



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

SALOMÃO MARTINEZ BEZERRA SALVADOR

**ESTUDO DO EFEITO DOS PARÂMETROS ALGORÍTMICOS NOS CRITÉRIOS DE
RESOLUÇÃO OC, SAO E MMA EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS COM O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO SIMP**

Caruaru
2018

SALOMÃO MARTINEZ BEZERRA SALVADOR

**ESTUDO DO EFEITO DOS PARÂMETROS ALGORÍTMICOS NOS CRITÉRIOS DE
RESOLUÇÃO OC, SAO E MMA EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS COM O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO SIMP**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental - do Centro Acadêmico do Agreste, da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Estruturas e Materiais

Orientador: Prof^o. Dr. Gustavo Bono

Caruaru
2018

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

S182e Salvador, Salomão Martinez Bezerra.
Estudo do efeito dos parâmetros algorítmicos nos critérios de resolução OC, SAO e MMA em problemas tridimensionais com o método de otimização SIMP. / Salomão Martinez Bezerra Salvador. – 2018.
93 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Gustavo Bono.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2018.
Inclui Referências.

1. Otimização estrutural. 2. Algoritmos. 3. Elasticidade. 4. Aprendizagem baseada em problemas. I. Bono, Gustavo (Orientador). II. Título.

CDD 620 (23. ed.) UFPE (CAA 2018-442)

SALOMÃO MARTINEZ BEZERRA SALVADOR

**ESTUDO DO EFEITO DOS PARÂMETROS ALGORÍTMICOS NOS CRITÉRIOS DE
RESOLUÇÃO OC, SAO E MMA EM PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS COM O
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO SIMP**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental - do Centro Acadêmico do Agreste, da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Aprovada em: 11/09/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gustavo Bono (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Andres Muñoz Rojas (Examinador Externo)
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof.ª Dr.ª. Giuliana Furtado Franca Bono (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me ter auxiliado em mais este momento da minha vida.

Aos meus pais, Washington e Maria das Graças pela criação e incentivo que sempre me deram. Também a todos da minha família que me apoiaram e oraram por mim durante este percurso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gustavo Bono pela inestimável orientação, ensino e paciência durante todo o período do mestrado.

Ao Dr. Kai Liu e ao Dr. Andrés Tovar pela disponibilização do programa de Otimização Topológica utilizado neste trabalho.

Ao Dr. Kristen Svanberg por ter disponibilizado o código MMA utilizado neste trabalho.

A todos os professores do PPGECAM pelo seu empenho e dedicação na transmissão do conhecimento pra nós alunos.

Agradeço também a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa concedida a mim.

Aos meus colegas estudantes do PPGECAM por toda a ajuda que me deram no Mestrado. Em especial a Rayanne por me ajudar em várias etapas de minha pesquisa.

A todos os funcionários do PPGECAM, especialmente Marcelo e Euclécia pelo esforço e ajuda com os quais sempre atenderam a mim e aos outros estudantes.

Quanto melhor é adquirir a sabedoria do que o ouro! E quanto mais excelente, adquirir a prudência do que a prata!.

(BÍBLIA, A. T.,Provérbios 16:16)

RESUMO

Na área de Otimização Topológica foram desenvolvidos vários métodos e algoritmos para resolução de problemas matemáticos relacionados à Engenharia Estrutural. Cada um desses métodos possui suas próprias características na abordagem do problema de Otimização Topológica. No presente trabalho, emprega-se o método de Otimização Topológica SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) para estudar diferentes problemas estruturais em elasticidade linear tridimensional. O objetivo é resolver o problema da minimização de flexibilidade, sujeita a restrição de volume. Para o estudo algorítmico no ambiente do MATLAB foram analisados diferentes métodos de resolução: o critério de Otimalidade (OC), a Programação Quadrática associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-QP), a aproximação Dual também associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-DUAL) e o Método das Assíntotas Móveis (MMA). No presente estudo analisa-se como os quatro critérios de resolução OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA influenciam os principais parâmetros e a topologia final de diferentes problemas clássicos da Otimização Topológica.

Palavras-chave: Otimização topológica. Método SIMP. Critério de otimalidade. Programação sequencial aproximada. Método das assíntotas móveis

ABSTRACT

In the field of Topology Optimization several methods and algorithms were developed for the resolution of mathematical problems related to Structural Engineering. Each of these methods has its own characteristics when facing the problem of Topology Optimization. In the present work the topology optimization method SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with penalization*) is used to study different structural problems in tridimensional linear elasticity. The objective is to solve the problem of minimization of compliance, subject to a restriction of volume. For the algorithmic studies on MATLAB, different criteria of resolution were analyzed: the Optimality Criteria (OC), Quadratic Programming associated with Optimization by Sequential Approximation (SAO-QP), the Dual approach also associated with Sequential Approximation (SAO-DUAL) and the Method of Moving Asymptotes (MMA). In the present study it was analyzed how the four criteria of resolution OC, SAO-DUAL, SAO-QP and MMA influence the main parameters and topology of different classical problems of Topology Optimization.

Keywords: Topology optimization. SIMP method. Optimality criteria. Sequential approximate programming. Method of the moving asymptotes

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Exemplos de Otimização Estrutural: a) de Tamanho; b) de Forma e c) Topológica	25
Figura 2 –	Exemplo de um corpo submetido a cargas F com domínio de solução Ω e densidade de material ρ no ponto j	28
Figura 3 –	Exemplo da viga MBB: a) com problema do tabuleiro de xadrez; b) sem o problema do tabuleiro de xadrez	29
Figura 4 –	Exemplo da viga MBB com problema de dependência de malha, resultados com: a) malha de 60x20 elementos; b) malha de 120x40 elementos	30
Fluxograma 1 –	Fluxograma da aplicação do método de otimização SIMP	34
Fluxograma 2 –	Fluxograma do programa desenvolvido.	48
Figura 5 –	Problema da viga engastada com carga distribuída na extremidade	50
Figura 6 –	Variação da topologia em função da fração de volume: a) 0,10, b) 0,30 e c) 0,50	51
Figura 7 –	Variação da topologia em função do fator de penalização: a) 1,0, b) 3,0 e c) 5,0.	52
Figura 8 –	Ilustração do raio mínimo do filtro na técnica de filtragem	54
Figura 9 –	Variação da topologia em função do raio mínimo do filtro: a) 0,50, b) 3,0 e c) 6,0	54
Figura 10 –	Problema da viga engastada-livre	57
Figura 11 –	Topologias ótimas em função dos critérios de resolução e C_{pen} para o problema da viga engastada livre com carga concentrada.	58
Gráfico 1 –	Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $C_{pen} = 1,02$ para o problema da viga engastada livre com carga concentrada	59
Figura 12 –	Resultados do problema da viga engastada livre para o método OC e $C_{pen} = 1,02$ nos casos: a) sem suavização, b) e c) com suavização	60

Gráfico 2 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes constantes C_{pen} : a) 1,02, b)1,005 e c)1,0015 no caso do problema da viga engastada livre	61
Figura 13 –	Resultado do problema da viga engastada livre obtido por Nguyen et al. (2012)	62
Figura 14 –	Resultado do problema da viga engastada livre obtido por Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015)	63
Figura 15 –	Problema da viga submetida a carregamento de torção	64
Figura 16 –	Topologias ótimas em função dos critérios de resolução e C_{pen} para o problema da viga com carregamento de torção. Malha 80x20x20	65
Figura 17 –	Resultados do problema da viga com carregamento de torção para o método OC e $C_{pen} = 1,02$ nos casos: a) sem suavização e b) com suavização	66
Gráfico 3 –	Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $C_{pen} =1,02$ para o problema da viga engastada livre com carregamento de torção	67
Gráfico 4 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes constantes C_{pen} : a) 1,02, b)1,005 e c)1,0015 no caso do problema da viga com carga de torção	68
Figura 18 –	Resultados obtidos para o problema da viga submetida a carregamento de torção. Malha de 80x20x20	70
Figura 19 –	Estrutura obtida para problema da viga submetida ao carregamento de torção com uma malha de 60x15x15 elementos	70
Figura 20 –	Estruturas obtidas pelos métodos de otimização: a) MMV; b) MMC (Malha de 96x32x32)	70
Figura 21 –	Resultados Gráficos da Flexibilidade para diferentes valores do parâmetro de Penalização – Malha 80x20x20	72

Gráfico 5 –	Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $p = 3$ para diferentes valores de penalização no problema da viga engastada livre com carregamento de torção (malha 80x20x20)	73
Gráfico 6 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes valores de penalização: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$. Malha 80x20x20	75
Figura 22 –	Topologias ótimas em função do parâmetro de penalização. Malha 96x24x24	77
Gráfico 7 –	Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $p = 3$ para diferentes valores de penalização no problema da viga engastada livre com carregamento de torção (malha 96x24x24)	78
Gráfico 8 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes valores de penalização: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$. Malha 96x24x24	79
Figura 23 –	Topologias finais para diferentes frações de volume e constantes de penalização	81
Gráfico 9 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações e da fração de volume para valores constantes de: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$	83
Gráfico 10 –	Variação da flexibilidade em função do número de iterações e da constante de penalização para valores constantes da fração de volume: a) 0,10, b) 0,15, c) 0,20 e d) 0,30	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variação da flexibilidade e número de iterações em função da fração de volume	51
Tabela 2 – Valor da função objetivo e número de iterações para cada exemplo de penalização analisado	52
Tabela 3 – Valor da função objetivo e número de iterações para cada valor de filtro analisado	55
Tabela 4 – Flexibilidade e tempo de processamento em função dos critérios de resolução e valores da constante de continuação C_{pen} para o problema da viga engastada livre com carga concentrada	58
Tabela 5 – Flexibilidade e tempo de processamento em função dos critérios de resolução e valores da constante de continuação C_{pen} para o problema da viga com carga de torção. Malha 80x20x20	66
Tabela 6 – Resultados Numéricos da Flexibilidade para diferentes valores da Constante de Penalização – Malha 80x20x20	73
Tabela 7 – Flexibilidade e tempo de processamento para diferentes valores da constante de penalização – Malha 96x24x24	77
Tabela 8 – Flexibilidade e tempo de processamento em função da penalização e fração de volume	82

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
CAD	Computer Aided Design
ESO	Evolutionary Structural Optimization
GPU	Graphics Processing Unit
ICM	Independent Continuous Mapping
MATLAB	Matrix Laboratory
MBB	Messerschmitt-Bölkow-Blohm
MEMS	Micro-Electro-Mechanical System
MMA	Method of Moving Asymptotes
MMC	Moving Morphable Component
MMV	Moving Morphable Void
PBD	Performance Based Design
QP	Quadratic Programming
SAO	Sequential Approximate Optimization
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Flexibilidade do elemento
C_{pen}	Constante de penalização
γ	Problema de otimização na forma <i>DUAL</i>
E_i	Módulo de elasticidade no ponto i
E_0	Módulo de elasticidade para o material “sólido”
E_{min}	Módulo de elasticidade para o material “vazio”
F	Vetor relativo as forças atuantes no problema analisado
$f(x)$	Função objetivo
$\tilde{f}(x)$	Função aproximada da função objetivo
$g_i(x)$	Restrição a função objetivo
$\tilde{g}(x)$	Função aproximada da restrição
H_{ij}	Fator de peso utilizado na técnica de filtro
K	Rigidez do elemento
L_j^k	Limite inferior no método MMA
λ	Multiplicador de Lagrange
$move$	Limite móvel positivo
N_i	Adjacência do elemento i
$nelx$	Número de elementos ao longo do eixo x
$nely$	Número de elementos ao longo do eixo y
$nelz$	Número de elementos ao longo do eixo z
p	Parâmetro de penalização
ρ	Vetor de densidade
R	Tamanho (raio) do filtro
R_{min}	Tamanho (raio) mínimo do filtro

\mathbf{U}	Vetor relativo aos graus de liberdade presentes no problema analisado
U_j^k	Limite superior no método MMA
\mathbf{v}	Variável associada ao volume
V	Fração de volume adotado
\mathbf{x}	Variável associada a densidade
\tilde{x}	Valor da densidade após ser submetido ao filtro

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos Gerais	18
1.2	Objetivos Específicos	18
1.3	Revisão Bibliográfica	19
2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	24
2.1	Formulação geral do problema de Otimização	24
2.2	Tipos de Otimização Estrutural	25
3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	27
3.1	Descrição Matemática	27
3.2	Instabilidades numéricas na OT	29
3.3	Método de Otimização Topológica – SIMP	31
3.4	Outros métodos de OT	35
3.5	Estratégias de solução para resolver o problema de OT	36
3.5.1	Critério de Otimalidade (OC)	36
3.5.2	Método de Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)	38
3.5.2.1	<i>Aproximação do Método da Programação Quadrática (QP na Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)</i>	39
3.5.2.2	<i>Métodos Primal e Dual na Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)</i>	40
3.5.3	Método das Assíntotas Móveis (MMA)	42
4	METODOLOGIA	46
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	49
5.1	Análise dos principais parâmetros no método SIMP	49
5.2	Influência da Estratégia de Continuação nos critérios de resolução	55
5.2.1	Problema da viga engastada livre com carga concentrada na extremidade	56
5.2.2	Problema da viga submetida a esforço de torção	63
5.3	Influência do parâmetro de penalização nos critérios de resolução	71
5.3.1	Problema da viga submetida a esforço de torção – Malha 80x20x20	72
5.3.2	Problema da viga submetida a esforço de torção – Malha 96x24x24	76
5.4	Influência da Fração de Volume e Penalização nos critérios de resolução	80

6	CONCLUSÕES	86
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	87
	REFERÊNCIAS.....	89

1 INTRODUÇÃO

A definição de otimização ou otimizar pode ser descrita, segundo o dicionário Aurélio como “tornar ótimo” ou “aproveitar, utilizar ou realizar melhor”, ou seja, está associada fundamentalmente à ideia de realizar uma tarefa ou processo da melhor maneira disponível. Nesse processo há a presença de diversos fatores que devem ser modificados para obter o melhor resultado.

A necessidade por processos que demandem menos recursos, e alcancem resultados satisfatórios é algo de extrema importância. A otimização de processos é uma grande necessidade na época atual, na qual há uma grande competitividade e constantes avanços nas áreas tecnológicas.

Nesse contexto está a Otimização Estrutural, que lida com problemas relacionados à Engenharia Civil no escopo de Estruturas e Materiais. Essa área da engenharia trabalha com o cálculo e construção de estruturas, como pontes e edificações em geral, devendo atender as normas vigentes para estabilidade e bom funcionamento da estrutura.

Entretanto, o objetivo da Otimização Estrutural não se limita a atender as restrições determinadas pelas normas. Seu objetivo também pode ser minimizar parâmetros como o custo envolvido com os materiais utilizados nas obras estruturais. Por isso, a Otimização Estrutural tem uma forte influência no aspecto econômico e social.

Pode-se considerar que os primeiros conceitos da otimização estrutural foram introduzidos por Galileo Galilei, em seu livro “*Discorsi*”, no qual foi investigado o processo de ruptura de corpos frágeis, considerando o formato dos corpos em relação à sua resistência. Além dessa contribuição, há os trabalhos de Newton e Leibnitz no desenvolvimento do Cálculo Diferencial no século XVI. Rao (2009) também destaca os trabalhos de Bernoulli, Lagrange, Euler e Weierstrass no desenvolvimento do cálculo variacional e na minimização de funcionais. Belegundru e Chandrupatla (2011) destacam o trabalho de Cauchy, como sendo um dos primeiros métodos para encontrar mínimos de funções baseado em gradiente.

Na área da Otimização Estrutural, pode-se destacar a Otimização Topológica que foi introduzida inicialmente pela publicação do artigo de Bendsoe e Kikuchi (1988). Porém, antes da publicação o pesquisador Lucien Schmit já havia reconhecido em 1960 o potencial em combinar métodos de programação não-linear com o Método dos Elementos Finitos conforme citado por

Belegundu e Chandrupatla (2011) e Vanderplaats (2010). A Otimização Topológica lida com a distribuição de material no *design* ou espaço de solução do elemento estrutural. Ao introduzir o espaço de solução e as condições de contorno (carregamentos, apoios etc.) é possível, obter através da Otimização Topológica, a distribuição de material ótima para a estrutura. Segundo Bendsoe e Sigmund (2003) “O propósito da Otimização Topológica é encontrar o layout ótimo de uma estrutura dentro de uma região específica”. Deve-se ressaltar que o uso dos computadores é algo imprescindível para a realização dos processos de otimização, principalmente no caso de problemas nos quais, o número de variáveis e equações envolvidas é muito alto. Sendo assim, os computadores constituem uma ferramenta para auxiliar no desenvolvimento e simulação dos problemas de otimização. A Otimização Topológica contribui atualmente para uma ampla variedade de áreas de conhecimento.

No presente trabalho, para estudar como os diferentes critérios de resolução influenciam a estrutura final emprega-se como base o programa de Otimização Topológica *top3d* (Liu e Tovar, 2014). Foram realizadas modificações no código, já que originalmente o mesmo foi desenvolvido com o critério de resolução OC (critério de Otimalidade). No programa foram implementados três novos critérios de resolução: (1) baseado na Programação Quadrática associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-QP), (2) a aproximação Dual também associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-DUAL) e (3) o Método das Assíntotas Móveis (MMA).

1.1 Objetivos gerais

O presente trabalho tem como objetivo geral realizar um estudo dos parâmetros algorítmicos utilizados nos critérios de resolução OC, SAO-QP, SAO-DUAL e MMA no método de Otimização Topológica SIMP considerando-se problemas em elasticidade linear tridimensional.

1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos podem ser resumidos nos seguintes pontos:

- 1) Investigar e reunir estudos no campo da Otimização Topológica Estrutural com diferentes critérios de resolução;
- 2) Utilizar o programatop3d (LIU; TOVAR, 2014), criado no ambiente do MATLAB, para examinar a Otimização Topológica de problemas em elasticidade linear tridimensional considerando o critério de minimização da flexibilidade atendendo um volume de material predefinido. O problema de Otimização Topológico resolve-se empregando os critérios de OC, SAO-QP, SAO-DUAL e MMA;
- 3) Fazer um estudo dos parâmetros algorítmicos nos diferentes critérios de resolução utilizados, mostrando as principais características entre os mesmos;
- 4) Fazer um estudo paramétrico, analisando como as mudanças no critério de resolução e nas dimensões da geometria modelada alteram a estrutura otimizada.

1.3 Revisão Bibliográfica

Segundo citado por Rozvany (2009), a Otimização Topológica é um campo bem vasto com descobertas que podem implicar em diversos ramos da ciência como Matemática, Mecânica, Multifísica, Ciências da Computação, entre outros. Um exemplo desse potencial apresenta-se no trabalho de Zegard e Paulino (2016), onde mostra-se a integração da Otimização Topológica com a Manufatura Aditiva na área da medicina. No trabalho, mostra-se a manufatura de uma prótese para reconstrução facial de um paciente. O *design* da peça leva em consideração as características biológicas, físicas e estruturais do indivíduo. O resultado, segundo os autores, seria uma peça adaptada a configuração facial do paciente, possuindo um *design* ótimo para o mesmo.

Outro exemplo de aplicação da Otimização Topológica é na construção de aeronaves. Munk, Verstraete e Vio (2017) estudaram o problema de OT na asa de uma aeronave hipersônica considerando os efeitos da temperatura na estrutura. O algoritmo utilizado é baseado no método BESO e busca a otimização estrutural do modelo de asa empregado pelos pesquisadores.

No estudo de Ortiz e Michell (2016), mostra-se a aplicação da Otimização Topológica no *design* da célula base do ânodo de silicone presente nas baterias de Lítio-íon. O objetivo do estudo é lidar com os problemas de expansão de volume e baixa condutividade elétrica do silício presente no anodo da bateria. Os resultados obtidos, apresentam menor flexibilidade e maior condução elétrica respondendo assim as dificuldades citadas acima. No campo da

microtecnologia, pode-se destacar o estudo realizado por Ramirez-Gil, Silva e Montealegre-Rubio (2016) onde foi proposto um modelo de otimização tridimensional baseado no método SIMP e implementado fazendo uso de computação paralela com o auxílio de GPUs. Com o modelo implementado determina-se a melhor distribuição de material em estruturas de sistemas microeletromecânicos (MEMS).

A seguir serão apresentados alguns estudos focados na área de engenharia de Estruturas. Inicialmente, pode-se citar o trabalho clássico de Sigmund (2001) que apresentou um programa de OT desenvolvido na linguagem de programação MATLAB e baseado no método *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (SIMP). O trabalho tinha como objetivo encontrar a distribuição ótima de material no domínio bidimensional do problema, minimizando a flexibilidade, sujeita às restrições de volume e de densidade. O código de caráter acadêmico apresenta vários parâmetros que podem ser alterados, como por exemplo: o número de elementos na discretização nas direções x e y , a fração de volume, o parâmetro de penalidade e o tamanho do filtro. O estudo resolve vários problemas clássicos da OT, destacando como facilmente podem-se analisar diferentes problemas através da mudança em algumas linhas e parâmetros do código. Andreassen et al. (2011), apresentou uma versão modificada do código de Sigmund (2001). O novo código possui uma eficiência computacional superior ao código original, destacando-se uma melhora na velocidade de processamento em um fator de 100. Essas melhoras ocorreram principalmente devido a pré-alocação de vetores e a transformação de partes do código contendo “loops” em vetores, o que aumenta a eficiência do código no MATLAB.

Kaveh e Shahrouzi (2008) estudaram o desenvolvimento de algoritmos Meméticos para o *layout* topológico de um sistema de travamento em estruturas. Esse sistema é implementado através do uso de algoritmos Meméticos o qual se baseia no método já existente dos Algoritmos Genéticos. O método foi associado ao método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO) (*Evolutionary Structural Optimization*). Com o algoritmo desenvolvido os autores obtiveram um método para encontrar a melhor distribuição de barras em um sistema de travamento.

Rong et al. (2010) estudaram o desenvolvimento de um algoritmo de OT baseado no modelo *Independent, Continuous, Mapping* (ICM) e na resolução do problema através da divisão do processo de otimização em diferentes estágios. O algoritmo foi aplicado em estruturas contínuas com múltiplas restrições de deslocamento. Os resultados mostraram um método prático

e robusto, sendo que as estruturas obtidas correspondem a topologias que podem ser executadas na prática.

Torres e Almeida (2013) utilizam a OT para obter sistemas de travamento em edifícios altos. Os autores utilizaram o método SIMP em conjunto com o Método dos Elementos Finitos. No estudo foram contempladas as condições de simetria e repetição de padrões para obter estruturas mais regulares.

Tavakoli e Mohseni (2013) utilizaram a OT na resolução de problemas multimateriais. O programa implementado para minimizar a flexibilidade nos elementos estruturais foi desenvolvido no ambiente MATLAB utilizando o método baseado na aproximação BCD (*Block Coordinate Descent*).

Alvarado e Gottlieb (2013) investigaram o uso da otimização no *design* da fachada de um modelo tridimensional de edifício. Nesse projeto, inicialmente emprega-se o método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO), através do uso do MATLAB e do programa CALFEM. Em um estágio posterior os autores fizeram uso do método de otimização SIMP para auxiliar na obtenção da fachada.

Beghini (2013), mostra que a OT pode ser uma ferramenta utilizada em forma conjunta por engenheiros e arquitetos. Propõe-se uma metodologia para integrar a OT à engenharia Estrutural, através da geração dos elementos de travamento em edificações. O sistema de travamento obtido, verifica-se através de modelos de análise baseados no Método dos Elementos Finitos, para garantir que o *design* da estrutura seja estável. Beghini (2013) sugere que a otimização seja realizada pelos engenheiros e a implementação dos elementos do *design* do edifício pelos arquitetos em sistemas de CAD.

Lee e Tovar (2014) propuseram um sistema de estabilização de treliças na parte exterior de prédios altos. O objetivo do estudo foi encontrar a menor distribuição de treliças de modo a obter um sistema de travamento que garanta a menor flexibilidade na estrutura de um prédio de 67 andares submetido à ação do vento. No estudo emprega-se para a OT o método SIMP e para a modelagem do edifício o software ANSYS.

O método de OT em conjunto com o método PBD (*Performance Based Design*) foi empregado por Bobby et al. (2014) no estudo de sistemas de estabilização para prédios altos submetidos à ação de vento. O método foi aplicado com o objetivo de encontrar o menor volume

no sistema de travamento. O modelo mostra-se eficaz, já que obtém-se com uma rápida convergência um sistema de estabilização simples de serem construídos.

Liu e Tovar (2014), desenvolveram um código computacional para a OT de estruturas tridimensionais. O programa implementado no MATLAB foi utilizado para simular vários exemplos com diferentes geometrias e condições de contorno. Emprega-se o método SIMP e uma técnica de filtração baseada na densidade de material, assim como o critério de Otimalidade para encontrar a solução do problema analisado. Entretanto, diferentes técnicas de filtração e critérios de resolução também podem ser implementadas pelo usuário. Os resultados do programa são consistentes com a literatura, entretanto, o tempo de processamento pode ser elevado para problemas que demandem uma malha mais refinada.

Zuo e Xie (2015) implementaram na linguagem de programação *Python* um algoritmo para a OT de estruturas tridimensionais. Para minimizar a flexibilidade da estrutura o programa emprega o método BESO em conjunto com o *software* Abaqus. O algoritmo foi empregado na resolução de vários problemas, entretanto os autores destacam que o programa pode ser modificado para considerar situações de múltiplas cargas, assim como outras extensões, tais como diferentes métodos de otimização. O código apresentou bom desempenho, porém, pode sofrer problemas de desempenho em modelos que exijam uma malha mais refinada.

No trabalho de Silva e Cardoso (2016) os autores estudaram a OT levando em consideração as restrições de tensão e o grau de incerteza associado ao módulo de Young. Para isso os pesquisadores utilizaram o método de Otimização Topológica Robusta (RTO, *Robust Design Optimization*). As restrições de tensão foram incorporadas ao problema através do uso da desigualdade de Chebychev. Já as incertezas foram contempladas através da Teoria de Perturbação de Primeira Ordem. Os pesquisadores concluíram que o modelo proposto possui duas vantagens principais em relação ao modelo determinístico tradicional: o controle sobre a máxima probabilidade de falha através da desigualdade de Chebychev e o design de estruturas com uma probabilidade de falha menor.

Molter, Fonseca e Fernandez (2016), empregam a OT para estudar a distribuição ótima de material piezoelétrico em uma estrutura. Os pesquisadores formularam o problema considerando a distribuição ótima de dois materiais: alumínio (material elástico isotrópico) e PZT5A (material piezoelétrico). A função objetivo a ser minimizada é o custo e emprega-se para a OT o método

SIMP. Os resultados obtidos mostraram ser possível a otimização de estruturas possuindo mais de um material em sua especificação.

A OT considerando os efeitos da interação fluido-estrutura foi estudada por Picelli, Vicente e Pavanello (2017). No trabalho, emprega-se o método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Method*) para analisar estruturas em contato com um escoamento de fluido estacionário utilizando as equações de Navier-Stokes. Obtiveram-se resultados promissores considerando um modelo para minimização da flexibilidade.

Zhang et al. (2017) destacam que a OT tridimensional demanda um alto custo computacional devido ao grande número de variáveis e de graus de liberdade presentes no problema. Os autores, propuseram o método MMV (*Moving Morphable Void*) para criar uma aproximação que torna a OT tridimensional mais eficiente. O método MMV reduz o número de variáveis no problema de OT e o número de graus de liberdade na análise pelo Método dos Elementos finitos, contribuindo assim para resolver o problema dos gargalos presentes em vários casos da OT tridimensional.

2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Atualmente, a redução de custos é uma das principais prioridades na Engenharia. Por exemplo, na área de Engenharia Civil, Lee, Lee e Park (2011) realizaram uma estimativa de custo no qual citam que a construção de prédios muito altos frequentemente tem riscos, pois pode envolver investimentos elevados e baixo retorno. Logo, há a necessidade imediata de minimizar custos na construção de estruturas na Engenharia Civil, sendo a Otimização Topológica associada a Engenharia de Estruturas uma ferramenta fundamental.

Com isso em mente, ao se abordar a execução de edifícios altos é necessário tomar todas as precauções possíveis para garantir a segurança dos usuários, como também o bom funcionamento da estrutura, gerando assim o retorno dos investimentos.

2.1 Formulação geral do problema de Otimização

Um problema de otimização, pode ser descrito de forma genérica como:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (1)$$

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= 0, & i &= 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) &\leq 0, & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

onde, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ é o vetor com as variáveis de projeto, $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo do problema e representa matematicamente a quantidade que se deseja minimizar (ou maximizar) para obter o valor ótimo. Já $g_i(\mathbf{x})$ e $h_i(\mathbf{x})$, representam as funções de restrição de igualdade e desigualdade do problema, que constituem as condições que as variáveis de projeto devem atender no processo de otimização. As quantidades das restrições de igualdade e desigualdade são dadas por m e n .

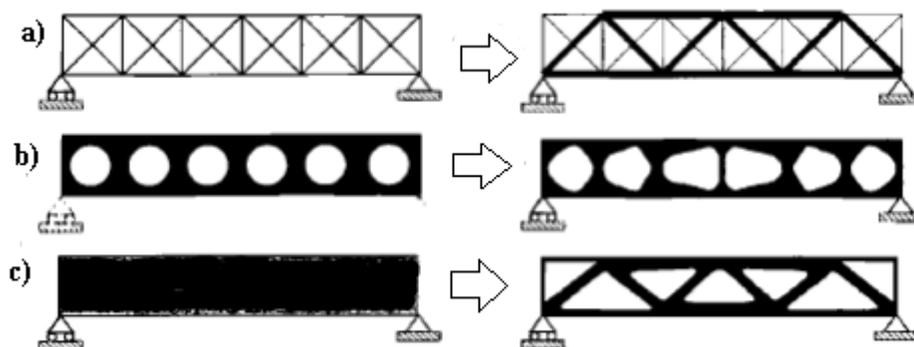
Um exemplo de função objetivo em um problema poderia ser o custo associado à construção de uma obra de engenharia civil, a rigidez de uma peça, a frequência de vibração, entre outras. Como restrições, podem-se citar por exemplo: o máximo volume, máximo valor do deslocamento e/ou tensão, limites normativos, entre outros.

No presente estudo, adota-se como função objetivo a flexibilidade de estruturas tridimensionais. A flexibilidade pode ser definida como o inverso da rigidez de um corpo, ou seja, sua minimização resulta na maximização da rigidez global da estrutura. Fisicamente, a estrutura sofre menos deformações, portanto, é uma característica muitas vezes procurada nos projetos estruturais de Engenharia Civil.

2.2 Tipos de Otimização Estrutural

A otimização aplicada a área de Estruturas pode ser dividida, segundo Bendsoe e Sigmund (2003), em otimização: de Forma, de Tamanho e Topológica. Na Figura 1 mostra-se esquematicamente os tipos de Otimização Estrutural.

Figura 1 – Exemplos de Otimização Estrutural: a) de Tamanho; b) de Forma e c) Topológica.



Fonte: O Autor (2018)

Adaptado de: Bendsoe e Sigmund (2003)

A otimização de Tamanho, também conhecida como otimização Paramétrica, possui *a priori* um domínio de solução fixo ocupando-se de medidas que caracterizam a geometria da estrutura, como por exemplo mudanças na espessura de uma seção transversal circular ou retangular de uma estrutura. Na otimização de Forma lida-se com a forma dos “vazios” presentes no domínio de solução. No processo de otimização não há nem a criação nem a eliminação desses “vazios” no domínio. Ocorre somente a alteração na forma desses elementos. Isto pode ser visto esquematicamente na Figura (1b). No caso da Otimização Topológica (OT), lida-se com a distribuição de material no domínio de solução adotado para o problema. Nesse processo, ocorre

a criação e/ou eliminação de elementos vazios no domínio de solução, para atender as restrições e imposições do problema de otimização.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

O artigo de Michell (1904) pode ser considerado a primeira publicação na área de Otimização Topológica, ver Rozvany (2009). No trabalho, buscava-se maximizar a rigidez e encontrar o menor volume de material para um sistema formado por barras interligadas e submetido a forças externas.

Na revisão publicada por Munk, Vio e Steven (2015), também citam-se outros autores que contribuíram para a Otimização Estrutural a partir de 1950, por exemplo: Drucker e Shield (1957) desenvolveram um modelo para encontrar o menor peso em estruturas tridimensionais elástico-plásticas; Heyman e Prager (1958) desenvolveram um estudo para encontrar o menor peso em pórticos de aço; Charrett e Rozvany (1972) ampliaram o modelo de otimização plástica desenvolvido por Prager e Shield (1967) para o problema de placas reforçadas com fibras. Em 1988, Bendsoe e Kikuchi formularam a base de um dos principais métodos de OT, o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Por sua vez, Xie e Steven (1993) propuseram um algoritmo heurístico com remoção gradual das regiões do domínio menos eficientes denominado de método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO, *Evolutionary Structural Optimization*).

3.1 Descrição Matemática

De forma geral, pode-se descrever matematicamente o problema de Otimização Topológica que minimiza a flexibilidade, da seguinte maneira:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_e, \dots, x_n]^T \quad (4)$$

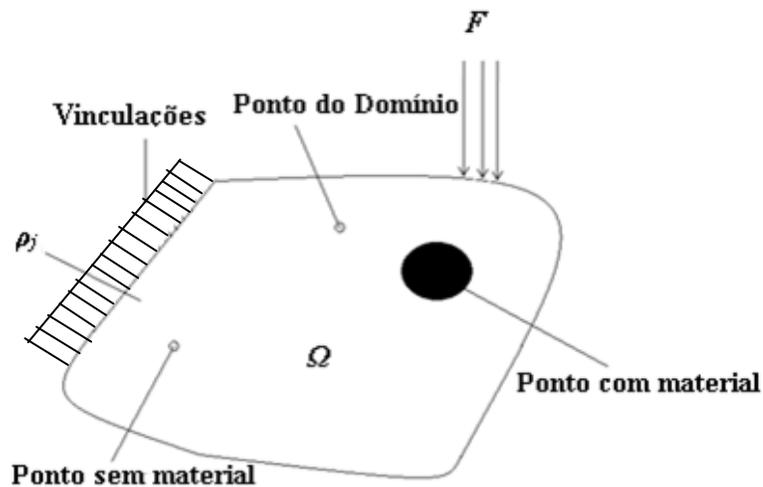
$$\text{Minimizar} \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

$$\text{sujeito a} \quad v(\mathbf{x}) = (\mathbf{x})^T \mathbf{v} - \text{volfrac} \leq 0 \quad (6)$$

onde, o vetor \mathbf{x} representa a densidade de material em cada ponto x_n do domínio dividido em n elementos, c é a flexibilidade da estrutura, \mathbf{F} é o vetor de forças atuantes no corpo, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos, v representa o volume e volfrac representa a fração limite de volume imposta no modelo.

Em termos matemáticos, um problema de OT envolve um domínio de solução Ω correspondente ao corpo no qual agem determinadas forças F e cuja densidade do material, ρ , pode variar em cada ponto do domínio entre dois valores: zero, que indica a ausência de material e um que indica a presença de material naquele ponto. Neste problema procura-se encontrar a distribuição ótima de material sólido no domínio de projeto que minimiza a deformação da estrutura (flexibilidade) submetida as cargas atuantes.

Figura 2 – Exemplo de um corpo submetido a cargas F com domínio de solução Ω e densidade de material ρ no ponto j .



Fonte: O Autor (2018)

AOT gera bons resultados quando utilizada com métodos que consideram o domínio de solução discreto (como o Método dos Elementos Finitos). De fato, Bendsoe e Sigmund (2003) citam que a discretização em elementos finitos é uma das aproximações mais típicas para resolver o problema de OT. Destaca-se ainda que no caso de soluções baseadas em ferramentas computacionais que utilizam o Método dos Elementos Finitos, a solução irá variar em função da “malha” de elementos empregada, ou seja, o espaço escolhido para o domínio de solução. Bendsoe e Sigmund (2003), no entanto, também afirmam que o uso do Método dos Elementos Finitos pode causar instabilidade nos resultados do problema analisado dependendo das combinações de parâmetros utilizados. Logo é necessária cautela, para garantir estabilidade numérica e resultados viáveis. Outro cuidado a ser tomado é a necessidade do uso de materiais cujas características mecânicas possam ser representados pelo tensor de rigidez K_{ijkl} . Quando se

varia a densidade em um ponto do material base, também se varia o tensor de rigidez K_{ijkl} naquele ponto. De forma geral, assume-se que para os valores limite de zero e um de densidade, o tensor assumirá os valores:

$$K_{ijkl}(\rho = 0) = 0 \quad (7)$$

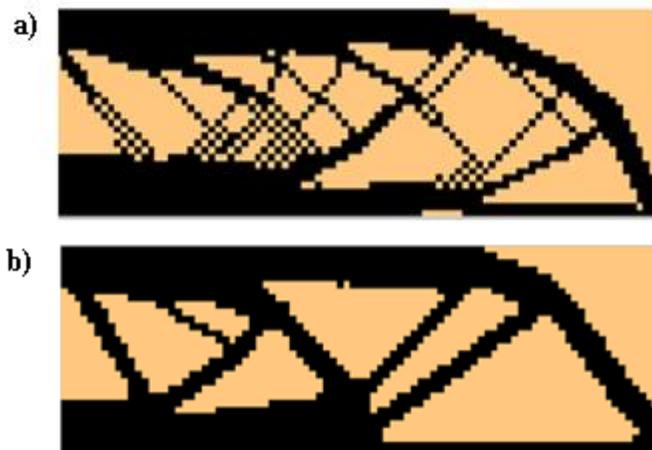
$$K_{ijkl}(\rho = 1) = 1 \quad (8)$$

3.2 Instabilidades numéricas na OT

Alguns modelos empregados na OT podem apresentar problemas em sua resolução devido a instabilidades numéricas. Bendsoe e Sigmund (2003) citam alguns desses problemas, destacando-se: o tabuleiro de xadrez (checkerboard) e a dependência de malha.

O problema do tabuleiro de xadrez consiste, segundo Sigmund e Peterson (1998), na existência de regiões com alternância de elementos sólidos e vazios nos resultados presentes na OT. Esse padrão se assemelha a um tabuleiro de xadrez e mostra-se na Figura 3.

Figura 3 – Exemplo da viga MBB: a) com problema do tabuleiro de xadrez; b) sem o problema do tabuleiro de xadrez.



Fonte: O Autor (2018)

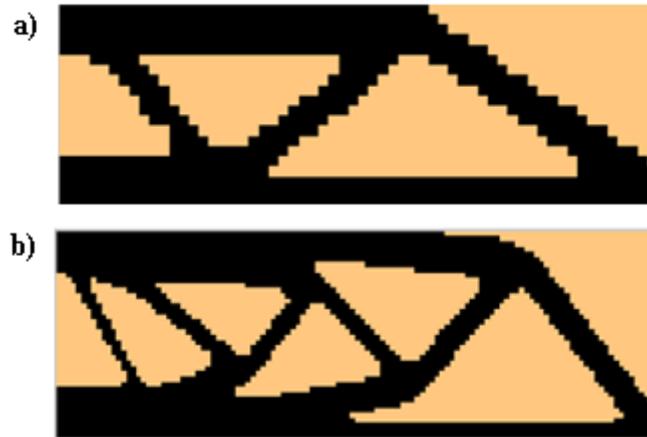
Adaptado de: Pereira (2018)

O problema analisado consiste na minimização da flexibilidade da viga MBB. Na Figura 3a mostra-se o resultado com a presença do problema do tabuleiro de xadrez; já na Figura 3b

apresenta-se o resultado sem a presença do tabuleiro de xadrez devido ao emprego da técnica de filtro de sensibilidade. Bendsoe e Sigmund (2003) associam o problema do tabuleiro de xadrez com características do Método de Elementos Finitos, especificamente com uma modelagem numérica inadequada.

O problema da dependência de malha pode ser explicado como a obtenção de diferentes soluções para um mesmo problema a partir da utilização de malhas com diferentes refinamentos. Na Figura 4 mostra-se um exemplo do problema da dependência de malha para o caso da viga MBB.

Figura 4 – Exemplo da viga MBB com problema de dependência de malha, resultados com: a) malha de 60x20 elementos; b) malha de 120x40 elementos.



Fonte: O Autor (2018)

Adaptado de: Pereira (2018)

Na Figura 4a mostra-se o resultado do exemplo da viga MBB com uma malha de 60x20 elementos; já na Figura 4b apresenta-se o resultado obtido para uma malha de 120x40 elementos. Pode-se perceber que os resultados obtidos apresentam diferentes topologias, Bendsoe e Peterson (1998) associam o problema da dependência de malha a não existência de uma única solução para o problema de topologia. Isto é, à medida que o número de elementos em um modelo aumenta, também mudam-se as condições de contorno da estrutura, o que invariavelmente afeta o resultado final da estrutura. Outra razão dada para a dependência de malha é a existência de vários pontos ótimos (várias soluções) para a função objetivo do problema.

Uma medida utilizada para controlar os problemas na OT é o uso de técnicas de filtro. As técnicas de filtragem são utilizadas, segundo Liu e Tovar (2014), para evitar problemas de

instabilidades numéricas, destacando-se que são utilizados diferentes tipos de filtros na OT, por exemplo: o filtro de densidade, o filtro de sensibilidade, entre outros. Segundo Bendsoe e Sigmund (2003), a técnica do filtro de densidade restringe os valores de densidade que podem ocorrer durante a resolução do problema. Já a técnica do filtro de sensibilidade (SVANBERG e SVARD, 2013) não atua nas densidades do problema, mas sim nas derivadas (sensibilidades) da função objetiva do problema examinado.

3.3 Método de Otimização Topológica – SIMP

Existem diferentes formulações que podem ser utilizadas para resolver o problema de OT, por exemplo: o método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), o método BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Method*), o método LSM (*Level-set Method*), o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), entre outros.

O método de Otimização Topológica, SIMP, pode ser descrito através da relação entre a densidade do elemento x_i e o módulo de elasticidade E_i do elemento (considerando que esse elemento seja constituído por material isotrópico), conforme mostrado por:

$$E_i(x) = x_i^p E_0 \quad p > 1 \quad (9)$$

onde, E_0 representa o módulo de elasticidade do material sólido isotrópico, p é o parâmetro de penalização e x_i varia no intervalo entre 0 e 1. O parâmetro p penaliza as zonas com densidade intermediária de modo que os valores de densidade assumam valores extremos próximos de 0 (ausência de material) ou 1 (presença de material).

Uma aproximação modificada do método SIMP, pode ser representada por:

$$E_i(x) = E_{min} + x_i^p (E_0 - E_{min}) \quad (10)$$

onde E_{min} representa o módulo de elasticidade do material “vazio” isotrópico correspondente a um valor muito próximo de zero para evitar singularidades na matriz de rigidez de elementos finitos.

Dessa maneira, o problema de Otimização Topológica pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_e, \dots, x_n]^T \quad (11)$$

$$\text{Minimizar} \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

$$\text{sujeito a} \quad v(\mathbf{x}) = (\mathbf{x})^T \mathbf{v} - \text{volfrac} \leq 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \quad (15)$$

Sendo que a rigidez \mathbf{K} pode ser descrita em função do Módulo de Elasticidade E mostrado na eq (16):

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n E_i(\mathbf{x}) \mathbf{K}_i^0 \quad (16)$$

Onde n é o número da discretização de elementos no problema de OT; E_i é o módulo de elasticidade do elemento i que é obtido através da Eq (10); e \mathbf{K}_i^0 é a matriz de rigidez relativa ao material sólido isotrópico no problema de OT.

Para lidar com os problemas que surgem na OT, tais como a dependência de malha ou a presença de “tabuleiro de xadrez”, empregam-se técnicas de regularização como o filtro de sensibilidade mostrado na seguinte equação:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{j=1}^N H_{ij}} \sum_{j=1}^N H_{ij} x_j \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (17)$$

onde $\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x}$ é o valor da sensibilidade após ser submetida ao filtro e H_{ij} é o fator de peso da sensibilidade. A influência do filtro define-se em função do tamanho do filtro, R , sendo nulo fora da região do filtro e decaindo linearmente a partir do elemento i . O fator de peso (operador de convolução) H_{ij} pode ser definido como uma função da distância entre elementos vizinhos, conforme:

$$H_{ij} = R - \text{dist}(i, j) \quad (18)$$

Uma etapa importante no método SIMP é o cálculo das derivadas da função objetivo e da função de restrição, também chamadas de sensibilidades. As sensibilidades são utilizadas pelos critérios de resolução e são necessárias para encontrar o valor da variável de projeto em cada iteração realizada.

Inicialmente, utilizando-se da equação de elasticidade linear, pode-se reescrever a função objetivo (Eq. (5)) como:

$$c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N E_i u_i^T k_0 u_i \quad (19)$$

Onde E_i refere-se ao módulo de elasticidade do elemento i dado pela Eq. (10), u_i refere-se ao deslocamento no elemento i , k_0 é o termo da matriz de rigidez para um elemento hexaédrico de 8 nós e N refere-se ao número de elementos empregados na discretização do modelo analisado.

Reescrevendo-se a Eq. (19) utilizando a Eq. (10) para substituir o termo E_i , obtém-se:

$$c(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N [E_{min} + x_i^p (E_0 - E_{min})] u_i^T k_0 u_i \quad (20)$$

Derivando a Eq. (20) em relação à variável de projeto x_i , resulta:

$$\frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -p x_i^{p-1} (E_0 - E_{min}) u_i^T k_0 u_i \quad (21)$$

Para encontrar a derivada da restrição de volume $v(\mathbf{x})$, utiliza-se a Eq. (6). Pode-se perceber que o volume possui uma relação linear com a variável de projeto x_i , logo:

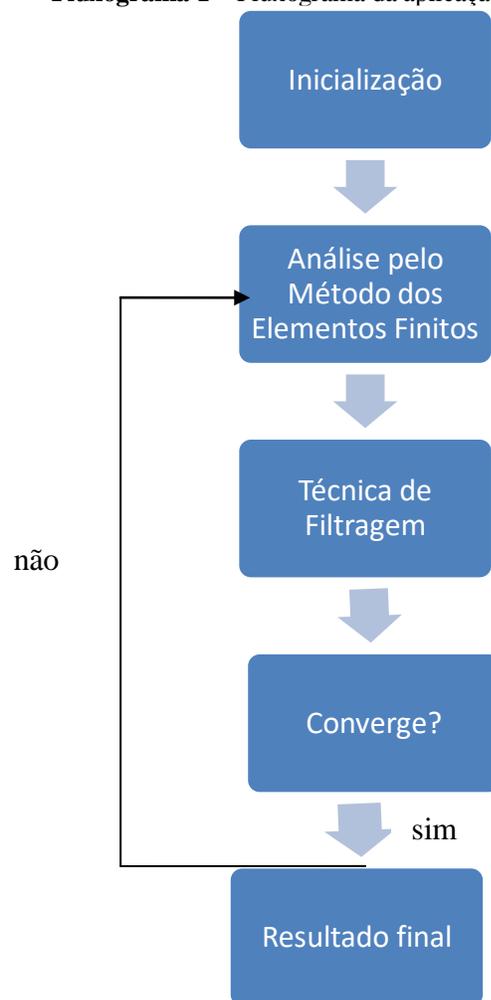
$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial [(\mathbf{x})^T \mathbf{v} - \bar{v}]}{\partial x_i} = v_i \quad (22)$$

Considerando que as malhas utilizadas no presente trabalho discretizam-se em elementos hexaédricos com aresta de comprimento unitário, pode-se escrever que:

$$v_i = 1 \quad (23)$$

No Fluxograma 1 apresenta-se um fluxograma do método de Otimização Topológica, SIMP. Inicialmente, emprega-se o Método dos Elementos Finitos para a determinação dos deslocamentos e o valor da função objetivo. O próximo passo consiste na análise das sensibilidades e na aplicação da técnica de filtragem, as quais são utilizadas, para evitar problemas numéricos na otimização, como padrões em tabuleiro de xadrez, mínimos locais, etc.. Finalmente, verificar-se a convergência comparando com a tolerância especificada para o problema. Caso essas condições sejam atendidas então o problema chega à solução final, caso contrário repete-se todo o processo desde a etapa de análise pelo método dos Elementos Finitos.

Fluxograma 1 – Fluxograma da aplicação do método de otimização SIMP.



3.4 Outros métodos de OT

Além do método SIMP, extremamente difundido nos meios acadêmicos e industriais, também, podem-se citar o método ESO assim como uma sua variante o método BESO. Entre as diferenças dos métodos SIMP e BESO pode-se citar que o primeiro método assume uma abordagem baseada na análise da densidade de material, ou seja, o domínio de solução é discretizado em um número finito de pontos, cada qual possuindo um valor de densidade variando entre zero e um. São utilizados parâmetros de penalização para influenciar a densidade em cada ponto, a fim, de possuir um valor extremo de zero ou um, evitando a ocorrência de valores intermediários. Por sua vez, o método BESO, assume uma abordagem baseada no método de otimização evolucionária, no qual cada etapa do problema de otimização produzirá um resultado com uma determinada distribuição de material (valor de densidade unitário). Para cada iteração, obtém-se as melhores características da distribuição de material, descartando-se as áreas onde a distribuição de material não é ideal, segundo as condições de contorno do problema.

Huang e Xie (2010) conceituam o método ESO como a remoção gradual de material ineficiente de uma estrutura, sendo que, através desse processo a estrutura evoluirá em direção ao resultado topológico mais otimizado. No caso do método BESO, há a capacidade de remover e readicionar material à estrutura em cada etapa do processo.

Os métodos evolucionários ESO/BESO são descritos por Sigmund e Maute (2013), como métodos que utilizam atualmente técnicas de análise de gradientes e filtros. A semelhança é tão grande com o método SIMP que Huang e Xie (2010) tomaram como base para a implementação do método BESO o programa de 99 linhas desenvolvido no MATLAB por Sigmund (2001). Sigmund e Maute (2013) até sugerem que o termo “método BESO” seja mudado para “aproximações de densidade discreta” ou até “aproximações SIMP discretas”.

Algumas desvantagens dos métodos ESO/BESO, citadas por Sigmund e Maute (2013) são: a falta de critérios de convergência e seleção de critérios de parada em algoritmos que utilizam esses métodos. Rozvany (2009) também faz várias críticas ao método ESO, ressaltando que o método é totalmente heurístico, isto é, pode-se obter um resultado que não seja ótimo. Também, cita que o método geralmente requer mais iterações do que métodos baseados em gradientes e, ainda assim, segundo Rozvany (2009), pode obter uma solução que não seja o valor ótimo.

Entretanto, Huang e Xie (2010), ressaltam que houve uma grande confusão por parte dos pesquisadores com relação à eficiência dos métodos ESO/BESO devido ao fato de que algumas das primeiras versões dos algoritmos não abordavam de maneira adequada alguns problemas de OT. Os pesquisadores citam que o método BESO melhorado com o uso de técnicas como filtros de densidade, pode exibir resultados tão bons quanto outros métodos, por exemplo o método SIMP, com a vantagem de alcançarem esses resultados em menos iterações. Ainda como vantagens da utilização do método BESO, Huang e Xie (2010), Munk, Vio e Steven (2015) e Xiaet al. (2018) citam: soluções topológicas de alta qualidade, grande variedade de aplicações na OT, excelente custo e tempo computacionais e algoritmos fáceis de entender e simples de implementar.

3.5 Estratégias de solução para resolver o problema de OT

Existem diferentes métodos utilizados para resolver o problema de Otimização Topológica, sendo alguns dos principais: o critério de Otimalidade (OC), a Otimização por Aproximação Sequencial (SAO) associada com a Programação Quadrática (SAO-QP) e com a aproximação Dual (SAO-DUAL), o Método das Assíntotas Móveis (MMA), entre outros.

A seguir, serão apresentados os principais critérios de resolução utilizados para encontrar o valor ótimo no problema de OT.

3.5.1 Critério de Otimalidade (OC)

O critério de Otimalidade descrito em Bendsoe (1995), Sigmund (2001) e Bendsoe e Sigmund (2003) está associado à obtenção do resultado através do atendimento da condição de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \nabla h(x)\mu = 0 \quad (24)$$

onde, L é a fórmula do multiplicador de Lagrange, f é a função objetivo, g refere-se a função de restrição de desigualdade e h refere-se a função de restrição de igualdade. No presente estudo a

função de restrição é a flexibilidade c e a restrição de desigualdade é o volume v , não havendo restrição de igualdade. Nesse caso pode-se escrever a Equação (24) como:

$$\frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0 \quad (25)$$

Onde λ representa o multiplicador de Lagrange, c é a flexibilidade, v representa a restrição de volume e x_k representa a densidade na iteração k . A equação (25) pode ser reescrita como:

$$B_e = -\frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right)^{-1} \quad (26)$$

Percebe-se que a Eq. (26) é resultante da reorganização algébrica da Eq. (25) adotando que $B_e = 1$, o que ocorre segundo Bendsoe e Sigmund (2003) quando a função objetivo atinge o ponto ótimo.

O algoritmo de otimização do método OC pode ser descrito então pela cadeia lógica proposta por Bendsoe e Sigmund (2003) e dado por:

$$x_k^{new} = \begin{cases} \max(0, x_k - move), & \text{se } x_k B_k^\eta \leq \max(0, x_k - move), \\ \min(1, x_k + move), & \text{se } x_k B_k^\eta \geq \min(1, x_k + move), \\ x_k B_k^\eta, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (27)$$

onde, $move$ é o limite móvel positivo, com um valor de 0.2 conforme usado por Liu e Tovar (2014) e η é um coeficiente de amortecimento numérico com um valor usual de 0.50 sugerido por Sigmund (2001) para o problema de otimização de mínima flexibilidade.

Na Eq. (27) a incógnita é o multiplicador de Lagrange, λ , o qual foi determinado através do uso do método da bissecção. Nesse método se estabelece um intervalo entre dois pontos (a, b) que possuem um ponto médio c ; subdivide-se então o intervalo (a, b) em dois subintervalos formados pelo ponto médio: (a, c) e (b, c) ; verifica-se em qual desses subintervalos há a presença de uma raiz que satisfaça a equação (16); Verifica-se então se o valor obtido para a raiz atende a precisão estabelecida para o problema; caso a precisão tenha sido atingida o problema está resolvido; caso contrário toma-se o subintervalo no qual foi encontrado o valor da raiz e utiliza-o como o novo intervalo analisado com o ponto médio c , repetindo então os passos seguidos anteriormente.

O critério de parada utilizado tanto para o método OC quanto para os outros métodos foi o número máximo de iterações, que é estabelecido *a priori* pelo usuário e também o valor da diferença numérica entre o resultado obtido para a variável de projeto em uma nova iteração do programa e o resultado obtido para a variável de projeto na iteração anterior, como mostrado na equação abaixo.

$$|x_{k+1} - x_k|_{\infty} \leq t \quad (28)$$

Onde t é a tolerância estabelecida para o problema.

3.5.2 Método de Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)

Os métodos de Otimização por Aproximação Sequencial SAO (do inglês *Sequential Approximate Optimization*) consistem em uma alternativa ao Critério de Otimalidade. A ideia básica nos métodos SAO é gerar e resolver a partir do problema de otimização original uma sequência de sub-problemas explícitos, onde a função objetivo, ou as restrições, são substituídas por funções que apresentem menor custo computacional.

Groenwold, Etman e Wood (2010), destacam que em simulações com alto custo de processamento computacional, os métodos SAO são geralmente utilizados como uma alternativa para resolver o problema. De fato, Wood (2012) cita que o uso de algoritmos baseados na SAO com o método DUAL, são o estado da arte para a resolução de problemas de OT de larga escala.

Segundo Etman, Groenwold e Rooda (2012), os métodos de SAO trabalham substituindo o problema P com a função objetivo $f(x)$ por subproblemas P_k ($k=1,2,3,\dots$) com funções convexas e separáveis aproximadas computacionalmente mais simples, para diversos pontos sucessivos de iteração k . Para isso, definem-se subfunções $\tilde{f}(x)$ computacionalmente mais simples de serem processadas em diversos pontos iterativos x_k do problema. Dessa forma, o problema de otimização mostrado nas Eqs. (1), (2) e (3) pode ser reformulado como:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (29)$$

$$\text{Minimizar} \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) \quad (30)$$

$$\text{sujeito a} \quad \tilde{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (31)$$

$$\text{com } \mathbf{L} = \{\tilde{\mathbf{x}} | \check{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (32)$$

onde k representa as sucessivas iterações no processo, $\tilde{f}(\mathbf{x})$ é a subfunção objetivo simplificada, que no presente problema é a flexibilidade, $\tilde{g}_j(\mathbf{x})$ representa as funções de restrição simplificada, que no presente problema é a restrição de volume e \mathbf{L} representa o conjunto matemático em que está contida a variável $\tilde{\mathbf{x}}$ que no presente problema é a densidade. Nesse conjunto, \check{x}_i e \hat{x}_i , representam respectivamente os valores limite inferior e limite superior estipulados para a variável x_i e n representa o número de incógnitas de problema analisado.

As funções de aproximação utilizadas no presente trabalho possuem a forma de séries, especificamente da série de Taylor. Sendo assim uma função aproximada $\tilde{f}(\mathbf{x})$ pode ser escrita através da série de Taylor da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x} \frac{(x-a)^1}{1!} + \dots + \frac{\partial^n f(a)}{\partial x^n} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (33)$$

onde a é o ponto em torno do qual está sendo feita a aproximação e n é o grau do polinômio da série. No presente trabalho adota-se uma expansão em série de Taylor de 2º grau, também chamada de série quadrática, ou seja, considera-se $n=2$.

Geralmente, no método SAO podem ser empregadas as variáveis intervenientes recíprocas ou exponenciais. Neste trabalho, adota-se as variáveis intervenientes recíprocas empregadas por Groenwold, Etman e Wood (2010) para a aproximação da curvatura presente na função original.

3.5.2.1 Aproximação do Método da Programação Quadrática (QP) na Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)

A função de aproximação representada por uma expansão em série de Taylor de segundo grau (quadrática) assume a forma:

$$\tilde{f}_j(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j^k}{\partial x_i} (x_i - x_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{2_i}^k (x_i - x_i^k)^2 \quad (34)$$

Onde \tilde{f}_j é a função aproximada que pode representara função objetivo flexibilidade, f_j é a função objetivo original, x^k é o valor de densidade x na iteração k , n é o número de elementos e c_{2i} são os termos correspondentes a derivada de segunda ordem na série de Taylor, também conhecida como a matriz Hessiana.

Sendo assim, o problema mostrado nas Eqs. (29, 30 e 31) pode ser denominado como um problema de Programação Sequencial Quadrática, SQP (do inglês, *Sequential Quadratic Programming*). No presente trabalho, utilizou-se uma aproximação do método convencional de programação quadrática. Neste modelo, desenvolvido por Groenwold, Etman e Wood (2010) o termo relativo à matriz de segunda ordem (Hessiana) é aproximado utilizando-se somente os valores da diagonal principal desta matriz ao invés de utilizar todos os termos como acontece em problemas convencionais de SQP. Esta aproximação (referida de agora em diante como QP por razões de nomenclatura) é útil para reduzir o custo computacional no cálculo de problemas com grande quantidade de restrições e variáveis de projeto.

Assim, utilizando a aproximação QP e considerando a utilização de variáveis intervenientes e recíprocas, pode-se escrever os termos de segunda ordem da matriz hessiana c_2 pela seguinte aproximação (ETMAN; GROENWOLD; RONDA, 2012):

$$c_{2i} = \frac{2}{x_i^k} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^k \quad (35)$$

Onde f refere-se à função objetivo ou de restrição e x são as variáveis de projeto. Para a resolução do problema de programação quadrática formulado pela Eq. (34), emprega-se a função *quadprog* do MATLAB.

3.5.2.2 Métodos Primal e Dual na Otimização por Aproximação Sequencial (SAO)

Outro método de otimização que também pode ser empregado na Otimização por Aproximação Sequencial é o método DUAL. Este método se contrapõe ao método Primal que pode ser formulado, segundo Groenwold, Etman e Wood (2010), como:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (36)$$

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) \quad (37)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \tilde{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

$$\text{Com} \quad \check{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

onde, \tilde{f} é a função objetivo aproximada da função objetivo original f , \tilde{g}_j é a função aproximada das restrições g_j , \check{x}_i e \hat{x}_i representam, respectivamente, os limites inferior e superior definidos para as variáveis x_i . No presente método os limites definem-se em função do fator *move*, conforme definido por:

$$\check{x}_i = \max(\bar{x}_i^k - \text{move}, 0) \quad (40)$$

$$\hat{x}_i = \max(\bar{x}_i^k + \text{move}, 1) \quad (41)$$

onde o termo “max” significa que deve-se adotar o valor máximo entre os dois termos mostrados entre parênteses.

Percebe-se, que a formulação do método Primal apresentada nas Eqs.(36) a (39) é a mesma formulação utilizada para o problema de minimização da flexibilidade abordado no presente estudo. É importante destacar que a expressão efetiva do problema de otimização na forma DUAL pode-se definir somente no caso em que as funções do problema sejam estritamente convexas e separáveis. Com esta ressalva, pode-se escrever o problema DUAL, segundo Etman, Groenwold e Ronda (2010), como:

$$\text{Maximizar} \quad \gamma(\lambda) = \left[\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{g}_j(x) \right] \quad (42)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \lambda_j \geq 0 \quad (43)$$

Percebe-se, que o problema de otimização no método DUAL é uma maximização que depende não somente da função objetivo f , mas também depende dos multiplicadores de Lagrange λ_j , que são chamados de variáveis duais. O número de variáveis duais é igual ao número de restrições do problema Primal e o número de restrições duais é igual ao número de variáveis do problema Primal.

Considerando novamente a aproximação dos termos de segunda ordem da matriz hessiana, assim como as funções de restrição do problema indicado, pode-se encontrar uma relação entre as variáveis de projeto x e os multiplicadores de Lagrange λ (GROENWOLD; ETMAN, 2008) dada por:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \beta_i(\lambda), & \text{se } \check{x}_i < \beta_i(\lambda) < \hat{x}_i \\ \check{x}_i, & \text{se } \beta_i(\lambda) \leq \check{x}_i \\ \hat{x}_i, & \text{se } \beta_i(\lambda) \geq \hat{x}_i \end{cases} \quad (44)$$

onde o fator $\beta_i(\lambda)$ é dado por:

$$\beta_i(\lambda) = x_i^k - \left(c_{2i_0}^k + \sum_{j=1}^m \lambda_j c_{2i_j}^k \right)^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \tilde{g}_j^k}{\partial x_i} \right) \quad (45)$$

onde \tilde{f} é a função aproximada da função objetivo f , c_2 refere-se à curvatura de 2ª ordem relativas à função original e \tilde{g} são as funções de restrição aproximadas.

Pode-se perceber, observando as Eqs. (44) e (45) que o esquema para encontrar as variáveis de projeto na aproximação DUAL é semelhante ao esquema utilizado para encontrar as variáveis de projeto no método OC mostrado no item 3.5.1. Logo, o método SAO-DUAL possui a vantagem do método OC de ser eficiente para problemas com pouca quantidade de restrições.

Para encontrar o valor das variáveis duais λ no algoritmo do método SAO-DUAL utilizou-se o método da bissecção.

3.5.3 Método das Assíntotas Móveis (MMA)

O método das Assíntotas Móveis (MMA) desenvolvido pelo Dr. Kristen Svanberg em 1987 é uma das aproximações convexas separáveis mais utilizadas. Conforme Fleury (1989), o MMA pode considerar-se uma generalização do método por aproximação linear convexa CONLIN (*CONvex LINearization*).

No MMA as funções são aproximadas por expansões em séries de Taylor lineares com relação às variáveis intermediárias $1/(U_j - x_j)$ e $1/(x_j - L_j)$ dependendo do sinal da derivada da função em x . O principal diferencial do método MMA está no fato de que os intervalos adotados para as funções (também chamadas de assíntotasmóveis) podem ser modificados (ou movidos) a

cada iteração, isto influencia o comportamento da função aproximada com o objetivo de acelerar a convergência e a estabilidade.

Pode-se formular o método MMA como:

$$\text{Encontrar} \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (46)$$

$$\text{Minimizar} \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) \quad (47)$$

$$\text{sujeito a} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (48)$$

onde $\tilde{f}(\mathbf{x})$ é a função objetivo aproximada e \tilde{g}_j são as funções de restrição aproximadas. No método MMA os limites inferior e superior assumidos pela variável analisada são definidos pelo usuário e mudam ao longo do processo de otimização de acordo com a iteração k , logo, segundo Svanberg (1987) tem-se:

$$L_j^k < x_j^k < U_j^k \quad (49)$$

onde \mathbf{x} é a variável analisada no problema, L_j é o limite inferior e U_j é o limite superior para a variável. Os valores das assíntotas móveis são atualizadas dentro das iterações k . Svanberg (1987) formulou as funções de aproximação, f_i em termos das variáveis de projeto x e dos limites L e U através da seguinte equação:

$$f_i^k(x) = r_i^k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (50)$$

onde os parâmetros p , q e r são determinados pelas condições mostradas a seguir:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \\ 0, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 0 \end{cases} \quad (51)$$

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases} \quad (52)$$

$$r_i^k(x) = f_i(x^k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (53)$$

É importante destacar que os valores adotados para L e U mudam à medida que as iterações avançam. Svanberg (1987) estabelece diretrizes para ajustar o valor dos limites L e U , para as iterações iniciais ($k=0$ e $k=1$) adota-se os valores de L e U como:

$$L_j^k = x_j^k - (\hat{x}_j - \check{x}_j) \quad (54)$$

$$U_j^k = x_j^k + (\hat{x}_j - \check{x}_j) \quad (55)$$

Para as iterações seguintes ($k \geq 2$) o valor dos limites depende da seguintes condições:

- Se os sinais dos termos $x_j^k - x_j^{k-1}$ e $x_j^{k-1} - x_j^{k-2}$ forem diferentes, indicando uma oscilação, então utiliza-se os seguintes valores para L e U :

$$L_j^k = x_j^k - s(x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) \quad (56)$$

$$U_j^k = x_j^k + s(U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) \quad (57)$$

onde s é um valor menor que 1 definido pelo usuário.

- Se os sinais dos termos $x_j^k - x_j^{k-1}$ e $x_j^{k-1} - x_j^{k-2}$ forem iguais, indicando que os limites estão diminuindo a “velocidade” de convergência então utiliza-se os seguintes valores para L e U :

$$L_j^k = x_j^k - \frac{(x_j^{k-1} - L_j^{k-1})}{s} \quad (58)$$

$$U_j^k = x_j^k + \frac{(U_j^{k-1} - x_j^{k-1})}{s} \quad (59)$$

Onde s é um valor menor que 1 definido pelo usuário.

4 METODOLOGIA

No presente trabalho realizou-se para o método de Otimização Topológica SIMP um estudo comparativo entre os critérios de resolução OC, SAO-QP, SAO-DUAL e MMA. Para o desenvolvimento foi adotado o código implementado no MATLAB por Liu e Tovar (2014), o qual utiliza o critério OC para a resolução de problemas em elasticidade linear tridimensional. No programa de Liu e Tovar (2014) foram implementados os critérios SAO-QP, SAO-DUAL e MMA. Também foi desenvolvida para um programa de pós-processamento uma rotina para a visualização dos resultados, tais como: topologia final e principais parâmetros em função do número de iterações.

O programa original *top3d* (Liu e Tovar, 2014) baseia-se no método dos Elementos Finitos (Zienkiewicz e Taylor, 2000; Oñate, 2009 e Rao, 2011) e utiliza o método SIMP de Otimização Topológica. Adota-se como função objetivo a ser minimizada, a flexibilidade, sujeita à restrição de volume. Para a discretização do domínio emprega-se o elemento hexaédrico trilinear e o método de solução utilizado por Liu e Tovar (2014) foi o Critério de Otimalidade (OC). Adotou-se como base para o desenvolvimento do trabalho o código *top3d*, já que o mesmo pode ser facilmente modificado para simular problemas com diferentes cargas e condições de contorno em domínios retangulares arbitrários. Para auxiliar na interpretação da geometria otimizada emprega-se a técnica de suavização implementada por Liu e Tovar no programa *top3d_STLv3.m*. Para a suavização empregam-se as informações relativas aos vértices e faces dos elementos e algumas funções próprias do MATLAB, tais como *isosurface* e *patch*.

Os três novos critérios de resolução implementados no programa se baseiam nos trabalhos de Etman, Groenwold e Rooda (2012), Groenwold, Etman e Wood (2010), Svanberg (1987) e Liu e Tovar (2014). Dois dos métodos estão associados à Otimização por Aproximações Sequenciais (SAO) e são: o método SAO com Programação Quadrática (SAO-QP) e o método SAO com o problema na forma DUAL (SAO-DUAL). Para a resolução do método SAO-QP emprega-se a função *quadprog* do MATLAB que permite encontrar o valor mínimo da variável de projeto em um problema de programação quadrática. Para a função *quadprog* adota-se o algoritmo de ponto interior convexo com os seguintes parâmetros, valor de tolerância de 10^{-8} para a variável de projeto, valor de tolerância de 10^{-10} para a função objetivo e um valor máximo de

200 iterações internas. Já para a resolução do método SAO-DUAL emprega-se o método da bissecção.

Além dos métodos SAO, também foi empregado o Método das Assíntotas Móveis (MMA), desenvolvido por Svanberg (1987). No presente trabalho, empregou-se a implementação cedida pelo Dr. Svanberg, do método MMA no MATLAB através do código *mmasub*.

Para a validação e verificação do programa desenvolvido foram analisados vários exemplos clássicos da Otimização Topológica e os resultados obtidos comparados com os existentes na literatura. Também foram realizados estudos paramétricos variando-se os principais parâmetros utilizados pelo código, ou seja, discretização da malha, fração de volume do material na estrutural final (*volfrac*), parâmetro de penalização (*p*) e tamanho do filtro utilizado (R_{min}).

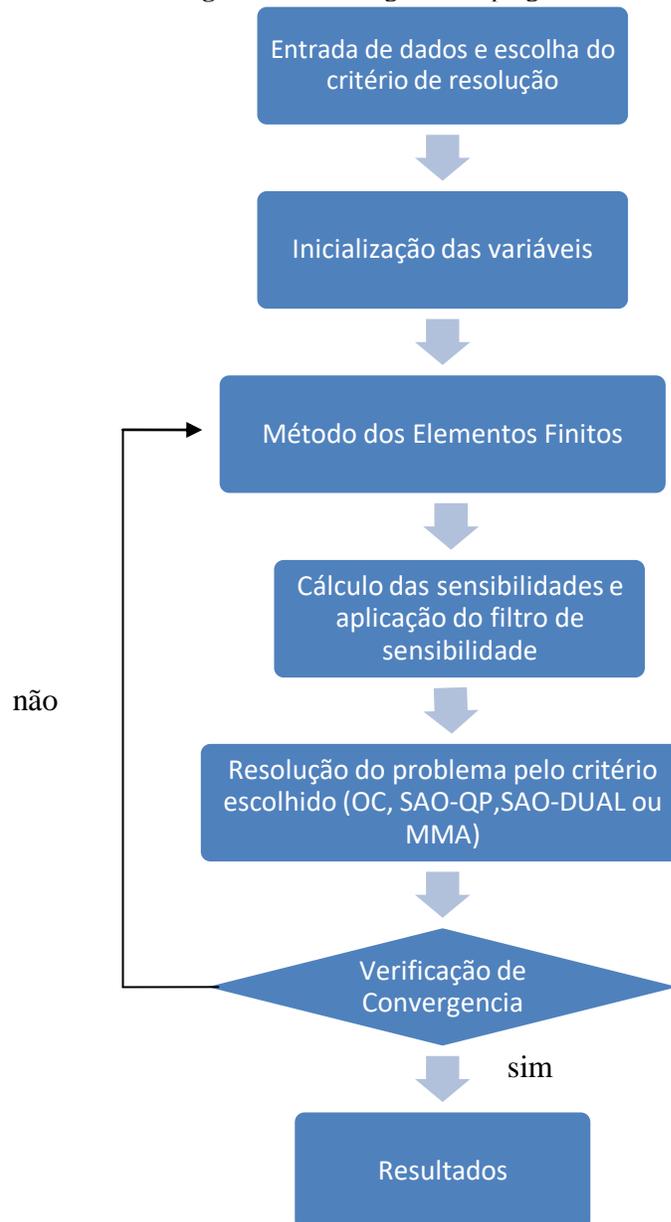
Para o estudo comparativo, foram considerados exemplos de estruturas clássicas com diferentes dimensões geométricas e carregamentos e os quatro critérios de resolução implementados. Nos diferentes casos analisados, mostram-se as principais características do método de OT tais como: o número de iterações, o tempo de processamento, o valor da função objetivo, a forma da estrutura otimizada, influência da discretização, entre outros.

No programa implementado no presente trabalho, para realizar a otimização da estrutura primeiro é necessário escolher o critério de resolução a ser empregado no programa (OC, SAO-QP, SAO-DUAL ou MMA). Após isso, define-se a entrada dos dados relativos ao sistema de forças atuantes no corpo e os dados relacionados com as vinculações da estrutura. Por fim, devem ser definidos os parâmetros de entrada necessários para a execução do problema, ou seja, a fração de volume da estrutural final (*volfrac*), o parâmetro de penalização (*p*), o valor do raio mínimo do filtro de sensibilidade (R_{min}) e os números de elementos empregados na discretização nas direções *x*, *y* e *z* (*nelx*, *nely* e *nelz*). Sempre adota-se para o domínio fixo inicial a forma de um paralelepípedo de volume total igual a *nelx* x *nely* x *nelz*.

Posteriormente, através do método dos Elementos Finitos determinam-se os deslocamentos nodais necessários para o cálculo do valor da função objetivo (flexibilidade) e da sensibilidade da função objetivo. Em seguida aplica-se o filtro de sensibilidade. Conforme, o método de resolução (OC, SAO-QP, SAO-DUAL ou MMA) especificado na entrada de dados determina-se a densidade *x* em cada ponto do domínio. Por fim, verifica-se se há convergência da solução em relação às condições de parada estabelecidas no problema, em caso positivo, apresenta-se com uma saída gráfica a solução da estrutura otimizada. Caso contrário, o contador

de iterações é incrementado e uma nova iteração é inicializada na etapa da execução do método dos Elementos Finitos. No Fluxograma 2 mostra-se um fluxograma com as principais etapas do algoritmo.

Fluxograma 2 – Fluxograma do programa desenvolvido.



Fonte: O Autor (2018)

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos obtidos considerando os quatro critérios de resolução empregados para resolver exemplos clássicos de Otimização Topológica.

Inicialmente, analisa-se como os principais parâmetros do método SIMP influenciam os resultados na Otimização Topológica de uma viga engastada livre com carga distribuída na extremidade. Posteriormente, estuda-se como a estratégia de continuação influencia os resultados considerando os critérios de resolução OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA. No estudo foram abordados os problemas de Otimização Topológica: 1) viga engastada livre com carga concentrada na extremidade e 2) viga submetida a esforço de torção.

Finalmente, avalia-se como o parâmetro de penalização e fração de volume considerando os quatro critérios de resolução influenciam as topologias finais, valor da função objetivo e tempo de processamento no problema da viga submetida a esforço de torção.

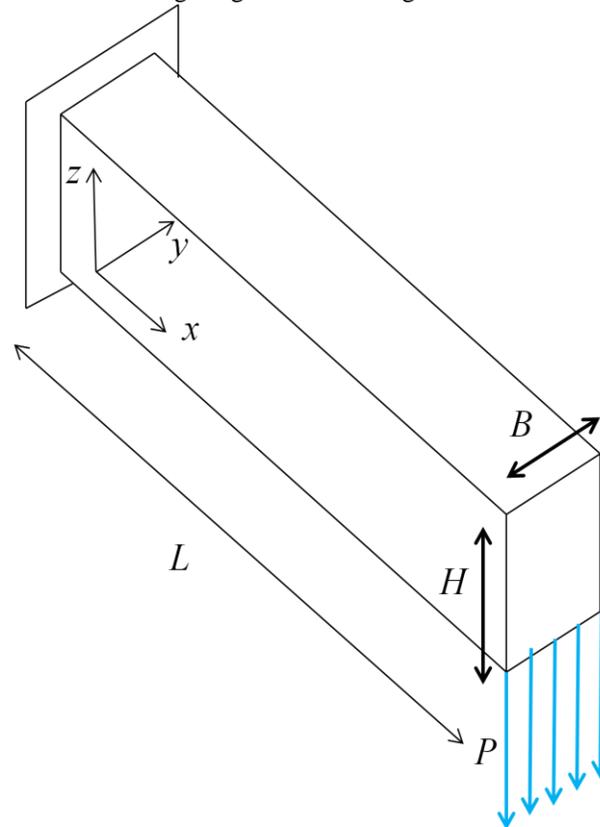
Em todos os exemplos analisados no presente capítulo sempre considera-se o módulo de Young para o material sólido, $E_0 = 1$, para o material vazio, $E_{min} = 10^{-9}$, e coeficiente de Poisson do material igual a 0,30. Define-se como material sólido todos os elementos que apresentem um valor mínimo de densidade de 0,50, ou seja, são plotados na figura os elementos com $x_i \geq 0,50$. Os valores dos parâmetros relativos a tamanho de malha, fração de volume, raio do filtro e fator *move* variam de acordo com o exemplo estudado.

Todas as análises foram realizadas em um computador com processador i7- 4785T 2.20GHz com 32GB de memória RAM e sistema operacional de 64 bits WINDOWS 7 Ultimate.

5.1 Análise dos principais parâmetros no método SIMP

Os principais parâmetros do método de Otimização Topológica SIMP já foram descritos qualitativamente na seção 3.3. No presente item, estuda-se como os valores numéricos relacionados aos parâmetros de penalização, raio do filtro de sensibilidade e fração de volume influenciam os resultados. Para isso, analisa-se o problema de uma viga engastada livre com carga distribuída no extremo, conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Problema da viga engastada com carga distribuída na extremidade.



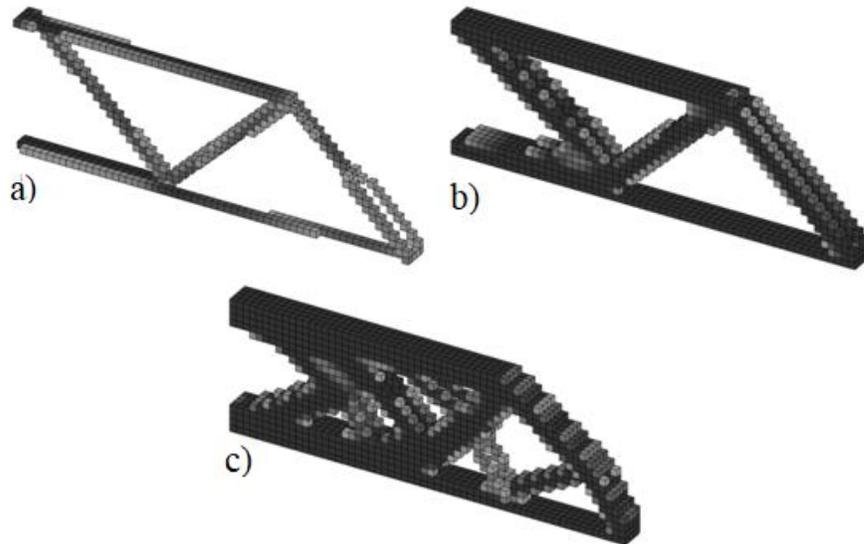
Fonte: O Autor (2018)

Para o estudo dos parâmetros, considerou-se um domínio em forma de paralelepípedo discretizado em $L \times H \times B = 60 \times 20 \times 4$ elementos hexaédricos uniformes. Neste exemplo, empregou-se o método OC para resolver o problema de OT. O valor da força distribuída foi adotado como $P = 1$. Para os critérios de parada empregou-se uma tolerância de 10^{-4} para a variável de projeto e adotou-se um valor máximo de 200 iterações.

A fração de volume (*volfrac*), está associada à quantidade limite de material sólido que será utilizado no problema de otimização, podendo ser definido, como a razão entre o volume prescrito de material sólido na estrutura final e o volume total do domínio inicial do projeto. Quanto maior o valor da fração de volume, maior será a quantidade de material sólido presente na estrutura otimizada.

Na Figura 6 mostram-se as três estruturas finais obtidas, considerando os valores de fração de volume igual a 0,10, 0,30 e 0,50, respectivamente.

Figura 6 – Variação da topologia em função da fração de volume: a) 0,10, b) 0,30 e c) 0,50.



Fonte: O Autor (2018)

Na Tabela 1 mostra-se o valor da flexibilidade (função objetivo) e o número de iterações para cada fração de volume analisada. Pode-se observar que os três casos atingiram o critério de parada dado pelo número máximo de iterações.

Tabela 1–Variação da flexibilidade e número de iterações em função da fração de volume.

Fração de volume	Função objetivo	Iterações
0,10	6008,68	200
0,30	1033,01	200
0,50	602,89	200

Fonte: O Autor (2018)

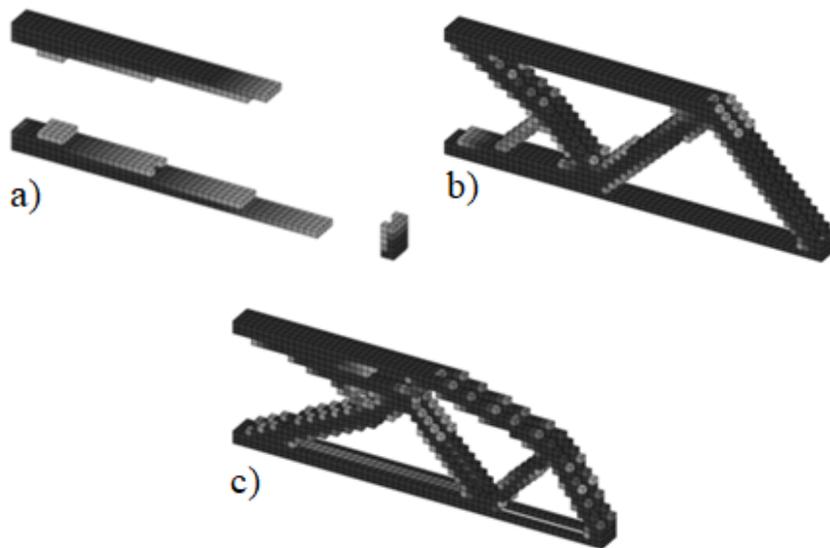
Percebe-se, que à medida que aumenta o valor da fração de volume também cresce a quantidade de elementos na estrutura final. O valor da flexibilidade diminui à medida que a fração de volume aumenta, isso caracteriza um aumento na rigidez da estrutura, o que pode ser explicado justamente pelo aumento do volume na geometria otimizada.

Na literatura observa-se que são empregados diferentes valores para a fração de volume conforme o caso estudado, por exemplo, autores como Nguyen et al. (2012) e Villanueva e Maute (2014) utilizaram valores de 0,10 enquanto autores como Liu e Tovar (2014) empregaram o valor de 0,30.

Conforme mostrado na seção 3.3 o parâmetro de penalização p é utilizado no método SIMP para minimizar a obtenção de resultados com valores de densidade intermediários entre zero e um. Bendsoe e Sigmund (2003), citam que os melhores resultados na OT obtêm-se com um número alto para p tipicamente maior que 3. Caso o valor de p seja muito baixo, podem acontecer problemas para atingir um valor de densidade nulo ou a convergência será prejudicada, requerendo mais iterações para chegar a um resultado satisfatório.

As geometrias otimizadas com os parâmetros de penalização iguais a 1,0, 3,0 e 5,0, mostram-se na Figura 7.

Figura 7 – Variação da topologia em função do fator de penalização: a) 1,0, b) 3,0 e c) 5,0.



Fonte: O Autor (2018)

O valor da função objetivo e do número de iterações para cada um dos valores de penalização analisados são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valor da função objetivo e número de iterações para cada exemplo de penalização analisado.

Penalização	Função objetivo	Iterações
1,0	720,69	43
3,0	1028,70	200
5,0	1166,33	200

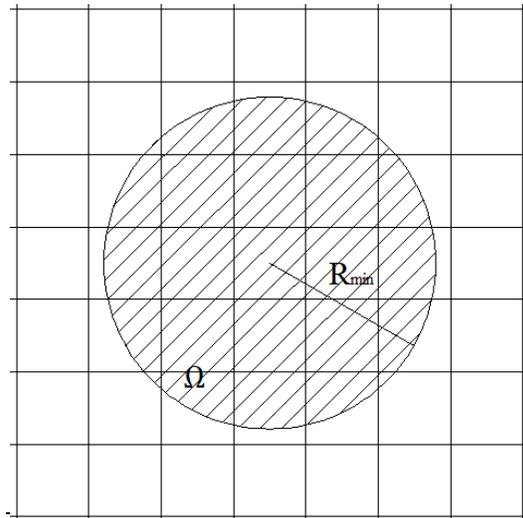
Fonte: O Autor (2018)

Pode-se observar que no caso do parâmetro de penalização $p=1,0$, o critério de tolerância na flexibilidade foi atingido na iteração número 43, entretanto, a geometria otimizada mostra descontinuidade no material. No caso de $p=3,0$, percebe-se que o resultado numérico atendeu ao critério do limite máximo de iterações e que estrutura otimizada final obtida foi satisfatório, embora, ainda existam algumas regiões com a presença de elementos com densidades intermediárias (elementos de cor cinza) na estrutura. Para o caso do parâmetro p igual a 5,0, também atinge-se o critério de limite máximo de iterações no problema. A estrutura otimizada apresenta diferenças com relação à determinada com $p=3,0$ e os valores da função objetivo são relativamente maiores. Embora, não mostrado no trabalho, o tempo de processamento para ambos parâmetros são semelhantes.

No presente trabalho, seguindo os estudos de Bendsoe e Sigmund (2003), Nguyen et al. (2012), Villanueva e Malte (2014) e Liu e Tovar (2014), adota-se na maioria dos exemplos analisados o valor de penalização p igual a 3,0. Esse valor, no entanto, varia nos itens relacionados com o estudo paramétrico do fator de penalização, ver item 5.3.

Como discutido anteriormente, as técnicas de filtragem adotadas no algoritmo de OT servem para evitar a ocorrência de instabilidades numéricas, como o padrão em “tabuleiro de xadrez”. Numericamente, o filtro é expresso através do valor do raio mínimo de influência do filtro de sensibilidade, \mathbf{R}_{\min} . Na Figura 8 mostra-se graficamente a influência do raio do filtro sobre a malha de elementos finitos. Conforme aumenta o valor do raio do filtro maior é quantidade de elementos que serão suavizados.

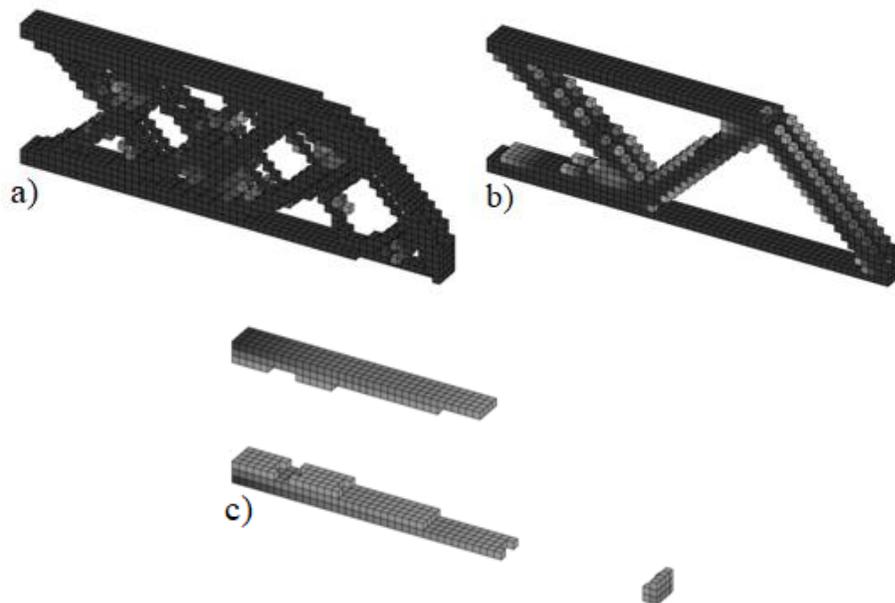
Figura 8 – Ilustração do raio mínimo do filtro na técnica de filtragem.



Fonte: O Autor (2019)

Na Figura 9 mostram-se os resultados da otimização topológica, considerando os valores do raio mínimo do filtro iguais a 0,50, 3,0 e 6,0.

Figura 9 – Variação da topologia em função do raio mínimo do filtro: a) 0,50, b) 3,0 e c) 6,0



Fonte: O Autor (2018)

Tabela 3 – Valor da função objetivo e número de iterações para cada valor de filtro analisado.

Filtro	Função objetivo	Iterações
0,50	838,95	167
3,0	1033,01	200
6,0	4062,44	200

Fonte: O Autor (2018)

Na Tabela 3 mostram-se os valores da função objetivo (flexibilidade) e o número de iterações para os três valores de raio de filtro considerados. Pode-se perceber que no caso de um valor de raio do filtro muito pequeno acontece a formação de uma camada de material sólido na parte lateral da viga. Isso ocorre devido ao valor do raio mínimo do filtro ser pequeno para atuar eficientemente na prevenção das instabilidades numéricas da malha. Para o segundo caso, com $R_{min} = 3,0$, observa-se em função da configuração final da viga o adequado funcionamento do filtro na malha. Finalmente, no último caso analisado, o elevado valor do filtro impediu a obtenção de uma estrutura viável.

Nos exemplos da seção 5.1 emprega-se o filtro de densidades empregado por Liu e Tovar (2014) com o intuito de estudar as diferenças resultantes da alteração do valor do filtro. Entretanto, no resto dos problemas analisados utiliza-se o filtro de sensibilidades empregado por Sigmund (2001).

5.2 Influência da Estratégia de Continuação nos critérios de resolução

Devido à característica não convexa da maioria dos problemas de OT, resulta impossível garantir a convergência em pontos estacionários que são necessariamente mínimos globais. Portanto, um mesmo problema com diferentes pontos de partida converge para diversos mínimos locais.

No método SIMP, o problema de minimização da flexibilidade é convexo e com uma única solução para o fator de penalização igual a $p = 1$ (Zegard e Paulino, 2016). Entretanto, conforme Rozvany (2001), para reduzir as regiões com valores de densidade intermediárias emprega-se $p > 1$. Isto tornando o problema não convexo, existindo vários mínimos locais.

A estratégia de continuação é uma alternativa utilizada para controlar o valor da penalização e evitar uma convergência prematura a um mínimo local. Essa estratégia consiste em limitar o valor da penalização para um determinado número de iterações, após as quais o valor da

penalização é gradualmente aumentado. Por exemplo, a estratégia de continuação foi utilizada por autores como Groenwold e Etman (2010), Liu e Tovar (2014), Zegard e Paulino (2016), Seitz e Grabe (2016), entre outros. No presente trabalho, a estratégia de continuação define-se como:

$$p_k = \begin{cases} 1 & k \leq 20 \\ \min(p_{max}, C_{pen} p_{k-1}) & k > 20 \end{cases} \quad (60)$$

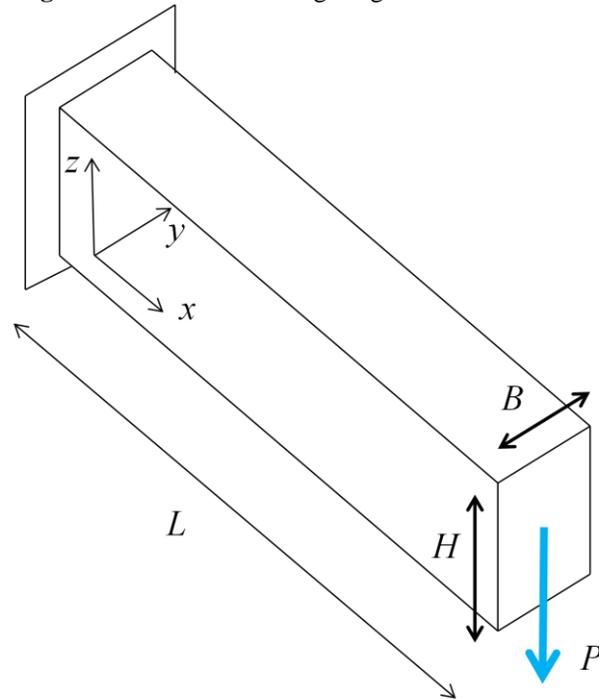
onde p_k e p_{k-1} representam os valores da penalização na iteração k e na iteração anterior ($k-1$), respectivamente, $p_{max}= 3$ é o valor limite máximo que o fator de penalização poderá assumir ao longo das iterações e C_{pen} é a constante na estratégia de continuação.

Para a análise da influência da estratégia de continuação no método SIMP com os quatro critérios de resolução foram estudados dois problemas de OT, o problema da viga engastada livre e o problema da viga submetida a esforço de torção, com a constante na estratégia de continuação C_{pen} igual a 1,02, 1,005 e 1,0015. Nos dois casos empregou-se 1000 iterações como critério de parada.

5.2.1 Problema da viga engastada livre com carga concentrada na extremidade

O problema tridimensional da viga engastada livre com uma carga concentrada na extremidade foi analisado por vários autores como por exemplo: Nguyen et al. (2012), Villanueva e Malte (2014), Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015), entre outros. Na Figura 10 mostra-se esquematicamente o problema analisado.

Figura 10 – Problema da viga engastada-livre.

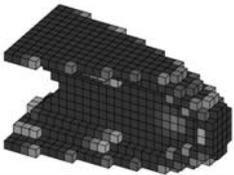
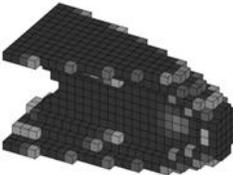
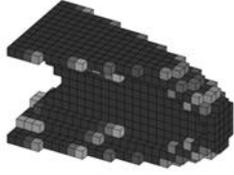
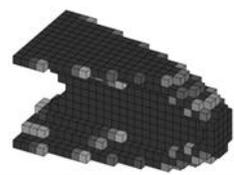
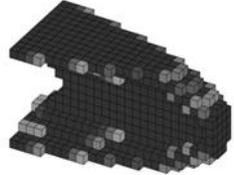
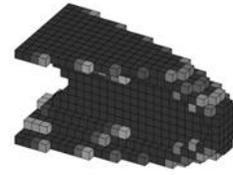
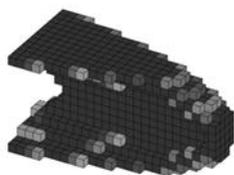
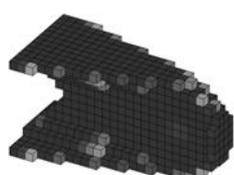
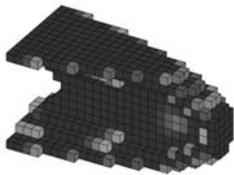
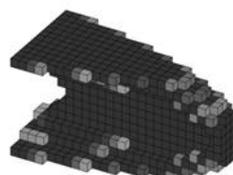
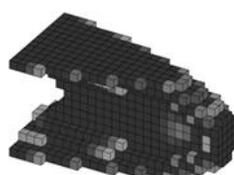
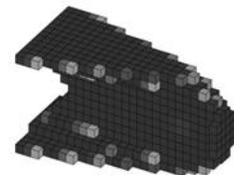


Fonte: O Autor (2018)

Empregam-se os mesmos dados do problema analisado no trabalho de Nguyen et al. (2012), ou seja, fração de volume igual a 0,30, fator de penalização máximo igual a 3,0, valor do raio mínimo do filtro igual 1.6 e valor unitário para a carga P . O domínio foi discretizado com uma malha uniforme de $24 \times 12 \times 12$ elementos hexaédricos. Adota-se o valor do parâmetro *move* igual a 0,20 para os métodos de resolução OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA. Empregou-se um valor de parada de 1000 iterações em cada critério analisado.

Na Figura 11 mostram-se as topologias finais da estrutura otimizada em função dos quatro critérios de resolução (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) utilizando três valores diferentes para a constante da estratégia de continuação C_{pen} (1,02; 1,005 e 1,0015).

Figura 11 – Topologias ótimas em função dos critérios de resolução e C_{pen} para o problema da viga engastada livre com carga concentrada.

C_{pen}	Critério de Resolução			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
1,02				
1,005				
1,0015				

Fonte: O Autor (2018)

Percebe-se que, ao final das 1000 iterações, todos os exemplos analisados são semelhantes tanto na topologia final da estrutura como na distribuição de material. Nas regiões pouco solicitadas o material foi removido.

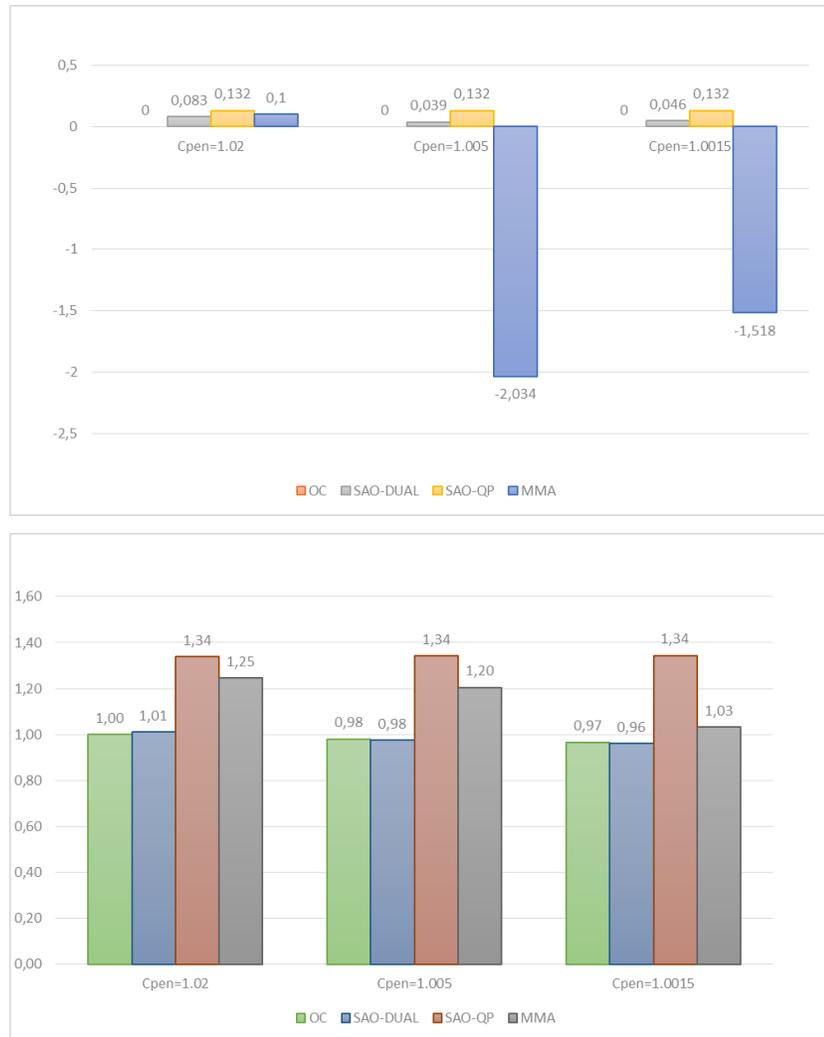
Os valores da flexibilidade e do tempo de processamento em função dos quatro critérios de resolução e dos três valores para a constante na estratégia de continuação C_{pen} , apresentam-se na Tabela 5. Por sua vez, no Gráfico 1, mostram-se as diferenças do valor da função objetivo (FO) e a relação entre os tempos de processamento para os 12 casos analisados, tomando-se como referência o valor da função objetivo (FO) e tempo de processamento obtidos no caso de critério de resolução OC com estratégia de continuação igual a $C_{pen} = 1,02$.

Tabela 4 – Flexibilidade e tempo de processamento em função dos critérios de resolução e valores da constante de continuação C_{pen} para o problema da viga engastada livre com carga concentrada.

C_{pen}	Função objetivo				Tempo (s)			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
1,02	4,72477	4,72560	4,72609	4,72577	503	509	673	627
1,005	4,72477	4,72516	4,72609	4,70443	493	491	675	606
1,0015	4,72477	4,72523	4,72609	4,70959	486	483	676	519

Fonte: O Autor (2018)

Gráfico 1 – Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $C_{pen} = 1,02$ para o problema da viga engastada livre com carga concentrada.



Fonte: O Autor (2018)

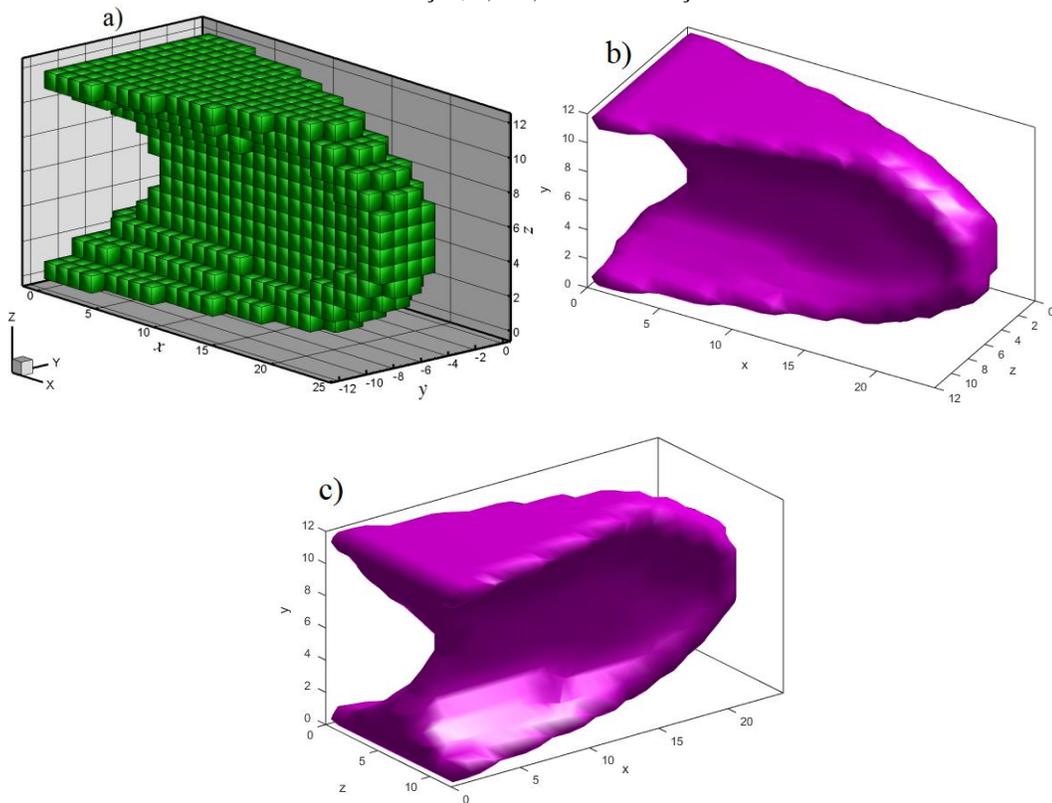
Analisando-se os resultados numéricos da figura, percebe-se que os métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP apresentaram valores de flexibilidade muito próximos, embora, os menores valores sejam obtidos com o método OC. Comparando os 4 métodos, observa-se que o método MMA, apresenta os menores valores de flexibilidade para os valores $C_{pen} = 1,005$ e $1,0015$. Deve-se ressaltar, que os valores da função objetivo sempre foram os mesmos para os métodos OC e SAO-QP, independentemente do valor da constante C_{pen} .

Em relação ao tempo de processamento, percebe-se que os métodos OC e SAO-DUAL apresentam valores relativos muito próximos de 1,0. Os métodos SAO-QP e MMA, sempre

apresentam os maiores tempos de processamento em comparação com os outros métodos. Também, observar-se que o método SAO-QP em todos os casos analisados sempre apresenta o máximo e o mesmo valor de tempo de processamento, independentemente do valor adotado na estratégia de continuação. Por sua vez, nos métodos OC, SAO-DUAL e MMA pode-se observar que o tempo de processamento relativo diminui conforme se reduz o valor da estratégia de continuação.

Como o domínio inicial foi discretizado em elementos hexaédricos, a geometria final apresenta arestas que impossibilitaram sua construção e/ou emprego estrutural (Zegard e Paulino, 2016; Yi e Kim, 2017). Utilizando o programa *top3dSTL-V3* desenvolvido por Liu e Tovar (2014), pode-se obter uma estrutura final suavizada. Na Figura 12 apresenta-se a estrutura otimizada sem e com suavização para o caso do método OC e $C_{pen} = 1,02$.

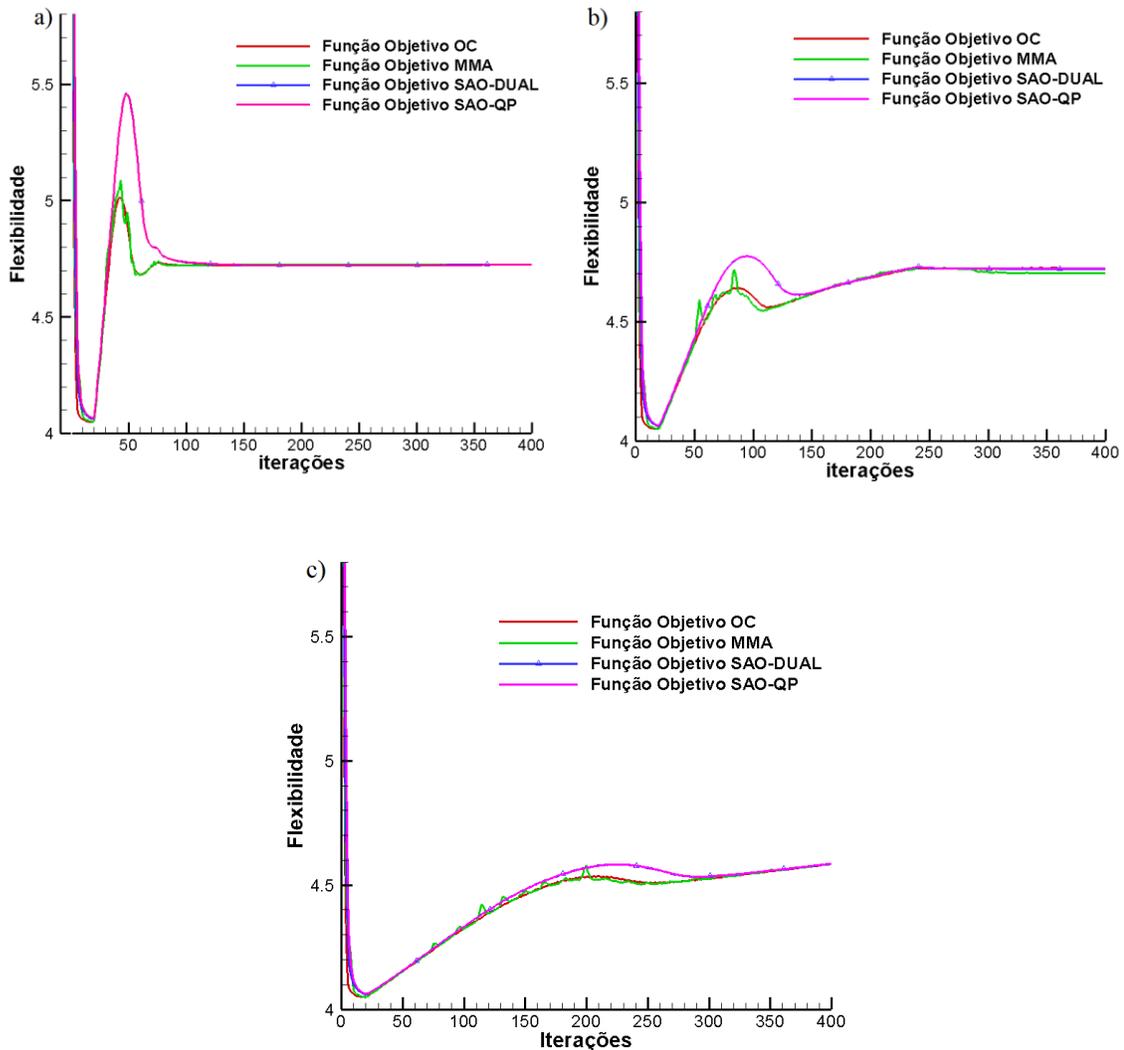
Figura 12 – Resultados do problema da viga engastada livre para o método OC e $C_{pen} = 1,02$ nos casos: a) sem suavização, b) e c) com suavização.



Fonte: O Autor (2018)

No Gráfico 2 mostra-se a variação da função objetivo (flexibilidade), no problema de OT, em função do número de iterações para os quatro métodos de resolução considerados e os três valores adotados para a constante na estratégia de continuação (C_{pen}).

Gráfico 2 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes constantes C_{pen} : a) 1,02, b) 1,005 e c) 1,0015 no caso do problema da viga engastada livre.



Fonte: O Autor (2018)

Analisando as figuras, percebe-se que os valores da constante (C_{pen}) na estratégia de continuação tem uma forte influência na variação do valor da função objetivo com o número de iterações. Observa-se que a função objetivo sofre pouca variação quando o número de iterações atinge aproximadamente 150 no caso de $C_{pen} = 1,02$, por sua vez isto acontece para 300 iterações no caso de $C_{pen} = 1,005$ e para 800 iterações no menor valor de $C_{pen} = 1,0015$.

Nas Figuras 13 e 14, mostram-se os resultados obtidos por Nguyen et al. (2012) e Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015) para o problema da viga engastada livre com carga concentrada na extremidade.

O resultado obtido por Nguyen et al. (2012), obteve-se empregando o método iMTOPT (*Improving Multiresolution Topology Optimization*) com uma malha de 24x12x12 elementos, $volfrac = 0,30$, $p = 3$ e raio do filtro $R_{min}=1,20$. O valor da função objetivo nesse caso foi igual a 5,182. Por sua vez, no caso de Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015), emprega-se uma malha de 48x48x48 elementos e uma fração de volume igual a 0,30. O programa de OT baseia-se no método SIMP e emprega-se o método do Ponto Interior para a resolução do problema.

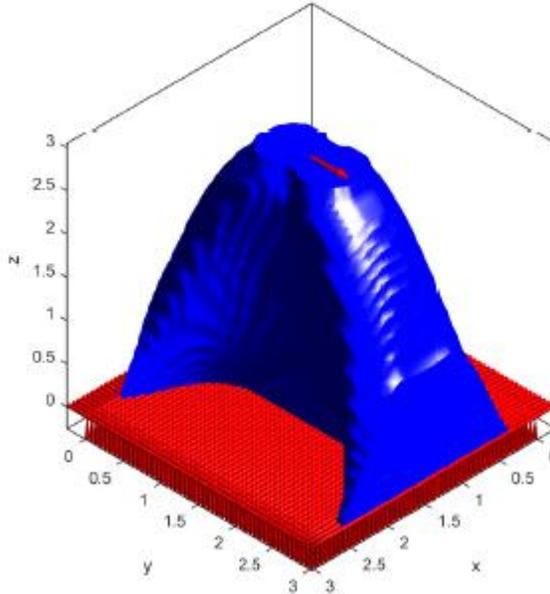
Percebe-se, que as geometrias finais obtidas por ambos autores mostram uma boa concordância com as topologias apresentadas na Figura 15.

Figura 13 – Resultado do problema da viga engastada livre obtido por Nguyen et al. (2012).



Fonte: Nguyen et al. (2012)

Figura 14 – Resultado do problema da viga engastada livre obtido por Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015).

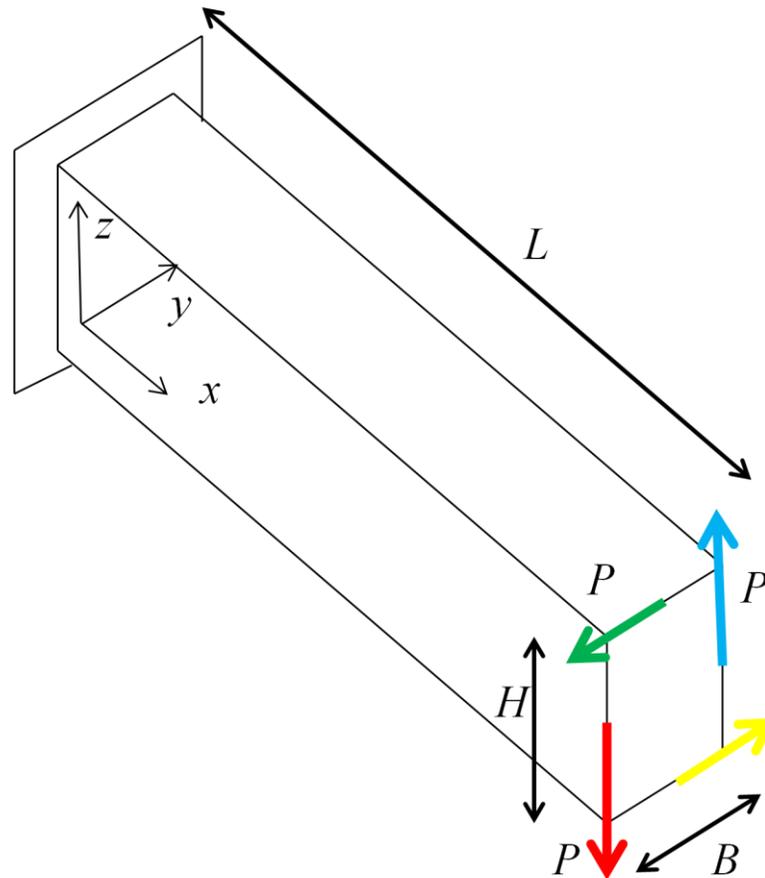


Fonte: Rojas Labanda, Stolpe e Sigmund (2015)

5.2.2 Problema da viga submetida a esforço de torção

Neste item, estuda-se o problema da viga tridimensional submetida a cargas de torção. O problema mostrado esquematicamente na Figura 15, foi abordado por autores como Nguyen et al. (2012), Villanueva e Maute (2014), entre outros.

Figura 15 – Problema da viga submetida a carregamento de torção.



Fonte: O Autor (2018)

Os parâmetros adotados no estudo foram os mesmos do trabalho de Villanueva e Malte (2014), sendo: fração de volume igual a 0,10, fator de penalização máximo igual a 3,0, valor unitário para a carga P e para o raio mínimo do filtro adotou-se um valor inferior ao empregado por Villanueva e Malte (2014), no lugar de 2,40 foi adotado 1,60. O domínio foi discretizado em uma malha uniforme de $80 \times 20 \times 20$ elementos hexaédricos.

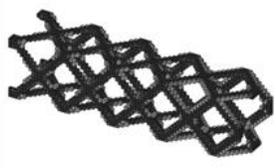
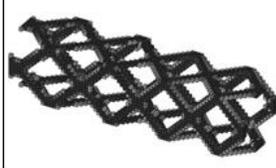
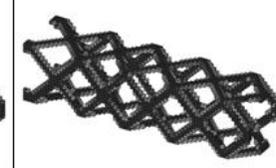
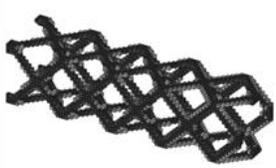
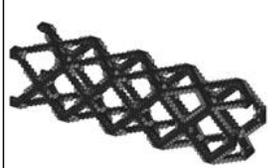
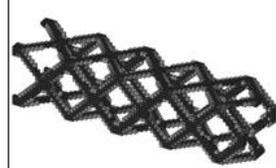
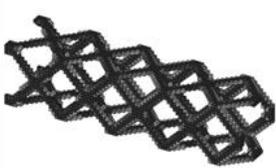
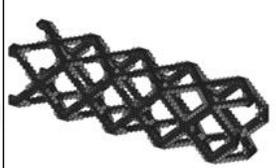
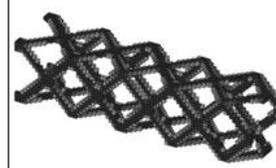
Adota-se o valor do parâmetro *move* igual a 0,20 para todos os métodos de resolução (OC, SAO-DUAL e SAO-QP), exceto no caso do método MMA no qual utilizou-se o valor de 0,05 pois com valores maiores observou-se inconsistências nas topografias obtidas.

Na Figura 16 mostram-se as topologias finais obtidas, utilizando os quatro critérios de resolução (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) e os três valores da constante empregada na estratégia de continuação C_{pen} .

Pode-se perceber que as topologias obtidas para os métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP apresentam uma grande semelhança para os três valores das constantes empregadas na estratégia de continuação (C_{pen}). Entretanto, deve-se observar que a distribuição de material na área da base da viga apresenta pequenas diferenças para os casos OC e SAO com $C_{pen} = 1,02$.

Para o método MMA, somente a topologia obtida com $C_{pen} = 1,02$ apresenta semelhança com as estruturas resultantes dos métodos de resolução OC, SAO-DUAL e SAO-QP. Os outros dois valores da constante empregada na estratégia de continuação para o método MMA apresentam uma topologia final de estrutura muito diferente da exibida pelos outros métodos.

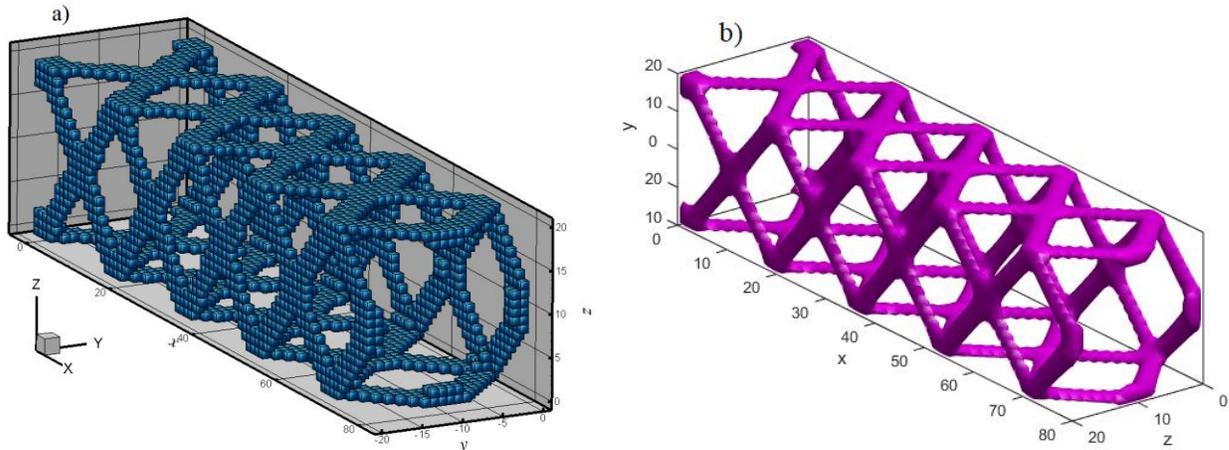
Figura 16 – Topologias ótimas em função dos critérios de resolução e C_{pen} para o problema da viga com carregamento de torção. Malha 80x20x20.

C_{pen}	Critério de Resolução			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
1,02				
1,005				
1,0015				

Fonte: O Autor (2018)

Apresenta-se, na Figura 17, a topologia final da estrutura otimizadas sem e com suavização para o problema da viga com carregamento de torção no caso do método OC e $C_{pen} = 1,02$.

Figura 17 – Resultados do problema da viga com carregamento de torção para o método OC e $C_{pen} = 1,02$ nos casos: a) sem suavização e b) com suavização.



Fonte: O Autor (2018)

Na Tabela 5 apresentam-se os valores da flexibilidade e tempo de processamento em função dos quatro critérios de resolução (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) utilizando três valores diferentes para a constante da estratégia de continuação C_{pen} .

Tomando como referência o valor da função objetivo (FO) e tempo de processamento obtidos no caso de critério de resolução OC com estratégia de continuação igual a $C_{pen} = 1,02$, no Gráfico 3 mostram-se as diferenças do valor da FO e a relação entre os tempos de processamento com os 4 critérios de resolução e os 3 valores de estratégia de continuação empregados.

Tabela 5 – Flexibilidade e tempo de processamento em função dos critérios de resolução e valores da constante de continuação C_{pen} para o problema da viga com carga de torção. Malha 80x20x20.

C_{pen}	Função objetivo				Tempo (s)			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
1,02	105,8089	105,7858	105,9517	107,3217	14019	13417	15884	14093
1,005	105,8088	105,8094	107,0793	102,8999	13758	14418	15343	12966
1,0015	106,6477	106,0037	107,1041	102,4656	14158	12919	14469	14158

Fonte: O Autor (2018)

Gráfico 3 – Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $C_{pen} = 1,02$ para o problema da viga engastada livre com carregamento de torção.



Fonte: O Autor (2018)

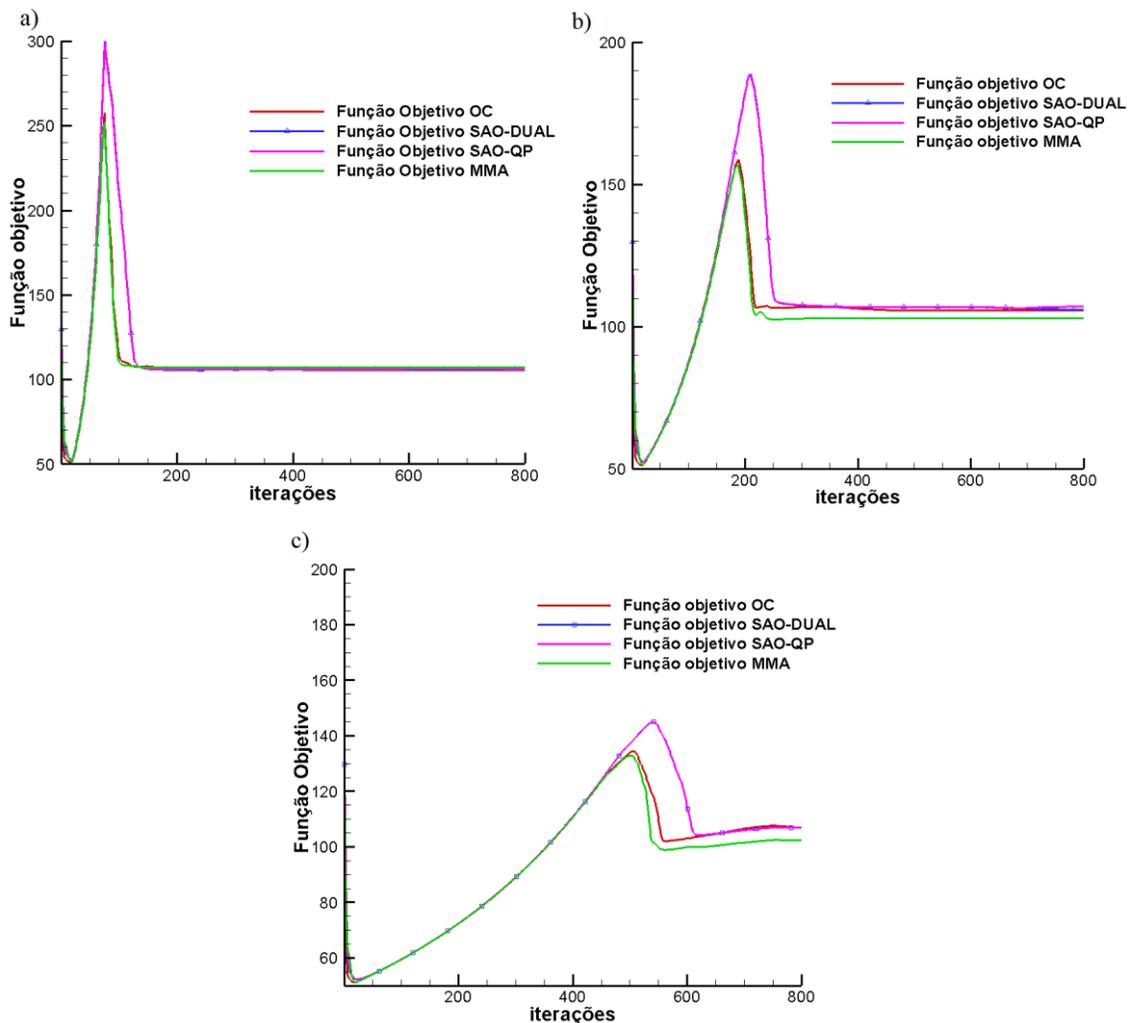
Analisando-se os resultados numéricos percebe-se que os métodos OC e SAO-DUAL apresentaram valores de flexibilidade próximos. Comparando os 4 métodos, observa-se que o método MMA, apresenta os menores valores de flexibilidade para $C_{pen} = 1,005$ e $1,0015$.

Também, observa-se que o valor numérico da FO nos métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP tende a aumentar conforme diminui o valor da estratégia de continuação de 1,02 até 1,0015. Por sua vez, no caso do método MMA, percebe-se que o valor numérico da flexibilidade diminui à medida que o valor da estratégia de continuação se reduz de 1,02 para 1,0015.

Em relação ao tempo de processamento, percebe-se que os métodos OC, SAO-DUAL e MMA apresentam valores relativos próximos de 1,0, variando entre 0,92 e 1,03. Por sua vez, o método SAO-QP sempre apresenta maior tempo de processamento em comparação com os outros métodos independentemente do valor adotado na estratégia de continuação. Também, no método SAO-QP pode-se observar que o tempo de processamento relativo diminui conforme se reduz o valor da estratégia de continuação.

No Gráfico 4 mostra-se a variação da função objetivo (flexibilidade) em função do número de iterações considerando os diferentes valores adotados na estratégia de continuação C_{pen} .

Gráfico 4 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes constantes C_{pen} : a) 1,02, b)1,005 e c)1,0015 no caso do problema da viga com carga de torção.



Fonte: O Autor (2018)

Pode-se observar que o comportamento da FO em função do número de iterações é similar ao exibido no exemplo da viga engastada livre com carga concentrada mostrado na seção anterior, isto é, os máximos valores da função objetivo no início do processo são atenuados conforme diminui o valor da constante na estratégia de continuação. Nota-se também que, à medida que o valor da constante de penalização se reduz, necessita-se de mais iterações para atingir a convergência no processo de otimização.

O valor da função objetivo sofre pouca variação nos 4 métodos quando se atinge o número de aproximadamente 200 iterações no caso de $C_{pen} = 1,02$. Enquanto que no caso de $C_{pen} = 1,005$ isto ocorre próximo das 300 iterações e para o menor valor da constante na estratégia de continuação deve-se superar aproximadamente as 800 iterações.

Nas Figuras 18, 19 e 20 mostram-se os resultados obtidos por Nguyen et al. (2012), Villanueva e Maute (2014) e Zhang et al. (2017) para o problema da viga com relação 4:1:1 submetida à carga de torção.

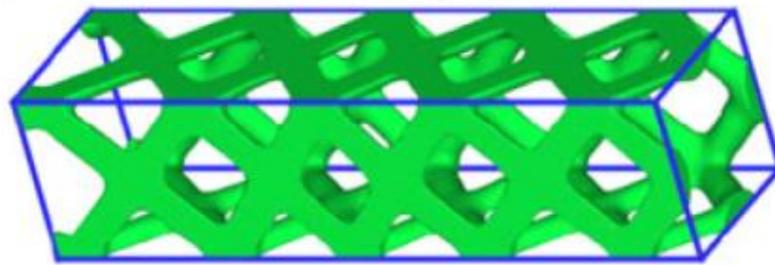
No estudo de Nguyen et al (2012) os autores empregaram uma malha de $40 \times 10 \times 10$ elementos, fração de volume de 0,1, raio do filtro $R_{min} = 1,20$, parâmetro de penalização $p = 3$ e uma variação do método iMTOP (*Improving Multiresolution Topology Optimization*).

No estudo de Villanueva e Maute (2014) os autores empregaram uma malha de $60 \times 15 \times 15$ elementos, fração de volume de 0,10, parâmetro de penalização $p = 3$ e o método de otimização topológica SIMP.

No estudo de Zhang et al. (2017) os autores abordaram o exemplo da viga submetida a carga de torção com a aplicação de placas em ambas as extremidades da viga e fazendo uso da relação 3:1:1 com uma malha de $96 \times 32 \times 32$ elementos. Nesse exemplo os autores utilizaram dois métodos de otimização topológica: o método MMV (*Moving Morphable Void*) e o método MMC (*Moving Morphable Component*).

Em todos os casos citados acima pode-se perceber que o resultado gráfico obtido pelos autores possui uma distribuição de material similar ao resultado obtido no presente estudo.

Figura 18 – Resultados obtidos para o problema da viga submetida a carregamento de torção. Malha de 80x20x20.



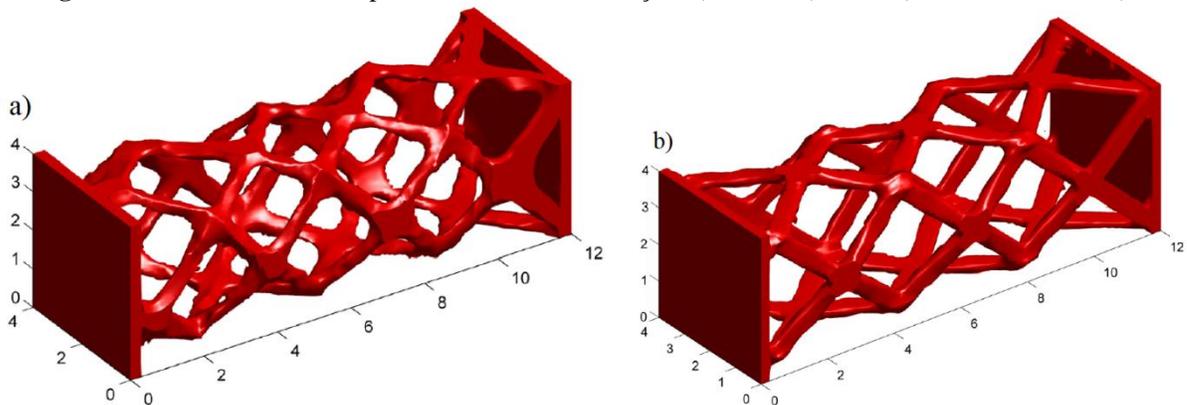
Fonte: Nguyen et al. (2012)

Figura 19 – Estrutura obtida para problema da viga submetida ao carregamento de torção com uma malha de 60x15x15 elementos.



Fonte: Villanueva e Maute (2014)

Figura 20 – Estruturas obtidas pelos métodos de otimização: a) MMV; b) MMC (Malha de 96x32x32).



Fonte: Zhang et al (2017)

Comparando os resultados obtidos no presente trabalho com os apresentados por Nguyen et al. (2012) e Villanueva e Maute (2014), observa-se que existe uma boa concordância com relação às estruturas otimizadas no caso dos métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP com os

valores da constante na estratégia de continuação iguais a 1,005 e 1,0015. O método MMA, somente apresenta semelhança com os resultados obtidos por Nguyen et al. (2012) e Villanueva e Malte (2014) para o caso em que adota-se $C_{pen} = 1,02$. Finalmente, deve-se ressaltar, que independentemente do valor de C_{pen} , o método OC sempre apresenta a mesma topologia final.

Compara-se também os resultados obtidos no presente trabalho com os resultados obtidos por Zhang et al. (2017), mostrados na Figura 20. Nessa comparação pode-se perceber que há uma boa concordância dos resultados obtidos no método OC, considerando todos os valores da constante de estratégia de continuação C_{pen} analisados, com o resultado obtido por Zhang et al (2017) para o método MMC na Figura 20b. Em relação aos métodos SAO-DUAL e SAO-QP percebe-se que quando o parâmetro na estratégia de continuação C_{pen} assume os valores de 1,005 e 1,0015, os resultados obtidos são semelhantes ao método MMC usado por Zhang et al (2017) mostrado Figura 20b, porém quando o valor da constante de estratégia de continuação é igual a 1,02, os métodos SAO-DUAL e SAO-QP apresentam resultados com estruturas que mais se assemelham ao o método MMV utilizado por Zhang et al (2017) mostrado na Figura 20a. Em relação ao método MMA empregado no presente trabalho, percebe-se que para o valor da constante na estratégia de continuação de 1,02 o resultado obtido se assemelha ao resultado de Zhang et al (2017) no método MMC mostrado na Figura 20a.

5.3 Influência do parâmetro de penalização nos critérios de resolução

Como apresentado na Seção 3.3 o parâmetro de penalização emprega-se para minimizar a existência de pontos com densidades intermediárias, ou seja, espera-se que os valores de densidade assumam valores extremos próximos de 0 e 1.

No presente item será realizado um estudo para determinar a influência do parâmetro de penalização (p) e o refinamento da malha nos resultados obtidos através dos diferentes critérios de resolução implementados no programa de Otimização Topológica. Para o estudo considera-se o problema apresentado no item 5.2.2, viga submetida à torção, com dois níveis de refinamento da malha de elementos finitos.

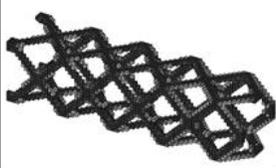
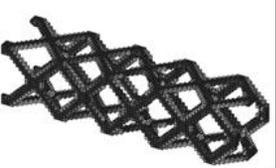
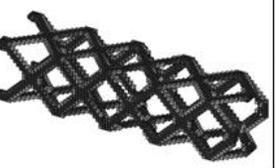
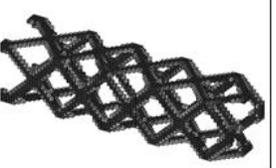
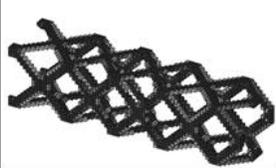
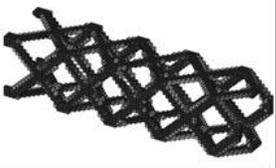
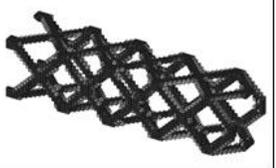
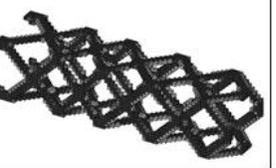
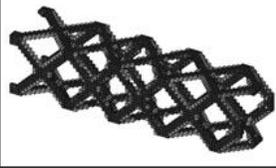
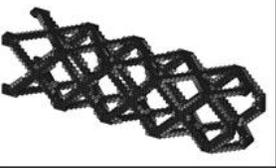
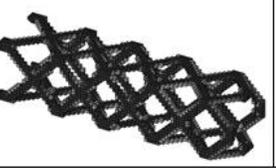
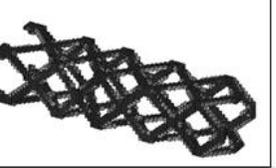
Inicialmente, emprega-se uma malha de 80x20x20 elementos hexaédricos uniformemente distribuídos e posteriormente uma malha de 96x24x24 elementos. Todos os parâmetros adotados foram os mesmos utilizados no item 5.2.2, porém, com a presença de algumas exceções descritas

no texto, como por exemplo emprega-se três valores para a constante de penalização, isto é, $p = 3, 5$ e 8 e utiliza-se um número máximo de 500 iterações.

5.3.1 Problema da viga submetida a esforço de torção – Malha 80x20x20

As topologias finais obtidas utilizando os quatro critérios de resolução e os três valores da constante de penalização mostram-se na Figura 21. Percebe-se que todos os resultados obtidos são semelhantes, independentemente do método (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) e do valor da constante de penalização ($p = 3, 5$ e 8). Deve-se destacar, que no caso do método MMA foi necessário ajustar a constante $C_{pen} = 1,02$ e o parâmetro $move = 0,05$ com valores distintos daqueles adotados para os outros três métodos ($C_{pen} = 1,005$ e $move = 0,20$). Os valores iniciais geravam uma topologia final com uma distribuição de material diferente da obtida para os métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP.

Figura 21 – Resultados Gráficos da Flexibilidade para diferentes valores do parâmetro de Penalização – Malha 80x20x20.

P	Critério de Resolução			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
3				
5				
8				

Fonte: O Autor (2018)

Na Tabela 6 apresentam-se os valores da flexibilidade e tempo de processamento em função dos quatro critérios de resolução (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) utilizando três valores diferentes para a constante de penalização p . Tomando como referência o valor da função

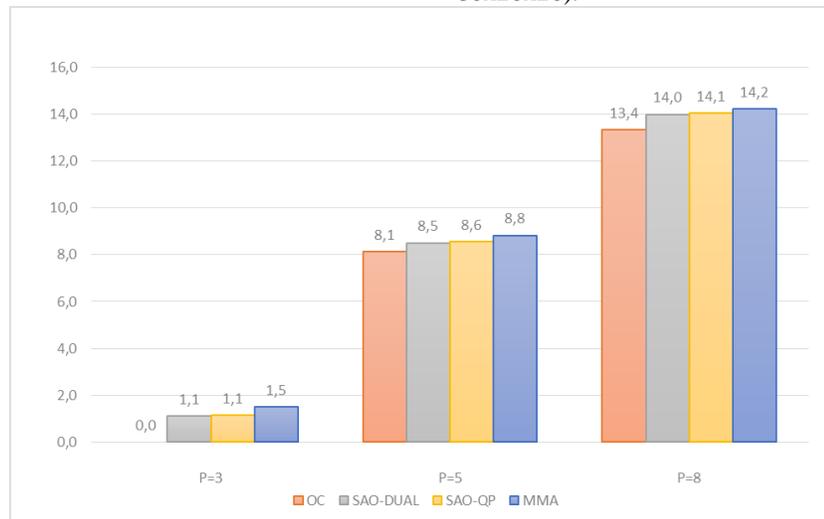
objetivo (FO) e tempo de processamento obtidos no caso de critério de resolução OC com constante de penalização igual a $p = 3$, mostram-se no Gráfico 5 as diferenças do valor da FO e a relação entre os tempos de processamento com os 4 critérios de resolução e os 3 valores de penalização.

Tabela 6 – Resultados Numéricos da Flexibilidade para diferentes valores da Constante de Penalização – Malha 80x20x20.

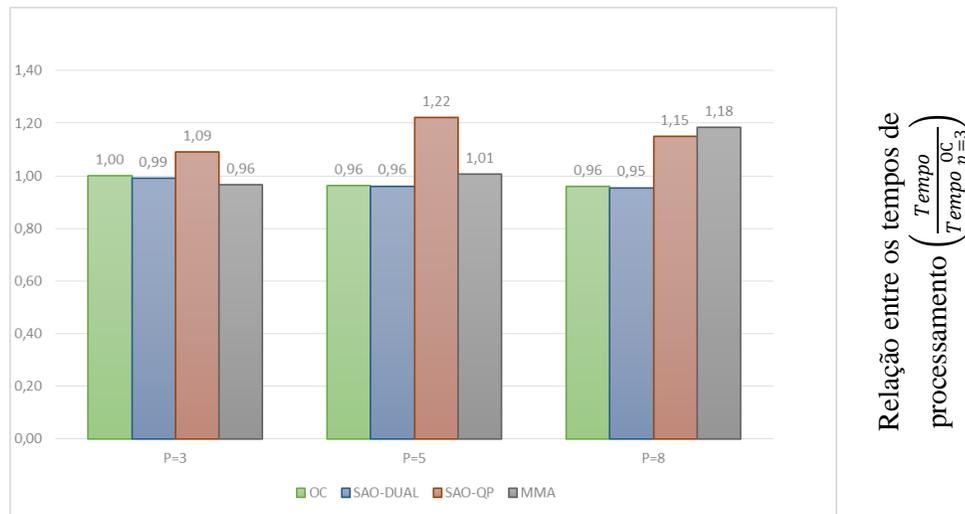
p	função objetivo				tempo (s)			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
3	105,8133	106,9235	106,9606	107,3219	6856	6795	7477	6612
5	113,9534	114,3239	114,3769	114,6439	6601	6589	8371	6892
8	119,1666	119,8186	119,8691	120,0524	6576	6543	7885	8118

Fonte: O Autor (2018)

Gráfico 5 – Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $p = 3$ para diferentes valores de penalização no problema da viga engastada livre com carregamento de torção (malha 80x20x20).



Diferença dos valores de flexibilidade
($FO - FO_{p=3}^{OC}$)



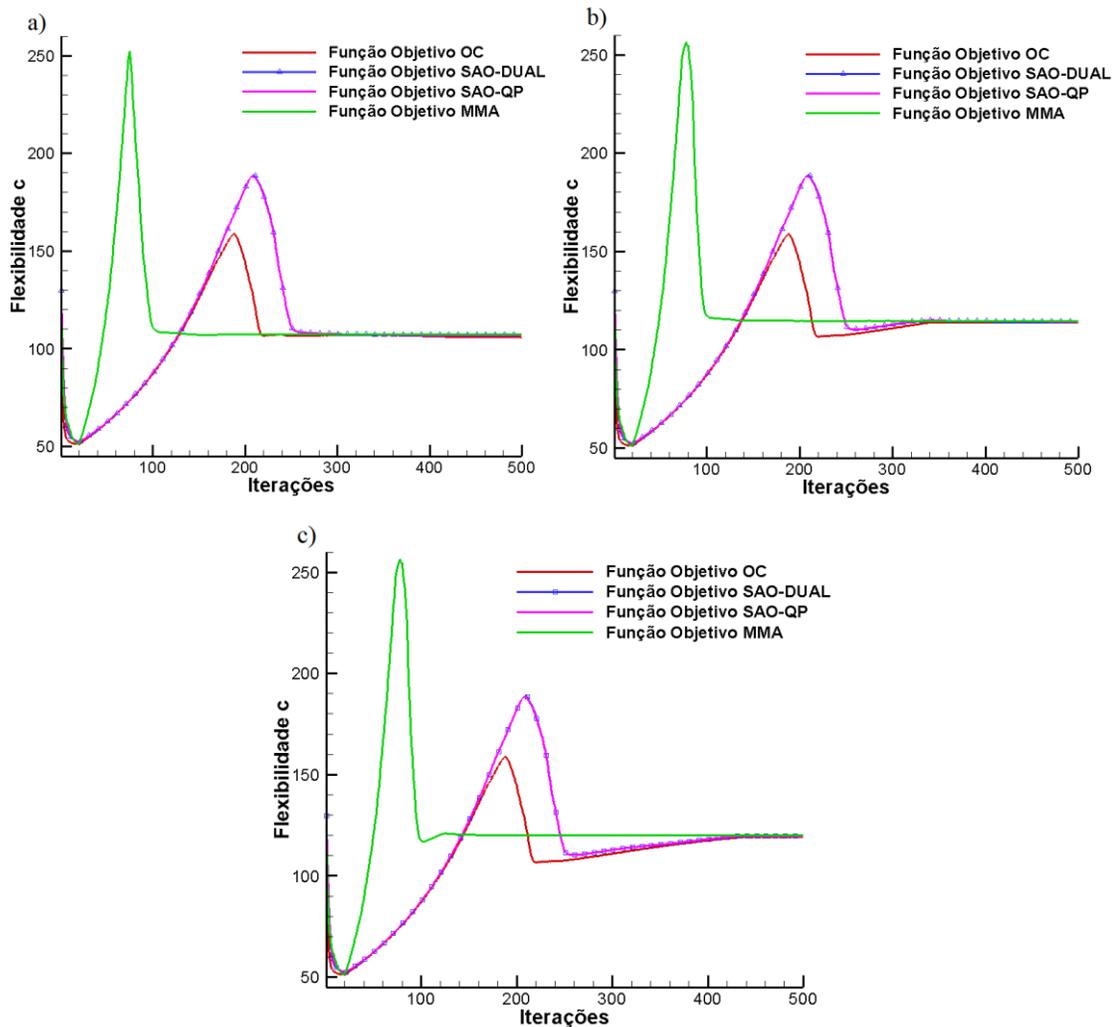
Fonte: O Autor (2018)

Pode-se observar que os resultados numéricos da flexibilidade apresentaram pequenas variações entre si, sendo que o método OC foi o que exibiu os menores valores seguido pelos métodos SAO-DUAL, SAO-QP e finalmente pelo método MMA que apresentou os maiores valores de flexibilidade entre os 4 métodos. Também notou-se que valor da flexibilidade aumenta à medida que o valor da penalização cresce, de 3 até 8.

Em relação ao tempo de processamento, pode-se perceber que os métodos OC e SAO-DUAL apresentam os menores valores relativos variando entre 0,95 e 1,0. Também, observa-se para ambos métodos que o tempo de processamento relativo diminui conforme se aumenta o valor da penalização. Independentemente do valor adotado na constante p , o método SAO-QP na maioria de vezes apresenta o maior tempo de processamento em comparação com os outros métodos. Por sua vez, o tempo de processamento relativo no método MMA aumenta conforme cresce o valor da penalização.

No Gráfico 6 mostra-se a variação da flexibilidade em função do número de iterações considerando os três valores da constante de penalização, p .

Gráfico 6 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes valores de penalização: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$. Malha $80 \times 20 \times 20$.



Fonte: O Autor (2018)

Pode-se perceber que o comportamento da flexibilidade em função das iterações apresenta-se semelhante para os valores de penalização, $p = 3, 5$ e 8 . Inicialmente, nas primeiras iterações observa-se uma redução do valor da flexibilidade mas, depois de atingir o mínimo a função objetivo cresce em valor conforme aumenta o número das iterações. Após atingir o máximo valor da flexibilidade a mesma diminui ficando praticamente assintótica até o número máximo de iterações. Independentemente do método empregado, pode-se observar que o valor da flexibilidade converge para valores próximos de $106,7$ ($p = 3$), $114,3$ ($p = 5$) e $119,7$ ($p = 8$).

Também, nota-se que conforme aumenta o valor da constante de penalização os métodos precisam de um maior número de iterações para convergir.

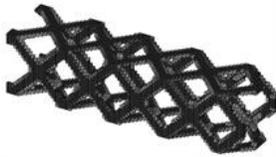
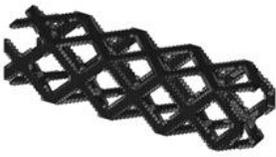
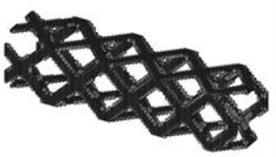
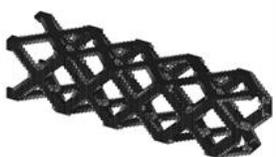
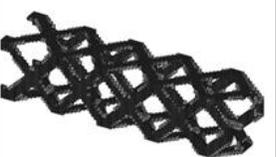
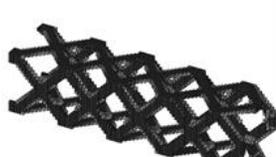
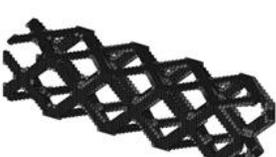
Os resultados obtidos com os critérios de resolução SAO-DUAL e SAO-QP são praticamente os mesmos, conforme pode-se observar no Gráfico. O método MMA, sempre apresenta uma variação da função objetivo diferente das obtidas com os outros métodos. Isso ocorre devido a que foram empregados valores diferentes dos utilizados nos métodos OC, SAO-DUAL e SAO-QP para a constante C_{pen} e para o parâmetro *move*.

5.3.2 Problema da viga submetida a esforço de torção – Malha 96x24x24

Na Figura 22 mostram-se as topologias finais obtidas utilizando os quatro critérios de resolução e os três valores da constante p para o caso da malha mais refinada.

Analisando as topologias, percebe-se que os resultados obtidos com os métodos OC e MMA apresentam uma grande semelhança independentemente do valor da penalização. Isto também acontece no caso dos métodos SAO-DUAL e SAO-QP. As diferenças entre os métodos OC/MMA e SAO-DUAL/SAO-QP observa-se principalmente na distribuição de material na base da viga. No caso dos métodos OC/MMA existe distribuição de material nas quinas da base, enquanto que no caso dos métodos SAO-DUAL/SAO-QP a distribuição de material localiza-se no centro das arestas que definem a base.

Figura 22 – Topologias ótimas em função do parâmetro de penalização. Malha 96x24x24.

P	Critério de Resolução			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
3				
5				
8				

Fonte: O Autor (2018)

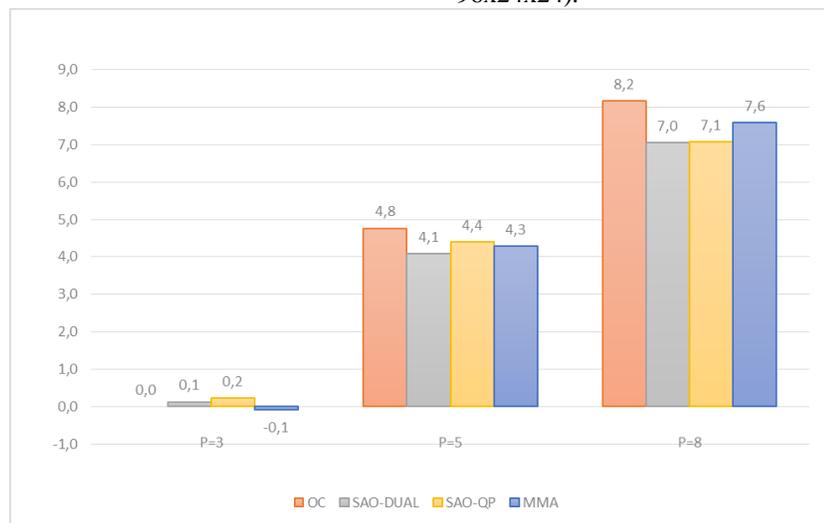
Na Tabela 7 apresentam-se os valores da flexibilidade e tempo de processamento em função dos quatro critérios de resolução (OC, SAO-DUAL, SAO-QP e MMA) utilizando três valores diferentes para a constante de penalização p . Tomando como referência o valor da função objetivo (FO) e tempo de processamento obtidos no caso de critério de resolução OC com constante de penalização igual a $p = 3$, mostram-se no Gráfico 7 as diferenças do valor da FO e a relação entre os tempos de processamento com os 4 critérios de resolução e os 3 valores de penalização.

Tabela 7– Flexibilidade e tempo de processamento para diferentes valores da constante de penalização – Malha 96x24x24.

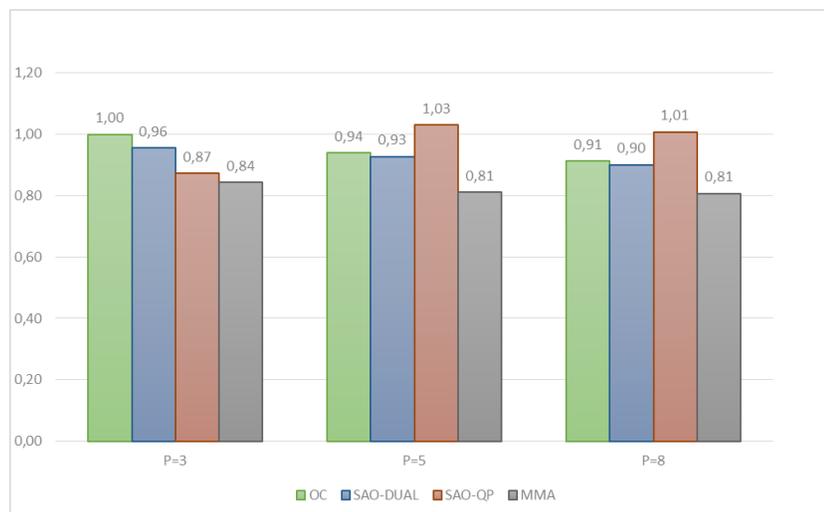
P	função objetivo				tempo (s)			
	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA	OC	SAO-D	SAO-QP	MMA
3	82,94328	83,0728	83,16427	82,86539	20852	19950	18192	17607
5	87,70541	87,03561	87,33880	87,22939	19579	19351	21500	16921
8	91,11436	89,99109	90,01261	90,52783	19039	18795	21023	16843

Fonte: O Autor (2018)

Gráfico 7 – Valor da Função Objetivo (FO) e tempo de processamento em relação ao critério de resolução OC com $p = 3$ para diferentes valores de penalização no problema da viga engastada livre com carregamento de torção (malha 96x24x24).



Diferença dos valores de flexibilidade
 $(FO - FO_{p=3}^{OC})$



Relação entre os tempos de
 processamento
 $\left(\frac{\text{Tempo}_{OC}}{\text{Tempo}_{p=3}^{OC}}\right)$

Fonte: O Autor (2018)

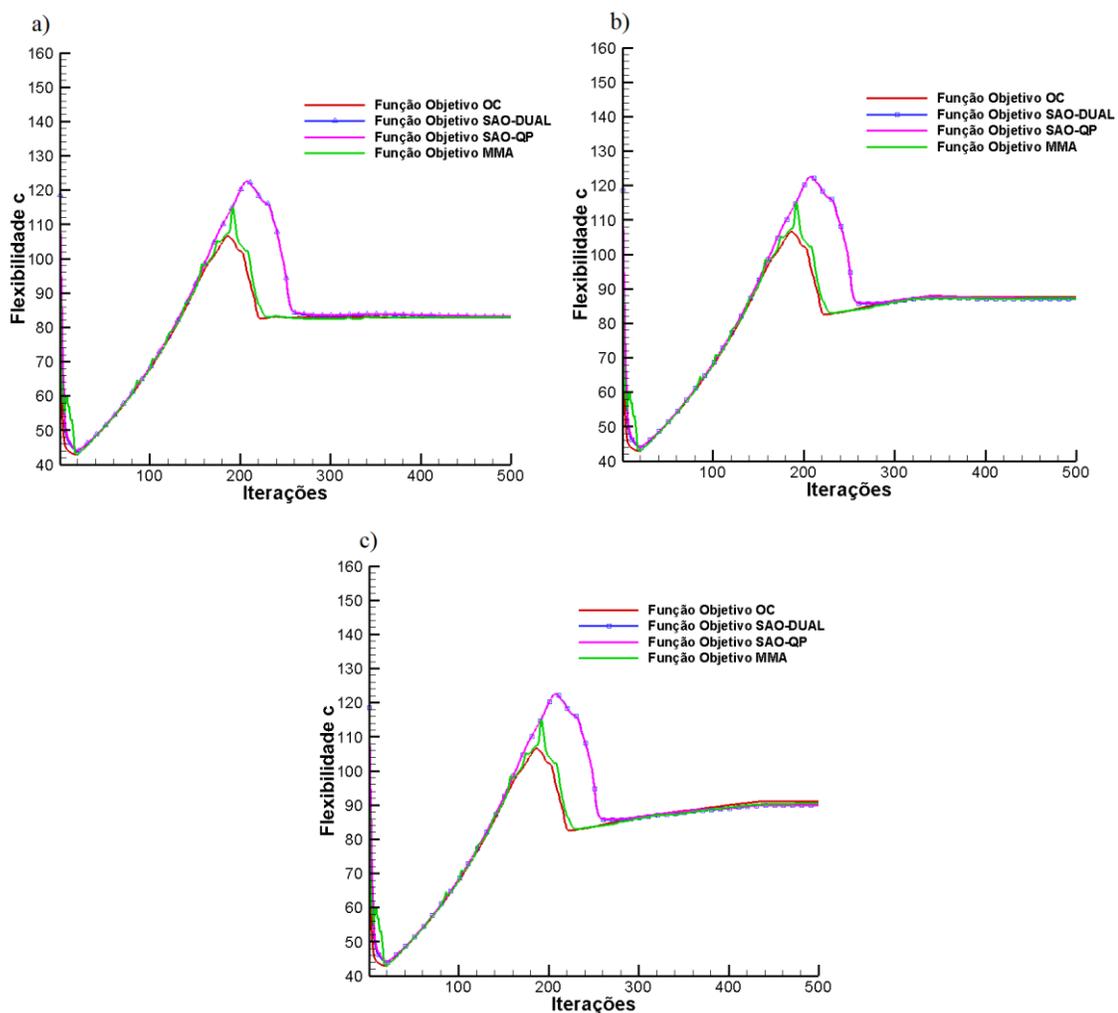
Analisando os Gráficos observa-se que o valor da flexibilidade apresenta pequenas variações entre os diferentes métodos, sendo que na maioria das vezes o método SAO-DUAL exibiu os menores valores e o método OC os máximos. Também percebe-se que valor da flexibilidade aumenta conforme cresce o valor da penalização.

Em relação ao tempo de processamento, pode-se perceber que o método MMA sempre apresenta o menor valor relativo variando entre 0,81 e 0,84. Também, observa-se que para os métodos OC, SAO-DUAL e MMA o tempo de processamento relativo diminui conforme

aumenta-se o valor da penalização. Por sua vez, no método SAO-QP o tempo de processamento relativo aumenta conforme cresce o valor da constante p .

No Gráfico 8 apresenta-se a variação da flexibilidade em função do número de iterações considerando os quatro critérios de resolução e os três valores da constante de penalização. Analisando as figuras pode-se concluir que a variação da função objetivo apresenta o mesmo comportamento que foi observado e discutido no item anterior para o caso da malha de 80x20x20 elementos. Deve-se ressaltar, que para a malha de 96x24x24 elementos empregou-se nos quatro métodos $C_{pen} = 1,005$ e $move = 0,20$.

Gráfico 8 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações para diferentes valores de penalização: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$. Malha 96x24x24.



Fonte: O Autor (2018)

Pode-se perceber, que independentemente do método empregado o valor da flexibilidade converge para valores menores em comparação com a malha de 80x20x20 elementos. Na malha mais refinada os valores da função objetivo ficam próximos de 83,0 ($p = 3$), 87,3 ($p = 5$) e 90,4 ($p = 8$).

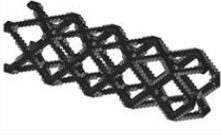
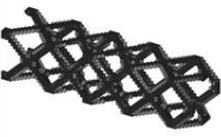
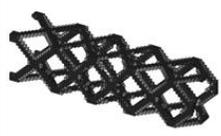
5.4 Influência da Fração de Volume e Penalização nos critérios de resolução

Como foi apresentado na seção 3.1, a fração de volume define a quantidade de material que estará presente na estrutura final, sendo definida pela relação entre o volume prescrito e o volume do domínio do projeto. No presente item será estudada a influência da fração de volume e da constante de penalização nos resultados obtidos com o critério de resolução OC.

Para o estudo emprega-se o mesmo problema da viga submetida a esforço de torção analisado no item 5.2.2, ou seja, um domínio discretizado em 80x20x20 elementos. Para a análise foram considerados cinco valores de fração de volume (0,10, 0,15, 0,20, 0,30 e 0,50) e três valores para o parâmetro de penalização ($p = 3, 5$ e 8). Em todos os casos adotam-se os seguintes valores: constante na estratégia de continuidade $C_{pen} = 1,005$, fator $move = 0,2$ e número máximo de iterações igual a 500.

Na Figura 23 mostram-se as topologias finais obtidas para os diferentes valores de fração de volume e constante de penalização. Percebe-se que no caso das frações de volume 0,10 e 0,15 as topologias são semelhantes independentemente do valor da constante de penalização, embora, no segundo caso a distribuição de material seja maior. No caso da fração de volume igual a 0,20, pode-se notar como o aumento na constante de penalização elimina de forma eficiente os elementos com densidades intermediárias obtidos para o caso de $p = 3$. Finalmente, observa-se pouca variação na topologia final para os casos de frações de volume 0,30 e 0,50.

Figura 23 – Topologias finais para diferentes frações de volume e constantes de penalização.

P	Fração de Volume				
	V=0.1	V=0.15	V=0.2	V=0.3	V=0.5
3					
5					
8					

Fonte: O Autor (2018)

Os valores da flexibilidade e tempo de processamento para os cinco valores de fração de volume e três constantes de penalização, apresentam-se na Tabela 8. Pode-se perceber, que os valores da flexibilidade diminuem (aumento de rigidez) conforme aumenta o valor da fração de volume de 0,10 até 0,50, sendo esse comportamento independentemente do valor de penalização adotado. Também pode-se notar que os valores de flexibilidade para cada fração de volume aumentaram à medida que cresceu o valor da constante de penalização. Esse comportamento fica mais perceptível nos casos dos menores valores de fração de volume.

Tabela 8 – Flexibilidade e tempo de processamento em função da penalização e fração de volume.

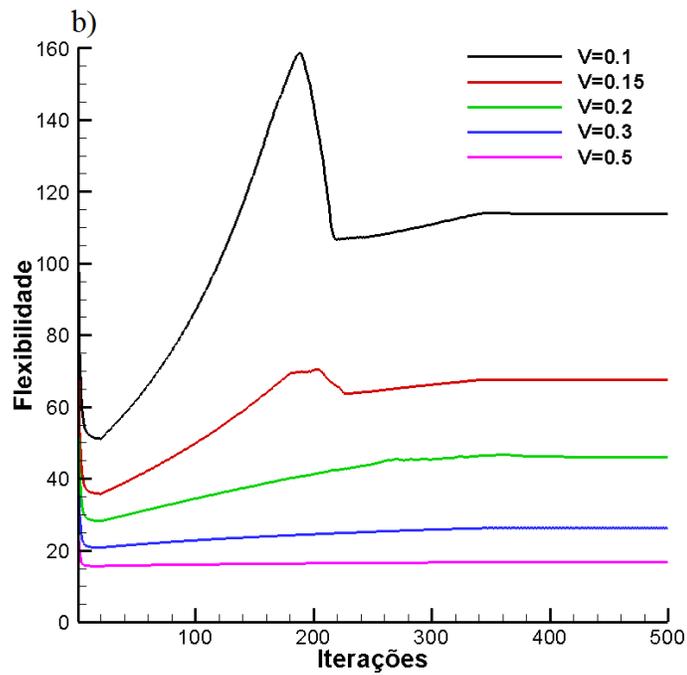
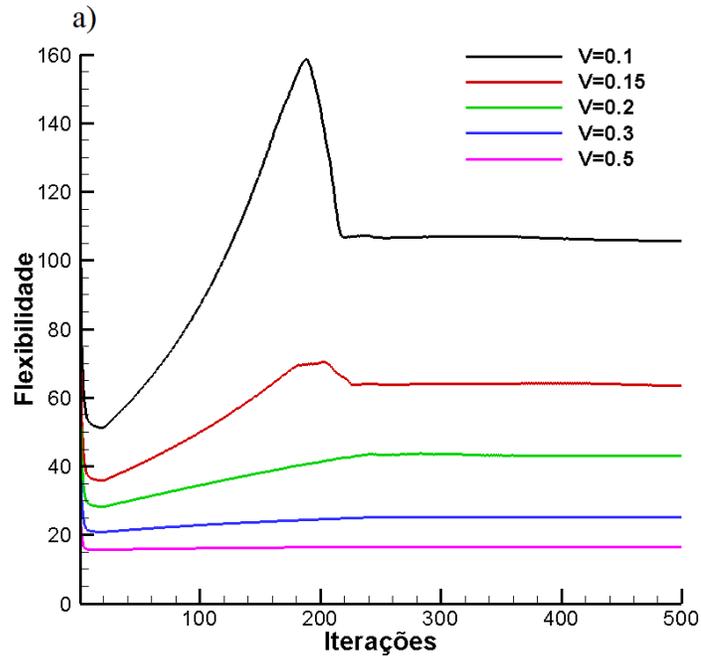
Penalização	Volume	Flexibilidade	Tempo (s)
3	0,10	105,81335	6856
	0,15	63,59066	6640
	0,20	43,07209	6659
	0,30	25,11572	6798
	0,50	16,56376	8317
5	0,10	113,95344	6601
	0,15	67,65265	6697
	0,20	46,09736	6716
	0,30	26,28246	6827
	0,50	16,73073	8746
8	0,10	119,16663	6576
	0,15	70,25538	6367
	0,20	47,79423	6550
	0,30	27,03429	6945
	0,50	16,82355	7985

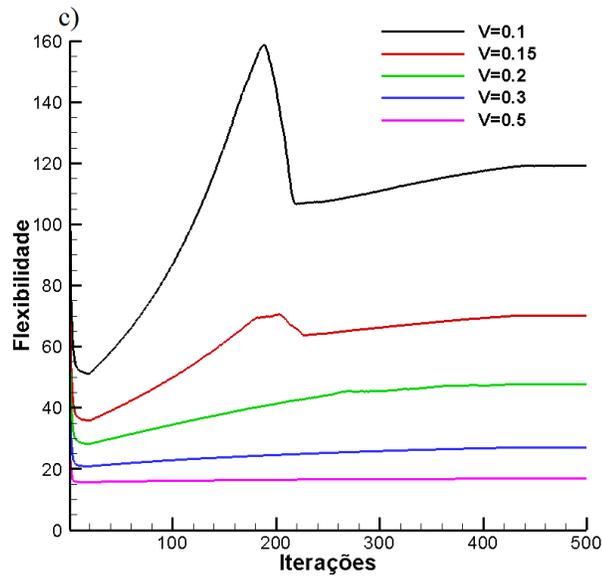
Fonte: O Autor (2018)

Com relação ao tempo de processamento, observa-se que de forma geral um aumento no valor da fração de volume produz um incremento no tempo, sendo que na maioria das vezes os máximos tempos de processamento foram obtidos no caso de $p = 5$.

A variação da flexibilidade em função do número de iterações e da fração de volume para valores constante de p mostra-se na Figura 34.

Gráfico 9 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações e da fração de volume para valores constantes de: a) $p = 3$, b) $p = 5$ e c) $p = 8$.





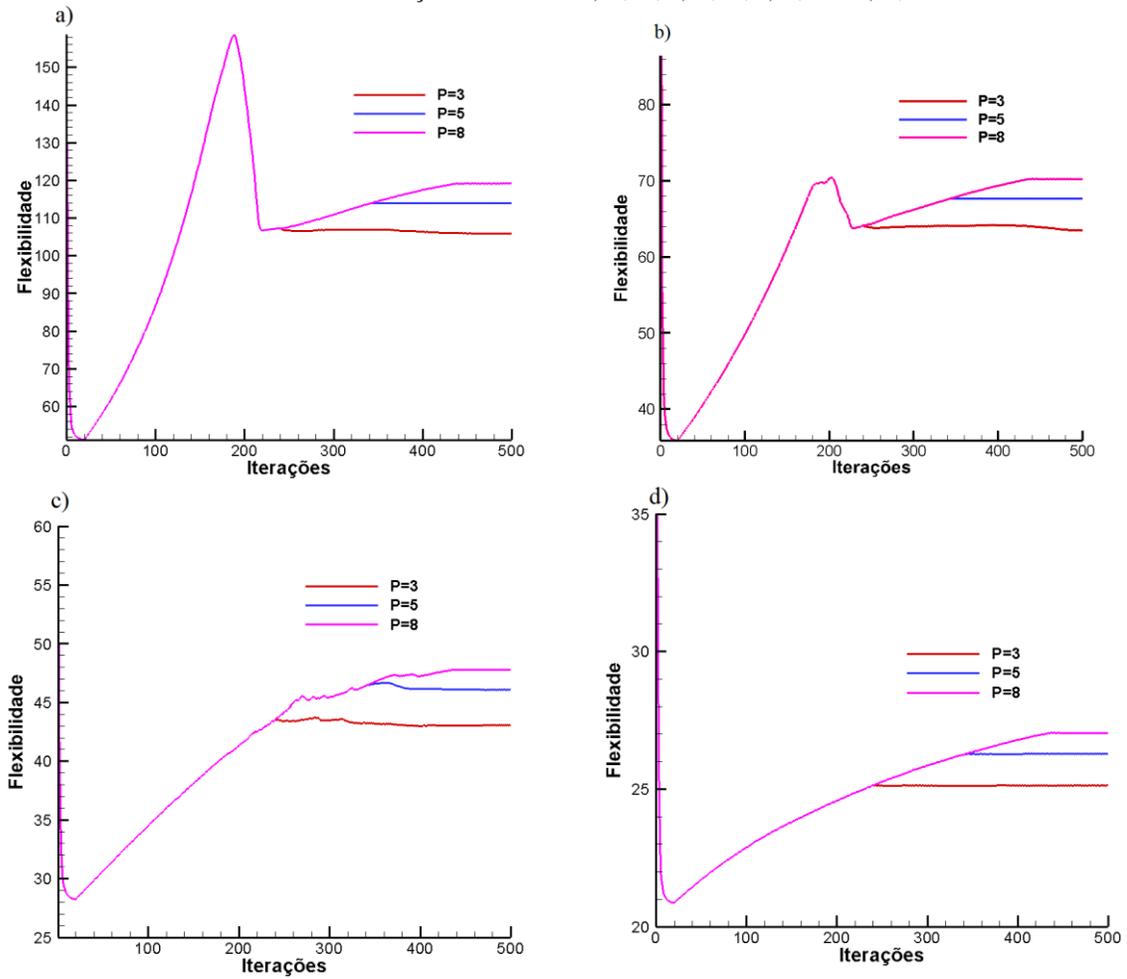
Fonte: O Autor (2018)

Analisando as figuras, observa-se que quanto maior for o valor da fração de volume mais suave será a variação da flexibilidade em função do número de iterações. O pico existente no valor da flexibilidade para a fração de volume igual a 0,10 desaparece totalmente quando adota-se $volfrac = 0,20$. Também, percebe-se que o número de iterações necessários para atingir a convergência aumenta conforme cresce o valor da constante de penalização.

No Gráfico 10 apresenta-se a variação da flexibilidade em função do número de iterações e da constante de penalização para valores constante da fração de volume. Analisando as figuras, pode-se perceber que a variação da flexibilidade para os diferentes valores de penalização apresenta exatamente o mesmo comportamento no trecho que vai desde 0 até aproximadamente 200 iterações. Posteriormente, a variação da flexibilidade para cada valor da penalização fica completamente diferente. As curvas com valores de penalização $p = 3$, sempre apresentam os menores valores de flexibilidade, por sua vez, os maiores valores de flexibilidade são obtidos com $p = 8$.

Não apresenta-se, a variação da flexibilidade para a fração de volume igual a 0,50 já que a mesma tem pouco mudança para as três constantes de penalização. O resto das observações que foram realizadas na Figura 34 também são extensíveis à Figura 35.

Gráfico 10 – Variação da flexibilidade em função do número de iterações e da constante de penalização para valores constantes da fração de volume: a) 0,10, b) 0,15, c) 0,20 e d) 0,30.



Fonte: O Autor (2018)

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, estudam-se como os principais parâmetros utilizados em quatro critérios de resolução influenciam os resultados no método de Otimização Topológica, SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*). O método de Otimização Topológica aplica-se a problemas estruturais tridimensionais sujeitos à restrição de volume com o objetivo de minimizar a função objetivo flexibilidade.

O estudo algorítmico foi desenvolvido no ambiente do MATLAB, considerando os métodos de resolução: critério de Otimalidade (OC), Programação Quadrática associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-QP), aproximação Dual também associada à Otimização por Aproximação Sequencial (SAO-DUAL) e o Método das Assíntotas Móveis (MMA).

Inicialmente, analisa-se como os principais parâmetros (fração de volume, penalização e raio mínimo do filtro) influenciam os resultados (valor da flexibilidade e número de iterações) no problema da viga engastada com carga distribuída na extremidade para o caso do critério de resolução OC. Posteriormente, estuda-se a influência que a estratégia de continuação, fator de penalização, fração de volume e nível de refinamento da malha de elementos finitos têm nos diferentes critérios de resolução implementados. Analisam-se para isso os problemas da viga engastada com carga concentrada na extremidade livre e viga engastada submetida a esforço de torção na extremidade livre.

Dentre as principais conclusões obtidas no desenvolvimento do presente trabalho, podem-se destacar:

- Os resultados obtidos nos exemplos analisados mostraram uma boa concordância quando comparados aos apresentados na literatura por outros autores.
- Pode-se perceber que independentemente do exemplo e do parâmetro analisados, os valores numéricos da função objetivo (flexibilidade) são sempre relativamente próximos para os 4 métodos analisados (OC, SAO-DUAL, SAO-QP, MMA).
- Os critérios de resolução que apresentam os mínimos valores de flexibilidade e tempo de processamento variam entre os diferentes casos estudados, portanto resulta impossível generalizar para todos os exemplos. Entretanto, observa-se que em vários casos os métodos OC e SAO-DUAL apresentaram os menores valores de flexibilidade, seguidos pelos

métodos MMA e SAO-QP. Por sua vez, os menores tempos de processamento são frequentemente obtidos pelos métodos SAO-DUAL e OC seguido pelos métodos MMA e SAO-QP.

- Observou-se que independentemente do critério de resolução utilizado, a estrutura final e a variação da flexibilidade em função do número de iterações sofrem mudanças conforme o valor adotado na estratégia de continuação (C_{pen}). Os máximos valores da função objetivo no início do processo são atenuados conforme diminui o valor da constante C_{pen} . Nota-se também que, à medida que o valor da constante C_{pen} se reduz, necessitam-se de mais iterações para atingir a convergência no processo de otimização.
- A variação do parâmetro de penalização (p), independentemente do critério de resolução empregado, apresenta pouca influência na topologia final da estrutura otimizada. Por sua vez, notou-se que o valor da flexibilidade aumenta à medida que o valor da penalização cresce, de 3 até 8. Em relação ao tempo de processamento, pode-se perceber que o método SAO-QP na maioria de vezes apresenta o maior tempo de processamento em comparação com os outros métodos.
- O valor da fração de volume tem uma forte influência na distribuição de material na estrutura final e na variação da flexibilidade em função do número de iterações. Quanto maior for o valor da fração de volume, menor será o valor da função objetivo (maior rigidez da estrutura) e a curva de flexibilidade x iterações apresenta um comportamento mais suave.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como continuações do trabalho desenvolvido, destacam-se as seguintes sugestões:

- Implementar o código desenvolvido em uma linguagem de programação compilada (Fortran 2008, C++, etc.) para reduzir o tempo de processamento.
- Acoplar um programa de pré-processamento para permitir modelar estruturas tridimensionais com geometrias e carregamentos arbitrários.
- Realizar com os quatro critérios de resolução um estudo paramétrico, variando para um mesmo problema as dimensões geométricas da estrutura.

- Implementar um estimador de erro *a posteriori* e um esquema de refinamento de malhas tipo *h*.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de concreto - Procedimento** . Rio de Janeiro, 2014.
- ALVARADO, R.C; GOTLLIEB, A. L. Diseño paramétrico em Arquitectura; método técnicas y aplicaciones. **Arquisur Revista**. n.3, 2013.
- AURÉLIO. O Mini dicionário da Língua Portuguesa. 7. Ed. Curitiba: Positivo, 2008
- ANDREASSEN, E; CLAUSEN, A; SCHEVENELS, M; LAZAROV B. S; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 43, p. 1-16, 2011.
- BEGHINI, I. I. **Building Science through Topology Optimization**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). University of Illinois. Urbana-Champaign.
- BELEGUNDRU; CHANDRUPATLA. **Optimization concepts and Applications in Engineering**. Tirupathi:Cambridge, 2011.
- BENDSOE, M. P. Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Berlin: Springer, 1995.
- BENDSOE, M. P; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 71, p. 197-224, 1988.
- BENDSOE; M. P; SIGMUND O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
- BÍBLIA, A. T. Provérbios. In BÍBLIA. Português. **Bíblia de Estudo Defesa da Fé: questões reais, respostas precisas, fé solidificada**. Tradução de João Ferreira de Almeida. Rio de Janeiro: Casa Publicadora das Assembléias de Deus, 2010. p. 1018.
- BOBBY, S; SPENCER, S. M. J; BERNARDINI, E; KAREEM, A. Performance-based topology optimization for wind-excited tall buildings: a framework. **Engineering Structures**. v. 74, p. 242-275, 2014.
- CHARRETT, D, E.; ROZVANY G. I. N. Extensions of the Prager-Shield theory of Optimal Plastic Design. **International Journal on Non-linear Mechanics**. V. 7, p. 51-64, 1972.
- DRUCKER, D.C; SHIELD, R. T. Bounds on Minimum Weight Design. **Quarterly of Applied Mathematics**. v. 15. p. 269-281, 1957.

- ETMAN, L. F. P; GROENWOLD, A. A; ROODA, J. E. First-order sequential convex programming using approximate diagonal QP subproblems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 45, p. 479-488, 2012.
- FLEURY, C. First and second order convex approximation strategies in structural optimization. **Structural Optimization**. v. 1, p. 2-10, 2019.
- GROENWOLD, A. A; ETMAN, L. F. P. A Quadratic Approximation for Structural Topology Optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 82, p. 505-524, 2009.
- GROENWOLD, A. A; ETMAN, L. F. P; E. A Quadratic Approximation for Structural Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 36, p. 547-570, 2008.
- GROENWOLD, A. A; ETMAN, L. F. P; WOOD, D. W. Approximated approximations for SAO. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 41, p. 39-56, 2010.
- HEYMAN, J; PRAGER, W. Automatic Minimum weight Design of Steel Frames. **Journal of the Franklin Institute**. v. 266, p. 339-364, 1958
- HUANG, X; XIE, Y. M. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures. Chichester: Wiley, 2010
- JOHNSEN, S. **Structural Topology Optimization: Basic Theory, Methods and Applications**, 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Norwegian University of Science and Technology. Trondheim.
- KAVEH, A.; SHAHROUZI, M. Graph theoretical implementation of memetic algorithms in structural optimization of frame bracing layouts. **Engineering Computations**. v. 30, p. 55-85, 2008.
- LEE, J. S; LEE, H. S; PARK, M. S. Schematic cost estimating model for super tall buildings using a high-rise Premium ratio. **Canadian Journal of Civil engineering**. v. 38, p. 530-545, 2011.
- LEE, S; TOVAR, A. Outrigger placement in tall buildings using topology optimization. **Advances in Engineering Software**. v. 74, p. 122-129, 2014.
- LIU, T.; TOVAR A. An efficient 3d topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 50, p. 1175-1196, 2014.
- MICHELL, A.G.M. The limits of Economy of Material in Frame Structures. **The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**. v. 8, p. 589-597, 1904

- MOLTER, A; FONSECA, J. S. O; FERNANDEZ, L. S. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution. **Applied Mathematical Modelling**. v. 40, p. 5576-5588, 2016.
- MUNK, D. J; VERSTRAETE, D; VIO, G. A. Effect of fluid-thermal-structural interactions on the topology optimization of a hypersonic transport aircraft wing. **Journal of Fluids and Structures**. v. 75, p. 45-76, 2017.
- MUNK, D. J; VIO, G. A; STEVEN, G. P. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 52, p. 613-631, 2015.
- NGUYEN, T. M; PAULINO, G. H; SONG, J; LE, C, H. Improving Multiresolution Topology Optimization via Multiple Discretizations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** v. 92, p. 507-530, 2012.
- OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statistics. Vol. 1: Basis and solids**. 1. Ed.Barcelona: Springer, 2011.
- ORTIZ, M; MITCHELL, S. L. Computational multiobjective topology optimization of silicone anode structures for lithium-ion batteries. **Journal of power sources**. v. 326, p. 242-251, 2016
- PICELLI R; VICENTE, W. M; PAVANELLO, R. Evolutionary Topology Optimization for Structural Compliance Minimization considering Design-dependent FSI Loads. **Finite elements in Analysis and Design**. v. 135, p. 44-55, 2017.
- PEREIRA, R. E. L. **Otimização Topológica de Sistemas de Contraventamento em Edificações, considerando os efeitos do vento**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental). Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru.
- RAMIREZ-GIL, F. J; SILVA, E. C. N; MONTEALEGRE-RUBIO, W. Topology optimization design of 3D electrothermomechanical actuators by using GPU as a co-processor. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 302, p. 44-69, 2016
- RAO, S. S. **Engineering Optimization: theory and Practice**. 4. Ed.New Jersey: John Wiley & sons, 2009.
- RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 5. Ed.Burlington: Elsevier, 2011.
- ROJAS LABANDA, S; STOLPE, M; SIGMUND, O. **Mathematical programming methods for large-scale topology optimization problems**.2015. Tese (Doutorado em Energia do Vento). Technical University of Denmark. Roskilde.
- RONG, J. H; LIU, X. H; YI, J. J; YI, J. H. An efficient structural topological optimization method for continuum structures with multiple displacement constraints. **Finite Elements in Analysis and Design**. v. 47, p. 913-921, 2010.

- ROZVANY, G, I. N. A Critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 37, p. 217-237, 2009.
- ROZVANY, G. I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics . **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 21, p. 90-108, 2001.
- SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 21, p. 120-127, 2001.
- SIGMUND, O; PETERSSON, J. Numerical Instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization** v. 16, p. 68-75, 1998
- SIGMUND, O; MAUTE, K. Topology Optimization approaches: A comparative review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 48, p. 1031-1055, 2013.
- SILVA, G. A; CARDOSO, E. L. Stress-based topology optimization of continuum structures under uncertainties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 313, p. 647-672, 2017
- SVANBERG, K; SVARD, H. Density Filters for topology optimization based on the geometric and harmonic means. In: WORLD CONGRESS ON STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION. 10., 2013. Orlando.
- SEITZ, K; GRABE, J. Three-dimensional topology optimization for geotechnical foundations in granular soil . **Computer and Geotechnics**. v. 80, p. 41-48, 2016.
- SVANBERG, K. The Method of Moving Asymptotes – A new Method for Structural Optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 24, p. 359-373, 1987.
- TAVAKOLI, R; MOHSENI, S. M. Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 49, p. 621-642, 2014.
- TORRES, I. A; ALMEIDA, S. R. M. **On conceptual design of buildings based on topology optimization techniques**. In: Iberian-latin-american Congress on Computational Methods in engineering, 34, 2013, Pirenópolis.
- VANDERPLAATS, G. N. **Fifty years of Structural Synthesis: some musings from a disciple of Schmit**. In: IAIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis Optimization Conference, 13., 2010, Fort Worth.
- VILLANUEVA, C. H; MAUTE, K. Density and Level set-XFEM Schemes for Topology Optimization of 3-D structures. **Computational Mechanics** v. 54, p. 133-150, 2014.

- WOOD, D. W. **Dual Sequential Approximation Methods in Structural Optimization**.2012. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Stellenbosch University. Stellenbosch.
- XIA, L; XIA, Q; HUANG, X; XIE, Y. M. Bi-directional Evolutionary Structural Optimization on Advanced Structures and Materials: A Comprehensive Review. **Archives of Computational Methods in Engineering**. v. 25, p. 437-478, 2018.
- XIE, Y. M; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization . **Computers and Structures**. v. 49, p. 885-896, 1993.
- YI, G; KIM, N. H. Identifying boundaries of topology optimization results using basic parametric features. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 55, p. 1641-1654, 2017.
- ZEGARD, T; PAULINO G. H. Bridging topology optimization and additive manufacturing. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 53, p. 175-192, 2016.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. C. **The Finite Element Method Volume 1: The Basis** 5. Ed.Oxford:Butterworth-Heinemann, 2000.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. C. **The Finite Element Method Volume 2: Solid Mechanics** 5. Ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- ZHANG, W; CHEN, J; ZHU, X; ZHOU J; XUE, D; LEI, X; GUO, X. Explicit three-dimensional topology optimization via Moving Morphable void (MMV) approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 322, p. 590-614, 2017.
- ZUO, Z. H; XIE, Y. M. A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization.**Advances in Engineering software**. v. 85, p. 1-11, 2015.