



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Michelle Gonzaga dos Santos

# **Bifurcações de Equilíbrios Relativos nos Problemas de Quatro e Cinco Corpos**

**Recife  
2019**

Michelle Gonzaga dos Santos

# Bifurcações de Equilíbrios Relativos nos Problemas de Quatro e Cinco Corpos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Mecânica Celeste

**Orientador:** Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro.

**Recife**  
**2019**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S237b Santos, Michelle Gonzaga dos  
Bifurcações de equilíbrios relativos nos problemas de quatro e cinco corpos  
/ Michelle Gonzaga dos Santos. – 2019.  
125 f.: il., fig.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,  
Matemática, Recife, 2019.  
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática. 2. Mecânica celeste. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes  
(orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2019-111

**MICHELLE GONZAGA DOS SANTOS**

**BIFURCAÇÕES DE EQUILÍBRIOS RELATIVOS NOS  
PROBLEMAS DE QUATRO E CINCO CORPOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 22/02/2019.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Diego Araujo de Souza (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por esta conquista, por me colocar de pé todas as vezes em que cai ao longo desses dois anos de mestrado, por me ensinar a nunca desistir e a compreender que com Ele todas as coisas são possíveis.

A meu amigo e esposo, Tiago, por ter sido tão paciente, compreensivo, gentil e amoroso ao longo deste trabalho, seu apoio foi extremamente importante para mim. Sua coragem me inspira a enfrentar desafios cada vez maiores.

Aos meus pais, Simone e Moises, vocês me ajudaram a construir meu caráter e a nunca desistir dos meus sonhos. Me ensinaram a ser humilde em todas as circunstâncias da vida e a me orgulhar de quem eu sou.

As minhas irmãs queridas, Mirelly, Miriam, Gabriela e Mayra. Não tenho palavras para tamanha cumplicidade. Obrigada!

A meu orientador, Eduardo Leandro, pela paciência e pelos grandes conselhos. Desde a iniciação científica tenho aprendido muito com ele, e neste trabalho de mestrado, em especial, o meu desenvolvimento em Mecânica Celeste não teria sido possível sem a sua cuidadosa orientação. Agradeço pelo incentivo, por acreditar em mim e me apoiar como um amigo. Agradeço muito pelas críticas e puxões de orelhas, cresci muito com eles. obrigada por tudo!

Agradeço aos amigos da sala 214, vocês foram essenciais para o meu sucesso. Cada palavra de ânimo, cada abraço e ajuda foram combustíveis para que eu não desanimasse. Com carinho, agradeço à Ana Cristina por ser uma grande amiga nesta jornada e muitas vezes ser como uma irmã nos momentos bons e ruins. Agradeço à André pelo companheirismo nas disciplinas cursadas e nos fins de semanas de estudos no DMAT. À Bia e Estevan, pelo cuidado e torcida. Agradeço também à Mauri por ser um ser do bem e nos encher diariamente com sua alegria e conhecimento (às vezes engraçado). À João Alexandre e Luiz pelas conversas motivadoras sobre a vida e sobre ciência.

Agradeço ainda aos amigos que fiz na Matemática, João Gondim, Tiago Amorim, Gabriel Carvalho, Augusto, Karine, Serginei, Ricardo, Willikat, Jaime, Júlio, Dayane. Vocês sempre contribuíram positivamente com boas conversas e com todo o apoio.

Agradeço aos amigos que não são da Matemática, Gabriel Luz, Mariana Lima, Kamila Sales, Gerson Tabosa, pelo apoio e incentivo em escolher a Matemática, Felipe, Jurandi, Nilza e Ceça. Obrigada pela paciência nas intermináveis conversas sobre a Matemática e pelo ombro amigo em todas as horas.

Agradeço aos membros da banca, Eudes Naziazeno e Diego Araújo, por aceitarem

o convite e pelas críticas construtivas.

Agradeço aos Professores Henrique Araújo, Silvia Sastre, Fernando Nobrega, Caliteia (Do Departamento de Estatística), William Artiles. Também à Marcelo Pedro e Anete ambos da (UFRPE). Estas pessoas me ajudaram durante minha caminhada acadêmica com conselhos, sugestões e motivação.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Com vocês divido a imensa alegria desta experiência!

# RESUMO

Nesta dissertação faremos uma exposição dos principais conceitos sobre configurações centrais e a sua relação com uma família de soluções do problema de  $N$  corpos, as soluções homográficas. Em seguida associaremos soluções da equação de configurações centrais com os extremos da função potencial restrita ao conjunto de configurações sem colisões cujo momento de inércia assume um valor constante. Para isto usaremos o teorema dos multiplicadores de Lagrange. Este método nos permite encontrar configurações centrais de três e quatro corpos. Apresentaremos resultados sobre configurações centrais côncavas e convexas de quatro corpos. Finalmente, como objetivo principal, estudaremos as bifurcações de uma família de configurações centrais côncavas de quatro corpos e as bifurcações de uma família de configurações centrais côncavas de cinco corpos. Para o caso de quatro corpos consideramos uma configuração na forma de um triângulo equilátero centrado num corpo de massa arbitrária e mostraremos que existe um único valor desta massa que torna a configuração degenerada. Encontraremos duas únicas famílias de triângulos isósceles que bifurcam da configuração inicial. Para cinco corpos, a mesma técnica é utilizada para encontrar configurações centrais que bifurcam de um quadrado centrado num corpo de massa arbitrária. Encontraremos três valores para a massa central que torna a configuração do quadrado degenerado. As únicas famílias de configurações que bifurcam são trapézios isósceles, losangos e configurações na forma de pipas. Em ambos os casos estudados as bifurcações das configurações simétricas ainda são simétricas. A unicidade das famílias encontrada é garantidas pelo teorema da função implícita. Utilizamos como ferramenta para realizar os cálculos o programa de computação algébrica MAPLE.

**Palavras-chave:** Mecânica Celeste. Problema de  $N$  Corpos. Equilíbrios Relativos. Configurações Centrais. Bifurcações.

# ABSTRACT

In this dissertation, we will give an overview of the main concepts on central configuration and its relation with a family of solutions of the  $N$  body problem, the homographic solutions. Next we will associate solutions of the equation of central configurations with the extrema of the potential function restricted to the set of configurations without collisions whose moment of inertia assumes a constant value. For this we will use Lagrange's multiplier theorem. This method allows us to find central configurations of three and four bodies. We will present results about concave and convex central configurations of four bodies. Finally, as a main objective, we will study the bifurcations of a family of four body concave central configurations and the bifurcations of a family of five concave central configurations. For the case of four bodies we consider a configuration in the form of an equilateral triangle centered on an arbitrary mass body and we will show that there is a single value of this mass that makes the configuration degenerate. We will find two unique families of isosceles triangles that branch from the initial configuration. For five bodies, the same technique is used to find central configurations that bifurcate from a square centered on an arbitrary mass body. We will find three values for the central mass that makes the configuration of the square degenerate. The only families of forking configurations are isosceles trapezoids, rhombuses and kite-shaped configurations. In both cases studied the bifurcations of symmetrical configurations are still symmetrical. The uniqueness of the families found is guaranteed by the implicit function theorem. We use as a tool to perform the calculations the algebraic computing program MAPLE.

**Keywords:** Celestial Mechanics.  $N$  Body Problem. Relative Equilibria. Central Configurations. Bifurcations.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama da força de atração, . . . . .	13
Figura 2 – Representação do centro de massa da prova do lema (2.2.3). . . . .	18
Figura 3 – Representação de uma solução homotética. . . . .	20
Figura 4 – Tetraedro regular, solução do sistema (4.1). . . . .	37
Figura 5 – a) Configuração côncava. b) Configuração convexa. . . . .	40
Figura 6 – Estimativas das regiões para localizar as massas $m_3$ e $m_4$ . . . . .	42
Figura 7 – Cotas para a razão das diagonais de uma configuração central convexa.	43
Figura 8 – Configurações centrais que surgem do triângulo equilátero centrado. I) $m > m_c$ e II) $m < m_c$ . . . . .	56
Figura 9 – I. Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando $m >$ $m_{c_2}$ . II. Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando $m < m_{c_2}$ . . . . .	64
Figura 10 – Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando $m = m_{c_3}$ .	65

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CONFIGURAÇÕES CENTRAIS E O PROBLEMA DE <math>N</math> CORPOS</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Formulações do Problema de <math>N</math> Corpos</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Integrais Primeiras</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Configurações Centrais e Equilíbrios Relativos</b> . . . . .	<b>19</b>
2.3.1	Soluções Homotéticas . . . . .	20
2.3.2	Soluções Homográficas e Equilíbrios Relativos . . . . .	21
2.3.3	Configurações Centrais como Extremos da Função Potencial . . . . .	23
<b>2.4</b>	<b>Configurações Centrais Isoladas e Distâncias Mútuas</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA EN- CONTRAR CONFIGURAÇÕES CENTRAIS</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>Configurações Centrais no Problema de Três Corpos</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>Determinante de Cayley-Menger e o Volume de um Simplexo</b> . . . . .	<b>28</b>
3.2.1	1-Simplexo (Segmento de Reta) . . . . .	29
3.2.2	2-Simplexo (Triângulo) . . . . .	30
3.2.3	3-Simplexo (Tetraedro) . . . . .	31
<b>3.3</b>	<b>Configurações Centrais Colineares de Três Corpos</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NO PROBLEMA DE QUATRO CORPOS</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>4.1</b>	<b>Configurações Centrais de Quatro Corpos no Espaço</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>4.2</b>	<b>Configurações Centrais Planas de Quatro Corpos</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4.3</b>	<b>Configurações Côncavas e Convexas</b> . . . . .	<b>40</b>
4.3.1	Configurações Centrais Convexas . . . . .	41
4.3.1.1	<i>Cotas para a Razão das Diagonais de uma Configuração Central</i> . . . . .	43
4.3.2	Configurações Côncavas . . . . .	45
<b>5</b>	<b>BIFURCAÇÕES DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS PLANAS</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>Bifurcações da Família de Configurações Centrais de Quatro Corpos em Forma de Triângulo Equilátero com uma Massa Central</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>5.2</b>	<b>Bifurcações da família de Configurações Centrais em Forma de Qua- drado Centrado</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>67</b>

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS MAPLE DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE QUATRO CORPOS</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>APÊNDICE B – CÓDIGOS MAPLE DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE CINCO CORPOS</b> . . . . .	<b>106</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Há muito tempo o movimento dos corpos celestes desperta a curiosidade e o interesse da humanidade. A Mecânica Celeste é uma disciplina conhecida por estudar a dinâmica de  $N$  corpos que se movem no espaço euclidiano tridimensional sob a influência da atração mútua (dois a dois) entre os corpos, a lei de gravitação universal de Newton. Apesar de sua origem ser bem antiga por estar ligada a observações e registros de posições dos astros e seus deslocamentos, ela foi fundamentada no século XVII por Isaac Newton, com a publicação do livro *Principia Mathematica* em 1687. Neste livro, Newton formulou as leis do movimento que são válidas tanto para corpos massivos interagindo entre si num laboratório quanto a interação entre corpos celestes. Neste contexto surge o problema mais importante da Mecânica Celeste, **o problema de  $N$  corpos**. Este problema consiste em dado um sistema formado por  $N$  corpos de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$  que interagem entre si pela lei da gravitação universal de Newton descobrir qual é o movimento destes  $N$  corpos.

Pouco se sabe sobre as soluções do sistema de equações que descreve o movimento desses corpos. Configurações centrais desempenham um papel importante para encontrar soluções desse sistema de forma explícita.

No capítulo 2 formulamos matematicamente o problema de  $N$  corpos e exibimos alguns conceitos acerca do sistema de equações que descreve o movimento desses corpos. Neste mesmo capítulo estudamos uma importante família de soluções do problema de  $N$  corpos, as soluções homográficas. Estas soluções são tais que as posições iniciais dos corpos formam uma configuração central. Além disso, elas são interessantes pois preservam sua forma para todo tempo. Assim, uma das maneiras de determinar soluções explícitas do problema de  $N$  corpos é procurar por configurações centrais. As referências mais usadas neste capítulo foram [Moeckel 2014], [Llibre, Moeckel e Simó 2015] e os capítulos 1 e 2 de [Cabral e Diacu 2002].

Newton resolveu o problema para  $N = 2$ , e deixou em aberto os casos  $N \geq 3$ . Desde então muitos matemáticos vêm tentando resolver este problema. Euler e Lagrange obtiveram soluções particulares para o caso  $N = 3$ . As soluções de Euler são tais que os três corpos são colineares para todo instante  $t$ , [Euler 1766]. Já as soluções de Lagrange são tais que três corpos permanecem nos vértices de um triângulo equilátero para todo instante  $t$ , [Lagrange 1772].

Para três corpos colineares, tem-se que quando dois corpos tem massas iguais, pode-se obter uma configuração central colocando um corpo de massa arbitrária no ponto médio entre os dois corpos de massas iguais. Quando três corpos tem massas diferentes, não é óbvio que existam configurações centrais. Mas Euler mostrou que, de fato, haverá

exatamente uma classe de equivalência de configurações centrais colineares para cada possível ordenamento das massas ao longo de uma reta. Entretanto três corpos com massas iguais ou não, nos vértices de um triângulo equilátero é sempre uma configuração central.

O matemático alemão Bruns mostrou em [Bruns 1887] que nenhum método analítico envolvendo as leis de conservação conhecidas pode resolver o problema para  $N = 3$ , conseqüentemente, o problema de  $N$  corpos não é integrável analiticamente. Deste modo as soluções particulares tornam-se muito importantes.

No capítulo 3, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontramos configurações centrais colineares de três corpos de massas diferentes, e configurações centrais na forma de triângulos equiláteros. Ainda neste capítulo relacionamos o volume de um simplexo com os determinantes de Cayley-Menger.

No capítulo 4, estudamos alguns resultados acerca das configurações centrais de quatro corpos côncavas e convexas. As referências principais utilizadas neste capítulo são o capítulo 1 de [Cabral e Diacu 2002], [Schmidt 1988] e [MacMillan e Bartky 1932].

O capítulo 5 é o objetivo principal desta dissertação. Neste capítulo estudamos bifurcações de configurações centrais côncavas, para os casos  $N = 4$  e  $N = 5$ . Primeiro consideramos uma configuração de quatro corpos na qual três corpos de massas iguais ocupam os vértices de um triângulo equilátero e um corpo de massa arbitrária ocupa o centro deste triângulo. Mostramos que para um determinado valor da massa central esta configuração torna-se degenerada, e encontramos duas famílias de triângulos isósceles que bifurcam da configuração degenerada. Em seguida consideramos uma configuração de cinco corpos na qual quatro corpos de massas iguais ocupam os vértices de um quadrado e um corpo de massa arbitrária ocupa o centro deste quadrado. Mostramos que para um determinado valor da massa central esta configuração torna-se degenerada. Encontramos três famílias de configurações centrais que bifurcam da configuração degenerada. Uma dessas famílias é formada por pipas, uma por trapézios isósceles e uma por losangos. A existência e unicidade dessas famílias é garantida pelo teorema da função implícita. Utilizamos o programa de computação algébrica Maple para realizar os cálculos deste capítulo, e alguns dos códigos MAPLE são exibidos no apêndice.

Para este trabalho, seguimos duas principais referências, o capítulo 1 de [Cabral e Diacu 2002], que foi escrito por Dieter S. Schmidt e [Meyer e Schmidt 1988].

## 2 CONFIGURAÇÕES CENTRAIS E O PROBLEMA DE $N$ CORPOS

Neste capítulo apresentamos um contexto geral para a formulação do problema de  $N$  corpos. Mostraremos alguns resultados acerca do sistema de equações que descreve o movimento desses  $N$  corpos. Introduziremos os principais objetos e o método de estudo para os capítulos seguintes. Para a lei de gravitação universal de Newton, consideraremos a constante de gravitação universal  $G = 1$ .

### 2.1 Formulações do Problema de $N$ Corpos

Considere  $N$  partículas de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , onde cada  $m_j \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , localizadas nas posições  $q_j \in \mathbb{R}^3$  com velocidades  $\dot{q}_j \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, N$ . A força resultante exercida na  $j$ -ésima partícula pelas demais  $N - 1$  partículas é

$$F_j = \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j),$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana. Ver figura 1.

De acordo com a segunda lei de Newton, a posição da  $j$ -ésima partícula satisfaz o sistema de equações do movimento

$$m_j \ddot{q}_j = \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

e o sistema das  $N$  equações diferenciais acima descreve o movimento das  $N$  partículas.

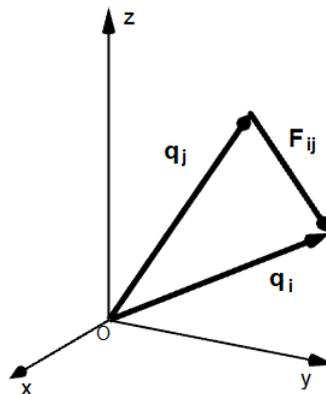


Figura 1 – Diagrama da força de atração,

Quando as partículas se movem,  $q_j = q_j(t)$  é uma função do tempo  $t$  e o ponto em cima da variável indica a derivada com respeito a  $t$ .

**Definição 2.1.1.** A **configuração** do sistema de  $N$  partículas descrito acima é dada pelo vetor  $q = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ .

**Definições 2.1.1.1.** O **momento linear** de  $m_k$  é  $p_k = m_k \dot{q}_k$ , para cada  $k = 1, 2, \dots, N$ . O **momento linear** do sistema de  $N$  partículas é  $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  e o **momento linear total** do sistema de  $N$  partículas é  $P = \sum_{k=1}^N p_k$ .

Definimos a **função potencial** (que é o negativo da energia potencial) do sistema como

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \\ q &\longmapsto \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\Delta = \bigcup_{1 \leq j < k \leq N} \Delta_{kj}$ , com  $\Delta_{kj} = \{q \in \mathbb{R}^{3N} \mid q_k = q_j\}$ , é denominado **conjunto de colisões**.

Perceba que podemos escrever a equação do movimento de cada partícula sem muito esforço como

$$m_j \ddot{q}_j = \nabla_{q_j} U(q), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

onde

$$\nabla_{q_j} U(q) = \left( \frac{\partial U}{\partial q_j} \right)^T.$$

A forma matricial do sistema (2.3) é dada por

$$\ddot{q} = M^{-1} \nabla U(q), \quad (2.4)$$

onde  $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N)$ , isto é,  $M$  é a matriz diagonal  $3N \times 3N$  cuja diagonal principal é  $m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N$ .  $M^{-1}$  representa a inversa de  $M$ .

De (2.4) podemos escrever um sistema de  $6N$  equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1} p, \\ \dot{p} = \nabla U(q). \end{cases} \quad (2.5)$$

O conjunto dos pares  $(q, p) \in \mathbb{R}^{6N}$  é chamado **espaço de fase** e o conjunto das configurações  $q \in \mathbb{R}^{3N}$ , é chamado **espaço de configurações**.

Finalmente, podemos escrever o sistema (2.5) como um **sistema hamiltoniano**

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $H(q, p)$  é a **função hamiltoniana**

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\|p_k\|^2}{m_k} - U(q) = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p - U(q).$$

O sistema (2.6) na forma matricial é

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

Tomando  $X = (p, q)$  e  $\nabla H(X) = (\partial H/\partial q, \partial H/\partial p)$ , chegamos a equação diferencial no espaço de fase

$$\dot{X} = J \nabla H(X),$$

onde  $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$  é a matriz em blocos  $2n \times 2n$  com  $0_n$  a matriz nula  $n \times n$  e  $I_n$  a matriz identidade  $n \times n$ .

## 2.2 Integrais Primeiras

Segundo [Cabral e Diacu 2002], capítulo 2, um importante resultado que sinalizou o fim da era quantitativa em Mecânica Celeste e o começo da análise qualitativa foi obtido pelo matemático Bruns. Bruns mostrou que o sistema (2.5) não tem mais que dez integrais primeiras independentes que são algébricas em relação a  $q$  e a  $p$ .

**Definição 2.2.1.** Uma **integral primeira** do movimento definido pelo sistema (2.5) é uma função  $\mathcal{I}(q, p) : \mathbb{R}^{6N} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  que permanece constante ao longo das soluções de (2.5).

**Definição 2.2.2.** Dizemos que  $k$  integrais primeiras  $\mathcal{I}_1(q, p), \mathcal{I}_2(q, p), \dots, \mathcal{I}_k(q, p)$ , são **independentes**, se  $\forall (q, p) \in \mathbb{R}^{6N} \setminus \Delta$  o conjunto  $\{\nabla \mathcal{I}_1(q, p), \dots, \nabla \mathcal{I}_k(q, p)\}$  é linearmente independente.

Definimos a **energia cinética** do sistema como a função

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{R}^{3N})^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\longmapsto \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k^{-1} \|p_k\|^2, \end{aligned}$$

e o **momento cinético** do sistema como a função

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathbb{R}^{3N} \times (\mathbb{R}^{3N})^* &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (q, p) &\longmapsto \sum_{k=1}^N q_k \times p_k. \end{aligned}$$

Os resultados a seguir fornecem as dez integrais primeiras independentes, algébricas em  $p$  e  $q$ . No entanto omitiremos a demonstração da independência.

**Lema 2.2.1.** *A energia total  $E = T - U$  do sistema (2.5), é conservada ao longo dos movimentos.*

*Demonstração.* Seja  $q(t) = q$  uma solução para (2.5), tem-se então

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \sum_{k=1}^N m_k^{-1} \langle p_k, \dot{p}_k \rangle - \sum_{k=1}^N \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \sum_{k=1}^N m_k^{-1} \langle m_k \dot{q}_k, \nabla_{q_k} U(q) \rangle - \sum_{k=1}^N \langle \nabla_{q_k} U(q), \dot{q}_k \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Da primeira igualdade para a segunda usamos (2.5) no primeiro termo e a definição de gradiente no segundo.  $\square$

**Definição 2.2.3.** O centro de massa de um sistema de  $N$  partículas é o vetor

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N m_k q_k,$$

onde  $\mathcal{M} = \sum_{k=1}^N m_k$  é a massa total do sistema.

**Lema 2.2.2.** *O centro de massa do sistema (2.5) se move com velocidade constante ao longo de uma reta.*

*Demonstração.* Somando em  $j$  as  $N$  equações de (2.1) notamos que

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{m_j m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j) = 0,$$

pois os termos  $\frac{m_j m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j)$  cancelam-se com os  $\frac{m_j m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_j - q_k)$ . Derivando  $\mathbf{c}$  duas vezes com relação ao tempo, encontramos

$$\ddot{\mathbf{c}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N m_k \ddot{q}_k \implies \ddot{\mathbf{c}} = 0.$$

Concluindo que a velocidade  $\dot{\mathbf{c}}$  é constante. Se integrarmos duas vezes, obtemos  $\mathbf{c} = t\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

Se compararmos as duas igualdades que temos para o centro de massa,

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N m_k q_k = \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

e derivarmos com respeito a  $t$ , obtemos

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N p_k = \mathbf{A}.$$

Note que do vetor  $\mathbf{A}$  obtemos três integrais do movimento; e se escolhermos  $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ , encontramos mais três integrais, a saber, as componentes do vetor  $\mathbf{B} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N m_k q_k$ . Assim, do lema (2.2.2) obtemos seis integrais do movimento. Entretanto, escolhendo  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  e escrevendo as posições dos corpos em relação ao centro de massa, ainda teremos seis integrais. De fato, se  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))$  é uma solução de (2.1), então  $\tilde{q}(t) = (\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_N(t))$ , onde para  $j = 1, \dots, N$ ,  $\tilde{q}_j = q_j - \mathbf{c}$  é a posição do corpo  $q_j$  em relação ao centro de massa e também é uma solução de (2.1); basta ver que  $\ddot{\tilde{q}}_j = \ddot{q}_j - \ddot{\mathbf{c}} = \ddot{q}_j$  e que o segundo membro de (2.1) é invariante por translações. Com esta mudança de coordenadas, teremos  $\tilde{\mathbf{A}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$  tal que  $\tilde{\mathbf{c}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{k=1}^N m_k \tilde{q}_k = t\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}$ ; quando derivamos  $\tilde{q}$  com relação a  $t$ , multiplicamos por  $m_j$  e somamos em  $j$ , temos

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\tilde{q}}_j = \frac{1}{\mathcal{M}} \left( \sum_{j=1}^N m_j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{c}} \right) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Além disso, temos

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^N m_j \tilde{q}_j = \sum_{j=1}^N m_j q_j - \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{c} = \mathcal{M}\mathbf{c} - \mathcal{M}\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Portanto, temos seis das integrais desejadas. Por outro lado, percebemos que o centro de massa está parado e na origem para todo  $t$ , ou seja,  $\tilde{\mathbf{c}}(t) \equiv \mathbf{0}$ .

Um importante resultado acerca do centro de massa está enunciado no lema a seguir.

**Lema 2.2.3.** *O centro de massa independe da escolha da origem do sistema de coordenadas.*

*Demonstração.* Sejam  $O$  e  $O'$  duas origens distintas,  $q_j$  e  $q'_j$  as respectivas posições do corpo  $j$  com relação a  $O$  e  $O'$  e  $v = O - O'$ . Seja  $W_j$  o ponto onde o corpo  $j$  está; vamos escrever os vetores posições  $q_j = W_j - O$  e  $q'_j = W_j - O'$  referentes aos sistemas de coordenadas com as origens  $O$  e  $O'$ , respectivamente. Note que  $q_j = q'_j + v \ \forall j$ , como está disposto na figura 2. Suponha que o centro de massa mude quando mudamos a origem e sejam  $C$  e  $C'$  os respectivos pontos onde os centros de massa estão. Representamos o vetor posição do centro de massa por

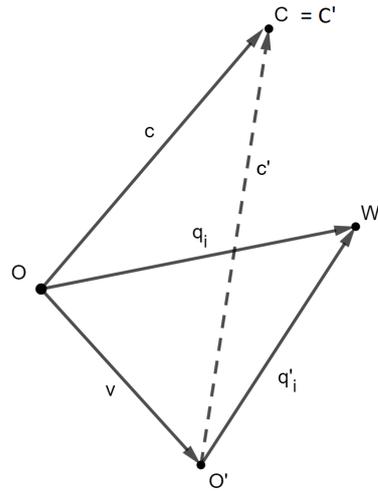


Figura 2 – Representação do centro de massa da prova do lema (2.2.3).

$$\begin{aligned}
 c = C - O &= \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^N m_j q_j \\
 &= \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^N m_j (q'_j + v) \\
 &= \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^N m_j q'_j + \frac{1}{\mathcal{M}} \left( \sum_{j=1}^N m_j \right) v \\
 &= c' + v \\
 &= C' - O.
 \end{aligned}$$

Portanto o centro de massa independe da escolha da origem do sistema de coordenadas.  $\square$

Devido a discussão acima de que o centro de massa tem velocidade nula, ou seja, está parado para todo instante  $t$ , a partir de agora estaremos assumindo que o centro de massa está fixado na origem.

O próximo lema dá as três últimas integrais linearmente independentes que foram mencionadas no começo desta seção.

**Lema 2.2.4.** *O momento cinético do sistema de partículas é conservado.*

*Demonstração.* De fato,

$$\dot{C} = \sum_{k=1}^N (\dot{q}_k \times p_k + q_k \times \dot{p}_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^N (\dot{q}_k \times m_k \dot{q}_k + q_k \times \nabla_{q_k} U(q)) \\
&= \sum_{k=1}^N q_k \times \nabla_{q_k} U(q) \\
&= \sum_{k=1}^N \left( q_k \times \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j) \right) \\
&= - \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k \times q_j) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade vale pois os termos cancelam-se dois a dois, ou seja,  $\frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k \times q_j)$  se cancelam com os termos  $\frac{m_k m_j}{\|q_j - q_k\|^3} (q_j \times q_k)$ .  $\square$

Da independência das integrais encontradas acima, fato que não será demonstrado aqui, concluímos que o sistema hamiltoniano reduz-se a um sistema em  $\mathbb{R}^{6N-10}$ . Embora esta redução não seja suficiente para resolver o problema de  $N$  corpos para  $N \geq 3$ , as integrais ajudam na compreensão de alguns aspectos qualitativos das soluções. Mais detalhes podem ser encontrados no capítulo 5 de [Wintner 2014] e no capítulo 2 de [Cabral e Diacu 2002].

Dado o contexto geral do problema de  $N$  corpos, definiremos configurações centrais e equilíbrios relativos. Equilíbrios relativos, entre outras razões, são importantes por estarem entre as únicas soluções para o problema geral de  $N$  corpos que podem ser dadas de uma forma explícita.

## 2.3 Configurações Centrais e Equilíbrios Relativos

**Definição 2.3.1.** Uma **configuração** de  $N$  corpos  $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  é dita **central** se existe uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k \neq j} \frac{m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j) + \lambda (q_j - \mathbf{c}) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Como estamos considerando o centro de massa na origem o termo  $\lambda \mathbf{c}$  não aparecerá quando nos referirmos às configurações centrais.

Escolhidas as velocidades iniciais de maneira conveniente, as soluções do problema de  $N$  corpos que se iniciam em configurações centrais são tais que a quaisquer dois instantes as configurações são semelhantes, ou seja, diferem apenas por uma composição de rotações, dilatações e translações. Porém, como o centro de massa está na origem, a translação

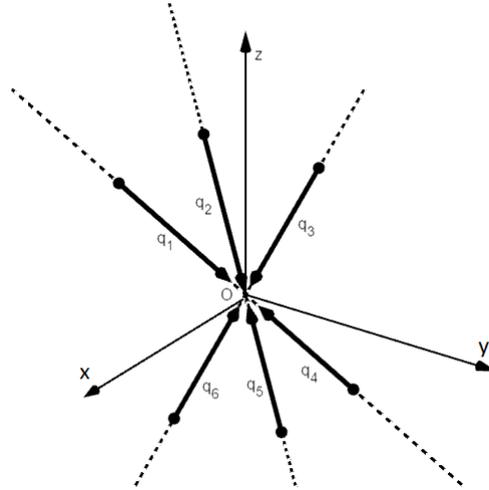


Figura 3 – Representação de uma solução homotética.

não pode ocorrer. Mostraremos mais adiante que aplicando rotações e/ou dilatações numa configuração central ainda temos uma configuração central. Nas próximas seções apresentaremos famílias de soluções para o problema de  $N$  corpos e veremos como as configurações centrais se relacionam com tais soluções.

### 2.3.1 Soluções Homotéticas

**Definição 2.3.2.** Uma **solução homotética** do problema de  $N$  corpos é uma solução da equação (2.1) tal que  $q_j(t) = r(t)q_j(0) \forall j = 1, \dots, N$ , onde  $r(t) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função escalar positiva chamada **função dilatação** e  $J$  é um intervalo aberto contendo 0.

Esta definição nos diz que a trajetória de cada corpo  $q_j$  é retilínea passando pela origem, como ilustra a figura 3 para  $N = 6$ .

**Proposição 2.3.1.** Uma solução de (2.1) tal que  $q_j(t) = r(t)q_j(0)$  para  $j = 1, \dots, N$  é uma solução homotética se e somente se  $q_j(0)$  satisfaz a equação (2.6) para todo  $j = 1, \dots, N$  e  $r(t)$  satisfaz a equação de Kepler  $\ddot{r} - \frac{\lambda}{r^2} = 0$ , para cada  $t$ .

*Demonstração.* Suponha que  $q(t) = r(t)q(0)$  é tal que  $q(0)$  satisfaz (2.6) e  $r(t)$  satisfaz  $\ddot{r}(t) = \frac{\lambda}{r^2(t)}$ . Como  $\ddot{q}_j(t) = \ddot{r}(t)q_j(0)$  e  $r(t) > 0, \forall t$ , temos

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t)q_j(0) &= \ddot{q}_j(t) = \sum_{k \neq j} \frac{m_k(r(t)q_k(0) - r(t)q_j(0))}{\|r(t)q_k(0) - r(t)q_j(0)\|^3} = \frac{1}{r^2(t)} \sum_{k \neq j} \frac{m_k(q_k(0) - q_j(0))}{\|q_k(0) - q_j(0)\|^3} \\ &= \frac{\lambda}{r^2(t)}q_j(0), \end{aligned}$$

e isto vale para cada  $t \in \mathbb{R}$  e  $\forall j = 1, \dots, N$ . A recíproca é clara. □

Encontremos uma solução muito especial para a equação de Kepler e consequentemente uma solução homotética.

A equação  $\ddot{r} - \frac{\lambda}{r^2} = 0$  pode ser escrita como o sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{r} = y, \\ \dot{y} = \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{d\bar{U}}{dr}, \end{cases}$$

onde  $\bar{U} = -\lambda r^{-1}$  é a energia potencial do sistema. Relacionando a função  $\dot{r}(t)$  com a energia cinética do sistema e pelo lema (2.2.1) temos

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \bar{U}(r) = k,$$

onde  $k$  é uma constante. Assim,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(k - \bar{U}(r))}.$$

Por separação de variáveis e escolhendo  $k = 0$ , por exemplo, temos

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2\lambda r^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int r^{1/2} dr = \pm \frac{2}{3\sqrt{2\lambda}} r^{3/2}$$

$$\Rightarrow r(t) = (\sqrt{2\lambda} t)^{2/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \left(\frac{9}{2}\lambda\right)^{1/3} t^{2/3},$$

uma solução para a equação de Kepler. Consideramos aqui a constante de integração sendo zero. Sendo  $q_j(0)$  solução de (2.6), então

$$q_j(t) = \left(\frac{9}{2}\lambda\right)^{1/3} t^{2/3} q_j(0), \quad j = 1, \dots, N,$$

é uma solução homotética especial de (2.1).

Os movimentos homotéticos de uma configuração central são exemplos de uma órbitas de colisão total. Pela solução especial obtida acima, vemos que todos os corpos colidem no centro de massa, isto é, na origem do sistema, quando  $t = 0$ . Apesar de existirem outras órbitas de colisões total, quando as soluções são não-homotéticas, todas elas se aproximam do conjunto de configurações centrais na colisão. Mais informações e uma ideia da prova podem ser vistas em [Saari 1984], [McGehee 1978] e [McGehee 1986].

Uma solução homotética é um caso particular das soluções homográficas, estudaremos tais soluções na próxima seção.

### 2.3.2 Soluções Homográficas e Equilíbrios Relativos

**Definição 2.3.3.** Uma **configuração central** é dita **plana** se os  $N$  corpos estão contidos em um mesmo plano.

**Definição 2.3.4.** Um **equilíbrio relativo** é uma solução do problema de  $N$  corpos no plano, onde cada corpo  $q_j$  descreve um movimento circular uniforme centrado no centro de massa.

Identificando  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{C}$  podemos escrever as posições dos corpos num sistema de coordenadas em rotação e verificar que neste novo sistema de coordenadas a construção do sistema que descreve o movimento dos corpos é semelhante com o que já tínhamos obtido. Ou seja, considerando  $q_j = e^{i\omega t}u_j$  a posição do  $j$ -ésimo corpo, onde  $\omega$  é a velocidade angular, e derivando  $q_j$  duas vezes com respeito a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= i\omega e^{i\omega t}u_j + e^{i\omega t}\dot{u}_j \\ \implies \ddot{q}_j &= (-\omega^2 u_j + 2i\omega\dot{u}_j + \ddot{u}_j)e^{i\omega t}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = e^{i\omega t} \frac{\partial U}{\partial u_j}.$$

Logo, o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento neste novo sistema de coordenadas tem a forma

$$m_j(-\omega^2 u_j + 2i\omega\dot{u}_j + \ddot{u}_j) = \frac{\partial U}{\partial u_j} \quad j = 1, \dots, N.$$

Se  $u = (u_1, \dots, u_N)$  é um equilíbrio para o sistema, ou seja, uma solução constante, então  $\dot{u} = 0$  e  $\ddot{u} = 0$ . Logo, para todo  $j = 1, \dots, N$ ,  $\dot{u}_j = 0$  e  $\ddot{u}_j = 0$ . Portanto,  $u = (u_1, \dots, u_N)$  é um equilíbrio relativo se existir um  $\lambda = \omega^2$ , tal que

$$-\lambda u_j = \frac{1}{m_j} \frac{\partial U}{\partial u_j} \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Uma solução mais geral do que a solução homotética do problema de  $N$  corpos é a solução homográfica.

**Definição 2.3.5.** Uma solução  $q(t)$  do problema de  $N$  corpos é dita **homográfica** se existem funções diferenciáveis  $r : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $\Omega : J \rightarrow SO(3)$ , com  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto contendo 0, tal que

$$q(t) = r(t)\Omega(t)q_j(0).$$

Aqui  $r(t)$  é a função dilatação como antes.

Segundo [Moeckel 2014], uma solução homográfica plana é tal que  $\Omega(\theta(t)) \in SO(2)$  para todo  $t \in J$ , onde  $\theta(t)$  é o ângulo de rotação em torno da origem. Neste caso,  $\Omega(t)$  fica determinada por  $\theta(t)$ . Tal solução homográfica pode ser encontrada se  $r(t)$  e  $\theta(t)$  resolverem o problema bidimensional de Kepler

$$\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2 = \frac{\lambda}{r(t)^2}, \quad r(t)\dot{\theta}(t)^2 = k,$$

onde  $k$  é uma constante.

As soluções desta equação fornecem seções cônicas e soluções análogas são possíveis para qualquer configuração central plana. Em particular, cada configuração central plana dá origem a uma família de soluções periódicas do problema de  $N$  corpos, de tal modo que cada um dos corpos se move numa órbita elíptica com um dos focos no centro de massa; apesar de cada um dos corpos se mover de acordo com a lei de gravitação de Newton, o equilíbrio das forças que caracteriza as configurações centrais permite que a configuração dos  $N$  corpos permaneça a mesma para cada tempo. Como um caso especial, as órbitas keplerianas circulares dão origem a uma solução homográfica para a qual a configuração apenas gira rigidamente a uma velocidade angular constante, neste caso temos às vezes a solução de equilíbrio relativo. Mais detalhes e ilustrações das configurações homográficas podem ser conferidas em [Moeckel 2014].

Equilíbrios relativos são chamados às vezes, na literatura da Mecânica Celeste, de configurações centrais planas. Usaremos esta terminologia nesta dissertação.

### 2.3.3 Configurações Centrais como Extremos da Função Potencial

Vejamos agora como relacionar configurações centrais com os extremos da função potencial sob algumas restrições.

**Definição 2.3.6.** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **homogênea de grau**  $\alpha$  se para todo  $\sigma \in \mathbb{R}^*$ , satisfizer a **relação de Euler**

$$f(\sigma x) = \sigma^\alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O teorema a seguir é um resultado clássico encontrado na literatura de Análise.

**Teorema 2.3.1.** Se  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^1$ , homogênea de grau  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , então,  $\forall x \in D$ ,

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

**Lema 2.3.1.**  $U(q)$  é uma homogênea de grau  $-1$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $\sigma \in \mathbb{R}^*$ , então

$$U(\sigma q) = \sum_{k < j} \frac{m_k m_j}{\|\sigma q_k - \sigma q_j\|} = \frac{1}{|\sigma|} \sum_{k < j} \frac{m_k m_j}{\|q_k - q_j\|} = \frac{1}{\sigma} U(q)$$

$\implies U$  é homogênea de grau  $-1$ . □

**Proposição 2.3.2.** Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  satisfizer a equação (2.6), para alguma configuração central  $q \in \mathbb{R}^{3N}$ , então  $\lambda > 0$ .

*Demonstração.* Seja  $q$  uma configuração central. Como  $U$  é uma função homogênea de grau  $-1$ , satisfaz o teorema (2.3.1), logo

$$\langle \nabla U(q), q \rangle = -U(q) \implies \langle -\lambda Mq, q \rangle = -U(q),$$

pela equação (2.6).

$$\therefore \lambda = \frac{U(q)}{\langle Mq, q \rangle}. \quad (2.9)$$

Como  $U$  é uma função real positiva, tem-se  $\lambda > 0$ .  $\square$

Definimos o **momento de inércia** do sistema como a função

$$\begin{aligned} I : \mathbf{R}^{3N} &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ q &\longmapsto \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Note que o denominador da equação (2.9) é duas vezes o momento de inércia, então

$$\lambda = \frac{U(q)}{2I(q)}. \quad (2.11)$$

Isto sugere interpretar  $\lambda$  como um multiplicador de Lagrange. Adaptando o teorema da teoria dos multiplicadores de Lagrange para nosso contexto, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.3.2.** *Considere a função  $U(q)$  diferenciável em todo  $\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$  e o conjunto de configurações sem colisões  $\Lambda = \{q \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \mid I(q) = I_0 \text{ onde } I_0 > 0\}$ . Se  $q$  é extremo local de  $U|_{\Lambda}$ , então existe  $\bar{\lambda}$  tal que*

$$\nabla U(q) = \bar{\lambda} \nabla I(q)$$

Este resultado encontra-se em livros de Análise, como o [Lima 2000] por exemplo, por isto a demonstração será omitida aqui.  $\square$

**OBS 2.3.1.** Note que  $\bar{\lambda} = 2\lambda$ . Aparecerão outras situações ao longo da dissertação em que o multiplicador de Lagrange usado absorverá constantes, isto será útil para facilitar os cálculos.

Portanto, configurações centrais são vistas como os extremos da função potencial restrita ao conjunto de configurações sem colisões cujo momento de inércia é uma constante. Esta caracterização fornece uma maneira de provar que as configurações centrais existem, ver [Moeckel 2014] e o capítulo 2 de [Llibre, Moeckel e Simó 2015].

Estaremos explorando este método a partir de agora. Nos próximos capítulos, encontraremos configurações centrais para três, quatro e cinco corpos, e usaremos tal método no estudo de bifurcações de configurações centrais.

## 2.4 Configurações Centrais Isoladas e Distâncias Mútuas

Nesta seção mostramos que uma configuração central não pode ser isolada, ou seja, aplicando rotações e/ou dilatações em uma configuração, teremos outra configuração central; assim, temos configurações centrais tão perto quanto se queira da configuração inicial. Neste contexto introduzimos o conceito de classes de equivalência de configurações centrais. Consideramos as distâncias mútuas entre os diferentes corpos como coordenadas.

**Lema 2.4.1.** *Se  $q \in \mathbb{R}^{3N}$  é uma configuração central, então para todo  $\sigma \in \mathbb{R}^*$  e para toda rotação  $\Omega \in SO(3)$ ,  $\sigma q$  e  $\Omega q$  também são configurações centrais.*

*Demonstração.* Seja  $q$  uma configuração central e  $\sigma \in \mathbb{R}^*$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq j}^N \frac{m_k}{\|\sigma q_k - \sigma q_j\|^3} (\sigma q_k - \sigma q_j) &= \frac{\sigma}{|\sigma|^3} \sum_{k \neq j}^N \frac{m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j) \\ &= \frac{\lambda}{|\sigma|^3} (\sigma q_j) \quad \forall j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

$\implies \sigma q$  é uma configuração central com  $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{|\sigma|^3}$ . De maneira análoga, considere  $\tilde{q} = \Omega q$ , daí

$$\sum_{k \neq j}^N \frac{m_k}{\|\tilde{q}_k - \tilde{q}_j\|^3} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_j) = \Omega \left( \sum_{k \neq j}^N \frac{m_k}{\|q_k - q_j\|^3} (q_k - q_j) \right) = \Omega(\lambda q_k) = \lambda \tilde{q}_j,$$

usando a linearidade de  $\Omega$  e o fato das distâncias serem invariantes por rotações.  $\square$

Como rotações e/ou homotetias de uma configuração central ainda são configurações centrais, concluímos que nenhuma configuração central é isolada. Além destas, translações de configurações centrais também são configurações centrais; porém, como já foi mencionado, translações não são consideradas aqui já que estamos supondo que o centro de massa está fixado na origem. Portanto, a partir de uma configuração central podemos encontrar outras, tão perto quanto se queira. Logo, iremos pensar em configurações centrais módulo rotações, fixando o centro de massa. Por esta razão, introduziremos o conceito de classes de equivalência de uma configuração central.

**Definição 2.4.1.** Dizemos que duas configurações centrais  $q, \tilde{q} \in \mathbb{R}^{3N}$  são **equivalentes** se existir  $\Omega \in SO(3)$  tal que  $\tilde{q}_j = \Omega q_j \quad \forall j = 1, \dots, N$ , isto é, se podemos transformar uma na outra por rotações que fixam o centro de massa.

Estaremos nos referindo à classe de equivalência de uma configuração central quando encontrarmos um representante da mesma. As dificuldades de trabalhar com classes de configurações centrais podem ser evitadas com uma escolha apropriada de um

sistema de coordenadas. Escolhemos um sistema cujas coordenadas sejam as  $\frac{1}{2}N(N-1)$  distâncias mútuas entre os diferentes  $N$  corpos.

Sejam  $r_{kj}$  a distância entre o  $k$ -ésimo e o  $j$ -ésimo corpo, i.e,  $r_{kj} = \|q_k - q_j\|$ ,  $1 \leq k < j \leq N$ . Essas distâncias determinam uma configuração, e são invariantes por rotações, tornando nossa escolha a mais adequada.

Neste novo sistema de coordenadas, a função potencial é escrita sem nenhuma dificuldade como

$$U = \sum_{k < j} \frac{m_k m_j}{r_{kj}}. \quad (2.12)$$

O momento de inércia também pode ser escrito nas coordenadas das distâncias mútuas. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k \|q_k - q_j\|^2 &= \sum_{k=1}^N m_k (\|q_k\|^2 - 2\langle q_k, q_j \rangle + \|q_j\|^2) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N m_k \langle q_k, q_j \rangle + \sum_{k=1}^N m_k \|q_j\|^2 \end{aligned}$$

e como o centro de massa está na origem, o segundo somatório é zero. Logo

$$\sum_{k=1}^N m_k \|q_k - q_j\|^2 = \sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2 + \mathcal{M} \|q_j\|^2.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $m_j$  e somando em  $j$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N m_k m_j \|q_k - q_j\|^2 &= \mathcal{M} \sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2 + \mathcal{M} \sum_{j=1}^N m_j \|q_j\|^2 \\ &= 2\mathcal{M} \sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2 \end{aligned}$$

Perceba que do lado esquerdo cada termo aparecem duas vezes e o lado direito  $\sum_{k=1}^N m_k \|q_k\|^2 = 2I$ , logo

$$I = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{k < j} m_k m_j r_{kj}^2.$$

### 3 MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA ENCONTRAR CONFIGURAÇÕES CENTRAIS

Nesta seção exploraremos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar configurações centrais para três corpos.

#### 3.1 Configurações Centrais no Problema de Três Corpos

No final do último capítulo mudamos o sistema de coordenadas para um sistema cujas coordenadas são as distâncias mútuas entre os corpos. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados. Para três corpos a configuração  $q = (q_1, q_2, q_3)$  pertence ao conjunto  $\{\mathbb{R}^9 \setminus \Delta \mid \sum_{k=1}^3 m_k q_k = 0\}$  e passando ao quociente pelo grupo de rotações  $SO(3)$ , percebemos que necessitamos apenas de três coordenadas para determinar tal configuração. Assim, podemos representar uma configuração de três corpos em  $\mathbb{R}^3$  pelas distâncias mútuas entre os corpos,  $r_{12}, r_{13}, r_{23}$ . Além disso, para que as distâncias representem uma configuração, a desigualdade triangular deve ser satisfeita, i.e,  $r_{12} \leq r_{13} + r_{23}$ ,  $r_{13} \leq r_{12} + r_{23}$  e  $r_{23} \leq r_{12} + r_{13}$ . Então as configurações para três corpos estão na interseção desses três regiões.

**Teorema 3.1.1.** *As configurações centrais planas, ou seja, os extremos de  $U$  restrito ao conjunto  $\Lambda_1 = \{r_{ij} \mid I = I_0, 1 \leq i < j \leq 3\}$ , com  $I_0 = \frac{1}{2\mathcal{M}}$ , são triângulos equiláteros.*

*Demonstração.* Os extremos de  $U|_{\Lambda_1}$  são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \nabla U + \lambda \nabla I = -\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} + \frac{\lambda}{\mathcal{M}} m_i m_j r_{ij} = 0, \\ I - I_0 = \sum_{i < j}^3 r_{ij}^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

com  $1 \leq i < j \leq 3$ . Da primeira equação temos que

$$\frac{\lambda}{\mathcal{M}} r_{ij}^3 = 1 \implies r_{ij} = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{M}}{\lambda}}, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Substituindo esses valores na segunda equação, obtemos o valor de  $\lambda$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{M}}{\lambda}\right)^{2/3} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) &= 1 \\ \implies \lambda &= \mathcal{M} \left(\sum_{i < j}^3 m_i m_j\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Voltando para as distâncias mútuas, temos

$$r_{ij} = \left( \sum_{i < j}^3 m_i m_j \right)^{-1/2}, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Portanto essa solução é uma configuração central na forma de um triângulo equilátero com as massas nos seus vértices.  $\square$

Essas soluções foram descobertas por Lagrange. Mais adiante discutiremos as soluções de três corpos colineares descobertas por Euler.

## 3.2 Determinante de Cayley-Menger e o Volume de um Simplexo

Nesta seção introduzimos a relação entre o determinante de Cayley-Menger e o volume de um simplexo. Esta relação será uma ferramenta importante nos cálculos para determinar configurações centrais a partir daqui.

**Definição 3.2.1.** Um **simplexo  $N$ -dimensional** no espaço euclidiano é um sólido convexo com  $N + 1$  vértices. Mais formalmente, suponha  $N + 1$  pontos  $q_0, q_1, \dots, q_N$  tais que  $q_1 - q_0, \dots, q_N - q_0$  são vetores linearmente independentes, então o simplexo determinado por esses pontos é o conjunto

$$\left\{ \theta_0 q_0 + \dots + \theta_N q_N \mid \sum_{k=1}^N \theta_k = 1 \text{ e } \theta_k \geq 0, \forall k \right\}.$$

Este conjunto é o de fecho convexo dos  $q_i$ 's.

O volume de um simplexo pode ser expresso em termos dos comprimentos de seus lados através de um polinômio, e se esses comprimentos são distâncias mútuas, então a equação polinomial produzida será uma função dessas distâncias mútuas, [Liberti e Lavor 2016]. Esta função é dada pelo determinante de uma matriz cujas entradas são os  $r_{ij}^2$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ , exceto a primeira linha  $a_{1j} = 1$ , a primeira coluna  $a_{i1} = 1$  e  $a_{kk} = 0$ . Este determinante é conhecido como **determinante de Cayley-Menger**.

Vejamos como relacionar o volume de um simplexo com esses determinantes. Deduziremos essas relações para  $N = 2, 3$  e  $4$ . As deduções para  $N = 3$  e  $4$  estão feitas em [Hagihara 1970], apenas completaremos as análises e esclarecemos algumas passagens. Para tais deduções precisaremos do seguinte lema.

**Lema 3.2.1.** *Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então*

- I.  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ ,
- II.  $\det(A^T) = \det(A)$ .

### 3.2.1 1-Simplexo (Segmento de Reta)

O volume de um 1-simplexo é o comprimento do segmento entre os dois pontos que determina o simplexo. Vamos relacionar o volume de um 1-simplexo com o determinante de Cayley-Menger. Para deduzir tal relação começamos considerando dois segmentos de reta,  $\overline{x_1x_2}$  e  $\overline{x'_1x'_2}$ . Consideremos seus comprimentos como  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , respectivamente. Estes comprimentos de retas são representados pelos seguintes determinantes,

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad -\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Usando os itens I e II do lema anterior temos que

$$-\delta_1\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x_1x'_1 & x_1x'_2 \\ 1 & x_2x'_1 & x_2x'_2 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Seja

$$r_{kj}^2 = (x_k - x'_j)^2 = x_k^2 - 2x_kx'_j + x_j'^2. \quad (3.2)$$

Subtraindo a  $i$ -ésima linha  $i = 2, 3$  da primeira linha de (3.1) multiplicada por  $\frac{1}{2}x_k^2$ , com  $k = 1, 2$ , e subtraindo a  $l$ -ésima coluna  $l = 2, 3$  da primeira coluna de (3.1) multiplicada por  $\frac{1}{2}x_j'^2$ , com  $j = 1, 2$ , temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x_1x'_1 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1'^2 & x_1x'_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 \\ 1 & x_2x'_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1'^2 & x_2x'_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Multiplicando as duas últimas linhas de (3.3) por  $-2$ , a primeira coluna por  $-\frac{1}{2}$  e usando (3.2), obtemos

$$2\delta_1\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & r_{11}^2 & r_{12}^2 \\ 1 & r_{21}^2 & r_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

Quando os segmentos de reta coincidem teremos a relação do comprimento de um segmento de reta com o determinante de Cayley-Menger

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

### 3.2.2 2-Simplexo (Triângulo)

O volume de um 2-simplexo é a área de um triângulo. Relacionemos a área de um triângulo com o determinante de Cayley-Menger. Para determinar tal relação começamos considerando dois triângulos no mesmo plano com os vértices  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  e  $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3)$ . As áreas  $A$  e  $A'$  desses triângulos podem ser calculadas pelos determinantes

$$-2A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 2A' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ x'_1 & y'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 0 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Usando o lema (3.2.1) temos

$$-4AA' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1x'_1 + y_1y'_1 & x_1x'_2 + y_1y'_1 & x_1x'_3 + y_1y'_3 \\ 1 & x_2x'_1 + y_2y'_1 & x_2x'_2 + y_2y'_2 & x_2x'_3 + y_2y'_3 \\ 1 & x_3x'_1 + y_3y'_1 & x_3x'_2 + y_3y'_2 & x_3x'_3 + y_3y'_3 \end{vmatrix}$$

Sejam

$$r_{kj}^2 = (x_k - x'_j)^2 + (y_k - y'_j)^2, \quad (3.5)$$

as distâncias entre os vértices  $(x_i, y_i)$  e  $(x'_i, y'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  dos diferentes triângulos. Subtraímos a  $i$ -ésima linha  $i = 2, 3, 4$ , da primeira linha multiplicada por  $\frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$ , com  $k = 1, 2, 3$ , subtraímos a  $l$ -ésima coluna  $l = 2, 3, 4$  da primeira coluna multiplicada por  $\frac{1}{2}(x'_j{}^2 + y'_j{}^2)$ , com  $j = 1, 2, 3$  e substituímos a equação (3.3) onde for conveniente. Por fim, multiplicamos as três últimas linhas por  $-2$  e a primeira por  $-\frac{1}{2}$  e obtemos

$$-16AA' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{11'}^2 & r_{12'}^2 & r_{13'}^2 \\ 1 & r_{21'}^2 & r_{22'}^2 & r_{23'}^2 \\ 1 & r_{31'}^2 & r_{32'}^2 & r_{33'}^2 \end{vmatrix}.$$

Quando os triângulos coincidem teremos a relação da área de um triângulo com o determinante de Cayley-Menger

$$-16A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Se expandirmos e fatorarmos este determinante, obtemos

$$A^2 = -\frac{1}{16}(r_{12} + r_{13} + r_{23})(-r_{12} + r_{13} + r_{23})(r_{12} - r_{13} + r_{23})(r_{12} + r_{13} - r_{23})$$

que é conhecida como fórmula de Heron.

Normalmente denotaremos o determinante de Cayley-Menger relacionado com os volumes dos simplexes por uma função das distâncias,  $F(r_{ij}^2)$ ,  $1 \leq i < j \leq N$ . Assim, para o caso do 2-simplexo, teremos  $F((r_{12}^2, r_{13}^2, r_{23}^2)) = -16A^2$ .

### 3.2.3 3-Simplexo (Tetraedro)

Um 3-simplexo é um tetraedro em  $\mathbb{R}^3$ . Para determinar o volume de um tetraedro faremos o mesmo processo de antes. Consideremos dois conjuntos, cada um com quatro pontos,  $(x_i, y_i, z_i)$  e  $(x'_i, y'_i, z'_i)$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ , e denotemos  $V$  e  $V'$  os volumes dos dois tetraedros formados por esses dois conjuntos de pontos, respectivamente. Logo

$$-6V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad 6V' = \begin{vmatrix} 0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ 0 & y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ 0 & z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sejam

$$\begin{aligned} r_{kj}^2 &= (x_k - x'_j)^2 + (y_k - y'_j)^2 + (z_k - z'_j)^2 \\ &= -2(x_k x'_j + y_k y'_j + z_k z'_j)^2 + (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) + (x'_j{}^2 + y'_j{}^2 + z'_j{}^2), \end{aligned} \quad (3.7)$$

as distâncias entre os vértices dos tetraedros. Usando novamente o lema (3.2.1) teremos  $-36VV'$ , após esse produto das matrizes, subtraímos de cada linha  $i$  a primeira linha multiplicada por  $\frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ , com  $i = 2, 3, 4, 5$ , e de cada coluna  $j$  a primeira coluna multiplicada por  $\frac{1}{2}(x'_j{}^2 + y'_j{}^2 + z'_j{}^2)$ , com  $j = 2, 3, 4, 5$ . Feitas essas operações, multiplicamos as quatro últimas linhas por  $-2$  e a primeira coluna por  $-\frac{1}{2}$ , obtendo

$$288VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_{11'}^2 & r_{12'}^2 & r_{13'}^2 & r_{14'}^2 \\ 1 & r_{21'}^2 & r_{22'}^2 & r_{23'}^2 & r_{24'}^2 \\ 1 & r_{31'}^2 & r_{32'}^2 & r_{33'}^2 & r_{34'}^2 \\ 1 & r_{41'}^2 & r_{42'}^2 & r_{43'}^2 & r_{44'}^2 \end{vmatrix}.$$

Se os dois tetraedros coincidem,  $r_{kk}^2 = 0, \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , então,

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Portanto, o determinate de Cayley-Menger relacionado ao volume é  $F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{14}^2, r_{23}^2, r_{24}^2, r_{34}^2) = 288V^2$ .

Este resultado pode ser generalizado para todo  $N$ , ver [Blumenthal 1970]. A generalização para o volume de um  $N$ -simplexo é

$$V_N^2 = \frac{(-1)^{N-1}}{2^N (N!)^2} \Delta,$$

onde  $\Delta$  é o determinante de Cayley-Menger. Mais informações sobre os determinantes de Cayley-Menger e contexto histórico estão em [Liberti e Lavor 2016].

Diferenciando  $F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{14}^2, r_{23}^2, r_{24}^2, r_{34}^2)$  com respeito a  $r_{12}^2$ , por exemplo, temos

$$\frac{\partial F}{\partial r_{12}^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & 1 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & 0 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & 0 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & 0 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & 0 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aplicando o teorema de Laplace nos dois determinantes e em seguida usando o item II do lema 3.2.1 no segundo determinante, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial r_{12}^2} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Perceba que quando  $F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{14}^2, r_{23}^2, r_{24}^2, r_{34}^2) = 0$ , a derivada de  $F$  com respeito a  $r_{12}^2$  está relacionada com o produto das áreas de dois triângulos, no mesmo plano, formados pelos pontos  $(2, 3, 4)$  e  $(1, 3, 4)$ , de acordo com a dedução feita previamente, ver (3.4). Devido a simetria do determinante, tem-se em geral que

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} = 32\Delta_i \Delta_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4, \quad (3.8)$$

onde  $\Delta_i$  é o determinante de Cayley-Menger associado a área de um triângulo, formado por três dos quatro pontos, excluindo o ponto  $i$ .

### 3.3 Configurações Centrais Colineares de Três Corpos

No teorema (3.1.1) obtivemos configurações centrais planas de três corpos na forma de triângulos equiláteros encontrando os extremos de  $U|_{\Lambda_1}$ , pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Para usar este método para encontrar as soluções de Euler, ou seja, três corpos colineares, faz-se necessário introduzir mais uma restrição. Seja  $\Lambda_2 = \{r_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3 \mid F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{23}^2) = 0\}$ , onde  $F = (r_{12} + r_{13} + r_{23})(-r_{12} + r_{13} + r_{23})(r_{12} - r_{13} + r_{23})(r_{12} + r_{13} - r_{23})$ . Estamos interessados nos extremos de  $U|_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$ . Tais extremos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} m_i m_j (\lambda r_{ij} - r_{ij}^{-2}) + 2\sigma \frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} r_{ij} = 0, & 1 \leq i < j \leq 3, \\ I - I_0 = 0, \\ F = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $\sigma$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição  $\Lambda_2$ ,  $I_0 = \frac{1}{2M}$  e notamos que  $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} = 2 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} r_{ij}$ ; esta escolha é conveniente para facilitar os cálculos.

Vamos mostrar que a solução de (3.9) é única para massas positivas.

Da terceira equação de (3.9), tem-se que os três corpos são colineares; sem perda de generalidade  $r_{13} = r_{12} + r_{23}$ . Usando isto nas derivadas  $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2}$ , ou seja, em

$$\frac{\partial F}{\partial r_{13}^2} = 2(r_{13}^2 - r_{23}^2 - r_{12}^2), \quad \frac{\partial F}{\partial r_{12}^2} = -2(r_{13}^2 + r_{23}^2 - r_{12}^2), \quad \frac{\partial F}{\partial r_{23}^2} = -2(r_{13}^2 + r_{12}^2 - r_{23}^2),$$

obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial r_{13}^2} = 4r_{12}r_{23}, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{12}^2} = -4r_{13}r_{23}, \quad \frac{\partial F}{\partial r_{23}^2} = -4r_{12}r_{13}.$$

Logo as três primeiras equações ligeiramente modificadas são

$$\begin{cases} m_1 m_2 m_3 (\lambda r_{12} - r_{12}^{-2}) + 2\sigma (-4r_{12}r_{13}r_{23}) m_3 = 0, \\ m_1 m_2 m_3 (\lambda r_{23} - r_{23}^{-2}) + 2\sigma (-4r_{12}r_{13}r_{23}) m_1 = 0, \\ m_1 m_2 m_3 (\lambda r_{13} - r_{13}^{-2}) + 2\sigma (-4r_{12}r_{13}r_{23}) m_2 = 0, \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} m_1 m_2 m_3 (\lambda - r_{12}^{-3}) - 8\sigma m_3 r_{13} r_{23} = 0, \\ m_1 m_2 m_3 (\lambda - r_{23}^{-3}) - 8\sigma m_1 r_{12} r_{13} = 0, \\ m_1 m_2 m_3 (\lambda - r_{13}^{-3}) + 8\sigma m_2 r_{12} r_{23} = 0. \end{cases}$$

Dividindo por  $m_1 m_2 m_3$  cada uma das equações, eliminamos  $\sigma$ :

$$\frac{\lambda - r_{12}^{-3}}{m_3 r_{13} r_{23}} = \frac{\lambda - r_{23}^{-3}}{m_1 r_{12} r_{13}} = \frac{-\lambda + r_{13}^{-3}}{m_2 r_{12} r_{23}}. \quad (3.10)$$

De (3.10), segue que

$$\frac{\lambda - r_{12}^{-3}}{m_3 r_{13} r_{23}} + \frac{\lambda - r_{13}^{-3}}{m_2 r_{12} r_{23}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m_2 r_{12}^{-2} + m_3 r_{13}^{-2}}{m_2 r_{12} + m_3 r_{13}},$$

e de forma análoga,

$$\frac{\lambda - r_{23}^{-3}}{m_1 r_{12} r_{13}} + \frac{\lambda - r_{13}^{-3}}{m_2 r_{12} r_{23}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m_2 r_{23}^{-2} + m_1 r_{13}^{-2}}{m_2 r_{23} + m_1 r_{13}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m_2 r_{12}^{-2} + m_3 r_{13}^{-2}}{m_2 r_{12} + m_3 r_{13}} = \frac{m_2 r_{23}^{-2} + m_1 r_{13}^{-2}}{m_2 r_{23} + m_1 r_{13}}. \quad (3.11)$$

Seja  $\rho \in (0, 1)$ . Podemos escrever as dependências das outras duas distâncias em função de  $r_{13}$  como

$$r_{12} = \rho r_{13} \quad \text{e} \quad r_{23} = (1 - \rho) r_{13}. \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.11) por  $r_{13}^3$  e usando (3.12), segue

$$\lambda r_{13}^3 = \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} = \frac{m_2 (1 - \rho)^{-2} + m_1}{m_2 (1 - \rho) + m_1}. \quad (3.13)$$

A diferença entre as duas últimas expressões de (3.13) nos dá uma função cujas propriedades serão estudadas no lema a seguir.

**Lema 3.3.1.** *No intervalo  $0 < \rho < 1$ , a função*

$$f(\rho) = \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} - \frac{m_2 (1 - \rho)^{-2} + m_1}{m_2 (1 - \rho) + m_1},$$

*é contínua e monotonamente decrescente. Além disso,  $f$  tem um único zero neste intervalo.*

*Demonstração.* A diferenciabilidade (e portanto a continuidade) é trivialmente satisfeita no intervalo de definição da função. Para mostrarmos a segunda parte do lema, calculamos a derivada

$$\begin{aligned} f'(\rho) &= - \left( \frac{2m_2 \rho^{-3}(m_2 \rho + m_3) + (m_2 \rho^{-2} + m_3)m_2}{(m_2 \rho + m_3)^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{(2m_2(1 - \rho)^{-3}(m_2(1 - \rho) + m_1)) + m_2(m_2(1 - \rho)^{-2} + m_1)}{(m_2(1 - \rho) + m_1)^2} \right) < 0, \end{aligned}$$

$\forall \rho \in (0, 1)$ , já que todas as massas são positivas. Portanto,  $f$  é monotonamente decrescente. Por outro lado, notamos que quando  $\rho \rightarrow 0$ ,  $f(\rho) \rightarrow \infty$  e quando  $\rho \rightarrow 1$ ,  $f(\rho) \rightarrow -\infty$ . Assim, existem constantes  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que  $0 < a < b < 1$ ,  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ . Então, pelo teorema do valor intermediário, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . Portanto,  $f$  tem uma solução no intervalo  $(0, 1)$  e tal solução é única, caso contrário, a função seria crescente em algum subintervalo de  $(0, 1)$ , mas isso seria um absurdo pois já mostramos que ela é decrescente em todo o intervalo.  $\square$

Quando desenvolvemos a função  $f$  definida no lema acima ficamos com uma função racional cujo numerador é o polinômio de grau 5

$$P(\rho) = (m_1 + m_3) \rho^5 - (2m_1 + 3m_3) \rho^4 + (m_1 + 2m_2 + 3m_3) \rho^3 - (m_1 + 3m_2) \rho^2 + (2m_1 + 3m_2) \rho - (m_1 + m_2).$$

Assim, a única solução da função  $f(\rho)$  será a única solução real positiva deste polinômio, em  $(0, 1)$ .

**OBS 3.3.1.** Massas iguais levam a única solução deste polinômio sendo  $\rho = \frac{1}{2}$ .

**OBS 3.3.2.** Usando outro método encontramos um polinômio para configurações centrais colineares com apenas uma variação de sinal, e aplicando o teorema de variações de sinais de Descartes, podemos concluir que tal polinômio tem apenas uma raiz real positiva. Este método alternativo pode ser encontrado em [Pollard 1966].

Como escrevemos as distâncias  $r_{12}$ ,  $r_{23}$  em função de  $r_{13}$  e  $\rho$ , podemos encontrar o valor de  $r_{13}$  usando a condição de restrição  $\Lambda_1$ , isto é, a segunda equação do sistema (3.9). De fato,

$$\rho^2 r_{13}^2 m_1 m_2 + r_{13}^2 m_1 m_3 + (1 - \rho)^2 m_2 m_3 r_{13}^2 = 1$$

$$\therefore r_{13} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 m_1 m_2 + m_1 m_3 + (1 - \rho)^2 m_2 m_3}},$$

e voltando para (3.12)

$$r_{12} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 m_1 m_2 + m_1 m_3 + (1 - \rho)^2 m_2 m_3}}, \quad r_{23} = \frac{(1 - \rho)}{\sqrt{\rho^2 m_1 m_2 + m_1 m_3 + (1 - \rho)^2 m_2 m_3}},$$

e pela primeira igualdade em (3.13)

$$\lambda = \left( \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 m_1 m_2 + m_1 m_3 + (1 - \rho)^2 m_2 m_3}} \right)^{-3},$$

consequentemente

$$\sigma = \frac{-\lambda + r_{13}^{-3}}{m_2 \rho(1 - \rho)r_{13}^2}.$$

Portanto, dadas três massas positivas, encontramos um único valor para  $\rho$  e uma única solução para o sistema (3.9), isto é, uma única configuração central. Outras duas configurações centrais podem ser obtidas permutando as posições dos corpos.

# 4 CONFIGURAÇÕES CENTRAIS NO PROBLEMA DE QUATRO CORPOS

## 4.1 Configurações Centrais de Quatro Corpos no Espaço

Para quatro corpos uma configuração  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  pertence ao conjunto  $\{\mathbb{R}^{12} \setminus \Delta \mid \sum_{k=1}^4 m_k q_k = 0\}$ . Quando passamos ao quociente pelo grupo de rotações  $SO(3)$ , notamos que necessitamos apenas de seis coordenadas para determinar tal configuração. Assim, podemos representar uma configuração de quatro corpos pelas suas distâncias mútuas,  $r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34}$ .

Encontrar configurações centrais para quatro corpos em  $\mathbb{R}^3$ , pelo método dos multiplicadores de Lagrange, é equivalente a procurar pontos críticos da função

$$V : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, \lambda) \longmapsto \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} + \frac{\lambda}{2} (r_{ij}^2 - 1) \right)$$

ou pelas soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} m_i m_j (\lambda - r_{ij}^{-3}) = 0, \\ \sum m_i m_j (r_{ij}^2 - 1) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $1 \leq i < j \leq 4$  e  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange. Das seis primeiras equações, temos que  $r_{ij} = \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , e substituindo na última equação encontramos  $\lambda = 1$ , logo  $r_{ij} = 1$  para todo  $1 \leq i < j \leq 4$ . Portanto, a única solução do sistema (4.1) em  $\mathbb{R}^3$  é um tetraedro regular. (Figura 4).

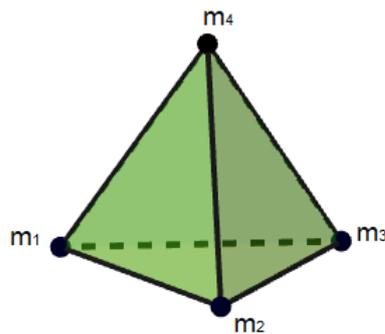


Figura 4 – Tetraedro regular, solução do sistema (4.1).

## 4.2 Configurações Centrais Planas de Quatro Corpos

Desejamos agora estudar configurações centrais planas. Uma condição para que os quatro corpos estejam no mesmo plano é que o volume do tetraedro formado pelos quatro corpos seja zero. Pela relação que encontramos no capítulo 3, isto é equivalente ao anulamento do determinante de Cayley-Menger,  $F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{23}^2, r_{14}^2, r_{24}^2, r_{34}^2) = 0$ .

Assim, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, com as restrições

$$\Lambda_1 = \{r_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 4 \mid I = I_0, I_0 > 0\},$$

$$\Lambda_2 = \{r_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 4 \mid F(r_{12}^2, r_{13}^2, r_{14}^2, r_{23}^2, r_{24}^2, r_{34}^2) = 0\},$$

basta encontrar os pontos críticos da função

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^8 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, \lambda, \sigma) &\longmapsto \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} + \frac{\lambda}{2} (r_{ij}^2 - 1) \right) + \frac{\sigma}{64} F, \end{aligned}$$

ou seja, as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} m_i m_j (\lambda - r_{ij}^{-3}) + \frac{\sigma}{32} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2} = 0, \\ \sum m_i m_j r_{ij}^2 - 1 = 0, \\ F = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $1 \leq i < j \leq 4$  e sigma é o multiplicador de Lagrange da restrição  $\Lambda_2$ . Dadas as massas, é natural tentar resolver o sistema (4.2), porém essas equações são não-lineares e infelizmente pouco se conhece sobre as soluções no caso geral.

Nesta seção estudaremos o problema inverso ao problema de encontrar configurações centrais. Este problema consiste na seguinte pergunta: dada uma configuração no plano, é possível encontrar quatro massas positivas para que essa configuração seja uma configuração central? Para responder a essa pergunta, exibimos as seis primeiras equações acima da forma

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (r_{12}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_1 \Delta_2, \\ m_1 m_3 (r_{13}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_1 \Delta_3, \\ m_1 m_4 (r_{14}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_1 \Delta_4, \\ m_2 m_3 (r_{23}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_2 \Delta_3, \\ m_2 m_4 (r_{24}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_2 \Delta_4, \\ m_3 m_4 (r_{34}^{-3} - \lambda) &= \sigma \Delta_3 \Delta_4, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde lado direito das equações usamos (3.8) e cada  $\Delta_i$  é o determinante de Cayley-Menger associado à área de um triângulo formado por três dos quatro corpos, de modo que o corpo  $i$  é excluído. Multiplicamos duas a duas equações de (4.3), de forma que os lados direito das igualdades fiquem iguais e possamos eliminar  $\sigma$ . Com isto, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 4.2.1.** *Sendo dadas as distâncias, as igualdades*

$$(r_{12}^{-3} - \lambda)(r_{34}^{-3} - \lambda) = (r_{13}^{-3} - \lambda)(r_{24}^{-3} - \lambda) = (r_{14}^{-3} - \lambda)(r_{23}^{-3} - \lambda), \quad (4.4)$$

é uma condição necessária e suficiente para resolver o sistema (4.2), para massas diferentes de zero.

*Demonstração.* É uma condição necessária uma vez que (4.4) é obtida do sistema (4.2). De fato, multiplicando as equações de (4.3) aos pares, ou seja,

$$\begin{aligned} m_1 m_2 m_3 m_4 (r_{12}^{-3} - \lambda)(r_{34}^{-3} - \lambda) &= \sigma^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4, \\ m_1 m_2 m_3 m_4 (r_{13}^{-3} - \lambda)(r_{24}^{-3} - \lambda) &= \sigma^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4, \\ m_1 m_2 m_3 m_4 (r_{14}^{-3} - \lambda)(r_{23}^{-3} - \lambda) &= \sigma^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4, \end{aligned}$$

e dividindo as três equações por  $m_1 m_2 m_3 m_4$ , obtemos (4.4). Como as distâncias são dadas as duas últimas equações de (4.2) são trivialmente satisfeitas e portanto é necessário resolver (4.4) para resolver o sistema (4.2).

É uma condição suficiente. De fato, dada as distâncias, (4.4) garante a unicidade de  $\lambda$ , ou seja, da primeira igualdade de (4.4), segue que

$$\lambda = \frac{r_{12}^{-3} r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} r_{24}^{-3}}{r_{12}^{-3} + r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} - r_{24}^{-3}}.$$

Da segunda igualdade de (4.4), temos

$$\lambda = \frac{r_{13}^{-3} r_{14}^{-3} - r_{14}^{-3} r_{23}^{-3}}{r_{13}^{-3} + r_{24}^{-3} - r_{14}^{-3} - r_{23}^{-3}}.$$

Por fim, usando que

$$(r_{12}^{-3} - \lambda)(r_{34}^{-3} - \lambda) = (r_{14}^{-3} - \lambda)(r_{23}^{-3} - \lambda),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r_{14}^{-3} r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} r_{34}^{-3}}{r_{14}^{-3} + r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} - r_{34}^{-3}}. \\ \implies \lambda &= \frac{r_{12}^{-3} r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} r_{24}^{-3}}{r_{12}^{-3} + r_{34}^{-3} - r_{13}^{-3} - r_{24}^{-3}} = \frac{r_{13}^{-3} r_{14}^{-3} - r_{14}^{-3} r_{23}^{-3}}{r_{13}^{-3} + r_{24}^{-3} - r_{14}^{-3} - r_{23}^{-3}} = \frac{r_{14}^{-3} r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} r_{34}^{-3}}{r_{14}^{-3} + r_{23}^{-3} - r_{12}^{-3} - r_{34}^{-3}}. \end{aligned}$$

Logo pelas equações de (4.3) encontramos  $\sigma$  em função das massas e daí as soluções de (4.2) são determinadas.  $\square$

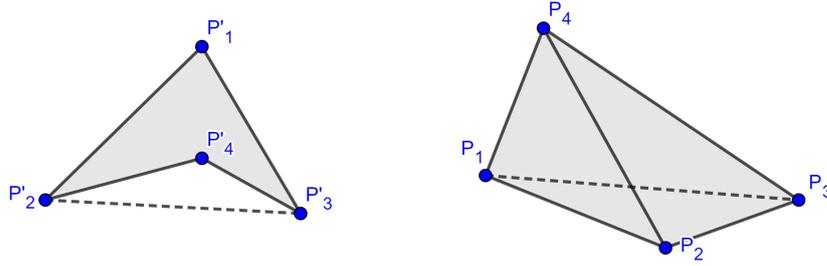


Figura 5 – a) Configuração côncava. b) Configuração convexa.

Note que se as distâncias forem dadas, (4.4) só garante que as razões entre as massas podem ser encontradas, mas nada diz sobre as massas serem ou não positivas. A fim de ver condições para que as quatro massas sejam positivas, analisamos as diferentes razões entre elas.

$$\frac{m_1 \Delta_2}{m_2 \Delta_1} = \frac{r_{23}^{-3} - \lambda}{r_{13}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{24}^{-3} - \lambda}{r_{14}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{23}^{-3} - r_{24}^{-3}}{r_{13}^{-3} - r_{14}^{-3}}, \quad (4.5)$$

$$\frac{m_1 \Delta_3}{m_3 \Delta_1} = \frac{r_{23}^{-3} - \lambda}{r_{12}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{34}^{-3} - \lambda}{r_{14}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{23}^{-3} - r_{34}^{-3}}{r_{12}^{-3} - r_{14}^{-3}}, \quad (4.6)$$

$$\frac{m_1 \Delta_4}{m_4 \Delta_1} = \frac{r_{24}^{-3} - \lambda}{r_{12}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{34}^{-3} - \lambda}{r_{13}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{24}^{-3} - r_{34}^{-3}}{r_{12}^{-3} - r_{13}^{-3}}, \quad (4.7)$$

$$\frac{m_2 \Delta_3}{m_3 \Delta_2} = \frac{r_{13}^{-3} - \lambda}{r_{12}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{34}^{-3} - \lambda}{r_{24}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{13}^{-3} - r_{34}^{-3}}{r_{12}^{-3} - r_{24}^{-3}}, \quad (4.8)$$

$$\frac{m_2 \Delta_4}{m_4 \Delta_2} = \frac{r_{14}^{-3} - \lambda}{r_{12}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{34}^{-3} - \lambda}{r_{23}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{14}^{-3} - r_{34}^{-3}}{r_{12}^{-3} - r_{23}^{-3}}, \quad (4.9)$$

$$\frac{m_3 \Delta_4}{m_4 \Delta_3} = \frac{r_{14}^{-3} - \lambda}{r_{13}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{24}^{-3} - \lambda}{r_{23}^{-3} - \lambda} = \frac{r_{14}^{-3} - r_{24}^{-3}}{r_{13}^{-3} - r_{23}^{-3}}. \quad (4.10)$$

Obtemos tais razões das equações (4.3). As segundas igualdades de (4.5) – (4.10) seguem de (4.4).

### 4.3 Configurações Côncavas e Convexas

**Definição 4.3.1.** Diremos que uma **configuração** de quatro corpos é **côncava** quando um corpo está no interior do triângulo formado pelos outros três corpos. E é dita **convexa** quando isto não ocorre. (Figura 5).

**Proposição 4.3.1.** *Se três corpos de massas não-nulas são colineares, então o quarto corpo tem massa nula.*

*Demonstração.* Suponha que os quatro corpos não são todos colineares, pois se fossem, todos os  $\Delta_i$ 's,  $i = 1, 2, 3, 4$ , seriam nulos e não teríamos as razões entre as massas nas equações (4.5) – (4.10). Suponha também que  $m_4 \neq 0$  e que os três corpos com massas não-nulas  $m_1, m_2, m_3$ , sejam colineares. Logo, o determinante de Cayley-Menger  $\Delta_4$ , associado à área do triângulo formado por esses três corpos colineares é zero. Por outro lado,  $\Delta_1, \Delta_2$  e  $\Delta_3$  são diferentes de zero. Logo, das equações (4.7), (4.9) e (4.10) tem-se  $r_{23}^{-3} = r_{34}^{-3}$ ,  $r_{14}^{-3} = r_{34}^{-3}$  e  $r_{14}^{-3} = r_{24}^{-3} \implies r_{14}^{-3} = r_{24}^{-3} = r_{34}^{-3}$ . Isto exige que pelo menos dois corpos colidam, mas se isto não ocorre, chegamos numa contradição. Portanto  $m_4 = 0$ .  $\square$

**OBS 4.3.1.** Se a massa de um corpo é nula, a força exercida por este corpo sobre os demais corpos é zero, ou seja, o corpo de massa nula não tem influência sobre o movimento dos demais corpos; porém o seu movimento sofre influência dos outros corpos.

Vejamos condições para que dada uma configuração central no plano tenhamos massas positivas de modo que a forma da configuração central não mude. Estudaremos isto em dois casos separadamente.

### 4.3.1 Configurações Centrais Convexas

Para estudarmos condições de se ter configurações convexas é necessário assumir uma orientação para as áreas dos triângulos formados por cada três corpos. Segundo [Albouy 2003], é conveniente associar uma orientação, conseqüentemente um sinal, para volumes de simplexes definidos pelos corpos de uma configuração que tenha dimensão  $N - 2$ . Neste artigo são encontradas justificativas para a escolha de sinais que faremos a seguir.

Convencionamos os sinais dos determinantes de Cayley-Menger associados às áreas dos triângulos para cada três corpos da seguinte forma

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 < 0, \quad \Delta_3 > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_4 < 0.$$

Suponha que  $r_{12}^{-3} - \lambda < 0$  e que todas as massas são positivas, assim, das equações (4.5) – (4.10), temos

$$\begin{aligned} r_{23}^{-3} < \lambda, \quad r_{24}^{-3} > \lambda, \quad r_{13}^{-3} > \lambda, \quad r_{14}^{-3} < \lambda \quad \text{e} \quad r_{34}^{-3} < \lambda \\ \implies r_{23}^{-3}, r_{12}^{-3}, r_{14}^{-3}, r_{34}^{-3} < \lambda < r_{24}^{-3}, r_{13}^{-3}. \end{aligned}$$

Usando a notação  $\lambda = \rho^{-3}$ , obtemos

$$r_{23}, r_{12}, r_{14}, r_{34} > \rho > r_{24}, r_{13}.$$

Como todos os lados do quadrilátero são maiores que as suas diagonais isto é geometricamente impossível para um quadrilátero convexo.

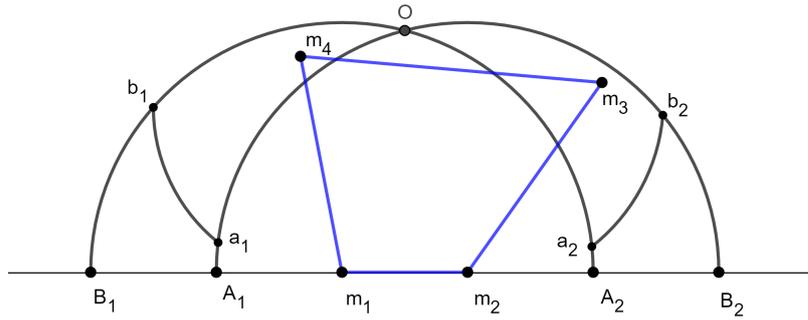


Figura 6 – Estimativas das regiões para localizar as massas  $m_3$  e  $m_4$ .

Supondo agora que as quatro massas são positivas e que  $r_{12}^{-3} - \lambda > 0$ , das equações (4.5) – (4.10) temos que

$$r_{23}^{-3} > \lambda, \quad r_{24}^{-3} < \lambda, \quad r_{13}^{-3} < \lambda, \quad r_{14}^{-3} > \lambda \quad \text{e} \quad r_{34}^{-3} > \lambda$$

$$\implies r_{23}^{-3}, r_{12}^{-3}, r_{14}^{-3}, r_{34}^{-3} > \lambda > r_{24}^{-3}, r_{13}^{-3}$$

$$\therefore r_{23}, r_{12}, r_{14}, r_{34} < \rho < r_{24}, r_{13}, \tag{4.11}$$

e o quadrilátero formado pelos quatro corpos tem seus quatro lados maiores que as diagonais.

**Teorema 4.3.1.** *Configurações centrais que satisfazem (4.11) são geometricamente possíveis. Além disso, fixando duas massas podemos determinar as duas regiões onde as outras duas massas estão.*

*Demonstração.* Suponha que  $r_{12} < \rho$  e que  $m_1, m_2$  sejam as massas fixadas. Desenhemos dois semicírculos, um centrado em  $m_1$  e o outro centrado em  $m_2$ , ambos com raio  $\rho$ , se intersectando num ponto  $O$ , de modo que este ponto seja o centro de um outro semicírculo, o qual iremos representar pelos arcos  $a_1b_1$  e  $a_2b_2$ , também com raio  $\rho$  (ver figura 6). Uma vez que  $r_{13} > \rho > r_{23}$ , a massa  $m_3$  está fora do semicírculo  $B_1OA_2$  e dentro do semicírculo  $A_1OB_2$ , isto é, no interior da região  $OA_2B_2$ . Da mesma maneira, uma vez que  $r_{24} > \rho > r_{14}$ , a massa  $m_4$  está fora do semicírculo  $A_1OB_2$  e dentro do semicírculo  $B_1OA_2$ , ou seja, no interior da região  $OA_1B_1$ . As possibilidades são ainda mais restritas pelo fato de  $r_{34}$  também ser menor que  $\rho$ , então limitamos esta distância com o círculo de centro  $O$ . Consequentemente,  $m_3$  está no interior da região  $Oa_2b_2$  e  $m_4$  está no interior da região  $Ob_1a_1$ . Assim obtendo uma boa estimativa para as regiões onde as massas  $m_3$  e  $m_4$  estão de modo a se ter uma configuração convexa.  $\square$

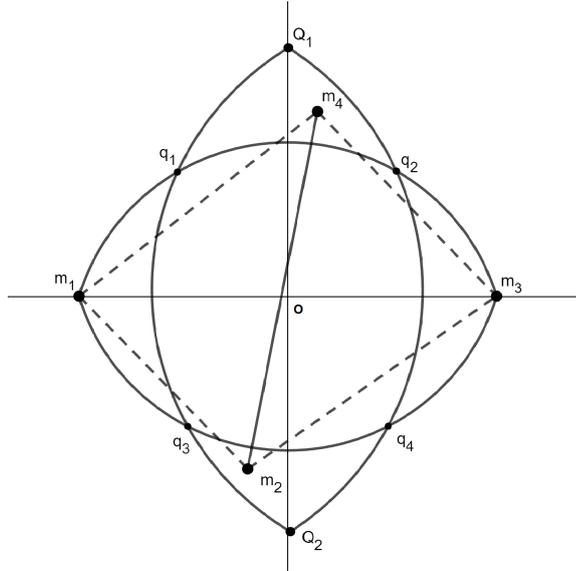


Figura 7 – Cotas para a razão das diagonais de uma configuração central convexa.

4.3.1.1 *Cotas para a Razão das Diagonais de uma Configuração Central*

Para obter cotas para a razão das diagonais de uma configuração central convexa, isto é, uma configuração que satisfaz (4.11), iniciamos a construção de um quadrilátero com uma de suas diagonais, digamos  $r_{13}$ , seja maior que  $\rho$ . Consideramos dois círculos, ambos de raio  $\rho$ , centrados em  $m_1$  e  $m_3$ , respectivamente. Notemos que as outras duas massas, que estão nos outros dois vértices deste quadrilátero, devem estar na interseção desses círculos, já que,  $r_{14}, r_{12}, r_{34}, r_{23} < \rho$ .

Como  $r_{24} > \rho$  as massas  $m_2$  e  $m_4$  devem estar fora da interseção de dois círculos centrados em  $Q_1$  e  $Q_2$ , isto é, devem estar no interior das regiões delimitadas por  $Q_1q_1q_2$  e  $Q_2q_3q_4$ , respectivamente. Caso contrário, supondo, sem perda de generalidade, que  $m_4$  esteja na região delimitada por  $q_1q_3q_4q_2$ , e que  $m_3$  não esteja, tem-se que  $r_{24}$  assume o maior valor quando  $m_2$  está em  $Q_2$  e  $m_4$  está no arco  $\widehat{q_1q_2}$ , mas isto contradiz (4.11). Perceba ainda que as massas não podem estar simultaneamente nos arcos  $\widehat{q_3q_4}$  e  $\widehat{q_1q_2}$  por também contradizer (4.11). Ver figura 7.

**Teorema 4.3.2.** *Uma configuração central convexa com as massas dos quatro corpos positivas tem a razão das diagonais limitada por*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{r_{13}}{r_{24}} < \sqrt{3}.$$

Além disso, os ângulos internos deste quadrilátero convexo estão entre  $60^\circ$  e  $120^\circ$ .

*Demonstração.* Usaremos a construção anterior para demonstrar este teorema. Notemos da figura 7 que

$$\left(\frac{r_{13}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{Q_1Q_2}}{2}\right)^2 = \rho^2 \implies r_{13}^2 = 4\rho^2 - \overline{Q_1Q_2}^2.$$

Como  $\overline{Q_1Q_2} > \rho$ , certamente  $r_{13}^2 < 3\rho^2$ . Por outro lado  $\rho < r_{24} < \overline{Q_1Q_2}$ , daí,

$$r_{13} < \sqrt{3}\rho < \sqrt{3}r_{24}. \quad (4.12)$$

Como  $r_{24} < \overline{Q_1Q_2}$  tem-se que  $r_{24}^2 < 4\rho^2 - r_{13}^2$  e como  $\rho < r_{13}$ , obtemos

$$r_{24} < \sqrt{3}\rho < \sqrt{3}r_{13}. \quad (4.13)$$

Dividindo (4.12) e (4.13) por  $r_{24}$ , tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{r_{13}}{r_{24}} < \sqrt{3}.$$

Para mostrarmos a segunda afirmação, estudamos as limitações dos ângulos internos de uma configuração central convexa, isto é, um quadrilátero que satisfaça (4.4). Notemos que quando a massa  $m_4$  está na região  $q_1Q_1q_2$  o ângulo interno entre  $r_{13}$  e  $r_{14}$  é menor do que o ângulo  $Q_1\hat{m}_1O$ , quando  $m_4$  está em  $Q_1$ . Seja  $\theta_1$  o maior ângulo entre  $r_{13}$  e  $r_{14}$ . Como  $\overline{Q_1Q_2}^2 = 4\rho^2 - r_{13}^2$  e  $r_{13} > \rho$  tem-se  $Q_1Q_2 < r_{13}\sqrt{3}$ , daí

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1) &= \frac{Q_1Q_2}{r_{13}} < \frac{r_{13}\sqrt{3}}{r_{13}} = \sqrt{3} \\ \implies \theta_1 &< 60^\circ. \end{aligned}$$

Sendo  $\theta_2$  o maior ângulo entre a diagonal  $r_{13}$  e o lado  $r_{12}$ , usando a simetria,  $\theta_2 < 60^\circ$ . Denotando por  $\hat{p}_1$ , o ângulo máximo entre  $r_{14}$  e  $r_{12}$ , temos que

$$\hat{p}_1 = \theta_1 + \theta_2 < 120^\circ$$

Por outro lado, considerando  $\beta_1$  o ângulo mínimo entre  $r_{14}$  e  $r_{13}$  e usando a cota para a razão das diagonais, obtemos

$$\begin{aligned} \tan(\beta_1) &= \frac{Q_1Q_2}{r_{13}} > \frac{r_{24}}{r_{13}} > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \implies \beta_1 &> 30^\circ. \end{aligned}$$

Seja  $\beta_2$  o menor ângulo entre a diagonal  $r_{13}$  e o lado  $r_{12}$  e usando a simetria, obtemos

$$\hat{p}_1 = \beta_1 + \beta_2 > 60^\circ.$$

Combinando os dois resultados

$$60^\circ < \hat{p}_1 < 120^\circ$$

□

Estes e outros resultados referentes a configurações centrais para quatro corpos são encontrados em [MacMillan e Bartky 1932]

### 4.3.2 Configurações Côncavas

Para as configurações centrais côncavas, consideramos um triângulo com três corpos de massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  nos seus vértices e um corpo de massa  $m_4$  no interior deste triângulo. Para este caso convencionamos os sinais dos determinantes de Cayley-Menger associados às áreas dos triângulos para cada três corpos, da seguinte forma:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \text{ e } \Delta_4 < 0. \quad (4.14)$$

No teorema a seguir mostraremos que numa configuração central côncava de quatro corpos, o maior e o menor lado interno são opostos ao maior e menor lado externo, respectivamente. As oposições aqui referidas são as oposições dos lados de um quadrilátero formado pelos quatro corpos do problema.

**Teorema 4.3.3.** *Em uma configuração central côncava com quatro massas positivas a maior aresta exterior encontra-se oposta à maior aresta interior. De forma análoga, a menor aresta exterior encontra-se oposta a menor aresta interior.*

*Demonstração.* Suponha que as quatro massas são positivas e que  $r_{12}^{-3} - \lambda < 0$ . De (4.14) e (4.6) temos que  $r_{23}^{-3} - \lambda < 0$ . Usando as demais equações de (4.5) – (4.10) juntamente com (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} r_{23}^{-3} < \lambda, \quad r_{24}^{-3} > \lambda, \quad r_{13}^{-3} < \lambda, \quad r_{14}^{-3} > \lambda \text{ e } r_{34}^{-3} > \lambda \\ \implies r_{23}^{-3}, r_{12}^{-3}, r_{13}^{-3} < \lambda < r_{24}^{-3}, r_{34}^{-3}, r_{14}^{-3}. \end{aligned}$$

Consideremos  $\lambda = \rho^{-3}$ , assim

$$r_{23}, r_{12}, r_{13} > \rho > r_{24}, r_{14}, r_{34}.$$

Isto significa que as arestas interiores tem tamanho menores que as arestas exteriores. Suponha que  $r_{12}$  é a maior das arestas exteriores e que  $r_{12} > r_{23} > r_{13}$ . Daí, usando (4.14) na equação (4.7), temos que  $r_{24} < r_{34}$ . Analogamente, das equações (4.9) e (4.10), tem-se  $r_{14} < r_{34}$  e  $r_{24} < r_{14}$ , respectivamente. Logo  $r_{24} < r_{14} < r_{34}$ , e portanto  $r_{12}$  é oposto à  $r_{34}$  e  $r_{13}$  é oposto à  $r_{24}$ .  $\square$

**OBS 4.3.2.** A figura 5.a mostra uma configuração côncava de quatro corpos que não é uma configuração central. Pois se  $\overline{P_1P_2}$  é o maior lado externo tal lado não é oposto ao maior lado interno  $\overline{P_2P_4}$ .

Para uma configuração central côncava é possível determinar em qual dos semi-planos, definidos pelas mediatrizes de cada aresta exterior do quadrilátero, a massa  $m_4$  está.

**Teorema 4.3.4.** *Se uma configuração central côncava tem um corpo de massa  $m_4$  positiva no interior do triângulo formado pelos outros três corpos de massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , então a massa  $m_4$  se encontra no circuncentro das arestas exteriores.*

*Demonstração.* Consideremos um triângulo cujos vértices são  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Traçamos a mediatriz do segmento  $\overline{P_1P_2}$  e suponhamos que  $m_4$  não está no semi-plano definido pela mediatriz que contém o vértice  $P_1$ . Assim  $r_{14}$  é a maior aresta interior, pois as massas  $m_4$  e  $m_1$  estão de lados opostos do semi-plano definido pela mediatriz. Logo pelo teorema (4.3.3),  $r_{23}$  é a maior aresta exterior, já que deve se opor à maior aresta interior. Porém como os pontos  $P_2$  e  $P_3$  estão no mesmo semi-plano definido pela mediatriz,  $r_{13} > r_{23}$ , o que contradiz o teorema (4.3.3). Portanto,  $m_4$  está no semi-plano que contém o ponto  $P_1$ . Repetindo o mesmo argumento com as outras mediatrizes concluímos que  $m_4$  está na interseção das três mediatrizes.  $\square$

**OBS 4.3.3.** Sabemos que as mediatrizes de um triângulo se encontram em um ponto, logo a interseção mencionada no teorema acima é não-vazia. Todavia, esta interseção pode não estar dentro do triângulo dado. Uma condição para se ter uma configuração central côncava é que o centro do círculo circunscrito ao triângulo esteja dentro do triângulo dado. Isto acontece quando o triângulo for acutângulo.

Podemos representar esta restrição algebricamente, sem perda de generalidade, por  $r_{12}^2 < r_{13}^2 + r_{23}^2$ . Em [Schmidt 1988], tem-se uma representação gráfica em  $\mathbb{R}^2$  desta restrição, obtida fazendo  $x = \frac{r_{13}}{r_{12}}$  e  $y = \frac{r_{23}}{r_{12}}$ , daí  $r_{12}^2 < r_{12}^2 y^2 + r_{12}^2 x^2 \implies x^2 + y^2 > 1$ .

# 5 BIFURCAÇÕES DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS PLANAS

As mudanças qualitativas de pontos de equilíbrios, ou seja, o aparecimento, desaparecimento ou mudança na estabilidade de pontos de equilíbrios, com a variação de um parâmetro, são chamadas de **bifurcações**.

Vejamos um exemplo simples que ilustra uma bifurcação.

**Exemplo:** Considere uma função  $f(z; m) = mz + \frac{1}{3}z^3$ , onde  $m, z \in \mathbb{R}$ . Os pontos críticos são  $f'(z; m) = m + z^2 = 0 \implies z = \pm \sqrt{-m}$ . Logo, quando

- $m = 0 \implies z = 0$  é o único ponto crítico real.
- $m > 0 \implies z \notin \mathbb{R}$ , então não temos nenhum ponto crítico real.
- $m < 0 \implies z = \pm \sqrt{-m}$  e temos dois pontos críticos reais.

Neste capítulo estudaremos o surgimento de novos pontos críticos, que são as nossas configurações centrais, quando variamos um parâmetro, que será a massa de um dos corpos envolvidos no problema.

## 5.1 Bifurcações da Família de Configurações Centrais de Quatro Corpos em Forma de Triângulo Equilátero com uma Massa Central

Nesta seção vamos considerar três corpos de massas unitárias nos vértices de um triângulo equilátero, e um corpo de massa arbitrária no centro deste triângulo. Mostraremos que esta configuração é central e encontraremos duas famílias de configurações centrais formada por triângulos isósceles que bifurcam desta.

Neste contexto bifurcar de uma configuração central significa que ao variar as distâncias de uma configuração central e de uma das massas do problema ainda temos uma configuração central.

**Lema 5.1.1.** *Um triângulo equilátero com três corpos cujas massas são unitárias  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  nos seus vértices, e um quarto corpo de massa  $m_4 = m$  no seu centro, tal que  $r_{12} = r_{23} = r_{13} = \sqrt{3}$ ,  $r_{24} = r_{34} = r_{14} = 1$  é uma configuração central.*

*Demonstração.* No capítulo anterior vimos que uma configuração central plana de quatro corpos é uma solução do sistema

$$\begin{cases} m_1 m_2 (\lambda - r_{12}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{12}^2} = 0, \\ m_1 m_3 (\lambda - r_{13}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{13}^2} = 0, \\ m_1 m_4 (\lambda - r_{14}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{14}^2} = 0, \\ m_2 m_3 (\lambda - r_{23}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{23}^2} = 0, \\ m_2 m_4 (\lambda - r_{24}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{24}^2} = 0, \\ m_3 m_4 (\lambda - r_{34}^{-3}) + \sigma \frac{\partial F}{\partial r_{34}^2} = 0, \\ I - I_0 = 0, \\ F = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Representemos uma solução deste sistema pelo vetor  $z = (\lambda, \sigma, r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34})$ . Pelas hipóteses e pela simetria do sistema, das seis primeiras equações do sistema (5.1) apenas duas são linearmente independentes, a saber

$$\begin{cases} (\lambda - (\sqrt{3})^{-3}) - 3\sigma = 0, \\ m(\lambda - 1) + 9\sigma = 0. \end{cases}$$

Então basta resolver este sistema linear. Multiplicando a primeira equação por três e somando as duas equações, obtemos

$$\lambda = \frac{3m + \sqrt{3}}{9 + 3m},$$

e substituindo o valor de  $\lambda$  na segunda equação, determinamos

$$\sigma = \frac{m}{27} \left( \frac{\sqrt{3} - 9}{m + 3} \right).$$

Obtemos uma família de triângulos equiláteros dados por

$$z_0 = \left( \frac{3m + \sqrt{3}}{9 + 3m}, \frac{m}{27} \left( \frac{\sqrt{3} - 9}{3 + m} \right), \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, 1, 1 \right)$$

que é uma solução para o sistema (5.1) e portanto é uma família de configurações centrais.  $\square$

**OBS 5.1.1.** A família que este capítulo irá se referir com uma certa frequência são as configurações centrais que estão na mesma classe de equivalência, mencionada no capítulo 2, ou seja, configurações obtidas uma da outra por rotação, em torno do centro do triângulo.

**Definição 5.1.1.** Seja  $\bar{z}$  uma configuração central, ou seja,  $\bar{z}$  pertence ao conjunto  $X_m = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f_1(z; m) = 0, \dots, f_N(z; m) = 0\}$  para algum  $m$ , onde  $f_1 = 0, \dots, f_N = 0$  são as equações de configurações centrais. Dizemos que  $\bar{z} \in X_m$  é **degenerada** se e somente se  $\{\nabla f_1(\bar{z}; m), \dots, \nabla f_N(\bar{z}; m)\}$  é linearmente dependente. Neste caso, diz-se que  $m = m_c$  é o **valor crítico** ou o **valor de bifurcação** do sistema  $f_1(z; m) = 0, \dots, f_N(z; m) = 0$ .

Uma pergunta natural a ser feita é: será que existe um valor crítico que torna  $z_0$ , a família dos triângulos equiláteros centrados, degenerada? Para responder a esta pergunta consideramos a função

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ (z; m) &\longmapsto (f_1, \dots, f_8) \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $f_i = 0, i = 1, \dots, 8$  são as equações do sistema (5.1). Com a ajuda do programa MAPLE (os cálculos estão discutidos no apêndice A), encontramos o jacobiano

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W}{\partial z}(z_0) \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_{34}}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_{34}}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_8}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial r_{34}}(z_0) \end{vmatrix} \\ &= \frac{24\sqrt{3}m^2[-219m^2 + (88\sqrt{3} - 18)m - (12\sqrt{3} - 31)]}{m + 3}, \end{aligned}$$

que será não nulo para todo  $m > 0$ , exceto para

$$m_c = \frac{81 + 64\sqrt{3}}{249}.$$

Logo existe um valor de bifurcação do problema e para este a configuração torna-se degenerada. Isto quer dizer que para valores próximos a este aparecerão outras configurações centrais que bifurcam da configuração  $z_0$ .

**Teorema 5.1.1.** *Para valores da massa central do triângulo equilátero próximos ao valor crítico  $m_c = \frac{81+64\sqrt{3}}{249}$ , existem famílias de configurações centrais que bifurcam da configuração  $z_0$ .*

*Demonstração.* Consideramos inicialmente a função

$$\begin{aligned} \widetilde{W} = \pi_6 \circ W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\gamma, \alpha) &\longmapsto (f_1, \dots, f_6), \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\gamma = (r_{24}, r_{34}, m)$ ,  $\alpha = (\lambda, \sigma, r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14})$ . Para  $\alpha_0 = \left( \frac{3m+\sqrt{3}}{3m+9}, \frac{m}{27} \left( \frac{\sqrt{3}-9}{m+3} \right), \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 \right)$  e  $\gamma_0 = (1, 1, m_c)$ , tem-se  $\widetilde{W}(\gamma_0, \alpha_0) = 0$  pois  $W(z_0, m) = 0, \forall m$ , e

$$\left| \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \alpha}(\alpha_0) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(\alpha_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(\alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_{14}}(\alpha_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}(\alpha_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}(\alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_{14}}(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \lambda}(\alpha_0) & \frac{\partial f_6}{\partial \sigma}(\alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial r_{14}}(\alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

pois o posto da matriz jacobiana de  $W$  em  $(z_0, m_c)$  é 6, ou seja, retirando as duas últimas linhas e colunas obtemos uma matriz  $6 \times 6$  cujo determinante é diferente de zero; esta matriz é a matriz jacobiana de  $\widetilde{W}$ . Então, pelo teorema da função implícita, existem abertos  $U$  e  $V$ , tais que  $\gamma_0 \in U \subset \mathbb{R}^3$  e  $\alpha_0 \in V \subset \mathbb{R}^6$ , de modo que,  $\forall \gamma \in U$  existe um único  $\alpha(\gamma) \in V$  tais que  $\widetilde{W}(\gamma, \alpha(\gamma)) = 0$  e  $\alpha(\gamma_0) = \alpha_0$ . Isto nos diz que podemos resolver as seis primeiras equações de (5.1) para as variáveis  $\lambda, \sigma, r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}$  em função de  $r_{24}, r_{34}$  e  $m$ , quando  $m$  é próximo de  $m_c$ . Geometricamente  $\widetilde{W}^{-1}(0) \cap (U \times V) = \{(\gamma, \alpha(\gamma)) \mid \gamma \in U \text{ e } \alpha(\gamma) \in V\}$  é o gráfico de  $\alpha$ . Para que as funções  $f_7(z; m), f_8(z; m)$  também se anulem nesta vizinhança, fazemos

$$m = m_c + \epsilon \quad z = z_0 + \epsilon b + \epsilon^2 c + \dots$$

tais que  $|\epsilon| \ll 1$  e  $b, c, \dots \in \mathbb{R}^8$ . Definimos a função

$$\begin{aligned} F : (-\eta, \eta) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ \epsilon &\longmapsto F(\epsilon) = W(z(\epsilon), m(\epsilon)), \end{aligned}$$

com  $|\eta| \ll 1$  fixo, e fazemos a expansão de Taylor em  $\epsilon$  ao redor de zero:

$$F(\epsilon) = F(0) + \epsilon F'(0) + \frac{\epsilon^2}{2!} F''(0) + O(|\epsilon|^3).$$

Para concluir que  $F(\epsilon) = 0$  e portanto a existência das configurações centrais numa vizinhança de  $z_0$ , verificaremos condições para que os coeficientes da expansão da função  $F(\epsilon)$  sejam todos iguais a zero.

**Afirmção 1.** As funções  $f_7$  e  $f_8$  são identicamente nulas até a primeira ordem.

*Demonstração.* De fato, o termo de ordem zero é

$$F(0) = W(z_0, m_c) = 0.$$

O coeficiente do termo linear, ou de primeira ordem, é

$$F'(0) = \frac{\partial W}{\partial z}(z_0, m_c) \cdot \frac{dz}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial W}{\partial m}(z_0, m_c) \cdot \frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}. \quad (5.4)$$

Sejam  $b = (b_1, b_2, \dots, b_8)$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_8)$ , etc. Temos que

$$\frac{dz}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = (b_1, b_2, \dots, b_8),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}(z_0, m_c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(z_0, m_c) & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(z_0, m_c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_{34}}(z_0, m_c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}(z_0, m_c) & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}(z_0, m_c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_{34}}(z_0, m_c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_8}{\partial \lambda}(z_0, m_c) & \frac{\partial f_8}{\partial \sigma}(z_0, m_c) & \cdots & \frac{\partial f_8}{\partial r_{34}}(z_0, m_c) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial m}(z_0, m_c) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial m}(z_0, m_c), \frac{\partial f_2}{\partial m}(z_0, m_c), \dots, \frac{\partial f_8}{\partial m}(z_0, m_c) \right). \quad (5.6)$$

Cada um desses termos foram obtidos com a ajuda do MAPLE (ver apêndice A). Como o posto da matriz jacobiana de  $\widetilde{W}$  é 12, podemos concluir que se  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_6)$  então  $\beta = \beta(b_7, b_8)$ . As dependências explícitas das seis variáveis são obtidas quando igualamos o vetor (5.4) ao vetor nulo, e resolvemos as seis primeiras equações para  $b_7$  e  $b_8$ . Quando substituímos  $\beta(b_7, b_8)$  nas duas últimas equações elas são trivialmente satisfeitas.  $\square$

A afirmação acima não é verdade para o coeficiente do termo de segunda ordem. Tal termo é da forma

$$F''(0) = \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) (z_0, m_c) \cdot \frac{dz}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial W}{\partial z}(z_0, m_c) \cdot \frac{d^2 z}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \quad (5.7)$$

$$+ \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial W}{\partial m} \right) (z_0, m_c) \cdot \frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial W}{\partial m}(z_0, m_c) \cdot \frac{d^2 m}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0}.$$

Novamente como o posto da matriz jacobiana de  $\widetilde{W}$  no ponto  $(z_0, m_c)$  é 12, se  $\zeta = (c_1, c_2, \dots, c_6)$ , então  $\zeta = \zeta(b_7, b_8, c_7, c_8)$ . As dependências explícitas das seis variáveis são obtidas quando igualamos o vetor (5.7) ao vetor nulo, e resolvemos as seis primeiras equações para  $b_7, b_8, c_7, c_8$ . Quando substituímos  $\zeta(b_7, b_8, c_7, c_8)$  nas duas últimas equações, utilizando o MAPLE (ver apêndice A), obtemos duas equações. Tais equações na forma fatorada são

$$\begin{aligned} (2b_7 + b_8)(b_8 + p) &= 0, \\ (2b_8 + b_7)(b_7 + p) &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $p = \frac{4531167 - 3089347\sqrt{3}}{18889832}$ . O problema se reduz a estudarmos essas equações.

Além da solução trivial  $b_7 = b_8 = 0$ , as equações (5.8) tem três pares de soluções

1.  $b_7 = -p$  e  $b_8 = -p$ ,
2.  $b_7 = -p$  e  $b_8 = 2p$ ,
3.  $b_7 = 2p$  e  $b_8 = -p$ .

O fato de existirem três soluções das equações (5.8) sugere que seja uma consequência da simetria de rotação do triângulo equilátero. Devido a simetria das soluções, podemos nos concentrar na primeira solução, ou seja,  $(b_7, b_8) = (-p, -p)$ .

A fim de resolver as duas últimas equações, percebemos que

$$F(\epsilon) = (f_1(r_{24}, r_{34}, \epsilon), f_2(r_{24}, r_{34}, \epsilon), \dots, f_8(r_{24}, r_{34}, \epsilon)),$$

se anula se e somente se

$$\begin{cases} f_7(r_{24}, r_{34}, \epsilon) = (2b_7 + b_8)(b_8 + p)\epsilon^2 + O(|\epsilon|^3) = 0, \\ f_8(r_{24}, r_{34}, \epsilon) = (2b_8 + b_7)(b_7 + p)\epsilon^2 + O(|\epsilon|^3) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Dividindo as equações (5.9) por  $\epsilon^2$ , obtemos duas funções analíticas

$$\begin{cases} \tilde{f}_7 = \frac{f_7(r_{24}, r_{34}, \epsilon)}{\epsilon^2}, \\ \tilde{f}_8 = \frac{f_8(r_{24}, r_{34}, \epsilon)}{\epsilon^2}. \end{cases}$$

Seja

$$\begin{aligned} \bar{V} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\epsilon, (r_{24}, r_{34})) &\longmapsto (\tilde{f}_7, \tilde{f}_8), \end{aligned}$$

e notemos que no ponto  $v_0 = (0, (-p, -p))$  tem-se  $\bar{V}(v_0) = 0$ . Além disso,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial (r_{24}, r_{34})}(v_0) \right| = \begin{vmatrix} 2(b_8 + p) & (b_8 + p) + (2(b_7 + b_8)) \\ (b_7 + p) + (2(b_8 + b_7)) & 2(b_8 + p) \end{vmatrix}_{(b_7, b_8) = (-p, -p)} \neq 0.$$

Então, pelo teorema da função implícita existem abertos  $A_1 \subset \mathbb{R}$  e  $A_2 \subset \mathbb{R}^2$  tais que  $0 \in A_1$ ,  $r_{24} = r_{24}(\epsilon)$ ,  $r_{34} = r_{34}(\epsilon)$  e, para todo  $\epsilon \in A_1$ , existe um único  $(r_{24}(\epsilon), r_{34}(\epsilon)) \in A_2$  tal que  $\bar{V}(\epsilon, r_{24}(\epsilon), r_{34}(\epsilon)) = 0$ .

Portanto mostramos a existência de configurações centrais que bifurcam da configuração central do triângulo equilátero centrado, para valores da massa central próximo ao valor crítico  $m_c = \frac{81+64\sqrt{3}}{249}$ , sem precisar investigar os outros termos da expansão.  $\square$

**OBS 5.1.2.** Para mostrarmos que  $f_7$  e  $f_8$  se anulam na mesma vizinhança das demais funções, tentamos uma maneira direta de resolver as equações  $f_7 = 0$  e  $f_8 = 0$  usando o teorema da função implícita. Este é um caminho alternativo ao que fizemos no teorema 5.1.1, neste teorema seguimos a sugestão do capítulo 1 do [Cabral e Diacu 2002], porém não obtivemos êxito, vejamos por quê. Vimos que  $\lambda, \sigma, r_{12}, \dots, r_{14}$  estão em função de  $r_{24}, r_{34}$  e  $m$ , numa vizinhança de  $(1, 1, m_c)$ , porém como fizemos uma perturbação na massa, isto é,  $m(\epsilon) = m_c + \epsilon$ , as variáveis dependem agora de  $r_{24}, r_{34}$  e  $\epsilon$ , numa vizinhança de  $(1, 1, 0)$ . Portanto,

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f_1(\tilde{\alpha}, r_{24}, r_{34}, \epsilon) = 0, \\ \vdots \\ \tilde{f}_6 = f_6(\tilde{\alpha}, r_{24}, r_{34}, \epsilon) = 0, \end{cases}$$

com  $\tilde{\alpha} = \alpha(r_{24}, r_{34}, \epsilon)$ . Queremos que  $r_{24} = r_{24}(\epsilon)$  e  $r_{34} = r_{34}(\epsilon)$ , e para isto, consideramos a função

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\epsilon, (r_{24}, r_{34})) &\longmapsto (\tilde{f}_7, \tilde{f}_8), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{f}_7 = f_7(\tilde{\alpha}, r_{24}, r_{34}, \epsilon)$  e  $\tilde{f}_8 = f_8(\tilde{\alpha}, r_{24}, r_{34}, \epsilon)$ . Notemos que se  $u_0 = (0, (-p, -p))$  tem-se  $G(u_0) = 0$ . Para aplicar o teorema da função implícita, falta verificar que

$$\left| \frac{\partial G}{\partial(r_{24}, r_{34})}(u_0) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_7}{\partial r_{24}}(u_0) & \frac{\partial \tilde{f}_7}{\partial r_{34}}(u_0) \\ \frac{\partial \tilde{f}_8}{\partial r_{24}}(u_0) & \frac{\partial \tilde{f}_8}{\partial r_{34}}(u_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

As entradas deste jacobiano são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_7}{\partial r_{i4}}(u_0) &= \frac{\partial f_7}{\partial \tilde{\alpha}}(u_0) \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial r_{i4}}(u_0) + \frac{\partial f_7}{\partial r_{i4}}(u_0), \\ \frac{\partial \tilde{f}_8}{\partial r_{i4}}(u_0) &= \frac{\partial f_8}{\partial \tilde{\alpha}}(u_0) \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial r_{i4}}(u_0) + \frac{\partial f_8}{\partial r_{i4}}(u_0), \end{aligned}$$

com  $i = 2, 3$ ; como não sabemos como as variáveis de  $\tilde{\alpha}$  estão expressas em função de  $r_{24}, r_{34}$ , derivamos implicitamente a função

$$\begin{aligned} \tilde{G} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\epsilon; (r_{24}, r_{34})) &\longmapsto (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_6), \end{aligned}$$

para encontrarmos as derivadas parciais de  $\tilde{\alpha}$ . Logo

$$\left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r_{i4}} \right) (0, 1, 1) = \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r_{i4}} \right) (m_c, 1, 1) + \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\alpha}} \right) ((0, 1, 1), \tilde{\alpha}(0, 1, 1)) \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial r_{i4}}(0, 1, 1) \right) = 0,$$

onde  $i = 2, 3$  e  $\widetilde{W}$  está definida em (5.3). A derivada parcial de  $\widetilde{G}$  com respeito a  $r_{i4}$ ,  $i = 2, 3$  é zero, pois, caso contrário,  $\widetilde{G}$  não seria nula numa vizinhança de  $(0, 1, 1)$ ,

$$\implies \frac{\partial \widetilde{\alpha}}{\partial r_{i4}} = - \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\alpha}} \right)^{-1} \left( (0, 1, 1), \widetilde{\alpha}(0, 1, 1) \right) \cdot \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial r_{i4}} \right) (0, 1, 1), \quad i = 2, 3.$$

Por outro lado, para  $i = 2, 3$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{f}_7}{\partial r_{i4}}(u_0) &= \frac{\partial f_7}{\partial \widetilde{\alpha}}(u_0) \cdot \left[ - \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\alpha}} \right)^{-1} \left( (0, 1, 1), \widetilde{\alpha}(0, 1, 1) \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial r_{i4}}(0, 1, 1) \right] + \frac{\partial f_7}{\partial r_{i4}}(u_0), \\ \frac{\partial \widetilde{f}_8}{\partial r_{i4}}(u_0) &= \frac{\partial f_8}{\partial \widetilde{\alpha}}(u_0) \cdot \left[ - \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \widetilde{\alpha}} \right)^{-1} \left( (0, 1, 1), \widetilde{\alpha}(0, 1, 1) \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial r_{i4}}(0, 1, 1) \right] + \frac{\partial f_8}{\partial r_{i4}}(u_0). \end{aligned}$$

Fazendo os respectivos cálculos no MAPLE, concluímos que todas as quatro derivadas parciais são zero. Isto ocorre porque vimos que o termo linear da expansão da função  $F(\epsilon)$  é zero. Então não podemos usar o teorema da função implícita diretamente para mostrar que as funções se anulam na vizinhança desejada, sendo necessário estudar o termo quadrático. A seguir temos uma consequência deste fato.

**Afirmção 1.** Se  $r_{24}$  e  $r_{34}$  são funções diferenciáveis em  $\epsilon$ , então não é possível determinar o termo linear da sua expansão de Taylor em  $\epsilon$  diretamente da expansão da função  $F(\epsilon)$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $r_{24} = r_{24}(\epsilon)$  e  $r_{34} = r_{34}(\epsilon)$ . Para que

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_7(\epsilon, r_{24}(\epsilon), r_{34}(\epsilon)) &= \widetilde{f}_7(0) + \left[ \frac{\partial \widetilde{f}_7}{\partial r_{24}}(0) \cdot \frac{dr_{24}}{d\epsilon}(0) + \frac{\partial \widetilde{f}_7}{\partial r_{34}}(0) \cdot \frac{dr_{34}}{d\epsilon}(0) + \frac{d\widetilde{f}_7}{d\epsilon}(0) \right] \cdot \epsilon + \dots, \\ \widetilde{f}_8(\epsilon, r_{24}(\epsilon), r_{34}(\epsilon)) &= \widetilde{f}_8(0) + \left[ \frac{\partial \widetilde{f}_8}{\partial r_{24}}(0) \cdot \frac{dr_{24}}{d\epsilon}(0) + \frac{\partial \widetilde{f}_8}{\partial r_{34}}(0) \cdot \frac{dr_{34}}{d\epsilon}(0) + \frac{d\widetilde{f}_8}{d\epsilon}(0) \right] \cdot \epsilon + \dots, \end{aligned}$$

se anulem, todos os termos da expansão devem se anular, em particular,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{f}_7}{\partial r_{24}}(0) & \frac{\partial \widetilde{f}_7}{\partial r_{34}}(0) \\ \frac{\partial \widetilde{f}_8}{\partial r_{24}}(0) & \frac{\partial \widetilde{f}_8}{\partial r_{34}}(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dr_{24}}{d\epsilon}(0) \\ \frac{dr_{34}}{d\epsilon}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d\widetilde{f}_7}{d\epsilon}(0) \\ -\frac{d\widetilde{f}_8}{d\epsilon}(0) \end{pmatrix}.$$

Logo, se a matriz quadrada  $2 \times 2$  fosse inversível poderíamos encontrar os termos lineares das expansões

$$r_{24}(\epsilon) = r_{24}(0) + r'_{24}(0)\epsilon + \dots$$

$$r_{34}(\epsilon) = r_{34}(0) + r'_{34}(0)\epsilon + \dots$$

mas como vimos na observação acima, esta matriz não é inversível e portanto não podemos encontrar explicitamente as configurações centrais que emanam da configuração do triângulo equilátero centrado.  $\square$

**Corolário 5.1.1.** *Existem duas únicas famílias de configurações centrais que têm a forma de triângulos isósceles com o quarto corpo localizado no eixo de simetria do triângulo, que bifurcam de  $z_0$  quando  $m = \frac{81+64\sqrt{3}}{249}$ .*

*Demonstração.* A unicidade de cada configuração para um dado  $\epsilon$  segue do teorema 5.1.1. Mostraremos que as configurações que bifurcam são dois triângulos isosceles. Foi mostrado que  $r_{24} = r_{24}(\epsilon)$  e  $r_{34} = r_{34}(\epsilon)$ , conseqüentemente temos que as demais variáveis são funções  $\lambda = \lambda(\epsilon), \sigma = \sigma(\epsilon), \dots, r_{14} = r_{14}(\epsilon)$ , pois estão em função de  $r_{24}$  e  $r_{34}$ . Logo, as distâncias mútuas são expressas como uma expansão em série de Taylor. Usamos o vetor definido anteriormente  $z = z_0 + \epsilon b + O(\epsilon^2)$ . Como os  $b_i$ 's  $i = 1, 2, \dots, 6$ , foram obtidos explicitamente em função de  $b_7$  e  $b_8$  com os cálculos feitos no MAPLE (ver apêndice A), e para  $b_7 = b_8 = -p$ , obtemos

$$b_1 = \frac{10575 - 2647\sqrt{3}}{35152}, \quad b_2 = \frac{2647\sqrt{3}}{6591} - \frac{3525}{2197}, \quad b_3 = -\frac{81 + 64\sqrt{3}}{83}p,$$

$$b_4 = -\frac{81 + 64\sqrt{3}}{83}p, \quad b_5 = 2\frac{81 + 64\sqrt{3}}{83}p, \quad b_6 = 2p,$$

e portanto

$$\begin{aligned} r_{24} &= r_{34} = 1 - \epsilon p + O(\epsilon^2), \\ r_{14} &= 1 + 2p\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{23} &= \sqrt{3} + 2\frac{81 + 64\sqrt{3}}{83}p\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{12} &= r_{13} = \sqrt{3} - \frac{81 + 64\sqrt{3}}{83}p\epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Concluimos que estas são as configurações que bifurcam da configuração do triângulo equilátero centrado. Como  $r_{24} = r_{34}$  e  $r_{12} = r_{13}$ , as configurações são triângulos isósceles com três massas unitárias nos seus vértices e uma quarta massa no circuncentro, próximo ao centro de massa. Lembrando que  $m = m_c + \epsilon$ , temos dois casos a considerar:

- I. Quando  $\epsilon > 0$ , temos  $m > m_c$ . Denotando  $k = \frac{81+64\sqrt{3}}{83}$ , usando a lei dos cossenos  $r_{23}^2 = r_{13}^2 + r_{12}^2 - r_{13}r_{12} \cos \phi$  e substituindo os valores das distâncias mútuas encontradas, temos

$$(\sqrt{3} + 2kp\epsilon)^2 = 2(\sqrt{3} - kp\epsilon)^2 - 2(\sqrt{3} - kp\epsilon)^2 \cos \phi,$$

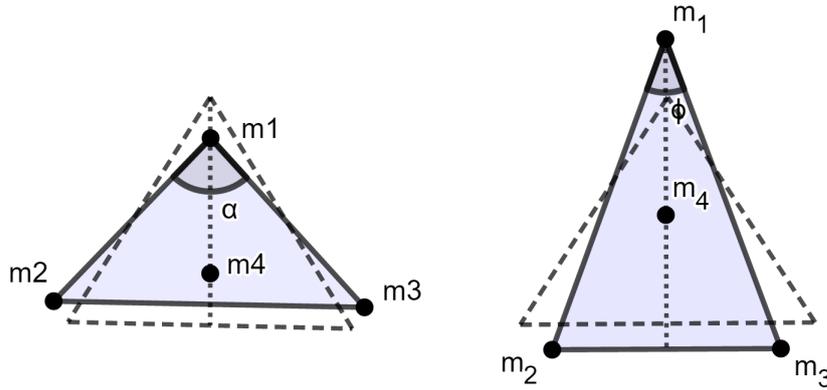


Figura 8 – Configurações centrais que surgem do triângulo equilátero centrado. I)  $m > m_c$  e II)  $m < m_c$ .

$$\implies \cos \phi = \frac{-3 + 2k^2 p^2 \epsilon^2 + 8\sqrt{3}k p \epsilon}{-6 + 4\sqrt{3}k p \epsilon - 2k^2 p^2 \epsilon^2}.$$

Para  $\epsilon = 1$ ,  $\cos \phi \cong 0.65 \implies \phi > 60^\circ$ . E quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pela direita,  $\phi \rightarrow 60^\circ$ . Ver figura 8b.

II. Quando  $\epsilon < 0$ , temos  $m < m_c$ . Substituindo os valores das variáveis e assumindo o sinal negativo de  $\epsilon$  nas expressões, como no caso anterior, obtemos

$$(\sqrt{3} - 2kp\epsilon)^2 = 2(\sqrt{3} + kp\epsilon)^2 - 2(\sqrt{3} + kp\epsilon)^2 \cos \alpha.$$

Fazendo  $\epsilon = 1$ ,  $\cos \alpha \cong 0.3 \implies \alpha < 60^\circ$ . E quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pela esquerda,  $\alpha \rightarrow 60^\circ$ . Ver figura 8.a

□

**OBS 5.1.3.** Um fato interessante a se observar é que as configurações obtidas da bifurcação do triângulo equilátero centrado, que é totalmente simétrica, ainda são configurações simétricas. Isto nos deixa motivados a investigar futuramente as razões que justificam essas simetrias.

**OBS 5.1.4.** O aparecimento de exatamente duas famílias de configurações centrais é outro ponto a se questionar. O fato da matriz jacobiana da função  $W$  (5.2), ter nulidade dois quando  $m = m_c$ , pode ser um dos motivos para o aparecimento das duas famílias de configurações centrais. Veremos na seção a seguir que este fato se repete mais duas vezes.

## 5.2 Bifurcações da família de Configurações Centrais em Forma de Quadrado Centrado

Nesta seção encontraremos três bifurcações da família de configurações centrais na forma de um quadrado com um corpo no seu centro. Uma dessas famílias é formada por pipas, uma por trapézios isósceles e a outra por losangos. Usaremos o mesmo método da seção anterior com algumas pequenas modificações.

Para determinarmos uma configuração central de cinco corpos no espaço, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, encontramos os pontos críticos da função  $V = U + \delta(I - I_0) + \sigma F$ , onde

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & r_{25}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & r_{35}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & r_{45}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & r_{25}^2 & r_{35}^2 & r_{45}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

é o determinante de Cayley-Menger relacionado com o volume do simplexo formado pelos cinco corpos.

Como nosso interesse é encontrar configurações centrais planas que bifurcam da configuração do quadrado centrado, é necessário três restrições além da restrição ao conjunto de configurações cujo momento de inércia é constante. Sejam

$$F_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{25}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{35}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & r_{25}^2 & r_{35}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$F_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{14}^2 & r_{15}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{24}^2 & r_{25}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & 0 & r_{45}^2 \\ 1 & r_{15}^2 & r_{25}^2 & r_{45}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

onde  $F_i$  com  $i = 1, 2, 3$  são os determinantes de Cayley-Menger relacionados aos volumes dos tetraedros formados pelos pontos  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 2, 3, 5)$  e  $(1, 2, 4, 5)$ , respectivamente. Quando esses volumes forem zero temos as restrições necessárias. Essas restrições são

convenientes pois três corpos estão sempre no mesmo plano mas quando o número de corpos aumenta para cinco, os cinco corpos podem ou não estar no mesmo plano que os três corpos iniciais. Vimos no capítulo anterior que uma condição para que quatro corpos estejam no mesmo plano é que o volume do tetraedro formado pelos quatro corpos seja zero. Com isto, basta impor que os determinantes de Cayley-Menger associados a esses volumes se anulem, isto é,  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ . Contudo, ainda não garantimos que o corpo 4 e o corpo 5 estão no mesmo plano, caso os três corpos iniciais sejam colineares. Para considerar todos os casos, faz-se necessário impor ainda que  $F_3 = 0$ .

Logo para determinar uma configuração central plana de cinco corpos, procuramos os extremos da função potencial  $U$  restrita aos quatro vínculos  $I = I_0, F_1 = 0, F_2 = 0$  e  $F_3 = 0$ , ou seja, as soluções do sistema

$$\begin{cases} m_i m_j (\lambda - r_{ij}^{-3}) + \sigma_1 \frac{\partial F_1}{\partial r_{ij}^2} + \sigma_2 \frac{\partial F_2}{\partial r_{ij}^2} + \sigma_3 \frac{\partial F_3}{\partial r_{ij}^2} = 0, & 1 \leq i < j \leq 5, \\ I - I_0 = 0, \\ F_3 = 0, \\ F_4 = 0, \\ F_5 = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Representaremos uma solução para este sistema pelo vetor com quatorze componentes

$$z = (\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34}, r_{15}, r_{25}, r_{35}, r_{45}).$$

**Lema 5.2.1.** *Um quadrado com quatro corpos de massas unitárias  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$  nos seus vértices, centrado num corpo de massa arbitrária  $m_5 = m$  tais que  $r_{12} = r_{23} = r_{14} = r_{34} = \sqrt{2}$ ,  $r_{24} = r_{13} = 2$ , e  $r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 1$  é uma configuração central.*

*Demonstração.* Para demonstrarmos este lema basta encontrarmos uma solução para o sistema (5.10) substituindo os valores das distâncias e das massas dadas. As quatro últimas equações são trivialmente satisfeitas e das dez primeiras equações apenas quatro são linearmente independentes. Logo, o sistema a ser resolvido é reduzido para

$$\begin{cases} (\lambda - (\sqrt{2})^{-3}) - 16\sigma_1 = 0, \\ (\lambda - (2)^{-3}) + 16\sigma_1 + 4\sigma_2 = 0, \\ m(\lambda - 1) - 8\sigma_2 = 0, \\ m(\lambda - 1) - 8\sigma_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos os valores de  $\lambda, \sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Denotamos a configuração do quadrado centrado por

$$z_0 = \left( \frac{1 + 2\sqrt{2} + 4m}{4m + 16}, \frac{1 - 2\sqrt{2} - m(2\sqrt{2} - 4)}{256 + 64m}, \frac{(2\sqrt{2} - 15)m}{32m + 128}, \frac{(2\sqrt{2} - 15)m}{32m + 128}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, 1, 1, 1 \right).$$

□

**Proposição 5.2.1.** *Existem valores (de bifurcação) para  $m$  que tornam a configuração do quadrado centrado degenerada.*

*Demonstração.* Denotamos as catorze equações do sistema (5.10) pela função

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{14} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{14} \\ (z; m) &\longmapsto (f_1, \dots, f_{14}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde  $f_i = 0, i = 1, \dots, 14$  são as equações do sistema (5.10). Com a ajuda do MAPLE (ver apêndice B), encontramos o jacobiano

$$\left| \frac{\partial H}{\partial z}(z_0) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_{45}}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_{45}}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{14}}{\partial \lambda}(z_0) & \frac{\partial f_{14}}{\partial \sigma}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_{14}}{\partial r_{45}}(z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

exceto para os valores  $m_{c_1} = 0, m_{c_2} = \frac{13 + 11\sqrt{2}}{12}$  e  $m_{c_3} = -\frac{1}{4}$ . E para estes valores a configuração do quadrado centrado torna-se degenerada.  $\square$

**Teorema 5.2.1.** *Para valores da massa central do quadrado  $m_5 = m$ , próximos ao valor crítico  $m_{c_2}$ , existem famílias de configurações centrais que bifurcam da configuração central  $z = z_0$ .*

*Demonstração.* Consideramos inicialmente a função

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = \pi_{12} \circ H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{12} &\longrightarrow \mathbb{R}^{12} \\ (\gamma, \alpha) &\longmapsto (f_1, \dots, f_{12}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\gamma = (r_{35}, r_{45}, m)$  e  $\alpha = (\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r_{12}, r_{13}, r_{23}, \dots, r_{25})$ . Para os valores  $\gamma_0 = (1, 1, m_{c_2})$  e  $\alpha_0 = \left( \frac{1+2\sqrt{2}+4m}{4m+16}, \frac{1-2\sqrt{2}-m(2\sqrt{2}-4)}{64m+256}, \frac{(2\sqrt{2}-15)m}{32m+128}, \frac{(2\sqrt{2}-15)m}{32m+128}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, 1 \right)$  tem-se  $\widetilde{H}(\gamma_0, \alpha_0) = 0$  pois  $H(z_0; m) = 0, \forall m$ . O jacobiano

$$\left| \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \alpha}(\gamma_0, \alpha_0) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(\gamma_0, \alpha_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1}(\gamma_0, \alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_{25}}(\gamma_0, \alpha_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}(\gamma_0, \alpha_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1}(\gamma_0, \alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_{25}}(\gamma_0, \alpha_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial \lambda}(\gamma_0, \alpha_0) & \frac{\partial f_{12}}{\partial \sigma_1}(\gamma_0, \alpha_0) & \cdots & \frac{\partial f_{12}}{\partial r_{25}}(\gamma_0, \alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

e verificamos que o posto da matriz jacobiana da função  $H$  em  $(z_0; m_{c_2})$  é 12. Mais precisamente, o jacobiano de  $H$  retirando-se a última linha e a última coluna é zero, e se retiramos a penúltima linha e coluna e manter a última linha e coluna, também é zero. Porém, retirando as duas últimas linhas e colunas da matriz jacobiana da função  $H$ , obtemos uma matriz  $12 \times 12$  cujo determinante é diferente de zero; e esta matriz é a matriz jacobiana de  $\widetilde{H}$ . Então, pelo teorema da função implícita, existem abertos  $U_1 \subset \mathbb{R}^3$  e  $U_2 \subset \mathbb{R}^{12}$ , tais que  $\gamma_0 \in U_1$  e  $\alpha_0 \in U_2$ , de modo que,  $\forall \gamma \in U_1$  existe um único  $\alpha(\gamma) \in U_2$  tais que  $\widetilde{H}(\gamma, \alpha(\gamma)) = 0$  e  $\alpha(\gamma_0) = \alpha_0$ . Isto nos diz que podemos resolver as doze primeiras equações de (5.10) para as variáveis  $\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r_{12}, r_{13}, r_{23}, \dots, r_{25}$  em função de  $r_{35}, r_{45}$  e  $m$ , quando  $m$  é próximo de  $m_{c_2}$ .

Para que as funções  $f_{13}(z; m)$  e  $f_{14}(z; m)$  também se anulem nesta vizinhança, fazemos

$$m = m_{c_1} + \delta \epsilon^2 \quad \text{e} \quad z = z_0 + \epsilon b + \epsilon^2 c + \epsilon^3 d + \dots$$

tais que  $\delta = \pm 1$ ,  $|\epsilon| \ll 1$  e  $b, c, d, \dots \in \mathbb{R}^{14}$ . Definimos a função

$$\begin{aligned} F : (-\eta, \eta) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{14} \\ \epsilon &\longmapsto F(\epsilon) = H(z(\epsilon); m(\epsilon)), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $|\eta| \ll 1$  fixo, e fazemos sua expansão de Taylor em  $\epsilon$  ao redor de zero,

$$F(\epsilon) = F(0) + \epsilon F'(0) + \frac{\epsilon^2}{2!} F''(0) + \frac{\epsilon^3}{3!} F'''(0) + O(\epsilon^4). \quad (5.14)$$

Para concluir que  $F(\epsilon) = 0$  e portanto a existência das configurações centrais que bifurcam de  $z_0$ , verificaremos condições para que os coeficientes da expansão da função  $F(\epsilon)$  sejam todos iguais a zero.

**Afirmção 1.** As funções  $f_{13}$  e  $f_{14}$  são identicamente nulas até a segunda ordem.

*Demonstração.* De fato, o termo de ordem zero é

$$F(0) = H(z_0, m_{c_2}) = 0.$$

O coeficiente do termo linear é

$$F'(0) = \frac{\partial H}{\partial z}(z_0, m_{c_2}) \cdot \left. \frac{dz}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial m}(z_0, m_{c_2}) \cdot \left. \frac{dm}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (5.15)$$

Sejam  $b = (b_\lambda, b_{\sigma_1}, \dots, b_{35}, b_{45})$ ,  $c = (c_\lambda, c_{\sigma_1}, \dots, c_{35}, c_{45})$ ,  $d = (d_\lambda, d_{\sigma_1}, \dots, d_{35}, d_{45})$  e etc. Devido a nulidade da matriz jacobiana de  $\widetilde{H}$  ser 2, concluímos que se  $\beta = (b_\lambda, b_{\sigma_1}, \dots, b_{15}, b_{25})$ , então  $\beta = \beta(b_{35}, b_{45})$ . As dependências explícitas das doze variáveis são obtidas quando

igualamos o vetor (5.15) ao vetor nulo, obtendo catorze equações, e resolvendo as doze primeiras equações para  $b_{35}$  e  $b_{45}$ . Quando substituímos  $\beta(b_{35}, b_{45})$  nas duas últimas equações elas são trivialmente satisfeitas (ver Apêndice B). O termo de segunda ordem é

$$\begin{aligned} F''(0) = & \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{dz}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial z} (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^2 z}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \\ & + \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial m} \right) (z_0, m_c) \cdot \frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial m} (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^2 m}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Novamente pela nulidade da matriz jacobina de  $\tilde{H}$  se  $\zeta = (c_\lambda, c_{\sigma_1}, \dots, c_{15}, c_{25})$ , então  $\zeta = \zeta(b_{35}, b_{45}, c_{35}, c_{45})$ . As dependências explícitas das doze primeiras variáveis são obtidas quando igualamos o vetor (5.16) ao vetor nulo, obtendo catorze equações e resolvendo as doze primeiras equações para  $b_{35}$ ,  $b_{45}$ ,  $c_{35}$  e  $c_{45}$ . Quando substituímos  $\zeta(b_{35}, b_{45}, c_{35}, c_{45})$  nas duas últimas equações são trivialmente verificadas.  $\square$

A afirmação acima não é verdade para o coeficiente do termo de terceira ordem. Tal termo é da forma

$$\begin{aligned} F'''(0) = & \frac{d^2}{d\epsilon^2} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{dz}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + 2 \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^2 z}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \\ & + \frac{\partial H}{\partial z} (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^3 z}{d\epsilon^3} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{d^2}{d\epsilon^2} \left( \frac{\partial H}{\partial m} \right) (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ & + 2 \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\partial H}{\partial m} \right) (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^2 m}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial m} (z_0, m_{c_2}) \cdot \frac{d^3 m}{d\epsilon^3} \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Notemos que

$$\frac{\partial W}{\partial m} (z_0, m_c) \cdot \frac{d^3 m}{d\epsilon^3} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{d\epsilon^2} \left( \frac{\partial W}{\partial m} \right) (z_0, m_c) \cdot \frac{dm}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0,$$

pois  $m$  só tem termo de ordem quadrática em  $\epsilon$ .

Pelo mesmo motivo dos dois primeiros termos se  $\xi = (d_\lambda, d_{\sigma_1}, \dots, d_{15}, d_{25})$ , então  $\xi = \xi(b_{35}, b_{45}, c_{35}, c_{45}, d_{35}, d_{45})$ . As dependências explícitas são obtidas quando igualamos o vetor (5.17) ao vetor nulo e resolvendo as doze primeiras equações para  $b_{35}$ ,  $b_{45}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{45}$ ,  $d_{35}$ ,  $d_{45}$ . Quando substituímos  $\zeta(b_{35}, b_{45}, c_{35}, c_{45}, d_{35}, d_{45})$  nas duas últimas equações, obtemos tais equações na forma fatorada (ver Apêndice B),

$$\begin{aligned} (\delta s_1 - s_2 b_{35}^2 + s_3 b_{45}^2) b_{35} &= 0, \\ (\delta s_1 + s_3 b_{35}^2 - s_2 b_{45}^2) b_{45} &= 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde

$$s_1 = 122691244 + 411830784\sqrt{2}, \quad (5.19)$$

$$s_2 = 291093160040 + 211659410269\sqrt{2}, \quad (5.20)$$

$$s_3 = 1204699032744 + 860002887155\sqrt{2}. \quad (5.21)$$

O problema se reduz a estudarmos as equações (5.18). As soluções reais, não-triviais, destas equações são

- I. Quando  $\delta = 1 \implies b_{35} = 0$  e  $b_{45} = \pm \sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$  ou  $b_{45} = 0$  e  $b_{35} = \pm \sqrt{\frac{s_1}{s_2}}$ .
- II. Quando  $\delta = -1 \implies b_{35} = \pm b_{45}$  com  $b_{35} = \pm \sqrt{\frac{s_1}{s_3 - s_2}}$ .

O fato de existirem quatro soluções para cada valor de  $\delta$  indica uma relação com as simetrias de rotação do quadrado.

A fim de resolver  $f_{13} = 0$  e  $f_{14} = 0$ , percebemos que a função

$$F(\epsilon) = (f_1(r_{35}, r_{45}, \epsilon), f_2(r_{35}, r_{45}, \epsilon), \dots, f_{14}(r_{35}, r_{45}, \epsilon))$$

se anula se e somente se

$$\begin{cases} f_{13}(r_{35}, r_{45}, \epsilon) = (\delta s_1 - s_2 b_{35}^2 + s_3 b_{45}^2) b_{35} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) = 0, \\ f_{14}(r_{35}, r_{45}, \epsilon) = (\delta s_1 + s_3 b_{35}^2 - s_2 b_{45}^2) b_{45} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Dividindo as equações acima por  $\epsilon^3$ , temos duas funções analíticas

$$\begin{cases} \tilde{f}_{13} = \frac{f_{13}(r_{35}, r_{45}, \epsilon)}{\epsilon^3}, \\ \tilde{f}_{14} = \frac{f_{14}(r_{35}, r_{45}, \epsilon)}{\epsilon^3}. \end{cases}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \bar{Z} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\epsilon, (r_{35}, r_{45})) &\longmapsto (\tilde{f}_{13}, \tilde{f}_{14}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

No ponto  $\bar{z}_0 = (0, s)$ , onde  $s$  é uma das soluções de (5.18), tem-se  $\bar{Z}(\bar{z}_0) = 0$ . Além disso, o jacobiano de  $\bar{Z}$

$$\left| \frac{\partial \bar{Z}}{\partial (r_{35}, r_{45})} \right| = \begin{vmatrix} -2s_2 b_{35}^2 + (\delta s_1 - s_2 b_{35}^2 + s_3 b_{45}^2) & 2s_3 b_{45} \\ 2s_3 b_{35} b_{45} & -2s_2 b_{45}^2 + (\delta s_1 + s_3 b_{35}^2 - s_2 b_{45}^2) \end{vmatrix}$$

no ponto  $\bar{z}_0$  é diferente de zero. Então, pelo teorema da função implícita existem abertos  $A_1 \subset \mathbb{R}$  e  $A_2 \subset \mathbb{R}^2$  tais que  $0 \in A_1$ ,  $s \in A_2$  e para todo  $\epsilon \in A_1$  existe um único  $(r_{35}(\epsilon), r_{45}(\epsilon)) \in A_2$  tal que  $\bar{Z}(\epsilon, r_{35}(\epsilon), r_{45}(\epsilon)) = 0$  e  $(r_{35}(0), r_{45}(0)) = s$ . Portanto existem configurações centrais que bifurcam da configuração do quadrado centrado.  $\square$

**Corolário 5.2.1.** *Duas famílias de configurações centrais bifurcam do quadrado centrado  $z_0$  quando  $m_{c_2} = \frac{13+11\sqrt{2}}{12}$ ; uma formada de pipas, e outra formada de trapézios isósceles.*

*Demonstração.* No teorema (5.2.1) mostramos a existência de tais configurações, basta mostrar que existem apenas duas famílias que bifurcam para o valor crítico  $m = m_{c_2}$ . Com a ajuda do Maple pudemos encontrar as dependências explícitas dos  $b_\lambda, b_{\sigma_1}, \dots, b_{25}$  em função de  $b_{35}, b_{45}$ , a saber

$$\begin{aligned} b_{12} = -b_{34} &= \frac{82 + 75\sqrt{2}}{62}(b_{35} + b_{45}), \\ b_{14} = -b_{23} &= \frac{82 + 75\sqrt{2}}{62}(b_{35} - b_{45}), \\ b_{13} = b_{24} &= 0, \\ b_{15} &= -b_{35}, \\ b_{25} &= -b_{45}. \end{aligned}$$

Consideremos  $k = \frac{82 + 75\sqrt{2}}{62} \left( \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \right)$ ,  $s_1$  e  $s_2$  como em (5.19) e (5.20), respectivamente. Pelas soluções de I, ou seja, quando  $\delta = 1$  tem-se  $m > m_{c_2}$ , e as distâncias mútuas tem a expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} r_{23} = r_{12} &= \sqrt{2} + k\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{14} = r_{34} &= \sqrt{2} - k\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{25} &= 1 - \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{45} &= 1 + \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{24} &= r_{13} = 2 + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

**OBS 5.2.1.** Um quadrilátero convexo que tem dois pares de lados consecutivos congruentes, ou equivalentemente, uma das diagonais é um eixo de simetria é chamado de quadrilátero tipo pipa.

Assim, as configurações centrais que bifurcam quando  $m > m_{c_2}$  são em forma de pipa com a massa  $m_5$  sobre o eixo de simetria da pipa. Tal eixo coincide com uma das diagonais do quadrado (figura 9-I). As outras três soluções do conjunto de soluções quando  $\delta = 1$ , são outras três pipas que apontam para os outros três vértices.

Quando  $\delta = -1$ , tem-se  $m < m_{c_2}$  e as expansões de Taylor em  $\epsilon$  das distâncias são

$$\begin{aligned} r_{12} = r_{14} &= \sqrt{2} + 2K\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{23} = r_{34} &= \sqrt{2} - 2K\epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{15} = r_{25} &= 1 - \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ r_{45} = r_{35} &= 1 + \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \epsilon + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Portanto, a configuração que bifurca tem a forma de um trapézio isósceles. Como  $r_{15} = r_{25}$

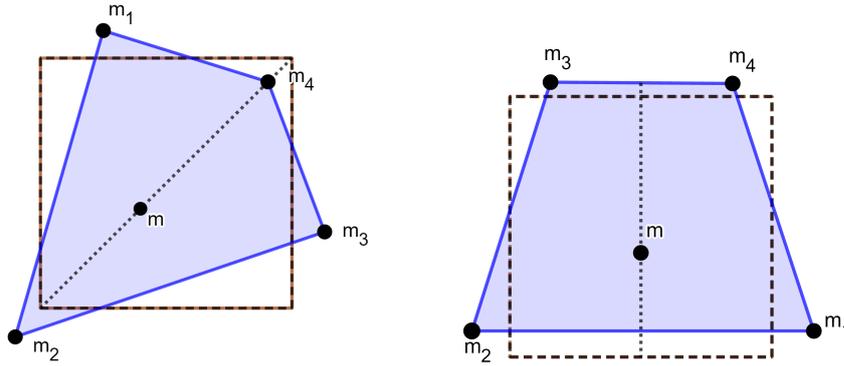


Figura 9 – I. Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando  $m > m_{c_2}$ .  
 II. Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando  $m < m_{c_2}$ .

e  $r_{45} = r_{35}$ , a massa  $m_5$  está na mediatriz dos segmentos  $\overline{m_1m_2}$  e  $\overline{m_3m_4}$ , no eixo de simetria do trapézio. As outras três soluções do conjunto de soluções, quando  $\delta = -1$ , são outras três configurações em forma de trapézios isósceles, obtidos por uma rotação do primeiro trapézio (figura 9–II).  $\square$

**Corolário 5.2.2.** *Uma família de configurações centrais formada de losangos bifurca do quadrado centrado quando  $m = m_{c_3} = -\frac{1}{4}$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste corolário é análoga à do teorema (5.2.1). Verificamos que a matriz jacobiana da função  $H$  ver (5.11), quando  $m = m_{c_3}$  no ponto  $z_0$  tem posto 13 (retirando a última linha e a última coluna o jacobiano é diferente de zero). Logo, podemos aplicar o teorema da função implícita na função

$$\begin{aligned} \bar{H} = \pi_{13} \circ H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{13} &\longrightarrow \mathbb{R}^{13} \\ (\bar{\gamma}, \bar{\alpha}) &\longmapsto (f_1, \dots, f_{13}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde  $\bar{\gamma} = (r_{45}, m)$ ,  $\bar{\alpha} = (\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{35})$ , já que no ponto  $\bar{\gamma}_0 = (1, m_{c_3})$  e  $\bar{\alpha}_0 = (\alpha, 1)$  tem-se  $\bar{H}(\bar{\gamma}_0, \bar{\alpha}_0) = 0$ . Daí, resolvemos as treze primeiras equações de (5.10) numa vizinhança de  $\bar{\gamma}_0$ . Repetindo toda a demonstração do teorema (5.2.1), verificamos que o primeiro termo da expansão da função  $F(\epsilon)$ , ver (5.14), que é não-nulo é o termo de ordem três. A última entrada do vetor de ordem três que não se anula é  $72\delta b_{45}$ . Portanto,

$$72\delta b_{45} = 0 \iff b_{45} = 0.$$

Para resolver  $f_{14} = 0$ , consideramos a função

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\epsilon, r_{45}) &\longmapsto \tilde{f}_{14}, \end{aligned}$$

com  $\tilde{f}_{14} = \frac{72\delta b_{45}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)}{\epsilon^3}$ . Como  $\mathcal{F}(0,0) = 0$  e  $\left. \frac{d(72\delta b_{45})}{db_{45}} \right|_{b_{45}=0} \neq 0$ , temos, pelo teorema da função implícita que  $r_{45} = r_{45}(\epsilon)$ . Logo as demais variáveis estão em função de

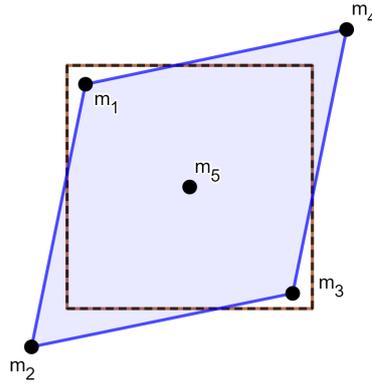


Figura 10 – Configuração central que bifurca do quadrado centrado quando  $m = m_{c_3}$ .

$\epsilon$  e calculamos as dependências dos  $b_\lambda, b_{\sigma_1}, \dots, b_{35}$  e dos  $c_\lambda, c_{\sigma_1}, \dots, c_{35}$  no MAPLE, a saber

$$b_{12} = b_{23} = b_{14} = b_{34} = 0, \quad b_{13} = -2b_{45}, \quad b_{24} = 2b_{45}, \quad b_{35} = b_{15} = b_{45}, \quad b_{25} = b_{45},$$

$$c_{12} = c_{23} = c_{14} = c_{34} = 0, \quad c_{13} = -2c_{45}, \quad c_{24} = 2c_{45}, \quad c_{15} = c_{35} = c_{45}, \quad c_{25} = c_{45}.$$

Considerando  $c_{45} = 1$ , as expansões em  $\epsilon$  das distâncias são

$$\begin{aligned} r_{24} &= 2 + 2\epsilon^2 + O(|\epsilon|^3), \\ r_{13} &= 2 - 2\epsilon^2 + O(|\epsilon|^3), \\ r_{34} = r_{23} = r_{14} = r_{12} &= \sqrt{2} + \epsilon^2 + O(|\epsilon|^3). \end{aligned}$$

Observamos que para valores positivos ou negativos de epsilon, para aproximações de até segunda ordem, tem-se os mesmos valores para as distâncias. Usando a lei dos cossenos, temos que  $\cos(\beta_1) = -(2\epsilon^2 + \epsilon^4) \iff \beta_1 > 90^\circ$ , com  $\beta_1$  o ângulo entre  $r_{12}$  e  $r_{14}$  e pela simetria, o ângulo entre  $r_{23}$  e  $r_{34}$  também é maior que  $90^\circ$ . Por outro lado,

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - r_{12} r_{23} \cos \beta_2 \implies \cos \beta_2 = 2\epsilon^2 - \epsilon^4,$$

como  $\epsilon \ll 1, \epsilon^2 > \epsilon^4$  e portanto  $\cos \beta_2 > 0$  o que implica que  $\beta_2 < 90^\circ$ . Novamente pela simetria, o ângulo entre  $r_{14}$  e  $r_{34}$  também é menor que  $90^\circ$ .

Concluimos que a única configuração central que bifurca da configuração central do quadrado centrado, quando  $m = m_{c_3} = -\frac{1}{4}$ , é um losango com um corpos de massa  $m_5 \approx -\frac{1}{4}$  no seu centro (ver figura 10).  $\square$

Estes resultados se encontram no capítulo 1 de [Cabral e Diacu 2002] e [Meyer e Schmidt 1988].

**OBS 5.2.2.** Notemos que a matriz jacobiana da função  $H$ , ver (5.11), tem nulidade dois e duas famílias de configurações centrais bifurcam da configuração do quadrado centrado. Por outro lado, a matriz jacobiana da função  $\bar{H}$ , ver (5.21), do corolário (5.2.2), tem

nulidade um e a única família que bifurca do quadrado centrado é a família de losangos. Este mesmo fato aconteceu antes com as bifurcações do triângulo equilátero centrado, isto sugere uma correlação entre a nulidade e o número de famílias que bifurcam. Analisando as configurações que bifurcam do quadrado centrado quando  $m = 0$ , mostramos que a matriz jacobiana tem nulidade dois, todavia as análises indicam que existe uma única família que bifurca da família do quadrado centrado.

**OBS 5.2.3.** É importante lembrar que já foi mostrado a existência de uma família a um parâmetro de configurações centrais degeneradas para o problema de cinco corpos quando a massa de um dos corpos é  $-\frac{1}{4}$ , [Roberts 1999]. Ou seja, fixando uma das diagonais e variando o comprimento da outra diagonal tem-se um continuum de configurações centrais degeneradas. Portanto, o corolário (5.2.2) é um caso particular dessa família de configurações degeneradas citadas acima.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, estudamos em essência configurações centrais de três, quatro e cinco corpos, e uma técnica para obter bifurcações de configurações centrais de quatro e cinco corpos.

No Capítulo 2 estudamos os conceitos básicos sobre configurações centrais e sua relação com as soluções do problema de  $N$  corpos, em particular, a relação com uma família de soluções bem conhecida na literatura da Mecânica Celeste, os equilíbrios relativos. Ainda neste capítulo introduzimos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar configurações centrais.

No Capítulo 3 aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar configurações centrais de três corpos no plano. E relacionamos o volume de um simplexo com o determinante de Cayley-Menger. Tal relação foi importante para simplificar os cálculos para encontrar configurações centrais e no estudo de bifurcações.

No Capítulo 4 mostramos que o tetraedro regular é a única configuração central de quatro corpos no espaço, e mostramos alguns resultados geométricos importantes sobre configurações centrais côncavas e convexas.

No Capítulo 5 estudamos bifurcações de certas configurações côncavas de quatro e cinco corpos. Mostramos a existência e unicidade de duas famílias de configurações centrais que bifurcam do triângulo centrado, para um valor crítico da massa central. Mostramos ainda a existência e unicidade de três famílias de configurações centrais que bifurcam do quadrado centrado, para dois valores críticos da massa central. Em ambos os casos, obtemos explicitamente as configurações que bifurcam e percebemos que tais configurações preservam alguma(s) simetria(s) das configurações iniciais.

Este trabalho abre algumas expectativas. Uma delas é o interesse em investigar os motivos pelos quais as configurações centrais que bifurcam de configurações centrais degeneradas simétricas ainda serem simétricas.

Um outro interesse é encontrar explicitamente as configurações centrais que bifurcam do quadrado centrado quando  $m_c = 0$ . Além disso, analisar a relação entre a nulidade da matriz jacobiana com o número de famílias de configurações que bifurcam, como comentado nas observações (5.1.5) e (5.2.2).

Ainda para as famílias de triângulos e de quadrados centrados, temos a expectativa de estudar as bifurcações para o caso em que os parâmetros são as massas dos seus respectivos vértices com a massa central fixada. Em [Santos et al. 2017] encontramos o estudo das bifurcações do triângulo equilátero com o parâmetro sendo uma das massas

dos seus vértices com a massa central e duas das massas dos vértices fixadas. Para este caso as configurações centrais encontradas não são todas simétricas.

Um outro interesse é aplicar a técnica desenvolvida no Capítulo 5 em polígonos regulares com o número de lados maior ou igual a cinco que tenham massas iguais nos seus vértices e uma massa variável no seu centro. Estes casos ainda não foram desenvolvidos e devem ter resultados interessantes.

Em [Schmidt 1988] tem-se a mesma técnica aplicada a cinco corpos no espaço, onde quatro corpos de massas unitárias são colocados nos vértices de um tetraedro regular e um corpo de massa arbitrária é colocado no centro deste tetraedro. As configurações obtidas são todas simétricas. Em [Santos et al. 2017] também encontramos o estudo para as bifurcações do tetraedro regular centrado, com mais detalhes e com algumas considerações teóricas adicionais. Além disso, neste artigo foi estudado o caso em que o parâmetro é uma das massas dos vértices do tetraedro com as demais massas fixadas. Obtendo configurações nem todas simétricas. Estes resultados nos motivam a compreender melhor esta técnica e conceitos teóricos acerca de análises de bifurcações a fim de estudar também as bifurcações de configurações centrais no espaço.

# REFERÊNCIAS

- ALBOUY, A. On a paper of moeckel on central configurations. *Regular and chaotic dynamics*, Turpion Ltd, v. 8, n. 2, p. 133–142, 2003. Citado na página 41.
- BLUMENTHAL, L. M. *Theory and applications of distance geometry*. [S.l.]: Chelsea New York, 1970. Citado na página 32.
- BRUNS, H. Über die integrale des vielkörper-problems. *Acta Mathematica*, Springer, v. 11, n. 1-4, p. 25–96, 1887. Citado na página 12.
- CABRAL, H.; DIACU, F. *Classical and celestial mechanics: the Recife lectures*. [S.l.]: Princeton University Press, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 15, 19, 53, 65 e 71.
- EULER, L. Considerationes de motu corporum coelestium. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, p. 544–558, 1766. Citado na página 11.
- HAGIHARA, Y. *Celestial Mechanics, Vol. I, Dynamical Principles and Transformation Theory*. 1970. Citado na página 28.
- LAGRANGE, J.-L. Essai sur le probleme des trois corps. *Prix de l'académie royale des Sciences de paris*, v. 9, p. 292, 1772. Citado na página 11.
- LIBERTI, L.; LAVOR, C. Six mathematical gems from the history of distance geometry. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 23, n. 5, p. 897–920, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 32.
- LIMA, E. L. Curso de análise, vol. 2.(6a edição). *Projeto Euclides*, IMPA, 2000. Citado na página 24.
- LLIBRE, J.; MOECKEL, R.; SIMÓ, C. *Central configurations, periodic orbits, and Hamiltonian systems*. [S.l.]: Springer, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 24.
- MACMILLAN, W.; BARTKY, W. Permanent configurations in the problem of four bodies. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 34, n. 4, p. 838–875, 1932. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 44.
- MCGEHEE, R. Singularities in classical celestial mechanics. In: *Proceedings of the International Congress of mathematicians, Helsinki*. [S.l.: s.n.], 1978. p. 827–834. Citado na página 21.
- MCGEHEE, R. Von zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics. *Expo. Math*, v. 4, p. 335–345, 1986. Citado na página 21.
- MEYER, K. R.; SCHMIDT, D. S. Bifurcations of relative equilibria in the 4-and 5-body problem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 8, n. 8\*, p. 215–225, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 65.
- MOECKEL, R. Central configurations. *Scholarpedia*, v. 9, n. 4, p. 10667, 2014. Revision #142886. Citado 4 vezes nas páginas 11, 22, 23 e 24.

- POLLARD, H. Mathematical introduction to celestial mechanics. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall [1966]*, 1966. Citado na página 35.
- ROBERTS, G. E. A continuum of relative equilibria in the five-body problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 127, n. 3-4, p. 141–145, 1999. Citado na página 66.
- SAARI, D. G. The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n-body problem. *Journal of differential equations*, Academic Press, v. 55, n. 3, p. 300–329, 1984. Citado na página 21.
- SANTOS, A. A. et al. Continuation and bifurcations of concave central configurations in the four and five body-problems for homogeneous force laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 446, n. 2, p. 1743–1768, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.
- SCHMIDT, D. S. Central configurations in  $r_2$  and  $r_3$ . *Contemp. Math*, v. 81, p. 59–76, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 12, 46 e 68.
- WINTNER, A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. [S.l.: s.n.], 2014. 242 p. Citado na página 19.

# APÊNDICE A – CÓDIGOS MAPLE DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE QUATRO CORPOS

Neste apêndice exibimos primeiro o código MAPLE utilizado para calcular o jacobiano da função  $W$ , (ver (5.2) no texto). Em seguida exibimos os cálculos que determinam os vetores  $F'(0)$  e  $F''(0)$ , (ver (5.4) e (5.7)), como também as dependências dos  $b_i$ 's,  $i = 1, \dots, 6$  em função de  $b_7$  e  $b_8$  e dos  $c_i$ 's,  $i = 1, \dots, 6$  em função de  $b_7, b_8, c_7$  e  $c_8$ . Por fim, exibimos o código que determina o sistema de equações (5.8).

Ao longo dos programas MAPLE mencionados acima, faremos comentários detalhando o uso dos comandos para obter os resultados.

Para efetuar os cálculos deste apêndice, usamos a relação (3.6) do capítulo 3. Seguindo a proposta de áreas orientadas do capítulo 1 de [Cabral e Diacu 2002]. Usando diretamente as derivadas dos determinantes de Cayley-Menger  $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}^2}$ , devemos obter os mesmos resultados, sem a necessidade de considerações sobre os sinais das áreas  $\Delta_i$ .

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
> With(LinearAlgebra):

> # Primeiro definimos as funções que serão usadas nos cálculos. Cada  $g_i$ ,  $i=1,\dots,8$ 
    são os gradientes das funções  $f_i$ 's, com cada  $f_i=0$  uma equação do sistema
    (5.1).
```

```
> F := Matrix(5, 5, {(1, 1) = 0, (1, 2) = 1, (1, 3) = 1, (1, 4) =
1, (1, 5) = 1, (2, 1) = 1, (2, 2) = 0, (2, 3) = r_12^2, (2, 4) =
r_13^2, (2, 5) = r_14^2, (3, 1) = 1, (3, 2) = r_12^2, (3, 3) =
0, (3, 4) = r_23^2, (3, 5) = r_24^2, (4, 1) = 1, (4, 2) =
r_13^2, (4, 3) = r_23^2, (4, 4) = 0, (4, 5) = r_34^2, (5, 1) =
1, (5, 2) = r_14^2, (5, 3) = r_24^2, (5, 4) = r_34^2, (5, 5) =
0});
```

$$F := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> LinearAlgebra:-Determinant( (1) )
-2 r_12^4 r_34^2 - 2 r_12^2 r_13^2 r_23^2 + 2 r_12^2 r_13^2 r_24^2 + 2 r_12^2 r_13^2 r_34^2 + 2 r_12^2 r_14^2 r_23^2 - 2 r_12^2 r_14^2 r_24^2
+ 2 r_12^2 r_14^2 r_34^2 + 2 r_12^2 r_23^2 r_34^2 + 2 r_12^2 r_24^2 r_34^2 - 2 r_12^2 r_34^4 - 2 r_13^4 r_24^2 + 2 r_13^2 r_14^2 r_23^2
+ 2 r_13^2 r_14^2 r_24^2 - 2 r_13^2 r_14^2 r_34^2 + 2 r_13^2 r_23^2 r_24^2 - 2 r_13^2 r_24^4 + 2 r_13^2 r_24^2 r_34^2 - 2 r_14^4 r_23^2
- 2 r_14^2 r_23^4 + 2 r_14^2 r_23^2 r_24^2 + 2 r_14^2 r_23^2 r_34^2 - 2 r_23^2 r_24^2 r_34^2
```

```
> g1:=Gradient(-2*r_12^4*r_34^2-2*r_12^2*r_13^2*r_23^2+2*
r_12^2*r_13^2*r_24^2+2*r_12^2*r_13^2*r_34^2+2*r_12^2*
r_14^2*r_23^2-2*r_12^2*r_14^2*r_24^2+2*r_12^2*r_14^2*
r_34^2+2*r_12^2*r_23^2*r_34^2+2*r_12^2*r_24^2*r_34^2-2*
r_12^2*r_34^4-2*r_13^4*r_24^2+2*r_13^2*r_14^2*r_23^2+2*
r_13^2*r_14^2*r_24^2-2*r_13^2*r_14^2*r_34^2+2*r_13^2*
r_23^2*r_24^2-2*r_13^2*r_24^4+2*r_13^2*r_24^2*r_34^2-2*
r_14^4*r_23^2-2*r_14^2*r_23^4+2*r_14^2*r_23^2*r_24^2+2*
r_14^2*r_23^2*r_34^2-2*r_23^2*r_24^2*r_34^2, [lambda, sigma,
r_12, r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g2:=Gradient((m*r_14^2+m*r_24^2+m*r_34^2+r_12^2+r_13^2+
r_23^2)/(m+3)-9-3*m, [lambda, sigma, r_12, r_13, r_23, r_14,
r_24, r_34]):
```

```
> g3:=Gradient(lambda-1/r_12^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+r_23+
r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+r_23-
```

```
r_34))*sqrt((((r_14+r_13+r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-
r_13+r_34))*(r_14+r_13-r_34)), [lambda, sigma, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g4:=Gradient(lambda-1/r_13^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+r_23+
r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+r_23-
r_34))*sqrt((((r_14+r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*(r_14-
r_12+r_24))*(r_14+r_12-r_24)), [lambda, sigma, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g5:=Gradient( lambda-1/r_23^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_14+r_13+
r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-r_13+r_34))*(r_14+r_13-
r_34))*sqrt((((r_14+r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*(r_14-
r_12+r_24))*(r_14+r_12-r_24)), [lambda, sigma, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g6:=Gradient(m*(lambda-1/r_14^3)-(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+
r_23+r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+
r_23-r_34))*sqrt((((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)), [lambda, sigma, r_12,
r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g7:=Gradient(m*(lambda-1/r_24^3)-(1/16)*sigma*sqrt((((r_14+
r_13+r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-r_13+r_34))*(r_14+
r_13-r_34))*sqrt((((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)), [lambda, sigma, r_12,
r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g8:=Gradient(m*(lambda-1/r_34^3)-(1/16)*sigma*sqrt((((r_14+
r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*(r_14-r_12+r_24))*(r_14+
r_12-r_24))*sqrt((((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)), [lambda, sigma, r_12,
r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> #A matriz M abaixo é a matriz jacobiana de W.
```

```
> M:=<<g1>|<g2>|<g3>|<g4>|<g5>|<g6>|<g7>|<g8>>:
```

```
> #Substituindo z= z_0 em M, onde z_0 é a configuração central do triângulo
equilátero centrado, obtemos:
```

```
> M1:=subs(lambda=(3*m+sqrt(3))/(9+3*m), sigma= 16*m*(sqrt(3)-9)/
(27*(3+m)), r_12 =sqrt(3), r_13=sqrt(3), r_23=sqrt(3), r_14=1,
r_24=1, r_34=1, M);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 0, 0, 1, 1, 1, m, m, m \end{bmatrix},$$

$$\left[ 0, 0, \frac{3}{16} (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}), \frac{3}{16} (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right]$$

(3)

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{3}), -\frac{1}{16} \sqrt{3} \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{27}, \\
 & \left. -\frac{1}{16} \sqrt{3} \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{27}, -\frac{1}{16} \sqrt{3} \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{27} \right], \\
 & \left[ -12\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{m+3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \frac{m(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{27m+81}, \right. \\
 & \frac{1}{2} \frac{m(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{27m+81}, \\
 & -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81}, \\
 & -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81}, \\
 & -\frac{1}{6} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{3}\sqrt{27}(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{(27m+81)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
 & \left. -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81} \right], \\
 & \left[ -12\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{m+3}, \frac{1}{2} \frac{m(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{27m+81}, \frac{1}{3}, \right. \\
 & \frac{1}{2} \frac{m(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{27m+81}, \\
 & -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81}, \\
 & -\frac{1}{6} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{3}\sqrt{27}(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{(27m+81)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
 & -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81}, \\
 & \left. -\frac{2}{3} \frac{m(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{27}}{27m+81} \right], \\
 & \left[ -12\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{m+3}, \frac{1}{2} \frac{m(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{27m+81}, \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -7776 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} \sqrt{3} m^3 + 3591 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} m^4 \\
 & - 1296 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{5/2} m - 4576 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} \sqrt{3} m^2 \\
 & + 13203 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} m^3 + 17424 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} \sqrt{3} m \\
 & + 8433 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} m^2 + 945 \sqrt{27} \sqrt{3} m^3 + 2916 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} \sqrt{3} \\
 & - \sqrt{3})^{3/2} \sqrt{3} - 18279 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} m + 3321 \sqrt{27} \sqrt{3} m^2 \\
 & - 912 \sqrt{27} m^3 - 26244 \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} + 2523 \sqrt{27} \sqrt{3} m - 5544 \sqrt{27} m^2 \\
 & + 3195 \sqrt{27} \sqrt{3} - 8640 \sqrt{27} m - 648 \sqrt{27}) \sqrt{3} m^2) / \left( \left( (2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \right)^{3/2} ( \right. \\
 & \left. - 2 + \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3}) (m + 3)^3 \right)
 \end{aligned}$$

> *simplify*( (4) )

$$-\frac{3}{2} \frac{m^2 \sqrt{3} (180 \sqrt{3} m^2 + 88 \sqrt{3} m - 399 m^2 - 12 \sqrt{3} - 18 m - 31)}{m + 3} \quad (5)$$

> *solve*( { (5)=0 } )

$$\{m=0\}, \{m=0\}, \left\{ m = -\frac{1}{3} \frac{44 \sqrt{3} - 9}{60 \sqrt{3} - 133} \right\}, \left\{ m = -\frac{1}{3} \frac{44 \sqrt{3} - 9}{60 \sqrt{3} - 133} \right\} \quad (6)$$

> **m1 := (- (1/3) \* (44\*sqrt(3)-9) / (60\*sqrt(3)-133)) ;**

$$m1 := -\frac{\frac{44}{3} \sqrt{3} - 3}{60 \sqrt{3} - 133} \quad (7)$$

> *rationalize*( (7) )

$$\frac{1}{20667} (44 \sqrt{3} - 9) (133 + 60 \sqrt{3}) \quad (8)$$

> *expand*( (8) )

$$\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{83} \quad (9)$$

```
> restart;
```

```
>
```

```
> #Iniciamos definindo M como a matriz (5.5) do termo linear da expansão da
    função F(ε). Substituímos o valor da massa crítica nesta matriz e chamamos
    M2 a matriz após esta substituição. O vetor V definido abaixo é o vetor (5.6).
```

```
>
```

```
> M:=Matrix(8, 8, {(1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -12*sqrt(3),
(1, 4) = -12*sqrt(3), (1, 5) = -12*sqrt(3), (1, 6) = 36, (1, 7) =
36, (1, 8) = 36, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 2*sqrt(3)/
(m+3), (2, 4) = 2*sqrt(3)/(m+3), (2, 5) = 2*sqrt(3)/(m+3), (2, 6)
= 2*m/(m+3), (2, 7) = 2*m/(m+3), (2, 8) = 2*m/(m+3), (3, 1) = 1,
(3, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*(2-sqrt(3)), (3, 3) = 1/3, (3, 4) =
(1/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3)
)/(27*m+81), (3, 5) = (1/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(27*m+81), (3, 6) = 6*m*(sqrt(3)-9)/
(27*m+81), (3, 7) = 6*m*(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (3, 8) = 12*m*
(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (4, 1) = 1, (4, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*
(2-sqrt(3)), (4, 3) = (1/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(27*m+81), (4, 4) = 1/3, (4, 5) = (1/2)
*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/
(27*m+81), (4, 6) = 6*m*(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (4, 7) = 12*m*
(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (4, 8) = 6*m*(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (5, 1)
= 1, (5, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*(2-sqrt(3)), (5, 3) = (1/2)*m*
(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(27*
m+81), (5, 4) = (1/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*
(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(27*m+81), (5, 5) = 1/3, (5, 6) = 12*m*(sqrt(3)
-9)/(27*m+81), (5, 7) = 6*m*(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (5, 8) = 6*m*
(sqrt(3)-9)/(27*m+81), (6, 1) = m, (6, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3))), (6, 3) = -2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81), (6, 4) = -2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81), (6, 5) = -(3/2)*m*(sqrt
(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((27*m+81)
*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81), (6, 6) = 3*m, (6, 7) = -18*m*
(sqrt(3)-9)/((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))), (6, 8) =
-18*m*(sqrt(3)-9)/((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))), (7,
1) = m, (7, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))), (7, 3) =
-2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81),
(7, 4) = -(3/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt
(3))*sqrt(3))/((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-2*m*(sqrt
(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81), (7, 5) =
-2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81),
(7, 6) = -18*m*(sqrt(3)-9)/((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)
))), (7, 7) = 3*m, (7, 8) = -18*m*(sqrt(3)-9)/((27*m+81)*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))), (8, 1) = m, (8, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3))), (8, 3) = -(3/2)*m*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+
(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3))))-2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)
/(27*m+81), (8, 4) = -2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)
))*sqrt(3)/(27*m+81), (8, 5) = -2*m*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(27*m+81), (8, 6) = -18*m*(sqrt(3)-9)/((27*
m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))), (8, 7) = -18*m*(sqrt(3)-9)/
((27*m+81)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))), (8, 8) = 3*m)}):
```

```

> subs(m=(64/249)*sqrt(3)+27/83,M):
>
> B:=Vector[column]([ b1,b2,b3 , b4,b5,b6,b7,b8]):
>
> M2:=Matrix(8, 8, {(1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -12*sqrt(3),
(1, 4) = -12*sqrt(3), (1, 5) = -12*sqrt(3), (1, 6) = 36, (1, 7) =
36, (1, 8) = 36, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 2*sqrt(3)/((
64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 4) = 2*sqrt(3)/((64/249)*sqrt(3)
+276/83), (2, 5) = 2*sqrt(3)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 6) =
((128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 7) = (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 8) = (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (3, 1) = 1,
(3, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*(2-sqrt(3)), (3, 3) = 1/3, (3, 4) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (3, 5) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (3, 6) = (
(128/83)*sqrt(3)+162/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83),
(3, 7) = ((128/83)*sqrt(3)+162/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)
+7452/83), (3, 8) = ((256/83)*sqrt(3)+324/83)*(sqrt(3)-9)/((
576/83)*sqrt(3)+7452/83), (4, 1) = 1, (4, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt
(3))*(2-sqrt(3)), (4, 3) = (1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt
(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*
sqrt(3)+7452/83), (4, 4) = 1/3, (4, 5) = (1/2)*((64/249)*sqrt(3)
+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3)
)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (4, 6) = ((128/83)*sqrt(3)+162/83)*
(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (4, 7) = ((256/83)*sqrt
(3)+324/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (4, 8) = (
(128/83)*sqrt(3)+162/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83),
(5, 1) = 1, (5, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*(2-sqrt(3)), (5, 3) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (5, 4) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (5, 5) =
1/3, (5, 6) = ((256/83)*sqrt(3)+324/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*
sqrt(3)+7452/83), (5, 7) = ((128/83)*sqrt(3)+162/83)*(sqrt(3)-9)/
((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (5, 8) = ((128/83)*sqrt(3)+162/83)*
(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (6, 1) = (64/249)*sqrt(3)
+27/83, (6, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))), (6, 3) =
-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt
(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (6, 4) = -((128/249)*
sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/
((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (6, 5) = -(3/2)*((64/249)*sqrt(3)
+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3)
)/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-(
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)
))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (6, 6) = (64/83)*sqrt(3)
+81/83, (6, 7) = -((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)/((
(576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))), (6, 8)
= -((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)/(((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))), (7, 1) = (64/249)*sqrt
(3)+27/83, (7, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))), (7, 3)
= -((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt
(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (7, 4) = -(3/2)*((
64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-
sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))

```

```
-sqrt(3))) - ((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))
)*sqrt(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (7, 5) = - (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))
)*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (7, 6) = -((384/83)*sqrt(3)
+486/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))
*(2-sqrt(3))), (7, 7) = (64/83)*sqrt(3)+81/83, (7, 8) = - (
(384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*
sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))), (8, 1) = (64/249)*sqrt(3)+27/83,
(8, 2) = -(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3)), (8, 3) = -(3/2)* (
(64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))
)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3)) - ((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))
)*sqrt(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (8, 4) = - (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))
)*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (8, 5) = -((128/249)*sqrt
(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3)/ (
(576/83)*sqrt(3)+7452/83), (8, 6) = -((384/83)*sqrt(3)+486/83)*
(sqrt(3)-9)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))
)*sqrt(3))), (8, 7) = -((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)/((
(576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))), (8, 8)
= (64/83)*sqrt(3)+81/83):
```

>

```
> M2B:=Vector(8, {(1) = -12*sqrt(3)*b3-12*sqrt(3)*b4-12*sqrt(3)*
b5+36*b6+36*b7+36*b8, (2) = 2*sqrt(3)*b3/((64/249)*sqrt(3)
+276/83)+2*sqrt(3)*b4/((64/249)*sqrt(3)+276/83)+2*sqrt(3)*b5/ (
(64/249)*sqrt(3)+276/83)+((128/249)*sqrt(3)+54/83)*b6/((64/249)*
sqrt(3)+276/83)+((128/249)*sqrt(3)+54/83)*b7/((64/249)*sqrt(3)
+276/83)+((128/249)*sqrt(3)+54/83)*b8/((64/249)*sqrt(3)+276/83),
(3) = b1+(3/8+(3/16)*sqrt(3))*sqrt(3))*b2+(1/3)*b3+(1/2)* (
(64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))
)*sqrt(3))*b4/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(1/2)*((64/249)*
sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))*
sqrt(3))*b5/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt(3)+162/83)*
(sqrt(3)-9)*b6/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt(3)
+162/83)*(sqrt(3)-9)*b7/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((256/83)*sqrt
(3)+324/83)*(sqrt(3)-9)*b8/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (4) = b1+
(3/8+(3/16)*sqrt(3))*sqrt(3))*b2+(1/2)*((64/249)*sqrt(3)
+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3))
)*b3/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(1/3)*b4+(1/2)*((64/249)*sqrt(3)
+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3))
)*b5/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt(3)+162/83)*(sqrt
(3)-9)*b6/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((256/83)*sqrt(3)+324/83)*
(sqrt(3)-9)*b7/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt(3)
+162/83)*(sqrt(3)-9)*b8/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (5) = b1+
(3/8+(3/16)*sqrt(3))*sqrt(3))*b2+(1/2)*((64/249)*sqrt(3)
+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3))
)*b3/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*
(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3))*b4/ (
(576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(1/3)*b5+((256/83)*sqrt(3)+324/83)*
(sqrt(3)-9)*b6/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt(3)
+162/83)*(sqrt(3)-9)*b7/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)*sqrt
(3)+162/83)*(sqrt(3)-9)*b8/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (6) = (
(64/249)*sqrt(3)+27/83)*b1-(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))*
b2-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))
)*sqrt(3))*b3/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)-((128/249)*sqrt(3)
+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*sqrt(3))*sqrt(3))*b4/ (
```

```
(576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(-3/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt
(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(((576/83)*
sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-((128/249)*sqrt
(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(
(576/83)*sqrt(3)+7452/83))*b5+((64/83)*sqrt(3)+81/83)*b6-(
(384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b7/(((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-((384/83)*sqrt(3)
+486/83)*(sqrt(3)-9)*b8/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3))))), (7) = ((64/249)*sqrt(3)+27/83)*b1-(9/16)*sqrt
((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b2-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)
-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b3/((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)+(-3/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt
(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-((128/249)*sqrt(3)
+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/(
(576/83)*sqrt(3)+7452/83))*b4-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)
-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b5/((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)-((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b6/(((576/83)*
sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))+((64/83)*sqrt(3)
+81/83)*b7-((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b8/(((576/83)*
sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))), (8) = ((64/249)*
sqrt(3)+27/83)*b1-(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b2+(-3/2)
*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*
(2-sqrt(3))*sqrt(3))/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3)
)*(2-sqrt(3))))-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83))*b3-(
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)
))*sqrt(3)*b4/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)-((128/249)*sqrt(3)+54/83)
*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b5/((576/83)*
sqrt(3)+7452/83)-((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b6/((
(576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))-((
(384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b7/(((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))+((64/83)*sqrt(3)+81/83)*
b8)):

```

```
> V:=Vector(8, {(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0, (4) = 0, (5) = 0, (6) =
(3*m+sqrt(3))/(9+3*m)-1, (7) = (3*m+sqrt(3))/(9+3*m)-1, (8) = (3*
m+sqrt(3))/(9+3*m)-1}):

```

```
> V1:=subs(m=(64/249)*sqrt(3)+27/83, V):

```

```
> M2B + V1:

```

> *#Obtido o vetor (5.4) acima, denotamos por  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  as suas entradas:*

```
> S_1:=(-12*sqrt(3)*b3-12*sqrt(3)*b4-12*sqrt(3)*b5+36*b6+36*b7+36*
b8):

```

```
> S_2:=(2*sqrt(3)*b3/((64/249)*sqrt(3)+276/83)+2*sqrt(3)*b4/(
(64/249)*sqrt(3)+276/83)+2*sqrt(3)*b5/((64/249)*sqrt(3)+276/83)+
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*b6/((64/249)*sqrt(3)+276/83)+((128/249)*
sqrt(3)+54/83)*b7/((64/249)*sqrt(3)+276/83)+((128/249)*sqrt(3)

```

+54/83)\*b8/((64/249)\*sqrt(3)+276/83)) :

S\_3:=(b1+(3/8+(3/16)\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*b2+(1/3)\*b3+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b4/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b5/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b6/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b7/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((256/83)\*sqrt(3)+324/83)\*(sqrt(3)-9)\*b8/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)) :

S\_4:=(b1+(3/8+(3/16)\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*b2+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b3/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+(1/3)\*b4+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b5/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b6/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((256/83)\*sqrt(3)+324/83)\*(sqrt(3)-9)\*b7/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b8/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)) :

S\_5:=(b1+(3/8+(3/16)\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*b2+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b3/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+(1/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3))\*b4/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+(1/3)\*b5+((256/83)\*sqrt(3)+324/83)\*(sqrt(3)-9)\*b6/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b7/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+((128/83)\*sqrt(3)+162/83)\*(sqrt(3)-9)\*b8/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)) :

S\_6:=(((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*b1-(9/16)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3))))\*b2-((128/249)\*sqrt(3)+54/83)\*(sqrt(3)-9)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3)))\*sqrt(3)\*b3/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)-((128/249)\*sqrt(3)+54/83)\*(sqrt(3)-9)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3)))\*sqrt(3)\*b4/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)+(-(3/2)\*((64/249)\*sqrt(3)+27/83)\*(sqrt(3)-9)\*(-6\*sqrt(3)+(4+2\*sqrt(3))\*(2-sqrt(3))\*sqrt(3)))/(((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3))))-((128/249)\*sqrt(3)+54/83)\*(sqrt(3)-9)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3)))\*sqrt(3)/((576/83)\*sqrt(3)+7452/83))\*b5+((64/83)\*sqrt(3)+81/83)\*b6-((384/83)\*sqrt(3)+486/83)\*(sqrt(3)-9)\*b7/(((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3))))-((384/83)\*sqrt(3)+486/83)\*(sqrt(3)-9)\*b8/(((576/83)\*sqrt(3)+7452/83)\*sqrt((2+sqrt(3))\*(2-sqrt(3)))))+((147/83)\*sqrt(3)+81/83)/(828/83+(64/83)\*sqrt(3))-1) :

#Resolvendo as equações obtidas fazendo as seis primeiras componentes de F'(0) iguais a zero, ver (5.4), encontramos

solve({S\_1=0,S\_2=0,S\_3=0,S\_4=0,S\_5=0,S\_6=0},[b1,b2,b3,b4,b5,b6]);

$$\left[ \begin{array}{l} b1 = \frac{3}{4} \left( -268758648 b7 - 268758648 b8 + 288180648 \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & -61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b7 \\
 & + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b8 - 221225544 b7 \sqrt{3} - 221225544 b8 \sqrt{3} \\
 & + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b7 \\
 & + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b8) / ((-498 \sqrt{3} \\
 & + 4482) (19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \\
 & + 11952 \sqrt{3} + 154629)), b2 = (4 (-268758648 b7 - 268758648 b8 \\
 & + 288180648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \\
 & + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b7 + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b8 \\
 & - 221225544 b7 \sqrt{3} - 221225544 b8 \sqrt{3} + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b7 \\
 & + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b8) / ((-19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
 & - 14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} - 11952 \sqrt{3} - 154629) (-498 \sqrt{3} + 4482)), \\
 & b3 = -\frac{6 b8 (-537 - 495 \sqrt{3})}{-498 \sqrt{3} + 4482}, b4 = -\frac{6 b7 (-537 - 495 \sqrt{3})}{-498 \sqrt{3} + 4482}, b5 \\
 & = \frac{6 (-537 b7 - 537 b8 - 495 b7 \sqrt{3} - 495 b8 \sqrt{3})}{-498 \sqrt{3} + 4482}, b6 = -b8 - b7 \Big]
 \end{aligned}$$

>  
>  
>  
>  
>  
>

*#Substituindo as dependências explícitas das seis variáveis b i, i=1,...6, nas duas últimas funções de (5.4), verificamos que ambas são identicamente nulas.*

```

> S_7:=(((64/249)*sqrt(3)+27/83)*b1-(9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b2-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b3/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)+(-(3/2)*(64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt(3))*(2-

```

```
sqrt(3))*sqrt(3))/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-
sqrt(3))))-((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3)
)*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)+7452/83))*b4-((128/249)*
sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*
b5/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)-((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)
-9)*b6/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))
+((64/83)*sqrt(3)+81/83)*b7-((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)
*b8/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))+(
(147/83)*sqrt(3)+81/83)/(828/83+(64/83)*sqrt(3))-1):
```

>

```
> subs(b1 = (3/4)*(-268758648*b7-268758648*b8+288180648*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-61752996*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt
(3)+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b7+268758648*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b8-221225544*b7*sqrt(3)-221225544*b8*sqrt
(3)+221225544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b7+221225544*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b8)/((-498*sqrt(3)+4482)*
(19839*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))+14544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-
sqrt(3)))*sqrt(3)+11952*sqrt(3)+154629)), b2 = (4*(-268758648*b7
-268758648*b8+288180648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-61752996*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))*b7+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b8
-221225544*b7*sqrt(3)-221225544*b8*sqrt(3)+221225544*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b7+221225544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt
(3)))*sqrt(3)*b8)/((-19839*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-14544*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)-11952*sqrt(3)-154629)*
(-498*sqrt(3)+4482)), b3 = -6*b8*(-537-495*sqrt(3))/(-498*sqrt(3)
+4482), b4 = -6*b7*(-537-495*sqrt(3))/(-498*sqrt(3)+4482), b5 =
(6*(-537*b7-537*b8-495*b7*sqrt(3)-495*b8*sqrt(3)))/(-498*sqrt(3)
+4482), b6 = -b8-b7, S_7);
```

$$\frac{3}{4} \left( \left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{83} \right) (-268758648 b_7 - 268758648 b_8 \right. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 288180648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \\
 &+ 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b_7 + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b_8 \\
 &- 221225544 b_7 \sqrt{3} - 221225544 b_8 \sqrt{3} + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b_7 \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b_8) \Big/ \left( (-498 \sqrt{3} \right. \\
 &+ 4482) \left( 19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \right. \\
 &+ 11952 \sqrt{3} + 154629) \Big) - \frac{9}{4} \left( \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} (-268758648 b_7 \right. \\
 &- 268758648 b_8 + 288180648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
 &- 61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b_7 \\
 &+ 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b_8 - 221225544 b_7 \sqrt{3} - 221225544 b_8 \sqrt{3} \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b_7 \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b_8) \Big/ \left( (-19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} - 11952 \sqrt{3} - 154629) (-498 \sqrt{3} + 4482) \\
 & + \frac{1}{(-498 \sqrt{3} + 4482) \left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right)} \left( 6 \left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} \right. \\
 & \left. - 9) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \right) b8 (-537 - 495 \sqrt{3}) \\
 & - \frac{1}{-498 \sqrt{3} + 4482} \left( 6 \left( \right. \right. \\
 & \left. \frac{3}{2} \frac{\left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6 \sqrt{3} + (4 + 2 \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \sqrt{3})}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3}}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \right) b7 (-537 \right. \\
 & \left. - 495 \sqrt{3}) \right) - \frac{1}{(-498 \sqrt{3} + 4482) \left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right)} \left( 6 \left( \frac{128}{249} \sqrt{3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} (-537 b7 - 537 b8 - 495 b7 \sqrt{3} \right. \\
 & \left. - 495 b8 \sqrt{3}) \right) - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) (-b8 - b7)}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} + \left( \frac{64}{83} \sqrt{3} \right. \\
 & \left. + \frac{81}{83} \right) b7 - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) b8}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} + \frac{147}{83} \sqrt{3} + \frac{81}{83} \\
 & - 1
 \end{aligned}$$

> *simplify*( (2) )

0

(3)

```

> S_8 := ((64/249)*sqrt(3)+27/83)*b1 - (9/16)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))
*b2 + (-3/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)
+(4+2*sqrt(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))) - ((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)
-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)/((576/83)*sqrt(3)
+7452/83)*b3 - ((128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3)
)*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b4/((576/83)*sqrt(3)+7452/83) -
(128/249)*sqrt(3)+54/83)*(sqrt(3)-9)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)
))*sqrt(3)*b5/((576/83)*sqrt(3)+7452/83) - ((384/83)*sqrt(3)+486/83)
*(sqrt(3)-9)*b6/((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-

```

```
sqrt(3))) - ((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)*b7/(((576/83)*
sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))) + ((64/83)*sqrt(3)
+81/83)*b8+((147/83)*sqrt(3)+81/83)/(828/83+(64/83)*sqrt(3))-1:
```

>

```
subs(b1 = (3/4)*(-268758648*b7-268758648*b8+288180648*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-61752996*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt
(3)+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b7+268758648*sqrt((2+
sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b8-221225544*b7*sqrt(3)-221225544*b8*sqrt
(3)+221225544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b7+221225544*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b8)/((-498*sqrt(3)+4482)*
(19839*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))+14544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-
sqrt(3)))*sqrt(3)+11952*sqrt(3)+154629)), b2 = (4*(-268758648*b7
-268758648*b8+288180648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-61752996*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*
(2-sqrt(3)))*b7+268758648*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*b8
-221225544*b7*sqrt(3)-221225544*b8*sqrt(3)+221225544*sqrt((2+sqrt
(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)*b7+221225544*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt
(3)))*sqrt(3)*b8)/((-19839*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))-14544*
sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3)))*sqrt(3)-11952*sqrt(3)-154629)*
(-498*sqrt(3)+4482)), b3 = -6*b8*(-537-495*sqrt(3))/(-498*sqrt(3)
+4482), b4 = -6*b7*(-537-495*sqrt(3))/(-498*sqrt(3)+4482), b5 =
(6*(-537*b7-537*b8-495*b7*sqrt(3)-495*b8*sqrt(3)))/(-498*sqrt(3)
+4482), b6 = -b8-b7, S_8);
```

$$\frac{3}{4} \left( \left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{83} \right) (-268758648 b7 - 268758648 b8 \right. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &+ 288180648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - 61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \\
 &+ 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b7 + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b8 \\
 &- 221225544 b7 \sqrt{3} - 221225544 b8 \sqrt{3} + 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b7 \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b8) \Big/ \left( (-498 \sqrt{3} \right. \\
 &+ 4482) \left( 19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} \right. \\
 &+ 11952 \sqrt{3} + 154629) \Big) - \frac{9}{4} \left( \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} (-268758648 b7 \right. \\
 &- 268758648 b8 + 288180648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\
 &- 61752996 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} + 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b7 \\
 &+ 268758648 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} b8 - 221225544 b7 \sqrt{3} - 221225544 b8 \sqrt{3} \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b7 \\
 &+ 221225544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} b8) \Big/ \left( (-19839 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \right. \\
 &- 14544 \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \sqrt{3} - 11952 \sqrt{3} - 154629) (-498 \sqrt{3} \\
 &+ 4482) \Big) - \frac{1}{-498 \sqrt{3} + 4482} \left( 6 \left( \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{83}\right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\sqrt{3})}{\left(\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} \\
 & - \left. \frac{\left(\frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83}\right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3}}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \right) b8 (-537 \\
 & - 495 \sqrt{3}) \\
 & + \frac{1}{(-498 \sqrt{3} + 4482) \left(\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)} \left( 6 \left(\frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83}\right) (\sqrt{3} \right. \\
 & \left. - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3} b7 (-537 - 495 \sqrt{3}) \right) \\
 & - \frac{1}{(-498 \sqrt{3} + 4482) \left(\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)} \left( 6 \left(\frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83}\right) (\sqrt{3} \right. \\
 & \left. - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3} (-537 b7 - 537 b8 - 495 b7 \sqrt{3} - 495 b8 \sqrt{3}) \right) \\
 & - \frac{\left(\frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83}\right) (\sqrt{3} - 9) (-b8 - b7)}{\left(\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} \\
 & - \frac{\left(\frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83}\right) (\sqrt{3} - 9) b7}{\left(\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} + \left(\frac{64}{83} \sqrt{3} + \frac{81}{83}\right) b8 \\
 & + \frac{\frac{147}{83} \sqrt{3} + \frac{81}{83}}{\frac{828}{83} + \frac{64}{83} \sqrt{3}} - 1
 \end{aligned}$$

> simplify( (4) )

0

(5)

```

> restart:
> with(VectorCalculus):
> With(LinearAlgebra):
>
> #Primeiro definimos as funções que serão usadas para calcular o primeiro termo
de (5.7). As funções  $g_i$ ,  $i=1, \dots, 8$ , são as funções que definimos para encontrar
a massa crítica do sistema (note que tais funções foram denotadas por  $g_i$ 
anteriormente). Em cada uma dessas funções substituímos suas variáveis pela
expansão em epsilon de cada uma das variáveis, até a segunda ordem.
Derivamos em epsilon e em seguida fazemos epsilon igual a zero. Observe que
as  $g_{ij}$  são obtidas das  $g_i$ 's após substituições e derivações.
>
>
> g_1:=Gradient(-2*r_12^4*r_34^2-2*r_12^2*r_13^2*r_23^2+2*
r_12^2*r_13^2*r_24^2+2*r_12^2*r_13^2*r_34^2+2*r_12^2*
r_14^2*r_23^2-2*r_12^2*r_14^2*r_24^2+2*r_12^2*r_14^2*
r_34^2+2*r_12^2*r_23^2*r_34^2+2*r_12^2*r_24^2*r_34^2-2*
r_12^2*r_34^4-2*r_13^4*r_24^2+2*r_13^2*r_14^2*r_23^2+2*
r_13^2*r_14^2*r_24^2-2*r_13^2*r_14^2*r_34^2+2*r_13^2*
r_23^2*r_24^2-2*r_13^2*r_24^4+2*r_13^2*r_24^2*r_34^2-2*
r_14^4*r_23^2-2*r_14^2*r_23^4+2*r_14^2*r_23^2*r_24^2+2*
r_14^2*r_23^2*r_34^2-2*r_23^2*r_24^2*r_34^2,[lambda,sigma,
r_12,r_13,r_23,r_14,r_24,r_34]):
>
> g_12:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2,g_1):
>
> g_13:=diff(g_12,epsilon):
> g_14:=subs(epsilon=0,g_13):
>
> g_2:=Gradient((m*r_14^2+m*r_24^2+m*r_34^2+r_12^2+r_13^2+
r_23^2)/(m+3)-9-3*m, [lambda,sigma,r_12,r_13,r_23,r_14,
r_24,r_34]):
>
> g_21:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2,g_2):
>
> g_22:=diff(g_21,epsilon):
> g_23:=subs(epsilon=0,g_22):
>
>
> g_3:=Gradient(lambda-1/r_12^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+r_23+
r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+r_23-

```

```
r_34))*sqrt((((r_14+r_13+r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-
r_13+r_34))*(r_14+r_13-r_34)), [lambda, sigma, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g_31:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2, g_3):
```

```
> g_32:=diff(g_31, epsilon):
```

```
> g_33:=subs(epsilon=0, g_32):
```

```
>
```

```
> g_4:=Gradient(lambda-1/r_13^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+r_23+
r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+r_23-
r_34))*sqrt((((r_14+r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*(r_14-
r_12+r_24))*(r_14+r_12-r_24)), [lambda, sigma, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g_41:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2, g_4):
```

```
> g_42:=diff(g_41, epsilon):
```

```
> g_43:=subs(epsilon=0, g_42):
```

```
> g_5:=Gradient( lambda-1/r_23^3+(1/16)*sigma*sqrt((((r_14+
r_13+r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-r_13+r_34))*(r_14+
r_13-r_34))*sqrt((((r_14+r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*
(r_14-r_12+r_24))*(r_14+r_12-r_24)), [lambda, sigma, r_12,
r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g_51:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2, g_5):
```

```
> g_52:=diff(g_51, epsilon):
```

```
> g_53:=subs(epsilon=0, g_52):
```

```
>
```

```
> g_6:=Gradient(m*(lambda-1/r_14^3)-(1/16)*sigma*sqrt((((r_24+
r_23+r_34)*(-r_24+r_23+r_34))*(r_24-r_23+r_34))*(r_24+
r_23-r_34))*sqrt((((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)), [lambda, sigma, r_12,
r_13, r_23, r_14, r_24, r_34]):
```

```
> g_61:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
```

```

r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2,g_6):
=>
> g_62:=diff(g_61,epsilon):
> g_63:=subs(epsilon=0,g_62):
=>
> g_7:=Gradient(m*(lambda-1/r_24^3)-(1/16)*sigma*sqrt(((r_14+
r_13+r_34)*(-r_14+r_13+r_34))*(r_14-r_13+r_34))*(r_14+
r_13-r_34))*sqrt(((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)),[lambda,sigma,r_12,
r_13,r_23, r_14,r_24, r_34]):
=>
> g_71:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2,g_7):
=>
> g_72:=diff(g_71,epsilon):
> g_73:=subs(epsilon=0,g_72):
=>
> g_8:=Gradient(m*(lambda-1/r_34^3)-(1/16)*sigma*sqrt(((r_14+
r_12+r_24)*(-r_14+r_12+r_24))*(r_14-r_12+r_24))*(r_14+
r_12-r_24))*sqrt(((r_12+r_23+r_13)*(-r_12+r_23+r_13))*
(r_12-r_23+r_13))*(r_12+r_23-r_13)),[lambda,sigma,r_12,
r_13,r_23, r_14,r_24, r_34]):
=>
> g_81:=subs(m=m_c+epsilon, lambda= lambda+epsilon*b_1+
epsilon^2*c_1, sigma=sigma+epsilon*b_2+epsilon^2*c_2, r_12=
r_12+epsilon*b_3+epsilon^2*c_3, r_13=r_13+epsilon*b_4+
epsilon^2*c_4, r_23=r_23+epsilon*b_5+epsilon^2*c_5, r_14=
r_14+epsilon*b_6+epsilon^2*c_6, r_24=r_24+epsilon*b_7+
epsilon^2*c_7, r_34=r_34+epsilon*b_8+epsilon^2*c_8^2,g_8):
=>
> g_82:=diff(g_81,epsilon):
> g_83:=subs(epsilon=0,g_82):
=>
> M3:=
<<g_14>|<g_23>|<g_33>|<g_43>|<g_53>|<g_63>|<g_73>|<g_83>>:
=>
> M31:=(subs(lambda=(3*m_c+sqrt(3))/(9+3*m_c),sigma= 16*m_c*
(sqrt(3)-9)/(27*(3+m_c)),r_12 =sqrt(3),r_13=sqrt(3), r_23=
sqrt(3), r_14=1,r_24=1,r_34=1,m_c=(64/249)*sqrt(3)+27/83,M3))
:
=>
> M32 := LinearAlgebra:-Transpose(M31) :
=>
> B:=Vector[column]([ b_1 ,

```

```

b__2 ,
b__3 ,
b__4 ,
b__5 ,
b__6 ,
b__7 ,
b__8 ]):

```

> #Calculamos o primeiro termo do vetor (5.7),

> M32.B:

> #O vetor V2 abaixo é o terceiro termo de (5.7) e M é a matriz já definida.

```

> V2:=Vector(8, {(1) = 0, (2) = (2*b__6+2*b__7+2*b__8)/((64/249)*
sqrt(3)+276/83)-3/((64/249)*sqrt(3)+276/83)^2-(2*((64/249)*sqrt
(3)+27/83))*b__6+(2*((64/249)*sqrt(3)+27/83))*b__7+(2*((64/249)*
sqrt(3)+27/83))*b__8+2*sqrt(3)*b__3+2*sqrt(3)*b__4+2*sqrt(3)*
b__5+3)/((64/249)*sqrt(3)+276/83)^2+(2*(828/83+(64/83)*sqrt(3)))/
((64/249)*sqrt(3)+276/83)^3, (3) = 0, (4) = 0, (5) = 0, (6) =
b__1+(3*b__6)/(1), (7) = b__1+(3*b__7)/(1), (8) = b__1+(3*b__8)/
(1)});

```

$$\begin{aligned}
 V2 := & \left( \frac{2b_6 + 2b_7 + 2b_8}{\frac{64}{249}\sqrt{3} + \frac{276}{83}} - \frac{3}{\left(\frac{64}{249}\sqrt{3} + \frac{276}{83}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{64}{249}\sqrt{3} + \frac{276}{83}\right)^2} \left( \left(\frac{128}{249}\sqrt{3} \right. \right. \right. \quad (1) \\
 & \left. \left. \left. + \frac{54}{83}\right) b_6 + \left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right) b_7 + \left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right) b_8 + 2\sqrt{3} b_3 + 2\sqrt{3} b_4 \right. \\
 & \left. \left. + 2\sqrt{3} b_5 + 3 \right) + \frac{\frac{1656}{83} + \frac{128}{83}\sqrt{3}}{\left(\frac{64}{249}\sqrt{3} + \frac{276}{83}\right)^3} \right) e_{x2} + (b_1 + 3b_6)e_{x6} + (b_1 + 3b_7)e_{x7} + (b_1 \\
 & + 3b_8)e_{x8}
 \end{aligned}$$

```

> M:=Matrix(8, 8, {(1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -12*sqrt(3),
(1, 4) = -12*sqrt(3), (1, 5) = -12*sqrt(3), (1, 6) = 36, (1, 7) =
36, (1, 8) = 36, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 2*sqrt(3)/
(64/249)*sqrt(3)+276/83, (2, 4) = 2*sqrt(3)/((64/249)*sqrt(3)
+276/83), (2, 5) = 2*sqrt(3)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 6) =
((128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 7) = (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (2, 8) = (
(128/249)*sqrt(3)+54/83)/((64/249)*sqrt(3)+276/83), (3, 1) = 1,
(3, 2) = (3/8+(3/16)*sqrt(3))*(2-sqrt(3)), (3, 3) = 1/3, (3, 4) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt
(3))*(2-sqrt(3))*sqrt(3))/((576/83)*sqrt(3)+7452/83), (3, 5) =
(1/2)*((64/249)*sqrt(3)+27/83)*(sqrt(3)-9)*(-6*sqrt(3)+(4+2*sqrt

```



```
(sqrt(3)-9)/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))), (8, 7) = -((384/83)*sqrt(3)+486/83)*(sqrt(3)-9)/(((576/83)*sqrt(3)+7452/83)*sqrt((2+sqrt(3))*(2-sqrt(3))))), (8, 8) = (64/83)*sqrt(3)+81/83):
```

```
> C:=Vector[column]([ c_1 ,
                    c_2 ,
                    c_3 ,
                    c_4 ,
                    c_5 ,
                    c_6 ,
                    c_7 ,
                    c_8 ]):
```

*#Calculamos o segundo termo de (5.7)*

M.C:

*#Somando os três termos de F''(0) calculados acima, e denotando F''(0) por J, obtemos:*

```
> J:= M32.B + M.C + V2;
```

$$J := (31 b_1 - 12 \sqrt{3} c_3 - 12 \sqrt{3} c_4 - 12 \sqrt{3} c_5 + 36 c_6 + 36 c_7 + 36 c_8) e_{x1} + \left( 31 b_2 \right. \quad (2)$$

$$+ \frac{2 \sqrt{3} c_3}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}} + \frac{2 \sqrt{3} c_4}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}} + \frac{2 \sqrt{3} c_5}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}}$$

$$+ \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) c_6}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}} + \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) c_7}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}} + \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) c_8}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}}$$

$$+ \frac{2 b_6 + 2 b_7 + 2 b_8}{\frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83}} - \frac{3}{\left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83} \right)^2}$$

$$- \frac{1}{\left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83} \right)^2} \left( \left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) b_6 + \left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) b_7 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) b_8 + 2\sqrt{3} b_3 + 2\sqrt{3} b_4 + 2\sqrt{3} b_5 + 3 \\
 & + \frac{\frac{1656}{83} + \frac{128}{83} \sqrt{3}}{\left( \frac{64}{249} \sqrt{3} + \frac{276}{83} \right)^3} e_{x_2} + \left( 31 b_3 + c_1 + \left( \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \sqrt{3} \right) (2 - \sqrt{3}) c_2 + \frac{1}{3} c_3 \right. \\
 & + \frac{\left( \frac{32}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{166} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \sqrt{3}) c_4}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left( \frac{32}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{166} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \sqrt{3}) c_5}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left( \frac{128}{83} \sqrt{3} + \frac{162}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_6}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} + \frac{\left( \frac{128}{83} \sqrt{3} + \frac{162}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_7}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left( \frac{256}{83} \sqrt{3} + \frac{324}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_8}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \left. \right) e_{x_3} + \left( 31 b_4 + c_1 + \left( \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \sqrt{3} \right) (2 \right. \\
 & - \sqrt{3}) c_2 \\
 & + \frac{\left( \frac{32}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{166} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \sqrt{3}) c_3}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{1}{3} c_4 \\
 & + \frac{\left( \frac{32}{249} \sqrt{3} + \frac{27}{166} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3}) (2 - \sqrt{3}) \sqrt{3}) c_5}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left( \frac{128}{83} \sqrt{3} + \frac{162}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_6}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} + \frac{\left( \frac{256}{83} \sqrt{3} + \frac{324}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_7}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left(\frac{128}{83}\sqrt{3} + \frac{162}{83}\right)(\sqrt{3}-9)c_8}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \Bigg) e_{x^4} + \left( 31b_5 + c_1 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16}\sqrt{3}\right) (2 \right. \\
 & \left. - \sqrt{3}) c_2 \right. \\
 & + \frac{\left(\frac{32}{249}\sqrt{3} + \frac{27}{166}\right)(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3} + (4+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})c_3}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left(\frac{32}{249}\sqrt{3} + \frac{27}{166}\right)(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3} + (4+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})c_4}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{1}{3}c_5 + \frac{\left(\frac{256}{83}\sqrt{3} + \frac{324}{83}\right)(\sqrt{3}-9)c_6}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} + \frac{\left(\frac{128}{83}\sqrt{3} + \frac{162}{83}\right)(\sqrt{3}-9)c_7}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & + \frac{\left(\frac{128}{83}\sqrt{3} + \frac{162}{83}\right)(\sqrt{3}-9)c_8}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \Bigg) e_{x^5} + \left( 34b_6 + \left(\frac{64}{249}\sqrt{3} + \frac{27}{83}\right)c_1 \right. \\
 & \left. - \frac{9}{16}\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}c_2 \right. \\
 & - \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3}c_3}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & - \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3}c_4}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} + \left( \right. \\
 & - \frac{\left(\frac{32}{83}\sqrt{3} + \frac{81}{166}\right)(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3} + (4+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{\left(\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
 & \left. - \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3}}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \right) c_5 + \left(\frac{64}{83}\sqrt{3} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{81}{83} \Big) c_6 - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_7}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} \\
 & - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_8}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} + b_I \Big) e_{x6} + \left( 34 b_7 + \left( \frac{64}{249} \sqrt{3} \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{27}{83} \right) c_1 - \frac{9}{16} \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} c_2 \right. \\
 & - \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3} c_3}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} + \left( \right. \\
 & \left. \frac{\left( \frac{32}{83} \sqrt{3} + \frac{81}{166} \right) (\sqrt{3} - 9) (-6\sqrt{3} + (4 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \sqrt{3})}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} \right. \\
 & \left. - \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3}}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \right) c_4 \\
 & - \frac{\left( \frac{128}{249} \sqrt{3} + \frac{54}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \sqrt{3} c_5}{\frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_6}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} + \left( \frac{64}{83} \sqrt{3} + \frac{81}{83} \right) c_7 \\
 & - \frac{\left( \frac{384}{83} \sqrt{3} + \frac{486}{83} \right) (\sqrt{3} - 9) c_8}{\left( \frac{576}{83} \sqrt{3} + \frac{7452}{83} \right) \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} + b_I \Big) e_{x7} + \left( 34 b_8 + \left( \frac{64}{249} \sqrt{3} \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{27}{83} \right) c_1 - \frac{9}{16} \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} c_2 + \left( \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\left(\frac{32}{83}\sqrt{3} + \frac{81}{166}\right)(\sqrt{3}-9)(-6\sqrt{3} + (4+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\sqrt{3})}{\left(\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
 & - \left. \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3}}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \right\} c_3 \\
 & - \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3} c_4}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & - \frac{\left(\frac{128}{249}\sqrt{3} + \frac{54}{83}\right)(\sqrt{3}-9)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\sqrt{3} c_5}{\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}} \\
 & - \frac{\left(\frac{384}{83}\sqrt{3} + \frac{486}{83}\right)(\sqrt{3}-9) c_6}{\left(\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \\
 & - \left. \frac{\left(\frac{384}{83}\sqrt{3} + \frac{486}{83}\right)(\sqrt{3}-9) c_7}{\left(\frac{576}{83}\sqrt{3} + \frac{7452}{83}\right)\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} + \left(\frac{64}{83}\sqrt{3} + \frac{81}{83}\right) c_8 + b_1 \right\} e_{x8}
 \end{aligned}$$

>

> #Por fim, substituímos em J as dependências dos bi's,  $i=1, \dots, 6$ , encontradas anteriormente.

>

```

> J_1:=subs(b_1 = -(1/144)*(432*sqrt(3)*b_2+664*sqrt(3)*
b_4+664*sqrt(3)*b_5-3960*b_8*sqrt(3)+5589*b_2-5976*b_4-5976*
b_5-4296*b_8)/(16*sqrt(3)+207),b_2=-(8*(766694*sqrt((2+sqrt(3)
)* (2-sqrt(3))))*sqrt(3)*b_7+766694*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))
*sqrt(3)*b_8-578676*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))
*sqrt(3)+592902*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))
*b_7+592902*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))
*b_8-766694*b_7*sqrt(3)-766694*b_8*sqrt(3)+1536247*
sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))-592902*b_7-592902*b_8)/(6468273
-1575423*sqrt(3)+383347*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3)))
*sqrt(3)+296451*sqrt((2+sqrt(3))* (2-sqrt(3))))),b_3 = -(1/3*(sqrt(3)*
b_4+sqrt(3)*b_5-3*b_6-3*b_7-3*b_8))*sqrt(3),b_4 = -(1/166)*
(83*sqrt(3)*b_5+495*b_7*sqrt(3)-495*b_8*sqrt(3)-747*b_5+537*
b_7-537*b_8)/(sqrt(3)-9),b_5 = (1/83)*(653*b_7*sqrt(3)+653*
b_8*sqrt(3)+558*b_7+558*b_8)/(3*sqrt(3)-14),b_6= -b_7-b_8,
J):

```

>

>

```

> restart:
> with(LinearAlgebra):
>
> #Denotamos por  $h_i, i=1, \dots, 8$  as entradas do vetor (5.7).
>
> h1:=(72/6889)*(70318044*sqrt(3)*b_7^2+70318044*sqrt(3)*b_7*
b_8+70318044*sqrt(3)*b_8^2-26715542*sqrt(3)*c_3-26715542*sqrt
(3)*c_4-26715542*sqrt(3)*c_5-38130615*sqrt(3)*c_6-38130615*
sqrt(3)*c_7-38130615*sqrt(3)*c_8-451254528*b_7^2-451254528*
b_7*b_8-451254528*b_8^2+38130615*c_3+38130615*c_4+38130615*
c_5+80146626*c_6+80146626*c_7+80146626*c_8)/((3*sqrt(3)-14)
^2*(sqrt(3)-9)^2):
>
> h2:=9/83*(3846541524*sqrt(3)*b_7^2+3846541524*sqrt(3)*b_7*
b_8+3846541524*sqrt(3)*b_8^2+4920027354*sqrt(3)*
c_3+4920027354*sqrt(3)*c_4+4920027354*sqrt(3)*c_5+547763397*
sqrt(3)*c_6+547763397*sqrt(3)*c_7+547763397*sqrt(3)*
c_8+6827812136*b_7^2+6827812136*b_7*b_8+6827812136*b_8^2
-6610691289*c_3-6610691289*c_4-6610691289*c_5-98642678*c_6
-98642678*c_7-98642678*c_8)/((3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)^2*
(16*sqrt(3)+207)^2):
>
> h3:=- (1/165336)*(2452682502818078528*sqrt(3)*
b_7^2+2452682502818078528*sqrt(3)*b_7*b_8+563778565371024704*
sqrt(3)*b_8^2+1584315089720066952*b_8*sqrt(3)
-747775699241159376*sqrt(3)*c_1-140207943607717383*sqrt(3)*c_2
-249258566413719792*sqrt(3)*c_3-35678031826396896*sqrt(3)*c_4
-35678031826396896*sqrt(3)*c_5-97368824393297232*sqrt(3)*c_6
-97368824393297232*sqrt(3)*c_7-194737648786594464*sqrt(3)*
c_8+591137339035866624*b_7^2+591137339035866624*b_7*
b_8+44825661655990848*b_8^2-3041187494092552008*
b_8+1481870647846305360*c_1+277850746471182255*
c_2+493956882615435120*c_3+97368824393297232*
c_4+97368824393297232*c_5+107034095479190688*
c_6+107034095479190688*c_7+214068190958381376*c_8)/((
-1691181+298019*sqrt(3))*(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)^2*(16*sqrt
(3)+207)):
>
> h4:=- (1/165336)*(563778565371024704*sqrt(3)*
b_7^2+2452682502818078528*sqrt(3)*b_7*b_8+2452682502818078528*
sqrt(3)*b_8^2+1584315089720066952*sqrt(3)*b_7
-747775699241159376*sqrt(3)*c_1-140207943607717383*sqrt(3)*c_2
-35678031826396896*sqrt(3)*c_3-249258566413719792*sqrt(3)*c_4
-35678031826396896*sqrt(3)*c_5-97368824393297232*sqrt(3)*c_6
-194737648786594464*sqrt(3)*c_7-97368824393297232*sqrt(3)*
c_8+44825661655990848*b_7^2+591137339035866624*b_7*
b_8+591137339035866624*b_8^2-3041187494092552008*
b_7+1481870647846305360*c_1+277850746471182255*
c_2+97368824393297232*c_3+493956882615435120*
c_4+97368824393297232*c_5+107034095479190688*
c_6+214068190958381376*c_7+107034095479190688*c_8)/((
-1691181+298019*sqrt(3))*(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)^2*(16*sqrt
(3)+207)):

```

```

>
> h5:=1/165336*(26855982705346048*b_7^2+26855982705346048*
b_8^2+9862632359749800*c_3+9862632359749800*
c_4+47408156978176368*c_5+17210266311098064*
c_6+289971053559907272*b_7+8605133155549032*
c_7+289971053559907272*b_8+8605133155549032*
c_8+26667088300224207*c_2+142224470934529104*c_1
-9862632359749800*sqrt(3)*c_7-9862632359749800*sqrt(3)*c_8
-143816004017795520*b_8*sqrt(3)-67283469811847808*sqrt(3)*c_1
-12615650589721464*sqrt(3)*c_2-159328389287283936*sqrt(3)*b_7*
b_8+65626060897374528*sqrt(3)*b_7^2-143816004017795520*sqrt(3)*
b_7+65626060897374528*sqrt(3)*b_8^2-2868377718516344*sqrt(3)*
c_3-2868377718516344*sqrt(3)*c_4-22427823270615936*sqrt(3)*c_5
-19725264719499600*sqrt(3)*c_6-108830131509526304*b_7*b_8)/
((-1691181+298019*sqrt(3))*(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)*(16*sqrt
(3)+207)):
>
> h6:=-1/165336*(-115971882903307278+192182346447033408*
b_7^2+192182346447033408*b_8^2-9862632359749800*c_3
-9862632359749800*c_4+19725264719499600*c_5+16846313953950864*
c_6-16566335072547192*b_7+25815399466647096*c_7
-16566335072547192*b_8+25815399466647096*c_8+80001264900672621*
c_2+61902074864815038*sqrt(3)+5615437984650288*c_1
-29587897079249400*sqrt(3)*c_7-29587897079249400*sqrt(3)*
c_8+27747193182299712*b_8*sqrt(3)-14668293514257792*sqrt(3)*
c_1-37846951769164392*sqrt(3)*c_2+942299127915685344*sqrt(3)*
b_7*b_8+495046560781548288*sqrt(3)*b_7^2+27747193182299712*
sqrt(3)*b_7+495046560781548288*sqrt(3)*b_8^2+2868377718516344*
sqrt(3)*c_3+2868377718516344*sqrt(3)*c_4-5736755437032688*sqrt
(3)*c_5-44004880542773376*sqrt(3)*c_6+359603943943526304*b_7*
b_8)/((-1691181+298019*sqrt(3))*(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)*
(16*sqrt(3)+207)):
>
> h7:=-1/165336*(-115971882903307278+192182346447033408*
b_7^2+24760748950540512*b_8^2-9862632359749800*
c_3+19725264719499600*c_4-9862632359749800*
c_5+25815399466647096*c_6+16566335072547192*
b_7+16846313953950864*c_7+25815399466647096*
c_8+80001264900672621*c_2-27747193182299712*sqrt(3)*
b_7+2868377718516344*sqrt(3)*c_3-5736755437032688*sqrt(3)*
c_4+2868377718516344*sqrt(3)*c_5-14668293514257792*sqrt(3)*c_1
-37846951769164392*sqrt(3)*c_2-29587897079249400*sqrt(3)*c_6
-44004880542773376*sqrt(3)*c_7-29587897079249400*sqrt(3)*
c_8+47793993647411232*sqrt(3)*b_8^2+495046560781548288*sqrt(3)*
b_7^2+5615437984650288*c_1+24760748950540512*b_7*
b_8+61902074864815038*sqrt(3)+47793993647411232*sqrt(3)*b_7*
b_8)/((-1691181+298019*sqrt(3))*(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)*
(16*sqrt(3)+207)):
>
> h8:=-1/165336*(-115971882903307278+24760748950540512*
b_7^2+192182346447033408*b_8^2+19725264719499600*c_3
-9862632359749800*c_4-9862632359749800*c_5+25815399466647096*
c_6+25815399466647096*c_7+16566335072547192*
b_8+16846313953950864*c_8+80001264900672621*c_2
-5736755437032688*sqrt(3)*c_3+2868377718516344*sqrt(3)*

```

```
c__4+2868377718516344*sqrt(3)*c__5-14668293514257792*sqrt(3)*c__1
-37846951769164392*sqrt(3)*c__2-29587897079249400*sqrt(3)*c__6
-29587897079249400*sqrt(3)*c__7-44004880542773376*sqrt(3)*
c__8+495046560781548288*sqrt(3)*b__8^2+47793993647411232*sqrt(3)*
b__7^2-27747193182299712*b__8*sqrt(3)+5615437984650288*
c__1+24760748950540512*b__7*b__8+61902074864815038*sqrt(3)
+47793993647411232*sqrt(3)*b__7*b__8)/((-1691181+298019*sqrt(3))*
(3*sqrt(3)-14)^2*(sqrt(3)-9)*(16*sqrt(3)+207)):
```

> #Resolvendo as equações obtidas fazendo as seis primeiras componentes de  $F''(0)$  iguais a zero, ver (5.7), encontramos

> solve({h1=0,h2=0,h3=0,h4=0,h5=0,h6=0}, [c\_\_1,c\_\_2,c\_\_3,c\_\_4,c\_\_5,c\_\_6]);

$$\left[ \begin{aligned} c_1 = & \frac{1}{341936543122516576} (3637605 \sqrt{3} + 5901934) (-144099501468 \sqrt{3} b_7 \\ & - 144099501468 b_8 \sqrt{3} + 293699107936 b_7^2 + 1174796431744 b_7 b_8 \\ & + 293699107936 b_8^2 - 74896070139 \sqrt{3} + 211351753548 b_7 + 211351753548 b_8 \\ & + 127190847981), c_2 = -\frac{1}{753764188023063378018} (191808486 \\ & + 119922163 \sqrt{3}) (16384443094656 \sqrt{3} b_7 b_8 - 43172600201172 \sqrt{3} b_7 \\ & - 43172600201172 b_8 \sqrt{3} + 127887345885728 b_7^2 + 415897664139776 b_7 b_8 \\ & + 127887345885728 b_8^2 - 22116614429817 \sqrt{3} + 61047189798660 b_7 \\ & + 61047189798660 b_8 + 37397554751367), c_3 = \frac{1}{341928626} (81 + 64 \sqrt{3}) ( \\ & -48438000 \sqrt{3} b_7^2 - 48438000 \sqrt{3} b_7 b_8 + 13498056 \sqrt{3} b_8^2 + 30690495 b_8 \sqrt{3} \\ & - 115610144 b_7^2 - 115610144 b_7 b_8 + 32392464 b_8^2 - 33294537 b_8 + 4119622 c_8), c_4 \\ = & \frac{1}{37270220234} (726786 + 441257 \sqrt{3}) (-13248 \sqrt{3} b_7 b_8 - 13248 \sqrt{3} b_8^2 \\ & + 2246211 \sqrt{3} b_7 - 86526 \sqrt{3} c_7 + 782184 b_7^2 - 2775088 b_7 b_8 - 2775088 b_8^2 \\ & - 3611979 b_7 + 207644 c_7), c_5 = \frac{1}{53274873431182} (9221445 \\ & + 5695883 \sqrt{3}) (30515940 \sqrt{3} b_7 b_8 - 189186759 \sqrt{3} b_7 - 189186759 b_8 \sqrt{3} \\ & + 6724809 \sqrt{3} c_7 + 6724809 \sqrt{3} c_8 + 186345172 b_7^2 + 533277264 b_7 b_8 \\ & + 186345172 b_8^2 + 296574102 b_7 + 296574102 b_8 - 18099367 c_7 - 18099367 c_8), c_6 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$= \frac{1}{107734} (135\sqrt{3} + 403) (135\sqrt{3} c_7 + 135\sqrt{3} c_8 + 2596 b_7^2 + 2596 b_7 b_8 + 2596 b_8^2 - 403 c_7 - 403 c_8) \Bigg]$$

> #Substituindo as dependências explícitas das seis variáveis  $b_i$  e das seis variáveis  $c_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ , nas duas últimas funções de (5.7), verificamos que em cada uma das entradas tem-se funções que dependem apenas de  $b_7$  e  $b_8$ . Quando igualamos essas duas funções a zero, temos o sistema de equações (5.8), a menos de constante.

```
>
> subs(c__1 = (1/341936543122516576*(3637605*sqrt(3)+5901934))*
(-144099501468*sqrt(3)*b__7-144099501468*b__8*sqrt(3)
+293699107936*b__7^2+1174796431744*b__7*b__8+293699107936*b__8^2
-74896070139*sqrt(3)+211351753548*b__7+211351753548*
b__8+127190847981), c__2 = -(1/753764188023063378018*
(191808486+119922163*sqrt(3)))*(16384443094656*sqrt(3)*b__7*b__8
-43172600201172*sqrt(3)*b__7-43172600201172*b__8*sqrt(3)
+127887345885728*b__7^2+415897664139776*b__7*
b__8+127887345885728*b__8^2-22116614429817*sqrt(3)
+61047189798660*b__7+61047189798660*b__8+37397554751367), c__3 =
(1/341928626*(81+64*sqrt(3)))*(-48438000*sqrt(3)*b__7^2-48438000*
sqrt(3)*b__7*b__8+13498056*sqrt(3)*b__8^2+30690495*b__8*sqrt(3)
-115610144*b__7^2-115610144*b__7*b__8+32392464*b__8^2-33294537*
b__8+4119622*c__8), c__4 = (1/37270220234*(726786+441257*sqrt(3))
)*(-13248*sqrt(3)*b__7*b__8-13248*sqrt(3)*b__8^2+2246211*sqrt(3)*
b__7-86526*sqrt(3)*c__7+782184*b__7^2-2775088*b__7*b__8-2775088*
b__8^2-3611979*b__7+207644*c__7), c__5 = (1/53274873431182*
(9221445+5695883*sqrt(3)))*(30515940*sqrt(3)*b__7*b__8-189186759*
sqrt(3)*b__7-189186759*b__8*sqrt(3)+6724809*sqrt(3)*c__7+6724809*
sqrt(3)*c__8+186345172*b__7^2+533277264*b__7*b__8+186345172*
b__8^2+296574102*b__7+296574102*b__8-18099367*c__7-18099367*
c__8), c__6 = (1/107734*(135*sqrt(3)+403))*(135*sqrt(3)*c__7+135*
sqrt(3)*c__8+2596*b__7^2+2596*b__7*b__8+2596*b__8^2-403*c__7-403*
c__8), h7);
```

$$- \frac{1}{165336} \left( -115971882903307278 - \frac{5522700871332}{128741168344321} \sqrt{3} (3637605 \sqrt{3} + 5901934) ( \right. \quad (2)$$

$$\left. -144099501468 \sqrt{3} b_7 - 144099501468 b_8 \sqrt{3} + 293699107936 b_7^2 \right.$$

$$\left. + 1174796431744 b_7 b_8 + 293699107936 b_8^2 - 74896070139 \sqrt{3} + 211351753548 b_7 \right.$$

$$\left. + 211351753548 b_8 + 127190847981 \right) + \frac{33912492244}{675405045459001} \sqrt{3} (191808486$$

$$+ 119922163 \sqrt{3}) (16384443094656 \sqrt{3} b_7 b_8 - 43172600201172 \sqrt{3} b_7$$

$$- 43172600201172 b_8 \sqrt{3} + 127887345885728 b_7^2 + 415897664139776 b_7 b_8$$

$$+ 127887345885728 b_8^2 - 22116614429817 \sqrt{3} + 61047189798660 b_7$$

$$\begin{aligned}
 &+ 61047189798660 b_8 + 37397554751367) + \frac{208185347548}{24817} \sqrt{3} (81 + 64 \sqrt{3}) ( \\
 &-48438000 \sqrt{3} b_7^2 - 48438000 \sqrt{3} b_7 b_8 + 13498056 \sqrt{3} b_8^2 + 30690495 b_8 \sqrt{3} \\
 &- 115610144 b_7^2 - 115610144 b_7 b_8 + 32392464 b_8^2 - 33294537 b_8 + 4119622 c_8) \\
 &- \frac{416370695096}{2705053} \sqrt{3} (726786 + 441257 \sqrt{3}) (-13248 \sqrt{3} b_7 b_8 - 13248 \sqrt{3} b_8^2 \\
 &+ 2246211 \sqrt{3} b_7 - 86526 \sqrt{3} c_7 + 782184 b_7^2 - 2775088 b_7 b_8 - 2775088 b_8^2 \\
 &- 3611979 b_7 + 207644 c_7) + \frac{208185347548}{3866662319} \sqrt{3} (9221445 \\
 &+ 5695883 \sqrt{3}) (30515940 \sqrt{3} b_7 b_8 - 189186759 \sqrt{3} b_7 - 189186759 b_8 \sqrt{3} \\
 &+ 6724809 \sqrt{3} c_7 + 6724809 \sqrt{3} c_8 + 186345172 b_7^2 + 533277264 b_7 b_8 \\
 &+ 186345172 b_8^2 + 296574102 b_7 + 296574102 b_8 - 18099367 c_7 - 18099367 c_8) \\
 &- \frac{178240343850900}{649} \sqrt{3} (135 \sqrt{3} + 403) (135 \sqrt{3} c_7 + 135 \sqrt{3} c_8 + 2596 b_7^2 \\
 &+ 2596 b_7 b_8 + 2596 b_8^2 - 403 c_7 - 403 c_8) + 47793993647411232 \sqrt{3} b_7 b_8 \\
 &+ 24760748950540512 b_7 b_8 + 61902074864815038 \sqrt{3} + 495046560781548288 \sqrt{3} b_7^2 \\
 &+ 47793993647411232 \sqrt{3} b_8^2 - 44004880542773376 \sqrt{3} c_7 \\
 &- 29587897079249400 \sqrt{3} c_8 - 27747193182299712 \sqrt{3} b_7 + 16566335072547192 b_7 \\
 &+ 16846313953950864 c_7 + 25815399466647096 c_8 + 192182346447033408 b_7^2 \\
 &+ 24760748950540512 b_8^2 + \frac{4228492458321}{257482336688642} (3637605 \sqrt{3} + 5901934) ( \\
 &-144099501468 \sqrt{3} b_7 - 144099501468 b_8 \sqrt{3} + 293699107936 b_7^2 \\
 &+ 1174796431744 b_7 b_8 + 293699107936 b_8^2 - 74896070139 \sqrt{3} + 211351753548 b_7 \\
 &+ 211351753548 b_8 + 127190847981) - \frac{13033557279}{122800917356182} (191808486 \\
 &+ 119922163 \sqrt{3}) (16384443094656 \sqrt{3} b_7 b_8 - 43172600201172 \sqrt{3} b_7 \\
 &- 43172600201172 b_8 \sqrt{3} + 127887345885728 b_7^2 + 415897664139776 b_7 b_8 \\
 &+ 127887345885728 b_8^2 - 22116614429817 \sqrt{3} + 61047189798660 b_7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 61047189798660 b_8 + 37397554751367) - \frac{715824674100}{24817} (81 + 64 \sqrt{3}) ( \\
 &-48438000 \sqrt{3} b_7^2 - 48438000 \sqrt{3} b_7 b_8 + 13498056 \sqrt{3} b_8^2 + 30690495 b_8 \sqrt{3} \\
 &- 115610144 b_7^2 - 115610144 b_7 b_8 + 32392464 b_8^2 - 33294537 b_8 + 4119622 c_8) \\
 &+ \frac{1431649348200}{2705053} (726786 + 441257 \sqrt{3}) (-13248 \sqrt{3} b_7 b_8 - 13248 \sqrt{3} b_8^2 \\
 &+ 2246211 \sqrt{3} b_7 - 86526 \sqrt{3} c_7 + 782184 b_7^2 - 2775088 b_7 b_8 - 2775088 b_8^2 \\
 &- 3611979 b_7 + 207644 c_7) - \frac{715824674100}{3866662319} (9221445 \\
 &+ 5695883 \sqrt{3}) (30515940 \sqrt{3} b_7 b_8 - 189186759 \sqrt{3} b_7 - 189186759 b_8 \sqrt{3} \\
 &+ 6724809 \sqrt{3} c_7 + 6724809 \sqrt{3} c_8 + 186345172 b_7^2 + 533277264 b_7 b_8 \\
 &+ 186345172 b_8^2 + 296574102 b_7 + 296574102 b_8 - 18099367 c_7 - 18099367 c_8) \\
 &+ \frac{155514454618356}{649} (135 \sqrt{3} + 403) (135 \sqrt{3} c_7 + 135 \sqrt{3} c_8 + 2596 b_7^2 \\
 &+ 2596 b_7 b_8 + 2596 b_8^2 - 403 c_7 - 403 c_8) \Big/ ((-1691181 + 298019 \sqrt{3}) (3 \sqrt{3} \\
 &- 14)^2 (\sqrt{3} - 9) (16 \sqrt{3} + 207))
 \end{aligned}$$

> *simplify*( (2) )

$$\begin{aligned}
 &\frac{9}{571787} (845405488509189456 \sqrt{3} b_7 b_8 + 422702744254594728 \sqrt{3} b_8^2 \\
 &+ 59518837659214138 \sqrt{3} b_7 + 29759418829607069 b_8 \sqrt{3} \\
 &+ 876033869595707488 b_7 b_8 + 438016934797853744 b_8^2 - 204649621464808350 b_7 \\
 &- 102324810732404175 b_8) \Big/ ((-1691181 + 298019 \sqrt{3}) (3 \sqrt{3} - 14)^2 (\sqrt{3} \\
 &- 9) (16 \sqrt{3} + 207))
 \end{aligned} \tag{3}$$

> *rationalize*( (3) )

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2574574611269618595635669282} (845405488509189456 \sqrt{3} b_7 b_8 \\
 &+ 422702744254594728 \sqrt{3} b_8^2 + 59518837659214138 \sqrt{3} b_7 \\
 &+ 29759418829607069 b_8 \sqrt{3} + 876033869595707488 b_7 b_8 + 438016934797853744 b_8^2 \\
 &- 204649621464808350 b_7 - 102324810732404175 b_8) (143369130069 \\
 &+ 67824984488 \sqrt{3})
 \end{aligned} \tag{4}$$

> *expand*( (4) )

(5)

$$\frac{40114328}{571787} \sqrt{3} b_7 b_8 + \frac{66097296}{571787} b_7 b_8 + \frac{20057164}{571787} \sqrt{3} b_8^2 + \frac{33048648}{571787} b_8^2 \quad (5)$$

$$- \frac{27}{13} \sqrt{3} b_7 - \frac{87}{13} b_7 - \frac{27}{26} b_8 \sqrt{3} - \frac{87}{26} b_8$$

> factor( (5) )

$$- \frac{1}{2700240092446} (5014291 \sqrt{3} + 8262162) (b_8 + 2 b_7) (-18889832 b_8 + 3089347 \sqrt{3} - 4531167) \quad (6)$$

> subs(c\_1 = (1/341936543122516576\*(3637605\*sqrt(3)+5901934))\*  
(-144099501468\*sqrt(3)\*b\_7-144099501468\*b\_8\*sqrt(3)  
+293699107936\*b\_7^2+1174796431744\*b\_7\*b\_8+293699107936\*b\_8^2  
-74896070139\*sqrt(3)+211351753548\*b\_7+211351753548\*  
b\_8+127190847981), c\_2 = -(1/753764188023063378018\*  
(191808486+119922163\*sqrt(3)))\*(16384443094656\*sqrt(3)\*b\_7\*b\_8  
-43172600201172\*sqrt(3)\*b\_7-43172600201172\*b\_8\*sqrt(3)  
+127887345885728\*b\_7^2+415897664139776\*b\_7\*  
b\_8+127887345885728\*b\_8^2-22116614429817\*sqrt(3)  
+61047189798660\*b\_7+61047189798660\*b\_8+37397554751367), c\_3 =  
(1/341928626\*(81+64\*sqrt(3)))\*(-48438000\*sqrt(3)\*b\_7^2-48438000\*  
sqrt(3)\*b\_7\*b\_8+13498056\*sqrt(3)\*b\_8^2+30690495\*b\_8\*sqrt(3)  
-115610144\*b\_7^2-115610144\*b\_7\*b\_8+32392464\*b\_8^2-33294537\*  
b\_8+4119622\*c\_8), c\_4 = (1/37270220234\*(726786+441257\*sqrt(3))  
)\*(-13248\*sqrt(3)\*b\_7\*b\_8-13248\*sqrt(3)\*b\_8^2+2246211\*sqrt(3)\*  
b\_7-86526\*sqrt(3)\*c\_7+782184\*b\_7^2-2775088\*b\_7\*b\_8-2775088\*  
b\_8^2-3611979\*b\_7+207644\*c\_7), c\_5 = (1/53274873431182\*  
(9221445+5695883\*sqrt(3)))\*(30515940\*sqrt(3)\*b\_7\*b\_8-189186759\*  
sqrt(3)\*b\_7-189186759\*b\_8\*sqrt(3)+6724809\*sqrt(3)\*c\_7+6724809\*  
sqrt(3)\*c\_8+186345172\*b\_7^2+533277264\*b\_7\*b\_8+186345172\*  
b\_8^2+296574102\*b\_7+296574102\*b\_8-18099367\*c\_7-18099367\*  
c\_8), c\_6 = (1/107734\*(135\*sqrt(3)+403))\*(135\*sqrt(3)\*c\_7+135\*  
sqrt(3)\*c\_8+2596\*b\_7^2+2596\*b\_7\*b\_8+2596\*b\_8^2-403\*c\_7-403\*  
c\_8), h8);

$$- \frac{1}{165336} \left( -115971882903307278 - \frac{5522700871332}{128741168344321} \sqrt{3} (3637605 \sqrt{3} + 5901934) \right) \quad (7)$$

$$-144099501468 \sqrt{3} b_7 - 144099501468 b_8 \sqrt{3} + 293699107936 b_7^2$$

$$+ 1174796431744 b_7 b_8 + 293699107936 b_8^2 - 74896070139 \sqrt{3} + 211351753548 b_7$$

$$+ 211351753548 b_8 + 127190847981) + \frac{33912492244}{675405045459001} \sqrt{3} (191808486$$

$$+ 119922163 \sqrt{3}) (16384443094656 \sqrt{3} b_7 b_8 - 43172600201172 \sqrt{3} b_7$$

$$- 43172600201172 b_8 \sqrt{3} + 127887345885728 b_7^2 + 415897664139776 b_7 b_8$$

$$+ 127887345885728 b_8^2 - 22116614429817 \sqrt{3} + 61047189798660 b_7$$

$$+ 61047189798660 b_8 + 37397554751367) - \frac{416370695096}{24817} \sqrt{3} (81 + 64 \sqrt{3}) ($$

$$\begin{aligned}
 & -48438000 \sqrt{3} b_7^2 - 48438000 \sqrt{3} b_7 b_8 + 13498056 \sqrt{3} b_8^2 + 30690495 b_8 \sqrt{3} \\
 & - 115610144 b_7^2 - 115610144 b_7 b_8 + 32392464 b_8^2 - 33294537 b_8 + 4119622 c_8) \\
 & + \frac{208185347548}{2705053} \sqrt{3} (726786 + 441257 \sqrt{3}) (-13248 \sqrt{3} b_7 b_8 - 13248 \sqrt{3} b_8^2 \\
 & + 2246211 \sqrt{3} b_7 - 86526 \sqrt{3} c_7 + 782184 b_7^2 - 2775088 b_7 b_8 - 2775088 b_8^2 \\
 & - 3611979 b_7 + 207644 c_7) + \frac{208185347548}{3866662319} \sqrt{3} (9221445 \\
 & + 5695883 \sqrt{3}) (30515940 \sqrt{3} b_7 b_8 - 189186759 \sqrt{3} b_7 - 189186759 b_8 \sqrt{3} \\
 & + 6724809 \sqrt{3} c_7 + 6724809 \sqrt{3} c_8 + 186345172 b_7^2 + 533277264 b_7 b_8 \\
 & + 186345172 b_8^2 + 296574102 b_7 + 296574102 b_8 - 18099367 c_7 - 18099367 c_8) \\
 & - \frac{178240343850900}{649} \sqrt{3} (135 \sqrt{3} + 403) (135 \sqrt{3} c_7 + 135 \sqrt{3} c_8 + 2596 b_7^2 \\
 & + 2596 b_7 b_8 + 2596 b_8^2 - 403 c_7 - 403 c_8) + 47793993647411232 \sqrt{3} b_7 b_8 \\
 & + 24760748950540512 b_7 b_8 + 61902074864815038 \sqrt{3} + 47793993647411232 \sqrt{3} b_7^2 \\
 & + 495046560781548288 \sqrt{3} b_8^2 - 29587897079249400 \sqrt{3} c_7 \\
 & - 44004880542773376 \sqrt{3} c_8 - 27747193182299712 b_8 \sqrt{3} + 16566335072547192 b_8 \\
 & + 25815399466647096 c_7 + 16846313953950864 c_8 + 24760748950540512 b_7^2 \\
 & + 192182346447033408 b_8^2 + \frac{4228492458321}{257482336688642} (3637605 \sqrt{3} + 5901934) ( \\
 & -144099501468 \sqrt{3} b_7 - 144099501468 b_8 \sqrt{3} + 293699107936 b_7^2 \\
 & + 1174796431744 b_7 b_8 + 293699107936 b_8^2 - 74896070139 \sqrt{3} + 211351753548 b_7 \\
 & + 211351753548 b_8 + 127190847981) - \frac{13033557279}{122800917356182} (191808486 \\
 & + 119922163 \sqrt{3}) (16384443094656 \sqrt{3} b_7 b_8 - 43172600201172 \sqrt{3} b_7 \\
 & - 43172600201172 b_8 \sqrt{3} + 127887345885728 b_7^2 + 415897664139776 b_7 b_8 \\
 & + 127887345885728 b_8^2 - 22116614429817 \sqrt{3} + 61047189798660 b_7 \\
 & + 61047189798660 b_8 + 37397554751367) + \frac{1431649348200}{24817} (81 + 64 \sqrt{3}) (
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -48438000 \sqrt{3} b_7^2 - 48438000 \sqrt{3} b_7 b_8 + 13498056 \sqrt{3} b_8^2 + 30690495 b_8 \sqrt{3} \\
 & - 115610144 b_7^2 - 115610144 b_7 b_8 + 32392464 b_8^2 - 33294537 b_8 + 4119622 c_8) \\
 & - \frac{715824674100}{2705053} (726786 + 441257 \sqrt{3}) (-13248 \sqrt{3} b_7 b_8 - 13248 \sqrt{3} b_8^2 \\
 & + 2246211 \sqrt{3} b_7 - 86526 \sqrt{3} c_7 + 782184 b_7^2 - 2775088 b_7 b_8 - 2775088 b_8^2 \\
 & - 3611979 b_7 + 207644 c_7) - \frac{715824674100}{3866662319} (9221445 \\
 & + 5695883 \sqrt{3}) (30515940 \sqrt{3} b_7 b_8 - 189186759 \sqrt{3} b_7 - 189186759 b_8 \sqrt{3} \\
 & + 6724809 \sqrt{3} c_7 + 6724809 \sqrt{3} c_8 + 186345172 b_7^2 + 533277264 b_7 b_8 \\
 & + 186345172 b_8^2 + 296574102 b_7 + 296574102 b_8 - 18099367 c_7 - 18099367 c_8) \\
 & + \frac{155514454618356}{649} (135 \sqrt{3} + 403) (135 \sqrt{3} c_7 + 135 \sqrt{3} c_8 + 2596 b_7^2 \\
 & + 2596 b_7 b_8 + 2596 b_8^2 - 403 c_7 - 403 c_8) \Big/ \left( (-1691181 + 298019 \sqrt{3}) (3 \sqrt{3} \right. \\
 & \left. - 14)^2 (\sqrt{3} - 9) (16 \sqrt{3} + 207) \right)
 \end{aligned}$$

> *simplify*( (7) )

$$\begin{aligned}
 & \frac{9}{571787} (422702744254594728 \sqrt{3} b_7^2 + 845405488509189456 \sqrt{3} b_7 b_8 \\
 & + 29759418829607069 \sqrt{3} b_7 + 59518837659214138 b_8 \sqrt{3} + 438016934797853744 b_7^2 \\
 & + 876033869595707488 b_7 b_8 - 102324810732404175 b_7 - 204649621464808350 b_8) \Big/ \\
 & \left( (-1691181 + 298019 \sqrt{3}) (3 \sqrt{3} - 14)^2 (\sqrt{3} - 9) (16 \sqrt{3} + 207) \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

> *rationalize*( (8) )

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2574574611269618595635669282} (422702744254594728 \sqrt{3} b_7^2 \\
 & + 845405488509189456 \sqrt{3} b_7 b_8 + 29759418829607069 \sqrt{3} b_7 \\
 & + 59518837659214138 b_8 \sqrt{3} + 438016934797853744 b_7^2 + 876033869595707488 b_7 b_8 \\
 & - 102324810732404175 b_7 - 204649621464808350 b_8) (143369130069 \\
 & + 67824984488 \sqrt{3})
 \end{aligned} \tag{9}$$

> *factor*( (9) )

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2700240092446} (5014291 \sqrt{3} + 8262162) (b_7 + 2 b_8) (-18889832 b_7 + 3089347 \sqrt{3} \\
 & - 4531167)
 \end{aligned} \tag{10}$$

# APÊNDICE B – CÓDIGOS MAPLE DE CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE CINCO CORPOS

Neste apêndice exibimos primeiro o código MAPLE utilizado para calcular o jacobiano da função  $H$ , (ver (5.11)). Em seguida exibimos os cálculos das dependências dos  $b_\lambda, b_{\sigma_1}, \dots, b_{25}$  em função de  $b_{35}$  e  $b_{45}$ . Omitimos os cálculos realizados para obter  $F'(0)$ ,  $F''(0)$  e  $F'''(0)$ , (ver (5.15), (5.16) e (5.17)), por serem muito extensos. Contudo o algoritmo usado é análogo ao exibido no Apêndice A, para quatro corpos. Por fim, exibimos o código MAPLE que calcula as dependências dos  $d_\lambda, d_{\sigma_1}, \dots, d_{25}$  em função dos  $b_{35}, b_{45}, c_{35}, c_{45}, d_{35}$  e  $d_{45}$ . Além disso, neste código encontramos as equações de (5.18).

Em alguns comandos dos códigos deste apêndice aparecem dois sinais de interrogação na forma (??). Isto significa que uma expressão foi ocultada da tela, logo o comando que utiliza tal expressão fica sem o seu número de referência, mostrando tais interrogações. Geralmente as expressões que não são ocultadas são exibidas na cor azul, no arquivo pdf. Foi necessário ocultar muitas das expressões a fim de diminuir o número de linhas exibidas nos códigos.

```

> restart;
> with(VectorCalculus):
> With(LinearAlgebra):
> with(ArrayTools):
>
> interface(rtablesize=14);
                                     14
(1)
> #Primeiro definimos as funções que serão usadas nos cálculos. Cada  $g_i$ ,  $i=1,\dots,14$ 
    são os gradientes das funções  $f_i$ 's, com cada  $f_i=0$  uma equação do sistema
    (5.10).
>
> g1:=Gradient((r__12^2+r__13^2+r__14^2+m*r__15^2+r__23^2+r__24^2+
m*r__25^2+r__34^2+m*r__35^2+m*r__45^2)/(m+4),[lambda,sigma__1,
sigma__2,sigma__3,r__12,r__13,r__23,r__14,r__24,r__34,r__15,
r__25,r__35,r__45]):

> g2:=Gradient(-2*r__12^4*r__34^2-2*r__12^2*r__13^2*r__23^2+2*
r__12^2*r__13^2*r__24^2+2*r__12^2*r__13^2*r__34^2+2*r__12^2*
r__14^2*r__23^2-2*r__12^2*r__14^2*r__24^2+2*r__12^2*r__14^2*
r__34^2+2*r__12^2*r__23^2*r__34^2+2*r__12^2*r__24^2*r__34^2-2*
r__12^2*r__34^4-2*r__13^4*r__24^2+2*r__13^2*r__14^2*r__23^2+2*
r__13^2*r__14^2*r__24^2-2*r__13^2*r__14^2*r__34^2+2*r__13^2*
r__23^2*r__24^2-2*r__13^2*r__24^4+2*r__13^2*r__24^2*r__34^2-2*
r__14^4*r__23^2-2*r__14^2*r__23^4+2*r__14^2*r__23^2*r__24^2+2*
r__14^2*r__23^2*r__34^2-2*r__23^2*r__24^2*r__34^2,[lambda,
sigma__1,sigma__2,sigma__3,r__12,r__13,r__23,r__14,r__24,r__34,
r__15,r__25,r__35,r__45]):

> g3:=Gradient(-2*r__12^4*r__35^2-2*r__12^2*r__13^2*r__23^2+2*
r__12^2*r__13^2*r__25^2+2*r__12^2*r__13^2*r__35^2+2*r__12^2*
r__15^2*r__23^2-2*r__12^2*r__15^2*r__25^2+2*r__12^2*r__15^2*
r__35^2+2*r__12^2*r__23^2*r__35^2+2*r__12^2*r__25^2*r__35^2-2*
r__12^2*r__35^4-2*r__13^4*r__25^2+2*r__13^2*r__15^2*r__23^2+2*
r__13^2*r__15^2*r__25^2-2*r__13^2*r__15^2*r__35^2+2*r__13^2*
r__23^2*r__25^2-2*r__13^2*r__25^4+2*r__13^2*r__25^2*r__35^2-2*
r__15^4*r__23^2-2*r__15^2*r__23^4+2*r__15^2*r__23^2*r__25^2+2*
r__15^2*r__23^2*r__35^2-2*r__23^2*r__25^2*r__35^2,[lambda,
sigma__1,sigma__2,sigma__3,r__12,r__13,r__23,r__14,r__24,r__34,
r__15,r__25,r__35,r__45]):

> g4:=Gradient(-2*r__12^4*r__45^2-2*r__12^2*r__14^2*r__24^2+2*
r__12^2*r__14^2*r__25^2+2*r__12^2*r__14^2*r__45^2+2*r__12^2*
r__15^2*r__24^2-2*r__12^2*r__15^2*r__25^2+2*r__12^2*r__15^2*
r__45^2+2*r__12^2*r__24^2*r__45^2+2*r__12^2*r__25^2*r__45^2-2*
r__12^2*r__45^4-2*r__14^4*r__25^2+2*r__14^2*r__15^2*r__24^2+2*
r__14^2*r__15^2*r__25^2-2*r__14^2*r__15^2*r__45^2+2*r__14^2*
r__24^2*r__25^2-2*r__14^2*r__25^4+2*r__14^2*r__25^2*r__45^2-2*
r__15^4*r__24^2-2*r__15^2*r__24^4+2*r__15^2*r__24^2*r__25^2+2*
r__15^2*r__24^2*r__45^2-2*r__24^2*r__25^2*r__45^2,[lambda,
sigma__1,sigma__2,sigma__3,r__12,r__13,r__23,r__14,r__24,r__34,
r__15,r__25,r__35,r__45]):

```

```

> g5:=Gradient((lambda-r_12^(-3))+sigma_1*(2*r_12^2*r_34^2+
r_13^2*r_23^2-r_13^2*r_24^2-r_13^2*r_34^2-r_14^2*r_23^2+
r_14^2*r_24^2-r_14^2*r_34^2-r_23^2*r_34^2-r_24^2*r_34^2+
r_34^4)+sigma_2*(2*r_12^2*r_35^2+r_13^2*r_23^2-r_13^2*
r_25^2-r_13^2*r_35^2-r_15^2*r_23^2+r_15^2*r_25^2-r_15^2*
r_35^2-r_23^2*r_35^2-r_25^2*r_35^2+r_35^4)+sigma_3*(2*
r_12^2*r_45^2+r_14^2*r_24^2-r_14^2*r_25^2-r_14^2*r_45^2-
r_15^2*r_24^2+r_15^2*r_25^2-r_15^2*r_45^2-r_24^2*r_45^2-
r_25^2*r_45^2+r_45^4), [lambda, sigma_1, sigma_2, sigma_3,
r_12, r_13, r_23, r_14, r_24, r_34, r_15, r_25, r_35, r_45]):

> g6:=Gradient((lambda-r_13^(-3))+sigma_1*(r_12^2*r_23^2-
r_12^2*r_24^2-r_12^2*r_34^2+2*r_13^2*r_24^2-r_14^2*r_23^2
-r_14^2*r_24^2+r_14^2*r_34^2-r_23^2*r_24^2+r_24^4-r_24^2*
r_34^2)+sigma_2*(r_12^2*r_23^2-r_12^2*r_25^2-r_12^2*
r_35^2+2*r_13^2*r_25^2-r_15^2*r_23^2-r_15^2*r_25^2+
r_15^2*r_35^2-r_23^2*r_25^2+r_25^4-r_25^2*r_35^2), [lambda,
sigma_1, sigma_2, sigma_3, r_12, r_13, r_23, r_14, r_24, r_34,
r_15, r_25, r_35, r_45]):

> g7:=Gradient((lambda-r_23^(-3))+sigma_1*(r_12^2*r_13^2-
r_12^2*r_14^2-r_12^2*r_34^2-r_13^2*r_14^2-r_13^2*r_24^2+
r_14^4+2*r_14^2*r_23^2-r_14^2*r_24^2-r_14^2*r_34^2+
r_24^2*r_34^2)+sigma_2*(r_12^2*r_13^2-r_12^2*r_15^2-
r_12^2*r_35^2-r_13^2*r_15^2-r_13^2*r_25^2+r_15^4+2*
r_15^2*r_23^2-r_15^2*r_25^2-r_15^2*r_35^2+r_25^2*r_35^2),
[lambda, sigma_1, sigma_2, sigma_3, r_12, r_13, r_23, r_14, r_24,
r_34, r_15, r_25, r_35, r_45]):

> g8:=Gradient((lambda-r_14^(-3))+sigma_1*(-r_12^2*r_23^2+
r_12^2*r_24^2-r_12^2*r_34^2-r_13^2*r_23^2-r_13^2*r_24^2+
r_13^2*r_34^2+2*r_14^2*r_23^2+r_23^4-r_23^2*r_24^2-
r_23^2*r_34^2)+sigma_3*(r_12^2*r_24^2-r_12^2*r_25^2-
r_12^2*r_45^2+2*r_14^2*r_25^2-r_15^2*r_24^2-r_15^2*
r_25^2+r_15^2*r_45^2-r_24^2*r_25^2+r_25^4-r_25^2*r_45^2),
[lambda, sigma_1, sigma_2, sigma_3, r_12, r_13, r_23, r_14, r_24,
r_34, r_15, r_25, r_35, r_45]):

> g9:=Gradient((lambda-r_24^(-3))+sigma_1*(-r_12^2*r_13^2+
r_12^2*r_14^2-r_12^2*r_34^2+r_13^4-r_13^2*r_14^2-r_13^2*
r_23^2+2*r_13^2*r_24^2-r_13^2*r_34^2-r_14^2*r_23^2+
r_23^2*r_34^2)+sigma_3*(r_12^2*r_14^2-r_12^2*r_15^2-
r_12^2*r_45^2-r_14^2*r_15^2-r_14^2*r_25^2+r_15^4+2*
r_15^2*r_24^2-r_15^2*r_25^2-r_15^2*r_45^2+r_25^2*r_45^2),
[lambda, sigma_1, sigma_2, sigma_3, r_12, r_13, r_23, r_14, r_24,
r_34, r_15, r_25, r_35, r_45]):

> g10:=Gradient((lambda-r_34^(-3))+sigma_1*(r_12^4-r_12^2*
r_13^2-r_12^2*r_14^2-r_12^2*r_23^2-r_12^2*r_24^2+2*
r_12^2*r_34^2+r_13^2*r_14^2-r_13^2*r_24^2-r_14^2*r_23^2+
r_23^2*r_24^2), [lambda, sigma_1, sigma_2, sigma_3, r_12, r_13,
r_23, r_14, r_24, r_34, r_15, r_25, r_35, r_45]):

```

```

> g11:=Gradient(m*(lambda-r_15^(-3))+sigma_2*(-r_12^2*r_23^2+
r_12^2*r_25^2-r_12^2*r_35^2-r_13^2*r_23^2-r_13^2*r_25^2+
r_13^2*r_35^2+2*r_15^2*r_23^2+r_23^4-r_23^2*r_25^2-
r_23^2*r_35^2))+sigma_3*(-r_12^2*r_24^2+r_12^2*r_25^2-
r_12^2*r_45^2-r_14^2*r_24^2-r_14^2*r_25^2+r_14^2*
r_45^2+2*r_15^2*r_24^2+r_24^4-r_24^2*r_25^2-r_24^2*
r_45^2), [lambda,sigma_1,sigma_2,sigma_3,r_12,r_13,r_23,
r_14,r_24,r_34,r_15,r_25,r_35,r_45]):

> g12:=Gradient(m*(lambda-r_25^(-3))+sigma_2*(-r_12^2*r_13^2+
r_12^2*r_15^2-r_12^2*r_35^2+r_13^4-r_13^2*r_15^2-r_13^2*
r_23^2+2*r_13^2*r_25^2-r_13^2*r_35^2-r_15^2*r_23^2+
r_23^2*r_35^2))+sigma_3*(-r_12^2*r_14^2+r_12^2*r_15^2-
r_12^2*r_45^2+r_14^4-r_14^2*r_15^2-r_14^2*r_24^2+2*
r_14^2*r_25^2-r_14^2*r_45^2-r_15^2*r_24^2+r_24^2*r_45^2),
[lambda,sigma_1,sigma_2,sigma_3,r_12,r_13,r_23,r_14,r_24,
r_34,r_15,r_25,r_35,r_45]):

> g13:=Gradient(m*(lambda-r_35^(-3))+sigma_2*(r_12^4-r_12^2*
r_13^2-r_12^2*r_15^2-r_12^2*r_23^2-r_12^2*r_25^2+2*
r_12^2*r_35^2+r_13^2*r_15^2-r_13^2*r_25^2-r_15^2*r_23^2+
r_23^2*r_25^2), [lambda,sigma_1,sigma_2,sigma_3,r_12,r_13,
r_23,r_14,r_24,r_34,r_15,r_25,r_35,r_45]):

> g14:=Gradient(m*(lambda-r_45^(-3))+sigma_3*(r_12^4-r_12^2*
r_14^2-r_12^2*r_15^2-r_12^2*r_24^2-r_12^2*r_25^2+2*
r_12^2*r_45^2+r_14^2*r_15^2-r_14^2*r_25^2-r_15^2*r_24^2+
r_24^2*r_25^2), [lambda,sigma_1,sigma_2,sigma_3,r_12,r_13,
r_23,r_14,r_24,r_34,r_15,r_25,r_35,r_45]):

> #Denotamos o jacobiano da função H pela matriz M abaixo.
>
> M:=
<<g1>|<g2>|<g3>|<g4>|<g5>|<g6>|<g7>|<g8>|<g9>|<g10>|<g11>|<g12>|<g
13>|<g14>>:

> #Substituindo z= z_0 em M, onde z_0 é a configuração central do quadrado
centrado, obtemos:
>
> subs(lambda = (1/4)*(4*m+1+2*sqrt(2))/(m+4), sigma_1 = -(1/128)*
(sqrt(2)-4)*(-sqrt(2)+2*m)/(m+4), sigma_2 = (1/32)*(2*sqrt(2)-15)
*m/(m+4), sigma_3 = (1/32)*(2*sqrt(2)-15)*m/(m+4), r_12=sqrt(2),
r_13=2,r_23=sqrt(2), r_14=sqrt(2), r_24=2, r_34=sqrt(2), r_15=
1, r_25=1, r_35=1, r_45=1, M):
> LinearAlgebra:-Determinant( ?? )
> solve( { ?? }, [m] )
[ [m=0], [m=0], [m=-1/4], [m=13/12 + 11/12*sqrt(2)], [m=13/12 + 11/12*sqrt(2)] ] (2)
>
> #Calculando o determinante de M encontramos os valores para a massa que torna
a configuração degenerada.

```

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
> With(LinearAlgebra):
> with(ArrayTools):
>
> interface(rtables=14);
```

14

(1)

> *#Após ter obtido  $F'(0)$ , ver (5.14), denotamos cada entrada deste vetor pelas funções  $h_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 14$ .*

```
> h1:=2*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+4*b__13/(61/12+
(11/12)*sqrt(2))+2*sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+2*sqrt
(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+4*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))
+2*sqrt(2)*b__34/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+(13/6+(11/6)*sqrt(2))*
b__15/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+(13/6+(11/6)*sqrt(2))*b__25/(61/12+
(11/12)*sqrt(2))+(13/6+(11/6)*sqrt(2))*b__35/(61/12+(11/12)*sqrt
(2))+(13/6+(11/6)*sqrt(2))*b__45/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):
```

```
> h2:=64*sqrt(2)*b__12-128*b__13+64*sqrt(2)*b__23+64*sqrt(2)*b__14
-128*b__24+64*sqrt(2)*b__34:
```

```
> h3:=-32*b__13+32*b__15+32*b__35:
```

```
> h4:=-32*b__24+32*b__25+32*b__45:
```

```
> h5:=b__lambda-16*b__sigma_1+(3/4-((1/16)*sqrt(2)-1/4))*((5/6)*
sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/2)*sqrt(2)
-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*sqrt(2))*
b__12+((1/8)*sqrt(2)-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__13/(61/12+
(11/12)*sqrt(2))+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*
sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*
(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(1/8)*sqrt(2)-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt
(2))+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__34/
(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((3/4)*sqrt(2)-45/8)*(13/12+(11/12)*sqrt
(2))*b__15/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((3/4)*sqrt(2)-45/8)*(13/12+
(11/12)*sqrt(2))*b__25/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)
-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__35/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-
(1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__45/(61/12+(11/12)*
sqrt(2)):
```

```
> h6:=b__lambda+16*b__sigma_1+4*b__sigma_2+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*
(5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+3/16-
(1/4)*sqrt(2)-1)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*sqrt
(2))*b__13+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*
b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)
+13/6)*sqrt(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-1)*
(5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/16)*sqrt(2)
-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__34/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-
(1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__15/(61/12+(11/12)
```

```
*sqrt(2))+(1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__25/
(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt
(2))*b__35/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):
```

```
> h7:=b__lambda-16*b__sigma_1+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*
sqrt(2))*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/8)*sqrt(2)
-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+3/4- (
(1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)/
(61/12+(11/12)*sqrt(2))*b__23+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt
(2)+13/6)*sqrt(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/8)*sqrt(2)
-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*
sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__15/(61/12+(11/12)*sqrt
(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__25/(61/12+
(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*
b__35/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):
```

```
> h8:=b__lambda-16*b__sigma_1+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*
sqrt(2))*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/8)*sqrt(2)
-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/16)*
sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))+3/4-((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)/
(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt
(2))*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*sqrt(2))*b__14+((1/8)*sqrt(2)-1/2)*((
5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)
-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__15/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((
1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__25/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__45/
(61/12+(11/12)*sqrt(2)):
```

```
> h9:=b__lambda+16*b__sigma_1+4*b__sigma_3+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((
5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*
sqrt(2)-1)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((
1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__23/(61/12+
(11/12)*sqrt(2))+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt
(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+3/16-((1/4)*sqrt(2)-1)*((5/6)*
sqrt(2)+13/6)/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/2)*sqrt(2)-15/4)*
(13/12+(11/12)*sqrt(2))/(61/12+(11/12)*sqrt(2))*b__24+((1/16)*
sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)*b__34/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))+((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__15/
(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt
(2))*b__25/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+
(11/12)*sqrt(2))*b__45/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):
```

```
> h10:=b__lambda-16*b__sigma_1+((1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)
+13/6)*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/8)*sqrt(2)-1/2)*
((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+((1/8)*sqrt(2)
-1/2)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+3/4- (
(1/16)*sqrt(2)-1/4)*((5/6)*sqrt(2)+13/6)*sqrt(2)/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))*b__34:
```

```
> h11:=(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__lambda-8*b__sigma_2-((3/4)*sqrt
(2)-45/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*
sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__13/
```

```
(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(sqrt(2)-15/2)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+(13/4+(11/4)*sqrt(2)+((3/2)*sqrt(2)-45/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))/(61/12+(11/12)*sqrt(2)))*b__15-(sqrt(2)-15/2)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__25/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__45/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):

```

>

```
> h12:=(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__lambda-8*b__sigma_3-((3/4)*sqrt(2)-45/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(sqrt(2)-15/2)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__14/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-
((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__24/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-
(sqrt(2)-15/2)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__15/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(13/4+(11/4)*sqrt(2)+((3/2)*sqrt(2)-45/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))/(61/12+(11/12)*sqrt(2)))*b__25-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__35/(61/12+(11/12)*sqrt(2)):

```

>

> *#Igualando as funções hi's, i=1,...,12 a zero e resolvendo as doze equações para b\_35 e b\_45, obtemos:*

>

```
> solve({h1=0,h2=0,h3=0,h4=0,h5=0,h6=0,h7=0,h8=0,h9=0,h10=0,h11=0,h12=0},[b__lambda,b__sigma_1,b__sigma_2,b__sigma_3,b__12,b__13,b__23,b__14,b__24,b__34,b__15,b__25]);

```

$$\left[ \left[ b_{\lambda} = 0, b_{\sigma_1} = -\frac{1}{63616} (5582 + 4493\sqrt{2}) (b_{35} + b_{45}), b_{\sigma_2} = \frac{1}{2019808} (5582 + 4493\sqrt{2}) (41\sqrt{2} b_{45} + 127 b_{35} + 21 b_{45}), b_{\sigma_3} = \frac{1}{365792} (3824 + 2545\sqrt{2}) (41\sqrt{2} b_{45} + 23 b_{35} - 21 b_{45}), b_{12} = \frac{1}{62} (82 + 75\sqrt{2}) (b_{35} + b_{45}), b_{13} = 0, b_{23} = -\frac{1}{62} (82 + 75\sqrt{2}) (b_{35} - b_{45}), b_{14} = \frac{1}{62} (82 + 75\sqrt{2}) (b_{35} - b_{45}), b_{24} = 0, b_{34} = -\frac{1}{62} (82 + 75\sqrt{2}) (b_{35} + b_{45}), b_{15} = -b_{35}, b_{25} = -b_{45} \right] \right] \quad (2)$$

>

> *#Substituindo estes valores nas duas entradas de F'(0), temos:*

>

```
> h13:=(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__lambda-8*b__sigma_2-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__12/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__13/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/4)*sqrt(2)-15/8)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b__23/(61/12+(11/12)*sqrt(2))-((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))*b__25/(61/12+(11/12)*sqrt(2))+
(13/4+(11/4)*sqrt(2)+((1/2)*sqrt(2)-15/4)*(13/12+(11/12)*sqrt(2))/(61/12+(11/12)*sqrt(2)))*b__35:

```

```
> subs(b_lambda = 0, b_sigma_1 = -(1/63616*(5582+4493*sqrt(2)))*
(b_35+b_45), b_sigma_2 = (1/2019808*(5582+4493*sqrt(2)))*(41*
sqrt(2)*b_45+127*b_35+21*b_45), b_sigma_3 = (1/365792*
(3824+2545*sqrt(2)))*(41*sqrt(2)*b_45+23*b_35-21*b_45), b_12
= (1/62*(82+75*sqrt(2)))*(b_35+b_45), b_13 = 0, b_23 = -
(1/62*(82+75*sqrt(2)))*(b_35-b_45), b_14 = (1/62*(82+75*sqrt
(2)))*(b_35-b_45), b_24 = 0, b_34 = -(1/62*(82+75*sqrt(2)))*
(b_35+b_45), b_15 = -b_35, b_25 = -b_45, h13);
```

$$-8 \left( \frac{2791}{1009904} + \frac{4493}{2019808} \sqrt{2} \right) (41 \sqrt{2} b_{45} + 127 b_{35} + 21 b_{45}) \quad (3)$$

$$- \frac{\left( \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{15}{8} \right) \left( \frac{13}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2} \right) \sqrt{2} \left( \frac{41}{31} + \frac{75}{62} \sqrt{2} \right) (b_{35} + b_{45})}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2}}$$

$$+ \frac{\left( \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{15}{8} \right) \left( \frac{13}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2} \right) \sqrt{2} \left( \frac{41}{31} + \frac{75}{62} \sqrt{2} \right) (b_{35} - b_{45})}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2}}$$

$$+ \frac{\left( \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{15}{4} \right) \left( \frac{13}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2} \right) b_{45}}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2}} + \left( \frac{13}{4} + \frac{11}{4} \sqrt{2} \right)$$

$$+ \frac{\left( \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{15}{4} \right) \left( \frac{13}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2} \right)}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12} \sqrt{2}} \Bigg) b_{35}$$

```
> simplify( (3) )
```

$$0 \quad (4)$$

```
> h14 := (13/12 + (11/12)*sqrt(2))*b_lambda - 8*b_sigma_3 - ((1/4)*sqrt
(2) - 15/8)*(13/12 + (11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*b_12 / (61/12 + (11/12)*
sqrt(2)) - ((1/4)*sqrt(2) - 15/8)*(13/12 + (11/12)*sqrt(2))*sqrt(2)*
b_14 / (61/12 + (11/12)*sqrt(2)) - ((1/2)*sqrt(2) - 15/4)*(13/12 + (11/12)
*sqrt(2))*b_24 / (61/12 + (11/12)*sqrt(2)) - ((1/2)*sqrt(2) - 15/4)*
(13/12 + (11/12)*sqrt(2))*b_15 / (61/12 + (11/12)*sqrt(2)) + (13/4 +
(11/4)*sqrt(2) + ((1/2)*sqrt(2) - 15/4)*(13/12 + (11/12)*sqrt(2))) /
(61/12 + (11/12)*sqrt(2))*b_45:
```

```
> subs(b_lambda = 0, b_sigma_1 = -(1/63616*(5582+4493*sqrt(2)))*
(b_35+b_45), b_sigma_2 = (1/2019808*(5582+4493*sqrt(2)))*(41*
sqrt(2)*b_45+127*b_35+21*b_45), b_sigma_3 = (1/365792*
(3824+2545*sqrt(2)))*(41*sqrt(2)*b_45+23*b_35-21*b_45), b_12
= (1/62*(82+75*sqrt(2)))*(b_35+b_45), b_13 = 0, b_23 = -
(1/62*(82+75*sqrt(2)))*(b_35-b_45), b_14 = (1/62*(82+75*sqrt
(2)))*(b_35-b_45), b_24 = 0, b_34 = -(1/62*(82+75*sqrt(2)))*
(b_35+b_45), b_15 = -b_35, b_25 = -b_45, h14);
```

$$-8 \left( \frac{239}{22862} + \frac{2545}{365792} \sqrt{2} \right) (41 \sqrt{2} b_{45} + 23 b_{35} - 21 b_{45}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{15}{8}\right) \left(\frac{13}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}\right) \sqrt{2} \left(\frac{41}{31} + \frac{75}{62}\sqrt{2}\right) (b_{35} + b_{45})}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}} \\
 & - \frac{\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{15}{8}\right) \left(\frac{13}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}\right) \sqrt{2} \left(\frac{41}{31} + \frac{75}{62}\sqrt{2}\right) (b_{35} - b_{45})}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}} \\
 & + \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{15}{4}\right) \left(\frac{13}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}\right) b_{35}}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}} + \left(\frac{13}{4} + \frac{11}{4}\sqrt{2}\right) \\
 & + \left. \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{15}{4}\right) \left(\frac{13}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}\right)}{\frac{61}{12} + \frac{11}{12}\sqrt{2}} \right) b_{45}
 \end{aligned}$$

> simplify( (5) )

0

(6)

>

```

> restart;
>
> #Denotamos as entradas de  $F'''(0)$ , ver (5.17), por  $w_i$ ,  $i=1, \dots, 14$ . Igualamos as
doze primeiras funções a zero e resolvemos as equações  $w_i=0$ ,  $i=1, \dots, 12$  para
 $b_{35}$ ,  $b_{45}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{45}$ ,  $d_{35}$  e  $d_{45}$ .
>
> w1:=-(6/923521)*(-44329008*d_13-44329008*d_24-24011546*d_15
-24011546*d_25-24011546*d_35-24011546*d_45-20317462*sqrt(2)*
d_25-20317462*sqrt(2)*d_35-22164504*sqrt(2)*d_12-22164504*sqrt
(2)*d_23-22164504*sqrt(2)*d_14-22164504*sqrt(2)*
d_34+463057205*sqrt(2)*b_45^3+463057205*sqrt(2)*b_35^3
-20317462*sqrt(2)*d_15-20317462*sqrt(2)*d_45+635725663*
b_35^3+635725663*b_45^3-324322124*sqrt(2)*b_45*c_45
-324322124*sqrt(2)*b_35*c_35+1392145221*sqrt(2)*b_35*
b_45^2+1392145221*sqrt(2)*b_35^2*b_45+1992685647*b_35^2*
b_45+1992685647*b_35*b_45^2-462575428*b_35*c_35-462575428*
b_45*c_45)/(61+11*sqrt(2)):
>
> w2:=-768*d_13-768*d_24+(60340329024/6464647)*b_35^3+
(60340329024/6464647)*b_45^3+(135675192960/6464647)*sqrt(2)*
b_35^2*b_45+(135675192960/6464647)*sqrt(2)*b_35*b_45^2-
(4723200/961)*sqrt(2)*b_35*c_35-(4723200/961)*sqrt(2)*b_45*
c_45+384*sqrt(2)*d_12+384*sqrt(2)*d_23+384*sqrt(2)*d_14+384*
sqrt(2)*d_34+(47838400128/6464647)*sqrt(2)*b_45^3+
(47838400128/6464647)*sqrt(2)*b_35^3+(201005817408/6464647)*
b_35^2*b_45+(201005817408/6464647)*b_35*b_45^2-(6902016/961)*
b_35*c_35-(6902016/961)*b_45*c_45:
>
> w3:=-192*d_13+192*d_15+192*d_35+(34098808896/6464647)*b_45^3+
(92753126784/6464647)*sqrt(2)*b_35^2*b_45-(3337728/961)*sqrt(2)
*b_45*c_45+(44698328448/6464647)*sqrt(2)*b_45^3+
(167527181376/6464647)*b_35^2*b_45-(5605632/961)*b_45*c_45:
>
> w4:=-192*d_24+192*d_25+192*d_45+(34098808896/6464647)*b_35^3+
(92753126784/6464647)*sqrt(2)*b_35*b_45^2-(3337728/961)*sqrt(2)
*b_35*c_35+(44698328448/6464647)*sqrt(2)*b_35^3+
(167527181376/6464647)*b_35*b_45^2-(5605632/961)*b_35*c_35:
>
> w5:=(1/7343838992)*(-969386746944*d_12-462661856496*d_13
-1531190429832*d_23-1531190429832*d_14-462661856496*d_24
-77110309416*d_34+2495069297532*d_15+2495069297532*
d_25+831689765844*d_35+831689765844*d_45-43005521137152*
d_sigma_1-261718463232*sqrt(2)*b_35*delta+2296785644748*sqrt
(2)*d_25+765595214916*sqrt(2)*d_35-1068528573336*sqrt(2)*d_12
-831689765844*sqrt(2)*d_23-831689765844*sqrt(2)*d_14
-231330928248*sqrt(2)*d_34+137454764561376*sqrt(2)*
b_45^3+137454764561376*sqrt(2)*b_35^3+2296785644748*sqrt(2)*
d_15+765595214916*sqrt(2)*d_45+200974333311285*
b_35^3+200974333311285*b_45^3-44280449031336*sqrt(2)*b_45*
c_45-44280449031336*sqrt(2)*b_35*c_35-666315679260752*sqrt(2)*
b_35*b_45^2-666315679260752*sqrt(2)*b_35^2*
b_45+3681957094872*sqrt(2)*b_45*c_35-261718463232*sqrt(2)*

```

```

b_45*delta+3681957094872*sqrt(2)*b_35*c_45+2687845071072*
d_lambda-947071354621919*b_35^2*b_45-947071354621919*b_35*
b_45^2-60151119368424*b_35*c_35+5313630499632*b_35*
c_45+5313630499632*b_45*c_35-60151119368424*b_45*c_45
-3884284996992*delta*b_35-3884284996992*delta*b_45-77110309416*
sqrt(2)*d_13-77110309416*sqrt(2)*d_24+484693373472*sqrt(2)*
d_lambda-7755093975552*d_sigma_1*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):

```

>

```

> w6:=(1/3671919496)*(-38555154708*d_12-117042433935*d_13
-38555154708*d_23-38555154708*d_14+462661856496*d_24
-38555154708*d_34+415844882922*d_15-831689765844*
d_25+415844882922*d_35+21502760568576*
d_sigma_1+5375690142144*d_sigma_2-765595214916*sqrt(2)*
d_25+382797607458*sqrt(2)*d_35-115665464124*sqrt(2)*d_12
-115665464124*sqrt(2)*d_23-115665464124*sqrt(2)*d_14
-115665464124*sqrt(2)*d_34+48579578371422*sqrt(2)*
b_45^3+24031548814707*sqrt(2)*b_35^3+382797607458*sqrt(2)*
d_15+27316627954161*b_35^3+72207463024725*b_45^3
-22450012633272*sqrt(2)*b_45*c_45+18076756513536*sqrt(2)*b_35*
c_35-41239977553383*sqrt(2)*b_35*b_45^2+405378181131462*sqrt
(2)*b_35^2*b_45-3717818489700*sqrt(2)*b_45*c_35-261718463232*
sqrt(2)*b_45*delta-3717818489700*sqrt(2)*b_35*
c_45+1343922535536*d_lambda+969386746944*d_sigma_2*sqrt(2)
+566954916783325*b_35^2*b_45-51509092396671*b_35*
b_45^2+24657823962324*b_35*c_35-4868965251696*b_35*c_45
-4868965251696*b_45*c_35-31068995402340*b_45*
c_45+874522669824*delta*b_45-643044901737*sqrt(2)*
d_13+77110309416*sqrt(2)*d_24+242346686736*sqrt(2)*
d_lambda+3877546987776*d_sigma_1*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):

```

>

```

> w7:=- (1/7343838992)*(1531190429832*d_12+462661856496*d_13
-561803682888*d_23+77110309416*d_14+462661856496*d_24
-831689765844*d_15-1663379531688*d_25-831689765844*
d_35+43005521137152*d_sigma_1+261718463232*sqrt(2)*b_35*
delta-1531190429832*sqrt(2)*d_25-765595214916*sqrt(2)*
d_35+831689765844*sqrt(2)*d_12+236838807492*sqrt(2)*
d_23+231330928248*sqrt(2)*d_14+195646429776225*sqrt(2)*
b_45^3+414565644291003*sqrt(2)*b_35^3-765595214916*sqrt(2)*
d_15+566253503279085*b_35^3+259614601154898*
b_45^3+18458267420796*sqrt(2)*b_45*c_45+18458267420796*sqrt(2)
*b_35*c_35+14360046310335*sqrt(2)*b_35*
b_45^2+869251778147297*sqrt(2)*b_35^2*b_45-72926602289352*sqrt
(2)*b_45*c_35+261718463232*sqrt(2)*b_45*delta-72926602289352*
sqrt(2)*b_35*c_45-2687845071072*d_lambda+1239993647716310*
b_35^2*b_45+39333043008253*b_35*b_45^2+24761929184580*b_35*
c_35-100618167285552*b_35*c_45-100618167285552*b_45*
c_35+24761929184580*b_45*c_45+711746552448*delta*
b_35+3884284996992*delta*b_45+77110309416*sqrt(2)*
d_13+77110309416*sqrt(2)*d_24-484693373472*sqrt(2)*
d_lambda+7755093975552*d_sigma_1*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):

```

>

```

> w8:=- (1/7343838992)*(1531190429832*d_12+462661856496*
d_13+77110309416*d_23-561803682888*d_14+462661856496*d_24
-1663379531688*d_15-831689765844*d_25-831689765844*
d_35+43005521137152*d_sigma_1+261718463232*sqrt(2)*b_35*

```

```

delta-765595214916*sqrt(2)*d__25+831689765844*sqrt(2)*
d__12+231330928248*sqrt(2)*d__23+236838807492*sqrt(2)*
d__14+414565644291003*sqrt(2)*b__45^3+195646429776225*sqrt(2)*
b__35^3-1531190429832*sqrt(2)*d__15-765595214916*sqrt(2)*
d__45+259614601154898*b__35^3+566253503279085*
b__45^3+18458267420796*sqrt(2)*b__45*c__45+18458267420796*sqrt(2)
*b__35*c__35+869251778147297*sqrt(2)*b__35*
b__45^2+14360046310335*sqrt(2)*b__35^2*b__45-72926602289352*sqrt
(2)*b__45*c__35+261718463232*sqrt(2)*b__45*delta-72926602289352*
sqrt(2)*b__35*c__45-2687845071072*d__lambda+39333043008253*
b__35^2*b__45+1239993647716310*b__35*b__45^2+24761929184580*
b__35*c__35-100618167285552*b__35*c__45-100618167285552*b__45*
c__35+24761929184580*b__45*c__45+3884284996992*delta*
b__35+711746552448*delta*b__45+77110309416*sqrt(2)*
d__13+77110309416*sqrt(2)*d__24-484693373472*sqrt(2)*
d__lambda+7755093975552*d__sigma__1*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):

```

>

```

> w9:=(1/3671919496)*(48579578371422*sqrt(2)*b__35^3-765595214916*
sqrt(2)*d__15-643044901737*sqrt(2)*d__24+382797607458*sqrt(2)*
d__45+242346686736*sqrt(2)*d__lambda+969386746944*sqrt(2)*
d__sigma__3-38555154708*d__12+462661856496*d__13-38555154708*
d__23-38555154708*d__14-117042433935*d__24-38555154708*d__34
-831689765844*d__15+415844882922*d__25+415844882922*
d__45+3877546987776*d__sigma__1*sqrt(2)+21502760568576*
d__sigma__1+5375690142144*d__sigma__3+72207463024725*
b__35^3+27316627954161*b__45^3+382797607458*sqrt(2)*
d__25+1343922535536*d__lambda-51509092396671*b__35^2*
b__45+566954916783325*b__35*b__45^2-31068995402340*b__35*c__35
-4868965251696*b__35*c__45-4868965251696*b__45*
c__35+24657823962324*b__45*c__45+874522669824*delta*b__35
-115665464124*sqrt(2)*d__34+24031548814707*sqrt(2)*
b__45^3+77110309416*sqrt(2)*d__13-115665464124*sqrt(2)*d__12
-115665464124*sqrt(2)*d__23-115665464124*sqrt(2)*
d__14+405378181131462*sqrt(2)*b__35*b__45^2-41239977553383*sqrt
(2)*b__35^2*b__45-22450012633272*sqrt(2)*b__35*c__35
-3717818489700*sqrt(2)*b__35*c__45-261718463232*sqrt(2)*b__35*
delta-3717818489700*sqrt(2)*b__45*c__35+18076756513536*sqrt(2)*
b__45*c__45)/(61+11*sqrt(2)):

```

>

```

> w10:=- (1/1835959748)*(37198561724541*sqrt(2)*b__35^3+19277577354*
sqrt(2)*d__24-121173343368*sqrt(2)*d__lambda+19277577354*
d__12+115665464124*d__13+115665464124*d__24-523248528180*
d__34+1938773493888*d__sigma__1*sqrt(2)+65429615808*sqrt(2)*
b__45*delta+10751380284288*d__sigma__1+52979991727677*
b__35^3+52979991727677*b__45^3-671961267768*
d__lambda+12183470173021*b__35^2*b__45+12183470173021*b__35*
b__45^2-2656815249816*b__35*c__35-1328407624908*b__35*c__45
-1328407624908*b__45*c__35-2656815249816*b__45*
c__45+177936638112*delta*b__35+177936638112*delta*b__45
-148712739588*sqrt(2)*d__34+37198561724541*sqrt(2)*
b__45^3+19277577354*sqrt(2)*d__13+57832732062*sqrt(2)*
d__12+8735892678450*sqrt(2)*b__35*b__45^2+8735892678450*sqrt(2)*
b__35^2*b__45-1840978547436*sqrt(2)*b__35*c__35-920489273718*sqrt
(2)*b__35*c__45+65429615808*sqrt(2)*b__35*delta-920489273718*sqrt
(2)*b__45*c__35-1840978547436*sqrt(2)*b__45*c__45)/(61+11*sqrt(2)
):

```

```

>
> w11:=(1/236898032)*(5958629521589*sqrt(2)*b_35^3+141072778056*
sqrt(2)*d_15-98786479344*sqrt(2)*d_24+49393239672*sqrt(2)*
d_45+96417499024*sqrt(2)*d_lambda+148179719016*
d_12+53657404248*d_13+49393239672*d_23+98786479344*d_14
-107314808496*d_24+206811981936*d_15+107314808496*
d_25+53657404248*d_45+50655186432*sqrt(2)*b_45*
delta-693637437696*d_sigma_2+10430763254991*
b_35^3+10115411646612*b_45^3+98786479344*sqrt(2)*
d_25+122594731560*d_lambda-19184870404720*b_35^2*
b_45+114313772367527*b_35*b_45^2-7669587159276*b_35*c_35
-2788901186400*b_35*c_45-2788901186400*b_45*
c_35+1570421890212*b_45*c_45+92824942752*delta*
b_35+35417447424*delta*b_45+7644504624549*sqrt(2)*
b_45^3+49393239672*sqrt(2)*d_13+80486106372*sqrt(2)*
d_12+26828702124*sqrt(2)*d_23+53657404248*sqrt(2)*
d_14+82712064662833*sqrt(2)*b_35*b_45^2-14143082075887*sqrt(2)
*b_35^2*b_45-5592102225780*sqrt(2)*b_35*c_35-1991525336304*
sqrt(2)*b_35*c_45-30020748192*sqrt(2)*b_35*
delta-1991525336304*sqrt(2)*b_45*c_35+1170473056284*sqrt(2)*
b_45*c_45-125082160896*d_sigma_2*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):
>
> w12:=(1/236898032)*(7644504624549*sqrt(2)*b_35^3+98786479344*
sqrt(2)*d_15+49393239672*sqrt(2)*d_24+96417499024*sqrt(2)*
d_lambda-125082160896*sqrt(2)*d_sigma_3+148179719016*d_12
-107314808496*d_13+98786479344*d_23+49393239672*
d_14+53657404248*d_24+107314808496*d_15+206811981936*
d_25+53657404248*d_35-30020748192*sqrt(2)*b_45*
delta-693637437696*d_sigma_3+10115411646612*
b_35^3+10430763254991*b_45^3+141072778056*sqrt(2)*
d_25+122594731560*d_lambda+114313772367527*b_35^2*b_45
-19184870404720*b_35*b_45^2+1570421890212*b_35*c_35
-2788901186400*b_35*c_45-2788901186400*b_45*c_35
-7669587159276*b_45*c_45+35417447424*delta*b_35+92824942752*
delta*b_45+49393239672*sqrt(2)*d_35+5958629521589*sqrt(2)*
b_45^3-98786479344*sqrt(2)*d_13+80486106372*sqrt(2)*
d_12+53657404248*sqrt(2)*d_23+26828702124*sqrt(2)*d_14
-14143082075887*sqrt(2)*b_35*b_45^2+82712064662833*sqrt(2)*
b_35^2*b_45+1170473056284*sqrt(2)*b_35*c_35-1991525336304*
sqrt(2)*b_35*c_45+50655186432*sqrt(2)*b_35*
delta-1991525336304*sqrt(2)*b_45*c_35-5592102225780*sqrt(2)*
b_45*c_45)/(61+11*sqrt(2)):
>
> w13:=(1/236898032)*(15025799449147*sqrt(2)*b_35^3+96417499024*
sqrt(2)*d_lambda+49393239672*d_12+53657404248*
d_13+49393239672*d_23+53657404248*d_25+314126790432*
d_35+50655186432*sqrt(2)*b_45*delta-693637437696*
d_sigma_2+21239835084291*b_35^3+13543005133638*
b_45^3+49393239672*sqrt(2)*d_25+122594731560*
d_lambda-9432511347358*b_35^2*b_45+4835294235907*b_35*b_45^2
-3118451184996*b_35*c_35-2788901186400*b_35*c_45
-2788901186400*b_45*c_35-712751670036*b_45*c_45+203693221728*
delta*b_35+35417447424*delta*b_45+239859257400*sqrt(2)*
d_35+9816433558251*sqrt(2)*b_45^3+49393239672*sqrt(2)*
d_13+26828702124*sqrt(2)*d_12+26828702124*sqrt(2)*

```

```
d__23+3454502394087*sqrt(2)*b__35*b__45^2-6932771647177*sqrt(2)*
b__35^2*b__45-2315561724252*sqrt(2)*b__35*c__35-1991525336304*
sqrt(2)*b__35*c__45+63790872480*sqrt(2)*b__35*
delta-1991525336304*sqrt(2)*b__45*c__35-495474144396*sqrt(2)*
b__45*c__45-125082160896*d__sigma__2*sqrt(2))/(61+11*sqrt(2)):
```

```
>
> w14:=(1/236898032)*(-125082160896*d__sigma__3*sqrt(2)
+26828702124*sqrt(2)*d__12+26828702124*sqrt(2)*d__14+49393239672*
d__12+49393239672*d__14+53657404248*d__24+53657404248*
d__15+314126790432*d__45-693637437696*d__sigma__3-495474144396*
sqrt(2)*b__35*c__35-1991525336304*sqrt(2)*b__45*
c__35+13543005133638*b__35^3+21239835084291*b__45^3+203693221728*
delta*b__45+35417447424*delta*b__35+4835294235907*b__35^2*b__45
-9432511347358*b__35*b__45^2-712751670036*b__35*c__35
-2788901186400*b__35*c__45-2788901186400*b__45*c__35
-3118451184996*b__45*c__45+3454502394087*sqrt(2)*b__35^2*b__45
-2315561724252*sqrt(2)*b__45*c__45-6932771647177*sqrt(2)*b__35*
b__45^2-1991525336304*sqrt(2)*b__35*c__45+50655186432*sqrt(2)*
b__35*delta+63790872480*sqrt(2)*b__45*delta+122594731560*
d__lambda+49393239672*sqrt(2)*d__15+49393239672*sqrt(2)*
d__24+239859257400*sqrt(2)*d__45+96417499024*sqrt(2)*
d__lambda+9816433558251*sqrt(2)*b__35^3+15025799449147*sqrt(2)*
b__45^3)/(61+11*sqrt(2)):
```

```
>
> solve({w1=0,w2=0,w3=0,w4=0,w5=0,w6=0,w7=0,w8=0,w9=0,w10=0,w11=0,
w12=0},[d__lambda,d__sigma__1,d__sigma__2,d__sigma__3,d__12,
d__13,d__23,d__14,d__24,d__34,d__15,d__25]):
```

```
> #Substituindo as dependências das variáveis encontradas nas duas últimas
    entradas de F'''(0), isto é, em w13 e em w14, obtemos
```

```
> subs(d__lambda = (1/1854520158337119083656048*
(1871453676646+1387028466567*sqrt(2)))*(-34449222622696*sqrt(2)*
b__35^2*b__45-34449222622696*sqrt(2)*b__35*b__45^2-1036877885136*
sqrt(2)*b__35*delta-1036877885136*sqrt(2)*b__45*
delta+36075334914017*b__35^3-99201632851055*b__35^2*b__45
-99201632851055*b__35*b__45^2+36075334914017*
b__45^3+1355815582848*delta*b__35+1355815582848*delta*b__45),
d__sigma__1 = (1/324418900001011306043873526528*
(6593909773116+4752868983739*sqrt(2)))*(-945018126542251825*sqrt
(2)*b__35^2*b__45-945018126542251825*sqrt(2)*b__35*b__45^2
-3907011385280934*sqrt(2)*b__35*c__35-16680502507748268*sqrt(2)*
b__35*c__45-87818572522965168*sqrt(2)*b__35*
delta-16680502507748268*sqrt(2)*b__45*c__35-3907011385280934*sqrt
(2)*b__45*c__45-87818572522965168*sqrt(2)*b__45*
delta+394425493885827957*b__35^3-2346787811188337202*b__35^2*
b__45-2346787811188337202*b__35*b__45^2+394425493885827957*
b__45^3+9287765830137270*sqrt(2)*d__35+9287765830137270*sqrt(2)*
d__45+69746215494768813*b__35*c__35+71952482338741872*b__35*
c__45+119570108085963936*delta*b__35+71952482338741872*b__45*
c__35+69746215494768813*b__45*c__45+119570108085963936*delta*
b__45-17706229003035426*d__35-17706229003035426*d__45),
d__sigma__2 = (1/45478421793546341376*(5582+4493*sqrt(2)))*
(-73167901956584033*sqrt(2)*b__35^3+669661427312803901*sqrt(2)*
```

```

b_35^2*b_45+884498175352491263*sqrt(2)*b_35*b_45^2
-144957086690375011*sqrt(2)*b_45^3-6617890607595624*sqrt(2)*
b_35*c_35-7563994018690368*sqrt(2)*b_35*
c_45+12927498800059872*sqrt(2)*b_35*delta-7563994018690368*sqrt
(2)*b_45*c_35-16381668505044360*sqrt(2)*b_45*
c_45+107978385146400*sqrt(2)*b_45*delta-376182563113199498*
b_35^3+777202177961223730*b_35^2*b_45+1637522505463014518*
b_35*b_45^2-63712545964124878*b_45^3+923164624328352*sqrt(2)*
d_45-30227605716663936*b_35*c_35-13836574424433600*b_35*c_45
-14906255303163168*delta*b_35-13836574424433600*b_45*c_35
-11430476187160128*b_45*c_45+2406873075397920*delta*
b_45+2859558714382944*d_35+472840417338912*d_45), d_sigma_3
= -(1/154107425665554248178743844544513536*
(179941455720783+118867766725744*sqrt(2))) *
(-148887188514499232982072*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-57571310784322682986016*sqrt(2)*b_35*
b_45^2+41017161884482336097832*sqrt(2)*
b_45^3+504368595802332877224*sqrt(2)*b_35*
c_35+1253322700630300755168*sqrt(2)*b_35*c_45
-281307843680554737360*sqrt(2)*b_35*
delta+1253322700630300755168*sqrt(2)*b_45*
c_35+3257169763892801865192*sqrt(2)*b_45*
c_45+2454691738210856866512*sqrt(2)*b_45*
delta+31227063466103173388839*b_35^3-125101153932679287900131*
b_35^2*b_45-118956206285856871089081*b_35*b_45^2
-2266112691025674375619*b_45^3-7998363727547341008*sqrt(2)*d_35
-340939067895762025872*sqrt(2)*d_45+3307301531030281174488*
b_35*c_35+1078587771572958557568*b_35*
c_45+100381370561846455680*delta*b_35+1078587771572958557568*
b_45*c_35-5969272007442509640*b_45*c_45
-3863781333314750623104*delta*b_45-195355224387341969664*
d_35+149851908107621713056*d_45), d_12 = -
(1/423525669224935366068*(11166534064+8209001995*sqrt(2))) *
(-8019128361923*sqrt(2)*b_35^2*b_45-8019128361923*sqrt(2)*
b_35*b_45^2-13783675164*sqrt(2)*b_35*c_35+44190125140*sqrt(2)
*b_35*c_45-846088585344*sqrt(2)*b_35*delta+44190125140*sqrt(2)
*b_45*c_35-13783675164*sqrt(2)*b_45*c_45-846088585344*sqrt(2)
*b_45*delta+11095133485401*b_35^3-26346283550174*b_35^2*b_45
-26346283550174*b_35*b_45^2+11095133485401*
b_45^3+111335152110*sqrt(2)*d_35+111335152110*sqrt(2)*
d_45+759662542527*b_35*c_35-772621708460*b_35*
c_45+1149812231616*delta*b_35-772621708460*b_45*
c_35+759662542527*b_45*c_45+1149812231616*delta*b_45
-213857568582*d_35-213857568582*d_45), d_13 =
(1/65881534200330831276504*(-55675006693+125949993228*sqrt(2))) *
(97154484365848*sqrt(2)*b_35^2*b_45-70068952114168*sqrt(2)*
b_35*b_45^2+8867992931616*sqrt(2)*b_45^3-882060889248*sqrt(2)*
b_35*c_35-1003136773104*sqrt(2)*b_35*delta-5419325124192*sqrt
(2)*b_45*c_45+1003136773104*sqrt(2)*b_45*delta+60661005819449*
b_35^3+218336474078555*b_35^2*b_45-179921416211159*b_35*
b_45^2-48208127498741*b_45^3+4262499742200*b_35*
c_35+1219812817536*delta*b_35-13192080638184*b_45*c_45
-1219812817536*delta*b_45), d_23 =
(1/63934523822847655016171723472*(38047826049854+23098424462691*
sqrt(2))) * (603776184380983474*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-597705056847646440*sqrt(2)*b_35*b_45^2+159729557189026986*sqrt
(2)*b_45^3-42589841989535820*sqrt(2)*b_35*c_35

```

```

-15874044506035520*sqrt(2)*b_35*c_45-6124565188540944*sqrt(2)*
b_35*delta-15874044506035520*sqrt(2)*b_45*
c_35+40339821367356084*sqrt(2)*b_45*c_45+6124565188540944*sqrt
(2)*b_45*delta+949488367400328161*b_35^3+2228492129933744213*
b_35^2*b_45-2099768920103177099*b_35*b_45^2
-865217701913796791*b_45^3-2599979239195632*sqrt(2)*
d_35+2599979239195632*sqrt(2)*d_45+39611577090693636*b_35*
c_35-12077878566517680*b_35*c_45+5375504083580352*delta*b_35
-12077878566517680*b_45*c_35-45863786262618492*b_45*c_45
-5375504083580352*delta*b_45+934410399952008*d_35
-934410399952008*d_45), d_14 = -
(1/49470557253189403898893735248*(26899382101142+14647681637817*
sqrt(2)))*(897894260515869414*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-925081269019494832*sqrt(2)*b_35*b_45^2-159729557189026986*sqrt
(2)*b_45^3-29043984334259412*sqrt(2)*b_35*
c_35+16496988315600800*sqrt(2)*b_35*c_45-4676682182921712*sqrt
(2)*b_35*delta+16496988315600800*sqrt(2)*b_45*
c_35+32146097404407084*sqrt(2)*b_45*c_45+4676682182921712*sqrt
(2)*b_45*delta+734684734195665449*b_35^3+2114506756115973149*
b_35^2*b_45-2233847951551463051*b_35*b_45^2
-865217701913796791*b_45^3-2212028261803584*sqrt(2)*
d_35+2212028261803584*sqrt(2)*d_45+28220710293048084*b_35*
c_35+16346806416711120*b_35*c_45+2837773701345024*delta*
b_35+16346806416711120*b_45*c_35-21766379879616876*b_45*c_45
-2837773701345024*delta*b_45-23295331489416*
d_35+23295331489416*d_45), d_24 = -(1/38792831785694481063576*
(108233267964*sqrt(2)-81070781041))*(81987345202168*sqrt(2)*
b_35^2*b_45-109128458864152*sqrt(2)*b_35*b_45^2
-8867992931616*sqrt(2)*b_45^3+6235353161184*sqrt(2)*b_35*c_35
-618882814512*sqrt(2)*b_35*delta+77853740832*sqrt(2)*b_45*
c_45+618882814512*sqrt(2)*b_45*delta+35718843273281*
b_35^3+163472668852955*b_35^2*b_45-201920871172559*b_35*
b_45^2-48208127498741*b_45^3+12068421373512*b_35*
c_35+676106036352*delta*b_35-3129570784536*b_45*c_45
-676106036352*delta*b_45), d_34 = (1/14957124330143800863912*
(74988725948+53858007869*sqrt(2)))*(-33891892390062*sqrt(2)*
b_35^2*b_45-33891892390062*sqrt(2)*b_35*b_45^2-3789106957188*
sqrt(2)*b_35*c_35-2583047502280*sqrt(2)*b_35*c_45
-11099010866688*sqrt(2)*b_35*delta-2583047502280*sqrt(2)*b_45*
c_35-3789106957188*sqrt(2)*b_45*c_45-11099010866688*sqrt(2)*
b_45*delta+27988064252631*b_35^3-158761700825763*b_35^2*b_45
-158761700825763*b_35*b_45^2+27988064252631*
b_45^3+1636371214044*sqrt(2)*d_35+1636371214044*sqrt(2)*
d_45+8264754041670*b_35*c_35+7431788491400*b_35*
c_45+15447665831040*delta*b_35+7431788491400*b_45*
c_35+8264754041670*b_45*c_45+15447665831040*delta*b_45
-2614331529348*d_35-2614331529348*d_45), d_15 = -d_35+
(56465552873/1086060696)*b_35^2*b_45-(125834412629/1086060696)*
b_35*b_45^2-(46919/6727)*b_35*c_35+(139977/6727)*b_45*c_45+
(51234323257/1086060696)*b_45^3-(55675006693/1086060696)*b_35^3
-(17160/6727)*sqrt(2)*b_45*c_45+(59832/6727)*sqrt(2)*b_35*
c_35-(77314955143/271515174)*sqrt(2)*b_35*b_45^2+
(70750620247/271515174)*sqrt(2)*b_35^2*b_45+(690/217)*sqrt(2)*
b_35*delta-(690/217)*sqrt(2)*b_45*delta-(1056/217)*delta*b_35+
(1056/217)*delta*b_45-(12278692113/90505058)*sqrt(2)*b_45^3+
(10495832769/90505058)*sqrt(2)*b_35^3, d_25 = -
(12278692113/90505058)*sqrt(2)*b_35^3-(77314955143/271515174)*

```

```

sqrt(2)*b__35^2*b__45+(70750620247/271515174)*sqrt(2)*b__35*
b__45^2+(10495832769/90505058)*sqrt(2)*b__45^3-(17160/6727)*sqrt
(2)*b__35*c__35-(690/217)*sqrt(2)*b__35*delta+(59832/6727)*sqrt
(2)*b__45*c__45+(690/217)*sqrt(2)*b__45*delta+
(51234323257/1086060696)*b__35^3-(125834412629/1086060696)*
b__35^2*b__45+(56465552873/1086060696)*b__35*b__45^2-
(55675006693/1086060696)*b__45^3+(139977/6727)*b__35*c__35+
(1056/217)*delta*b__35-(46919/6727)*b__45*c__45-(1056/217)*delta*
b__45-d__45,w13):

```

> simplify( ?? )

> rationalize( ?? )

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{179924055304} b_{35} \left( 16113248786849 \sqrt{2} b_{35}^2 - 65711865476639 \sqrt{2} b_{45}^2 \right. \\
 & \quad - 38617715808 \sqrt{2} \delta + 22413189788358 b_{35}^2 - 92406704514794 b_{45}^2 \\
 & \quad \left. - 83901942432 \delta \right) (-61 + 11 \sqrt{2})
 \end{aligned} \tag{1}$$

> expand( (1) )

$$\begin{aligned}
 & \frac{211659410269}{51717176} \sqrt{2} b_{35}^3 + \frac{36386645005}{6464647} b_{35}^3 - \frac{860002887155}{51717176} \sqrt{2} b_{35} b_{45}^2 \\
 & \quad - \frac{150587379093}{6464647} b_{35} b_{45}^2 - \frac{1728}{217} \sqrt{2} b_{35} \delta - \frac{5148}{217} \delta b_{35}
 \end{aligned} \tag{2}$$

> factor( (2) )

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{1865714445007162055992} (291093160040 \\
 & \quad + 211659410269 \sqrt{2}) (34449222622696 \sqrt{2} b_{45}^2 + 1036877885136 \sqrt{2} \delta \\
 & \quad - 36075334914017 b_{35}^2 + 99201632851055 b_{45}^2 - 1355815582848 \delta) b_{35}
 \end{aligned} \tag{3}$$

> #Após as simplificações, obtemos a primeira equação de (5.18), a menos de constante.

> #A segunda equação de (5.18) é obtida abaixo.

```

> subs(d_lambda = (1/1854520158337119083656048*
(1871453676646+1387028466567*sqrt(2)))*(-34449222622696*sqrt(2)*
b__35^2*b__45-34449222622696*sqrt(2)*b__35*b__45^2-1036877885136*
sqrt(2)*b__35*delta-1036877885136*sqrt(2)*b__45*
delta+36075334914017*b__35^3-99201632851055*b__35^2*b__45
-99201632851055*b__35*b__45^2+36075334914017*
b__45^3+1355815582848*delta*b__35+1355815582848*delta*b__45),
d_sigma_1 = (1/324418900001011306043873526528*
(6593909773116+4752868983739*sqrt(2)))*(-945018126542251825*sqrt
(2)*b__35^2*b__45-945018126542251825*sqrt(2)*b__35*b__45^2
-3907011385280934*sqrt(2)*b__35*c__35-16680502507748268*sqrt(2)*
b__35*c__45-87818572522965168*sqrt(2)*b__35*
delta-16680502507748268*sqrt(2)*b__45*c__35-3907011385280934*sqrt
(2)*b__45*c__45-87818572522965168*sqrt(2)*b__45*
delta+394425493885827957*b__35^3-2346787811188337202*b__35^2*
b__45-2346787811188337202*b__35*b__45^2+394425493885827957*

```

```

b_45^3+9287765830137270*sqrt(2)*d_35+9287765830137270*sqrt(2)*
d_45+69746215494768813*b_35*c_35+71952482338741872*b_35*
c_45+119570108085963936*delta*b_35+71952482338741872*b_45*
c_35+69746215494768813*b_45*c_45+119570108085963936*delta*
b_45-17706229003035426*d_35-17706229003035426*d_45),
d_sigma_2 = (1/45478421793546341376*(5582+4493*sqrt(2)))*
(-73167901956584033*sqrt(2)*b_35^3+669661427312803901*sqrt(2)*
b_35^2*b_45+884498175352491263*sqrt(2)*b_35*b_45^2
-144957086690375011*sqrt(2)*b_45^3-6617890607595624*sqrt(2)*
b_35*c_35-7563994018690368*sqrt(2)*b_35*
c_45+12927498800059872*sqrt(2)*b_35*delta-7563994018690368*sqrt
(2)*b_45*c_35-16381668505044360*sqrt(2)*b_45*
c_45+107978385146400*sqrt(2)*b_45*delta-376182563113199498*
b_35^3+777202177961223730*b_35^2*b_45+1637522505463014518*
b_35*b_45^2-63712545964124878*b_45^3+923164624328352*sqrt(2)*
d_45-30227605716663936*b_35*c_35-13836574424433600*b_35*c_45
-14906255303163168*delta*b_35-13836574424433600*b_45*c_35
-11430476187160128*b_45*c_45+2406873075397920*delta*
b_45+2859558714382944*d_35+472840417338912*d_45), d_sigma_3
= -(1/154107425665554248178743844544513536*
(179941455720783+118867766725744*sqrt(2)))*
(-148887188514499232982072*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-57571310784322682986016*sqrt(2)*b_35*
b_45^2+41017161884482336097832*sqrt(2)*
b_45^3+504368595802332877224*sqrt(2)*b_35*
c_35+1253322700630300755168*sqrt(2)*b_35*c_45
-281307843680554737360*sqrt(2)*b_35*
delta+1253322700630300755168*sqrt(2)*b_45*
c_35+3257169763892801865192*sqrt(2)*b_45*
c_45+2454691738210856866512*sqrt(2)*b_45*
delta+31227063466103173388839*b_35^3-125101153932679287900131*
b_35^2*b_45-118956206285856871089081*b_35*b_45^2
-2266112691025674375619*b_45^3-7998363727547341008*sqrt(2)*d_35
-340939067895762025872*sqrt(2)*d_45+3307301531030281174488*
b_35*c_35+1078587771572958557568*b_35*
c_45+100381370561846455680*delta*b_35+1078587771572958557568*
b_45*c_35-5969272007442509640*b_45*c_45
-3863781333314750623104*delta*b_45-195355224387341969664*
d_35+149851908107621713056*d_45), d_12 = -
(1/423525669224935366068*(11166534064+8209001995*sqrt(2)))*
(-8019128361923*sqrt(2)*b_35^2*b_45-8019128361923*sqrt(2)*
b_35*b_45^2-13783675164*sqrt(2)*b_35*c_35+44190125140*sqrt(2)
*b_35*c_45-846088585344*sqrt(2)*b_35*delta+44190125140*sqrt(2)
*b_45*c_35-13783675164*sqrt(2)*b_45*c_45-846088585344*sqrt(2)
*b_45*delta+11095133485401*b_35^3-26346283550174*b_35^2*b_45
-26346283550174*b_35*b_45^2+11095133485401*
b_45^3+111335152110*sqrt(2)*d_35+111335152110*sqrt(2)*
d_45+759662542527*b_35*c_35-772621708460*b_35*
c_45+1149812231616*delta*b_35-772621708460*b_45*
c_35+759662542527*b_45*c_45+1149812231616*delta*b_45
-213857568582*d_35-213857568582*d_45), d_13 =
(1/65881534200330831276504*(-55675006693+125949993228*sqrt(2)))*
(97154484365848*sqrt(2)*b_35^2*b_45-70068952114168*sqrt(2)*
b_35*b_45^2+8867992931616*sqrt(2)*b_45^3-882060889248*sqrt(2)*
b_35*c_35-1003136773104*sqrt(2)*b_35*delta-5419325124192*sqrt
(2)*b_45*c_45+1003136773104*sqrt(2)*b_45*delta+60661005819449*
b_35^3+218336474078555*b_35^2*b_45-179921416211159*b_35*

```

```

b_45^2-48208127498741*b_45^3+4262499742200*b_35*
c_35+1219812817536*delta*b_35-13192080638184*b_45*c_45
-1219812817536*delta*b_45), d_23 =
(1/63934523822847655016171723472*(38047826049854+23098424462691*
sqrt(2)))*(603776184380983474*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-597705056847646440*sqrt(2)*b_35*b_45^2+159729557189026986*sqrt
(2)*b_45^3-42589841989535820*sqrt(2)*b_35*c_35
-15874044506035520*sqrt(2)*b_35*c_45-6124565188540944*sqrt(2)*
b_35*delta-15874044506035520*sqrt(2)*b_45*
c_35+40339821367356084*sqrt(2)*b_45*c_45+6124565188540944*sqrt
(2)*b_45*delta+949488367400328161*b_35^3+2228492129933744213*
b_35^2*b_45-2099768920103177099*b_35*b_45^2
-865217701913796791*b_45^3-2599979239195632*sqrt(2)*
d_35+2599979239195632*sqrt(2)*d_45+39611577090693636*b_35*
c_35-12077878566517680*b_35*c_45+5375504083580352*delta*b_35
-12077878566517680*b_45*c_35-45863786262618492*b_45*c_45
-5375504083580352*delta*b_45+934410399952008*d_35
-934410399952008*d_45), d_14 = -
(1/49470557253189403898893735248*(26899382101142+14647681637817*
sqrt(2)))*(897894260515869414*sqrt(2)*b_35^2*b_45
-925081269019494832*sqrt(2)*b_35*b_45^2-159729557189026986*sqrt
(2)*b_45^3-29043984334259412*sqrt(2)*b_35*
c_35+16496988315600800*sqrt(2)*b_35*c_45-4676682182921712*sqrt
(2)*b_35*delta+16496988315600800*sqrt(2)*b_45*
c_35+32146097404407084*sqrt(2)*b_45*c_45+4676682182921712*sqrt
(2)*b_45*delta+734684734195665449*b_35^3+2114506756115973149*
b_35^2*b_45-2233847951551463051*b_35*b_45^2
-865217701913796791*b_45^3-2212028261803584*sqrt(2)*
d_35+2212028261803584*sqrt(2)*d_45+28220710293048084*b_35*
c_35+16346806416711120*b_35*c_45+2837773701345024*delta*
b_35+16346806416711120*b_45*c_35-21766379879616876*b_45*c_45
-2837773701345024*delta*b_45-23295331489416*
d_35+23295331489416*d_45), d_24 = -(1/38792831785694481063576*
(108233267964*sqrt(2)-81070781041))*(81987345202168*sqrt(2)*
b_35^2*b_45-109128458864152*sqrt(2)*b_35*b_45^2
-8867992931616*sqrt(2)*b_45^3+6235353161184*sqrt(2)*b_35*c_35
-618882814512*sqrt(2)*b_35*delta+77853740832*sqrt(2)*b_45*
c_45+618882814512*sqrt(2)*b_45*delta+35718843273281*
b_35^3+163472668852955*b_35^2*b_45-201920871172559*b_35*
b_45^2-48208127498741*b_45^3+12068421373512*b_35*
c_35+676106036352*delta*b_35-3129570784536*b_45*c_45
-676106036352*delta*b_45), d_34 = (1/14957124330143800863912*
(74988725948+53858007869*sqrt(2)))*(-33891892390062*sqrt(2)*
b_35^2*b_45-33891892390062*sqrt(2)*b_35*b_45^2-3789106957188*
sqrt(2)*b_35*c_35-2583047502280*sqrt(2)*b_35*c_45
-11099010866688*sqrt(2)*b_35*delta-2583047502280*sqrt(2)*b_45*
c_35-3789106957188*sqrt(2)*b_45*c_45-11099010866688*sqrt(2)*
b_45*delta+27988064252631*b_35^3-158761700825763*b_35^2*b_45
-158761700825763*b_35*b_45^2+27988064252631*
b_45^3+1636371214044*sqrt(2)*d_35+1636371214044*sqrt(2)*
d_45+8264754041670*b_35*c_35+7431788491400*b_35*
c_45+15447665831040*delta*b_35+7431788491400*b_45*
c_35+8264754041670*b_45*c_45+15447665831040*delta*b_45
-2614331529348*d_35-2614331529348*d_45), d_15 = -d_35+
(5646552873/1086060696)*b_35^2*b_45-(125834412629/1086060696)*
b_35*b_45^2-(46919/6727)*b_35*c_35+(139977/6727)*b_45*c_45+
(51234323257/1086060696)*b_45^3-(55675006693/1086060696)*b_35^3

```

```

- (17160/6727)*sqrt(2)*b_45*c_45+(59832/6727)*sqrt(2)*b_35*
c_35-(77314955143/271515174)*sqrt(2)*b_35*b_45^2+
(70750620247/271515174)*sqrt(2)*b_35^2*b_45+(690/217)*sqrt(2)*
b_35*delta-(690/217)*sqrt(2)*b_45*delta-(1056/217)*delta*b_35+
(1056/217)*delta*b_45-(12278692113/90505058)*sqrt(2)*b_45^3+
(10495832769/90505058)*sqrt(2)*b_35^3, d_25 = -
(12278692113/90505058)*sqrt(2)*b_35^3-(77314955143/271515174)*
sqrt(2)*b_35^2*b_45+(70750620247/271515174)*sqrt(2)*b_35*
b_45^2+(10495832769/90505058)*sqrt(2)*b_45^3-(17160/6727)*sqrt
(2)*b_35*c_35-(690/217)*sqrt(2)*b_35*delta+(59832/6727)*sqrt
(2)*b_45*c_45+(690/217)*sqrt(2)*b_45*delta+
(51234323257/1086060696)*b_35^3-(125834412629/1086060696)*
b_35^2*b_45+(56465552873/1086060696)*b_35*b_45^2-
(55675006693/1086060696)*b_45^3+(139977/6727)*b_35*c_35+
(1056/217)*delta*b_35-(46919/6727)*b_45*c_45-(1056/217)*delta*
b_45-d_45,w14):

```

> simplify( ?? )

> rationalize( ?? )

$$\frac{1}{179924055304} b_{45} \left( 65711865476639 \sqrt{2} b_{35}^2 - 16113248786849 \sqrt{2} b_{45}^2 + 38617715808 \sqrt{2} \delta + 92406704514794 b_{35}^2 - 22413189788358 b_{45}^2 + 83901942432 \delta \right) (-61 + 11 \sqrt{2}) \quad (4)$$

> expand( (4) )

$$-\frac{860002887155}{51717176} \sqrt{2} b_{35}^2 b_{45} - \frac{150587379093}{6464647} b_{35}^2 b_{45} + \frac{211659410269}{51717176} \sqrt{2} b_{45}^3 + \frac{36386645005}{6464647} b_{45}^3 - \frac{1728}{217} \sqrt{2} b_{45} \delta - \frac{5148}{217} \delta b_{45} \quad (5)$$

> factor( (5) )

$$-\frac{1}{10705271580755890779704} \left( 860002887155 \sqrt{2} + 1204699032744 \right) \left( 34449222622696 \sqrt{2} b_{45}^2 + 4145956578864 \sqrt{2} \delta + 206996445064129 b_{35}^2 - 99201632851055 b_{45}^2 - 5708564989056 \delta \right) b_{45} \quad (6)$$