



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**COMO OS ALUNOS DE 8º ANO LIDAM COM SITUAÇÕES RELATIVAS À ÁREA
DE PARALELOGRAMOS? : um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**

Recife
2018

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**COMO OS ALUNOS DE 8º ANO LIDAM COM SITUAÇÕES RELATIVAS À ÁREA
DE PARALELOGRAMOS? : um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

A663c Araújo, Jailson Cavalcante de
 Como os alunos de 8º ano lidam com situações relativas à área de
 paralelogramos? : um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais
 / Jailson Cavalcante de Araújo. – Recife, 2018.
 170 f. : il.

 Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
 Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica,
 2018.

 Inclui Referências e Apêndices.

 1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Geometria.
 3. Grandezas e medidas. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula
 Moreira Baltar (Orientadora). II. Título.

372.7 (22. ed.)

UFPE (CE2019-044)

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**COMO OS ALUNOS DE 8º ANO LIDAM COM SITUAÇÕES RELATIVAS À ÁREA
DE PARALELOGRAMOS? : um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 27/03/2018.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Externa)
Universidade de Pernambuco

RESUMO

O objetivo deste estudo foi analisar como alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos (quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos). A fundamentação teórica apoia-se na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores. Adota-se o modelo de área como uma grandeza autônoma, proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. No que se refere aos aspectos metodológicos, os participantes da pesquisa foram alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública federal situada na cidade do Recife, estado de Pernambuco. Foi aplicado um teste contendo situações de identificação de figuras, comparação de áreas, medida de área e produção de figuras de mesma área que uma figura dada, todas envolvendo paralelogramos. Alguns alunos foram selecionados para uma entrevista de explicitação para um melhor entendimento das respostas apresentadas no teste, bem como para a verificação da interpretação de alguns procedimentos. Os resultados mostram que mais de 80% dos participantes reconheceram quadrados e retângulos, inclusive em posições não habituais (lados não paralelos às bordas da folha), enquanto os paralelogramos não retângulos e não losangos e o losango só foram reconhecidos por 45% e 36% dos participantes respectivamente. A situação de medida foi a que teve a menor quantidade de acertos (12%), seguida da de identificação (24%). Os paralelogramos em que os alunos tiveram o melhor desempenho foram os quadrados e os retângulos, este último sem diferenças marcantes nos casos em que a figura está em posição não prototípica e com dados extras. A única exceção para o quadrado ocorreu quando foi dada a medida da sua diagonal, na qual apenas 26% dos alunos acertaram, diferentemente do resultado no caso habitual que foi de 78% de acertos. A dificuldade maior foi na figura do losango, com menor número de acertos na questão de identificação (36%), seguida do paralelogramo não retângulo e não losango, o qual não teve diferenças relevantes nos tipos de situações. Foram identificados os seguintes procedimentos: contagem de quadradinhos, uso de fórmula, sobreposição, inclusão. Alguns teoremas em ação verdadeiros foram identificados, tais como: figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais, figuras diferentes podem ter áreas iguais, entre outros. E falso: retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes. Averiguou-se que o desempenho dos alunos é acima de 70% de acertos em todas as situações quando as figuras em jogo são o quadrado e o retângulo. Quando se incluem os losangos e os paralelogramos não retângulos e não losangos, esse desempenho restringe-se

apenas à situação de comparação. Em relação ao cálculo de área, erros decorrentes da álgebra das grandezas foram verificados (multiplicação de números e obter grandezas como resultado, ausência e/ou utilização inadequada das unidades de medida). Também alguns de cálculo numérico e de cálculo relacional (confusão entre área e perímetro, entre outros).

Palavras-chave: Paralelogramos. Área. Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

The objective of this study was to analyze how students from the 8th year of elementary school deal with situations regarding the area of parallelograms (squares, rectangles, lozenges and parallelograms not rectangles and not lozenges). The theoretical foundation is based on the theory of conceptual fields developed by Gérard Vergnaud and his collaborators. The area model is adopted as an autonomous grandeur, proposed by Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian. With regard to the methodological aspects, survey participants were students of the 8th grade of Elementary School of a federal public school located in the city of Recife, state of Pernambuco. It was applied a test containing situations of figure identification, comparison of areas, measure area and production of figures of the same area as a given figure, all involving parallelograms. Some students were selected for an explication interview for a better understanding of the answers presented in the test, as well as for the verification of some producers. The results show that more than 80% of the participants recognized squares and rectangles, even in unusual positions (sides not parallel to the edge of the sheet of paper), whereas the parallelogram not rectangles and not lozenges and the lozenge were only recognized by 45% and 36% of participants respectively. The situation of measure was that had least amount of right answers (12%), followed by identification (24%). The parallelograms in which the students had the best performance were squares and rectangles, latter case with no significant differences in cases in which the figure is in a non-prototypical position and with extra data. The only exception to the squares occurred when the measure of its diagonal was given, in which only 26% of students answered right, unlike the results in the usual case, which was 78% of correct answers. The greatest difficulty was in the figure of the lozenge with fewer successes in the identification (36%), followed by the parallelogram not rectangle and not lozenge, which did not have significant differences in the types of situation. The following procedures were identified: counting of little squares, use of formula, overlap, inclusion. Some theorems in action have been identified, such as: figures of different perimeters may have equal areas, different figures may have equal areas, among others. And false: rectangles that have bases and heights of different measurements, have different areas. An examination that students' performance is over 70% of correct answers in all situations when the figures presented are the square and the rectangle. When including lozenges and parallelograms not rectangles and non lozenges, this performance is restricted only the comparison situation. With respect to area calculation, errors resulting from the algebra of the

quantities were verified (multiplication of numbers and obtain quantities as a result, absence and/or inappropriate use of units of measurement). Also some numerical calculation and relational calculation (confusion between area and perimeter, among others).

Keywords: Parallelograms. Area. Theory of Conceptual Fields.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Equivalências algébricas por meio do cálculo de áreas	19
Figura 2 –	Articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas...	29
Figura 3 –	Exemplo de superfícies diferentes com áreas iguais.....	30
Figura 4 –	Exemplo de uma situação de comparação sem dados numéricos.....	34
Figura 5 –	Exemplo de uma situação de medida.....	35
Figura 6 –	Exemplo de uma situação de produção de superfície de mesma área que uma superfície dada.....	35
Figura 7 –	Representação dos grupos dos quadriláteros notáveis.....	47
Figura 8 –	Esquema dos três tipos de objetos.....	48
Figura 9 –	Paralelogramo prototípico na França.....	49
Figura 10a –	Paralelogramo com inclinação para a direita.....	49
Figura 10b –	Paralelogramo com inclinação para a esquerda.....	49
Figura 11 –	Exemplo de paralelogramo prototípico.....	49
Figura 12 –	Paralelogramos em posições não prototípicos.....	50
Figura 13 –	Retângulo em posição prototípica.....	51
Figura 14 –	Retângulos em posições não prototípicas.....	51
Figura 15 –	Losango em posição prototípica.....	51
Figura 16 –	Losangos em posições não prototípicas.....	52
Figura 17 –	Quadrado em posição prototípica.....	52
Figura 18 –	Quadrados em posições não prototípicas.....	52
Figura 19a –	Paralelogramo com um dos lados na posição vertical.....	59
Figura 19b –	Paralelogramo com um dos lados na posição horizontal.....	59
Figura 19c –	Paralelogramo com lados na posição oblíqua.....	59
Figura 20a –	Paralelogramo com inclinação para a direita.....	59
Figura 20b –	Paralelogramo com inclinação para a esquerda.....	60
Figura 21a –	Paralelogramo com altura traçada no interior.....	61
Figura 21b –	Paralelogramo com altura traçada no exterior.....	61
Figura 22 –	Todos os paralelogramos da 1ª primeira questão.....	72
Figura 23 –	Quadriláteros que não são paralelogramos da 1ª questão.....	72
Figura 24 –	Paralelogramos não retângulos e não losangos da 1ª questão.....	73

Figura 25 –	Paralelogramo em posição prototípica da 1ª questão.....	73
Figura 26 –	Figura com lados dois a dois paralelos da 1ª questão.....	73
Figura 27 –	Figuras com pelo menos um par de lados paralelos que não são paralelogramos da 1ª questão.....	73
Figura 28 –	Trapézios da 1ª questão.....	74
Figura 29 –	Retângulos não quadrados da 1ª questão.....	74
Figura 30 –	Quadrados da 1ª questão.....	74
Figura 31 –	Quadrado em posição prototípica da 1ª questão.....	75
Figura 32 –	Losangos não quadrados da 1ª questão.....	75
Figura 33 –	Todos os retângulos da 1ª questão.....	75
Figura 34 –	Retângulo prototípico da 1ª questão.....	76
Figura 35 –	Todos os losangos da 1ª questão.....	76
Figura 36 –	Losango em posição próxima à prototípica da 1ª questão.....	76
Figura 37a –	Figuras (A e G) da 2ª questão.....	79
Figuras 37b –	Figuras (C e E) da 2ª questão.....	79
Figura 38 –	Figuras (B, D, F e H) da 2ª questão.....	79
Figura 39 –	Comparação (A e B) da 2ª questão.....	81
Figura 40 –	Comparação (A e C) da 2ª questão.....	82
Figura 41 –	Comparação (E e F) da 2ª questão.....	82
Figura 42 –	Comparação (F e H) da 2ª questão.....	83
Figura 43 –	Comparação (A e D) da 2ª questão.....	83
Figura 44 –	Figuras em posição prototípica da 3ª questão.....	86
Figura 45 –	Figuras não prototípicas da 3ª questão.....	87
Figura 46 –	Item (g) da 3ª questão.....	89
Figura 47 –	Item (c) da 3ª questão.....	90
Figura 48 –	Itens (d) e (f) da 3ª questão.....	90
Figura 49 –	Item (h) da 3ª questão.....	91
Figura 50 –	Acerto parcial na identificação de paralelogramos na 1ª questão.....	97
Figura 51 –	Erro na identificação de paralelogramos na 1ª questão.....	98
Figura 52 –	Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto total na identificação de quadrados.....	99
Figura 53 –	Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto parcial na identificação de retângulos.....	99

Figura 54 –	Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto parcial na identificação de losangos.....	100
Figura 55 –	Identificação de paralelogramos como tendo pelo menos um par de lados paralelos.....	101
Figura 56 –	Identificação de paralelogramos como tendo dois pares de lados paralelos.....	102
Figura 57 –	Resposta correta esperada na 1ª questão.....	104
Figura 58 –	Não inclusão de quadrado na identificação de retângulo e de losango na 1ª questão.....	105
Figura 59 –	Produção de retângulo não quadrado em vez de quadrado no item (c) da 4ª questão.....	106
Figura 60 –	Explicação dada pelo aluno na comparação (A e B) da 2ª questão.....	110
Figura 61 –	Explicação dada pelo aluno na comparação (F e H) da 2ª questão.....	110
Figura 62 –	Explicação dada pelo aluno na comparação entre as figuras (F) e (H) da 2ª questão.....	110
Figura 63 –	Explicação dada pelo aluno na comparação entre as figuras (A) e (B) da 2ª questão.....	110
Figura 64 –	Explicação dada pelo aluno na comparação (A e G) da 2ª questão.....	111
Figura 65 –	Explicação dada pelo aluno na comparação (F e H) da 2ª questão.....	111
Figura 66a –	Erro de cálculo numérico na comparação (A e D) da 2ª questão.....	111
Figura 66b –	Erro de cálculo numérico na comparação (A e D) da 2ª questão.....	112
Figura 67 –	Erro de álgebra das grandezas na 2ª questão.....	112
Figura 68 –	Explicação dada na comparação das áreas de (A) e (B) da 2ª questão..	115
Figura 69 –	Acerto no cálculo relacional, no cálculo numérico e na álgebra das grandezas no item (b) da 3ª questão.....	117
Figura 70 –	Procedimento de decomposição e recomposição no item (g) da 3ª questão.....	117
Figura 71 –	Erro de leitura nos dados do item (b) da 3ª questão.....	118
Figura 72 –	Acerto parcial decorrente de erro na álgebra das grandezas no item (a) da 3ª questão.....	118
Figura 73 –	Erro de cálculo numérico no item (g) da 3ª questão.....	119
Figura 74 –	Dificuldade na escolha dos dados numéricos no item (c) da 3ª questão.....	119

Figura 75 –	Produto do comprimento dos lados no item (f) da 3ª questão.....	120
Figura 76 –	Produto dos comprimentos dos lados no item (d) da 3ª questão.....	120
Figura 77 –	Produto dos comprimentos dos lados na 4ª questão.....	121
Figura 78 –	Erro de leitura no item (b) da 3ª questão.....	121
Figura 79 –	Erro de leitura no item (d) da 3ª questão.....	122
Figura 80 –	Resposta dada durante a entrevista ao item (b) da 3ª questão.....	123
Figura 81 –	Interpretação incorreta da figura no item (f) da 3ª questão.....	123
Figura 82 –	Resposta dada durante a entrevista ao item (f) da 3ª questão.....	124
Figura 83 –	Resposta do aluno B13 no item (d) da 3ª questão.....	125
Figura 84 –	Resposta do aluno B13 na 4ª questão.....	126
Figura 85 –	Erro na escolha dos dados no item (h) da 3ª questão.....	126
Figura 86 –	Resposta dada durante a entrevista ao item (h) da 3ª questão.....	127
Figura 87 –	Consideração da inclusão de classes na 4ª questão.....	128
Figura 88 –	Produção de losango não quadrado com a diagonal maior na horizontal na 4ª questão.....	129
Figura 89 –	Produção de losango não quadrado com a diagonal maior na vertical na 4ª questão.....	129
Figura 90 –	Dificuldade na produção do losango na 4ª questão.....	130
Figura 91 –	Erro de cálculo relacional na 4ª questão.....	130
Figura 92 –	Resposta dada durante a entrevista para os itens (a), (b) e (c) da 4ª questão.....	132
Figura 93 –	Figura produzida no item (b) da 4ª questão.....	132
Figura 94 –	Losangos produzidos no item (b) da 4ª questão.....	134
Figura 95 –	Paralelogramo ABCD.....	167
Figura 96 –	Quadrilátero ABCD.....	167
Figura 97 –	Paralelogramo com as diagonais interceptando-se nos pontos médios..	168
Figura 98 –	Retângulo.....	168
Figura 99 –	Losango.....	169
Figura 100 –	Paralelogramo com altura relativa ao lado tomado por base.....	169
Figura 101 –	Invariância da área com relação à escolha da base.....	170

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Sistematização das situações que dão sentido ao conceito de área.....	36
Quadro 2 –	Sistematização das variáveis didáticas e seus valores.....	66
Quadro 3 –	Quantificação dos itens do teste.....	68
Quadro 4 –	Sistematização dos quadriláteros e não quadriláteros.....	70
Quadro 5 –	Sistematização dos paralelogramos.....	71
Quadro 6 –	Variáveis didáticas da 1ª questão.....	71
Quadro 7 –	Variáveis didáticas da 2ª questão.....	80
Quadro 8 –	Variáveis didáticas da 3ª questão.....	88
Quadro 9 –	Variáveis didáticas da 4ª questão.....	93
Quadro 10 –	Alunos e critérios para entrevista na 1ª questão.....	100
Quadro 11 –	Síntese dos teoremas em ação observados na 2ª questão.....	113
Quadro 12 –	Alunos e critérios para entrevista na 2ª questão.....	113
Quadro 13 –	Alunos e critérios para entrevista na 3ª questão.....	121
Quadro 14 –	Alunos e critérios para entrevista na 4ª questão.....	131

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 –	Resultado do teste por questões.....	95
Gráfico 2 –	Resultado do teste por identificação na 1ª questão.....	96
Gráfico 3 –	Resultado do teste por comparações na 2ª questão.....	107
Gráfico 4 –	Resultado do teste por itens na 3ª questão.....	116
Gráfico 5 –	Resultado do teste por itens na 4ª questão.....	128
Gráfico 6 –	Desempenho dos alunos em relação aos itens sobre o quadrado.....	135
Gráfico 7 –	Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre quadrados.....	135
Gráfico 8 –	Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre quadrados.....	136
Gráfico 9 –	Desempenho dos alunos em relação aos itens sobre o retângulo.....	137
Gráfico 10 –	Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre retângulos.....	137
Gráfico 11 –	Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre retângulos.....	138
Gráfico 12 –	Desempenho dos alunos em relação aos itens sobre o losango.....	138
Gráfico 13 –	Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre losangos.....	139
Gráfico 14 –	Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre losangos.....	139
Gráfico 15 –	Desempenho dos alunos em relação aos itens sobre o paralelogramo não retângulo e não losango.....	140
Gráfico 16 –	Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre paralelogramos não retângulos e não losangos.....	140
Gráfico 17 –	Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre paralelogramos não retângulos e não losangos.....	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Itens com percentual de acertos acima de 70%.....	141
Tabela 2 –	Itens com percentual de acertos parciais acima de 50%.....	142
Tabela 3 –	Itens com percentual de erros acima de 25%.....	143

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA	22
2.1	ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	22
2.2	ÁREA COMO GRANDEZA.....	27
2.3	ESTUDOS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁREA.....	31
2.4	ASPECTOS RELACIONADOS ÀS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS.....	43
2.4.1	Paralelogramos prototípicos.....	47
2.5	SOBRE A APRENDIZAGEM E O ENSINO DE PARALELOGRAMOS.....	53
2.5.1	Estudos sobre a área do paralelogramo.....	57
2.6	OBJETIVOS.....	63
2.6.1	Objetivo Geral.....	63
2.6.2	Objetivos Específicos.....	63
3	PERCURSO METODOLÓGICO.....	64
3.1	ESTUDO DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS EM FOCO.....	65
3.2	DESCRIÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DO TESTE.....	68
4	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	95
4.1	COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A CLASSIFICAÇÃO DE PARALELOGRAMOS?.....	96
4.2	COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A COMPARAÇÃO DE ÁREAS DE PARALELOGRAMOS?.....	107
4.3	COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM O CÁLCULO DA ÁREA DE PARALELOGRAMOS?.....	116
4.4	COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A PRODUÇÃO DE FIGURAS DE MESMA ÁREA QUE UM PARALELOGRAMO DADO?....	127
4.5	ANÁLISE DOS RESULTADOS DE ACORDO COM AS CLASSES DE FIGURAS.....	134
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	144

REFERÊNCIAS.....	149
APÊNDICE A – TESTE.....	154
APÊNDICE B – QUADRO DOS ALUNOS SELECIONADOS PARA ENTREVISTAS COM OS RESPECTIVOS CRITÉRIO.....	160
APÊNDICE C – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS QUADRADOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4.....	161
APÊNDICE D – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS RETÂNGULOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4.....	162
APÊNDICE E – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS LOSANGOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4.....	163
APÊNDICE F – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS PARALELOGRAMOS NÃO RETÂNGULOS E NÃO LOSANGOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4.....	164
APÊNDICE G – RESULTADO INDIVIDUAL DE CADA ALUNO NO TESTE.....	165
APÊNDICE H – RESULTADO QUANTITATIVO EM TODOS OS ITENS DO TESTE.....	166
ANEXO A – PROVAS E DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES (P), TEOREMAS (T) E PROPOSIÇÕES (PP) DA SEÇÃO 2.4 E 2.4.1.....	167

INTRODUÇÃO

Nosso interesse por investigar aspectos relacionados ao processo de aprendizagem e ensino do conceito de área surge a partir de experiências em sala de aula, muitas delas durante as observações e regências do estágio na graduação. Percebíamos muitas dificuldades de alunos nesse conteúdo e a maneira como alguns professores o trabalhavam - figura seguida da fórmula para o cálculo da área – não nos parecia satisfatória. Na maioria dos casos, as questões seguiam um certo padrão e exigiam que o aluno apenas substituísse os dados numéricos e fizesse as operações para resolvê-las.

Realizamos nosso trabalho de conclusão de curso da graduação (ARAÚJO, 2014), orientado pela professora Marilene Rosa dos Santos, motivados pelos pontos anteriormente citados. Nele analisamos o desempenho e os procedimentos utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em situações de comparação, de medida e de produção, todas envolvendo o paralelogramo não retângulo e não losango (na época chamávamos de paralelogramo qualquer). Na questão de comparação percebemos que apresentaram um melhor desempenho quando recorreram a um procedimento numérico. Na de medida, confirmamos nossa hipótese inicial, uma vez que houve o maior número de acertos no item em que a figura se encontrava em sua posição habitual e com os dados necessários e suficientes, porém quando a figura estava em uma posição diferente e com dados extras para o cálculo da área, eles sentiram mais dificuldades e não obtiveram um bom desempenho. A questão de produção foi a que apresentou o maior número de erros, possivelmente pelo fato de não terem prática de trabalhar com situações desse tipo. Em relação aos procedimentos, na questão de comparação não tínhamos o objetivo de comparar por meio de estratégias numéricas, porém alguns estudantes sentiram a necessidade de utilizar a régua graduada para resolvê-la. Também utilizaram corte e colagem, associação a situações do dia a dia, procedimentos de medida e combinação entre eles, ou seja, corte e colagem e medida.

Na presente pesquisa, resolvemos dar continuidade ao estudo anterior para casos em que são considerados todos os paralelogramos (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango), uma vez que para cada uma dessas figuras há aspectos específicos. Estudos (VINH BANG; LUNZER, 1965, DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, SANTOS, 2005, SOUZA, 2013, entre outros) apontam dificuldades dos alunos em situações envolvendo a área de paralelogramos, como confusões entre as variações da área e do perímetro por considerarem que os paralelogramos são retângulos deformados,

não os reconhecer em posições inabituais e emprego de fórmulas erradas. Outras pesquisas (PASSOS, 2000, DINIZ, 2013, TAVARES, 2014, COSTA, 2016 etc.) apresentam resultados voltados para dificuldades na identificação e classificação de quadriláteros, principalmente quando se trata de paralelogramos.

Notamos que, em muitas vezes, as pesquisas ora voltam-se para o cálculo de área, a maioria ligada ao bloco das grandezas e medidas, ora voltam-se apenas para a identificação e classificação de quadriláteros, ligadas ao bloco da geometria. Nesse sentido, optamos por realizar uma pesquisa que contemplasse esses dois aspectos, o do cálculo de área de quadriláteros, especialmente paralelogramos, e a identificação e classificação dessas figuras.

Partimos dos seguintes questionamentos: os alunos consideram o quadrado, o retângulo e o losango como sendo paralelogramos? Consideram o paralelogramo como retângulo deformado? Quais os conhecimentos mobilizados por esses alunos ao resolverem situações que dão sentido ao conceito de área, no caso dos paralelogramos? Multiplicam os comprimentos dos lados adjacentes para calcular a área de paralelogramos? O tipo de paralelogramo influencia no uso da fórmula para o cálculo de área? Reconhecer a figura ajuda a calcular sua área?

Adotamos a abordagem da área como uma grandeza autônoma, elaborada por Douady e Perrin-Glorian (1989), que corresponde a distinguir e articular três quadros: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas. Além dos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989), apoiamo-nos em Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002) e Lima e Bellemain (2010), os quais sugerem que a abordagem de área, comprimento, volume como grandezas, favorece a compreensão e construção desses conceitos pelos alunos.

Nos Parâmetros na sala de aula (PERNAMBUCO, 2013, p. 138) orienta-se que “é importante que o estudante diferencie objeto, grandeza e medida dessa grandeza”. A título de exemplo, podemos tomar como objeto um triângulo, que tenha uma grandeza área de nove centímetros quadrados. Se quiséssemos mudar a unidade, ela poderia ser representada de forma equivalente por novecentos milímetros quadrados sem que sua área fosse alterada, ou seja, são maneiras diferentes, porém equivalentes de representar uma mesma grandeza, no caso, a área de um triângulo. De modo geral, poderíamos representar de diferentes maneiras o par (número, unidade de medida) sem provocar alterações na área da figura. Destacamos também a diferença entre figura e área, por exemplo: podemos tomar o mesmo triângulo de área nove centímetros quadrados e pensar em um trapézio que possua uma área igual a essa.

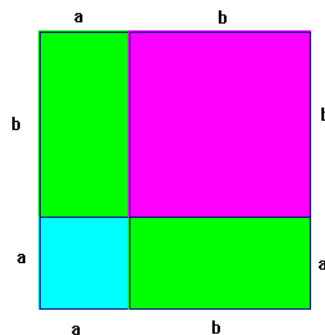
Temos duas figuras diferentes que possuem mesma área. Essa distinção entre grandeza e medida e entre grandeza e figura será retomada e aprofundada adiante.

Enfatizamos nesse estudo as classes de situações que dão sentido ao conceito de área, propostas por Baltar (1996) - comparação, medida, e produção de superfícies - e, ampliadas por Ferreira (2010) com a situação de mudança de unidade.

Embora tenha fortes relações com o bloco da geometria, incluímos nosso estudo no das grandezas e medidas que é considerado como um articulador entre diversos conteúdos matemáticos. Para Lima e Bellemain (2010), é importante um estudo detalhado desse campo e não se limitar apenas à aprendizagem das unidades de medida, múltiplos e submúltiplos, e das conversões de unidade. Nele encontram-se as grandezas geométricas: comprimento, área, volume e abertura de ângulo. Cabe ressaltar que elas são abordadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, (BRASIL, 1997-1998), em todos os ciclos do ensino fundamental. É proposto nos Parâmetros na sala de aula (PERNAMBUCO, 2013) que “o trabalho com grandezas geométricas deve ser fortemente articulado com a geometria” (p. 151).

Dentre as grandezas geométricas, o conceito de área fica na fronteira entre a geometria e as grandezas e medidas e é muito rico do ponto de vista da matemática escolar. Tem relações com outras disciplinas, como em Geografia, no estudo de escalas e cartografia, na Física, no estudo das pressões, entre outras. No currículo escolar, percebemos o uso de outros conteúdos vinculado ao estudo de área, por exemplo, embora isso seja feito de maneira implícita em geral, a área de figuras é um dos principais contextos utilizados no estudo de frações, é relacionado à multiplicação de números naturais, antes mesmo de ser explicitamente trabalhada, ajuda na compreensão de produtos notáveis, uma vez que permite visualizar a equivalência de expressões algébricas como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (apoiando-se na área de retângulos e quadrados como na figura abaixo).

Figura 1 – Equivalências algébricas por meio do cálculo de áreas



Fonte: acervo da pesquisa

Como podemos observar, ao realizar o cálculo das áreas das figuras coloridas, temos em azul a^2 , em verde $2ab$ e em rosa b^2 , favorecendo a visualização da equivalência de $(a + b)^2$.

Optamos por trabalhar com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental por já terem vivenciado diversas situações relativas ao conteúdo em estudo. Em relação ao conceito de área, nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco propõe-se que ele deve ser trabalhado a partir do 3º ano do Ensino Fundamental. No que se refere ao reconhecimento de figuras, este documento aponta que os alunos têm contato com figuras geométricas planas e espaciais desde os anos iniciais do ensino fundamental, em que no 1º ano eles devem “reconhecer quadrados, retângulos e triângulos não restritos a posições prototípicas” (PERNAMBUCO, 2012, p. 52). De acordo com este documento, esse conhecimento vai evoluindo e sendo aprofundado nos anos seguintes, de modo que descrevam, identifiquem e classifiquem diversas figuras planas. Já no início dos anos finais do ensino fundamental, o aluno deve ser capaz de “conhecer as propriedades dos quadriláteros e utilizá-las para classificá-los” (p. 94).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais aponta-se que “os estudantes que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle” (BRASIL, 1998, p. 131). Quando as fórmulas são ensinadas sem que os alunos compreendam o significado do que fazem, eles as esquecem rapidamente e não conseguem utilizá-las para calcular a área de figuras em posições diferentes do habitual, do que é geralmente apresentado na escola ou nos livros didáticos (por exemplo, se nenhum dos lados do paralelogramo é paralelo a uma das bordas da folha de papel). Por isso é comum ouvirmos perguntas por parte dos alunos, tais como: quem é a base? Qual a altura? Que figura é essa? Uso qual fórmula? Quais dados numéricos devo utilizar? Para Douady e Perrin-Glorian (1989) uma das origens das dificuldades conceituais dos estudantes é a ausência de construção das relações pertinentes entre os quadros numérico e geométrico. Pesquisas posteriores também confirmam essa interpretação, entre as quais Pessoa (2010).

Nosso objetivo é analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, como alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos (quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos). A escolha dessa teoria justifica-se por considerar que a aquisição de conhecimentos se dá por meio do enfrentamento de situações diversas. Nesse sentido, Vergnaud (1994, p. 177) aponta que para a construção de um conceito o aluno precisa “não somente de uma definição por enunciado e

textos, mas também daquilo que está subjacente às competências e permite a ação operatória”. Essa teoria nos permite investigar os conhecimentos mobilizados pelos alunos de 8º ano ao resolverem problemas variados sobre a área de paralelogramos.

O texto a seguir está estruturado em cinco capítulos. No capítulo 1 temos a introdução até aqui apresentada. No capítulo 2, que trata da fundamentação teórica e da construção da problemática da pesquisa, discutimos alguns elementos da Teoria dos Campos Conceituais, da área como grandeza, estudos sobre o ensino e a aprendizagem de área, aspectos relacionados às definições e propriedades dos paralelogramos, paralelogramos prototípicos, estudos sobre a aprendizagem e o ensino de paralelogramos, estudos sobre a área do paralelogramo, nosso objetivo geral e os específicos. No capítulo 3, dedicado ao percurso metodológico, apresentamos o universo da pesquisa, os participantes, os procedimentos metodológicos, o instrumento de coleta de dados, o estudo das variáveis didáticas e a análise a priori do teste. O capítulo 4 trata da análise e discussão dos resultados. No último capítulo, apresentamos nossas considerações finais. Por fim, constam as referências que serviram de suporte para elaboração e construção desta pesquisa e os apêndices.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA

2.1 ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) construída por Gérard Vergnaud (1986, 1990, 1996, 1998, 2014) e seus colaboradores tem por objetivo discutir o comportamento cognitivo do sujeito diante de situações de aprendizagem. Em nosso caso específico, estas situações se voltam para a área de paralelogramos.

Maia (2000, p. 42) afirma que “a teoria dos campos conceituais é uma teoria desenvolvimentalista multidimensional da conceitualização, que procura identificar as filiações e as rupturas entre as diversas formas de conhecimento em via de aquisição pelo indivíduo”. Essa conceitualização depende das situações e das representações que são mobilizadas pelos sujeitos.

De acordo com essa teoria, uma situação não se analisa com um único conceito e nem um conceito é formado a partir de uma única situação. São as situações que dão sentido ao conceito e é na execução de tarefas que o indivíduo coloca em prática seus conhecimentos implícitos e expõe seu modo de resolução, seja este pertinente ou não, correto ou incorreto.

Vergnaud (1990) considera o conceito (C) como sendo mais que uma simples definição, ou seja, é um tripé indissociável: $C = (S, IO, R)$, no qual (S) é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito, que o tornam significativo; (IO) o conjunto dos Invariantes Operatórios, teoremas em ação (verdadeiros ou falsos) e conceitos em ação (pertinentes ou não), que justificam a operacionalidade dos esquemas e constituem o seu significado; e (R) o conjunto das representações simbólicas (linguísticas e não linguísticas) do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos de tratamento das situações, constituintes do seu significante.

Em relação ao conceito de área, é preciso considerar três conjuntos: o das situações que dão sentido a ele; o dos invariantes operatórios, que são os teoremas em ação e conceitos em ação mobilizados nas tarefas sobre área; e o das representações simbólicas utilizadas no tratamento das situações. De forma análoga, não é apenas a definição de paralelogramo que vai dar sentido ao seu conceito, mas um conjunto de situações, de teoremas e conceitos em ação e de representações utilizadas no tratamento de tarefas utilizando esta figura.

O conceito de situação utilizado pelo autor supracitado não é o de situação didática de Brousseau, é o de tarefa cognitiva, sendo necessário uma combinação de tarefas para analisar

uma situação mais complexa. Cabe ressaltar que tampouco tarefa na TCC tem o mesmo sentido que na Teoria Antropológica do Didático. Para Vergnaud (1990), a dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das distintas subtarefas envolvidas, mas é evidente que o desempenho em cada subtarefa repercute no desempenho global. A variedade de situações é que torna um conceito significativo. Para Maia:

[...] toda situação supõe uma produção do aluno. Dessa forma, não existe situação sem esquema, tampouco esquema sem situação. Além do mais, para que uma situação imaginada pelo professor seja ela mesma uma situação para o aluno, é necessário que este disponha de meios cognitivos à identificação da intenção, das informações utilizáveis e das ações possíveis à sua resolução (MAIA, 2000, p. 46).

Acreditamos que um conjunto de tarefas cognitivas envolvendo o tipo de paralelogramo, a posição da figura, os dados fornecidos, as diferenças no tratamento dado ao quadrado, ao retângulo, ao losango e ao paralelogramo não retângulo e não losango, bem como a identificação dos teoremas em ação mobilizados nestas ações, irão nos ajudar a analisar como os alunos lidam com situações sobre a área dessas figuras. Vergnaud (1998) considera que o processo de lidar envolve uma grande variedade de situações, procedimentos e símbolos.

De acordo com o autor supracitado, “[...] um invariante é uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação” (VERGNAUD, 1986, p. 81). Ele considera que há três tipos de invariantes operatórios, são eles: proposições (teoremas em ação) que são verdadeiros ou falsos; função proposicional (conceitos em ação) que podem ser apenas pertinentes ou não, e não são suscetíveis de veracidade e falsidade; e argumento, sobre o qual esse autor aponta que quem diz função proposicional e proposição, diz argumento. Em matemática, pode ser números, relações etc.

Um teorema em ação é uma proposição considerada como verdadeira pelo sujeito, porém pode ser falsa para o domínio da matemática, cuja solução de um problema depende da sua ativação, e o conceito em ação é uma categoria do pensamento considerada como pertinente que possibilita a identificação dos elementos importantes para resolver o problema. Moreira (2002, p. 16) afirma que:

Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a

construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito.

Percebemos na citação acima a existência de teoremas em ação corretos e conceitos em ação pertinentes que o sujeito mobiliza, mas não é capaz de explicitar. Existem também os teoremas em ação falsos que ajudam a compreender os erros cometidos pelos alunos. Nesse sentido, quando notamos que o aluno mobiliza que “duas superfícies que possuem mesma área, possuem necessariamente o mesmo perímetro”, ele está usando um teorema em ação falso, que é um invariante operatório do tipo proposição, para justificar as operações realizadas para resolver uma determinada tarefa. Área e perímetro são conceitos em ação utilizados por esse aluno.

Na identificação de um invariante operatório falso, torna-se importante o trabalho do professor, pois é por meio da explicitação do conhecimento implícito que ele entra como mediador, buscando tornar esses teoremas e conceitos em ação em verdadeiros teoremas e conceitos científicos. A intervenção do professor varia entre trazer à consciência os invariantes operatórios verdadeiros e pertinentes subjacentes à ação dos alunos e invalidar os invariantes falsos.

Em relação aos esquemas, Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014, p. 17), apoiadas nos estudos de Vergnaud, apontam que “esquema diz respeito à forma como a pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação ao lidar com uma classe de situações”. Vergnaud considera que as competências podem ser entendidas como combinação de esquemas. Ao enfrentarmos situações já conhecidas, utilizamos os esquemas já conhecidos. Porém, quando estamos diante de uma situação nova, devemos buscar novos esquemas, novas estratégias para esta situação, desenvolvendo assim, novas competências. A organização invariante é essencial ao funcionamento do esquema.

Os resultados das pesquisas que apresentamos na parte introdutória deste trabalho apontam dificuldades de alunos na identificação e no cálculo da área de paralelogramos, a partir dos quais podemos inferir, na ótica da TCC, que o repertório de esquemas deles ainda não está efetivamente construído para lidar com tais situações, e faz-se necessário desenvolver novos esquemas para sua ampliação, o que pode levar um longo período de tempo.

Em relação às representações simbólicas, Vergnaud (1996, p. 184) afirma que “as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias

etapas”. Podem ser uma figura, as posições em que são representadas, uma fórmula, algum cálculo realizado pelo indivíduo.

As representações utilizadas nas tarefas com paralelogramos constituem um ponto muito importante na identificação dos invariantes operatórios que o sujeito mobiliza em ação e, além disso, faz uma mediação entre ele e o real, entre o que é pensado e o que é representado, considerando que constituem um meio para identificar os objetos matemáticos utilizados e considerados pertinentes para a construção de determinado conceito. Temos a hipótese de que uma parte importante dos erros no uso de fórmulas vem da leitura sobre o objeto gráfico dos comprimentos a serem utilizados nos problemas sobre área, por isso nossa escolha de estudar a classificação como parte da compreensão sobre a área de paralelogramos.

As representações de cada paralelogramo (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango), bem como suas diferentes posições serão discutidas na seção sobre paralelogramos prototípicos.

Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo aprendizado requer um longo período de tempo. Como são as situações que dão sentido ao conceito, “um campo conceptual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (VERGNAUD, 1986, p. 84). É sobre o campo conceitual das grandezas geométricas que nos debruçamos neste trabalho, ao qual pertencem os conceitos de área, comprimento, volume, ângulo, os números, as fórmulas de área e de volume, as figuras geométricas, entre outros.

Segundo Muniz (2009, p. 46):

Para a resolução de um problema matemático, Vergnaud propõe duas fases que constituem o processo resolutivo. A primeira é aquela de seleção das informações. A segunda diz respeito aos processos de resolução das operações em si. Cada uma dessas etapas comporta objetivos, regras, representações e inferências.

Em outras palavras, a citação anterior diz respeito ao cálculo relacional que se refere às operações do pensamento necessárias à resolução dos problemas, e ao cálculo numérico que é voltado para o desenvolvimento dos algoritmos, para as operações usuais. Dessa forma, na resolução de uma tarefa sobre área de paralelogramos, o aluno inicialmente entende o enunciado, o que está sendo solicitado e escolhe a estratégia mais adequada para posteriormente executar os algoritmos selecionados. Um exemplo clássico de erro decorrente

do cálculo relacional é quando o aluno confunde área e perímetro. Para Vergnaud¹ (2014, p. 37) “a noção de cálculo relacional contribui para esclarecer e explicitar a noção, muito vaga, de raciocínio”.

A classificação das situações, dos esquemas, dos conceitos, das representações verbais e não verbais faz com que tenhamos um vasto repertório de informações sobre a ação do aluno ao lidar com a área dos paralelogramos. O estudo de como essas situações são propostas (apresentadas) para o aluno também é indispensável para identificarmos seu modo de agir diante delas, ou seja, a forma como ele é acostumado a “recebê-las” e a maneira como age quando esta se diferencia do seu modo habitual.

A mudança em elementos da situação para que ela se torne diferente nos leva a discutir brevemente o conceito de variável didática que, embora não seja propriamente um termo da TCC, optamos por trazê-lo aqui e relacioná-lo um pouco com a tipologia das situações de Vergnaud. Segundo Santos (2005), variável didática é um elemento da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau que permite caracterizar classes de problemas associados a aspectos particulares. As mudanças em seus valores implicam no bloqueio ou no favorecimento de determinadas estratégias por parte dos alunos.

Por exemplo, nas diferentes situações que dão sentido ao conceito de área (comparação, medida, produção), se não são fornecidos dados numéricos, busca-se evitar procedimentos que utilizem números e favorecer o uso de outros, tais como a decomposição e recomposição, inclusão, sobreposição etc.

A variável dados fornecidos, que assume os valores de suficientes e necessários ou extras, pode gerar diferentes resoluções pelos alunos. Nesse cenário, entra um outro elemento da Teoria das Situações Didáticas que é a noção de contrato didático. Ele trata-se de um “conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] (BROUSSEAU, 1986, p. 51). Para ele, muitos dos momentos de aprendizagem acontecem nas rupturas das cláusulas do contrato, uma vez que não nos damos conta da maior parte delas e só passamos a observá-las quando são rompidas.

Almeida e Brito Lima (2013, p. 79) se referem a Brousseau ao mencionar que “o pesquisador francês estruturou a noção de contrato didático na tentativa de esclarecer, entre

¹ Título original: *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 3^e édition. Editions Peter Lang SA, Berne 1981, 1983, 1985. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro.

outras questões, como o professor e o aluno se relacionam entre si e com o terceiro polo, o saber, na relação didática”.

Voltando para a situação em que aparece a variável didática dados fornecidos, concordamos com Santos (2005, p. 53) ao afirmar que “[...] uma das regras de contrato didático, em vigor no ensino, relativa à resolução de problema indica que a imensa maioria das questões trabalhadas em sala de aula fornece, apenas, os dados necessários e suficientes para resolver o problema”. Nesse sentido, os alunos “acham” que devem usar todos os dados fornecidos na tarefa, sem que seja necessário fazer a escolha dos necessários e suficientes para solucioná-la. Um dos erros cometidos por eles ao lidar com tais situações consiste em multiplicar as medidas dos comprimentos dos lados de um paralelogramo para encontrar sua área, somá-las ou mesmo fazer diferentes cálculos de modo que utilize todos os dados fornecidos na questão.

2.2 ÁREA COMO GRANDEZA

O conceito de área e os de comprimento, volume e abertura de ângulo compõem as grandezas geométricas. Estes conceitos juntamente com os números, as fórmulas de área e de volume, as figuras geométricas, entre outros, constituem o campo conceitual das grandezas geométricas, como discutido na seção anterior.

Nesse trabalho, a discussão está direcionada para a consideração de área como uma grandeza autônoma alicerçada no ponto de vista adotado por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) que corresponde a distinguir e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas.

Embora não tenham como marco teórico a Teoria dos Campos Conceituais, notamos sob a ótica desta teoria, que essas pesquisadoras perceberam erros comuns nos alunos ao trabalharem com o conteúdo de área, que interpretamos como manifestações de teoremas em ação errôneos, tais como:

- a variação da área e do perímetro no mesmo sentido, ou seja, se a área de certa figura aumenta ou diminui, seu perímetro também se altera ou vice-versa;
- superfícies de mesma área têm necessariamente mesmo perímetro;
- calcular a área de um paralelogramo a partir do produto dos comprimentos dos seus lados;
- multiplicar os comprimentos dos três lados de um triângulo para calcular a sua área.

Douady e Perrin-Glorian (1989) também relatam que ora os alunos consideram a área como sendo a superfície (concepção forma ou geométrica), ora consideram-na como sendo o número (concepção número ou numérica). De acordo com essas pesquisadoras, um mesmo aluno pode desenvolver ambas as concepções, mas de forma independente, o que provoca dificuldades no tratamento de situações envolvendo esse conceito, uma vez que nos problemas sobre área frequentemente os aspectos geométricos e numéricos são bastante interligados.

Ao mobilizar uma concepção geométrica, o aluno entende que se uma figura for modificada, sua área também se altera. Como consequência, em uma determinada tarefa, ao decompor uma figura e recompor em outra diferente, sem perda nem sobreposição, ele compreende que esta nova figura possui área diferente da anterior que, de acordo com Teoria dos Campos Conceituais, interpretamos como um teorema em ação falso, do tipo superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes. Ele também pode confundir o perímetro com o contorno, porém sabemos que o perímetro não é o contorno, pois contornos diferentes podem ter mesmo perímetro. Cabe ressaltar que consideramos o perímetro como uma instanciiação da grandeza comprimento, ou seja, como uma maneira de representá-lo, pertencente ao quadro das grandezas e a sua medida ao quadro numérico. Se mudarmos a unidade utilizada para medi-lo, a medida se altera, mas o perímetro não.

Nas situações em que se constata as concepções numéricas, os alunos consideram apenas os aspectos pertinentes para o cálculo, o que provoca a omissão e/ou utilização inadequada das unidades de medida e os leva a estender o uso de fórmulas a situações nas quais não são válidas (por exemplo, multiplicar os comprimentos dos lados de um paralelogramo não retângulo para calcular sua área).

A abordagem elaborada por Douady e Perrin-Glorian (1989) corresponde a distinguir e articular três quadros²: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas. Mais especificamente, temos:

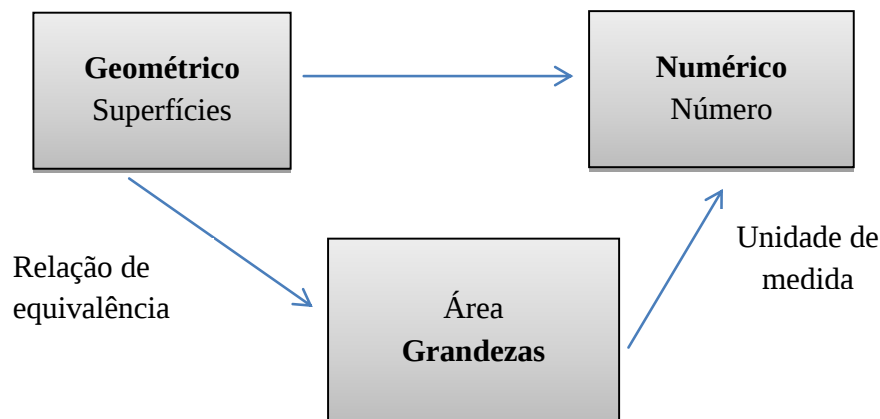
- Quadro Geométrico: constituído por superfícies planas. Exemplos: as figuras planas, triângulos, quadriláteros, dentre outros.

² Para Douady e Perrin-Glorian (1989) um quadro é constituído por objetos de um ramo matemática, de suas formulações eventualmente diversas, das relações entre esses objetos, e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

- Quadro Numérico: consistindo nas medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. Exemplos: 2; 4; 7,5; dentre outros.
- Quadro das grandezas: contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Exemplos: expressões compostas de um número e de uma unidade de medida como 2m^2 , dentre outros. (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 28 e 29).

Estes autores apresentam uma esquematização dos quadros apresentados pelas pesquisadoras francesas, relacionando a teoria com os estudos de área enquanto grandeza, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 2 - Articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas



Fonte: Bellemain e Lima (2002)

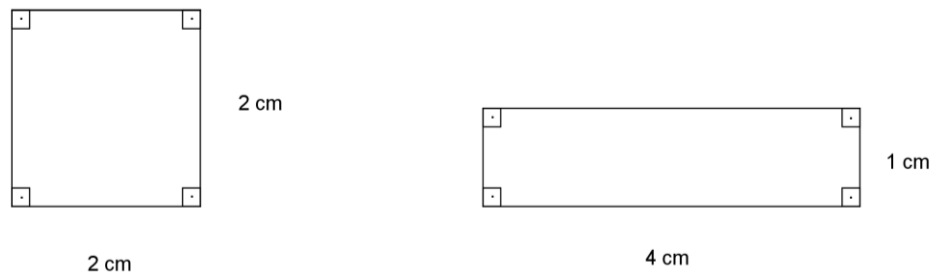
A proposta apresentada por Douady e Perrin-Glorian (1989) traz como exigência a diferenciação nítida dos conceitos de área e superfície, da mesma forma que entre área e número. Concordamos com Silva (2011) quando afirma que ela objetiva a superação das concepções geométricas e numéricas, as quais provocariam muitas dificuldades na aprendizagem desse conceito. Por exemplo, ao considerarmos a expressão “ 3 m^2 ” estamos nos referindo a um conjunto de objetos que têm mesma área e cuja medida em metros quadrados é 3. Ou seja, o número 3 acompanhado da unidade de medida m^2 (metro quadrado), compõem a expressão 3 m^2 que é uma maneira de representar uma área.

Bellemain e Lima (2002, p. 29) afirmam que,

A área de uma superfície plana aparece como um objeto matemático distinto da superfície plana, pois superfícies diferentes podem possuir a mesma área. Também se distingue do número que está associado a essa superfície quando se escolhe uma superfície unitária para medi-la, pois mudar a superfície unitária altera a medida da área, mas a área permanece a mesma.

Baseando-nos na citação anterior, observamos no exemplo a seguir, duas figuras geométricas, um quadrado e um retângulo não quadrado, que têm a mesma área. Cabe ressaltar que consideramos figura e superfície como sinônimos, as quais referem-se ao objeto geométrico.

Figura 3 – Exemplo de superfícies diferentes com áreas iguais



Fonte: acervo da pesquisa

Como percebemos, as figuras são diferentes e as áreas são ambas iguais a 4 cm^2 . A medida de área, ou seja, o número associado a ela (4), mudaria se quiséssemos escrevê-la em metros quadrados (0,0004) ou qualquer outra unidade de área, porém a área das figuras permaneceria a mesma ($4 \text{ cm}^2 = 0,0004 \text{ m}^2$). Ou seja, poderíamos ter diferentes pares (n° , unidade de medida), porém equivalentes, que designariam a mesma área. Conforme observamos nestes exemplos, no modelo de Douady e Perrin-Glorian a medida é o número, mas alguns utilizam medida designando o par número e unidade.

A partir dessas ideias, Facco e Almouloud (2004, p. 05) afirmam que “a área pode ser definida como uma classe de equivalência a partir de uma função medida, ao se reconhecer que se tem a mesma área a partir do recorte-colagem ou da medida de área”. Assim, obter pelo processo de decomposição e recomposição novas figuras que tenham mesma área que uma figura inicial, reforça a ideia de que figuras distintas podem possuir mesma área, contribuindo para a construção do seu conceito como grandeza. Esse tipo de procedimento favorece a distinção entre os quadros geométrico e das grandezas. Procedimentos de medida por contagem contribuem para a compreensão dos elementos envolvidos nas várias maneiras de medir área. É importante destacar que ao modificar uma figura, conservando sua área, nem sempre conservamos o seu perímetro. Observamos que o quadrado e o retângulo apresentados no exemplo da figura 3 possuem mesma área e perímetros distintos.

Os quadros propostos por Douady e Perrin-Glorian chamam a atenção de pesquisadores e educadores sobre a passagem direta e/ou precoce do quadro geométrico para o numérico, ignorando o quadro das grandezas, ou seja, a relação de equivalência (ter mesma

área) permite a passagem do geométrico para o das grandezas, pois temos a relação de superfícies diferentes terem mesma área. Por outro lado, a escolha do par (número, unidade de medida) permite a passagem da grandeza ao número, fazendo com que tenhamos diferentes pares de acordo com as unidades adotadas, sem alterar a grandeza.

2.3 ESTUDOS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁREA

Uma vez abordada a ideia de área enquanto grandeza, destacamos algumas pesquisas que trabalharam com essa temática, enfatizando situações e aspectos relevantes no processo de ensino e aprendizagem desse conceito. Nesta seção, inicialmente fazemos apenas as descrições das pesquisas e, posteriormente, fazemos um agrupamento delas por principais resultados bem como a vinculação com nosso estudo.

Ao analisar sete coleções das séries finais do Ensino Fundamental aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD de 2002 e 2005, adotando o modelo de área enquanto grandeza de Douady e Perrin-Glorian (1989), Barros (2006) constatou algumas utilizações inadequadas de certos termos como, por exemplo, superfície como sendo a grandeza, o que leva a comparar superfícies, quando, na verdade, a comparação é entre as áreas das superfícies. Algumas coleções analisadas apresentavam indícios de predominância do aspecto numérico por definir grandeza como sendo tudo aquilo que pode ser medido, e perímetro como sendo a medida do comprimento do contorno. Verificou ainda a presença de poucas atividades que possam contribuir para a construção dos conceitos de área e perímetro como grandezas autônomas, bem como para a dissociação entre estas noções.

Teles (2007), utilizando a Teoria dos Campos Conceituais, investigou imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na matemática escolar, voltada para a formulação e o tratamento de problemas envolvendo a fórmula de área, como conceito, do quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulo. Imbricações é um termo utilizado para “caracterizar um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa “interconexão dinâmica” são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco” (TELES, 2007, p. 18). Ela estabeleceu as seguintes relações das fórmulas de área e das figuras planas entre os campos conceituais:

A expressão “*fórmula de área*” suscita várias ideias. Ao compreender a fórmula como uma representação simbólica, a relacionamos ao campo algébrico, e ao mesmo tempo ao funcional, pois expressa uma relação entre

as grandezas comprimento e área. Por outro lado, a expressão “*figuras geométricas planas*” leva-nos a pensar no campo conceitual da geometria do qual fazem parte as figuras planas. Mas ainda podemos pensar no que se obtém através das fórmulas, na maioria das vezes números resultantes de operações, levando-nos a pensar também no campo conceitual numérico (p. 75).

Teles partiu de algumas indagações sobre as fórmulas que podemos especificar para o caso dos paralelogramos, tais como: qual o papel das fórmulas na construção do conceito de área (de paralelogramos)? Que dificuldades os alunos enfrentam na compreensão e na resolução de situações problema que envolvam fórmulas de área (de paralelogramos)? Ela analisou a construção do significado das fórmulas de área em duas coleções de livros didáticos do ensino fundamental, os tipos de usos de fórmulas em livros de ensino fundamental e médio, e utilizados em exame de vestibular. Também analisou resultados de testes diagnósticos com alunos da segunda série do ensino médio.

Como resultados, notou a necessidade de considerar outros campos conceituais, como o da geometria, o numérico, o algébrico e o funcional. Também lançou um novo olhar sobre o ensino-aprendizagem das fórmulas de área, argumentando que as imbricações ampliam as possibilidades de compreensão do sujeito aprendiz, mas também explicam a complexidade dos processos de aprendizagem. Mais especificamente no teste com os alunos, percebeu confusão entre área e perímetro, indícios de concepção geométrica ou numérica, confusão na classificação das figuras, ou seja, confusão entre paralelogramo e trapézio. O desenho da figura, mesmo quando não solicitado, foi a representação simbólica mais utilizada, prevalecendo a opção por figuras prototípicas³. De modo geral, se confirmou a pertinência da hipótese de tomar as imbricações como foco de interpretação no processo de aquisição e uso de fórmulas de área.

Como estamos interessados na área de figuras usuais, o aspecto das imbricações entre campos conceituais evidenciado por Teles (2007), ganha relevo na nossa pesquisa. Um dos prolongamentos indicados por Teles (2007) é analisar se há variações significativas da influência dos valores das variáveis didáticas utilizadas nos testes de sua pesquisa. Teles elegeu doze variáveis didáticas que apresentaremos a seguir com os respectivos valores⁴ considerados por ela:

³ Consideramos figuras prototípicas como as mais presentes nos livros e/ou mais utilizadas pelo professor, ou seja, são figuras mais usuais (essa questão será aprofundada à frente).

⁴ As variáveis a seguir podem assumir outros valores que não foram considerados por Teles (2007).

- **Tipo de uso das fórmulas de área** - assume os valores: calcular a área de figuras planas, calcular comprimentos que caracterizam a figura, comparar áreas de figuras, produzir figuras em condições dadas, otimizar e operar com grandezas de mesma natureza.

- **Unidades de medida** - pode assumir os valores: metro ou centímetros para comprimento, metros quadrados ou centímetros quadrados para área, ou podem não ser fornecidas.

- **Tipos de figura** - tem como valores: retângulo, triângulo, paralelogramo, quadrado, trapézio, outros polígonos regulares, círculo e figuras irregulares.

- **Presença da figura** - pode ser dada no enunciado, pode-se solicitar o traçado da mesma ou estar totalmente ausente.

- **Posição da figura** - pode ser prototípica ou não.

- **Dados numéricos** - suficientes ou necessários e suficientes. Os dados são necessários e suficientes quando são oferecidas apenas as medidas dos comprimentos que serão utilizadas na fórmula. São suficientes quando se apresentam todas as medidas dos comprimentos da figura (incluindo algumas que não são necessárias para o cálculo solicitado).

- **Natureza dos dados** - podem ser números, grandezas ou letras (incógnitas e variáveis).

- **Operações** - adição, subtração, multiplicação e divisão.

- **Domínio numérico dos dados e dos resultados** - pode ser restrito aos naturais, ou incluir racionais positivos.

- **Tipo de papel** - branco ou quadriculado.

- **Contexto** - pode ser familiar, do cotidiano, das práticas sociais ou intramatemático.

- **Caráter típico ou atípico da questão** - referem-se à origem das questões. As típicas são comuns nos livros didáticos e as atípicas são pouco usuais.

Na parte metodológica de nossa pesquisa retomaremos estas variáveis, elencando as que utilizaremos nesse estudo e quais valores assumirão.

Ferreira (2010) utilizou a Teoria dos Campos Conceituais como marco teórico para investigar a construção do conceito de área por alunos do terceiro ciclo do ensino fundamental. Ela fez um percurso de quatro estudos com sujeitos do sexto ano em relação aos conceitos de área e perímetro, analisando a abordagem desses conceitos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática do ensino fundamental e em duas coleções de livros didáticos. Em seguida aplicou uma sondagem e uma sequência didática, finalizando com um teste para verificar os conhecimentos que tinham evoluído e as dificuldades persistentes.

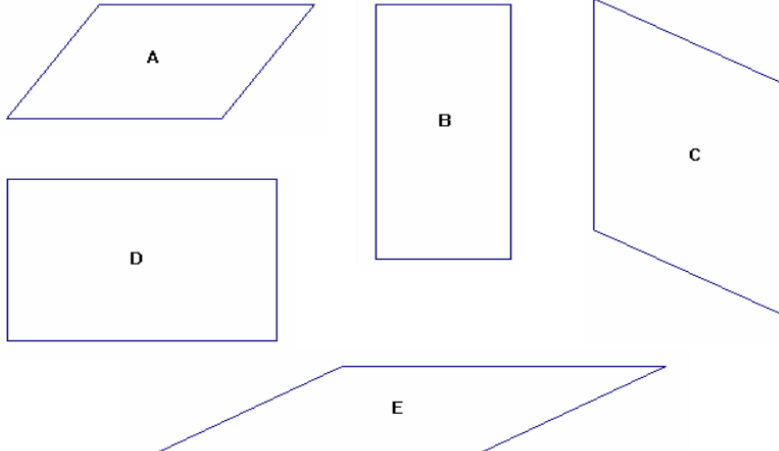
Como resultados, ela constatou que nas situações propostas pelo livro didático predomina o quadro numérico, e que mesmo havendo evolução na decomposição e recomposição de figuras e também na diferenciação entre perímetro e contorno, persistiram entraves na ordenação dos comprimentos e na dissociação entre área e perímetro. Outra dificuldade relatada por ela é quando as situações não contemplavam a representação simbólica das figuras.

Em seu trabalho ela fez uma ampliação das situações que dão sentido ao conceito de área categorizadas por Baltar (1996) que são *comparação de área*, *medida de área*, e *produção de superfícies*, incluindo a *mudança de unidade*.

Segundo Bellemain (2000, p. 7), as situações de comparação estão situadas em torno do quadro das grandezas, pois “quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência”. Vejamos o exemplo a seguir:

Figura 4 – Exemplo de uma situação de comparação sem dados numéricos

Observe os paralelogramos abaixo:



a) Qual das figuras acima tem a menor área? _____

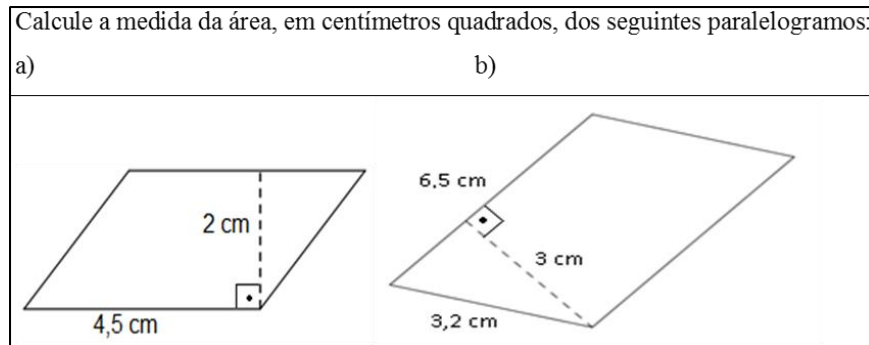
b) Quais das figuras acima têm a maior área? _____

c) Entre elas há figuras que têm a mesma área? Justifique sua resposta. _____

Fonte: Santos (2005, p. 92, adaptado)

Nas situações de medida, Bellemain e Lima (2002) afirmam que se destacam o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. Com isso, espera-se como resultado de uma situação de medida, um número acompanhado de uma unidade de medida.

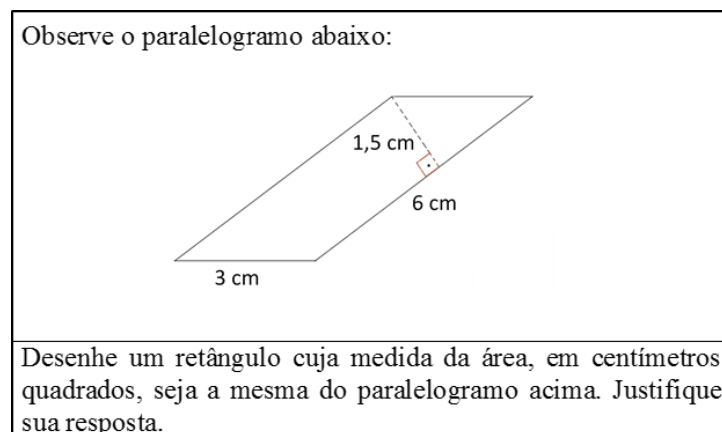
Figura 5 – Exemplo de uma situação de medida



Fonte: Araújo (2014, adaptado)

Em relação às atividades de produção, diferenciam-se das anteriores por podermos geralmente determinar várias respostas corretas para uma mesma situação. Além disso, mesmo se a resposta esperada para este tipo de atividade é uma figura (objeto geométrico), a presença dos demais quadros também tem grande importância.

Figura 6 – Exemplo de uma situação de produção de superfície de mesma área que uma superfície dada



Fonte: Araújo (2014, adaptado)

Na situação de mudança de unidade se destaca o quadro numérico e muitas vezes temos a ausência do quadro geométrico. Nela temos como procedimento a representação de uma mesma área com unidades de medida diferentes.

De acordo com Ferreira (2010, p. 33):

Optamos aqui por diferenciar a situação de medida da situação de mudança de unidade, considerando que devemos dar um tratamento que privilegie o tratamento entre os três quadros, com a presença das superfícies, antecedendo a introdução das unidades de medidas convencionais, para que o aluno compreenda a construção do par (n° , unidade de medida) independente de transformações meramente operatórias.

Para uma melhor compreensão dessas situações, Ferreira (2010) elaborou um quadro que resume a classificação de Baltar (1996) incluindo a mudança de unidade:

Quadro 1 – Sistematização das situações que dão sentido ao conceito de área

S I T U A Ç Õ E S	COMPARAÇÃO	ESTÁTICAS	Sem unidade de medida	
			Com unidade de medida	Não-convencional
				Convencional
		DINÂMICAS	Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica	
			Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa.	
	MEDIDA	EXATA	Com unidade de medida não-convencional	
			Com unidade de medida convencional	
		ENQUADRAMENTO	Aproximações	
	MUDANÇA DE UNIDADE		Com unidade de medida	Não-convencional
				Convencional
	PRODUÇÃO		Mesma área que a de uma figura dada	
			Área maior ou menor que a de uma figura dada	
			Com área dada	

Fonte: Ferreira (2010, p. 29)

De acordo com o quadro acima, as situações de comparação são subdivididas em situações estáticas e dinâmicas. Baltar (1996) considera como estáticas aquelas em que as superfícies não são alteradas com os procedimentos utilizados e, como dinâmicas, aquelas em que há modificação das figuras e observa-se se essas modificações provocam ou não variação de área e de perímetro.

As situações de medida são subdivididas em exata e enquadramento. As situações de medida exata são aquelas expressas por um número seguido de uma unidade de medida, isto é, ao escolhermos uma unidade atribuímos um número à área da superfície. As de enquadramento são aquelas de medidas aproximadas, aplicadas geralmente a superfícies de borda irregular ou arredondada.

Ainda de acordo com o quadro 1, as situações de produção estão divididas em: produção de superfícies de mesma área que a de uma figura dada, produção de superfícies de área maior ou menor que a de uma figura dada e produção de superfícies a partir de uma área dada. No primeiro e segundo casos temos procedimentos semelhantes uma vez que é dada a superfície, restando apenas a produção de outra que possua área igual, maior ou menor. No terceiro caso dá-se a área para que se produza uma superfície que tenha área igual à dada.

Se as pesquisas mostram que a construção do sentido de área se apoia nessa pluralidade de situações, é desejável que no ensino seja abordada uma diversidade delas para que o sentido atribuído pelo aluno seja um sentido amplo.

Pessoa (2010) pesquisou como alunos do sexto ano do ensino fundamental resolviam problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas em malhas quadriculadas. Investigou mais especificamente a influência de certas variáveis nos procedimentos de resolução empregados pelos alunos tais como o tipo de preenchimento das figuras, a posição relativa das figuras em relação à malha, o domínio numérico das medidas das áreas, os tipos de figura. Ela adotou a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau, mais precisamente a noção de variável didática. De acordo com os seus resultados, o desempenho dos alunos é bastante satisfatório quando o problema é resolvido apenas pela contagem de quadradinhos. Se era exigida a visualização de uma figura ladrilhável, que contém a figura original, os alunos apresentaram grande dificuldade. Eles tampouco conseguiram lidar adequadamente com problemas que exigiam procedimentos com decomposição e recomposição de figuras, pois contavam apenas os quadradinhos completos dentro da figura ou contavam como inteiros todos os que estão parcialmente contidos nela.

Achamos pertinente para nossa pesquisa fazer a descrição das variáveis consideradas e os valores que assumem no estudo realizado por Pessoa (2010), a saber:

- **Contorno da figura:** pode ser poligonal ou composto por segmentos e arcos de circunferência.

- **Preenchimento da figura:** hachurada com malha visível ou hachurada sem malha visível.⁵

- **Posição relativa dos polígonos em relação à malha:** todos os lados da figura “seguem a malha”, algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e os demais são diagonais dos quadrados, algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado, algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e os demais são arcos de circunferências, nenhum dos lados da figura “segue a malha”.

- **Medida da área tomando o quadradinho da malha como superfície unitária:** inteira ou fracionária.

- **Tipo de figura:** usual, ou seja, todas as figuras para as quais os alunos podem usar diretamente uma fórmula ou irregular.

Na parte metodológica voltaremos a discutir estas variáveis.

Tomando como referencial teórico a contribuição das discussões da teoria Sociocultural de Vygotsky, do desenvolvimento dos conceitos de Vergnaud e as abordagens da Etnomatemática, Santos (2010) fez uma pesquisa com alunos de 8º e 9º anos do ensino fundamental e com trabalhadores rurais objetivando investigar o conhecimento matemático prático dos trabalhadores rurais, mais especificamente no cálculo de área, e estabelecer possíveis relações conceituais entre os procedimentos formais usados na escola e não formais dos trabalhadores. Aqui apresentaremos apenas os resultados voltados para os alunos, uma vez que são nosso foco de estudo. Os resultados do questionário apontaram que em relação à preferência dos alunos por conteúdos matemáticos, apenas 15% optam pelo cálculo de área de uma figura específica, o triângulo. O significado do cálculo de área para 22,5% alunos era relações métricas, lado vezes altura, soma dos quadrados; cerca de 27,5%, afirmaram ser uma dificuldade, que quebrava demais a cabeça, dava um branco, faltava interesse. Um total de 25% demonstrou desconhecimento ou confusão no uso de unidades de medidas e confusão entre os conceitos de área e perímetro.

Em relação ao cálculo de área de figuras planas, percebe-se que a variável tipo de figura influenciou no desempenho dos alunos da pesquisa anterior, pois somente 11,1% acertaram ao determinar a área do retângulo e o percentual de erros chegou a 77,8%, enquanto que 40% acertaram a do quadrado. Os maiores erros se concentraram na determinação da área

⁵ Embora Pessoa (2010) não adote em sua pesquisa, esse tipo de variável poderia assumir o valor de não hachurada.

do trapézio e do triângulo equilátero, 81,5% e 96,3%, respectivamente. Outro ponto que merece destaque é o fato de que os alunos optaram por área como preferência entre os conteúdos matemáticos, mencionaram o triângulo e, na tarefa que envolvia a determinação da área desta figura, apresentaram o maior número de erros. Uma suposta explicação para este fato pode ter sido o tipo de triângulo.

Paula (2011) fez um estudo com alunos do 9º ano do ensino fundamental composto por um teste diagnóstico que continha questões para calcular a área de quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios, triângulos contextualizadas ou não, uma sequência didática que envolvia atividades práticas para descobrir a área das figuras anteriores e um pós-teste contendo as mesmas questões do diagnóstico, com o objetivo de avaliar a potencialidade do ensino de área de figuras planas com atividades mediadas pela malha quadriculada. Tomou como base a teoria das situações didáticas de Brousseau. Apesar de citar pesquisas que adotem a área como grandeza, ele não se apoiou nesse modelo. Os resultados mais gerais indicaram que no pré-teste os alunos não sabiam resolver tarefas que envolviam o cálculo de área de figuras planas. Após a aplicação da sequência composta por seis atividades e três jogos, foi aplicado o pós-teste no qual os alunos obtiveram melhor desempenho quando confrontado com o teste diagnóstico. A redescoberta das fórmulas de área proporcionou um aprendizado mais eficaz do conteúdo em estudo. Concluiu que o conjunto de situações desenvolvidas na sequência contribuiu significativamente para o aprendizado desse conceito.

Esse autor anterior também fez a aplicação de questões sobre área de figuras planas a alunos do 1º ano do ensino médio e constatou que em uma tarefa para calcular a área de várias figuras planas por meio da aplicação direta da fórmula, 36% dos alunos deixaram em branco as questões que continham o quadrado, o retângulo e o paralelogramo, e 55% não responderam a do losango. No teste diagnóstico, os alunos do 9º ano sujeitos da pesquisa, afirmaram que para calcular a área do quadrado, retângulo e paralelogramo bastava multiplicar a medida da altura pela base. Outros fizeram confusão entre a área da figura e a medida dos lados dessa figura, dizendo que para calcular a área do paralelogramo deveria multiplicar suas áreas, em vez de multiplicar a base pela sua respectiva altura, o que podemos interpretar como sendo um teorema em ação falso. Destacamos apenas estes resultados por se aproximarem do nosso foco de estudo, pois mostram que as dificuldades em relação à área de paralelogramos não se concentram apenas no ensino fundamental.

Analisando, à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores, as abordagens de comprimento, de perímetro e de área em

livros didáticos do sexto ano aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2008 e de 2011, Silva (2011) percebeu que, na maioria das obras analisadas, a ênfase nas grandezas geométricas é insuficiente e o foco é na medida e não na grandeza. Predominaram a conversão de unidades de comprimento, com foco no sistema métrico decimal e ênfase nas técnicas que se apoiavam na multiplicação e divisão de números decimais por potências de dez; no cálculo da área de figuras planas, observou-se a contagem da quantidade de superfícies unitárias necessárias para ladrilhar a figura e o uso de fórmulas; em relação ao perímetro, a tarefa principal era o seu cálculo em polígonos e a técnica associada era adicionar os comprimentos dos lados do polígono. Apenas uma obra não inicia seus capítulos ou seções com a palavra medida, repercutindo em forte ênfase no predomínio das situações de medida e do aspecto numérico.

Em uma pesquisa fundamentada na Teoria Antropológica do Didático que discute como é abordado o conteúdo área de figuras geométricas planas no Guia de Estudo do aluno do Programa Projovem Urbano e que relação pode ser observada entre os princípios que regem o referido Programa e a abordagem da área neste material, Carvalho (2012) apontou que a palavra área aparece no instrumento analisado com diversos sentidos e em vários momentos tanto no estudo da matemática como nos demais componentes curriculares, com uso frequente do contexto da construção civil nos problemas de cálculo de área. Destacou-se o cálculo da área do retângulo e encontraram-se elementos do bloco tecnológico-teórico relativos ao cálculo da área desta figura nas explicações fornecidas no Guia de Estudo.

Em um artigo sobre a aplicação de uma atividade com alunos do 1º ano do ensino médio, Bernardes, Souza e Zandonade (2014) buscaram criar significados para o conceito de área a partir da investigação sobre paralelogramos, iniciando com papel quadriculado e, posteriormente com a utilização da fórmula. Basearam-se em documentos de orientação curricular nacional e do estado do Espírito Santo. Na atividade, inicialmente os alunos deveriam dizer o que entendiam por área de figura plana. Em seguida teriam que desenhar paralelogramos em papel quadriculado, tentar encontrar a área dessas figuras fazendo relação com seus lados e generalizar por meio de uma fórmula para o cálculo de área de cada figura produzida.

Os resultados indicaram que os alunos apresentaram muita dificuldade em responder o que seria área, em relacionar as medidas dos lados da figura e sua área na construção dos paralelogramos, em determinar a altura do paralelogramo e em encontrar uma fórmula geral

para o cálculo de área em cada figura. Especificamente no caso do losango a dificuldade foi maior, tanto na produção da figura quanto na relação entre as diagonais e sua área.

Um fator que merece destaque no estudo de área é o fato de a maioria das pesquisas apontarem para um desempenho insatisfatório dos alunos nesse conteúdo, porém quando são questionados se sabem o que é área, eles respondem que sim. É o que acontece na pesquisa de Neto, Silva, Teixeira Filha e Silva (2014) que, apoiados no PCN, objetivaram identificar a percepção de alunos do 9º ano do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro. Em uma das questões do instrumento de coleta de dados, perguntava se os alunos sabiam o que é área de figuras planas, tendo duas opções de resposta, sim ou não. Quase 90% dos participantes afirmaram que sim. Eles não propuseram situações para testar a validade da resposta no caso da área, o que seria uma forma de continuidade desse estudo. Em relação ao perímetro, todos afirmaram saber seu significado e, para 79% dos sujeitos da pesquisa, estaria ligado à soma dos comprimentos dos lados de uma figura. Este fato levou a uma limitação entre o que dizem saber e o que realmente sabem, e cruzando com pesquisas anteriores corresponde à maneira como livros didáticos por muito tempo abordaram o perímetro. Nesse sentido, acreditamos que seja necessária uma diversidade de situações para se analisar um determinado conceito.

Santos (2015), apoiada na Teoria da Transposição Didática e na Teoria Antropológica do Didático ambas desenvolvidas por Chevallard e seus colaboradores, realizou uma pesquisa sobre o distanciamento entre a prática docente do professor de matemática e a abordagem do livro didático utilizado por ele, no sexto ano do ensino fundamental, sobre o conceito de área de figuras planas. Em relação aos resultados, procuramos destacar os que mais se aproximam do nosso estudo. Essa pesquisadora constatou que os autores do livro estudado iniciavam por uma questão contextualizada e depois partiam para a exploração do uso das fórmulas. As técnicas utilizadas se concentraram em torno da contagem e na utilização de fórmulas, explicitamente trabalhada e explorada, de área do quadrado e do retângulo. A área era tratada como a ideia de espaço ocupado, com ênfase considerável no aspecto numérico e em situações de comparação. De modo geral, a abordagem do livro tentava romper com a ênfase exagerada nas conversões de unidades e nas fórmulas de áreas.

Tomando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, Silva (2016) realizou uma pesquisa com alunos do 6º ano do ensino fundamental com o objetivo de analisar o tratamento dado por estes alunos às situações que dão sentido à área como grandeza em três ambientes: utilizando apenas papel e lápis, com materiais manipulativos e no software

Apprenti Géomètre 2. Os resultados mostraram que o software permitiu a superação de concepções geométricas de área, favorecendo a utilização de procedimentos como inclusão e sobreposição, bem como decomposição e recomposição de figuras. Vários sujeitos mobilizaram teoremas em ação verdadeiros, tais como “há conservação de área por corte e colagem sem perda nem sobreposição” e “a área é invariante por isometrias”. Também foram observados teoremas em ação falsos, tais como “figuras diferentes possuem necessariamente áreas diferentes” ou “duas figuras que têm a mesma quantidade de lados têm mesma área”. As concepções numéricas prevaleceram mesmo com a diversidade de recursos oferecidos, ou seja, para muitos dos sujeitos da pesquisa o número foi considerado suficiente para medir a área de uma figura. Para vários alunos só era possível medir a área de uma figura se conseguisse ladrilhar esta figura.

Alguns resultados das pesquisas acima merecem ser destacados, tais como:

- Predominância do tratamento numérico nas situações sobre área (BARROS, 2006, TELES, 2007, FERREIRA, 2010, PESSOA, 2010, SANTOS, 2010, PAULA, 2011, SILVA, 2011, SANTOS, 2015, SILVA, 2016). Barros (2006), Silva (2011) e Santos (2015) não realizaram estudos diretamente com alunos, uma vez que são voltados para a análise de livros didáticos. Embora não tenhamos o mesmo objetivo, achamos interessante trazê-las porque muitas vezes as situações apresentadas aos alunos são extraídas desses livros, repercutindo no seu modo de lidar com tais situações. Pessoa (2010) e Ferreira (2010) fizeram estudos com alunos utilizando figuras diversas, porém sentimos a necessidade de fazer um trabalho voltado para as situações que dão sentido ao conceito de área que seja específico dos paralelogramos.

- Prioridade do cálculo da área do quadrado e retângulo (CARVALHO, 2012, SANTOS, 2015). Os resultados obtidos por estes pesquisadores nos levam às seguintes indagações: se as pesquisas mostram que há prioridade no cálculo de área de determinadas figuras, como os alunos lidam quando se deparam com tarefas que contemplem outras? Haverá superioridade de acertos nas tarefas envolvendo o cálculo de área dessas figuras em relação às demais?

- Dificuldade com relação ao tipo de figura, especialmente o losango (SANTOS, 2010, PAULA, 2011, BERNARDES; SOUZA; ZANDONADE, 2014). Como podemos observar, muitas dificuldades concentram-se nesse tipo específico de paralelogramo, conduzindo os alunos a não responderem as tarefas ou a apresentarem dificuldades em produzi-la e relacionar suas diagonais com a sua área.

Algumas dificuldades são mais gerais e também são apresentadas na maioria das pesquisas relatadas anteriormente, tais como dificuldade e confusão entre os conceitos área e perímetro e, também, o uso inadequado das unidades de medida, ou seja, se a unidade de medida do lado de determinada figura for o metro, então após o cálculo da área eles se confundem, colocando metro ou até mesmo metro cúbico como unidades de área. Este dado aponta que mesmo havendo um enfoque maior no quadro numérico e uma prioridade para os problemas de transformações de unidades, isto é feito de forma isolada, sem um diálogo com os demais conteúdos a serem vivenciados pelos estudantes, contribuindo para dificuldades na construção dos conceitos bem como na mobilização de teoremas em ação falsos.

O estudo das situações anteriores nos leva a pesquisar como os alunos lidam com tarefas envolvendo os paralelogramos, se fazem a diferenciação e a identificação dessas figuras e dos aspectos pertinentes para o cálculo de suas áreas, pois acreditamos que para o aluno conseguir lidar com essas tarefas não seja suficiente apenas identificação, mas também a classificação a partir das suas características e propriedades, contribuindo para utilização correta da fórmula.

2.4 ASPECTOS RELACIONADOS ÀS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS

Como já citado na parte introdutória deste trabalho, esta pesquisa embora pertença ao campo das grandezas e medidas, mais especificamente ao campo conceitual das grandezas geométricas, possui forte vínculo com o da geometria. De acordo com Lima e Carvalho (2010, p. 137) “é consenso que o estudo das grandezas geométricas é uma maneira privilegiada de se promover a ligação entre esses dois importantes campos da matemática escolar”.

Antes de passarmos para as definições e propriedades dos paralelogramos, iremos apresentar brevemente as de quadrilátero e de quadrilátero notável, pois consideramos importante para a discussão subsequente. Segundo os autores supracitados:

Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. [...] podemos também designar este quadrilátero por outras sequências apropriadas dos símbolos A, B, C e D (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 154).

Em relação aos quadriláteros notáveis, temos:

No campo da Geometria, podemos encontrar duas famílias de quadriláteros, a dos quadriláteros notáveis e a dos quadriláteros não notáveis. Os notáveis são formados pelos paralelogramos e pelos trapézios, enquanto que os não notáveis, são constituídos pelos quadriláteros que não pertencem às famílias dos paralelogramos e dos trapézios. Nesse sentido, fazem parte do grupo dos quadriláteros não notáveis, os quadriláteros não convexos (COSTA, 2016, p. 53).

A seguir passaremos a algumas definições e propriedades⁶ do quadrado, do retângulo, do losango, do paralelogramo e também do trapézio na visão de diferentes autores e, no final, apresentamos nossas considerações e quais destas adotaremos para nosso estudo.

Passos (2000) em sua tese de doutorado afirma que o paralelogramo é um quadrilátero com os pares de lados opostos respectivamente paralelos; o paralelogramo cujos quatro lados são de mesma medida é chamado de losango; o paralelogramo que possui os quatro lados de mesma medida e os quatro ângulos também de mesma medida é um quadrado. “De maneira geral, [...] os quadriláteros quadrado, retângulo e losango são paralelogramos” (PASSOS, 2000, p. 18).

Em um texto complementar que visa contar porque um mesmo quadrilátero às vezes aparece na literatura com diferentes definições, Bongiovanni (2004) apoiou-se nos Elementos de Euclides (aproximadamente 300 a.C.), nos Elementos de Geometria de Legendre (1793) e o Tratado de Hadamard (1898), Leçons de géométrie élémentaire. Segundo esse autor, “o oblongo de Euclides é um caso particular do hoje denominado retângulo, que o rombo é um caso particular do nosso losango e que romboide é um paralelogramo particular” (p. 1). Entre as definições dos quadriláteros notáveis citadas por ele, trazemos a de Hadamard (1898) que diz que o quadrado é um quadrilátero que tem todos os lados e todos os ângulos iguais; o retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais (retos); o losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais; o paralelogramo é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois. Complementa dizendo: “o que é importante saber sobre o losango? Que é um paralelogramo; que seus lados são congruentes; que suas diagonais são perpendiculares [...]” (BONGIOVANNI, 2004, p. 03).

Este autor reforça que os questionamentos sobre as definições dos quadriláteros persistem e que o ideal é adotar uma das existentes e nunca inventar novas definições, alertando aos alunos que essas diferenças sempre existiram.

⁶ Todas as provas e/ou demonstrações dadas pelos autores às propriedades, proposições e teoremas encontram-se no Anexo A desta dissertação.

No livro *Geometria Euclidiana Plana*, Barbosa (2006) apresenta uma definição e algumas proposições acerca do paralelogramo, seguidas da sua prova.

Definição: “um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos” (p. 91).

Vejamos algumas das proposições que ele apresenta:

(i): “Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes” (p. 91);

(ii): “Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é paralelogramo” (p. 91);

Em relação ao retângulo, esse autor afirma que é um quadrilátero que tem todos os ângulos retos; o losango é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes, que também pode ser chamado de rombo; o quadrado é um retângulo que também é um losango e acrescenta “se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se cortam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Se, além disso, as diagonais são perpendiculares uma a outra, então o quadrilátero é um quadrado” (p. 98); o trapézio possui dois lados opostos paralelos.

No texto de Lima e Carvalho (2010) percebemos que eles dividem a classificação dos quadriláteros em duas categorias: uma voltada para a matemática mais avançada e outra para o ensino fundamental. Na primeira categoria, o quadrado tem os lados iguais entre si e os ângulos retos; no losango os lados são iguais entre si; o retângulo possui os quatro ângulos retos; no paralelogramo os dois pares de lados opostos são paralelos entre si; em relação ao trapézio, dois lados opostos são paralelos entre si. Segundo esses autores, “podemos dizer que todo quadrado é, também, losango, retângulo, paralelogramo e trapézio. Em tal classificação, todo paralelogramo é, também, trapézio” (p. 155). Na categoria voltada para a primeira etapa do ensino fundamental, a classificação se dá da seguinte maneira: quadrado possui os lados iguais entre si e os ângulos são retos; o losango possui os lados iguais entre si e os ângulos não são retos; no retângulo os ângulos são retos e existem dois lados desiguais; o paralelogramo tem os dois pares de lados opostos paralelos entre si; no trapézio apenas dois lados opostos são paralelos entre si. E complementam que “de acordo com esta última classificação, um quadrado não é retângulo, nem losango. Tampouco um paralelogramo é trapézio” (p. 155).

Em seu livro *Fundamentos de Geometria Plana*, Machado (2012) aponta algumas definições para as figuras em estudo. O retângulo é um quadrilátero cujos ângulos são todos retos; o quadrado possui os ângulos todos retos e os lados são todos congruentes entre si; o

paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos entre si; no losango, os lados são todos congruentes entre si; o trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos entre si. E acrescenta: “observe que todo quadrado é um retângulo, e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. Observe também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado” (p. 108).

Moura (2013) realizou um estudo que apresenta as definições dos quadriláteros, propriedades, teoremas, demonstrações, construções com compasso e régua, e com o software GeoGebra. Dentre as definições apresentadas por essa autora, consideramos aquelas mais voltadas para o nosso trabalho, ou seja, as dos paralelogramos. Além dessas definições, traremos também alguns teoremas mencionados por ela.

De acordo com Moura (2013, p. 25) o paralelogramo se define da seguinte maneira: “um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui lados opostos paralelos”.

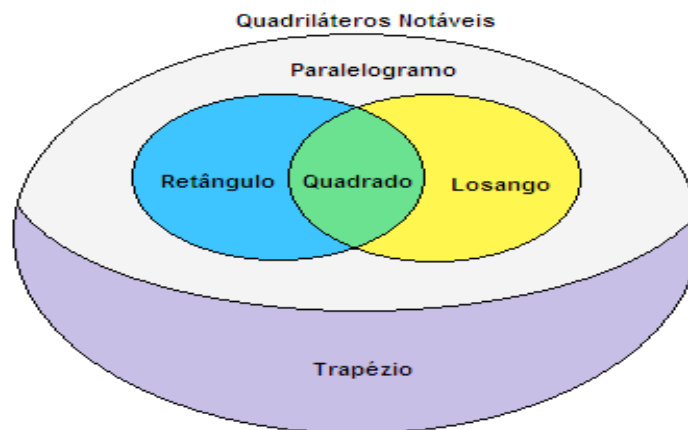
Além de outros teoremas já citados anteriormente, destacamos o seguinte: “todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo” (p. 26).

Em relação ao retângulo, ela apresenta esta definição: “um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente, possui os quatro ângulos congruentes” (MOURA, 2013, p. 27). Entre outros teoremas, enfatizamos este: “todo retângulo é um paralelogramo” (p. 28). No que diz respeito ao quadrado, ela apresenta a seguinte definição: “um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes” (p. 28). E para o losango: “um quadrilátero plano convexo é losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes” (p. 29). No que se refere aos teoremas, temos: “todo losango é um paralelogramo” (p. 30).

Como é interesse da nossa pesquisa saber se os alunos consideram o quadrado, o retângulo e o losango como sendo paralelogramos, foram apresentadas todas essas definições e propriedades dos quadriláteros, dentre as quais adotamos aquelas que definem o paralelogramo como sendo um quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos entre si, como aquela de Lima e Carvalho (2010), ou as que trazem essa mesma ideia, porém com outras palavras como Passos (2000). Das propriedades mencionadas por Barbosa (2006) e Moura (2013), destacamos a seguinte: em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes. Nesse sentido, podemos adotar o quadrado, o retângulo e o losango como pertencentes à família dos paralelogramos. Não consideramos o paralelogramo como sendo

trapézio por este último ter exatamente dois lados paralelos, conforme definições de Lima e Carvalho (2010) na categoria voltada para o ensino fundamental e de Machado (2012). Assim, vamos considerar que o trapézio é um quadrilátero com apenas um par de lados opostos paralelos. No que diz respeito às relações internas existentes entre o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo, consideramos que há inclusão de classes entre eles. Adotamos as ideias de Machado (2012) ao dizer que todo quadrado é um retângulo e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. E também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado. De modo semelhante, Costa (2016) argumenta que os quadrados são retângulos e são losangos, pois apresentam propriedades iguais, ou seja, apresentam os lados opostos paralelos, ângulos internos opostos congruentes e as diagonais se cortam ao meio. “Nesse sentido, dizemos que quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo” (p. 58). Ele traz a seguinte representação dos quadriláteros notáveis:

Figura 7 – Representação dos grupos dos quadriláteros notáveis



Fonte: Costa (2016, p. 59)

Acreditamos que tanto essas definições e os teoremas apresentados trazem propriedades particulares de cada tipo de paralelogramo, nos ajudando a identificá-los, diferenciá-los e classificá-los, bem como a utilizarmos adequadamente as fórmulas para o cálculo de área.

2.4.1 Paralelogramos prototípicos

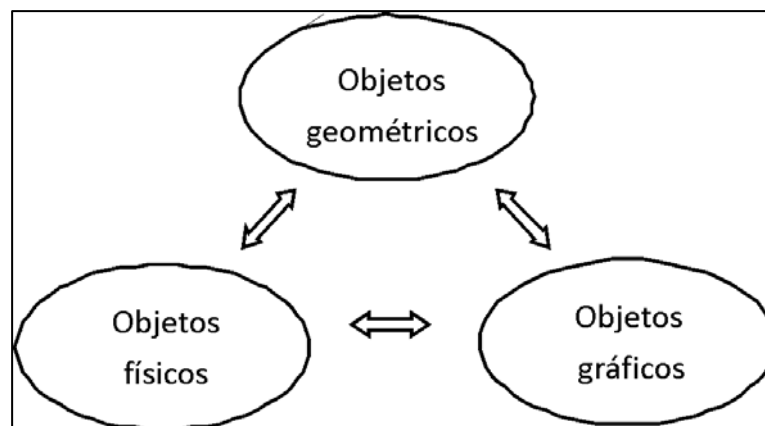
Antes de iniciarmos a parte de paralelogramos prototípicos, iremos discutir brevemente sobre objeto gráfico e objeto geométrico. Em relação a este último, já falamos

anteriormente que ele se refere à superfície (figura) e que se diferencia do primeiro porque o objeto gráfico pode possuir imperfeições.

Laborde e Capponi (1994) consideram que o desenho é a representação gráfica de uma ideia. Já Lima e Carvalho (2010) consideram que ela envolve desenhos e imagens dos objetos, e que conceitos matemáticos devem estar associados aos objetos físicos e às suas representações. Segundo eles:

[...] definimos quadrado como um quadrilátero que possui quatro ângulos retos e quatro lados de comprimentos iguais. Esta é a definição de um objeto abstrato, no qual não podemos efetuar medições com instrumentos concretos. Nos exemplos concretos de quadrados – desenhados ou construídos de algum material adequado – as medições fornecerão sempre igualdades aproximadas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos em jogo. Além disso, no que se refere à definição geométrica, o comprimento do lado do quadrado pode ser concebido em centímetros, em metros, ou em qualquer outra unidade de comprimento (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 137).

Figura 8 – Esquema dos três tipos de objetos

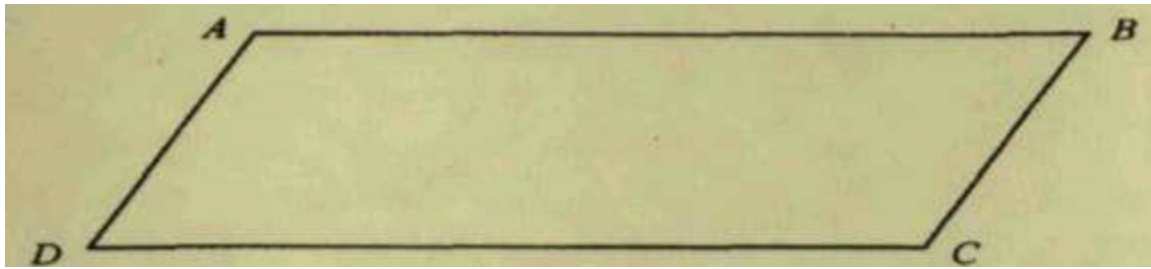


Fonte: Lima e Carvalho (2010, p. 138)

Como exemplificação para o esquema anterior, estes autores tomam um dado (objeto físico) que pode ser representado por um desenho (objeto gráfico) e associado a um cubo (objeto geométrico).

Laborde e Capponi (1994, p. 53) apontam que “desenhos prototípicos de objetos geométricos constituíram-se ao longo do tempo, resultantes de influências ao mesmo tempo perceptivas e culturais (em sentido amplo e escolar)”. Para eles, “o desenho prototípico de um paralelogramo é, ao menos na França, aquele em que a diagonal AC é perpendicular ao lado AD [...]” (p. 53).

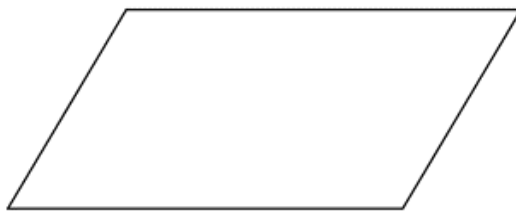
Figura 9 – Paralelogramo prototípico na França



Fonte: Laborde e Capponi (1994, p. 53)

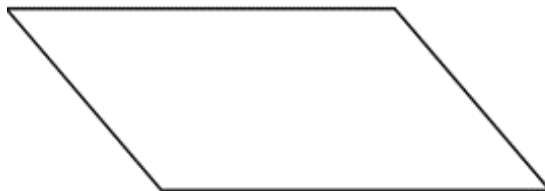
Santos (2005) comparou as características do paralelogramo considerado prototípico na França e no Brasil e nota aproximações, tais como o lado de maior comprimento na posição horizontal e a “inclinação” para a direita. Ela adota o termo “inclinação” de maneira coloquial, se referindo a que lado o paralelogramo está voltado.

Figura 10a – Paralelogramo com inclinação para a direita



Fonte: acervo da pesquisa

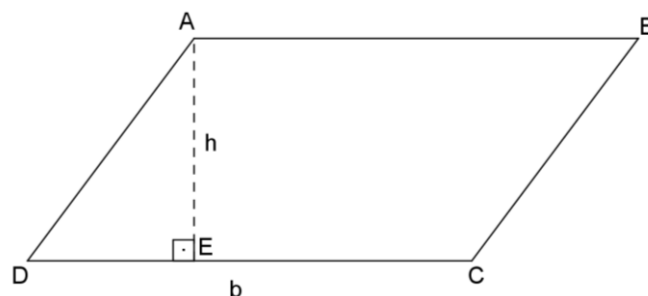
Figura 10b – Paralelogramo com inclinação para a esquerda



Fonte: acervo da pesquisa

Além dessas características, Teles (2007) pontua que a altura do paralelogramo prototípico é sempre interna, conforme figura abaixo:

Figura 11 – Exemplo de paralelogramo prototípico



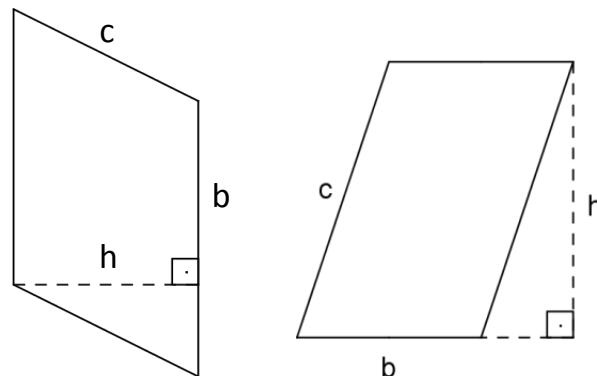
Fonte: acervo da pesquisa

A seguir apresentamos as características dos paralelogramos (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango) que estamos considerando como prototípicos, porém não iremos investigar isso neste trabalho e pode ser objeto de pesquisas específicas em momentos posteriores.

O desenho prototípico de um paralelogramo é o que Santos (2005) e Teles (2007) sinalizam: lado de maior comprimento na horizontal, altura interna e inclinação para a direita, conforme a figura acima.

Vejamos alguns exemplos de paralelogramos não prototípicos:

Figura 12 – Paralelogramos em posições não prototípicas



Fonte: acervo da pesquisa

Como percebemos, os paralelogramos acima se diferenciam do modelo habitual: no da esquerda, a altura é interna, mas o lado de maior comprimento está na posição vertical; o outro está inclinado para a direita, porém a altura é externa e o lado de maior comprimento não se encontra posicionado horizontalmente.

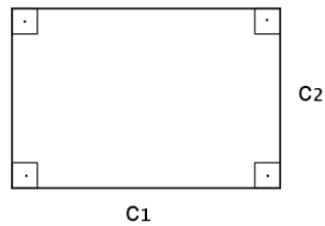
No que diz respeito à área do paralelogramo, Barbosa (2006) aponta a seguinte proposição: “a área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado” (p. 177). Um aspecto importante envolvendo a área do paralelogramo é a sua invariância em relação ao lado tomado por base⁷.

Nos casos acima, para o cálculo da área, teríamos: $A_p = b \times h$ (área do paralelogramo (A_p) é igual ao produto de um lado tomado como base (b) vezes a altura (h) correspondente a ela).

O retângulo prototípico possui o lado de maior comprimento na horizontal.

⁷ Ambas as demonstrações se encontram no Anexo A desta dissertação.

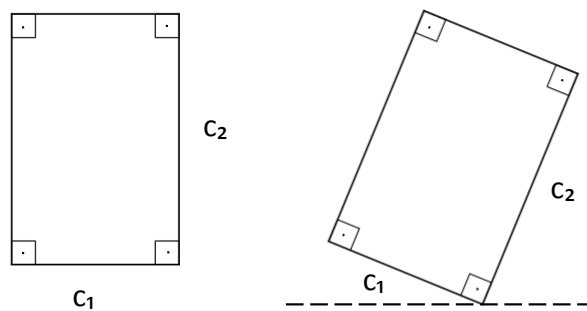
Figura 13 – Retângulo em posição prototípica



Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos casos em posições não usuais:

Figura 14 – Retângulos em posições não prototípicas



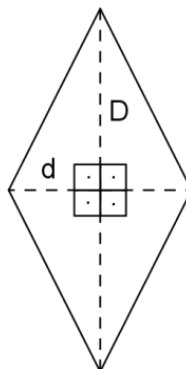
Fonte: acervo da pesquisa

O primeiro caso podemos considerar como uma primeira instanciização do modelo prototípico por ser o que mais se aproxima dele, diferenciando-se por possuir o lado de maior comprimento na posição vertical. O segundo possui os lados em posição oblíqua, tomando como referência a reta tracejada.

Para os três retângulos apresentados, a maneira de calcular a área pela utilização da fórmula é: $Ar = C_1 \times C_2$ (área do retângulo (Ar) é igual ao produto dos comprimentos (C_1 e C_2) de seus lados).

O losango prototípico é o que possui a diagonal maior na vertical e a menor na horizontal, parecido com um “balão”.

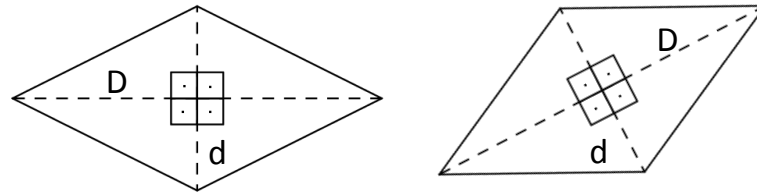
Figura 15 – Losango em posição prototípica



Fonte: acervo da pesquisa

Passemos aos losangos em posições não habituais:

Figura 16 – Losangos em posições não prototípicas



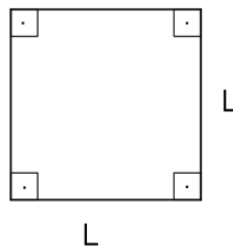
Fonte: acervo da pesquisa

O primeiro possui a diagonal maior na horizontal e a menor na vertical, podendo ser considerado como o que mais se aproxima do modelo prototípico. O outro está apoiado sobre um dos lados, considerando a borda da folha como referência.

Nos três casos de losangos, a área é dada por: $A_l = \frac{D \times d}{2}$ (área do losango (Al) é igual a diagonal maior (D) vezes a diagonal menor (d) dividido por 2).

Para o quadrado a posição prototípica é vertical-horizontal.

Figura 17 – Quadrado em posição prototípica

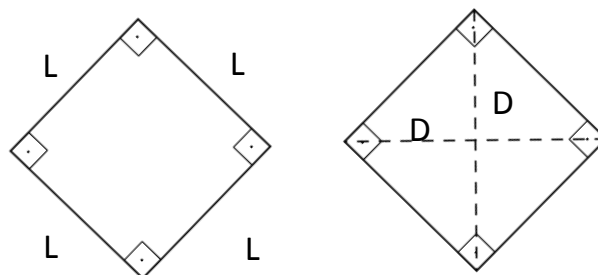


Fonte: acervo da pesquisa

Para este caso, a área seria igual a: $A_q = L \times L$ ou $(L)^2$ (área do quadrado (Aq) é igual ao comprimento do lado (L) elevando ao quadrado).

Vejamos alguns casos do quadrado em posições diferentes:

Figura 18 – Quadrados em posições não prototípicas



Fonte: acervo da pesquisa

Observamos dois casos diferentes do anterior: ambos estão apoiados sobre o vértice, tomando a borda da folha como referência. Para calcular a área, no primeiro deles, procede-se de forma análoga ao da figura 17. No quadrado da direita temos um caso em que são dados os comprimentos das diagonais e, pelo fato de todo quadrado ser losango, podemos obter a área dele, fazendo: $Aq = \frac{D^2}{2}$ (área do quadrado (Aq) é igual ao produto das diagonais (D) dividido por dois e, por ser um quadrado, $D = d \rightarrow D^2$).

Como vemos, temos quatro tipos de figuras (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango) que remetem a uma mesma figura (paralelogramos), mas que a maneira de calcular a área por meio da fórmula é diferente para cada uma delas. Nesse sentido, acreditamos que para o aluno lidar com as tarefas sobre área de paralelogramos, é importante que ele reconheça a figura para poder escolher a fórmula adequada e identificar os elementos geométricos que darão os valores que ele vai precisar para realizar as operações, isto é, o reconhecimento da figura e dos elementos geométricos nelas presentes irão trazer implicações sobre o cálculo da área.

Fazemos questão de enfatizar o uso das fórmulas pelo fato de os participantes da pesquisa serem alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e é recomendada a sua utilização. Elas fazem parte do ensino do conceito de área e isso nos conduz a considerar a área como uma grandeza bidimensional em relação ao comprimento, ou seja, além dos quadros numérico, geométrico e das grandezas, devemos também levar em conta o quadro algébrico funcional, que segundo Bellemain e Lima (2002, p. 45) a esse quadro “pertencem as fórmulas que expressam a área, em função de comprimentos relativos às figuras geométricas”.

2.5 SOBRE A APRENDIZAGEM E O ENSINO DE PARALELOGRAMOS

Passos (2000), embora investigue como o aluno representa e interpreta representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações, relatou um episódio ocorrido em um curso de aperfeiçoamento com professores das séries iniciais do ensino fundamental, que ao estarem em contato com figuras geométricas chamavam de losango os paralelogramos que tinham lados diferentes. Além disso, eles consideravam que um quadrado deixava de ser quadrado quando mudava de posição, isto é, se colocado em uma mesa com um dos lados na horizontal sobre ela, seria um quadrado, se apoiasse um dos vértices sobre a mesa, seria um losango. Isso é uma evidência de que as dificuldades de identificação e classificação dessas figuras não são apenas dos alunos.

Pirola, Carvalho, Nascimento e Mariani (2004) fizeram um estudo com vinte alunos das quatro últimas séries do ensino fundamental, sendo cinco alunos de cada turma, sobre a formação do conceito do triângulo e do paralelogramo, tomando como aporte teórico a teoria de Klausmeier sobre a formação conceitual. Como resultados, considerados mais importantes para nosso estudo, diagnosticaram que, do total de sujeitos pesquisados, doze afirmaram não saber a definição de paralelogramo e nenhum deles soube dar três exemplos corretos de paralelogramos, uma vez que, quando solicitados a desenhar essa figura, muitos produziram trapézios e hexágonos. Outro dado relevante é que não fizeram confusão entre o triângulo e o paralelogramo. No entanto, todos confundiram o paralelogramo como o trapézio, ou seja, afirmaram que trapézio é paralelogramo. Como exemplos deste último, sete apresentaram corretamente o quadrado e treze o losango.

Em um artigo que apresenta parte de um estudo com discentes do 7º ano do Ensino Fundamental, Menegotto e Lara (2011) tinham como objetivo da pesquisa analisar a contribuição do GeoGebra para a construção de conceitos referentes a paralelogramos, por meio da análise comparativa entre um grupo experimental e um grupo de controle. Entre outros resultados, elas observaram que no pré-teste, em uma questão para identificação de paralelogramos contendo triângulo, retângulo, losango, paralelogramo não retângulo e não losango, quadrado prototípico e não prototípico, e trapézio, os sujeitos da pesquisa identificaram apenas o paralelogramo não retângulo e não losango (prototípico) como sendo paralelogramo, deixando de marcar também o quadrado, o retângulo e o losango.

Diniz (2013), tomando como fundamento a teoria vanhieliana, realizou uma pesquisa objetivando investigar que habilidades são mobilizadas por alunos de 7º e 9º anos do Ensino Fundamental para classificar figuras geométricas, mais especificamente, classificar pela visualização. Percebeu que os acertos na classificação do quadrado e do retângulo foram 24% e 16% respectivamente. Em relação ao paralelogramo e o losango apresentaram índices muito baixos, correspondentes a 10% e 11%, nessa ordem. Em uma questão de associar a figura ao nome, os alunos dessas duas séries também confundiram o retângulo com o losango e o losango com o paralelogramo. Outro erro apontado por ele é que os alunos tratavam os retângulos em diferentes posições como duas figuras geométricas diferentes. Na classificação da figura pelas propriedades, o paralelogramo apresentou novamente o menor percentual de acerto, apenas 10%.

Mesquita, Santos e Santos (2013) apresentaram os resultados de uma atividade com alunos e professores do ensino fundamental sobre a área de figuras geométricas planas

(quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, triângulo e trapézio) e uma das dificuldades apresentadas pelos estudantes é o reconhecimento das figuras, ou seja, confundiram o paralelogramo com o trapézio, com o losango etc. e as reclamações por parte deles se davam por afirmar que nunca haviam estudado aquele assunto ou que não era abordado daquela forma.

Tavares (2014) fez um estudo que visava compreender e avaliar os conhecimentos que alunos no início do 3º ciclo possuíam, relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, apoiando-se na teoria de Van-Hiele. Como resultados, ela apontou que os alunos revelavam confusões e dificuldades relacionadas com os conceitos dessas figuras, dando mais importância aos atributos não críticos, como o tamanho e a posição delas. Os sujeitos da pesquisa evidenciaram dificuldades nas classificações das figuras levando-os, em alguns casos, a excluir o quadrado ao classificar retângulos e a excluir retângulos e losangos quando classificavam paralelogramos. Percebemos que ela adota uma classificação semelhante à nossa quanto à inclusão dessas figuras.

Em uma pesquisa com alunos do ensino médio, fundamentada no modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele que teve como objetivo identificar e analisar os níveis de raciocínio geométrico dos estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Estado de Pernambuco, Costa e Câmara dos Santos (2015) obtiveram, entre outros resultados, que o quadrado não é reconhecido como retângulo por 77% do total de alunos do 1º ano, 47% entre os do 2º e 60% para os do 3º ano; o losango foi reconhecido como um não retângulo por 5% dos discentes do 1º ano, 13% do 2º e 9% do 3º; o paralelogramo não retângulo e não losango foi considerado como não retângulo por 1% dos estudantes do 1º ano e 5% entre os do 2º e 3º anos. Cabe ressaltar que o fato de a figura estar em posição não prototípica também influenciou nas respostas dos sujeitos dessa pesquisa, ao afirmarem que o retângulo não prototípico é um não retângulo.

Em sua dissertação, Costa (2016) tomou como apoio a teoria de Van-Hiele e objetivou analisar, utilizando o GeoGebra como recurso didático, os efeitos de uma sequência didática com alunos⁸ do 6º ano do ensino fundamental para a construção do conceito de quadriláteros notáveis. Aqui apresentamos apenas os resultados mais voltados para nosso estudo, entre os quais, observou que após a análise do pré-teste 81% dos alunos não reconheceram o quadrado como retângulo. No pós-teste este índice caiu para 53%. Cerca de 7% da turma no pré-teste e

⁸ É importante destacar que os participantes do trabalho de Costa (2016) são os mesmos da nossa pesquisa.

8% no pós-teste identificaram os trapézios como paralelogramos. Os paralelogramos não losangos foram reconhecidos como losangos por 12% no pré-teste e 17% no pós-teste. Em uma das atividades da sequência didática notou que algumas duplas, ao serem orientadas a produzir um losango, produziram um trapézio ou um paralelogramo não losango. Por fim, ele deixou algumas inquietações para trabalhos futuros, dentre as quais destacamos: o que leva esses alunos a realizarem essas produções? Acreditamos que a identificação dos invariantes operatórios bem como a realização de entrevistas seja um caminho para a compreensão, ao menos parcial, de tais produções.

Como podemos notar, mesmo contemplando uma diversidade de sujeitos (alunos dos anos iniciais e dos anos finais do ensino fundamental, do ensino médio e professores) observamos algumas convergências entre os resultados dessas pesquisas:

- Dificuldades na classificação dos quadriláteros, especialmente paralelogramos e losangos (PASSOS, 2000, DINIZ, 2013, TAVARES, 2014);
- Dificuldades na definição de paralelogramos e em dar exemplos dessa figura (PIROLA et al., 2004, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015);
- Confusão entre paralelogramos e trapézios (PIROLA et al., 2004, MESQUITA et al., 2013, COSTA, 2016). Fato também observado na pesquisa de Teles (2007);
- Influência da posição das figuras na sua identificação e classificação (PASSOS, 2000, MENEGOTTO; LARA, 2011, DINIZ, 2013, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015);
- Não reconhecimento do quadrado como retângulo (TAVARES, 2014, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015, COSTA, 2016);
- Confusão entre trapézio e losango (COSTA, 2016).

A partir do agrupamento acima, percebemos que, de certa forma, existe uma coerência tanto na classificação adotada pelos pesquisadores quanto nas respostas dadas pelos alunos. Por exemplo, para os sujeitos que confundem paralelogramos e trapézios, Pirola et al. (2004), Mesquita et al. (2013) e Costa (2016) apontam como uma limitação. Da mesma maneira, o não reconhecimento do quadrado como retângulo por parte dos diferentes alunos nas pesquisas de Tavares (2014), Costa e Câmara dos Santos (2015) e Costa (2016) sinaliza que na classificação adotada por eles, consideram que o quadrado é um retângulo, diferente da apresentada por Lima e Carvalho (2010) na categoria voltada para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Diante destes resultados, resta-nos perguntar: que figuras os estudantes consideram como sendo paralelogramos? Se na questão aplicada por Costa e Câmara dos Santos (2015), em vez de pedir para eles produzirem um retângulo e uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo, desenhássemos um paralelogramo e pedíssemos para eles desenharem outras figuras que também fossem paralelogramos com área igual à da figura dada, que resultados obteríamos? Quais invariantes operatórios seriam mobilizados?

Uma vez tida essa visão mais geral sobre paralelogramos e os estudos relacionados a eles, muitos voltados para o âmbito da geometria, percebemos a importância de o aluno ter a clareza sobre os seus diferentes tipos. Acreditamos que a necessidade de diferenciação entre eles irá contribuir para a atribuição de sentido à área do paralelogramo e também para o uso mais adequado das fórmulas de área. Mas o que as pesquisas sobre área de paralelogramos apontam?

2.5.1 Estudos sobre a área do paralelogramo

Como vimos na seção anterior, a figura do paralelogramo é fonte de várias lacunas conceituais por parte dos alunos. Bellemain e Lima (2002) citam algumas pesquisas que também evidenciam dificuldades relacionadas a essa figura: Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), e apontam que tais estudos “observam que os alunos tendem a considerá-los como retângulos deformados, confundindo conseqüentemente as variações de área e de perímetro” (p. 31). Nesse sentido, ao resolver problemas com a área do paralelogramo, os alunos procuravam modificá-los (por meio de deformações) obtendo figuras com as quais sabiam tratar, como o retângulo. Algumas dessas deformações conservam a área e outras não.

Baltar (1996) realizou uma pesquisa na França voltada para a elaboração e experimentação de uma engenharia didática com alunos de nível equivalente ao terceiro ciclo do ensino fundamental brasileiro e formulou alguns teoremas em ação errôneos, mobilizados pelos alunos em relação à área do paralelogramo:

- dois paralelogramos cujos lados têm comprimentos iguais têm mesma área;
- a área de um paralelogramo é o produto das medidas de seus lados;
- girar um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva a área.

Ao realizar uma pesquisa com 21 alunos de uma oitava série, atual nono ano, Santos (2005) objetivou investigar que relações existiriam entre a abordagem da área do paralelogramo na coleção de livros didáticos utilizada por essa turma e os procedimentos

utilizados por esses estudantes na resolução de problemas envolvendo esse tema. Ela apoiou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e seus seguidores, mais especificamente as noções de contrato didático e variável didática, as quais já discutimos um pouco em nossa seção teórica. Cabe ressaltar que consideraremos para nosso estudo algumas das variáveis didáticas utilizadas por essa pesquisadora.

Em relação aos resultados da pesquisa, percebeu que os alunos, por vezes, não reconhecem o paralelogramo em outra posição, em outra inclinação ou ainda apresentam dificuldades na resolução de problemas envolvendo a sua área quando a figura aparece diferente do habitual. Verificou ainda que, mesmo não se tratando do lado de maior comprimento, o tomado por base geralmente era o horizontal, fato encontrado tanto na coleção quanto nos procedimentos dos alunos.

Ela argumenta que

Um dos fatores que explica essas lacunas é que existe um foco no aspecto numérico e da fórmula e numa forma mecânica e padronizada de se trabalhar o conceito de área do paralelogramo. Ao mesmo tempo, a crítica pertinente à maneira como o ensino vem sendo estruturado, não parece suficiente para explicar as dificuldades dos estudantes (SANTOS, 2005, p. 31).

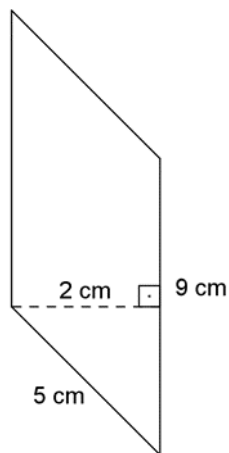
Segunda esta mesma autora “as dificuldades na dissociação entre área e perímetro dos paralelogramos existem e as pesquisas mostram que elas são persistentes e reforçadas por teoremas em ação a respeito do conceito de área” (p. 31).

Um aspecto a ser enfatizado na pesquisa realizada por Santos (2005), mais especificamente no teste aplicado com os estudantes, é o fato de ela assumir que os sujeitos da pesquisa já consideram o retângulo e o quadrado como sendo paralelogramos, pois, em uma questão de comparação de áreas, aparecem essas figuras em meio a paralelogramos não retângulos e não losangos, mas, em nenhum momento, verifica se esta hipótese é verdadeira, ou seja, se realmente tem sujeitos da pesquisa que consideram essas figuras como paralelogramos.

No que se refere à figura do paralelogramo, Santos (2005) apresenta as seguintes variáveis didáticas seguidas dos valores que podem assumir:

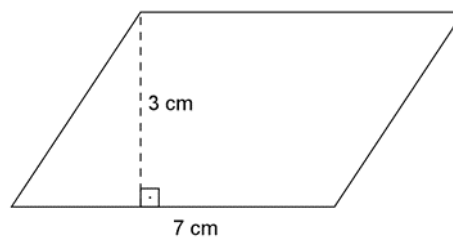
- **Posição relativa dos lados do paralelogramo:** esta variável restringe-se aos paralelogramos não retângulos e os seus valores são um dos lados na posição vertical, um dos lados na posição horizontal e ambos os lados oblíquos, tomando como referência a borda da folha de papel.

Figura 19a – Paralelogramo com um dos lados na posição vertical



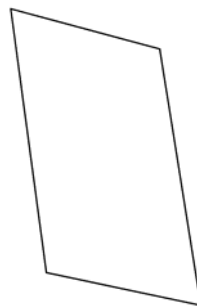
Fonte: acervo da pesquisa

Figura 19b – Paralelogramo com um dos lados na posição horizontal



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 19c – Paralelogramo com lados na posição oblíqua



Fonte: acervo da pesquisa

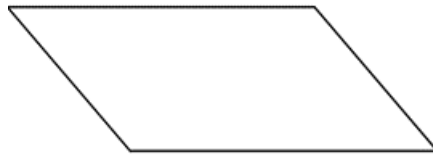
- **Inclinação da figura:** poderá ser inclinado para a direita ou para esquerda.
Conforme figuras abaixo:

Figura 20a – Paralelogramo com inclinação para a direita



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 20b – Paralelogramo com inclinação para a esquerda



Fonte: acervo da pesquisa

- **Orientação do lado de maior comprimento:** em posição vertical, horizontal ou oblíqua. Ver figuras 19a, 19b e 19c, respectivamente. Santos (2005) observa em sua pesquisa convergências tanto na análise do livro didático quanto nos procedimentos utilizados pelos alunos, no que se refere ao lado tomado como base era geralmente o horizontal.

Ela também traz um conjunto de variáveis para tarefas envolvendo a área do paralelogramo:

- **Existência/presença de figuras:** presença ou ausência de figuras nas questões, que pode ser dada no enunciado ou solicitada a sua produção. Podendo também estar totalmente ausente.

- **Natureza das soluções:** procedimento numérico e/ou algébrico ou nenhum dos dois.

- **Dados fornecidos:** podem ser necessários e suficientes ou ter dados extras. Ver figuras 19a com dados extras e 19b com dados necessários e suficientes. Já discutimos anteriormente que uma das regras do contrato didático⁹ é a de que os dados fornecidos na questão devem ser utilizados, sem que se precise fazer uma escolha entre eles.

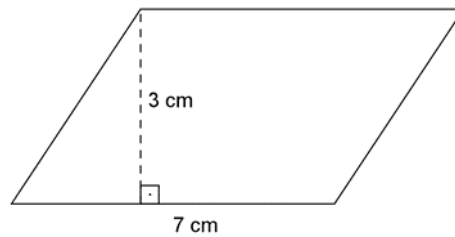
- **Posição do lado tomado como base:** vertical, horizontal ou oblíqua. Ver figuras 19a, 19b e 19c, respectivamente. Em alguns casos temos uma altura traçada e com isso estamos pressupondo que um lado é tomado como base.

- **Comprimento do lado tomado como base:** lado de maior comprimento ou de menor comprimento.

- **Posição da altura traçada:** interior ou exterior.

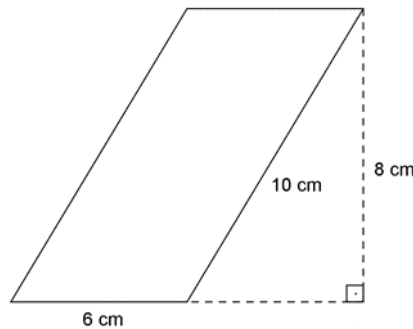
⁹ Se a questão for dada como nessa figura, pedindo apenas para calcular a área de paralelogramo, o aluno não pode resolver corretamente, sem se posicionar em ruptura com o contrato didático.

Figura 21a – Paralelogramo com altura traçada no interior



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 21b – Paralelogramo com altura traçada no exterior



Fonte: acervo da pesquisa

Assim como já mencionado ao apresentarmos as variáveis elencadas por Teles (2007) e Pessoa (2010), também retomaremos as de Santos (2005) na parte metodológica.

Ao realizar a análise de uma coleção de livros didáticos em relação ao paralelogramo e sua área, Santos e Bellemain (2007) obtiveram como resultados que havia regularidades na abordagem dessa figura, bem como da sua área, correspondendo a valores de variáveis didáticas privilegiadas e, além disso, a coleção apresentava poucas tarefas de comparação sem dados numéricos. Outras situações reforçavam as concepções geométricas e numéricas, havendo pouca ênfase na área enquanto grandeza.

Em um estudo que toma como apoio a dissertação de Santos (2005) e alguns pontos da tese de Teles (2007), Souza (2013) analisou, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, como alunos do 2º ano do ensino médio técnico lidam com a área de paralelogramos. Mais especificamente, verificou persistências ou não dos aspectos apontados por Santos (2005), mediante análise do cálculo relacional, do cálculo numérico e da álgebra das grandezas. Dentre as tarefas aplicadas aos sujeitos de sua pesquisa, Souza (2013) analisou duas, as quais contemplavam a medida da área de paralelogramos não retângulos e não losangos, sendo a primeira com a figura na posição prototípica e com dados numéricos extras, considerada uma tarefa habitual, e a segunda com o paralelogramo em posição não prototípica, sem dados numéricos, que considerou como uma tarefa não habitual.

Em relação aos resultados, observou que algumas dificuldades em relação à área de paralelogramos persistem mesmo no ensino médio. No que se refere à álgebra das grandezas, menos de 20% dos alunos expressaram adequadamente a área do paralelogramo pelo par (número, unidade de área); outros fizeram a utilização inadequada de unidades de medida (centímetro ou centímetro cúbico para representar áreas) ou a ausência delas, levando-os a considerar a área apenas como um número. Quanto ao cálculo relacional, os resultados apontaram que 40% dos alunos utilizaram procedimentos adequados na situação habitual, diminuindo para 25% em situação não habitual. Apresentaram confusão entre os conceitos de área e perímetro, emprego de fórmulas erradas, fazendo o produto dos comprimentos dos lados da figura ou cálculos de diferentes maneiras que envolvessem todos os dados fornecidos. Houve confusão entre a fórmula da área do paralelogramo com a do triângulo ou do trapézio, uma vez que o aluno via na fórmula deste último uma maneira de utilizar todos os dados presentes na figura do paralelogramo. Outro fato importante é que alunos que utilizaram corretamente a fórmula na figura habitual do paralelogramo, não a empregaram no paralelogramo não prototípico e sem dados numéricos. No que diz respeito ao cálculo numérico, cerca de um terço dos alunos cometeu erros envolvendo operações numéricas com números decimais.

Por fim, fazendo o cruzamento dos dados (cálculo relacional, numérico e álgebra das grandezas), Souza (2013) notou que o acerto simultâneo de cálculo relacional e cálculo numérico é de aproximadamente 30% nas condições consideradas habituais e 20% nas condições não habituais. Menos de 25% dos alunos que acertaram o cálculo relacional em ambas as tarefas, lidam adequadamente com unidades de comprimento e de área. Embora alguns alunos expressem a área por um número seguido da unidade de medida, inicialmente operam apenas com os números e ao final expressam o resultado acrescentando a unidade de área. De modo geral, houve diferenças significativas em relação ao tratamento dado à tarefa habitual e não habitual.

Como percebemos, na literatura pesquisada, nenhuma trata especificamente das situações que dão sentido ao conceito de área, no caso dos paralelogramos (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango) voltada para situações que envolvam identificação e classificação, ou seja, que permitem identificar e classificar essas figuras e, também, comparar áreas, medir áreas e produzir superfícies com condições dadas sobre sua área.

Diante do exposto até o presente momento, apresentamos nossas questões de pesquisa:

Como os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com as situações que dão sentido ao conceito de área, no caso dos paralelogramos? Quais as diferenças na maneira como resolvem tarefas sobre paralelogramos, de acordo com os tipos de paralelogramos (quadrado, retângulo, losango e o paralelogramo não retângulo e não losango) no que se refere à identificação, aplicação da fórmula e cálculo de área?

2.6 OBJETIVOS

2.6.1 Objetivo Geral

Analisar como alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos (quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos).

2.6.2 Objetivos Específicos

Verificar se os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental reconhecem quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos em configurações e posições não prototípicas;

Verificar a influência de variáveis (tipo de paralelogramo, tipo de situação, dados fornecidos) sobre o desempenho de alunos do 8º ano na resolução de tarefas sobre a área de paralelogramos;

Identificar os procedimentos e os teoremas em ação mobilizados pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental no tratamento de tarefas relativas à área de paralelogramos;

Averiguar se há diferenças marcantes no tratamento das tarefas sobre uso de fórmulas, cálculo de área e identificação, nos casos das famílias de figuras (quadrados, retângulos, losangos ou paralelogramos não retângulos e não losangos).

3 PERCURSO METODOLÓGICO

O estudo empírico dessa pesquisa foi realizado em uma escola pública federal situada na cidade do Recife/PE, a qual possui um bom desempenho geral em avaliações externas. Essa escolha justifica-se por buscarmos estudar aspectos relativamente sutis do campo conceitual em torno da área do paralelogramo, o que seria favorecido pela diversidade de procedimentos de resolução e pela escolha de participantes que dominassem aspectos mais elementares sobre paralelogramos e sobre a área de figuras planas.

A escolha de aplicar o teste¹⁰ com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental deve-se à consulta feita aos professores de matemática desta escola, os quais indicaram que aplicássemos o teste com duas turmas de 8º ano com um total de 42 alunos, sendo 17 do 8º ano A e 25 do 8º ano B, com idades de 12 a 14 anos. Os alunos tiveram duas aulas, ou seja, cem minutos para realizar a atividade proposta. Buscando preservar a identidade de cada sujeito pesquisado, eles serão representados por uma letra e um número, ou seja, de A1 a A17 para os alunos do 8º ano A e de B1 a B25 para os do 8º ano B.

Após a aplicação do teste, alguns deles foram selecionados para uma entrevista de explicitação (VERMERSCH, 1994), na qual o foco é em “como fizeram” em vez de “por que fizeram”. Nesse sentido, buscamos compreender as concepções dos alunos ao resolverem as tarefas propostas e completar informações acerca da resolução empregada por eles nas questões.

Como a análise das respostas dos alunos será feita à luz da Teoria dos Campos Conceituais e uma das características desta teoria é a análise do sujeito na ação, concordamos com Vermersch (1994) ao considerar ação como a realização de uma tarefa, sendo a entrevista de explicitação um método que busca a descrição detalhada desta ação. De acordo com Almeida (2016, p. 132) “nesse tipo de entrevista o papel do entrevistador é fundamental, pois o acompanhamento realizado por ele tem o objetivo de ajudar o entrevistado a evocar e explicitar uma ação já vivenciada em todas as suas dimensões”. Entre outros elementos, pretendemos por meio das entrevistas confrontar nossas interpretações acerca da mobilização de determinados invariantes operatórios.

¹⁰ O teste completo encontra-se no Apêndice A desta dissertação. Maiores detalhes serão abordados na seção 3.2.

O critério¹¹ para escolha desses alunos partiu de respostas que não entendemos o procedimento utilizado no papel e de outros que, embora tenhamos entendido como eles fizeram, buscamos compreender se realmente nosso entendimento estava correto e confrontá-lo com o previsto em nossa análise a priori. Detalharemos melhor na análise dos resultados.

3.1 ESTUDO DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS EM FOCO

Na revisão de literatura apresentamos as variáveis didáticas e os valores assumidos nas pesquisas de Santos (2005), Teles (2007) e Pessoa (2010). Após fazer o cruzamento das variáveis destes três trabalhos, resolvemos fixar algumas delas, por exemplo: temos presença da figura em todas as questões, com contorno poligonal e os traçados auxiliares como diagonal, altura etc. serão tracejados, pois pode facilitar o uso do tipo de papel fornecido, mais especificamente o quadriculado e o pontilhado; o preenchimento da figura é hachurado com malha visível; as questões assumem caráter típico, em contexto intramatemático.

Outro ponto consiste no fato de querermos analisar como os alunos lidam com as diferentes situações que dão sentido à área no caso dos paralelogramos, com ênfase nos procedimentos de resolução, e sabemos que uma parte dos erros dos alunos é relativa à questão das unidades de medida. Por isso decidimos que todas serão dadas em centímetros. Acreditamos que o fato de utilizarmos questões em malhas de um centímetro e de meio centímetro não se trate de uma mudança de unidade, pois não é necessário que o aluno faça conversões para comparar as áreas. No entanto, sabemos que erros na utilização das unidades poderão surgir, tais como, confusão entre as unidades de medida de comprimento e as unidades para expressar área de uma figura, utilização inadequada e/ou omissão.

Por sabermos que uma fonte de erros dos alunos na resolução de problemas de área é relativa ao cálculo com números decimais, o domínio numérico dos dados e dos resultados ficará restrito aos números inteiros, com exceção de uma tarefa que envolve a diagonal do quadrado (pode usar número irracional) e de outra que possui números racionais nas medidas, porém, nesta última, tais dados são dispensáveis para o cálculo da área. Dessa forma, diminuiremos do nosso campo de análise a questão da conversão de unidades de medida e do cálculo numérico. Apesar disso, é possível que alguns alunos cometam erros relacionados com o uso inadequado e/ou com a ausência de unidades, bem como na execução dos cálculos.

¹¹ O quadro completo com todos os alunos e os respectivos critérios para entrevista encontra-se no Apêndice B desta dissertação.

No quadro a seguir, elencamos as variáveis com seus respectivos valores que utilizaremos em nosso estudo para o teste como um todo. Cabe ressaltar que algumas podem não aparecer nele por serem específicas de uma determinada questão e, por esse motivo, aparecerão no quadro específico de cada uma delas.

Quadro 2 – Sistematização das variáveis didáticas e seus valores

<u>Variáveis didáticas e seus valores</u>	
Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Quadrado, retângulo, losango, paralelogramo não retângulo e não losango, trapézio, trapezoide, triângulo e hexágono não convexo
Posição da figura	Prototípica ou não prototípica
Tipo de papel	Branco, pontilhado ou quadriculado
Tipo de malha	Quadriculada de 1cm ou de 0,5cm
Dados fornecidos	Necessários e suficientes ou extras
Tipos de uso das fórmulas de área	Calcular a área, comparar áreas, produzir figuras em condições dadas e calcular comprimentos que caracterizam a figura
Natureza das soluções	Numérica, algébrica, geométrica ou escrita
Operações	Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação
Posição relativa dos lados do paralelogramo não retângulo	Horizontal, vertical ou oblíqua
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita ou esquerda
Posição do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo	Horizontal, vertical ou oblíqua
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal, vertical ou oblíqua
Posição da altura traçada do paralelogramo não retângulo e não losango	Interior ou exterior
Comprimento do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo e não losango	Maior ou menor

Fonte: acervo da pesquisa

Como vemos no quadro acima, as oito primeiras variáveis didáticas correspondem às figuras de um modo geral (tipos de figura, posição da figura, tipo de papel, tipo de malha, dados fornecidos, tipos de uso das fórmulas de área, natureza das soluções e operações). As três penúltimas estão relacionadas com o paralelogramo não retângulo (posição relativa dos lados, inclinação e posição do lado tomado como base). E as três últimas com o paralelogramo não

retângulo e não losango (orientação do lado de maior comprimento, posição da altura traçada e comprimento do lado tomado como base).

Em relação às variáveis didáticas das figuras gerais observamos que: em tipo de figura e os valores que assume, podemos verificar se existem diferenças marcantes no tratamento dado a cada uma delas, principalmente nos paralelogramos (quadrado, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulo e não losango); quanto à posição da figura, ela pode nos ajudar a verificar, casos existam, dificuldades quando aparecem em um modo não habitual. Vimos em nossa revisão que alunos e professores afirmam que a figura passa a ser outra quando muda de posição; o tipo de papel em que as figuras aparecerão pode contribuir para identificação de algumas propriedades delas; as malhas de 1 centímetro e de 0,5 centímetro de comprimento do lado de cada quadradinho podem fornecer aspectos pertinentes para identificação de concepções numéricas e geométricas; a utilização dos dados fornecidos possibilita ver aspectos já discutidos em pesquisas anteriores referentes ao contrato didático no sentido de fazer cálculos de diversas maneiras de modo que se utilize todos os dados da questão; embora tenhamos a variável didática tipos de uso das fórmulas de área, ressaltamos que outros procedimentos podem fazer como que o aluno obtenha êxito sem que seja necessário utilizá-la; a natureza das soluções possibilita verificar os procedimentos adotados pelos alunos, com mais ênfase nas situações em que eles não são numéricos nem algébricos, podendo-se ou não utilizar as operações.

Quanto ao paralelogramo não retângulo, temos: queremos verificar se o fato de mudar a inclinação interfere na classificação por parte dos participantes; as variáveis da posição relativa dos lados e da posição do lado tomado como base visam compreender qual a ideia de base para os alunos.

No que se refere às variáveis didáticas ligadas ao paralelogramo não retângulo e não losango: a orientação do lado de maior comprimento pode influenciar na ideia de base; quanto à posição da altura traçada, acreditamos que nos leva a verificar algumas propriedades do paralelogramo, como a invariância da área em relação ao lado tomado por base, conduzindo-os à identificação da altura relativa a este lado; o comprimento do lado tomado como base pode revelar se os alunos consideram o maior, como apontamos na revisão de literatura.

De modo geral, supomos que entrará em jogo com muito mais força a questão das imbricações entre os campos conceituais das grandezas e medidas e o da geometria, pois a força do campo numérico é diminuída e também não focaremos a questão da variação, referente ao campo funcional. Cabe ressaltar que ao mencionarmos a possibilidade de haver

uma imbricação maior entre determinados campos conceituais, não estamos descartando a possibilidade de presença dos demais, uma vez que já foi mostrado por Teles (2007) que eles estão fortemente imbricados em problemas envolvendo fórmulas de área de figuras planas.

Na seção seguinte aproveitaremos a análise a priori do teste para exemplificar essas variáveis didáticas, destacando que uma única tarefa pode contemplar diversas variáveis e também vários valores.

3.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DO TESTE

Esta parte do projeto é dedicada à apresentação, justificativa e descrição das questões do teste, as variáveis didáticas e os valores que assumem, as possíveis respostas certas esperadas e os procedimentos de resolução corretos ou errôneos esperados, uma vez que pretendemos antecipar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, o que pode ser observado e interpretado.

O teste como um todo é composto por quatro questões, contemplando vinte e um itens, como segue abaixo:

Quadro 3 – Quantificação dos itens do teste

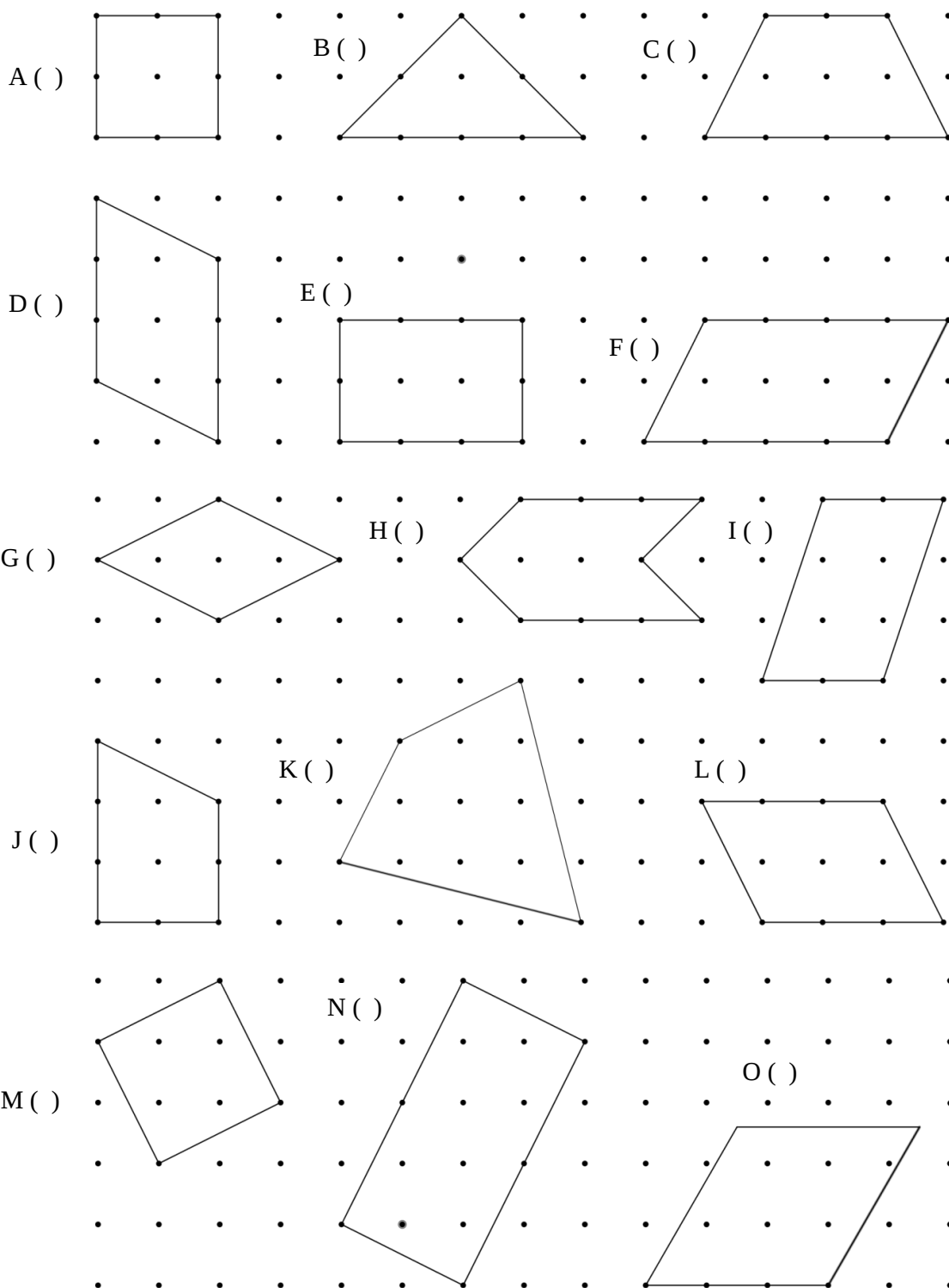
<u>Quesitos</u>	<u>Tarefas</u>	<u>Itens</u>
1º	Identificação de paralelogramos	4
2º	Comparação de áreas	6
3º	Medida de áreas	8
4º	Produção de figuras com área igual à de uma figura dada	3

Fonte: acervo da pesquisa

Todas as figuras do teste encontram-se em verdadeira grandeza, ou seja, em seu tamanho real. Nas que estão em papel pontilhado, os pontos consecutivos têm um centímetro de distância.

Vejamos detalhadamente cada uma delas:

Questão 1: Entre as figuras abaixo, assinale o(s) paralelogramo(s).



Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? _____

Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? _____

Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? _____

Esta questão possui quatro itens de identificação de figuras visualmente, incluindo implicitamente tarefas de classificação e reconhecimento. Trata-se de assinalar, em meio a diversas figuras, quais são paralelogramos e depois listar quais os quadrados, os retângulos e os losangos.

O interesse por essa atividade justifica-se pelo fato de podermos observar quais figuras são consideradas paralelogramos pelos alunos e também verificar se consideram as relações de inclusão entre eles (o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo e, estes dois últimos, são paralelogramos). Não estamos analisando propriedades, apenas o reconhecimento da figura que contribui para a identificação de elementos geométricos necessários ao cálculo da área e também à aplicação correta da fórmula. Nesse sentido, consideramos importante a inclusão de questões que envolvam a identificação, pois elas trazem implicações sobre o cálculo da área, o uso da fórmula e na maneira como os alunos lidam com os paralelogramos em suas diferentes representações. O tipo de papel presente na questão é o pontilhado, pois acreditamos que contribua para a sua identificação, uma vez que ficam mais evidentes aspectos característicos de cada uma delas.

Em relação ao tipo de figura, quanto à quantidade de lados, duas das 15 figuras não são quadriláteros (B e H), sendo que (B) trata-se de um triângulo isósceles e (H) é a única figura não convexa, possuindo os lados dois a dois paralelos. Dos 13 quadriláteros, há um não notável, o trapezoide (K), dois trapézios (C e J), sendo que (C) trata-se de um trapézio isósceles em que a base maior está “embaixo” e no caso de (J) temos um trapézio retângulo com as bases verticais.

Quadro 4 – Sistematização dos quadriláteros e não quadriláteros

<u>Quadriláteros</u>			<u>Não quadriláteros</u>	
<u>Paralelogramos</u>	<u>Não paralelogramos</u>		<u>Triângulo</u>	<u>Hexágono</u>
A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	<u>Trapézios</u>	<u>Não trapézios</u>	B	H
	C, J	K		

Fonte: acervo da pesquisa

Há 10 paralelogramos: (A e M) são quadrados, sendo que (M) possui os lados oblíquos em relação ao plano, (E e N) são retângulos não quadrados, com (N) também possuindo os lados oblíquos, e (G e O) são losangos não quadrados, o primeiro é o que mais se aproxima do modelo prototípico e outro com um lado apoiado na horizontal. As figuras (A e E) estão em posições a priori prototípicas, o retângulo (E) e o quadrado (A) têm seus lados

na posição horizontal-vertical. Temos quatro paralelogramos que não são nem retângulos nem losangos (D, F, I e L) – nesse caso (F) é o mais encaixado no modelo prototípico; (L) está inclinado para a esquerda, mas tem o lado de maior comprimento na horizontal; (D) tem o lado de maior comprimento na vertical e (I) na posição oblíqua.

Quadro 5 – Sistematização dos paralelogramos

<u>Paralelogramos</u>			
<u>Retângulos</u>		<u>Losangos</u>	<u>Paralelogramos não retângulos e não losangos</u>
<u>Não quadrados</u>	<u>Quadrados</u>	<u>Não quadrados</u>	D, F, I, L
E, N	A, M	G, O	

Fonte: acervo da pesquisa

As variáveis didáticas presentes nessa questão e seus respectivos valores são apresentadas no quadro a seguir:

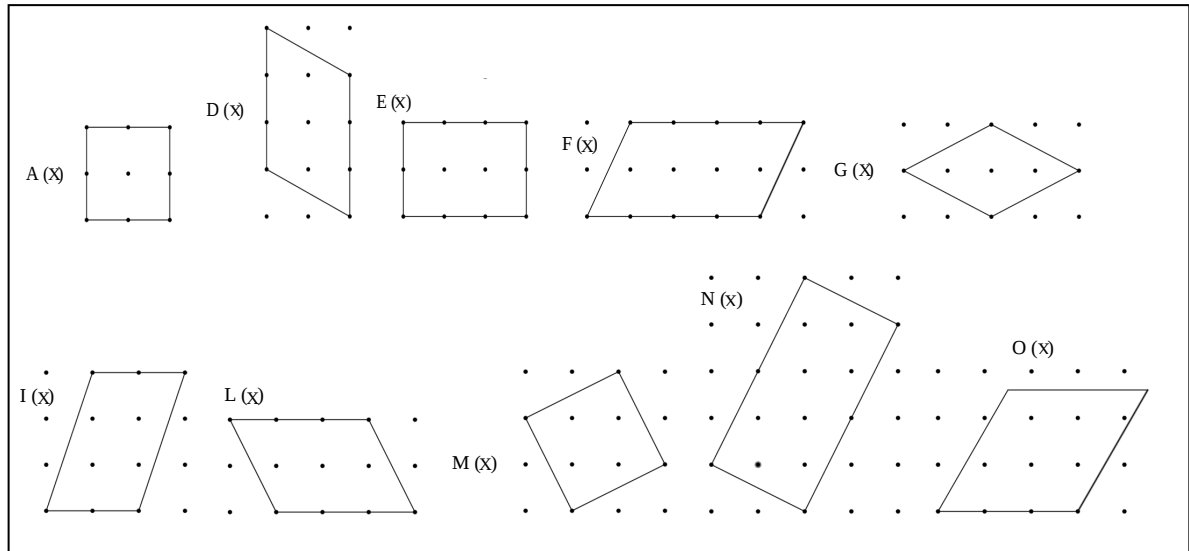
Quadro 6 – Variáveis didáticas da 1ª questão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	A, M
	Retângulo	A, E, M, N
	Losango	A, G, M, O
	Paralelogramo não retângulo e não losango	D, F, I, L
	Triângulo	B
	Trapézio	C, J
	Trapezoide	K
	Hexágono não convexo	H
Posição da figura	Prototípica	A, B, C, E, F,
	Não prototípica	D, G, H, I, J, K, L, M, N, O
Posição relativa dos lados do paralelogramo não retângulo	Horizontal	F, L, O
	Vertical	D
	Oblíqua	I
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	F, I, O
	Esquerda	L
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	F, L
	Vertical	D
	Oblíqua	I

Fonte: acervo da pesquisa

Como resposta correta, esperamos que eles identifiquem as figuras (A, D, E, F, G, I, L, M, N e O) como sendo paralelogramos, conforme veremos abaixo¹²:

Figura 22 – Todos os paralelogramos da 1ª primeira questão

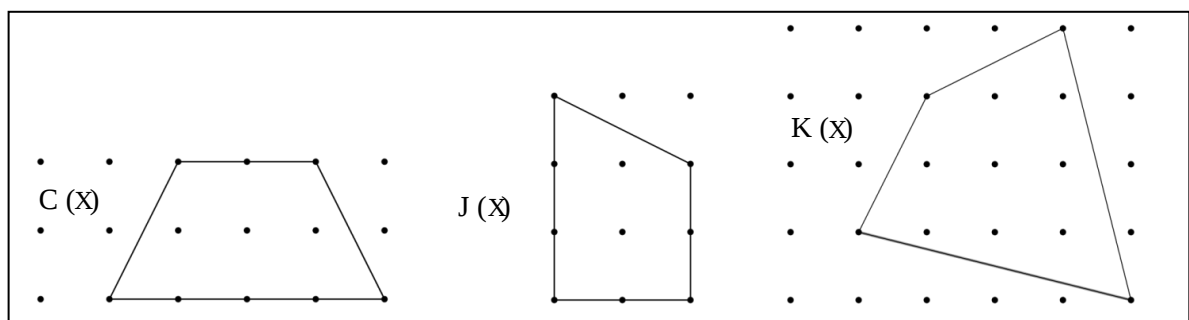


Fonte: acervo da pesquisa

Porém, outras respostas poderão conduzir ao que consideramos acerto parcial, tais como assinalar:

- Todos os quadriláteros (A, C, D, E, F, G, I, J, K, L, M, N, e O), pois todos os paralelogramos são quadriláteros, mas nem todo quadrilátero é paralelogramo, como é o caso das figuras (C, J e K);

Figura 23 – Quadriláteros que não são paralelogramos da 1ª questão

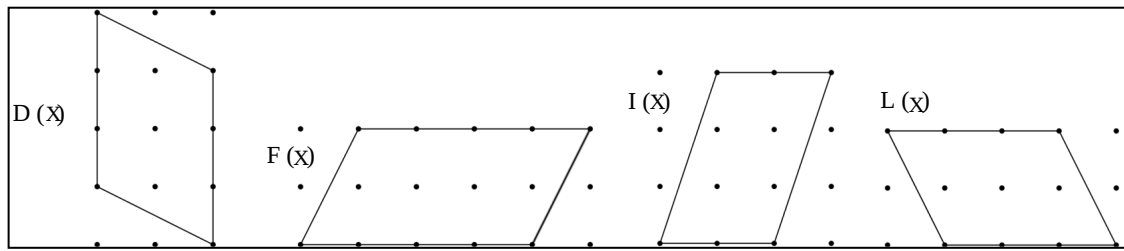


Fonte: acervo da pesquisa

- Só os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F, I e L);

¹² As figuras apresentadas aqui, referentes aos recortes de todas as questões, foram reduzidas por serem apenas para ilustração, ajudar na argumentação e facilitar ao leitor. Elas permanecem em verdadeira grandeza apenas nas questões completas e no Apêndice A.

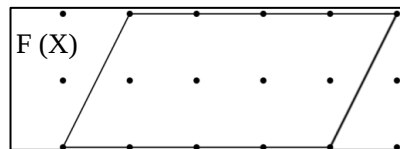
Figura 24 – Paralelogramos não retângulos e não losangos da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

- Apenas os paralelogramos em posição prototípica (F).

Figura 25 – Paralelogramo em posição prototípica da 1ª questão

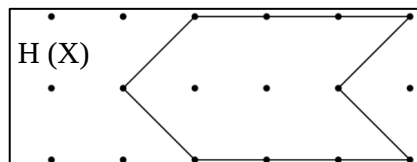


Fonte: acervo da pesquisa

A influência da posição das figuras pode conduzir os alunos a descartarem as que não estão em posição habitual, como vimos em Passos (2000), Menegotto e Lara (2011), Diniz (2013), Costa e Câmara dos Santos (2015).

- Figuras que possuem lados dois a dois paralelos (A, D, E, F, G, H, I, L, M, N e O). Nesse caso a figura (H) também seria marcada, mesmo não sendo paralelogramo;

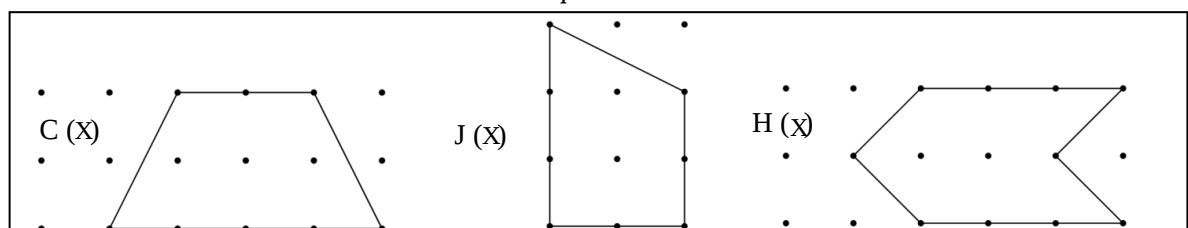
Figura 26 – Figura com lados dois a dois paralelos da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

- Figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos (A, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N e O). Obedecendo a esse critério, além dos paralelogramos, seriam assinalados os trapézios (C e J) e o hexágono (H), que não são paralelogramos.

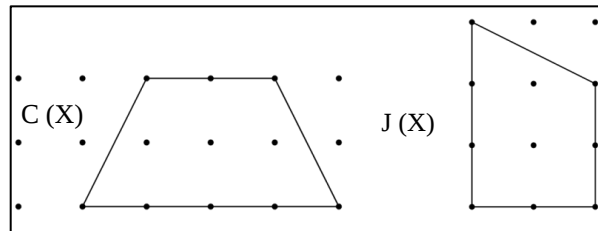
Figura 27 – Figuras com pelo menos um par de lados paralelos que não são paralelogramos da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Como erro, eles poderiam assinalar apenas os trapézios (C e J), ou seja, aquela em que confundem paralelogramos e trapézios, conforme observamos nas pesquisas de Pirola et al. (2004), Mesquita et al. (2013), Teles (2007) e Costa (2016).

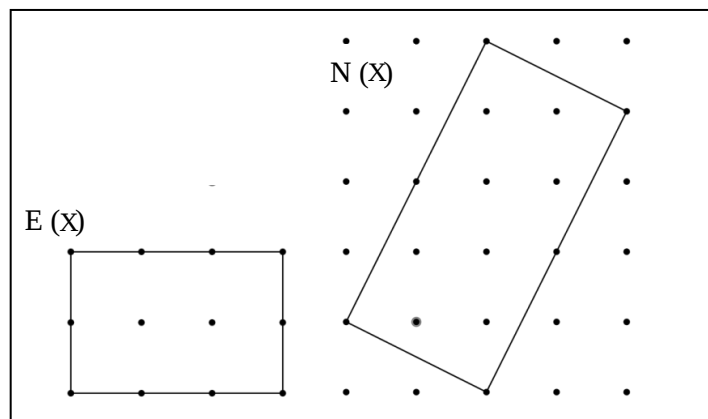
Figura 28 – Trapézios da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Algumas pesquisas tais como a de Baltar (1996), Santos (2005) entre outras, apontam que os alunos tendem a considerar o paralelogramo como retângulo deformado, fator que possivelmente os levaria a assinalar os retângulos não quadrados.

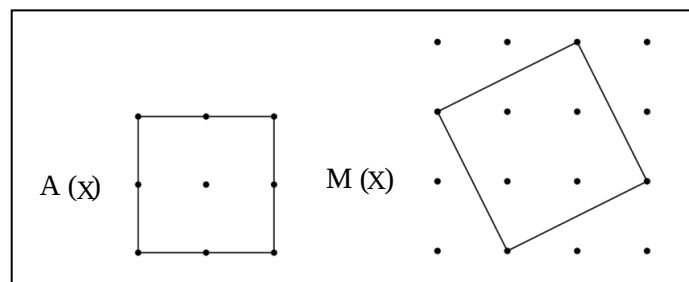
Figura 29 – Retângulos não quadrados da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Em relação à identificação de quadrados, temos duas possibilidades: a correta que seria classificar todos os quadrados, ou seja, as figuras (A e M).

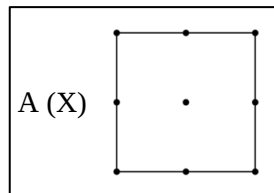
Figura 30 – Quadrados da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

A outra seria considerar apenas o quadrado prototípico da figura (A), que conduziria a um acerto parcial.

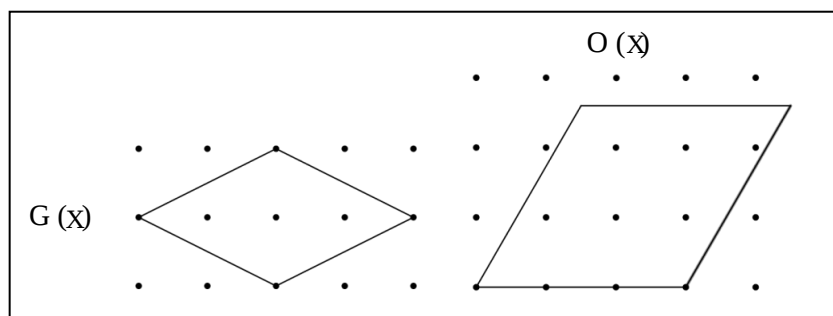
Figura 31 – Quadrado em posição prototípica da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Alguns erros podem estar relacionados a conceitos em ação não pertinentes, tais como o quadrado é uma figura que possui quatro lados de mesma medida e, nesse caso, os alunos poderiam citar também os losangos não quadrados (G e O).

Figura 32 – Losangos não quadrados da 1ª questão



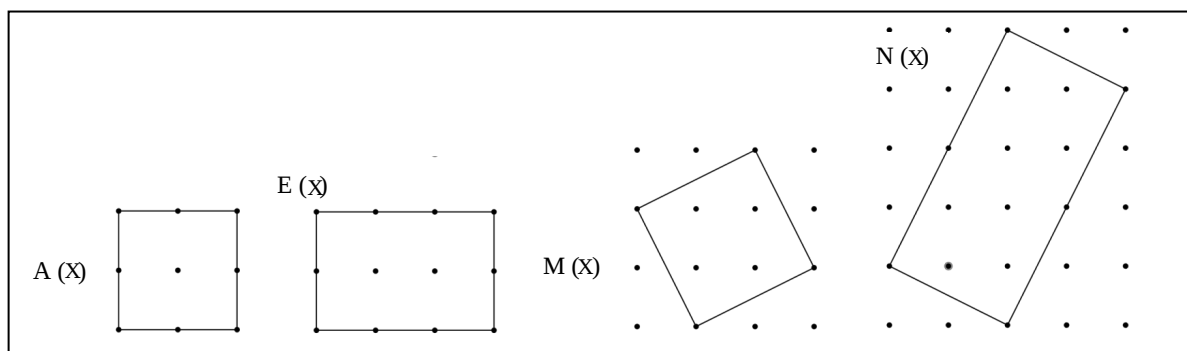
Fonte: acervo da pesquisa

Também poderiam considerar que retângulos são quadrados e assinalar os retângulos não quadrados (E e N), conforme apresentado na figura 29.

As possíveis respostas relacionadas à classificação de retângulos podem incluir:

- Todos os retângulos (A, E, M e N), que conduz à resposta correta esperada;

Figura 33 – Todos os retângulos da 1ª questão

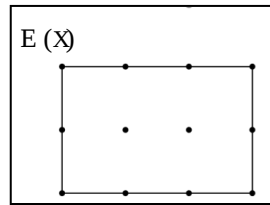


Fonte: acervo da pesquisa

- Apenas os retângulos não quadrados (E e N), ver figura 29;

- Só o retângulo em posição prototípica (E);

Figura 34 – Retângulo prototípico da 1ª questão

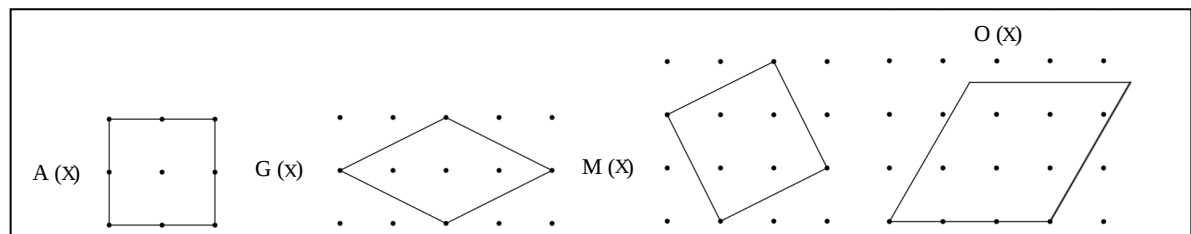


Fonte: acervo da pesquisa

Para o losango temos opções de respostas semelhantes às do retângulo:

- Todos os losangos (A, G, M e O), resposta correta;

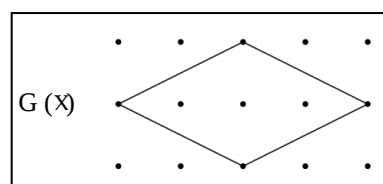
Figura 35 – Todos os losangos da 1ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

- Só os losangos não quadrados (G e O), ver figura 32;
- Apenas o losango em uma posição que se aproxima da prototípica (G);

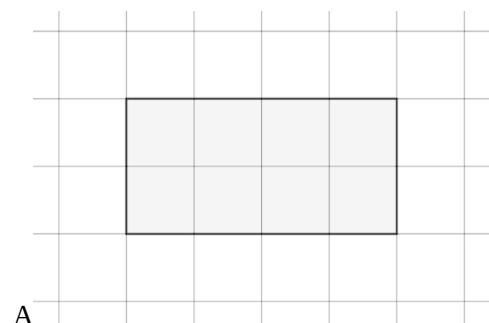
Figura 36 – Losango em posição próxima à prototípica da 1ª questão



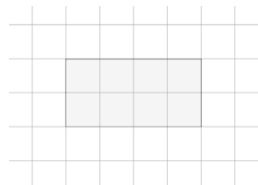
Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos a segunda questão:

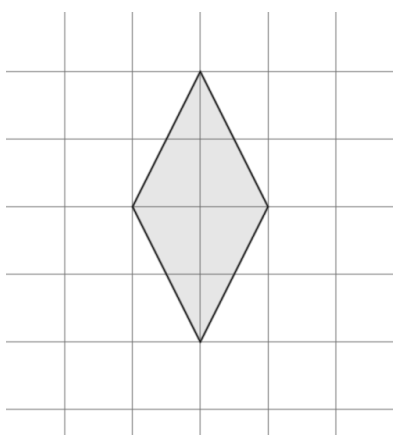
Questão 2: Observe as figuras abaixo:



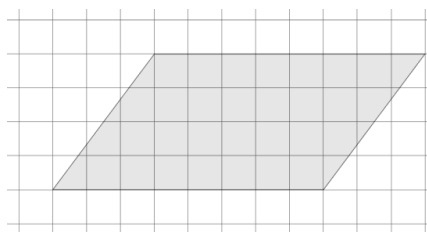
A



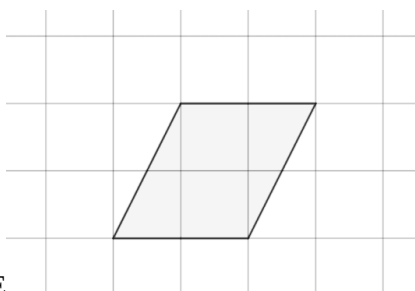
B



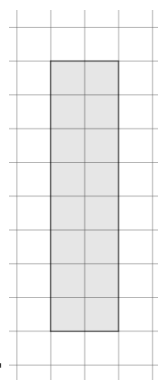
C



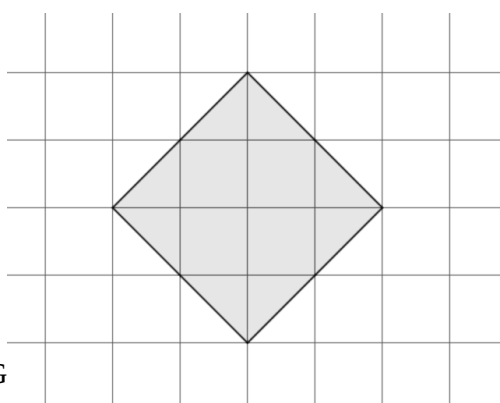
D



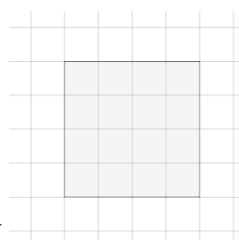
E



F



G



H

Assinale (V) para verdadeiro ou (F) para falso nas seguintes afirmações. Explique como você pensou.

() As figuras A e B possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e G possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e C possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras E e F possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras F e H possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e D possuem mesma área.

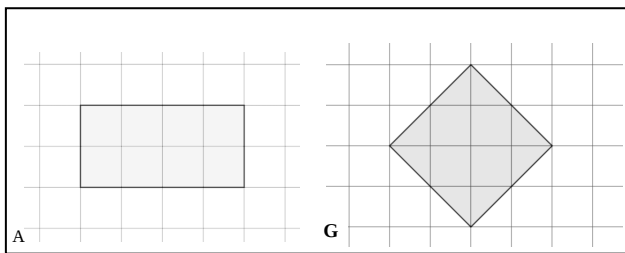
Explicação: _____

Esta é uma situação de comparação de áreas na qual os dados numéricos não são fornecidos. Pretendemos enfatizar a relação de equivalência (ter mesma área). Optamos por esta questão porque usar malhas diferentes e comparar nelas tem a ver com verificar se o aluno mobiliza uma concepção numérica e, ao fazer isto, ele desconsidera a necessidade que existe de só poder comparar as medidas quando estão com a mesma unidade. Nesse sentido, o aluno deverá julgar seis afirmações ao comparar as áreas dessas figuras, sendo três comparações na mesma malha (A e G), (A e C) e (F e H) e três em malhas diferentes (A e B),

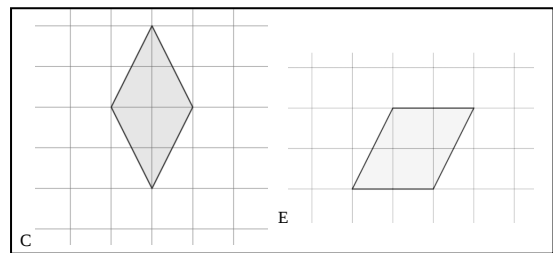
(E e F) e (A e D). As comparações (A e G) e (A e C) são na malha de um centímetro. A comparação (F e H) são na malha de meio centímetro. As demais são em malhas diferentes.

As figuras que estão na malha quadriculada de um centímetro possuem as seguintes características: as figuras (A e G) têm áreas de 8 cm^2 cada, sendo a primeira um retângulo prototípico e a segunda um quadrado em posição não prototípica; as figuras (C e E) ambas possuem áreas de 4 cm^2 , sendo a (C) um losango prototípico e a outra um paralelogramo não retângulo e não losango com inclinação para a direita

Figura 37a – Figuras (A e G) da 2ª questão



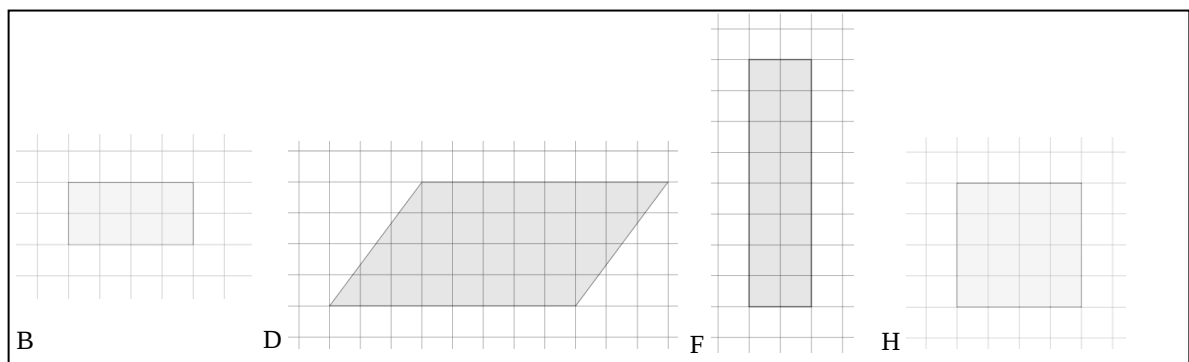
Figuras 37b – Figuras (C e E) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Em relação às figuras que estão na malha de meio centímetro, temos: a figura (B) é um retângulo em posição prototípica que possui área de 2 cm^2 ; a (D) trata-se de um paralelogramo não retângulo e não losango prototípico e tem uma área de 8 cm^2 ; as figuras (F e H) possuem áreas iguais a 4 cm^2 cada, em que a primeira é um retângulo não prototípico e a segunda um quadrado prototípico.

Figura 38 – Figuras (B, D, F e H) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

As variáveis didáticas e seus respectivos valores são explicitadas no quadro a seguir:

Quadro 7 – Variáveis didáticas da 2ª questão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	G, H
	Retângulo	A, B, F, G, H
	Losango	C, G, H
	Paralelogramo não retângulo e não losango	D, E
Posição relativa das figuras em relação à malha	Todos os lados da figura “seguem a malha”	A, B, F, H
	Algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado	D, E
	Nenhum dos lados da figura “segue a malha”	C, G
Posição da figura	Prototípica	A, B, C, D, H
	Não prototípica	E, F, G
Tipo de malha	1 cm	A, C, E, G
	0,5 cm	B, D, F, H
Tipos de uso das fórmulas de área	Calcular áreas	Todas
	Comparar áreas	
Operações	Adição	Todas
	Subtração	C, D, E, G
	Multiplicação	Todas
	Divisão	C, G
Posição relativa dos lados do paralelogramo não retângulo	Horizontal	D, E
	Vertical	-
	Oblíqua	-
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	D, E
	Esquerda	-
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal	D, E
	Vertical	-
	Oblíqua	-
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	D
	Vertical	-
	Oblíqua	E
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Maior	D
	Menor	E

Fonte: acervo da pesquisa

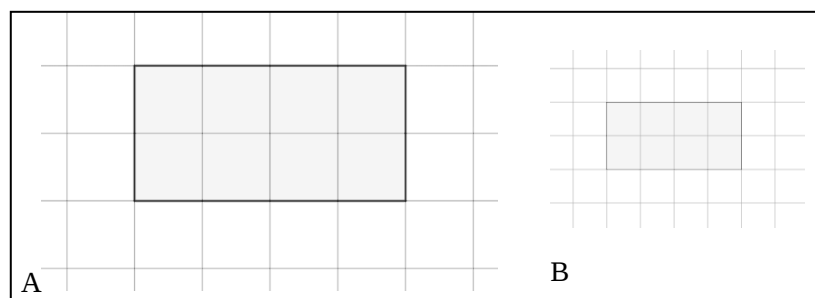
A malha de um centímetro possui cada quadradinho medindo 1 cm de lado. Na outra, cada quadradinho mede 0,5 cm de lado.

Os procedimentos para comparação podem depender dos materiais utilizados. Ressaltamos que foram disponibilizados para todas as questões papel quadriculado em que cada quadradinho mede um centímetro de lado, pontilhado, no qual os pontos consecutivos possuem um centímetro de distância e régua graduada.

As respostas corretas esperadas seriam aquelas em que o aluno assinala (V) verdadeiro nas afirmações que apontam as figuras (A e G), (E e F), (F e H), e (A e D) como tendo mesma área. Nas demais afirmações deve assinalar (F) falso, ou seja, as figuras (A e B) e (A e C) não possuem mesma área. Acreditamos que as explicações de como o aluno pensou podem fornecer elementos importantes para identificarmos os invariantes operatórios mobilizados ao realizar as comparações, embora saibamos que os explicitados nas respostas podem não ser os únicos utilizados para aquela resolução.

Ao comparar as áreas das figuras (A e B), se o aluno toma o quadrado da malha como superfície unitária, ele vai ter medida 8 nos dois casos e, se desconsiderar que as unidades são diferentes, dirá que possuem mesma área. Em outras palavras, se o aluno leva em consideração o aspecto numérico irá dizer que as áreas são iguais, pois elas têm a mesma quantidade de quadradinhos (8). Se leva em conta o aspecto geométrico, poderá também considerar que tenham mesma área por serem retângulos semelhantes. Caso ele considere o espaço ocupado ou que as unidades são diferentes, verá que possuem áreas distintas.

Figura 39 – Comparação (A e B) da 2ª questão

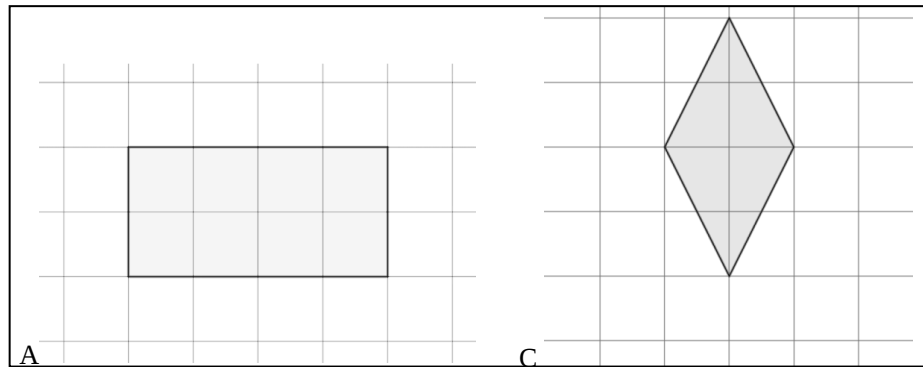


Fonte: acervo da pesquisa

Na comparação (A e G), ver figura 37a, o fato de serem figuras em representações e posições diferentes pode conduzir o aluno a falar que não possuem mesma área. Neste caso, interpretamos que ele mobiliza uma concepção geométrica ou o teorema em ação falso: superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes, como apresentado em nossa fundamentação teórica.

Se o aluno utilizar a fórmula para comparar as áreas das figuras (A e C) poderá dizer que elas têm áreas iguais, pois sabemos que podem cometer erros no uso da fórmula de área do losango, tais como multiplicar a medida das diagonais e não dividir por dois.

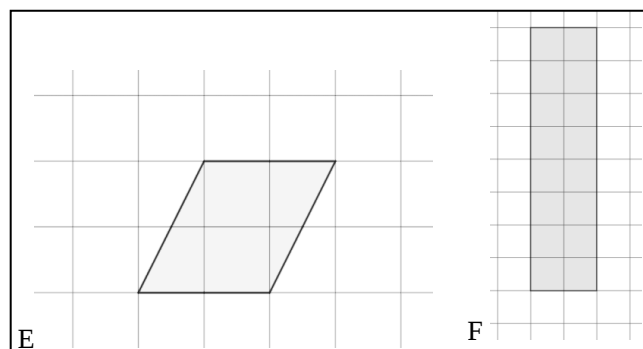
Figura 40 – Comparação (A e C) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Em relação às figuras (E e F), é possível realizar uma decomposição e recomposição que transforma uma figura na outra e, portanto, elas possuem mesma área. Outra observação possível é que quatro quadradinhos da malha cujo comprimento do lado é de 0,5 cm equivalem a um quadradinho da malha que mede 1 cm de lado. Assim, 4 quadradinhos da primeira malha correspondem a 16 quadradinhos da segunda. 4 e 16 são numericamente diferentes, mas ao considerar os pares número-unidade, percebemos que as áreas dessas duas figuras são iguais. Se fosse considerado o aspecto numérico e desprezada a diferença entre as unidades, os sujeitos poderiam falar que possuem áreas diferentes porque os números não são iguais ($4 \neq 16$). Ao se fazer isso, podem ocorrer erros de cálculo numérico, extensão indevida ou uso incorreto de fórmulas, não consideração do espaço ocupado, ou seja, procedimentos que dão indícios da mobilização de uma concepção numérica de área, como vimos nos estudos de Barros (2006), Teles (2007), Ferreira (2010), Pessoa (2010), Santos (2010), Paula (2011), Silva (2011), Santos (2015) e Silva (2016).

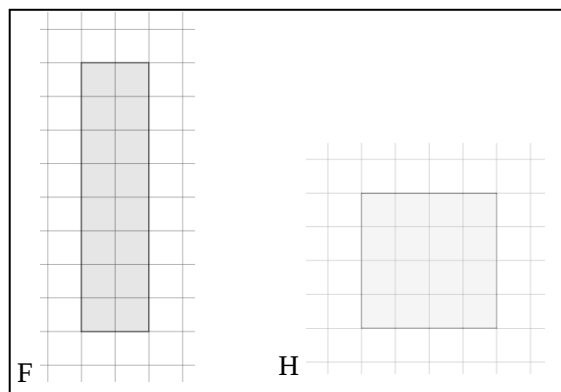
Figura 41 – Comparação (E e F) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Na comparação (F e H) o aluno terá sucesso ao contar os quadradinhos, ao usar a fórmula, ao fazer decomposição e recomposição e, mesmo diante dessa variedade de procedimentos que conduzem à resposta correta, poderá cometer erros relacionados a uma concepção geométrica, no sentido de que a mais “comprida” ou a mais “larga” tem maior área, ou se mobilizar o teorema em ação errôneo: figuras de mesma área são idênticas.

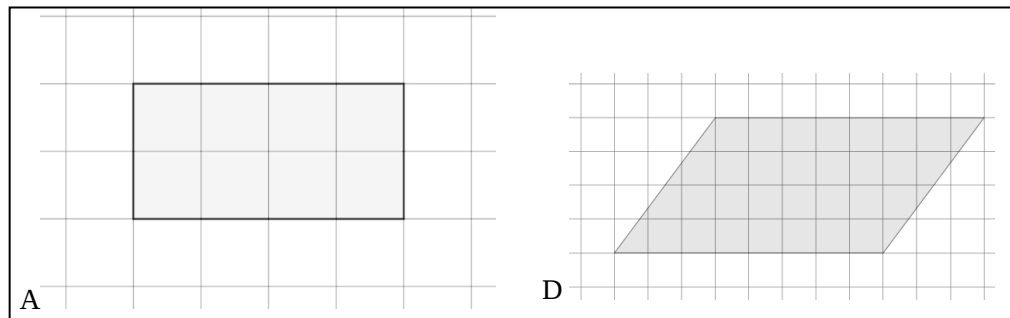
Figura 42 – Comparação (F e H) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

A comparação (A e D) numericamente são diferentes com unidades também distintas, mas a decomposição clássica do paralelogramo em retângulo conduz à resposta correta.

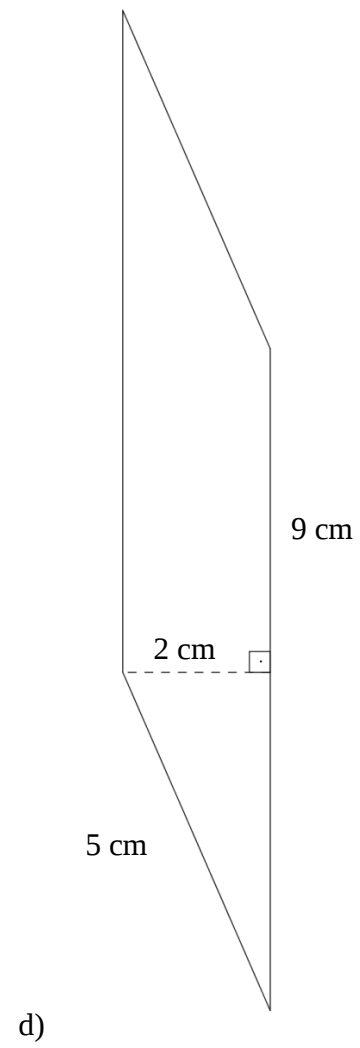
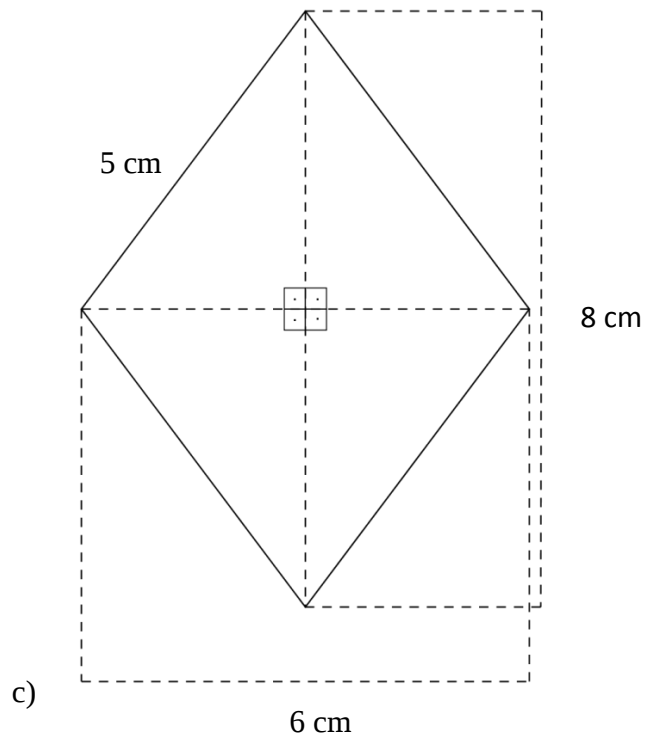
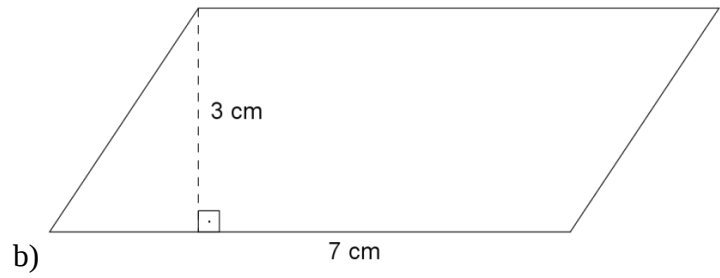
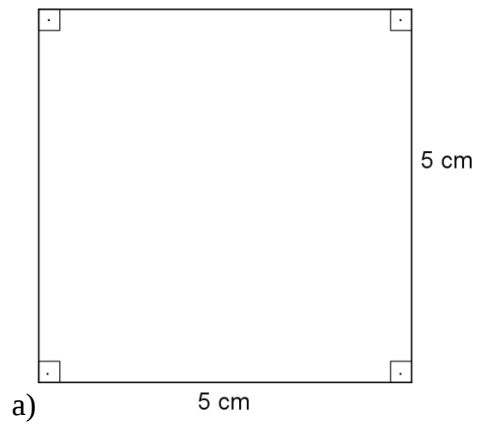
Figura 43 – Comparação (A e D) da 2ª questão

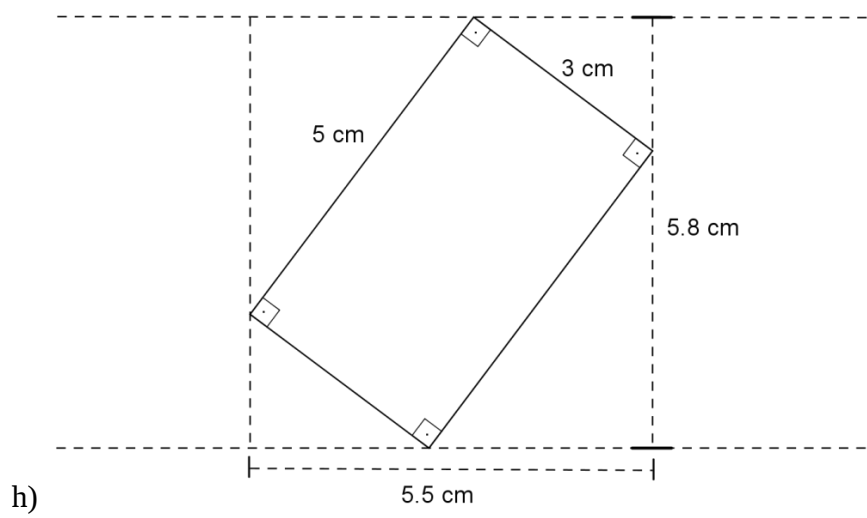
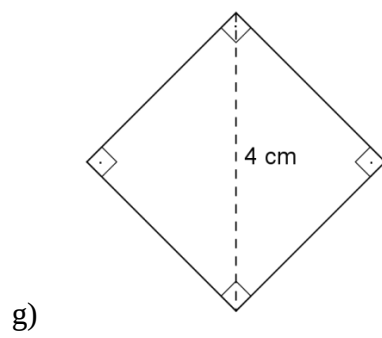
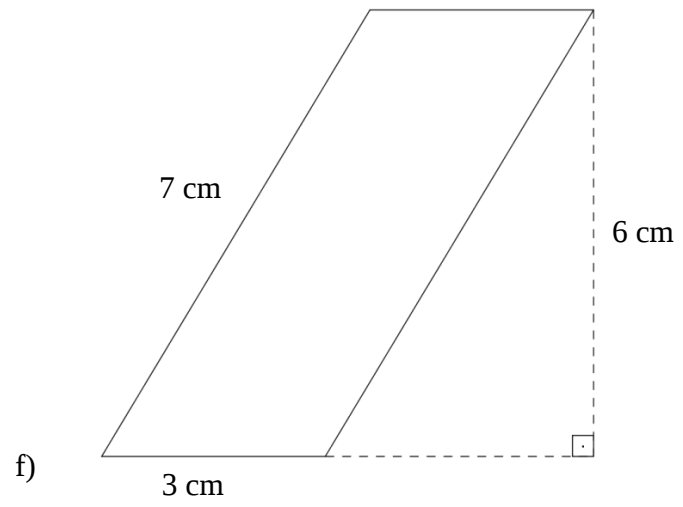
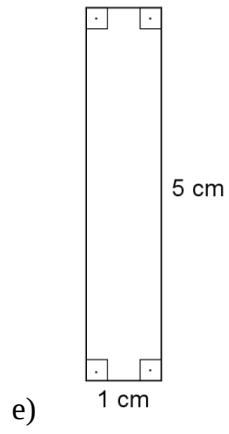


Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos a questão de número 3:

Questão 3: Calcule a área das figuras abaixo:

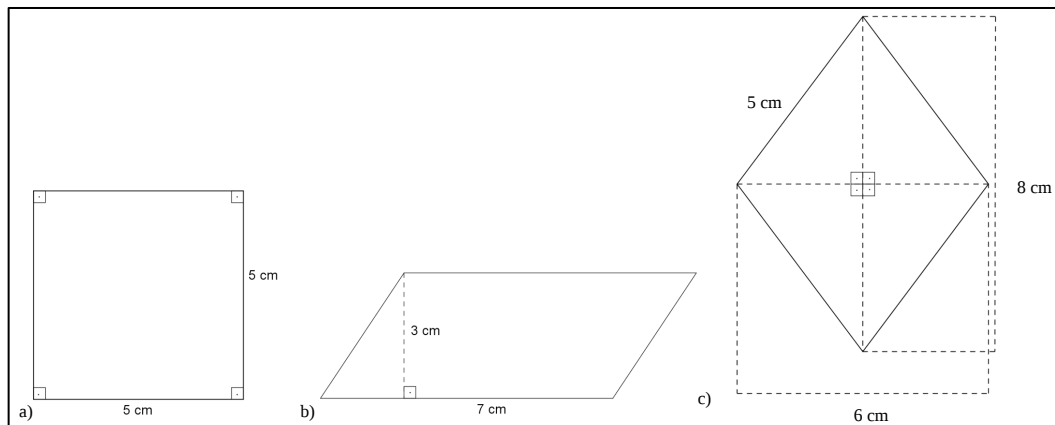




Nesta questão temos uma situação de medida de área, na qual entra em jogo o quadro algébrico funcional, a área como uma grandeza bidimensional em relação ao comprimento e o uso de fórmulas para cada figura. Poderemos averiguar se há diferenças marcantes no tratamento dado a cada tipo de paralelogramo no que se refere à identificação dos elementos geométricos para o cálculo da área, pois, como já mencionado, temos quatro classes de figuras (quadrado, retângulo, losango e paralelogramo não retângulo e não losango) que estão incluídas em uma mesma classe de figuras (paralelogramo), mas que possuem fórmulas distintas.

As figuras dos itens (a), (b) e (c) podem ser consideradas como em posições prototípicas, com (c) sendo a única das três a possuir dados desnecessários. No (a) tem-se um quadrado com lados horizontal-vertical medindo 5 cm e área 25 cm^2 ; (b) é um paralelogramo não retângulo e não losango, com o lado de maior comprimento na horizontal, altura interna e inclinação para a direita, cujo lado tomado como base mede 7 cm e a altura relativa a ele tem 3 cm, correspondendo a uma área de 21 cm^2 . No item (c) tem um losango parecendo “um balão” como o habitual, contendo dados extras para o cálculo da área, com a diagonal maior na vertical medindo 8 cm e a menor na horizontal com 6 cm, e uma área de 24 cm^2 .

Figura 44 – Figuras em posição prototípica da 3ª questão

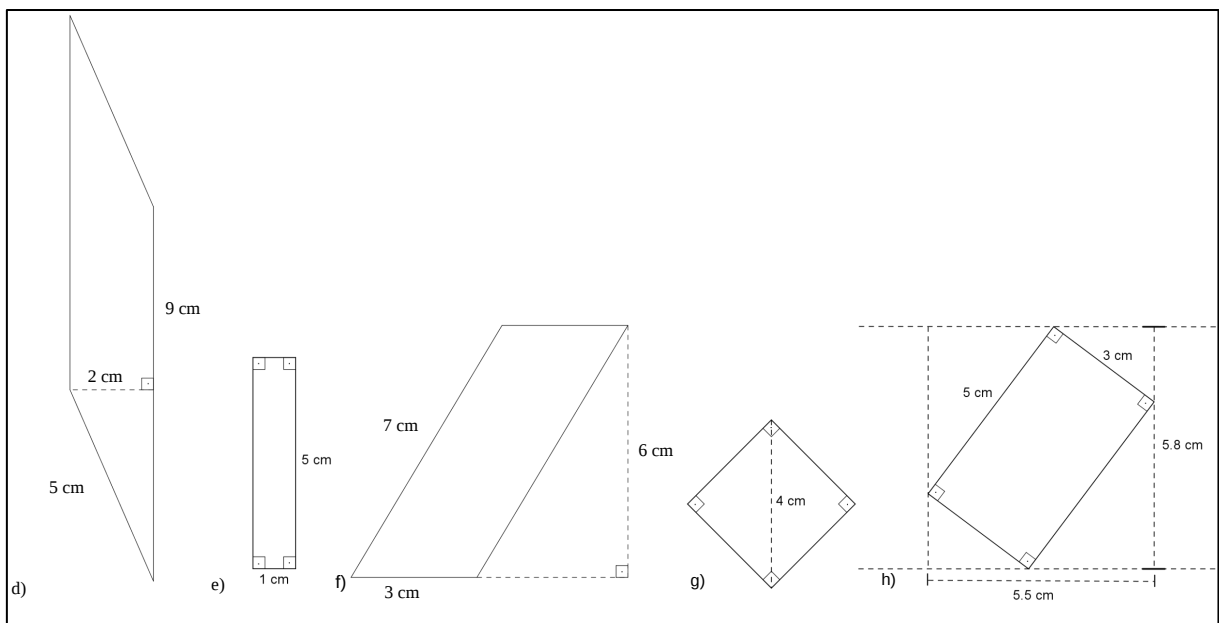


Fonte: acervo da pesquisa

Em relação às figuras que estão em posição não prototípica, temos os itens (d), (e), (f), (g) e (h): no (d) temos um paralelogramo não retângulo e não losango, com o lado de maior comprimento na posição vertical, altura interna e com dados extras para o cálculo, de base 9 cm e altura relativa a ela de 2 cm, dando área igual a 18 cm^2 ; o item (e) contém um retângulo que se aproxima do modelo prototípico, porém o lado de maior comprimento está na vertical medindo 5 cm, a outra dimensão é 1 cm e a área é 5 cm^2 ; a figura do item (f) é um paralelogramo não retângulo e não losango em posição não prototípica, com o lado de maior

comprimento na posição oblíqua, inclinação para a direita, com dados extras, altura externa medindo 6 cm e base 3 cm, de área 18 cm^2 ; na figura do item (g) temos um quadrado não prototípico contendo apenas a medida da diagonal que é de 4 cm e sua área é de 8 cm^2 ; o item (h) traz um retângulo não prototípico, pois seus lados estão em posição oblíqua, no qual fornecemos comprimentos em posição horizontal-vertical e verificaremos se os alunos irão mobilizar corretamente a fórmula para o cálculo da sua área, para o qual devem ser considerados os comprimentos 5 cm e 3 cm para se obter uma área de 15 cm^2 .

Figura 45 – Figuras não prototípicas da 3ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Ao fornecermos dados extras em algumas questões temos a intenção de verificar se o aluno utilizará um outro procedimento. Por exemplo, os itens (d) e (f) podem levar a mobilização do teorema em ação falso de que a área de um paralelogramo é dada pelo produto dos comprimentos dos seus lados, conforme apontado por Baltar (1996).

Tanto para as figuras em posição prototípica quanto para as que não estão nesta posição, já explicamos na seção dedicada a elas, quais fórmulas são geralmente utilizadas no ensino, bem como o que pode ser feito para calcular a área em cada caso. Ressaltamos que os cálculos numéricos a serem realizados são relativamente simples, pois o foco maior é no cálculo relacional.

As variáveis consideradas e seus respectivos valores são apresentados abaixo:

Quadro 8 – Variáveis didáticas da 3ª questão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	A, G
	Retângulo	A, E, G, H
	Losango	A, C, G
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, D, F
Posição da figura	Prototípica	A, B, C
	Não prototípica	D, E, F, G, H
Dados fornecidos	Necessários e suficientes	A, B, E, G
	Extras	C, D, F, H
Tipos de uso das fórmulas de área	Calcular a área	Todas
	Calcular comprimentos que caracterizam a figura	G
Operações	Adição	G
	Multiplicação	Todas
	Divisão	C
	Potenciação	A, G
	Radiciação	G
Posição relativa dos lados do paralelogramo não retângulo	Horizontal	B, F
	Vertical	D
	Oblíqua	-
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	B, F
	Esquerda	D
Posição do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo	Horizontal	B, F
	Vertical	D
	Oblíqua	-
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B
	Vertical	D
	Oblíqua	F
Posição da altura traçada do paralelogramo não retângulo e não losango	Interior	B, D
	Exterior	F
Comprimento do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo e não losango	Maior	B, D
	Menor	F

Fonte: acervo da pesquisa

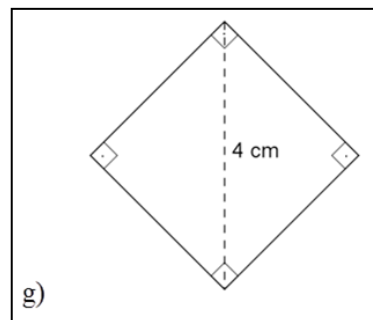
Entre os procedimentos que poderão ser utilizados nessa questão e considerados satisfatórios, destacamos a utilização adequada da fórmula bem como a escolha correta dos dados.

Os itens (a), (b), (e) e (g) não têm dados extras. Com exceção deste último, nos demais a aplicação direta da fórmula para o cálculo da área resolve o problema.

No item (g) é dado apenas o comprimento da diagonal do quadrado. Para resolver essa tarefa, o aluno pode: considerar que todo quadrado é losango e aplicar a fórmula para o cálculo da área do losango; decompor o quadrado e recompor em um retângulo de dimensões 2 cm por 4 cm; aplicar a fórmula da diagonal de um quadrado ou utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do lado. Um procedimento que conduz ao erro é tentar medir os comprimentos dos lados, pois encontrará, dependendo da imprecisão do instrumento utilizado, um número próximo de três e talvez queira arredondar para três, o que implicaria na medida da área aumentar de oito para nove. Se caso o aluno faça a soma da medida do comprimento das diagonais encontrará o número oito que corresponde a medida da área, que poderá ser considerado correto se estiver com a unidade de medida adequada, embora consideremos este procedimento como inadequado.

O aluno que medir o comprimento do lado desse quadrado encontrará, considerando a imprecisão do instrumento utilizado, 2,8 cm, que corresponde a uma área de $7,84 \text{ cm}^2$. Este procedimento será considerado como acerto parcial, pois, levando em consideração a intenção da pesquisa, deveria ser considerado o quadrado como losango ou retângulo e feito os procedimentos descritos anteriormente, obtendo-se a resposta correta. Quem responder que o quadrado possui 9 cm^2 será considerado como erro. Ressaltamos que deveríamos ter fornecido também a outra diagonal com seu comprimento para garantir que a figura é um quadrado.

Figura 46 – Item (g) da 3ª questão

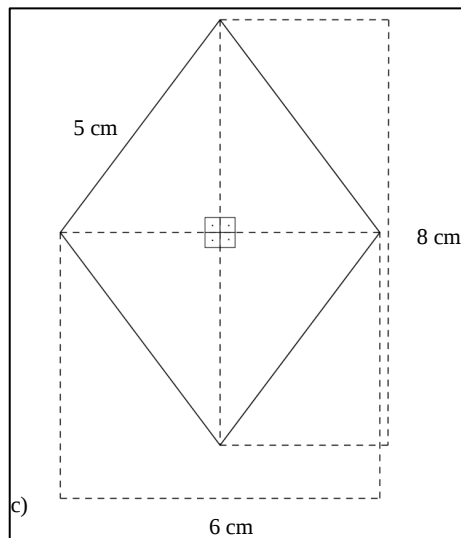


Fonte: acervo da pesquisa

Nos itens (c), (d), (f) e (h) é preciso decidir quais dados serão utilizados para o cálculo da área. Vimos na parte teórica que uma das regras do contrato didático consiste em usar todos os dados fornecidos na questão, no qual os alunos procuram fazer cálculos de diferentes maneiras utilizando-os.

Como procedimentos corretos para o item (c), o aluno pode: aplicar diretamente a fórmula utilizando os comprimentos das diagonais; dividir em quatro triângulos retângulos congruentes, calcular a área individual de cada triângulo e multiplicar por quatro; decompor a figura e recompor em retângulos de comprimentos 6 cm e 4 cm ou 8 cm e 3 cm.

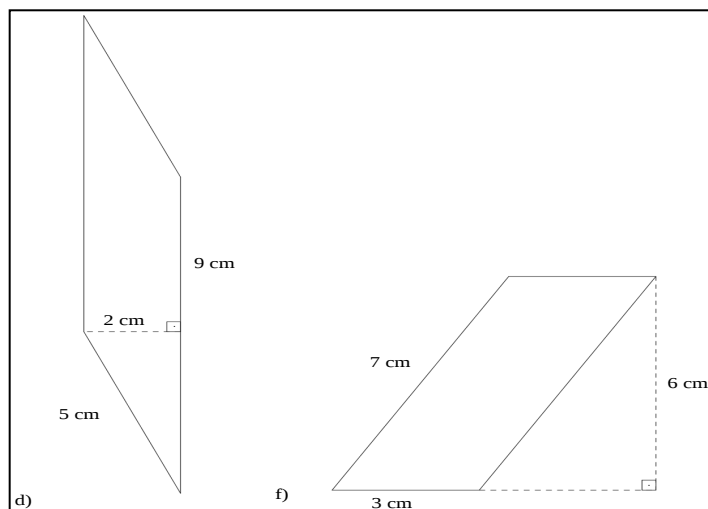
Figura 47 – Item (c) da 3ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Em relação aos paralelogramos não retângulos e não losangos, a dificuldade maior concentra-se nos itens (d) e (f), pois o lado de maior comprimento não se encontra na posição horizontal. Outro fator é a escolha da altura em relação ao lado tomado como base. De acordo com Baltar (1996), poderão considerar a área do paralelogramo como o produto das medidas de seus lados, como já citado anteriormente.

Figura 48 – Itens (d) e (f) da 3ª questão

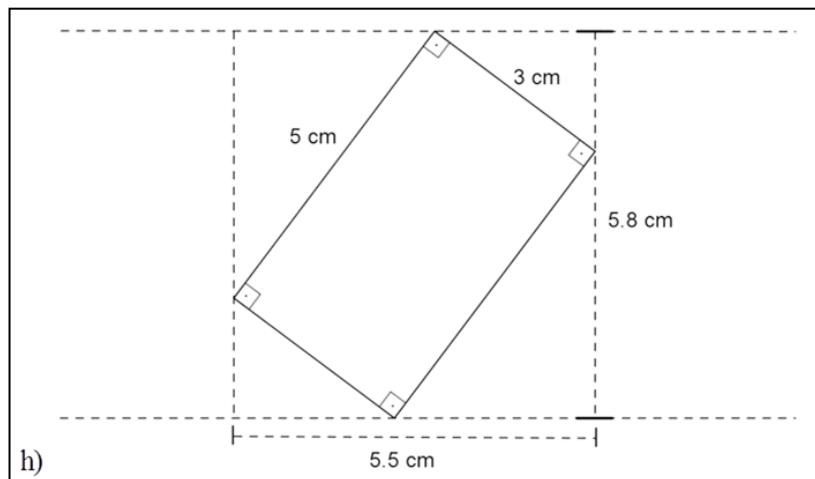


Fonte: acervo da pesquisa

A confusão entre os conceitos de área e perímetro, isto é, adicionar os comprimentos dos lados – erro de cálculo relacional – pode ocorrer em todas as figuras. Consideramos também, como relatado por Santos (2005), a possibilidade de que alguns alunos façam a soma de todos os dados numéricos fornecidos ou os multipliquem ou façam alguma combinação de operações numéricas, nas quais todos os dados sejam utilizados. Interpretamos esse tipo de resposta como consequência de cláusulas do contrato didático.

Por fim, a dificuldade do item (h) consiste na identificação dos dados necessários e suficientes para o cálculo da área, considerando que possui dados extras e a figura não está em sua posição habitual. Se o aluno relaciona a base com a ideia de “chão”, pode considerar erroneamente 5,5 cm como sendo a base da figura e calcular a área.

Figura 49 – Item (h) da 3ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

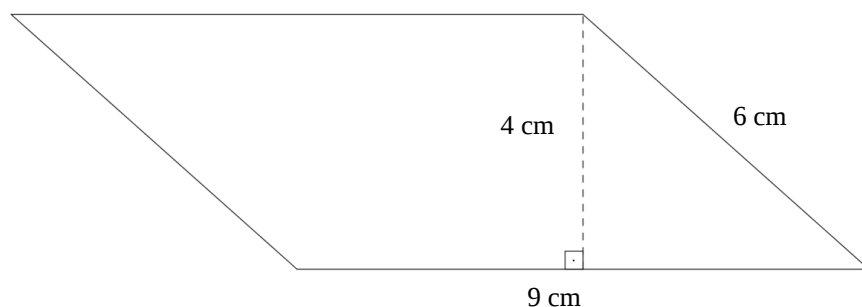
Embora tenhamos o cuidado de não sair do campo dos inteiros para evitar possíveis erros no cálculo numérico, nesses dois últimos itens da questão 3, ver figuras 46 e 49, podem ocorrer casos em que apareçam respostas fora do campo numérico dos inteiros, envolvendo números irracionais ou racionais, que serão fatores desencadeados por erros no cálculo numérico ou confusão na escolha dos dados, no caso do item (h). O cálculo numérico adequado seria o aluno fazer $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$. Porém, pode acontecer que façam inadequadamente: $5,5 \text{ cm} \times 5,8 \text{ cm} = 31,9 \text{ cm}^2$.

Do ponto de vista da álgebra das grandezas que se refere ao tratamento dado aos números e suas unidades nos cálculos e nas respostas, algumas resoluções poderão aparecer como mostraremos nos exemplos abaixo:

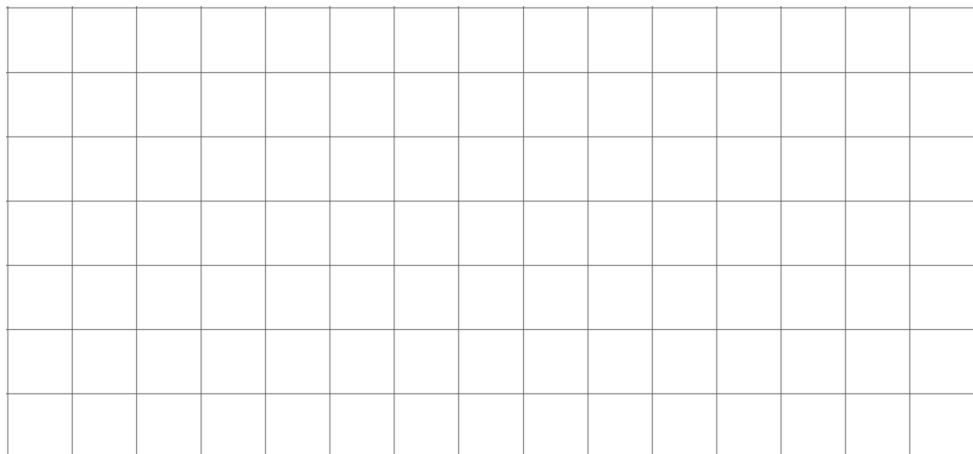
- multiplicar corretamente número e unidade de medida: $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$ (procedimento correto e adequado). Neste caso, o aluno opera com grandezas (comprimento) e obtém grandeza (área);
- multiplicar os números e depois colocar a resposta: $2 \times 3 = 6$. Resposta: 6 cm^2 (procedimento correto esperado). Aqui o aluno opera com números, obtém como resultados números e depois dá a resposta em grandeza. A diferença em relação ao primeiro caso é que existe apenas uma falta de controle progressivo no decorrer do processo da operação com as grandezas em relação à operação com números;
- multiplicar os números e acrescentar a unidade de medida: $2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$ (procedimento inadequado que conduz a um acerto parcial). Neste caso, embora o cálculo numérico esteja correto e a resposta seja dada utilizando uma unidade correta, ocorre um erro de sintaxe, pois o aluno multiplica números e obtém grandeza, ou seja, está igualando um número a uma grandeza ($6 = 6 \text{ cm}^2$).

Passemos para a quarta e última questão:

Questão 4: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:



- Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.
- Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.
- Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.



Temos nesta questão¹³ tarefas de produção de figuras com área igual à de uma figura dada. Nosso interesse por ela consiste no fato de ser dado um paralelogramo não retângulo e não losango com dados numéricos extras, conduzindo o aluno decidir quais medidas considerar para o cálculo da área e quais serão as dimensões dos lados e/ou diagonais das figuras produzidas para que atenda à condição dada. Vamos ao detalhamento das variáveis didáticas e seus respectivos valores:

Quadro 9 – Variáveis didáticas da 4ª questão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>
Tipos de figura	Paralelogramo não retângulo e não losango
	Retângulo
	Losango
	Quadrado
Tipos de uso das fórmulas de área	Calcular a área
	Produzir figuras em condições dadas

Fonte: acervo da pesquisa

A figura dada possui a altura interna, o lado de maior comprimento na posição horizontal e é também o tomado por base, mas a inclinação é para a esquerda e possui dados extras para o cálculo da área.

Por se tratar de uma situação de produção, vimos na literatura pesquisada que ela se diferencia das anteriores por admitir várias respostas corretas para uma mesma situação. Como a área do paralelogramo dado é de 36 cm^2 , algumas possibilidades de respostas corretas seriam o aluno desenhar:

- Retângulos de dimensões: 2 cm x 18 cm; 3 cm x 12 cm; 4 cm x 9 cm; 1 cm x 36 cm (esta última não pode estar em verdadeira grandeza devido à limitação da folha fornecida). Se o aluno considerar que todo quadrado é retângulo, poderá desenhar um quadrado com área igual à do paralelogramo dado.

¹³ A malha quadriculada, em que o lado do quadrado elementar é de um centímetro, fornecida aos alunos não foi apenas a apresentada acima. O teste continha, além dessa, uma folha completa desse tipo de papel disponível. Embora a tenhamos fornecido, o aluno poderia produzir as figuras solicitadas em outro tipo de papel, como o branco ou pontilhado. Cabe ressaltar que a escolha de usar malha de um centímetro induz a permanecer no âmbito dos inteiros, porém no ensino isso deve ser evitado.

- Losangos de diagonais medindo: 3 cm x 24 cm; 4 cm x 18 cm; 6 cm x 12 cm; 8 cm x 9 cm; 2 cm x 36 cm; 1 cm x 72 cm (estas duas últimas não podem estar em verdadeira grandeza no papel fornecido). Assim como para o retângulo, o aluno poderá também fazer um quadrado nesse item, considerando que todo quadrado é losango.
- Quadrado de lado medindo 6 cm.

Algumas dificuldades podem estar relacionadas a: identificação dos dados necessários e suficientes; não saber classificar as figuras e consequentemente confundi-las ou não as desenhar; confundir área com perímetro e produzir figuras com perímetro igual ao da figura dada.

Poderíamos ainda ter a possibilidade de o aluno considerar o paralelogramo não prototípico como sendo um não paralelogramo, e produzir um paralelogramo prototípico como uma das respostas da questão, como vimos no estudo desenvolvido por Costa e Câmara dos Santos (2015) que os alunos consideraram o retângulo não prototípico como sendo um não retângulo.

Pesquisas como as de Pirola et al. (2004), Costa e Câmara dos Santos (2015) revelam dificuldades dos alunos em dar exemplos de paralelogramos. Outra possibilidade de dificuldade seria em relacionar os comprimentos dos lados da figura e sua área na construção dos paralelogramos, e também em determinar a altura do paralelogramo, como apresentado na pesquisa de Bernardes, Souza e Zandonade (2014).

Em relação à inclusão de classes, quando apontamos como possibilidade de resposta fazer quadrados ao ser solicitado a produzir retângulos e/ou losangos, nos apoiamos no fato de que a questão pede retângulo e losango, sem especificar que eles devem ser retângulos não quadrados e losangos não quadrados. Porém um erro poderia surgir se caso o aluno considere que todo quadrado é retângulo e losango, e todo retângulo e/ou losango é quadrado que, nesse caso, ao ser solicitado a produzir quadrado, ele poderia fazer um retângulo não quadrado e/ou um losango não quadrado. Para tanto, é preciso considerar o que Machado (2012) aponta: todo quadrado é um retângulo e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. E também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

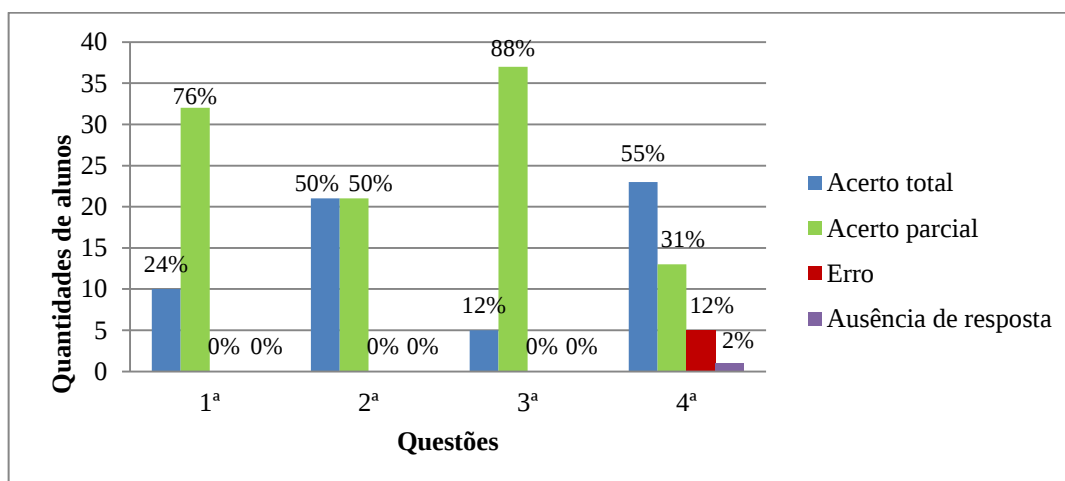
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Iniciaremos esta seção por uma análise mais numérica, pelo quantitativo de acertos totais, acertos parciais, erros e ausências de respostas. Para cada questão do teste, consideramos como acerto total a resolução correta da questão e de todos os seus itens; o acerto parcial é considerado quando ocorre a resolução correta de parte da questão e/ou de alguns de seus itens; consideramos como erro a resposta incorreta de toda a questão; a ausência de resposta é considerada quando a questão foi deixada em branco.

Nenhum dos 42 alunos teve acerto total em todas as questões do teste. De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, interpretamos que o repertório de esquemas desses alunos não está plenamente construído para lidar com tais situações.

Vejamos o resultado quantitativo por questões e itens individualizados.

Gráfico 1 – Resultado do teste por questões



Fonte: dados da pesquisa

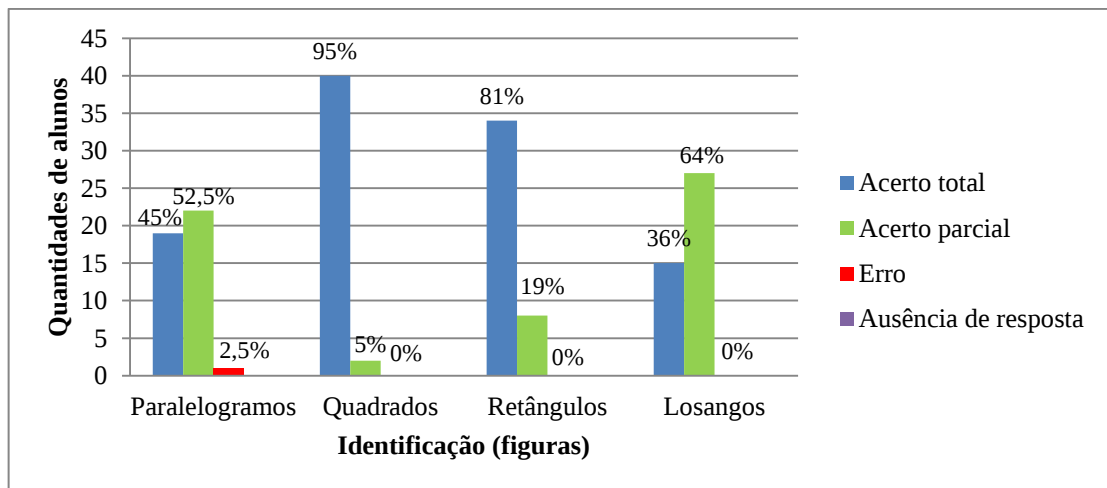
Acreditamos que o fato de a questão de produção (4ª) admitir várias respostas corretas para uma mesma situação tenha contribuído para que ela tivesse o maior número de acerto total, embora também apresente a maior quantidade de erros. Na questão de identificação (1ª) e na de medida (3ª) as dificuldades foram maiores (em ambas há menos de um quarto de acertos totais). Uma explicação possível, conforme supusemos inicialmente, é que saber identificar contribui para o cálculo da área e, conseqüentemente, problemas na identificação repercutem no cálculo.

Notamos também um índice muito baixo de ausência de respostas, o que tem relação com a escolha de uma escola que tem um bom desempenho geral e índices elevados em avaliações de larga escala, como vimos na parte metodológica deste trabalho.

4.1 COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A CLASSIFICAÇÃO DE PARALELOGRAMOS?

Dividimos a primeira questão em quatro identificações: de paralelogramos, de quadrados, de retângulos e de losangos. Em cada uma delas, o acerto total ocorre quando são identificadas apenas e corretamente todas as figuras solicitadas; o parcial quando são identificadas corretamente uma ou mais figuras, mas não todas, ou, mesmo marcando todas, são incluídas outras que não são daquela classe; o erro¹⁴ acontece quando todas as figuras são identificadas incorretamente; há ausência de respostas quando nenhuma figura é identificada. Sua análise é detalhada a seguir:

Gráfico 2 – Resultado do teste por identificação na 1ª questão



Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, a identificação de paralelogramos foi a única a apresentar erro, ou seja, nas figuras assinaladas pelo aluno, nenhum deles foi indicado, conforme veremos mais adiante em seu protocolo. Todos identificaram os paralelogramos não retângulos e não losangos em posições prototípicas ou não, com exceção do que errou.

Os resultados apresentados no quadro acima corroboram com os apontados por Passos (2000), Diniz (2013) e Tavares (2014) no que se refere à dificuldade na classificação dos quadriláteros, especialmente paralelogramos e losangos, uma vez que estas figuras foram fontes de menores índices de acertos totais, 45% e 36%, respectivamente. Percebemos que um pouco mais da metade dos alunos (52%) obteve acerto parcial na identificação de

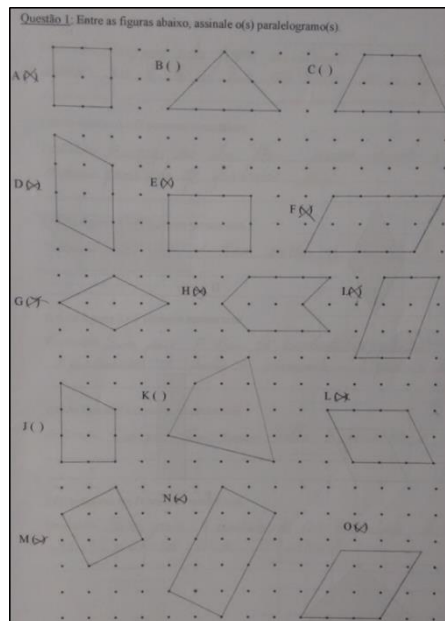
¹⁴ É importante destacar que o erro é em relação à classificação que adotamos, pois sabemos que outras classificações existem no campo da matemática e também são consideradas corretas.

paralelogramos, ou seja, cometeu algum erro ao deixar de assinalar alguns dos paralelogramos e/ou incluiu outras figuras que não são paralelogramos, como apresentamos a seguir:

- considerou que o trapézio (C) é paralelogramo: B3;
- considerou que o hexágono (H) é paralelogramo: A8, A9, A14, A15, A17, B8;
- considerou que o trapézio (C) e o hexágono (H) são paralelogramos: B21, B25;
- considerou que os trapézios (C e J) e o hexágono (H) são paralelogramos: A4, A5;
- considerou que o trapézio (C) é paralelogramo e o losango (O) não é: A16;
- não considerou que os quadrados (A e M) e o retângulo não quadrado (N) são paralelogramos: B11;
- não considerou que os quadrados (A e M) e os retângulos não quadrados (E e N) são paralelogramos: A6, A12, B9, B24;
- não considerou que os quadrados (A e M), os retângulos não quadrados (E e N) e o losango (G) são paralelogramos: B4, B5, B12, B14, B19.

Observamos que cerca de 27% dos alunos que obtiveram acertos parciais na identificação de paralelogramos se deu pelo fato de assinalaram também o hexágono (H), possivelmente por esta figura possuir lados paralelos dois a dois, como previsto em nossa análise a priori. Algumas incoerências nessas respostas também são percebidas, tais como incluir um trapézio e o outro não, assinalar um dos retângulos e não marcar o outro etc.

Figura¹⁵ 50 – Acerto parcial na identificação de paralelogramos na 1ª questão



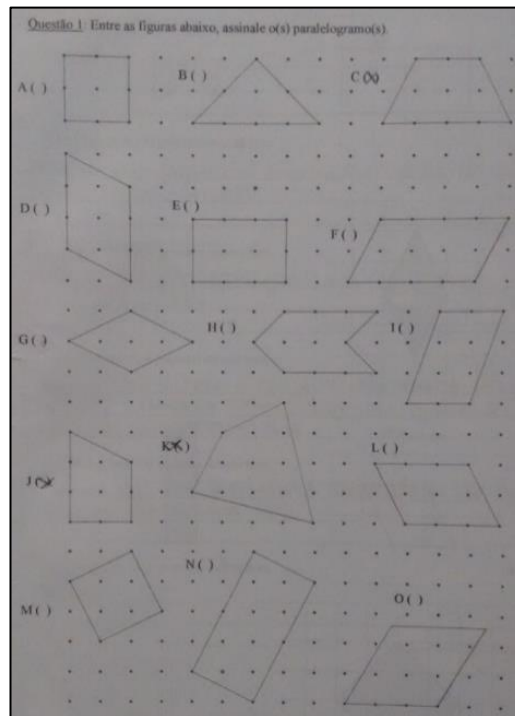
Fonte: Protocolo A14

¹⁵ As figuras apresentadas nesta seção foram reduzidas para melhor se adequarem ao texto.

Na figura acima temos um exemplo no qual são marcados todos os paralelogramos (inclusive os retângulos e losangos), mas o hexágono (H) também é assinalado como sendo paralelogramo.

A identificação de paralelogramos foi a única a apresentar erro, ou seja, o aluno identificou apenas os trapézios (C e J) e o trapezoide (K), conforme figura abaixo:

Figura 51 – Erro na identificação de paralelogramos na 1ª questão



Fonte: Protocolo B2

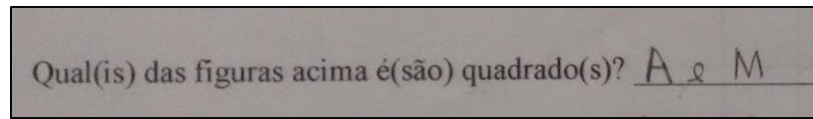
Inferimos que ele confunde paralelogramos e trapézios, conforme previsto em nossa análise a priori e observado nas pesquisas de Pirola et al. (2004), Mesquita et al. (2013), Teles (2007) e Costa (2016). Além disso, também considera o trapezoide como paralelogramo.

Em relação à identificação de quadrados, dos 42 alunos:

- todos identificaram os quadrados em posição não prototípica;
- 34 consideraram que o quadrado é retângulo;
- 29 consideraram que o quadrado é losango;
- 25 consideraram que o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo;
- 31 consideraram que o quadrado é paralelogramo.

Os quadrados foram identificados corretamente pela maioria dos alunos, cerca de 95% deles acertaram plenamente sua identificação, inclusive, marcando o quadrado em posição não prototípica. Os índices de acertos mais elevados na identificação de quadrados foram também verificados por Diniz (2013). Vejamos um exemplo:

Figura 52 – Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto total na identificação de quadrados



Fonte: Protocolo A8

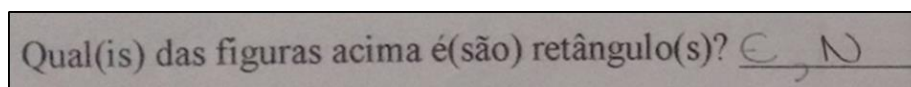
Apesar de a maioria ter êxito na identificação de quadrados, dois alunos acertaram parcialmente a questão: o aluno A4 incluiu o losango não quadrado (G) e o aluno B19 os retângulos não quadrados (E e N), como sinalizado em nossa análise a priori.

Na identificação de retângulos, dos 42 alunos:

- todos identificaram o retângulo não quadrado em posição não prototípica;
- 1 considerou que retângulo não quadrado era quadrado;
- 32 consideraram que o retângulo é paralelogramo.

Em torno de 81% dos sujeitos da pesquisa tiveram acerto total na identificação de retângulos. Os oito sujeitos que tiveram acerto parcial deram exatamente a mesma resposta, a qual consistiu em identificar apenas os retângulos não quadrados, fato também observado nas pesquisas de Tavares (2014), Costa e Câmara dos Santos (2015) e Costa (2016). Todos os alunos marcaram corretamente o retângulo não quadrado em posição não prototípica, como já destacado anteriormente.

Figura 53 – Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto parcial na identificação de retângulos



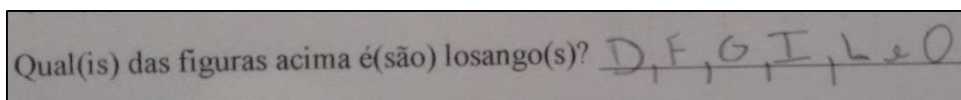
Fonte: Protocolo A5

Sobre a identificação de losangos, dos 42 alunos:

- 23 identificaram os losangos não quadrados, tanto o que se aproxima da posição prototípica (G) quanto o não prototípico (O);
- 1 considerou que losango não quadrado era quadrado;
- apenas 1 não considerou que losango é paralelogramo.

Na identificação de losangos, assim como na pesquisa de Diniz (2013), observamos mais dificuldades. Em três casos, apenas o losango (G) foi identificado, sendo este o que mais se aproxima do prototípico; três sujeitos incluíram também os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F, I e L) em vez de colocarem os quadrados (A e M), como mostra a figura abaixo:

Figura 54 – Extrato da resolução de um aluno referente ao acerto parcial na identificação de losangos



Fonte: Protocolo B17

Percebemos que o aluno acima não considerou os quadrados na identificação dos losangos e incluiu os paralelogramos não retângulos e não losangos. Vale ressaltar que seis alunos consideraram apenas os losangos não quadrados como losango. Um aluno incluiu aos losangos quadrados e não quadrados, o paralelogramo (L); outro incluiu aos losangos não quadrados, o trapezoide (K) e o paralelogramo não retângulo e não losango (L).

Dos 27 alunos que acertaram parcialmente a identificação de losangos, 13 não marcaram o losango em posição não prototípica (O).

Os alunos entrevistados sobre essa questão foram: A5, B6, B11 e B25, conforme critérios abaixo:

Quadro 10 – Alunos e critérios para entrevista na 1ª questão

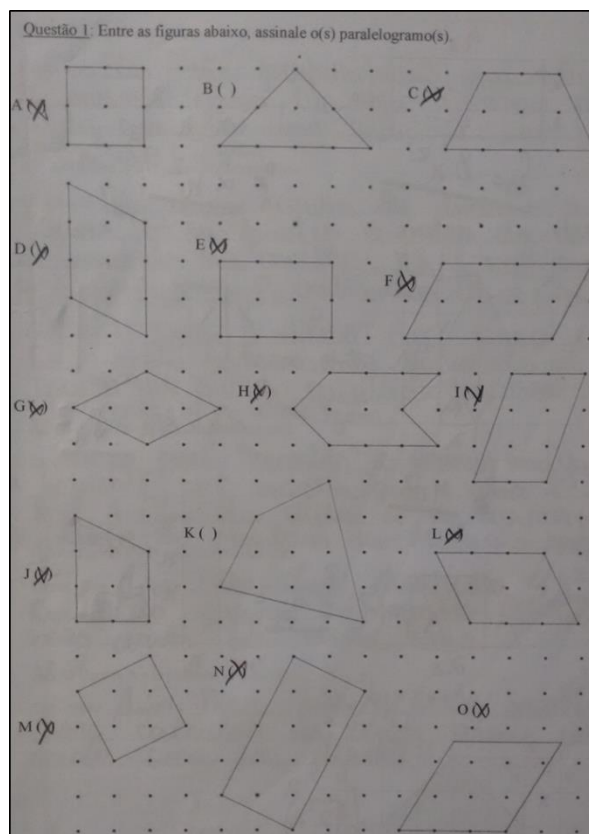
<u>Aluno</u>	<u>Critério</u>
A5	Confirmar procedimento esperado na análise a priori da primeira questão (paralelogramos como figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos) e confrontar com o aluno B11.
B6	Confirmar propriedades do paralelogramo (apenas dois pares de lados paralelos) e a inclusão de classes prevista na nossa análise a priori, ou seja, a resposta correta esperada para essa primeira questão e confrontar com aluno fictício.
B11	Confirmar procedimento esperado na análise a priori da primeira questão, embora a resposta dada esteja incompleta (paralelogramos como figuras que possuem dois pares de lados paralelos) e confrontar com o aluno A5.
B25	Entender como identificou as figuras na primeira questão e como calculou a área da figura dada na quarta questão. Confrontar figuras desenhadas no quarto (confusão entre retângulo e paralelogramo não retângulo, e quadrado e losango não quadrado com medidas dos comprimentos dos lados diferentes) com as assinaladas na primeira questão, confirmando o previsto na análise a priori (não incluir quadrados ao identificar retângulos e losangos).

Fonte: acervo da pesquisa

Decidimos confrontar as respostas dadas pelos alunos A5 e B11, buscando confirmar procedimentos esperados na análise a priori: paralelogramos como figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos (A5) e paralelogramos como quadriláteros que possuem dois pares de lados paralelos (B11).

As figuras assinaladas como paralelogramos por A5 foram:

Figura 55 – Identificação de paralelogramos como tendo pelo menos um par de lados paralelos



Fonte: Protocolo A5

Percebemos que ao considerar que os paralelogramos são figuras que possuem pelo menos um par de lados paralelos, ele acabou considerando figuras que não são paralelogramos, como os trapézios (C e J) e o hexágono (H), conforme previsto em nossa análise a priori. Ao pergunta-lo (P = pesquisador) como pensou para identificar os paralelogramos, ele respondeu:

A5: É, são quadriláteros que tem que ter pares, é, pares de lados paralelos.

P: Aí você usou essa... [ele interrompe]¹⁶

A5: Sim, por exemplo, o A [apontando para a figura A] tem dois pares de lados paralelos aqui.

P: Hum.

¹⁶ As palavras e/ou frases entre colchetes [] são comentários do pesquisador a partir de observações e não de falas dos alunos durante as entrevistas.

A5: O B [apontando para a figura B] ele não tem.

P: Sim.

A5: O C [apontando para a figura C] ele tem que é a base paralela aqui [se referindo aos lados paralelos do trapézio C]. O D [apontado para a figura D] também, eles dois aqui [mostrando os lados paralelos do paralelogramo D]. O E [se referindo à figura E] também, tudo paralelo.

P: Hum.

A5: Agora o H, é, o K [se referindo à figura K] ele não vai ter nenhum par, é, par de lados paralelos, é só prolongar a reta, você não vai prolongar o lado, no caso.

P: Sim. Aí no caso você considerou que, quadriláteros que [ele continua].

A5: Tem pares de lados paralelos.

P: Nesse item H aqui [apontado para a figura H] como foi que você pensou?

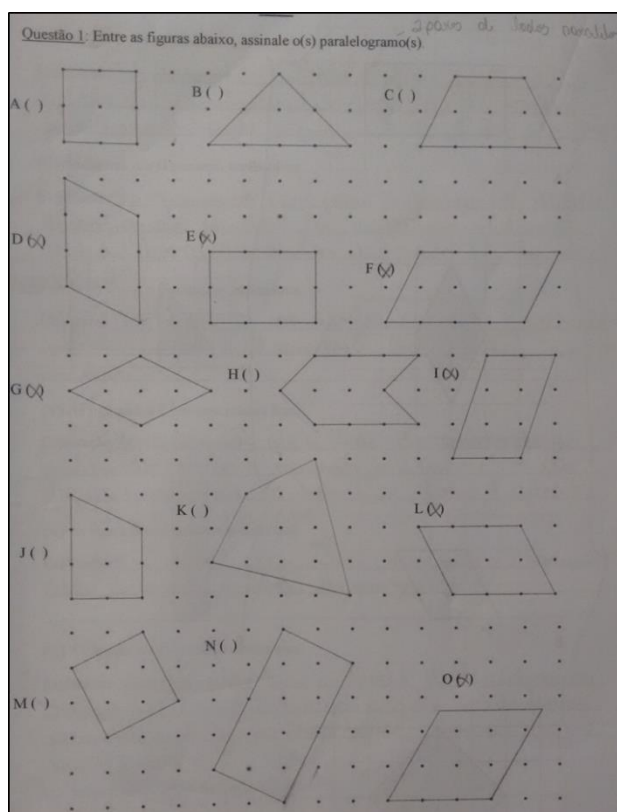
A5: É, prolonguei essa base e essa aqui [se referindo aos lados na posição horizontal da figura H] ...

P: Hum.

A5: Aí eu verifiquei que elas vão ser paralelas, não vão se cruzar etc. (TRANSCRIÇÃO de 206 a 226).

Vejamos os paralelogramos identificados pelo aluno B11:

Figura 56 – Identificação de paralelogramos como tendo dois pares de lados paralelos



Fonte: Protocolo B11

Notamos que ao lado da palavra paralelogramos ele escreveu “2 pares de lados paralelos”, mas observamos, a partir das respostas apresentadas, que nem todas as figuras que possuem essa propriedade foram assinaladas, por exemplo (A, H, M e N). Vejamos um trecho da entrevista:

P: Por exemplo, nessa primeira questão, é, como você pensou para identificar entre essas figuras quais são paralelogramos?

B11: Paralelogramo?

P: Isso, que é o primeiro que pede aqui.

B11: É, ah está, como pensei, é, os lados tinham que ser paralelos e parece os ângulos também tinham que ser diferentes, calma [pensa um pouco]. É só isso mesmo que eu sei, que os lados tinham que ser paralelos.

P: Que os lados tinham que ser paralelos?

B11: Sim.

P: Certo.

B11: Dois pares de lados paralelos e tinham, mas nessa resposta aí fiquei com uma dúvida, não sei se, o ângulo também tem, faz a diferença?

P: Você tem essa dúvida com relação ao ângulo?

B11: É. (TRANSCRIÇÃO de 1134 a 1147).

Pelo fato de ter dúvidas quanto aos ângulos de um paralelogramo ele não assinalou algumas figuras que possuem os ângulos iguais, como é o caso das figuras A, M e N. Porém se contradiz um pouco ao marcar o retângulo (E).

Confrontamos as respostas dadas por esses dois alunos de modo que não identificassem quem havia respondido o teste. Vamos aos diálogos:

P: Oh, teve um, um aluno que respondeu dessa forma aqui [mostrando para ele as respostas dadas na primeira questão pelo aluno B11]. Como você explicaria para ele sua opinião?

A5: Dois pares de lados, é, paralelos, não é? [Lendo o que o aluno B11 escreveu].

P: Isso, eu acho que ele escreveu isso aí.

A5: É, não necessariamente, pode ter mais de um. Mas tem que ter um par de lados paralelos, pelo menos.

P: Aí você considera pelo menos um par?

A5: Hurum. Por exemplo, o O [se referindo à figura O] ele, não, o O não, foi mal, o O tem dois. É, por exemplo, o H [se referindo à figura H], o H tem um par de lados paralelos.

P: Mas H seria um quadrilátero?

A5: Não, porque não tem quatro lados.

P: Mas é paralelogramo?

A5: Sim.

P: Ok. Aí você explicaria para ele que tem que ter pelo menos um par de lados paralelos, teve, já é paralelogramo?!

A5: Sim. (TRANSCRIÇÃO de 260 a 277).

Percebemos que ele explicaria para B11 que para ser paralelogramo é preciso ter pelo menos um par de lados paralelos, independentemente de ser quadrilátero ou não.

A explicação dada de B11 para A5 é a seguinte:

P: Então como você explicaria para ele o que você acha da resposta dele, você diria o que?

B11: Só pode ser paralelogramo com dois pares de lados paralelos. É o que eu acho.

P: Para ser paralelogramo tem que ter dois pares de lados [ele completa].

B11: Paralelos. E a questão do ângulo que eu não sei.

P: Do ângulo você não sabe se tem.

B11: É.

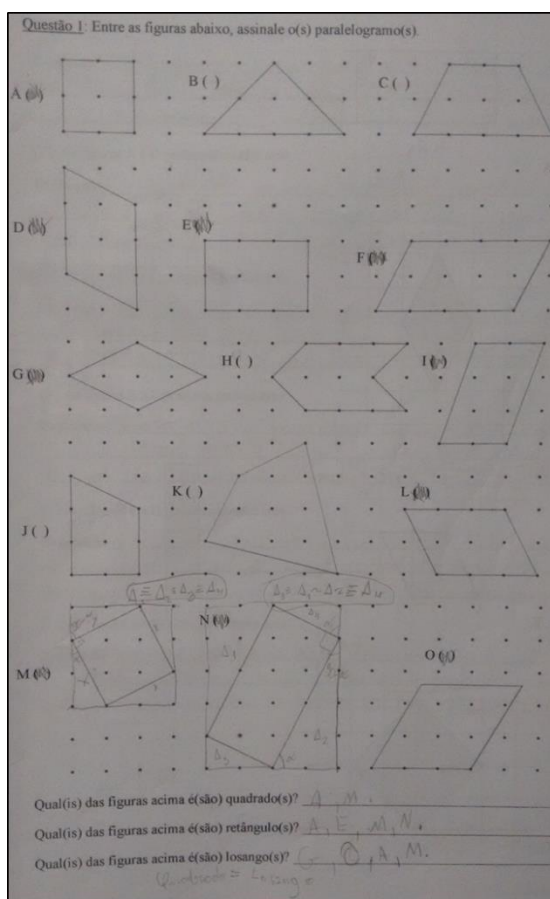
P: No caso, por exemplo, é, o A possui dois pares de lados paralelos, não é isso? Você concorda?

B11: Concordo sim, pela questão do ângulo eu não coloquei. (TRANSCRIÇÃO de 1248 a 1257).

Novamente ele reafirmou suas dúvidas quanto aos ângulos na identificação de paralelogramos.

Na entrevista realizada com o aluno B6 pretendíamos confirmar propriedades do paralelogramo (apenas dois pares de lados paralelos) e a inclusão de classes prevista na nossa análise a priori, ou seja, a resposta correta esperada para essa primeira questão.

Figura 57 – Resposta correta esperada na 1ª questão



Fonte: Protocolo B6

Confrontamos suas respostas com as de um aluno que a priori seria fictício, mas após a entrevista com o aluno A5, notamos que ele tem uma ideia de paralelogramo igual a desse suposto aluno fictício, conforme trecho da entrevista abaixo:

P: Hurum. É, um aluno falou que paralelogramo é toda figura que possui lados paralelos dois a dois, certo. Daí ele assinalou, além das figuras que você marcou, essa figura H. É, como você explicaria para ele sua opinião?

B6: É, porque é o seguinte, o paralelogramo ele é um quadrilátero, então ele tem que ter quatro lados, aí se você contar, esse daqui tem um, dois, três, quatro, cinco, seis lados.

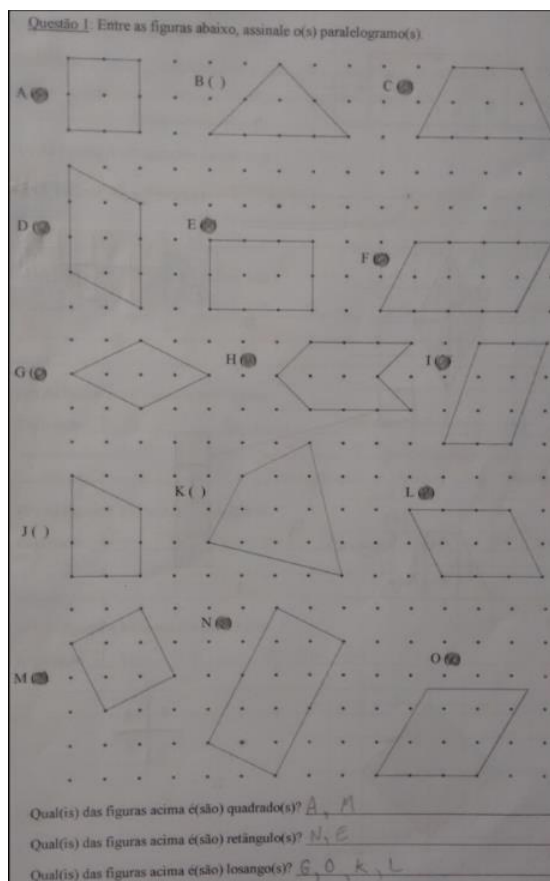
P: Hum.

B6: Aí não seria um paralelogramo, porque tem que ser quadrilátero. (TRANSCRIÇÃO de 989 a 996).

O aluno B6, diferentemente do A5, não levou em consideração apenas o paralelismo entre os dois pares de lados do paralelogramo, considerou também que tem que ser um quadrilátero.

O último aluno entrevistado para essa questão (B25) foi selecionado porque percebemos algumas contradições entre as respostas dadas na primeira questão e as produções na quarta como, por exemplo, não incluir quadrados ao identificar retângulos, mas desenhar (incorretamente) retângulos não quadrados quando solicitado a produzir quadrado. Também pretendíamos confirmar procedimento esperado na análise a priori no que se refere a não incluir quadrados ao identificar retângulos e losangos.

Figura 58 – Não inclusão de quadrado na identificação de retângulo e de losango na 1ª questão



Além de não incluir os quadrados na identificação dos retângulos e dos losangos, ele assinalou figuras que não são paralelogramos, como o hexágono (H) e o trapézio (C), mas não marcou o (J). Considerou também que o trapezoide (K) e o paralelogramo não retângulo e não losango (L) são losangos.

Ao ser questionado em como pensou para identificar os paralelogramos, ele respondeu:

B25: Paralelogramos são polígonos que tem dois lados paralelos, dois pares de lados paralelos. E aí todos que tinham dois pares de lados paralelos eu marquei como paralelogramo.

P: Por exemplo, nessa figura (C).

B25: (C), sim. Isso daí é um trapézio, eu pensei errado.

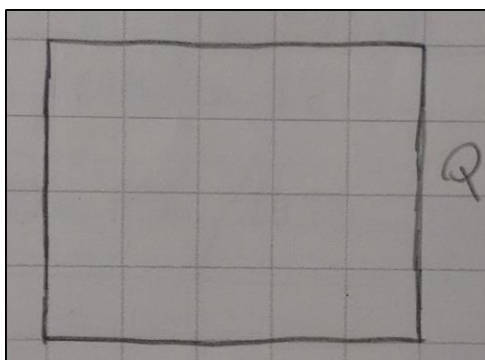
P: Então, você acha que a (C), você marcou, mas acha que, diante do que você falou agora, não é um paralelogramo?

B25: Não é um paralelogramo. É, é porque no dia eu não estava muito preparado, eu não tinha, eu não sabia que ia ser naquele dia. (TRANSCRIÇÃO de 1448 a 1456).

No decorrer da entrevista ele discorda de algumas respostas dadas no teste, percebendo o que tinha feito de errado.

Quanto à quarta questão, ele produziu figuras diferentes das solicitadas como, por exemplo, um paralelogramo não retângulo e não losango em vez de um retângulo, um retângulo não quadrado em vez de um quadrado. Vejamos um exemplo:

Figura 59 – Produção de retângulo não quadrado em vez de quadrado no item (c) da 4ª questão



Fonte: Protocolo B25

Perguntamos como ele explicaria para alguém que a figura acima é um quadrado, e ele novamente discordou da resposta, conforme trecho abaixo:

B25: Não é um quadrado.

P: Então você discorda das suas respostas?

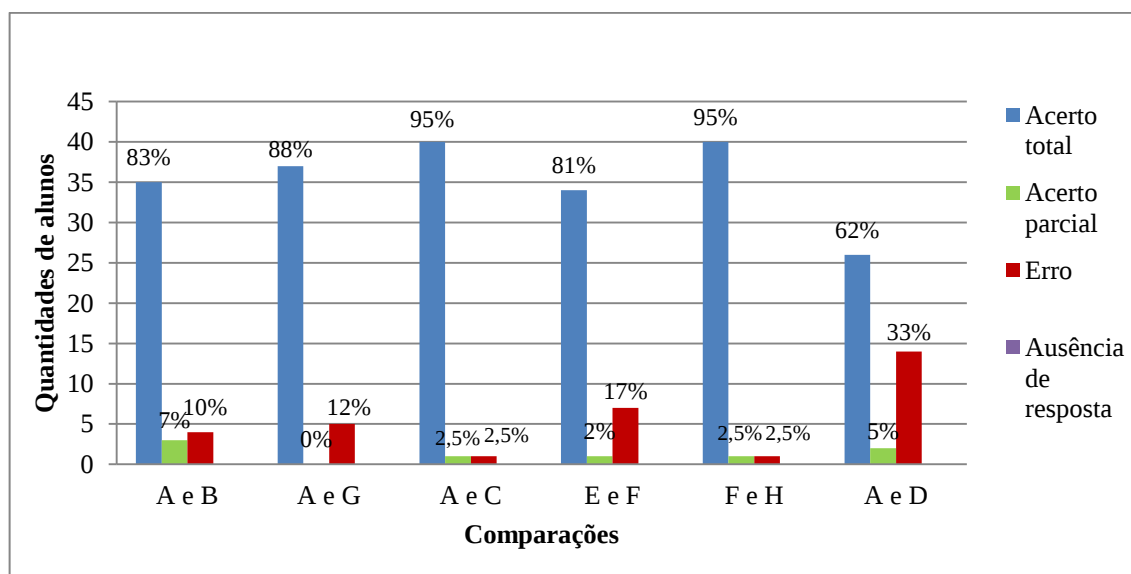
B25: Exatamente, eu discordo de todas as respostas, porque um quadrado é ele tem também os lados iguais e aqui está um lado de cinco quadradinhos e quatro quadradinhos, então é um retângulo e não um quadrado. (TRANSCRIÇÃO de 1526 a 1530).

De modo geral, percebemos que os alunos ao lidarem com a classificação de quadriláteros possuem um melhor desempenho quando são quadrados e retângulos, inclusive em posições não habituais. Já nos paralelogramos não retângulos e não losangos, e losangos, apresentaram maiores dificuldades, respectivamente, principalmente quando este último estava com um dos lados apoiados na horizontal, considerando a borda da folha como referência.

4.2 COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A COMPARAÇÃO DE ÁREAS DE PARALELOGRAMOS?

Dividimos, para um melhor detalhamento, a segunda questão em seis comparações: (A e B), (A e G), (A e C), (E e F), (F e H) e (A e D). Em cada comparação consideramos como acerto total sua resposta correta, seguida da explicação adequada; o acerto parcial é considerado quando é dada a resposta correta, mas com uma explicação inadequada; o erro é considerado quando ambas (resposta e explicação) estão incorretas; a ausência de resposta ocorre quando a comparação é deixada em branco. Levamos em consideração também os aspectos relacionados à álgebra das grandezas sinalizados em nossa análise a priori.

Gráfico 3 – Resultado do teste por comparações na 2ª questão

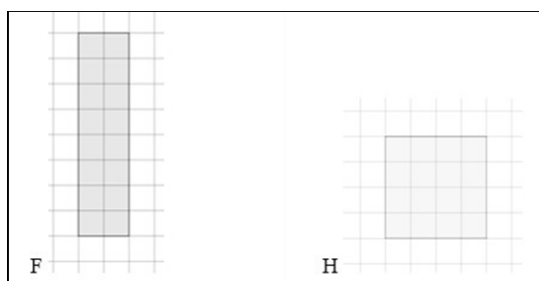


Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, as comparações para as quais houve melhor desempenho são aquelas em que as figuras estão na mesma malha: (A e C) na de 1 cm e (F e H) na de 0,5 cm. Nesta

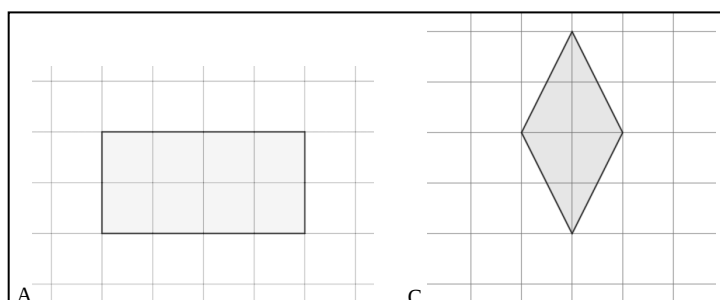
última, conforme previsto em nossa análise a priori, várias estratégias de resolução conduziram à resposta correta.

Figura¹⁷ 42 da seção 3.2 – Comparação (F e H) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

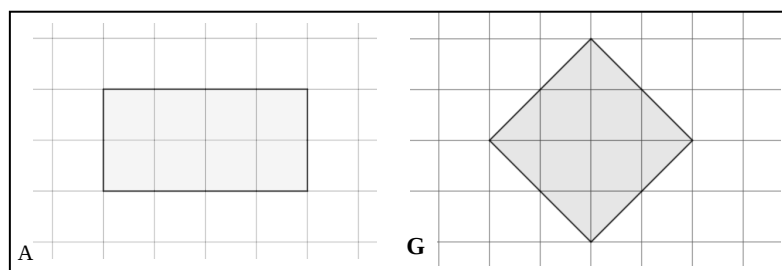
Figura 40 da seção 3.2 – Comparação (A e C) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

No caso da comparação das áreas de (A) e (G), elas estão na mesma malha, mas a taxa de sucesso é um pouco menor que as anteriores. O fato de haver 3 acertos a mais na comparação entre as áreas de (A) e (C) e de (A) e (G) pode ter acontecido porque esta última figura está em uma posição não prototípica, em que nenhum lado segue a malha. Já em (A) e (C), utilizando-se procedimentos de inclusão, percebe-se que (C) “cabe” em (A).

Figura 37a da seção 3.2 – Comparação (A e G) da 2ª questão



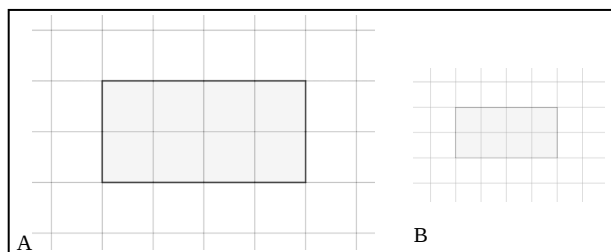
Fonte: acervo da pesquisa

Em relação às comparações entre as áreas de figuras traçadas em malhas distintas, no caso de (A) e (B), tratam-se de figuras semelhantes. Só tem um acerto total a menos na

¹⁷ Algumas figuras da análise a priori (seção 3.2) serão repetidas aqui para ajudar na argumentação e não serão contabilizadas novamente.

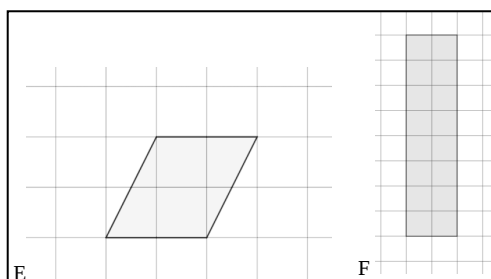
comparação das áreas de (E) e (F) e das áreas de (A) e (B). Somando acertos totais e parciais, a diferença de desempenhos é de 3 participantes.

Figura 39 da seção 3.2 – Comparação (A e B) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

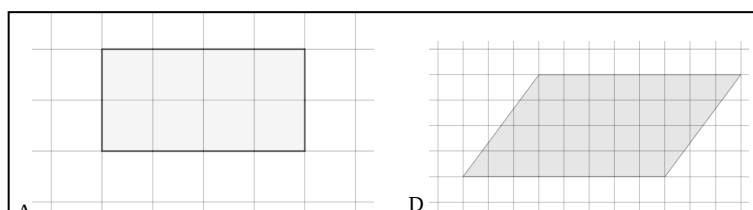
Figura 41 da seção 3.2 – Comparação (E e F) da 2ª questão



Fonte: acervo da pesquisa

Já entre esta anterior e a comparação (A e D) há uma diferença bem mais nítida: se na comparação (E e F) há 34 acertos totais e 35 acertos totais ou parciais, na comparação entre as áreas de (A) e (D) são 26 acertos totais, e 28 somando os acertos totais e parciais. Um terço dos alunos erraram a comparação (A e D). Ambas as comparações possuem figuras em malhas diferentes e, no caso desta última, as duas figuras estão em posição prototípica. Possivelmente o fato de (D) possuir mais quadradinhos a serem contados e preenchidos tenha contribuído para essa diferença, já que na (E) a decomposição e recomposição é mais evidente.

Figura 43 da seção 3.2 – Comparação (A e D) da 2ª questão



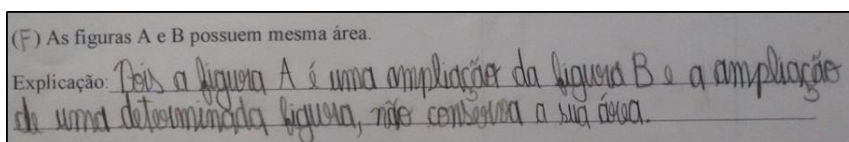
Fonte: acervo da pesquisa

Diversos procedimentos foram utilizados para comparar as figuras, tais como: considerar corretamente a relação entre os quadradinhos das malhas (um quadrado da malha de 1 cm de lado equivale, em termos de área, a quatro quadradinhos da malha de 0,5 cm).

Alguns utilizaram contagem de quadradinhos, decomposição e recomposição, uso de fórmula, sobreposição, inclusão.

Vejamos alguns protocolos por meio dos quais fizemos a interpretação de teoremas em ação verdadeiros:

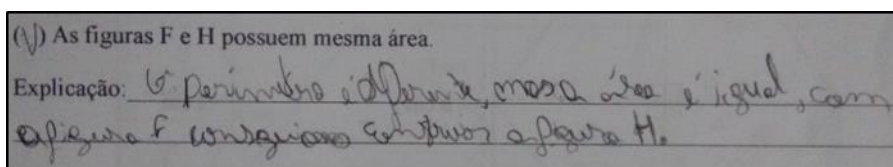
Figura 60 – Explicação dada pelo aluno na comparação (A e B) da 2ª questão



Fonte: Protocolo A1

Interpretamos a explicação dada pelo aluno acima como o teorema em ação verdadeiro: se duas figuras V' e V são semelhantes, com razão de semelhança diferente de 1, então as áreas de V e V' são diferentes.

Figura 61 – Explicação dada pelo aluno na comparação (F e H) da 2ª questão

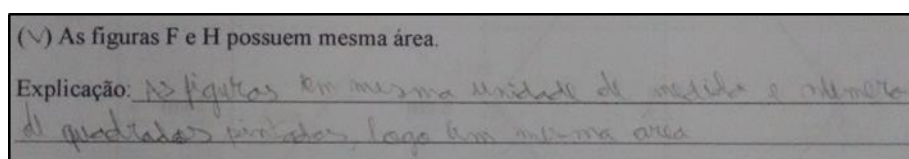


Fonte: Protocolo A11

Percebemos na explicação acima indícios da mobilização do teorema em ação verdadeiro de que figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais.

Ao também comparar as figuras (F) e (H), o aluno B15 falou o seguinte:

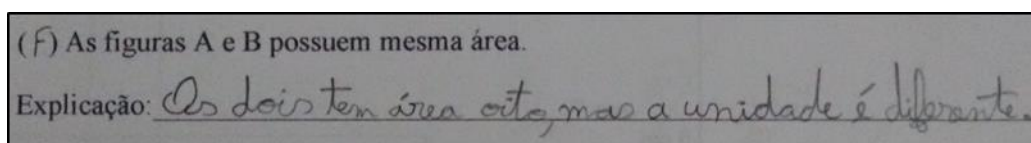
Figura 62 – Explicação dada pelo aluno na comparação entre as figuras (F) e (H) da 2ª questão



Fonte: Protocolo B15

Interpretamos a fala do aluno como o seguinte teorema em ação verdadeiro: se duas figuras V e V' podem ser ladrilhadas com uma mesma quantidade de superfícies unitárias idênticas U , então as áreas de V e V' são iguais.

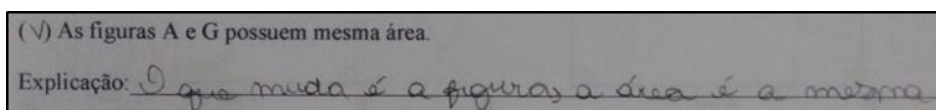
Figura 63 – Explicação dada pelo aluno na comparação entre as figuras (A) e (B) da 2ª questão



Fonte: Protocolo B16

Temos como interpretação para a explicação acima o teorema em ação verdadeiro: sejam duas figuras V e V' e duas superfícies unitárias U e U' de áreas distintas. Se a medida da área de V utilizando a unidade definida por U e a medida da área de V' utilizando a unidade definida por U' são iguais, então as áreas de V e V' são diferentes.

Figura 64 – Explicação dada pelo aluno na comparação (A e G) da 2ª questão

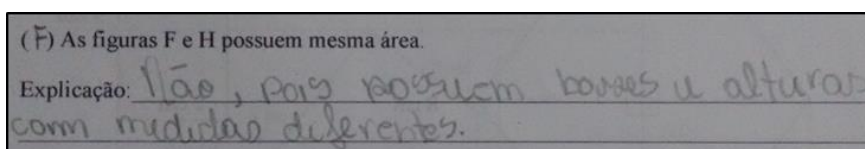


Fonte: Protocolo B20

A explicação acima pode ser interpretada como o teorema em ação verdadeiro de que figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Em relação aos teoremas em ação falsos, vejamos:

Figura 65 – Explicação dada pelo aluno na comparação (F e H) da 2ª questão



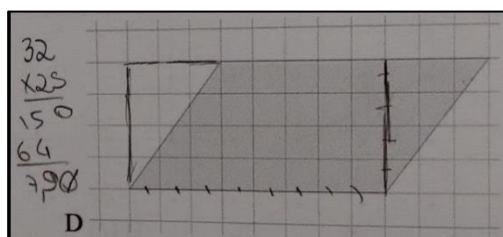
Fonte: Protocolo B22

Interpretamos a explicação do aluno como o teorema em ação falso: retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes. Como sabemos, os números podem ser diferentes e ter mesma área, pois dependem da unidade. A proposição utilizada por ele vale apenas para casos específicos.

Quanto aos procedimentos errôneos, alguns alunos consideraram a relação entre as malhas não em termos de área, mas como comprimento, o qual ficou o dobro e não o quádruplo (erro de cálculo relacional). Outros consideraram que as malhas eram iguais, daí tiveram sucesso apenas nas comparações em que as figuras estavam na mesma malha, conforme previsto em nossa análise a priori.

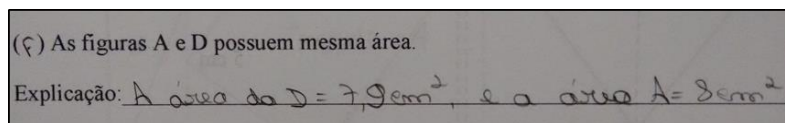
O aluno A15 apresentou um erro de cálculo numérico nas comparações das figuras (A e D), conforme mostramos abaixo:

Figura 66a – Erro de cálculo numérico na comparação (A e D) da 2ª questão



Fonte: Protocolo A15

Figura 66b – Erro de cálculo numérico na comparação (A e D) da 2ª questão

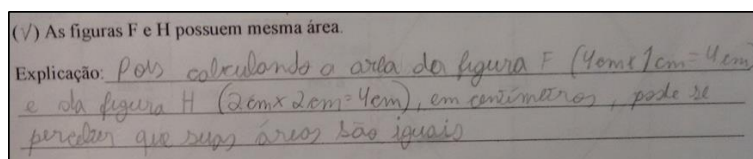


Fonte: Protocolo A15

É interessante que ele simula o corte-colagem clássico, produz um retângulo congruente, mas apoia sua decisão no numérico. Isso é um forte indício de concepção numérica. Ele percebeu a relação entre as malhas, por isso multiplicou por 25 e dividiu o resultado por 100, o que vale a multiplicar por 0,25, ou seja, cada quadrado da malha menor é um quarto do quadrado da malha maior. Ao fazer 5×2 , ele colocou o 0, mas esqueceu de colocar o 1 das dezenas na casa da esquerda, daí ficou 150 em vez de 160, fator que conduziu ao erro na comparação, como vemos na figura 66a.

Percebemos também um erro de álgebra das grandezas. Vejamos:

Figura 67 – Erro de álgebra das grandezas na 2ª questão



Fonte: Protocolo B8

O aluno acima obteve acerto parcial na comparação devido ao erro na álgebra das grandezas, o qual multiplicou comprimento por comprimento e encontrou comprimento como resultado. A confusão entre as unidades de medida de comprimento e de área também é verificada nas demais comparações em que ele realizou cálculos, bem como em todos os itens da 3ª questão.

No quadro a seguir, apresentamos uma síntese dos teoremas em ação que interpretamos a partir do mencionado nas explicações e, por isso, acreditamos que foram mobilizados, porém podem não ter sido os únicos para chegar àquela resposta.

Quadro 11 – Síntese dos teoremas em ação observados na 2ª questão

<u>Teoremas em ação</u>		<u>Alunos</u>
Verdadeiros	Se duas figuras V' e V são semelhantes, com razão de semelhança diferente de 1, então as áreas de V e V' são diferentes.	A1, B5, B22
	Figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais.	A11
	Se duas figuras V e V' podem ser ladrilhadas com uma mesma quantidade de superfícies unitárias idênticas U , então as áreas de V e V' são iguais.	B15
	Sejam duas figuras V e V' e duas superfícies unitárias U e U' de áreas distintas. Se a medida da área de V utilizando a unidade definida por U e a medida da área de V' utilizando a unidade definida por U' são iguais, então as áreas de V e V' são diferentes.	B16
	Figuras diferentes podem ter áreas iguais.	B20
Falsos	Retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes.	B22, B8

Fonte: dados da pesquisa

Selecionamos os alunos A1 e B8 para entrevista nessa questão, em que interpretamos as explicações dadas por eles como indício da mobilização de teoremas em ação verdadeiro e falso, respectivamente, conforme quadro a seguir:

Quadro 12 – Alunos e critérios para entrevista na 2ª questão

<u>Aluno</u>	<u>Critério</u>
A1	Confirmar teorema em ação verdadeiro (se duas figuras V' e V são semelhantes, com razão de semelhança diferente de 1, então as áreas de V e V' são diferentes) interpretado na segunda questão e confrontar com alunos fictícios que mobilizam concepções numéricas e geométricas, respectivamente.
B8	Confrontar o teorema em ação errôneo (retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes) interpretado na comparação das figuras A e B da segunda questão com as demais explicações.

Fonte: acervo da pesquisa

Vimos na figura 60 o teorema em ação que interpretamos como mobilizado por A1, daí confrontamos suas respostas com as de um aluno fictício (não havia produção escrita,

apenas falamos), que mobiliza concepções numéricas e geométricas. No primeiro caso, um aluno fictício considerou o aspecto numérico na comparação das figuras (A) e (B) e falou que elas possuem mesma área por terem a mesma quantidade de quadradinhos, sem considerar o tamanho de cada quadradinho, ou seja, não considerou que as unidades são diferentes. Vejamos um trecho referente à primeira concepção:

P: Veja só, é, outro aluno falou que as figuras A e B elas têm mesma área porque têm a mesma quantidade de quadradinhos. Como é que você explicaria para ele sua opinião?

A1: Eu explicaria, na verdade, eu considere as duas opções. Eu preferi primeiro utilizar é, primeiro usar a régua e, tipo, quando eu utilizei a régua foi possível perceber que esse [apontando para a figura A] tinha uma área maior e aí seria assim que eu explicaria: como, pelas medidas, se nós não considerarmos nenhuma escala, porque não tem nenhuma escala explícita aqui, a gente pode considerar que área desse [mostrando a figura A] é bem maior que essa [mostrando a figura B], já que é um por um [se refere à medida do comprimento dos lados do quadradinho da malha da figura A] e aqui meio por meio [se refere à medida do comprimento dos lados do quadradinho da malha da figura B].

P: Certo, A1. Aí seria dessa forma que você explicaria para ele?

A1: É. (TRANSCRIÇÃO de 44 a 57).

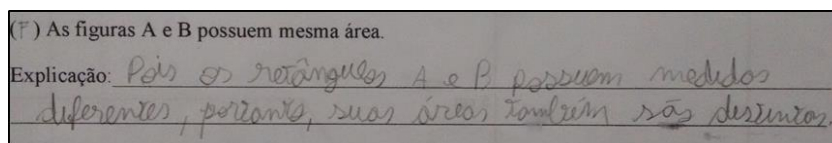
Quanto à concepção geométrica, falamos para ele que um aluno disse que, embora as figuras F e H possuam a mesma quantidade de quadradinhos, a F tem maior área porque é mais comprida. Vejamos como ele explicaria para esse aluno sua opinião:

A1: Eu explicaria que, na verdade, esses quadradinhos, eles são que compõem a área, mesmo que a, sejam diferentes medidas, diferentes figuras, se formos fazer, por exemplo, um quadrado e um retângulo, a forma de descobrir a área seria multiplicar lado vezes altura, e, base, base vezes altura e, se fizéssemos isso com esses dois, dois por oito [se referindo à figura F] e quatro por quatro [se referindo à figura H] se a gente encontraria o mesmo resultado, então, por isso que eu considere que seria a mesma coisa e mesmo que esse seja mais comprido [apontando para a figura F], mas esse daqui [apontando para a figura H] ele seria mais, não sei como dizer, esse é mais comprido [figura F], mas ao mesmo tempo esse [figura H] é mais proporcional, vamos assim dizer, meio que proporcional, mas não tem um comprimento maior do que a largura, ele é mais, como é um quadrado, largura é do mesmo tamanho de largura, de comprimento, é isso. E aí por isso que eu acredito que, mesmo que esse seja mais comprido [mostrando a figura F], esse daqui [apontando para a figura H] já é mais, é, mais compacto, vamos assim dizer, ele é mais proporcional, os lados e comprimentos, altura e comprimento são da mesma medida e por isso que eu consideraria que os dois têm o mesmo tamanho, a mesma área. (TRANSCRIÇÃO de 67 a 82).

Em ambos os casos, ele calcula as áreas das figuras multiplicando os comprimentos dos lados, mas mostra que percebe a necessidade de utilizar uma mesma unidade de área para comparar as medidas.

O aluno B8 deu a seguinte resposta na comparação das áreas das figuras (A) e (B):

Figura 68 – Explicação dada na comparação das áreas de (A) e (B) da 2ª questão



Fonte: Protocolo B8

Interpretamos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, que o aluno mobilizou o teorema em ação falso segundo o qual retângulos cujos comprimentos dos lados são diferentes possuem áreas distintas, porém sabemos, como já mencionado anteriormente, que as medidas dependem das unidades a elas associadas.

Na comparação das áreas das figuras (F) e (H), ver figura 67, percebemos uma contradição em suas palavras, pois ele disse que os retângulos possuem mesma área, mesmo tendo indicado medidas diferentes. Decidimos interrogá-lo quanto a isso:

P: Que você nessa comparação de A e B, você diz que possuem medidas diferentes, portanto suas áreas são distintas. Foi, foi isso?

B8: Foi isso.

P: Nas comparações E e F e F e H você falou que tem mesma área, mas a gente observa que as medidas são diferentes.

B8: Sim.

P: Aí como você explicaria isso aí? Por que aqui você diz assim, dá a entender que você diz assim, tem medida diferente, logo é área diferente.

B8: Não, é porque a explicação está mal formulada mesmo. Eu usei medindo com a régua e eu fiz o cálculo das áreas, eu percebi que, é, apesar de ter o mesmo número de quadrados, como os quadrados estão em medidas diferentes, eles acabam, acabaram que a área divergia, então podia ser igual.

P: Certo.

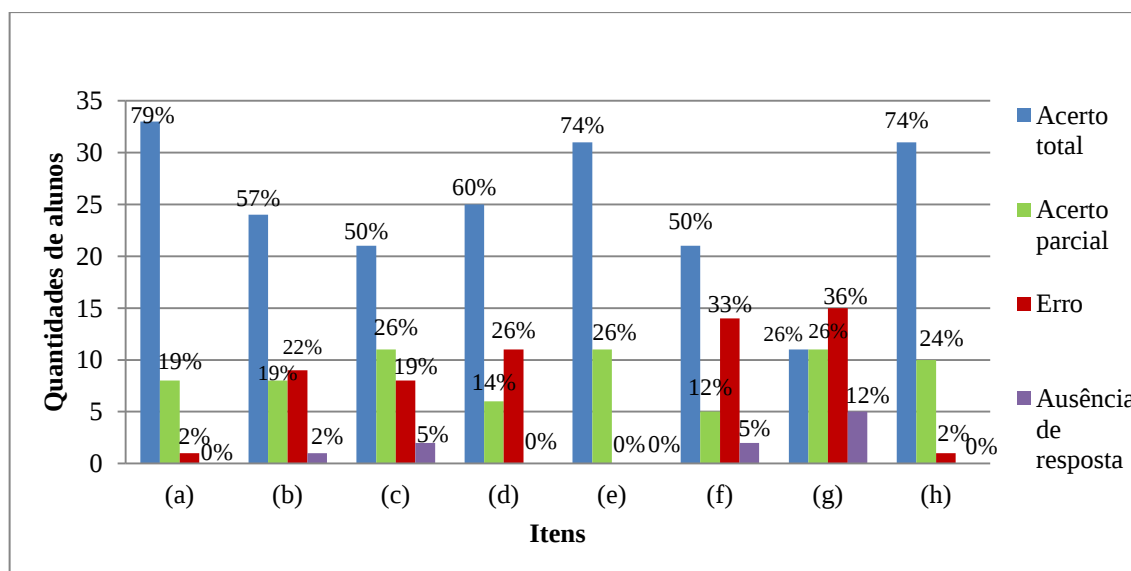
B8: Então a explicação acabou sendo incompleta. (TRANSCRIÇÃO de 1110 a 1124).

A entrevista possibilitou que entendêssemos melhor as explicações dos alunos, sobre as quais interpretamos teoremas em ação verdadeiros e falsos. No caso de B8, percebemos que, na verdade, sua ideia era outra, o modo como escreveu que estava incompleto. Considerar que figuras diferentes podem ter mesma área contribui para a construção do conceito de área como grandeza e fortalece o objetivo da questão que consiste em compreender o sentido que os alunos atribuem à ideia de ter mesma área.

4.3 COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM O CÁLCULO DA ÁREA DE PARALELOGRAMOS?

Analisaremos, a partir de agora, a questão 3. Consideramos como acerto total a resolução (se indicada) correta de cada item, com o resultado final seguido da unidade de medida adequada, levando em consideração os aspectos da álgebra das grandezas; o acerto parcial é considerado nas resoluções (se indicadas) em que ocorre erro de álgebra das grandezas e/ou nos resultados; consideramos como erro a resolução (se indicada) e a resposta incorreta do item, que podem ser frutos de erros decorrentes do cálculo numérico; a ausência de respostas ocorre quando o item é deixado em branco, sem a presença de resposta.

Gráfico 4 – Resultado do teste por itens na 3ª questão



Fonte: dados da pesquisa

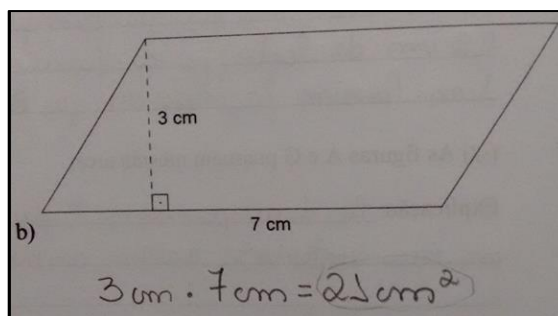
A partir do gráfico acima, observamos que:

- no item (a) houve 79% de acerto total (quadrado em posição prototípica);
- nos itens (e) e (h) foram 74% de acerto total (retângulos em posições não prototípicas, com (e) sendo o que mais se aproxima do modelo prototípico por possuir lados vertical-horizontal, porém o de maior comprimento está na vertical. Já (h) tem os lados inclinados);
- no item (d) o percentual de acerto total foi de 60% (paralelogramo com um dos lados na vertical e dados desnecessários), nenhuma ausência de resposta e 14% de acerto parcial;
- no item (b) houve 57% de acerto total (paralelogramo prototípico, dados necessários e suficientes), uma ausência de resposta e 19% de acerto parcial;

- 50% dos participantes acertaram plenamente os itens (c) e (f) e 5% de ausência de resposta (losango em posição prototípica (c) e paralelogramo com lado de menor comprimento na horizontal, com altura externa (f), ambos com dados extras), com diferenças grandes entre os dois itens quanto à distribuição entre acertos parciais e erros;
- no item (g) houve 26% de acerto total (quadrado em posição não prototípica, dado o comprimento da diagonal), 12% de ausência de resposta e 36% de erros.

Para nossa análise, três elementos serão considerados: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas. Vejamos, no exemplo abaixo, um acerto pleno que contempla estes pontos.

Figura 69 – Acerto no cálculo relacional, no cálculo numérico e na álgebra das grandezas no item (b) da 3ª questão

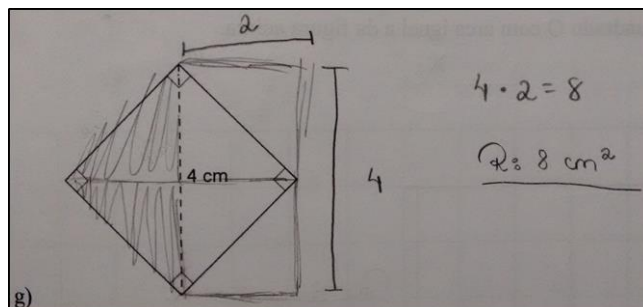


Fonte: Protocolo B23

Podemos notar que o aluno faz corretamente a multiplicação do número e da unidade de medida, obtendo acerto total neste item da questão, utilizando o procedimento correto e adequado, conforme sinalizado na análise a priori.

Vejamos outro exemplo de acerto total:

Figura 70 – Procedimento de decomposição e recomposição no item (g) da 3ª questão

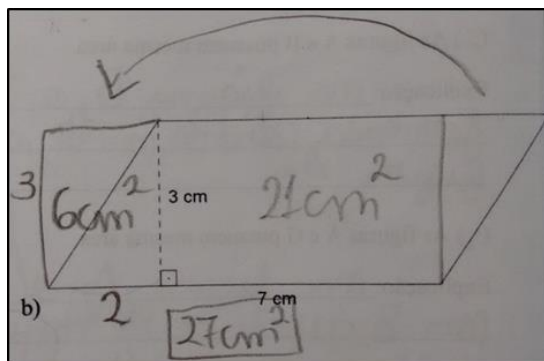


Fonte: Protocolo B10

Percebemos no protocolo acima que o aluno realiza um procedimento correto esperado em nossa análise a priori e obtém sucesso na resolução do item. Procedimentos como este contribuem para a construção do conceito de área como uma grandeza autônoma.

Algo que foge do esperado é o percentual de acertos de (b) ser menor que o de (d), possivelmente devido a erros de leitura nos dados da questão, uma vez que alguns alunos consideraram os sete centímetros da figura (b) até o pé da altura.

Figura 71 – Erro de leitura nos dados do item (b) da 3ª questão

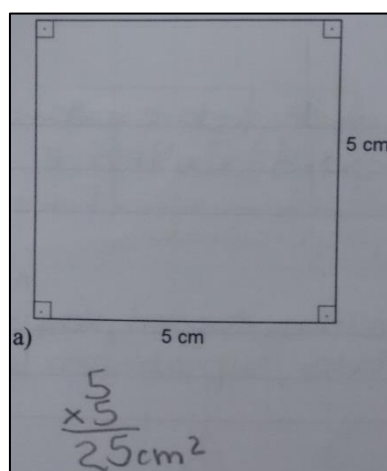


Fonte: Protocolo B13

Como vemos, ele decompôs o paralelogramo em um retângulo, calculou a área do retângulo menor e obteve 6 cm^2 e na do maior encontrou 21 cm^2 , somou e teve 27 cm^2 como resultado. O erro consistiu em não considerar que 7 cm seria o comprimento total do lado horizontal (e não a distância entre o vértice à direita e o pé da altura).

Nessa questão, muitos dos acertos parciais foram provenientes de erros relacionados à álgebra das grandezas, nos quais onze alunos multiplicaram números e deram como resultado da operação um par número unidade, que representa uma área, como mostra o protocolo a seguir:

Figura 72 – Acerto parcial decorrente de erro na álgebra das grandezas no item (a) da 3ª questão

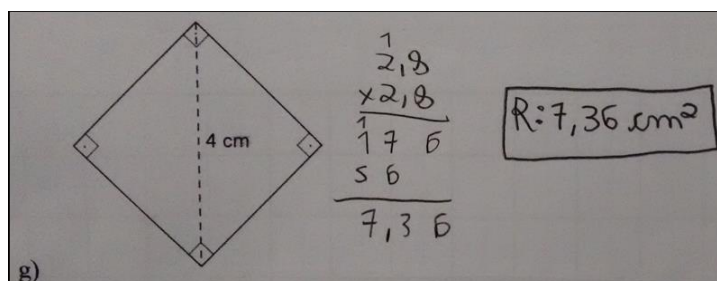


Fonte: Protocolo A6

Houve confusão entre as unidades de medida de área e de comprimento, isto é, cinco alunos colocaram centímetros em vez de centímetros quadrados para designar a área de uma

figura. Um aluno não colocou a unidade de medida na questão toda. Também verificamos que dois participantes cometeram erros relacionados ao cálculo numérico.

Figura 73 – Erro de cálculo numérico no item (g) da 3ª questão

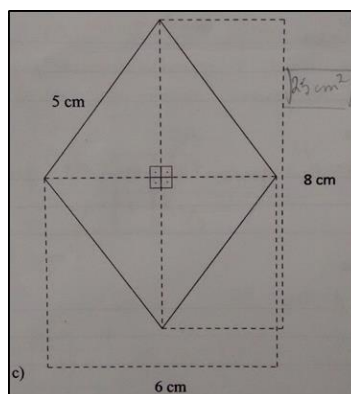


Fonte: Protocolo B1

Embora tivéssemos o cuidado de evitar sair do campo numérico dos inteiros, este item, como detalhado na análise a priori, pode conduzir a operar com números racionais. Acreditamos que o aluno usou a régua para medir o comprimento do lado do quadrado obtendo 2,8 cm e errou na multiplicação (fez $8 \times 8 = 16$, em vez de 64).

Dois alunos confundiram-se na escolha dos dados necessários e suficientes para o cálculo da área no item (c) da terceira questão. Vejamos um exemplo:

Figura 74 – Dificuldade na escolha dos dados numéricos no item (c) da 3ª questão



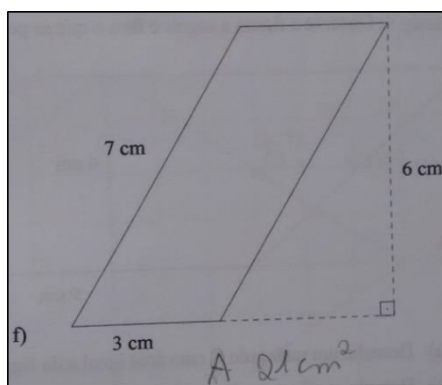
Fonte: Protocolo B25

Conforme esperado em nossa análise a priori, este aluno eleva ao quadrado o comprimento do lado do losango para calcular a sua área, possivelmente um erro de cálculo relacional.

O aluno B9, além de cometer o mesmo erro de B25 (calculou a área do losango fazendo o quadrado do comprimento do lado), fez o produto dos comprimentos dos lados no paralelogramo do item (f). Ao olharmos as respostas deles na primeira questão, verificamos que B9 classifica corretamente quadrados e losangos. Já B25 acerta a de quadrados, mas na identificação de losangos obtém acerto parcial, deixando de incluir os quadrados e marcando

figuras como o trapézioide (K) e o paralelogramo não retângulo e não losango (L). Vejamos na figura a seguir, a produção de B9 no item (f) do terceiro quesito, na qual verificamos um erro de cálculo relacional – fórmula observada em pesquisas anteriores: área do paralelogramo como produto dos comprimentos de seus lados.

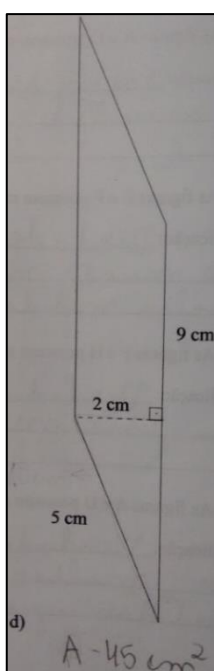
Figura 75 – Produto do comprimento dos lados no item (f) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B9

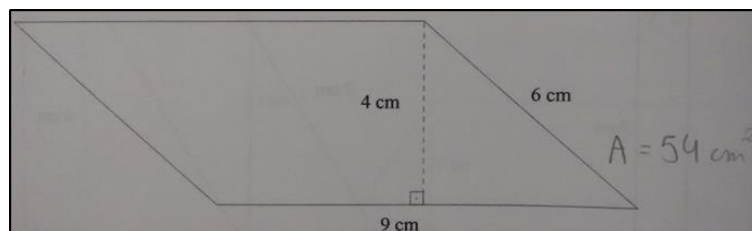
As dificuldades na escolha dos dados necessários e suficientes para o cálculo da área também foram observadas por Santos (2005). No caso acima, o lado de maior comprimento não está na posição horizontal e a altura é externa, fato que pode ter contribuído para o erro nesse item. Esse mesmo aluno mantém uma regularidade em suas respostas, o qual faz o produto dos comprimentos dos lados no item (d) dessa questão e no cálculo da área do paralelogramo dado no quarto quesito, conforme observamos nas figuras abaixo:

Figura 76 – Produto dos comprimentos dos lados no item (d) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B9

Figura 77 – Produto dos comprimentos dos lados na 4ª questão



Fonte: Protocolo B9

Nessa questão, entrevistamos os alunos A4, A13, A16, A17, B12, B13 e B19. Com exceção de B19, os demais alunos foram selecionados para esclarecer erros de leitura, ou seja, não consideraram o comprimento todo nos itens (b), (d) e (f) da terceira questão ou não terem realizado algum deles por dúvidas quanto aos tamanhos. O quadro abaixo traz os critérios para seleção e será detalhado em seguida.

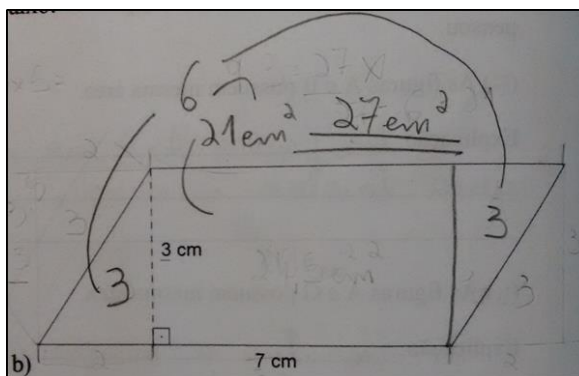
Quadro 13 – Alunos e critérios para entrevista na 3ª questão

<u>Aluno</u>	<u>Critério</u>
A4, A13	Esclarecer erros de leitura nos itens (b) e (d) da terceira questão.
A16	Esclarecer erros de leitura no item (d) da terceira questão e entender como fez para calcular a área da figura dada na quarta questão.
A17	Entender porque respondeu todos os itens da terceira questão, menos o (b).
B12	Esclarecer erro de leitura na figura do item (d) da terceira questão.
B13	Esclarecer erro de leitura nas figuras dos itens (b) e (f) da terceira questão.
B19	Confirmar procedimento esperado na análise a priori (erro na escolha dos dados) no item (h) da terceira questão e esclarecer erro de leitura da questão.

Fonte: acervo da pesquisa

A resposta dada pelo aluno A4 exemplifica o ocorrido com os itens (b) e (d):

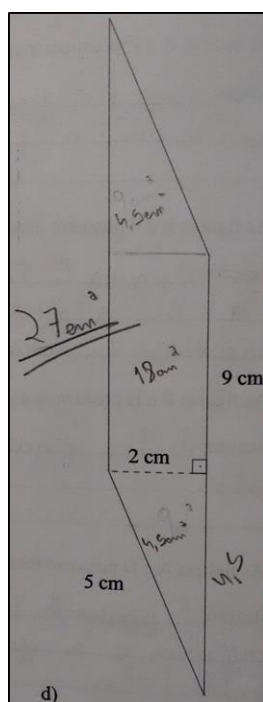
Figura 78 – Erro de leitura no item (b) da 3ª questão



Fonte: Protocolo A4

Buscamos confirmar por meio da entrevista nossa interpretação inicial da produção dos alunos, segundo a qual o comprimento dado da base (7 cm), havia sido considerado por eles como sendo a distância entre o pé da altura e o vértice do paralelogramo. No caso acima, o sujeito decompôs o paralelogramo em um retângulo de área 21 cm^2 e dois triângulos cuja soma das áreas é 6 cm^2 , totalizando uma área total de 27 cm^2 , quando deveria ser 21 cm^2 . Semelhantemente ocorreu com o item (d):

Figura 79 – Erro de leitura no item (d) da 3ª questão



Fonte: Protocolo A4

Como vemos, ele considerou que 9 cm seria a distância entre o pé da altura e o vértice. Por meio de um procedimento igual ao anterior, encontrou como área para o paralelogramo 27 cm^2 quando deveria ser 18 cm^2 .

Na entrevista realizada com este e os demais alunos, buscamos confirmar se nosso entendimento estava correto, se realmente foi assim que pensaram, e esclarecer os tamanhos reais das medidas, dando a oportunidade de refazerem a questão em um papel à parte, caso tivessem interesse.

A4: Eu peguei a altura da figura e aí eu multipliquei a altura vezes a largura, e aí daria como se fosse um retângulo completo, aí depois eu peguei a área desses dois triângulos [apontando para os triângulos formados pelos lados inclinados e a altura do paralelogramo] e subtraí que seria área que eu teria que subtrair para tirar, entre aspas, a área do triângulo, do retângulo completo.

P: Certo, aí você considerou que altura aí seria quantos centímetros?

A4: A altura seria isso [apontando para o 3], mas eu não lembro. Ela está aqui eu acho, mas eu acho que apaguei. Ah, 3, né, que a altura aqui [mostrando na figura] estava três.

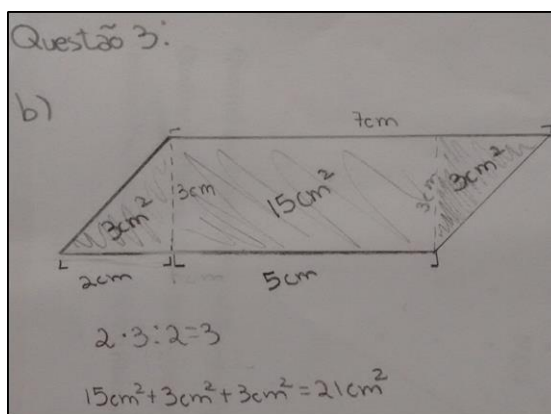
P: É, e essa parte que está na horizontal, você considera que, você considerou esses 7 centímetros até onde?

A4: 7 centímetros daqui até aqui [mostrando que considerou apenas até a altura]. (TRANSCRIÇÃO de 146 a 157).

Ao perguntamos sobre como pensou no item (d), ele respondeu: “na verdade, nas letras (b) e (d) eu vi que as figuras eram parecidas e eu tentei aplicar a mesma maneira de fazer [...]” (TRANSCRIÇÃO de 164 a 165). Oferecemos a oportunidade de refazer a questão, mas ele disse que não saberia.

O aluno A17 havia deixado o item (b) em branco por, segundo ele, não saber algumas medidas. Durante a entrevista e após o esclarecimento, ele o respondeu da seguinte maneira:

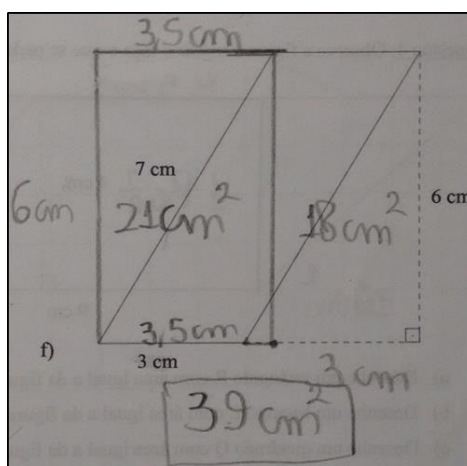
Figura 80 – Resposta dada durante a entrevista ao item (b) da 3ª questão



Fonte: Protocolo A17

Quanto ao item (f), o aluno B13 calculou, além da área do paralelogramo dado, a área da figura formada pelos traçados auxiliares da altura, conforme figura abaixo:

Figura 81 – Interpretação incorreta da figura no item (f) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B13

Vejamos o que ele falou durante a entrevista:

P: É, nesse (f) como foi que você pensou? Na letra (f) [se referindo ao item (f) da terceira questão].

B13: Esse aqui?

P: Isso.

B13: Posso dar uma medida nesse aqui?

P: Pode, pode usar a régua, os papéis aqui oh, tem lápis, borracha, o que você quiser usar, você pode.

B13: Eu usei o mesmo princípio, passei, é, passei isso aqui para o outro lado [se referindo ao triângulo formado pelos traçados auxiliares que indicam a altura do paralelogramo, formando dois retângulos] sabendo que era 6 cm e esse aqui era três, três e meio na verdade, porque, calma [mede novamente] três, eu escrevi errado.

P: Você quer alterar?

B13: Posso?

P: Pode. Aqui nessa folha você coloca o seu nome, a questão e o item, (f), não é?

B13: Isso. [Começa a desenhar a figura novamente na folha de respostas disponibilizada]. Precisa estar igual? [Se referindo ao desenho].

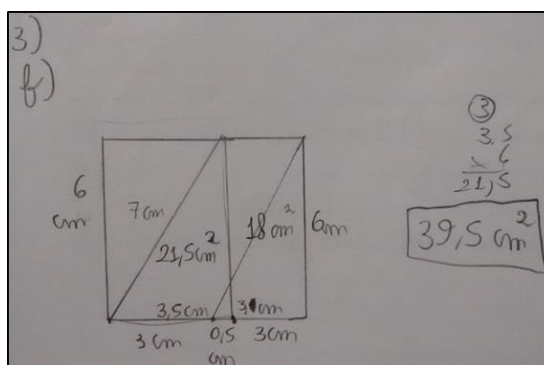
P: Oi.

B13: Precisa estar igual ao desenho original?

P: Não. [Inicia os cálculos, conforme folha de respostas]. (TRANSCRIÇÃO de 1361 a 1379).

Refez o item conforme figura abaixo:

Figura 82 – Resposta dada durante a entrevista ao item (f) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B13

Percebemos que ele havia refeito seguindo o mesmo raciocínio anterior, porém com um erro de cálculo numérico ao fazer $3,5 \times 6 = 21,5$ em vez de apenas 21, o alertamos:

B13: Vai dar 39,5 cm².

P: Aí como foi que você pensou?

B13: Eu usei o, o mesmo princípio do outro.

P: Fez, você fez como? Explique aí.

B13: Bom, eu comecei [pesquisador interrompe].

P: Olha, a figura é esse paralelogramo aqui, não é, que a gente quer a área, certo?

[Apontando para o paralelogramo original]. Aí como foi que você fez, você?

B13: Quer a área desse paralelogramo aqui é?

P: A área desse paralelogramo aqui, oh.

B13: Ah tá. Ah, é só do paralelogramo, pensei que era desse retângulo aqui [apontando para o retângulo formado a partir dos traçados auxiliares e uma reta que ele fez no meio do paralelogramo].

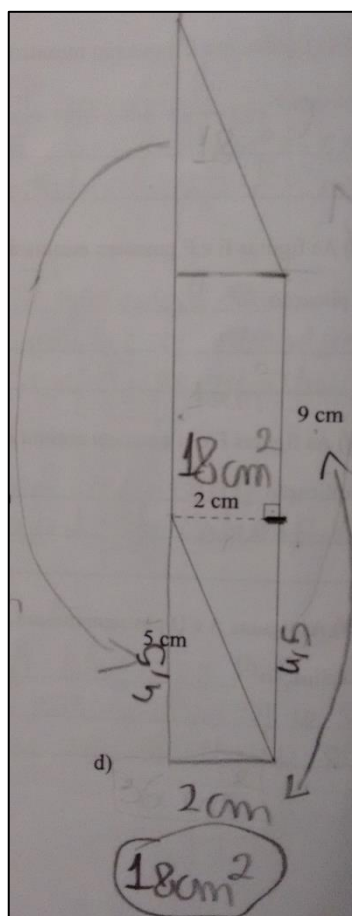
P: Não. Só do paralelogramo. Quer alterar?

B13: Não. Eu não sei como fazer a área do paralelogramo. (TRANSCRIÇÃO de 1380 a 1393).

Neste item (f), o lado de maior comprimento não está na horizontal, a altura relativa a ele não é dada, não é possível ancorar o raciocínio, nos dados do problema, mobilizando a produção de um retângulo de mesma área que o paralelogramo, usando a decomposição-recomposição. O procedimento geométrico precisa se apoiar na complementação da figura e subtração das áreas, isto é, completa adicionando as superfícies e depois subtrai o que adicionou. Casos como esse acontecem quando o lado que vai ser tomado como base é o de menor comprimento.

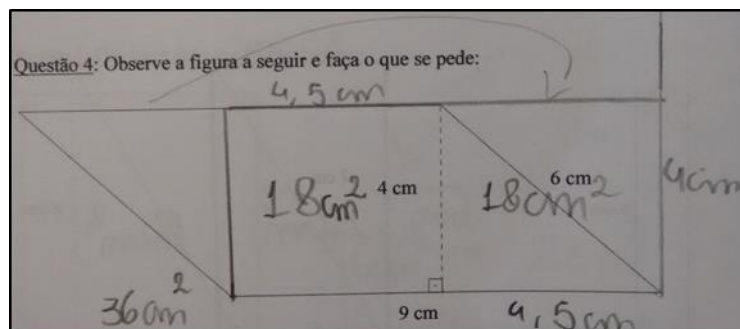
Com exceção do item (b) que teve erros de leitura nos dados, ver figura 71, ele acertou o cálculo da área dos demais paralelogramos não retângulos e não losangos utilizando o procedimento de decomposição e recomposição, conforme vemos nas figuras a seguir:

Figura 83 – Resposta do aluno B13 no item (d) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B13

Figura 84 – Resposta do aluno B13 na 4ª questão

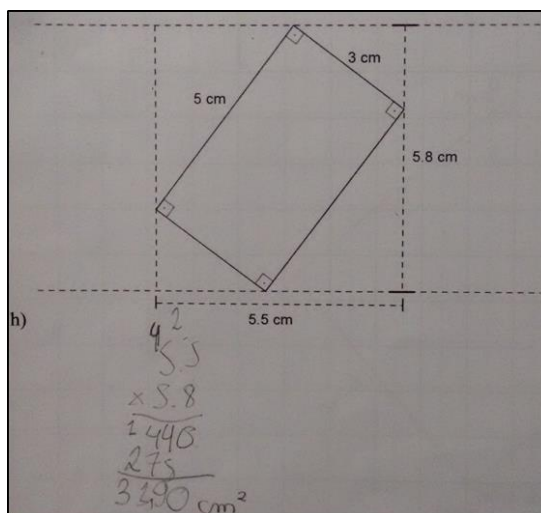


Fonte: Protocolo B13

A compreensão de como por decomposição e recomposição se resolve estes problemas, não é suficiente para calcular corretamente no caso do item (f). Por isso percebemos a dificuldade que ele vai encontrando em argumentar ao querer decompor e recompor a figura.

Quanto ao aluno B19, o motivo para entrevistá-lo consistiu na confirmação de procedimento esperado em nossa análise a priori no que se refere ao erro na escolha dos dados no item (h) da terceira questão.

Figura 85 – Erro na escolha dos dados no item (h) da 3ª questão



Fonte: Protocolo B19

Como esperávamos, ele calculou a área do retângulo formado pelos traçados auxiliares. Percebemos também um erro do ponto de vista da álgebra das grandezas, pois ele multiplicou números e obteve uma grandeza (área) como resultado.

Na entrevista perguntamos como ele pensou para calcular a área da figura do item (h) e falamos para ele qual figura queríamos a área:

B19: Para calcular a área, eu pensei nessas dimensões que estavam aqui, assim do lado e aqui também [apontando para as dimensões dos traçados auxiliares].

P: Você fez como?

B19: Eu multipliquei 5.5 por 5.8.

P: Certo. Aí você, veja só, a figura que estamos considerando é esse retângulo aqui, certo? [Apontado para o retângulo de dimensões 5cm e 3cm].

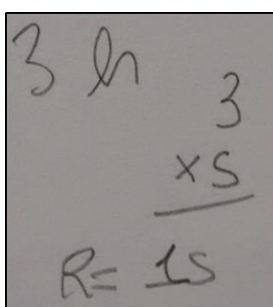
B19: Hum.

P: É, diante disso, você gostaria de alterar sua resposta?

B19: Gostaria. (TRANSCRIÇÃO de 1412 a 1420).

Vejamos os cálculos feitos por ele:

Figura 86 – Resposta dada durante a entrevista ao item (h) da 3ª questão



The image shows a handwritten calculation on a piece of paper. At the top left, there is a '3' followed by a handwritten 'h'. To the right of this, there is a vertical multiplication: the number '3' is written above 'x 5', and a horizontal line is drawn below 'x 5'. Below the line, the result '15' is written. At the bottom left, the text 'R= 15' is written.

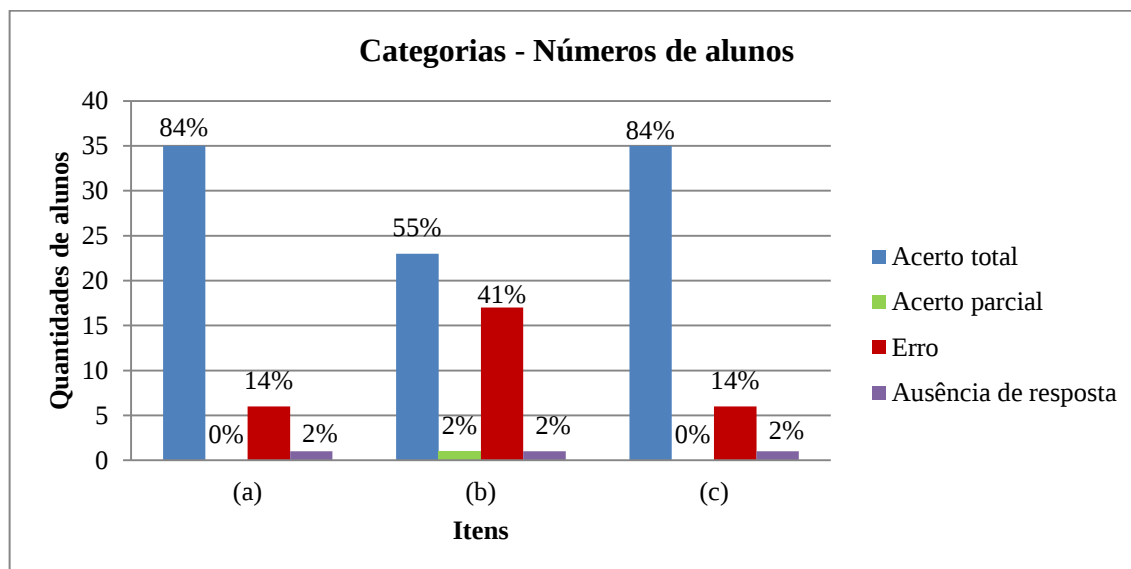
Fonte: Protocolo B19

Podemos notar que ele considerou as dimensões do retângulo correto, mas ainda esqueceu a unidade de medida, que se caracteriza como outro erro de álgebra das grandezas.

4.4 COMO OS PARTICIPANTES DA PESQUISA LIDAM COM A PRODUÇÃO DE FIGURAS DE MESMA ÁREA QUE UM PARALELOGRAMO DADO?

Na análise da quarta questão consideramos como acerto total a produção correta de cada questão com área igual à da figura dada; o erro é considerado quando ocorre a produção incorreta da questão ou quando a figura produzida possui área diferente da solicitada; na ausência de respostas, a questão é deixada em branco. Em apenas um caso consideramos um acerto parcial, no qual o aluno produziu a figura corretamente e com a área solicitada, errando apenas por esquecer de acrescentar um quadradinho da malha na diagonal maior do losango produzido.

Gráfico 5 – Resultado do teste por itens na 4ª questão

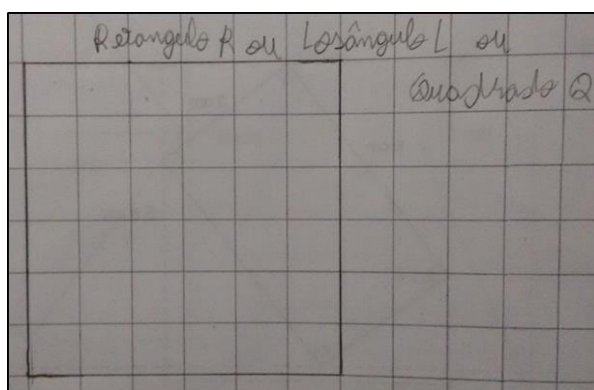


Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, a dificuldade maior concentrou-se na produção do losango, em que os alunos precisavam relacionar as medidas das diagonais com a área do paralelogramo dado. Bernardes, Souza e Zandonade (2014) também verificaram em sua pesquisa que a dificuldade no losango foi maior, tanto na produção da figura quanto na relação entre as diagonais e sua área. Nos estudos de Souza (2010) e Paula (2011) as maiores dificuldades também se concentram nesse tipo específico de paralelogramo. A ausência de respostas acima é de um mesmo aluno, o B1.

A produção de um quadrado de comprimentos dos lados medindo 6 cm seria uma das respostas corretas esperadas para essa questão. Apenas dois alunos a responderam assim. Vejamos um exemplo:

Figura 87 – Consideração da inclusão de classes na 4ª questão



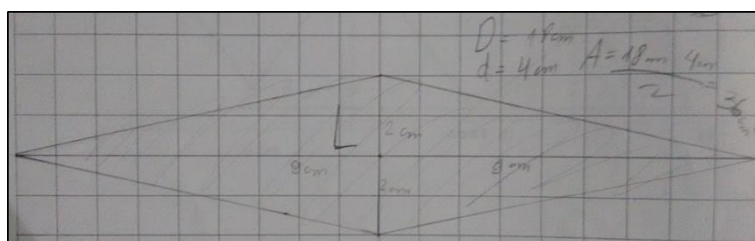
Fonte: Protocolo B8

Observamos as respostas dadas por eles na primeira questão, na qual eles incluem os quadrados ao identificarem retângulos e losangos. Um deles não inclui o losango não quadrado (O) em posição não prototípica.

Seis sujeitos produziram um quadrado como resposta apenas para os itens (b) e (c), embora todos tenham incluído os quadrados ao identificarem os retângulos. Desses seis, apenas um não incluiu o quadrado na identificação de losangos, mesmo tendo considerado essa inclusão na resposta do quarto quesito. Três deles acertaram a inclusão na primeira questão e a outra metade obteve acertos parciais por não incluírem um ou mais losangos, principalmente o (O).

Observamos que 83% dos alunos têm acerto total na produção de um retângulo e de um quadrado de mesma área que um paralelogramo não retângulo e não losango, e 55% dos sujeitos encontram um losango de mesma área que o paralelogramo dado. Dos 23 alunos que responderam corretamente ao item (b) dessa questão, 15 produziram um losango não quadrado, sendo 9 com a diagonal maior na horizontal e 6 com ela na vertical, conforme figuras abaixo:

Figura 88 – Produção de losango não quadrado com a diagonal maior na horizontal na 4ª questão



Fonte: Protocolo B6

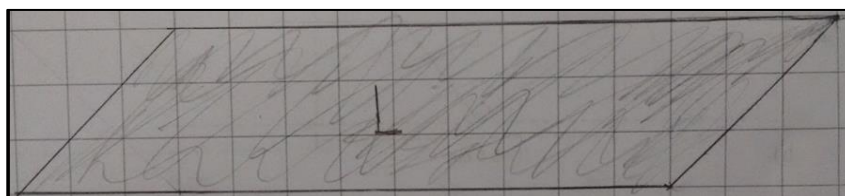
Figura 89 – Produção de losango não quadrado com a diagonal maior na vertical na 4ª questão



Fonte: Protocolo A14

Como já mencionado, a dificuldade maior concentrou-se na produção do losango, vejamos um exemplo de erro:

Figura 90 – Dificuldade na produção do losango na 4ª questão

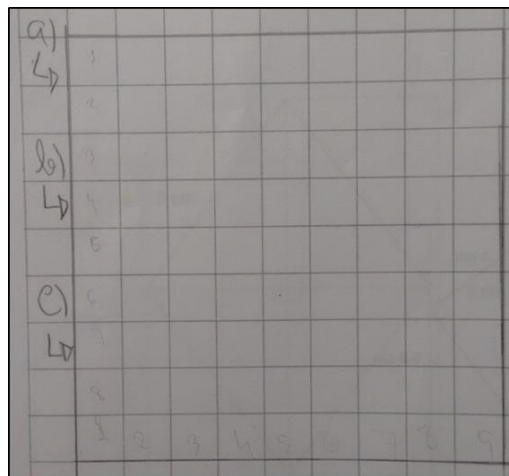


Fonte: Protocolo A3

Percebemos que o aluno produz um paralelogramo não retângulo e não losango quando solicitado a produzir um losango. Acreditamos que as dificuldades em relacionar a área da figura dada e as diagonais do losango o tenham conduzido a essa produção.

Nessa questão também verificamos erros de cálculo numérico e de cálculo relacional. Neste último, o aluno produziu uma figura com o número associado ao perímetro (36) igual ao número associado à área (36), conforme protocolo abaixo:

Figura 91 – Erro de cálculo relacional na 4ª questão



Fonte: Protocolo A13

Esse aluno produz um quadrado que, tomando o comprimento do quadradinho como unidade, o número que expressa o perímetro dessa figura usando essa unidade é igual ao número que expressa a área dela (com o quadradinho como superfície unitária). E afirma que: “a figura desenhada atende todos os pedidos”. O erro consistiu no perímetro e não na produção da figura, pois, como vimos em nossa análise a priori, a produção de um quadrado com área igual à da figura dada responderia a todos os itens da questão. Diante da afirmação acima dada por esse aluno, decidimos observar suas respostas na questão de identificação e

percebemos que ele inclui quadrados ao classificar retângulos e losangos, porém, comete um pequeno erro ao incluir um paralelogramo não retângulo e não losango nos losangos.

Quanto às entrevistas, foram realizadas com os alunos A13, A16, A17, B4 e B25, este último já discutido na análise da primeira questão.

Quadro 14 – Alunos e critérios para entrevista na 4ª questão

<u>Aluno</u>	<u>Critério</u>
A13	Entender a resposta da quarta questão (possível confusão entre área e perímetro, conforme previsto na análise a priori).
A16	Esclarecer erros de leitura no item (d) da terceira questão e entender como fez para calcular a área da figura dada na quarta questão.
A17	Entender a figura produzida no item (b) da quarta questão.
B4	Entender como pensou para produzir o losango no item (b) da quarta questão.
B25	Entender como identificou as figuras na primeira questão e como calculou a área da figura dada na quarta questão. Confrontar figuras desenhadas no quarto (confusão entre retângulo e paralelogramo não retângulo, e quadrado e losango não quadrado com medidas dos comprimentos dos lados diferentes) com as assinaladas na primeira questão, confirmando o previsto na análise a priori (não incluir quadrados ao identificar retângulos e losangos).

Fonte: acervo da pesquisa

O aluno A13 produziu um quadrado (ver figura 91) com o número associado ao perímetro (36) igual ao número associado à área (36) da figura dada, cometendo um erro de cálculo relacional, como já discutido anteriormente. Como essa era uma resposta prevista na análise a priori, vinculada a um erro amplamente estudado nas pesquisas anteriores, relacionado à confusão entre área e perímetro, buscamos confirmá-la ou não por meio da entrevista.

P: Sim, aí no caso, pronto, é, a figura que você desenhou, você escreveu aqui que “a figura desenhada atende todos os pedidos”, como foi que você pensou para desenhar essa figura?

A13: Bom, é, ele manda desenhar um retângulo com a mesma área, então eu fiz a conta para ter a mesma área aqui, e um quadrado é um retângulo. Depois ele pede um losango e que eu me lembre, um losango também é um, pode ser um quadrado, e desenha um quadrado com a mesma área, então um quadrado já resolvia todas as questões.

P: Aí você considerou que um quadrado é retângulo e losango, e resolve?!

A13: Isso.

P: E a figura desenhada, você considera que possui mesma área que essa figura aqui?

[Se referindo à figura dada].

A13: Sim.

P: Está certo, A13. Acho que era isso que...

A13: Certo.

P: ... aí como foi que você fez para calcular essa área aí? [Se referindo à figura produzida].

A13: Eu fiz a coluna vezes a, a vertical vezes a horizontal.

P: A vertical vezes a horizontal. No caso dá... saiu colocando o [ela interrompe].

A13: Na verdade, eu acho que eu errei a conta também. Por que eu disse que dava 36, é, está errado.

P: Você acha que errou?

A13: Hurum.

P: Em que?

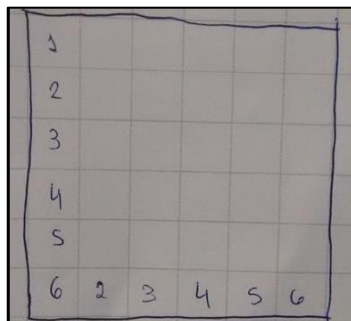
A13: Na hora de fazer a conta, porque eu coloquei nove e nove, então vai dar 81 e a área é 36, então era só para ser até seis.

P: Aí você gostaria de alterar?

A13: Hurum. (TRANSCRIÇÃO de 341 a 368).

Como vemos na fala do aluno, ele não explicita nada sobre perímetro. Embora tenhamos pensado e previsto de uma forma, o sujeito entrevistado aponta apenas que errou. Ele considerou a inclusão, isto é, que a figura do quadrado já atenderia ao solicitado, mas confundiu alguns cálculos e refez da seguinte maneira:

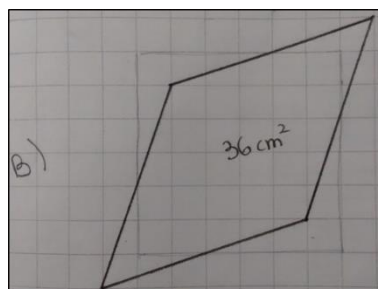
Figura 92 – Resposta dada durante a entrevista para os itens (a), (b) e (c) da 4ª questão



Fonte: Protocolo A13

Interpretamos a figura produzida pelo aluno A17 no item (b) como se ele tivesse feito considerando um aspecto dinâmico, isto é, diminuindo uma das diagonais do losango, automaticamente aumentava a outra, vejamos:

Figura 93 – Figura produzida no item (b) da 4ª questão



Fonte: Protocolo A17

Como vemos, ele desenhou um quadrado e “achadou” a diagonal menor do losango e “esticou” a diagonal maior. Realizamos a entrevista para entender esse procedimento e confirmar ou não nossa interpretação inicial.

P: Ah, para fazer o lado, entendi. E nesse, o (b), não é, o losango?

A17: Esse eu fiz mais por tipo, desenho do que por raciocínio, porque tipo, nesses daqui [se referindo ao retângulo e ao quadrado] foi mais pensar, ah raiz quadrada de 36, nesse aqui [se referindo ao losango] eu fiquei no começo um pouquinho sem saber o que fazer, então tipo, eu meio que desenhei o quadrado e fui completando pela imagem, tipo, tanto que tem um quadrado aqui no fundo.

P: Sim.

A17: Eu fui vendo aqui, tipo, é, sei lá.

P: Cuidado para não riscar viu [se referindo ao teste].

A17: É, tal coisinha compensa tal coisinha, tal coisinha compensa, eu fui fazendo assim até finalizar [se referindo aos quadrados que completam os outros].

P: Ah você foi, desenhou o quadrado e depois foi vendo.

A17: É, por exemplo, calma. O quadrado 36, então eu tinha que fazer aqui um negócio igual, então eu tinha que botar isso aqui [apontando para o quadrado no fundo do losango produzido].

P: Sim.

A17: Aí, tipo, é, esse quadrado compensa com, como? O que é que eu estava fazendo mesmo? [Fica em dúvida e pensa um pouco]. Com esse negocinho mais esse negocinho. Não, espera, não, não, é, esse negocinho mais esse negocinho, é esse quadrado, esse negocinho mais esse negocinho. Isso aqui, esse mais esse mais esse dá um quadrado [se referindo aos quadrados não inteiros que se complementam] entendesse? Aí eu vou fazendo assim.

P: Ah, entendi. Você desenhou um quadrado inicialmente, aí depois foi pegando os quadrados de fora e tentando [ela interrompe].

A17: E botando dentro.

P: Dentro desse aí [se referindo ao losango].

A17: Foi.

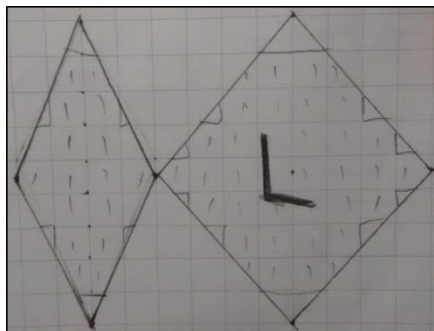
P: Entendi. Aí no caso você acha que ficou com a mesma área?

A17: Acho. (TRANSCRIÇÃO de 879 a 907).

Após a entrevista observamos que ele fez por compensação e não da forma que estávamos pensando. Embora tenha sido um procedimento interessante, verificamos que ele não conserva a área, pois, devido à imprecisão dos instrumentos utilizados, em alguns momentos compensa por excesso e em outros por falta.

O aluno B4 fez dois losangos no item (b) da quarta questão, como mostra a figura a seguir:

Figura 94 – Losangos produzidos no item (b) da 4ª questão



Fonte: Protocolo B4

A entrevista foi realizada com esse aluno para entender como ele pensou ao produzir estes losangos. Vejamos um trecho dela:

B4: Sim. Esse, é, o retângulo e o quadrado foi mais fácil, o problema aqui foi o losango.

P: Certo. Como foi que você pensou?

B4: É, que se tem uma parte faltando aqui que ele está incompleto, somando com outra [mostrando os quadrados não inteiros na malha], vai, vai dar um quadrado, ou seja, vai ficar com 1cm^2 . Aí tentei somar até dar 36. Eu não sei se isso nesse daqui está certo, mas foi o que eu consegui.

P: Como foi que você pensou para fazer dois, o que, como é que você, os dois são a resposta, é isso? [Apontando para os dois losangos desenhados].

B4: Não, é esse daqui [apontando para o losango representado pela letra L].

P: Esse é a resposta?

B4: Esse aqui é errado [se referindo ao losango menor] porque ele foi muito, ele não deu o mesmo número de quadrados.

P: Então, esse aqui foi uma tentativa de resposta, não é, não faz parte, não é uma resposta única os dois?

B4: Isso. (TRANSCRIÇÃO de 939 a 954).

Por estarem unidos por um ponto, inicialmente pensávamos que os dois seriam a resposta, mas, após a entrevista, percebemos que ele fez por tentativas, completando os quadrados não inteiros até obter corretamente um losango com área igual à do paralelogramo dado. Fica claro em sua fala que teve menos dificuldades na produção do quadrado e do retângulo se comparada à do losango, corroborando com as pesquisas de Bernardes, Souza e Zandonade (2014), Souza (2010) e Paula (2011).

4.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS DE ACORDO COM AS CLASSES DE FIGURAS

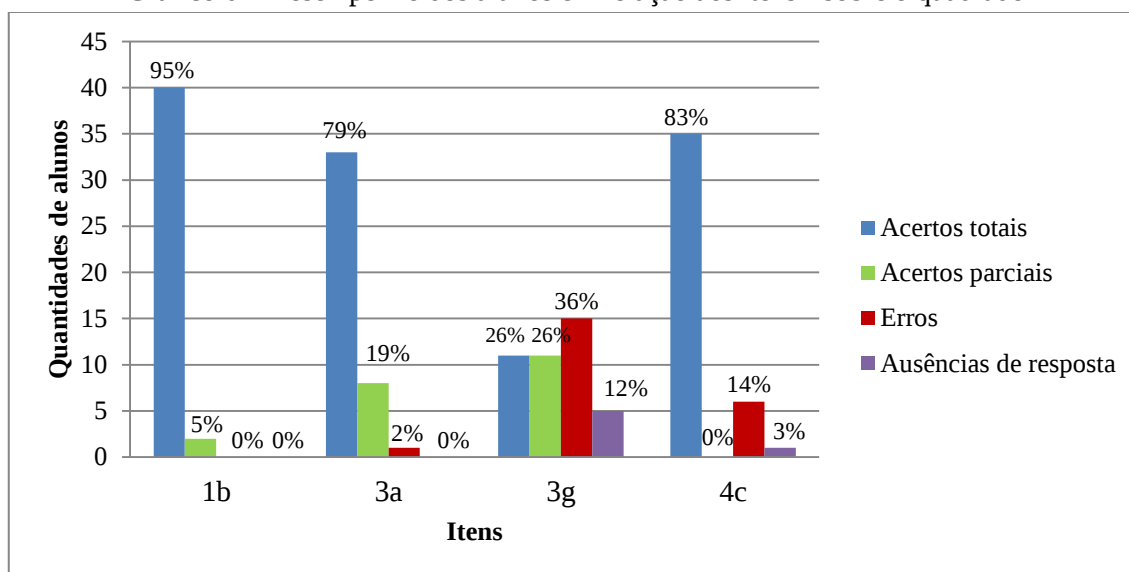
Ao fazer um recorte do resultado individual de cada aluno no teste¹⁸ em relação ao conjunto de figuras, dividimos as respostas dadas por eles nos itens das questões de identificação (1ª), medida (3ª) e produção (4ª) sobre os quadrados (1b, 3a, 3g, 4c), os

¹⁸ Tabela completa no Apêndice G desta dissertação.

retângulos (1c, 3e, 3h, 4a), os losangos (1d, 3c, 4b) e os paralelogramos não retângulos e não losangos (1a, 3b, 3d, 3f). Cabe ressaltar que na primeira questão apesar de não ter itens explícitos, consideramos cada identificação como um item, por exemplo, identificação de paralelogramos (1a), de quadrados (1b), de retângulos (1c) e de losangos (1d) para melhorar a estrutura e organização de cada gráfico.

Vejamos o desempenho dos alunos referente aos quadrados:

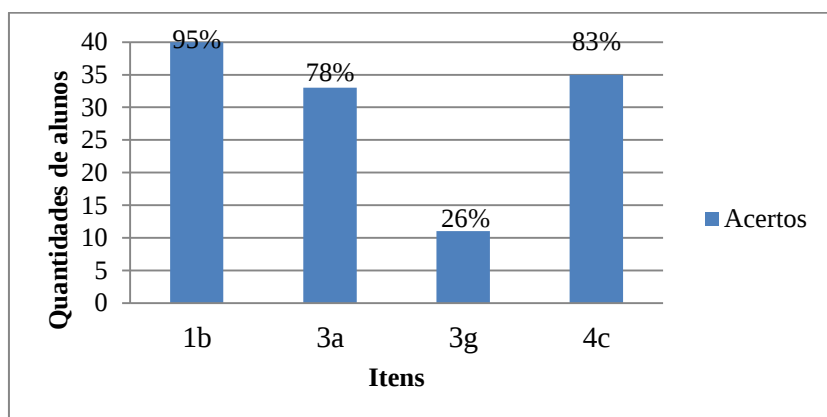
Gráfico 6 – Desempenho dos alunos em relação aos itens¹⁹ sobre o quadrado



Fonte: dados da pesquisa

Juntando os acertos das questões de identificação (1b), de cálculo da área (3a, 3g) e de produção (4c), todas envolvendo o quadrado, temos:

Gráfico 7 – Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre quadrados



Fonte: dados da pesquisa

¹⁹ 1b (identificação de quadrados), 3a (cálculo da área do quadrado em posição prototípica), 3g (cálculo da área do quadrado em posição não prototípica, dado o comprimento da diagonal) e 4c (produção de quadrados).

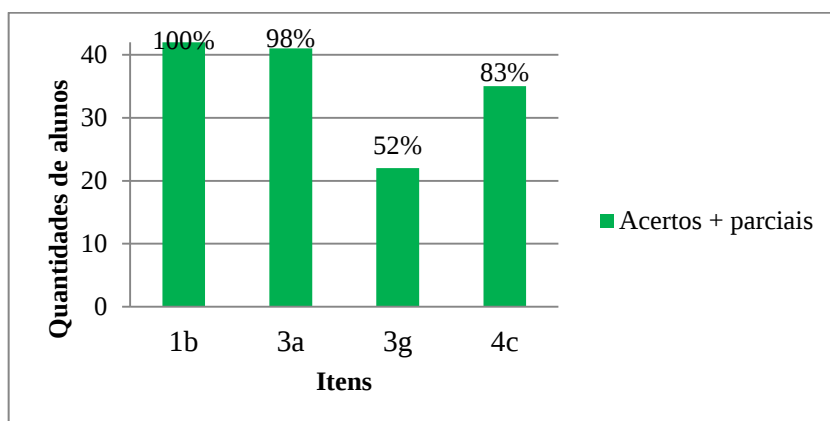
Percebemos que das 168 respostas dadas aos itens acima sobre os quadrados nas questões de identificação, medida e produção, 119 foram corretas, o que corresponde a 71% de acertos nas tarefas que envolvem a identificação de quadrados ou a sua área.

Notamos que os alunos têm um bom desempenho nas situações que contemplam o quadrado, com exceção do caso em que é dado o comprimento da sua diagonal. Os melhores resultados estão na questão de identificação e na de produção, nas quais 95% e 83% dos alunos acertaram.

A terceira questão tem um índice elevado (78%)²⁰ no caso em que a figura se encontra em sua posição prototípica, tendo uma diferença considerável para o item em que ela não está em sua posição habitual e o dado fornecido não é o comprimento do lado, mas sim, a da diagonal, fato que voltaremos a discutir mais adiante.

Somando os acertos parciais e totais, temos:

Gráfico 8 – Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre quadrados

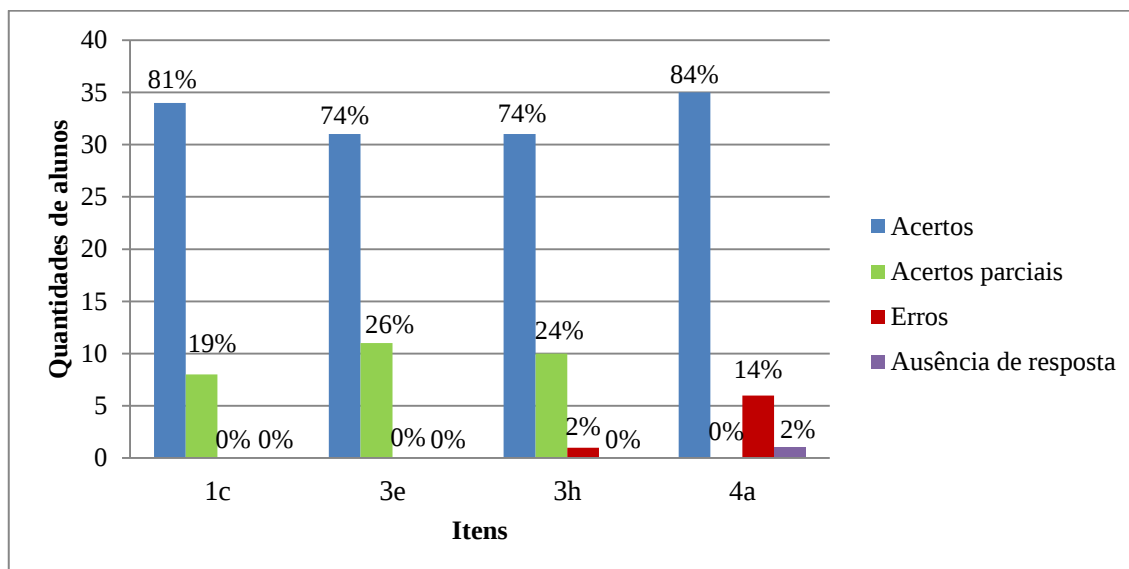


Fonte: dados da pesquisa

Observamos que o item (g) da terceira questão foi o que teve o menor percentual de acertos (totais e parciais), com uma diferença significativa para o caso prototípico (3a).

Vejamos o desempenho dos alunos em relação aos retângulos:

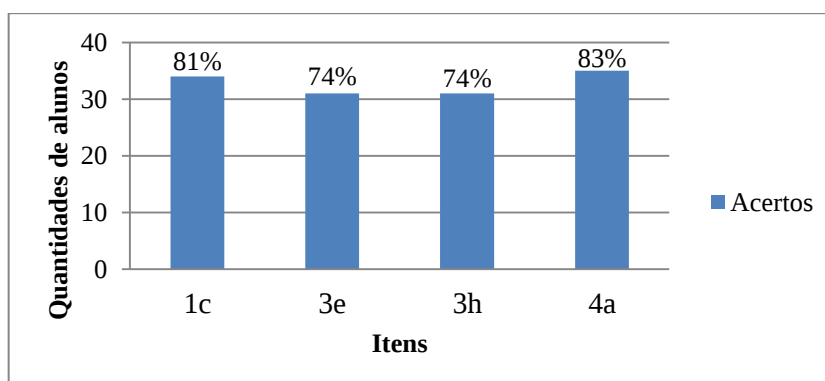
²⁰ No gráfico 6 esse índice está 79% porque houve um arredondamento automático do programa para que a soma dos outros percentuais totalizasse 100%. Como no gráfico 7 os demais percentuais não aparecem, o programa manteve os 78%. Seu valor sem arredondamentos é de aproximadamente 78,57%. O mesmo vale para outros casos em que aparecerem essa pequena diferença nos valores apresentados nos gráficos.

Gráfico 9 – Desempenho dos alunos em relação aos itens²¹ sobre o retângulo

Fonte: dados da pesquisa

Juntando apenas os acertos totais, temos:

Gráfico 10 – Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre retângulos



Fonte: dados da pesquisa

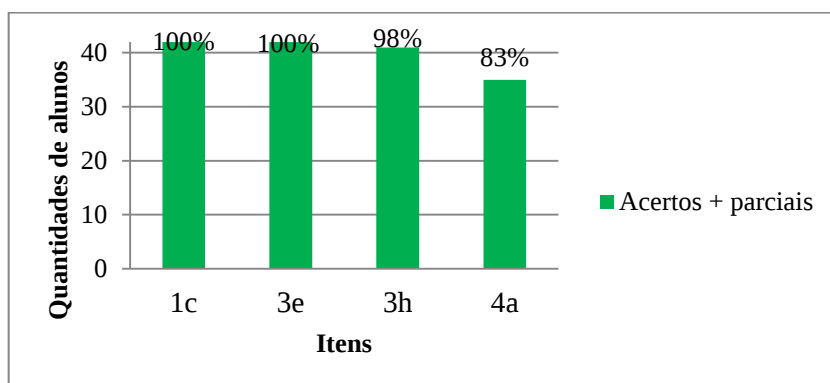
Os itens em relação ao retângulo também totalizam 168 respostas, das quais 131 foram corretas, o que corresponde a 78% de acertos totais.

Assim como no caso dos quadrados, nos retângulos os alunos apresentam bons desempenhos, ainda um pouco melhor que o da figura anterior, na identificação, medida e produção, inclusive no caso em que os lados estão em posição não prototípica e há dados supérfluos.

²¹ 1c (identificação de retângulos), 3e e 3h (cálculo da área de retângulos em posição não prototípica, este último com dados extras) e 4a (produção de retângulos).

Vejamos o desempenho dos alunos juntando acertos parciais e totais nas questões consideradas:

Gráfico 11 – Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre retângulos

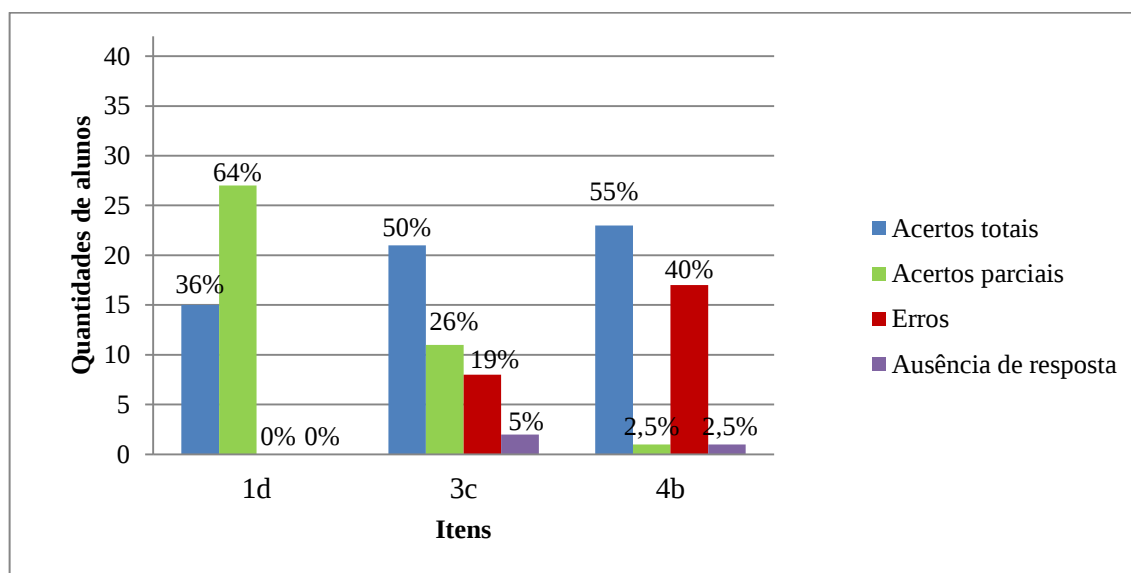


Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que o desempenho nas questões sobre a identificação de retângulos e sobre a área do retângulo é bem satisfatório, sem diferenças marcantes nas situações e nos dados e/ou posições da figura.

Passemos às respostas dadas aos itens sobre os losangos:

Gráfico 12 – Desempenho dos alunos em relação aos itens ²²sobre o losango



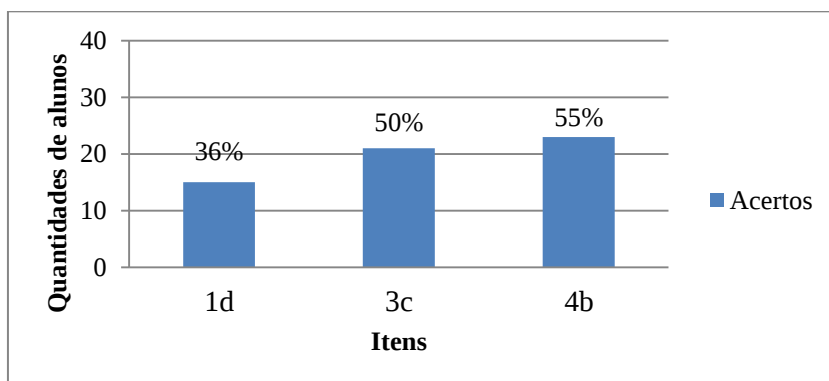
Fonte: dados da pesquisa

Diferentemente dos dois casos anteriores, os losangos estão presentes em três itens e não em quatro como nas demais figuras.

²² 1d (identificação de losangos), 3c (cálculo da área do losango em posição prototípica com dados extras) e 4b (produção de losangos).

O quantitativo de acertos no conjunto de questões segue abaixo:

Gráfico 13 – Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre losangos



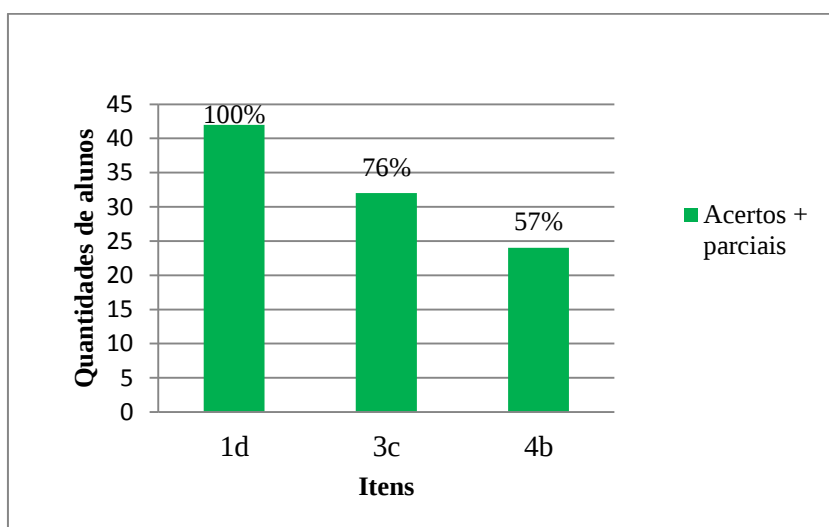
Fonte: dados da pesquisa

Temos 126 respostas e, deste total, há apenas 47% de acertos, o que corresponde a 59 respostas corretas.

Quando observamos os percentuais de acerto do quadrado e do retângulo – 71% e 78%, respectivamente – notamos que há uma diferença marcante no tratamento dado ao losango se comparado às figuras anteriores, uma vez que menos da metade das respostas dadas estavam corretas.

A identificação de losangos tem o menor número de acertos. Já as situações de medida e de produção tem um índice maior ou igual à metade, com pouca diferença entre ambos.

Gráfico 14 – Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre losangos

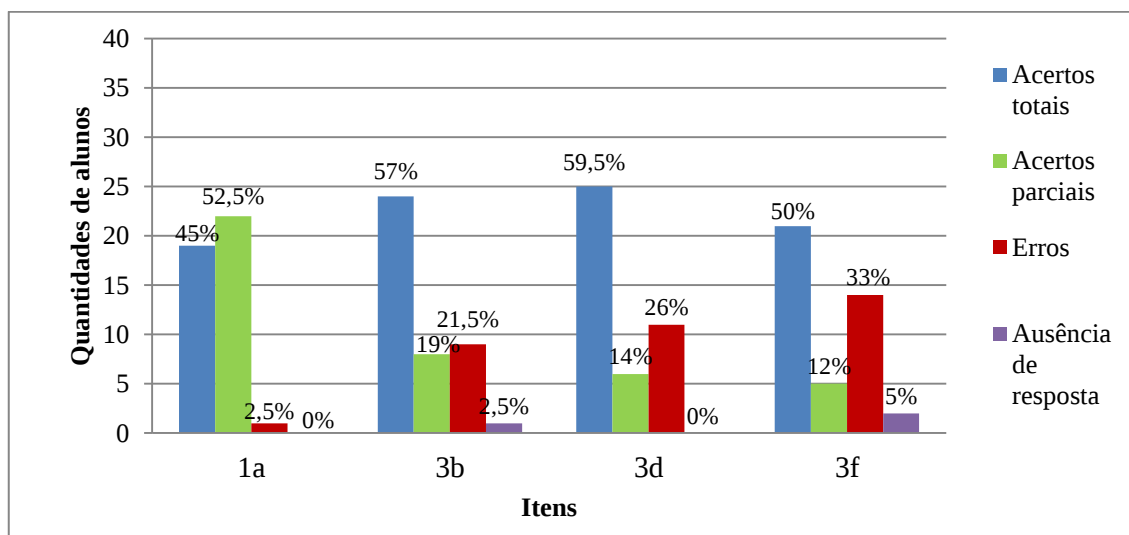


Fonte: dados da pesquisa

Quando somados acertos parciais e totais, o item sobre identificação atinge o percentual máximo, ficando o de produção com menor índice.

E sobre os paralelogramos não retângulos e não losangos? Vejamos:

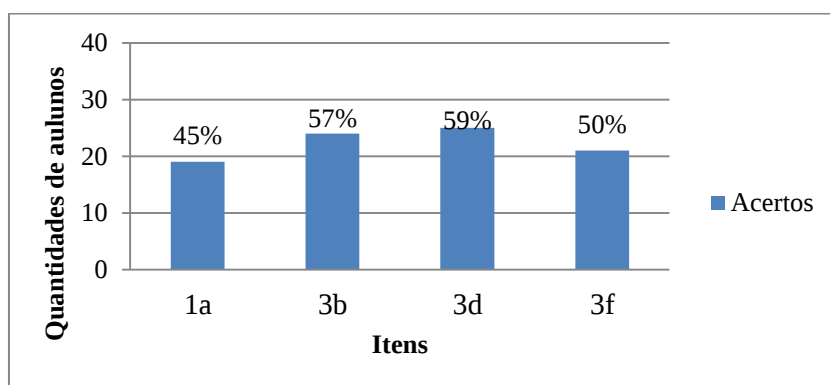
Gráfico 15 – Desempenho dos alunos em relação aos itens²³ sobre o paralelogramo não retângulo e não losango



Fonte: dados da pesquisa

Vejamos o agrupamento dos acertos plenos:

Gráfico 16 – Quantitativo de alunos que acertaram nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre paralelogramos não retângulos e não losangos



Fonte: dados da pesquisa

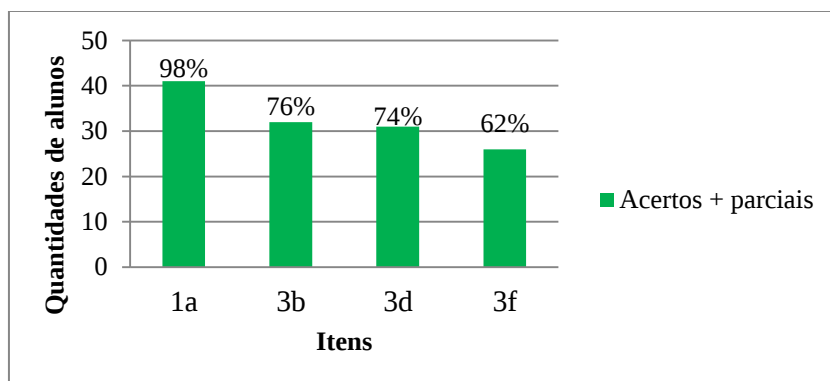
Das 168 respostas dadas aos quatro itens envolvendo o paralelogramo não retângulo e não losango, 89 foram corretas, o que corresponde a 53% de acertos.

²³ 1a (identificação de paralelogramos), 3b (cálculo da área do paralelogramo não retângulo e não losango em posição prototípica), 3d e 3f (cálculo da área de paralelogramos não retângulos e não losangos em posição não prototípica e com dados extras).

Diante dos dados acima, percebemos que não há diferenças marcantes no quantitativo de acertos referentes aos itens que envolvem os paralelogramos não retângulos e não losangos nas situações de identificação, medida e produção.

Em relação à soma de acertos parciais e totais, temos:

Gráfico 17 – Quantitativo de alunos que acertaram total ou parcialmente nas questões 1, 3 e 4 os itens sobre paralelogramos não retângulos e não losangos



Fonte: dados da pesquisa

Fazendo um ordenamento crescente dos percentuais de respostas certas no conjunto de questões, obtemos: losango (47%), paralelogramo não retângulo e não losango (53%), quadrado (71%) e retângulo (78%). Tais resultados apontam para uma dificuldade maior em situações de identificação, de medida e de produção envolvendo o losango (índices de acertos abaixo da metade) e o paralelogramo não retângulo e não losango (índices de acerto um pouco maior que a metade). O desempenho torna-se mais satisfatório quando as figuras envolvidas nessas situações são o quadrado e o retângulo.

Ao observarmos todos os itens das questões do teste, resolvemos agrupar aqueles em que os alunos tiveram um percentual²⁴ de acertos acima de 70%, conforme quadro abaixo:

Tabela 1 – Itens com percentual de acertos acima de 70%

<u>Itens</u>	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3e	3h	4a	4c
<u>Percentual</u>	95%	81%	83%	88%	95%	81%	95%	78%	74%	74%	83%	83%

Fonte: dados da pesquisa

Os itens em que 95% dos alunos acertaram se referem à identificação de quadrados (1b), comparação entre retângulo e losango na mesma malha, ambos em posição prototípica (2c) e comparação envolvendo um retângulo com o lado de maior comprimento na vertical e

²⁴ Tabela completa no Apêndice H desta dissertação.

um quadrado em posição prototípica, presentes na mesma malha (2e). Na comparação entre um retângulo em posição prototípica e um quadrado em posição não habitual, ambos na malha de 1 cm (2b), 88% dos sujeitos conseguiram acertar. Ao comparar retângulos em posições prototípicas presentes em malhas diferentes (2a), e ao produzir retângulos (4a) e quadrados (4c), 83% dos alunos acertaram. Na identificação de retângulos (1c) e na comparação entre paralelogramo não retângulo e não losango, e retângulo, ambos em posições não prototípicas e em malhas diferentes (2d), 81% dos sujeitos tiveram sucesso. O cálculo da área de um quadrado em posição prototípica (3a) foi acertado por 78% dos alunos. Ao calcular a área de retângulos em posições não prototípicas e um deles contendo dados extras, 74% deles acertaram.

Percebemos, salvo algumas exceções que veremos adiante, que a identificação do quadrado é bem dominada, inclusive em posições não prototípicas, e a produção de um quadrado de área igual à de um paralelogramo também tem uma taxa de desempenho boa, resultados já apresentados anteriormente. O mesmo vale para as comparações em que ele aparece e para o cálculo de área dele, em posição prototípica. Da mesma forma, as situações de identificação, comparação, medida e produção nas quais aparece a figura do retângulo também observamos bons resultados dos alunos. Os losangos e os paralelogramos não retângulos e não losangos só apareceram na situação de comparação.

De modo geral, levando em consideração o tipo de figura e a situação, podemos observar que o desempenho dos alunos, considerando o recorte (acima de 70% de acertos), é bom em todas as situações em que as figuras em jogo são o quadrado e o retângulo. Quando entram em cena os losangos e os paralelogramos não retângulos e não losangos, esse desempenho restringe-se à situação de comparação.

Tabela 2 – Itens com percentual de acertos parciais acima de 50%

<u>Itens</u>	1a	1d
<u>Percentual</u>	52%	64%

Fonte: dados da pesquisa

Na situação de identificação de paralelogramos (1a) e de losango (1d), mais da metade dos alunos tiveram acertos parciais, 52% e 64%, respectivamente. Isso indica que os sujeitos ainda estão em processo de aprimoramento de seu repertório de esquemas para lidar com esse tipo de situação, envolvendo tais figuras.

Tabela 3 – Itens com percentual de erros acima de 25%

<u>Itens</u>	2f	3d	3f	3g	4b
<u>Percentual</u>	33%	26%	33%	36%	40%

Fonte: dados da pesquisa

Na comparação entre retângulo e paralelogramo não retângulo e não losango, ambos em posição prototípica e em malhas diferentes (2f), 33% dos alunos erraram. O cálculo de área de paralelogramos não retângulos e não losangos com dados extras e em posições não prototípicas (3d) foi fonte de erros por 26% deles. Esse índice sobe para 33% quando a altura é externa (3f).

A única exceção em relação ao quadrado foi no cálculo da área, dado o comprimento da diagonal (3g), na qual 36% dos sujeitos erraram. Percebemos que embora muitos alunos identifiquem os quadrados como losangos, esse conhecimento sobre a classificação de quadriláteros não foi reinvestido nesse item, ou seja, não foi reconhecido como um conceito em ação pertinente na situação. Cabe ressaltar que, nessa questão, como sinalizado na análise a priori, acreditamos que exista uma falha na formulação, pois assinalamos os ângulos, mas não há marcas que sustentem a igualdade dos comprimentos.

O índice maior de erro (40%) encontra-se na produção de um losango (4b). Percebemos que a situação de identificação não aparece como tendo altos índices de erros.

Por fim, cabe ressaltar que dada a riqueza dos dados ainda há muito o que explorar como, por exemplo, olhar de maneira sistemática e mais detalhada aluno por aluno no conjunto de questões do teste, o que fica para pesquisas futuras.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho está inserido no conjunto de investigações desenvolvidas pelo grupo Pró-Grandezas – ensino e aprendizagem das grandezas e medidas – da UFPE que, desde 2000, vem se dedicando aos estudos sobre a didática das grandezas, em especial, das grandezas geométricas: área, volume, comprimento e abertura de ângulo. Nesse sentido, adotamos a abordagem do conceito de área com uma grandeza autônoma, conforme o modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989), o qual busca distinguir a área da superfície, bem como a área do número associado a ela.

Além do campo das grandezas e medidas, o da geometria também ganha destaque em nosso trabalho, pois as grandezas geométricas, no caso a área, fazem um elo entre esses dois importantes campos de estudos, conforme enfatizado por Lima e Carvalho (2010).

Tomamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1990) e seus colaboradores, a partir da qual, ao considerarmos a área como um conceito, devemos levar em consideração um conjunto de situações que dão sentido a ela, um conjunto de invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) mobilizados no tratamento de tarefas relativas à área de uma figura e, por último e não menos importante, um conjunto de representações simbólicas referentes a esse conceito.

Em relação às situações, consideramos para este trabalho as propostas por Baltar (1996) que são comparação de área, medida de área e produção de superfícies. Além dessas, resolvemos trabalhar também com a situação de identificação de paralelogramos.

Com a realização da revisão de literatura voltada para a identificação, percebemos algumas dificuldades de alunos - e, em alguns casos, de professores - comuns nos diferentes trabalhos, tais como: dificuldades na classificação dos quadriláteros, especialmente paralelogramos e losangos (PASSOS, 2000, DINIZ, 2013, TAVARES, 2014); dificuldades na definição de paralelogramos e em dar exemplos dessa figura (PIROLA et al., 2004, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015); confusão entre paralelogramos e trapézios (PIROLA et al., 2004, MESQUITA et al., 2013, COSTA, 2016, TELES, 2007); influência da posição das figuras na sua identificação e classificação (PASSOS, 2000, MENEGOTTO; LARA, 2011, DINIZ, 2013, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015); não reconhecimento do quadrado como retângulo (TAVARES, 2014, COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015, COSTA, 2016); confusão entre trapézio e losango (COSTA, 2016).

Em relação às pesquisas direcionadas para o cálculo de área de figuras planas, observamos: predominância do tratamento numérico nas situações sobre área (BARROS, 2006, TELES, 2007, FERREIRA, 2010, PESSOA, 2010, SANTOS, 2010, PAULA, 2011, SILVA, 2011, SANTOS, 2015, SILVA, 2016); dificuldade com relação ao tipo de figura, especialmente o losango (SANTOS, 2010, PAULA, 2011, BERNARDES; SOUZA; ZANDONADE, 2014).

Estudos voltados para o cálculo da área do paralelogramo (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, SANTOS, 2005, SOUZA, 2013, entre outros) apontam dificuldades dos alunos franceses e brasileiros, como confusões entre as variações da área e do perímetro por considerarem que os paralelogramos são retângulos deformados, não os reconhecer em outra posição e emprego de fórmulas erradas.

Algumas dificuldades são mais gerais e também são investigadas na maioria das pesquisas relatadas anteriormente, tais como dificuldade e confusão entre os conceitos área e perímetro e, também, o uso inadequado e/ou a ausência das unidades de medida.

Frente aos resultados anteriores e por acreditarmos que a identificação tem influência sobre o cálculo da área, no sentido de que reconhecer a figura ajuda no momento de tomar os elementos geométricos necessários para os cálculos, optamos por realizar uma pesquisa que contemplasse aspectos da identificação (geometria) e do cálculo de área de paralelogramos (grandezas e medidas) com o seguinte objetivo: analisar como alunos do 8º ano do Ensino Fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos (quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos).

Nosso primeiro objetivo específico era verificar se os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental reconhecem quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos não retângulos e não losangos em configurações e posições não prototípicas. Observamos que mais de 80% dos participantes da pesquisa reconhecem os quadrados e os retângulos em posições não habituais, mais precisamente, 95% e 81%, respectivamente. Já os paralelogramos não retângulos e não losangos são reconhecidos por apenas 45% deles, e a dificuldade aumenta mais no caso do losango que é de apenas 36% o percentual de acertos. Tais resultados confirmam o que apontam as pesquisas de Passos (2000), Diniz (2013), Tavares (2014), entre outras.

Quanto ao segundo objetivo específico, pretendíamos verificar a influência de variáveis (tipo de situação, tipo de paralelogramo e dados fornecidos) sobre o desempenho desses alunos na resolução de tarefas sobre a área de paralelogramos. Quanto ao tipo de

situação, percebemos que a de produção e a de comparação foram as únicas em que metade ou um pouco mais, acertaram, 55% e 50%, respectivamente. A situação de medida foi a que teve o menor número de acertos (12%), seguida da de identificação (24%), fato que de certa forma confirma nossa hipótese inicial, no sentido de que bons desempenhos ao identificar contribuem para calcular a área, considerando um cruzamento entre variáveis e não a observação de cada uma isoladamente. Os paralelogramos em que os alunos tiveram o melhor desempenho foram os quadrados e os retângulos, este último sem diferenças marcantes nos casos em que a figura está em posição não prototípica e com dados extras. A única exceção para o quadrado ocorreu quando foi dado o comprimento da sua diagonal, na qual apenas 26% dos alunos acertaram, diferentemente do resultado no caso habitual que foi de 78% de acertos. A dificuldade maior foi na figura do losango, com menor número de acertos na questão de identificação (36%), seguida do paralelogramo não retângulo e não losango, o qual não teve diferenças relevantes nos tipos de situações. Os dados fornecidos influenciaram mais no caso em que a altura do paralelogramo não retângulo e não losango é externa, o que levou a apenas metade dos alunos acertarem. O outro fato foi a diagonal do quadrado, que já relatamos antes.

O terceiro objetivo específico era identificar os procedimentos e os teoremas em ação mobilizados por eles no tratamento de tarefas relativas à área de paralelogramos. Os seguintes procedimentos foram observados: contagem de quadradinhos no caso da situação em que aparecia a malha quadriculada, decomposição e recomposição, uso de fórmula, sobreposição, inclusão. Identificamos alguns teoremas em ação verdadeiros:

- se duas figuras V' e V são semelhantes, com razão de semelhança diferente de 1, então as áreas de V e V' são diferentes;
- figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais;
- se duas figuras V e V' podem ser ladrilhadas com uma mesma quantidade de superfícies unitárias idênticas U , então as áreas de V e V' são iguais;
- sejam duas figuras V e V' e duas superfícies unitárias U e U' de áreas distintas. Se a medida da área de V utilizando a unidade definida por U e a medida da área de V' utilizando a unidade definida por U' são iguais então as áreas de V e V' são diferentes;
- figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Também observamos erros que interpretamos como manifestação de teorema-em-ação falso: retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes.

Alguns desses foram confirmados por meio da entrevista de explicitação que, além disso, possibilitou validar procedimentos esperados na análise a priori, verificar erros de leitura nas questões, confrontar respostas de alunos reais e fictícios, entre outros.

No que se refere ao quarto e último objetivo específico, tratava-se de averiguar se há diferenças marcantes no tratamento das tarefas sobre uso de fórmulas, cálculo de área e identificação, nos casos das famílias de figuras (quadrados, retângulos, losangos ou paralelogramos não retângulos e não losangos). Os resultados mostram que o desempenho global dos alunos é acima de 70% de acertos quando as figuras em jogo são o quadrado e o retângulo. Quando consideramos os losangos e os paralelogramos não retângulos e não losangos, esse desempenho restringe-se apenas à situação de comparação. Sobre o uso de fórmula, já enfatizamos a dificuldade quando foi dado apenas o comprimento da diagonal em um quadrado. Em relação ao cálculo de área e à identificação, também apontamos anteriormente que tiveram o menor percentual de acertos, principalmente na de medida, a qual foi fonte maior de erros decorrentes da álgebra das grandezas (multiplicação de números e obter grandezas como resultado, ausência e/ou utilização inadequada das unidades de medida). Alguns erros de cálculo relacional (considerar relação incorreta entre as diferentes malhas, confusão entre área e perímetro, entre outros) e de cálculo numérico também foram observados.

Nossas escolhas teórico-metodológicas atenderam às questões que a pesquisa pretendia investigar, as quais deram suporte à elaboração do instrumento de coleta de dados e à análise dos resultados encontrados, bem como à validação por meio das entrevistas.

Diante dos resultados, algumas questões se abrem: por que a figura do losango continua sendo fonte de maiores erros por parte dos alunos? Como encontra-se o ensino de paralelogramos atualmente? As aulas sobre área são pensadas levando em consideração aspectos da identificação e classificação? Como os professores trabalhariam esses dois aspectos simultaneamente?

Por fim, sugerimos que sejam elaboradas e experimentadas sequências didáticas voltadas para situações de identificação, de classificação, de comparação, de medida e de produção, que contribuam para o ensino e à aprendizagem do conceito de área de figuras planas, em especial àquelas em que apresentamos como maiores fontes de dificuldades por parte dos alunos. E que as intervenções não se restrinjam apenas a esses sujeitos. Que se possa trabalhar a elaboração e experimentação de instrumentos juntamente aos professores, levando

em consideração suas experiências, limitações e realidades encontradas diariamente em sala de aula, contribuindo assim para seu desenvolvimento e sua formação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. E. L.; BRITO LIMA, A. P. A. Negociações do contrato didático na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e na resolução da equação no 8º ano do ensino fundamental. **Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 77-102, 2013.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – UFRPE, Recife-PE, 2016.

ARAÚJO, J. C. **Situações que dão sentido ao conceito de área**: um estudo com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em relação à área do paralelogramo. Monografia apresentada a Universidade de Pernambuco – Campus Mata Norte, Curso Licenciatura em Matemática, julho, 2014.

BALTAR, P. M. **Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. (Tese Doutorado) Grenoble, França: Universidade Joseph Fourier, 1996.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 10ª edição, 2006.

BARROS, A. L. S. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. 215f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Educação. Universidade Federal Pernambuco. Recife: UFPE, 2006.

BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações problema relativas ao conceito de área. In: X ENDIPE – X Encontro de Didática e Prática de Ensino, 2000, Rio de Janeiro, **Anais... X ENDIPE**. Cd - Rom.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental** / Paula Moreira Baltar Bellemain, Paulo Figueiredo Lima. Natal: SBHMata, 2002.

BERNARDES, G. M.; SOUZA, C. S.; ZANDONADE, C. S. A construção do conceito de área por meio de atividades investigativas: uma experiência com paralelogramos no PIBID/IFES. Revista eletrônica **Sala de Aula em Foco**. Vol. 3, nº 1, 73 - 82, 2014.

BONGIOVANNI, Vincenzo. **As diferentes definições dos quadriláteros notáveis**. Matemática. Assunto: Geometria - Projeto Apoema. Editora do Brasil. Texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, publicado originalmente na Revista do Professor de Matemática (<http://www.rpm.org.br>). São Paulo: IME-USP, n. 55, p. 29-32, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **RDM**, v. 7, n. 2, p. 33-115, Paris, 1986.

CARVALHO, D. G. **Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2012.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. **Anais...** XIV CIAEM, México, 2015.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

DINIZ, L. S. Habilidades e níveis do pensamento geométrico de alunos do ensino fundamental sobre quadriláteros. **Revista Acadêmica do Campus de Marabá**, nº 1/2013 Universidade Federal do Pará.

DOUADY R.; PERRIN-GLORIAN M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. vol.20, n. 4, p. 387-424, 1989.

FACCO, S. R.; ALMOULOU, S. A. Uma abordagem de Ensino-Aprendizagem do Conceito de Área. **Anais...** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004.

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife-PE, 2010.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. **Repensando – Multiplicação e Divisão – contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 1ª edição, Proem Editora Ltda. São Paulo, 2014.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre**. Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J.B.P.F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p.167 - 200.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J.B.P.F. Geometria. In: CARVALHO, J.B.P.F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p. 135 – 166.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. CAED/UFMG, Belo Horizonte-MG, 2012.

MAIA, L. S. L. A Teoria dos Campos Conceituais: Um Novo Olhar Para a Formação do Professor. In: **Boletim GEPEM**, nº 36 - fevereiro de 2000, p. 37-46.

MENEGOTTO, G.; LARA, I. C. M. Contribuições do software GeoGebra para o estudo de paralelogramos. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.4, n.2, p. 31-55, 2011.

MESQUITA, A. N. L.; SANTOS, D. B.; SANTOS, V. M. Descobrindo o segredo das fórmulas de área. **Anais... XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba-PR, 2013.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências – V7 (1)**, pp. 7-29, 2002.

MOURA, L. K. J. **Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM. UFMT – Cuiabá-MT, 2013.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: **A Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais** / Marilena Bittar, Cristiano Alberto Muniz (organizadores). – 1. ed. – Curitiba: Editora CRV, 2009.

NETO, E. G. S.; SILVA, G. O.; TEIXEIRA FILHA, A. A.; SILVA, D. F. O conceito de área e perímetro de figuras planas para os alunos do 9º ano do ensino fundamental. **Anais... VIII Encontro Paraibano de Educação Matemática**, vol. 1, nº 2, UEPB, Campina Grande-PB, 2014.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2000.

PAULA, A. P. M. **Ensino de área de figuras planas por atividades**. 232f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012.

_____. **Parâmetros na sala de aula**. Matemática. Ensino Fundamental e Médio. Recife, 2013.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo de área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2010.

PIROLA, N. A.; CARVALHO, A. M. B.; NASCIMENTO, H. L.; MARIANI, J. M.; MONGER, W. Um estudo sobre a formação do conceito de triângulo e paralelogramo em alunos do ensino fundamental: uma análise sobre os atributos definidores e exemplos e não-exemplos. **Anais... VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife-PE, 2004.

SANTOS, L. M. S. **Cálculo de área na vida e na escola: possíveis diferenças conceituais.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão-SE, 2010.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático.** 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – UFRPE, Recife-PE, 2005.

SANTOS, M. R.; BELLEMAIN, P. M. B. A área do paralelogramo no livro didático de matemática. **Educação Matemática em Revista.** SBEM. Ano 13, nº 23. Recife, 2007.

SANTOS, M. R. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sobre a ótica da teoria antropológica do didático.** Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – UFRPE, Recife-PE, 2015.

SILVA, A. D. P. R. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2016.

SILVA, J. V. G. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2011.

SOUZA, E. R. **Análise de estratégias de alunos do ensino médio em problemas de cálculo de área do paralelogramo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2013.

TAVARES, C. V. A. **Conhecimento dos alunos sobre geometria no início do 3º ciclo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Escola Superior de Educação de Lisboa – Instituto Politécnico de Lisboa. Lisboa, 2014.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.** Tese (Doutorado em Educação) – UFPE, Recife-PE, 2007.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** *Análise Psicológica*, 1, 1986, pp. 75-90.

_____. La théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 2.3, p. 133-170, 1990.

_____. Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In: ARTIGUE, M. et col. (orgs.). **Vingt des Didactiques des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 177-191, 1994.

_____. Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN. J. (Ed.). **Didácticas das Matemáticas**. V. 62. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996. p. 155-191²⁵.

_____. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of de Mathematical Behavior**, 17 (2): 167-181, 1998.

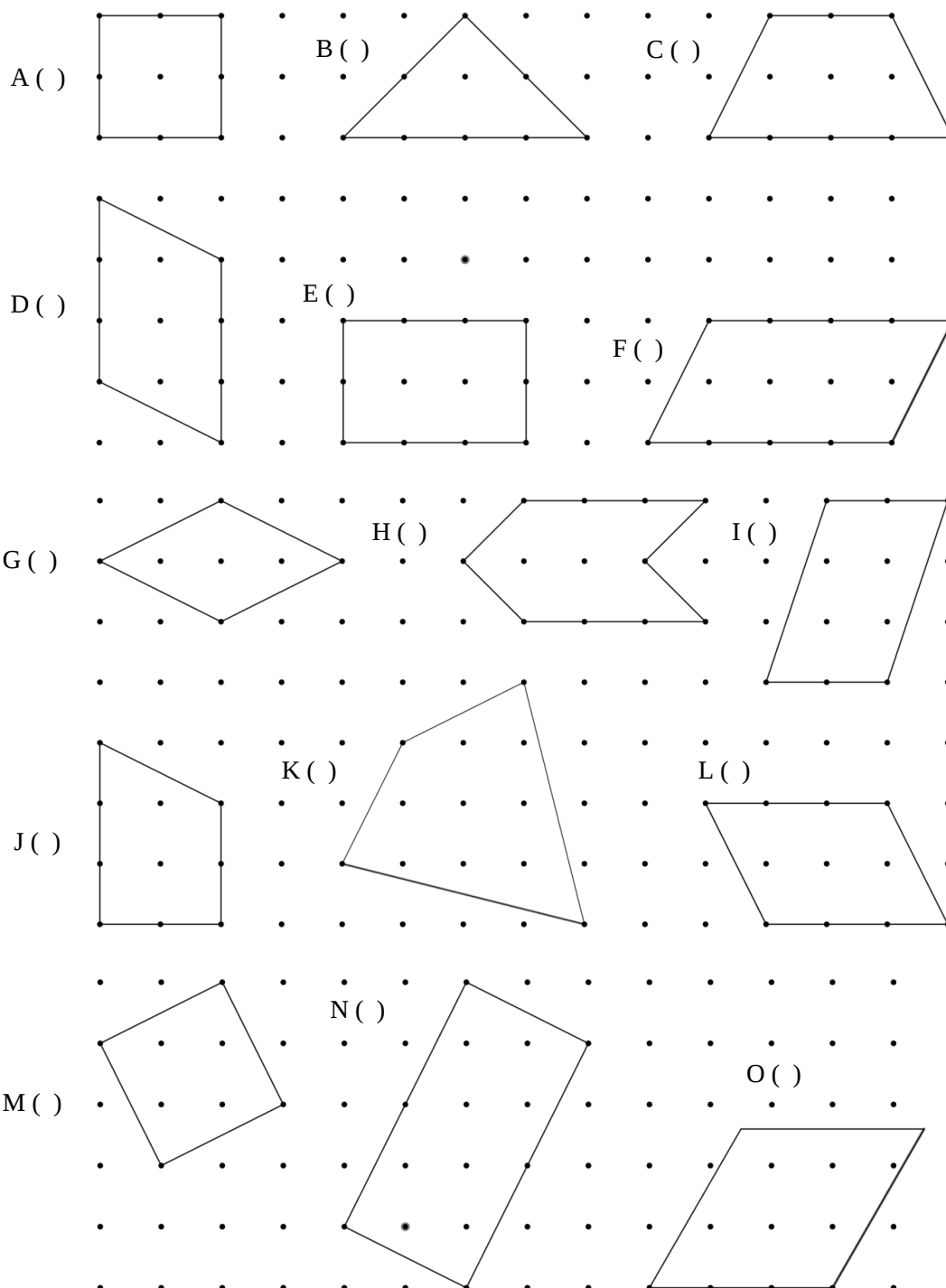
_____. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Revisão técnica: Maria Tereza Carneiro Soares. – Ed. rev. – Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

VERMERSCH, P. **L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue**. ESF, Paris, 1994.

²⁵ Tradução do texto de Vergnaud: La théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, n° 2.3, p. 133-170, 1990.

APÊNDICE A – TESTE

Questão 1: Entre as figuras abaixo, assinale o(s) paralelogramo(s).

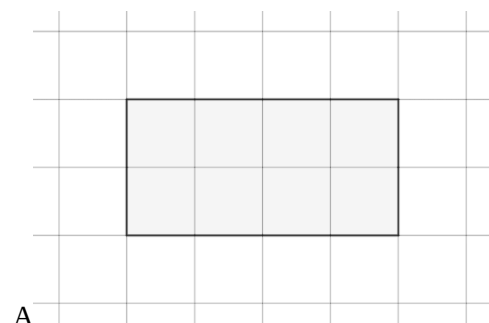


Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? _____

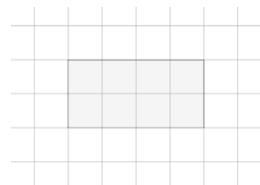
Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? _____

Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? _____

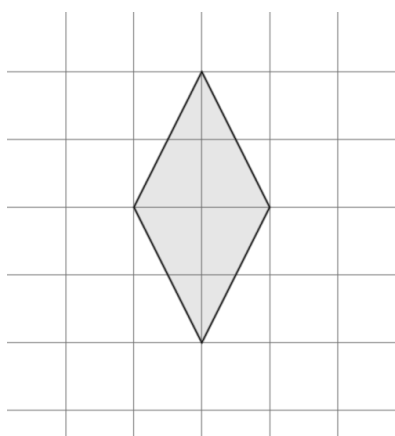
Questão 2: Observe as figuras abaixo:



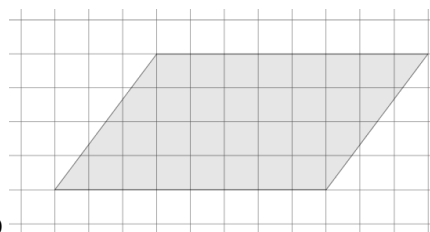
A



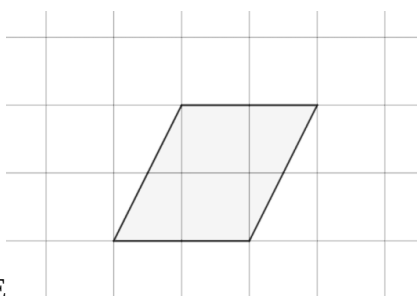
B



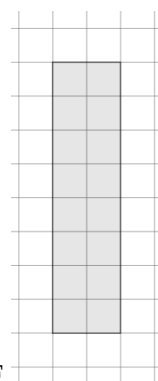
C



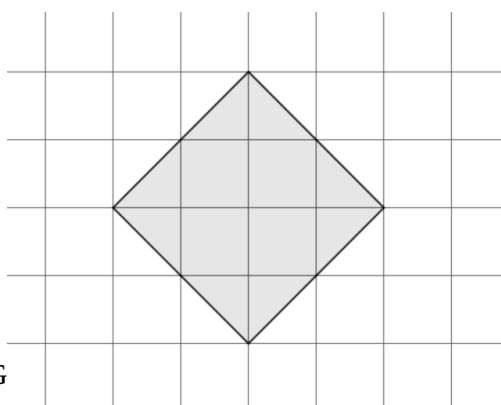
D



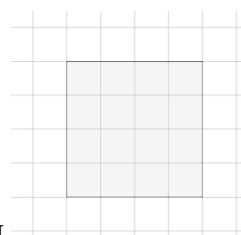
E



F



G



H

Assinale (V) para verdadeiro ou (F) para falso nas seguintes afirmações. Explique como você pensou.

() As figuras A e B possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e G possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e C possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras E e F possuem mesma área.

Explicação: _____

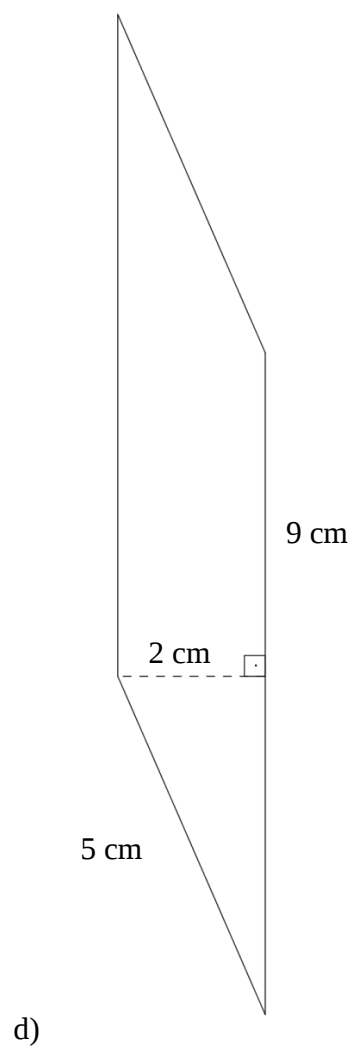
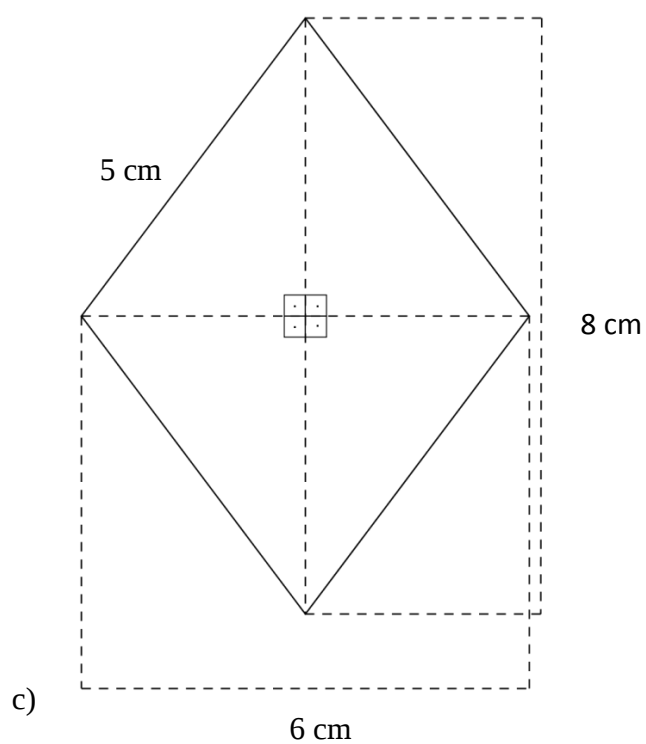
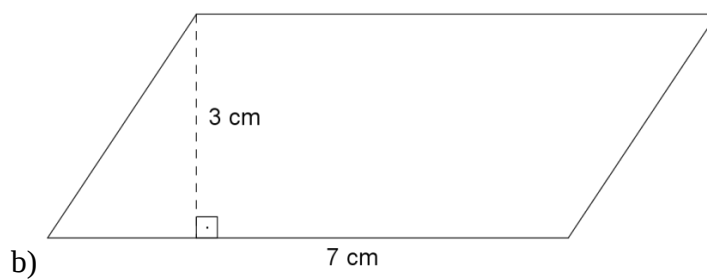
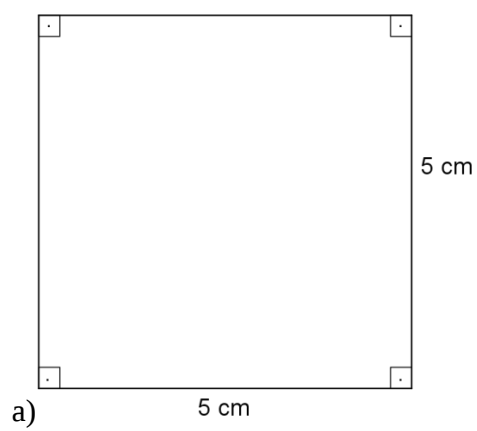
() As figuras F e H possuem mesma área.

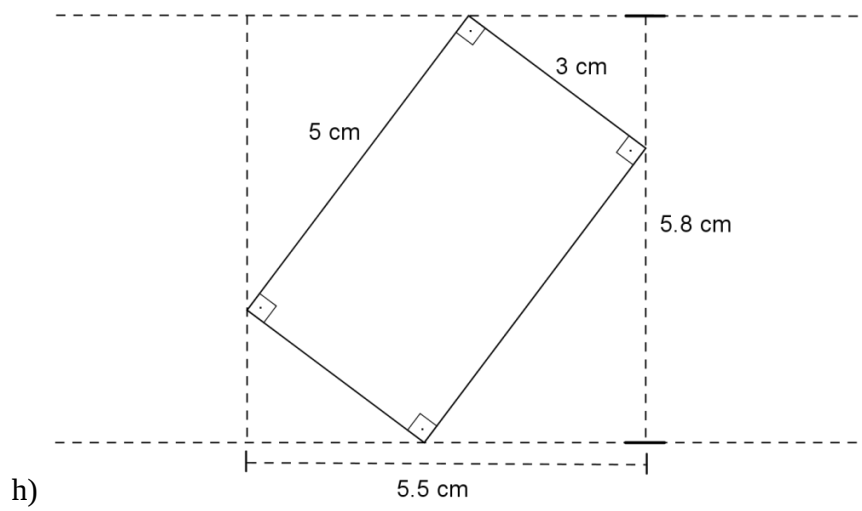
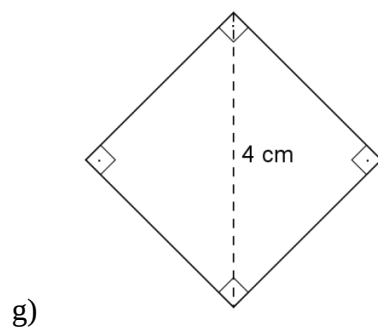
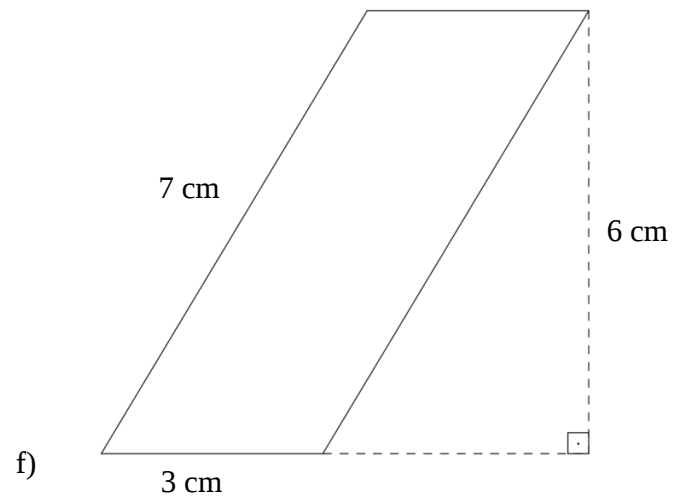
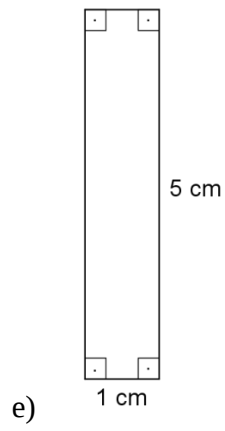
Explicação: _____

() As figuras A e D possuem mesma área.

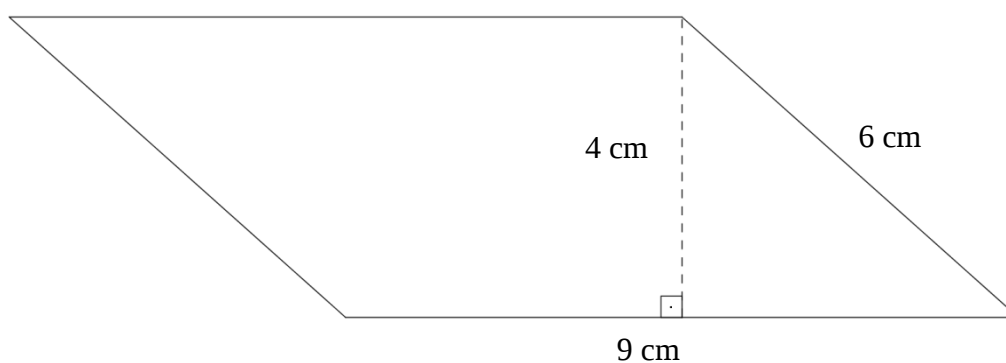
Explicação: _____

Questão 3: Calcule a área das figuras abaixo:

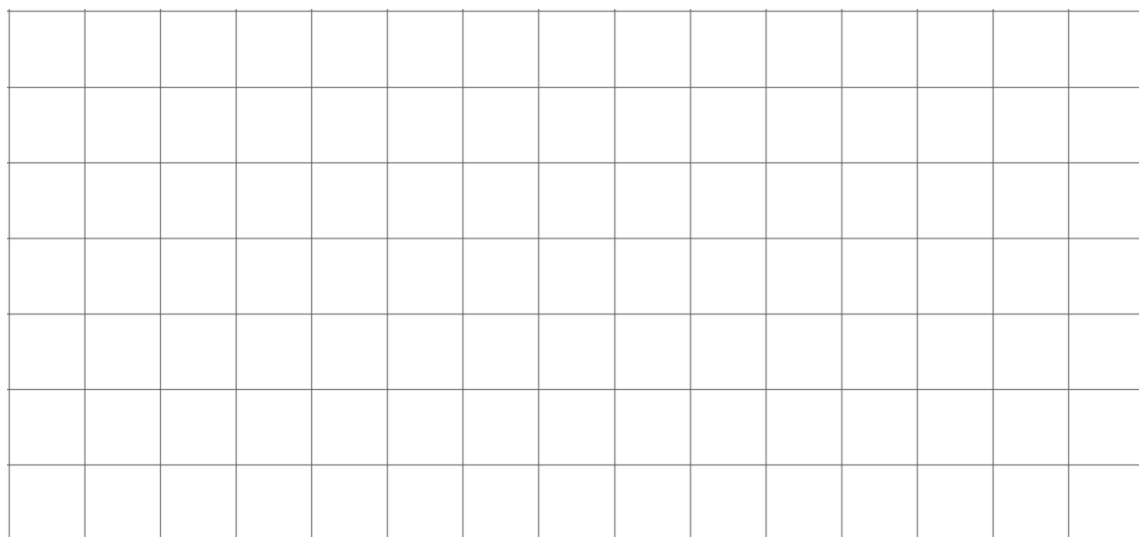




Questão 4: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:



- a) Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.
- b) Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.
- c) Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.



APÊNDICE B – QUADRO DOS ALUNOS SELECIONADOS PARA ENTREVISTAS COM OS RESPECTIVOS CRITÉRIOS

<u>Aluno</u>	<u>Crítério</u>
A1	Confirmar teorema em ação verdadeiro mobilizado na segunda questão e confrontar com alunos fictícios que mobilizam concepções numéricas e geométricas, respectivamente.
A4	Esclarecer erros de leitura nos itens (b) e (d) da terceira questão.
A5	Confirmar procedimento esperado na análise a priori da primeira questão (paralelogramos como figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos) e confrontar com o aluno B11.
A13	Esclarecer erros de leitura nos itens (b) e (d) da terceira questão e entender a resposta da quarta questão (possível confusão entre área e perímetro, conforme previsto na análise a priori).
A16	Esclarecer erros de leitura no item (d) da terceira questão e entender como fez para calcular a área da figura dada na quarta questão.
A17	Entender porque respondeu todos os itens da terceira questão, menos o (b) e entender a figura produzida no item (b) da quarta questão.
B4	Entender como pensou para produzir o losango no item (b) da quarta questão.
B6	Confirmar propriedades do paralelogramo (apenas dois pares de lados paralelos) e a inclusão de classes prevista na nossa análise a priori, ou seja, a resposta correta esperada para essa primeira questão e confrontar com aluno fictício.
B8	Confrontar o teorema em ação errôneo mobilizado na comparação das figuras A e B da segunda questão com as demais explicações.
B11	Confirmar de procedimento esperado na análise a priori da primeira questão, embora a resposta dada esteja incompleta (paralelogramos como figuras que possuem dois pares de lados paralelos) e confrontar com o aluno A5.
B12	Esclarecer erro de leitura na figura do item (d) da terceira questão.
B13	Esclarecer erro de leitura nas figuras dos itens (b) e (f) da terceira questão.
B19	Confirmar procedimento esperado na análise a priori (erro na escolha dos dados) no item (h) da terceira questão e esclarecer erro de leitura da questão.
B25	Entender como identificou as figuras na primeira questão e como calculou a área da figura dada na quarta questão. Confrontar figuras desenhadas no quarto (confusão entre retângulo e paralelogramo não retângulo, e quadrado e losango não quadrado com medidas dos comprimentos dos lados diferentes) com as assinaladas na primeira questão, confirmando o previsto na análise a priori (não incluir quadrados ao identificar retângulos e losangos).

APÊNDICE C – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS QUADRADOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4

Quadrados				
<u>Alunos</u>	1b	3a	3g	4c
A1	A	A	E	A
A2	A	A	E	A
A3	A	A	E	A
A4	AP	A	AP	A
A5	A	A	E	A
A6	A	AP	AP	A
A7	A	AP	A	A
A8	A	A	A	A
A9	A	A	E	A
A10	A	AP	A	A
A11	A	A	A	A
A12	A	AP	AP	A
A13	A	A	E	E
A14	A	A	AP	A
A15	A	A	E	A
A16	A	A	SR	E
A17	A	A	A	A
B1	A	A	E	SR
B2	A	A	SR	A
B3	A	A	SR	A
B4	A	E	A	A
B5	A	AP	AP	E
B6	A	A	AP	A
B7	A	A	E	A
B8	A	AP	E	A
B9	A	A	E	E
B10	A	A	A	A
B11	A	A	E	A
B12	A	AP	AP	A
B13	A	A	E	E
B14	A	A	E	A
B15	A	A	AP	A
B16	A	A	SR	A
B17	A	A	A	A
B18	A	A	AP	A
B19	AP	A	E	A
B20	A	A	AP	A
B21	A	A	A	A
B22	A	AP	AP	A
B23	A	A	E	A
B24	A	A	A	A
B25	A	A	A	E

A	Acertou
AP	Acertou Parcialmente
E	Errou
SR	Sem Resposta

**APÊNDICE D – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS RETÂNGULOS
NAS QUESTÕES 1, 3 E 4**

Retângulos				
Alunos	1c	3e	3h	4a
A1	A	A	A	A
A2	A	A	AP	A
A3	AP	A	A	A
A4	A	A	A	A
A5	A	AP	AP	A
A6	A	AP	AP	A
A7	A	A	A	A
A8	A	A	A	A
A9	A	A	A	A
A10	A	AP	A	A
A11	AP	A	A	A
A12	A	AP	AP	A
A13	A	A	A	E
A14	A	A	A	A
A15	A	A	A	A
A16	A	A	A	E
A17	A	A	A	A
B1	A	A	A	SR
B2	A	A	A	A
B3	A	A	A	A
B4	AP	A	A	A
B5	AP	AP	AP	E
B6	A	A	A	A
B7	A	A	A	A
B8	A	AP	AP	A
B9	AP	A	A	E
B10	A	A	A	A
B11	A	A	A	A
B12	AP	AP	AP	A
B13	AP	A	A	A
B14	A	A	A	A
B15	A	A	A	A
B16	A	A	A	A
B17	A	AP	AP	A
B18	A	AP	AP	A
B19	A	AP	E	A
B20	A	A	A	A
B21	A	A	A	A
B22	A	AP	AP	E
B23	A	A	A	A
B24	A	A	A	A
B25	AP	A	A	E

APÊNDICE E – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS LOSANGOS NAS QUESTÕES 1, 3 E 4

Losangos			
<u>Alunos</u>	1d	3c	4b
A1	AP	A	A
A2	A	AP	A
A3	AP	A	E
A4	AP	E	E
A5	AP	AP	E
A6	AP	AP	AP
A7	AP	AP	A
A8	A	A	A
A9	A	A	A
A10	A	AP	A
A11	AP	A	A
A12	A	AP	E
A13	AP	A	E
A14	AP	AP	A
A15	AP	A	A
A16	AP	SR	E
A17	AP	A	E
B1	AP	E	SR
B2	AP	A	A
B3	AP	SR	E
B4	AP	A	A
B5	AP	AP	E
B6	A	AP	A
B7	A	A	A
B8	AP	AP	A
B9	A	E	E
B10	A	A	A
B11	AP	A	E
B12	AP	A	A
B13	AP	A	E
B14	AP	AP	A
B15	A	A	E
B16	A	A	A
B17	AP	A	E
B18	A	AP	A
B19	AP	E	A
B20	AP	A	A
B21	A	A	A
B22	A	E	E
B23	A	E	E
B24	AP	A	A
B25	AP	E	E

**APÊNDICE F – RESULTADO DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AOS
PARALELOGRAMOS NÃO RETÂNGULOS E NÃO LOSANGOS NAS QUESTÕES
1, 3 E 4**

Paralelogramos não retângulos e não losangos				
Alunos	1a	3b	3d	3f
A1	A	A	A	A
A2	A	AP	E	E
A3	A	A	A	A
A4	AP	E	E	E
A5	AP	A	AP	E
A6	AP	AP	AP	AP
A7	A	AP	A	E
A8	AP	A	A	A
A9	AP	A	A	A
A10	A	AP	E	A
A11	A	A	A	A
A12	AP	AP	AP	AP
A13	A	E	E	A
A14	AP	A	A	A
A15	AP	A	A	A
A16	AP	E	E	E
A17	AP	SR	A	A
B1	A	E	E	SR
B2	E	A	A	A
B3	AP	A	A	SR
B4	AP	A	A	E
B5	AP	E	E	E
B6	A	A	A	A
B7	A	A	A	A
B8	AP	AP	AP	AP
B9	AP	A	E	E
B10	A	A	A	A
B11	AP	A	A	A
B12	AP	A	E	A
B13	A	E	A	E
B14	AP	E	A	A
B15	A	A	A	E
B16	A	A	A	E
B17	A	E	A	A
B18	A	AP	AP	AP
B19	AP	AP	AP	AP
B20	A	A	A	E
B21	AP	A	A	A
B22	A	E	E	E
B23	A	A	A	A
B24	AP	A	A	A
B25	AP	A	E	E

APÊNDICE G – RESULTADO INDIVIDUAL DE CADA ALUNO NO TESTE

Alunos	Resultado individual por itens em cada questão																				
Símbolo	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	2e	2f	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	3h	4a	4b	4c
A1	A	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A
A2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	AP	E	A	E	E	AP	A	A	A
A3	A	A	AP	AP	E	A	A	E	A	E	A	A	A	A	A	A	E	A	A	E	A
A4	AP	AP	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	A	E	AP	A	A	E	A
A5	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	AP	AP	E	E	AP	A	E	A
A6	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	A	AP	A
A7	A	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	AP	AP	AP	A	A	E	A	A	A	A	A
A8	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A9	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A
A10	A	A	A	A	AP	A	A	A	A	E	AP	AP	AP	E	AP	A	A	A	A	A	A
A11	A	A	AP	AP	A	E	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A12	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	A	E	A
A13	A	A	A	AP	A	A	A	A	A	E	A	E	A	E	A	A	E	A	E	E	E
A14	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	A	A	A	AP	A	A	A	A
A15	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A
A16	AP	A	A	AP	A	A	A	E	A	E	A	E	SR	E	A	E	SR	A	E	E	E
A17	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	SR	A	A	A	A	A	A	A	E	A
B1	A	A	A	AP	A	A	A	E	A	E	A	E	E	E	A	SR	E	A	SR	SR	SR
B2	E	A	A	AP	E	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	SR	A	A	A	A
B3	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	E	A	A	SR	A	A	SR	SR	A	A	E	A
B4	AP	A	AP	AP	AP	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A	E	A	A	A	A	A
B5	AP	A	AP	AP	A	A	A	A	A	E	AP	E	AP	E	AP	E	AP	AP	E	E	E
B6	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	A	A	A	AP	A	A	A	A
B7	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	A
B8	AP	A	A	AP	AP	E	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	E	AP	A	A	A
B9	AP	A	AP	A	A	E	A	A	A	A	A	A	E	E	A	E	E	A	E	E	E
B10	A	A	A	A	E	A	A	E	A	E	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B11	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	E	A
B12	AP	A	AP	AP	A	A	A	A	A	E	AP	A	A	E	AP	A	AP	AP	A	A	A
B13	A	A	AP	AP	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	E	E	A	A	E	E
B14	AP	A	A	AP	A	A	A	E	A	E	A	E	AP	A	A	A	E	A	A	A	A
B15	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	AP	A	A	E	A
B16	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	SR	A	A	A	A
B17	A	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	AP	A	A	AP	A	E	A
B18	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	AP	AP	AP	AP	AP	AP	AP	A	A	A
B19	AP	AP	A	AP	A	E	E	A	A	E	A	AP	E	AP	AP	AP	E	E	A	A	A
B20	A	A	A	AP	E	A	A	E	A	E	A	A	A	A	A	E	AP	A	A	A	A
B21	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B22	A	A	A	A	A	E	A	E	E	A	AP	E	E	E	AP	E	AP	AP	E	E	A
B23	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	E	A	A	A	E	A	A	E	A
B24	AP	A	A	AP	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B25	AP	A	AP	AP	A	A	A	A	A	E	A	A	E	E	A	E	A	A	E	E	E

APÊNDICE H – RESULTADO QUANTITATIVO EM TODOS OS ITENS DO TESTE

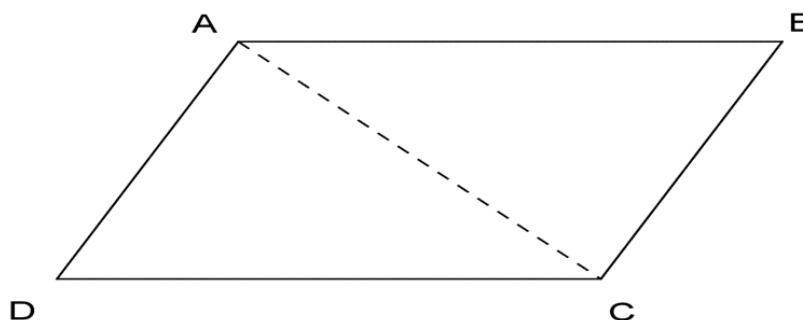
Quantitativo por itens em cada questão					
Itens	Quantitativo	Acertos	Acertos Parciais	Erros	Sem Resposta
1a	Q	19	22	1	0
	%	45%	52%	2%	0%
1b	Q	40	2	0	0
	%	95%	5%	0%	0%
1c	Q	34	8	0	0
	%	81%	19%	0%	0%
1d	Q	15	27	0	0
	%	36%	64%	0%	0%
2a	Q	35	3	4	0
	%	83%	7%	9%	0%
2b	Q	37	0	5	0
	%	88%	0%	12%	0%
2c	Q	40	1	1	0
	%	95%	2%	2%	0%
2d	Q	34	1	7	0
	%	81%	2%	17%	0%
2e	Q	40	1	1	0
	%	95%	2%	2%	0%
2f	Q	26	2	14	0
	%	62%	5%	33%	0%
3a	Q	33	8	1	0
	%	78%	19%	2%	0%
3b	Q	24	8	9	1
	%	57%	19%	21%	2%
3c	Q	21	11	8	2
	%	50%	26%	19%	5%
3d	Q	25	6	11	0
	%	59%	14%	26%	0%
3e	Q	31	11	0	0
	%	74%	26%	0%	0%
3f	Q	21	5	14	2
	%	50%	12%	33%	5%
3g	Q	11	11	15	5
	%	26%	26%	36%	12%
3h	Q	31	10	1	0
	%	74%	24%	2%	0%
4a	Q	35	0	6	1
	%	83%	0%	14%	2%
4b	Q	23	1	17	1
	%	55%	2%	40%	2%
4c	Q	35	0	6	1
	%	83%	0%	14%	2%

Q - Quantidade
% - Percentual

ANEXO A – PROVAS E DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES (P), TEOREMAS (T) E PROPOSIÇÕES (PP) DA SEÇÃO 2.4 E 2.4.1

P1 – Em um paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.

Figura 95 – Paralelogramo ABCD



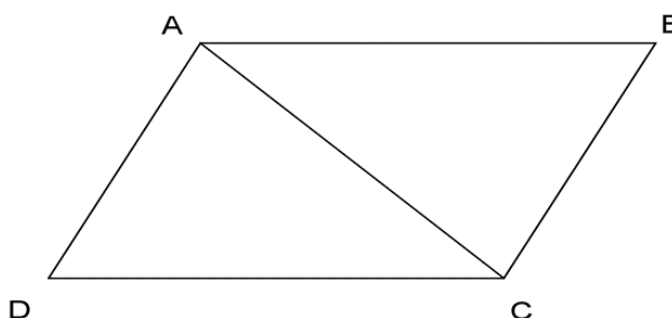
Fonte: Barbosa (2006, p. 91)

Prova:

Seja ABCD um paralelogramo. Trace a diagonal AC. Como AB e DC são paralelos, então $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$. Como AD e BC são paralelos, então $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Como, além disso, AC é comum aos triângulos ABC e CDA, então estes triângulos são congruentes. Logo $\widehat{B} = \widehat{D}$, $AB = CD$ e $BC = DA$. É agora fácil ver que $\widehat{A} = \widehat{C}$ (BARBOSA, 2006, p. 91).

P2 – Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes então o quadrilátero é paralelogramo.

Figura ²⁶ 96 – Quadrilátero ABCD



Fonte: Barbosa (2006, p. 92)

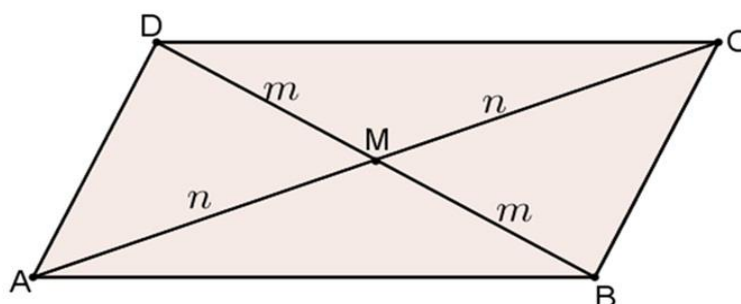
Prova:

²⁶ Como podemos observar as figuras 95 e 96 apresentam diagonais tracejadas e contínuas, respectivamente, pois são assim que estão no livro e procuramos manter a opção do autor.

Seja ABCD um quadrilátero em que $AB = CD$ e $BC = AD$. Trace a diagonal BD do quadrilátero. Os triângulos ABD e CDB são congruentes de acordo com o terceiro caso de congruência de triângulos. Logo $\widehat{C\hat{B}D} = \widehat{B\hat{D}A}$ e $\widehat{C\hat{D}B} = \widehat{D\hat{B}A}$. A primeira igualdade garante que BC e AD são paralelos, a segunda garante que CD e BA também são paralelos. Logo ABCD é um paralelogramo (BARBOSA, 2006, p. 92).

T1 – Todo quadrilátero convexo em que as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

Figura 97 – Paralelogramo com as diagonais interceptando-se nos pontos médios



Fonte: Moura (2013, p. 26)

Demonstração:

Hipótese: $AC \cap BD = M$ e $AM \equiv MC$; $BM \equiv MD$.

Tese: ABCD é paralelogramo

Seja ABCD um quadrilátero convexo, figura 9. Apresenta-se, por hipótese, que $AM \equiv MC$, $BM \equiv DM$ e como $\widehat{DMA} \equiv \widehat{CMB}$ (o. p. v) segue-se que, $\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ e $\triangle DMC \equiv \triangle AMB$ pelo caso LAL. Logo, $\widehat{A\hat{B}D} \equiv \widehat{C\hat{D}B} \Rightarrow AB \parallel CD$ e $\widehat{D\hat{A}C} \equiv \widehat{A\hat{C}B} \Rightarrow AD \parallel BC$. Portanto, ABCD é paralelogramo (MOURA, 2013, p. 26-27).

T2 – Todo retângulo é um paralelogramo.

Figura 98 – Retângulo

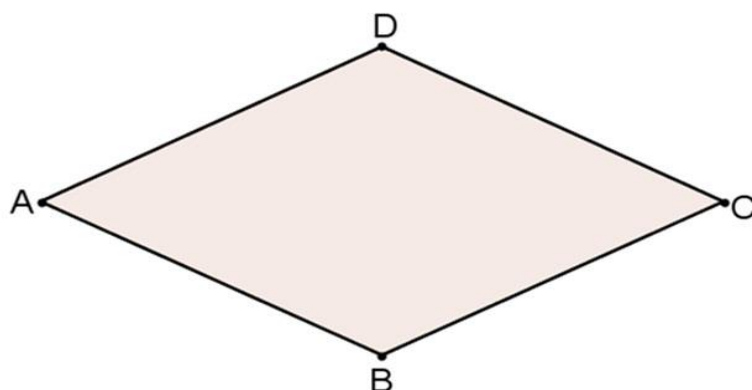


Fonte: Moura (2013, p. 27)

Demonstração: “Seja ABCD um retângulo. Então $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$, segue-se que $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$. Logo, ABCD é um paralelogramo” (MOURA, 2013, p. 28).

T3 – Todo losango é um paralelogramo.

Figura 99 – Losango



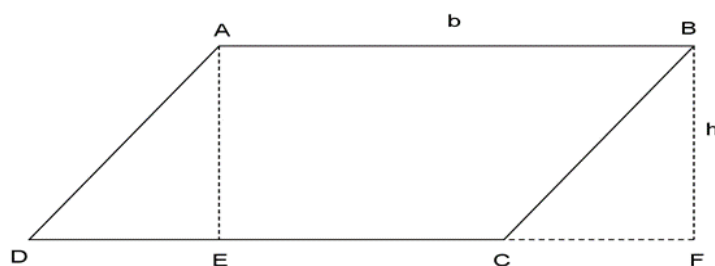
Fonte: Moura (2013, p. 29)

Demonstração:

Seja ABCD um losango. Então, $AB = BC = CD = DA$. Ao considerar a diagonal AC, temos que $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (pelo caso LLL) e que $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ são isósceles. Então, $\hat{BAC} = \hat{DCA} = \hat{ACB} = \hat{CAD}$. Logo, $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$: Portanto, ABCD é um paralelogramo (MOURA, 2013, p. 30).

Pp1 – A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Figura 100 – Paralelogramo com altura relativa ao lado tomado por base



Fonte: Barbosa (2006, p. 177)

Prova:

Em termos da notação fixada acima devemos provar que a área do paralelogramo ABCD é $b \times h$. Para isto trace, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta que contém CD. O quadrilátero ABFE é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \times \overline{BF}$ a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b \times h$. Para concluir a demonstração observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes e que

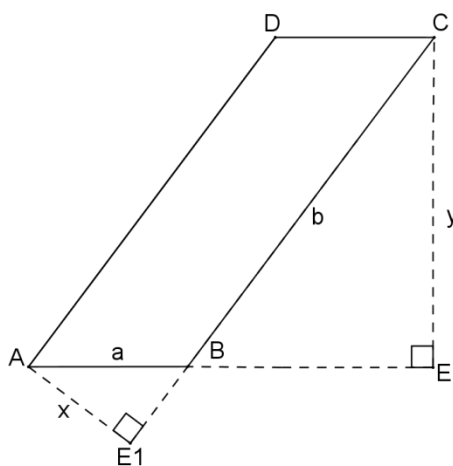
$$\begin{aligned} \text{Área (ABCD)} &= \text{Área (ABCE)} + \text{Área (ADE)} = \\ &= \text{Área (ABCE)} + \text{Área (CBF)} \\ &= \text{Área (ABFE)} = b \times h \text{ (BARBOSA, 2006, p. 177-178).} \end{aligned}$$

Pp2 – A área de um paralelogramo é invariante em relação ao lado tomado por base.

Prova:

Considere na figura a seguir, ABCD um paralelogramo, em que a e b são comprimentos dos lados AB e BC respectivamente. Da mesma forma, x e y são os respectivos comprimentos das alturas relativas a BC e AB. Os prolongamentos dos lados AB e BC interceptam respectivamente as alturas y e x nos pontos E e E1, determinando (pelo caso ângulo/ângulo/ângulo) triângulos semelhantes: BCE e ABE1. Sendo assim: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Logo, $x \cdot b = a \cdot y$ (SANTOS, 2005, p. 34).

Figura 101 – Invariância da área com relação à escolha da base



Fonte: Santos (2005, p. 34)