



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

WILLIAM OBEL

INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE: avaliação da NBR-6118 – 2014

Recife

2019

WILLIAM OBEL

INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE: avaliação da NBR-6118 – 2014

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Engenharia Estrutural

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz

Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo

Recife

2019

- O12i Obel, William.
 Interação torque – cortante: avaliação da NBR-6118-2014 /
William Obel – Recife, 2019.
 151f., figs., tabs., simbol.
- Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz
 Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.
 Inclui Referências e Apêndices.
1. Engenharia Civil. 2. Vigas. 3. Concreto armado. 4. Gráfico torção -
cortante. 5. AASTHO-LRFD. 6. NBR 6118. I. Horowitz, Bernardo
(Orientador). II. Bernardo, Luís Filipe Almeida. III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2019 – 265



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE: avaliação da NBR-6118 – 2014

defendida por

William Obel

Considera o candidato APROVADO

Recife, 30 de maio de 2019

Orientadores:

Prof. Dr. Bernardo Horowitz – UFPE – Orientador

Prof. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo – UBI – Coorientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bernardo Horowitz - UFPE
(orientador)

Prof. Dr. Fernando Artur Nogueira Silva – UNICAP
(examinador externo)

Prof. Dr. Paulo de Araújo Régis – UFPE
(examinador externo)

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, pela sua graça derramada em mim por meio do seu filho Jesus Cristo sem a qual não teria condições de realizar este grande sonho.

A Minha mãe e Minha segunda mãe (madrasta), apesar de estar longe de mim, não deixaram de manifestar o seu amor, seus carinhos, seus cuidados, seus conselhos para comigo.

Aos meus irmãos que me apoiaram durante todos esses anos de estudos no Brasil.

Aos meus familiares, em especial meus sogros e cunhados, por me amar e me ajudar em tudo que for preciso.

Ao meu orientador, professor Dr. Bernardo Horowitz, pela sua total disponibilidade e ajuda nas pesquisas, interpretações de textos, compreensão dos assuntos tratados neste trabalho e a elaboração do mesmo.

Ao meu coorientador, Professor. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo, pela sua ajuda na realização deste trabalho.

A todos os meus amigos e colegas em geral, que sofreram comigo nas horas da angustia, que se alegraram comigo nas horas de felicidades, que manifestaram seu amor, seus cuidados, seus carinhos para comigo, que me apoiaram em todas as áreas da vida.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFPE, por ter me ajudado a tornar o meu sonho em realidade.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante a pesquisa.

A minha esposa, Valdilene Maria da Silva Obel, pela sua paciência, seu apoio, sua compreensão, seus conselhos, seus carinhos e seu grande amor por mim, que sempre esteve perto de mim nas horas de estresses e difíceis durante a realização deste trabalho.

RESUMO

O diagrama de interação Momento Torsor – Esforço Cortante tem sido utilizado para análise de seções de estruturas de concreto armado sujeitas a tal combinação. O uso desse diagrama permite a avaliação dos efeitos causados por essas solicitações na resistência da seção transversal. No entanto, a determinação desse diagrama constitui um importante desafio para o projetista devido à complexidade dos métodos e modelos de cálculo dos esforços resistente. Ademais, é sabido o problema de conservadorismo encontrado nos procedimentos de cálculo nos modelos indicados por algumas normas, o que torna o projeto oneroso, como também o problema de superestimação de resistências da seção transversal resultando em uma análise inconsistente.

Com objetivo de alcançar o real comportamento das estruturas de concreto armado sobre essas solicitações, visando obter soluções tanto para resolver o problema de conservadorismo como também o problema de estabilidade, é apresentado nesse trabalho um roteiro de cálculo para a geração da curva de interação Torque – Cortante utilizando o método de Otimização no intuito de avaliar os procedimentos da NBR-6118 – 2014 em comparação com a AASHTO-LRFD – 2014.

Os resultados de dois ensaios disponíveis na literatura e um modelo baseado na Trelença com Amolecimento e Ângulo Variável (CA-STM) foram escolhidos para fins de validação. Os resultados obtidos pelos procedimentos da AASHTO-LRFD foram satisfatórios. Os da NBR-6118 são consistentes para o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , variável ou igual ao limite inferior de 30° segundo o modelo II da norma. Para θ igual a 45° conforme o modelo I da NBR-6118, os valores obtidos para a resistência ao momento torsor combinado com cortante são muito conservadores e isso torna o projeto oneroso. O roteiro proposto nesse trabalho é de caráter geral e pode ser implementado utilizando os procedimentos de cálculo de qualquer norma técnica destinada à análise de interação de esforços. Além disso, o método de otimização é a melhor opção para análise da interação torção – cortante segundo o modelo II da NBR-6118.

Palavras-chave: Vigas. Concreto armado. Gráfico torção – cortante. AASTHO-LRFD. NBR-6118.

ABSTRACT

Shear – Torsion interaction diagram has been used to analysis of sections of reinforced concrete structures subject to such combination. This diagram allows evaluation of the effects caused by these requests on the strength of section. However, to determine of this diagram poses a great challenge to designer because of complexity of methods and models of calculation of strengths. In addition also, it is known problem of conservatism found to generate procedures in the models indicated by some standards, which makes project onerous, as well problems of overestimation of strengths of section resulting in an inconsistent analysis.

In order to achieve real behavior of reinforced concrete structures under these requests, and to obtain solutions both to solve conservatism problem and also stability problem, is presented in this work a workflow to generate shear – torsion interaction diagrams using Optimization methods in order to evaluate NBR-6118 – 2014 code provisions in comparison with AASHTO-LRFD – 2014 standard.

Two tests of experimental results and a Combined-Action Softened Truss Model (CA-STM) were chosen for validation purposes. The results obtained by AASHTO-LRFD design procedures are of satisfactory accuracy. NBR-6118 provisions are consistent with experimental results when compression diagonals are inclined at an angle, θ , to longitudinal axis, equal to lower limit of 30 ° degrees or the angle which yields maximum strength in the case of variable angle according to model II. For θ equals to 45°, according to model I of the Brazilian code, the resulting strength to combined shear and torsion is excessively conservative. The proposed workflow is of a general nature and can be applied to any design standard for analysis of interaction between internal forces. Formulating the analysis of shear – torsion interaction as an optimization problem is the most direct and efficient option when applying model II of NBR-6118.

Keywords: Beam. Reinforced concrete. Shear – torsion curve. AASTHO-LRFD. NBR-6118.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Amostra do ensaio Rahal e Collins (1995)	27
Figura 2 – Estado Último das faces Sul (T+V) e Norte (T-V) dos ensaios Rahal e Collins (1995).....	29
Figura 3 – Ângulo de inclinação das fissuras, θ , da série 2 dos ensaios Rahal e Collins (1995).....	30
Figura 4 – Diagrama de interação bi – linear proposto por Klus	31
Figura 5 – Diagramas de interações bi – linear e circular	32
Figura 6 – Modelo de treliça para uma viga em concreto armado	36
Figura 7 – Modelo de treliça para vigas com banzos paralelos	38
Figura 8 – Modelo teórico da treli clássica generalizada de Mörsch	39
Figura 9 – Esforço resistente de tração ao cortante devido ao concreto	44
Figura 10 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência ao Cortante.....	51
Figura 11 – Seção transversal de concreto armado para o cálculo da resistência máxima ao esforço cortante segundo os modelos I e II da NBR-6118 - 2014.....	52
Figura 12 – Tubo de paredes finas submetidas à torção pura	55
Figura 13 – Condições de equilíbrio para uma viga fissurada devido à torção.....	57
Figura 14 – Dados do primeiro exemplo de cálculo da resistência máxima ao momento torsor	61
Figura 15 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência ao momento torsor	62
Figura 16 – Gráfico Torque – Armadura transversal	65
Figura 17 – Condições de compatibilidade entre as deformações para uma seção de um elemento fissurado	72
Figura 18 – Curva tensão – deformação das bielas do concreto comprimido.....	74
Figura 19 – Condições de equilíbrio para a Teoria do Campo de Compressão Modificado ...	76
Figura 20 – Adição das tensões de cisalhamento devido à torção e cortante.....	83
Figura 21 – Dados de entrada do ensaio N-06-06 de Fang e Shiau (2004).....	87
Figura 22 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência máxima ao momento torsor segundo AASHTO-LRFD – 2014	88
Figura 23 – Esforços de membrana em um elemento bidimensional de concreto armado	91

Figura 24 – Curvas tensão – deformação do concreto em compressão com amolecimento	93
Figura 25 – Curvas tensão – deformação do aço	94
Figura 26 – Idealização da estrutura segundo CA-STM	95
Figura 27 – Idealização de uma seção real.....	96
Figura 28 – Distribuição dos esforços tangenciais nos painéis	97
Figura 29 – Distribuição das deformações nas bielas	99
Figura 30 – Modelo da curva torque – cortante otimizada	106
Figura 31 – Dados de entrada da série 2 do experimento Rahal e Collins (1995)	118
Figura 32 – Plano e vista lateral da amostra mostrando os esforços na região do teste.....	119
Figura 33 – Diagrama de interação torção – cortante segundo Rahal e Collins (2003).....	119
Figura 34 – Diagrama de interação torque – cortante da série RC2 do procedimento Proposto	120
Figura 35 – Diagrama de interação torção – cortante para avaliação da AASHTO-LRFD e ACI	121
Figura 36 – Diagrama de interação torque – cortante do procedimento proposto	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação do esforço resistente ao cortante entre os modelos I e II da NBR-6118 – 2014	53
Tabela 2 – Esforço resistente ao cortante considerando a decalagem do diagrama de banzo tracionado.....	54
Tabela 3 – Soluções para o momento torsor resistente máximo do exemplo da Figura 14 (a).....	63
Tabela 4 – Soluções para o momento torsor resistente máximo do exemplo da Figura 14 (b).....	64
Tabela 5 – Resistência máxima ao momento torsor, T , e o ângulo de fissuração, θ	89
Tabela 6 – Ângulo de inclinação das fissuras, θ , espessura da parede equivalente, h_e e a distância da superfície média da espessura da parede a face externa da seção transversal, c_0	123

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras gregas:

θ	Ângulo de inclinação das bielas de concreto
α	Ângulo formado pelos estribos em relação à armadura longitudinal
σ_{cw}	Tensão principal de compressão nas bielas de concreto
α_{v2}	Fator de redução da resistência de cálculo do concreto devido a não uniformidade das tensões no concreto
σ_{ct}	Tensão principal de tração nas bielas de concreto
σ_{sw}	Tensão nas barras da armadura transversal
γ_c	Coeficiente de ponderação das cargas atuantes no concreto
ϕ_l	Diâmetro da armadura longitudinal
ϕ_t	Diâmetro da armadura transversal
$\varepsilon_x = \varepsilon_s = \varepsilon_L$	Deformação longitudinal na zona tracionada da seção transversal
$\varepsilon_t = \varepsilon_T$	Deformação transversal
ε_2	Deformação principal de compressão
ε_1	Deformação principal de tração no concreto
$\varepsilon'_c = \varepsilon_{cr}$	Deformação principal de compressão correspondente à f_{ck}
α_1, α_2	Coeficientes de ponderação em função do tipo de armadura e de carregamento
β	Fator de resistência as tensões de tração do concreto
ϕ_f, ϕ_v, ϕ_c	Fatores de ponderação de cargas e de resistência
τ_{LT}^c	Tensão de cisalhamento no elemento de concreto

σ_L^c, σ_T^c	Tensões normais atuando nos eixos longitudinal e transversal do elemento de concreto
ρ_L, ρ_T	Taxas de armaduras longitudinal e transversal
σ_R, σ_D	Tensões principais de tração e de compressão
α_D, α_R	Ângulo variável de inclinação das bielas de concreto e seu complemento
ζ	Coeficiente de amolecimento
$\varepsilon_D, \varepsilon_R$	Deformações principais médias de compressão e de tração
ε_0	Deformação relativa à tensão máxima de compressão
ε_{sy}	Deformação de escoamento do aço
γ_{LT}	Deformação de cisalhamento
$\varepsilon_{DS}, \varepsilon_A$	Deformações externas e internas nos painéis de concreto
ψ	Curvatura da biela de concreto
ϕ_T, ϕ_L	Curvaturas longitudinais e transversais nos painéis de concreto
α_i	Ângulo formado por cada raio em relação ao cortante no eixo longitudinal

Letras Romanas Minúsculas:

$b = b_w = b_v$	Largura da alma
d	Altura útil da seção transversal
h	Altura da seção transversal
f_{cd}	Resistência característica à compressão de cálculo
s	Espaçamento entre os estribos

$f_{ck} = f'_c$	Resistência característica à compressão do concreto
$z = jd$	Braço de alavanca
nb_L	Número de barras da armadura longitudinal
q	Fluxo de cisalhamento
v	Tensões de cisalhamento
$f_{ywd} = f_y$	Tensão de cálculo ao escoamento da armadura transversal
$u_e = p_0$	Perímetro da linha central do fluxo de cisalhamento
$h_e = t_D$	Espessura equivalente da parede
t	Espessuras dos painéis
$u = p_c$	Perímetro da seção sólida
c_1	Distancia entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento
c_0	Distancia da superfície média da parede equivalente a face externa da seção
c	Cobrimento
f_2	Tensão principal de compressão nas bielas de concreto
$f_{2,max}$	Limite das tensões principais de compressão nas bielas de concreto
f_1	Resistência à tração do concreto
f_{cr}	Tensão de fissuração do concreto
s_{xe}	Parâmetro de resistência associado ao tamanho do agregado
s_x	Distância vertical entre duas fissuras
a_g	Tamanho do agregado graúdo no concreto

d_v	Altura efetiva da seção transversal
p_h	Perímetro da linha central dos estribos
d_s	Altura eficaz da seção transversal
v_u	Tensão de cisalhamento último
f_s, f_{sy}	Tensão no aço e tensão de escoamento do aço
q_T, q_V	Fluxos de cisalhamentos devido ao momento torsor e ao esforço cortante
b_0	Largura dos painéis 2 e 4
h_0	Largura dos painéis 1 e 3
z_i	Parâmetro adimensional da curvatura no painel i
x_1	Base dos estribos
y_1	Altura dos estribos
r_i	Raios que relacionam cada momento torsor solicitante, T_i , com o esforço cortante solicitante, V_i
f_{yl}, f_{yt}	Tensões de escoamentos da armadura longitudinal e transversal

Letras Romanas Maiúsculas:

V_{Sd}	Esforço Cortante Solicitante de Cálculo
V_{Rd2}	Esforço Cortante Resistente de Cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto
V_{Rd3}	Esforço Cortante Resistente de Cálculo, relativa à ruína por tração diagonal
T_{Sd}	Momento Torsor Solicitante de Cálculo

T_{Rd2}	Limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto
T_{Rd3}	Limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural
T_{Rd4}	Limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural
T, V	Momento torsor solicitante e esforço cortante solicitante
T_0, V_0	Valores teóricos ou limites impostos para o momento torsor e esforço cortante
R_{cw}	Força resultante das tensões solicitantes nas bielas de concreto
R_{sw}	Resistência das tensões de tração nos estribos
$V_{sw} = V_s$	Parcela resistente ao esforço cortante devido à armadura transversal
R_{ct}	Esforço resultante das tensões de tração no concreto
V_c	Parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto
V_{c0}	Parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção transversal
A_{sw}	Área da armadura transversal existente na seção
$F_{Sd} = F_s$	Esforço de tração devido à armadura longitudinal na zona tracionada
$F_{Sd,cor}$	Esforço de tração na zona tracionada devido à M_{Sd} e V_{Sd}
M_{Sd}	Momento fletor solicitante de cálculo
$M_{Sd,max}$	Momento fletor de cálculo máximo na seção em análise
$A_1 = A_s$	Armadura longitudinal na zona tracionada
$A_e = A_0$	Área envolvida pelo fluxo de cisalhamento

$A_{90} = A_t$ Área da armadura transversal de uma perna

$A_w = A_v$ Área de armadura transversal para duas pernas de estribo devido ao cortante

$A_{w+90} = A_{v+t}$ Área de armadura transversal total na seção devido à combinação cortante – torção

A_{sl} Área total da armadura longitudinal na seção transversal

$A = A_{cp}$ Área da seção sólida

M_u, V_u, N_u Momento fletor, esforços cortante e normal últimos

$V_{u,eq}$ Esforço cortante último equivalente à combinação torção – cortante na seção

$E = E_s$ Módulo de elasticidade da armadura longitudinal na zona tracionada

V_n Resistência nominal ao esforço cortante na ausência de torção

T_n Resistência nominal ao momento torsor na ausência de cortante

T_{cr} Momento torsor de fissuração

$A_{v,min}$ Área de armadura transversal mínima na seção transversal

A_t Armadura longitudinal devido à torção

E_c Módulo de elasticidade do concreto

T_x Momento torsor solicitante no eixo X

N_x Esforço Normal solicitante no eixo X

V_y, V_z Esforços cortantes solicitantes nos eixos Y e Z

M_y, M_z Momentos fletores solicitantes nos eixos Y e Z

F_{CA-STM} Função resíduo do CA-STM

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	NOTA HISTÓRICA SOBRE A NORMA BRASILEIRA.....	22
1.2	OBJETIVOS	23
1.2.1	Objetivo Geral	23
1.2.2	Objetivos específicos	23
1.3	JUSTIFICATIVA	24
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
1.4.1	Cavalcante (2018)	25
1.4.2	Silva (2016).....	25
1.4.3	Rahal e Collins (1995)	26
1.4.4	Klus (1968)	31
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	33
2	ESFORÇOS RESISTENTES SEGUNDO A NORMA NBR-6118 – 2014.....	35
2.1	MODELO DA TRELIÇA DE MÖRSCH	35
2.2	FUNDAMENTO DAS ESPECIFICAÇÕES PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLICITADAS AO ESFORÇO CORTANTE SEGUNDO A NBR-6118 – 2014	37
2.2.1	Determinação do limite da resistência ao cortante de cálculo, V_{Rd2}, segundo a NBR-6118 – 2014	40
2.2.2	Determinação da área da armadura transversal, A_{sw}, segundo a NBR-6118 – 2014	42
2.2.3	Parcela resistente ao cortante devido ao concreto, V_c, segundo a NBR-6118 – 2014	43

2.3	CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO O MODELO I DA NBR-6118 – 2014	45
2.4	CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO O MODELO II DA NBR-6118 – 201	47
2.5	DECALAGEM DO DIAGRAMA DE ESFORÇO NO BANZO TRACIONADO SEGUNDO A NBR-6118 – 2014.....	49
2.6	CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS I E II DA NBR-6118 – 2014.....	50
2.6.1	Soluções para o esforço resistente máximo ao cortante sem a decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado	52
2.6.2	Soluções para o esforço resistente máximo ao cortante considerando a decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado	53
2.7	MODELO DE TRELIÇA ESPACIAL PARA O CÁLCULO DE TORÇÃO.....	54
2.7.1	Determinação das áreas das armaduras transversal, A_{sw}, e longitudinal, A_{sl}, segundo a NBR-6118 – 2014	56
2.7.2	Condições necessárias para o cálculo do momento torsor resistente segundo a NBR-6118 – 2014	58
2.7.2.1	Determinação da espessura da parede equivalente, h_e :	60
2.7.2.2	Considerações sobre a espessura da parede equivalente, h_e e o ângulo θ	60
2.7.2.3	Soluções para o momento resistente a torção do exemplo da Figura 14.....	63
2.8	RESISTÊNCIA À AÇÃO COMBINADA TORÇÃO – CORTANTE SENDO A NBR-6118 – 2014	65
2.8.1	Decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado segundo a NBR-6118 – 2014 para combinação Torção – Cortante	67
3	ESFORÇOS RESISTENTES SEGUNDO A NORMA AASHTO-LRFD - 2014	69
3.1	TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO	70
3.1.1	Modelo de treliça com ângulo variável.....	70

3.1.2	Teoria do Campo de Compressão	72
3.2	ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014 (TCCM SIMPLIFICADA)	77
3.3	MOMENTO TORSOR RESISTENTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014	81
3.4	RESISTÊNCIA À AÇÃO COMBINADA TORÇÃO – CORTANTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014	82
3.5	CONSIDERAÇÕES SOBRE A RESISTÊNCIA AO MOMENTO TORSOR PURO E O ÂNGULO DE INCLINAÇÃO DAS BIELAS DE CONCRETO, θ , SEGUNDO AASHTO-LRFD – 2014.....	86
4	MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO E COMBINAÇÃO DE ESFORÇO (CA-STM).....	90
4.1	FUNDAMENTOS DO RA-STM	90
4.2	FUNDAMENTOS DO CA-STM	95
4.3	IDEALIZAÇÃO DA SEÇÃO REAL SEGUNDO O CA-STM.....	96
4.3.1	Geometria da seção	96
4.3.2	Armadura equivalente em cada painel.....	97
4.3.3	Distribuição dos esforços tangenciais equivalente em cada painel	97
4.3.4	Espessura do fluxo de cisalhamento e as deformações dos painéis.....	98
4.3.5	Equações de equilíbrio e de compatibilidade dos painéis.....	100
4.4	ANÁLISE DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO SEGUNDO O CA-STM.....	101
4.5	PROCEDIMENTO EFICIENTE PARA ANÁLISE DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO USANDO O MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO (SILVA 2016)	101
4.6	FUNÇÃO RESÍDUO QUE REPRESENTA O SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEAR.....	102
5	INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE	105

5.1	PROCEDIMENTO PROPOSTO	105
5.1.1	Otimização da curva Torque – Cortante	106
5.1.2	Pós-processamento	109
5.2	RESTRIÇÕES CORRESPONDENTES AOS PROCEDIMENTOS DA NBR-6118 – 2014	110
5.2.1	Formulação geral do problema de otimização segundo a NBR-6118 – 2014	113
5.3	RESTRIÇÕES CORRESPONDENTES AOS PROCEDIMENTOS DA AASHTO-LRFD – 2014	114
5.3.1	Formulação geral do problema de otimização segundo a AASHTO-LRFD – 2014.....	116
5.4	RESULTADOS OBTIDOS	116
5.4.1	Ensaio 1	117
5.4.2	Ensaio 2	120
5.5	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	123
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	125
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	126
	REFERÊNCIAS	127
	APÊNDICE A – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE MÁXIMO AO CORTANTE SEGUNDO A NBR-6118 – 2014	129
	APÊNDICE B – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO MOMENTO RESISTENTE MÁXIMO À TORÇÃO SEGUINDO A NBR-6118 – 2014	131

APÊNDICE C – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO MOMENTO RESISTENTE MÁXIMO À TORÇÃO SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014 (ENSAIO N-06-06)	137
--	------------

APÊNDICE D – CÓDIGOS EM MATHCAD DO PROCEDIMENTO PROPOSTO	140
---	------------

1 INTRODUÇÃO

Geralmente as estruturas de concreto armado compostas por elementos lineares, a exemplo das vigas de fachadas sujeitas ao momento torsor são também solicitadas ao esforço cortante. Vários métodos e modelos de cálculo e análise foram desenvolvidos com o objetivo de avaliar os efeitos causados por essas solicitações nas estruturas. A partir desses métodos e modelos de cálculo, inúmeras comissões nacionais e internacionais foram formadas para a elaboração de normas técnicas, visando à garantia de estabilidade e desempenho dos elementos estruturais.

Nem sempre os procedimentos encontrados nas normas técnicas são consistentes para o cálculo e análise da resistência de seções de vigas de concreto armado sobre a solicitação do momento torsor combinado com esforço cortante. E uma das técnicas empregada para a verificação da eficácia de uma determinada norma para o caso a ser estudado, é a comparação dos resultados obtidos pelas especificações indicadas na mesma com os valores de ensaios disponíveis. Portanto, essa tarefa requer um grande esforço e compreensão, devido à complexidade dos procedimentos de cálculo e dos problemas de inconsistências deparados em algumas normas.

Ademais, algumas normas apresentam resultados muito conservadores em relação aos valores experimentais e isso torna o projeto oneroso. Sabendo disso, o engenheiro projetista é levado à procura por melhores soluções para tornar os projetos eficientes e propor soluções para resolver os problemas de inconsistências. Para isso, faz-se necessário a comparação de valores calculados pelos procedimentos de diversas normas com valores experimentais disponíveis na literatura e definir alguns métodos ou roteiros de cálculo para a utilização de tais procedimentos.

O presente trabalho mostra o desenvolvimento de um roteiro de cálculo para avaliar o comportamento de vigas de concreto armado sujeitas a combinação torção – cortante utilizando o método de otimização. Para esse fim, foram utilizados os procedimentos da NBR-6118 – 2014 e da AASHTO-LRFD – 2014. Os procedimentos encontrados nessas normas têm como base o Modelo da Trelça de Mörsch para o cálculo do esforço resistente ao cortante e o Modelo da Trelça Espacial para o cálculo da resistência ao momento torsor. Diagramas de interação torção – cortante foram determinados pelas especificações dessas normas e comparados entre si junto com os resultados experimentais disponíveis na literatura, inclusive

os resultados obtidos pelo código elaborado por Silva (2016) no MATLAB baseando-se no modelo “CA-STM” para fins de validação do modelo.

1.1 NOTA HISTÓRICA SOBRE A NORMA BRASILEIRA

Segundo Carneiro, na cronologia da evolução das normas de concreto armado e protendido utilizadas no Brasil, a Norma Brasileira – NB-1/1960, foi à primeira norma dentre as normas elaboradas desde 1905 a levar em consideração todos os tipos de esforços solicitantes no cálculo e análise da resistência de estruturas de concreto armado e protendido no estado limite último.

Essa norma teve uma importante influência das especificações encontradas na norma europeia “CEB, Comité Européen du Béton (francês)”. Sobretudo, na definição da resistência característica à compressão do concreto (resistência mínima provável), determinação do diagrama de bloco de tensão na zona comprimida (retângulo para NB-1 e parábola-retângulo para CEB e a mesma permitia um diagrama retângulo em apenas 0,8 da altura da zona de compressão), e outras definições para o cálculo dos esforços resistentes como até hoje são utilizadas na NBR-6118 – 2014 para o esforço cortante.

No cálculo e análise de elementos de concreto armado sujeitos ao esforço cortante, a NB-1/1960 estabeleceu os critérios a serem atendidos para garantir a segurança das estruturas. Segundo o item 30 dessa norma, as tensões principais de tração, σ_1 , e compressão, σ_2 , deveriam satisfazer os limites estabelecidos no item 97 para os esforços de tração oriundos do esforço cortante. Esses limites foram estabelecidos em função da resistência característica à compressão do concreto e estabelece também um valor mínimo da tensão de tração abaixo do qual a armadura de tração devido ao esforço cortante solicitante é desprezada.

Para o cálculo e análise da resistência ao momento torsor, o item 29 da NB-1/1960 exigiu o cálculo das armaduras necessárias para resistir à torção solicitada quando o esforço de tração provocado pela mesma, ultrapassasse o valor mínimo permitido no item 97. Quando o momento torsor é combinado com o momento fletor, as tensões devidas a essas duas solicitações deveriam ser superpostas entre si, permitindo um acréscimo de 30% nos limites estabelecidos no item 97, desde que estes não sejam ultrapassados para cada uma das solicitações consideradas separadamente.

Quanto à combinação torção – cortante, os limites estabelecidos no item 97 da NB-1/1960 engloba todos os esforços de tração oriundos da torção e cortante. Ainda que não houvesse as mesmas indicações que existiam para a combinação torção – fletor para essa combinação, o projetista poderia optar em adicionar as armaduras necessárias para resistir a essas duas solicitações (técnica empregada até hoje na NBR-6118 – 2014, AASHTO-LRFD – 2014 e em algumas outras normas técnicas), e superpor às tensões principais de tração devidas as mesmas, conservando os limites estabelecidos no item 97.

1.2 OBJETIVOS

Os objetivos da presente dissertação podem ser classificados como objetivo geral e objetivos específicos.

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho de dissertação é avaliar os critérios normativos para o cálculo da resistência ao momento torsor combinado com esforço cortante segundo a NBR-6118 – 2014 em comparação com a AASHTO-LRFD – 2014.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos a serem atingidos neste trabalho de dissertação podem ser apresentados como:

- Desenvolver um roteiro de cálculo para determinar o diagrama de interação Momento Torsor – Esforço Cortante utilizando o método de otimização com os procedimentos encontrados nessas duas normas.
- Codificar as prescrições normativas da NBR-6118 – 2014.
- Codificar as prescrições normativas da AASHTO-LRFD – 2014.
- Comparar as previsões de esforços resistentes das duas normas e de modelos baseados em treliça com amolecimento, “CA-STM, Silva (2016)”, com resultados experimentais.

1.3 JUSTIFICATIVA

Sabendo o fato da interação relevante entre o momento torsor e o esforço cortante, o cálculo e análise dos esforços resistentes em estruturas de concreto armado sujeitas a essas duas solicitações, sempre foram e permanecem imprescindíveis para garantir o equilíbrio de um elemento composto pela ligação monolítica entre vigas apoiadas em outras vigas, denominadas vigas de fachadas.

Para esse fim, o emprego das provisões decorrentes de métodos empíricos e mecânicos tem sido os meios mais utilizados. São os casos dos procedimentos da NBR-6118 – 2014 que têm como base os modelos da Treliza Clássica e Generalizada de Mörsch, Treliza Espacial, associados aos métodos empíricos e as especificações da AASHTO-LRFD – 2014 baseadas na Teoria do Campo de Compressão Modificado simplificada (inglês = The Modified Compression Field Theory – MCFT), definidas como métodos mecânicos.

No entanto, a determinação do diagrama de interação torção – cortante por esses métodos e modelos não é uma tarefa fácil apesar da comprovação da eficácia desses em comparação com os resultados experimentais, devido à complexidade e às dificuldades de implementação.

As simplificações e inclusão de valores empíricos no modelo mecânico fazem com que haja sempre uma comparação entre as normas para verificar a mais consistente no cálculo e análise dos esforços resistentes em seções de elementos estruturais de concreto armado. Além disso, algumas normas apresentam maior facilidade na implementação de roteiro ou código para o cálculo de resistência das seções e outras dificultam esse cálculo devido à inconsistência dos procedimentos na determinação de certos parâmetros envolvidos na formulação dos esforços resistentes e dos limites estabelecidos aos mesmos.

Dessa forma, faz-se necessário o desenvolvimento de um método ou roteiro de cálculo e análise que possa ser utilizado na implementação dos procedimentos encontrados nas normas a serem avaliadas e comparar os resultados obtidos entre as mesmas com resultados experimentais, visando sempre à procura de soluções para tornar os projetos estruturais eficientes. Isso constitui o fundamento dessa pesquisa na determinação de diagramas de interação torção – cortante pelo método de otimização para prescrever o comportamento de um elemento que gire sobre o seu próprio eixo causando o denominado “Momento Torsor”, oriundo de uma carga aplicada provocando também um esforço cortante.

Ademais, a determinação do diagrama de interação Momento Torsor – Esforço Cortante pela otimização, torna-se para o engenheiro projetista uma das maneiras mais eficiente para

avaliar e analisar os métodos e os procedimentos encontrados em algumas normas para o cálculo da resistência de seções de concreto armado submetidas a essas solicitações.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para a obtenção de uma ideia precisa sobre o estado atual dos conhecimentos sobre elementos de concreto armado submetidos ao momento torsor combinado com esforço cortante, são relatados os seguintes trabalhos realizados por alguns pesquisadores:

1.4.1 Cavalcante (2018)

No intuito de analisar o comportamento de vigas de concreto armado sob a solicitação do momento torsor combinado com esforço cortante, Cavalcante (2018) utilizou-se as normas técnicas americana e brasileira, “ACI-318 – 14 e NBR-6118 – 2014”, para o cálculo das resistências aos esforços solicitantes e geração de diagramas de interação.

Nessa pesquisa, o autor empregou a Teoria do Campo de Compressão Modificado Simplificado (SMCFT) para o cálculo do ângulo de inclinação das bielas de compressão segundo o Modelo II da NBR-6118 – 2014 e relatou que os procedimentos da ACI-318 – 14 fornecem resultados conservadores, enquanto que o esforço cortante resistente pode ser superestimado para o caso de baixos valores de torção. Além disso, concluiu que torna difícil afirmar que os modelos para o cálculo do momento torsor resistente estão inconsistentes devido aos poucos ensaios experimentais disponíveis na literatura.

1.4.2 Silva (2016)

Com objetivo de analisar o comportamento de elementos de concreto armado submetidos ao momento torsor combinado com esforço cortante, Silva (2016) desenvolveu um procedimento eficiente utilizando o Modelo de Treliça com Amolecimento e Combinação de Esforço (*Combined-Action Softened Truss Model – CA-STM*). Esse modelo foi proposto por Greene (2006), baseado no modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável (*Rotating-Angle Softened Truss Model – RA-STM*), desenvolvido por HSU (1987).

Nesse estudo, o pesquisador relatou que os modelos de treliça com amolecimento encontrados na literatura são resolvidos tradicionalmente pelo método de tentativas e erro para o cálculo e análise estrutural e concluiu que o CA-STM pode ser utilizado para o cálculo e análise de seções retangulares, sólidas e vazadas em concreto armado sobre as solicitações de momento torsor, momento fletor e esforço cortante. Ademais, esse procedimento proposto avançou no conhecimento quando incorporou estratégias de otimização na solução do problema.

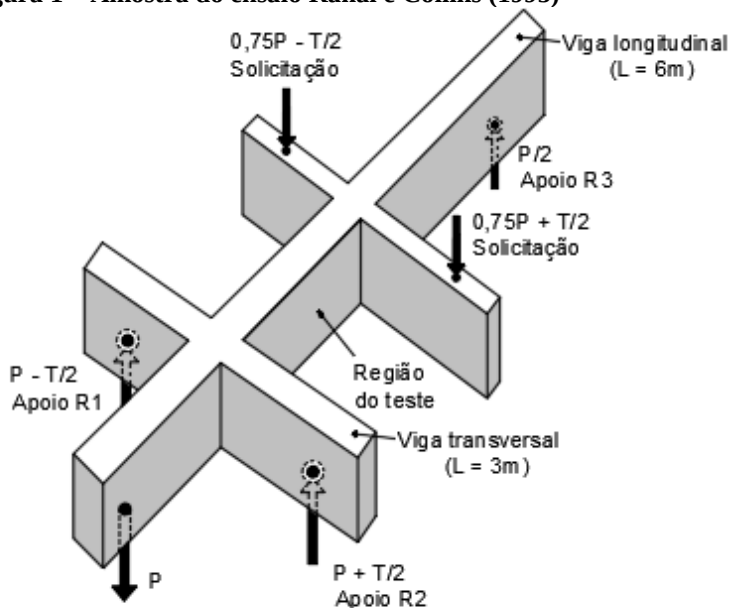
1.4.3 Rahal e Collins (1995)

A Figura 1 (a) mostra o modelo típico de um trecho de vigas de concreto armado submetidas ao ensaio para estudar o seu comportamento para a combinação torção – cortante. A viga principal tem 6 metros de comprimento e as transversais contam com 3 metros de vão.

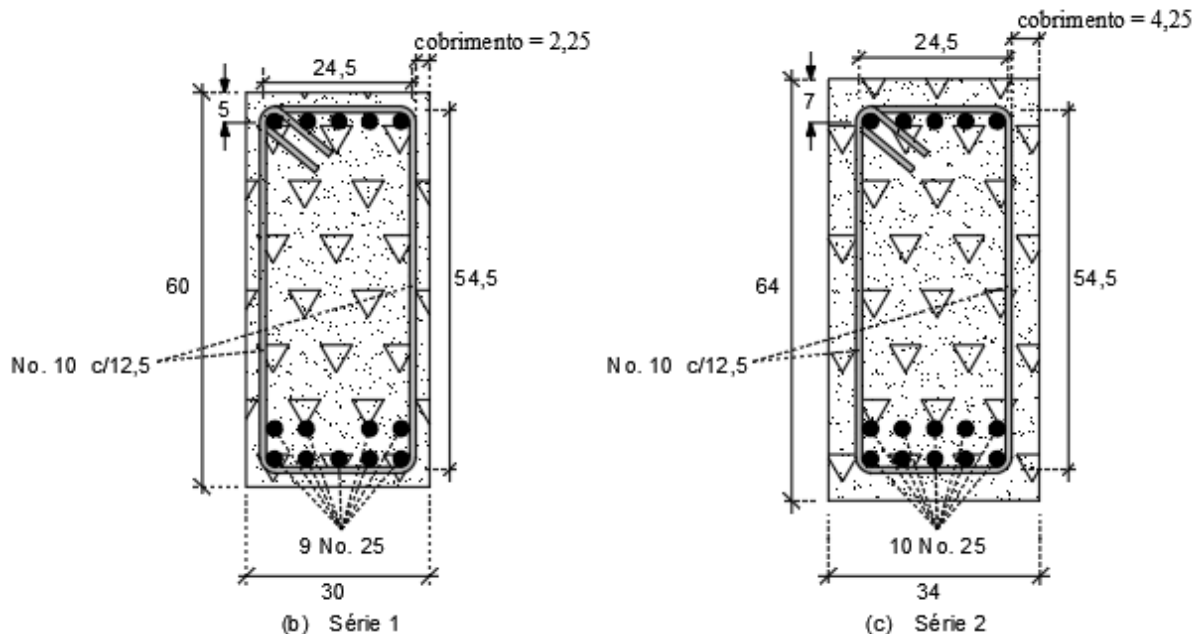
Sete vigas dessas foram divididas em duas séries, 1 e 2. A primeira série é composta de três vigas, identificados como RC1-2, RC1-3 e RC1-4, e a segunda contém quatro, denominados RC2-1, RC2-2, RC2-3 e RC2-4. As seções transversais das duas séries são ilustradas nas Figuras 1 (b) e 1 (c) e foram projetadas para rupturas por cisalhamento, i.e., a viga se rompe logo após o escoamento da armadura transversal, antes do escoamento da armadura longitudinal na seção em análise.

Nessa investigação, os autores descobriram que o aumento do cobrimento de concreto (da série 1 para a série 2) só mostrou um efeito significativo para as relações torção/cortante relativamente grande. Além disso, identificaram que o cobrimento de concreto da primeira série não foi esmagado antes do escoamento da armadura transversal, enquanto a da segunda série esmagou antes do escoamento do estribo.

Figura 1 – Amostra do ensaio Rahal e Collins (1995)



(a) Visão geral da amostra típica e a disposição das cargas do experimento de Rahal & Collins (1995)



Fonte: adaptado de Rahal e Collins (1995)

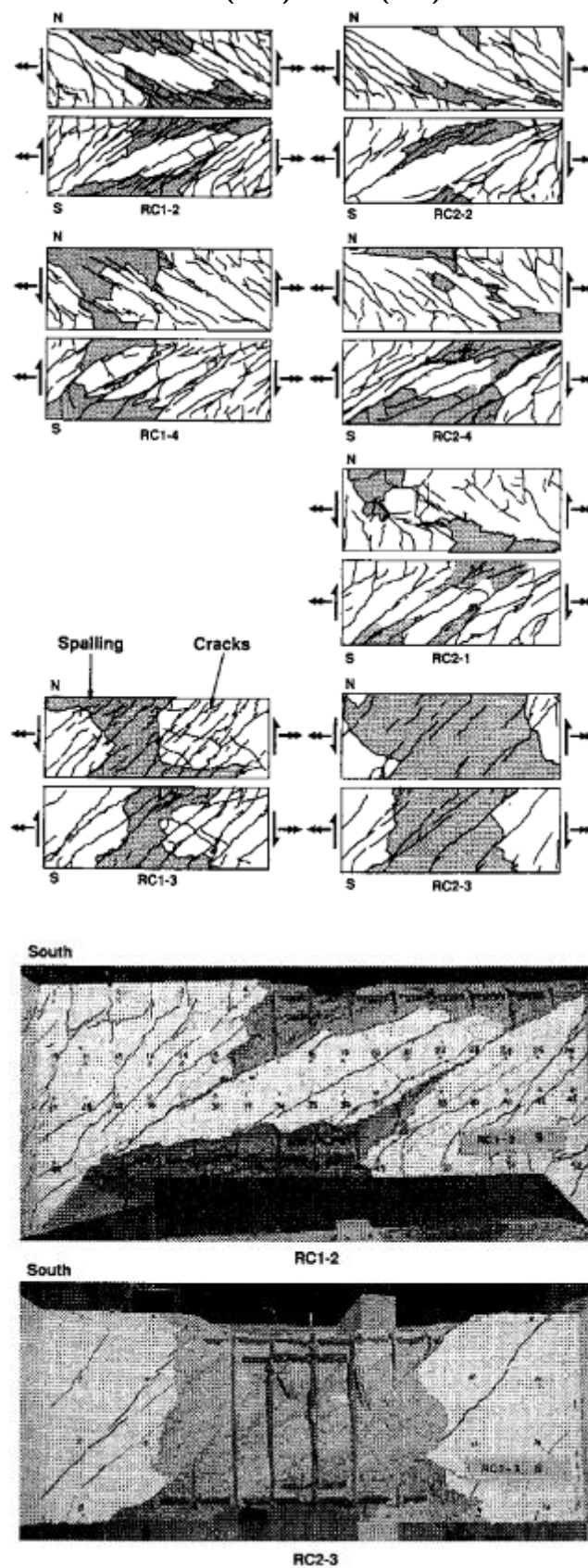
A Figura 2 mostra o modo de ruptura das vigas nas seções em análise para a combinação do momento torsor com o esforço cortante. Nessas ilustrações, são diferenciadas as faces onde a torção e o cortante adicionam-se (face Sul = South (S), $T + V$), e as faces nas quais essas solicitações se diferenciam (face Norte = North (N), $T - V$). Na face sul, o ângulo de inclinação das fissuras diagonais diminui com o aumento do momento torsor, enquanto na face norte a direção da fissura mudou completamente.

Rahal e Collins (2003) utilizaram os resultados dos ensaios da série 2 para avaliar os procedimentos de cálculo da resistência ao momento torsor combinado com esforço cortante indicados nas normas técnicas da ACI e da AASHTO-LRFD. Nesse estudo, foram tiradas as seguintes conclusões:

- A utilização do ângulo de inclinação das fissuras, $\theta = 45^\circ$, indicada como valor máximo por ACI fornecem resultados muito conservadores em relação aos valores experimentais.
- Por outro lado, o valor mínimo do ângulo $\theta = 30^\circ$ especificado na norma ACI resulta em resultados menos consistentes devido aos valores calculados que superestimam a resistência da seção transversal em comparação aos resultados experimentais.
- Já o valor obtido para o ângulo θ segundo os procedimento da AASHTO-LRFD foi aproximadamente 36° . Esse valor é considerado como uma estimativa consistente e razoavelmente precisa para a determinação do diagrama de interação torção – cortante, pois está de acordo com as inclinações das fissuras observadas segundo a Figura 3.

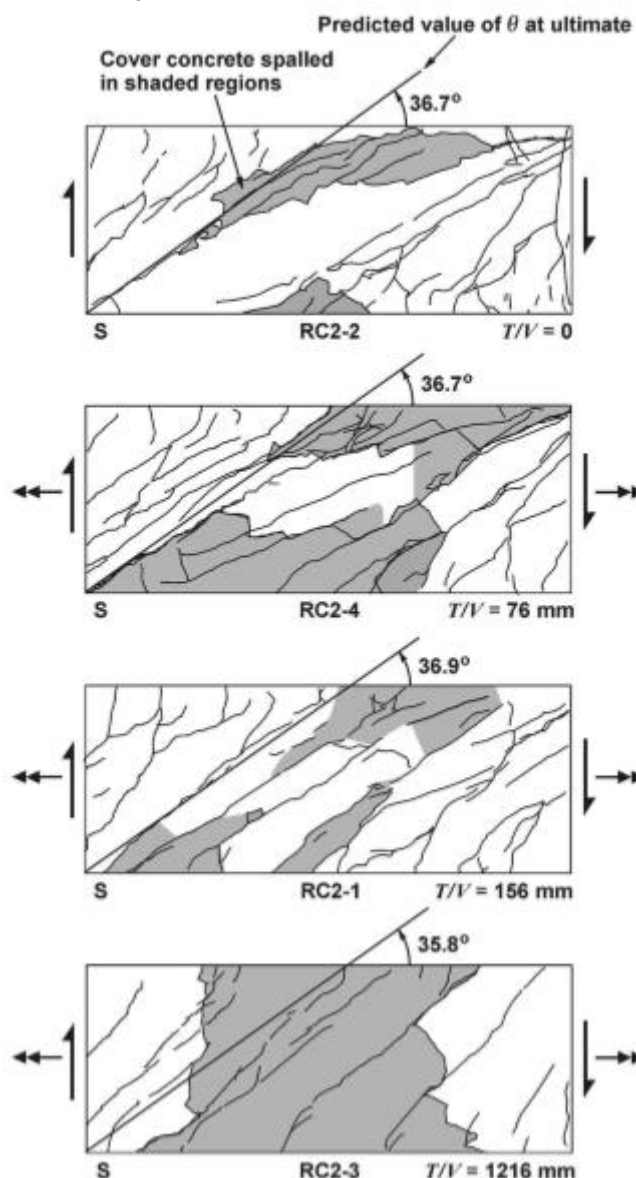
Ressalte-se que o valor de $\theta = 36^\circ$ foi calculado utilizando a tabela de valores para o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , e o fator de resistência às tensões de tração do concreto, β , em função da deformação longitudinal na zona tracionada, ε_x , e da razão entre a tensão de cisalhamento último e a resistência característica à compressão do concreto, v / f_{ck} . Esse procedimento de cálculo é denominado Método Geral – MG, que é uma simplificação das equações da teoria do campo de compressão (modelo mecânico) segundo Rahal (2006).

Figura 2 – Estado Último das faces Sul (T+V) e Norte (T-V) dos ensaios Rahal e Collins (1995)



Fonte: Rahal e Collins (1995)

Figura 3 – Ângulo de inclinação das fissuras, θ , da série 2 dos ensaios Rahal e Collins (1995)



Fonte: Rahal e Collins (1995)

Embora o Método Geral possa oferecer uma boa estimativa para os parâmetros θ e β na determinação da resistência ao momento torsor combinado com cortante, fixando o valor da deformação longitudinal na zona tracionada, $\varepsilon_x = 0,001$ pode levar a soluções não consistentes e imprecisas, visto que esse parâmetro envolve todas as sollicitações na seção em análise. Logo, o uso da expressão dada para o cálculo dessa deformação em função das cargas aplicadas constitui-se a melhor maneira de avaliar o comportamento de seções de vigas de

concreto armado sujeitas a combinação torção – cortante. Além disso, os valores de θ e β passam a variar ao invés de serem fixos segundo o método geral.

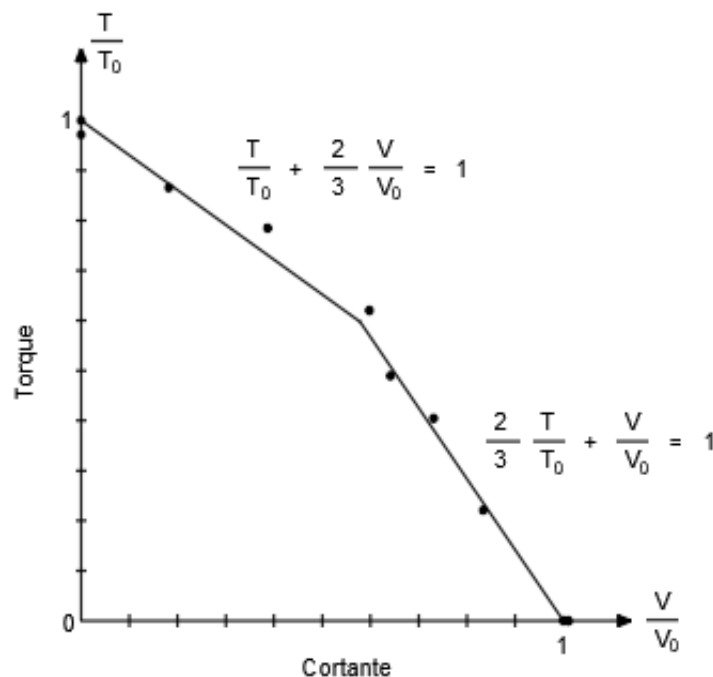
A utilização de um roteiro de cálculo que envolva todos os parâmetros contribuintes para a resistência de seções de elementos de concreto armado, em função das variações dos esforços solicitados, permanece ainda o meio mais propício para conduzir a uma análise eficaz e valores consistentes.

1.4.4 Klus (1968)

Dez vigas de concreto armado foram ensaiadas para calcular e analisar a resistência ao momento torsor combinado com esforço cortante em seções transversais. De acordo com os resultados obtidos nesses ensaios, Klus propôs o seguinte diagrama de interação bi - linear:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \frac{T}{T_0} + \frac{V}{V_0} \leq 1 & \text{para } \frac{T}{T_0} \leq 0,6 \\ \frac{T}{T_0} + \frac{2}{3} \frac{V}{V_0} \leq 1 & \text{para } \frac{V}{V_0} \leq 0,6 \end{cases}$$

Figura 4 – Diagrama de interação bi – linear proposto por Klus



Fonte: adaptado de Tahmazian (1969)

Nesse diagrama de interação, T , V representam o momento torsor solicitante e esforço cortante solicitante, respectivamente, e T_0 , V_0 , os valores teóricos ou limites impostos para o momento torsor e esforço cortante, sucessivamente.

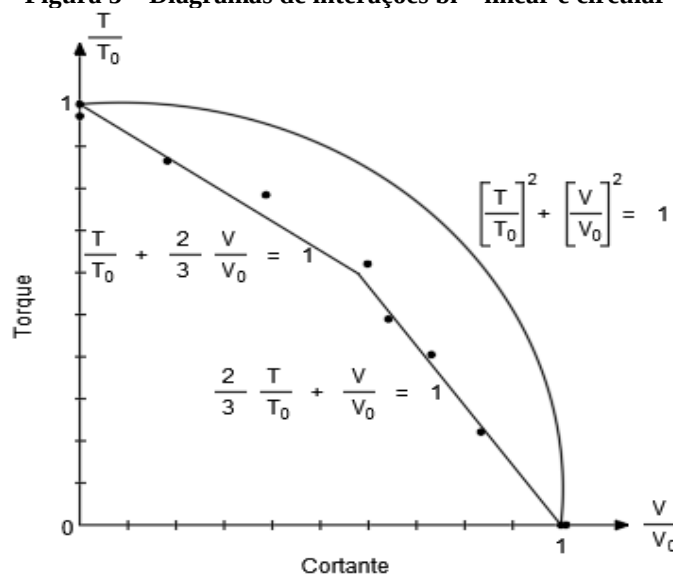
Segundo Klus, esse diagrama de interação bi linear, ao contrário do diagrama de interação circular geralmente proposto por outros pesquisadores, pode ser justificado devido à ausência do momento fletor. O mesmo concluiu que o aumento do esforço cortante na seção transversal tem forte influência na rigidez à torção da viga.

É fácil observar que a utilização do diagrama de interação bi - linear e outros diagramas de interação adotados na literatura são considerados como casos particulares na análise da resistência de seções de concreto armado sujeitas à combinação torção - cortante, pois foram derivados diretamente dos resultados experimentais. Além disso, pode se fazer as seguintes observações:

- Para o diagrama de interação circular:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1$$

Figura 5 – Diagramas de interações bi – linear e circular



Fonte: adaptado de Tahmazian (1969)

É visível a forte influência do aumento do esforço cortante na resistência ao momento torsor. Logo, a utilização desse diagrama circular para análise da combinação torção – cortante sem influência do momento fletor pode ser inconsistente devido à superestimação da resistência à torção à medida que se aumenta o cortante solicitante na seção transversal.

- Quanto ao diagrama de interação bi – linear:

É notória nas curvas de interação torção – cortante a influência da parcela resistida ao esforço cortante pelo concreto. Essa parcela faz com que o momento torsor resistente devido aos estribos permaneça constante até a transferência da resistência à armadura transversal calculada para resistir ao cortante. Esse efeito é representado por um trecho horizontal, e é fácil observar a ausência do mesmo nesse diagrama de interação. Ademais, outras análises mostram que os trechos do diagrama de interação torção - cortante não são totalmente lineares.

Determinar de maneira consistente e eficaz o diagrama de interação Momento Torsor – Esforço Cortante para prever o real comportamento de elementos de concreto armado sujeitos a esses esforços pelo método de otimização, utilizando os critérios estabelecidos em normas técnicas tais como a NBR-6118 – 2014 e a AASHTO-LRFD - 2014 constitui um importante avanço tecnológico para o cálculo e análise estrutural.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O fundamento de pesquisa desse trabalho de dissertação é a determinação da melhor maneira de obter o diagrama de interação torção – cortante pelo método de otimização atendendo todas as exigências indicadas nas normas técnicas a serem utilizadas. Para tal, são apresentadas seis capítulos com os seguintes conteúdos:

- a) O primeiro capítulo aborda a introdução do tema da dissertação, exhibe uma nota histórica sobre a Norma Brasileira, mostra os objetivos da pesquisa, contempla a justificativa, expõe a metodologia e é concluído com a revisão bibliográfica reportando alguns trabalhos realizados anteriormente com as conclusões dos seus respectivos pesquisadores;

- b) No segundo capítulo são exibidos os fundamentos dos procedimentos da NBR-6118 – 2014 para o cálculo e análise de seções de elementos de concreto armado sujeitas à combinação torção – cortante. São detalhadas também as exigências dessa norma em relação às condições necessárias para a determinação da resistência a tais solicitações. Além disso, são fornecidas algumas considerações sobre os modelos de cálculos através de alguns exemplos;
- c) Analogamente ao segundo capítulo, o terceiro expõe os métodos, modelos e a base das especificações da AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo e análise da resistência máxima de seções de estruturas de concreto armado sujeitas ao momento torsor combinado com esforço cortante. Exemplos de cálculos são realizados para fins de considerações sobre as exigências indicadas nessa norma;
- d) No quarto capítulo consta outro modelo de cálculo e análise de seções de elementos estruturais sobre a solicitação da combinação torção – cortante baseado na Treliça com Amolecimento e Combinação de Esforço – CA-STM;
- e) O quinto capítulo trata da proposta de um roteiro de cálculo e análise de seções retangulares sólidas de vigas de concreto armado sujeitas à combinação torção – cortante pelo método de otimização. Inicialmente é apresentado o procedimento geral, em seguida as restrições segundo as normas a serem avaliadas e finalmente a validação do modelo através de gráficos comparativos entre valores calculados e valores oriundos de ensaios experimentais, incluindo os valores obtidos pelo modelo “CA-STM, Silva (2016)”;
- f) No último capítulo são extraídas as conclusões em relação aos resultados obtidos nesse trabalho de pesquisa e são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros. Esse trabalho de dissertação termina com as referências bibliográficas e os apêndices significativos.

2 ESFORÇOS RESISTENTES SEGUNDO A NORMA NBR-6118 – 2014

Os procedimentos para o cálculo de esforços resistentes em estruturas de concreto armado indicados nas normas técnicas foram sempre e permanecem objetos de discussões. Isso se dá devido ao conservadorismo encontrado nas comparações entre valores calculados e valores experimentais, além dos problemas de inconsistências encontrados em algumas normas. Uma das maneiras de entender os motivos pelos quais algumas normas são mais apropriadas do que outras, além das comparações entre os resultados obtidos pelas especificações contidas nelas com os valores experimentais, é saber os métodos e modelos utilizados em cada uma.

Vários resultados experimentais em vigas de concreto armado submetidas ao esforço cortante, momento fletor, momento torsor e esforço normal, provam que os métodos e modelos baseados nas teorias da analogia de tubos de paredes finas, Teoria do Campo de Compressão Modificado, Modelo da Treliça de Mörsch (Clássica e Generalizada), Modelo da Treliça Espacial, são eficazes para prever o comportamento estrutural de elementos de concreto armado submetidos essas solicitações.

A norma brasileira, NBR-6118 - 2014 estabelece os critérios para o cálculo e análise de estruturas de concreto simples, armado e protendido. As especificações encontradas nessa norma para determinar a capacidade resistente de seções de vigas de concreto armado submetidas ao momento torsor, esforço cortante, momento fletor e esforço normal, baseiam-se no Modelo da Treliça de Mörsch para o cálculo de cortante e no Modelo da Treliça Espacial para o cálculo de torção.

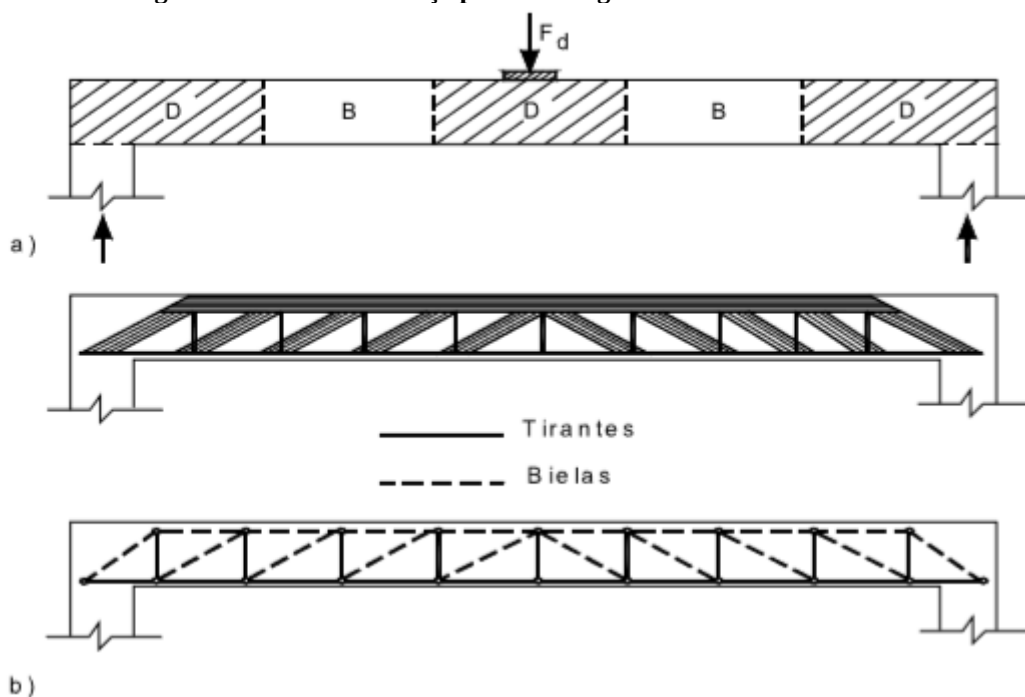
2.1 MODELO DA TRELIÇA DE MÖRSCH

Segundo Giongo (2011), esse modelo foi proposto por W. Ritter e E. Mörsch no início do século XX, baseado na observação de uma viga de concreto armado fissurado, entrando em colapso. Como o concreto resiste aos esforços de compressão e as armaduras aos esforços de tração, Mörsch propôs a analogia de treliça de banzos paralelos onde os elementos são detalhados e definidos como: o banzo inferior composto pela armadura longitudinal para resistir ao momento fletor solicitado, o banzo superior representa o concreto comprimido, as diagonais comprimidas são as bielas de concreto e as diagonais tracionadas descrevem as armaduras transversais com a finalidade de absorver os esforços de cisalhamento. A Figura 6 mostra uma viga simplesmente apoiada e o modelo de treliça associado a ela.

Para calcular os esforços resistentes dessa viga e analisar o seu comportamento quando é solicitada ao cortante, existem dois conceitos ou modelos derivados do modelo da treliça de Mörsch. O primeiro modelo até hoje é o mais utilizado, conhecido como “Analogia Clássica da Treliça” ou “Treliça Clássica de Mörsch”. Nessa analogia, os esforços resistentes nas bielas de concreto são maiores quando estão mais próximos aos apoios e admite-se o ângulo de inclinação dessas bielas igual a 45° ($\theta = 45^\circ$), enquanto os esforços no banzo tracionado são maiores no meio do vão segundo a teoria da flexão.

Ainda segundo Giongo (2011), os ensaios realizados por Leonardo e Mönnig (1977) mostraram que o modelo da Treliça Clássica de Mörsch superestima os esforços resistentes ao cortante em comparação com os valores experimentais. Foi observado ainda, que a inclinação das bielas de concreto era menor do que 45° na seção mais crítica ao esforço cortante. Com o objetivo de obter um modelo que representasse melhor a viga real no que diz respeito à capacidade resistente aos esforços solicitados, surgiu o segundo modelo com o nome de “Analogia Generalizada da Treliça ou Treliça Generalizada de Mörsch”. Nesse modelo, o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , é considerado menor ou igual a 45° e as taxas de armaduras transversais são menores.

Figura 6 – Modelo de treliça para uma viga em concreto armado



Fonte: Giongo (2011)

As prescrições para o cálculo do Esforço Cortante Resistente segundo a NBR-6118 – 2014 baseiam-se nesses dois modelos, associados aos mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural através de uma componente adicional V_c . O Modelo 1 refere-se ao modelo teórico da Trelça Clássica de Morsch, admite o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas igual à 45° ($\theta = 45^\circ$) e a parcela resistente ao Esforço Cortante devido ao concreto, V_c , é constante independente do cortante solicitante V_{sd} . O Modelo 2 utiliza a Trelça Generalizada de Morsch, com o ângulo de inclinação das bielas varia entre 30° e 45° ($30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$) e a parcela resistente ao cortante devido ao concreto, V_c , diminui com o aumento do cortante solicitante de cálculo V_{sd} . Fica a critério do projetista a utilização de outros métodos para o cálculo do ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , desde que atenda às prescrições normativas. Esses modelos serão detalhados posteriormente.

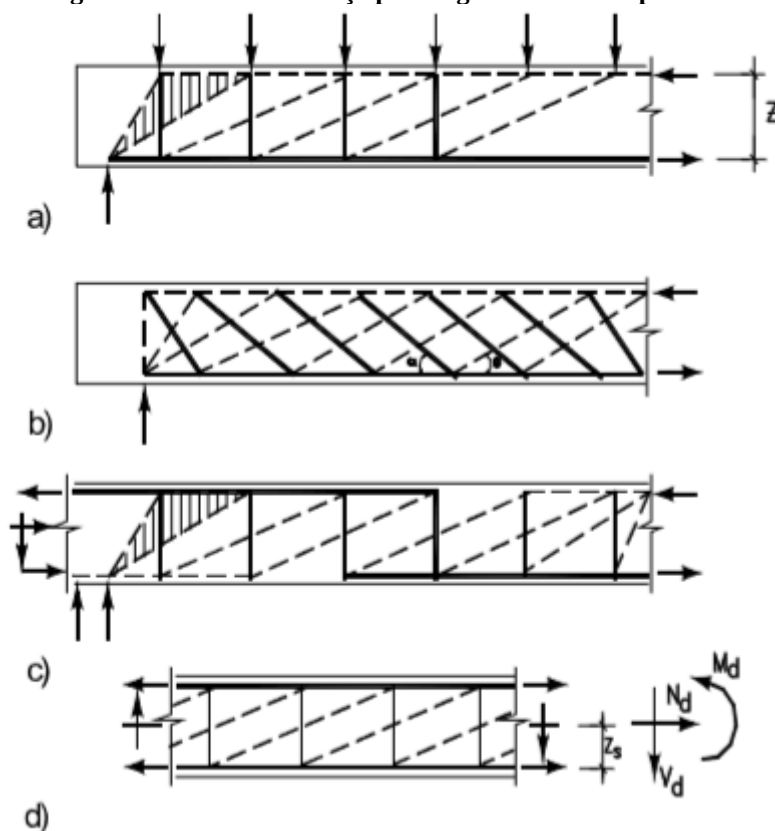
2.2 FUNDAMENTO DAS ESPECIFICAÇÕES PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLICITADAS AO ESFORÇO CORTANTE SEGUNDO A NBR-6118 – 2014

Segundo Giongo (2011), os procedimentos de cálculos dos esforços resistentes ao cortante indicados na NBR-6118 – 2014 são fundamentados nos critérios da norma europeia “CM – CEB-FIP (1990)”. A CM – CEB-FIP é a norma anterior da FIB – 2010, “Fédération Internationale du Béton (Francês) / International Federation for Structural Concrete (Inglês)”.

A Figura 7 ilustra o modelo de treliça para o cálculo e verificação dos esforços resistentes tanto ao cortante, como também ao momento fletor segundo a NBR-6118 – 2014, baseado nos critérios adotados na CM – CEB-FIP (1990). A Figura 7 (a) representa uma viga simplesmente apoiada sob a solicitação de uma carga distribuída, (b) uma força concentrada, (c) força concentrada para uma viga contínua e (d) combinação de cortante com momento fletor e esforço normal.

Segundo a NBR-6118 – 2014, o ângulo formado pelos estribos em relação à armadura longitudinal, α , pode ser tomado igual a 45° ou 90° . Nesse trabalho, adotaremos sempre o ângulo de 90° , sabendo que esse oferece mais vantagem devido à facilidade de montagem na obra e concretagem, Giongo (2011). E o ângulo de inclinação das bielas de concreto é igual a 45° no caso do modelo 1 e está entre 30° e 45° para o modelo 2.

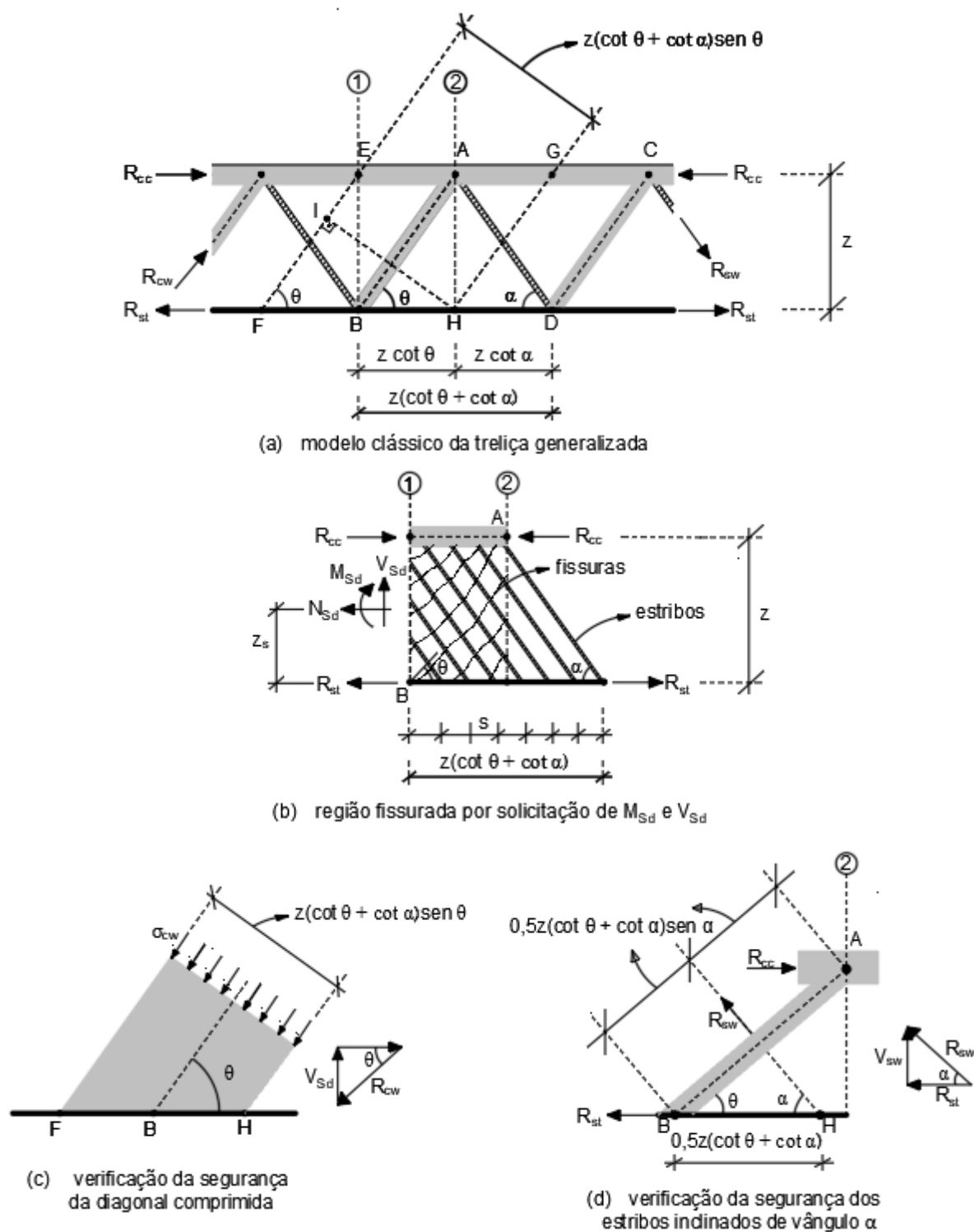
Figura 7 – Modelo de treliça para vigas com banzos paralelos



Fonte: Giongo (2011)

As especificações para o cálculo e dimensionamento de elementos estruturais sujeitos ao esforço cortante são deduzidas a partir das condições de equilíbrio representadas na Figura 8. Essa figura representa o Modelo de Treliça clássica Generalizada de Mörsch para os critérios do modelo I e II da NBR-6118 – 2014, onde o ângulo θ está entre 30° e 45° , e o ângulo α igual a 45° ou 90° . Nessa figura, são apresentadas as relações entre o esforço cortante solicitado de cálculo, V_{sd} , o esforço resistido pelas bielas de concreto e o esforço resistido pela armadura transversal (os estribos).

Figura 8 – Modelo teórico da treli clássica generalizada de Morsch



Fonte: adaptado de Giongo (2011)

2.2.1 Determinação do limite da resistência ao cortante de cálculo, V_{Rd2} , segundo a NBR-6118 – 2014

Utilizando o modelo de treliça clássica generalizada, a Figura 8 (a), a barra $\overline{AB}$, formando um ângulo θ em relação ao eixo longitudinal, representa as bielas de concreto, e é representada como o elemento da Figura 8 (c). A barra $\overline{AD}$, formando um ângulo α em relação ao eixo longitudinal, representa a armadura transversal que resiste aos esforços de tração (tirante). Tanto as bielas, quanto os tirantes garantem o equilíbrio do elemento em relação ao esforço cortante solicitante de cálculo.

Assim, considerando o diagrama de forças da Figura 8 (c), o esforço resistente na diagonal comprimida pode ser calculado como:

$$R_{cw} = \frac{V_{Sd}}{\sen\theta} \quad (2.1)$$

Onde

R_{cw} = força resultante das tensões solicitadas na biela de concreto no trecho $z.(\cot\theta + \cot\alpha).sen\theta$;

V_{Sd} = esforço cortante solicitante de cálculo;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto.

A área da biela de concreto é dada pelo produto da largura do elemento b_w pelo segmento $\overline{HI}$ (vide a Fig. 8 (a)). Logo a tensão na biela pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{cw} = \frac{R_{cw}}{b_w.z.(\cot\theta + \cot\alpha).sen\theta} \quad (2.2)$$

Substituindo a equação 2.1 em 2.2, temos:

$$\sigma_{cw} = \frac{V_{Sd}}{b_w.z.(\cot\theta + \cot\alpha).sen^2\theta} \quad (2.3)$$

A equação 2.3 pode ser escrita ainda como:

$$V_{Sd} = \sigma_{cw}.b_w.z.(\cot\theta + \cot\alpha).sen^2\theta \quad (2.4)$$

O esmagamento da diagonal comprimida pode ocorrer de modo típico à ruína por cortante-tração, com a tração provocada pela aderência com os estribos. Então, podemos considerar:

$$\begin{aligned}\sigma_{cw} &= 0,7 \cdot \sigma_{cd} = 0,7 \cdot 0,85 \cdot f_{cd}; \\ z &= 0,9 \cdot d; \\ \alpha_{v2} &= 1 - \frac{f_{ck}}{250}, [f_{ck} \text{ em MPa}]\end{aligned}$$

A equação 2.4 pode ser escrita como:

$$V_{sd} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

Essa equação corresponde ao limite do esforço cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto indicado no item 17.4.2.3 para o modelo 2 da NBR-6118 – 2014. Fazendo $V_{sd} = V_{Rd2}$, temos:

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \theta \quad (2.6)$$

Na equação 2.6, α_{v2} representa o fator de redução da resistência de cálculo do concreto encontrado também na CEB-FIP (1990), devido a não uniformidade das tensões no concreto segundo Giongo (2011). O coeficiente 0.7 leva em consideração a redução da resistência do concreto em região com tração na direção perpendicular, que é o caso da diagonal comprimida.

f_{cd} = resistência característica à compressão de cálculo;

b_w = largura da alma da viga;

d = altura útil;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto variável;

α = ângulo formado pelos estribos em relação a armadura longitudinal.

Tomando o ângulo $\theta = 45^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$, temos o limite do esforço cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto indicado no item 17.4.2.2 para o modelo 1 da NBR-6118 – 2014 dado por:

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (2.7)$$

2.2.2 Determinação da área da armadura transversal, A_{sw} , segundo a NBR-6118 – 2014

Considerando o diagrama de força da Figura 8 (d), a resistência das tensões de tração na armadura transversal, R_{sw} , com inclinação α em relação ao eixo longitudinal distribuídas no trecho de comprimento $\left[(z/2) \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \right]$, pode ser escrita como:

$$R_{sw} = \frac{V_{sw}}{\sen \alpha} \quad (2.8)$$

Onde

V_{sw} = componente que atua na direção do esforço V_{sd} , da força resultante das tensões nas barras da armadura transversal no segmento $z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)$, conforme mostrado nas Figuras 8 (a) e 8 (b).

O esforço resistente de um estribo é dado por:

$$R_{sw,1} = A_{sw,1} \cdot \sigma_{sw} \quad (2.9)$$

O número de barras da armadura transversal distribuídas no segmento $z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)$, segundo a Figura 8 (b), pode ser determinado como:

$$nb = \frac{z \cdot (\cot \theta + \cot \alpha)}{s} \quad (2.10)$$

Onde

s = espaçamento entre os estribos.

Fazendo $\sigma_{sw} = f_{ywd}$, o esforço resultante em relação a todos os estribos é dado por;

$$R_{sw} = A_{sw,1} \cdot nb \cdot f_{ywd} \quad (2.11)$$

Substituindo a equação 2.10 na equação 2.11 e fazendo $z = 0,9.d$ (viga com deformações compatíveis com o Estádio II), obtemos:

$$V_{sw} = \frac{A_{sw,1}}{s} \cdot f_{ywd} \cdot 0,9.d \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot \sen \alpha \quad (2.12)$$

A equação 2.12 representa a parcela resistente ao esforço cortante devido a armadura transversal indicada para o modelo 2 da NBR-6118 – 2014. E fazendo $\theta = 45^\circ$, temos a expressão dada para o modelo 1, ou seja:

$$V_{sw} = \frac{A_{sw,1}}{s} \cdot f_{ywd} \cdot 0,9 \cdot d \cdot (\sen \alpha + \cos \alpha) \quad (2.13)$$

Onde

f_{ywd} = resistência de cálculo ao escoamento dos estribos.

2.2.3 Parcela resistente ao cortante devido ao concreto, V_c , segundo a NBR-6118 – 2014

Observando as seções 1-1 e 2-2 na Figura 8 (a), existe uma tensão de tração σ_{ct} atuando perpendicularmente a biela AB, ao longo do seu comprimento como ilustra a Figura 9. Essa tensão de tração é causada pelo esforço V_{cw} , na vertical. Assim, podemos determinar o esforço resultante das tensões de tração no concreto, R_{ct} , usando o equilíbrio das forças conforme a Figura 9 da seguinte maneira:

$$R_{ct} = \frac{V_{cw}}{\cos \theta} \quad (2.14)$$

O esforço R_{ct} é perpendicular ao plano da fissura $\overline{AB}$. A distancia entre os esforços resistentes de compressão no concreto, R_{cc} , e o de tração na armadura longitudinal na zona tracionada, R_{st} , é o braço de alavanca $z = 0,9 \cdot d$ segundo a Figura 9. O comprimento $\overline{AB}$, pode ser calculado como:

$$\overline{AB} = \frac{z}{\sen \theta} = \frac{0,9 \cdot d}{\sen \theta} \quad (2.15)$$

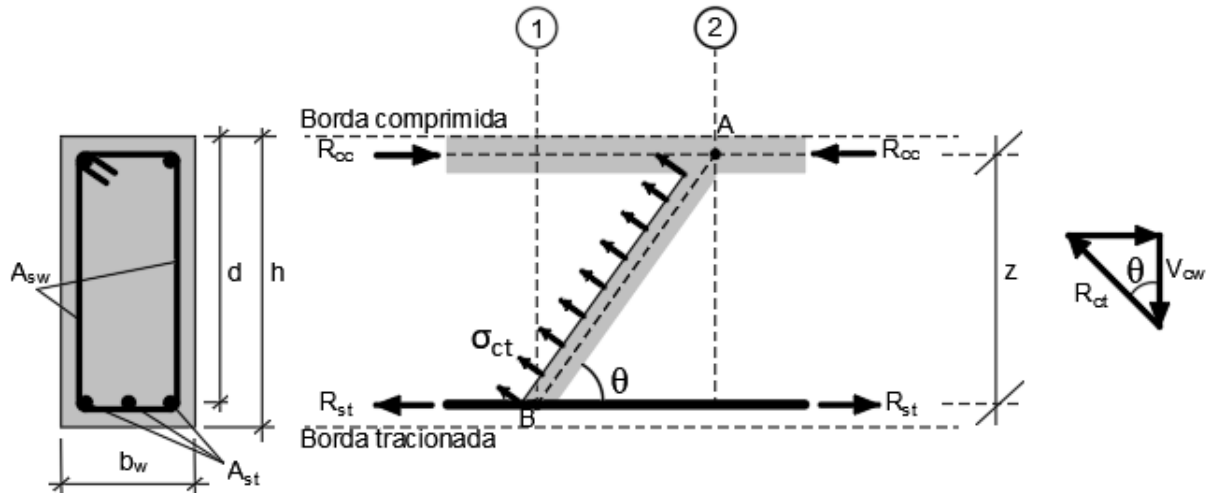
A tensão de tração que atua ao longo do segmento $\overline{AB}$ pode ser escrita como:

$$\sigma_{ct} = \frac{R_{ct}}{b_w \cdot \overline{AB}} \quad (2.16)$$

Substituindo as equações 2.14 e 2.15 na equação 2.16 e fazendo $\sigma_{ct} = f_{ctd}$ (início da primeira fissura), obtivemos:

$$V_{cw} = f_{ctd} \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d \cdot \cot \theta \quad (2.17)$$

Figura 9 – Esforço resistente de tração ao cortante devido ao concreto



Fonte: adaptado de Giongo (2011)

Segundo Mangini (2000), a contribuição do concreto no esforço resistente da seção transversal é de 50% a 70% do esforço calculado na equação (2.17). A NBR-6118 -2014 adota 67%, e exige para o modelo 1 ($\theta = 45^\circ$) que a parcela do esforço resistente ao cortante devido ao concreto na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção transversal, seja calculada como:

$$V_c = V_{c0} = 0,67 \cdot V_{cw} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (2.18)$$

Com

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ct,m}}{\gamma_c} \quad (2.19)$$

$$f_{ct,m} = \begin{cases} 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,12 \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

Onde

$f_{ctk,inf}$ = limite inferior da resistência característica à tração do concreto.

Assim, o esforço resistente ao cortante de uma seção transversal é calculado pela soma da resistência do concreto e dos estribos, ou melhor:

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (2.20)$$

A resistência ao cortante devido ao concreto segundo o modelo 2 da NBR-6118 -2014 como também a decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado, serão tratadas na próxima seção.

Nesses próximos tópicos, como nesse trabalho de dissertação em geral, são considerados estruturas de concreto armado sem protensão, sem esforço normal solicitante, a linha neutra corta a seção transversal, os estribos são colocados a um ângulo de 90° em relação ao eixo longitudinal. Temos ainda as seguintes nomenclaturas para os esforços solicitantes e resistentes segundo a NBR-6118 – 2014:

- ✓ V_{Sd} = Esforço Cortante Solicitante de Cálculo;
- ✓ V_{Rd2} = Esforço Cortante Resistente de Cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;
- ✓ V_{Rd3} = Esforço Cortante Resistente de Cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;
- ✓ T_{Sd} = Momento Torsor Solicitante de Cálculo;
- ✓ $T_{Rd,2}$ = limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto;
- ✓ $T_{Rd,3}$ = limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;
- ✓ $T_{Rd,4}$ = limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural.

2.3 CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO O MODELO I DA NBR-6118 – 2014

Como já foi mencionado anteriormente, V_c é constante e $\theta = 45^\circ$. Os critérios e procedimentos para o cálculo e análise dos esforços resistentes ao esforço cortante se

encontram no item 17.4.2.2 da NBR-6118 – 2014. Temos para esse modelo de cálculo as seguintes exigências:

- O Esforço Solicitante de Cálculo, V_{sd} , na seção transversal a ser analisada não deve exceder a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, V_{Rd2} , ou seja:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.21)$$

Com

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{ck} b_w d \quad (2.22)$$

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right), f_{ck} \text{ em MPa}$$

Onde

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_w = largura da seção;

d = altura útil da seção, igual à distância entre o centroide da armadura longitudinal de tração e a fibra de compressão extrema.

- O Esforço solicitante de cálculo, V_{sd} , não pode ultrapassar a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, V_{Rd3} , isto é:

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (2.23)$$

Com

$$V_c = V_{c0} = 0,6 f_{ctk,inf} b_w d \quad (2.24)$$

$$V_{sw} = \frac{A_{sw} f_{ywd} 0,9d}{s} \quad (2.25)$$

Onde

V_{c0} = parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

V_{sw} = parcela resistente ao esforço cortante pela armadura transversal;

A_{sw} = área da armadura transversal existente na seção;

f_{ywd} = resistência de cálculo ao escoamento da armadura transversal.

s = espaçamento da armadura transversal.

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_w = largura da alma da seção transversal;

d = altura útil da seção, igual à distância entre o centroide da armadura longitudinal de tração e a fibra de compressão extrema.

2.4 CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO O MODELO II DA NBR-6118 – 2014

O ângulo θ varia entre 30° e 45° e a parcela resistente ao cortante devido ao concreto, V_c , não é mais constante e pode diminuir com o aumento do esforço solicitante de cálculo V_{Sd} . As especificações para o cálculo e análise dos esforços resistentes ao Esforço Cortante para esse modelo se encontram no item 17.4.2.3 da NBR-6118 – 2014 e temos as seguintes exigências:

- O Esforço Solicitante de Cálculo, V_{Sd} , na seção transversal a ser analisada não deve exceder a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, V_{Rd2} , ou seja:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.26)$$

Com

$$V_{Rd2} = 0,54\alpha_{v2} f_{ck} b_w d \sin \theta \cos \theta \quad (2.27)$$

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right), f_{ck} \text{ em MPa}$$

Onde

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_w = largura da seção;

d = altura útil da seção, igual à distância entre o centroide da armadura longitudinal de tração e a fibra de compressão extrema;

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto.

- O Esforço solicitante de cálculo, V_{Sd} , não pode ultrapassar a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, V_{Rd3} , ou melhor:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (2.28)$$

Com

$V_c = V_{c1}$ = na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$V_{c1} = V_{c0}$ quando $V_{Sd} \leq V_{c0}$;

$V_{c1} = 0$ quando $V_{Sd} = V_{Rd2}$, interpolando-se linearmente para valores intermediários.

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctk,inf} b_w d \quad (2.29)$$

$$V_{sw} = \frac{A_{sw} f_{ywd} 0,9d}{s} \cot \theta \quad (2.30)$$

Onde

V_{sw} = parcela resistente ao esforço cortante pela armadura transversal;

A_{sw} = área da armadura transversal existente na seção;

f_{ywd} = resistência de cálculo ao escoamento da armadura transversal.

s = espaçamento da armadura transversal.

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_w = largura da alma da seção transversal;

d = altura útil da seção, igual à distância entre o centroide da armadura longitudinal de tração e a fibra de compressão extrema.

2.5 DECALAGEM DO DIAGRAMA DE ESFORÇO NO BANZO TRACIONADO SEGUNDO A NBR-6118 – 2014

A NBR-6118 – 2014 estabelece outro critério que relaciona o esforço cortante com a armadura do banzo tracionado na seção a ser analisada. Esse requisito é dado pela decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado pela força de tração, em cada seção pela seguinte expressão:

$$F_{Sd,cor} = \left[\frac{M_{Sd}}{z} + \left| \frac{V_{Sd}}{2} \right| \cot \theta \right] \leq \frac{M_{Sd,max}}{z} \quad (2.31)$$

Fazendo $F_{Sd} = \frac{M_{Sd,max}}{z}$, a equação 2.31 pode ser reescrita como:

$$\left[\frac{M_{Sd}}{z} + \left| \frac{V_{Sd}}{2} \right| \cot \theta \right] \leq F_{Sd} \quad (2.32)$$

Com

$$F_{Sd} = f_{ywd} A_1 \quad (2.33)$$

Onde

F_{Sd} = esforço resistente de cálculo fornecido pela armadura longitudinal na zona tracionada;

$F_{Sd,cor}$ = esforço de tração na zona tracionada devido a M_{Sd} e V_{Sd} ;

M_{Sd} = momento fletor solicitante de cálculo;

V_{Sd} = esforço solicitante de cálculo ao cortante;

$M_{Sd,máx}$ = momento fletor de cálculo máximo na seção em análise;

f_{ywd} = resistência de cálculo ao escoamento dos estribos;

A_1 = armadura longitudinal na zona tracionada;

z = braço de alavanca.

2.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MODELOS I E II DA NBR-6118 – 2014

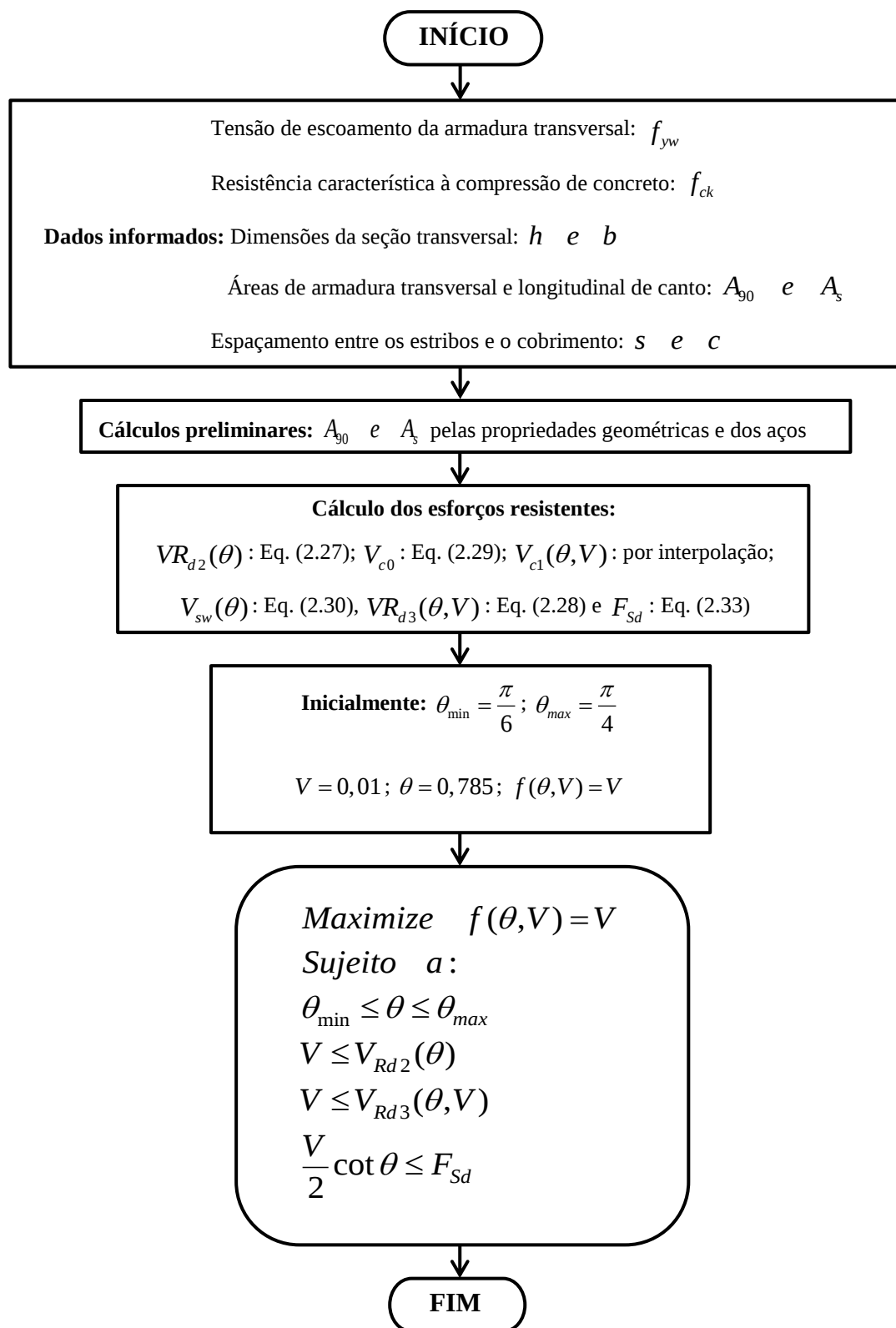
É desejável comparar o esforço resistente ao cortante segundo os dois modelos da NBR-6118 – 2014 e, particularmente, quando o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , é igual a 45° . O problema em questão é determinar o esforço resistente máximo ao cortante pelos dois modelos e comparar os mesmos quando θ atinge 45° .

A seguir, iremos mostrar um exemplo de aplicação das especificações encontradas nesses dois modelos para o cálculo do esforço resistente máximo ao cortante de uma seção transversal qualquer na ausência de torção. A Figura 11 mostra a geometria da seção e os dados a serem utilizados na solução do problema. A resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , e a tensão de escoamento da armadura transversal e longitudinal, f_{ywk} , são iguais a 40 MPa e 500 MPa, sucessivamente. As dimensões da seção (altura e largura) estão em cm.

O roteiro para o cálculo do esforço resistente máximo ao cortante pelo método de otimização é mostrado no fluxograma da Figura 10 e o código em MATHCAD concernente a ele encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

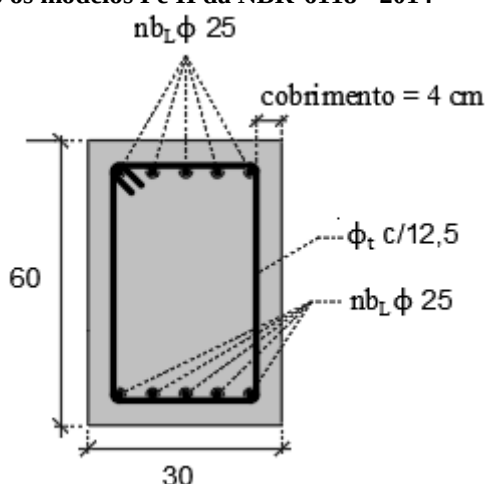
Nesse fluxograma, a função objetivo é definida como $f(\theta, V) = V$, e as variáveis de projetos são o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , e o esforço resistente máximo ao cortante, V . Restrições de desigualdades foram impostas conforme as exigências indicadas no item 17.4 da NBR-6118 – 2014 para o cálculo de elementos lineares sujeitos à Esforço Cortante.

Figura 10 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência ao Cortante



Fonte: o autor

Figura 11 – Seção transversal de concreto armado para o cálculo da resistência máxima ao esforço cortante segundo os modelos I e II da NBR-6118 - 2014



Fonte: o autor

Onde

nb_L = número de barras da armadura longitudinal;

ϕ = diâmetro da armadura longitudinal;

ϕ_t = diâmetro da armadura transversal;

2.6.1 Soluções para o esforço resistente máximo ao cortante sem a decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado

Inicialmente foi desprezado o efeito da armadura longitudinal na seção em análise e foram considerados 3 casos para o cálculo da resistência máxima ao cortante pelo modelo 2, variando a área da armadura transversal da seção. Para isso, não foi considerada a restrição dada na equação 2.32. Em seguida, foi feito o cálculo do esforço resistente máximo ao cortante segundo o modelo 1, utilizando a mesma armadura transversal que fornece o ângulo de inclinação das bielas de concreto igual a 45° ($\theta = 45^\circ$) no modelo 2. A Tabela 1 mostra a comparação dos resultados entre os 2 modelos, Onde A_{90} representa a área de um ramo de estribo montado a 90° em relação ao eixo longitudinal.

Tabela 1 – Comparação do esforço resistente ao cortante entre os modelos I e II da NBR-6118 – 2014 sem decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado

	MODELO II			MODELO I
	$A_{90} = 100 \text{ mm}^2$	$A_{90} = 300 \text{ mm}^2$	$A_{90} = 500 \text{ mm}^2$	$A_{90} = 500 \text{ mm}^2$
θ	30°	36°	45°	45°
V [MN]	0,71	1,366	1,421	1,421

Fonte: o autor

É de se esperar que a resistência ao esforço cortante esteja igual nos dois modelos quando o ângulo de inclinação das bielas, θ , é igual a 45°. Percebemos também que a resistência aumenta com o aumento do ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , o que leva vários projetistas a utilizar o Modelo I para o cálculo e análise de estruturas de concreto armado sobre a solicitação de cortante, além da facilidade de utilização do mesmo. Esse comportamento pode ser diferente quando o esforço cortante é combinado com momento torsor. Essa análise será feita pelos gráficos de interação Torque – Cortante que é o foco nesta dissertação.

2.6.2 Soluções para o esforço resistente máximo ao cortante considerando a decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado

Os dados e os detalhes das armaduras na seção transversal da Figura 11 foram utilizados para estudar o efeito da armadura longitudinal na resistência máxima ao esforço cortante. Para isso, foi feita uma variação no número de barras longitudinais, n_{bL} , para cada caso de armadura transversal. Assim, foi considerada a restrição apresentada na Equação 2.32 no processo de otimização. Os resultados obtidos para esse tópico são mostrados na Tabela 2.

Alguns aspectos são relevantes na análise desses resultados. Primeiramente, assim como foi visto no tópico 2.6.1, o aumento da armadura transversal fornece maior ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , e aumenta também o esforço resistente máximo ao cortante. A resistência máxima ao esforço cortante é igual nos dois modelos para θ igual a 45°.

Tabela 2 – Esforço resistente ao cortante considerando a decalagem do diagrama de banzo tracionado com os modelos I e II da NBR-6118 - 2014

		MODELO II		MODELO I	
		$A_{90} = 100$	$A_{90} = 300$	$A_{90} = 500$	$A_{90} = 500$
		[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]
θ	36°	45°	45°	45°	nb_L = 2
V [MN]	0,62	0,854	0,854	0,854	
θ	30°	42°	45°	45°	nb_L = 3
V [MN]	0,71	1,155	1,281	1,281	
θ	30°	36°	45°	45°	nb_L = 5
V [MN]	0,71	1,366	1,421	1,421	

Fonte: o autor

Outro fenômeno é destacado em relação à variação da armadura longitudinal. Observamos que a diminuição da armadura longitudinal provoca um aumento no ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , e reduz o esforço resistente máximo ao cortante. Isso mostra quanto é importante levar em consideração as armaduras longitudinais no cálculo e análise de uma seção. Além dos cuidados que devem ser tomados na decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado. Considerando o modelo I por exemplo que é similar ao modelo II quando θ é 45°, o esforço cortante resistente de 1,4 MN para 5 barras de 25 mm de diâmetro é quase o dobro da resistência ao cortante para 2 barras de mesmo diâmetro.

2.7 MODELO DE TRELIÇA ESPACIAL PARA O CÁLCULO DE TORÇÃO

Segundo Bastos (2017), o Modelo de Treliza Espacial foi proposto inicialmente por Rausch em 1929, baseado na analogia da seção vazada desenvolvida por Bredt e tem sido utilizado por diversas normas, inclusive a NBR-6118 – 2014. Esse modelo supõe que as seções sólidas de concreto armado, podem ser representadas como seções vazadas de paredes finas interligadas aos componentes de uma treliza onde as bielas de concreto são responsáveis para combater as tensões de compressão e as armaduras transversais e longitudinais resistem aos esforços de tração.

A Figura 12 mostra o modelo do tubo de paredes finas utilizado para analisar o comportamento de um elemento estrutural submetido à torção pura. O fluxo de cisalhamento, $q = vt$, é considerado constante ao longo do perímetro do tubo e o momento causado pelas tensões de cisalhamento em torno do eixo x atuando em um comprimento dp , pode ser calculado como:

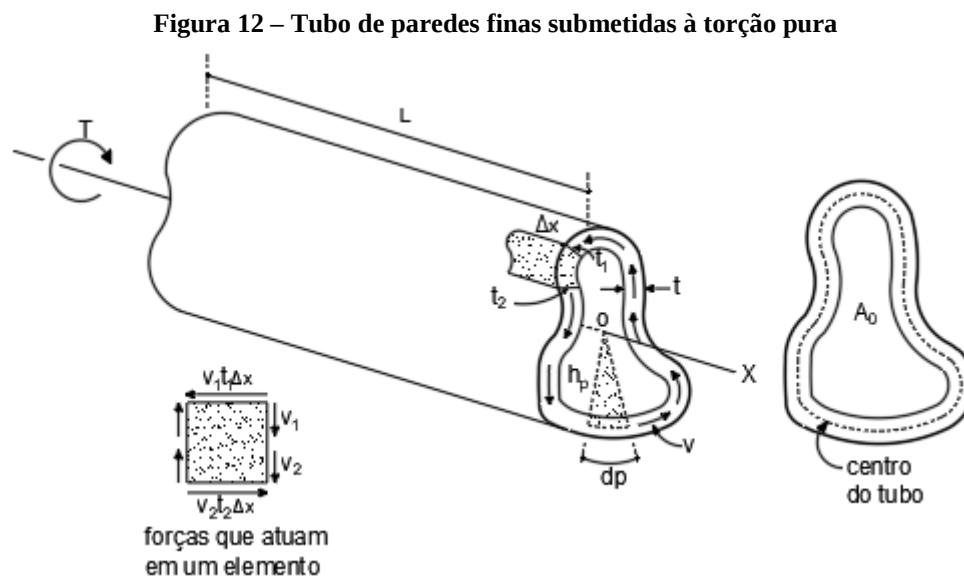
$$dT = qh_p dp \quad (2.34)$$

Onde h_p representa o braço de alavanca da força de cisalhamento de torção, qdp . A integração em torno do perímetro fornece o momento torção, ou, seja:

$$T = q \int_p h_p dp = q2A_0 \quad (2.35)$$

A_0 representa a área envolvida pelo fluxo de cisalhamento. A tensão de cisalhamento causada por essa torção na parede do tubo com espessura t é dada por:

$$v = \frac{T}{2A_0 t} \quad (2.36)$$



Fonte: adaptado de Cowan (1968)

2.7.1 Determinação das áreas das armaduras transversal, A_{sw} , e longitudinal, A_{sl} , segundo a NBR-6118 – 2014

A Figura 13 ilustra as condições de equilíbrio para uma viga fissurada devido ao momento tórcor solicitante. O fluxo de cisalhamento proveniente da tensão de cisalhamento torcional na diagonal de compressão deve equilibrar a torção, ou seja:

$$q = vt = \frac{T}{2A_0} \quad (2.37)$$

A força de tração nos estribos deve equilibrar a componente vertical da diagonal de compressão conforme mostrado na Figura 14 (d). Consequentemente:

$$\frac{A_t f_t}{s} = \frac{T}{2A_0} \tan \theta \quad (2.38)$$

Fazendo $f_t = f_{ywd}$, $A_t = A_{90}$ e $A_0 = A_e$, a equação 2.38 é igual à expressão indicada no item 17.5 da NBR-6118 – 2014 como o limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd3} . Reescrevendo essa equação, temos:

$$T_{Rd3} = \frac{A_{90} f_{ywd} 2A_e}{s} \cot \theta \quad (2.39)$$

Onde

A_{90} = área da armadura transversal de um ramo, inclinado a 90° em relação ao eixo longitudinal;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

s = espaçamento entre os estribos;

f_{ywd} = tensão de cálculo ao escoamento da armadura transversal;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto.

A componente longitudinal da diagonal de compressão, N_v , deve equilibrar também a tensão na armadura longitudinal segundo a Figura 13 (b). Disso:

$$N_v = A_l f_l = \frac{T p_0 \cot \theta}{2A_0} \quad (2.40)$$

Fazendo $f_l = f_{ywd}$, $p_0 = u_e$ e $A_0 = A_e$, a equação 2.40 representa o limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd4} , indicada no item 17.5 da NBR-6118 – 2014. Assim:

$$T_{Rd4} = \frac{A_{sl} 2A_e f_{ly}}{u_e} \tan \theta \quad (2.41)$$

Onde

A_{sl} = área da armadura longitudinal total na seção transversal;

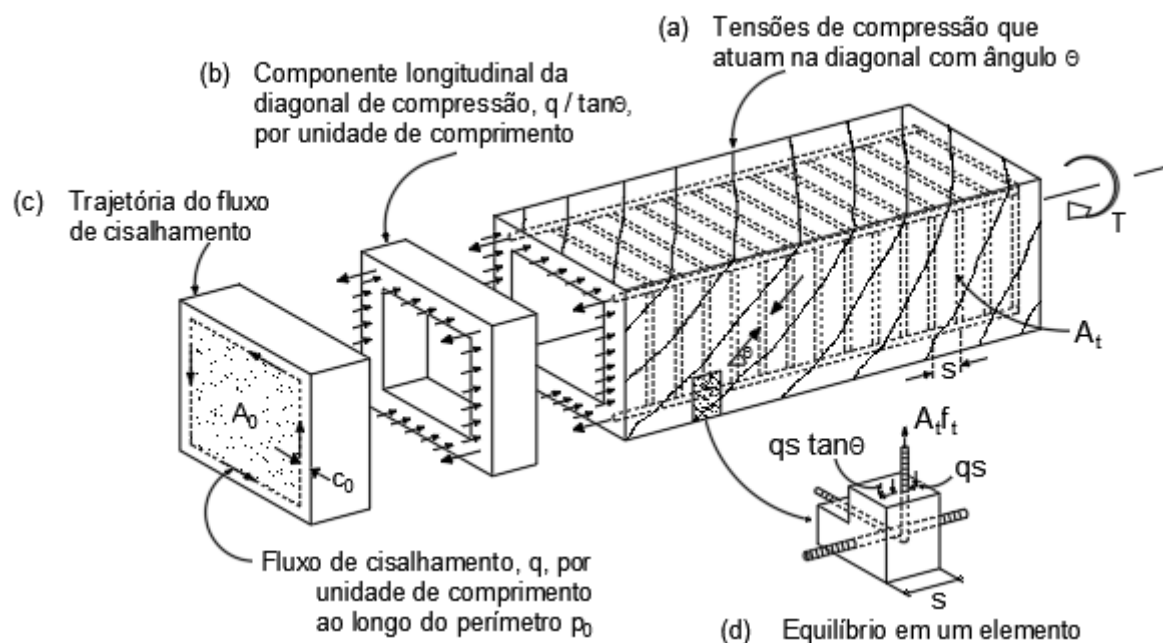
A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

u_e = perímetro da linha média do fluxo de cisalhamento;

f_{ywd} = tensão de cálculo ao escoamento da armadura longitudinal;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto.

Figura 13 – Condições de equilíbrio para uma viga fissurada devido à torção



Fonte: adaptado de Cowan (1968)

2.7.2 Condições necessárias para o cálculo do momento torsor resistente segundo a NBR-6118 – 2014

A NBR-6118 – 2014 utiliza o modelo de treliça espacial com os mesmos elementos definidos anteriormente com a analogia do tubo de paredes finas que consiste em idealizar a seção a ser estudada em outra seção vazada equivalente composta de paredes com espessura h_e , para o cálculo e análise de torção. As prescrições para o cálculo e análise dos esforços resistentes ao momento torsor estão no item 17.5 da NBR-6118 – 2014 e tem as seguintes orientações:

- O momento torsor solicitante de Cálculo, T_{Sd} , na seção transversal a ser analisada não deve exceder o limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto, T_{Rd2} , ou seja:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd2} \quad (2.42)$$

Com

$$T_{Rd2} = 0,5\alpha_{v2} f_{ck} A_e h_e \sin(2\theta) \quad (2.43)$$

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right), f_{ck} \text{ em MPa}$$

Onde

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

h_e = espessura equivalente da parede;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento.

- O momento torsor solicitante de cálculo, T_{Sd} , na seção transversal a ser analisada não pode ultrapassar o limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd3} , ou melhor:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd3} \quad (2.44)$$

Com

$$T_{Rd3} = \frac{A_{90} f_{ywd} 2A_e}{s} \cot \theta \quad (2.45)$$

Onde

A_{90} = área da armadura transversal de um ramo;

f_{ywd} = tensão de cálculo ao escoamento da armadura transversal;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

s = espaçamento da armadura transversal;

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto.

- O momento tissor solicitante de cálculo, T_{sd} , na seção transversal a ser analisada não deve ultrapassar o limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd4} , i.e.:

$$T_{sd} \leq T_{Rd4} \quad (2.46)$$

Com

$$T_{Rd4} = \frac{A_{sl} 2A_e f_{ywd}}{u_e} \tg \theta \quad (2.47)$$

Onde

A_{sl} = área total de armadura longitudinal na seção transversal;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

u_e = perímetro envolvido pelo fluxo de cisalhamento;

f_{ywd} = tensão de cálculo ao escoamento da armadura longitudinal;

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto.

2.7.2.1 Determinação da espessura da parede equivalente, h_e :

Um dos problemas de inconsistência encontrado na norma NBR-6118 - 2014 é a determinação da espessura da parede equivalente, h_e , para o cálculo do momento torsor resistente. A norma brasileira estabelece os seguintes critérios para a definição da espessura da parede equivalente segundo o item 17.5.1.4.1:

$$\begin{cases} 2c_1 \leq h_e \leq \frac{A}{u}, \text{ para } \frac{A}{u} \geq 2c_1 \\ h_e = \frac{A}{u} \leq b_w - 2c_1, \text{ para } \frac{A}{u} < 2c_1 \end{cases} \quad (2.48)$$

Onde

c_1 = distancia entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural;

A = área da seção sólida;

u = perímetro da seção sólida;

b_w = largura da seção;

Notamos pela equação 2.48 que independente do caso considerado $\left(\frac{A}{u} \geq 2c_1 \text{ ou } \frac{A}{u} < 2c_1 \right)$, a espessura da parede equivalente, h_e , varia entre uma relação constante A / u , (propriedades da seção transversal) e uma relação variável em função do parâmetro c_1 que por sua vez varia com o aumento do diâmetro do estribo assim como o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ . Os exemplos abaixo tratam com mais detalhes a variação dessa espessura e do ângulo.

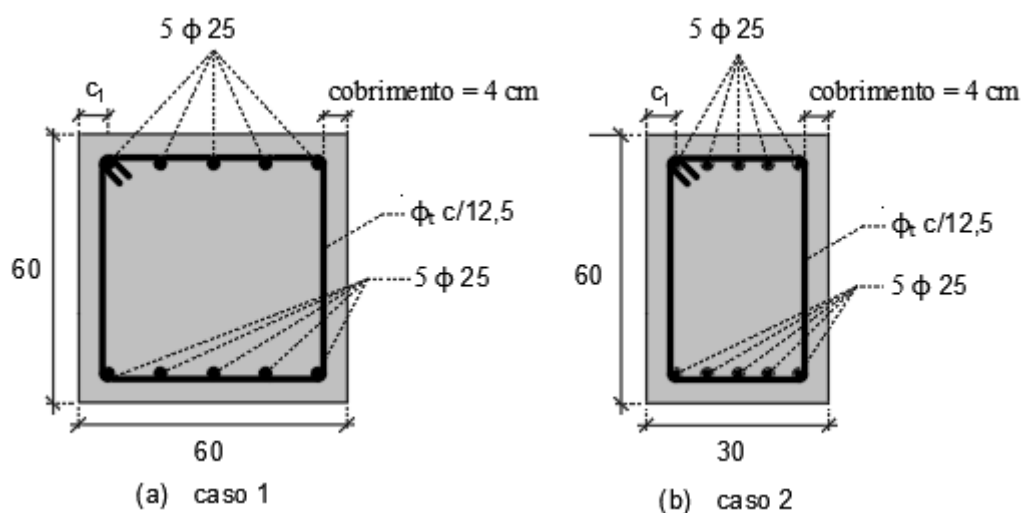
2.7.2.2 Considerações sobre a espessura da parede equivalente, h_e e o ângulo θ

Assim como foi feito nos exemplos de vigas solicitadas ao esforço cortante na ausência de torção, escolhemos duas seções de modo a obter os dois casos apresentados na equação 2.48 para analisar o comportamento de seções solicitadas à torção na ausência de esforço

cortante. Em ambas as seções, fez-se uma variação nas armaduras transversais para o cálculo da resistência máxima ao momento torsor, e a verificação da espessura de parede e o ângulo de inclinação das bielas θ . A Figura 14 mostra a geometria das seções com os seus respectivos dados. A resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , e a tensão de escoamento da armadura transversal e longitudinal, f_{ywk} , são iguais a 40 MPa e 500 MPa sucessivamente para os dois casos. As dimensões das seções (alturas e larguras) estão em cm.

O roteiro para determinar o máximo momento torsor resistente pelo método de otimização é ilustrado no fluxograma da Figura 15 e o código em MATHCAD referente a ele encontra-se no apêndice B deste trabalho.

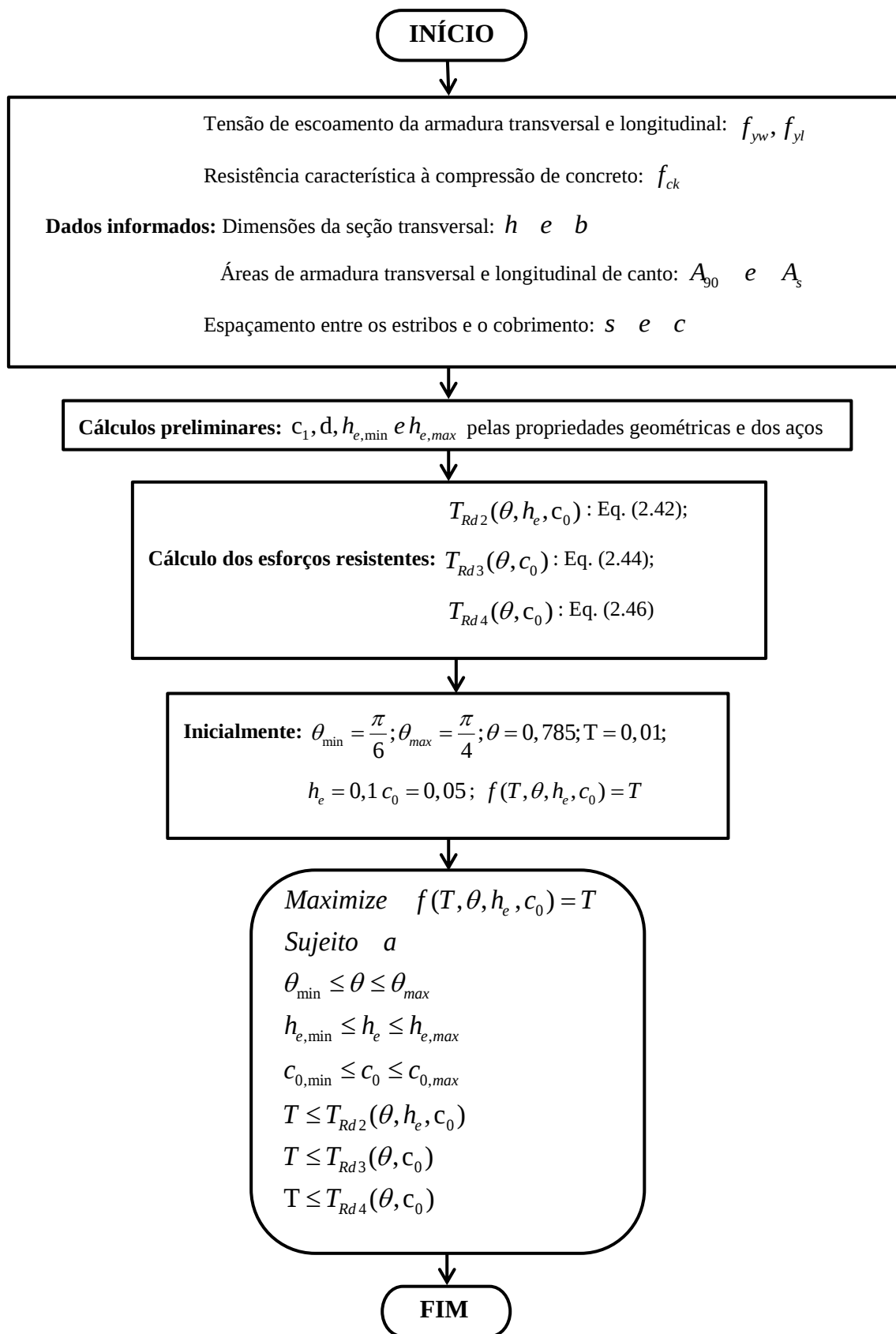
Figura 14 – Dados do primeiro exemplo de cálculo da resistência máxima ao momento torsor



Fonte: o autor

A função objetivo para esse problema é definida como $f(T, \theta, h_e, c_0) = T$, e as variáveis de projetos são o momento resistente máximo ao torsor, T , o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , a espessura de parede equivalente, h_e , e a distancia da superfície média da parede equivalente a face externa da seção, c_0 (Figura 13 (c)). Restrições de desigualdades foram impostas conforme as exigências indicadas no item 17.5 da NBR-6118 – 2014 para o cálculo de elementos lineares sujeitos a momento torsor.

Figura 15 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência ao momento torsor



Fonte: o autor

2.7.2.3 Soluções para o momento resistente a torção do exemplo da Figura 14

Como já mencionado, para estudar o comportamento de vigas de concreto armado sob a solicitação de momento torsor sem influência de esforço cortante e momento fletor, foram escolhidas essas duas seções. A primeira seção foi escolhida de modo que a relação das dimensões geométricas A / u fosse maior ou igual a $2c_1$, correspondendo ao primeiro caso para determinar a espessura equivalente da parede, h_e . A segunda seção corresponde ao segundo caso onde A / u é inferior a $2c_1$. Para ambos os casos, foi feita uma variação na armadura transversal para avaliar o ângulo de inclinação das bielas, θ , e a espessura h_e . Os resultados obtidos para todos os casos são mostrados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Soluções para o momento torsor resistente máximo do exemplo da Figura 14 (a)

Caso 1					
$A / u \geq 2c_1$	$A_{90} = 100$ [mm ²]	$A_{90} = 150$ [mm ²]	$A_{90} = 200$ [mm ²]	$A_{90} = 300$ [mm ²]	$A_{90} = 400$ [mm ²]
$h_{e,min}$ [m]	0,128	0,133	0,137	0,144	0,15
$h_{e,máx}$ [m]	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
h_e [m]	0,128	0,133	0,137	0,144	0,15
θ	30°	34°	37,8°	43,4°	45°
T [MN. m]	0,269	0,337	0,384	0,46	0,48

Fonte: o autor

Podemos observar no caso 1 que a espessura da parede equivalente, h_e , varia com o aumento da taxa de armadura transversal na seção. Como a espessura da parede equivalente mínima, $h_{e,min}$, oferece o momento resistente máximo ao torsor, a variação da espessura equivalente pode ser explicada pela variação do parâmetro c_1 indicado na equação 2.48 que é função do diâmetro do estribo. Vimos também que a resistência máxima ao momento torsor aumenta com o aumento do ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , devido ao aumento da área dos estribos. Mas como foi comentado para o cortante sem torção, não é garantida a obtenção desse mesmo comportamento quando a torção é combinada com cortante.

Tabela 4 – Soluções para o momento torsor resistente máximo do exemplo da Figura 14 (b)

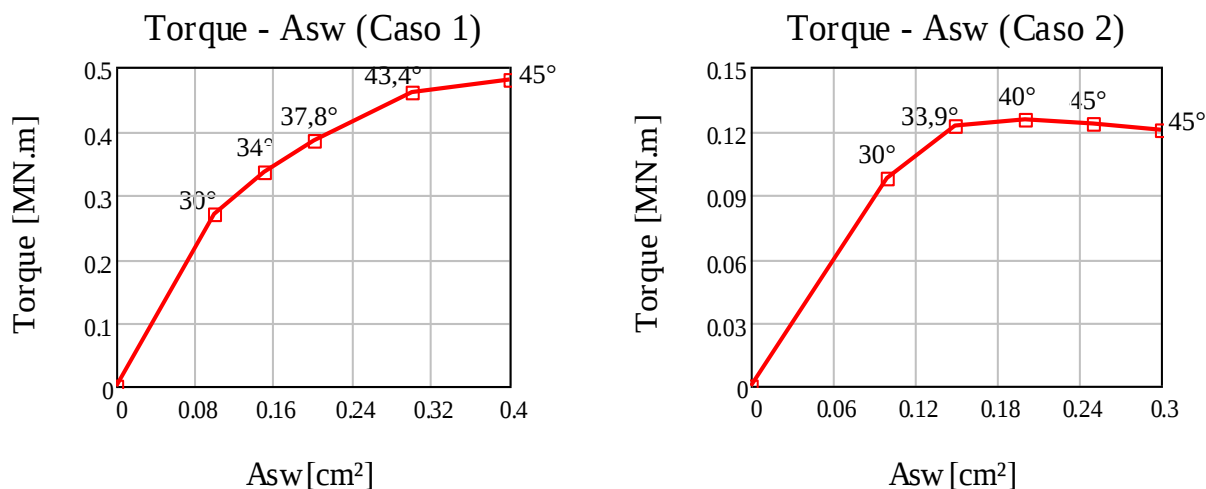
Caso 2					
$A/u < 2c_1$	$A_{90} = 100$	$A_{90} = 150$	$A_{90} = 200$	$A_{90} = 250$	$A_{90} = 300$
	[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]	[mm ²]
$h_{e,min}$ [m]	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
$h_{e,máx}$ [m]	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
h_e [m]	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
θ	30°	33,9°	40°	45°	45°
T [MN. m]	0,098	0,122	0,125	0,123	0,120

Fonte: o autor

No segundo caso, a espessura da parede é constante independentemente do aumento da área da armadura transversal. Isso se dá devido à relação que oferece a menor espessura para o segundo caso da equação 2.48 que é constante (A/u). Observamos também um aspecto importante, o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , continua aumentando com o aumento da área de armadura transversal, portanto o momento torsor resistente máximo atinge um valor maior para $\theta = 40^\circ$ do que $\theta = 45^\circ$. Isso significa que a armadura de 200 mm² é suficiente para resistir ao esforço solicitante e qualquer armadura adicionada a essa, não contribui para a resistência ao momento torsor.

Os gráficos a seguir mostram o comportamento da resistência máxima ao momento torsor com o aumento da armadura transversal tanto para o caso 1, quanto para o caso 2.

Figura 16 – Gráfico Torque – Armadura transversal



Fonte: o autor

A diferença comportamental entre esses dois casos serve para mostrar quanto é importante utilizar o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , corretamente para o cálculo do momento torsor resistente sem ou com a influência do esforço cortante e momento fletor.

2.8 RESISTÊNCIA À AÇÃO COMBINADA TORÇÃO – CORTANTE SENDO A NBR-6118 – 2014

Quando o momento torsor é combinado com o esforço cortante, segundo o item 17.7.2 da NBR-6118 – 2014, o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , deve ser o mesmo para o cálculo tanto da resistência à torção, quanto a resistência ao cortante. A armadura transversal para resistir aos esforços de cisalhamento pode ser determinada separadamente somando a parcela resistente de cálculo ao cortante, V_{sd} , com a parcela resistente de cálculo ao torsor, T_{sd} . Assim temos a seguinte expressão para o cálculo da armadura transversal da combinação Torque - Cortante:

$$\frac{A_{w+90}}{s} = \frac{A_w}{s} + \frac{2A_{90}}{s} \quad (2.49)$$

Substituindo a área de armadura por unidade de comprimento do espaçamento devido ao cortante da equação 2.30 e a devido à torção da equação 2.45 na equação 2.49, temos:

$$\frac{A_{w+90}}{s} = \frac{V_{sw}}{f_{ywd} 0,9d \cot \theta} + \frac{T}{f_{ywd} A_e \cot \theta} \quad (2.50)$$

Fazendo ainda $V_{sw} = \max\{V - V_c, 0\}$, a equação 2.49 torna-se:

$$\frac{A_{w+90}}{s} = \frac{\max\{V - V_c, 0\}}{f_{ywd} 0,9d \cot \theta} + \frac{T}{f_{ywd} A_e \cot \theta} \quad (2.51)$$

O segundo termo do segundo membro da equação 2.49 representa a área de armadura transversal para dois ramos de estribo devido ao momento torsor;

Onde

A_w = área de armadura transversal para duas pernas de estribo devido ao esforço cortante;

s = espaçamento entre os estribos;

A_{w+90} = área de armadura transversal total na seção devido à combinação cortante – torção;

V_{sw} = parcela resistente ao esforço cortante pela armadura transversal;

V_c = parcela de esforço resistente ao cortante devido ao concreto;

V = esforço resistente máximo ao cortante da seção em análise;

T = momento resistente máximo à torção da seção em análise.

f_{ywd} = tensão de cálculo ao escoamento da armadura transversal;

d = altura útil da seção transversal;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

A NBR-6118 – 2014 estabelece ainda o seguinte critério (item 17.7.2.2) para a verificação do esmagamento da diagonal de concreto à compressão quando o momento torsor é combinado com esforço cortante:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad (2.52)$$

Onde

V_{Sd} e T_{Sd} , representam o esforço cortante solicitante de cálculo e momento torsor solicitante de cálculo respectivamente. E V_{Rd2} e T_{Rd2} , representam respectivamente o limite do esforço cortante, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto e o limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto para o momento torsor.

2.8.1 Decalagem do diagrama de esforço no banço tracionado segundo a NBR-6118 – 2014 para combinação Torção – Cortante

A equação 2.32 desempenha um grande papel no cálculo e análise dos esforços resistentes tanto ao cortante, quanto à torção. Como esse trabalho de dissertação trata da análise e cálculo de esforço resistente ao cortante combinado com torção sem influência do momento fletor, podemos considerar que a força existente na zona tracionada devido à armadura longitudinal deve ser maior ou igual aos esforços solicitados na seção em análise, ou melhor:

$$\cot \theta \left(\frac{T_{Sd}}{2A_e} \frac{u_e}{2} + \frac{V_{Sd}}{2} \right) \leq F_{Sd} \quad (2.53)$$

Onde

T_{Sd} = momento torsor de cálculo;

u_e = perímetro envolvido pelo fluxo de cisalhamento;

A_e = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

V_{sd} = Esforço cortante de cálculo;

θ = ângulo de inclinação das bielas;

F_{Sd} = esforço de tração devido a armadura longitudinal na zona tracionada.

O primeiro termo da soma entre parêntese da equação 2.53 é derivado da formula para o cálculo do momento torsor em função da armadura longitudinal segundo o item 17.5 da NBR-6118 – 2014. A expressão $u_e / 2$ corresponde à metade do perímetro envolvido pelo fluxo de cisalhamento na zona tracionada.

3 ESFORÇOS RESISTENTES SEGUNDO A NORMA AASHTO-LRFD - 2014

Vimos no capítulo anterior a aplicação de métodos e modelos que podem ser utilizados para estabelecer os critérios que devem ser atendidos no projeto que envolve o cálculo e análise de estruturas de concreto armado sob a solicitação de momento torsor combinado com esforço cortante.

Assim como a NBR-6118 – 2014 baseou-se no Modelo da Treliça de Mörsch e Treliça Espacial para indicar os procedimentos para o cálculo de esforço cortante e momento torsor, as especificações encontradas na AASHTO-LRFD - 2014 se baseiam na Teoria do Campo de Compressão Modificado – TCCM (*MODIFIED COMPRESSION FIELD THEORY* – MCFT) para calcular a resistência ao esforço cortante solicitante e no Modelo da Treliça Espacial para o cálculo de torção. A TCCM foi desenvolvida por Vecchio e Collins (1986) para resolver o problema de conservadorismo que apresenta a Teoria do Campo de Compressão desenvolvida por Mitchell e Collins (1974) que é também uma solução para determinar as incógnitas encontradas no Modelo de Treliça com Ângulo Variável.

A seguir, iremos descrever o embasamento de algumas formulas encontrada nos procedimentos da AASHTO-LRFD - 2014 para o cálculo do esforço resistente ao cortante baseado na TCCM simplificada e da resistência ao momento torsor com base dos modelos da Treliça Espacial e do Tubo de Paredes Finas. Entre as definições encontradas nessa norma para a resistência dos elementos de concreto armado, destacamos de modo geral:

- R_n = Resistência Nominal, definida como sendo a resistência de um elemento ou a reação aos efeitos causados por uma força devido às dimensões, às tensões admissíveis, às deformações ou resistências dos materiais do elemento.
- R_r = Resistência de Cálculo, é a resistência nominal multiplicado por um fator de resistência, ou seja: $R_r = \phi R_n$.

O fator de resistência, ϕ , por sua vez, é definido como sendo um multiplicador estatisticamente aplicado à resistência nominal, responsável pela variabilidade das propriedades dos materiais, dimensões estruturais, mão de obra, incerteza nas resistências previstas, a aplicação e calibração das cargas.

- R_u = Resistência Última, é o limite relativo ao estado último à resistência e à estabilidade do elemento durante a sua vida útil.

3.1 TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO

Segundo Collins, Bentz, Sherwood e Xie (2007), a Teoria do Campo de Compressão Modificado foi desenvolvida pela observação dos resultados experimentais em um elemento de concreto armado submetido ao esforço cortante puro. Na análise desses resultados, observou-se que a tensão principal e a deformação principal de compressão nas bielas de concreto do elemento testado são bem menores do que a resistência do concreto de um cilindro padrão testado, e a diferença entre esses dois valores aumentava à medida que aumentasse a deformação principal de tração no elemento.

A partir das tensões de tração no concreto fissurado, Vecchio e Collins (1986) modificaram a teoria do Campo de Compressão desenvolvida por Mitchell e Collins (1974) para a Teoria do Campo de Compressão Modificado.

A teoria do Campo de Compressão é baseada no modelo de treliça com ângulo variável, relacionando as equações de equilíbrio com as deformações da seção analisada. Para entender melhor os mecanismos da Teoria do Campo de Compressão Modificado, iniciaremos as demonstrações começando pelo Modelo de Treliça com ângulo Variável, em seguida a Teoria do Campo de Compressão.

3.1.1 Modelo de treliça com ângulo variável

Vimos no Capítulo 2 desse trabalho que o Modelo de Treliça com ângulo variável (Treliça Generalizada de Morsch), ao contrario da Treliça Clássica que considera o ângulo de inclinação das bielas de concreto fixo ($\theta = 45^\circ$), admite esse ângulo variável.

As mesmas equações derivadas dos conceitos utilizados na Figura 8 para deduzir a área da armadura transversal devido ao cortante solicitante são usadas para explicar o surgimento da Teoria do Campo de Compressão. Assim, fazendo algumas mudanças de variáveis nas equações 2.3 e 2.12 inclusive nas identidades trigonométricas, e adotando o ângulo da inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal igual a 90° , essas equações podem ser reescritas sucessivamente como:

$$f_2 = \frac{V}{b_w j d} (\tan \theta + \cot \theta) \quad (3.1)$$

$$\frac{A_v f_v}{s} = \frac{V}{jd} \tan \theta \quad (3.2)$$

Onde

$f_2 = \sigma_{cw}$ = tensão principal de compressão nas bielas de concreto;

$V = V_{sd}$ = esforço cortante solicitante;

$jd = z = 0.9d$ = braço de alavanca;

b_w = largura da alma da viga;

$A_v = A_{sw,1}$ = área de um estribo na seção em análise;

$f_v = f_{ywd}$ = resistência de cálculo ao escoamento dos estribos;

s = espaçamento entre os estribos;

Pelo diagrama de força na Figura 8 (d), o esforço de tração na armadura longitudinal, $R_{st} = N_v$, na ausência de esforço normal solicitante, deve equilibrar o esforço resistente às tensões de compressão na diagonal comprimida, $R_{cw} = D$ (Figura 8 (c)). Ou seja:

$$R_{st} = N_v = R_{cw} \cos \theta = D \cos \theta \quad (3.3)$$

Substituindo a equação 2.1 na equação 3.3, obtivemos:

$$N_v = V \cot \theta \quad (3.4)$$

Analisando todas essas equações, pode perceber que para um esforço cortante solicitante, V , existem quatro incógnitas para serem calculadas (f_2 , f_v , N_v , e θ). Isso dificulta o cálculo do esforço resistente ao cortante somente pelas equações de equilíbrio. Para resolver esse problema, Mitchell e Collins (1974) desenvolveram a teoria do Campo de Compressão (TCC).

3.1.2 Teoria do Campo de Compressão

Uma das hipóteses da Teoria do Campo de Compressão é que o concreto não contribui para a resistência à tração na fissuração. Ou seja, as tensões principais de tração nas bielas de concreto são consideradas nulas ($\sigma_{ct} = f_t = 0$). Nesse momento, o esforço cortante é resistido por um campo de compressão diagonal e pelos estribos. Com essa hipótese, é possível expressar o ângulo de inclinação das tensões principais de compressão em função das deformações da seção em análise como:

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2} \quad (3.5)$$

Onde

ε_x = deformação longitudinal;

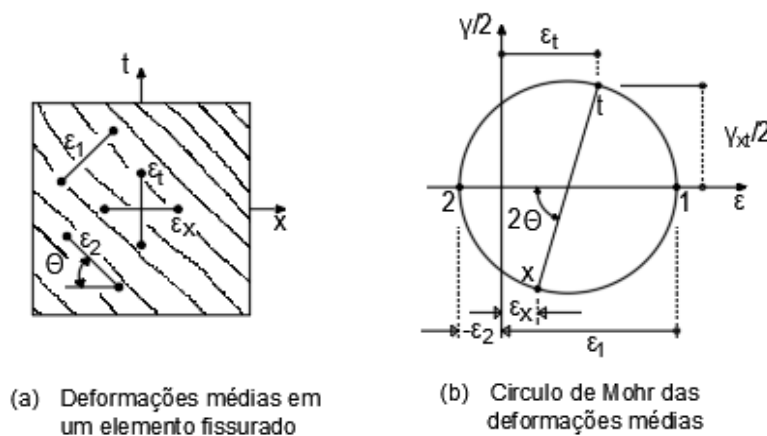
ε_t = deformação transversal;

ε_2 = deformação principal de compressão.

A partir do círculo de Mohr das deformações apresentado na Figura 17, a deformação principal de tração no concreto pode ser determinada pela relação de compatibilidade entre as deformações para um determinado valor de θ . Assim, segue:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_t - \varepsilon_2 \quad (3.6)$$

Figura 17 – Condições de compatibilidade entre as deformações para uma seção de um elemento fissurado



Fonte: adaptado de ACI-ASCE (1973)

A Teoria do Campo de Compressão utiliza também as relações constitutivas dos materiais dadas pela curva tensão – deformação do concreto e do aço para relacionar as tensões principais de compressão, f_2 , nas bielas de concreto com as deformações, conforme ilustra a Figura 18.

Essa curva mostra que quando um cilindro é submetido a um ensaio de compressão pura, ele se deforma transversalmente somente pelo efeito de poisson. Essa deformação permanece, portanto, bem menor do que a deformação principal de tração que surge nas bielas do concreto solicitado. Para levar em conta esse efeito, Vecchio e Collins (1986), sugere de associar as tensões com as deformações pela seguinte equação:

$$f_2 = f_{2,máx} \left(2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c'} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c'} \right)^2 \right) \quad (3.7)$$

Com

$$f_{2,máx} = \frac{f_{ck}}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_{ck} \quad (3.8)$$

Onde

f_2 = tensão principal de compressão nas bielas de concreto;

$f_{2,máx}$ = limite das tensões principais de compressão nas bielas de concreto;

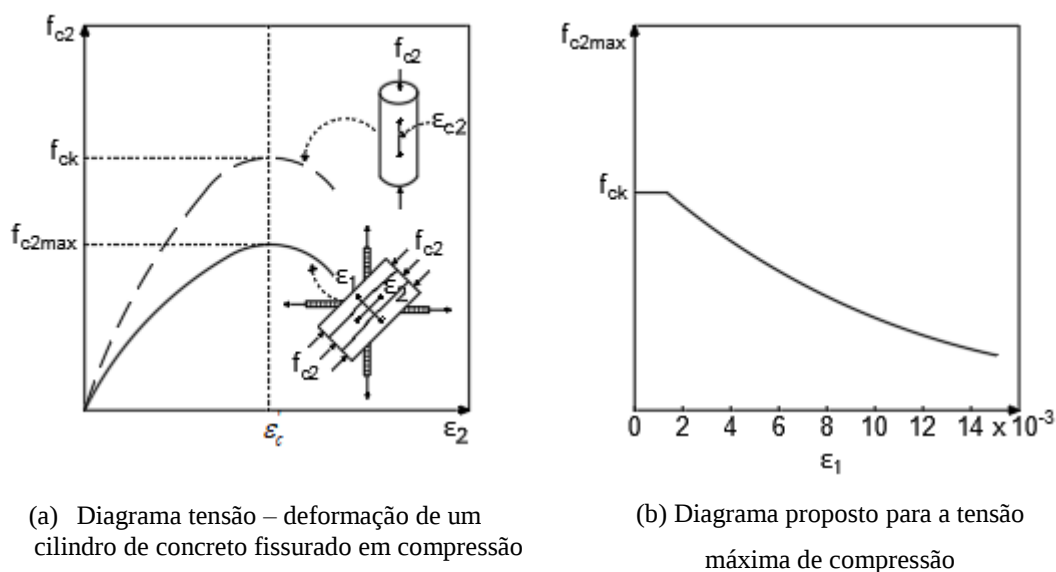
f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

ε_1 = deformação principal de tração no concreto;

ε_2 = deformação principal de compressão no concreto;

ε_c' = deformação principal de compressão correspondente a f_{ck} .

Figura 18 – Curva tensão – deformação das bielas do concreto comprimido



Fonte: adaptado de Mitchell e Collins (1991)

Observação:

A resistência característica à compressão do concreto é expressa como f'_c na norma AASHTO-LRFD – 2014. Nesse trabalho de dissertação, f'_c está sendo substituído por f_{ck} de forma simplificada.

A Teoria do Campo de Compressão resulta um esforço cortante conservador comparado aos resultados experimentais devido à desconsideração da tensão principal de tração do concreto fissurado. Para prever melhor o comportamento real da estrutura e a resistência ao esforço cortante último, Vecchio e Collins (1986) modificou essa teoria para Teoria do Campo de Compressão Modificada (TCCM).

Uma das modificações consiste em levar em conta a resistência à tração do concreto após a fissuração. As tensões principais de tração, f_1 , são perpendiculares às fissuras. São iguais à zero em uma fissura e máximas entre duas fissuras como mostra na Figura 19 (b). Nas equações de equilíbrio, um valor médio de f_1 é usado. Collins e Mitchell (1991) sugere que f_1 seja calculado da seguinte maneira dependendo do concreto fissurado ou não:

$$\begin{cases} f_1 = E_c \varepsilon_1 & \text{para } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr} \\ f_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} & \text{para } \varepsilon_1 > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.9)$$

Onde α_1 e α_2 , depende do tipo de armadura e do carregamento aplicado na estrutura sucessivamente. E f_{cr} representa a tensão de fissuração do concreto.

Se o peso específico do concreto é normal, a tensão de fissuração do concreto e a deformação principal de compressão correspondente à resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , podem ser calculadas sucessivamente como:

$$f_{cr} = 0,328 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{cr} = 0,002 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{f_{cr}}{f_{ck}}} \right) \quad (3.11)$$

A Figura 19 apresenta as condições de equilíbrio da Teoria do Campo de Compressão Modificado - TCCM. Pelo círculo de Mohr apresentado na Figura 19 (c), a tensão principal de compressão nas bielas de concreto pode ser determinada como:

$$f_2 = \frac{V}{b_w j d \cos \theta \sin \theta} - f_1 \quad (3.12)$$

Onde $j d$ representa o braço de alavanca detalhado na Figura 19 (a).

O esforço cortante em um estado de carregamento qualquer pode ser calculado pelo equilíbrio das forças verticais na Figura 19 (d). Assim, temos:

$$A_v f_v = b_w s (f_2 \sin^2 \theta - f_1 \cos^2 \theta) \quad (3.13)$$

Substituindo a equação 3.12 na equação 3.13, obtivemos:

$$V = f_1 b_w j d \cot \theta + \frac{A_v f_v j d}{s} \cot \theta \quad (3.14)$$

O primeiro termo da equação 3.14 corresponde à parcela de esforço resistente ao cortante devido ao concreto, enquanto o segundo termo representa a parcela de esforço cortante resistido pelos estribos.

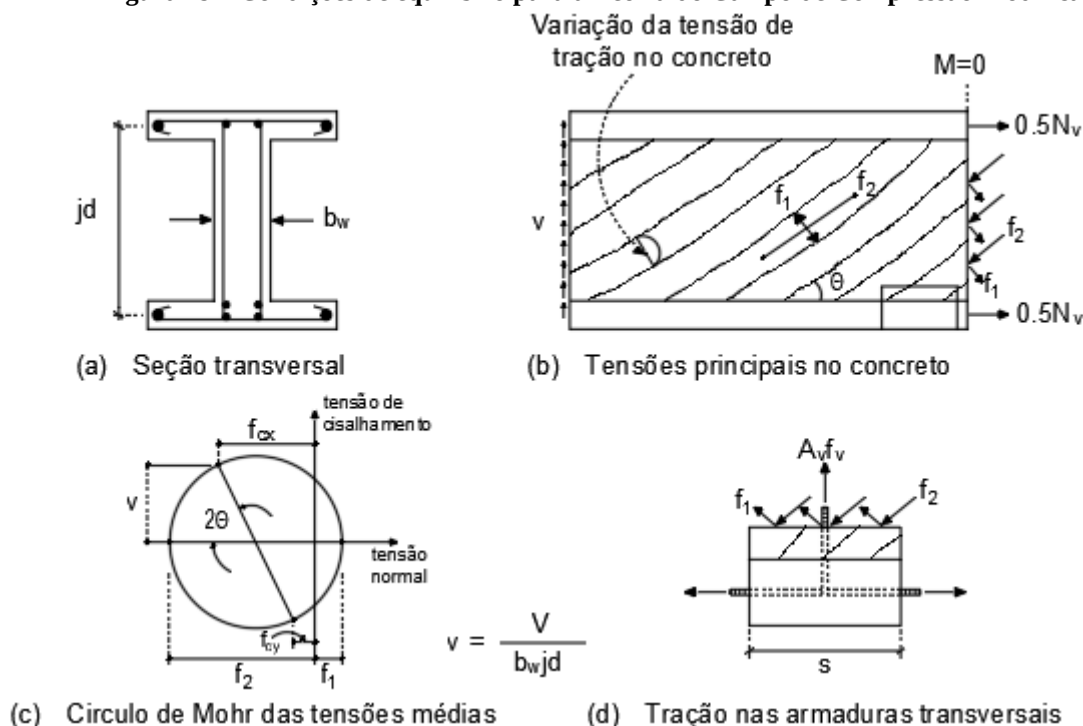
Admitindo que a deformação principal de tração do concreto seja maior do que a deformação principal de compressão correspondente à f_{ck} ($\varepsilon_1 > \varepsilon_{cr}$), a substituição da segunda parte da equação 3.9 na resistência devido ao concreto da equação 3.14, resulta em:

$$V_c = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} b_w j d \cot \theta \quad (3.15)$$

Substituindo a equação 3.10 na equação 3.15 e fazendo $\beta = \frac{0,328 \alpha_1 \alpha_2}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \cot \theta$, obtivemos:

$$V_c = \beta \sqrt{f_{ck}} b_w j d \quad (3.16)$$

Figura 19 – Condições de equilíbrio para a Teoria do Campo de Compressão Modificado



Fonte: adaptado de Mitchell e Collins (1991)

3.2 ESFORÇO RESISTENTE AO CORTANTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014 (TCCM SIMPLIFICADA)

Segundo Collins, Vecchio e Bentz (2006), várias simplificações foram feitas na Teoria do Campo de Compressão Modificado com o objetivo de tornar os procedimentos de cálculo do esforço resistente ao cortante mais fáceis e eficazes.

Uma das simplificações consiste na proposta das seguintes expressões para o fator de resistência as tensões de tração do concreto, β :

$$\beta = \frac{4,8}{(1 + 750\varepsilon_s)} \quad \text{para } A_v \geq A_{v,\min} \quad (3.17)$$

$$\beta = \frac{4,8}{(1 + 750\varepsilon_s)} \frac{1,3}{(1 + s_{xe})} \quad \text{para } A_v < A_{v,\min} \quad (3.18)$$

Com

$$A_{v,\min} = 0.083 \sqrt{f_{ck}} \frac{b_v s}{f_y} \quad (3.19)$$

O fator β é definido também como a capacidade que as bielas de concreto possuem para transmitir esforços de tração e cortante. O primeiro termo da equação 3.18 descreve o efeito da deformação longitudinal, ε_s , nas bielas de concreto, enquanto o segundo termo mostra a influência do tamanho do agregado na resistência pelo parâmetro s_{xe} . Esse parâmetro pode ser definido como:

$$s_{xe} = s_x \frac{0.035}{a_g + 0.016} \quad e \quad 0,30m \leq s_{xe} \leq 2,00m \quad (3.20)$$

Onde

s_x = distância vertical entre duas fissuras que pode ser tomada igual à distância entre as camadas das armaduras de pele, e é igual a zero para $f_{ck} \geq 70$ MPa;

a_g = tamanho do agregado graúdo no concreto;

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_v = largura da alma da viga;

f_y = tensão de escoamento da armadura transversal;

s = espaçamento entre os estribos.

Pode-se perceber que o parâmetro s_{xe} diminui com o aumento do tamanho do agregado graúdo. Isso significa que para aberturas de fissuras maiores, o tamanho do agregado necessário fornece o limite inferior para esse parâmetro. Logo, o segundo termo da equação 3.18 é tomado igual a 1 e leva a equação 3.17. Como a armadura transversal é calculada para combater a abertura de fissura na seção em análise, foram impostas as condições necessárias entre a armadura transversal mínima e existente para a determinação do fator β .

Quando a armadura transversal necessária para combater a abertura de fissura em uma seção de concreto armado submetida ao esforço cortante é maior ou igual à armadura transversal mínima dada pela equação 3.19, a deformação longitudinal ε_s é o único parâmetro responsável para a variação do fator β .

Segundo Bentz e Collins (2006), a resistência última ao esforço cortante em elementos de concreto armado é influenciada por vários fatores, tais como: geometria da seção, esforços solicitantes, taxas de armadura, nível de protensão, e outros. Para levar em consideração todos esses efeitos, é utilizado um único parâmetro que é a deformação longitudinal ε_s . O conceito é que quanto maior essa deformação, maior a abertura de fissura e, portanto, menor o bloqueio do agregado graúdo e o valor de V_c . Esse efeito de redução da resistência ao cortante com o aumento da deformação longitudinal pode ser chamado de “efeito de deformação”. Na ausência de protensão, essa deformação pode ser calculada como:

$$\varepsilon_s = \frac{\left(\left(\frac{|M_u|}{d_v} + 0,5N_u + |V_u| \right) \right)}{E_s A_s} \quad (3.21)$$

Onde ε_s é definida no item 5.8.3.4.2-4 da AASHTO como a deformação longitudinal localizada no centroide da armadura longitudinal na zona tracionada da seção transversal.

M_u = momento fletor último;

N_u = esforço normal último;

V_u = esforço cortante último;

E_s = módulo de elasticidade da armadura longitudinal na zona tracionada;

A_s = Armadura longitudinal na zona tracionada;

$d_v \geq \text{Máx}(0.9d, 0.72h)$ = altura efetiva da seção transversal.

O ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , é influenciado também pelos fatores geométricos, esforços solicitantes e taxas de armadura. Consequentemente, o ângulo θ pode ser determinado em função da deformação de tração na armadura longitudinal, ε_s , na zona tracionada como:

$$\theta = 29^\circ + 3500\varepsilon_s \quad (3.22)$$

As equações 3.17 e 3.18 foram deduzidas com f_{ck} na unidade de psi, para a utilização do f_{ck} em MPa, elas devem ser divididas por 12. Feito isso, a equação 3.16 pode se reescrever como:

$$V_c = 0.083\beta\sqrt{f_{ck}}b_vd_v \quad (3.23)$$

Com $b_v = b_w$ e $d_v = jd$.

Onde

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_v = largura da alma da viga;

$d_v \geq \text{Máx}(0.9d, 0.72h)$ = altura efetiva da seção transversal.

A equação 3.23 corresponde à expressão indicada no item 5.8.3.3-3 da AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo da parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto.

O segundo termo do segundo membro da equação 3.14 define a parcela de resistência ao esforço cortante devido aos estribos no item 5.8.3.3-4 da norma.

$$V_s = \frac{A_v f_{ty} d_v}{s} \cot \theta \quad (3.24)$$

Desconsiderando a protensão, a resistência nominal ao esforço cortante solicitante na seção transversal em análise segundo o item 5.8.3.3-1 é dada por:

$$V_n = V_c + V_s \quad (3.25)$$

A resistência indicada na equação 3.25 não deve ultrapassar a resistência última encontrada no item 5.8.3.3-2, ou seja:

$$V_n \leq V_u = 0.25 f_{ck} b_v d_v \quad (3.26)$$

Além da verificação do esmagamento do concreto pela equação 3.26, a AASHTO-LRFD – 2014 estabelece a seguinte exigência para a verificação do escoamento da armadura longitudinal conforme o item 5.8.3.5-1, para estruturas de concreto armado sem protensão:

$$A_s f_y \geq \frac{|M_u|}{d_v \phi_f} + 0.5 \frac{N_u}{\phi_c} + \left(\left| \frac{V_u}{\phi_v} \right| - 0.5 V_s \right) \cot \theta \quad (3.27)$$

Onde

M_u = momento fletor último;

N_u = esforço normal último;

V_u = esforço cortante último;

V_s = parcela de resistência ao esforço cortante devido aos estribos;

$d_v \geq \text{Máx}(0.9d, 0.72h)$ = altura efetiva da seção transversal;

A_s = Armadura longitudinal na zona tracionada;

f_y = tensão de escoamento da armadura longitudinal;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

ϕ_f, ϕ_v, ϕ_c = fatores de resistência que podem ser tomados no item 5.5.4.2 da AASHTO-LRFD - 2014.

3.3 MOMENTO TORSOR RESISTENTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014

Assim como a NBR-6118 – 2014, a norma AASHTO-LRFD – 2014 é baseada no Modelo de Treliça Espacial com analogia do tubo de paredes finas para o cálculo de estruturas de concreto armado submetidas à torção pura. Utilizando os mesmos conceitos do tópico 2.7 para o cálculo da armadura transversal devido ao momento torsor solicitante, a equação 2.38 pode ser reescrita como:

$$T_n = \frac{2A_0 A_t f_y \cot \theta}{s} \quad (3.28)$$

Com

$$f_y = f_t \quad e \quad T_n = T$$

Onde

T_n = resistência nominal ao momento torsor na ausência de cortante;

f_y = tensão de escoamento da armadura transversal;

A_0 = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

A_t = área da armadura transversal correspondente a uma perna de estribo;

s = espaçamento entre os estribos;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto.

A equação 3.28 é indicada no item 5.8.3.6.2-1 da AASHTO para o cálculo da resistência nominal à torção quando o momento torsor último solicitante, T_u , é maior do que $0,25\phi T_{cr}$ (item 5.8.2.1-3). Onde ϕ representa o fator de resistência especificado no item 5.5.4.2 e T_{cr} , o momento torsor de fissuração encontrado no item 5.8.2.1-4.

Segundo Cowan (1968), a espessura da parede equivalente, t , e a área envolvida pelo fluxo de cisalhamento, A_0 , antes da fissuração podem ser tomadas como $3 / 4 A_{cp} / p_c$ e $2 / 3 A_{cp}$ sucessivamente. Admitindo que a tensão de cisalhamento é igual à tensão de tração do concreto, $f_{cr} = 0,328\sqrt{f_{ck}}$, o momento torsor de fissuração na ausência de protensão pode ser definido a partir da equação 2.37 como:

$$T_{cr} = 0,328\sqrt{f_{ck}} \frac{A_{cp}^2}{p_c} \quad (3.29)$$

Onde

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

A_{cp} = área total da seção sólida;

p_c = perímetro da seção sólida;

3.4 RESISTÊNCIA À AÇÃO COMBINADA TORÇÃO – CORTANTE SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014

O item 5.8.3.6 da AASHTO-LRFD – 2014 fornece o procedimento para o cálculo e análise de seções de concreto armado sob a solicitação de torção combinada com cortante. Geralmente o processo de cálculo é iterativo, onde a seção transversal é calculada para flexão. A geometria e os esforços solicitantes são utilizados para verificar a resistência ao momento torsor combinado com cortante na seção em análise. Disso, as propriedades geométricas da seção transversal e das armaduras longitudinal e transversal são fornecidas com valores diferentes até que o esforço cortante desejado seja alcançado. Os passos necessários para o cálculo de seções submetidas à torção e cortante são mostrados abaixo:

- a) Determinar os esforços solicitantes na seção em análise. Feito isso, a viga deve ser analisada para resistir aos esforços solicitantes utilizando a combinação de esforços que fornece os efeitos máximos. A seção é então calculada para flexão e as dimensões da seção transversal e a quantidade de armadura longitudinal são pré-definidas;
- b) Tendo os efeitos dos esforços externos (esforço normal, esforço cortante e momento fletor) na seção transversal, a deformação nas armaduras longitudinais na zona tracionada, ε_s , é calculada usando a equação 3.21 e deve substituir V_u na equação 3.21 pelo $V_{u,eq}$ indicado abaixo.

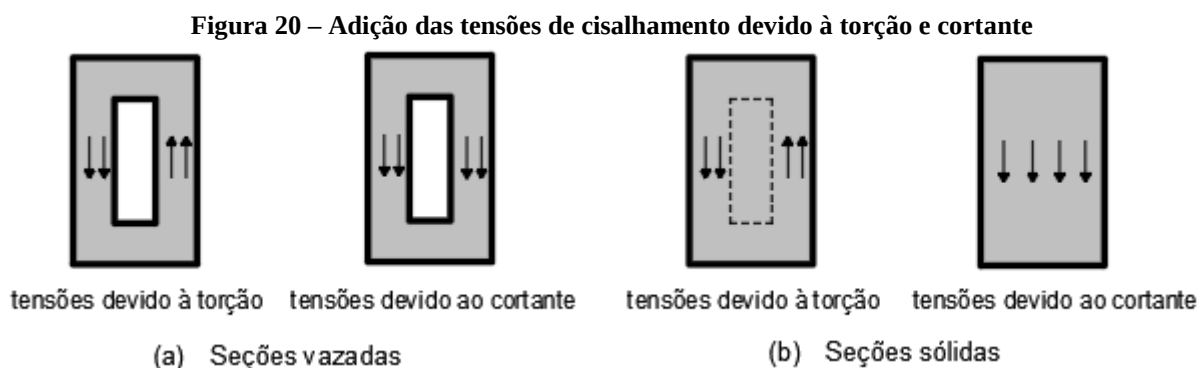
Para seções sólidas:

$$V_{u,eq} = \sqrt{V_u^2 + \left(\frac{0,9p_h T_u}{2A_0} \right)^2} \quad (3.30)$$

Para seções vazadas:

$$V_{u,eq} = V_u + \frac{T_u d_s}{2A_0} \quad (3.31)$$

As equações 3.30 e 3.31 foram deduzidas segundo a distribuição do esforço cortante na seção transversal. Para uma seção vazada, o cortante é adicionado diretamente ao momento torsor como mostra na Figura 20 (a). Já, para uma seção sólida, o cortante é distribuído em toda largura da alma da seção transversal conforme ilustra a Figura 20 (b), e para levar essa distribuição em consideração, é tomada a raiz quadrada da soma dos efeitos ao quadrado. O valor de $0,9p_h$ refere-se ao perímetro eficaz para o cálculo da resistência máxima ao momento torsor.



Fonte: adaptado de Reinforced Concrete, Mechanics and Design (7ª ed.)

Onde

$V_{u,eq}$ = esforço cortante último equivalente à combinação torção – cortante na seção;

V_u = esforço cortante último;

T_u = momento torsor último;

p_h = perímetro da linha central dos estribos;

A_0 = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

d_s = altura eficaz da seção transversal;

- c) Para se determinar a resistência nominal ao cortante devido ao concreto, V_c , o valor de ε_s discutido anteriormente deve ser substituído na equação 3.17 para determinar o valor de β . Em seguida, calcula V_c pela equação 3.23;
- d) Calcular o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , pela substituição do valor de ε_s obtido da equação 3.21 na equação 3.22;
- e) O cortante para o cálculo da armadura transversal é o desejado? Essa armadura não é necessária no caso em que $V_u < 0,5\phi V_c$ na ausência de protensão;
- f) Se $V_u > 0,5\phi V_c$, resolve a equação 3.24 para A_v / s após a substituição do valor de θ obtido no passo 4. Ressaltando que $V_s = V_u / \phi - V_c$;
- g) Calcular o momento torsor de fissuração pela equação 3.29;
- h) A torção deve ser considerada? Se o momento torsor último solicitado na seção transversal é tal que $T_u > 0,25\phi T_{cr}$, a torção pode ser considerada. Caso contrário, é ignorada. A resistência nominal ao momento torsor pode ser calculada pela equação 3.28;
- i) Resolver a equação 3.28 para $2A_t / s$ e soma o resultado com a solução obtida no passo 6.

Ou seja:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s} \quad (3.32)$$

O primeiro membro da equação 3.32 refere-se à armadura transversal existente por unidade de espaçamento na seção transversal devido à combinação cortante – torção. O

primeiro termo do segundo membro representa a armadura transversal necessária por unidade de espaçamento para combater o esforço cortante solicitante, enquanto o segundo termo equivale à armadura transversal por unidade de espaçamento para resistir ao momento torsor solicitante;

- j) O valor da armadura transversal por comprimento de espaçamento obtido no passo 9 deve ser superior ou igual ao valor indicado na equação abaixo (item 5.8.2.5-1):

$$A_{v,\min} \geq 0,083 \sqrt{f_{ck}} \frac{b_v s}{f_y} \quad (3.33)$$

Onde

$A_{v,\min}$ = área de armadura transversal mínima na seção transversal;

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

b_v = largura da alma da seção transversal;

s = espaçamento entre os estribos;

f_y = tensão de escoamento da armadura transversal;

- k) O espaçamento entre os estribos não deve exceder o valor máximo permitido, $s_{\max}$, determinado como:

$$\begin{cases} s_{\max} = 0,8d_v \leq 0,60m & \text{para } v_u < 0,125 f_{ck} \quad (\text{item } 5.8.2.7-1) \\ s_{\max} = 0,4d_v \leq 0,30m & \text{para } v_u \geq 0,125 f_{ck} \quad (\text{item } 5.8.2.7-2) \end{cases}$$

Onde

$d_v = \max(0,9d; 0,72h)$ = altura eficaz da seção transversal;

v_u = tensão de cisalhamento último na seção em análise;

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

- l) A seção transversal é grande o suficiente? Se $V_c + V_s < 0,25 f_{ck} b_v d_v$ (item 5.8.3.3-2), a seção transversal é grande o suficiente, caso contrário, não é;
- m) Como último passo, a armadura longitudinal na zona tracionada para seções sólidas deve satisfazer a seguinte relação na ausência de protensão segundo o item 5.8.3.6.3-1:

$$A_s f_y \geq \frac{|M_u|}{\phi_f d_v} + \frac{0,5N_u}{\phi_c} + \cot \theta \sqrt{\left(\frac{|V_u|}{\phi_v} - 0,5V_s\right)^2 + \left(\frac{0,45 p_h T_u}{2A_0 \phi_v}\right)^2} \quad (3.34)$$

Para seções vazadas, a armadura longitudinal devido à torção, além da exigida para a flexão, não pode ser inferior à:

$$A_t = \frac{T_n p_h}{2A_0 f_y} \quad (3.35)$$

Onde

V_u = esforço cortante último;

V_s = resistência ao cortante devido aos estribos;

T_u = momento torsor último;

T_n = resistência nominal ao momento torsor;

p_h = perímetro da linha central dos estribos;

A_0 = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento;

M_u = momento fletor último;

N_u = esforço normal último;

$d_v = \max(0,9d; 0,72h)$ = altura eficaz da seção transversal;

θ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

ϕ_f, ϕ_v, ϕ_c = fatores de ponderação de cargas e de resistência que podem ser tomados no item 5.5.4.2 da AASHTO-LRFD - 2008. Esses fatores são tomados igual a 1 nos exemplos de cálculo para fins de comparação com valores experimentais.

3.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE A RESISTÊNCIA AO MOMENTO TORSOR PURO E O ÂNGULO DE INCLINAÇÃO DAS BIELAS DE CONCRETO, θ , SEGUNDO AASHTO-LRFD – 2014

Deseja-se avaliar o comportamento dos elementos de concreto armado submetidos ao momento torsor puro segundo os procedimentos encontrados na AASHTO-LRFD – 2014. Para isso, foi escolhida uma das seções de viga de concreto armado submetida à torção pura dos ensaios realizados por Fang e Shiau (2004).

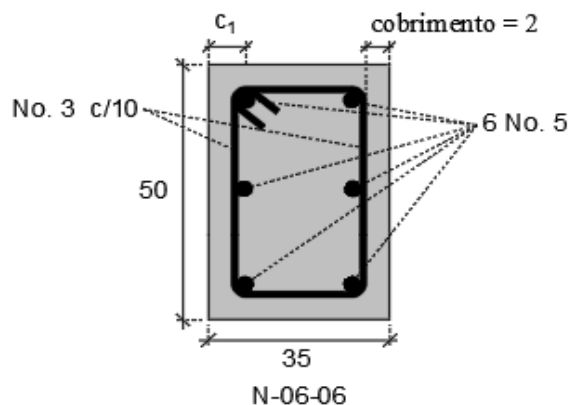
A Figura 21 mostra a geometria da seção e os dados a serem utilizados no problema em questão. A resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , é igual a 35,5 MPa e as tensões de escoamento da armadura transversal e longitudinal, f_y , são iguais a 440 MPa. As dimensões da seção (altura e largura) estão em cm. As armaduras longitudinal e transversal de uma barra referente aos No. 5 e No. 3 são iguais a 198,6 mm² e 71,3 mm² respectivamente.

O roteiro para o cálculo do máximo momento torsor resistente pelo método de otimização é mostrado no fluxograma da Figura 22 e o código em MATHCAD concernente a ele encontra-se no apêndice C deste trabalho.

Nesse fluxograma, a função objetivo é definida como $f(T) = T$, onde a resistência máxima ao momento torsor solicitante, T , é a única variável de projeto. Restrições de desigualdades foram impostas conforme as exigências indicadas nos itens 5.8 da AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo e análise de seções de concreto armado submetidas à torção pura. Os parâmetros A_{s1} e F_s representam a armadura longitudinal existente e o esforço de tração sucessivamente na zona tracionada.

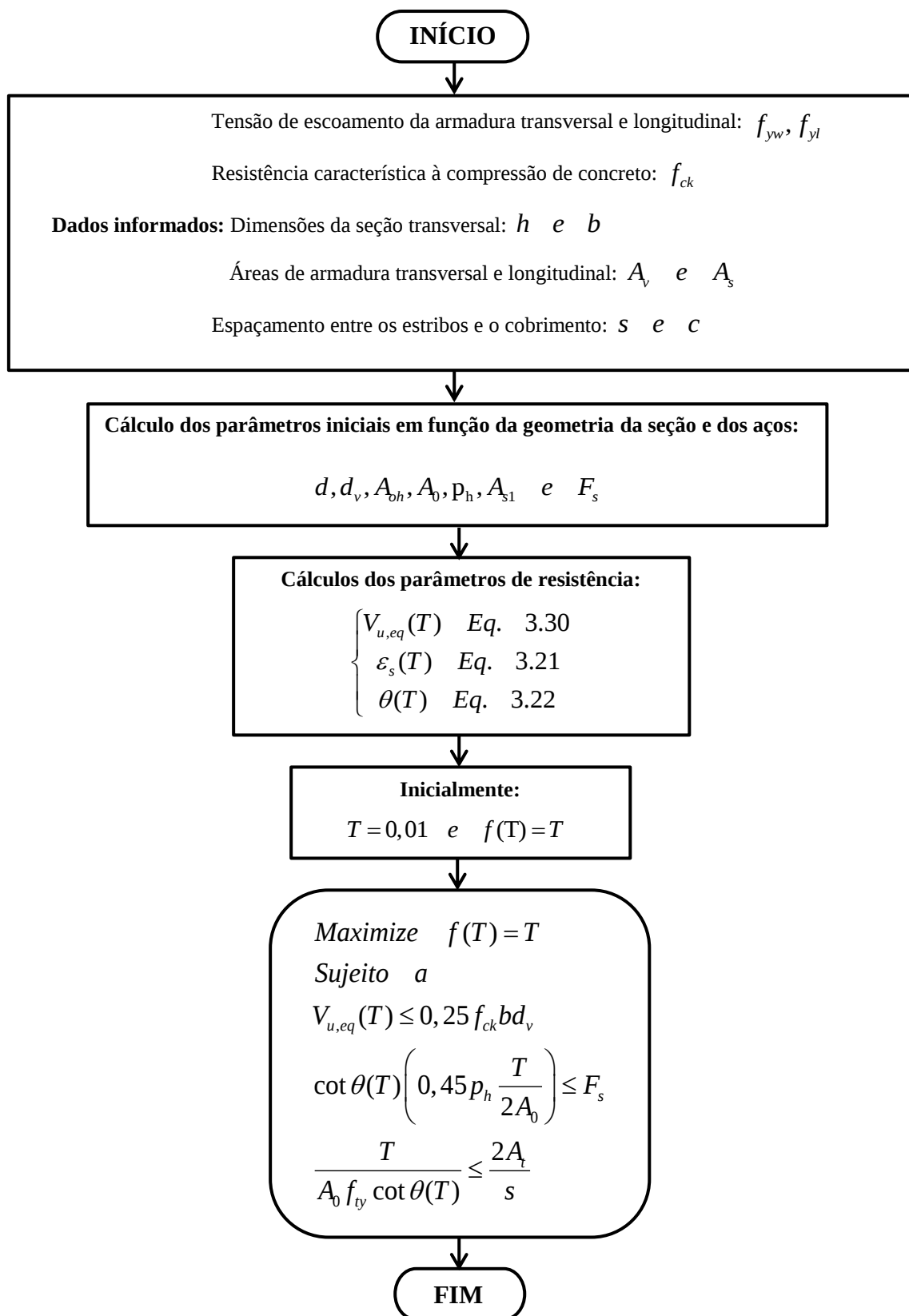
A Tabela 5 mostra os resultados obtidos no processo de otimização para o máximo momento torsor resistente, T , na seção transversal e o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , segundo os procedimentos de cálculo indicados na AASHTO-LRFD - 2014. Nessa tabela, consta também a comparação desses valores com os resultados experimentais, resultados obtidos através dos procedimentos encontrados na NBR-6118 – 2014 e soluções obtidas pela utilização de código em MATLAB do modelo CA-STM (Silva – 2016). Os procedimentos de cálculo segundo CA-STM serão discutidos posteriormente.

Figura 21 – Dados de entrada do ensaio N-06-06 de Fang e Shiau (2004)



Fonte: adaptado de Fang e Shiau (2004)

Figura 22 – Fluxograma do roteiro de cálculo da Resistência máxima ao momento torsor segundo AASHTO-LRFD – 2014.



Fonte: o autor

Tabela 5 – Resistência máxima ao momento torsor, T, e o ângulo de fissuração, θ

	Experimento	NBR-6118	AASHTO	CA-STM
θ	43°	42,5°	42,6°	43,6°
T [MN m]	0,0797	0,0802	0,0786	0,0818
Erro [%]	-	0,62	1,38	2,6

Fonte: o autor

Os resultados da Tabela 5 mostram que todos os modelos utilizados para o cálculo do máximo momento torsor resistente tem boa precisão em comparação com os valores experimentais. Podemos observar também que os valores de cálculo do ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , são bem próximos ao do ensaio. Isso mostra a importância da determinação dos esforços resistentes de uma seção de concreto armado por métodos e modelos confiáveis.

A grande diferença entre os procedimentos encontrados nas Normas NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD - 2014 para o cálculo do momento resistente máximo à torção é o grau de dificuldade para a implementação dos códigos no Mathcad ou Matlab, visto que é quase impossível fazer esses cálculos à mão. Esse grau de dificuldade é bem maior quando o momento torsor solicitante é combinado com o esforço cortante.

Para diminuir esse grau de dificuldade, faz-se necessário utilizar um programa ou software que permite a realização de cálculo e análise dos esforços resistentes. Posteriormente, iremos mostrar um algoritmo de solução para determinar a melhor maneira de analisar e avaliar a resistência de vigas de concreto armado submetidas à combinação torção – cortante utilizando os procedimentos encontrados na NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD - 2014.

4 MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO E COMBINAÇÃO DE ESFORÇO (CA-STM)

Para analisar o comportamento de estruturas de concreto armado, podemos utilizar a associação de elementos menores e mais simples, para representar a estrutura na sua totalidade. Isso é feito com o intuito de diminuir o grau de complexidade nas implementações e procedimentos de cálculo.

No presente trabalho, podemos utilizar esse mesmo conceito, na estimativa do comportamento estrutural de seções de concreto armado submetidas à combinação de carregamentos, utilizando o Modelo de Treliza com Amolecimento e Combinação de Esforço (*Combined-Action Softened Truss Model* – CA-STM).

Essa teoria, proposta por Greene (2006), é baseada no modelo de treliza com amolecimento e ângulo variável, *Rotating-Angle Softened Truss Model* – RA-STM, desenvolvido por HSU (1987), e, visa determinar o comportamento pré-pico de vigas de concreto armado submetidas à combinação de torção com esforço cortante e momento fletor, através da associação de quatro painéis de concreto fissurados.

4.1 FUNDAMENTOS DO RA-STM

As técnicas utilizadas no RA-STM consistem em determinar o comportamento pré-pico de elementos bidimensionais de concreto armado baseando-se em um modelo de treliza, onde o concreto resiste aos esforços de compressão e a armadura combate os esforços de tração. Esse modelo é fundamentado nas leis que regem a mecânica das estruturas:

- Equilíbrio das tensões:

A estrutura é tratada como um elemento bidimensional sob a solicitação de esforço de membrana, como é mostrado na Figura 23. Essa figura ilustra a superposição de um elemento de concreto simples com a malha formada pela armadura longitudinal e transversal. Nessa superposição, são separadas também as tensões no elemento de concreto simples, “ σ_L^c, σ_T^c e τ_{LT}^c ”, das tensões da malha formada pelas armaduras, “ $\rho_L f_L$ e $\rho_T f_T$ ”.

Onde:

σ_L^c = tensão normal atuando no eixo longitudinal do elemento de concreto;

σ_T^c = tensão normal atuando no eixo transversal do elemento de concreto;

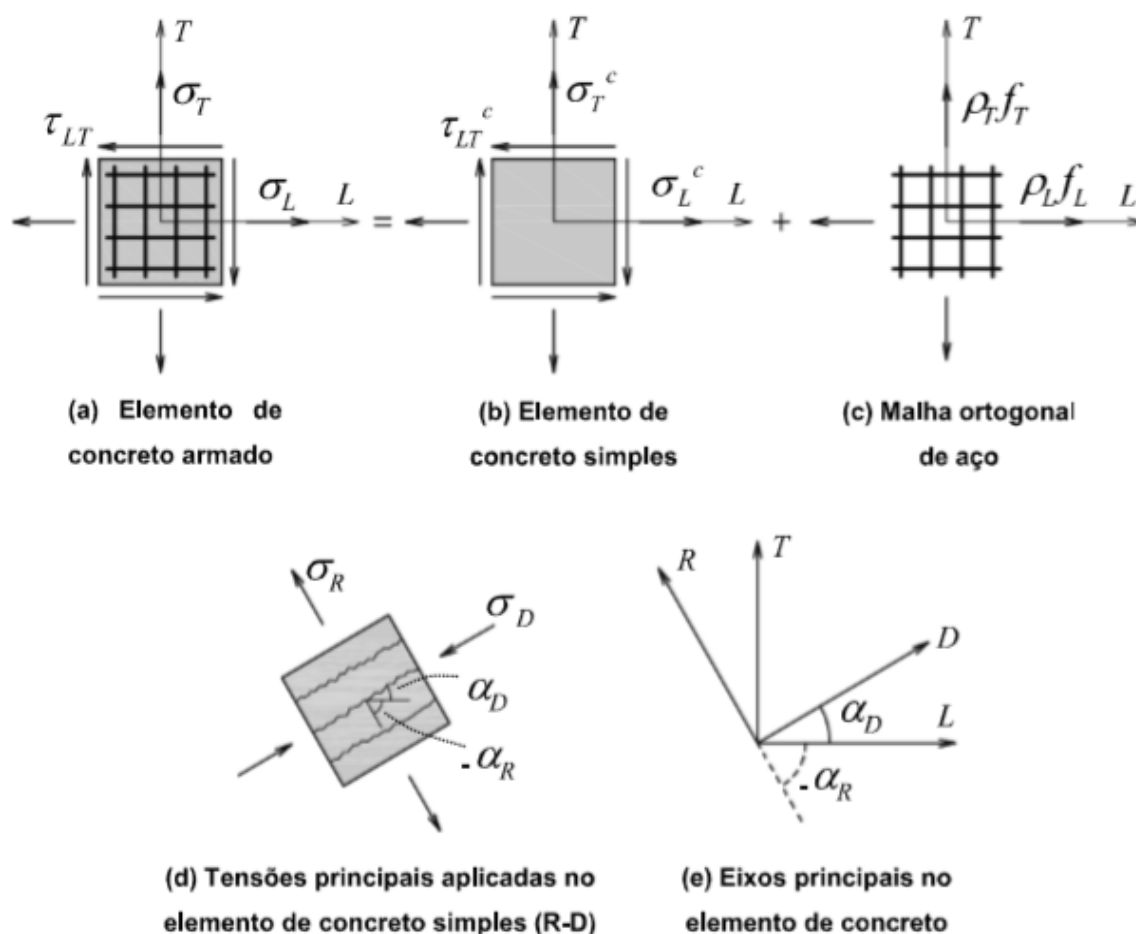
τ_{LT}^c = tensão de cisalhamento no elemento de concreto.

ρ_L e ρ_T = taxas de armaduras longitudinal e transversal;

f_L e f_T = tensões das armaduras longitudinal e transversal;

Os eixos L e T referem se as orientações das armaduras longitudinal e transversal.

Figura 23 – Esforços de membrana em um elemento bidimensional de concreto armado



Fonte: Silva (2016)

As tensões principais solicitadas no elemento de concreto simples são definidas na Figura 23 (d) como tensão principal de tração, “ σ_R “, e tensão principal de compressão, “ σ_D “. O

ângulo variável α_D da Figura 23 (e) refere-se ao ângulo de inclinação das bielas de concreto, o qual representa o complemento do ângulo α_R .

Através das tensões apresentadas na Figura 23, o modelo do RA-STM garante o equilíbrio da estrutura, aplicando as condições de equilíbrio, e fundamentos do círculo de Mohr.

- Compatibilidade das deformações:

De forma semelhante ao item acima, é utilizado o círculo de Mohr das deformações do elemento na compatibilidade das deformações.

- Relações constitutivas dos materiais.

Para o elemento de concreto, pode-se adotar a curva tensão-deformação conforme as equações 4.1, 4.2 e a Figura 24.

$$\sigma_D = f_{ck} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

$$\sigma_D = \begin{cases} \zeta f_{ck} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D \leq \zeta \varepsilon_0 \\ \zeta f_{ck} \left[1 - \left(\frac{\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} - 1}{\frac{2}{\zeta} - 1} \right)^2 \right], & \text{para } \varepsilon_D > \zeta \varepsilon_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

A equação 4.1 segundo Silva (2016) foi desenvolvida para carregamento de compressão uniaxial e despreza o efeito de amolecimento devido à tração perpendicular. Já, a equação 4.2 foi obtida pela adição do efeito do coeficiente de amolecimento ζ , na equação anterior, representado como:

$$\zeta = \frac{0.9}{\sqrt{1 + 600\varepsilon_R}} \quad (4.3)$$

Onde

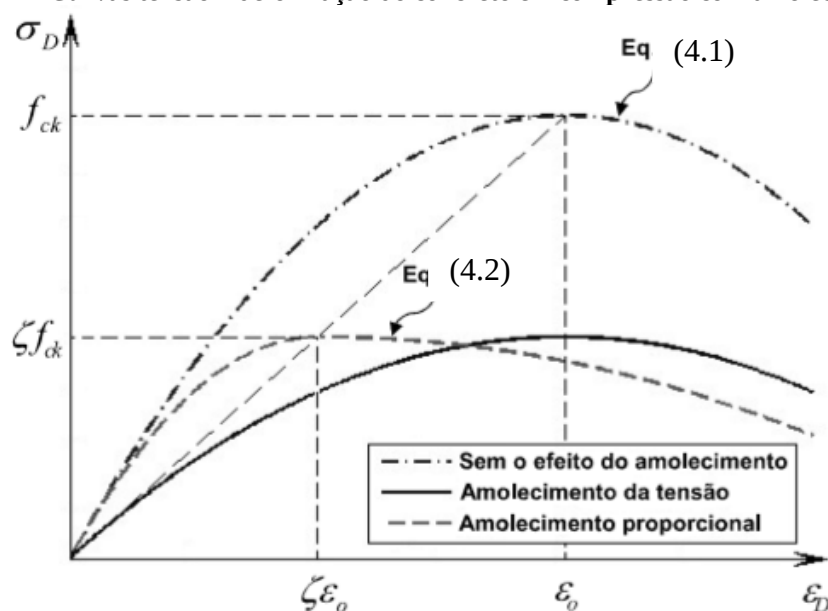
f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto;

ε_D = deformação principal média de compressão no sistema R-D;

ε_R = deformação principal média de tração no sistema R-D;

ε_0 = deformação relativa à tensão máxima de compressão, geralmente tomada como: 0.002.

Figura 24 – Curvas tensão – deformação do concreto em compressão com amolecimento



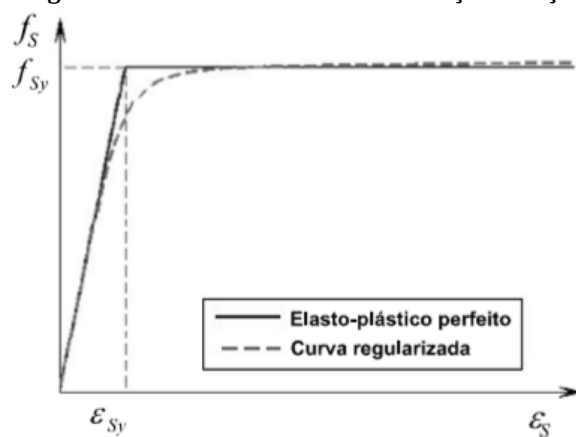
Fonte: adaptado de Silva (2016)

Para a malha formada pelas armaduras longitudinais e transversais, segundo Silva (2016), pode-se utilizar como relação constitutiva para as armaduras o modelo de curva elasto-plástica perfeita, representada pela equação 4.3, ou uma curva adaptada, equação 4.4, ambas ilustradas na Figura 25.

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} = \frac{f_{sy}}{E_s} \\ f_{sy}, & \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$f_s = E_s \varepsilon_s \left[A + \frac{1-A}{\left[1 + \left[(1-A) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{sy}} \right]^F \right]^{\frac{1}{F}}} \right] \quad (4.5)$$

Figura 25 – Curvas tensão – deformação do aço



Fonte: Silva (2016)

A curva representada pela equação 4.5 foi proposta por Ramberg-Osgood, Collins e Mitchell (1991) com o objetivo de regularizar a curva dada pela equação 4.4 que mostra uma descontinuidade na primeira derivada no ponto de escoamento da armadura. Essa regularização serve também para resolver problemas de convergência no método utilizado pela RA-STM, proposto por Silva (2016). As constantes A e F nessas equações são admitidas como: 2×10^{-5} e 40 respectivamente, e temos as seguintes definições para os outros parâmetros:

E_s : módulo de elasticidade do aço;

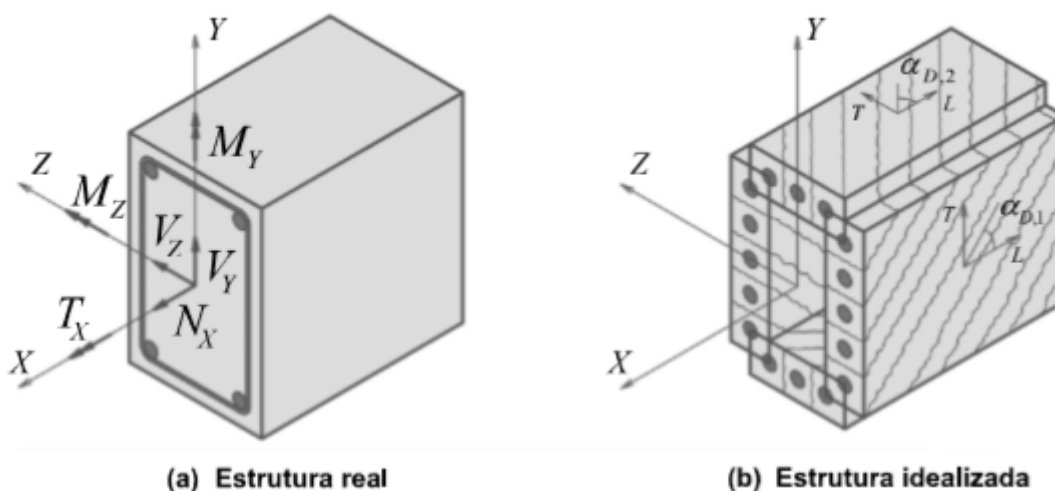
f_s e f_{sy} = tensão no aço e tensão de escoamento do aço, respectivamente;

ε_s e ε_{sy} = deformação no aço e deformação de escoamento do aço, respectivamente.

4.2 FUNDAMENTOS DO CA-STM

Esse modelo determina o comportamento de seções de concreto armado sujeitas a combinação de momento torsor com esforço cortante e momento fletor idealizando o elemento como a associação de quatro painéis de concreto fissurados como ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Idealização da estrutura segundo CA-STM



Fonte: Silva (2016)

Na Figura 26 (b), as espessuras dos painéis representam espessuras do fluxo de cisalhamento, as espessuras de paredes equivalentes. Segundo Silva (2016), assim como a teoria de tubo de paredes finas, o CA-STM admite que o elemento resiste ao momento torsor, ou, ao momento torsor combinado com esforço cortante e momento fletor por meio de um fluxo de cisalhamento constante em todo perímetro da seção transversal. A seção pode ser tanto maciça, como também vazada.

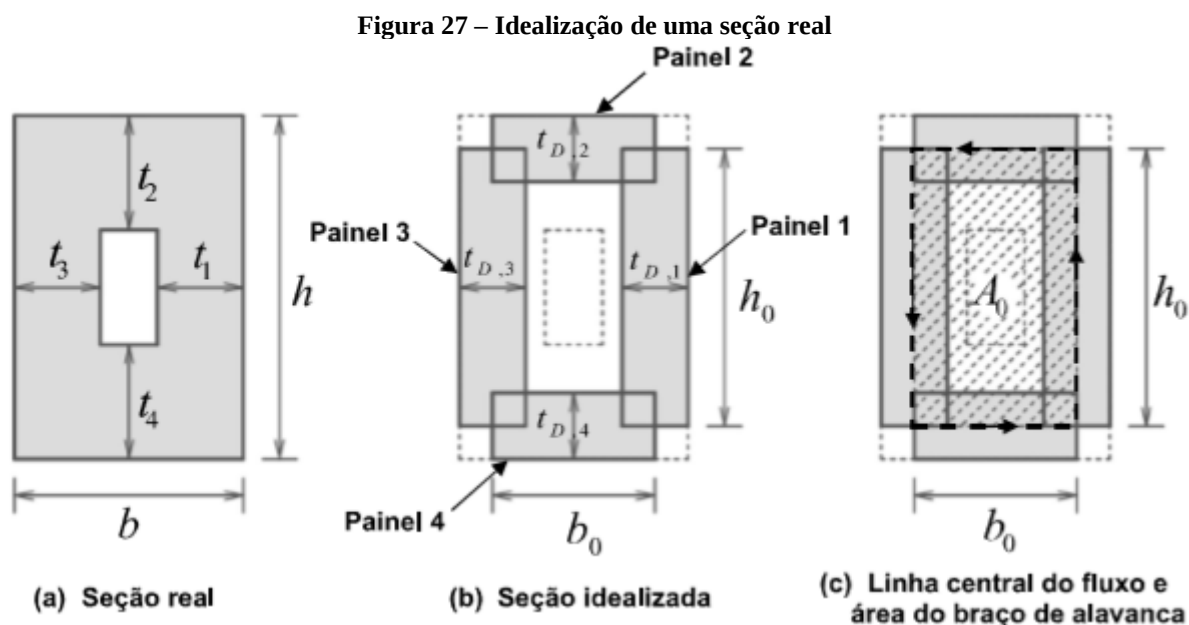
Ainda segundo Silva (2016), o CA-STM utiliza o mesmo mecanismo de resistência que o RA-STM, onde os esforços solicitantes à tração são resistidas pelas armaduras longitudinais e transversais, e as bielas de concreto resistem aos esforços de compressão. O ângulo de inclinação das bielas de concreto é considerado variável, de acordo com a solicitação.

4.3 IDEALIZAÇÃO DA SEÇÃO REAL SEGUNDO O CA-STM

Como mencionado anteriormente nesse capítulo, o CA-STM idealiza uma seção real em outra fictícia composta de quatro painéis de concreto fissurados. Essa transformação inclui a definição da área de aço equivalente em cada painel a partir da armadura original da estrutura e o cálculo dos esforços solicitados nos painéis com os esforços aplicados na seção real.

4.3.1 Geometria da seção

A Figura 27 mostra uma seção vazada com espessura real t_i e a sua transformação para uma seção idealizada com espessura de parede $t_{D,i}$. Na seção idealizada, os torques e cortantes são resistidos através do fluxo de cisalhamento, q , que envolve a área A_0 (Figura 27 (c)). O fluxo de cisalhamento é considerado ao longo dos eixos dos painéis. No modelo original, para seções sólidas, a espessura real t_1 na Figura 27 (a) é igual à metade da base da seção. Porém Silva, Horowitz e Bernardo (2017) propuseram uma metodologia de correção dessa espessura com base em critérios presentes na ABNT NBR-6118 – 2014.



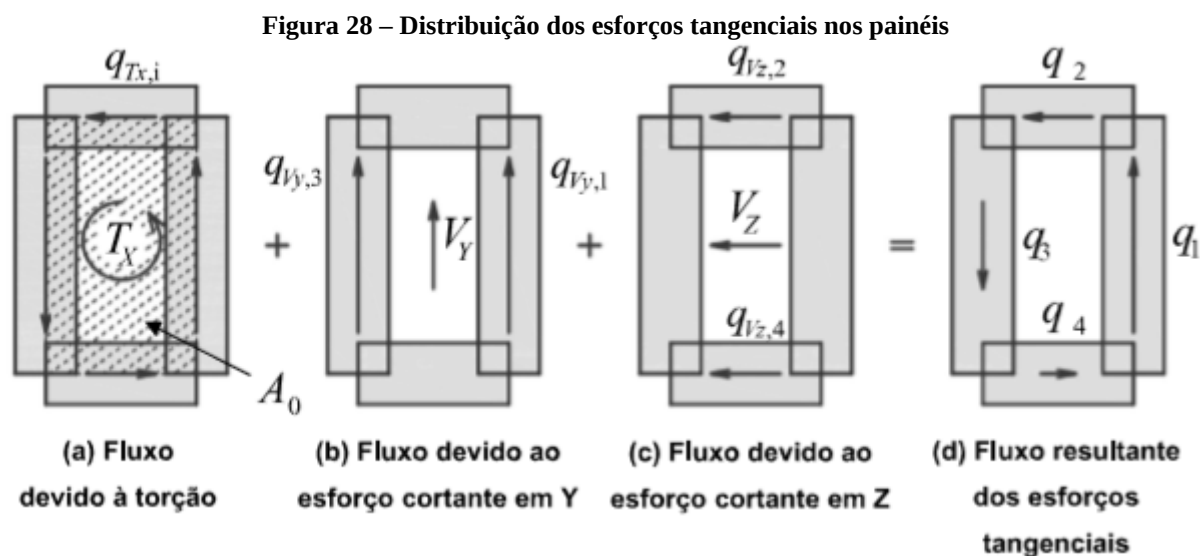
Fonte: Silva (2016)

4.3.2 Armadura equivalente em cada painel

Um dos critérios estabelecidos pelo CA-STM na idealização da seção real em quatro painéis de paredes equivalentes é calcular a área da armadura longitudinal equivalente com base das áreas de influência. Para seções simétricas em relação à distribuição da armadura longitudinal, a armadura em cada painel pode ser tomada como $\frac{1}{4}$ da armadura total na seção transversal. Greene (2006) e Silva (2016) tratam com mais detalhes o cálculo da armadura nos painéis para seções assimétricas.

4.3.3 Distribuição dos esforços tangenciais equivalente em cada painel

A distribuição do esforço cortante e momento torsor nos painéis são feitas através do fluxo de cisalhamento constante ao longo dos elementos conforme a Figura 28.



Fonte: Silva (2016)

O fluxo de cisalhamento $q_{T,i}$ devido ao momento torsor aplicado T_x é dado por:

$$q_{T,i} = \frac{T_x}{2A_0} \quad (4.6)$$

Para o cálculo do fluxo de cisalhamento devido aos esforços cortantes, são considerados os dois painéis paralelos à direção dos carregamentos como é mostrado na Figura 4.6 (b) e (c).

Assim, os fluxos de cisalhamentos devido aos esforços cortantes V_Y e V_Z são calculados como:

$$q_{Vy,1} = q_{Vy,3} = \frac{V_Y}{2h_0} \quad (4.7)$$

$$q_{Vz,2} = q_{Vz,4} = \frac{V_Z}{2b_0} \quad (4.8)$$

O fluxo de cisalhamento em cada painel é determinado pela soma das parcelas devido à torção e cortante. Considerando a convenção dos sinais para os esforços existentes em cada elemento, o fluxo de cisalhamento pode ser calculado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{T_x}{2A_0} + \frac{V_Y}{2h_0} \\ q_2 = \frac{T_x}{2A_0} + \frac{V_Z}{2b_0} \\ q_3 = \frac{T_x}{2A_0} - \frac{V_Y}{2h_0} \\ q_4 = \frac{T_x}{2A_0} - \frac{V_Z}{2b_0} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.3.4 Espessura do fluxo de cisalhamento e as deformações dos painéis

As faces planas de uma viga sob a solicitação de momento torsor se deformam e assumem a forma de um parabolóide hiperbólico. Esse efeito causa uma gradiente de deformações nas bielas de concreto, Fig. 29. A variação da espessura do fluxo de cisalhamento em função da espessura real da seção transversal é mostrada na Figura 29, junto com a distribuição das deformações de compressão nas bielas de compressão. Onde a deformação principal de compressão nos painéis, $\varepsilon_{D,i}$, pode ser tomada como a média aritmética das deformações externas, $\varepsilon_{Ds,i}$, e internas, $\varepsilon_{A,i}$, em cada painel. Ou seja:

$$\varepsilon_{D,i} = \frac{\varepsilon_{Ds,i} + \varepsilon_{A,i}}{2} \quad (4.10)$$

A curvatura da biela de concreto em cada painel, também pode ser calculada em função dessas deformações e da espessura de parede equivalente da seguinte maneira:

$$\psi_i = -\frac{\varepsilon_{DS,i} - \varepsilon_{A,i}}{t_{D,i}} \quad (4.11)$$

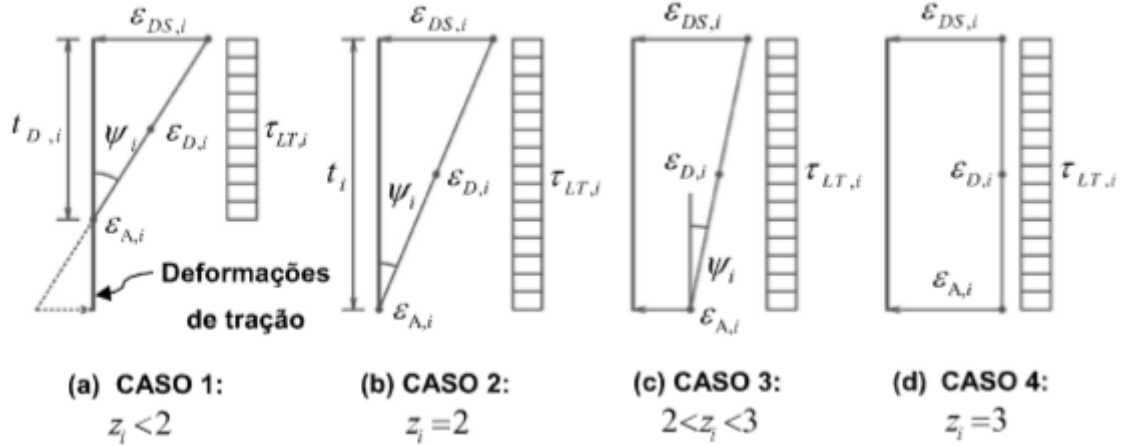
O índice z_i da Figura 29 é um parâmetro adimensional que limita o comportamento da biela de acordo com cada caso segundo Silva – 2016, e foi criado com o objetivo de tornar o processo de cálculo das variáveis $\varepsilon_{DS,i}$, $\varepsilon_{A,i}$, $\varepsilon_{D,i}$, $t_{D,i}$ e ψ_i mais fáceis. Esse parâmetro varia entre 0 e 3 no procedimento Silva (2016) e entre 0 e 300 segundo Greene (2006).

A variação do parâmetro z_i em função dos outros parâmetros citados anteriormente é mais detalhada em Silva (2016), e depende de cada caso apresentado na Figura 29. Pode ser representada também através das seguintes equações:

$$\varepsilon_{A,i} = \begin{cases} 0 & , \text{para } 0 < z_i \leq 2 \\ (z_i - 2)\varepsilon_{DS,i} & , \text{para } 2 < z_i \leq 3 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$t_{D,i} = \begin{cases} z_i \frac{t_i}{2} & , \text{para } 0 < z_i \leq 2 \\ t_i & , \text{para } 2 < z_i \leq 3 \end{cases} \quad (4.13)$$

Figura 29 – Distribuição das deformações nas bielas



Fonte: Silva (2016)

4.3.5 Equações de equilíbrio e de compatibilidade dos painéis

Com base nos fundamentos do RA-STM, e do círculo de Mohr, as equações de equilíbrio e de compatibilidades segundo o CA-STM podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{L,i} = \sigma_{D,i} \cos^2(\alpha_{D,i}) + \sigma_{R,i} \text{sen}^2(\alpha_{D,i}) + f_{L,i} \left(\frac{A_{L,i}}{t_{d,i} w_{0,i}} \right) \\ \sigma_{T,i} = \sigma_{R,i} \cos^2(\alpha_{D,i}) + \sigma_{D,i} \text{sen}^2(\alpha_{D,i}) + f_{T,i} \left(\frac{A_T}{t_{d,i} s} \right) \\ \tau_{LT,i} = \sigma_{R,i} - \sigma_{D,i} \text{sen}(\alpha_{D,i}) \cos(\alpha_{D,i}) \text{sin}(\alpha_i) \\ \gamma_{LT,i} = 2(\varepsilon_{R,i} - \varepsilon_{D,i}) \text{sen}(\alpha_{D,i}) \cos(\alpha_{D,i}) \text{sin}(\alpha_i) \\ \varepsilon_{T,i} = \varepsilon_{R,i} + \varepsilon_{D,i} - \varepsilon_{L,i} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Onde o índice i refere-se à numeração do painel estudado. Admite-se que não há transferência de esforços entre os painéis através de tensões transversais, i.e. $\sigma_{T,i} = 0$.

$\sigma_{L,i}$ = tensões longitudinais no elemento bidimensional;

$\left(\frac{A_{L,i}}{t_{d,i} w_{0,i}} \right) = \rho_{L,i}$ = taxa de armadura longitudinal nos painéis;

$\left(\frac{A_T}{t_{d,i} s} \right) = \rho_{T,i}$ = taxa de armadura transversal nos painéis;

$\sigma_{D,i}$ = tensões principais de compressão;

$\sigma_{R,i}$ = tensões principais de tração;

$f_{L,i}$ e $f_{T,i}$ = solicitações nos aços longitudinais e transversais sucessivamente;

s = espaçamento entre os estribos;

$\alpha_{D,i}$ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

$\tau_{LT,i}$ = tensões de cisalhamento;

$\gamma_{LT,i}$ = deformações de cisalhamento;

$\varepsilon_{D,i}$ e $\varepsilon_{R,i}$ = deformações principais de compressão e tração sucessivamente;

$\varepsilon_{L,i}$ e $\varepsilon_{T,i}$ = deformações longitudinais e transversais sucessivamente.

4.4 ANÁLISE DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO SEGUNDO O CA-STM

Com base no exposto, segundo Silva (2016), é possível formular o modelo do CA-STM através de dezesseis incógnitas divididas em quatro grupos, um para cada painel da seção idealizada. A equação 4.15 descreve essas incógnitas, onde o índice i refere-se à numeração do painel estudado e os outros parâmetros são definidos anteriormente.

$$\left[\varepsilon_{D,i}, \varepsilon_{R,i}, \alpha_{D,i}, \psi_i \right] \text{ para } i = 1 \dots 4 \quad (4.15)$$

4.5 PROCEDIMENTO EFICIENTE PARA ANÁLISE DE SEÇÕES EM CONCRETO ARMADO USANDO O MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO (SILVA 2016)

Silva (2016) realizou algumas substituições nas variáveis encontradas na equação 4.13 com o objetivo de aumentar a eficiência do procedimento de cálculo conforme a equação 4.16. O índice z_i e as deformações externas, $\varepsilon_{DS,i}$, são representados na Figura 29 e detalhados anteriormente.

A primeira substituição refere-se ao ângulo de inclinação das bielas de concreto, $\alpha_{D,i}$, que pode ser calculado em função da deformação longitudinal do painel, $\varepsilon_{L,i}$.

A segunda mudança corresponde à curvatura das bielas de compressão, ψ_i , que pode ser definida em função do fator adimensional, z_i , uma vez que os valores da espessura real da face, t_i , e da deformação principal de compressão no lado externo, $\varepsilon_{DS,i}$, são conhecidos.

A última substituição consiste em adotar $\varepsilon_{DS,i}$ no lugar de $\varepsilon_{D,i}$, com intuito de verificar a deformação principal de compressão máxima, $\varepsilon_{DS,MAX}$, em cada painel.

$$\left[\varepsilon_{DS,i}, \varepsilon_{R,i}, \varepsilon_{L,i}, z_i \right] \text{ para } i = 1 \dots 4 \quad (4.16)$$

Além dessa substituição, são utilizadas algumas técnicas que consistem em:

- Adotar um valor fixo para a deformação de compressão no primeiro painel, $\varepsilon_{DS,1}$;
- Estabelecer relações constantes entre os esforços solicitantes ilustrados na Figura 26 (a) em relação ao momento torsor, ou seja:

$$\left(\frac{N_x}{T_x} + \frac{V_y}{T_x} + \frac{V_z}{T_x} + \frac{M_y}{T_x} + \frac{M_z}{T_x} \right);$$

- Substituir $\varepsilon_{DS,1}$ por T_x no procedimento de cálculo das incógnitas apresentadas na equação 4.13.

Assim, o problema para análise do comportamento de seções de concreto armado sob as solicitações de esforços de membrana usando o Modelo de Treliça com Amolecimento segundo Silva (2016) pode ser definido como:

Dados:

t_i , b e h = propriedades geométricas da seção transversal;

$A_{L,i}$ e A_T / s = armadura longitudinal e transversal equivalente em cada painel;

E_C , f_{ck} , ε_0 , ε_{cr0} e ε_{cr} = propriedades mecânicas do concreto;

E_S , f_{Ly} e f_{Ty} = propriedades mecânicas do aço;

$(N_x / T_x, V_y / T_x, V_z / T_x, M_y / T_x \text{ e } M_z / T_x)$ = relações entre os esforços solicitantes e o momento torsor;

$\varepsilon_{DS,1}$ = estimativa inicial para a deformação externa no primeiro painel;

Determine:

T_x , $\varepsilon_{DS,2}$, $\varepsilon_{DS,3}$, $\varepsilon_{DS,4}$, $\varepsilon_{R,i}$, $\varepsilon_{L,i}$ e z_i , que satisfaz a função F_{CA-STM} sujeita a $0 \leq z_i \leq 3$, até um valor abaixo da tolerância admitida.

4.6 FUNÇÃO RESÍDUO QUE REPRESENTA O SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEAR

Com base no que já foi visto, são considerados os seguintes critérios para definir o sistema de equações a ser resolvido no procedimento proposto por Silva (2016):

- a) A transferência de esforços transversais entre os painéis é nula. Sendo assim, as quatro primeiras equações são dadas por:

$$F_{CA-STM}(i) = \sigma_{R,i} \cos^2(\alpha_{D,i}) + \sigma_{D,i} \sin^2(\alpha_{D,i}) + f_{T,i} \left(\frac{A_T}{t_{D,i} s} \right) = 0 \quad (4.17);$$

- b) A expressão dada na equação 4.11 para o cálculo da curvatura é equivalente à seguinte equação, detalha em Silva (2016):

$$\psi_i = \theta \sin(2\alpha_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\phi_{L,13} \\ -\phi_{L,24} \\ \phi_{L,13} \\ \phi_{L,24} \end{bmatrix} \cos^2(\alpha_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\phi_{T,13} \\ -\phi_{T,24} \\ \phi_{T,13} \\ \phi_{T,24} \end{bmatrix} \sin^2(\alpha_{D,i}) \quad (4.18)$$

Onde $(\phi_{L,13}$ e $\phi_{L,24})$ e $(\phi_{T,13}$ e $\phi_{T,24})$ representam as curvaturas longitudinais e transversais, sucessivamente nos painéis. Dessa forma, um segundo grupo composto de quatro equações é definido como:

$$F_{CA-STM}(i+4) = \theta \sin(2\alpha_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\phi_{L,13} \\ -\phi_{L,24} \\ \phi_{L,13} \\ \phi_{L,24} \end{bmatrix} \cos^2(\alpha_{D,i}) + \begin{bmatrix} -\phi_{T,13} \\ -\phi_{T,24} \\ \phi_{T,13} \\ \phi_{T,24} \end{bmatrix} \sin^2(\alpha_{D,i}) + \frac{\varepsilon_{DS,i} - \varepsilon_{A,i}}{t_{D,i}} = 0 \quad (4.19);$$

- c) As quatro equações seguintes, são decorrentes das tensões de cisalhamento nos painéis.

$$F_{CA-STM}(i+8) = (\sigma_{R,i} - \sigma_{D,i}) \sin(\alpha_{D,i}) \cos(\alpha_{D,i}) \sin(\alpha_i) - \frac{q_i}{t_{D,i}} = 0 \quad (4.20);$$

- d) Pelo equilíbrio entre as tensões normais nos painéis e os esforços solicitantes na seção transversal, foram definidas mais três equações, a saber:

$$F_{CA-STM}(13) = [\sigma_{L,3}(t_{D,3}h_0) - \sigma_{L,1}(t_{D,1}h_0)] \frac{b_0}{2} - M_Y = 0 \quad (4.21)$$

$$F_{CA-STM}(14) = [\sigma_{L,4}(t_{D,4}b_0) - \sigma_{L,2}(t_{D,2}b_0)] \frac{h_0}{2} - M_Z = 0 \quad (4.22)$$

$$F_{CA-STM}(15) = \sigma_{L,1}(t_{D,1}h_0) + \sigma_{L,2}(t_{D,2}b_0) + \sigma_{L,3}(t_{D,3}h_0) + \sigma_{L,4}(t_{D,4}b_0) - N_X = 0 \quad (4.23);$$

- e) Enfim, a última equação foi derivada pela compatibilidade entre as deformações longitudinais nos quatro painéis da seguinte maneira:

$$F_{CA-STM}(16) = \varepsilon_{L,1} - \varepsilon_{L,2} + \varepsilon_{L,3} - \varepsilon_{L,4} = 0 \quad (4.24)$$

Onde

$\sigma_{D,i}$ = tensões principais de compressão;

$\sigma_{R,i}$ = tensões principais de tração;

$\left(\frac{A_T}{t_{d,i}s} \right) = \rho_{T,i}$ = taxa de armadura transversal nos painéis;

$f_{T,i}$ = solicitações nos aços transversais;

s = espaçamento entre os estribos;

$\alpha_{D,i}$ = ângulo de inclinação das bielas de concreto;

θ = rotação axial;

$\varepsilon_{DS,i}$ = deformações externas nos painéis;

$\varepsilon_{A,i}$ = deformações internas nos painéis;

$t_{D,i}$ = espessuras equivalentes dos painéis;

q_i = fluxo de cisalhamento nos painéis;

$\varepsilon_{L,i}$ = deformações longitudinais nos painéis;

$\sigma_{L,i}$ = tensões longitudinais no elemento bidimensional;

M_Y e M_Z = momentos fletores em torno dos eixos y e z, sucessivamente;

N_x = esforço normal ao longo do eixo x.

Demais detalhes sobre o “CA-STM”, a estimativa inicial para a solução, assim como técnicas de implementação aplicadas a esse problema, podem ser encontradas em Silva (2016).

Nesse trabalho de dissertação, foi utilizado o código implementado por Silva (2016) em Matlab para o cálculo da resistência máxima ao momento torsor puro ou momento torsor combinado com cortante, para fins de comparação com valores experimentais e do algoritmo de otimização utilizado para avaliar as especificações da NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD – 2014.

5 INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE

Temos visto que os procedimentos encontrados nas normas técnicas da NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo dos esforços resistentes máximos em seções de vigas de concreto armado submetidas ao momento torsor e esforço cortante são eficazes devido aos modelos e métodos utilizados, além das simplificações oriundas das observações feitas nas rupturas de vigas de concreto armado em ensaios. Portanto, o cálculo dessas resistências máximas em seções de elementos de concreto armado sob a solicitação da combinação do momento torsor com o esforço cortante permanece um grande desafio devido à complexidade e a insuficiência dos procedimentos para determinar os parâmetros envolvidos no problema em questão.

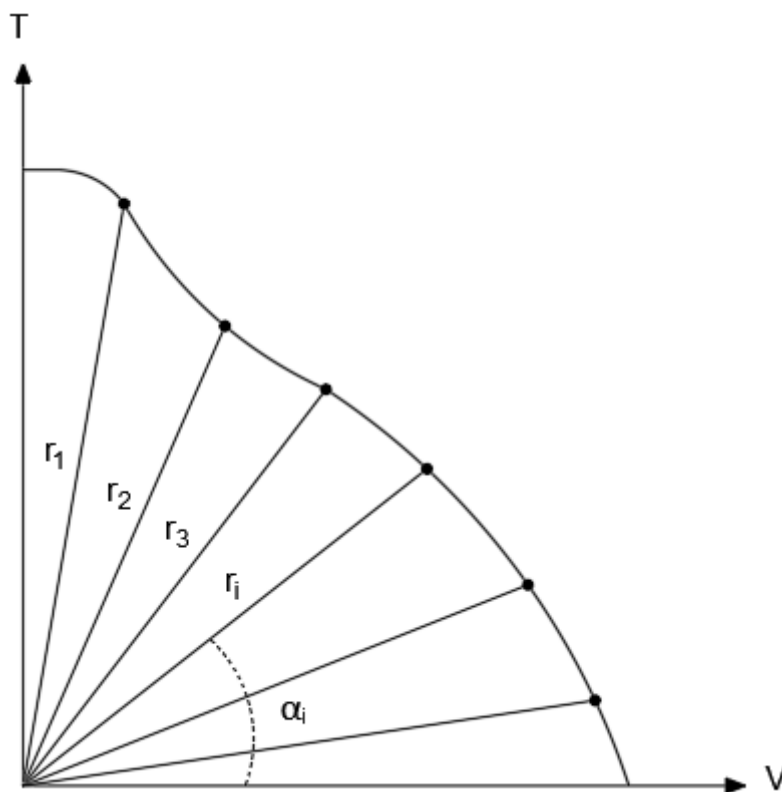
Com o objetivo de obter a melhor solução para um problema que envolve o cálculo e análise da influência do esforço cortante na resistência ao momento torsor de seções de vigas de concreto armado, iremos mostrar um algoritmo de solução baseado em métodos de otimização e a utilização do mesmo para o cálculo dos esforços resistentes pelos procedimentos encontrados na NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD – 2014.

Nesse capítulo, todos os coeficientes de ponderação são unitários para fins de comparação com resultados experimentais.

5.1 PROCEDIMENTO PROPOSTO

O procedimento proposto para a determinação da resistência máxima de seções de vigas de concreto armado submetidas ao momento torsor combinado com esforço cortante consiste em, para um determinado problema, avaliar o comportamento da estrutura através da otimização de uma função que relaciona o cortante solicitante com o momento torsor na seção em análise. No processo de otimização, essa função (função objetivo), depende dos parâmetros envolvidos na resistência máxima ao esforço solicitante segundo as especificações de cada norma em avaliação. No entanto, essa função é representada por um raio que relaciona o momento torsor com o esforço cortante conforme o modelo mostrado na Figura 30.

Figura 30 – Modelo da curva torque – cortante otimizada



Fonte: o autor

Na Figura 30, r_1 , r_2 , r_3 , r_i , representam os raios que relacionam cada momento torsor solicitante, T , com o esforço cortante solicitante, V . E α_i , refere-se ao ângulo formado por cada raio em relação ao cortante no eixo horizontal. Dessa forma, o cortante solicitante, V , e o torque solicitado, T , podem ser representados em função do raio r e do ângulo α da seguinte maneira:

$$V = r \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$T = r \sin \alpha \quad (5.2)$$

5.1.1 Otimização da curva Torque – Cortante

Para fins de convergência mais rápida no processo de otimização, são utilizados números adimensionais nos dois eixos apresentados na Figura 30. Para a obtenção dos números adimensionais, podemos dividir cada esforço por um valor conhecido. Nesse trabalho foram

escolhidos os esforços máximos permitidos pelas normas a serem avaliadas. Nesse sentido, as equações 5.1 e 5.2 podem ser reescritas, sucessivamente, como:

$$V = r \cdot \cos \alpha \cdot V_{max} \quad (5.3)$$

$$T = r \cdot \sin \alpha \cdot T_{max} \quad (5.4)$$

Feitas essas definições, os passos necessários para a obtenção da solução ótima no processo de cálculo da resistência máxima de uma seção transversal retangular submetida ao momento tursor combinado com cortante, podem ser descritos como:

a) Para um determinado experimento, entrar com os seguintes dados:

- Propriedades mecânicas dos aços

f_{yl} = tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa);

f_{yt} = tensão de escoamento da armadura transversal (MPa);

E_s = módulo de elasticidade dos aços (MPa);

- Propriedades mecânicas do concreto

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto (MPa);

- Propriedades geométricas da seção

h = altura da seção transversal (m);

b = largura da alma da viga (m);

- Detalhamento e quantidade de armaduras transversal e longitudinal

A_v = área de armadura transversal referente a duas pernas para resistir ao esforço cortante solicitante (m²);

A_t = área de armadura transversal referente a uma perna para resistir ao momento tursor solicitante (m²);

A_l = área de uma barra da armadura longitudinal (m²);

s = espaçamento entre os estribos (m);

c = cobrimento (m);

b) Determinar os parâmetros iniciais para o cálculo dos esforços resistentes:

x_1 = base dos estribos (m);

y_1 = altura dos estribos (m);

ϕ_t = diâmetro da armadura transversal (m);

ϕ_l = diâmetro da armadura longitudinal (m);

d = altura útil da seção (m);

d_v = altura eficaz da biela de concreto (m);

c_1 = distancia entre o eixo da armadura longitudinal de canto e a face lateral da seção (m);

A_{s1} = área da armadura longitudinal na zona tracionada (m²);

A_{s2} = área da armadura longitudinal na zona comprimida (m²);

A_{sL} = área da armadura longitudinal total na seção transversal (m²);

A_{cp} = área total da seção transversal (m²);

p_c = perímetro externo da seção transversal (m);

A_{oh} = área envolvida pela linha central dos estribos (m²);

p_h = perímetro da linha central dos estribos (m);

A_0 = área envolvida pelo fluxo de cisalhamento (m²);

p_0 = perímetro da linha do fluxo de cisalhamento (m);

Outros parâmetros como a espessura da parede equivalente, área e perímetro envolvidos pelo fluxo de cisalhamento segundo a NBR-6118 – 2014 serão discutidos

posteriormente devido à complexidade para o cálculo dos mesmos nos tópicos que tratam da otimização segundo as especificações da norma;

- c) Calcular os esforços cortantes e momentos torsor, inclusive os valores máximos e equivalentes segundo a combinação dos esforços de acordo com o processo de cálculo indicado em cada norma a ser avaliada;
- d) Definir a função objetivo em função dos parâmetros envolvidos no cálculo da resistência aos esforços solicitantes. Essa função pode ser definida conforme o procedimento proposto da seguinte maneira:

$$f(r, \alpha, \dots) = r \quad (5.5)$$

Onde r e α foram definidos anteriormente no procedimento proposto, e a reticência (...), indica os possíveis parâmetros envolvidos na determinação dos esforços resistentes segundo as especificações das normas a serem avaliadas;

- e) Maximizar a função objetivo definida pela equação 5.5 sujeito as restrições normativas que podem ser derivadas dos limites de esmagamento das bielas de concreto, escoamento da armadura longitudinal, escoamento da armadura transversal, e outros.

5.1.2 Pós-processamento

A saída e a análise dos resultados obtidos no processo de otimização depende do programa ou software utilizado para a implementação do código. Nesse trabalho de dissertação, os códigos foram implementados no MATHCAD e constam nos Apêndices. Sabendo disso, a função objetivo a ser maximizada no passo 5 é função do ângulo α que relaciona cada raio máximo com o máximo esforço resistente ao cortante e a resistência máxima ao momento torsor. Ou seja, considerando o vetor solução R obtido no passo 5, o mesmo pode ser declarado no processo de maximização como:

$$R(\alpha) = \text{Maximize}(f, r, \dots) \quad (5.6)$$

Com essa saída, podemos definir o ângulo α em função do número de pontos, n , desejados para obter a curva torque – cortante conforme o modelo apresentado na Figura 30. Sabendo que esse ângulo varia entre 0° e 90° , uma das técnicas empregada consiste em definir um ângulo nesse intervalo, ou seja:

$$\theta_1 = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \quad (5.7)$$

Pode perceber na equação 5.7 que quando n é igual a 1, θ_1 é igual a $\pi/2$, conseqüentemente a resistência ao momento torsor é máxima. E para n grande esse ângulo é sensivelmente igual a zero e o esforço cortante resistente é máximo. Dessa forma, a definição do ângulo α em função do número de pontos n é dada por:

$$\alpha = i\theta_1 \quad \text{para } i = 1..n \quad (5.8)$$

Finalmente, os vetores de solução para o máximo esforço cortante resistente e a resistência máxima ao momento torsor na seção em análise podem ser definidos a partir das equações 5.3 e 5.4 como:

$$V = r(i\theta_1) \cdot \cos(i\theta_1) \cdot V_{max} \quad (5.9)$$

$$T = r(i\theta_1) \cdot \sin(i\theta_1) \cdot T_{max} \quad (5.10)$$

5.2 RESTRIÇÕES CORRESPONDENTES AOS PROCEDIMENTOS DA NBR-6118 – 2014

As restrições decorrentes das especificações da NBR-6118 – 2014 para o cálculo e análise de elementos de concreto armado submetidos ao momento torsor e esforço cortante podem ser deduzidas a partir das seguintes exigências:

- a) O ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , segundo os critérios estabelecidos para o cálculo do esforço resistente ao cortante segundo o modelo II do item 17.4.2.3 varia entre o valor mínimo de 30° e máximo de 45° . Disso, temos que:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max} \quad (5.11);$$

- b) O item 17.5.1.4.1 estabelece alguns limites para a determinação da espessura equivalente da parede, h_e , conforme os casos apresentados na equação 2.48. No primeiro caso, onde $A/u \geq 2c_1$, h_e varia entre os valores mínimo $2c_1$ e máximo A/u . Para o segundo caso, h_e é constante, tanto o limite inferior quanto o superior pode ser definido de forma sistemática pelo valor constante dela mesmo. Dessa forma, independentemente do caso apresentado para o problema em questão, temos a seguinte restrição para a espessura h_e :

$$h_{e,min} \leq h_e \leq h_{e,max} \quad (5.12);$$

- c) Outras duas restrições foram derivadas do parâmetro c_0 , definido no tópico 2.7.2.2. Como c_0 é função de h_e , a primeira restrição decorrente do mesmo pode ser escrita como:

$$c_{0,min} \leq c_0 \leq c_{0,max} \quad (5.13)$$

Para evitar problemas de convergência no processo de otimização, foi imposto o parâmetro c_0 superior ou igual à metade da espessura de parede equivalente, h_e , tendo em vista que essa restrição está a favor da segurança. Pois quanto menor h_e , maior a solicitação na seção transversal e menor c_0 . Temos a segunda restrição devido ao c_0 definida como:

$$0,5h_e \leq c_0 \quad (5.14)$$

Como mencionado no passo 2 do subtópico 5.1.1, a área envolvida pelo fluxo de cisalhamento, A_e , e o perímetro do fluxo de cisalhamento, u_e , podem ser calculados em função da espessura de parede equivalente, h_e , ou da distancia da superfície média da parede equivalente a face externa da seção, c_0 , como:

$$\begin{cases} A_e(c_0) = (b - 2c_0)(h - 2c_0) \\ u_e(c_0) = p_c - 8c_0 \end{cases} ;$$

- d) Vimos no tópico 2.4 que o item 17.4.2.3 estabelece limites para o esforço cortante solicitante de cálculo, V_{sd} . Assim, podemos utilizar as equações 2.26 e 2.28 para determinar mais duas restrições para o máximo esforço cortante resistentes na seção em análise. Dessa forma:

- A resistência máxima ao esforço cortante, $V(r, \alpha)$, na seção em análise não deve exceder a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, V_{Rd2} (Eq. 2.22), i.e.:

$$V(r, \alpha) \leq V_{Rd2}(\theta) \quad (5.15)$$

- A resistência máxima ao esforço cortante, $V(r, \alpha)$, na seção em análise não pode ultrapassar a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, V_{Rd3} (Eq. 2.23), isto é:

$$V(r, \alpha) \leq V_{Rd3}(r, \alpha, \theta) \quad (5.16);$$

e) As especificações encontradas na seção 17.5 para o cálculo do momento torsor resistente nos fornecem mais três restrições que podem ser deduzidas da seguinte maneira de acordo com as equações 2.42, 2.44 e 2.46:

- O máximo momento torsor resistente, $T(r, \alpha)$, na seção em análise não deve exceder o limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto, T_{Rd2} , ou seja:

$$T(r, \alpha) \leq T_{Rd2}(\theta, h_e, c_0) \quad (5.17)$$

- O máximo momento torsor resistente, $T(r, \alpha)$, na seção em análise não pode ultrapassar o limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd3} , ou melhor:

$$T(r, \alpha) \leq T_{Rd3}(\theta, c_0) \quad (5.18)$$

- O máximo momento torsor resistente, $T(r, \alpha)$, na seção em análise não deve passar o limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural, T_{Rd4} , i.e.:

$$T(r, \alpha) \leq T_{Rd4}(\theta, c_0) \quad (5.19);$$

f) O item 17.7.2 fornece algumas restrições decorrentes da armadura transversal necessária para resistir a combinação torção – cortante. Essas restrições podem ser deduzidas a partir da equação 2.51 como:

$$\frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha, \theta)}{f_{yt} 0,9d \cot \theta} + \frac{T(r, \alpha)}{f_{yt} A_e(c_0) \cot \theta} \leq \frac{A_{vt}}{s} \quad (5.20)$$

O primeiro termo do primeiro membro da equação 5.20 representa a parcela da armadura transversal necessária por unidade de espaçamento para resistir ao cortante solicitante. O numerador desse termo representa a parcela contribuinte dos estribos à resistência ao cortante, V_s . Sendo assim, essa parcela não pode ser negativa, pois um valor negativo significaria que a parcela de resistência devido ao concreto, V_c , é capaz de resistir ao esforço cortante solicitante e que toda armadura transversal existente na seção transversal é devido ao máximo momento torsor resistente. Esses conceitos levam a outra restrição decorrente da armadura transversal dada por:

$$0 \leq A_{vsn}$$

Com

$$A_{vsn} = \frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha, \theta)}{f_{yt} 0,9d \cot \theta} \quad (5.21)$$

O segundo termo do primeiro membro da equação 5.20 representa a parcela da armadura transversal por unidade de espaçamento para resistir ao momento torsor. Ao contrário da resistência ao esforço cortante que admite duas parcelas de resistência para elementos de concreto armado sem protensão, uma devido à resistência a tração do concreto, e outra devido aos estribos. Os modelos e métodos, inclusive as especificações encontradas nas normas a serem avaliadas consideram que o concreto não contribui à resistência ao momento torsor na fissuração.

E o segundo membro da equação 5.20 representa a armadura transversal existente por unidade de espaçamento devido à combinação torção – cortante;

- g) Segundo o item 17.7.2.2, deve verificar o esmagamento da diagonal de concreto à compressão conforme a equação 2.52 para seções de concreto armado solicitadas ao momento torsor combinado com esforço cortante. Dessa forma, outra restrição pode ser deduzida como:

$$\frac{V(r, \alpha)}{V_{Rd2}(\theta)} + \frac{T(r, \alpha)}{T_{Rd2}(\theta, h_e, c_0)} \leq 1 \quad (5.22);$$

- h) Finalmente, a última restrição é deduzida a partir da equação 2.53 obtida pela decalagem do diagrama de esforço no banzo tracionado pela força de tração. Assim, temos que:

$$\cot \theta \left(\frac{T(r, \alpha) u_e(c_0)}{4A_e(c_0)} + \frac{V(r, \alpha)}{2} \right) \leq F_s \quad (5.23)$$

Onde F_s representa o esforço resistente fornecido pela armadura longitudinal na zona tracionada, e é calculado pela equação 2.33 fazendo $f_{ywd} = f_{yl}$.

5.2.1 Formulação geral do problema de otimização segundo a NBR-6118 – 2014

De modo geral, o problema de otimização para o cálculo e análise de seções de concreto armado sem protensão, submetidas ao momento torsor e esforço cortante pode ser representado de forma canônica como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } f(r, \alpha, \theta, h_e, c_0, A_{vsn}) = r \\
 & \text{Sujeito a:} \\
 & \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \\
 & h_{e,\min} \leq h_e \leq h_{e,\max} \\
 & c_{0,\min} \leq c_0 \leq c_{0,\max} \\
 & 0,5h_e \leq c_0 \\
 & V(r, \alpha) \leq V_{Rd2}(\theta) \\
 & V(r, \alpha) \leq V_{Rd3}(r, \alpha, \theta) \\
 & T(r, \alpha) \leq T_{Rd2}(\theta, h_e, c_0) \\
 & T(r, \alpha) \leq T_{Rd3}(\theta, c_0) \\
 & T(r, \alpha) \leq T_{Rd4}(\theta, c_0) \\
 & \frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha, \theta)}{f_{yt} 0,9d \cot \theta} \leq A_{vsn} \\
 & 0 \leq A_{vsn} \\
 & A_{vsn} + \frac{T(r, \alpha)}{f_{yt} A_e(c_0) \cot \theta} \leq \frac{A_{v+t}}{s} \\
 & \frac{V(r, \alpha)}{V_{Rd2}(\theta)} + \frac{T(r, \alpha)}{T_{Rd2}(\theta, h_e, c_0)} \leq 1 \\
 & \cot \theta \left(\frac{T(r, \alpha) u_e(c_0)}{4A_e(c_0)} + \frac{V(r, \alpha)}{2} \right) \leq F_s
 \end{aligned}
 \tag{P}$$

5.3 RESTRIÇÕES CORRESPONDENTES AOS PROCEDIMENTOS DA AASHTO-LRFD 2014

As restrições correspondentes aos procedimentos da AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo e análise de estruturas de concreto armado sobre as solicitações de momento torsor e esforço cortante podem ser desenvolvidas através das seguintes exigências:

- a) A equação 3.26 indica o limite da resistência ao esforço cortante em seções de elementos de concreto armado segundo o item 5.8.3.3-2. Vimos também no passo 2 do tópico 3.4 que o item 5.8.3.6 exige que a resistência última ao esforço cortante, V_u , na ausência de momento torsor seja substituída pelo esforço cortante equivalente devido a combinação torção – cortante para o cálculo da deformação longitudinal na zona tracionada. Nesse sentido, deduzimos que o esforço cortante equivalente na seção em análise, não deve exceder o limite estabelecido para o esforço cortante solicitante, ou seja:

$$V_{eq}(r, \alpha) \leq V_u \quad (5.24)$$

A equação 5.24 descreve a verificação do esmagamento das bielas de concreto devido à ação combinada torção – cortante;

- b) Quanto à verificação do escoamento da armadura transversal devido à torção combinada com cortante, o item 5.8.3.6 fornece as restrições decorrentes da armadura transversal necessária para resistir à combinação torção – cortante. Substituindo a área de armadura por unidade de comprimento do espaçamento devido ao cortante da equação 3.24 e a devido à torção da equação 3.28 na equação 3.32, obtivemos:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{V_s}{f_{yt} d_v \cot \theta} + \frac{T}{f_{yt} A_0 \cot \theta} \quad (5.25)$$

Fazendo $V_s = V - V_c$, temos:

$$\frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha)}{f_{yt} d_v \cot(\theta(r, \alpha))} + \frac{T(r, \alpha)}{f_{yt} A_0 \cot(\theta(r, \alpha))} \leq \frac{A_{v+t}}{s} \quad (5.26)$$

Analogamente aos procedimentos para deduzir as restrições encontradas no passo 6 do tópico 5.2, a parcela resistente ao esforço cortante devido aos estribos, $V_s = V - V_c$, não pode ser negativa, logo, temos uma outra restrição definida como:

$$0 \leq A_{vsn}$$

Com

$$A_{vsn} = \frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha)}{f_{yt} d_v \cot(\theta(r, \alpha))} \quad (5.27);$$

- c) Por última, a verificação do escoamento da armadura longitudinal na zona tracionada de seções de concreto armado solicitadas à combinação torção – cortante pode ser feita conforme o passo 13 do tópico 3.4. Neste estudo, utilizaremos sempre seções sólidas para fazer os cálculos e análises dos esforços resistentes, tendo em vista a disponibilidade dos dados experimentais na literatura. Dessa forma, temos a seguinte restrição decorrente da equação 3.34:

$$\cot(\theta(r, \alpha)) \sqrt{(V(r, \alpha) - 0,5 A_{vsn} f_{yt} d_v \cot(\theta(r, \alpha)))^2 + \left(0,45 P_h \frac{T(r, \alpha)}{2 A_0}\right)^2} \leq F_s \quad (5.28)$$

Onde F_s representa o esforço resistente fornecido pela armadura longitudinal na zona tracionada, e é calculado pela equação 2.33 fazendo $f_{ywd} = f_{yl}$. Deve-se salientar que a parcela resistente ao esforço cortante devido aos estribos, V_s , da equação 3.34 foi substituída pelo valor correspondente à equação 5.27.

5.3.1 Formulação geral do problema de otimização segundo a AASHTO-LRFD – 2014

O problema de otimização para o cálculo e análise de seções de concreto armado sem protensão, sobre a solicitação da combinação de momento torsor com esforço cortante pode ser escrito da seguinte forma canônica:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximize } f(r, \alpha, A_{vsn}) = r \\ \text{Sujeito a :} \\ V_{eq}(r, \alpha) \leq V_u \\ \frac{V(r, \alpha) - V_c(r, \alpha)}{f_{yt} d_v \cot(\theta(r, \alpha))} \leq A_{vsn} \\ 0 \leq A_{vsn} \\ A_{vsn} + \frac{T(r, \alpha)}{f_{yt} A_0 \cot(\theta(r, \alpha))} \leq \frac{A_{v+t}}{s} \\ \cot(\theta(r, \alpha)) \sqrt{(V(r, \alpha) - 0,5 A_{vsn} f_{yt} d_v \cot(\theta(r, \alpha)))^2 + \left(0,45 P_h \frac{T(r, \alpha)}{2 A_0}\right)^2} \leq F_s \end{array} \right.$$

5.4 RESULTADOS OBTIDOS

Foram escolhidas duas seções sólidas de vigas de concreto armado com armadura longitudinal simétrica para o cálculo e análise da resistência máxima ao momento torsor combinado com esforço cortante. Para fins de validação e análise da viabilidade do modelo de cálculo, gráficos comparativos entre os resultados experimentais, otimização segundo os procedimentos da NBR-6118 – 2014, otimização segundo os procedimentos da AASHTO-LRFD – 2014 4 e segundo o modelo “CA-STM, Silva (2016)” foram confeccionados.

Essas seções foram escolhidas de formas sólidas devido a poucos ensaios de vigas de concreto armado submetidas à combinação torção – cortante disponível para fins de avaliação.

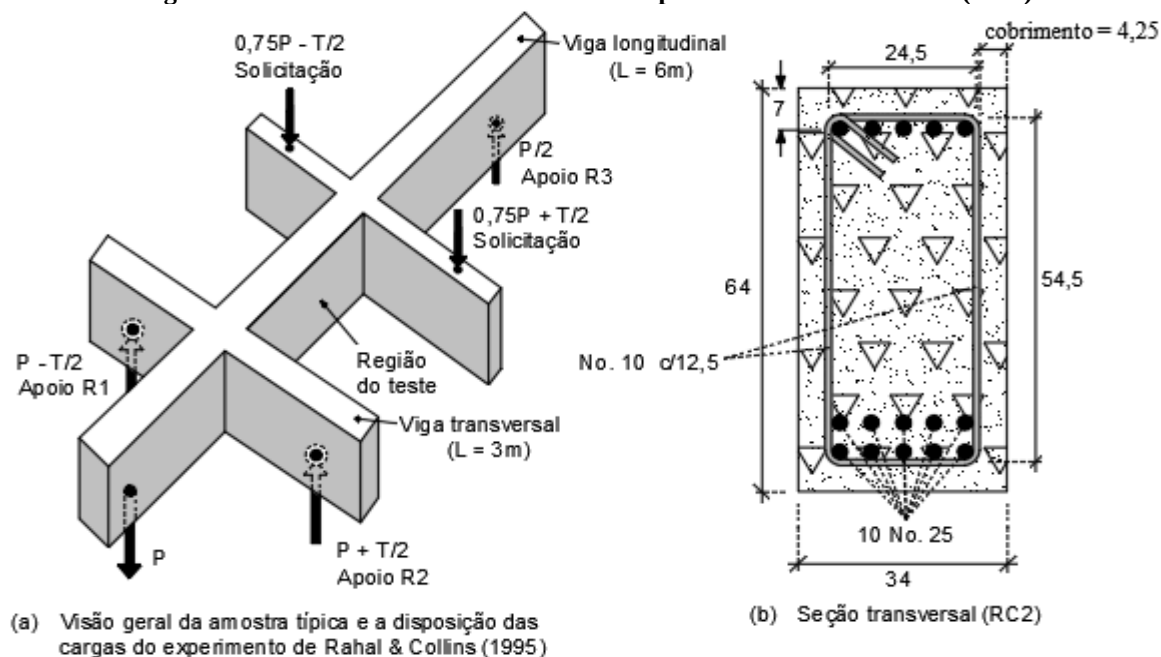
A análise somente com armadura longitudinal simétrica retrata a desconsideração de qualquer armadura longitudinal oriunda de momento fletor na seção em análise, visto que é aconselhável distribuir a armadura longitudinal devido à torção de forma simétrica na seção transversal. Os códigos em MATHCAD concernente a esses dois ensaios encontram-se no apêndice D deste trabalho.

5.4.1 Ensaio 1

A Figura 31 mostra os dados da série 2 do ensaio realizado por Rahal e Collins (1995). Essa série contém quatro amostras de seções de vigas com dimensões geométricas e quantidades de armaduras longitudinal e transversal iguais. Elas se diferenciam apenas pela resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , que varia de 38 MPa a 54 MPa (vide a Figura 33). As tensões de escoamento da armadura transversal, f_{yt} , e longitudinal, f_{yl} , são iguais a 466 MPa e 480 MPa sucessivamente. As dimensões da seção (altura e largura) estão em cm e as armaduras transversal e longitudinal correspondentes aos No.10 e No.25 são iguais a 100 mm² e 500 mm² respectivamente.

A seção transversal desse experimento foi calculada para ruptura por cisalhamento, i.e., a viga rompe na região de teste logo após o escoamento da armadura transversal existente na seção antes do escoamento da armadura longitudinal.

Figura 31 – Dados de entrada da série 2 do experimento Rahal e Collins (1995)



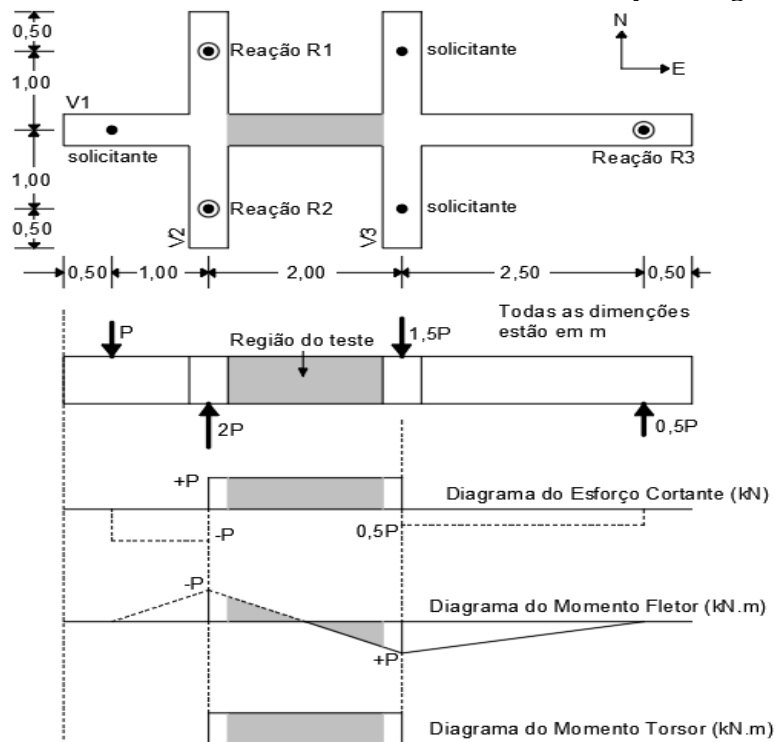
Fonte: adaptado de Rahal e Collins (1995)

Segundo Rahal e Collins (2003), a força de escoamento da armadura longitudinal na zona tracionada correspondente a 5 barras de 500 mm^2 para a tensão de escoamento de 480 MPa , $N_v = 1,2\text{ MN}$, fornece o máximo momento torsor resistente de $0,117\text{ MN.m}$ com ângulo de inclinação das bielas de concreto, $\theta = 36^\circ$, segundo os procedimentos da AASHTO-LRFD (vide a Figura 33).

Sabendo que a seção transversal do experimento foi projetada para romper por cisalhamento e não por flexão e que o momento fletor na região do teste é nulo conforme o diagrama dos esforços da Figura 32, o cálculo dos esforços máximos segundo os procedimentos das normas a serem avaliadas pode ser feito somente com 5 barras longitudinais na zona tracionada de concordância à análise de Rahal e Collins (2003) e tornando o problema simétrico em relação a armadura longitudinal. A resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , é tomada igual a 46 MPa (f_{ck} média).

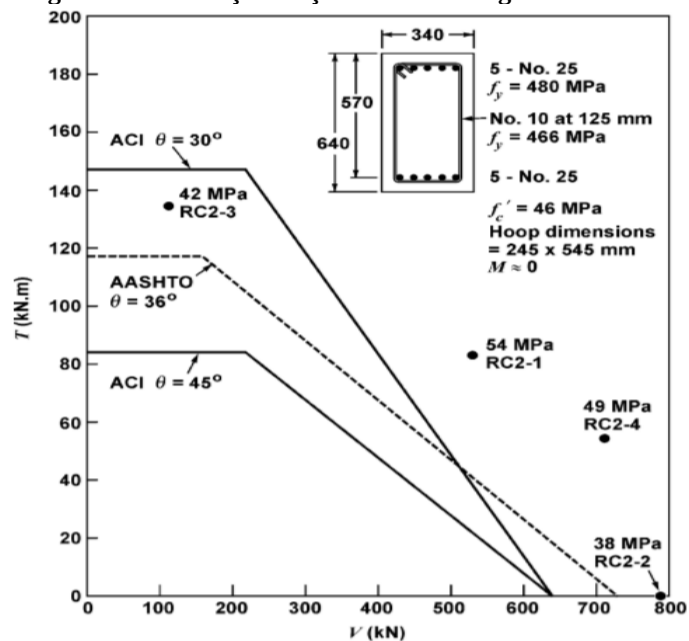
A Figura 34 mostra os resultados obtidos pelo procedimento proposto utilizando as especificações da NBR-6118 – 2014 e AASHTO-LRFD – 2014, inclusive a comparação dos mesmos com os valores experimentais e valores obtidos do modelo “CA-STM, Silva (2016)”.

Figura 32 – Plano e vista lateral da amostra mostrando os esforços na região do teste



Fonte: adaptado de Rahal e Collins (1995)

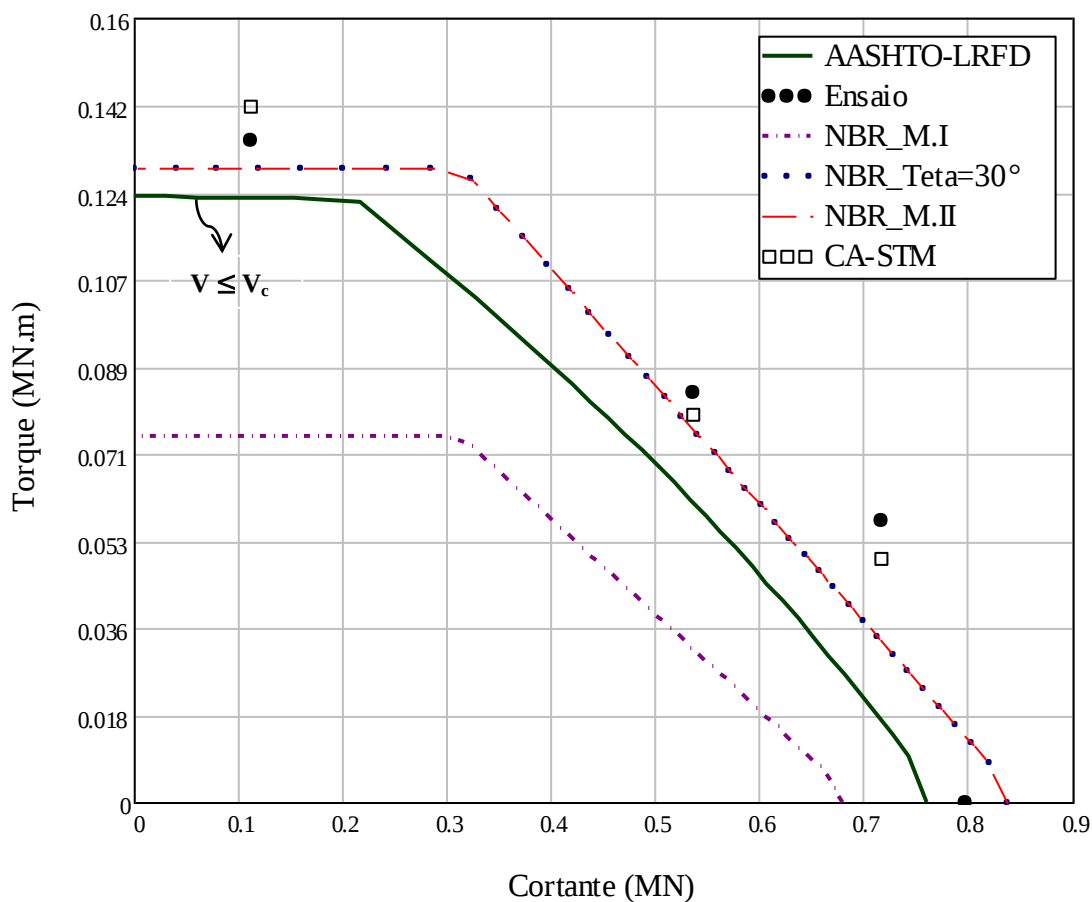
Figura 33 – Diagrama de interação torção – cortante segundo Rahal e Collins (2003)



Fonte: adaptado de Rahal e Collins (2003)

Figura 34 – Diagrama de interação torque – cortante da série RC2 do procedimento proposto

Gráficos Comparativos Torque - Cortante (RC2)



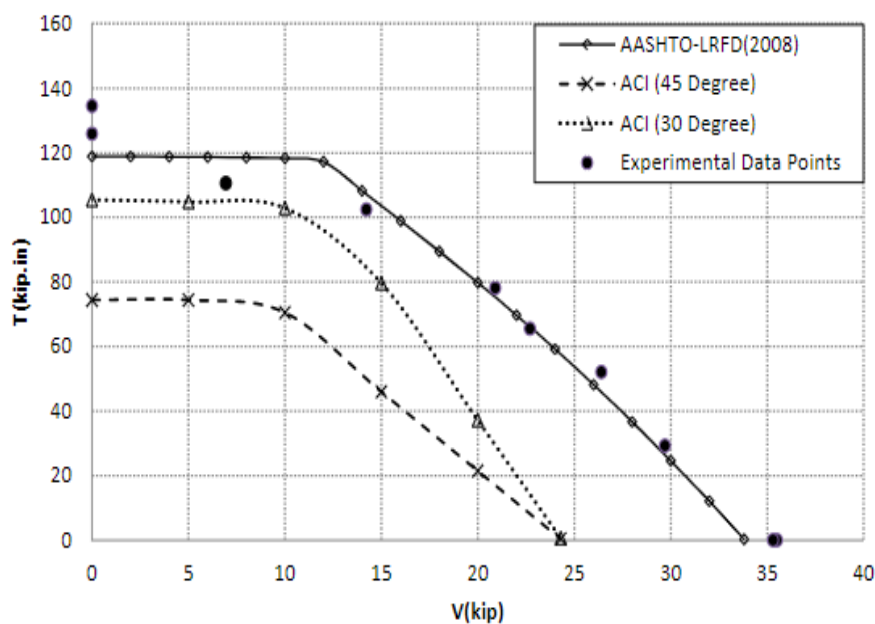
5.4.2 Ensaio 2

A Figura 36 contém os dados experimentais de uma seção de viga de concreto armado solicitada a combinação torção – cortante do ensaio realizado por Klus [1968]. A resistência característica à compressão do concreto, f_{ck} , é igual 21,5 MPa e as tensões de escoamento da armadura transversal, f_{yt} , e longitudinal, f_{yl} , são iguais a 265 MPa e 429 MPa sucessivamente. As dimensões da seção (altura e largura) estão em cm. São mostrados também nessa Figura, os resultados obtidos pelo procedimento proposto utilizando as especificações da NBR 6118

[2014] e AASHTO LRFD [2014], inclusive a comparação dos mesmos com os valores experimentais e valores obtidos do modelo “CA-STM, Silva [2016]”.

A Figura 35 ilustra os resultados obtidos por um grupo de pesquisadores da Universidade de Kansas, Report (2011), com o objetivo de avaliar os procedimentos da AASHTO-LRFD – 2008 e da ACI-318 – 2008 para o cálculo e análise de estruturas de concreto armado submetidas ao momento torsor combinado com esforço cortante.

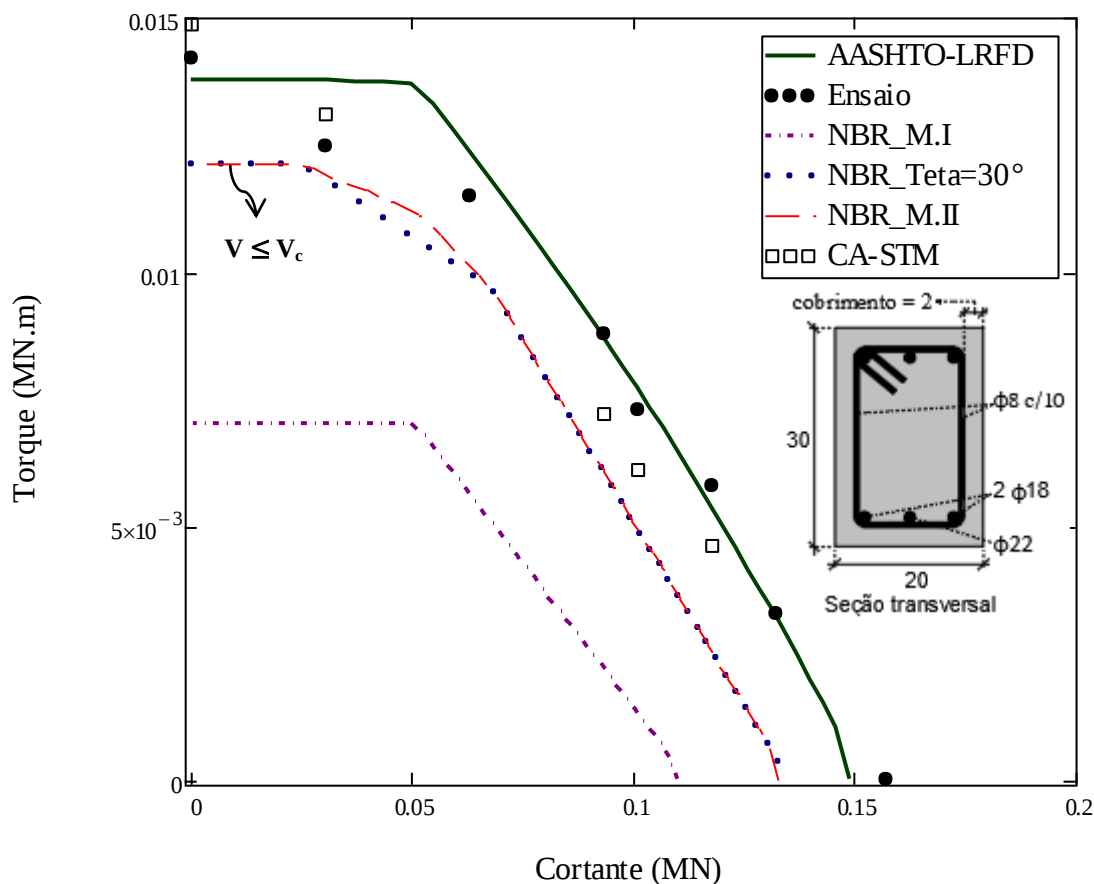
Figura 35 – Diagrama de interação torção – cortante para avaliação da AASHTO-LRFD e ACI



Fonte: Report (2011)

Figura 36 – Diagrama de interação torque – cortante do procedimento proposto

Gráficos Comparativos Torque - Cortante, Klus (1968)



Fonte: o autor

O trecho horizontal em cada diagrama de interação Torque – Cortante representa o valor constante do torque máximo sem a influência do esforço cortante, i.e., quando o cortante aplicado é inferior ou igual à parcela resistente devido ao concreto, V_c , não existe armadura devido ao cortante, toda armadura transversal é absorvida pelo momento torsor.

Os valores obtidos para o ângulo variável de inclinação das bielas de concreto pelo método de otimização segundo os procedimentos da NBR-6118 – 2014 e da AASHTO-LRFD – 2014 para os dois exemplos são mostrados na tabela 6. Nessa tabela, constam também os valores da espessura de parede equivalente, h_e , e a distância da superfície média da parede equivalente a face externa da seção transversal, c_0 .

Tabela 6 – Ângulo de inclinação das fissuras, θ , espessura da parede equivalente, h_e e a distância da superfície média da espessura da parede a face externa da seção transversal, c_0

	NBR-6118 - 2014			AASHTO-LRFD - 2014
	θ [°]	h_e [m]	c_0 [m]	θ [°]
RC2 (1995)	30	0,111	0,07	34 – 35
KLUS (1968)	30 - 32	0,06	0,04	32 – 33

Fonte: o autor

5.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Tem – se as seguintes notações e observações tanto para as curvas obtidas do primeiro exemplo (experimento RC2), quanto para aquelas obtidas do segundo exemplo (experimento Klus):

- Os pontos representados pelo símbolo “•” são os valores experimentais;
- A linha tracejada, “– –”, representa a curva otimizada pelos procedimentos da NBR-6118 – 2014 considerando o ângulo de inclinação das bielas de concreto, θ , variável segundo o modelo II indicado para o cálculo dos esforços cortantes resistentes na seção em análise. No primeiro exemplo (Figura 34), o cortante último superestimou o valor obtido experimentalmente aproximadamente 6%. Entretanto, os valores obtidos para o máximo momento torsor nessa seção transversal são considerados satisfatórios em relação aos valores experimentais.

Quanto ao segundo exemplo (Figura 36), observamos que os valores obtidos para as resistências ao momento torsor e ao esforço cortante são um pouco conservadores em relação aos valores experimentais. No entanto, esse resultado é consistente e favorável à segurança no cálculo e análise da resistência de seções submetidas à combinação torção – cortante;

- A linha pontilhada, “· · ·”, representa a curva otimizada segundo o modelo II da NBR-6118 – 2014 fazendo $\theta = 30^\circ$.

Observamos que no primeiro exemplo essa curva coincide com a curva obtida pelo modelo II com ângulo θ variável. Isso prova o valor desse ângulo que é indicado na tabela 6 referente ao experimento Rahal e Collins (1995), série 2 – RC2.

Já no segundo exemplo, pode se perceber um pequeno desvio da curva quando $\theta = 30^\circ$ com a de θ variável conforme os valores indicados na tabela 6 para o experimento KLUS (1968);

- O modelo I com o ângulo de inclinação das bielas de concreto, $\theta = 45^\circ$, da NBR-6118 – 2014 fornece a curva otimizada com os símbolos “— · —”. Esse modelo apresenta resultados muito conservadores em comparação aos valores experimentais;
- A linha contínua representa a curva obtida pela otimização segundo os procedimentos da AASHTO-LRFD – 2014.

O resultado obtido no primeiro exemplo é um pouco conservador e razoavelmente consistente em comparação aos valores experimentais.

Já no segundo exemplo, obteve uma excelente solução em comparação ao resultado experimental;

- Os pontos quadrados são os resultados obtidos pelo modelo “CA-STM, Silva (2016)”. A resistência ao momento torsor no primeiro exemplo superestimou o valor experimental aproximadamente 4.9% e 4.6% no segundo exemplo. Observamos que o momento torsor resistente torna-se pouco conservador com o aumento do esforço cortante solicitante na seção em análise. Entretanto, esses resultados são consistentes em comparação com os valores experimentais tanto para o primeiro exemplo, quanto para o segundo.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No intuito de avaliar os procedimentos da NBR-6118 – 2014 em comparação com a AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo e análise de seções de vigas de concreto armado submetidas ao momento torsor combinado com esforço cortante, foram usados os resultados de dois ensaios disponíveis na literatura para fins de validação inclusive o modelo “CA-STM, Silva (2016)”, e concluímos que:

- a) O procedimento proposto para a determinação do diagrama de interação Torque – Cortante prescreve o real comportamento de seções de elementos de concreto armado sujeitas a essas solicitações. De modo geral, esse procedimento pode ser aplicado a qualquer norma técnica de projeto, inclusive a verificação do mesmo em seções retangulares vazadas caso haja resultados experimentais disponíveis. Ademais, esse procedimento baseado no método de otimização, torna eficiente o projeto de cálculo e análise de estruturas de concreto armado;
- b) O modelo I com ângulo de inclinação das bielas de concreto, $\theta = 45^\circ$, indicado pela NBR-6118 – 2014 para o cálculo dos esforços resistentes ao esforço cortante solicitante é muito conservador e isto torna o projeto oneroso;
- c) O modelo II com ângulo de inclinação das bielas de concreto, $\theta = 30^\circ$, segundo os procedimentos da NBR-6118 – 2014 para o cálculo dos esforços resistentes ao esforço cortante solicitante é consistente quando houver combinação do esforço cortante solicitante com momento torsor solicitante na seção transversal em análise. Portanto, a melhor solução é a aplicação da otimização para calcular a resistência aos esforços combinados devido à complexidade na determinação dos parâmetros envolvidos como a espessura da parede equivalente, h_e , e a distância da superfície média dessa espessura a face externa da seção transversal, c_0 . Visto que, no processo de otimização, nem sempre c_0 é tomado igual à metade da espessura h_e como pode ser observado na tabela 6 e o ângulo variável θ oferece melhor resultado segundo a figura 36;
- d) Os procedimentos da AASHTO-LRFD – 2014 para o cálculo e análise de seções de vigas de concreto armado submetidas à combinação torção – cortante são os mais simples e completos devido à consideração de todos os esforços solicitantes na deformação longitudinal, ε_s . E as soluções obtidas segundo esses procedimentos são consistentes;
- e) O modelo “CA-STM, Silva (2016)” é consistente tanto para o cálculo da resistência ao momento torsor puro quanto para a combinação torção – cortante.

Embora fossem utilizados poucos ensaios para fins de validação do procedimento proposto nesse trabalho de dissertação, é indubitável, o emprego da palavra consistente para a avaliação das normas, visto que as formulas indicadas nas normas técnicas para o cálculo do momento torsor combinado com cortante são as mesmas utilizadas para determinar a resistência ao momento torsor puro e vários resultados de ensaios experimentais comprovam as eficácias dessas formulas. Portanto, uma análise dessas formulas é recomendável quando houver torção combinada com esforço cortante, momento fletor e esforço normal.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugerimos para trabalhos futuros as seguintes recomendações, associadas ao cálculo e análise da resistência de seções de elementos de concreto armados sobre as solicitações de esforços combinados:

- Avaliar os procedimentos da NBR-6118 e outros procedimentos decorrentes de outras normas para fins de comparação se for possível com objetivo de calcular e analisar a influência do momento fletor e do esforço normal na resistência de seções de estruturas de concreto armado solicitadas à combinação torção – cortante. Dessa forma, a determinação de diagramas de interações (3D) entre esses esforços, tais como: Interação Torque – Cortante – Fletor, Interação Torque – Cortante – Esforço Normal se faz necessária para prever o comportamento real da estrutura sobre essas solicitações.
- Calcular e analisar a rigidez à torção (antes da fissuração, logo após a fissuração e última) de elementos de concreto armado solicitados à torção combinado com esforço cortante, momento fletor e esforço normal.
- Determinar a resistência ao momento torsor de fissuração de elementos de concreto armado sobre a solicitação da combinação torção – cortante; torção – cortante – fletor e torção – cortante – esforço normal.
- Finalmente, calcular e analisar a resistência inclusive à rigidez torcional de seções de elementos de concreto armado e protendido sobre a combinação de momento torsor com esforço cortante, momento fletor e esforço normal.

REFERÊNCIAS

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. **LRFD bridge design, specifications**. 7. ed. Washington/DC: AASHTO, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: projeto de estruturas de concreto: procedimento**. 3. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

RAHAL, K. N.; COLLINS, M. P. **Effect of the thickness of concrete cover on the shear-torsion interaction**: an experimental investigation. ACI Structural Journal, v. 92, n. 3, p. 334-342. 1995.

RAHAL, K. N.; COLLINS, M. P. **Experimental evaluation of ACI and AASHTO-LRFD design provisions for combined shear and torsion**. ACI Structural Journal, v. 100, n. 3, p. 277-281. 2003.

HALIM, A. H.; RASHEED, H. A., Ph.D., P.E.; ESMAEILY, A., Ph.D, P.E. **Software for AASHTO LRFD combined shear and torsion computations using modified compression field theory and 3D truss analogy**. Report. Kansas: Kansas State University; Kansas Departament of Transportation, 2011.

Cavalcante, G. H. F.; Trautwein, L. M.; Siqueira, G. H.; Almeida, L. C. **Comparação de diagramas de interação torção x cortante Segundo a ABNT NBR 6118: 2014 e o ACI 318-14, com ensaios experimentais**. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 60., 2018, Foz do Iguaçu. Anais [...]. Foz do Iguaçu: IBRACON, 2018.

SILVA, J. R. B. **Procedimento eficiente para análise de seções em concreto armado usando o modelo de treliça com amolecimento**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

Fang, I. K.; Shiau, J. K. **Torsional behavior of normal – and high-strength concrete beams**. ACI Structural Journal, v. 101, n. 3, p. 304-313. 2004.

VECCHIO, F.; COLLINS, M. P. **The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear.** ACI Structure Journal, v. 83, n. 2, p. 219-231. 1986.

HSU, T. T. C.; ZHU, R. R. H. **Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear.** Structural Journal of the American Concrete Institute, v. 99, n. 4, p. 460–469. 2002.

HSU, T. T. C. **Post-cracking torsional rigidity of reinforced concrete sections.** ACI Structural Journal, Proceedings, v. 70, n. 5, p. 352-360. 1973.

HSU, T. T. C.; MO, Y. L. **Softening of concrete in torsional members – theory and tests.** Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, v. 82, n. 3, p. 290–303. 1985.

Hsu, T.T.C. & Mo, Y.L. **Unified theory of concrete structures.** 2010.

GREENE, G. G. Jr. **Behavior of reinforced concrete girders under cyclic torsion and torsion combined with shear:** experimental investigation and analytical models. Dissertation (Civil Engineering) – University of Missouri Rolla. 2006.

GREENE, G. G. Jr., BELARBI, A. **Model for reinforced concrete members under torsion, bending and shear:** theory. Journal of Engineering Mechanics, v. 135, p. 961-969. 2009.

JAMES K. **Reinforced concrete:** mechanics and design. 7. ed. New York: Pearson, 2016.

GIONGO, J. S. **Concreto armado:** dimensionamento de elementos estruturais fletidos solicitados por força cortante. São Paulo: USP, 2011.

TAHMAZIAN, B. **Torsion – flexion – effort tranchant d’une poutre rectangulaire en béton armé.** Dissertation (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de Sherbrooke. 1969.

APÊNDICE A – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO ESFORÇO RESISTENTE MÁXIMO AO CORTANTE SEGUNDO A NBR-6118 – 2014

CORTANTE SEGUNDO A NBR-6118 - 2014 DO MODELO II

- Dados de entrada:

$f_{ywd} := 435$	: Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 40$	: Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$h := 0.60$	: Altura da seção (m)
$b := 0.30$	: Base da seção (m)
$s_p := 0.125$	: Espaçamento da armadura transversal (m)
$c_{ob} := 0.04$	: Cobrimento (m)
$A_{sw} := 2.500 \cdot 10^{-6}$	: Área da armadura de cortante existente na seção (m²)
$A_s := 490.87 \cdot 10^{-6}$	: Área da armadura de cortante existente na seção (m²)

- Cálculo dos parâmetros iniciais:

$$\phi_l := \sqrt{(A_s) \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.025 \quad \text{: Diâmetro da armadura longitudinal (m)}$$

$$\phi_t := \sqrt{\left(\frac{A_{sw}}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.025 \quad \text{: Diâmetro da armadura transversal (m)}$$

Distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face superior do elemento:

$$c_1 := c_{ob} + \phi_t + \left(\frac{\phi_l}{2}\right) = 0.078$$

$$d := h - c_1 = 0.522 \quad \text{: Altura útil da seção (m)}$$

- Cortante na ausência de Torção segundo o modelo 2 da NBR-6118 - 2014:

$$f_{ctkinf} := 0.21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad : \text{Resistência característica a tração inferior do concreto}$$

$$\alpha_v2 := \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$$

$$VRd2(\theta) := 0.54 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$V_{c0} := 0.6 \cdot f_{ctkinf} \cdot b \cdot d$$

$$V_{sw}(\theta) := A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot 0.9 \cdot \frac{d \cdot \cot(\theta)}{s_p} \quad : \text{Parcela de resistência ao cortante resistido pelos estribos}$$

:Parcela de resistência ao cortante devido ao concreto:

$$V_{c1}(\theta, V) := \begin{cases} v \leftarrow V_{c0} & \text{if } V \leq V_{c0} \\ v \leftarrow 0 & \text{if } V \geq VRd2(\theta) \\ v \leftarrow V_{c0} \cdot \left(1 - \frac{V - V_{c0}}{VRd2(\theta) - V_{c0}}\right) & \text{if } V_{c0} < V < VRd2(\theta) \end{cases}$$

$$VRd3(\theta, V) := V_{c1}(\theta, V) + V_{sw}(\theta)$$

- Otimização segundo NBR6118 do MODELO 2:

$$\theta_{min} := \left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.524 \quad \theta_{max} := \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.785$$

$$V_{sw} := 0.01 \quad \theta := \theta_{max} \quad f(\theta, V) := V$$

Given

Limites do ângulo de fissuração e dos esforços na seção transversal:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$$

$$V \leq VRd2(\theta) \quad : \text{Esmagamento das bielas (17.7.2.2)}$$

$$V \leq VRd3(\theta, V) \quad : \text{Armação transversal devido à torção:}$$

$$\begin{pmatrix} R\theta \\ RV \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, \theta, V) = \begin{pmatrix} 0.785 \\ 1.421 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_{max} = 0.785 \\ \theta_{min} = 0.524 \end{matrix}$$

$$\theta_{gr} := \left(R\theta \cdot \frac{180}{\pi}\right) = 45$$

APÊNDICE B – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO MOMENTO RESISTENTE MÁXIMO À TORÇÃO SEGUINDO A NBR-6118 – 2014

TORQUE PURO SEGUINDO A NBR-6118 - 2014 QUANDO $A/U \geq 2c1$ (caso 1) PARA He:

- Dados de entrada:

$f_{ty} := 435$	:Tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa)
$f_{ty} := 435$	:Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 40$	:Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$E_s := 210000$	:Módulo de elasticidade dos aços (MPa)
$h := 0.60$	:Altura da seção (m)
$b := 0.60$	:Base da seção (m)
$sp := 0.125$	:Espaçamento da armadura transversal (m)
$cob := 0.04$	:Cobrimento (m)
$A_{sw} := 2.400 \cdot 10^{-6}$	:Área da armadura de cortante existente na seção (m ²)
$A_t := \frac{A_{sw}}{2}$	:Área de uma perna de estribo (m ²)
$A_l := 490.87 \cdot 10^{-6}$	:Área de uma barra da armadura longitudinal (m ²)

- Cálculo dos parametros iniciais:

$\phi_t := \sqrt{\left(\frac{A_{sw}}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.023$	:Diametro da armadura transversal (m)
$\phi_L := \sqrt{A_l \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.025$	:Diametro da armadura longitudinal (m)
$c1 := cob + \phi_t + \left(\frac{\phi_L}{2}\right) = 0.075$	:Distancia entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento
$d := h - c1 = 0.525$	:Altura útil da seção (m)
$x1 := b - 2 \cdot cob - \phi_t = 0.497$	:Distancias entre o eixo do estribo e a face lateral do elemento
$y1 := h - 2 \cdot cob - \phi_t = 0.497$	
$A_{s1} := 5 \cdot A_l$	:Área de armadura na zona de flexão (m ²)
$A_{s2} := 5 \cdot A_l$	:Área de armadura na zona de compressão (m ²)

$A_{oh} := x1 \cdot y1$	:Área cercada pela linha central dos estribos (m²)
$Ph := 2 \cdot (x1 + y1)$	:Perímetro da linha central dos estribos (m)
$AsL := As1 + As2$	:Área de armadura total na seção transversal (m²)
$A_{cp} := b \cdot h$	:Área total da seção transversal (m²)
$P_{cp} := 2 \cdot (b + h)$	:Perímetro externo da seção transversal (m)
$F_s := As1 \cdot f_{ly}$	:Força resistente da armadura longitudinal na zona tracionada (MN)

- Torque puro segundo a NBR-6118 - 2014:

$$A_u := \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \quad A_u = 0.15 \quad 2c1 = 0.15$$

$$\lim := \left| \begin{array}{l} v_1 \leftarrow 2 \cdot c1 \\ v_2 \leftarrow A_u \\ v_3 \leftarrow 0.5 v_1 \\ v_4 \leftarrow 0.5 \cdot v_2 \\ \text{if } A_u < 2 \cdot c1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_1 \leftarrow \min(A_u, b - 2 \cdot c1) \\ v_2 \leftarrow v_1 \\ v_3 \leftarrow c1 \\ v_4 \leftarrow v_3 \end{array} \right. \\ v \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{hemin} \\ \text{hemax} \\ c0min \\ c0max \end{array} \right) := \lim \quad \text{tol} := 0.00001$$

$$\text{hemin} = 0.15 \quad \text{hemax} = 0.15 \quad c0min = 0.075 \quad c0max =$$

$$\theta_{min} := 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.524 \quad \theta_{max} := 45 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.785$$

$$f_{ctkinf} := 0.21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad : \text{Resistência característica a tração inferior do concreto}$$

$$\alpha v2 := \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right)$$

$$A_e(c0) := (b - 2 \cdot c0) \cdot (h - 2 \cdot c0)$$

$$u_e(c0) := P_{cp} - 8 \cdot c0$$

$TRd2(\theta, he, c0) := 0.5 \cdot \alpha_v 2 \cdot f_{ck} \cdot Ae(c0) \cdot he \cdot \sin(2 \cdot \theta)$: Limite da Resistência ao torque das diagonais comprimidas

$TRd3(\theta, c0) := At \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{Ae(c0) \cdot \cot(\theta)}{sp}$: Limite da Resistência ao torque dos estribos

$TRd4(\theta, c0) := AsL \cdot 2 \cdot Ae(c0) \cdot f_{ly} \cdot \frac{\tan(\theta)}{ue(c0)}$: Limite da Resistência ao torque da armadura longitudinal

- Otimização segundo NBR-6118 - 2014:

$T := 0.01$ $he := 0.1$ $c0 := 0.05$ $\theta := \theta_{max}$ $f(T, \theta, he, c0) := T$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$$

$$he_{min} - tol \leq he \leq he_{max}$$

$$c0_{min} - tol \leq c0 \leq c0_{max}$$

$$0.5 \cdot he \leq c0$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$T \leq TRd2(\theta, he, c0) \quad : \text{Esmagamento das bielas (17.7.2.2)}$$

$$T \leq TRd3(\theta, c0) \quad : \text{Armação transversal devido à torção:}$$

$$T \leq TRd4(\theta, c0) \quad : \text{Armação longitudinal:}$$

$$\left(T \cdot \frac{ue(c0)}{4 \cdot Ae(c0) \cdot \tan(\theta)} \right) \leq F_s \quad : \text{Força no banzo tracionado}$$

$$\begin{pmatrix} RT \\ R\theta \\ Rhe \\ Rc0 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, T, \theta, he, c0) = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.785 \\ 0.15 \\ 0.075 \end{pmatrix}$$

TORQUE PURO SEGUNDO A NBR-6118 - 2014 QUANDO $A/U < 2c1$ (caso 2) PARA He:

- Dados de entrada:

$f_{ly} := 435$	: Tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa)
$f_{ty} := 435$	: Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 40$	: Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$h := 0.60$	: Altura da seção (m)
$b := 0.30$	: Base da seção (m)
$s_p := 0.125$	: Espaçamento da armadura transversal (m)
$cob := 0.04$	: Cobrimento (m)
$A_{sw} := 2.300 \cdot 10^{-6}$	: Área da armadura de cortante existente na seção (m ²)
$A_t := \frac{A_{sw}}{2}$	: Área de uma perna de estribo (m ²)
$A_l := 490.87 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma barra da armadura longitudinal (m ²)

- Cálculo dos parametros iniciais:

$\phi_t := \sqrt{\left(\frac{A_{sw}}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.02$	: Diametro da armadura transversal (m)
$\phi_L := \sqrt{A_l \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.025$	: Diametro da armadura longitudinal (m)
$c1 := cob + \phi_t + \left(\frac{\phi_L}{2}\right) = 0.072$	: Distancia entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento
$d := h - c1 = 0.528$	: Altura útil da seção (m)
$A_{s1} := 5 \cdot A_l$	: Área de armadura na zona de flexão (m ²)
$A_{s2} := 5 \cdot A_l$	: Área de armadura na zona de compressão (m ²)
$A_{sL} := A_{s1} + A_{s2}$	: Área de armadura total na seção transversal (m ²)
$A_{cp} := b \cdot h$	: Área total da seção transversal (m ²)
$P_{cp} := 2 \cdot (b + h)$	: Perímetro externo da seção transversal (m)
$F_s := A_{s1} \cdot f_{ly}$	: Força resistente da armadura longitudinal na zona tracionada (MN)

- Torque puro segundo a NBR-6118 - 2014:

$$A_u := \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \quad A_u = 0.1 \quad 2c1 = 0.144$$

$$\lim := \begin{cases} v_1 \leftarrow 2 \cdot c1 \\ v_2 \leftarrow A_u \\ v_3 \leftarrow 0.5 v_1 \\ v_4 \leftarrow 0.5 \cdot v_2 \\ \text{if } A_u < 2 \cdot c1 \\ \quad \begin{cases} v_1 \leftarrow \min(A_u, b - 2 \cdot c1) \\ v_2 \leftarrow v_1 \\ v_3 \leftarrow c1 \\ v_4 \leftarrow v_3 \end{cases} \\ v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{hemin} \\ \text{hemax} \\ c0min \\ c0max \end{pmatrix} := \lim \quad \text{tol} := 0.0001$$

$$\text{hemin} = 0.1 \quad \text{hemax} = 0.1 \quad c0min = 0.072 \quad c0max =$$

$$\theta_{min} := 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.524 \quad \theta_{max} := 45 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.785$$

$$f_{ctkinf} := 0.21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad : \text{ Resistência característica a tração inferior do concreto}$$

$$\alpha_{v2} := \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right)$$

$$A_e(c0) := (b - 2 \cdot c0) \cdot (h - 2 \cdot c0)$$

$$u_e(c0) := P_{cp} - 8 \cdot c0$$

$TRd2(\theta, he, c0) := 0.5 \cdot \alpha_v^2 \cdot f_{ck} \cdot Ae(c0) \cdot he \cdot \sin(2 \cdot \theta)$: Limite da Resistência ao torque das diagonais comprimidas

$TRd3(\theta, c0) := At \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{Ae(c0) \cdot \cot(\theta)}{s_p}$: Limite da Resistência ao torque dos estribos

$TRd4(\theta, c0) := AsL \cdot 2 \cdot Ae(c0) \cdot f_{ly} \cdot \frac{\tan(\theta)}{ue(c0)}$: Limite da Resistência ao torque da armadura longitudinal

- Otimização segundo NBR-6118 - 2014:

$T := 0.01$ $he := 0.1$ $c0 := 0.05$ $\theta := \theta_{max}$ $f(T, \theta, he, c0) := T$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$$

$$he_{min} - tol \leq he \leq he_{max}$$

$$c0_{min} - tol \leq c0 \leq c0_{max}$$

$$0.5 \cdot he \leq c0$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$T \leq TRd2(\theta, he, c0) \quad : \text{Esmagamento das bielas (17.7.2.2)}$$

$$T \leq TRd3(\theta, c0) \quad : \text{Armação transversal devido à torção:}$$

$$T \leq TRd4(\theta, c0) \quad : \text{Armação longitudinal:}$$

$$\left(T \cdot \frac{ue(c0)}{4 \cdot Ae(c0) \cdot \tan(\theta)} \right) \leq F_s \quad : \text{Força no banzo tracionado}$$

$$\begin{pmatrix} RT \\ R\theta \\ Rhe \\ Rc0 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, T, \theta, he, c0) = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.785 \\ 0.1 \\ 0.072 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE C – CÓDIGO EM MATHCAD DO CÁLCULO DO MOMENTO RESISTENTE MÁXIMO À TORÇÃO SEGUNDO A AASHTO-LRFD – 2014 (ENSAIO N-06-06)

TORQUE PURO SEGUNDO A NBR-6118 - 2014 DO EXPERIMENTO N-06-06 DE FANG & SHIAU

- Dados de entrada do experimento N-06-06:

$f_{ly} := 440$	: Tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa)
$f_{ty} := 440$	: Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 35.5$	: Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$E_s := 210000$	: Módulo de elasticidade dos aços (MPa)
$h := 0.50$	: Altura da seção (m)
$b := 0.35$	: Base da seção (m)
$s_p := 0.100$	: Espaçamento da armadura transversal (m)
$c_{ob} := 0.02$	: Cobrimento (m)
$A_{sw} := 2.713 \cdot 10^{-6}$	: Área da armadura de cortante existente na seção (m ²)
$A_t := 71.3 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma perna de estribo (m ²)
$A_l := 198.6 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma barra da armadura longitudinal (m ²)

- Cálculo dos parametros iniciais:

$\phi_t := \sqrt{\left(\frac{A_{sw}}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi}} = 9.528 \times 10^{-3}$	: Diametro da armadura transversal (m)
$\phi_L := \sqrt{A_l \cdot \frac{4}{\pi}} = 0.016$	: Diametro da armadura longitudinal (m)
$c_1 := c_{ob} + \phi_t + \left(\frac{\phi_L}{2}\right) = 0.037$	: Distancia entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento
$d := h - c_1 = 0.463$	: Altura útil da seção (m)
$x_1 := b - 2 \cdot c_{ob} - \phi_t = 0.3$	: Distancias entre o eixo do estribo e a face lateral do elemento
$y_1 := h - 2 \cdot c_{ob} - \phi_t = 0.45$	
$A_{s1} := 3 \cdot A_l$	: Área de armadura na zona de flexão (m ²)
$A_{s2} := 3 \cdot A_l$	: Área de armadura na zona de compressão (m ²)

$A_{oh} := x1 \cdot y1$: Área cercada pela linha central dos estribos (m^2)
 $Ph := 2 \cdot (x1 + y1)$: Perímetro da linha central dos estribos (m)
 $AsL := As1 + As2$: Área de armadura total na seção transversal (m^2)
 $A_{cp} := b \cdot h$: Área total da seção transversal (m^2)
 $P_{cp} := 2 \cdot (b + h)$: Perímetro externo da seção transversal (m)
 $F_s := As1 \cdot f_{ly}$: Força resistente da armadura longitudinal na zona tracionada (MN)

- Torque puro segundo a NBR-6118 - 2014:

$$A_u := \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \quad A_u = 0.103 \quad 2c1 = 0.075$$

```

lim :=
  v1 ← 2·c1
  v2 ← A_u
  v3 ← 0.5·v1
  v4 ← 0.5·v2
  if A_u < 2·c1
    v1 ← min(A_u, b - 2·c1)
    v2 ← v1
    v3 ← c1
    v4 ← v3
  v

```

$$\begin{pmatrix} hemin \\ hemax \\ c0min \\ c0max \end{pmatrix} := \lim \quad tol := 0.0001$$

$$hemin = 0.075 \quad hemax = 0.103 \quad c0min = 0.037 \quad c0max = 0.051$$

$$\theta_{min} := 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.524 \quad \theta_{max} := 45 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.785$$

$$f_{ctkinf} := 0.21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad : \text{Resistência característica a tração inferior do concreto}$$

$$\alpha_{v2} := \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right)$$

$$Ae(c0) := (b - 2 \cdot c0) \cdot (h - 2 \cdot c0)$$

$$ue(c0) := Pcp - 8 \cdot c0$$

$$TRd2(\theta, he, c0) := 0.5 \cdot \alpha_v 2 \cdot f_{ck} \cdot Ae(c0) \cdot he \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

: Limite da Resistência ao torque das diagonais comprimidas

$$TRd3(\theta, c0) := At \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{Ae(c0) \cdot \cot(\theta)}{s_p}$$

: Limite da Resistência ao torque dos estribos

$$TRd4(\theta, c0) := AsL \cdot 2 \cdot Ae(c0) \cdot f_{ly} \cdot \frac{\tan(\theta)}{ue(c0)}$$

- Otimização segundo NBR-6118 - 2014 do experimento N-06-06 de Fang & Shiau:

$$\underline{T} := 0.01 \quad he := 0.1 \quad c0 := 0.05 \quad \theta := \theta_{max} \quad f(T, \theta, he, c0) := T$$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$$

$$he_{min} - tol \leq he \leq he_{max}$$

$$c0_{min} - tol \leq c0 \leq c0_{max}$$

$$0.5 \cdot he \leq c0$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$T \leq TRd2(\theta, he, c0) \quad : \text{Esmagamento das bielas (17.7.2.2)}$$

$$T \leq TRd3(\theta, c0) \quad : \text{Armação transversal:}$$

$$T \leq TRd4(\theta, c0) \quad : \text{Armação longitudinal:}$$

$$\begin{pmatrix} RT \\ R\theta \\ Rhe \\ Rc0 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, T, \theta, he, c0) = \begin{pmatrix} 0.0802 \\ 0.7413 \\ 0.0749 \\ 0.0374 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE D – CÓDIGOS EM MATHCAD DO PROCEDIMENTO PROPOSTO

Rahal & Collins (1995 – RC2)

ITERAÇÃO TORQUE - CORTANTE PELA OTIMIZAÇÃO

- Dados de entrada do experimento Rahal & Collins 1995 (RC2):

$f_{ty} := 480$	:Tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa)
$f_{ty} := 466$	:Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 46$	:Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$E_s := 200000$	:Módulo de elasticidade dos aços segundo AASHTO-LRFD (MPa)
$E_{sb} := 210000$	:Módulo de elasticidade dos aços segundo NBR 6118 (MPa)
$h := 0.64$	:Altura da seção (m)
$b := 0.34$	:Base da seção (m)
$x_1 := 0.245$	:Base dos estribos (m)
$y_1 := 0.545$	:Altura dos estribos (m)
$f_{it} := 0.0113$	:Diâmetro da armadura transversal (m)
$f_{il} := 0.0252$	:Diâmetro da armadura longitudinal (m)
$s_p := 0.125$	:Espaçamento da armadura transversal (m)
$c_{ob} := 0.0425$	:Cobrimento (m)
$d := 0.570$	:Altura útil da seção (m)
$A_v := 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}$	:Área da armadura de cortante existente na seção (m ²)
$A_t := 100 \cdot 10^{-6}$	:Área de uma perna de estribo (m ²)
$A_l := 500 \cdot 10^{-6}$	:Área de uma barra da armadura longitudinal (m ²)
$c_1 := 0.070$	:Distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face superior do elemento

- Cálculo dos parâmetros iniciais:

$As1 := 5 \cdot A1$	: Área de armadura na zona de flexão (m²)
$As2 := 5 \cdot A1$	: Área de armadura na zona de compressão (m²)
$Aoh := x1 \cdot y1$	: Área cercada pela linha central dos estribos (m²)
$Ph := 2 \cdot (x1 + y1)$	: Perímetro da linha central dos estribos (m)
$AsL := As1 + As2$	: Área de armadura total na seção transversal (m²)
$Acp := b \cdot h$	: Área total da seção transversal (m²)
$Pcp := 2 \cdot (b + h)$	: Perímetro externo da seção transversal (m)
$A0 := 0.85 \cdot Aoh$	: Área cercada pelo fluxo de cisalhamento segundo AASHTO (m²)
$P0 := 0.9 \cdot Ph$	: Perímetro da linha central do fluxo de cisalhamento (m)
$dv := \max(0.9 \cdot d, 0.72 \cdot h)$	: Altura eficaz da biela de concreto segundo AASHTO (m)
$Fs := As1 \cdot fy$	: Força resistente da armadura longitudinal na zona tracionada (MN)

Resultados experimentais e do Procedimento Silva (2016) (Torque - Cortante - RC2):

$$V_{exp} := \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.535 \\ 0.715 \\ 0.796 \end{pmatrix} \quad T_{exp} := \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.0835 \\ 0.0576 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_{jordly} := \begin{pmatrix} 0.111 \\ 0.535 \\ 0.715 \end{pmatrix} \quad T_{jordly} := \begin{pmatrix} 0.142 \\ 0.0792 \\ 0.050 \end{pmatrix}$$

- Cortante e Torque máximos segundo AASHTO-LRFD-2014:

$$V_{max} := 0.25 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot dv \quad : \text{Cortante maximo (MN)}$$

$$T_{max} := V_{max} \cdot 2 \cdot \frac{A0}{0.9 \cdot Ph} \quad : \text{Torque maximo (MN.m)}$$

$$Vu(r, \alpha) := r \cdot \cos(\alpha) \cdot V_{max} \quad : \text{máximo esforço cortante na seção em análise (MN)}$$

$$Tu(r, \alpha) := r \cdot \sin(\alpha) \cdot T_{max} \quad : \text{máximo momento torsor na seção em análise (MN.m)}$$

$$V_{ueq}(r, \alpha) := \sqrt{(Vu(r, \alpha))^2 + \left(0.9 \cdot Ph \cdot \frac{Tu(r, \alpha)}{2 \cdot A0}\right)^2} \quad : \text{esforço cortante equivalente na seção (MN)}$$

$$\varepsilon_s(r, \alpha) := \frac{V_{ueq}(r, \alpha)}{Es \cdot As1} \quad : \text{deformação longitudinal}$$

$$\theta(r, \alpha) := (29 + 3500 \cdot \varepsilon_s(r, \alpha)) \cdot \frac{\pi}{180} \quad : \text{ângulo de inclinação das bielas de concreto (rad)}$$

$$\beta(r, \alpha) := \frac{4.8}{1 + 750 \cdot \varepsilon_s(r, \alpha)} \quad : \text{fator de resistência às tensões de tração do concreto}$$

$$V_c(r, \alpha) := 0.083 \cdot \beta(r, \alpha) \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot b \cdot d_v \quad : \text{resistência ao esforço cortante devido ao concreto (MN)}$$

$$V_s(r, \alpha) := A_v \cdot f_{ty} \cdot d_v \cdot \frac{\cot(\theta(r, \alpha))}{s_p} \quad : \text{resistência ao esforço cortante devido aos estribos (MN)}$$

$$V_n(r, \alpha) := V_c(r, \alpha) + V_s(r, \alpha) \quad : \text{resistência nominal ao esforço cortante solicitante (MN)}$$

$$T_n(r, \alpha) := 2 \cdot A_0 \cdot A_t \cdot f_{ty} \cdot \frac{\cot(\theta(r, \alpha))}{s_p} \quad : \text{resistência nominal ao momento torsor solicitante na ausência de cortante (MN.m)}$$

$$A_{vnec}(r, \alpha) := \frac{(V_u(r, \alpha) - V_c(r, \alpha))}{f_{ty} \cdot d_v \cdot \cot(\theta(r, \alpha))} \quad : \text{armadura transversal necessária por unidade de espaçamento devido ao esforço cortante}$$

- Otimização segundo AASHTO:

$$r := 0.5 \quad A_{vsn} := 0 \quad f(r, A_{vsn}, \alpha) := r$$

Given

Verificação do esmagamento das bielas do concreto:

$$V_{ueq}(r, \alpha) \leq V_{max}$$

Verificação do escoamento da armadura transversal:

$$\left[\frac{(V_u(r, \alpha) - V_c(r, \alpha))}{f_{ty} \cdot d_v \cdot \cot(\theta(r, \alpha))} \right] \leq A_{vsn}$$

$$0 \leq A_{vsn}$$

$$A_{vsn} + \frac{T_u(r, \alpha)}{A_0 \cdot f_{ty} \cdot \cot(\theta(r, \alpha))} \leq \frac{A_v}{s_p}$$

Verificação do escoamento da armadura longitudinal na zona tracionada:

$$\cot(\theta(r, \alpha)) \cdot \sqrt{(V_u(r, \alpha) - 0.5 \cdot A_{vsn} \cdot f_{ty} \cdot d_v \cdot \cot(\theta(r, \alpha)))^2 + \left(0.45 \cdot P_h \cdot \frac{T_u(r, \alpha)}{2 \cdot A_0}\right)^2} \leq F_s$$

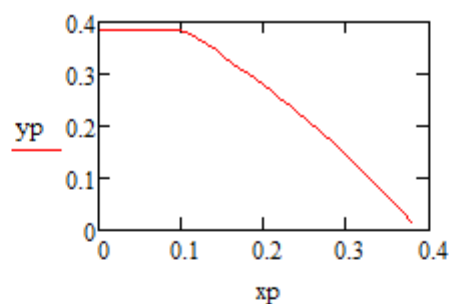
$$rs(\alpha) := \text{Maximize}(f, r, A_{vsn})$$

$$n := 40 \quad \theta_1 := \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad i := 1..n \quad \theta_{p_i} := i \cdot \theta_1$$

$$r_{p_i} := rs(\theta_{p_i})_1 \quad x_{p_i} := r_{p_i} \cdot \cos(\theta_{p_i}) \quad y_{p_i} := r_{p_i} \cdot \sin(\theta_{p_i})$$

$$T_{aashto} := y_p \cdot T_{max} \quad V_{aashto} := x_p \cdot V_{max} \quad : \text{Torques e cortantes resistentes da seção}$$

- Gráfico adimensional Torque - Cortante:



- Curva Torque - Cortante segundo NBR-6118 - 2014 :

$$f_{ctkinf} := 0.21 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad : \text{ Resistência característica a tração inferior do concreto}$$

$$\alpha_{v2} := \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \quad : \text{ Fator de resistência}$$

$$A_u := \frac{A_{cp}}{P_{cp}} \quad : \text{ Razão entre a área e o perímetro da seção total}$$

Espessura da parede equivalente e a distância da superfície média dessa parede a face externa da seção

$$\text{lim} := \begin{cases} v_1 \leftarrow 2 \cdot c1 \\ v_2 \leftarrow A_u \\ v_3 \leftarrow 0.5 \cdot v_1 \\ v_4 \leftarrow 0.5 \cdot v_2 \\ \text{if } A_u < 2 \cdot c1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} v_1 \leftarrow \min(A_u, b - 2 \cdot c1) \\ v_2 \leftarrow v_1 \\ v_3 \leftarrow c1 \\ v_4 \leftarrow v_3 \end{array} \right. \\ v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{hemin} \\ \text{hemax} \\ c0min \\ c0max \end{pmatrix} := \text{lim} \quad \text{tol} := 0.0001$$

$$\theta_{\min} := 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.524 \quad \theta_{\max} := 45 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.785 \quad A_{\max} := (b - h_{\max}) \cdot (h - h_{\max})$$

$V_{c0} := 0.6 \cdot f_{ctk} \cdot b \cdot d$: resistência ao cortante devido ao concreto segundo o modelo 1 (MN)

MODELO 2 COM θ OTIMIZADO:

$A_{e2}(c02) := (b - 2 \cdot c02) \cdot (h - 2 \cdot c02)$: área cercada pelo fluxo de cisalhamento (m²)

$u_{e2}(c02) := P_{cp} - 8 \cdot c02$: perímetro do fluxo de cisalhamento (m)

Cálculo dos esforços:

$V_{\max_M2} := 0.54 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.964$: Cortante máximo (MN)

$T_{\max_M2} := 0.5 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot A_{\max} \cdot h_{\max} = 0.252$: Torque máximo (MN.m)

$V_{u_M2}(r2, \alpha2) := r2 \cdot \cos(\alpha2) \cdot V_{\max_M2}$: máximo esforço cortante na seção em análise (MN)

$T_{u_M2}(r2, \alpha2) := r2 \cdot \sin(\alpha2) \cdot T_{\max_M2}$: máximo momento torsor na seção em análise (MN.m)

$VR_{d2_M2}(\theta2) := 0.54 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta2) \cdot \cos(\theta2)$: Resistência de cálculo relacionada à Ruína das diagonais comprimidas

$V_{sw_M2}(\theta2) := A_v \cdot f_{ty} \cdot 0.9 \cdot \frac{d \cdot \cot(\theta2)}{s_p}$: resistência ao cortante devido aos estribos

Parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto:

$$V_{c1_M2}(r2, \theta2, \alpha2) := \begin{cases} v_{c2} \leftarrow V_{c0} & \text{if } V_{u_M2}(r2, \alpha2) \leq V_{c0} \\ v_{c2} \leftarrow 0 & \text{if } V_{u_M2}(r2, \alpha2) \geq VR_{d2_M2}(\theta2) \\ v_{c2} \leftarrow V_{c0} \cdot \left(1 - \frac{V_{u_M2}(r2, \alpha2) - V_{c0}}{VR_{d2_M2}(\theta2) - V_{c0}} \right) & \text{if } V_{c0} < V_{u_M2}(r2, \alpha2) < VR_{d2_M2}(\theta2) \\ v_{c2} & \end{cases}$$

$VR_{d3_M2}(r2, \theta2, \alpha2) := V_{c1_M2}(r2, \theta2, \alpha2) + V_{sw_M2}(\theta2)$: Resistência de cálculo ao cortante, relativa à Ruína por tração diagonal

$TR_{d2_M2}(\theta2, h_{e2}, c02) := 0.5 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot A_{e2}(c02) \cdot h_{e2} \cdot \sin(2 \cdot \theta2)$: Limite da Resistência ao torque das diagonais comprimidas

$TR_{d3_M2}(\theta2, c02) := A_t \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{A_{e2}(c02) \cdot \cot(\theta2)}{s_p}$: Limite da Resistência ao torque dos estribos

$TR_{d4_M2}(\theta2, c02) := A_{sL} \cdot 2 \cdot A_{e2}(c02) \cdot \frac{f_{ly} \cdot \tan(\theta2)}{u_{e2}(c02)}$: Limite da Resistência ao torque das barras longitudinais

- Otimização segundo NBR-6118 - 2014 do MODELO 2 com θ otimizado:

$$r2 := 0.5 \quad Avsn2 := 0 \quad he2 := 0.1 \quad c02 := 0.05 \quad \theta2 := \theta_{max}$$

$$f2(r2, \theta2, he2, c02, Avsn2, \alpha2) := r2$$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$\theta_{min} \leq \theta2 \leq \theta_{max}$$

$$he_{min} - tol \leq he2 \leq he_{max}$$

$$c0_{min} - tol \leq c02 \leq c0_{max}$$

$$0.5 \cdot he2 \leq c02$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$Vu_M2(r2, \alpha2) \leq VRd_M2(\theta2)$$

$$Vu_M2(r2, \alpha2) \leq VRd3_M2(r2, \theta2, \alpha2)$$

$$Tu_M2(r2, \alpha2) \leq TRd2_M2(\theta2, he2, c02)$$

$$Tu_M2(r2, \alpha2) \leq TRd3_M2(\theta2, c02)$$

$$Tu_M2(r2, \alpha2) \leq TRd4_M2(\theta2, c02)$$

Armação de cortante necessária por unidade de espaçamento:

$$\left[\frac{(Vu_M2(r2, \alpha2) - Vc1_M2(r2, \theta2, \alpha2))}{f_{ty} \cdot 0.9 \cdot d \cdot \cot(\theta2)} \right] \leq Avsn2$$

$$0 \leq Avsn2$$

Armação transversal devido à combinação torção - cortante:

$$Avsn2 + \frac{Tu_M2(r2, \alpha2)}{Ae2(c02) \cdot f_{ty} \cdot \cot(\theta2)} \leq \frac{Av}{sp}$$

Esmagamento das bielas (17.7.2.2):

$$\left(\frac{Vu_M2(r2, \alpha2)}{VRd2_M2(\theta2)} \right) + \left(\frac{Tu_M2(r2, \alpha2)}{TRd2_M2(\theta2, he2, c02)} \right) \leq 1$$

Verificação do banzo tracionado:

$$\cot(\theta2) \cdot \left[\left(\frac{Tu_M2(r2, \alpha2) \cdot ue2(c02)}{4 Ae2(c02)} \right) + \left(\frac{Vu_M2(r2, \alpha2)}{2} \right) \right] \leq F_s$$

$$rs2(\alpha 2) := \text{Maximize}(f2, r2, \theta 2, he2, c02, Avsn2)$$

$$n2 := 40 \quad \theta_{12} := \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n2} \right) \quad i2 := 1..n2 \quad \theta_{p2_{i2}} := i2 \cdot \theta_{12}$$

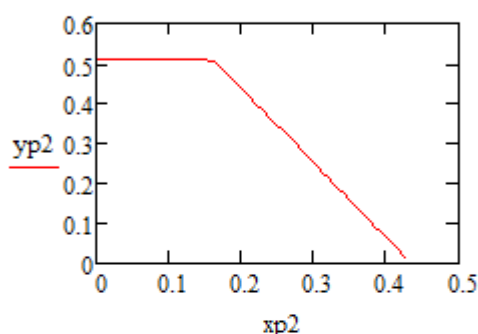
$$rp2_{i2} := rs2(\theta_{p2_{i2}})_1 \quad xp2_{i2} := rp2_{i2} \cdot \cos(\theta_{p2_{i2}}) \quad yp2_{i2} := rp2_{i2} \cdot \sin(\theta_{p2_{i2}})$$

Torques e cortantes resistentes da seção segundo o modelo 2:

$$Tn_{br_M2} := yp2 \cdot T_{max_M2}$$

$$Vn_{br_M2} := xp2 \cdot V_{max_M2}$$

- Gráfico adimensional Torque - Cortante:



$$\text{MODELO 1: } \theta = 45^\circ \quad \theta_{11} := \frac{\pi}{4}$$

$$Ae1(c01) := (b - 2 \cdot c01) \cdot (h - 2 \cdot c01) \quad : \text{área cercada pelo fluxo de cisalhamento (m}^2\text{)}$$

$$ue1(c01) := P_{cp} - 8 \cdot c01 \quad : \text{perímetro do fluxo de cisalhamento (m)}$$

Cálculo dos esforços:

$$V_{max_M1} := 0.54 \cdot \alpha_v 2 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta_{11}) \cdot \cos(\theta_{11}) = 1.964 \quad : \text{Cortante máximo (MN)}$$

$$T_{max_M1} := 0.5 \cdot \alpha_v 2 \cdot f_{ck} \cdot A_{e_{max}} \cdot h_{e_{max}} \cdot \sin(2 \cdot \theta_{11}) = 0.252 \quad : \text{Torque máximo (MN.m)}$$

$$V_{u_M1}(r1, \alpha 1) := r1 \cdot \cos(\alpha 1) \cdot V_{max_M1} \quad : \text{máximo esforço cortante na seção em análise (MN)}$$

$$T_{u_M1}(r1, \alpha 1) := r1 \cdot \sin(\alpha 1) \cdot T_{max_M1} \quad : \text{máximo momento torsor na seção em análise (MN.m)}$$

$$VR_{d2_M1} := 0.54 \cdot \alpha_v 2 \cdot f_{ck} \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta_{11}) \cdot \cos(\theta_{11}) \quad : \text{Resistência de cálculo relacionada à Ruína das diagonais comprimidas}$$

$$V_{sw_M1} := A_v \cdot f_{ty} \cdot 0.9 \cdot \frac{d \cdot \cot(\theta_{11})}{s_p} \quad : \text{resistência ao cortante devido aos estribos}$$

$$\begin{aligned}
 VRd3_M1(r1, \alpha1) &:= V_{sw_M1} + V_{c0} && : \text{ Resistência de cálculo ao cortante,} \\
 &&& \text{relativa à Ruína por tração diagonal} \\
 TRd2_M1(he1, c01) &:= 0.5 \cdot \alpha_v2 \cdot f_{ck} \cdot A_{e1}(c01) \cdot he1 \cdot \sin(2 \cdot \theta11) && : \text{ Limite da Resistência ao torque} \\
 &&& \text{das diagonais comprimidas} \\
 TRd3_M1(c01) &:= A_t \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{A_{e1}(c01) \cdot \cot(\theta11)}{s_p} && : \text{ Limite da Resistência} \\
 &&& \text{ao torque dos estribos} \\
 TRd4_M1(c01) &:= A_{sL} \cdot 2 \cdot A_{e1}(c01) \cdot \frac{f_{ly} \cdot \tan(\theta11)}{u_{e1}(c01)} && : \text{ Limite da Resistência ao torque} \\
 &&& \text{das barras longitudinais}
 \end{aligned}$$

- Otimização segundo a NBR-6118 - 2014 do MODELO 1:

$$r1 := 0.5 \quad Av_{sn1} := 0 \quad he1 := 0.1 \quad c01 := 0.05$$

$$f1(r1, he1, c01, Av_{sn1}, \alpha1) := r1$$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$he_{min} - tol \leq he1 \leq he_{max}$$

$$c0_{min} - tol \leq c01 \leq c0_{max}$$

$$0.5 \cdot he1 \leq c01$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$V_u_M1(r1, \alpha1) \leq VRd2_M1$$

$$V_u_M1(r1, \alpha1) \leq VRd3_M1(r1, \alpha1)$$

$$T_u_M1(r1, \alpha1) \leq TRd2_M1(he1, c01)$$

$$T_u_M1(r1, \alpha1) \leq TRd3_M1(c01)$$

$$T_u_M1(r1, \alpha1) \leq TRd4_M1(c01)$$

Armação de cortante necessária por unidade de espaçamento:

$$\left[\frac{(V_u_M1(r1, \alpha1) - V_{c0})}{f_{ty} \cdot 0.9 \cdot d \cdot \cot(\theta11)} \right] \leq Av_{sn1}$$

$$0 \leq Av_{sn1}$$

Armação transversal devido à combinação torção - cortante:

$$Av_{sn1} + \frac{T_u_M1(r1, \alpha1)}{A_{e1}(c01) \cdot f_{ty} \cdot \cot(\theta11)} \leq \frac{A_v}{s_p}$$

Esmagamento das bielas (17.7.2.2):

$$\left(\frac{Vu_M1(r1, \alpha1)}{VRd2_M1} \right) + \left(\frac{Tu_M1(r1, \alpha1)}{TRd2_M1(he1, c01)} \right) \leq 1$$

Verificação do banzo tracionado:

$$\left(\frac{Tu_M1(r1, \alpha1) \cdot ue1(c01)}{4Ae1(c01)} \right) + \left(\frac{Vu_M1(r1, \alpha1)}{2} \right) \leq Fs$$

$$rs1(\alpha1) := \text{Maximize}(f1, r1, he1, c01, Avsn1)$$

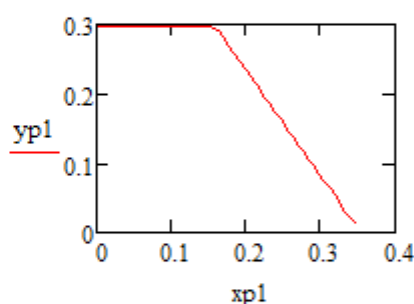
$$rp1_{i2} := rs1(\theta p2_{i2})_1 \quad xp1_{i2} := rp1_{i2} \cdot \cos(\theta p2_{i2}) \quad yp1_{i2} := rp1_{i2} \cdot \sin(\theta p2_{i2})$$

Torques e cortantes resistentes da seção do modelo 1:

$$Tnbr_M1 := yp1 \cdot Tmax_M1$$

$$Vnbr_M1 := xp1 \cdot Vmax_M1$$

- Gráfico adimensional Torque - Cortante:



$$\text{MODELO 2: } \theta = 30^\circ \quad \theta30 := \frac{\pi}{6}$$

$$Ae30(c030) := (b - 2 \cdot c030) \cdot (h - 2 \cdot c030) \quad : \text{área cercada pelo fluxo de cisalhamento (m}^2\text{)}$$

$$ue30(c030) := Pcp - 8 \cdot c030 \quad : \text{perímetro do fluxo de cisalhamento (m)}$$

Cálculo dos esforços:

$$Vmax_30 := 0.54 \cdot \alpha v2 \cdot fck \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta30) \cdot \cos(\theta30) = 1.701 \quad : \text{Cortante máximo (MN)}$$

$$Tmax_30 := 0.5 \cdot \alpha v2 \cdot fck \cdot Aemax \cdot hemax \cdot \sin(2 \cdot \theta30) = 0.219 \quad : \text{Torque máximo (MN.m)}$$

$$Vu_30(r30, \alpha30) := r30 \cdot \cos(\alpha30) \cdot Vmax_30 \quad : \text{máximo esforço cortante na seção em análise (MN)}$$

$$Tu_30(r30, \alpha30) := r30 \cdot \sin(\alpha30) \cdot Tmax_30 \quad : \text{máximo momento torsor na seção em análise (MN.m)}$$

$$VRd2_30 := 0.54 \cdot \alpha v2 \cdot fck \cdot b \cdot d \cdot \sin(\theta30) \cdot \cos(\theta30) \quad : \text{Resistência de cálculo relacionada à Ruína das diagonais comprimidas}$$

$$V_{sw_30} := A_v \cdot f_{ty} \cdot 0.9 \cdot \frac{d \cdot \cot(\theta_{30})}{s_p} \quad : \text{resistência ao cortante devido aos estribos}$$

Parcela resistente ao esforço cortante devido ao concreto:

$$V_{c1_30}(r_{30}, \alpha_{30}) := \begin{cases} v_{c30} \leftarrow V_{c0} & \text{if } V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq V_{c0} \\ v_{c30} \leftarrow 0 & \text{if } V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \geq V_{Rd2_30} \\ v_{c30} \leftarrow V_{c0} \cdot \left(1 - \frac{V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) - V_{c0}}{V_{Rd2_30} - V_{c0}} \right) & \text{if } V_{c0} < V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) < V_{Rd2_30} \\ v_{c30} & \end{cases}$$

$$V_{Rd3_30}(r_{30}, \alpha_{30}) := V_{c1_30}(r_{30}, \alpha_{30}) + V_{sw_30} \quad : \text{Resistência de cálculo ao cortante, relativa à Ruína por tração diagonal}$$

$$T_{Rd2_30}(h_{e30}, c_{030}) := 0.5 \cdot \alpha_v \cdot 2 \cdot f_{ck} \cdot A_{e30}(c_{030}) \cdot h_{e30} \cdot \sin(2 \cdot \theta_{30}) \quad : \text{Limite da Resistência ao torque das diagonais comprimidas}$$

$$T_{Rd3_30}(c_{030}) := A_t \cdot f_{ty} \cdot 2 \cdot \frac{A_{e30}(c_{030}) \cdot \cot(\theta_{30})}{s_p} \quad : \text{Limite da Resistência ao torque dos estribos}$$

$$T_{Rd4_30}(c_{030}) := A_{sL} \cdot 2 \cdot A_{e30}(c_{030}) \cdot \frac{f_{ly} \cdot \tan(\theta_{30})}{u_{e30}(c_{030})} \quad : \text{Limite da Resistência ao torque das barras longitudinais}$$

- Otimização segundo NBR6118 do MODELO 2 ($\theta = 30^\circ$):

$$r_{30} := 0.5 \quad A_{vsn30} := 0 \quad h_{e30} := 0.1 \quad c_{030} := 0.05$$

$$f_{30}(r_{30}, h_{e30}, c_{030}, A_{vsn30}, \alpha_{30}) := r_{30}$$

Given

Limites do ângulo de fissuração e da espessura de parede da seção transversal:

$$h_{emin} - tol \leq h_{e30} \leq h_{emax}$$

$$c_{0min} - tol \leq c_{030} \leq c_{0max}$$

$$0.5 \cdot h_{e30} \leq c_{030}$$

Limites dos esforços na seção transversal:

$$V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq V_{Rd2_30}$$

$$V_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq V_{Rd3_30}(r_{30}, \alpha_{30})$$

$$T_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq T_{Rd2_30}(h_{e30}, c_{030})$$

$$T_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq T_{Rd3_30}(c_{030})$$

$$T_{u_30}(r_{30}, \alpha_{30}) \leq T_{Rd4_30}(c_{030})$$

Armação de cortante necessária por unidade de espaçamento:

$$\left[\frac{(V_{u_30}(r30, \alpha30) - V_{c1_30}(r30, \alpha30))}{f_{ty} \cdot 0.9 \cdot d \cdot \cot(\theta30)} \right] \leq A_{vsn30}$$

$$0 \leq A_{vsn30}$$

Armação transversal devido à combinação torção - cortante:

$$A_{vsn30} + \frac{T_{u_30}(r30, \alpha30)}{A_{e30}(c030) \cdot f_{ty} \cdot \cot(\theta30)} \leq \frac{A_v}{s_p}$$

Esmagamento das bielas (17.7.2.2):

$$\left(\frac{V_{u_30}(r30, \alpha30)}{V_{Rd2_30}} \right) + \left(\frac{T_{u_30}(r30, \alpha30)}{T_{Rd2_30}(h_{e30}, c030)} \right) \leq 1$$

Verificação do banzo tracionado:

$$\cot(\theta30) \cdot \left[\left(\frac{T_{u_30}(r30, \alpha30) \cdot u_{e30}(c030)}{4 \cdot A_{e30}(c030)} \right) + \left(\frac{V_{u_30}(r30, \alpha30)}{2} \right) \right] \leq F_s$$

$$rs30(\alpha30) := \text{Maximize}(f30, r30, h_{e30}, c030, A_{vsn30})$$

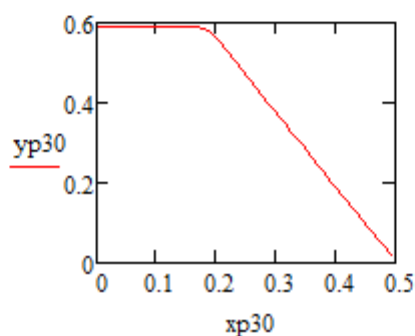
$$rp30_{i2} := rs30(\theta_{p2_{i2}})_1 \quad xp30_{i2} := rp30_{i2} \cdot \cos(\theta_{p2_{i2}}) \quad yp30_{i2} := rp30_{i2} \cdot \sin(\theta_{p2_{i2}})$$

Torques e cortantes resistentes da seção do modelo 2 ($\theta = 30^\circ$):

$$T_{nbr_30} := yp30 \cdot T_{max_30}$$

$$V_{nbr_30} := xp30 \cdot V_{max_30}$$

- Gráfico adimensional Torque - Cortante:



Klus (1968) – Dados de entrada**ITERAÇÃO TORQUE - CORTANTE PELA OTIMIZAÇÃO**

- Dados de entrada do experimento Klus (1968):

$f_{ty} := 429$	: Tensão de escoamento da armadura longitudinal (MPa)
$f_{ty} := 265$	: Tensão de escoamento da armadura transversal (MPa)
$f_{ck} := 21.5$	: Resistência característica do concreto comprimido (MPa)
$E_s := 200000$	: Módulo de elasticidade dos aços segundo AASHTO (MPa)
$E_{sb} := 210000$	: Módulo de elasticidade dos aços segundo a NBR 6118 (MPa)
$h := 0.30$	: Altura da seção (m)
$b := 0.20$	: Base da seção (m)
$x_1 := 0.152$	: Base dos estribos (m)
$y_1 := 0.252$	: Altura dos estribos (m)
$f_{it} := 0.008$	: Diâmetro da armadura transversal (m)
$f_{il} := 0.018$	: Diâmetro da armadura longitudinal (m)
$sp := 0.10$	: Espaçamento da armadura transversal (m)
$cob := 0.02$	: Cobrimento (m)
$d := 0.26$	: Altura útil da seção (m)
$A_v := 2.50 \cdot 10^{-6}$	: Área da armadura de cortante existente na seção (m ²)
$A_t := 50 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma perna de estribo (m ²)
$A_l := 254.5 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma barra da armadura longitudinal dos cantos (m ²)
$A_{lm} := 380 \cdot 10^{-6}$	: Área de uma barra da armadura longitudinal do meio (m ²)
$c_1 := 0.04$	: Distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face superior do elemento
$A_{s1} := 2 \cdot A_l + A_{lm}$	: Área de armadura na zona de flexão (m ²)
$A_{s2} := 2 \cdot A_l + A_{lm}$	: Área de armadura na zona de compressão (m ²)