UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Júlio César Silva Aleixo

DINÂMICA DE VÓRTICES EM REGIÕES BIDIMENSIONAIS

Recife

2018

Júlio César Silva Aleixo

DINÂMICA DE VÓRTICES EM REGIÕES BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Área de Concentração: Mecânica Celeste
Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho

Recife
2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A366d Aleixo, Júlio César Silva
Dinâmica de vórtices em regiões bidimensionais / Júlio César Silva Aleixo. – 2018.
55 f.: il., fig.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Mecânica celeste. 3. Dinâmica de vórtices. I. Castilho, César Augusto Rodrigues (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-108

JÚLIO CÉSAR SILVA ALEIXO

DINÂMICA DE VÓRTICES EM REGIÕES BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 27/07/2018

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Deus.

Para minha mãe e padastro.

Aos meus avós (In Memoriam) e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, principalmente a minha mãe, por sempre estar me apoiando e pela preocupação de sempre, ao meu avô Alcedo (In Memoriam), pelas conversas engraçadas e apoio em todos os sentidos, a minha avó Nazareth (In Memoriam), uma grande guerreira que me apoiou num momento bem delicado da minha vida, sem contar que a mesma, contribuiu bastante para que eu pudesse ingressar no mestrado, e agradeço também ao meu padrasto e irmãos.

Gostaria também de agradecer ao meu orientador, professor César Castilho, pela confiança, onde antes de ingressar no mestrado, o mesmo tem depositado em mim, pela paciência e disponibilidade constante, pelas conversas de incentivo, pela contribuição acadêmica (pois, desde que passei a ser seu orientando, melhorei bastante em alguns aspectos como matemático) e também por se mostrar amigo quando se fez necessário.

Ao meu grande amigo e ex-professor de graduação pela UNICAP, professor Vicente Francisco, carinhosamente chamado por muitos de "Chumbinho". O mesmo, é uma grande referência para mim, como matemático e também como pessoa, é como as vezes costumo dizer: "meu pai adotivo". Obrigado por ter acreditado em mim desde o início da graduação, grato pelo incentivo, pelas orientações, conselhos e até mesmo no mestrado, por se dispor a estudar comigo sob forma de discussão em algumas disciplinas, saiba que isto tem me acrescentado muito academicamente e espero continuarmos com o projeto também no doutorado.

Ao amigo Josué, pela ajuda desde o início do mestrado, pelas conversas produtivas com relação a vários temas, pelas tentativas de me acalmar sempre que me encontrava nervoso. E também pelas conversas jogadas fora na mesa do bar *Engenho beer*.

Ao amigo João Gondim, por toda sua ajuda e amizade, o admiro bastante como matemático, é um profissional espetacular, tenho orgulho de ser seu "irmão"acadêmico. Agradeço a amiga Thaís Resende pelo seu companheirismo, parceira de luta desde o início do mestrado, tenho aprendido muito com ela através das discussões "calorosas"repletas de aprendizagem. Aos amigos Serginei Liberato e Karine Santos pela amizade e pelos "rolês"que esvaziavam nossas mentes para poder encarar mais uma semana de estudos. A Islanita Cecília, sempre atenciosa, amiga, e disposta a ouvir meus desabafos. E ao grupo *capivaras* por muitas vezes me fazer sorrir em momentos adversos.

Quero também deixar minha gratidão aos professores Henrique Vitório e Tony Sousa pelas disciplinas ministradas, pois foram nelas que obtive um amadurecimento acadêmico considerável. Também em especial ao prof. Francisco Brito pela contribuição nos seminários referente a dissertação, como dito por muitos: "a nossa enciclopédia de análise complexa".

E por fim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nessa dissertação, estudaremos a dinâmica de vórtices em fluidos bidimensionais ideais, regiões planares não simplesmente conexas e na superfície de uma esfera através do Hamiltoniano definido em cada uma dessas regiões, obtendo, assim, as equações de Kirchhoff, as quais descrevem o movimento dos vórtices pontuais. Inicialmente, é considerado o caso de dois vórtices pontuais no plano e depois generalizamos isto para o caso de N- vórtices, onde N é qualquer número natural. A não auto interação dos vórtices é destacada nesse trabalho. Em seguida, é estudada a dinâmica de vórtices pontuais em domínios não simplesmente conexos ainda no plano, e para isto, será utilizada a teoria de Kirchhoff-Routh na obtenção de duas funções especiais, a saber, a função Hidrodinâmica de Green e a função Prime de Schottky-Klein. Por fim, estendemos os dois últimos casos para a superfície da esfera. Para isto, será utilizada toda a teoria feita para o plano e com isto o Hamiltoniano definido numa capa esférica é exibido.

Palavras-chave: Dinâmica de vórtices. Hamiltoniano. Kirchhoff-Routh. Green. Schottky-Klein. Domínios não simplesmente conexos.

ABSTRACT

In this dissertation, we study the point vortex dynamics in two dimensional ideal fluids, non-simply connected planar regions and on a spherical surface, by means of the Hamiltonian defined in each of these regions in orther to obtain the Kirchhoff equations, which describe the point vortex movement. Initially, it is considered the case of two point vortices in the plane and then we generalize this to the case of N-vortices, where N is any natural number. The non-self-vortex interaction is highlighted in this work. Next, we study the point vortex dynamics in non-simply connected domains in the plane by means of the Kirchhoff-Routh theory, with which we get two special functions: Green's Hydrodynamics function and Schottky-Klein's Prime function. At last, we extend the last two cases to the surface of a sphere. For this, all the theory made for the plane will be used and with this the Hamiltonian defined in a spherical shell is exhibited.

Keywords: Vortex Dynamics. Hamiltonian. Kirchhoff-Routh. Green. Schottky-Klein. Domains not simply connected.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 DINÂMICA DE VÓRTICES EM FLUIDOS BIDIMENSIONAIS 12

2.1 Alguns conceitos básicos 12

2.2 Fluido ideal 14

2.3 Dinâmica de vórtices pontuais em regiões simplesmente conexas . 16

2.4 Dinâmica de vórtices pontuais 21

3 DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS EM DOMÍNIOS NÃO SIMPLESMENTE CONEXOS 29

3.1 A Função Hidrodinâmica de Green 29

3.2 Construção de G em domínios circulares 33

3.3 O grupo de Schottky 33

3.4 A Função Prime de Schottky - Klein 36

3.5 Solução Explícita para G 40

4 DINÂMICA DE VÓRTICES NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA 45

4.1 Alguns conceitos importantes 45

4.2 A teoria de Kirchhoff-Routh numa superfície esférica 49

REFERÊNCIAS 54

1 INTRODUÇÃO

Na natureza, podemos encontrar vários fenômenos que podem ser modelados por vórtices. Vórtices, são movimentos espirais ao redor de um centro de rotação; exemplo disto são os tornados, redemoinhos e turbilhões.

A teoria da dinâmica de vórtices, apesar de ser uma área cuja essência é teórica, a mesma pode ser aplicada a diversas áreas, como por exemplo, na meteorologia.

A dinâmica de vórtices é uma área da mecânica dos fluidos. Aqui, estaremos sempre considerando fluidos bidimensionais, ideais e incompressíveis. Para se ter uma boa compreensão sobre essa teoria, é necessário entender o conceito de vorticidade, o qual será apresentado neste trabalho. A princípio, o campo de vorticidade está relacionado com um campo de velocidade. Tal campo, nos dá informação sobre a rotação das partículas do fluido. A dinâmica de vórtices estuda, então, o movimento dos vórtices no fluido. Ao longo deste trabalho, estaremos apenas interessados em vórtices pontuais, seja no plano ou na esfera.

O estudo sobre a dinâmica de vórtices pontuais teve início em 1867, o qual foi introduzido por Helmholtz, quando o mesmo publicou [14]. Nesse artigo, o autor não apenas estabelece a base para a teoria como também chega a estudar o movimento de vórtices pontuais, embora a terminologia usada seja diferente da atual.

O artigo de Helmholtz originou uma série de temas sobre o movimento de vórtices, onde posteriormente, a dinâmica passa a ser descrita como um sistema Hamiltoniano por Kirchhoff em 1883 [15].

Em 1877, o matemático suíço Gröbli contribuiu para avanços consideráveis na área ao publicar sua tese [16]. Nessa tese, Gröbli destaca a condição de integrabilidade do movimento de três vórtices no plano. Mesmo com a relevância desse trabalho, o suíço é menosprezado. Após altos e baixos que marcaram a história da dinâmica de vórtices, os resultados sobre três

vórtices no plano voltaram a ser explorados na década de 70 por Aref [17] e Novikov [18].

A dinâmica de vórtices na esfera teve uma história similar. No século XX, Zermelo contribuiu bastante para a teoria da dinâmica de vórtices na esfera. Uma de suas contribuições, foi a prova da integrabilidade de três vórtices nessa superfície . Seus resultados ficaram no esquecimento por muito tempo, até que assim como no caso planar, tais resultados voltaram a ser estudados também na década de 70.

Durante muito tempo, o estudo sobre vórtices se resumia aos casos do plano e da esfera, até que Kimura mudou o cenário, quando generalizou a teoria. Em seu artigo [19] publicado em 1999, ele trabalha as equações de movimento de vórtices pontuais na esfera e no plano hiperbólico.

Atualmente, um dos problemas que atrai a atenção dos pesquisadores da área está relacionado com a questão da integrabilidade dos vórtices. Por exemplo, já foi provado que o movimento de até três vórtices no plano e na esfera é integrável, o que não se tem tanta certeza quando nos referimos ao plano hiperbólico.

Nesta dissertação, estudaremos a dinâmica de vórtices pontuais em regiões bidimensionais; sendo inicialmente estudada em regiões simplesmente conexas no plano e posteriormente em regiões não simplesmente conexas no plano e na esfera.

O texto está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo, são apresentados conceitos e resultados básicos que podem ser encontrados em qualquer livro-texto referente a mecânica dos fluidos. Alguns desses conceitos também são abordados no cálculo diferencial, como por exemplo: *rotacional, divergente* e *gradiente*. E também, apresentamos o conceito de *hamiltoniano*, que será muito utilizado no texto.

Posteriormente, no segundo capítulo, faremos um estudo sobre a dinâmica de vórtices pontuais em domínios não simplesmente conexos do plano, onde tomamos como principal referência o artigo [5]. Ainda no Capítulo 2, serão apresentadas as funções *Hidrodinâmica de Green* e *função Prime de Schottky-Klein*, que desempenham um papel fundamental na busca pelo Hamiltoniano definido em regiões desse tipo.

Por fim, no terceiro capítulo, cuja principal referência foi [12], iremos adaptar a teoria desenvolvida no segundo capítulo para a superfície de uma esfera. Em seguida, exibiremos o Hamiltoniano para a dinâmica de vórtices pontuais sobre uma capa esférica.

2 DINÂMICA DE VÓRTICES EM FLUIDOS BIDIMENSIONAIS

Neste capítulo iremos abordar a teoria básica que será usada no decorrer deste trabalho que pode ser encontrado em qualquer livro-texto referente a mecânica dos fluidos, cujo objetivo principal é fornecer ferramentas básicas a fim de facilitar (ou tornar menos árduo) o desenvolvimento de todo o estudo deste trabalho.

Aqui, consideramos os fluidos como sendo bidimensionais e ideais (veremos no decorrer do trabalho o que isto significa). Também veremos alguns conceitos importantes para a teoria a ser desenvolvida, tais como: *função potencial, potencial complexo, streamlines, campo de vorticidade*, entre outros.

Por fim, apresentaremos um dos conceitos que será bastante utilizado em nosso estudo, o de *Hamiltoniano* e, para isso, será feita toda uma construção de maneira explícita.

2.1 Alguns conceitos básicos

Para descrever o campo de velocidades de um fluido F em qualquer ponto $\mathbf{x}$ pertencente a um espaço X e em qualquer tempo t, utiliza-se a seguinte expressão

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \tag{2.1}$$

Considerando o espaço $\mathbb{R}^3$ e denotando as três componentes de $\mathbf{u}$ por u, v e w, escrevemos

$$\mathbf{u} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}.$$

Definição 1. *Um campo de velocidades u é dito estacionário quando* $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = 0$ *para todo tempo t. Isto significa que o tempo está fixado e que o fluxo depende apenas do ponto $\boldsymbol{x}$.*

Um campo de velocidades *planar* é da seguinte forma

$$\mathbf{u} = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j} + 0\vec{k},$$

que simplesmente podemos representar por

$$\mathbf{u} = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j}. \tag{2.2}$$

Aqui, estaremos sempre considerando o campo de velocidades planar *estacionário*, ou seja, campos que apresentam a seguinte forma

$$\mathbf{u} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}. \tag{2.3}$$

Agora, iremos introduzir um conceito que será bastante útil no decorrer deste trabalho, o conceito de *streamline*.

Suponha que o campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v)$ está definido em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ e que em um dado tempo t_0, o campo de vetores $\mathbf{u}$ é contínuo e suave para todo $(x, y) \in X$. Da teoria de equações diferenciais ordinárias, temos que associadas ao campo $\mathbf{u}$ estão as denominadas *curvas integrais* que são curvas tangentes aos vetores do campo em todos os pontos, isto é, uma curva $\alpha : [a, b] \to X$ é curva integral do campo de vetores $\mathbf{u}$ se $\dfrac{d}{dt}\alpha(t) = \mathbf{u}(\alpha(t))$ para todo tempo t.

Sendo $(x(s), y(s))$ uma parametrização da curva integral α, o vetor tangente a curva é dado por $\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right)$ que deve ser paralelo ao campo vetorial $(u(x(s), y(s)), v(x(s), y(s)))$ pela definição dada no parágrafo anterior. Isto pode ser escrito da seguinte maneira

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)} = ds. \tag{2.4}$$

Este sistema de equações diferenciais dado em (2.4) pode ser integrado para uma condição inicial dada em $s = 0$ pelo menos localmente. E disto, juntamente com o *Teorema da Existência e Unicidade* também da teoria de equações diferenciais ordinárias, a curva α é

determinada de maneira única no ponto $P = (x(0), y(0))$. A curva α obtida deste modo é dita uma *streamline*.

2.2 Fluido ideal

Nesta seção definimos um *fluido ideal* como um fluido que apresenta as seguintes propriedades:

i) É incompressível, no sentido de que não há alteração no volume quando submetido a uma pressão exterior.

ii) A densidade ρ (isto é, a massa por unidade de volume) é constante.

iii) A *viscosidade* é nula.

Sejam $\mathbf{u}$ o campo de velocidades do escoamento de um fluido, C uma curva fechada no fluido com campo normal unitário $\mathbf{n}$ e A um domínio simplesmente conexo tal que $C = \partial A$. A componente do campo $\mathbf{u}$ na direção normal é dada por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (Ver [1]). Assim, o fluxo total através de C é dado por

$$\int_C (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, dl,$$

que deve ser zero para um fluido incompressível. Se $\mathbf{u} = (u, v)$ e $\mathbf{n} = (s, t)$ então

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, dl, \\ &= \int_C (u, v) \cdot (s, t)\, dl, \\ &= \int_C (us + vt)\, dl, \\ &= \int_C (-v, u) \cdot (-t, s)\, dl, \end{aligned}$$

Como, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{n}$ são ortogonais, temos

$$\int_C (-v, u) \cdot (-t, s)\, dl = \int_C (-v, u)\tilde{\mathbf{t}} dl$$

onde $\vec{t}$ é um vetor do campo de velocidades u.

Utilizando o teorema de Green, obtemos

$$\int_C (-v, u)\vec{t}dl = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA.$$

Assim,

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{u}\, dA = 0, \tag{2.5}$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{u}$ é o divergente de $\mathbf{u}$.

Da arbitrariedade de C, segue que a equação (2.5) é válida para qualquer curva no fluido. E disto, cabe a seguinte pergunta: É possível que se tenha (2.5) com $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$?

Suponha sem perda de generalidade que o divergente $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ em algum ponto p do fluido. Como o campo $\mathbf{u}$ é contínuo, teríamos que $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$ em alguma vizinhança V de p. Logo,

$$\iint_{V \cap A} \nabla \cdot \mathbf{u}\, dA > 0$$

o que gera uma contradição com (2.5). Mesmo argumento é válido se supormos que $\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$. Deste modo, concluímos que (2.5) acontece se, e somente se,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.6}$$

em todo o fluido.

Definição 2. *Seja $\boldsymbol{u}$ um campo de velocidades de um fluido F. Dizemos que F é incompressível se $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$.*

Definição 3. *Seja $\boldsymbol{u}$ um campo de velocidades de um fluido F. Dizemos que F é irrotacional se $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$, onde $\nabla \times \boldsymbol{u}$ é o rotacional de $\boldsymbol{u}$.*

Definição 4. *Seja $\boldsymbol{u}$ um campo de velocidades de um fluido F. Um campo $\boldsymbol{\omega}$ é dito campo de vorticidade de $\boldsymbol{u}$ se $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$.*

O conceito de vorticidade será muito importante no decorrer deste trabalho. Para um fluido irrotacional, segue por definição que $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Aqui estamos considerando a vorticidade para fluidos bidimensionais. Desse modo,

$$\mathbf{u} = u(x,y,t)\vec{i} + v(x,y,t)\vec{j}$$

e, $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$, onde

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.7}$$

Com efeito, por definição de vorticidade, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u(x,y,t) & v(x,y,t) & 0 \end{vmatrix},$$

no que resulta em $\boldsymbol{\omega} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$.

2.3 Dinâmica de vórtices pontuais em regiões simplesmente conexas

Definição 5. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $H : X \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O campo Hamiltoniano de H é o campo vetorial que associa a um ponto $(x,y) \in X$, o campo*

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x,y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right).$$

*H é dita função **Hamiltoniana**.*

Teorema 1. *Seja $\boldsymbol{u}$ um campo de velocidades definido em um domínio aberto simplesmente conexo D. Se $\boldsymbol{u}$ satisfaz o sistema*

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{u} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{cases}$$

então $\boldsymbol{u}$ é um campo Hamiltoniano.

Para demonstrarmos o teorema, precisamos de um resultado preliminar dado a seguir cuja demonstração é baseada em [2].

Proposição 1. *Se* $\boldsymbol{u} = (u, v)$ *é um campo vetorial irrotacional definido em um domínio aberto simplesmente conexo* D *então existe uma função real* $\Phi : D \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\boldsymbol{u} = grad\, \Phi.$$

Dem:

Se $\mathbf{u}$ é irrotacional, segue por definição que

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0.$$

Assim, do teorema de Green, segue que

$$\int_C \mathbf{u} \cdot dl = \iint_D (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \vec{k} dA = 0 \tag{1}$$

Tomando dois pontos na curva orientada e fechada C, temos que C fica dividida em duas partes, as quais iremos denotar por C_1 (O a P) e $C - C_1$ (P a O). Seja C_2 a curva $C - C_1$ com orientação reversa ou simplesmente $C_1 - C$. Então temos para a equação (1)

$$\int_{C_1} \mathbf{u}\, dl + \int_{C-C_1} \mathbf{u}\, dl = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \mathbf{u}\, dl - \int_{C_2} \mathbf{u}\, dl = 0 \tag{2}$$

Sendo assim, podemos escrever (2) da seguinte maneira:

$$\int_{O(C_1)}^{P} \mathbf{u} \cdot dl = \int_{O(C_2)}^{P} \mathbf{u} \cdot dl := \Phi(O, P) \tag{3}$$

A curva fechada C foi escolhida arbitrariamente dentro do domínio no qual o campo é irrotacional.

Deste modo, em (3), o caminho integral de O a P pode ser tomado arbitrariamente em D, e a integral é considerada como função apenas dos pontos finais O e P que é definida pela função $\Phi(O, P)$ em (3).

Fixando o ponto O, tem-se que Φ depende apenas de P. Assim, escrevendo P como $P = \mathbf{x} = (x, y)$, obtemos a função

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_O^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot dl$$

Calculando sua derivada, tem-se

$$d\Phi = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = udx + vdy$$

onde $\mathbf{u} = (u, v)$ e $d\mathbf{x} = (dx, dy)$.

Em outras palavras,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

ou seja,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ e } v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

E com isto, provamos o que queríamos.

□

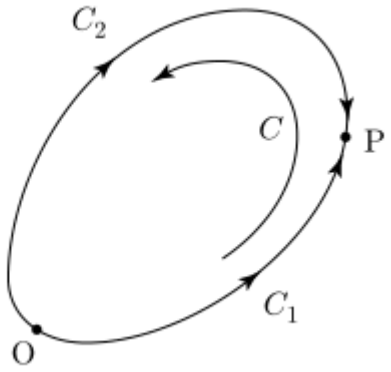

Figura 2.1: Curvas C_1 e C_2.

Demonstremos agora o Teorema.

Dem:

A primeira equação do sistema dada por $\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$ nos permite utilizar a Proposição 1.

Uma condição suficiente para termos

$$div\ \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

é a existência de uma função de classe C^2 (e portanto diferenciável), $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ e } v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{2.8}$$

As curvas de nível da função Ψ são as curvas integrais do campo $\mathbf{u}$. De fato, considere uma parametrização

$$\Psi(t) = (x(t), y(t))$$

de uma curva obtida de $\Psi(x, y) = c$.

Derivando a curva parametrizada, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \dot{y} \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \dot{y} \\ &= \mathbf{u} \cdot (\dot{y}, -\dot{x}) \end{aligned}$$

onde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$. As duas últimas igualdades se dão devido a Proposição 1.

A igualdade acima nos diz que $\mathbf{u}$ é tangente a curva $\Psi(x, y) = c$ uma vez que o vetor $(\dot{y}, -\dot{x})$ é normal a tal curva.

Da Proposição 1 e de (2.8) obtemos as equações de Cauchy-Riemann para as funções Ψ e Φ, ou seja,

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Com isto, a função

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad z = x + iy$$

é analítica.

A função f é dita *potencial complexo* enquanto que sua parte real e imaginária, isto é, Φ e Ψ são chamadas de *potencial de velocidade* e *função fluxo*, respectivamente.

A expressão

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = u - iv$$

é dita *velocidade complexa.* Perceba que a segunda igualdade acima ocorre devido a (2.9).

As curvas de nível da função potencial de velocidade Φ são chamadas de *família de curvas equipotenciais*, enquanto que as curvas de nível da função fluxo Ψ descrevem uma família de streamlines.

De fato,

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) = c \quad &\Rightarrow \quad 0 = d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy \\ &\Rightarrow \quad -vdx + udy = 0 \end{aligned}$$

e isto equivale a equação de uma streamline, como visto na Seção 2.1 deste capítulo.

Agora, seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ curva integral de $\mathbf{u}$, ou seja,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (u, v)$$

De (2.8) segue que

$$\begin{cases} \dot{x} = u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \\ \dot{y} = v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.10}$$

E isto nos mostra que o campo vetorial $\mathbf{u}$ é campo Hamiltoniano com função Hamiltoniana Ψ.

□

Vimos que dado o potencial complexo $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$, o potencial de velocidade Φ e a função fluxo Ψ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann dadas em (2.9) e o mesmo vale para qualquer função analítica, ou seja, as partes real e imaginária de uma função analítica também satisfazem (2.9). Disto segue que toda função analítica representa o potencial complexo de algum fluido bidimensional. Assim, como a parte imaginária de um potencial complexo define um Hamiltoniano para a dinâmica de um fluido ideal bidimensional, obtemos que toda função analítica induz um campo Hamiltoniano.

2.4 Dinâmica de vórtices pontuais

Definição 6. *Uma fonte (ou sumidouro) corresponde a um fluxo com o seguinte campo de velocidades:*

$$\boldsymbol{u} = \frac{m}{2\pi r}\tilde{r}, \tag{2.11}$$

onde $\tilde{r}$ é o vetor unitário na direção radial e m é a intensidade da fonte ($m > 0$) ou sumidouro ($m < 0$).

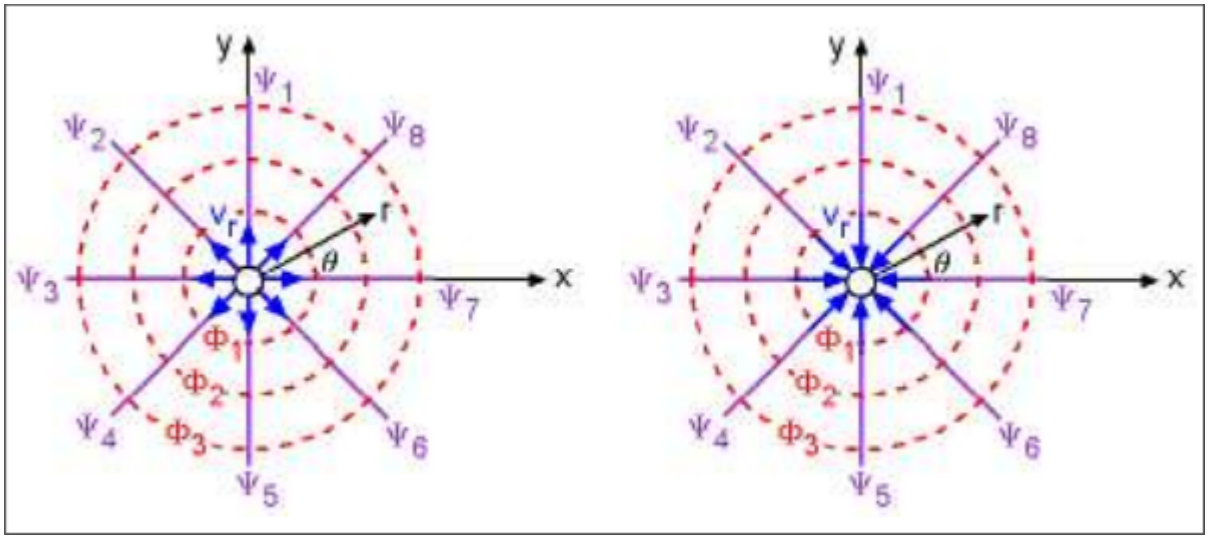

Figura 2.2: Streamlines (cor roxa) e linhas equipotenciais (cor vermelha) para uma fonte (lado esquerdo) ou um sumidouro (lado direito).

O campo de velocidades dado em (2.11) é obtido do seguinte potencial de velocidades (ver [4])

$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \log\ r \tag{2.12}$$

que é a parte real do potencial complexo

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} \log\ z. \tag{2.13}$$

De fato, basta usar a identidade para logaritmos complexos dada por $log\, z = log\, ||z|| + i\, arg(z)$ e tomar $r = ||z||$.

Se a fonte ou sumidouro ao invés de estar na origem estiver em um ponto z_0 qualquer do plano complexo, então o potencial complexo é da forma

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} \log(z - z_0). \tag{2.14}$$

Definição 7. *Se o campo de vorticidade estiver concentrado em um único ponto, dizemos que tal ponto é um vórtice pontual.*

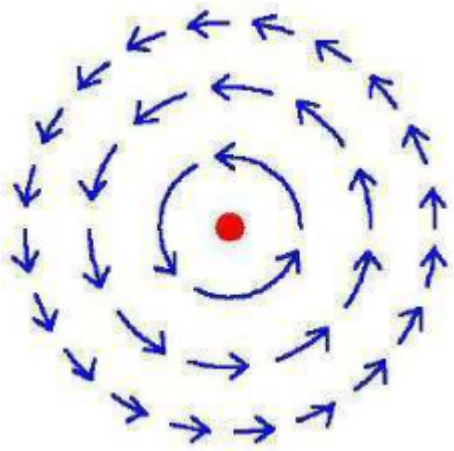

Figura 2.3: Esboço do campo de velocidades de um vórtice pontual com intensidade positiva (para intensidade negativa, o sentido do campo dar-se no sentido horário).

Vale ressaltar que dado um vórtice pontual, o mesmo induz um campo de velocidades e consequentemente um campo de vorticidade, assim para que haja uma maior clareza

das ideias a serem apresentadas, ao falar de potencial complexo para um vórtice pontual estaremos nos referindo ao potencial gerado pelo campo induzido por tal vórtice.

O campo de vorticidade para um vórtice pontual de intensidade Γ localizado em $r_0 = (x_0, y_0)$ é dado por

$$\boldsymbol{\omega}(x, y) = \Gamma\delta(r - r_0),$$

onde $\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_C \frac{\Gamma}{2\pi\mathbf{r}}\tilde{\theta} \cdot d\mathbf{x} = \Gamma$ com C curva fechada no fluido. (Γ é dita a circulação em torno da curva C). (Ver [2])

O campo de velocidade associado a um vórtice pontual é dado por

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi\mathbf{r}}\tilde{\theta},$$

onde $\mathbf{r} = ||r - r_0|| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ e $\tilde{\theta}$ é o vetor unitário na direção azimutal. As streamlines são círculos centrados no vórtice pontual.

O potencial complexo para um vórtice pontual pode ser gerado a partir do potencial complexo associado a uma fonte ou sumidouro simplesmente trocando os papéis de Φ e Ψ, isto é, se $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ é potencial complexo de uma fonte ou sumidouro então $g(z) = \Psi(x, y) + i\Phi(x, y)$ é potencial complexo de um vórtice pontual.

Considerando a discussão já feita nesta seção, as streamlines para um vórtice pontual são círculos em torno do mesmo, ou seja, as linhas equipotenciais para uma fonte são também círculos (ver Figura 2.3). Deste modo, a velocidade potencial de uma fonte desempenha o papel da função fluxo para o vórtice.

Essa troca pode ser obtida simplesmente multiplicando o potencial complexo em (2.14) por $\pm i$. A fim de manter a convenção de que a circulação de vórtices significa um fluxo no sentido anti-horário, escolhemos o sinal negativo e obtemos:

$$f(z) = -i\frac{m}{2\pi}log(z - z_0). \tag{2.15}$$

Alterando a nomenclatura de m para Γ para denotar o vórtice intensidade, obtemos

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}log(z - z_0). \tag{2.16}$$

As partes real e imaginária do potencial dado em (2.16) são

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad \text{e} \quad \Psi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} log\, r,$$

respectivamente, onde $\theta = arg(z - z_0)$ e $r = ||z - z_0||$.

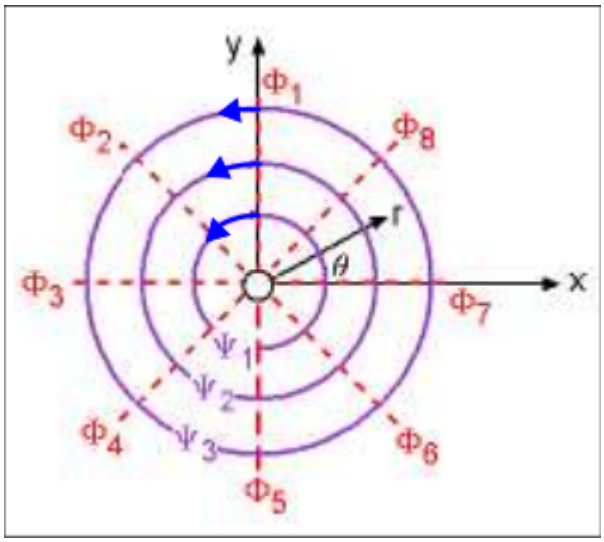

Figura 2.4: Streamlines (cor roxa) e linhas equipotenciais (cor vermelha) para um vórtice de circulação positva ($\Gamma > 0$).

Como comentado nesta seção, todo vórtice pontual induz um campo de velocidades no fluido. No plano, se consideramos apenas um vórtice pontual, não há movimento por parte do mesmo. Neste caso, dizemos que no plano não há auto interação. Mas, ao considerarmos dois vórtices no plano, fixado um, o campo de velocidades gerado pelo outro vórtice faz com que o vórtice fixado se movimente, havendo assim uma dinâmica de vórtices.

Para o caso de dois vórtices, o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2} \ln ||r_1 - r_2||^2 \tag{2.17}$$

onde $||r_1 - r_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, e Γ_1, Γ_2 são as intensidades dos vórtices r_1 e r_2 respectivamente, nos fornece as *equações de Kirchhoff* dadas por

$$\Gamma_j \dot{x_j} = \frac{\partial H}{\partial y_j} \quad \text{e} \quad \Gamma_j \dot{y_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{2.18}$$

com $j = 1, 2$.

Dado um ponto $z = (x, y)$ no plano, as equações de movimento induzido por N vórtices no ponto z são dadas através do Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j ln \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right], \tag{2.19}$$

cuja as equações de Kirchhoff são

$$\Gamma_j \dot{x_j} = \frac{\partial H}{\partial y_j} \quad \text{e} \quad \Gamma_j \dot{y_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{2.20}$$

com $j = 1, 2, ..., N$. Estas últimas equações desempenham um papel muito importante no estudo da dinâmica de vórtices pontuais. A fim de uma melhor compreensão, vejamos um exemplo.

Exemplo 1. *Resolveremos o caso de dois vórtices verificando que:*

i) Se $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ *então a solução para as equações de Kirchhoff são círculos.*

ii) Se $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ *então a solução para as equações de Kirchhoff são retas.*

i) Observe que o Hamiltoniano dado em (2.17) pode ser escrito da forma:

$$H = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2} \, ln \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right].$$

Sendo assim, as equações de movimento dos vórtices r_1 e r_2 são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dfrac{\Gamma_2}{||r_1 - r_2||^2}(y_1 - y_2) \\ \\ \dot{y_1} = -\dfrac{\Gamma_2}{||r_1 - r_2||^2}(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x_2} = \dfrac{\Gamma_1}{||r_1 - r_2||^2}(y_1 - y_2) \\ \\ \dot{y_2} = -\dfrac{\Gamma_1}{||r_1 - r_2||^2}(x_1 - x_2) \end{cases}. \tag{2.21}$$

Sendo $r_j(t) = (x_j(t), y_j(t)) = x_j(t) + iy_j(t)$, temos

$$\frac{dr_1}{dt} = i\frac{\Gamma_2}{||r_1 - r_2||^2}(r_2 - r_1) \quad \text{e} \quad \frac{dr_2}{dt} = i\frac{\Gamma_1}{||r_1 - r_2||^2}(r_1 - r_2). \quad (\Upsilon)$$

Agora, fazendo $D := ||r_1 - r_2||$, mostremos que D independe do tempo t. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d(D^2)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)\right), \\ &= 2\left[\dot{x_1}(x_1 - x_2) + \dot{x_2}(x_2 - x_1) + \dot{y_1}(y_1 - y_2) + \dot{y_2}(y_2 - y_1)\right].\end{aligned}$$

Substituindo (2.21) na última equação, obtemos que

$$\frac{d(D^2)}{dt} = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (independente de r_1 e r_2). Disto conclui-se que

$$||r_1 - r_2|| = c.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \dfrac{dr_1}{dt} = i\dfrac{\Gamma_2}{D^2}(r_2 - r_1) \\ \\ \dfrac{dr_2}{dt} = i\dfrac{\Gamma_1}{D^2}(r_1 - r_2) \end{cases} \tag{2.22}$$

que na forma matricial é dado por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dr_1}{dt} \\ \\ \dfrac{dr_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\dfrac{\Gamma_2}{D^2} & i\dfrac{\Gamma_2}{D^2} \\ \\ i\dfrac{\Gamma_1}{D^2} & -i\dfrac{\Gamma_1}{D^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

A matriz dos coeficientes do sistema anterior nos fornece o seguinte polinômio característico:

$$\left(-\frac{\Gamma_2}{D^2}i - \lambda\right)\left(-\frac{\Gamma_1}{D^2}i - \lambda\right) - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{D^4}i^2 = D^2\lambda\left(D^2\lambda + i(\Gamma_1 + \Gamma_2)\right),$$

que como soluções (que são os autovalores) tem-se $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\dfrac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{D^2}i$.

Para o autovalor $\lambda_1 = 0$ temos o autovetor associado $v_1 = (1, 1)$, e para o autovalor $\lambda_2 = -\dfrac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{D^2}i$, o autovetor associado é $v_2 = \left(-\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1}, 1\right)$.

Se $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ então a solução geral de (2.20) é dada por

$$R(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{0\cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(-\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D^2}i\right)t} \begin{pmatrix} -\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - \dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} c_2 e^{-i\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D^2}t} \\ c_1 + c_2 e^{-i\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D^2}t} \end{pmatrix}.$$

Para o valor inicial $t = 0$, obtemos

$$\begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - \dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Isto é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 - \dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} c_2 = r_1(0) \\ \\ c_1 + c_2 = r_2(0) \end{cases}$$

Daí, encontramos que $c_1 = \dfrac{\Gamma_1 r_1(0) + \Gamma_2 r_2(0)}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ e $c_2 = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}(r_2(0) - r_1(0))$ que substituindo em (2.21), nos mostra que as soluções para este caso são círculos.

ii) Neste caso, temos $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, assim, de (Υ) tem-se que $\dot{r_1} = \dot{r_2}$, e com isso, obtemos $r_2 - r_1 = c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\dot{r_1} = i\frac{\Gamma_2}{D^2}c.$$

Analogamente, mostra-se que $\dot{r_2}$ também é constante. Portanto, segue que r_1 e r_2 são retas.

3 DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS EM DOMÍNIOS NÃO SIMPLESMENTE CONEXOS

Foi estudado no capítulo anterior a dinâmica de vórtices pontuais no plano, mais especificamente em regiões simplesmente conexas.

Neste capítulo, estudaremos a dinâmica de vórtices pontuais em domínios mais complicados, no nosso caso em domínios não simplesmente conexos.

Para isso, será introduzida a função denominada *função Hidrodinâmica de Green.* A fim de conseguir uma fórmula analítica para esta função, será utilizada uma função especial chamada de *função Prime de Schottky-Klein* (Ver [5]).

Tais funções estão definidas em domínios circulares (não simplesmente conexos). Estes domínios são regiões planares com um número finito de *obstáculos* (círculos no interior da região). Veremos de forma precisa o que isto significa.

3.1 A Função Hidrodinâmica de Green

Introduziremos uma função especial denotada por $G(x, y; x_0, y_0)$, em relação a dois pontos (x, y) e (x_0, y_0) em um domínio do fluido D descrito a seguir. Consideramos três casos distintos do domínio D, a depender se D é limitado ou ilimitado.

Seja $M \geq 0$ um número inteiro. Suponhamos que D contenha $M + 1$ *obstáculos* e sejam tais obstáculos de D dados pelo conjunto $\{C_j; j = 0, ..., M\}$.

Se D é limitado então C_0 será tomado como a fronteira externa onde $\{C_k; k = 1, ..., M\}$

representa o conjunto dos M obstáculos no interior de C_0.

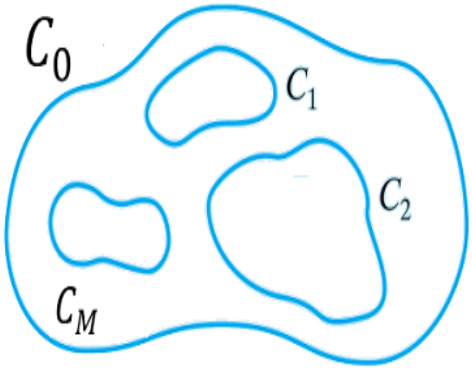

Figura 3.1: A fronteira externa C_0 juntamente com M obstáculos no seu interior.

No caso em que D é ilimitado, temos que sua fronteira se estende ao infinito. Assim, esta fronteira de comprimento infinito será denotado por C_0.

Definição 8. *A função Hidrodinâmica de Green é a função $G(x, y; x_0, y_0)$ satisfazendo as seguintes propriedades (ver [5]):*

i) A função

$$g(x, y; x_0; y_0) = -G(x, y; x_0, y_0) - \frac{1}{2\pi} log\, r_0,$$

é harmônica com respeito a (x, y) ao longo da região D incluindo o ponto (x_0, y_0). Aqui, r_0 é dado por

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

ii) Se $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ é a derivada normal de G numa curva, então

$$\begin{cases} G(x, y; x_0, y_0) = A_k, \quad em\ C_k,\ k = 1, ..., M, \\ \\ \int_{C_k} \dfrac{\partial G}{\partial n} ds = 0,\ k = 1, ..., M, \end{cases}$$

onde ds denota um elemento de arco e A_k é constante para $k = 1, ..., M$.

iii) E cumpre para os seguintes casos:

Caso 1: *Se D tem uma fronteira externa fechada C_0, então*

$$G(x, y; x_0, y_0) = 0 \ \ em \ C_0.$$

Caso 2: *Se D é ilimitado e se estende ao infinito em todas as direções, então, em um círculo com raio r_0 suficientemente grande, G se comporta da seguinte maneira:*

$$\begin{cases} G(x, y; x_0, y_0) = -\dfrac{1}{2\pi} log\, r_0 + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{r_0}\right), \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial s} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{r_0^2}\right), \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial n} = -\dfrac{1}{2\pi r_0} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{r_0^2}\right), \end{cases}$$

onde $\dfrac{\partial G}{\partial s}$ é a derivada tangencial ao longo do círculo.

Caso 3: *Se D é ilimitado e tem fronteiras que se estendem ao infinito, então G se comporta como segue:*

$$\begin{cases} G(x, y; x_0, y_0) = 0 \quad em \ C_0, \\ \\ G(x, y; x_0, y_0) = \mathcal{O}(1), \quad em\ um\ círculo\ de\ raio\ suficientemente\ grande\, r_0. \end{cases}$$

Agora, iremos estabelecer alguns lemas cuja demonstração encontra-se em [7] e com isto poderemos obter um teorema que será bastante útil no decorrer do capítulo.

Lema 1. *A função Hidrodinâmica de Green $G(x, y; x_0, y_0)$ existe de maneira única e satisfaz a condição*

$$G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y).$$

Lema 2. *Se N vórtices de intensidades Γ_k, $k = 1, ..., N$, estão num fluido incompressível localizados nos pontos (x_k, y_k), $k = 1, ..., N$, numa região D limitada por fronteiras fixadas então a função fluxo de movimento do fluido é dada por*

$$\Psi(x, y; x_1, y_1; ...; x_N, y_N) = \Psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k G(x, y; x_k, y_k),$$

onde $\Psi_0(x,y)$ satisfaz as condições de contorno através das fronteiras do domínio D. Além disso, $\Psi_0(x,y)$ independe da posição de vórtices pontuais.

Definição 9. *Dada a função Hidrodinâmica de Green G, dizemos que $\mathcal{R}$ é função de Robin se satisfaz a equação*

$$\mathcal{R}(x_0,y_0) = g(x_0,y_0;x_0,y_0),$$

onde (x_0,y_0) é uma singularidade da função de Green G.

Com isto, temos que próximo a singularidade (x_0,y_0), G pode ser expandida como

$$G(x,y;x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi} log\, r_0 - \mathcal{R}(x_0,y_0) + \mathcal{O}(r_0).$$

Por fim, temos o teorema cuja demonstração também encontra-se em [7].

Teorema 2. *Para o movimento de vórtices de intensidades Γ_k, $k = 1,...,N$, numa região D limitada por fronteiras fixadas, existe uma função $H(x_1,y_1;...,x_n,y_n)$ tal que*

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \tag{3.1}$$

onde $H(x_1,y_1;...,x_n,y_n)$ é dada por

$$\begin{aligned} H(x_1,y_1;...,x_n,y_n) &= \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \Psi_0(x_k,y_k) + \sum_{\substack{k_1,k_2=1,\\ k_1>k_2}}^{N} \Gamma_{k_1}\Gamma_{k_2} G(x_{k_1},y_{k_1};x_{k_2},y_{k_2}) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^2 g(x,y;x_k,y_k). \end{aligned}$$

A função H assim obtida é dita função de Kirchhoff-Routh.

Observe que a equação (3.1) representa um sistema Hamiltoniano.

Por conveniência, iremos utilizar coordenadas complexas $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$. Deste modo, se o número complexo $\alpha = x_0 + iy_0$ denota a singularidade da função de Green, iremos escrever $G(z,\alpha)$ ao invés de $G(x,y;x_0,y_0)$.

3.2 Construção de G em domínios circulares

Agora, iremos mostrar uma maneira de representar a função G explicitamente em domínios circulares não simplesmente conexos.

Seja D_z o interior do disco unitário com M discos menores dentro. Se $M = 0$ temos o caso de um domínio simplesmente conexo. Denotemos as fronteiras destes discos menores por C_j, o círculo unitário por C_0; o centro dos discos menores por δ_j e o raio dos mesmos por q_j onde $j = 1, ..., M$.

Esta classe especial de domínios não simplesmente conexos é muito importante por dois motivos: primeiro, tais domínios circulares são conhecidos como domínios canônicos para aplicações conformes com relação a domínios não simplesmente conexos gerais (Ver [8]). Isto é, qualquer domínio não simplesmente conexo dado pode ser obtido através de um mapa conforme definido num domínio circular de mesma conectividade para alguma escolha de parâmetros δ_j e q_j com $j = 1, ..., M$. Estes parâmetros devem ser determinados como parte da construção do mapeamento conforme. Segundo, tais domínios nos permite fornecer fórmulas explícitas para a função de Kirchhoff-Routh. Em particular, se um mapa conforme $z(\zeta)$ mapeia uma região D_z contida num z-plano numa região D_ζ contida num ζ-plano, e $H^{(z)}$ e $H^{(\zeta)}$ denotam os Hamiltonianos no z e ζ-plano, respectivamente, então estes Hamiltonianos estão relacionados pela fórmula (ver [5])

$$H^{(\zeta)}(\zeta_1, \overline{\zeta_1}, ..., \zeta_n, \overline{\zeta_n}) = H^{(z)}(z_1, \overline{z_1}, ..., z_n, \overline{z_n}) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma_k^2}{4\pi} log||z_(\zeta_k)||,$$

onde ζ_k e $z_k = z(\zeta_k)$, com $k = 1, ..., N$, são vórtices pontuais nos z e ζ-planos, respectivamente.

3.3 O grupo de Schottky

Seja A o conjunto das M *transformações de Mobius* denotados por ϕ_j, com $j = 1, ..., M$, correspondente ao mapa conjugação para pontos no círculo C_j (Ver [10]), isto é, se C_j satisfaz a equação

$$||z - \delta_j||^2 = (z - \delta_j)\left(\overline{z} - \overline{\delta_j}\right) = q_j^2,$$

então

$$\overline{z} = \overline{\delta_j} + \frac{q_j^2}{z - \delta_j}.$$

Deste modo, podemos definir

$$\phi_j(z) \equiv \overline{\delta_j} + \frac{q_j^2}{z - \delta_j}.$$

Se z é um ponto em C_j, então o conjugado de z é dado por $\overline{z} = \phi_j(z)$.

Agora, iremos introduzir a transformação de Mobius

$$\theta_j(z) \equiv \overline{\phi_j}\left(z^{-1}\right) = \delta_j + \frac{q_j^2 z}{1 - \overline{\delta_j} z}.$$

Seja C_j' o círculo obtido por reflexão do círculo C_j no círculo unitário $||z|| = 1$ (isto é, o círculo obtido pela transformação $z \longmapsto 1/\overline{z}$). É facilmente verificado que a imagem do círculo C_j' sob a tranformação θ_j é o círculo C_j.

Observação 1. *Como os M círculos C_j são disjuntos, o mesmo vale para os M círculos C_j'.*

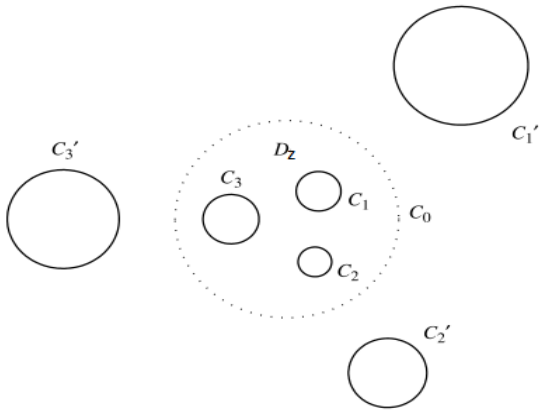

Figura 3.2: A região circular D_z é a região no interior do círculo unitário C_0 (no interior da linha pontilhada) e exterior aos círculos C_1, C_2 e C_3. A região D_z é não simplesmente conexo com três obstáculos. A região fundamental é a região não delimitada exterior aos seis círculos de Schottky $C_1, C_1', C_2, C_2', C_3$ e C_3'.

Definição 10. *O grupo de Schottky* Θ *é um grupo infinito cujos elementos são mapas gerados por composições dos* M *mapas básicos de Mobius* θ_j *e seus inversos* θ_j^{-1}*, onde* $j = 1, ..., M$*, juntamente com o mapa identidade.*

Definição 11. *Sejam* $\{C_j\}_{j=1}^M$ *e* $\{C'_j\}_{j=1}^M$ *como na Figura 2.2. A região do plano exterior aos 2M círculos é dita região fundamental associada ao grupo de Schottky.*

A região fundamental pode ser entendida como tendo duas metades, a metade que é interior ao círculo unitário C_0, mas exterior aos círculos $\{C_j\}_{j=1}^M$, a qual é chamada de *região física* (que estamos chamando de D_z), e a região exterior ao círculo unitário C_0 e também aos círculos $\{C'_j\}_{j=1}^M$, chamada de *região não física*.

Duas propriedades importantes referente a estes mapas de Mobius cuja as demonstrações podem ser encontradas em [10] são

(i) $\theta_j^{-1}(z) = \dfrac{1}{\phi_j(z)}, \forall z \in \mathbb{C},$

(ii) $\theta_j^{-1}\left(z^{-1}\right) = \dfrac{1}{\phi_j\left(z^{-1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{\overline{\phi_j}\left(\overline{z}^{-1}\right)}} = \dfrac{1}{\overline{\theta_j}\left(\overline{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{\theta_j}(z)}, \forall z \in \mathbb{C}.$

Agora, iremos introduzir alguns subconjuntos infinitos especiais formados por mapas do grupo de Schottky Θ que serão necessários no decorrer do capítulo.

Definição 12. *Denotamos por* ${}_i\Theta_j$ *todos os mapas do grupo de Schottky que não possuem uma potência de* θ_i *ou* θ_i^{-1} *no " lado esquerdo"(lado esquerdo no sentido de que todo mapa no grupo de Schottky é gerado por composição de acordo com a Definição 2.7) e nem possuem potências de* θ_j *ou* θ_j^{-1} *no "lado direito".*

Como um caso especial disto, a notação Θ_j representa simplesmente todos os mapas do grupo Θ que não possuem nenhuma potência de θ_j ou θ_j^{-1} no lado direito e sem restrição sobre o que aparece sobre o lado esquerdo. Analogamente, ${}_j\Theta$ representa todos os mapas que não possuem potências de θ_j e nem de θ_j^{-1} no lado esquerdo e sem restrição sobre o lado direito.

Definição 13. *Denotamos por* Θ' *o conjunto dos mapas do grupo* Θ *com exceção do mapa identidade.*

Por exemplo, Θ_1' é o conjunto de todos os mapas de Θ, excluindo a identidade e todos os mapas com potências de θ_1 ou de θ_1^{-1} no lado direito.

Definição 14. *A notação Θ'' denota o conjunto dos mapas do grupo de Schottky Θ com exceção do mapa identidade e todos os mapas inversos.*

Por exemplo, se $\theta_1\theta_2$ está no conjunto então o mapa $\theta_2^{-1}\theta_1^{-1}$ não está. Analogamente, a notação ${}_1\Theta_2''$ denota todos os mapas do grupo excluindo os mapas inversos e a identidade e também aqueles com potências de θ_1 ou θ_1^{-1} no lado esquerdo e aqueles com potências de θ_2 ou θ_2^{-1} no lado direito. Da mesma forma, Θ_j'' representa todos os mapas do grupo, excluindo a identidade e todos os inversos, de modo que não possuam potências de θ_j no lado direito.

3.4 A Função Prime de Schottky - Klein

Definição 15. *Seja $\omega(z,\gamma)$ uma função complexa simplesmente valuada no z-plano que se anula em γ e em todos os pontos equivalentes a γ sob os mapas do grupo Θ, isto é, γ e $\theta(\gamma)$ com $\theta \in \Theta$ são zeros de $\omega(z,\gamma)$. A função Prime de Schottky-Klein é dada por*

$$\omega(z,\gamma) = (z-\gamma)\omega'(z,\gamma), \tag{3.2}$$

onde $\omega'(z,\gamma)$ é dada por

$$\omega'(z,\gamma) = \prod_{\theta_i \in \Theta''} \frac{(\theta_i(z)-\gamma)\,(\theta_i(\gamma)-z)}{(\theta_i(z)-z)\,(\theta_i(\gamma)-\gamma)}. \tag{3.3}$$

A função ω' também pode ser escrita da seguinte forma

$$\omega'(z,\gamma) = \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{z, \theta_i(z), \gamma, \theta_i(\gamma)\}, \tag{3.4}$$

onde a notação de chaves indica a razão cruzada entre os elementos z, $\theta_i(z)$, γ e $\theta_i(\gamma)$ (ver [10]). A notação $'$ não é usada para denotar diferenciação.

A função Prime de Schottky-Klein possui duas propriedades importantes. Uma dessas propriedades é que ela é antisimétrica em seus argumentos, ou seja,

$$\omega(z,\gamma) = -\omega(\gamma,z). \tag{3.5}$$

Isto é claro quando se utiliza (3.2) e (3.3). A segunda propriedade é dada por

$$\frac{\omega\left(\theta_j(z),\gamma_1\right)}{\omega\left(\theta_j(z),\gamma_2\right)} = \beta_j(\gamma_1,\gamma_2)\frac{\omega(z,\gamma_1)}{\omega(z,\gamma_2)}, \tag{3.6}$$

onde θ_j é qualquer um dos mapas básicos do grupo de Schottky Θ e $\beta_j(\gamma_1,\gamma_2)$ é dada por

$$\beta_j(\gamma_1,\gamma_2) = \prod_{\theta_k\in\Theta_j} \frac{\left(\gamma_1-\theta_k(B_j)\right)\left(\gamma_2-\theta_k(A_j)\right)}{\left(\gamma_1-\theta_k(A_j)\right)\left(\gamma_2-\theta_k(B_j)\right)}, \tag{3.7}$$

onde A_j e B_j são os dois pontos fixos do mapa θ_j, ou seja,

$$\theta_j(A_j) = A_j \quad \text{e} \quad \theta_j(B_j) = B_j.$$

Além disso, A_j e B_j satisfazem a equação

$$\frac{\theta_j(z)-B_j}{\theta_j(z)-A_j} = \mu_j e^{ik_j}\frac{z-B_j}{z-A_j}, \tag{3.8}$$

onde $\mu_j, k_j \in \mathbb{R}$ e $|\mu_j| < 1$.

A demonstração dessa propriedade encontra-se em [9].

Proposição 2. *Sejam $\{C_j, C_j'\}$ os círculos de Schottky como na seção anterior. Então a função Prime $\omega(z,\gamma)$ satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\overline{\omega}\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right) = -\frac{1}{z\gamma}\omega(z,\gamma),$$

onde $\overline{\omega}(z,\gamma) = \overline{\omega\left(\overline{z},\overline{\gamma}\right)}$.

Dem:

Da Definição 12 e da equação (3.4), temos:

$$\omega(z,\gamma) = (z-\gamma)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z,\theta_j(z),\gamma,\theta_j(\gamma)\right\}. \tag{3.9}$$

Desta maneira, obtemos de (3.9) que

$$\omega\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right)=\left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z^{-1},\theta_j\left(z^{-1}\right),\gamma^{-1},\theta_j\left(\gamma^{-1}\right)\right\}. \tag{3.10}$$

Como $\theta_j \in \Theta'' \subset \Theta$, segue por definição do grupo de Schottky que θ_j é uma composição de geradores do grupo Θ, ou seja,

$$\theta_j\left(z^{-1}\right)=\theta_p\left(\theta_q\left(\theta_r\left(z^{-1}\right)\right)\right), \tag{3.11}$$

para alguma sequência de inteiros (p,q,r).

A propriedade (ii) é válida para os mapas de Θ (em particular, para os mapas geradores de Θ). Logo,

$$\theta_k^{-1}\left(z^{-1}\right)=\frac{1}{\overline{\theta_k}(z)},$$

onde θ_k é gerador de Θ. Equivalentemente,

$$\theta_k\left(z^{-1}\right)=\frac{1}{\overline{\theta_k}^{-1}(z)}. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) repetidamente em (3.11), tem-se:

$$\begin{aligned}\theta_j\left(z^{-1}\right) &= \theta_p\left(\theta_q\left(\frac{1}{\overline{\theta_r}^{-1}(z)}\right)\right)=\theta_p\left(\frac{1}{\overline{\theta_q}^{-1}\left(\overline{\theta_r}^{-1}(z)\right)}\right)\\ &= \frac{1}{\overline{\theta_p}^{-1}\left(\overline{\theta_q}^{-1}\left(\overline{\theta_r}^{-1}(z)\right)\right)}=\frac{1}{\left(\overline{\theta_r\theta_q\theta_p}\right)^{-1}(z)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Se θ_j decompõe-se como três mapas básicos θ_p, θ_q e θ_r, ou seja, $\theta_j(z)=\theta_p(\theta_q(\theta_r(z)))$, então θ_{jr} irá denotar o mapa *invertido* de θ_j. Por exemplo, no nosso caso, o mapa invertido de θ_j é dado por

$$\theta_{jr}(z)=\theta_r(\theta_q(\theta_p(z))).$$

Assim, a equação (3.13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta_j\left(z^{-1}\right)=\frac{1}{\overline{\theta_{jr}}^{-1}(z)}.$$

Com isto, temos que a equação (3.10) torna-se

$$\begin{aligned}\omega\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right) &= \left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{\frac{1}{z},\frac{1}{\overline{\theta_{jr}}^{-1}(z)},\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\overline{\theta_{jr}}^{-1}(\gamma)}\right\}\\ &= \left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z,\overline{\theta_{jr}}^{-1}(z),\gamma,\overline{\theta_{jr}}^{-1}(\gamma)\right\},\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde na última igualdade foi usada a invariância da razão cruzada para transformações de Mobius.

Agora, usando a definição do subconjunto Θ'' (isto significa que os mapas inversos são excluídos do produto), temos que a equação (3.14) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\omega\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right)=\left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z,\overline{\theta_{jr}}(z),\gamma,\overline{\theta_{jr}}(\gamma)\right\}.$$

Além disso, se um mapa θ_j está incluído no produto acima, pode-se fazer uma reorganização de tal forma que o mapa θ_{jr} também esteja no produto. Deste modo, renomeando os mapas, a última equação torna-se:

$$\omega\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right)=\left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z,\overline{\theta_j}(z),\gamma,\overline{\theta_j}(\gamma)\right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\overline{\omega}\left(z^{-1},\gamma^{-1}\right) &= \overline{\omega\left(\overline{z}^{-1},\overline{\gamma}^{-1}\right)}\\ &= \left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\prod_{\theta_j\in\Theta''}\left\{z,\theta_j(z),\gamma,\theta_j(\gamma)\right\}\\ &= \left(z^{-1}-\gamma^{-1}\right)\frac{\omega(z,\gamma)}{(z-\gamma)}\\ &= -\frac{1}{z\gamma}\omega(z,\gamma).\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova da proposição.

Devido a sua importância, iremos classificar todas as possíveis composições dos mapas básicos do grupo de Schottky Θ de acordo com seu *nível* (ver [10]). Como exemplo, vejamos o caso de quatro mapas básicos θ_j, com $j = 1, 2, 3, 4$. Por convenção, o mapa identidade é considerado tendo nível zero e os quatro mapas básicos juntamente com seus inversos θ_j^{-1}, onde $j = 1, 2, 3, 4$, como sendo mapas de nível um. Todas as possíveis composições de quaisquer dois destes oito mapas de forma que não se reduzam a identidade, por exemplo,

$$\theta_1\left(\theta_1(z)\right),\ \ \theta_1\left(\theta_2(z)\right),\ \ \theta_1\left(\theta_3(z)\right),\ \ \theta_1\left(\theta_4(z)\right),\ \ \theta_2\left(\theta_1(z)\right),\ \ \theta_2\left(\theta_2(z)\right), ...,$$

são chamadas de mapa de nível dois; todas as possíveis composições de quaisquer três dos oitos mapas de nível um que não se reduzam a um mapa de nível menor, são chamadas de mapas de nível três, e assim por diante.

3.5 Solução Explícita para G

Dado um domínio circular D_z com obstáculos no seu interior (como mostrado na Figura 3.2), podemos construir a função Prime de Schottky-Klein $\omega(z, \gamma)$ associada. Seja $\alpha \in D_z$ a singularidade da função Hidrodinâmica de Green G. O potencial complexo $W(z, \alpha)$ para o fluxo é tal que

$$G(z, \alpha) = Im[W(z, \alpha)],$$

onde o potencial complexo $W(z, \alpha)$ é dado por

$$W(z, \alpha) = -\frac{i}{4\pi} log\left(\frac{\omega(z, \alpha)\overline{\omega}\left(z^{-1}, \alpha^{-1}\right)}{\omega\left(z, \overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1}, \overline{\alpha}\right)}\right). \tag{3.15}$$

Uma representação explícita para $G(z, \alpha)$ é dada por

$$G(z, \alpha) = Im[W(z, \alpha)] = -\frac{1}{4\pi} log\left\|\frac{\omega(z, \alpha)\overline{\omega}\left(z^{-1}, \alpha^{-1}\right)}{\omega\left(z, \overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1}, \overline{\alpha}\right)}\right\|. \tag{3.16}$$

Teorema 3. *Seja G como dada em (3.16). Então G assim definida é uma função Hidrodinâmica de Green.*

Dem:

Considere a função

$$S(z,\alpha)=\frac{\omega(z,\alpha)\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)}{\omega\left(z,\overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)}.$$

Observe que $S(z,\alpha)$ possui um zero de segunda ordem em $z=\alpha$ (assim como em todos os pontos do plano equivalente a α) e também admite um pólo de segunda ordem em $z=\overline{\alpha}^{-1}$ (e em pontos equivalentes), basta usar a definição da função $\omega(z,\alpha)$ dada em [5] a fim de verificar isto.

Seja α um ponto na região física da região fundamental. Então $\overline{\alpha}^{-1}$ encontra-se na região não física. Como,

$$G(z,\alpha)=-\frac{1}{4\pi}log\left\|S(z,\alpha)\right\|, \tag{3.17}$$

isto significa que na região física da região fundamental D_z, $G(z,\alpha)$ possui uma única singularidade logaritma isolada, a saber, em $z=\alpha$, como necessário.

Uma vez que o zero de S em α é de segunda ordem, temos que, localmente, G admite a seguinte expansão:

$$G(z,\alpha)=-\frac{1}{2\pi}log\left\|z-\alpha\right\|+\mathcal{O}(1).$$

Precisamos verificar que a equação (3.16) satisfaz as condições de contorno em todos os círculos C_j, $j=0,1,...,M$.

Primeiro, vejamos a condição de contorno com relação ao círculo C_0; para isto, observe que

$$\overline{S(z,\alpha)}=\frac{\overline{\omega(z,\alpha)\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)}}{\overline{\omega\left(z,\overline{\alpha}^{-1}\right)}\overline{\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)}}.$$

Pela Proprosição 2, obtemos

$$\overline{S(z,\alpha)}=\frac{\overline{\omega}\left(\overline{z},\overline{\alpha}\right)\omega\left(\overline{z}^{-1},\overline{\alpha}^{-1}\right)}{\overline{\omega}\left(\overline{z},\alpha^{-1}\right)\omega\left(\overline{z}^{-1},\alpha\right)}.$$

Como $z\in C_0$ (isto é, $z\cdot\overline{z}=1$), segue que

$$\overline{S(z,\alpha)} = \frac{\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)\omega\left(z,\overline{\alpha}^{-1}\right)}{\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)\omega(z,\alpha)} = \frac{1}{S(z,\alpha)}. \tag{3.18}$$

Da equação (3.18) temos que em C_0, $\|S(z,\alpha)\| = 1$. Logo, segue de (3.17) que

$$G(z,\alpha) = 0, \quad \forall z \in C_0,$$

satisfazendo assim, a Definição 8 (condição (iii), caso 1).

Para qualquer um dos círculos interiores C_j, $j = 1, ..., M$, temos

$$\overline{S(z,\alpha)} = \frac{\overline{\omega}\left(\phi_j(z),\overline{\alpha}\right)\omega\left(\phi_j^{-1}(z),\overline{\alpha}^{-1}\right)}{\overline{\omega}\left(\phi_j(z),\alpha^{-1}\right)\omega\left(\phi_j^{-1}(z),\alpha\right)}.$$

Na última equação , foi utilizado o fato de que $\overline{z} = \phi_j(z)$ (ver Seção 3.3). E com isto, obtemos

$$\overline{S(z,\alpha)} = \frac{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}\right)\omega\left(\overline{\theta_j}^{-1}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}^{-1}\right)}{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\alpha^{-1}\right)\omega\left(\overline{\theta_j}^{-1}\left(z^{-1}\right),\alpha\right)}.$$

Por fim, utilizando mais uma vez a Proposição 2, tem-se

$$\overline{S(z,\alpha)} = \frac{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}\right)\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}\right)}{||\alpha||^2\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\alpha^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\alpha^{-1}\right)}. \tag{3.19}$$

Observe que a equação (3.10) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\overline{S(z,\alpha)} = \frac{1}{||\alpha||^2}\cdot\frac{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}\right)}{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\alpha^{-1}\right)}\cdot\frac{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\overline{\alpha}\right)}{\overline{\omega}\left(\overline{\theta_j}\left(z^{-1}\right),\alpha^{-1}\right)}. \tag{3.20}$$

Utilizando a propriedade (3.6) na equação (3.20), obtemos

$$\overline{S(z,\alpha)} = \overline{\beta_j\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}^2\cdot\frac{\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)}{||\alpha||^2\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)}. \tag{3.21}$$

Agora, usando a proprosição 2 na equação (3.21), obtemos

$$\overline{S(z,\alpha)} = \overline{\beta_j\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}^2\cdot\frac{\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)\omega\left(z,\overline{\alpha}^{-1}\right)}{\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)\omega(z,\alpha)} = \frac{\overline{\beta_j\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}^2}{S(z,\alpha)}. \tag{3.22}$$

Resulta imediatamente da equação (3.22) que nos círculos C_j, vale:

$$\|S(z,\alpha)\| = \overline{\beta_j\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}.$$

Assim,

$$G(z,\alpha) = -\frac{1}{4\pi} log \left\| S(z,\alpha) \right\| = -\frac{1}{4\pi} log \, \overline{\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right)} \text{ em } C_j.$$

Isto significa que os parâmetros A_j, $j = 1, ..., M$, conforme a Definição 8 (em (ii)) são:

$$A_j = -\frac{1}{4\pi} log \, \overline{\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right)}.$$

Utilizando a equação (3.7) para $\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right)$, obtem-se

$$\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right) = \prod_{\theta_k \in \Theta_j} \frac{\left(\alpha - \theta_k(B_j)\right)\left(\overline{\alpha}^{-1} - \theta_k(A_j)\right)}{\left(\alpha - \theta_k(A_j)\right)\left(\overline{\alpha}^{-1} - \theta_k(B_j)\right)}. \tag{3.23}$$

A equação (3.22) nos diz que $\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right)$ deve ser um número real, mas não está claro que o lado direito da equação (3.23) é sempre um número real. Em [5] há uma prova de que $\beta_j \left(\alpha, \overline{\alpha}^{-1}\right)$ é um número real positivo, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Isto finaliza a prova do teorema.

□

Lema 3. *Seja* $G(z,\alpha) = -\frac{1}{4\pi} log \left\| \frac{\omega(z,\alpha)\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right)}{\omega\left(z,\overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(z^{-1},\overline{\alpha}\right)} \right\|$ *a função Hidrodinâmica de Green. Então a função de Robin associada a* G *é dada por:*

$$\mathcal{R}(\alpha,\overline{\alpha}) = \frac{1}{4\pi} log \left\| \frac{\omega'(\alpha,\alpha)\overline{\omega}'\left(\alpha^{-1},\alpha^{-1}\right)}{\alpha^2 \omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\alpha^{-1},\overline{\alpha}\right)} \right\|.$$

Dem:

Pela proprosição 2, temos que

$$\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right) = -\frac{1}{z\alpha}(z-\alpha)\omega'(z,\alpha). \tag{3.24}$$

Por outro lado, segue da definição que

$$\overline{\omega}\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right) = \frac{(\alpha - z)}{z\alpha}\overline{\omega}'\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right).$$

Disto, juntamente com a equação (3.24), obtemos:

$$\overline{\omega}'\left(z^{-1},\alpha^{-1}\right) = \omega'(z,\alpha).$$

Em particular,

$$\overline{\omega}'\left(\alpha^{-1},\alpha^{-1}\right)=\omega'(\alpha,\alpha). \tag{3.25}$$

Uma representação para a função de Robin, é dada em [11] por

$$\mathcal{R}\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)=\frac{1}{2\pi}log\left\|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)}{||\alpha||\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}\right\|. \tag{3.26}$$

A equação (3.26) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)=\frac{1}{2\pi}log\left\|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)}{||\alpha||\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}\right\| &= \frac{1}{4\pi}log\left\|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)}{||\alpha||\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}\right\|^{2}\\ &= \frac{1}{4\pi}log\left\|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)\omega'(\alpha,\alpha)}{\alpha^{2}\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)\left(-\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right)\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)}\right\|.\end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.25) juntamente com a definição da função Prime para $\overline{\omega}\left(\alpha^{-1},\overline{\alpha}\right)$, obtemos que

$$\mathcal{R}\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)=\frac{1}{4\pi}log\left\|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)\overline{\omega}'(\alpha^{-1},\alpha^{-1})}{\alpha^{2}\omega\left(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\alpha^{-1},\overline{\alpha}\right)}\right\|,$$

finalizando a demosntração do lema.

□

4 DINÂMICA DE VÓRTICES NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Neste capítulo, estudaremos o movimento de vórtices pontuais em regiões não simplesmente conexas na superfície de uma esfera.

Uma vez que detemos o conhecimento da função Hidrodinâmica de Green, definida num domínio circular (que é conformalmente equivalente a uma região na superfície esférica através da projeção estereográfica), iremos adaptar a teoria de Kirchhoff-Routh para o movimento de vórtices pontuais no plano para a superfície de uma esfera.

Por fim, exibiremos o Hamiltoniano para a dinâmica de vórtices pontuais sobre uma capa esférica.

4.1 Alguns conceitos importantes

Aqui, $\mathcal{S}_R$ denotará a esfera bidimensional de raio R. Sem perda de generalidade, podemos considerar a esfera unitária que será denotada por $\mathcal{S}$. E $D_{\mathcal{S}}$ irá denotar uma região arbitrária não simplesmente conexa contendo um número finito de obstáculos na superfíce de $\mathcal{S}$. O conjunto $\{D_j; j = 1, ..., M\}$ representa o conjunto dos obstáculos no interior de $D_{\mathcal{S}}$ e a fronteira de D_j será denotada por ∂D_j, onde aqui será sempre uma curva simples, fechada e diferenciável . A fronteira externa que envolve os obstáculos é denotada por ∂D_0. Os ângulos polar e meridional usuais em coordenadas polares esféricas serão indicados pelo par (θ, ϕ) e $\nabla^2_{\mathcal{S}}$ será o operador de Laplace-Beltrami (como em [12]) definido por

$$\nabla^2_{\mathcal{S}} \equiv \frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

O movimento de fluido incompressível na superfície da esfera $\mathcal{S}$ pode ser descrito por uma função fluxo Ψ. O campo de vorticidade local $\boldsymbol{\omega}$ possui a seguinte relação com a função Ψ:

$$\nabla^2_{\mathcal{S}}\Psi = -\boldsymbol{\omega}.$$

Para considerar o caso de movimento de vórtice em $D_{\mathcal{S}}$, introduzimos a função Hidrodinâmica de Green

$$G^S(\theta,\phi,\theta_\alpha,\phi_\alpha) = -\delta(\theta,\phi,\theta_\alpha,\phi_\alpha) \text{ em } D_{\mathcal{S}}, \tag{4.1}$$

onde δ é uma função fluxo. As condições de contorno da função de Green G^S são dadas por

$$\begin{cases} G^S(\theta,\phi;\theta_\alpha,\phi_\alpha) = 0 \text{ em } \partial D_0, \\ \\ G^S(\theta,\phi;\theta_\alpha,\phi_\alpha) = C_j \text{ em } \partial D_j,\ j = 1,...,M, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\{C_j; j = 1,...,M\}$ é um conjunto de constantes independentes de (θ,ϕ) (geralmente dependem de $(\theta_\alpha,\phi_\alpha)$). Estas M constantes são determinadas pelas M condições em que as circulações ao redor de todos os obstáculos fechados são zero, ou seja,

$$\int_{\partial D_j} \frac{\partial G^S}{\partial n} ds = 0,\ \ j = 1,...,M,$$

onde $\partial G^S/\partial n$ é a derivada normal de G^S e ds é um elemento de comprimento da fronteira da região $D_{\mathcal{S}}$.

Agora, vamos introduzir a projeção estereográfica de $D_{\mathcal{S}}$ na região D_z num z-plano complexo, dada por

$$z = cot\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}, \qquad z_\alpha = cot\left(\frac{\theta_\alpha}{2}\right)e^{i\phi_\alpha},$$

onde z_α é a projeção da singularidade da função δ.

Denotamos as projeções das regiões D_j e suas fronteiras ∂D_j por D_j^z e ∂D_j^z, respectivamente. Esta escolha particular de projeção, mapeia o pólo norte da esfera para $z = \infty$.

Iremos agora reescrever $G^S(\theta,\phi;\theta_\alpha,\phi_\alpha)$ como sendo uma função de novas variáveis independentes $(z,\overline{z})$. E esta nova função será dada por $G^z(z,\overline{z};z_\alpha,\overline{z}_\alpha)$. E assim,

$$\begin{cases} G^z\left(z,\overline{z};z_\alpha,\overline{z}_\alpha\right)=0 \text{ em } \partial D_0^z, \\ \\ G^z\left(z,\overline{z};z_\alpha,\overline{z}_\alpha\right)=C_j \text{ em } \partial D_j^z,\ j=1,...,M, \end{cases} \tag{4.3}$$

com

$$\int_{\partial D_j^z}\frac{\partial G^z}{\partial n_z}ds_z=0,\ \ j=1,...,M,$$

onde $\partial G^z/\partial n_z$ é a derivada normal de G^z e ds_z é um elemento de comprimento da fronteira da região não simplesmente conexa no z-plano da projeção. Por uma extensão do teorema da aplicação de Riemann (ver [13]), é sabido que D_z é conformalmente equivalente a alguma região circular D_ζ consistindo do ζ-disco unitário contendo M discos menores.

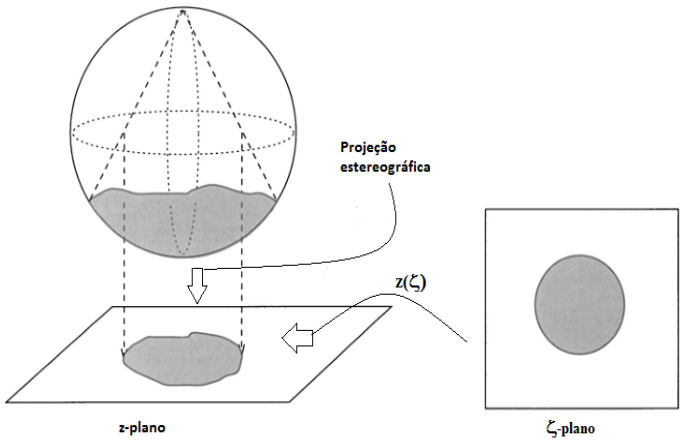

Figura 4.1:

C_0 irá denotar o disco unitário no ζ-plano e C_j, $j=1,...,M$, denotará as fronteiras dos círculos no interior de C_0. Denotaremos por $q_j\in\mathbb{R}$ e $\delta_j\in\mathbb{C}$, o raio e o centro do círculo C_j, respectivamente.

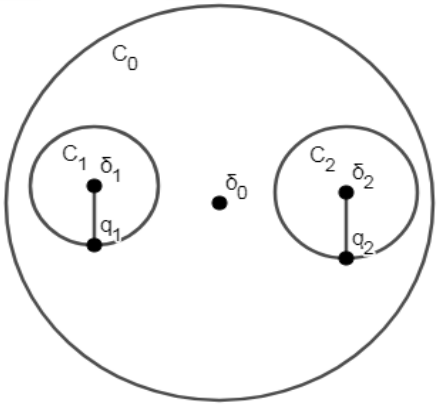

Figura 4.2: C_0 com dois obstáculos C_j, $j = 1, 2$, no seu interior.

Sejam $z(\zeta)$ o mapa conforme de D_ζ em D_z e $G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right)$ a função Hidrodinâmica de Green com relação ao domínio D_ζ. Pela invariância conforme, segue que

$$G^S(\theta, \phi; \theta_\alpha, \phi_\alpha) = G^z\left(z, \overline{z}; z_\alpha, \overline{z}_\alpha\right) = G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right), \tag{4.4}$$

onde α é a pré-imagem do ponto z_α em D_ζ sob o mapa $z(\zeta)$ (isto é, $z_\alpha = z(\alpha)$).

Uma fórmula explícita alternativa para a função Hidrodinâmica de Green em D_ζ é dada por (ver [5]):

$$G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right) = -\frac{1}{2\pi} log \left\| \frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\alpha\omega\left(\zeta, \overline{\alpha}^{-1}\right)} \right\|. \tag{4.5}$$

Desta forma, a função $G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right)$ ainda pode ser escrita da seguinte maneira:

$$G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right) = -\frac{1}{4\pi} log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)\overline{\omega}\left(\overline{\zeta}, \overline{\alpha}\right)}{||\alpha||^2 \omega\left(\zeta, \overline{\alpha}^{-1}\right) \overline{\omega}\left(\overline{\zeta}, \alpha^{-1}\right)} \right). \tag{4.6}$$

De fato, a equação (4.5) nos dá

$$G^\zeta\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha, \overline{\alpha}\right) = -\frac{1}{4\pi} log \left\| \frac{\omega(\zeta, \alpha)}{\alpha\omega\left(\zeta, \overline{\alpha}^{-1}\right)} \right\|^2 = -\frac{1}{4\pi} log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)\overline{\omega}(\zeta, \alpha)}{||\alpha||^2 \omega\left(\zeta, \overline{\alpha}^{-1}\right) \overline{\omega}\left(\zeta, \overline{\alpha}^{-1}\right)} \right), \tag{4.7}$$

que utilizando a observação da Proposição 2 na equação (4.7) obtemos a equação (4.6).

4.2 A teoria de Kirchhoff-Routh numa superfície esférica

Considere o movimento de fluido em $D_{\mathcal{S}}$ que é irrotacional, exceto para N vórtices pontuais com intensidades fixas Γ_i, $i = 1, ..., N$, localizados nos pontos $(\theta_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i})$, $i = 1, ..., N$.

A função fluxo associada a este sistema é

$$\Psi(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i G^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i}).$$

Note que $G^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i})$ pode ser escrita como a soma de uma função auto-induzida $G_{pv}(\theta, \phi; \theta_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i})$ com uma função não auto-induzida $\hat{G}(\theta, \phi; \theta_{\alpha_i}, \phi_{\alpha_i})$, ou seja,

$$G^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) = G_{pv}(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) + \hat{G}^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}), \tag{4.8}$$

onde,

$$G_{pv}(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) = -\frac{1}{4\pi} log \left(\frac{(z - z_{\alpha_j}) \left(\overline{z} - \overline{z}_{\alpha_j}\right)}{(1 + z\overline{z}) \left(1 + z_{\alpha_j}\overline{z}_{\alpha_j}\right)} \right) \tag{4.9}$$

é a função de Green associada a um vórtice pontual isolado de intensidade unitária (isto é, $\Gamma = 1$) numa esfera sem fronteiras (escrito em termos de $(z, \overline{z})$).

Das equações (4.8) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{G}^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) &= -\frac{1}{4\pi} log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha_j)\overline{\omega}\left(\overline{\zeta}, \overline{\alpha_j}\right)}{||\alpha_j||^2 \omega\left(\zeta, \overline{\alpha_j}^{-1}\right) \overline{\omega}\left(\overline{\zeta}, \alpha_j^{-1}\right)} \right) + \frac{1}{4\pi} log \left(\frac{(z - z_{\alpha_j}) \left(\overline{z} - \overline{z}_{\alpha_j}\right)}{(1 + z\overline{z}) \left(1 + z_{\alpha_j}\overline{z}_{\alpha_j}\right)} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega'(\zeta, \alpha_j)\overline{\omega}'\left(\overline{z}, \overline{\alpha_j}\right)}{||\alpha_j||^2 \omega\left(\zeta, \overline{\alpha_j}^{-1}\right) \overline{\omega}\left(\overline{\zeta}, \alpha_j^{-1}\right)} \right) + \frac{1}{4\pi} log \left(\frac{||z(\alpha_j)||}{1 + z(\alpha_j)\overline{z}(\alpha_j)} \right)^2 \\ &+ \mathcal{O}\left(\zeta - \alpha_j, \overline{z} - \overline{\alpha_j}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Lema 4. *Seja $\hat{G}^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j})$ como na equação (4.10). Então são válidas as propriedades:*

i) $\hat{G}^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) = \hat{G}^S(\theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}; \theta, \phi)$;

ii) $\hat{G}^S(\theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j}) = -\mathcal{R}\left(\alpha_j, \overline{\alpha_j}\right) + \frac{1}{2\pi} log \left(\frac{||z(\alpha_j)||}{1 + z(\alpha_j)\overline{z}(\alpha_j)} \right)$.

Dem:

i) Da equação (4.8), obtemos

$$\hat{G^S}(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j}) = G^S(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j}) - G_{pv}(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j}).$$

Da equação (4.4) e do Lema 1 (Capítulo 3) segue que a propriedade i) é válida para $G^S(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j})$.

Da equação (4.9), temos que

$$G_{pv}(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j}) = G_{pv}\left(z,\overline{z},z_{\alpha_j},\overline{z}_{\alpha_j}\right)$$

que nas variavéis $\left(z,\overline{z},z_{\alpha_j},\overline{z}_{\alpha_j}\right)$ fica claro a validade da propriedade i) para a função G_{pv}.

Portanto, como a propriedade i) é válida para G^s e G_{pv} segue que tal propriedade também é válida para $\hat{G^S}(\theta,\phi;\theta_{\alpha_j},\phi_{\alpha_j})$.

ii) Para provar esta propriedade, basta mostrar que

$$\mathcal{R}\left(\alpha_j,\overline{\alpha_j}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\omega'(\alpha_j,\alpha_j)\overline{\omega}'\left(\overline{\alpha_j},\overline{\alpha_j}\right)}{||\alpha_j||^2\omega\left(\alpha_j,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\overline{\alpha_j},\alpha_j^{-1}\right)}\right).$$

Temos por definição que (ver [11])

$$\mathcal{R}(z,\alpha_j) = -G(z,\alpha_j) - \frac{1}{2\pi}log\,||z-\alpha_j||.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\zeta,\alpha_j) &= \frac{1}{2\pi}log\left\|\frac{\omega(\zeta,\alpha_j)}{\alpha_j\omega\left(\alpha_j,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)}\right\| - \frac{1}{2\pi}log\,||\zeta-\alpha_j|| \\
&= \frac{1}{2\pi}log\left\|\frac{\omega'(\zeta,\alpha_j)}{\alpha_j\omega\left(\zeta,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)}\right\| = \frac{1}{4\pi}log\left\|\frac{\omega'(\zeta,\alpha_j)}{\alpha_j\omega\left(\zeta,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi}log\left\|\frac{\omega'(\zeta,\alpha_j)\overline{\omega}'(z,\alpha_j)}{||\alpha_j||^2\omega\left(\zeta,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\zeta,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)}\right\| \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\omega'(\zeta,\alpha_j)\overline{\omega}'\left(\overline{\zeta},\overline{\alpha_j}\right)}{||\alpha_j||^2\omega\left(\zeta,\overline{\alpha_j}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\overline{\zeta},\alpha_j^{-1}\right)}\right),
\end{aligned}$$

que quando aplicado no par $(\alpha,\overline{\alpha_j})$, obtém-se a propriedade ii). Isto prova o lema.

□

Agora, seja $(\theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j})$ a posição do j-ésimo vórtice pontual numa esfera. Fazendo a mudança de variável

$$P_j = cos\,\theta_{\alpha_j}, \quad Q_j = \phi_{\alpha_j},$$

temos que o movimento de N vórtices em um domínio não simplesmente conexo numa esfera é dada através do seguinte sistema dinâmico Hamiltoniano

$$\Gamma_j \dot{Q_j} = \frac{\partial H^S(\{Q_i\},\{P_i\})}{\partial P_j}, \quad \Gamma_j \dot{P_j} = -\frac{\partial H^S(\{Q_i\},\{P_i\})}{\partial Q_j},$$

onde o Hamiltoniano $H^S(\{Q_i\},\{P_i\})$ é dado por

$$\begin{aligned} H^S(\{Q_i\},\{P_i\}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}{\sum_{i=1}^{N}}' \Gamma_j\Gamma_i G^S\left(\arccos\ P_j, Q_j; \arccos\ P_i, Q_i\right) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \hat{G^S}\left(\arccos\ P_j, Q_j; \arccos\ P_j, Q_j\right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde, $\sum_{i=1}^{N}{}'$ indica a soma sobre i entre 1 e N desconsiderando o caso $i = j$.

Utilizando a equação (4.4) e o Lema 4 ii) na equação (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} H^S(\{Q_i\},\{P_i\}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}{\sum_{i=1}^{N}}' \Gamma_j\Gamma_i G^\zeta\left(\alpha_j, \overline{\alpha_j}; \alpha_i, \overline{\alpha_i}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \mathcal{R}\left(\alpha_j, \overline{\alpha_j}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{||z(\alpha_j)||}{1+z(\alpha_j)\overline{z}(\alpha_j)}\right), \end{aligned} \tag{4.12}$$

que de acordo com [11] a equação (4.12) torna-se

$$H^S(\{Q_i\},\{P_i\}) = H^\zeta(\{\alpha_i\}) + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{||z(\alpha_j)||}{1+z(\alpha_j)\overline{z}(\alpha_j)}\right). \tag{4.13}$$

Como D_ζ é um domínio circular unitário, segue do capítulo anterior que a equação (4.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$H^S(\{Q_i\},\{P_i\}) = H^z(\{z_{\alpha_i}\}) + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{1}{1+z(\alpha_j)\overline{z}(\alpha_j)}\right), \tag{4.14}$$

onde $H^{\zeta}(\{\alpha_i\})$ e $H^{z}(\{z_{\alpha_i}\})$ denotam os Hamiltonianos de vórtice pontual nos domínios D_{ζ} e D_z, respectivamente.

Um ponto importante a ser observado é que os Hamiltonianos que governam o movimento de N vórtices na superfície da esfera não são invariantes sob projeção estereográfica ou mapas conformes.

Por fim, vejamos um exemplo com o intuito de exibirmos o Hamiltoniano para a dinâmica de vórtices pontuais sobre uma capa esférica.

Exemplo 2. *Considere uma superfície esférica com uma capa circular contendo o pólo norte. Suponha que a capa corresponde no z-plano através da projeção estereográfica ao disco* $D_z = \{z \in \mathbb{C}; ||z|| \leq r_0\}$. *A região* D_z *é conformalmente equivalente ao disco unitário sob o simples mapa conforme*

$$z(\zeta) = r_0\zeta. \tag{4.15}$$

Queremos determinar de maneira explícita o Hamiltoniano referente a esta capa esférica. Denotemos por $D_P^{\mathcal{S}}$, a capa esférica contendo o pólo norte.

Sejam $G^S(\theta, \phi; \theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j})$, $G^z\left(z, \overline{z}; z_{\alpha_j}, \overline{z}_{\alpha_j}\right)$ e $G^{\zeta}\left(\zeta, \overline{\zeta}; \alpha_j, \overline{\alpha_j}\right)$ as funções Hidrodinâmicas de Green nos domínios $D_P^{\mathcal{S}}$, D_z e D_{ζ}, respectivamente.

Sendo $(\theta_{\alpha_j}, \phi_{\alpha_j})$ as coordenadas do j-ésimo vórtice pontual em $D_P^{\mathcal{S}}$, façamos a mudança de variável $P_j = cos\,\theta_{\alpha_j}$ e $Q_j = \phi_{\alpha_j}$.

Assim, da equação (4.14) e da definição do mapa conforme dada em (4.15), tem-se que o Hamiltoniano definido na região $D_P^{\mathcal{S}}$ é dado por

$$\begin{aligned} H^S(\{Q_i\}, \{P_i\}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}{\sum_{i=1}^{N}}' \Gamma_j\Gamma_i G^z(z_{\alpha_j}; z_{\alpha_i}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2\mathcal{R}^z\left(z_{\alpha_j}; \overline{z_{\alpha_j}}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{1}{1+||\alpha_j||^2\cdot r_0}\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora, resta-nos exibir as funções $G^z(z_{\alpha_j}; z_{\alpha_i})$ e $\mathcal{R}^z\left(z_{\alpha_j}; \overline{z_{\alpha_j}}\right)$. De (4.4), temos que $G^{\zeta}(\{\alpha_i\}) = G^z(\{z_{\alpha_i}\})$. Logo,

$$G^z(\{z_{\alpha_i}\}) = -\frac{1}{4\pi} log\left(\frac{\omega(z_{\alpha_j}, z_{\alpha_i})\overline{\omega}\left(\overline{z_{\alpha_j}}, \overline{z_{\alpha_i}}\right)}{||z_{\alpha_i}||^2 \omega\left(z_{\alpha_j}, \overline{z_{\alpha_i}}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\overline{z_{\alpha_j}}, z_{\alpha_i}^{-1}\right)}\right).$$

Como D_z e D_ζ são conformalmente equivalentes, onde D_ζ é o disco unitário, segue que $\omega'(z_{\alpha_j}, z_{\alpha_i}) = \overline{\omega}'\left(\overline{z_{\alpha_j}}, \overline{z_{\alpha_i}}\right) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} G^z(\{z_{\alpha_i}\}) &= -\frac{1}{4\pi} log\left(\frac{(z_{\alpha_j} - z_{\alpha_i})\overline{\left(\overline{z_{\alpha_j}} - \overline{z_{\alpha_i}}\right)}}{||z_{\alpha_i}||^2\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_i}}^{-1}\right)\overline{\left(\overline{z_{\alpha_j}} - z_{\alpha_i}^{-1}\right)}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} log\left(\frac{(z_{\alpha_j} - z_{\alpha_i})}{||z_{\alpha_i}||\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_i}}^{-1}\right)}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sabemos que dada a função de Green G, temos a função de Robin $\mathcal{R}$ associada. Como $G^z = G^\zeta$, a função de Robin $\mathcal{R}^z$ associada a G^z é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^z\left(z_{\alpha_j}; \overline{z_{\alpha_j}}\right) &= \frac{1}{4\pi} log\left(\frac{1}{||z_{\alpha_j}||^2 \omega\left(z_{\alpha_j}, \overline{z_{\alpha_j}}^{-1}\right)\overline{\omega}\left(\overline{z_{\alpha_j}}, z_{\alpha_j}^{-1}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} log\left(\frac{1}{||z_{\alpha_j}||^2\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_j}}^{-1}\right)\overline{\left(\overline{z_{\alpha_j}} - z_{\alpha_j}^{-1}\right)}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} log\left(\frac{1}{||z_{\alpha_j}||^2\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_j}}^{-1}\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} log\left(\frac{1}{||z_{\alpha_j}||\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_j}}^{-1}\right)}\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Assim, das equações (4.17) e (4.18), temos que o Hamiltoniano definido na região $D_P^{\mathcal{S}}$ é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} H^S &= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}{}'\Gamma_j\Gamma_i log\left(\frac{(z_{\alpha_j} - z_{\alpha_i})}{||z_{\alpha_i}||\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_i}}^{-1}\right)}\right) - \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{1}{||z_{\alpha_j}||\left(z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_j}}^{-1}\right)}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 log\left(\frac{1}{1 + ||\alpha_j||^2 \cdot r_0}\right). \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1] ACHESON, D. J. **Elementary fluid dynamics**, Oxford University Press, 1990.

[2] KAMBE TSUTOMU. **Elementary fluid mechanics**, Institute of Dynamical Systems, Tokyo, Japan, 2007.

[3] ABLOWITZ MARK, J. and FOKAS ATHANASSIOS, S. **Complex variables introduction and applications**, University of Colorado, Boulder, USA, 2003.

[4] MOURA, M. N. **Vortex motion around a circular cylinder both in an unbounded domain and near a plane boundary**, Federal University of Pernambuco, 2012.

[5] CROWDY, D. G. and MARSHALL, J. S. **Analytical formulae for the Kirchoff-Routh path function in multiply connected domains**, Proc. R. Soc. A 461 (2005) 2477-2501.

[6] KUNDU PIJUSH, K. and COHEN IRA, M. **Fluid mechanics**, Oceanographic Center New Southeastern University Dania, Florida and Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics University of Pennsylvania Philadelphia, Pennsylvania, 2008.

[7] LIN, C. C. **On the motion of vortices in two dimensions. I. Existence of the Kirchhoff-Routh function.**, Proc. Natl Acad. Sci. 27, 570-575., 1941.

[8] NEHARI ZEEV. **Conformal mapping**, University Pittsburgh, Pennsylvania, 1975.

[9] BAKER, H. **Abelian functions**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[10] MARSHALL JONATHAN. **Function theory in multiply connected domains and applications to fluid dynamics**, University of London, 2005.

[11] SAKAJO TAKASHI. **Equation of motion for point vortices in multiply connect circular domains**, Departament of mathematics, Hokkaido University, 2009.

[12] SURANA AMIT and CROWDY DAREN. **Vortex dynamics in complex domains on a spherical surface**, Departament of mechanical engineering, Massachusetts Institute of Technology, 2008.

[13] GOLUZIN, G. M. **Geometric Theory of Functions of a Complex Variable**, AMS Monographs, AMS, 1959.

[14] HELMHOLTZ, H. **On integrals of the hydrodynamical equations with express vortex-motion**, Philos.Mag, **33** (4), 1867.

[15] KIRCHHOFF, G. **Vorlensungen uber matematische physik**, third edition, Teubner, Leipzig, 1883.

[16] GROBLI, W. **Spezielle probleme uber die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden**, Zürcher und Furrer, 1877.

[17] AREF, H. **Motion of three vortices**, Phys.Fluids, 22:393-400, 1979.

[18] NOVIKOV, E. A. **Dynamics and statistics of a system of vortices**, Zh.Eksp.Teor.Fiz, 68, 1975.Sov.Phys-JETP, 41 (5): 937-943, 1975.

[19] KIMURA, Y. **Vortex motion on surfaces with constante curvature**, Proc.R.Soc.London, A 445:245-259, 1999.