



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

**Mauri Cristiano da Silva Faria**

CONTINUIDADE ABSOLUTA DE MEDIDAS ERGÓDICAS PARA  
TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS E ATRADORES  
SOLENOIDAIIS GORDOS

Recife  
2018

**Mauri Cristiano da Silva Faria**

**CONTINUIDADE ABSOLUTA DE MEDIDAS ERGÓDICAS PARA  
TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS E ATRATORES  
SOLENOIDAIIS GORDOS**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração:** Sistema Dinâmicos.

**Orientador(a):** Prof. Ricardo Turolla Bortolotti.

Recife  
2018

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

F224c Faria, Mauri Cristiano da Silva  
Continuidade absoluta de medidas ergódicas para transformações  
expansoras e atratores solenoidais gordos / Mauri Cristiano da Silva Faria. –  
2018.  
85 f.: il., fig.  
  
Orientador: Ricardo Turolla Bortolotti.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,  
Matemática, Recife, 2018.  
Inclui referências e apêndice.  
  
1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Teoria ergódica. I. Bortolotti,  
Ricardo Turolla (orientador). II. Título.  
  
510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2019-104

**MAURI CRISTIANO DA SILVA FARIA**

**CONTINUIDADE ABSOLUTA DE MEDIDAS ERGÓDICAS PARA  
TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS E ATRATORES SOLENOIDAIIS GORDOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 27/07/2018.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Ricardo Turolla Bortolotti (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto (Examinador Externo)  
Universidade Federal da Paraíba

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, "Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas" (Romanos 11.36a).

Agradeço à minha família, pela paciência, amor, apoio e afeto que tanto me deram durante esta jornada, sobretudo nos momentos mais difíceis. Agradeço também a minha família em Cristo, aos pastores, obreiros, servos de Deus que através de suas orações, palavras e atitudes que ajudaram a me fortalecer durante toda essa jornada.

Agradeço aos meus professores, pelo empenho e por cada lição aprendida nas respectivas disciplinas. Em particular, agradeço ao meu orientador, o professor doutor Ricardo Bortolotti, pela grande paciência, dedicação e assistência dadas antes, durante e depois da elaboração deste trabalho.

Agradeço também aos professores doutores Carlos Bocker Neto e César Augusto Rodrigues Castilho, pela disposição na avaliação e revisão do trabalho, bem como às devidas correções.

Agradeço aos meus colegas da Universidade, pelo apoio dado durante as disciplinas, pelas excelentes conversas e discussões (muitas delas cheias de alegria e ciência) e pela oportunidade de partilhar cada momento vivido ao longo do curso de mestrado.

Agradeço também à sala 214, pelo acolhimento feito à minha pessoa durante maior parte do mestrado. Em especial, agradeço à Michelle por ter sido a responsável por me introduzir à sala, por me ajudar tanto (e mais um tanto) nessa vida acadêmica da UFPE e por ter contribuído como pessoa, como cristã e como amiga nas mais diversas situações. Aproveito também para agradecer a Estevan e sua "metade da carne" Ana Beatriz, pelas conversas, conselhos e pelas dúvidas tiradas em algumas situações, agradeço a André Pacheco, pelos momentos de descontração e incentivo às discussões referentes às disciplinas.

Agradeço também a Tiago Amorim (mais conhecido como "*Nash*"), pelas questões "na medida". também aos demais colegas e amigos que presenciaram a defesa do trabalho, são eles: Ana Cristina, Pedro, Romero, Fábio e Élida. Agradecimentos também a ilustre presença do doutor Sinval, e também do professor doutor Felipe Wergette.

Agradeço também a todos que me incentivaram e estiveram sempre torcendo por mim durante todos esses anos e, em particular, na vida acadêmica. Que Deus os abençoe grandemente.

Agradecimento também à Capes, pelo apoio financeiro fornecido durante todo o período de vigência do mestrado.

# RESUMO

Neste trabalho, nós estudamos a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para transformações expansoras e atratores solenoidais gordos. Antes disso, estudamos conceitos fundamentais de Teoria Ergódica, como o Teorema ergódico de Birkhoff, ergodicidade e sistemas misturadores. Em seguida, abordaremos a existência de medidas invariantes para uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. O objetivo será analisar as propriedades agregadas a esses aspectos em relação às medidas invariantes e ergódicas, para então estabelecemos um critério de continuidade absoluta para a medida de Lebesgue e demonstramos que toda transformação expansora, numa variedade compacta, cujo Jacobiano é Hölder, admite uma única medida invariante absolutamente contínua, a qual é ergódica e é medida física. Após isso, fornecemos uma condição geométrica de transversalidade para atratores solenoidais gordos, que é suficiente para garantir a continuidade absoluta da medida SRB do atrator. E, por fim, exibiremos dois exemplos: o primeiro exemplo corresponde a atratores para os quais não há medida invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, o segundo exemplo corresponde a atratores para os quais a medida SRB é absolutamente contínua à medida de Lebesgue.

**Palavras-chave:** Teoria ergódica. Medidas absolutamente contínuas. Transformações expansoras. Atratores solenoidais.

# ABSTRACT

In this work, we have studied the existence of absolutely continuous invariant measures for expansive transformations and fat solenoid attractors. Before that, we study fundamental concepts of Ergodic Theory, such as Birkhoff's ergodic theorem, ergodicity, and mixer systems. Next, we will discuss the existence of invariant measures for a continuous transformation into a compact metric space. The objective will be to analyze the properties added to these aspects in relation to the invariants and ergodic measures, for which we establish a criterion of absolute continuity for the Lebesgue measure and show that any expansive transformation, in a compact manifold whose Jacobian is Hölder, admits a single absolutely continuous invariant measure, which is ergodic and is physical measurement. After that, we provide a cross-sectional geometric condition for fat solenoid attractors, which is sufficient to ensure the absolute continuity of the SRB measure of the attractor. And finally, we will show two examples: the first example corresponds to attractors for which there is no absolutely continuous invariant measure to the Lebesgue measure, the second example corresponds to attractors for which the SRB measure is absolutely continuous as measured by Lebesgue.

**Keywords:** Ergodic theory. Absolutely continuous measures. Expansive transformations. Solenoidal attractors.

# SUMÁRIO

|       |                                                                  |    |
|-------|------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                             | 8  |
| 2     | MEDIDAS INVARIANTES . . . . .                                    | 11 |
| 2.1   | Transformações expansoras lineares . . . . .                     | 12 |
| 2.2   | Teorema Ergódico de Birkhoff . . . . .                           | 15 |
| 2.3   | Ergodicidade via conjuntos e funções invariantes . . . . .       | 22 |
| 2.4   | Propriedades das medidas ergódicas . . . . .                     | 28 |
| 2.5   | Sistemas misturadores . . . . .                                  | 31 |
| 3     | TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E DE CONTINUIDADE ABSOLUTA                | 34 |
| 3.1   | Topologia fraca* . . . . .                                       | 35 |
| 3.2   | Existência de medidas invariantes . . . . .                      | 42 |
| 3.3   | Primeiro critério de continuidade Absoluta . . . . .             | 45 |
| 3.4   | Medidas A.C. para transformações expansoras . . . . .            | 47 |
| 3.4.1 | Ramos inversos contrativos . . . . .                             | 51 |
| 3.4.2 | Lema de distorção e consequências . . . . .                      | 53 |
| 3.4.3 | Demonstração do teorema . . . . .                                | 55 |
| 4     | ATRADORES SOLENOIDAIS GORDOS . . . . .                           | 61 |
| 4.1   | Descrição simbólica da medida SRB . . . . .                      | 63 |
| 4.2   | Segundo critério para a continuidade absoluta de $\mu$ . . . . . | 70 |
| 4.3   | Transversalidade . . . . .                                       | 73 |
| 4.4   | Demonstração do teorema 4.3 . . . . .                            | 79 |
| 4.5   | 2 exemplos . . . . .                                             | 80 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                                            | 82 |
|       | APÊNDICE A – ALGUNS FATOS IMPORTANTES . . . . .                  | 83 |

# 1 INTRODUÇÃO

A teoria ergódica consiste no ramo da matemática que estuda sistemas dinâmicos (aqui entendidos como transformações  $T : M \rightarrow M$ , em algum espaço  $M$ ) munidos de medidas invariantes. A palavra ergódico possui origem em duas palavras gregas:  $\acute{\epsilon}\rho\gamma\omicron\nu$  (ergon), que significa “trabalho” e  $\acute{o}\delta\omicron\varsigma$  (hodos), que significa “caminho”. Na teoria ergódica, estudamos também o problema da possibilidade de determinar valores médios de funções associadas à descrição dos sistemas.

O termo *teoria ergódica* teve origem na teoria cinética dos gases, desenvolvida no século 19 pelos físicos Boltzmann, Maxwell e Gibbs. A partir dos trabalhos realizados em sistemas que eram descritos por um fluxo hamiltoniano. Acreditando que as órbitas desses fluxos hamiltonianos preenchem toda a superfície de energia, Boltzmann propôs deduzir as propriedades experimentais dos gases na natureza a partir de uma análise estatística de toda a população de suas moléculas, mais precisamente, Boltzmann deduziu que os tempos médios de visita das grandezas observáveis (que no caso, eram funções) ao longo das suas órbitas coincidem com a média espacial dessas grandezas ao longo das superfícies de energia.

Apesar da hipótese assumida por Boltzmann ser falsa, ao longo do tempo, tornou-se comum denotar por *hipótese ergódica* a dedução consequente, isto é, assumir a *hipótese ergódica* significa assumir que as médias temporais e espaciais dentro de um sistema dinâmico coincidem. Pode-se dizer que boa parte da Teoria ergódica e o seu desenvolvimento no século 20 ocorreram em volta das soluções para as seguintes perguntas: “*Em quais sistemas é válida a hipótese ergódica? E em quais sistemas a hipótese ergódica não é válida?*”.

Atualmente, as aplicações da Teoria ergódica têm sido vistas e feitas em áreas das mais diversas, sejam em Teoria dos Números (destacamos a proposição 2.22) e Topologia, até mesmo aplicações em Estatística e Probabilidade. Podemos observar essas aplicações na demonstrações dos Teorema de Szemerédi, Van der Waerden, de Green-Tao e também na “versão ergódica” do teorema central do limite.

O estudo de medidas invariantes é necessário dentro do contexto da teoria ergódica, pois muitos dos fenômenos da natureza e ciências experimentais são modelados por sistemas dinâmicos que preservam alguma medida importante, por exemplo: os sistemas hamiltonianos, que correspondem a fluxos que preservam a medida de Liouville. Um problema interessante da Teoria ergódica é demonstrar que um sistema preserva uma medida absolutamente contínua, como é o caso da medida de Liouville.

Um outro aspecto importante acerca do estudo das medidas invariantes é a possibilidade de obtermos informações estatísticas sobre o comportamento da dinâmica dos sistemas. O teorema ergódico de Birkhoff (teorema 2.9), por exemplo, nos garante que se uma (medida de) probabilidade  $\mu$  é invariante por alguma transformação  $T : M \rightarrow M$ , a hipótese ergódica se verifica em  $\mu$ —quase todo ponto  $x \in M$ .

Neste trabalho, nosso objetivo é tratar da existência de medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue, para transformações diferenciáveis em espaços métricos compactos. Em especial, o nosso estudo tratará das transformações expansoras em variedades compactas, provando o Teorema de existência e unicidade de medidas ergódicas absolutamente contínuas para transformações expansoras (Teorema 3.26). O estudo tratará de atratores solenoidais que admitem uma medida ergódica absolutamente contínua, chamados de atratores solenoidais gordos.

O **capítulo 1** deste trabalho abordará alguns resultados importantes das medidas invariantes, com destaque para o Teorema ergódico de Birkhoff (teorema 2.11) e uma de suas aplicações na teoria dos números (proposição 2.22). O capítulo também introduzirá o conceito de ergodicidade de uma medida e fornecerá várias condições equivalentes para essa ergodicidade (proposição 2.16). Na seção 1.5, definiremos também o conceito de sistemas misturadores, observaremos que esses sistemas também são ergódicos e provaremos que o sistema formado por uma transformação expansora linear de grau  $k$ ,  $k \geq 2$  e a medida de Lebesgue constituem um sistema misturador (proposição 2.29).

No **capítulo 2**, abordaremos a existência de medidas invariantes para uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. O objetivo será analisar as propriedades agregadas a esses aspectos em relação às medidas invariantes e ergódicas, para então provarmos os dois resultados principais do capítulo (os teoremas 3.12 e 3.26). O primeiro teorema garante a existência de medidas de probabilidade invariantes para transformações contínuas enquanto que o segundo teorema garante que, para transformações expansoras cujo jacobiano é Hölder, existe uma única medida ergódica que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. A condição do jacobiano ser Hölder no teorema 3.26 permite obtermos um controle de distorção (proposição 3.31), o qual será fundamental para garantir a continuidade absoluta.

O teorema 3.26 e toda a teoria que é necessária para embasá-lo, desenvolvida nas seções 2.3 e 2.4, servem de motivação para o **capítulo 3**, onde faremos o estudo do artigo *Fat Solenoidal Attractors* de Tsujii [4], no qual um outro critério de continuidade absoluta é aplicado para atratores solenoidais (teorema 4.3). Nesse sentido, o objetivo do estudo no capítulo 3 é fornecer uma condição suficiente para a continuidade absoluta da medida SRB do atrator, distintos correspondendo a uma condição geométrica de transversalidade

entre as sobreposições das imagens do atrator. A condição geométrica de transversalidade é dada na definição 4.15. E, por fim, exibiremos dois exemplos que ilustram dois comportamentos dos mapas  $T$ : o primeiro exemplo corresponde a atratores para os quais não há medida invariante absolutamente contínua, o segundo exemplo corresponde a atratores para os quais a medida SRB é absolutamente contínua.

## 2 MEDIDAS INVARIANTES

A teoria ergódica é a área da matemática que estuda os sistemas dinâmicos sob um ponto de vista estatístico. A principal noção desta área é a de medida invariante, a qual tomamos como ponto de partida deste trabalho.

Iniciaremos o estudo partindo de um conteúdo que será bastante requerido no desenvolvimento dos capítulos subsequentes, principalmente no que se diz respeito às hipóteses dos teoremas que serão abordados. Assim, começaremos definindo o que vem a ser uma medida invariante em um espaço de medida.

**Definição 2.1.** *Sejam  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  espaço de medida e  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável, dizemos que a medida  $\mu$  é  $T$ -invariante se*

$$\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)) \quad \forall E \subset M \text{ mensurável} \quad (2.1)$$

**Observação 2.2.**  *$T$  é uma transformação mensurável se, e somente se,  $T^{-1}(E)$  é mensurável para todo  $E \subset M$  mensurável, portanto a equação (2.1) está bem definida. Nesse caso, também dizemos que  $T$  preserva  $\mu$ .*

Diante da definição acima e de alguns resultados que são vistos em teoria da medida, podemos enunciar a seguinte proposição, que nos fornece uma equivalência para a definição.

**Proposição 2.3.** *Sejam  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida em  $M$ . Então  $T$  preserva  $\mu$  se, e somente se,*

$$\int g \, d\mu = \int g \circ T \, d\mu \quad (2.2)$$

para toda função  $\mu$ -integrável  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Prova:* Suponha que  $\mu$  é invariante. Temos que vale a relação da definição, isto é,

$$\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

para todo  $B$  mensurável. Mas,

$$\int_M \chi_B \, d\mu = \mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \int_M \chi_{T^{-1}(B)} \, d\mu = \int_M \chi_B \circ T \, d\mu$$

Em virtude da igualdade acima, temos então que o resultado segue para funções características.

Por linearidade, concluímos que o mesmo vale para funções simples, já que essas funções são combinações lineares de funções características e a integral é um operador linear.

Agora, para provar que vale para qualquer função integrável, usaremos um argumento de aproximação: considere uma sequência  $(s_n)$  de funções simples convergindo para uma função  $g$  integrável qualquer de tal modo que  $|s_n| \leq |g|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal sequência existe em virtude de  $g$  ser  $\mu$ -integrável. A partir daí, aplicando o teorema da convergência dominada (teorema A.8) duas vezes temos que

$$\int_M g \, d\mu = \lim \int s_n \, d\mu = \lim \int_M s_n \circ T \, d\mu = \int_M g \circ T \, d\mu$$

Logo temos que o resultado é válido para todas medidas  $\mu$   $T$ -invariantes.

A recíproca é válida e segue tomando  $g = \chi_E$ ,

$$\mu(T^{-1}(E)) = \int \chi_{T^{-1}(E)} \, d\mu = \int \chi_E \circ T \, d\mu = \int \chi_E \, d\mu = \mu(E).$$

□

Antes de darmos procedência aos resultados principais deste capítulo, vamos estudar um exemplo importante de transformação que preserva medida e que também servirá de exemplo para os resultados do capítulo 2.

## 2.1 Transformações expansoras lineares

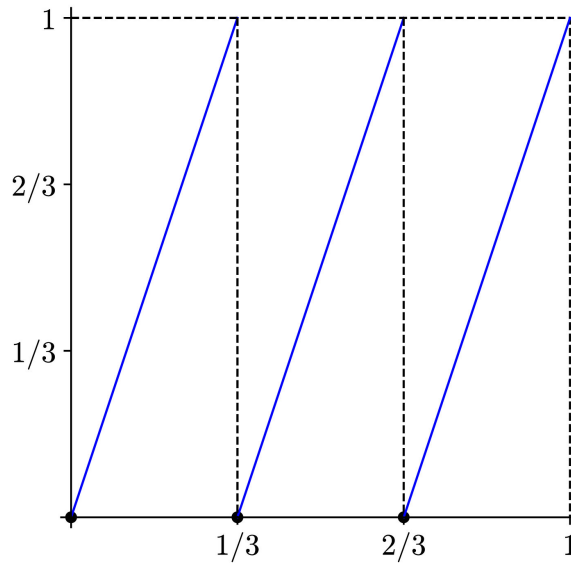
Vamos considerar a transformação  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por:

$$T(x) = kx - [kx] \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

onde  $[kx]$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $kx$ ,  $k \geq 2$  e  $\mu$  é a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$ .  $T$  é um exemplo de uma família mais geral de transformações, que são as transformações expansoras e que serão melhor estudadas no Capítulo 2.

**Proposição 2.4.** *A transformação  $T$  descrita acima preserva  $\mu$ , isto é, ela satisfaz a condição (2.1).*

*Prova:* A transformação  $T$  tem relação com a expansão de  $x \in [0, 1]$  na base  $k$ . Vamos considerar a expansão de  $x$  na base  $k$ , com  $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_k$  denotando o número  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{k^i}$ . Observemos que a transformação  $T$  leva um ponto  $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_k$ ,  $x_i \in \{0, \dots, k-1\}$ , no ponto  $T(x) = (0, x_2 x_3 \dots)_k$ . Note que  $T$  "suprime" o primeiro dígito da expansão na base  $k$  de  $x$ .

Figura 1 – Gráfico da transformação  $T$  para  $k = 3$ 

Dessa forma, considerando  $E = [a, b]$  com  $a = 0, a_1 a_2 \dots$  e  $b = 0, b_1 b_2 \dots$ , vemos então que o conjunto  $T^{-1}(E)$  dos pontos cuja imagem pertence a  $E$  são todos os pontos entre  $a_j = 0, j a_1 a_2 \dots$  e  $b_j = 0, j b_1 b_2 \dots$  para algum  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Mais precisamente, definindo  $T_j^{-1}(E) = \{x \in [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}] : a_j \leq x \leq b_j\}$  temos que

$$T^{-1}(E) = \bigcup_{j=0, \dots, k} T_j^{-1}(E).$$

Por um lado, a medida de Lebesgue de  $T_j^{-1}(E)$  é  $k$  vezes menor que a medida de  $E$  (ou seja,  $\mu(T_j^{-1}(E)) = \frac{1}{k} \cdot \mu(E)$ ) e, pelas propriedades de medida, segue que

$$\mu(T^{-1}(B)) = k \cdot \mu(T_j^{-1}(E)) = \mu(E).$$

Isto mostra que (2.1) é satisfeita no caso de intervalos. Como consequência, essa relação é satisfeita sempre que  $E$  é uma união finita de intervalos. Agora, a família das uniões finitas de intervalos é uma álgebra que gera a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0,1]$ . A validade da igualdade para todos os subconjuntos mensuráveis seguirá do seguinte fato geral:

**Lema 2.5.** *Sejam  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida finita em  $M$ . Suponha que existe uma álgebra  $\mathcal{A}$  de subconjuntos mensuráveis que geram a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  de  $M$  e  $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$  para todo  $E \in \mathcal{A}$ . Então temos que  $\mu$  é  $T$ -invariante para todo  $E \in \mathcal{B}$ .*

*Demonstração:* Considere  $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \mu(T^{-1}(E))\}$ .

Note primeiramente que, pela definição do conjunto  $\mathcal{D}$  e por hipótese, temos que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ . Provaremos que  $\mathcal{D}$  é uma classe monótona. Com efeito, seja  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  uma sequência crescente de elementos em  $\mathcal{D}$  e  $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$ , como a sequência de conjuntos é encaixada, segue que

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \quad \text{e} \quad \mu(T^{-1}(E)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-1}(E_n)).$$

Como  $E_n \in \mathcal{D}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos que é válida a seguinte igualdade

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-1}(E_n)) = \mu(T^{-1}(E)).$$

Assim,  $E \in \mathcal{D}$ . Analogamente, para uma sequência decrescente de intervalos  $\mathcal{D}$  temos que a interseção está em  $\mathcal{D}$ . Portanto  $\mathcal{D}$  é uma classe monótona e, como  $\mathcal{D}$  contém  $\mathcal{A}$ , segue pelo teorema das classes monótonas (Teorema A.3) que  $\mathcal{D}$  contém a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada por  $\mathcal{A}$ , o que completa a demonstração. ■

A partir do lema acima, como os borelianos estão contidos na  $\sigma$ -álgebra gerada pela família de uniões finitas de intervalos, segue que  $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$  para todo  $E$  boreliano, logo  $T$  preserva a medida  $\mu$  de Lebesgue. □

A seguir, provaremos um resultado (mais geral) que nos fornece uma caracterização da propriedade de preservação de medidas em variedades Riemannianas compactas. Temos então o enunciado

**Proposição 2.6.** *Suponha que  $T : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo local de classe  $C^1$  de uma variedade Riemanniana compacta  $M$ . Seja  $\text{vol}$  a medida de volume em  $M$  e seja  $\rho : M \rightarrow [0, \infty)$  uma função contínua, então  $T$  preserva a medida  $\mu = \rho \text{ vol}$  se, e somente se,*

$$\sum_{x \in T^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|\text{Det}DT(x)|} = \rho(y) \quad \forall y \in M. \quad (2.4)$$

*Prova:* Seja  $d \geq 1$  o grau de  $T$ , ou seja,  $d = \#T^{-1}(y)$  para todo  $y \in M$ . Para cada  $y \in M$  e toda vizinhança suficientemente pequena  $V$ , a pré-imagem  $T^{-1}(V)$  tem  $d$  componentes conexas  $V_1, \dots, V_d$ , tais que cada restrição  $T_j = T|_{V_j}$  é um difeomorfismo

sobre  $V$ . Suponha que  $T$  preserva a medida  $\mu = \rho \text{ vol}$ . Então, pela fórmula de mudança de variáveis (Teorema A.9) aplicado a  $T_j$ :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \, d\text{vol} &= \mu(V) = \mu(T^{-1}(V)) = \sum_{j=1}^d \int_{V_j} \rho \, d\text{vol} = \sum_{j=1}^d \int_V (\rho \circ T_j^{-1}) |DetDT_j^{-1}| d\text{vol} \\ &= \int_V \sum_{j=1}^d (\rho \circ T_j^{-1}) |DetDT_j^{-1}| d\text{vol}. \end{aligned}$$

Note que  $|DetDT_j^{-1}| = 1/|DetDT_j \circ T_j^{-1}|$  e agora fazendo  $V = B(y, r)$  com  $r \rightarrow 0$ , temos que  $\int \rho \, d\text{vol} \rightarrow \rho(y)$  para vol-qtp  $y \in M$ , pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Por outro lado, para todo  $x \in f^{-1}(y)$ , pelo mesmo motivo, temos que

$$\int_{B(y,r)} \sum_{j=1}^d (\rho \circ T_j^{-1}) |DetDT_j^{-1}| \, d\text{vol} \rightarrow \sum_{j=1}^d \frac{(\rho \circ T_j^{-1})}{|DetDT_j \circ T_j^{-1}|}(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|DetDT(x)|}.$$

Assim, a igualdade (2.4) vale para todo vol-qtp  $y \in M$ . Como  $\rho$  é contínuo, segue a igualdade para todo  $y \in M$ .

Reciprocamente, se esta igualdade vale em todo ponto então

$$\mu(V) = \int \rho(y) \, d\text{vol}(y) = \sum_j \int_V \frac{\rho(T_j^{-1}(y))}{|DetDT(T_j^{-1}(y))|} \, d\text{vol}(y) = \sum_j \int_{V_j} \rho \, d\text{vol} \mu(T^{-1}(V)).$$

Para todo conjunto  $V$  com diâmetro suficientemente pequeno. Assim, dado qualquer conjunto mensurável  $E \subset M$  podemos cobrir  $E$  com esses conjuntos  $V$  à medida que  $y$  percorre  $M$ . Logo, deduzimos que  $T$  preserva a medida  $\mu = \rho \text{ vol}$

□

## 2.2 Teorema Ergódico de Birkhoff

Nesta seção, apresentaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff, um dos resultados fundamentais da Teoria Ergódica. Este teorema permite um estudo de propriedades estatísticas do conjunto dos iterados de  $x$ .

Iniciaremos a seção definindo primeiramente o tempo médio de visita de um ponto a um conjunto mensurável.

**Definição 2.7.** Dado  $E \subset M$  um conjunto mensurável, o tempo médio de visita de um ponto  $x \in M$  ao conjunto  $E$  é definido por:

$$\tau(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{j = 0, 1, \dots, n-1 : T^j(x) \in E\} \quad (2.5)$$

**Observação 2.8.** Note que  $0 \leq \tau(x, E) \leq 1$  e que este limite, quando existe, corresponde à frequência de “tempos”  $j$  para os quais  $T^j(x)$  pertence a  $E$ .

**Teorema 2.9.** (*Birkhoff - versão para tempo médio de visita*). Sejam  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável,  $\mu$  uma probabilidade invariante e  $E \subset M$  mensurável, Então  $\tau(x, E)$  existe em  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$ . Além disso,

$$\int \tau(x, E) d\mu = \mu(E) \quad \forall E \subset M \text{ mensurável} \quad (2.6)$$

O teorema ergódico de Birkhoff garante que  $\tau(x, E)$  está bem definido para  $\mu$ -qtp  $x \in M$ .

Outra propriedade importante é que se  $\tau(x, E)$  existe para um certo ponto  $x \in M$ , então corresponde a uma função invariante.

**Lema 2.10.**

$$\tau(x, E) = \tau(T(x), E).$$

*Demonstração:* De fato, temos que

$$\begin{aligned} \tau(T(x), E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_E(T^j(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(T^j(x)) - \frac{1}{n} [\chi_E(x) - \chi_E(T^n(x))] \\ &= \tau(x, E) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\chi_E(x) - \chi_E(T^n(x))] \\ &= \tau(x, E). \end{aligned}$$

■

O teorema 2.9 segue de uma versão mais geral do teorema ergódico de Birkhoff, o qual enunciaremos e demonstraremos a seguir:

**Teorema 2.11.** (*Birkhoff- versão para média temporal*) Sejam  $T : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma probabilidade invariante. Dada qualquer função  $\mu$ -integrável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , o limite

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \quad (2.7)$$

existe em  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$ . Além disso, a função  $\tilde{\varphi}$  é  $\mu$ -integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x). \quad (2.8)$$

Chamamos o limite  $\tilde{\varphi}$  de média temporal de  $\varphi$  ao longo da órbita de  $x$  e  $\int \varphi(x) d\mu(x)$  de média espacial de  $\varphi$ .

*Demonstração do Teorema 2:* Começamos por provar a existência (em  $\mu$ -qtp) do limite (2.7). Sabemos que toda função pode ser escrita como diferença de duas funções não negativas. Logo, podemos sem restrição, supor  $\varphi \geq 0$ . Consideramos as funções

$$\varphi^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \quad \text{e} \quad \varphi_*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)),$$

e então basta mostrar que

$$\int \varphi^* d\mu \leq \int \varphi d\mu \leq \int \varphi_* d\mu, \quad (2.9)$$

pois, a partir de (2.9) temos que  $\int \varphi^* - \varphi_* d\mu \leq 0$  e, como  $\varphi^* - \varphi_* \geq 0$ , segue-se então que  $\varphi^* - \varphi_* \equiv 0$  (portanto  $\varphi^* = \varphi_*$ ) em  $\mu$ -qtp, que é a conclusão pretendida.

Para provar a primeira desigualdade em (2.9), introduzimos  $\varphi_K^* = \min \{\varphi^*, K\}$ , onde  $K \in \mathbb{N}$  é um inteiro fixado (grande). Vamos demonstrar que  $\int \varphi d\mu \geq \int \varphi_K^* d\mu$ . Para isso, fixamos  $\epsilon > 0$  (pequeno) e para cada  $x \in M$ , definimos

$$q(x) = \min \left\{ n \geq 1 : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \geq \varphi_K^* - \epsilon \right\}$$

Observe que  $q(x)$  sempre existe (por definição de lim sup e porque  $\varphi^* \geq \varphi_K^*$ ) e depende dos números  $K$  e  $\epsilon$  fixados, embora omitiremos os índices  $K$  e  $\epsilon$  da notação. Além disso, percebe-se que, pela definição de  $q(x)$ , temos que para  $n \geq q(x)$ , vale

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \geq q(x) (\varphi_K^* - \epsilon). \quad (2.10)$$

Agora, escolhemos  $S \in \mathbb{N}$  grande tal que o conjunto

$$E = \{x \in M : q(x) > S\}$$

tenha medida  $\mu(E) \leq \epsilon/K$ . Tal escolha é possível, pois a família dos conjuntos

$$E_n = \{x \in M : q(x) = n\}$$

forma uma partição do espaço mensurável  $M$ . Logo, tem-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(M) = 1$  e, portanto,  $\mu(E) = \sum_{n>S} \mu(E_n) \leq \epsilon/K$  para  $S$  suficientemente grande.

Agora para cada  $x \in M$  e  $n \geq 1$  definimos as sequências  $x_i$  (de iterados de  $x$ ) e  $q_i$  (de inteiros positivos) da seguinte maneira:

1. Tomamos  $x_0 = x$ .
2. Suponhamos que  $x_i$  já foi definido. Para a definição de  $q_i$  e de  $x_{i+1}$  temos duas possibilidades:
  - a) Se  $q(x_i) \leq S$ , então tomamos  $q_i = q(x_i)$  e  $x_{i+1} = T^{q_i}(x_i)$
  - b) Se  $q(x_i) > S$ , então tomamos  $q_i = 1$  e  $x_{i+1} = T(x_i) (= T^{q_i}(x_i))$ .
3. Encerramos a iteração quando encontramos  $x_s$  tal que  $q_0 + q_1 + \dots + q_{s-1} + q_s \geq n$ .

Observamos que em qualquer uma das situações (a) ou (b) temos que a definição de  $q_s$  e o fato de  $S \geq 1$  implicará que

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{s-1} \geq n - S. \quad (2.11)$$

Para o caso (a) temos que, por (2.10), obtemos (trocando-se  $n$  por  $q_i$  e  $x$  por  $x_i$ )

$$\sum_{j=0}^{q_i-1} (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \geq \sum_{j=0}^{q_i-1} \varphi(T^j(x_i)) \geq q_i(\varphi_K^*(x_i) - \epsilon) = q_i(\varphi_K^*(x) - \epsilon), \quad (2.12)$$

onde a última igualdade segue de que  $\varphi_K^*(T(y)) = \varphi_K^*(y)$  para todo  $y$  (mostraremos na proposição seguinte o mesmo resultado valendo para  $\tilde{\varphi}$ ). Por outro lado, no caso (b), temos

$$\sum_{j=0}^{q_i-1} (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) = \varphi(x_i) + K \geq K \geq q_i(\varphi_K^*(x) - \epsilon), \quad (2.13)$$

então, denotando  $v = q_0 + \dots + q_{s-1}$  apenas para reduzir as expressões, e usando as equações (2.12), (2.13) e (2.11):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)(T^j(x)) &= \sum_{\alpha=0}^{s-1} \left( \sum_{j=0}^{q_{\alpha}-1} (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \right) \\ &\quad + \sum_{j=v}^{n-1} (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \\ &\geq \left( \sum_{\alpha=0}^{s-1} q_{\alpha} \right) (\varphi_K^*(x) - \epsilon) + 0 \geq (n - S)(\varphi_K^*(x) - \epsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Integrando o primeiro e o último membros (observar que, uma vez que a medida  $\mu$  é  $T$ -invariante, tem-se  $\int (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E) \circ T^j d\mu = \int (\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E) d\mu$  para todo  $j \geq 0$ ):

$$n \left( \int \varphi d\mu + K\mu(E) \right) \geq (n - S) \left( \int \varphi_K^* d\mu - \epsilon \right).$$

Dividindo ambos os termos por  $n$ , fazendo  $n \rightarrow \infty$  e lembrando que  $K\mu(E) < \epsilon$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu &\geq \int \varphi_K^* d\mu - 2\epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0 \\ \text{e portanto } \int \varphi d\mu &\geq \int \varphi_K^* d\mu. \end{aligned}$$

Então, passando ao limite quando  $K \rightarrow \infty$  (notar que a sequência  $\varphi_K^*$  converge monotonicamente para  $\varphi^*$ ) obtemos

$$\int \varphi d\mu \geq \int \varphi^* d\mu.$$

como queríamos.

A segunda desigualdade em (2.9) é provada de modo muito semelhante, apenas indicamos as diferenças com relação ao caso anterior. Consideramos

$$q(x) = \min \left\{ n \geq 1 : \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \geq \varphi_* + \epsilon \right\}$$

e definimos  $x_i, q_i$  do mesmo modo que antes. Tomamos  $E$  como atrás foi definido mas com  $S$  fixado de tal modo que

$$\int_E \varphi d\mu \leq \epsilon \tag{2.15}$$

Aplicando a  $(\varphi - \varphi \circ \mathcal{X}_E)$  o mesmo tipo de cálculo que usamos em (2.12), (2.13), (2.14) para a função  $(\varphi + K \cdot \mathcal{X}_E)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi - \varphi \circ \mathcal{X}_E)(T^j(x)) &= \sum_{\alpha=0}^{s-1} \left( \sum_{j=0}^{q_{\alpha}-1} (\varphi - \varphi \circ \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \right) + \sum_{j=v}^{n-1} (\varphi - \varphi \circ \mathcal{X}_E)(T^j(x_i)) \\ &\leq \left( \sum_{\alpha=0}^{s-1} q_i \right) (\varphi_* + \epsilon) + \sum_{j=v}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \\ &\leq n(\varphi_* + \epsilon) + \sum_{j=v}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Integrando, temos que (lembre que  $n - v \leq S$  por (2.11))

$$n \left( \int \varphi d\mu - \int_E \varphi d\mu \right) \leq n \left( \int \varphi_* d\mu + \epsilon \right) + M \int \varphi d\mu.$$

Dividindo ambos os termos por  $n$ , fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando (2.15)

$$\int \varphi d\mu \leq \int \varphi_* d\mu + \epsilon + \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Portanto

$$\int \varphi d\mu \leq \int \varphi_* d\mu \leq \int \varphi^* d\mu \leq \int \varphi d\mu.$$

Assim, concluímos que o limite  $\phi^*$  existe em  $\mu$ -qtp, também concluímos que  $\varphi^* = \varphi_* = \tilde{\varphi}$  em  $\mu$ -qtp e que vale a igualdade:

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi_* d\mu = \int \varphi^* d\mu = \int \varphi d\mu.$$

■

Uma consequência imediata do Teorema 2.11 é o Teorema 2.9, o qual segue tomando  $\phi = \mathcal{X}_E$ .

*Demonstração do Teorema 1:* Diante do Teorema acima, basta que tomemos  $\varphi = \mathcal{X}_E$ . Com efeito, percebe-se que

$$\begin{aligned} \tau(x, E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{j = 0, 1, \dots, n-1 : T^j(x) \in E\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(T^j(x)) = \tilde{\varphi}(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\int \tau(x, E) d\mu = \int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu = \int \mathcal{X}_E d\mu = \mu(E).$$

■

A função  $\tilde{\varphi}$ , cuja existência em  $\mu$ -qtp é garantida pelo Teorema 2.11, é invariante.

**Proposição 2.12.** *Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mu$ -integrável. Então*

$$\tilde{\varphi}(T(x)) = \tilde{\varphi}(x) \quad \text{para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in M. \quad (2.17)$$

*Prova:* Pela definição de  $\tilde{\varphi}$ , temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(T(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(T^j(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) + \frac{1}{n} [\varphi(T^n(x)) - \varphi(x)] \\ &= \tilde{\varphi}(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(T^n(x)) - \varphi(x)].\end{aligned}$$

Para concluirmos a prova, basta mostrar que o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(T^n(x))] = 0$  em  $\mu$ -qtp, o qual faremos isso no seguinte lema:

**Lema 2.13.** *Se  $\varphi$  é uma função  $\mu$ -integrável então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(T^n(x))] = 0$  para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$*

*Demonstração:* Dado  $\epsilon > 0$ , Como  $\mu$  é invariante, temos

$$\begin{aligned}\mu(T^{-n}(\varphi^{-1}[n\epsilon, \infty))) &= \mu(\varphi^{-1}[n\epsilon, \infty)) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in M : k \leq \frac{|\varphi(x)|}{\epsilon} < k+1\right\}\right).\end{aligned}$$

E, somando sobre todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(\varphi^{-1}[n\epsilon, \infty))) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mu\left(\left\{x \in M : k \leq \frac{|\varphi(x)|}{\epsilon} < k+1\right\}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi(x)|}{\epsilon} \cdot \mu\left(\left\{x \in M : k \leq \frac{|\varphi(x)|}{\epsilon} < k+1\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{k \leq \frac{|\varphi(x)|}{\epsilon} < k+1\}} |\varphi| d\mu \cdot \frac{1}{\epsilon} \\ &\leq \int |\varphi| d\mu \cdot \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

E daí, como  $\varphi$  é integrável, segue que as somas são finitas, o que implica que  $\mathcal{B}_\epsilon := \{x \in M : \varphi(T^n(x)) \geq n\epsilon \text{ para infinitos valores de } n\}$  tem medida nula, pelo Lema de Borel-Cantelli (lema A.4). A partir da definição de  $\mathcal{B}_\epsilon$  temos que para  $x \notin \mathcal{B}_\epsilon$  existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq p \Rightarrow \varphi(T^n(x)) < n\epsilon$ . Agora tome o conjunto  $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_{1/j}$ . Então,  $\mathcal{B}$  tem medida nula e para todo  $x \notin \mathcal{B}$ , vale que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(T^n(x))] = 0$ . ■

O resultado segue do lema acima, uma vez que o limite do lado direito em (2.18) é igual a 0 para  $\mu$ -qtp.

□

O teorema ergódico também afirma que  $\int \tau(x, E) d\mu = \mu(E)$ . Existem medidas para as quais vale  $\tau(x, E) = \mu(E)$  para  $\mu$ -qtp, tais medidas são chamadas de medidas ergódicas.

**Definição 2.14.** Dizemos que  $\mu$  é uma medida ergódica para  $f$  (ou  $f$  diz-se ergódica relativamente a  $\mu$ ) se dado qualquer conjunto mensurável  $E$ , temos que  $\tau(x, E) = \mu(E)$  em  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$ .

Em outras palavras, a medida  $\mu$  é ergódica para  $T$  se o tempo médio de visita a qualquer conjunto mensurável coincide, em  $\mu$ -quase todo ponto, com a medida desse conjunto. Esta noção, chamada de *ergodicidade*, será o objeto de estudo da seção seguinte.

## 2.3 Ergodicidade via conjuntos e funções invariantes

Nesta seção, estudaremos a ergodicidade das medidas, veremos as definições equivalentes de medida ergódica, como construir conjuntos invariantes a partir de um dado conjunto mensurável e mostraremos que a medida de Lebesgue é ergódica para as transformações expansoras lineares vistas na seção (1.1).

Começamos definindo função e conjunto invariante conforme abaixo:

**Definição 2.15.** Dizemos que uma função mensurável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  é  $T$ -invariante se  $\varphi = \varphi \circ T$  em  $\mu$ -quase todo ponto.

Dizemos que um conjunto mensurável  $B \subset M$  é  $T$ -invariante se sua função característica  $\chi_B$  é uma função  $T$ -invariante.

Note que se  $B$  é um conjunto invariante, então a condição  $\chi_B(x) = \chi_B(T(x))$  garante que  $T(x) \in B$  se, e somente se,  $x \in B$ , o que ilustra a invariância do conjunto. Existem diversas formas equivalentes de se definir ergodicidade, conforme a proposição abaixo:

**Proposição 2.16.** Seja  $\mu$  uma probabilidade invariante de uma transformação mensurável  $T : M \rightarrow M$ . As seguintes condições são equivalentes

a)  $\mu$  é ergódica (isto é,  $\tau(\cdot, E) = \mu(E)$  para  $\mu$ -qtp  $x \in M$  e  $\forall B \subset M$  mensurável.);

b) Para todo  $B \subset M$  mensurável a função  $\tau(\cdot, B)$  é constante. Isto é, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\tau(\cdot, B) = c$  em  $\mu$ -quase todo ponto.

c) Para toda função integrável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}$  é constante em  $\mu$ -quase todo ponto.

d) Para toda função integrável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que  $\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$  para  $\mu$ -quase todo ponto.

e) Para toda função integrável invariante  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se que  $\psi(x) = \int \psi d\mu$  para  $\mu$ -quase todo ponto.

f) Para toda função integrável invariante  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se que  $\psi(x)$  é constante em  $\mu$  quase todo ponto.

g) Para toda  $A \subset M$  invariante temos que  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ .

*Demonstração:* Demonstraremos separadamente algumas implicações entre os itens.  
 $a) \Rightarrow b)$ : A implicação é imediata, pois  $\tau(x, B) = \mu(B)$ , por definição.

$d) \Rightarrow c)$ : A implicação também é imediata em virtude de que  $\tilde{\varphi}$  será constante igual a  $\int \varphi d\mu$  para  $\mu$ -qtp.

$e) \Rightarrow f)$ : A implicação ocorre pelo mesmo motivo que  $d) \Rightarrow c)$ .

$e) \Rightarrow d)$ : Note que  $\tilde{\varphi}$  é integrável e invariante e, portanto  $\tilde{\varphi} = \int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$ , aonde a última igualdade segue do teorema de Birkhoff (Teorema 2.11).

$f) \Rightarrow c)$ : Pelo mesmo motivo de  $e) \Rightarrow d)$ .

$d) \Rightarrow a)$ : Tome  $\varphi = \chi_B$ , então  $\tau(x, B) = \tilde{\varphi}(x) = \int \chi_B d\mu = \mu(B)$  para  $\mu$ -qtp  $x$ .

$c) \Rightarrow b)$ : Pelo mesmo motivo de  $d) \Rightarrow a)$ .

$b) \Rightarrow g)$ : Seja  $A$  é um conjunto invariante, então  $T(x) \in B$  se, e somente se,  $x \in B$ , isso implica que  $\tau(x, A) = 1$  para todo  $x \in A$  e  $\tau(x, A) = 0$  para todo  $x \in A^c$ . Como, por hipótese, a função  $\tau(\cdot, A)$  é constante em quase todo ponto, temos que  $\mu(A) = 0$  ou

$$\mu(A) = 1.$$

$g) \Rightarrow e)$ : Seja  $\psi$  uma função integrável invariante, então o conjunto

$$B_c = \{x \in M : \psi(x) \leq c\}$$

é invariante (perceba que  $T(x) \in B_c$  se, e somente se,  $x \in B_c$ , logo  $\mathcal{X}_{B_c} = \mathcal{X}_{T^{-1}(B_c)} = \mathcal{X}_{B_c} \circ T$ ). Logo, a hipótese implica que  $\mu(B_c) = 0$  ou  $\mu(B_c) = 1$  para todos  $c \in \mathbb{R}$ . Como  $c \mapsto \mu(B_c)$  é não-decrescente, segue que existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $\mu(B_c) = 0$  para todos  $c < d$  e  $\mu(B_c) = 1$  para todos  $c \geq d$ . Então  $\psi$  é constante igual a  $d$  em  $\mu$ -qtp, pois para  $c < d$  temos  $\mu(B_c^c) = 1$ , logo  $\psi(x) = d$  ocorre em  $\mu$ -qtp.  $\square$

A seguir, exibiremos um resultado que fornece informações úteis sobre conjuntos invariantes, às quais faremos menção posteriormente.

**Proposição 2.17.** *Suponha que  $T : M \rightarrow M$  preserva uma probabilidade  $\mu$ . Seja  $B \subset M$  um conjunto mensurável que satisfaz qualquer uma das seguintes condições:*

1.  $\mu(B \setminus T^{-1}(B)) = 0$ ,
2.  $\mu(T^{-1}(B) \setminus B) = 0$ ,
3.  $\mu(B \Delta T^{-1}(B)) = 0$ ,
4.  $B \subset T^{-1}(B)$ .

*Então existe  $C \subset M$  tal que  $T^{-1}(C) = C$  e  $\mu(B \Delta C) = 0$ . Em particular  $C$  é um conjunto invariante.*

*Prova:* Começaremos provando o resultado supondo a condição 4.

Tome  $C = \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(B)$ . A hipótese implica que, os conjuntos  $T^{-j}(B)$  são encaixados e portanto  $\mu(C) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{-j}(B))$  e, em virtude da medida  $\mu$  ser preservada por  $T$ , temos que  $\mu(T^{-j}(B)) = \mu(B)$  para todo  $j$ . Assim, vale que  $\mu(B \Delta C) = 0$ . Agora, vamos verificar que  $C = T^{-1}(C)$ . Para isso, perceba que

$$T^{-1}(C) = \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-(j+1)}(B) = \bigcup_{j=1}^{\infty} T^{-j}(B) = C. \quad (2.19)$$

Na continuação, vamos provar supondo a condição 1 e o procedimento supondo as condições 2 e 3 será análogo.

Tomemos  $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(B) (= \limsup T^{-j}(B))$ ,

para mostrar que  $\mu(B \setminus C) = 0$ , note que  $\mu(B \setminus T^{-n}(B)) = 0$  para todo  $n \geq 0$ , pois

$$B \setminus T^{-n}(B) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(B) \setminus T^{-(i+1)}(B) = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(B \setminus T^{-1}(B))$$

e, portanto,  $\mu(B \setminus T^{-n}(B)) \leq n \cdot \mu(B \setminus T^{-1}(B)) \Rightarrow \mu(B \setminus T^{-n}(B)) = 0 \Rightarrow \mu(B \setminus C) = 0$ .

Agora mostraremos que  $\mu(C \setminus B) = 0$ . Para isso vamos mostrar que  $\mu(C \cap B) = \mu(B) = \mu(C)$ . Perceba que, por  $\mu$  ser preservada por  $T$ , temos que

$$\mu(T^{-n}(B) \cap C) = \mu(T^{-n}(B) \cap T^{-n}(C)) = \mu(T^{-n}(B \cap C)) = \mu(B \cap C) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e sabemos que  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(C) \subset T^{-n}(B) \cap C$ , como também que  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B) \subset T^{-n}(B) \cap C$  e já que as interseções  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(C)$  e  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(B)$  são encaixadas, temos que  $\mu(C) = \mu(B)$ . Logo

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(C) \cap C\right) = \mu(C) = \mu(B) \leq \mu(B \cap C) \leq \mu(B).$$

Portanto, temos que  $\mu(C \setminus B) = 0$ .

Por fim, observe que,

$$T^{-1}(C) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(B)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} T^{-(j+1)}(B) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=n+1}^{\infty} T^{-j}(B) = C.$$

□

O enunciado acima remete à proposição 2.16, pois  $B$  é invariante se, e somente se, ele difere da sua imagem  $T^{-1}(B)$  por um conjunto de medida nula ( $\mu(B \Delta T^{-1}(B)) = 0$ ).

Um importante conjunto invariante é a bacia de uma medida  $\mu$ , a qual corresponde aos pontos  $x \in M$  cuja órbita é descrita estatisticamente por  $\mu$ .

**Definição 2.18.** Dizemos que  $\mu$  é medida física se a medida de Lebesgue  $m$  de  $B(\mu)$  é positiva, isto é,  $m(B(\mu)) > 0$ .

Diante da proposição vista, podemos agora demonstrar para a bacia de uma medida que a bacia é um conjunto invariante e se  $\mu$  é ergódica, tem medida total. Temos o seguinte enunciado

**Proposição 2.19.** *Considere  $M$  um conjunto compacto e  $T : M \rightarrow M$  contínua. Dada uma probabilidade invariante  $\mu$ , a bacia de  $\mu$  é o conjunto  $B(\mu)$  dos pontos  $x \in M$  tais que*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) = \int \varphi(x) d\mu(x) \quad (2.20)$$

*para toda função contínua  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Então a bacia é um conjunto invariante e, se  $\mu$  é ergódica, então  $B(\mu)$  tem  $\mu$ -medida total.*

*Prova:* Note que se  $\varphi$  é contínua, então segue que é  $\mu$ -integrável e portanto pela proposição 2.12, lema 2.13 e teorema 2.11, temos que

$$\begin{aligned} T^{-1}(B(\mu)) &= \left\{ x \in M : \tilde{\varphi}(T(x)) = \int \varphi d\mu \right\} \\ &= \left\{ x \in M : \tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu \right\} = B(\mu) \end{aligned} \quad (2.21)$$

pois  $\tilde{\varphi}(T(x)) = \tilde{\varphi}(x)$ . Portanto  $B(\mu)$  é invariante.

Agora, supondo que  $\mu$  é ergódica, pela proposição 2.16, concluímos que  $\mu(B(\mu)) = 1$ .

□

Agora, dentro da mesma linha de fatos usados na seção anterior, vamos dar um exemplo de medida ergódica, tal exemplo fornece também uma importante aplicação do Teorema de Birkhoff.

Seja a função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada pela equação (2.3). Afirmamos que

**Proposição 2.20.** *A transformação  $T$  é ergódica para a medida de Lebesgue  $m$ .*

*Prova:* De acordo com a Proposição 2.19, basta provar que todo conjunto invariante  $A$  tem medida total. Vamos utilizar o teorema da diferenciação de Lebesgue (Teorema A.5), segundo o qual quase todo ponto de  $A$  é ponto de densidade de  $A$ . Isto é,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{m(I \cap A)}{m(I)} : I \text{ intervalo tal que } a \in I \subset B(a, \epsilon) \right\} = 1, \quad (2.22)$$

é válido para quase todo ponto  $a \in A$ .

Fixemos um ponto de densidade  $a \in A$ . Como o conjunto dos pontos da forma  $m/k^l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq m \leq k^l$  tem medida nula, podemos supor, sem qualquer restrição, que  $a$  não é desta forma. Consideremos a seguinte família de intervalos:

$$I(l, m) = \left( \frac{m-1}{k^l}, \frac{m}{k^l} \right), \quad l \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, k^l.$$

É claro que para cada  $l \in \mathbb{N}$  existe um único  $m = m_l$  tal que  $I(l, m_l)$  contém o ponto  $a$ . Denotaremos  $I_l = I(l, m_l)$ . A equação (2.22) implica que

$$\frac{m(I_l \cap A)}{m(I_l)} \rightarrow 1 \quad \text{quando } l \rightarrow \infty$$

Observe também que cada  $T^l$  é uma bijeção afim de  $I_l$  sobre o intervalo  $(0, 1)$ . Isso tem a seguinte consequência, que é essencial para a nossa demonstração:

**Lema 2.21.** (*Distorção Limitada*). *Para todo  $l \in \mathbb{N}$  é válido que*

$$\frac{m(T^l(E_1))}{m(T^l(E_2))} = \frac{m(E_1)}{m(E_2)} \quad (2.23)$$

$\forall E_1, E_2 \subset I_l$  conjuntos mensuráveis.

*Prova:* Vamos usar a ideia parecida com a demonstração da proposição 2.4, perceba que  $|DetDT^l| = k^l$  e  $T_{I_l}^l$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre  $I_l$  e  $(0, 1)$ . Ora, pelo teorema da mudança de variáveis (Teorema A.9) aplicado a  $T^l$ , concluímos que

$$m(T^l(E_1)) = k^l \cdot m(E_1) \quad (2.24)$$

e do mesmo modo isso ocorre com  $E_2$  portanto, vale a igualdade (2.23). ■

Tomando  $E_1 = I_l \cap A$  e  $E_2 = I_l$  acima, segue que

$$\frac{m(T^l(I_l \cap A))}{m((0, 1))} = \frac{m(I_l \cap A)}{m(I_l)}, \quad (2.25)$$

Claro que  $m((0, 1)) = 1$ .

Além disso, como estamos supondo que  $A$  é invariante,  $T^l(I_l \cap A)$  está contido em  $A$ . Deste modo obtemos que

$$m(A) \geq \frac{m(I_l \cap A)}{m(I_l)}. \quad (2.26)$$

Como a sequência do lado direito converge para 1 quando  $l \rightarrow \infty$ , segue que  $m(A) = 1$ . □

Desta proposição acima, segue uma aplicação importante do teorema ergódico de Birkhoff na teoria dos números, para a qual nós vamos nos utilizar da função que definimos na seção anterior, mais precisamente a função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada pela equação (2.3) tomando  $k = 10$ . Dessa forma, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.22.** *O conjunto dos números  $x \in \mathbb{R}$  não balanceados, isto é, o conjunto dos números  $x \in \mathbb{R}$  para os quais nem todo dígito aparece com a mesma frequência,  $1/10$ , na sua expansão decimal, tem medida de Lebesgue nula.*

*Prova:* Como o fato de ser balanceado é independente da parte inteira do número, só precisamos mostrar que quase todo  $x \in [0, 1]$  é balanceado. Considere a transformação  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $T(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$ , denote  $I_j = [\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10}]$ ,  $0 \leq j \leq 9$  e lembre que se  $x = 0, x_0x_1x_2x_3\dots$  (na base 10), então  $T^k(x) = 0, x_kx_{k+1}\dots$  para  $k \geq 0$ .

Logo,  $T^k(x) \in I_j \Leftrightarrow x_k = j$ , o que nos diz que, o tempo médio de visita  $\tau(x, I_j)$  é exatamente a frequência do dígito  $j$  na expansão decimal de  $x$ . De fato, para  $x = 0, x_1x_2x_3\dots$  temos

$$\begin{aligned} \tau(x, I_j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{j = 0, 1, \dots, n-1 : T^j(x) \in I_j\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{j = 0, 1, \dots, n-1 : x_j = j\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{\text{dígitos } j \text{ em } x \text{ entre } x_0 \text{ e } x_{n-1}\}}{n}. \end{aligned}$$

Aplicando agora o teorema ergódico de Birkhoff e o fato de que a transformação  $T$  é ergódica para a medida de Lebesgue  $m$ , concluímos que para cada  $j \in \{0, \dots, 9\}$  existe um conjunto  $B_j$  de  $[0, 1]$  com  $m(B_j) = 1$  tal que

$$\tau(x, I_j) = m(I_j) = 1/10 \quad \forall x \in B_j.$$

Tomando  $B = B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_9$  temos que  $m(B) = 1$ , e, portanto, todo  $x \in B$  é balanceado.

□

A seguir, trataremos de algumas propriedades importantes referentes a medidas ergódicas. Consideramos que a transformação  $T : M \rightarrow M$  está fixada e analisaremos o espaço das probabilidades invariantes por  $T$ , em especial o subconjunto das probabilidades ergódicas.

## 2.4 Propriedades das medidas ergódicas

Antes de enunciarmos o primeiro resultado, recordemos que uma medida  $\nu$  diz-se absolutamente contínua com relação a outra medida  $\mu$  se  $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ , nesse caso escrevemos  $\nu \ll \mu$ . Sabendo disso, eis o enunciado:

**Proposição 2.23.** *Se  $\mu$  e  $\nu$  são probabilidades invariantes tais que  $\mu$  é ergódica e  $\nu$  é absolutamente contínua com relação a  $\mu$ , então  $\mu = \nu$ .*

*Prova:* Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável limitada qualquer. Como  $\mu$  é invariante e ergódica, a média temporal

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x))$$

é constante:  $\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$  em  $\mu$ -quase todo ponto. Como  $\nu \ll \mu$ , toda propriedade que vale para  $\mu$ -qtp, vale também para  $\nu$ -qtp, logo, vale esta mesma igualdade para  $\nu$ -quase todo ponto, pois  $\nu \ll \mu$ . Portanto, em particular, vale que

$$\int \varphi d\nu = \int \tilde{\varphi} d\nu = \int \left( \int \varphi d\mu \right) d\nu = \int \varphi d\mu.$$

A igualdade da esquerda advém do teorema de Birkhoff (Teorema 2.11). Daí, podemos ver que a integrais em  $\mu$  e  $\nu$  coincidem, qualquer que seja a função mensurável limitada  $\varphi$ . Tomando então as funções características, temos a igualdade  $\mu = \nu$ . ■

Outra caracterização das medidas ergódicas é obtida quando consideramos o conjunto convexo  $\mathcal{M}_1(T)$  das probabilidades  $T$ -invariantes. As medidas ergódicas correspondem aos pontos extremais deste conjunto, conforme enunciado na proposição abaixo.

**Proposição 2.24.** *Uma probabilidade invariante  $\mu$  é ergódica se, e somente se,  $\mu$  é um ponto extremal de  $\mathcal{M}_1(T)$ , isto é, não é possível escrevê-la na forma  $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$  com  $t \in (0,1)$  e  $\mu_1, \mu_2$  probabilidades invariantes distintas.*

*Prova:* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\mu$  é ergódica e temos  $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$  com  $t \in (0,1)$  e  $\mu_1, \mu_2$  distintas. É claro que  $\mu(E) = 0$  implica que  $\mu_1(E) = \mu_2(E) = 0$ , ou seja,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são absolutamente contínuas com relação a  $\mu$ . Logo, pelo lema anterior, segue que  $\mu_1 = \mu = \mu_2$ , o que é uma contradição.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\mu$  não é ergódica, então existe algum conjunto invariante  $A$  com  $0 < \mu(A) < 1$ . Provemos primeiramente o seguinte Lema:

**Lema 2.25.** *Seja  $A$  um conjunto invariante e  $T : M \rightarrow M$  uma transformação que preserva  $\mu$ . Dado  $B \subset M$  mensurável temos que a restrição normalizada*

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \tag{2.27}$$

*é uma probabilidade  $T$ -invariante.*

*Demonstração:* Claramente  $\mu_A$  é uma probabilidade, pois  $\mu_A(X) = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1$ .

A invariância segue de

$$\begin{aligned}\mu_A(T^{-1}(B)) &= \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap T^{-1}(A))}{\mu(T^{-1}(A))} \\ &= \frac{\mu(T^{-1}(B \cap A))}{\mu(T^{-1}(A))} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_A(B)\end{aligned}$$

■

Defina  $\mu_1$  e  $\mu_2$  como sendo as restrições normalizadas de  $\mu$  a  $A$  e  $A^c$ , respectivamente:

$$\mu_1(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)} \quad \text{e} \quad \mu_2(E) = \frac{\mu(E \cap A^c)}{\mu(A^c)}, \quad (2.28)$$

como  $A$  e  $A^c$  são conjuntos invariantes,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são também probabilidades invariantes distintas ( $\mu_1(A) = 1$  e  $\mu_2(A) = 0$ ). Além disso

$$\mu = \mu(A) \cdot \mu_1 + \mu(A^c) \cdot \mu_2,$$

o que implica, por absurdo, que  $\mu$  não é extremal, pois  $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ .

□

Por fim, outra propriedade importante corresponde ao fato das medidas ergódicas serem mutuamente singulares.

**Proposição 2.26.** *Suponha que a  $\sigma$ -álgebra de  $M$  admite um gerador enumerável. Seja  $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  uma família qualquer de probabilidades invariantes e ergódicas, todas duas-a-duas distintas entre si. Então as medidas  $\mu_i$  são mutuamente singulares: existem subconjuntos mensuráveis invariantes  $\{P_i : i \in \mathcal{I}\}$  disjuntos dois-a-dois e tais que  $\mu_i(P_i) = 1$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ .*

*Prova:* Seja  $\Gamma$  um gerador enumerável da  $\sigma$ -álgebra de  $M$  e seja  $\mathcal{A}$  a álgebra gerada por  $\Gamma$ . Note que  $\mathcal{A}$  é enumerável, já que ela coincide com a união das álgebras geradas pelos subconjuntos finitos de  $\Gamma$ . Para cada  $i \in \mathcal{I}$ , defina

$$P_i = \{x \in M : \tau(x, A) = \mu_i(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Por ergodicidade (Proposição 2.16),  $\mu_i(P_i) = 1$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Além disso, se existe  $x \in P_i \cap P_j$ , então  $\mu_i(A) = \tau(x, A) = \mu_j(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ ; em outras palavras,  $\mu_i = \mu_j$ . Isto prova que os  $P_i$ 's são disjuntos dois-a-dois.

■

## 2.5 Sistemas misturadores

Nesta seção, vamos estudar uma propriedade mais forte do que a ergodicidade, a qual é a propriedade de mistura de um sistema. Veremos que as transformações expansoras lineares em  $[0, 1]$  são misturadoras com respeito à medida de Lebesgue, este fato importante será utilizado mais adiante no capítulo 3.

**Definição 2.27.** Dizemos que o sistema  $(T, \mu)$  é misturador se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad (2.29)$$

para quaisquer conjuntos mensuráveis  $A, B \subset E$ .

**Observação 2.28.** Se  $(T, \mu)$  é misturador então  $(T, \mu)$  é ergódico.

De fato, suponha que existe algum conjunto invariante  $A \subset M$  com  $0 < \mu(A) < 1$ . Tomando  $B = A^c$  vem que  $T^{-n}(A) \cap B = \emptyset$  para todo  $n$ . Logo,  $\mu(T^{-n}(A) \cap B) = 0$  para todo  $n$ , enquanto que  $\mu(A)\mu(B) \neq 0$ . Em particular  $(T, \mu)$  não é misturador, o que é uma contradição.

**Proposição 2.29.** Considere  $T$  como em (2.3), então  $(T, m)$  é misturador.

*Prova:* Tomando  $\varphi = \mathcal{X}_A$  e  $\psi = \mathcal{X}_B$ , a relação (2.29) é equivalente à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi \circ T^n) \cdot \psi \, d\mu = \int \varphi \, d\mu \int \psi \, d\mu. \quad (2.30)$$

Demonstraremos que (2.30) é válido para toda  $\varphi, \psi \in L^2(S^1)$  (em particular, para  $\mathcal{X}_A$  e  $\mathcal{X}_B$ ). Escrevemos  $\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m x}$  e  $\psi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j e^{2\pi i j x}$ , então:

Dado  $\epsilon > 0$  tome  $n_0 = n_0(\epsilon)$  tal que

$$\left( \sum_{|m| \geq n_0} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\psi\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left( \sum_{|j| \geq n_0} |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, pela desigualdade triangular e Cauchy-Swcharz

$$\left| \int_0^1 \varphi \circ T^n(x) \psi \, dx - a_0 b_0 \right| \leq \left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| \leq n_0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \cdot \left( \sum_{|j| \leq n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) - a_0 b_0 \, dx \right| \quad (2.31)$$

$$+ \left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| > n_0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \psi \, dx \right| \quad (2.32)$$

$$+ \left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| \leq n_0, m \neq 0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \cdot \left( \sum_{|j| > n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) \, dx \right| \quad (2.33)$$

Note que podemos reescrever a expressão (2.31) da seguinte forma

$$\left| \int \left( \sum_{|m| \leq n_0, m \neq 0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \cdot \left( \sum_{|j| \leq n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) \, dx \right| \quad (2.34)$$

pois, para  $m = 0$  vale que

$$\int_0^1 a_0 \cdot \left( \sum_{|j| \leq n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) = a_0 \sum_{|j| \leq n_0} b_j \int_0^1 e^{2\pi i j x} \, dx = \begin{cases} a_0 b_0, & \text{se } j = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Além disso, para a equação (2.32) temos válida a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| > n_0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \psi \, dx \right| &\leq \left\| \sum_{|m| > n_0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right\|_{L^2} \cdot \|\psi\|_{L^2} \\ &= \left( \sum_{|m| > n_0} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\psi\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Analogamente, temos válida para a equação (2.33) a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| \leq n_0, m \neq 0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right) \cdot \left( \sum_{|j| > n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) \, dx \right| \\ &\leq \left\| \sum_{|m| \leq n_0, m \neq 0} a_m e^{2\pi i m(k^n x)} \right\|_{L^2} \cdot \left\| \sum_{|j| > n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2} \cdot \left( \sum_{|j| \geq n_0} |b_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por fim, provemos que, para  $n$  suficientemente grande, a expressão (2.34) se anula. Desse modo,

$$\left| \int_0^1 \left( \sum_{|m| \leq n_0, m \neq 0} a_m e^{2\pi i m (k^n x)} \right) \cdot \left( \sum_{|j| \leq n_0} b_j e^{2\pi i j x} \right) dx \right| = \left| \sum_{|m|, |j| \leq n_0, m \neq 0} a_m b_j \int_0^1 e^{2\pi i (k^n m + j)x} dx \right| \quad (2.37)$$

e sabemos que

$$\int_0^1 e^{2\pi i (k^n m + j)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{se } k^n m = -j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.38)$$

Assim, para  $n \geq \max \left\{ n_0, \frac{\ln n_0}{\ln k} \right\}$  temos válido que  $k^n > n_0$  e, portanto,  $|k^n m + j| > 0$ . Logo, a integral na expressão (2.34) é nula.

Portanto, por (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38). podemos escrever:

$$\left| \int_0^1 \varphi \circ T^n(x) \psi dx - a_0 b_0 \right| < 0 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (2.39)$$

Assim, como é válido que

$$\int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.40)$$

Segue que  $a_0 = \int \varphi d\mu$  e  $b_0 = \int \psi d\mu$ . Portanto, temos provado o resultado.

□

### 3 TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E DE CONTINUIDADE ABSOLUTA

Neste capítulo abordaremos a existência de medidas invariantes para uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. O objetivo será analisar as propriedades agregadas a esses aspectos em relação às medidas invariantes e ergódicas. Inicialmente, nós estudaremos a topologia fraca\* cujas propriedades serão utilizadas para estabelecer o teorema de existência de medidas invariantes.

Após isso vamos estudar a existência de medidas invariantes que são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue. Para tal, vamos exibir um critério que estabelece condições suficientes para a continuidade absoluta de uma medida. Por fim, o nosso estudo tratará das transformações expansoras (de forma mais geral) e provará o teorema de existência e unicidade de medidas ergódicas absolutamente contínuas para transformações expansoras (Teorema 3.26).

Em suma, toda a preparação feita nas seções 2.1 e 2.2 é para que possamos estabelecer o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.** *(Existência de medidas invariantes para transformações contínuas). Seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em  $M$  que é invariante por  $T$ .*

No caso de transformações expansoras, é possível demonstrarmos um resultado ainda mais forte: a existência de medidas invariantes que são absolutamente contínuas. E, sabendo que uma transformação  $T$  de classe  $C^1$  é expansora se satisfaz  $\|DT(x)v\| \geq \sigma\|v\|$  para todo  $x \in M$  e  $v \in T_x(M)$ , com  $\sigma > 1$  (ver definição 3.21), desenvolveremos as seções 2.3 e 2.4 para provar o principal resultado desse capítulo, cujo enunciado segue abaixo:

**Teorema 3.2.** *(Medida ergódica absolutamente contínua para transformações expansoras) Seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação diferenciável expansora numa variedade compacta conexa  $M$ . Suponha que o jacobiano  $x \mapsto \det DT(x)$  é Hölder. Então  $T$  admite uma única probabilidade invariante  $\mu$  absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue  $m$ . Além disso,  $\mu$  é ergódica, seu suporte coincide com  $M$ ,  $\mu$  é uma medida física e a sua bacia tem medida de Lebesgue total na variedade.*

### 3.1 Topologia fraca\*

Vamos considerar, nessa seção,  $M$  um espaço métrico compacto. Vamos definir a topologia fraca\* no conjunto  $\mathcal{M}_1(M)$  das medidas borelianas de probabilidade em  $M$  e iremos perpassar por algumas propriedades principais dessa topologia, para que possamos demonstrar o teorema de existência de medidas invariantes. Também utilizando essa topologia estabeleceremos um critério de continuidade absoluta, que será utilizado em nosso estudo da teoria ergódica de transformações expansoras feito neste capítulo.

Denotaremos por  $d(\cdot, \cdot)$  a função distância em  $M$  e por  $B(x, \delta)$  a bola de centro  $x \in M$  e raio  $\delta > 0$ . Dado  $B \subset M$ , definimos  $d(x, B) = \inf \{d(x, y) : y \in B\}$  e chamamos  $\delta$ -vizinhança de  $B$  ao conjunto  $B^\delta$  dos pontos  $x \in M$  tais que  $d(x, B) < \delta$ .

**Definição 3.3.** Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ , um conjunto finito  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  de funções contínuas limitadas  $\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  e um número  $\epsilon > 0$ , definimos

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(M) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon \text{ para todo } i \right\}. \quad (3.1)$$

Observe que a interseção de dois quaisquer conjuntos dessa forma contém algum conjunto dessa forma, logo podemos tomar a família  $\{V(\mu, \Phi, \epsilon) : \Phi, \epsilon\}$  como sendo base de vizinhanças de cada  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ .

A topologia fraca\* é, portanto, a topologia definida por estas bases de vizinhanças. Em outras palavras, os abertos da topologia fraca\* são os conjuntos  $A \subset \mathcal{M}_1(M)$  tais que para todo elemento  $\mu \in A$  existe algum  $V(\mu, \Phi, \epsilon)$  contido em  $A$  e contendo  $\mu$ .

Observe que esta topologia depende apenas da topologia de  $M$  e não da sua distância. Note que a topologia fraca\* é Hausdorff devido ao fato de que se tivermos que  $\int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu$  para toda  $\varphi$  contínua e limitada, então  $\nu = \mu$ , o que segue do fato de que se  $\mu$  e  $\nu$  são probabilidades distintas então existe  $\epsilon > 0$  e alguma função contínua limitada  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $V(\mu, \{\varphi\}, \epsilon) \cap V(\nu, \{\varphi\}, \epsilon) = \emptyset$ .

Todo o desenvolvimento feito nesta seção culminará no teorema que demonstra a compacidade de  $\mathcal{M}_1(M)$  com respeito a topologia fraca\* quando  $M$  é um espaço métrico compacto (teorema 3.10).

Iniciaremos o estudo demonstrando uma propriedade equivalente à convergência de medidas  $\mu_n$  na topologia fraca\*. No que segue,

**Lema 3.4.** *Uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$  na topologia fraca\* se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu \quad \text{para toda função contínua limitada } \phi : M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

*Demonstração:* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $\phi$  uma função contínua limitada e defina  $\Phi = \{\phi\}$ . Como  $\mu_n \rightarrow \mu$ , temos que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  tal que  $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$  para todo  $n \geq N$ . Em outras palavras, temos que

$$n \geq N \Rightarrow \left| \int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu \right| < \epsilon.$$

Isto nos diz que a sequência  $(\int \phi d\mu_n)_n$  converge para  $(\int \phi d\mu)$ .

( $\Leftarrow$ ) Queremos mostrar que se a sequência  $(\int \phi d\mu_n)$  converge para  $(\int \phi d\mu)$  para toda  $\phi$  contínua limitada então para toda  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_T\}$  e  $\epsilon > 0$  como antes, existe  $N$  tal que  $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$  para todo  $n \geq N$ . De fato, para cada  $i$ , existe  $N_i$  tal que

$$n \geq N_i \Rightarrow \left| \int \phi_i d\mu_n - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon.$$

Tomando  $N = \max \{N_1, \dots, N_T\}$ , temos que  $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$  para todo  $n \geq N$ .

□

Seguindo no nosso estudo, notaremos que o espaço  $\mathcal{M}_1(M)$  é metrizável, para isso definimos a função

$$D(\mu, \nu) = \inf \{ \delta > 0 : \mu(B) < \nu(B^\delta) + \delta \text{ e } \nu(B) < \mu(B^\delta) + \delta \text{ para todo boreliano } B \}$$

Vamos mostrar que a função  $D(\mu, \nu)$  é uma distância e induz a topologia fraca\*.

**Lema 3.5.** *A função  $D(\mu, \nu)$  é uma distância em  $\mathcal{M}_1(M)$*

*Prova:* Por definição, já vemos que  $D(\mu, \nu) \geq 0$ . Para checar que  $D(\mu, \nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$ , notemos que existe  $\delta_n \rightarrow 0$  tal que  $\mu(B) < \nu(B_n^\delta) + \delta_n < \mu(B^{2\delta_n}) + 2 \cdot \delta_n$ , agora tomando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $\mu(B) \leq \nu(B) \leq \mu(B)$  para todo  $B$  boreliano, o que implica que  $\mu = \nu$ . A verificação de que  $D(\mu, \nu) = D(\nu, \mu)$  é imediata em virtude da simetria da definição.

Finalmente, nos resta mostrar a desigualdade triangular. Suponha que  $\sigma$  seja uma medida.

Se valem  $\mu(B) < \nu(B^{\delta_1}) + \delta_1$ ,  $\nu(B) < \sigma(B^{\delta_2}) + \delta_2$ ,  $\nu(B) < \mu(B^{\delta_1}) + \delta_1$  e  $\sigma(B) < \nu(B^{\delta_2}) + \delta_2$  para todo  $B$  boreliano então temos que

$$\mu(B) < \sigma(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_2 \quad \text{e} \quad \sigma(B) < \mu(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_1 + \delta_2,$$

o que implica que  $D(\mu, \sigma) \leq \delta_1 + \delta_2$ , e tomando o ínfimo sobre  $\delta_1$  e  $\delta_2$  temos o resultado desejado. ■

Antes de demonstrar que a topologia induzida por  $D$  coincide com a topologia fraca\*, vamos recordar uma definição e um fato topológico importante

**Definição 3.6.** *Um espaço métrico  $X$  é dito separável se satisfaz o segundo axioma de Enumerabilidade, isto é, se existe uma base enumerável para os abertos de  $X$ .*

E diante desta definição, podemos então mostrar o seguinte resultado:

**Lema 3.7.** *Todo espaço métrico compacto é separável*

*Prova:* Observe que por  $X$  ser compacto, temos que toda cobertura aberta de  $X$  possui subcobertura finita. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja  $\mathcal{U}_n = \{B(x, 1/n)\}$  com  $x \in X$ , Então  $\mathcal{U}_n$  é uma cobertura aberta de  $X$ , segue que existe uma subcobertura enumerável  $\nu_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , Denote por  $\mathcal{U}$  a união enumerável de todas as  $\nu_n$ , verifiquemos que  $\mathcal{U}$  é base para os abertos de  $X$ . De fato, tome  $V$  um aberto não-vazio de  $X$ , Assim, dado  $y \in V$  como  $V$  é aberto segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $B(y, 1/n_0) \subset V$ . Como  $\nu_2$  é cobertura de  $X$ , então para  $n_1 > n_0$ , existe  $x_0$  tal que  $B(x_0, 1/2n_1) \cap B(y, 1/n_0) \neq \emptyset$ . Logo,  $y \in B(x_0, 1/2n_1) \subset B(y, 1/n_0) \subset \mathcal{U}$ . Concluimos que  $X$  satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade e, portanto, segue que  $X$  é separável. ■

Sabendo deste fato, podemos agora demonstrar o seguinte resultado:

**Proposição 3.8.** *Se  $M$  é espaço métrico separável então a topologia induzida pela distância  $D$  coincide com a topologia fraca\* em  $\mathcal{M}_1(M)$ .*

Para demonstrarmos esse fato, precisaremos nos utilizar de topologias equivalentes à topologia (3.1). Assim, provaremos antes o seguinte resultado:

**Lema 3.9.** *Seja  $\mu$  uma probabilidade com  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ , dado  $\epsilon > 0$  e para todo  $i$  com  $1 \leq i \leq N$  (para algum  $N \in \mathbb{N}$ ). As topologias geradas pelas seguintes bases de vizinhanças são equivalentes, isto é, elas contém exatamente os mesmos abertos:*

1.  $V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(M) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon, \quad \Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \text{ contínuas} \right\}.$

2.  $V_l(\mu, \Psi, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1(M) : |\int \psi_i d\nu - \int \psi_i d\mu| < \epsilon, \quad \Psi = \{\psi_i \text{ Lipschitziana}\}\}.$
3.  $V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1 : v(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon, \quad \mathcal{F} = \{F_i \text{ fechado}\}\}.$
4.  $V_a(\mu, \mathcal{A}, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1 : v(A_i) > \mu(A_i) - \epsilon, \quad \mathcal{A} = \{A_i \text{ Aberto}\}\}.$
5.  $V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1 : |\mu(B_i) - v(B_i)| < \epsilon, \quad \mathcal{B} = \{B_i \text{ Boreliano} : \mu(\partial B_i) = 0\}\}.$

*Demonstração:* Nos convém falar primeiramente que dadas duas topologias  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  num mesmo conjunto, dizemos que  $\mathcal{T}_1$  é mais fraca que  $\mathcal{T}_2$  (ou  $\mathcal{T}_2$  é mais forte que  $\mathcal{T}_1$ ) se todo subconjunto que é aberto para  $\mathcal{T}_1$  também é aberto para  $\mathcal{T}_2$  (e podemos ter a noção de que a topologia  $\mathcal{T}_2$  contém mais abertos que a topologia  $\mathcal{T}_1$ ).

Assim, para provar que as topologias são equivalentes basta provar que cada topologia é mais fraca que as demais topologias. Isso será feito mostrando que as vizinhanças que geram uma topologia (a mais fraca) contém alguma vizinhança geradora da topologia seguinte (mais forte).

Denotaremos por  $\mathcal{T}^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , a topologia gerada pela base de abertos do item  $i$ . Desse modo,  $\mathcal{T}^2$  claramente é mais fraca que  $\mathcal{T}^1$  pois toda função lipschitziana é contínua.

A topologia  $\mathcal{T}^3$  é mais fraca que a topologia  $\mathcal{T}^2$ , para mostrar isso, considere qualquer família finita  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$  de subconjuntos fechados de  $M$ . De acordo com o Lema A.7, para cada  $\delta > 0$  e cada  $i$ , existe uma função Lipschitziana  $\psi_i : M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\mathcal{X}_{F_i} \leq \psi_i \leq \mathcal{X}_{F_i^\delta}$ . Observe que  $\cap_\delta F_i^\delta = F_i$ , e portanto  $\mu(F_i^\delta) \rightarrow \mu(F_i)$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . Fixe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno para que  $\mu(F_i^\delta) < \mu(F_i) + \epsilon/2$  para todo  $i$ . Seja  $\Psi$  o conjunto das funções  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  obtidas deste modo e  $\nu \in V_l(\mu, \Psi, \epsilon/2)$ . Observe que

$$\left| \int \psi_i d\nu - \int \psi_i d\mu \right| < \epsilon/2 \Rightarrow \nu(F_i) - \mu(F_i^\delta) < \epsilon/2.$$

$$\Rightarrow \nu(F_i) < \mu(F_i^\delta) + \epsilon/2 \Rightarrow \nu(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon,$$

para todo  $i$ , isto é,  $V(\mu, \Psi, \epsilon/2)$  está contido em  $V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$ .

As topologias  $\mathcal{T}^3$  e  $\mathcal{T}^4$  são equivalentes. De fato, seja  $\mathcal{F}$  como definido anteriormente e seja  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ , onde cada  $A_i$  é o complementar de  $F_i$  (e portanto todos os  $A_i$ 's são abertos). É claro que

$$\begin{aligned} V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) &= \{v \in \mathcal{M}_1 : v(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon \text{ para todo } i\} \\ &= \{v \in \mathcal{M}_1 : v(A_i) > \mu(A_i) - \epsilon \text{ para todo } i\} = V_a(\mu, \mathcal{A}, \epsilon). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que a topologia  $\mathcal{T}^5$  é mais fraca que as topologias equivalentes  $\mathcal{T}^3$  e  $\mathcal{T}^4$ . Dada qualquer família finita  $\mathcal{B} = \{B_i : \mu(\partial B_i) = 0\}$  de conjuntos de continuidade de  $\mu$  seja, para cada  $i$ ,  $F_i = B_i \cup \partial B_i$  o fecho e  $A_i = B_i \setminus \partial B_i$  o interior de  $B_i$ . Denote  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$  e  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  e considere  $\nu \in V_a(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) \cap V_l(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$ . Como  $\mu(F_i) = \mu(B_i) + \mu(\partial B_i) = \mu(B_i) = \mu(B_i) - \mu(\partial B_i) = \mu(A_i)$ , temos

$$\begin{cases} v(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon & \Rightarrow v(B_i) < \mu(B_i) + \epsilon \\ v(A_i) > \mu(A_i) - \epsilon & \Rightarrow v(B_i) > \mu(B_i) - \epsilon \end{cases} \Rightarrow |\mu(B_i) - \nu(B_i)| < \epsilon.$$

para todo  $i$ . Isto significa que  $V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) \cap V_a(\mu, \mathcal{A}, \epsilon)$  está contido em  $V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon)$ .

Por fim, vamos provar que a topologia  $\mathcal{T}^1$  é mais fraca que a topologia  $\mathcal{T}^5$ . Seja  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  uma família finita de funções contínuas limitadas. Fixemos um inteiro  $\rho$  tal que  $\sup |\phi_i(x)| < \rho$  para todo  $i$ . Para cada  $i$ , as pré-imagens  $\phi_i^{-1}(s)$ ,  $s \in [-\rho, \rho]$ , são disjuntas duas-a-duas. Portanto, como  $\phi_i^{-1}(s)$  é fechado (e limitado) e  $\mu$  é probabilidade num espaço métrico então  $\mu(\phi_i^{-1}(s)) = 0$  exceto para um conjunto enumerável de valores de  $s$ . Em particular, podemos escolher  $k \in \mathbb{N}$  e pontos  $-\rho = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \rho$  tais que  $t_j - t_{j-1} < \epsilon/2$  e  $\mu(\phi_i^{-1}(t_j)) = 0$  para todo  $j$  com  $0 \leq j \leq k$ .

Então cada

$$B_{i,j} = \phi_i^{-1}((t_{j-1}, t_j])$$

satisfaz  $\mu(\partial B_{i,j}) = 0$ , pois  $\partial B_{i,j} = \phi_i^{-1}(t_{j-1}) \cup \phi_i^{-1}(t_j)$ . Além disso,

$$\int \phi_i d\mu = \sum_j \int_{B_{i,j}} \phi_i d\mu \geq \sum_{j=1}^k t_{j-1} \mu(B_{i,j}) > \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_{i,j}) - \epsilon/2$$

e

$$\int \phi_i d\mu = \sum_j \int_{B_{i,j}} \phi_i d\mu \leq \sum_j t_j \mu(B_{i,j}).$$

E, da mesma forma, valem desigualdades análogas para as integrais relativamente a  $\nu \in V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon)$ . Logo

$$\left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \sum_{j=1}^k \rho |\mu(B_{i,j}) - \nu(B_{i,j})| + \epsilon/2$$

para todo  $i$ . Denote  $\mathcal{B} = \{B_{i,j} : i = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, k\}$ . Então a relação acima e  $|t_j| \leq \rho$  implicam que  $V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon/(2k\rho))$  está contido em  $V(\mu, \Phi, \epsilon)$ .

■

Agora estamos aptos a demonstrar a proposição 3.8.

*Prova:* primeiro, vejamos que a topologia induzida por  $D$  é mais forte que a topologia fraca\*. Dados  $\epsilon > 0$  e  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$  uma família finita de fechados de  $M$ , fixe  $\delta \in (0, \epsilon/2)$  tal que  $\mu(F_i^\delta) < \mu(F_i) + \epsilon/2$  para todo  $i$ , se  $v \in B_D(\mu, \delta)$  (isto é, se  $v$  está na bola relativamente a  $D$  com centro em  $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$  e raio  $\delta > 0$ ), então

$$v(F_i) < \mu(F_i^\delta) + \delta < \mu(F_i) + \epsilon \quad \text{para todo } i,$$

o que significa que  $v \in V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$ . Isto garante que  $V_l(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$  contém  $B_D(\mu, \delta)$ .

Resta provar que se  $M$  é separável então a topologia fraca\* é mais forte que a topologia induzida por  $D$ . Dado  $\epsilon > 0$ , fixemos  $\delta \in (0, \epsilon/3)$ . Seja  $\{p_1, p_2, \dots\}$  um subconjunto enumerável denso de  $M$ . Para cada  $j$ , as esferas  $\partial B(p_j, r) = \{x : d(x, p_j) = r\}$   $r > 0$  são disjuntas duas-a-duas, portanto, é possível encontrar  $r > 0$  arbitrariamente pequeno tal que  $\mu(\partial B(p_j, r)) = 0$  para todo  $j$  (pois  $\mu(\{d(x, p_j) = r\}) > 0$  no máximo para um conjunto enumerável de pontos). Fixemos um tal  $r$ , com  $r \in (0, \delta/3)$ .

A família  $\{B(p_j, r) : j = 1, 2, \dots\}$  é uma cobertura enumerável de  $M$  por conjuntos com  $\mu(\partial B(p_j, r)) = 0$ . Fixemos  $k \geq 1$  tal que o conjunto  $U = \cup_{j=1}^k B(p_j, r)$  satisfaz

$$\mu(U) > 1 - \delta. \quad (3.3)$$

Considere a partição (finita)  $\mathcal{P}$  de  $U$  definida pela família finita  $\{B(p_j, r) : j = 1, \dots, k\}$ : os elementos de  $\mathcal{P}$  são os conjuntos maximais  $\mathcal{P} \subset U$  tais que, para cada  $j$ , ou  $\mathcal{P}$  está contido em  $B(p_j, r)$  ou  $\mathcal{P}$  é disjunto de  $B(p_j, r)$ . Em seguida, seja  $\mathcal{E}$  a família de todas as uniões finitas de elementos de  $\mathcal{P}$ . Note que o bordo de todo elemento de  $\mathcal{E}$  está contido na união dos bordos dos  $B(p_j, r)$ ,  $1 \leq j \leq k$  e, conseqüentemente, tem medida nula.

Se  $v \in V_c(\mu, \mathcal{E}, \delta)$  então

$$|\mu(A) - v(A)| < \delta \quad \text{para todo } A \in \mathcal{E}. \quad (3.4)$$

Em particular, (3.3) juntamente com (3.4) implicam que

$$v(U) > 1 - 2\delta. \quad (3.5)$$

Agora, dado um subconjunto boreliano  $B$  qualquer, denote por  $A_B$  a união dos elementos de  $\mathcal{P}$  que intersectam  $B$ . Então  $A_B \in \mathcal{E}$  e portanto a relação (3.4) resulta em

$$|\mu(A_B) - v(A_B)| < \delta.$$

Observe que  $B$  está contida em  $A_B \cup U^c$ . Além disso,  $A_B \subset B^\delta$  porque todo elemento de  $\mathcal{P}$  tem diâmetro menor que  $2r < \delta$ . Estes fatos, juntamente com (3.3) e (3.5) implicam que

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leq \mu(E_B) + \delta < v(E_B) + 2\delta \leq v(B^\delta) + 2\delta \\ v(B) &\leq v(E_B) + 2\delta < \mu(E_B) + 3\delta \leq \mu(B^\delta) + 3\delta.\end{aligned}$$

Como  $3\delta < \epsilon$ , estas relações implicam que  $v \in B_D(\mu, \epsilon)$ , portanto  $B_D(\mu, \epsilon)$  contém  $V_c(\mu, E, \delta)$ .

□

Diante da fundamentação dada pelos resultados anteriores, podemos prosseguir para o teorema mais importante da seção.

**Teorema 3.10.** *Seja  $M$  um espaço métrico compacto, então o espaço  $\mathcal{M}_1(M)$  munido da topologia fraca\* é compacto.*

Esse resultado é consequência da seguinte proposição:

**Proposição 3.11.** *Toda sequência  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(M)$  admite uma subsequência convergente na topologia fraca\**

*Prova:* Considere  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável denso na bola unitária de  $C^0(M)$  (isso é possível porque temos que dado  $K$  compacto e  $X$  separável, o conjunto  $C^0(K; X)$  é separável, em particular, isso vale para  $K = M = X$ ). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a sequência de números reais  $(\int \phi_n d\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é limitada por 1. Portanto, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe uma subsequência  $(k_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\int \phi_n d\mu_{k_j^n} \text{ converge para algum número } \Phi_n \in \mathbb{R} \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Além disso, cada sequência  $(k_j^{n+1})_{j \in \mathbb{N}}$  pode ser escolhida como subsequência da anterior  $(k_j^n)$ . Definamos  $s_j = k_j^j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Por construção,  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência de  $(k_j^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  a menos de uma quantidade finita de termos.

Assim, temos que

$$\int \phi_n d\mu_{s_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Phi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por densidade podemos deduzir que

$$\Phi(\varphi) = \lim_j \int \varphi d\mu_{s_j} \tag{3.6}$$

existe para toda função  $\varphi \in C^0(M)$ . De fato, suponha primeiro que  $\varphi$  está na bola unitária de  $C^0(M)$ . Dado  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\varphi - \phi_n\| \leq \epsilon$ , então,

$$\left| \int \varphi d\mu_{sj} - \int \phi_n d\mu_{sj} \right| \leq \epsilon \quad \forall j.$$

Como  $\int \phi_n d\mu_{sj} \rightarrow \Phi_n$ , segue que

$$\limsup_j \int \varphi d\mu_{sj} - \liminf_j \int \varphi d\mu_{sj} \leq 2\epsilon.$$

E como  $\epsilon$  é arbitrário, temos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{sj}$  existe. Isto prova (3.6) quando a função está na bola unitária. Para o caso geral, fazemos a substituição de  $\varphi$  por  $\varphi/\|\varphi\|$ . Portanto, provamos que o limite (3.6) existe.

Por fim, note que o operador  $\Phi : C^0(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por (3.6) é linear e positivo:  $\Phi(\varphi) \geq \min \varphi \geq 0$  sempre que  $\varphi(x) \geq 0$  para todo  $x \in M$ .

Além disso,  $\Phi(\mathcal{X}_M) = 1$ . Logo, pelo teorema de Riez-Markov, como  $M$  é compacto concluímos que existe alguma probabilidade boreliana  $\mu$  em  $M$  tal que  $\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu$  para toda função contínua  $\varphi$ . Agora, podemos reescrever a igualdade (3.6) como:

$$\int \varphi d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{sj} \quad \forall \varphi \in C^0(M).$$

Ora, mas isto nos diz, pelo lema 3.7, que a subsequência  $(\mu_{sj})_{j \in \mathbb{N}}$  converge para  $\mu$  na topologia fraca\*.

□

*Demonstração do Teorema 3:* Já sabemos que  $M_1(M)$  é metrizável com respeito a topologia fraca\*, agora pelo resultado anterior, temos que a bola unitária fechada de  $M_1(M)$  é compacta e portanto, temos o resultado.

■

## 3.2 Existência de medidas invariantes

Dedicaremos esta seção a demonstrar a existência de medidas invariantes para transformações contínuas em espaços compactos. O teorema 3.10 visto na seção anterior, será o alicerce essencial que precisaremos para realizar tal demonstração. Eis então o enunciado do Teorema:

**Teorema 3.12.** (*Existência de medidas invariantes para transformações contínuas*). Seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em  $M$  que é invariante por  $T$ .

Para demonstrá-lo, vamos começar introduzindo a definição de *push-forward* de uma medida.

**Definição 3.13.** Dado  $T : M \rightarrow M$  e qualquer medida  $\gamma$  em  $M$  definimos por

$$T_*\gamma(B) = \gamma(T^{-1}(B)) \quad (3.7)$$

para cada conjunto mensurável  $B \subset M$ .

**Observação 3.14.**  $T_*\gamma$  é uma medida. além disso, se  $\gamma$  é uma probabilidade, então  $T_*\gamma$  também é probabilidade.

De fato:

$$\begin{aligned} T_*\gamma(B) &= \gamma(T^{-1}(B)) \in [0, +\infty) \\ T_*\gamma(\emptyset) &= \gamma(T^{-1}(\emptyset)) = \gamma(\emptyset) = 0 \\ T_*\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \gamma\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(T^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} T_*\gamma(B_n), \text{ para união disjunta.} \end{aligned}$$

Note que a definição 1.1 pode ser reescrita em termos do *push-forward*:  $\gamma$  é invariante por  $f$  se, e somente se,  $T_*\gamma = \gamma$ .

Sobre o *push-forward*, temos o seguinte resultado auxiliar:

**Lema 3.15.** Sejam  $\gamma$  uma medida e  $\varphi$  uma função mensurável limitada. Então

$$\int \varphi dT_*\gamma = \int \varphi \circ T d\gamma. \quad (3.8)$$

*Demonstração:* Se  $\varphi$  é a função característica de um conjunto mensurável  $B$  então a relação (3.8) significa que  $T_*\gamma(B) = \gamma(T^{-1}(B))$ , o que é verdade por definição. Pela linearidade da integral, segue que (3.8) vale sempre que  $\varphi$  é uma função simples. Finalmente, como toda função mensurável limitada pode ser aproximada uniformemente por funções simples, segue pelo teorema da convergência dominada (teorema A.8), que a conclusão do lema é verdadeira no caso geral.

■

Continuaremos esta seção provando a continuidade da aplicação  $T_*$  com respeito a topologia fraca\*.

**Proposição 3.16.** *A aplicação  $T_* : \mathcal{M}_1(M) \rightarrow \mathcal{M}_1(M)$  é contínua relativamente à topologia fraca\*.*

*Prova:* Sejam  $\epsilon > 0$  e  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  uma família qualquer de funções contínuas limitadas. Como  $T$  é contínua, a família  $\Psi = \{\phi_1 \circ T, \dots, \phi_n \circ T\}$  também consiste de funções contínuas limitadas.

Seja  $\nu \in V(\mu, \Psi, \epsilon)$  usando o lema anterior, temos que

$$\left| \int \phi_i d(T_*\mu) - \int \phi_i d(T_*\nu) \right| = \left| \int (\phi_i \circ T) d\mu - \int (\phi_i \circ T) d\nu \right| < \epsilon, \text{ para todo } i.$$

O que implica a relação de inclusão:

$$T_*(V(\mu, \Psi, \epsilon)) \subset V(T_*\mu, \Phi, \epsilon) \text{ para todo } \mu, \Phi \text{ e } \epsilon \text{ como acima.}$$

E isto nos mostra que  $T_*$  é contínua.

□

Para demonstrar o teorema 3.12, fixe  $\rho$  uma probabilidade qualquer em  $M$  e defina a sequência de probabilidades:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j \rho, \quad (3.9)$$

onde  $T_*^j \rho$  é a imagem de  $\rho$  pelo iterado  $T^j$ .

O teorema 3.10 garante que esta sequência tem pelo menos um ponto de acumulação, isto é, existe  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\mu$  probabilidade em  $M$  tais que

$$\mu_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j \rho \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu \quad (3.10)$$

na topologia fraca\*. Afirmamos que tal  $\mu$  é  $T$ -invariante:

**Lema 3.17.** *Todo ponto de acumulação de uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por (3.9) é uma probabilidade invariante por  $T$ .*

*Demonstração:* Seja  $\mu$  um ponto de acumulação de  $(\mu_n)$ , a relação (3.10) nos diz que dada uma família  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  de funções contínuas limitadas e para todo  $\epsilon > 0$  tem-se que

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ T^j) d\rho - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon/2 \quad (3.11)$$

para todo  $i$  e todo  $k$  suficientemente grande. Pela proposição 2.23, obtemos

$$T_*\mu = T_*\left(\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j \rho\right) = \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} T_*^j \rho. \quad (3.12)$$

Estimemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ T^j) d\rho - \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j) d\rho \right| &= \frac{1}{n_k} \left| \int \phi_i d\rho - \int (\phi_i \circ T^{n_k}) d\rho \right| \\ &\leq \frac{2}{n_k} \sup |\phi_i| < \epsilon/2 \end{aligned}$$

a qual é válida para todo  $i$  e todo  $k$  suficientemente grande. Agora combinando o fato acima com a equação (3.11), obtemos que

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j) d\rho - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon$$

para todo  $i$  e todo  $k$  suficientemente grande. Isto nos mostra que

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j \rho \rightarrow \mu \quad \text{na topologia fraca}^*$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Porém, por (3.12) temos que essa mesma sequência converge para  $T_*\mu$ . Pela unicidade dos limites (a topologia fraca\* é Hausdorff), segue que  $T_*\mu = \mu$ . ■

O teorema 3.12 é uma consequência imediata do lema 3.17. De fato, as relações (3.9) e (3.10), junto com o lema 3.17, dão uma prova construtiva do Teorema 3.12. *Demonstração do teorema 4:* Fixe  $\rho \in \mathcal{M}_1(M)$  qualquer,  $\mu_n$  como em (3.9) e  $\mu$  como em (3.10). O lema 3.17 garante que  $\mu$  é uma probabilidade invariante por  $T$ . ■

### 3.3 Primeiro critério de continuidade Absoluta

Em geral, uma transformação contínua  $T$  admite muitas medidas invariantes. É natural nos questionarmos qual medida invariante seria a mais importante. As medidas importantes são ergódicas, mas como  $T$  pode admitir muitas medidas ergódicas, a questão se torna qual medida ergódica é a mais importante. Uma possibilidade é escolher alguma

geometricamente natural (absolutamente contínua com respeito à medida  $m$  de Lebesgue), outra possibilidade é escolher uma cuja parte dinamicamente descrita por ela tem volume positivo (medida física).

Nesta seção, provaremos que toda transformação expansora admite uma medida ergódica que é, ao mesmo tempo, absolutamente contínua e medida física, e é a única com tais propriedades. Logo, esta medida é a mais importante para transformações expansoras.

Para prepararmos a demonstração deste fato, vamos estudar um critério que garante a continuidade absoluta de medidas.

Lembramos ainda que, dada uma função não-negativa  $\varphi$  e uma medida  $\nu$ , representamos por  $\varphi\nu$  a medida definida por  $\varphi\nu(B) = \int_B \varphi d\nu$ . Além disso, para duas medidas  $\mu$  e  $\nu$ , dizemos que  $\mu \leq \nu$  se tivermos que  $\mu(E) \leq \nu(E)$  para todo  $E$  mensurável.

**Lema 3.18.** *Sejam  $\nu$  uma probabilidade num espaço métrico compacto  $X$ ,  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$  uma função  $\nu$ -integrável,  $\{\mu_i\}_{i \geq 1}$  uma sequência de probabilidades em  $X$  convergindo para uma probabilidade  $\mu$  na topologia fraca\*. Se  $\mu_i \leq \varphi\nu$  para todo  $i \geq 1$ , então  $\mu \leq \varphi\nu$  e  $\mu \ll \nu$ . Por outro lado, se  $\mu_i \geq \varphi\nu \forall i$ , então  $\mu \geq \varphi\nu$ .*

*Prova:* Seja  $B$  um conjunto mensurável qualquer. Para cada  $\epsilon > 0$ , seja  $K_\epsilon$  um subconjunto compacto de  $B$  tal que  $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  e  $(\varphi\nu)(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  (isso é possível pelo fato de toda medida de probabilidade definida num espaço métrico ser regular, conforme o teorema A.11).

Então seja  $A_\epsilon$  uma vizinhança aberta de  $K_\epsilon$  da forma  $A_\epsilon = \{p : d(p, K_\epsilon) < \epsilon\}$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno para que  $\mu(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  e  $(\varphi\nu)(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ , note que se  $E_r = \{x \in X : d(x, K_\epsilon) = r\} = \partial A_r$ ,  $r > 0$ , os  $E_r$  são disjuntos dois-a-dois para todo  $r > 0$  e portanto vale que  $\sum \mu(E_r) \leq 1$ , portanto  $\mu(E_r) = 0$  a menos de um conjunto enumerável  $H = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Diminuindo  $\epsilon$  ligeiramente, podemos supor que  $\epsilon \notin H$ . Então, como  $\mu = \lim \mu_i$  e  $\mu(\partial A_r) = 0$ , vale que (lema 3.9, item 5)  $\mu(A_\epsilon) = \lim \mu_i(A_\epsilon) \leq (\varphi\nu)(A_\epsilon)$ , o que implica:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(K_\epsilon) + \mu(B \setminus K_\epsilon) \\ &\leq \mu(A_\epsilon) + \mu(B \setminus K_\epsilon) \\ &\leq (\varphi\nu)(A_\epsilon) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos que  $\mu(B) \leq (\varphi\nu)(B)$ .

De forma semelhante, para provar a desigualdade no sentido contrário basta substituímos o símbolo  $\leq$  por  $\geq$  nos últimos argumentos acima.

■

**Observação 3.19.** A condição " $\mu_i \leq \varphi\nu$ " pode ser interpretada como uma forma de afirmar que  $\{\mu_n\}$  é uniformemente absolutamente contínua em relação à  $\varphi\nu$ .

O lema acima tem como consequência um critério para a existência de probabilidades invariantes absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue para certas transformações  $T : M \rightarrow M$ . Aplicaremos este critério na seção seguinte para transformações expansoras. O seguinte enunciado apresenta formalmente o 1º critério de continuidade absoluta deste trabalho:

**Lema 3.20.** (1º Critério de continuidade absoluta) *Seja  $m$  a medida de Lebesgue em uma variedade Riemmaniana  $M$ , se existe  $C > 0$  tal que  $m(T^{-n}(E)) \leq C \cdot m(E)$  para todo  $E$  mensurável e para todo  $n \geq 0$ , então todo ponto de acumulação  $\mu$  de  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j m$  é uma medida  $T$ -invariante que satisfaz  $\mu \ll m$  e  $\frac{d\mu}{dm}(x) \leq C$  em  $m$ -qtp. Além disso, se  $m(T^{-n}(E)) \geq Km(E)$  para todo  $E$  mensurável e para todo  $n \geq 0$ , concluímos que  $\frac{d\mu}{dm} \geq K$ .*

*Demonstração:* Aplique o lema 3.18 considerando:

- i.  $\varphi \equiv D_3$
- ii.  $\nu = m$
- iii.  $\mu_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} T_*^j m$  tal que  $(\mu_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mu$  na topologia fraca\*.

Desse modo, por hipótese, temos que  $\mu_i(B) \leq \varphi\nu(B) \forall B$  mensurável e pelo lema 3.18 obtemos que esta última desigualdade implica que  $\mu(B) \leq \varphi\nu(B) = D_3 \cdot m(B) \forall B$  mensurável e que  $\mu \ll m$ . O lema 3.17 implica que  $\mu$  é  $T$ -invariante.

Por fim, basta verificar que  $\Psi(x) := \frac{d\mu}{dm}(x)$  é tal que  $\Psi(x) \leq C$  em  $m$ -qtp.

De fato, suponha por absurdo que exista um conjunto  $B \subset M$  mensurável com  $m(B) > 0$  e, portanto,  $\mu(B) > 0$  de modo que  $\Psi > C$  em  $B$ , temos então que  $\mu(B) = \int_B \Psi dm > \int_B C dm = C \cdot m(B)$ , contradição. Analogamente, se  $m(T^{-1}(E)) \geq K \cdot m(E)$  para todo  $n \geq C$  e para todo  $E$  mensurável, concluímos que  $\frac{d\mu}{dm} \geq K$  em  $m$ -qtp

Logo, Tomando  $C = D_3 > 0$  temos verificado que  $\Psi \leq D_3 = C$ , como queríamos. ■

### 3.4 Medidas A.C. para transformações expansoras

Nesta seção, nosso objetivo principal será mostrar que é possível aplicar o critério de continuidade absoluta visto anteriormente para transformações expansoras.

Vamos definir primeiramente o que vem a ser uma transformação expansora em uma variedade compacta e darmos uma família de exemplos ( os endomorfismos lineares expansores no toro  $\mathbb{T}^d$ ) que generaliza as transformações expansoras lineares vistas na seção 1.1.

**Definição 3.21.** *Sejam  $M$  uma variedade compacta e seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação de classe  $C^1$ . Dizemos que  $T$  é expansora se existe  $\sigma > 1$  e alguma métrica Riemanniana em  $M$  tal que*

$$\|DT(x)v\| \geq \sigma\|v\| \quad \forall x \in M, \forall v \in T_x M. \quad (3.13)$$

**Exemplo 3.22.** *(Endomorfismos lineares do Toro) Lembre que o toro de dimensão  $d$  é o quociente  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ , ou seja, o espaço das classes de equivalência da relação de equivalência definida em  $\mathbb{R}^d$  por  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^d$ . Seja  $A$  uma matriz  $d \times d$  com coeficientes inteiros e determinante diferente de zero. Então  $A(\mathbb{Z}^d) \subset \mathbb{Z}^d$  e, por consequência,  $A$  induz uma transformação*

$$T_A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d, \quad T_A([x]) = [A(x)]$$

onde  $[x]$  denota a classe de equivalência que contém  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Tais transformações são chamadas de *endomorfismos lineares do toro*. Note que o toro  $\mathbb{T}^d$  é uma variedade Riemanniana compacta,  $T_A$  é diferenciável e a derivada  $DT_A(x)$  em cada ponto está canonicamente identificada com  $A$ . Em particular, o jacobiano  $\det DT_A([x])$  é constante igual a  $|\det A|$ . Isso também implica que o grau de  $T_A$  é igual a  $|\det A|$ . Portanto,  $T_A$  é invertível se, e somente se,  $|\det A| = 1$ . Neste caso, a sua inversa é a transformação  $T_A^{-1}$  induzida pela matriz inversa  $A^{-1}$ ; observe que  $A^{-1}$  também é uma matriz com coeficientes inteiros em tal caso.

Em qualquer caso,  $T_A$  preserva a medida de Lebesgue em  $\mathbb{T}^d$ . Isto pode ser visto da seguinte forma: como  $T_A$  é um difeomorfismo local, a pré-imagem de qualquer conjunto mensurável  $D$  com diâmetro suficientemente pequeno está formada por  $|\det A|$  (= grau de  $T_A$ ) partes disjuntas  $D_i$ , cada uma das quais é enviada difeomorficamente sobre  $D$ . Pela fórmula de mudança de variável,  $m(D) = |\det A| m(D_i)$  para todo  $i$ . Isto prova que

$$m(T^{-1}(D)) = \sum_{i=1}^{|\det A|} m(D_i) = |\det A| \cdot \frac{m(D)}{|\det A|} = m(D)$$

para todo domínio  $D$  suficientemente pequeno, logo  $T_A$  preserva a medida  $m$ .

**Proposição 3.23.** *Se todos os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  de  $A$  têm módulo maior que 1, então  $T_A$  é transformação expansora em uma variedade compacta.*

*Prova:* Lembramos pela forma do raio espectral (denotado por  $\rho(A)$ ) que  $\rho(A^{-1}) = (\inf |\lambda_i|)^{-1}$  aonde  $\lambda_i$  são autovalores de  $A$  e  $\sigma \in (1, \inf |\lambda_i|)$ . E a partir daí, segue que

$$\lim \|A^{-n}\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A^{-1}) = \inf |\lambda_i|^{-1} < \sigma^{-1} < 1$$

Desse modo, seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|A^{-k}\|^{\frac{1}{k}} < \tilde{\sigma} < 1 \text{ para algum } \tilde{\sigma} \in (\sigma^{-1}, 1), \text{ então } \|A^{-k}\| < \tilde{\sigma}^k < \tilde{\sigma} < 1.$$

Tome  $\Theta = \tilde{\sigma}$ . Assim, vale (pela desigualdade anterior) que

$$\|A^{-k}(v)\| < \Theta^k \|v\| \quad \forall v \Rightarrow \|v\|^2 < \Theta^{2k} \|A^k(v)\|^2.$$

Agora, defina um novo produto interno dado pela norma:

$$\|v\|_*^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \Theta^{2j} \|A^j(v)\|^2. \quad (3.14)$$

Note que a norma definida vem de um produto interno. Vamos verificar que para este produto interno, temos que vale  $\|A(v)\|_* \geq \Theta^{-1} \|v\|_* \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \|A(v)\|_*^2 &= \sum_{j=0}^{k-1} \Theta^{2j} \|A^j(A(v))\|^2 = \sum_{i=1}^k \Theta^{2(i-1)} \|A^i(v)\|^2 \\ &= \Theta^{-2} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \Theta^{2i} \|A^i(v)\|^2 - \|v\|^2 + \Theta^{2k} \|A^k(v)\|^2 \right) \\ &> \Theta^{-2} \|v\|_*^2. \end{aligned}$$

Aplicando-se a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos o resultado desejado.  $\square$

**Observação 3.24.** A propriedade 3.13 da definição 3.21 é uma condição aberta na topologia  $C^1$ . Logo, as transformações expansoras formam um conjunto aberto em  $C^1(M, M)$ .

Seja uma probabilidade invariante  $\mu$ , recordemos que a bacia de  $\mu$  é o conjunto:

$$B(\mu) = \left\{ x \in M : \tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) = \int \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua} \right\}.$$

Vimos na proposição 2.16 que a bacia é um conjunto invariante e se  $\mu$  é ergódica, então  $B(\mu)$  tem  $\mu$ -medida total.

Estamos interessados em medidas para as quais  $B(\mu)$  tem medida de Lebesgue positiva. Considerando  $m$  a medida de Lebesgue em  $M$  dada pela métrica Riemanniana, recorde que  $\mu$  é medida física (definição 2.18) se a medida de Lebesgue  $m$  de  $B(\mu)$  é positiva, isto é,  $m(B(\mu)) > 0$ .

Observemos que, mesmo que  $\mu$  seja ergódica ( $\mu(B(\mu)) = 1$ ), não necessariamente teremos que  $\mu$  é uma medida física ( $m(B(\mu)) > 0$ ). No entanto, se  $\mu$  é medida ergódica absolutamente contínua então  $\mu$  é também uma medida física. Mais precisamente:

**Proposição 3.25.** *Seja  $\mu$  uma medida ergódica, com  $\mu \ll m$ , então  $m(B(\mu)) > 0$ , isto é,  $\mu$  é uma medida física.*

*Prova:* Suponha por contradição que  $m(B(\mu)) = 0$ . Temos, pela continuidade absoluta,  $\mu(B(\mu)) = 0$ , mas isto contradiz a proposição (2.16). Portanto, temos  $m(B(\mu)) > 0$ .

□

O resultado Principal deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 3.26.** *(Medida ergódica absolutamente contínua para transformações expansoras) Seja  $T : M \rightarrow M$  uma transformação diferenciável expansora numa variedade compacta conexa  $M$ . Suponha que o jacobiano  $x \mapsto \det DT(x)$  é Hölder. Então  $T$  admite uma única probabilidade invariante  $\mu$  absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue  $m$ . Além disso,  $\mu$  é ergódica, seu suporte coincide com  $M$ ,  $\mu$  é uma medida física e a sua bacia tem medida de Lebesgue total na variedade.*

Vamos descrever um roteiro com a ideia da prova.

#### Ideia da Prova:

- Tomaremos  $m$  a medida de Lebesgue,  $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j m$  e  $\mu = \lim \mu_{n_k}$ .
- Aplicaremos o Lema 3.17 para  $\{\mu_n\}$ , tendo verificado que  $m(T^{-j}(E)) \leq C \cdot m(E)$  para algum  $C > 0$  que não depende de  $j$ , daí seguirá que  $\mu_{n_k} \leq C \cdot m(E)$  e  $\mu \ll m$ .
- A parte técnica da prova do teorema corresponde a analisar  $m(T^{-j}(E))$  para  $E$  de diâmetro pequeno. O lema 3.27, de natureza topológica, garante a existência de  $k^n$  ramos inversos de  $h$ , tais que  $T^{-n}(E) = \bigcup_h h(E)$ .
- O lema de distorção (proposição 3.31) terá como consequência (corolário 3.32) que a proporção entre as medidas  $\frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))}$  é comparável a  $\frac{m(B_1)}{m(B_2)}$ , de onde seguirá (proposição 3.33) que  $m(T^{-n}(E)) \leq C \cdot m(E)$ .

Todo o resto deste capítulo será dedicado a demonstrar o teorema 3.26.

*Demonstração:* Começaremos por provar uma propriedade importante das transformações  $T$  dadas pelo enunciado: a existência local de transformações inversas  $h$  que são contrativa (seção 2.4.1). A partir dessa propriedade, definiremos os ramos inversos dos iterados dessas transformações  $T$  e com eles, estabeleceremos a proposição 3.31, que irá nos fornecer um bom controle de distorção para esses iterados das transformações  $T$  (seção 2.4.2), em seguida aplicaremos tais propriedades para demonstrar o teorema 3.26 (seção 2.4.3).

### 3.4.1 Ramos inversos contrativos

No que segue, vamos considerar  $T$  uma transformação expansora e  $\sigma > 0$  como na definição 8. Em particular  $\sigma > 0$  é um minorante para conorma  $\|DT^{-1}\|^{-1}$  da derivada de  $T$ .

Como  $T$  é um difeomorfismo local numa variedade compacta conexa, localmente podemos considerar ramos inversos  $h$ , os quais correspondem a contrações, conforme verificamos no seguinte lema.

**Lema 3.27.** *Existe um inteiro  $k \geq 1$  e uma constante  $\rho > 0$  tais que  $\#T^{-1}(y) = k$  para todo  $y \in M$ , tal que para todo  $x \in T^{-1}(y)$ , existe  $h : B(y, \rho) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  satisfazendo:*

1.  $T \circ h = id$ ;
2.  $h(y) = x$ ;
3.  $d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} \cdot d(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in B(y, \rho)$ .

*Demonstração:* Como  $T$  é um difeomorfismo local, então é uma aplicação aberta. Além disso, como  $M$  é compacta, segue-se que  $f$  é uma aplicação fechada. Como  $M$  é conexo, temos que  $T(M) = M$ . Além disso,  $M$  compacto implica que  $T^{-1}(y)$  compacto para todo  $y \in M$ ; portanto,  $T$  é aplicação própria.

Note ainda que  $T$  é uma aplicação de Recobrimento (isto é,  $T$  é tal que cada ponto de  $M$  tem uma vizinhança  $V$  cuja imagem inversa é um conjunto com componentes conexas  $S_i$  tal que a restrição de  $T$  à  $S_i$  é um homeomorfismo). Já que  $M$  é compacta, segue que existe  $k \geq 1$  tal que

$$\mathcal{E}_k = \{y \in M : \#T^{-1}(y) = k\} \neq \emptyset.$$

Note que  $DT(x)$  é um isomorfismo para todo  $x \in M$ , pois  $|\det DT(x)| \geq \inf_{\|v\|=1} \|DT(x) \cdot v\| \geq \sigma > 0$ . Portanto, pelo teorema da aplicação inversa temos que, para todo  $x \in M$ ,

existe uma vizinhança  $V(x)$  e um raio  $\rho(x) > 0$  tal que a restrição de  $T$  à  $V(x)$  é um difeomorfismo sobre a bola  $B(T(x), \rho(x))$ . Como  $T$  é aplicação de recobrimento, podemos tomar  $V(x)$  e  $V(w)$  satisfazendo  $V(x) \cap V(w) = \emptyset$  para todo  $x, y \in f^{-1}(y)$ , com  $y \in M$ .

Afirmamos que podemos tomar  $\rho(x)$  independente de  $x$ :

Como  $T$  é sobrejetiva, se tomarmos a família  $\mathcal{F}_x = \{B(x, \rho(x)/2)\}$ , temos que  $\mathcal{F}_x$  será uma cobertura de  $M$ . Logo, como  $M$  é compacta, existe um conjunto  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m} \subset M$  tal que os conjuntos  $\{B(T(x_i), \rho(x_i)/2)\}_{1 \leq i \leq m}$  e  $\{V(x_i)\}_{1 \leq i \leq m}$  formam cada um coberturas de  $M$ . Escolhendo  $\rho$  como sendo o mínimo dos raios  $\rho(x_i)/2$ , temos que para todo  $x \in M$  vale que  $x \in V(x_s)$  para algum  $s$  com  $1 \leq s \leq m$ , e portanto temos que  $T(x) \in B(T(x_s), \rho(x_s))$ . Pela minimalidade de  $\rho$  temos que  $B(T(x), \rho) \subset B(T(x_j), \rho(x_j))$ . Daí, existe uma vizinhança  $U(x)$  de  $x$  tal que a restrição de  $T$  à  $U(x)$  é um difeomorfismo sobre  $B(T(x), \rho)$ . Logo, podemos tomar  $\rho(x)$  independente de  $x$ .

Note que  $\mathcal{E}_k$  é aberto, pois se  $y \in \mathcal{E}_k$ , então  $B(y, \rho/2) \subset \mathcal{E}_k$ . De fato, tomando  $T^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  e  $w \in B(y, \rho/2)$ , claramente  $T^{-1}(w) \cap V(x_i) \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ , logo  $\#T^{-1}(w) \geq k$ ; por outro lado, se existe  $w_{k+1} \in \left(\bigcup_{i=1}^k V(x_i)\right)^c \cap T^{-1}(w)$ , então considere  $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}\} \in T^{-1}(w)$  e  $V(w_i)$  tal que  $T$  é bijeção entre  $V(w_i)$  e  $B(w, \rho)$  vizinhança de  $y$ , com  $i = 1, \dots, k+1$ , daí segue que  $y$  tem uma imagem inversa em cada  $V(w_i)$ , o que é impossível; portanto  $B(y, \rho/2) \subset \mathcal{E}_k$ .

Como  $\mathcal{E}_k$  é aberto e fechado, pela conexidade de  $M$ , segue que  $\mathcal{E}_k = M$  para algum  $k$ , ou seja, todos os pontos têm exatamente  $k$  pré-imagens.

Assim, tomando  $h = (T|V(x))^{-1}$ , segue que  $h$  é de classe  $C^1$ ,  $h(y) = x$  e  $T \circ h = Id$ . Desse modo  $h$  é  $\sigma^{-1}$ -contração, isto é,  $\|Dh(w)\| = \|DT(h(w))^{-1}\| \leq \sigma^{-1} < 1$  para todo  $w$  no domínio de  $h$ . Pelo teorema do valor médio, temos que

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2)$$

para todo  $y_1, y_2 \in B(y, \rho)$  e portanto,  $h$  verifica a condição 3. ■

**Observação 3.28.** A transformação  $h$  definida no lema anterior é chamada ramo inverso de  $T$ .

Definimos ramos inversos  $h^n$  de qualquer iterado  $T^n$ ,  $n \geq 1$ , da seguinte forma:

**Definição 3.29.** Dado  $y \in M$  e  $x \in T^{-n}(y)$ , sejam  $h_1, \dots, h_n$  ramos inversos de  $T$  com

$$h_j(T^{n-j+1}(x)) = T^{n-j}(x) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Então definimos o ramo inverso  $h^n$  de qualquer iterado  $T^n$  como sendo  $h^n = h_n \circ \dots \circ h_1$ , o qual está definido em  $B(y, \rho)$ , é um difeomorfismo de classe  $C^1$  sobre sua imagem, satisfaz  $T^n \circ h^n = \text{Id}$  e  $h^n(y) = x$ .

**Observação 3.30.** Como  $\sigma^{-1} < 1$ , cada  $h_j$  é uma contração, portanto, a sua imagem está contida numa bola de raio menor que  $\rho$  em torno de  $T^{n-j}(x)$ , logo  $h^n$  está bem definida. Além disso, satisfaz as condições dadas no lema anterior substituindo adequadamente  $T$  por  $T^j$  e  $\sigma$  por  $\sigma^j$ .

Prosseguindo com a demonstração do Teorema 3.26, note que, uma vez que  $T$  é um difeomorfismo local e  $M$  é compacta, o jacobiano de  $T$  é limitado. Segue que o logaritmo  $\ln |\det DT|$  também é Hölder e portanto existem  $D_0$  e  $\alpha > 0$  de tal forma que

$$|\ln |\det DT(x)| - \ln |\det DT(y)|| \leq D_0 \cdot d(y_1, y_2)^\alpha \quad \forall x, y \in M.$$

### 3.4.2 Lema de distorção e consequências

Apresentamos abaixo um importante lema que nos fornece um controle sobre a derivada dos ramos inversos definidos anteriormente. O controle fornecido nos permitirá estimar  $T_*m$  por um múltiplo da medida de Lebesgue  $m$  em todo conjunto mensurável. Assim, temos

**Proposição 3.31.** (Lema de distorção). Existe  $D_1 > 0$  de tal forma que para todo  $n \geq 1$ , para todo  $y \in M$ , e qualquer ramo inverso  $h^n : B(y, p) \rightarrow M$  de  $T^n$ , têm-se que

$$\frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} \leq D_1.$$

*Prova:* Escrevemos  $h^n$  como composição  $h^n = h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_1$  de ramos inversos de  $T$ . E também denotamos  $h^i = h_i \circ h_{i-1} \circ \dots \circ h_1$  para  $1 \leq i \leq n$ , tendo que  $h^0 = \text{Id}$ .

Assim, temos que :

$$\begin{aligned} \ln \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} &= \ln |\det Dh^n(y_1)| - \ln |\det Dh^n(y_2)| \\ &= \ln \left| \det \prod_{i=1}^n Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_1) \right| - \ln \left| \det \prod_{i=1}^n Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_2) \right| \\ &= \ln \left| \prod_{i=1}^n \det Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_1) \right| - \ln \left| \prod_{i=1}^n \det Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_2) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln |\det Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_1)| - \sum_{i=1}^n \ln |\det Dh_i(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)(y_2)| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln |\det Dh_i(h^{i-1}(y_1))| - \sum_{i=1}^n \ln |\det Dh_i(h^{i-1}(y_2))|. \end{aligned}$$

Acima, foi usado que  $Dh^n(y_k) = \Pi_{i=1}^n Dh_i(h^{i-1}(y_k))$ ,  $k = 1, 2$ , e aplicado o teorema de Binet-Cauchy aos determinantes  $Dh^n(y_k)$   $k = 1, 2$ .

Mas  $\ln |Dh_i| = -\ln |\det DT| \circ h_i$  e como cada  $h_j$  é uma  $\sigma^{-1}$ -contração, segue que

$$\begin{aligned} \ln \frac{|\det Dh^n(y_1)|}{|\det Dh^n(y_2)|} &\leq \sum_{i=1}^n D_0 \cdot d(h^i(y_1), h^i(y_2))^\alpha \leq \sum_{i=1}^n D_0 \cdot \sigma^{-i\alpha} d(y_1, y_2)^\alpha \\ &= D_0 \cdot d(y_1, y_2)^\alpha \sum_{i=1}^n \sigma^{-i\alpha} \leq D_0 \cdot d(y_1, y_2)^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^{-i\alpha} \\ &\leq D_0 (2\rho)^\alpha \frac{\sigma^{-\alpha}}{1 - \sigma^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomar  $D_1 = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} D_0 \cdot \sigma^{-i\alpha})$  para que tenhamos o resultado desejado.

□

O corolário a seguir nos fornece uma noção mais geométrica da proposição anterior. Note que esta é uma versão mais geral do Lema 2.21.

**Corolário 3.32.** *Existe  $D_2 > 0$  tal que, para todo  $y \in M$  e quaisquer  $B_1, B_2 \subset B(y, p)$  conjuntos mensuráveis, temos*

$$\frac{1}{D_2} \frac{m(B_1)}{m(B_2)} \leq \frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq D_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}.$$

*Prova:* Tome  $D_2 = D_1^{2(2\rho)^\nu}$ . Segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} m(h^n(B_1)) &= \int_{B_1} |\det Dh^n| dm \leq \int_{B_1} D_1^{(2\rho)^\nu} |\det Dh^n(y)| dm = D_1^{(2\rho)^\nu} |\det Dh^n(y)| m(B_1) \text{ e} \\ m(h^n(B_2)) &= \int_{B_2} |\det Dh^n| dm \geq \int_{B_2} \frac{1}{D_1^{(2\rho)^\nu}} |\det Dh^n(y)| dm = \frac{1}{D_1^{(2\rho)^\nu}} |\det Dh^n(y)| m(B_2). \end{aligned}$$

Ao dividirmos as duas desigualdades, obtemos que

$$\frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq D_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}.$$

Para obtermos a desigualdade da esquerda, basta que troquemos  $B_1$  por  $B_2$  nas respectivas posições das relações acima e temos o resultado.

□

A seguir, nós mostraremos um resultado consequente do lema de distorção, o qual nos diz que a sequência de *push-fowards*  $T_*^n m$  tem densidade (derivada de Radón-Nikodym) uniformemente limitadas.

**Proposição 3.33.** *Existe  $D_3$  tal que,*

$$D_3^{-1} \cdot m(B) \leq (T_*^n m)(B) \leq D_3 \cdot m(B) \quad (3.15)$$

para todo mensurável  $B \subset M$  e todo  $n \geq 1$ .

*Prova:* Suponha, sem restrição que  $B \subset B_0 = B(z, \rho)$  para algum  $z \in M$ . Pelo corolário anterior, temos que

$$\frac{1}{D_2} \frac{m(B_1)}{m(B_2)} \leq \frac{m(h^n(B))}{m(h^n(B_0))} \leq D_2 \frac{m(B)}{m(B_0)}.$$

para todo ramo inverso  $h^n$  de  $T^n$  no ponto  $z$ .

Perceba que  $m(T^{-n}(B))$  é a soma das medidas  $m(h^n(B))$  de todos os ramos inversos de  $T^n$ , já que cada  $h^n$  é inversa de  $T^n$  e suas imagens são distintas duas-a-duas devido a todos os pontos, para  $B_1 = B$  e  $B_2 = B_0$ , possuem a mesma quantidade de pré-imagens por  $T^n$ .

Usando novamente o resultado anterior, temos que

$$\frac{1}{D_2} \frac{m(B)}{m(B_0)} \leq \frac{T_*^n m(h^n(B))}{T_*^n m(h^n(B_0))} \leq D_2 \frac{m(B)}{m(B_0)}.$$

Além disso, vale que  $(T_*^n m)(B_0) \leq (T_*^n m)(M) = 1$ . Como o raio  $\rho$  está fixado temos que o volume das bolas  $B(z, \rho)$  é limitado superiormente e inferiormente, digamos por  $\beta_0$  e  $\beta_0^{-1}$ , para todo  $z \in M$ . Logo, sendo  $\beta_0 \geq m(B_0) \geq \beta_0^{-1} > 0$ , obtemos

$$\frac{\beta_0^{-1}}{D_2} \cdot m(B) \leq \frac{1}{D_2} \frac{m(B)}{m(B_0)} \leq T_*^n m(B) \leq \frac{T_*^n m(B)}{T_*^n m(B_0)} \leq D_2 \frac{m(B)}{\beta_0}$$

Diante disso, tome  $D_3 = D_2 \cdot (\beta_0)^{-1}$  e o resultado segue.

□

### 3.4.3 Demonstração do teorema

Para demonstrar o Teorema 3.26, é necessário demonstrar a existência de probabilidades invariantes e absolutamente contínuas. Perceba que o teorema 3.12 (mais precisamente no lema 3.15), permite encontrar uma sequência de medidas cujo ponto de acumulação é

invariante pela transformação  $T$ . Nosso intuito é usar o 1º critério de continuidade absoluta (Lema 3.20) para mostrar que todo ponto de acumulação dessa sequência é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue, tal fato é uma consequência imediata do que foi feito na seção anterior. Além disso, existe  $C > 0$  tal que  $C^{-1} \leq \frac{d\mu}{dm}(x) \leq C$ .

**Corolário 3.34.** *Todo ponto de acumulação  $\mu$  da sequência  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j m$  é uma probabilidade invariante para  $T$  absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue  $m$ .*

*Prova:* Seja  $\mu$  um ponto de acumulação da sequência  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j m$ . Pelo Lema 3.17,  $\mu$  é probabilidade invariante para  $T$ .

□

Pela proposição 3.33, podemos usar o lema 3.20 e concluir que  $\mu$  é absolutamente contínua em relação à  $m$  medida de Lebesgue e vale  $D_3^{-1} \frac{d\mu}{dm}(x) \leq D_3$ .

O corolário 3.34 garante a existência da medida invariante absolutamente contínua. Mostraremos agora que a medida  $\mu$  é a única probabilidade invariante absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue e, além disso, é ergódica para  $T$ .

**Lema 3.35.** *Sejam  $\mathcal{P}_0 = \{U_1, U_2, \dots, U_s\}$  uma partição de  $M$  em regiões com interior não vazio e diâmetro menor que  $\rho$  e  $B$  qualquer conjunto mensurável com  $m(B) > 0$ . Defina  $\mathcal{P}_n = \{h^n(U_i), \quad 1 \leq i \leq s, h^n \text{ ramo inverso de } T^n\}$ , para cada  $n \geq 1$ . Então  $(\mathcal{P}_n)$  é uma sequência de partições num espaço métrico compacto, com diâmetros convergindo para zero quando  $n \rightarrow \infty$  e existe  $Q_n \in (\mathcal{P}_n)$ , para cada  $n \geq 1$ , tal que*

$$m(Q_n) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{m(Q_n \cap B)}{m(Q_n)} \rightarrow 1 \quad n \rightarrow \infty.$$

*Demonstração:* Dado qualquer  $0 < \epsilon < m(B)$ , seja  $K_\epsilon \subset B$  compacto tal que  $m(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ . Note que

$$\text{diam } h^n(U_i) \leq \sigma^{-n} \cdot \text{diam } U_i \leq \sigma^{-n} \rho.$$

Assim, como o diâmetro das partições tende a zero, temos que a medida da união  $K_{\epsilon,n}$  de todos os elementos de  $(\mathcal{P}_n)$  que intersectam  $K_\epsilon$  satisfaz  $m(K_{\epsilon,n} \setminus K_\epsilon) < \epsilon$  para  $n$  suficientemente grande. Suponha, por absurdo, que

$$m(K_\epsilon \cap Q_n) \leq \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} m(Q_n) \quad \text{para todo } Q_n \in K_{\epsilon,n}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
 m(K_\epsilon) &= \sum_{Q_n \in K_{\epsilon,n}} m(K_\epsilon \cap Q_n) \\
 &\leq \sum_{Q_n \in K_{\epsilon,n}} \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} m(Q_n) = \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} \sum_{Q_n \in K_{\epsilon,n}} m(Q_n) \\
 &= \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} m(K_{\epsilon,n}) \leq \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} (m(K_\epsilon) + \epsilon) \\
 &\leq m(B) - \epsilon < m(K_\epsilon)
 \end{aligned}$$

O que é uma contradição e, portanto, deve existir algum  $Q_n \in (\mathcal{P}_n)$  de tal modo que

$$m(K_\epsilon \cap Q_n) > \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon} m(Q_n).$$

O que implica que  $m(Q_n) \geq m(B \cap Q_n) \geq m(K_\epsilon \cap Q_n) > 0$ . Agora, dividindo todos os membros das desigualdades por  $(Q_n)$  encontramos que

$$1 \geq \frac{m(B \cap Q_n)}{m(Q_n)} \geq \frac{m(K_\epsilon \cap Q_n)}{m(Q_n)} \geq \frac{m(B) - \epsilon}{m(B) + \epsilon}$$

e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos o desejado. ■

O lema anterior servirá de base para argumentarmos a ergodicidade da medida  $\mu$ . Recorde o fato de que se  $A$  é conjunto invariante então  $T^n(A) = A$  a menos de conjunto com medida de Lebesgue nula e que  $\mu$  é ergódica se, e somente se, todo conjunto invariante tem medida  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A) = 1$ .

**Lema 3.36.** *Seja  $\mathcal{P}_0 = \{U_1, \dots, U_s\}$  como anteriormente e  $A \subset M$  um conjunto invariante para  $T$  com  $m(A) > 0$ , então existe  $1 \leq i_0 \leq s$  tal que  $m(U_{i_0} \setminus A) = 0$ .*

*Demonstração:* Pelo lema anterior, podemos tomar  $Q_n$  de tal forma que  $m(Q_n) > 0$  e

$$m(Q_n \cap A)/m(Q_n) \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Lembrando que  $1 = m(Q_n \setminus A)/m(Q_n) + m(Q_n \cap A)/m(Q_n)$ , segue que  $m(Q_n \setminus A)/m(Q_n) \rightarrow 0$ .

Seja  $U_{i(n)} = T^n(Q_n)$ . Pelo Corolário 3.32 aplicado ao ramo inverso  $h^n$  de  $T^n$  que envia  $U_{i(n)}$  em  $Q_n$ , sabendo que  $A$  é invariante e  $T^n(Q_n \setminus A) \supset T^n(Q_n) \setminus A$ , temos então que

$$\frac{m(U_{i(n)} \setminus A)}{m(U_{i(n)})} \leq \frac{m(T^n(Q_n \setminus A))}{m(T^n(Q_n))} \leq D_2 \cdot \frac{m(Q_n \setminus A)}{m(Q_n)} \rightarrow 0.$$

Ou seja,  $\frac{m(U_{i(n)} \setminus A)}{m(U_{i(n)})} \rightarrow 0$ . Como  $\mathcal{P}_0$  é uma partição finita, então, temos que deve existir  $1 \leq i_0 \leq s$  tal que  $i(n) = i_0$  para infinitos valores de  $n$ . Logo  $m(U_{i_0} \setminus A) = 0$ .

■

Como consequência, temos a ergodicidade de alguma medida invariante absolutamente contínua.

**Corolário 3.37.** *A transformação  $T : M \rightarrow M$  admite alguma probabilidade invariante ergódica e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.*

*Prova:* Do resultado anterior, temos que existem no máximo  $s = \#\mathcal{P}_0$  conjuntos invariantes com medida de Lebesgue positiva disjuntos dois-a-dois. Portanto,  $M$  pode ser particionada num número finito de conjuntos invariantes  $A_1, \dots, A_r$ ,  $r \leq s$  com  $m(A_i) > 0$  para todo  $1 \leq i \leq r$  e que são minimais (De fato, para cada  $A$  invariante, se  $\exists B \subset A$  invariante com  $0 < m(B) < m(A)$  então trocamos  $\{A\}$  por  $\{B, A \setminus B\}$ , ou seja, não existem subconjuntos invariantes  $B_i \subset A_i$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazendo  $0 < m(B_i) < m(A_i)$ ).

Dada qualquer medida invariante absolutamente contínua  $\mu$ , existe algum  $i$  tal que  $\mu(A_i) > 0$ , (caso contrário  $\mu(M) = 0$ ). Considere a restrição normalizada

$$\mu_i(E) = \frac{\mu(E \cap A_i)}{\mu(A_i)}$$

de  $\mu$  a  $A_i$  a qual sabemos que é invariante (Lema 2.25) e absolutamente contínua devido à continuidade absoluta de  $\mu$ . Verificaremos que  $\mu_i$  é ergódica,

Com efeito, seja  $C \subset M$  invariante, suponhamos que  $\mu_i(C) > 0$ , logo  $C \cap A_i \neq \emptyset$ . Como  $C \subset A_i$  é invariante, segue que  $m(C \cap A_i) > 0$ . Pela continuidade absoluta, temos que  $\mu(C \cap A_i) = 0$  ou  $\mu(C^c \cap A_i) = 0$ , o que implica que  $\mu_i(C) = 0$  ou  $\mu_i(C) = 1$ .

□

Com isso, já demonstramos a existência de uma medida ergódica absolutamente contínua  $\mu$  e, além disso, mostramos que existem apenas um número finito de probabilidades ergódicas e absolutamente contínuas. Agora, nos resta mostrar que tal probabilidade  $\mu$  é única e, para isso, usaremos o fato da seguinte propriedade de  $T$ .

**Lema 3.38.** *Dado qualquer aberto não vazio  $U \subset M$ , existe  $N \geq 1$  tal que  $T^N(U) = M$ .*

*Demonstração:* Seja  $x \in U$  e  $r > 0$  tais que  $B(x, r) \subset U$ . Dado qualquer  $n \geq 1$ , suponha que  $T^n(U)$  não cobre toda a variedade  $M$ . Então existe alguma curva  $\gamma$  ligando  $T^n(x)$  a um ponto  $y \in M \setminus T^n(U)$ , e essa curva pode ser tomada com comprimento menor

que  $\text{diam}(M) + 1$ . Compondo  $\gamma$  com o ramo inverso  $h^n$  que satisfaz  $h^n(T^n(x)) = x$ , obtemos uma curva  $\gamma_n = h^n \circ \gamma$  ligando  $x$  a um ponto  $y_n \in M \setminus U \supset M \setminus B(x, r)$ .

Como  $h^n$  é contração, segue então que

$$r \leq \text{comp}(\gamma_n) \leq \sigma^{-n} \text{comp}(\gamma) \leq \sigma^{-n}(\text{diam}(M) + 2),$$

o que implica que  $n < \log \frac{r}{\text{diam}(M)+2} - \log \sigma$ , isso nos diz que o conjunto dos  $n$ 's para os quais  $T^n(U) \neq M$  é limitado superiormente. Logo, existe  $N \geq 1$  tal que  $T^N(U) = M$ , como queríamos. ■

**Corolário 3.39.** *Se  $A \subset M$  é um conjunto invariante com  $m(A) > 0$ , então  $A$  tem medida de Lebesgue total na variedade  $M$ .*

*Prova:* Como  $A$  é invariante, pelo lema 3.36 é possível escolher  $U_j \in \mathcal{P}_0 = \{U_1, \dots, U_s\}$  tal que  $m(U_j \setminus A) = 0$ . Tome  $U_A = \bigcup (U_i)$  e como  $U_A$  é aberto, segue que existe  $N \geq 1$  tal que  $T^N(U_A) = M$ . Como  $U_j$  é invariante, segue que  $U_A$  é invariante e, como  $m(U_A) = m(U_j)$ , segue que  $m(U_A \setminus A) = 0$ .

Agora, perceba que  $M \setminus A = T^N(U) \setminus T^N(A) \subset T^N(U \setminus A)$  e, aplicando o Teorema de mudança de variáveis (Teorema A.9) à  $T^N(U \setminus A)$ , obtemos

$$m(T^N(U \setminus A)) = \int_{T^N(U \setminus A)} X_{T^N}(U \setminus A) dm = \int_{U \setminus A} |\det T^N(x)| dm = m(U \setminus A) = 0.$$

Logo  $m(A) = m(M)$ . □

Finalmente, podemos completar a demonstração do Teorema 3.26.

**Corolário 3.40.** *Seja  $\mu$  qualquer probabilidade invariante absolutamente contínua. Então  $\mu$  é ergódica,  $\mu$  é medida física e a sua bacia  $B(\mu)$  tem medida de Lebesgue total em  $M$ . Consequentemente,  $\mu$  é a única probabilidade invariante absolutamente contínua. Além disso, o seu suporte é toda a variedade  $M$ .*

*Prova:* Se  $A \subset M$  é um subconjunto invariante qualquer então, pelo Corolário 3.39,  $m(A) = 0$  ou  $m(A^c) = 0$ . Já que  $\mu$  é absolutamente contínua, segue que  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A^c) = 0$ . Isto prova que  $\mu$  é ergódica.

Da ergodicidade de  $\mu$ , temos que  $\mu(B(\mu)) = 1$ . Como  $B(\mu)$  é um conjunto invariante com medida de Lebesgue positiva, então, deve ter medida de Lebesgue total. Em particular,  $\mu$  é também uma medida física.

Analogamente, como o suporte de  $\mu$  é um conjunto compacto invariante, então  $\mu(\text{supp}(\mu)) = \mu(M)$ , o que implica que  $\text{supp}(\mu) = M$ .

Finalmente, sejam  $\mu$  e  $\nu$  duas probabilidades invariantes absolutamente contínuas quaisquer. Segue do fato demonstrado acima que elas são ergódicas e que as suas bacias tem medida total, em particular  $B(\mu) \cap B(\nu) \neq \emptyset$ . Tomando qualquer ponto  $x \in B(\mu) \cap B(\nu)$ , temos que

$$\mu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)} = \nu$$

e pela unicidade do limite na topologia fraca\*, concluímos que  $\mu = \nu$ .

□

Concluímos este capítulo aplicando o teorema 3.26 para endomorfismos lineares expansores no toro.

**Corolário 3.41.** *Seja  $T_A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  como no exemplo 3.22 tal que todos os autovalores de  $A$  tem módulo maior que 1, então a medida de Lebesgue é ergódica para  $T_A$ .*

*Prova:* Como  $T_A$  preserva  $m$  e  $m \ll m$ , o corolário 3.40 implica a ergodicidade de  $m$ .

□

## 4 ATRATORES SOLENOIDAIS GORDOS

Neste capítulo iremos tratar de uma classe de sistemas dinâmicos enfocada no artigo *Fat Solenoidal Attractors* [4]. Esta classe é definida pelos seguintes mapas

$$\begin{aligned} T : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \\ T(x, y) &= (cx, \lambda y + f(x)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $c \geq 2$  é um inteiro,  $0 < \lambda < 1$  é um número real e  $f$  é uma função de classe  $C^2$  do toro  $S^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$  em  $\mathbb{R}$ .

Note que o mapa  $T$  é um produto torto sobre o mapa expansor  $\phi : x \mapsto cx$  e, além disso,  $T$  contrai uniformemente na direção das fibras verticais  $\{x\} \times \mathbb{R}$ . De fato, a dinâmica de  $T$  em cada componente vertical é um mapa afim da forma  $T_x(y) = \lambda y + f(x)$  com  $\lambda < 1$ . Pela definição da  $T$ , é possível notar que  $T$  é um endomorfismo hiperbólico.

O comportamento ergódico de  $T$  é relativamente simples, pois  $T$  admite uma única medida ergódica tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(T^j(x)) = \mu \quad \text{para Lebesgue quase todo ponto } x \in S^1 \times \mathbb{R}$$

Esta medida  $\mu$  é uma medida física, chamada de medida Sinai-Ruelle-Bowen ou simplesmente medida SRB. Na seção 3.1 daremos uma descrição precisa desta medida SRB para esta classe de sistemas dinâmicos.

A cada mapa  $T$  associamos o atrator solenoidal  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(S^1 \times [-K, K])$  para algum  $K > \frac{\sup |f|}{1-\lambda}$  (para tal  $K$ , vale que  $T(S^1 \times [-K, K]) \subset S^1 \times [-K, K]$ ). Esse conjunto  $\Lambda$  satisfaz  $d(T^n(x, y), \Lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  para todo  $(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$ , daí o fato ser atrator. O termo “*solenoidal*” se deve ao mapa  $T$  ser expansor na base e, por isso, sobrepõe  $S^1 \times [-K, K]$   $c$ -vezes sobre si próprio.

A questão apontada no artigo de *Tsujii* [4] (e de nosso interesse neste capítulo) é a suavidade da medida SRB com respeito a medida de Lebesgue dentro desse domínio. No caso aonde  $|DetDT(x, y)| = \lambda c < 1$ , a medida SRB é mutuamente singular com respeito a medida de Lebesgue porque  $T$  contrai área. O caso em que  $\lambda c > 1$  é suscetível de que a medida SRB seja mais regular e portanto, iremos estudá-lo com mais cautela. A regularidade que estudaremos será a continuidade absoluta de  $\mu$  com respeito à medida de Lebesgue  $m$  e a propriedade  $\frac{d\mu}{dm} \in L^2(S^1, \mathbb{R})$ .

Exibiremos na seção 3.5 dois exemplos onde destacamos comportamentos distintos da medida SRB para dois mapas  $T$ . O primeiro exemplo corresponde a uma família de funções para as quais não há medida invariante absolutamente contínua. O segundo exemplo corresponde a um mapa  $T$  específico para o qual a medida SRB é absolutamente contínua. Deixamos abaixo os seus respectivos enunciados:

**Exemplo 4.1.** *Se  $f(x) = \sigma(\phi(x)) - \lambda \cdot \sigma(x)$  para alguma função mensurável  $\sigma$  no toro  $S^1$ , então o suporte da medida SRB de  $T$  está contido no gráfico de  $\sigma$  e é totalmente singular com respeito a medida de Lebesgue em  $S^1 \times \mathbb{R}$ .*

**Exemplo 4.2.** *Seja  $c = 2$ .  $0,5 < \lambda \leq 0,51$  e  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Então a medida SRB  $\mu$  de  $T$  é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue em  $S^1 \times \mathbb{R}$ .*

O objetivo desse estudo é fornecer uma condição suficiente para a continuidade absoluta da medida SRB, a qual corresponde a uma condição geométrica de transversalidade entre as sobreposições das imagens do atrator. A condição geométrica de transversalidade corresponde à definição 4.15. Afirmamos que a medida  $\mu$  em questão é absolutamente contínua para quase todo o mapa  $T$  e mais ainda, essa medida é robusta, isto é, existe um aberto  $A$  na topologia do espaço das medidas de  $S^1 \times \mathbb{R}$  tal que, para toda  $\nu \in A$ , temos que  $\nu$  é ergódica.

Agora, fixe um inteiro  $c \geq 2$  seja  $\mathcal{S} \subset (0, 1) \times C^2(S^1, \mathbb{R})$  conjunto dos  $(\lambda, g)$  para os quais a medida SRB é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue em  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Consideremos  $\text{Int}(\mathcal{S})$  como sendo o interior de  $\mathcal{S}$ , com respeito a topologia produto, obtida da topologia usual em  $(0, 1)$  e da topologia  $C^2$  nas funções  $C^2(S^1, \mathbb{R})$ .

Nosso objetivo principal será a discutir o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.** *Se  $T$  satisfaz a condição de transversalidade, então a medida SRB é absolutamente contínua. Além disso, o par  $(\lambda, f) \in \text{Int}(\mathcal{S})$*

O teorema acima é um importante passo no artigo [4] para obter o seguinte resultado:

**Teorema.** *Seja  $c^{-1} < \lambda < 1$ . Existe uma coleção finita de funções  $\sigma_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\sigma_i \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$  e  $1 \leq i \leq m$  tais que para qualquer função  $h \in C^2(S^1, \mathbb{R})$ , é válido*

$$m \left( \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m \mid \left( \lambda, h(x) + \sum_{i=1}^m t_i \sigma_i(x) \right) \notin \text{Int}(\mathcal{S}) \right\} \right) = 0,$$

para  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^m$ .

Segue daí que a continuidade absoluta da medida SRB é uma propriedade aberta e densa sob a condição  $\lambda c > 1$ , conforme os seguintes corolários

**Corolário.**  $\mathcal{S}$  contém um conjunto aberto e denso de  $(1/c, 1) \times C^2(S^1, \mathbb{R})$ .

**Corolário.** Seja  $2 \leq r \leq \infty$  e  $c^{-1} < \lambda < 1$  o conjunto de funções

$$\mathcal{S}_\lambda^r = \{g \in C^r(S^1, \mathbb{R}) \mid (\lambda, g) \in \text{Int}(\mathcal{S})\}$$

é aberto e denso em  $C^r(S^1, \mathbb{R})$ .

As condições de validade do teorema acima nos remetem a estudar o conceito de prevalência e timidez, introduzidos por *Yorke* e colaboradores (1992). Esses conceitos, tal como as propriedades que eles carregam, nos permitem demonstrar que o conjunto  $\mathcal{S}_\lambda^r$  é prevalente em  $C^r(S^1; \mathbb{R})$ .

## 4.1 Descrição simbólica da medida SRB

Nesta seção, daremos uma descrição mais precisa da medida SRB e algumas de suas implicações dentro do contexto que estamos trabalhando. No entanto, precisamos antes introduzir o conceito que irá nos permitir entender a dinâmica sob um ponto de vista simbólico. Começaremos com a seguinte definição:

Seja  $K = \{1, 2, \dots, c\}$ , dizemos que  $w$  é uma palavra sobre  $K$  se  $w$  é uma sequência de elementos de  $K$  justapostos, ou seja, se  $w = w_1 w_2 w_3 \dots w_s = (w_i)_{i=1}^s$ , onde  $w_i \in K$ . Neste caso, dizemos ainda que a palavra  $w$  tem comprimento  $s$ .

Note que podemos estender a definição para quando  $s = \infty$ , sendo assim,  $w$  é uma palavra de comprimento infinito quando é uma sequência infinita de justaposições dos elementos de  $K$ . Denotaremos por  $K^s$  o conjunto gerado por todas as palavras de comprimento  $s$  em  $K$  (portanto  $K^\infty$  é denotado quando  $s = \infty$ ).

Diante disso, considere  $c \geq 2$ ,  $c^{-1} < \lambda < 1$ ,  $f \in C^2(S^1, \mathbb{R})$  e  $\phi$  o mapa dado por:

$$\phi : S^1 \rightarrow S^1, \quad x \mapsto cx \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Para uma palavra  $w = (w_i)_{i=1}^p \in K^p$ , vamos denotar o truncamento ao comprimento  $q \leq p$  por  $[w]_q = (w_i)_{i=1}^q$ . Agora, defina  $\mathcal{P}$  como sendo a partição de  $S^1$  em intervalos dada por:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(j) := [(j-1)/c, j/c) \mid j \in K\}.$$

Então  $\mathcal{P}^p := \bigvee_{i=0}^{p-1} \phi^{-i}(\mathcal{P})$  é a partição em intervalos

$$\mathcal{P}(w) = \bigcap_{i=0}^{p-1} \sigma^{-i}(\mathcal{P}(w_{p-i})),$$

onde  $w = (w_i)_{i=1}^p \in K^p$ . Note que  $x \in \mathcal{P}(w) \Leftrightarrow \phi^i(x) \in \mathcal{P}(w_{p-i}) \forall i = 0, 1, \dots, p-1$ .

Podemos entender melhor tal dinâmica se, por exemplo, tomarmos  $S^1 \times \mathbb{R}$  e particionarmos sucessivamente  $S^1$  em intervalos de comprimento  $c$  vezes menores que os anteriores (i.e., intervalos de tamanho  $\frac{1}{c^n}$ , sendo  $n$  o número de repetições desse processo). Na figura, ilustramos  $P(122)$  no caso  $c = 3$ .

Dado  $x \in P(122)$ , temos que  $x \in P(2)$ ,  $\phi(x) \in P(2)$  e  $\phi^2(x) \in P(1)$ , o que nos diz que  $x \in P_2 \cap \phi^{-1}(P(2)) \cap \phi^{-2}(P(1))$ , como ilustrado abaixo:

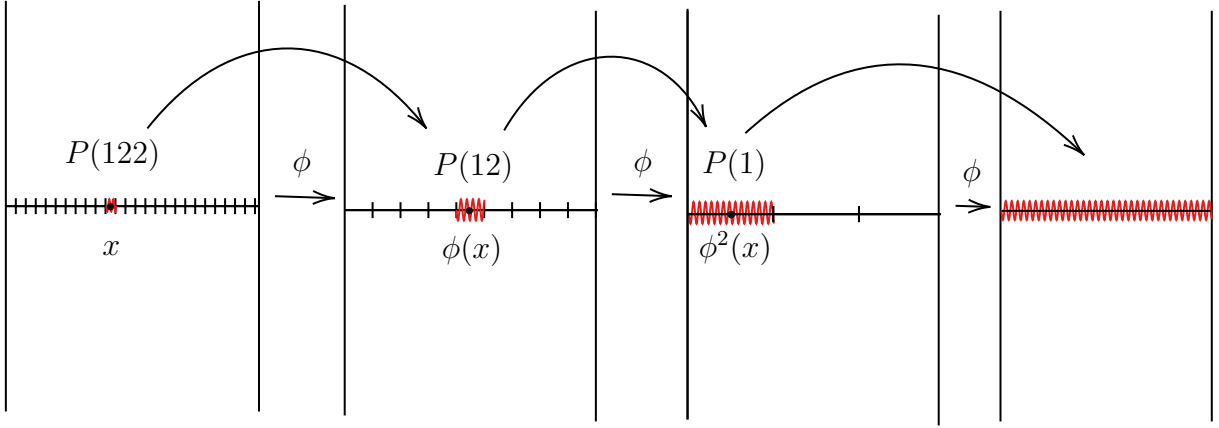


Figura 2 – Ilustração de elementos da partição no caso  $c=3$ .

Note que se  $w \in K^p$ , então a restrição de  $\phi^p$  sobre  $\mathcal{P}(w)$  é uma bijeção entre  $\mathcal{P}(w)$  e  $S^1$ . Dados  $x \in S^1$  e  $w \in K^p$  seja  $w(x)$  o único ponto  $y \in \mathcal{P}(w)$  tal que  $\phi^p(y) = x$ , temos então que  $\phi(w(x)) = [w]_{p-1}(x)$  com  $w \in K^p$ .

Temos a seguinte expressão para  $T^p$ :

$$T^p(x, 0) = \left( \phi^p(x), \sum_{i=1}^p \lambda^{i-1} f(\phi^{p-i}(x)) \right) = \left( \phi^p(x), \sum_{i=1}^p \lambda^{i-1} f([w]_i(\phi^p(x))) \right) \quad (4.2)$$

se  $y = w(x)$

Isso nos motiva a definirmos a função

$$R(x, w) := \sum_{i=1}^p \lambda^{i-1} f([w]_i(x)), \quad (4.3)$$

note que  $T^p(x, 0)$  corresponde ao gráfico da função  $R(\cdot, w)$ , pois  $T^p(y, 0) = (x, R(x, w))$  se  $x = \phi^p(y)$ .

Caso o comprimento de  $w$  seja infinito, isto é,  $w = (w_i)_{i=1}^{\infty} \in K^{\infty}$ , definimos

$$R(x, w) = \lim_{i \rightarrow \infty} R(x, \lfloor w \rfloor_i(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} f(\lfloor w \rfloor_i(x)).$$

Note que esse limite existe e corresponde a uma função de classe  $C^2$  (exceto para  $x = 0$ ), pois vale a seguinte limitação uniforme para as derivadas até ordem 2:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \lambda^{i-1} \cdot c^{-ir} \frac{d^r}{dx^r} (f(\lfloor w \rfloor_i(x))) \right| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \lambda^{i-1} \frac{d^r}{dx^r} (f(\lfloor w \rfloor_i(x))) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \|f\|_{C^2} \\ &\leq \|f\|_{C^2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \\ &= \|f\|_{C^2} (1 - \lambda)^{-1} < \infty, \quad \text{com } r = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

se  $x \neq 0$ . Tomando  $\beta = \|f\|_{C^2} (1 - \lambda)^{-1}$ , segue que

$$\sup_{x \in S^1 \setminus 0} \max \left\{ |R(x, w)|, \left| \frac{d}{dx} R(x, w) \right|, \left| \frac{d^2}{dx^2} R(x, w) \right| \right\} \leq \beta \quad (4.5)$$

para qualquer palavra  $w \in K^p$  (de comprimento infinito ou finito). Agora, considerando  $w \in K^p$  e  $v \in K^{\infty}$ , é importante notarmos que vale

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{dx^r} R(x, wv) - \frac{d^r}{dx^r} R(x, v) \right| &\leq \sum_{i=q+1}^{\infty} \lambda^{i-1} c^{-ir} \|f\|_{C^2} \\ &\leq \sum_{i=q+1}^{\infty} \lambda^{i-1} c^{-ir} \|f\|_{C^2} \\ &= \|f\|_{C^2} \sum_{i=q+1}^{\infty} \lambda^{i-1} c^{-ir} = \lambda^q c^{-(q+1)r} \cdot (1 - (\lambda - r))^{-1} \\ &\leq \lambda^q c^{-qr} \cdot \beta \end{aligned} \quad (4.6)$$

para  $r = 0, 1, 2$ .

Prosseguindo, dado  $x \in S^1$ , seja  $\gamma(x) \in K$  tal que  $\mathcal{P}(\gamma(x))$  contém  $x$ . Desse modo

$$\begin{aligned}
R(\phi(x), \gamma(x)w) &= \sum_{i=1}^p \lambda^{i-1} f(\lfloor \gamma(x)w \rfloor_i(\phi(x))) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda^{i-1} f(\lfloor w \rfloor_{i-1}(x)) \\
&= f(x) + \lambda \sum_{i=2}^{p+1} \lambda^{i-2} f(\lfloor w \rfloor_{i-1}(x)) = f(x) + \lambda \cdot R(x, w) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

para todo  $w \in K^p$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . E, observando essa relação acima, definimos os mapas:

$$\Pi : S^1 \times K^\infty \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \quad , \quad \Pi(x, w) = (x, R(x, w))$$

$$\Omega : S^1 \times K^\infty \rightarrow S^1 \times K^\infty \quad , \quad \Omega(x, w) = (\phi(x), \gamma(x)w).$$

De (4.7), seguem para todo par  $(x, w)$  a seguinte igualdade

$$T(x, R(x, w)) = (\phi(x), \lambda \cdot R(x, w) + f(x)) = (\phi(x), R(\phi(x), \gamma(x)w)) = \Pi(\phi(x), \gamma(x)w).$$

Assim, temos estabelecida a relação entre os mapas acima

$$T \circ \Pi = \Pi \circ \Omega. \quad (4.8)$$

O mapa  $\Omega$  pode ser visto com uma codificação da dinâmica  $T$ , e isso nos permite desenvolver a busca por propriedades ergódicas de  $T$  em outros espaços, para depois transportá-las ao espaço de origem.

Assim, com o intuito de definirmos uma medida ergódica em uma  $\sigma$ -álgebra para  $S^1 \times K^\infty$ , denomine cilindros em  $K^\infty$  os subconjuntos

$$C[k, a_k, \dots, a_n] = \{(w_1, w_2, \dots) \in K^\infty : w_j = a_j \text{ } k \leq j \leq n\}. \quad (4.9)$$

Tomando  $\mathcal{C} = \{U \times C : U \subset S^1 \text{ aberto, } C \text{ cilindro em } K^\infty\}$ , temos que  $\mathcal{C}$  é uma álgebra em  $S^1 \times K^\infty$  e portanto podemos tomar a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{C}$ .

Considere  $m_{S^1}$  como a medida de Lebesgue normalizada em  $S^1$  e seja  $\nu_\infty$  a medida de Bernoulli em  $K^\infty$ . Caracterizada pela equação

$$\nu_\infty(C[k, a_k, \dots, a_n]) = \frac{1}{c^{n-k+1}}. \quad (4.10)$$

Dados  $U \subset S^1$  mensurável e  $C$  um cilindro em  $K^\infty$  a medida produto  $m_{S^1} \times \nu_\infty$  é dada por:

$$m_{S^1} \times \nu_\infty(U \times C) = m_{S^1}(U) \cdot \nu_\infty(C).$$

A partir das considerações acima realizadas, são válidas seguintes propriedades da medida  $m_{S^1} \times \nu_\infty$  para a dinâmica  $\Omega$ :

**Proposição 4.4.** *A medida produto  $m_{S^1} \times \nu_\infty$  é invariante, ergódica e misturadora com respeito ao mapa  $\Omega$ .*

*Prova:* Inicialmente, note que

$$\nu_\infty(C[k, a_k, \dots, a_n]) = \nu_\infty(C[k + m, a_k, \dots, a_n]) \quad \forall m, k, n \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Com isso, mostraremos  $m_{S^1} \times \nu_\infty$  é invariante por  $\Omega$ . Com efeito, dados  $U \subset \mathbb{R}$  e  $C = C[k, a_k, \dots, a_n]$  temos que, para  $k > 1$

$$m_{S^1} \times \nu_\infty(\Omega^{-1}(U \times C)) = m_{S^1}(\phi^{-1}(U)) \cdot \nu_\infty(C[k - 1, a_k, \dots, a_n]) \quad (4.12)$$

Vimos que  $(m_{S^1}, S^1)$  é invariante, logo  $m_{S^1}(\phi^{-1}(U)) = m_{S^1}(U)$ . Além disso, de (4.11) segue a igualdade

$$\nu_\infty(C[k - 1, a_k, \dots, a_n]) = \nu_\infty(C) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Para  $k = 1$ , teremos que  $\phi(x)a \in C$  se, e somente se,  $\phi(x) = x_1, a_1 = x_2, a_2 = x_3, \dots, a_{n-1} = x_n$ , em particular,  $a \in C[1, x_2x_3\dots x_n]$ . Portanto:

$$\begin{aligned} m_{S^1} \times \nu_\infty(\Omega^{-1}(U \times C)) &= m_{S^1}(\phi^{-1}(U) \cap P(x_1)) \cdot \nu_\infty(C[1, a_1, \dots, a_{n-1}]) \\ &= m_{S^1}(U) \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c^{n-1}} \\ &= m_{S^1} \times \nu_\infty(U \times C). \end{aligned}$$

Como os conjuntos da forma  $U \times C$  geram a  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$ , segue que  $(m_{S^1}, S^1)$  é  $\Omega$ -invariante.

Para a ergodicidade de  $m_{S^1} \times \nu_\infty$ , é suficiente verificar que a medida  $m_{S^1} \times \nu_\infty$  é misturadora para  $\Omega$  (conforme a observação 2.28),

isto é,

$$(m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-n}A \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (m_{S^1} \times \nu_\infty)(A) \cdot (m_{S^1} \times \nu_\infty)(B) \quad \forall A, B \in \Sigma$$

Primeiro, vamos mostrar a convergência para  $A, B \in \mathcal{C}$ . Sejam  $A = U_1 \times C_1$ ,  $B = U_2 \times C_2$  e  $C_1 = C[m, x_m, \dots, x_n]$ , com  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $q - n > m - 1$ . Então

$$\begin{aligned}\Omega^{-q}(U_1 \times C_1) &= \Omega^{-(q-(m-1))}(\phi^{-(m-1)}(U_1) \times C[1, x_m, \dots, x_n]) \\ &= \Omega^{-(q-(m-1)+n)}(\phi^{-(m-1)-n}(U_1 \cap P(x_m \dots x_n)) \times K^\infty) \\ &= \phi^{-(q-(m-1)-n)}(U_1 \cap P(x_m \dots x_n)) \times K^\infty.\end{aligned}$$

Note que  $A \cap B = (U_1 \cap U_2) \times (C_1 \cap C_2)$ , daí temos que

$$\begin{aligned}(m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-q}A \cap B) &= (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\phi^{-(q-(m-1)-n)}(U_1 \cap P(x_m \dots x_n)) \cap U_2 \times K^\infty \cap C_2) \\ &= m_{S^1}(\phi^{-(q-(m-1)-n)}(U_1 \cap P(x_m \dots x_n)) \cap U_2) \cdot \nu_\infty(C_2) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} m_{S^1}(U_1) \cdot \frac{1}{c^{n-m+1}} \cdot m_{S^1}(U_2) \cdot \nu_\infty(C_2) \\ &= (m_{S^1} \times \nu_\infty)(A) \cdot (m_{S^1} \times \nu_\infty)(B).\end{aligned}$$

A penúltima igualdade é válida, pois  $m_{S^1}$  é misturadora para  $\phi$  (proposição 2.29) para quaisquer  $A, B \in \Sigma$  e  $\epsilon > 0$ . Para provar o caso geral, usaremos o fato de que sempre existem  $A_\epsilon \in \mathcal{C}$  e  $B_\epsilon \in \mathcal{C}$  de tal forma que  $|(m_{S^1} \times \nu_\infty)(A \Delta A_\epsilon)| < \epsilon/2$  e  $|(m_{S^1} \times \nu_\infty)(B \Delta B_\epsilon)| < \epsilon/2$ .

Além disso, como vale a inclusão  $(\Omega^{-n}A \cap B) \Delta (\Omega^{-n}A_\epsilon \cap B_\epsilon) \subset \Omega^{-n}(A \Delta A_\epsilon) \cup (B \Delta B_\epsilon)$ , segue que

$$\begin{aligned}|(m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-n}A \cap B) - (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-n}A_\epsilon \cap B_\epsilon)| &\leq |(m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-n}A \Delta A_\epsilon)| \\ &\quad + |(m_{S^1} \times \nu_\infty)(B \Delta B_\epsilon)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto

$$|(m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-n}A \cap B) - m_{S^1}(A)\nu_\infty(B)| \leq 2\epsilon$$

para todo  $\epsilon > 0$ , o que completa a demonstração. □

Portanto, também como consequência de (4.7), temos que a medida  $\mu = \Pi_*(m_{S^1} \times \nu_\infty)$  é invariante e ergódica com respeito a  $T$ .

**Proposição 4.5.**  $\mu$  é invariante e ergódica com respeito à  $T$ .

*Prova:* A invariância segue da relação:

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}(A)) &= (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Pi^{-1}T^{-1}(A)) \\ &= (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Omega^{-1}\Pi^{-1}(A)) \\ &= (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A).\end{aligned}$$

Para verificar a ergodicidade, seja  $A \in S^1 \times K^\infty$  um conjunto  $T$ -invariante, então por (4.8) temos que  $\Pi^{-1}(A)$  é  $\Omega$ -invariante, pois  $\Omega^{-1}(\Pi^{-1}(A)) = \Pi^{-1}(T^{-1}(A)) = \Pi^{-1}(A)$ . E isto nos diz que

$$\Pi_*(m_{S^1} \times \nu_\infty)(A) := (m_{S^1} \times \nu_\infty)(\Pi^{-1}(A)) = 0 \text{ ou } 1.$$

■

Sendo a dinâmica hiperbólica, chamamos de medida SRB as medidas físicas para  $T$ . Como o mapa  $T$  contrai na direção vertical e a projeção de  $\mu$  em  $S^1$  coincide com a medida de Lebesgue em  $S^1$ , segue que  $\mu$  é a medida física para  $T$ , conforme a proposição abaixo:

**Proposição 4.6.** *A medida  $\mu$  é uma medida física para  $T$ , e, além disso, a bacia  $B(\mu)$  tem volume total em  $S^1 \times \mathbb{R}$ .*

*Prova:* Vamos mostrar que  $m(B(\mu)^c) = 0$ . Primeiramente, note que  $B(\mu) = \Pi_1(B(\mu)) \times \mathbb{R}$  aonde  $\Pi_1(x, y) = x$ . A inclusão  $\Pi_1(B(\mu)) \times \mathbb{R} \supset B(\mu)$  é óbvia, pois se  $(x, y) \in B(\mu)$ , então  $x \in \Pi_1(B(\mu))$  e  $y \in \mathbb{R}$ .

Para a inclusão oposta, dado  $(x, y) \in B(\mu)$ , temos que

$$\begin{aligned}\|T^n(x, y) - T^n(x, \tilde{y})\| &= \|(\phi^n(x) - \phi^n(x), \lambda^n(y - \tilde{y}))\| \\ &= \lambda^n\|(0, y - \tilde{y})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

para todo  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ . O fato de que  $(x, \tilde{y}) \in B(\mu)$  segue do seguinte fato mais geral.

**Lema 4.7.** *Dado  $z \in B(\mu)$ , com  $\{T^n(z)\}$  contida em algum compacto, se*

$$d(T^n(z), T^n(\tilde{z})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*então  $\tilde{z} \in B(\mu)$ .*

*Demonstração:* Considere  $C$  um compacto contendo  $\{T^n(z)\}$  e  $T^n(\tilde{z})$  para todo  $n \geq 0$ . Se  $\varphi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M$  é contínua, então é uniformemente contínua em  $C$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta > 0$  tal que

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por hipótese, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(T^j(z), T^j(\tilde{z})) < \delta$  para todo  $j \geq n_0$ . Logo, para  $n \geq n_0$  suficientemente grande, podemos fazer as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(z)) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(\tilde{z})) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n_0} \varphi(T^j(z)) - \varphi(T^j(\tilde{z})) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{n} \sum_{j=n_0+1}^{n-1} \varphi(T^j(z)) - \varphi(T^j(\tilde{z})) \right| \\ &< \frac{n_0}{n} \sup_{x \in C} (\varphi(x)) + \frac{n - (n_0 + 1)}{n} \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{n_0}{n} |\sup(\varphi(x))| + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ , como  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(z))$  converge para  $\int \varphi d\mu$ , segue que  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(\tilde{z}))$  também converge para  $\int \varphi d\mu$ . E como  $z \in B(\mu)$  segue o resultado. ■

Agora, como  $B(\mu)^c = \Pi_1(B(\mu^c)) \times \mathbb{R}$ , vale que

$$m(B(\mu)^c) = \int_{\Pi_1(B(\mu)^c) \times \mathbb{R}} 1 dm = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\Pi_1(B(\mu)^c)} 1 dm_{S^1} \right] dm_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} 0 dm_{\mathbb{R}} = 0.$$

□

## 4.2 Segundo critério para a continuidade absoluta de $\mu$

Nesta seção, procuraremos estabelecer um resultado que será utilizado para garantir a continuidade absoluta de  $\mu$ . Para isso, trabalharemos no espaço das medidas Borelianas finitas em  $\mathbb{R}$  com sinal, definindo a seguinte forma bilinear simétrica.

**Definição 4.8.** *Sejam  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  duas medidas Borelianas finitas com sinal em  $\mathbb{R}$  e  $\rho > 0$  um número real, definimos a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  por:*

$$\langle \gamma, \tilde{\gamma} \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma(B(y, \rho)) \tilde{\gamma}(B(y, \rho)) dy,$$

onde  $B(y, \rho) = \{z \in \mathbb{R} \mid |z - y| < \rho\}$ .

**Lema 4.9.** *A forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  é um produto interno em  $\mathcal{M}(S^1 \times \mathbb{R})$*

*Demonstração:* Pelas propriedades da integral e pela definição, temos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  é bilinear, positiva e simétrica (devido a comutatividade em  $\mathbb{R}$ ).

Nos resta verificar que se  $\langle \gamma, \gamma \rangle_\rho = 0$ , então  $\gamma(B(y, \rho)) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ , o que garante  $\gamma \equiv 0$ . De fato, para todo  $y \in \mathbb{R}$ , sejam  $c_1 := \gamma([y_0, y_0 + \rho])$  e  $c_2 := \gamma((y_0 - \rho, y_0])$ . Como  $B(y, \rho) \supset [y_0, y_0 + \rho]$  para todo  $y \in [y_0, y_0 + \rho]$ , temos que

$$0 = \langle \gamma, \gamma \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \gamma(B(y, \rho))^2 dy \geq \int_{y_0}^{y_0 + \rho} \gamma(B(y, \rho))^2 dy,$$

analogamente

$$0 \geq \int_{y_0 - \rho}^{y_0} \gamma(B(y, \rho))^2 dy \geq (c_2)^2 \rho \geq 0,$$

o que implica  $c_1 = c_2 = 0$ , e, portanto  $\gamma(B(y_0, \rho)) = 0$ .

□

Definimos então  $\|\gamma\|_r = \sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle_\rho}$ .

O lema a seguir irá nos fornecer um critério de continuidade absoluta de qualquer medida  $\gamma$  Boreliana com sinal em  $\mathbb{R}$ . Estenderemos o critério fornecido para conseguirmos aplicá-lo sobre as medidas  $\mu$  em  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

**Lema 4.10.** *Se  $\liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} \|\gamma\|_\rho < \infty$  para uma probabilidade  $\gamma$ , em  $\mathbb{R}$  então  $\gamma$  é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  e a derivada de Radón-Nikodym  $d\mu/dx$  satisfaz  $\|d\mu/dx\|_{L^2} \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} \|\gamma\|_\rho$ .*

*Demonstração:* Definamos  $h_\rho(x) = \rho^{-1} \gamma(B(x, \rho))$ . Logo, da definição, segue que

$$\|h_\rho\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} h_\rho^2 dy} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho^2} \gamma^2(B(y, \rho)) dy} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \|\gamma\|_\rho^2} = \rho^{-1} \|\gamma\|_\rho.$$

Considere uma sequência  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\rho_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) e:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|h_{\rho_k}\|_{L^2} = \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} \|\gamma\|_\rho < +\infty.$$

A sequência  $h_{\rho_k}$  é uniformemente limitada em  $L^2$  e portanto, possui subsequência fracamente convergente (pelo teorema de Arzelá-Ascoli). Denotamos ainda  $h_{\rho_{k'}}$  a subsequência que converge na topologia fraca\* para uma função  $h_\infty \in L^2(\mathbb{R})$ . Portanto,  $h_\infty$  satisfaz a relação

$$\|h_\infty\|_{L^2} = \lim_{k' \rightarrow \infty} \|h_{\rho_{k'}}\|_{L^2} \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-1} \|\gamma\|_\rho.$$

Além disso, a convergência na topologia fraca\* implica que  $\int \varphi h_\infty dx = \lim \int \varphi h_{\rho_{k'}} dx$ .

O teorema da convergência dominada (teorema A.8), teorema de diferenciação de Lebesgue e o teorema de Radón-Nikodym também implicam que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi h_\infty dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi h_{\rho_k} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu$$

para toda função  $\varphi$  contínua com suporte compacto. O teorema de Radón-Nikodym implica que  $h_\infty = d\mu/dx$ .

■

Agora, para estender este resultado, considere a família de medidas  $\mu_x = \Pi_*(\delta_x \times \nu)$  para  $x \in S^1$ , onde  $\delta_x$  é a medida delta de Dirac em  $x \in \mathbb{R}$ .

Dado  $E \subset S^1 \times \mathbb{R}$ , considere o conjunto  $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ , temos então que

$$(m \times \nu_\infty)(E) = \int_{S^1} \nu(E_x) dm(x) = \int_{S^1} \delta_x \times \nu(E) dm(x).$$

Assim,

$$\mu(E) = (m \times \nu_\infty)(\Pi^{-1}(E)) = \int_{S^1} \delta_x \times \nu(\Pi^{-1}(E)) dm(x) = \int_{S^1} \mu_x(E) dm(x) \quad (4.14)$$

A expressão (4.14) mostra que a família  $\{\mu_x\}$  é uma **desintegração** de  $\mu$  com respeito à partição  $\mathcal{P}$  nas fibras  $\{x\} \times \mathbb{R}$ ,  $x \in S^1$ . A medida  $\mu_x$  é a medida condicional da medida SRB de  $T$ .

Desse modo, defina

$$I(\rho) := \rho^{-2} \int_{S^1} \|\mu_x\|_\rho^2 dx.$$

A partir dessa definição, obtemos o seguinte critério de continuidade absoluta para  $\mu$  em  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

**Corolário 4.11.** *Se  $\liminf_{\rho \rightarrow 0^+} I(\rho) < \infty$ , então a medida SRB  $\mu$  de  $T$  é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue em  $S^1 \times \mathbb{R}$ , a sua função densidade pertence à  $L^2(\mathbb{R})$  e tem norma  $L^2$  limitada por  $\liminf I(\rho)$ .*

*Prova:* Com efeito, aplicando o lema de Fatou, segue que

$$\int_{S^1} \liminf_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-2} \|\mu_x\|^2 \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} I(\rho) < \infty.$$

Agora, desta última desigualdade segue que  $\liminf \rho^{-1} \|\mu_x\|_\rho < +\infty$  para  $m$ -qtp  $x \in S^1$ , e pelo lema 4.10 têm-se que  $\mu_x \ll m$  para  $m$ -qtp  $x$ .

Definindo  $g : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x, y) = g_x(y)$  temos que  $g \in L^2(S^1 \times \mathbb{R})$ , pois:

$$\|g\|_{L^2(S^1 \times \mathbb{R})}^2 \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{-2} \|\mu_x\|_\rho^2.$$

Agora para toda  $\varphi$  contínua com suporte compacto em  $S^1 \times \mathbb{R}$ , pelo teorema de Fubini vale que

$$\int_{S^1 \times \mathbb{R}} \varphi \cdot g \, d(m_{S^1} \times m_{\mathbb{R}}) = \int_{S^1} \left[ \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot g_x(y) \, dm_{\mathbb{R}}(y) \right] dm_{S^1} = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu_x dm_{S^1} = \int_{S^1 \times \mathbb{R}} \varphi \, d\mu.$$

A última igualdade da direita advém da equação (4.14). Assim, tomando  $\varphi = \chi_E$  para todo  $E \subset S^1 \times \mathbb{R}$  mensurável, temos que  $\mu \ll m_{S^1 \times \mathbb{R}}$ , com  $g = \frac{d\mu}{dm_{S^1 \times \mathbb{R}}}$  e o resultado segue.

□

### 4.3 Transversalidade

Nesta seção nós mostraremos que a medida SRB de  $T$  é absolutamente contínua se para algum  $w \in K^q$  fixado existem muitos  $\tilde{w}$  tais que os gráficos de  $R(\cdot, w)$  e  $R(\cdot, \tilde{w})$  são transversais entre si. De fato, se nós assumirmos que todos os pares são transversais entre si, o argumento abaixo será mais simples, porém não é válido tal suposição em geral. Daremos uma alternativa mais fraca porém suficiente para que a medida SRB seja absolutamente contínua.

**Lema 4.12.** *É válida a seguinte relação:*

$$\mu_x = c^{-q} \sum_{a \in K^q} T_*^q(\mu_{a(x)}) \quad (4.15)$$

*Demonstração:* Tal fórmula segue da invariância da medida SRB  $\mu$  com respeito a  $T$ . De fato:

$$\int_{S^1} (c^{-q} \sum_{a \in K^q} T_*^q(\mu_{a(x)}))(E) dm(x) = \sum_{a \in K^q} \int_{S^1} \mu_{a(x)}(T^{-q}(E)) c^{-q} dm(x).$$

Escrevendo  $z = a(x)$  com  $a : S^1 \rightarrow \mathcal{P}(a)$ , temos  $dm(z) = c^{-q} dm(x)$ , logo

$$\begin{aligned} \sum_{a \in K^q} \int_{S^1} \mu_{a(x)}(T^{-q}(E)) c^{-q} dm(x) &= \sum_{a \in K^q} \int_{\mathcal{P}(a)} \mu_z(T^{-q}(E)) dm(z) \\ &= \int_{S^1} \mu_z(T^{-q}(E)) dm(z) = \mu(T^{-q}(E)) = \mu(E) \\ &= \int_{S^1} \mu_x(E) dm(x). \end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade da desintegração (proposição A.13), temos válida a igualdade (4.15), para  $q \geq 1$  e  $x \in S^1$ . ■

Note ainda que  $\mu_x(\{x\} \times \mathbb{R}) = 1$ , e que  $c^{-q} \sum T_*^q \mu_{a(x)}(\{x\} \times \mathbb{R}) = 1$ , esta última ocorrendo pois

$$\mu_{a(x)}(T^{-q}(\{x\} \times \mathbb{R})) = \mu_{a(x)}((\{a(x)\} \times \mathbb{R}) \cap T^{-q}(\{x\} \times \mathbb{R})) = \mu_{a(x)}(\{a(x)\} \times \mathbb{R}) = 1$$

e

$$c^{-q} \sum_{a \in K^q} T_*^q(\mu_{a(x)})(\{x\} \times \mathbb{R}) = c^{-q} \sum_{a \in K^q} 1 = c^{-q} \cdot c^q = 1.$$

Sendo  $w \in K^p$  e  $a, b \in K^q$ , denotamos

$$I(\rho, w) = \rho^{-2} \int_{\mathcal{P}(w)} \|\mu_x\|_\rho^2 dm(x)$$

e

$$I(\rho, w; a, b) = \rho^{-2} \int_{\mathcal{P}(w)} \langle T^q(\mu_a(x)), T^q(\mu_b(x)) \rangle_\rho dm(x)$$

Da equação (4.15), temos que

$$I(\rho, w) = c^{-2q} \sum_{(a,b) \in K^q \times K^q} I(\rho, w; a, b). \quad (4.16)$$

A função  $R(\cdot, a)$  para uma palavra  $a$  pode ser descontínua no fecho de  $\mathcal{P}(w)$  se  $\mathcal{P}(w)$  contém 0 como extremo à direita, porém obviamente à restrição  $R(\cdot, a)$  a  $\mathcal{P}(w)$  pode ser estendida ao fecho da mesma partição como uma função de classe  $C^2$ . Iremos denotar esta extensão por  $R_w(\cdot, a)$ .

**Definição 4.13.** Considere as palavras  $a, b \in K^q$  e seja  $w \in K^p$ . Dizemos que  $R(\cdot, a)$  e  $R(\cdot, b)$  são  $(\epsilon, \delta)$ -transversais em  $\mathcal{P}(w)$  se para todo  $x \in \overline{\mathcal{P}(w)}$  alguma das condições é verdadeira

$$|R_w(x, a) - R_w(x, b)| > \epsilon \quad \text{ou} \quad \left| \frac{d}{dx} R_w(x, a) - \frac{d}{dx} R_w(x, b) \right| > \delta.$$

Para  $1 \leq p, q < \infty$ ,  $w \in K^p$  e  $\epsilon, \delta > 0$ . seja  $E(q, w; \epsilon, \delta)$  o conjunto dos pares  $(a, b) \in K^q \times K^q$  para os quais existe  $u, v \in K^\infty$  tais que  $R(\cdot, au)$  e  $R(\cdot, bv)$  não são  $(\epsilon, \delta)$ -transversais em  $\mathcal{P}(w)$ . Definimos:

$$e(q, p; \epsilon, \delta) = \max_{w \in K^p} \max_{a \in K^q} \# \{b \in K^q | (a, b) \in E(q, w; \epsilon, \delta)\}.$$

Obviamente  $e(q, p; \epsilon, \delta)$  é decrescente com respeito a  $p$  e crescente com respeito a  $\epsilon$  e  $\delta$ . Assim, colocamos:

$$e(q) = \min \{e(q, p; \epsilon, \delta) | \epsilon > 0, \delta > 0, p \geq 1\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} e(q, p; \epsilon, \delta).$$

**Observação 4.14.** Caso ocorra o contrário, dizemos que estas funções são  $(\epsilon, \delta)$ -tangentes em  $\mathcal{P}(w)$ .

**Definição 4.15.**  $T$  satisfaz a condição de transversalidade se

$$e(q) < (\lambda c)^q \quad \text{para algum } q \in \mathbb{N}.$$

Abaixo verificaremos que a transversalidade entre  $R(\cdot, a)$  e  $R(\cdot, b)$  em  $\mathcal{P}(w)$  corresponde a um “mecanismo de cancelamento” para  $I(\rho)$ , pois nos dá uma cota superior para  $I(\rho, w; a, b)$  independente de  $\rho$ .

**Lema 4.16.** Sejam  $a, b \in K^q$ ,  $w \in K^p$  e  $u, v \in K^\infty$ . Se as funções  $R(\cdot, a)$  e  $R(\cdot, b)$  são  $(\epsilon, \delta)$ -transversais em  $\mathcal{P}(w)$ , então, para  $0 < \rho < \epsilon/4$ , vale a desigualdade

$$m(\{x \in \mathcal{P}(w), |R(x, au) - R(x, bv)| < 2\rho\}) \leq 4\rho\delta^{-1}c^{-p} \max\{4\beta/\epsilon, c^p\} \quad (4.17)$$

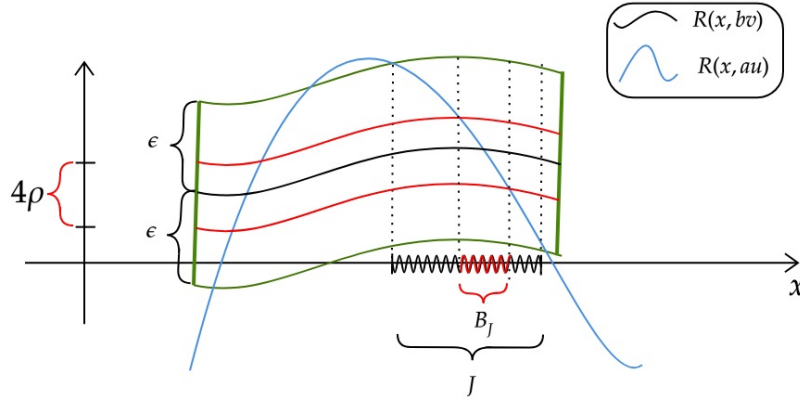
*Demonstração:* Tome  $J$  uma componente conexa arbitrária do conjunto

$$\{x \in \mathcal{P}(w), |R(x, au) - R(x, bv)| < \epsilon\}$$

e coloque

$$B_J = \{x \in J, |R(x, au) - R(x, bv)| < 2\rho\} \subset J,$$

conforme o esquema abaixo

Figura 3 – Escolha dos conjuntos  $B_J$  e  $J$ 

Para mostrar a desigualdade (4.17) é suficiente provar que

$$m(B_J) \leq \frac{4\rho}{\delta} \quad \text{e} \quad m(J) \geq \min \{ \epsilon/4\beta, c^{-p} \}. \quad (4.18)$$

Queremos utilizar a transversalidade para limitar o comprimento de  $B_J$  por uma constante  $A(\delta, \epsilon) \cdot \rho$ . Nosso objetivo é utilizar a transversalidade para cancelar o fator  $\rho^{-1}$ , obtendo uma medida que não depende do fator  $\rho$ .

Se  $B_J = \emptyset$  a equação (4.18) segue trivialmente. Suponha  $B_J \neq \emptyset$ , da equação (4.5) e do fato de ser  $R(\cdot, au)$  e  $R(\cdot, bv)$  serem  $(\epsilon, \delta)$ -transversais, nós temos que para  $x \in J$  vale a desigualdade

$$\delta < \left| \frac{d}{dx} R(x, au) - \frac{d}{dx} R(x, bv) \right| \leq 2\beta.$$

Portanto  $B_J$  consiste em um único intervalo com tamanho não maior do que  $4\rho/\delta$ , em outras palavras a medida de comprimento da componente conexa  $J \setminus B_J \geq (\epsilon - 2\rho)/(2\beta) \geq \epsilon/4\beta$ , a menos que  $J = \mathcal{P}(w)$ . Destes, nós obtemos que

$$\frac{m(B_J)}{m(J)} \leq \frac{4\rho/\delta}{\min \{ \epsilon/(4\beta), c^{-p} \}} = 4\rho\delta^{-1} \max \{ \epsilon/(4\beta), c^{-p} \}.$$

O resultado segue somando sobre todas as componentes conexas de  $J$ .

□

Com o auxílio da função  $e(q, \rho; \epsilon, \delta)$  que realiza a contagem das não-transversalidades, temos a seguinte desigualdade para  $T(\rho)$ .

**Proposição 4.17.** *Seja  $a, b \in K^q$  e  $w \in K^p$ . Se as funções  $R(\cdot, a)$  e  $R(\cdot, b)$  são  $(\epsilon, \delta)$ -transversais em  $\mathcal{P}(w)$  para todo  $u, v \in K^\infty$ , então vale que*

$$I(\rho, w; a, b) \leq 8\delta^{-1}c^{-p} \max \{4\beta/\epsilon, c^p\}$$

com  $0 < \rho < \epsilon/4$ .

*Prova:* seja  $\mathcal{X}_\rho(\cdot)$  a função característica do intervalo  $(-\rho, \rho)$ , considerando que  $\Pi_a(u) = (x, R(x, au))$  para algum  $u \in K^\infty$  tal que  $R(x, au) = s$  para  $s \in \mathbb{R}$  temos que, pelo teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \langle T^q(\mu_a(x)), T^q(\mu_b(x)) \rangle_\rho &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_\rho(s-y) \mathcal{X}_\rho(t-y) d(T^q(\mu_a(x)) \times T^q(\mu_b(x)))(s, t) \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_\rho(s-y) \mathcal{X}_\rho(t-y) dy \right) d(T^q(\mu_a(x)) T^q(\mu_b(x)))(s, t) \\ &\leq 2\rho \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{2\rho}(s-t) d(T^q(\mu_a(x)) \times T^q(\mu_b(x)))(s, t) \\ &\leq 2\rho \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{2\rho}(R(x, au) - R(x, bv)) d(T_*^q \Pi_*(\delta_{a(x)} \times \nu_\infty) \times T_*^q \Pi_*(\delta_{b(x)} \times \nu_\infty))(u, v) \\ &\leq 2\rho \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{2\rho}(R(x, au) - R(x, bv)) d(\Pi_* \Omega_*^q(\delta_{a(x)} \times \nu_\infty) \times \Pi_* \Omega_*^q(\delta_{b(x)} \times \nu_\infty))(u, v) \\ &\leq 2\rho \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{X}_{2\rho}(R(x, au) - R(x, bv)) d((\Pi_a)_* \nu_\infty \times (\Pi_b)_* \nu_\infty)(u, v) \\ &\leq 2\rho \int_{K^\infty \times K^\infty} \mathcal{X}_{2\rho}(R(x, au) - R(x, bv)) d(\nu_\infty \times \nu_\infty)(u, v). \end{aligned}$$

Integrando em  $\mathcal{P}(w)$ , temos

$$I(\rho, w; a, b) \leq 2\rho^{-1} \int_{K^\infty \times K^\infty} m_{S^1}(\{x \in \mathcal{P}(w) \mid |R(x, au) - R(x, bv)| < 2\rho\}) d(\nu_\infty \times \nu_\infty)(u, v).$$

Portanto, pelo Lema anterior, temos o resultado desejado.

□

**Proposição 4.18.** Para  $1 \leq p, q < \infty, \epsilon, \delta > 0$  e  $0 < \rho < \epsilon/4$  vale a seguinte desigualdade:

$$I(\rho) \leq \lambda^{-q} c^{-q} e(q, p; \epsilon, \delta) I(\lambda^{-q} \rho) + 8\delta^{-1} \max \{4\beta/\epsilon, c^p\} \quad (4.19)$$

*Prova:* Note que de (4.16) temos

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \rho^{-2} \int_{S^1} \|\mu_x\|_\rho^2 dx \\ &= \rho^{-2} \sum_{w \in K^p} \int_{\mathcal{P}(w)} \sum_{(a,b) \in K^q \times K^q} c^{-2q} \langle T^q(\mu_a(x)), T^q(\mu_b(x)) \rangle_\rho dm(x) \\ &= \sum_{w \in K^p} \sum_{(a,b) \in K^q \times K^q} c^{-2q} \cdot I(\rho, w; a, b). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aplicando a proposição anterior, temos que

$$\sum_{w \in K^p} \sum_{(a,b) \notin E(q,w;\epsilon,\delta)} c^{-2q} \cdot I(\rho, w; a, b) \leq 8\delta^{-1} \max \{4\beta/\epsilon, c^p\}. \quad (4.21)$$

Já que  $T^q$  é uma contração de taxa  $\lambda^q$  na direção vertical, temos que

$$\begin{aligned} \langle T^q(\mu_a(x)), T^q(\mu_b(x)) \rangle_\rho &= \int |T^q \mu_a(x)(B(y, \rho))|^2 dy \\ &= \int \mu_a(x)(T^{-q}B(y, \rho))^2 dy \\ &= \int \mu_a(x)(B(\tilde{y}, \lambda^{-q}\rho))^2 dy. \quad \text{com } y = \lambda^q \tilde{y} + \Psi^q(x) \\ &= \int \mu_a(x)(B(\tilde{y}, \lambda^{-q}\rho))^2 \lambda^q d\tilde{y} \\ &= \lambda^q \langle \mu_a(x), \mu_a(x) \rangle_{\lambda^{-q}\rho}^2 \quad \text{para } a \in K^q. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Da desigualdade de Cauchy-Swarchz e pela equação acima, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \sum_{(a,b) \in E(q,w;\epsilon,\delta)} \langle T^q(\mu_a(x)), T^q(\mu_b(x)) \rangle_\rho &\leq \sum_{(a,b) \in E(q,w;\epsilon,\delta)} \|T^q(\mu_a(x))\|_\rho \cdot \|T^q(\mu_b(x))\| \\ &\leq \lambda^q \sum_{(a,b) \in E(q,w;\epsilon,\delta)} \|\mu_a(x)\|_{\lambda^{-q}\rho} \cdot \|\mu_b(x)\|_{\lambda^{-q}\rho} \\ &\leq \lambda^q \sum_{(a,b) \in E(q,w;\epsilon,\delta)} \frac{\|\mu_a(x)\|_{\lambda^{-q}\rho}^2 + \|\mu_b(x)\|_{\lambda^{-q}\rho}^2}{2} \\ &\leq \lambda^q \cdot e(q, p; \epsilon, \delta) \sum_{a \in K^p} \|\mu_a(x)\|_{\lambda^{-q}\rho}^2. \end{aligned}$$

E multiplicando ambos os lados por  $\rho^2 c^{-2q}$  e integrando-os sobre  $S^1$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{w \in K^p} \sum_{(a,b) \in E(q,w;\epsilon,\delta)} c^{-2q} I(\rho, w; a, b) &\leq \rho^2 c^{-2q} \lambda^q \cdot e(q, p; \epsilon, \delta) \sum_{a \in K^p} \left( \int_{S^1} \|\mu_a(x)\|_{\lambda^{-q}\rho}^2 \right) \\ &\leq \rho^2 c^{-2q} \lambda^q \cdot e(q, p; \epsilon, \delta) \sum_{a \in K^p} \left( c^q \int_{\mathcal{P}(a)} \|\mu_y\|_{\lambda^{-q}\rho}^2 dy \right) \\ &\leq \lambda^{-q} \cdot c^{-q} \cdot e(q, p; \epsilon, \delta) \cdot I(\lambda^{-q}\rho). \end{aligned}$$

■

## 4.4 Demonstração do teorema 4.3

A desigualdade (4.19) é frequente em Teoria ergódica e é conhecida como uma desigualdade do tipo *Lasota-Yorke* (ou *Doebling-Fortet*). Agora podemos demonstrar o teorema 4.3.

*Prova do Teorema 4.3:* Escolha um  $p$  suficientemente grande e  $\epsilon, \delta > 0$  suficientemente pequenos tais que  $e(q, p; \epsilon, \delta) = e(q)$ . Usando a proposição anterior nós temos que para  $0 < \rho < \epsilon/4$  vale a relação abaixo:

$$I(\rho) \leq \eta \cdot I(\lambda^{-q}\rho) + R$$

onde  $\eta = \lambda^{-q} \cdot c^{-q} \cdot e(q) < 1$  e  $R = 8\delta^{-1} \max \{4\beta/\epsilon, c^p\}$ . Fixado  $\rho_0 < \lambda^{-q}\epsilon/4$ , segue que

$$\begin{aligned} I(\lambda^q \rho_0) &\leq \eta \cdot I(\rho_0) + R \\ \Rightarrow I(\lambda^{2q} \rho_0) &\leq \eta \cdot I(\lambda^q \rho_0) + R \leq \eta^2 \cdot I(\rho_0) + \eta \cdot R + R. \end{aligned}$$

E portanto, por indução em  $n \in \mathbb{N}$ , que

$$\begin{aligned} I(\lambda^{nq} \rho_0) &\leq \eta^n I(\rho_0) + (\eta^{n-1} + \eta^{n-2} \dots \eta^1 + 1) \cdot R \\ &= \eta^n I(\rho_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i R \\ &\leq I(\rho_0) + \frac{R}{1 - \eta}. \end{aligned}$$

Já que  $\eta < 1$  por hipótese, Concluimos que :

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0^+} I(\rho) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\lambda^{nq} \rho_0) \leq I(\rho_0) + (1 - \eta)^{-1} R < \infty.$$

Do corolário (4.11), temos que a medida SRB  $\mu$  para  $T$  é absolutamente contínua.

Para verificarmos que o resultado ainda vale para  $(\tilde{\lambda}, \tilde{f})$  pertos de  $(\lambda, f)$ , note que a expansão  $R(x, a) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} f([a]_i(x))$  garante que as funções  $R(\cdot, a)$  dependem continuamente de  $a \in K^\infty$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f \in C^2(S^1, \mathbb{R})$ . Portanto a  $(\epsilon, \delta)$ -transversalidade de um par dessas funções é uma condição aberta em  $a \in K^\infty$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e  $f \in C^2$ . Como  $e(q)$  assume valores inteiros entre 1 e  $(\lambda c)^q$ , nós vemos que  $e(q)$  é uma cota superior semicontínua com respeito a  $(\lambda, f)$ . Portanto,  $(\lambda, f)$  está contido no interior de  $\mathcal{S}$ .

■

O teorema 4.3 implica que o par  $(\lambda, f)$  pertence a  $\text{int}(\mathcal{S})$  se a taxa de crescimento da quantidade  $e(q)$  quando  $q$  cresce é menor do que  $\lambda c$ .

## 4.5 2 exemplos

Apresentamos a seguir dois exemplos que demonstram a variedade de comportamento dos mapas  $T$  tratados nesse capítulo. O primeiro exemplo exhibe uma família de funções para as quais não há medida invariante absolutamente contínua, conforme o enunciado abaixo.

**Exemplo 4.19.** *Sejam  $c = 2$ .  $0,5 < \lambda \leq 0,51$  e  $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$ . Então a medida SRB  $\mu$  de  $T$  é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue de  $S^1 \times \mathbb{R}$*

*Prova:* Sabemos que  $K = \{1, 2\}$  e, por isso, é suficiente verificarmos que  $e(1) = 1 < (\lambda c)^1$ . De fato, vamos considerar  $a, b$  palavras em  $K^\infty$  tais que  $\lfloor a \rfloor_1 = 0$  e  $\lfloor b \rfloor_1 = 1$ . Para  $|x| \leq \frac{2}{5}$  ou  $|x| \geq 1 - \frac{2}{5}$ , podemos checar que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dx} R(x, a) - \frac{d}{dx} R(x, b) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \cos(\lfloor a \rfloor_i(x)) \cdot c^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \cos(\lfloor b \rfloor_i(x)) \cdot c^{-i} \right| \\ &= \frac{1}{2} |\cos(\lfloor a \rfloor_1(x)) - \cos(\lfloor b \rfloor_1(x))| + \frac{\lambda}{4} |\cos(\lfloor a \rfloor_2(x)) - \cos(\lfloor b \rfloor_2(x))| + \dots \\ &> 2 \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{\lambda}{4} \left( \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \right) - 2 \cdot \frac{\lambda^2/8}{1 - \lambda/2} > 0. \end{aligned}$$

No caso em que  $\frac{2}{5} \leq x \leq 1 - \frac{2}{5}$ , cada um dos pontos  $\lfloor a \rfloor_2(x)$  e  $\lfloor b \rfloor_2(x)$  estão contidos em uma vizinhança de tamanho  $\frac{1}{40}$  dos números da forma  $r/8$ , com  $r = 1, 3, 5, 7$ . Portanto,

$$|R(x, a) - R(x, b)| > 2 \left( \text{sen}(2\pi/5) - \lambda \text{sen}(3\pi/10) - \lambda^2(1 - \lambda)^{-1} \right) > 0$$

Logo, temos que  $e(1) = 1$  e pelo Teorema 4.3, temos que  $\liminf_{\rho \rightarrow 0^+} I(\rho) < \infty$  e portanto a medida SRB  $\mu$  para  $T$  é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue.

□

Em seguida, iremos verificar a validade do Teorema 4.3 sobre o mapa  $T$  especificado no início do capítulo, cujo enunciado é fornecido abaixo:

**Exemplo 4.20.** *Se  $f(x) = \sigma(\phi(x)) - \lambda \cdot \sigma(x)$  para alguma função de variação limitada  $\sigma$  no toro  $S^1$ , então o suporte da medida SRB de  $T$  está contido no gráfico de  $\sigma$  e é totalmente singular com respeito a  $m_{S^1 \times \mathbb{R}}$ .*

*Prova:* Vamos mostrar inicialmente que o gráfico de  $\sigma$  (denotado por  $\text{graf}(\sigma)$ ) é um conjunto invariante. De fato, basta verificarmos que  $T(\text{graf}(\sigma)) \subset \text{graf}(\sigma)$ , o que segue de:

$$T(x, \sigma(x)) = (\phi(x), \lambda \cdot \sigma(x) + \sigma(\phi(x)) - \lambda \cdot \sigma(x)) = (\phi(x), \sigma(\phi(x))) \in \text{graf}(\sigma)$$

Como  $\phi$  é sobrejetiva, a igualdade acima também implica que  $\text{graf}(\sigma) \subset T(\text{graf}(\sigma))$ . Agora, considere  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(S^1 \times [-K, K])$ , com  $K > \sup |\sigma|$ , segue que  $\text{graf}(\sigma) = \Lambda$ . Mostremos agora que  $\text{graf}(\sigma) = \Lambda$ .

A inclusão  $\subseteq$ , segue notando que  $\text{graf}(\sigma) \subset S^1 \times [-K, K]$  e que

$$\text{graf}(\sigma) = T^n(\text{graf}(\sigma)) \subset T^n(S^1 \times [-K, K]) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim,  $\text{graf}(\sigma) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(S^1 \times [-k, k]) = \Lambda$ .

Para inclusão  $(\supseteq)$ , temos que verificar que para  $(x, y) \in \Lambda$  têm-se  $y = \sigma(x)$ .

Note que, se  $(x, y) \in \Lambda$ , então existe  $(x_n, y_n) \in S^1 \times [-K, K]$  tal que  $T^n(x_n, y_n) = (x, y)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x = \phi^n(x_n)$ , também segue que  $T^n(x_n, \sigma(x_n)) = (x, \sigma(x))$ .

Além disso, temos que

$$\|T^n(x_n, y_n) - T^n(x_n, \sigma(x_n))\| = \lambda^n \|(0, y_n - \sigma(x_n))\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pois  $\lambda < 1$  e  $|y_n|, |\sigma(x_n)| < K$ . Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_n, \sigma(x_n)) = (x, \sigma(x))$ , o que implica que  $y = \sigma(x)$  e  $\Lambda = \text{graf}(\sigma)$ .

Agora, como  $\sigma$  é de variação limitada, então  $\text{graf}(\sigma)$  tem medida de Lebesgue nula ( $m_{S^1 \times \mathbb{R}}(\text{graf}(\sigma)) = 0$ )

Por fim, verificaremos que não existe probabilidade invariante  $\mu \ll m_{S^1 \times \mathbb{R}}$  suportada em  $\Lambda$ . De fato, se existir tal  $\mu$ , teríamos

$$\mu(\Lambda) \geq \mu(\text{supp}(\mu)) = 1$$

(lembre que  $\text{supp}(\mu) = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} : \mu(V_x) > 0 \quad \forall V_x \text{ vizinhança de } x\}$ .) e, por outro lado, pela continuidade absoluta

$$m_{S^1 \times \mathbb{R}} \mu(\text{graf}(\sigma)) = 0 \Rightarrow \mu(\Lambda) = \mu(\text{graf}(\sigma)) = 0$$

o que é impossível. Portanto, temos provado o resultado.

□

# REFERÊNCIAS

- [1] VIANA, Marcelo e OLIVEIRA, Krerley. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro. SBM, volume 90. 2014.
- [2] VIANA, Marcelo. **Teorema Ergódico de Birkhoff**. Texto encontrado na página pessoal de Marcelo Viana em <http://www.impa.br/viana/>. Data do acesso: 16/01/2018.
- [3] WALTERS, Peter. **An introduction to ergodic theory**. 2000. Springer Science & Business Media, volume 79.
- [4] TSUJII, Masato. **Fat solenoidal attractors**. Nonlinearity. volume 14. nº 5. 1011-1027. <http://stacks.iop.org/0951-7715/14/i=5/a=306>, 2001.
- [5] BOCKER, Carlos; BORTOLOTTI, Ricardo T. **Higher-dimensional attractors with absolutely continuous invariant probability**. Nonlinearity. volume 31. nº5. 2057-2082. <http://stacks.iop.org/0951-7715/31/i=5/a=2057>, 2018.
- [6] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [7] FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. New Jersey: John Wiley. Pure and Applied Mathematics.1999
- [8] FURSTENBERG, H. KATZNELSON, Y. ORNSTEIN D. **The Ergodic Theoretical Proof of Szemerédi's Theorem**. Rhole Island: Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society. Volume 7. Nº 3. 1982

# APÊNDICE A – ALGUNS FATOS IMPORTANTES

Nosso objetivo nesse apêndice é listar os fatos de Teoria da medida que são utilizados ao longo da dissertação.

**Teorema A.1.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra de subconjuntos de  $X$  e seja  $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  uma função  $\sigma$ -aditiva com  $\mu_0(X) < \infty$ . Então existe uma única medida  $\mu$  definida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada por  $\mathcal{A}$  que é uma extensão de  $\mu_0$ , ou seja, tal que  $\mu(A) = \mu_0(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .*

**Definição A.2.** *Dizemos que uma família não vazia  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  é uma classe monótona, se  $\mathcal{C}$  contém  $X$  e é fechada para as uniões e interseções enumeráveis monótonas, ou seja:*

- dados  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  em  $\mathcal{C}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$  e
- dados  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  em  $\mathcal{C}$ , então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

**Teorema A.3.** *(Classes monótonas). A menor classe monótona que contém uma álgebra  $\mathcal{A}$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\mathcal{A})$  gerada por  $\mathcal{A}$ .*

**Lema A.4.** *(Borel-Cantelli). Seja  $(E_n)_n$  uma família enumerável de conjuntos mensuráveis. Seja  $F$  o conjunto dos pontos que pertencem a  $E_n$  para infinitos valores de  $n$ , ou seja,  $F = \limsup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ . Se  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < \infty$  então  $\mu(F) = 0$ .*

**Teorema A.5.** *(Derivação de Lebesgue). Seja  $X = \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{B}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel e  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ . Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função localmente integrável. Então:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dm = 0 \text{ em } m\text{-quase todo ponto.}$$

*Em particular,*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) \, dm = f(x) \text{ em } m\text{-quase todo ponto.}$$

**Teorema A.6.** *(Radón-Nikodym). Se  $\mu$  e  $\nu$  são medidas finitas tais que  $\nu \ll \mu$ , então existe uma função mensurável  $\rho : X \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\nu = \rho\mu$ , ou seja, tal que*

$$\int \phi \, d\nu = \int \phi \rho \, d\mu \text{ para toda função limitada } \phi : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Lema A.7.** *Dado qualquer subconjunto fechado  $F$  de  $M$  e dado  $\delta > 0$ , existe uma função Lipschitziana  $g^\delta : M \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g^\delta(x) = 1$  para todo  $x \in F$  e  $g^\delta(x) = 0$  para todo  $x \in M$  tal que  $d(x, F) \geq \delta$ .*

**Teorema A.8.** *(Convergência dominada). Seja  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma sequência de funções mensuráveis e suponha que existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n(x)| \leq |g(x)|$  para  $\mu$ -quase todo  $x$  em  $X$ . Suponha também que a sequência  $(f_n)_n$  converge em  $\mu$ -quase todo ponto para uma função  $f$ . Então  $f$  é integrável e vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

**Teorema A.9.** *(Mudança de variáveis). Seja  $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação injetora de classe  $C^1$  definida num subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ; suponha que a diferencial  $d\pi(x)$  é um isomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $x \in U$ .*

*Dados um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}^n$  contido em  $U$  e uma função mensurável  $f : \pi(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  então*

- o conjunto  $\pi(A)$  é mensurável
- a função:

$$A \ni y \mapsto f(\pi(y)) |\det d\pi(y)| \in \overline{\mathbb{R}} \tag{A.1}$$

*é mensurável.*

- a função  $f$  é quase integrável se e somente se a função (A.1) é quase integrável e, nesse caso, vale a igualdade:

$$\int_{\pi(A)} f(x) dm(x) = \int_A f(\pi(y)) |\det d\pi(y)| dm(y). \tag{A.2}$$

**Definição A.10.** *Uma medida boreliana  $\mu$  num espaço topológico é regular se para todo subconjunto mensurável  $B$  e todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto fechado  $F$  e um conjunto aberto  $A$  tais que  $F \subset B \subset A$  e  $\mu(F \setminus A) < \epsilon$ .*

**Teorema A.11.** *Toda probabilidade definida num espaço métrico compacto é regular.*

**Definição A.12.** Uma desintegração de  $\mu$  relativamente a uma partição  $\mathcal{P}$  é uma família  $\{\mu_x : x \in \mathcal{P}\}$  de probabilidades em  $M$  tal que, para todo conjunto mensurável  $E \subset M$  :

- $\mu_x(\mathcal{P}) = 1$  para  $\hat{\mu}$ -qtp  $x \in \mathcal{P}$ ;
- A aplicação  $\mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \mu_x(E)$  é mensurável;
- $\mu(E) = \int \mu_x(E) d\hat{\mu}(x)$ .

A partição  $\mathcal{P}$  tem uma estrutura natural de espaço de probabilidade, com uma  $\sigma$ -álgebra  $\hat{\mathcal{B}}$  e uma probabilidade  $\hat{\mu}$ . As  $\mu_x$  são chamadas probabilidades condicionais de  $\mu$  relativamente a  $\mathcal{P}$ .

**Proposição A.13.** (unicidade da desintegração) Suponha que a  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  admite algum gerador enumerável. Se  $\{\mu_x : x \in \mathcal{P}\}$  e  $\{\mu'_x : x \in \mathcal{P}\}$  são desintegrações de  $\mu$  com respeito a  $\mathcal{P}$ , então  $\mu_x = \mu'_x$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo  $x \in \mathcal{P}$ .

*Demonstração:* Seja  $\mathcal{B}$  um gerador enumerável de  $\Sigma$  e seja  $\mathcal{A}$  a álgebra gerada por  $\mathcal{B}$ . Note que  $\mathcal{A}$  é enumerável, uma vez que ela coincide com a união das álgebras (finitas) geradas pelos subconjuntos finitos de  $\mathcal{B}$ . Para cada  $C \in \mathcal{A}$  considere os conjuntos:

$$\mathcal{Q}_C = \{x \in \mathcal{P} : \mu_x(C) > \mu'_x(C)\} \quad \mathcal{R}_C = \{x \in \mathcal{P} : \mu_x(C) < \mu'_x(C)\}.$$

Se  $x \in \mathcal{Q}_C$  então  $x$  está em  $\pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)$  e, pelo primeiro item da definição de desintegração, temos que  $\mu_x(C \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)) = \mu_x(C)$ . Caso contrário,  $\mu_x(C \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)) = 0$ . Além disso, valem as mesmas condições trocando  $\mu_x$  por  $\mu'_x$ . Logo, pela terceira propriedade da definição de desintegração, temos que

$$\mu_x(C \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)) = \begin{cases} \int_{\mathcal{P}} \mu_x(C \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)) d\hat{\mu}(x) = \int_{\mathcal{Q}_C} \mu_x(C) d\hat{\mu}(x), \\ \int_{\mathcal{P}} \mu'_x(C \cap \pi^{-1}(\mathcal{Q}_C)) d\hat{\mu}(x) = \int_{\mathcal{Q}_C} \mu'_x(C) d\hat{\mu}(x), \end{cases}$$

Como  $\mu_x(C) > \mu'_x(C)$  para todo  $x \in \mathcal{Q}_C$  o que implica que  $\hat{\mu}(\mathcal{Q}_C) = 0$  para todo  $C \in \mathcal{A}$ . De forma análoga, concluímos também que  $\hat{\mu}(\mathcal{R}_C) = 0$  para todo  $C \in \mathcal{A}$ . Assim,

$$\bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{Q}_C \cup \mathcal{R}_C$$

Também é um subconjunto de  $\mathcal{P}$  com medida nula. Para todo  $C$  no complementar deste subconjunto, as medidas  $\mu_x$  e  $\mu'_x$  coincidem na álgebra geradora  $\mathcal{A}$  e, portanto, coincidem em toda a  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$ . ■