



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

RICARDO BATISTA DO CARMO

**EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E FÍSICOS EM SISTEMAS DINÂMICOS
CAÓTICOS E CAVIDADES DE MICRO-ONDAS PLANARES**

Recife
2019

RICARDO BATISTA DO CARMO

**EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E FÍSICOS EM SISTEMAS DINÂMICOS
CAÓTICOS E CAVIDADES DE MICRO-ONDAS PLANARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração:
Dinâmica Não-linear, Caos e Sistemas Complexos

Orientador: Prof. Flávio Menezes de Aguiar

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Arabelly Ascoli CRB4-2068

C287e Carmo, Ricardo Batista do
Experimentos numéricos e físicos dinâmicos caóticos e
cavidades de micro-ondas planares/ Ricardo Batista do Carmo. –
2019.
138 f.: il., fig.

Orientador: Flávio Menezes de Aguiar
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Física. Recife, 2019.
Inclui referências e apêndices.

1. Caos. 2. Centro de periodicidade. 3. Bilhares. 4.
Espalhamento de micro-ondas. I. Aguiar, Flávio Menezes de
(orientador). II. Título.

515.39

CDD (22. ed.)

UFPE-FQ 2019-44

RICARDO BATISTA DO CARMO

**EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E FÍSICOS EM SISTEMAS DINÂMICOS
CAÓTICOS E CAVIDADES DE MICRO-ONDAS PLANARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 07/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Flávio Menezes de Aguiar
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Sérgio Machado Rezende
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
Examinador Externo
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Edson Denis Leonel
Examinador Externo
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho” – Câmpus de Rio Claro

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha Família pelo apoio e compreensão ao longo dessa trajetória. Cada palavra dita foi um incentivo para continuar e passar por todas as barreiras. Agradeço ao Prof. Flavio Aguiar por acreditar neste trabalho, pela experiência e sabedoria repassadas a mim. Com mestrado e doutorado são quase seis anos de muito aprendizado, em que pude crescer tanto pessoal como profissionalmente.

Agradeço aos Profs. J. R. Rios Leite e Hugo Cavalcante por discussões diversas e ajuda com o circuito de Rössler. Ao Prof. Antônio Murilo Macêdo por discussões a respeito do processo de espalhamento discutido nesta tese. Ao Prof. Antônio Azevedo pelo empréstimo do VNA. Ao Prof. Steven Anlage, pelo envio dos absorvedores de micro-ondas. Ao Prof. Lev Kaplan pelas discussões úteis sobre bilhares C3.

Aos amigos e colegas de laboratório, Tiago e Kainã, um muito obrigado por diversas discussões sobre experimentos numéricos.

Sou grato aos Amigos que estiveram nessa jornada, de forma direta ou indireta. Obrigado a Aldo, Alyson, Ceará, Emerson, Fillipe, Fred, Gabriel, João, Joas, Mário, Neto, Obed, Pablo, Paulo, Pedro, Rafael, Raoni, Russita e Suzana. Agradeço de forma especial a Luma por ser minha maior incentivadora e parceira em todos os momentos.

Do Departamento de Física, irei guardar inúmeras lembranças. Agradeço a todos que o compõem e com certeza foram essenciais na minha formação. Este trabalho foi financiado parcialmente pela CAPES e pelo CNPq.

RESUMO

Nesta tese investigamos, através de experimentos físicos e numéricos, sistemas não lineares dissipativos e conservativos, fechados e abertos, nos regimes clássico, semiclássico e quantizado, a saber: (i) Experimentos numéricos demonstraram que a densidade invariante pode ser bem ajustada com uma combinação linear das distribuições beta e de Kumaraswamy, em mapas discretos unidimensionais construídos no centro de espirais de periodicidade em regiões caóticas de espaços biparamétricos de sistemas dissipativos tridimensionais, incluindo Rössler, Rosenzweig-MacArthur (predador-presa), modelo de laser semiconductor, oscilador químico de Gaspard-Nicolis e o circuito eletrônico de Nishio-Inaba. Computações analógicas em experimentos físicos em um circuito eletrônico integrador para o sistema de Rössler exibiram excelente acordo com a simulação numérica. (ii) Também numericamente, investigamos propriedades clássicas e quânticas de bilhares com simetria $C3$. Em regime classicamente caótico, obtivemos evidências numéricas que confirmam as conjecturas de Leyvraz, Schmit e Seligman, de que em regime semiclássico o espectro de energia desses bilhares tem singletos que seguem o Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE) das matrizes aleatórias, enquanto que os dubletos apresentam estatísticas típicas do Ensemble Gaussiano Unitário (GUE), embora o bilhar possua a simetria de reversão temporal. Regiões mistas do espaço de fase clássico desses bilhares também foram identificadas e estudadas. Desvios das conjecturas para singletos e dubletos foram observados em suas contrapartidas quânticas. Ajustes para a distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos são discutidos nos vários casos. (iii) Como contribuição principal, realizamos experimentos de espalhamento de micro-ondas em cavidades de cobre

bidimensionais, conectadas à fonte (um analisador de rede vetorial) através de uma antena de monopolo e uma porta (um cabo coaxial), em temperatura ambiente e a 77 K, no intervalo de 2,0 a 18,0 GHz. Foram utilizadas três cavidades poligonais (não caóticas) e uma com a geometria do bilhar de Sinai (caótico). Medidas em dezenas de posições da antena para cada cavidade mostraram que as distribuições de coeficiente de reflexão, fase da matriz de espalhamento, resistência e reatância normalizadas, nos vários níveis de absorção e acoplamento acessíveis ao experimento, são descritas universalmente pela teoria de matrizes aleatórias, independentemente da geometria. Esta universalidade está de acordo com previsões teóricas na literatura para a cavidade sem perdas, mas é intrigante nos demais regimes. Os resultados são discutidos com base nas limitações impostas pelo aparato experimental.

Palavras-chave: Caos. Centro de periodicidade. Bilhares. Espalhamento de micro-ondas. Universalidade.

ABSTRACT

In this thesis we investigate, through physical and numerical experiments, dissipative and conservative, closed and open systems, in the classical, semiclassical and quantized regimes, namely: (i) Numerical experiments have shown that the invariant density can be well adjusted with a linear combination of the beta and Kumaraswamy distributions in one-dimensional discrete maps constructed at the center of periodicity spirals (“periodicity hubs”) in chaotic regions of two-dimensional dissipative systems, including Rössler, Rosenzweig-MacArthur (predator-prey model), a semiconductor laser model, Gaspard-Nicolis chemical oscillator and the Nishio-Inaba electronic circuit. Analog computations in physical experiments in an integrator electronic circuit for the Rössler system exhibited excellent agreement with the numerical simulation. (ii) Also numerically, we investigate classical and quantum properties of billiards with C3 symmetry. In a classically chaotic regime, we obtained numerical evidence in agreement with the conjectures of Leyvraz, Schmit, and Seligman, for which the semiclassical regime the energy spectrum of these billiards has singlets with spectral properties that follow the Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) of the random matrices, whereas the doublets exhibit statistics of the Gaussian Unitary Ensemble (GUE), although the billiards enjoy the time reversal symmetry. Mixed regions of the classical phase space of these billiards were also identified and studied. Deviations from the conjectures for singlets and doublets were observed in their quantum counterparts. Fits for the nearest neighbor spacing distribution are discussed in the various cases. (iii) As a main contribution of this thesis, we perform microwave scattering experiments in two-dimensional copper cavities connected to the source (a

vector network analyzer) through a monopole antenna and a single port (a coaxial cable) at room temperature and 77 K, in the range of 2.0 to 18.0 GHz. Four different geometries were investigated, namely, three polygonal (non-chaotic) and one with a caothic boundary (Sinai billiard). Measurements at dozens of antenna positions for each cavity showed that the reflection coefficient, phase of the scattering matrix, normalized resistance and normalized reactance distributions at the various levels of absorption and coupling accessible to the experiment are universally described by the theory of random matrices, regardless of geometry. The observed universality agrees with theoretical predictions in the literature for the lossless cavity, but is intriguing in the other regimes. The results are discussed with respect to the limitations imposed by the experimental apparatus.

Keywords: Chaos. Periodicity hub. Billiards. Microwave scattering. Universality.

Sumário

1	Introdução	11
2	Densidade invariante em centros de periodicidade	18
2.1	Caos em sistemas dissipativos	18
2.2	Centros de periodicidade	19
2.3	Sistema de Rössler	22
2.4	O modelo de Rosenzweig-MacArthur	27
2.5	Modelo de laser semiconductor	30
2.6	O modelo de Gaspard-Nicolis	31
2.7	O circuito de Nishio-Inaba	34
3	Bilhares com simetria C3: Espaço de fase clássico e quantização	37
3.1	Caos em sistemas conservativos	37
3.2	Bilhares	39
3.3	Quantização de bilhares	42
3.3.1	<i>Desdobramento espectral e distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos</i>	44
3.3.2	<i>Distribuição de intensidades</i>	52
3.4	Bilhar C3-elíptico	53
3.4.1	<i>Dinâmica clássica</i>	54
3.4.2	<i>Quantização</i>	57
4	Espalhamento em bilhares de micro-ondas	63
4.1	Bilhares de micro-ondas	64
4.2	Estatísticas de espalhamento	69

4.3	Flutuações da matriz S	72
4.3.1	<i>Absorção forte</i>	75
4.3.2	<i>Medições em regimes de absorção baixa e intermediária</i>	78
4.4	Impedância normalizada	86
4.4.1	<i>Flutuações da impedância em bilhares de micro-ondas</i>	88
4.5	Discussão	90
4.5.1	<i>Retângulo</i>	93
4.5.2	<i>Triângulo irracional</i>	100
4.5.3	<i>Triângulo equilátero</i>	105
4.5.4	<i>Bilhar de Sinai</i>	107
4.5.5	<i>Medidas em baixas temperaturas</i>	111
5	Conclusões e perspectivas	118
	Referências	121
	Apêndice A – Circuito eletrônico – sistema Rössler	128
	Apêndice B – Parâmetro de acoplamento t: teórico x experimental	131
	Apêndice C – Parâmetros da função de ajuste z_R	132
	Apêndice D – Modos ressonantes das cavidades de micro-ondas	133
	Apêndice E – Métodos experimentais	134
	Apêndice F – Artigo: Experimental Microwave Scattering in Polygonal Billiards	138

1 Introdução

Quando, a partir de condições iniciais típicas, o espaço de fase de um sistema dinâmico *clássico* é inteiramente visitado quando o tempo tende a infinito, tal que a média de uma variável dinâmica no tempo é igual à média no *ensemble* das configurações possíveis, dizemos que o sistema é *ergódico* [1]. A chamada teoria ergódica de sistemas dinâmicos é hoje domínio especializado da matemática e provê bases rigorosas para hipóteses da mecânica estatística do equilíbrio. De acordo com esta teoria, os sistemas dinâmicos estão classificados hierarquicamente. Seja X o conjunto de todos os pontos do espaço de fase de um sistema ergódico em uma seção de Poincaré, A e B dois subconjuntos arbitrários de X , e T a transformação associada à dinâmica do sistema nessa seção em um tempo discreto n . Seja μ a *medida* de uma região dessa seção. Dizemos que o sistema é *fortemente misturador* se

$$\frac{\mu((T^n A) \cap B)}{\mu(B)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A)}{\mu(X)}, \quad (1.1)$$

com $\mu(X) = 1$, e *fracamente misturador* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu((T^k(A)) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0. \quad (1.2)$$

O subconjunto mais conhecido dos sistemas misturadores é o dos sistemas K (sistemas de Kolmogorov), caracterizados por uma separação exponencial de trajetórias inicialmente vizinhas no espaço de fase. Essa caracterização é tipicamente feita

através da identificação de um expoente de Lyapunov positivo. O painel mais à esquerda da Fig. 1.1 mostra, como conjunto X , a região do plano xy no intervalo $[0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$, dividida em duas regiões α_1 e α_2 , elementos da *partição* α ; ou seja, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. A transformação

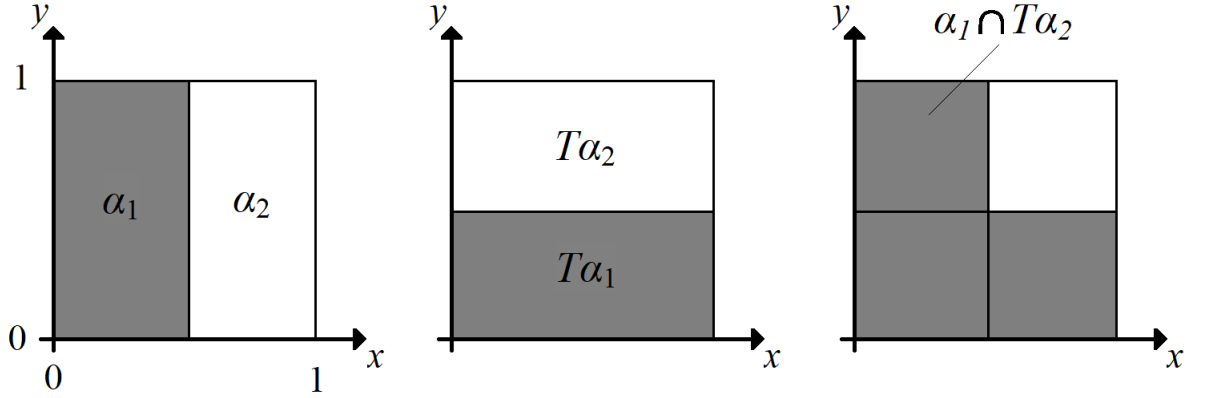


Figura 1.1: Transformação do padeiro na partição α da região X definida por $[0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$.

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x - 1, (y + 1)/2), & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

conhecida como transformação do padeiro, leva as regiões α_1 e α_2 da partição α nas regiões $\beta_1 \equiv T\alpha_1$ e $\beta_2 \equiv T\alpha_2$ da partição β de X , mostradas no painel central. O painel mais à direita indica a interseção $\alpha_1 \cap \beta_2$. Vemos que $\mu(\alpha_1 \cap \beta_2) = \mu(\alpha_1)\mu(\beta_2)$, o mesmo valendo para as outras combinações dos índices 1 e 2. Neste caso, dizemos que as partições α e β são *independentes*. Uma transformação T é chamada de *Bernoulli* se existe uma partição α de X tal que as imagens de α sob T em diferentes instantes de tempo, $T\alpha, T^2\alpha, T^3\alpha, \dots$ são todas independentes. Sistemas de Bernoulli formam um subconjunto dos sistemas de Kolmogorov. Essas definições estabelecem, assim, a chamada hierarquia ergódica: Sistemas de Bernoulli (B) são de Kolmogorov

(K), sistemas K são fortemente misturadores (FM), sistemas FM são fracamente misturadores (fm), sistemas fm são ergódicos (E), mas não seguem o sentido inverso. Ou seja,

$$B \subset K \subset FM \subset fm \subset E. \quad (1.4)$$

Dentre os sistemas dinâmicos ergódicos, portanto, apenas os sistemas K e B são classicamente caóticos.

Uma característica procurada no estudo de sistemas caóticos é a *universalidade*. De modo geral, a não linearidade das equações não permite solução de forma fechada e a identificação de propriedades quantitativas comuns é uma rotina na pesquisa desses sistemas. Por exemplo, ganhou notoriedade na década de 1980 o número $\delta = 4,669\dots$, a constante de Feigenbaum que mede universalmente a taxa assintótica de bifurcações de dobramentos de período em sistemas que podem ser descritos a partir de mapas discretos unidimensionais com extremo quadrático [2].

Um problema intrigante da física teórica que tem atraído atenção desde o final da década de 1970 é a quantização de sistemas classicamente caóticos. Este tema tem sido chamado de “caos quântico” um tanto quanto abusivamente, uma vez que o princípio da incerteza impede a caracterização do caos baseada na separação de trajetórias em um espaço de fase [3]. Outra maneira de visualizar essa impossibilidade é considerar a evolução temporal unitária em mecânica quântica. Se $|\psi_1(0)\rangle$ e $|\psi_2(0)\rangle$ são estados iniciais arbitrariamente próximos de um sistema quântico, tomando a projeção de um sobre o outro como uma medida da “distância” entre os mesmos, segue frustrantemente que

$$\langle \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle = \langle \psi_1(0) | U^{-1} U | \psi_2(0) \rangle = \langle \psi_1(0) | \psi_2(0) \rangle. \quad (1.4)$$

Hoje, receitas de caracterização de propriedades caóticas em sistemas quânticos

podem ser separadas em duas categorias, a de sistemas fechados (hamiltonianos com espectros discretos) e a de sistemas abertos (problemas de espalhamento). Como originalmente apontado pelos fundadores da disciplina, também chamada de “caologia quântica”, qualquer propriedade que pudesse ser associada ao caos em um sistema quântico deveria ser procurada no regime semiclássico (estados altamente excitados). Ao longo dos anos, o “caos quântico” tem sido tentativamente identificado através de conjecturas com origem na física nuclear estatística, fortemente ancorada na teoria de matrizes aleatórias. Com exceções.

Nesta tese apresentamos resultados numéricos e de medições em experimentos físicos em sistemas dinâmicos dissipativos e conservativos, fechados e abertos, em regimes clássico, semiclássico e quântico (estados mais próximos do fundamental). No Capítulo 2, dando continuidade a um trabalho iniciado no programa de mestrado aqui mesmo na UFPE [4], apresentamos um estudo numérico de espirais de periodicidade dentro do caos em sistemas dinâmicos dissipativos tridimensionais, a saber, Rössler, Rosenzweig-MacArthur (predador-presa), modelo de laser semiconductor, oscilador químico de Gaspard-Nicolis e o circuito eletrônico de Nishio-Inaba. Tipicamente, essas espirais são identificadas através do cálculo de expoentes de Lyapunov em três direções ortogonais no espaço de fase. Uma segue a direção da trajetória e tem, portanto, expoente nulo. Outra tem expoente negativo, característico de atratores. O terceiro, que chamaremos de λ_c , troca de sinal quando o sistema passa de um regime periódico para outro caótico. As espirais são identificadas em diagramas de Lyapunov, que são projeções em código de cores do expoente λ_c com variação de apenas dois dos possíveis parâmetros em cada sistema. As espirais seguem uma sequência de adição de período, acumulando no centro após um número infinito de bifurcações (P(1) -

$P(2) - P(4) - P(8) - \dots$ caos $\dots - P(3) - P(6) - \dots$ caos $- P(4) - P(8) - \dots$ caos $- P(5) - P(10) - \dots$ caos $- P(k - 1) - \dots -$ caos $- P(k) \dots -$ caos $- P(k + 1) - \dots -$ caos $- \dots$). Note que cada janela periódica apresenta sua própria sequência de dobramentos de período como rota para o caos vizinho. Procuramos uma característica universal no centro de espirais dos sistemas acima, calculando numericamente a *densidade invariante* de mapas discretos (aproximadamente) unidimensionais no intervalo $[0, 1]$, identificados em cada sistema a partir dos máximos locais em séries temporais. Observamos que os mapas construídos são distintos, mas as densidades invariantes são similares, divergindo nos extremos do intervalo. Mostramos que a densidade invariante pode ser satisfatoriamente ajustada através de uma combinação linear das distribuições beta e de Kumaraswami.

No Capítulo 3 apresentamos resultados numéricos sobre o espaço de fase clássico e a correspondente quantização em bilhares com simetria $C3$. Bilhares são modelos protótipos na teoria ergódica de sistemas hamiltonianos. Em um bilhar, uma partícula descreve movimento retilíneo uniforme em uma região fechada Ω entre duas colisões especulares sucessivas na fronteira $\partial\Omega$. A dinâmica pode variar de uma completamente regular a outra completamente caótica dependendo apenas da geometria determinada por $\partial\Omega$. Exatamente por esta razão os bilhares se tornaram modelos de escolha no estudo do “caos quântico”. Em mecânica quântica, um bilhar corresponde ao problema de uma partícula confinada em um poço de potencial infinito bidimensional (2D). Matematicamente, isso nos leva ao problema de autovalor do laplaciano 2D com condições de Dirichlet na fronteira, contido na equação de Schrödinger independente do tempo que descreve o problema. A mesma equação que aparece no problema das vibrações de membranas em um tambor [5] e na eletrodinâmica clássica

de modos TM em cavidades ressonantes planas (frequências menores que $c/2d$, onde c é a velocidade da luz e d é a espessura da cavidade) [6], de modo que os bilhares quânticos também oferecem a possibilidade de experimentos físicos. Nos bilhares com simetria C3 explorados aqui, identificamos numericamente os regimes regulares e caóticos no espaço de fase clássico a partir da medida relativa e verificamos, em particular, a conjectura de Leyvraz, Schmit e Seligman para a quantização desses sistemas em regime classicamente caótico [7]: singletos devem seguir as estatísticas previstas pelo ensemble gaussiano ortogonal (GOE) das matrizes aleatórias, enquanto que os dubletos seguiriam o ensemble unitário (GUE), característico de sistemas com simetria de reversão temporal quebrada. As propriedades aqui exploradas foram a distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos, $P(s)$, e a sua integral, $I(s)$, que fornece o número de espaçamentos menores do que s e, convenientemente, não depende da largura das binas utilizadas nos histogramas de $P(s)$.

Como parte principal da tese, apresentamos no Capítulo 4 um conjunto amplo de resultados experimentais para estatísticas de espalhamento de uma porta em bilhares de micro-ondas poligonais e caóticos [8]. Bilhares poligonais possuem entropia nula e, portanto, nunca são caóticos. Em experimentos de uma porta, a matriz- S é parametrizada como $S = \sqrt{R}e^{i\theta}$, onde R é o coeficiente de reflexão e θ a fase. Analisadores de rede vetoriais (VNAs) permitem medidas simultâneas de R e θ , assim como das partes real (resistência) e imaginária (reatância) da impedância do alvo. Em nossos experimentos foi utilizado um VNA operando na faixa de 2,0 a 18,0 GHz. Fitas de um absorvedor de micro-ondas de banda larga foram utilizadas, de modo que foi possível explorar diversos regimes de absorção e acoplamento, tanto em temperatura ambiente quanto em 77 K. Além da matriz- S , caracterizamos também a resistência

z_R e a reatância z_I normalizadas, que dependem da absorção mas não do acoplamento. Médias em várias dezenas de posições da antena de monopolo utilizada para acoplar a cavidade com o cabo coaxial proveniente da fonte de micro-ondas foram feitas para cada bilhar (três poligonais, um caótico), em cada faixa de frequência. Intrigantemente, mostramos que os resultados experimentais em polígonos não diferem daqueles tão frequentemente estudados na literatura como “espalhamento caótico” [9], [10], [11]. Nem da teoria utilizada para descrever exatamente os regimes de absorção fraca e forte, nem das fórmulas de interpolação intermediárias. Nossos resultados para as numerosas medições das distribuições $P(R)$, $P(\theta)$, $P(z_R)$ e $P(z_I)$ são discutidos em relação a limitações impostas pelo próprio aparato experimental.

A tese é finalizada com uma seção de Conclusões e Perspectivas.

2 Densidade invariante em centros de periodicidade

2.1 Caos em sistemas dissipativos

Dentre os sistemas que são classificados como K (caóticos), estão os sistemas dinâmicos dissipativos, onde sua evolução é dada por equações diferenciais não lineares para o caso de tempo contínuo, e mapas iterados para o caso de tempo discreto. O que caracteriza os sistemas dissipativos é a contração de volumes no espaço de fase. Para ilustrar esse fato consideremos um conjunto de n equações diferenciais não lineares de primeira ordem, representadas compactamente por

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (2.1)$$

com evolução de um volume $V(t)$ no espaço de fase descrita por

$$V(t) = V(0)e^{\nabla \cdot \vec{f} t}. \quad (2.2)$$

Se $\nabla \cdot \vec{f} < 0$, o sistema é classificado como dissipativo, e todas as trajetórias iniciando em uma pequena região do espaço de configurações seguirão para um conjunto

limitante. Os atratores das trajetórias podem ser pontos fixos, ciclos limite e para alguns valores de parâmetros, um atrator estranho (caótico) [12].

Ao exibir comportamento caótico, os sistemas dissipativos compartilham algumas características como oscilações aperiódicas em regime estacionário e forte sensibilidade às condições iniciais. Os sistemas tratados aqui são determinísticos, ou seja, em suas equações não há variáveis ou parâmetros aleatórios. Com esses requisitos, o caos aqui tratado é chamado de caos determinístico.

Em anos recentes, espirais de periodicidade foram descobertas [13], [14] em regiões caóticas de espaços biparamétricos de sistemas dissipativos tridimensionais ($n = 3$). Realizamos aqui estudos numéricos do comportamento caótico nos centros de tais espirais em cinco sistemas dinâmicos. Os resultados são apresentados a seguir.

2.2 Centros de periodicidade

Espirais de periodicidade aparecem em projeções do expoente de Lyapunov característico (λ_c) no espaço de parâmetros bidimensional de um sistema dinâmico, o qual muda de sinal entre soluções periódicas ($\lambda_c < 0$) e caóticas ($\lambda_c > 0$). O polo de uma dessas espirais será chamado aqui de centro de periodicidade (CP). Na literatura ele é conhecido como *periodicity hub*. Sequências completas de adição de período e respectivas bifurcações de dobramento de período podem ser encontradas seguindo-se determinadas linhas no espaço biparamétrico em direção ao CP, como será visto abaixo.

Considere, então, um sistema tridimensional com

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

A ideia do algoritmo para obtenção do espectro de Lyapunov desse sistema é seguir uma dada trajetória típica a partir de condições iniciais $x_1(0)$, $x_2(0)$ e $x_3(0)$ que já estão no atrator, ou seja, estamos supondo que transientes já foram descartados. Devemos monitorar três direções específicas no espaço de fases, a saber: (a) Uma ao longo da própria trajetória. Duas condições iniciais vizinhas ao longo desta direção nem se aproximam nem se afastam. A ela estará associado, portanto, um expoente de Lyapunov $\lambda_a = 0$; (b) Como estamos supostamente em um atrator, este possuirá, mesmo em regime caótico, uma variedade estável. Esta direção, portanto, será caracterizada por um expoente $\lambda_b < 0$ em qualquer circunstância; (c) Finalmente, a terceira direção, ortogonal às duas primeiras, poderá indicar a presença de uma variedade estável ou instável com λ_c negativo ou positivo, respectivamente. Este será o nosso expoente característico, indicador das fases periódicas e caóticas em um plano de parâmetros do sistema.

Nesta tese, apresentaremos uma caracterização da dinâmica caótica na vizinhança de CPs em cinco sistemas tridimensionais, os quais são, o sistema de Rössler, o modelo predador-presa de Rosenzweig-MacArthur, um modelo de laser semiconductor, o oscilador químico de Gaspard-Nicolis e o circuito eletrônico de Nishio-Inaba. Através de mapas de retorno de máximos locais em uma variável dinâmica, aproximadamente unidimensionais, buscamos aspectos que podem ser compartilhados por atratores estranhos dos diferentes sistemas.

Os mapas unidimensionais $F(x')$ apresentados aqui são reescalados no intervalo

unitário ($x' \in [0, 1]$) a partir dos dados numéricos. Após a seleção dos máximos locais em uma variável dinâmica do fluxo 3D, verifica-se a ergodicidade através do mapa de retorno $x'(n+1) = F(x'(n))$ e segue-se para a caracterização da densidade invariante correspondente $\rho(x')$. Exemplos conhecidos de total ergodicidade em $[0, 1]$ são o mapa da tenda

$$F(x') = \begin{cases} 2x', & \text{se } 0 \leq x' \leq 1/2 \\ 2(1-x'), & \text{se } 1/2 \leq x' \leq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

com distribuição uniforme $\rho_u(x') = 1$, e o mapa logístico

$$F(x') = 4x'(1-x'), \quad (2.5)$$

com distribuição dada por

$$\rho_{log}(x') = \frac{1}{\pi \sqrt{x'(1-x')}}. \quad (2.6)$$

Duas outras famosas distribuições no intervalo unitário são utilizadas aqui: (i) A distribuição beta, a qual é definida por

$$\rho_B(x'; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x'^{\alpha-1} (1-x')^{\beta-1}, \quad (2.7)$$

onde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (2.8)$$

é a função beta e α e β são parâmetros de forma positivos. Como casos particulares, temos que $\rho_u(x') = \rho_B(x'; 1, 1)$ e $\rho_{log}(x') = \rho_B(x'; 1/2, 1/2)$. (ii) A distribuição de

Kumaraswamy, a qual foi proposta por fornecer bons ajustes em dados de hidrologia [15] e por ter vantagens computacionais [16], sendo definida por

$$\rho_K(x'; \gamma, \delta) = \gamma \delta x'^{\gamma-1} (1 - x'^{\gamma})^{\delta-1}, \quad (2.9)$$

onde γ e δ são parâmetros positivos.

Todos os sistemas tridimensionais analisados nesta tese, apresentaram comportamento caótico unidimensional próximos aos CPs e em suas análises estatísticas observou-se que todas as densidades investigadas, divergem nos extremos do intervalo unitário, com forma simétrica e assimétrica de “U”. A distribuição que caracteriza os máximos locais normalizados da variável em questão é dada por uma combinação linear das distribuições beta e Kumaraswamy, definida como

$$\rho(x') = p\rho_B(x'; \alpha, \beta) + (1 - p)\rho_K(x'; \gamma, \delta), \quad (2.10)$$

onde p é uma constante em $[0, 1]$.

Os sistemas tratados nas seções posteriores serão apresentados na forma $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$. Os mapas unidimensionais obtidos a partir dos máximos locais, serão normalizados e as variáveis dinâmicas $x(t)$ ou $y(t)$ serão reescritas como x' e y' . Em particular, para o sistema de Rössler, além do cálculo numérico, montamos um circuito eletrônico que faz a mímica das equações diferenciais.

2.3 Sistema de Rössler

O primeiro dos cinco sistemas a ser caracterizado é o sistema de Rössler [17], o qual foi proposto em 1976 como sendo o fluxo 3D mais simples a apresentar comportamento

caótico, no sentido de ter apenas uma não linearidade em suas equações. O conjunto de equações diferenciais que descreve o sistema dinâmico de Rössler é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde a , b e c são parâmetros reais. As soluções são estudadas nos intervalos $0,1 < a, b < 0,4$ e $1 < c < 25$. Aspectos globais de CPs nesse sistema foram estudados anteriormente em [18] e [19]. Aqui calculamos os três expoentes de Lyapunov para valores de a , b e c na vizinhança do atrator de Rössler, definido por $(a, b, c) = (0,2; 0,2; 5,7)$. Explicitamente fixamos $b = 0,17872$ e plotamos o expoente de Lyapunov característico do sistema no plano $a \times c$, o qual é apresentado na figura 2.1. Um CP

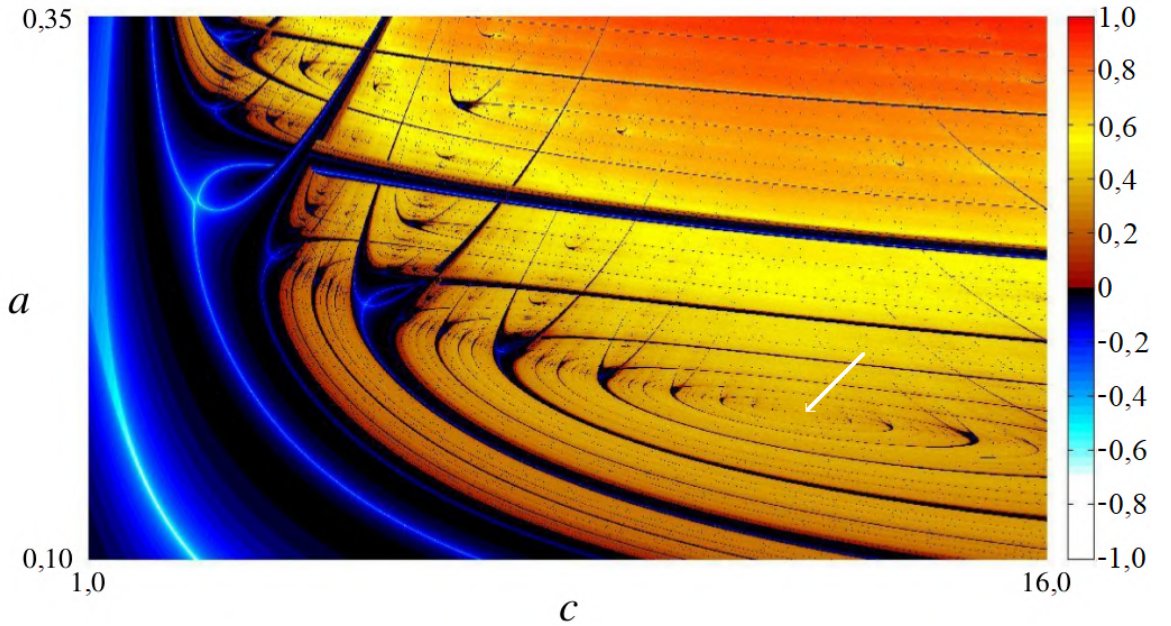


Figura 2.1: Diagrama de fases de Lyapunov obtido numericamente com 2400×2400 valores normalizados de λ_c , projetados no plano $a \times c$ para $b_c = 0,17872$.

foi localizado no ponto $(c_c, a_c) = (10,57060; 0,17694)$, o qual é indicado pela seta

branca na figura 2.1. Para esse conjunto de parâmetros, mostramos na figura 2.2(a), um trecho da série temporal numérica correspondente à variável $x(t)$, e na figura 2.2(b), uma projeção do atrator estranho no plano xy . Na figura 2.3 mostramos o diagrama de órbita obtido a partir dos máximos locais em $x(t)$ para $(a, b) = (a_c, b_c)$ e $3 \leq c \leq c_c$. A partir dele, localizamos em $c = c_k$ o regime superestável de período- 2^k da primeira sequência de dobramentos de período, obtendo assim, o valor $\delta_8 = (c_8 - c_7)/(c_9 - c_8) = 4,66922$, o qual está em excelente acordo com a constante universal de Feigenbaum $\delta = 4,669201609\dots$. Em analogia com a sequência de dobramentos de período, consideramos a ocorrência das janelas de adição de período na região caótica. A partir dos correspondentes regimes superestáveis de período- j , obtivemos $\Delta_{12} = (c_{12} - c_{11})/(c_{13} - c_{12}) = 1,73400\dots$ [4].

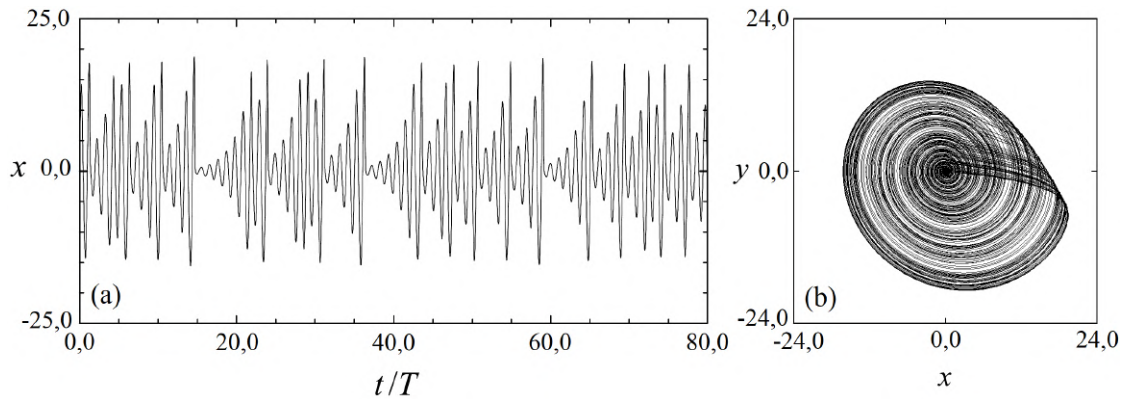


Figura 2.2: (a) Oscilações estacionárias de $x(t)$ e (b) projeção do atrator estranho no plano xy , numericamente calculado no sistema de Rössler com parâmetros do CP $(a, b, c) = (0,17694; 0,17872; 10,57060)$.

Uma vez localizado numericamente o CP, identificamos 5×10^6 máximos locais da variável $x(t)$ e, após reescalar os valores para o intervalo unitário, construímos o mapa de retorno mostrado na figura 2.4(a). Com esses dados em mãos, construímos um histograma da distribuição de ocorrência desses máximos (densidade invariante),

o qual é mostrado na figura 2.4(b). Inicialmente, tentamos ajustar o histograma com apenas uma das distribuições, $\rho_B(x; \alpha, \beta)$ ou $\rho_K(x; \gamma, \delta)$, mas apenas uma combinação linear das mesmas se mostrou adequada a este objetivo. Os parâmetros de ajuste com a equação (2.10) foram $p = 0,6961$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,56222$ e $\delta = 1,40565$. O resultado está mostrado através da linha sólida na figura 2.4(b). Com isso, podemos dizer que este CP para o sistema de Rössler apresenta 70% de distribuição logística.

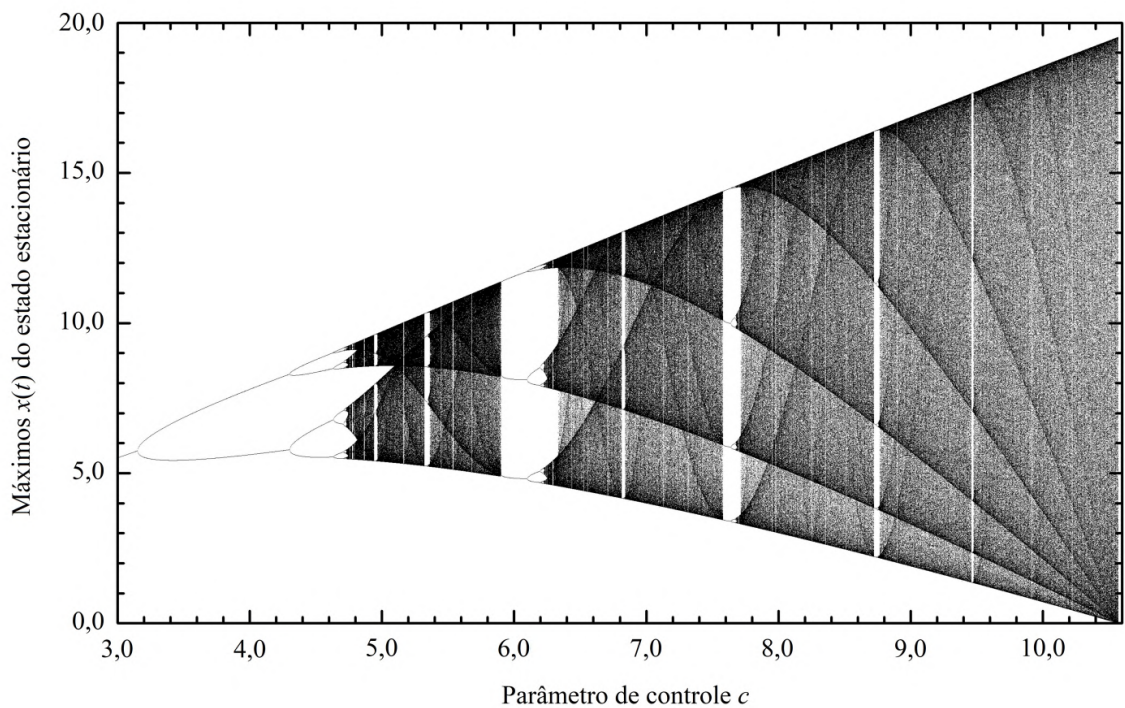


Figura 2.3: Diagrama de órbita dos máximos em $x(t)$ no sistema de Rössler, obtido numericamente com $a = 0,17694$ e $b = 0,17872$.

As oscilações do sistema de Rössler também foram obtidas através de um circuito eletrônico, o qual tem o esquema apresentado no apêndice A. Com valores específicos dos componentes eletrônicos do circuito, podemos nos aproximar dos resultados obtidos através da integração numérica, os quais foram mostrados na figura 2.2 para o CP. Então, tem-se na figura 2.5(a), as oscilações para a variável x , e em (b), o uma

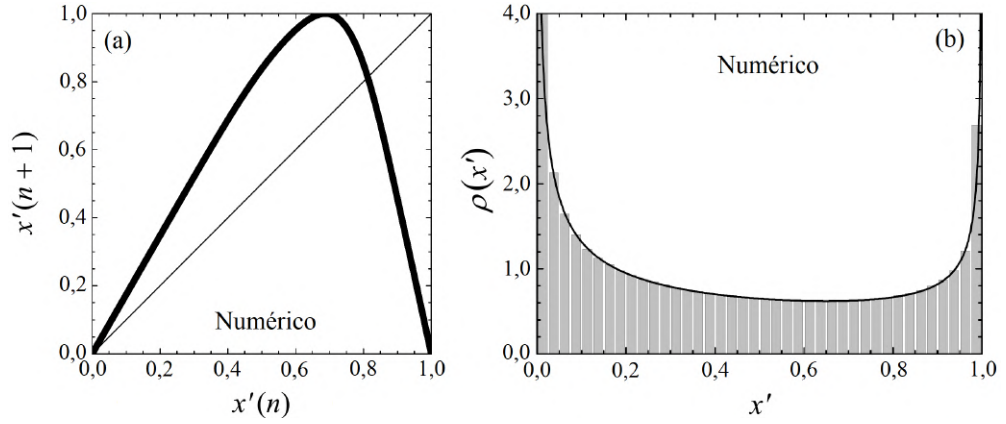


Figura 2.4: Cálculo numérico: (a) Mapa de retorno de máximos consecutivos em $x(t)$, reescalados no intervalo unitário, no CP do sistema de Rössler. (b) Densidade invariante (histograma) do mapa 1D ao lado. A curva sólida é um ajuste com a equação (2.10).

projecção no plano $y \times x$ do atrator caótico. Qualitativamente, observamos um bom acordo com os resultados numéricos apresentados na figura 2.2. Além disso, na figura 2.6(a) é mostrado o mapa de retorno experimental para a variável x normalizada, e a correspondente densidade invariante é exibida em (b), que também apresenta um bom acordo com o ajuste numérico da figura 2.4(b).

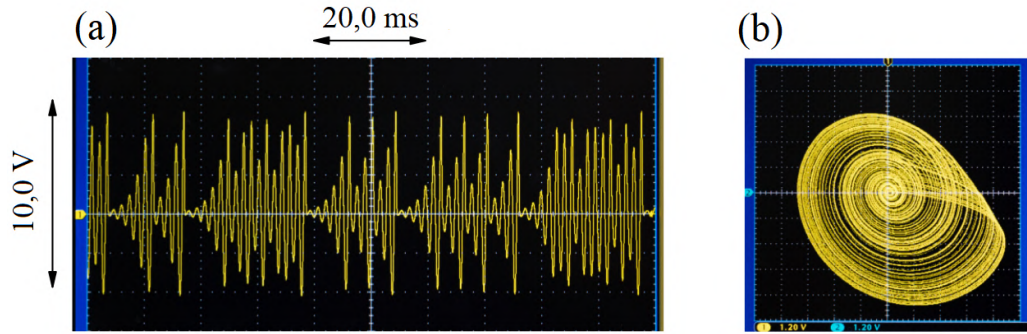


Figura 2.5: (a) Imagem de osciloscópio da voltagem $V_x(t)$ no circuito de Rössler, com elementos passivos escolhidos para fazer a mímica dos valores dos parâmetros (a, b, c) tão próximos possíveis ao CP encontrado numericamente na figura 2.2. (b) Imagem de osciloscópio mostrando a projeção do atrator estranho experimental no plano de voltagem $V_x \times V_y$.

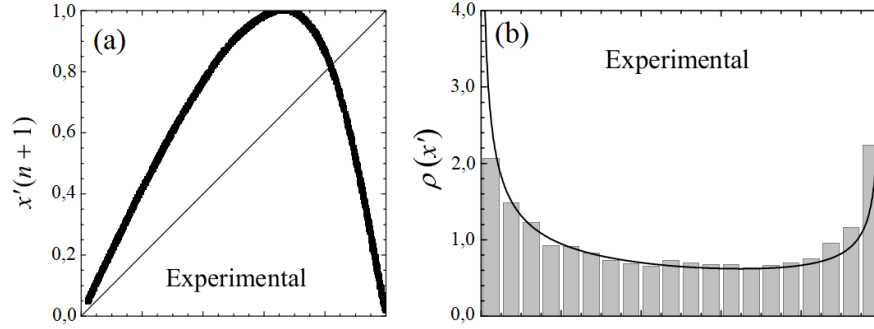


Figura 2.6: (a) Resultados experimentais observados na simulação do circuito analógico do CP previsto numericamente. (b) Densidade invariante (histograma) do mapa 1D ao lado. A curva sólida é o mesmo ajuste da figura 2.4(b).

2.4 O modelo de Rosenzweig-MacArthur

O primeiro modelo não linear para dinâmica de sistemas biológicos, nos quais duas espécies interagem (predador-presa), foi introduzido independentemente por Lotka e Volterra na década de 1920 [20], [21]. Quatro décadas mais tarde, o modelo de Lotka-Volterra foi estendido por Rosenzweig e MacArthur (RM) [22], incluindo na dinâmica uma taxa de crescimento da presa. As equações diferenciais que descrevem o modelo de RM são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x[r(1 - x/K) - a_1 y/(1 + b_1 x)], \\ \dot{y} &= y[a_1 x/(1 + b_1 x) - a_2 z/(1 + b_2 y) - d_1], \\ \dot{z} &= z[a_2 y/(1 + b_2 y) - d_2],\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde os parâmetros K e r determinam a taxa de crescimento da presa, a qual tem sua população representada por $x(t)$.

No contexto de espirais de periodicidade, sua identificação e análise foi realizada no plano de parâmetros $K \times r$ [19], com um CP localizado em $K = 1,0587$ e $r = 0,78225$. Os demais valores dos parâmetros foram considerados em [23]: $a_1 = 5,0$, $a_2 = 0,1$,

$b_1 = 3,0$, $b_2 = 2,0$, $d_1 = 0,4$ e $d_2 = 0,01$. Uma projeção do atrator estranho correspondente no plano $z \times x$ é mostrado na figura 2.7(a). O mapa de retorno obtido dos consecutivos máximos locais para a variável x é mostrado na figura 2.7(b), com a função que descreve o mapa logístico (equação (2.5)) representada pela curva em preto. Como consequência da aproximação dos dados numéricos do mapa com a função logística, a distribuição de ocorrência dos máximos locais para o sistema de RM segue uma distribuição logística, dada pela equação (2.6). A figura 2.7(c) mostra o histograma da distribuição de máximos locais do sistema. A curva sólida representa a função de densidade invariante logística (equação (2.6)). Portanto, não há aqui uma necessidade de um ajuste numérico. No encarte em (c), há uma pequena amostra das oscilações em x para o caso estudado.

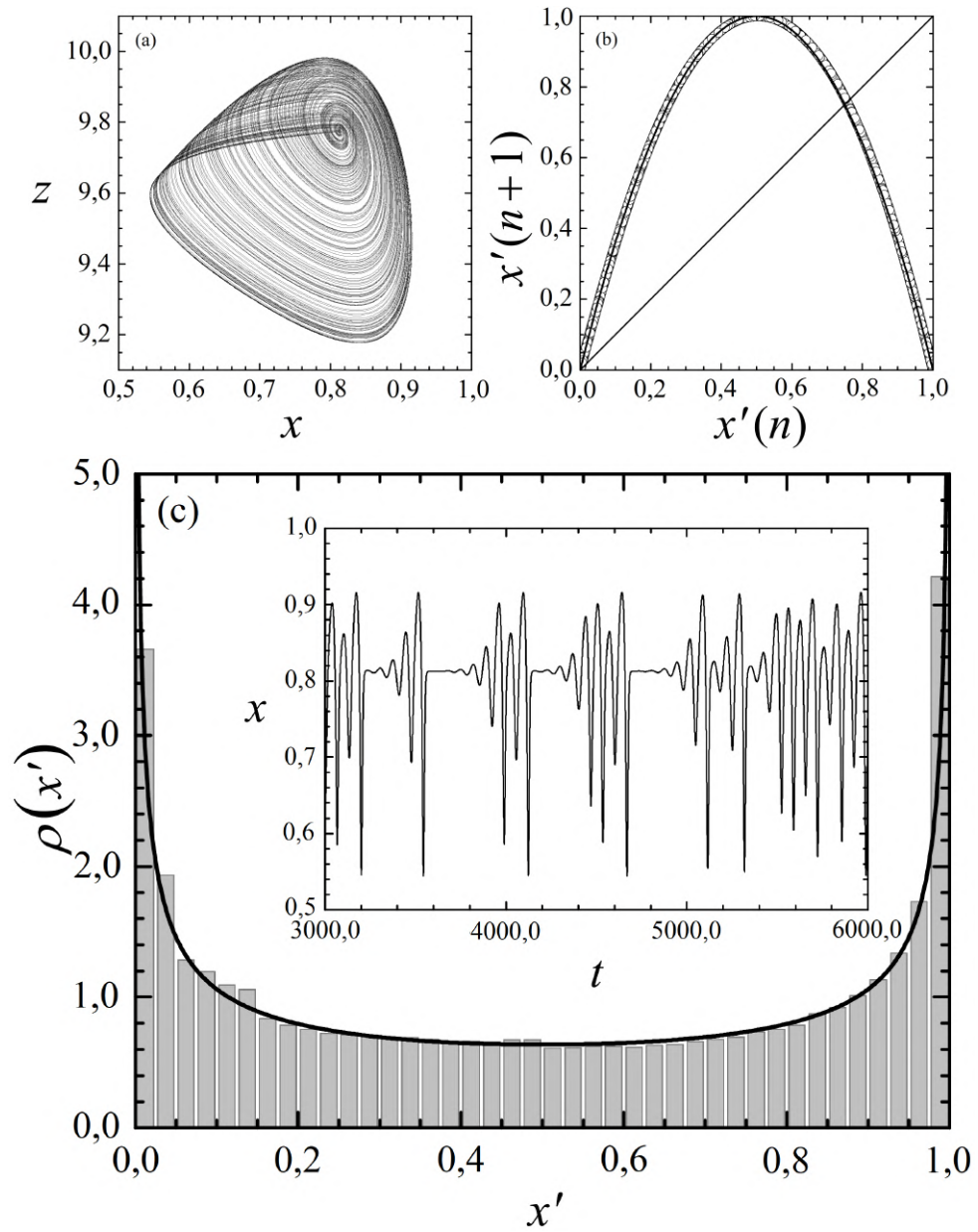


Figura 2.7: (a) Projção do atrator estranho no plano xz correspondente ao centro de periodicidade no modelo de Rosenzweig-MacArthur. (b) Mapa de retorno reescalado de máximos consecutivos em $x(t)$ (símbolos) e o mapa logístico (linha sólida parabólica). A reta $y = x$ é também desenhada como referência. (c) Densidade invariante do mapa 1D observado no CP do modelo RM (histograma) e a distribuição logística (linha sólida). No encarte, série temporal pós transiente, numericamente calculada no CP do modelo RM.

2.5 Modelo de laser semiconductor

Oscilações do tipo *spiking* surgem em lasers semicondutores e um modelo tridimensional foi introduzido em [24] para descrevê-las. As equações diferenciais adimensionais para o laser de um único modo com realimentação *ac* são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y - 1), \\ \dot{y} &= \gamma_0[\delta_0 - y + \alpha_0(x + z)/[1 + s_0(x + z)] - xy], \\ \dot{z} &= -\epsilon_0(x + z),\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde $x(t)$ é proporcional à população de fótons, $y(t)$ é proporcional à densidade do portador de carga, e a soma $x(t) + z(t)$ é proporcional à intensidade do laser.

Freire e Gallas [25] encontraram cascatas de CPs associados ao plano de parâmetros $\delta_0 \times \epsilon_0$, com os outros parâmetros fixados em $\gamma_0 = 0,001$, $\alpha_0 = 1,0$ e $s_0 = 11,0$, os quais foram utilizados em experimentos numéricos realizados previamente em [24]. O CP considerado em [25] foi encontrado com os valores $(\delta_0, \epsilon_0) = (1,010639; 3,9355 \times 10^{-5})$. Na figura 2.8(a) é mostrado uma projeção no plano $y \times x$ do atrator para o conjunto de parâmetros em questão. Mais uma vez, escolhemos a variável $x(t)$ para analisar a dinâmica de seus máximos consecutivos através do mapa de retorno, como mostrado na figura 2.8(b), onde na mesma imagem mostra-se a curva em preto que representa a função do mapa logístico (equação (2.5)). A distribuição de ocorrência dos máximos locais de $x(t)$ após serem reescalados no intervalo unitário é mostrada no histograma da figura 2.8(c), com sua respectiva função de ajuste (equação (2.10)) para $p = 0,8589$, $\alpha = \beta = 0,5$, $\gamma = 0,706$ e $\delta = 2,58141$. Para este valor de p , podemos dizer que o histograma é bem ajustado com uma componente de 86% da distribuição logística. No encarte em (c), há uma pequena amostra das oscilações em

x para o caso estudado.

2.6 O modelo de Gaspard-Nicolis

Na década de 80, uma série de trabalhos foram publicados sobre o fenômeno das bifurcações em sistemas homoclínicos [26], [27] e [28]. Em particular, um modelo investigado por Gaspard e Nicolis leva em conta a lei de ação da massa, o qual afirma que a taxa de uma reação química é proporcional às concentrações dos reagentes. O sistema de equações que descreve esse modelo é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta_1 x - f_1 y - z + g_1), \\ \dot{y} &= y(x + s_1 z - \alpha_1), \\ \dot{z} &= (-c_1 z + x + b_1 z^2 - a_1 z^3)/\epsilon_1.\end{aligned}\tag{2.14}$$

No contexto de CP, o trabalho [29] apresentou uma cascata desses pontos centrais no plano de parâmetros $\alpha_1 \times \beta_1$ com os outros parâmetros fixados em $a_1 = 0,5$, $b_1 = 3,0$, $c_1 = 4,8$, $\epsilon_1 = 0,01$, $f_1 = 0,5$, $g_1 = 0,6$ e $s_1 = 0,3$. Um CP foi considerado como principal por ter a maioria das soluções espiralando ao redor dele. As suas coordenadas são $(\alpha_1, \beta_1) = (0,7825; 0,39213)$. Na figura 2.9(a) mostra-se a projeção $y \times x$ do atrator caótico do sistema com coordenadas do CP, e ao lado, na figura 2.9(b), o mapa de retorno para os máximos consecutivos da variável $y(t)$. Diferentemente dos sistemas anteriores, que o mapa iterativo se aproximava da função do mapa logístico, aqui, a proximidade dos pontos do mapa com a reta de reinjeção, faz com que a ocorrência de menores valores de y' sejam mais frequentes. Essa característica do mapa se reflete na distribuição desses máximos, a qual é mostrada no histograma da figura 2.9(c). A curva dada pela equação (2.10) que melhor se ajustou aos dados,

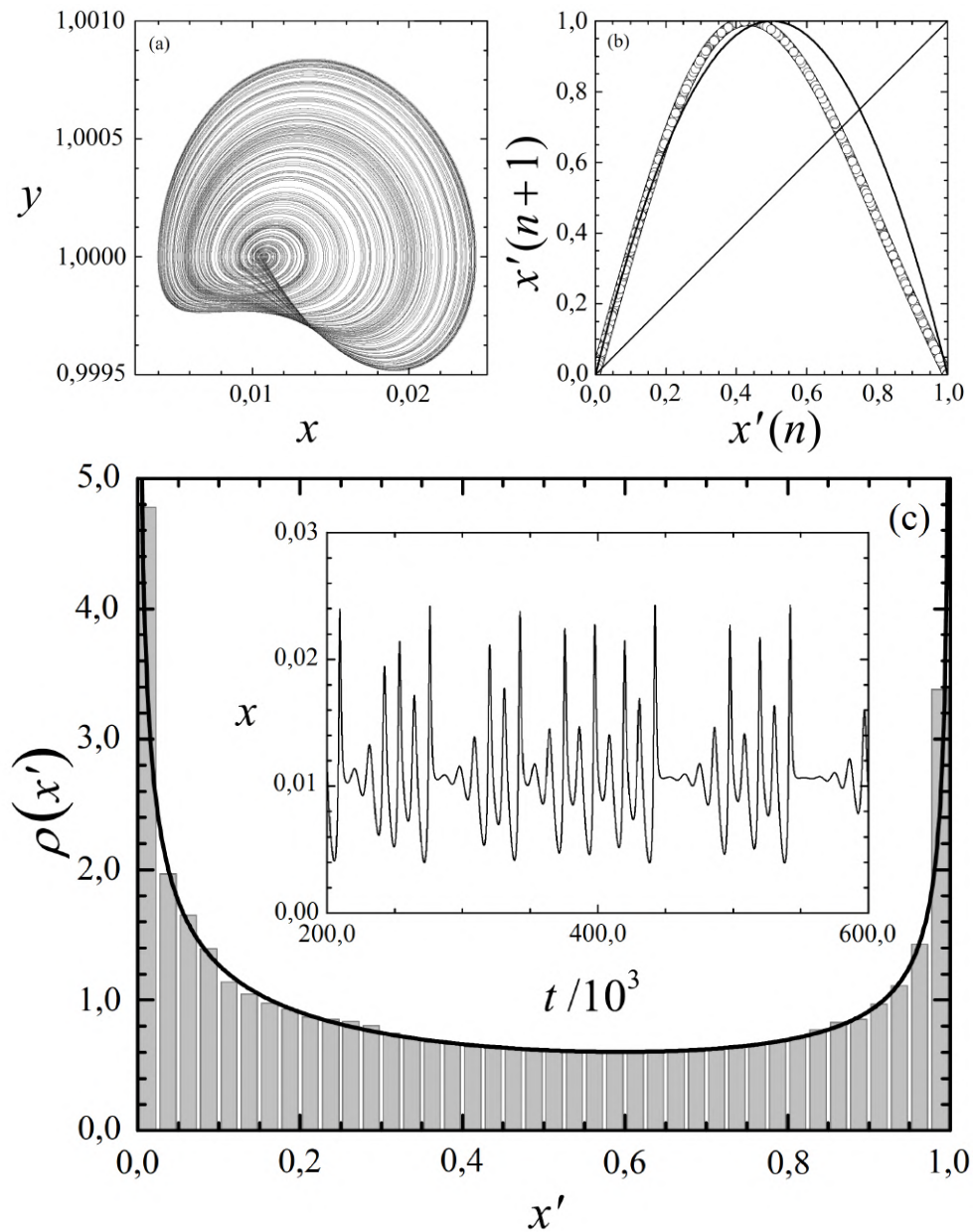


Figura 2.8: (a) Projeção do atrator estranho no plano xy correspondente ao CP no modelo de laser semiconductor. (b) Mapa de retorno reescalado de máximos consecutivos em $x(t)$ (símbolos) e o mapa logístico (linha sólida parabólica). A reta $y = x$ é também desenhada como referência. (c) Densidade invariante do mapa 1D observado no CP do modelo de laser semiconductor (histograma) e ajuste realizado pela equação (2.10) (linha sólida). No encarte, série temporal pós transiente, numericamente calculada no CP do modelo de laser semiconductor.

forneceu os parâmetros $\alpha = \beta = 0,5$, $\gamma = 0,48627$, $\delta = 2,93744$ e $p = 0,3348$. A assimetria da distribuição (33% logístico) é um reflexo da dinâmica do mapa unidimensional. Até esse ponto, todos os mapas apresentados cortam apenas uma única vez a reta de reinjeção, e suas respectivas distribuições de ocorrência foram em forma de “U”. No encarte em (c), há uma pequena amostra das oscilações na variável y .

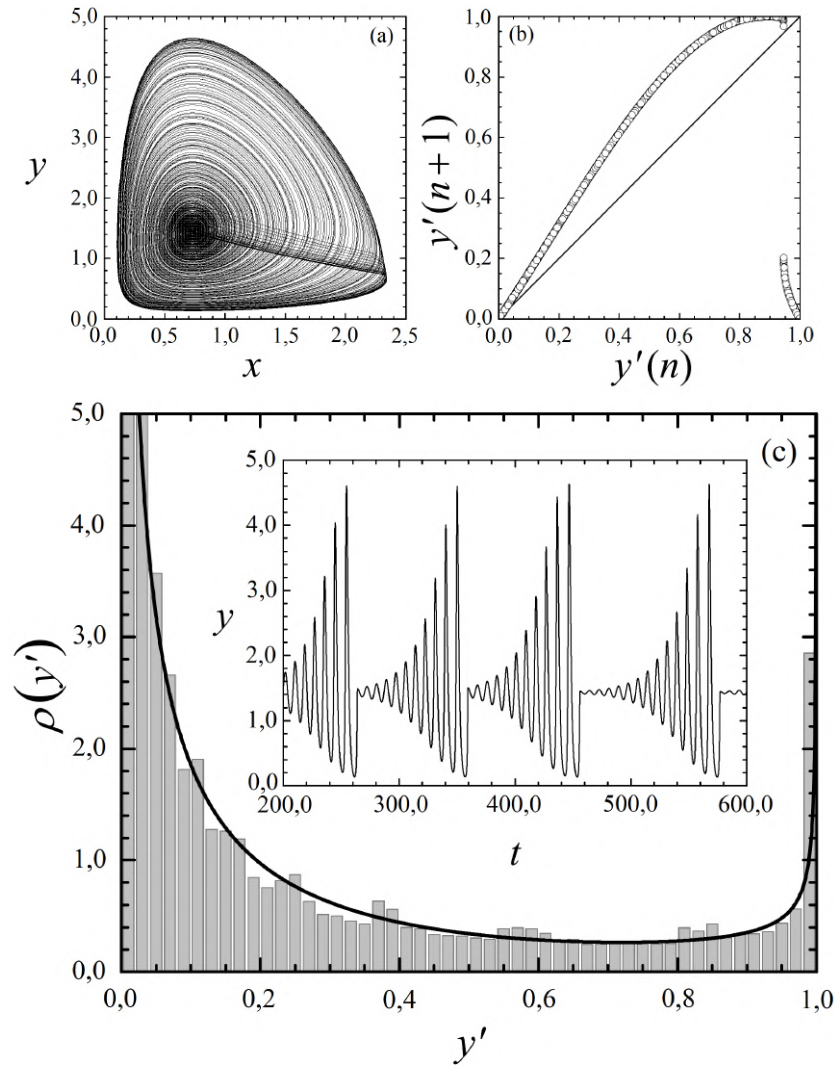


Figura 2.9: (a) Projeção do atrator estranho no plano xy correspondente ao centro de periodicidade no oscilador químico de Gaspard-Nicolis. (b) Mapa de retorno reescalado de máximos consecutivos em $y(t)$ (símbolos). A reta $y = x$ é também desenhada como referência. (c) Densidade invariante do mapa 1D observado no CP do oscilador químico de Gaspard-Nicolis (histograma) e ajuste realizado pela equação (2.10) (linha sólida). No encarte, série temporal pós transiente, numericamente calculada no CP do oscilador químico de Gaspard-Nicolis.

2.7 O circuito de Nishio-Inaba

Bonnato e Gallas [13] investigaram a presença de espirais de periodicidade em um modelo de um circuito eletrônico [30], o qual foi realizado experimentalmente por

Stoop, Benner e Uwate [31] dois anos depois. Entre os componentes eletrônicos deste circuito, está uma resistência não linear composta por dois diodos. O sistema de equações diferenciais que descreve este modelo é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_2 x + z, \\ \dot{y} &= z - \gamma_2(|y + 1/\gamma_2| - |y - 1/\gamma_2|)/2, \\ \dot{z} &= -x - \beta_2 y,\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde x e y são proporcionais às correntes em cada volta no circuito e z é uma variável representando a queda de tensão no capacitor. O parâmetro que define a resistência linear por partes é fixado em $\gamma_2 = 470, 0$. O plano de fases de Lyapunov é investigado no espaço de parâmetros $\alpha_2 \times \beta_2$ com $\alpha_2 = R\sqrt{C/L_1}$ e $\beta_2 = L_1/L_2$, onde o CP foi encontrado em $(\alpha_2, \beta_2) = (0, 4612; 3, 7191)$ [13]. A projeção do atrator estranho no plano $z \times x$ é mostrada na figura 2.10(a). Em (b), temos o mapa de retorno dos máximos consecutivos da variável $x(t)$ representados por pequenos círculos, onde observa-se a diferença da dinâmica unidimensional comparada aos sistemas anteriores. No sistema em questão, as iterações no mapa de retorno cruzam 3 vezes a reta de reinjeção, e sua forma se assemelha a função $F(F(x))$ para o mapa da tenda (equação (2.4)), a qual é representada pela curva preta na figura. Tanto o mapa da tenda, como a curva $F(F(x))$ tem uma distribuição de órbitas que é uniforme. Já para o sistema em questão, as curvaturas nos máximos e mínimos do mapa, refletem uma distribuição mostrada no histograma da figura 2.10(c), a qual é ajustada através da equação (2.10) com parâmetros $p = 0, 4524$, $\alpha = \beta = 1, 0$, $\gamma = 0, 36883$ e $\delta = 0, 71454$, logo, pode-se dizer que para este CP, $\rho(x')$ é 45% uniforme. Uma pequena amostra das oscilações em x são mostradas no encarte em (c).

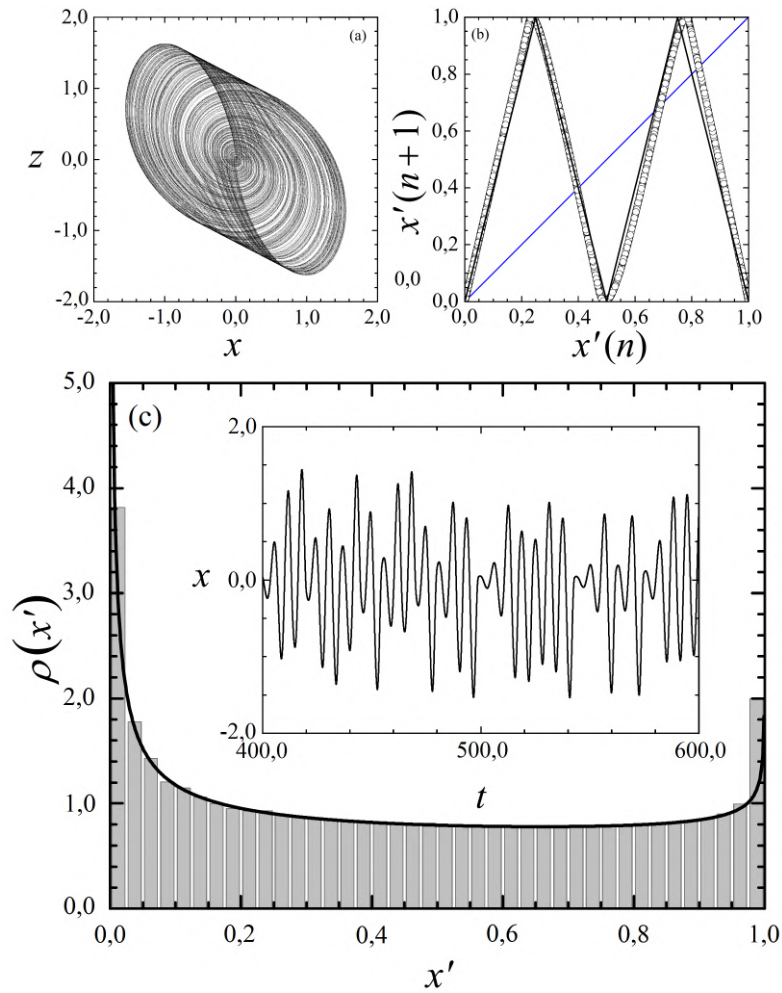


Figura 2.10: (a) Projeção do atrator estranho no plano xz correspondente ao centro de periodicidade no circuito de Nishio-Inaba. (b) Mapa de retorno reescalado de máximos consecutivos em $x(t)$ (símbolos) e segundo mapa de retorno $F^{(2)}(x)$ do mapa da tenda (linha sólida). A reta $y = x$ é também desenhada como referência. (c) Densidade invariante do mapa 1D observado no CP do circuito de Nishio-Inaba (histograma) e ajuste realizado pela equação (2.10) (linha sólida). No encarte, série temporal pós transiente, numericamente calculada no CP do circuito de Nishio-Inaba.

3 Bilhares com simetria C3: Espaço de fase clássico e quantização

3.1 Caos em sistemas conservativos

Aqui, são considerados sistemas conservativos aqueles que são descritos pelas equações de movimento de Hamilton, $\dot{q} = \partial H / \partial p$ e $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, onde $H = H(p, q)$ é uma função hamiltoniana independente do tempo. No contexto da equação (2.2), tais sistemas obedecem ao teorema de Liouville, ou seja, elementos de volume no espaço de fase são preservados, de modo que $\nabla \cdot \vec{f} = 0$. Tais sistemas também podem ser descritos por mapas discretos. Em muitos casos representativos de interesse, tais mapas são bidimensionais do tipo $(x_1(n+1), x_2(n+1)) = (f_1(x_1(n), x_2(n)), f_2(x_1(n), x_2(n)))$. Neste caso, a matriz jacobiana J tem elemento de matriz $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Um mapa como esse preserva a área se $|\det J| = 1$. Um exemplo comumente encontrado é o do *mapa padrão*

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + p_n \mod 2\pi \\ p_{n+1} &= p_n + K \sin \theta_n \mod 2\pi,\end{aligned}\tag{3.1}$$

que descreve a dinâmica de um rotor impulsionado por pulsos discretos, no intervalo $[0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq p \leq 2\pi]$. θ representa a posição angular do rotor, p seu momento angular, e K é o parâmetro de controle. Para $K = 64/9$, a dinâmica é caótica [32], ou seja, para uma condição inicial típica a órbita resulta no preenchimento irregular do espaço de fase em sua quase totalidade, como mostra a figura 3.1, construída aqui com uma sequência de 10^6 pares de pontos. Para $K = 2, 5$, pontos fixos elípticos (centros) estão presentes no espaço de fase, assim como ilhas de estabilidade do tipo Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), como mostra a figura 3.2(a). Neste caso, dizemos que o sistema exibe um espaço de fase misto, ou seja com regiões de comportamento regular e outras de comportamento irregular. Para $K = 1, 0$ (figura 3.2(b)), as ilhas KAM ocupam uma área maior no plano de fase. O sistema torna-se integrável quando $K = 0$.

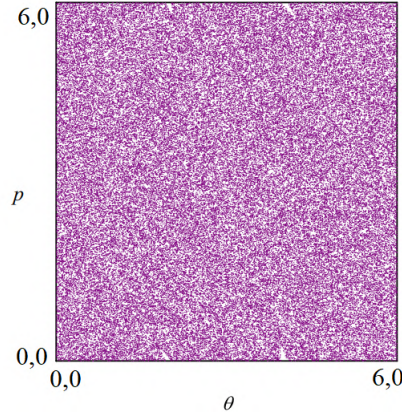


Figura 3.1: Espaço de fase completamente caótico do mapa padrão com $K = 64/9$.

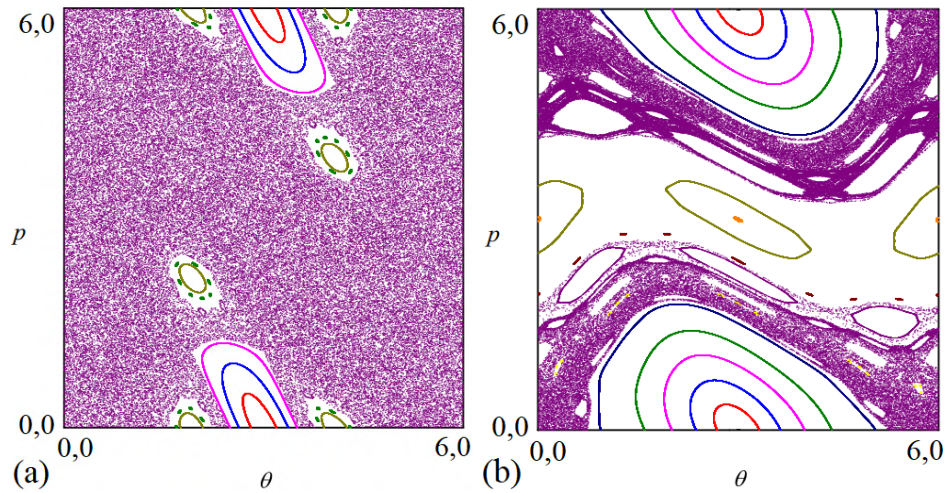


Figura 3.2: (a) Espaço de fase misto para o mapa padrão com $K = 2, 5$. (b) O mesmo de (a), com $K = 1, 0$.

3.2 Bilhares

Modelos matemáticos protótipos na teoria ergódica de sistemas dinâmicos, passíveis de uma descrição via mapas discretos bidimensionais, são os *bilhares* [33]. Em um bilhar, uma partícula de massa unitária é confinada em uma região planar Ω , descrevendo um movimento retilíneo uniforme entre duas colisões especulares sucessivas com a fronteira $\partial\Omega$. A dinâmica resultante pode variar de completamente regular para totalmente caótica, dependendo apenas da geometria da fronteira. O módulo da velocidade é tomado como 1, de modo que uma dinâmica conservativa discreta pode ser investigada em um espaço de fase consistindo do comprimento de arco do ponto de colisão até uma origem ao longo da fronteira e do *ângulo* da velocidade com a normal (ou seu complementar) no instante da mesma colisão (figura 3.3).

São poucas as geometrias completamente regulares: O retângulo, a elipse, a região anular concêntrica e três triângulos (60-60-60, 90-45-45 e 90-60-30). O círculo pode ser visto como um caso particular da elipse. De modo geral, setores da fronteira

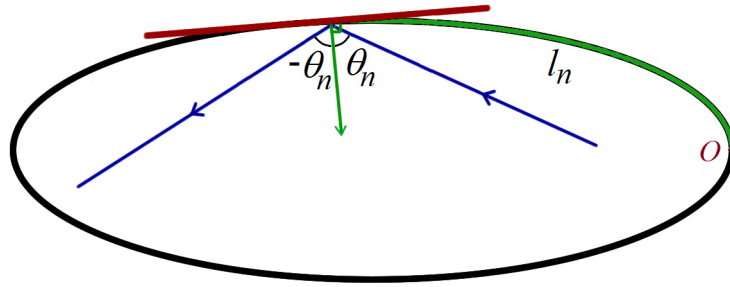


Figura 3.3: Ilustração do movimento de uma partícula em um domínio arbitrário. l_n é o comprimento de arco do ponto de colisão até uma origem O ao longo da fronteira.

côncavos para o interior são chamados de *focalizadores*, e os convexos são *desfocalizadores*. Setores retilíneos são *neutros* nessa classificação. Os dois bilhares caóticos mais conhecidos são os de Sinai [34] e o estádio de Bunimovich [35], [36] e [37] (figura 3.4). Historicamente, o bihar de Sinai foi o primeiro a promover a *hipótese* ergódica à categoria de *teorema*. Sinai considerou um gás de duas esferas duras colidindo elasticamente entre si e com as paredes de um reservatório quadrado. Separando o movimento do centro de massa, ele reduziu o problema ao de uma única partícula percorrendo a superfície de um toro, com reflexões especulares em um *disco* com a topologia do toro. Esse problema pode ser mapeado em outro onde a partícula se move livremente entre colisões elásticas com discos igualmente espaçados em uma rede infinita em um plano. Uma terceira maneira de caracterizar o bilhar de Sinai está esquematizada na figura 3.4(a). Neste caso, a partícula sofre reflexões especulares no disco central (desfocalizador) e tem condições de contorno periódicas na fronteira quadrada externa, ou seja, ao atingir um lado do quadrado, a partícula desaparece e é reinjetada instantaneamente no lado oposto do quadrado com o mesmo vetor velocidade. Um aluno de Sinai na famosa “Escola de Moscou”, Bunimovich provou que separando as duas metades de um círculo de diâmetro D por um retângulo de altura D e largura ϵ concêntrico com o círculo, o bilhar passa de inteiramente regular

(círculo) para inteiramente caótico (estádio), independentemente do valor de ϵ . O estádio de Bunimovich, com trechos focalizadores e neutros na fronteira, é mostrado na figura 3.4(b).

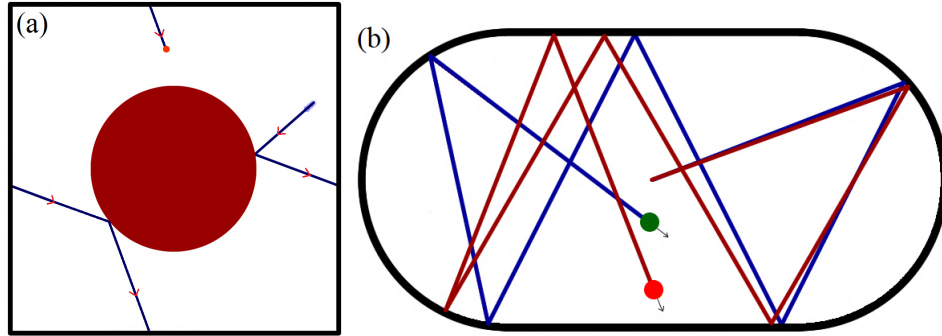


Figura 3.4: (a) Ilustração de trajetória de partícula no bilhar de Sinai. (b) No bilhar do estádio, trajetórias resultantes de partículas que partem de condições iniciais próximas.

Uma classe importante de bilhares é a de polígonos. Um resultado conhecido, também devido a Sinai, é o de que a *entropia* (soma dos expoentes de Lyapunov pelo teorema de Pesin), ou seja, a taxa de aumento no tempo da complexidade dinâmica, ou ainda, a entropia de Kolmogorov-Sinai, é nula em bilhares poligonais. Bilhares em polígonos, portanto, nunca são caóticos. De fato, polígonos com dinâmica irregular são chamados de *pseudo-integráveis*. Importante notar que os matemáticos consideram que a dinâmica cessa se, em uma dada órbita, a partícula atinge um canto. Em experimentos numéricos, tais órbitas são descartadas em cálculos de médias.

No final da década de 1990 [38], Casati e Prosen mostraram evidências numéricas de que triângulos irracionais (todos os ângulos irracionais com π) são fortemente misturadores. Uma família de triângulos irracionais foi introduzida anos depois [39], [40] para mostrar que o nível de mistura pode variar. Especificamente, a família de triângulos irracionais é definida por um parâmetro N (figura 3.5). Cada triângulo é

formado por lados inteiros consecutivos $(N, N+1, N+2)$, estando limitada à esquerda pelo triângulo retângulo ($N = 3$) e à direita pelo equilátero ($N \rightarrow \infty$). Retornaremos aos triângulos irracionais no Capítulo 4. Neste capítulo, investigamos propriedades clássicas e quânticas de bilhares com simetria $C3$, descritos mais adiante.

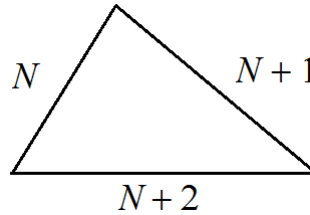


Figura 3.5: Bilhar de família de triângulos irracionais.

3.3 Quantização de bilhares

A quantização de um bilhar remete ao problema de uma partícula em um poço de potencial infinito com a mesma geometria. Na representação de coordenadas ($\vec{r}$ é o vetor posição no plano), a equação de Schrödinger independente do tempo corresponde à equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -k^2 \phi(\vec{r}), \quad (3.2)$$

em Ω , com $\phi(\vec{r}) = 0$ em $\partial\Omega$. Em outras palavras, estamos interessados no problema de autovalor do laplaciano bidimensional com condições de Dirichlet na fronteira. Como no caso clássico, soluções analíticas fechadas são conhecidas em apenas algumas geometrias. Dada a impossibilidade de se caracterizar o caos através de trajetórias no espaço de fase em mecânica quântica, uma reivindicação teórica primordial é a de que qualquer propriedade caótica, seja qual for, deve ser investigada no regime

semiclássico, ou seja, no espectro de energia e nas autofunções de estados altamente excitados [41]. Com este objetivo, vários métodos numéricos foram introduzidos na literatura nas últimas décadas para a abordagem do problema do laplaciano 2D acima. Aqui no DF-UFPE, temos feito uso de duas abordagens computacionais. Uma mais tradicional, o método de elementos finitos (MEF), que é uma espécie de técnica “força bruta” bem estabelecida. Nela, o primeiro passo é dividir a região Ω em pequenos mosaicos (elementos), tipicamente triangulares. Em cada elemento, usamos uma aproximação linear para a solução desejada $\phi(\vec{r})$. A continuidade da função de onda nas fronteiras entre mosaicos vizinhos e a condição de contorno na fronteira do bilhar transformam o problema da equação diferencial em outro: o de diagonalizar a matriz dos muitos coeficientes da aproximação linear em cada mosaico. Esse método é interessante pela possibilidade de discretização de qualquer geometria, mas limitado pela alta demanda de memória e tempo de processamento. O segundo método que temos utilizado é um *método de fronteira* (MF), mais eficiente. Em um MF, utilizamos uma base ortonormal de funções em uma região externa (um retângulo, por exemplo) da qual a região de interesse Ω é um subconjunto. As soluções procuradas são as superposições das funções da base que produzem a condição de Dirichlet em $\partial\Omega$. Detalhes sobre os dois métodos podem ser encontrados nas referências [42], [43], [44]. A título de comparação, conseguimos calcular com precisão de quatro a cinco dígitos cerca de três mil autovalores em um tempo da ordem de um dia com MEF. No mesmo período, o MF nos fornece da ordem de trinta mil autovalores. O cálculo das correspondentes autofunções é imediato com o MEF, mas mais demorado com o MF.

A equação de Helmholtz acima, com as mesmas condições de contorno, também aparece no problema do tambor (vibrações de membranas presas na borda) e, mais

relevantemente para esta tese, na descrição de modos TM em cavidades de micro-ondas planares (“bilhares de micro-ondas”), com dimensões típicas de dezenas de centímetros no plano (xy) e alguns milímetros na espessura d na direção transversal (z) . Os modos são todos bidimensionais para frequências abaixo de $f_c = c/2d$, onde c é a velocidade da luz. Para o valor comercial $d = 6,0$ mm, $f_c = 25$ GHz. Em experimentos com cavidades supercondutoras, o número de modos ressonantes acessíveis é da ordem de 1000. Esse número cai para a metade em cavidades de cobre em temperatura ambiente. Voltaremos a este assunto no Capítulo 4, quando a possibilidade de comparação entre experimentos físicos e numéricos é explorada extensivamente em quatro geometrias diferentes, três poligonais e uma classicamente caótica. Aqui, vale ainda lembrar que

$$k^2 = 2mE/\hbar^2, \quad (3.3)$$

para a partícula no poço infinito 2D e

$$k^2 = (2\pi f/c)^2, \quad (3.4)$$

para o bilhar de micro-onda. Essa diferença é importante, uma vez que devemos fazer comparações entre experimentos físicos, que medem espectros de ressonâncias na frequência f proporcional a k , e a teoria para autovalores de energia, diretamente proporcionais a k^2 . Ou seja, o espectro experimental em cavidades de micro-ondas a ser estudado é de f^2 , não o de f .

3.3.1 Desdobramento espectral e distribuição de espaçamento entre primeiros vizinhos

De modo geral, o problema da quantização de sistemas caóticos é antigo e recebeu ímpeto renovado no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, pegando carona na

então efervescente busca pela universalidade no caos em sistemas dissipativos [45]. Especificamente, as perguntas que são feitas são: Há caos em sistemas quânticos? Se sim, como caracterizá-lo? É possível se estabelecer algo semelhante à hierarquia ergódica em mecânica quântica? Historicamente, o problema foi abordado a partir de propriedades estatísticas dos autovalores de energia. Berry and Tabor [46] provaram em 1977 que para sistemas integráveis a distribuição de espaçamentos ΔE entre primeiros vizinhos era proporcional a $\exp(-\Delta E/\Delta E_0)$, onde ΔE_0 é uma constante. Dois anos mais tarde, McDonald e Kaufmann [47] publicaram resultados numéricos evidenciando diferenças entre as distribuições de espaçamentos para uma partícula em um bilhar com a fronteira de $1/4$ de círculo e outro em $1/4$ de um estádio de Bunimovich. Já existiam ali as evidências para as conjecturas que ficaram conhecidas na comunidade, proporcionadas pelos trabalhos pioneiros de Berry [48] e de Bohigas, Gianonni e Schmit [49]. Antes de explicitar essas conjecturas, descrevemos a seguir um procedimento que deve ser feito em um espectro no sentido de torná-lo universalmente comparável ao de outros sistemas, o chamado “*unfolding*”, aqui traduzido por “desdobramento”. O espectro desdobrado deve oferecer a oportunidade de se estudar propriedades como funções de correlação e estatísticas diversas em pé de igualdade. Uma receita comum é a de que esse novo espectro deve ter o valor médio do espaçamento entre primeiros vizinhos igual a 1. Então, se $P(s)ds$ é a probabilidade de se encontrar dois níveis vizinhos mais próximos separados por uma distância entre s e $s + ds$ no espectro desdobrado, devemos ter

$$\int_0^{\infty} P(s)ds = 1, \quad (3.5)$$

e

$$\int_0^{\infty} sP(s)ds = 1. \quad (3.6)$$

Precisamos, então, de uma transformação $f(E)$ que nos leve do espectro original $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ para o espectro desdobrado $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$. Para isso, considere um intervalo ΔE com centro em E , onde existem ΔN níveis. ΔE deve ser grande o suficiente para que $\Delta N \gg 1$ e pequeno o suficiente para que a densidade $\rho(E) = \Delta N / \Delta E$ seja suave. Para o espaçamento médio no espectro desdobrado, segue que

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{k=1}^{\Delta N-1} s_k}{\Delta N - 1} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) + (\epsilon_3 - \epsilon_2) + \cdots + (\epsilon_{\Delta N} - \epsilon_{\Delta N-1})}{\Delta N - 1} \approx \frac{\epsilon_{\Delta N} - \epsilon_1}{\Delta N} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta N}. \quad (3.7)$$

Ou seja,

$$\frac{\Delta \epsilon}{\Delta N} = \frac{f\left(E + \frac{\Delta E}{2}\right) - f\left(E - \frac{\Delta E}{2}\right)}{\Delta N} = \frac{(df/dE) \Delta E}{\Delta N} \approx 1, \quad (3.8)$$

de onde obtemos

$$f(E) = \int_{-\infty}^E \rho(E') dE' \equiv N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i). \quad (3.9)$$

Aqui, E_i é o i -ésimo autovalor de energia, Θ é a função de Heaviside e $N(E)$ é chamada de *função escada*, por razões aparentes. $N(E)$ fornece o número de autovalores com energias menores do que E . Portanto, é uma função que cresce discretamente, em degraus verticais de altura 1 e largura que é uma variável aleatória. O matemático alemão Hermann Weyl propôs pioneiramente uma fórmula que ajusta a função degrau em termos da área A e do perímetro ℓ de um bilhar quântico. A chamada *fórmula de Weyl* é dada por

$$N_{\text{Weyl}}(E) = \frac{A}{4\pi}k^2 - \frac{\ell}{4\pi}k + \text{cte.} \quad (3.10)$$

Para o regime semiclássico, o termo de área, proporcional ao autovalor de energia, domina. Temos aqui todos os ingredientes para o procedimento padrão do desdobramento de um espectro. O algoritmo a ser seguido para um dado sistema é o seguinte:

1. Obtenha um espectro representativo, através de cálculo ou medição, digamos, de E_{N_0} a E_{N_m} . Note que as ordens N_0 e N_m devem ser previamente calculadas ou estimadas.
2. Plote a função $N(E)$ e faça um ajuste linear da mesma (supondo que o regime semiclássico tenha sido atingido), digamos com a função $N_{\text{fit}}(E)$.
3. Substitua o espectro original $\{E_i\}_{i=N_0}^{N_m}$ pelo desdobrado $\{\epsilon_i\}_{i=N_0}^{N_m} = \{N_{\text{fit}}(E_i)\}_{i=N_0}^{N_m}$.

Considere um espectro não degenerado de um sistema completamente integrável. Neste caso, podemos supor que os autovalores de energia são números aleatórios não correlacionados. Estamos interessados na probabilidade $P(s)ds$ de se encontrar dois níveis separados por uma distância desde s até $s + ds$, ou equivalentemente, de se encontrar um nível dentro da distância ds . Esta probabilidade é proporcional à probabilidade $P_1 = G(s)ds$ de se encontrar *exatamente* um nível no intervalo $[x + s, x + s + ds]$ e à probabilidade P_2 de que não haja nível no intervalo $(x, x + s)$. Esta última é dada por

$$P_2 = 1 - \int_0^s P(s')ds' = \int_s^\infty P(s')ds'. \quad (3.11)$$

Portanto,

$$P(s)ds = P_1 \times \int_s^\infty P(s')ds'. \quad (3.12)$$

Supondo que P_1 está associada a uma distribuição uniforme de números aleatórios em $[0, 1]$, temos que

$$P(s) = \int_s^{\infty} P(s') ds'. \quad (3.13)$$

A solução da equação (3.11), satisfazendo as condições expressas nas equações (3.5) e (3.6) é a distribuição de Poisson

$$P_P(s) = e^{-s}. \quad (3.14)$$

Este resultado está associado à conjectura de Berry e Tabor [46], que pode ser enunciada como: No regime semiclássico, os autovalores de energia se comportam como uma sequência de variáveis aleatórias independentes, desde que no limite clássico a dinâmica seja completamente integrável.

Como mencionado acima, outra conjectura, a de Bohigas, Gianonni e Schmit (BGS) [49] disparou o interesse pela quantização de sistemas classicamente caóticos em meados da década de 80. A teoria de matriz aleatória em que está baseada teve início bem antes com Wigner, Dyson e outros [50]. A ideia central está relacionada a experimentos complexos de espalhamento em física nuclear, cuja teoria envolve o hamiltoniano de um alvo que é desconhecido. Uma abordagem possível para esta dificuldade é truncar o número de elementos da matriz deste hamiltoniano e substituí-los por números aleatórios obedecendo os critérios de algumas das classes de simetria. Hamiltonianos reais podem seguir o ensemble gaussiano ortogonal, ou GOE. Hamiltonianos complexos podem seguir o ensemble unitário (GUE) das matrizes aleatórias. Finalmente, temos o caso específico para sistemas de spins conhecido como ensemble gaussiano simplético (GSE). No que se refere a $P(s)$, a dedução das respectivas

fórmulas está acima dos objetivos desse trabalho e podem ser encontradas em livros especializados [50]. Reproduzimos aqui apenas os resultados para cada ensemble:

$$P_{\text{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{1}{4}\pi s^2} \quad , \quad (3.15)$$

$$P_{\text{GUE}}(s) = \frac{32}{\pi} s^2 e^{-\frac{4}{\pi} s^2} \quad \text{e} \quad (3.16)$$

$$P_{\text{GSE}}(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^3 e^{-\frac{64}{9\pi} s^2} . \quad (3.17)$$

Diferentemente do caso integrável, as equações (3.15)-(3.17) preveem o fenômeno conhecido como *repulsão de níveis*: $P(s \rightarrow 0) = 0$. Em outras palavras, não são esperadas degenerescências em estados altamente excitados de sistemas classicamente caóticos. Essa repulsão é linear no GOE e quadrática no GUE. A figura 3.6 mostra os gráficos das três correlações de curto alcance de interesse nesta tese.

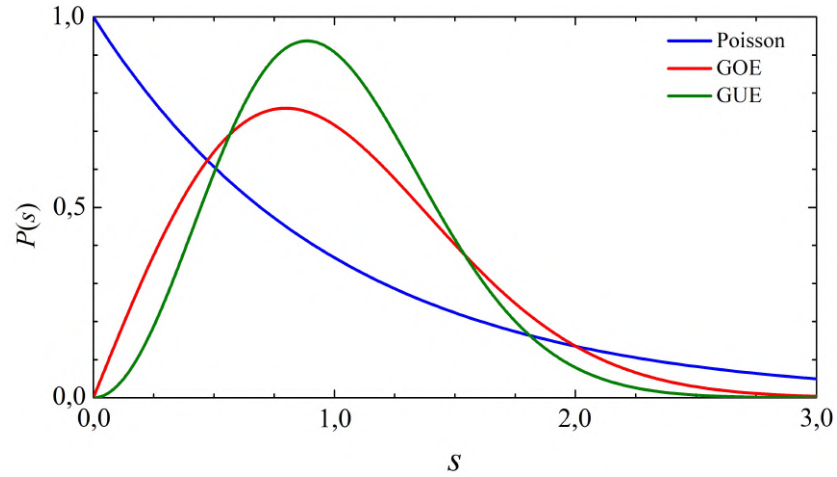


Figura 3.6: Distribuições de espaçamentos entre primeiros vizinhos para autovalores de energia. GUE (curva verde), GOE (curva vermelha) e Poisson (curva azul).

Na prática, histogramas de $P(s)$ em experimentos numéricos ou físicos tendem

a apresentar flutuações que dependem do número de binas escolhido para um dado intervalo da variável aleatória, dificultando a comparação com resultados analíticos. Como alternativa, é comum a investigação da função de espaçamento cumulativa

$$I(s) = \int_0^s P(s') ds', \quad (3.18)$$

que fornece o número de espaçamentos com valores menores do que s . Essa é uma função do tipo escada que pode ser obtida diretamente do espectro desdobrado e não depende de largura de binas. Em particular, para os casos Poisson, GOE e GUE, temos, respectivamente, que

$$I_P(s) = 1 - \exp(-s) \quad , \quad (3.19)$$

$$I_{\text{GOE}}(s) = 1 - \exp(-\pi s^2/4) \quad \text{e} \quad (3.20)$$

$$I_{\text{GUE}}(s) = \text{erf}\left(\frac{2s}{\sqrt{\pi}}\right) - \frac{4}{\pi}s \exp(-4s^2/\pi), \quad (3.21)$$

onde $\text{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt$ é a função erro.

Evidentemente, comportamentos do tipo Poisson, GOE e GUE são casos limites. Para um sistema com espaço de fase misto, cujas frações regulares e irregulares dependem de um parâmetro de controle, podemos pensar em uma transição Poisson-GOE ou Poisson-GUE. Previamente, fórmulas de interpolação foram propostas, com ou sem base física. Para a transição Poisson-GOE, a mais popular é a fórmula puramente matemática de Brody [51] para a distribuição de espaçamentos entre primeiros vizinhos

$$P_\nu(s) = (\nu + 1)a_\nu s^\nu \exp(-a_\nu s^{\nu+1}), \quad (3.22)$$

onde

$$a_\nu = \left[\Gamma\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right) \right]^{\nu+1}, \quad (3.23)$$

e

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-x} dx, \quad (3.24)$$

é a função gama de Euler. O símbolo ν é chamado de parâmetro de Brody, cuja fórmula reproduz a distribuição de Poisson com $\nu = 0$ e a de Wigner para o GOE com $\nu = 1$. Outra crítica que pode ser feita a essa fórmula de interpolação é que a mesma prevê uma transição abrupta entre Poisson e uma repulsão de níveis com s^ν para qualquer valor de ν positivo. Além disso, sua dedução [3] tem uma falha grave, que é a de supor que os níveis são não correlacionados para qualquer valor de ν , o que estritamente só vale para $\nu = 0$. Uma outra distribuição entre os limites Poisson e GOE é a do tipo Berry-Robnik [52], onde são considerados parâmetros de interpolação que podem ser determinados diretamente das propriedades do espaço de fase clássico.

Seguindo os mesmos passos que levam à distribuição de Brody, podemos mostrar que a fórmula

$$P_\eta(s) = a(\eta)^2 (1 + \eta) s^{2\eta} \exp(-a(\eta) s^{\eta+1}), \quad (3.25)$$

onde

$$a(\eta) = \left[\Gamma \left(\frac{1+2\eta}{1+\eta} \right) \right]^{-(1+\eta)}, \quad (3.26)$$

faz a interpolação entre os casos Poisson ($\eta = 0$) e GUE ($\eta = 1$). A equação (3.25) será usada adiante para ajustar distribuições de espaçamentos entre dubletos vizinhos em bilhares com simetria C_3 .

3.3.2 Distribuição de intensidades

Historicamente, propriedades espectrais tem sido mais efetivamente exploradas na busca pelo caos em mecânica quântica do que propriedades das funções de onda. Contudo, alguns resultados para os autovetores são revistos aqui. Ainda em meados da década de 1980, quando métodos numéricos eficientes ainda não estavam difundidos na literatura, Heller [53] mostrou evidências de que algumas autofunções exibiam intensidades $I = |\phi(\vec{r})|^2 / \langle |\phi(\vec{r})|^2 \rangle$ mais pronunciadas na vizinhança de órbitas periódicas clássicas. Esses fenômenos de localização ficaram conhecidos por “cicatrices” nas autofunções. As cicatrizes levaram a um considerável debate, particularmente na comunidade da matemática, notavelmente no que ficou conhecido como “*quantum unique ergodicity*”. Este tema é especializado e está fora do escopo desta tese [54]. Em essência, tais cicatrizes não deveriam ser esperadas em sistemas classicamente caóticos, e o problema não é único se órbitas periódicas clássicas estiverem presentes, como no caso do estádio simétrico. Assim, para evitar problemas com o rigor matemático, frequentemente se toma o cuidado de “dessimetrizar” um bilhar, considerando apenas uma fração do domínio original, como um quadrante, por exemplo, quando características possivelmente caóticas são procuradas. Uma exceção é o assunto discutido neste capítulo, o de bilhares com simetria C_3 , como veremos adiante.

Uma estratégia independente é olhar para a distribuição das intensidades das autofunções correspondentes a modos estendidos ou deslocalizados. Uma conjectura importante é a de que tais modos em geometrias classicamente caóticas tenham intensidades distribuídas de acordo com a fórmula de Porter-Thomas

$$P_{PT}(I) = \sqrt{\frac{1}{2\pi I}} \exp\left(-\frac{I}{2}\right). \quad (3.27)$$

Essa distribuição foi originalmente proposta para ressonâncias observadas em seções de choque em experimentos de física nuclear. A distribuição de Porter-Thomas foi estudada numericamente [55] e em experimentos em cavidades de micro-ondas [56], [57] em geometrias caóticas. Além desses sistemas, modos ressonantes estendidos de placas vibrantes também seguem a distribuição acima [5]. Para casos de geometrias integráveis, a distribuição da intensidade da função de onda não é universal, e acaba sendo truncada para algum valor de I , como por exemplo no retângulo, onde acontece frequentemente em $I = 4$ [56].

3.4 Bilhar C3-elíptico

Como mencionado acima, uma hipótese amplamente aceita é a de que sistemas classicamente caóticos apresentam flutuações espectrais do tipo GOE no seu correspondente quântico quando há invariância de reversão temporal. Baseados nesse pressuposto, Leyvraz, Schmit and Seligman (LSS) [7] previram (e testaram numericamente) que bilhares com apenas a simetria C3 (sem simetria de reflexão) possuem dubletos com correlações de curto alcance do tipo GUE, embora o bilhar seja invariante por reversão temporal. Para isso, LSS consideraram o bilhar esquematizado na figura 3.7, constituído de três segmentos retilíneos de um triângulo equilátero

com cantos arredondados por duas circunferências de raios diferentes. Em particular, LSS mostraram resultados para $R = 2r$ em que há um acordo satisfatório com a fórmula (3.16), para um total de aproximadamente 800 dubletos. Mais tarde, Richter e colaboradores utilizaram bilhares de micro-ondas com a simetria C3 para verificar experimentalmente o resultado previsto por LSS. Em adição, eles mostraram que os singletos seguem o GOE [58].

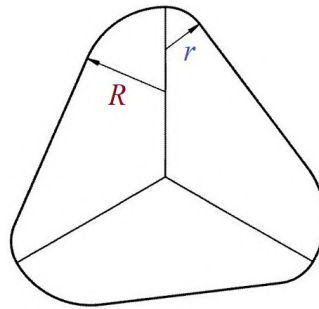


Figura 3.7: Bilhar caótico de simetria C3 composto por segmentos de reta de lados de um triângulo equilátero com cantos encurvados por duas circunferências de raios diferentes ($R = 2r$) [7].

3.4.1 Dinâmica clássica

Motivados pelos resultados de LSS [7] e do grupo de Darmstadt [58], apresentamos aqui estudos numéricos de propriedades clássicas e quânticas em uma família biparamétrica de bilhares com simetria C3. Nossa construção é similar à de LSS, exceto pelos cantos, aqui encurvados por elipses, ao invés de circunferências. A elipse maior (menor) tem semi-eixos A (a) e B (b). Em todos os casos são mantidas as relações $A = 2a$ e $B = 2b$, com a e b no intervalo $(0, \sqrt{3}/6)$. Nesse intervalo, o bilhar de LSS é reproduzido com $a = b = \sqrt{3}/12$. A figura 3.8 mostra um esquema de um bilhar dessimetrizado, restrito a $1/3$ da região C3-simétrica. Os segmentos I e II formam um ângulo de 120 graus, o segmento III é um arco da elipse maior, o segmento IV é

parte de um lado do triângulo equilátero de base e e o segmento V é um arco da elipse menor. O painel da direita mostra o contorno resultante.

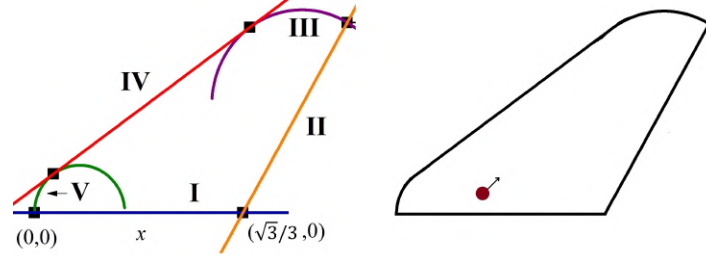


Figura 3.8: Esquerda: Procedimento de construção de $1/3$ bilhar C3 elíptico, onde os parâmetros de forma são dados pelos valores dos semi-eixos da menor elipse. Direita: bilhar resultante.

Para análise da dinâmica clássica, adotamos um procedimento padrão de se considerar colisões sucessivas em uma seção de Poincaré [44]. No caso, selecionamos o segmento I (horizontal) na figura 3.8. Assim o espaço de fase fica restrito ao plano $p_x \times x$, com os valores visitados da componente horizontal do momento linear e da posição da partícula em colisões sucessivas com o setor I no tempo discreto t . Para uma órbita típica, como a massa da partícula e o módulo de sua velocidade tem valores unitários, $p_x = mv \cos \theta \in (-1, 1)$. Por outro lado, com as definições geométricas da figura 3.8, $x \in (0, \sqrt{3}/3) = (0, 0,577\dots)$. Os painéis superiores da figura 3.9 mostram contornos para quatro valores distintos do par de parâmetros (a, b) e os painéis inferiores os respectivos planos de fase, calculados para séries temporais com 2×10^7 pontos. Para $a = b = 0,025$, o sistema exibe um aspecto completamente ergódico, enquanto os outros três pares produzem cavidades com espaços de fase mistos.

A característica quantitativa da dinâmica utilizada aqui é a chamada *medida relativa* (MR), $r(t)$, assim definida: Dividimos o plano de fase $p_x \times x$ em N_c células. Para cada órbita a partir de um conjunto de condições iniciais, definimos $n(t)$ como

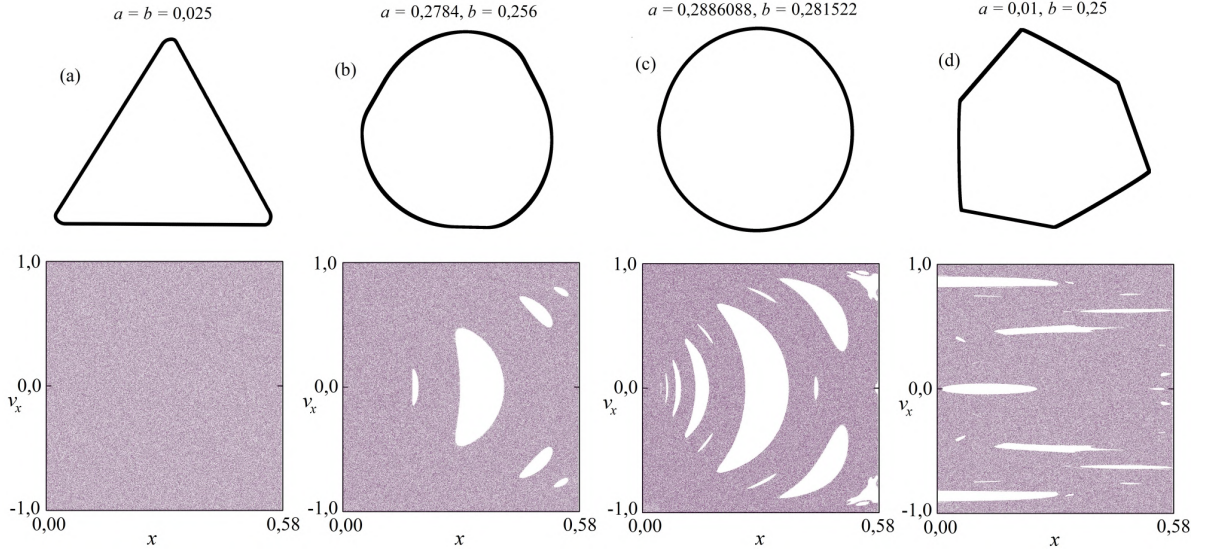


Figura 3.9: Painéis superiores: contornos de bilhares C3 simétricos para os valores de a e b dados na figura. Painéis inferiores: correspondentes planos de fase. Apenas o bilhar em (a) é completamente ergódico.

o número de células diferentes visitadas após t colisões. A MR é definida como a razão $r(t) = \langle n(t) \rangle / N_c$. Quando o sistema é ergódico, $r(t \rightarrow \infty) = 1$. Em particular, quando o sistema é fortemente misturador, este limite assintótico é atingido mais rapidamente. Essa rápida convergência de sistemas fortemente misturadores tem sido descrita pelo *modelo aleatório* [59], o qual prevê para a MR o valor

$$r_c(t) = 1 - \exp(-t/N_c). \quad (3.28)$$

Na figura 3.10 mostramos um diagrama numérico do valor assintótico $r(t = 2 \times 10^7)$, sendo a média realizada em 20 condições iniciais aleatoriamente escolhidas. Na região de cor preta, a propriedade ergódica é numericamente garantida em todo o plano de fase, para este tamanho das séries temporais. Este mapa nos serviu de guia para a exploração das propriedades quânticas descritas a seguir.

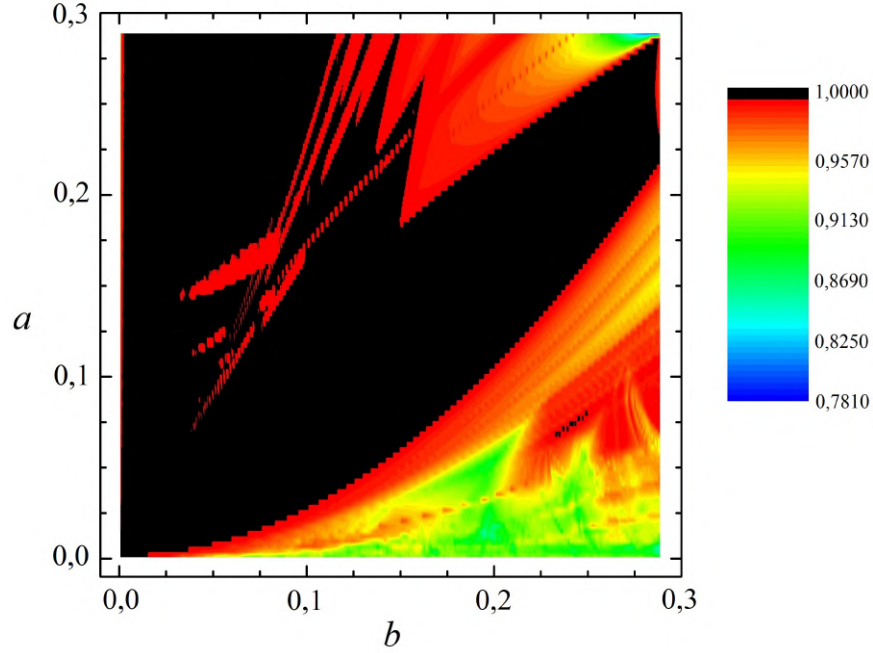


Figura 3.10: Projeção no plano de parâmetros da medida relativa para o bilhar C3-elíptico. Em preto ($r(t = 2 \times 10^7) = 1$), os valores de a e b produzem um bilhar completamente ergódico. A dinâmica tem espaço de fase misto para as outras cores ($r(t = 2 \times 10^7) < 1$).

3.4.2 Quantização

A investigação das propriedades quânticas em nossos bilhares C3-simétricos está em andamento. Nesta seção apresentamos alguns resultados já obtidos. A figura 3.11 exhibe resultados de MEF para o quadrado das autofunções de estados singletos nos bilhares mostrados nas figuras 3.9(c) e 3.9(d). Claramente, os singletos exibem a simetria C3. Em contraste, mostramos na figura 3.12 resultados para $|\phi|^2$ em dubletos nos mesmos bilhares, os quais só exibem a simetria C3 quando superpostos.

Ainda em um estágio inicial, estamos realizando a quantização dos bilhares de simetria C3, em busca de caracterizar flutuações no espectro de energia através das distribuições dos vizinhos mais próximos, $P(s)$. Mais especificamente, estamos inves-

tigando seperadamente singletos e dubletos, a fim de procurar desvios da conjectura de [7], onde o $P(s)$ para singletos é do tipo GOE e para dubletos é do tipo GUE, se o sistema é classicamente caótico.

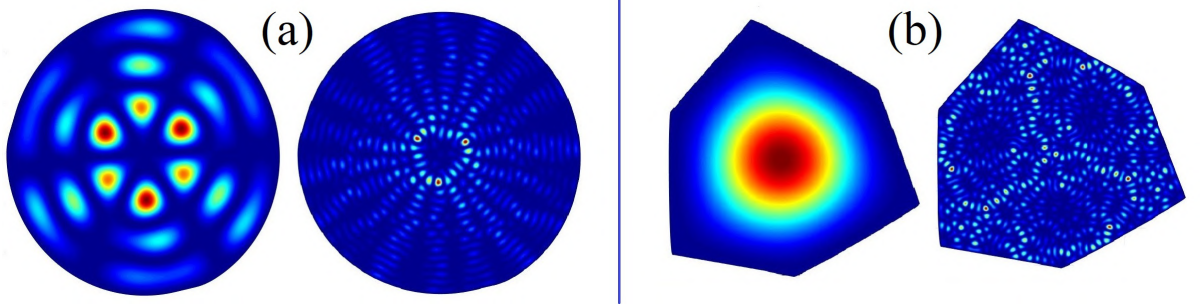


Figura 3.11: Resultados de MEF para $|\phi|^2$ em singletos, os quais exibem a simetria C3. (a) $(a, b) = (0, 2886088; 0, 281522)$ e (b) $(a, b) = (0, 01; 0, 25)$.

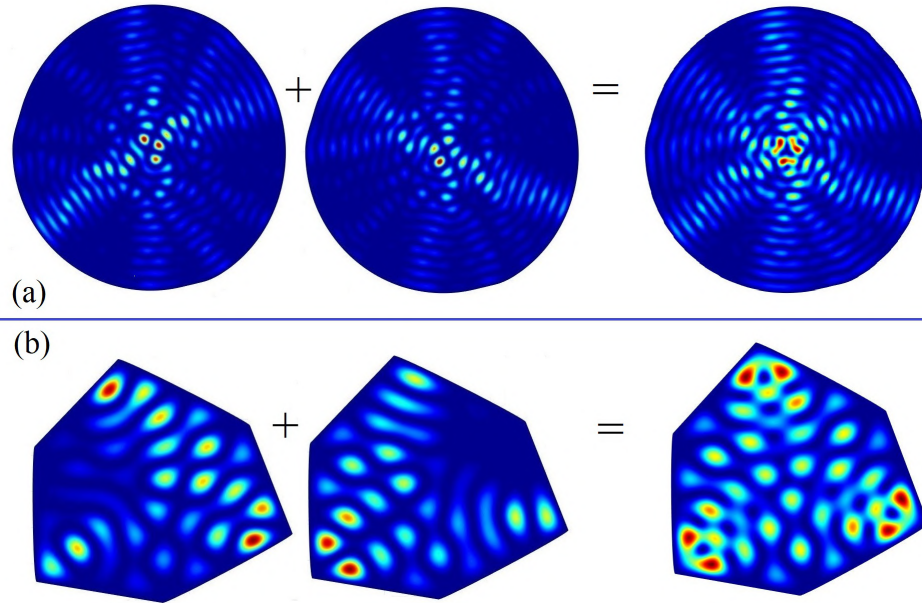


Figura 3.12: Resultados de MEF para $|\phi|^2$ em dubletos, que só exibem a simetria C3 quando superpostos. (a) $(a, b) = (0, 2886088; 0, 281522)$ e (b) $(a, b) = (0, 01; 0, 25)$.

Experimentos numéricos estão sendo realizados no sentido de se obter quantidades significativas de autovalores nas várias geometrias. Para isso, estamos usando o MF

de Vergini e Saraceno [43], previamente implementado em nosso grupo [44]. Minha contribuição, especificamente, tem sido a de encontrar funções base adequadas para o cálculo independente de singletos e dubletos em cada bilhar. Temos tido sucesso nessa busca e alguns resultados são apresentados a seguir. Detalhes da técnica numérica serão publicados oportunamente.

Inicialmente, tentamos reproduzir os resultados de LSS, com $a = b = \sqrt{3}/12$. O histograma do painel superior na figura 3.13 mostra resultado numérico para $P(s)$ de singletos, obtidos com 14 mil autovalores desse bilhar, acima dos primeiros mil. A linha sólida é a curva do GOE (equação (3.15)), mostrando um bom acordo. No painel inferior da mesma figura, os símbolos são os correspondentes valores calculados para a função de espaçamento cumulativa, também mostrando um excelente acordo a curva do GOE (equação (3.20)). Confirmando os resultados de LSS, mostramos na figura 3.14 nossos resultados para $P(s)$ e $I(s)$ dos dubletos, exibindo um bom acordo com as curvas do GUE (equações (3.16) e (3.21), respectivamente).

O passo seguinte foi testar os possíveis desvios da previsão de LSS quando um bilhar C3-simétrico possui espaço de fase misto. Na figura 3.15 mostramos o histograma calculado para $P(s)$ de singletos no bilhar da figura 3.9(c), para 25 mil autovalores acima dos primeiros mil. A curva sólida em azul é um ajuste com a distribuição de Brody (equação (3.22)), com parâmetro $\nu = 0,02$. O histograma da figura 3.16 foi obtido a partir de um espectro com o primeiro dos dois autovalores em cada dubleto, em um total de 24 mil pares acima dos mil primeiros. Observe que a maior diferença entre as energias calculadas em um dubleto ocorre tipicamente no quinto dígito. A linha sólida em azul é um ajuste com a equação (3.25), com parâmetro $\eta = 0,29$. Claramente, nem os singletos seguem o GOE nem os dubletos seguem o GUE, quando

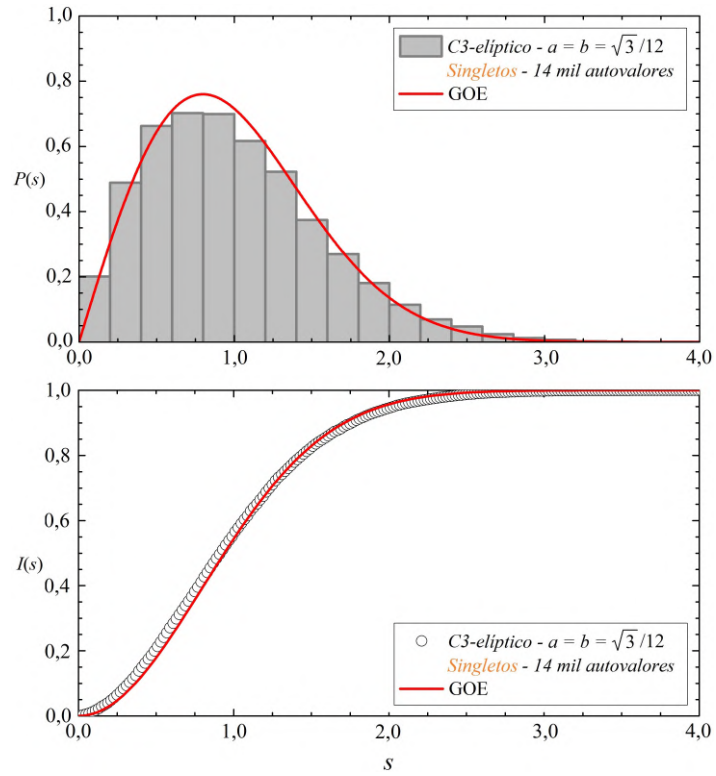


Figura 3.13: Painel superior: Distribuição de espaçamento no bilhar de LSS calculada a partir de 14 mil singletos acima dos primeiros mil (histograma). A curva sólida em vermelho é a distribuição do GOE. Painel inferior: Correspondente distribuição cumulativa calculada (símbolos). A curva sólida é a $I_{\text{GOE}}(s)$ (equação (3.20)) em bom acordo com o resultado numérico.

o espaço de fase dos bilhares com simetria C3 são mistos. Em um futuro próximo, testaremos novas fórmulas de interpolação que levam em conta os valores da medida relativa do espaço de fase clássico.

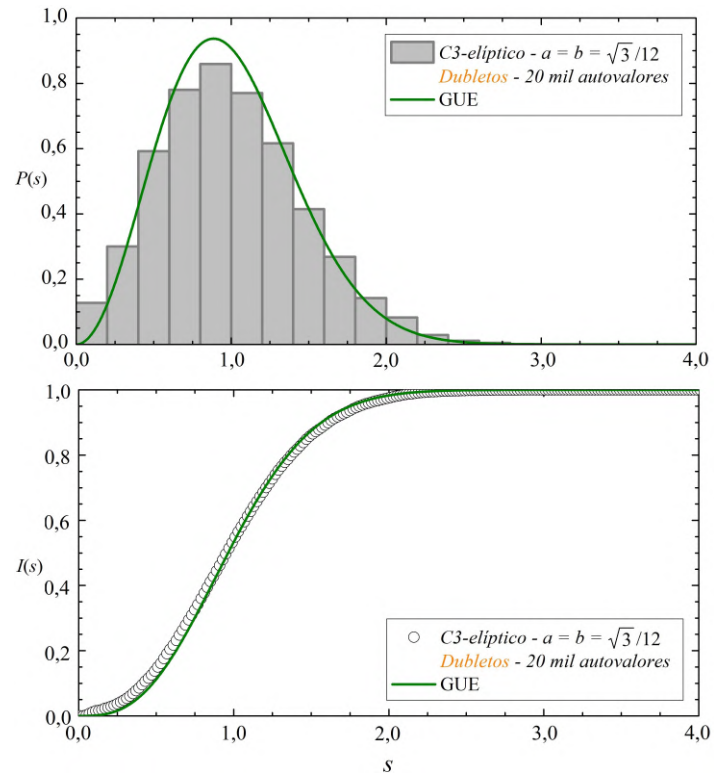


Figura 3.14: Paineil superior: Distribuição de espaçamento no bilhar de LSS calculada a partir de 20 mil dubletos acima dos primeiros mil (histograma). A curva sólida em verde é a distribuição do GUE. Paineil inferior: Correspondente distribuição cumulativa calculada (símbolos). A curva sólida é a $I_{\text{GUE}}(s)$ (equação (3.21)) em bom acordo com o resultado numérico.

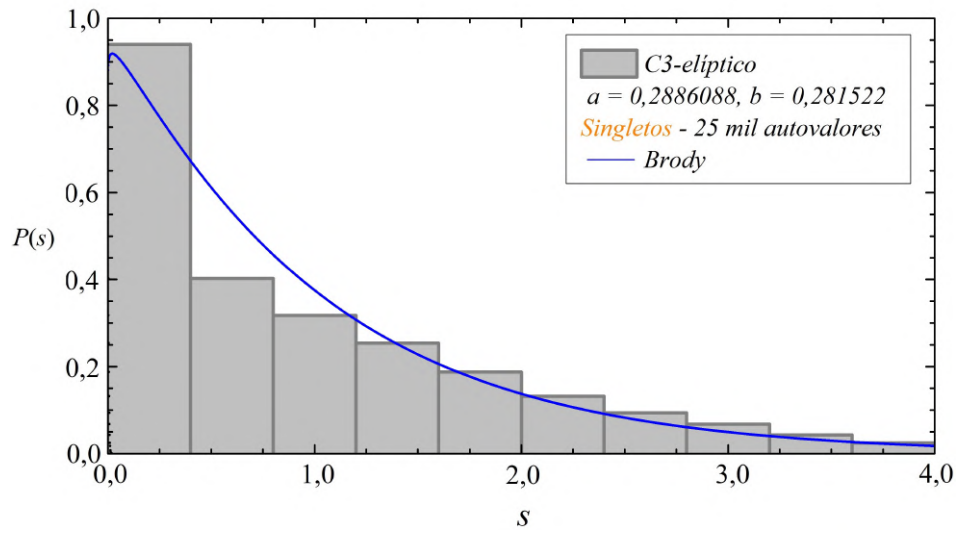


Figura 3.15: Histograma: distribuição de singletos para bilhar com espaço de fase clássico misto. A curva em azul é a distribuição de Brody (equação (3.22)) com parâmetro $\nu = 0,02$.

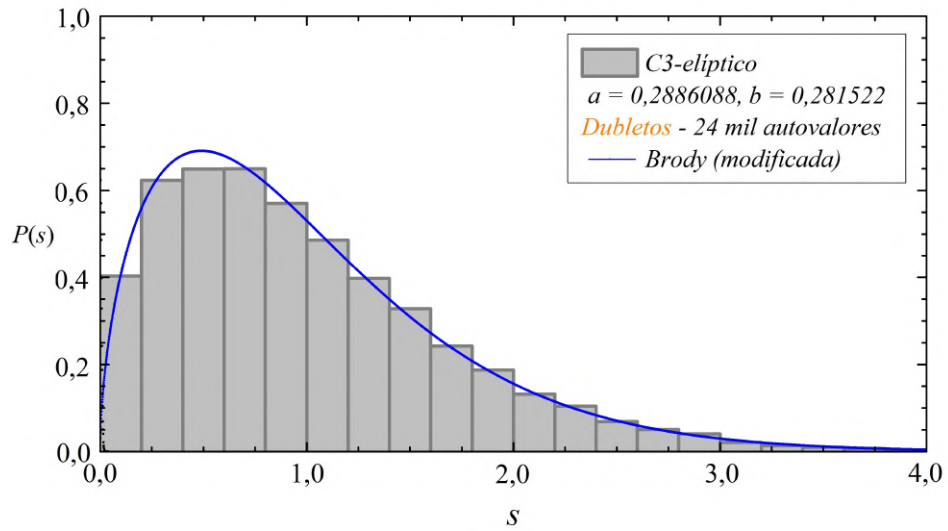


Figura 3.16: Histograma: distribuição de dubletos para bilhar com espaço de fase clássico misto. A curva em azul é a distribuição de Brody modificada (equação (3.25)) com parâmetro $\eta = 0,29$.

4 Espalhamento em bilhares de micro-ondas

O tema “*caos quântico*” teve uma infância traumática, dada a ausência de quantificadores inequívocos para o caos em mecânica quântica. A partir de 1990, os bilhares de micro-ondas foram introduzidos e se tornaram protagonistas de destaque na “*confirmação*” de previsões e conjecturas, a maior parte delas baseada na teoria de matrizes aleatórias [50]. Contudo, poucos grupos experimentais trabalharam nesse tema desde então, com inúmeras publicações em importantes periódicos científicos. A sensibilidade que caracterizou a comunidade do caos quântico nas décadas de 1980 e 90 pode ser percebida nos artigos de Gutzwiller [60], importante teórico da quantização de sistemas classicamente caóticos, e de Stöckmann [61], ex-físico nuclear, pioneiro nos estudos de bilhares de micro-ondas e um de seus principais defensores. Esses artigos apareceram nos anais de uma primeira conferência internacional reconhecida por órgãos de fomento sobre o tema, no ano de 2000. Historicamente, os experimentos com cavidades de micro-ondas podem ser divididos em duas etapas. A primeira, mais efervescente na década de 1990, procurava confirmar resultados teóricos para sistemas *fechados*, como os discutidos no Capítulo 3 dessa tese,

por exemplo. Mais recentemente, ganhou ímpeto teoria e experimento em sistemas abertos. Em outras palavras, o interesse tornou-se mais intenso em experimentos de espalhamento, parcialmente motivado também pelas semelhanças com sistemas como transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos [62] e propriedades estatísticas de núcleos complexos [63]. Estariam as questões fundamentais (“Existe caos em sistemas quânticos?”, etc.) respondidas satisfatoriamente? Neste capítulo, como contribuição principal da tese, abordamos o problema do espalhamento de uma porta em experimentos físicos em cavidades poligonais e caóticas, em vários níveis de absorção e acoplamento. Previamente, o assunto fora abordado por outros grupos apenas em geometrias classicamente caóticas. Para nossa surpresa, nossos numerosos resultados experimentais para flutuações na matriz de espalhamento e na impedância normalizada não mostraram qualquer assinatura de uma dada geometria, estando todos os resultados em acordo com previsões teóricas baseadas em matrizes aleatórias. Esta *universalidade* foi prevista para cavidades sem perda, um resultado notável pouco celebrado, em nossa opinião.

Iniciamos nossa discussão com uma revisão mais detalhada das cavidades planares experimentais. Em seguida dirigimos a atenção para os experimentos físicos e ajustes com resultados teóricos retirados da literatura onde possível.

4.1 Bilhares de micro-ondas

Bilhares de micro-ondas foram introduzidos em 1990 [6], com o objetivo de se estudar experimentalmente a conjectura de BGS [49]. Durante a década de 1990, a vasta maioria dos experimentos serviu como testes de previsões de propriedades estatísticas de autovalores e autovetores do sistema fechado [3], o qual descrevemos

a seguir. A figura 4.1 mostra o esquema de um bilhar com geometria arbitrária no plano xy e comprimento (espessura) d na direção z .

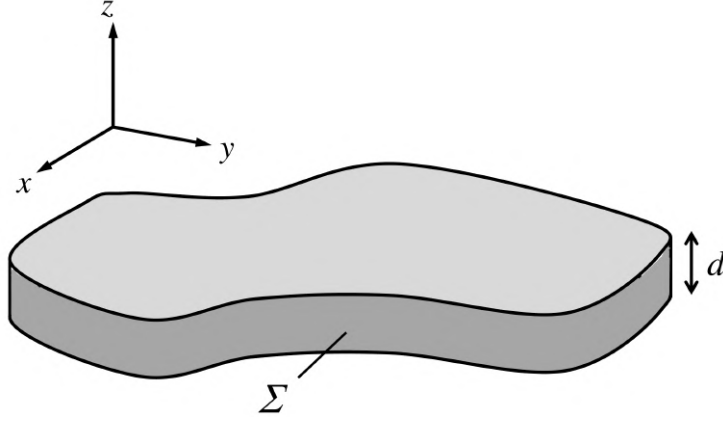


Figura 4.1: Esquema de um bilhar com geometria arbitrária no plano xy , espessura d e parede longitudinal Σ .

Para o interior de uma cavidade tridimensional com paredes condutoras perfeitas, o campo eletromagnético obedece à equação de onda

$$(\nabla^2 + k^2)\{\vec{E}, \vec{B}\} = 0, \quad (4.1)$$

onde a componente tangencial de $\vec{E}$ e a componente normal de $\vec{B}$ devem ser nulas nas superfícies internas da cavidade. Se a cavidade for uniforme na direção z e tem um formato arbitrário na seção transversal, o campo elétrico pode ser expresso como

$$\vec{E}(\vec{\rho}, z) = \vec{E}(\vec{\rho}) \exp(ik_z z), \quad (4.2)$$

com uma expressão idêntica para $\vec{B}$. Aqui, $\vec{\rho}$ é o vetor posição no plano xy . Substituindo esta solução na equação de onda, com oscilações no tempo na frequência ω , segue que

$$[\nabla_t^2 + (k^2 - k_z^2)]\vec{E} = 0, \quad (4.3)$$

onde $\nabla_t^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$ e $k = \omega/c$, com equação idêntica para $\vec{B}$. É possível mostrar que podemos escrever as componentes transversais dos campos em função das componentes longitudinais. Em particular, para o campo elétrico, temos que

$$\vec{E}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left[\nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + ik\hat{z} \times \nabla_t B_z \right]. \quad (4.4)$$

Os modos ressonantes de interesse aqui são *transversais magnéticos* (TM), definidos pela condição $B_z = 0$. Escrevendo $E_z(\vec{\rho}, z) = E_z(\vec{\rho}) [A_1 \cos(k_z z) + A_2 \sin(k_z z)]$, segue da equação (4.4) que

$$\vec{E}_t(\vec{\rho}, z) \propto \vec{E}_t(\vec{\rho}) [-k_z A_1 \sin(k_z z) + k_z A_2 \cos(k_z z)]. \quad (4.5)$$

Como a componente transversal do campo elétrico deve ser nula na parede da cavidade em $z = 0$, temos que $A_2 = 0$. Aplicando a mesma condição de contorno na parede em $z = d$, segue que $k_z = n\pi/d$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Assim, temos de (4.3) que

$$\{\nabla_t^2 + [k^2 - (n\pi/d)^2]\} E_z = 0. \quad (4.6)$$

Vamos considerar ainda um subconjunto das soluções TM constituído pelos modos para os quais não há variação com a direção z . Para esses modos ficamos, portanto, com

$$(\nabla_t^2 + k^2) E_z(\vec{\rho}) = 0. \quad (4.7)$$

Essa equação define o isomorfismo entre autofunções $\phi(\vec{\rho})$ e o espectro de autovalores de energia de uma partícula em um poço infinito 2D (equação (3.2)) e a componente

E_z e os quadrados das correspondentes autofrequências de modos TM *bidimensionais* em bilhares de micro-ondas. Em experimentos físicos, essa bidimensionalidade é garantida para todas as ressonâncias com frequências menores do que $f_c = c/(2d)$. Para o valor comercial $d = 0,6$ mm usado em nossos experimentos, $f_c = 25$ GHz. Note ainda que, na aproximação de paredes com condutividade perfeitamente condutoras, E_z de modos bidimensionais satisfaz as condições de contorno de Dirichlet na parede longitudinal Σ , como indicada na figura 4.1. Por completeza, vale notar que $E_t = 0$ em todos os pontos no interior da cavidade para esses modos TM 2D. Por outro lado, o campo de indução magnética circula no plano xy , de acordo com $\vec{B} \propto \hat{z} \times \nabla_t E_z(\vec{\rho})$.

Para acoplar esses modos com a radiação proveniente de uma fonte através de um cabo coaxial, é conveniente utilizar uma antena de monopolo, constituída de um prolongamento do condutor central do cabo coaxial até uma altura h no interior da cavidade. Claramente, essa antena acopla com o campo elétrico dos modos TM 2D. A figura 4.2 mostra uma das antenas utilizadas em nossos experimentos, onde um pequeno pedaço de fio foi soldado no condutor central de um conector parafusado em uma das paredes planas da cavidade paralelas no plano xy , totalizando $h \sim 4,1$ mm.

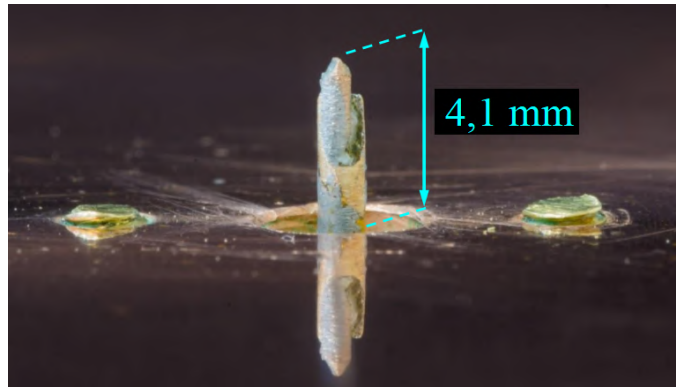


Figura 4.2: Macrofotografia da antena de monopolo de altura 4,1 mm.

É importante notar que a presença da antena perturba o sistema, deslocando as frequências de ressonâncias previstas para a cavidade vazia. Esse deslocamento foi previsto por Slater e colaboradores nos anos 1950 [64]. Para a antena de monopolo, o deslocamento em frequência das ondas estacionárias ressonantes é aproximadamente proporcional ao quadrado do campo elétrico na posição da antena. Evidentemente o acoplamento é nulo quando a antena está em um ponto sobre uma linha nodal para um dado modo. Isto significa que este modo não será detectado no experimento, exigindo do experimentador que médias sejam realizadas em um número razoável (tipicamente de algumas dezenas) de diferentes posições da antena no plano xy . Voltaremos a esse assunto nas seções seguintes. Por outro lado, em experimentos típicos em cavidades de cobre em temperatura ambiente oferecem uma condutividade finita ao experimentador, resultando em um alargamento nas ressonâncias observadas. Se essa largura exceder o espaçamento entre ressonâncias vizinhas, temos outra razão para não observar alguns modos nos experimentos físicos. Portanto, tanto o *acoplamento* quanto a *absorção* são parâmetros relevantes na interpretação de dados experimentais. Fatores de qualidade típicos da ordem de 10^3 podem ser obtidos em temperatura ambiente. Apenas um grupo de pesquisa na Alemanha (Achim Richter, Universidade de Darmstad) tem realizado experimentos em bilhares de micro-ondas operando em regime supercondutor em temperaturas criogênicas. Nesse caso, o fator de qualidade das ressonâncias pode exceder 10^7 e antenas com alturas $h \sim 0,5$ mm podem ser usadas, minimizando os deslocamentos em frequência. Quando a inevitável introdução da antena no interior da cavidade não puder ser significativamente reduzida, o sistema torna-se efetivamente aberto e as estatísticas de espalhamento ganham importância na interpretação dos experimentos físicos.

4.2 Estatísticas de espalhamento

De modo geral, em experimentos de espalhamento não é uma tarefa simples separar as propriedades do alvo daquelas dos projéteis, principalmente quando pouco se sabe sobre o primeiro. Uma possível solução para esse problema está na abordagem via matriz de espalhamento ou matriz- S , que tem origem na física nuclear estatística. O problema básico é o de um alvo descrito por um hamiltoniano não perturbado H conectado aos *projéteis* por N_C *canais* ou *portas*, como conhecidos em técnicas de micro-ondas. Cada porta transporta dois tipos de projétil, um incidente, que no n -ésimo canal se aproxima do alvo com amplitude a_n , e outro espalhado, que se afasta do alvo com amplitude b_n . A figura 4.3 esquematiza o problema para $N_C = 2$ canais. Por definição, a matriz- S associa a amplitude espalhada b_n com as amplitudes

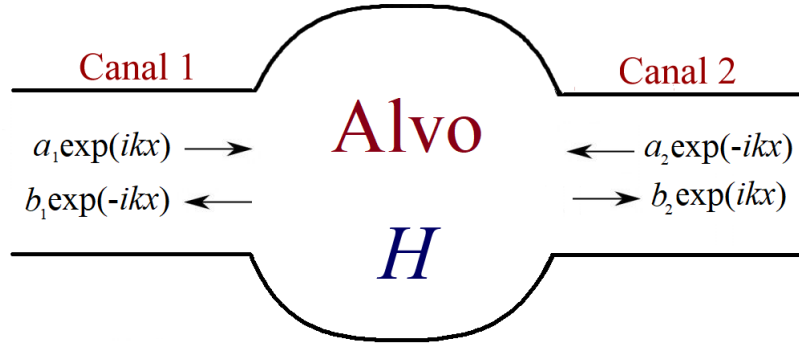


Figura 4.3: Ilustração do processo de espalhamento por dois canais.

incidentes a_m ($m = 1, 2, \dots, N_C$) via

$$b_n = \sum_{m=1}^{N_C} S_{nm} a_m. \quad (4.8)$$

Décadas atrás, ainda no contexto da física nuclear, Weidenmüller e colaboradores [63] e [65] desenvolveram uma teoria na qual a matriz- S é esquematizada como

$$S = 1 - W^\dagger \frac{1}{E - H + iWW^\dagger} W, \quad (4.9)$$

onde o dígito 1 deve ser entendido como a matriz identidade $N_C \times N_C$, E representa a energia incidente e W é a matriz cujos elementos acoplam o alvo com os canais. Qualquer manipulação desta equação requer que o número de autovalores de H seja truncado em um valor finito N_E . Assim, a matriz de acoplamento W é $N_E \times N_C$. Em casos complexos de interesse, uma barreira ao problema colocado por essa matriz- S é o total desconhecimento do conjunto de autovalores E . Valores obtidos em experimentos numéricos são úteis em simulações, mas ainda assim algum modelo precisa ser proposto para os elementos de W que, em geral, também são desconhecidos. É aqui que entram os ensembles da teoria de matrizes aleatórias [50], que por razões técnicas supõe que os elementos de matriz são distribuídos *gaussianamente*, com os vínculos associados aos conjuntos GOE, GUE e GSE, por exemplo, mencionados aqui no Capítulo 3. Trocar os elementos de matriz de H por números aleatórios não resolve o problema da descrição física do alvo, mas permite uma abordagem estatística e a identificação de propriedades de flutuações que são universais a sistemas classicamente caóticos diversos. Vimos algumas dessas estatísticas para sistemas *fechados* ($P(s)$ e $P(I)$) anteriormente no Capítulo 3. Aqui, encontraremos outras estatísticas associadas a propriedades de sistemas *abertos*, ou estatísticas de espalhamento. Em particular, estaremos focalizados no problema do espalhamento por uma única porta, o que reduz o problema consideravelmente, mas que ainda assim não é, em geral, de fácil acesso.

Em problemas de espalhamento de uma porta, a matriz S é um escalar que pode ser parametrizada como

$$S = \sqrt{R} \exp(i\theta), \quad (4.10)$$

onde R é o coeficiente de reflexão e θ é a fase. Esses dois parâmetros dependem do espectro de autovalores de energia, da absorção, e do acoplamento entre canais e alvo. Tanto R quanto θ são acessíveis em experimentos físicos em bilhares de micro-ondas através de um equipamento conhecido por analisador de rede vetorial (VNA), dentro de uma larga faixa de frequência estabelecida pelo fabricante. No nosso caso, utilizamos um modelo da Anritsu, gentilmente cedido pelo Prof. Antonio Azevedo, do DF-UFPE. O acoplamento pode ser variado através de diferentes antenas e o nível de absorção pode ser definido pela própria faixa de frequência e por absorvedores que podem ser adicionados na cavidade. Esse controle dos vários parâmetros é que tornou os experimentos de micro-ondas ideais para testes de previsões de estatísticas baseadas em teoria de matrizes aleatórias. Aqui, portanto, nos interessam as previsões para as distribuições $P(R)$ e $P(\theta)$ nos vários níveis de absorção e acoplamento. Experimentos físicos com medições em bilhares de micro-ondas foram publicados pioneiramente em [66], [9], [10].

Em uma mesma rodada de medição, um equipamento como um VNA permite também a medida das partes real (resistência Z_R) e imaginária (reatância Z_I) da impedância Z do sistema. Modelos para a matriz Z de cavidades caóticas baseados em teoria de matrizes aleatórias [67], assim como experimentos físicos em cavidades com essa geometria [11], também tem sido publicados na literatura. Na realidade, a impedância considerada é a chamada impedância normalizada $z = z_R + iz_I$. As impedâncias Z e z estão relacionadas via

$$z = \frac{Z - i\text{Im}Z_r}{\text{Re}Z_r}, \quad (4.11)$$

onde Z_r é a “impedância de radiação”, definida como a impedância de uma cavidade com a mesma espessura do bilhar, mas com as paredes laterais levadas para uma distância infinitamente grande em relação ao canal acoplado à cavidade. Neste caso, não há reflexão, o que pode ser obtido experimentalmente revestindo as paredes laterais do bilhar com um absorvedor de micro-ondas de largo espectro. No nosso caso, usamos um absorvedor comercial (ECCOSORB), gentilmente cedido pelo grupo do Prof. Steven Anlage, da Universidade de Maryland (EUA). A vantagem de se estudar as distribuições $P(z_R)$ e $P(z_I)$, em relação a $P(R)$ e $P(\theta)$, reside no fato de que a impedância normalizada não depende do acoplamento, apenas da absorção. Abaixo, resumimos os principais resultados existentes na literatura no que se refere às distribuições $P(R)$, $P(\theta)$, $P(z_R)$ e $P(z_I)$. Em seguida, apresentamos os resultados de nossos próprios experimentos de uma porta, em uma faixa de 2 a 18 GHz.

4.3 Flutuações da matriz S

No que se refere a flutuações da matriz- S , nosso procedimento experimental seguiu os trabalhos descritos em [9], [10], onde o primeiro trata da distribuição dos coeficientes de reflexão $P(R)$, enquanto o segundo analisa as distribuições da fase, $P(\theta)$. Os trabalhos citados são realizações de um mesmo grupo de pesquisadores, e seus resultados são complementares, ou seja, em [10] a análise para a fase foi feita na mesma cavidade e nos mesmos intervalos de frequência estudados em [9].

As distribuições $P(R)$ e $P(\theta)$ para cavidades caóticas foram descritas em [10] e revistas em [68], por um modelo no qual a distribuição conjunta é dada por

$$P(R, \theta; \gamma, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - \langle S \rangle^2}{|1 - S \langle S \rangle|^2} \right) P(R, \theta; \gamma, 1), \quad (4.12)$$

onde $t = 1 - \langle S \rangle^2$ é o parâmetro de acoplamento e γ o de absorção. A integração de $P(R, \theta; \gamma, t)$ ao longo de θ resulta no $P(R)$, e similarmente, a integração ao longo de R produz $P(\theta)$. A distribuição no caso de acoplamento perfeito $P(R, \theta; \gamma, 1)$ é conhecida para os casos $\gamma \ll 1$ e $\gamma \gg 1$ [10]. Para um valor intermediário de γ , uma fórmula de interpolação deve ser usada. Para o caso do GOE, os autores em [10] usaram a fórmula

$$P(R, \theta; \gamma, t = 1) = C_1 \frac{\exp[-\alpha/(1 - R_0(R, \theta))]}{[1 - R_0(R, \theta)]^{5/2}} [A\alpha^{-1/2} + B(1 - R_0(R, \theta))^{1/2}], \quad (4.13)$$

onde

$$\alpha = \gamma/2, \quad A = \alpha(e^\alpha - 1), \quad B = 1 + \alpha - e^\alpha, \quad C_1 = \frac{1}{A\Gamma(3/2, \alpha)/\alpha^2 + Be^{-\alpha}/\alpha},$$

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_\alpha^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad R_0 = |S_0|^2, \quad S_0 = \frac{S - \langle S \rangle}{1 - \langle S \rangle S} \quad \text{e} \quad \langle S \rangle = \sqrt{1 - t}.$$

A análise de dados experimentais com as fórmulas (4.12) e (4.13) requer uma razoável quantidade de espectros, correspondendo a diferentes posições da antena como discutido. Em cada bilhar foi demarcada uma região com posições não equivalentes. Essas regiões estão demarcadas pelas grades na figura 4.4, onde os números se referem aos comprimentos dos lados em cm. Detalhes sobre como a posição da antena é varrida estão no Apêndice E. O intervalo de 2 a 18 GHz foi coberto com oito varreduras de 2 GHz digitalizadas com 1600 pontos cada, de forma que dois pontos vizinhos em cada espectro estão separados por 1,25 MHz. Observamos que esses polígonos possuem propriedades estatísticas distintas no regime semiclássico: o retângulo é Poisson

[69], o triângulo irracional (com as dimensões indicadas) é GOE [40] e o equilátero, extremamente degenerado, tem uma estatística que depende fortemente da faixa de energia [39].

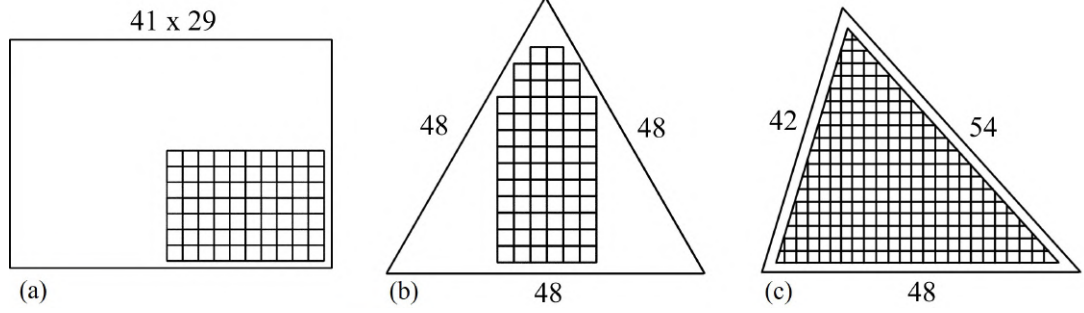


Figura 4.4: Geometrias de três bilhares usados nos experimentos. Números são dimensões em cm. As áreas marcadas indicam regiões varridas pela posição da antena para realizar médias. (a) Retângulo (Poisson), (b) triângulo equilátero (altamente degenerado) e (c) triângulo irracional (GOE).

A escolha das faixas de frequência para realização das distribuições de R e θ seguem o procedimento adotado em [9], onde a partir dos gráficos de $R(f)$ de uma posição da antena, realiza-se uma média em um pequeno intervalo de frequência, com o resultado centrado neste mesmo intervalo. Por exemplo, uma média dos valores de $R(f)$ entre 2,0 e 2,5 GHz, terá abcissa em 2,25 GHz. Este procedimento é executado em todo intervalo dentre 2 a 18 GHz para cada posição da grade, quando novamente uma média é realizada, agora no número de antenas, definindo assim o valor médio $\langle R \rangle$. A partir da curva de $\langle R \rangle \times f$, observamos onde $\langle R \rangle$ é aproximadamente constante. Ficam assim definidas as faixas de frequência para a análise estatística. As distribuições $P(R)$ e $P(\theta)$ de cada geometria serão detalhadas nas próximas seções, nos vários regimes de acoplamento e absorção.

4.3.1 Absorção forte

Para realizações de medições com alta absorção, colamos pequenos pedaços de uma espuma de poliuretano embebida com absorvedores de micro-ondas (ECCOSORB LS-26 / SS-3 (0,8-18 GHz)). A figura 4.5 mostra dois espectros de uma mesma posição da antena para a cavidade retangular com e sem absorvedores, onde fica claro o desaparecimento das ressonâncias e a queda drástica no valor de R . A queda no coeficiente de reflexão torna-se mais acentuada em frequências mais altas e este fato é evidenciado na figura 4.6, a qual exibe as curvas $\langle R \rangle \times f$ para o retângulo vazio e com absorvedores. Para o regime de absorção forte, a previsão da teoria de matrizes aleatórias é exato [70]:

$$P(R) = \langle R \rangle^{-1} e^{-R/\langle R \rangle} \quad (4.14)$$

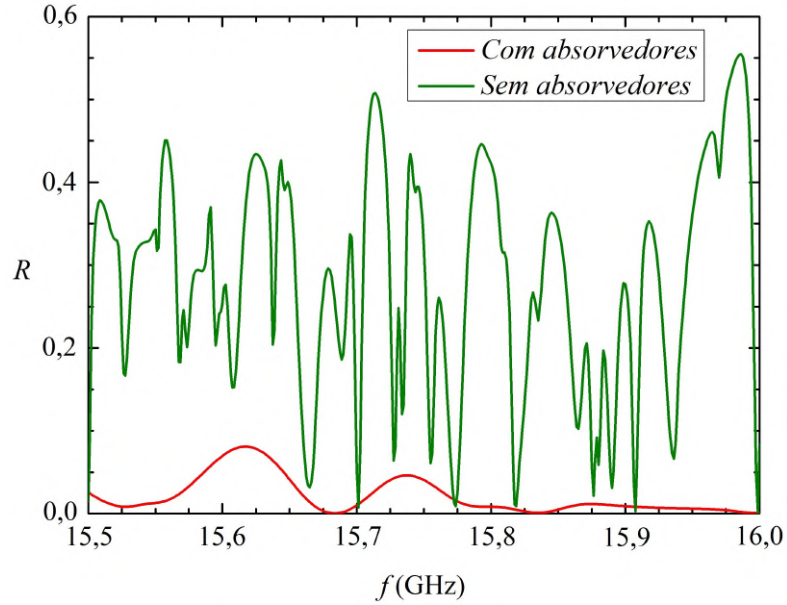


Figura 4.5: Espectros do coeficiente de reflexão para o retângulo em uma mesma posição da antena. (Linha verde) paredes sem absorvedores. (Linha vermelha) paredes com absorvedores.

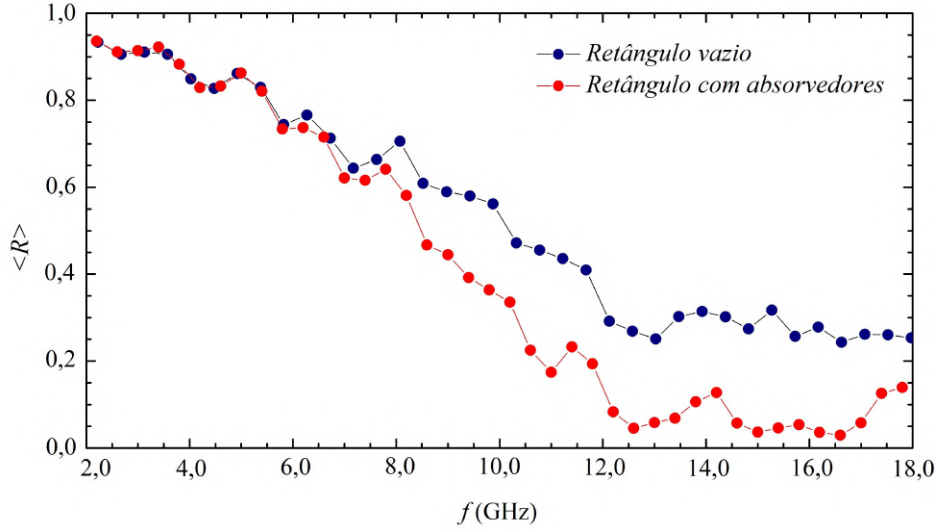


Figura 4.6: Coeficiente de reflexão médio medido em um intervalo de 450 MHz centrado na frequência f e 80 posições diferentes da antena, para o retângulo sem absorvedores (círculos azuis) e para o retângulo com absorvedores de micro-ondas (círculos vermelhos). Linhas são para guiar os olhos.

A figura 4.7 mostra $\langle R \rangle \times f$ para os três polígonos no regime de alta absorção. As faixas consideradas com valores $\langle R \rangle$ aproximadamente constantes foram $[15,7; 16,2]$ para o triângulo irracional com média em 121 posições da antena, $[16,2; 16,7]$ para o triângulo equilátero com 185 espectros, e por fim, $[14,75; 16,75]$ para o retângulo com média em 123 posições. A equação (4.14) pode ser reescrita da seguinte forma

$$-\langle R \rangle \ln[P(R)\langle R \rangle] = R, \quad (4.15)$$

a qual é tracejada na figura 4.8, juntamente com as medições realizadas nas cavidades poligonais. Observamos que as distribuições experimentais estão na vizinhança do resultado da matriz aleatória, exibindo um bom acordo. Logo, nossas medições sugerem que para o regime de alta absorção, não só cavidades caóticas apresentam o comportamento previsto pela equação (4.15), ou seja, bilhares com dinâmica clássica

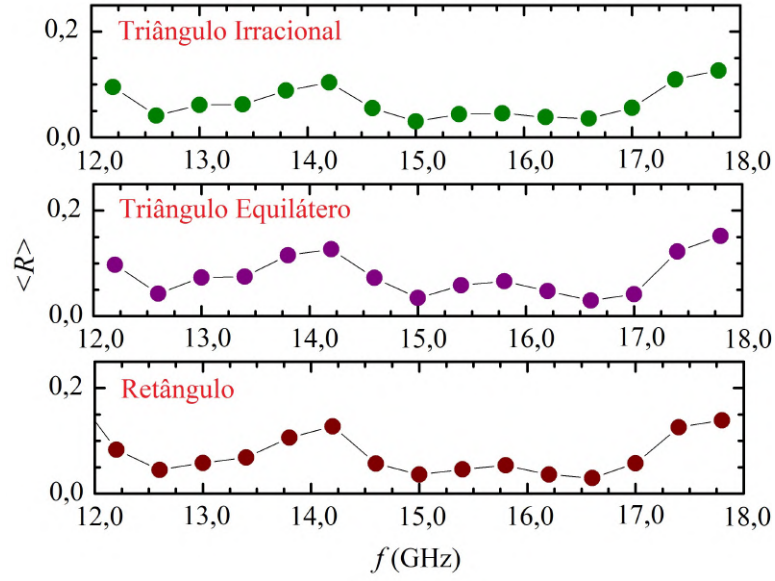


Figura 4.7: Regime de absorção forte: coeficiente de reflexão médio medido em um intervalo de 450 MHz centrado em frequência f . (a) Retângulo: 123 posições diferentes da antena; (b) Triângulo equilátero: 185 posições diferentes da antena; (c) Triângulo irracional: 121 posições diferentes da antena. As linhas são para guiar os olhos.

não caótica também poderiam apresentar esse efeito.

Os símbolos na figura 4.9 mostram a distribuição de fase medida no retângulo e a curva preta um ajuste com a equação (4.12), obtido com parâmetros $\gamma = 37,0$ e $t = 0,9996$. A linha horizontal tracejada é o “kernel de Poisson” para o acoplamento ideal na ausência de absorção, $P(\theta) = 1/2\pi$. O valor medido $t_{exp} = 1 - \langle R \rangle = 0,96$ está em bom acordo com o valor de t extraído do procedimento de ajuste. Comparações similares são observadas nos outros bilhares poligonais.

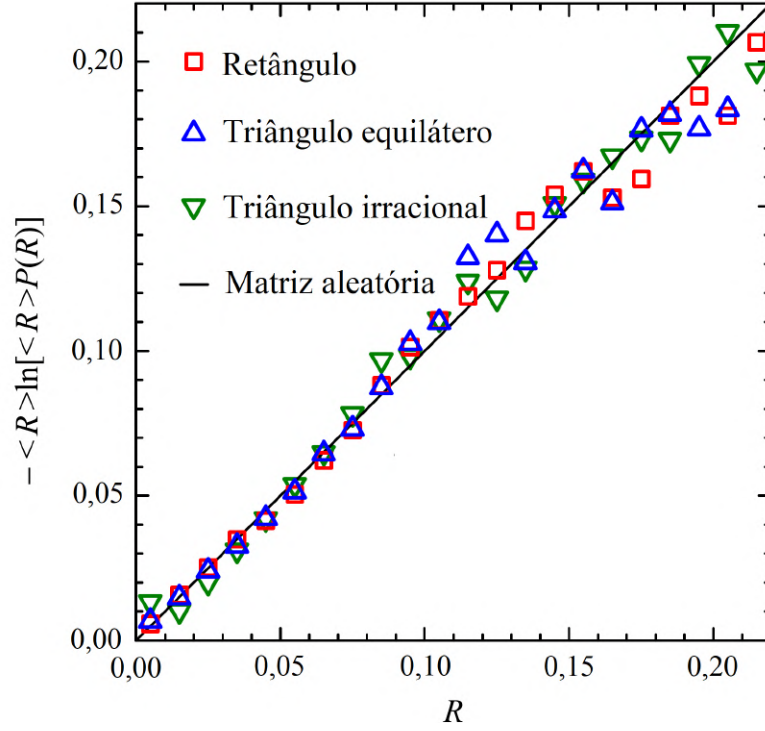


Figura 4.8: Símbolos: Distribuição $P(R)$ no bilhar indicado no regime de absorção forte (cavidades com absorvedores, $f > 14$ GHz). Os intervalos de frequência são, em GHz, $[14,75; 16,75]$, $[16,2; 16,7]$ e $[15,7; 16,2]$, respectivamente, para o retângulo ($\langle R \rangle = 0,0343$), o triângulo irracional ($\langle R \rangle = 0,0345$) e o triângulo equilátero ($\langle R \rangle = 0,0297$). Linha sólida: Resultado exato previsto pela teoria de matrizes aleatórias para espalhamento caótico (equação (4.15)).

4.3.2 Medições em regimes de absorção baixa e intermediária

Para os casos em que os absorvedores ECCOSORB não foram utilizados, apresentamos a seguir as distribuições da matriz- S e sua comparação com a equação (4.12), a qual fora proposta para cavidades caóticas. Ao que se segue, em cada uma das geometrias focamos nossa atenção em duas faixas de frequência: (i) um regime em que $f < 5$ GHz, o qual apresenta picos bem definidos, exceto para ressonâncias muito próximas e (ii) um regime intermediário, $10 \text{ GHz} < f < 18 \text{ GHz}$, no qual a superposição de ressonâncias ocorre devido às perdas nas paredes da cavidade. A figura

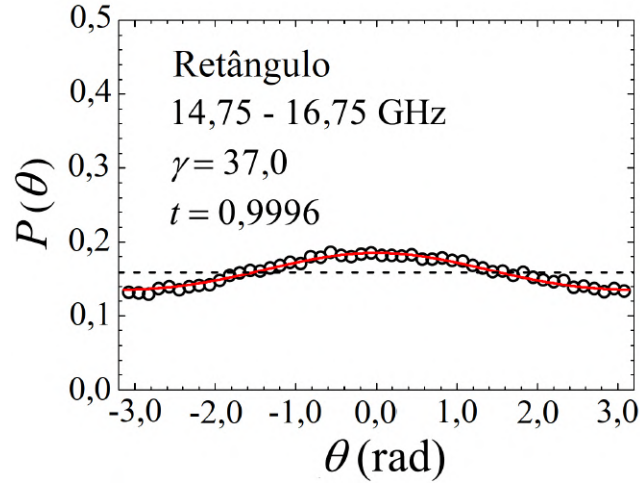


Figura 4.9: Símbolos: Medição de $P(\theta)$ no retângulo no regime de absorção forte. Linha vermelha: Ajuste com a equação (4.12) com $\gamma = 37,0$ e $t = 0,9996$. A linha horizontal tracejada é o “kernel de Poisson” para o acoplamento ideal na ausência de absorção, $P(\theta) = 1/2\pi = 0,159$.

4.10 apresenta $\langle R \rangle \times f$ referente às medições nas cavidades poligonais. Em todas as geometrias, as médias foram realizadas em intervalos de 450 MHz, e o número de espectros utilizados para a média final foi de 80 para o retângulo, 92 para o triângulo equilátero e 40 para o triângulo irracional.

Dos dados da figura 4.10(a), a região de 2,6 a 3,6 GHz apresenta $\langle R \rangle$ aproximadamente constante. Os dados de $P(R)$ e $P(\theta)$ correspondentes são mostrados na figura 4.11, acompanhados de ajustes teóricos com a distribuição conjunta $P(R, \theta; \gamma, t)$. A distribuição $P(R)$ se concentra na vizinhança de $R = 1$, enquanto $P(\theta)$ apresenta um pico estreito, de modo que nossos resultados são consistentes com os resultados anteriores para cavidades caóticas. Note que os dados foram deslocados por uma constante de fase irrelevante e reinjetados no intervalo de $[-\pi, \pi]$, de modo que a distribuição é simétrica em torno de $\theta = 0$. Nos painéis da figura 4.11 constam a faixa de frequência investigada e os parâmetros de absorção e acoplamento usados no

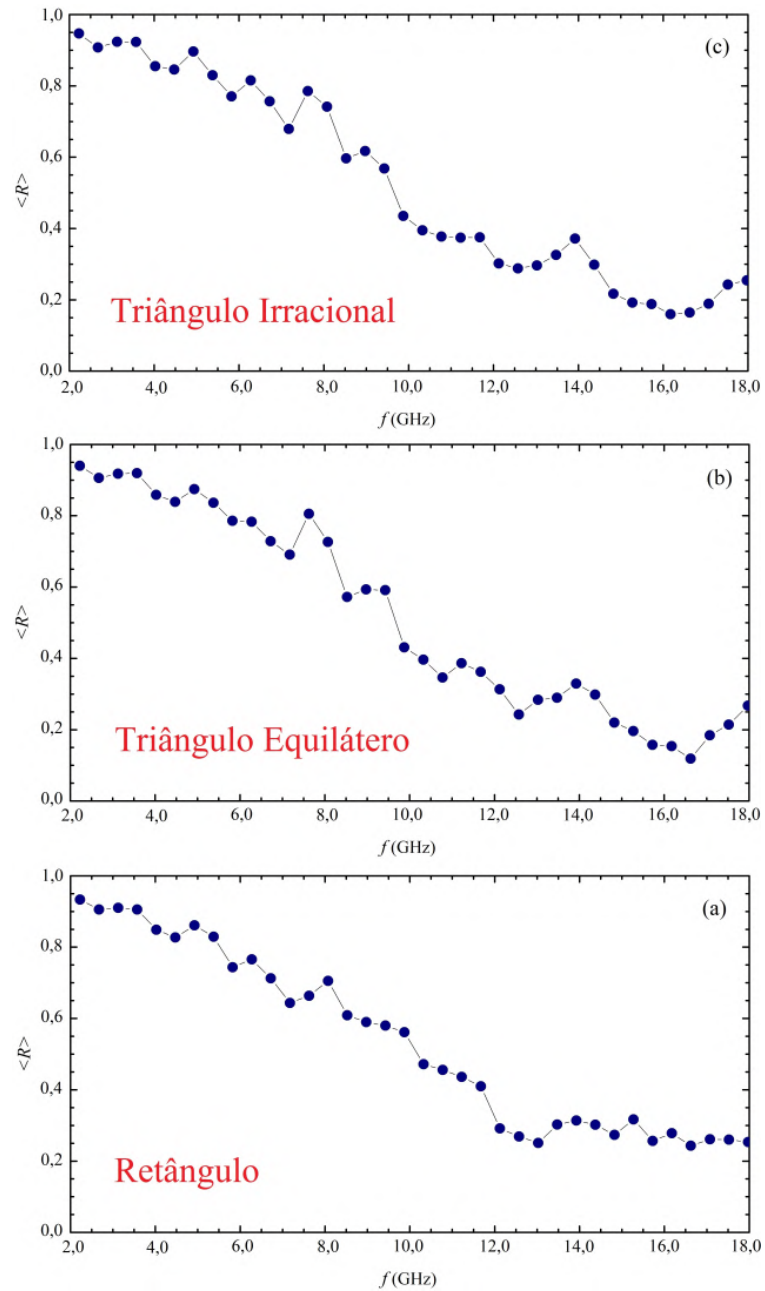


Figura 4.10: Coeficiente de reflexão médio medido em um intervalo de 450 MHz centrado em frequência f . (a) Retângulo: 80 posições diferentes da antena; (b) Triângulo equilátero: 82 posições diferentes da antena; (c) Triângulo irracional: 40 posições diferentes da antena. As linhas são para guiar os olhos.

ajuste. O parâmetro $t = 0,016$ está em bom acordo com o valor retirado a partir dos dados, ou seja, $t_{exp} = 1 - \langle R \rangle = 0,0164$.

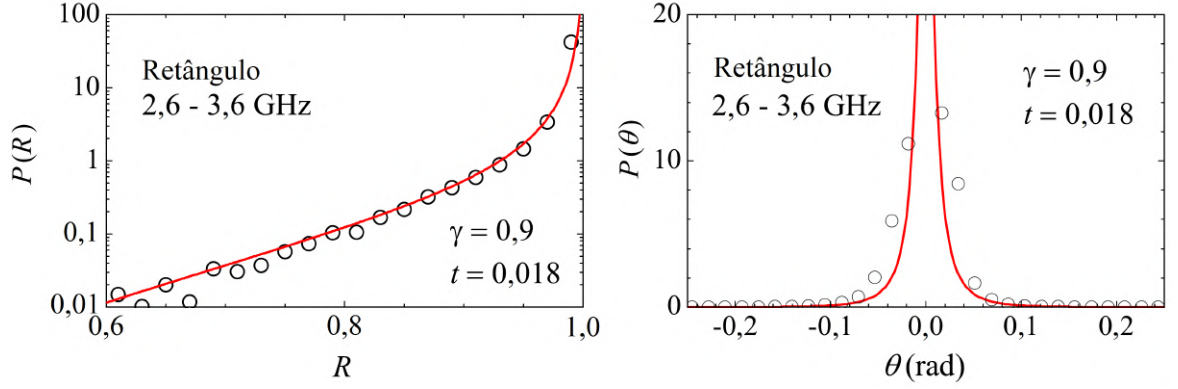


Figura 4.11: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no retângulo em regime de baixa frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

Para o regime intermediário do retângulo, a faixa de frequência investigada foi de 17 a 18 GHz, onde os resultados são mostrados na figura 4.12. A distribuição de R tomou uma forma que privilegia menores valores no intervalo de 0 a 1. Já para $P(\theta)$ observamos um alargamento da curva em comparação com o resultado anterior. Houve um aumento nos parâmetros de absorção e acoplamento, isto é, $\gamma = 7,3$, $t = 0,92$ e $t_{exp} = 0,74$. Aqui a diferença entre t e t_{exp} é compatível com resultados anteriores [9], e está associada a forte dependência de $P(R, \theta; \gamma, t)$ com o par (γ, t) . Novamente, os nossos resultados são consistentes com aqueles apresentados anteriormente para cavidades caóticas [9], [10].

Dos dados da figura 4.10(b) para o triângulo equilátero, as faixas de frequência correspondentes para a análise estatística são 2,8 a 3,8 GHz e 15,7 a 16,2 GHz, respectivamente, para absorção baixa e intermediária. Os símbolos na figura 4.13 mostram os resultados experimentais para $P(R)$ e $P(\theta)$ no triângulo equilátero na

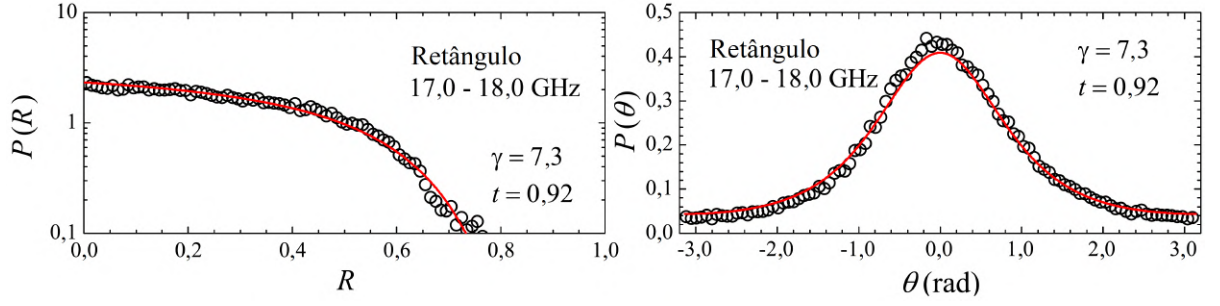


Figura 4.12: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no retângulo em regime intermediário de frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

faixa de frequência mais baixa. As curvas sólidas são ajustes simultâneos com $\gamma = 1,1$ e $t = 0,020$. Aqui, $t_{exp} = 0,0160$ exibe um bom acordo com o valor do ajuste. Para a faixa de 15,7 a 16,2 GHz, as distribuições $P(R)$ e $P(\theta)$ são mostradas na figura 4.14 acompanhadas das suas respectivas curvas teóricas. Mais uma vez, observamos que o coeficiente de reflexão se distribui em menores valores no intervalo, e a fase visita todo o intervalo de $-\pi$ a π com um pico mais largo para o $P(\theta)$. Os parâmetros extraídos foram $\gamma = 15,0$, $t = 0,95$ e $t_{exp} = 0,84$.

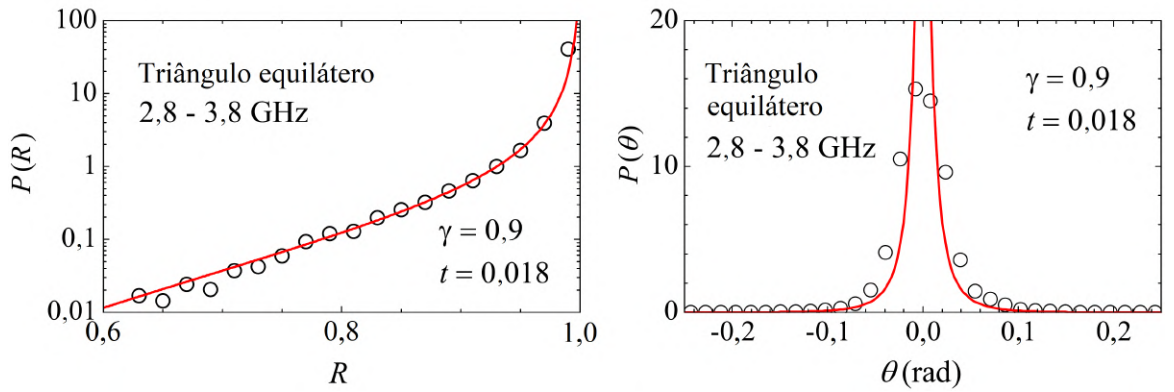


Figura 4.13: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no triângulo equilátero em regime de baixa frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

Da curva $\langle R \rangle \times f$ da figura 4.10(c) para o triângulo irracional, as faixas de

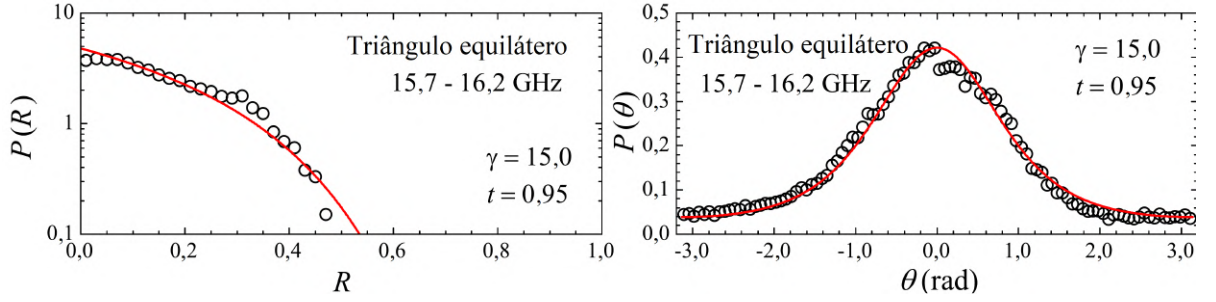


Figura 4.14: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no triângulo equilátero em regime intermediário de frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

frequência analisadas foram 4,0 a 4,5 GHz e 15,8 a 16,8 GHz. Para o regime de baixas frequências, as distribuições de S são mostradas na figura 4.15, onde para R observamos o acordo dos dados experimentais com a previsão teórica, reforçando mais uma vez que para baixas frequências, $P(R)$ se acumula na vizinhança de $R = 1$. O mesmo se repete para a fase. $P(\theta)$ apresenta um pico fino em uma região e é próximo a zero na maior parte do intervalo de $-\pi$ a π . Os valores dos parâmetros foram $\gamma = 0,7$, $t = 0,045$ e $t_{exp} = 0,0213$, os quais são comparáveis aos resultados obtidos nos polígonos anteriores. As distribuições para o regime intermediário são mostradas na figura 4.16. O acordo e a forma das curvas são semelhantes às cavidades integráveis. Aqui, $\gamma = 11,0$, $t = 0,983$ e $t_{exp} = 0,84$. No Apêndice B sintetizamos a comparação entre t e t_{exp} para todos os polígonos. Em média, obtivemos $\langle t/t_{exp} \rangle = 1,3$, compatível com resultados anteriores em cavidades caóticas, sendo este um valor razoável diante da complexidade experimental e do ajuste simultâneo com uma distribuição conjunta.

Além dos polígonos, medições em um bilhar caótico foram executadas, isto é, um bilhar de Sinai. Para isso, adicionamos ao retângulo um disco metálico de diâmetro

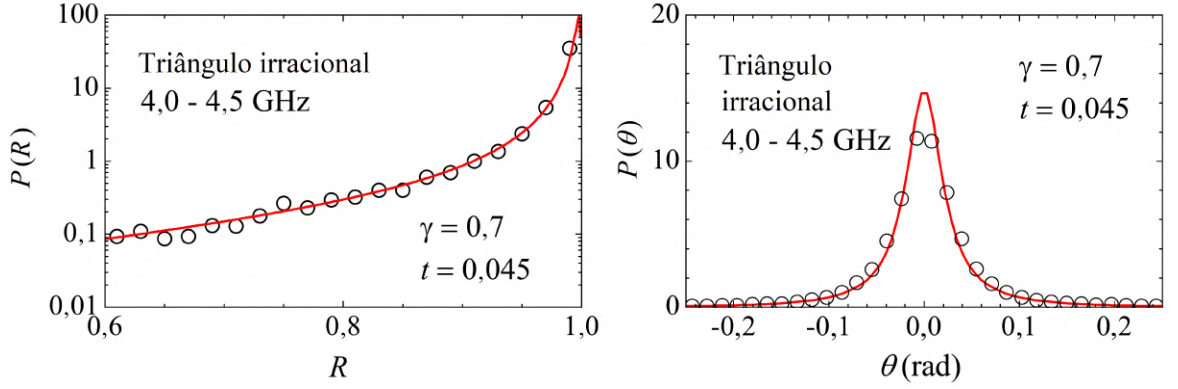


Figura 4.15: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no triângulo irracional em regime de baixa frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

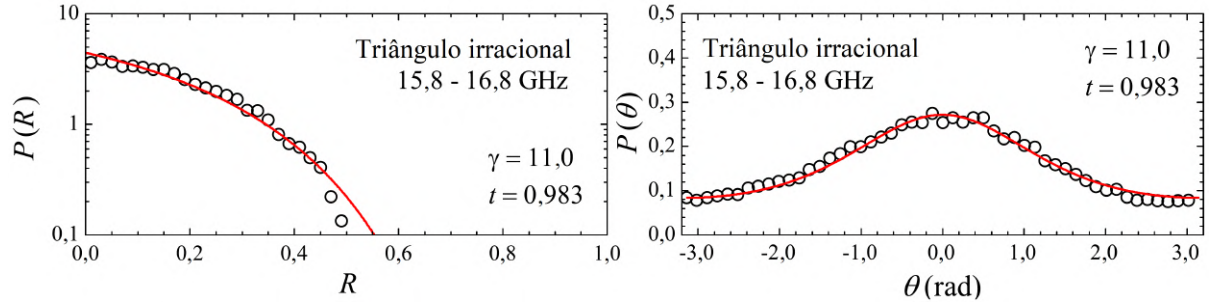


Figura 4.16: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no triângulo irracional em regime intermediário de frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

8,5 cm em seu interior. Com 60 espectros obtidos através de diferentes posições da antena, R e θ são ajustadas pela equação (4.12), como esperado para a geometria caótica. A figura 4.17 exhibe os dados com suas respectivas curvas de distribuições ao longo da faixa de 2,6 a 3,1 GHz.

No contexto das reações nucleares, quando as conjecturas do caos quântico ainda não existiam, López, Mello e Seligman (LMS) [71] consideraram um ensemble de matrizes $S = e^{i\theta}$ ($R = 1$) para o qual a distribuição $P(\theta)$ é a mesma para as estatísticas

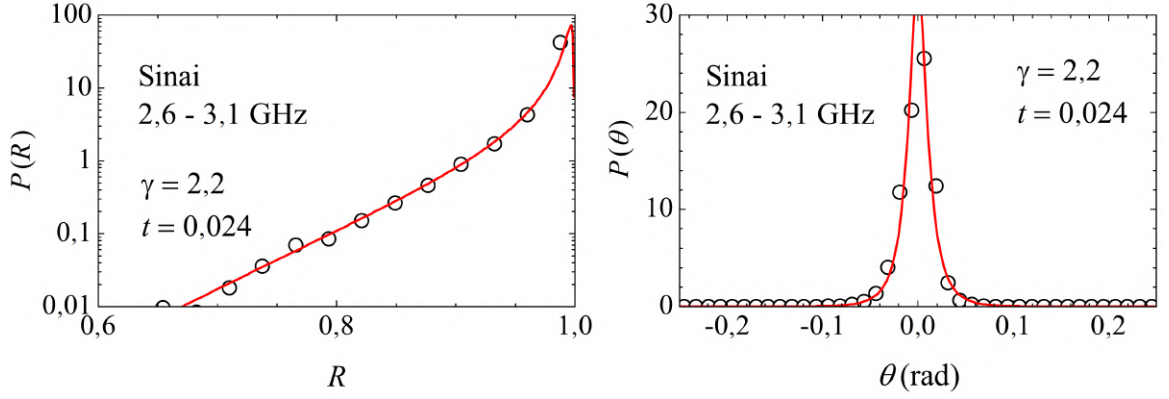


Figura 4.17: Símbolos: Distribuições medidas $P(R)$ (painel à esquerda) e $P(\theta)$ (painel à direita) no bilhar de Sinai em regime de baixa frequência. As linhas sólidas são ajustes com a equação (4.12), para valores indicados dos parâmetros γ e t .

de Poisson e GOE. Curiosamente, esta universalidade para o caso de uma cavidade sem perdas parece ter sido ignorada na literatura do espalhamento caótico. A fórmula deduzida por LMS é dada por

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{1 + |\langle S \rangle|^2 - 2\text{Re}(\langle S \rangle e^{-i\theta})}. \quad (4.16)$$

Nossos experimentos em baixa frequência se aproximam do caso ideal estudado por LMS. Assim, nos sentimos motivados a ajustar nossas medições das flutuações na fase com a fórmula (4.16). Os resultados estão mostrados na figura 4.18 para os quatro bilhares usados em nossos experimentos. As semelhanças e o bom acordo entre os dados experimentais e o resultado teórico de LMS são claramente observados.

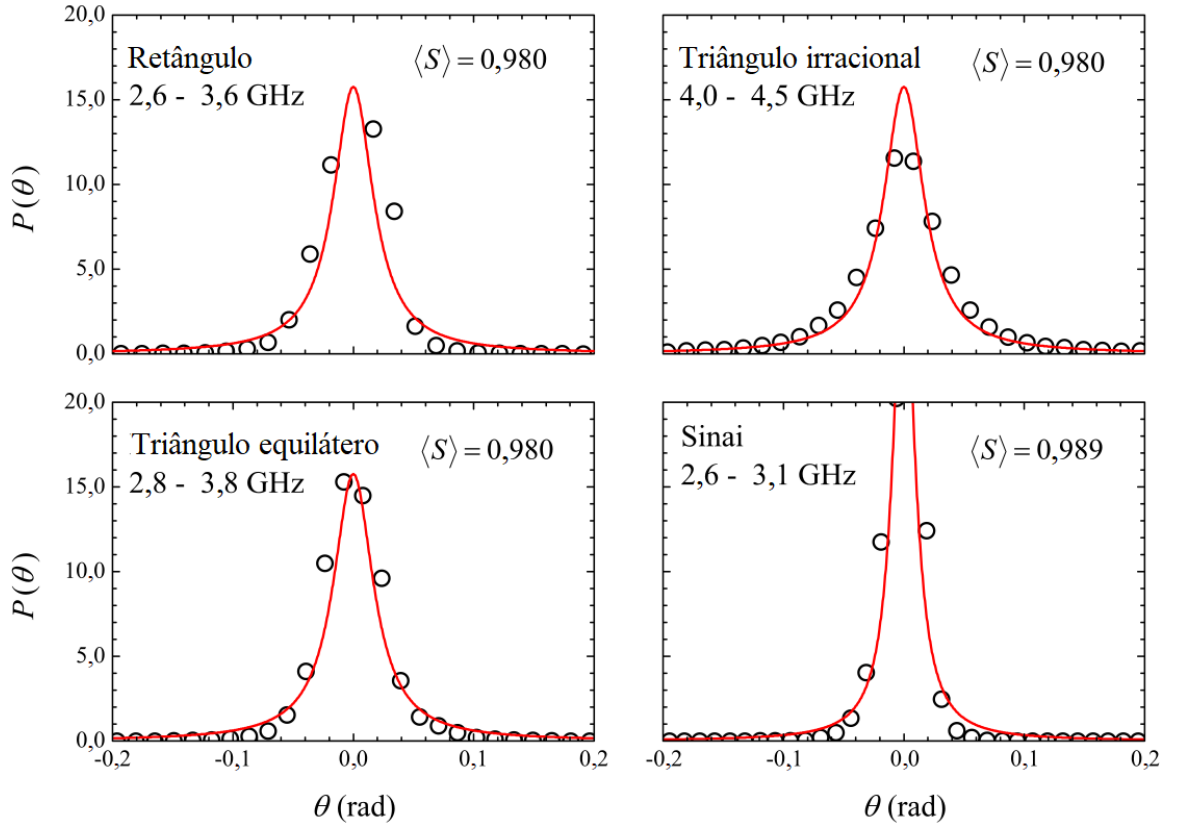


Figura 4.18: Símbolos: Distribuições de fase $P(\theta)$ medidas nos bilhares indicados em cada painel. Linhas sólidas são gráficos da equação (4.16) com valores indicados do parâmetro $\langle S \rangle$.

4.4 Impedância normalizada

O modelo proposto por Zheng, Antonsen e Ott (ZAO) [67], baseado em um modelo de ondas planas aleatórias, prevê para o caso de uma cavidade sem perdas, uma distribuição de impedância normalizada ($z = z_R + iz_I$) que independe de seu espectro ser Poisson ou GOE, assim como no ensemble de LMS para $P(\theta)$. Como discutido anteriormente, a abordagem via impedância normalizada tem como vantagem em relação à matriz- S o fato das flutuações não dependerem do acoplamento, apenas da absorção. Para valores intermediários de absorção, ZAO mostraram que

$P(z_I)$ sofre uma transição de uma distribuição lorentziana em baixas perdas para uma distribuição gaussiana quando a absorção aumenta. Essa transição foi também prevista independentemente por Fyodorov e Savin [72]. Por outro lado, $P(z_R)$ exibe um pico assimétrico que se desloca para valores crescentes de z_R à medida que a absorção aumenta. Resultados experimentais para $P(z_R)$ e $P(z_I)$ foram publicados pelo grupo da Universidade de Maryland (EUA) em 2005 [11] em bilhares caóticos (1/4 de um “travesseiro” ou “gravata borboleta”). Os resultados mostraram um bom acordo com o modelo de ZAO, o que foi considerado como uma demonstração de que as previsões para as propriedades da impedância normalizada seriam universais para todos os sistemas classicamente caóticos.

Como na referência [11], realizamos medições nas quatro cavidades discutidas na seção anterior, em dois níveis de absorção. Um com a cavidade vazia e outro com absorvedores no interior, mantendo a mesma razão entre os volumes dos absorvedores e das cavidades. Infelizmente, a teoria de ZAO não fornece uma expressão tão clara quanto a distribuição conjunta para a matriz- S . Assim, para ajustar nossos dados, escolhemos fórmulas qualitativas mais simples. Por exemplo, como $P(z_I)$ supostamente deve exibir uma transição entre um regime lorentziano e outro gaussiano, escolhemos para ajuste dos dados experimentais uma função do tipo pseudo-Voigt, composta por uma combinação das distribuições lorentziana e gaussiana,

$$P(x) = \mu L(x) + (1 - \mu)G(x), \quad (4.17)$$

onde μ representa o peso da distribuição lorentziana. Para o caso de z_R , a distribuição com pico assimétrico será ajustada pela combinação linear

$$P(x) = \eta C(x) + (1 - \eta)S(x), \quad (4.18)$$

onde $C(x)$ é a função de Chesler-Cram, dada por

$$C(x) = A_C [e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2w}} + B [1 - 0,5[1 - \tanh[k_2(x - x_2)]]] e^{-0,5k_3[|x-x_3|+(x-x_3)]}], \quad (4.19)$$

e $S(x)$ é a função sigmoïdal dupla assimétrica

$$S(x) = A_S \left[\frac{1}{1 + \exp[-(x - x_c + w_1/2)/w_2]} \right] \left[1 - \frac{1}{1 + \exp[-(x - x_c - w_1/2)/w_3]} \right]. \quad (4.20)$$

Essas duas funções são comumente encontradas na literatura para ajustes de picos assimétricos. Em detrimento, temos um número excessivo de parâmetros de ajuste.

4.4.1 Flutuações da impedância em bilhares de micro-ondas

Com base nos experimentos descritos na referência [11], escolhemos faixas de frequências adequadas para cada geometria, fazendo estatísticas em dezenas de diferentes posições da antena.

Os símbolos nas figuras 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 mostram as estatísticas $P(z_I)$ e $P(z_R)$, nas faixas de frequência indicadas, medidas nos quatro bilhares, respectivamente, no retângulo, no triângulo equilátero, no triângulo irracional e no bilhar de Sinai, para dois valores de absorção cada uma. As linhas sólidas são ajustes de qualidade inquestionável com as equações (4.17) e (4.18), respectivamente, para as partes imaginária e real da impedância normalizada. Todos os quatro bilhares exibem as

mesmas propriedades previstas pelo modelo de ondas aleatórias de ZAO [67], independentemente da geometria. No apêndice C encontram-se os valores dos parâmetros de ajuste da equação (4.18) para cada bilhar.

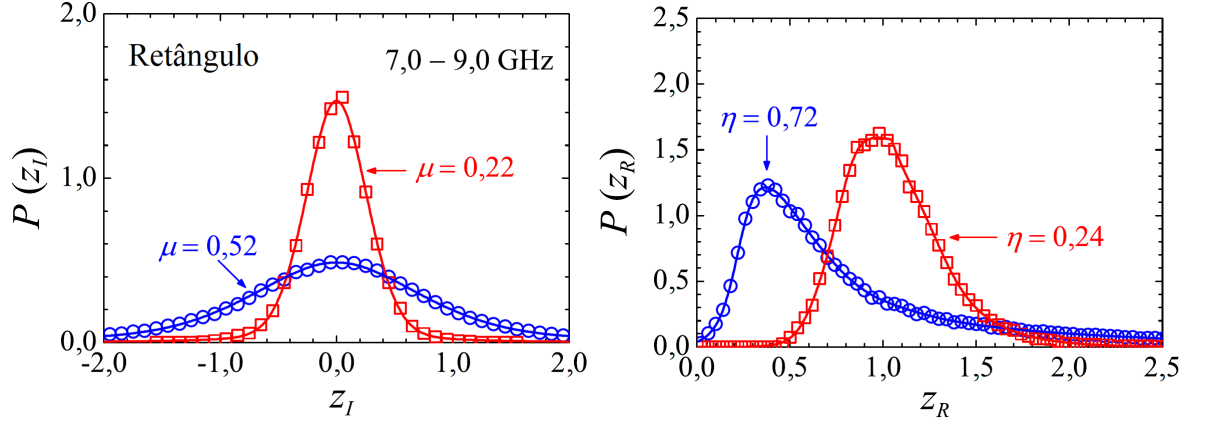


Figura 4.19: Símbolos: $P(z_I)$ (à esquerda) e $P(z_R)$ (à direita) medidas no retângulo no intervalo de frequência indicado, para dois níveis de absorção. Círculos azuis: cavidade vazia. Quadrados vermelhos: cavidade com absorvedores. As linhas sólidas são ajustes com a distribuição pseudo-Voigt ($P(z_I)$) e com a combinação linear das funções de Chesler-Cram e sigmoidal dupla assimétrica ($P(z_R)$).

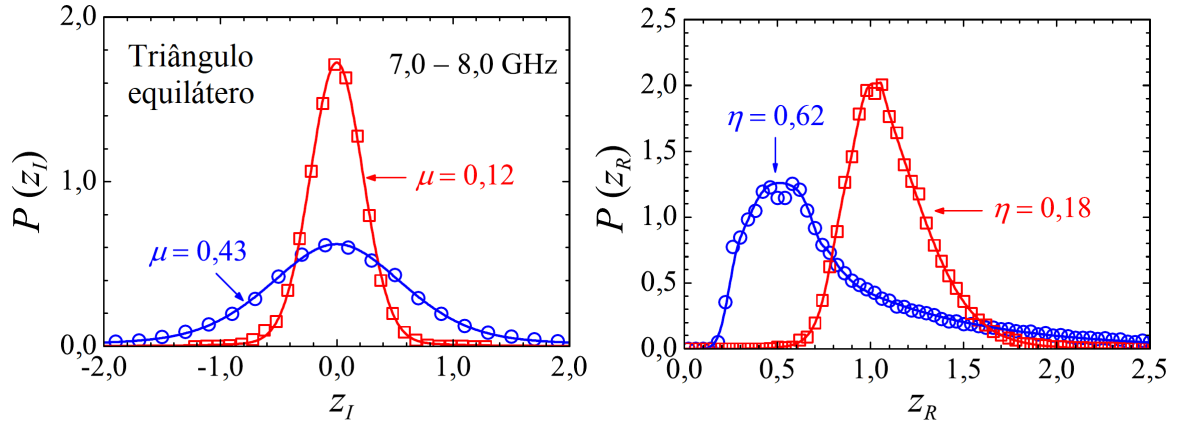


Figura 4.20: Símbolos: $P(z_I)$ (à esquerda) e $P(z_R)$ (à direita) medidas no triângulo equilátero no intervalo de frequência indicado, para dois níveis de absorção. Círculos azuis: cavidade vazia. Quadrados vermelhos: cavidade com absorvedores. As linhas sólidas são ajustes com a distribuição pseudo-Voigt ($P(z_I)$) e com a combinação linear das funções de Chesler-Cram e sigmoidal dupla assimétrica ($P(z_R)$).

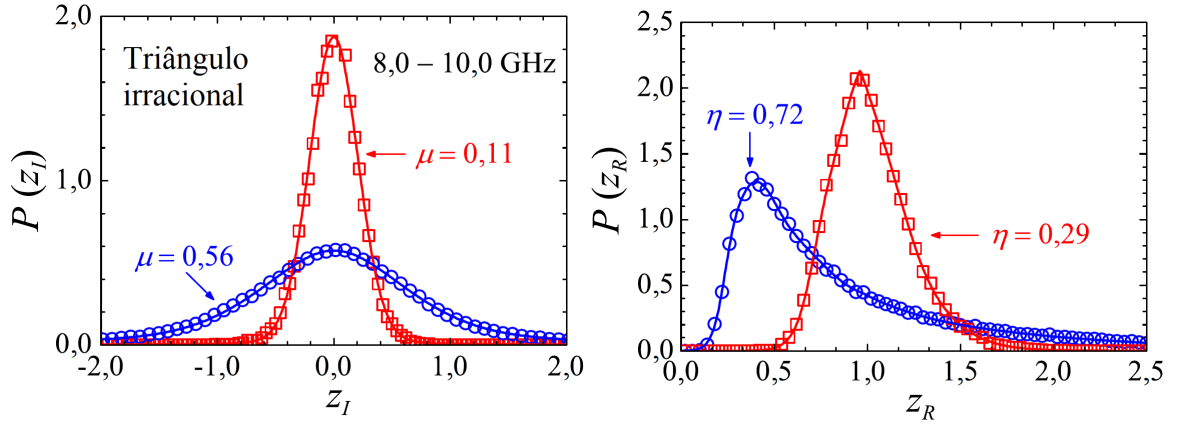


Figura 4.21: Símbolos: $P(z_I)$ (à esquerda) e $P(z_R)$ (à direita) medidas no triângulo irracional no intervalo de frequência indicado, para dois níveis de absorção. Círculos azuis: cavidade vazia. Quadrados vermelhos: cavidade com absorvedores. As linhas sólidas são ajustes com a distribuição pseudo-Voigt ($P(z_I)$) e com a combinação linear das funções de Chesler-Cram e sigmoidal dupla assimétrica ($P(z_R)$).

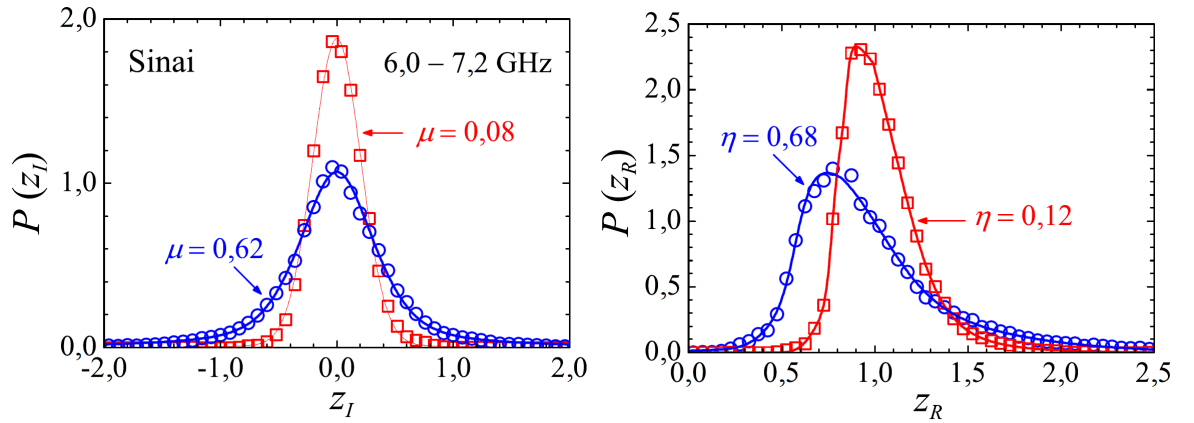


Figura 4.22: Símbolos: $P(z_I)$ (à esquerda) e $P(z_R)$ (à direita) medidas no bilhar de Sinai no intervalo de frequência indicado, para dois níveis de absorção. Círculos azuis: cavidade vazia. Quadrados vermelhos: cavidade com absorvedores. As linhas sólidas são ajustes com a distribuição pseudo-Voigt ($P(z_I)$) e com a combinação linear das funções de Chesler-Cram e sigmoidal dupla assimétrica a ($P(z_R)$).

4.5 Discussão

Apresentamos neste capítulo um conjunto de resultados experimentais indicativos de que as estatísticas de espalhamento não diferenciam geometrias caóticas e

integráveis. Esse fato é intrigante, uma vez que a vasta maioria de modelos teóricos e testes experimentais referem-se a sistemas classicamente caóticos. Suporte teórico para uma onipresença das distribuições ocorre no regime ideal da cavidade sem perda: Tanto o ensemble de LMS para a matriz- S [71] quanto o modelo de ondas planas aleatórias de ZAO para a matriz Z [67] preveem estatísticas de espalhamento iguais para espectros não correlacionados (Poisson) e correlacionados via GOE. A pergunta que obviamente se coloca aqui é: Nossos resultados experimentais nas diferentes geometrias investigadas são evidências de que $P(R)$, $P(\theta)$, $P(z_R)$ e $P(z_I)$ não diferenciam caos de não caos também na presença de absorção? Para jogar luz nesse cenário complexo, vamos discutir aqui o papel de nosso aparato experimental. Uma cavidade com uma antena, por exemplo, poderia representar um bilhar de Sinai com um disco quase puntiforme. Teríamos, então, realizado experimentos físicos inevitavelmente caóticos? Nesse caso, a aparente universalidade observada nos experimentos não seria surpreendente. Para abordar aqui essas questões, que tomaram parte em longo debate com árbitros anônimos de nosso manuscrito recentemente publicado na Scientific Reports (capa do artigo no apêndice F), realizamos uma série de experimentos em temperatura ambiente e em 77 K, com antenas de dois tamanhos, nos quais medimos as distribuições de espaçamentos $P(s)$, de intensidade $P(I)$, e de reflexão $P(R)$. Os resultados são apresentados a seguir, juntamente com experimentos numéricos correspondentes. Contudo, essa discussão deve ser antecedida por um histórico do problema do bilhar com espalhador puntiforme.

O bilhar com uma singularidade puntiforme ficou conhecido como bilhar de Šeba, introduzido em 1990 [73]. No limite clássico, as trajetórias que atingem o espalhador

puntiforme dentro de um retângulo possuem medida nula e não afetam a entropia. Assim, o sistema é classicamente integrável. Com métodos numéricos de 1990, Šeba obteve na quantização desse bilhar, contrariamente às conjecturas esperadas do “caos quântico”, uma distribuição $P(s)$ do tipo do GOE e autofunções desordenadas. No mesmo volume daquela *Physical Review Letters*, Stöckmann e Stein [6] introduziam os bilhares de micro-ondas, mostrando resultados experimentais em um bilhar de Sinai e outro retangular que, para eles exibiam as esperadas estatísticas do GOE e de Poisson, respectivamente. Desvios da estatística de Poisson em pequenos valores de s foram atribuídos a um baixo fator de qualidade das ressonâncias (baixa resolução espectral) e acoplamento ruim com alguns modos (antena próxima a uma linha nodal). No ano seguinte, um conjunto de teóricos de peso juntou-se a Stein e Stöckmann para publicar, como Rapid Communication na Phys. Rev. A [74], resultados no retângulo, agora medidos em 69 diferentes posições da antena. Esses autores dividiram o espectro experimental em três fatias (5-10, 10-15 e 15-18 GHz) e “uma transição da distribuição de Poisson até uma de Wigner” (GOE) fora observada, sendo confirmada por um modelo que tomava a antena por um potencial tipo delta de Dirac. No ano subsequente, Sridhar e colaboradores na Northeastern University (Boston, EUA) publicavam em [75] resultados afirmando que “o método de medição não introduz caos no sistema integrável”! Durante um bom tempo não se ouviu falar mais sobre essa controvérsia na literatura, uma vez que o interesse no caos dominou durante toda a década de 1990. O problema da “estatística singular” foi revisitado em uma série de três trabalhos pelo grupo de Marburg (Stöckmann) em 2008, 2010 e 2011 [76], [77], [78]. Os novos resultados seguiram as ideias de 1991, mas o terceiro finalmente conclui que no limite em que a energia “vai pra infinito” o espectro é Poisson! Em nossa

opinião, os espectros reforçam a ideia dos fundadores (Gutzwiller, Berry, etc.) de que qualquer assinatura do caos em mecânica quântica deve ser procurada nos estados altamente excitados, ou seja, no regime semiclássico. Embora esse regime possa ser definido a partir de um comprimento de onda associado à partícula no bilhar, o conjunto da obra parece indicar que importância deve ser dada à geometria do contorno $\partial\Omega$ do bilhar, como na mecânica clássica. Para aqueles acostumados a experimentos numéricos, tornou-se prática comum caracterizar o início do regime semiclássico a partir das estatísticas produzidas por faixas de energia de mesmo tamanho. Calculando, por exemplo, $P(s)$, sistematicamente a partir de estados mais baixos, o regime semiclássico terá sido atingido quando dentro de alguma precisão, a estatística observada para uma faixa de energia reproduzir a da faixa anterior, indicando que $P(s)$ convergiu, podendo, então, ser associada a uma característica quântica da geometria estudada. Um processo como esse em experimentos físicos tem uma limitação bem mais severa, pois as perdas em um sistema real impedem a exploração experimental dessa convergência. No caso numérico, o limite é imposto pela precisão do método. Para se ter uma ideia, os melhores experimentos físicos com cavidades 2D supercondutoras acessam pouco mais de 1000 ressonâncias, enquanto que métodos numéricos de fronteira permitem a manipulação de espectros com centenas de milhares de autovalores, uma diferença brutal! Estariam, então, os experimentos em bilhares de micro-ondas confirmando as previsões teóricas?

4.5.1 Retângulo

As soluções exatas do bilhar retangular quantizado foram de grande importância na época das primeiras investigações sobre o caos quântico [69]. Ao longo das 3

últimas décadas, foram realizados diversos experimentos com micro-ondas em cavidades retangulares para melhor entendimento da teoria [6], [74], [79] e [80]. As soluções da equação (3.2) podem ser obtidas facilmente para este contorno, de modo que as autofunções são dadas por

$$\phi_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b), \quad (4.21)$$

onde $m, n = 1, 2, 3, \dots$ são os números quânticos associados às direções x e y , e os parâmetros a e b são os comprimentos da base e altura do bilhar, respectivamente. Com as soluções para k_n , e partir da relação de dispersão $\omega_n = ck_n$, podemos obter as autofrequências do sistema,

$$f_{m,n} = \frac{c}{2} \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}, \quad (4.22)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Para nossos experimentos, as dimensões utilizadas de $a = 41$ cm e $b = 29$ cm foram convenientemente escolhidas baseadas em trabalhos anteriores, e assim em torno de 10^3 ressonâncias são obtidas na faixa de 2 – 18 GHz, com a frequência do estado fundamental $f_1 = 0,6331$ GHz. Os outros bilhares tiveram números de estados e valor da frequência fundamental semelhantes para a faixa considerada. Os detalhes destas quantidades estão no apêndice D.

Na figura 4.23 há os espectros de 3 posições de antenas em diferentes faixas de frequência. Em (a) é exposto como as ressonâncias aparecem para cada antena, onde observa-se diferentes amplitudes para a mesma frequência, e isto depende da intensidade do campo elétrico naquele ponto específico. Então, se a antena for colocada sobre uma linha nodal da função de onda de uma dada ressonância, esta não vai

ser detectada. Observa-se também que os mínimos não acontecem no mesmo ponto, onde esse *shift* é causado pela perturbação da antena no sistema. Nesta faixa de $2 - 2,5$ GHz, é possível obter a partir da equação (4.22), oito autofrequências, as quais são indicadas em verde na figura. As duas primeiras ressonâncias calculadas são 2,09961 GHz e 2,100063 GHz, e ao comparar estes resultados com os espectros, observamos que a limitação do experimento devido às perdas nas paredes faz com que apenas uma frequência seja observada. O alargamento das lorentzianas aumenta com a frequência, e em conjunto com diferentes *shifts* e acoplamentos das antenas, os espectros tomam as formas mostradas nas imagens inferiores da mesma figura.

Espaçamento de primeiros vizinhos

Na coluna à esquerda da figura 4.24, estão as $P(s)$'s para os espectros das antenas citadas acima, onde a curva em vermelho é a distribuição do GOE (equação (3.15)) e a curva em azul é a distribuição de Poisson (equação (3.14)). Em (d) está o $P(s)$ médio das 3 posições da antena. As duas curvas foram deduzidas para o regime semiclássico, ou seja, em estados altamente excitados, que sejam bem distantes do estado fundamental. Os números de ressonâncias detectadas por cada posição da antena, são $\sim 2/3$ da quantidade que é exatamente calculada no intervalo de $3 - 10$ GHz. A $P(s)$ para este caso encontra-se na figura 4.24(e). A distribuição espectral do retângulo tem a forma Poissoniana com tendência mostrada na figura 4.24(f), onde para realizar a estatística, utilizamos 1×10^6 autovalores de energia e descartamos os 5 mil primeiros.

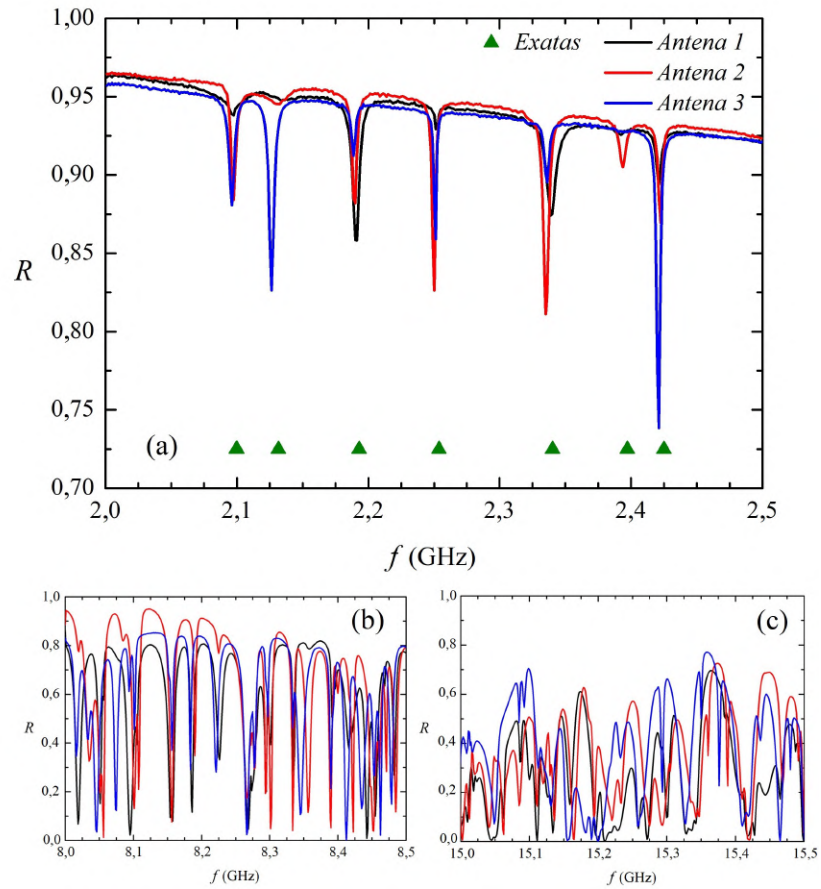


Figura 4.23: (a) As linhas sólidas são espectros $R(f)$ medidos em três diferentes posições da antena no retângulo. Os triângulos verdes marcam as ressonâncias calculadas exatamente. (b) e (c), espectros $R(f)$ em frequências altas.

Intensidade

Em trabalhos experimentais da década de 90, foram realizadas medições de funções de onda em diferentes bilhares e argumentava-se sobre a capacidade de realizar tais experimentos em geometrias arbitrárias, o que não seria possível através de simulações numéricas [81], [82], [56] e [83]. Nesta seção vamos comparar as funções de onda para o bilhar retangular obtidas de forma exata (equação (4.21)), e experimentalmente através de uma técnica perturbativa proposta por Slater e colaboradores na década

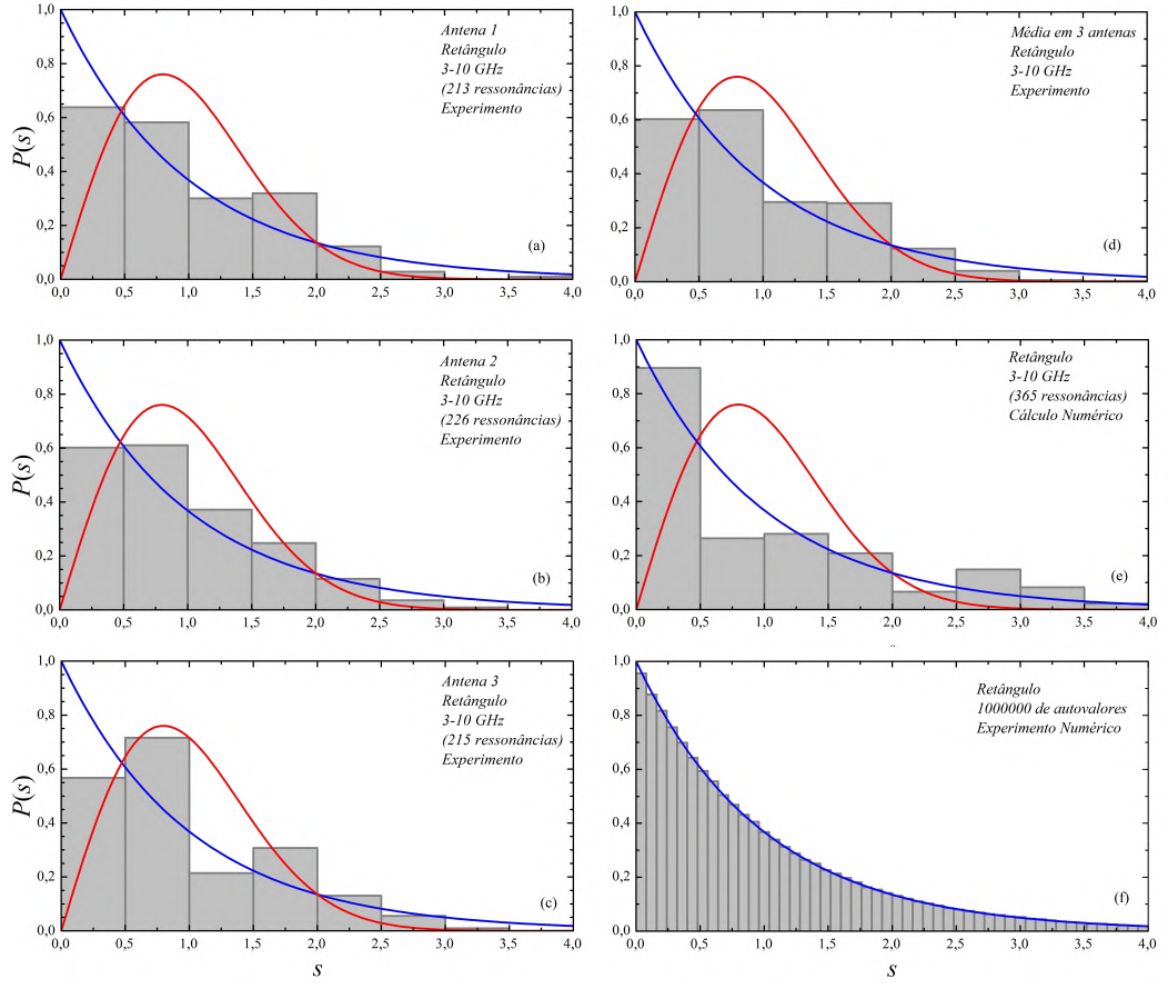


Figura 4.24: A curvas sólidas em vermelho e azul são as distribuições do GOE e Poisson, respectivamente. (a), (b) e (c): $P(s)$ de espectros de diferentes posições da antena no retângulo. (d) $P(s)$ médio das antenas citadas. (e) $P(s)$ numérico de auto-energias calculadas na mesma faixa de frequência das distribuições experimentais. (f) $P(s)$ numérico para o bilhar retangular, realizado com 1×10^6 auto-energias acima das 5 mil primeiras.

de 50 [64], no qual um pequeno objeto metálico é colocado na posição $\vec{\rho}$ dentro da cavidade. Uma ressonância prevista para ocorrer em uma frequência f_0 , ocorre em uma frequência $f(\vec{\rho})$ devido à presença do objeto metálico. Para uma pequena esfera, o *shift* da frequência dependerá de seu volume V_0 , também como dos campos eletromagnéticos na posição $\vec{\rho}$, e assim podemos escrever,

$$f_0^2 - f^2(\vec{\rho}) \approx 3f_0^2 V_0 E_z^2(\vec{\rho}). \quad (4.23)$$

Nosso objetivo foi o de medir a intensidade do campo elétrico, $I(\vec{\rho}) = I(x, y) = E_z^2(x, y)/\langle E_z^2 \rangle$, para um determinado modo, ou seja, o qual está associado a uma frequência de ressonância com determinados números quânticos. O modo escolhido é o $(m, n) = (3, 5)$ no retângulo, o qual corresponde ao vigésimo oitavo estado excitado, $f = 2,8075$ GHz, em que sua função de onda associada $\phi_{(3,5)}^2$ calcula-se através da equação (4.21) e mostrada na figura 4.25(a). Para a medição experimental, é apenas necessário medir a intensidade do campo elétrico em 1/4 da área do bilhar, já que devido às simetrias presentes na geometria, as intensidades nas outras regiões serão obtidas por operações de reflexão. O procedimento consistiu em posicionar a antena no centro do bilhar, distribuir uniformemente 753 marcações na região ao qual $f(\vec{\rho})$ seria medido, e finalmente em cada marcação um pequeno ímã fora aproximado para atrair a pequena esfera metálica contida na cavidade. Em cada posição que o ímã atraía a esfera, um novo valor de f era medido. Os valores obtidos variaram de 2,79723 GHz a 2,80135 GHz, onde este último valor é o f_0 citado acima, o qual são medidos com a esfera perturbadora próxima à linha nodal da fronteira do bilhar. A figura 4.25(b) exhibe a intensidade do modo $(3, 5)$ na cavidade de micro-ondas, o qual apresenta um bom acordo qualitativo com aquele calculado exatamente. E o f_0 medido, 2,801 GHz, também mostra um bom acordo com a frequência calculada pela equação (4.22), $f_{(3,5)} = 2,8075$ GHz.

A seguir, iremos tratar sobre as distribuições da intensidade das ondas no experimento numérico e no experimento físico. Como mencionado no capítulo anterior, é conjecturado que a intensidade de uma única função de onda espalhada

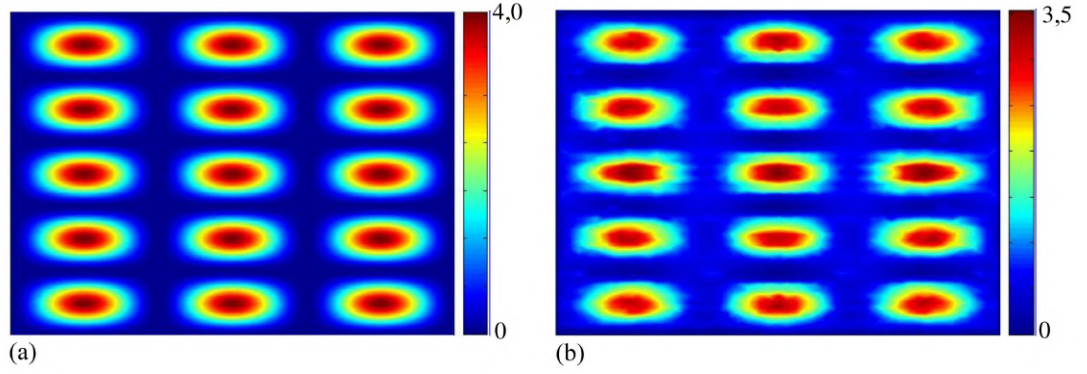


Figura 4.25: Intensidades calculadas (a) e medidas (b) do modo com números quânticos $(m, n) = (3, 5)$ no retângulo. Para o resultado experimental, a antena foi posicionada em um máximo de intensidade local e medido em um quadrante com 795 pontos. Os outros quadrantes foram preenchidos pela reflexão apropriada do quadrante medido.

em um bilhar classicamente caótico segue a distribuição universal de Porter-Thomas (equação (3.27)). Por outro lado, as intensidades das geometrias integráveis não são distribuídas universalmente. Para o retângulo, referente ao cálculo numérico ilustrado na figura 4.25(a), onde a intensidade ($I = \phi_{(3,5)}^2$) fora plotado em 214950 pontos do domínio, o que resulta em um $P(I)$ mostrado na figura 4.26(a). Como esperado [56], a intensidade é truncada em $I \sim 4$. Já para a intensidade dos campos elétricos na cavidade de micro-ondas, a baixa resolução espacial resulta em um experimento limitado. A intensidade mostrada na figura 4.25(b) é distribuída em apenas em 3178 pontos do domínio, o que impede um melhor acordo com o resultado teórico. O $P(I)$ experimental é representado por círculos sólidos na figura 4.26(b), e como esperado, há um grande desvio ao resultado teórico. Em ambas as imagens da figura 4.26, a distribuição de Porter-Thomas foi adicionada a título de comparação com os experimentos.

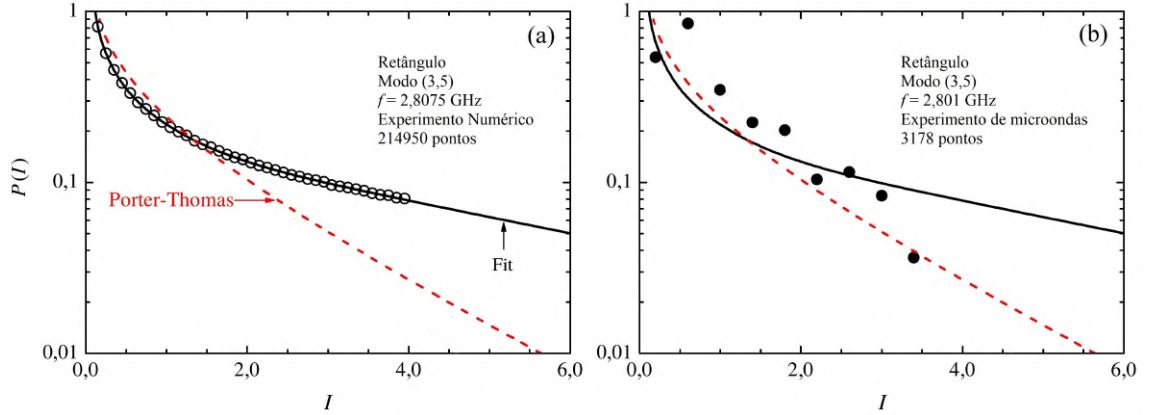


Figura 4.26: Símbolos: Distribuições das intensidades calculadas (a) e medidas (b) para o retângulo. A linha sólida preta é um ajuste para os dados calculados com uma combinação linear de exponenciais decrescentes. A linha tracejada vermelha é a distribuição de Porter-Thomas.

4.5.2 Triângulo irracional

O próximo bilhar de micro-ondas analisado é o triângulo irracional descrito anteriormente. Calculamos que em torno de 10^3 ressonâncias são encontradas na faixa de 2 – 18 GHz, com frequência do estado fundamental $f_1 = 0,7411$ GHz. Os cálculos das frequências foram realizados pelos métodos de elemento finito [42] e um método de fronteira [43], os quais foram cedidos por integrantes do grupo de pesquisa que faço parte. A figura 4.27(a) exhibe 3 espectros de $R \times f$ para diferentes posições da antena, e assim como no retângulo, observamos *shifts* entre as ressonâncias de cada espectro, também como o acoplamento com cada modo é significativo na amplitude dos mínimos. Em (b) e (c) da mesma figura, observamos novamente que devido à absorção das ondas pelas paredes da cavidade, a mesma já não consegue resolver bem as ressonâncias, também como verifica-se que com o aumento da frequência, os *shifts* tornam-se mais pronunciáveis.

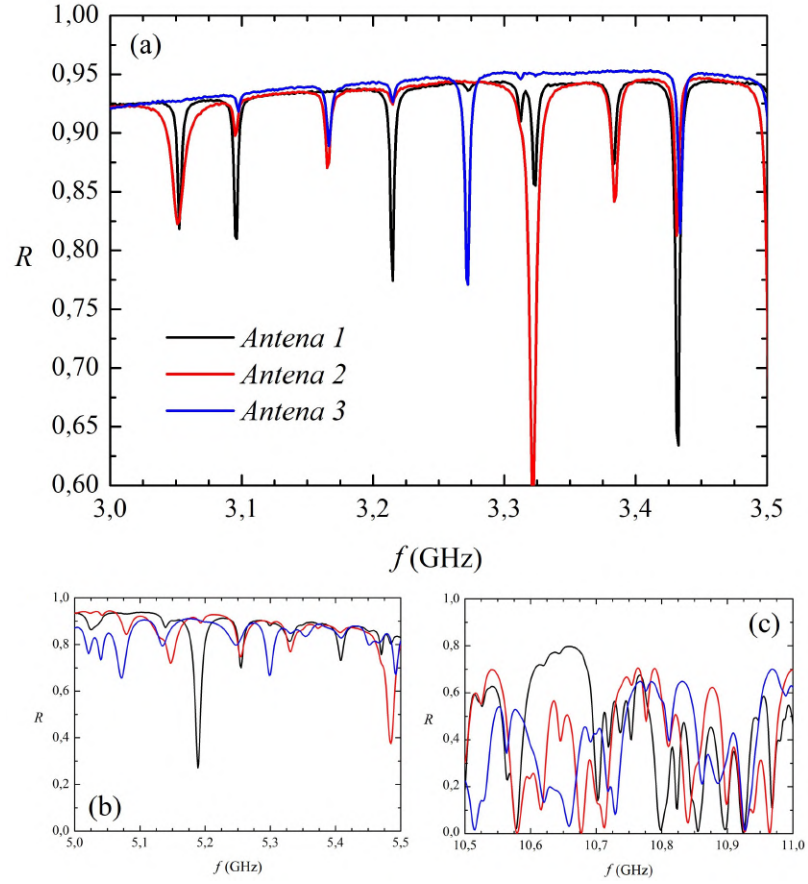


Figura 4.27: (a) As linhas sólidas são espectros $R(f)$ medidos em três diferentes posições da antena no triângulo irracional. (b) e (c), espectros $R(f)$ em frequências altas.

Espaçamento de primeiros vizinhos

Na coluna à esquerda da figura 4.28, estão os $P(s)$'s para os espectros das antenas citadas acima, onde a curva em vermelho é a distribuição do GOE (equação (3.15)) e a curva em azul é a distribuição de Poisson (equação (3.14)). Uma média destas 3 distribuições é mostrada na figura 4.28(d). Assim como no retângulo, os números de ressonâncias detectadas por cada posição da antena, são $\sim 2/3$ da quantidade que é calculada numericamente no intervalo de 3–10 GHz, o $P(s)$ para este caso é mostrado na figura 4.28(e). Mesmo com um baixo número de ressonâncias que se encontram

próximas ao estado fundamental, as distribuições já exibem o caráter esperado para o regime semiclássico (GOE). Na figura 4.28(f), temos como resultado do cálculo numérico [40], o $P(s)$ com 145×10^3 autovalores acima dos primeiros 5×10^3 .

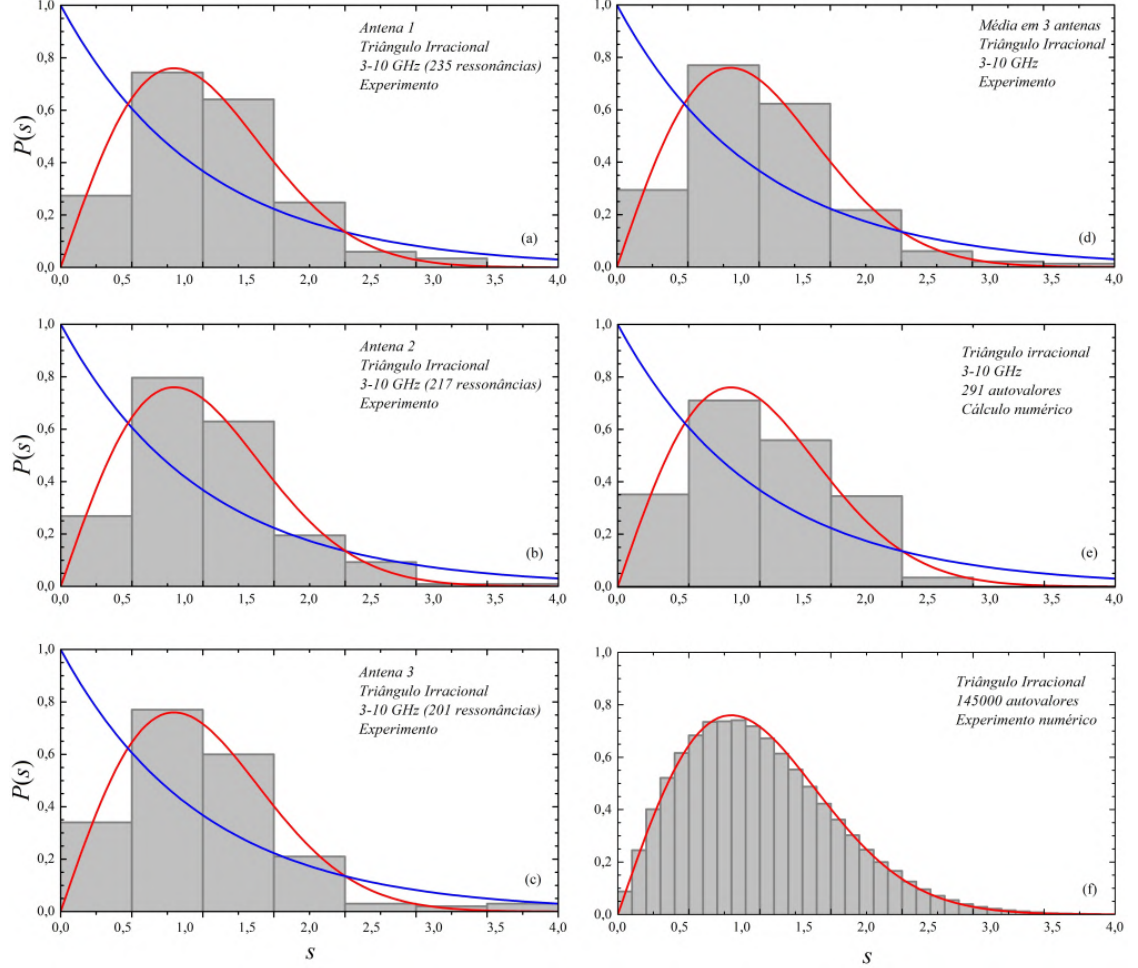


Figura 4.28: A curvas sólidas em vermelho e azul são as distribuições do GOE e Poisson, respectivamente. (a), (b) e (c): $P(s)$ de espectros de diferentes posições da antena no triângulo irracional. (d) $P(s)$ médio das antenas citadas. (e) $P(s)$ numérico de auto-energias calculadas na mesma faixa de frequência das distribuições experimentais. (f) $P(s)$ numérico realizado com 145×10^3 auto-energias acima das 5 mil primeiras.

Intensidade

Assim como realizado para a cavidade retangular, iremos comparar a intensidade de um modo ressonante calculado numericamente, com as medições no bilhar de micro-ondas. O modo escolhido corresponde ao vigésimo estado excitado, 3,284 GHz, o qual foi calculado pelo método de elemento finito, e a maior frequência medida na cavidade tem o valor 3,270 GHz, que é verificada quando a esfera que perturba o sistema, passa por uma linha nodal da onda correspondente a este modo. A figura 4.29 exhibe em (a) o modo calculado numericamente, e em (b) a intensidade na cavidade. Mesmo com a baixa resolução da medição experimental, observamos um bom acordo visual com (a).

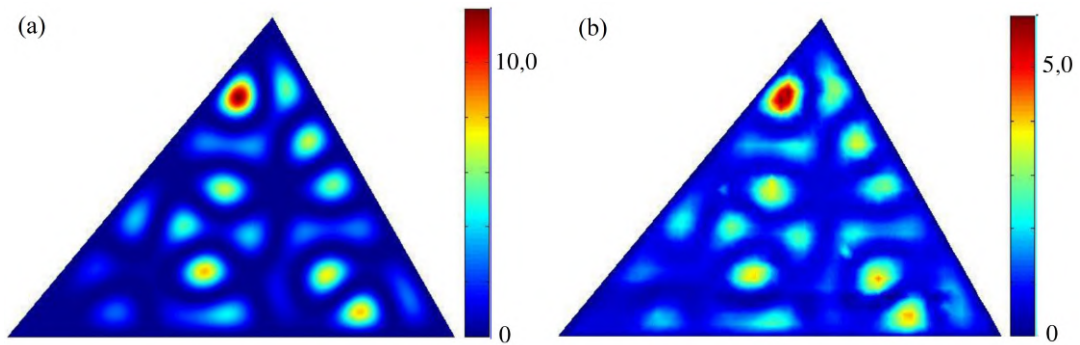


Figura 4.29: Intensidades calculadas (a) e medidas (b) do 29 ° estado excitado no triângulo irracional. Para o resultado experimental, a antena foi posicionada em um máximo próximo ao centróide.

A seguir, iremos analisar as distribuições destas intensidades. Embora este triângulo irracional seja classificado como *fortemente misturador* do ponto de vista clássico, a conjectura de Porter-Thomas pode ser utilizada aqui, já que para este bilhar, as flutuações espectrais comportam-se similarmente aos bilhares caóticos quantizados. A figura 4.29(a) é formada por 413799 pontos no domínio, e a distribuição desta intensidade é mostrada na figura 4.30(a), onde verificamos um bom acordo com a

conjectura para o caso caótico, e o pequeno desvio deve-se ao fato de não ser um modo bem espalhado, o qual é uma condição da teoria. A medição experimental foi realizada em 1037 pontos espalhados pelo domínio, ou seja, em 1037 posições deslocamos uma pequena esfera contida na cavidade e gravamos a intensidade do campo a essa perturbação. A distribuição $P(I)$ é mostrada na figura 4.30(b), onde observamos um desvio da curva de Porter-Thomas. Como no caso do retângulo, a baixa resolução espacial impede a realização de uma estatística mais robusta.

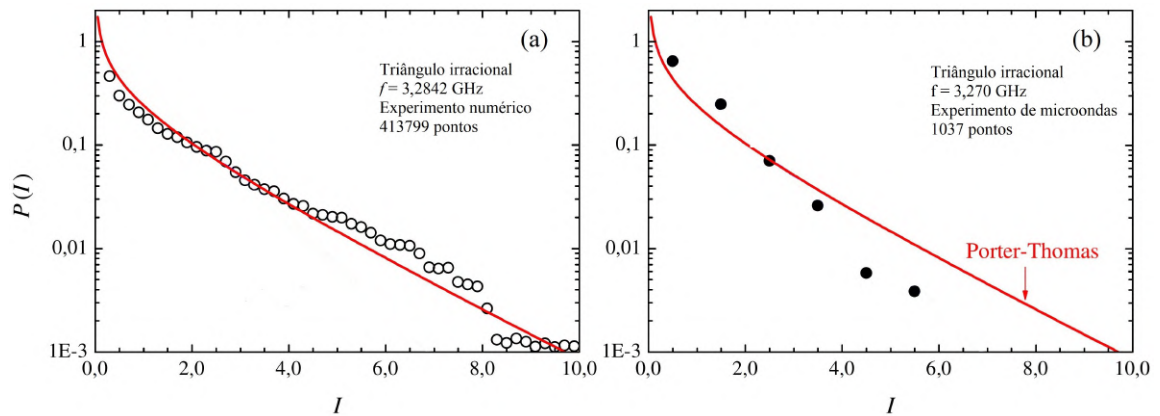


Figura 4.30: Símbolos: Distribuições das intensidades calculadas (a) e medidas (b) para o triângulo irracional. A linha sólida vermelha é a distribuição de Porter-Thomas.

4.5.3 Triângulo equilátero

Espaçamento de primeiros vizinhos

O terceiro bilhar poligonal utilizado em nossos experimentos, foi o triângulo equilátero de lado 48 cm, como ilustrado na figura 4.4(b). Com estas dimensões, a frequência do estado fundamental tem valor de 0,4164 GHz e 1113 ressonâncias estão presentes na faixa de 2 – 18 GHz. Na figura 4.31(a) e (b) são mostrados espectros para uma posição arbitrária da antena, e em (c), tem-se $P(s)$ com apenas 116 ressonâncias detectadas no intervalo de 3 – 10 GHz, onde se constata um bom acordo com a curva do GOE. Os níveis de energia para esta geometria foram calculados em [84], os quais podem ser escritos em termos de k^2 como

$$k^2 = \frac{16\pi^2}{9}(m^2 + n^2 - mn), \quad (4.24)$$

onde percebe-se que essa expressão permite a existência de degenerescências, de modo que a distribuição de espaçamento espectral depende fortemente da faixa de energia considerada. Para melhor compreensão do resultado da figura 4.31(c), calculamos uma série de autovalores a partir da equação (4.24), e selecionamos os primeiros 500 pontos da série, de maneira que os estados degenerados fossem contabilizados apenas uma vez. Este procedimento de ignorar as degenerescências busca reproduzir a falta de resolução da cavidade que não consegue detectá-las. O $P(s)$ para este caso numérico é mostrado na figura 4.31(d), o qual se assemelha a aquele da medição experimental.

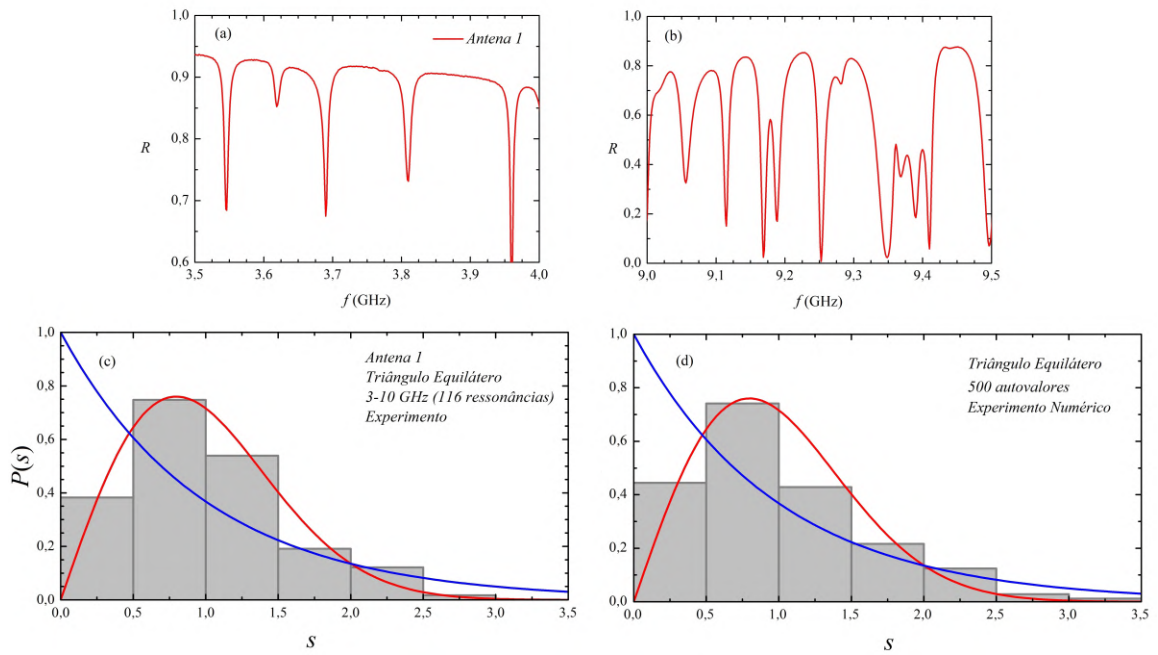


Figura 4.31: (a) e (b) espectros $R(f)$ da mesma antena em diferentes faixas de frequência no triângulo equilátero. (c) $P(s)$ experimental de uma única antena. As curvas em vermelho e azul são as distribuições do GOE e Poisson, respectivamente. (d) $P(s)$ numérico com os primeiros 500 autovalores.

Intensidade

Ao realizar numericamente a estatística da distribuição da intensidade de um modo ressonante, observa-se como esperado, o truncamento de $P(I)$ para um bilhar integrável. O modo ressonante de números quânticos $(m, n) = (8, 10)$ é mostrado na figura 4.32(a), o qual apresenta frequência de ressonância associada de 3,8162 GHz. A distribuição da intensidade para este caso é mostrado na imagem ao lado, onde observamos o truncamento em $I \sim 5$ e também o seu desvio em relação à conjectura de Porter-Thomas para o caso caótico.

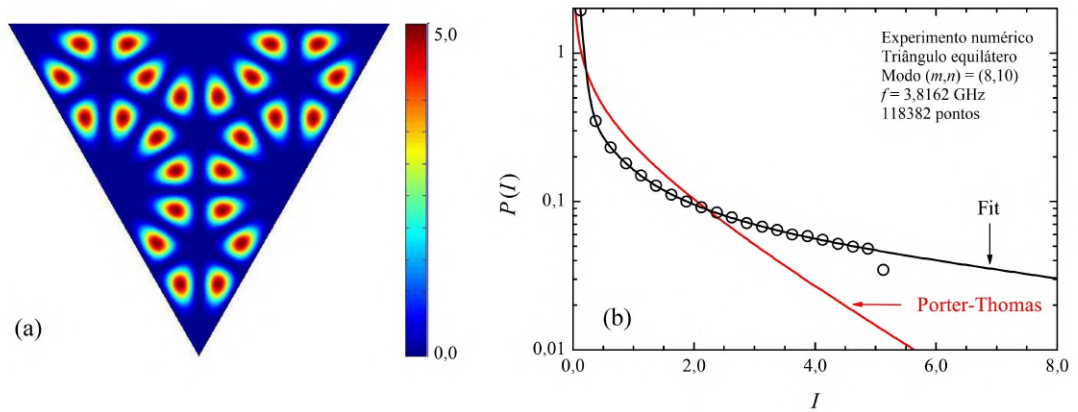


Figura 4.32: (a) Intensidade calculada no 52 ° estado excitado no triângulo equilátero. (b) Símbolos são o $P(I)$ calculado. O comportamento não universal da distribuição de intensidade no triângulo equilátero (integrável) é ajustado com uma combinação linear de exponenciais decrescentes (linha sólida preta).

4.5.4 Bilhar de Sinai

As imagens na figura 4.33 exibem espectros de uma antena posicionada no bilhar de Sinai que fora utilizado nesta tese. De forma análoga às cavidades poligonais, observa-se o alargamento das ressonâncias à medida que os valores de f aumentam, também há diferentes acoplamentos dos modos com a antena.

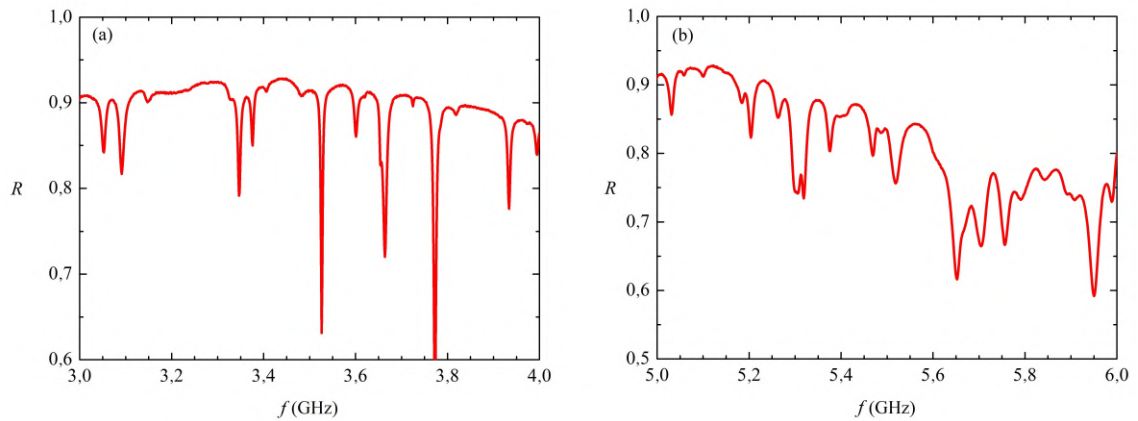


Figura 4.33: (a) e (b) espectros $R(f)$ da mesma antena em diferentes faixas de frequência no bilhar de Sinai.

A distribuição de espaçamento espectral não nos traz nada de novo para esta geometria, onde por ser um bilhar caótico já estudado em espalhamento de micro-ondas [9], o mesmo nos auxiliou a fim de comparar com os resultados já conhecidos e para interpretação dos experimentos em geometrias poligonais, como vimos neste capítulo.

Com a intenção de mostrar que nosso experimento numérico foi realizado com boa acurácia para o caso da distribuição da intensidade em bilhares poligonais, mostramos na figura 4.34(a) o modo ressonante do 163^o estado excitado do bilhar de Sinai, o qual corresponde a frequência $f = 6,7706$ GHz. A distribuição de intensidade desta onda é exibida na figura 4.34(b), onde verifica-se a boa concordância com a conjectura para o caso de um bilhar caótico.

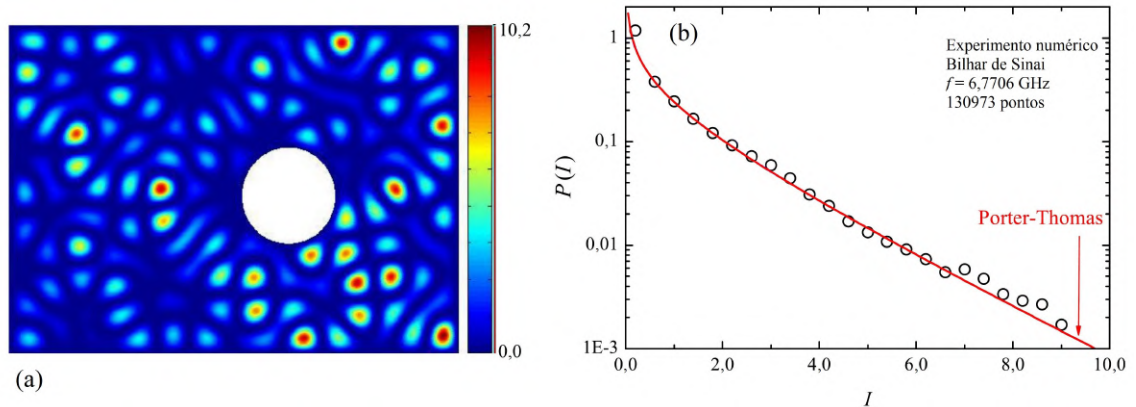


Figura 4.34: (a) Intensidade calculada no 163^o estado excitado no bilhar de Sinai. (b) Símbolos são o $P(I)$ calculado. O modo estendido no bilhar de Sinai (caótico) segue a distribuição universal de Porter-Thomas.

Com o que fora mostrado até aqui neste capítulo, a combinação de fatores como *shifts* de ressonâncias, acoplamento ruim entre modos ressonantes e antena, e principalmente o fato de frequências muito próximas não serem distinguíveis, há indícios de que as propriedades estatísticas do processo de espalhamento por um canal sejam

independentes da distribuição de níveis espectrais para cavidades com absorção. Esta independência das propriedades espectrais do bilhar ocorre quando se considera o limite ideal do caso sem perdas. Como já mencionado, a abordagem proposta em [71], o qual parte do ensemble analítico-ergódico de matrizes $S = e^{i\theta}$, obtém uma expressão para a distribuição de fase (equação (4.16)) que é independente se as distribuições de espaçamento são do tipo Poisson ou GOE. Nos nossos experimentos, mesmo com as pequenas perdas em baixas frequências, utilizamos a expressão citada acima para ajustar os dados das distribuições de fase para as diferentes cavidades, e observamos um bom acordo como mostrado na figura 4.18. Como também já citado, o modelo de ondas aleatórias proposto na referência [67] prevê que as flutuações de impedância do caso sem perdas, serão as mesmas para distribuições de espaçamento do tipo Poisson ou GOE. O regime em que há maiores níveis de absorção, devem ser analisados com mais detalhes.

Como já mencionado, devemos questionar se a montagem experimental poderia inserir elementos caóticos que comprometeriam a interpretação das distribuições medidas. Como exemplo tem-se a possibilidade de a antena atuar como um centro espalhador, de modo que o contorno do bilhar seja efetivamente mudado, em especial para altas frequências, se o comprimento de onda torna-se comparável ao tamanho da antena. Do apêndice D, temos que os menores comprimentos de onda em nossos experimentos são maiores do que 16 mm, enquanto que a antena tem um diâmetro de apenas 0,94 mm. E além disso, como já indicado, não há acoplamento se a antena é colocada sobre uma linha nodal de um particular modo ressonante. Geralmente realizam-se médias das quantidades medidas para evitar esses problemas, e assim a posição da antena é variada com esse propósito. Além do que, não é possível contar

o número correto de modos a pequenas distâncias, por conta do nível de absorção da cavidade. Para o caso das estatísticas de impedância normalizadas, como o acoplamento da antena não é levado em conta, salientamos que a absorção sozinha pode ser a causadora da falsa evidência.

As medições realizadas para ambas as matrizes S e z se deram em intervalos de frequência relativamente curtos, isto é, $0,5 \text{ GHz} \leq \Delta f \leq 2,0 \text{ GHz}$. Para uma medição de uma distribuição de espalhamento, este intervalo é aceitável. Embora, dada as limitações do experimento, como já exposto, o Δf pode não ser suficientemente representativo para uma distinção entre o espectro correlacionado e o descorrelacionado. Para discutir esses possíveis problemas, medições adicionais foram realizadas para 3 alturas diferentes da antena, as quais são $h = 1,0, 4,1$ e $6,0 \text{ mm}$, e em duas temperaturas, 77 e 293 K .

4.5.5 Medidas em baixas temperaturas

Como já comentado neste capítulo, um pequeno objeto metálico colocado em uma posição $\vec{\rho}$ dentro da cavidade, causa uma perturbação no espectro da cavidade através de *shifts* de frequências [64]. Quando este objeto tem a forma de uma agulha, o *shift* é aproximadamente proporcional ao quadrado do campo elétrico na posição $\vec{\rho}$, e além disso, este efeito é pequeno se a agulha é perpendicular ao campo. Nas imagens à direita da figura 4.35 é mostrado esquematicamente o perfil da antena de monopolo de altura h , a qual penetra em uma cavidade de profundidade d . Em (a), tem-se o espectro ruidoso do retângulo no intervalo de 5,0-5,5 GHz obtido através da menor antena ($h = 1,0$ mm), que tem como objetivo minimizar o efeito da perturbação. Já em (b), quando a antena tem tamanho $h = 4,1$ mm, há um melhor acoplamento com o campo elétrico naquela posição, o que causa um aumento na razão sinal-ruído. Vale destacar que os dois espectros apresentados parecem ser estatisticamente equivalentes ao considerar a distribuição de espaçamento. Os círculos sólidos em (b) são as frequências de ressonância calculadas através da equação (4.22), onde apenas metade dessas são observadas nos experimentos físicos nesta faixa de frequência, e que são obtidas por uma posição particular da antena. Por fim, na figura 4.35(c) é mostrado o caso de quando a antena toca a placa superior da cavidade ($h = d$), onde somente nesta situação que há possibilidade de considerar o bilhar com um centro espalhador. Observa-se que o espectro para este caso apresenta grandes desvios no nível de absorção e nas posições das ressonâncias.

Em experimentos com cavidades supercondutoras constatou-se como a absorção tem um papel fundamental para a detecção de ressonâncias em pequenas distâncias. Para melhor entendimento deste fenômeno e sua relação com o processo de espalha-

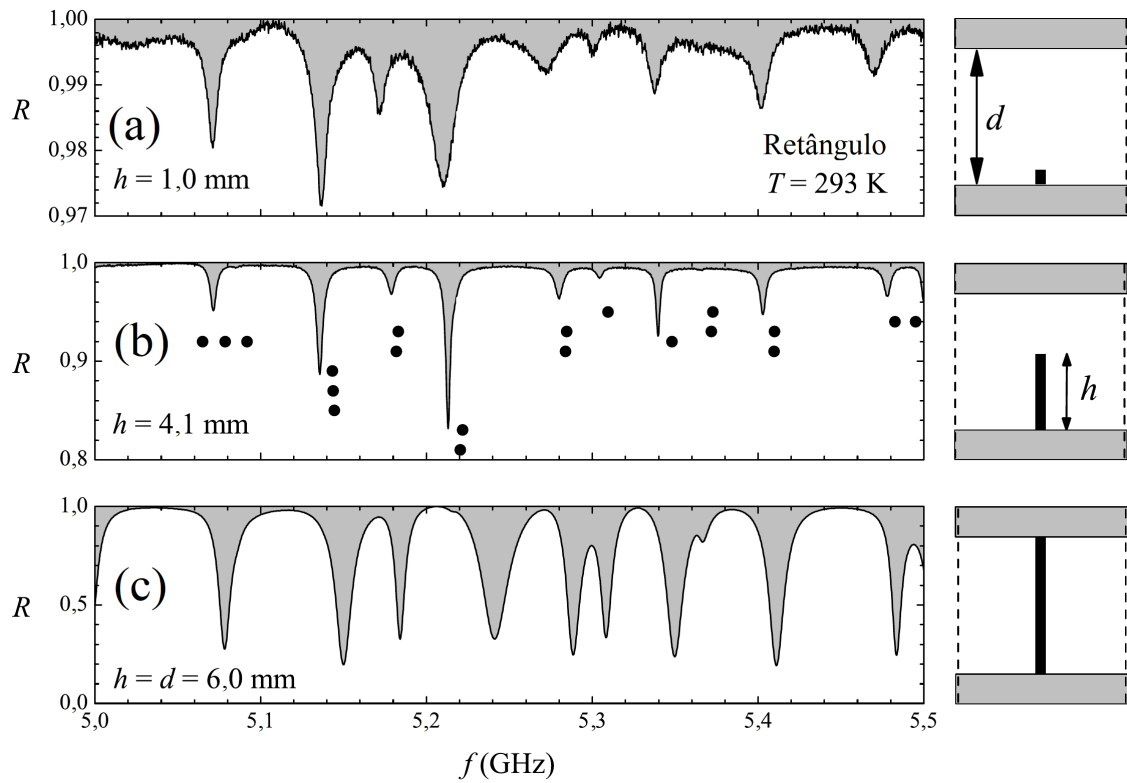


Figura 4.35: Painéis à esquerda: coeficiente de reflexão medido no retângulo na faixa de frequência de 5,0-5,5 GHz em temperatura ambiente. Painéis à direita: perfil das placas superior e inferior da cavidade com profundidade d e com tamanho da antena h . Para todas as cavidades, $d = 6,0$ mm. Os valores de h para as três antenas são indicados nos painéis correspondentes à direita. Os círculos sólidos em (b) indicam as posições das ressonâncias calculadas exatamente.

mento, realizamos medições com uma cavidade imersa em uma caixa de isopor com nitrogênio. Para este caso, as placas superior e inferior da cavidade tinham tamanhos iguais e estavam presas entre si por parafusos, e este sistema foi mecanicamente isolado do nitrogênio líquido através de uma fina partição, embora não evacuado. Este processo de resfriamento alcançou a estabilização térmica após algumas horas. Com a diminuição da temperatura de 293 K (ambiente) para 77 K, a resistência superficial no cobre cai por um fator de 3 ou 4. Consequentemente há um ganho no fator de qualidade da cavidade, o que pode nos elucidar sobre a questão de ressonâncias muito

próximas. Na figura 4.36 são mostrados os espectros para as duas temperaturas analisadas em medições com as duas menores antenas citadas acima. As antenas foram colocadas uma por vez na mesma posição $((x, y) = (10 \text{ cm}, 7 \text{ cm}))$, com a origem em um dos cantos. Para $h = 1,0 \text{ mm}$, o aparecimento de ressonâncias próximas são claramente observadas no espectro a 77 K (figura 4.36(d)). Já quando a antena utilizada é a de altura $h = 4,1 \text{ mm}$, observa-se que o espectro em baixa temperatura exibe um número bem maior de ressonâncias se comparado com o caso medido em temperatura ambiente (figura 4.36(a)). A medição em 77 K com a antena maior, é mostrada na figura 4.36(b), também como as ressonâncias exatas representadas por círculos pretos.

Mostra-se abaixo como essas mudanças podem afetar a distribuição de espaçamento no retângulo. Na figura 4.37, tem-se 3 distribuições de espaçamentos obtidos a partir de uma mesma posição da antena, onde no mesmo intervalo de frequências (5-10 GHz) essas medições foram realizadas. Para melhor averiguar o desvio dos dados às curvas de Poisson e GOE, o eixo vertical das imagens fora colocado em escala logarítmica. Em (a), está o $P(s)$ em temperatura ambiente e para $h = 4,1 \text{ mm}$, onde apenas 148 ressonâncias são observadas, o que distoa das 303 que são calculadas exatamente para este intervalo. Observa-se que as medições para este caso não se aproximam da distribuição de Poisson. Em (b), quando há a diminuição da temperatura com a mesma antena, o número de ressonâncias aumenta para 285, no entanto, devido a maioria dos grandes *shifts* de frequências no surgimento dos multipletos, a medida não é tão próxima do resultado teórico. Em (c), tem-se o $P(s)$ para o caso em baixa temperatura e $h = 1,0 \text{ mm}$, onde apenas 188 ressonâncias foram detectadas. Mesmo assim, a tendência para a distribuição de Poisson é mais evidente agora, e é confirmada pelas

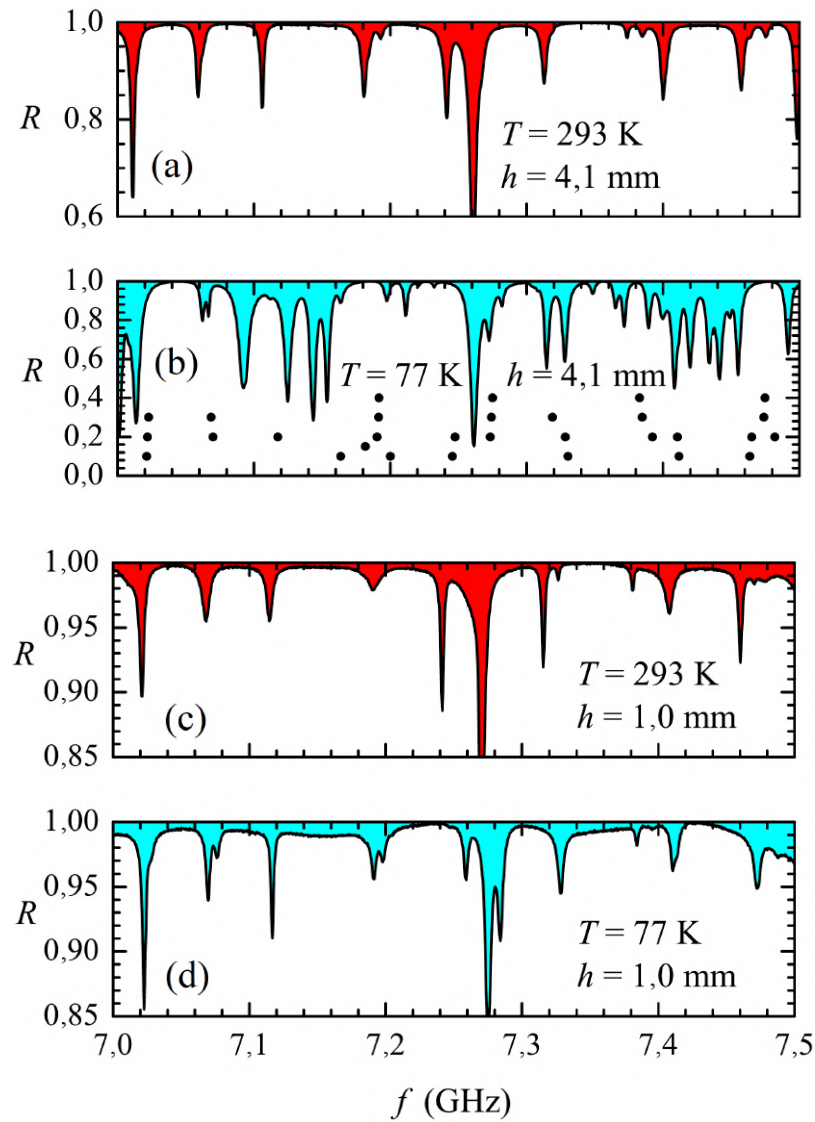


Figura 4.36: Coeficiente de reflexão medido no retângulo na faixa de frequência de 7,0-7,5 GHz, para as antenas com $h = 1,0$ e $h = 4,1$ mm em temperaturas $T = 293$ K e 77 K, como indicado no painel. Os círculos sólidos em (b) indicam as posições das ressonâncias exatamente calculadas.

funções de espaçamentos cumulativos mostradas na figura 4.38. Experimentos realizados em cavidades supercondutoras com antenas de tamanho abaixo de $h \approx 0,5$ mm [79], [85] e [86], conseguiram de fato observar a distribuição de Poisson em geometrias integráveis. Já em temperatura ambiente, a absorção causa a aparente repulsão de

níveis, e foi associado na época com a pseudo-integrabilidade de um bilhar com centro espalhador [74].

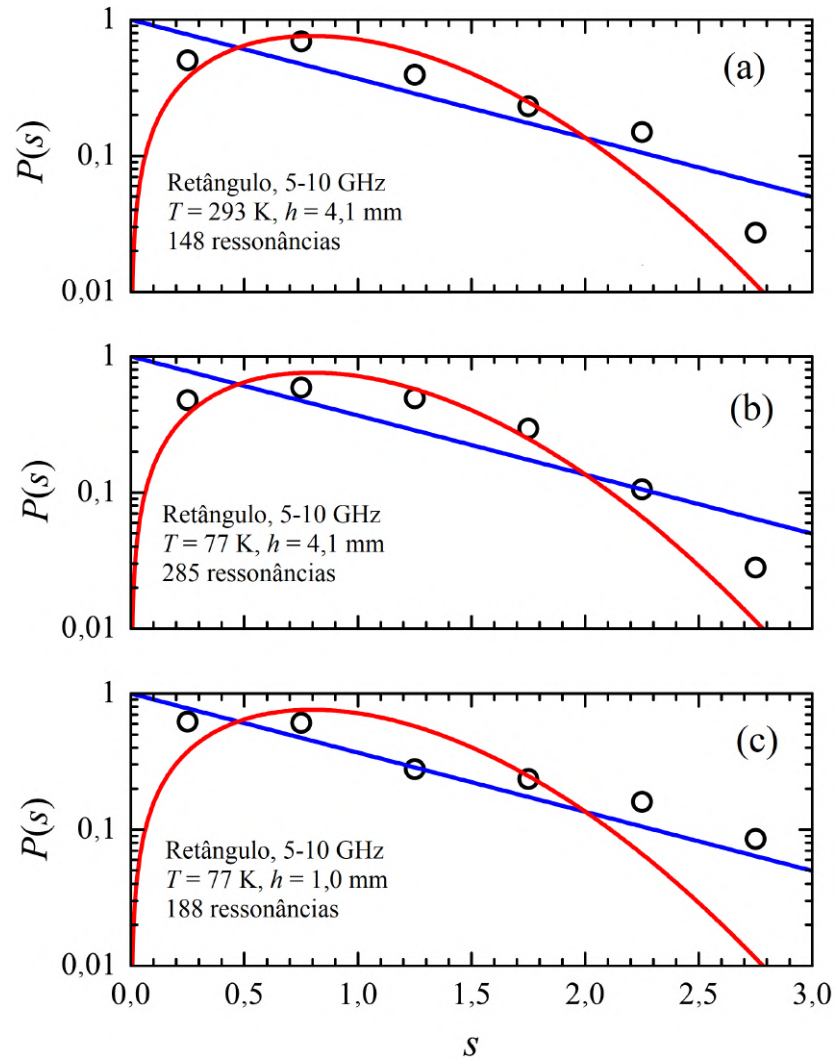


Figura 4.37: Símbolos: distribuição de espaçamento de vizinhos mais próximos medido no retângulo no intervalo de frequência 5-10 GHz, para os valores indicados da altura da antena h e temperatura T .

Por fim, a figura 4.39 apresenta distribuições dos coeficientes de reflexão para uma única posição da antena e em duas temperaturas distintas. Em (a) tem-se as distribuições para $h = 4,1$ mm, e em (b) o caso para $h = 1,0$ mm, onde nota-se que

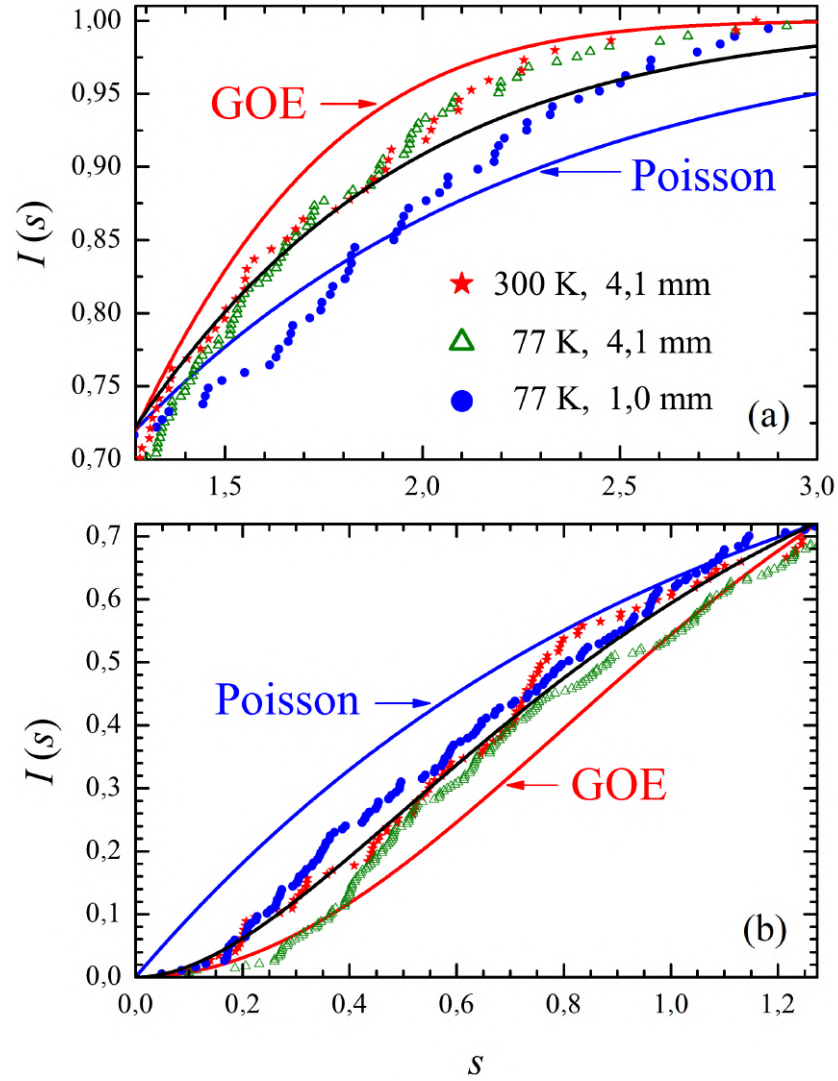


Figura 4.38: Símbolos: funções de espaçamento cumulativas medidas no retângulo com os valores indicados de temperatura e altura da antena. Linha sólida azul (vermelha) é o resultado teórico de Poisson e GOE. A linha sólida preta é um plote da função semi-Poisson $I_{SM} = 1 - [(1 + 2s) \exp(-2s)]$, para comparação.

todos os dados puderam ser ajustados novamente com a equação (4.12). Observa-se que não há diferença significativa nas distribuições com a antena menor, mesmo com o aparecimento de mais ressonâncias para o caso de baixa temperatura, as quais não são resolvidas à temperatura ambiente.

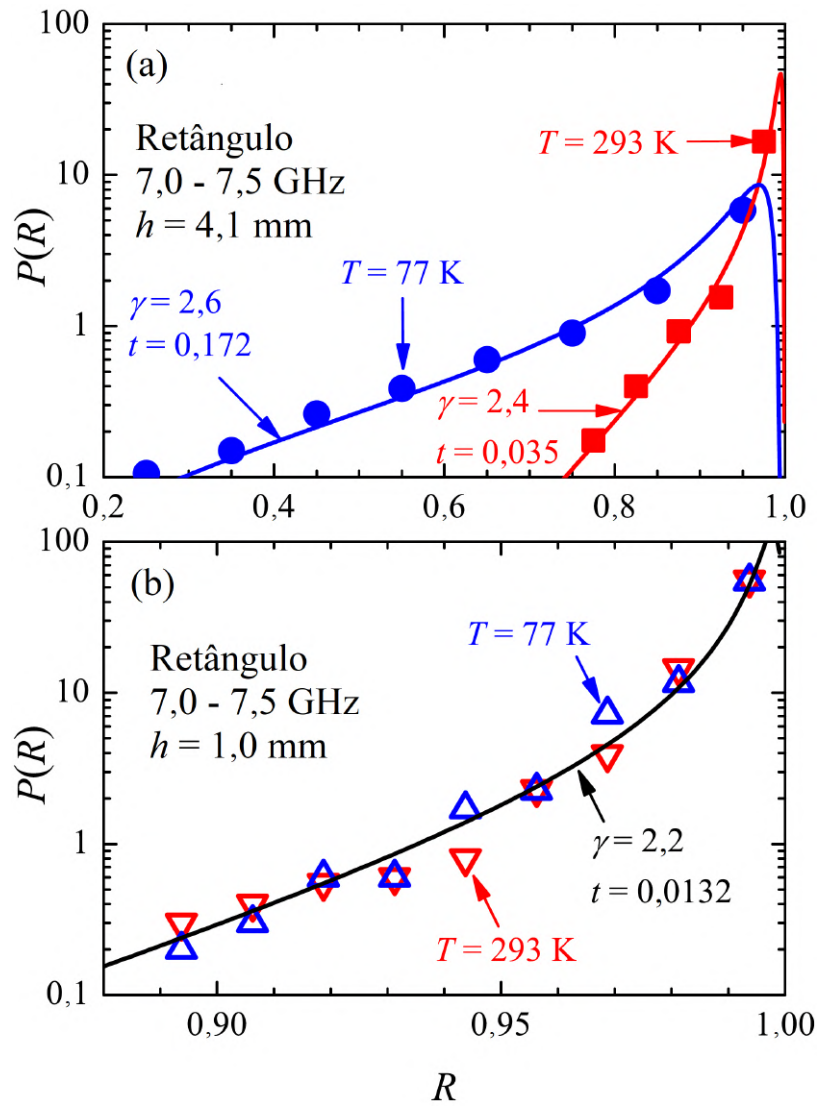


Figura 4.39: (a) Distribuição da medida do coeficiente de reflexão no intervalo de 7-7,5 GHz para a antena com $h = 4,1$ mm à temperatura de $T = 77$ K (círculos azuis) e $T = 293$ K (quadrados vermelhos). Linhas são ajustes com a equação (4.12) para os valores indicados de parâmetros γ (absorção) e t (acoplamento). (b): O mesmo como em (a), para a antena com $h = 1,0$ mm.

No apêndice E se encontram as informações técnicas sobre a montagem e execução dos experimentos de micro-ondas em cavidades de cobre.

5 Conclusões e perspectivas

Nesta tese realizamos experimentos numéricos e físicos em sistemas dinâmicos dissipativos e conservativos, nos quais propriedades clássicas e quânticas foram investigadas. No Capítulo 2, apresentamos estudos em cinco sistemas tridimensionais dissipativos que compartilham em espaços biparamétricos a existência de centros de periodicidade (CPs) (*“periodicity hubs”*). Dentro da precisão numérica dos experimentos, mapas de retorno discretos quase unidimensionais foram obtidos a partir de máximos locais nas oscilações não lineares em cada CP. Renormalizados ao intervalo $[0, 1]$, todos os mapas exibiram uma densidade invariante em forma de “U”, embora os mapas tenham formatos diferentes. Mostramos que as densidades podem ser ajustadas satisfatoriamente com uma combinação linear das distribuições beta e de Kumaraswamy. No caso do sistema de Rössler, fizemos também uma simulação analógica com circuito eletrônico, em excelente acordo com a integração numérica via Runge-Kutta. Procuramos também CPs em modelo de dois modos de ondas de spin (magnons) interagentes, sem sucesso dentro da janela de tempo dedicada ao assunto. Dado o número de parâmetros (~ 10) nesse sistema, é possível que CPs estejam lá para serem descobertos, com apelo de eventualmente serem observados em experimentos de ressonância ferromagnética de alta potência em isolantes magnéticos, por exemplo. Uma conexão dos fenômenos estudados com outras bifurcações de co-

dimensão-2 [Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, J. Guckenheimer and P. Holmes, Springer (1983)] poderia ser investigada em estudos futuros. Sistemas conservativos fechados (bilhares) com simetria $C3$ foram investigados numericamente e resultados preliminares apresentados no Capítulo 3. Introduzimos uma família de triângulos equiláteros com cantos arredondados por duas elipses e mapeamos a ergodicidade de seus espaços de fase clássicos através da chamada medida relativa em uma seção de Poincaré. Tal espaço de fase pode exibir uma transição suave entre os casos integrável e caótico. Na quantização desses bilhares, introduzimos um esquema para ajuste das distribuições de espaçamento entre primeiros vizinhos $P(s)$ em todos os estágios da transição clássica. Com funções base adequadas, utilizamos um método de fronteira para separar singletos e dubletos nos espectros. Em regime caótico, confirmamos a conjectura de Leyvraz, Seligman e Smith de que dubletos seguem o ensemble gaussiano unitário (GUE), apesar do sistema possuir a simetria de reversão temporal. Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos uma grande coleção de dados experimentais para as estatísticas de espalhamento de uma porta em bilhares de micro-ondas com geometrias diversas, três poligonais (não caóticos) e uma classicamente caótica (bilhar de Sinai). Foram medidas as distribuições $P(R)$ (coeficiente de reflexão), $P(\theta)$ (fase da matriz- S), $P(z_R)$ (resistência normalizada) e $P(z_I)$ (reatância normalizada), em vários níveis de absorção e acoplamento. Verificamos que nossos experimentos de espalhamento em temperatura ambiente são incapazes de distinguir uma geometria da outra. O papel desempenhado pelo aparato experimental foi discutido com base em experimentos adicionais em 77 K e para duas antenas diferentes. Por um lado, os resultados são globalmente consistentes com previsões teóricas existentes na literatura para o caso sem perdas. A possibilidade da não dis-

tinção entre espalhamento caótico e não caótico para um nível de absorção arbitrário é intrigante e desafiadora para ambos teoria e experimentos. Esperamos que cenários esclarecedores apareçam em futuro próximo. De nossa parte, gostaríamos de realizar, em particular, experimentos com duas portas, para investigar experimentalmente as distribuições das componentes não diagonais das matrizes S e z .

Referências

- [1] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry*. Perseus Publishing, 2001.
- [3] H.-J. Stöckmann, “Quantum chaos: An introduction,” 2000.
- [4] R. B. d. CARMO, “Um mapa discreto unidimensional para o sistema de Rössler,” Master’s thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2015.
- [5] K. Schaadt, *The quantum chaology of acoustic resonators*. Citeseer, 1997.
- [6] H.-J. Stöckmann and J. Stein, ““quantum” chaos in billiards studied by microwave absorption,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 19, p. 2215, 1990.
- [7] F. Leyvraz, C. Schmit, and T. Seligman, “Anomalous spectral statistics in asymmetrical billiard,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 29, no. 22, p. L575, 1996.
- [8] R. do Carmo and F. de Aguiar, “Experimental microwave scattering in polygonal billiards,” *Scientific Reports*, vol. 9, no. 1, p. 3634, 2019.
- [9] R. Méndez-Sánchez, U. Kuhl, M. Barth, C. Lewenkopf, and H.-J. Stöckmann, “Distribution of reflection coefficients in absorbing chaotic microwave cavities,” *Physical Review Letters*, vol. 91, no. 17, p. 174102, 2003.
- [10] U. Kuhl, M. Martínez-Mares, R. Méndez-Sánchez, and H.-J. Stöckmann, “Direct processes in chaotic microwave cavities in the presence of absorption,” *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 14, p. 144101, 2005.
- [11] S. Hemmady, X. Zheng, E. Ott, T. M. Antonsen, and S. M. Anlage, “Universal impedance fluctuations in wave chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 1, p. 014102, 2005.
- [12] D. Ruelle and F. Takens, “On the nature of turbulence,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 20, no. 3, pp. 167–192, 1971.
- [13] C. Bonatto and J. A. Gallas, “Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit,” *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 5, p. 054101, 2008.
- [14] M. A. Nascimento, H. Varela, and J. A. Gallas, “Periodicity hubs and spirals in an electrochemical oscillator,” *Journal of Solid State Electrochemistry*, vol. 19, no. 11, pp. 3287–3296, 2015.

- [15] P. Kumaraswamy, “A generalized probability density function for double bounded random processes,” *Journal of Hydrology*, vol. 46, no. 1-2, pp. 79–88, 1980.
- [16] M. Jones, “Kumaraswamy’s distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages,” *Statistical Methodology*, vol. 6, no. 1, pp. 70–81, 2009.
- [17] O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos,” *Physics Letters A*, vol. 57, no. 5, pp. 397–398, 1976.
- [18] R. Vitolo, P. Glendinning, and J. A. Gallas, “Global structure of periodicity hubs in lyapunov phase diagrams of dissipative flows,” *Physical Review E*, vol. 84, no. 1, p. 016216, 2011.
- [19] R. Barrio, F. Blesa, S. Serrano, and A. Shilnikov, “Global organization of spiral structures in biparameter space of dissipative systems with shilnikov saddle-foci,” *Physical Review E*, vol. 84, no. 3, p. 035201, 2011.
- [20] L. I. Dublin and A. J. Lotka, “On the true rate of natural increase: As exemplified by the population of the united states, 1920,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 20, no. 151, pp. 305–339, 1925.
- [21] V. Volterra, “Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically,” 1926.
- [22] M. L. Rosenzweig and R. H. MacArthur, “Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions,” *The American Naturalist*, vol. 97, no. 895, pp. 209–223, 1963.
- [23] Y. A. Kuznetsov, O. De Feo, and S. Rinaldi, “Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 62, no. 2, pp. 462–487, 2001.
- [24] K. Al-Naimee, F. Marino, M. Ciszak, R. Meucci, and F. T. Arecchi, “Chaotic spiking and incomplete homoclinic scenarios in semiconductor lasers with optoelectronic feedback,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 7, p. 073022, 2009.
- [25] J. G. Freire and J. A. Gallas, “Non-shilnikov cascades of spikes and hubs in a semiconductor laser with optoelectronic feedback,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 3, p. 037202, 2010.
- [26] P. Gaspard and G. Nicolis, “What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 31, no. 3, pp. 499–518, 1983.
- [27] P. Gaspard, R. Kapral, and G. Nicolis, “Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 35, no. 56, pp. 697–727, 1984.
- [28] P. Glendinning and C. Sparrow, “Local and global behavior near homoclinic orbits,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 35, no. 5-6, pp. 645–696, 1984.

- [29] J. A. Gallas, “The structure of infinite periodic and chaotic hub cascades in phase diagrams of simple autonomous flows,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, no. 2, pp. 197–211, 2010.
- [30] Y. Nishio, N. Inaba, S. Mori, and T. Saito, “Rigorous analyses of windows in a symmetric circuit,” in *Circuits and Systems*, 1989., IEEE International Symposium on, pp. 2151–2154, IEEE, 1989.
- [31] R. Stoop, P. Benner, and Y. Uwate, “Real-world existence and origins of the spiral organization of shrimp-shaped domains,” *Physical Review Letters*, vol. 105, no. 7, p. 074102, 2010.
- [32] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillator systems,” *Physics Reports*, vol. 52, no. 5, pp. 263–379, 1979.
- [33] N. Chernov and R. Markarian, *Chaotic billiards*. No. 127, American Mathematical Soc., 2006.
- [34] Y. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections,” *Russian Mathematical Surveys*, vol. 25, no. 2, pp. 137–189, 1970.
- [35] L. Bunimovic, “On billiards close to dispersing,” *Sbornik: Mathematics*, vol. 23, no. 1, pp. 45–67, 1974.
- [36] L. A. Bunimovich, “On ergodic properties of certain billiards,” *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 8, no. 3, pp. 254–255, 1974.
- [37] L. A. Bunimovich, “On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 65, no. 3, pp. 295–312, 1979.
- [38] G. Casati and T. Prosen, “Mixing property of triangular billiards,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 23, p. 4729, 1999.
- [39] F. De Aguiar, “Quantum properties of irrational triangular billiards,” *Physical Review E*, vol. 77, no. 3, p. 036201, 2008.
- [40] T. A. Lima, S. Rodríguez-Pérez, and F. de Aguiar, “Ergodicity and quantum correlations in irrational triangular billiards,” *Physical Review E*, vol. 87, no. 6, p. 062902, 2013.
- [41] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 2013.
- [42] D. de Menezes, M. Jar e Silva, and F. de Aguiar, “Numerical experiments on quantum chaotic billiards,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 17, no. 2, p. 023116, 2007.
- [43] E. Vergini and M. Saraceno, “Calculation by scaling of highly excited states of billiards,” *Physical Review E*, vol. 52, no. 3, p. 2204, 1995.

- [44] T. A. d. P. Lima, “Bilhares triangulares irracionais e estádios elípticos: Mixing, caos e quantização,” 2017.
- [45] H. G. Schuster and W. Just, *Deterministic chaos: An introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [46] M.-V. Berry, “Mv berry and m. tabor, proc. r. soc. london, ser. a 356, 375 (1977).,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 356, p. 375, 1977.
- [47] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, “Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories,” *Physical Review Letters*, vol. 42, no. 18, p. 1189, 1979.
- [48] M. V. Berry, “Semiclassical mechanics of regular and irregular motion,” *Les Houches Lecture Series*, vol. 36, pp. 171–271, 1983.
- [49] O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmit, “Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws,” *Physical Review Letters*, vol. 52, no. 1, p. 1, 1984.
- [50] M. L. Mehta, *Random matrices*, vol. 142. Elsevier, 2004.
- [51] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. Mello, A. Pandey, and S. S. Wong, “Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 53, no. 3, p. 385, 1981.
- [52] M. V. Berry and M. Robnik, “Semiclassical level spacings when regular and chaotic orbits coexist,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 17, no. 12, p. 2413, 1984.
- [53] E. J. Heller, “Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: scars of periodic orbits,” *Physical Review Letters*, vol. 53, no. 16, p. 1515, 1984.
- [54] Z. Rudnick and P. Sarnak, “The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 161, no. 1, pp. 195–213, 1994.
- [55] K. Müller, B. Mehlig, F. Milde, and M. Schreiber, “Statistics of wave functions in disordered and in classically chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 2, p. 215, 1997.
- [56] A. Kudrolli, V. Kidambi, and S. Sridhar, “Experimental studies of chaos and localization in quantum wave functions,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 5, p. 822, 1995.
- [57] H. Alt, H.-D. Gräf, H. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schardt, and H. Weidenmüller, “Gaussian orthogonal ensemble statistics in a microwave stadium billiard with chaotic dynamics: Porter-thomas distribution and algebraic decay of time correlations,” *Physical Review Letters*, vol. 74, no. 1, p. 62, 1995.

- [58] C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Gräf, A. Heine, F. Leyvraz, M. Miski-Oglu, A. Richter, and T. Seligman, “Phase shift experiments identifying kramers doublets in a chaotic superconducting microwave billiard of threefold symmetry,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 1, p. 014102, 2003.
- [59] M. Robnik, J. Dobnikar, A. Rapisarda, T. Prosen, and M. Petkovsek, “New universal aspects of diffusion in strongly chaotic systems,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 30, no. 23, p. L803, 1997.
- [60] M. C. Gutzwiller, “Nobel Symposium Quantum Chaos y2k,” *Physica Scripta*, vol. T90, pp. 13–14, jan 2001.
- [61] H. Stöckmann, “Why do an experiment, if theory is exact, and any experiment can at,” in *Quantum Chaos Y2K: Proceedings of Nobel Symposium 116, B ckaskog Castle, Sweden, June 13-17, 2000*, vol. 90, pp. 246–247, World Scientific, 2001.
- [62] C. W. Beenakker, “Random-matrix theory of quantum transport,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 69, no. 3, p. 731, 1997.
- [63] H. Weidenmüller and G. Mitchell, “Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 2, p. 539, 2009.
- [64] L. C. Maier Jr and J. Slater, “Field strength measurements in resonant cavities,” *Journal of Applied Physics*, vol. 23, no. 1, pp. 68–77, 1952.
- [65] G. E. Mitchell, A. Richter, and H. A. Weidenmüller, “Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear reactions,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 4, p. 2845, 2010.
- [66] E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, “Experimental demonstration of chaotic scattering of microwaves,” *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 25, p. 3072, 1990.
- [67] X. Zheng, T. M. Antonsen, and E. Ott, “Statistics of impedance and scattering matrices in chaotic microwave cavities: Single channel case,” *Electromagnetics*, vol. 26, no. 1, pp. 3–35, 2006.
- [68] U. Kuhl, H. Stöckmann, and R. Weaver, “Classical wave experiments on chaotic scattering,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, no. 49, p. 10433, 2005.
- [69] G. Casati, B. Chirikov, and I. Guarneri, “Energy-level statistics of integrable quantum systems,” *Physical Review Letters*, vol. 54, no. 13, p. 1350, 1985.
- [70] E. Kogan, P. A. Mello, and H. Liqun, “Wave scattering through classically chaotic cavities in the presence of absorption: an information-theoretic model,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 1, p. R17, 2000.

- [71] G. López, P. Mello, and T. Seligman, “The statistical distribution of the s -matrix in the one-channel case,” *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei*, vol. 302, no. 4, pp. 351–354, 1981.
- [72] Y. V. Fyodorov and D. V. Savin, “Statistics of impedance, local density of states, and reflection in quantum chaotic systems with absorption,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 80, no. 12, pp. 725–729, 2004.
- [73] P. Seba, “Wave chaos in singular quantum billiard,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 16, p. 1855, 1990.
- [74] F. Haake, G. Lenz, P. Seba, J. Stein, H.-J. Stöckmann, and K. Zyczkowski, “Manifestation of wave chaos in pseudointegrable microwave resonators,” *Physical Review A*, vol. 44, no. 10, p. R6161, 1991.
- [75] S. Sridhar, D. Hogenboom, and B. A. Willemsen, “Microwave experiments on chaotic billiards,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 68, no. 1-2, pp. 239–258, 1992.
- [76] T. Tudorovskiy, R. Höhmann, U. Kuhl, and H. Stöckmann, “On the theory of cavities with point-like perturbations: part i. general theory,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, no. 27, p. 275101, 2008.
- [77] T. Tudorovskiy, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann, “Singular statistics revised,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 12, p. 123021, 2010.
- [78] T. Tudorovskiy, U. Kuhl, and H. Stöckmann, “On the theory of cavities with point-like perturbations: part ii. rectangular cavities,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 44, no. 13, p. 135101, 2011.
- [79] A. Richter, “Wave dynamical chaos: an experimental approach in billiards,” in *Quantum Chaos Y2K*, pp. 212–222, World Scientific, 2001.
- [80] B. Dietz and A. Richter, “Quantum and wave dynamical chaos in superconducting microwave billiards,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 25, no. 9, p. 097601, 2015.
- [81] A. Kudrolli, S. Sridhar, A. Pandey, and R. Ramaswamy, “Signatures of chaos in quantum billiards: Microwave experiments,” *Physical Review E*, vol. 49, no. 1, p. R11, 1994.
- [82] S. Sridhar and A. Kudrolli, “Experiments on not “hearing the shape” of drums,” *Physical Review Letters*, vol. 72, no. 14, p. 2175, 1994.
- [83] S. Sridhar, “Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities,” *Physical Review Letters*, vol. 67, no. 7, p. 785, 1991.
- [84] P. Richens and M. Berry, “Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 2, no. 3, pp. 495–512, 1981.

- [85] A. Richter, “On some spectral properties of billiards and nuclei-similarities and differences,” *Physica Scripta*, vol. 2006, no. T125, p. 167, 2006.
- [86] B. Dietz, T. Klaus, M. Miski-Oglu, and A. Richter, “Spectral properties of superconducting microwave photonic crystals modeling dirac billiards,” *Physical Review B*, vol. 91, no. 3, p. 035411, 2015.
- [87] “<http://www.glensstuff.com/rosslerattractor/rossler.htm>,”

Apêndice A - Circuito eletrônico - sistema de Rössler

A implementação do circuito eletrônico realizado nesta tese que integra as equações do atrator de Rössler se baseou na montagem da referência [87]. Enquanto o atrator de Rössler é prontamente simulado com técnicas de computação digital iterativas e discretas em uma área de trabalho moderna, usando pacotes de software como o MATLAB, ele também pode ser simulado com hardware eletrônico, de acordo com um conceito bem conhecido; o da computação analógica contínua. Um análogo elétrico completo do atrator de Rössler, conforme descrito pelas três equações diferenciais (equação (2.11)), pode ser implementado com uma interconexão de apenas três blocos de construção de circuito distintos, básicos e comuns; ou seja, o amplificador somador, o integrador e o multiplicador analógico. Este último tem o papel de multiplicar duas diferentes tensões, onde para o caso estudado é a não linearidade zx das equações do sistema de Rössler. Abaixo está um esquema do circuito montado em nosso laboratório.

As soluções estacionárias de x , y e z contínuas no tempo foram obtidas dentro da faixa de operação linear dos amplificadores operacionais e do único chip multiplicador

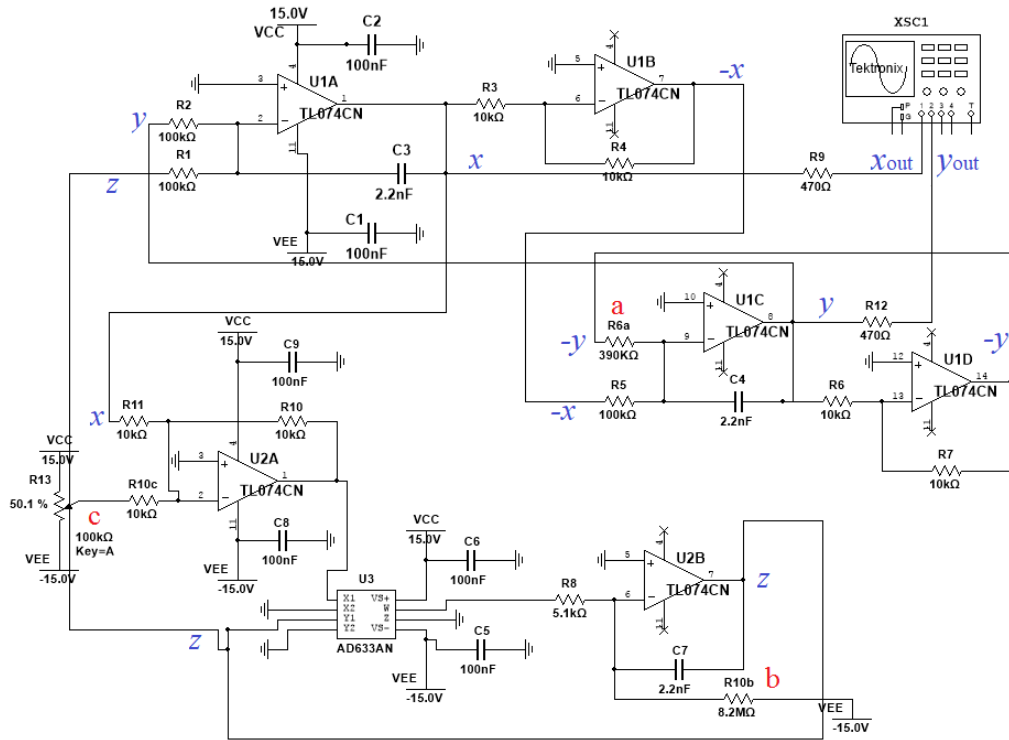
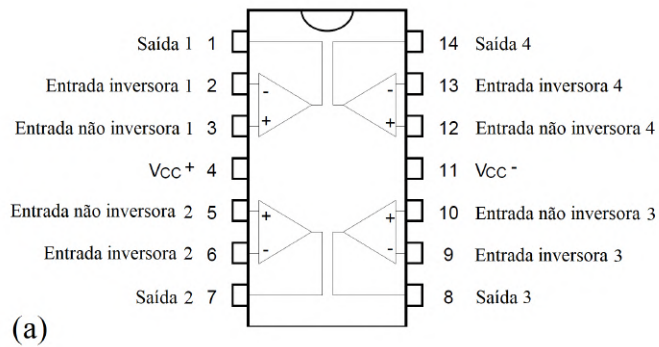


Figura A.1: Esquema do circuito eletrônico que integra as equações do sistema de Rössler. Indicados pela cor vermelha, os valores dos parâmetros a , b e c são dados pelos resistores R6a, R10b e R13 (potenciômetro), respectivamente.

análogo em fontes de alimentação de $\pm 15\text{V}$. Utilizando resistores de valor padrão, os valores de coeficientes a e b foram ajustados o mais próximo possível dos valores que localizam o centro de periodicidade discutido no capítulo 2, enquanto o coeficiente c é variado pelo usuário por meio de um potenciômetro. Como vimos, pudemos encontrar numericamente os valores dos parâmetros que localizavam um CP para o sistema de Rössler, desse modo, a fim de comparação, o cálculo analógico foi realizado em um valor do potenciômetro que permitiu a aproximação em até duas casas decimais do valor $c_c = 10,57060$ encontrado no experimento numérico. A figura A.2 ilustra a distribuição e função dos pinos no amplificador operacional e chip multiplicador utilizados na montagem do circuito.

AMP OP - TL074CN



Chip multiplicador - AD633AN

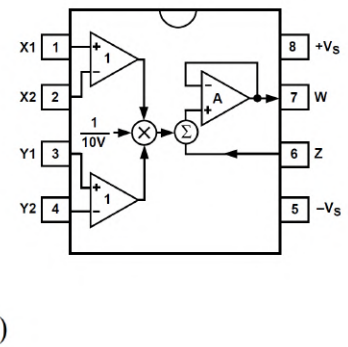


Figura A.2: (a) amplificador operacional (amp op) de modelo TL074CN. Aos pinos 4 e 11 é conectada uma fonte de tensão simétrica. (b) Chip multiplicador de modelo AD633AN. Os pinos 1 e 3 são responsáveis em multiplicar as tensões x e z .

Apêndice B - Parâmetro de acoplamento t : teórico $\times$ experimental

Tabela B.1: Comparação entre o valor do parâmetro de acoplamento t extraído de ajustes simultâneos de $P(R)$ e $P(\theta)$, e aqueles obtidos independentemente dos valores medidos de $1 - \langle R \rangle$. O número de diferentes posições da antena utilizado nas médias foram 80, 40 e 82, respectivamente, para o retângulo, o triângulo irracional e o triângulo equilátero.

Bilhar	Faixa de frequência (GHz)	Acoplamento t	Medido $1 - \langle R \rangle$	$t/(1 - \langle R \rangle)$
Ret.	17,0-18,0	0,920	0,74	1,24
T. I.	15,8-16,8	0,983	0,84	1,17
T. E.	15,7-16,7	0,950	0,84	1,13
Ret.	2,6-3,6	0,016	0,0164	0,98
T. I.	4,0-4,5	0,045	0,0213	2,11
T. E.	2,8-3,8	0,020	0,0160	1,25

Apêndice C - Parâmetros da função de ajuste para z_R

Tabela C.1: Parâmetros de ajustes das curvas identificadas por η nos painéis à direita das figuras 2.20, 2.21, 2.22 e 2.23. T. I. = Triângulo irracional, T. E. = Triângulo equilátero.

Bilhar	η	A_C	x_1	w	B	k_2	x_2	k_3	x_3	A_S	x_c	w_1	w_2	w_3
Ret.	0,72	0,35	0,33	0,03	1,11	4,65	0,96	0,90	0,86	3,93	0,49	0,54	0,05	0,16
Ret.	0,24	0,96	1,19	0,02	2,41	8,54	0,62	6,73	1,04	1,86	0,97	0,39	0,06	0,22
T. I.	0,72	0,39	0,41	0,01	1,24	4,42	0,93	1,13	0,98	3,81	0,51	0,56	0,03	0,14
T. I.	0,29	0,62	1,24	0,05	7,80	9,74	0,71	5,11	0,96	1,29	1,05	0,31	0,05	0,08
T. E.	0,62	0,81	0,28	0,003	1,01	21,9	0,75	1,44	0,87	3,36	0,53	0,40	0,03	0,04
T. E.	0,18	1,08	0,97	0,002	5,70	10,9	0,80	6,21	1,06	1,89	1,13	0,30	0,09	0,15
Sinai	0,68	0,15	0,48	0,009	17,5	1,68	1,46	2,57	0,82	4,61	0,80	0,45	0,05	0,16
Sinai	0,12	1,98	0,74	0,006	3,79	34,4	0,85	4,05	0,99	1,72	0,97	0,39	0,02	0,10

Apêndice D - Modos ressonantes das cavidades de micro-ondas

Tabela D.1: Parâmetros calculados dos bilhares experimentalmente investigados nesta tese: f_1 é a frequência do estado fundamental, f_m (f_M) é a menor (Maior) auto-frequência no intervalo de 2-18 GHz acessado nos experimentos, λ_m (λ_M) é o correspondente comprimento de onda, N_m (N_M) é o número de modos ressonantes abaixo de 2 GHz (18 GHz), e $\Delta N = N_M - N_m$.

Bilhar	f_1 (GHz)	f_L (GHz)	f_H (GHz)	λ_L (cm)	λ_H (cm)	N_L	N_H	ΔN
Retângulo	0,6331	2,0996	17,9998	14,2785	1,6655	12	1306	1294
Triângulo Equilátero	0,4164	2,0819	17,9912	14,4000	1,6663	14	1127	1113
Triângulo Irracional	0,7411	2,0327	17,9972	14,7484	1,6658	9	1048	1039
Sinai	0,8342	2,0821	17,9992	14,3987	1,6656	10	1220	1210

Apêndice E - Métodos experimentais

Nossas cavidades são compostas de duas placas de cobre polido que são separadas por barras de largura de 6,0 mm, as quais definem a geometria planar. Para a excitação da cavidade, usamos uma antena de sonda de linha coaxial padrão, consistindo de um conector SMA fêmea de dois furos com terminal de copo de solda banhado a ouro, com um diâmetro externo de 1,22 mm (Fairview Microwave, modelo SC7486). Um pequeno pedaço de fio de 0,94 mm de diâmetro é soldado no terminal do copo para que o condutor interno do conector coaxial seja estendido a uma altura total de 4,1 mm na cavidade, perpendicularmente à placa inferior muito maior ($1200 \times 600 \times 2 \text{ mm}^3$), que repousa sobre o plano xy de uma mesa de madeira grossa. Um buraco foi perfurado na mesa, para que a antena, fixada no centro da placa inferior, pudesse ser alcançada por um cabo coaxial flexível vindo de baixo. As paredes da cavidade e a placa de Cu superior são fixadas por um peso (60 kg) uniformemente distribuído no topo da estrutura, definindo assim a posição da antena em relação às paredes laterais. A radiação de entrada é acoplada ao campo elétrico dos modos de ressonância da cavidade, que são bidimensionais para frequências abaixo de 25 GHz.

As matrizes complexas S e z foram medidas em dezenas de diferentes posições de antena em cada bilhar, com um analisador vetorial (Anritsu, modelo 37247D VNA, 40 MHz - 20 GHz) na faixa de frequência de 2-18 GHz, dividido em 8 intervalos de 2 GHz. Cada medição (2-4 GHz, 4-6 GHz, 6-8 GHz, 8-10 GHz, 10-12 GHz, 12-14 GHz, 14-16 GHz e 16-18 GHz) foi gravada com um intervalo de discretização de 1,25 MHz e devidamente calibrados com dispositivos de precisão (Kit de calibração Anritsu N, modelo 3653, que inclui as cargas Curta (Anritsu, modelo 23N50), Aberta (Anritsu, modelo 24N50) e de Terminação ($50\ \Omega$, Anritsu, modelo 28N50-2)). A antena de monopolo e o VNA são conectados através de um cabo coaxial tipo N flexível (Anritsu, modelo 3670N-2) e um adaptador coaxial N fêmea-SMA macho (Fairview Microwave, modelo SM4265). Os absorvedores de micro-ondas utilizados nos experimentos são um material de espuma de poliuretano flexível leve (Emerson & Cuming Microwave Products, ECCOSORB LS-26 / SS-3 (0,8-18 GHz)), mantido no lugar por um adesivo sensível à pressão. Os dados foram gravados em um computador desktop através de uma interface GPIB-USB-HS da National Instruments. Uma visão geral do aparato experimental é mostrado na fotografia abaixo.

Para as medidas das flutuações da matriz- S no regime de baixa absorção ($f < 5$ GHz), os trabalhos [9], [10] realizaram a subtração do *background* gerado pela conexão do cabo coaxial com o VNA. Seguimos o mesmo procedimento para todas as cavidades, onde de cada espectro uma função senoidal foi subtraída, enquanto a fase, a ela foi subtraída uma reta. Assim, as flutuações com $\langle R \rangle \approx 1$ e da fase poderiam ser tratadas com a equação (4.12). A figura E.2 ilustra o procedimento de retirada do *background* para uma posição arbitrária da antena no bilhar retangular.



Figura E.1: Fotografia do aparato experimental para as medidas de espalhamento. A placa superior e paredes da cavidade do triângulo irracional são erguidas, expondo as três fitas pretas dos absorvedores de micro-ondas.

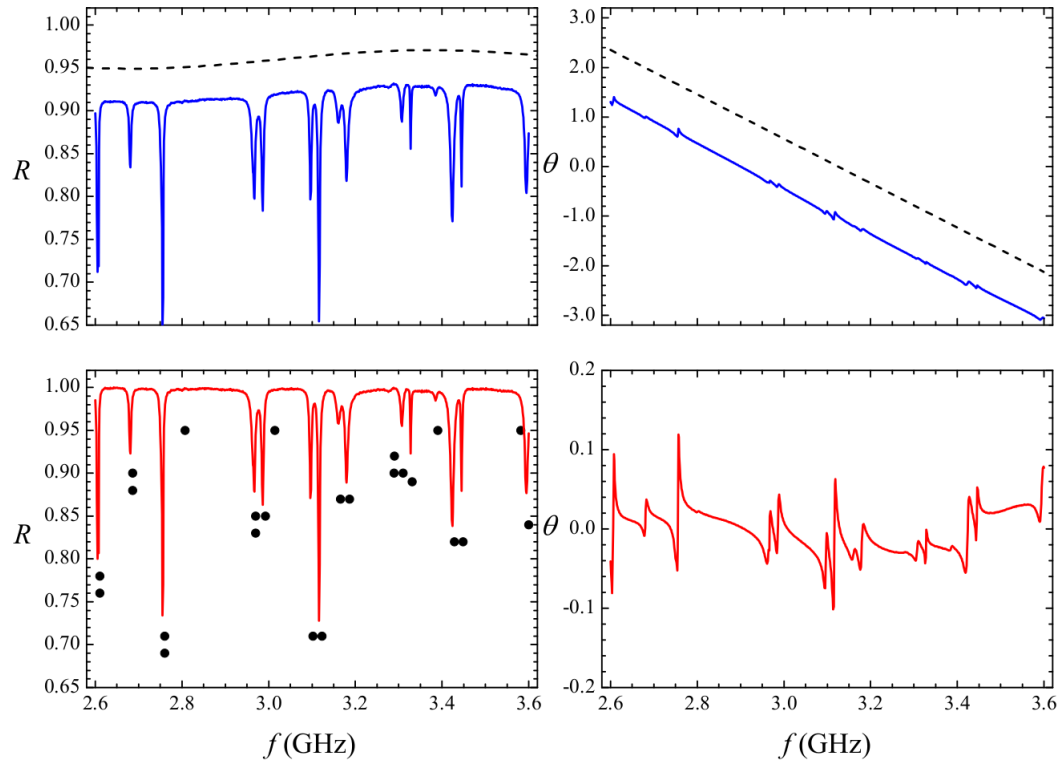


Figura E.2: Subtração de *backgrounds* em baixas frequências de micro-ondas para a medição do coeficiente de reflexão R (painéis à esquerda) e fase θ da matriz S (painéis à direita), para uma única posição da antena no retângulo. Painéis superiores: Linhas azuis sólidas: Sinais medidos. Linhas pretas tracejadas: *backgrounds* deslocados para cima, senoidal para R , linear para θ . Painéis inferiores: Linhas sólidas vermelhas: sinais medidos subtraídos pelo *background* correspondente. Os pontos pretos no painel esquerdo inferior indicam as ressonâncias calculadas.

Apêndice F - Artigo: Experimental Microwave Scattering in Polygonal Billiards

SCIENTIFIC REPORTS 

OPEN

Experimental Microwave Scattering in Polygonal Billiards

R. B. do Carmo & F. M. de Aguiar

Received: 26 March 2018

Accepted: 7 February 2019

Published online: 06 March 2019

Fluctuations in the one-port scattering and normalized impedance matrices in three polygonal and one chaotic time-reversal invariant microwave billiards are experimentally investigated, in several levels of coupling and absorption, at room temperature and at 77 K. The observed distributions of reflection coefficient, phase of the scattering matrix, resistance and reactance exhibit no fingerprint of a given geometry. At low frequencies, the results are consistent with earlier theoretical models by López, Mello and Seligman and by Zheng, Antonsen and Ott, who independently predicted that the scattering fluctuations might be the same for the Wigner and Poisson level spacing distributions in the lossless cavity. The uniqueness of the observed scattering statistics at higher absorption levels is discussed with respect to inherent limitations posed by the experimental technique.

Figura F.1: Capa do artigo publicado na Scientific Reports referente aos estudos de espalhamento de micro-ondas de uma porta em cavidades de cobre poligonais.