



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

LÚCIA DE FÁTIMA DURÃO FERREIRA

**UM ESTUDO SOBRE A TRANSIÇÃO DO 5º ANO PARA O 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro**

Recife
2018

LÚCIA DE FÁTIMA DURÃO FERREIRA

**UM ESTUDO SOBRE A TRANSIÇÃO DO 5º ANO PARA O 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife
2018

LÚCIA DE FÁTIMA DURÃO FERREIRA

**UM ESTUDO SOBRE A TRANSIÇÃO DO 5º ANO PARA O 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 27/11/2018

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
(Orientadora e Presidente da Banca) / UFPE

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa) / UFMS

Profa. Dra. Marlene Alves Dias (Examinadora Externa) / UNIBAN-SP

Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima
(Examinadora Externa) / UFRPE

Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles
(Examinadora Interna) / UFPE

Dedico esta tese
a meus pais, Lourdes Veloso e Gilvan Durão (*in memoriam*),
a Walter, Leonardo e Laura.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por ter me dado forças e saúde e colocado pessoas ao meu lado nessa caminhada.

À minha família, sempre apoiando as minhas decisões: Walter, sempre ao meu lado, a escutar meus questionamentos sobre as teorias estudadas, a ler e dar sugestões nos meus escritos, acompanhado de muitos cafezinhos; minha filha, Lalá, com seu cuidado e sua dedicação, ensinando-me a cada dia; e meu filho, Leo, mesmo distante, sempre me dando forças para continuar.

À minha mãe, que esteve fisicamente ao meu lado durante um ano desta caminhada, e continua a me guiar em pensamento.

À minha orientadora e amiga, Profa. Dra. Paula M. Baltar Bellemain, por ter aceitado esta tarefa mais uma vez, pelas conversas e orientações, sempre momentos de grande aprendizado; pelo incentivo para a minha participação em um período de estudos na França, o apoio e a escuta em todos os momentos, acadêmicos e pessoais.

Às professoras doutoras Anna Paula Brito, Marilena Bittar, Marlene Dias e Rosinalda Teles, por terem aceitado participar das bancas de qualificação e defesa e pelas valiosas contribuições.

Ao grupo de pesquisa Pró-grandezas, pelos encontros para estudos e discussões, regados de muita alegria, amizade e respeito.

Ao EDUMATEC, programa formado por pessoas sempre disponíveis a contribuir; ao Prof. Dr. Sérgio Abranches, eterno coordenador do programa, sempre com uma solução para nossos problemas; aos professores, em especial aos da linha de didática Profa. Dra. Iranete Lima, Prof. Dr. Marcelo Câmara, Prof. Dr. Paulo Figueiredo e Profa. Dra. Rosinalda Teles; aos funcionários, nas pessoas de Clara e Mário. E aos (re)encontros, ao longo desses quatro anos, com Aluska Macêdo, Jailson Cavalcante, Leonardo Moraes, Luciana Santos e Sônia Leitão.

À turma nº 1 do doutorado, pelas aprendizagens nas disciplinas cursadas, os debates e as sugestões em Seminários, nas pessoas de Aldinete Lima, Cristiane Rocha e Marcos Melo; as amigas “gamificadas” Dagmar Procrifka e Renata Araújo; e, em especial, ao meu “irmão gêmeo” Alexandre Barros, companheiro de jornada, teoria e mãe acadêmica.

Ao Colégio de Aplicação da UFPE, pela oportunidade e o apoio, e em especial aos amigos Abraão Araújo, Beatriz Silva, José Carlos Alves de Souza, Kátia Barreto, Marlon Melo, Marta Bibiano, Rogério Ignácio e Tarcísio Rocha. E às amigas irmãs Georgina Leal e Paulene Andrade.

Ao professor Dr. Alain Bronner, sempre disponível para viabilizar a minha estada na Université de Montpellier, na França.

À CAPES, pelo apoio e incentivo para participar do programa de doutorado sanduíche no exterior, sob a orientação do Prof. Dr. Alain Bronner e da Profa. Dra. Mirène Larguier, na Université de Montpellier, na França. À professora Dra. Lícia Maia, que fez a gentileza de nos ajudar ao trazer a documentação da França: sem ela, não teríamos conseguido a documentação a tempo.

Aos “brasileiros na França” Verônica Gitirana, Rosilângela Lucena, Rogério Ignácio, Cibelle Assis e Katiane Rocha, pelos momentos de estudo, conversas e caminhadas.

Ao Prof. Dr. Gérard Vergnaud, com suas valiosas contribuições durante uma reunião com doutorandos brasileiros, e a Profa. Dra. Tânia Mendonça Campos, organizadora desse encontro, meus agradecimentos.

A Anderson Silva, por ter disponibilizado seu tempo para colaborar no registro das observações de aulas durante o período em que estive no doutorado-sanduíche.

À Escola São Francisco e toda sua comunidade, por ter aberto suas portas para desenvolvermos nossa pesquisa; direção, coordenação, professores e funcionários, que cederam algumas horas dos seus tempos livres a atender nossas solicitações, sempre com gentileza; aos alunos e, em particular, aos professores, que permitiram a nossa presença em suas salas de aula.

Aos alunos, pela oportunidade de continuar a querer aprender.

“Não há transição que não implique um ponto de partida, um processo e um ponto de chegada. Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje. De modo que o nosso futuro baseia-se no passado e se corporifica no presente. Temos de saber o que fomos e o que somos, para sabermos o que seremos.”

Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa visou investigar fatores de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica relativos à transição entre a primeira e a segunda etapa do ensino fundamental e aos objetos de saber área e perímetro e sua possível influência sobre o modo como os alunos do 6º ano lidam com esses objetos. A fundamentação teórica está ancorada na abordagem do conceito de área como grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), na teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990), na teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999) e no conceito de retomada (LARGUIER, 2009). Para melhor compreensão do processo de transição, buscou-se responder a duas questões norteadoras: quais as dificuldades conceituais enfrentadas pelos alunos ao resolver situações relativas à área e ao perímetro na transição entre o 5º e o 6º anos do ensino fundamental? Que elementos ajudam a compreender as possíveis raízes dessas dificuldades? Estudo de caso, com abordagem qualitativa, a pesquisa foi desenvolvida na escola São Francisco, na cidade do Recife, e teve como participantes alunos que cursaram o 5º ano (2016), o 6º ano (2017) e o 7º ano (2018); diretoras, coordenadoras dos anos iniciais e dos anos finais; e professores de matemática das turmas de 5º ano (2016) e 6º ano (2017). Para responder às questões, três estudos foram elaborados. O primeiro consistiu na elaboração, aplicação e análise de uma sondagem, realizada com os alunos ao final do 5º ano, e um pós- teste, com esses mesmos alunos no início do 7º ano. A sondagem foi composta de seis atividades e o pós-teste com as mesmas questões da sondagem, acrescido de outras duas. Os resultados comparativos dos instrumentos diagnósticos mostraram que, mesmo tendo concluído o 6º ano, os alunos apresentam dificuldades relacionadas a situações que envolvem a decomposição de figuras, a impossibilidade do ladrilhamento de uma superfície com quantidade finita de superfícies unitárias e a dissociação entre área e de perímetro. O segundo estudo consistiu na análise dos livros didáticos de matemática adotados na escola, do 1º ao 6º ano do ensino fundamental, das observações de aulas, dos cadernos dos alunos e dos cadernos de planejamento dos professores de matemática. Esse estudo mostrou que as praxeologias ensinadas pelos professores se aproximam daquelas dos livros adotados e os tipos de tarefas predominantes são medir uma área e medir um perímetro. O terceiro estudo, a análise comparativa das instituições 5º ano e 6º ano com base na escala

de níveis de codeterminação, nos documentos oficiais e nas entrevistas, mostrou pressões internas e externas nos níveis da sociedade, escola e pedagogia, que contribuem para compreender rupturas e continuidades na transição entre o 5º e o 6º anos, relativas aos objetos de saber área e perímetro. Observamos na escola São Francisco um fenômeno que interpretamos como o conflito de paradigmas entre visita às obras e o questionamento do mundo.

Palavras-chave: Teoria antropológica do didático. Teoria dos campos conceituais. Grandezas geométricas. Retomada. Situações. Tipos de tarefas.

ABSTRACT

This research looked to investigate factors of epistemological, cognitive, didactic and pedagogical natures having to do with the transition between the first and second stages of elementary education, with the area and perimeter learning objects and with its possible influence over how 6th grade students deal with these objects. The theoretical basis of this study is based on the approach of the concept area as a greatness (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), on the conceptual field theory (VERGNAUD, 1990), on the anthropological theory of the didactic (CHEVALLARD, 1999), and on the concept of recall (LARGUIER, 2009). To better comprehend the transition process, the answer to two leading questions was sought: what are the conceptual difficulties faced by students when solving situations relative to area and perimeter in the transition between elementary education's grade 5 and grade 6? Which elements help comprehend the possible roots of these difficulties? Conducted as a case study, with a qualitative approach, the research was developed in São Francisco school, in the city of Recife, and included as participants students that were there in grade 5 (2016), grade 6 (2017) and grade 7 (2018); school's directors, coordinators of both initial and final years, and mathematics teachers of both grade 5 (2016) and grade 6 (2017). To answer our questions, three studies were conducted. The first consisted of the elaboration, application and analysis of a trial test and a post-test, performed with students at the end of grade 5, and with the same students in the beginning of grade 7, respectively. The trial test was composed by 6 exercises and the post-test contained the same exercises seen in the trial test, with two additional tasks. The comparative results of the diagnostic tools show that, even after finishing grade 6, the students show difficulties related to situations that were not study objects in previous years, such as the decomposition of figures, the impossibility to tile a surface with a finite number of unitary surfaces, and the dissociations between area and perimeter. The second study consisted on the analysis of mathematics textbooks used in the school, from grade 1 to grade 6 of elementary school, of classroom observations, of students' notes and from mathematics teachers' planning notes. This study showed that the praxeologies taught by teachers are similar to those shown in the textbooks used, and the predominant types of tasks are to measure an area and to measure a perimeter. The third study, the comparative analysis of the grade 5 and grade 6 institutions based on

the codetermination levels scale, on the official documents and on the interviews, shows internal and external pressures on the society, school and pedagogical levels, that contribute to comprehend ruptures and continuities on the transition between grade 5 and grade 6, relative to the knowledge objects area and perimeter. We observed on São Francisco school a phenomenon that we interpret as a paradigm conflict between the work visitation and world questioning.

Keywords: Anthropological theory of the didactic. Conceptual field theory. Geometric greatness. Recall. Situations. Type of tasks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Articulação entre quadros para as grandezas área e comprimento	40
Figura 2 – Figura P (esquerda) e figura P' (direita)	41
Figura 3 – Diferença entre superfície unitária e unidade de área.....	43
Figura 4 – Comparação de duas figuras de mesma área.....	61
Figura 5 – Classes de situações para as grandezas área e comprimento	63
Figura 6 – Escala de níveis de codeterminação	69
Figura 7 – Exemplo de tipo de tarefas T_{CC}	81
Figura 8 – Exemplo de tipo de tarefas T_{MP}	82
Figura 9 – Exemplo de tipo de tarefas T_{EA}	83
Figura 10 – Exemplo de tipo de tarefa T_{PA}	83
Figura 11 – Exemplo de tipo de tarefa T_{MUC}	83
Figura 12 – Exemplo de tipo de tarefa T_{GA}	84
Figura 13 – Exemplo de tipo de tarefa T_{TA}	85
Figura 14 – Filtro das grandezas.....	103
Figura 15 – Percurso de observação	111
Figura 16 – Representação das análises da nossa pesquisa	115
Figura 17 – Atividade 1 da sondagem e do pós-teste	119
Figura 18 – Atividade 2 da sondagem e do pós-teste	121
Figura 19 – Atividade 3 da sondagem e do pós-teste	123
Figura 20 – Atividade 4 da sondagem e do pós-teste	125
Figura 21 – Atividade 5 da sondagem e do pós-teste	127
Figura 22 – Atividade 6 da sondagem e do pós-teste	129
Figura 23 – Atividade 7 do pós-teste	131
Figura 24 – Atividade 8 do pós-teste	133
Figura 25 - Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ1a).....	138
Figura 26 – Recursos utilizados para resolução correta (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ1a)	139
Figura 27 - Situação de comparação de áreas com resolução correta no quadro algébrico (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ1a)	139
Figura 28 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo e recurso PT_7A14_Ativ1a)	140

Figura 29 - Situação de comparação de áreas com acerto parcial por erro de cálculo numérico (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ1a)	141
Figura 30 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à observação visual das figuras (extrato de protocolo PT_7B13_Ativ1b)	142
Figura 31 – Recursos utilizados para solução correta (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ1b)	142
Figura 32 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de lado de polígono (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ2a)	143
Figura 33 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7B8_Ativ2a)	144
Figura 34 - Recursos utilizados para solução correta (extrato de protocolo PT_7B4_Ativ2a)	144
Figura 35 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado ao comprimento dos lados da figura (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ2b)	145
Figura 36 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação de área e perímetro no mesmo sentido (extrato de protocolo PT_7A1_ativ2b)	146
Figura 37 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada à extensão da figura (extrato de protocolo PT_7A2_Ativ3a e b)	147
Figura 38 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado à diferença entre as figuras (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ3c e d)	148
Figura 39 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado à quantidade de lados da figura (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ3d)	148
Figura 40 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à comparação com as áreas (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ3c e d)	149
Figura 41 – Situação de medição de área com solução correta associada à configuração retangular (extrato de protocolo PT_7A5_Ativ4a)	151
Figura 42 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ4a)	152
Figura 43 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de comprimento (extrato de protocolo PT_7A14_Ativ4a)	152
Figura 44 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo PT_7A7_Ativ4b)	153

Figura 45 – Situação de medição de área com acerto parcial associado à conversão de unidade de medida (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ4b)	154
Figura 46 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ4b)	155
Figura 47 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ4b)	155
Figura 48 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada a comprimentos (extrato de protocolo PT_7A2_Ativ4b)	156
Figura 49 – Situação de medição de área com solução correta associada à decomposição de figuras (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ4c)	157
Figura 50 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à conversão de unidade (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ4c)	157
Figura 51 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à ideia de configuração retangular (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ4c)	158
Figura 52 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à ideia de contorno da região retangular (extrato de protocolo PT_7B2_Ativ4c)	159
Figura 53 – Situação de medição de perímetro com solução correta (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ7)	160
Figura 54 – Situação de medição de perímetro com acerto parcial (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ7)	161
Figura 55 – Situação de medição do perímetro com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo PT_7B11_Ativ7)	162
Figura 56 – Situação de medição de perímetro com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo PT_7A5_Ativ7)	162
Figura 57 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ5a)	165
Figura 58 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada à região externa a figura (extrato de protocolo PT_7A10_Ativ5a)	165
Figura 59 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada às regiões interna e externa da figura (extrato de protocolo PT_7B2_Ativ5a)	166
Figura 60 – Situação de medição de áreas com acerto parcial associado à unidade de medida (extrato de protocolo PT_7A7_Ativ5b)	167
Figura 61 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada à unidade de medida de área (extrato de protocolo PT_7A13_Ativ5b)	168

Figura 62 – Situação de comparação de áreas com solução correta associada à relação de equivalência entre as figuras (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ5c).....	169
Figura 63 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associada à relação de equivalência entre as figuras (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ5c)...	169
Figura 64 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao quadro numérico (extrato de protocolo PT_7B8_Ativ5c)	170
Figura 65 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à superfície unitária T1 (extrato de protocolo PT_7A10_Ativ6c)	171
Figura 66 - Possibilidade de ladrilhamento do quadrado Q com a superfície unitária T2	172
Figura 67 – Situação de medição de área com solução correta associada à superfície unitária T2 (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ6d)	173
Figura 68 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à superfície unitária T2 (extrato de protocolo PT_7B6_ativ6d).....	173
Figura 69 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à impossibilidade de rotação da figura (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ6d)	174
Figura 70 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à diagonal de quadrado (extrato de protocolo PT_7A1_Ativ6d)	175
Figura 71 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à impossibilidade de decomposição do triângulo T2 (extrato de protocolo PT_7A16_Ativ6d)	175
Figura 72 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação entre área e perímetro (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ8a e b).....	177
Figura 73 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5B12_Ativ1a).....	180
Figura 74 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ1a)	181
Figura 75 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ1b)	182
Figura 76 - Enquadramento de figuras não poligonais em retângulos de mesmos comprimentos e mesmas larguras	182
Figura 77 - Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação de comprimentos (extrato de protocolo S_5B10_Ativ1b).....	183

Figura 78 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5A5_Ativ2a).....	184
Figura 79 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ2)	185
Figura 80 – Situação de comparação de áreas com solução correta associada à decomposição – composição (extrato de protocolo S_5A6_Ativ3a e b).....	187
Figura 81 – Situação de áreas com solução incorreta associada à figura (extrato de protocolo S_5B12_Ativ3a e b).....	187
Figura 82 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada às projeções da figura (extrato de protocolo S_5B1_Ativ3a e b)	188
Figura 83 – Situação de comparação de perímetros com solução correta associada ao maior contorno (extrato de protocolo S_5A3_Ativ3c e d)	188
Figura 84 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação das áreas (extrato de protocolo S_5B12_Ativ3c e d).....	189
Figura 85 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associada às figuras (extrato de protocolo S_5A10_Ativ3c e d)	190
Figura 86 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo S_5B2_Ativ3c e d).....	190
Figura 87 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A1_Ativ4a)	193
Figura 88 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A11_Ativ4a)	193
Figura 89 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo S_5B12_Ativ4a)	194
Figura 90 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B13_Ativ4b)	195
Figura 91 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B3_Ativ4b)	196
Figura 92 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B12_Ativ4b)	196
Figura 93 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A13_Ativ4b)	197
Figura 94 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A3_Ativ4c).....	197

Figura 95 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo S_B13_Ativ4c).....	198
Figura 96 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B7_Ativ4c)	198
Figura 97 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B4_Ativ4c)	199
Figura 98 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à fórmula da área de retângulo (extrato de protocolo S_5A11_Ativ4c).....	200
Figura 99 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A3_Ativ5a)	202
Figura 100 – Situação de medição de área com solução incorreta (extrato de protocolo S_5A6_Ativ5a).....	204
Figura 101 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de ângulo (extrato de protocolo S_5A10_Ativ5a).....	204
Figura 102 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B10_Ativ5b)	205
Figura 103 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à unidade de medida quadradinho (extrato de protocolo S_5A5_Ativ5b)	205
Figura 104 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A13_Ativ5b)	206
Figura 105 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5B13_Ativ5c)	207
Figura 106 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação numérica (extrato de protocolo S_5A4_Ativ5c).....	207
Figura 107 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação visual das figuras (extrato de protocolo S_5A14_Ativ5)	208
Figura 108 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta (extrato de protocolo S_5B6_Ativ5c).....	209
Figura 109 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B4_Ativ6a e b)	210
Figura 110 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao metro cúbico (extrato de protocolo S_5A2_Ativ6a)	210
Figura 111 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B6_Ativ6c).....	211

Figura 112 – Situação de medição de área com solução correta associada à proporcionalidade (extrato de protocolo S_5A6_Ativ6c).....	211
Figura 113 – Situação de medição de área com solução incorreta (extrato de protocolo S_5A16_Ativ6c)	212
Figura 114 – Situação de medição de área com solução correta associada à decomposição (extrato de protocolo S_5A12_Ativ6d).....	212
Figura 115 – Situação de medição de área com acerto parcial associado à relação de proporcionalidade (extrato de protocolo S_5A6_Ativ6d)	213
Figura 116 - Distribuição dos conteúdos nos LD dos anos iniciais no domínio das grandeza e medidas para o setor medida de comprimento.....	223
Figura 117 – Distribuição dos conteúdos nos LD dos anos iniciais no domínio das grandezas e medidas para o setor área.....	223
Figura 118 – Distribuição dos conteúdos nos livros de matemática do 6º ao 9º ano do domínio das medidas para os setores medida de comprimento e medida de área.	226
Figura 119 – Situação interdomínios associada às práticas profissionais.....	230
Figura 120 – Situação interdomínios associada ao cotidiano infantil	231
Figura 121 – Objeto área como instrumento no habitat da geometria com figura não poligonal.....	233
Figura 122 – Situação interdomínios com o perímetro como instrumento	236
Figura 123 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{PP} para a produção de diferentes retângulos com unidade de medida não convencional	237
Figura 124 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{PP} para a produção de diferentes polígonos com unidade de medida não convencional	238
Figura 125 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{PP} sem a presença de figura, com unidade de medida convencional.....	239
Figura 126 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} com a presença de figura, com unidade de medida convencional.....	240
Figura 127 – Situação interdomínios com o perímetro enquanto objeto	241
Figura 128 - Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} com unidade de medida não convencional	243
Figura 129 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} sem unidade de medida.....	244
Figura 130 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{CP}	245
Figura 131 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP}	246

Figura 132 – Situação interdomínios com o perímetro enquanto retomada em tarefas do tipo T_{MP}	248
Figura 133 – Situação interdomínios do perímetro.....	249
Figura 134 – Situação interdomínios com a área e o perímetro associada ao tipo de tarefa T_{PP}	251
Figura 135 – Situação interdomínios associada ao tipo de tarefa T_{GP}	251
Figura 136 – Situação interdomínios associada ao tipo de tarefa T_{CP}	252
Figura 137 – Situação interdomínios com a área enquanto instrumento no habitat de números e operações.....	255
Figura 138 – Situação interdomínios para o ladrilhamento de figuras.....	256
Figura 139 – Tarefa do tipo T_{PA} no domínio espaço e forma.....	257
Figura 140 – Situação interdomínios com o objeto área	258
Figura 141 – Situação de comparação de áreas associada ao domínio geometria e o tema formas geométricas	259
Figura 142 – Situação de produção de figuras poligonais com a área enquanto instrumento.....	260
Figura 143 – Tarefa de composição de figuras poligonais no domínio espaço e forma com o Tangram	261
Figura 144 – Situação interdomínios com a área para o tema multiplicação	262
Figura 145 – Situação interdomínios com o tipo de tarefa T_{MA} associado a uma figura tridimensional	262
Figura 146 – Situação interdomínios com a relação entre área e perímetro	264
Figura 147 – Institucionalização dos objetos área e perímetro	265
Figura 148 – Exemplo de tipo de tarefa T_{TA}	266
Figura 149 – A decomposição de áreas de figuras em situação interdomínios.....	267
Figura 150 – A noção de área enquanto objeto	268
Figura 151 – Exemplo de tarefa do tipo T_{MA}	269
Figura 152 – A configuração retangular e os termos comprimento e largura	270
Figura 153 – Composição e decomposição de áreas como instrumento para diferentes representações	271
Figura 154 – Tarefa do tipo T_{GA} com área enquanto objeto	271
Figura 155 – Situação de produção de um quadrado com área e perímetro dados.....	272
Figura 156 – Área enquanto instrumento no domínio da geometria.....	273
Figura 157 – Objeto área em tarefas do tipo T_{MA} e T_{CUA}	274

Figura 158 – Tarefa do tipo T_{MA} associada a duas técnicas.....	275
Figura 159 – A decomposição de figura associada ao uso da fórmula	276
Figura 160 – A decomposição de regiões em diferentes graus de dificuldade.....	277
Figura 161 – Tarefa do tipo T_{GA} sem a presença da figura	278
Figura 162 – Situação de medição de área com estimativas na malha quadriculada	278
Figura 163 – Tarefa do tipo T_{CUA} com unidades de medidas de área convencionais	279
Figura 164 – Atividades com figuras poligonais não convexas nos LD do 5º e 6º anos	281
Figura 165 – Tarefa do tipo T_{MA} proposta na sondagem de matemática dos 6º anos	289
Figura 166 – Situação de comparação de áreas com parte da malha	291
Figura 167 – Tarefa do tipo T_{MP} com o uso do recurso régua graduada.....	294
Figura 168 – Introdução da noção de área no LD	296
Figura 169 – Tarefa T_{MA} para introdução da técnica	298
Figura 170 – Retomada de um conhecimento em ligação com o novo	299
Figura 171 – Tarefa do tipo T_{MA}	300
Figura 172 – Exploração da técnica τ_{MA4}	301
Figura 173 – Tarefa do tipo T_{GA}	302
Figura 174 – Resolução da tarefa do tipo T_{GA}	303
Figura 175 – Análise comparativa entre as instituições 5º ano e 6º anos da Escola São Francisco com a escala dos níveis de codeterminação	312
Figura 176 – Estrutura organizacional das inter-relações da Escola São Francisco	323
Figura 177 – Solicitação da coord. Al aos professores dos 5 ^{os} anos	339

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 1, 2, e 3 do pós-teste.....	137
Gráfico 2 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 4 e 7 do pós-teste.....	150
Gráfico 3 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 5, 6 e 8 do pós-teste.....	164
Gráfico 4 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 1, 2, e 3 da sondagem.....	179
Gráfico 5 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para a atividade 4 da sondagem.....	192
Gráfico 6 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 5 e 6 da sondagem.....	202

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Tipos de tarefas para a grandeza comprimento	77
Quadro 2 – Tipos de tarefas para a grandeza área.....	77
Quadro 3 – Tipos de tarefas para o perímetro	78
Quadro 4 – A relação entre as classes de situações e os tipos de tarefas	80
Quadro 5 – Nomenclaturas para as análises	107
Quadro 6 – Classificação das atividades de sondagem.....	117
Quadro 7 – Atividades acrescentadas à sondagem para composição do pós-teste	131
Quadro 8 – Teoremas-em-ação verdadeiros.....	214
Quadro 9 – Teoremas-em-ação falsos.....	215
Quadro 10 – Conteúdos conceituais e procedimentais para o domínio das grandezas e medidas nos LD do 1º ao 5º anos na coleção dos anos iniciais, associados aos objetos comprimento, área e perímetro.....	225
Quadro 11 – Representação do quadro da professora dos 5º anos.....	287
Quadro 12 – Representação do quadro do professor dos 6º anos	300
Quadro 13 - Setores comprimento e área do domínio das grandezas e medidas no currículo do 5º ano de matemática da Escola São Francisco	342
Quadro 14 – Domínio medidas no levantamento do conteúdo programático / 2013 - Disciplina: MATEMÁTICA do 6º ano da Escola São Francisco.....	348
Quadro 15 - Quadro de horário de aulas das turmas 5º A e 5º B, da Escola São Francisco, em 2016.....	373
Quadro 16 - Quadro de horário de aulas das turmas 6º A e 6º B, da Escola São Francisco, em 2017	373

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Mobilidade de alunos das turmas A e B da Escola São Francisco, no período de 2016 a 2018	108
Tabela 2 – Quantitativo de tipos de tarefas para o objeto perímetro nos livros didáticos analisados	234
Tabela 3 – Quantitativo de tipos de tarefas para o objeto área nos livros didáticos analisados	254

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AI	Anos iniciais do ensino fundamental
AF	Anos finais do ensino fundamental
art.	Artigo
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CA	Caderno de atividades
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior
Coord.	Coordenadora
CF	Constituição Federal
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DCNEB	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
Ef.	Ensino Fundamental
EMF	Espace Mathématique Francophone
Ibid.	Na mesma obra
Id.	Do mesmo autor
LD	Livro didático
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MP	Manual do Professor
p.	Página
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPP	Projeto Político-Pedagógico
Prof(a).	Professor(a)
RCNEI	Referenciais Curriculares Nacionais da Educação Infantil
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SOE	Serviço de Orientação Educacional
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TI	Tecnologia da Informação
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	30
2 CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DE PESQUISA	36
2.1 REFLEXÕES SOBRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS.....	36
2.1.1.Comprimento e área como grandezas geométricas do ponto de vista didático.....	38
2.1.2 Pesquisas sobre a aprendizagem e o ensino de comprimento, área e perímetro.....	45
2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC)	55
2.2.1 Classes de situações que dão sentido aos conceitos de comprimento e área	62
2.3 ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD).....	65
2.4 BUSCA DA COMPLEMENTARIDADE ENTRE A TAD E A TCC	71
2.4.1 Classes de situações que dão sentido aos conceitos de área e perímetro e tipos de tarefas passíveis de serem estudados do 1º ao 6º ano	75
2.5 A TRANSIÇÃO ENTRE NÍVEIS DE ENSINO	85
2.5.1 O que dizem os documentos oficiais sobre a transição entre níveis de ensino.....	86
2.5.2 Pesquisas sobre transição entre níveis de ensino	88
2.5.3 Os processos de transição na nossa pesquisa	94
2.6 O CONCEITO DE RETOMADA	95
2.7 FILTRO DAS GRANDEZAS: UM INSTRUMENTO TEÓRICO-METODOLÓGICO	102
2.8 OBJETIVO GERAL E QUESTÕES NORTEADORAS	105
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	106
3.1 ESCOLA CAMPO DA PESQUISA E PARTICIPANTES	106
3.2 ELEMENTOS DE ANÁLISE E TRATAMENTO DOS DADOS	109
3.3 PERCURSO METODOLÓGICO	110
4 PRIMEIRO ESTUDO: A SONDAGEM E O PÓS-TESTE	116
4.1 ANÁLISE <i>A PRIORI</i> DA SONDAGEM.....	118
4.1.1 Análise <i>a priori</i> das atividades 1 e 2	118
4.1.2 Análise <i>a priori</i> da atividade 3	122
4.1.3 Análise <i>a priori</i> da Atividade 4.....	124

4.1.4 Análise <i>a priori</i> da atividade 5	126
4.1.5 Análise <i>a priori</i> da atividade 6	128
4.2 ANÁLISE A <i>PRIORI</i> DAS ATIVIDADES 7 E 8 DO PÓS-TESTE.....	131
4.2.1 Análise <i>a priori</i> da atividade 7	131
4.2.2 Análise <i>a priori</i> da atividade 8	133
5 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS	135
5.1 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS NO INÍCIO DO 7º ANO NO PÓS-TESTE.....	135
5.1.1 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de comparação de áreas e de perímetros sem unidades de medidas no pós-teste	137
5.1.1.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 1 do pós-teste	138
5.1.1.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 2 do pós-teste	143
5.1.1.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 3 do pós-teste	146
5.1.2 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição de áreas e de perímetros com unidades de medidas convencionais no pós-teste	149
5.1.2.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 4 do pós-teste	151
5.1.2.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 7 do pós-teste	160
5.1.3 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição e de comparação de áreas e de perímetros com unidades de medidas não convencionais no pós-teste	163
5.1.3.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 5 do pós-teste	164
5.1.3.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 6 do pós-teste	170
5.1.3.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 8 do pós-teste	176
5.2 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS NO FINAL DO 5º ANO NA SONDAGEM	177
5.2.1 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de comparação de áreas e de perímetros sem unidades de medidas na sondagem	179
5.2.1.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 1 da sondagem	180
5.2.1.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 2 da sondagem	184
5.2.1.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 3 da sondagem	186

5.2.2	Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição de áreas com unidades de medidas convencionais na sondagem ...	191
5.2.3	Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição e de comparação de áreas com unidades de medidas não convencionais na sondagem	201
5.2.3.1	Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 5 da sondagem	202
5.2.3.2	Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 6 da sondagem	209
5.3	TEOREMAS-EM-AÇÃO	213
5.4	O ESTADO DOS CONHECIMENTOS DOS ALUNOS.....	216
6	SEGUNDO ESTUDO: SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS E SABERES ENSINADOS NO 5º ANO E NO 6º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL	219
6.1	SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS	219
6.1.1	Visão geral das duas coleções.....	219
6.1.1.1	A coleção dos anos iniciais do ensino fundamental.....	219
6.1.1.2	A coleção dos anos finais do ensino fundamental	221
6.1.2	O domínio das grandezas e medidas nas duas coleções	222
6.1.2.1	O domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos iniciais do ensino fundamental.....	222
6.1.2.2	O domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos finais do ensino fundamental.....	226
6.1.2.3	As inter-relações do domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos iniciais do ensino fundamental	228
6.1.2.4	As inter-relações do domínio das grandezas e medidas no livro do 6º ano do ensino fundamental	232
6.1.3	Análise praxeológica dos saberes perímetro e área nos LD do 1º ao 6º ano do ensino fundamental com o filtro das grandezas.....	234
6.1.3.1	O saber perímetro nos LD analisados	234
6.1.3.2	O saber área nos LD analisados	254
6.1.4	Algumas considerações.....	280
6.2	SABERES ENSINADOS NO 5º ANO E NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	284
6.2.1	Observação de uma turma do 5º ano no final do ano letivo de 2016	284
6.2.2	Observação de uma turma do 6º ano no ano letivo de 2017	288

6.2.2.1 O início do ano letivo – caracterização dos 6º anos	288
6.2.2.2 Observações de aulas referentes ao capítulo 8 – medidas e números decimais	294
6.2.2.3 Observações de aulas referentes ao capítulo 11 – áreas e perímetros.....	295
6.2.3 Cadernos dos alunos dos 5^{os} e dos 6^{os} anos.....	305
6.3 SÍNTESE DO SEGUNDO ESTUDO	307
7 TERCEIRO ESTUDO: ANÁLISE COMPARATIVA DAS INSTITUIÇÕES 5º ANO E 6º ANO DA ESCOLA SÃO FRANCISCO POR MEIO DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO.....	311
7.1 SOCIEDADE.....	313
7.2 ESCOLA	316
7.3 PEDAGOGIA	330
7.4 O SISTEMA DIDÁTICO: DISCIPLINA, DOMÍNIO, TEMA, SETOR E ASSUNTO	339
7.5 SÍNTESE DO TERCEIRO ESTUDO	350
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E ENCAMINHAMENTOS	352
8.1 OS ESTUDOS REALIZADOS.....	352
8.2 CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES DA PESQUISA.....	360
8.3 POSSIBILIDADES DE RETOMADAS E ENCAMINHAMENTOS.....	360
REFERÊNCIAS.....	363
APÊNDICE A – QUADROS DE HORÁRIOS DE AULAS DOS 5º ANOS EM 2016 E DOS 6º ANOS EM 2017.....	373
APÊNDICE B – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A DIREÇÃO DA ESCOLA CAMPO DA PESQUISA	374
APÊNDICE C – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A COORDENAÇÃO DOS ANOS INICIAIS DO EF	375
APÊNDICE D – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A PROFESSORA DAS TURMAS DOS 5º ANOS.....	377
APÊNDICE E – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A COORDENAÇÃO DOS ANOS FINAIS DO EF.....	379
APÊNDICE F – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM O PROFESSOR DAS TURMAS DOS 6º ANOS.....	381
ANEXO A – ORGANOGRAMA DA ESCOLA SÃO FRANCISCO.....	383
ANEXO B – FICHA DE ACOMPANHAMENTO DO(A) ESTUDANTE.....	384

ANEXO C – REGISTRO DE AVALIAÇÃO ENSINO FUNDAMENTAL (1º AO 5º ANO)	385
ANEXO D – BOLETIM ESCOLAR (6º ANO)	386

1 INTRODUÇÃO

As reflexões resultantes da experiência docente enquanto professora de matemática da educação básica foram a motivação por esse tema. Ao iniciar mais um ano letivo com alunos de 5ª série/6º ano, oriundos de diferentes escolas, a expectativa sobre quais conceitos matemáticos esses alunos compreendiam ou não sempre esteve presente. Nossa experiência nos mostrava alunos geralmente em busca de aplicar fórmulas para resolver problemas, em particular quando esses estavam associados às grandezas.

Enquanto professora formadora, tanto na Licenciatura em Matemática quanto em programas de formação continuada, constatei que alguns questionamentos realizados pelos professores sobre as grandezas geométricas por vezes eram semelhantes aos dos alunos da educação básica.

Esse interesse levou a escolher o objeto da nossa dissertação de mestrado (FERREIRA, 2010): a construção do conceito de área e a relação entre área e perímetro por alunos do 6º ano do ensino fundamental, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais (TCC).

Com quatro estudos, nossa pesquisa de mestrado foi composta pela análise de documentos e livros didáticos¹, intervenções, testes e entrevistas. Na análise, constatamos que tanto os documentos como os livros didáticos apresentavam situações predominantemente associadas ao quadro numérico e que as figuras utilizadas para a abordagem de área e perímetro na sua maioria eram poligonais.

Na coleção analisada, observamos que diversas atividades nos livros didáticos do 1º e 2º ano dos anos iniciais associadas às grandezas e medidas tinham como foco a construção do significado numérico e a escrita numérica, o que é esperado para esse nível de ensino. No entanto, o fato de as atividades apresentarem “espaços” a serem preenchidos pelos alunos já com a unidade de medida presente poderia contribuir para a dificuldade de compreender uma grandeza representada com um par (número, unidade de medida).

Observamos que muitas das situações associadas ao quadro numérico apresentadas nas duas coleções priorizavam a transformação operatória das

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática dos anos iniciais e anos finais do ensino fundamental e duas coleções dos mesmos autores, uma, dos anos iniciais, e a outra dos anos finais do ensino fundamental.

unidades de medidas, apoiada no sistema de numeração decimal e suas regras, com a ausência do quadro geométrico.

Essa ausência pode provocar uma dificuldade de aprendizagem em relação à mudança de unidade de área de uma superfície, ou seja, alguns alunos podem ter dificuldades em associar diferentes pares (número, unidade de medida) a uma superfície dada e, portanto, em admitir que a área da superfície se mantém inalterada quando mudamos a unidade de medida de área. Diante dessa constatação, além das três grandes classes de situações² – comparação de área, medida de área e produção de superfície – da classificação de Baltar (1996), consideramos necessário inserir uma quarta, a mudança de unidade.

Quanto à intervenção realizada, os testes aplicados e as entrevistas mostraram avanços dos alunos ao resolverem situações com ladrilhamento de superfícies apoiadas na malha quadriculada, seja com figuras poligonais ou não poligonais, que envolviam procedimentos de decomposição e composição de figuras, e a mudança de unidade.

Por outro lado, persistiram erros e dúvidas referentes à compreensão da ordenação de comprimentos, enquanto propriedades de figuras que se apresentam desconhecidas, ao afirmarem que o lado de um quadrado tem mesma medida que sua diagonal. Também observamos dificuldades na dissociação entre os conceitos de área e perímetro nas situações que não contemplavam a representação simbólica das figuras, e nas situações em que o quadro numérico estava ausente, com a necessidade de introduzir uma unidade de medida e fazer o uso de fórmulas.

Naquele momento, levantamos ainda a necessidade de pesquisas para verificar se a construção de situações que privilegiam o uso de instrumentos sem unidades de medidas pode favorecer a introdução e compreensão das grandezas comprimento e área desde o 1º ano do ensino fundamental (EF).

Diante de tais resultados de pesquisa, continuamos nossas leituras, realizamos outras intervenções em diferentes anos da educação básica e constatamos a permanência das dificuldades percebidas na nossa dissertação. Por exemplo, Ferreira e Bellemain (2013) observaram que alunos do 6º ano do ensino fundamental resolvem melhor as situações que envolvem a grandeza comprimento que a grandeza área.

² As classes de situações serão apresentadas no item 2.2.1 do capítulo 2.

Reis e Durão (2015), ao analisarem as seis coleções de matemática do ensino médio do Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) de 2015, constataram que as situações de medida³ eram propostas apenas com o objetivo do uso de fórmulas para o cálculo de área e de perímetro, e que situações de produção⁴ de superfícies a partir de condições sobre sua área ou seu perímetro eram ausentes. Essa pesquisa mostrou ainda que os alunos do ensino médio, ao resolverem situações de medida e de produção, não conseguiram desvincular o conceito de área do conceito de perímetro e obtiveram um melhor desempenho nas situações de medida do que nas de produção.

Observamos que as dificuldades associadas aos objetos comprimento, área e perímetro, e especificamente à relação entre área e perímetro, não são restritas ao domínio das grandezas e medidas, mas perpassam outros domínios da matemática, como também diversos níveis de ensino. Além disso, sentimos a necessidade de compreender melhor como acontece a aprendizagem e o ensino desses objetos na transição entre níveis de ensino.

Essas inquietações são somadas e permeiam a nossa experiência com o 6º ano do ensino fundamental. Nosso olhar volta-se para tentar explicar os entraves encontrados pelos alunos no 6º ano, buscando compreender as filiações e rupturas⁵ com relação à história escolar vivida pelos alunos no 5º e no 6º ano do ensino fundamental.

Diante desse percurso, questionamos como acontece a passagem de um ano a outro do ensino fundamental, especificamente quando se trata do 5º para o 6º anos, tanto em relação ao que foi aprendido pelo aluno quanto ao que foi ensinado com relação aos objetos área e perímetro, mas de maneira mais ampla, na busca de compreender a transição entre níveis de ensino dentro de uma instituição escolar.

Que fatores de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica interferem nas dificuldades que os alunos apresentam para aprender a lidar com as grandezas comprimento (perímetro) e área no 6º ano do ensino fundamental?

Na educação básica, os conceitos de comprimento e de área começam a ser introduzidos a partir do 2º e 4º ano do ensino fundamental, respectivamente

³ Situação de medida envolve a passagem de uma grandeza a um número, associada a uma unidade de medida.

⁴ Situação de produção de um objeto geométrico a partir de uma condição preestabelecida, associado a uma grandeza.

⁵ Apresentamos no item 1.6 (p. 81) os tipos de ruptura segundo BESSOT (2015).

(BRASIL, 1998). Sentimos a necessidade de compreender a maneira que é conduzido seu estudo no 6º ano, como se articulam os conhecimentos novos e antigos e se há ampliação e aprofundamento de aspectos abordados nos dois anos anteriores.

Para tanto, buscamos aprofundar nossos estudos com um período de estágio de doutorado-sanduíche⁶ na Université de Montpellier (França), com dois focos: a noção de *reprise* (LARGUIER, 2009), que no nosso trabalho será traduzido como retomada, e o filtro da grandeza área (BELLEMAIN; BRONNER; LARGUIER, 2017). A retomada diz respeito ao momento no processo de ensino em que determinado objeto de estudo, que foi parcialmente abordado e institucionalizado em anos anteriores ou no mesmo ano, volta a entrar em cena na sala de aula. E sobre o filtro da grandeza área, adaptação do filtro das grandezas (ANWANDTER-CUELLAR, 2012), o qual, por sua vez, inspira-se no filtro do numérico (BRONNER, 2007), funciona como instrumento teórico-metodológico para separar e compreender informações que se encontram “misturadas” sobre as grandezas em diferentes perspectivas. Tanto a noção de retomada quanto o filtro das grandezas serão objetos de reflexão nesta pesquisa.

O período de estudos possibilitou a nossa participação em eventos como a XIX *École d'Été de Didactique des Mathématiques*⁷, o Colóquio da ARDM e *Séminaire National de Didactique des Mathématiques*⁸, e o CITAD 6 – 6^{ième} *Congrès International de la Théorie Anthropologique du Didactique*⁹, eventos que ocorrem na França para difusão de novas pesquisas, estudos e debates sobre as experiências vivenciadas em diferentes instituições, bem como o estímulo às interações e trocas entre renomados e jovens pesquisadores. Entendemos que a transição entre níveis de ensino é uma questão presente, que vem sendo discutida em outras instituições,

⁶ Programa de doutorado-sanduíche no exterior (PDSE), com o financiamento da CAPES (processo nº 88881.133443/2016-1), sob a direção do prof. Dr. Alain Bronner e em colaboração com a profa. Mirène Larguier, no período de setembro a dezembro de 2017.

⁷ Evento bianual que ocorre na França, sob a coordenação da ARDM – *Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*. Mais informações sobre a ARDM podem ser encontradas em <https://ardm.eu/association-ardm/>

⁸ Evento que ocorre semestralmente, sob a coordenação da ARDM em parceria com a Universidade Paris Diderot, o LDAR - Laboratoire de Didactique André Revuz - e o IREM - Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - de Paris, e uma delas em conjunto com o Colóquio ARDM. Mais informações sobre os IREM podem ser encontradas em <http://www.univ-irem.fr/> e sobre o LDAR em <https://www.ldar.website>

⁹ Congresso sobre a TAD, que ocorre a cada dois anos.

em diferentes níveis de ensino, sob o aspecto do ensino e da aprendizagem de objetos matemáticos.

Desse modo, a nossa pesquisa investigou possíveis relações entre as dificuldades conceituais de aprendizagem enfrentadas por alunos do 6º ano sobre área e perímetro e fatores de naturezas diversas em jogo, na transição do 5º para o 6º ano do ensino fundamental.

Esse objetivo levou a formular as seguintes questões norteadoras:

- a) Quais as dificuldades conceituais enfrentadas pelos alunos ao resolver situações relativas à área e ao perímetro na transição entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental?
- b) Quais elementos ajudam a compreender as possíveis raízes dessas dificuldades?

Nesse sentido, iniciamos a construção da problemática da nossa pesquisa no segundo capítulo, a partir de algumas reflexões sobre a epistemologia das grandezas geométricas, a construção do conceito das grandezas geométricas comprimento e área e considerações sobre algumas pesquisas realizadas, com o objetivo de compreender questões epistemológicas, cognitivas e didáticas que se apresentam hoje no ensino das referidas grandezas.

Como suporte teórico, tomamos a teoria dos campos conceituais (TCC) de Vergnaud (1975; 1981; 1990; 1993; 1994; 1998; 2001; 2007) e a teoria antropológica do didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999; 2002; 2008; 2009; 2010; 2011; 2013; 2015). A busca da complementaridade entre essas teorias na nossa pesquisa é o suporte para o estudo cognitivo e didático para a construção do quadro de análise das classes de situações de Baltar (1996) e Ferreira (2010) e a classificação de tipos de tarefas de Bellemain, Bronner e Larguier (2017).

A transição entre níveis de ensino é abordada a partir de alguns documentos oficiais, e algumas pesquisas são apresentadas sobre a transição entre anos iniciais e anos finais do ensino fundamental, assim como o conceito de retomada de Larguier (2009). Optamos pelo filtro da grandeza área para ajudar nas análises com as duas teorias, nas dimensões didática e cognitiva, e concluímos com as questões levantadas ao longo deste trabalho, juntamente com nosso objetivo geral.

No terceiro capítulo, apresentamos a escola campo da pesquisa com seus participantes, os elementos de análise e tratamento dos dados, bem como o percurso metodológico. Para responder às questões norteadoras levantadas, três

estudos foram realizados: o primeiro, uma análise cognitiva dos conhecimentos dos alunos sobre os objetos área e perímetro, ao final do 5º ano e após o término do 6º ano; o segundo, composto de uma análise documental sobre o ensino prescrito do 1º ao 6º ano, e o ensinado no 6º ano, sobre os objetos em foco; e o terceiro, uma análise comparativa das instituições 5º ano e 6º ano, para melhor caracterizar a transição entre esses níveis de ensino.

Na busca de compreender como os alunos lidam com as situações que dão sentido aos conceitos de área e perímetro no 5º ano e no 6º ano, realizamos o nosso primeiro estudo, com a elaboração de uma sondagem e um pós-teste, que são apresentados no quarto capítulo com as análises *a priori* de cada uma das atividades. No capítulo quinto, apresentamos a análise cognitiva com o olhar da TCC sobre os conhecimentos mobilizados pelos alunos na sondagem, realizada ao final do 5º ano dos anos iniciais, e no pós-teste, aplicado após o término do 6º ano, no início do ano de 2018, e fechamos o estudo com os conhecimentos aprendidos e os conhecimentos mobilizados pelos alunos, bem como os teoremas-em-ação verdadeiros e falsos identificados.

Nosso segundo estudo compõe o sexto capítulo. Uma descrição e análise da abordagem da área e do perímetro nos livros didáticos adotados pela escola é inicialmente realizada, seguida da observação de aulas de uma turma de 5º ano e uma de 6º ano, e da maneira como esses objetos são retomados na transição entre esses anos de ensino.

Para compreender as escolhas realizadas pela instituição escola, realizamos o nosso terceiro estudo, apresentado no sétimo capítulo. As análises comparativas são explicitadas, com a caracterização das instituições 5º ano dos anos iniciais e 6º ano dos anos finais do ensino fundamental (EF) sob a ótica da TAD, a partir dos níveis de codeterminação, baseadas nos documentos de orientação curricular e da escola campo da pesquisa, e nas entrevistas realizadas.

As considerações finais sobre os estudos realizados e um panorama da transição entre os anos iniciais e anos finais do ensino fundamental na escola campo da pesquisa com base nos referenciais teóricos são apresentados, e propostas de encaminhamentos são objeto do último capítulo.

2 CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

2.1 REFLEXÕES SOBRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

Neste tópico, trazemos reflexões sobre a epistemologia das grandezas e mais especificamente das grandezas geométricas comprimento e área.

Em sua origem, há uma estreita relação entre os conceitos de grandeza, medida e número, como descreve Boyer (1974). A necessidade de realizar e registrar os resultados de contagens e medições pelo homem de certo modo gerou a ideia de atributos que podem ser comparados e medidos, ou seja, de grandezas.

A medida de terras após cada inundação do rio Nilo e, antes, o homem neolítico com seus desenhos, seus potes e cestas, objetos pesados, compridos e volumosos mostram situações das práticas sociais ligadas à mensuração e trazem implicitamente a ideia de grandezas como a área, a massa, o comprimento e o volume. Nesses casos, trata-se de medições práticas. Se os números naturais são suficientes para resolver o problema da contagem, pode-se perceber rapidamente que não dão conta do problema da medição de comprimentos, áreas ou outras grandezas. Para atribuir valores numéricos no processo de medição prática de comprimentos ou áreas, precisamos de uma parte do conjunto dos números racionais positivos. Dificilmente precisaremos de um número como 2,1235468790564 para a expressão de uma medição prática, pois nessa está em jogo a precisão de instrumentos de medida.

A necessidade de resolver problemas como os clássicos da geometria – a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo – possibilitou o surgimento de conceitos e teorias matemáticas. Aqui não se trata mais da medição prática, mas da medição teórica, abstrata. Para resolver esse problema de medição teórica, não bastam os números racionais e entram em cena os números irracionais, cujo embrião encontram-se nas grandezas incomensuráveis, tratados pelo matemático grego Eudóxio. Para conhecer um número irracional, segundo a ideia desse matemático, seria necessário conhecer ao menos dois números racionais e situar o número irracional enquanto uma aproximação por falta ou por excesso (LIMA, 2009).

Trazendo para hoje, dado um quadrado cujo comprimento do lado é 10 cm, geometricamente esse objeto pode ser construído (tanto no sentido prático, com

suas aproximações e imperfeições, como no sentido teórico, de construção geométrica). Se usarmos uma régua para medir o comprimento da diagonal desse quadrado, devemos obter um valor de aproximadamente 14,1 cm.

No entanto, a medida teórica desse comprimento em centímetros é $\sqrt{200}$ e por valores racionais aproximados $14,142 < 10\sqrt{2} < 14,143$, o que significa, $(14,142)^2 < 200 < (14,143)^2$. Essa medida é um número irracional, pois não pode ser expresso como um quociente de dois inteiros (com divisor não nulo). Observamos aqui a profunda inter-relação que as atividades de medição propiciam entre os campos da geometria e dos números. A medição pode estar associada tanto ao ato concreto como ao abstrato de medir, e por isso pode ser usada para designar o tipo de situação. Com essa escolha, utilizaremos o termo medida para expressar o resultado, evidenciando, assim, a distinção entre o processo e seu resultado.

Outro aspecto importante a ser destacado é o uso de diferentes termos, ao lidar com grandezas geométricas e suas medidas. Por exemplo, altura, comprimento, largura, distância e profundidade são diferentes termos usados quando lidamos com a grandeza comprimento. No uso de alguns desses termos, ora estamos falando de um objeto geométrico (um segmento), ora da grandeza associada a ele (seu comprimento).

O modo como lidamos com esses termos pode contribuir para o não entendimento da diferença entre os objetos e seus atributos, mas também pode reforçar a confusão gerada pela pluralidade de significados em jogo para um mesmo termo. Além disso, os usos de alguns termos prejudicam a distinção entre os objetos e seus atributos, como é o caso de tomar superfície (que é um objeto geométrico) e área (que do nosso ponto de vista é uma grandeza) como sinônimos.

Entendemos grandeza enquanto um atributo, uma qualidade de um objeto ou de um fenômeno que pode ser comparado e quantificado. A comparação entre objetos para estabelecer uma ordem crescente pressupõe, mesmo que de maneira implícita, a escolha de algum atributo dos objetos, que será o critério de ordenação. Por exemplo, uma caixa pode ser observada com relação a diferentes grandezas, como o comprimento da sua altura¹⁰, sua massa, ou seu volume, entre outras. É possível que, ao ordenar duas caixas segundo essas grandezas tenhamos ordens

¹⁰ Embora a expressão comprimento da altura possa parecer estranha, queremos destacar que, na expressão, o termo altura remete ao objeto geométrico e o termo comprimento indica a grandeza correspondente.

diferentes, ou seja, duas caixas A e B podem ter volumes iguais, ao mesmo tempo que a caixa A tem massa maior que a da caixa B e a caixa B tem altura maior que a da caixa A¹¹.

A partir da escolha de uma unidade de comprimento, podemos quantificar os comprimentos das arestas da caixa. Por meio de uma operação de medição, vamos atribuir uma medida ao comprimento de cada aresta. Assim, se a unidade de medida escolhida for palmos, ao realizarmos a medição será determinada a quantidade de palmos que equivale à medida da altura da caixa; se a unidade de medida for centímetros, outra medição irá determinar a quantos centímetros equivale a altura da caixa. Os números obtidos por meio dos dois processos de medição são diferentes (como o palmo é uma unidade maior que o centímetro, a medida da altura em palmos é menor que sua medida em centímetros). Suponhamos que a altura da caixa é de dois palmos e meio e sua medida em centímetro é 50. Neste caso, 50 cm e 2,5 palmos são duas maneiras distintas de expressar um mesmo comprimento.

Para caracterizar essa operação, no caso específico da área, trazemos a ideia de grandeza do ponto de vista da matemática, com a visão geométrica de Euclides e Hilbert e a introdução dos números com a função medida; e, do ponto de vista da didática, a partir das hipóteses de Douady e Perrin-Glorian (1989).

2.1.1. Comprimento e área como grandezas geométricas do ponto de vista didático

Diversas pesquisas¹², como as de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996) e Ferreira (2010), identificam problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem das grandezas geométricas na escola básica, por exemplo, se duas superfícies possuem mesma área, os alunos afirmam que obrigatoriamente elas também possuem mesmo perímetro. As três pesquisas supracitadas – duas realizadas na França (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; BALTAR, 1996) e uma no Brasil (FERREIRA, 2010) – convergem quanto à observação de uma ênfase exacerbada nos aspectos numéricos, no ensino de área, como uma das possíveis razões de erros e dificuldades conceituais de aprendizagem.

¹¹ A densidade da caixa A, nesse caso, é maior que a densidade da caixa B.

¹² Trazemos, a seguir, um levantamento de algumas pesquisas nos últimos 15 anos.

As pesquisadoras francesas entendem que a aprendizagem matemática está associada à capacidade de resolver problemas tratados em diferentes quadros. Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 389), um quadro “[...] é constituído por objetos da matemática, pelas relações entre esses objetos, por suas formulações eventualmente diversas e pelas imagens mentais que o sujeito associa, a um dado momento, aos objetos e suas relações”.

A proposta da noção de quadros é dinâmica. Ao realizar mudanças entre os quadros, o aluno tem a possibilidade de buscar formas diferentes de resolução de uma dada situação, colocando em evidência a existência de uma articulação intensa e necessária entre os processos presentes nos diferentes quadros. Provocar mudanças de quadros no processo de resolução de problemas matemáticos favorece a construção, pelos alunos, de uma matemática menos fragmentada, mais articulada e dinâmica.

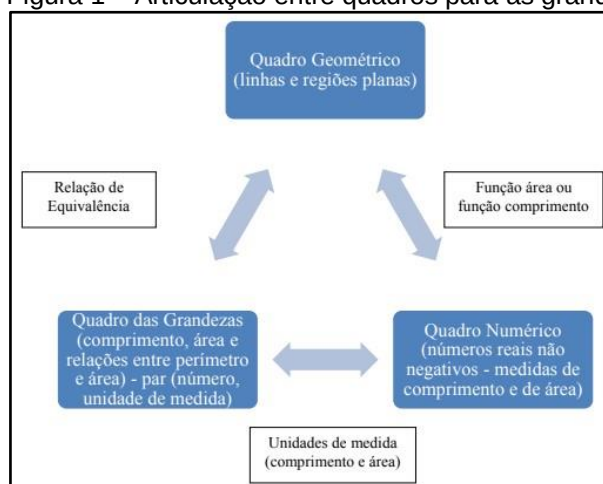
Ao considerar os três quadros (geométrico, das grandezas e numérico), as pesquisadoras francesas afirmam que a construção do conceito de área como grandeza significa: distinguir uma superfície e sua área, considerando que duas superfícies diferentes podem ter uma mesma área; e distinguir uma área e o número que representa sua medida em uma certa unidade, visto que, para uma mesma superfície, podem corresponder números diferentes associados às unidades de medida escolhidas, sem modificar a sua área.

Bellemain e Lima (2002) propõem uma diagramação dos quadros apresentados por Douady e Perrin-Glorian (1989), que relacionam a teoria com os estudos de área enquanto grandeza. Essa diagramação foi ampliada para o comprimento por alguns pesquisadores a exemplo de José Valério Silva (2016), na sua tese, que adotamos na nossa pesquisa, apresentada na Figura 1, a seguir.

Se considerarmos a grandeza área, o quadro geométrico é composto por superfícies, considerando as figuras geométricas e suas particularidades – triângulos, quadrados, retângulos, círculos, superfícies com contornos irregulares. O quadro numérico é formado pelas medidas das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos, e o quadro das grandezas constituído por classes de equivalência¹³ de superfícies de mesma área.

¹³ Classes de equivalência de superfícies de mesma área, que permite considerar área enquanto uma grandeza, é definida pela escolha de uma unidade de medida de área de modo que duas superfícies de mesma medida possuem a mesma área.

Figura 1 – Articulação entre quadros para as grandezas área e comprimento



Fonte: José Valério Silva (2016, p. 298).

Para a grandeza comprimento, teremos as linhas e os segmentos pertencentes ao quadro geométrico; as classes de equivalência das linhas e dos segmentos de mesmo comprimento, no quadro das grandezas; e o quadro numérico com as medidas das linhas, os números reais não negativos.

O perímetro, nesse modelo epistemológico, é uma instância do comprimento. Dada uma superfície plana, o comprimento de seu contorno é o perímetro da superfície. No caso dos polígonos, é a soma dos comprimentos dos lados do polígono, mas figuras não poligonais também têm contorno e, portanto, têm perímetro. No caso do perímetro, o objeto geométrico ao qual corresponde é uma linha fechada.

A passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas no caso da grandeza área acontece a partir da relação de equivalência “ter mesma área”. Dadas duas superfícies A e B, pode-se compará-las de acordo com suas áreas (decidir se A tem área maior que B, se A tem área menor que B ou se A e B têm áreas iguais). Se as áreas são iguais, as figuras A e B pertencem a uma mesma classe de equivalência.

A possibilidade de que figuras não congruentes possam ter mesma área já está presente na construção do saber matemático, desde a geometria de Euclides, embora a linguagem utilizada no livro *Os elementos* não seja essa. Pressiat (2002), ao discutir um modelo matemático para a grandeza área, argumenta que a noção de área na geometria de Euclides apoia-se em propriedades para a igualdade de figuras consideradas como “figuras de mesma área”:

1. Duas figuras congruentes são “iguais”;

2. As somas de figuras “iguais” são “iguais”;
3. As diferenças de figuras “iguais” são “iguais”;
4. As metades de duas figuras “iguais” são “iguais”;
5. O todo é maior que a parte;
6. Se dois quadrados são “iguais” seus lados são “iguais” (PRESSIAT, 2002, p. 5).

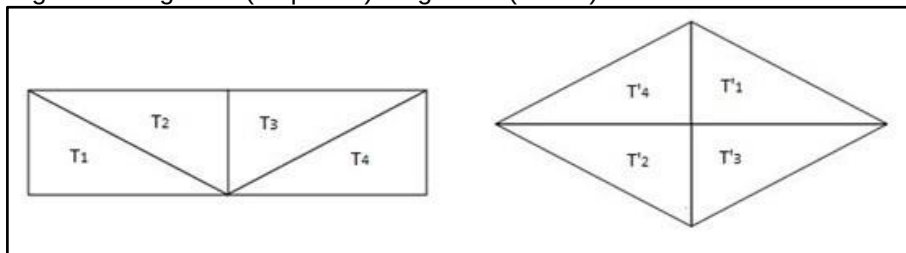
Observe que as propriedades de área de acordo com Euclides não estavam associadas à medida, aos números, mas à grandeza. Hilbert retomou essas propriedades de maneira mais rigorosa e, após definir um polígono como a reunião finita de triângulos, utilizou o termo “congruente” em substituição a “iguais”, de Euclides, e apresentou duas definições: de figuras equidecomponíveis e figuras equicomplementares.

Para Hilbert,

[...] duas figuras P e P' são equidecomponíveis se é possível escrevê-las na forma da união disjunta de triângulos:
 $P = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \dots \cup T_n$ e $P' = T'_1 \cup T'_2 \cup T'_3 \cup \dots \cup T'_n$ tal que, para qualquer valor de i , $1 \leq i \leq n$, os triângulos T_i e T'_i são congruentes (2002, p. 7).

Por exemplo, a união de dois retângulos congruentes (figura P) é equidecomponível com o losango (figura P') construído sobre suas diagonais, a partir da equivalência por decomposição.

Figura 2 – Figura P (esquerda) e figura P' (direita)



Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Hilbert também definiu figuras equicomplementares como:

- Duas figuras P e P' são equicomplementares se existem duas figuras Q e Q' tais que:
- P e Q são quase disjuntas¹⁴;
 - P' e Q' são quase disjuntas;
 - Q e Q' são equidecomponíveis;
 - $P \cup Q$ e $P' \cup Q'$ são equidecomponíveis. (PRESSIAT, 2002, p. 8)

¹⁴ Quase disjuntas: figuras poligonais que têm em comum no máximo pontos de suas fronteiras.

Nos *Fundamentos da geometria* de Hilbert, a igualdade de áreas de figuras poligonais apoia-se na equidecomposição e na equicomplementaridade. Essas noções, na reflexão sobre a aprendizagem e o ensino da área como grandeza, conectam-se ao aspecto da conservação da área ao realizar processos de decomposição e recomposição de figuras, sem perda nem sobreposição.

Um procedimento análogo pode apoiar a extensão desse modelo para o comprimento das linhas. Para linhas fechadas, por exemplo, podemos observar que os contornos de duas figuras planas distintas podem possuir o mesmo perímetro. Se os dois contornos possuem o mesmo comprimento, eles pertencem a uma mesma classe de equivalência.

A passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico é realizada por meio de uma função área que atribui a cada área um valor no conjunto dos $\mathbb{R}^+$. De maneira informal, pode-se dizer que se trata de escolher uma unidade de medida (padronizada ou não) e buscar resposta à questão: quantas vezes essa unidade de área “cabe” na superfície? Uma função f desse tipo tem as seguintes propriedades:

- a) f é uma função positiva, ou seja, se uma superfície possui interior não vazio, terá área positiva;
- b) f é uma função aditiva, ou seja, se duas superfícies S_1 e S_2 são quase disjuntas então a área da união das duas superfícies será a soma das áreas das superfícies, $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) + f(S_2)$;
- c) f é invariante por isometria, ou seja, se uma superfície S_1 é transformada em uma superfície S_2 e a distância entre quaisquer dois pontos de S_1 não se altera em S_2 , as duas superfícies possuem mesma área, $f(S_1) = f(S_2)$.

Além disso, geralmente, f é normalizada, ou seja, um quadrado Q é escolhido como superfície unitária, $f(Q) = 1$.

Essa função possibilita determinar a medida da área associada a um conjunto de superfícies planas mensuráveis. Dessa forma, escolhida a unidade de medida de área u , a função $f_u(S)$ é a função medida de área que a cada superfície plana mensurável S , atribui um número real não negativo, que é a sua medida na unidade u .

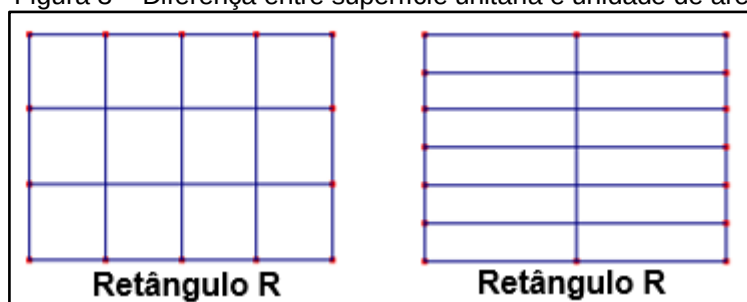
Uma função comprimento g pode ser construída de maneira análoga, tomando o conjunto de linhas L , abertas ou fechadas, com valores no conjunto dos $\mathbb{R}^+$, para determinar a medida do comprimento associado a um conjunto de linhas mensuráveis. Ao escolher uma unidade de medida de comprimento v , a função g_v

(L) é a função medida de comprimento que atribui um número real a cada linha mensurável L, o qual representa sua medida na unidade v. Assim, a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico, no caso do comprimento, consiste em escolher uma unidade de comprimento e buscar resposta à questão: “Quantas vezes essa unidade de comprimento cabe na linha a ser medida?”.

Como observado por Bellemain e Lima (2002), alguns textos da matemática pura, a partir da escolha da unidade de medida de área, passam a utilizar sentenças como “a área do retângulo é 12” ou “o quadrado tem 9 de área”, em que a unidade de medida de área está implícita. Essas expressões também são frequentes na linguagem cotidiana, mas durante o ensino das grandezas podem provocar confusões e erros.

Uma distinção que fazemos nesse trabalho é entre superfície unitária e unidade de área. Tomando um quadradinho de lado 1 cm como superfície unitária, são necessários 12 exemplares do mesmo para ladrilhar um retângulo R cujos lados medem 3 cm e 4 cm. Se utilizarmos como superfície unitária o retângulo de 2 cm por 0,5 cm, também são utilizados 12 exemplares para ladrilhar o mesmo retângulo.

Figura 3 – Diferença entre superfície unitária e unidade de área



Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

O centímetro quadrado é a área do quadradinho, mas também é a área do pequeno retângulo descrito acima. Ou seja, a unidade de área centímetro quadrado é a classe de equivalência das figuras que têm mesma área que o quadradinho cujo comprimento dos lados é de 1 cm. Se a unidade u fosse a área de um retângulo cujos lados medem 1 cm e 2 cm, a medida da área desse mesmo retângulo R seria 6.

O ponto de vista que adotamos nesta pesquisa, ao considerar comprimento e área como grandezas, é o de que o número que expressa o resultado da comparação com a unidade escolhida é a medida naquela unidade, e o par (número,

unidade de medida) é uma maneira de expressar a grandeza (a área ou o comprimento). Caraça (1951) destaca a importância do problema da medida na expansão dos números naturais para os racionais positivos.

A depender da unidade de medida, teremos diferentes pares, embora a área da superfície ou o comprimento da linha sejam invariantes. E a função medida, que associa as superfícies planas a números reais não negativos, garante a passagem entre os quadros geométrico e numérico. O mesmo acontece com segmentos, linhas e contornos para a associação de comprimentos ao quadro numérico. A escolha do par (número, unidade de medida) para representar uma grandeza irá depender da situação e da adequação da ordem de grandeza numérica obtida (CARAÇA, 1951).

Se por um lado conceitualmente, a exigência é que uma unidade de comprimento é um comprimento e uma unidade de área é uma área, do ponto de vista prático a escolha de uma unidade adequada é geralmente norteadas pela ordem de grandeza da medida. Assim, é mais adequado escolher o quilômetro para medir a distância entre Recife e Caruaru do que escolher o centímetro, embora conceitualmente não haja nenhum erro em utilizar o centímetro, uma vez que se trata de uma unidade de comprimento.

Considerar comprimento e área como grandezas exige, portanto, distinguir o objeto geométrico e a grandeza (uma superfície e sua área; uma linha e seu comprimento), bem como distinguir a grandeza e suas medidas, obtidas mediante a escolha de uma unidade.

Duas superfícies conexas podem ter áreas iguais, porém não coincidirem por superposição, o que nos leva a distinguir a área do objeto geométrico, que é a superfície. Também duas linhas podem ter comprimentos iguais, porém não coincidirem por superposição.

Douady e Perrin-Glorian (1989) consideram que o conceito de área deve ser desenvolvido enquanto uma grandeza, de maneira a garantir aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico. As pesquisadoras defendem que “[...] uma identificação precoce entre grandezas e números favorece o amálgama de diferentes grandezas (no caso, comprimento e área)” (p. 396).

Como consideramos em Ferreira (2010), a partir de Barbosa (2002, 2007), a articulação entre os quadros também deve ser utilizada para o desenvolvimento do comprimento enquanto grandeza e do perímetro como uma instância dessa grandeza, ou seja, o perímetro como o comprimento do contorno de uma figura.

Trazemos a seguir algumas pesquisas realizadas nos âmbitos nacional e internacional sobre as grandezas comprimento (perímetro) e área, para subsidiar a compreensão das continuidades e rupturas na construção desses conceitos, na transição entre o 5º ano e o 6º ano.

2.1.2 Pesquisas sobre a aprendizagem e o ensino de comprimento, área e perímetro

São muitas as pesquisas brasileiras e estrangeiras que analisam diferentes aspectos da abordagem das grandezas comprimento e área, identificam dificuldades dos alunos, experimentam intervenções com o objetivo de contribuir para dar significação aos conceitos em foco, analisam documentos curriculares, livros didáticos e práticas de professores de diferentes níveis e modalidades de ensino¹⁵.

Destacamos que a maioria desses estudos utiliza como referencial teórico as pesquisas desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), que elaboraram e experimentaram engenharias didáticas com alunos franceses. A análise dos resultados dessas pesquisas mostrou a variedade e a permanência de dificuldades conceituais em torno dos conceitos comprimento (incluindo o perímetro) e área.

Dificuldades dos alunos, nos vários níveis de escolaridade, foram constatadas nas construções conceituais: de área e do perímetro (BALTAR, 1996; MELO, 2003; SOUZA, 2004; D'AMORE & FANDIÑO, 2007; FERREIRA, 2010); de área (DUARTE, 2002; TELES, 2007; PESSOA, 2010; SILVA, A., 2016), de comprimento e perímetro (BARBOSA, 2002; BRITO, 2003; TEIXEIRA, 2004); e ao comprimento (BARBOSA 2007).

Na sua pesquisa de doutorado, Baltar (1996) realizou um estudo de situações em torno do conceito de área de superfícies planas, tomando como base os quadros numérico, geométrico e das grandezas. A pesquisadora considerou ainda as relações de diferenciação e coordenação entre o conceito de área e o de comprimento, necessária para a compreensão do conceito de área como grandeza,

¹⁵ Muitas das pesquisas que utilizamos foram desenvolvidas no grupo Pró-Grandezas: ensino e aprendizagem das grandezas geométricas, liderado pela Profa. Dra. Paula Bellemain e pelo Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima, ao qual a presente pesquisa também é vinculada.

e propôs uma classificação de situações que possibilita diferentes articulações entre esses quadros: situações de comparação, de medida e de produção.

A partir dessa classificação, a pesquisadora elaborou uma engenharia didática desenvolvida com alunos franceses, em turma equivalente ao 7º ano do ensino fundamental brasileiro, com situações que privilegiassem a passagem da noção de área enquanto grandeza unidimensional para a área como grandeza bidimensional.

As relações entre comprimento e área, e a dissociação entre área e perímetro, em ambientes de papel e lápis e com o uso do *software Cabri-géomètre*, foram exploradas por Baltar (1996). Como resultado no ambiente papel e lápis, foi confirmada a hipótese da pesquisadora, adotada de Douady e Perrin-Glorian (1989), quanto à necessidade de articular os quadros geométrico e numérico para a construção conceitual da grandeza área. Já o ambiente dinâmico do *Cabri-géomètre* favoreceu a construção do conceito de área e o uso das fórmulas de área e de perímetro.

No entanto, dificuldades conceituais relacionadas à dissociação da área e do perímetro de paralelogramos e retângulos ainda persistiram, como também relativas à independência da área de paralelogramos e triângulos diante da escolha do lado tomado como base. Noções associadas às figuras geométricas como base e altura mostraram a necessidade de um trabalho com figuras que não sejam prototípicas¹⁶.

Melo (2003) analisou a dissociação entre área e perímetro ao aplicar um mesmo teste com duas situações de comparação, a de áreas e a de perímetros, com alunos de 5ª a 8ª séries (6º aos 9º anos) do ensino fundamental. O pesquisador verificou que não houve uma mudança significativa na comparação dos perímetros como houve na comparação das áreas, em que os alunos apresentaram diversos tipos de erros, como considerar que a área e o perímetro variam no mesmo sentido. A necessidade de verificar a compreensão dos alunos ao considerar o perímetro apenas como a soma das medidas dos lados de um polígono também foi levantada pelo pesquisador, assim como quais seriam as estratégias utilizadas diante de figuras não poligonais.

A pesquisa de Souza (2004) investigou os procedimentos utilizados por alunos de 4ª, 5ª e 8ª séries (5º, 6º e 9º anos, respectivamente), de municípios do

¹⁶ Posição mais usual da figura, utilizada como exemplo-padrão. Por exemplo, um retângulo sempre representado com o lado de maior comprimento na posição horizontal.

estado de Pernambuco, ao responderem a questões de avaliações institucionais¹⁷ envolvendo grandezas geométricas, e deteve-se aos conceitos de área e perímetro.

Ao constatar na 5ª série (6º ano) que 43,9% dos alunos apresentaram dificuldade em dissociar os conceitos em tela quando estão presentes em um mesmo item, o pesquisador sinalizou que a dificuldade poderia ser provocada pelo efeito visual das figuras, quando a forma interfere na interpretação das grandezas. Diante dos resultados, interpretou as expressões “mais cheio”, “mais espichado” e “mais alta” como sinônimos da ideia de “espaço ocupado”.

D’Amore e Fandiño (2007) examinaram as convicções de professores e estudantes italianos de vários níveis de escolaridade, com relação à dissociação entre área e perímetro de figuras planas, a partir de situações de produção. Foi observado que a produção das figuras, tanto pelos alunos quanto pelos professores, se concentra em polígonos convexos, em particular, retângulos.

Dentre os estudantes, mais de 90% afirmaram existir dependência entre a área e o perímetro das figuras e mais de 50% se surpreenderam quando figuras não convexas foram apresentadas pelo entrevistador, e justificaram ao afirmar “essas figuras não são geométricas” ou “elas não são usadas na escola”. Também é preocupante que professores mantenham a imagem de polígonos convexos, o que poderá ser transferido para a sala de aula com situações em que predominem retângulos, por exemplo.

Conforme comentamos na introdução (p. 27) sobre nossa dissertação (FERREIRA, 2010), os alunos apresentaram avanços em situações na malha quadriculada. No entanto, a maioria utilizou a contagem de quadradinhos no lugar da aditividade das áreas e da invariância de áreas por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição, o que confirma a ênfase em situações no quadro numérico. Além disso, alguns alunos não perceberam as características e propriedades das superfícies, o que prejudicou a compreensão do conceito de perímetro.

Percebemos que o uso da malha quadriculada enquanto recurso favorece a decomposição e composição de figuras, o que possibilita a compreensão da área enquanto grandeza unidimensional. Como recomendação, sugerimos maior

¹⁷ Municípios do Recife e do Cabo (NAPE – Núcleo de Avaliação e Pesquisas da UFPE), além de outros (SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco/2002).

exploração desse recurso para auxiliar na percepção das propriedades das superfícies.

Nas pesquisas de Baltar (1996), Melo (2003), D'Amore e Fandiño (2007) e Ferreira (2010), abordando situações distintas e sujeitos de diferentes níveis de ensino, e em diferentes países, foi possível perceber que não está claro para o aluno que nem sempre a área e o perímetro variam no mesmo sentido.

Duarte (2002) realizou um estudo de caso com alunos de 5ª série (6º ano), tomando como marco teórico a teoria dos campos conceituais (TCC), no qual propôs situações de comparação, medida e produção de superfícies. O pesquisador observou que, nas atividades de comparação de áreas e produção de figuras com o uso de medidas, os alunos apresentavam dificuldades em dissociar a grandeza área da medida dessa grandeza. Por exemplo, com o princípio de invariância da área de uma figura, ao verificar que uma figura poderia ser transformada em outra de mesma área, com diferentes unidades de medidas não convencionais.

Teles (2007), também apoiada na TCC, aplicou testes a 259 alunos do 2º ano do ensino médio, que permitiram investigar a mobilização de invariantes operatórios e representações simbólicas nos procedimentos de resolução dos alunos, e confirmou que as fórmulas de áreas enquanto conceito estão situadas simultaneamente nos vários campos conceituais. Foram identificados teoremas-emoção falsos, relacionados ao uso das fórmulas de área e perímetro do retângulo. Para muitos alunos, as fórmulas de área de uma figura podem ser indevidamente estendidas para outra figura como do retângulo para o paralelogramo, resultado convergente com o encontrado por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Pessoa (2010) realizou um estudo diagnóstico dos procedimentos utilizados por alunos do 6º ano do ensino fundamental, em situações de medida de área de figuras planas construídas em malha quadriculada. O foco central desse estudo foi o mapeamento de variáveis didáticas e seus respectivos valores, e a análise da influência dos valores atribuídos para as variáveis escolhidas sobre o desempenho dos alunos e sobre os procedimentos utilizados (a contagem de quadradinhos inteiros, a necessidade de realizar compensações, a decomposição e recomposição, a subtração de áreas e o uso de fórmulas, entre outros).

A pesquisadora constatou que a contagem de quadradinhos foi o procedimento mais frequente e que o uso da malha contribuiu para a determinação da medida da área das figuras através do procedimento de decomposição e

recomposição, que auxilia na articulação entre os quadros geométrico e das grandezas, como sugerem Douady e Perrin-Glorian (1989). Também observou a dificuldade de alguns alunos aceitarem as situações em que a área de uma figura era representada por uma quantidade não inteira. Observou ainda que o fato de as figuras estarem preenchidas, sem deixar a malha visível no seu interior, dificultou a determinação das áreas, fazendo com que alguns alunos mobilizassem outras estratégias, mas não foram motivo de impedimento.

A pesquisa de Anderson Silva (2016), com o aporte da TCC e elementos de uma engenharia didática, investigou como alunos de 6º ano do ensino fundamental enfrentavam situações que dão sentido à área como grandeza, segundo a classificação de Ferreira (2010), em três ambientes com características distintas: apenas com papel e lápis, com materiais manipulativos¹⁸ e o uso do *software Apprenti-Géomètre 2*.

A intervenção contou com um grupo de 12 alunos, submetido a uma etapa de familiarização com os recursos, ambientes e conhecimentos necessários para o desenvolvimento com as situações sobre área. Em seguida, organizados em duas duplas para cada um dos ambientes, os alunos realizaram as atividades propostas e, na terceira etapa, em trios, um de cada ambiente da etapa anterior, escolhiam os recursos que sentissem mais à vontade para responder as tarefas nos três ambientes.

A pluralidade de recursos nos ambientes materiais manipulativos e no *Apprenti-Géomètre 2* mostraram avanços nas situações de comparação de áreas com procedimentos de inclusão e sobreposição, e decomposição e recomposição de figuras. O pesquisador constatou ainda que, independente da diversidade de recursos oferecidos nos ambientes, o aspecto numérico nas situações de medida de área e mudança de unidade permanece.

Observamos nas pesquisas anteriores, em diferentes níveis de ensino, com situações variadas associadas ao campo numérico e/ou algébrico, a dificuldade na construção do conceito de área.

Barbosa (2002) investigou como alunos da 4ª série (5º ano) do ensino fundamental de uma escola da rede pública compreendem a passagem do objeto geométrico contorno, ao perímetro, tomado como instanciação da grandeza

¹⁸ Materiais manipulativos disponibilizados: papel de decalque, tesoura, fita adesiva, cola, lápis de cor, canetas hidrográficas, giz de cera e malhas pontilhada quadrada, quadriculada e isométrica.

comprimento, propriedade desse objeto geométrico. Desenvolveu e aplicou uma sequência de atividades de comparação de comprimentos de caminhos planos, abertos e fechados, sem o uso de medidas, fornecendo alguns materiais (um fio fino e flexível, dois cordões de cores diferentes, uma régua transparente e uma régua de cartolina branca não graduada) que possibilitavam comparações.

As dificuldades dos alunos foram com os caminhos fechados, devido à não compreensão dos conceitos de contorno e perímetro. Dentre os materiais fornecidos, o cordão foi o mais utilizado, embora tenha sido observada uma resistência dos alunos em utilizá-lo, talvez pelo fato dele não fazer parte do cotidiano das aulas de matemática. O pesquisador também levantou a questão posta por Melo (2003) sobre quais estratégias os alunos poderiam utilizar diante de situações que envolvessem figuras não poligonais.

Com base nas conclusões de Barbosa (2002), levantamos o questionamento sobre quais recursos fazem parte do cotidiano da sala de aula de matemática e são utilizados para o estudo das grandezas e medidas, em particular para as grandezas área e comprimento no 5º e 6º anos do ensino fundamental; e de que maneira esses recursos contribuem para o ensino da área e do perímetro no 6º ano durante a retomada dos conceitos trabalhados no 5º ano do ensino fundamental.

Brito (2003) verificou a influência de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza, com foco nas noções de comprimento e perímetro, a partir de um estudo diagnóstico com alunos de 4ª série (5º ano) do ensino fundamental. Nas situações de comparação de comprimentos de caminhos abertos, observou a influência de efeitos como “projeção horizontal”, “projeção vertical”, “espaço ocupado”, também percebido por Barbosa (2002), e na comparação de figuras/objetos com contornos iguais verificou que os alunos apresentaram dificuldade em dissociar contorno de forma.

Por meio de um estudo envolvendo situações de comparação e de produção, Teixeira (2004) investigou a concepção de alunos do 2º e 8º períodos do curso de pedagogia, sobre os conceitos de comprimento e perímetro. A pesquisadora observou que os alunos apresentam concepções ora no quadro das grandezas, ora no quadro geométrico, principalmente em atividades com figuras fechadas, quando a percepção visual global das figuras prevalece em detrimento das propriedades das mesmas, e que a grandeza comprimento é mais compreendida quando as situações envolvem figuras poligonais do que com figuras não poligonais. Também o termo

perímetro causou mudança de estratégia, quando as figuras passaram a ser comparadas pela sua forma e não mais pelos comprimentos, o que foi percebido por Barbosa (2002).

Na sequência aplicada a 28 alunos numa turma de 4ª série (5º ano) do ensino fundamental, numa escola de Campina Grande (PB), Barbosa (2007) constatou que, ao realizarem comparações de comprimentos entre pares de linhas abertas, os alunos utilizaram conhecimentos influenciados por fenômenos visuais, os quais interferem nas respostas indicadas como integrantes da operação cognitiva de visualização.

As lacunas apresentadas nas pesquisas de Barbosa (2002; 2007), Brito (2003) e Teixeira (2004), influenciadas pela percepção visual das figuras, deixam clara a necessidade de investigar que situações estão sendo objeto de estudo dos conceitos de área e perímetro nas escolas, presentes nos livros didáticos ou são apresentadas pelos professores nos diferentes níveis de ensino.

Vale destacar que, dentre as pesquisas citadas anteriormente, apenas Barbosa (2002) e Brito (2003) investigaram o 5º ano dos anos iniciais do ensino fundamental, sobre o conceito de comprimento.

Apesar de o foco da nossa pesquisa não ser na grandeza comprimento, entendemos que as pesquisas sobre essa grandeza ajudam a entender a conceituação de perímetro, necessária para o estudo das relações entre área e perímetro, e considerado como um dos aspectos importantes na compreensão do conceito de área enquanto grandeza.

Algumas pesquisas focaram suas análises em livros didáticos (LD) do PNLD: no 5º ano do ensino fundamental (BARBOSA, 2002); nos anos finais (BARROS, 2006; SANTANA, 2006); nos anos finais e no ensino médio (TELES, 2007); ao longo do ensino fundamental (FERREIRA, 2010; SILVA, J. V., 2016); e no 6º ano (SILVA, J. V., 2011; BELLEMAIN, 2013; SANTOS, 2015), sendo que Bellemain (2013) também fez uma análise comparativa com livros franceses.

Barbosa (2002) também analisou quatro coleções de livros didáticos do 5º ano e observou que o conceito de perímetro poderia ter uma abordagem mais ampla que a apresentada nos livros didáticos, quase sempre como “a soma dos lados”. O pesquisador situou “[...] o conceito de perímetro como uma instância da grandeza comprimento, por sua vez do campo conceitual da grandeza área” (p. 31). Complementa dizendo: “[...] o conceito de perímetro passa a ser um caso particular

da grandeza comprimento, diferenciando-se do objeto geométrico em si, que é a linha fechada” (p. 32).

Barros (2006) analisou as relações entre área e perímetro em sete coleções do PNLD 2002 e 2005, 3º e 4º ciclos do ensino fundamental¹⁹, e observou que esses conceitos eram usados com frequência para trabalhar outros conteúdos, como multiplicação de naturais, frações, potências e equações do 2º grau, reforçando o papel das grandezas e medidas como articulador dos demais blocos, conforme proposto nos PNC (BRASIL, 1998a). Dentre as atividades propostas, foi observado ainda que a figura do retângulo era a mais frequente, seguida do quadrado, triângulo e paralelogramo com inclinação à direita.

O pesquisador também observou nas coleções analisadas que há diversidade de abordagens dadas aos conceitos de área e perímetro, com relação às definições apresentadas, por exemplo, aos termos área, perímetro e grandeza associados ao aspecto numérico. A primeira abordagem que envolvia os conceitos de área e perímetro, em cinco das sete coleções analisadas, estava associada a situações de medida, sem dar destaque à dimensionalidade das unidades de medida.

Santana (2006) investigou nas coleções do PNLD 2002, dos anos finais do ensino fundamental, o uso de recursos didáticos, tais como tangram, malhas e poliminós, no estudo do conceito de área, e constatou que os recursos didáticos em foco eram pouco explorados nos livros investigados. A pesquisadora considera que recursos como tangram e poliminós, ao possibilitarem a construção de diferentes figuras planas, contribuem para a elaboração de diferentes representações que auxiliam na dissociação entre área e figura.

Teles (2007), tomando como referencial a TCC, analisou coleções do ensino fundamental e médio e observou que as fórmulas de área eram usadas ora como objeto de estudo, ora como recurso para outras temáticas, o que favorece ao estudante transitar por diferentes campos conceituais. Constatou ainda que essas passagens ampliam a compreensão dos estudantes, mas também explicam a complexidade da aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Na nossa pesquisa de mestrado (FERREIRA, 2010), analisamos duas coleções dos mesmos autores, uma dos anos iniciais, e a outra dos anos finais do ensino fundamental. A predominância de situações de mudança de unidade

¹⁹ 3º e 4º ciclos equivalem às 5ª e 6ª séries (6º e 7º anos atuais) e 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos atuais), respectivamente no PCN.

associadas ao quadro numérico, conforme descrito na introdução desta tese (p. 13), reforça a necessidade de uma articulação dos demais quadros para a compreensão e construção dos conceitos de área e perímetro. Também atentamos para a baixa frequência de situações de comparação e produção, tanto para a área quanto para o perímetro.

José Valério Silva (2011), ao analisar os capítulos do 6º ano em livros do PNLD 2008 e 2011 que tomam comprimento, perímetro e área como objetos de estudo, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), observou uma maior concentração em situações de mudança de unidade de comprimento, e situações de medida de área e de perímetro. No entanto, situações de comparação de perímetros de figuras planas sem medida e de produção de perímetro não foram identificadas em nenhum livro didático.

Bellemain (2013) fez uma análise comparativa entre livros didáticos franceses e brasileiros, de classes equivalentes (*sixième* e sexto ano, respectivamente) com relação à grandeza área, sob a ótica da TAD, e observou que as articulações com o bloco dos números são mais explícitas nos livros brasileiros, enquanto que a dissociação entre área e perímetro é mais explícita nos livros franceses.

A tese de Santos (2015) analisou o distanciamento entre a prática de um professor de matemática de 6º ano do ensino fundamental e a abordagem do livro didático adotado por ele, com relação ao conceito de área de figuras geométricas planas, com o olhar da TAD. No capítulo do livro analisado, a pesquisadora observou que os autores abordam a noção de área com tarefas contextualizadas de comparação, na busca da construção dessa noção enquanto grandeza. Contudo, foi percebida a ênfase em tarefas de medida de figuras ou de uma região, inclusive nas relacionadas à comparação, e ausência de tarefas de produção e transformações geométricas.

A pesquisadora constatou que a relação entre a prática docente e a abordagem do capítulo do livro analisado converge quanto à abordagem do conceito de área, mas diverge quanto aos tipos de tarefas propostos visto que, apesar de o livro didático ser o único recurso do professor, esse transforma a organização didática proposta ao escolher as atividades associadas ao treino e uso de fórmulas.

José Valério Silva (2016) investigou como alunos do nível médio de um curso técnico de edificações utilizam os seus conhecimentos das noções de área e perímetro nas tarefas contextualizadas associadas à construção civil. O estudo foi

composto de três etapas: uma análise documental, um estudo diagnóstico e uma intervenção realizada com os estudantes.

Ao analisar duas coleções de um mesmo autor ao longo de todo o ensino fundamental o pesquisador constatou que elas apresentam poucas tarefas que favorecem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas, e que ajudem na distinção entre grandezas, como ao abordar a área e o perímetro de um mesmo objeto, e as figuras utilizadas são em sua maioria poligonais, com ênfase nos quadrados e retângulos. Em particular, não foram observadas na coleção dos anos iniciais tarefas que contemplassem as relações entre área e perímetro e, mesmo nos volumes dos anos finais em quantidade reduzida, essas tarefas estão associadas ao quadro numérico.

À luz das reflexões realizadas sobre as grandezas geométricas comprimento e área, do desenvolvimento a partir dos seus usos dentro da sociedade e da disciplina matemática, entendemos que alguns princípios devem servir de base para uma integração com o saber escolar desde os anos iniciais do EF, e que favoreçam a compreensão de área e comprimento enquanto grandezas ao final do 6º ano do EF.

Podemos observar, a partir de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), o interesse das pesquisas aqui apresentadas sobre alguns conceitos como comprimento, área e perímetro, que consideram a importância da construção da noção de grandeza a partir da distinção entre uma grandeza, um objeto e um número.

Como proposta de enfrentamento das dificuldades conceituais de aprendizagem e dos erros observados, adotamos nesta pesquisa o modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989), segundo o qual a área deve ser abordada na escola como uma grandeza, o que conduz a distinguir e articular três quadros: o geométrico, o das grandezas e o numérico. Essa abordagem tem como consequência a necessidade de promover a compreensão da distinção entre um objeto e as grandezas que se pode associar a ele; assim como uma grandeza e suas medidas (números associados à superfície, por meio do processo de medição a partir da escolha de uma unidade). Ao mesmo tempo, esses três quadros não são isolados, na abordagem da área, pois é preciso também entender em que condições se pode alterar uma figura mantendo sua área e de quais maneiras podemos atribuir um número à área de uma figura de modo que às figuras de mesma área seja

atribuído o mesmo número e a ordem das áreas seja a mesma que a ordem dos números que expressam sua medida, em uma mesma unidade.

Embora discretos, observam-se avanços no ensino das grandezas geométricas em alguns LD, como a possibilidade de transitar entre diferentes campos conceituais com o uso de fórmulas para o cálculo de áreas, apontada na pesquisa de Teles (2007), e a abordagem da noção de área enquanto grandeza estudada por Santos (2015). Por outro lado, lacunas foram sinalizadas, na abordagem do aspecto numérico das grandezas por Barbosa (2002), Barros (2006), José Valério Silva (2011) e Bellemain (2013), no número reduzido de tarefas que abordam a distinção entre área e perímetro (SILVA, J. V., 2016), na abordagem restrita do conceito de perímetro constatada por Barbosa (2002) e na exploração limitada dos recursos apresentados (SANTANA, 2006).

Nas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de conceitos como área e perímetro, é imperativa a proposição de situações de comparação sem medida e de produção, seja para comprimentos (TEIXEIRA, 2004), seja para área (SILVA, J. V., 2011; FERREIRA, 2010); com figuras poligonais e não poligonais (MELO, 2003) e também com as figuras poligonais não convexas (D'AMORE; FANDIÑO, 2007); ou ainda situações que façam o uso de recursos didáticos, a exemplo da pesquisa de Pessoa (2010,) com malha quadriculada, e de Anderson Silva (2016), com a oferta de recursos em diferentes ambientes, que podem contribuir para a compreensão do conceito de grandeza.

Entendemos existir uma lacuna quanto à análise de LD (livro didático) dos anos iniciais do ensino fundamental. Além disso, a necessidade de observar mais atentamente a organização conceitual proposta na educação básica, em particular no ensino fundamental e o papel articulador das grandezas e medidas; de diferenciar um objeto das grandezas associadas a ele, e mapear as situações propostas para compreensão das dificuldades dos alunos na transição entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental, ao lidar com as grandezas, no nosso entendimento precisa ser realizada.

2.2 ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC)

Apresentamos algumas reflexões teóricas sobre a teoria dos campos conceituais proposta por Gérard Vergnaud (1975; 1981; 1990; 1993; 1994; 1998;

2001; 2007), que, com a colaboração da psicologia cognitiva, da didática da matemática e da matemática, vem propiciar aos pesquisadores compreender o processo de construção de conceitos matemáticos pelos alunos.

Embora Vergnaud estude, essencialmente, o sujeito que aprende, e não propriamente o aluno, a sua teoria busca compreender a construção de conceitos, o desenvolvimento cognitivo de sujeitos frente a uma situação, o que se aplica potencialmente aos alunos, e tem sido tomada como suporte de diversas pesquisas em didática da matemática, em particular no campo das grandezas geométricas, como apresentado anteriormente.

Para Vergnaud (1994), o aluno constrói seu conhecimento em ação diante de uma situação, e para a construção de um conceito o aluno precisa “[...] não somente de uma definição por enunciado e textos, mas também daquilo que está subjacente às competências e permite a ação operatória” (p. 177). Entendemos aqui competência como a capacidade do sujeito em enfrentar e resolver situações. Essas competências são construídas a partir das experiências individuais, das relações sociais e dos conhecimentos adquiridos. Vergnaud (Ibid.) afirma que grande parte dos nossos conhecimentos são competências, porém apenas uma parte dessas é facilmente explicável.

Vergnaud (2001) apresenta algumas definições complementares de competência, mas que não considera serem suficientes para caracterizar a organização dos conhecimentos que um indivíduo possui para analisar uma atividade.

- A é mais competente que B, se ele sabe fazer qualquer coisa que B não sabe fazer;
- A é mais competente que B, se ele se posiciona de uma maneira melhor;
- A é mais competente, se ele dispõe de recursos alternativos que lhe permitem utilizar tanto um procedimento quanto outro, e se adaptar mais facilmente aos diferentes casos que possam se apresentar;
- A é mais competente, se ele sabe “se virar” diante de uma situação nova de uma categoria jamais encontrada (p. 7-8, tradução nossa).

De fato, a depender da situação a ser resolvida, podemos ser ágeis ao resolver uma determinada tarefa, realizar ações automáticas e, em outros momentos, precisamos agir com mais cuidado, analisar as possibilidades, ou, ainda, ser capazes de enfrentar situações nunca antes vivenciadas, conseguindo resolvê-las ao adaptar os conhecimentos existentes e ser capaz de desenvolver novos.

Mas o que interessa não é apenas a capacidade de resolver uma situação, e sim como a aprendizagem se desenvolve e um conceito é construído. Para Vergnaud, o que se adapta são os esquemas às situações. “Um esquema é uma organização invariante da conduta para uma classe definida de situações” (VERGNAUD, 2001, p. 9, tradução nossa).

Quando estamos diante de situações conhecidas, utilizamos esquemas já conhecidos. Essas devem ser escolhidas de modo a favorecer o uso de esquemas já existentes e contribuir para a elaboração de outros. Se as situações são novas, precisaremos buscar, além dos conhecimentos adquiridos, novas estratégias, construindo novos esquemas de resolução, desenvolvendo, assim, novas competências. Nessa ação, existem conhecimentos explícitos e implícitos, e representações importantes para o trabalho do pesquisador.

Vergnaud considera o esquema uma organização dinâmica, composta de quatro elementos:

[...] regras de ação e de antecipações, visto que gera uma série de ações para se atingir um objetivo, nem sempre se reconhece que ele é também composto, de modo essencial, por invariantes operatórias (conceitos-em-ação e conhecimentos-em-ação) e por inferências. (1993, p. 6)

É a partir da ação sobre uma situação que o sujeito mobiliza seus conhecimentos, considera as informações que são relevantes, organiza suas ideias e as representa. A dupla esquema-situação é vista por Vergnaud (2007) como fundamental para compreender como acontece a construção do conhecimento.

A TCC também destaca que a aprendizagem não se realiza em um período apenas, mas que se consolida quando os conceitos são utilizados em outros momentos, de forma ampliada e associados a outros conceitos. Essa visão traz consequências sobre o modo como se deve estruturar o ensino, tanto no que diz respeito à variedade de situações como ao fato de revisitar os mesmos conceitos ao longo dos anos, aprofundando paulatinamente a abordagem deles, o que coaduna com a ideia de currículo em espiral de Bruner (1999)²⁰.

Além disso, uma situação não pode ser analisada com um único conceito e um conceito não assume o seu significado em uma única classe de situações. Vergnaud (1990) considera que um conceito nunca está sozinho, mas sim acompanhado de outros conceitos, que serão necessários para a resolução de uma

²⁰ Abordaremos a ideia de currículo em espiral de Bruner (1999) no item 2.6 deste capítulo.

situação proposta, e chama de campo conceitual o “[...] espaço de problemas ou de situações problemas cujo tratamento implica conceitos e procedimentos de diversos tipos em estreita conexão” (VERGNAUD, 1981, p. 217).

Um conceito é constituído de três elementos que estão interligados: (S) um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; (IO) um conjunto dos invariantes operatórios, que justificam a operacionalidade dos esquemas; (R) e um conjunto das representações simbólicas (linguísticas e não linguísticas) do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos de tratamento das situações. Esse espaço de situações (S), cujo tratamento envolve uma variedade de conceitos e processos de vários tipos em conexão, juntamente com o conjunto dos invariantes operatórios, os procedimentos e as representações dos conceitos, é caracterizado por Vergnaud (1990) como um campo conceitual.

O autor entende essa situação como “[...] uma combinação de tarefas das quais é importante conhecer a natureza e a dificuldade própria” (VERGNAUD, 1990, p. 146). Por exemplo, a situação de medição de comprimentos deve ser oportunizada em diferentes tarefas – seja com medições concretas como medir comprimentos de diferentes fios sem instrumentos, com instrumentos não convencionais e com instrumentos convencionais, seja com medições teóricas, como medir o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados medem 4 cm e 7 cm. Todas essas tarefas contribuem para a aquisição de competências específicas.

A construção de um conceito, em conjunto com conceitos e invariantes operatórios associados, e as representações compõem a análise da tarefa cognitiva do sujeito. O destaque deve ser dado aos esquemas construídos pelos alunos e os procedimentos utilizados para resolver a tarefa matemática.

Dessa forma, não podemos falar apenas do conceito de área, mas sim do conceito de área enquanto parte do campo conceitual das grandezas geométricas, juntamente com os conceitos de comprimento, perímetro, capacidade, volume, ângulo; com as relações entre os campos, como as estruturas aditivas e multiplicativas; com as fórmulas para o cálculo do perímetro, da área, do volume; e com as funções.

Para ganhar significado, esses conceitos devem ser abordados numa grande variedade de situações dentro do campo conceitual das grandezas geométricas, a partir das variáveis de situação e seus respectivos valores, para buscar nos

conhecimentos dos alunos as situações que eles já dominam e as que são possíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar.

A continuidade da construção do conhecimento é primordial para Vergnaud, assim como as rupturas são necessárias, do ponto de vista conceitual (VERGNAUD, 1990).

Vergnaud (1998) considera algumas definições como fundamentais para a compreensão da construção de um conceito. São elas:

1. Um esquema é uma organização invariante de comportamento para uma certa classe de situações.
2. Um teorema-em-ação é uma proposição que é considerada verdade.
3. Um conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria que é considerada relevante (p. 168, tradução nossa).

Os invariantes operatórios (IO) conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, para Vergnaud (1994), atuam como guias no reconhecimento dos elementos que são pertinentes ao aluno na situação, e nas escolhas dos conhecimentos a serem utilizados, muitas vezes implícitos na ação.

Diante de uma situação, o aluno buscará informações que considera relevantes de acordo com os conhecimentos que possui, os conceitos-em-ação, que podem ser ou não pertinentes para aquela análise. A partir dos conceitos-em-ação elencados, mas nem sempre anunciados, o aluno passa a realizar inferências e a levantar proposições, os teoremas-em-ação²¹, que servirão de suporte para suas inferências e pautar as suas ações. Esses, independentes da situação, sempre devem ser verificados quanto a sua veracidade ou não.

Para Vergnaud (2007), a compreensão da forma operatória utilizada pelo aluno para resolver a tarefa matemática precisa ser complementada com a forma que este aluno exprime a sua ação, que é a sua forma predicativa. As rupturas entre a forma operatória e a forma predicativa geram dificuldades na construção de conceitos.

Diante de situações novas, os alunos mobilizam o conhecimento do qual dispõem, amparados na filiação entre esse conhecimento e os esquemas que permitem tratá-las parcialmente. Ao mesmo tempo, essas novas situações levam a

²¹ Ao longo do texto, teoremas-em-ação serão apresentados com base em Ferreira (2010) e Bellemain, Ferreira e Anderson Silva (2016). A relação completa dos citados consta no Quadro 8 – Teoremas-em-ação verdadeiros e

rupturas e à elaboração de novos esquemas. No desenvolvimento conceitual, são igualmente importantes as filiações e rupturas. Ao propor situações, o professor precisa estar atento a esse movimento.

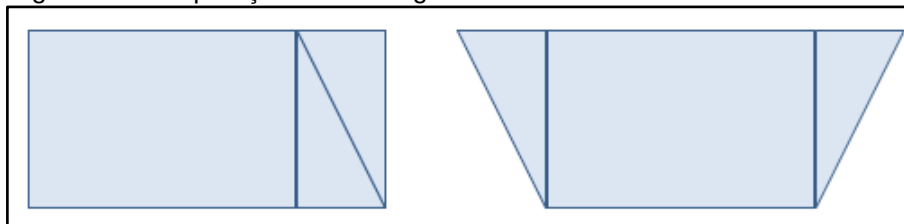
Quando o aluno afirma “se duas superfícies possuem mesma área, possuem mesmo perímetro”, ele está utilizando um teorema-em-ação falso, que é um invariante operatório, para justificar as operações realizadas ao resolver uma determinada situação. Mas nem sempre os invariantes operatórios são explicitados pelos alunos como na situação acima. Como os invariantes operatórios expressam a representação que cada sujeito possui dos objetos, e esses, geralmente, são mobilizados de maneira implícita na sua forma operatória, na maioria das vezes não são expressos na forma predicativa.

As representações simbólicas (R) dos conceitos, propriedades e procedimentos, por exemplo, as figuras, suas formas e posições, irão contribuir para a identificação dos invariantes operatórios na ação do aluno diante das situações.

Diante da comparação de duas figuras equidecompostas que possuem a mesma área (como citado no item 2.1, são aquelas que possuem partes duas a duas congruentes), o aluno pode, dentre outras possibilidades:

- a) mobilizar um teorema-em-ação verdadeiro, de que figuras equidecompostas têm áreas iguais;
- b) comparar os perímetros das figuras ao confundir os conceitos de área e perímetro, e mobilizar o conceito-em-ação que não é pertinente, ao realizar a comparação das áreas das figuras a partir do perímetro;
- c) comparar os perímetros das figuras por considerar que a ordem dos perímetros é sempre igual à ordem das áreas, ou seja, se duas figuras têm perímetros iguais, necessariamente as suas áreas são iguais; e, se o perímetro da figura A for maior que o perímetro da figura B, então a área da figura A será maior que a área da figura B. Nesse caso, embora a resposta seja a mesma do item anterior, o teorema-em-ação mobilizado “quanto maior o perímetro de uma figura, maior será a sua área” é falso.

Figura 4 – Comparação de duas figuras de mesma área



Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

A partir das situações propostas aos alunos, conceitos e teoremas pertinentes serão mobilizados por eles ao considerarem as características que são próprias de cada situação. Ao ser colocado diante de uma situação, o aluno irá mobilizar seus conhecimentos e expressar seu raciocínio por representações simbólicas, que possibilitarão ao pesquisador analisar quais conceitos-em-ação são mobilizados pelos alunos em cada uma das situações, e que teoremas-em-ação são elaborados por eles.

Na interpretação dos procedimentos utilizados pelo aluno frente a uma situação, é papel do pesquisador interpretar, mapear e analisar os esquemas, com os conceitos envolvidos de forma explícita e os que não estão visíveis nas suas representações, sejam simbólicas ou não.

Ao analisar uma situação, é esperada do aluno a utilização de diversas formas de linguagens, e que possam ser ampliadas, com as representações simbólicas, os símbolos matemáticos, para expressar o seu pensamento, suas ideias sobre o objeto de estudo, suas propriedades e conceitos, sem a limitação apenas da linguagem natural. Vergnaud (1975) entende que as representações também devem ser consideradas,

Por quais representações intermediárias se deve passar para ensinar com eficácia um sistema de representação canônico? [...] A questão do cálculo relacional está no centro dos problemas do conhecimento e é somente no nível das relações e do cálculo relacional que **o novo pode ser gerado pelo sujeito**²² (p. 237, tradução nossa).

Ao propor diferentes situações que propiciam a utilização de diferentes técnicas, podemos contribuir com a mudança de representação, para a construção de um sistema canônico de representação. As mudanças de representação irão propiciar ao aluno a adaptação ou a mudança das relações e do cálculo relacional,

²² “¿Por cuáles representaciones intermedias se debe pasar para enseñar con eficacia un sistema de representación canónico? [...] La cuestión del cálculo relacional está en el centro de los problemas del conocimiento ya que es solamente al nivel de las relaciones y del cálculo relacional que **lo nuevo puede ser generado por el sujeto**”.

que podem levar a um novo conhecimento, no nosso entendimento, as retomadas para Vergnaud.

Ao analisar a ação de um aluno, o pesquisador identifica as relações e as organizações da conduta e percebe regularidades em uma variedade de situações. Essa é uma análise cognitiva das situações. No próximo tópico, vamos abordar as classes de situações das grandezas geométricas comprimento e área.

2.2.1 Classes de situações que dão sentido aos conceitos de comprimento e área

As concepções dos alunos são construídas a partir das situações que são vivenciadas por eles, tanto na sua vida escolar quanto nas suas experiências fora da escola. Essas concepções podem estar defasadas dos conceitos oficiais, sendo necessário identificar os conhecimentos prévios dos alunos, suas concepções, errôneas ou não, para construir situações que possibilitem uma ampliação desses conhecimentos, e se tornem mais complexas, na abordagem de um conceito.

Vergnaud (1990) mostra a importância da construção de uma classificação de situações como um trabalho científico necessário para que tenhamos o mapeamento da variedade de situações de um campo conceitual.

Dentro dessa perspectiva, Baltar (1996) propõe uma classificação de situações (S) que dão sentido ao conceito de área, em três grandes classes: comparação, medição²³ e produção.

As situações de comparação estão situadas essencialmente no quadro das grandezas, quando Bellemain afirma:

Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários à resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas (2000, p. 7-8).

As situações de medição estão situadas essencialmente no quadro numérico, e na passagem da grandeza ao número, por meio da escolha de uma unidade de

²³ Diante de estudos do grupo de pesquisa Pró-grandezas, passamos a adotar situação de medição em substituição à situação de medida (BALTAR, 1996), assim como situação de conversão de unidades em substituição à situação de mudança de unidade (FERREIRA, 2010).

medida. O resultado esperado nessa situação é um par (número, unidade de medida).

Já as situações de produção se diferenciam das anteriores, uma vez que podemos determinar várias respostas corretas para uma mesma situação. Aqui, o quadro geométrico ganha destaque, considerando a produção de uma superfície, embora a intervenção dos quadros numérico e das grandezas também seja importante.

Ferreira (2010) propõe uma nova classe de situações de conversão de unidade, baseada em Baltar (1996), ao considerar que representar uma mesma área com unidades de medida diferentes está mais centrado no quadro numérico e, por vezes, com a ausência do quadro geométrico. Essa ausência pode conduzir os estudantes a estabelecer, para as unidades de área, a mesma relação que aquela existente para as unidades do comprimento (ou seja, cometer o erro que consiste em considerar que, se 1 centímetro é igual a 10 milímetros, um centímetro quadrado é igual a 10 milímetros quadrados).

Assim, diferenciar as situações de medição das situações de conversão de unidade se justifica, considerando que devemos dar um tratamento que privilegie a articulação entre os três quadros, com a presença das superfícies, antecedendo a introdução das unidades de medida convencionais, para que o aluno compreenda a construção do par (n° , unidade de medida) independente das transformações meramente operatórias. Para uma melhor visualização, apresentamos a organização das situações no quadro a seguir, ampliado do proposto por Ferreira (2010) para a grandeza área, com a inclusão do comprimento.

Figura 5 – Classes de situações para as grandezas área e comprimento

		ÁREA	COMPRIMENTO	
CLASSES DE SITUAÇÕES	COMPARAÇÃO	ESTÁTICAS	Sem unidade de medida	
			Com unidade de medida não-convencional	
			Com unidade de medida convencional	
		DINÂMICAS	Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica	Variação do comprimento por deformação ou transformação geométrica
			Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa	
		MEDIDA	EXATA	Com unidade de medida não-convencional
	Com unidade de medida convencional			
	ENQUADRAMENTO		Aproximações	
	MUDANÇA DE UNIDADE		Com unidade de medida não-convencional	
			Com unidade de medida convencional	
	PRODUÇÃO		Mesma área que a de uma figura dada	Mesmo comprimento que o de uma linha dada
			Área maior ou menor que a de uma figura dada	Comprimento maior ou menor que o de uma linha dada
			Com área dada	Com comprimento dado

Fonte: Ampliado de Ferreira (2010).

O foco do quadro está na grandeza área e na grandeza comprimento, na relação entre área e perímetro, e a distinção com relação aos procedimentos quando intervém o quadro numérico, e quando intervém a área ou o comprimento enquanto grandezas.

As situações de comparação de objetos podem ser realizadas, de uma maneira geral, por justaposição, sendo necessário para cada uma das grandezas um vocabulário específico. Para realizarmos comparações entre áreas, precisamos descobrir qual a superfície que “ocupa mais espaço” e, para comparação entre comprimentos, qual a linha “mais comprida”. Essas situações favorecem a compreensão da grandeza e dos objetos aos quais a grandeza está associada.

As situações ditas estáticas são aquelas em que não ocorre alteração dos objetos comparados. Nas situações dinâmicas, podemos realizar procedimentos como a decomposição e recomposição de áreas ou a alteração da configuração de uma linha, que pode estar “enrolada” e ser esticada.

Em situações de comparação, seja de área ou de comprimento, uma distinção importante a ser feita é quando realizamos uma comparação com muitos objetos, visto que precisaremos estabelecer uma seriação entre os objetos a partir de uma relação de ordem que será obtida através da operação de transitividade. Por exemplo, para compararmos as áreas de três superfícies A, B e C e decidirmos qual delas tem maior área, podemos realizar uma comparação com duas das superfícies,

A e B, e, ao verificar qual a maior entre elas, seja por inclusão ou por decomposição, passamos a compará-la com a terceira. Assim, se $S_A > S_B$, e $S_B > S_C$ então, $S_A > S_C$.

Nas situações de medição, a passagem entre o quadro das grandezas e o quadro numérico é o destaque. Procedimentos de medição direta ou indireta podem ser realizados, com recobrimentos para as áreas e justaposição para os comprimentos. Nessas situações, estão envolvidas as adições e subtrações das grandezas. O caso de enquadramento de áreas está associado à medição da área de uma superfície com borda irregular ou arredondada, que serão aproximadas de acordo com a escolha da unidade de medida.

As situações de conversão de unidade têm como procedimento caracterizar que uma mesma grandeza pode ser representada com unidades de medidas diferentes. Essas situações devem privilegiar a articulação entre o quadro dos objetos geométricos, o quadro das grandezas e o quadro numérico para que a compreensão do par ordenado (número, unidade de medida) não seja apenas uma transformação operatória com o uso de um sistema de unidades.

As situações de produção possibilitam a articulação entre os três quadros, o uso de procedimentos só geométricos, só numéricos, ou ainda a combinação desses, e têm como objetivo a produção de figuras e linhas que atendam a condições e propriedades.

Diante do estudo das classes de situações que dão sentido e contribuem para diferenciar as grandezas comprimento e área, com o detalhamento dos conhecimentos implícitos, dos procedimentos, das representações utilizadas, que, consequentemente, reduzem as rupturas presentes na transição entre os 5^{os} e 6^{os} anos, levantamos a nossa primeira questão: quais as dificuldades conceituais enfrentadas pelos alunos ao resolver situações relativas à área e ao perímetro ao final do 6º ano?

Para compreender como acontece a transição entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental, precisamos realizar a discussão sobre a natureza de um conceito dentro dos anos iniciais e dos anos finais do EF, do ponto de visto didático. A TCC traz contribuições de uma epistemologia das grandezas geométricas, mas não é suficiente para o olhar didático, que será realizado com outra teoria.

2.3 ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

Para compreender a natureza dos conceitos como área e perímetro tanto no 5º ano quanto no 6º ano, e quais as condições que professor e aluno dispõem para ensinar e aprender esses conceitos, respectivamente, buscamos o suporte em alguns elementos da teoria desenvolvida por Chevallard (1999; 2002; 2008; 2009; 2010; 2011; 2013; 2015).

O pesquisador adota quatro noções fundamentais: objeto, relação pessoal, pessoa e instituição (CHEVALLARD, 2002). Por objeto O entende qualquer coisa, material ou não, que exista para pelo menos um indivíduo. Por exemplo, o conceito de perímetro e a fórmula da área de um retângulo, dados os comprimentos de seus lados ($A = C \times L$), são exemplos de objetos que existem para um professor de matemática, mas podem não existir para outra pessoa. Dizemos existir uma relação pessoal desse professor de matemática (pessoa X) com o conceito de perímetro e com a fórmula de área, representada por R (X, O).

Ao vivermos em sociedade, segundo Chevallard (2011), nossa vida se organiza em diversas esferas: familiar, profissional, religiosa, política, dentre outros, assim como na esfera didática. A relação pessoal que temos com os objetos é influenciada pelo modo como esses objetos existem nas diferentes esferas da vida social.

A instituição I, para Chevallard (2009), é um dispositivo social no qual indivíduos ocupam diferentes posições, e no qual há regras, organizações e maneiras próprias de pensar sobre objetos de saber e práticas vivenciadas sobre esses objetos. As diferentes esferas mencionadas acima podem ser vistas sob a ótica da TAD como instituições nas quais as pessoas ocupam posições: mãe, pai, filho, irmão, neto, funcionário, patrão, padre, pastor, diácono, filiado, representante etc. Mas o termo instituição pode modelar também dispositivos sociais transitórios e sem existência formal, como um grupo de amigos que se reúne regularmente para discutir sobre literatura ou uma turma de adolescentes que frequenta um clube de cinema.

Nosso foco de interesse principal são as instituições didáticas, nas quais existe uma intenção de propiciar modificações nas relações dos seus sujeitos com os saberes.

Por exemplo, uma turma em uma escola é uma instituição em que diferentes pessoas ocupam diferentes posições como o aluno, o professor de cada disciplina, o coordenador pedagógico, a merendeira etc. Nessa instituição I, as posições centrais

com relação ao saber são ocupadas pelo aluno (ou uma turma de alunos) X e pelo professor (ou um ajudante didático) Y.

A instituição I à qual uma pessoa X está vinculada exerce uma influência sobre a relação dessa pessoa com os objetos de saber O (CHEVALLARD, 1999), seja trazendo novos objetos, seja modificando sua relação com objetos que já conhecia. Por exemplo, um aluno pode estabelecer uma relação com a fórmula da área de um paralelogramo a partir da sua entrada no 6º ano, como também pode aprender a usar essa fórmula que já conhecia em novos contextos.

Entendemos que, dentro de uma instituição escolar, vivem diferentes instituições, com regras e organizações de funcionamento diferenciadas. Por exemplo, uma escola que ofereça toda a educação básica pode ser considerada uma instituição maior, com suas regras gerais, que comporta outras instituições, os níveis de ensino anos iniciais do EF, anos finais do EF e o ensino médio. Esses, por sua vez, têm organizações específicas e diferenciadas, mesmo pertencentes a uma mesma instituição escolar. Da mesma maneira, pessoas diferentes ocupam diferentes posições em cada uma dessas microinstituições. Por certo, objetos do saber existem e são reconhecidos por pessoas pertencentes a essas instituições.

Chevallard (2009) considera existir uma relação dialética entre as pessoas e as instituições. As relações pessoais são fruto da sua história vivida em instituições anteriores e atuais e, portanto, as pessoas são resultantes de um conjunto amplo e complexo de sujeições institucionais. Ao mesmo tempo, as instituições não existem sem as pessoas e as relações das instituições se modificam em função da participação ativa de seus sujeitos. Entendemos que a turma com seus alunos é uma instituição, por existir uma relação que é construída pelo grupo de alunos, com cada um dos seus professores, para os quais há maneiras específicas de lidar com objetos do saber.

Os objetos do saber vivem em diferentes instituições. Por exemplo, o conceito de comprimento está presente nas instituições anos iniciais e anos finais do EF, assim como na educação infantil, mas também está presente em práticas sociais não escolares, inclusive do universo infantil, como em certas brincadeiras. A forma como ele vive em cada uma dessas instituições é diferente. Nas brincadeiras infantis, o comprimento será mobilizado, por exemplo, na demarcação de um terreno para jogar queimado, na educação infantil aparece em situações do cotidiano das crianças, como na comparação das suas alturas, no 5º ano vive associado a outros

termos como o perímetro de uma figura plana, e no 9º ano é necessário para determinar a velocidade de um veículo.

A depender da instituição, os objetos de saber na TAD possuem *conditions et contraintes*²⁴ que são distintas:

Vamos enfatizar nesse ponto a distinção realizada pela TAD entre condições e restrições: uma restrição é uma condição considerada, a partir de uma posição institucional em um determinado momento, como não modificável (relativamente e temporariamente, portanto). Da mesma forma, uma condição é uma restrição considerada modificável no mesmo sentido²⁵ (CHEVALLARD, 2009, p. 5, tradução nossa).

Entendemos que, para Chevallard (2009), existem dois tipos de condições, aquelas modificáveis e as não modificáveis²⁶. As condições não modificáveis num dado período de tempo são consideradas como restrições. Por exemplo, o objeto do saber probabilidade, durante muito tempo, esteve ausente dos currículos dos anos iniciais do ensino fundamental, o que caracteriza uma restrição. Essa restrição passou a uma condição a partir dos PCN (BRASIL, 1997), dada a sua importância na sociedade atual, para compreensão e análise de dados e tomada de decisões no mundo atual.

A depender da instituição, os objetos do saber possuem condições específicas que podem ser consideradas como condições não modificáveis, que irão influenciar as relações entre a pessoa (uma turma) X, o professor Y e o objeto do saber O.

Essa teoria possibilita analisar a organização de objetos de saber dentro de instituições, o que caracteriza uma relação institucional. Na nossa pesquisa, consideramos a transição entre duas instituições, a instituição 5º ano dos anos iniciais e a instituição 6º ano dos anos finais do EF, e as relações institucionais consideradas dos objetos do saber área e perímetro, no interior de cada uma das instituições.

As relações esperadas das instituições 5º e 6º anos do EF, com os objetos em tela, estarão aqui relacionadas com os documentos oficiais como a Lei de

²⁴ Os termos *conditions* e *contraintes* serão traduzidos no texto condições e restrições.

²⁵ “Soulignons en ce point la distinction faite en TAD entre conditions et contraintes : une contrainte est une condition regardée, depuis une certaine position institutionnelle à un certain instant, comme non modifiable (relativement et provisoirement, donc); de même, une condition est une contrainte jugée modifiable en ce même sens.”

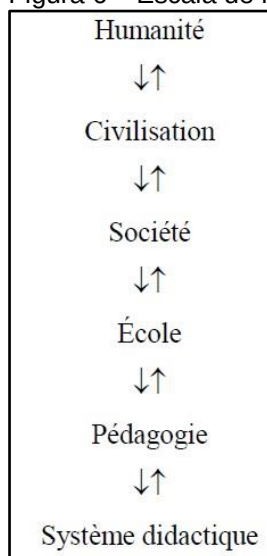
²⁶ Na nossa pesquisa adotamos para os termos condições e restrições, condições modificáveis e não modificáveis, respectivamente.

Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB) e os PCN²⁷; e as relações existentes, com o projeto político-pedagógico da escola, os currículos, e os programas da disciplina, em particular para o ensino das grandezas geométricas, os objetos área e perímetro.

Na transição do 5º para o 6º ano do EF, buscaremos analisar quais as condições modificáveis e as não modificáveis existentes, para favorecer a evolução da relação pessoal dos alunos da instituição 5º ano com os objetos área e perímetro ao se tornarem sujeitos da instituição 6º ano do EF.

Essas análises estão situadas na escala de níveis de codeterminação de Chevallard (2015), que estão interligados e em constante movimento: humanidade, civilização, sociedade, escola, pedagogia, e o sistema didático composto de disciplina, domínio, setor, tema e assunto.

Figura 6 – Escala de níveis de codeterminação



Fonte: Chevallard (2015, p.3).

Para Chevallard (2008), cada nível tem por princípio ser o local de condições modificáveis e não modificáveis sob as quais as pessoas e as instituições convivem, e que podem ser percebidas em todos os outros níveis.

A escala de hierarquia dos níveis de codeterminação representa uma construção histórica do conhecimento com a participação da sociedade, das diversas escolas e diferentes disciplinas, e o poder de decisão pertence às comunidades científicas, aos políticos, ao Ministério da Educação, às famílias,

²⁷ Durante o desenvolvimento da nossa pesquisa (2014-2018), o PCN é o documento oficial de referência para o currículo nacional e os autores de livros didáticos.

dentre outros, com espaços de pensamento das instituições, denominado por Chevallard (2015) de noosfera.

Para o pesquisador, as instituições são dotadas de diferentes espaços noosferianos, em que decisões são pensadas e tomadas por grupos diversos. Por exemplo, no nível da Sociedade, o Ministério da Educação define a existência da disciplina matemática, e os documentos oficiais que orientam a construção dos currículos para o país atualmente definem a existência de domínios, dentre os quais, o domínio das grandezas e medidas.

Os termos Escola, Pedagogia e Disciplina não carregam propriamente o significado do senso comum (CHEVALLARD, 2010), nem de outros campos do conhecimento.

Para Chevallard (2015), por trás de qualquer sistema didático há uma instituição (a Escola) na qual a Sociedade confia, num sentido amplo, e que tem condições de legitimar a formação de sistemas didáticos. Para que esses sistemas existam, algumas condições dependem dos níveis superiores Pedagogia e Escola. Por exemplo, uma escola de música está organizada a partir de diferentes cursos – piano, violão, canto, guitarra, etc., em que diferentes grupos de alunos podem frequentar um mesmo curso. Já a educação básica brasileira tem numa escola de ensino fundamental um exemplo de sistema didático organizado por anos de ensino, composto cada um por diversas disciplinas. Em qualquer uma das duas instituições escolares citadas, um conteúdo com um conjunto de regras pode ser compreendido como uma disciplina. Não é preciso que exista uma entidade formal para se falar de uma Escola, na TAD.

O sentido dado por Chevallard (2015) ao termo Pedagogia é o de um conjunto de condições das organizações escolares, para que uma pessoa, na posição de aluno, passe a ter contato com objetos do saber a serem ensinados. Na nossa pesquisa, os objetos do saber área e perímetro fazem parte do sistema didático da disciplina matemática.

Chevallard (1999) considera que a atividade matemática, desenvolvida dentro da disciplina matemática, é uma atividade humana e essa pode ser modelizada a partir de uma praxeologia $[T/\tau/\theta/\Theta]$. A componente *praxis* $[T/\tau]$ é formada por um tipo de tarefas (T), resolvido por meio de uma técnica (τ). A técnica é explicada e justificada pela tecnologia (θ), que, por sua vez, é fundamentada na teoria (Θ). A

tecnologia e a teoria compõem o *logos* [θ/Θ]. Pode-se então questionar: que tipo de tarefas espera-se que os alunos de 5º ano e de 6º ano sejam capazes de resolver sobre área e perímetro? Por meio de que técnicas? Que explicações e justificativas são dadas acerca dessas técnicas?

O olhar da praxeologia contribui para que possamos compreender como um determinado objeto “vive” numa instituição, expressão que Chevallard (2002) adota da Ecologia. Trata-se, por meio dessa analogia, de buscar verificar a existência (ou não) desse objeto e situar onde ele existe, ou seja, qual é seu habitat. Por exemplo, pode-se interrogar se os alunos de 6º ano estudam o objeto tempo e em que disciplinas ou tópicos esse objeto é estudado. Suponhamos que esteja previsto estudar o tempo histórico, alguns tempos verbais (presente, pretérito e futuro) e unidades de duração de intervalos de tempo (segundo, minuto, hora). Nesse caso, o objeto tempo teria vários habitats (na história, na língua portuguesa, mais especificamente na parte de gramática; na matemática, em especial no domínio das grandezas e medidas). A perspectiva ecológica se debruça também sobre a função que desempenham os objetos de saber e as relações que são estabelecidas entre os níveis de codeterminação, apoiada em outra analogia: o nicho ecológico.

Por exemplo, na história, o estudo do tempo pode ter por função compreender a sincronicidade e sequência de eventos históricos; na língua portuguesa para situar em uma sequência temporal acontecimentos reais ou imaginados, na interpretação e na produção de textos. Na matemática do 6º ano, o estudo do tempo pode ter por função compreender as relações existentes entre as diferentes unidades de medida de duração de intervalos de tempo, como também ilustrar a possibilidade de lidar com diferentes bases (1 dia corresponde a 24 horas; uma hora a 60 minutos, um minuto a 60 segundos etc.). As funções desempenhadas pelo objeto tempo nos seus diversos habitats são seus nichos.

Na nossa pesquisa, os tipos de tarefas serão o caminho para analisarmos qual a relação existente entre as instituições 5º e 6º anos do ensino fundamental e os objetos do saber comprimento (perímetro) e área, os lugares que esses objetos ocupam e as funções que desempenham.

2.4 BUSCA DA COMPLEMENTARIDADE ENTRE A TAD E A TCC

Nossa proposta é investigar dois aspectos complementares: o modo como os alunos lidam com as situações que dão sentido à área e ao perímetro e o modo como as instituições lidam com esses objetos. O estudo da dimensão cognitiva será realizado com a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1975; 1981; 1990; 1993; 1994; 1998; 2001; 2007), a partir das análises conceituais das situações, dos esquemas utilizados pelos alunos na sua resolução, dos invariantes operatórios, representações simbólicas e regras de controle contidas nos esquemas.

A dimensão didática será investigada sob a ótica da teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999; 2002; 2008; 2009; 2010; 2011; 2013; 2015), com a identificação das escolhas de transposições didáticas realizadas no 5º e no 6º ano do ensino fundamental, a caracterização das organizações matemáticas e didáticas estabelecidas por essas instituições, assim como as condições modificáveis e as não modificáveis, oriundas dos diferentes níveis da escala de codeterminação didática, os programas oficiais, a proposta pedagógica da Escola, os livros didáticos adotados no ensino fundamental e o modo como o ensino desses objetos é efetivamente conduzido em sala de aula.

Vergnaud nos ajuda a compreender como os alunos resolvem uma determinada situação,

[...] deve-se entender a análise das operações indispensáveis ao tratamento da situação e à solução do problema posto. Essas operações podem ser materiais (realizar certa ação), perceptivas (considerar certo aspecto), sociais (interagir ou cooperar com alguém), etc. implicam operações do pensamento que estão necessariamente ligadas às características conceituais da situação. A análise dessas operações de pensamento, que representa a análise propriamente cognitiva da tarefa²⁸, forma o núcleo da análise da tarefa. Sem ela, dificilmente poderemos compreender a organização e programação da ação, o uso dos algoritmos e procedimentos parciais (sub-tarefas). Esta análise cognitiva da tarefa baseia-se no conhecimento aprofundado dos conceitos matemáticos em jogo, mas ela não é reduzida a isso, porque a análise da tarefa pode conduzir a privilegiar tal aspecto físico-matemático em lugar de outro, em função da capacidade de dar conta de condutas efetivamente observadas²⁹ (1983, p. 24, tradução nossa).

²⁸ O termo tarefa na TCC remete à tarefa cognitiva e não ao significado atribuído na TAD.

²⁹ "L'analyse des opérations nécessaires au traitement de la situation et à la solution du problème posé. Ces opérations peuvent être matérielles (faire telle action), perceptives (prendre en compte tel aspect), sociales (interagir ou coopérer avec un tel), etc..., elles impliquent des opérations de pensée qui sont nécessairement reliées aux caractéristiques conceptuelles de la situation. L'analyse de ces opérations de pensée, qui représente l'analyse proprement cognitive de la tâche, forme le noyau de l'analyse de la tâche. Sans elle on ne peut guère comprendre l'organisation et programmation de l'action, recours à des algorithmes et procédures partiels (sous-tâches). Cette analyse cognitive de la tâche repose bien entendu sur la connaissance approfondie des concepts mathématiques en jeu, mais elle ne s'y réduit pas, car l'analyse de la tâche peut conduire à

O olhar da TCC tem trazido ao conjunto de pesquisas do grupo Pró-grandezas a exemplo de Barbosa (2002) e Brito (2003) sobre comprimento e perímetro; Duarte (2002), Teles (2007) e Anderson Silva (2016) sobre área; Baltar (1996), Melo (2003) e Ferreira (2010) sobre área e perímetro; Barros (2002), Figueiredo (2013) e Moraes (2013) sobre a grandeza volume, um importante subsídio para organizar a epistemologia das grandezas geométricas e, em diálogo com as pesquisas em educação matemática que investigam esse tema, propor recomendações acerca da condução do ensino desse campo.

Como já foi dito, a construção do conceito de grandeza neste trabalho está pautada nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), na ideia de que a grandeza é um atributo associado a diferentes objetos, sendo possível identificá-la, independente de um número. Para isso, é necessária a elaboração de um conjunto de situações que favoreça:

- a) o resgate da grandeza antes da medida: com a observação de objetos, a identificação de diferentes tipos de grandeza; a comparação de grandezas de mesma espécie sem a interferência do campo numérico; as comparações diretas e indiretas. Por exemplo, uma caixa cúbica pode ser analisada a partir do seu volume interno (sua capacidade); da área de uma das faces ou de todas elas; da comparação de comprimentos como da sua aresta com a diagonal de uma das faces.
- b) a compreensão dos termos associados às grandezas: os diferentes termos utilizados e seus significados associados à grandeza, que se mantêm implícito na sala de aula. Por exemplo, a grandeza comprimento e seus diferentes contextos: a altura de uma árvore; a profundidade de um tanque; a espessura de um vidro; a distância entre duas cidades; o perímetro de um círculo; as unidades de medida convencionais – centímetro, metro etc. – e não convencionais – palmo, passada etc.
- c) a diferença entre a grandeza e o número: a compreensão das relações entre as unidades de medida associadas às grandezas e os números com suas operações que as expressam quantitativamente.

Esses são, a nosso ver, elementos que deveriam ser contemplados no ensino

de área e perímetro na etapa que nos interessa, ou seja, até o 6º ano do ensino fundamental.

O olhar da TCC nos permite analisar, do ponto de vista cognitivo, a aprendizagem desses conceitos pelos alunos, ao final do 5º ano e do 6º ano, para entendermos quais os avanços na transição entre os níveis de ensino. Essa teoria leva a considerar, no ensino, a importância de contemplar as dimensões predicativa e operatória do conhecimento, os diferentes tipos de situações que constituem o sentido dos conhecimentos estudados, bem como a pluralidade de representações do campo conceitual em foco.

Entretanto, consideramos que essa teoria não nos fornece instrumentos teórico-metodológicos suficientes para investigar, do ponto de vista didático, o que está em jogo nessa transição entre os anos iniciais e os anos finais do EF, com relação ao ensino da área e do perímetro. Assim, sob a ótica da TAD, vamos nos interessar pelas atividades matemáticas realizadas dentro das instituições às quais elas estão associadas, no caso, o 5º e o 6º ano do ensino fundamental.

Como já foi dito, essa teoria situa a atividade matemática e a atividade de estudo da matemática, no âmbito das atividades humanas e das instituições sociais:

[...] esse viés epistemológico leva a cruzar todas as direções – ou até mesmo ignorar – muitos limites institucionais dentro dos quais é habitual permanecer, porque, normalmente, respeitamos o corte do mundo social que as instituições estabelecidas [...] nos apresentam como evidentes, quase naturais e, em última instância, obrigatório³⁰ (CHEVALLARD, 1999, p. 221, tradução nossa).

Com a TAD, podemos modelizar a atividade matemática e a atividade de estudo da matemática, considerando uma gama ampla de fatores, de naturezas variadas, que interferem nesse processo.

Conectando as duas teorias, pode-se dizer que, na resolução de tarefas de certo tipo, o aluno aplica técnicas (frequentemente aprendidas na escola), etapa de execução do bloco saber-fazer (práxis). Esse bloco revela o conhecimento do aluno na forma operatória. Os elementos que justificam as técnicas utilizadas e a teoria que a explica compõem o bloco teórico do saber (logos) que se conectam com a forma predicativa do conhecimento.

³⁰ “Or ce parti pris épistémologique conduit qui s’y assujettit à traverser en tous sens – ou même à ignorer – nombre de frontières institutionnelles à l’intérieur desquelles il est pourtant d’usage de se tenir, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies [...] nous présentent comme allant de soi, quasi naturel, et en fin de compte obligé.”

Ao corrigir uma tarefa realizada pelo aluno, o professor verifica a conformidade (ou não) entre as técnicas empregadas e aquelas preconizadas pela instituição. A capacidade de realizar mudança de representações e justificar escolhas, de expressar o conhecimento na forma predicativa, mostra a compreensão de conceitos e propriedades associadas aos objetos.

No tópico a seguir, realizamos uma re-leitura (sob a ótica da TAD) do estudo das situações que dão sentido à área (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010), construído originalmente com base na TCC.

2.4.1 Classes de situações que dão sentido aos conceitos de área e perímetro e tipos de tarefas passíveis de serem estudados do 1º ao 6º ano

Como discutido no tópico 2.2.1, sob a ótica da teoria dos campos conceituais, com base em Baltar (1996) e Ferreira (2010), consideramos quatro grandes classes de situações que dão sentido à área como grandeza – as situações de comparação de áreas de superfícies, as de medição da área de uma superfície, as de produção de superfícies, a partir de condições sobre sua área e as de conversão de unidade de área. Por analogia, vamos considerar que a construção do sentido de comprimento apoia-se essencialmente nas situações de comparação de comprimentos de linhas, de medição dos comprimentos das linhas, como um perímetro, na produção de perímetros a partir de condições sobre comprimentos dados e de conversão de unidade de comprimento.

Assumindo a ótica da TAD, pesquisas anteriores à nossa classificaram as tarefas relativas aos objetos comprimento, área e perímetro. José Valério Silva (2011), ao analisar livros didáticos do 6º ano aprovados nos PNLD 2008 e 2011, realizou um mapeamento dos tipos de tarefas presentes nas coleções e apresentou uma analogia dos subtipos de tarefas com os procedimentos descritos no quadro das classes de situações proposto por Ferreira (2010). O pesquisador constatou que a conversão de unidades de comprimento, o cálculo do perímetro e o cálculo da área de figuras planas eram os tipos de tarefas predominantes. Na maioria das obras analisadas, a ênfase nas grandezas geométricas era insuficiente e o foco estava centrado na medida e não na grandeza.

Santos (2015) tomou como referência a classificação de Bellemain (2013) para caracterizar as organizações matemáticas associadas ao conceito de área em um livro didático do 6º ano do ensino fundamental, e constatou que os autores consideram a construção conceitual da grandeza área diante da diversidade dos tipos de tarefas. No entanto, tipos de tarefas de produção e de transformações geométricas que podem contribuir para a ampliação conceitual não foram encontrados. Também foi observada a redução do trabalho com algumas técnicas e da explicação do bloco tecnológico-teórico.

José Valério Silva (2016) realizou uma classificação de tarefas associadas às noções de perímetro, área, e à relação entre área e perímetro com base na análise de duas coleções de livros didáticos de um mesmo autor, uma dos anos finais do ensino fundamental, a outra do ensino médio, e dos cadernos do estado de São Paulo dos anos de 2008 e 2013.

Foi constatado pelo pesquisador, conforme apresentado na discussão das pesquisas no capítulo 2 (item 2.1.2), que as tarefas propostas nesses cadernos, apesar de contribuírem para a construção das noções enquanto grandeza, pouco favoreciam a articulação entre área e perímetro e a distinção entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas, como sugerido por Douady e Perrin-Glorian (1989). Essa análise auxiliou a construção de uma engenharia didática a ser desenvolvida com alunos do ensino médio, do curso técnico de edificações.

Segundo Chevallard (1999), as classificações dos tipos de tarefas são realizadas pelas instituições. Essas classificações modelam as ações, as práticas das pessoas que se sujeitam a tal instituição. Assim, a depender das instituições consideradas, e da relação dessa com o objeto de saber, as praxeologias são constituídas.

Os tipos de tarefas serão o caminho para analisarmos qual a relação existente das instituições 5º e 6º anos do ensino fundamental com os objetos em foco, perímetro e área. Para isso, partiremos *a priori* de uma classificação que acreditamos ser necessária para a compreensão conceitual dos objetos em questão, com base na construção e evolução histórica e nas pesquisas, e dos significado desses objetos para o meio social e cultural considerado. Isso não significa que outros gêneros de tarefas³¹ como associar e escolher, identificados por José Valério

³¹ O gênero de tarefa se refere a uma tarefa mais ampla, por exemplo, escolher, o que o diferencia do tipo de tarefa escolher um instrumento de medida.

Silva (2011), sejam menos importantes, mas, como sugerem o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCNEI) (BRASIL, 1998b) e os PCN (BRASIL, 1997), esses devem ser essencialmente explorados na educação infantil e nos anos iniciais.

Bellemain, Bronner e Larguier (2017), ao analisarem livros didáticos brasileiros e franceses de 6º ano e da classe de *sixième* (equivalente ao 6º ano), respectivamente, com base em Anwandter-Cuellar (2012), consideraram sete tipos de tarefas para a grandeza área: comparar, determinar, produzir objeto de grandeza dada, produzir objeto de grandeza maior ou menor, estudar efeitos de transformações ou deformações sobre uma grandeza e transformar unidades.

Em relação ao tipos de tarefas “produzir objeto de grandeza dada” e “produzir objeto de grandeza maior ou menor”, consideramos ser as técnicas que os diferenciam. Além desses tipos, acrescentamos os tipos de tarefas “estimar uma grandeza”, como adotado por Santos (2015) e José Valério Silva (2016).

Assim, adaptamos essa tipologia também para o estudo do perímetro, e consideramos *a priori* 21 tipos de tarefas potenciais, como pode ser acompanhado nos quadros a seguir. No Quadro 1, estão os tipos de tarefas relativos ao comprimento que serão considerados. No Quadro 2, os tipos de tarefas relativos à grandeza área e, no Quadro 3, os tipos de tarefas consideradas para o perímetro:

Quadro 1 – Tipos de tarefas para a grandeza comprimento

Tipos de Tarefas para a grandeza comprimento
T_{CC} – Comparar comprimentos.
T_{MC} – Medir um comprimento.
T_{EC} – Estimar um comprimento.
T_{PC} – Produzir um comprimento.
T_{CUC} – Converter a unidade de medida de um comprimento.
T_{GC} – Determinar o valor de uma grandeza diferente do comprimento, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao comprimento.
T_{TC} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre o comprimento de uma família de linhas.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Quadro 2 – Tipos de tarefas para a grandeza área

Tipos de tarefas para a grandeza área
T_{CA} – Comparar áreas.
T_{MA} – Medir uma área.

T_{EA} – Estimar uma área.
T_{PA} – Produzir uma superfície a partir de uma área.
T_{CUA} – Converter a unidade de medida de área.
T_{GA} – Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área.
T_{TA} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Quadro 3 – Tipos de tarefas para o perímetro

Tipos de tarefas para o perímetro
T_{CP} – Comparar perímetros.
T_{MP} – Medir um perímetro.
T_{EP} – Estimar um perímetro.
T_{PP} – Produzir superfície a partir de um perímetro.
T_{CUP} – Converter a unidade de medida de um perímetro.
T_{GP} – Determinar o valor de uma grandeza diferente do perímetro, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao perímetro.
T_{TP} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre o perímetro de uma família de linhas/superfícies.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Propomos associar as classes de situações de Ferreira (2010), sob a ótica da TCC, aos tipos de tarefas, conforme apresentado no Quadro 4, a seguir. Lembramos, conforme comentado no item 1.1, que passaremos a designar o tipo de situação de medição, por abranger tanto ao ato concreto como ao abstrato, deixando o termo medida para o resultado (focando na distinção entre o processo e seu resultado).

Assim, situações de comparação dentro dos quadros das grandezas e geométrico devem ser oportunizadas desde os anos iniciais, como a ordenação de objetos a partir de uma grandeza, sem a interferência do quadro numérico, com comparações diretas de dois objetos e, em seguida, a ampliação para três ou mais superfícies, seja do ponto de vista da área, seja do ponto de vista do perímetro.

Situações de produção também podem ser introduzidas desde os anos iniciais, como, a partir de uma figura dada, produzir uma figura de mesma área, de mesmo perímetro, de área maior (ou menor) que aquela de uma figura dada, ou de um perímetro maior (ou menor) que o de uma figura dada.

Situações de medição da área, ou do perímetro, com diferentes unidades de medidas padrão, convencionais ou não convencionais, com o uso de diferentes recursos devem ser aqui oportunizadas para contribuir na compreensão da invariância da grandeza, independente do par (número, unidade de medida) a ela associado.

A percepção de que um quadrado só pode ser recoberto com superfícies unitárias também quadradas deve ser quebrada com a introdução de diferentes superfícies unitárias.

A partir da montagem de quebra-cabeças, jogos do cotidiano que devem fazer parte do dia a dia escolar da criança, essas situações podem ser vivenciadas com temas interdisciplinares, para o reconhecimento das figuras, seguido das suas propriedades no quadro geométrico, até a percepção da invariância das áreas.

A distinção entre o quadro geométrico e das grandezas precisa ser constantemente trabalhada diante da interferência da forma da figura sobre a interpretação da grandeza. Compõe essa articulação a percepção das características e propriedades das figuras, a diferenciação dos termos associados às figuras e às grandezas e a proposição de figuras poligonais e não poligonais, em posições prototípicas ou não.

A distinção entre grandezas – em especial entre área e perímetro (instanciação do comprimento) – deve ser objeto de situações de comparação e de produção, em articulação ora com o quadro geométrico, sem a interferência das unidades de medida, ora com o quadro numérico, envolvendo unidades de medidas tanto convencionais quanto não convencionais.

A articulação entre o quadro das grandezas e o numérico, a partir de situações de conversão de unidade, deve envolver também o quadro geométrico, de modo a possibilitar a compreensão das operações e associar a uma grandeza diferentes pares (número, unidade de medida), além de dar significado à conversão de unidade.

Diferentes recursos devem ser propostos e reconhecidos enquanto adequados no estudo de uma determinada grandeza, com a intenção de contribuir para a construção conceitual dessa grandeza, a compreensão das propriedades do objeto geométrico e ajudar a comparar, estimar ou medir grandezas, com unidades convencionais ou não convencionais.

As fórmulas de áreas devem ser construídas em articulação com os três quadros, após a experimentação das diversas situações anteriores associadas à decomposição e composição de figuras, sem interferência do quadro numérico, seguido dos números naturais e, posteriormente, estendida para os números racionais.

Como já foi dito, os tipos de tarefas do gênero medir (áreas ou perímetros) dizem respeito a atribuir um número a uma área ou a um perímetro sem que isso implique uma técnica de medição concreta ou instrumentada, ou ainda a realização de um cálculo por meio de uma fórmula.

Os elementos discutidos acima, a partir dos Quadros 1, 2 e 3, compõem um esboço do modelo epistemológico de referência (MER) utilizado nesta pesquisa. A teoria dos campos conceituais leva a questionar quais as situações que dão sentido à área e ao perímetro, que representações simbólicas estão em jogo no processo de formação desses conceitos e quais os invariantes operatórios passíveis de serem utilizados para resolver as tarefas cognitivas relativas a esses objetos. Assim, os estudos realizados com o olhar da TCC e o conjunto de pesquisas que ao longo de aproximadamente 30 anos têm adotado a abordagem da área como uma grandeza funcionam na nossa pesquisa como uma espécie de motor de desenvolvimento desse MER. O Quadro 4 relaciona a classificação de situações construída com base na TCC e a tipologia ancorada na TAD.

Quadro 4 – A relação entre as classes de situações e os tipos de tarefas

		TIPOS DE TAREFAS
CLASSES DE SITUAÇÕES	COMPARAÇÃO	T_{CG} – Comparar grandezas da mesma espécie
		T_{TG} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre uma grandeza
	MEDIÇÃO	T_{MG} – Medir uma grandeza
		T_{EG} – Estimar uma grandeza
		T_{GO} – Medir o valor de uma grandeza diferente de outra grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à segunda

	CONVERSÃO DE UNIDADE	T_{CUG} – Converter a unidade de medida da grandeza
	PRODUÇÃO	T_{PG} – Produzir um objeto geométrico associado a uma grandeza dada

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Essa classificação é mais ampla e pode ser adaptada à grandeza considerada. Por exemplo, à classe de situações de medição estão associados três tipos de tarefas: T_{MG} – Medir uma grandeza, T_{EG} – Estimar uma grandeza e T_{GO} – Medir o valor de uma grandeza diferente de outra grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à segunda. Por exemplo, para a grandeza comprimento podemos ter o tipo de tarefa T_{MP} – Medir o comprimento de uma linha poligonal; para a área T_{MA} – Medir a área de um retângulo; e para o perímetro T_{MP} – Medir o perímetro de um pentágono regular.

A partir dessas classificações, iremos analisar nos livros didáticos quais os tipos de tarefas propostos, se todas estão contempladas nessas classificações, ou se será necessária a inserção de outro(s) tipos de tarefa(s) para cada um dos conceitos para a nossa pesquisa.

Para esclarecer os tipos de tarefas, trazemos um exemplo, que pode estar associado ao comprimento, à área ou ao perímetro.

a) T_{CC} – **Comparar comprimentos:**

Nesse tipo de tarefas, a comparação poderá ser direta ou indireta, com ou sem o uso de unidades de medida.

Figura 7 – Exemplo de tipo de tarefas T_{CC}



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015b, p. 26).

Essa atividade, proposta no livro do 2º ano, envolve um tipo de comparação sem o uso do domínio numérico, exemplo do tipo de tarefas T_{CC} – Comparar comprimentos. Observamos que as duas cordas têm o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final, e que uma delas apresenta uma volta.

A comparação a ser realizada, nesse caso, será por meio de uma observação visual a partir das imagens, que leva a uma operação mental de perceber a coincidência dos pontos de início e final das duas cordas e, como uma delas dá uma volta, esta seria a corda de maior comprimento.

Trata-se de um tipo de tarefas importante para verificar como os alunos lidam com situações de comparação sem medidas que contribui para a construção do conceito de comprimento como uma grandeza sem interferência do quadro numérico.

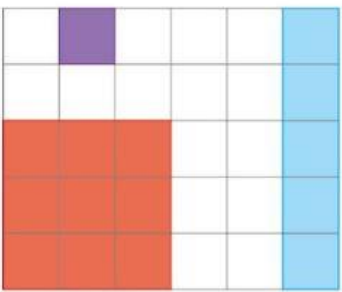
b) T_{MP} – Medir um perímetro:

Figura 8 – Exemplo de tipo de tarefas T_{MP}

3 Na malha quadriculada abaixo, cada quadradinho tem 1 cm de lado. Confira!

a) Qual é o perímetro do quadrado vermelho? _____

b) E o do retângulo azul? _____



O perímetro do quadrado roxo é 4 cm.

Fonte: Imenes, Lellis e Melani (2015d, p. 74).

Pesquisas anteriores à nossa (BARROS, 2006; FERREIRA, 2010; SILVA, J. V., 2016) mostram que as figuras presentes nos LD para o desenvolvimento dos conceitos de área e perímetro na sua maioria são poligonais e, quase sempre, quadrados e retângulos. O exemplo acima, extraído de um livro do 4º ano, exemplifica o tipo de tarefa T_{MP} – Medir um perímetro. Vale ressaltar que esse tipo de tarefas inclui medir o perímetro de outros tipos de figuras (não poligonais), para os quais a resolução exige outros recursos além da malha quadriculada.

c) T_{EA} – Estimar uma área:

Esse tipo de tarefa pode estar associado a unidades de medidas convencionais ou não convencionais.

Figura 9 – Exemplo de tipo de tarefas T_{EA}

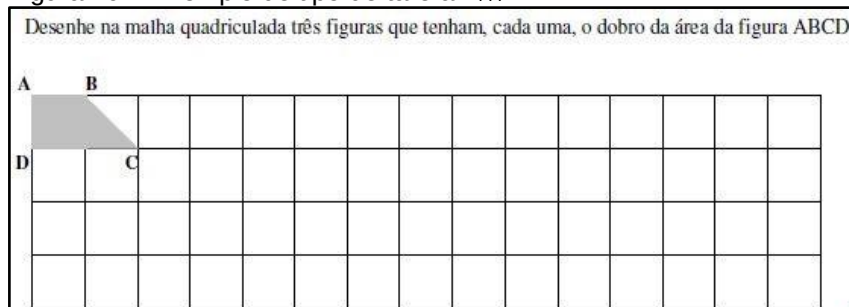
a. Quantos metros quadrados tem o piso da sua sala de aula? Faça estimativas.

Fonte: Imenes e Lellis (2010, 6º ano, p. 229).

Pouco frequentes nos LD, tarefas desse tipo favorecem o desenvolvimento do senso numérico, da observação visual e o conhecimento das grandezas. Realizar um cálculo aproximado, por falta ou por excesso, com o uso de diferentes unidades de medida, também contribui para compreender as relações entre elas.

d) T_{PA} – Produzir uma superfície:

Figura 10 – Exemplo de tipo de tarefa T_{PA}



Fonte: Atividade proposta em sondagem (FERREIRA, 2010, p. 157).

A atividade solicita a produção de três figuras que tenham o dobro da área da figura dada, construída sobre uma malha quadriculada, e associada ao tipo de tarefa T_{PA} – produzir uma superfície. Pesquisas anteriores mostram que esse tipo de tarefa é pouco frequente nos LD, embora contribua para a construção da noção de grandeza e favoreça a compreensão do aspecto dimensional da grandeza área.

e) T_{CUC} – Converter uma unidade de medida de um comprimento:

Figura 11 – Exemplo de tipo de tarefa T_{MUC}

4 O nome quilômetro é formado por **quilo** e **metro**. Na língua grega, quilo quer dizer mil. Por isso, quilômetro significa mil metros.

• Agora, complete:

a) 2 km = _____ m

c) 14 km = _____ m

b) _____ km = 7 000 m

d) _____ km = 32 000 m

Fonte: Imenes, Lellis e Melani (2015e, p. 99).

Esse tipo de tarefa está sempre presente nos LD (FERREIRA, 2010; SILVA, 2011; SANTOS, 2015) e associado, na maioria das vezes, apenas a transformações operatórias, sem a compreensão da transformação do par (número, unidade de medida), quando o aluno é convidado apenas a preencher lacunas, como observado em Ferreira (2010).

f) T_{GA} – Medir o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área:

Tarefas desse tipo são reduzidas nos LD, mas importantes por fazerem parte do contexto escolar e tratarem de situações cotidianas, assim como necessárias para a articulação entre os domínios dos números e operações e das grandezas.

Figura 12 – Exemplo de tipo de tarefa T_{GA}

5 Um terreno retangular tem área de 450 m^2 . O comprimento do terreno é 25 m. Qual é o perímetro do terreno?

a) 18 m
b) 43 m
x c) 86 m
d) 94 m

Fonte: Imenes e Lellis (2010, 6º ano, Supertestes, p. 233).

Também destacamos uma tarefa sem a presença da figura, o que contribui para verificar a compreensão de conceitos como o de figura retangular, o aspecto unidimensional dos comprimentos e o aspecto bidimensional da grandeza área.

g) T_{TA} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies:

Para esse tipo de tarefas, Anwandter–Cuellar (2009) considera aquelas associadas às propriedades provenientes das modificações sobre objetos. Por

exemplo, para a ampliação ou a redução como uma transformação geométrica de um objeto a partir da multiplicação das suas dimensões por uma constante k , que produz objetos semelhantes.

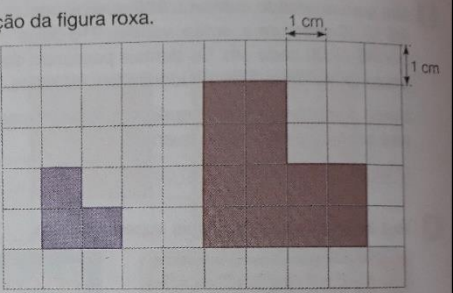
Figura 13 – Exemplo de tipo de tarefa T_{TA}

6 A figura marrom é uma ampliação da figura roxa.

a) Por quanto se deve multiplicar a medida dos lados da figura roxa para obter a medida dos lados da marrom? 2

b) Qual é, em centímetros, o perímetro da figura roxa? E o da marrom?
8 cm; 16 cm

c) Um quadrado com 1 cm de lado tem área igual a 1 centímetro quadrado. Quantos centímetros quadrados de área tem a figura roxa? E a marrom? 3 centímetros quadrados; 12 centímetros quadrados.



Fonte: Imenes, Lellis e Melani (2015d, p. 186).

As figuras dadas, construídas com o suporte da malha quadriculada, são semelhantes e favorecem a compreensão das transformações realizadas a partir da observação e comparação das medidas dos comprimentos associados aos lados de cada uma das figuras, tanto com relação ao perímetro quanto à grandeza área. Também favorece a compreensão da conservação dos ângulos. Tarefas desse tipo em geral são propostas, mas associadas a outros domínios, como espaço e forma (BARROS, 2006).

O nosso MER está construído para atender ao objetivo desta pesquisa a partir da classificação de situações construída com base na TCC e os tipos de tarefas ancoradas com a TAD. No entanto, outros modelos podem existir, a depender do objetivo em foco.

Nas nossas análises, iremos modelar as praxeologias matemáticas segundo Chevallard (1999), com a intenção de responder à nossa segunda questão: que praxeologias são preconizadas e/ou ensinadas na primeira etapa do ensino fundamental e no 6º ano, em relação à área e ao perímetro?

2.5 A TRANSIÇÃO ENTRE NÍVEIS DE ENSINO

Um sujeito escolar que está no 6º ano do ensino fundamental traz na sua bagagem cultural, social e escolar diversos conhecimentos não apenas do domínio

das grandezas e medidas, mas dos outros domínios, que servirão como base na ampliação e construção do conhecimento novo. Por outro lado, há conhecimentos que poderão provocar dificuldades nesta construção.

O domínio das grandezas e medidas é introduzido desde a educação infantil e vai sendo ampliado e enriquecido ao longo da escolaridade, o que pode ser verificado nos documentos oficiais e livros didáticos.

Uma vez que o ensino de área e perímetro está previsto, de acordo com os documentos oficiais, desde a educação infantil e ao longo dos nove anos do ensino fundamental, consideramos que esses objetos transitam entre os níveis de ensino.

A palavra transição, segundo o dicionário da língua portuguesa Michaelis online³², é um substantivo feminino e, entre outros significados, pode ser entendida como: “1) Ação ou efeito de transitar; 2) Estágio intermediário entre uma situação e outra; 3) Mudança de uma condição a outra; 4) Maneira de relacionar as ideias ou partes de um discurso”.

Na nossa pesquisa, aproximamo-nos do significado de transição sob dois aspectos: o primeiro, a ação ou efeito de transitar dos conceitos de área e perímetro, e o terceiro, na mudança de condição do aluno. Nosso interesse volta-se para o efeito da construção desses conceitos, relacionado às ideias que foram objeto de estudo desde os anos iniciais – e em particular no 5º ano – e as que serão objeto no 6º ano do ensino fundamental, na mudança de condição de “aluno dos anos iniciais” para “aluno dos anos finais” do ensino fundamental.

A seguir, discutimos como alguns documentos oficiais abordam a transição e especificamente a transição entre níveis de ensino e apresentamos uma breve revisão de literatura, com pesquisas que abordam a transição entre níveis de ensino, em particular entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental.

2.5.1 O que dizem os documentos oficiais sobre a transição entre níveis de ensino

Quando os alunos passam do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental, algumas questões são levantadas quanto à adaptação escolar, tanto por parte dos

³² DICIONÁRIO MICHAELIS. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=transi%C3%A7%C3%A3o>>. Acesso em: 25 out. 2016.

alunos – com a mudança de professores, novas disciplinas, nova grade curricular – quanto por parte dos professores, ao esperar que, se os alunos mudaram de ano escolar possuem um conjunto de conhecimentos anteriores disponíveis para serem mobilizados nesse novo nível de ensino.

Como acontece de fato a transição entre esses níveis de ensino?

Tomaremos neste momento alguns documentos oficiais, como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) – Lei 9394/96 (BRASIL, 1996), As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCNEB) (BRASIL, 2013), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998a) e os Parâmetros em Ação (BRASIL, 1999), com o foco no ensino fundamental.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional Lei nº 9394/96 (LDBEN) (BRASIL, 1996) estabelece que a formação básica comum a todo cidadão deve ser garantida em colaboração com as redes de ensino, e os currículos e conteúdos mínimos deverão ser norteados pelas DCNEB (BRASIL, 2013), respeitados os diferentes níveis de ensino.

Os princípios norteadores das DCNEB são a autonomia, a responsabilidade, o respeito e a ética, e devem estar presentes nas ações pedagógicas das escolas, nas propostas curriculares, de modo a garantir a identidade da instituição escolar, dos seus alunos, professores e demais profissionais. As diversas experiências de toda a comunidade escolar geram aprendizagens e contribuem para a construção de novos conhecimentos.

Com relação à transição entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental, recomenda-se nas DCNEB que,

Mesmo no interior do Ensino Fundamental, há de se cuidar da fluência da transição da fase dos anos iniciais para a fase dos anos finais, quando a criança passa a ter diversos docentes, que conduzem diferentes componentes e atividades, tornando-se mais complexas a sistemática de estudos e a relação com os professores (BRASIL, 2013, p. 20).

Enquanto norma obrigatória, as DCNEB sinalizam a necessidade do planejamento dos currículos das escolas, respeitando a transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais³³ de Matemática para o Ensino Fundamental constam objetivos de aprendizagem, conteúdos a serem abordados, critérios de avaliação e orientações didáticas. Ao discutir o processo de ensino aprendizagem dos 3º e 4º ciclos do ensino fundamental³⁴, nos PCN (BRASIL, 1998a) considera-se o desenvolvimento social, afetivo e cognitivo do aluno, e destaca-se o cuidado que se deve ter com o aluno, na transição do 2º ciclo para o 3º ciclo,

[...] com uma organização escolar com a qual não está habituado, horário compartilhado por diferentes matérias e diferentes professores, níveis de exigências distintos, posições variadas quanto à conduta em sala de aula e à organização do trabalho escolar, diferentes concepções quanto à relação professor-aluno (p. 61).

Para contribuir na implementação dos PCN pelas instituições de ensino, foram publicados os PCN em Ação (BRASIL, 1999), 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, com o objetivo de incentivar professores e demais especialistas da educação para uma formação conjunta e compartilhada. O módulo 6, específico para Matemática, teve como objetivo que professores dos anos finais do ensino fundamental conhecessem a proposta dos PCN dos anos iniciais, de modo a minimizar as rupturas e garantir a continuidade ao processo de ensino e aprendizagem.

Observamos que nos documentos oficiais há orientações gerais que alertam o professor acerca dos desafios em jogo na transição entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental, mas enquanto orientações gerais.

2.5.2 Pesquisas sobre transição entre níveis de ensino

Frequentemente, deparamo-nos com alunos que resolviam problemas e chegavam a respostas corretas no ano escolar anterior e, no entanto, parecem ter esquecido ou não conseguem mobilizar alguns conhecimentos no ano seguinte.

³³ Como citado anteriormente, durante a realização da nossa pesquisa (2014-2018) e especificamente no período de realização da parte empírica da pesquisa, o documento de orientação curricular vigente eram os PCN (BRASIL, 1997, 1998a) e não a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

³⁴ 3º e 4º ciclos equivalem às 5ª e 6ª séries (6º e 7º anos atuais) e 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos atuais), respectivamente no PCN (BRASIL, 1998a). A mudança de nomenclatura de série para ano vem com a Lei 11.274/2006, sobre o ensino de nove anos, cujo prazo para implementação foi até o início de 2010.

Brousseau e Centeño (1991) observaram que esse fenômeno causa dificuldades quando, além da transição entre níveis de ensino, “[...] a cultura didática do professor não fornece um conjunto de situações-padrão que possam atuar como uma memória com condições para aprendizagem³⁵” (p. 187, tradução nossa). Os autores entendem que essa transição está atrelada a um problema didático e à necessidade de analisar o funcionamento da memória do sistema didático.

A transição tem sido objeto de estudos em diversos países, nos vários níveis de ensino e sob diferentes aspectos: institucional, cultural, social e epistemológico.

Na 8ª Escola de Verão de Didática da Matemática, em 1995, três pesquisadoras³⁶ apresentaram um estudo sobre o problema da análise didática para garantir a continuidade entre níveis de ensino equivalentes aos 5º e 6º anos do ensino brasileiro. Na edição da Escola de Verão de 2008, um dos estudos tratou da transição entre o ensino secundário e as etapas pós-secundário no ensino francês. Em 2015, na Conferência *Espace Mathématique Francophone* (EMF) realizada na Argélia, “Transições no ensino da matemática” foi um dos projetos especiais apresentados.

Gueudet, Khalouffi e Marc (2012) participaram da EMF 2012 na equipe do projeto especial *Evaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaires: rôle des mathématiques*. Em seu relatório, abordaram que o termo transição pode estar associado à transição institucional, de um nível escolar a outro, por exemplo, dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental. Mas também, dentro do ambiente escolar, as transições estão presentes no nível micro, do aluno, a “[...] qualquer aprendizagem de novos conhecimentos pode ser vista como uma transição, a partir de conhecimentos anteriores. Pode-se analisar então as ligações entre conhecimentos para identificar aqueles sobre os quais o aluno pode se apoiar para construir o novo³⁷” (tradução nossa).

Os autores ainda trazem o sentido de transição em um nível macro,

[...] com uma perspectiva de evoluções históricas, pode-se falar de transições quando há mudanças de programa. Como será gerida a

³⁵ “[...] la culture didactique des enseignants ne fournit pas un ensemble de situations standard qui peuvent jouer le rôle d’une mémoire des conditions d’apprentissage”.

³⁶ Annie Bessot, Marianna Bosch e Marie-Hélène Salin.

³⁷ “[...] tout apprentissage de connaissances nouvelles peut être vu comme une transition, à partir de connaissances antérieures. On peut alors analyser les liens entre connaissances, pour identifier ce sur quoi l’élève peut s’appuyer pour construire du nouveau” (GUEUDET ; KHALOUFFI ; MARC, 2012, p. 1.709).

transição de um programa para outro? Quando o conteúdo ensinado em um determinado ano é alterado, a priori os alunos estão bem menos preparados para enfrentar esse novo conteúdo.

[...] qualquer que seja a direção selecionada, interrogar a transição demanda observar continuidades e rupturas, e formular proposições visando construir uma consistência ao longo do tempo³⁸ (GUEUDET; KHALOUFFI; MARC, 2012, p. 1.709).

As mudanças em alguns países como a França, por exemplo, acontecem de forma gradual, o que nem sempre acontece no Brasil. Durante o desenvolvimento da nossa pesquisa, o Ministério de Educação e Cultura realizou a mudança de um dos seus documentos orientadores, os PCN, após quase 30 anos de sua publicação, para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada no final do ano de 2017, que passa a ser referência obrigatória a partir de 2019 para todo o ensino infantil e fundamental brasileiro. Essa mudança se fez necessária uma vez que, após a publicação dos PCN, muitas leis, decretos e regulamentos entraram em vigor e não estavam contemplados no documento, por exemplo o ensino fundamental de 9 anos.

A preocupação com a continuidade do ensino entre níveis presente nos documentos brasileiros reforça a importância e a necessidade da busca por pesquisas sobre a transição entre níveis de ensino, o que pode ser observado no banco de teses e dissertações da CAPES³⁹, sobre transição entre o 5º e o 6º ano, extraindo dados do período de 2000 a 2018.

Algumas pesquisas sobre transição também foram desenvolvidas no Brasil e abordaram o contexto escolar e familiar, a motivação, as práticas pedagógicas, a unidocência e a pluridocência. Essas pesquisas consideraram ainda diferentes sujeitos, desde alunos e pais a professores, coordenadores e diretores de instituições escolares.

Prati (2005) observou o contexto escolar e familiar, e os efeitos das práticas que constituem os sujeitos (alunos, professores e pais) na passagem da 4ª para a 5ª série (5º para o 6º anos) do ensino fundamental. A partir da observação de aulas,

³⁸ “[...] avec une perspective d'évolutions historiques, on peut parler de transitions lors de changements de programmes. Comment sera géré le passage d'un programme à un autre? Lorsque le contenu enseigné une année donnée est modifié, a priori les élèves sont moins bien préparés à rencontrer ce nouveau contenu. On voit dans tous les cas, quel que soit le sens retenu, qu'interroger la transition demande d'observer des continuités et des ruptures, et de formuler des propositions visant à construire une cohérence dans la durée” (GUEUDET KHALOUFFI ; MARC, 2012, p. 1.709).

³⁹ Pesquisa realizada no período de 04 a 06/01/2017 com as palavras transição AND 5º ano, transição AND 6º ano, transição AND unidocência AND pluridocência. Disponível em: <<http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>>. Atualização da pesquisa em 23 de fevereiro de 2018.

conversas, entrevistas gravadas, diário de campo em duas escolas da rede estadual de Porto Alegre, durante um ano, a pesquisadora buscou captar os momentos de subjetividade entre professores e alunos e traçou um panorama da movimentação escolar a partir de frases e interações, para sinalizar a complexidade da passagem.

Na sua dissertação, a pesquisadora constatou que a ruptura não é tão visível para os sujeitos considerados, mas é expressa pelos diferentes sujeitos e, por vezes, comuns, por exemplo, quando pais e professores entendem ser o aluno o sujeito principal da sua aprendizagem; e outras contraditórias, quando os alunos do 5º ano entendem a escola enquanto um espaço único e no 6º ano percebem a escola e a aula de maneiras distintas, como espaços com significados próprios.

Melin (2013), Goncalves (2014) e Martins (2014) investigaram a motivação de aprender associada ao período de transição.

Em sua dissertação, Melin (2013) analisou a transição para o ensino fundamental II com alunos de 5º e 6º anos na dissertação, e investigou a motivação desses alunos associada ao interesse e ao desempenho, bem como o acolhimento do professor nas aulas de matemática, mas sem observar um conteúdo específico. A pesquisa revelou que os alunos do 5º ano se sentem mais acolhidos pelo professor de matemática do que os dos 6º anos. Já com relação ao interesse e ao desempenho, quanto ao gênero, as meninas dos dois anos de ensino têm um maior interesse em aprender, enquanto os meninos do 6º ano obtiveram um melhor desempenho que os do 5º ano.

Goncalves (2014) buscou identificar potencialidades a partir das dificuldades percebidas pelos alunos na transição do 5º para o 6º anos na disciplina de matemática. A partir de uma revisão de literatura e da aplicação de questionário semiestruturado com os alunos, o pesquisador diagnosticou ser necessário considerar a motivação deles, assim como a percepção do professor quanto ao planejamento e à metodologia a serem utilizados, fatores que podem influenciar no desempenho da matemática.

Martins (2014), na sua dissertação, realizou uma pesquisa em três escolas de Porto Alegre nas quais entrevistou dois professores do sexto ano e dois alunos do sétimo ano para relatarem suas experiências com a transição e a motivação para aprender. Essas escolas já realizavam uma adaptação ao propor encontros no último ano dos anos iniciais do ensino fundamental entre alunos e professores dos anos iniciais e anos finais, o que, para os entrevistados, contribui para minimizar a

ansiedade e insegurança comum no período de transição entre esses níveis de ensino.

A dissertação de Castanho (2015) tomou como ponto de partida os baixos índices na disciplina matemática em avaliações oficiais como o SAEB⁴⁰ e buscou analisar os erros mais frequentes cometidos por alunos de duas turmas do 6º ano de uma escola da rede pública de Santa Maria – RS. A partir das análises das respostas desses alunos, a pesquisadora constatou que, apesar de promovidos para o 6º ano, dificuldades com conteúdos vivenciados nos anos anteriores permaneciam, como sistema de numeração decimal, operações de adição e subtração com números naturais e o significado de termos como “doou”, “tem” e “vendeu” em problemas.

Com a análise dos erros, duas ações foram desenvolvidas por Castanho (2015) para minimizar os impactos da transição: uma direcionada aos alunos e outra aos professores da escola campo da pesquisa. Estratégias de ensino foram elaboradas e aplicadas, na busca de reduzir as dificuldades, e uma nova avaliação foi realizada para verificar o aproveitamento das turmas. Realizou-se uma formação com professores dos anos iniciais e finais do ensino fundamental e a equipe de direção sobre práticas pedagógicas, tendo como referência a análise das respostas de alunos do 6º ano às provas aplicadas.

A unidocência e a pluridocência foram objetos das pesquisas de Rangel (2001), Hauser (2007) e Zacarias (2016).

Rangel (2001), em sua dissertação, buscou construir um referencial pedagógico capaz de contribuir na redução dos conflitos que são provocados tanto aos professores quanto aos alunos na transição da unidocência para a pluridocência em classes de 4ª série (5º ano) para a 5ª série (6º ano) do ensino fundamental. Com base na análise e interpretação das entrevistas, realizadas com 10 professores e 10 alunos de uma 5ª série (6º ano), a pesquisadora observou que os alunos esperam ser atendidos dentro das suas individualidades, com o olhar de um professor unidocente. Já os professores pluridocentes sentiram dificuldade em lidar com a transição, o que provoca um distanciamento das reais necessidades dos alunos neste momento.

⁴⁰ Sistema de Avaliação da Educação Básica.

Hauser (2007) realizou uma revisão bibliográfica no banco de teses e dissertações da CAPES sobre trabalhos que abordaram a transição escolar da 4ª para a 5ª série (5º para o 6º anos) no período de 1987 a 2004. Dentre as 14 dissertações e duas teses, a pesquisadora constatou existir no período investigado uma ruptura e descontinuidade entre os níveis de ensino anos iniciais e anos finais do ensino fundamental, causada por diversos fatores, como a passagem da unidocência para a pluridocência, as exigências pedagógicas e as relações professor-aluno.

Os professores da 4ª série (5º ano) desconhecem os conteúdos do ano seguinte, da mesma forma que os professores da 5ª série (6º ano) não sabem quais conteúdos foram trabalhados com seus alunos, e consideram o ensino de alguns conteúdos como novos. Hauser entende esse problema como um “descompasso didático que pode gerar atrasos e desmotivação” (2007, p. 56).

Zacarias, em sua tese, buscou analisar as dificuldades dos alunos em consequência da transição da unidocência para a pluridocência relacionadas às estruturas aditivas através de um estudo comparativo com alunos e professores do Brasil e de Portugal. A pesquisadora afirma que

[...] a transição da unidocência para a pluridocência é um momento da trajetória escolar marcado por situações didáticas, pedagógicas, psicológicas e políticas que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem tanto no Brasil como em Portugal (2016, p.45).

Numa primeira etapa, a pesquisadora propôs aos professores uma análise dos problemas a serem aplicados nas suas turmas, com o objetivo de estimar o percentual de alunos que acertariam cada problema e justificar as possíveis dificuldades.

Dentre os resultados encontrados na resolução de problemas aditivos, Zacarias (2016) constatou um melhor desempenho dos alunos da unidocência nos dois países. Elementos como a categorização de problemas de estrutura aditiva da TCC, assim como o cálculo numérico e o relacional, foram objetos da análise. Nos dois países, o maior índice de dificuldade esteve associado aos problemas de comparação e problemas mistos⁴¹. Com relação às estratégias utilizadas pelos alunos, diferentes formas de registros e representações foram observadas entre os

⁴¹ Vergnaud (1990) classifica os problemas de estrutura aditiva em três grupos de base: composição, transformação, comparação, e os problemas mistos, como a composição de transformações.

portugueses, enquanto que os brasileiros ficaram restritos ao uso de algoritmos convencionais.

A proximidade das escolas nas quais a pesquisa foi desenvolvida em Portugal com as universidades foi considerada como um fator que favoreceu ao desenvolvimento de parcerias, enquanto que, no Brasil, foi observado um distanciamento entre o professor, seja ele unidocente ou pluridocente, e o pesquisador da academia.

Zacarias (2016) acredita que a divisão do ensino fundamental entre as redes municipal (unidocência) e estadual (pluridocência)⁴² contribui para o distanciamento, o que não acontece em Portugal, visto que os dois ciclos são de responsabilidade do distrito, o que equivale a um estado brasileiro.

Dentre as pesquisas apresentadas, embora não se trate de um estudo exaustivo, é possível perceber a importância da transição entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental. Foram observadas dificuldades na passagem da unidocência para a pluridocência, tanto por parte dos professores dos 6º anos, diante do desconhecimento dos conteúdos que foram objeto de estudo no 5º ano, quanto por parte dos alunos, que se sentem menos acolhidos pelos professores dos 6º anos, desmotivados, com um maior índice de retenção. Ações pedagógicas para minimizar as diferenças foram utilizadas, como um período de adaptação para alunos e professores dos dois níveis de ensino, ou ainda formações com professores dos anos iniciais.

Apesar da diversidade e amplitude do tema transição nas pesquisas analisadas, observamos que poucas abordam o ensino e a aprendizagem de conceitos, a construção conceitual.

2.5.3 Os processos de transição na nossa pesquisa

Trazendo para a nossa pesquisa os aspectos relacionados aos professores pertencentes aos níveis de ensino associados à transição, o professor polivalente, do 1º ao 5º ano, tem conhecimento do programa do 6º ano? E o professor do 6º ano conhece, por sua vez, o programa que foi trabalhado pelo professor do nível de ensino anterior?

⁴² Embora no Brasil existam escolas que ofereçam todo o ensino fundamental, essas são em menor número.

Qual(is) suporte(s) o professor dos anos iniciais do ensino fundamental utiliza para desenvolver um trabalho que ajude na aprendizagem de área e perímetro? O que pode ser tomado como referência para esse professor? Os livros didáticos são uma dessas referências, tomados como complementar na formação acadêmica e pedagógica. Qual o lugar dos livros didáticos na tomada de decisão do professor sobre o que ensinar e como ensinar área e perímetro? Qual a abordagem que realizam sobre os campos conceituais, em particular, o das grandezas e medidas? Estão em consonância com os documentos oficiais? Apresentam orientações aos professores que possibilitam a compreensão da construção conceitual das grandezas na transição entre os diferentes níveis de escolaridade?

Nossa pesquisa amplia a abrangência uma vez que se propõe a fazer a análise dos conceitos de área e perímetro do 1º ano até o 6º ano, momento em que o aluno já deveria ter a construção desses conceitos estabelecida. Buscaremos elementos para verificar se as dificuldades relatadas nas pesquisas anteriores estão associadas às situações, aos procedimentos utilizados, às variáveis estabelecidas e aos recursos propostos, que estão apresentados nos livros do 1º ao 6º ano do ensino fundamental. Isto é, se as abordagens desses objetos, nos livros de 1º ao 6º ano das coleções adotadas na escola campo da nossa pesquisa, contribuem para a construção desses conceitos pelos alunos, ou se deixam lacunas que dificultam a superação dos entraves observados.

Também iremos analisar a passagem dos anos iniciais do ensino fundamental para o início dos anos finais do ensino fundamental, tanto do ponto de vista do aluno, com um professor para diversas disciplinas para um professor por disciplina, quanto do ponto de vista dos professores, da formação de pedagogia e do especialista em matemática.

Diante do apresentado nos documentos oficiais e nas pesquisas sobre transição, levantamos a nossa terceira questão: que condições modificáveis e não modificáveis nos diferentes níveis da escala de codeterminação didática influenciam a transição entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental e, conseqüentemente, o ensino de área e perímetro nessa transição?

2.6 O CONCEITO DE RETOMADA

Como já foi dito, os objetos de saber em foco nesta pesquisa são estudados nos anos iniciais do ensino fundamental e entram novamente em cena no 6º ano. O conceito de retomada⁴³, desenvolvido por Larguier (2005; 2009) nos seus trabalhos de mestrado e doutorado, subsidia o olhar que vamos ter sobre esse retorno à cena, considerado sob dois pontos de vista.

No mestrado, Larguier (2005) considerou a *reprise scolaire* na transição entre o *collège* e o *lycée*⁴⁴, em turmas de *seconde*⁴⁵, mais especificamente, entre o início do ano escolar e até as férias de Toussaint⁴⁶. Nesse período, os professores fazem intervir assuntos ligados aos domínios numérico e algébrico, seja por meio de revisões sistemáticas de conhecimentos do *collège* ou da retomada de conhecimentos do *collège* para a introdução de novos conteúdos.

Tomando a TAD como quadro teórico, a pesquisadora adotou como objeto O a *reprise scolaire* do domínio numérico e algébrico no 1º ano do ensino médio, por existir na instituição I considerada, currículo oficial de matemática para esse ano de ensino, e o professor o sujeito X, que tem uma relação com esse objeto R (X, O) de acordo com as orientações da instituição I, estabelecendo, assim, uma relação R, (O).

Esse estudo de caso foi composto da análise de documentos, entrevistas e observações de aulas. Os documentos foram os textos oficiais que fixavam o programa do 1º ano do ensino médio, para verificar a existência ou não de orientações ao professor de como realizar uma *reprise scolaire* ideal nesse ano de ensino.

Foram observadas aulas de duas turmas de 1º ano do ensino médio durante o início do ano escolar, para recolher dados associados à *reprise scolaire* dos domínios numérico e algébrico, a partir das organizações matemáticas e didáticas escolhidas pelos professores, os gestos profissionais desses e o seu impacto sobre os gestos de estudo dos alunos. Para complementar o corpus de análise, foram realizadas entrevistas com dois professores, um mais experiente e outro iniciante.

Como resultados, os programas sinalizavam que as *reprises scolaires* deviam ser realizadas entre conteúdos antigos do *collège* com os novos do *lycée*, em

⁴³ O termo *reprise* será adotado na nossa pesquisa como retomada.

⁴⁴ No sistema escolar brasileiro, passagem do ensino fundamental para o ensino médio.

⁴⁵ Nível equivalente ao 1º ano do ensino médio no sistema escolar brasileiro, que se chama classe de *Seconde* na França. A partir de agora usaremos o termo em português, 1º ano do ensino médio.

⁴⁶ O ano escolar francês inicia em setembro e as férias de Toussaint (Todos os santos) começam no final de outubro, com duração de 15 dias.

particular no estudo das funções quando do domínio numérico e algébrico, mas sem fazer uso de revisões sistemáticas (LARGUIER, 2005). As observações das aulas e as entrevistas com os professores confirmaram que as atividades de *reprise scolaire* demandam gestos profissionais mais específicos, como fazer revisões de alguns assuntos do *collège* e de acordo com a experiência do professor. A pesquisadora percebeu ainda a necessidade do olhar sobre a aprendizagem dos alunos, com uma intervenção no início do ano escolar e outra após o ensino com a retomada dos domínios numérico e algébrico.

Na sua tese, Larguier (2009) ampliou o conceito anterior de *reprise scolaire* e investigou apenas o domínio do numérico em classe do 1º ano do ensino médio, porém ao longo de todo o ano escolar. Observou as aulas em que esse domínio seria objeto de estudo e complementou seu olhar sobre a aprendizagem dos alunos com uma intervenção e entrevistas.

A pesquisadora considerou a *reprise du numérique* “[...] o momento de ensino em que esse tema ou tópicos relacionados a ele intervêm de novo e são atualizados em temas de ensino nesta classe”⁴⁷ (2009, p. 31, tradução nossa). O tipo de tarefas <T- determinar a qual conjunto um número pertence> característico do domínio numérico foi eleito como objeto de estudo dentro de dois temas, valor absoluto e trigonometria. Também foram analisadas as possibilidades de interação interna ao domínio numérico, e entre os domínios numérico e geométrico.

A noção de retomada com o conhecimento novo está situada para Larguier (2009), seja de conhecimentos já vistos no ensino fundamental, desde simples revisões até a sua ligação com algo novo no ensino médio; seja enquanto uma lembrança⁴⁸ dos conhecimentos novos trabalhados no 1º ano do ensino médio, no sentido de Perrin-Glorian (1992), ou na aprendizagem de novos conhecimentos a partir da retomada do que já foi ensinado no mesmo ano letivo.

Perrin-Glorian (1992) defende que, para que as situações de lembrança existam, o professor precisa ter ensinado ele mesmo o tema matemático que será objeto de lembrança com seus alunos. São situações de lembrança do que foi vivido em um mesmo ano escolar.

⁴⁷ “Le moment de l’enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l’enseignement de cette classe.”

⁴⁸ Em francês, *rappel*.

Além das categorias estabelecidas pela pesquisadora, outras foram encontradas a exemplo da síntese, que pode ser utilizada tanto para o professor quanto para o aluno, enquanto uma possibilidade de reorganização pessoal dos conhecimentos; e enquanto meio de controle do aluno da sua atividade matemática, ao mudar de registro ou de quadro, por exemplo. A pesquisadora constatou que a construção do espaço numérico é um problema dos professores e dos alunos.

Larguier (2009) considera o termo *reprise* adotado por ela mais amplo que o utilizado por Brousseau (1998) e por Chevallard (2002).

Brousseau (1998) considera *reprise* a reorganização de um conhecimento antigo em que professor e aluno fazem parte de um sistema didático, e o professor tem uma memória didática da turma. Essa, segundo Centeño (1995), é construída sobre tudo o que foi vivenciado pelo professor e seus alunos, e a responsabilidade da retomada é comum aos dois. Para Centeño, a *reprise* não pode ser considerada na transição entre níveis de ensino porque os alunos devem ter a lembrança do que foi trabalhado no ano anterior, no entanto o professor de um 6º ano não conhece as situações que foram trabalhadas no 5º ano (CENTEÑO, 1995).

Já para Chevallard (2015, p. 22, tradução nossa), na *reprise d'étude* “[...] existe uma retomada de estudo numa aula toda vez que se estuda um objeto que já foi estudado em uma aula anterior [...] ou mesmo no ano em curso”⁴⁹, quando fica a cargo do professor a responsabilidade da retomada de estudo de um tema, a partir da organização de uma nova questão didática.

Para Larguier (2009), essa retomada pode, então, estar associada às revisões sistemáticas de conhecimentos de um domínio específico já vivenciado em um ano escolar anterior ou um momento anterior de um mesmo ano escolar, ao ensino de conhecimentos de um domínio específico do programa do ano escolar vigente e a requisitos necessários para outros domínios do ano escolar vigente. Isso nos remete, dentro do sistema escolar brasileiro, ao conceito de currículo em espiral de Bruner (1999).

Bruner participou em 1959 da *Woods Hole Conference*, com cientistas, educadores e estudantes de diversas áreas de conhecimento, como matemática, física, biologia e história, para discutir sobre a necessidade de uma mudança no ensino das ciências nas escolas da educação primária e secundária. Temas como

⁴⁹ “Il y a reprise d'étude dans une classe chaque fois qu'on y étudie un objet qui a déjà été étudié dans une classe antérieure [...] ou même dans l'année en cours.”

“Sequência de um currículo”, “O aparato de ensinar”, “A motivação de aprender”, “O papel da intuição na aprendizagem e no pensamento” e “Processos cognitivos da aprendizagem” foram abordados, o que já indicava um primeiro esforço de diferentes profissionais e áreas de conhecimento em mudar um planejamento educacional.

A ideia principal do “currículo em espiral” de Bruner (1999) é que conceitos básicos seriam revisitados em níveis subsequentes, respeitando o desenvolvimento do aluno. Trata-se de um currículo contrário à ideia de organização linear, sem estar centrado apenas no que deveria ser ensinado pelo professor, o que era foco da matemática moderna nas décadas de 1950 e 1960, em que o conhecimento matemático deveria ser baseado nas estruturas matemáticas abstratas, sua lógica, técnicas e teorias.

No Brasil, em 1985, foi iniciada a elaboração de uma proposta curricular para o ensino de 1º grau (equivalente hoje ao ensino fundamental) da rede pública do estado de São Paulo que buscou incorporar a ideia de Bruner. Esta tinha como foco, a apresentação e o trabalho de conteúdos em diferentes níveis de abordagem e maior integração, tendo inclusive o domínio das medidas como integrador dos números e da geometria. Também outros estados iniciaram a construção de suas propostas e, em meados da década de 1990, a proposta dos PCN foi elaborada.

Buscaremos verificar na análise dos livros didáticos do 1º ao 6º ano e, em particular, do 5º para o 6º se os conceitos são apresentados a partir de uma ampliação e aprofundamento, como sugerido pelos PCN, e se eles apresentam tarefas que contribuem para a retomada dos conceitos de área e perímetro, quando trabalhados no 5º ano, no sentido de Larguier (2009).

Na nossa pesquisa, retomada significa a maneira pela qual esses objetos são atualizados durante novos encontros, com assuntos relacionados à área e ao perímetro no 6º ano do ensino fundamental.

Do ponto de vista da história escolar do aluno, esse conhecimento deveria existir na sua memória. Se existe, ele pode lembrar ou não. O conhecimento pode estar adormecido, por vezes sem ser reconhecido pelo aluno.

E se o aluno por vezes não lembra de conhecimentos trabalhados no nível anterior? Segundo Mirène Larguier (2009), as revisões são uma possibilidade para o professor resgatar a memória pessoal dos alunos. Mas devemos estar atentos às revisões, como bem salienta os PCN, ao afirmar que existe uma tendência em fazer da 5ª série (6º ano),

[...] um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. De modo geral, os professores avaliam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos muito aquém do desejável e acreditam que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada dos conteúdos. No entanto, essa retomada é desenvolvida de forma bastante esquemática, sem uma análise de como esses conteúdos foram trabalhados no ciclo anterior e em que nível de aprofundamento foram tratados (1998a, p. 61-62).

Os alunos devem ter uma lembrança dos conteúdos trabalhados no ano anterior, mas o professor de um ano não sabe quais situações foram trabalhadas no ano anterior. Por outro lado, alunos de turmas diferentes ou mesmo oriundos de escolas diferentes não vivenciaram as mesmas situações.

Repetições de conteúdos são insuficientes e provocam o desinteresse no aluno. Que mecanismos o professor do 6º ano irá utilizar para lembrar, resgatar a memória didática dos seus alunos? Como verifica e reconstrói essa memória do passado dos alunos dentro de um sistema de ensino? A memória didática é construída com cada turma e o seu professor. Como a instituição escolar pode contribuir para repassar aos professores das próximas turmas o que foi objeto de estudo, não apenas do currículo prescrito, mas do currículo que foi vivenciado pelos alunos no ano anterior?

Centeño (1995) afirma ser essa uma responsabilidade da instituição escola, delegada ao professor, mas que o sistema didático não tem meios de administrar o que foi vivenciado, e que Chevallard (1989) chama de amnésia institucional.

Fica, assim, a cargo do professor ajudar seus alunos no resgate da memória pessoal, ao propor situações de retomadas que ajudem na articulação entre o que foi ensinado no ano anterior com o atual ano de ensino. São situações que, segundo Vergnaud (1975), para possibilitar a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos pelos alunos, devem propor mudanças de representação, das relações a serem estabelecidas.

Considerando o currículo em espiral proposto pelos PCN, em que os conteúdos serão retomados, buscaremos na nossa pesquisa observar como as retomadas acontecem na sala de aula do 6º ano com os conceitos de área e perímetro e como estão configuradas, segundo Larguier (2009).

Quais seriam as situações de aprendizagens caracterizadas enquanto retomada que podem favorecer a continuidade do ensino da matemática e a transição entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental?

Bessot (2015) diz existirem dois tipos de rupturas que estão relacionadas: a ruptura cultural e a epistemológica. A ruptura cultural pode acontecer dentro de uma mesma instituição, por exemplo a formação dos professores dos anos iniciais que possuem o curso de pedagogia, e a formação dos professores dos anos finais do ensino fundamental, com a licenciatura em matemática; e a diferenciação entre os dois níveis de ensino, mesmo dentro de uma mesma instituição escolar quanto à carga horária de matemática em cada nível de ensino.

A ruptura epistemológica de um mesmo saber é aquela que está presente em diferentes níveis de ensino dentro do currículo, mas com naturezas diversas. Por exemplo, a noção de área ao ser estudada ao longo do ensino fundamental, para determinar a área de um retângulo associada à ampliação dos conjuntos numéricos. A passagem da contagem de quadradinhos apenas inteiros para uma situação com quadradinhos inteiros e partes de quadradinhos caracteriza uma primeira ruptura. Posteriormente uma outra ruptura acontece para a determinação da área do retângulo com o uso da fórmula, com a passagem para a representação algébrica.

Bessot (2015) questiona como assegurar a continuidade e realizar a transição diante dessas rupturas, o que também foi objeto de estudo de Brousseau e Centeño (1991) ao considerarem que “[...] os alunos, que davam respostas corretas a questões complexas no ano anterior, parecem não saber nada no início do ano seguinte, com um professor que também não os pode ajudar”⁵⁰ (1991, p. 187, tradução nossa).

Nesse sentido, precisamos compreender como o ensino está estruturado, como os conceitos de área e perímetro estão presentes no 5º e no 6º ano na escola, nos programas e nos livros didáticos, e quais as tarefas propostas que contribuem para a realização da transição entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental.

A fim de considerar fatores de naturezas diversas, no ensino e na aprendizagem de área e perímetro, vamos adotar como instrumento teórico-metodológico o filtro da grandeza área, que é objeto do próximo tópico.

⁵⁰ “[...] les élèves qui donnaient des réponses correctes à des questions compliquées dans une classe inférieure semblent ne plus rien savoir au début de l’année suivante dans un environnement et avec un enseignant qui ne peut aider (rappel, formulation).”

2.7 FILTRO DAS GRANDEZAS: UM INSTRUMENTO TEÓRICO-METODOLÓGICO

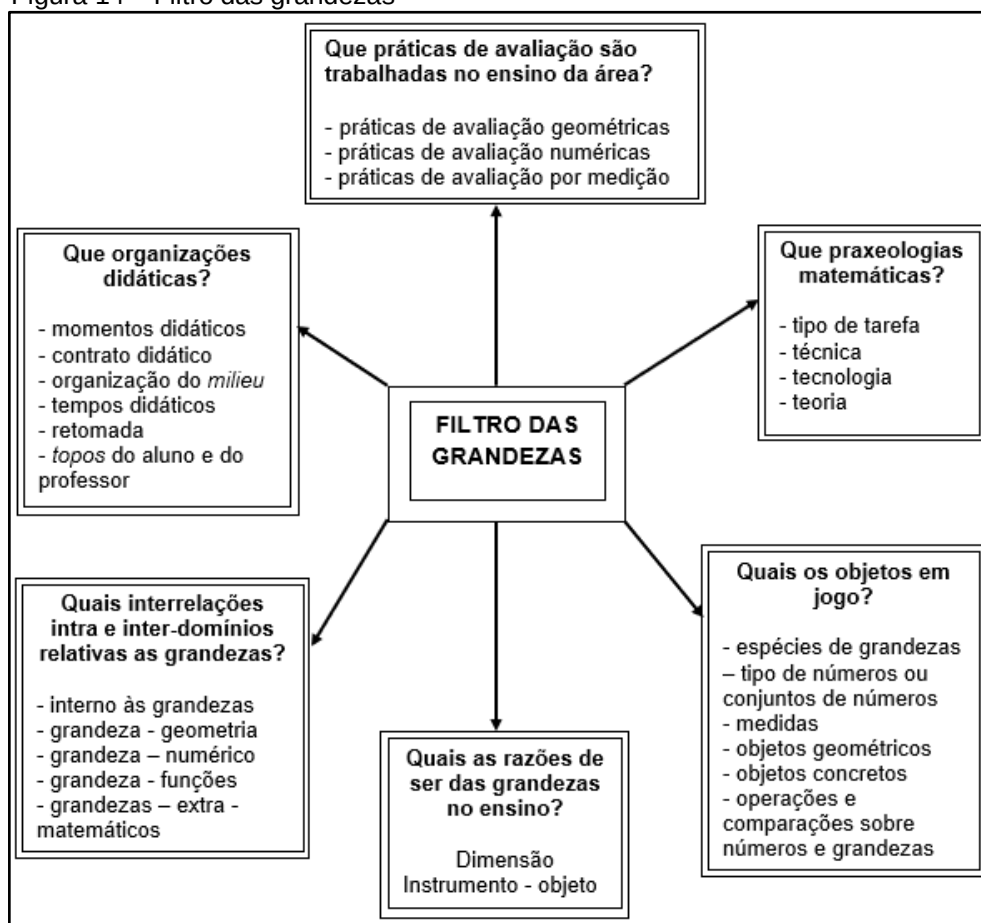
O filtro da grandeza área (BELLEMAIN; BRONNER; LARGUIER, 2017), que tem suas raízes no filtro das grandezas (ANWANDTER-CUELLAR, 2012) e no filtro do numérico (BRONNER, 2007), é um instrumento metodológico que serve para separar as informações que se encontram “misturadas” na sociedade e contribui para a compreensão das grandezas nas diferentes perspectivas.

Enquanto instrumento metodológico, o filtro das grandezas tem como objetivo fornecer um panorama das análises realizadas e, ao mesmo tempo, considerar cada uma das entradas de forma isolada ou associada a uma outra, o que possibilita uma complementaridade, como podemos observar na Figura 14, a seguir.

Ele será tomado inicialmente para uma análise em duas dimensões: a dimensão institucional com a TAD, a partir do estudo das organizações matemáticas propostas nos documentos oficiais e nos livros didáticos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental; e a dimensão cognitiva com a TCC, a partir do levantamento das situações, dos conceitos, esquemas, invariantes operatórios e as regras de controle tomando como base as classes de situações de Ferreira (2010).

As demais entradas do filtro serão consideradas com a complementaridade das duas teorias, do conceito de grandeza tomando como base no referencial de Bellemain e Lima (2002) e Douady e Perrin-Glorian (1989) e no conceito de retomada de Mirène Larguier (2009).

Figura 14 – Filtro das grandezas



Fonte: Adaptada de Anwandter-Cuellar (2012).

Segundo Bellemain (2013), com o filtro das grandezas (Figura 14) é possível realizar uma análise detalhada sobre o conceito de área no ensino, a partir de cada uma das perguntas levantadas no filtro das grandezas e os elementos a serem observados.

Na nossa pesquisa, iremos observar as grandezas comprimento (perímetro) e área para cada uma das entradas, descritas a seguir.

a) Objetos para as grandezas área e comprimento:

Dentro do domínio das grandezas e medidas iremos considerar todos os objetos geométricos dos quais a área e o comprimento são atributos como:

- superfícies e linhas, e a distinção entre os objetos do mundo físico e do abstrato;
- áreas e comprimentos que representam as grandezas geométricas, suas relações com outras grandezas e, em particular, com o perímetro, e os valores associados a cada uma delas, por exemplo, a área de um retângulo e o comprimento dos seus lados;

- funções-medida de área e de comprimento expressas por aplicações entre o conjunto das áreas e dos perímetros no conjunto dos reais não negativos, respectivamente;
- medida de uma área e de um perímetro, número associado a uma unidade de área e a uma unidade de comprimento, obtidos por meio da função medida de área e de comprimento, respectivamente;
- termo grandeza medida associado ao par (número, unidade de área) ou (número, unidade de comprimento), por exemplo, dado um quadrado de perímetro 8 cm, esse par representa a grandeza comprimento associado ao perímetro, e 4 cm^2 é o par que representa a sua área.

b) Razão de ser dos objetos área e perímetro:

Os objetos área e perímetro se apresentam enquanto instrumento ou objeto de acordo com o lugar que eles ocupam. Enquanto instrumento, quando o aluno é capaz de reconhecer quando usar e como aplicar aquela noção, seja dentro da própria matemática, seja em situações associadas a outras áreas de conhecimento ou do cotidiano. Enquanto objeto, com suas definições, propriedades, condições de validade e seus limites, a depender da situação apresentada (DOUADY, 1986).

c) O lugar dos objetos área e perímetro:

Relações dos objetos área e perímetro com outros objetos: internas ao domínio das grandezas e medidas; entre domínios das grandezas e medidas e outros domínios como números e operações, geometria ou tratamento da informação; externas à matemática, com outras disciplinas escolares, de práticas sociais extraescolares.

d) Praxeologias dos objetos área e comprimento:

Considerar os tipos de tarefas para as grandezas área e comprimento, e em particular, para o perímetro, com base na classificação adotada na nossa pesquisa (item 2.4.1) e as tecnologias associadas.

e) Organização didática dos objetos área e comprimento:

As organizações didáticas serão observadas a partir dos tipos de retomada (LARGUIER, 2009) associados ao estudo das grandezas área e comprimento (perímetro).

Dessa forma, com o filtro da grandeza área, iremos examinar as relações estabelecidas entre os objetos área e perímetro, para observar os tipos de retomada

(LARGUIER, 2009) associados à construção do conceito de área na transição do 5º para o 6º anos do ensino fundamental.

2.8 OBJETIVO GERAL E QUESTÕES NORTEADORAS

O objetivo geral da nossa pesquisa é investigar possíveis relações entre as dificuldades conceituais de aprendizagem enfrentadas por alunos do 6º ano sobre área e perímetro e fatores de naturezas diversas em jogo, na transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental.

As três questões inicialmente formuladas deram lugar às seguintes questões norteadoras:

- 1) Quais as dificuldades conceituais enfrentadas pelos alunos ao resolver situações relativas à área e ao perímetro na transição entre o 5º e o 6º ano do ensino fundamental?
- 2) Que elementos ajudam a compreender as possíveis raízes dessas dificuldades?

Os subsídios discutidos neste capítulo permitiram refinar essas questões iniciais e produzir um esboço do modelo epistemológico de referência (MER) adotado nesta tese, ancorado na consideração da área e do comprimento como grandezas e no estudo das situações que dão sentido à área e ao comprimento, sob a ótica da teoria dos campos conceituais. Por outro lado, a teoria antropológica do didático fornece um arcabouço teórico-metodológico para analisar a vida dos objetos de saber área e perímetro nas instituições e as condições que pesam sobre o estudo desses objetos.

Assim, a tese defendida é:

Fatores de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica relativos à transição entre a primeira e a segunda etapa do ensino fundamental e aos objetos de saber área e perímetro influenciam o modo como os alunos do 6º ano lidam com esses objetos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentadas e justificadas as principais escolhas metodológicas feitas na pesquisa, como: a escola campo da pesquisa, os participantes, os diferentes elementos de análise e instrumentos de produção de dados empíricos.

O objetivo de investigar possíveis relações entre as dificuldades conceituais de aprendizagem enfrentadas por alunos do 6º ano sobre área e perímetro e fatores de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica em jogo, na transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental, levou a escolher um estabelecimento de ensino com condições favoráveis que serão detalhadas no próximo tópico.

3.1 ESCOLA CAMPO DA PESQUISA E PARTICIPANTES

Para escolha da escola campo da pesquisa, estabelecemos dois critérios em relação aos objetos de estudo:

- a) a escola deveria ofertar o ensino fundamental completo, inclusive no mesmo espaço geográfico, para poder observar elementos relativos à transição entre o 5º e o 6º ano numa mesma instituição escolar;
- b) os livros didáticos adotados no ensino fundamental serem do(s) mesmo(s) autor(res), na busca de otimizar a continuidade da proposta pedagógica das obras, para análise da retomada dos conceitos de área e perímetro do 1º ao 6º ano.

O estabelecimento escolar onde a pesquisa foi realizada pertence à rede privada de ensino por atender aos critérios preestabelecidos. O motivo pelo qual a escola selecionada para este estudo foi uma escola da rede privada de ensino deve-se à dificuldade em obter acesso às escolas da rede municipal que atendiam aos critérios necessários ao estudo.

O município do Recife tinha, no momento da nossa escolha pelo campo da pesquisa, final do primeiro semestre de 2016, 221 escolas públicas que atendiam à modalidade do ensino fundamental. No entanto, apenas 32 dessas atendiam conjuntamente as modalidades dos anos iniciais e finais do ensino fundamental. Esse processo de descentralização, que já ocorre há alguns anos, institui a

responsabilidade das redes municipais sobre a oferta dos anos iniciais do ensino fundamental, enquanto que os anos finais ficaram a cargo das redes estaduais.

Somado a isso, as escolas públicas participavam novamente da escolha do livro didático para os anos finais do ensino fundamental, por meio do PNLD 2017. Considerando que poderia ocorrer a mudança de coleção⁵¹, sem a manutenção do critério adotado para os livros didáticos, passamos para a consulta na rede privada de ensino.

Dentre as nove escolas com as quais entramos em contato, quatro adotavam coleções do(s) mesmo(s) autor(es) ao longo de todo o ensino fundamental, mas apenas uma se disponibilizou a participar da pesquisa. Essa escola está situada na região metropolitana do Recife e oferece as modalidades de educação infantil e ensino fundamental. A partir de agora, a escola campo de pesquisa será nomeada escola São Francisco.

Considerando que nossa pesquisa se situa na transição do 5º para o 6º anos do ensino fundamental, os participantes da pesquisa são pessoas que estabelecem relações com a instituição escolar São Francisco nesses níveis de ensino, a saber: alunos que no ano de 2016 cursaram o 5º ano, alunos que em 2017 cursaram o 6º ano, e alunos que em 2018 cursam o 7º ano⁵² do ensino fundamental; professores de matemática dos 5ºs anos em 2016, e dos 6ºs anos em 2017; coordenadoras dos dois níveis de ensino, diretora-geral e diretoria-adjunta.

Para facilitar o acompanhamento das nossas análises, utilizaremos a seguinte nomenclatura:

Quadro 5 – Nomenclaturas para as análises

Participantes da pesquisa	Nomenclatura utilizada
Diretora-geral	Dir. geral
Diretora-adjunta	Dir. adjunta
Coordenadora dos anos iniciais	Coord. AI
Coordenadora dos anos finais	Coord. AF
Professora dos 5º anos de Português/ História/Geografia	Profa. de PHG
Professora dos 5º anos de Matemática/Ciências	Profa. 5º anos

⁵¹ A escolha dos livros didáticos do PNLD é realizada no segundo semestre de cada ano pelas escolas, com duas opções. A divulgação da coleção a ser enviada só acontece no início do ano seguinte, e não garante a 1ª escolha.

⁵² A aplicação do pós-teste, que será apresentada posteriormente, aconteceu no início do ano letivo de 2018, quando os alunos iniciaram o 7º ano.

Professor dos 6º anos	Prof. 6º anos
Aluno do 5º ano A	5A12 (ano, turma e nº de chamada)
Aluno do 5º ano B	5B12
Aluno do 6º ano A	6A12
Aluno do 6º ano B	6B12
Aluno do 7º ano A	7A12
Sondagem_ AnoTurmaAluno_ Atividade	S_5A12_Ativ1a
Pós-teste_ AnoTurmaAluno_ Atividade	PT_7A12_Ativ1a

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Nossas observações na Escola São Francisco, no período de 2016 a 2018, foram iniciadas em outubro de 2016, com a observação de duas turmas dos 5^{os} anos A e B, e concluídas no início do ano de 2018, com a aplicação de um pós-teste, com os alunos dos 7º anos A e B.

Considerando a mobilidade escolar durante o período da nossa pesquisa, apresentamos uma tabela com a quantidade de participantes por ano letivo.

Tabela 1 – Mobilidade de alunos das turmas A e B da Escola São Francisco, no período de 2016 a 2018

ALUNOS	2016 (5º anos)	2017.1 (6º anos)	2017.2 (6º anos)	2018 (7º anos)
Turma A	16	18	19	17
Turma B	14	14	15	14

Fonte: Dados da Escola São Francisco.

No início da nossa observação no mês de outubro de 2016, as turmas dos 5^{os} anos A e B contavam com a participação de 16 e 14 alunos, respectivamente. No ano de 2017, no primeiro semestre, a turma do 6º ano A recebeu dois alunos novatos e a turma do 6º ano B, apesar de continuar com o mesmo quantitativo de alunos, contou com a mobilidade de dois alunos que saíram e a chegada de outros dois. No segundo semestre de 2017, a turma do 6º ano A recebeu uma ex-aluna, e a turma do 6º ano B recebeu uma nova aluna. No ano de 2018, a turma do 7º ano A teve redução de duas alunas: uma que estava na Escola São Francisco desde os anos iniciais e outra que tinha entrado no início do 6º ano. E a turma do 7º ano B teve a redução de uma aluna que tinha entrado no ano anterior.

Diante da mobilidade de alunos durante o período de desenvolvimento da nossa pesquisa na Escola São Francisco, e na busca de melhor compreender como se dá a relação pessoal dos alunos com os objetos área e perímetro, estabelecemos

como critérios de escolha para análise, os alunos que estiveram matriculados na Escola São Francisco durante todo esse período, a saber, 22 alunos.

3.2 ELEMENTOS DE ANÁLISE E TRATAMENTO DOS DADOS

O corpus de materiais empíricos construídos para a nossa pesquisa contou com diferentes elementos complementares: documentos oficiais (LDBEN, DCNEB, PCN, RCNEI), documentos da Escola São Francisco (projeto político-pedagógico, proposta curricular do ensino fundamental), livros didáticos do 1º ao 6º ano utilizados na escola campo da pesquisa, observações de aulas nas turmas de 5º e 6º anos, testes e entrevistas nas turmas observadas, cópia de cadernos de alunos, entrevistas com as equipes pedagógicas e observação de reunião de passagem das turmas dos 5^{os} anos da Escola São Francisco.

As entrevistas realizadas com a professora dos 5^{os} anos em 2016, o professor dos 6º anos em 2017, as coordenadoras dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, e as diretoras da instituição no período da nossa pesquisa, de acordo com Manzini (2004), caracterizaram-se como sendo do tipo semiestruturadas.

Associadas ao tema da pesquisa e apoiadas em roteiros com blocos de questões básicas, as entrevistas semiestruturadas podem ser “[...] complementadas por outras questões inerentes às circunstâncias momentâneas à entrevista” (MANZINI, 2004, p. 2) e possibilitam a comparação das informações entre os participantes entrevistados.

Os roteiros foram elaborados com blocos de perguntas comuns e específicas, considerando as funções que os participantes desempenhavam na instituição. Bloco comum: formação acadêmica e atuação profissional, reuniões da escola, projeto político-pedagógico e a matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem. Para os participantes com função de direção, foi acrescido o bloco a função da direção; para as coordenadoras, os blocos a função de coordenação e o trabalho pedagógico e a formação de professores; e, para os professores, também dois blocos: o trabalho pedagógico e o currículo de matemática da escola.

As entrevistas foram gravadas em forma de áudio e transcritas pela pesquisadora, por considerar essa etapa como uma pré-análise do material, como sinaliza Manzini (2008). Dois momentos distintos e importantes, o da entrevista e o da transcrição, para o pesquisador buscar respostas ao seu objeto de pesquisa,

embora no primeiro a necessidade de observação e interação com o entrevistado para que ele se sinta à vontade esteja presente. Já no momento da transcrição, “[...] transcreve-se o que foi falado, mas pode-se perceber o que foi ou não perguntando, o que foi ou não respondido e o que está inaudível ou incompreensível” (Ibid., p. 2).

As transcrições das entrevistas foram editadas visto que a construção linguística e a construção da fala não interferem na compreensão do nosso objeto de pesquisa, e apresentadas no corpo do texto desta pesquisa com base nas normas da ABNT. Ao longo das entrevistas, quando o nome da instituição escolar pesquisada ou o nome de alguma das pessoas pertencentes à instituição foi citado, na transcrição substituímos por Escola São Francisco ou pelo termo que representa sua função na instituição, respectivamente. Por exemplo, quando algum entrevistado citou o nome de batismo da diretora-adjunta, esse foi substituído por diretora-adjunta.

A transcrição das aulas observadas também seguiu o mesmo princípio quanto à construção linguística e à apresentação segundo as normas da ABNT. Quanto aos registros realizados no quadro de sala de aula, tanto pelo professor quanto pelos alunos, esses foram transcritos, por não termos autorização para registrar imagens.

3.3 PERCURSO METODOLÓGICO

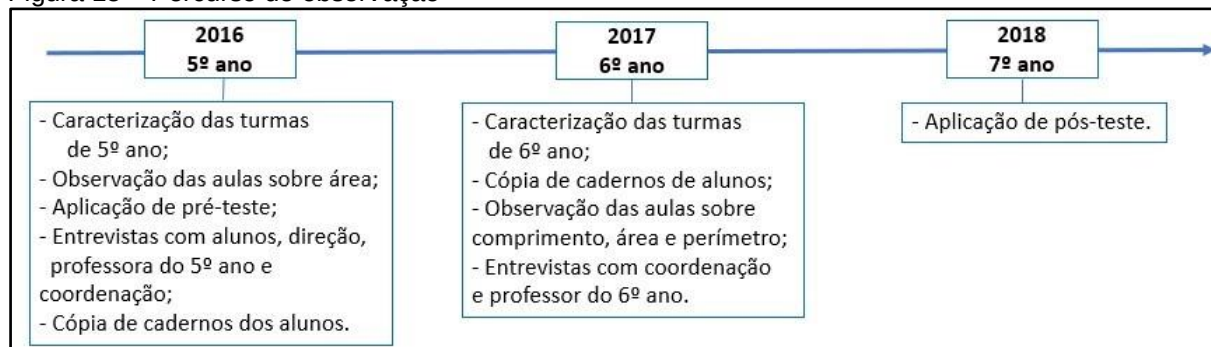
Nossa pesquisa se caracteriza como um estudo de caso (PONTE, 2006), por ser realizado numa instituição bem definida dentro de uma perspectiva interpretativa, na busca de compreender o que há de “[...] mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse” (p. 2), a transição entre o 5º e o 6º anos do EF.

No desenvolvimento do nosso estudo, foram realizadas observações naturalistas (ESTRELA, 1986), quando o pesquisador apenas observa, sem interferir no ambiente e no planejamento do professor, o que nos possibilita comparar o que foi realizado com o que poderia ter sido realizado, para que possamos determinar o que deveria permitir aos alunos a construção das relações entre os objetos de estudo e a instituição de 6º ano, a partir das situações de retomada propostas.

A elaboração do material empírico da pesquisa foi iniciada no ano de 2016, com a observação de duas turmas de 5º ano da Escola São Francisco (alunos de 10 a 12 anos). No ano seguinte, de 2017, as mesmas turmas foram observadas, agora

cursando o 6º ano. Finalizamos nossa coleta no início do ano letivo de 2018, com a aplicação de um pós-teste nas turmas de 7º anos (alunos entre 11 e 14 anos).

Figura 15 – Percurso de observação



Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Nossa observação nas turmas dos 5^{os} anos teve dois focos: caracterizar a instituição 5º ano, diante das relações estabelecidas entre professor e alunos, e dos objetos de estudo área e perímetro, a partir da observação de aulas e aplicação de uma sondagem, para verificar quais os conhecimentos apresentados pelos alunos ao final do 5º ano. Registramos que, no momento em que obtivemos o aceite da escola São Francisco para acolhida da nossa pesquisa, as aulas sobre o foco do nosso estudo já tinham sido ministradas. No entanto, pudemos observar aulas relacionadas ao domínio espaço e forma em que os objetos área e perímetro foram retomados.

Como complementação da caracterização das turmas, no final do ano de 2016 fizemos cópia de cadernos de cinco alunos dos 5^{os} anos, utilizando como critério quais os alunos que tinham maior número de frequência às aulas de matemática, visto que nesse momento não tínhamos a análise das atividades da sondagem.

No ano de 2017, com as turmas dos 6º anos, as observações foram realizadas em três períodos, com os seguintes focos: no início do ano, para caracterizar a instituição 6º ano diante da transição com o início dos anos finais do ensino fundamental, as relações estabelecidas entre os professores e alunos, bem como a introdução da disciplina de Matemática pelo professor junto às turmas; no mês de setembro, para observação das aulas associadas ao objeto comprimento e, no mês de novembro, para observação das aulas referentes aos objetos áreas e perímetros.

Considerando o final do ano letivo, a demanda das atividades programadas da escola São Francisco, bem como o cronograma de avaliação e recuperação final, não foi possível realizarmos o pós-teste nesse ano, o que aconteceu no início do ano letivo de 2018, com as turmas cursando os 7º anos.

Como realizado nos 5º anos, cópias de seis cadernos de alunos de cada uma das turmas de 6º ano foram realizadas, a partir do seguinte critério: os mesmos alunos considerados no 5º ano; alunos que entraram na escola São Francisco no 6º ano em 2017 e alunos que tiveram uma maior intervenção durante as aulas observadas.

Salientamos que não interferimos no trabalho realizado pelos professores dos 5º e 6º anos para deixar em evidência o trabalho habitual realizado nas referidas turmas, com os objetivos pesquisados. Além disso, o foco do nosso estudo é a transição tanto institucional quanto dos objetos entre os níveis de ensino anos iniciais e anos finais do EF.

O fato de a pesquisa se desenvolver numa escola da rede privada, com uma pesquisadora presente nos diversos espaços da instituição escolar em diferentes momentos – aulas, reuniões, recreio dos alunos, horário de recreio dos professores –, influenciou na percepção dos participantes da pesquisa a se “acostumarem” com essa nova presença e visualizarem a importância da aproximação entre a escola e a universidade, o ensino e a pesquisa enquanto parceiras.

Nosso primeiro estudo foi composto da elaboração, aplicação e análise de uma sondagem, realizada ao final do 5º ano, e um pós-teste, aplicado no início do 7º ano. A sondagem e o pós-teste foram os instrumentos utilizados para identificar e analisar, sob a ótica da TCC, os invariantes operatórios corretos e errôneos⁵³ e as representações mobilizados pelos alunos ao resolverem situações que dão sentido à área e ao perímetro, e as dificuldades conceituais enfrentadas por eles ao final do 6º ano. Uma complementação da sondagem foi realizada com a entrevista de alguns para esclarecimento de respostas dadas. Para a realização das atividades tanto da

⁵³ Uma relação com os teoremas-em-ação sinalizados na análise *a priori* da sondagem e do pós-teste, complementada com os teoremas-em-ação mobilizados pelos alunos nesses dois instrumentos compõem o Quadro 8 – Teoremas-em-ação verdadeiros e o

sondagem quanto do pós-teste foi disponibilizada para cada aluno uma pasta com os seguintes recursos: barbante, papel decalque, malha quadriculada e malha triangular.

Para efeito de análise da sondagem e do pós-teste na transição dos anos iniciais para os anos finais do EF, foram considerados apenas os alunos que estavam matriculados na escola São Francisco desde o 5º ano até o início do 7º ano, a saber 22 alunos. Outros alunos que entraram ou saíram da escola durante esse processo participaram da nossa coleta, mas não das nossas análises.

Buscamos, com esse primeiro estudo, responder às seguintes questões:

- a) Que conhecimentos os alunos mobilizam na resolução de tarefas relativas à área e ao perímetro?
- b) Os alunos apresentam dificuldades em relação à área e ao perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos? Em caso afirmativo, quais são essas dificuldades?
- c) Que fatores de natureza epistemológica e cognitiva ajudam a compreender as raízes dessas dificuldades?

A análise de documentos e livros e da observação naturalista de aulas no 5º e no 6º anos do EF compõem nosso segundo estudo. Foram analisados os livros didáticos do 1º ao 6º ano do EF das duas coleções adotadas na escola São Francisco: “Presente Matemática” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015a; 2015b; 2015c; 2015d; 2015e), composta dos livros destinados aos cinco primeiros anos do EF, e “Matemática para todos” (IMENES; LELLIS, 2010), o volume do 6º ano do EF.

A análise dos livros didáticos foi realizada não apenas nos capítulos dedicados ao estudo dos objetos área e perímetro, mas ao longo de todos os seis volumes, para observarmos, junto com o filtro das grandezas, como eles se apresentam, quais praxeologias estão presentes, quais as retomadas que são realizadas, as conexões desses objetos com outros da matemática e de outras áreas de conhecimento. A contagem das tarefas nos LD considerou todos os itens propostos. Por exemplo, numa atividade com dois itens (a, b) e se um desses itens envolvia três perguntas, foi considerado como um total de quatro tarefas. No entanto, atividades que envolviam a construção de um texto para sistematização do que foi compreendido pelo aluno⁵⁴ não foram consideradas na nossa contagem.

⁵⁴ Exemplo de atividade proposta para a construção de um texto de sistematização do LD do 6º ano: “Você já adquiriu muito conhecimentos sobre medidas. Sabe medir comprimentos e calcular a área

As observações das aulas nos 6º anos também fazem parte desse estudo, na busca de identificar como acontecem as retomadas dos conceitos vistos no 5º ano, se existe algum indicativo no livro didático que seja considerado pelo professor, quais as situações propostas aos alunos e quais as estratégias de resoluções utilizadas pelos alunos, agora no 6º ano.

Com esse segundo estudo, procuramos elementos de resposta para as seguintes questões:

- a) Que praxeologias são preconizadas e/ou ensinadas em relação aos objetos área e ao perímetro do 1º ao 6º ano do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- b) Qual a razão de ser, os nichos e habitat desses objetos do 1º ao 6º ano do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- c) Que filiações e rupturas podem ser observadas entre o modo como os objetos são abordados do 1º ao 6º ano do EF?
- d) De que maneira são conduzidas as retomadas desses objetos do 1º ao 6º anos do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- e) Quais aproximações e distanciamentos são observados entre o modelo epistemológico dominante, evidenciado nas análises do saber a ser ensinado e do saber ensinado sobre área e perímetro, e esboço de modelo epistemológico de referência adotado nessa pesquisa, que norteou a elaboração da sondagem e do pós-teste?
- f) Que fatores de natureza didática (*stricto sensu*) ajudam a compreender as raízes das dificuldades dos alunos em relação à área e ao perímetro, na transição entre 5º e 6º anos do EF?

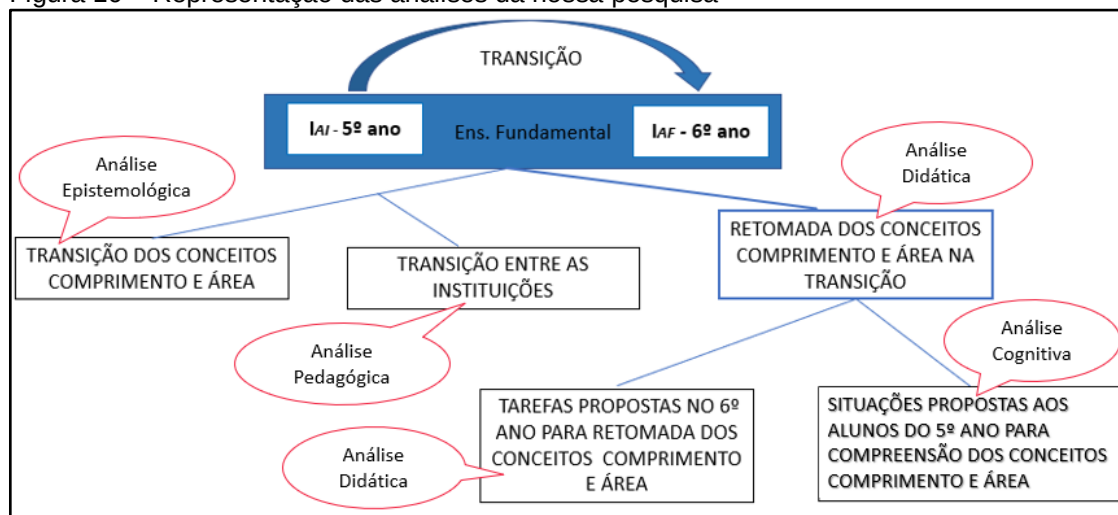
Uma análise comparativa faz parte do nosso terceiro estudo, com base na escala de níveis de codeterminação didática, para identificar convergências e diferenças entre as relações institucionais na posição de aluno com os objetos área e perímetro, as relações pessoais com esses objetos, e identificar condições modificáveis, condições não modificáveis e impedimentos que pesam na transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

O material utilizado para o nosso terceiro estudo é composto de documentos oficiais, como a LDBEN, DCNEB, PCN, RCNEI, com o foco no ensino fundamental;

de um retângulo. Tem noções do que são quilograma e litro, sabe medir o tempo, e muito mais. Então faça um resumo desses conhecimentos [...]” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 231).

documentos da escola São Francisco, como o projeto político-pedagógico (PPP)⁵⁵, e a proposta curricular do ensino fundamental, além das entrevistas realizadas com diretoras, coordenadoras e professores de matemática da referida instituição.

Figura 16 – Representação das análises da nossa pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Analisar a relação das instituições 5º ano e 6º ano do EF significa, além de observar esses dois anos de ensino, analisar as relações estabelecidas entre as outras instituições às quais eles estão submetidos, a saber, os anos iniciais e finais, respectivamente, e esses à instituição Escola São Francisco.

Esse terceiro estudo visou buscar elementos de resposta para a seguinte questão:

- a) Que fatores de natureza pedagógica e didática ajudam a compreender as raízes das dificuldades observadas na aprendizagem e no ensino de área e perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos do EF?

Como os estudos têm fortes conexões e com relação à cronologia da pesquisa houve sobreposições, alguns elementos serão antecipados no texto, embora seu detalhamento seja desenvolvido num capítulo posterior.

⁵⁵ Projeto Político-Pedagógico da escola São Francisco atualizado em 2007.

4 PRIMEIRO ESTUDO: A SONDAGEM E O PÓS-TESTE

Neste capítulo, apresentamos a sondagem, o material desenvolvido e aplicado nas turmas dos 5^{os} anos, e o pós-teste, material aplicado aos mesmos alunos que cursaram o 5º ano, agora no início do 7º ano, bem como a análise *a priori* de cada uma das atividades desses dois instrumentos.

A construção da sondagem tomou como base a análise dos PCN, do PPP da Escola São Francisco, os programas de matemática do 5º e 6º anos, a análise dos livros didáticos do 1º ao 6º ano, em particular os do 5º e 6º anos; a abordagem de comprimento (BARBOSA, 2002; 2007) e área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) como grandezas; e a noção de retomada (LARGUIER, 2009).

Composta de 6 atividades, a sondagem apresenta algumas questões típicas (mais frequentes) em relação à coleção de LD adotada na Escola São Francisco, por ser um elemento norteador do planejamento e da prática da professora dos 5º anos. Teve como objetivo observar nos esquemas utilizados os invariantes operatórios mobilizados na aprendizagem dos conceitos em foco pelos alunos, e verificar se o que foi objeto de ensino também foi aprendido pelos alunos.

Buscamos compreender como o aluno faz uso do bloco saber-fazer, mas também como o aluno faz uso do seu conhecimento, ou desse saber, diante de uma situação.

Com as atividades atípicas, aquelas que não aparecem frequentemente nos LD, pretendemos verificar se os alunos têm elementos suficientes para resolvê-las, quais as estratégias e invariantes operatórios mobilizados e se conseguem resolvê-las devido a experiências outras, como afirma Vergnaud, que não são consequência do ensino que foi ministrado, mas do sujeito que é formado por um conjunto de experiências.

Segundo Vergnaud (1993, p. 2), existem situações em que o aluno “[...] não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso”. Esse aluno vai conseguir construir um conceito quando fizer uso dos seus esquemas nas diferentes situações e seus teoremas-em-ação e conceitos-em-ação permanecerem válidos em todas elas.

Apresentamos um quadro com uma visão geral da sondagem e, para cada uma das atividades propostas, a classe de situação, o tipo de tarefa e as variáveis

didáticas consideradas. Também sinalizamos se as atividades correspondem a tipos de tarefas presentes nos LD ou na prática da professora do 5º ano (P), se foram tipos de tarefas ausentes (A), ou que estão algumas vezes presentes (AV).

Quadro 6 – Classificação das atividades de sondagem

ATIVIDADE	CLASSE DE SITUAÇÃO	TIPO DE TAREFA	VARIÁVEIS DIDÁTICAS	LD	5º ano
1 (a) (b)	Comparação	Comparar áreas	Duas figuras poligonais e duas figuras não poligonais desenhadas em papel branco, sem unidade de medida convencional	A	A
2(a)	Comparação	Comparar áreas	Duas figuras poligonais não convexas, desenhadas em papel branco, sem unidade de medida convencional, em situação contextualizada	A	A
2 (b)		Comparar perímetros		A	A
3 (a) (b)	Comparação	Comparar áreas	Duas figuras construídas com todas as peças do Tangram sem o uso de unidade de medida convencional	AV	A
3 (c) (d)		Comparar perímetros		A	A
4 (a)	Medição	Determinar áreas	Situação contextualizada sem o uso de figura, com unidades de medidas convencionais	P	P
4 (b) (c)			Situação contextualizada com o uso de figura, com unidades de medidas convencionais	P	P
5 (a) (b)	Medição	Determinar áreas	Figuras poligonais construídas sobre malha quadriculada e malha triangular, com unidades de medidas não convencionais	P	AV
5(c)	Comparação	Comparar áreas	Figuras poligonais dos itens 5(a) e 5(b), com diferentes unidades de medida não convencionais	AV	AV
6 (a) (b)	Medição	Determinar área	Quadrado desenhado sobre uma malha quadriculada, com diferentes unidades de medida não convencionais	P	P
6 (c) (d)				A	A

Legenda: Presente (P); Algumas vezes (AV); Ausente (A).

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

4.1 ANÁLISE A *PRIORI* DA SONDAGEM

Nesta análise apresentamos algumas das possíveis respostas corretas e incorretas para cada uma das atividades, bem como os teoremas-em-ação, verdadeiros ou falsos, que poderiam ser mobilizados pelos alunos. Para as atividades que correspondem aos tipos de tarefas presentes nos LD e na prática da professora do 5º ano, trazemos qual a técnica preconizada pela instituição, para uma posterior comparação com a técnica empregada pelos alunos.

A sondagem foi aplicada pela pesquisadora, com a colaboração da profa. 5º anos. Para a realização das atividades, foi disponibilizada para cada aluno uma pasta com os seguintes recursos: barbante, papel decalque, malha quadriculada e malha triangular.

4.1.1 *Análise a priori* das atividades 1 e 2

As atividades 1 e 2 correspondem a duas situações de comparação de áreas sem unidades de medidas que buscam diferenciar a área da figura, privilegiando o quadro das grandezas e o quadro geométrico, com as superfícies. Com o objetivo de bloquear o quadro numérico, as superfícies são apresentadas em papel branco.

Como observamos nas pesquisas apresentadas no capítulo 2 (item 2.1.2), poucas são as situações de comparação propostas em livros didáticos e, quando elas ocorrem, estão associadas à medida. Diante disso, pretendemos confrontar como os alunos lidam com esse tipo de situação, sem que tenha sido abordada nos anos anteriores no LD, assim como pela professora dos 5ºs anos, conforme cadernos dos alunos e de planejamento da professora⁵⁶.

Na atividade 1 (Figura 17), as figuras do *item a*, um quadrado e dois retângulos, são comumente apresentadas nos livros didáticos, como constatado em Ferreira (2010), e verificado na nossa análise praxeológica apresentada a seguir, no capítulo 6. No *item a*, as três figuras são poligonais, sendo a figura A a que tem maior área. O aluno poderia utilizar o papel branco para decalcar uma das figuras e sobrepor às demais. Caso utilizasse uma das duas malhas disponibilizadas, o

⁵⁶ No capítulo 6, trazemos as análises das aulas observadas e dos materiais de alunos e professores.

procedimento seria transferido para o quadro numérico, sendo reduzido à contagem de quadradinhos ou triângulos para a obtenção da resposta.

Figura 17 – Atividade 1 da sondagem e do pós-teste

ATIVIDADE 1

Determine a figura que tem a maior área, explicando como você fez em cada caso.

a)



Figura A



Figura B



Figura C

A figura de maior área é _____

Explique como você fez e indique que materiais usou:

b)



Bandeja D



Bandeja E

A figura de maior área é _____

Explique como você fez e indique que materiais usou:

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Outra possibilidade seria utilizar a malha quadriculada e estabelecer o lado do quadradinho da malha quadriculada como unidade de comprimento. As figuras A e B podem ser dispostas de modo a garantir que seus lados coincidam com os lados dos quadradinhos, ou seja, as duas figuras são ladrilháveis com os quadradinhos da malha. Esse procedimento está associado à mobilização do teorema-em-ação

« TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área», verdadeiro.

O uso desse procedimento para a figura C fará surgir a unidade de medida não inteira metade de quadradinho, quando o aluno deverá perceber que cada duas metades de quadradinho equivalem a uma unidade de medida inteira, e mobilizar o teorema-em-ação associado « $TA_{Dec-rec}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área», que é verdadeiro.

Os alunos podiam ainda associar o uso da malha quadriculada com o conhecimento da organização retangular para o cálculo de áreas das figuras, posicionar os lados dos retângulos sobre a malha, contar quantas unidades cabiam em cada lado de cada uma das figuras poligonais e utilizar a fórmula para calcular as respectivas áreas.

Um procedimento errôneo possível de ser verificado com esse item seria o aluno considerar apenas uma dimensão para realizar a comparação das áreas das três figuras. Dessa forma, poderia indicar que a figura B tem maior área porque tem maior largura, ou ainda, que a figura C tem maior área por ter maior altura, mobilizando um teorema-em-ação falso, « TA_{Alt} – A superfície ‘mais alta’ (ou ‘mais larga’) tem maior área».

No *item b*, as duas figuras eram não poligonais formadas por segmentos de reta e curvas, e, por inclusão, poderia ser verificado que a bandeja D é menor que a bandeja E. O aluno poderia utilizar, como no item anterior, tanto o procedimento de decalque em papel branco, para comparar as duas bandejas, quanto as malhas, para realizar a contagem de quadradinhos ou triângulos. Um procedimento errôneo seria a comparação dos perímetros com o barbante, por se tratar de figuras não poligonais, com o teorema-em-ação falso mobilizado « $TA_{MContMA}$ – A figura de maior contorno tem maior área».

A atividade 2 (Figura 18) é composta de duas figuras: a “Figura de Sérgio” e a “Figura de Vandréia”, duas figuras poligonais não convexas em papel branco, que não é apresentada na maioria dos LD. Na nossa análise dos LD do 1º ao 6º ano (capítulo 6), nas poucas situações de comparação que apresentam figuras não convexas, constatamos que essas sempre estão apoiadas sobre malhas quadriculada ou isométrica. Também não foram observadas figuras desse tipo nos cadernos dos alunos do 5º ano, no ano letivo de 2016, para esse fim.

Figura 18 – Atividade 2 da sondagem e do pós-teste

ATIVIDADE 2

Dois alunos do 5º ano, Sérgio e Vandréia, fizeram com cartolina as figuras abaixo.



Figura de Sérgio



Figura de Vandréia

Depois cada um colocou cordão no contorno da sua figura.

a) Na figura de qual dos dois alunos tem mais cartolina? _____

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

b) Qual dos dois alunos gastou mais cordão? _____

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

Fonte: Amaral, Bellemain, Bertholini Sobrinho et al. (2001, p. 33).

A atividade é formada por dois itens. No *item a*, temos uma situação de comparação de área de duas figuras, na qual o papel branco poderia ser utilizado para comparação por sobreposição, ou decalcar cada uma das figuras sobre as malhas, quadriculada ou isométrica, e verificar se as figuras seriam efetivamente ladrilháveis ou não, realizando a contagem de quadradinhos ou de triângulos, sendo a “Figura de Sérgio” de maior área que a “Figura de Vandréia”.

Como procedimento errôneo para a comparação das áreas, no *item a*, os alunos poderiam utilizar o barbante para contornar as figuras, associado ao teorema-em-ação errôneo $TA_{MContMA}$.

No *item b*, uma situação de comparação de perímetros, em que a “Figura de Sérgio” tem perímetro menor que o da “Figura de Vandréia”, pode ser verificada a partir da utilização do barbante para contornar toda a figura e depois comparar os comprimentos encontrados, ou ainda, realizar a medida de cada um dos segmentos de cada uma das figuras e depois somá-los, procedimento associado ao teorema-em-ação verdadeiro $\ll T_{MContMP}$ – A figura de maior contorno tem o maior perímetro». O aluno poderia também perceber que as medidas de comprimento dos lados nas duas figuras se repetem (na “Figura de Sérgio” dois segmentos de reta e na “Figura de Vandréia” o lado da estrela), e a medida do perímetro poderia ser obtida sem precisar realizar a medição de cada um dos lados de cada figura.

4.1.2 Análise *a priori* da atividade 3

A **atividade 3** (Figura 19) envolve uma situação de comparação de áreas e de perímetros sem unidade de medida a partir das peças do Tangram. Nos LD, esse material é proposto enquanto instrumento no domínio da geometria com a composição e decomposição de figuras planas. No livro do 3º ano, é utilizado como suporte para a ampliação do reconhecimento de polígonos (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015c, p. 170-171), e no 5º ano para o estudo de ângulos (Id., 2015e, p. 134-137), objetos de estudo do domínio da geometria. A invariância das áreas de figuras construídas com o Tangram se faz presente em duas atividades (Ibid., p. 137, Ativ. 1 e 2), embora não seja explicitada nem para o aluno nem nas orientações para o professor⁵⁷. E a relação de independência do perímetro de figuras construídas com as mesmas peças do Tangram é ausente.

Nas aulas com as turmas dos 5^{os} anos no ano letivo de 2016⁵⁸, a profa. 5^{os} anos fez uso do Tangram em situações que envolviam a comparação e a medida de áreas e a medida de perímetros. A comparação e medida das áreas das figuras com unidades de medidas não convencionais tiveram como suporte a malha

⁵⁷ No capítulo 6, trazemos a análise dos livros didáticos, do 1º ao 6º ano do EF, adotados na escola São Francisco.

⁵⁸ A análise das aulas observadas será apresentada no capítulo 6.

quadriculada, e um quadradinho correspondente a um centímetro quadrado. Para a determinação da medida dos perímetros, foram utilizadas as convencionais, com o uso da régua para a realização de medições práticas.

Figura 19 – Atividade 3 da sondagem e do pós-teste

Aluno(a): 	
ATIVIDADE 3 Usando as sete peças do Tangram, Rosa fez esta figura  e Pedro fez esta outra figura  Alunos de uma turma de 5º ano fizeram afirmações sobre a área e o perímetro das figuras de Rosa e Pedro. Você concorda com eles? Explique sua resposta. André: A área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro. Concordo (☐) Discordo (☐) Rita: As áreas da figura de Rosa e da figura de Pedro são iguais. Concordo (☐) Discordo (☐) Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais. Concordo (☐) Discordo (☐) Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro. Concordo (☐) Discordo (☐)	

Fonte: Ferreira (2010, p.117-118).

A atividade proposta na sondagem apresenta afirmações sobre a arrumação das peças do Tangram que assume duas situações distintas: todas as peças arrumadas em forma de um quadrado e, na outra, as peças estão “espalhadas”, numa figura que representa um gato. Os quadros das grandezas e dos objetos estão relacionados, enquanto que o quadro numérico está bloqueado.

Composta por quatro itens, todos apresentam uma afirmação, que deverá ser assinalada como verdadeira ou falsa e justificada. A análise dos LD nos mostra que

situações de associações desse tipo são presentes, mas a solicitação da justificativa das suas respostas em geral não é habitual.

O objetivo da atividade é verificar se o aluno consegue perceber a invariância das áreas independente da organização das peças utilizadas, a partir do procedimento de decomposição e recomposição das peças, quando o aluno poderá mobilizar os teoremas-em-ação verdadeiros: « TA_{Eq} – Duas superfícies equidecompostas (compostas de partes duas a duas congruentes) têm áreas iguais», e « $TA_{Dec-rec}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área».

O procedimento errôneo seria o aluno considerar que, embora utilizando as mesmas peças para a formação das duas figuras, a área pode variar em função da organização das peças, que está associado ao teorema-em-ação falso « TA_{Ocup} – Dadas duas figuras superfícies S e S' equidecompostas, de modo que S' é mais “compacta” que S , $A(S') < A(S)$ ».

Nos *itens c e d*, a comparação realizada é entre os perímetros das duas figuras e o objetivo é verificar se o aluno consegue perceber a variação do perímetro em função da reorganização das peças em cada uma das figuras e, neste caso, fazer uso de teorema-em-ação verdadeiro « $T_{MContMP}$ – A figura de maior contorno tem o maior perímetro». Caso o aluno considere que as duas figuras possuem mesma área e mesmo perímetro, o teorema-em-ação falso associado é « TA_{mAmP} – Figuras com áreas iguais têm perímetros iguais» ou, se considerar que a reorganização das peças altera a área e o perímetro, fará uso do « TA_{VAP} – A área e o perímetro de duas superfícies variam no mesmo sentido», teorema-em-ação falso.

4.1.3 Análise *a priori* da Atividade 4

A **atividade 4** apresenta uma situação de medição de áreas com o uso de unidades de medidas convencionais. Mesmo sem ter sido objeto de estudo no LD do 5º ano, situações com o uso implícito da fórmula são propostas em problemas dessa natureza (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p.155) (Figura 154).

Figura 20 – Atividade 4 da sondagem e do pós-teste

Aluno(a): _____

ATIVIDADE 4

- Responda cada um dos itens abaixo e anote todos os seus cálculos.

a) Para pintar uma parede de uma sala com 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta.
Quanto vai custar para pintar esta parede?

b) A Pousada Bom Viver é cercada de jardim, como mostra a planta retangular abaixo:

- Determine a área da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

- Determine a área do jardim da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Na atividade 4, *item a*, temos um problema sem a presença da figura, que coloca em jogo dois tipos de estrutura multiplicativa, a função bilinear para o cálculo da área de um retângulo, sendo dados apenas os comprimentos de seus lados, e a proporcionalidade para calcular o custo em função da área e do preço por metro quadrado. Essa é uma atividade presente na maioria dos LD de 5º ano⁵⁹, com quantidades inteiras. Os *itens b* e *c* apresentam uma situação com uma figura retangular para o cálculo de áreas, estando presentes em LD do 6º ano⁶⁰.

⁵⁹ No capítulo 6, apresentaremos as análises dos LD de 1º ao 6º ano.

⁶⁰ Idem item acima.

No *item a*, o aluno pode calcular a área da parede por meio do uso da organização retangular, ou utilizar a malha quadriculada para representar a parede e realizar a contagem dos quadradinhos. Em seguida, para ambos os casos, deve multiplicar o número obtido, ou a quantidade de quadradinhos, pelo valor monetário indicado. Os teoremas-em-ação verdadeiros que podem ser mobilizados são «TA_{AfigRet} – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura» e «TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

Segundo Vergnaud (2009, p. 253), essa é “[...] uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional”.

Nos *itens b* e *c*, o aluno pode utilizar dos mesmos procedimentos do item anterior para a determinação das duas áreas solicitadas. No *item c*, o aluno também pode decompor a região do jardim em dois retângulos, calcular suas áreas e, em seguida, realizar a adição delas, apoiado no teorema-em-ação verdadeiro «TA_{AditA} – Se S e S' são superfícies quase disjuntas (que possuem no máximo pontos de fronteira em comum), então $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ ».

Como procedimento errôneo, os alunos podem operar com todos os comprimentos fornecidos para determinar as áreas, associado ao teorema-em-ação falso «TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área».

Essa é uma atividade que se apresenta frequentemente nos LD do 6º ano e foi considerada na sondagem com o objetivo de verificarmos se o aluno, mesmo antes de vivenciá-la em sala de aula, possui esquemas que possam ser mobilizados para resolvê-la. Em particular, no *item c*, por se tratar de uma situação que envolve a decomposição da figura, e que será objeto de análise, tanto do LD quanto das aulas observadas nas turmas dos 6º anos, no cap. 5. A técnica de resolução apresentada nesses dois casos coincide com a apresentada acima.

4.1.4 Análise *a priori* da atividade 5

A Atividade 5 (

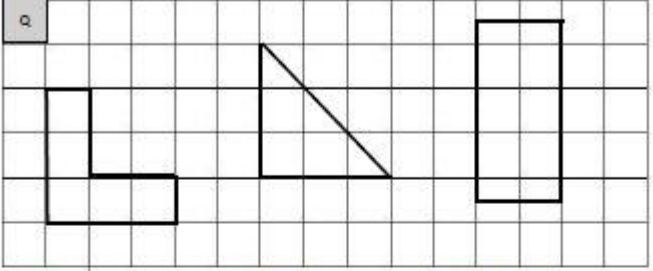
Figura 21) apresenta uma situação de medição de áreas e comparação de áreas com o uso de unidades de medidas não convencionais, apoiadas em malha quadriculada e malha triangular. A malha quadriculada, em geral, é apresentada nos LD, com a articulação entre os domínios da geometria, grandezas e medidas e números e operações, como será detalhado no capítulo 6. A malha isométrica, embora com menos frequência, também está presente nas coleções, o que não acontece com a malha triangular proposta nessa atividade.

Figura 21 – Atividade 5 da sondagem e do pós-teste

Aluno(a): _____

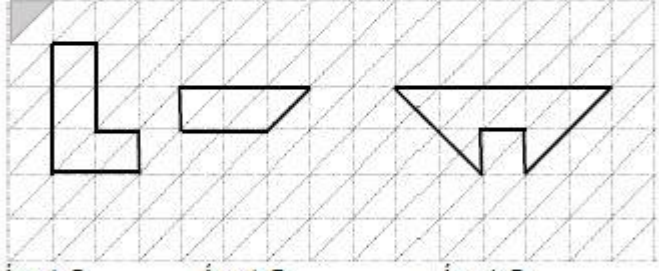
ATIVIDADE 5
Observe as figuras A, B, C, D, E e F abaixo:

a) Considerando a área do quadradinho da malha como unidade de medida, determine a área de cada uma das figuras abaixo.



Área de A: _____ Área de B: _____ Área de C: _____

b) Considerando a área do triângulo da malha como unidade de medida, determine a área de cada uma das figuras abaixo.



Área de D: _____ Área de E: _____ Área de F: _____

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

- () A área de D é maior que a área de A.
- () A área de B é maior que a área de E.
- () As áreas de A e F são iguais.
- () A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião:

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Ao determinar a área de cada figura, o procedimento esperado para o item a é a contagem de quadradinhos que, para a figura B, precisa ser considerado que

dois triângulos equivalem a um quadradinho, e, para a figura C, que duas metades de quadradinhos equivalem a um quadradinho inteiro. No *item b*, o aluno precisa observar na figura F que os triângulos da malha se apresentam em posições diferentes.

Para a comparação das áreas, no *item c*, o aluno precisa considerar que cada quadradinho da malha quadrada equivale a dois triângulos da malha triangular e de acordo com o par (número, unidade de medida) equivalente, mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro « $TA_{EUmdMnumMA}$ – Escolhida uma unidade de medida, duas superfícies de mesma medida têm mesma área».

Como procedimentos errôneos, o aluno poderá determinar os perímetros de cada figura, considerando as medidas do lado e da diagonal do quadradinho como iguais, mobilizando, assim, o teorema-em-ação falso « TA_{Ldq} – O lado e a diagonal de um quadrado têm comprimentos iguais», como observado em Ferreira (2010). Além disso, as áreas poderão ser comparadas apenas pelos valores numéricos, sem que as unidades de medidas sejam consideradas, procedimento associado ao teorema-em-ação falso « TA_{MnumMA} – Se duas superfícies ao serem medidas são representadas pelo mesmo número, então elas têm a mesma área».

4.1.5 Análise *a priori* da atividade 6

A Atividade 6 (

Figura 22) aborda uma situação de medição de área e de conversão de unidades de medidas não convencionais, com os dois primeiros *itens a* e *b* presentes nos LD, por serem unidades de medidas mais utilizadas, com a presença da malha quadriculada, o que não acontece com os *itens c* e *d*. Essa atividade oferece a oportunidade de avaliar se os alunos aceitam ou não expressar a área de uma superfície usando certa unidade quando não é possível ladrilhar efetivamente a superfície com a superfície unitária dada. Com a presença da figura construída sobre uma malha quadriculada, os três quadros (numérico, geométrico e das grandezas) são destacados e articulados.

No *item a*, a superfície unitária é um quadradinho A, e são necessários 36 A para cobrir totalmente o quadrado Q; no *item b*, a superfície unitária é o quadradinho B, no entanto, quatro vezes maior que o quadradinho A, o que justifica a

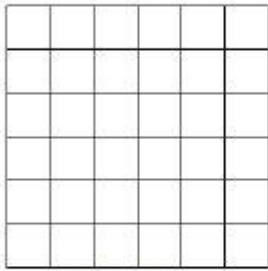
necessidade de apenas nove dessas unidades de medida para cobrir Q. Essa técnica coincide com a apresentada nos LD analisados.

No *item c*, a superfície unitária passa a ser um triângulo retângulo isósceles T1, construído dentro de um quadradinho, sendo necessários dezoito deles para recobrir o quadrado Q; e o *item d*, com a unidade de medida triângulo isósceles T2, sendo necessários doze desse triângulo para cobrir Q totalmente. Caso o aluno perceba essa relação de proporcionalidade, estaria mobilizando os seguintes teoremas-em-ação verdadeiros: « TA_{MAUmd} – A uma mesma superfície podem corresponder números diferentes de acordo com a unidade de medida escolhida, mas a área não se altera» e « TA_{MUmmN} – Quanto maior a superfície unitária, menor a quantidade de peças necessárias para recobrir uma superfície».

Figura 22 – Atividade 6 da sondagem e do pós-teste

Aluno(a): _____

ATIVIDADE 6
Observe o quadrado Q e responda:



Quadrado Q

a) Usando o quadradinho A abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



quadradinho A

b) Usando o quadradinho B abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



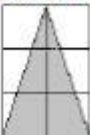
quadradinho B

c) Usando o triângulo T1 abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



triângulo T1

d) Usando o triângulo T2 abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



triângulo T2

Fonte: Adaptado de Ferreira (2010, p. 74).

Um dos procedimentos corretos esperado é que o aluno consiga perceber que por pavimentação é possível recobrir o quadrado Q com qualquer uma das peças, mobilizando conhecimentos de rotação e translação de figuras e simetria. O aluno pode não utilizar desses conhecimentos e mobilizar um teorema-em-ação falso: « $TA_{\text{Rot-Trans}}$ – Se uma superfície unitária é rotacionada, as suas características não são mantidas».

Outra possibilidade é o uso da fórmula para calcular a área do quadrado Q e, usando proporcionalidade, verificar para cada item quantas unidades de cada são necessárias para completar trinta e seis quadradinhos A. Os teoremas-em-ação verdadeiros mobilizados podem ser « TA_{ANq} – A quantidade de quadradinhos

necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área» e « TA_{FAq} – A área de um quadrado pode ser obtida pela fórmula $Q=l \times l$ ».

Como procedimentos errôneos, principalmente nos *itens c e d*, o aluno pode considerar não ser possível cobrir um quadrado com triângulos, devido às diferentes formas das figuras.

4.2 ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES 7 E 8 DO PÓS-TESTE

No pós-teste, como anunciado no início deste capítulo, foram mantidas todas as questões da sondagem e inseridas duas atividades que, além de envolverem os conceitos de comprimento, área e perímetro, são próximas às questões presentes no LD e trabalhadas em classe pelo prof. 6º anos, e presentes na avaliação elaborada e aplicada por ele.

Apresentamos um quadro com as atividades propostas inseridas no pós-teste, atividade 7 e 8, e sua respectiva classe de situação associada, o tipo de tarefa e as variáveis didáticas consideradas.

Quadro 7 – Atividades acrescentadas à sondagem para composição do pós-teste

ATIVIDADE	CLASSE DE SITUAÇÃO	TIPO DE TAREFA	VARIÁVEIS DIDÁTICAS	LD	6º ano
7	Medição	Determinar o perímetro a partir da área dada	Situação sem o uso de figura, com unidades de medidas convencionais	P	P
8 (a) (b)	Medição	Comparar áreas e comparar perímetros	Figuras poligonais construídas sobre malha quadriculada, com unidades de medidas não convencionais	P	P

Legenda: P: Presente.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

4.2.1 Análise a priori da atividade 7

A **atividade 7** aborda uma situação de medição associada à área em que, dado no enunciado do problema o valor de uma área, é solicitado determinar o perímetro.

Figura 23 – Atividade 7 do pós-teste

ATIVIDADE 7

Um quadrado possui área de 64 cm². Qual é a medida do perímetro desse quadrado?

Fonte: Adaptada do LD (IMENES; LELLIS, 2010, p. 227).

Essa atividade está presente no LD do 6º ano, foi objeto de estudo em sala de aula pelo prof. 6º anos e também esteve presente na última avaliação por ele realizada, apenas com a mudança do valor numérico. Nela, é informada a medida da área de um quadrado com uma unidade de medida convencional. O aluno precisará determinar a medida do comprimento do contorno desse quadrado, ou seja, seu perímetro.

Para isso, o aluno deverá perceber que, como a figura considerada é um quadrado, então a sua área pode ser representada pelo produto de duas dimensões, dois comprimentos de mesma medida, a saber, o valor do seu lado, que deve ser determinado.

Sabendo que o número 64 é um quadrado perfeito, o aluno deve buscar descobrir, seja por tentativa ao realizar multiplicações de um número por ele mesmo, seja por cálculo mental, utilizando o conceito de potência quadrada. Isso representa, implicitamente, fazer uso da fórmula para o cálculo da área de um quadrado, $A = l \times l = l^2$.

O número inteiro positivo é 8 porque $8 \times 8 = 64$.

$A = 64 \text{ cm}^2 = l \times l = 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Ou seja, o comprimento de um lado do quadrado é 8 cm.

A partir do valor do lado do quadrado conhecido, o aluno precisa determinar o perímetro, ou seja, a medida do comprimento do contorno do quadrado que equivale a multiplicar o comprimento do lado por quatro.

$P = 4 \times l = 4 \times 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$.

Como procedimento errôneo, o aluno poderá associar a informação da área do quadrado ao fato de esse possuir todos os lados de mesma medida, e mobilizar o teorema-em-ação falso «TA_{PQuadrado} – A medida do perímetro do quadrado é igual a medida da área desse quadrado dividida por quatro». Assim, considerar que o

perímetro poderá ser determinado a partir da divisão desse valor por quatro, ou seja, $P = A : 4$, caracteriza uma não compreensão da bidimensionalidade da área e a unidimensionalidade do perímetro. A operação realizada, $P = A : 4 = 64 \text{ cm}^2 : 4 = 16 \text{ cm}$, apresenta uma resolução incorreta para a determinação do perímetro do quadrado.

4.2.2 Análise *a priori* da atividade 8

A **atividade 8** aborda, no *item a*, uma situação de medição associada à identificação de figuras poligonais construídas sobre uma malha quadriculada que possuem mesma área. No *item b*, é solicitado ao aluno indicar se existem, entre as figuras dadas, algumas que possuem mesmo perímetro, conforme apresentado na Figura 24 a seguir.

Essa atividade também está presente nos LD e nas aulas do prof. 6º anos, a utilizar da mesma técnica que apresentamos a seguir, com a única diferença, a não disponibilidade de uma tabela para o registro dos dados numéricos associados aos valores das áreas e dos perímetros.

Para a determinação da área de cada uma das figuras, os alunos deverão realizar a contagem dos quadradinhos que formam cada figura construída sobre a malha e equivale ao teorema-em-ação verdadeiro « TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

Figura 24 – Atividade 8 do pós-teste

ATIVIDADE 8
 Considere cada uma das figuras na malha quadriculada abaixo. Cada quadradinho equivale a uma unidade de área.

a) Entre as figuras acima, há figuras com mesma área? Sim (☐) Não (☐)
 Em caso afirmativo, quais são elas?

b) Entre as figuras acima, há figuras com mesmo perímetro? Sim (☐) Não (☐)
 Em caso afirmativo, quais são elas?

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Para o *item b*, o aluno deverá realizar a contagem dos lados de quadradinhos, considerando o lado do quadradinho como uma unidade de comprimento, associado ao teorema-em-ação verdadeiro « $TA_{PContladoq}$ – A quantidade de lados de quadradinhos necessários para contornar uma superfície desenhada sobre a malha quadriculada corresponde à medida de seu perímetro, tomando o comprimento do lado do quadradinho como unidade».

Quanto à realização de procedimentos errôneos, supomos estar associados ao domínio numérico com erro na parte operatória, na contagem de quadradinhos para a determinação da área, ou de lados de quadradinhos, para o perímetro.

No próximo capítulo, iniciaremos nossas análises com base nos instrumentos pós-teste e sondagem aqui apresentados.

5 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS

Este capítulo apresenta a análise do pós-teste e da sondagem com base na teoria dos campos conceituais. Iniciamos com o pós-teste, tendo como objetivo mapear quais conhecimentos sobre os objetos área e perímetro os alunos conseguem mobilizar no início do 7º ano. Em seguida, trazemos a análise da sondagem, para resgatar os conhecimentos mobilizados pelos alunos ao final do 5º ano e, ao observar esses dois panoramas, buscamos sinalizar modificações que tenham ocorrido.

Conforme justificado nos procedimentos metodológicos da pesquisa, apresentamos nossas análises considerando o total de 22 alunos matriculados na escola São Francisco, no 5º ano do EF, em 2016, quando realizamos a sondagem no final do ano, até o início do ano letivo de 2018, com a aplicação do pós-teste, nesse momento enquanto alunos do 7º ano do EF. Salientamos que, antes da aplicação do pós-teste, nenhuma aula sobre grandezas e medidas foi ministrada pelo professor desse ano de ensino.

Lembramos ainda que esse primeiro estudo visou buscar elementos de resposta para as seguintes questões:

- d) Que conhecimentos os alunos mobilizam na resolução de tarefas relativas à área e ao perímetro?
- e) Os alunos apresentam dificuldades em relação à área e ao perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos? Em caso afirmativo, quais são essas dificuldades?
- f) Que fatores de natureza epistemológica e cognitiva ajudam a compreender as raízes dessas dificuldades?

5.1 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS NO INÍCIO DO 7º ANO NO PÓS-TESTE

O pós-teste foi aplicado em 16 de março de 2018, em duas horas-aula com um total de 110 minutos de duração, em cada uma das turmas dos 7º anos. As atividades foram entregues pela própria pesquisadora em conjunto com os recursos disponibilizados: barbante, papel decalque, malha quadriculada e malha triangular. Alguns alunos concluíram as atividades no tempo médio de setenta minutos, visto

que uma avaliação de geografia seria realizada logo após a aula de matemática e esses queriam um tempo para estudar, ou para concluir uma atividade da referida disciplina a ser entregue como parte da avaliação.

Para efeito das nossas análises, foram considerados nesse momento apenas os protocolos dos alunos que estavam matriculados na escola São Francisco desde o 5º ano, no ano de 2016, e participaram da aplicação da sondagem.

Os protocolos que utilizaremos como exemplos estarão representados pela nomenclatura apresentada no Quadro 5. Por exemplo, PT_7A1_Ativ1 representa PT – Pós-Teste; 7 – 7º ano, A – turma A, 1 – nº do aluno; Ativ1 – Atividade 1.

A análise do pós-teste será apresentada por bloco de atividades de acordo com o tipo de situação, com o objetivo de realizarmos algumas comparações. Os blocos estão assim organizados:

- a) situações de comparação de área e/ou perímetros sem unidade de medida convencional: nesse bloco, estão as atividades 1 e 2 com seus itens, em geral ausentes dos LD, e a atividade 3, com quatro itens, algumas vezes contemplada nos LD;
- b) situações de medição de áreas com unidades de medidas convencionais: esse bloco é composto pela atividade 4, com dois itens, sendo o *item a* já presente em LD do 5º ano, e o *item b*, nos livros do 6º ano do EF; e pela atividade 7, ao solicitar a medida do perímetro a partir da medida da área dada, presente tanto no LD do 6º ano quanto na avaliação do prof. 6º anos;
- c) situações de medição e comparação de áreas e de perímetros com unidades de medidas não convencionais, e o suporte do recurso de malhas: bloco composto por três atividades. As atividades 5 e 6 envolvem apenas a noção de área, com figuras construídas sobre malhas. A atividade 8 do pós-teste apresenta dois itens relacionados à comparação de área e de perímetro de figuras poligonais construídas sobre a malha quadriculada, respectivamente. Atividades semelhantes à atividade 8 estão presentes nos LD do 5º e 6º anos e na avaliação do prof. 6º anos.

As informações quantitativas, como informado no capítulo referente aos procedimentos metodológicos, terão como classificação três tipos: acerto; acerto parcial, quando a resposta está certa e a justificativa incorreta ou ausente; e errado. Além dessas, serão computados também os itens deixados em branco.

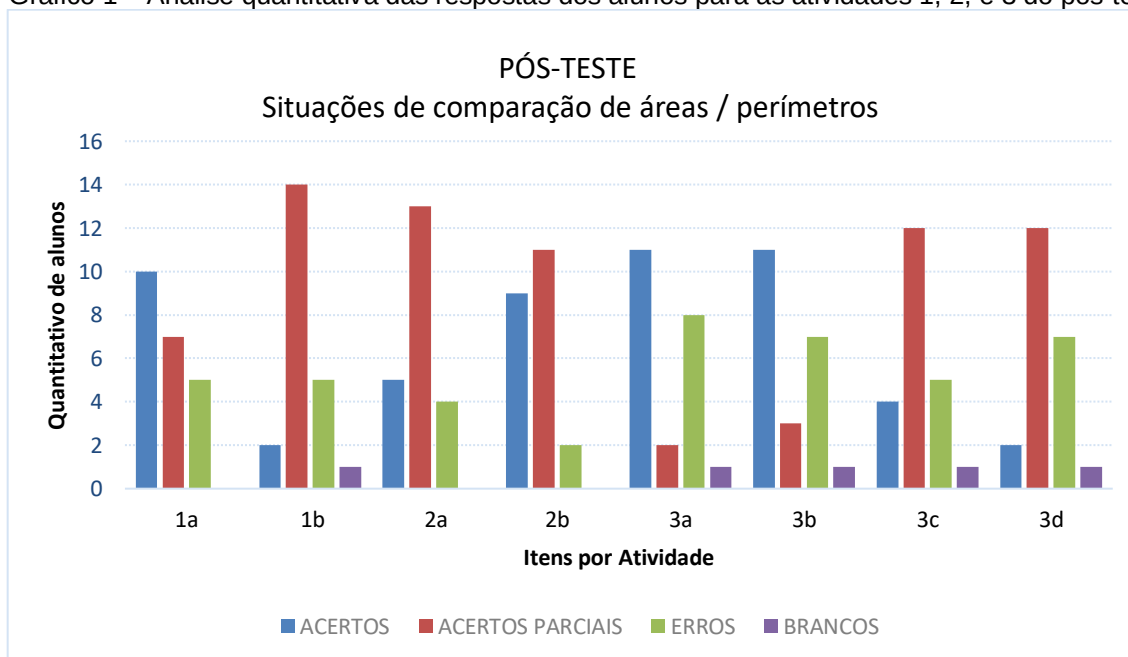
5.1.1 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de comparação de áreas e de perímetros sem unidades de medidas no pós-teste

Situações de comparação de área e/ou perímetros de figuras desenhadas em papel branco, sem unidade de medida, são apresentadas nas atividades 1, 2 e 3. A atividade 1 envolve duas situações de comparação de áreas: no *item a*, com duas figuras poligonais, no *item b*, com duas figuras não poligonais. A atividade 2 apresenta uma situação contextualizada de comparação de áreas e de perímetros de figuras poligonais não usuais. E a atividade 3 tem como suporte figuras construídas com o recurso Tangram.

Uma visão do desempenho do grupo de alunos nessas três atividades, como apresentado no Gráfico 1, pode auxiliar nossas considerações iniciais.

Na atividade 1, a mudança de variável tipo de figura, de figuras poligonais sempre presentes no cotidiano escolar como quadrados e retângulos no *item a*, para figuras não poligonais, formadas por curvas fechadas ou composição de curvas e segmentos de reta no *item b*, parece ter sido um elemento desestabilizador para os alunos com relação ao conceito de área.

Gráfico 1 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 1, 2, e 3 do pós-teste



Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

A atividade 2, apesar de apresentar um menor índice de erros que a atividade 1, deixou implícita nas justificativas a dificuldade em dissociar a grandeza do objeto a ele associado, e neste caso, mesmo com uma situação contextualizada. O fato de as figuras poligonais serem não convexas revelou a confusão entre os conceitos de área e perímetro, diante dos procedimentos inadequados utilizados pelos alunos.

Na terceira atividade, para os *itens a* e *b* associados à comparação de áreas de figuras a partir da representação com peças do Tangram, os alunos apresentaram um bom desempenho, o que não se refletiu quando passamos a explorar o conceito de perímetro, nos *itens c* e *d*, reforçando o uso de teoremas-em-ação falsos, como poderemos observar nos protocolos a seguir.

5.1.1.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 1 do pós-teste

Na atividade 1, nove dos 10 alunos que acertaram o *item a* fizeram uso da malha quadriculada, recurso presente no ambiente escolar, e desses, apenas uma aluna usou a combinação do recurso papel decalque para transportar as figuras da atividade, sobrepor a malha quadriculada e realizar a contagem, conforme mostrado na Figura 25 e na Figura 26.

Figura 25 - Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ1a)

ATIVIDADE 1

Determine a figura que tem a maior área, explicando como você fez em cada caso.

a)



Figura A

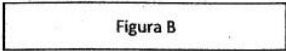


Figura B



Figura C

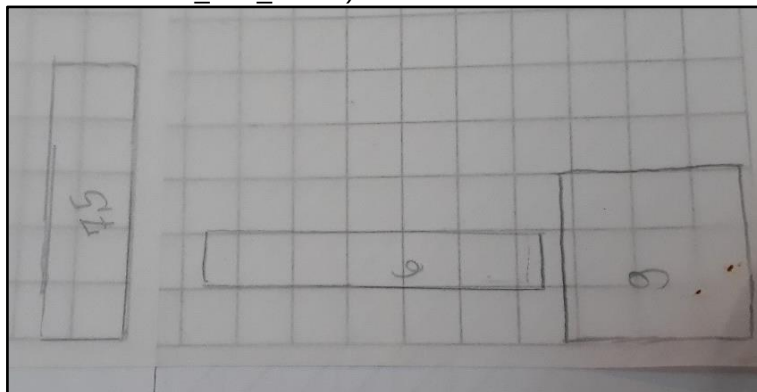
A figura de maior área é a A

Explique como você fez e indique que materiais usou:

Eu usei o papel manteiga para contornar as figuras e o coloquei sobre o papel quadriculado, contei a quantidade de quadrados e vi qual tinha mais

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Figura 26 – Recursos utilizados para resolução correta (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ1a)

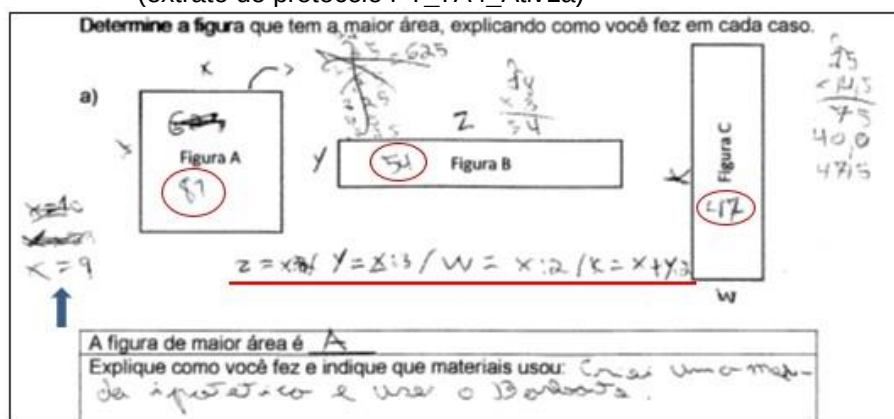


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Os conhecimentos da aluna sobre a grandeza área e os recursos disponibilizados contribuíram para a mobilização correta do teorema-em-ação verdadeiro «TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

Dentre os alunos que acertaram o *item a*, apenas um não fez uso da malha quadriculada, mas usou o barbante para “criar uma medida hipotética” (Figura 27) e estabelecer relações algébricas entre as medidas dos lados das figuras.

Figura 27 - Situação de comparação de áreas com resolução correta no quadro algébrico (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ1a)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7A4 adotou o lado do quadrado como sua unidade de medida padrão x e, a partir dela, estabeleceu relações para cada um dos comprimentos dos demais lados das figuras A, B e C. O barbante foi utilizado, então, como instrumento de medida para verificar a operação de comparação com os demais comprimentos. Por exemplo, a medida do lado menor da Figura B equivale à terça parte da unidade

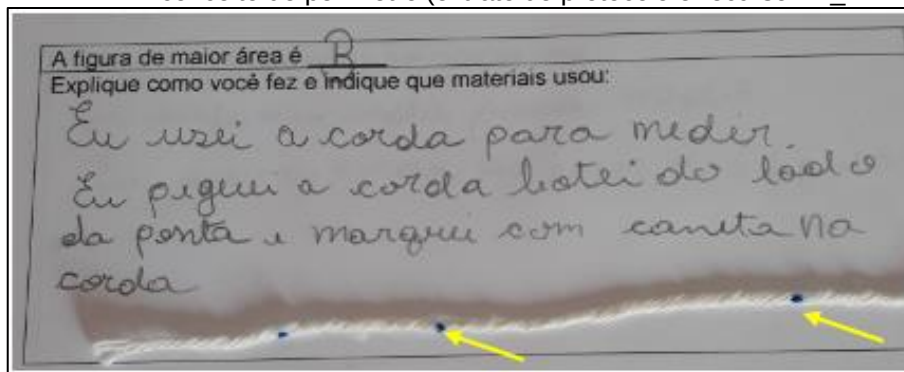
padrão x , representada pelo aluno com a expressão algébrica $y = x : 3$. Da mesma maneira, foram estabelecidas para os outros lados das figuras as expressões algébricas associadas à unidade padrão, em destaque na Figura 27 (linha vermelha).

Após a determinação das relações entre os lados das figuras, o aluno passou para o quadro numérico, ao estabelecer um valor para a unidade padrão x (seta azul), realizou as operações para determinar a área de cada uma das figuras de acordo com as expressões obtidas e registrou no interior de cada figura a medida da respectiva área (valores em destaque com contorno), sem considerar nesse momento a unidade padrão adotada.

Percebemos que o aluno tem um domínio mais amplo do campo conceitual das grandezas diante da álgebra das grandezas que foi utilizada, superando os conhecimentos exigidos para alunos que estão iniciando o 7º ano do ensino fundamental. E manifesta também uma compreensão do caráter teoricamente arbitrário da unidade de medida.

Os erros cometidos pelos cinco alunos no *item a* dessa atividade foram provenientes do cálculo relacional incorreto: quatro alunos usaram o conceito de perímetro e um aluno, o conceito de comprimento, e o procedimento utilizado por todos envolveu o barbante enquanto recurso. Trazemos a seguir o protocolo da aluna 7A14 (Figura 28), que utilizou o conceito de comprimento para determinar a figura que apresentava a maior área.

Figura 28 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo e recurso PT_7A14_Ativ1a)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O procedimento utilizado pela aluna foi a comparação dos comprimentos das bases das figuras. Considerando as marcas realizadas no barbante, inferimos que a

aluna não sentiu necessidade de realizar a medição da base da Figura C, já que visualmente é a menor entre as três, realizando apenas as medições para a base das Figuras A e B. Na sua justificativa, observamos o uso do termo “ponta” enquanto sinônimo de vértice, para indicar os pontos inicial e final da medição, no barbante marcado por pontos azuis (destaque com setas). A resposta foi baseada no teorema-em-ação errôneo, « TA_{Alt} – A superfície “mais alta” (ou “mais larga”) tem maior área», o que caracteriza a incompreensão do conceito de área.

As respostas associadas a acertos parciais envolveram erro no cálculo numérico, na contagem dos quadradinhos, por exemplo, o que levou à resposta de outra figura que não a Figura A, ou ainda comparações visuais sem justificativa. Uma aluna, no entanto, ao realizar a comparação visual das figuras justificou sua resposta associada ao conceito de quadrado, como apresentado na Figura 29, a seguir.

Figura 29 - Situação de comparação de áreas com acerto parcial por erro de cálculo numérico (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ1a)

A figura de maior área é <u>A</u> Explique como você fez e indique que materiais usou: <u>- Nem um</u> <u>Pois ela é um quadrado e todas as suas áreas são iguais.</u>

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A justificativa está baseada na afirmação que, dentre as figuras apresentadas, o quadrado é o que tem maior área porque “todas as suas áreas são iguais”. Interpretamos essa resposta como o uso da palavra “área” erroneamente no sentido de “lado” de quadrado. Somos ainda levados a pensar sobre quais situações foram experienciadas por essa aluna para garantir que a maior área entre quadrado e retângulos é do quadrado.

Na atividade 1, *item b*, 19 alunos, entre os que erraram e os que acertaram parcialmente, todos mobilizaram o conceito de perímetro. A diferença entre eles foi a figura dada como resposta, o que mostra a fragilidade conceitual da grandeza diante da variável didática tipo de figura, em situação com figuras não poligonais. Trazemos um exemplo de acerto parcial com o protocolo do aluno 7B13 (Figura 30), a seguir, considerando que a observação visual foi utilizada como justificativa por cinco alunos.

Figura 30 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à observação visual das figuras (extrato de protocolo PT_7B13_Ativ1b)

b)

Figura D

Figura E

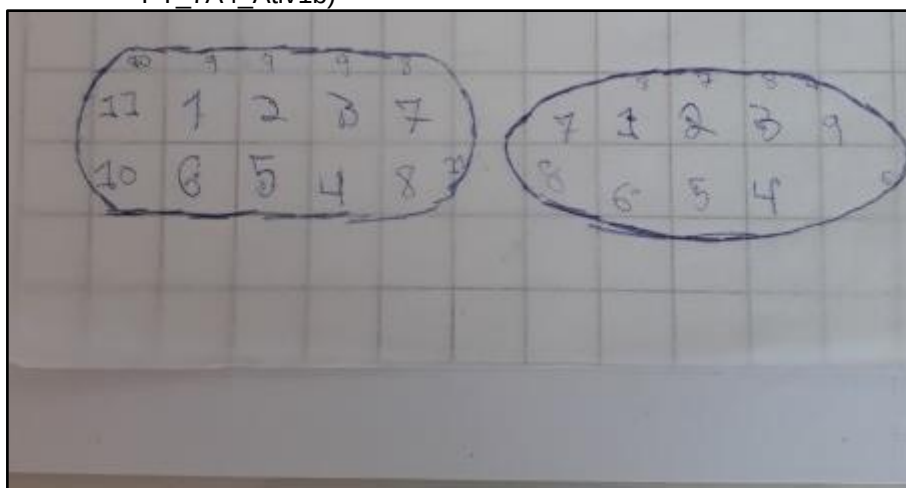
A figura de maior área é <u>E</u>
Explique como você fez e indique que materiais usou: <u>As curvas da D diminuem seu tamanho</u>

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7B13 não faz uso dos recursos disponibilizados e sua percepção é visual, que pode estar associada à imagem mental da inclusão da Figura D na Figura E, ou ao perímetro das figuras, quando se refere ao “tamanho das curvas”. Diante da justificativa dada, não ficou claro se o aluno observou outras características comuns às duas figuras, como possuírem “mesma largura” e “mesma altura”.

Nessa atividade, apenas dois alunos acertam a questão, sendo que um deles fez uso do recurso malha quadriculada associada ao papel decalque, como consta no protocolo do aluno 7A4 (Figura 31), a seguir, o que reforça a necessidade do aluno em mobilizar o quadro numérico.

Figura 31 – Recursos utilizados para solução correta (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ1b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno apresenta sua justificativa descrevendo o procedimento realizado: “usei a folha transparente e a quadriculada para medir quantos quadrados cabiam

em cada uma” (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ1b), mobilizando, assim, o teorema-em-ação verdadeiro « TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

5.1.1.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 2 do pós-teste

Nessa atividade, *item a*, 13 alunos acertam parcialmente, e, desses, oito realizam a observação visual para afirmar que a figura de Sérgio é maior que a de Vandréia, e justificativas como “eu percebi pelo tamanho” ou “pois ela é maior” foram dadas.

O protocolo do aluno 7A12, a seguir, chama a nossa atenção ao associar a sua justificativa à quantidade de lados da figura de Sérgio.

Figura 32 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de lado de polígono (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ2a)

ATIVIDADE 2

Dois alunos do 7º ano, Sérgio e Vandréia, fizeram com cartolina as figuras abaixo.



Figura de Sérgio



Figura de Vandréia

Depois cada um colocou cordão no contorno da sua figura.

a) Na figura de qual dos dois alunos tem mais cartolina? a de Sérgio

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

Contei os lados de cada figura

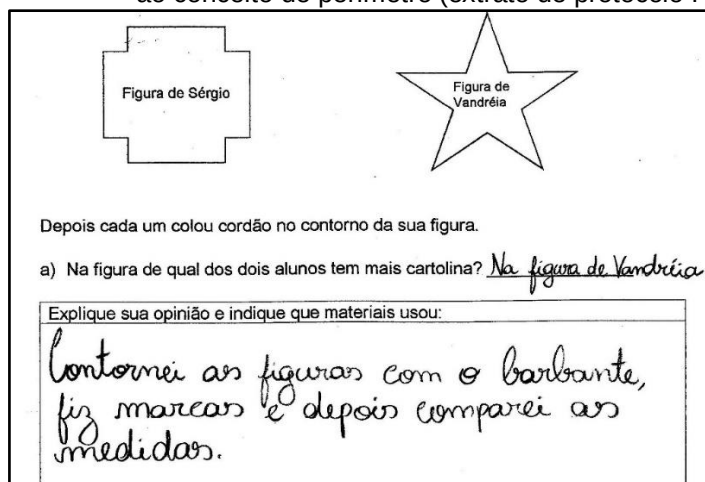
Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno tem domínio do conceito de lado de figura, no entanto estabelece uma relação incorreta, mobilizando outro teorema-em-ação falso « $T_{MQLadosMA}$ – A figura com maior quantidade de lados tem a maior área», não previsto em nossas análises *a priori*, mas evidenciado nas pesquisas de Duarte (2002) e Anderson Silva (2016). Elementos associados às figuras, polígonos não convexos, podem estar relacionados ao argumento do aluno, assim como a necessidade do quadro

numérico se fazer presente diante da relação de comparação com o uso do termo “maior”.

Dentre os alunos que erraram a questão, todos realizaram o cálculo relacional incorreto, por associar a figura com maior quantidade de cartolina ao conceito de perímetro, como apresentado na figura a seguir.

Figura 33 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7B8_Ativ2a)

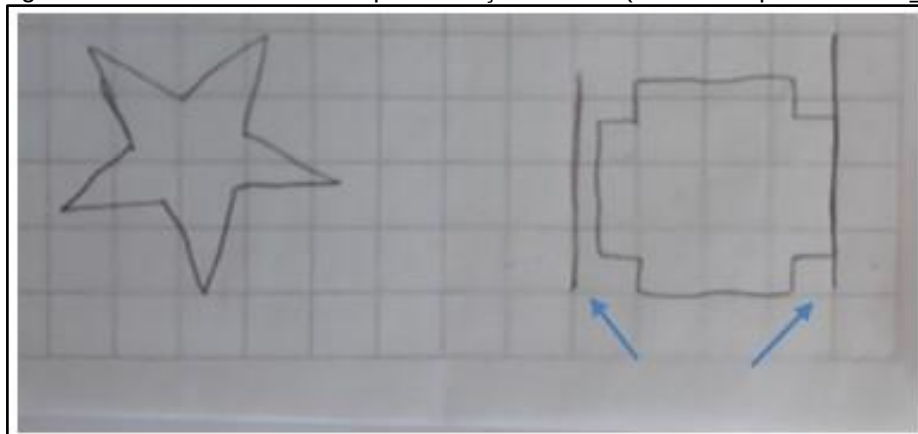


Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7B8 realiza o cálculo operacional correto, faz uso do recurso do barbante, porém determina o maior perímetro entre as figuras, quando o solicitado no item a foi a área.

Todos os cinco alunos que acertaram esse item afirmam ter utilizado o papel decalque. No entanto, apenas um aluno decalca as duas figuras (Figura 34). Os demais decalcam apenas a figura de Vandréia, sem deixar mais elementos para nossa análise.

Figura 34 - Recursos utilizados para solução correta (extrato de protocolo PT_7B4_Ativ2a)



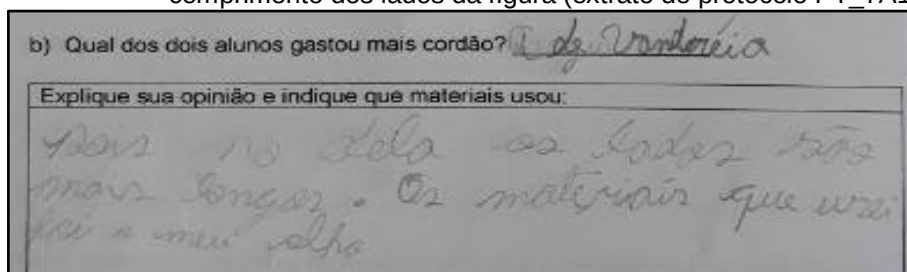
Fonte: Acervo da autora, 2018.

Diante dos registros realizados pelo aluno 7B4, o primeiro procedimento foi realizar o decalque das duas figuras no papel decalque, seguido da sobreposição desse recurso na malha quadriculada. Inferimos serem os traços registrados pelo aluno no papel decalque (setas azuis), paralelos a dois dos lados da figura de Sérgio, como apoio ao coincidirem com as linhas da malha quadriculada para delimitar a figura e facilitar a contagem. Nesse caso, o aluno não fez registros numéricos, mas também tem como base o teorema-em-ação TA_{Contq} verdadeiro.

Na atividade 2, no *item b*, para a determinação da figura de maior perímetro, dos 20 alunos que acertam ou acertam parcialmente, 12 deles utilizam o barbante como recurso, mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro « $T_{MContMP}$ – A figura de maior contorno tem o maior perímetro». Os demais justificam a observação visual, percepção realizada mentalmente e um deles (Figura 35) associa os lados da figura.

Destacamos nesse item que a contextualização da atividade ao perguntar diretamente “quem gastou mais cordão” pode estar associada ao fato do aluno responder corretamente à questão sem precisar saber que o contorno se associa ao perímetro.

Figura 35 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado ao comprimento dos lados da figura (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ2b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7A12 permanece associando o conceito de lados de uma figura poligonal aos conceitos de área e perímetro, como foi apresentado na Figura 35 para o *item a*, mobilizando agora outro teorema-em-ação « TA_{CompL} – Dadas duas figuras F e F' que possuem diferentes quantidades de lados, se os lados de uma figura F possuem comprimentos maiores do que os comprimentos dos lados de uma figura F' , então F tem maior perímetro», também falso.

Dois alunos erram a questão por associar o teorema-em-ação falso « TA_{VAP} – A área e o perímetro variam no mesmo sentido», como apresentado no protocolo a seguir (Figura 36).

Figura 36 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação de área e perímetro no mesmo sentido (extrato de protocolo PT_7A1_ativ2b)

b) Qual dos dois alunos gastou mais cordão? Denjo

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

Usei o cordão, Denjo tem mais cartolina por isso ele usou mais cordão

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Observamos que nessa atividade o recurso do barbante foi mais utilizado, o que podemos associar ao tipo de figura, um polígono não convexo, nem sempre presente no cotidiano escolar para as situações do domínio das grandezas e medidas.

5.1.1.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 3 do pós-teste

Na atividade 3, iremos analisar as respostas dos alunos associando os *itens a* e *b*, relacionados à comparação das áreas, e os *itens c* e *d*, à comparação dos perímetros.

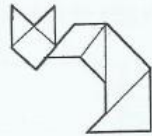
O número de acertos dos itens associados à comparação das áreas foi superior à comparação dos perímetros, como podemos observar no Gráfico 1.

Ao realizar a comparação das áreas nos dois primeiros itens, os alunos que acertam justificam suas respostas com afirmações associadas ao Tangram: “Resposta de André (os dois usaram as mesmas peças)”, “As duas figuras têm sete peças, então as suas áreas são iguais”, “eles usaram os mesmos materiais” ou “pois eles usavam a mesma quantidade de peças”.

Dentre os 15 alunos que erram esses dois itens, os alunos associam suas justificativas à organização das peças do Tangram como no *item a*, para a afirmação de que a área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro: “concorda, a figura dela é mais fechada” ou “Porque a figura de Pedro é ‘maior’, tem mais curvas etc.”, ou ainda “Porque o de Pedro é um gato e o de Rosa um quadrado”. Trazemos na Figura 37, a seguir, um exemplo dessa interpretação associada à “extensão da figura” construída.

Figura 37 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada à extensão da figura (extrato de protocolo PT_7A2_Ativ3a e b)

ATIVIDADE 3

Usando as sete peças do Tangram, Rosa fez esta figura  e Pedro fez esta outra figura 

Alunos de uma turma de 7º ano fizeram afirmações sobre a área e o perímetro das figuras de Rosa e Pedro. Você concorda com eles? **Explique sua resposta.**

André: A área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro.
 Concordo (☒) Discordo (☐)

Concordo, porque a de Pedro é mais estendida

Rita: As áreas da figura de Rosa e da figura de Pedro são iguais.
 Concordo (☐) Discordo (☒)

Porque a área de Pedro é mais estendida

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Apesar de os alunos realizarem o cálculo relacionado ao conceito correto, conceito de área enquanto espaço ocupado, o fazem associado à figura e mobilizam o teorema-em-ação falso «TA_{Alt} – A superfície “mais alta” (“mais larga” ou “mais espalhada”) tem maior área», ao associar a grandeza área ao “espaço ocupado” pela figura. Não percebem que as duas figuras estão formadas pelas mesmas peças, garantia da invariância da área.

Os itens c e d dessa terceira atividade estão associados à comparação dos perímetros das figuras de Rosa e Pedro. Dos 22 alunos, seis respondem corretamente, mas apenas dois deles aos dois itens. Dentre as 24 respostas consideradas parcialmente corretas para um dos dois itens, sendo 12 do item c e 12 do item d, oito apenas indicam a concordância que os perímetros são diferentes, mas não estão justificadas; cinco estão apoiadas no teorema-em-ação falso «TA_{VAP} – A área e o perímetro variam no mesmo sentido»; 10 associam o perímetro à diferença entre as figuras; e uma delas associa o perímetro à quantidade de lados das figuras.

Dentre aqueles que acertam parcialmente aos dois itens, 3 alunos apenas assinalam a alternativa que os perímetros são diferentes, mas não justificam suas respostas; e 6 alunos associam o perímetro ao formato das figuras, alegando que as

figuras são diferentes e a figura de Pedro é maior que a de Rosa, como pode ser observado na Figura 38, a seguir.

Figura 38 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado à diferença entre as figuras (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo ()	Discordo (✓)
Dois as formas são diferentes,	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo (✓)	Discordo ()
Explicação de Rosa	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A fragilidade conceitual ganha destaque quando 10 justificativas para um dos itens *c* ou *d* estão associadas ao teorema-em-ação falso «TA_{PSup} – Dadas duas superfícies *S* e *S'* equidecompostas, de modo que *S'* é mais “compacta” que *S*, $P(S') < P(S)$ », quando o perímetro está associado à representação espacial da figura. Como constatado por Souza (2004), a dificuldade pode ser provocada pelo efeito visual das figuras, quando a forma interfere na interpretação das grandezas. Esse item nos leva a buscar na análise dos LD e das aulas observadas como a decomposição e composição de figuras têm sido objeto de estudo no domínio das grandezas e medidas.

Uma aluna acerta parcialmente por reconhecer que o perímetro da figura de Rosa é menor que o da figura de Pedro, mas a relação estabelecida está associada à quantidade de lados de cada figura, como podemos observar na Figura 39, a seguir.

Figura 39 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associado à quantidade de lados da figura (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ3d)

Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo (X)	Discordo ()
Porque um quadrado só tem quatro lados, e o gato quinze lados	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O uso do teorema-em-ação falso « $T_{MQLadosMP}$ – A figura com maior quantidade de lados tem o maior perímetro» reforça a importância a ser dada na articulação entre o quadro geométrico e das grandezas, enquanto necessidade de reconhecer as figuras com suas características e propriedades, mas também buscar compreender que conhecimentos associados ao campo conceitual das grandezas são ensinados para os alunos dos 6º anos.

Um erro recorrente nas pesquisas sobre área e perímetro, como observado em Baltar (1996), Melo (2003), D'Amore e Fandiño (2007) e Ferreira (2010), (Cap. 2, item 2.1.2) também foi observado em sete justificativas a um dos itens, associadas à comparação com as áreas, e ao teorema-em-ação falso « TA_{mAmP} – Figuras com áreas iguais têm perímetros iguais». Trazemos no protocolo a seguir a resposta de um aluno para os dois itens.

Figura 40 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à comparação com as áreas (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo (X)	Discordo ()
Eles tem a mesma perimetro pois tem a mesma area	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo ()	Discordo (X)
mesma susposta do pergunta anterior	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

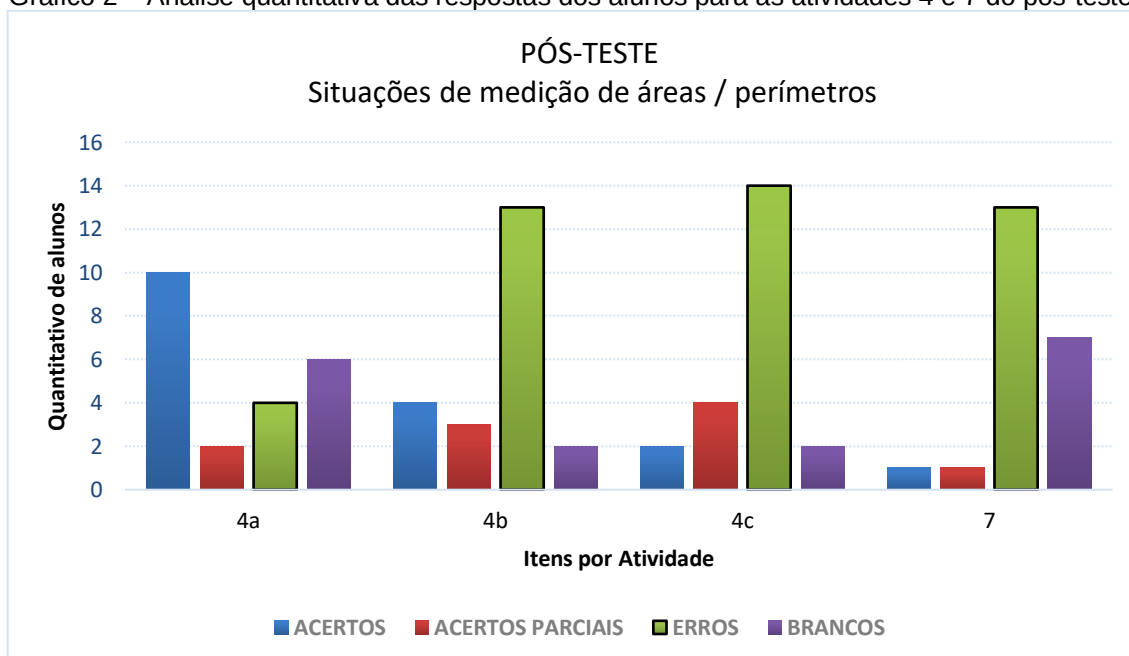
Os resultados obtidos nas respostas às atividades desse bloco corroboram a necessidade de compreender quais situações foram oportunizadas para esses alunos nos anos anteriores, em particular, no 5º e 6º anos, e de que maneira a decomposição de figuras foi explorada para a abordagem dos conceitos de área e perímetro.

5.1.2 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição de áreas e de perímetros com unidades de medidas convencionais no pós-teste

Esse bloco de atividades é composto de situações de medição de áreas e de perímetros com unidades de medidas convencionais, com duas atividades. A atividade 4 apresenta três itens associados a situações cotidianas de determinação de áreas de figuras retangulares, sendo o primeiro deles em geral presente em LD do 5º ano e os demais em LD do 6º ano do ensino fundamental. A atividade 7, uma situação interna à matemática também presente nos LD do 6º ano, solicita a medida do perímetro a partir da medida da área dada.

A análise quantitativa das respostas dos alunos para essas atividades mostra um desempenho inferior a 50% em todos os itens, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 4 e 7 do pós-teste



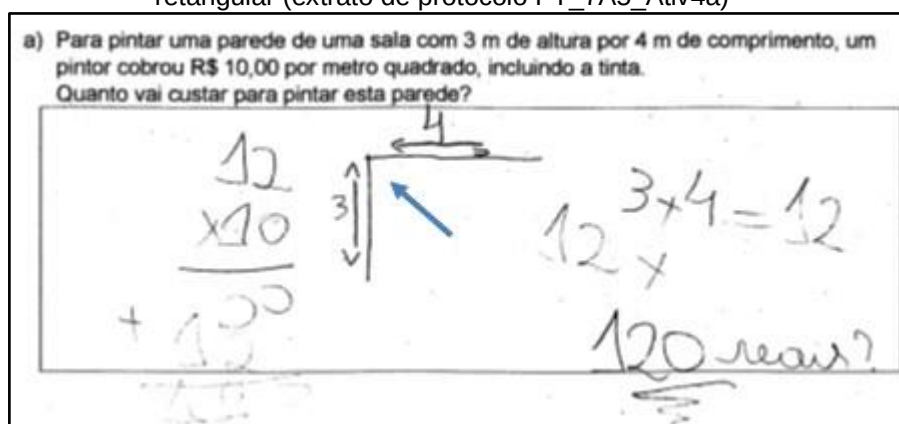
Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Apenas no *item a* da atividade 4 o índice de acerto (45,5%) se aproxima de 50%, o que consideramos baixo, uma vez que se trata de uma situação presente nas atividades do domínio das grandezas e medidas desde o 5º ano no ensino fundamental. O quantitativo de respostas erradas nos demais itens foi superior à soma dos demais tipos de respostas. Um aumento no índice de itens sem resposta foi observado, chegando a 32% na atividade 7, para a determinação da medida do perímetro de um quadrado a partir da medida fornecida da área.

5.1.2.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 4 do pós-teste

A atividade 4, *item a*, envolve uma situação do cotidiano, sem a presença da figura. Dentre os 10 alunos que acertaram a questão, apenas dois alunos utilizaram uma representação da parede retangular, como podemos observar na Figura 41. A representação está associada ao significado da multiplicação enquanto configuração retangular, elemento presente no campo multiplicativo (VERGNAUD, 1990) e em problemas de estrutura multiplicativa frequentes no 2º ciclo⁶¹ (4º e 5º anos) do EF.

Figura 41 – Situação de medição de área com solução correta associada à configuração retangular (extrato de protocolo PT_7A5_Ativ4a)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7A5 representou a altura e o comprimento da parede da região retangular, deixando implícita a compreensão das propriedades de um retângulo, que possui ângulos de 90° entre os seus lados (seta azul). Ela realizou a operação de multiplicação com conhecimentos associados ao teorema-em-ação verdadeiro «TA_{AfigRet} – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura». A operação que caracteriza o produto entre a quantidade de metros quadrados a serem pintados e o valor da pintura do metro quadrado (R\$10,00) foi realizada com o registro da conta de multiplicar. A aluna respondeu à questão apresentando a unidade de medida do sistema monetário.

Os dois alunos que acertaram parcialmente a atividade calcularam o produto da largura pelo comprimento da parede a ser pintada. No entanto, demonstraram não compreender a bidimensionalidade da grandeza área e erraram no uso das unidades de medidas convencionais. Como a área não foi dada nem solicitada,

⁶¹ Como será mostrado no próximo capítulo sobre a análise dos LD.

sendo um dado intermediário da situação de medição, consideramos o cálculo de 3×4 enquanto acerto parcial. Apresentamos na Figura 42, a seguir, o extrato do protocolo da aluna 7B7.

Figura 42 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ4a)

a) Para pintar uma parede de uma sala com 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta. Quanto vai custar para pintar esta parede?

$$\begin{array}{r} 4 \text{ m} \\ \times 3 \text{ m} \\ \hline 12 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \text{ m}^2 \\ + 120 \text{ m}^2 \\ \hline 240 \text{ m}^2 \end{array}$$

R\$ 240,00

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7B7 demonstrou o conhecimento operatório da configuração retangular representada no enunciado da atividade pelos termos altura e comprimento, mas não ficou claro o conhecimento sobre área que ela possui. Ela demonstrou ter um controle das grandezas ao fazer uso de unidades de medidas, mas não domina o conhecimento predicativo quando associou ao produto de dois comprimentos uma unidade de medida linear e determinou o produto dessa medida linear pelo valor monetário, obtendo um valor associado a uma unidade de medida de área. A confusão conceitual com o perímetro permaneceu ao realizar a operação da adição do dobro do valor obtido, 120 m^2 , com o uso do teorema-em-ação falso «TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área».

Entre os quatro alunos que erraram o item, três apresentaram o mesmo tipo de raciocínio (Figura 43). Desconsideraram a situação contextualizada de uma parede enquanto uma região a ser pintada associada à grandeza área, e associaram o valor monetário correspondente à pintura do metro linear. As operações de multiplicação foram realizadas para obtenção do valor equivalente ao comprimento e a altura da parede, e os resultados adicionados para chegar ao valor final.

Figura 43 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de comprimento (extrato de protocolo PT_7A14_Ativ4a)

a) Para pintar uma parede de uma sala com 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta. Quanto vai custar para pintar esta parede? 70 R\$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 3 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times 30 \\ \hline 2100 \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A resolução do aluno 7A14 demonstra apenas um conhecimento no plano operatório, e o cálculo relacional estabelecido considera o conceito do comprimento de uma figura retangular, o que indica ausência da compreensão da área enquanto uma grandeza bidimensional.

Nessa mesma atividade 4, os *itens b* e *c* apresentaram uma situação de medição de áreas com unidades de medidas convencionais e a presença da figura. Apenas quatro alunos acertaram o *item b*, que solicita a determinação da área de uma região retangular. Todos eles realizaram a multiplicação entre os comprimentos da Pousada, indicados na figura, e indicaram a resposta da medida da área pelo par (número, unidade de medida), como exemplificado no protocolo a seguir (Figura 44).

Figura 44 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo PT_7A7_Ativ4b)

b) A Pousada Bom Viver é cercada de jardim, como mostra a planta retangular abaixo:

- Determine a área da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

1000 m²

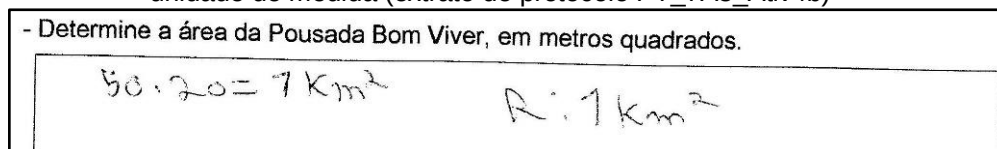
$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 50 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Para esse mesmo item, três alunos acertam parcialmente, um por erros operatórios na multiplicação dos comprimentos, outro por indicar o resultado apenas com o valor numérico, sem a unidade de medida de área associada, e o terceiro aluno, apesar de realizar o cálculo operatório entre os comprimentos mentalmente,

demonstra não compreender o cálculo relacional associado à conversão de unidade entre grandezas diante de uma função bilinear, conforme protocolo a seguir (Figura 45).

Figura 45 – Situação de medição de área com acerto parcial associado à conversão de unidade de medida (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ4b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

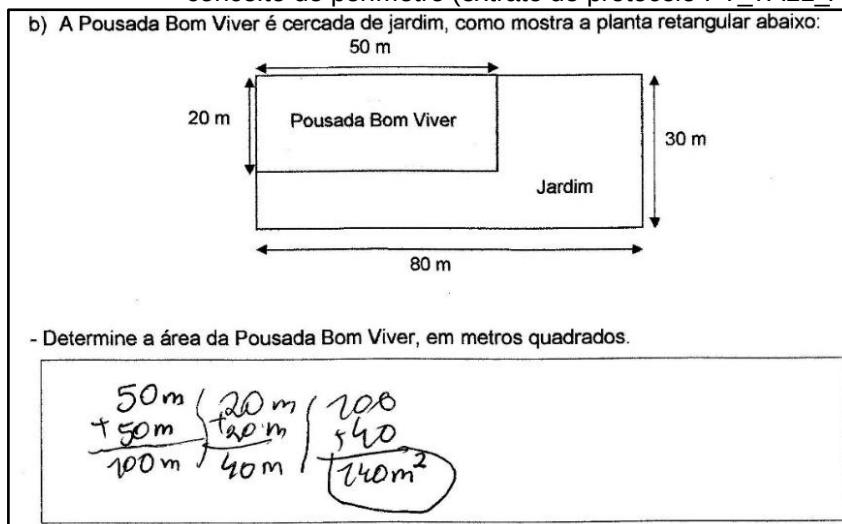
Diante dos registros do aluno 7A3, podemos inferir que ele reconheceu a relação existente entre as unidades de comprimento metro e quilômetro ao associar mentalmente que 1.000 m equivale a 1 km. No entanto, como constatamos em Ferreira (2010), as situações de conversão de unidades privilegiam o quadro numérico e revelam a não compreensão da área enquanto grandeza bidimensional, associada a dois comprimentos, o que justifica o raciocínio utilizado pelo aluno ao considerar que, se 1000 metros é igual a 1 quilômetro, então 1000 metros quadrados é igual a 1 quilômetro quadrado, km².

Mais da metade dos alunos erraram o *item b*, e, desses, onze associaram seus cálculos à relação conceitual do perímetro. A maioria das resoluções apresentadas pelos alunos estava centrada apenas no quadro numérico, para a adição das medidas dos lados da Pousada, sem a indicação da unidade de medida ou apenas a sua associação ao final, como resposta. Trazemos dois exemplos que se diferenciam dos demais (Figura 46 e Figura 47) e demonstram a incompreensão no uso das unidades de medidas e, consequentemente, das grandezas.

A aluna 7A11 apresenta domínio das operações aritméticas, mas essas estão associadas ao conceito de perímetro, inclusive com a organização das adições das medidas dos lados que possuem mesmo comprimento, característica do conhecimento do conceito de retângulo, com a indicação da sua unidade de medida linear, o metro. Em seguida, realizou a adição dos comprimentos obtidos a partir do teorema-em-ação falso «TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área», e ao resultado numérico associou a unidade de medida metros quadrados.

Consideramos que o fato de a pergunta trazer no seu enunciado a unidade metros quadrados pode ter interferido na representação do resultado da aluna. No entanto, essa possibilidade deixa visível a incompreensão da grandeza área.

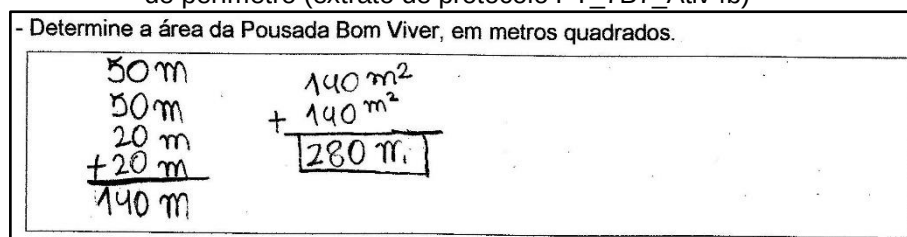
Figura 46 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ4b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Uma outra resolução associada ao conceito de perímetro é desenvolvida pela aluna 7B7, que realiza o cálculo correto para esse conceito, inclusive associado à unidade de medida linear metro, conforme Figura 47 a seguir.

Figura 47 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7B7_Ativ4b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

No entanto, foi pedido para se determinar a área da região em metros quadrados, o que a aluna considerou a partir da indicação da unidade de medida representada corretamente, mas agora associada ao valor por ela encontrado para o perímetro da região. Observamos que a conduta da aluna foi reforçada pela ideia de perímetro quando novamente realizou outra adição e associou ao valor numérico a unidade de medida metro.

A mudança da unidade de medida e a mudança da grandeza a ela associada presente nas duas resoluções anteriores reforça a importância de buscarmos informações sobre as situações de conversão de unidades trabalhadas no ano anterior.

Outro erro no *item b* foi observado (Figura 48) quando o aluno apresentou um cálculo relacional incorreto ao associar comprimentos que não estão relacionados para determinar a área solicitada.

Figura 48 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada a comprimentos (extrato de protocolo PT_7A2_Ativ4b)

- Determine a área da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

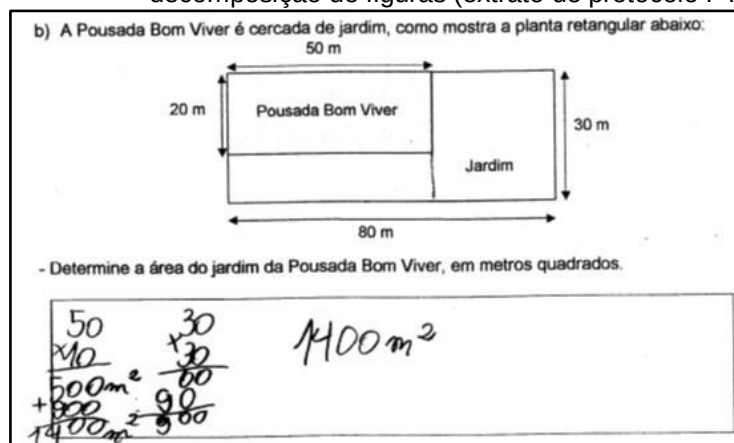
$$4600 \quad \begin{array}{r} 50 \\ 180 \\ \hline 400 \end{array} + \begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array} = 460$$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7A2 desconsiderou a região em questão e operou com os comprimentos 50 m e 80 m, que estão indicados e em lados opostos da figura. Na sua justificativa, não ficou claro o significado da multiplicação do comprimento 30 m por 2. Levantamos duas hipóteses: um erro numérico, quando deveria ter realizado 30 m x 20 m para seguir a associação realizada anteriormente, com a multiplicação dos comprimentos indicados na figura, ou o aluno mudou a estratégia e considerou as medidas dos dois lados do retângulo que representa toda a região, 30 m.

Passamos para o *item c* da atividade 4, que envolve o cálculo de área de uma região composta por retângulos. Esse item foi respondido corretamente por apenas dois alunos que utilizam da mesma estratégia apresentada na Figura 49 seguir, a decomposição seguida da aditividade das áreas.

Figura 49 – Situação de medição de área com solução correta associada à decomposição de figuras (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ4c)

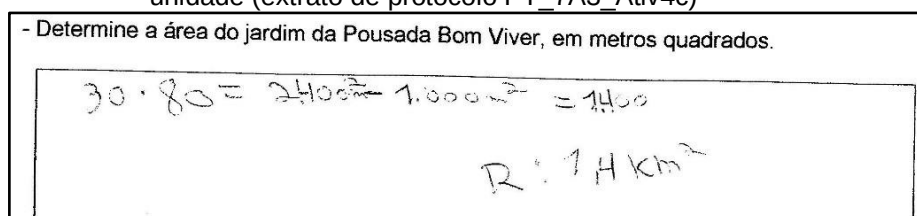


Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7A6 apresentou domínio do cálculo operatório e articulou os quadros geométrico, das grandezas e numérico, apoiada no teorema-em-ação verdadeiro «TA_{AditA} – Se S e S' são superfícies quase disjuntas (que possuem no máximo pontos de fronteira em comum), então $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ ».

Apenas quatro alunos acertaram parcialmente o *item c*. Uma aluna utilizou a estratégia da decomposição e aditividade das áreas e um aluno, a subtração de áreas, porém erraram na realização das operações. Um terceiro aluno (Figura 50) resolveu o item corretamente a partir da subtração das áreas, mas errou ao indicar a resposta em quilômetros quadrados. Uma “adaptação” de três comprimentos do jardim associados à ideia da configuração retangular foi utilizada pelo quarto aluno (Figura 51).

Figura 50 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à conversão de unidade (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ4c)

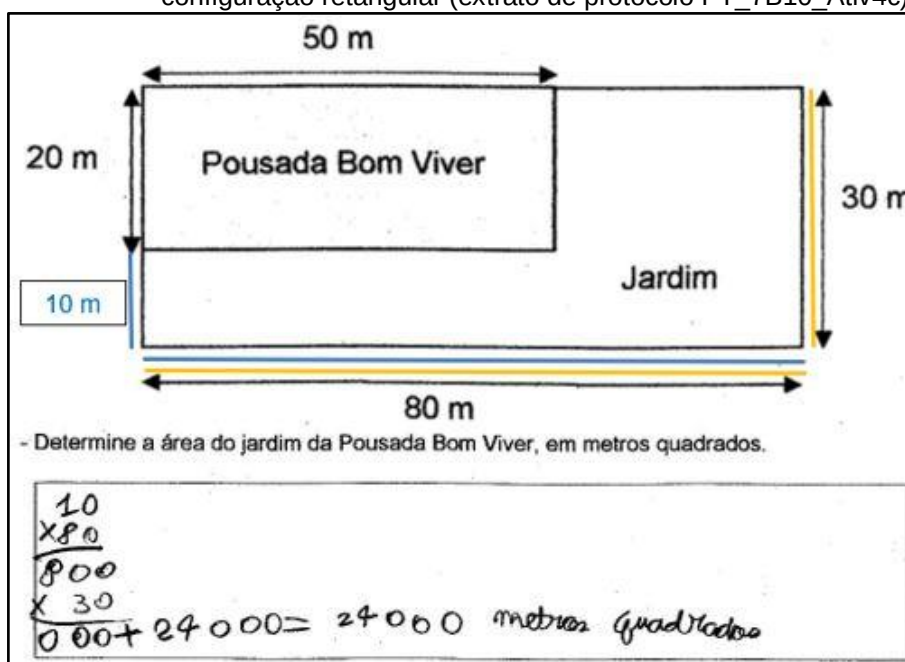


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Podemos observar que esse tipo de erro foi cometido pelo mesmo aluno ao responder o *item b* dessa mesma atividade, apresentado na Figura 45, o que reforça o nosso interesse em buscar elementos sobre situações semelhantes que fizeram parte do ano escolar anterior, tanto no livro quanto nas aulas e situações de conversão de unidade.

O aluno 7B10 mobilizou a ideia de configuração retangular associada ao cálculo da área de figuras retangulares para resolver o *item 4c*, apresentada no protocolo da Figura 51, a seguir. O reconhecimento do objeto retângulo parece estar associado à identificação de dois lados e o ângulo reto formado por esses lados.

Figura 51 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à ideia de configuração retangular (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ4c)



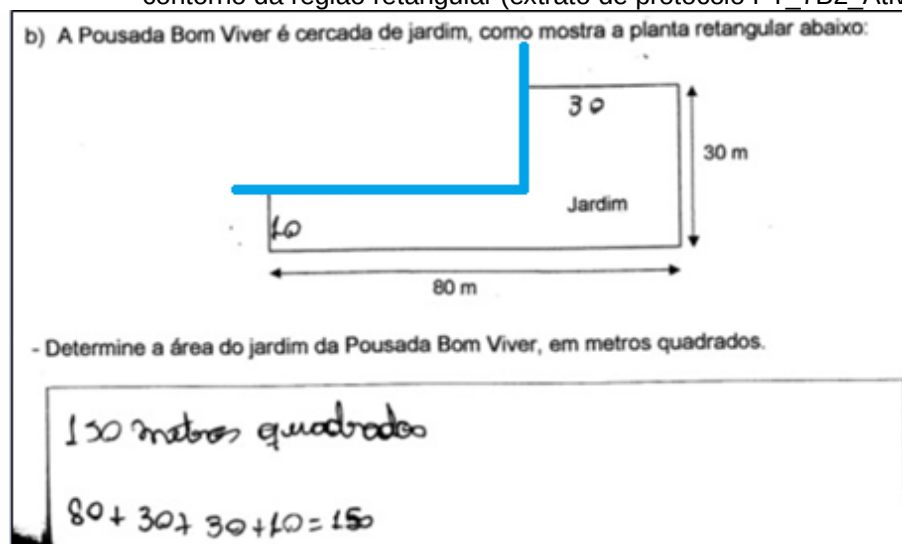
Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno tem conhecimento do objeto retângulo, suas propriedades, e as utilizou para determinar a medida do comprimento de um dos lados da região do jardim, 10 m (indicação na Figura 51). No entanto, para associar as três medidas dos lados do retângulo 10 m, 80 m e 30 m ao teorema-em-ação verdadeiro «TA_{AfigRet} – A área do retângulo é obtida pelo produto da sua base pela sua altura», o aluno 7B10 considerou a região do jardim enquanto dois retângulos com mesma base e alturas distintas (indicação na Figura 51 em azul e amarelo).

Com dois retângulos, cada um com sua base e sua altura, o aluno considerou possível aplicar o teorema-em-ação verdadeiro TA_{ARet} e determinar a área da região. Fazemos a hipótese que a apresentação das medidas dos lados dos retângulos sempre na base inferior e em um dos lados verticais corroborou para o aluno adaptar os seus esquemas ao que ele considera pertinente, mobilizando as representações que conhecia no quadro numérico e geométrico. E deixou visível a ausência da ideia de área enquanto uma grandeza.

O item c da atividade 4 para determinar a área do jardim da Pousada Bom Viver apresentou o maior quantitativo de erros, com 14 alunos. Desses, seis alunos associaram a ideia de contorno de uma região retangular, como apresentado na Figura 52 a seguir.

Figura 52 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à ideia de contorno da região retangular (extrato de protocolo PT_7B2_Ativ4c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Para determinar a área do jardim, o aluno 7B2 acertadamente desconsiderou a área destinada à pousada. Também reconheceu a necessidade de determinar a medida de dois dos lados do jardim, a saber, as diferenças ($80\text{ m} - 50\text{ m}$) e ($30\text{ m} - 20\text{ m}$), e fez o registro desses valores na figura, mas sem as unidades.

Ao realizar a subtração da área da pousada, a figura poligonal representativa do jardim não foi reconhecida pelo aluno como possibilidade de ser decomposta, por exemplo, em dois retângulos. Consideramos que, ao subtrair a área da pousada, os lados comuns às duas regiões também foram excluídos (indicação em azul) e a imagem da linha poligonal é pertinente para o aluno como a imagem do objeto matemático retângulo, uma figura com quatro comprimentos, paralelos dois a dois, relativos aos quatro lados.

O aluno 7B2 determina a área da região do jardim a partir do teorema-em ação-falso « TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área» e ao resultado numérico associa a unidade de medida metros quadrados.

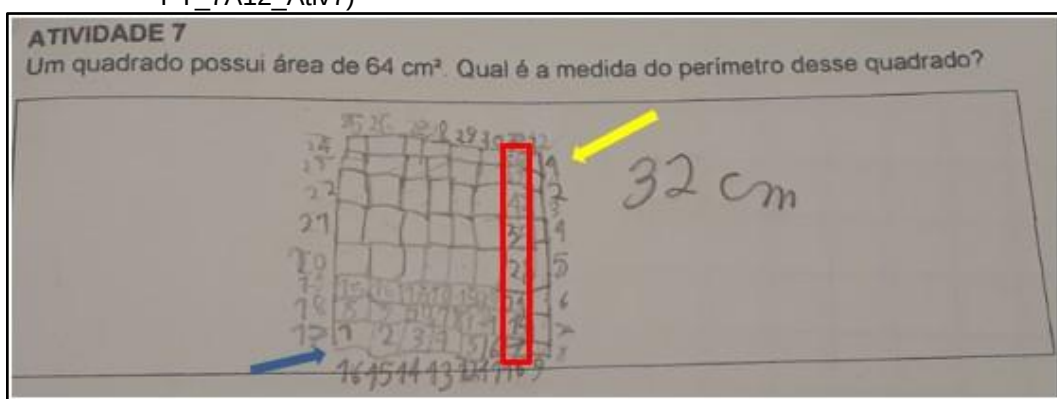
5.1.2.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 7 do pós-teste

A atividade 7 foi respondida corretamente por apenas um aluno, e sete a deixaram em branco, como pode ser observado no Gráfico 2.

O aluno que resolveu de maneira correta (Figura 53) apresentou a seguinte solução: baseado na informação dada que o quadrado possui área de 64 cm^2 , observamos no esquema produzido pelo aluno a construção de um quadrado com base em fileiras de quadradinhos (indicação com seta azul).

Em seguida, o aluno enumerou cada um dos quadradinhos da primeira linha até o número sete e continuou, na segunda e na terceira linha, da esquerda para a direita a enumerar os quadradinhos.

Figura 53 – Situação de medição de perímetro com solução correta (extrato de protocolo PT_7A12_Ativ7)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7A12 percebeu, a partir da terceira linha, a regularidade de sete quadradinhos por linha, passando apenas a representar a contagem dos múltiplos de sete (destaque em vermelho na Figura 53) no último quadradinho do lado direito de cada linha. Ele notou que a totalidade não coincide com um quadrado de área de 64 quadradinhos e inseriu uma outra coluna à direita no quadrado (localizada ao lado direito da nossa indicação em vermelho).

Ao complementar o quadrado com 64 quadradinhos, passou à contagem dos lados de quadradinhos, enumerando-os a partir do vértice superior direito (seta em amarelo na Figura 53), na sequência, até chegar ao último, quando escreve 32. Respondeu corretamente à atividade com o par número unidade de medida, em centímetros, o que mostra a compreensão da situação, associando a área à quantidade de unidades de área (centímetros quadrados) necessárias para ladrilhar

a região delimitada pelo quadrado e o perímetro à quantidade de unidades de comprimento (centímetros) necessária para recobrir o contorno da figura, ou seja o quadrado.

Observamos que o aluno mobilizou diversos conceitos como o de quadrado, área, perímetro, lado, contorno, regularidade, múltiplos, unidades de medida convencionais e não convencionais. Mostrou-se competente ao mobilizar diferentes conceitos, realizando representações que demonstram a articulação entre os quadros geométrico, das grandezas e o numérico, sem fazer uso da fórmula da área do quadrado, para resolver a tarefa proposta.

Um outro aluno foi o único a responder parcialmente, como mostra o protocolo na Figura 54, considerando ter indicado a resposta correta, mas não apresentou justificativas, o que nos faz levantar algumas possibilidades, por exemplo, o aluno compreende a questão, domina o cálculo mental para as operações de número quadrado perfeito, multiplicação e adição, sem necessitar realizar registros das suas ações, assim como reconhece a área enquanto grandeza bidimensional como produto de dois comprimentos representados na unidade centímetros, e o perímetro como um comprimento.

Figura 54 – Situação de medição de perímetro com acerto parcial (extrato de protocolo PT_7A4_Ativ7)

ATIVIDADE 7 Um quadrado possui área de 64 cm^2. Qual é a medida do perímetro desse quadrado? 32 cm

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Elementos do histórico desse aluno como sua participação em sala de aula e seus registros no caderno podem ser indicativos da nossa hipótese, a ser confirmada ou não no desenvolvimento da apresentação das nossas análises.

Dentre os alunos que erraram essa atividade, nove realizaram a divisão da medida da área do quadrado por quatro (quantidade de lados da figura), sendo que quatro deles obtiveram 16 como resposta e os demais, 64, associados ou não a unidades de medida como o centímetro ou o centímetro quadrado, como pode ser observado nos protocolos apresentados nas Figura 55 e Figura 56, respectivamente, a seguir.

Figura 55 – Situação de medição do perímetro com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo PT_7B11_Ativ7)

ATIVIDADE 7
Um quadrado possui área de 64 cm^2 . Qual é a medida do perímetro desse quadrado?

16 cm^2 $64 \overline{) 16}$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Na resolução apresentada, a aluna 7B11 demonstrou conhecer uma das propriedades do quadrado, que possui quatro lados de mesmo comprimento. No entanto, para determinar o perímetro do quadrado, mobilizou o teorema-em-ação falso «TA_{PQuadrado} – A medida do perímetro do quadrado é igual à medida da área desse quadrado dividida por quatro». A ação da aluna ao indicar a resposta 16 cm^2 evidencia conhecimentos instáveis sobre área e perímetro.

Outro exemplo de resolução incorreta com resposta igual a 64 é apresentado no protocolo da Figura 56, que reforça a dificuldade na compreensão da dimensionalidade das grandezas. A aluna domina algumas propriedades do quadrado, como podemos observar na sua representação do esboço de uma região quadrada com lados cuja medida equivale a 16. No entanto, a unidade de medida não está especificada.

Figura 56 – Situação de medição de perímetro com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo PT_7A5_Ativ7)

ATIVIDADE 7
Um quadrado possui área de 64 cm^2 . Qual é a medida do perímetro desse quadrado?

ATIVIDADE 8
Considere cada uma das figuras na malha quadriculada abaixo. Cada quadradinho equivale a uma unidade de área.

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Assim como apresentado no protocolo anterior, a aluna 7A5 faz uso de operações numéricas como multiplicação e divisão para determinar o comprimento do lado do quadrado a partir do teorema-em-ação falso «TA_{LQuadrado} – A medida do

lado do quadrado é igual à medida da área desse quadrado dividida por quatro». No entanto, reconhece o conceito de perímetro para figuras poligonais, quando realizou a operação de adição das medidas dos quatro lados do quadrado, obtendo o valor 64. Nessa resolução, percebemos a articulação entre o quadro geométrico e o numérico, mas a ausência do quadro das grandezas.

O caráter operatório observado nos protocolos dessa atividade deixa clara a incompreensão, por parte de uma maioria expressiva dos alunos, da bidimensionalidade da área enquanto uma grandeza composta formada pelo produto de dois comprimentos.

5.1.3 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição e de comparação de áreas e de perímetros com unidades de medidas não convencionais no pós-teste

Situações de medição e comparação de áreas e de perímetros, com unidades de medidas não convencionais e o suporte do recurso de malhas, compõem esse bloco de atividades. As atividades 5 e 6 envolvem apenas a noção de área, com figuras construídas sobre malhas. Atividades parecidas com a atividade 8 estão presentes nos LD do 5º e 6º anos e na avaliação do prof. 6º anos, como veremos nos capítulos seguintes. Essa atividade apresenta dois itens relacionados à comparação de áreas e de perímetros de figuras poligonais construídas sobre a malha quadriculada, respectivamente.

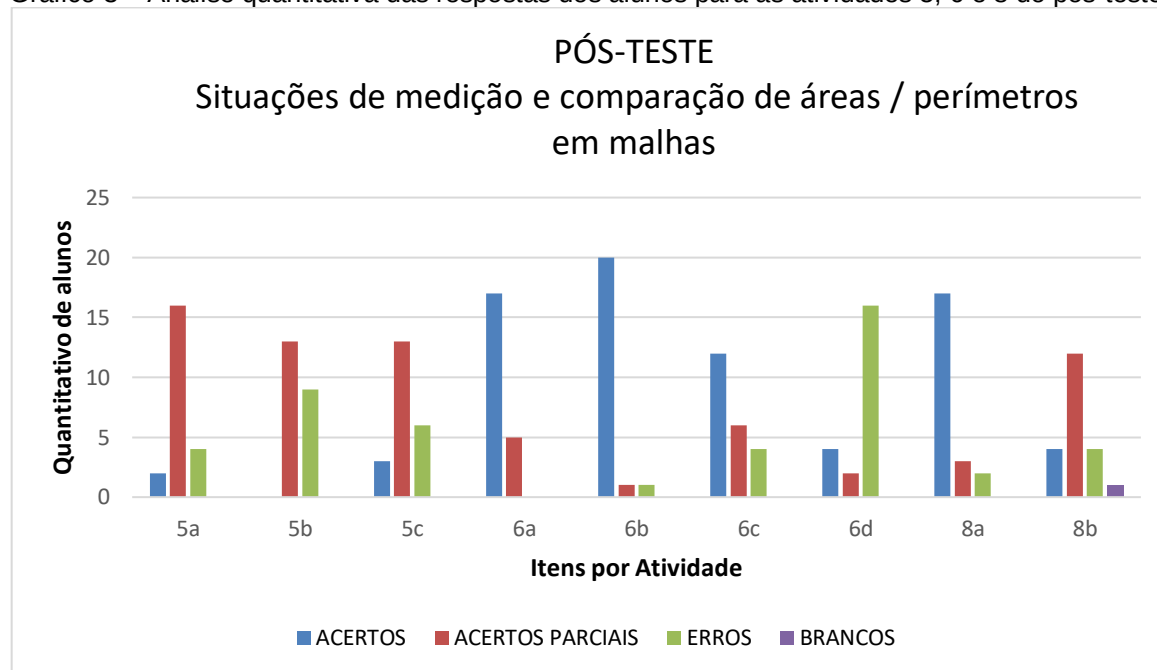
Na análise quantitativa das respostas dos alunos a essas atividades (Gráfico 3), observamos que os maiores índices de acerto ocorreram nos *itens a* e *b* da atividade 6, e na atividade 8 *item a*, associados ao cálculo de áreas com figuras formadas por quadradinhos inteiros.

Na atividade 5 *item a*, o maior número de acertos parciais se justifica diante das respostas com a indicação apenas de um número para a medida da área das figuras poligonais, sem associar a unidade de medida. No *item b* dessa mesma atividade, a ausência de resposta correta pode estar associada ao uso de uma malha triangular não isométrica, nem sempre presente nos LD em atividades desse tipo.

De todos os itens do pós-teste, aquele que apresentou o maior índice de erro foi o da atividade 6 *item d*, aproximadamente 73%, que revela a dificuldade de

aceitar a possibilidade de expressar a área de uma figura em certa unidade quando não é possível ladrilhar efetivamente a região com uma quantidade finita de superfícies unitárias.

Gráfico 3 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 5, 6 e 8 do pós-teste



Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

A atividade 8 teve um maior índice de acerto no *item a*, associado à comparação de áreas, que ao *item b*, na comparação de perímetros.

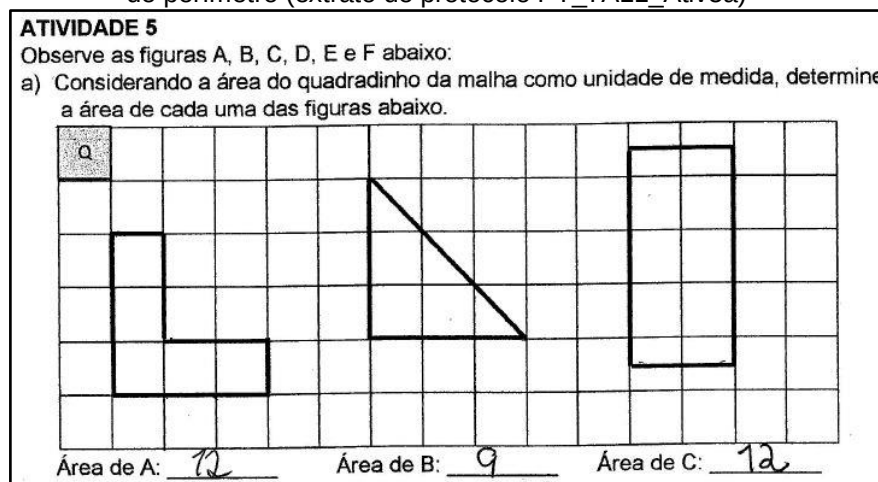
5.1.3.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 5 do pós-teste

Na atividade 5, *item a*, os dois alunos que acertaram associaram corretamente a quantidade de quadradinhos à medida de área de cada figura solicitada. Dentre os 16 alunos que acertaram parcialmente, 14 não expressaram a unidade de medida ou erraram na contagem de superfícies unitárias. Dois alunos indicaram as áreas, porém adotaram o metro quadrado e o centímetro quadrado como unidades de medidas.

Dentre os quatro alunos que erraram a resposta do *item a*, dois alunos associaram a área ao conceito de perímetro (Figura 57), um considerou a área enquanto a região do entorno de cada figura (Figura 58) e a quarta aluna

compreendeu a área como a junção das regiões interna e externa à figura (Figura 59).

Figura 57 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ5a)

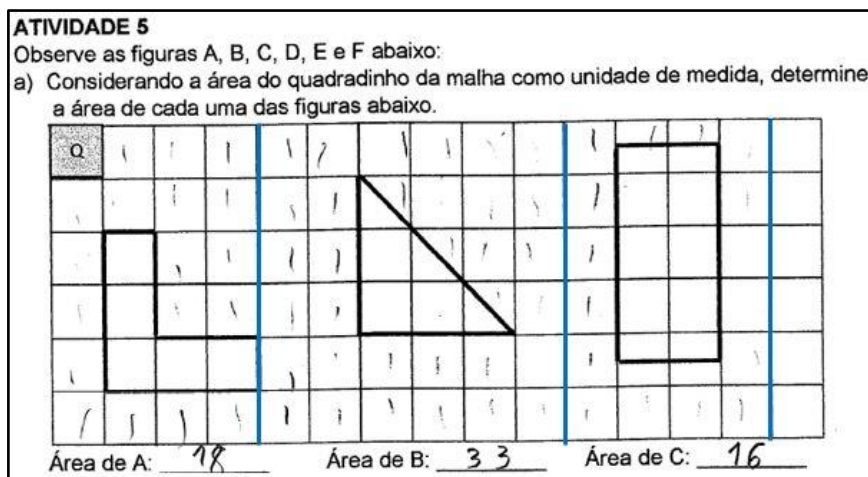


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Para a aluna 7A11, o cálculo da área das figuras está aqui associado ao conceito do perímetro, que não era pertinente, e ao teorema-em-ação falso « TA_{Ldq} – O lado e a diagonal de um quadrado têm comprimentos iguais», já observado em Ferreira (2010). Levantamos a hipótese de que o fato de as figuras deixarem a malha à mostra e o seu contorno estar em destaque pode ter influenciado na escolha da aluna.

No protocolo a seguir, observamos que o aluno compreende o quadradinho da malha como unidade de medida de área, pelas marcações realizadas para contagem.

Figura 58 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada à região externa a figura (extrato de protocolo PT_7A10_Ativ5a)

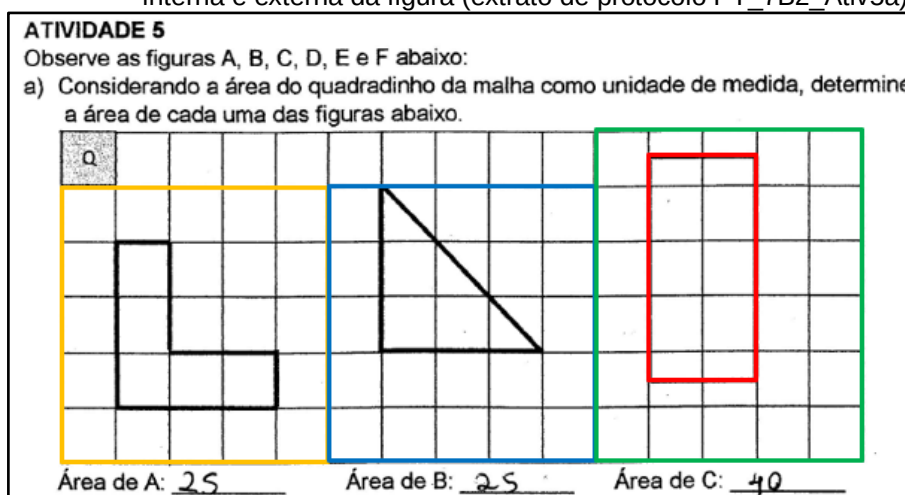


Fonte: Acervo da autora, 2018.

No entanto, a ideia de área de acordo com a representação do aluno 7A10 estava associada à região em volta da figura, sem considerá-la. Quanto à unidade de área determinada pelo quadradinho, o aluno considerou ser equivalente a duas metades de quadradinho, representado por um retângulo, ou a metade de quadradinho, representada por um triângulo.

O outro exemplo de erro no *item a* da atividade 5 está associado a uma aluna que também considerou o quadradinho como uma unidade de medida de área, porém contou a quantidade de quadradinhos de uma região da malha quadriculada na qual a figura estava apoiada, incluindo a área da figura. A área da figura A, igual a 25, foi obtida a partir dos 20 quadradinhos da região externa a figura A mais 5 quadradinhos da própria figura. As regiões consideradas para as figuras A, B e C estão em destaque amarelo, azul e verde, respectivamente, na figura a seguir.

Figura 59 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada às regiões interna e externa da figura (extrato de protocolo PT_7B2_Ativ5a)

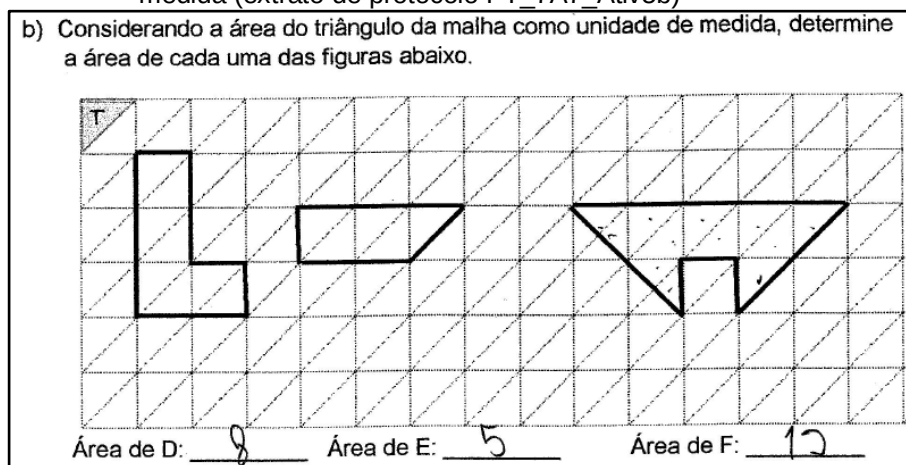


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Diante da resposta da aluna para a figura C, levantamos a hipótese de que a aluna pode ter errado na contagem da região, ou ter adicionado novamente os quadradinhos internos do retângulo, considerando metade de quadradinho como equivalente a quadradinho inteiro, com base no teorema-em-ação falso « $T_{Uqm} - A$ medida da área de um quadrado é igual a medida da área da sua metade».

Nessa mesma atividade *item b*, sem nenhum acerto, 13 alunos acertaram parcialmente devido à unidade de medida, embora com a maioria de acertos na resposta numérica. Sete alunos acertaram a resposta numérica, mas não indicaram a unidade de medida “triângulo”, um aluno continuou a realizar a medição das áreas com a unidade “quadradinho”, e um aluno associou sua resposta numérica à unidade de medida convencional metro quadrado. Três alunos realizaram a contagem com a unidade de medida triângulo, porém consideraram a metade do triângulo T como uma unidade de medida para determinar a área da figura F, conforme protocolo a seguir.

Figura 60 – Situação de medição de áreas com acerto parcial associado à unidade de medida (extrato de protocolo PT_7A7_Ativ5b)



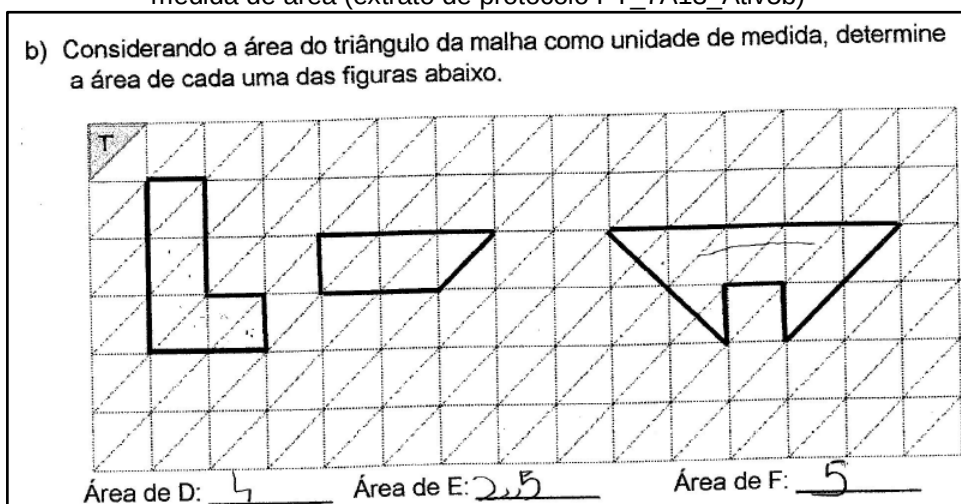
Fonte: Acervo da autora, 2018.

Podemos observar, de acordo com o protocolo, que o aluno 7A7 realizou a contagem correta das superfícies unitárias T para determinar as áreas das figuras D e E, figuras que possuem todos os seus lados apoiados sobre a malha. Já para a figura F, a interferência da malha triangular e o traçado da figura deixam que os triângulos fiquem cortados. O aluno é levado a contar a quantidade de superfícies elementares que estão ladrilhando a figura, o que revelou a incompreensão da unidade de medida triângulo T, mobilizando um teorema-em-ação falso « $T_{MAFormDif} -$ A quantidade de superfícies unitárias necessárias para recobrir uma superfície,

mesmo que essas sejam de tamanhos e formas diferentes, corresponde à medida da sua área».

Dentre os nove alunos que erraram esse item, quatro mantiveram a determinação da área associada à unidade de medida quadrado, como mostra o protocolo na Figura 61, a seguir.

Figura 61 – Situação de medição de áreas com solução incorreta associada à unidade de medida de área (extrato de protocolo PT_7A13_Ativ5b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Apesar de as figuras estarem desenhadas numa malha triangular e a superfície unitária T estar destacada, o aluno considerou a superfície unitária quadrado utilizando um conceito-em-ação inadequado.

Três alunos consideraram a área a partir do perímetro, e dois outros com relação à região do entorno da figura, como apresentado no item anterior. Os alunos 7A11 e 7A10 permaneceram com os esquemas utilizados associados ao perímetro (Figura 57) e a região do entorno da figura, como considerado no item anterior (Figura 58), respectivamente.

No *item c* da atividade 5, os alunos deveriam assinalar dentre quatro afirmações as que consideravam verdadeiras, a partir dos resultados das medidas das áreas encontradas para as figuras dos *itens a* e *b*. Todos os três alunos que acertaram o *item c* compreendem a relação de equivalência entre as áreas das unidades de medida quadrado e triângulo e assinalaram as três afirmações verdadeiras, como apresentado no protocolo da Figura 62, a seguir.

Figura 62 – Situação de comparação de áreas com solução correta associada à relação de equivalência entre as figuras (extrato de protocolo PT_7A3_Ativ5c)

a) Área de A: 5 Área de B: 4,5 Área de C: 3

b) Área de D: 8 Área de E: 5 Área de F: 10

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

() A área de D é maior que a área de A.

(X) A área de B é maior que a área de E.

(X) As áreas de A e F são iguais.

(X) A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião:

Porque um quadrado é igual a dois triângulos.

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Mesmo sem ter indicado as unidades de medida das figuras nos *itens a e b*, o aluno 7A3 percebe a relação entre as unidades de medida e assinala corretamente as afirmações.

Dentre os 13 alunos que acertaram parcialmente o *item c*, cinco percebem a relação entre as unidades de medida, mas realizaram a comparação entre as áreas das figuras por vezes sem associar o quadro das grandezas ao quadro numérico (Figura 63); quatro alunos assinalam as afirmações sem apresentar justificativa; e os outros quatro afirmam ter apenas observado as figuras.

Figura 63 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associada à relação de equivalência entre as figuras (extrato de protocolo PT_7B10_Ativ5c)

a) Área de A: 5Q Área de B: 4,5Q Área de C: 3Q

b) Área de D: 8T Área de E: 5T Área de F: 12T

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

() A área de D é maior que a área de A.

(X) A área de B é maior que a área de E.

() As áreas de A e F são iguais.

() A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião:

Um T seria metade de um Q, ou seja, para fazer um Q, precisamos de dois T. Ou seja, 5T seria 2,5Q, e 4,5Q seria 9T.

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Podemos observar no protocolo acima que o aluno 7B10 percebeu a relação de equivalência entre um quadradinho Q e dois triângulos T. No entanto, por ter errado a contagem de triângulos para determinar a medida da área da figura F, não assinalou a terceira afirmação, também verdadeira. Já o fato de o aluno não ter

assinalado a última alternativa nos faz levantar duas hipóteses: a comparação das áreas das figuras C e D com base apenas no quadro numérico ou talvez ele não tenha notado a possibilidade de marcar mais de uma alternativa diante da questão.

Dentre os seis erros apresentados no *item c*, dois alunos não justificaram suas respostas e erraram as afirmações. Três alunos afirmaram que as comparações foram realizadas com base nos números, e uma aluna afirmou que “são medidas diferentes”, conforme protocolo a seguir.

Figura 64 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao quadro numérico (extrato de protocolo PT_7B8_Ativ5c)

a)	Área de A: <u>5</u>	Área de B: <u>4,5</u>	Área de C: <u>8</u>
b)	Área de D: <u>8</u>	Área de E: <u>5</u>	Área de F: <u>10</u>
c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:			
☒ A área de D é maior que a área de A.			
☐ A área de B é maior que a área de E.			
☐ As áreas de A e F são iguais.			
☐ A área de C é diferente da área de D.			
Explique sua opinião:			
<u>São medidas diferentes.</u>			

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A afirmação da aluna 7B8 revelou uma comparação realizada apenas no quadro numérico, o que justificou assinalar somente a primeira afirmação. A relação entre realizar medições com unidades de medidas diferentes e estabelecer relações de equivalência entre elas não parece visível para a aluna.

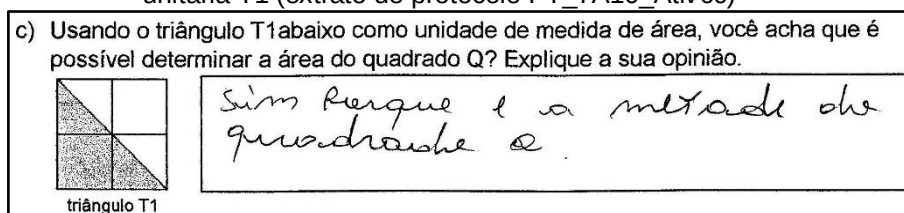
5.1.3.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 6 do pós-teste

Nos *itens a* e *b* dessa atividade, mais de 80% dos alunos acertaram suas respostas, o que já era esperado, considerando que a região Q está quadriculada e as unidades de medidas são duas superfícies unitárias, quadradinho A no *item a*, que coincide com um quadradinho da região Q, e quadradinho B no *item b*, equivalente a quatro quadradinhos da região Q. Os teoremas-em-ação verdadeiros usados foram « TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área» ou « T_{FAq} – A área de um quadrado pode ser obtida pela fórmula $Q = l \times l$ ».

Nos *itens c e d*, as unidades de medida deixam de estar associadas à figura quadrado e passam a ser representadas por triângulos. No *item c*, um triângulo retângulo isósceles T1 é a superfície unitária que equivale a dois quadradinhos A, e, no *item d*, a superfície unitária é um triângulo isósceles T2 equivalente a três quadradinhos A.

Dentre os alunos que acertaram parcialmente, todos perceberam ser possível recobrir o quadrado Q com a superfície unitária T1, mas erraram na contagem. Dos quatro alunos que erraram, três afirmaram não ser possível determinar a área da região Q, por exemplo, disse o aluno 7B3: “porque isso não cobre todos os espaços”. O outro aluno considerou ser possível recobrir a região Q, conforme protocolo a seguir.

Figura 65 – Situação de medição de área com acerto parcial associada à superfície unitária T1 (extrato de protocolo PT_7A10_Ativ6c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

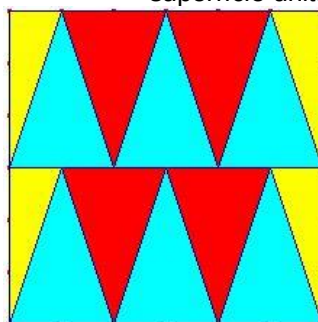
Considerando a justificativa do aluno 7A10, esse compreendeu ser o quadrado quadriculado suporte da superfície unitária T1, coincidente com a região Q a ser recoberta, sem estabelecer a relação de equivalência com a unidade de medida quadradinho A, o que demonstra uma dificuldade no quadro geométrico. Nossa hipótese confirma-se quando analisamos as respostas desse aluno aos itens anteriores dessa atividade, ao considerar o quadrado quadriculado suporte das unidades A, B e T1 como a própria região quadrada Q.

O *item d* dessa atividade apresenta o menor número de acertos, apenas quatro alunos, e o maior índice de erros, com 16 alunos que afirmam não ser possível determinar a área da região Q com a superfície unitária T2. Este item envolve a distinção entre duas ideias importantes, a possibilidade de recobrimento e a determinação da área de uma região.

Efetivamente não é possível recobrir a região Q com uma quantidade finita de superfícies unitárias sem cortar alguns exemplares dessa superfície, nesse caso específico, com o triângulo T2.

Assim, a possibilidade de expressar a área da figura com base na unidade definida por essa superfície unitária vai se assentar em outros conhecimentos como a invariância da área por decomposição e recomposição ou ainda na ideia de que uma unidade é uma classe de equivalência de superfícies unitárias e portanto pode-se buscar uma outra superfície unitária com a qual se possa ladrilhar, conforme exemplo de ladrilhamento que trazemos a seguir.

Figura 66 - Possibilidade de ladrilhamento do quadrado Q com a superfície unitária T2

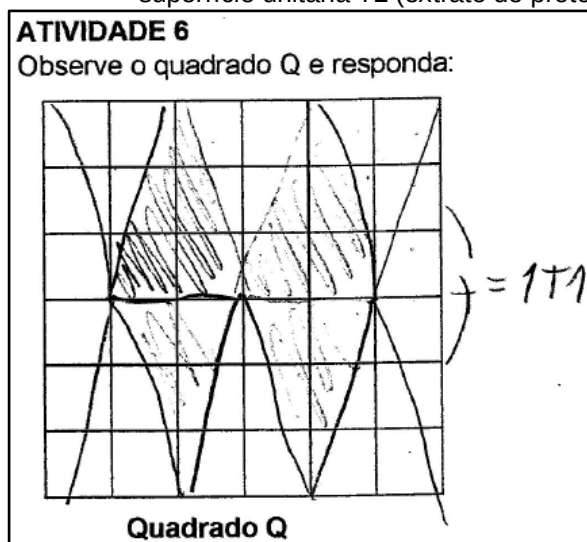


Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Nesse caso, o ladrilhamento efetivo com quantidade finita de superfícies unitárias é impossível. Entretanto, é possível expressar a área usando a unidade determinada por essa superfície unitária, por decomposição da superfície unitária T2 em dois triângulos retângulos, representados na Figura 66 em amarelo.

Dentre os quatro alunos que acertam, todos afirmaram ser possível cobrir o quadrado Q com 12 triângulos T2, mas apenas duas fizeram a representação do ladrilhamento do quadrado Q com a decomposição do triângulo T2, conforme protocolo a seguir (Figura 67).

Figura 67 – Situação de medição de área com solução correta associada à superfície unitária T2 (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ6d)

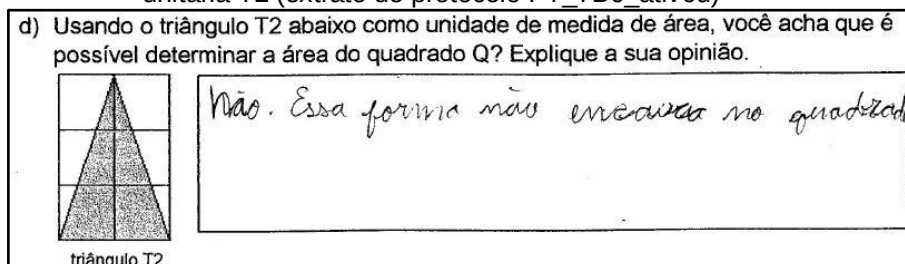


Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7A6 compreende ser possível realizar operações de translação e rotação com a superfície unitária T2 conforme o desenho realizado, apesar de ter escrito T1, e indica a mobilização dos teoremas-em-ação verdadeiros « TA_{Isom} – Dadas uma isometria F e uma superfície S , $A(F(S)) = A(S)$ » e « $TA_{\text{Dec-rec}}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área».

Dentre os 16 alunos que erraram, apenas nove justificaram suas respostas: cinco alunos alegaram a impossibilidade de a superfície unitária T2 se encaixar numa região quadrada (Figura 68), dois entenderam que sobram espaços (Figura 69), uma aluna associou às diferentes divisões dos quadradinhos (Figura 70), e o último aluno (Figura 71) julgou não ser possível realizar uma operação de multiplicação.

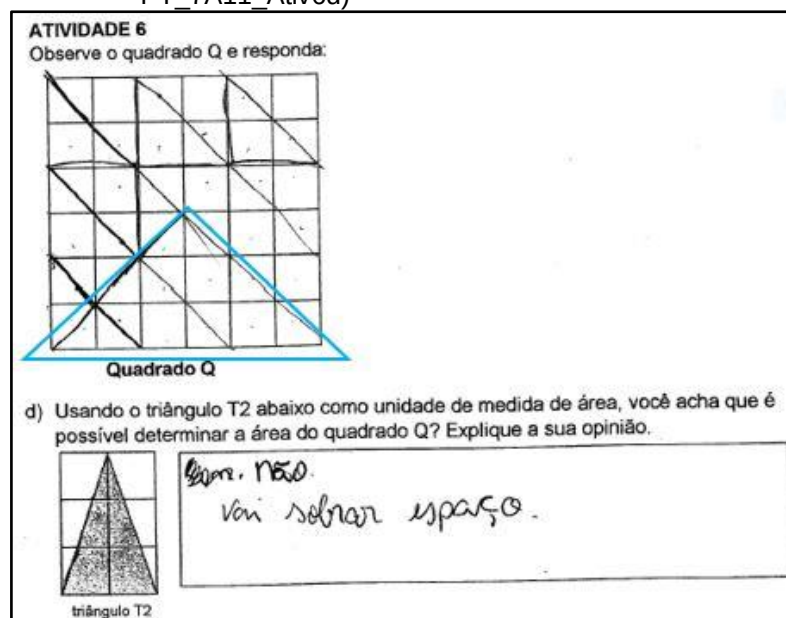
Figura 68 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à superfície unitária T2 (extrato de protocolo PT_7B6_ativ6d)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 7B6 não compreendeu a possibilidade de medir a área da região quadrada Q com a superfície unitária T2, embora tenha respondido corretamente ao item anterior, com a seguinte justificativa: “Sim. Usando de cabeça para cima e de cabeça para baixo. Cabem 18 dele” (extrato do protocolo PT_7B6_Ativ6c). A mudança da variável tipo de figura de T1, um triângulo retângulo isósceles apoiado sobre os lados e as diagonais dos quadradinhos, para T2, um triângulo isósceles, revela a dificuldade associada à decomposição de figuras, das suas propriedades, formas e posições, ao considerar que, se a peça não cabe dentro de um quadrado, então não é possível recobrir o quadrado Q.

Figura 69 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à impossibilidade de rotação da figura (extrato de protocolo PT_7A11_Ativ6d)

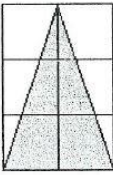


Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 7A11 fez um esboço de um triângulo na região do quadrado Q (destaque em azul na Figura 69) mantendo a altura da superfície unitária T2, mas considerou a base como toda a base do quadrado Q. Além da dificuldade de reconhecer características de uma figura numa situação de deslocamento, a aluna deixa visíveis dificuldades no quadro geométrico quanto aos conhecimentos de rotação e translação de figuras, e simetria, que poderiam ter sido mobilizados mesmo com o esboço do triângulo. A conduta da aluna ao afirmar que sobram espaços mostra a necessidade de que, para medir uma região, é imperativo o ladrilhamento com quantidade inteira de exemplares da superfície unitária.

Figura 70 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à diagonal de quadrado (extrato de protocolo PT_7A1_Ativ6d)

d) Usando o triângulo T2 abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



triângulo T2

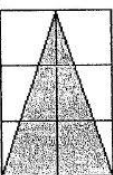
Não, pois os quadradinhos não estão cortados em partes iguais

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A justificativa da aluna 7A1 “Não, pois os quadradinhos não estão cortados em partes iguais” destaca a condição inicial de que, para decompor uma figura que irá recobrir uma região quadrada, é necessário que essa figura tenha “partes iguais” de quadrado, influenciada pela resposta do item anterior ao afirmar “18, partindo o quadradinho B ao meio” (extrato do protocolo PT_7A1_Ativ6c). A variável tipo de figura deixou visível a dificuldade associada às propriedades de figuras no quadro geométrico como reconhecer a diagonal de um retângulo e a possibilidade de decomposição do triângulo T2 e recomposição em figuras equivalentes ou áreas iguais a T2, e equivalente a três quadradinhos A.

Figura 71 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à impossibilidade de decomposição do triângulo T2 (extrato de protocolo PT_7A16_Ativ6d)

d) Usando o triângulo T2 abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



triângulo T2

Não, pois não se multiplica.

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Nesse último caso, o aluno 7A16 procura estabelecer uma relação de proporcionalidade entre a superfície unitária T2 e uma determinada quantidade de quadradinhos, tendo em vista nas respostas dadas por ele aos itens anteriores dessa atividade ter levado à mobilização do teorema-em-ação verdadeiro «TA_{MAUmd} – A uma mesma superfície podem corresponder números diferentes de acordo com a unidade de medida escolhida, mas a área não se altera».

Observamos uma situação em que o aluno não percebe a necessidade de adaptar sua conduta de resolução, quando seria necessário visualizar a

possibilidade de decomposição, a partir do teorema-em-ação verdadeiro « $TA_{Dec-rec}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área». E, a partir da composição da nova figura, poderia estabelecer a relação de equivalência entre a superfície unitária T_2 e três unidades de medida quadrado A .

Observamos que todos esses erros estão associados à incompreensão entre as ideias de ser possível recobrir e ser possível determinar a área de uma região. Para eles, só é possível determinar a área em certa unidade, se for possível ladrilhar efetivamente a figura com uma quantidade finita de exemplares da superfície unitária correspondente à unidade.

5.1.3.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 8 do pós-teste

Essa atividade envolve a comparação de áreas e perímetros de figuras construídas sobre a malha quadriculada. Como esperado, por ser uma tarefa presente desde os anos iniciais no ensino fundamental, mais de 75% dos alunos acertaram o *item a* dessa atividade e fizeram uso do teorema-em-ação verdadeiro « T_{AContq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área». As respostas consideradas parciais referem-se aos alunos que apresentaram apenas um dos pares de figuras com mesma área.

No *item b*, a comparação dos perímetros teve um maior índice de acertos parciais devido a erros na contagem do perímetro de alguma figura, apresentação de um dos pares incorreto, ou não apresentação de todos os pares de figuras com mesmo perímetro. Todos os quatro alunos que erraram o item associaram o perímetro à área a partir do teorema-em-ação falso « TA_{mAmP} – Figuras com áreas iguais têm perímetros iguais».

Figura 72 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação entre área e perímetro (extrato de protocolo PT_7A6_Ativ8a e b)

ATIVIDADE 8
 Considere cada uma das figuras na malha quadriculada abaixo.
 Cada quadradinho equivale a uma unidade de área.

a) Entre as figuras acima, há figuras com mesma área? Sim (☒) Não ()
 Em caso afirmativo, quais são elas?

C e F / A e E

b) Entre as figuras acima, há figuras com mesmo perímetro? Sim (☒) Não ()
 Em caso afirmativo, quais são elas?

C e F / A e E

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Esse protocolo apresenta apenas o registro numérico das medidas das áreas no interior das figuras, o que confirma a associação e não diferenciação entre as grandezas comprimento e área pela aluna, e o uso do teorema-em-ação falso TA_{mAmP} .

5.2 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS PELOS ALUNOS NO FINAL DO 5º ANO NA SONDAGEM

A sondagem foi aplicada no final do ano letivo de 2016, em 7 de dezembro, nas duas turmas de 5º ano, com o objetivo de analisar os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução de situações relativas à área e ao perímetro.

As tarefas foram realizadas individualmente, e não foi estipulado tempo para cada uma delas. As atividades eram entregues uma a uma, à medida que o aluno conseguia terminar, na ordem da numeração. Utilizamos o horário de aula da professora em cada uma das turmas, de 90 minutos, e contamos com a colaboração

dela na organização e distribuição das tarefas, bem como para tirar dúvidas sobre os enunciados das tarefas, mas sem intervenção, quando as perguntas estavam relacionadas às resoluções dos alunos.

A elaboração da sondagem aconteceu sem que a pesquisadora tivesse conhecimento do planejamento e de como os saberes comprimento, área e perímetro tinham sido vivenciados em sala de aula.

A aplicação da sondagem foi complementada com entrevistas individuais, no dia 12 de dezembro, com os alunos do 5º ano B, e no dia 15 do mesmo mês, com os alunos do 5º ano A. Essa complementação se fez necessária, visto que alguns alunos deixaram algumas atividades sem registro das justificativas, ou essas não estavam legíveis o suficiente para compreensão da pesquisadora. No momento da entrevista individual, apenas essas atividades eram apresentadas, quando era solicitado pela pesquisadora que o aluno explicasse oralmente qual a sua justificativa e, em seguida, realizasse o registro na ficha, no espaço específico para cada item de cada atividade.

Os protocolos que utilizaremos como exemplos estarão representados pela nomenclatura apresentada no Quadro 5. Por exemplo, S_5A1_Ativ1 representa S – Sondagem; 5 – 5º ano, A – turma A, 1 – nº do aluno; Ativ1 – Atividade 1.

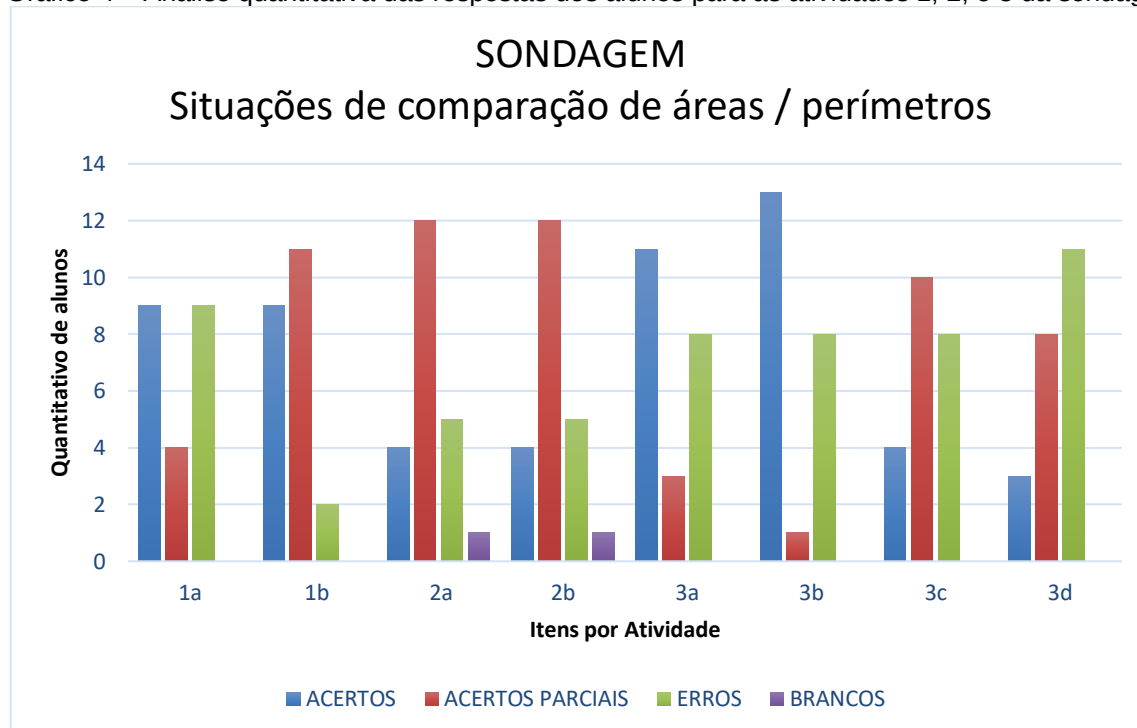
Nossas análises das atividades da sondagem serão apresentadas utilizando a mesma sequência da análise do pós-teste. Para cada bloco de atividades, apresentamos a análise quantitativa dos dados, seguida da análise qualitativa. Ao final de cada bloco, trazemos uma discussão entre as análises do pós-teste e da sondagem para que tenhamos uma primeira visão sobre os avanços que ocorreram ao longo do período analisado, do final do 5º ano para o início do 7º ano.

Registramos que, no momento da aplicação da sondagem nas duas turmas dos 5^{os} anos em 2016, a turma A contou com a participação de todos os 16 alunos da turma, e a turma B com 14 presentes do total de 15 alunos. No entanto, considerando que um dos nossos objetos de pesquisa é a transição entre os 5º e 6º anos e os efeitos da mobilidade escolar, apresentamos nossas análises considerando o total de 22 alunos, que permaneceram matriculados na Escola São Francisco desde o início do ano letivo de 2016, no 5º ano, até o início do ano letivo de 2018, a cursar o 7º ano, momento da aplicação do nosso pós-teste.

5.2.1 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de comparação de áreas e de perímetros sem unidades de medidas na sondagem

Iniciamos com uma visão do desempenho do grupo dos alunos nessas três atividades, como apresentado no Gráfico 1 para auxiliar nossas considerações iniciais.

Gráfico 4 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 1, 2, e 3 da sondagem



Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Na atividade 1, a mudança de variável tipo de figura, de figuras poligonais no *item a*, para figuras não poligonais, formadas por curvas fechadas ou composição de curvas e segmentos de reta no *item b*, já era um elemento desestabilizador para os alunos desde o 5º ano, com relação ao conceito de área.

A dificuldade em dissociar a grandeza do objeto a ele associado e da confusão conceitual entre área e perímetro também estavam presentes no 5º ano, mesmo numa situação contextualizada como a atividade 2. E a atividade 3, que envolvia as peças do Tangram para comparar áreas e perímetros, apresentou um melhor desempenho nos itens associados à área que aos associados ao perímetro, o que se manteve no 7º ano.

5.2.1.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 1 da sondagem

Na atividade 1 da sondagem, dos 22 alunos participantes, nove acertaram o *item a*, e o procedimento utilizado por todos eles envolveu o recurso da malha quadriculada, mobilizando assim o quadro numérico. Procedimentos como decalcar as figuras na malha e contar os quadradinhos ou utilizar o lado do quadradinho da malha como unidade de medida, determinar a quantidade de lados de quadradinho para cada lado de cada uma das figuras e utilizar a fórmula para o cálculo da área de retângulos foram utilizados.

Figura 73 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5B12_Ativ1a)

A figura de maior área é <u>A</u> Explique como você fez e indique que materiais usou: <i>Eu usei a malha quadriculada e medi as figuras colocando a malha por cima das figuras e contando os quadradinhos</i>

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Observamos que a combinação do recurso malha quadriculada com as figuras poligonais, elementos presentes no contexto escolar, tanto nos LD quanto nas práticas de sala de aula, contribuiu para a mobilização do teorema-em-ação verdadeiro «TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

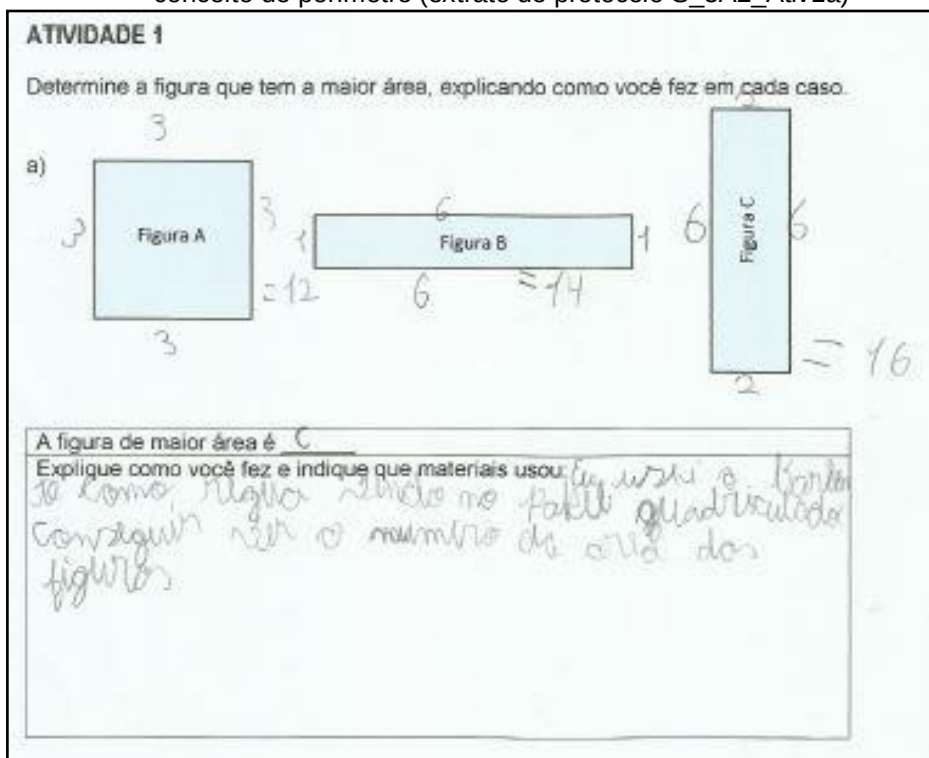
Alguns alunos utilizaram uma combinação de recursos como o barbante, enquanto uma régua não graduada, e a malha quadriculada, para o estabelecimento de uma unidade de medida, lado de quadradinho, obtendo, assim, um número.

Podemos observar um momento de reorganização dos esquemas segundo Vergnaud (2001), quando os alunos utilizaram o recurso da malha quadriculada, já conhecido, juntamente com o barbante, recurso desconhecido por eles no meio escolar do 5º ano, diante das situações propostas na sondagem.

Alguns alunos colocaram o barbante sobre o lado da malha quadriculada e estabeleceram para o lado do quadradinho como equivalente a unidade de comprimento com o barbante, representado por alguns apenas com o número, 1, e por outros, com o número e a unidade de medida, 1cm.

Dentre os nove alunos que erraram o *item a*, sete deles utilizaram o conceito de perímetro e apresentaram dificuldade em verificar uma medição com quantidade não inteira (Figura 74) do retângulo da figura C, cuja base mede 1,5 lado de quadradinho e foi aproximado por alguns alunos para 2 lado de quadradinho.

Figura 74 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ1a)



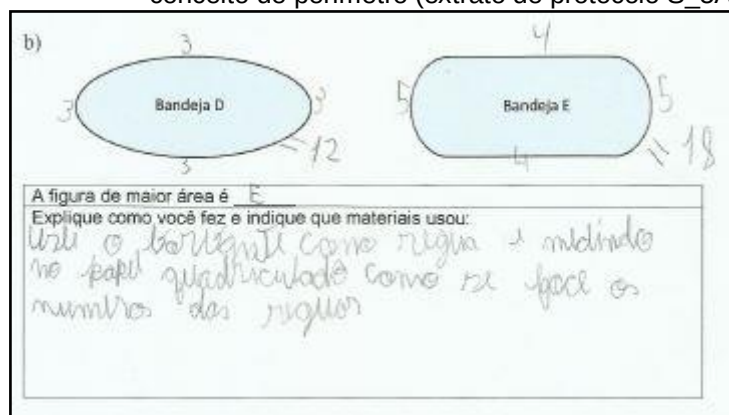
Fonte: Acervo da autora, 2018.

Podemos observar que o conceito mobilizado pelo aluno 5A2 foi o de perímetro, associado ao teorema-em-ação falso «TA_{MContMA} – A figura de maior contorno tem maior área». Apesar de ter utilizado o recurso do barbante “como régua”, não conseguiu estabelecer uma relação de comparação sem a interferência do quadro numérico, visto recorrer à malha quadriculada para estabelecer a unidade de comprimento lado de quadradinho associada ao barbante.

No *item b* da atividade 1, nove alunos acertaram que a figura E possui maior área, com o uso do conceito de área e a utilização de recursos como a malha quadriculada, a malha triangular ou a comparação das áreas por sobreposição das figuras e verificação da possibilidade de inclusão. Acertaram parcialmente onze alunos por também fazerem a mesma afirmação, porém desses três alunos utilizaram o conceito de perímetro, mobilizando o teorema-em-ação falso TA_{MContMA},

procedimento mantido pelo aluno 5A2 (Figura 75) e dois alunos realizam a comparação de comprimentos (Figura 77). Nesse item, a figura E possui maior área e maior perímetro que a figura D. Os dois alunos que erram o item também associaram ao conceito de perímetro e marcaram a figura D.

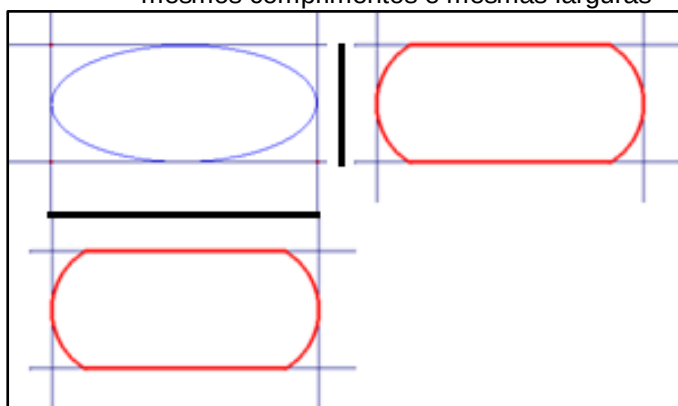
Figura 75 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ1b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O fato de apresentar duas figuras que não são retângulos foi intencional, para verificar se os alunos iriam comparar a partir do comprimento e da largura e concluir que as figuras tinham mesma área. A comparação de comprimentos está associada à ideia de que uma figura plana tem apenas um comprimento e uma largura, o que não ocorre com as figuras propostas, como pode ser observado na Figura 76 a seguir.

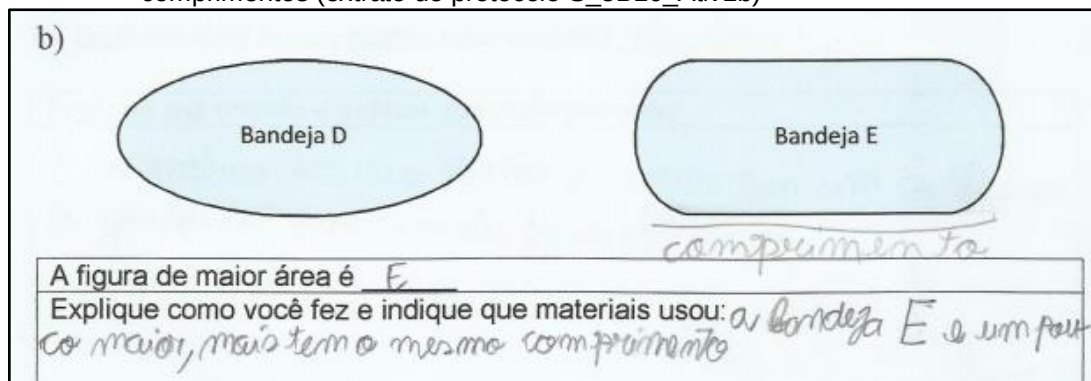
Figura 76 - Enquadramento de figuras não poligonais em retângulos de mesmos comprimentos e mesmas larguras



Fonte: A autora, 2018.

As duas figuras não poligonais foram construídas no interior de retângulos que possuem mesmos comprimentos e mesmas larguras. Esse raciocínio foi utilizado pelo aluno 5B10, conforme protocolo na Figura 77, a seguir.

Figura 77 - Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação de comprimentos (extrato de protocolo S_5B10_Ativ1b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 5B10 percebeu visualmente que a bandeja E é maior nas suas laterais, mas utilizou da comparação de comprimentos como apresentamos na Figura 77.

Nessa situação de comparação, temos a possibilidade de verificar se o aluno utiliza o mesmo esquema do *item a*, ao realizar as comparações com a malha quadriculada, ou se o aluno muda a sua conduta ao perceber a necessidade de uma ampliação, como sinaliza Vergnaud:

Não se pode esperar que tal processo intervenha sem que sejam reconhecidas pelo sujeito analogias e parentescos (semelhanças em certos critérios, diferenças em outros) entre a classe de situações em que o esquema já é operatório para o sujeito e as novas situações a vencer. O reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema (1993, p. 5).

A mudança de valor da variável possibilita observar com um mesmo enunciado a mudança das figuras com outra tomada de informação – figuras não poligonais. A necessidade de buscar informações, regras de ação com os materiais disponibilizados, favorece a construção de novos esquemas pelos alunos. Se era preciso contar quadradinhos, agora será necessária a mudança para a malha triangular, por exemplo, e a possibilidade de realizar a estimativa das áreas, ou, ainda, a possibilidade de realizar um procedimento não numérico, com a sobreposição das figuras.

Por outro lado, o fato de as duas figuras terem mesmos comprimentos e mesmas alturas considerando o enquadramento a partir de um retângulo tomado como referência (Figura 76), não é suficiente para garantir que tenham as mesmas áreas, considerando a função linear: $A(x,y) = x.y$ para figuras não retangulares, o que exige daqueles que fizeram uso da fórmula para o cálculo da área de figuras retangulares novas adaptações.

5.2.1.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 2 da sondagem

Na atividade 2 *item a*, dos 17 alunos que afirmaram ser a figura de Sérgio que gasta mais cartolina que a figura de Vandréia, apenas quatro deles utilizaram o conceito de área, acertando o item (Figura 78). Os demais utilizaram o conceito de perímetro associado ao teorema-em-ação falso «TA_{MContMA} – A figura de maior contorno tem maior área».

Figura 78 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5A5_Ativ2a)

ATIVIDADE 2

Dois alunos do 5º ano, Sérgio e Vandréia, fizeram com cartolina as figuras abaixo.



Figura de Sérgio



Figura de Vandréia

Depois cada um colou cordão no contorno da sua figura.

a) Na figura de qual dos dois alunos tem mais cartolina? Sérgio

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

usei o papel transparente e quando contornei a estrela em cima da estrela e vi que era maior

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Um procedimento percebido na análise do pós-teste de um aluno foi utilizado por cinco alunos na sondagem, com a mobilização de teoremas-em-ação falsos como «T_{MQLadosMA} – A figura com maior quantidade de lados tem a maior área» e

« $T_{MQVérticeMP}$ – A figura com maior quantidade de vértices tem o maior perímetro», como podem ser observados na Figura 79 a seguir.

Os alunos buscaram nos conceitos-em-ação, categorias do pensamento associadas à situação: objetos, propriedades, relações, etc. As figuras associadas a polígonos e as propriedades de nomeação de polígonos a partir da quantidade de lados, de vértices, foram os elementos selecionados e considerados importantes para as ações, assim como relações foram estabelecidas entre a quantidade de lados e as grandezas área e comprimento, para responder à situação proposta.

A conceituação orientou a conduta desses alunos que ainda estão em processo, não apenas das grandezas comprimento e área, mas com relação à articulação entre conceitos nos diferentes domínios da matemática. Na comparação do resultado das análises da sondagem com o pós-teste, observamos um avanço diante da redução da utilização do teorema-em-ação falso « $T_{MQLadosMA}$ – A figura com maior quantidade de lados tem a maior área».

Figura 79 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A2_Ativ2)

ATIVIDADE 2

Dois alunos do 5º ano, Sérgio e Vandréia, fizeram com cartolina as figuras abaixo.



Figura de Sérgio



Figura de Vandréia

Depois cada um colocou cordão no contorno da sua figura.

a) Na figura de qual dos dois alunos tem mais cartolina? O Sérgio

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

Eu usei o barbante e fui contando

b) Qual dos dois alunos gastou mais cordão? O Vandréia

Explique sua opinião e indique que materiais usou:

Se usei o lápis e fui contando as extremidades

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A escolha das figuras nessa atividade, como justificado na análise *a priori*, pode ter contribuído para a utilização desses procedimentos, se considerarmos que as figuras poligonais não convexas, quando presentes nos LD sem o apoio das malhas, apresentam-se no domínio da geometria. Na continuidade das nossas análises, vamos mostrar que no ensino de área e perímetro não foram abordadas figuras poligonais não convexas.

5.2.1.3 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 3 da sondagem

Nas respostas aos *itens a* e *b* da atividade 3, que abordam a comparação de áreas de figuras construídas com todas as peças do Tangram, sete alunos acertaram os dois *itens*, mobilizando os teoremas-em-ação verdadeiros «TA_{Eq} –

Duas superfícies equidecompostas (compostas de partes duas a duas congruentes) têm áreas iguais», e « $TA_{Dec-rec}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área».

Figura 80 – Situação de comparação de áreas com solução correta associada à decomposição – composição (extrato de protocolo S_5A6_Ativ3a e b)

Alunos de uma turma de 5º ano fizeram afirmações sobre a área e o perímetro das figuras de Rosa e Pedro. Você concorda com eles? **Explique sua resposta.**

André: A área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro.

Concordo () Discordo (X)

Por os dois usarem as este peças do tangram, mas de formas diferentes.

Rita: As áreas da figura de Rosa e da figura de Pedro são iguais.

Concordo (X) Discordo ()

Eles usaram as mesmas peças. Cor 17

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A justificativa da aluna 5A6 está apoiada no teorema-em-ação $TA_{Dec-rec}$.

Dentre os oito alunos que erram os *itens a* e *b* dessa atividade, sete associam a ideia de área à figura que “ocupa mais espaço” ou que “está mais espalhada”, como observado por Souza (2004), conforme exemplo de protocolo na Figura 81, a seguir.

Figura 81 – Situação de áreas com solução incorreta associada à figura (extrato de protocolo S_5B12_Ativ3a e b)

André: A área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro.

Concordo (X) Discordo ()

A figura de Pedro está de um jeito que se olhando não se percebe que ela está com uma área maior. Depois eu usei a malha quadriculada e confirmei.

Rita: As áreas da figura de Rosa e da figura de Pedro são iguais.

Concordo () Discordo (X)

A área de Pedro é maior

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A primeira observação da aluna 5B12 foi visual, ao perceber que a figura de Pedro tem maior área. Mas, ao dizer “depois eu usei a malha quadriculada e confirmei”, a aluna comprova a percepção operada mentalmente, desconsiderando a

quantidade de quadradinhos que cabe dentro de cada uma das figuras, mobilizando o teorema-em-ação falso «TA_{Alt} – A superfície ‘mais alta’ (‘mais larga’ ou ‘mais espalhada’) tem maior área».

Um outro aluno que errou os *itens a* e *b* e concordou com a afirmação de que a área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro, justificou suas respostas associando as áreas das figuras aos seus comprimentos, largura e altura, de acordo com o teorema-em-ação falso TA_{Alt}, como podemos observar no extrato do protocolo na Figura 82, a seguir.

Figura 82 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta associada às projeções da figura (extrato de protocolo S_5B1_Ativ3a e b)

André: A área da figura de Rosa é menor que a área da figura de Pedro.	
Concordo (X)	Discordo ()
A de rosa é maior na largura mas a de Pedro é maior no comprimento	
Rita: As áreas da figura de Rosa e da figura de Pedro são iguais.	
Concordo ()	Discordo (X)
Uma é maior em largura e a outra em comprimento	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Para os *itens c* e *d* da atividade 3 que tratam da comparação de perímetros, dentre os alunos que acertam os itens, apenas um aluno justifica com o teorema-em-ação verdadeiro «T_{MContMP} – A figura de maior contorno tem o maior perímetro», conforme protocolo a seguir.

Figura 83 – Situação de comparação de perímetros com solução correta associada ao maior contorno (extrato de protocolo S_5A3_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo ()	Discordo (X)
porque na de Pedro mais de um lado dos lados são retos.	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo (X)	Discordo ()
Porque os lados da figura de Pedro tem mais lados expostos.	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno S5A3 estabeleceu uma relação correta ao observar as peças e que mais de um lado das peças do Tangram compõe o contorno da figura de Pedro e, conseqüentemente, aumenta o perímetro dela.

Dentre as 18 respostas consideradas parcialmente corretas para um dos dois itens, sendo dez para o *item c* e oito para o *item d*, ou seja, esses alunos entenderam que os perímetros são diferentes: cinco apenas assinalaram a discordância sem apresentar justificativas; três alunos repetiram na justificativa a diferença, sem mais elementos para a nossa análise; três alunos estavam apoiados no teorema-em-ação falso « TA_{VAP} – A área e o perímetro variam no mesmo sentido» (Figura 84); e sete associaram o perímetro à diferença entre as figuras.

A interferência das figuras representadas aparece nas justificativas, inclusive porque alguns alunos consideraram que a figura de Pedro, representada pelo formato de um gato, não pode ser considerada uma figura geométrica, conforme apresentamos na Figura 85.

Figura 84 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada à variação das áreas (extrato de protocolo S_5B12_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo ()	Discordo (X)
Como a área de Pedro é maior o perímetro também é	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo (X)	Discordo ()
Está certo já que a área de Pedro é maior e o perímetro também.	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 5B12 responde corretamente aos *itens c* e *d* por discordar da afirmação de Joana e concordar com a afirmação de Luiz. No entanto, a justificativa nos mostra a incompreensão da aluna quanto à dissociação entre os conceitos de área e perímetro ao tomar como verdade o teorema-em-ação falso TA_{mAp} .

No protocolo a seguir, temos outro aluno que acerta parcialmente aos dois itens, por ter concordado com as afirmações, mas a sua justificativa está associada às figuras.

Figura 85 – Situação de comparação de perímetros com acerto parcial associada às figuras (extrato de protocolo S_5A10_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo ()	Discordo (X)
Não, o quadrado tem certa centímetros por lado, o gato não, pois ele não tem lados como o de Rosa	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo (X)	Discordo ()
Ela tem um perímetro menor pois, como eu tinha dito, o gato não tem certo comprimento por lados, o quadrado sim	

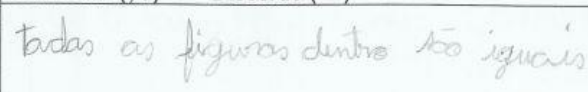
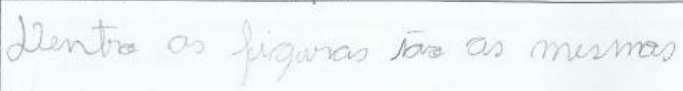
Fonte: Acervo da autora, 2018.

A compreensão do aluno 5A10 está associada ao tipo de figura. Para esse aluno, o quadrado, por ser uma figura geométrica, tem lados que podem estar relacionados a determinados comprimentos e a unidades de medidas convencionais como o centímetro. Já a figura de Pedro, que está associada à ideia de um gato, não é considerada por ele como uma figura geométrica, que ora não tem lados, ora tem lados, mas sem comprimentos. Levantamos a hipótese de que a ausência de atividades com figuras convexas pode ter levado o aluno a essa incerteza.

A dificuldade em perceber relações entre diferentes figuras também esteve presente no pós-teste, o que nos sugere observar nos LD e nas aulas observadas a presença de atividades com o Tangram, que propiciam a articulação e a exploração de conceitos que permeiam os domínios da geometria e das grandezas e medidas.

Como procedimento errôneo, seis alunos consideraram que o perímetro da figura de Rosa é igual ao perímetro da figura de Pedro, por entenderem que, se duas figuras possuem mesma área, então possuem o mesmo perímetro (Figura 86), que pode ser representado pelo teorema-em-ação falso «TA_{mAMP} – Figuras com áreas iguais têm perímetros iguais».

Figura 86 – Situação de comparação de perímetros com solução incorreta associada ao conceito de área (extrato de protocolo S_5B2_Ativ3c e d)

Joana: Os perímetros das figuras de Rosa e de Pedro são iguais.	
Concordo (X)	Discordo ()
	
Luiz: O perímetro da figura de Rosa é menor que o perímetro da figura de Pedro.	
Concordo ()	Discordo (X)
	

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Ao compararmos os resultados do pós-teste com a sondagem para esse bloco de atividades, constatamos que, mesmo com alguns avanços, dificuldades apresentadas no 5º ano persistem no início do 7º ano, confirmando indicações das pesquisas (Cap. 2, item 2.1.2) como a não dissociação entre área e perímetro, a persistência na utilização do quadro numérico, a ausência de conhecimento de algumas propriedades de figuras e a compreensão das ações de decomposição e composição de figuras.

Entendemos ser fundamental para o professor compreender quais os conhecimentos mobilizados pelos alunos, o que ajudará na retomada dos conceitos trabalhados, seja enquanto revisão, seja na introdução de um novo conhecimento, segundo Larguier (2009). Não menos importante será para os alunos compreenderem a forma operatória utilizada em situação de resolução, o que os ajudará na construção da forma predicativa das suas respostas e, consequentemente, na construção conceitual (VERGNAUD, 2007).

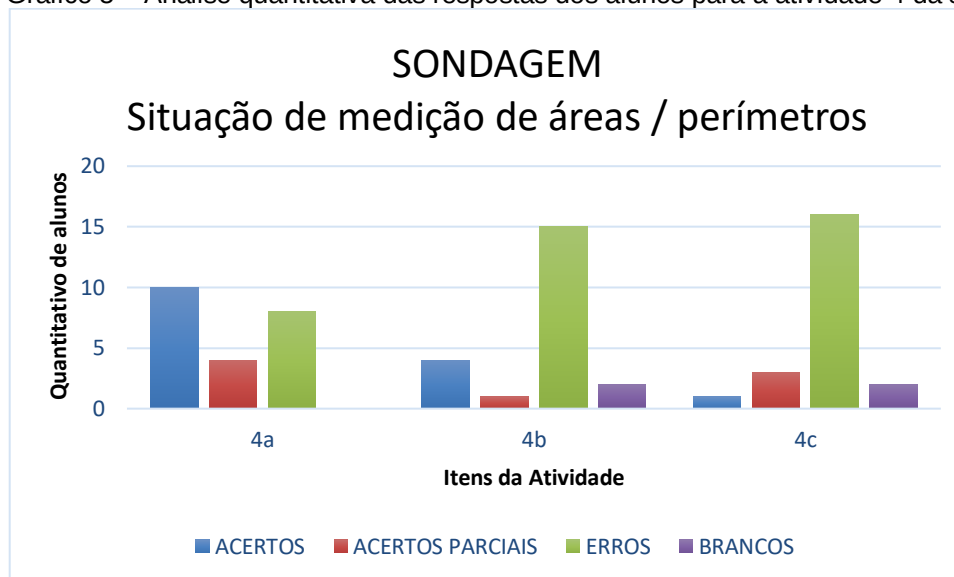
5.2.2 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição de áreas com unidades de medidas convencionais na sondagem

Esse bloco, na sondagem, foi composto pela atividade 4, que apresenta três itens associados a situações cotidianas de medição de áreas de figuras retangulares, com unidades de medidas convencionais.

A análise quantitativa das respostas dos alunos para essas atividades demonstra um desempenho inferior a 50% em todos os itens. O *item a* apresentou

melhor desempenho por ser uma situação sempre presente no LD do 5º ano⁶², abordada na inter-relação entre os domínios de números e operações e das grandezas e medidas, em temas como multiplicação de números naturais e sistema monetário.

Gráfico 5 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para a atividade 4 da sondagem



Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

No caso dos *itens b e c*, por estarem presentes a partir do 6º ano do EF⁶³, o índice de acertos já era esperado, mas nosso objetivo era verificar quais esquemas seriam mobilizados pelos alunos, a partir do *item a*, e ampliados para o *item c*, por envolver uma situação de decomposição de figuras, tema em geral abordado no domínio das grandezas e medidas a partir do 6º ano.

Na atividade 4, *item a*, 10 alunos deram respostas corretas, na sua maioria com as representações das operações com o cálculo da área da parede, e, em seguida, o valor a ser pago considerando o preço cobrado por metro quadrado. Sete alunos mobilizaram em sua resolução o teorema-em-ação verdadeiro « TA_{figRet} – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura».

Apenas três alunos fizeram a representação da parede por meio de um retângulo e realizaram a contagem. O esquema mobilizado pela aluna 5A1 (Figura 87) foi a compreensão da parede como uma superfície retangular, representada pelo esboço de um retângulo, com suas respectivas dimensões sinalizadas pela divisão

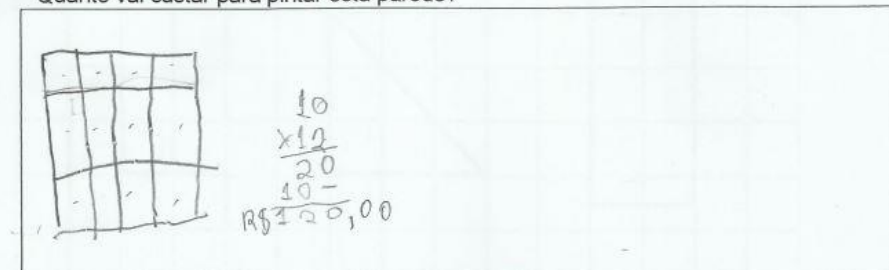
⁶² Como será abordado no capítulo seguinte.

⁶³ Como veremos no capítulo seguinte.

do retângulo em quadradinhos. A contagem está representada com pontinhos no interior de cada quadradinho, associado ao teorema-em-ação verdadeiro «TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

Figura 87 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A1_Ativ4a)

a) Para pintar uma parede de uma sala 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta. Quanto vai custar para pintar esta parede?



Fonte: Acervo da autora, 2018.

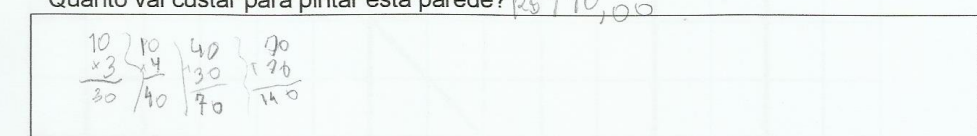
A informação do valor do metro quadrado também foi compreendida pela aluna 5A1, como observado na operação de multiplicação por 10 da quantidade de metros quadrados encontrada. A aluna também utiliza a representação correta da unidade de medida do sistema monetário.

Dentre os oito alunos que erraram esse *item a*, um aluno realizou a adição de todos os números presentes no enunciado; três alunos realizam a multiplicação mentalmente de dois números, um dos comprimentos e o valor monetário, e registraram apenas a resposta; e três alunos utilizam o conceito de perímetro (Figura 88).

A aluna 5A11 utilizou apenas os valores numéricos, apesar de demonstrar implicitamente nas suas ações a compreensão do conceito de retângulo e de perímetro.

Figura 88 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A11_Ativ4a)

a) Para pintar uma parede de uma sala 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta. Quanto vai custar para pintar esta parede? R\$ 140,00



Fonte: Acervo da autora, 2018.

A utilização do conceito-em-ação do perímetro não é pertinente para esse *item*, embora a aluna 5A11 tenha utilizado o teorema-em-ação verdadeiro «TA_{ScompP} – A soma de todos os comprimentos dos lados de um polígono determina o seu perímetro» para calcular o valor total a ser pago, nesse caso pelo metro linear. A incompreensão pode estar associada aos termos utilizados no problema, “altura” e “comprimento”, sempre associados à grandeza comprimento. A grandeza área não foi reconhecida pela aluna 5A11 por meio dos termos “parede” e “metros quadrados”, o que mostra a necessidade de compreensão da área enquanto uma grandeza bidimensional, expressa pelo produto de dois comprimentos.

Os quatro alunos que acertaram parcialmente o *item* a utilizaram os conceitos de área e perímetro e os mesmos esquemas de resolução, como apresentamos na Figura 89. Inicialmente, reconheceram a região retangular da parede e determinaram a área, mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro TA_{AfigRet}.

Figura 89 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo S_5B12_Ativ4a)

a) Para pintar uma parede de uma sala 3 m de altura por 4 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 10,00 por metro quadrado, incluindo a tinta.
Quanto vai custar para pintar esta parede? R\$ 480,00

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times 10 \\ \hline 480 \end{array}$$

R\$ 480,00

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Na sequência, passaram a relacionar o valor numérico encontrado para a área ao conceito de perímetro, e consideraram esse valor correspondente a um dos lados da parede, mobilizando o teorema-em-ação TA_{ScompA} falso. Apesar de esses quatro alunos terem estabelecido relações e regras de ações diferentes das utilizadas pelos alunos que erraram esse *item*, como exemplificado no protocolo da Figura 88, inferimos serem dificuldades da mesma ordem.

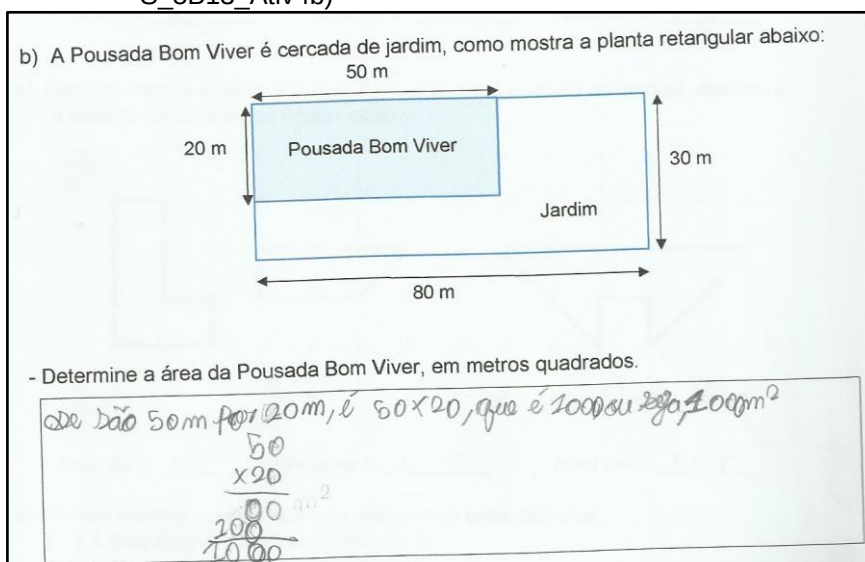
Com a análise do pós-teste e da sondagem, percebemos que as dificuldades relacionadas anteriormente a esse *item*, existentes ao final do 5º ano, permanecem no início do 7º ano do EF.

Trazemos aqui uma outra preocupação quanto à ausência da figura nesse *item* a enquanto mais uma variável a ser considerada. As representações e procedimentos a serem utilizados e os conceitos que o aluno dispõe reforçam a importância da construção de um campo conceitual (VERGNAUD, 1990).

Nessa atividade no *item b*, agora com a presença da figura, o aluno deverá associar os termos altura e comprimento à ideia de uma figura retangular. Dos 22 alunos, apenas quatro acertaram esse *item*, e dois deixaram a atividade em branco.

O protocolo da Figura 90, a seguir, apresenta um procedimento correto, quando o aluno mobiliza o «TA_{AfigRet} – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura».

Figura 90 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B13_Ativ4b)

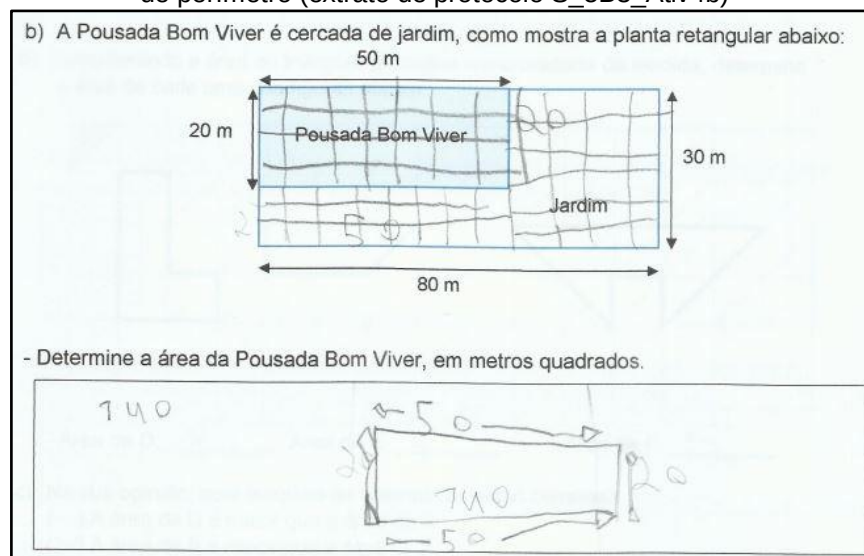


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Todos os alunos que acertaram utilizaram as unidades de medidas associadas à área corretamente, com a resposta composta pelo par (número, unidade de medida).

Dentre os 15 alunos que erraram o *item b*, nove utilizaram o conceito de perímetro (Figura 91 e Figura 92); dois alunos somaram todas medidas fornecidas no problema; dois alunos somaram duas das medidas fornecidas; uma aluna calculou o perímetro utilizando a malha triangular (Figura 93); e um aluno indicou uma resposta numérica sem deixar justificativa.

Figura 91 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B3_Ativ4b)

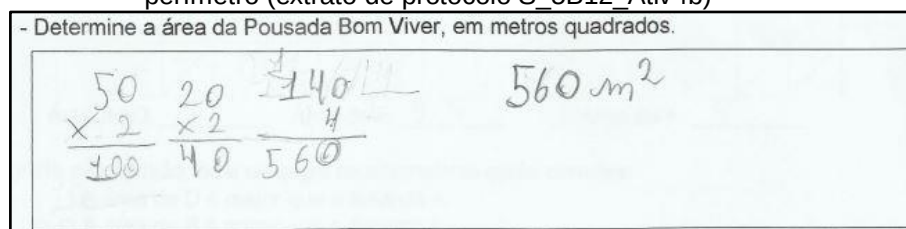


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Apesar de o aluno 5B3 ter quadriculado toda a região da Pousada, esse não estava associado a uma unidade de medida tomada como padrão, possível de estabelecer uma relação de proporcionalidade entre os comprimentos, considerando que 20 m foi associado a 4 quadradinhos e 50 m a 7 quadradinhos. Essa representação foi desconsiderada pelo aluno que fez um esboço da região e mobilizou o teorema-em-ação falso «TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área». Observamos também que as unidades de medida associadas tanto à grandeza comprimento quanto à grandeza área não foram utilizadas.

No próximo protocolo, trazemos também uma aluna que utiliza a relação conceitual do perímetro.

Figura 92 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B12_Ativ4b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

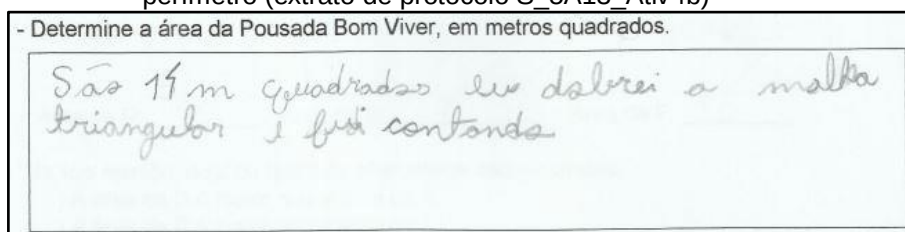
A regra de conduta adotada pela aluna 5B12 é inadequada, visto que, após determinar o valor de perímetro da Pousada, uma outra multiplicação por 4 é

realizada. Esse procedimento demonstra a incompreensão dos conceitos de perímetro e área, considerando que a área é determinada pela soma dos comprimentos dos lados da figura, mobilizando o teorema-em-ação falso TA_{ScompA} .

Esse erro persistente também foi apresentado pela aluna no item anterior (Figura 89), o que reforça a não compreensão da grandeza área enquanto uma grandeza bidimensional.

Apenas uma aluna utilizou recursos para resolver esse item, no caso a malha triangular, como apresentado no protocolo a seguir (Figura 93). No entanto, a conduta da aluna deixa visível o conceito envolvido de perímetro, ao adotar o lado do quadrinho da malha como unidade de medida e realizar a contagem, mobilizando o teorema-em-ação falso « TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área».

Figura 93 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A13_Ativ4b)

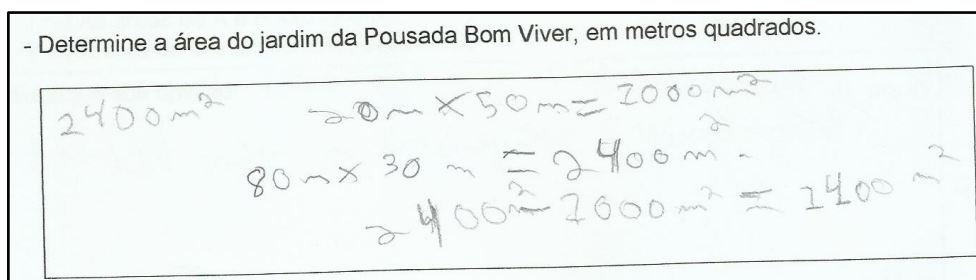


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Como observado na análise do pós-teste, esse item também apresentou um alto índice de erros, mostrando que a dificuldade existente ao final do 5º ano do EF permanece no início do 7º ano, com situações conhecidas dos alunos desde o final dos anos iniciais. Nas próximas análises do LD e das aulas observadas, buscaremos verificar se situações semelhantes a essa foram propostas aos alunos nos 6º anos do EF.

O item c da atividade 4 é acertado por apenas um aluno, que mobilizou o teorema-em-ação verdadeiro « TA_{figRet} – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura».

Figura 94 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A3_Ativ4c)

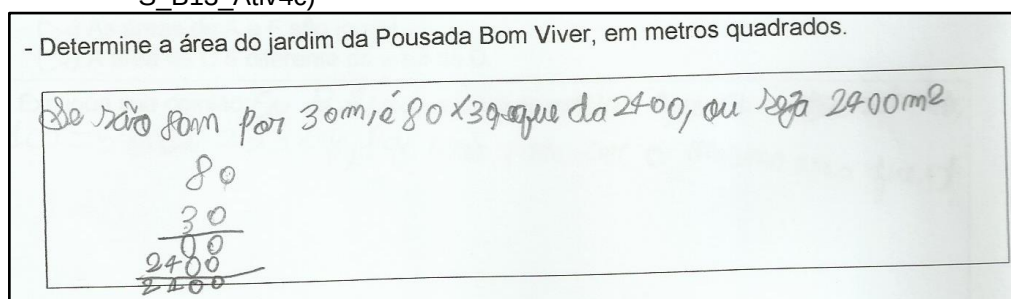


Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 5A3 domina as formas operatórias, inclusive com a representação das grandezas com o número associado às unidades de medida. Ele compreendeu que a situação envolve a subtração de áreas, determinando a área do jardim corretamente, o que demonstra o conhecimento do teorema-em-ação verdadeiro «TA_{AditA} – Se S e S' são superfícies quase disjuntas (que possuem no máximo pontos de fronteira em comum), então A (SUS') = A(S) + A(S')».

Os três alunos que acertaram parcialmente o *item b* relacionaram o conceito de área corretamente, como apresentado no protocolo da Figura 95, a seguir. No entanto, compreendem a área do jardim como a área total do terreno.

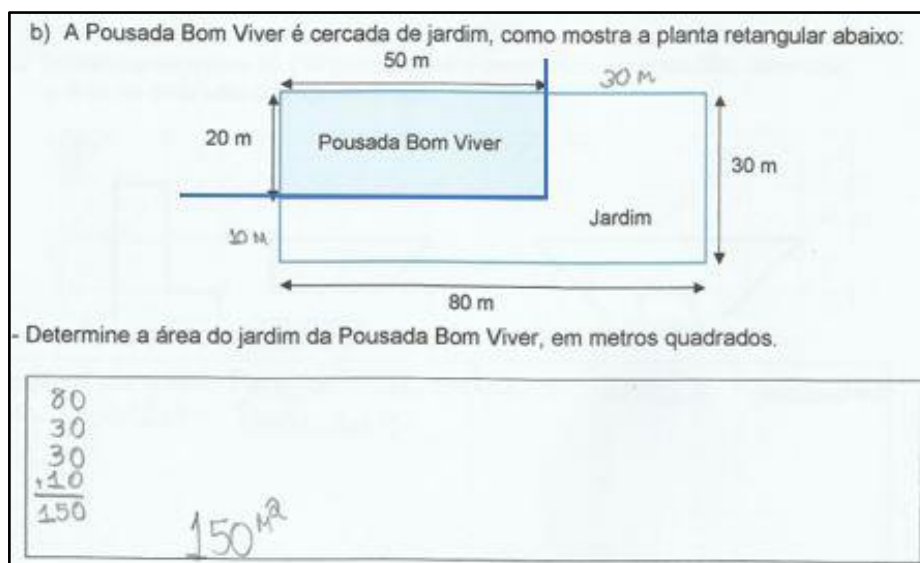
Figura 95 – Situação de medição de área com acerto parcial (extrato de protocolo S_B13_Ativ4c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Dentre os 16 alunos que erraram esse item, 11 alunos utilizaram o conceito de perímetro e, desses, sete alunos somaram algumas das medidas fornecidas (Figura 96 e Figura 97). O conceito de área foi utilizado por três alunas (Figura 98), e dois alunos atribuíram um valor numérico sem justificativas.

Figura 96 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B7_Ativ4c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

No protocolo da aluna 5B7, a imagem do objeto matemático retângulo, uma figura com quatro lados, paralelos dois a dois, e quatro comprimentos, é o conceito pertinente para ela. Existe a compreensão da área da região do jardim enquanto resultado da subtração da área da Pousada da área total (destaque em azul), mas a imagem da linha poligonal formada pelos comprimentos 10 m e 30 m (registro da aluna), juntamente com os outros dois lados do jardim indicados na figura, são tomados enquanto os quatro lados do retângulo.

Com as informações, a aluna buscou reorganizar o seu pensamento, sua ação, em função de obter um retângulo para determinar a área da região do jardim, o que levou a aluna a mobilizar o teorema-em-ação falso « TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área» e ao resultado numérico associou a unidade de medida metros quadrados. A notação da unidade de medida metros quadrados está situada enquanto uma potência, talvez associada ao algarismo dois que representa a dimensão da unidade de medida.

Resolução semelhante também é apresentada na Figura 97, a seguir, a partir da adição de algumas medidas fornecidas na atividade, ao considerar alguns comprimentos do jardim, desconsiderando os comprimentos que estão na região de fronteira entre a Pousada e o Jardim.

Figura 97 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5B4_Ativ4c)

- Determine a área do jardim da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

$$\begin{array}{r} 80 \\ 60 \\ 50 \\ + 20 \\ \hline 210 \text{ m} \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O conceito de perímetro é o considerado pelo aluno 5B4, que, embora tenha errado na adição de todos os comprimentos do jardim, apresentou também a sua resposta com a unidade de medida metros quadrados. O que diferencia a sua solução das demais é o valor numérico encontrado de 2,10. Fazemos a hipótese que, apesar de operar com números naturais, a resposta dada sofreu influência das relações de mudança de unidade do sistema métrico decimal e o aluno associou metro quadrado às regras do sistema de numeração decimal com a divisão por cem.

A aluna 5A11 manteve o mesmo princípio utilizado pelos alunos, conforme apresentado nos protocolos anteriores, com a determinação de alguns comprimentos, mas utilizou o conceito de área para resolver a atividade, como podemos observar no protocolo da Figura 98, a seguir.

Figura 98 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à fórmula da área de retângulo (extrato de protocolo S_5A11_Ativ4c)

b) A Pousada Bom Viver é cercada de jardim, como na planta retangular abaixo:

- Determine a área do jardim da Pousada Bom Viver, em metros quadrados.

4.900 m²

$$\begin{array}{r} 80 \text{ m} \\ 30 \text{ m} \\ 30 \text{ m} \\ 10 \text{ m} \\ \hline 2400 \\ + 300 \\ \hline 2700 \end{array}$$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna reconheceu as medidas de comprimentos de dois lados do jardim e determinou as diferenças dos outros dois lados (destaques na figura), $(80 - 50) \text{ m}$ igual a 30 m e $(30 - 20) \text{ m} = 10 \text{ m}$. No entanto, a ideia está associada à construção

de um retângulo, e, para fazer uso do teorema-em-ação verdadeiro « $TA_{AfigRet}$ – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura», a aluna 5A11 considerou a região do jardim enquanto um retângulo. A aluna também errou na operação de multiplicação.

A base da região está indicada na figura como 80 m e a altura foi determinada pela aluna como a operação dos demais comprimentos considerados $(30 + 30 + 10)$ m = 70 m (destaque com seta vermelha). O teorema-em-ação $TA_{AfigRet}$ foi utilizado e a área determinada, com a unidade de medida metros quadrados.

A imagem do objeto matemático retângulo para a aluna é de dois comprimentos e o ângulo reto dos lados que têm esses comprimentos, condição necessária para que a ação seja colocada em prática com o teorema-em-ação verdadeiro $TA_{AfigRet}$. Fica visível que a aluna não reconheceu a figura poligonal do jardim como possibilidade de ser decomposta em dois retângulos.

Observamos que as dificuldades apresentadas nesse item da sondagem ainda persistiram no pós-teste, o que nos leva a buscar mais elementos quanto ao que foi vivenciado no 6º ano, com relação à decomposição de figuras.

5.2.3 Análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos em situações de medição e de comparação de áreas com unidades de medidas não convencionais na sondagem

As situações de medição e comparação de áreas e de perímetros contam com o suporte de recursos como a malha quadriculada e a malha triangular.

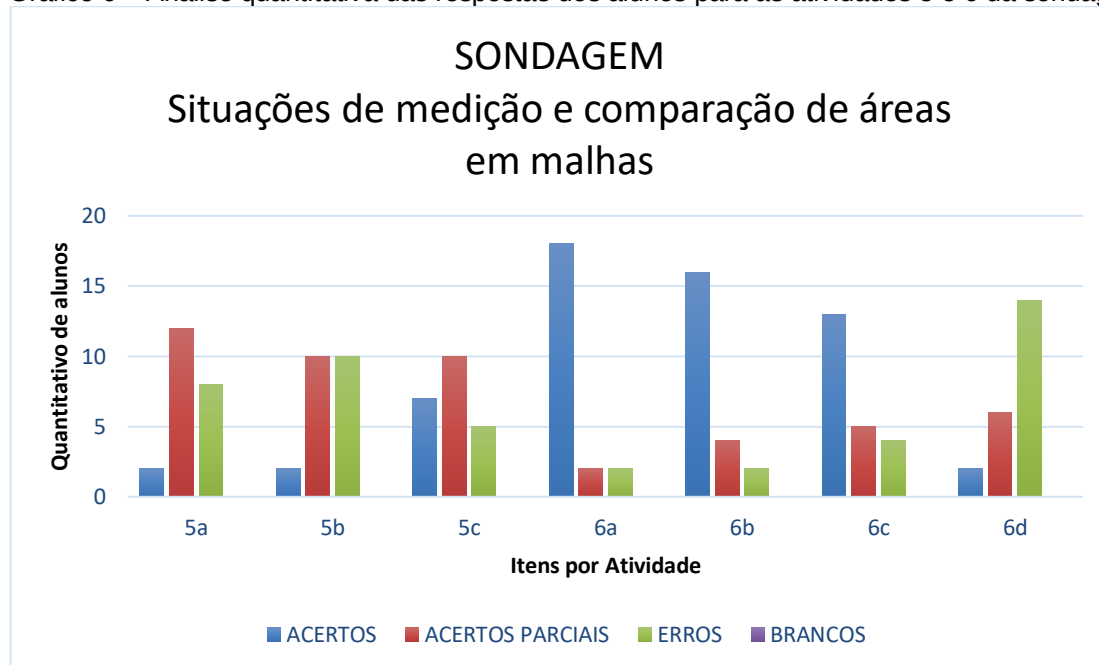
Na análise quantitativa das respostas dos alunos a essas atividades (Gráfico 6), observamos que os maiores índices de acerto ocorreram nos *itens a, b e c* da atividade 6, associados à medição de áreas com unidades de medidas formadas por quadradinhos inteiros ou por metade de quadradinho.

Dentre as duas atividades, o item que teve maior número de acertos parciais foi o *item a* da atividade 5, visto que a maioria dos alunos indicou apenas a medida da área das figuras poligonais sem associar a unidade de medida. Já no *item b*, o baixo índice de respostas corretas pode ser reflexo do recurso, a malha triangular não isométrica.

Assim como no pós-teste, o maior índice de erro na sondagem esteve na atividade 6 *item d*, aproximadamente 63%, o que revela a dificuldade em aceitar a

possibilidade de expressar a medida da área de uma figura em certa unidade quando não é possível ladrilhar efetivamente a figura com a superfície unitária.

Gráfico 6 – Análise quantitativa das respostas dos alunos para as atividades 5 e 6 da sondagem

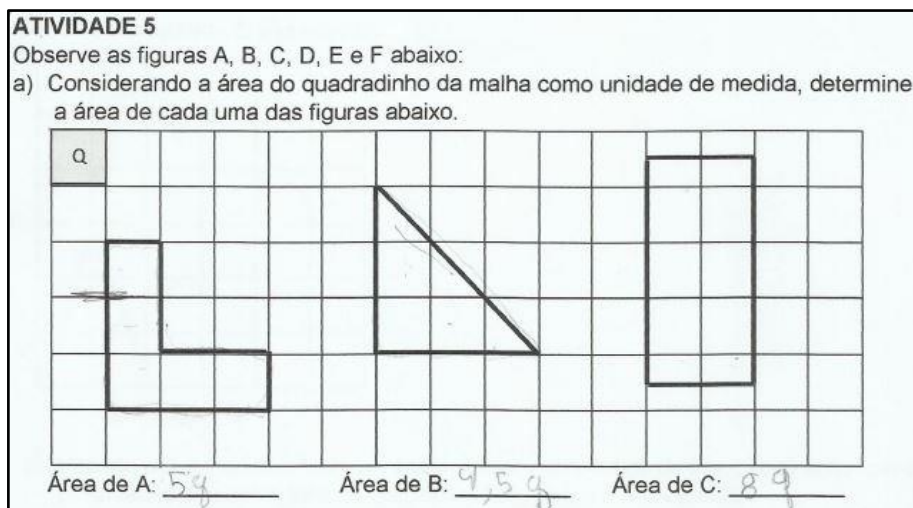


Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

5.2.3.1 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 5 da sondagem

No *Item a*, apenas dois alunos acertam as áreas das figuras solicitadas com a representação do par número, unidade de medida (Figura 99). Dentre os 12 alunos que acertaram parcialmente, nove deles não apresentaram as unidades de medida e três associaram o valor numérico à unidade de medida centímetro quadrado.

Figura 99 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5A3_Ativ5a)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

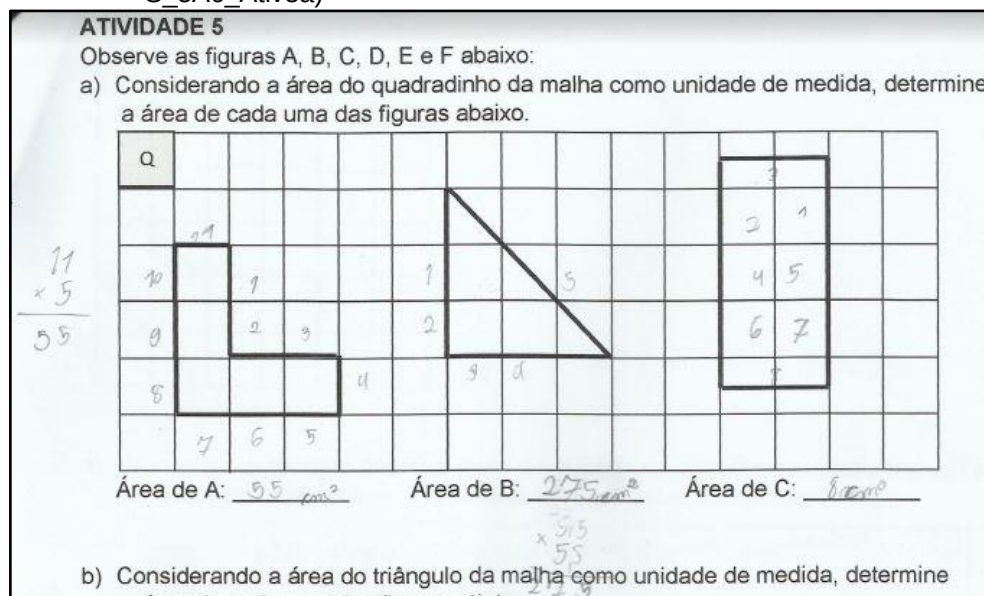
O aluno que acerta o *item a* reconheceu a unidade de medida de área quadradinho, assim como as metades de quadradinho representadas por um triângulo retângulo e um retângulo, e as relações de equivalências entre elas, mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro « T_{AContq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área».

Dos oito alunos que erraram o *item a*, cinco alunos erraram a contagem para duas das três figuras; um aluno considerou apenas os quadradinhos inteiros; uma aluna determinou a área a partir dos quadradinhos externos às figuras (Figura 100); e um aluno determinou a soma de ângulos internos às figuras (Figura 101).

A seguir, trazemos dois protocolos que apresentam erros nas suas soluções. O primeiro protocolo é da aluna 5A6 que utilizou diferentes estratégias de resolução a partir dos quadradinhos externos às figuras, para determinar a medida da área de cada uma das figuras do *item a*, conforme protocolo a seguir (Figura 100). E o segundo, do aluno 5A10, que utilizou o conceito de ângulo (Figura 101).

A área da figura A foi obtida a partir do produto entre a quantidade de quadradinhos externos à figura pela quantidade de quadradinhos internos. Para a figura B, a aluna manteve sua conduta, porém, diante da metade de quadradinho representada por triângulos, não considerou os quadradinhos externos a esses. E, internamente, considerou metade de quadradinho, ora equivalente a quadradinho, ora equivalente à metade de quadradinho, obtendo o número 5,5. Ao realizar a multiplicação, a aluna 5A6 não concluiu a operação.

Figura 100 – Situação de medição de área com solução incorreta (extrato de protocolo S_5A6_Ativ5a)

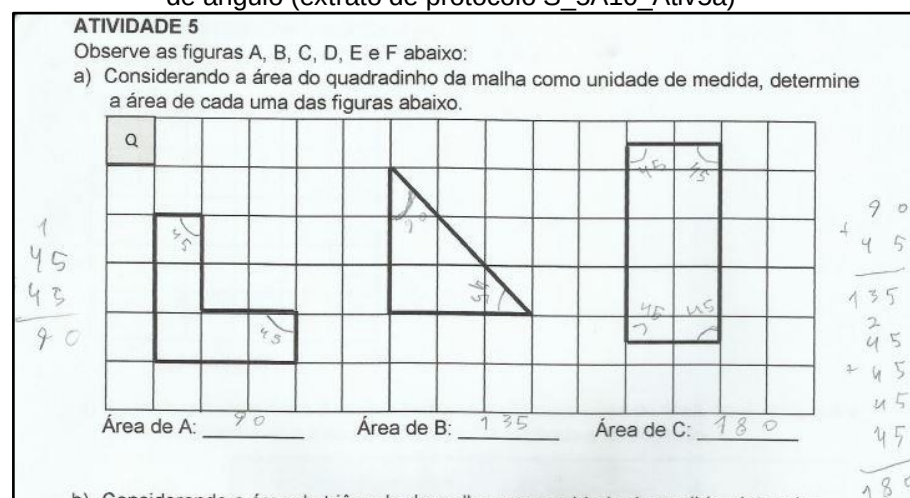


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Na figura C, a aluna 5A6 mudou a regra de conduta e determinou a área considerando o retângulo como metade de quadradinho e mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro T_{AContq} . Fazemos a hipótese que, nesse último caso, a mudança se deveu ao fato do reconhecimento pela aluna da figura retangular, sempre presente nos LD desde os anos iniciais.

Outro tipo de procedimento errôneo foi apresentado pelo aluno 5A10 ao associar o conceito de ângulo às figuras para determinar suas áreas.

Figura 101 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de ângulo (extrato de protocolo S_5A10_Ativ5a)

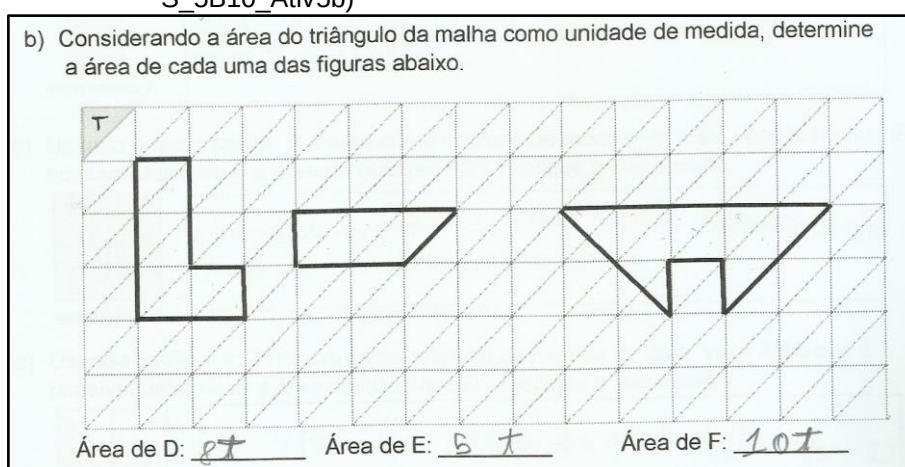


Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno escolheu alguns ângulos internos a cada figura e realizou a adição desses valores. Vale destacar que os ângulos não correspondem às medidas corretas. Levantamos a hipótese que o aluno pode ter associado ao conteúdo de ângulo que tenha sido vivenciado anteriormente em sala de aula, o que será objeto de verificação no capítulo referente à observação de aulas do 5º ano.

No *Item b*, apenas dois alunos acertaram as áreas das figuras solicitadas, em que consideraram a unidade de medida T, conforme protocolo a seguir (Figura 102).

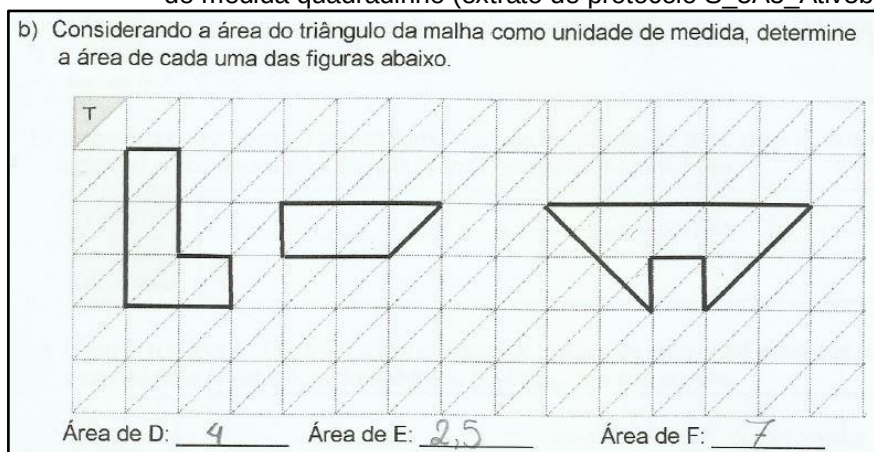
Figura 102 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B10_Ativ5b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Dentre os nove alunos que erram o *item b*, oito deles continuaram a determinar a área das figuras com a unidade de medida quadrado (Figura 103) e uma aluna determinou área a partir do perímetro (Figura 104).

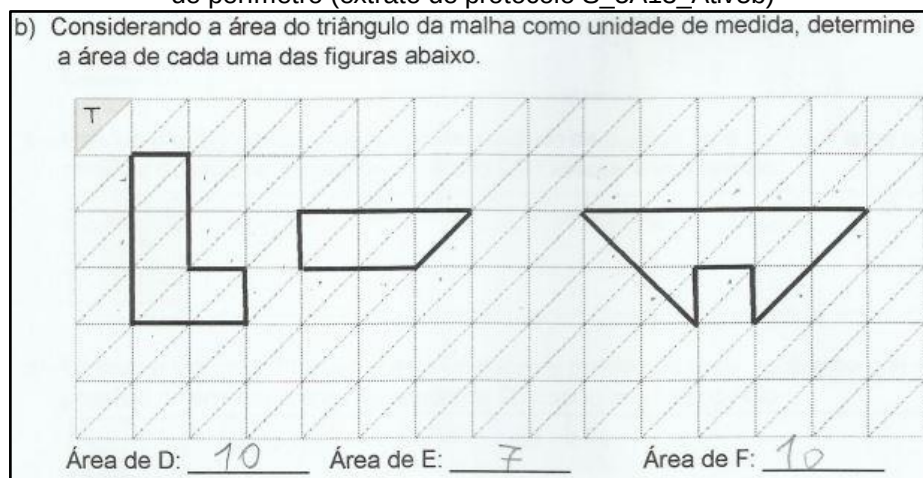
Figura 103 – Situação de medição de área com solução incorreta associada à unidade de medida quadradinho (extrato de protocolo S_5A5_Ativ5b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 5A5 considerou quadradinhos inteiros e metades de quadradinhos para a contagem da área das figuras D e E, mobilizando o teorema-em-ação verdadeiro « TA_{Contq} – A quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área». No entanto, para a figura F a aluna mudou a conduta utilizada para a figura E, e considerou metade de quadradinho, representado pelo triângulo T como equivalente a um quadradinho.

Figura 104 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao conceito de perímetro (extrato de protocolo S_5A13_Ativ5b)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

Esse outro protocolo apresenta o conceito de perímetro associado à determinação da área das figuras, que pode ser observado pelas marcas realizadas com a ponta do lápis, e considera o teorema-em-ação falso « TA_{Ldq} – O lado e a diagonal de um quadrado têm comprimentos iguais».

Observamos que a pouca oferta de malhas, além da quadriculada no sistema escolar, pode ser um fator desestabilizador para que os alunos enfrentem situações desse tipo.

No *item c* dessa atividade, apenas sete alunos conseguiram associar corretamente quais são as afirmações corretas, tendo em vista o item depender das comparações realizadas pelos alunos entre as áreas obtidas nos itens anteriores.

Exemplo de resposta correta nesse *item c* (Figura 105) é apresentado a seguir: o aluno B13 percebeu a relação entre as duas unidades de medidas apresentadas, realizou a representação correta dos pares (número, unidade de medida) e mobilizou o teorema-em-ação verdadeiro « $TE_{UmdMnumMA}$ – Escolhida uma unidade de medida, duas superfícies de mesma medida têm mesma área».

Figura 105 – Situação de comparação de áreas com solução correta (extrato de protocolo S_5B13_Ativ5c)

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

() A área de D é maior que a área de A.
☒ A área de B é maior que a área de E.
☒ As áreas de A e F são iguais.
☒ A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião: *A B é visivelmente maior que a E. De $2t=18$, $10t=54$. De $2t=18$, $8t$ não pode ser o mesmo área que $8t$*

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O maior índice de respostas a esse *item c* esteve associado ao quadro numérico, sem considerar as unidades de medidas preestabelecidas, nem a relação existente entre elas, num total de oito alunos entre os dez que acertaram parcialmente. Trazemos dois protocolos de alunos que acertaram parcialmente: um que realizou a comparação numérica (Figura 106) e que outro realizou a comparação visual das figuras (Figura 107).

Figura 106 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação numérica (extrato de protocolo S_5A4_Ativ5c)

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

() A área de D é maior que a área de A.
☐ A área de B é maior que a área de E.
☒ As áreas de A e F são iguais.
☒ A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião: *comparando a área*

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Apesar de ter assinalado duas alternativas corretas para o *item c*, o aluno 5A4 realizou comparações apenas considerando os valores numéricos obtidos, sem considerar as diferentes unidades de medida. Por exemplo, para a afirmação “A área de A e F são iguais”, o aluno considerou ser incorreta por ter registrado área de B = 4,5 e a área de E = 5, comparando, assim, apenas os valores numéricos, sem considerar as unidades de medidas associadas, quadradinho e triângulo, respectivamente.

O protocolo do aluno 5A14 é apresentado na íntegra (Figura 107) por ter sido um aluno que determinou as áreas das figuras nos *itens a e b* associados à unidade de medida quadrado e, além disso, considerado apenas os quadrados inteiros.

Figura 107 – Situação de comparação de áreas com acerto parcial associado à comparação visual das figuras (extrato de protocolo S_5A14_Ativ5)

ATIVIDADE 5
Observe as figuras A, B, C, D, E e F abaixo:

a) Considerando a área do quadrado da malha como unidade de medida, determine a área de cada uma das figuras abaixo.

Área de A: 5 Área de B: 3 Área de C: 6

b) Considerando a área do triângulo da malha como unidade de medida, determine a área de cada uma das figuras abaixo.

Área de D: 4 Área de E: 2 Área de F: 3

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

☒ A área de D é maior que a área de A.
☒ A área de B é maior que a área de E.
☐ As áreas de A e F são iguais.
☒ A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião: olhando para as figuras

Fonte: Acervo da autora, 2018.

Para o *item c*, ao assinalar três afirmações, o aluno 5A14 nos deixa com algumas incertezas quanto à sua observação visual das figuras, como afirma.

Concordamos que visualmente é possível responder à segunda e à quarta afirmação assinalada pelo aluno. Porém, para a primeira afirmação: “A área de D é maior que a área de A”, não conseguimos estabelecer qual o critério usado pelo

aluno. De fato, não foi numérico diante dos resultados obtidos para as áreas de A e D. Visualmente, é possível perceber que a figura D tem um menor número de quadradinhos que a figura A. Caso tenha realizado a comparação pelos comprimentos, as duas figuras possuem a mesma altura, e a figura D tem o comprimento da base menor que o da figura A.

Dentre os cinco alunos que erraram o *item c* dessa atividade, um aluno determinou corretamente o valor numérico da área de cada uma das figuras, tanto para a malha quadriculada quanto para a malha triangular, embora associado a unidade metro quadrado (Figura 108).

Figura 108 – Situação de comparação de áreas com solução incorreta (extrato de protocolo S_5B6_Ativ5c)

c) Na sua opinião, qual ou quais as alternativas estão corretas:

☒ A área de D é maior que a área de A.

☐ A área de B é maior que a área de E.

☐ As áreas de A e F são iguais.

☐ A área de C é diferente da área de D.

Explique sua opinião:

A área D é 8 m² e a área A é 5 m².

Fonte: Acervo da autora, 2018.

A única alternativa que o aluno considera verdadeira tem a sua justificativa associada ao quadro numérico, o que demonstra, ao responder a esse item, a incompreensão em estabelecer relações de equivalência entre unidades de medidas diferentes e a necessidade de recorrer a uma unidade de medida convencional.

Esses dois extratos de protocolos nos levam a observar, mais uma vez, a predominância do quadro numérico e, por consequência, a desarticulação com o quadro geométrico e um esquecimento do quadro das grandezas.

5.2.3.2 Conhecimentos mobilizados pelos alunos na atividade 6 da sondagem

Nessa atividade, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades com mais de 70% de acerto nos *itens a* e *b*, e apenas quatro alunos erram os dois *itens*. O procedimento correto utilizado é a verificação de quantos quadradinhos A e B para cada um dos *itens*, respectivamente, são necessários para recobrir o quadrado Q, associado ao teorema-em-ação verdadeiro « T_{AContq} – A quantidade de quadradinhos

necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida de sua área» ou « T_{FAq} – A área de um quadrado pode ser obtida pela fórmula $Q=l \times l$ ».

Figura 109 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B4_Ativ6a e b)

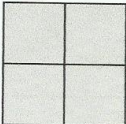
a) Usando o quadradinho A abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



quadradinho A

Sim. É só você contar quantos quadradinhos tem no quadrado Q $\rightarrow 36$

b) Usando o quadradinho B abaixo como unidade de medida de área, você acha que é possível determinar a área do quadrado Q? Explique a sua opinião.



quadradinho B

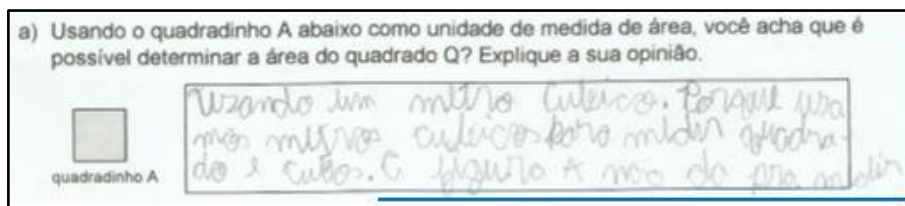
Sim. É só você contar de quatro em quatro $\rightarrow 9$

Fonte: Acervo da autora, 2018.

O extrato de protocolo do aluno 5B4 é um exemplo da mobilização do teorema-em-ação verdadeiro T_{AContq} para responder aos *itens*, como também percebeu a relação de proporcionalidade entre as duas unidades de medidas com a justificativa dada no *item b*, ao afirmar que, para o quadradinho B: “E só você contar de quatro em quatro”, fazendo uso de outro teorema-em-ação verdadeiro, « T_{AMAUmd} – A uma mesma superfície podem corresponder números diferentes de acordo com a unidade de medida escolhida, mas a área não se altera».

Dos dois erros apresentados no *item a*, um aluno afirma apenas não ser possível medir e na entrevista repete essa informação sem mais justificativas. O outro aluno (Figura 110) afirmou não ser possível recobrir porque deveria usar “metro cúbico”, e mesmo na entrevista (destaque em azul) manteve essa afirmação, mostrando-nos a importância de propor situações que envolvam a visualização de objetos e as relações interdomínios, da geometria e das grandezas e medidas (BELLEMAIN, BRONNER; LARGUIER, 2017).

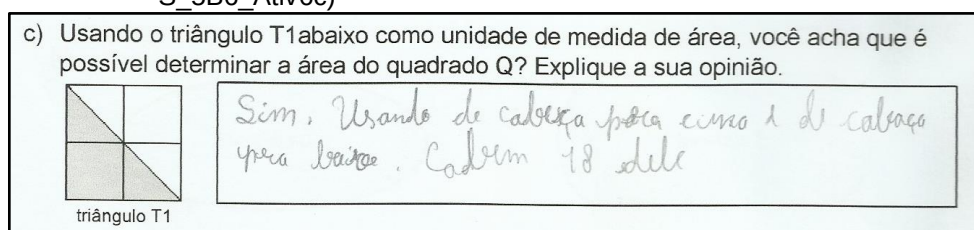
Figura 110 – Situação de medição de área com solução incorreta associada ao metro cúbico (extrato de protocolo S_5A2_Ativ6a)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

No item c, 13 alunos acertaram a questão e quatro erraram. Dentre os que acertaram, eles conseguiram perceber a possibilidade de ladrilhar a região quadrada Q com a superfície unitária T1, e, desses, cinco alunos perceberam que as propriedades das figuras podiam ser mantidas ao realizar uma rotação (Figura 111), e oito alunos observaram a relação de proporcionalidade entre as superfícies unitárias quadradinho B e triângulo T1 (Figura 112).

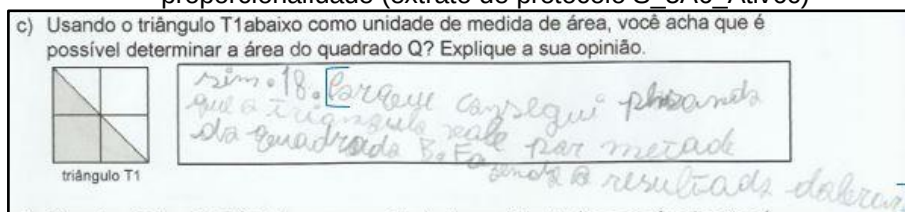
Figura 111 – Situação de medição de área com solução correta (extrato de protocolo S_5B6_Ativ6c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

A possibilidade de rotação da superfície unitária T1 é percebida pelo aluno 5B6 e expressa na sua justificativa, o que demonstra a mobilização do teorema-emoção verdadeiro « TA_{som} – Dadas uma isometria F e uma superfície S, $A(F(S)) = A(S)$ ».

Figura 112 – Situação de medição de área com solução correta associada à proporcionalidade (extrato de protocolo S_5A6_Ativ6c)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

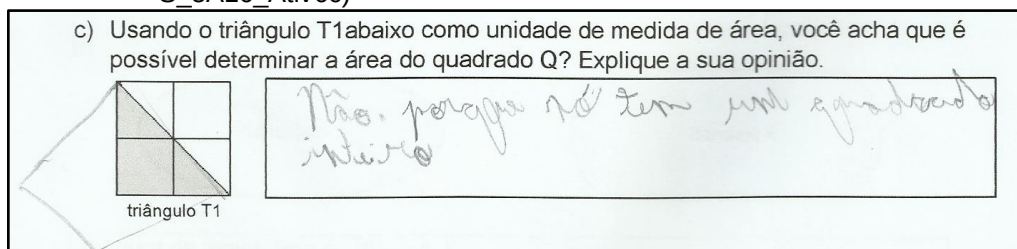
Na aplicação da sondagem, o aluno 5A6, ao responder a essa atividade, apenas indicou se era possível ou não determinar a área do quadrado Q com as

unidades que eram propostas – “sim” – e indicou a quantidade das peças – “18” – sem deixar mais elementos para a nossa análise.

Na entrevista individual, ao solicitarmos a explicação da sua resposta e o registro no protocolo (destaque em azul), o aluno deixou clara a sua compreensão sobre a proporcionalidade entre as unidade de medidas, o que demonstra a mobilização dos teoremas-em-ação verdadeiros «TA_{MAUmd} – A uma mesma superfície podem corresponder números diferentes de acordo com a unidade de medida escolhida, mas a área não se altera», e «TA_{MUmmN} – Quanto maior a superfície unitária, menor a quantidade de peças necessárias para recobrir uma superfície».

Dentre os alunos que afirmam não ser possível ladrilhar o quadrado Q com a superfície unitária T1 devido ao tipo de figura, observamos a dificuldade em perceber o quadrado formado com quatro quadradinhos enquanto uma figura equivalente a dois triângulos T1. Essa dificuldade pode estar associada às situações e aos tipos de tarefas que foram oportunizadas aos alunos durante o seu percurso escolar.

Figura 113 – Situação de medição de área com solução incorreta (extrato de protocolo S_5A16_Ativ6c)

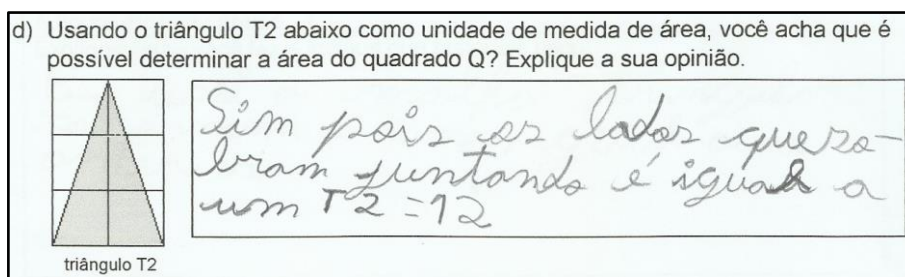


Fonte: Acervo da autora, 2018.

Observamos que o aluno 5A16 faz um esboço de um quadrado cujo lado tenha medida igual à medida da hipotenusa do triângulo T1, mas não há indicativos de avanço dessa ideia do aluno, nem com registros no quadrado Q da atividade, nem nos recursos disponibilizados, sobre os esquemas pensados por ele.

No *item d*, apenas seis alunos conseguem visualizar a possibilidade de decomposição da superfície unitária T2 (Figura 114), o que não acontece com a aluna 5A6 (Figura 115).

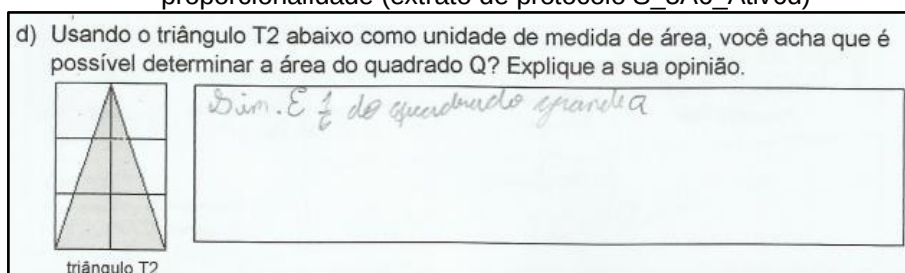
Figura 114 – Situação de medição de área com solução correta associada à decomposição (extrato de protocolo S_5A12_Ativ6d)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

O aluno 5A12 mobilizou os teoremas-em-ação verdadeiros «TA_{Iso}m – Dadas uma isometria F e uma superfície S, $A(F(S)) = A(S)$ », com a rotação e translação da superfície unitária T2, e «TA_{Dec-rec} – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área», para compor uma nova figura com metades do triângulo T2, apesar de ter usado o termo lado.

Figura 115 – Situação de medição de área com acerto parcial associado à relação de proporcionalidade (extrato de protocolo S_5A6_Ativ6d)



Fonte: Acervo da autora, 2018.

A aluna 5A6 percebeu a possibilidade de translação da superfície unitária T2 e estabeleceu uma relação de proporcionalidade entre a área do quadrado Q e a área do triângulo T2, sendo essa de um sexto. No entanto, desconsiderou o restante da região do quadrado Q, o que evidencia a impossibilidade de rotações e decomposição da unidade de medida considerada.

5.3 TEOREMAS-EM-AÇÃO

Diante das nossas observações a partir dos conhecimentos mobilizados pelos alunos, tanto na sondagem quanto no pós-teste, alguns teorema-em-ação eram esperados, como sinalizados na nossa análise *a priori*, e outros surgiram, o que nos mostra a importância de conhecê-los para melhor compreensão da construção

conceitual de área e perímetro. Trazemos a seguir, a relação dos teorema-em-ação⁶⁴ verdadeiros e falsos.

Quadro 8 – Teoremas-em-ação verdadeiros

TA_{AditA} – Se S e S' são superfícies quase disjuntas (que possuem no máximo pontos de fronteira em comum), então $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$.
TA_{Eq} – Duas superfícies equidecompostas (compostas de partes duas a duas congruentes) têm áreas iguais.
$TA_{AfigRet}$ – A área de uma figura retangular é obtida pelo produto do comprimento pela altura.
TA_{MAUmd} – A uma mesma superfície podem corresponder números diferentes de acordo com a unidade de medida escolhida, mas a área não se altera.
$TA_{Dec-rec}$ – A decomposição de uma figura seguida da composição de uma nova figura, sem perda nem sobreposição conserva a área.
TA_{Contq} – A área é a quantidade de quadradinhos necessários para recobrir uma superfície corresponde à medida da sua área.
$TA_{MContMP}$ – A figura de maior contorno tem o maior perímetro.
$TA_{EUmdMnumMA}$ – Escolhida uma unidade de medida, duas superfícies de mesma medida têm mesma área.
TA_{FAq} – A área de um quadrado pode ser obtida pela fórmula $Q = l \times l$.
TA_{Isom} – Dadas uma isometria F e uma superfície S , $A(F(S)) = A(S)$.
$TA_{AfigRet}$ – A área do retângulo é obtida pelo produto da sua base pela sua altura.
TA_{ScompP} – A soma de todos os comprimentos dos lados de um polígono determina seu perímetro.
$TA_{FigRetmPMA}$ – Dado um conjunto de figuras retangulares de mesmo perímetro, o retângulo de maior área será aquele cujos lados possuem a mesma medida, no caso, o quadrado.
$TA_{PContladoq}$ – A quantidade de lados de quadradinhos necessários para contornar uma superfície desenhada sobre a malha quadriculada corresponde à medida de seu perímetro, tomando o comprimento do lado do quadradinho como unidade.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

⁶⁴ Relação ampliada a partir da dissertação de Ferreira (2010), da oficina 3B realizada no I LADIMA (FERREIRA; SILVA; BELLEMAIN, 2016) e da análise realizada nos protocolos da sondagem e do pós-teste dos alunos da escola São Francisco.

Quadro 9 – Teoremas-em-ação falsos

TA_{VAP} – A área e o perímetro de duas superfícies variam no mesmo sentido.
TA_{Ocup} – Dadas duas figuras superfícies S e S' equidecompostas, de modo que S' é mais “compacta” que S , $A(S') < A(S)$.
TA_{ScompA} – A soma de todos os comprimentos dos lados da figura determina sua área.
$TA_{MQLadosMA}$ – A figura com maior quantidade de lados tem a maior área.
TA_{CompL} – Dadas duas figuras F e F' que possuem diferentes quantidades de lados, se os lados de uma figura F possuem comprimentos maiores do que os comprimentos dos lados de uma figura F' então F tem maior perímetro.
TA_{PSup} – Dadas duas superfícies S e S' equidecompostas, de modo que S' é mais “compacta” que S , $P(S') < P(S)$.
TA_{Uqm} – A medida da área de um quadrado é igual a medida da área da sua metade.
TA_{Ident} – Figuras com áreas iguais são idênticas.
TA_{mAMP} – Figuras com áreas iguais têm perímetros iguais.
TA_{MAMP} – Quanto maior o perímetro de uma figura, maior será a sua área.
TA_{Alt} – A superfície “mais alta” (“mais larga” ou “mais espalhada”) tem maior área.
TA_{Ldq} – O lado e a diagonal de um quadrado têm comprimentos iguais.
$TA_{MContMA}$ – A figura de maior contorno tem maior área.
TA_{MnumMA} – Se duas superfícies ao serem medidas são representadas pelo mesmo número, então elas têm a mesma área. ⁶⁵
$TA_{Rot-Trans}$ – Se uma superfície unitária é rotacionada, as suas características não são mantidas.
$TA_{PQuadrado}$ – A medida do perímetro do quadrado é igual à medida da área desse quadrado dividida por quatro.
$TA_{LQuadrado}$ – A medida do lado do quadrado é igual à medida da área desse quadrado dividida por quatro.
$TA_{MQLadosMP}$ – A figura com maior quantidade de lados tem o maior perímetro.
$TA_{MAFormDif.}$ – A quantidade de superfícies unitárias necessárias para recobrir uma superfície, mesmo que essas sejam de tamanhos e formas diferentes, corresponde à medida da sua área.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

⁶⁵ O TA_{MnumMA} não exige que a unidade de medida sejam a mesma utilizada para medir as áreas das duas superfícies.

5.4 O ESTADO DOS CONHECIMENTOS DOS ALUNOS

Baseada nos conhecimentos mobilizados pelos alunos na sondagem e no pós-teste associados aos objetos área e perímetro no final do 5º ano e após o término do 6º ano, buscamos responder às três questões levantadas.

Os alunos conseguem resolver situações que envolvem o cálculo de área por meio da contagem da quantidade de quadradinhos, inteiros ou metades, com o uso da malha quadriculada. Diante dos recursos disponibilizados (malha quadriculada, malha isométrica, papel decalque e barbante), a malha quadriculada é o mais utilizado, o que é esperado, por estar presente na instituição escolar desde os anos iniciais do ensino fundamental, tanto nos LD quanto nas atividades propostas pelos professores⁶⁶.

Algumas dificuldades em relação à área e ao perímetro ainda se fazem presentes na transição entre o 5º e o 6º anos, como: a força do quadro numérico, a instabilidade na relação entre área e perímetro e a compreensão do significado da fórmula da área de um retângulo.

A predominância de procedimentos numéricos em questões que visavam observar a capacidade dos alunos em lidar com a área e o perímetro, focando apenas os domínios geométrico e das grandezas acontece, mesmo sem implicar necessariamente em erro. E a ausência do par (número, unidade de medida) também ocorreu com o cálculo de áreas com diferentes unidades de medida (SILVA, A., 2016). Essa predominância torna-se mais acentuada ao final do 6º ano, com o pós-teste, com uma redução na exploração dos recursos disponibilizados.

O fato de propor situações de comparação sem o uso de unidades de medidas convencionais ou não convencionais deixa à mostra a dificuldade em observar a variabilidade da área e do perímetro de figuras construídas com as mesmas peças, o que é um forte candidato a obstáculo epistemológico associado à articulação dos quadros das grandezas e o quadro geométrico (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

A instabilidade entre os conceitos de área e perímetro diante da predominância do cálculo relacional associado ao conceito do perímetro permanece, com a mobilização do teorema-em-ação falso « TA_{ScompA} – A soma de todos os

⁶⁶ No próximo capítulo, serão apresentadas as análises dos LD e das aulas observadas.

comprimentos dos lados da figura determina sua área» (DUARTE, 2002; SILVA, A., 2016). E mesmo aqueles alunos que mobilizam a fórmula para o cálculo da área de um retângulo, organizam suas ações em função da existência de uma figura retangular, ao associar comprimentos de maneira inadequada.

Essa ruptura entre a forma operatória e predicativa demonstra dificuldades desses alunos na construção de diversos conceitos (VERGNAUD, 2007). As dificuldades nas situações estavam associadas aos conceitos de área, perímetro, do retângulo e suas propriedades, de decomposição de figuras, de figuras poligonais não convexas, assim como das fórmulas de área enquanto objeto de estudo (TELES, 2007).

A dificuldade em recobrir uma superfície quadrada com uma superfície unitária diferente de quadrado permanece e de maneira mais acentuada diante do formato da unidade de medida considerada, por envolver conceitos como composição e decomposição de figuras, rotação, translação e simetria de figuras planas. Essa dificuldade já sinalizada em outras pesquisas (FERREIRA, 2010) reforça a importância de oportunizar aos alunos atividades que privilegiem a invariância de áreas por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição, processo que auxilia na articulação entre os quadros geométrico e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

A ausência de situações que favoreçam a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas é sinalizada em pesquisas sobre área e perímetro, o que revela a importância de oportunizar aos alunos situações de comparação sem medida (SILVA, 2011; FERREIRA, 2010). Assim como o processo de composição e decomposição de figuras, que reforça a compreensão do conceito de área enquanto grandeza (PESSOA, 2010; FERREIRA, 2010).

A necessidade de associar termos da matemática em situações de comparação esteve presente tanto em situações contextualizadas – como na comparação de áreas quando usamos o termo quantidade de cartolina; e na de perímetros, diante da expressão quantidade de cordão – quanto em situações internas à matemática, com a comparação de áreas com quantidade de lados, revelando também a importância dos termos na construção conceitual.

A fragilidade conceitual da grandeza diante da variável didática tipo de figura, em situações com figuras não poligonais, foi constatada diante da mobilização do teorema-em-ação falso « TA_{PSup} – Dadas duas superfícies S e S' equidecompostas,

de modo que S' é mais “compacta” que S , $P(S') < P(S)$ », quando o perímetro está associado à representação espacial da figura. A ideia de que a figura mais compacta tem menor perímetro e menor área mostra o efeito visual das figuras, quando a forma interfere na interpretação das grandezas, conforme percebido por Souza (2004). Esse item nos leva a buscar na análise dos LD e das aulas observadas como a decomposição e a composição de figuras têm sido objeto de estudo no domínio das grandezas e medidas.

No próximo estudo, com a análise dos LD adotados na escola e as aulas observadas para caracterização das turmas de 5º ano, assim como as aulas observadas nos 6º anos, dos capítulos referentes aos conceitos de área e perímetro, buscaremos verificar a presença de situações de comparação de áreas e de perímetros sem o uso de unidade de medida, situações de conversão de unidade com diferentes superfícies unitárias. Discutimos também a presença de figuras não poligonais, o uso de outros recursos além da malha quadriculada e o procedimento de composição e decomposição de figuras para os objetos área e perímetro.

6 SEGUNDO ESTUDO: SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS E SABERES ENSINADOS NO 5º ANO E NO 6º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Este capítulo apresenta dois subtópicos: um associado ao saber a ensinar nos livros didáticos adotados e outro aos saberes ensinados no 5º ano e no 6º anos do ensino fundamental, na Escola São Francisco.

6.1 SABER A ENSINAR NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste tópico, trazemos a visão geral das duas coleções, dos anos iniciais e anos finais do EF adotada na Escola São Francisco. Uma análise com o filtro das grandezas e o respaldo da TAD é realizada para observar como esses objetos do saber estão conectados com outros objetos, do domínio das grandezas e medidas, de outros domínios da matemática, de outras disciplinas escolares e de práticas sociais extraescolares. E como são (ou não) contempladas as dimensões instrumento e objeto, bem como as funções que desempenham em cada um de seus habitat.

A análise dos livros do 1º ao 6º ano e o levantamento dos tipos de tarefas para os objetos perímetro e área para cada volume são realizados, e o percurso é construído, com a intenção de observarmos de que maneira está estruturado o ensino desses objetos nos LD, bem como se retomadas são evidenciadas.

6.1.1 Visão geral das duas coleções

6.1.1.1 A coleção dos anos iniciais do ensino fundamental

A coleção de matemática para os anos iniciais do EF “Presente Matemática” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015a; 2015b; 2015c; 2015d; 2015e) é composta de livros destinados aos cinco anos de ensino, e cada um deles está estruturado em quatro unidades, subdivididas em itens dedicados aos domínios da matemática escolar, números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. Cada unidade está dividida em 14 capítulos, e esses trazem atividades de um ou mais domínios, indicados por ícones.

O “Guia e recursos didáticos”, nome atribuído ao “Manual do professor”, é composto de duas partes. A primeira, comum a todos os volumes, apresenta orientações gerais da coleção com objetivos e conteúdos para todos os anos iniciais, pressupostos teóricos, estrutura e sugestão de atuação do professor, orientações sobre avaliação, comentários sobre recursos didáticos e fontes para atualização e aperfeiçoamento.

A segunda parte contém uma cópia do “Livro do aluno”, com um sumário detalhado para o professor. Na abertura de cada unidade, apresenta os objetivos gerais com os principais conteúdos e, em cada capítulo, os objetivos, as orientações didáticas, comentários para a maioria das atividades, todas as respostas, sugestões de atividades extras e de avaliação.

Os capítulos nem sempre apresentam nos seus títulos a indicação dos temas matemáticos a serem objeto de estudo, embora esses façam parte do sumário detalhado presente no manual do professor. Por exemplo, no livro do 3º ano, na Unidade 1, o capítulo 2 – “Passeio no parque e Matemática”, tem no sumário detalhado os temas: contagem; número par e número ímpar; números ordinais; gráfico de barras; e sistema monetário.

Ao apresentar os pressupostos teóricos da coleção, os autores afirmam estar em consonância com documentos oficiais como o PCN (BRASIL, 1997) e o RCNEI (BRASIL, 1998b), e com pesquisas desenvolvidas na área da Educação Matemática e as novas concepções, como o tratamento não linear aos conteúdos.

Nesta coleção, os conteúdos são tratados em espiral e em rede. Assim, temas antes apresentados de forma concentrada, quase de uma só vez, agora passam a ser estudados em vários momentos de um ano e ao longo de vários anos. Podem ocorrer diferentes abordagens de um mesmo tema, com diferentes enfoques. Além disso, no lugar dos capítulos sem conexão, os temas entrelaçam-se uns com os outros, como deve ocorrer quando se pensa “em rede” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015, p. XXVI).

A articulação entre os domínios favorece um ensino menos fragmentado, a ser retomado e ampliado como defende Bruner (1999).

Na coleção dos anos iniciais, cada unidade é iniciada com a seção “Primeiros contatos”, que destaca um dos conteúdos a serem estudados, com o objetivo de trazer à tona os conhecimentos prévios dos alunos sobre o que será objeto de estudo e propiciar ao professor uma ampliação e aprofundamento dos conteúdos, uma retomada no sentido de Larguier (2009).

6.1.1.2 A coleção dos anos finais do ensino fundamental

A coleção para os anos finais do ensino fundamental “Matemática para todos” (IMENES; LELLIS, 2010) é composta de quatro volumes e um caderno de atividades (CA) correspondente a cada ano de ensino. Cada volume é dividido em capítulos, organizados por domínios – aritmética, geometria, medidas, álgebra e estatística – quase sempre alternados e subdivididos em itens.

O “Guia do professor” é formado de três partes. A primeira, comum a todos os volumes, apresenta a fundamentação teórico-metodológica da coleção, sua estrutura e sugestão de atuação do professor, orientações sobre avaliação, comentários sobre recursos didáticos, conexões na matemática e outras disciplinas, e fontes para atualização e aperfeiçoamento. A segunda parte contém uma cópia do “Livro do aluno” e são apresentados, para cada capítulo, os objetivos, as sugestões para o plano de aula, comentários para a maioria das atividades, todas as respostas, sugestões de atividades extras e de avaliação. Na última parte, é apresentada a cópia do CA, com o mesmo formato do livro do aluno.

Ao apresentar a organização, seleção e dimensão dos conteúdos, a coleção dos anos finais diz adotar uma característica especial

[...] na **organização dos conteúdos em espiral**, os assuntos são abordados mais de uma vez, de diferentes formas, em vários anos de estudo, acompanhando a experiência dos alunos. [...] A retomada dos temas garante tanto a memorização quanto as reelaborações do conhecimento adquirido, o que vai aprofundando a compreensão. Além disso, trabalhando cada conteúdo mais de uma vez, os detalhes complexos podem ser abordados no momento adequado à experiência matemática e ao desenvolvimento cognitivo dos alunos (IMENES; LELLIS, 2010, p. VI).

Observamos que a coleção se aproxima da ideia de currículo em espiral de Bruner (1999), assim como entende a retomada como Larguier (2009), enquanto possibilidade de revisão e ampliação de um conhecimento. E continua afirmando que “[...] trabalhar conteúdos dessa maneira não significa fragmentá-los, abordando um pedacinho em cada ano, nem significa simplesmente repeti-los. É preciso tratá-los de modos diferentes, com novas conexões” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 6).

Os autores destacam ainda a importância de o professor conhecer a proposta da coleção e, também, a proposta pedagógica da escola para desenvolver o programa ao longo do ano:

Uma boa contribuição seria aprofundar a proposta espiralada da obra. No livro, às vezes, não podemos retomar um capítulo em meio a outro. As aulas não têm tais limitações, cabendo ao professor encontrar formas de manter os conteúdos “vivos” por todo o ano letivo.

[...]

De acordo com a proposta pedagógica da escola, o professor poderá saltar certos itens, deixando-os para o final do ano letivo, caso haja tempo. A organização em espiral facilita esse procedimento, uma vez que os temas relevantes são sempre retomados. Se não for possível explorar bem um assunto em um ano, não há motivo para preocupações, uma vez que voltaremos a ele no ano seguinte (IMENES; LELLIS, 2010, p. X).

A organização dos capítulos bem demarcados por domínio mostra uma primeira diferença da coleção dos anos iniciais e reforça a importância de o professor conhecer tanto a coleção quanto as orientações presentes no Guia, para se apropriar da proposta do LD e realizar as possíveis articulações.

Observamos que as duas coleções apresentam um olhar diferenciado ao partir de situações do cotidiano para a introdução dos assuntos a serem objeto de estudo assim como sinalizam conexões possíveis com outras áreas do conhecimento. No entanto, essa vista problematizada dos autores se faz mais presente na coleção dos anos iniciais, enquanto na coleção dos anos finais ela é deixada mais a cargo do professor.

6.1.2 O domínio das grandezas e medidas nas duas coleções

6.1.2.1 O domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos iniciais do ensino fundamental

O “Guia e recursos didáticos” da coleção dos anos iniciais do EF apresenta quadros com os conteúdos a serem desenvolvidos do 1º ao 5º anos por domínio, o que contribui para uma visualização longitudinal dos conceitos abordados. Nas orientações gerais da coleção, os autores tomam como referência os eixos dos PCN (BRASIL, 1997) quanto aos objetivos e conteúdos a serem objeto de estudo da matemática.

Diante da organização dos conteúdos adotada pelos autores na coleção dos anos iniciais do EF, para o domínio das grandezas e medidas são considerados *setores*: medida de comprimento, medida de tempo, medida de capacidade, medida de temperatura, medida de massa, área, volume e sistema monetário.

Apresentamos a seguir (Figura 116 e Figura 117) um recorte do quadro de conteúdos da coleção dos anos iniciais, para as grandezas comprimento e área, considerando o perímetro enquanto instanciiação do comprimento.

Figura 116 - Distribuição dos conteúdos nos LD dos anos iniciais no domínio das grandezas e medidas para o setor medida de comprimento

Grandezas e medidas					
Conteúdo	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Medida de comprimento	• Longe, perto, mais curto, mais comprido • Estatura de uma pessoa • Metro e centímetro: uso na linguagem do dia a dia • Instrumentos de medida de comprimento: régua e fita métrica • Medidas com pé e palmo • Medidas com tira de papel	• Medidas com passo e palito • Medidas com barbante de 1 metro de comprimento • Comparação de comprimentos • Medidas com a régua: o centímetro • Comprimento e largura do retângulo	• Instrumentos de medida de comprimento: régua, metro articulado, trena e fita métrica • Comprimento, largura e altura do bloco retangular • Construção de uma fita métrica • Relação entre metro e centímetro	• Estimativa de comprimentos • Comprimento como grandeza • Relação entre quilômetro e metro • Estimativa do tamanho do quilômetro • Medidas de comprimento expressas por números na forma decimal • Noção e cálculo do perímetro de polígonos • Adequação dos instrumentos e das unidades de medida de comprimento	• Relação entre centímetro e milímetro • Símbolos das unidades de medida • Relações entre perímetro e área de figuras poligonais • Milímetro como milésimo do metro • Decímetro

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015, p. XXI).

Figura 117 – Distribuição dos conteúdos nos LD dos anos iniciais no domínio das grandezas e medidas para o setor área

Grandezas e medidas					
Conteúdo	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Área			• Noção de área com base na contagem do número de quadrados unitários que recobrem o interior de figuras poligonais	• Noção e cálculo de área de figuras poligonais • Relações entre área e perímetro de figuras poligonais • Centímetro quadrado	• Hectare e alqueire • Multiplicação associada ao cálculo do número de ladrilhos em um piso retangular • Metro quadrado e quilômetro quadrado

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015, p. XXIII).

Observamos que, dentro do setor medida de comprimento, o tema comprimento é abordado em todos os anos iniciais. Já para o objeto perímetro, esse

aparece enquanto tema abordado no 4º ano, noção e cálculo do perímetro de polígonos, e, no 5º ano, as relações entre perímetro e área de figuras poligonais (em destaque na Figura 116).

O objeto área é um setor de estudos do domínio das grandezas e medidas que será abordado a partir do 3º ano, e por esse motivo as células para o 1º e 2º anos de ensino estão em branco (Figura 117). O objeto perímetro, assim como para o setor medida de comprimento, é aqui considerado um tema - relações entre perímetro e área de figuras poligonais (destaque em vermelho na Figura 117) - tratado no 4º ano do EF.

Os autores salientam que nos quadros apenas estão registrados os temas objeto de estudo e os seus avanços. O que já foi vivenciado em um ano anterior poderá ser retomado nos anos seguintes, mas não consta no quadro o que difere das células em branco. Ao apresentar a distribuição de conteúdos, a coleção deixa claro para o professor o papel das retomadas enquanto uma lembrança dos conceitos abordados nos anos anteriores em cada domínio (LARGUIER, 2009) e, na nossa pesquisa, no domínio das grandezas e medidas.

É interessante observarmos que no caso do comprimento o setor é medida de comprimento, no caso da área o setor é área, e não medida de área. No nosso entendimento, o fato reside na ideia de comprimento enquanto instrumento para os demais domínios, enquanto medida, e não como grandeza.

No entanto, a nomenclatura dos dois setores não os diferencia muito quanto aos temas abordados, que carregam na sua essência a vinculação ao quadro numérico, quando na maioria dos anos de ensino as unidades de medidas convencionais estão presentes, as comparações de grandezas sem unidades de medidas são escassas, assim como a distinção entre um comprimento e a linha a ele associada, ou a uma superfície e a sua área, por exemplo. Observamos a interferência dos níveis superiores da escala de codeterminação, da Sociedade, em que as grandezas estão sempre associadas aos números, como sinalizam os documentos oficiais RCNEI (BRASIL, 1998b) e PCN (BRASIL, 1997; 1998a).

Observamos que nem os documentos oficiais, nem os LD fazem referência a esses aspectos, considerados importantes para a abordagem dos conceitos de área e perímetro. Esse distanciamento entre as pesquisas realizadas na área da educação matemática e a prática da sala de aula precisa ser reduzido a partir da

compreensão da epistemologia das grandezas geométricas, esta foi apresentada no capítulo 2 (item 2.10).

Nas orientações específicas para cada um dos anos iniciais do EF, no “Guia e recursos didáticos”, são apresentados os conteúdos conceituais e procedimentais para cada um dos domínios, caracterizados pelos autores como “saber sobre” e “saber fazer”, respectivamente.

Para o domínio das grandezas e medidas, os conteúdos conceituais e procedimentais associados aos objetos comprimento, perímetro e área estão apresentados no quadro a seguir.

Quadro 10 – Conteúdos conceituais e procedimentais para o domínio das grandezas e medidas nos LD do 1º ao 5º anos na coleção dos anos iniciais, associados aos objetos comprimento, área e perímetro

Grandezas e Medidas	
1º ano	• Procedimentos variados para comparar grandezas. • Noções iniciais sobre medidas de comprimento. • Uso de unidades de medida não padronizadas e noções sobre algumas unidades formais de uso social.
2º ano	• Comparação de grandezas com procedimentos variados. Uso de unidades de medida não padronizadas (pé, palmo). • Noções sobre medidas de comprimento. • Uso de algumas unidades de medida padronizadas (metro, centímetro).
3º ano	• Comparação de grandezas de mesma natureza por meio de recursos não convencionais. • Uso de régua e fita métrica. • Identificação e uso das unidades de medida metro e centímetro.
4º ano	• Comparação de grandezas de mesma natureza por meio de recursos não convencionais. • Noções de grandeza, unidade de medida, instrumento de medida. • Uso de fita métrica e régua. • Identificação e uso das unidades de medida metro, centímetro, milímetro e quilômetro. • Cálculo de perímetro de polígonos. • Estimativa e cálculo de áreas por contagem de unidades. • Resolução de problemas relativos a medidas.
5º ano	• Comparação de grandezas de mesma natureza • Noções de grandeza, unidade de medida, instrumento de medida. • Uso de régua e fita métrica. • Identificação do metro, centímetro, milímetro e quilômetro. • Cálculo do perímetro de figuras planas. • Estimativa e cálculo de áreas em situações simples. • Resolução de problemas envolvendo medidas.

Fonte: Adaptado do “Guia de recursos didáticos” (IMENES, LELLIS, MILANI, 2015, p. XLIV).

Os conteúdos conceituais e os procedimentais trazem o uso de instrumentos de medição associados às unidades de medidas convencionais, como a régua e a fita métrica, evidenciando o aspecto numérico. As dimensões “saber sobre” e “saber-fazer”, teoria e prática na praxeologia de Chevallard (2009), podem ser visualizadas nos conteúdos apresentados. Por exemplo, dentre os conteúdos conceituais, as noções de grandeza estão associadas à dimensão do saber, do bloco tecnológico-teórico, e a estimativa e o cálculo de áreas à dimensão saber-fazer, ao bloco prático-técnico.

Na análise praxeológica a ser apresentada ainda neste capítulo, poderemos observar o que é proposto para cada um dos objetos analisados.

6.1.2.2 O domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos finais do ensino fundamental

Na coleção de matemática dos anos finais do EF, ao apresentar a estrutura da coleção na primeira parte do “Guia do professor”, o domínio medidas é composto pelos setores medida de comprimento, medida de área, medida de volume/capacidade, medida de ângulo, medida de tempo e medida de massa.

No quadro de conteúdos da coleção, os temas comprimento, perímetro e área estão inseridos nos setores medida de comprimento e medida de área, como pode ser observado na Figura 118, a seguir.

Figura 118 – Distribuição dos conteúdos nos livros de matemática do 6º ao 9º ano do domínio das medidas para os setores medida de comprimento e medida de área

Medidas				
Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Medida de comprimento	Palmo, passo, polegada; instrumentos de medida; unidades do sistema métrico mais usadas e suas relações; <u>perímetro de polígonos</u> ; estimativas	Comprimento: a grandeza, os instrumentos e as unidades	<u>Perímetro da circunferência (experimental)</u>	Relação decimal entre as unidades de comprimento do sistema métrico; <u>perímetro da circunferência (dedução)</u> ; determinação de distâncias inacessíveis
Medida de área	Número de quadradinhos unitários contidos em uma figura; unidades mais usadas do sistema métrico e suas relações; fórmulas para o cálculo da área: quadrado e retângulo	Decomposição e composição de uma figura plana: conservação da área	Fórmulas para o cálculo da área: paralelogramo, triângulo, losango e trapézio	Relação decimal entre as unidades de área do sistema métrico; fórmula para o cálculo da área do círculo

Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. XVIII).

No domínio medida de comprimento, o objeto comprimento é abordado ao longo de todos os anos finais do EF, sempre associado ao quadro numérico. O objeto perímetro, da mesma maneira que na coleção dos anos iniciais, é considerado como tema, e surge no 6º ano com o perímetro de polígonos. Já no 8º e 9º anos, é abordado o perímetro da circunferência de maneira experimental e por dedução, respectivamente.

No domínio medida de área, o tema fórmulas para o cálculo da área surge no 6º ano, e a conservação da área no 7º ano. Já o tema relações entre perímetro e área de figuras poligonais, presente no 4º e 5º anos da coleção dos anos iniciais, não aparece explicitamente nos setores medida de comprimento e medida de área para os anos finais do ensino fundamental.

No “Guia do professor” dos anos finais do EF, os autores também consideram as dimensões conceituais e procedimentais dos conteúdos, baseado no PCN (BRASIL, 1998a), embora sem discriminá-los. Exemplos são apresentados para cada uma das dimensões: “saber o conceito de área e de perímetro” para a conceitual, e “dominar técnicas essenciais de cálculo escrito” para a procedimental, que também podem ser associados aos blocos tecnológico-teórico e prático-técnico da TAD, respectivamente.

Nas duas coleções, anos iniciais e anos finais do EF, além das diferenças de nomenclatura constatadas entre os domínios, também observamos a opção dos autores em abordar os objetos comprimento, área e perímetro associados à noção de medida, o que será ratificado ou não quando da análise praxeológica. A importância dada pelos autores ao objeto perímetro, em relação aos objetos comprimento e área, é nítida diante da localização em níveis diferentes.

Indagamos se as diferenças observadas seriam uma influência do nível da pedagogia, visto que as diferentes formações dos autores – uma licenciada em matemática e em ciências; um engenheiro civil, licenciado em matemática e mestre em educação matemática e o terceiro, bacharel em matemática e mestre em educação matemática – e as diferentes experiências como sala de aula e formação docente favorecem um olhar mais amplo para a composição de uma proposta pedagógica sobre o ensino e a aprendizagem da matemática ao longo do EF.

6.1.2.3 As inter-relações do domínio das grandezas e medidas na coleção dos anos iniciais do ensino fundamental

A razão de ser para o domínio das grandezas e medidas é justificada para o uso na vida cotidiana e a dinâmica interdomínios: “[...] tanto por sua importância social como por ajudarem a construir a noção de número, relacionarem os eixos de *Números e Operações* e *Espaço e forma* e constituírem a base necessária para o eixo *Tratamento da Informação*” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015, p. XIII). A ênfase a ser dada às medidas está presente ao salientar a utilização frequente de unidades de medidas, com o objetivo de mostrar uma matemática associada à realidade. Essa razão de ser anunciada nos LD dos anos iniciais é a razão de ser escolar, não é a razão de ser epistemológica.

A distribuição dos domínios da matemática proposta na coleção dos anos iniciais para cada um dos anos de ensino pelos autores destaca as conexões internas à matemática e/ou associadas a situações cotidianas, ao abordar num mesmo capítulo diferentes domínios.

Ao longo de toda a coleção, diversas situações são propostas, como no livro do 1º ano, cap. 16 – “Matemática em todo lugar” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015a, p. 63) – a exemplo da ilustração com uma profissional da saúde, um adulto e um bebê. O acompanhamento do desenvolvimento físico de um bebê e a informação de seu “peso” e sua altura caracterizam uma prática profissional relacionada ao tema transversal saúde de acordo com o PCN (BRASIL, 1997). O nicho do comprimento nessa situação é a exploração do uso social do número enquanto expressão de medida de uma grandeza.

O contexto do meio social também pode ser observado em articulação com outras disciplinas como a educação física, nos livros do 2º e 4º anos. Ao apresentar imagens de quadras de futebol de salão e de basquete no livro do 2º ano (Id., 2015b, p. 23; 2015b, p. 152-153), o comprimento é instrumento com habitat nos números e operações e espaço e forma, e os nichos são explorar os usos sociais de números através das medidas oficiais de espaços esportivos, e a vista superior de alguns espaços, com o uso de termos como largura e comprimento. No livro do 4º ano, a imagem de uma piscina (Id., 2015d, p. 110-111) tem o seu comprimento associado ao termo distância numa prova de 50 metros nado livre, numa situação interna às grandezas e medidas, e o nicho é associar a ideia da grandeza duração de intervalo

de tempo.

Outra articulação acontece no 5º ano, com a disciplina geografia, a partir de um texto sobre a floresta amazônica com a ilustração do mapa do Brasil e indicação dessa região, que caracteriza uma situação extra-matemática associada à noção de área. Nesse caso, o nicho é a ordem de grandeza das unidades de milhão dos números associada ao metro quadrado (Id., 2015e, p. 114).

O tema transversal meio ambiente também está presente no livro do 3º ano, numa situação que envolve o plantio de árvores no canteiro de uma avenida de um bairro, em que o nicho do comprimento são as operações numéricas com números naturais (Id., 2015c, p. 179).

O aspecto lúdico do universo infantil presente no livro do 1º ano, com a história “A cama do Rei” (Id., 2015a, p. 188), convida o aluno a refletir sobre as implicações em adotarmos unidades não convencionais como pés. Na história, o rei encomenda uma cama cujas medidas são 10 pés de comprimento e 5 pés de largura. O marceneiro faz a cama com as medidas fornecidas pelo rei e, ao realizar a entrega, o rei percebe que a cama é muito pequena.

Com base nas informações do texto e características dos personagens, pede-se aos alunos para explicarem o que aconteceu. A atividade, em conexão com a disciplina língua portuguesa, tem o seu habitat nas grandezas e medidas, cujo nicho é propiciar uma discussão que contribui para a percepção da importância da adoção de uma unidade-padrão de medida que seja comum.

Em toda a coleção dos anos iniciais do EF, cada capítulo dos livros apresenta uma indicação por ícones associada aos domínios. Por exemplo, no livro do 5º ano, no cap. 6 – “Alguns usos da Matemática” –, os autores consideram ser uma situação interdomínios associados aos domínios números e operações, espaço e forma e grandezas e medidas, conforme sinalizado pelos ícones (em destaque com seta azul).

As situações apresentadas envolvem práticas sociais da vida cotidiana e práticas profissionais. Na segunda delas, o nicho do comprimento com seu habitat no domínio de números e operações é explorar a noção de escala, com as diferentes representações, numa planta e na situação real, e a relação de proporcionalidade ao realizar a conversão de unidade de medida de comprimento.

Figura 119 – Situação interdomínios associada às práticas profissionais



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015e, p. 24).

Apesar dessa organização por ícones, o professor precisa ficar atento a alguns conceitos que são retomados ou abordados de maneira intuitiva ao longo da coleção, em conexões intramatemáticas, em capítulos não associados diretamente ao domínio das grandezas e medidas, e que serão aprofundados posteriormente, embora nem sempre sinalizados nos capítulos.

Por exemplo, no livro do 1º ano, cap. 11 – “Primeiro, segundo, terceiro...” –, uma situação associada apenas ao domínio de números e operações tem o comprimento como instrumento para o nicho de comparar alturas, necessário para que o aluno consiga responder qual a menina mais alta, conforme Figura 120, a seguir:

Figura 120 – Situação interdomínios associada ao cotidiano infantil



Fonte: Adaptado de Imenes, Lellis e Milani (2015a, p. 44).

A comparação entre objetos por meio de observação visual deve ser realizada por se tratar de uma situação de comparação sem a intervenção do quadro numérico. No entanto, a situação não é considerada pelo livro didático pertencente ao domínio das grandezas e medidas.

Embora o termo “estatura de uma pessoa” faça parte dos temas que compõem o setor medida de comprimento para o 1º ano, apresentado anteriormente no quadro de conteúdos (Figura 116), nenhuma referência é realizada nas orientações ao professor.

Entendemos ser a expressão “mais alta” um exemplo de retomada (LARGUIER, 2009) do tema comprimento trabalhado na educação infantil, conforme o RCNEI (BRASIL, 1998b), mas não sinalizado na coleção pelos autores.

A altura de crianças também é instrumento no habitat de tratamento da informação, e o nicho é a leitura e interpretação de gráficos, no livro do 4º ano (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 77).

Outras situações de conexões intramatemáticas foram observadas, como a articulação dos domínios das grandezas e medidas, espaço e forma e números e operações em atividades associadas ao perímetro como instrumento no habitat espaço e forma, para a produção de diferentes figuras com palitos (Id., 2015d, p. 19); e em atividades associadas à ampliação de figuras em malhas quadriculadas,

em que os conceitos de área e perímetro são instrumentos no habitat espaço e forma e números e operações, e o nicho é a relação de proporcionalidade (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 186).

6.1.2.4 As inter-relações do domínio das grandezas e medidas no livro do 6º ano do ensino fundamental

Na coleção dos anos finais, os capítulos são organizados por domínios, e esses aparecem sempre alternados. Em particular no livro do 6º ano, essa organização acontece em 12 dos 14 capítulos do livro, que abordam temas de um mesmo domínio.

Apenas o cap. 1 – “Panorama da Matemática” – e o cap. 8 – “Medidas e números decimais” – tomam por objeto de estudo simultaneamente mais de um domínio. Já o domínio estatística aparece de maneira reduzida, diluído em alguns capítulos, enquanto instrumento para situações de outros domínios.

O primeiro capítulo apresenta uma visão geral do que será objeto de estudo ao longo do ano, “retomando conteúdos estudados no Ensino Fundamental I (como proposto nos PCN)” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 12), e se caracteriza como uma revisão sistemática de conhecimentos dos anos anteriores (LARGUIER, 2009). Situações dos cinco domínios são apresentadas.

Conexões com a geometria são recorrentes, tanto para o comprimento quanto para a área. A grandeza comprimento é introduzida por meio dos termos altura, largura e comprimento enquanto instrumento no habitat da geometria, com o nicho de identificar as dimensões de um bloco retangular, associado às unidades de medidas convencionais (IMENES; LELLIS, 2010, p. 19; p. 21; p. 36; p. 41).

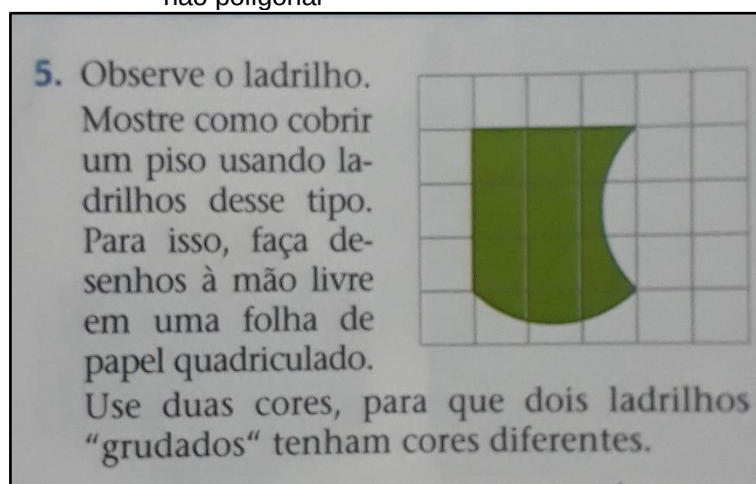
O domínio da aritmética é o habitat onde o comprimento também é instrumento para as operações numéricas, como pode ser observado em situações de distância entre cidades (Ibid., p. 69; p. 164); associado à configuração retangular (Ibid., p. 75); associado ao comprimento de um objeto na unidade de medida da polegada, representado por um número fracionário, a partir da leitura numa régua graduada (Ibid., p. 134; p.143); da estimativa de comprimentos de objetos associado a diferentes termos como largura, altura e espessura (Ibid., p. 164); associado a operações de adição e subtração com números decimais (Ibid., p. 181; p. 182).

Observamos também a articulação com outras disciplinas como a geografia, associada aos usos sociais como a leitura de mapas, quando o comprimento é utilizado para a determinação da distância entre cidades (IMENES; LELLIS, 2010, p. 46-47). Nesse caso, o nicho é utilizar a escala e a relação de proporcionalidade entre diferentes unidades de medida com o entendimento do sistema de numeração decimal.

O perímetro surge no livro do 6º ano no cap. 4 dedicado ao domínio da geometria enquanto instrumento, para o trabalho com polígonos. O nicho é expressar um comprimento a partir da adição das medidas dos lados de um hexágono, com números decimais.

A grandeza área aparece enquanto instrumento no habitat da geometria, cujo nicho é perceber a possibilidade ou não de pavimentar uma região na malha quadriculada, com diferentes superfícies poligonais (Ibid., p. 14; p. 35) ou não poligonais (Ibid., p. 15; p. 35). Trazemos a seguir uma dessas tarefas.

Figura 121 – Objeto área como instrumento no habitat da geometria com figura não poligonal



Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 15).

Esse é um exemplo de situação que contribui com a construção conceitual da grandeza área por possibilitar a pavimentação de uma região, sem deixar espaços nem sobreposição, além de mostrar ser possível ladrilhar também com outras figuras além das poligonais.

Situações como determinar a área são a maioria, associadas a unidades de medidas convencionais, como na articulação com a geografia, com as áreas das

regiões brasileiras (IMENES; LELLIS, 2010, p. 26), em que o nicho é a ordem de grandeza dos números.

A conexão com os números também é forte, quando no habitat da aritmética o nicho é representar as frações enquanto partes de figuras (Ibid., p. 126; p.127; 130; 134), apresentado enquanto área da figura, o que está em desacordo com o modelo por nós considerado.

6.1.3 Análise praxeológica dos saberes perímetro e área nos LD do 1º ao 6º ano do ensino fundamental com o filtro das grandezas

Neste tópico, trazemos a análise documental realizada nas duas coleções de LD adotadas pela escola São Francisco, com o objetivo de identificar elementos das relações institucionais com os objetos área e perímetro no ensino de matemática do 1º ao 6º ano do EF.

O instrumento teórico-metodológico filtro das grandezas possibilita observar as grandezas área e comprimento (perímetro) quanto à sua razão de ser no ensino, se objeto ou instrumento, qual o habitat e o nicho; às relações estabelecidas com outros objetos, interna ao domínio das grandezas e medidas, entre domínios da matemática ou externas à matemática; às organizações didáticas e aos tipos de retomada (LARGUIER, 2009); e aos tipos de tarefas que são propostos.

6.1.3.1 O saber perímetro nos LD analisados

A análise dos livros dos anos iniciais indica que o tema perímetro só é introduzido no 3º ano, estando em conformidade com a orientação do PCN (BRASIL, 1997), o que pode ser observado na tabela a seguir:

Tabela 2 – Quantitativo de tipos de tarefas para o objeto perímetro nos livros didáticos analisados do 1º ao 6º ano do EF

Classe de situação	Tipo de Tarefa	ANO					
		1º	2º	3º	4º	5º	6º
Comparação	T _{CP} – Comparar perímetros	0	0	0	0	3	5
Medição	T _{MP} – Medir um perímetro	0	0	4	26	11	22
	T _{GP} – Determinar o valor de uma	0	0	0	0	0	1

	grandeza diferente de perímetro, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao perímetro						
Produção	T_{PP} – Produzir superfície a partir de um perímetro	7	0	3	10	0	4

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

A primeira abordagem do perímetro acontece nos anos iniciais no livro do 3º ano enquanto instrumento para outros domínios. A maioria das tarefas se concentra no 4º ano, quando o perímetro passa a ser objeto de estudo e o tipo de tarefa « T_{MP} – Medir um perímetro» se destaca com relação às demais. As tarefas do tipo « T_{CP} – Comparar perímetros» estão presentes nos LD do 5º e 6º anos em quantidade reduzida, e apenas uma atividade associada ao tipo « T_{GP} – Determinar o valor de uma grandeza diferente de perímetro, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao perímetro» foi encontrada no 6º ano. Tarefas do tipo « T_{EP} – Estimar um perímetro», « T_{CUP} – Converter a unidade de medida de um perímetro» e « T_{TP} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre o perímetro de uma família de linhas/superfícies» estão ausentes nos LD analisados.

Para o tipo de tarefa T_{MP} , as técnicas mais utilizadas nos LD analisados são τ_{MP1} – Contagem das unidades de medida não convencionais de comprimento; τ_{MP2} – Contagem das unidades de medida convencionais de comprimento. Os elementos tecnológicos (Θ) que justificam as duas técnicas são a noção de contorno, as propriedades das figuras geométricas planas e a operação adição.

Como exemplo, trazemos as tarefas do tipo T_{MP} presentes no livro do 3º ano, na Unidade 2, capítulo 21 – “Multiplicação”, na Figura 122, a seguir.

A noção de perímetro introduzida a partir do 3º ano tem como habitat os domínios números e operações, espaço e forma e grandezas e medidas. Explorado como instrumento para o tema multiplicação, estabelece relações com objetos associados a esses domínios, os números naturais, a operação de adição e a tabuada de multiplicação por quatro, a figura geométrica poligonal quadrado e as suas propriedades, e a medida de comprimento.

No livro do aluno⁶⁷, as imagens são apresentadas em escala real para que, no domínio das grandezas e medidas, a tarefa tenha como nicho a medição concreta com o uso da régua graduada enquanto instrumento de medida de comprimento.

⁶⁷ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Figura 122 – Situação interdomínios com o perímetro como instrumento

21 Multiplicação

1 O lado deste quadrado mede 2 cm. Se a formiga der uma volta completa pelos lados do quadrado, quantos centímetros ela andará? _____

2 Imagine a formiga contornando cada quadrado. Meça os lados de cada um deles e responda quantos centímetros ela vai andar em cada caso.

a) _____

b) _____

c) _____

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 77).

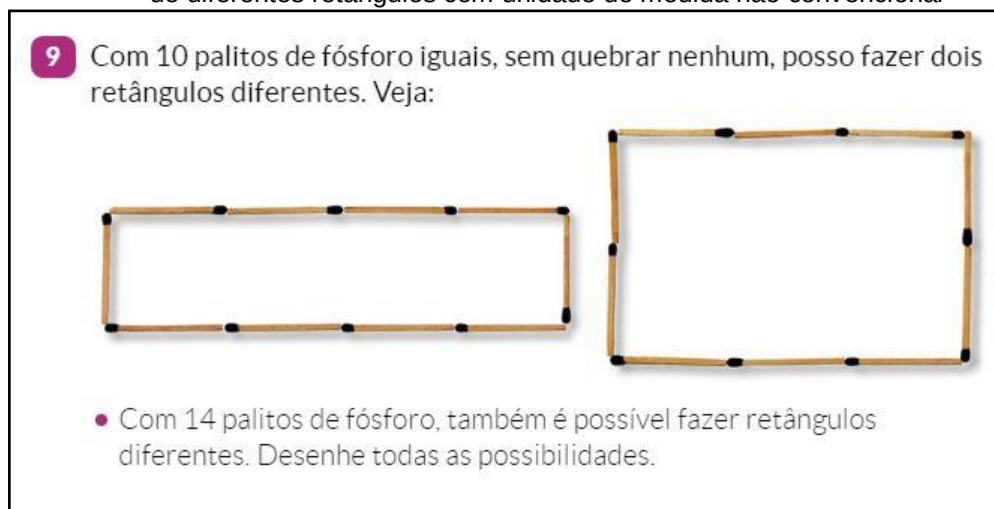
A intenção didática dessa tarefa é a retomada do conceito de multiplicação para introdução da tabuada por 4, conforme as orientações didáticas:

- capítulo retoma, mais uma vez, o trabalho com a multiplicação.
- As atividades desta página reúnem números e operações (multiplicações por 4), medidas (em centímetros) e formas geométricas (o quadrado). A tabuada do 4 é relacionada com o perímetro do quadrado. Note que se explora a noção, mas não se apresenta a palavra perímetro (ela aparecerá em momento oportuno) (IMENES, LELLIS, MILANI, 2015c, p. 77).

Compatível com o sentido dado por Larguier (2009), a retomada do conceito de multiplicação resgata um conhecimento antigo para sua ampliação no ano vigente, e com a ideia de currículo em espiral de Bruner (1999), o que justifica o termo perímetro não ser utilizado, como sinalizado nas orientações ao professor.

A noção de perímetro volta a ser apresentada no livro do 3º ano no capítulo 38 – “Pensando e resolvendo”, da Unidade 3, numa atividade que envolve tarefas do tipo «**T_{PP}** – Produzir superfície a partir de um perímetro dado», e têm seu habitat nos domínios das grandezas e medidas e espaço e forma (Figura 123).

Figura 123 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{PP} para a produção de diferentes retângulos com unidade de medida não convencional



Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015c, p. 137).

A retomada da noção do perímetro surge quando é solicitada ao aluno a produção de diferentes retângulos com um comprimento do contorno fixo de 14 palitos de fósforo. O nicho do perímetro é construir diferentes possibilidades de resposta para uma mesma situação. O “Guia de recursos didáticos” sinaliza a importância do trabalho com problemas sem solução, com mais de uma solução, com ausência ou excesso de dados, por entender que “[...] as crianças são capazes de elaborar estratégias adequadas para resolver diversos tipos de problema” (Id., p. XXXII).

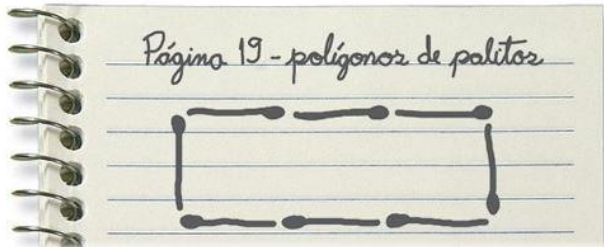
Observamos nas orientações didáticas ao professor que, dada a condição do palito ser considerado inteiro, existem apenas três possibilidades de produção de diferentes retângulos, mas, caso contrário, as possibilidades seriam infinitas, como foi exemplificado: “retângulos com lados: 0,5 e 6,5; 1,5 e 5,5; 1,2 e 5,8; e 3,16 e 3,84” (Ibid., p. 137).

As tarefas do tipo T_{PP} , que contribuem para a construção da noção de grandeza, são introduzidas no 3º ano, mas tornam-se bastante representativas no 4º ano inclusive por possibilitarem interessantes discussões. Na sessão *Vamos Construir?* na Unidade 1⁶⁸, nos domínios espaço e forma e grandezas e medidas, atividade semelhante é proposta, conforme Figura 124 a seguir.

⁶⁸ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Figura 124 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{PP} para a produção de diferentes polígonos com unidade de medida não convencional

Depois desenhou a figura no caderno.



• Agora é com você! Faça como Lara: construa as figuras com palitos e, depois, desenhe-as no caderno.

- a) Quadrado com 4 palitos.
- b) Retângulo com 6 palitos.
- c) Triângulo com 6 palitos.
- d) Com 4 palitos, um polígono de 4 lados.
Ele deve ser diferente de um quadrado.
- e) Quadrado com 8 palitos.
- f) Retângulo com 10 palitos.
- g) Retângulo com 5 palitos.
- h) Três retângulos diferentes com 16 palitos cada um.

A figura do item d chama-se losango.



Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015d, *Vamos construir?*, p. 19).

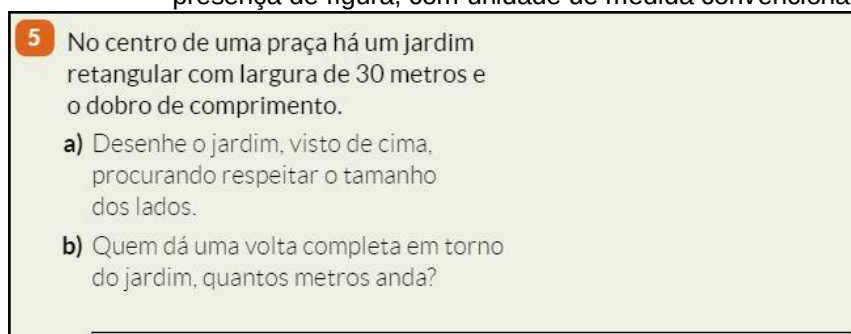
O nicho do perímetro em tarefas desse tipo é explorar a identificação e construção de diferentes polígonos. A articulação interdomínios é fundamental para que o aluno desenvolva suas técnicas de resolução, que devem estar associadas ao reconhecimento das propriedades de cada uma das figuras solicitadas. Observamos que todas as tarefas solicitadas envolvem uma operação geométrica associada a uma operação numérica, visto que a construção do polígono estará na ideia de contorno com uma quantidade de palitos preestabelecida.

No *item f*, o “Manual do professor” apresenta como resposta: “há duas possibilidades: retângulo 1 por 4 e retângulo 2 por 3”. Observamos aqui que os próprios autores desconsideram a unidade de medida estabelecida, palitos de fósforo, indicando apenas o número, o que reforça a predominância do numérico sem considerar a grandeza comprimento, como afirmado por Ferreira (2010). No *item g*, os autores esperam “[...] que os alunos percebam que, sem cortar palitos, a construção é impossível”. Além disso, nenhum comentário é apresentado ao professor e o enunciado da questão não deixa claro que o palito de fósforo é a unidade de medida padrão.

Embora o perímetro seja considerado instrumento nas tarefas desse tipo (Figura 125 e Figura 126), consideramos exemplos de retomadas segundo Larguier (2009), por possibilitar a ampliação da construção de conceitos internos ao domínio das grandezas e medidas, e entre domínios, com a produção de diferentes figuras com mesmo perímetro, além de proporcionar a discussão sobre a extensão dos números inteiros positivos para os números racionais positivos.

Ao final de cada unidade, em cada LD da coleção dos anos iniciais, existe uma sessão intitulada “Veja se já sabe”, proposta pelos autores com a função de servir para avaliações individuais, que entendemos como uma possibilidade de retomada dos conceitos trabalhados, tanto pelo aluno quanto pelo professor. Nessa sessão, uma tarefa do tipo **T_{PP}** sem a presença da figura é proposta, como podemos observar na Figura 125, a seguir:

Figura 125 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo **T_{PP}** sem a presença de figura, com unidade de medida convencional



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 56).

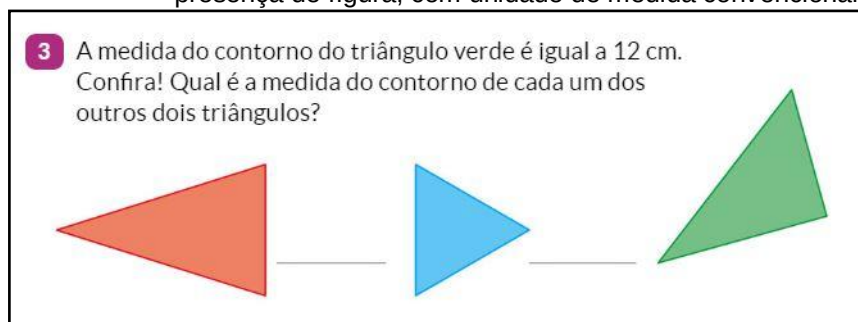
Apesar do item que nos interessa ser o 5b, entendemos que o *item 5a* contribui para que o aluno, no domínio espaço e forma, faça a representação do jardim retangular e estabeleça as relações entre as propriedades do retângulo a partir das dimensões dadas no enunciado do problema. No domínio de números e operações, o aluno deverá associar a ideia de dobro de um número e fazer uso das operações de adição associadas à unidade de medida convencional metros.

Ainda no livro do 4º ano, a noção de perímetro é retomada numa situação de medida na Unidade 2, capítulo 19 – “Medidas de comprimento” (Figura 126).

A atividade de determinação da medida do contorno dos triângulos⁶⁹, que atende a um dos objetivos do capítulo, o de realizar medições, contribui para retomar como o aluno deve fazer para realizar de maneira adequada a tarefa.

⁶⁹ No LD, as imagens dos triângulos estão em verdadeira grandeza.

Figura 126 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} com a presença de figura, com unidade de medida convencional



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 73).

A realização do procedimento de medida, com o uso de um instrumento como a régua, é proposta numa atividade anterior a essa de medição da imagem de objetos (Ibid., Ativ. 1 e 2, p. 73), e esteve presente no 3º ano (Figura 122). O momento é considerado oportuno visto que, ao utilizar a régua graduada para realizar medições de objetos, o aluno pode encontrar valores não inteiros que compõem as subdivisões do centímetro, pertencentes ao domínio números e operações. Embora um dos objetivos do capítulo seja discutir sobre medida exata e medida aproximada, nenhuma orientação é dada ao professor.

Como já foi apresentado no capítulo 1, reflexões sobre medições práticas e teóricas das grandezas geométricas envolvem imbricações entre diferentes campos conceituais. Faz-se necessário que essas reflexões sejam apresentadas nos LD para os professores, para que esses possam oportunizar aos alunos situações que envolvam diferentes tarefas e possibilitem a compreensão de objetos associados aos diferentes domínios.

Destacamos que, dentre os critérios de avaliação, o PCN (BRASIL, 1997) sinaliza, desde o 1º ciclo (2º e 3º anos), a importância de observar “[...] a capacidade do aluno de realizar algumas estimativas de resultados das medições” (p. 54), e para o 2º ciclo (4º e 5º anos), que o aluno realize cálculo com números naturais e decimais “distinguindo as situações que requerem resultados exatos ou aproximados” (p. 63).

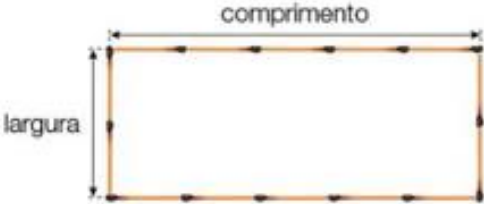
Na página seguinte do LD, no mesmo capítulo, a palavra perímetro aparece em destaque, por ser o tema objeto de estudo. A noção é retomada no domínio espaço e forma, a partir da representação de um retângulo construído com palitos de fósforo como unidade de medida não convencional, além de utilizar os termos

comprimento e largura, do domínio das grandezas e medidas, como trazemos na figura a seguir.

Figura 127 – Situação interdomínios com o perímetro enquanto objeto

Perímetro

1 O comprimento deste retângulo é 5 palitos.



comprimento

largura

a) E sua largura, é de quantos palitos? _____

b) O retângulo foi construído com quantos palitos? _____

2 O contorno do retângulo ao lado tem 18 palitos.
Dizemos, então, que seu **perímetro** é igual a 18 palitos.



a) Qual é o perímetro do retângulo da atividade 1? _____

b) Qual é o perímetro deste quadrado? _____



c) Qual é o perímetro deste triângulo? _____



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 74).

Na atividade 1, o perímetro é o objeto de estudo, e a técnica utilizada é τ_{MP1} – Contagem das unidades de medida não convencionais representadas pelos palitos, e os elementos tecnológicos (Θ) são a operação de adição, os números naturais e a figura plana retângulo e suas propriedades. Em seguida, na atividade 2, a ideia do contorno de um retângulo é retomada para a formalização do conceito de perímetro, e figuras já conhecidas dos alunos são propostas em tarefas do mesmo tipo.

Nas orientações didáticas ao professor a abordagem do perímetro enquanto a medida do contorno de um polígono é justificada, “Referimo-nos à medida do

contorno e não à soma das medidas dos lados, porque o perímetro só corresponde a essa soma nos polígonos. Um círculo, por exemplo, tem perímetro, mas não tem lados” (Ibid., p. 74). Essa escolha está parcialmente em conformidade com o modelo epistemológico de referência esboçado na nossa pesquisa para a construção do conceito de perímetro, no qual medida é considerada um número, enquanto que para os autores, a medida é um par número – unidade.

Na sequência, é sugerida ao professor nas orientações didáticas uma atividade que “reforça a ideia de perímetro e tem mais de uma solução” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 74). A atividade consiste em desenhar todos os retângulos possíveis com perímetro igual a 12 cm, e pressupõe o uso do recurso da malha quadriculada. As possibilidades de respostas apresentadas pressupõem medidas inteiras: dois retângulos sendo um com lados de medidas 1 cm e 5 cm, outro com 2 cm e 4 cm, e um quadrado com lado de medida 3 cm. Como apresentado no livro do 3º ano (Figura 123), a apresentação de problemas na disciplina de matemática que quebram com a ideia de uma única solução é retomada.

Observamos que essa atividade, pertencente ao domínio das grandezas e medidas, propicia a retomada no sentido de Larguier (2009) das atividades propostas nos livros do 3º ano (Figura 123) e do 4º ano (Figura 126). No 3º ano, com unidades de medidas não convencionais, por meio de recursos como o palito de fósforo, e no livro do 4º ano, com a passagem para a unidade de medida convencional centímetro.

Na mesma página, um novo recurso é introduzido para o trabalho com o perímetro, a malha quadriculada cujo lado de quadradinho mede 1 centímetro em escala real, como apresentado na figura a seguir.

Figura 128 - Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} com unidade de medida não convencional

3 Na malha quadriculada abaixo, cada quadradinho tem 1 cm de lado. Confira!

a) Qual é o perímetro do quadrado vermelho? _____

b) E o do retângulo azul? _____



O perímetro do quadrado roxo é 4 cm.

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 74).

Essa tarefa corrobora com as orientações dos conteúdos conceituais e procedimentais no domínio das grandezas e medidas do PCN para o “[...] cálculo do perímetro de figuras desenhadas sobre a malha quadriculada” (BRASIL, 1997, p. 61). A retomada no domínio espaço e forma de figuras diferentes possuírem o mesmo perímetro utiliza a mesma técnica T_{MP1} , só que agora com a unidade de medida não convencional lado de quadradinho, associado à unidade de medida convencional centímetro. Os elementos tecnológicos (Θ) são os mesmos das tarefas apresentadas desde o 3º ano (Figura 123), apenas com a mudança do recurso palito de fósforo, o que contribui para a ampliação conceitual dos alunos sobre o objeto perímetro.

Outra tarefa do tipo T_{MP} é proposta na Unidade 3 do LD do 4º ano, num capítulo que tem o foco no domínio espaço e forma, e o nicho do perímetro é reconhecer propriedades de um hexágono regular. A retomada do que é perímetro é informada no enunciado enquanto uma lembrança “O perímetro desse hexágono é o comprimento do seu contorno” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 120).

Na Unidade 4, o cap. 49 – “Áreas e perímetros” tem como objetivos conceituar perímetro e reconhecer que figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes e vice-versa. O perímetro surge como objeto, em tarefas do tipo T_{MP} , associado às situações conhecidas das crianças, como cobrir a tampa de uma caixa com lantejoulas e contornar com um fio (Ibid., p. 183), ou às situações internas à matemática, associado a quadrados desenhados numa malha quadriculada ou um retângulo parecido com uma caixa com lantejoulas (Ibid., p. 184). As técnicas, os elementos tecnológicos e as unidades de medidas são as mesmas utilizadas na

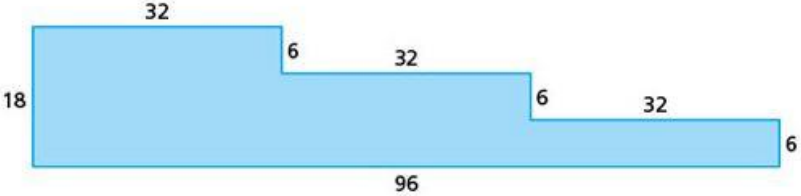
situação apresentada na Figura 128. No capítulo 50 – “Pensando e resolvendo” –, duas tarefas do mesmo tipo são propostas, na malha quadriculada com o lado do quadradinho em centímetros (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 186).

Ao final do LD do 4º ano, na sessão “Veja se já sabe” (Ibid., p. 202), duas tarefas do tipo T_{MP} são propostas no domínio das grandezas e medidas. O perímetro, enquanto instrumento, tem o nicho de avaliar a habilidade de medir. O aluno deve utilizar a técnica T_{MP3} – a medição dos comprimentos dos lados da figura poligonal com a régua graduada e a adição dos comprimentos. Os elementos tecnológicos (Θ) são a noção de contorno, os números decimais positivos e suas propriedades, a operação adição com decimais e um cálculo exato. Os comprimentos dos lados do retângulo e do hexágono regular apresentam medidas inteiras e decimais, esses associados à metade do inteiro.

A abordagem do perímetro no LD do 5º ano inicia na Unidade 2, no capítulo 22, “Expressões numéricas”.

Figura 129 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} sem unidade de medida

5 A principal utilidade das expressões é explicar como uma pessoa raciocinou para resolver certo problema. Por exemplo, vamos calcular o perímetro deste polígono:



• Complete o registro dos raciocínios.

a) Podemos calcular o perímetro assim:

$$18 + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + 96 = \underline{\quad}$$

b) Também podemos usar este “raciocínio esperto”:

$$18 + 3 \times \underline{\quad} + 3 \times \underline{\quad} + 96 = \underline{\quad}$$

Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 84).

Instrumento numa dinâmica entre os domínios das grandezas e medidas e o de números e operações, o perímetro tem como nicho o conhecimento das regras para o cálculo de uma expressão numérica. A tarefa T_{MP} não apresenta unidade de

medida, o que destaca a predominância da representação numérica (FERREIRA, 2010).

O perímetro é trabalhado como objeto de estudo na Unidade 3, no cap. 29 – “A noção de área” –, associado ao tema relações entre área e perímetro de figuras poligonais. Nessa atividade, além da tarefa do tipo **T_{MP}**, é abordado pela primeira vez o tipo de tarefas «**T_{CP}** – Comparar perímetros», conforme

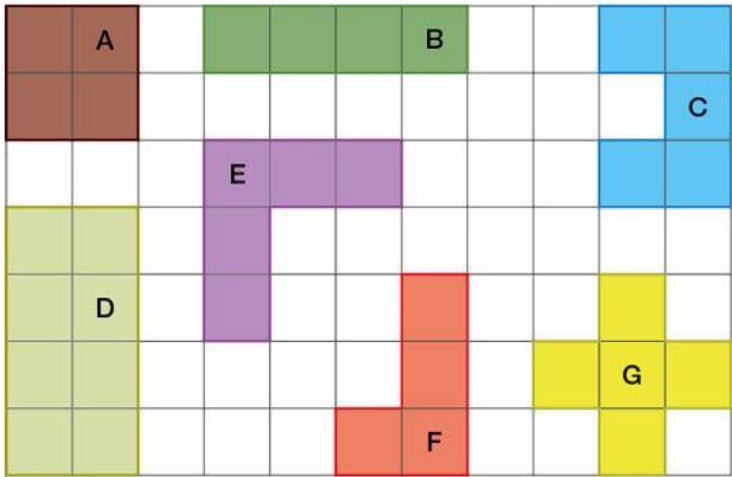
Figura 130, a seguir.

Figura 130 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo **T_{CP}**

3 Este quadradinho tem lados de 1 centímetro. Por isso, dizemos que sua área é igual a **1 centímetro quadrado**.



O centímetro quadrado é uma **unidade de medida de área** muito usada para medir superfícies pequenas. Observe os polígonos A, B, C, D, E, F e G. Eles estão desenhados sobre uma malha quadriculada na qual os lados dos quadrados medem 1 cm.



• Complete a tabela com a área (em centímetros quadrados) e o perímetro (em centímetros) de cada um desses polígonos.

Polígono	A	B	C	D	E	F	G
Área	4						
Perímetro		10					

4 Examine a tabela que você preencheu e dê exemplos de:

- dois polígonos de mesma área e de perímetros diferentes.

- dois polígonos de mesmo perímetro e de áreas diferentes.

- dois polígonos diferentes de mesma área e mesmo perímetro.

Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 111).

O foco das tarefas está no domínio das grandezas e medidas, com os objetos perímetro e área, que mantêm uma dinâmica com o espaço e forma, com as figuras poligonais servindo de instrumento. A técnica empregada é a justaposição da técnica τ_{MP1} – A contagem de comprimentos unitários necessários para contornar toda a figura poligonal, seguida da técnica τ_{CP1} – Comparação dos valores numéricos obtidos. Os elementos tecnológicos (Θ) em jogo são, para a medida do perímetro das figuras poligonais, a quantidade de comprimentos unitários necessários para contornar uma figura e a ordem dos números; e os teóricos (θ), que a área e o perímetro nem sempre variam no mesmo sentido.

O nicho de reconhecer a diferença entre os objetos área e perímetro está em conformidade com o PCN “Cálculo de perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas.” (BRASIL, 1997, p. 61). O recurso da malha quadriculada, introduzido no 4º ano, é retomado como suporte para apresentar a unidade de medida de área não convencional quadradinho de lado 1 cm. A opção dos autores de não usar o símbolo cm^2 é justificada nas orientações: “No 6º ano, conhecerão as potências e compreenderão o significado de notações como cm^2 ou m^2 ” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, GUIA DE RECURSOS DIDÁTICOS, p. 111).

A ampliação dos números naturais para os números racionais positivos é introduzida no LD do 5º ano com o mesmo tipo de tarefa, ao trazer novos objetos associados, como pode ser verificado na Figura 131, a seguir.

Figura 131 – Situação interdomínios com o perímetro em tarefas do tipo T_{MP} com números racionais



Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 116).

A introdução dos números decimais no domínio dos números e operações e de um polígono não regular no domínio da geometria amplia a abordagem do tema

perímetro. A técnica T_{MP3} e os elementos tecnológicos (Θ) utilizados são os mesmos das tarefas do final do LD do 4º ano, apresentados anteriormente (p. 242).

Nas orientações ao professor, os autores sinalizam a importância de conversar com os alunos sobre a figura da tarefa, que representa apenas um esquema diante das medidas colocadas em metro, e corrobora com o PCN (BRASIL, 1997) quanto à atitude a ser desenvolvida, de “[...] analisar todos os elementos significativos presentes em uma representação gráfica, evitando interpretações parciais e precipitadas” (p. 62).

Duas outras tarefas do tipo T_{MP} são propostas dentro da dinâmica interdomínios com o foco no domínio espaço e forma, e o nicho do perímetro é reconhecer propriedades do paralelogramo. Na Unidade 4, capítulo 50 – “Retomando figuras planas”, a técnica T_{MP3} deve ser utilizada, e os elementos tecnológicos (Θ) são a noção de contorno, os números decimais positivos e suas propriedades, a operação adição com decimais e um cálculo aproximado. Esse deve-se ao fato de o paralelogramo estar sobre uma malha quadriculada com lados apoiados sobre o lado e a diagonal do quadradinho da malha, que corresponde a um centímetro quadrado (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 181). Já na sessão “Veja se já sabe” (Ibid., p. 203), a figura do paralelogramo não está apoiada sobre a malha e apresenta as medidas de dois dos seus lados não paralelos em centímetro. A técnica e os elementos tecnológicos são os mesmos, com exceção do cálculo com os números decimais, que neste caso é exato.

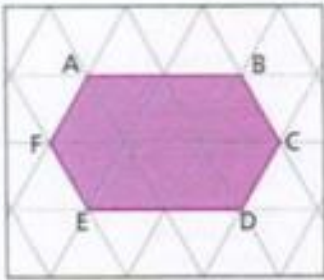
Essa tarefa está em conformidade com as orientações do PCN (BRASIL, 1997) para o domínio de números e operações, para o cálculo com números racionais em que o nicho do perímetro é o trabalho com estimativas: “Além disso, é importante que as atividades de cálculo com números decimais estejam sempre vinculadas a situações contextualizadas, de modo que seja possível fazer uma estimativa ou enquadramento do resultado, utilizando números naturais mais próximos” (p. 80).

No livro analisado do 6º ano, da coleção dos anos finais, o perímetro surge no capítulo 4 – “Formas planas” – numa tarefa interdomínios, geometria, medidas e aritmética, do tipo « T_{MP} – Medir um perímetro», como apresentado na figura a seguir.

Figura 132 – Situação interdomínios com o perímetro enquanto retomada em tarefas do tipo T_{MP}

31. Nesta malha de triângulos regulares, suponha que o lado de cada um deles meça 1,5 cm. Considere o polígono ABCDEF e responda no caderno:

- Como chamamos esse polígono? *hexágono*
- Quantos centímetros mede cada um de seus lados? *1,5 cm*
- Qual é o perímetro do polígono? *12 cm*
(Perímetro é o comprimento do contorno.)
- Quantos graus tem cada um de seus ângulos? *120°*
- Esse polígono é regular? Por quê?



Fonte: Imenes, Lellis (2010, 6º ano, p. 93).

O nicho do perímetro é expressar um comprimento a partir da adição das medidas dos lados de um hexágono, com números decimais. A técnica esperada a ser utilizada pelo aluno é a T_{MP2} – contagem das unidades de comprimento (lado do triângulo equilátero que compõe a malha triangular isométrica) seguida da multiplicação pela sua medida, ou adição das medidas dos lados de um hexágono a partir da medida do lado do triângulo regular. O domínio da aritmética está representado pelos números decimais positivos, utilizado com o suporte da malha triangular isométrica para a construção do hexágono, e no domínio da geometria temos a noção de polígono regular e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Destacamos ser essa a primeira atividade do perímetro em malha isométrica apresentada, incluindo os LD dos anos iniciais. A malha isométrica aparece apenas no LD do 5º ano, no domínio espaço e forma, para a representação de figuras espaciais em perspectivas em duas atividades (IMENES; LELLIS; MELANI, 2015e, p. 185).

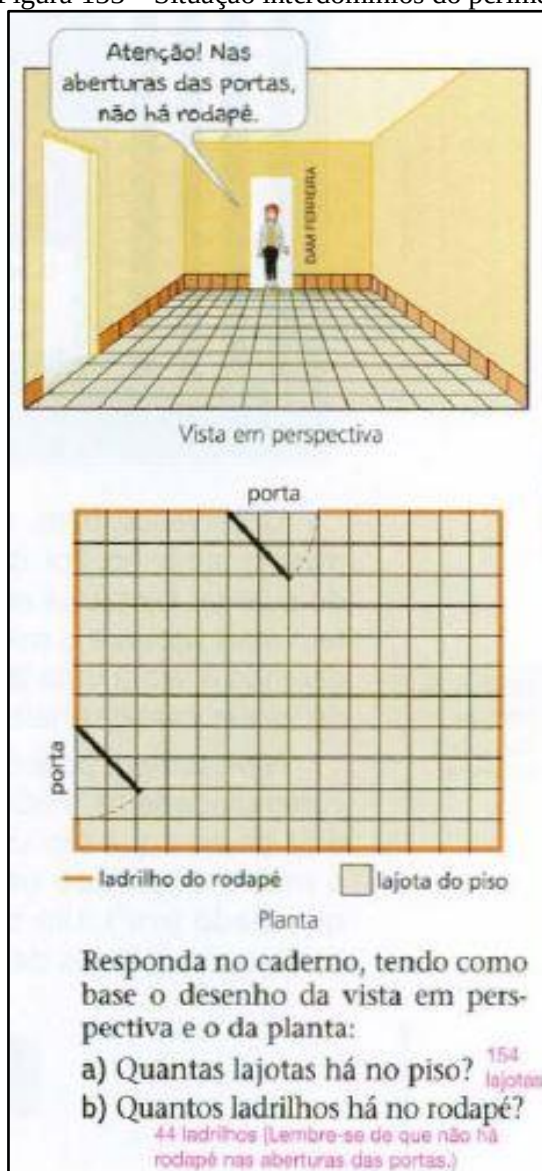
A definição de perímetro como «comprimento do contorno» caracteriza uma retomada, uma lembrança do conceito que vinha sendo apresentado na coleção dos anos iniciais (IMENES; LELLIS; MELANI, 2015d, p. 74; p. 120).

O perímetro aparece novamente como instrumento no LD do 6º ano, no capítulo 8 – Medidas e números decimais (IMENES; LELLIS, 2010, p. 165) –, em três tarefas do tipo T_{MP} , cujo nicho é medir os lados de polígonos regulares com régua graduada, na unidade de medida convencional milímetro. A relação interdomínios continua presente, no entanto o foco está nos domínios medidas e aritmética. A técnica é T_{MP3} – a medição dos comprimentos dos lados da figura poligonal com a régua graduada e a adição dos comprimentos, nesta tarefa, em

milímetros. Os elementos tecnológicos (Θ) são a noção de contorno, os números decimais positivos e suas propriedades, a operação adição com decimais. As orientações ao professor sinalizam as diferenças que podem ser encontradas em tarefas de medição concreta com instrumentos, e sugere que os alunos realizem comparações por justaposição das régua.

No capítulo 11 – “Áreas e perímetros”, diversas tarefas apresentadas possibilitam o trabalho de distinção entre os objetos área e perímetro. Duas atividades (Ibid., p. 220, p. 223) apresentam conexões com componentes externos à matemática, com práticas profissionais, associado aos domínios da geometria e das medidas, conforme Figura 133, a seguir.

Figura 133 – Situação interdomínios do perímetro



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 220)

Essa tarefa tem no *item 2b* o perímetro como objeto de estudo, e o domínio da geometria é usado para dar suporte com as diferentes vistas. A técnica utilizada é τ_{MP1} – Contagem das unidades de medida não convencionais de comprimento, e os elementos tecnológicos (Θ) são a noção de contorno, os números naturais e a operação adição.

Na sequência, ainda tarefas do tipo T_{MP} , em articulação com o domínio da geometria são propostas em malha quadriculada (Ibid., p. 222-223), para que comparações entre figuras sejam estabelecidas a partir da relação entre área e perímetro, uma retomada da tarefa apresentada no LD do 5º ano (Figura 130). A técnica a ser empregada é a mesma aplicada no ano anterior, τ_{CP1} , visto que as figuras também são poligonais. No enunciado dessa atividade, a afirmação “Você já sabe que o perímetro é a soma das medidas de seus lados” (IMENES; LELLIS, 2010, p.222) é mais restrita que a apresentada nesse mesmo livro, no cap. 4 (Figura 132), “**Perímetro** é o comprimento do contorno”, e pode levar o aluno a pensar que são afirmações excludentes.

Segundo Vergnaud, a construção do conhecimento por um sujeito acontece em ação, no enfrentamento de situações, quando é necessário “[...] não somente de uma definição por enunciado e textos, mas também daquilo que está subjacente às competências e permite a ação operatória” (1994, p. 177). Ainda para Vergnaud, “Um conceito não pode ser reduzido à sua definição” (Id., 1993, p. 1), ou seja, para a construção conceitual do perímetro o aluno precisa vivenciar diferentes classes de situações, com diferentes representações e relações, para verificar a amplitude desse conceito. Por exemplo, a proposição de situações de comparação de perímetros, a situação de medição, com figuras poligonais e não poligonais, ou numa atividade do tipo T_{MP} sem a presença da figura “Calcule o perímetro e a área de: a) um retângulo com lados 18 cm e 9 cm” (IMENES; LELLIS, 2010, Ativ. 11, p. 225), contribuem para a mudança de representações e a ampliação do conhecimento, para que se torne cada vez mais explícito.

O recurso palito de fósforo é utilizado no LD do 6º ano numa única atividade associada à tarefa do tipo « T_{PP} – produzir superfície a partir de um perímetro», conforme Figura 134, a seguir.

Figura 134 – Situação interdomínios com a área e o perímetro associada ao tipo de tarefa T_{PP}

16. Usando 22 palitos de fósforo e sem quebrar nenhum, é possível construir 5 retângulos diferentes, cada um usando os 22 palitos. Como no exemplo ao lado, desenhe-os no caderno, anotando as dimensões (comprimento e largura) e a área.

17. Com base no problema anterior, responda:

- Qual é o perímetro de cada retângulo?
- Qual retângulo tem a menor área?
- Qual retângulo tem a maior área?

Capítulo 11

1ª) 

Dimensões: $1p \times 10p$
Área: $1p \times 10p = 10p^2$

2ª) 

Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 227).

As atividades 16 e 17 abordam a relação entre áreas e perímetros. Na atividade 16, a informação que é possível construir 5 retângulos distintos com o mesmo perímetro de 22 palitos de fósforo é fornecida, com a representação de um deles com suas dimensões (destaque com seta laranja). Assim, a técnica τ_{PP1} consiste em perceber a possibilidade de variação das medidas de comprimento de modo que a soma do comprimento com a largura seja igual a 11 palitos, os elementos tecnológicos (Θ) estão associados às propriedades do retângulo. A atividade 17, *item a*, com a tarefa do tipo T_{MP} , complementa a atividade 16, e está em acordo com o nosso modelo epistemológico de referência para o perímetro.

Essas situações corroboram com o PCN “Variando as situações propostas (comparar duas figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes [...]) e solicitando aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas, cria-se a possibilidade para que compreendam os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente” (BRASIL, 1998a, p. 131).

Uma única tarefa do tipo « T_{GP} – Determinar o valor de uma grandeza diferente de perímetro, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao perímetro» é apresentada no cap. 11 (Figura 135), em que o perímetro é considerado *instrumento* com o foco no domínio das medidas para o conceito de área, sem a presença da figura.

Figura 135 – Situação interdomínios associada ao tipo de tarefa T_{GP}

18. Calcule a área de um quadrado cujo perímetro é 202 cm. 2550,25 cm²

Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 227).

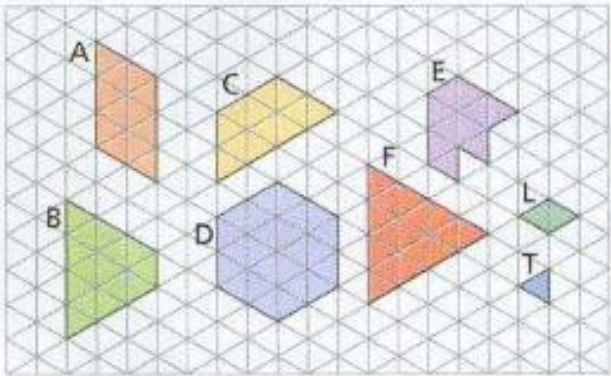
A técnica utilizada será τ_{GP1} – a divisão do valor do perímetro por quatro para a determinação do comprimento do lado do quadrado, seguido da multiplicação desse valor por ele mesmo. Os elementos tecnológicos (Θ) estão associados às propriedades do quadrado, à noção de contorno, ao conceito de perímetro e aos números racionais positivos.

Ao final do capítulo, na seção “Para não Esquecer”, uma retomada no sentido de Larguier (2009), enquanto revisão dos temas trabalhados perímetro e área, é realizada: “Algumas figuras planas, como círculos e polígonos, são delimitadas por um contorno, que é uma linha fechada. O comprimento dessa linha é o **perímetro** da figura. A extensão da superfície dessa figura é a sua **área**” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 323).

As tarefas associadas ao perímetro estão em sua maioria vinculadas à situação de medição com unidades de medidas convencionais ou não convencionais. O tipo de tarefa « T_{CP} – Comparar perímetros» volta a aparecer interna ao domínio das medidas, agora em malha triangular (Figura 136).

Figura 136 – Situação interdomínios associada ao tipo de tarefa T_{CP}

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



1 Sobre os polígonos A e E, é verdade que eles têm: **alternativa b**

- a) áreas e perímetros iguais.
- b) perímetros iguais e áreas diferentes.
- c) áreas iguais e perímetros diferentes.
- d) áreas diferentes e perímetros diferentes.

Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 233).

Essa tarefa faz parte de um conjunto de exercícios denominados “Supertestes”, que têm a função de autoavaliação, e assumem também a função de retomada, no sentido de Larguier (2009), quando aluno e/ou professor pode(m) ter um controle dos conceitos trabalhados e aprendidos. Nenhuma observação sobre a malha triangular isométrica é realizada, ficando subentendido ser de conhecimento dos alunos.

Em conformidade com as orientações dos documentos oficiais vigentes, o conceito de perímetro é introduzido pelos autores apenas no 3º ano dos anos iniciais do EF.

O objeto perímetro surge no “Guia de recursos didáticos” da coleção dos anos iniciais, no domínio das grandezas e medidas, em dois temas – noção e cálculo do perímetro de polígonos e as relações entre perímetro e área de figuras poligonais – a serem abordados no 4º e no 5º anos, respectivamente, dentro do setor medida de comprimento. E aparece ainda no manual do 5º ano, no tema relações entre área e perímetro de figuras poligonais no setor área.

No “Guia do professor” do 6º ano, no domínio intitulado medidas, o perímetro aparece apenas no tema perímetro de polígonos, no setor medida de comprimento. No entanto, no LD do aluno, o perímetro é tratado enquanto objeto no capítulo 11 em tarefas que abordam as relações entre área e perímetro.

Dentre os quatro tipos de tarefas identificados, a predominância ainda é na tarefa «**T_{MP}** – Medir um perímetro» e na técnica **T_{MP3}** – A medição dos comprimentos dos lados da figura poligonal com a régua graduada e a adição dos comprimentos. No entanto, a diversidade de recursos contribui para a construção conceitual (VERGNAUD, 1983).

Nos LD analisados, diversos momentos de retomada são realizados, no sentido de Larguier (2009), desde revisões, lembrança do que foi vivenciado num mesmo ano escolar, ampliação conceitual associado às grandezas ou a outros domínios. Esses momentos são sinalizados em algumas ocasiões ao longo dos manuais pedagógicos destinados ao professor, mas de maneira implícita, precisando da leitura atenta desse profissional das atividades, não apenas da coleção do seu nível de ensino, para que o processo de construção do conceito de perímetro proposto pelos autores seja compreendido, mas também a transição desse conceito associado aos demais, ao longo dos anos de ensino.

6.1.3.2 O saber área nos LD analisados

Conforme comentamos anteriormente, os autores da coleção dos anos iniciais afirmam que a introdução do conceito de área acontece no 3º ano (item 6.1.2.1). No entanto, no livro do 2º ano, atividades pertencentes a outros domínios são propostas com a noção de área enquanto instrumento. Assim como observado para o perímetro, a predominância é de situações de medição com tarefas do tipo « T_{MA} – Medir uma área». As tarefas do tipo « T_{TA} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies» e « T_{CUA} – Converter unidades de medida de áreas» surgem apenas no livro do 6º ano.

Tabela 3 – Quantitativo de tipos de tarefas para o objeto área nos livros didáticos analisados

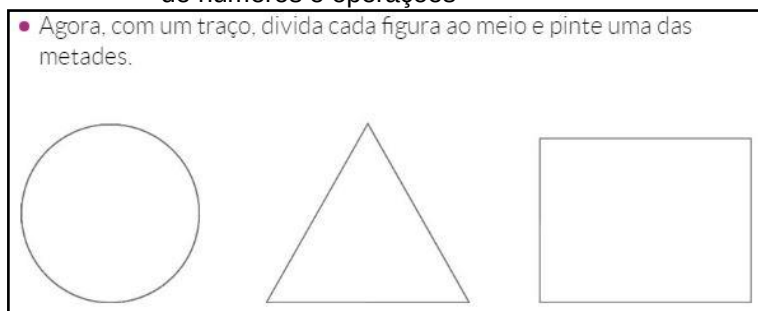
Classe de situação	Tipo de Tarefa	ANO					
		1º	2º	3º	4º	5º	6º
Comparação	T_{CA} – Comparar áreas	0	0	3	0	5	13
	T_{TA} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	0	0	0	1	0	0
Medição	T_{MA} – Medir uma área	0	2	0	17	51	99
	T_{EA} – Estimar uma área	0	0	0	0	0	3
	T_{GA} – Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área	0	0	0	0	3	10
Conversão	T_{CUA} – Converter unidades de medida de áreas	0	0	0	0	0	6
Produção	T_{PA} – Produzir superfícies	0	2	13	0	7	0

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

A noção de área surge no livro do 2º ano na Unidade 2, cap. 25 – “Palavras comuns na Matemática” –, em que termos como dobro, par, ímpar, metade, dúzia e meia dúzia deixam claro o habitat de números e operações, e o tema área tem como

nicho para compreender o conceito de metade, como podemos observar na Figura 137⁷⁰, a seguir.

Figura 137 – Situação interdomínios com a área enquanto instrumento no habitat de números e operações



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015b, p. 91).

O tipo de tarefa «**T_{MA}** – Medir a área» é proposto no sentido prático e geométrico, quando o aluno deve dividir cada figura ao meio e realizar a pintura de uma de suas metades. Nas orientações ao professor, apenas é comentado que existem diferentes possibilidades de solução. Com relação ao conceito de metade, os autores comentam que “[...] pode-se pensar na metade de uma quantidade (ou de um número) ou na metade de uma extensão (ou de um objeto, de uma figura)” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015b, p.91).

Essa tarefa reafirma o que foi sinalizado por Silva (2004), a importância dada às grandezas enquanto contextualização para o estudo das frações de quantidades contínuas. A pesquisadora analisou três coleções de autores que possuíam publicações tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do EF para observar a continuidade da abordagem proposta e verificar a existência ou não do amálgama entre área e figura. Dentre as situações propostas, 74% delas abordavam o conceito de área associado às frações de quantidades contínuas com o uso de desenhos de figuras geométricas, em geral circulares ou retangulares. A pesquisadora também constatou que os termos figura, superfície e região eram utilizados pelos autores enquanto sinônimos para designar a grandeza área, assim como a fração de um objeto associada a um desenho, como representante da área como uma figura.

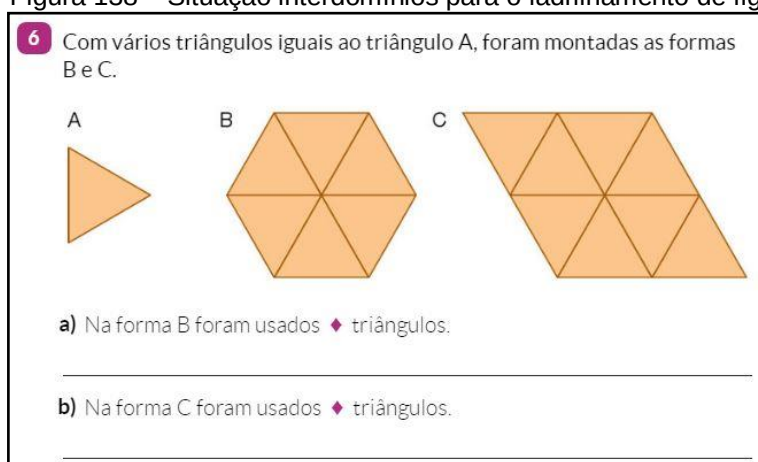
Nos dois casos, observamos a dificuldade em distinguir os quadros geométrico e o das grandezas, e a figura do seu atributo, distinções necessárias para a compreensão de grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

⁷⁰ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Mesmo com indicações de pesquisas de mais de uma década, o amálgama entre figura e área permanece ao se referir à metade da figura (Figura 137), quando deveria ser considerada a metade da área de cada uma das figuras, e não a metade da figura ou do objeto.

Na sequência, no cap. 26 – “Problemas” –, o mesmo tipo de tarefa T_{MA} aborda a noção de área como instrumento, mas agora associado a uma medição prática e numérica, nos domínios números e operações, espaço e forma e grandezas e medidas⁷¹.

Figura 138 – Situação interdomínios para o ladrilhamento de figuras



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015b, p. 95).

A tarefa a ser realizada é « T_{MA} – Medir a área» e a técnica é T_{MA1} – Contagem das unidades de medida não convencionais, representadas pelo triângulo A, e determinação da quantidade dessas unidades de medida para a construção das figuras B e C. Os elementos tecnológicos (Θ) são a operação de adição, os números naturais e as figuras planas hexágono e paralelogramo, e suas propriedades.

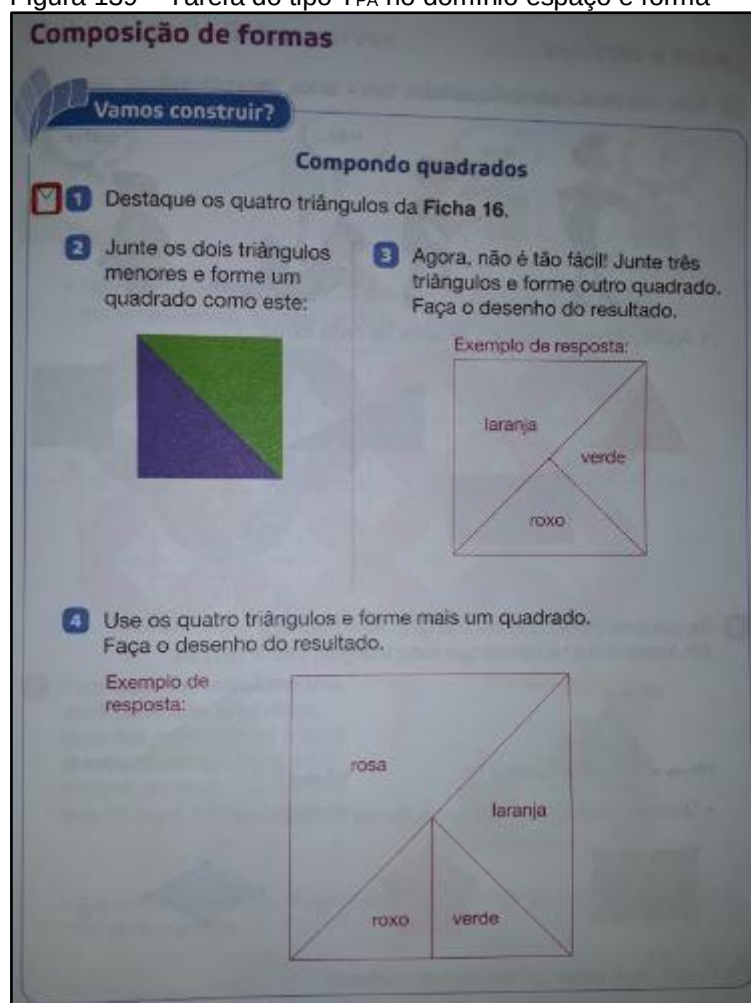
Observamos que as perguntas dos itens a e b, no habitat de números e operações, têm como objetivo saber a quantidade de figuras A que existem em cada uma das figuras B e C, e a indicação para o registro apenas numérico reforça essa valorização, como percebido por Ferreira (2010, p. 63), quando “[...] o aluno responde ‘preenchendo um espaço’ apenas com um número, com a unidade de medida presente”.

⁷¹ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Nas orientações ao professor, os autores afirmam que a atividade “visa desenvolver também a percepção geométrica”, sem trazer referência à abordagem da área enquanto instrumento.

As duas tarefas do tipo « T_{PA} – Produzir uma área», surgem no LD do 2º ano associadas à composição de figuras, para a produção de uma figura a partir de uma área dada, como apresentado na Figura 139⁷², a seguir.

Figura 139 – Tarefa do tipo T_{PA} no domínio espaço e forma



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015b, p. 111).

Nessas atividades, a área das figuras é um instrumento no habitat espaço e forma, cujo nicho é compor quadrados a partir de triângulos, a técnica é a composição de figuras sem a interferência do quadro numérico, e os elementos tecnológicos (Θ) são as figuras planas triângulo e quadrado e suas propriedades.

⁷² No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Nas orientações ao professor, os autores sinalizam a importância da decomposição:

O cálculo de área de paralelogramos, triângulos, losangos e dos polígonos em geral será objeto de estudo a partir do 6º ano. Tal estudo, em grande parte, é baseado em composição e decomposição de figuras. Por isso, atividades como a desta página serão propostas em todos os anos seguintes.

As informações anteriores não são para uso imediato, mas julgamos explicitar a importância matemática e formativa do trabalho que você realiza com as crianças. (op. cit.)

Os autores corroboram com o nosso pensamento quanto à importância do desenvolvimento de situações que envolvam esse procedimento, inclusive apresentam a imagem de um hexágono regular que pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros para a determinação da sua área, o que também contribui para a compreensão das propriedades das figuras geométricas.

Essas informações são apenas para o professor, o que consideramos pertinente diante do ano escolar em que são colocadas, por possibilitarem uma visão de continuidade e ampliação de um objeto de estudo e da dinâmica interdomínios.

No LD do 3º ano, a grandeza área é introduzida de maneira intuitiva, segundo os autores, na Unidade 1, cap. 4 – “Problemas ... e problemas” –, com uma tarefa do tipo «T_{CA} – Comparar áreas», conforme figura a seguir.

Figura 140 – Situação interdomínios com o objeto área

6 Veja o quadrado abaixo.

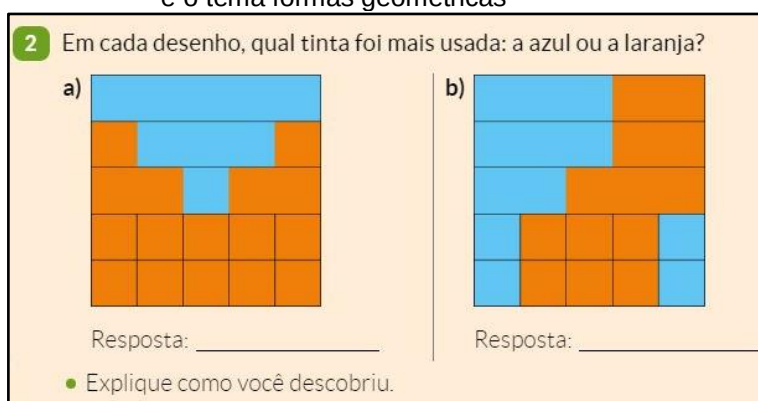
Para pintá-lo, qual tinta foi mais usada: a verde ou a vermelha? Por quê?

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 24).

A técnica sugerida é τ_{CA1} – A contagem de quadradinhos de cada cor, de modo que aquela que tiver maior quantidade de quadradinhos terá maior área, o que reforça, de forma equivocada, a necessidade da medida em uma situação de comparação. Os elementos tecnológicos (Θ) são a superfície unitária quadradinho e os números naturais.

A retomada desse tipo de tarefa é realizada ao final do livro do 3º ano, na seção “Refletindo mais”, com uma mudança de variável, em que apenas parte dos quadradinhos está encoberta⁷³, conforme Figura 141 a seguir.

Figura 141 – Situação de comparação de áreas associada ao domínio geometria e o tema formas geométricas



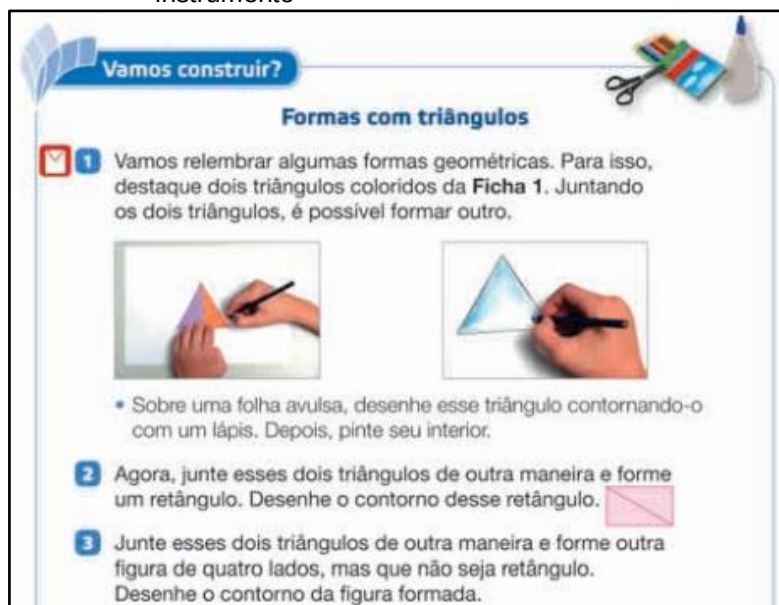
Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 104).

Nas orientações ao professor, é informado que a atividade envolve a noção de área e “a única maneira de ter segurança sobre qual é a resposta correta” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015c, p.104) é desenhando todos os quadradinhos que compõem cada quadrado. No entanto, a observação visual, operação mental possível de ser realizada e estimulada aos alunos, pode ser uma técnica utilizada nos dois itens, assim como a decomposição e composição das regiões, outra técnica possível para posterior comparação entre as áreas de cada uma das cores.

Tarefas do tipo « T_{PA} – Produzir superfícies» estão presentes no LD do 3º ano desde o início do livro, no habitat espaço e forma, como na sessão “Vamos construir?”, conforme Figura 142, a seguir.

⁷³ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Figura 142 – Situação de produção de figuras poligonais com a área enquanto instrumento

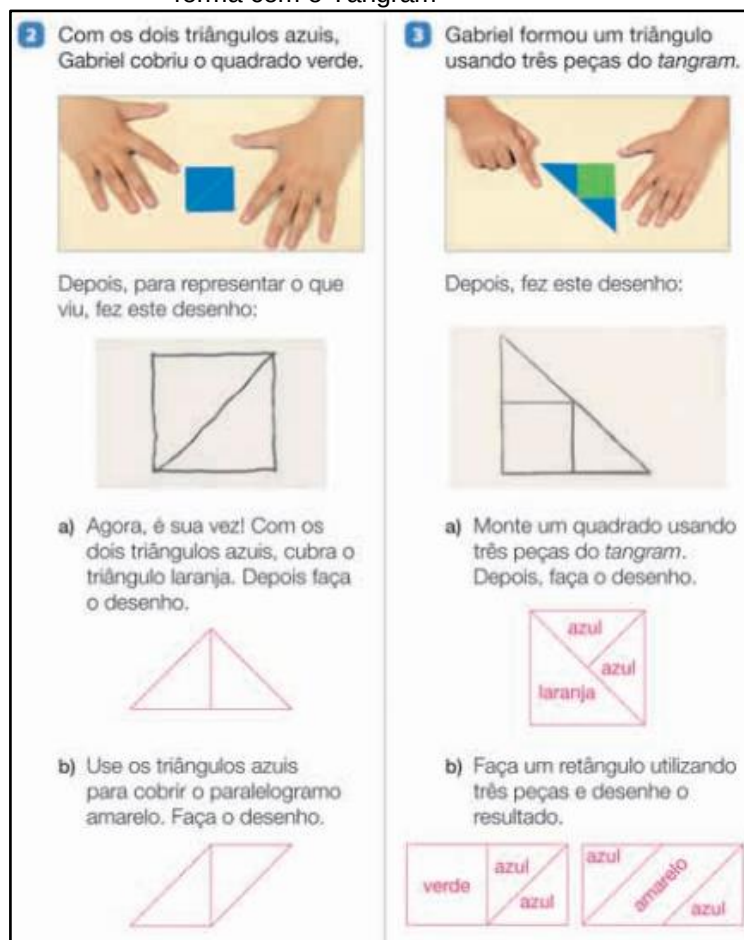


Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 13).

O nicho da área é desenvolver a percepção geométrica de diferentes figuras poligonais, como afirmam os autores nas orientações ao professor: “[...] atividades envolvendo decomposição e composição de figuras planas aguçam a visão geométrica dos alunos, favorecem a compreensão de propriedades das figuras e serão úteis futuramente na construção da noção e no cálculo de áreas” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015c, p.13), o que favorece a articulação entre os quadros geométrico e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Ainda no LD do 3º ano, encontramos quatro situações de produção no habitat espaço e forma, a partir do processo de composição de figuras planas: um quebra-cabeça para composição de dois polígonos (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015c, p. 138); a composição de três figuras geométricas com losangos (Ibid., p. 139); a composição de uma figura com dois triângulos retângulos (Ibid., p. 195) e a composição de quatro figuras poligonais a partir de peças do Tangram, como apresentado na Figura 143, a seguir.

Figura 143 – Tarefa de composição de figuras poligonais no domínio espaço e forma com o Tangram



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 171).

Podemos observar nas tarefas desse tipo, T_{PA} , que a área é utilizada ainda enquanto instrumento para a retomada das figuras já conhecidas, com diferentes recursos, nesse caso as peças do Tangram. Além disso, nas tarefas propostas, a retomada e a ampliação do objeto figura geométrica são realizadas a partir das diferentes subtarefas propostas, seja o recobrimento de uma figura preestabelecida, a produção de uma figura solicitada, ou a composição de uma figura qualquer.

No livro do 4º ano, a maioria das tarefas é do tipo T_{MA} . As duas primeiras, numa situação interdomínios com espaço e forma e o habitat números e operações, em que o nicho da área é a configuração retangular (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 32).

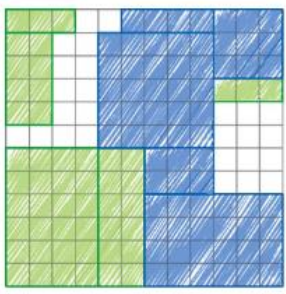
Em seguida, na sessão “Vamos jogar?”, são apresentadas regras do jogo da conquista, que têm como tabuleiro o recurso malha quadriculada. Após a prática do jogo, tarefas são propostas a partir da simulação de jogadas, conforme apresentado na Figura 144, a seguir.

Figura 144 – Situação interdomínios com a área para o tema multiplicação

2 Anísio (azul) e Alice (verde) estão disputando outra partida, e Alice está para lançar os dados. Veja como está a malha:

a) Se Alice tirar 6 e 5 nos dados. Ela deverá contentar-se com um retângulo de quantos quadradinhos, no máximo?

b) Quem começou esse jogo: Alice ou Anísio? _____



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 34).

Na tarefa do tipo T_{MA} no *item a*, a configuração retangular é retomada e ampliada. O aluno precisará realizar a multiplicação dos valores 5 e 6, e encontrar o resultado. Em seguida, deve-se aplicar a técnica τ_{MA1} – Contar a quantidade de superfícies unitárias necessária para recobrir a figura, no caso uma região retangular do tabuleiro que seja a maior possível. Os elementos tecnológicos considerados (Θ) são a área, que é dada pela quantidade de superfícies unitárias necessária para cobrir uma figura, a figura retângulo, os números naturais e a operação de multiplicação. Apesar de a tarefa envolver os domínios números e operações, geometria e grandezas e medidas, o contexto é para o tema multiplicação.

A configuração retangular continua a ser o nicho da área na mesma unidade, no cap. 12 – “Problemas” –, numa retomada para ampliação, agora associada a uma figura tridimensional, conforme Figura 145, a seguir.

Figura 145 – Situação interdomínios com o tipo de tarefa T_{MA} associado a uma figura tridimensional

DESAFIO!

Laura está fazendo um presente para o Dia das Mães. Ela está colando adesivos quadrados, todos de mesmo tamanho, multicoloridos, nas laterais e na tampa da caixa, como mostra a da ilustração ao lado. Sua mãe terá uma bonita caixa para guardar objetos.



• Quantos adesivos Laura vai usar para cobrir as laterais e a tampa da caixa?

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 49).

Numa situação contextualizada, o aluno precisará articular os três quadros, inicialmente o geométrico e das grandezas, para perceber três configurações

retangulares distintas: uma face lateral maior e uma menor da caixa, e sua tampa. As dimensões das laterais da caixa estão visíveis com a indicação da quantidade de adesivos quadrados, tanto na largura quanto na altura, o que está implícito na tampa.

A técnica é T_{MA2} – Contagem da quantidade de ladrilhos inteiros na largura e no comprimento, seguida da multiplicação dos valores obtidos. Os elementos tecnológicos (Θ) considerados são o quadrado, a área, a multiplicação associada à configuração retangular, além do bloco retangular e suas propriedades, apesar de esse não ter sido objeto de estudo até esse momento no LD do 4º ano.

Situação parecida é proposta na Unidade 4, no cap. 49 – “Áreas e perímetros” –, com a retomada do tipo de tarefa T_{MA} agora associado apenas à tampa de uma caixa, com a área e o perímetro enquanto objetos, conforme Figura 146, a seguir.

Figura 146 – Situação interdomínios com a relação entre área e perímetro



49 Áreas e perímetros



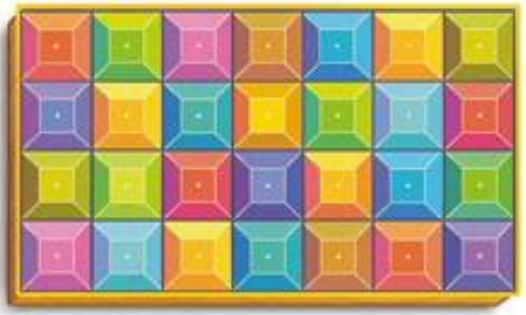
1 Gilda enfeitou a tampa da sua caixinha de bijuterias com lantejoulas coloridas. Cada lantejola é um quadradinho com 1 cm de lado. Para o acabamento, ela colocará um fio amarelo em todo o contorno da tampa.



a) Quantos centímetros de fio Gilda usará no acabamento da tampa?

b) Quantas lantejoulas coloridas Gilda precisou para enfeitar a tampa da caixinha?

2 Agora, Gilda vai enfeitar da mesma forma a tampa da caixinha de sua irmã.



a) Nessa outra caixinha, quantos centímetros de fio Gilda usará no contorno da tampa?

b) Quantas lantejoulas ela usou para enfeitar a tampa?

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 183).

As tarefas T_{MA} e T_{MP} , no habitat das grandezas e medidas, contribuem para a compreensão dos conceitos de área e perímetro, cujo nicho é reconhecer que figuras com mesmo perímetro podem ter áreas diferentes, e estão de acordo com a nossa proposta de modelo, baseada nas pesquisas anteriores e em Douady e

Perrin-Glorian (1989). Na sequência, uma proposta de institucionalização é feita pelos autores no enunciado de uma atividade, conforme Figura 147, a seguir.

Figura 147 – Institucionalização dos objetos área e perímetro

4 Na tampa da caixinha, medimos o **perímetro**, que é o comprimento de seu contorno. Também podemos medir a **área**, para saber qual é a extensão de sua superfície. A área da tampa pode ser medida pelo número de quadradinhos com 1 cm de lado que cabem nela.

● Se você entendeu, complete:

O perímetro da tampa da caixinha da irmã de Gilda é _____ cm, e sua área é _____ quadradinhos.

Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015d, p. 184).

Consideramos, com base no modelo epistemológico de referência esboçado no capítulo 2, que é desejável realizar atividades com a área sem que haja necessariamente medidas. Na articulação dos quadros das grandezas e o geométrico, explorar aspectos da área com a dependência do quadro numérico pode atrapalhar a construção conceitual defendida nas pesquisas, o que por vezes está presente na coleção analisada.

O conceito de área enquanto objeto aparece ainda em cinco tarefas do tipo T_{MA} cujo nicho é medir a área de quadrados numa malha quadriculada em centímetros. Outras cinco tarefas do mesmo tipo, enquanto instrumento, são propostas no habitat números e operações, associadas ao tema frações e retomadas do 3º ano (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 158), enquanto ampliação cujo nicho é representar frações com numerador diferente de 1.

Uma tarefa do tipo « T_{TA} – Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies», exemplo apresentado na nossa classificação, item 2.4.1, na Figura 13, está presente no LD do 4º ano e que reapresentamos aqui, na figura a seguir.

Figura 148 – Exemplo de tipo de tarefa T_{TA}

6 A figura marrom é uma ampliação da figura roxa.

a) Por quanto se deve multiplicar a medida dos lados da figura roxa para obter a medida dos lados da marrom? 2

b) Qual é, em centímetros, o perímetro da figura roxa? E o da marrom?
8 cm; 16 cm

c) Um quadrado com 1 cm de lado tem área igual a 1 centímetro quadrado. Quantos centímetros quadrados de área tem a figura roxa? E a marrom? 3 centímetros quadrados; 12 centímetros quadrados.

Fonte: Imenes, Lellis e Melani (2015d, p. 186).

Apesar de o sumário detalhado trazer para o cap. 50 – “Pensando e resolvendo” – orientações aos professores não são apresentadas pelos autores sobre o tema ampliações de figuras, o que nos faz pensar que o nicho da tarefa para o conceito de área é apenas calcular a área e o perímetro de figuras.

No livro do 5º ano, a noção de área surge enquanto instrumento na Unidade 2, para a retomada do tema frações no habitat números e operações, em nove tarefas do tipo T_{MA} , reforçando, conforme sinalizamos no livro de 2º ano, associação às partes de cada uma das figuras planas, e não as frações das áreas (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 68; p. 105). O tema frações é ampliado com a noção de porcentagem, tendo a área ainda como instrumento nas seis tarefas propostas e do mesmo tipo (Ibid., p. 102). Ao final do livro, na Unidade 4, cap. 54 – “Retomando as frações” –, dezesseis tarefas são propostas com a área enquanto instrumento. Nove delas são do tipo T_{MA} (Ibid., p. 193; p. 194; p. 195), e sete associadas a um outro tipo de tarefa « T_{OA} – Operar com áreas», em que o nicho é realizar operações de adição e subtração com áreas, para contextualizar os números racionais, neste caso representados por frações (Ibid., p. 196; p. 197).

Apesar de não constar na nossa classificação, esse tipo de tarefa foi sinalizado em trabalhos anteriores (SILVA, 2011; 2016; SANTOS, 2015). Para a construção conceitual da grandeza área e da relação entre ela e o perímetro, entendemos essa tarefa enquanto instrumento com predominância no quadro numérico. As situações de medição de área, em tarefas que envolvam o processo de composição de figuras, propiciam a operação com áreas num sentido mais amplo e que consideramos mais importante na construção conceitual por articular os

quadros geométrico e das grandezas. A ideia é fortalecer a distinção entre os três quadros (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Ainda na Unidade 2 e enquanto instrumento no cap. 22 – “Expressões numéricas” –, a noção de área surge numa situação interdomínios.

Figura 149 – A decomposição de áreas de figuras em situação interdomínios

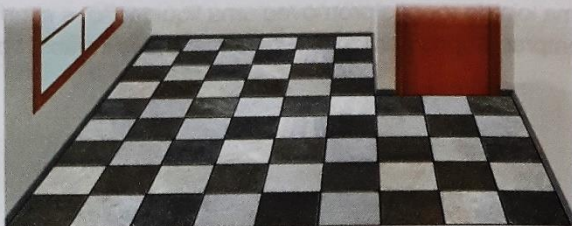
22

Expressões numéricas

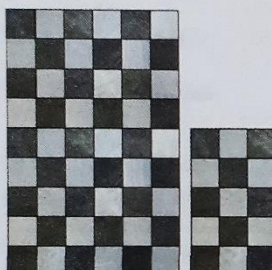
1 Veja o piso ao lado. Depois, responda.

Quantos ladrilhos tem o piso dessa sala?

Veja abaixo duas maneiras diferentes de contar os ladrilhos.



Você pode ver 6 colunas de 9 ladrilhos mais 3 colunas de 5 ladrilhos.

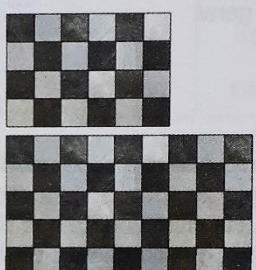


Registra-se assim:

$$6 \times 9 + 3 \times 5 =$$

$$= 54 + 15 = 69$$

Você também pode ver 4 fileiras de 6 ladrilhos mais 5 fileiras de 9 ladrilhos.



Registra-se assim:

$$4 \times 6 + 5 \times 9 =$$

$$= 24 + 45 = 69$$

Nesses registros, observe que as contas não são feitas na ordem em que foram escritas. As multiplicações são efetuadas antes das adições. Elas também devem ser feitas antes das subtrações.

- Siga essas regras e efetue:

a) $5 \times 7 + 4 \times 6 =$

$= \underline{35} + \underline{24} = \underline{59}$

b) $5 \times 11 - 4 \times 9 =$

$= \underline{55} - \underline{36} = \underline{19}$

2 Complete com o resultado final.

a) $4 \times 8 - 3 \times 9 = \underline{5}$

b) $6 \times 9 + 3 \times 10 = \underline{84}$

c) $11 \times 8 - 6 \times 5 = \underline{58}$

d) $9 \times 11 - 2 \times 25 = \underline{49}$

82

oitenta e dois

12

+

=

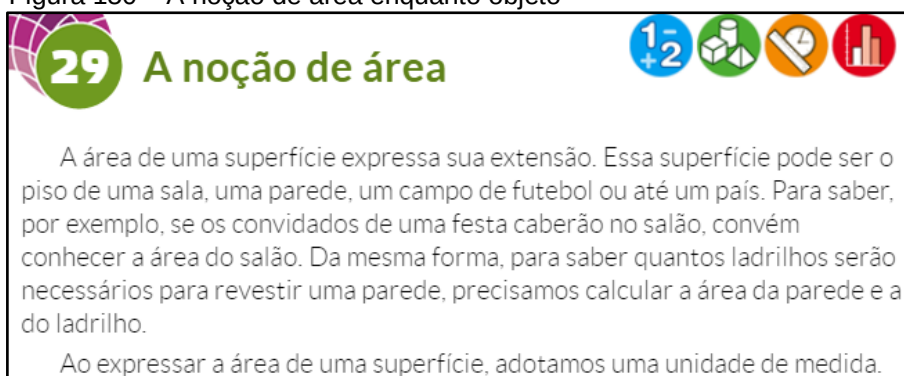
Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 82).

O nicho do conceito de área é a exploração de expressões numéricas, mais especificamente uma justificativa para a prioridade da multiplicação em relação à adição. O seu habitat é o domínio de números e operações como instrumento para, associado ao domínio da geometria, visualizar a decomposição da figura a partir da imagem dada. Apesar de os autores sinalizarem com ícones ser essa atividade pertencente também ao domínio das grandezas e medidas, esse serve apenas para contextualizar a situação. A invariância das áreas a partir da decomposição das figuras não é explorada pelos autores, nem enquanto orientação aos professores, o que reforça a predominância do domínio de números e operações.

Ainda no habitat números e operações, uma tarefa do tipo « T_{GA} – Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área» é apresentada. Solicita-se determinar a quantidade de árvores em um bosque, representado sobre uma região quadriculada, por aproximação. A técnica já é introduzida pelos autores: “Uma dica: o bosque está dividido em quadrados. Escolha um deles e conte quantas árvores há no seu interior. Depois deixamos o resto com você” (Ibid., p. 88), o que deixa visível a abordagem da área enquanto um instrumento para o tema estimativa.

A noção de área enquanto objeto é retomada do ano anterior e ampliada no LD do 5º ano na Unidade 3, cap. 29 – “A noção de área”, associada à ideia de espaço ocupado, o que contribui para sua construção enquanto grandeza.

Figura 150 – A noção de área enquanto objeto



Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 110).

De maneira adequada, o termo superfície é utilizado enquanto um objeto de quadro geométrico, estando em conformidade com as pesquisas da nossa fundamentação. Já nas orientações ao professor nessa mesma página, a afirmação “Área é a medida da superfície” vai em um sentido diferente da informação do texto

para os alunos, com a área associada ao quadro numérico, enquanto uma medida, o que diverge da concepção de área como grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Uma aplicação da noção de área de uma superfície expressa com a ajuda de unidade de medida é explorada numa tarefa do tipo T_{MA} , que apresentamos na Figura 151, a seguir.

A técnica utilizada é T_{MA2} – Contagem da quantidade de ladrilhos inteiros na largura e no comprimento, seguido da multiplicação dos valores obtidos, e o elemento tecnológico central (Θ) é a abordagem da multiplicação associada à configuração retangular.

Figura 151 – Exemplo de tarefa do tipo T_{MA}

2 Observe o piso da sala e complete o texto.



● No piso há _____ ladrilhos na largura e _____ no comprimento.

Portanto, a área da sala em ladrilhos é:

_____ × _____ = _____

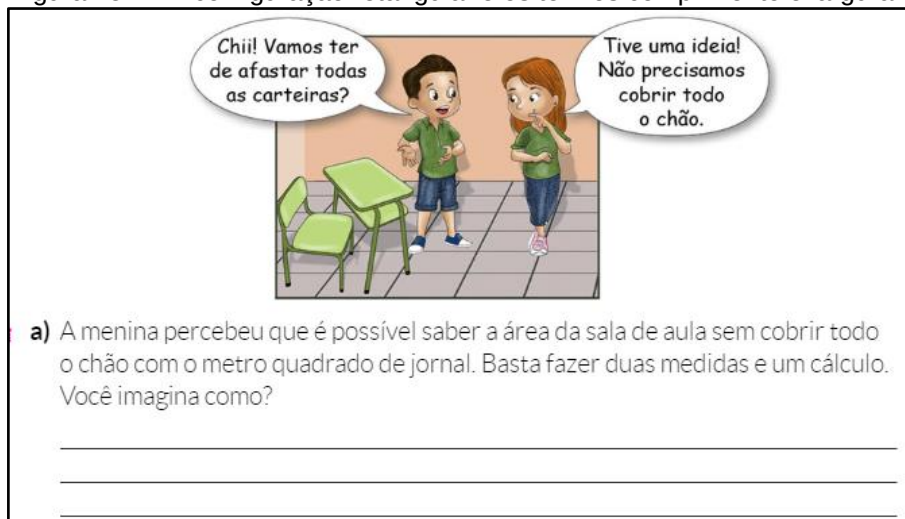
Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 110).

Dentre as cinco tarefas do tipo « T_{CA} – Comparar áreas» presentes no LD do 5º ano, três privilegiam a relação entre área e perímetro com o uso da malha quadriculada, conforme apresentado na Figura 130. A técnica é composta da justaposição da técnica T_{MA1} – Contagem da quantidade de unidades de medidas não convencionais quadradinhos inteiros, seguida da técnica T_{CA1} – Comparação dos valores numéricos obtidos. Os elementos tecnológicos (Θ) em jogo são, para a medida da área, a quantidade de superfícies unitárias necessárias para cobrir uma figura e a ordem dos números.

Duas outras tarefas do tipo T_{CA} são propostas, mas, apesar de estarem associadas às unidades de medidas convencionais, a técnica utilizada deve ser a observação visual, operação mental possível de ser realizada e estimulada aos alunos, a partir das informações do enunciado (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 112; p. 114).

A descoberta da “primeira ‘fórmula’ de área” (IMENES; LELLIS; MILANI, “Guia e recursos didáticos”, 2015e, p. 113) acontece com a unidade de medida convencional metro quadrado, a partir da apresentação no texto de duas tarefas resolvidas, de produção de um metro quadrado em jornal e medição de uma sala de aula, por personagens.

Figura 152 – A configuração retangular e os termos comprimento e largura



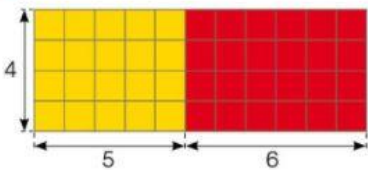
Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 113).

O nicho da área é expressar a área como o produto do comprimento pela largura, o que caracteriza uma ampliação com a mudança de representação numérica, associada à expressão numérica no domínio de números e operações, para os termos pertencentes ao domínio das grandezas e medidas, comprimento e largura.

Situações de medição, com a área enquanto instrumento no habitat números e operações e associadas tanto à contagem de quantidade discreta quanto à contagem de ladrilhos na configuração retangular (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 124), conforme apresentado a seguir (Figura 153), são propostas no LD do 5º ano. Nos dois casos, a decomposição é a técnica explorada.

Figura 153 – Composição e decomposição de áreas como instrumento para diferentes representações

4 Observe a parede ladrilhada e complete.



Para obter o total de ladrilhos da parede, podemos escrever a expressão: $\underline{\hspace{1cm}} \times (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$
ou a expressão: $\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}$.
Nos dois casos, o resultado é $\underline{\hspace{1cm}}$.

Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 124).

Nessa atividade, a área tem como nicho expressar regiões representadas por ladrilhos na configuração retangular por meio de expressões numéricas.

A configuração retangular também se faz presente em tarefas do tipo T_{GA} , agora com a área enquanto objeto, para determinar o valor de uma grandeza numérica, o sistema monetário (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 112; p. 155), conforme apresentado na Figura 154.

Figura 154 – Tarefa do tipo T_{GA} com área enquanto objeto

4 O piso de uma sala retangular de 6 m de comprimento por 4 m de largura será coberto por carpete. O custo do serviço, incluindo o carpete, é de R\$ 35,00 por metro quadrado. Quanto vai custar para acarpetar a sala?

Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 155).

A técnica preconizada é T_{MA3} – A multiplicação das medidas do comprimento e da largura da região retangular, e a área obtida deve ser multiplicada pelo valor da grandeza numérica associada, no caso, o valor monetário por metro quadrado, para obter o custo total (valor monetário). O elemento tecnológico central (Θ) é a área associada à configuração retangular, o retângulo e suas propriedades. Essa tarefa sinaliza uma retomada e uma ampliação da construção conceitual diante da proposição de uma tarefa sem a presença da figura, o que corrobora com o nosso modelo epistemológico.

Ainda na Unidade 3, cap. 36 – “Tangram e Matemática” –, são propostas seis tarefas do tipo « T_{PA} – Produzir superfícies», todas elas a partir de uma figura preestabelecida, a ser formada com as peças do tangram (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 136; p. 137). A área é abordada enquanto instrumento no domínio

espaço e forma, e tem como nicho a composição de diferentes figuras planas e a medição dos seus ângulos. Apenas uma tarefa desse tipo tem a área enquanto objeto, a produção de um metro quadrado (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 112).

A impossibilidade de produção de uma superfície surge numa tarefa T_{PA} que relaciona os objetos área e perímetro, no habitat das grandezas e medidas.

Figura 155 – Situação de produção de um quadrado com área e perímetro dados

6	João quer desenhar um quadrado que tenha área igual a 9 centímetros quadrados e perímetro igual a 8 centímetros. Acontece que esse quadrado não existe. Explique o motivo.

Fonte: Imenes, Lellis, Milani (2015e, p. 126).

Destacamos dois fatores positivos na resolução dessa tarefa: a importância da proposição de problemas sem solução, como sinalizado anteriormente ser uma preocupação dos autores (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. XXXII), e o estímulo à construção de argumentos, que contribui para a passagem da forma operatória para a forma predicativa (VERGNAUD, 2007). Situações semelhantes a essa poderiam ser oportunizadas, mas com soluções possíveis, por exemplo: “[...] dadas as dimensões de um retângulo R, construir um outro retângulo com mesma área que R e perímetro maior que R”, de modo a contribuir com a distinção desses dois conceitos.

No LD do 6º ano, a noção de área surge enquanto instrumento no cap. 1 – “Panorama da matemática”, para cobrir uma região em malha quadriculada com um mesmo tipo de ladrilho em duas tarefas do tipo T_{MA} (IMENES; LELLIS, 2010, p. 14-15). Apresentamos uma das tarefas a seguir⁷⁴.

⁷⁴ No LD do 6º ano, as atividades estão na mesma página, mas não lado a lado, como aqui apresentado, apenas para melhor organização do texto.

Figura 156 – Área enquanto instrumento no domínio da geometria



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 14).

Diante das orientações dos autores constatamos que a intenção dessa tarefa é retomar o conceito de polígono, palavra inclusive em destaque no LD. O nicho da área é explorar características e propriedades dos polígonos para perceber a possibilidade de ladrilhar uma região retangular, sem perda nem sobreposição, como os conceitos de rotação e translação de figuras, e simetria. Apesar de não dar o devido destaque para a área, esse tipo de tarefa, semelhante à atividade 6 da sondagem e pós-teste, articula os três quadros (geométrico, numérico e das grandezas) e favorece a construção conceitual da área tomada no nosso modelo.

Destacamos que nenhuma atividade de ladrilhamento semelhante a essa foi proposta na coleção dos anos iniciais. O termo ladrilho aparece no LD do 4º ano (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p. 122) no domínio espaço e forma, ao apresentar parte de um mosaico em malha quadriculada com ladrilhos quadrados e retangulares, para que o aluno dê continuidade ao padrão preestabelecido.

Ainda no capítulo 1, no livro do 6º ano (IMENES; LELLIS, 2010, p. 35), a pavimentação de uma região é colocada em discussão a partir de diferentes ladrilhos que são propostos, para que o aluno escolha aquele que não deixa vãos.

Outras tarefas do tipo T_{MA} são propostas (Ibid., p. 26), em conexão com a geografia, ao tratar das áreas das cinco regiões brasileiras. Nesse caso, o nicho é o estudo dos números na ordem de grandeza de centena de milhar, em situações interdomínios no habitat da aritmética.

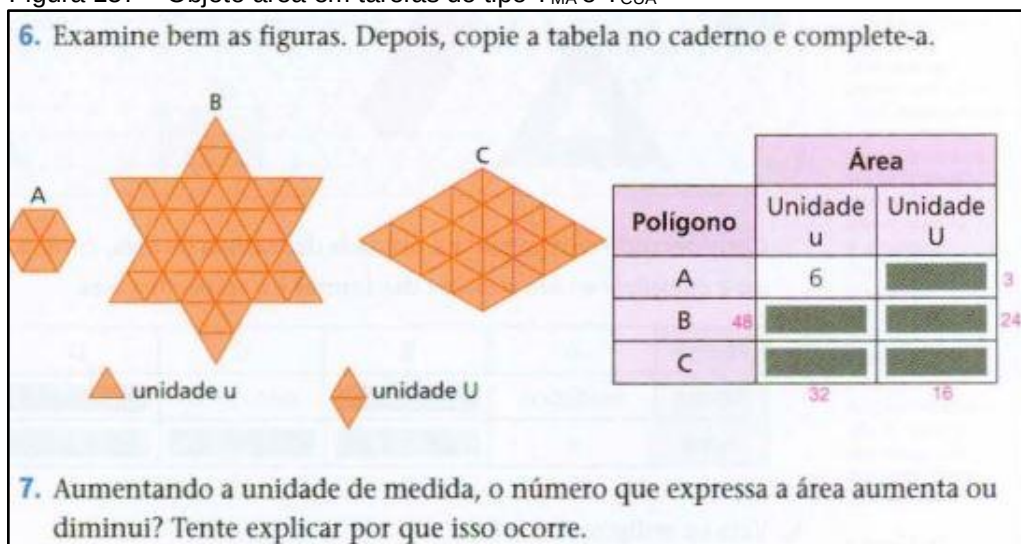
Dentre as tarefas do tipo T_{MA} , um pouco mais de um terço delas estão presentes no cap. 6 – “Frações e porcentagens”, no habitat aritmética (IMENES;

LELLIS, 2010, p. 126; p.127; p.130; p.134; p.138, p.143) e, como sinalizado nos LD analisados dos anos iniciais, apresentado ainda de maneira equivocada, com a área enquanto parte do objeto.

A noção de área volta a aparecer no cap. 11 – “Áreas e perímetros” –, agora enquanto objeto do domínio das medidas. As tarefas iniciais apresentadas proporcionam a retomada do trabalho realizado nos anos anteriores, a partir da comparação de áreas de regiões quadriculadas, numa situação contextualizada.

A maioria das tarefas é do tipo T_{MA} , associadas a unidades de medidas convencionais ou não convencionais, com unidades quadradas ou triangulares, essa última exemplificada com a atividade 6 do LD, na Figura 157.

Figura 157 – Objeto área em tarefas do tipo T_{MA} e T_{CUA}



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 222).

As tarefas acima apresentadas proporcionam a compreensão da grandeza área a partir da articulação entre o quadro das grandezas e o numérico. A técnica τ_{MA1} – Contar a quantidade de superfícies unitárias necessária para recobrir a figura é utilizada para a atividade 6, nesse caso as unidades u e U . Os elementos tecnológicos considerados (Θ) são a área, que é dada pela quantidade de superfície unitárias necessária para cobrir uma figura, a figura retângulo, os números naturais e a relação de proporcionalidade, de que a unidade U equivale a duas unidades u . A atividade seguinte, 7, tem na área o seu objeto com o nicho de possibilitar a compreensão das operações e da proporcionalidade e dar significado à conversão

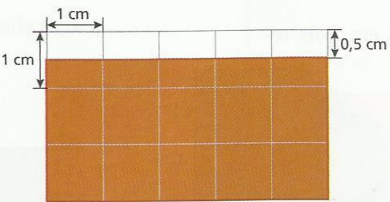
de unidade, com a possibilidade de associar a uma grandeza diferentes pares (número, unidade de medida).

A associação da malha quadriculada ao centímetro quadrado, introduzida no LD do 4º ano (Figura 128), é aqui retomada, em tarefas que relacionam área e perímetro (IMENES; LELLIS, 2010, p. 221; p. 222; p. 225). Se, por um lado, essas tarefas devem ser contempladas, por outro, a associação do centímetro quadrado a um quadradinho cujo lado mede um centímetro pode levar à incompreensão da diferença entre unidade de área e superfície unitária, apresentada no segundo capítulo (item 2.1.1). A diferença é que a unidade de área centímetro quadrado é a classe de equivalência das figuras que têm mesma área que o quadradinho de lados 1cm.

A associação da unidade de medida não convencional quadradinho com a unidade de medida convencional centímetro quadrado também é utilizada pelos autores como possibilidade de retomar uma técnica da tarefa do tipo T_{MA} e fazer a passagem para outra técnica, diante da articulação entre os quadros numérico e geométrico.

Figura 158 – Tarefa do tipo T_{MA} associada a duas técnicas

12. Observe a figura:



a) Obtenha a área do retângulo vermelho contando quantos centímetros quadrados cabem nele. $12,5 \text{ cm}^2$

b) Calcule a área do mesmo retângulo usando a fórmula. $A = c \cdot \ell = 5 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm} = 12,5 \text{ cm}^2$

c) Você acha que a fórmula $A = c \cdot \ell$ serve para obter a área de retângulos mesmo quando a medida de um lado é um número fracionário? *Espera-se que os alunos percebam que sim.*

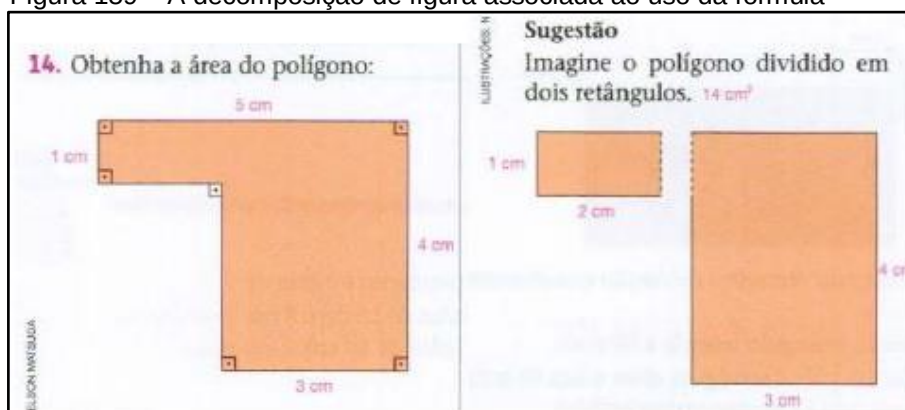
Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 225).

As três tarefas propostas têm a área como nicho para o uso de diferentes técnicas ou composição entre eles. Para o *item a* é utilizada a técnica T_{MA2} – contagem de unidades de medidas convencionais inteiras e metades; para o *item b* a técnica T_{MA4} – Substituir na fórmula $A = c \times l$ os valores do comprimento e da largura do retângulo e representar a área pelo valor obtido acompanhado da unidade

de medida de área; e, no *item c*, a proposta de validação e extensão da técnica $\mathbf{T}_{MA4}$ para o conjunto dos racionais positivos. Tarefas desse tipo, segundo os autores, “ajudam a perceber que a fórmula tem ampla validade” (IMENES ; LELLIS, 2010, Guia do professor, p. 225), o que consideramos não ser suficiente para a compreensão da extensão do uso da fórmula para o cálculo da área de figuras planas para o conjunto dos racionais positivos.

Na sequência, a decomposição de figuras surge numa tarefa resolvida⁷⁵ em composição com a técnica $\mathbf{T}_{MA4}$ para resolver a tarefa do tipo $\mathbf{T}_{MA}$ (Figura 159), embora já tenha sido retomada dos anos anteriores no início desse capítulo, associada à técnica $\mathbf{T}_{MA1}$ – Contagem de unidades de medidas não convencionais inteiras e metades (Ibid., p.220).

Figura 159 – A decomposição de figura associada ao uso da fórmula



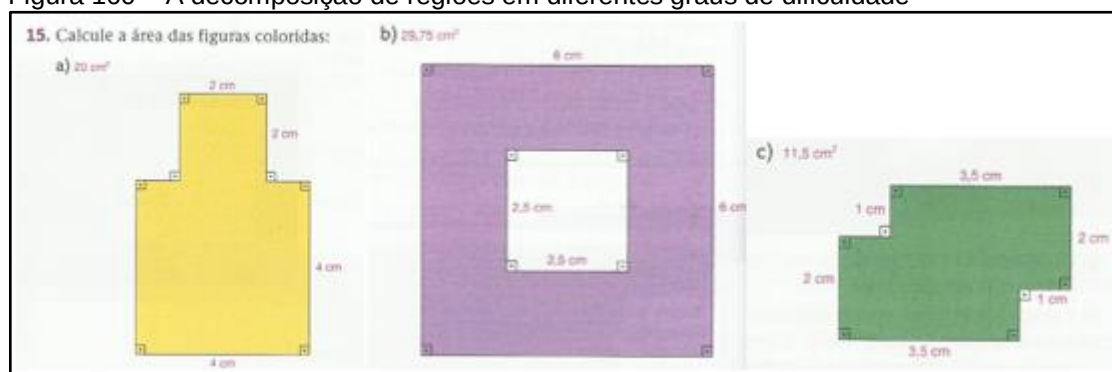
Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 226).

O exemplo serve de modelo para a resolução de outras tarefas, como se o aluno já tivesse a compreensão e o domínio desse processo. Apesar da afirmação “recurso valioso no cálculo de áreas: a **decomposição de figuras**” (IMENES; LELLIS, 2010, p.226) presente nas orientações ao professor, nenhuma outra referência, seja para o aluno ou para o professor, é realizada no LD. A próxima atividade apresenta três tarefas do tipo $\mathbf{T}_{MA}$, com diferentes graus de dificuldades, conforme figura a seguir⁷⁶.

⁷⁵ No LD do 6º ano, as atividades estão na mesma página, mas não lado a lado, como aqui apresentado, apenas para melhor organização do texto.

⁷⁶ No LD do 6º ano, as atividades estão na mesma página, mas não lado a lado, como aqui apresentado, apenas para melhor organização do texto.

Figura 160 – A decomposição de regiões em diferentes graus de dificuldade



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 226).

As três tarefas utilizam a combinação do processo de decomposição associado a uma das técnicas já conhecidas. No *item a*, há a decomposição da figura em dois quadrados associada à técnica do uso da fórmula para o cálculo da área do quadrado. No *item b*, há, inicialmente, o cálculo da área do quadrado de lado 6 cm, seguido do cálculo da área do quadrado de lado 2,5 cm, e finalmente a subtração das áreas. E o *item c*, o processo de decomposição da figura em três retângulos seguido do uso da fórmula para o cálculo da área de cada um deles e, finalmente, a adição das áreas obtidas. Destacamos que, para todos os itens, outras possibilidades de resolução com o processo de decomposição podem ser realizadas, o que é sinalizado nas orientações ao professor.

Todas essas tarefas possibilitam a retomada e ampliação conceitual da grandeza área, o que reforça a importância de a decomposição e composição de figuras serem objeto de estudo, desde os anos anteriores, associadas ao domínio das grandezas e medidas.

No entanto, apesar de os autores reconhecerem a importância da decomposição e composição de figuras, essa não ganha destaque para a abordagem da grandeza área nos livros de 1º ao 6º ano. Presente em diversas tarefas do tipo T_{MA} , que utilizam diferentes técnicas: contagem de quadradinhos, configuração retangular, uso da fórmula do cálculo da área com adição de áreas, subtração de áreas e complementação de áreas, até a sua ampliação para medir a área de um trapézio retângulo e de um triângulo retângulo, o processo de decomposição e composição de figuras possibilita uma retomada e ampliação conceitual da grandeza área.

Outro tipo de tarefa presente no LD do 5º ano « T_{GA} – Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados

relativos à área», aparece em dez tarefas no LD do 6º ano, na sua maioria associada ao perímetro (IMENES; LELLIS, 2010, p. 227; p. 231; p. 233), comprimento (Ibid., p. 230; p. 231), ou uma grandeza numérica, como apresentado a seguir.

Figura 161 – Tarefa do tipo T_{GA} sem a presença da figura

29. Para construir cada metro quadrado de um telhado, são necessárias 15 telhas. Quantas dessas telhas serão usadas para fazer um telhado retangular de 12 m por 15 m? 2.700 telhas

Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 232).

A técnica preconizada é T_{MA4} – Substituir na fórmula $A = c \times l$ os valores do comprimento e da largura do retângulo e representar a área pelo valor obtido acompanhado da unidade de medida de área, seguida da relação de proporcionalidade de que são necessárias 15 telhas para construir um metro quadrado de telhado. Os elementos tecnológicos considerados (Θ) são a área, a fórmula para o cálculo da área de uma região retangular, a figura retângulo, os números naturais e a relação de proporcionalidade entre a quantidade de telhas e o metro quadrado.

A tarefa do tipo « T_{EA} – Estimar uma área» aparece numa quantidade reduzida. Uma delas é associada à percepção visual da sala de aula e operações mentais de comparação do que já é conhecido do aluno, como o espaço de sala de aula, “Quantos metros quadrados tem o piso da sua sala de aula? Faça estimativas” (p. 229). Outro exemplo, que apresentamos a seguir, tem como base a malha quadriculada.

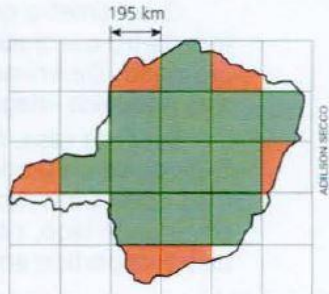
Figura 162 – Situação de medição de área com estimativas na malha quadriculada

31. O mapa do estado de Minas Gerais foi desenhado em uma malha quadriculada. O lado de cada quadrado representa 195 km.

a) Vamos fazer aproximações. Cada quadrado verde, ou cada pedaço de quadrado verde, vai valer 1 unidade de área. Cada pedaço de quadrado laranja vai valer 0,5 unidade de área. O restante é desprezado. Quantas unidades de área tem o mapa aproximadamente? 15

b) Determine a área de cada quadrado em quilômetros quadrados. 38025 km²

c) Qual é, aproximadamente, a área de Minas Gerais em quilômetros quadrados? 570375 km²



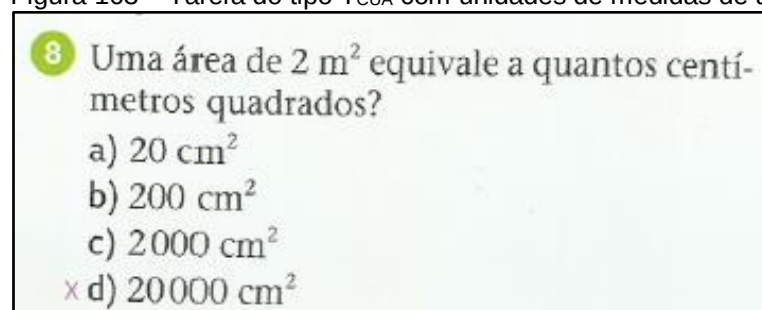
Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 232).

O caso de enquadramento de áreas está associado à medição da área de uma superfície com borda irregular ou arredondada, que serão aproximadas de acordo com a escolha da unidade de medida. Nessa tarefa, a unidade de medida convencional associada ao lado do quadrado da malha é o quilômetro quadrado, o que mostra uma ampliação das unidades associadas à malha quadriculada, anteriormente o centímetro. A técnica a ser utilizada é τ_{MA2} , com a contagem de superfícies inteiras e metades, de modo a recobrir o máximo a região. Dentre os elementos tecnológicos (Θ) temos a área, que é dada pela quantidade de superfície unitárias inteiras e partes que se juntam por métodos de aproximação necessária para cobrir a região, os números racionais positivos e sua operação de adição.

No livro do 6º ano, as tarefas do tipo « T_{CUA} – Converter unidades de medidas de áreas» estão associadas à medida com unidades de medidas não convencionais, como a contagem de quadradinhos na malha quadriculada (IMENES; LELLIS, 2010, p. 220, p. 221, p. 227, p. 230), de triângulos na malha isométrica (Ibid., p. 233), como apresentado no item 5.1.3.1 (Figura 136), ou na comparação da área de figuras retangulares construídas com palitos de fósforos, sendo esse último a unidade de medida utilizada.

Com relação à tarefa do tipo T_{CUA} , poucas são as atividades propostas associadas a unidades de medidas convencionais mais usuais, como metro quadrado, centímetro quadrado, quilômetro quadrado ou a unidades não convencionais, o que consideramos uma decisão acertada diante da construção conceitual da grandeza área nesse momento de retomada nos anos finais do EF.

Figura 163 – Tarefa do tipo T_{CUA} com unidades de medidas de área convencionais



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 233).

A técnica preconizada é τ_{CUA1} – Estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as unidades de medida de área, nesse caso, que 1 m^2

equivale a 10.000 cm^2 , então 2 m^2 equivale a 20.000 cm^2 . Os elementos tecnológicos são o princípio de equivalência entre as áreas e o sistema métrico decimal.

6.1.4 Algumas considerações

A análise dos saberes área e perímetro nos LD de matemática, do 1º ao 6º ano do EF, adotados na escola São Francisco mostrou que as noções de perímetro e de área são introduzidas no 3º ano e no 2º ano, respectivamente.

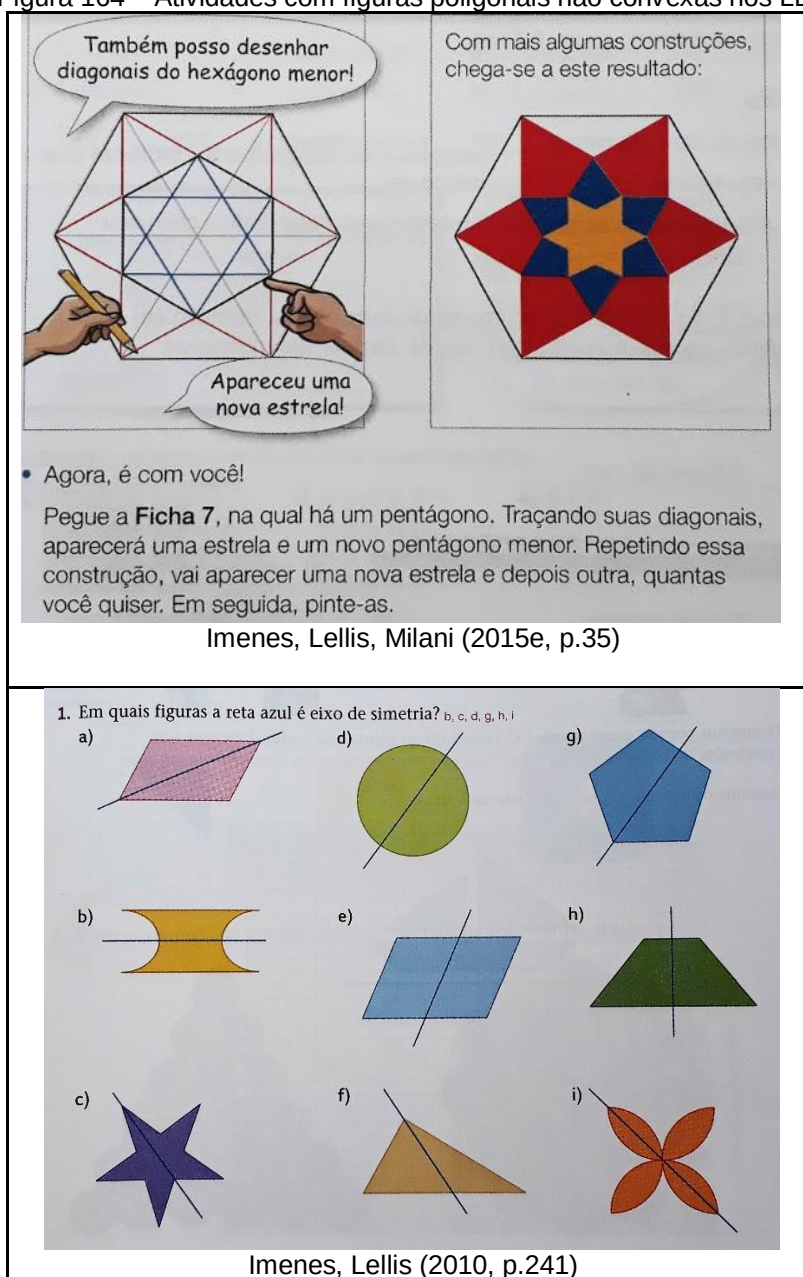
Na maioria das tarefas, as noções de perímetro e área são abordadas enquanto instrumento associado aos objetos de estudo do domínio de números e operações e espaço e forma, a exemplo das que utilizam a multiplicação e as propriedades de figuras geométricas para o perímetro, e a representação retangular associada a expressões numéricas e o recurso do Tangram para composição e reconhecimento de figuras planas, no caso da área.

A diversidade de recursos presentes nos LD dos anos iniciais contrasta com a exploração quase que exclusiva da malha quadriculada no LD do 6º ano, tanto para a área quanto para o perímetro. Com relação ao tipo de figura explorado no ensino de área e perímetro, nossas análises se juntam às de outras pesquisas (BARROS, 2006; FERREIRA, 2010; SILVA, J. V., 2016) para mostrar que as figuras presentes nos LD para o desenvolvimento desses conceitos de área e perímetro na sua maioria são poligonais e, quase sempre, quadrados e retângulos. Apenas no LD do 6º ano, no primeiro capítulo, duas tarefas são propostas com figuras não poligonais, associadas ao ladrilhamento de regiões retangulares no habitat geometria, apoiadas em malhas quadriculadas.

Constatamos nas análises dos LD a ausência de figuras poligonais não convexas quando construídas sem o apoio da malha quadriculada, para o ensino de área e perímetro. Essas figuras, quando presentes nos LD, mesmo de maneira reduzida, estão associadas ao domínio espaço e forma nos LD dos anos iniciais, e da geometria no LD do 6º ano, conforme exemplo na Figura 164⁷⁷, a seguir.

⁷⁷ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

Figura 164 – Atividades com figuras poligonais não convexas nos LD do 5º e 6º anos



Fonte: Adaptado pela autora, 2018.

No LD do 5º ano, essas figuras aparecem no setor formas planas para o tema padrões geométricos, enquanto no 6º ano, no setor simetria para o tema eixos de simetria de polígonos.

Como percebido nas análises do capítulo anterior, a presença de figuras poligonais não convexas nas atividades 2 e 3 da sondagem e do pós-teste revelou dificuldades como o reconhecimento de uma figura geométrica, a invariância das áreas e a variação da área e do perímetro.

Os tipos de figuras são variáveis a serem consideradas na construção das situações e no conjunto de tipologia das tarefas que compõem o campo conceitual

das grandezas geométricas. Para que os conceitos ganhem significado, diferentes tipos de figuras devem ser oportunizados, na busca de verificar quais conhecimentos os alunos já dominam e quais situações devem ser propostas de modo a contribuir para a ampliação dos conceitos que se pretende ensinar.

Dentro da nossa classificação de situações associada à tipologia de tarefas, observamos a predominância de situações de medição associadas ao tipo de tarefa « T_{MG} – Medir uma grandeza» sobre as demais em todos os livros do 1º ao 6º ano, tanto para a área quanto para o perímetro, com exceção do livro do 3º ano, ao apresentar nove tarefas do tipo « T_{PA} – Produzir uma superfície» a partir de uma área.

A técnica predominante para a tarefa do tipo T_{MG} , seja para a área, seja para o perímetro, é τ_{MG1} – Contagem da quantidade de superfícies unitárias (comprimentos unitários) necessárias para recobrir (contornar) a figura; se houver “metades”, a cada duas metades conta-se uma superfície unitária (comprimento unitário) a mais, e o elemento tecnológico considerado (Θ) é que a área é dada pela quantidade de superfície unitárias necessária para cobrir uma figura (o perímetro é dado pela quantidade de comprimentos unitários necessários para contornar uma figura).

No livro do 6º ano, esse tipo de tarefa para a grandeza área, a técnica e os elementos tecnológicos associados são aparentemente já conhecidos dos alunos e aqui são retomados, acompanhados ou não de alguma explicação, para a ampliação de um novo conhecimento (LARGUIER, 2009). Já para o perímetro, são considerados enquanto revisão de um conhecimento já adquirido em anos anteriores (LARGUIER, 2009).

Ao realizarmos o levantamento das tarefas nos livros didáticos, constatamos a existência de um conjunto de tarefas que não se encontram inseridas na nossa classificação, por exemplo: construir um instrumento de medida (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015c, p. 122; 2015e, p. 112); utilizar instrumentos de medida (Id., 2015b, p. 113; 2015c, p. 51), escolher um instrumento de medida (Id., 2015a, p. 178), escolher unidades de medidas (Id., 2015e, p. 112; IMENES; LELLIS, 2010, p. 35) e associar um objeto a uma unidade de medida (Ibid., p. 128), o que também foi constatado por Bellemain (2013) e por Larguier (2009), em tarefas que são utilizadas como retomada das grandezas, das suas unidades e da estimativa de medidas.

Lembramos que a categorização da tipologia de tarefas deve estar associada a um determinado objeto de estudo que, no nosso caso, é a construção conceitual de área e comprimento (perímetro) enquanto grandezas, com base nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996).

Observamos, ao longo desse percurso, que o procedimento de decomposição nos LD dos anos iniciais do EF surge enquanto instrumento associado aos domínios dos números e operações e espaço e forma, e no LD do 6º ano, e aos domínios da geometria e da aritmética, com diferentes nichos, o que contribui para a compreensão e construção do significado do termo decomposição utilizado na matemática, e para a percepção das diferentes representações, que são equivalentes. No entanto, mesmo em situações associadas à grandeza área, em nenhum momento é sugerido ao professor comentar com seus alunos essa inter-relação.

Um reflexo dessa ausência pode ser percebido nas análises da sondagem e do pós-teste no capítulo 5, na atividade 4 *item c*, que envolvia a decomposição de uma figura em dois retângulos e revelou dificuldades dos alunos associadas à compreensão do processo de decomposição associado à invariância das áreas, à composição de uma nova figura e à confusão conceitual de área e perímetro.

Como observado nas análises dos LD, mesmo apresentando situações de composição e decomposição de figuras, não acontece uma inter-relação entre os domínios ao abordarem os números, as figuras e as grandezas. Existe um privilégio em representações de decomposições numéricas e geométricas, apesar de essas envolverem o domínio das grandezas e, em particular, a grandeza área. Uma primeira conclusão que se impõe é o estabelecimento de uma relação mútua interdomínios, que contribua para a compreensão e construção do conceito de área, como sinalizado pelos autores no LD do 3º ano e citado anteriormente nesta pesquisa (item 6.1.3.2).

Ao apresentarmos o conceito de retomada de Larguier (2009), sinalizamos a preocupação que se faz presente nos PCN (BRASIL, 1998a), principalmente na transição entre os níveis de ensino, para que o 6º ano não seja um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores.

Trata-se de uma preocupação também sinalizada pelos autores do livro do 6º ano ao afirmarem no “Guia do professor” que o capítulo 1 possibilita a retoma de conteúdos estudados nos anos anteriores, como é proposto nos PCN (BRASIL,

1998a), embora com tratamento adequado à idade dos alunos. Para alguns, uma “[...] nova oportunidade de aprendizagem e, para outros, um contato renovado com ideias já conhecidas” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 35).

Apesar de a coleção dos anos iniciais trazer orientações ao professor sobre as atividades propostas, nem sempre as possibilidades de retomada estão sinalizadas no domínio das grandezas e medidas, seja enquanto uma revisão de conhecimentos vivenciados em anos anteriores, um resgate de conhecimentos de um domínio específico para a ampliação de novos conteúdos ou requisitos necessários para o trabalho em outros domínios do ano escolar vigente.

Buscaremos nos próximos itens verificar esses saberes enquanto objeto de estudo nas aulas observadas, em particular no 6º ano, em 2017, na escola São Francisco.

6.2 SABERES ENSINADOS NO 5º ANO E NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste tópico, apresentamos nossas observações numa turma de 5º ano, o 5º ano A, no final do ano letivo de 2016 da Escola São Francisco. No ano seguinte, essa mesma turma foi observada no 6º ano, agora 6º ano A, durante três períodos no ano letivo de 2017: o primeiro no início do ano para a caracterização da turma, e os dois seguintes no segundo semestre, em setembro e dezembro, para observação das aulas referentes ao ensino dos conteúdos de área e perímetro.

6.2.1 Observação de uma turma do 5º ano no final do ano letivo de 2016

As observações na turma do 5º ano A ocorreram no período de 11 de outubro de 2016 a 28 de novembro de 2016, com um total de 18 horas/aula, sendo 10 horas/aula da disciplina matemática e as demais das outras disciplinas. Esse período também teve como objetivo a familiarização dos alunos com a pesquisadora visto que após a observação tínhamos o momento de aplicação da sondagem.

No início da nossa observação, ocorriam na escola São Francisco os jogos internos. No período de 11 a 21 de outubro de 2016, o horário estava adaptado. As turmas do 2º ao 5º ano foram organizadas em dois grupos que tinham suas atividades alternadas. Por exemplo, os jogos dos 2º e 3º anos aconteciam antes do

recreio, enquanto os 4º e 5º anos tinham aulas. Após o recreio os grupos trocavam de atividade. Quando iniciamos a nossa observação para caracterização das turmas de 5º anos, os assuntos de área e perímetro já tinham sido objeto de estudo pela professora.

A partir de agora, para efeito de organização, apresentaremos as observações de aulas da turma 5A, no ano letivo de 2016, deixando claro que o trabalho realizado em matemática com essa turma foi também desenvolvido na turma B.

A primeira aula de matemática observada ocorreu em 11/10/2016, sobre o tema construções geométricas, para o assunto ângulos, pertencente ao domínio espaço e forma. A professora iniciou a aula registrando no quadro o assunto a ser trabalhado, “Construções geométricas” (IMENES, LELLIS; MILANI, 2015e, p. 132), e solicitou a dois alunos que realizassem a distribuição dos LD e dos cadernos para todos os colegas⁷⁸. A sequência do LD foi seguida, com o objetivo dos alunos construírem figuras geométricas envolvendo ângulos retos, com o auxílio da régua e de um esquadro de papel.

No dia 13/10/2016, a professora deu continuidade à construção de diferentes polígonos com os alunos e apresentou o tema seguinte do LD “O ângulo de 45º” (Ibid., p. 133). O objetivo da aula era a construção de um ângulo de 45º. Após a distribuição dos livros, cadernos, régua, esquadros e compassos e os alunos organizados em dupla, a professora solicitou a construção de circunferências. Na sequência, os alunos deveriam traçar duas retas perpendiculares passando pelo centro, seguido da divisão de cada ângulo de 90º. A professora precisou auxiliar alguns alunos quanto ao uso dos instrumentos. Ao final, os alunos deveriam ligar os pontos de encontro das retas com a circunferência. O passo a passo de toda a construção também foi realizado pela professora no quadro.

Na aula do dia 15/10/2016, os alunos pintaram os polígonos desenhados na aula anterior, recortaram e colocaram no mural da sala.

Na aula que ocorreu em 19/10/2016, os alunos realizaram uma atividade “Caça ao tesouro – Siga as instruções e encontre o estojo perdido”, com o objetivo de ler, compreender e interpretar instruções de modo a construir um mapa com a

⁷⁸ Nos anos iniciais na escola São Francisco, os LD, assim como os cadernos dos alunos, ficam guardados na sala de aula e são levados pelos alunos quando há tarefa de casa.

indicação dos ângulos do itinerário percorrido. A construção do mapa foi realizada nas aulas dos dias 23 e 25/10/2016, data da entrega.

Na aula do dia 26/10/2016, a professora iniciou o tema “Tangram e Matemática” (Ibid.,134). A leitura do texto do LD foi realizada em conjunto sobre a lenda do Tangram. Em seguida, os alunos destacaram as peças do quebra-cabeça, disponível no envelope de materiais que faz parte do LD do 5º ano, para a construção de figuras e decalque no caderno. Na sequência, a professora passou a identificação de cada uma das peças questionando os alunos.

A aula seguinte ocorreu em 16/11/2016, visto que os alunos estavam construindo as maquetes, os cartazes e os textos para a feira de conhecimentos. Nessa aula, a professora distribuiu para os alunos malhas quadriculadas – sendo que cada quadradinho tinha um centímetro de lado – e realizou com eles a construção de um Tangram, cuja medida do lado era de 16 centímetros.

A construção foi representada pela professora passo a passo no quadro. Ao final da aula, a professora solicitou como tarefa de casa o cálculo da medida da área de cada peça construída.

Na aula seguinte, em 18/11/2016, a professora iniciou a correção da tarefa solicitada. Observamos que, durante todo o período, a referência à unidade de medida foi realizada em centímetros quadrados. Em seguida, passou a comparar as áreas de algumas peças do Tangram, por exemplo, dois triângulos pequenos dá um quadrado ou um triângulo médio. Na sequência, pediu que os alunos anotassem a tarefa de casa – a construção de um Tangram com 12 centímetros de lado – no caderno e calculassem a área de cada uma das peças, bem como a área total.

No dia 21/11/2016, a professora iniciou a aula verificando quem havia realizado a tarefa e, como muitos não tinham realizado, passou para a construção no quadro. Após a construção do quadrado, a professora perguntou:

P – Qual é a medida do perímetro do Tangram? Quem lembra o que é perímetro?

As – Cento e quarenta e quatro.

P – Cento e quarenta e quatro? Cento e quarenta e quatro é o quê?

As – A área.

P – E o que é o perímetro?

A(12) – O contorno.

P – A medida do contorno. Qual é a medida do perímetro do Tangram?

As – Doze vezes quatro.

P – Doze mais doze mais doze mais doze.

A professora fez o registro no quadro, adicionou os valores numéricos e colocou que a área é de 144 cm² e o perímetro de 48 cm.

Em seguida, a professora solicitou que os alunos medissem, com a régua, o perímetro de cada uma das peças do Tangram. Durante a realização da tarefa, a professora ajudou alguns alunos quanto ao uso da régua. Diante das diferentes respostas encontradas para os lados das peças, a professora registrou no quadro os comprimentos dos lados de cada uma das peças, assim como o perímetro.

Quadro 11 – Representação do quadro da professora dos 5º anos

Representação do quadro da professora	
Triângulo grande: 8,5 cm / 8,5 cm / 12cm	Perímetro = 29 cm
Triângulo médio: 9 cm / 6 cm / 6cm	Perímetro = 21 cm
Triângulo pequeno: 4,5 cm / 4,5 cm / 6cm	Perímetro = 15 cm
Quadrado: 4,5 cm	Perímetro = 18 cm
Paralelogramo: 6 cm / 4,5 cm / 4,5 cm / 6cm	Perímetro = 21 cm

Fonte: Adaptado do registro da professora no quadro.

Em seguida, a professora retomou a comparação das áreas das figuras realizadas na aula anterior:

P – Pela atividade que a gente fez na aula passada, o quadrado tinha área igual a que outra figura?

A – Igual ao paralelogramo.

P – E quem mais?

A – Ao triângulo médio.

P – O quadrado e o paralelogramo são iguais a quê?

A (7) – O que é área mesmo?

P – Área é a medida da superfície de um determinado lugar. Do piso, de uma extensão. A gente estava medindo a área das figuras. O quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio têm áreas iguais.

[...]

A(3) – O que é perímetro?

P – O contorno do quadrado.

A(3) – Simplificando **A (7)**, a área é a parte de dentro do quadrado e o perímetro é o contorno.

A(7) – Mas eu não consigo entender.

P – É só multiplicar. A área do tangram de lado 16 cm é 16 cm x 16 cm = 256 cm².

A(7) – Foi isso que eu não entendi.

P – Só que essa regra não vale para todas as figuras.

A aula foi interrompida porque houve uma troca no horário e os alunos passaram para a aula de SOE. Após 50 minutos, os alunos retornaram e a leitura de um novo capítulo foi solicitada pela professora, “Conhecendo os milésimos” (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015e, p. 138), sem a discussão ser retomada.

A dificuldade conceitual do aluno A(7) expressa durante a aula mostrou que, mesmo os conceitos de área e perímetro já tendo sido vivenciados ao longo do ano letivo do 5º ano, como informado pela professora, os alunos ainda apresentavam dificuldades.

6.2.2 Observação de uma turma do 6º ano no ano letivo de 2017

6.2.2.1 O início do ano letivo – caracterização dos 6º anos

No período de 2 de fevereiro a 2 de março de 2017, realizamos a observação e caracterização das turmas de 6º anos, com um total de 20 horas/aula observadas, sendo 12 horas/aula da disciplina matemática e as demais associadas às outras disciplinas. Todas as aulas foram gravadas e transcritas pela pesquisadora.

A primeira semana do ano letivo foi dedicada para os professores construírem o contrato pedagógico com as turmas e realizarem atividades de sondagem. O contrato pedagógico construído ficou registrado no caderno de cada disciplina do aluno.

Esse pode ser caracterizado como um primeiro momento da transição entre os níveis de ensino, para os alunos, o estabelecimento das “regras” de convivência da turma com cada um dos professores, com suas diferentes dinâmicas e exigências, e para os professores, a construção de uma visão geral da turma quanto aos conhecimentos prévios trazidos dos anos anteriores.

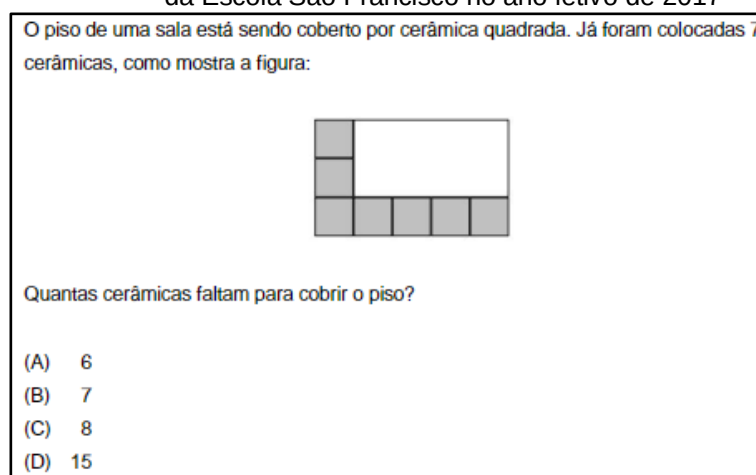
Por uma necessidade de ajustes no horário dos professores dos anos finais, por serem especialistas, o contrato de trabalho ser por hora/aula e alguns terem mais de um vínculo empregatício, mudanças foram realizadas nessas primeiras semanas, tanto da carga horária semanal quanto dos dias de aulas das disciplinas, o que caracteriza uma não modificável dos níveis da Pedagogia e da Sociedade. Do nível da Pedagogia, a organização e distribuição das aulas das disciplinas, e do nível da Sociedade, as condições não modificáveis pessoais e profissionais de cada um dos professores.

Como informado no capítulo dos “Procedimentos metodológicos”, as duas turmas dos 6º anos eram formadas por alunos oriundos dos 5^{os} anos da própria escola São Francisco, e alunos novatos, que cursaram o 5º ano em outras instituições escolares.

Por questão de organização, traremos aqui a observação da turma 6A, deixando claro que o trabalho realizado em matemática com essa turma foi também desenvolvido na turma B.

A sondagem de matemática foi realizada no laboratório de informática da escola, com uma atividade elaborada pelo professor com questões da Prova Brasil, a ser realizada em dupla no Kahoot⁷⁹. Composta de 15 questões dos quatro domínios da matemática escolar, duas delas pertenciam ao domínio das grandezas e medidas, e uma associada ao conceito de área.

Figura 165 – Tarefa do tipo T_{MA} proposta na sondagem de matemática dos 6º anos da Escola São Francisco no ano letivo de 2017



Fonte: Itens de Avaliação do SAEB de Matemática (BRASIL, 2015, 5º ano).

Dentre as oito duplas da turma 6A que estiveram presentes na aula do dia 02/02/2017, quatro duplas responderam à letra b, 7 cerâmicas; três duplas responderam corretamente à questão, letra c, 8 cerâmicas; e uma dupla marcou a letra d, 15 cerâmicas.

A discussão das respostas dos alunos foi realizada na aula seguinte, em 06/02/2017, quando o professor voltou com os alunos ao laboratório de informática para conferir a pontuação geral obtida por cada dupla e, em seguida, realizar a correção das questões. Os erros apresentados na questão sobre o conceito de área foram de três tipos:

⁷⁹ O Kahoot (<https://create.kahoot.it/login>) é uma plataforma de aprendizagem gratuita disponível *on-line*, que utiliza o fator da competição para responder às questões.

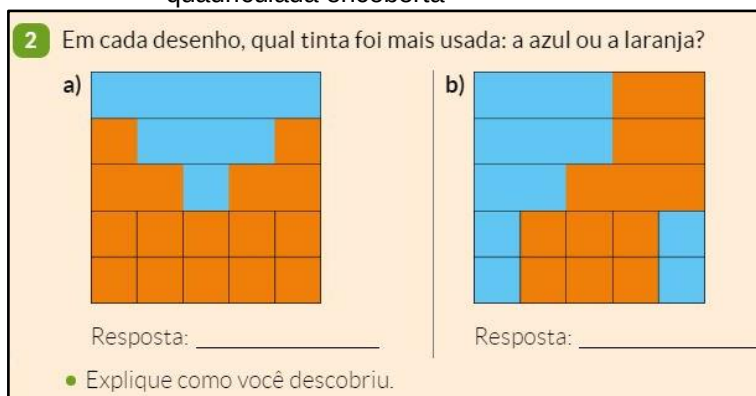
- a) três duplas realizaram apenas a contagem das cerâmicas já colocadas no piso conforme mostra a figura e encontraram como resposta sete cerâmicas, letra b;
- b) uma dupla que marcou a letra b compreendeu o piso enquanto uma região quadrada, devido ao termo no enunciado “cerâmica quadrada” e considerou que, como o contorno da região tem sete cerâmicas em dois lados, então a mesma quantidade de cerâmica deveria ser colocada nos outros dois lados para completar o contorno da região;
- c) uma dupla desconsiderou as sete cerâmicas já colocadas e determinou a área total do piso ao observar a configuração retangular da figura com três cerâmicas na sua altura e cinco cerâmicas no comprimento, multiplicando os valores, obtendo 15 cerâmicas, letra d.

Nessa análise, é possível observar que alguns alunos, mesmo tendo vivenciado no ano anterior, 5º ano A em 2016, situações de medição de áreas por meio das duas técnicas τ_{MA1} – Contar a quantidade de superfícies unitárias necessária para recobrir a figura, ou τ_{MA2} – Contagem da quantidade de ladrilhos inteiros na largura e no comprimento, seguido da multiplicação dos valores obtidos, ainda apresentam dificuldades. Levantamos a possibilidade de essa dificuldade estar associada à malha quadriculada, sempre visível.

No LD analisado do 5º ano (IMENES; LELLIS; MELANI; 2015e), nenhuma situação é apresentada com parte da malha encoberta, o que pode ter sido um elemento dificultador, como observado em Pessoa (2010). Apenas uma tarefa no LD do 3º ano apresenta uma figura com parte da malha quadriculada visível, mas ainda mantém as linhas, como pode ser verificado na Figura 166, a seguir⁸⁰.

⁸⁰ Esta figura foi apresentada no capítulo 6 com a análise do saber área nos LD.

Figura 166 – Situação de comparação de áreas com parte da malha quadriculada encoberta



Fonte: Imenes, Lellis e Milani (2015c, p. 104).

Após a correção das questões, os alunos retornaram à sala de aula e iniciaram a leitura do Cap. 1 – “Panorama da Matemática” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 12-13) – realizada voluntariamente por alguns alunos. A leitura foi interrompida com o término da aula e ficou como tarefa de casa a sua conclusão.

Esse primeiro capítulo apresenta, de maneira geral, o que será objeto de estudo ao longo de ano e, nas orientações ao professor, essa escolha é justificada:

Um planejamento pedagógico consistente deve ter em conta a fase da vida escolar em que se encontram os alunos da respectiva faixa etária. No caso do 6º ano, devemos considerar que, embora já estejam em contato com a Matemática há alguns anos, muitos alunos sentem-se apreensivos nesse início da nova etapa. Por isso, começamos o trabalho retomando conteúdos estudados no Ensino Fundamental I (como proposto nos PCN), mas dando tratamento adequado à idade em foco (Ibid., p. 12).

As recomendações dos autores corroboram com as questões levantadas na nossa pesquisa, por entender esse momento de transição e a importância da retomada do que foi objeto de estudo nos anos anteriores em ligação com o conhecimento novo (LARGUIER, 2009).

No dia seguinte (07/02/2017), participamos de um momento comum e diário da escola, o “Boa tarde”⁸¹, que acontece na sala de música dez minutos antes do início das aulas, com a presença dos professores, da coordenadora dos anos finais

⁸¹ O “Bom dia”/“Boa tarde” é realizado no respectivo turno da escola, apenas com os alunos do ensino fundamental. Nesse momento, informes da escola, assuntos que estão sendo discutidos na comunidade em geral, por vezes realizado por convidados, assim como alguns de interesse dos próprios alunos são colocados na pauta, sempre sob a coordenação de algum membro da equipe de gestores do turno.

do EF, da representante do SOE, e a participação voluntária dos alunos dos anos finais do EF, no turno da tarde.

Nesse encontro específico, os alunos dos 9º anos relataram um pouco da experiência deles enquanto alunos desse nível de ensino, o funcionamento de algumas atividades como os jogos, que acontecem com grupos constituídos de alunos de todas as turmas, e se disponibilizaram a tirar dúvidas e ajudar aos alunos dos 6º anos, que estão iniciando a trajetória enquanto alunos dos anos finais do EF.

Podemos constatar dois movimentos da instituição, o relato realizado de alunos para alunos, e a formação dos grupos para os jogos, característicos de uma ação no nível da Pedagogia, na escala de níveis de codeterminação⁸², na busca de minimizar as dificuldades na transição entre os níveis de ensino e, em particular, na mudança da condição de aluno dos anos iniciais para aluno dos anos finais do EF na escola São Francisco. Ao término do “Boa tarde”, os alunos se dirigiram para a sala de aula.

A aula foi iniciada com a retomada da leitura do início do cap. 1 – “Panorama da Matemática” –, seguida da sessão “Conversar para aprender”, que apresenta questões para uma discussão inicial entre professores e alunos, em geral sobre o tema do capítulo. Essa sequência adotada pelo professor é a sugerida pelos autores do LD para esse capítulo, por favorecer ao professor uma visão inicial da turma quanto às iniciativas, atitudes, a leitura e interpretação do texto, fator importante para a compreensão das situações às quais os alunos são submetidos.

Ao término da discussão das questões, o professor deixou como tarefa de casa sete exercícios do livro (IMENES; LELLIS, 2010, p. 14-15) para o dia seguinte. Alguns alunos questionaram o professor quanto ao prazo de realização e à forma de registro no caderno, o que revela uma outra condição não modificável no nível da Pedagogia na transição entre os níveis de ensino.

Como trataremos no capítulo 7, com as análises comparativas entre o 5º e o 6º anos do EF, na posição de alunos do 5º ano, esses tinham diariamente apenas duas tarefas para casa, o que não acontece no momento em que mudam de condição, ao assumirem a posição de alunos do 6º ano. O quantitativo de atividades para casa passadas pelos professores dos dois níveis de ensino deixa à mostra uma dificuldade diante de dois movimentos da instituição.

⁸² A escala de níveis de codeterminação e as relações entre os níveis serão objeto de análise do próximo capítulo.

A aula do dia 8 de fevereiro de 2017 iniciou-se com a verificação pelo professor dos alunos que tinham realizado a tarefa de casa. A agenda dos alunos que não realizaram a tarefa foi solicitada pelo professor para o devido registro. A correção foi iniciada com a leitura da questão pelo professor e o registro no quadro das informações iniciais de cada questão, seguida da sua resolução.

Dentre as nove questões presentes no LD do 6º ano (IMENES; LELLIS, 2010, p. 14-15), aquelas solicitadas pelo professor para tarefa de casa têm seu habitat no domínio da aritmética. As duas que não foram pedidas são as únicas que abordam o conceito de área enquanto instrumento no habitat da geometria, para verificar a possibilidade de pavimentação de uma superfície com um determinado tipo de ladrilho, como apresentado na análise do saber área no LD (Figura 156). Embora os autores façam referência apenas ao domínio da geometria, a opção do professor nesse momento não contribuiu para uma percepção inicial da turma do 6A quanto aos conhecimentos existentes e possíveis de serem mobilizados pelos alunos frente a uma situação de ladrilhamento.

Nas demais aulas observadas, até o dia 22/02/2017, constatamos que o professor segue a rotina de conferência dos cadernos dos alunos, correção coletiva das tarefas, discussão dos assuntos conforme a proposta didática do LD e resolução de tarefas em sala. A opção de escolha das questões propostas pelo livro que não serão objeto de discussão voltou a ocorrer, a exemplo de quatro atividades do LD que abordam o tema contagem de possibilidades (IMENES; LELLIS, 2010, p. 28-29), no domínio da estatística, para o desenvolvimento da técnica de construção e associação de elementos numa tabela de dupla entrada. Também não foram objeto de tarefa dos alunos, nem em sala nem para casa, as questões propostas na sessão “Supertestes” (Ibid., p. 35-36). Nesse caso, levantamos a hipótese da valorização do domínio da aritmética pelo professor como principal requisito para início do 6º ano, em detrimento dos demais domínios.

As aulas observadas nas demais disciplinas serviram de subsídios para constatar, nesse primeiro momento, uma rotina comum à maioria dos professores: realização diária da chamada, informação no início de cada aula do que será objeto de estudo, registro no quadro de anotações das aulas, registro das tarefas, dos trabalhos e das datas de avaliações e retomada dos pontos do contrato pedagógico sempre que necessário.

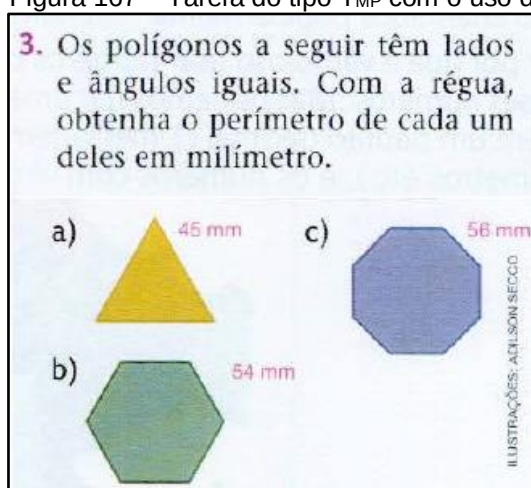
6.2.2.2 Observações de aulas referentes ao capítulo 8 – medidas e números decimais

No período de 14/09/2017 a 02/10/2017, foram observadas as aulas das duas turmas dos 6º anos da escola São Francisco, num total de 12 horas/aula, devido ao capítulo que seria trabalhado com a turma, “Medidas e números decimais” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 165), por considerarmos ser relevante para a nossa pesquisa, considerando que no LD do 6º ano, os únicos dois capítulos do domínio das medidas são esse e o capítulo 11 – “Áreas e perímetros”.

Ao longo da nossa observação, percebemos que o professor segue a proposta matemática e didática do LD, quando abordou prioritariamente para a grandeza comprimento as unidades de medidas convencionais, assim como as situações de conversão de unidades, que servem de suporte para o trabalho no domínio da aritmética com os números decimais.

O perímetro apareceu no ensino em sala de aula a partir de uma atividade do LD do 6º ano que envolve três tarefas do tipo T_{MP} , cujo nicho é medir os lados de polígonos regulares com régua graduada, na unidade de medida convencional milímetro, conforme apresentamos na Figura 167⁸³ a seguir.

Figura 167 – Tarefa do tipo T_{MP} com o uso do recurso régua graduada



Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 165).

A realização do procedimento de medida, com o uso de um instrumento como a régua, foi realizada por alguns alunos durante a aula, que contaram com a ajuda

⁸³ No nosso texto as imagens foram reduzidas.

do professor. Outras tarefas associadas aos conceitos de área e mesmo perímetro não foram apresentadas.

6.2.2.3 Observações de aulas referentes ao capítulo 11 – áreas e perímetros

As aulas referentes ao cap. 11 – “Áreas e perímetros” – aconteceram no período de 20 a 27 de novembro de 2017, num total de 5 horas-aula observadas, com duração de 40 minutos cada. Nesse período, uma gincana sobre a consciência negra com todas as turmas dos anos finais do EF estava ocorrendo, como culminância de um tema discutido por toda a escola, e as aulas foram reduzidas em 10 minutos do seu tempo normal. Registramos, assim, uma condição não modificável do nível da Pedagogia, quando decisões mais gerais da dinâmica escolar são tomadas pela coordenação e gestão escolar, e interferem no planejamento do professor, mais diretamente nos níveis inferiores *assunto* e *tema*.

A partir das observações e transcrições das aulas, constatamos que o professor realizou 40 tarefas com seus alunos, todas corrigidas em sala. Essa contagem inclui todos os itens de uma mesma atividade, por exemplo, atividade 1 com itens a e b contam como duas tarefas. Da mesma maneira, para as questões que compõem a sessão “Conversar para aprender”. As tarefas foram na sua maioria do tipo T_{MA} , com poucas do tipo T_{CA} , mas todas associadas ao quadro numérico.

O primeiro encontro aconteceu no dia 20 de novembro de 2017, iniciado por um diálogo entre professor e alunos de uma turma do 6º ano⁸⁴:

P – Abram o livro na página 219. Olha só, qual foi o último conteúdo que nós vimos?

A_S – Potenciação.

P – Potenciação, não foi?

P – A gente vai começar a ver agora áreas e perímetros.

O anúncio do conteúdo pelo professor é conectado como lembrança do último conteúdo trabalhado com a turma, potenciação, no sentido dado por Perrin-Glorian (1992) ao conceito de retomada.

O resgate da memória didática construída com a turma foi realizado pelo professor e seria objeto de discussão após a fase da apresentação do conteúdo,

⁸⁴ Na transcrição dos diálogos, representaremos prof. 6º anos (**P**), alunos (**A_S**) para falas de mais de um aluno ao mesmo tempo, e **A(nº)** para a fala de um aluno específico, associado ao seu número de chamada.

com a leitura do texto do LD do 6º ano (p. 219), sobre a área de dois pátios retangulares, realizada por um aluno. Em seguida, o professor questionou os alunos diante do tipo de tarefa «T_{CA} – Comparar áreas», sobre qual dos dois pátios tinha maior área:

Figura 168 – Introdução da noção de área no LD



Fonte: Imenes, Lellis (2010, p. 219).

P – Observando aí, qual o que vocês acham que é maior, o pátio xadrez ou o pátio da zebra?

As – O xadrez.

P – Por que o xadrez?

A(9) – Porque o xadrez é maior em largura.

A(7) – O da zebra só tem maior comprimento, e o xadrez é o mais largo.

P – Se a gente observar a largura, o comprimento isso dá segurança para ter certeza gente?

A(3) – Para descobrir a área, tem que ver a quantidade de quadrados multiplicado dos pátios, multiplicado pelos metros quadrados.

P – **A(3)** está dizendo que basta que eu observe a quantidade de quadradinhos de cada um dos pátios. Mas, para que isso aconteça, os quadradinhos, eles têm que ter tamanhos iguais ou diferentes?

As – Iguais.

P – Iguais. E eles possuem isso? Eles são iguais?

As – Sim.

A necessidade de maior clareza da compreensão de área enquanto uma grandeza bidimensional, e de diferentes unidades de medida de área, não convencional ou convencional, é percebida nas falas dos alunos A(9) e A(7), e A(3), respectivamente.

O questionamento do professor, sobre a necessidade de comparação entre áreas estar associada a quadradinhos com “tamanhos iguais ou diferentes”, leva a um encaminhamento limitado, quando destaca que a comparação entre as medidas pressupõe que as unidades são iguais, além de desconsiderar a possibilidade de comparar áreas sem se apoiar em números, por sobreposição ou usando a decomposição e recomposição, por exemplo.

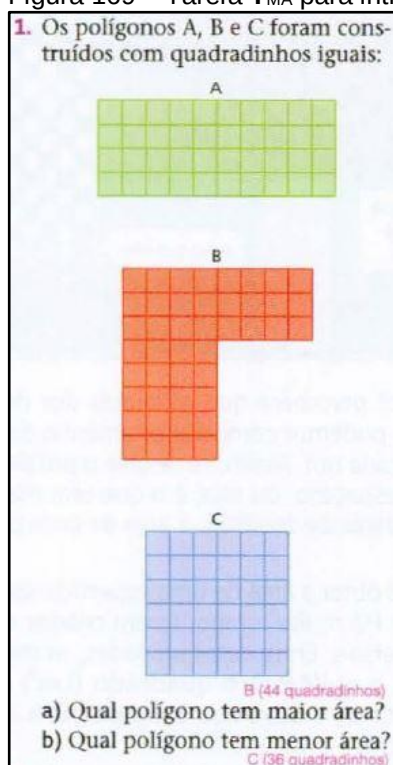
No segundo momento, da exploração da tarefa e uso da técnica, um aluno responde: “**A(2)** – Para saber qual tinha a maior área eu contei quantos quadradinhos tinham em cada lado e multipliquei o do xadrez, $10 \times 15 = 150$ e o pátio da zebra, $144 = 8 \times 18$ ”, o que é validado pelo professor “Olha só, ele somou a quantidade de quadradinhos que tinham na largura e que tinham no comprimento, e depois ele multiplicou”, com destaque para o procedimento numérico, sem ressaltar a importância da associação à unidade de medida quadradinhos.

Observamos que o professor segue a proposta do livro didático, e esse retoma o conteúdo de área que foi objeto de estudo no 5º ano. O tipo de tarefa «**T_{MA}** – Medir uma área», resolvida com a técnica **τ_{MA2}** – Contagem dos quadradinhos inteiros da largura e do comprimento da região, seguido da multiplicação dos valores obtidos tem no livro didático do 5º ano um elemento tecnológico central (Θ), a multiplicação associada à configuração retangular.

O professor retoma a discussão inicial sobre potenciação e questiona se a mesma relação que serviu para os quadrados representados pelas potências vale para os retângulos, e um aluno afirma “**A(9)** – Sim, pela quantidade de quadrados e que basta multiplicar a quantidade da horizontal pela vertical”, o que reforça o caráter operacional.

A exploração de um tipo de tarefa e articulação com uma técnica foi um outro momento da primeira aula, com a introdução de uma nova técnica **τ_{MA4}** – Decomposição de figuras poligonais em quadrados e/ou retângulos, para responder à atividade 1 do livro.

Figura 169 – Tarefa T_{MA} para introdução da técnica



Fonte: IMENES, LELLIS, 2010, p. 220.

A(12) – Na letra b, eu contei um por um da parte de cima que tem 24 e contei com o dedo. E o de baixo eu não contei. Eu multipliquei embaixo.

A – Eu contei tudo.

P – O que é a parte de cima? 3, 6, 8, é isso? O que é a parte de cima?

A – Aí tem 24.

P – Mas aí, por que tem 24?

A(12) – Porque eu contei com o dedo.

P – Nós temos quantos aqui na horizontal, na primeira parte do polígono B? Tem 8 na horizontal e 3 na vertical, o que seria 24. E esse quadrado aqui tem quantos quadradinhos? E aqui tem quantos?

A(12) – Na parte de baixo da figura B teria 4 na horizontal e 5 na vertical.

P – Você fez como, **A (4)?**

A(3) – Eu separei os trechos e multipliquei.

Diferentes técnicas foram utilizadas pelos alunos, como a τ_{MA1} – contagem de ladrilhos inteiros, por exemplo. Para a τ_{MA4} – Medir a área de uma figura que pode ser decomposta em quadrados e/ou retângulos, o elemento teórico (Θ_{MA4}) é a aditividade das áreas, que poderia ser verificado a partir da realização de diferentes decomposições da figura e a observação de que a medida da área total da figura seria mantida, e apareceu no diálogo da turma, mas não foi objeto de análise pelo professor. A aula foi encerrada com tarefas a serem realizadas em casa para trabalhar as técnicas estudadas.

Na segunda aula (21/11/2017), o professor corrigiu as tarefas passadas no dia anterior. Dentre as 15 tarefas, apenas uma delas era do tipo T_{CA} . Todas as demais eram do tipo T_{MA} , caracterizando o momento de exploração de um tipo de tarefa e articulação com uma técnica. Nenhum momento de retomada foi vivenciado. A aula foi concluída com atividades associadas ao conceito de área e perímetro para casa.

No dia seguinte (22/11/2017), após a correção das tarefas que ficaram para casa, o professor fez a leitura do tema área de retângulos, momento de retomada de um conhecimento em ligação com o novo (LARGUIER, 2009), neste caso, a introdução da fórmula para o cálculo da medida da área. A partir de uma situação de contagem de ladrilhos, técnica preconizada nos anos anteriores, tanto nos LD analisados quanto no 5º ano, conforme cadernos dos alunos, uma situação incomum de contagem foi proposta, conforme Figura 170, a seguir.

Figura 170 – Retomada de um conhecimento em ligação com o novo



Fonte: (IMENES; LELLIS, 2010, p. 223).

P – Vamos lá. Então, fica o entendimento de que, depois que a gente observou a área dessa sala, a área dos polígonos e a área de uma região retangular, ela é calculada como, multiplicando o quê?

A(9) – A quantidade de objetos, de quadrados da lateral vezes quatro.

P – Vamos chamar isso daqui de comprimento, e isso aqui de largura? Melhora? Do que a gente falar em quadradinho? Quadradinho foi para gente entender o início do conteúdo, não é? Mas agora a gente já pode falar de comprimento e largura e até porque vocês já têm esse entendimento, não é? Quando eu multiplico aqui comprimento vezes largura, eu encontro a área de quê? A área de quê? A área de um o quê?

A(12) – A área do retângulo.

Observamos a retomada de um conteúdo já conhecido em ligação com o novo nesse momento de institucionalização verbalizada pelo professor e representada no quadro, de uma nova técnica. “P – Vamos generalizar que a área do retângulo é”, e escreve no quadro:

Quadro 12 – Representação do quadro do professor dos 6º anos

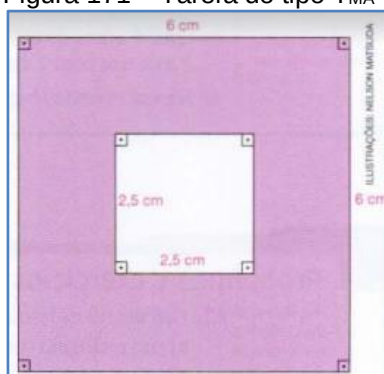
Representação do quadro do professor
$A = C \times L$ $A = 80.37$ $A = 2.960 \text{ cm}^2$

Fonte: Adaptado do registro do professor no quadro.

A apresentação da técnica τ_{DA3} – Substituir valores na fórmula $A = c \times l$, para determinar a área de uma figura retangular pelo professor parece associar o fato de saber calcular área à multiplicação de dois valores numéricos, dissociado do significado do conceito da área.

A aula seguinte (23/11/2017) foi dedicada à correção de tarefas. Trazemos uma tarefa do tipo « T_{MA} – Medir uma área». A atividade, momento de trabalho com a técnica τ_{MA4} , revela a dificuldade apresentada pelos alunos, na decomposição das figuras, e no cálculo aritmético com números não inteiros. Cabe observar que a validade da fórmula apresentada não foi justificada para medidas de comprimento não inteiras.

Figura 171 – Tarefa do tipo T_{MA}



Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 226, ativ. 15b).

P – Presta atenção. Ele quer a área da figura, a área pintada, né? Eu tenho aqui o quê? O contorno aqui eu tenho um qua... drado. Quanto mede o lado desse quadrado?

A(9) – 6

P – 6 cm, não é? 6 cm. Vê, mas, para eu calcular a área somente da região pintada, não é? Vocês encontram o que, qual área como resposta, no total?

A(3) – É 18,5 cm².
P – 18,5?
A(3) – É 18,5 cm². Eu fiz o cálculo errado.
A(3) – Todos nós fizemos o cálculo errado. Não sei qual foi o erro.
P – Qual foi o erro?
P – É aí, A (12)?
A(12) – Eu, eu errei. Tem que tirar a área de dentro. Eu não fiz isso.
A(4) – É, você tem que multiplicar, tem que dividir em quatro áreas.
A(15) – Em quatro?
A(3) – É.
[...]
P – Peraí, vamos lá. Qual a área do quadrado total, do quadrado maior?
A(9) – 36
P – 36 centímetros quadrados.
P – Agora calma aí. Quanto mede esse lado aqui? do quadrado interno?
A(9) – 2,5
[...]
P – E aí, quanto vai ser, quanto é 2,5 x 2,5?
[...]
P – Vai ficar 6,25, né? 6,25 cm². Agora eu tenho que fazer o quê?
A(3) – Somar.
P – Somar?
As – Subtrair; subtrair; dividir...
A(3) – Multiplicar por dois.
P – Vamos lá? Como é que eu vou resolver isso aqui? Vai ficar como?

Figura 172 – Exploração da técnica τ_{MA4}

Representação do quadro do professor		
$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 2,5 \\ \hline 125 \\ +50 \\ \hline 6,25 \text{ cm}^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36,00 \\ - 6,25 \\ \hline 29,75 \end{array}$	$A = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25 \text{ cm}^2$ $A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$ $\text{Área total: } 29,75 \text{ cm}^2$

Fonte: Adaptada do registro do professor no quadro.

A ideia de decomposição de figuras planas não foi objeto de retomada por parte do professor, assim como o livro do 6º ano apresenta tarefas para o cálculo de áreas sem o estudo de decomposição de figuras anteriormente, apenas associado ao uso da fórmula.

Na última aula observada (27/11/2017), antes de iniciar o *tema* unidades de medida de área, o professor fez uso da memória didática do grupo para a retomada das relações entre unidades de medida convencionais, como metro e centímetro. Desenhou no quadro um quadrado de lado medindo 100 centímetros e perguntou qual a medida da área, em centímetros e em metros. Alguns alunos apresentaram dificuldades em realizar as tarefas associadas à conversão de unidade de medida tanto de comprimento quanto de área.

A seguir, realizou uma única tarefa do tipo « T_{GA} – Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área», cuja técnica (τ_{GA}) associa o uso da fórmula $A = c \times l$, e a multiplicação por um valor numérico. O diferencial é o elemento tecnológico associado (Θ_{GA}), a proporcionalidade entre grandezas.

O professor solicitou que os alunos resolvessem a tarefa individualmente. Após um tempo, o professor realizou a leitura da questão e perguntou aos alunos qual era a resposta.

Figura 173 – Tarefa do tipo T_{GA}

29. Para construir cada metro quadrado de um telhado, são necessárias 15 telhas. Quantas dessas telhas serão usadas para fazer um telhado retangular de 12 m por 15 m? 2.700 telhas

Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 231)

A(9) – 180 telhas.

P – 180 telhas?

A(12) – 2.700. É porque eu multipliquei por $15 \times 12 = 180$

A(9) – Eu também multipliquei.

A(12) – 2.700. Porque 12×15 dá 180, 180×15 dá 2.700.

P – Quando vocês multiplicam 15 por 12, essa medida aí 15, é o quê?

A(9) – É o número de telhas.

A(3) – 12 é o comprimento.

P – É o comprimento, tá em metros. Quando vocês multiplicam 15 vezes 12 vocês encontram o quê? 180 m^2 . Olha só o raciocínio do aluno A (12). Ele disse que cada metro quadrado tem 15 telhas, então A (12) multiplicou 15 por 180 e encontrou quanto A (12)?

A(12) – 2.700.

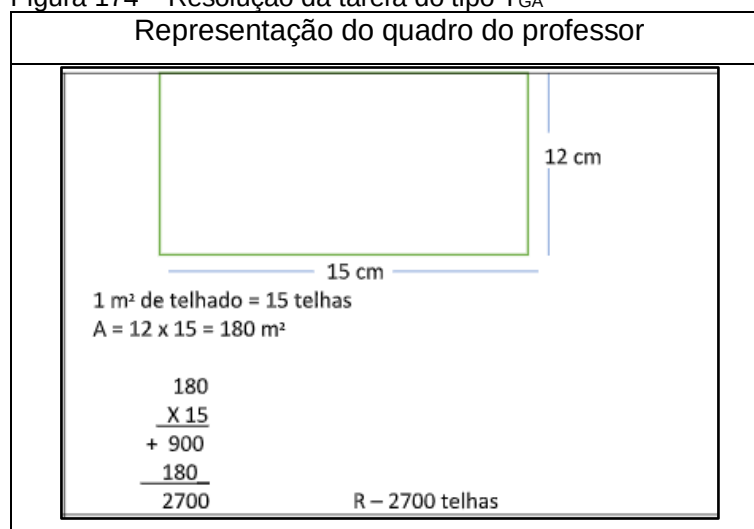
P – Certo. 2.700.

A(12) – 2.700. Porque 12×15 dá 180, 180×15 dá 2.700.

P – Você calculou primeiro o quê? A área do....

A(12) – A área do retângulo.

P – A área do telhado, não foi? 12×15 que é retangular que deu quanto? Cento e oitenta metros quadrados. Aí olha só, para cada metro quadrado de telhado são necessárias 15 telhas. Se eu tenho 180 metros quadrados eu vou ter que multiplicar o quê? 180×15 . (O professor registrou as operações no quadro à medida que explicou.)

Figura 174 – Resolução da tarefa do tipo T_{GA}

Fonte: Adaptada do registro do professor no quadro.

Um dos alunos continuava com dúvidas e questionou o professor:

A(9) – E 180 é o quê?

P – A área do telhado.

A(7) – Oh, professor, quantas telhas tu acha que essa escola chega, mais ou menos?

P – Ah? É o quê?

A(7) – Quantas telhas tu acha que essa escola tem?

P – Essa? A gente teria que ter a medida... a área do telhado.

A(3) – Faz por estimativa.

A(7) – Tu não tem nem ideia?

P – Nem ideia.

A(7) – Mais de 2.000?

P – Mais de 2.000.

A(3) – Muito mais!

P – Você acha que essa área todinha da escola a gente só tem 15 metros por 12 metros?

A(7) – Mas também não é na escola toda.

A – Mas também a telha é desse tamanho?

A – Mas só que a escola toda não é toda ela com telha.

P – Toda ela tem telha.

A – Mas não é só a casa, tem o terreno, ...

A – Eu acho que deve ter umas 3500 telhas.

A – Tem mais.

O professor passou a explicar como seria composta a nota da unidade e alguns alunos continuaram a discussão sobre como fariam para descobrir a quantidade de telhas. Nesse momento tocou para o recreio. A aula foi concluída e a data da avaliação foi marcada (30/11/2017) pelo professor, que anotou no quadro a agenda de matemática: “Conteúdos da avaliação: operações com números decimais, Cap 11 – “Áreas e perímetros” e p. 212 a 215. Data: 30/11/2017”.

As dúvidas que surgiram ao final da aula sobre o quantitativo de telhas que são necessárias para recobrir o telhado da escola demonstra a importância de uma questão que surgiu a partir de uma tarefa apresentada no LD e foi trazida para uma situação contextualizada pelos alunos, o telhado da escola. Neste momento houve uma oportunidade de ampliação do paradigma de visita às obras para o paradigma de questionamento do mundo⁸⁵ (Chevallard, 2013), quando o aluno deixa de ser um mero expectador do que é proposto pelo LD e passa a se questionar sobre a sua realidade. No entanto, devido ao tempo didático reduzido, observamos no diálogo que o professor não se dispôs plenamente a estudar a questão formulada pelos alunos.

Observamos a importância do livro didático como principal recurso utilizado pelo professor nas aulas observadas, ao acompanhar a proposta de organização matemática e didática adotada pelos autores, que segue o PCN (BRASIL, 1998a).

Na descrição das aulas observadas, podemos verificar, por exemplo, a opção de uma abordagem de área e perímetro num momento específico, sem “misturar” com outros temas. E também a não abordagem de aspectos importantes relacionados ao tema já discutidos nas pesquisas, como questões anteriores que não foram exploradas pelo professor, também observado em Santos (2015).

A dinâmica da escola observada torna mais visíveis as condições modificáveis e as não modificáveis impostas pelos níveis de codeterminação, interferindo nas escolhas realizadas pelo professor e no planejamento. O quantitativo de tarefas que foram deixadas sem discussão pelo professor também é reflexo dessa condição não modificável.

O fato do capítulo referente aos objetos área e perímetros estar situado no final do livro, como apontado em outras pesquisas (SANTOS, 2015), e ser objeto de estudo apenas ao final do ano letivo também influencia na construção do aprendizado dos alunos. E reforça a importância do professor conhecer toda a proposta de ensino da disciplina de matemática, para que as retomadas possam ser realizadas de modo a oportunizar novas aprendizagens. Como sinalizado pelos autores do LD do 6º ano, o professor pode saltar alguns itens, deixando-os para o final do ano letivo, ou retomando no ano seguinte, diante da organização em espiral dos conteúdos (IMENES; LELLIS, 2010), comentada anteriormente (item 6.1.1.2).

⁸⁵ O paradigma de visita às obras e o paradigma de questionamento do mundo serão abordados no próximo capítulo.

Mesmo dentro de uma mesma instituição escolar, com a utilização de LD de um mesmo autor para o ensino fundamental, não são visíveis os problemas da continuidade do ensino, em particular na retomada do conceito de área no 6º ano.

Os momentos de retomada foram percebidos como lembrança, pertencente à memória didática construída pelo professor e seus alunos, quando houve o resgate da potenciação e relações entre unidades de medida convencionais, como metro e centímetro. As retomadas em ligação com um novo objeto aconteceram com a introdução da técnica τ_{DA4} – Decomposição de figuras poligonais em quadrados e/ou retângulos, e a fórmula para o cálculo da área de figuras retangulares.

As retomadas enquanto revisão ou síntese, embora presentes no livro didático, não foram realizadas nem orientadas pelo professor. Algumas tarefas que compõem o capítulo e são consideradas no nosso modelo como importantes para a construção conceitual da grandeza área e a relação entre área e perímetro não foram contempladas pelo professor, a exemplo das tarefas do tipo: T_{CUA} , apresentadas na nossa análise sobre o saber área nos LD (Figura 157 – Objeto área em tarefas do tipo TMA e TCUA), que contribuem para a compreensão do significado da conversão de unidade de área (IMENES; LELLIS, 2010, p. 222); T_{PP} , em continuidade ao trabalho realizado nos anos anteriores com o recurso palito de fósforo, para a construção de retângulos de mesmo perímetro, o que favorece a dissociação entre área e perímetro (Ibid., p. 227); e, nessa mesma página, a tarefa do tipo T_{GP} , ao solicitar a determinação do perímetro de um quadrado dada a sua área, dentre outras. Os momentos de trabalho dos elementos tecnológico-teórico poderiam ser melhor explorados para contribuir na construção do conceito de área enquanto grandeza (LIMA; BELLEMAIN, 2010).

De qualquer modo, a partir da observação dos cadernos dos alunos e do caderno de planejamento do professor, os conceitos de figura simétrica, rotação e translação de figuras não foram objetos de estudo no 6º ano, o que contribuiria para a compreensão dos objetos geométricos com suas propriedades e, conseqüentemente, na dissociação entre os quadros geométrico e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

6.2.3 Cadernos dos alunos dos 5ºs e dos 6ºs anos

A escolha de analisar os cadernos justifica-se pelo fato, como sinaliza Vergnaud (1982), da construção do conceito ser realizada durante um longo período de tempo, importante para observarmos regularidades nos registros escritos, marcas deixadas ao longo dos anos do 5º e 6º anos, para buscar elementos que pudessem se juntar aos demais, mesmo considerando registros de aulas que não foram observadas. Salientamos que a análise desses registros contribuiu para a compreensão da evolução do aluno, das suas incertezas, mas não são suficientes para tirarmos conclusões sobre a aprendizagem dos alunos.

Na nossa observação dos cadernos em paralelo às análises das aulas observadas, constatamos que os alunos, mesmo participando das discussões nas aulas, reorganizando seus pensamentos, descobrindo seus erros, refazendo seus percursos de aprendizagens, o fazem na maioria das vezes oralmente. A maioria dos alunos não registra nos cadernos o processo de resolução das situações propostas, nem das discussões orais, nem dos registros realizados no quadro, sejam esses produzidos pelo professor ou pelos colegas que participam desses momentos durante a aula.

A indicação de correção das tarefas está mais presente nos cadernos dos alunos do 5º ano do que nos cadernos dos alunos do 6º ano. No 5º ano, alguns alunos indicam as respostas erradas, mas não realizam a correção. Esse comportamento não contribui para o caderno ser um instrumento de estudo, elemento constitutivo da sua memória didática pessoal, servindo apenas como local de registro “de respostas” das tarefas passadas pelo professor.

Como a nossa observação nas turmas dos 5º anos da escola São Francisco teve início quando a professora já tinha ministrado os assuntos relacionados à nossa pesquisa, buscamos vestígios nos cadernos fotocopiados do trabalho realizado, mas sem sucesso. A única atividade referente aos objetos área e perímetro registrada era referente ao Tangram, período em que observamos as aulas para caracterização das turmas, e apresentado no item 6.2.1 deste capítulo. Levantamos a hipótese que os conteúdos foram trabalhados diretamente no LD do 5º ano por ser uma edição consumível.

Nas aulas que foram observadas e transcritas, tanto nos 5º anos, em 2016, quanto nos 6º anos, em 2017, em comparação com os cadernos dos alunos que foram fotocopiados para análise, percebemos que, com frequência, os alunos deixam de realizar as tarefas de casa, problema sinalizado pela coord. AI:

Para algumas professoras, a tarefa de casa tem menos importância do que para outras, mas a gente precisa saber qual a importância para a Escola São Francisco para que todas comecem a respeitar a filosofia dessa escola em relação à tarefa de casa, que é uma temática que a gente provavelmente vai trabalhar no primeiro sábado de trabalho em fevereiro. É uma questão que está nos preocupando, é a questão do pouco valor das crianças em relação à tarefa de casa.

[...] os argumentos que as crianças estão nos trazendo fazem com que a gente tenha que urgentemente voltar para a gente ver por que eles não estão valorizando essa tarefa. **[Pesquisadora** – Mas isso nos anos iniciais apenas ou em que níveis?] Todos os níveis. Essa é uma preocupação até no 9º ano.

A não realização da tarefa de casa é objeto de registro na agenda dos alunos por parte dos professores da escola, tanto do 5º quanto do 6º anos, prática constatada nas aulas observadas. Os argumentos aos quais a coord. Al se refere são, por exemplo, outras atividades que os alunos realizam no contraturno.

Existem gestos didáticos, como sinalizado por Chevallard (2011), que indicam as ações do professor para ajudar seus alunos a estudarem um determinado objeto de ensino. A tarefa de casa é um desses gestos, considerado pelos professores e a Escola São Francisco enquanto um gesto de estudo do aluno, um dos elementos do didático.

6.3 SÍNTESE DO SEGUNDO ESTUDO

Como já foi dito, o estudo 2 apresentado nesse capítulo em dois subtópicos, visou buscar elementos de resposta às seguintes questões:

- a) Que praxeologias são preconizadas e/ou ensinadas em relação aos objetos área e ao perímetro do 1º ao 6º ano do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- b) Qual a razão de ser, os habitat e os nichos desses objetos do 1º ao 6º anos do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- c) Que filiações e rupturas podem ser observadas entre o modo como os objetos são abordados do 1º ao 6º ano do EF?
- d) De que maneira são conduzidas as retomadas desses objetos do 1º ao 6º anos do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- e) Que aproximações e distanciamentos são observados entre o modelo epistemológico dominante, evidenciado nas análises do saber a ser ensinado e do saber ensinado sobre área e perímetro, e esboço de modelo

epistemológico de referência adotado nesta pesquisa, que norteou a elaboração da sondagem e do pós-teste?

- f) Que fatores de natureza didática (*stricto sensu*) ajudam a compreender as raízes das dificuldades dos alunos em relação à área e ao perímetro, na transição entre 5º e 6º anos do EF?

No subtópico sobre o saber a ensinar nos livros didáticos, para a coleção dos anos iniciais, área e perímetro são objetos de um domínio intitulado grandezas e medidas, convergindo com a terminologia adotada nos documentos de orientação curricular, desde os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 1998a). Na coleção de 6º ao 9º, o domínio no qual esses objetos se situam é chamado medidas (nomenclatura divergente daquela dos documentos de orientação curricular e do modelo epistemológico de referência adotado nessa tese). Esse é o principal habitat da área e do perímetro nos livros didáticos, bem como nas aulas observadas e nos cadernos dos alunos, no qual são efetivamente estudados.

Esses objetos são também instrumentos para o estudo de objetos de outros domínios, o que converge para a razão de ser das grandezas e medidas, apoiada, por um lado, nos usos em práticas sociais, e, por outro, na dinâmica interdomínios e com outras disciplinas (geografia, história, língua portuguesa, entre outras). A ênfase maior no aspecto das medidas do que no das grandezas (já sinalizada pela nomenclatura do domínio no livro de 6º ano) parece justificar-se pelo viés dos usos sociais. Essa ênfase também foi observada nas aulas e nos cadernos.

A dinâmica interdomínios leva a que o estudo do perímetro e/ou da área esteja presente em vários capítulos, nos quais o domínio estudado é o de números e operações ou o da geometria, fazendo com que esses objetos vivam em outros habitats e assumam outros nichos. Na dinâmica interdomínios, podem-se destacar alguns nichos: estudar um dos significados das estruturas multiplicativas, por meio da configuração retangular; exemplificar números com ordem de grandeza elevada (área de regiões e países, por exemplo); fornecer um suporte para o estudo de frações; provocar a necessidade de números não inteiros; produzir figuras geométricas, utilizando suas propriedades; destacar o caráter histórico da matemática; ou ainda explorar a possibilidade de que problemas matemáticos tenham mais de uma resposta correta ou não tenham solução.

Ao longo de todos os livros didáticos analisados, observa-se uma ênfase nítida nas tarefas dos tipos T_{MP} (Medir o perímetro) e T_{MA} (Medir uma área). Essa

ênfase não parece ter sido amenizada pelas escolhas didáticas feitas pelos professores em sala de aula. Nos anos iniciais do ensino fundamental, são abordadas técnicas apoiadas em unidades não convencionais (palitos, no caso do perímetro e malhas, no caso da área, por exemplo) bem como a técnica de medição concreta de comprimentos com o uso da régua. As observações no 5º ano mostram que o uso adequado da régua é objeto de estudo e não parece ser ainda um conhecimento estável para todos os alunos ao final do 5º ano. Das observações no 6º ano, em relação a esse aspecto, destacamos que a escolha de desconsiderar questões de ladrilhamento é divergente de nosso modelo epistemológico de referência.

Foram observados outros tipos de tarefas, embora menos frequentes: T_{CP} (Comparar perímetros); T_{GP} (Determinar o valor de uma grandeza diferente de perímetro, em problema cujo enunciado comporta dados relativos ao perímetro); T_{PP} (Produzir superfície a partir de um perímetro); T_{CA} (Comparar áreas); T_{TA} (Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies); T_{EA} (Estimar uma área); T_{GA} (Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área); T_{CUA} (Converter unidades de medida de áreas); e T_{PA} (Produzir superfícies a partir de dados sobre sua área). Mesmo nesses tipos de tarefa, em geral, a ênfase das técnicas recai nos aspectos numéricos.

A tendência em privilegiar as praxeologias pontuais nas quais estão em jogo os aspectos numéricos tampouco pareceu ser amenizada pelas escolhas dos professores.

Há ênfase em polígonos convexos e, em especial, nos retângulos. Apesar disso, os livros analisados expressam que o perímetro é o comprimento do contorno, o que sinaliza a possibilidade de considerar o perímetro de figuras não poligonais. A distinção entre as variações da área e do perímetro e a medição da área de uma figura com diferentes unidades fazem parte das praxeologias dos livros didáticos do 5º ano e do 6º anos, o que converge para o modelo epistemológico de referência adotado aqui. Entretanto, esses aspectos não são destacados pelos professores observados.

A composição e decomposição de figuras é explorada nos livros analisados, embora sua conexão com a aditividade e a invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição, elementos fundamentais em nosso

modelo epistemológico de referência, não nos pareçam suficientemente destacados, em especial no livro de 6º ano.

Tanto no 5º ano como no 6º, há momentos em que alguns alunos manifestam dúvidas sobre a área e o perímetro e os professores não percebem ou não respondem.

Por outro lado, destacam-se também escolhas feitas pelos professores, que são convergentes com nosso MER. É o caso da professora do 5º ano trabalhar a possibilidade de figuras diferentes terem mesma área, ao explorar o uso do Tangram, e o professor de 6º ano chamar a atenção que só podemos comparar as medidas de área quando utilizamos as mesmas unidades.

7 TERCEIRO ESTUDO: ANÁLISE COMPARATIVA DAS INSTITUIÇÕES 5º ANO E 6º ANO DA ESCOLA SÃO FRANCISCO POR MEIO DOS NÍVEIS DE CODETERMINAÇÃO

Iniciamos nossa análise das instituições 5º e 6º anos do ensino fundamental considerando os níveis da escala de codeterminação (CHEVALLARD, 2002) e o modelo proposto por Artigue e Winslow (2010) para melhor situar os contextos das comparações realizadas e as suas articulações. Na nossa pesquisa, os contextos considerados são as instituições 5º e 6º anos para caracterização da transição entre os níveis de ensino.

Artigue e Winslow (2010) propõem considerar quatro questões para situar uma análise comparativa:

- a) A quais níveis da escala de codeterminação a comparação será realizada?
- b) Que tipo de evidências serão consideradas para inclusão de comparações das organizações matemáticas e/ou didáticas?
- c) Que ferramentas metodológicas serão utilizadas para interpretar as observações ou descrições, de modo a garantir que a comparação faça sentido em um determinado nível?
- d) Como serão relacionadas as comparações horizontal (entre dois contextos de um mesmo nível) e vertical (entre níveis diferentes de um mesmo contexto)?

A Escola São Francisco é parte integrante da sociedade brasileira, que, por sua vez, está inserida na civilização ocidental e compõe o conjunto de seres humanos. Nesse contexto, ela estabelece relações com os diferentes níveis enquanto instituição do ensino infantil e fundamental, o que justifica a nossa análise perpassar toda a escala de codeterminação.

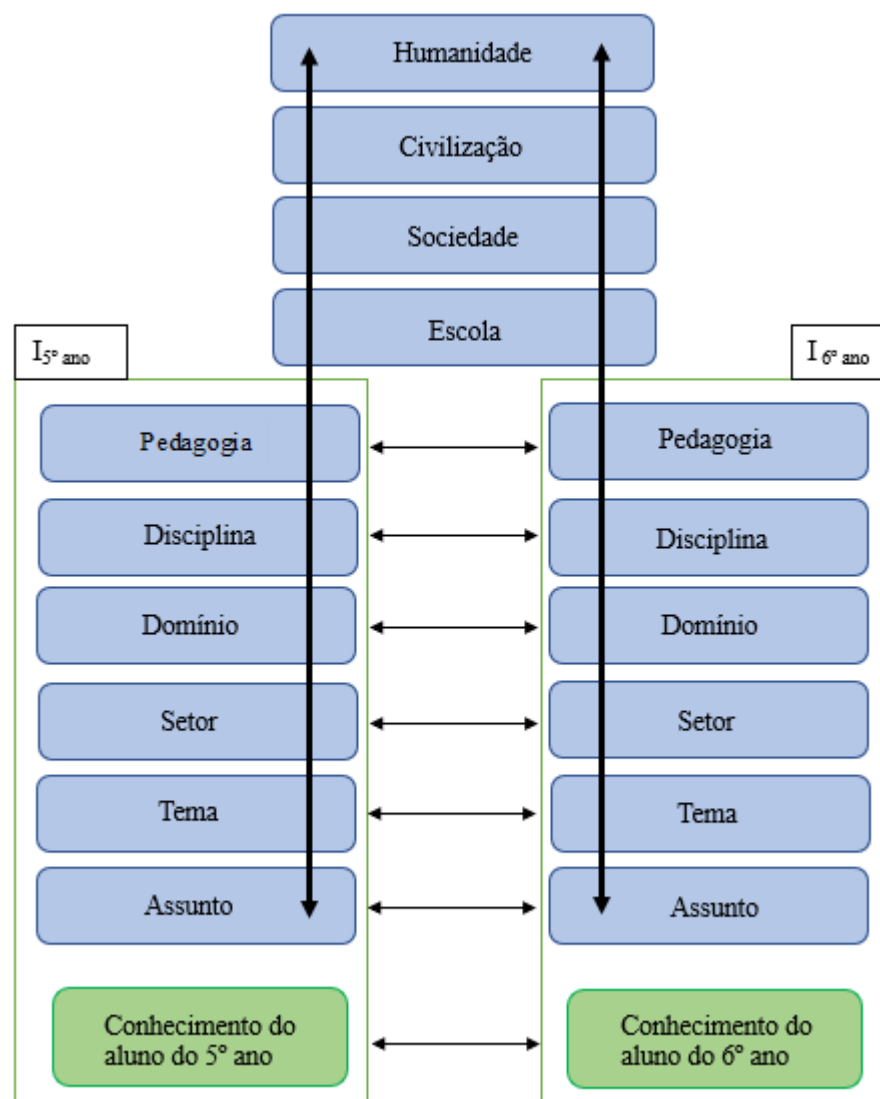
As comparações das organizações matemáticas e didáticas, tanto as prescritas quanto as observadas serão analisadas por meio dos documentos oficiais que orientam o currículo, dos programas da disciplina, dos livros didáticos de matemática adotados pela Escola São Francisco, em particular para os objetos área e perímetro.

O filtro das grandezas foi o instrumento teórico-metodológico utilizado na comparação horizontal, aquela que acontece entre dois contextos de um mesmo nível. Por exemplo, ao analisarmos no nível do setor o contexto do 5º ano e o

contexto do 6º ano, a existência ou não de diferenças. Já as comparações verticais estão relacionadas a um mesmo contexto, mas são provocadas por diferenças em níveis. Por exemplo, as diferenças existentes entre os níveis Escola e Pedagogia no contexto do 6º ano.

Consideramos também a análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos, realizada no cap. 5, com a TCC, dentro da visão cognitiva, tanto no contexto do 5º ano quanto no contexto do 6º ano, a partir das situações que dão sentido aos conceitos de comprimento, área e perímetro, e compõem nosso modelo de análise, baseado no proposto por Artigue e Winslow (2010).

Figura 175 – Análise comparativa entre as instituições 5º ano e 6º anos da Escola São Francisco com a escala dos níveis de codeterminação



Fonte: Adaptado de Artigue e Winslow (2010, p. 9).

A Escola São Francisco estabelece as mesmas relações com os níveis acima dela, a saber Sociedade, Civilização e Humanidade. No entanto, ao considerarmos as instituições 5º ano e 6º anos, buscaremos analisar as características e particularidades nas comparações entre diferentes níveis, representadas pelas setas verticais, e, dentro de um mesmo nível, representadas pelas setas horizontais, que perpassam tanto o 5º quanto o 6º anos do EF.

O conhecimento do aluno sofre influência da transição entre os níveis de ensino e das situações que tenham feito parte das organizações matemáticas e didáticas propostas, que foram objeto do cap. 6.

7.1 SOCIEDADE

A caracterização da sociedade na qual as escolas estão inseridas, como devem ser governadas, financiadas e organizadas são aspectos que estão relacionados a esse nível.

Os direitos e deveres da sociedade brasileira estão reconhecidos na Constituição Federal (CF) (BRASIL, 1988), lei maior como garantia da cidadania plena, na qual a educação é um dos direitos sociais assegurados no seu art. 6º, e o ensino é dever, obrigação e responsabilidade do poder público. A educação é fundamental por envolver todas as dimensões do ser humano enquanto indivíduo, ser social com seus direitos civis.

A coexistência de instituições de ensino pública e privada é garantida na CF no art. 206º, assim como aquelas sem fins lucrativos. A organização do sistema de ensino, no art. 211º da CF, deve ser realizada em regime de colaboração nas redes federal, estadual e municipal, enquanto na rede privada o ensino é livre, desde que sejam garantidas as condições “I - cumprimento das normas gerais da educação nacional; II - autorização e avaliação de qualidade pelo poder público” (Ibid., art. 209º).

Diversos são os documentos que tratam da educação na sociedade brasileira (cap. 1, item 1.5.1) e consideram o aluno como sujeito de direito, agente da sua própria formação, “[...] que atribui sentidos à natureza e à sociedade nas práticas sociais que vivencia, produzindo cultura, recriando conhecimentos e construindo sua

identidade pessoal e social” (DCNEB, 2013, p. 118). Enquanto sujeito de sua formação, faz-se necessário que os currículos sejam construídos com menos fragmentação, de modo a possibilitar ao aluno estabelecer conexões com as suas experiências. Nesse sentido, considerando a amplitude da DCNEB, observamos ser imperativa a participação dos componentes do sistema educativo, para repensar a transição escolar.

O currículo, segundo a atualização da LDBEN (Lei nº 12.796/2013) no art. 26º, deve cumprir uma formação básica comum com um mínimo de conteúdos, a ser complementada em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, de acordo com as características regionais da cultura e dos estudantes.

Essa possibilidade de adequação curricular deve atender na sua base comum, segundo o Conselho Nacional de Educação, para os anos iniciais do ensino fundamental o ensino de língua portuguesa, matemática, história, geografia, ciências, artes e educação física, e para os anos finais do ensino fundamental o ensino é ampliado com a oferta da língua inglesa⁸⁶.

Observamos, assim, ser o currículo um documento aberto no nível da Sociedade, o que o torna diferente entre as redes de ensino, pública e privada. Na rede pública, a existência de um currículo único de cada rede, municipal, estadual ou federal, como referência, serve de base para o professor elaborar seu planejamento. Na rede privada, cada escola elabora o seu currículo, desde que atenda às normas fixadas pelo sistema de ensino e, por sua vez, as condições impostas pela CF (BRASIL, 1988), como citado anteriormente.

Encontramos, assim, uma primeira condição de diferença e influência tanto nas escolas pertencentes a uma mesma rede de ensino como de redes de ensino distintas, elemento de imposição do nível Sociedade sobre o nível Escola.

Enquanto pertencente à Sociedade, a Escola São Francisco é uma instituição da educação que faz parte da rede privada de ensino do município do Recife, sociedade civil sem fins lucrativos, organizada a partir de conselhos gestores: sócios e colaboradores, docentes e pais. E o conselho de pais é subdividido em finanças e integração família-escola.

A LDBEN também regulamenta a organização das instituições escolares ao estabelecer para o ensino fundamental, no seu art. 24º⁸⁷, carga horária anual mínima

⁸⁶ Art. 26º, parágrafo 5º, com redação dada pela Lei nº 13.415/2007.

⁸⁷ O art. 24º teve a sua redação modificada conforme a Lei nº 13.415/2017.

de oitocentas horas, distribuídas em um total de duzentos dias letivos, e, no art. 34º determinar um mínimo de quatro horas em sala de aula.

Outro documento referência na construção do currículo escolar são os PCN (BRASIL, 1998a) que, embora não determinem de maneira detalhada quais conteúdos devem ser trabalhados ao longo do ensino fundamental, são utilizados como norteadores por estabelecerem princípios, objetivos gerais e específicos, para os ciclos de ensino e por área de conhecimento, também considerado no PPP da Escola São Francisco. Mais uma vez, observamos a influência da noosfera política na noosfera disciplinar e a premência de uma discussão menos fragmentada.

Os PCN de Matemática estão organizados por blocos de conteúdos e sugerem a articulação do bloco das grandezas e medidas com os demais “por estar fortemente conectado com o estudo da Geometria e com os diferentes tipos de números” (BRASIL, 1998a, p. 69), o que pode ser tomado como uma das condições para que as grandezas e medidas estejam sempre associadas a outros domínios de conhecimento, mas também um impedimento para a compreensão do comprimento e da área enquanto objetos do saber ao sinalizar a necessidade de “retomar as experiências que explorem o conceito de medida” (BRASIL, 1998a, p. 129).

Apesar da predominância no aspecto do número e da medida, o documento sinaliza a importância de criar situações que abordem a variação entre grandezas, como a comparação de figuras quanto às áreas e aos perímetros, condição necessária para uma construção conceitual consistente. Destaca ainda que um ensino baseado em fórmulas para a determinação de áreas e perímetros sem uma análise crítica leva a um trabalho mecânico, sugerindo que

[...] o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações (BRASIL, 1998a, p. 131).

Alguns dos procedimentos sugeridos devem ter sido trabalhados nos anos iniciais, o que mostra a necessidade de conhecer os documentos não apenas para um nível de ensino, assim como resgatar algumas experiências vivenciadas, sejam essas propostas por um livro didático ou pelo professor do ano anterior.

O PCN sinaliza a atenção com o trabalho a ser desenvolvido pelas instituições escolares com as grandezas e medidas e apresenta orientações

didáticas para os níveis subsequentes da escala, confirmadas pelas pesquisas apresentadas (capítulo 2), e que devem ser objeto de discussão pelo professor junto ao aluno em sala de aula. Enquanto documento pertencente ao nível Sociedade, apresenta recomendações que interferem tanto nos níveis do sistema didático de um mesmo contexto quanto de contextos diferentes.

O nível Sociedade interfere diretamente no nível Escola, com a definição de documentos reguladores para as instituições escolares. Percebemos a necessidade de uma maior articulação entre os componentes desses níveis, como pesquisadores, diretores, professores, e as instituições, universidade, secretarias de educação e escolas, para redução do distanciamento constatado por Zacarias (2016).

Os participantes desse ambiente noosferiano precisam compreender o problema da transição entre níveis de ensino, ampliar a discussão com diferentes redes de ensino e propor ações políticas e pedagógicas conjuntas.

7.2 ESCOLA

A palavra escola deriva do grego *scholé*, e significa discussão, conferência, ou ainda, lazer. Para Chevallard (2015), a escola seria um espaço em que as tarefas comuns dariam lugar a outras, seja de aprofundamento, em que discussões do que já é conhecido podem ser aprofundadas, como um curso de confeitaria para uma pessoa que já trabalha com bolos, ou sobre um outro conhecimento, como uma pessoa aprender a dançar frevo por *hobby*.

A escola, qualquer que seja, tem condições modificáveis e condições não modificáveis para que o ensino de algum conhecimento aconteça. Dentro dela, as pessoas, aluno X e professor Y do sistema didático, estão submetidas a sujeições da própria escola, com seu regimento, PPP, currículo, sistema de avaliação e, da Sociedade, pelas exigências do sistema de ensino no qual ela está inserida.

Nesse nível, estão situados os marcos estruturais e legais decididos no nível da Sociedade. A escolaridade na sociedade brasileira, segundo a LDBEN, no seu art. 4º, é obrigatória e gratuita a partir dos 4 anos de idade⁸⁸ para a rede pública, em diferentes esferas, municipal, estadual ou federal. A estrutura do ensino regular

⁸⁸ Redação dada pela Lei nº 12.793/2017.

atende desde o ensino fundamental até a conclusão do ensino médio, quando o aluno deve ter 17 anos. No entanto, existem creches ligadas à rede pública que recebem crianças de até os 3 anos de idade, como também a educação de jovens e adultos que atende alunos fora da faixa etária regular.

Na rede de ensino pública, na maioria dos estados, os anos iniciais do ensino fundamental são de responsabilidade das redes municipais, enquanto que os anos finais do ensino fundamental estão sob a responsabilidade da rede estadual.

Essa preocupação está presente nas DCNEB ao abordar a descentralização do ensino:

O fato requer especial atenção de Estados e Municípios ao planejarem conjuntamente o atendimento à demanda, a fim de evitar obstáculos ao acesso dos alunos que devem mudar de uma rede para outra para completar o Ensino Fundamental.

As articulações no interior do Ensino Fundamental, e deste com as etapas que o antecedem e o sucedem na Educação Básica, são, pois, elementos fundamentais para o bom desempenho dos estudantes e a continuidade dos seus estudos (2013, p. 120).

Ao considerar que os alunos estarão mudando não apenas de nível escolar, mas também de instituições escolares e de redes que seguem orientações diferentes, entendemos essa já ser uma condição que dificulta uma boa transição entre os níveis de ensino.

A rede de ensino privada oferece escolaridade com diferentes estruturas, desde creche ao ensino superior, e o projeto político-pedagógico de cada instituição de ensino deve retratar as características da comunidade escolar e conter seus referenciais que servirão de base para a construção da proposta curricular.

É também nesse nível da escala de codeterminação que são decididas as estruturas das instituições quanto aos níveis de ensino. A Escola São Francisco, por atender tanto a educação infantil quanto o ensino fundamental, considera no seu PPP (2007) que o processo de ensino-aprendizagem deve estar baseado nos RCNEI (BRASIL, 1998b) e PCN (BRASIL, 1997, 1998a), com o objetivo de promover o desenvolvimento de indivíduos na sua totalidade cognitiva, afetiva, emocional, social, moral, religiosa e física.

O objetivo do ensino fundamental da Escola São Francisco, em consonância com a LDBEN no seu art. 32º, é “[...] promover a formação básica do cidadão, o domínio da leitura, escrita e do cálculo, a compreensão da realidade do seu meio

físico e social, a formação de atitudes e valores para a vida em sociedade” (PPP, 2007, p. 9).

Ainda com base no mesmo artigo da referida lei, a Escola São Francisco cumpre a exigência legal ao garantir o ensino fundamental de 9 anos⁸⁹, sendo esse estruturado em três níveis: o 1º ano do ensino fundamental vinculado à coordenação da educação infantil, localizado no mesmo espaço físico destinado a esse nível de ensino; do 2º ao 5º anos vinculados à coordenação dos anos iniciais; e do 6º ao 9º ano à coordenação dos anos finais. Entendemos que os níveis apresentam características diferentes, mas a divisão entre as coordenações caracteriza uma primeira ruptura entre as duas instituições, 5º ano e 6º anos do EF.

No organograma da Escola São Francisco (ANEXO A), existe a direção geral e, ligada a essa, a direção adjunta, compostas por duas profissionais, com formação em pedagogia e psicologia escolar, respectivamente. De acordo com o organograma da escola, as coordenações pedagógicas da educação infantil, dos anos iniciais e dos anos finais do EF, e o serviço de orientação educacional e psicologia estão ligados, por sua vez, à direção adjunta.

Nas entrevistas realizadas com as diretoras geral e adjunta, e a coordenadora dos anos finais, ao perguntarmos a cada uma delas “Como você vê o papel da gestão da escola?”, obtivemos respostas complementares. A Escola São Francisco tem um conselho gestor, “[...] um grupo de nove técnicas⁹⁰ que se encontra semanalmente, com duas horas de reunião, onde a gente discute as questões gerais da escola”, como afirmou a diretora-geral.

As diretoras, as coordenadoras de cada nível de ensino e as psicólogas compõem esse grupo gestor, que foi sendo instituído de forma gradual, como nos informou a coordenadora AF:

Coord. AF – [...] a escola começou a se abrir com projetos estudando Zaballa, em relação a como a gente poderia favorecer com que a escola ficasse com a direção mais partilhada. Então, em algumas gestões isso foi acontecendo e a atual gestão a gente tem uma direção mais compartilhada onde a coordenação e o serviço de orientação fazem parte desse grupo gestor junto com a direção que é escolhido basicamente por um grupo de ex-alunos que eles são da área de educação, e aí eles percebem como a gente pode caminhar num espaço que se vive através de Conselhos.

⁸⁹ Redação dada pela Lei nº 11.274/2006.

⁹⁰ Configuração do conselho gestor no momento da nossa entrevista, 2016, tendo em vista uma das técnicas ter sido recentemente contratada.

Esse grupo gestor também está atento ao ambiente noosferiano de Chevallard, como podemos perceber na entrevista com a diretora-adjunta,

Dir.-adjunta – A gente trabalha, na Escola São Francisco, em colegiados. [...] mas entendendo que tem nuances de gerenciamento. Eu penso que a função da gente é contribuir para que os serviços funcionem, facilitando a comunicação, buscando interlocuções com elementos de fora da escola. [...]

Então, há um leque de possibilidades que exige da gente estar muito nessa interlocução com quem tá dentro, e esse dentro que é fora que é a família, e também com as parcerias com a universidade, com interlocutores de outros espaços porque, sempre que você tá numa realidade institucional, você fica cego para o universo não é, e deixa de ver aspectos que são importantes.

Observamos na fala da diretora-adjunta a preocupação em se ter uma escola com uma gestão compartilhada, que possibilite atender à demanda interna das pessoas que compõem essa instituição, mas também sem deixar de perceber outros grupos pertencentes à Sociedade, como as famílias e a universidade.

Um exemplo desse olhar foi dado pela diretora-adjunta com a Semana da Consciência Negra, demanda que surgiu da necessidade de um posicionamento da escola sobre o tema, levantado pela coordenação e pelo SOE, que faz parte dos temas trabalhados anualmente. A escola planejou diversos momentos, em reuniões de estudo com os professores, em ações com os alunos e em reuniões com as famílias.

Dir.-adjunta – De fato, foi bem esvaziado com as famílias, mas a gente sabendo disso optou por convocar os professores e funcionou como uma reunião de trabalho. Então, eles foram remunerados e vieram em grande peso, para um dia além do que está posto nas nossas reuniões de estudo, para um dia de formação. Então, eu acho que a gente precisa fazer isso em vários temas, e é um grande desafio para a gestão da escola porque a escola é um mundo, é a interface com o mundo e com a construção do conhecimento, e isso se dá em geografia.

Existe uma preocupação no nível da Escola associada a uma visão externa, posto por meio do tema da consciência negra, que tem uma relação direta com os níveis da Sociedade, da Civilização e da Humanidade. Mas também associado à visão interna, quando a escola, mesmo sendo uma instituição sem fins lucrativos, busca minimizar um problema no nível da Sociedade, a desvalorização do professor, ao remunerar o professor que vem em outros horários, impedimentos provocados também nesse nível.

Ao afirmar que a Escola tem a intenção de realizar esse mesmo movimento com outros temas, a diretora-adjunta traz à tona a proposta que questões da atualidade sejam postas, discutidas nos diversos grupos e estudadas, para serem respondidas. Interpretamos essa proposta como uma intenção de aproximação do paradigma do questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2013). Alguns temas, por exemplo, o da consciência negra, são incorporados às atividades anuais da escola, como a semana de arte e literatura e a semana dos povos indígenas.

A escolha dos temas é realizada com a participação de todos, como explicado pela coordenadora dos anos iniciais:

Coord. AI – [...] o tema é escolhido no começo do ano por professores, em votação, e é muito bonito o processo. A gente fala um pouco, a gente traz um texto para poder ler um pouco sobre o que a gente propõe trabalhar, cada professor escreve três temas e a gente vai fazendo a votação. Primeiro, cada um tem que escolher dois, a gente apaga os que foram menos escolhidos e a gente vai, e vai até chegar no tema central que é escolhido pela maioria. Isso, como a maioria das coisas que são decididas na Escola São Francisco são escolhidas por grupos de gestores, inclusive dos professores.

[...]

Mas voltando para a questão do tema: quando a gente escolhe o tema central, a gente vai buscar dentro do que eu preciso trabalhar nesta classe, o que é que eu posso fazer em relação a esse tema central?”. E a matemática também entra nessa questão. Então, “casa comum, uma história de todos” é um tema que dá pano para as mangas para você trabalhar tudo, inclusive geometria, não é?

Essa escolha acontece num processo de convergência, para que a maioria das pessoas se sinta contemplada, o que demonstra um cuidado e uma preocupação com a articulação entre o didático e o pedagógico nas ações do planejamento, de como vai se expressar o tema escolhido por meio do trabalho com os conteúdos específicos a ser realizado ao longo do ano e ter a sua culminância na mostra de conhecimentos. No ano de 2016, o tema foi “Casa comum, história de todos”.

Para compreender como acontece essa articulação, formulamos um bloco de questões sobre PPP, sua função e seu papel no processo de ensino-aprendizagem quanto à construção do conhecimento proposto, e trazemos a fala da diretora-adjunta:

Pesquisadora – O projeto político-pedagógico tem questões gerais e tem questões específicas em relação ao ensino e à aprendizagem. E bem pontuado com relação à construção do conhecimento. Como é que você vê

hoje o que está posto no documento e o que de fato está sendo vivenciado pela escola?

Dir.-adjunta – [...] A escola São Francisco é uma escola que desde o início ela se propõe a ter um investimento na qualidade [...]. E aí eu fico vendo um pouco a caminhada da formação dos professores, e a impressão que me dá é que, muitas vezes, as professoras chegam com muitas necessidades de base assim, na estruturação. E eu vejo nuances na formação [...] as professoras que chegam, que vêm de uma ascensão social, são grandes batalhadoras, que vêm de um grande esforço. [...] e que a gente precisa chegar mais perto.

[...] Quando os meninos saem daqui do quinto ano, normalmente eles têm bons desempenhos nas escolas. E aí um relato que eu escuto é que, quando saem do fundamental II para o ensino médio, eu escuto relatos de outras escolas que têm preocupações, sobretudo a produção em matemática. [...] eu acho que a gente precisa chegar mais perto dessa interface do que está posto com o que precisa ser propriamente dito, sabe? Acho que precisa investir em construção, em dedicar mais tempo a essas tarefas. Eu vejo muita criatividade, a questão do trabalho em projeto, os meninos têm uma capacidade comunicativa muito boa, mas na produção escrita eu acho que a gente precisa investir mais. E, em matemática, eu acho que é a questão da fixação, de como se dá, e um grande desafio também que tem é a rotatividade. Por mais que a gente tenha funcionários de longa data na escola, a gente tem também uma circulação muito rápida, então, é muito difícil ser professor dos anos iniciais hoje. É um trabalho permanente...

A direção da Escola São Francisco reconhece que o tempo de apropriação com o trabalho pedagógico não é imediato e há necessidade de um corpo docente que se estabilize, e a formação docente é um dos sinais de uma forma de trabalho, um processo permanente, um compromisso de busca de instalação de um paradigma educacional. Essa também é uma condição de reduzir o distanciamento existente entre os professores e os níveis da escala de codeterminação. Entendemos existir dois distanciamentos: dos professores em um mesmo nível da escala e entre os sujeitos em diferentes níveis.

A existência de um conflito de paradigmas surge de forma mais acentuada com o ingresso dos alunos no ensino médio, entre os níveis da Escola e da Sociedade, com o paradigma de visita às obras, metáfora utilizada na TAD associada à visita a monumentos, quando temas são apresentados aos alunos sem que eles tenham conhecimento da sua razão de ser e da sua função (CHEVALLARD, 2013).

Essas transições têm a ver também com elementos do ponto de vista da Sociedade, em que há uma pressão cada vez maior para uma preparação para avaliações como o ENEM⁹¹, o ensino propedêutico que permita dar acesso à

⁹¹ Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), avaliação nacional pública necessária para ingresso nas instituições públicas de ensino superior.

universidade e a compreensão da Sociedade, que esse ensino só se faz de maneira tradicional.

A escola parece sofrer uma pressão simultânea, uma pressão pela coerência interna apontando para o paradigma de compreensão do mundo e uma pressão externa da sociedade, apontando para o paradigma de visita a muitas obras. É como se ela estivesse tentando se equilibrar diante dessas duas pressões.

Diante das condições não modificáveis do nível da Sociedade, com a rotatividade dos professores, os momentos de estudo propostos buscam aproximar o que é pretendido no PPP com o que é de fato realizado no processo de ensino e aprendizagem, conforme consta nas ações desse documento:

[...] em um programa de formação continuada para o corpo de professores que, sistematicamente, acontece aos sábados, nos quais deverão ser tratados assuntos pertinentes ao cotidiano escolar, temas da atualidade, e temas norteadores para o aprimoramento da relação teoria-prática pedagógica, dentro da perspectiva de ação-reflexão-ação (PPP, 2007, p. 8).

A Escola São Francisco promove reuniões pedagógicas, reuniões gerais que podem ser utilizadas para o planejamento de eventos, para a entrega de resultados aos pais, ou para estudo sobre temas como avaliação. A coordenadora AF, ao ser questionada sobre a organização das reuniões de estudo, afirmou serem planejadas no início do ano letivo.

Pesquisadora – Com relação à equipe gestora com a formação em serviço, existe horário de estudo coletivo, tem tema associado a essas formações? Tem uma pauta para as reuniões dos sábados que você comentou?

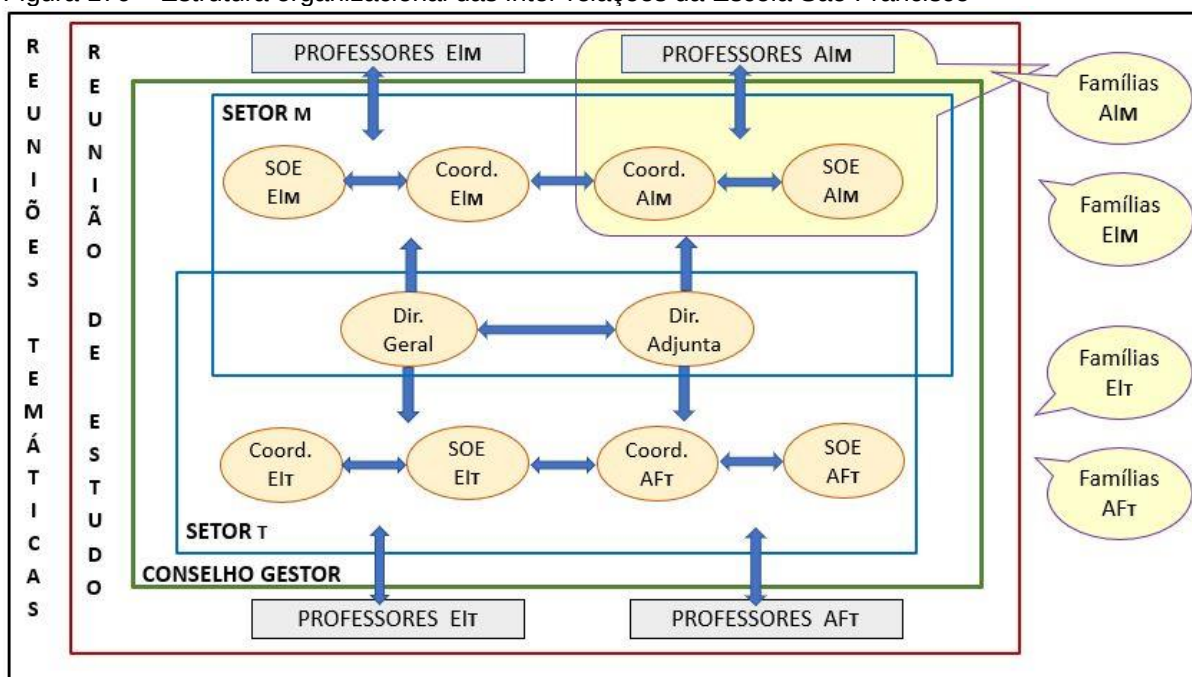
Coordenadora AF – O planejamento desses sábados, no início do ano a gente vê quantos sábados serão necessários para a atividade de estudo, que a gente chama sábados de estudo. Sempre a gente deixa um momento para as informações, para poder ter do cotidiano, e a partir daí a gente faz o planejamento de estudo. Nesse ano, a gente colocou o estudo da matemática, a questão da avaliação e a questão da autonomia. São três momentos que a gente tem material para realizar esses estudos. Quando há necessidade, a gente chama uma pessoa da área para nos orientar.

Existe, assim, um entrelaçamento entre o didático e o pedagógico nas ações de planejamento que permeia as falas das diretoras e coordenadoras, sempre dando suporte para a formação docente, por entender ser o *topos*⁹² do professor um profissional que estuda continuamente.

⁹² O termo *topos* tem origem grega e indica o lugar de algo. Na TAD, o termo *topos* representa o lugar ocupado por um sujeito dentro de uma instituição (CHEVALLARD, 2011).

Com base nas entrevistas realizadas sobre o papel da gestão, constatamos uma dinâmica de organização compartilhada, que respeita a escuta de todos da comunidade, a preocupação com a formação docente, com o desenvolvimento de um trabalho integrado. A dinâmica das relações é mais complexa do que é possível de se observar a partir do organograma da Escola São Francisco. Trazemos uma representação da dinâmica da gestão e das inter-relações existentes entre as pessoas pertencentes a essa instituição.

Figura 176 – Estrutura organizacional das inter-relações da Escola São Francisco



Legenda: EIM – Educação Infantil manhã; EIT – Educação Infantil tarde; AIM – Ano Iniciais manhã; AFT – Ano Finais tarde.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

As diretoras geral e adjunta trabalham em conjunto, com olhares que se complementam, diante da formação de cada uma delas:

Dir.-adjunta – [...] como minha formação é em psicologia, a diretora-geral tem um olhar mais endereçado ao fazer pedagógico. A minha ação é na ação coletiva. Então, a minha função é pensar, levantar questões, convocar, me apropriar do que as coordenadoras estão fazendo...

Essa apropriação acontece nas reuniões com cada um dos setores, manhã e tarde, composto da coordenação do respectivo nível de ensino e o representante do SOE, ambos do mesmo turno. Podemos observar na Figura 176 – Estrutura organizacional das inter-relações da Escola São Francisco que a articulação entre

os setores manhã e tarde é realizada pelas diretoras, e também no momento da reunião do conselho gestor.

Reuniões das coordenações e do SOE com a direção geral e adjunta acontecem semanalmente, quando são planejadas tanto as ações conjuntas para toda a escola quanto as específicas para cada nível de ensino ou turma, a partir da necessidade e demanda do planejamento escolar. Salientamos que cada coordenação tem um par do SOE, totalizando dez participantes do conselho gestor. Cada coordenação tem encontros semanais com cada professor individualmente, para acompanhar o que vem sendo trabalhado com cada turma.

As famílias possuem diversos momentos garantidos pela escola: no início do ano, acontece uma reunião com cada ano de ensino para apresentar a proposta da escola; quatro reuniões bimestrais para entrega de resultados com a participação da coordenação e professores; reuniões temáticas para todas as famílias da escola; reuniões gerais por turma e atendimentos por família com coordenação de ensino; SOE e/ou professor(es), a partir da necessidade, tanto da instituição escola quanto da família.

Com relação ao planejamento entre os níveis de ensino, reuniões entre as disciplinas de níveis diferentes não acontece, visto que a escola São Francisco oferta os anos iniciais do ensino fundamental no turno da manhã, e os anos finais no turno da tarde, como podemos constatar na entrevista do prof. 6º anos:

Pesquisadora – Existe algum encontro de planejamento entre você e a professora dos 5ºs anos? **[Prof. 6º anos – Não]**. Em nenhum momento, vocês têm uma chance...?

Prof. 6º anos – Nunca houve. O único momento que a gente tem com o professor é quando eles vão fazer o repasse da turma, então tem esse momento de repasse. Mas de estudo e de preparação não. **[Pesquisadora** – Nem de conversa específica, você com a professora do 5º ano para saber o que foi feito e o que você vem fazendo, também não?] Algo formal, não. Um momento que eu sente com a profa. 5ºs anos para ela me repassar não tem não. Em alguns casos, eu chego, quando eu tenho uma dificuldade com aluno, então eu digo: “Tal aluno tá com essa dificuldade aqui”, aí a gente conversa, troca ideia... **[Pesquisadora** – Mas em que momento? Porque a profa. 5ºs anos trabalha de manhã e você de tarde. Quando é que acontece?] Nas reuniões pedagógicas. Então, a gente faz esse trabalho nesse horário.

Além de trabalharem na Escola São Francisco em turnos diferentes, o prof. 6º anos também leciona em outra instituição escolar no turno da manhã, o que impossibilita sua presença no contraturno e caracteriza uma condição não

modificável, tanto para os professores quanto para a instituição (CHEVALLARD, 2013).

O fato de o professor ter que se submeter a trabalhar em mais de uma escola influencia no nível da Sociedade, leva-o a algumas sujeições, como projetos pedagógicos que não são necessariamente convergentes, e um tempo maior que o necessário para ele se dedicar a uma determinada escola, com um determinado paradigma. Essas são condições não modificáveis que sinalizam para a influência de outros níveis, como o da Pedagogia e o do Sistema Didático.

Buscamos também saber dos professores sobre essas reuniões, e a profa. 5º anos falou sobre a dinâmica das reuniões de estudo

Pesquisadora – Eu queria que você falasse um pouco sobre as reuniões da escola. Quais os tipos de reunião que você participa: pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe; qual a frequência com que ocorrem, os temas que são tratados, as dinâmicas utilizadas, os resultados e encaminhamentos.

Profa. 5º anos – Aqui na escola, a gente tem uma dinâmica bem interessante com relação a essas reuniões.

[...]

E a gente também tem reuniões de estudo. Essas reuniões de estudo podem ter uma dinâmica, como, por exemplo, textos que eles trazem que a gente lê esse texto coletivamente e faz alguma análise sobre esse texto. A gente teve reunião, por exemplo, de avaliação, porque aqui na Escola São Francisco a gente tem um tipo de avaliação diferenciado, que não tem prova, então eles trouxeram uns textos falando sobre avaliação e sobre como avaliar esse aluno, relacionado a isso, não tem prova, nenhum método, por exemplo, que você tenha que aplicar e dizer para o aluno que é prova. Eles são avaliados o tempo inteiro, todos os dias em sala de aula, às vezes com fichas, que poderiam se aproximar ao que é uma prova, mas que não se diz isso para o aluno. Os alunos do 5º ano, eles já sabem que são avaliados o tempo inteiro.

A profa. 5^{os} anos percebe a relação entre o didático e o pedagógico ao exemplificar o tema de estudo do ano, avaliação e o rebatimento nas ações em sala de aula. Além disso, o fato de ser uma professora polivalente pode levar a uma maior possibilidade de conexões entre as disciplinas, no caso matemática e ciências, e, por ser uma professora com uma carga horária maior na mesma escola, todas as manhãs, com horários semanais de encontro com a coordenação dos anos iniciais.

Ao perguntarmos sobre as reuniões pedagógicas que acontecem na Escola São Francisco ao prof. 6^{os} anos, esse afirmou sentir falta de momentos específicos para a área de matemática: “[...] geralmente, acho, que três ou dois sábados no mês

a gente sempre tem reunião. São temas voltados para a área pedagógica, e eu sinto falta de algo mais direcionado a nossa área”.

O prof. 6º anos tinha quatro tardes na Escola São Francisco e ministrava aulas nas duas turmas dos 6º anos e em uma turma do 8º ano, no ano de 2016, totalizando dezessete horas-aulas. Enquanto professor de diferentes escolas, que também trabalha quatro manhãs em outra instituição, esse professor vai ter de buscar se adequar a diferentes paradigmas que regulam o funcionamento interno da escola e conduzem o processo pedagógico escolar.

Somos levados a concordar com Hauser, quando afirma que

[...] de alguma forma e por alguns motivos, os professores de 1ª a 4ª série e os de 5ª a 8ª série, bem como os de Ensino Médio não executam um trabalho pedagógico integrado por causa das formações e práticas docentes bem distintas. Duas realidades, duas escolas, dois mundos distantes (2007, p. 5).

Percebemos que os professores dos anos iniciais sofrem um tipo de pressão diferente da dos professores dos anos finais, interferência dos diferentes níveis como da Sociedade e da Pedagogia, ao demandar aos professores dos anos finais do ensino fundamental um reforço do ponto de vista do paradigma de visita às obras (CHEVALLARD, 2013), cobrança da Sociedade que todo o conteúdo seja ensinado na escola, forçado pela proximidade do ensino médio.

A transição entre níveis de ensino também foi objeto do bloco comum de perguntas a todos os entrevistados. Preocupação da direção da Escola São Francisco que percebemos na entrevista da diretora-geral:

Pesquisadora – E assim, e essa transição dos anos iniciais para os anos finais, até porque a escola tem o movimento até do tempo... Eles têm aula de manhã, aula de tarde, mas eles mudam inclusive de turno [...] Como é que vocês veem isso?

Dir.-geral – A gente tem sempre uma atenção para ver se não divide tanto a escola, mas se divide da educação infantil para o fundamental I, mais ainda do I para o fundamental II porque tem ainda essa questão do horário não é... Veja, a gente tem tido uma preocupação, por exemplo, a gente faz uma passagem de turma no começo do ano quando os professores já sabem as turmas que vão pegar; tem um momento que as duas coordenações se reúnem com os grupos de professores e, por exemplo, os professores do quinto ano passam para o pessoal do sexto o perfil da turma. A gente orienta que os professores façam um relatório da classe...

Pesquisadora – Isso só acontece do quinto para o sexto?

Dir.-geral – Não, isso acontece em todas as turmas, mas a gente tem muito do quinto para o sexto exatamente por essa distância na comunicação que existe.

A comunicação entre os turnos é um impedimento visível da transição, mesmo com todos os esforços realizados pela direção da escola, enquanto elo entre os diferentes setores e a existência de reuniões de passagem de turmas realizadas não apenas do 5º para o 6º anos, mas com outras turmas da escola, mostra uma intenção de minimizar a transição entre os níveis de ensino.

A diretora-adjunta traz, no momento da entrevista, um olhar sobre a transição entre os diferentes níveis de ensino mais voltado para questões percebidas desse período na função de direção⁹³

Dir.-adjunta – Bom, bem como leiga, o que eu observo nas construções com as coordenações, enfim, com as pessoas que estão envolvidas, com os pequenos a gente vê mais a necessidade de trabalhar com uma coisa concreta. É uma coisa que a orientadora AI fala, que tem uma longa caminhada e que está agora na relação com a educação infantil [...] Nessa transição do 5º para o 6º anos, os especialistas da matemática sentem falta de atividades de fixação. Eu não sei dizer, com muita franqueza, se isso vem do não trabalho de fixação nos 5ºs anos – por exemplo, como é que está construída a questão da fração. A coord. AI problematiza a noção da construção de fração. Às vezes, ela acha que isso chega num tempo que é anterior à própria sedimentação dos conceitos fundamentais de adição e subtração... A minha sensação muito empírica, é como se, às vezes, são introduzidas questões mais abstratas sem uma sedimentação anterior. Isso é tudo que eu posso lhe dizer por ora em relação a esse tema.

Apesar de ter poucos elementos sobre a transição entre o 5º e o 6º anos, a diretora-adjunta percebe a existência de lacunas no fazer didático.

A coordenadora dos anos iniciais traz seu olhar sobre a transição enquanto pertencente a esse nível de ensino:

Coord. AI – Eu não sei exatamente como é que eles são recebidos lá, porque, quando a gente faz uma sondagem – eu estou fazendo uma sondagem básica dos conhecimentos de matemática, porque não dá para a gente fazer uma avaliação de todos os conteúdos que a gente trabalha para saber como é que a gente está mandando. Agora, acaba que a gente é influenciada pela maneira que os de lá recebem. Então, às vezes, vem alguma crítica de lá, e eu vou falar do trabalho do miudinho: “Fulaninho, porque vocês passaram fulaninho?”. Porque a gente tem um processo. Fulaninho do 2º ano até o 5º cresceu muito. [...] Porque a gente também precisa ver que o trabalho pedagógico não é algo isolado no desenvolvimento socio-afetivo, e do desenvolvimento emocional.

A compreensão da aprendizagem enquanto um processo em constante desenvolvimento é sinalizada pela coord. AI, que está em conformidade com a

⁹³ A entrevista foi realizada com a diretora-adjunta em 24/11/2016, quando ela tinha 11 meses nessa função. Anteriormente, ela atuava como psicóloga no SOE.

finalidade da escola São Francisco: “[...] todo o processo educativo é decorrente de uma história de construção pessoal e coletiva, e que o meio social também exerce influência nesta complexidade” (PPP, 2007, p. 8). Existe um pensar no aluno não apenas enquanto pessoa que tem um bom relacionamento com os objetos dessa ou naquela disciplina, mas da pessoa que tem a capacidade de mudar a partir das relações que estabelece dentro da instituição (CHEVALLARD, 1999), e que irão compor o ser humano na sua integralidade, pertencente ao nível da Sociedade.

Mesmo com a existência de momentos de estudo coletivo, em conformidade com o que é proposto no PPP, e a percepção das diretoras e da coord. Al sobre as lacunas existentes em relação à transição entre os níveis de ensino, em particular, do 5º para o 6º anos, essa parece ficar a cargo dos professores, visto que reuniões entre professores da mesma disciplina não são propostas pela escola, como citado anteriormente pelo prof. 6º anos (p. 320).

O fato de a escola São Francisco contar com o ensino do 5º ano e do 6º anos em turnos distintos, 5º ano pela manhã e 6º ano à tarde, é uma condição não modificável que causa no nível da Escola um impedimento para que os professores de níveis de ensino diferentes possam realizar reuniões de planejamento conjuntas. No entanto, dispositivos voltados para a transição existem, como afirma a diretora-geral (p. 322), como reuniões de passagem de turmas e a orientação da realização de um relatório de classe pelos professores, que serão objeto de discussão no nível da Pedagogia.

Entendemos que, mesmo assumindo como critério o fato das duas instituições 5º ano e 6º anos pertencerem a uma mesma rede de ensino, numa mesma escola, sem o distanciamento físico, a gestão da Escola São Francisco, conforme relatado nas entrevistas, considera que a transição entre os níveis de ensino não acontece a contento, uma das questões que buscamos responder ao longo da nossa pesquisa.

A filosofia da escola e o seu PPP são tomados como referência para a construção do currículo de todas as áreas de conhecimento da escola, atualizado em 2013, tomando como base os documentos citados no nível da Sociedade (item 6.1). Isso é o que a Escola São Francisco respeita. Mas existe a possibilidade de escolhas no nível da Escola, que fica aberto no nível da Sociedade, e é possível de ser modificado, a exemplo da parte diversificada do currículo que pode ser adaptada de acordo com os interesses da comunidade escolar.

A Escola São Francisco considera que a parte diversificada, além da língua inglesa obrigatória e ofertada nos anos finais do ensino fundamental, deve incluir “[...] disciplinas que venham enriquecer o currículo (Filosofia e Atualidade, Metodologia de Pesquisa, Orientação Educacional e Informática Educativa)” (PPP, 2007, p. 14). O movimento de incluir saberes considerados importantes de viverem na Escola São Francisco caracteriza uma transposição escolar, que deve ser analisado. Durante o nosso período de observação na escola (2016-2017), segundo a distribuição de horários do ensino fundamental, constatamos que Orientação Educacional (SOE) é oferecida a todo esse nível de ensino; Informática Educativa (TI) para todos os anos iniciais do ensino fundamental; e, apenas para o 9º ano, Filosofia e Atualidade.

O sistema de avaliação de uma instituição escolar também pertence a esse nível de codeterminação da Escola enquanto um dos elementos constitutivos da organização escolar, de acordo com a DCNEB (2013) e a LDBEN (1996). Na Escola São Francisco, segundo o PPP, a avaliação é entendida como:

[...] um processo global e contínuo, abrangendo a pessoa do aluno nos aspectos pertinentes ao desenvolvimento integral, e a toda a sua vida escolar. Priorizará os aspectos qualitativos acima dos quantitativos na aprendizagem, em uma prática reflexiva (2007, p. 17).

Ainda nesse documento, para acompanhar a aprendizagem desse aluno, diversas formas de avaliação são propostas com o objetivo de “[...] diagnosticar aspectos que necessitam de intervenção pedagógica para garantir a construção do conhecimento pelo aluno” (PPP, 2007, p. 17), que coaduna com a teoria de Vergnaud (2007), com a necessidade de compreender os esquemas construídos pelos alunos, os conceitos apreendidos e os que ainda precisam ser retomados.

Concordamos com a posição adotada pela Escola São Francisco quanto à função da avaliação de uma maneira mais ampla: “[...] o ato avaliativo deverá servir não apenas para a tomada de consciência do aluno, mas, também, para a orientação da prática pedagógica do professor e para a definição de prioridades e de ações da escola.” (PPP, 2007, p. 18). Nesse sentido, entendemos que o momento de transição entre os anos e, particularmente, entre os níveis de ensino anos iniciais e anos finais deve ser contemplado com informações sobre o desenvolvimento integral, assim como o processo de construção conceitual de cada aluno.

A proposta de um currículo e um sistema de avaliação no nível da Escola interfere diretamente na organização escolar, objeto do próximo nível da escala de codeterminação.

7.3 PEDAGOGIA

Nesse nível, temos a organização de um sistema escolar e suas dinâmicas, com o currículo, as disciplinas e seus programas, bem como a rotina para cada ano de ensino, com o objetivo de levar os alunos desse sistema a conhecer determinado objeto do saber, enquanto parte de um desenvolvimento integral do indivíduo, como sinaliza o PPP com base no RCNEI (BRASIL, 1998b) e PCN (BRASIL, 1997, 1998a), e citado no nível da Escola.

Influenciado pelos níveis anteriores e determinante nas decisões a serem efetivadas nas ações relacionadas ao ensino das disciplinas, encontramos nesse nível uma noosfera disciplinar, formada pelas diretoras, coordenadoras pedagógicas e por professores, que na Escola São Francisco partilham as decisões de organização.

A construção das diretrizes pedagógicas de uma escola deve ter como eixo norteador, a partir dos documentos produzidos pela Sociedade, a garantia de uma educação que atenda à sua comunidade de forma legítima, com propostas pedagógicas que valorizem a construção de uma educação para a cidadania, o que é confirmado pela diretora-geral quando perguntamos sobre o papel da direção na gestão da escola quanto ao planejamento:

Pesq – E como é o papel de planejamento das atividades didáticas? Você tem uma atuação, você faz parte da equipe da direção em termos de organização, do pensar desse planejamento, ou ele chega até a ponta junto com as coordenações?

Dir.-geral – A gente tem uma participação no planejamento, mas não é uma participação direta no planejamento, até porque a gente tem diversos níveis de planejamento. No planejamento geral da escola sim, a gente tem uma participação integral, assim, atuante, de acompanhamento... Mas o papel da gente é muito de garantir, de buscar. Primeiro, de trazer uma informação e de tentar fazer com que o que se organiza na escola, o que se planeja pra ser executado na escola esteja de acordo com a filosofia da escola, tanto no aspecto de ideias, de visão de pessoa, como também do que pedagogicamente venha a estar de acordo com o que a gente pensa que deva ser o processo de educação. Então, a gente tem muito mais esse papel de acompanhamento a distância, digamos, o planejamento de unidade fica muito mais a cargo das coordenações.

A construção curricular, disciplinas que compõem a parte comum e diversificada, suas cargas horárias, a articulação entre os componentes curriculares, a divisão de turmas entre disciplinas, a dinâmica das atividades de classe e de sala dentre outros, toda essa organização deve ser discutida com o objetivo de formar esse cidadão integral, nos respectivos níveis de planejamento da instituição escolar.

A grade curricular dos 5^{os} anos da Escola São Francisco apresenta uma maior concentração para as disciplinas português, história e geografia, ministradas pela professora P/H/G, e as disciplinas de matemática e ciências, pela profa. 5^{os} anos. O fato de já contar com duas professoras caracteriza uma prática de pluridocência nos 5^o anos.

Diariamente, essas duas professoras têm aulas em blocos alternados, como pode ser verificado nos quadros de horário de aulas dos 5^{os} anos, para o ano de 2016 (APÊNDICE A).

Vale destacar que os alunos não possuem uma sala de aula fixa para cada uma das turmas. Eles iniciam o dia em uma das salas, de acordo com o horário, seja a sala de aula de português, história e geografia, ou a sala de aula de matemática e ciências. Embora existam salas para esses dois grupos de disciplina, o que as diferencia de uma sala de aula “tradicional” é que todos os materiais correspondentes a cada uma dessas disciplinas ficam nas salas: livros didáticos, cadernos de atividades, cadernos dos alunos, e materiais diversos (lápiz, hidrocor, régua, dentre outros). O aluno leva para casa apenas os materiais necessários para as atividades de casa.

O lanche coletivo é servido pela professora, com a ajuda dos alunos, na própria sala de aula do primeiro bloco de aulas. Por exemplo, a turma do 5^o B nas segundas-feiras faz seu lanche na sala de matemática e ciências (APÊNDICE A). Ao final do lanche, os alunos organizam seus materiais, suas bolsas e colocam no corredor, ao lado da sala de português, história e geografia, para onde retornam ao final do recreio. Esse acontece no pátio da escola.

As aulas de outras áreas do conhecimento consideradas na organização curricular para os 5^{os} anos, como artes, educação física, recreação, movimento e musicalidade, tecnologias da informação⁹⁴ (TI) e serviço de orientação educacional

⁹⁴ No PPP, a nomenclatura usada é Informática Educativa (TIC), mas no horário consta Tecnologias da informação (TI).

(SOE)⁹⁵, são ministradas por professores especialistas e acontecem uma vez por semana, com trinta minutos de duração cada. Nos horários destinados a SOE e TI, cada uma das turmas é dividida em dois grupos, G1 e G2, que se alternam. Todas essas disciplinas são ministradas em espaços específicos, o que caracteriza uma organização no nível da Pedagogia da Escola São Francisco.

Observamos que os alunos dos 5^{os} anos da Escola São Francisco já vivenciam uma rotina diferenciada, com diversos professores, diferentes disciplinas e espaços, com demandas que se aproximam da estrutura organizacional presente na maioria das escolas dos anos finais na nossa cidade. Entretanto, algumas características como o tempo fracionado para o lanche e o recreio, e professores com uma carga horária maior e diária com cada turma, remetem a princípios pertencentes à educação infantil e aos anos iniciais.

Para os 6^o anos do ensino fundamental, a carga horária semanal é de 26 horas-aula, com duração de 50 minutos cada. A disciplina de matemática tem uma carga horária semanal de 5 horas-aula, distribuídas em quatro dias da semana, conforme quadros de horário dos 6^o anos, para o ano de 2017 (APÊNDICE A).

A distribuição das aulas por disciplina nos 6^o anos na Escola São Francisco atende como princípio a disponibilidade de cada professor, por serem especialistas e terem um contrato de trabalho baseado no quantitativo de horas-aula.

A construção do horário, também um elemento desse nível da escala de codeterminação, deve ser realizada para atender a critérios pedagógicos. Entendemos a importância de acolher as necessidades dos professores, mas também se faz necessário pensar numa organização que contribua para o desempenho pedagógico. Por exemplo, a garantia de aulas geminadas de matemática em um dia da semana favorece o desenvolvimento de atividades em grupo, trabalho com jogos, um tempo maior para a realização de uma avaliação ou mesmo o acompanhamento dos alunos na realização de atividades por parte do professor. Assim como aulas de uma mesma disciplina em dias alternados, possibilitam aos alunos um tempo maior para reflexão e realização das tarefas ou o aprofundamento dos estudos.

A partir das observações realizadas no segundo semestre de 2016 nas turmas dos 5^{os} anos, e no início do ano letivo de 2017 nas turmas dos 6^o anos,

⁹⁵ Aula ministrada por uma psicóloga que aborda questões gerais desde a organização de estudo a problemas de relacionamento da turma.

constatamos que as rotinas de sala de aula do 5º ano e do 6º anos da Escola São Francisco são exemplos de diferenças da organização escolar que precisam ser cuidadas na transição entre níveis de ensino, sinalizadas nos PCN e que apresentamos no cap. 2 (item 2.5.1).

Esse cuidado com a organização escolar enquanto elemento na transição do 5º para o 6º anos já vem sendo objeto de acompanhamento pela instituição e, em particular, pelos professores do 6º ano, como nos informou a coordenadora AF.

Pesquisadora – Qual é a sua percepção sobre o trabalho do professor do 6º ano de uma maneira geral?

Coord. AF – O professor do 6º ano é um professor que eu sempre acho assim que é um momento muito difícil para os meninos que saem de duas professoras basicamente, de sala de aula, para dez professores. Há um certo temor desses alunos. Num primeiro momento, é a gente estabilizá-los, os alunos junto aos professores. Então, sempre a gente coloca uma construção junto aos alunos e a gente sempre vai trabalhando essa construção do contrato pedagógico, é organizado, todos são organizados juntos aos alunos, mas esse é com mais cuidado para dizer a eles do que a gente gostaria de trabalhar.

[...]

A outra coisa também é a questão do material, porque o adolescente, a gente já percebe que há necessidade de escolher o seu material, coisa que não acontece até o 5º ano. Até o 5º ano, todo o material escolar é dado pela escola [...], às vezes, eles se atrapalham, esquecem muito o material, isso a gente precisa ver a questão do material, a organização do material [...]. Então, isso tudo atrapalha o pedagógico, não é? A gente tenta tirar para que eles foquem mais no pedagógico [...].

A construção do contrato pedagógico caracteriza um primeiro momento no 6º ano de aproximar alunos e professores, com a construção das regras de convivência e de trabalho que devem nortear o trabalho em cada disciplina.

Gueudet, Khalouffi e Marc (2012) afirmam existir uma transição no nível macro, visto que as formações dos professores são distintas. A professora de matemática dos 5^{os} anos é pedagoga com mestrado em educação matemática e ministra aulas da área de ciências (matemática e ciências). O prof. 6º anos é licenciado em matemática com especialização em educação matemática, e ministra apenas a disciplina de matemática.

Essas diferenças também são objeto da DCNEB:

Os alunos, ao mudarem do professor generalista dos anos iniciais para os professores especialistas dos diferentes componentes curriculares, costumam se ressentir diante das muitas exigências que têm de atender, feitas pelo grande número de docentes dos anos finais (BRASIL, 2013, p. 120).

A dinâmica de sala de aula, de acordo com as aulas observadas na disciplina de matemática, é semelhante nas turmas de 5º e 6º anos. Os dois professores, em cada tempo de aula, vivenciam alguns dos seguintes momentos: informação do objeto de estudo, leitura do conteúdo no livro-texto, realização de atividades individual ou em grupos, correções de forma coletiva no quadro, tarefas de classe e de casa, verificação de tarefas nos cadernos dos alunos e registro nas agendas quando não realizadas, indicação de conteúdos a serem estudados e aplicação de fichas ou avaliações.

Uma diferença maior foi percebida quanto à organização do espaço de sala de aula, dinâmica de acompanhamento da realização das atividades em sala e avaliação.

Se para os 5^{os} anos tem-se uma sala de matemática e ciências, para os 6º anos há uma sala para cada uma das turmas, local onde acontece a maioria das aulas, inclusive matemática.

O acompanhamento da realização das atividades é realizado de maneira mais próxima pela profa. 5^{os} anos, inclusive quanto às dúvidas, considerando o quantitativo de alunos nas turmas dos 5^{os} anos e o tempo médio de aula de 1 hora, o que é uma tentativa do prof. 6^{os} anos visto que a aula geminada acontece apenas uma vez no 6º ano A, e o tempo da hora-aula é, no máximo, de 50 minutos.

Com relação à avaliação, apresentamos, no nível anterior da escala de codeterminação, os princípios que compõem o sistema de avaliação no PPP da Escola São Francisco. No entanto, a prática observada em sala e relatada pelos professores dos 5º e 6º anos de matemática na entrevista apresenta algumas diferenças.

Pesquisadora – Como você realiza a avaliação de um conteúdo ministrado?

Profa. 5^{os} anos – A pessoa aqui tem total autonomia para decidir qual o conceito do aluno, relacionando o que ele viu em sala de aula, a participação do aluno, as atividades que ele realizou ou deixou de realizar, para indicar esse conceito. Como não são muitos alunos, a gente tem uma turma de quinze alunos; essa é uma prática muito tranquila de ser estabelecida em sala. A gente consegue perceber exatamente como é, em que situação cada um está, para que a gente possa trabalhar mais individualizado com cada aluno.

Na entrevista com a profa. 5^{os} anos, percebemos o princípio de uma avaliação integral do aluno, dentro da perspectiva apresentada no PPP, e sinalizada por ela como capaz de identificar o que foi aprendido por cada aluno e quais dificuldades

precisam ser trabalhadas. Já nos 6º anos, a partir das aulas observadas, percebemos que, além da observação da participação do aluno, das tarefas, trabalhos e relatórios realizados, existem provas que são marcadas.

Pesquisadora – E como é que você faz a avaliação de um conteúdo? Como é que é feita essa avaliação?

Prof. 6º anos – A avaliação, geralmente aqui a coordenadora AF pede para que ela observe... Eu geralmente pego todos aqueles objetivos do livro, cada capítulo traz seus objetivos. Então, eu traço minha avaliação em cima daqueles objetivos. E dali eu vou formulando questões, pego questões de livro, faço minhas modificações e ali eu vou avaliando o percentual de acertos... E como a gente tá fazendo aqui um trabalho de valorização dos erros, retomando os erros, então a gente sempre retoma, retorna com essa avaliação para o aluno, para que ele possa refazer, ver onde errou e depois a gente faz a correção coletiva.

Uma complementação da entrevista foi realizada com o prof. 6º anos, para esclarecermos alguns pontos sobre a avaliação. Em cada bimestre, foram realizadas duas avaliações, com base nos objetivos dos capítulos do livro trabalhados naquele bimestre. Após o professor realizar a correção de cada avaliação, essa é devolvida para que o aluno possa observar seus erros e complementar ou refazer as questões nas quais apresentou dificuldades. Esse processo faz parte do trabalho de valorização do erro, conforme citado pelo prof. 6º anos.

Os encaminhamentos dados pelos professores de matemática dos 5º e dos 6º anos ao processo de avaliação estão baseados no PPP, e são tomados como instrumento tanto para o aluno avaliar a sua aprendizagem quanto para o professor analisar a sua prática a partir dos erros dos alunos.

Observamos aqui um outro ponto de condições modificáveis e não modificáveis entre os níveis anos iniciais e anos finais, provocado pelo nível da Sociedade (CHEVALLARD, 2015), quando a escola faz a opção de não ter provas nos anos iniciais, e considera que a avaliação seja um processo efetivamente contínuo, mas, como comentou a profa. 5^{os} anos: “Por que às vezes eles vêm com uma pergunta assim ‘Mas o meu colega tem prova na escola que ele estuda’, e aí a gente explica que eles são avaliados o tempo inteiro, que não tem prova”. Então, existe assim, no nível da Sociedade, uma pressão para que a avaliação seja realizada por meio de provas. É uma pressão sutil, mas existe uma interface da escola com a Sociedade que vai levando que as escolhas sejam feitas e essa diferença aconteça dentro da própria escola, que nos anos iniciais não tem prova e nos finais já tem.

A comunicação do processo de aprendizagem dos alunos às famílias é realizada com documentos diferentes para os dois níveis de ensino. Para os anos iniciais, a “Ficha de Acompanhamento do(a) Estudante” (ANEXO B) e o “Registro de Avaliação Ensino Fundamental” (ANEXO C) e, para os anos finais, o “Boletim Escolar” (ANEXO D). Diferenças na forma de registro dos dois sistemas podem ser observadas, a “Ficha de Acompanhamento do(a) Estudante” dos anos iniciais apresenta um conjunto de questões atitudinais gerais para serem avaliadas quanto ao seu desempenho, conforme legenda⁹⁶, que não estão presentes no documento dos anos finais. Nos outros dois documentos, “Registro de Avaliação” e “Boletim Escolar”, são utilizados conceitos⁹⁷ para serem atribuídos às questões conceituais e atitudinais em cada uma das disciplinas dos níveis de ensino correspondente.

Entendemos que esses documentos retratam a diferença observada no processo avaliativo dentro do nível Sociedade, com exigências de um resultado final expresso por conceitos, sem deixar clara a situação de aprendizagem de cada aluno, e servir de elemento de análise para o ano seguinte enquanto diagnóstico do que foi vivenciado. O formato apresentado tem influência na maneira como é organizado o ensino, sem dar visibilidade à informação dos objetivos específicos que foram trabalhados em cada disciplina, dos conceitos já construídos pelos alunos e os que estão em construção, em cada bimestre por exemplo

Como citado pela diretora-geral, no nível da Escola, uma das reuniões que acontece no início do ano letivo é a de passagem de turma. Nesse momento, uma memória coletiva, tanto do grupo-classe como de cada aluno, é construída pelos professores dos 5^{os} anos, pela coord. AI e a representante do SOE. Um retrato do histórico escolar individual é realizado tomando como referência o objetivo do nível do ensino fundamental, de acordo com o PPP (2007, p. 9), mencionado anteriormente no nível da Escola (item 7.2).

A reunião de passagem de turma dos 5^{os} anos de 2016 para a equipe de professores, coordenação e serviço de orientação dos 6^{os} anos de 2017, realizada em 30/01/2017, foi conduzida pela coord. AF e a caracterização das turmas foi realizada pela coord. AI e pela psicóloga dos anos iniciais do ensino fundamental. Para cada um dos alunos de cada uma das turmas, considerações foram realizadas cuja predominância estava associada às questões atitudinais, sendo as questões

⁹⁶ DC – Desempenho Construído; DEC – Desempenho em Construção; * - Observação.

⁹⁷ O – Ótimo; B – Bom; S – Suficiente; I – Insuficiente.

conceituais mais gerais associadas à capacidade de leitura, escrita, compreensão, e interpretação textual. Naquele momento, nenhuma referência foi feita aos dois documentos “Ficha de Acompanhamento do(a) Estudante” e “Registro de Avaliação”, que poderiam servir de subsídios quanto às questões atitudinais e a evolução dos alunos ao longo do ano, por exemplo.

Apesar de a coordenadora AF ter questionado para cada aluno sobre alguma atenção que deveria ser dada ao aspecto pedagógico, nenhuma informação específica da disciplina de matemática e do domínio das grandezas e medidas foi passada. A profa. 5^{os} anos fez referência apenas a dois alunos, mas de maneira geral: um que utilizava o cálculo mental para resolver as atividades, porém apresentava dificuldades quanto ao registro, e o outro, que apresentava dificuldades de compreensão.

O resgate do que foi trabalhado nas disciplinas, bem como as dificuldades de aprendizagem de cada turma, e de cada aluno, não aconteceu nessa reunião de passagem de turma, nem em outro momento apenas entre os professores das turmas ou da disciplina, o que não favorece a compreensão do prof. 6^{os} anos quanto ao que foi objeto de estudo em matemática com as turmas dos 5^{os} anos no ano anterior. Sobre a reunião de passagem de turma, a coordenadora AF comentou:

Coordenadora AF – E a gente gosta muito, nessa reunião de passagem, a gente trabalha mais aspectos positivos porque, às vezes, a gente não pode carregar muito nos aspectos de dificuldades porque o aluno, quando ele vem para o novo, ele tem uma postura diferente. Às vezes, um aluno que apresenta alguma dificuldade em alguma disciplina, no novo ele se envolve de uma forma diferente. Já é um desafio para o adolescente que gosta de ser desafiado; ele funciona de forma diferente.

Podemos perceber nesse momento uma preocupação da coordenação junto ao processo de transição dos alunos, nessa mudança de condição de aluno dos anos iniciais para aluno dos anos finais do ensino fundamental. Para a coordenadora AF, sem desmerecer a questão pedagógica de cada aluno, nesse momento o objetivo seria destacar os aspectos positivos e acreditar na possibilidade de uma mudança diante do novo.

Entendemos o argumento da coordenadora AF, mas se faz necessário analisar o funcionamento da memória do sistema didático, problema levantado por Brousseau e Centeño (1991), comentado nesta pesquisa, no item sobre transição (cap. 2, item 2.5). Entendemos a memória do sistema didático como um sistema

maior, que envolve não apenas o professor e a sua memória, mas a memória do passado de cada aluno dentro da instituição.

Atualmente, quando um aluno é aprovado de um ano para outro, a família recebe um dos documentos citados anteriormente, a depender do nível de ensino. Encontramos aqui um ponto delicado, mas necessário de ser analisado e discutido, que é o sistema de avaliação, não apenas para a Escola São Francisco, mas das instituições escolares em geral, principalmente quando ocorre uma mudança de instituição escolar.

Ao ser transferido de uma escola para outra cursando o ensino fundamental, o aluno recebe a ficha 18⁹⁸, documento com informações no nível da Escola, válido no nível da Sociedade. O mesmo acontece quanto essa transferência ocorre no ensino médio, com a ficha 19. Entendemos ser essa condição imposta no nível da Sociedade uma condição não modificável dentro do sistema de avaliação, que leva a uma perda de memória da história escolar do aluno, reduzida a conceitos ou notas e quantitativo de faltas.

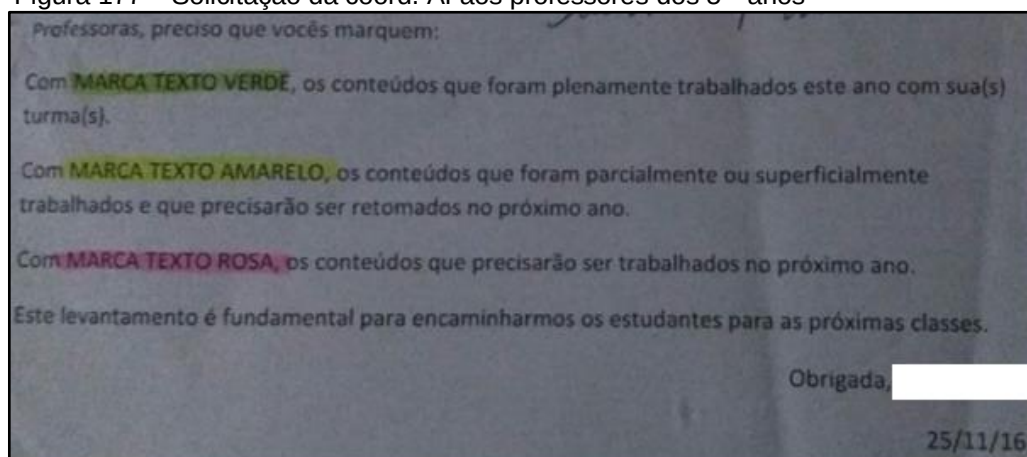
Existe uma intenção de construção de uma memória didática dos alunos, como foi percebido na entrevista com a dir. geral, ao afirmar “[...] a gente orienta que os professores façam um relatório de classe”, e também em conversa com a coord. AI, realizada em 19/12/16, quando informou que, ao final do ano letivo, sempre solicita aos professores de todas as disciplinas que sinalizem os conteúdos que foram trabalhados ao longo do ano para que seja repassado à coordenação do ensino fundamental II. Um documento deve ser produzido pelos professores⁹⁹, atendendo à solicitação da coord. AI (Figura 177).

Essa é uma ação que favorece a construção da história do que foi vivenciado pelos alunos dos 5^{os} anos e do currículo realizado, que pode contribuir para a continuidade do que deve ser retomado e acrescentado enquanto objeto de estudo, tanto para a coord. AF quanto para os professores do 6º ano, que podem compor um retrato dos alunos do 5º ano.

⁹⁸ Ficha 18 – histórico escolar do ensino fundamental e ficha 19 – histórico escolar do ensino médio, ambas reconhecidas pelas secretarias de educação no sistema escolar brasileiro.

⁹⁹ Não tivemos acesso ao documento elaborado pela profa. 5º anos.

Figura 177 – Solicitação da coord. Al aos professores dos 5^{os} anos



Fonte: Documento adaptado da escola São Francisco.

Essa solicitação da coord. Al caracteriza a percepção de uma ação para dirimir as lacunas causadas pela transição, a intenção da construção de uma memória do sistema didático (BROUSSEAU; CENTEÑO, 1991).

Apesar de existirem dispositivos voltados para a transição, como a reunião de passagem de turmas dos 5^{os} anos para os 6^{os} anos, a discussão restringe-se aos aspectos atitudinais e nos objetivos mais gerais do ensino fundamental. Há ausência de um maior detalhamento sobre as questões de aprendizagem e dificuldades dos alunos ao final do 5º ano. Referências ao documento solicitado pela coord. Al, aos relatórios dos professores do 5º ano sobre quais conteúdos foram abordados, o que deixou de ser trabalhado ou, ainda, o que precisa ser retomado ao longo do 6º ano não foram realizadas.

Entendemos que cada ano de ensino tem as suas especificidades, assim como cada disciplina, mas consideramos que uma maior integração entre os anos iniciais e os anos finais do ensino fundamental, como sugere a DCNEB (2013), contribuiria para que os problemas decorrentes dessa transição sejam superados.

7.4 O SISTEMA DIDÁTICO: DISCIPLINA, DOMÍNIO, TEMA, SETOR E ASSUNTO

A disciplina matemática, como determina a LDBEN no seu art. 26º, parágrafo 1º, é parte obrigatória do currículo escolar, e faz parte do currículo da Escola São Francisco. No PPP, a matemática atende a essa exigência, e, dentre as diretrizes gerais que norteiam o processo de ensino e aprendizagem, destacamos “[...] a descoberta e a construção do conhecimento em abordagem analítica, baseadas no

método raciocínio indutivo dedutivo; a reflexão crítica e construtiva acerca da realidade e dos temas e questões propostas em situações de aprendizagem” (2007, p. 10). E prossegue,

Nesta concepção, o aluno é percebido como sujeito histórico-social, que interage com o processo ensino-aprendizagem, ampliando seus conhecimentos prévios, sendo o professor um dos mediadores deste processo. É o professor que mediante as orientações psicopedagógicas da instituição e junto aos demais membros da equipe pedagógica deverá organizar as situações a serem vivenciadas, respeitando as características evolutivas, as necessidades, os interesses dos alunos(as) e diversidade do grupo-classe, além de levar em consideração o tempo, o espaço e os materiais necessários para que a aprendizagem aconteça. As atividades propostas devem ter significado e servir para a formação do hábito de estudo, do desenvolvimento da autonomia, da sistematização, fixação e revisão de conteúdos relevantes, podendo apresentar em algumas situações caráter investigatório (Ibid., p. 10-11).

Observamos que o documento sinaliza modos de aprendizagem de maneira ampla, mas também nos remete à importância que deve ser dada à organização das situações e sua diversidade, considerando a evolução na construção dos conhecimentos dos alunos para que ocorra a aprendizagem (VERGNAUD, 1990), com momentos para sistematizar, fixar e revisar o que foi aprendido, sem desconsiderar o que os alunos já conhecem, a retomada dos conceitos (LARGUIER, 2009).

No currículo da Escola São Francisco, para a disciplina matemática, as grandezas e medidas estão discriminadas tanto para a educação infantil quanto para todo o ensino fundamental. A construção desse documento foi realizada numa reunião pedagógica com grupos de professores de uma mesma disciplina, a partir da listagem de conteúdos por eles trabalhados, como comentou a diretora-geral:

Pesquisadora – [...] Como você vê a matemática ao longo do ensino fundamental? E como é que você percebe a transição entre esses ciclos de aprendizagem, entre a educação infantil, os anos iniciais e os anos finais?

Dir.-geral – [...] Eu não encontrava um registro de em que momento a gente ia tratar cada assunto específico. Então, o que aconteceu é que a gente sentiu a necessidade em um desses começos de ano, em uma grande reunião a gente fez grupos de estudo por disciplina, considerando que quem ia coordenar cada grupo desses seria um especialista da área. [...] Ali tinha representante de todos os níveis e cada professor ia listar o que ele estava trabalhando, e eles tentaram listar isso: no maternal, o que estava trabalhando? No infantil I, infantil II, até o 9º ano.

Ao perguntarmos quando ocorreu essa demanda, a entrevistada complementou:

Dir.-geral – Isso faz muito tempo, logo que eu cheguei à direção. Porque eu comecei a perguntar: “Como é que vocês estão trabalhando? Como é que está? Como é, vocês têm uma lista de conteúdos que vão trabalhar em cada ano?”, e ninguém sabia me responder isso. Eu sempre fui professora do jardim de infância, então eu não tenho um domínio total do que se deva trabalhar, por exemplo, em matemática, em história, em cada classe. Não tenho. Mas eu tenho uma noção de como isso deve ser organizado. Então, eu juntei o grupo e o grupo trabalhou isso. E foi a partir dessa preocupação que eu levantei “quando é que vocês ensinam hora?”, e ninguém sabia quando é que se ensinava hora e ninguém estava ensinando hora. Vez por outra, isso surgia em algum grupo e alguém falava “eu dava hora”, mas isso não estava dentro da compreensão de tempo, de distribuição de tempo, que é importantíssimo para a pessoa se situar no mundo, não é?

O currículo surgiu da necessidade de uma pessoa pertencente à instituição Escola São Francisco compreender o histórico da organização curricular dessa instituição, o que evidencia uma gestão que está buscando refletir sobre, continuamente. A construção foi realizada a partir da relação que as pessoas pertencentes à instituição naquele momento tinham com os objetos de ensino, nos anos e nas etapas da escolaridade às quais elas estavam inseridas. Isso está refletido no título do documento “Levantamento do conteúdo Programático/2013”.

Nesse momento, analisar o processo de construção desse documento – a quais questões buscou responder, quais materiais foram utilizados como fundamentação (textos, documentos oficiais, pesquisas, entre outros), a partir de quais objetivos, gerais ou por níveis de ensino etc. – não é objeto da nossa pesquisa. No entanto, julgamos de extrema importância a construção curricular dentro de uma instituição escolar, por ser um elemento que compõe, no nível da Pedagogia, a relação das pessoas pertencentes à instituição com o saber.

Considerada a indicação do PPP, que, para atender à visão de educação proposta, a organização do currículo deve tomar como base o RCNEI (BRASIL, 1998b) e os PCN, trazemos uma análise da proposta curricular da Escola São Francisco, os PCN (BRASIL, 1997; 1998a) e o caderno de planejamento dos professores de matemática do 5º e do 6º anos, para estabelecer as comparações tanto horizontais quanto verticais, nos níveis do sistema didático: domínio, setor, tema e assunto, para os respectivos anos de ensino.

O currículo da Escola São Francisco apresenta uma organização disciplinar para todos os níveis de ensino. No entanto, algumas diferenças nessa organização são observadas, tanto entre disciplinas dentro de um mesmo nível de ensino quanto entre níveis de ensino para uma mesma disciplina, que não são justificadas.

Para a disciplina matemática na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental, os conteúdos estão distribuídos para cada um dos domínios grandezas e medidas, tratamento da informação, números e operações e espaço e forma. Em acordo com as recomendações do PCN (BRASIL, 1997) e do RCNEI (BRASIL, 1998b), o domínio das grandezas e medidas é o habitat dos objetos comprimento, para os dois níveis de ensino, e área apenas no 5º ano.

Nos anos iniciais do ensino fundamental, além de os conteúdos estarem organizados por domínios, são apresentados os indicadores de aprendizagem e os critérios de avaliação para cada um dos objetivos de aprendizagem, conforme apresentamos no quadro a seguir.

Quadro 13 - Setores comprimento e área do domínio das grandezas e medidas no currículo do 5º ano de matemática da Escola São Francisco

Bloco: Grandezas e Medidas		
Objetivos ou expectativas de aprendizagem:	Indicadores de aprendizagem e critérios de avaliação.	Conteúdos de aprendizagem:
	Com esse objetivo espera-se que o(a) aluno(a):	
1 – Trabalhar a grandeza comprimento e suas unidades de medida.	1.1 – Saiba a relação entre centímetro e milímetro.	1 – Grandeza Comprimento
6 – Trabalhar a grandeza área e suas unidades de medida.	6.1 – Saiba a unidade de medida metro quadrado e quilômetro quadrado, também hectare e alqueire.	6 – Grandeza Área
	6.2 – Faça multiplicação associada ao cálculo do número de ladrilhos em um piso retangular.	

Fonte: Adaptado do Currículo de Matemática da Escola São Francisco.

No currículo do 5º ano do ensino fundamental de matemática, dentre os setores pertencentes ao domínio das grandezas e medidas, estão comprimento e área. Dentro do setor comprimento, dois temas estão associados: a grandeza comprimento e as suas unidades de medida. No entanto, apenas um assunto, a relação entre centímetro e milímetro, é abordado, esse associado ao tema unidades de medida.

O setor área também está associado a dois temas, à grandeza área e às suas unidades de medida. Esse último, por sua vez, está associado a dois tipos de tarefa: um, que não fica claro no documento se a intenção é reconhecer unidades de medida de área usuais e/ou estabelecer relações entre unidades usuais de medida

de uma mesma grandeza; e o outro, T_{MA} – Medir a área de uma figura retangular, cuja técnica τ_{MA2} é a contagem da quantidade de ladrilhos inteiros da largura e do comprimento, e o elemento tecnológico central (θ), a multiplicação associada à configuração retangular.

O foco apresentado para o domínio das grandezas e medidas no currículo do 5º ano do EF da escola São Francisco é no quadro numérico, o que não contribui para a construção conceitual dos objetos comprimento e área enquanto grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Nenhuma relação é estabelecida entre área e perímetro. Esse objeto tem seu habitat no domínio da geometria no 4º ano do EF e surge enquanto tema – determinar a medida do perímetro de um polígono, dentro do setor polígonos e ângulos.

O fato de o PCN considerar uma construção conceitual contínua já caracteriza a necessidade do professor ter conhecimento do currículo, não apenas do ano de ensino no qual ele leciona, mas numa visão macro, do ano anterior e do posterior, inclusive com a compreensão dos tipos de tarefas sugeridas e dos temas, não apenas para o domínio das grandezas e medidas, mas a visão da disciplina matemática.

Antes de passarmos a observar a organização do LD de matemática adotado na Escola São Francisco, trazemos como acontece o processo de escolha desse recurso pela instituição, a partir das respostas das coordenadoras de ensino e dos professores entrevistados à pergunta: “Como acontece a escolha do livro didático pela escola?”, realizada pela pesquisadora no bloco sobre o trabalho pedagógico.

A coord. AI justificou a importância da coleção de livros adotados para uma determinada disciplina ter uma unidade na proposta pedagógica,

Coordenadora AI – A gente tomou a decisão de que o livro de matemática precisa ser um bloco só, do 2º ao 9º ano, por a gente pensar de que a ideia do que é a matemática precisa ser única na escola. [...] e a decisão de manter ou não o livro do ano anterior é dos professores. Mas com respaldo, por exemplo, da coordenadora AF, dos professores de matemática da escola.

A preocupação com a construção do conhecimento permeia a escolha realizada pela escola São Francisco, que parece ter sido motivada por uma proximidade entre a proposta pedagógica da escola e o LD.

Ainda segundo a coord. AI, a escola não adota LD no 1º ano dos anos iniciais, no 2º ano adota apenas o LD de matemática, no 3º ano matemática e língua portuguesa, e a partir do 4º ano entram os LD de história, geografia, ciência. Para as disciplinas que não possuem livro adotado do 1º ao 3º ano, as tarefas são produzidas pelos professores. Mais uma vez, a pressão externa no nível da Sociedade é visível diante da cobrança em se adotar um livro.

A coord. AF, ao responder a mesma pergunta, coloca um fator interno à instituição, também pertencente ao nível da Sociedade.

Coordenadora AF – A escolha no fundamental II é feita pelos professores. A partir do momento que eles escolhem eles me dizem e eu vou olhar os livros didáticos, mas sempre a escolha é do professor da disciplina.
[Pesquisadora – Mas todo ano vocês fazem isso?] Todo ano.
[Pesquisadora – Certo, é anual]. Agora tem também uma coisa que nós fazemos que, escolhido um livro, ele tem que funcionar durante dois anos por duas coisas: por questões financeiras para a família e porque também há um banco de livros, um banco de livros usados de um ano para o outro.

A preocupação com fatores sociais, com o investimento alto das famílias na aquisição dos livros, o cuidado e a reutilização desses materiais por mais de um ano letivo também é uma das condições internas consideradas pela instituição.

Os professores de matemática do 5º e 6º anos têm conhecimento do processo de escolha dos LD de matemática, que já era adotado pela escola São Francisco antes da entrada desses sujeitos na instituição.

Profa. 5ºs anos - Quando eu cheguei já era uma decisão tomada. Mas eu soube que foi uma decisão tomada para que ele fosse usado desde os anos iniciais até os finais. [...] outros professores da escola já participaram de ações com análises de livros didáticos e a escolha foi baseada principalmente pelos professores do ensino fundamental II que apoiaram esse autor e indicaram como sendo um autor interessante para trabalhar.

Diante das respostas dos entrevistados sobre o processo de escolha do LD na escola São Francisco, mesmo com a participação dos professores, essa parece ser um pouco mais diretiva, por considerar a análise dos professores dos anos finais do EF, os especialistas, assim como o respaldo da coord. AF, que tem a sua formação também em matemática. Isso reforça o conflito de paradigmas, visto que a escolha do tema acontece de maneira que a maioria se sinta representada, já que o tema é central e para toda a escola.

Por outro lado, a escolha de um LD e o uso desse em sala de aula aponta para um paradigma de visita das obras, mesmo que seja uma visita problematizada,

como é o caso das coleções de matemática adotadas, e apresentado no cap. 5 (item 6.1.1). Tem um olhar que é o dos autores das coleções de Matemática, que não é uma visita superficial, mas não é também deixar de visitar os assuntos que são tratados, o que mostra mais um conflito dentro das coleções, com as condições postas pelo nível da Sociedade, e interna à escola, com indicações que se aproximam do paradigma de visita das obras e de questionamento do mundo.

As diferenças entre o PCN (BRASIL, 1997), o currículo da Escola São Francisco e a proposta didático-pedagógica do LD mostram constrangimentos que limitam uma articulação entre os níveis de codeterminação Disciplina, Pedagogia e Escola. No nível Disciplina, nesse caso a matemática no 5º ano, o foco central está na medida e no aspecto numérico, apesar de o domínio ser grandezas e medidas nos três documentos. No entanto, apenas o PCN propõe um conjunto de tipos de tarefas mais amplo. A ausência de referência à relação entre área e perímetro pode ser constatada no currículo da escola São Francisco, outra limitação para a abordagem do conceito de área enquanto grandeza, como indicado por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Considerando o que está previsto no currículo da Escola São Francisco para a disciplina de matemática no 5º ano, e o que foi planejado para o ano escolar de 2016 conforme caderno de planejamento da profa. 5^{os} anos¹⁰⁰, observamos a coincidência da sequência das quatro unidades proposta pelo LD adotado, com os quatro bimestres no ano escolar: “I Unidade¹⁰¹ – Unidade 1 do livro; II Unidade – Unidade 2 do livro; III Unidade – Unidade 3 do livro; IV Unidade – Unidade 4 do livro”. Essa sequência caracteriza o LD adotado como definidor do currículo, ou, ao menos, da sequência dos conteúdos e em que momento serão abordados.

Os ajustes e as adaptações realizadas ao longo do ano estão sinalizados no caderno da profa. 5^{os} anos. Por exemplo, a I Unidade foi concluída com o capítulo 11 – “Paralelas e perpendiculares”, ficando os capítulos restantes da Unidade 1 do LD (12, 13 e 14) para a II unidade escolar. Segundo os registros no caderno da profa.

¹⁰⁰ O caderno de planejamento da profa. 5^{os} anos contém a relação com o nome dos alunos de cada turma, o contrato didático, o planejamento anual previsto de Ciências e Matemática, um calendário associado ao tema central “Casa comum, história de todos”, com os meses fevereiro, março e abril, e os temas a serem trabalhados por semana, seguido do planejamento por semestre e o registro das atividades realizadas diariamente em cada disciplina. O caderno foi disponibilizado pela professora e fotocopiado.

¹⁰¹ I Unidade – unidade referente ao I bimestre no calendário escolar.

5^{os} anos, o LD foi trabalhado conforme a sequência proposta pelos autores até o capítulo 36 – “Tangram e Matemática” –, da Unidade 3.

Embora não estivesse registrado no caderno de planejamento da profa. 5^{os} anos, na entrevista buscamos saber o que já tinha sido trabalhado sobre o domínio de grandezas e medidas com as turmas de 5^o ano.

Pesquisadora – O que já trabalhou relacionado a grandezas geométricas? E o que ainda pensa em trabalhar?

Profa. 5^{os} anos – Volume eu trabalhei muito pouco. Área e perímetro, a gente trabalhou, reforçou, eu acho que ficou melhor entendido agora. Mas volume foi muito pouco, a gente trabalhou com decímetro cúbico, metro cúbico, mas a gente trabalhou principalmente as unidades de medida, o que é que se usa para medir volume, e situações relacionadas com essas grandezas, foi área, perímetro, volume.

Registramos que o reforço sobre área e perímetro ao qual a professora se refere foi uma tarefa de casa solicitada no dia 18/11/2016 – a construção, no caderno, de um tangram com área igual a 144 cm^2 . Na aula seguinte, no dia 21/11/2016, a profa. 5^{os} anos verificou quem tinha realizado a tarefa, entregou a cada aluno uma régua graduada e solicitou que realizassem a medição de cada um dos lados de cada uma das figuras, para determinar o perímetro e a área de cada figura.

A profa. 5^{os} anos tinha conhecimento apenas que nossa intervenção seria sobre as grandezas geométricas, área e perímetro.

Ao final do ano letivo (19/12/2016), consultei novamente a profa. 5^{os} anos sobre o que tinha sido trabalhado, e ela informou que foram vistos ainda: na Unidade 3 do LD os capítulos 37 – “Conhecendo os milésimos” e o 38 – “Unidades de medida e seus milésimos”; e na Unidade 4 os capítulos 54 – “Retomando frações” –; e 55 – “Adição e subtração de frações”, como revisão, visto que alguns alunos estavam apresentando dificuldades e precisavam ter esses conceitos consolidados no 6^o ano.

É importante salientar que o planejamento da profa. 5^{os} anos foi ajustado de acordo com a visão dela sobre as necessidades dos alunos, para a retomada de conceitos que considera necessários na chegada do 6^o ano.

Podemos perceber aqui uma exigência no nível da Sociedade que pesa sobre as escolhas didáticas do professor, no nível da Pedagogia, enquanto revisões necessárias para que os alunos criem condições de utilizar determinadas técnicas, associadas, nesse caso, ao domínio dos números e operações, para o ano seguinte.

No nível da Pedagogia, a profa. 5^{os} anos observou a necessidade de realizar a retomada de alguns conceitos enquanto revisões sistemáticas (LARGUIER, 2009), o que caracteriza uma visão do currículo prescrito, mas um desconhecimento do currículo real, talvez pela ausência de momentos de interação com os professores de matemática, em particular, o professor dos 6^{os} anos.

Ainda na entrevista, perguntamos sobre o Currículo de Matemática da Escola São Francisco.

Pesquisadora – Você conhece o Currículo, a Proposta e/ou os materiais didáticos utilizados pelos outros segmentos da escola: a educação infantil, os anos iniciais e os anos finais?

Profa. 5^{os} anos – Nas reuniões que a gente tem, na maioria das vezes, são reuniões conjuntas, em que participam os três segmentos juntos. Nessas reuniões, a gente tem uma ideia do que se faz também nos outros segmentos. Mas, por exemplo, recursos que eles utilizam, eu não sei bem do dia a dia deles em sala de aula. Eu sei dos eventos, que são quando a gente se reúne, dos três segmentos para planejar eventos da escola... Mas não é assim nada específico, que eu saiba o que está acontecendo na sala de cada um. Isso realmente eu não sei.

A profa. 5^{os} anos traz à tona os momentos das reuniões com todos os segmentos da escola para discussão sobre os eventos, esses, por sua vez, associados aos temas enquanto uma discussão específica do pedagógico. A escola São Francisco propicia momentos que são próximos do ideal possível, com investimento na formação docente, respeitando o profissional com remuneração por esses horários, mas algumas questões do didático ficam em aberto, sem serem objeto de discussão.

Registramos que, quando os professores de matemática do 5^o e 6^o anos chegaram à Escola São Francisco, as coleções de LD de matemática já tinham sido escolhidas. E, apesar de considerar buscar como os conteúdos são construídos nos livros dos anos iniciais, o prof. 6^{os} anos não conhece a coleção.

Pesquisadora – [...] você conhece o currículo, as propostas, os materiais didáticos que são usados nos outros segmentos? No caso, a educação infantil e nos anos iniciais, já que você é professor dos anos finais?

Prof. 6^{os} anos – Veja, não. Fica, apesar de acontecer reuniões com todo grupo, eu não tenho acesso – não é que eu não tenha acesso, até já solicitei, com os livros que são trabalhados nos anos iniciais para que a gente tenha uma linha a seguir, e para observar inclusive como o conteúdo foi construído nos anos anteriores. Mas aí, como é um material didático que nunca modificou, então não teve nenhum problema, não.

Entendemos ser esse um outro ponto da transição entre os anos iniciais e os anos finais do EF que precisa ser pensado pelas instituições escolares. A associação entre o PPP e a construção de um currículo da escola para a posterior escolha do LD, com a participação e discussão de todos os professores dos dois níveis de ensino. Diante da fala do prof. 6^{os} anos constatamos que, mesmo com três anos de escola São Francisco e participando de diversas reuniões com pessoas pertencentes aos outros níveis de ensino, ainda não conhece a coleção dos anos iniciais adotada. Esse é um impedimento nos níveis da Escola e da Pedagogia, inclusive considerando a rotatividade de professores, como citado pela dir. adjunta da escola.

No currículo de matemática na Escola São Francisco dos anos finais do EF, para cada domínio são apresentados os objetivos e conteúdos e, no caso do 6º e 8º anos, esses estão divididos nas quatro unidades. No documento referente ao 6º ano, constam apenas os conteúdos, separados por domínio, para cada uma das unidades, conforme apresentamos a seguir.

Quadro 14 – Domínio medidas no levantamento do conteúdo programático / 2013 - Disciplina: MATEMÁTICA do 6º ano da Escola São Francisco

Objetivos	Conteúdos
I UNIDADE	
	Medidas • Uso informal de unidades de medidas de comprimento; • Números e unidades equivalentes contidas em uma figura plana; • Comparação de grandezas (comprimento, área, massa); Introdução ao cálculo de perímetro, de área, de volume e de massa.
II UNIDADE	
	Medidas • A relação de grandeza entre o milímetro e o centímetro.
III UNIDADE	
	Medidas • Números de quadrados unitários e suas relações com a área do quadrado e do retângulo.
IV UNIDADE	
	Medidas • Palmo, passo e polegada; instrumentos de medida; perímetros de polígonos; estimativas.

Fonte: Adaptado do Currículo de Matemática da escola São Francisco.

Observamos que, para os anos finais do EF, foram considerados relevantes os conteúdos divididos para as quatro unidades e os objetivos, apesar de esses não

estarem discriminados. A estrutura curricular de todo o EF se aproxima da divisão proposta no manual do professor do LD adotado na Escola São Francisco.

Em entrevista com o prof. 6^{os} anos, constatamos que, mesmo pertencendo à mesma instituição escolar, existe uma condição não modificável na transição entre os níveis de ensino, quando esse afirmou desconhecer o programa curricular trabalhado no 5º ano, a coleção de LD dos anos iniciais, e não ter nenhum registro do desenvolvimento cognitivo dos alunos na disciplina de matemática. Os elementos norteadores do prof. 6^{os} anos são o PCN, a proposta curricular do 6º ano e a coleção adotada pela escola para os anos finais do EF.

Ao final do ano letivo de 2017, consultamos o prof. 6^{os} anos para saber quais os conteúdos que tinham sido trabalhados, e percebemos que foi mantida praticamente a sequência do LD, deixando de ser trabalho o cap. 7 – “Construções geométricas” (este foi “pulado”); cap. 12 – “Simetria”; cap.13 – “Generalizações”; e cap. 14 – “Adição e subtração de frações”. E o prof. 6^{os} anos justifica:

Prof. 6^{os} anos – O andamento dos trabalhos faz com que priorizemos alguns conteúdos, devido ao tempo para trabalharmos as unidades. Algumas datas comemorativas, semanas e mostras realizadas durante o ano letivo não permitem que concluamos todo o planejamento.

Entendemos que as organizações curriculares prescritas nos documentos oficiais, no nível da Sociedade, e as organizações curriculares prescritas pela Escola São Francisco no nível da Escola são transpostas para a sala de aula tanto do 5º ano quanto do 6º ano, mas sofrem efeitos da transposição interna. O desenvolvimento curricular real na sala de aula do 5º ano e do 6º anos aparece no nível da disciplina, tendo por base o currículo prescrito no LD utilizado.

Observamos também a interferência dos outros níveis como a Pedagogia, quando o prof. 6^{os} anos afirma que outras atividades programadas da Escola São Francisco interferem no planejamento da sua disciplina. Essa dinâmica faz parte da organização escolar e mostra a importância de os professores se perceberem enquanto pessoas pertencentes à instituição escolar, pertencentes aos demais níveis, além da sua disciplina. É mais uma indicação do conflito de paradigmas existente entre a pressão externa no nível da Sociedade, com os temas que poderiam levar a um estudo ancorado no paradigma de questionamento do mundo.

Diante das entrevistas, consideramos existir, por um lado, diferenças entre os níveis de ensino uma ausência de articulação entre o currículo de matemática

proposto pela escola e o planejamento de matemática do 5º ano, e uma aproximação deste com o livro didático.

7.5 SÍNTESE DO TERCEIRO ESTUDO

Como já foi dito, o estudo 3 visou buscar elementos de resposta à seguinte questão:

- a) Que fatores de natureza pedagógica e didática ajudam a compreender as raízes das dificuldades observadas na aprendizagem e no ensino de área e perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos do EF?

Diante da análise comparativa dos níveis de ensino, em particular 5º e 6º anos do EF, observamos que as raízes das dificuldades na aprendizagem e no ensino de área e perímetro na transição entre esses dois anos de ensino não estão restritas às relações professor-saber área e perímetro, professor-aluno, aluno-saber área e perímetro.

A interferência dos níveis da escala de codeterminação revela fatores de natureza pedagógica desde o seu nível macro de organização como os documentos oficiais no nível da Sociedade, quando sinalizam a preocupação com a transição entre os níveis de ensino a exemplo da DCNEB (BRASIL, 2013), mas, ao mesmo tempo, as determinações e exigências diferem para as instituições escolares a depender da rede de ensino, como comentamos no início deste capítulo, a exemplo da construção dos currículos.

No momento em que uma instituição escolar constrói o seu currículo com seus princípios norteadores, esses baseados no projeto da instituição, novas exigências são colocadas, na passagem de um documento de referência geral e distante da escola para um documento dinâmico a partir da sua concretização pela instituição escolar. A definição das disciplinas e suas conexões, assim como uma grade de horário de aulas que favoreça intervalos de estudo e reflexão, são alguns elementos que perpassam os demais níveis da escala e provocam desdobramentos concretos na transição entre níveis de ensino.

A Escola São Francisco é um exemplo de instituição escolar com uma dinâmica curricular na qual há várias escolhas que favorecem as conexões e os

momentos de estudo e reflexão oportunizados para a comunidade escolar com as diversas reuniões realizadas. No entanto, dentro dessa dinâmica, a transição entre os níveis de ensino, em particular do 5º para o 6º anos do EF, revela a existência de condições pedagógicas favoráveis, como a reunião de passagem de turmas e, ao mesmo tempo, condições não modificáveis, quando no momento da nossa observação a predominância da discussão esteve centrada nos aspectos atitudinais.

A ausência de um detalhamento de questões relativas às aprendizagens dos alunos na reunião de passagem, sinalizada nos capítulos anteriores, funciona como uma condição não modificável no nível didático.

Outra condição favorável são os momentos de trabalho com os temas, com organização de atividades com a participação de alunos de diferentes níveis de ensino, mas que se torna por vezes uma condição não modificável para os professores quanto ao cumprimento dos seus planejamentos.

Outros elementos que demonstram a preocupação da instituição com a transição estão presentes nas entrevistas realizadas, como o depoimento da diretora-geral sobre a importância de construir um relatório de passagem das turmas. Esse seria um primeiro documento de memória didática da turma que pode trazer informações da história escolar dos alunos e contribuir com elementos que interfiram também no aspecto didático das disciplinas.

Nossa análise comparativa da transição entre o 5º e o 6º anos a partir dos objetos área e perímetro trouxe elementos que nos ajudam a perceber a importância de uma visão mais ampla do processo de ensino e da aprendizagem. A necessidade de um olhar macro, para a compreensão no nível da Sociedade, do sistema de ensino no qual a instituição escolar está inserida e as suas interdependências com os diferentes níveis e, ao mesmo tempo, um olhar micro, que se volta para compreender os diferentes fatores, sejam eles de natureza pedagógica ou didática, que interferem na sala de aula, no momento do ensino de conceitos como área e perímetro.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E ENCAMINHAMENTOS

O objetivo geral da nossa pesquisa – *investigar possíveis relações entre as dificuldades conceituais de aprendizagem enfrentadas por alunos do 6º ano sobre área e perímetro e fatores de naturezas diversas em jogo, na transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental* – emergiu das seguintes questões iniciais:

- a) Quais as dificuldades conceituais enfrentadas pelos alunos ao resolver situações relativas à área e ao perímetro na transição entre o 5º e o 6º anos do ensino fundamental?
- b) Que elementos ajudam a compreender as possíveis raízes dessas dificuldades?

8.1 OS ESTUDOS REALIZADOS

A revisão de literatura e o marco teórico adotado na pesquisa, ancorado na complementaridade entre a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) e a teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999), levaram a esboçar um modelo epistemológico de referência, no qual o perímetro e a área são considerados como grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

As questões deram origem a três estudos que foram realizados na Escola São Francisco, da Rede Privada, sem fins lucrativos, localizada no Recife, durante o período de 2016 a 2018, com duas turmas de alunos que no ano de 2016 cursavam o 5º ano dos anos iniciais, em 2017 o 6º ano e em 2018, o 7º ano. A escolha dessa Escola justifica-se por dois critérios que estabelecemos em relação aos objetos de estudo:

- a) a escola deveria ofertar o ensino fundamental completo, inclusive no mesmo espaço geográfico, para poder observar elementos relativos à transição entre o 5º e o 6º anos numa mesma instituição escolar;
- b) os livros didáticos adotados no ensino fundamental deveriam ser do(s) mesmo(s) autor(res), na busca de otimizar a continuidade da proposta pedagógica das obras, para análise da retomada dos conceitos de área e perímetro do 1º ao 6º ano.

Vale ressaltar que os estudos se entrelaçam tanto na cronologia como na busca dos fatores que potencialmente nos ajudam a compreender o processo de

transição entre o 5º e o 6º anos nas suas múltiplas dimensões, instanciado no estudo dos objetos área e perímetro.

O primeiro estudo visou buscar elementos de resposta às questões:

- a) Que conhecimentos os participantes da pesquisa mobilizam na resolução de tarefas relativas à área e ao perímetro?
- b) Os participantes da pesquisa apresentam dificuldades em relação à área e ao perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos? Em caso afirmativo, quais são essas dificuldades?
- c) Que fatores de natureza epistemológica e cognitiva ajudam a compreender as raízes dessas dificuldades?

Baseado nas reflexões realizadas no capítulo 2 sobre as grandezas geométricas e nos elementos teóricos, elaboramos os instrumentos do primeiro estudo: uma sondagem, aplicada ao final do 5º ano, e um pós-teste. Esse estudo visou identificar e analisar, sob a ótica da TCC, os invariantes operatórios corretos e errôneos e as representações mobilizados pelos alunos ao resolverem situações que dão sentido à área e ao perímetro. Buscamos também observar as dificuldades conceituais enfrentadas por eles ao final do 6º ano. Uma complementação da sondagem foi realizada com a entrevista de alguns alunos para esclarecimento de respostas dadas. Cada aluno recebeu uma pasta com recursos (barbante, papel decalque, malha quadriculada e malha triangular) para a realização das atividades.

Para efeito de análise da sondagem e do pós-teste na transição dos anos iniciais para os anos finais do EF, foram considerados apenas os 22 alunos que estavam matriculados na escola São Francisco desde o 5º ano até o início do 7º ano. Outros alunos que entraram ou saíram da escola durante esse processo participaram da nossa coleta, mas suas produções não foram consideradas nas nossas análises.

Ao analisarmos os conhecimentos mobilizados pelos alunos na sondagem, ao final do ano letivo de 2016, e no pós-teste, no início do ano letivo de 2018, algumas dificuldades conceituais permaneceram e foram percebidas a partir dos invariantes operatórios errôneos mobilizados.

A instabilidade entre os conceitos de área e perímetro diante da predominância do cálculo relacional associado ao conceito do perímetro permaneceu e, mesmo aqueles alunos que mobilizavam a fórmula para o cálculo da

área de um retângulo, organizavam suas ações em função da existência de uma figura retangular, ao associar comprimentos de maneira inadequada.

A fragilidade conceitual dos alunos ao mobilizarem o conceito de perímetro em situações de comparação de áreas e perímetros com figuras não poligonais sem unidade de medida (MELO, 2003; FERREIRA, 2010) pode ser reflexo da ausência desse tipo de situação tanto nos LD quanto nas aulas observadas, como verificado na nossa análise no capítulo 6.

Os alunos apresentaram uma maior familiaridade com as situações que envolviam as malhas quadriculadas do que com as malhas triangulares, o que foi confirmado com as análises dos LD e as observações de aulas, espaços em que há predominância desse recurso.

A dificuldade em recobrir uma superfície quadrada com uma superfície unitária diferente de quadrado permanece, e de maneira mais acentuada diante do formato da unidade de medida considerada, por envolver conceitos como composição e decomposição de figuras, rotação, translação e simetria de figuras planas. Mesmo com o uso da malha quadriculada, a dificuldade em lidar com unidades que não sejam representadas por quadradinhos, com procedimentos de decomposição de figuras, permaneceu desde o 5º ano.

A predominância do quadro numérico, mesmo em situações nas quais esse quadro estava ausente, mostrou a necessidade de superação das concepções geométrica e numérica, questão importante para o ensino e a aprendizagem das grandezas (BARBOSA, 2002; BARROS, 2006; SILVA, J.V., 2011; BELLEMAIN, 2013).

O segundo estudo consistiu na análise dos livros didáticos de matemática adotados na Escola São Francisco, do 1º ao 6º ano do ensino fundamental e das observações de aulas nas turmas dos 5^{os} anos (2016) e 6^{os} anos (2017) sobre os objetos de estudo área e perímetro.

A análise dos livros didáticos foi realizada não apenas nos capítulos dedicados ao estudo dos objetos área e perímetro, mas ao longo de todos os seis volumes, para observarmos, com base em elementos do filtro das grandezas, como eles se apresentavam, quais praxeologias estavam presentes, quais as retomadas que eram realizadas e quais conexões existiam desses objetos com outros da matemática e de outras disciplinas.

As observações das aulas para caracterização e acompanhamento das turmas de 5º e 6º anos foram do tipo naturalistas (ESTRELA, 1986), tendo em vista o nosso papel de pesquisadora que apenas observou, procurando não interferir no ambiente e no planejamento dos professores. Isso nos possibilitou realizar comparações entre o que foi realizado no 6º ano e o que poderia ter sido realizado, diante de elementos da transição do 5º para o 6º anos do ensino fundamental.

Esse estudo visou buscar elementos de resposta para as seguintes questões:

- a) Que praxeologias são preconizadas e/ou ensinadas em relação aos objetos área e ao perímetro do 1º ao 6º ano do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- b) Qual a razão de ser, os nichos e habitat desses objetos do 1º ao 6º ano do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- c) Que filiações e rupturas podem ser observadas entre o modo como os objetos são abordados do 1º ao 6º ano do EF?
- d) De que maneira são conduzidas as retomadas desses objetos do 1º ao 6º anos do EF, e mais especificamente na transição entre o 5º e o 6º anos?
- e) Que aproximações e distanciamentos são observados entre o modelo epistemológico dominante, evidenciado nas análises do saber a ser ensinado e do saber ensinado sobre área e perímetro, e esboço de modelo epistemológico de referência adotado nessa pesquisa, que norteou a elaboração da sondagem e do pós-teste?
- f) Que fatores de natureza didática (*stricto sensu*) ajudam a compreender as raízes das dificuldades dos alunos em relação à área e ao perímetro, na transição entre 5º e 6º anos do EF?

Na coleção dos anos iniciais, o domínio das grandezas e medidas tem associado a ele o setor medida de comprimento e o setor área, enquanto, para os anos finais, o domínio medidas está associado aos setores medida de comprimento e medida de área. Essas escolhas indicam uma predominância da medida, o que, diante dos indicativos das pesquisas referenciadas anteriormente (FERREIRA, 2010; SILVA, J.V., 2016, entre outras), pode ser prejudicial para a construção e compreensão dos objetos do saber perímetro e área. A hierarquia dos níveis leva os autores a escolhas que indicam um desequilíbrio, ao considerar o objeto perímetro pertencente a um nível diferente dos objetos comprimento e área.

A dinâmica interdomínios é mais intensa nos livros dos anos iniciais do ensino fundamental, enquanto que uma dinâmica intradomínios das medidas é mais pronunciada no livro do 6º ano. Essa dinâmica interdomínios junto à ênfase dada às medidas, com a utilização frequente de unidades de medidas, demonstra uma matemática associada à realidade, que é a razão de ser escolar, não é a razão de ser epistemológica.

A abordagem do conceito de perímetro mostra avanços nos LD analisados, em comparação com aqueles do início dos anos 2000 analisados por Barbosa (2002), ao apresentarem o perímetro enquanto o comprimento do contorno no LD do 4º ano (IMENES; LELLIS; MILANI, 2015d, p.120), como apresentado no capítulo 6 (item 6.1.3.1) e no LD do 6º ano (IMENES; LELLIS, 2010, p. 93) (

Figura 130). No entanto, com relação à área enquanto grandeza, essa ainda é bastante reduzida diante do que as pesquisas já sinalizam há mais de 20 anos.

Quanto às tarefas propostas, há concentração em situações de medição e com figuras na sua maioria poligonais, com ênfase em quadrados e retângulos, como observado por Barros (2006), Ferreira (2010) e José Valério Silva (2016). O mesmo pode ser verificado a partir da análise dos cadernos dos alunos, tanto do 5º quanto do 6º anos, e nas atividades propostas em sala pelos professores das respectivas turmas, para o ensino dos objetos em questão, com uma maior ênfase no trabalho com figuras poligonais.

Constatamos uma predominância de tarefas associadas às medidas, tanto nos LD quanto nas aulas observadas. Mesmo para as tarefas do tipo comparar áreas e perímetros, essas eram frequentemente resolvidas por técnicas nas quais o aspecto numérico era central.

A coleção dos anos iniciais analisada propõe um trabalho diferenciado com os objetos perímetro e área com o uso de recursos diversificados, o que não acontece no livro do 6º ano, com a predominância da malha quadriculada, e confirma a limitação dos recursos ofertados (SANTANA, 2006). Esses são pontos que podem ser sanados sem grandes dificuldades, tanto pelos autores de LD quanto pelos professores, com a proposição de tarefas que articulem os três quadros (geométrico, numérico e das grandezas), tomando como possibilidade a nossa proposta de modelo epistemológico de referência para os objetos área e perímetro.

Um trabalho articulado entre o modelo de referência e as possíveis retomadas ao longo dos anos de ensino da grandeza área pode ser efetivado a partir de

situações de comparações sem unidade de medida, passando para o cálculo de área associada à malha quadriculada para a sua ampliação com a introdução da fórmula da área de regiões retangulares e quadradas, e o cálculo de áreas de regiões poligonais a partir do uso de técnicas como a decomposição de figuras e o uso de fórmulas.

Nossas análises mostram que a técnica de decomposição e composição de figuras não é suficientemente explorada, inclusive nos anos iniciais, dentro do domínio das grandezas e medidas. De acordo com o nosso modelo epistemológico de referência, esse procedimento contribui para a articulação entre os quadros e a compreensão da área e do comprimento como grandezas.

O terceiro estudo teve por base os níveis da escala de codeterminação (CHEVALLARD, 2002) e o modelo proposto por Artigue e Winslow (2010) para situar os contextos das comparações realizadas e suas articulações adaptados para a transição entre o 5º e o 6º anos do ensino fundamental. O material utilizado foi composto de documentos oficiais nacionais (LDBEN, DCNEB, PCN, RCNEI) com o foco no ensino fundamental, documentos da instituição Escola São Francisco (PPP, organograma, proposta curricular, planejamentos dos professores) e documentos produzidos pela pesquisadora para compor outra parte empírica da pesquisa, as entrevistas com alguns participantes da referida instituição (diretoras, coordenadoras e professores de matemática) e atores nos níveis de ensino anos iniciais e anos finais do ensino fundamental.

Esse estudo visou buscar elementos de resposta para a seguinte questão:

- a) Que fatores de natureza pedagógica e didática ajudam a compreender as raízes das dificuldades observadas na aprendizagem e no ensino de área e perímetro, na transição entre o 5º e o 6º anos do EF?

A comparação entre as instituições 5º ano e 6º anos da Escola São Francisco com base nos níveis de codeterminação nos levou a observar que, mesmo pertencendo a uma mesma instituição escolar, existem interferências diretas na transição entre níveis de ensino.

O nível Sociedade interfere diretamente no nível Escola, com a definição de documentos reguladores para as instituições escolares, o que nos mostrou a necessidade de uma maior articulação entre os componentes desses níveis, como pesquisadores, diretores, professores, e as instituições, universidades, secretarias de educação e escolas, para redução do distanciamento assim como constatado por

Zacarias (2016). A discussão sobre o problema da transição entre níveis de ensino precisa passar a existir nas redes de ensino e deve ser ampliada com as diferentes redes, com o intuito de propor ações políticas e pedagógicas conjuntas.

No nível da Pedagogia, a existência de uma reunião de passagem de turmas, entre os professores do 5º e os professores do 6º ano na escola São Francisco, revela uma intenção de reduzir as diferenças entre os níveis de ensino. No entanto, a predominância da discussão ficou centrada nos aspectos atitudinais sem uma maior análise sobre os aspectos conceituais ensinados, os aprendidos e aqueles que precisariam ser retomados.

A construção da história do que foi vivenciado pelos alunos do 5º ano e do currículo realizado pode contribuir para a continuidade do que deve ser retomado e acrescentado enquanto objeto de estudo, tanto para a coordenação de ensino quanto para o professor do 6º ano. Algumas ações da coordenadora dos anos iniciais, como a solicitação de um relatório do que foi ensinado ao final de cada ano letivo, caracterizam a percepção da necessidade em dirimir as lacunas causadas pela transição, a intenção da construção de uma memória do sistema didático, como afirmado por Brousseau e Centeño (1991), e a possibilidade de sair da posição de amnésia institucional, segundo Chevallard (1989).

A transição é um problema institucional, no sentido de que a instituição tem responsabilidade sobre a transição entre os anos de ensino, e principalmente entre diferentes níveis de ensino. Com relação à construção dos currículos, no nível da Pedagogia, saber quando um assunto foi ensinado ou quando está sendo ensinado não é suficiente. É preciso saber também como um assunto está sendo ensinado, e associado a que conceitos, o que remete à dimensão de Vergnaud (1990) de campo conceitual. Não podemos ter um conceito ensinado no 5º ano, por exemplo, sem saber o que está sendo trabalhado no entorno dele. Da mesma forma, a transição rebate para o professor enquanto um problema da profissão, como sinaliza Larguier (2009).

Os currículos não são conhecidos pelos professores e a visão de continuidade fica reduzida ao currículo prescrito, seguido enquanto uma sequência de conteúdos sem uma visão mais local ou regional das praxeologias propostas. No caso dos objetos matemáticos em foco na pesquisa, observamos pouca articulação entre os quadros das grandezas, o numérico e o geométrico, fundamental para a

compreensão dos conceitos de comprimento e área como grandezas, segundo o modelo de Douady e Perrin-Glorian (1989).

As retomadas ou revisões sistemáticas são realizadas tomando como referência o que o professor já conhece da sua experiência para esse ano de ensino, ou pelo que é sinalizado nos LD. Entendemos que esse papel também cabe à instituição enquanto coordenação, de garantir um meio de informar a esse professor, seja através de reuniões pedagógicas, seja por um parecer, mas também a partir de outros meios no nível da Pedagogia.

A metodologia utilizada, com diversos instrumentos, possibilitou-nos uma análise mais ampla e, ao mesmo tempo, complementar, das instituições 5º ano e 6º anos do EF. Isso contribuiu para a compreensão de como ocorre a transição entre esses níveis de ensino e, em particular, sobre os objetos perímetro e área, o que permitiu dar sustentação à tese aqui defendida: fatores interligados de natureza epistemológica, cognitiva, didática e pedagógica relativos à transição entre a primeira e a segunda etapa do ensino fundamental e aos objetos de saber área e perímetro influenciam o modo como os alunos do 6º ano lidam com esses objetos.

Podemos perceber que o processo de transição entre níveis de ensino não se restringe apenas a um desses fatores, nem a um aluno específico. É um problema das instituições e que deve ser pensado nos diversos níveis da escala de codeterminação, por diferentes instituições de ensino, de modo a contribuir para uma melhoria no ensino e na aprendizagem não apenas no nível micro dos objetos área e perímetro, mas que se aplica a qualquer objeto de estudo dentro de uma instituição escolar.

A Escola São Francisco já demonstra em algumas ações a preocupação com o processo de transição entre os níveis de ensino, ao propor reuniões nas diferentes esferas, a exemplo das reuniões de estudo enquanto uma condição para a formação docente e, da mesma forma, sinalizam a importância de buscar melhorar esse processo, minimizando as distâncias entre o 5º e o 6º anos.

A complementaridade entre a teoria dos campos conceituais, com o olhar do sujeito epistemológico e cognitivo, e a teoria antropológica do didático, com o olhar do sujeito didático, possibilitou a composição da visibilidade do estado de conhecimento desses alunos na transição entre os níveis de ensino, em conjunto com os diversos fatores que permeiam a instituição escolar.

8.2 CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES DA PESQUISA

O paradigma de questionamento do mundo parece estar ausente num nível micro como o paradigma de visita às obras, diante da condição da nossa pesquisa. Nas aulas observadas nos parece que o paradigma que rege o estudo de área e perímetro é o da visita às obras.

Já a proposta da Escola São Francisco de trabalhar com temas transversais aos conteúdos e às disciplinas, temas relevantes da realidade social na qual a escola está inserida parece apontar para um paradigma mais próximo do questionamento do mundo, no qual questões da sociedade são problematizadas e estudadas, sem a limitação de disciplinas.

Os estudos realizados na nossa pesquisa não se debruçaram sobre o projeto em andamento e portanto não foi estudado o modo de vida de objetos de saber (incluindo perímetro e área) nos projetos, o que constitui uma limitação da pesquisa passível de ser investigada em pesquisas posteriores.

Diante da demanda de atividades programadas da escola São Francisco, bem como do cronograma de avaliação e recuperação final, não foi possível realizarmos o pós-teste ao final de 2017, o que aconteceu no início do ano letivo de 2018, com as turmas cursando os 7º anos. Essa também foi mais uma condição não modificável, no nível da Pedagogia, da nossa pesquisa. A dinâmica escolar extrapola a dimensão cartesiana dos planejamentos, revelando esses apenas como guias para as ações desenvolvidas, como pode ser observado no período da nossa observação.

8.3 POSSIBILIDADES DE RETOMADAS E ENCAMINHAMENTOS

Enquanto professora de uma escola da rede pública federal de ensino vinculada a uma universidade, que tem como um dos seus primeiros objetivos a formação inicial com o atendimento aos estagiários, e também enquanto membro do grupo de pesquisas Pró-grandezas: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, temos a responsabilidade de ampliar a divulgação das pesquisas realizadas, e de elementos sinalizados que já poderiam ter sido incorporados na prática docente por meio de formações continuadas.

Nesta pesquisa, a variedade de instrumentos utilizados, o volume e a complementaridade dos dados coletados na pesquisa oportunizam aos estagiários e professores em geral um olhar mais amplo e diversificado para a compreensão do processo de transição entre níveis de ensino, das situações de ensino propostas sobre os conceitos de área e perímetro, assim como as retomadas que são realizadas.

Para o ensino de tais conceitos, entendemos ser fundamental que o professor tome para si questões como: quais as situações que os alunos já conhecem, as tarefas que precisam ser oportunizadas, as retomadas propostas nos programas e nos livros didáticos adotados e os critérios de escolha desses objetos no currículo. Por exemplo, em que momento a decomposição de figuras deve ser objeto de estudo associada à invariância das áreas? As possíveis respostas a essas questões podem garantir ao professor um primeiro panorama dos saberes de referência que compõem o currículo, e dos saberes a ensinar, que compõem o programa da disciplina, para um determinado ano de ensino.

O conhecimento dos programas oficiais, da sua organização global entre os níveis de ensino anos iniciais e anos finais do EF se faz necessário, a fim de que se construa uma visão geral do programa de ensino e, ao mesmo tempo, uma visão específica para um objeto do saber em particular, de como ele pode ser visto na sua continuidade. Essa é uma dificuldade concreta, principalmente para os professores dos anos finais, no nível da Disciplina, que sofrem pressões dos níveis da Escola e da Pedagogia.

Entendemos ser premente que as instituições criem condições de diálogos intra-institucional e inter-institucional, o que contribuirá com a transição entre os níveis de ensino e, em particular, para a prática social do ensino da matemática.

Uma outra interferência no nível da Pedagogia acontece com a entrada da BNCC, a partir do ano de 2019, como documento oficial obrigatório nas escolas brasileiras, que nos coloca numa posição de continuidade da nossa pesquisa. Pretendemos continuar nossos estudos tanto sobre transição entre níveis de ensino e objetos do domínio das grandezas e medidas quanto sobre relação desse novo documento com os PCN (mudanças realizadas e avanços observados).

A oportunidade de realizar pesquisas numa escola da rede privada também abre a possibilidade de novos estudos em instituições de diferentes redes de ensino e análises comparativas advindas.

Diante do quantitativo de dados obtidos nos nossos estudos, diversas pesquisas podem ser desenvolvidas, como a análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos que entraram na escola São Francisco no 6º ano em 2017, o que caracteriza um outro tipo de transição, entre macroinstituições, a saber duas escolas diferentes. O mesmo ocorre com os alunos que entraram na Escola São Francisco no ano de 2018 e realizaram o pós-teste.

Sinalizamos finalmente que cada escola, mesmo parte integrante de um sistema educacional numa determinada Sociedade, tem suas características, sua dinâmica própria, por ser formada por pessoas, seres humanos. Mas todas as escolas comungam de um objetivo maior, a formação do indivíduo, motivo pelo qual precisamos cuidar das transições pelas quais esse indivíduo enquanto sujeito da instituição escolar passa.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, BELLEMAIN, BERTHOLINI SOBRINHO et al. **Concepção e experimentação de sequências didáticas na formação do professor de matemática**. 2001. (Relatório de pesquisa).
- ANWANDTER-CUELLAR, N. **Place et rôle des grandeurs dans la constrution des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France**. 2012. 511 f. Thèse de doctorat HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) – Université Montpellier 2, Montpellier, 2012.
- ARTIGUE, M; WINSLOW, C. International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. In: **Recherches en Didactique de Mathématiques**, Grenoble, Éditions La Pensée sauvage, v. 31, n. 1, p. 47-82, 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/260451302_International_comparative_studies_on_mathematics_education_a_viewpoint_from_the_anthropological_theory_of_didactics>. Acesso em: 17 maio 2018.
- ATAS DO EMF 2015 Disponível em: <http://emf.unige.ch/index.php/emf-2015/projet-special-3/>>. Acesso em : 9 fev. 2017.
- BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. 358 f. Thèse de doctorat (Doctorat en Didactique des Mahtématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.
- BARBOSA, P. R. **Efeitos de Visualização em Atividades de Comparação de Comprimentos de Linhas Abertas**. 2007. 316 f. Tese (Doutorado em Educação) – UFPE, Recife, Pernambuco, 2007.
- _____. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental**. 2002. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, Pernambuco, 2002.
- BARROS, J. S. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. 2002. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, Pernambuco, 2002.
- BARROS, A. L. de S. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. 2006. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, Pernambuco, 2006.
- BELLEMAIN, P. M. B. **Análise comparativa da relação institucional às grandezas geométricas no ensino fundamental, no Brasil e na França. Relatório das atividades desenvolvidas no âmbito do projeto de estágio pós-doutoral no exterior financiado pelo CNPq**. Recife, 2013.

_____. Estudo de situação relativa ao conceito de área. In: Encontro de didática e prática de ensino, 10, 2000, Rio de Janeiro – RJ. **Anais**, 2000.

BELLEMAIN, P. M. B.; BRONNER, A.; LARGUIER, M. Análise comparativa da relação institucional à grandeza área no 6º ano no Brasil e na França. In: TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs.). **Investigações em didática da Matemática**. Recife-PE: Editora da UFPE, 2017, v. 1. p. 10-63.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental e médio**. Natal. SBHMat, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B.; FERREIRA, L. F. D.; SILVA, A. D. P. R.; Engenharia didática e engenharia de formação. Oficina 3B. **I LADIMA** – I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Bonito, MS, Brasil. Anais. 2016, no prelo.

BESSOT, A. Pourquoi s'intéresser aux transitions entre cycles d'enseignement? Comment problématiser les phénomènes didactiques liés à ces transitions? **5ième Colloque International Franco-Vietnamien en Didactique des Mathématiques**. HUE, Vietnam, may 2015. Disponível em: < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01163266/document> >. Acesso em: 11 nov. 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192 >. Acesso em 4 jan. 2017.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. Programa de desenvolvimento profissional continuado. **Parâmetros em Ação**. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª Séries). Brasília: MEC/SEF, 1999. v. I.

_____. Congresso Nacional. **Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Publicada no DOU de 23/12/1996. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf >. Acesso em: 5 mar. 2017.

_____. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998b.

_____. **Lei 11.274/2006.** Promulgada em 06 de fevereiro de 2006. Altera a redação dos artigos. 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade. 2006. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2006/Lei/L11274.htm>. Acesso em: 8 fev. 2018.

_____. **Lei 13.415/2017.** Altera as Leis nºs 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm>. Acesso em: 8 fev. 2018.

_____. **Constituição da República Federativa do Brasil.** Promulgada em 05 de outubro de 1988. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm>. Acesso em: 8 fev. 2018.

_____. Ministério da Educação e do Desporto/ INEP. **Instrumentos de Avaliação da Educação Básica.** 5º ano do Ensino Fundamental - Matemática. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_gestor/exemplos_questoes/M04_Saeb_Site_FP.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2017.

BRITO, A. F. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental.** 2003. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, Pernambuco, 2003.

BRONNER, A. **La question du numérique: le numérique en question?** Habilitation à diriger des recherches, Université de Montpellier II, 2007.

BROUSSEAU, G. La théorie des situations didactiques. **Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.** Montreal, 1998. Disponível em: < https://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf>. Acesso em: 10 set. 2017.

BROUSSEAU, G; CENTEÑO, J. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, Éditions La Pensée sauvage, 11 (2.3), 1991, p. 167-210. Disponível em: < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00696335/document>>. Acesso em: 04 jul. 2017.

BRUNER, J. S. **The Process of Education.** 25. ed. Harvard: Harvard University Press, 1999. Disponível em: <<https://mde.biologia.gr/amigi/wp->

<content/uploads/sites/2/2016/03/The-Process-of-Education-Bruner.pdf>>. Acesso em: 2 out. 2017.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. Disponível em: <https://ufri.br/nedir/disciplinas-Pagina/Caraca_ConceitosFundamentais.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2018.

CARVALHO, D.; BELLEMAIN, P. M. B. Condições e restrições na abordagem de área de figuras planas no guia de estudo do projoovem urbano: a escala dos níveis de codeterminação. In: **VII EPBEM** – Encontro Paraibano de Educação Matemática. João Pessoa, Paraíba. Anais. 2012. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Comunicacao_683.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

CASTANHO, S. B. **Análise de erros no ensino fundamental**: uma transição do 5º para o 6º ano. 2015. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – UFSM, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015.

CENTEÑO, J. **La mémoire didactique de l'enseignant**. Thèse posthume inachevée. Bordeaux: Ed. LADIST, 1995.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel**. IREM d'Aix-Marseille. Faculté des Sciences de Luminy. Non publié, 1989, 25p.

_____. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, Éditions Pensée Sauvage, v.19-2, n° 56, p. 221-265, 1999.

_____. **Approche Anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**, 2002. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/>>. Acesso em : 29 ago. 2017.

_____. Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement, **Journal du séminaire TAD/IDD**, 2008. Disponível em: <<http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filières/mat/data/fdf/2008-2009/journal-tad-idd-2008-2009-8.pdf>>. Acesso em: 7 nov 2017.

_____. Conceitos fundamentais da Didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 2009, p. 115-153.

_____. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2018.

_____. **La didactique dites-vous**, 2010. Disponível em : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_La_didactique_dites-vous.pdf>. Acesso em: 4 nov. 2016.

_____. **Introdução à teoria antropológica do didático**. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sao_Paulo_-_4-13_mai_2011.pdf>. Acesso em: 15 out. 2016.

_____. La TAD et son devenir: rappels, reprises, avancées. In: CIRADE, Dans G. et al. (Éds.). **Actes CITAD4** – Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la Société. Toulouse, 2017. p. 27-65. Disponível em: < <https://citad4.sciencesconf.org/>>. Acesso em: 27 maio 2018.

CHEVALLARD, Y.; ARTAUD, M. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques 2015-2016**. Disponível em : < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DDM_-_UE_35_-_YC_-_Lecons_2015-2016.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2017.

_____. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques** – Sur les praxéologies de recherche en didactique – Séance 4 – Parcours Didactique de la spécialité Enseignement et formation en mathématiques du master Mathématiques et applications – Année 2014-2015. Marseille: Université d'Aix-Marseille, 2015. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_4.pdf>. Acesso em: 7 nov. 2017.

D'AMORE, B.; FANDIÑO, M. I. P. Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 10, n. 1. p. 39-68, mar. 2007.

DOUADY, R. Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques** (RDM). Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage, 1986. v.7-2, p. 5-31.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M.-J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Análise de situações didáticas para a construção do conceito de área, como grandeza, no ensino fundamental**. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2002.

ESPIRIDIANO, R. M. V. B. **A criança e o lúdico na transição da educação infantil para o primeiro ano do ensino fundamental em uma escola municipal**. 2015. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – PUC Minas Gerais, Belo Horizonte. 2015.

ESTRELA, A. **Teoria e prática de observação de classe**: uma estratégia de formação de professores. 2. Ed. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, 1986.

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2010.

FERREIRA, L.F.D.; BARROS, L. A experiência do GESTAR II de Matemática na Paraíba. In: **VIII EPBEM** – Encontro Paraibano de Educação Matemática. Campina Grande, PB. Anais. 2014. Disponível em: <
http://www.editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Modalidade_3datahora_18_10_2014_14_06_09_idinscrito_1004_9b80a750afacf4bc35a4160c1122e892.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2015.

FERREIRA, L.F.D; BELLEMAIN, P.M.B. Estratégias utilizadas por alunos do 6º ano em questões da OBMEP sobre as grandezas comprimento e área. XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Paraná, Curitiba. **Anais**, 2013. Disponível em:
 <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2899_1501_ID.pdf>. Acesso em: 16 out. 2015.

_____. A retomada do conceito de área nas aulas de um professor de matemática do 6º ano do ensino fundamental. **II LADIMA** – II Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Jarinu, São Paulo. Anais. 2018, no prelo.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio**: um estudo sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2013. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ed. Matemática e Tecnológica) – UFPE. Recife, 2013.

GONCALVES, E. **Caminhos percorridos por alunos do 5º para o 6º ano do ensino fundamental em matemática**: identificando potencialidades, superando dificuldades. 2014. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em gestão Social, Educação e desenvolvimento regional) – FVC, São Mateus, 2014.

GUEUDET, G.; KHALOUFFI, F.; MARC, V. Evaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaires: rôle des mathématiques. In: DORIER, J.; COUTAT, L. **EMF 2012**, Switzerland. 2012, p. 1.707-1.712. Disponível em: <hal-00745595>. Acesso em: 04 fev. 2015.

HAUSER, S. D. R. **A transição da 4ª para a 5ª série do ensino fundamental**: uma revisão bibliográfica (1987-2004). 2007. 72 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação) – PUC-SP, São Paulo, 2007.

IMENES, L.M.; LELLIS, M; MILANI ; E. **Presente Matemática 1**. 4. ed. São Paulo : Moderna: São Paulo, 2015a.

_____. **Presente Matemática 2**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2015b.

_____. **Presente Matemática 3**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2015c.

_____. **Presente Matemática 4**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2015d.

_____. **Presente Matemática 5**. 4. ed. Ed São Paulo: Moderna, 2015e.

IMENES, L.M.; LELLIS. **Matemática para todos**. 6. ano. São Paulo: Moderna, 2010.

LARGUIER, M. **Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde**. Master (Master en Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences). Université de Montpellier II, Montpellier, 2005.

_____. **La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde**: un problème de la profession. Thèse de doctorat (Thèse em Sciences et Techniques du Languedoc). Université de Montpellier II, Montpellier, 2009.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. Coleção do Professor de Matemática. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, P.; BELLEMAIN, P. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J. B. P. F. **Coleção explorando o ensino**: Matemática, Brasília, MEC, v. 17, 2010. p. 167-200.

MANZINI, E. J. Entrevista semiestruturada: análise de objetivos e de roteiros. In: **Seminário Internacional sobre pesquisa e estudos qualitativos**. Anais. Bauru: USC, 2004. v. 1. p. 1-10. 1 CD. Disponível em: <<http://www.eduinclusivapesq-uerj.pro.br/images/pdf/manzinibauru2004.pdf>>. Acesso em: 2 fev. 2018.

_____. Considerações sobre a transcrição de entrevistas. In: **A entrevista como instrumento de pesquisa em Educação e Educação Especial**: uso e processo de análise (material submetido para livre-docência na FFC – UNESP, SP, 2008). Disponível em: <https://transcricoes.com.br/wp-content/uploads/2014/03/texto_orientacao_transcricao_entrevista.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2018.

MARTINS, M. **A relação afetiva entre professores e alunos na transição dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental**. 2014. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1478787>. Acesso em: 4 mar. 2018.

MELIN, L. **A transição para o ensino fundamental II**: motivação para a matemática em relação ao contexto social percebido. 2013. 90 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UEL, Londrina, 2013.

MELO, M. A. P. **Um estudo de conhecimentos de alunos de 5ª a 8ª série do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2003. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – UFRPE, Recife, 2003.

MONTEIRO, I. M. **As experiências educacionais no contexto da transição da educação infantil para o ensino fundamental numa escola municipal de**

Fortaleza na perspectiva dos diversos segmentos da comunidade escolar. 2013. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFC, Fortaleza, 2013.

MORAIS, L.B. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do ensino médio.** 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ed. Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2013.

NUNES, T. et al. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

PERRIN-GLORIAN, M. J. **Aires de surfaces planes et nombres décimaux.** Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e. Thèse de doctorat d'État, Université de Paris-VII, 1992.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada:** influência de algumas variáveis. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ed. Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2010.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. In: **Bolema**, n. 25, p. 105-132, 2006. Disponível em: <<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3007/1/06-Ponte%28BOLEMA-Estudo%20de%20caso%29.pdf>>. Acesso em: 2 fev. 2018.

PRATI, L. E. **Escola e modos de subjetivação:** um estudo da passagem da quarta para a quinta série do ensino fundamental. 2005. 154 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Social e Institucional) – UFRGS, Porto Alegre, 2005.

PRESSIAT, A. **Grandeur et mesure**, 2002. Disponível em: <<http://www.ac-grenoble.fr/maths/perso/ALaur/grandeurs1.pdf>>. Acesso em: 18 out. 2015.

RANGEL, Z. A. **O processo de transição da unidocência para a pluridocência em classes de 4ª para a 5ª série do ensino fundamental:** olhando a realidade e apontando caminho. 2001. Dissertação de mestrado não-publicada – PUC Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

REIS, L.; DURÃO, L. Resolução de situações de medida e produção envolvendo os conceitos de área e perímetro por alunos do ensino médio. **I Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais.** UFV, Viçosa, 2015.

SANTANA, W. M. G. de **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área:** uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2006.

SANTOS, M. R. dos. **A transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental:** um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – UFRPE, Recife, 2015.

SILVA, M. F. F. **Frações e grandezas geométricas:** um estudo exploratório da abordagem nos livros didáticos. 2004. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2004.

SILVA, J. V. G. da. **Análise da abordagem do conceito de comprimento, perímetro e área em livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2011.

_____. **Grandeza e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional**. 2016. 427 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, A. D. P. R. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Appreniti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental**. 2016. 315 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife, 2016.

SOUZA, J. C. A. **Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações institucionais em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco**. 2004. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – UFRPE, Recife, 2004.

TEIXEIRA, S. G. **Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro**. 2004. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife, 2004.

TELES, R. A. M. **A Influência de Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar, um estudo sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas**. 2007. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – UFPE, Recife, 2007.

VERGNAUD, G. Calcul rationnel et représentation calculable. In : **Bulletin de Psychologie**, Laboratoire de Psychologie clinique. Paris: Université de Paris VII, tome XXVIII, juil/aout, n. 315, p. 378-387, 1975.

VERGNAUD, G. Jean Piaget : quels enseignements pour la didactique? In: **Revue Française de Pédagogie**, Lyon, n. 57, p. 7-14, 1981.

_____. La théorie des Chapms Conceptuels. In : **Recherches en didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2-3, p. 133-170, 1990.

_____. Teoria dos campos conceituais. In: **Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, 1, Rio de Janeiro, 1993. Anais. Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundação, Instituto de Matemática, 1993, p. 1-26.

_____. Le role de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In: ARTIGUE, M. et col. (Orgs.). **Vingt ans des didactiques des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage. p. 177-191, 1994.

_____. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. In: **Journal of Mathematical Behaviour**. Paris, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

_____. Forme opératoire et forme predicative de la connaissance. In: **Actes du colloque GDM 2001**. La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation. J. Portugais, Université de Montréal, 2002, p. 6-27.

_____. Représentation et activité: deux concepts étroitement associés. In: **Recherches en Education**, CREN, Université de Nantes, n. 4, p. 9-22, oct. 2007.

_____. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lúcia Faria Moro. 1ª ed. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

_____. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? In: **ANAIS DO LADIMA 2016**. Bonito, MS, Brasil, 2016. Disponível em: <http://ladima.tuseon.com.br/uploads/fille_manager/source/d7322ed17dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/oficinas/CONFER%C3%8ANCIA%201%20-%20PORTUGU%C3%8AS.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2017.

ZACARIAS, S. M. Z. **Uma comparação do desempenho de estudantes brasileiros e portugueses na transição da unidocência para a pluridocência, no caso das estruturas aditivas**. 2016. 294 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

APÊNDICE A – Quadros de horários de aulas dos 5º anos em 2016 e dos 6º anos em 2017

Quadro 15 - Quadro de horário de aulas das turmas 5º A e 5º B, da Escola São Francisco, em 2016

5º A - 2016					
Horário	Segunda-Feira	Terça-Feira	Quarta-Feira	Quinta-Feira	Sexta-Feira
8h20min às 9h30min	Profa G	Profa 5º	Profa G	Profa 5º	Profa G
9h 30min às 9h50min	LANCHE COLETIVO NA SALA				
9h50min às 10h10min	RECREIO				
10h20min às 10h50min	Profa 5º	Profa G	ARTE	Profa G	Profa 5º
10h50min às 11h20min			Profa 5º	SOE/TI (G1)	
11h20min às 11h50min	ED. FÍSICA	Profa G	RECR / MOV E MUSIC	SOE/TI (G2)	Profa 5º

5º B - 2016					
Horário	Segunda-Feira	Terça-Feira	Quarta-Feira	Quinta-Feira	Sexta-Feira
8h20min às 9h30min	Profa 5º	Profa G	Profa 5º	Profa G	Profa 5º
9h 30min às 9h50min	LANCHE COLETIVO NA SALA				
9h50min às 10h10min	RECREIO				
10h20min às 10h50min	Profa G	Profa 5º	Profa G	Profa 5º	Profa G
10h50min às 11h20min	SOE/TI (G1)				
11h20min às 11h50min	SOE/TI (G2)	ED. FÍSICA	ARTE	RECR / MOV E MUSIC	Profa 5º

Fonte: Adaptado do horário das turmas dos anos iniciais da Escola São Francisco (2016).

Quadro 16 - Quadro de horário de aulas das turmas 6º A e 6º B, da Escola São Francisco, em 2017

6º ano A - 2017					
Horário	Segunda-Feira	Terça-Feira	Quarta-Feira	Quinta-Feira	Sexta-Feira
13h 25min	SOE	Inglês	Português	Inglês	Geografia
14h 15min	Matemática	Arte/Música	Arte Cênica	Matemática	História
15h 05min	Ciências	Matemática	Matemática	Matemática	História
15h 55min	RECREIO				
16h 20min	Português	História	Geografia	Ed. Física	Português
17h 10min	Português	Ed. Física	Ciências	Arte/Música	Português
18h	-----	-----	Ciências	-----	-----

6º ano B - 2017					
Horário	Segunda-Feira	Terça-Feira	Quarta-Feira	Quinta-Feira	Sexta-Feira
13h 25min	Matemática	SOE	Geografia	Matemática	História
14h 15min	Português	Matemática	Matemática	Inglês	Português
15h 05min	Português	Arte/Música	Português	Arte/Música	Português
15h 55min	RECREIO				
16h 20min	Ciências	Ed. Física	Arte Cênica	Matemática	Ciências
17h 10min	Ciências	Inglês	História	Ed. Física	Geografia
18h	-----	-----	História	-----	-----

Fonte: Adaptado do horário das turmas dos anos finais da Escola São Francisco (2017).

APÊNDICE B – Roteiro de entrevista com a direção da escola campo da
pesquisa¹⁰²

– *Formação e papel na gestão:*

- a) Formação, tempo de experiência na área da educação e tempo de atuação nesta escola.
- b) Como você vê o papel da gestão da escola?
- c) E como você exerce esse papel no que diz respeito ao planejamento das atividades didático-pedagógicas?

– *A função de direção:*

- a) Dificuldades e satisfações da direção de modo geral e nesta escola.
- b) Em que medida sente que interfere efetivamente na vida da escola (estrutura, organização, relacionamento etc.).

– *O Projeto Político-Pedagógico da Escola:*

- a) Como você percebe o PPP sendo desenvolvido na escola?
- b) E, em particular, o processo de ensino-aprendizagem quanto à construção do conhecimento proposto no PPP e efetivado?

– *Reuniões na escola:*

- a) Tipos de reunião (pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe) e frequência com que ocorrem.
- b) Quais os temas normalmente tratados?
- c) Quais as dinâmicas utilizadas? Quais os resultados e os encaminhamentos?

– *A Matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem:*

- a) Como você percebe a matemática ao longo do ensino fundamental?
- b) Como você percebe a transição entre ciclos de aprendizagem, em particular entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental?

– Você gostaria de falar mais alguma coisa relacionada à sua prática na direção e/ou na sua prática docente?

¹⁰² Roteiro de entrevista utilizado com a direção geral e a direção adjunta da escola campo da pesquisa.

APÊNDICE C – Roteiro de entrevista com a coordenação dos anos iniciais do EF

– *Formação e papel na gestão:*

- a) Formação, tempo de experiência na área da educação e tempo de atuação nesta escola.
- b) Como você vê o papel da gestão da escola?

– *A função da coordenação:*

- a) Como acontece a conexão entre as coordenações das diferentes etapas de ensino?
- b) E entre as coordenações com as coordenações de áreas de conhecimento ou de disciplinas?
- c) Como você planeja o seu trabalho anual?
- d) E como você exerce esse papel no que diz respeito ao planejamento das atividades didático-pedagógicas?

– *Reuniões na escola:*

- a) Tipos de reunião (pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe) e frequência com que ocorrem.
- b) Quais os temas normalmente tratados?
- c) Quais as dinâmicas utilizadas? Quais os resultados e os encaminhamentos?

– *O Projeto Político-Pedagógico da Escola:*

- a) Como você percebe o PPP sendo desenvolvido na escola?
- b) E, em particular, o processo de ensino-aprendizagem quanto à construção do conhecimento proposto no PPP e efetivado?

– *Sobre o trabalho pedagógico e a formação de professores:*

- a) Existem projetos institucionais: descrição dos mesmos e sua vinculação com a matemática, (em particular, com o campo das grandezas e medidas).
- b) Relação da equipe gestora com a formação em serviço (horário de estudo coletivo, pautas e temas associados à formação continuada).
- c) Como acontece a escolha do livro didático pela escola?
- d) Qual a sua percepção com relação ao trabalho da professora do 5º ano?

– *A Matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem*

- a) Como você percebe a matemática ao longo do ensino fundamental?
- b) Como você percebe a transição entre ciclos de aprendizagem, em particular entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental?

– Você gostaria de falar mais alguma coisa relacionada a sua prática na coordenação e/ou na sua prática docente?

APÊNDICE D – Roteiro de entrevista com a professora das turmas dos 5º anos

– *Formação e experiência profissional:*

- a) Qual a sua formação inicial?
- b) Tempo na função e tempo de trabalho no ensino fundamental I.
- c) Tempo de professora nesta escola.
- d) Atualmente, ensina em outras escolas/instituições?
- e) Percepção pessoal: considera-se formada ou busca aperfeiçoamento? No segundo caso, como realiza essa complementação? (cursos, formação em serviço, leituras etc.).

– *Reuniões na escola:*

- a) Tipos de reunião que você participa (pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe) e a frequência com que ocorrem.
- b) Quais os temas normalmente tratados?
- c) Quais as dinâmicas utilizadas? Quais os resultados e os encaminhamentos?

– *Sobre o trabalho pedagógico:*

- a) O que você considera necessário para o planejamento de suas aulas de matemática?
- b) Que recursos você utiliza para preparar suas aulas?
- c) Que materiais você utiliza para retirar atividades para os alunos?
- d) Como você planeja o ensino de um conteúdo novo?
- e) E como você planeja a retomada de um conteúdo que já foi visto?
- f) Como você realiza a avaliação de um conteúdo ministrado?
- g) Como acontece a escolha do livro didático na escola? Qual a coleção adotada?
- h) Exceto o livro didático adotado na escola, você utiliza outro livro, outros materiais? Qual(is)? (Caso consulte sites, solicitar que especifique.)
- i) O que já trabalhou relacionado a grandezas geométricas? E o que ainda pensa em trabalhar?
- j) Como descreveria o grupo de alunos do 5º ano hoje?

– *O Projeto Político-Pedagógico da Escola:*

- a) Como você percebe o PPP sendo desenvolvido na escola?
- b) E, em particular, o processo de ensino-aprendizagem quanto a construção do conhecimento proposto no PPP e efetivado?

– *Sobre o Currículo de Matemática da Escola:*

- a) Você conhece o currículo, a proposta e/ou os materiais didáticos utilizados pelos outros segmentos da escola: a educação infantil, os anos iniciais e os anos finais?

b) Qual a sua opinião sobre a unidocência (o professor que ministra todas as disciplinas) e a pluridocência (o professor ministrar as disciplinas por área de ensino, a saber, ciências e matemática)?

– *A Matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem:*

a) Como você percebe a matemática ao longo do ensino fundamental?

b) Como você percebe a transição entre ciclos de aprendizagem, em particular entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental?

– Você gostaria de falar mais alguma coisa relacionada a sua prática docente?

APÊNDICE E – Roteiro de entrevista com a coordenação dos anos finais do EF

– *Formação e papel na gestão:*

- a) Formação, tempo de experiência na área da educação e tempo de atuação nesta escola.
- b) Como você vê o papel da gestão da escola?

– *A função da coordenação:*

- a) Como acontece a conexão entre as coordenações das diferentes etapas de ensino?
- b) E entre as coordenações com as coordenações de áreas de conhecimento ou de disciplinas?
- c) Como você planeja o seu trabalho anual?
- d) E como você exerce esse papel no que diz respeito ao planejamento das atividades didático-pedagógicas?

– *Reuniões na escola:*

- a) Tipos de reunião (pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe) e frequência com que ocorrem.
- b) Quais os temas normalmente tratados?
- c) Quais as dinâmicas utilizadas? Quais os resultados e os encaminhamentos?

– *O Projeto Político-Pedagógico da Escola:*

- a) Como você percebe o PPP sendo desenvolvido na escola?
- b) E, em particular, o processo de ensino-aprendizagem quanto a construção do conhecimento proposto no PPP e efetivado?

– *Sobre o trabalho pedagógico e a formação de professores:*

- a) Existem projetos institucionais: descrição deles e sua vinculação com a matemática (em particular, com o campo das grandezas e medidas).
- b) Relação da equipe gestora com a formação em serviço (horário de estudo coletivo, pautas e temas associados a formação continuada).
- c) Como acontece a escolha do livro didático pela escola?
- d) Qual a sua percepção com relação ao trabalho do professor do 6º ano?

– *A Matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem*

- a) Como você percebe a matemática ao longo do ensino fundamental?
- b) Como você percebe a transição entre ciclos de aprendizagem, em particular entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental?

- Você gostaria de falar mais alguma coisa relacionada a sua prática na coordenação e/ou na sua prática docente?

APÊNDICE F – Roteiro de entrevista com o professor das turmas dos 6º anos

– *Formação e experiência profissional:*

- a) Qual a sua formação inicial?
- b) Tempo na função e tempo de trabalho no ensino fundamental II.
- c) Tempo de professor nesta escola.
- d) Atualmente, ensina em outras escolas/instituições?
- e) Percepção pessoal: considera-se formado ou busca aperfeiçoamento? No segundo caso, como realiza essa complementação? (cursos, formação em serviço, leituras etc.).

– *Reuniões na escola:*

- a) Tipos de reunião que você participa (pedagógica, de pais, de pais e professores, conselho de classe) e a frequência com que ocorrem.
- b) Quais os temas normalmente tratados?
- c) Quais as dinâmicas utilizadas? Quais os resultados e os encaminhamentos?

– *Sobre o trabalho pedagógico:*

- a) O que você considera necessário para o planejamento de suas aulas de matemática?
- b) Que recursos você utiliza para preparar suas aulas?
- c) Que materiais você utiliza para retirar atividades para os alunos?
- d) Como você planeja o ensino de um conteúdo novo?
- e) E como você planeja a retomada de um conteúdo que já foi visto?
- f) Como você realiza a avaliação de um conteúdo ministrado?
- g) Como acontece a escolha do livro didático na escola? Qual a coleção adotada?
- h) Além do livro didático adotado na escola você utiliza outro livro, outros materiais? Qual(is)? (Caso consulte sites, solicitar que especifique.)
- i) O que já trabalhou relacionado a grandezas geométricas? E o que ainda pensa em trabalhar?
- j) Como descreveria o grupo de alunos dos 6º anos hoje?

– *O Projeto Político-Pedagógico da Escola:*

- a) Como você percebe o PPP sendo desenvolvido na Escola?
- b) E, em particular, o processo de ensino-aprendizagem quanto à construção do conhecimento proposto no PPP e efetivado?

– *Sobre o Currículo de Matemática da Escola:*

- a) Você conhece o currículo, a proposta e/ou os materiais didáticos utilizados pelos outros segmentos da escola: a educação infantil, os anos iniciais e os anos finais?

b) Qual a sua opinião sobre a unidocência (o professor que ministra todas as disciplinas) e a pluridocência (o professor ministrar as disciplinas por área de ensino, a saber, ciências e matemática)?

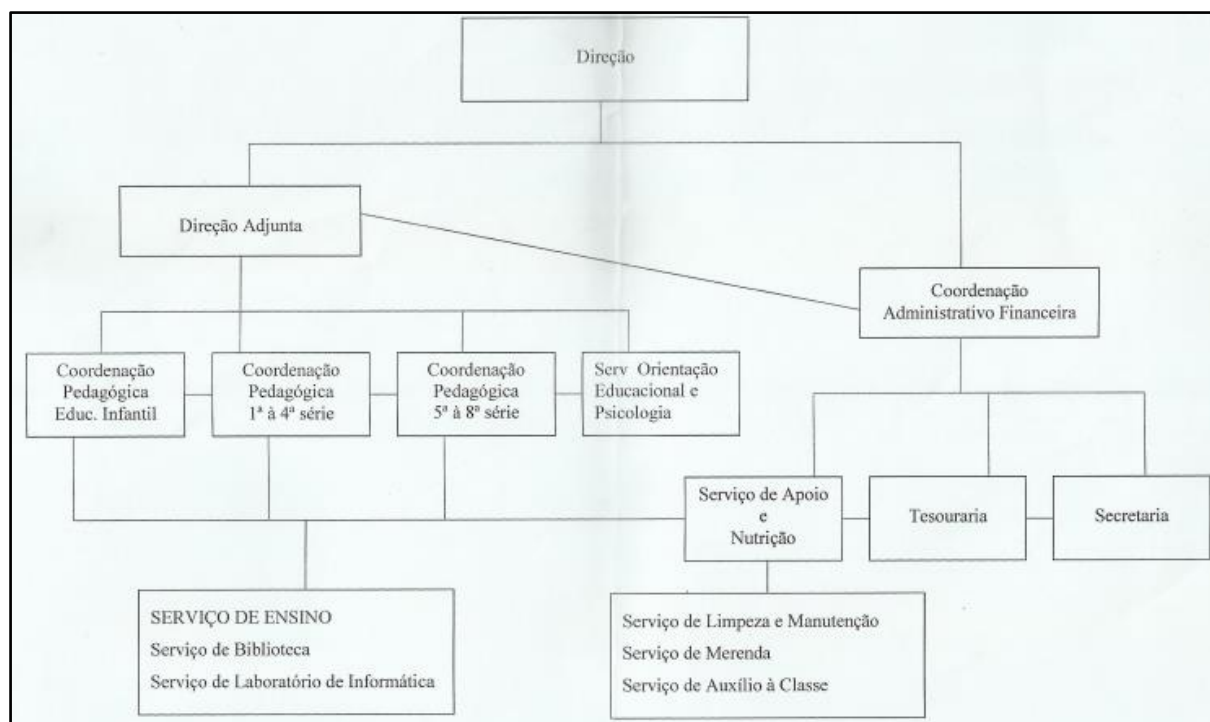
– *A Matemática e a transição entre ciclos de aprendizagem:*

a) Como você percebe a matemática ao longo do ensino fundamental?

b) Como você percebe a transição entre ciclos de aprendizagem, em particular entre o término dos anos iniciais e o início dos anos finais do ensino fundamental?

– Você gostaria de falar mais alguma coisa relacionada a sua prática docente?

ANEXO A – Organograma da Escola São Francisco



Fonte: Documentos da Escola São Francisco.

ANEXO B – Ficha de Acompanhamento do(a) Estudante

FICHA DE ACOMPANHAMENTO DO(A) ESTUDANTE				
Ensino Fundamental I				
Estudante: _____				
Turma: 5º Ano ____ Ano: _____				
LEGENDA DC - Desempenho Construído DEC - Desempenho em Construção * - Observação				
	1º unid	2º unid	3º unid	4º unid
Expressa suas ideias com clareza.				
Posiciona-se de maneira crítica.				
Adota atitudes colaborativas e construtivas em diferentes situações sociais.				
Contribui favoravelmente para o crescimento do grupo.				
Estabelece, nas relações interpessoais, atitudes de respeito ao outro e a si próprio.				
Pratica regras de convívio social.				
Apresenta iniciativa para resolver diferentes situações.				
Valoriza o diálogo como forma de mediar e resolver os conflitos.				
Participa das aulas demonstrando interesse e curiosidade pelos temas e conteúdos abordados.				
Demonstra disponibilidade para ouvir.				
Mostra interesse e participa das atividades extraclasse:	Arte			
	SOE			
	Educação Física			
	Música e Movimento			
	Informática			
Demonstra zelo e cuidado com o material individual.				
Demonstra zelo e cuidado com o material coletivo.				
Pratica hábitos relativos à higiene pessoal.				
Apresenta perseverança na busca de conhecimento e na realização de atividades.				
Solicita à professora e/ou aos colegas esclarecimentos sobre o que está sendo trabalhado.				
Utiliza diferentes fontes de informação para adquirir e construir conhecimentos.				
Realiza tarefas de classe com:	empenho			
	autonomia			
	organização			
Cumpre as tarefas de casa com:	responsabilidade			
	organização			
	coerência			
Apresenta as pesquisas solicitadas com:	responsabilidade			
	organização			
	coerência			

Fonte: Documento adaptado da escola São Francisco.

ANEXO C – Registro de avaliação ensino fundamental (1º ao 5º ano)

Registro de Avaliação					
Ensino Fundamental					
(1º ao 5º ano)					
Estudante: _____					
Turma: _____		Turno: _____		Ano: _____	
LEGENDA O – Aprendizagem Ótima B – Aprendizagem Boa S – Aprendizagem Suficiente I – Aprendizagem Insuficiente					
I Semestre					
Área de Conhecimento		I unidade		II unidade	
		Conhecimento	Atitude	Conhecimento	Atitude
Português	Linguagem Oral				
	Linguagem Escrita				
História					
Geografia					
Matemática					
Ciências					
II Semestre					
Área de Conhecimento		III unidade		IV unidade	
		Conhecimento	Atitude	Conhecimento	Atitude
Português	Linguagem Oral				
	Linguagem Escrita				
História					
Geografia					
Matemática					
Ciências					
Área de Conhecimento		Conceito Anual			
Português					
História					
Geografia					
Matemática					
Ciências					
Assinatura do Responsável				Data	
I unidade _____				____/____/____	
II unidade _____				____/____/____	
III unidade _____				____/____/____	
IV unidade _____				____/____/____	
Parecer Final _____					

Fonte: Documento adaptado da escola São Francisco.

ANEXO D – Boletim escolar (6º ano)

BOLETIM ESCOLAR														
Aluno(a):				Série:								Matrícula:		
DISCIPLINAS	1ª Unidade			2ª Unidade			3ª Unidade			4ª Unidade			Média	LEGENDAS
	A	C	F	A	C	F	A	C	F	A	C	F		Critérios de Avaliação
ARTES 1														A : Atitude C : Conhecimento F : Faltas
ARTES 2														
CIÊNCIAS														
EDUCAÇÃO FÍSICA														Conceitos O : Ótimo B : Bom S : Suficiente I : Insuficiente
GEOGRAFIA														
HISTÓRIA														
LÍNGUA ESTRANGEIRA(INGLÊS)														
MATEMÁTICA														
LÍNGUA PORTUGUESA														

----- Destacar e entregar à Coordenação -----

Aluno(a): _____ Série: **6º ano** Ano: **2** Matrícula: _____

Ass. do Responsável : _____ Data da Entrega: ____/____/____

Fonte: Documento adaptado da Escola São Francisco.