



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



EMERSON WAGNER DINIZ DE MAGALHÃES

**UMA FORMULAÇÃO NUMÉRICA METAMÓRFICA BASEADA NO MÉTODO DE
VOLUMES FINITOS APLICADA À SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
MONOFÁSICOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E
ANISOTRÓPICOS**

Recife

2019

EMERSON WAGNER DINIZ DE MAGALHÃES

**UMA FORMULAÇÃO NUMÉRICA METAMÓRFICA BASEADA NO MÉTODO DE
VOLUMES FINITOS APLICADA À SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
MONOFÁSICOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E
ANISOTRÓPICOS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Orientador Interno: Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes.

Orientador Externo: Prof. Dr. Márcio Rodrigo de Araújo Souza.

Recife

2019

- M188f Magalhães, Emerson Wagner Diniz de.
 Uma formulação numérica metamórfica baseada no método de volumes finitos aplicada à simulação de escoamentos monofásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos / Emerson Wagner Diniz de Magalhães. – 2019.
 70 folhas, il., gráfs., tabs.
- Orientador Interno: Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes.
 Orientador Externo: Prof. Dr. Márcio Rodrigo de Araújo Souza.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2019.
 Inclui Referências.
1. Engenharia Civil. 2. Problemas de difusão em estado estacionário. 3. Fluxo metamórfico contínuo em volumes finitos. 4. Métodos de volumes finitos não-lineares. 5. Métodos de aproximação de fluxo por múltiplos pontos (MPFA). 6. Tensores e malhas de difusão arbitrários. I. Gomes, Igor Fernandes. (Orientador Interno). II. Souza, Márcio Rodrigo de Araújo. (Orientador Externo). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2019-169

EMERSON WAGNER DINIZ DE MAGALHÃES

**UMA FORMULAÇÃO NUMÉRICA METAMÓRFICA BASEADA NO MÉTODO DE
VOLUMES FINITOS APLICADA À SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
MONOFÁSICOS EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO HETEROGÊNEOS E
ANISOTRÓPICOS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes (Orientador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jonathan da Cunha Teixeira – (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram no decorrer desta jornada, especialmente:

A minha família, que sempre me apoiou nos estudos e nas escolhas tomadas.

A minha noiva, Mávylla, por sempre me incentivar e pelo suporte nos momentos difíceis.

Aos meus orientadores, Prof. Igor Gomes e Prof. Márcio Souza, que tiveram papel fundamental na elaboração e conclusão deste trabalho, além da extraordinária atenção e paciência.

Aos meus colegas pelo companheirismo e disponibilidade para me auxiliar em vários momentos.

A Universidade Federal de Pernambuco, seu corpo técnico e administrativo, e todos os professores, em especial do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, com quem tive oportunidade de aprender muito.

Aos seguintes órgãos: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), Fundação de Apoio ao Desenvolvimento da Universidade Federal de Pernambuco (FADE-UFPE), pelo suporte financeiro, direto e indireto, necessário para o desenvolvimento desta pesquisa.

E a todos, cujos nomes não foram mencionados, mas que de alguma forma contribuíram como minha formação, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

As variantes tradicionais de Métodos de Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA) conseguem, em geral, produzir soluções convergentes para problemas elípticos com tensores de difusão completos e malhas arbitrárias. Em contrapartida, esses métodos de Fluxo Contínuo em Volumes Finitos, com operadores lineares, não são capazes de garantir a positividade das soluções quando são utilizados tensores com maiores razões de anisotropia. Visando solucionar esse problema, diversos métodos numéricos com operadores não-lineares têm surgido na literatura seja para garantir a satisfação da positividade, a preservação de extremos, ou ambos. Entretanto, esses métodos são mais computacionalmente onerosos que os tradicionais métodos MPFA devido ao seu procedimento iterativo, característico a essa abordagem. Neste trabalho, propomos o chamado método Metamórfico de Fluxo Contínuo em Volumes Finitos (MFC-FV) que é caracterizado por uma estrutura híbrida baseada na aproximação de fluxos unilaterais com coeficientes positivos. Aqui, um operador discreto linear é inicialmente considerado, e a solução computada é submetida a uma verificação baseada na satisfação da positividade local dos volumes de controle. De acordo com esse critério, o método sofre metamorfose, uma vez que a solução linear, produzida inicialmente, pode ser a definitiva ou se torna um suporte inicial pré-convergado em uma abordagem não-linear, onde os coeficientes do operador dependem da variável desconhecida. Essa estratégia reduz o número de iterações quando comparado a uma formulação não-linear tradicional. O desempenho de nossa proposição é avaliado resolvendo-se alguns problemas de benchmark de difusão em estado estacionário e desafiador para diferentes padrões de malha. Observamos que o método MFC-FV apresenta convergência mais rápida em relação ao procedimento tradicional não linear. Para alguns casos, também observamos ausência de procedimento iterativo devido à satisfação da positividade local após atingir o modo linear do método.

Palavras-chave: Problemas de difusão em estado estacionário. Fluxo metamórfico contínuo em volumes finitos. Métodos de volumes finitos não-lineares. Métodos de aproximação de fluxo por múltiplos pontos (MPFA). Tensores e malhas de difusão arbitrários.

ABSTRACT

The traditional variants of Multi-Point Flow Approximation Methods (MPFA) are, generally, capable to produce convergent solutions for elliptic problems with full diffusion tensors and arbitrary meshes. On the other hand, these methods of continuous flow in finite volumes, using linear operators, are not capable to guarantee the positive solutions when tensors with greater ratios of anisotropy are used. In order to solve this problem, several numerical methods with non-linear operators have appeared in the literature either to guarantee the satisfaction of positivity, the preservation of extremes, or both. However, these schemes are computationally expensive than traditional MPFA methods due to their iterative procedure, which is characteristic of this approach. In this work, we propose the so-called Metamorphic Method of Continuous Flow in Finite Volumes (MFC-FV), which is characterized by a hybrid structure based on the approximation of unilateral flows with positive coefficients. Here, a discrete linear operator is initially considered, and the computed solution is submitted to a check based on the satisfaction of the local positivity of the control volumes. According to this criteria, the method undergoes metamorphosis, since the initially produced linear solution can be the definitive one or becomes a pre-convergent initial support in a non-linear approach, where the coefficients of the operator depend on the unknown variable. This strategy reduces the number of iterations when compared to a traditional nonlinear formulation. The performance of our proposition is evaluated by solving some classical and challenging steady-state diffusion benchmark problems for different mesh patterns. We observed that the MFC-FV method presents faster convergence than the traditional non-linear procedure. For some cases, we also observed an absence of iterative procedure due to the satisfaction of the local positivity after reaching the linear mode of the method.

Keywords: Steady-state diffusion problems. Metamorphic flux continuous finite volume. Non-linear finite volume methods. Multi-Point flux approximation methods (MPFA). Arbitrary diffusion tensors and meshes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Exemplo de domínio discretizado (a) Indicação de um volume de controle arbitrário $V_{\dot{M}}$ com limite $\Gamma_{\dot{M}}$ (b) detalhe de volumes de controle $V_{\dot{L}}$ e $V_{\dot{R}}$ que compartilham a mesma interface σ	25
Figura 2 -	Fluxo ao longo da co-normal	26
Figura 3 -	Definição das variáveis geométricas	27
Figura 4 -	Decomposição da co-normal em partes tangencias e normais	28
Figura 5 -	Homogeneização através de duas interfaces	31
Figura 6 -	Exemplo de posição relativas para construção da combinação de Fluxos	35
Figura 7 -	Exemplo de malha com volumes "problemáticos" (1, 5 e 7) destacados	39
Figura 8 -	Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 1	40
Figura 9 -	Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 5	40
Figura 10 -	Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 7	41
Figura 11 -	Esquema de construção da nova matriz para solução do modo não-linear	41
Figura 12 -	Malha quadrangular utilizada para o teste da Interpolação em barreira oblíqua	44
Figura 13 -	Escoamento monofásico em material homogêneo: Exemplo de malha quadrangular utilizada na solução (com 16x16 subdivisões)	45
Figura 14 -	Taxa de convergência utilizando norma L2: (a) para o campo de pressão (b) para o campo de velocidade	47

Figura 15 -	Campos de pressão no refinamento de malha 124x124, para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV.....	48
Figura 16 -	Exemplos de malhas utilizadas para estudo da convergência em escoamento monofásico	49
Figura 17 -	Taxa de convergência para malha TRIANGULAR utilizando norma L2: (a) para o campo de pressão (b) para o campo de velocidade	52
Figura 18 -	Campos de pressão no refinamento de malha 32x32 em malha TRIANGULAR para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV	53
Figura 19 -	Taxa de convergência para malha QUADRANGULAR utilizando norma L2: (a) para o campo de pressão (b) para o campo de velocidade	55
Figura 20 -	Campos de pressão no refinamento de malha 192x192 em malha QUADRANGULAR para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV	56
Figura 21 -	Escoamento Monofásico em material Homogêneo e Anisotrópico com furo quadrado: (a) Domínio computacional; (b) Malha quadrada utilizada (com 54x54 subdivisões) aleatoriamente perturbada	58
Figura 22 -	Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 100$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio	60
Figura 23 -	Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 1000$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio	60
Figura 24 -	Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 10000$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio	61
Figura 25 -	Campos de pressão com $K_x = 100$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV	62
Figura 26 -	Campos de pressão com $K_x = 1000$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV	63
Figura 27 -	Campos de pressão com $K_x = 10000$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Erros de Pressão e Velocidade e número de Iterações	44
Tabela 2 -	Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-F	46
Tabela 3 -	Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações em malha TRIANGULAR para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV	51
Tabela 4 -	Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações em malha QUADRANGULAR para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV	54
Tabela 5 -	Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV...	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2-D	Duas dimensões
cte	constante
DMP	<i>Discrete Maximum Principle</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
MPFA	<i>Multi-Point Flux Approximation</i>
MFC-FV	<i>Metamorphic Method of Continuous Flow in Finite Volumes</i>
MVF	Método Volumes Finitos
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
tol	Tolerância
TPFA	<i>Two-Point Flux Approximation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{K}$	Tensor de difusão
Ω	Domínio poligonal
Γ	Contorno do domínio
Γ_D	Contorno de Dirichlet
Γ_N	Contorno de Neumann
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente
σ	Interface entre volumes de controle
μ	Pesos para combinação de fluxos
$\mathcal{A}$	Matriz de homogeneização
λ	Componente Tangencial da co-normal
$\vec{\gamma}$	Componente normal da co-normal
E_{L2}^p	Norma de Erro L2 para pressão
$E_{L2}^{\vec{v}, \vec{N}}$	Norma de Erro L2 para velocidade
$\vec{\mathcal{F}}$	Fluxo numérico interfacial
H	Vetores de Homogeneização
Q	Termo fonte/sumidouro
R_{L2}^p	Taxa de Convergência para pressão
$R_{L2}^{\vec{v}, \vec{N}}$	Taxa de Convergência para velocidade
$\mathcal{R}$	Matriz de termos conhecidos
V	Volume de controle
$\vec{c}$	Pesos para equação de fluxo
d	Distância entre o ponto de colocação e a interface
g_D	Função com valores de Dirichlet
g_N	Função com valores de Neumann
h	Tamanho médio do volume de controle em cada direção
$\vec{n}$	Vetor normal unitário
p	Pressão em determinado volume de controle
u	Eventual variável escalar (pressão, temperatura etc.)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	21
1.2	ORGANIZAÇÃO GERAL DA DISSERTAÇÃO	21
2	MODELO MATEMÁTICO	22
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	24
3.1	FORMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO-LINEAR, TEREKHOV ET AL. (2017)	24
3.1.1	Divisão de Fluxo	27
3.1.2	Interpolação	29
3.1.3	Discretização Unilateral de Fluxo	32
3.1.4	Seleção de estêncil	33
3.1.5	Combinações não-lineares	34
3.1.6	Combinações não-lineares para a não negatividade da solução (NTPFA)	35
3.2	FORMULAÇÃO METAMÓRFICA	38
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	42
4.1	TESTE DE INTERPOLAÇÃO EM BARREIRA OBLÍQUA	43
4.2	TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MATERIAL HOMOGÊNEO COM ANISOTROPIA LEVE (CRUMPTON ET AL., 1995)	44
4.3	TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MATERIAL HOMOGÊNEO COM ANISOTROPIA LEVE (GAO E WU, 2011)	49
4.4	ESTUDO DE MONOTONICIDADE EM MATERIAL HOMOGÊNEO E ANISOTRÓPICO COM DESCONTINUIDADE NO DOMÍNIO	57
5	CONCLUSÕES	65
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO

A difusão em meios descontínuos heterogêneos anisotrópicos e situações matematicamente equivalentes ocorre em várias áreas práticas de engenharia, como por exemplo, simulação de reservatórios (AAVATSMARK et al., 1996), descarte de resíduos nucleares (LE POTIER, 2005) e hidrologia sub-superfície (VIDOVIĆ et al., 2013). Descontinuidades bruscas do tensor de difusão, anisotropia contundente, e irregularidade da malha computacional resultam em dificuldades para obter soluções numéricas relevantes. Como consequência, métodos de discretização que conseguem lidar com esses importantes desafios se tornam necessários.

Essa busca é motivada, em particular, pela simulação numérica de fluxos complexos em meios porosos. A heterogeneidade das rochas e repercussões significativas da sua anisotropia, juntamente com geometrias intrincadas em modelos motivaram a evolução das estratégias desenvolvidas para uso na simulação de reservatórios (AAVATSMARK et al., 1998). Os métodos de discretização para leis de conservação geralmente não são projetados para lidar com a heterogeneidade e uma anisotropia relevante. Grandes descontinuidades em propriedades regulares demandam a elaboração de métodos numéricos com uma determinação satisfatória da condutividade efetiva através das interfaces entre células. Para satisfazer a continuidade local no fluxo entre as células das malhas com fortes descontinuidades na condutividade, métodos baseados no conceito de volume de controle são especialmente adequados.

Uma vasta revisão de métodos numéricos para problemas de difusão anisotrópicos foi feita por Droniou (2014). Embora alguns métodos gerais tenham sido propostos (HERBIN; HUBERT, 2008) ainda não existe uma metodologia numérica “definitiva”, isto é, um método centrado na célula com estêncil compacto, que respeite os limites físicos e produza boas aproximações mesmo em malhas distorcidas não conformes e com um forte contraste nas permeabilidades. Segundo Blanc e Labourasse (2016), o método ideal deve satisfazer as seguintes características:

- Consistência
- Estabilidade
- Conservabilidade
- Pequeno estêncil

- Princípio do Máximo
- Simetria
- Linearidade

Uma abordagem comum e bastante utilizada em simulação de reservatórios é utilizar um método de Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (TPFA). A principal desvantagem do método clássico TPFA é a inconsistência em malhas que não estão alinhadas com a direção da anisotropia. Isso gera adversidades complexas por que é notavelmente difícil e frequentemente impossível construir uma malha $\mathbf{K}$ -ortogonal para domínios heterogêneos de relevância prática (AZIZ; SETTARI, 1979). Os termos de difusão tangencial, não são computados pela abordagem convencional desses métodos que não são construídos para lidar com anisotropias arbitrárias (AAVATSMARK et al., 1998; AAVATSMARK, 2002). Isto ocorre devido ao estêncil de diferença de dois pontos empregado na construção desses fluxos. Apesar disso, vale ressaltar que o método TPFA também pode produzir soluções robustas e convergentes, inclusive para problemas anisotrópicos, a depender de ortotropia, com $\mathbf{K}$ -ortogonalidade na direção da malha.

Para ser praticável reproduzir sistemas com tensor de permeabilidade heterogêneos e malhas complexas, métodos que aplicam Aproximações De Fluxos Por Múltiplos Pontos (MPFA) foram propostos (AAVATSMARK et al., 1996; EDWARDS; ROGERS, 1998; AAVATSMARK, 2002; EDWARDS, 2000; LEE; JENNY; TCHELEPI, 2002). Eles são caracterizados por um fluxo discreto computado por médias de mais de dois pontos. Isso produz uma aproximação adequada dos termos de difusão tangencial e, consequentemente, soluções convergentes. Esses métodos são extensíveis a qualquer sistema de leis de conservação onde os termos de fluxo são definidos por leis de gradiente, como a lei de Fourier para condução térmica, a lei de Darcy para o fluxo de um fluido através de um meio poroso, ou a lei de Ohm para condução elétrica (AAVATSMARK et al., 1998). As variantes mais clássicas desse tipo de formulação (AAVATSMARK et al., 1998; EDWARDS; ROGERS, 1998; NORDBOTTEN; AAVATSMARK; EIGESTAD, 2007; AGELAS; EYMARD; HERBIN, 2009) são inspiradas no trabalho pioneiro de CRUMPTON *et al.* (1995).

A perda de estabilidade local é uma desvantagem inegável nas primeiras metodologias numéricas de fluxo contínuo, resultando na ocorrência de oscilações quando são adotados tensores de difusão com fortes relações de anisotropia (EDWARDS; ZHENG, 2008). Novas formulações caracterizadas por suporte total à variável primária em métodos MPFA foram propostas (CHEN et al., 2008; EDWARDS; ZHENG, 2008, 2010; GAO; WU, 2011). Essas

variantes diminuem as oscilações espúrias não físicas. Infelizmente, esses métodos são condicionalmente monótonos e só funcionam satisfatoriamente de acordo com determinadas limitações para regularidade da malha e a relação de anisotropia adotada (NORDBOTTEN; AAVATSMARK; EIGESTAD, 2007)

Do ponto de vista analítico, os princípios máximo e mínimo são bastante gerais, mas muito significativos, devido às suas implicações físicas. Do ponto de vista numérico, é amplamente reconhecido que princípios máximos e mínimos fornecem uma ferramenta valiosa para provar os resultados de existência e unicidade de soluções discretas, reforçando a estabilidade numérica (MORTON, 1996 apud BERTOLAZZI; MANZINI, 2005). Uma variedade de métodos de elementos finitos não-lineares visando satisfazer o Princípio do Máximo Discreto (DMP) continuam sendo propostos, iniciando por Bertolazzi e Manzini (2005), que buscava a aplicação para uma equação de difusão isotrópica. Um método que preserva DMP é chamado de não oscilatório (VIDOVIĆ et al., 2013). Burman e Ern (2002) fazem uma revisão de trabalhos que investigam a existência de Princípios Máximos em métodos de discretização para Equações Diferenciais Parciais. A maior parte destes métodos destina-se a mostrar que o método dá origem a uma matriz *M-matrix* em malhas uniformes. Vale ressaltar que o problema em obter matrizes *M-matrix* também tem sido relacionado à dificuldade em controlar a positividade e a limitação dos coeficientes no método requerido para garantir a monotonicidade (HEINRICH, 1987 apud BERTOLAZZI; MANZINI, 2005).

Métodos lineares são notáveis por serem condicionalmente monótonos sob certas restrições de regularidade de malha, ou força da anisotropia (NORDBOTTEN; AAVATSMARK, 2005; NORDBOTTEN; AAVATSMARK; EIGESTAD, 2007). De acordo com Kershaw (1981), nenhum método linear com estêncil de nove pontos pode satisfazer incondicionalmente a propriedade de preservação de positividade com segunda ordem de precisão para qualquer malha quadrilateral distorcida ou para qualquer tensor de difusão, no entanto já existem métodos que produzem soluções exatas para problemas lineares. Uma solução possível para esse problema é usar um método não linear. Seguindo o trabalho pioneiro de Le Potier (2005), uma variedade de métodos não-lineares de volumes finitos que buscam garantir a positividade da solução foram propostos (KAPYRIN, 2007; YUAN; SHENG, 2008; DANILOV, 2009; LIPNIKOV; SVYATSKIY; VASSILEVSKI, 2009; QUEIROZ et al., 2014; VIDOVIĆ et al., 2014; WU; GAO, 2014; GAO; WU, 2015). Alguns métodos alcançam positividade por construção (LE POTIER, 2009; DRONIOU; LE POTIER, 2011; LIPNIKOV; SVYATSKIY; VASSILEVSKI, 2012; GAO; WU, 2013). Outros métodos empregam correções a técnicas de células centradas

(KUZMIN;SHASHKOV; SVYATSKIY, 2009; CANCÈS; CATHALA; LE POTIER, 2013; LE POTIER, 2010, 2014). Esses métodos ainda sofrem de redução de ordem de aproximação para problemas desafiadores (DRONIOU, 2014).

Bertolazzi e Manzini (2005) propõem a formatação de uma aproximação de volumes finitos que é baseada em uma extensão não-linear do método de pressão diamante. No método de pressão diamante não-linear de Bertolazzi e Manzini (2005), o gradiente de pressão em qualquer face interna é reformulado como uma média não-linear dos gradientes unilaterais, projetando pesos dependentes da solução. Aproveitando-se dessas características é possível satisfazer simultaneamente três condições importantes (BERTOLAZZI; MANZINI, 2005): garantir uma formulação conservativa centrada nas células, fornece segunda ordem de precisão na aproximação das médias entre células da solução em malhas não-estruturadas, e assegurar o DMP para um valor aproximado da solução. Destaca-se que a não-linearidade é a questão crucial na arquitetura do método, pois torna possível contornar o resultado negativo (KERSHAW, 1981) e provar a existência do DMP para a solução numérica. Um modelo não-linear que também mostrou possuir soluções precisas de segunda ordem que preserva o Princípio do Máximo Discreto semelhante foi originalmente considerado em Bertolazzi (1998), para construir operadores de matrizes *M-matrix* não-lineares.

Um desafio importante associado com métodos de discretização não-lineares é o método de interpolação necessário para a aproximação de fluxo unilateral com coeficientes não negativos. Interpolações lineares e do inverso das distâncias foram propostas em Lipnikov *et al.* (2007). Porém, métodos lineares, que não respeitam descontinuidade do material, são ineficientes em meios descontínuos e métodos não-lineares perdem consistência. Em Yuan e Sheng (2008), foi proposto um método de mínimos quadrados que admite coeficientes negativos, os quais devem ser substituídos com uma interpolação de inverso da distância para assegurar positividade. Uma abordagem livre de interpolação e baseada no reposicionamento dos centros de células foi proposta por Lipnikov; Svyatskiy e Vassilevski (2009), mas tem sua aplicação limitada a malhas com somente uma descontinuidade de interface por célula. Uma técnica de interpolação não-linear no centro das interfaces e baseada na continuidade de fluxos de dois pontos não lineares foi proposta em Danilov (2009), mas o método resulta em uma interpolação não-convexa irreduzível. Outra técnica baseada em Pontos médios harmônicos foram introduzidos por Agelas; Eymard e Herbin (2009) e posteriormente usados na construção de métodos que preservam o princípio do máximo discreto (LIPNIKOV; SVYATSKIY; VASSILEVSKI, 2012; GAO; WU, 2013).

Agelas; Eymard e Herbin (2009) propôs uma metodologia numérica centrada nas células que combina as vantagens dos métodos MPFA, como o método MPFA-L ou MPFA-O, e de métodos híbridos e pode ser usado em malhas quaisquer não-conformes. Esse método produz um estêncil de 9 pontos em malhas quadrangulares bidimensionais, e leva em conta uma matriz de difusão heterogênea. O método se baseia no uso de pontos especiais, chamados de pontos de média harmônica, localizados nas interfaces da heterogeneidade. O método é projetado utilizando pontos de média harmônica e tem as seguintes características a destacar: pode ser utilizado em qualquer malha poligonal não-conforme, é coerciva com relação a uma norma discreta adequada e, portanto, é possível provar sua convergência (AGELAS; EYMARD; HERBIN, 2009).

A principal desvantagem dos pontos harmônicos é que eles podem aparecer em qualquer lugar do plano que a interface está contida. Como resultado, estes pontos podem não formar um envoltório convexo ao redor do ponto de colocação, o que implica que interpolações estritamente positivas podem não ser possíveis. Interpolações baseadas em uma suposição de divergência zero nos nós foi proposta por Wu e Gao (2014) seguindo a abordagem de Chen *et al.* (2008), porém tal metodologia numérica de interpolação pode produzir coeficientes negativos. Um método de preservação de positividade não-linear foi proposto em Gao e Wu (2015), que permite uma interpolação com coeficientes negativos ao custo de preservação local, em meios altamente anisotrópicos ou malhas distorcidas. Entretanto, esse método não pode ser estendido para satisfazer o princípio do máximo discreto.

Sheng e Yuan (2016) também propõem uma nova estratégia para produzir soluções que garantam preservação de positividade para problemas de difusão anisotrópica. Como os procedimentos de interpolação, que no caso fazem uso de um estêncil adaptativo, podem produzir coeficientes negativos, os autores propuseram dois parâmetros não negativos adicionais na construção do fluxo unilateral. Isso evita assumir esses coeficientes como nulos ou adotar uma interpolação positiva, o que geralmente leva a uma precisão de ordem baixa. Xie *et al.* (2018) adaptou este novo método não-linear em aplicações de condução de calor para resolver problemas em domínios 2-D e 3-D, adotando um estêncil fixo para a derivação dos referidos parâmetros não negativos.

Devido a uma combinação de geometria complicada, malha distorcida e a proximidade das interfaces de materiais diferentes, algumas vezes a discretização de fluxo deve utilizar um valor de homogeneização interpolado em um local posicionado favoravelmente onde não há ponto de colocação. Em Vidović *et al.* (2013), uma função de homogeneização entre

descontinuidades de material foi proposta para permitir interpolação através de descontinuidades de material usando a pressão e o gradiente de pressão na célula. Essa estratégia foi posteriormente embutida em um método de preservação de positividade usada em Vidović *et al.*, (2014). Essa interpolação generaliza a ideia de pontos médios harmônicos para um número arbitrário de interfaces entre materiais. O método permite a interpolação em todos os pontos na maioria do domínio, preservando os princípios do máximo e mínimo.

Uma diversidade de métodos numéricos para resolver o problema do valor limite em meios anisotrópicos descontínuos foram desenvolvidos. Alguns deles foram comparados em Eymard *et al.*, (2011). Diversas metodologias numéricas (LE POTIER, 2005; DANILOV, 2009) discretizam o fluxo de uma maneira a garantir que a solução não é negativa e todos esses possuem precisão de aproximação de segunda ordem. O fluxo numérico é uma função não-linear de valores de homogeneização em pontos de colocação e, se houver, fluxos no contorno.

A aplicação desses métodos em casos particulares, depende diretamente da disposição dos pontos de colocação. Em Danilov (2009), a homogeneização é interpolada nas bordas pela média aritmética dos valores do ponto de colocação da face. Tal abordagem permite a preservação da positividade da homogeneização, mas reduz a precisão. Em Vidović; Dimkić e Pušić (2011), um método de mínimos quadrados é usado para calcular um valor de nó, que é substituído por zero se negativo. Essa abordagem garante uma precisão de segunda ordem longe das descontinuidades, mas reduz para primeira ordem em uma descontinuidade. O método apresentado em Le Potier (2009) e por Droniou e Le Potier (2011) segue a ideia de Bertolazzi (1998) e Bertolazzi e Manzini (2005) e está em conformidade com um requisito ainda mais rigoroso, não apenas preservando a não negatividade do resultado, mas também satisfazendo os princípios discretos máximo e mínimo.

A partir disso, Vidović *et al.* (2013), propôs substituir os métodos de interpolação usados em (DANILOV, 2009; LE POTIER, 2009; DRONIOU; POTIER, 2011; SHENG; YUAN, 2011; VIDOVIĆ; DIMKIĆ; PUŠIĆ, 2011) por um novo método derivado de relações físicas, que pode usar nós de interpolação em lados opostos de uma descontinuidade de material. O método utiliza uma generalização de combinações convexas e produz uma aproximação precisa de segunda ordem, mesmo quando utiliza dados em pontos de colocação pertencentes a diferentes zonas de material, desde que as interfaces do material sejam suaves. Considerações teóricas e exemplos numéricos (VIDOVIĆ *et al.*, 2013) mostram que o método não viola os princípios máximo e mínimo. O método é de segunda ordem e preciso se as interfaces do material forem suaves, caso contrário a precisão será reduzida, e pode ser usado

para interpolação em qualquer lugar no domínio, mesmo fora da casca convexa dos pontos de colocação. De forma que, esse método pode ser usado como parte de métodos de discretização para difusão anisotrópica descontínua onde estes princípios são importantes.

O método da solução numérica de um problema dependente de parâmetros é dito que exhibe “locking” se a acurácia da aproximação deteriora quando o parâmetro tende a um valor limitante (BABUŠKA; SURI, 1992). Uma extensa revisão do problema de “locking” em diversas aplicações foi conduzida em Ambroziak (2014). Em problemas diversos, o “mesh-locking” pode levar a erros significantes quando a razão de anisotropia do tensor de permeabilidade em uma única célula se torna extremamente grande, ou quando o tensor de permeabilidade varia significativamente entre as células da vizinhança. Uma técnica variacional foi proposta para resolver o problema de “locking” (HAVU; PITKÄRANTA, 2001a, 2001b). A técnica rateia a discretização ao longo da direção da maior permeabilidade, mas não pode ser usada diretamente com uma aproximação de fluxo unilateral. Outra técnica no contexto de métodos de volumes finitos foi proposta em Manzini e Putti (2007). Esse método divide o fluxo em partes normais e transversais, e divide-se o fluxo em uma parte TPFa convencional e uma parte transversal.

Em todas as estratégias não-lineares, a maior dificuldade é produzir soluções eficientes e mais rápidas, relacionadas ao método de discretização proposto, para o sistema algébrico global não-linear. A estratégia de iteração Picard costuma ser empregada devido à sua garantia de positividade. Uma estratégia híbrida Picard-Newton tem sido usada em alguns trabalhos de métodos não lineares (TEREKHOV; MALLISON; TCHELEPI, 2017) para contornar a baixa convergência do método tradicional.

Neste trabalho, estende-se a abordagem de Terekhov; Mallison e Tchelepi (2017) para o caso de polígonos não-conformes 2D e tensores de difusão heterogênea. Introduzimos um método híbrido que combina características de métodos lineares e não lineares. O método MFC-FV é uma adaptação da variante preservadora da positividade do Terekhov; Mallison e Tchelepi (2017), denominada NTPFA, que consiste em um método baseado na combinação ponderada entre dois fluxos unilaterais. A diferença proposta desse trabalho é o uso de pesos constantes na interação inicial. Neste caso, um chute inicial não é necessário e o MFC-FV assume um modo linear para o operador discreto. Em sequência, e somente após a interação linear inicial, os valores obtidos são avaliados quanto à preservação de positividade. Isso funciona como um indicador de volumes de controle problemáticos, nos quais a satisfação do critério de positividade local é violada. Caso nenhum valor que viola a positividade da solução seja detectado, a solução previamente obtida é adotada como definitiva e a

formulação continua linear. Por outro lado, quando a análise de satisfação de positividade local falha, o procedimento não-linear ocorre e caracteriza a metamorfose do método. Neste caso, os valores de solução que respeitem a positividade local com o operador linear são adotadas e ainda servirão de suporte para construção do sistema não-linear. Isso reduz o número de iterações no modo não-linear do MFC-FV quando comparado aos métodos não-lineares tradicionais, que sempre usam uma suposição inicial “não-física”.

É possível observar, resolvendo uma variedade de problemas benchmark, que para os casos de teste considerando meios isotrópicos ou levemente anisotrópicos, o método MFC-FV funciona como um método numérico linear, uma vez que o critério de positividade local é satisfeito na iteração inicial. Enquanto isso, as variantes não-lineares convencionais usadas para comparação executam necessariamente um número de iterações para alcançar a convergência. Além disso, para mais problemas desafiadores, onde o modo não linear de MFC-FV é ativado, uma convergência mais rápida das soluções é observada para nossa proposta.

1.1 OBJETIVOS

No contexto de Método dos Volumes Finitos (MVF), a presente dissertação se concentra no estudo, implementação avaliação de uma formulação numérica metamórfica (MFC-FV) para a modelagem do escoamento monofásico apta a lidar com problemas de difusão em meios descontínuos anisotrópicos. Além disso, explora metodologias numéricas não-lineares, cuja importância tem crescido no campo de Simulação Numérica.

Como objetivos específicos, pode-se citar:

- Descrever detalhadamente a construção de fluxo e interpolação necessárias para resolver a metodologia numérica não-linear NTPFA-B proposto por Terekhov *et al.* (2017);
- Descrever a proposta do método MFC-FV, esclarecendo quando o método funciona como método linear e quando funciona como método não-linear;
- Avaliar a acurácia e a eficiência da formulação proposta.

1.2 ORGANIZAÇÃO GERAL DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação foi organizada em sete capítulos. No capítulo atual foi feita uma resumida contextualização de métodos não-lineares em problemas de difusão em meios descontínuos e anisotrópicos, com as metodologias desenvolvidas para a abordagem dos mesmos e os objetivos do referido trabalho.

No segundo capítulo é abordada a formulação matemática que representa os fenômenos físicos a serem considerados, rapidamente descrevendo as equações de escoamento monofásico utilizadas nesse trabalho.

O capítulo três se refere à formulação numérica, onde será apresentada a combinação não-linear para o método NTPFA-B proposto por Terekhov; Mallison e Tchelepi (2017), em seguida apresentando o Método Metamórfico, proposto nesse trabalho, e como funciona seu modo linear e não-linear.

No capítulo quatro, serão apresentadas aplicações do método estudado, incluindo comparativos com resultados disponíveis na literatura, bem como com a discussão acerca dos resultados observados

No capítulo cinco, são apresentadas as conclusões obtidas a partir do presente trabalho e são feitas sugestões para trabalhos futuros.

No último capítulo é apresentada a bibliografia utilizada neste trabalho.

2 MODELO MATEMÁTICO

No presente capítulo são brevemente apresentados conceitos fundamentais, necessários ao entendimento do fenômeno simulado, e as equações governantes do escoamento monofásico em meios porosos, juntamente com as aproximações e hipóteses do modelo adotado

Considere o domínio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com limite Γ e volume V_Ω onde o problema de difusão em estado estacionário é governado pela seguinte Equação Diferencial Parcial elíptica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} = Q(x) \quad (2.1)$$

onde $x = (x, y)$, na qual Q representa um termo fonte/sumidouro e o fluxo $\vec{\mathcal{F}}$ pode representar a Lei de Fourier para condução de calor, a Lei de Darcy para meios porosos (BEAR, 1988)(BEAR, 1988)(BEAR, 1988)(BEAR, 1988)(BEAR, 1988)(BEAR, 1988) ou a Lei de Fick para difusão:

$$\vec{\mathcal{F}} = -\mathbb{K}(x) \vec{\nabla} u \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), chega-se a:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\mathbb{K} \vec{\nabla} u) = Q(x) \quad (2.3)$$

onde u se refere à eventual variável escalar (pressão, temperatura, etc.), e $\mathbb{K}$ é o tensor de difusão é representado da seguinte forma em coordenadas cartesianas:

$$\mathbb{K}(x) = \mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

que é uma matriz simétrica definida positiva que pode ser descontínua através do domínio aberto Ω com limite $\partial\Omega$.

O contorno Γ é composto por dois limites não sobrepostos $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde as condições de Dirichlet, Γ_D e Neumann, Γ_N , são impostas, respectivamente, como segue:

$$u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad (2.5)$$

$$-K \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = g_N(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \quad (2.6)$$

onde h é o coeficiente convectivo de transferência de calor ou massa em Γ_R , u_∞ é a variável ambiental conhecida e $\vec{n}$ é o vetor normal unitário externo aos limites de Neumann. Os parâmetros $g_D(\mathbf{x})$ e $g_N(\mathbf{x})$ são funções prescritas conhecidas, atribuídas, respectivamente, nos limites de Dirichlet e Neumann.

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

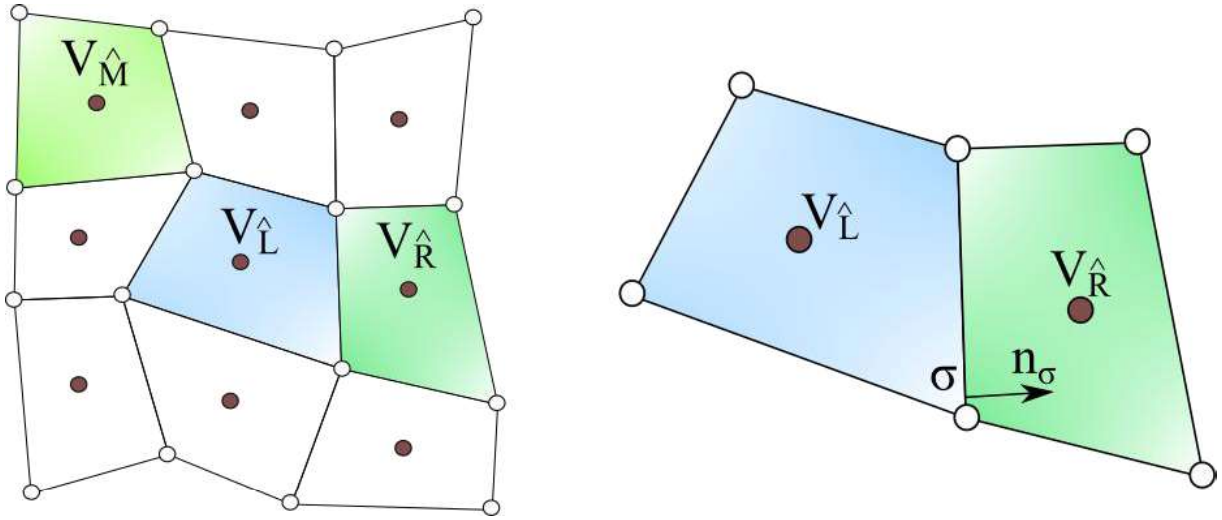
Um modelo matemático muito complexo, como normalmente ocorre em simulação de reservatórios de petróleo, se faz necessária a utilização de formulações numéricas para a solução do problema proposto, já que a solução analítica só é obtida sob condições muito restritivas (CHEN; HUAN; MA, 2006; SOUZA, 2015). A forte não linearidade presente na equação de transporte e no seu acoplamento com a equação de pressão também constitui um desafio do ponto de vista numérico (SOUZA, 2015).

Neste capítulo serão apresentadas as metodologias numéricas utilizados para a solução do modelo matemático descrito no capítulo anterior. É aplicada em todas as aproximações um tratamento embasado no Método de Volumes Finitos (MALISKA, 2004). A estratégia para tratar o acoplamento entre as equações de transporte e de pressão é discutida, e na sequência, as estratégias numéricas empregadas na resolução dessas equações são apresentadas.

3.1 FORMULAÇÃO NUMÉRICA NÃO-LINEAR, TEREKHOV ET AL. (2017)

No trabalho de Terekhov *et al.* (2017) é proposto uma formulação focada em métodos de discretização localmente conservativos, centrado nas células Figura 1, para a equação de pressão de fluxo incompressível monofásico. São apresentados dois novos métodos de volumes finitos não-lineares que satisfazem a positividade da solução ou o princípio do máximo discreto.

Figura 1 - Exemplo de domínio discretizado (a) Indicação de um volume de controle arbitrário $V_{\hat{M}}$ com limite $\Gamma_{\hat{M}}$ (b) detalhe de volumes de controle $V_{\hat{L}}$ e $V_{\hat{R}}$ que compartilham a mesma interface σ .



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

O domínio Ω é decomposto em uma malha poligonal, e $\mathbb{K}$ é um tensor de difusão simétrico, definido-positivo, para cada polígono V . Considerando uma variável desconhecida, p_h , por célula V considerada em algum ponto de colocação no centro do volume de controle.

Integrando sobre o volume do polígono, com a normal unitária $\vec{n}$ orientada para fora de V , e aplicando a fórmula de Stokes (GUIDORIZZI, 1985) à equação (2.3) para um problema de pressão, obtém-se:

$$-\int_{\partial V} \mathbb{K} \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} dS = - \sum_{\sigma_i \in \partial V} \int_{\sigma_i} \mathbb{K} \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} dS = \int_V Q dx \quad (3.1)$$

onde σ é a interface entre dois volumes de controle respectivos

Usando uma aproximação de segunda ordem para a integral de fluxo e assumindo que a pressão p é linear em cada célula V , obtém-se a seguinte relação na interface da célula:

$$-\sum_{\sigma_i} \mathcal{F}_{\sigma_i} |\sigma_i| = - \sum_{\sigma_i} \mathbb{K} \vec{\nabla}_h p \cdot \vec{n} |\sigma_i| = \int_V Q dx \quad (3.2)$$

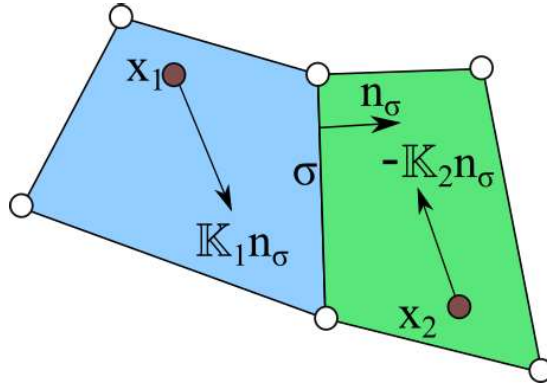
Uma aplicação do Método dos Volumes Finitos é feita usando os fluxos $\mathcal{F}_{\sigma_i}$ sobre as interfaces σ_i e seu balanço em (3.2), na qual, $\vec{\nabla}_h p$ é uma aproximação discreta do gradiente

de pressão $\vec{\nabla}p$. Como o tensor de difusão $\mathbb{K}$ é simétrico, é possível reescrever o fluxo $\mathcal{F}_{\sigma_i}$ através de uma face como:

$$\mathcal{F}_{\sigma_i} = \mathbb{K} \vec{\nabla}_h p \cdot \vec{n} = \vec{\nabla}_h p \cdot \mathbb{K} \vec{n} \quad (3.3)$$

Demonstrando que, para calcular o fluxo $\mathcal{F}_{\sigma_i}$ através da interface σ_i , é possível aproximar o gradiente de pressão $\vec{\nabla}_h p$ ao longo da co-normal, representada por $\mathbb{K} \vec{n}$, como apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Fluxo ao longo da co-normal



Fonte: Adaptado de Terekhov *et al.* (2017).

Seja σ uma interface comum para dois poliedros, V_1 e V_2 com a normal unitária, $\vec{n}_\sigma$, direcionada de V_1 a V_2 ; $\mathbb{K}_1$ é o tensor de difusão da célula V_1 , $\vec{\nabla}_1 p$ é um gradiente discreto de pressão em uma determinada célula V_1 , conforme ilustrado na Figura 2. O fluxo unilateral $\mathcal{F}_B^1$ através da interface σ na célula V_1 é expresso como:

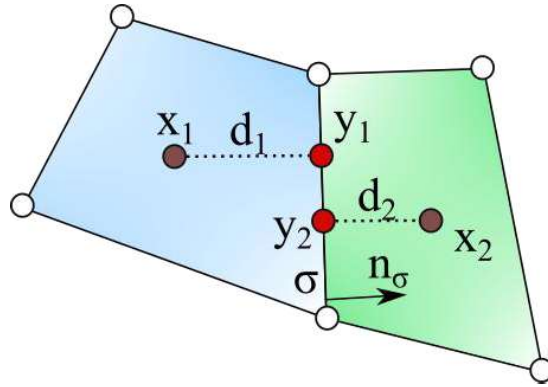
$$\mathcal{F}_B^1 = \vec{\nabla}_1 p \cdot \mathbb{K}_1 \vec{n}_\sigma \quad (3.4)$$

A nomenclatura própria do trabalho de Terekhov *et al.* (2017) denomina esse método numérico de método de Fluxo B.

3.1.1 Divisão de Fluxo

Assumindo que $\mathbb{K}_2$ seja o tensor de difusão para a célula V_2 . São atribuídas duas pressões de colocação p_1 e p_2 nos pontos de colocação $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ nos poliedros V_1 e V_2 , respectivamente (Figura 3). Utilizando projeções dos pontos de colocação, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 + d_1 \vec{n}_\sigma$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 + d_2 \vec{n}_\sigma$ em determinada interface σ^* um plano definido por $\vec{n}_\sigma$ e algum ponto em σ , com d igual distância entre o ponto de colocação $\mathbf{x}$ e a interface σ .

Figura 3- Definição das variáveis geométricas



Fonte: Adaptado de Terekhov *et al.* (2017).

Após a derivação dos pontos de harmônicos (Agelas *et al.*, 2009) é imposta a continuidade do fluxo $\mathcal{F}_\sigma$ no plano σ^* usando a equação (3.3) e a continuidade da pressão p em determinado ponto harmônico na interface, $\mathbf{x}_\sigma \in \sigma^*$:

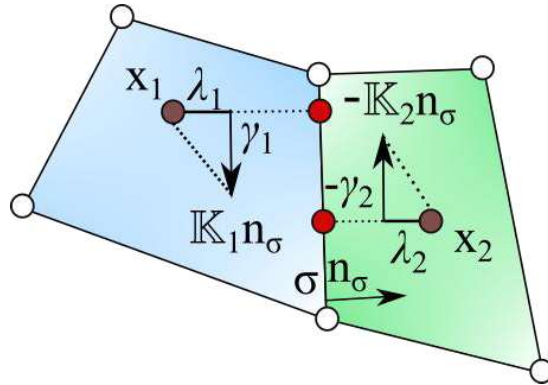
$$\nabla_1 p \cdot \mathbb{K}_1 \vec{n}_\sigma = \nabla_2 p \cdot \mathbb{K}_2 \vec{n}_\sigma \quad (3.5)$$

$$p_1 + \nabla_1 p \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_1) = p_2 + \nabla_2 p \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_\sigma \in \sigma^*. \quad (3.6)$$

no qual, gradientes de pressão p são assumidos como constantes em cada célula. O gradiente é então decomposto em partes normais e tangenciais para V_1 e V_2 da seguinte forma:

$$\nabla_1 p = q_1 \vec{n}_\sigma + \vec{g}_1, \quad \nabla_2 p = q_2 \vec{n}_\sigma + \vec{g}_2. \quad (3.7)$$

Figura 4 - Decomposição da co-normal em partes tangenciais e normais



Fonte: Adaptado de Terekhov *et al.* (2017).

De maneira similar, um vetor co-normal pode ser decomposto (Figura 4) em duas partes ortogonais:

$$\mathbb{K} \vec{n}_\sigma = \lambda \vec{n}_\sigma + \vec{\gamma} \quad (3.8)$$

Pode-se definir λ e $\vec{\gamma}$ para algum tensor $\mathbb{K}$ como segue:

$$\lambda = \vec{n}_\sigma \cdot \mathbb{K} \vec{n}_\sigma, \quad \vec{\gamma} = (\mathbb{K} - \lambda \mathbb{I}) \vec{n}_\sigma. \quad (3.9)$$

onde, $\vec{\gamma}$ deve ser coplanar a interface σ^* e ortogonal em relação a normal $\vec{n}_\sigma$.

Usando as equações (3.7) e (3.9), é possível reescrever (3.5) e (3.6) como:

$$\lambda_1 q_1 + \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{g}_\sigma = \lambda_2 q_2 + \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{g}_\sigma, \quad (3.10)$$

$$p_1 + q_1 d_1 + \vec{g}_\sigma \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{y}_1) = p_2 + q_2 d_2 + \vec{g}_\sigma \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{y}_2), \quad \forall \mathbf{x}_\sigma \in \sigma^* \quad (3.11)$$

Explicitando q_2 na equação de (3.11), obtém-se:

$$q_2 = \frac{p_2 - p_1}{d_2} - q_1 \frac{d_1}{d_2} + \vec{g}_\sigma \cdot \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2}{d_2}. \quad (3.12)$$

Usando (3.12), é possível representar q_1 da equação (3.10) na seguinte forma:

$$q_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} (p_2 - p_1) + \vec{g}_\sigma \frac{\lambda_2 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + d_2 (\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2)}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} \quad (3.13)$$

Manipulando algebricamente a equação (3.10) com a equação (3.13) é possível obter uma representação dividida do fluxo unilateral $\mathcal{F}_A^1$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A^1 &= \lambda_1 q_1 + \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{g}_\sigma = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} (p_2 - p_1) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \lambda_1 d_2 \vec{\gamma}_2 + \lambda_2 d_1 \vec{\gamma}_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} \cdot \nabla_1 p \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.2 Interpolação

Nesta seção será apresentada a técnica de interpolação para meios heterogêneos que permite discretizar um gradiente ao longo de uma determinada direção.

Reescrevendo a equação (3.12) para começar com q_2 da equação (3.10) para chegar a:

$$q_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} q_1 + \vec{g}_\sigma \cdot \frac{\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2}{\lambda_2} \quad (3.15)$$

E em seguida, aplicando a equação (3.15) na equação (3.11):

$$p_1 + q_1 \left(d_1 + d_2 + \frac{d_2}{\lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_2) \right) + \vec{g}_\sigma \cdot \left(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 + \frac{d_2}{\lambda_2} (\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) \right) = p_2 \quad (3.16)$$

Aplicando as relações entre os pontos de colocação e a co-normal, $(d_1 + d_2) \vec{n}_\sigma + \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e $(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{n}_\sigma + (\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) = [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \vec{n}_\sigma$, e agrupando os termos ortogonais da equação (3.16), obtém-se:

$$p_1 + \nabla_1 p \cdot \left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \frac{d_2}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \vec{n}_\sigma \right) = p_2 \quad (3.17)$$

De tal forma que, para qualquer ponto $\mathbf{x}$ na célula V_2 , chega-se a seguinte equação:

$$p(\mathbf{x}) = p_1 + \nabla_1 p \cdot \left(\left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \right) \quad (3.18)$$

A única informação utilizada na equação (3.18) da célula V_2 é o tensor $\mathbb{K}_2$.

Seguindo os mesmos passos é possível construir a equação para interpolação em duas interfaces com descontinuidades. Considerando uma célula V_2 com ponto de colocação $\mathbf{x}_3$ para a pressão p_3 . Seja δ uma interface comum para V_2 e V_3 com o normal $\bar{\mathbf{n}}_\delta$ dirigida de V_2 para V_3 . Aplicando a equação (3.18), e impondo o fluxo $\mathcal{F}_\delta$ e a continuidade da pressão p em qualquer ponto na no plano δ^* , que é um plano definido pela $\bar{\mathbf{n}}_\delta$ e um ponto qualquer em δ , é possível obter as seguintes equações:

$$\tilde{\nabla}_1 p = \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right]^T \nabla_1 p \quad (3.19)$$

$$\tilde{\nabla}_1 p \cdot \mathbb{K}_2 \bar{\mathbf{n}}_\delta = \nabla_3 p \cdot \mathbb{K}_3 \bar{\mathbf{n}}_\delta \quad (3.20)$$

$$p_1 + \tilde{\nabla}_1 p \cdot (\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_1) - \nabla_1 p \cdot \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma = p_3 + \nabla_3 p \cdot (\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_1) \quad (3.21)$$

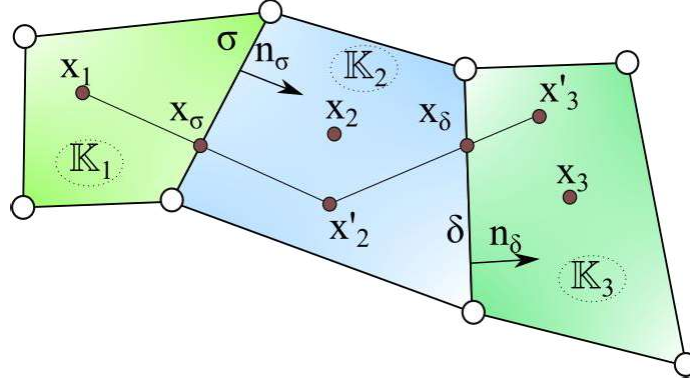
onde d_1^δ e d_3^δ são distâncias de δ^* a $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_3$, respectivamente, e $\lambda_3^\delta = \bar{\mathbf{n}}_\delta \cdot \mathbb{K}_3 \bar{\mathbf{n}}_\delta$. O sistema de equações de (3.19) a (3.21) é semelhante ao sistema de equações de (3.5) e (3.6). Ao decompor os gradientes $\tilde{\nabla}_1 p$, $\nabla_3 p$ e as co-normais $\mathbb{K}_2 \bar{\mathbf{n}}_\delta$, $\mathbb{K}_3 \bar{\mathbf{n}}_\delta$ em partes normais e tangenciais e, em seguida, repetindo as etapas descritas anteriormente nas equações (3.15) a (3.18), é possível expressar a equação de (3.21) sem o gradiente $\nabla_3 p$:

$$p_1 + \tilde{\nabla}_1 p \cdot \left(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 + \frac{d_3^\delta}{\lambda_3^\delta} [\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3] \bar{\mathbf{n}}_\delta \right) - \nabla_1 p \cdot \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma = p_3 \quad (3.22)$$

que é uma interpolação para qualquer ponto $\mathbf{x}$ em V_3 :

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= p_1 + \nabla_1 p \cdot \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_3^\delta} [\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3] \bar{\mathbf{n}}_\delta \bar{\mathbf{n}}_\delta^T \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \\
&\quad - \nabla_1 p \cdot \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] \frac{d_1^\delta}{\lambda_3^\delta} [\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3] \bar{\mathbf{n}}_\delta \\
&\quad - \nabla_1 p \cdot \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Figura 5 - Homogeneização através de duas interfaces



Fonte: Adaptado de Terekhov *et al.* (2017).

Assim, as expressões (3.18) e (3.23) introduzem a função de homogeneização para uma interface com descontinuidade, $H_{1,2}^\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \forall \mathbf{x} \in V_2$, e para duas interfaces com descontinuidade, $H_{1,3}^{\sigma,\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \forall \mathbf{x} \in V_3$, indicado na Figura 5, da seguinte forma:

$$H_{1,2}^\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
H_{1,3}^{\sigma,\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) &= \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_3^\delta} [\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3] \bar{\mathbf{n}}_\delta \bar{\mathbf{n}}_\delta^T \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \\
&\quad - \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma \bar{\mathbf{n}}_\sigma^T \right] \frac{d_1^\delta}{\lambda_3^\delta} [\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3] \bar{\mathbf{n}}_\delta - \frac{d_1}{\lambda_2} [\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2] \bar{\mathbf{n}}_\sigma
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.23), é possível deduzir um padrão de interpolação para três ou mais interfaces com descontinuidades. Para um conjunto de interfaces $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k\}$ e um conjunto

de volumes $\Theta = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, V_{k+1}\}$ tal que $\sigma_i = V_j \cap V_{j+1}$. A normal $\vec{n}_j$ para cada interface σ_j é direcionado da célula V_j para a célula V_{j+1} . Então, a função de homogeneização para uma quantidade $H_{1,k+1}^\Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \forall \mathbf{x} \in V_{k+1}$ pode ser escrita como:

$$H_{1,k+1}^\Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \prod_{i=1}^k \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^i} [\mathbb{K}_i - \mathbb{K}_{i+1}] \vec{n}_i \vec{n}_i^T \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^{j-1} \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^i} [\mathbb{K}_i - \mathbb{K}_{i+1}] \vec{n}_i \vec{n}_i^T \right] \right) \frac{d_1^j}{\lambda_{i+1}^j} [\mathbb{K}_j - \mathbb{K}_{j+1}] \vec{n}_j \quad (3.26)$$

onde, $\lambda_{i+1}^i = \vec{n}_i^T \cdot \mathbb{K}_{i+1} \vec{n}_i$ e $d_1^i = \vec{n}_i^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_1)$, com $\mathbf{y}_i$ representando o centro da face σ_i e $\mathbf{x}_1$ como o ponto de colocação da célula V_i . Para um meio homogêneo, $H_{1,k+1}^\Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. É importante ressaltar que a função de homogeneização pode resultar em ponto fora da respectiva célula, embora ainda produza uma interpolação de pressão consistente.

3.1.3 Discretização Unilateral de fluxo

Usando o método de interpolação e homogeneização introduzido na seção anterior, é possível obter um sistema de equações para reconstruir o gradiente de pressão $\nabla_1 p$:

$$H_{1,k+1}^\Sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1)^T \nabla_1 p = p_i - p_1 \quad \text{em } V_i. \quad (3.27)$$

no qual, V_i é uma célula com o ponto de colocação $\mathbf{x}_i$ e pressão correspondente p_i , e $H_{1,i}^\Sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1)$ é a função de homogeneização introduzida anteriormente na equação (3.26), Σ define um conjunto de interfaces que formam o caminho de V_1 a V_i . Informações de condição de contorno são incorporadas a partir das definições da equação (2.5).

Para determinada interface $\sigma_i \in V_i \cap \Gamma_D$ (Equação (2.5)) da célula V_i com ponto de colocação, $\mathbf{x}_D$, e para condição de contorno de valor prescrito (Dirichlet), utilizando a função de homogeneização $H_{1,i}^\Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$, obtém-se:

$$H_{1,i}^\Sigma(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_1)^T \nabla_1 p = g_D - p_1, \quad \text{para } \sigma \in V_i \cap \Gamma_D. \quad (3.28)$$

Na interface $\sigma_i \in V_i \cap \Gamma_N$ da célula V_i , e para condição de contorno de fluxo prescrito (Neumann), com o gradiente da função de homogeneização $\nabla H_{1,i}^\Sigma$, obtém-se:

$$\left(\nabla H_{1,i}^\Sigma \mathbb{K}_i \vec{n}_\sigma \right)^T \nabla_1 p = g_N, \quad \text{para } \sigma \in V_i \cap \Gamma_N. \quad (3.29)$$

O gradiente da função de homogeneização é uma matriz dada por:

$$\nabla H_{1,k+1}^\Sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \prod_{i=1}^k \left[\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda_{i+1}^i} [\mathbb{K}_i - \mathbb{K}_{i+1}] \vec{n}_i \vec{n}_i^T \right] \quad (3.30)$$

As equações (3.27), (3.28) ou (3.29) podem ser combinadas para formar um sistema linear:

$$\mathcal{A} \nabla_1 p = \mathcal{R}. \quad (3.31)$$

As linhas da matriz $\mathcal{A}$ são formadas pelos vetores linha $H_{1,i}^\Sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1)^T$, $H_{1,i}^\Sigma(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_1)^T$ ou $\left(\nabla H_{1,i}^\Sigma \mathbb{K}_i \vec{n}_\sigma \right)^T$ e as entradas no vetor $\mathcal{R}$ pelas expressões $p_i - p_1$, $g_D - p_1$ ou g_N . O gradiente da pressão em V_1 é obtido pelo sistema $\nabla_1 p = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{R}$, e o fluxo unilateral por $\vec{w} \cdot \nabla_1 p = \vec{w}^T \cdot \mathcal{A}^{-1} \mathcal{R}$. O vetor linha de coeficientes na aproximação unilateral de fluxo é descrito por $\vec{\omega} = \vec{w}^T \cdot \mathcal{A}^{-1}$, que será utilizado para avaliar a seleção do estêncil necessário as combinações não-lineares.

3.1.4 Seleção de estêncil

O método utiliza estêncil adaptativo, construído de forma a garantir a positividade do vetor linha $\vec{\omega} = \vec{w}^T \cdot \mathcal{A}^{-1}$, caso não seja possível definir valores positivos na vizinhança imediata do volume de controle, é construído novo estêncil com os volumes consecutivos a vizinhança inicial. Esse processo pode prosseguir indefinidamente caso não seja possível

determinar a positividade do vetor $\vec{\omega} = \vec{w}^T \cdot \mathcal{A}^{-1}$, processo que pode tornar o método muito oneroso computacionalmente.

3.1.5 Combinações não lineares

Para construir as combinações não-lineares é necessário escrever a equação de fluxo (3.4) de acordo com o sistema linear (3.31), da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_B = (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{R}) \cdot \mathbb{K}_1 \vec{n}_\sigma \quad (3.32)$$

Baseando-se em vetores linha de peso:

$$\vec{c} = (\mathbb{K}_1 \vec{n}_\sigma) \mathcal{A}^{-1} \quad (3.33)$$

É possível reorganizar a equação de fluxo interfacial na seguinte forma:

$$\mathcal{F}_B^1 = \vec{c} \cdot \mathcal{R}. \quad (3.34)$$

Assumindo que o fluxo $\mathcal{F}_\sigma$ pode ser definido como uma combinação dos fluxos com dois parâmetros μ_1 e μ_2 satisfazendo $\mu_1 + \mu_2 = 1$:

$$\mathcal{F}_\sigma = \mu_1 \mathcal{F}_\sigma^1 + \mu_2 \mathcal{F}_\sigma^2 \quad (3.35)$$

A escolha mais simples de pesos em (3.35) são:

$$\mu_1 = \mu_2 = 1/2 \quad (3.36)$$

O que leva a um método MPFA linear sem qualquer garantia de positividade da solução, ou satisfação do princípio máximo discreto.

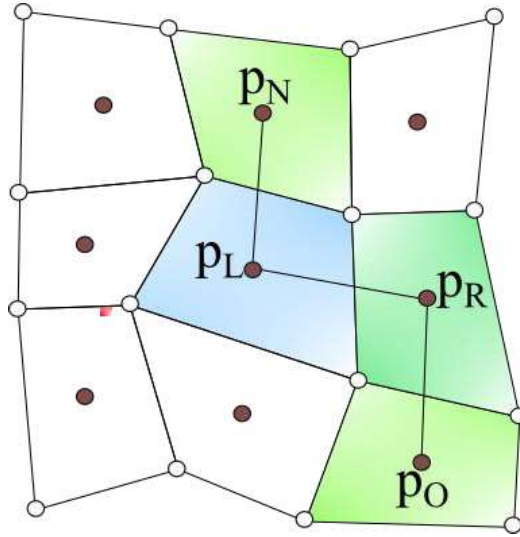
3.1.6 Combinação não linear para a não negatividade da solução (NTPFA)

Para garantir a não negatividade da solução, busca-se uma aproximação da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_\sigma = \mathbb{T}_2(p) p_2 - \mathbb{T}_1(p) p_1 \quad (3.37)$$

com $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_2$ não negativos.

Figura 6 - Exemplo de posição relativas para construção da combinação de Fluxos



Fonte: O Autor (2018).

Como exemplo ilustrativo será usado o domínio da Figura 6. Utilizando a equação (3.34) é possível reconstruir o fluxo interfacial a partir do volume com pressão p_L da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_L = \begin{Bmatrix} (p_L - p_R) \\ (p_L - p_N) \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathcal{F}_{\sigma,1} = c_1^L (p_L - p_R) + c_2^L (p_L - p_N) \quad (3.39)$$

Para o fluxo interfacial a partir do volume do volume com pressão p_R :

$$\mathcal{R}_R = \begin{Bmatrix} (p_L - p_R) \\ (p_O - p_R) \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{F}_{\sigma,2} = c_1^R (p_L - p_R) + c_2^R (p_O - p_R) \quad (3.41)$$

Com isso, é possível construir o fluxo interface da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\sigma = & \mu_1 \left[c_1^L (p_L - p_R) + c_2^L (p_L - p_N) \right] \\ & + \mu_2 \left[c_1^R (p_L - p_R) + c_2^R (p_O - p_R) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Reorganizando a equação, chega-se na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\sigma = & \left(\mu_1 (c_1^L + c_2^L) + \mu_2 (c_1^R) \right) p_L \\ & - \left(\mu_1 (c_1^L) + \mu_2 (c_1^R + c_2^R) \right) p_R \\ & - \mu_1 c_2^L p_N + \mu_2 c_2^R p_O \end{aligned} \quad (3.43)$$

Seja $r_1 = c_2^R p_N$ e $r_2 = c_2^R p_O$. Para eliminar o resto $\mu_1 r_1 - \mu_2 r_2$ gerado na equação (3.37), escolhe-se os pesos μ_1 e μ_2 tais que:

$$\mu_1 = \frac{r_2 + \varepsilon}{r_1 + r_2 + 2\varepsilon} \quad (3.44)$$

$$\mu_2 = \frac{r_1 + \varepsilon}{r_1 + r_2 + 2\varepsilon} \quad (3.45)$$

onde, $\varepsilon = 10^{-16}$ é um parâmetro de regularização de precisão da máquina para que $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ quando r_1 e r_2 são zero.

Substituindo os valores de r_1 e r_2 :

$$\mu_1 = \frac{c_2^R p_O}{c_2^R p_N + c_2^R p_O} \quad (3.46)$$

$$\mu_2 = \frac{c_2^R p_N}{c_2^R p_N + c_2^R p_O} \quad (3.47)$$

Restando:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\sigma = & \left(\mu_1 (c_1^L + c_2^L) + \mu_2 (c_1^R) \right) p_L \\ & - \left(\mu_1 (c_1^L) + \mu_2 (c_1^R + c_2^R) \right) p_R \end{aligned} \quad (3.48)$$

Mantendo constantes μ_1 e μ_2 , a matriz será:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & -\mathbb{T}_2 \\ -\mathbb{T}_1 & \mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Isso resulta em uma matriz **M**-matrix com somas de coluna não negativas. A solução do sistema produz uma solução positiva para qualquer termo fonte/sumidouro positivo (VARGA, 1999).

O método NTPFA-B é construído pela formulação não-linear apresentada acima utilizando a equação de fluxo (3.4).

3.2 FORMULAÇÃO METAMÓRFICA

O objetivo deste trabalho é propor uma nova metodologia numérica a partir da formulação proposta por Terekhov *et al.* (2017). Esse novo método será denominado nesse texto como método Metamórfico de Fluxo Contínuo em Volumes Finitos (MFC-FV). O método Metamórfico visa lidar com volumes de controle problemáticos em problemas de transporte, de forma que seja possível utilizar sistemas algébricos reorganizados para serem resolvidos, sempre que possível, como metodologias numéricas lineares antes de utilizar-se sistemas não-lineares.

Antes de tudo, é importante destacar que o MFC-CV não está limitado a Formulação proposta por Terekhov *et al.* (2017), pode ser aplicado em qualquer formulação não-linear, e com qualquer método iterativo. O esperado dessa metodologia numérica é alcançar uma minimização no número de iterações em comparação a outros métodos não-lineares.

No escopo desse trabalho a formulação metamórfica seguirá processo semelhante a formulação proposta por Terekhov *et al.* (2017) até a etapa de satisfação de positividade do vetor $\vec{\omega}$. Caso o estêncil satisfaça essa condição a etapa seguinte é a construir a variante linear para resolver a equação de fluxo (3.35).

Caso a variante linear respeite a condição local de positividade para todos os elementos, o campo de pressões resultante será o considerado. Caso contrário, inicia-se a variante não-linear do método, até todos os valores no campo de pressão serem positivos. Foi utilizado um método iterativo de Picard no módulo não-linear com tolerância de $\text{tol}=10^{-6}$.

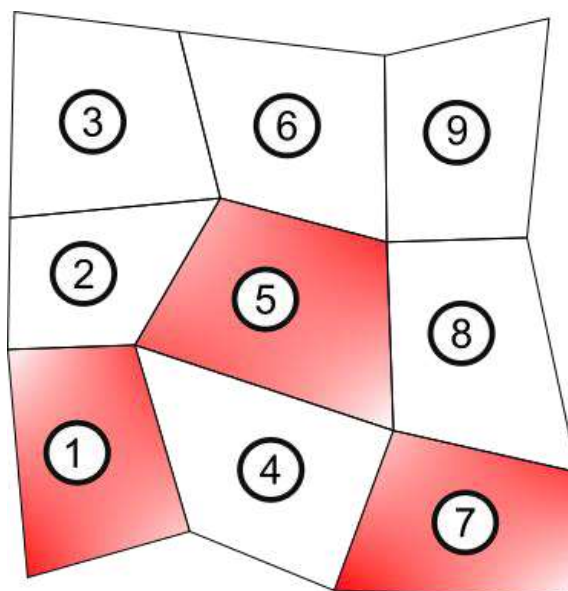
A formulação metamórfica pode ser descrita de acordo com os seguintes passos:

- 1) Pré-processa os coeficientes para os fluxos da equação (3.35);
- 2) Caso não se tenha positividade nos coeficientes do vetor $\vec{\omega}$ nos volumes utilizados para construção primeira camada, busca-se outro estêncil, adicionando os volumes vizinhos a camada anterior;
- 3) Uma vez que se obtém os coeficientes positivos para o vetor $\vec{\omega}$, resolve-se o método metamórfico no modo linear ($\mu_1 = \mu_2 = 1/2$) ((3.36)).
- 4) Uma vez que a matriz resultante não é necessariamente **M**-matrix, soluções para o campo de pressões com negatividade podem ocorrer;
- 5) Avalia a existência de valores negativos na solução para o campo de pressões (apenas na primeira iteração);

- 6) Entra no modo não-linear para resolver apenas os fluxos nos volumes de controle com valores negativos “problemáticos” usando como suporte valores que satisfizeram a positividade no modo linear, como será exemplificado na Figura 8, Figura 9 e Figura 10 e generalizada na equação (3.50) ;
- 7) Define com estimativa inicial para o modo não-linear valores maiores que ou igual a zero (≥ 0), nesse trabalho arbitrou-se como valor de estimativa inicial no modo não-linear, o valor máximo dentre as pressões positivas, nos volumes não-problemáticos, obtidas na etapa linear do método;
- 8) Monta-se um novo sistema algébrico apenas para os volumes de controle problemáticos usando como valor conhecido, as pressões que satisfizeram a positividade, que nesse caso, irão para o vetor de termos conhecidos.

A seguir é apresentando um exemplo para ilustrar a construção das matrizes para a solução do campo de pressões quando o método entra no modo não-linear. Na Figura 7, os volumes 1, 5 e 7 são “problemáticos” pois não satisfizeram a condição local de positividade.

Figura 7 - Exemplo de malha com volumes "problemáticos" (1, 5 e 7) destacados



Fonte: O Autor (2018).

Após a seleção de estêncil e da primeira iteração como um sistema linear (Passo 1 ao 4), o sistema de equações pode ser construído, destacando na figura acima (Figura 7) os volumes que tiveram valores de pressão negativos (Passo 5), p_1^* , p_5^* e p_7^* , enquanto os demais

volumes representam os valores de pressão com positividade local, convergidos no sistema linear.

Os valores de pressão negativos serão utilizados na construção de um novo sistema não-linear (Passo 6). Separando os coeficientes relativos aos volumes não-convergid, é construído um novo sistema algébrico que utilizará valores conhecidos e convergid (Figura 8) (Passo 7) como suporte de um sistema não-linear exemplificando na Figura 11 (Passo 8) até todos os valores no campo de pressão serem positivos.

Figura 8 - Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 1

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^* & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & a_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & a_{5,4} & a_{5,5}^* & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & 0 & 0 & a_{6,9} \\ 0 & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & 0 & a_{7,7}^* & a_{7,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,5} & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,6} & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5^* \\ p_6 \\ p_7^* \\ p_8 \\ p_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_1 = b_1 - (a_{1,2} \ a_{1,4}) \begin{pmatrix} p_2 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Fonte: O Autor (2018).

Figura 9 - Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 5

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^* & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & a_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & a_{5,4} & a_{5,5}^* & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & 0 & 0 & a_{6,9} \\ 0 & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & 0 & a_{7,7}^* & a_{7,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,5} & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,6} & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5^* \\ p_6 \\ p_7^* \\ p_8 \\ p_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_5 = b_5 - (a_{5,2} \ a_{5,4} \ a_{5,6} \ a_{5,8}) \begin{pmatrix} p_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ p_8 \end{pmatrix}$$

Fonte: O Autor (2018).

Figura 10 - Esquema de escolha e cálculo de valores de suporte para a construção do sistema não-linear para o volume de controle problemático 7

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^* & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & a_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & a_{5,4} & a_{5,5}^* & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & 0 & 0 & a_{6,9} \\ 0 & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & 0 & a_{7,8}^* & a_{7,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,5} & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,6} & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5^* \\ p_6 \\ p_7^* \\ p_8 \\ p_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_7 = b_7 - (a_{7,4} \ a_{7,8}) \begin{pmatrix} p_4 \\ p_8 \end{pmatrix}$$

Fonte: O Autor (2018).

A equação que utiliza os valores convergidos como suporte que pode ser generalizada da seguinte forma:

$$\hat{b}_i = b_i^* - \sum_{i=1}^D a_i p_i \quad (3.50)$$

Onde b são termos conhecidos, D indica os coeficientes a e pressões p relativos aos volumes de controle com pressões desconhecidas

Figura 11 - Esquema de construção da nova matriz para solução do modo não-linear

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^* & a_{1,2} & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & a_{4,6} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & a_{5,4} & a_{5,5}^* & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & 0 & 0 & a_{6,9} \\ 0 & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & 0 & a_{7,8}^* & a_{7,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,5} & 0 & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,6} & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5^* \\ p_6 \\ p_7^* \\ p_8 \\ p_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,5}^* & 0 \\ 0 & 0 & a_{7,7}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\max,\Omega} \\ p_{\max,\Omega} \\ p_{\max,\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_5 \\ \hat{b}_7 \end{pmatrix}$$

Fonte: O Autor (2018).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

A formulação numérica foi implementada de maneira acoplada ao código desenvolvido e fornecido por Souza (2015), na qual, foi adotado o software voltado para cálculo numérico Matlab, que permite a implementação dos algoritmos de análise numérica de forma direta, devido sua fácil prototipagem decorrente de sua fundamentação em operações matriciais e a disponibilidade de uma ampla biblioteca de funções (SOUZA, 2015). As malhas, que discretizam o domínio físico, foram geradas pelo software livre GMSH (GEUZAINÉ e REMACLE, 2009). A plotagem dos resultados para grandezas de campo foi realizada através do VisIt (LLNS, 2005) e para as curvas e tabelas foi utilizado o Microsoft Excel.

Nesta seção, a equação de pressão (2.19) é resolvida numericamente para cinco problemas encontrados na literatura. O primeiro caso busca validar a interpolação da Equação (3.26). Os três casos seguintes têm solução analítica conhecida, permitindo assim, avaliar para cada formulação os resultados e a taxa de convergência. O último caso é proposto com a finalidade de testar violações de positividade, sendo avaliado para um meio homogêneo, com variada anisotropia e sujeito a condições de contorno que delimitam os valores admissíveis máximo e mínimo. Os resultados do método MFC-FV foram comparados com aqueles obtidos com o método convencional TPFA, MPFA-O, e a variante do método de preservação de positividade NTPFA-B proposto por Terekhov *et al.* (2017), e tem operador não linear. Em todos os casos também foi avaliada a quantidade de iterações necessárias para os métodos não-lineares, com objetivo de comparar a eficiência do método NTPFA-B ao método MFC-FV.

Para os problemas cujo objetivo é verificar a convergência da formulação, é necessário avaliar os erros nos campos de pressão e vazão, em relação a valores de referência. A norma $L2(E_{L_2})$ é empregada na quantificação desses erros (Carvalho, 2005 e Souza, 2015):

$$E_{L_2}^u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{VC}} (u(\vec{x}) - \hat{u})^2 V_i}{\sum_{i=1}^{N_{VC}} V_i}} \quad (4.1)$$

onde $u(\vec{x})$ e $\hat{u}$ são os valores da pressão ou velocidade, calculados em cada ponto de colocação $\vec{x}$, obtidos por meio das soluções analítica e numérica, respectivamente. O

parâmetro V_i é o volume de cada volume de controle i onde a solução é avaliada. $E_{L_2}^p$ e $E_{L_2}^{v \cdot \vec{N}}$ serão os erros nos campos de pressão e vazão, respectivamente.

As taxas de convergência nas aproximações numéricas dos campos de pressão e velocidade R_u , são calculadas, como em Souza (2015):

$$R_u = \frac{\log \left[E_{L_1}^u(h_2) / E_{L_1}^u(h_1) \right]}{\log(h_2/h_1)} \quad (4.2)$$

onde h é o tamanho médio do volume de controle em cada direção (x e y), e aproximadamente equivalente ao tamanho do domínio em cada direção coordenada, dividido pelo número de subdivisões adotado. $R_{L_2}^p$ e $R_{L_2}^{v \cdot \vec{N}}$ serão as taxas de convergência nos campos de pressão e vazão, respectivamente.

4.1 TESTE DE INTERPOLAÇÃO EM BARREIRA OBLÍQUA

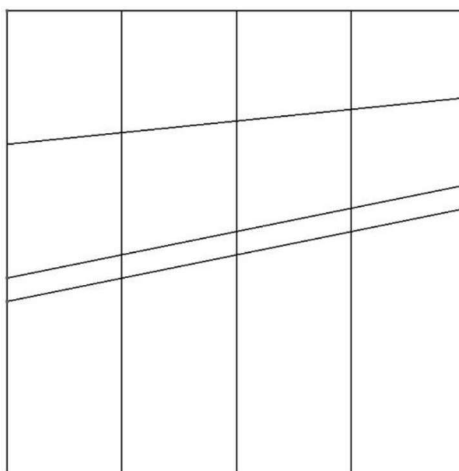
Para validar a interpolação, utiliza-se um teste de barreira oblíqua encontrado em Herbin e Hubert (2008). A solução deve ser satisfeita para qualquer resolução de malha, seja utilizando os métodos MPFA, NTPFA-B ou MFC-FV.

O domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ é decomposto em três subdomínios:

$$p(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x, y) < 0 \\ \varphi_1(x, y) > 0, \varphi_2(x, y) < 0; \\ \varphi_2(x, y) > 0 \end{cases} \quad \mathbb{K} = \begin{cases} 1 \\ 0, 0.1; \\ 1 \end{cases} \quad (x, y) \in \begin{cases} -\varphi_1(x, y) \\ -100\varphi_1(x, y) + 5, 5 \\ -\varphi_2(x, y) + 5, 5 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\varphi_1(x, y) = y - 0,2x - 0,375$ e $\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, y) - 0,05$, com condições de contorno de valor prescrito (Dirichlet), e o valor calculado pela seguinte relação: $\Gamma_D = \partial\Omega$, com $g_D(x, y) = p(x, y)|_{x, y \in \partial\Omega}$. O problema foi resolvido utilizando a seguinte malha quadrangular 4x4 (Figura 12):

Figura 12 - Malha quadrangular utilizada para o teste da Interpolação em barreira oblíqua.



Fonte: Adaptado de Terekhov *et. al.* (2017).

Todos os métodos, com exceção do TPFA, estão de acordo com a solução analítica, pois os erros apresentaram valores da ordem 10^{-13} a 10^{-15} (Tabela 1), indicando zero de máquina. Enquanto o método NTPFA-B necessitou de 10 iterações para seu sistema não-linear, o método MFC-FV convergiu na etapa linear, não necessitando de iterações não-lineares.

Tabela 1 - Erros de Pressão e Velocidade e número de Iterações para o teste da Interpolação em barreira oblíqua

	TPFA	MPFA-O	NTPFA-B	MFC-FV
$E_{l_2}^p$	6,24E-04	1,53E-15	2,32E-14	1,87E-14
$E_{l_2}^{\vec{v}, \vec{N}}$	1,47E-03	1,11E-14	1,26E-13	2,34E-13
Nº de iter.	---	---	10	---

Fonte: O Autor (2018).

4.2 TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MATERIAL HOMOGENEO COM ANISOTROPIA LEVE (CRUMPTON ET AL., 1995)

Com o objetivo de verificar a convergência da formulação Metamórfica em comparação com outros métodos, foi avaliado o erro da solução numérica, em relação a solução analítica, além do número de iterações para os métodos não-lineares, no problema de escoamento monofásico em material homogêneo e levemente anisotrópico proposto por Crumpton *et al.*, (1995 apud Carvalho, 2005). O domínio consiste em um quadrado unitário

com dimensões $\Omega \in [0,1] \times [0,1]$ representado em malhas quadrangulares com subdivisões de 8x8, 16x16 (Figura 13), 32x32, 64x64 e 128x128 elementos.

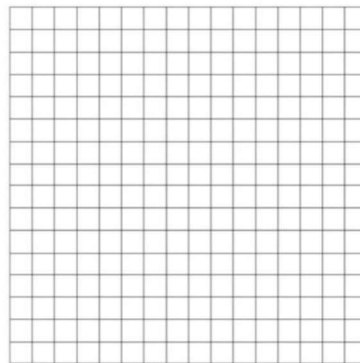
O tensor de difusão é dado por:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

A solução exata para o problema é $p(x,y) = e^{xy}$ (CRUMPTON *et al.*, 1995 apud CARVALHO, 2005).

A taxa de convergência da pressão e de fluxo, valores mínimos e máximos de pressão, e número de iterações são comparadas para diferentes métodos e diferentes subdivisões de malha na Tabela 2. Gráficos comparativos com os respectivos erros de pressão e velocidades são apresentados na Figura 14. Em todas as tabelas com resultados de erro e convergência, o número na parte superior indica o número de repetições de padrões nas malhas em cada direção.

Figura 13 - Escoamento monofásico em material homogêneo: Exemplo de malha quadrangular utilizada na solução (com 16x16 subdivisões)



Fonte: O Autor (2018).

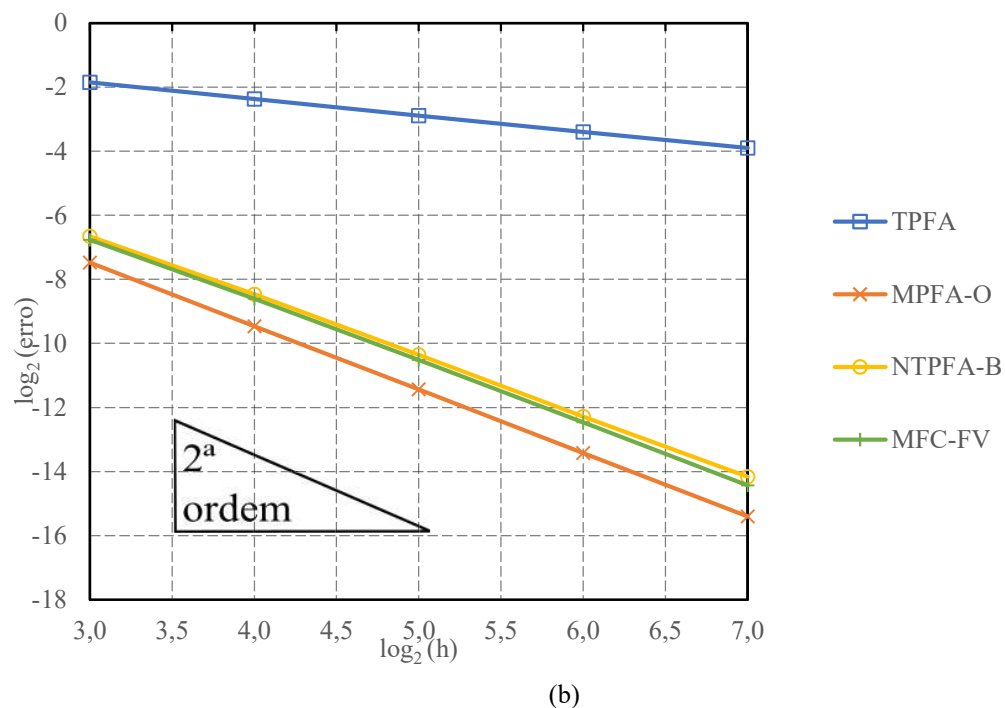
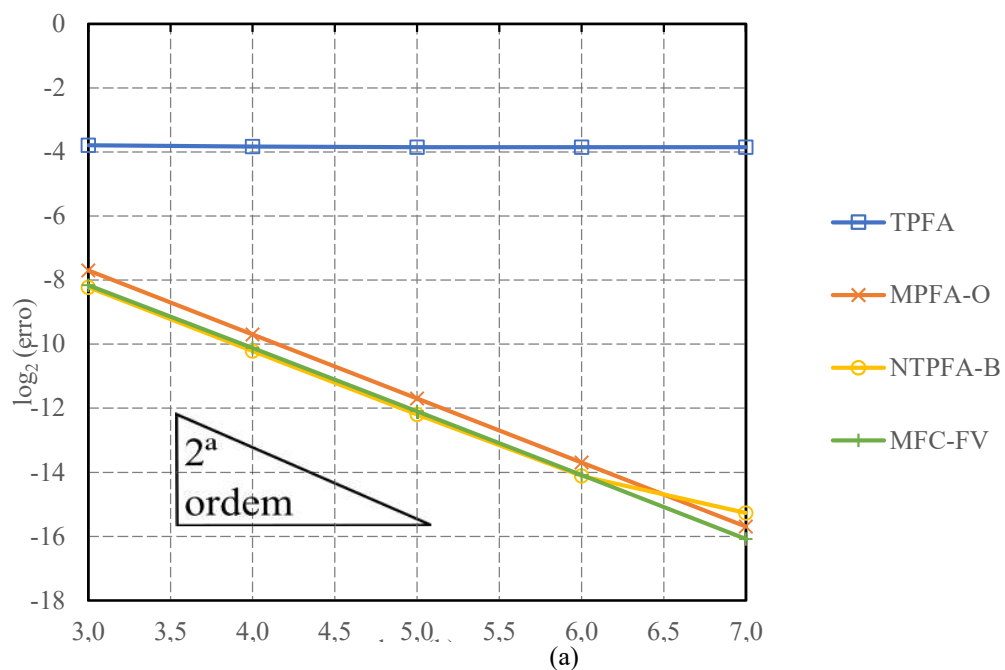
De acordo com a Tabela 2 é possível verificar como o método MPFA-O obteve os melhores valores de convergência, chegando a segunda ordem para pressão em todos os casos. O método MFC-FV tem taxas de convergência bem próximas a segunda ordem sem entrar no modo não-linear. Enquanto o método NTPFA-B produziu resultados decrescentes de convergência mesmo exigindo iterações não-lineares. Como esperado, taxas de convergência do TPFA são muito baixas.

Tabela 2 - Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV

Esquema Numérico	Erro, T.C. e N.I.	8x8	16x16	32x32	64x64	128x128
TPFA	$E_{l_2}^p$	7,24E-02	7,01E-02	6,96E-02	6,94E-02	6,94E-02
	$R_{l_2}^p$	---	4,58E-02	1,12E-02	2,91E-03	6,24E-04
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	2,78E-01	1,93E-01	1,35E-01	9,50E-02	6,69E-02
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	5,23E-01	5,16E-01	5,09E-01	5,05E-01
	$p_{\max}$	2,3784	2,5462	2,6322	2,6754	2,6969
	$p_{\min}$	0,9931	0,9929	0,9931	0,9932	0,9932
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
MPFA-O	$E_{l_2}^p$	4,82E-03	1,21E-03	3,02E-04	7,54E-05	1,88E-05
	$R_{l_2}^p$	---	2,00	2,00	2,00	2,00
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	5,61E-03	1,42E-03	3,60E-04	9,13E-05	2,30E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,98	1,98	1,98	1,99
	$p_{\max}$	2,3953	2,5525	2,6343	2,6761	2,6971
	$p_{\min}$	1,0018	1,0005	1,0001	1,0000	1,0000
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
NTPFA-B	$E_{l_2}^p$	3,35E-03	8,43E-04	2,13E-04	5,63E-05	2,53E-05
	$R_{l_2}^p$	---	1,99	1,98	1,92	1,15
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	9,92E-03	2,83E-03	7,65E-04	2,00E-04	5,45E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,81	1,89	1,93	1,88
	$p_{\max}$	2,4010	2,5534	2,6347	2,6762	2,6971
	$p_{\min}$	1,0018	1,0005	1,0001	1,0000	1,0000
	Nº de iter.	10	11	11	11	10
MFC-FV	$E_{l_2}^p$	3,50E-03	9,01E-04	2,28E-04	5,74E-05	1,44E-05
	$R_{l_2}^p$	---	1,96	1,98	1,99	2,00
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	9,19E-03	2,56E-03	6,82E-04	1,77E-04	4,53E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,85	1,91	1,94	1,97
	$p_{\max}$	2,4007	2,5539	2,6347	2,6762	2,6971
	$p_{\min}$	1,0021	1,0005	1,0001	1,0000	1,0000
	Nº de iter.	---	---	---	---	---

Fonte: O Autor (2018).

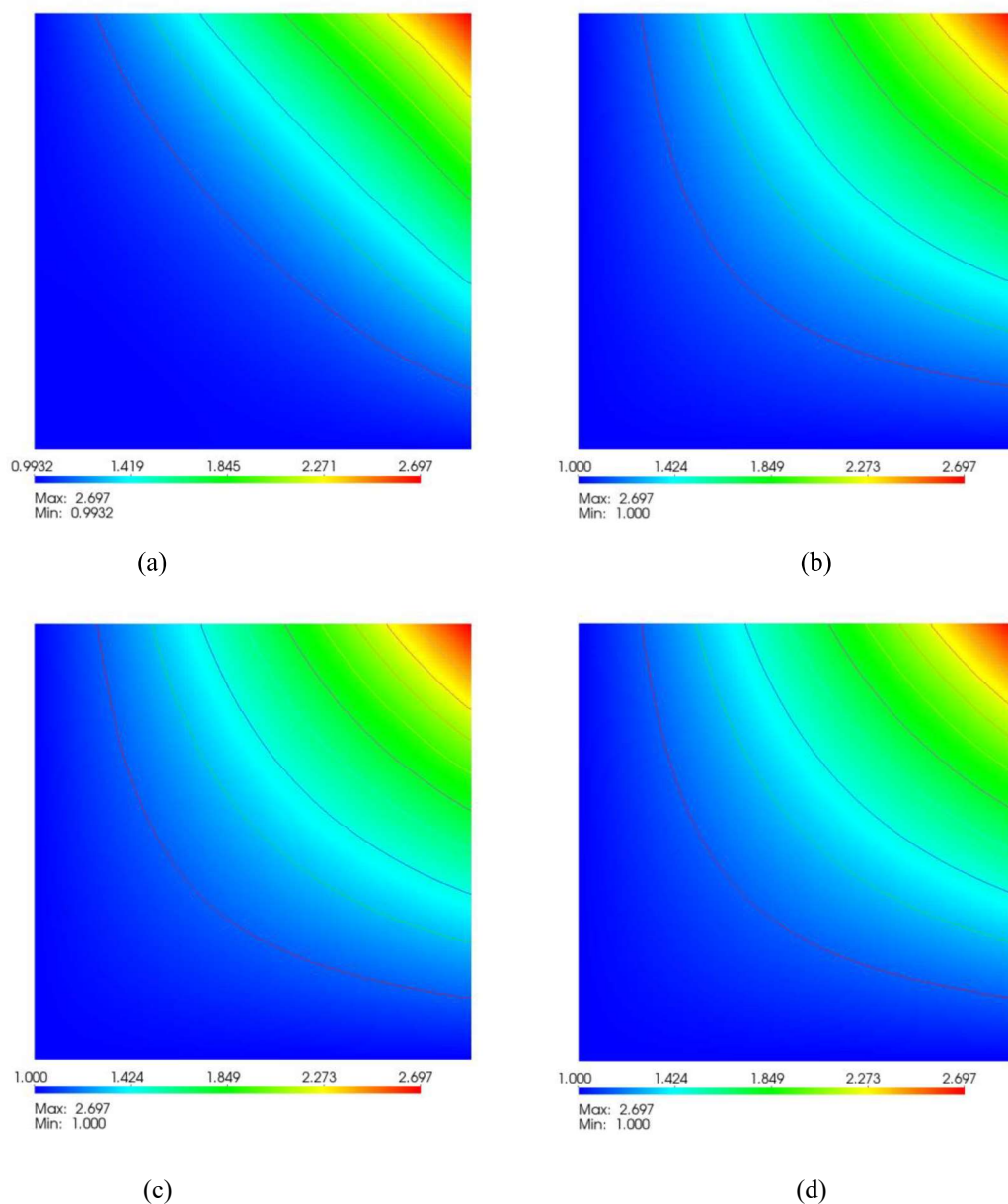
Figura 14 - Taxa de convergência utilizando norma L_2 : (a) Campo de pressão (b) Campo de velocidade



Fonte: O Autor (2018).

Observando a Figura 14 é possível observar como o método MPFA-O tem as maiores e o método TPFA tem as menores taxas de convergência, enquanto os métodos NTPFA-B e MFC-FV obtiveram resultados semelhantes, mas o método metamórfico não exigiu iterações não-lineares, necessárias ao método NTPFA-B.

Figura 15 - Campos de pressão no refinamento de malha 124x124, para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

Analisando a Figura 15 verificou-se como os valores de pressão são próximos entre os 4 métodos, sendo o TPFA visivelmente mais difusivo que os outros métodos, devido a limitação tangencial do método. Enquanto os métodos MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV resultaram em campos muito similares.

4.3 TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MATERIAL HOMOGÊNEO COM ANISOTROPIA LEVE (GAO E WU. 2011)

Ainda avaliando a convergência, estudou-se outro caso levemente anisotrópico encontrado em Gao e Wu (2011). O domínio consiste em um quadrado unitário com dimensões $\Omega \in [0,1] \times [0,1]$, representado em malhas triangulares com 2x2, 4x4 (Figura 16 (a)), 8x8, 16x16 e 32x32 subdivisões e, em malhas quadrangulares com 12x12, 24x24 (Figura 16 (b)), 48x48, 96x96 e 192x192 subdivisões. O tensor de difusão é dado por:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

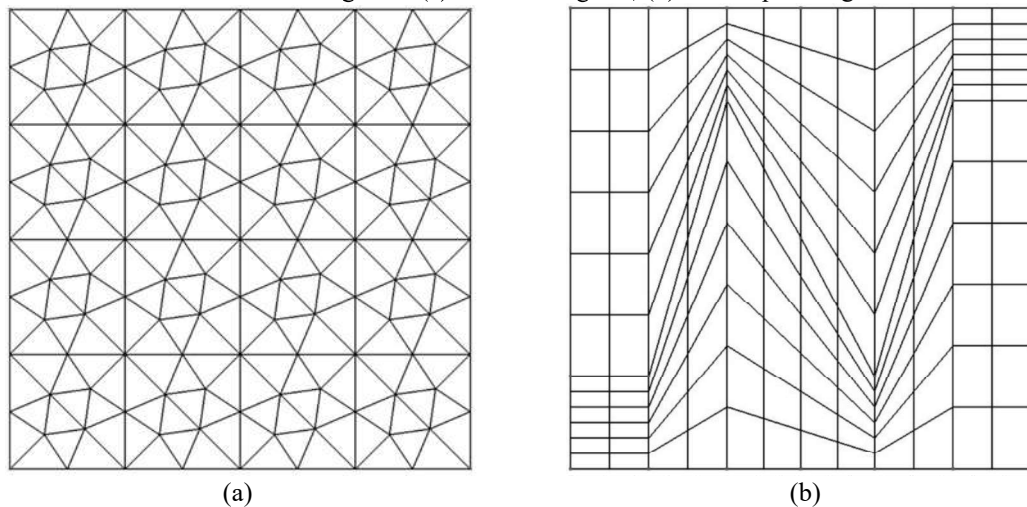
E a solução exata para o problema é (GAO; WU, 2011):

$$p(x,y) = \frac{1}{2\sin(1)} \sin((1-x)(1-y)) + \frac{1}{2}(1-x^3)(1-y^2) \quad (4.6)$$

com o termo fonte/sumidouro correspondente a $g = -\nabla \cdot \mathbb{K} \nabla p(\mathbf{x})$ e condições de contorno de valor prescrito (Dirichlet), com o valor calculado pela seguinte relação:

$$\Gamma_D = \partial\Omega, \quad g_D = p(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega}.$$

Figura 16 - Exemplos de malhas utilizadas para estudo da convergência em escoamento monofásico em material homogêneo: (a) malha triangular; (b) malha quadrangular.



Fonte: (a) Adaptada de Herbin e Hubert (2008) (b) Adaptada de Hermeline (2007).

A taxa de convergência da pressão e de fluxo, valores mínimos e máximos de pressão, e número de iterações são comparadas para diferentes métodos e diferentes subdivisões de malha triangular e quadrangular, na Tabela 3 e Tabela 4, respectivamente. Gráficos comparativos com os erros de pressão e velocidades são apresentados na Figura 17 e Figura 19, respectivamente para a malha triangular e quadrangular.

De acordo com a Tabela 3, relativa a malha triangular, é possível verificar como o método MPFA-O obteve os melhores valores referentes a convergência, chegando a segunda ordem para pressão em todos os casos. O método MFC-FV tem taxas de convergência bem próximas a segunda ordem sem entrar no modo não-linear. Enquanto o método NTPFA-B produziu resultados decrescentes de convergência exigindo iterações não-lineares. Como esperado, as menores taxas de convergência são do método TPFA.

Observando a Tabela 4, para a malha quadrangular, os resultados foram um pouco diferentes, a convergência do método MPFA-O caiu um pouco mas ainda se manteve próximo a segunda ordem. O método MFC-FV apresentou valores menores com menos subdivisões da malha, mas a convergência apresentou melhora com o refinamento da malha. O método NTPFA-B conseguiu superar a convergência do método MFC-FV em quase todos os casos, embora exija cada vez mais iterações com o crescimento das subdivisões de malha. Novamente, as menores taxas de convergência são do método TPFA.

Na Figura 17, analisando a malha triangular, é possível observar como os métodos MPFA-O e MFC-FV obtiveram resultados semelhantes, e próximos a segunda ordem. É visível como o método TPFA tem as menores taxas de convergência.

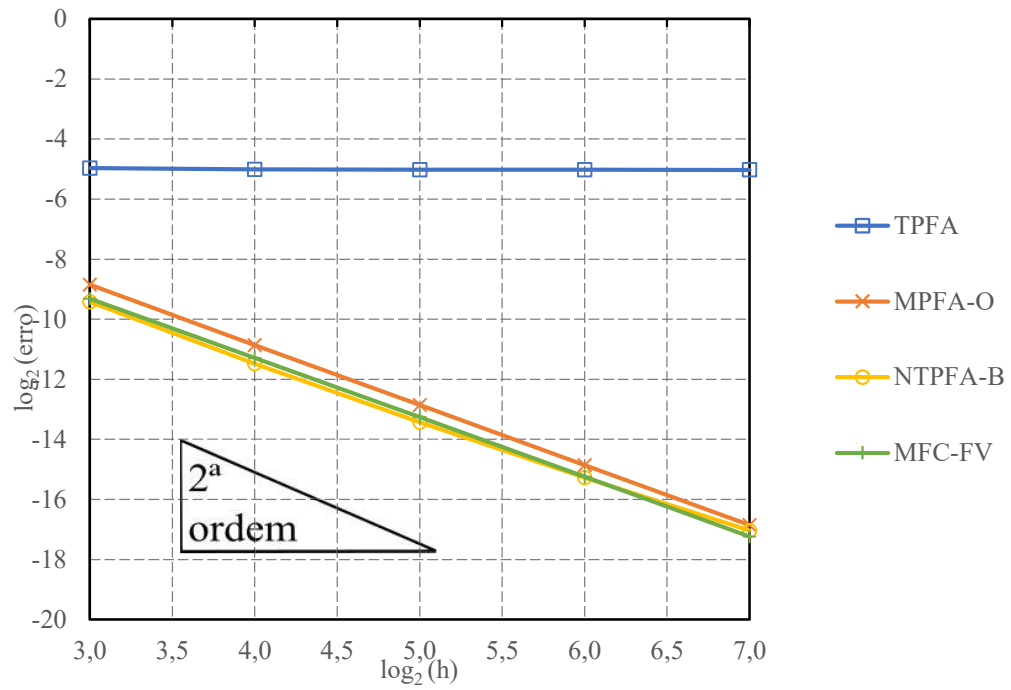
Enquanto para a Figura 19, idem a malha quadrangular, é possível observar como todos os métodos obtiveram resultados distantes, melhorando com o refinamento da malha. O método MPFA-O foi o único a se aproximar consistentemente de segunda ordem de convergência. O NTPFA-B e o MFC-FV melhoram sua convergência com o refinamento da malha. O TPFA tem as menores taxas de convergência.

Tabela 3 - Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações em malha TRIANGULAR para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV

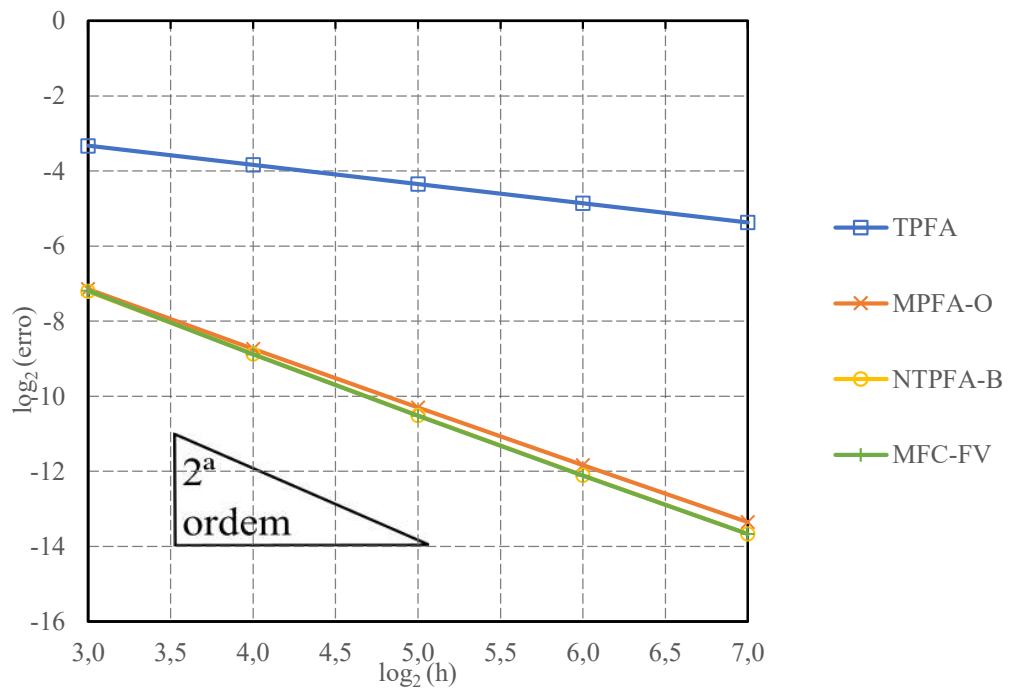
Esquema Numérico	Erro, T.C. e N.I.	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32
TPFA	$E_{l_2}^p$	3,21E-02	3,11E-02	3,08E-02	3,08E-02	3,07E-02
	$R_{l_2}^p$	---	4,35E-02	1,34E-02	3,51E-03	9,39E-04
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	9,96E-02	7,02E-02	4,91E-02	3,44E-02	2,42E-02
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	5,05E-01	5,15E-01	5,13E-01	5,08E-01
	$p_{\max}$	0,7537	0,8733	0,9360	0,9679	0,9840
	$p_{\min}$	-8,31E-04	-8,39E-04	-8,52E-04	-8,25E-04	-8,29E-04
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
MPFA-O	$E_{l_2}^p$	2,17E-03	5,39E-04	1,35E-04	3,38E-05	8,45E-06
	$R_{l_2}^p$	---	2,01	2,00	2,00	2,00
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	7,05E-03	2,34E-03	7,93E-04	2,73E-04	9,54E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,59	1,56	1,54	1,52
	$p_{\max}$	0,7510	0,8709	0,9343	0,9669	0,9834
	$p_{\min}$	2,81E-03	7,01E-04	1,75E-04	4,38E-05	1,09E-05
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
NTPFA-B	$E_{l_2}^p$	1,46E-03	3,51E-04	9,07E-05	2,53E-05	7,43E-06
	$R_{l_2}^p$	---	2,06	1,95	1,84	1,77
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	6,78E-03	2,13E-03	6,83E-04	2,26E-04	7,69E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,67	1,64	1,59	1,56
	$p_{\max}$	0,7539	0,8717	0,9345	0,9669	0,9834
	$p_{\min}$	3,20E-03	8,07E-04	2,02E-04	5,07E-05	1,27E-05
	Nº de iter.	12	12	12	12	12
MFC-FV	$E_{l_2}^p$	1,57E-03	4,00E-04	1,02E-04	2,58E-05	6,48E-06
	$R_{l_2}^p$	---	1,97	1,97	1,98	1,99
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	6,87E-03	2,12E-03	6,79E-04	2,25E-04	7,68E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,70	1,64	1,59	1,55
	$p_{\max}$	0,7539	0,8718	0,9345	0,9669	0,9834
	$p_{\min}$	0,0030	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000
	Nº de iter.	---	---	---	---	---

Fonte: O Autor (2018).

Figura 17 - Taxa de convergência para malha TRIANGULAR utilizando norma L_2 : (a) para o campo de pressão
(b) para o campo de velocidade



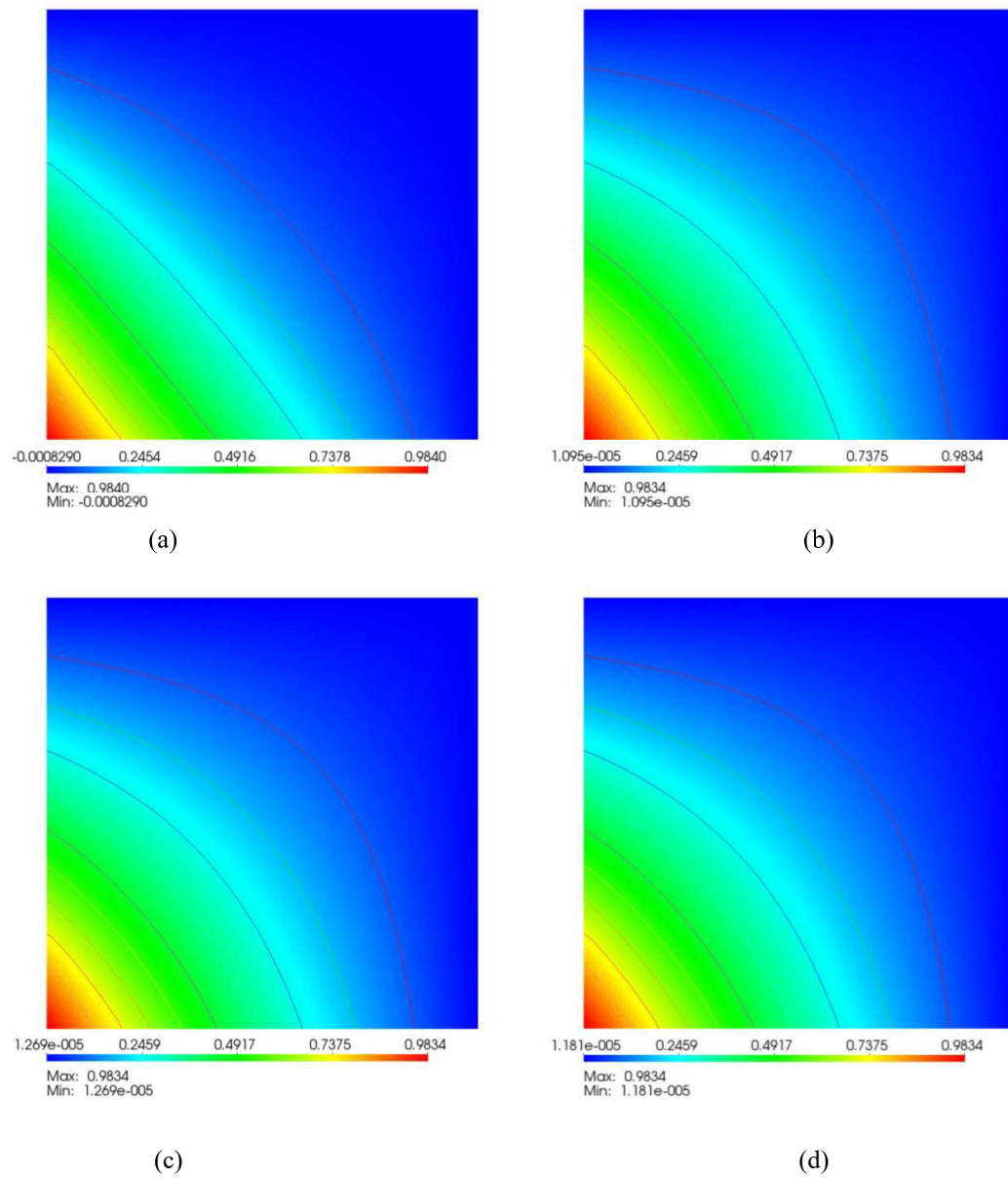
(a)



(b)

Fonte: O Autor (2018).

Figura 18 - Campos de pressão no refinamento de malha 32x32 em malha TRIANGULAR para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

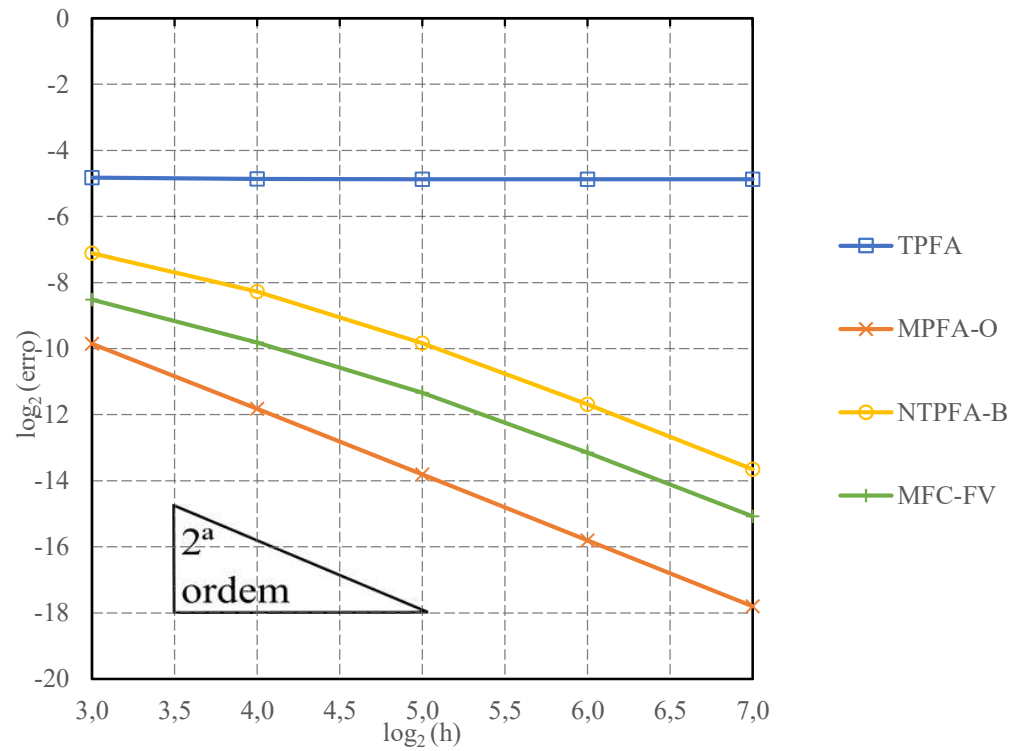
É possível verificar na Figura 18 como os valores de pressão são próximos entre os 4 métodos, sendo o TPFA visivelmente mais difusivo que os outros métodos, devido a limitação tangencial do método. Enquanto os métodos MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV resultaram em campos muito similares.

Tabela 4 - Erros e Convergência de Pressão e Velocidade, Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações em malha QUADRANGULAR para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV

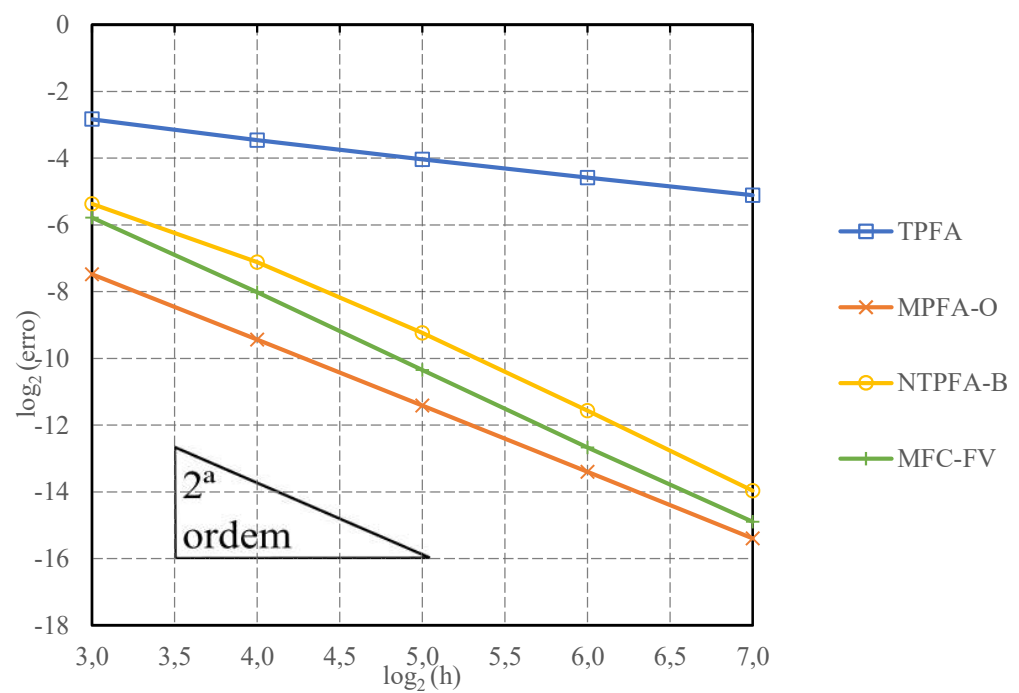
Esquema Numérico	Erro, T.C. e N.I.	12x12	24x24	48x48	96x96	192x192
TPFA	$E_{l_2}^p$	3,54E-02	3,44E-02	3,42E-02	3,42E-02	3,42E-02
	$R_{l_2}^p$	---	3,90E-02	8,91E-03	2,19E-03	5,07E-04
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	1,41E-01	9,10E-02	6,09E-02	4,17E-02	2,90E-02
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	6,27E-01	5,81E-01	5,45E-01	5,24E-01
	$p_{\max}$	0,9009	0,9502	0,9751	0,9875	0,9938
	$p_{\min}$	-1,18E-04	-9,098E-06	-5,504E-05	-5,084E-05	-4,922E-05
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
MPFA-O	$E_{l_2}^p$	1,08E-03	2,76E-04	6,97E-05	1,75E-05	4,38E-06
	$R_{l_2}^p$	---	1,97	1,99	1,99	2,00
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	5,59E-03	1,44E-03	3,66E-04	9,24E-05	2,32E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,95	1,98	1,99	1,99
	$p_{\max}$	0,9037	0,9511	0,9753	0,9876	0,9938
	$p_{\min}$	2,88E-04	7,28E-05	1,82E-05	4,56E-06	1,14E-06
	Nº de iter.	---	---	---	---	---
NTPFA-B	$E_{l_2}^p$	7,23E-03	3,23E-03	1,09E-03	3,04E-04	7,77E-05
	$R_{l_2}^p$	---	1,16	1,56	1,85	1,97
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	2,41E-02	7,22E-03	1,66E-03	3,29E-04	6,24E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	1,74	2,12	2,34	2,40
	$p_{\max}$	0,9032	0,9510	0,9754	0,9876	0,9938
	$p_{\min}$	7,26E-04	1,44E-04	2,90E-05	6,38E-06	1,51E-06
	Nº de iter.	44	64	83	94	103
MFC-FV	$E_{l_2}^p$	2,72E-03	1,11E-03	3,88E-04	1,10E-04	2,89E-05
	$R_{l_2}^p$	---	1,30	1,51	1,82	1,93
	$E_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	1,81E-02	3,87E-03	7,67E-04	1,53E-04	3,27E-05
	$R_{l_2}^{\vec{v} \cdot \vec{N}}$	---	2,23	2,34	2,32	2,23
	$p_{\max}$	0,9040	0,9511	0,9754	0,9876	0,9938
	$p_{\min}$	3,39E-04	7,77E-05	1,90E-05	4,73E-06	1,18E-06
	Nº de iter.	---	---	---	---	---

Fonte: O Autor (2018).

Figura 19 - Taxa de convergência para malha QUADRANGULAR utilizando norma L_2 : (a) para o campo de pressão (b) para o campo de velocidade



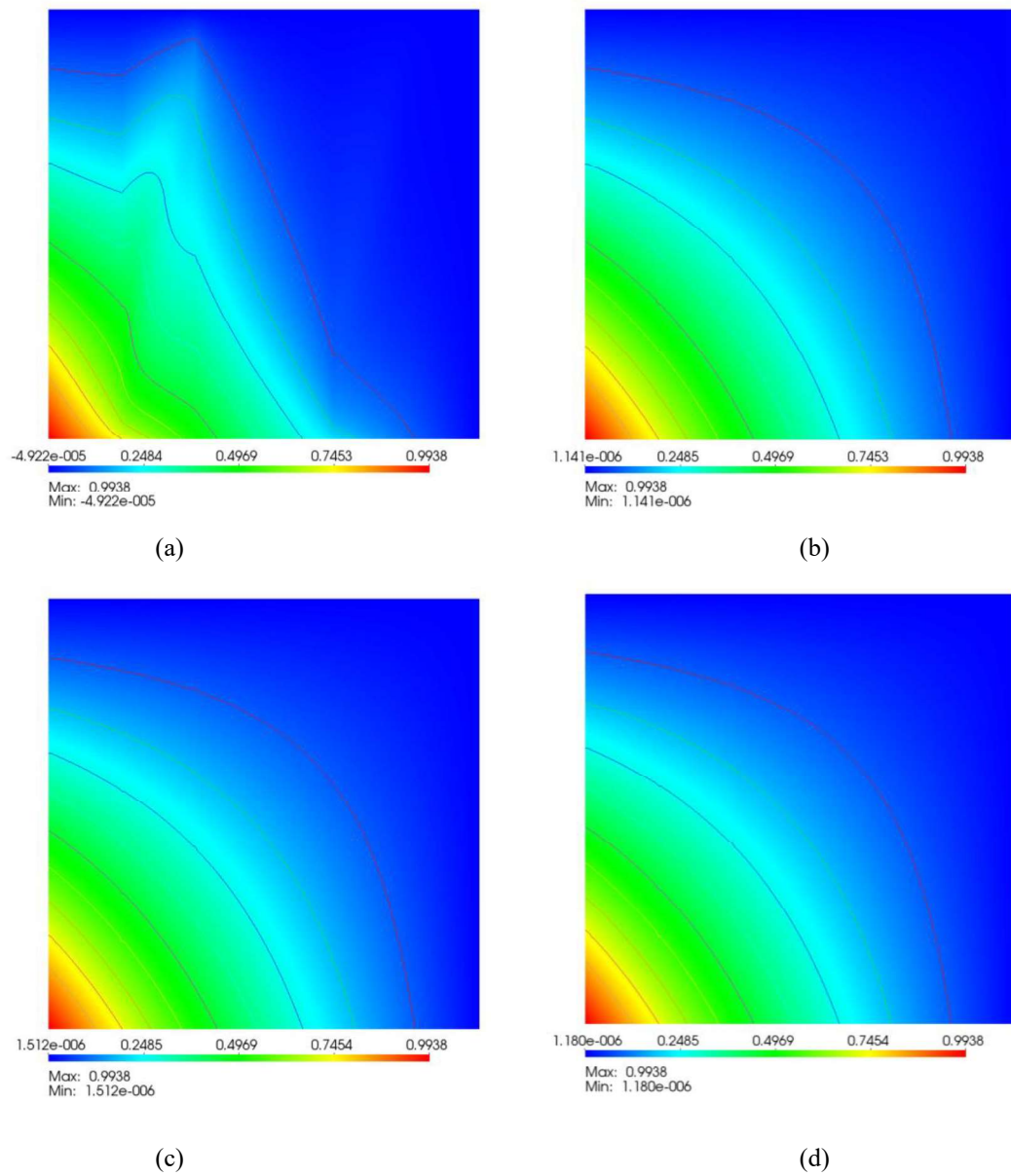
(a)



(b)

Fonte: O Autor (2018).

Figura 20 - Campos de pressão no refinamento de malha 192x192 em malha QUADRANGULAR para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

Observa-se na Figura 20 como os valores de pressão são próximos entre os 4 métodos, sendo o TPFA visivelmente mais difusivo que os outros métodos, devido a limitação tangencial do método. Enquanto os métodos MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV resultaram em campos muito similares.

4.4 ESTUDO DE MONOTONICIDADE EM MATERIAL HOMOGÊNIO E ANISOTRÓPICO COM DESCONTINUIDADE NO DOMÍNIO

O seguinte problema é utilizado visando avaliar a formulação Metamórfica em respeito as condições de respeito a positividade. A configuração é uma modificação de um problema proposto por Lipnikov *et al.* (2009) e é ilustrada na (a). O problema é definido em um quadrado unitário com um furo no seguinte domínio: $\Omega = [0,1]^2 \setminus [4/9, 5/9]^2$.

Para avaliação com respeito a positividade da formulação, as condições de contorno de valor prescrito (Dirichlet) são definidas como $g_{D,1} = 2$ em Γ_1 (fronteira interna) e $g_{D,2} = 0$ em Γ_2 (fronteira externa). A solução para as configurações deve satisfazer os intervalos de pressão, $p^2 \in [0, 2]$, pressões aproximadas fora desse intervalo violam a física representada no problema. A solução analítica não é conhecida.

O tensor de difusão é anisotrópico:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

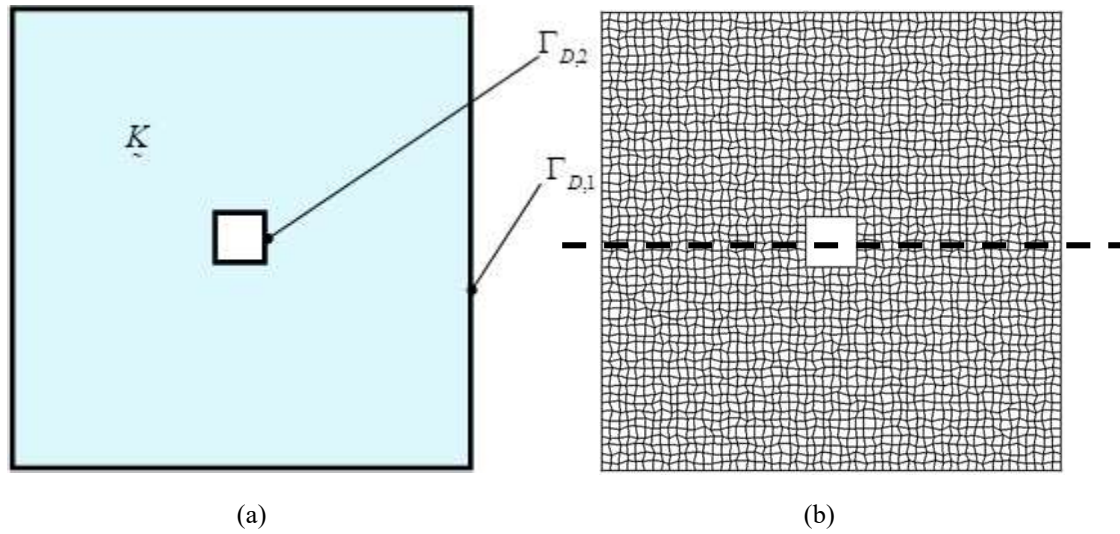
com os eixos principais rotacionados em $\theta = 67.5^\circ$, e aplicando para as comparações três diferentes taxas de anisotropia ($K_x = 100, 1000$ e 10000).

O problema é resolvido em uma malha quadrada 54×54 perturbada aleatoriamente. A malha aleatória sobre o domínio computacional $\Omega = [0,1]^2 \setminus [4/9, 5/9]^2$ é construída a partir da malha uniforme, para o tamanho médio do volume de controle h , com uma distorção aleatória de seus nós:

$$x := x + \varsigma R_x h \quad y := y + \varsigma R_y h \quad (4.8)$$

onde R_x e R_y são variáveis aleatórias com valores entre $[-0.5, 0.5]$ e o grau de distorção $\varsigma = 0.5$ (Figura 16(b)).

Figura 21 - Escoamento Monofásico em material Homogêneo e Anisotrópico com furo quadrado: (a) Domínio computacional; (b) Malha quadrada utilizada (com 54x54 subdivisões) aleatoriamente perturbada.



Fonte: Adaptado de Terekhov et. al. (2017).

Valores mínimos e máximos de pressão, e número de iterações são comparadas para diferentes métodos e diferentes taxas de anisotropia na Tabela 5. Distribuição e Campos de pressão para diferentes métodos e diferentes taxas de anisotropia são apresentados entre a Figura 22 até a Figura 27.

Tabela 5 - Pressão Máxima e Mínima e número de Iterações para os métodos numéricos TPFA, MPFA-O, NTPFA-B e MFC-FV

Método	Press. Máx. / Mín. e N.I.	$K_x = 100$	$K_x = 1000$	$K_x = 10000$
TPFA	$p_{\max}$	1,948	1,949	1,949
	$p_{\min}$	1,70E-04	1,61E-04	1,60E-04
	Nº de iter.	---	---	---
MPFA-O	$p_{\max}$	2,004	2,184	2,530
	$p_{\min}$	-5,95E-10	-0,23	-0,83
	Nº de iter.	---	---	---
NTPFA-B	$p_{\max}$	1,966	1,969	1,970
	$p_{\min}$	9,86E-09	2,71E-09	2,35E-09
	Nº de iter.	86	92	93
MFC-FV	$p_{\max}$	1,961	1,964	1,964
	$p_{\min}$	1,41E-09	1,05E-08	5,36E-09
	Nº de iter.	27	39	41

Fonte: O Autor (2018).

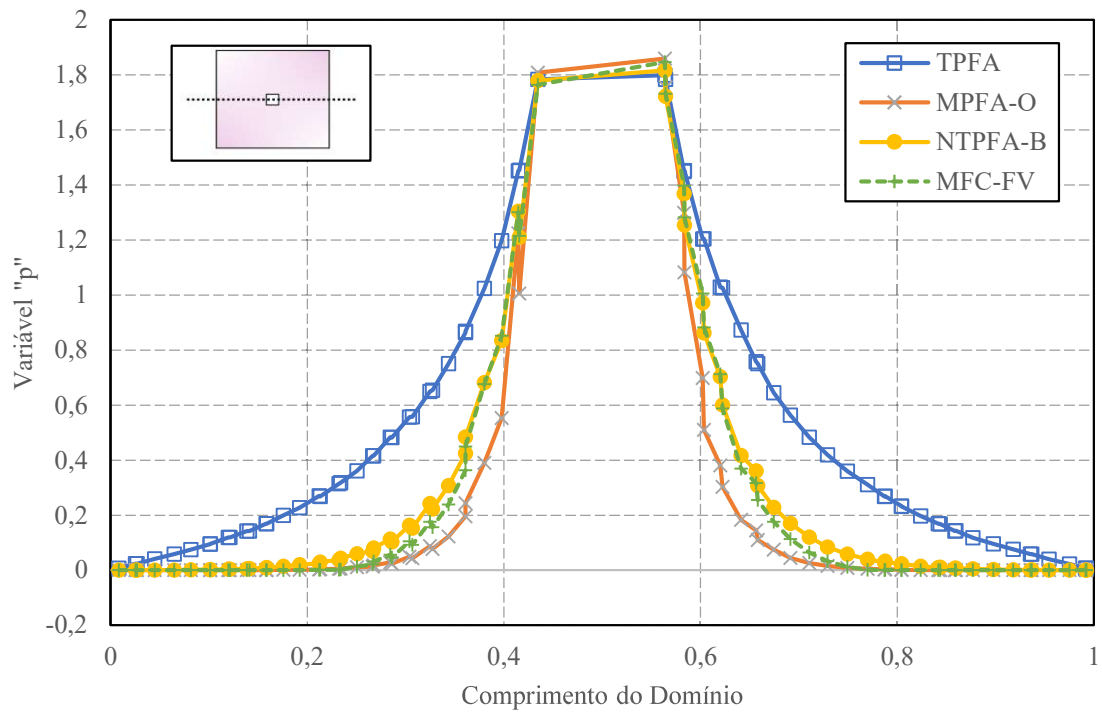
É possível observar na Tabela 5 como o método MPFA-O não foi capaz de garantir a positividade em nenhum dos casos avaliados, resultando em pressões mínimas negativas iguais a $-5,95 \times 10^{-10}$, $-0,233$ e $-0,8328$. O mesmo método também ultrapassou o valor esperado de pressão máxima, chegando a atingir 2,53 para a maior taxa de anisotropia. Quanto maior a taxa de anisotropia mais distante o método MPFA-O fica da solução esperada, seja nos valores máximos ou mínimos.

Ainda na Tabela 5, os métodos TPFA, NTPFA-B e MFC-FV preservaram a positividade da solução e se mantiveram no intervalo esperado, respeitando a física do problema, mas o TPFA produziu resultados mais distantes do esperado em comparação aos métodos não-lineares, com pressão mínima na ordem de 10^{-4} enquanto os métodos NTPFA-B e MFC-FV chegaram a ordem de 10^{-9} , e pressão máxima próximo a 1,95 enquanto os métodos NTPFA-B e MFC-FV chegaram próximos a 1,97 e 1,965, respectivamente.

Mesmo entrando no modo não-linear, a formulação Metamórfica ainda exigiu menos iterações do que o método NTPFA-B para convergir. O método MFC-FV necessitou de apenas 31,39%, 42,93% e 44,09% do total de iterações necessárias para o NTPFA-B, indicando uma convergência consideravelmente mais rápida e eficiente entre os métodos não-lineares avaliados.

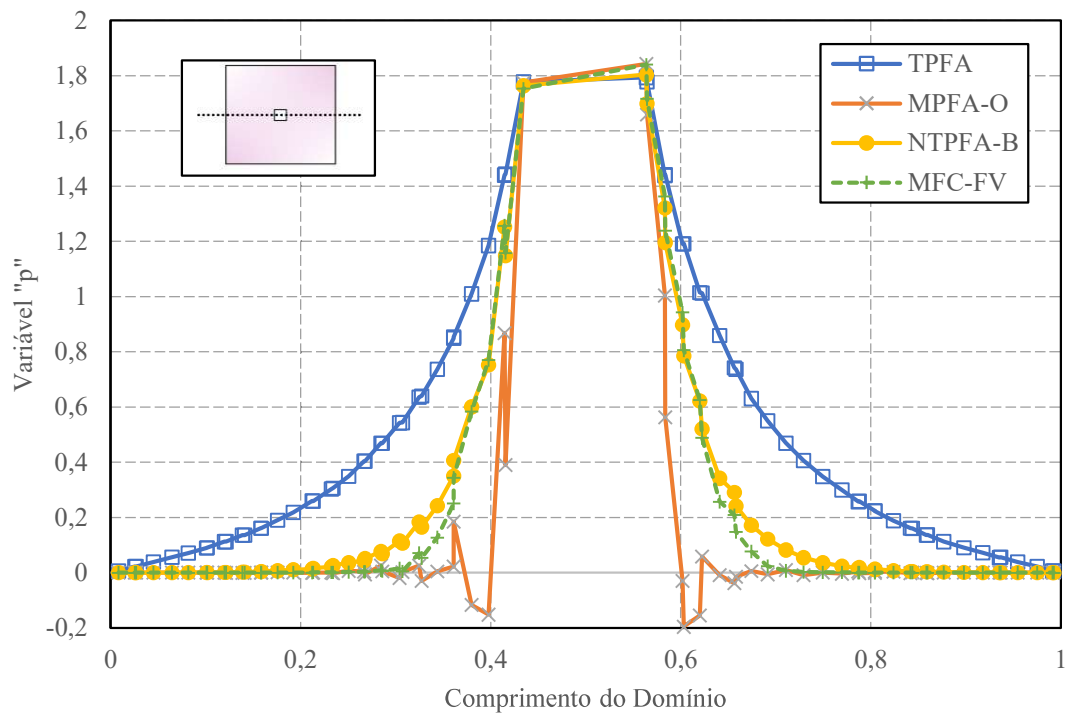
As distribuições de pressão ilustradas entre a Figura 22 até a Figura 24 mostram como os métodos não-lineares produzem soluções menos difusivas em relação ao método MPFA-O, ficando explícito principalmente na Figura 24, a alta difusão em valores negativos. Também é perceptível como o método Metamórfico produz soluções muito próximas em relação ao método NTPFA-B, mesmo requerendo menos iterações não-lineares.

Figura 22 - Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 100$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio



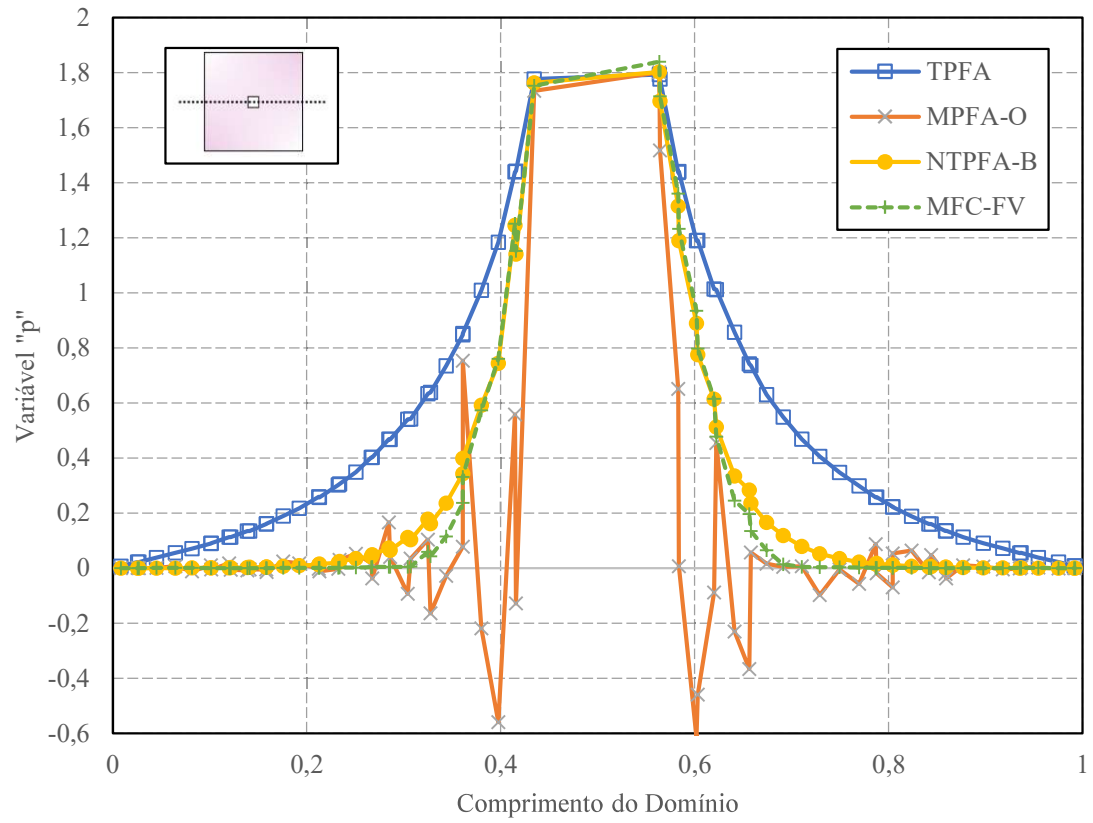
Fonte: O Autor (2018).

Figura 23 - Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 1000$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio



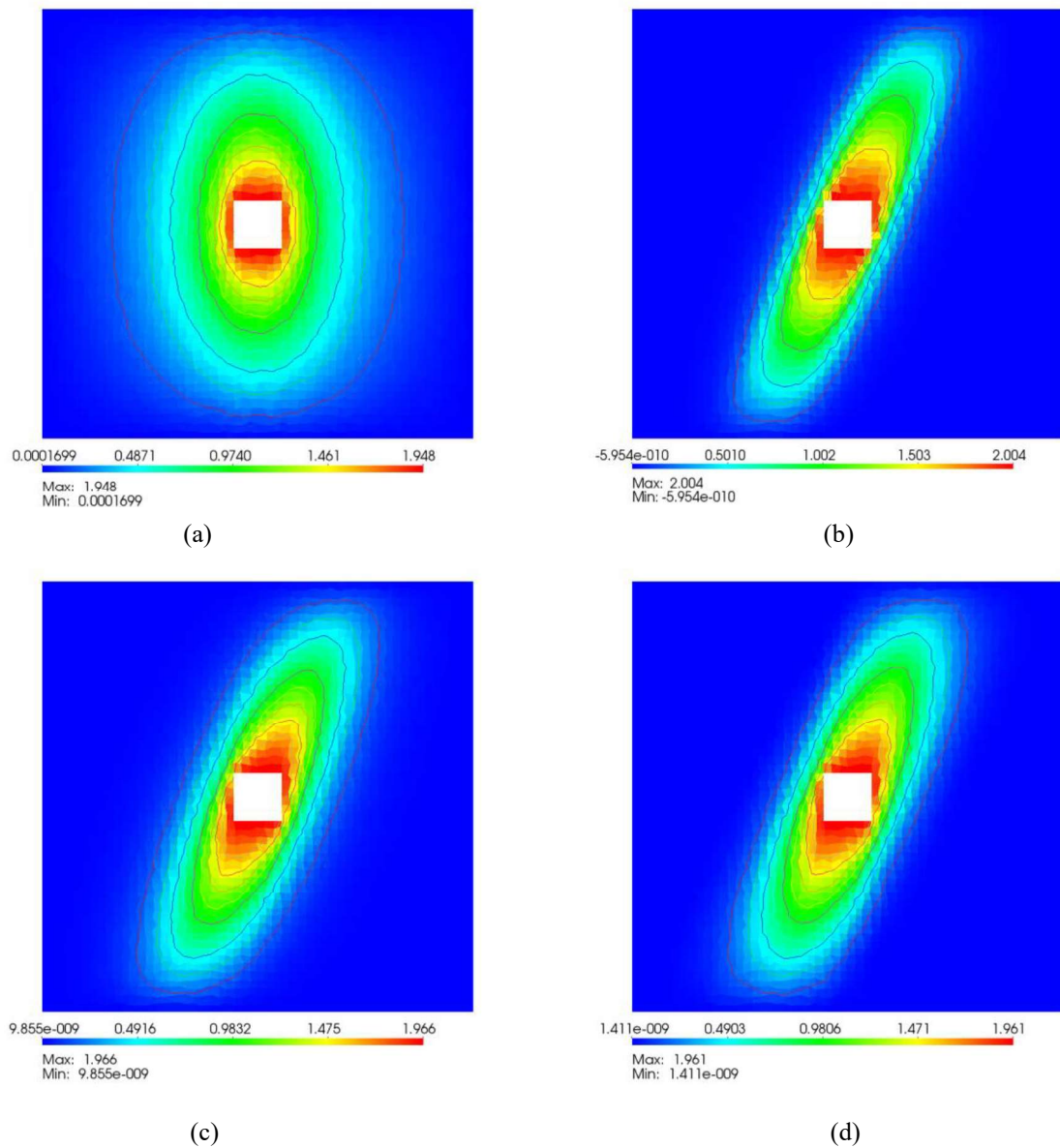
Fonte: O Autor (2018).

Figura 24 – Distribuição da pressão obtida com diferentes métodos para $K_x = 10000$ ao longo de um perfil horizontal cruzando o domínio



Fonte: O Autor (2018).

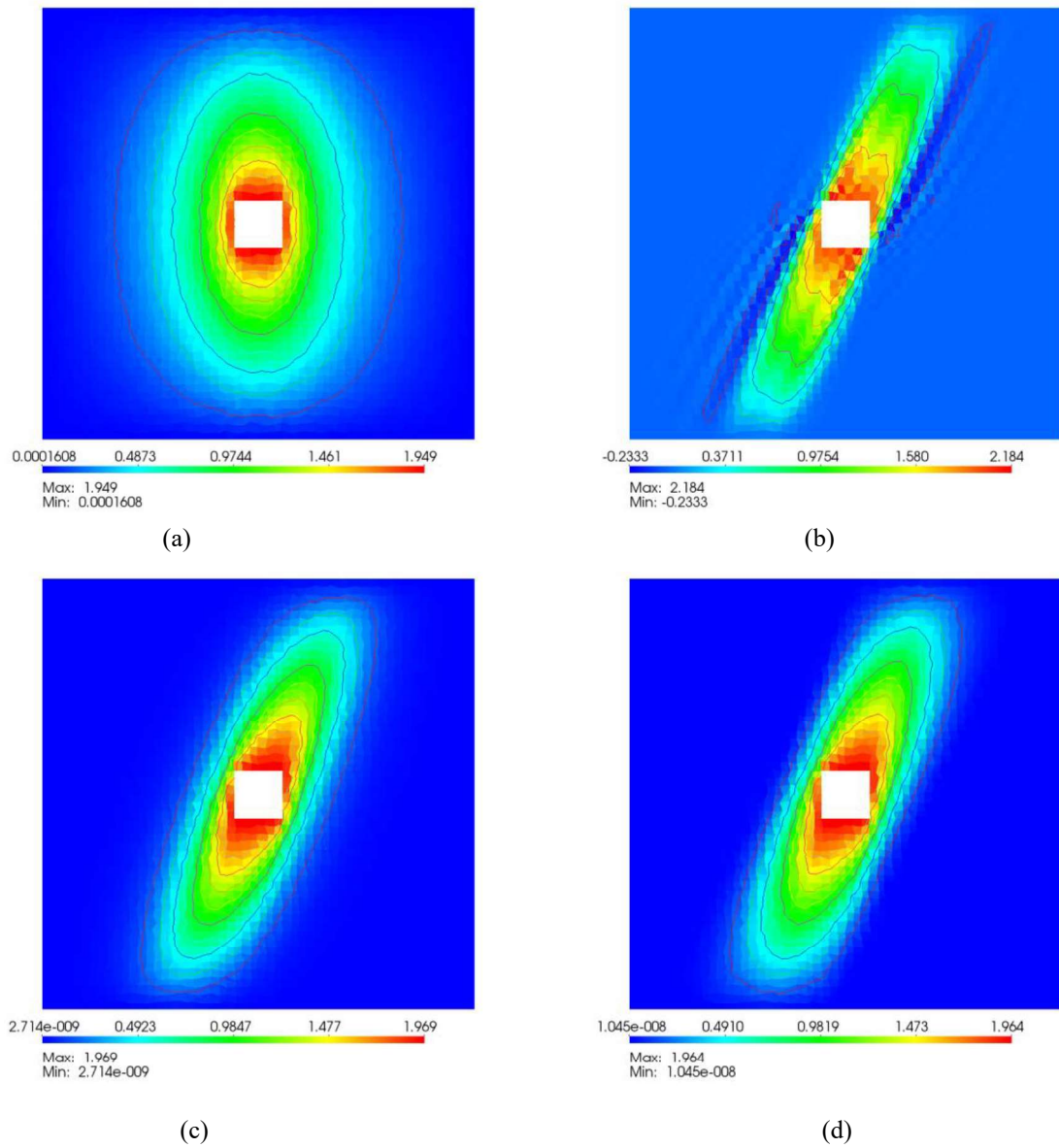
Figura 25 - Campos de pressão com $K_x = 100$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

É possível verificar na Figura 25 como campo de pressão para o método MPFA-O resultou no maior valor de pressão máxima, 2,004, e no menor valor de pressão mínima, -5,95E-10, mostrando-se ineficiente em respeitar a positividade da solução. Os métodos TPFA, NTPFA-B e MFC-FV conseguiram se manter nos valores de pressão esperado, embora os valores mínimos e máximos para o método TPFA estejam mais distantes do intervalo do que os métodos não-lineares.

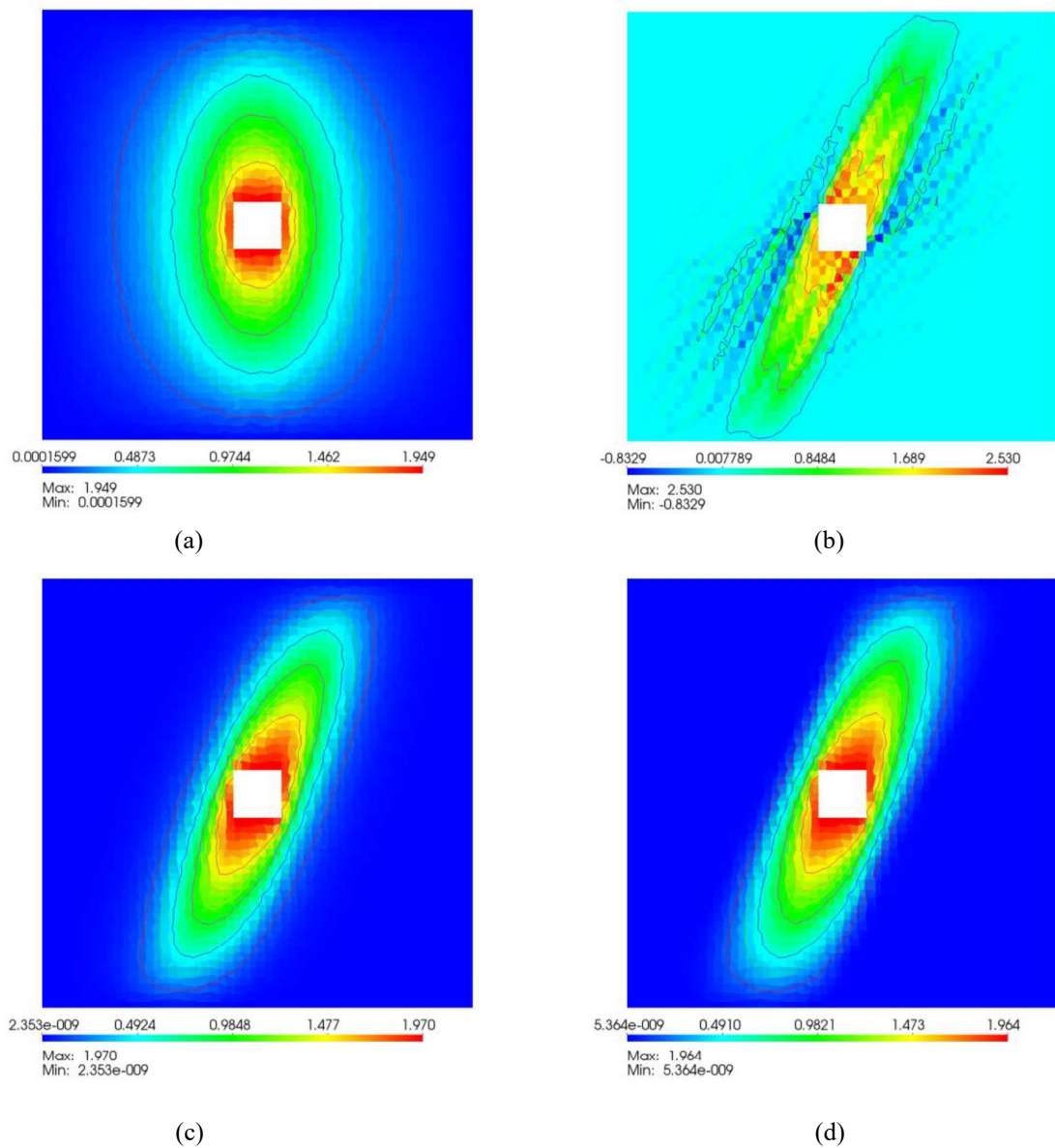
Figura 26 - Campos de pressão com $K_x = 1000$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

Analisando a Figura 26 verificou-se como o campo de pressão para o método MPFA-O resultou no maior valor de pressão máxima, 2,184, e no menor valor de pressão mínima, -0,233, sendo visivelmente mais difusivo que os outros métodos. Enquanto os métodos TPFA, NTPFA-B e MFC-FV ainda conseguiram se manter no intervalo de pressão esperado.

Figura 27 - Campos de pressão com $K_x = 10000$ para 4 diferentes métodos: (a) TPFA (b) MPFA-O (c) NTPFA-B (d) MFC-FV



Fonte: O Autor (2018).

Observa-se na Figura 27, que o campo de pressão para o método MPFA-O resultou no maior valor de pressão máxima, 2,530, e no menor valor de pressão mínima, -0,8328, valores que com o aumento da taxa de anisotropia se tornam cada vez mais distantes do esperado e resultam em um campo visivelmente mais difusivo que os outros métodos. Enquanto os métodos TPFA, NTPFA-B e MFC-FV ainda conseguiram se manter no intervalo de pressão esperado. Com os resultados dos métodos NTPFA-B e MFC-FV sempre muito semelhantes.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposto o chamado método Metamórfico de Fluxo Contínuo em Volumes Finitos (MFC-FV) que é caracterizado por uma estrutura híbrida baseada na aproximação de fluxos unilaterais com coeficientes positivos. Nessa formulação, um operador discreto linear é inicialmente considerado, mas o método pode sofrer metamorfose, transformando-se em uma abordagem não-linear.

Para testar a metodologia apresentada, em escoamento monofásico, foram realizados testes de interpolação, convergência e preservação de positividade em comparação aos métodos tradicionais TPFA, MPFA-O e método não-linear NTPFA-B.

O teste de interpolação confirmou a eficácia da equação de homogeneização também implementada no método NTPFA-B. Nos testes de convergência o MPFA-O sempre se sobressaiu, mas o MFC-CV mostrou crescimento na convergência com o refinamento da malha, chegando próximo a segunda ordem em alguns casos, e para todos os casos analisados foi capaz de se manter sempre no modo linear, sendo menos custoso que o NTPFA-B.

No teste mais desafiador, um domínio com descontinuidade, o MFC-FV foi capaz de preservar a positividade da solução, enquanto o método MPFA-O, com operador linear, produziu solução com excessivas oscilações espúrias. Em comparação com o NTPFA-B, um método não-linear padrão, é possível observar uma convergência mais rápida do Método metamórfico, e como o modo não-linear está ligado ao tensor de anisotropia, pois nos exemplos com menor razão de anisotropia o MFC-CV se manteve no modo linear.

Por fim, o MFC-FV mostrou-se um método promissor para problemas de difusão anisotrópica. No entanto deve ser levado em consideração se é interessante trabalhar com uma formulação que pode gerar iterações não-lineares, pois pode se tornar computacionalmente caro.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS:

- Avaliação em materiais Heterogêneos;
- Implementação da Formulação que visa preservar o Princípio do Máximo Discreto e a combinação de fluxos apresentada em Terekhov *et al.* (2017);
- Implementação para Escoamento Bifásico;
- Desenvolver novas estratégias para seleção de estêncil;

REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I. et al. Discretization on non-orthogonal, quadrilateral grids for inhomogeneous, anisotropic media. **Journal of Computational Physics**, v. 127, n. 1, p. 2–14, 1996.
- AAVATSMARK, I. et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: derivation of the methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998. Disponível em: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S1064827595293582>. Acesso em: 20 jan. 2019.
- AAVATSMARK, Ivar. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. **Computational Geosciences**, v. 6, n. 3–4, p. 405–432, 2002.
- AGELAS, L.; EYMARD, R.; HERBIN, R. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 347, n. 11–12, p. 673–676, 2009. a.
- AGELAS, Léo; EYMARD, Robert; HERBIN, Raphaële. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 347, n. 11–12, p. 673–676, 2009. b. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2009.03.013> Acesso em: 20 jan. 2019.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. **Petroleum reservoir simulation**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <<http://www.getcited.org/pub/102020605>> Acesso em: 20 jan. 2019.
- BABUŠKA, Ivo; SURI, Manil. On Locking and Robustness in the Finite Element Method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 29, n. 5, p. 1261–1293, 1992. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0729075>> Acesso em: 20 jan. 2019.
- BEAR, J. Dynamics of fluids in porous media. **Dynamics of fluids in porous media**, [s. l.], p. 439–578, 1988.
- BERTOLAZZI, Enrico. DISCRETE CONSERVATION AND DISCRETE MAXIMUM PRINCIPLE FOR ELLIPTIC PDEs. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 08, n. 04, p. 685–711, 1998.
- BERTOLAZZI, Enrico; MANZINI, Gianmarco. A Second-Order Maximum Principle Preserving Finite Volume Method for Steady Convection-Diffusion Problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 43, n. 5, p. 2172–2199, 2005.
- BLANC, Xavier; LABOURASSE, Emmanuel. A positive scheme for diffusion problems on deformed meshes. **ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, 2016.
- BURMAN, Erik; ERN, Alexandre. Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection-diffusion-reaction equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 35, p. 3833–3855, 2002.
- CANCÈS, Clément; CATHALA, Mathieu; LE POTIER, Christophe. Monotone corrections for generic cell-centered finite volume approximations of anisotropic diffusion equations.

Numerische Mathematik, v. 125, n. 3, p. 387–417, 2013.

CARVALHO, D. K. E. **Uma formulação do método dos volumes finitos com estrutura de dados por aresta para a simulação de escoamentos em meios porosos**. 2005. Tese Universidade Federal de Pernambuco. Recife., [s. l.], 2005.

CHEN, Qian Yong et al. Enriched multi-point flux approximation for general grids. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 3, p. 1701–1721, 2008.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational methods for multiphase flows in porous media** Notes, 2006.

CRUMPTON, P. I.; SHAW, G. J.; WARE, A. F. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. **Journal of Computational Physics**, v. 116, n. 2, p. 343–358, 1995.

DANILOV, A. A. for Diffusion Equations on Conformal Polyhedral Meshes. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling - **RUSS J NUMER ANAL MATH MODEL.**, v. 24, n. 3, p. 207–227, 2009.

DRONIOU, Jerome. Finite volume schemes for diffusion equations: Introduction to and review of modern methods. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 24, n. 08, p. 1575–1619, 2014. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218202514400041>. Acesso em: 20 jan. 2019.

DRONIOU, Jérôme; POTIER, Christophe Le. Construction and Convergence Study of Schemes Preserving the Elliptic Local Maximum Principle. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 49, n. 2, p. 459–490, 2011. Disponível em: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/090770849>. Acesso em: 20 jan. 2019.

EDWARDS, Michael G. M-Matrix Flux Splitting for General Full Tensor Discretization Operators on Structured and Unstructured Grids. **Journal of Computational Physics**, v. 160, n. 1, p. 1–28, 2000.

EDWARDS, Michael G.; ROGERS, Clive F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. **Computational Geosciences**, v. 2, n. 4, p. 259–290, 1998.

EDWARDS, Michael G.; ZHENG, Hongwen. A quasi-positive family of continuous Darcy-flux finite-volume schemes with full pressure support. **Journal of Computational Physics**, 2008.

EDWARDS, Michael G.; ZHENG, Hongwen. Double-families of quasi-positive Darcy-flux approximations with highly anisotropic tensors on structured and unstructured grids. **Journal of Computational Physics**, 2010.

EYMARD, Robert et al. 3D Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. **Springer Proceedings in Mathematics**, v. 4, p. 895–930, 2011. GAO, Zhiming; WU, Jiming. A linearity-preserving cell-centered scheme for the

heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2011.

GAO, Zhiming; WU, Jiming. A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2D and 3D meshes. **Journal of Computational Physics**, v. 250, p. 308–331, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.05.013>

GAO, Zhiming; WU, Jiming. A second-order positivity-preserving finite volume scheme for diffusion equations on general meshes* Copyright © by SIAM . *Unauthorized reproduction of this article is prohibited . Downloaded 07 / 18 / 15 to 139 . 80 . 123 . 40 . Redistribution subject t. [s. l.], v. 37, n. 1, p. 420–438, 2015.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 79(11): 1309-1331, 2009.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985. V. 1

HAVU, V.; PITKÄRANTA, J. An analysis of finite element locking in a parameter dependent model problem. **Numerische Mathematik**, v. 89, n. 4, p. 691–714, 2001. a.

HAVU, Ville; PITKÄRANTA, Juhani. Analysis of a bilinear finite element for shallow shells I: approximation of inextensional deformations. **Mathematics of Computation**, v. 71, n. 239, p. 923–943, 2001. b. Disponível em: <http://www.ams.org/mcom/2002-71-239/S0025-5718-01-01376-X/>. Acesso em: 20 jan. 2019.

HERBIN, Raphael; HUBERT, Florence. Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids. In: 2008, Londres.

KAPYRIN, I. V. A family of monotone methods for the numerical solution of three-dimensional diffusion problems on unstructured tetrahedral meshes. **Doklady Mathematics**, v. 76, n. 2, p. 734–738, 2007. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1134/S1064562407050249>. Acesso: 20 jan. 2019.

KERSHAW, David S. Differencing of the diffusion equation in Lagrangian hydrodynamic codes. **Journal of Computational Physics**, v. 39, n. 2, p. 375–395, 1981.

KUZMIN, D.; SHASHKOV, M. J.; SVYATSKIY, D. A constrained finite element method satisfying the discrete maximum principle for anisotropic diffusion problems. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 9, p. 3448–3463, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.01.031> Acesso em: 20 jan. 2019.

LE POTIER, C. Finite volume scheme for highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 340, n. 12, p. 921–926, 2005. a.

LE POTIER, Christophe. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés. **Comptes Rendus**

Mathematique, v. 341, n. 12, p. 787–792, 2005. b.

LE POTIER, Christophe. A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators. **International Journal on Finite Volumes**, 6, 2009.

LE POTIER, Christophe. Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 348, n. 11–12, p. 691–695, 2010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2010.04.017>. Acesso em: 20 jan. 2019.

LE POTIER, Christophe. Correction non linéaire d'ordre 2 et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 352, n. 11, p. 947–952, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.08.010>. Acesso em: 20 jan. 2019.

LEE, S. H.; JENNY, P.; TCHELEPI, H. A. A finite-volume method with hexahedral multiblock grids for modeling flow in porous media. **Computational Geosciences**, v. 6, n. 3–4, p. 353–379, 2002.

LIPNIKOV, K. et al. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 1, p. 492–512, 2007.

LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Y. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 3, p. 703–716, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2008.09.031>. Acesso em: 20 jan. 2019.

LIPNIKOV, K.; SVYATSKIY, D.; VASSILEVSKI, Yu. Minimal stencil finite volume scheme with the discrete maximum principle. **Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling**, v. 27, n. 4, p. 369–385, 2012.

LLNS. **VisIt User's Manual, Version 1.5**. Department of Energy by Lawrence Livermore National Laboratory. 2005.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.

MANZINI, Gianmarco; PUTTI, Mario. Mesh locking effects in the finite volume solution of 2-D anisotropic diffusion equations. **Journal of Computational Physics**, v. 220, n. 2, p. 751–771, 2007.

NORDBOTTEN, J. M.; AAVATSMARK, I.; EIGESTAD, G. T. Monotonicity of control volume methods. **Numerische Mathematik**, v. 106, n. 2, p. 255–288, 2007.

NORDBOTTEN, Jan M.; AAVATSMARK, Ivar. Monotonicity conditions for control volume methods on uniform parallelogram grids in homogeneous media. **Computational Geosciences**, v. 9, n. 1, p. 61–72, 2005.

QUEIROZ, L. E. S. et al. On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014. Disponível em: <http://doi.wiley.com/10.1002/fld.3850>. Acesso em: 20 jan. 2019.

SHENG, Zhiqiang; YUAN, Guangwei. The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, v. 230, n. 7, p. 2588–2604, 2011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.037>. Acesso em: 20 jan. 2019.

SOUZA, Márcio Rodrigo de Araújo. Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em reservatório de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem. 2015. Tese. UFPE, [s. l.], 2015.

TEREKHOV, Kirill M.; MALLISON, Bradley T.; TCHELEPI, Hamdi A. Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem. **Journal of Computational Physics**, v. 330, p. 245–267, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2016.11.010>. Acesso em: 20 jan. 2019.

VARGA, Richard S. Matrix Iterative Analysis. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, 1999.

VIDOVIĆ, D. et al. Convex combinations for diffusion schemes. **Journal of Computational Physics**, v. 246, p. 11–27, 2013.

VIDOVIĆ, D. et al. Piecewise Linear Transformation in Diffusive Flux Discretizations. *Journal of Computational Physics*. 282. 10.1016/j.jcp.2014.11.024.

VIDOVIĆ, D.; DIMKIĆ, M.; PUŠIĆ, M. Accelerated non-linear finite volume method for diffusion. **Journal of Computational Physics**, v. 230, n. 7, p. 2722–2735, 2011.

WU, Jiming; GAO, Zhiming. Interpolation-based second-order monotone finite volume schemes for anisotropic diffusion equations on general grids. **Journal of Computational Physics**, v. 275, p. 569–588, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.011>. Acesso em: 20 jan. 2019.

XIE, Hui et al. A Positivity-Preserving Finite Volume Scheme for Heat Conduction Equation on Generalized Polyhedral Meshes. **Communications in Computational Physics**. 24. 10.4208/cicp.OA-2017-0183.

YUAN, Guangwei; SHENG, Zhiqiang. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.