



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PHILLIPE CAETANO GOMES DA SILVA

**MODELO ORTOTRÓPICO EM ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO  
LINEAR FÍSICA DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS**

Recife  
2018

PHILLIPE CAETANO GOMES DA SILVA

**MODELO ORTOTRÓPICO EM ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO  
LINEAR FÍSICA DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação subbmetida ao Departamento de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Estruturas.

**Orientador:** Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

Recife  
2018

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

S586m

Silva, Phillipe Caetano Gomes da.

Modelo ortotrópico em elementos finitos para análise não linear física de problemas bidimensionais / Phillipe Caetano Gomes da Silva. - 2018.

89 folhas, il., tabs., abr., sigl. e símb.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2018.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Civil. 2. Método dos elementos finitos. 3. Elasticidade bidimensional. 4. Material não linear. 5. Concreto armado. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2019-106

PHILLIPE CAETANO GOMES DA SILVA

**MODELO ORTOTRÓPICO EM ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE NÃO  
LINEAR FÍSICA DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Estruturas.

Aprovada em: 12 de março de 2018.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Paulo Marcelo V. Ribeiro (Orientador),  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Ézio da Rocha Araújo (Examinador Interno),  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Raúl Darío Durand Farfán (Examinador Externo),  
Universidade de Brasília

Recife  
2018

*Dedicado à Mayara, minha esposa,  
presente em todas as etapas  
desta dissertação.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao final de um curso de mestrado faz-se necessário um momento de reflexão e agradecimento devido aos desafios superados nesta jornada. Assim, de forma singela e sincera, gostaria de agradecer a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para concretização deste objetivo.

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por revigorar as minhas forças nos momentos de dificuldades e aplinar os meus caminhos diante Dele. Assim como, por colocar pessoas especiais ao meu lado.

Ao meu orientador Professor Paulo Marcelo, por ensinar verdadeiros caminhos e acreditar em minha capacidade. Sua determinação, dedicação e confiança foram fundamentais durante o desenvolvimento deste trabalho, algo admirável que irei levar como exemplo a seguir na minha carreira profissional.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – PPGEC, por me permitir a realização deste curso. Aos professores do programa que de alguma forma ajudaram a sedimentar o caminho transmitindo seus preciosos ensinamentos.

Aos amigos que conquistei no PPGEC que me ajudaram consideravelmente, dando apoio na hora necessária. Suas amizades foram fundamentais para conseguir chegar ao final dessa jornada. Aos meus amigos da Paróquia Sagrado Coração de Jesus que sempre estão ao meu lado não importando a situação a ser enfrentada.

A minha família, em especial ao meus pais Tereza e Moises pelo amor e carinho incondicional, fundamental para suportar os percalços da jornada. Aos meus irmãos Rafael e Rodrigo pelo apoio, carinho e conselhos valorosos imprescindíveis para o meu sucesso.

A minha querida e amada esposa Mayara por sua paciência, resiliência e compreensão durante a caminhada, sem o seu inestimável apoio este trabalho não viria a se tornar realidade.

## RESUMO

A análise estrutural é frequentemente baseada em suposições lineares para projeto simplificado e avaliação prática do comportamento mecânico. No entanto, problemas complexos surgem em estruturas de concreto armado, que exigem análise não-linear e demandam atenção especial. Portanto, este trabalho compreende um estudo do comportamento do modelo ortotrópico em membros de concreto armado e a implementação de algoritmos computacionais eficientes para análise não linear física usando o Método dos Elementos Finitos. O modelo matemático proposto é baseado em elementos triangulares quadráticos com reforço de aço embutido para análise numérica de problemas bidimensionais em concreto simples ou armado. As relações cinemáticas e constitutivas dependem do campo de deformação durante o processo de atualização das propriedades físicas. Estes cálculos fazem uso de um modelo ortotrópico para atualizar a matriz constitutiva, desacoplada através de um modelo multilinear de tensão-deformação do material. Além disso, este modelo está associado à abertura de fissura distribuída por elemento para simular o comportamento mecânico da resistência à tração do concreto na região pós-pico. Esses cálculos são computacionalmente intensivos. Assim, justifica-se o uso de uma linguagem de programação de alto desempenho, bem como o uso de matrizes explícitas de elementos finitos e estratégias computacionais para melhorar a eficiência do código. A validação do modelo numérico foi feita por comparações usando dados experimentais como referência. Os resultados numéricos estão em excelente concordância com testes experimentais. Finalmente, conclui-se que, em uma aproximação a nível de projeto, o modelo proposto pode simular adequadamente o comportamento mecânico não-linear de estruturas de concreto armado bidimensionais.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos. Elasticidade bidimensional. Material não linear. Concreto armado.

## ABSTRACT

Structural analysis is often based on linear assumptions for simplified design, and practical evaluation of mechanical behavior. However, complex problems arise in reinforced concrete structures, which require nonlinear analysis and demand special attention. Therefore, this work comprises a study of the orthotropic model behavior in reinforced concrete members and the implementation of efficient computational algorithms for physical nonlinear analysis using the Finite Element Method. The proposed mathematical model is based on quadratic triangular elements with embedded steel reinforcement for numerical analysis of bidimensional problems in plain or reinforced concrete. The kinematic and constitutive relations depend on the strain field during the process of updating the physical properties. These computations make use of an orthotropic model to update the constitutive matrix, decoupled through a multilinear tensile-strain model of the material. Moreover, this model is associated with element distributed crack opening to simulate the mechanical behavior of concrete tensile strength in the post-peak region. These calculations are computationally intensive. Thus, the use of a high-performance programming language is justified, as well as the use of explicit finite element matrices and computational strategies to improve code efficiency. The validation of the numerical model was made by comparisons using experimental data as a reference. The numerical results are in excellent agreement with experimental tests. Finally, it is concluded that in a design level approximation the proposed model can adequately simulate the nonlinear mechanical behavior of bidimensional reinforced concrete structures.

**Keywords:** Finite element method. Two-dimensional elasticity. Nonlinear material. Reinforced concrete.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Implementação do modelo ortotrópico em elementos finitos. . . . .	16
Figura 2 – Diagrama de corpo livre de um elemento bidimensional, com espessura unitária. . . . .	21
Figura 3 – Elemento triangular T6 em coordenadas de áreas. . . . .	24
Figura 4 – Armadura embutida em elemento triangular para análise de concreto armado. . . . .	29
Figura 5 – Curva tensão-deformação para concreto submetido à compressão uniaxial.	35
Figura 6 – Curva tensão-deslocamento para concreto submetido à tração uniaxial.	36
Figura 7 – Comprimento efetivo do elemento triangular. . . . .	36
Figura 8 – Modelos de fissuras em elementos finitos. . . . .	37
Figura 9 – Curvas de tensão-deformação características do concreto à tração. . . .	38
Figura 10 – Curva tensão-deformação para armadura de aço. . . . .	39
Figura 11 – Modelos de curvas tensão – deformação. . . . .	40
Figura 12 – Discretização da relação para atualização do módulo secante. . . . .	40
Figura 13 – Convergência da técnica clássica de Newton-Raphson. . . . .	44
Figura 14 – Solução do método de Newton-Raphson. . . . .	45
Figura 15 – Solução de Newton-Raphson modificado. . . . .	46
Figura 16 – Ponto crítico e comportamento dinâmico da curva de equilíbrio. . . . .	47
Figura 17 – Solução do primeiro passo de carga do método do comprimento do arco.	49
Figura 18 – Elemento triangular de teste. . . . .	52
Figura 19 – Tempo para um milhão de avaliações da matriz de rigidez de um elemento T6. . . . .	53
Figura 20 – Transformação da matriz de rigidez do elemento T3, com $n = 1 \dots nel$ .	54
Figura 21 – Fluxograma geral do programa para análise não linear física. . . . .	55
Figura 22 – Modelo esquemático do Painel em L com medidas em milímetros. . . . .	57
Figura 23 – Discretização do Painel em concreto simples em forma de L. . . . .	58
Figura 24 – Curva força–deslocamento das análises experimental e numérica. . . . .	59
Figura 25 – Campo de deformação $\varepsilon_{yy}$ no estado deformado do painel em L (deformação em mm/mm). Fator de escala 20. . . . .	60
Figura 26 – Campo de tensão $\sigma_{yy}$ no estado deformado do painel em L (tensão em MPa). Fator de escala 20. . . . .	61
Figura 27 – Modelo esquemático da viga com entalhe. Medidas em milímetros. . . . .	62
Figura 28 – Discretização da viga com entalhe em concreto simples. . . . .	63
Figura 29 – Curva de equilíbrio força–CMOD das análises experimental e numérica.	64
Figura 30 – Campo de deformação $\varepsilon_{xx}$ no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 01 e 02 (deformação em mm/mm). Fator de escala 20.	65

Figura 31 – Campo de deformação $\varepsilon_{xx}$ no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 03 e 04 (deformação em mm/mm). Fator de escala 20.	65
Figura 32 – Campo de tensão $\sigma_{xx}$ no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 01 e 02 (tensão em MPa). Fator de escala 20. . . . .	66
Figura 33 – Campo de tensão $\sigma_{xx}$ no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 03 e 04 (tensão em MPa). Fator de escala 20.. . . . .	66
Figura 34 – Desenho esquemático do experimento à flexão em quatro pontos em viga de concreto armado com medidas em milímetros. . . . .	67
Figura 35 – Desenho esquemático do modelo reduzido para as análises numéricas com medidas em milímetros. . . . .	67
Figura 36 – Discretização do modelo reduzido da viga em concreto armado. . . . .	68
Figura 37 – Curva força versus deslocamento do ensaio experimental e numérico. . . . .	69
Figura 38 – Fissuramento experimental da viga . . . . .	70
Figura 39 – Campo de deformação equivalente $\varepsilon_{eq}$ no estado deformado da viga em concreto armado (deformação em mm/mm). Fator de escala 10. . . . .	71
Figura 40 – Campo de tensão na armadura $\sigma_a$ no estado deformado da viga em concreto armado (tensão em MPa). Fator de escala 10. . . . .	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas e pesos para a quadratura de Gauss de elementos triangulares. . . . .	28
Tabela 2 – Quadratura de Gauss-Legendre. . . . .	32
Tabela 3 – Classificação das análises não lineares. . . . .	33
Tabela 4 – Tempo para um milhão de avaliações da matriz de rigidez de um elemento T6 e taxa de aceleração da matriz explícita sobre a numérica. . . . .	53
Tabela 5 – Parâmetros físicos utilizados nas análises numéricas do painel em L. . . . .	58
Tabela 6 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas. . . . .	58
Tabela 7 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica. . . . .	59
Tabela 8 – Parâmetros físicos utilizados nas análises numéricas da viga com entalhe. . . . .	62
Tabela 9 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas. . . . .	62
Tabela 10 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica. . . . .	63
Tabela 11 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas. . . . .	68
Tabela 12 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica. . . . .	70

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
nel	Número de elemento sólidos da malha
T6	Elemento triangular quadrático
TOL	Tolerância da convergência

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos do Alfabeto Grego

$\alpha$	Fator de redução do comprimento do arco
$\beta$	Ângulo de inclinação entre os eixos cartesianos e as direções principais
$\gamma$	Deformação de cisalhamento
$\Delta R$	Incremento do vetor de forças residuais
$\Delta u$	Incremento do vetor de deslocamento
$\Delta s$	Comprimento do arco constante
$\varepsilon$	Vetor de deformações na direção cartesiana
$\varepsilon'$	Vetor de deformações na direção principal
$\varepsilon_{ij}$	Termo do vetor de deformação
$\lambda$	Fator de carga escalar
$\xi$	Coordenada de área ou homogênea do elemento triangular
$\sigma$	Vetor de tensão na direção cartesiana
$\sigma'$	Vetor de tensão na direção principal
$\sigma_{ij}$	Termo do vetor de tensão
$\nu$	Coefficientes de Poisson

### Símbolos do Alfabeto Latino

$A$	Área do elemento triangular
$B$	Matriz da relação cinemática ou deformação-deslocamento
$c$	Cosseno de $\beta$
$D$	Matriz constitutiva do material
$E$	Módulo de elasticidade

$E_{a1}$	Módulo de elasticidade do aço
$E_{a2}$	Módulo de endurecimento do aço
$E_s$	Módulo de elasticidade secante
$E_t$	Módulo de elasticidade tangente
$f_{ck}$	Resistência à compressão do concreto
$F_t$	Resistência à tração do concreto
$F_y$	Resistência de escoamento do aço
$\mathbf{F}$	Vetor de forças nodais
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$G_f$	Energia de fratura total
$\mathbf{I}_e$	Vetor linha da matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{J}_e$	Vetor coluna da matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$N_i$	Função de forma do elemento triangular
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de interpolação
$w_i$	Função pondera do método <i>Galerkin</i>
$R$	Função residual do método <i>Galerkin</i>
$s$	Seno de $\beta$
$S_a$	Taxa de aceleração em latência
$\mathbf{S}$	Matriz de conformidade das propriedades físicas
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação
$T$	Tempo de execução
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos global
$\mathbf{V}_e$	Vetor de valores da matriz de rigidez do elemento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Abrangências e limitações</b>	<b>19</b>
<b>1.4</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Formulação básica do Método dos Elementos Finitos</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Elemento triangular quadrático – T6</b>	<b>23</b>
2.2.1	Coordenadas de áreas	24
2.2.2	Deslocamentos nodais	25
2.2.3	Campo de deformações	26
2.2.4	Estratégias de integração em domínios triangulares	27
<b>2.3</b>	<b>Armadura embutida em elementos triangulares</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DOS MATERIAIS NÃO LINEARES</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Comportamento dos materiais</b>	<b>34</b>
3.1.1	Comportamento do concreto à compressão	34
3.1.2	Comportamento do concreto à tração	35
3.1.3	Comportamento da armadura de aço	38
<b>3.2</b>	<b>Modelos constitutivos dos materiais</b>	<b>39</b>
3.2.1	Discretização dos modelos constitutivos	39
3.2.2	Matriz constitutiva para elementos de concreto simples	40
3.2.3	Matriz constitutiva para elementos de concreto armado	41
<b>4</b>	<b>PROCEDIMENTOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Método de Newton-Raphson para elementos finitos</b>	<b>44</b>
<b>4.2</b>	<b>Método do comprimento do arco</b>	<b>47</b>
<b>4.3</b>	<b>Critérios de convergência</b>	<b>50</b>
<b>5</b>	<b>ESTRUTURA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL</b>	<b>51</b>
<b>5.1</b>	<b>Pré-processamento</b>	<b>51</b>
<b>5.2</b>	<b>Processamento</b>	<b>51</b>
5.2.1	Matriz de rigidez	52
5.2.2	Programa para análise não linear	54
<b>5.3</b>	<b>Pós-processamento</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>57</b>

<b>6.1</b>	<b>Exemplo 01: Painel em L</b> . . . . .	<b>57</b>
6.1.1	Discretização em elementos triangulares . . . . .	58
6.1.2	Resultados do experimento . . . . .	59
6.1.3	Conclusões e considerações . . . . .	60
<b>6.2</b>	<b>Exemplo 02: Viga com entalhe</b> . . . . .	<b>61</b>
6.2.1	Discretização em elementos triangulares . . . . .	62
6.2.2	Resultados do experimento . . . . .	63
6.2.3	Conclusões e considerações . . . . .	64
<b>6.3</b>	<b>Exemplo 03: Viga de concreto armado</b> . . . . .	<b>67</b>
6.3.1	Discretização em elementos triangulares . . . . .	68
6.3.2	Resultados do experimento . . . . .	68
6.3.3	Conclusões e considerações . . . . .	70
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>7.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> . . . . .	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>75</b>
	<b>APÊNDICE A – ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL PARA MA- TERIAIS ORTOTRÓPICOS</b> . . . . .	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE B – ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL</b> . . . . .	<b>85</b>

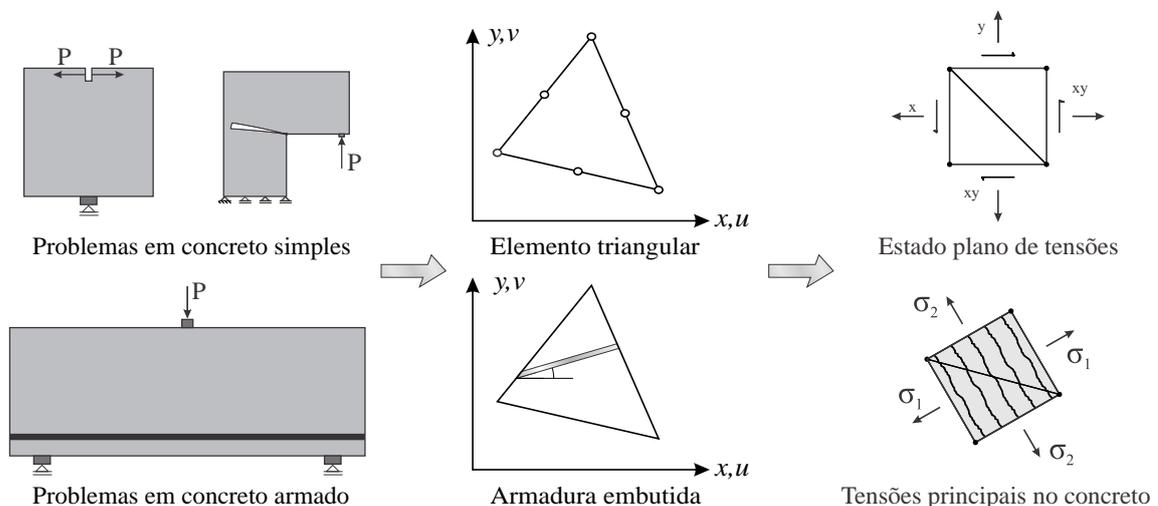
## 1 INTRODUÇÃO

As análises estruturais usualmente adotam hipóteses lineares que permitem determinar os deslocamentos, as deformações e as tensões. Essas respostas são relevantes para os projetos de engenharia. No entanto, problemas complexos em concreto armado demandam análises mais abrangentes e atenção especial a fim de aumentar a segurança das estruturas e reduzir os custos. Logo, desenvolveu-se análises numéricas que consideram os efeitos não lineares dos materiais. Para tanto, a transformação de problemas complexos em elementos discretos e a implementação computacional são de fundamental importância.

A discretização de meios contínuos foi bastante abordada pelos matemáticos e engenheiros durante décadas por diferentes métodos. Nesse contexto, a apresentação formal do Método dos Elementos Finitos (MEF) é atribuída a Argyris e Kelsey (1954) e Turner et al. (1956), uma vez que, apresentaram trabalhos sobre a discretização das propriedades de um sólido contínuo por meio do somatório das contribuições individuais dos elementos, com as ideias principais do MEF. No entanto, o termo elemento finito surgiu no trabalho de Clough (1960) em contraposição aos elementos infinitesimais do cálculo diferencial.

Clough e Wilson (1962) apresentaram os resultados obtidos do primeiro programa computacional que calculou as propriedades de rigidez para qualquer malha de elementos finitos triangulares e, em seguida, utilizou a iteração de Gauss-Seidel para resolver as equações de equilíbrio. Desde então, com a evolução e acessibilidade dos computadores o *MEF* passou a ser difundido e aplicado em diversas áreas, inclusive na análise estrutural não linear. Entretanto, para a implementação desse método é necessário formular os elementos finitos e os modelos constitutivos dos materiais, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Implementação do modelo ortotrópico em elementos finitos.



Fonte: O autor (2018).

Em relação à formulação de elementos finitos, os pesquisadores investigaram a implementação e a eficiência da matriz explícita em comparação com à integração analítica ou numérica de elementos triangulares de ordem superior, como Moser e Swoboda (1978), Subramanian e Bose (1982), Rathod (1988) e Sengupta e Dasgupta (1990). Mais recentemente, Griffiths et al. (2009), analisaram a taxa de aceleração entre o tempo de processamento da matriz explícita e da integração numérica convencional de elementos triangulares. Como resultado, os autores obtiveram que a abordagem da matriz explícita possui elevado potencial para programas computacionais mais eficientes.

Entre os modelos constitutivos que simulam o comportamento mecânico do concreto, os modelos ortotrópicos são facilmente incorporados em procedimentos de análises numéricas. Diante disto, esses modelos foram investigados por pesquisadores para aproximar adequadamente o comportamento do concreto sob carga biaxial e triaxial.

Darwin e Pecknold (1977) investigaram o comportamento do concreto em estado plano de tensões e sob carga biaxial monotônica, com ortotropia do material nas direções principais. Como resultado da investigação, os autores obtiveram um modelo constitutivo do concreto simples consistente em relação aos dados experimentais e representações analíticas.

Bathe e Ramaswamy (1979) apresentaram a formulação de um modelo hipoeelástico baseado em uma relação tensão-deformação uniaxial que é generalizado para levar em consideração as condições de tensão biaxial e triaxial. Este modelo foi incorporado e avaliado no programa computacional ADINA através de aplicações práticas para análises não lineares em concreto. Em 1989, os autores reapresentaram a formulação com melhorias significativas.

Os modelos apresentados possuem em comum as deformações acopladas, desta forma a matriz constitutiva não linear depende de uma formulação para o coeficiente de Poisson ou módulos de elasticidades combinados afim de obter a matriz constitutiva simétrica. No entanto, Vecchio (1989) propôs um modelo constitutivo desacoplado mediante o coeficiente de Poisson nulo e a teoria do campo de compressão modificado para elementos de concreto armado (VECCHIO; COLLINS, 1986).

Vecchio e Selby (1991) apresentaram as expressões e os procedimentos para análise não linear de concreto armado em elementos finitos tridimensionais, com base na teoria do campo de compressão modificado. Como resultado obtiveram um programa computacional numericamente estável e com boa convergência. Neste contexto, outros trabalhos empregaram o modelo ortotrópico proposto por Vecchio tais como (VECCHIO; SELBY, 1997; JAGD, 1997; MENIN et al., 2009). Ademais, o modelo ortotrópico representado por uma curva de tensão-deformação total é associado a um modelo de fissuração do concreto simples e a formulação do reforço em aço para simulação de um problema em concreto armado.

Estes trabalhos apresentam modelos constitutivos e procedimentos para atualização das propriedades físicas durante a evolução do carregamento por meio de métodos iterativos. Estes métodos demanda um custo computacional devido à solução do sistema de equações, montagem das forças internas e da matriz de rigidez. Por isto, o presente trabalho justifica-se pelo desenvolvimento da formulação matemática e de procedimentos computacionais eficientes.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estudar o comportamento do modelo ortotrópico em membros de concreto e a implementação de algoritmos eficientes para análise não linear física por meio do Método dos Elemento Finitos. Para alcançar esse objetivo é necessário o desenvolvimento de algumas etapas específicas:

- Realizar uma revisão do referencial teórico para embasar o desenvolvimento da pesquisa;
- Desenvolver passo-a-passo a formulação da armadura embutida para elementos triangulares;
- Modelar o comportamento ortotrópico dos materiais e discretizar o diagrama de tensão–deslocamento total;
- Desenvolver um programa computacional para análise não linear física e investigar a eficiência do emprego de matrizes explícitas;
- Realizar experimentos numéricos e verificar a convergência do modelo ortotrópico;
- Validar os modelos constitutivos por meio da comparação de ensaios experimentais extraídos da literatura.

## 1.2 Metodologia

A solução analítica de problemas complexos em concreto armado é de difícil obtenção. Portanto, desenvolveu-se ao longo dos anos soluções numéricas que envolvem um conjunto de métodos e boas práticas na elaboração de ferramentas computacionais eficientes para análises não lineares.

Neste trabalho será investigado de forma sistemática os principais procedimentos para análise não linear física pelo Método dos Elementos Finitos aplicado à problemas de elasticidade bidimensional. No entanto, um código computacional para este fim têm aspectos específicos em relação à análise linear, uma vez que as propriedades físicas não permanecem constantes durante a evolução do carregamento.

Na solução numérica será utilizado o triângulo quadrático e a armadura embutida pela versatilidade na discretização das estruturas em concreto simples ou armado e pela precisão numérica em relação ao triângulo básico. Nesses elementos as deformações variam linearmente, por isto as relações cinemáticas e constitutivas dependem do campo de deformações durante o processo de atualização das propriedades físicas. Portanto, essas variações precisam ser consideradas no integrando das forças internas e da matriz de rigidez.

Desta forma, as propriedades físicas dos elementos serão atualizadas por um solver iterativo, com base no método do *Comprimento do Arco*. A implementação desse método é uma alternativa eficiente ao problema da matriz de rigidez singular nos pontos críticos da curva de equilíbrio. Ademais, durante a evolução do carregamento, a matriz de rigidez e o vetor de forças internas são atualizados através dos modelos ortotrópicos dos materiais.

Neste trabalho será utilizado a linguagem de programação para computação numérica e científica designada por JULIA a fim de desenvolver um código aplicado à análise não linear física. Os resultados obtidos nas análises de problemas práticos serão validados por meio de resultados experimentais. Também serão utilizados os programas GID para pré-processamento dos modelos bidimensionais e PARAVIEW para visualização científica pós-processamento.

### 1.3 Abrangências e limitações

Este trabalho envolve problemas práticos de engenharia estrutural relacionados a análise não linear física de sólidos, conforme as seguintes limitações:

- elementos finitos bidimensionais em estado plano de tensões com materiais homogêneos e comportamento ortotrópico;
- hipótese de aderência perfeita entre o reforço e o concreto para formulação da armadura embutida no elemento finito;
- modelo de fissuras distribuídas a fim de simular a fase plástica do concreto à tração;
- modelo multilinear da curva de tensão–deformação total para aproximação do comportamento do material;
- desacoplamento da relação constitutiva por meio do coeficiente de *Poisson* nulo;

A avaliação do código computacional limita-se ao processamento da análise não linear, uma vez que o pré e pós-processamento podem ser obtidos de programa externos de forma eficiente. Neste trabalho, utilizou-se um computador com sistema operacional Windows, com processador Intel®Core(TM) i7-7700HQ CPU 2.80 GHz e 16 GB de memória RAM DDR4.

## 1.4 Organização do trabalho

O primeiro capítulo apresenta-se de forma objetiva as generalidades da não linearidade física em análises estruturais. Em seguida, apresentam-se os objetivos, as abrangências e limitações desse trabalho. Aborda-se, ainda, a metodologia empregada no desenvolvimento.

No segundo capítulo é apresentado a formulação básica do MEF pelo *Método de Galerkin* aplicada à problemas bidimensionais. Em seguida, aborda-se o desenvolvimento do elemento triangular T6 e as principais estratégias de integração em domínios triangulares. Por fim, apresenta-se a formulação do elemento triangular com armadura embutida para análise de concreto armado.

No terceiro capítulo é demonstrado a modelagem dos materiais não lineares, com uma breve abordagem dos fenômenos físicos que definem o comportamento do concreto e da armadura de aço. Em seguida, aborda-se os conceitos para modelagem da fase plástica do concreto à tração por meio de fissuras distribuídas no elemento finito. Por fim, apresenta-se o modelo ortotrópico não linear para implementação e atualização das propriedades físicas dos materiais.

O quarto capítulo encontram-se os procedimentos para solução de equações não lineares por processo iterativo pelo *Método de Newton-Rapshon Modificado* e *Método do Comprimento do Arco* para elementos finitos, assim como o critério de convergência da análise.

O quinto capítulo apresenta-se a estrutura do código computacional para os procedimentos adotados, assim como as principais estratégias utilizadas no desenvolvimento do programa a fim de obter eficiência computacional.

O sexto capítulo apresentam-se as análises numéricas realizadas utilizando os modelos constitutivos proposto para análise não linear física por meio de experimentos extraídos da literatura. Por fim, no sétimo capítulo apresentam-se as principais conclusões e contribuições, assim como os pontos importantes para continuidade da pesquisa.

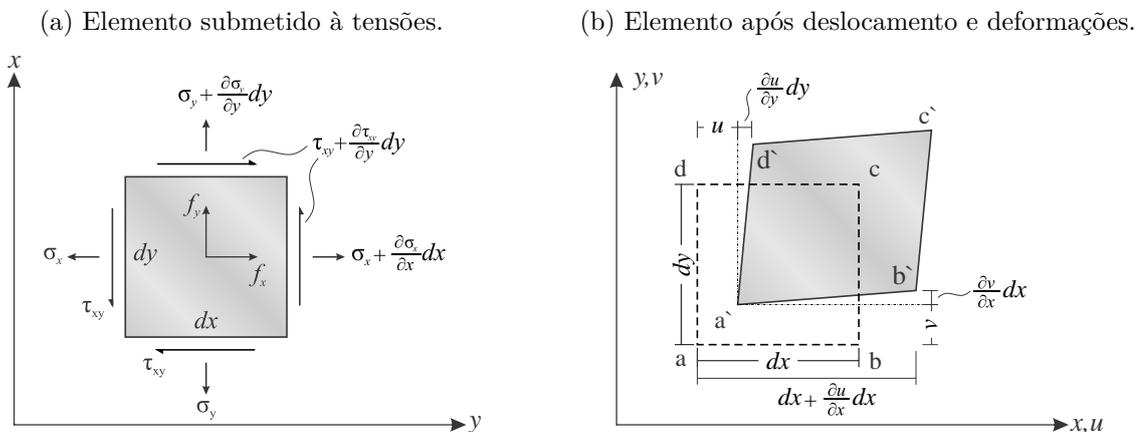
## 2 ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

Neste capítulo será desenvolvido a formulação dos elementos finitos por meio do método de Galerkin e aplicada em problemas de elasticidade bidimensional, assim como a formulação básica dos elementos finitos triangular para discretização de um sólido estrutural, onde cada nó do elemento possui dois graus de liberdade. No Apêndice 7.1 encontram-se os conceitos fundamentais de elasticidade para materiais ortotrópicos tridimensionais e bidimensionais.

### 2.1 Formulação básica do Método dos Elementos Finitos

A formulação do MEF para problemas bidimensionais parte das equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade da elasticidade de Timoshenko e Goodier (1980). Para tanto, considera-se o equilíbrio de um elemento bidimensional, com espessura unitária. O desenho esquemático das tensões atuantes e do elemento após deslocamento e deformações pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de corpo livre de um elemento bidimensional, com espessura unitária.



Fonte: Adaptada de Logan (2009).

Desta forma, as equações diferenciais de equilíbrio são apresentadas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $f_x$  e  $f_y$  são as forças de massa por unidade de volume. Além disso, as tensões atuantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são as componentes do vetor  $\boldsymbol{\sigma}$ . Por outro lado, as tensões estão relacionadas com as deformações do elemento finito por meio das equações constitutivas,

sob a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva do material, enquanto o vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é a deformação total dada pelas equações cinemáticas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{S}$  é o operador matricial da relação deformação–deslocamento;  $u$  e  $v$  são as componentes do vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$ .

Em seguida, parte-se da equação geral dos Métodos de Resíduos Ponderados (MRP):

$$\int w_i R \, dV = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

onde  $w_i$  e  $R$  representam, respectivamente, a função ponderadora do nó  $i$  e a função residual, enquanto  $dV$  é o volume diferencial de um elemento finito. No desenvolvimento dos elementos finitos pelo método de Galerkin, a função residual é a equação diferencial que descreve matematicamente o problema, enquanto a função ponderadora é dada por:

$$w_i = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{d}_i} \quad (2.5)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{d}_i$  representam a função aproximadora e o vetor de deslocamentos do nó  $i$ , tal função pode ser expressa por funções de interpolação e os deslocamentos nodais do elemento, sob a forma:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_n u_n \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_n v_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{d} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n\}^T$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento finito e por fim,  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de interpolação dada por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Agora, aplicando o método dos resíduos ponderados na Eq. (2.1), obtém-se a forma forte do método de Galerkin:

$$\int \left\{ w_1 \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right\} dV + \int \left\{ w_2 \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \right\} dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Para obter a forma fraca da formulação aplica-se no primeiro termo da Eq. (2.8) a integração por partes. Neste processo, as condições de contorno naturais são introduzidas no sistema de equações:

$$- \int \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy}) \\ (\frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y) \end{array} \right\} dV + \int \left\{ \begin{array}{l} w_1(\sigma_x \eta_x + \tau_{xy} \eta_y) \\ w_2(\sigma_y \eta_y + \tau_{xy} \eta_x) \end{array} \right\} dS + \int \left\{ \begin{array}{l} w_1 f_x \\ w_2 f_y \end{array} \right\} dV = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

onde os três termos da equação podem ser designados, respectivamente, por forças internas, forças de superfície por unidade de área do contorno e forças de massa por unidade de volume, enquanto  $\eta_x$  e  $\eta_y$  são os cossenos diretores do vetor normal externo e por fim  $dS$  é a região da superfície do domínio onde são aplicadas as condições de contorno naturais.

Usando a Eq. (2.7) para substituir as funções ponderadoras, a Eq. (2.9) torna-se:

$$\int \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} dV = \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \eta_x + \tau_{xy} \eta_y \\ \sigma_y \eta_y + \tau_{xy} \eta_x \end{array} \right\} dS + \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} f_x \\ f_y \end{array} \right\} dV \quad (2.10)$$

Utilizando as Equações (2.2), (2.3) e (2.6) é possível reescrever a Eq. (2.10):

$$\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \eta_x + \tau_{xy} \eta_y \\ \sigma_y \eta_y + \tau_{xy} \eta_x \end{array} \right\} dS + \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} f_x \\ f_y \end{array} \right\} dV \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação–deslocamento, sendo possível representa-la em termos da matriz operacional e das funções de interpolação:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A Eq. (2.11) é reescrita sob a forma generalizada:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{K}$  representa a matriz de rigidez de um elemento finito:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.14)$$

e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais equivalentes composto por forças de superfície e de massa:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \eta_x + \tau_{xy} \eta_y \\ \sigma_y \eta_y + \tau_{xy} \eta_x \end{array} \right\} dS + \int \mathbf{N}^T \left\{ \begin{array}{l} f_x \\ f_y \end{array} \right\} dV \quad (2.15)$$

## 2.2 Elemento triangular quadrático – T6

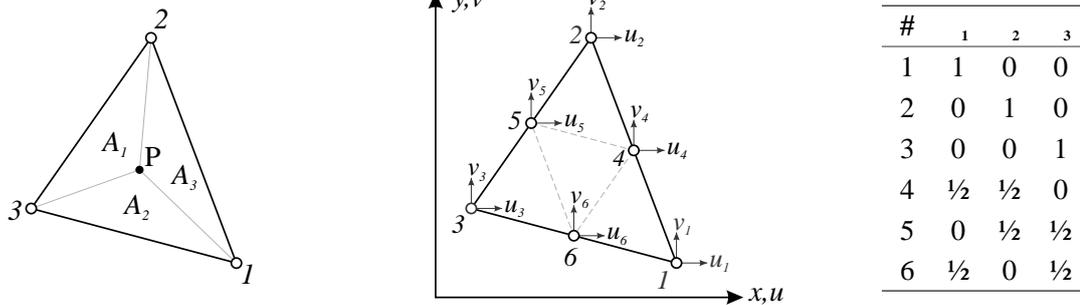
Neste trabalho, consideramos o elemento triangular de seis nós e deformação linear desenvolvido por Veubeke (1965) e denominado simplesmente de T6. Este elemento é usado em programas comerciais e possui vantagens em relação ao elemento triangular básico tais como melhores resultados para tensões e deslocamentos para um dado número de nós da malha de elementos finitos.

### 2.2.1 Coordenadas de áreas

Apesar da formulação matemática de Veubeke considerar coordenadas cartesianas, por conveniência serão empregadas as coordenadas de áreas do elemento T6 (Figura 3).

Figura 3 – Elemento triangular T6 em coordenadas de áreas.

- (a) Triângulo dividido em áreas.      (b) Elemento triangular T6.      (c) Coordenadas nodais.



Fonte: Adaptada de Assan (2003).

Segundo Assan (2003), as coordenadas de áreas  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  estão associadas aos lados do elemento triangular e variam de 0 a 1. Sendo às relações entre as coordenadas de áreas e as cartesianas obtidas por meio das expressões:

$$\begin{aligned}
 x &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \\
 y &= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \\
 1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Além disso, as coordenadas de um determinado ponto  $P(x,y)$  podem ser representadas pelas razões entre as subáreas formadas a partir do  $P(x,y)$  e a área total do elemento  $A = A_1 + A_2 + A_3$ . Assim:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{2.17}$$

onde a área total do elemento triangular é obtida com as coordenadas dos vértices:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_1 (y_2 - y_3) + y_1 (x_3 - x_2)] \tag{2.18}$$

Nas Eqs. (2.17) podemos determinar as subáreas do mesmo modo que a área total. Desta maneira, obtemos as coordenadas de áreas em função das cartesianas e escritas como:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x (y_2 - y_3) + y (x_3 - x_2)] \\
 \xi_2 &= \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + x (y_3 - y_1) + y (x_1 - x_3)] \\
 \xi_3 &= \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x (y_1 - y_2) + y (x_2 - x_1)]
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

### 2.2.2 Deslocamentos nodais

Os deslocamento  $u$  e  $v$  são interpolados por polinômios completos do segundo grau, a saber:

$$u(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 \quad (2.20a)$$

$$v(x,y) = c_7 + c_8x + c_9y + c_{10}x^2 + c_{11}xy + c_{12}y^2 \quad (2.20b)$$

Transformando as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em coordenadas de áreas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  obtemos as funções interpoladoras escritas da seguinte forma:

$$u(\xi_1, \xi_2) = a_1 + a_2\xi_1 + a_3\xi_2 + a_4\xi_1^2 + a_5\xi_1\xi_2 + a_6\xi_2^2 \quad (2.21a)$$

$$v(\xi_1, \xi_2) = a_7 + a_8\xi_1 + a_9\xi_2 + a_{10}\xi_1^2 + a_{11}\xi_1\xi_2 + a_{12}\xi_2^2 \quad (2.21b)$$

Os deslocamentos nodais do elemento T6 na direção  $u$  são deduzidos da Eq. (2.21a):

$$u_1 = u(1, 0) = a_1 + a_2 + a_4$$

$$u_2 = u(0, 1) = a_1 + a_3 + a_6$$

$$u_3 = u(0, 0) = a_1$$

$$u_4 = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{4}a_5 + \frac{1}{4}a_6 \quad (2.22)$$

$$u_5 = u\left(0, \frac{1}{2}\right) = a_1 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{4}a_6$$

$$u_6 = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_4$$

Reescrevendo o sistema de Eqs. (2.22) na forma matricial  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}\mathbf{a}$ :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Assim, resolvendo o sistema equações em termos de  $\mathbf{a}$  e substituindo na Eq. (2.21a) obtemos a expressão do deslocamento em termos nodais para  $u$  e de forma semelhante para  $v$ . Logo:

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 \quad (2.24a)$$

$$v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 \quad (2.24b)$$

onde  $N_i$  representa as funções de forma quadráticas do elemento T6 dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1), & N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1), & N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1), & N_6 &= 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.2.3 Campo de deformações

Reescrevendo as relações cinemática em função das coordenadas de áreas temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (2.19) e (2.24) nas Eqs. (2.26) e expressando o resultado em forma matricial  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$ , obtemos a matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (4\xi_1 - 1)b_1 & 0 & (4\xi_1 - 1)a_1 \\ 0 & (4\xi_1 - 1)a_1 & (4\xi_1 - 1)b_1 \\ (4\xi_2 - 1)b_2 & 0 & (4\xi_2 - 1)a_2 \\ 0 & (4\xi_2 - 1)a_2 & (4\xi_2 - 1)b_2 \\ (4\xi_3 - 1)b_3 & 0 & (4\xi_3 - 1)a_3 \\ 0 & (4\xi_3 - 1)a_3 & (4\xi_3 - 1)b_3 \\ 4(\xi_2 b_1 + \xi_1 b_2) & 0 & 4(\xi_2 a_1 + \xi_1 a_2) \\ 0 & 4(\xi_2 a_1 + \xi_1 a_2) & 4(\xi_2 b_1 + \xi_1 b_2) \\ 4(\xi_3 b_2 + \xi_2 b_3) & 0 & 4(\xi_3 a_2 + \xi_2 a_3) \\ 0 & 4(\xi_3 a_2 + \xi_2 a_3) & 4(\xi_3 b_2 + \xi_2 b_3) \\ 4(\xi_1 b_3 + \xi_3 b_1) & 0 & 4(\xi_1 a_3 + \xi_3 a_1) \\ 0 & 4(\xi_1 a_3 + \xi_3 a_1) & 4(\xi_1 b_3 + \xi_3 b_1) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde  $a_i = x_k - x_j$  e  $b_i = y_j - y_k$  para  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Neste caso, as deformações são lineares e a matriz  $\mathbf{B}$  depende das coordenadas de áreas  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ . Portanto, as expressões finais das forças internas e da matriz de rigidez do elemento T6 dependem da integração.

### 2.2.4 Estratégias de integração em domínios triangulares

Da formulação básica do MEF obtemos as expressões para forças internas e matriz de rigidez do elemento T6:

$$\mathbf{F}_{int} = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.28)$$

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (2.29)$$

As principais abordagens para integrar uma função em domínios triangulares de lados retos são integração numérica e analítica. A primeira é aplicada em elementos finitos pela grande maioria dos programas comerciais para calcular a matriz de rigidez (GRIFFITHS et al., 2009).

Segundo Zienkiewicz (2000), a primeira formulação para integração numérica aplicada com sucesso em elementos finitos foi concebida por Radau (1880). No entanto, as expressões em termos de coordenadas de área foram derivadas por Hammer et al. (1956). Desta forma, o integrando é calculado pela fórmula:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_1 = \sum_{p=1}^{n_p} f(\xi_{1_p}, \xi_{2_p}, \xi_{3_p}) W_p \quad (2.30)$$

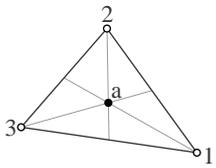
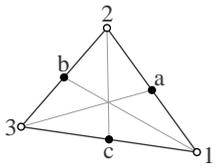
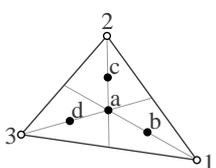
sendo  $n_p$  o número de pontos de integração e  $\xi_{1_p}$ ,  $\xi_{2_p}$ ,  $\xi_{3_p}$  e  $W_p$  as coordenadas de áreas e o peso correspondente. Posteriormente, uma série de pontos numericamente eficientes e totalmente simétricos foram derivados da formulação gaussiana de HAMMER et al. e dados por Cowper (1973), conforme a Tabela (1).

A segunda abordagem foi apresentado por Bell (1969) e empregada para formular a matriz de rigidez explícita do elemento por Moser e Swoboda (1978). Neste caso, a integração em domínios triangulares é independente da forma do triângulo e pode ser expressa como uma fração da área, a saber:

$$I = \int \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n dA = 2A \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} \quad (2.31)$$

onde  $A$  é a área do elemento. Desta forma, obtemos os termos da forças internas e da matriz de rigidez na forma explícita para o elemento T6.

Tabela 1 – Coordenadas e pesos para a quadratura de Gauss de elementos triangulares.

Ordem	Figura	Erro	Pontos	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$W_p$
Linear		$O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
Quadrática		$O(h^3)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
			b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Cúbica		$O(h^4)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
			b	0,6	0,2	0,2	$\frac{25}{48}$
			c	0,2	0,6	0,2	$\frac{25}{48}$
			d	0,2	0,2	0,6	$\frac{25}{48}$

Fonte: Modificado de Zienkiewicz (2000).

Neste trabalho será investigada a aplicação da matriz explícita frente à integração numérica convencional, uma vez que, há possibilidade de integração exata através da Eq. (2.30). Além disso, de acordo com Griffiths et al. (2009), a matriz explícita pode aumentar a eficiência computacional, haja vista a redução do número de termos avaliados devido à simetria da matriz de rigidez, fatores comuns, termos repetidos e iguais a zero.

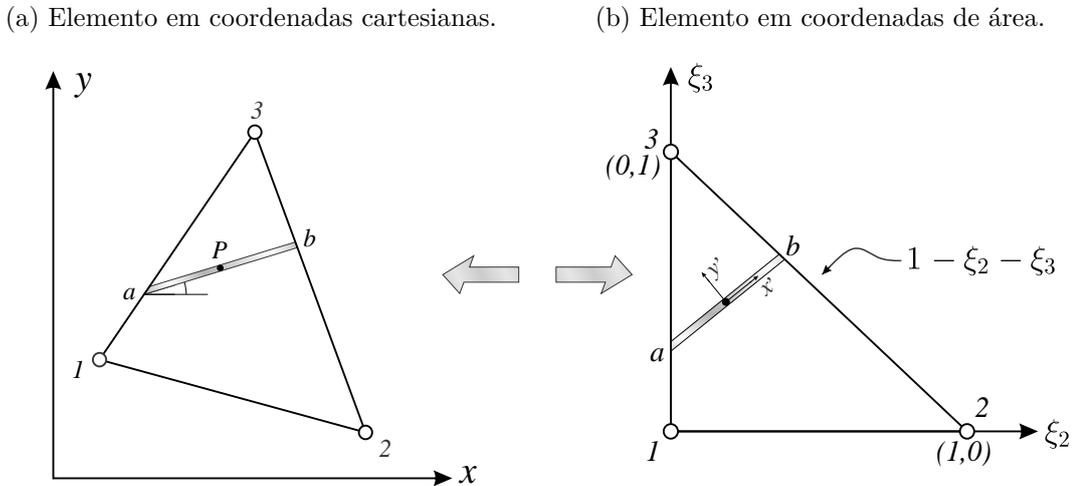
### 2.3 Armadura embutida em elementos triangulares

Em elementos finitos de concreto armado, o reforço de aço pode ser analisado por três modelos distintos: distribuído, discreto e embutido. No modelo distribuído, conforme Kwak e Filippou (1990), assume-se que o reforço seja distribuído sobre o elemento de concreto com um determinado ângulo de orientação. Por outro lado, o modelo discreto representa o reforço por elementos unidimensionais sobreposto à malha de elementos de concreto bidimensional. Uma vantagem da representação discreta é a possibilidade de inclusão do deslizamento do reforço em relação ao concreto. Já o modelo embutido é útil em ligação com elementos de concreto isoparamétricos de ordem superior. O reforço é considerado como um elemento axial embutido no elemento principal de modo que seus deslocamentos sejam consistentes.

Nesta seção consideramos o modelo de armadura embutida no elemento em concreto apresentado por Phillips e Zienkiewicz (1976). Recentemente, a formulação do modelo foi modificado por Ranjbaran (1991) para consideração de barras inclinadas. Ademais, o modelo é rerepresentado com as devidas alterações para o caso do elemento triangular,

como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 – Armadura embutida em elemento triangular para análise de concreto armado.



Fonte: Adaptada de Assan (2003).

Inicialmente, assume-se aderência perfeita entre o concreto e a armadura, de tal forma que o deslizamento entre os elementos é ignorado. Assim, em cada ponto ao longo da camada de reforço, assume-se que o concreto e armadura tem o mesmo estado de deformação. Logo, a deformação do elemento triangular em concreto é dada pela relação deformação–deslocamento em coordenadas cartesianas, sob a forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.32)$$

No entanto, avalia-se a deformação do elemento triangular no sistema de coordenadas local  $(x', y')$ , onde  $x'$  e  $y'$  são, respectivamente, a coordenada na direção axial e perpendicular da armadura, como mostra a Figura 4. Para transformar o sistema de coordenadas de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  utiliza-se a relação dada no Apêndice 7.1 e reescrita abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

onde  $c = \cos \alpha$  e  $s = \sin \alpha$ . Já  $\alpha$  é o ângulo entre o sistema de coordenadas cartesianas e local da armadura. Entretanto, considerando a armadura com deformação apenas na direção axial conduz que apenas o primeiro termo da Eq. (2.33) é utilizado na formulação:

$$\varepsilon_{x'} = [c^2 \quad s^2 \quad cs] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.34)$$

Substituindo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pela relação deformação–deslocamento do elemento triangular dada na Eq. 2.32 é possível escrever a deformação em qualquer ponto da armadura:

$$\varepsilon_{x'} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{B}'\mathbf{d} \quad (2.35)$$

onde  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{B}'$  são, respectivamente, a matriz de transformação e a matriz deformação–deslocamento da armadura embutida no elemento. Uma vez que  $\mathbf{B}'$  é determinada, escreve-se  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{F}_{int}$  do conjunto elemento–armadura, a partir das Eqs. (2.28) e (2.29), conforme as expressões a seguir:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_a = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{B}'^T \sigma_a dV \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{el} + \mathbf{K}_a = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \int \mathbf{B}'^T E_a \mathbf{B}' dV \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{F}_{el}$  e  $\mathbf{K}_{el}$  representam, respectivamente, forças internas e matriz de rigidez do elemento, enquanto  $\mathbf{F}_a$  e  $\mathbf{K}_a$  representam, respectivamente, forças internas e matriz de rigidez da armadura, por fim,  $\sigma_a$  e  $E_a$  são, respectivamente, tensão e módulo de elasticidade da armadura.

Considerando que as barras da armadura são distribuídas na espessura do elemento, o volume elementar é calculado como:

$$dV = n_b A_a |J_a| ds \quad (2.38)$$

onde  $n_b$  e  $A_a$  representam, respectivamente, o número de barras ao longo da espessura do elemento e a área transversal da armadura, enquanto  $|J_a|$  é o jacobiano da transformação. Por fim,  $s$  é uma coordenada adimensional adotada ao longo da armadura no elemento que coincide com a coordenada local  $x'$ . Logo, escreve-se as relações dos cossenos diretores por meio das transformações:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x'} = \frac{1}{|J_a|} \frac{\partial x}{\partial s} \\ s &= \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x'} = \frac{1}{|J_a|} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Substituindo as expressões finais das Eqs. (2.39) na relação trigonométrica  $c^2 + s^2 = 1$  obtém-se o jacobiano da transformação:

$$|J_a| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \quad (2.40)$$

As relações entre as coordenadas triangulares e  $s$  são obtidas por meio das derivadas da regra da cadeia e expressas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Em seguida, avalia-se as relações entre coordenadas cartesianas, triangulares e  $s$  a fim de obter a expressão final do  $|J_a|$ . As relações entre coordenadas cartesianas e

triangulares são reescritas a partir da Eq. (2.16):

$$\begin{aligned} x &= (1 - \xi_2 - \xi_3)x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 \\ y &= (1 - \xi_2 - \xi_3)x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para uma armadura de barra reta escreve-se as relações entre coordenadas triangulares e  $s$ , com  $s$  variando de  $-1$  a  $+1$ , a partir do polinômio de Lagrange:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{2} (\Delta\xi_2s + \xi_{2,a} + \xi_{2,b}) = \\ \xi_3 &= \frac{1}{2} (\Delta\xi_3s + \xi_{3,a} + \xi_{3,b}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde  $\Delta\xi_2 = \xi_{2,b} - \xi_{2,a}$  e  $\Delta\xi_3 = \xi_{3,b} - \xi_{3,a}$ .

Substituindo as relações das Eqs. (2.42) e (2.43) na Eq. (2.41) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & -a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta\xi_2}{2} \\ \frac{\Delta\xi_3}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

onde  $a_i = x_k - x_j$  e  $b_i = y_j - y_k$  para  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Finalmente, considerando as relação das Eqs. (2.44) na Eq.(2.40) obtém-se a expressão final do jacobiano de transformação para um elemento triangular, a saber:

$$|J_a| = \frac{1}{2} \sqrt{(a_3^2 + b_3^2) \Delta\xi_2^2 - 2(a_2a_3 + b_2b_3) \Delta\xi_2\Delta\xi_3 + (a_2^2 + b_2^2) \Delta\xi_3^2} \quad (2.45)$$

Substituindo o volume elementar dado na Eq. 2.38 obtém-se  $F_a$  e  $K_a$  no domínio da barra:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a &= n_b A_a |J_a| \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}'^T \sigma_a ds \\ \mathbf{K}_a &= n_b A_a |J_a| \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}'^T E_a \mathbf{B}' ds \end{aligned} \quad (2.46)$$

Enfatiza-se que as mesmas funções de interpolação do elemento triangular em  $dV$  são aplicadas ao domínio da barra, uma vez que,  $\mathbf{B}'$  e  $|J_a|$  são expressos como funções das coordenadas triangulares do elemento. Por fim, as integrais definidas no intervalo  $-1 \leq s \leq +1$  são calculadas de forma eficiente por integração analítica ou numérica. No segundo caso, emprega-se quadratura de Gauss-Legendre e o integrando é calculado pela fórmula:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(s) ds \approx \sum_{p=1}^{n_p} f(s_p) W_p \quad (2.47)$$

onde  $n_p$  é o número de pontos,  $s_p$  é a coordenada e por fim,  $W_p$  é o peso do ponto  $p$ . A Tabela 2 apresenta os pontos de integração da quadratura de Gauss-Legendre e seus respectivos

pesos, conforme a ordem do polinômio. Os pontos são localizados simetricamente em relação ao intervalo de integração e no caso da armadura embutida no elemento triangular quadrático considera-se ordem cúbica para avaliação do integrando.

Tabela 2 – Quadratura de Gauss-Legendre.

<b>Ordem</b>	<b>Erro</b>	<b>Pontos</b>	<b>s</b>	<b><math>W_p</math></b>
Linear	$O(h)$	1	0	2
Quadrática	$O(h^2)$	1	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
		2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
Cúbica	$O(h^5)$	1	$+\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
		2	0	$\frac{8}{9}$
		3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

Fonte: Modificado de Zienkiewicz (2000).

### 3 MODELAGEM DOS MATERIAIS NÃO LINEARES

No capítulo anterior foram deduzidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez dos elementos finitos triangulares considerando análise estática, com as equações de equilíbrio para um conjunto de elementos finitos escrita na forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} \quad (3.1)$$

Este sistema de equações indica que a análise é linear, uma vez que multiplicando o vetor de forças externas  $\mathbf{F}_{ext}$  por uma constante  $\alpha$  obtém-se um novo vetor de deslocamento  $\alpha\mathbf{u}$ . As análises que não atendem a esta premissa são consideradas como não lineares. A Tabela 3 apresenta uma classificação das análises não lineares conforme a formulação e a medição das tensões e deformações, esta classificação é conveniente por separar os efeitos não lineares do material e da cinemática.

Tabela 3 – Classificação das análises não lineares.

Tipo	Descrição	Formulação	Medição
Materialmente não linear	Deslocamentos e deformações infinitesimais; Relação constitutiva não linear.	Material não linear	Tensões e deformações de engenharia
Grandes deslocamentos e rotações; Pequenas deformações.	Grandes deslocamentos e rotações das fibras; Pequenas alterações das extensões e ângulo entre fibras; Relação constitutiva linear ou não linear.	Lagrangiana total  Lagrangiana atualizada	2° Tensor de Piola-Kirchhoff Deformação Green-Lagrange  Tensor de Cauchy Deformação de Almansi
Grandes deslocamentos, rotações e deformações.	Grandes deslocamentos e rotações das fibras; Grandes alterações das extensões e ângulo entre fibras; Relação constitutiva linear ou não linear.	Lagrangiana total  Lagrangiana atualizada	2° Tensor de Piola-Kirchhoff Deformação Green-Lagrange  Tensor de Cauchy Deformação de Almansi

Fonte: Bathe (1996).

Neste trabalho serão considerados os conceitos e os procedimentos para análise não linear do material. Este tipo de não linearidade indica que os parâmetros físicos do material não permanecem constantes e as relações tensões-deformações não lineares são determinadas pela função:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon})$  representa a matriz constitutiva do material não linear em função das deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 3.1 Comportamento dos materiais

Em primeiro lugar, faz-se necessário uma breve abordagem dos fenômenos físicos que definem o comportamento dos materiais para uma melhor compreensão a respeito dos modelos constitutivos aplicados nas análises não lineares.

#### 3.1.1 Comportamento do concreto à compressão

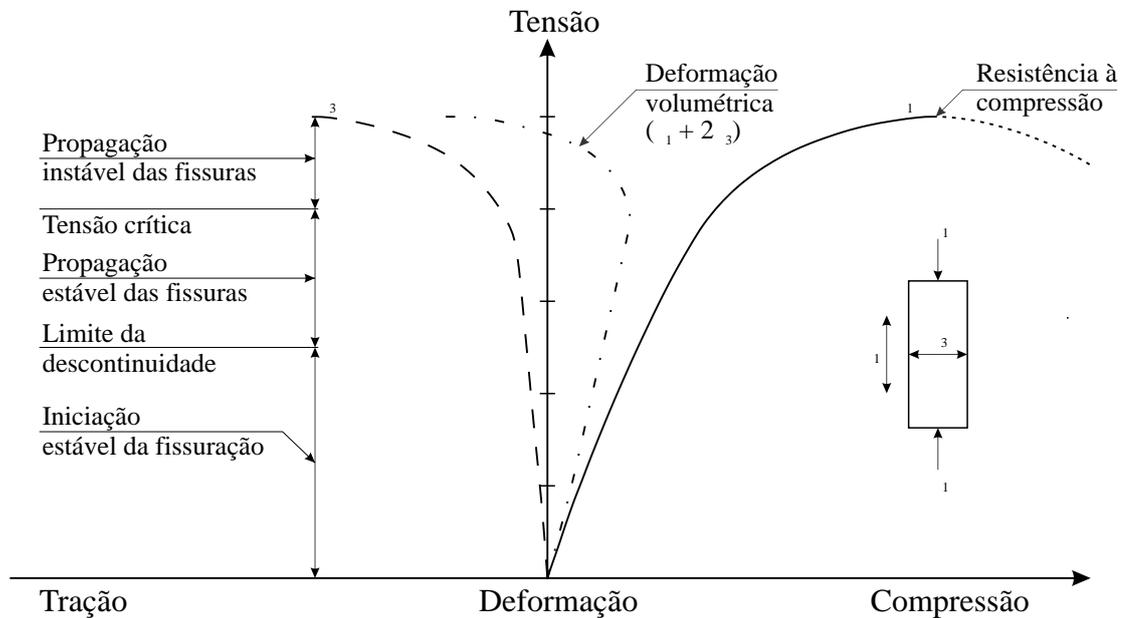
O concreto é um material heterogêneo que possui um elevado número de microfissuras, especialmente na interface entre agregados e argamassa. Ademais, durante o carregamento as microfissuras contribuem de forma significativa para um comportamento não linear e ligeiramente dúctil em baixos níveis de tensões devido à evolução da fissuração e à redistribuição de tensões.

Por outro lado, a resposta de uma estrutura sob carga depende das relações entre tensões e deformações dos materiais constituintes. Neste contexto, segundo Wight e MacGregor (2011), o comportamento do concreto apresenta quatro fases principais quando está sujeito a uma carga de compressão uniaxial.

1. A retração da pasta de cimento durante a hidratação é contida pelo agregado. Como resultado, as tensões de tração resultantes levam a fissuras de aderência, e que se desenvolve antes que o concreto seja carregado. Essas fissuras têm pouco efeito sobre o concreto em baixas tensões, e a curva de tensão-deformação permanece linear até 30% da resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), como mostrado pela Figura 5.
2. Novas fissuras de aderência se desenvolvem quando o concreto é submetido à carga maiores que 30 a 40% de sua resistência à compressão ( $f_{ck}$ ). Essas fissuras são estáveis, ou seja, só se propagam com o aumento da carga aplicada. No entanto, qualquer carga adicional na interface dessas fissuras é redistribuída para as interfaces intactas e para a argamassa. Essa redistribuição provoca uma gradual inclinação da curva de tensão-deformação para tensões acima de 40% da resistência à compressão.
3. À medida que a carga atinge cerca de 50 ou 60% da resistência final, ocorre o surgimento de fissuras na argamassa de forma estável. Essas fissuras se desenvolvem paralelamente à direção do carregamento e são ocasionadas pelas deformações de tração transversais. O início desse estágio de carregamento é chamado de limite de descontinuidade.
4. Em 75 a 80% da resistência à compressão, o número de fissuras na argamassa começa a aumentar de forma instável, e inicia-se a formação de um padrão contínuo de microfissuras. Como resultado, há menos porções intactas para receber e transportar

a carga, e a curva de tensão-deformação longitudinal torna-se ainda mais não-linear. O início desse estágio de ruptura é chamado de tensão crítica.

Figura 5 – Curva tensão-deformação para concreto submetido à compressão uniaxial.



Fonte: Adaptada de Wight e MacGregor (2011).

### 3.1.2 Comportamento do concreto à tração

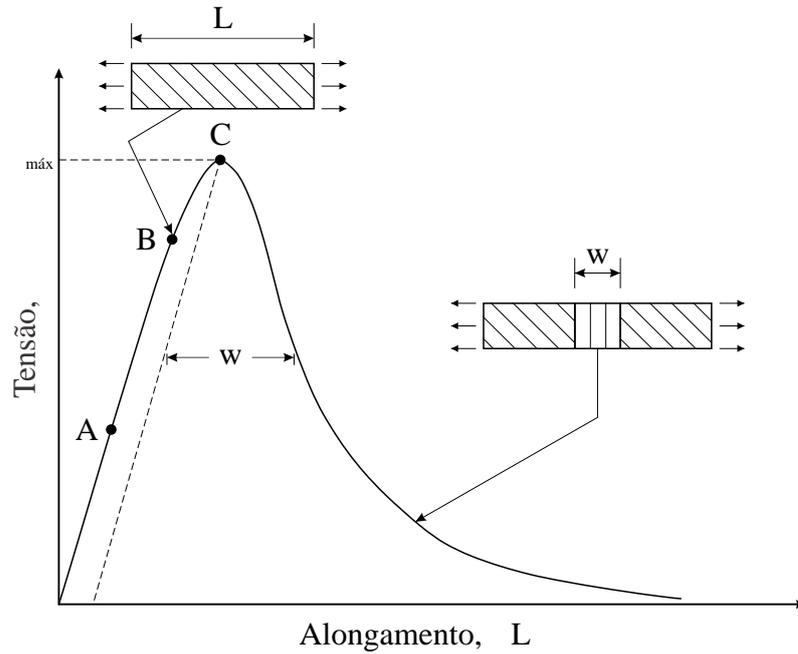
O concreto submetido a um carregamento de tração está sujeito a fratura na ponta da trinca. Por esta razão, faz-se necessário a compreensão do comportamento do concreto à tração com base no diagrama típico de tensão-deslocamento, como pode ser visto na Figura 6. Segundo Kumar e Barai (2011), o comportamento do concreto apresenta três fases principais quando está sujeito a uma carga de tração uniaxial.

**Ponto A:** Corresponde a cerca de 30% da carga pico da curva tensão-deslocamento. A propagação de microfissuras ou vazios internos da origem até este ponto da curva é insignificante.

**Ponto B:** Corresponde a cerca de 80% da carga pico. As microtrincas se propagam entre os pontos A e B são isoladas e distribuídas aleatoriamente sobre o volume da amostra. Nesta região, a tensão de tração é distribuída uniformemente na direção do carregamento sobre o comprimento da amostra.

**Ponto C:** Corresponde a cerca de 100% da carga pico. Entre os pontos de carga B e C, as microfissuras começam a se localizar em uma macro-trinca e a distribuição da deformação na direção de carregamento não é mais uniforme sobre a amostra. Até a carga de pico (ponto C), ocorre um crescimento de trincas estável. Logo após o pico da curva, o dano localizado começa a formar uma banda chamada zona de fratura.

Figura 6 – Curva tensão-deslocamento para concreto submetido à tração uniaxial.



Fonte: Adaptada de Kumar e Barai (2011).

Na fase plástica da curva típica de tensão-deslocamento do concreto, o alongamento é escrito como:

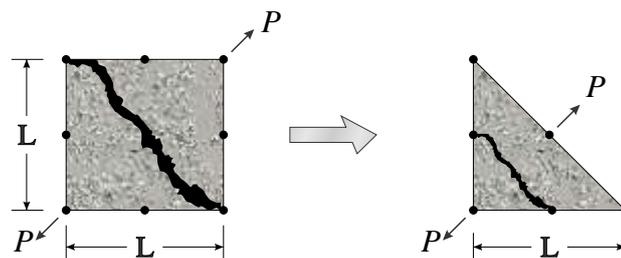
$$\Delta L = \varepsilon_o L + w \quad (3.3)$$

onde  $\varepsilon_o$  é a deformação da amostra na fase elástica e  $w$  é o deslocamento plástico na zona de fratura. Agora, dividindo a Eq. (3.3) pelo comprimento efetivo da amostra de concreto encontra-se a deformação média  $\varepsilon_m$ :

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_o + \frac{w}{L} \quad (3.4)$$

Na Eq. (3.4) evidencia-se que a deformação média depende do comprimento efetivo do elemento para converter deslocamento em deformação plástica, por esta razão a fase plástica da curva tensão-deformação do concreto não é uma característica do material, mas um efeito localizado de deformação, como mostra a Figura 7.

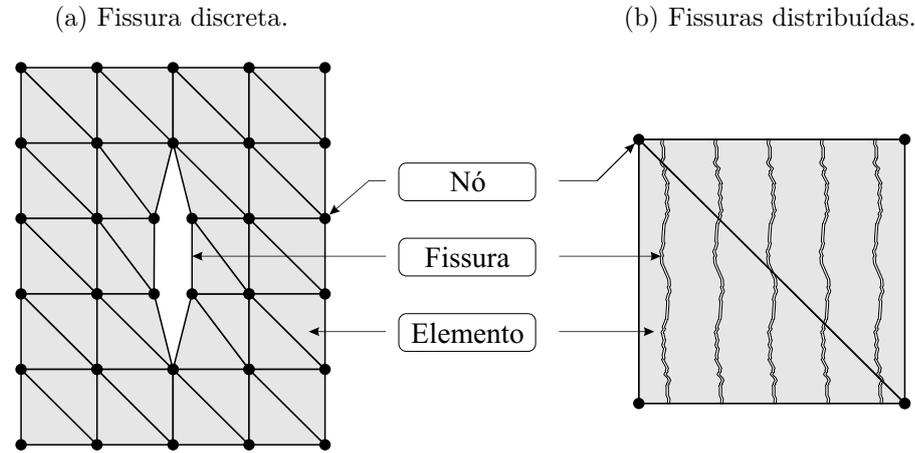
Figura 7 – Comprimento efetivo do elemento triangular.



Fonte: O autor (2018).

Para modelagem da fase plástica é de fundamental importância o conhecimento sobre os modelos de fissuras. Na literatura, os modelos aplicados em elementos finitos dividi-se em: fissuras discretas e fissuras distribuídas, como se pode observar na Figura 8.

Figura 8 – Modelos de fissuras em elementos finitos.



Fonte: Adaptada de Kwak e Filippou (1990).

Na representação da forma discreta, conforme Kwak e Filippou (1990), as fissuras são modeladas como descontinuidades dos deslocamentos entre os elementos finitos, através da separação dos pontos nodais da malha. Esse método provoca o aumento do número de nós e, conseqüentemente, há o aumento do esforço computacional para o cálculo da matriz de rigidez da estrutura. Como exemplos de pesquisas que utilizam essa abordagem pode-se citar Xu, Zang e Sakamoto (2016) e Silva (2017).

Por outro lado, ainda conforme Kwak e Filippou (1990), na representação do modelo de fissura distribuída, uma faixa de fissuras em paralelo é formada em todo o volume do elemento em questão, finamente espaçadas e perpendiculares à tensão principal. Ademais, pelo fato de não haver adição de novos nós, esse modelo possui um esforço computacional menor em relação ao método de fissuras discretas.

Neste trabalho considerou-se fissura distribuída no elemento, com base no modelo de fissuras coesivas para simular a mecânica da fatura, ou seja, o comportamento e a propagação da fissura. Para tanto, utilizou-se a função não linear de amolecimento do concreto sob a forma:

$$\sigma(\varepsilon) = f_t \left( \left[ 1 + \left( \frac{c_1 \varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^3 \right] \exp \left( \frac{-c_2 \varepsilon}{\varepsilon_c} \right) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \right) \quad (3.5)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$  são parâmetros do material, que no caso do concreto simples são dados por  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 6.93$ . Já o parâmetro de deformação plástica  $\varepsilon_c$  é dada por:

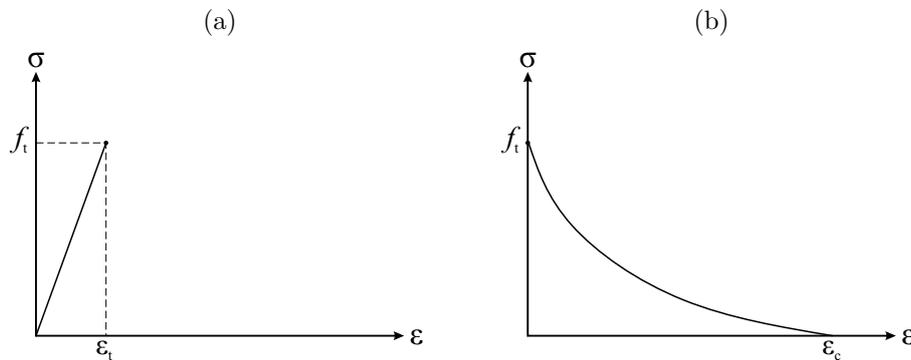
$$\varepsilon_c = \frac{5,136G_f}{L_{ef}f_t} \quad (3.6)$$

onde  $G_f$  e  $f_t$  são, respectivamente, energia de fatura e resistência à tração do concreto simples. Já o comprimento efetivo do elemento triangular é escrito na forma:

$$L_{ef} = \frac{\sqrt{2}L}{2} \equiv \sqrt{A_{el}} \quad (3.7)$$

onde  $A_{el}$  é a área do elemento triangular. Em resumo, o comportamento do concreto à tração é dado por duas curvas, como mostra a Figura 9: (a) curva tensão-deformação linear do concreto fora da zona de fratura; (b) curva tensão-deformação não linear do concreto na zona de fratura.

Figura 9 – Curvas de tensão-deformação características do concreto à tração.



Fonte: O autor (2008).

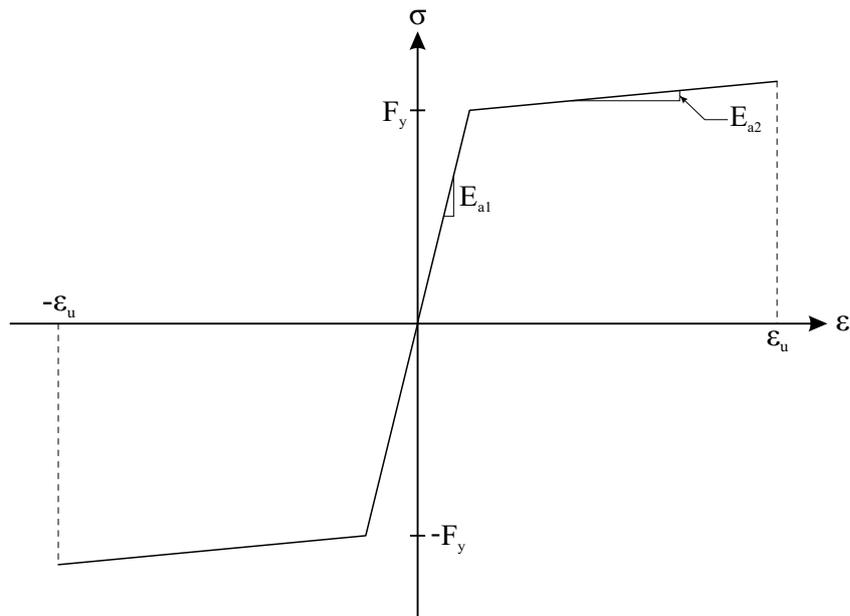
Esta abordagem é de simples implementação computacional, por isto amplamente utilizada em elementos finitos. No entanto, os resultados das simulações depende significativamente do tamanho do elemento da malha.

### 3.1.3 Comportamento da armadura de aço

No caso da armadura de aço, os parâmetros físicos necessários na análise de estruturas de concreto armado são definidos por uma única relação constitutiva do material, ao contrário do comportamento do concreto à tração. Ademais, a armadura é composta por elementos de barra, de maneira que o comportamento do aço é idealizado de forma satisfatória por uma relação tensão-deformação unidimensional, com a mesma curva na compressão e na tração.

Neste trabalho, a armadura de aço é modelada com comportamento linear elástico-plástico, com endurecimento por deformação e resistência de escoamento  $F_y$ , conforme ilustração da Figura 10. Segundo Kwak e Filippou (1990) as razões para utilização deste modelo são a conveniência computacional e os efeitos do escoamento do aço no comportamento dos elementos.

Figura 10 – Curva tensão-deformação para armadura de aço.



Fonte: Adaptada de Kwak e Filippou (1990).

Ainda segundo Kwak e Filippou (1990), a suposição de um comportamento linear de endurecimento por deformação imediatamente após a resistência de escoamento do aço não afeta adversamente a precisão dos resultados, desde que a inclinação do endurecimento por deformação seja determinada de modo que a energia de deformação do modelo seja igual à energia de deformação da relação tensão-deformação experimental do aço.

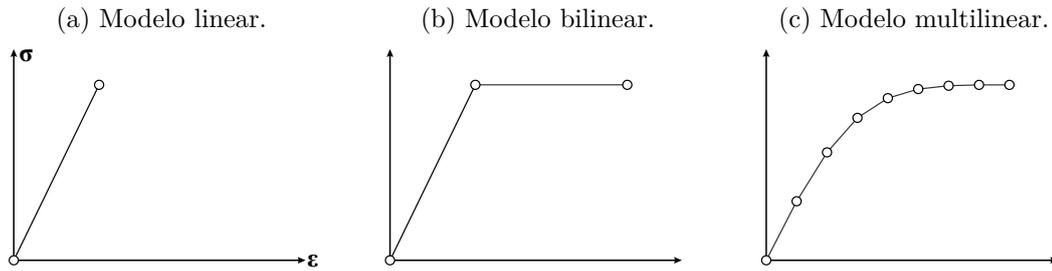
## 3.2 Modelos constitutivos dos materiais

Nesta seção serão abordados os modelos constitutivos utilizados na modelagem do concreto simples e armado para implementação computacional e análise numérica das estruturas por meio do Método dos Elementos Finitos.

### 3.2.1 Discretização dos modelos constitutivos

Ao descrever o comportamento uniaxial de tensão-deformação considera-se fórmulas empíricas ou dados experimentais dos materiais. No entanto, alguns programas comerciais avaliam o comportamento do material por meio de um modelo multilinear, no qual a relação não-linear é aproximada por uma série de segmentos de reta, como mostra a Figura 11. Logo, diversos modelos não lineares são representados a partir de um conjunto de pontos  $P(\varepsilon, \sigma)$ .

Figura 11 – Modelos de curvas tensão – deformação.



Fonte: Adaptada de Kwak e Filippou (1990).

Para proceder com atualização dos parâmetros físicos de cada elemento finito avalia-se a deformação principal atual como valor de entrada na relação constitutiva. Como resultado, obtém-se as tensões principais por interpolação quadrática. Já os módulos de elasticidade são obtidos por módulo secante ou tangente por meio da deformação atual. Segundo (VECCHIO, 1989), a atualização dos parâmetros físicos por meio do módulo secante pode ser tão bem sucedida quanto o módulo tangente, ao ser menos restritiva sobre a natureza das relações constitutivas ou dos procedimentos numéricos adotados. Logo, o módulo secante é medido pela expressão:

$$E_s = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \quad (3.8)$$

onde  $i$  é o índice que indica o estado de deformação atual do elemento. No entanto, o módulo de elasticidade é avaliado a partir da relação módulo-deformação derivada do modelo multilinear por meio de diferenciação numérica e do valor da deformação atual (Figura 12).

Figura 12 – Discretização da relação para atualização do módulo secante.

#	$\epsilon$	$\sigma$		#	$\epsilon$	$E$
1	$\epsilon_1$	$\sigma_1$	$\Rightarrow$	1	$\epsilon_1$	$E_1$
2	$\epsilon_2$	$\sigma_2$		2	$\epsilon_2$	$E_2$
3	$\epsilon_3$	$\sigma_3$		3	$\epsilon_3$	$E_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$\epsilon_n$	$\sigma_n$		$n$	$\epsilon_n$	$E_n$

Fonte: O autor (2018).

### 3.2.2 Matriz constitutiva para elementos de concreto simples

Em virtude do concreto apresentar um comportamento extremamente complexo adota-se hipóteses simplificadoras na modelagem numérica a fim simular o comportamento de forma satisfatória. Neste trabalho, o concreto simples é simulado por um modelo ortotrópico total de tensão-deformação não linear, cujos os eixos de ortotropia são paralelos

às direções das deformações principais. A relação constitutiva  $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'$  é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $\nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}$ . Já o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  é avaliado por analogia a Eq. (18) do Apêndice 7.1. Logo:

$$\frac{1}{G_{12}} \simeq \frac{1+\nu_{21}}{E_1} + \frac{1+\nu_{12}}{E_2} \quad (3.10)$$

No entanto, programas comerciais para análise estrutural como SAP2000, MIDAS e DIANA utilizam modelos ortotrópicos simplificados por meio das deformações desacopladas, ou seja,  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$ . Esta simplificação do modelo ortotrópico foi aplicada no contexto do elementos finitos por Vecchio (1989), Jagd (1997), Menin et al. (2009). Logo, substituindo  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$  nas Eqs. (3.9) e (3.10) obtém-se o modelo ortotrópico desacoplado escrito em termos de  $E_1$  e  $E_2$ , na forma abaixo:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1E_2}{E_1+E_2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Uma vez que os eixos principais estão rotacionados por um ângulo  $\beta_p$  em relação aos eixos cartesianos do elemento deve-se considerar a transformação que conduz a matriz constitutiva em coordenadas cartesianas, conforme expressão a seguir:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}' \mathbf{T} \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação dada no Apêndice 7.1.

Neste trabalho investiga-se o comportamento do modelo ortotrópico e desacoplado para peças em concreto simples e concreto armado. Já a matriz constitutiva é atualizada por meio dos módulos secantes nas direções principais. Este modelo é adequado para muitas aplicações, tais como vigas, colunas, paredes de cisalhamento, tabuleiros de pontes, túneis, muros de contenção, entre outras de acordo com CSI (2015).

### 3.2.3 Matriz constitutiva para elementos de concreto armado

Na modelagem da armadura de aço em estrutura de concreto armado, as abordagens dos modelos constitutivos são divididas em: modelos distribuídos, modelos embutidos e modelos discretos.

Os modelos distribuídos, baseiam-se na distribuição da armadura de aço sobre o elemento de concreto, com um determinado ângulo de orientação  $\beta$ . Neste modelo

assume-se uma relação constitutiva aço-concreto composta, de tal forma que a ligação aço-concreto seja perfeita.

Por outro lado, segundo Kwak e Filippou (1990), os modelos de armadura embutida são úteis em associação com elementos isoparamétricos de ordem superior, conforme formulação do elemento embutido apresentada na Seção 2.3. Neste caso, considera-se a armadura de aço como elemento axial embutido no elemento de concreto, de tal modo que os deslocamentos entre os elementos sejam consistentes em cada ponto. Tal modelo implica novamente na aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Já os modelos discretos representam a armadura como elementos unidimensionais discretos, os quais são assumidos como elementos de treliça ou de viga. Assim, os elementos da armadura podem ser sobrepostos na malha dos elementos bidimensionais de concreto. Uma vantagem do modelo discreto é a possibilidade de incluir o deslizamento do aço em relação ao concreto circundante.

Neste trabalho, empregou-se o modelo de armadura embutida no elemento triangular de ordem quadrática para modelagem do concreto armado. Como o elemento da armadura equivalente tem propriedades uniaxiais na direção paralela ao eixo das barras de reforço, o modelo constitutivo do material toma a forma simples:

$$D = \begin{bmatrix} E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $E_a$  representa o módulo de elasticidade do aço ( $E_{a1}$ ) ou o módulo de endurecimento do aço ( $E_{a2}$ ), conforme a curva tensão-deformação idealizada (Figura 8).

## 4 PROCEDIMENTOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Os procedimentos para solução de um sistema de equações não lineares são geralmente derivados da técnica clássica de Newton-Raphson. Para clarificar a aplicação da técnica em elementos finitos considera-se uma abordagem matemática que consiste em estimar a raiz de uma função escalar:

$$\psi(x) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $x$  é uma variável simples da função  $\psi(x)$ . Em seguida, expande-se a Eq. (4.1) em série de Taylor, sobre uma solução conhecida  $x_i$  suficientemente próxima do valor correto, mas  $\psi(x_i) \neq 0$ , desta forma:

$$\psi(x) = \psi(x_i) + \Delta x \psi'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} \psi''(x_i) + \dots = 0 \quad (4.2)$$

onde  $\Delta x$  é o incremento da solução e se escreve de forma generalizada:

$$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i \quad (4.3)$$

Assume-se que o valor do incremento é pequeno, por isto os valores dos termos de segunda ordem ou de ordem superior da série de Taylor são insignificantes. Logo, reescreve-se a Eq. (4.2) a fim de obter a função do incremento:

$$\Delta x_{i+1} = -\frac{\psi(x_i)}{\psi'(x_i)} \quad (4.4)$$

A Eq. (4.4) dá o incremento de  $x$  na iteração atual para a solução total:

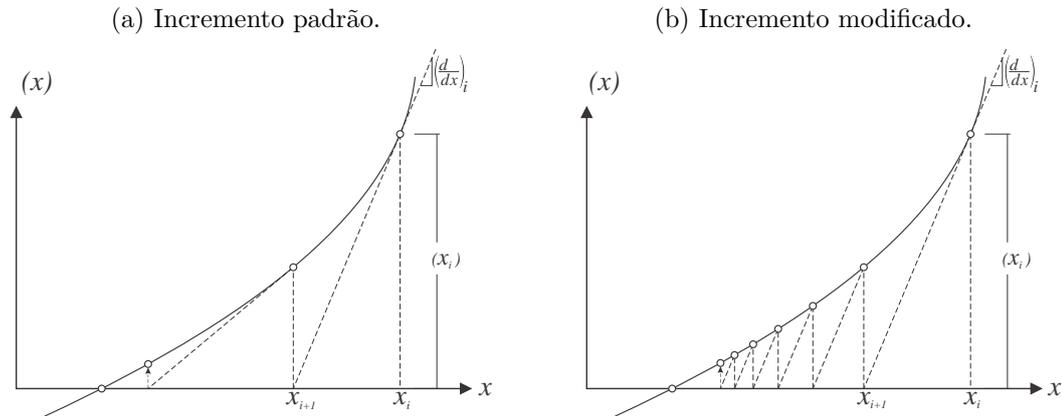
$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1} \quad (4.5)$$

Repetindo este processo obtém-se um método iterativo para encontrar a raiz de uma função. De forma geral, os métodos para solução de uma equação não linear são iterativos e diferentes métodos estão disponíveis de acordo com a forma de calcular o incremento (KIM, 2015). Uma abordagem alternativa para a Eq. (4.4) é o incremento modificado por  $\psi'(x_0)$  constante. Logo:

$$\Delta x_{i+1} = -\frac{\psi(x_i)}{\psi'(x_0)} \quad (4.6)$$

A Figura 13 ilustra a solução de  $x$  para o método de Newton-Raphson padrão e modificado. Graficamente observa-se que o incremento com atualização da reta tangente ao ponto  $(x_i, \psi(x_i))$  em todas as etapas possui uma taxa de convergência maior do que o incremento modificado.

Figura 13 – Convergência da técnica clássica de Newton-Raphson.



Fonte: Adaptada de Zienkiewicz (1971).

Esta técnica pode ser generalizada para um sistema de equações não-lineares do tipo  $\mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F}$ . Por isso, o método de Newton-Raphson é amplamente utilizada em elementos finitos para análise não linear devido à sua eficiência e generalização.

#### 4.1 Método de Newton-Raphson para elementos finitos

O método de Newton-Raphson abrange um conjunto de procedimentos tais como a equação de equilíbrio, passo da solução, incremento do processo iterativo, matriz de rigidez e critérios de convergência. Em relação a equação de equilíbrio o método permite abordagem pelo controle de forças ou controle de deslocamentos, de acordo com o caminho da solução e os pontos limites da curva de equilíbrio.

Neste trabalho consideramos o controle de forças, onde dado um passo de carga, os deslocamentos são obtidos por processo iterativo para o equilíbrio do sistema. Assim, a função de equilíbrio do processo iterativo de *Newton-Raphson* é escrita na forma:

$$\mathbf{K}_{i-1}\Delta\mathbf{u}_i = \Delta\mathbf{R}_{i-1} \quad (4.7)$$

onde  $i$  é o índice da iteração atual,  $\mathbf{K}_{i-1}$  é a matriz de rigidez, enquanto  $\Delta\mathbf{u}_i$  representa o incremento do vetor deslocamento e por fim,  $\Delta\mathbf{R}_{i-1}$  representa o vetor de forças residuais do sistema e se escreve pela fórmula:

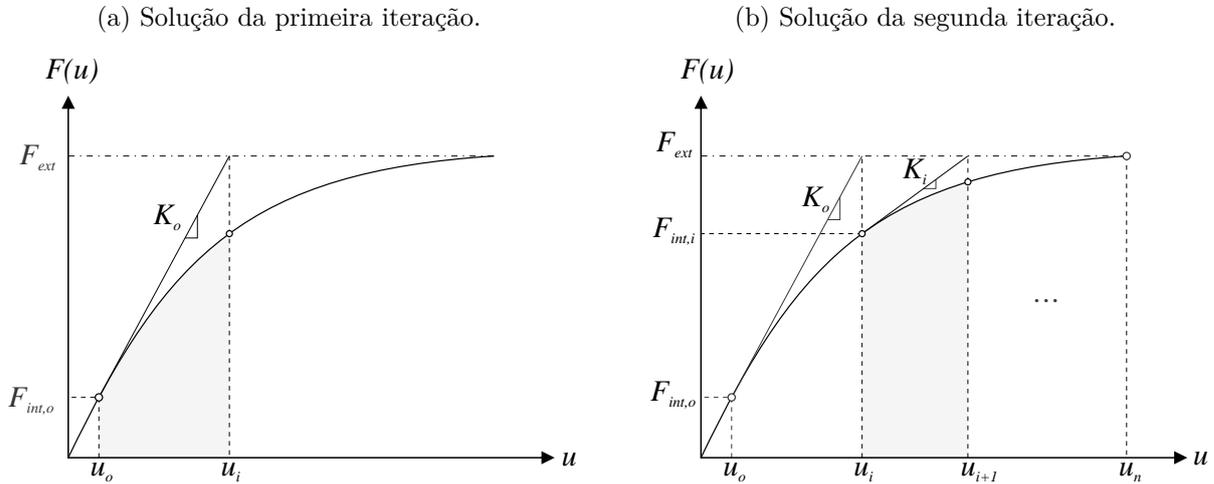
$$\Delta\mathbf{R}_{i-1} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int_{i-1}} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{F}_{ext}$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{F}_{int_{i-1}}$  é o vetor de forças internas. Após a solução do sistema de equações para o incremento  $\Delta\mathbf{u}_i$ , a solução dos deslocamento é atualizada conforme a expressão:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i \quad (4.9)$$

A Figura 14(a) ilustra graficamente o resultado da primeira iteração da Eq. (4.7) para um curva força–deslocamento. Sendo acessível as condições iniciais do problema através de um ponto inicial dado por  $\mathbf{K}_o = \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}_o = \mathbf{u}$  e  $\mathbf{F}_{int_o} = \mathbf{F}_{int}$ .

Figura 14 – Solução do método de Newton-Raphson.



Fonte: Adaptada de Kim (2014).

Para as próximas iterações é necessário atualizar a matriz de rigidez e o vetor de forças internas conforme o vetor deslocamento atual  $\mathbf{u}_i$ . Para clarificar este procedimento, a Figura 14(b) ilustra a atualização dos parâmetros para a iteração subsequente a primeira. Segundo Bathe (1996), o cálculo do vetor de forças internas é crucial e qualquer erro nesta medição, em geral, resulta em uma resposta incorreta, assim como, o cálculo correto da matriz de rigidez é necessário para convergência e pode diminuir o número de iterações necessárias.

O procedimento de atualização dos parâmetros têm início com a relação cinemática  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{B}\mathbf{u}_i$ . No caso do elemento triangular T6, as deformações são lineares e dependem das coordenadas homogêneas ( $\xi_j$  para  $j = 1, 2, 3$ ). Deste modo, a relação cinemática é reescrita na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_j)_i = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_j)\mathbf{u}_i \quad (4.10)$$

Considerando a variação da deformação e a atualização da relação constitutiva, o integrando do vetor de forças internas e da matriz de rigidez dado nas Eqs. (2.28) e (2.29) são reescritos na forma:

$$\mathbf{F}_{int_i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_j)^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_j)_i) dV \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_i = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_j)^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}_j)_i) \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_j) dV \quad (4.12)$$

Para avaliar o integrando das Eqs. (4.11) e (4.12) por integração numérica é necessário obter os valores das deformações em cada ponto de *Gauss* e proceder com a

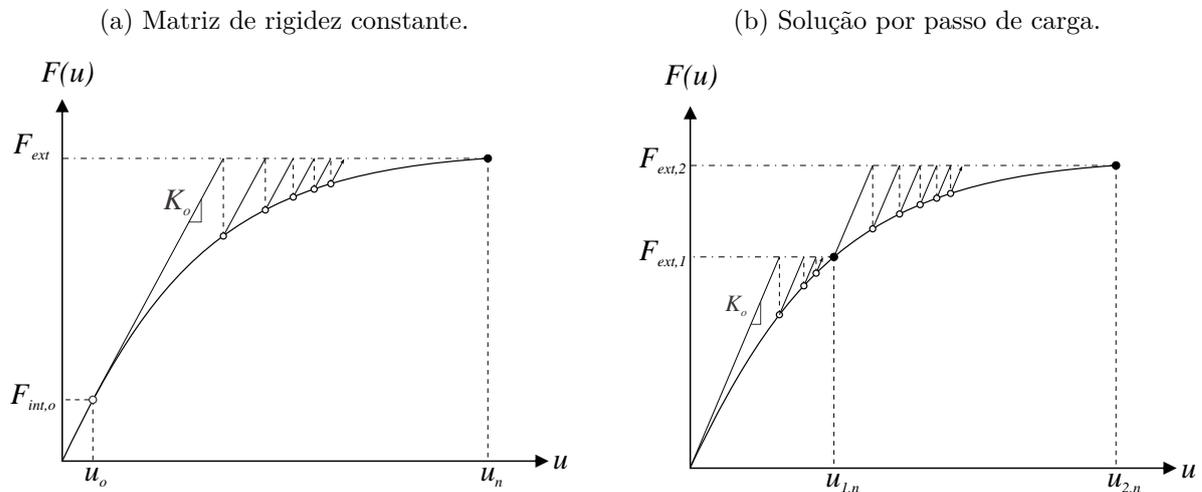
atualização das propriedades físicas do elemento. No entanto, a precisão numérica desta estratégia depende diretamente do número de pontos de *Gauss* considerados na análise do integrando. No caso da integração analítica, considera-se a variação das tensões e dos módulos de elasticidade no integrando, a partir dos valores nodais atualizados e das funções de forma do elemento dadas nas Eqs. (2.25), conforme as expressões a seguir:

$$\sigma(\xi_j) = N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + N_3\sigma_3 + N_4\sigma_4 + N_5\sigma_5 + N_6\sigma_6 \quad (4.13)$$

$$E(\xi_j) = N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3 + N_4E_4 + N_5E_5 + N_6E_6 \quad (4.14)$$

Assim, obtêm-se as expressões explícitas da solução exata do vetor de forças internas e da matriz de rigidez do elemento T6, respectivamente. Por outro lado, a atualização da matriz de rigidez global do sistema é um processo de alto custo computacional, por isto aplica-se o método de Newton-Raphson modificado que consiste na alteração do cálculo do incremento por meio da matriz de rigidez inicial constante para todas as iterações. A princípio, esta modificação aumenta o número de iterações necessárias para convergência da solução, mas pode reduzir o tempo de processamento. A Figura 15(a) ilustra o aumento do número de iterações para convergência do método de Newton-Raphson modificado em relação ao padrão.

Figura 15 – Solução de Newton-Raphson modificado.



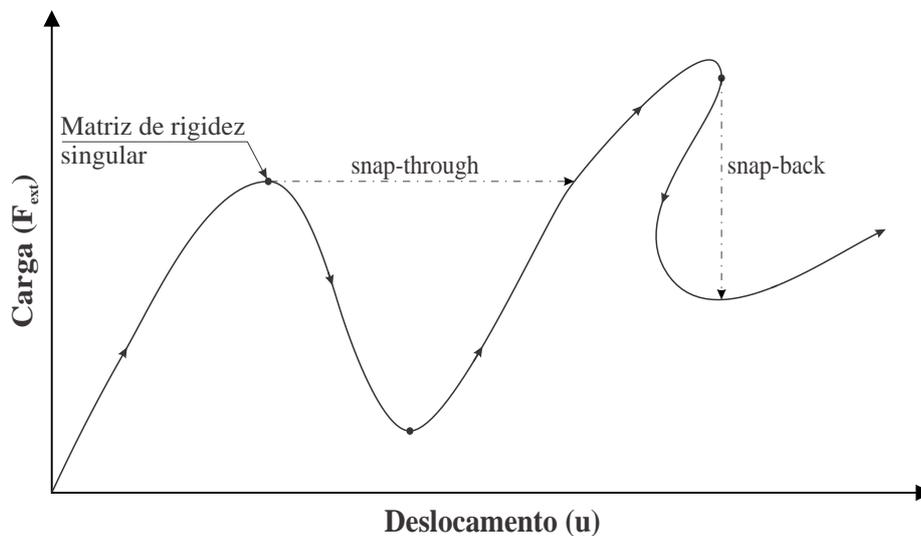
Fonte: Adaptada de Kim (2014).

Uma segunda modificação está relacionada com o tamanho do passo entre a estimativa inicial e a solução. No caso de problemas práticos em engenharia estrutural o valor inicial das deformações são iguais a zero e o tamanho do passo é controlado pelo valor do carregamento aplicado. Sendo assim, a força externa é discretizada e aplicada em incrementos de modo que a carga seja pequena, conforme ilustração da Figura 15(b).

## 4.2 Método do comprimento do arco

O método de Newton-Raphson controlado pela carga está limitado ao ponto limite do caminho de equilíbrio, onde a matriz de rigidez tangente torna-se singular. Para solucionar este problema surgiram alguns métodos ou procedimentos para investigação completa do comportamento não linear das estruturas, tais como Newton-Raphson controlado pelo deslocamento, alteração entre controles de carga e de deslocamento e o método do comprimento do arco. Sendo este último um forma geral e eficiente de resolver o problema do ponto crítico e o comportamento dinâmico (*snap-through or snap-back*).

Figura 16 – Ponto crítico e comportamento dinâmico da curva de equilíbrio.



Fonte: Adaptada de Crisfield (1983).

O método do comprimento do arco foi proposto originalmente e de forma independente por Wempner (1971) e Riks (1972) e posteriormente modificado por vários pesquisadores. Neste trabalho consideramos o método do comprimento de arco constante que tem como base os procedimentos do método de Newton-Raphson modificado, com adição de uma restrição e de uma incógnita para o incremento simultâneo do vetor de forças e deslocamentos conforme a expressão:

$$\mathbf{F}_{ext} = \lambda \bar{\mathbf{F}} \quad (4.15)$$

onde  $\lambda$  é um fator de carga escalar. Assim, o vetor de forças residuais é escrito na forma:

$$\mathbf{R}(u, \lambda) = \lambda \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{K}(u) \mathbf{u} \quad (4.16)$$

logo o vetor de forças residuais do sistema de equações depende do fator de carga e do vetor de deslocamentos. Agora, aplica-se a série de Taylor na Eq.(4.16) para uma solução conhecida na iteração  $(i - 1)$  da  $n$ -ésimo etapa de carga  $(u_n^{(i-1)}, \lambda_n^{(i-1)})$ :

$$\mathbf{R}(u_n^i, \lambda_n^i) = \mathbf{R}_n^{(i-1)} + \delta \lambda \left( \frac{\partial \mathbf{R}_n^{(i-1)}}{\partial \lambda} \right) + \delta \mathbf{u} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_n^{(i-1)}}{\partial \mathbf{u}} \right) + \dots = 0 \quad (4.17)$$

onde  $\delta\lambda$  e  $\delta\mathbf{u}$  são os incrementos da solução. Por outro lado, desconsiderando os termos de segunda ordem ou de ordem superior na Eq. (4.17) obtém-se a expressão:

$$0 = \mathbf{R}_n^{(i-1)} + \delta\lambda\bar{\mathbf{F}} - \delta\mathbf{u}\mathbf{K} \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{K} = \partial\mathbf{R}_n^{(i-1)}/\partial\mathbf{u}$  é a matriz de rigidez tangente. Reescreve-se a Eq. (4.18) em função do incremento do vetor de deslocamentos sobre a forma generalizada:

$$\delta\mathbf{u}_n^i = \delta\bar{\mathbf{u}}_n^i + \delta\lambda_n^i\delta\hat{\mathbf{u}}_n \quad (4.19)$$

onde a primeira parcela do segundo membro é o deslocamento residual gerado pelo vetor de forças não equilibradas do método de Newton-Raphson modificado e a segunda parcela é o deslocamento tangencial que ajusta a carga a fim de satisfazer a restrição do método do comprimento do arco. Estas parcelas podem ser reescritas conforme abaixo:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_n^i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}_n^{(i-1)} \quad (4.20)$$

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_n = \mathbf{K}^{-1}\bar{\mathbf{F}} \quad (4.21)$$

Para primeira iteração do primeiro incremento de carga define-se o comprimento do arco constante ( $\Delta s$ ) como:

$$\Delta s = \delta\lambda_1^0\sqrt{\delta\hat{\mathbf{u}}_1^T\delta\hat{\mathbf{u}}_1} \quad (4.22)$$

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{u}_o)^{-1}\bar{\mathbf{F}} \quad (4.23)$$

onde  $\delta\lambda_1^0$  é o incremento do parâmetro de carga e  $\mathbf{u}_o$  é a solução do vetor de deslocamento, normalmente, no ponto inicial emprega-se  $\delta\lambda_1^0 = 1$  e  $\mathbf{u}_o = 0$ . A solução dos deslocamentos na  $i$ -ésima iteração do passo de carga atual é dado por:

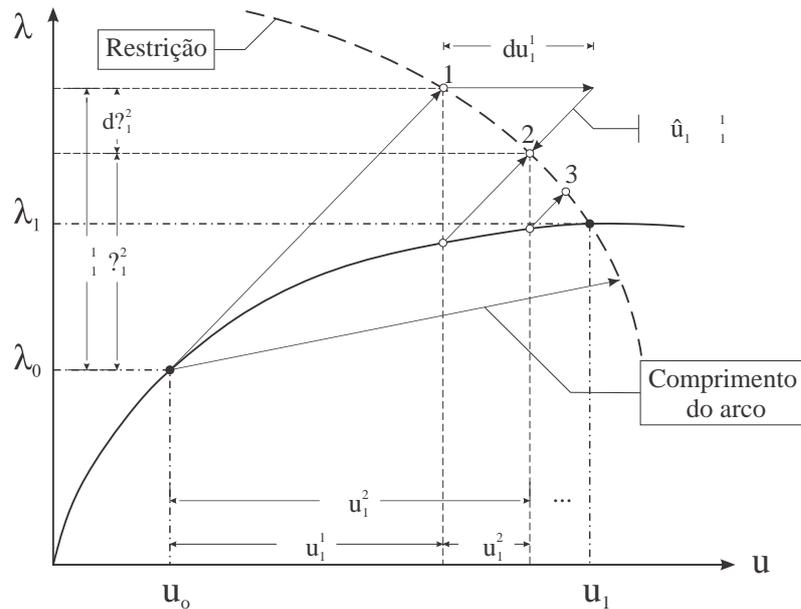
$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta\mathbf{u}_n^i \quad (4.24)$$

$$\Delta\mathbf{u}_n^i = \Delta\mathbf{u}_n^{(i-1)} + \delta\mathbf{u}_n^i \quad (4.25)$$

$$\lambda_n^i = \lambda_n^{i-1} + \delta\lambda_n^i \quad (4.26)$$

A Figura (17) ilustra o processo iterativo e as duas parcelas do incremento do vetor de deslocamento para convergência do primeiro passo de carga do método do comprimento do arco, com base no método de Newton-Raphson modificado. Além disso, observa-se que comprimento do arco e a restrição do hiperplano são constantes para todas as iterações do passo de carga.

Figura 17 – Solução do primeiro passo de carga do método do comprimento do arco.



Fonte: Adaptada de Reddy (1993).

Para restrição do hiperplano no espaço considerou-se o método de Crisfield-Ramm modificado proposto por Fafard e Massicotte (1993). Este método é baseado na equação de restrição dada por:

$$(\Delta \mathbf{u}_n^{(i-1)})^T \delta \mathbf{u}_n^i = 0 \quad (4.27)$$

A Eq. (4.27) utiliza o hiperplano atualizado definido pelo incremento do vetor de deslocamento. Agora, usando a separação de  $\delta \mathbf{u}_n^i$  em duas parcelas  $\delta \bar{\mathbf{u}}_n^i$  e  $\delta \lambda_n^i \delta \hat{\mathbf{u}}_n^i$  dadas pelas Eqs. (4.20) e (4.21) obtêm-se o incremento do fator de carga. Assim:

$$\delta \lambda_n^i = - \frac{(\Delta \mathbf{u}_n^{(i-1)})^T \delta \bar{\mathbf{u}}_n^i}{(\Delta \mathbf{u}_n^{(i-1)})^T \delta \hat{\mathbf{u}}_n^i} \quad (4.28)$$

e o deslocamento atual é calculado com Eq. (4.24). Esse deslocamento não recai sobre o hiperplano definida; para trazê-lo ao hiperplano sugere-se uma redução no deslocamento computado tal como:

$$\|\Delta \mathbf{u}_n^i\| = \Delta S = \alpha \|\Delta \mathbf{u}_n^i\| \quad (4.29)$$

de onde obtêm-se o fator de redução dado por:

$$\alpha = \frac{\Delta S}{\|\Delta \mathbf{u}_n^i\|} \quad (4.30)$$

Portanto, o deslocamento incremental desejado é expresso como:

$$\Delta \mathbf{u}_n^i = \alpha \Delta \mathbf{u}_n^{(i-1)} + \alpha \delta \mathbf{u}_n^i \quad (4.31)$$

Uma vez que o método de Crisfield-Ramm modificado combina as vantagens de dois métodos eficientes para análise não linear de estruturas, ele pode superar as desvantagens individuais dos outros métodos quanto ao problema de convergência e também ser utilizado em programas de elementos finitos para diferentes aplicações. No entanto, a convergência perto do ponto limite e da falha da estrutura pode causar problemas, o que é evitado com a redução do valor de  $\Delta S$ .

### 4.3 Critérios de convergência

Neste trabalho, se a diferença entre aproximações consecutivas do vetor de deslocamento for menor que uma dada tolerância definida pelo usuário do programa, o vetor de deslocamento  $\mathbf{u}_{i+1}$  é aceito como solução do incremento de carga. Assim, o critério de convergência é escrito como:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|}{\|\mathbf{u}_{i+1}\|} < TOL \quad (4.32)$$

onde  $TOL$  denota a tolerância da convergência. Caso a Eq. (4.27) não seja satisfeita o processo é repetido até que a diferença entre aproximações se torne muito pequena.

## 5 ESTRUTURA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

Neste trabalho, os procedimentos e aspectos computacionais empregados no desenvolvimento da solução numérica foram classificados em pré-processo, processo e pós-processo. Esta abordagem não é a única possível, mas permite estruturar de forma sistemática os procedimentos e os programas utilizados em cada etapa.

Em relação à programação utilizou-se a linguagem Julia por meio do ambiente de desenvolvimento integrado denominado de *Juno*. Esta promissora linguagem de código aberto e licenciada pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts – MIT está em desenvolvimento desde 2009, com base em linguagens de alto desempenho e linguagens dinâmicas de alto nível. Desta forma, a linguagem Julia aponta para uma programação de uso geral, eficiente e produtiva.

### 5.1 Pré-processamento

Na fase de pré-processamento, o engenheiro introduz os dados do modelo referente ao problema bidimensional. Além disto, o programa define as variáveis globais e a pré-alocação de memória para o processamento, conforme os dados do modelo que abrange a geometria, as propriedades do material, a curva de tensão-deformação total, as forças externas e as restrições aplicadas à geometria. No caso da geometria, a discretização do modelo em elementos finitos é realizada de forma eficiente em programas comerciais do tipo Gid e as coordenadas dos nós e as conectividades dos elementos sólidos são importadas para o programa por meio de arquivos de texto.

### 5.2 Processamento

Nesta fase de processamento, o programa analisa a solução numérica para o modelo definido na etapa precedente. No caso da análise não linear, o programa possui procedimentos e aspectos computacionais específicos em comparação à análise linear, na qual as etapas básicas são montagem da matriz de rigidez global e solução do sistema de equações lineares  $\mathbf{K}_g \mathbf{d} = \mathbf{F}$ . Estas etapas básicas possuem alto custo computacional, principalmente para modelos de malhas grandes e processos iterativos, de tal forma que justifica-se o emprego de algumas estratégias para melhorar o desempenho do programa, tais como pré-alocação de memória, variáveis locais, indexação linear rápida, matriz do elemento na forma explícita e matriz global esparsa.

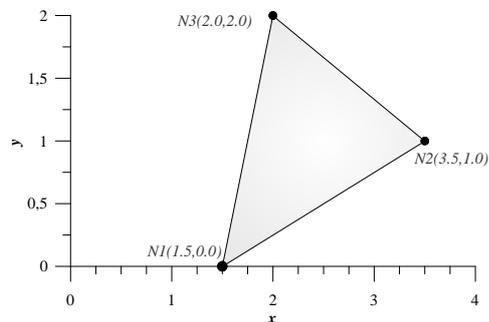
### 5.2.1 Matriz de rigidez

No caso da matriz do elemento na forma explícita observa-se que esta abordagem é pouco empregada por pesquisadores devido à conveniência da integração numérica. Além disto, cada aplicação requer uma avaliação prévia da integração analítica ou numérica a fim de obter os termos explícitos da matriz de rigidez do elemento. Para solução deste problema, Barros (2016) propôs um programa específico de geração de matrizes explícitas de elementos triangulares de alta ordem. Portanto, investigamos o tempo de execução em diferentes linguagem de programação para avaliação da rigidez do elemento teste proposto por Griffiths et al. e modificado para análise do material não linear (Figura 18). Ademais, analisamos a eficácia da matriz explícita por meio da Eq. (5.1):

$$S_a = \frac{T(K_{exp})}{T(K_{num})} \quad (5.1)$$

onde  $S_a$  é a taxa de aceleração na avaliação da matriz de rigidez do elemento;  $T(K_{exp})$  e  $T(K_{num})$  são, respectivamente, o tempo de execução da matriz explícita ( $K_{exp}$ ) e da matriz numérica ( $K_{num}$ ) obtida por pontos de Gauss.

Figura 18 – Elemento triangular de teste.



Fonte: Griffiths et al. (2009).

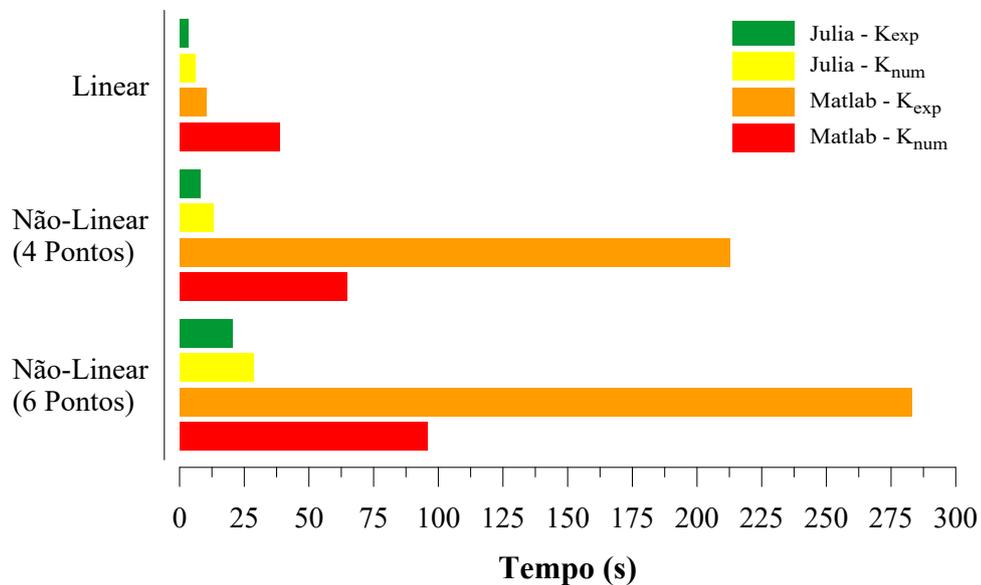
A Tabela 4 apresenta o tempo de execução de um milhão de avaliações da matriz de rigidez do elemento T6 e a taxa de aceleração em diferentes linguagens de programação. Além disso, na Figura 19 observa-se de forma prática o desempenho da linguagem de programação Julia e a eficácia da matriz explícita sobre a numérica, nos casos de material linear e não-linear com relação constitutiva em coordenadas principais.

Tabela 4 – Tempo para um milhão de avaliações da matriz de rigidez de um elemento T6 e taxa de aceleração da matriz explícita sobre a numérica.

Linguagem	Material	Pontos de Gauss	Tempo de $K_{num}$ (s)	Tempo de $K_{exp}$ (s)	Taxa de Aceleração
Julia	Linear	4	5,89	3,37	1,75
	Não linear	4	12,97	8,02	1,62
	Não linear	6	28,41	20,30	1,40
Matlab	Linear	4	38,52	10,34	3,73
	Não linear	4	64,72	212,49	0,30
	Não linear	6	95,56	283,00	0,34

Fonte: O autor (2018).

Figura 19 – Tempo para um milhão de avaliações da matriz de rigidez de um elemento T6.



Fonte: O autor (2018).

Um segundo aspecto importante sobre a matriz de rigidez é a estratégia computacional para montagem da matriz global do sistema de equações. Neste caso, a Figura 20 ilustra a transformação dos elementos  $k_{ij}$  da matriz de rigidez do elemento T3 em vetor linha ( $I_e^n$ ), vetor coluna ( $J_e^n$ ) e vetor de valores ( $V_e^n$ ), de tal forma que a montagem do sistema global é obtida por meio de vetores alocados em matrizes de ordem 36 vezes o número de elementos sólidos ( $nel$ ). Esta abordagem é apropriada para matrizes esparsas e mais eficiente que o duplo laço convencional utilizado na montagem do sistema global. Além disto, no processo iterativo podemos preservar as matrizes de índices globais e atualizar apenas a matriz dos valores.

Figura 20 – Transformação da matriz de rigidez do elemento T3, com  $n = 1 \dots nel$ .

$$K_e^n = \begin{bmatrix} k_{1,1} & & & & & \\ k_{2,1} & k_{2,2} & & & & \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & & & \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & & \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{sim} \quad \Rightarrow \quad I_e^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{36 \times 1} \quad J_e^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}_{36 \times 1} \quad V_e^n = \begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \\ k_{3,1} \\ \vdots \\ k_{4,6} \\ k_{5,6} \\ k_{6,6} \end{bmatrix}_{36 \times 1}$$

Fonte: Adaptada de Cuvelier, Japhet e Scarella (2013).

### 5.2.2 Programa para análise não linear

O programa principal é dividido nas etapas fundamentais de pré-processo, processo e pós-processo. Já as etapas são formadas por um conjunto de procedimentos, que o programa principal é responsável pelo gerenciamento e chamada de sub-rotinas, como pode ser visto na Figura 21. Os procedimentos da análise não linear física são descritos a seguir:

**Modelo do material:** É a sub-rotina que determina a relação constitutiva tensão-deformação total de cada elemento ou armadura, conforme os parâmetros físicos de entrada. Retorna uma função para atualização das tensões e dos módulos de elasticidade.

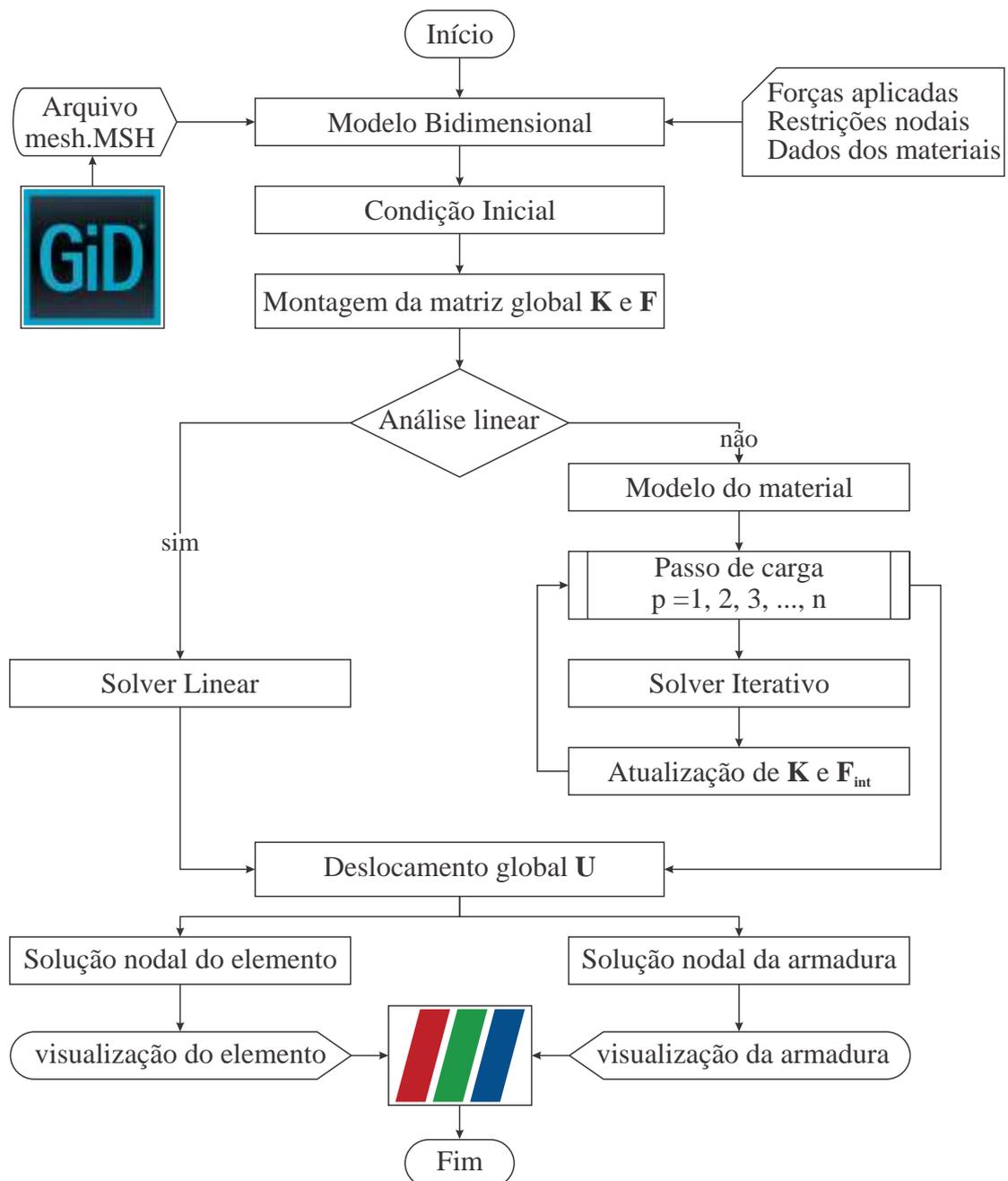
**Solver iterativo:** Resolve o sistema de equações não lineares pelo Método do Comprimento do Arco. Ademais, o algoritmo implementado foi adaptado da versão dada por Reddy. Retorna o vetor de deslocamento global para um enésimo passo de carga. Além disso, o deslocamento resultante e o carregamento imposto são obtidos nos pontos de controle para plotar a curva carga versus deslocamentos.

**Atualização da matriz global  $K$  e  $F_{int}$**  Calcula a matriz de rigidez global e o vetor de forças internas para atualização do solver iterativo. O passo-a-passo do procedimento para atualização das propriedades físicas de um elemento finito é enfatizado abaixo:

1. Avalia os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$ ;
2. Calcula as deformações cartesianas  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$ ;
3. Calcula o ângulo  $\beta_p$  do sistema de coordenadas principais;
4. Transforma as deformações cartesianas em principais  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ ;
5. Computa as tensões principais  $\boldsymbol{\sigma}_1$  e  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , conforme modelo de cada elemento;
6. Computa os módulos secantes no sistema de coordenadas principais;
7. Transforma o vetor de tensões  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}'$ ;
8. Transforma a matriz constitutiva  $\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}' \mathbf{T}$ . Neste caso, verifica-se a simetria da matriz  $\mathbf{D}$ ;

9. Calcula a matriz de rigidez e o vetor de força internas do elemento;
10. Em caso de elemento com armadura embutida, a contribuição da armadura é computada na matriz de rigidez e no vetor de forças internas.

Figura 21 – Fluxograma geral do programa para análise não linear física.



Algoritmos disponíveis em: <[https://github.com/phllcaetano/mamne\\_nfea.git](https://github.com/phllcaetano/mamne_nfea.git)>.

Fonte: O autor (2018).

### 5.3 Pós-processamento

Após a solução do sistema de equações utilizou-se o vetor de deslocamento globais para atualizar a solução nodal do sistema e o arquivo para visualização. Na solução nodal do elemento empregou-se os resultados obtidos nos pontos de superconvergência de Gauss para aproximar os valores nodais e em seguida, calcula-se a média aritmética dos valores nodais no nó comum a todos os elementos. Já no elemento com armadura embutida utiliza-se a hipótese aderência perfeita entre o elemento e armadura para recuperar as deformações nodais da armadura por meio das deformações do elemento. Desta forma, obtém-se a tabela de resultados, com as componentes de deslocamentos, deformações e tensões na forma nodal.

Para uma visualização científica eficiente geramos o arquivo do tipo VTK (*Visualization Toolkit*) a partir da discretização do modelo e dos resultados nodais, este procedimento é um método simples para transmitir os resultados entre programas. Assim, para análise e visualização deste arquivo utilizamos o programa ParaView.

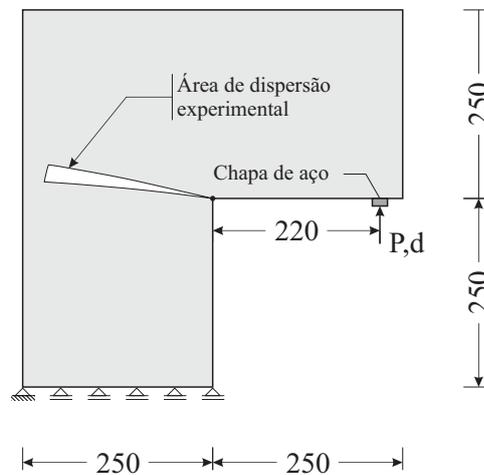
## 6 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados as análises numéricas realizadas utilizando o modelo ortotrópico com o objetivo de verificar seu desempenho. Para tanto, realizou-se análises que simulam os ensaios experimentais em concreto simples ou armado. Por fim, as conclusões e considerações sobre os resultados são apresentadas ao final de cada experimento.

### 6.1 Exemplo 01: Painel em L

O experimento em painel de concreto simples em forma de L é apresentado no trabalho de Winkler (2001). Esse experimento visa induzir uma fissura única na área de dispersão a partir do canto vivo do painel. Na Figura 22 é possível visualizar de forma esquemática o painel em L adotado no experimento de modo que a face inferior esquerda encontra-se engastada e a face inferior direita recebe uma carga vertical, onde monitorou-se a força aplicada ( $P$ ) e o deslocamento resultante ( $d$ ).

Figura 22 – Modelo esquemático do Painel em L com medidas em milímetros.



Fonte: Adaptada de Silva (2017).

O ensaio numérico do painel em L foi realizado por pesquisadores com parâmetros físicos adaptados conforme modelo numérico proposto para corresponder a fase elástica inicial, a carga de pico e a fase plástica do ensaio experimental, como Unger, Eckardt e Könke (2007), Ghosh e Chaudhuri (2013) e Silva (2017). Os valores dos parâmetros utilizados no modelo ortotrópico são dados na Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros físicos utilizados nas análises numéricas do painel em L.

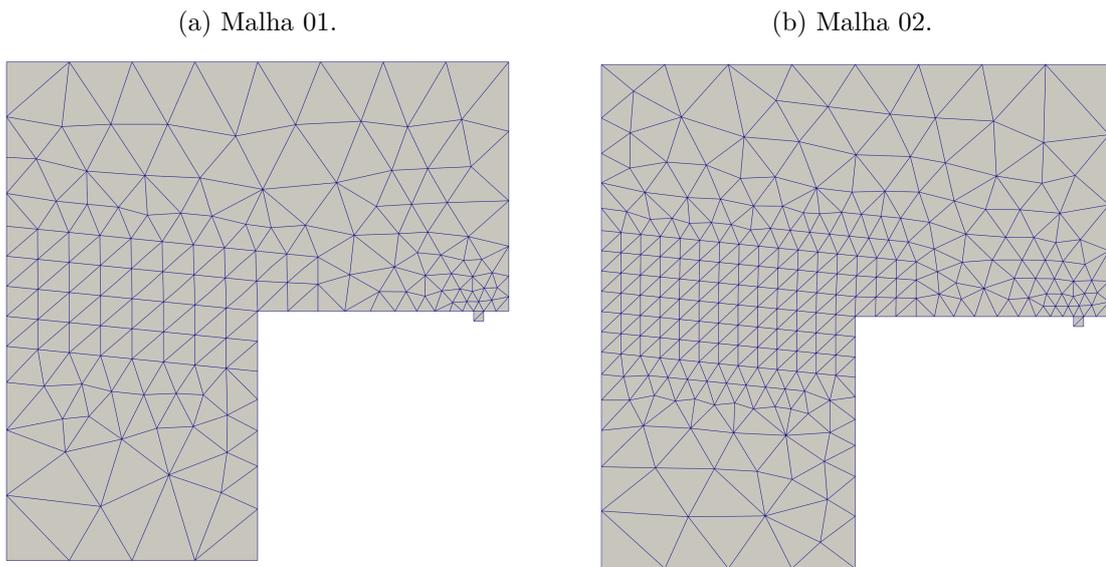
Parâmetro	Experimental	Numérico 1	Numérico 2
Resistência à tração, $F_t$ (MPa)	2,70	2,80	2,60
Energia de fratura total, $G_f$ (N/m)	65,00	140,00	120,00
Módulo de elasticidade, $E$ (GPa)	25,85	20,00	19,00

Fonte: O autor (2018).

### 6.1.1 Discretização em elementos triangulares

Na discretização do sólido empregou-se malhas do tipo estruturada na área de dispersão da fissura extraídas do software Gid, com vários graus de refinamento. Na Figura 23 pode-se visualizar duas das quatro malhas com elementos triangulares empregadas nas análises numéricas. Assim como, os dados de cada malha encontra-se na Tabela 6.

Figura 23 – Discretização do Painel em concreto simples em forma de L.



Fonte: O autor (2018).

Tabela 6 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas.

Malha	Tipo de elemento	Graus de liberdade	Quantidades de nós	Quantidades de sólidos
Malha 1	T6	1210	605	276
Malha 2	T6	2136	1068	503
Malha 3	T6	3018	1509	720
Malha 4	T6	5490	2745	1332

Fonte: O autor (2018).

### 6.1.2 Resultados do experimento

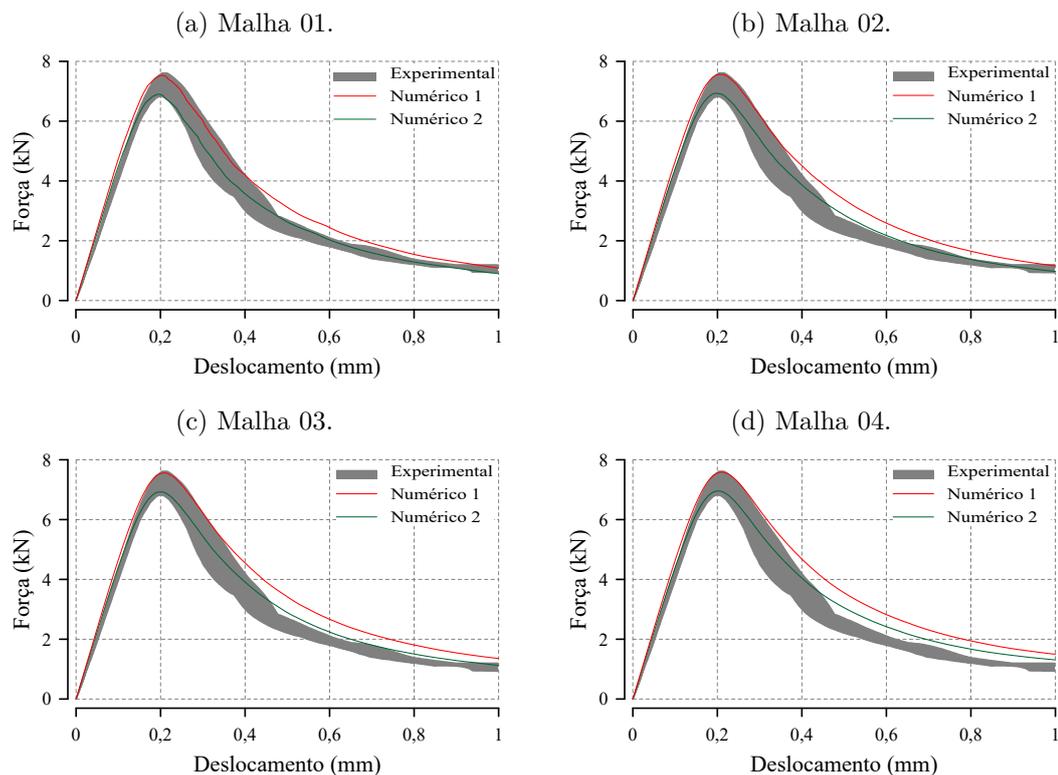
Após as análises numéricas obteve-se os deslocamentos verticais resultantes na face inferior direita do painel em L, devido a aplicação dos carregamentos impostos na face da chapa de aço. Com esses dados foi possível plotar a curva carga versus deslocamentos verticais e compara-los com os resultados obtidos experimentalmente, como pode ser visto na Figura 24. A Tabela 7 apresenta um comparativo entre a carga máxima atingida no ensaio experimental e o seu respectivo deslocamento vertical e os resultados obtidos na análise numérica. Além disso, a razão entre o tempo de processamento e o número de passos utilizados para análise numérica é apresentado para avaliação do aspecto computacional.

Tabela 7 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica.

Malha	Análise	d (mm)	P (kN)	$\frac{ \Delta d }{d} \%$	$\frac{ \Delta P }{P} \%$	$\frac{\text{Tempo (s)}}{\text{n.º passos}}$
-	Experimental	0,2136	7,6180	-	-	-
Malha 1	Numérica 1	0,2044	7,5354	4,30	1,08	0,226
Malha 2	Numérica 1	0,2082	7,5627	2,54	0,73	0,371
Malha 3	Numérica 1	0,2094	7,5584	1,97	0,78	0,547
Malha 4	Numérica 1	0,2100	7,5858	1,70	0,42	1,122

Fonte: O autor (2018).

Figura 24 – Curva força–deslocamento das análises experimental e numérica.



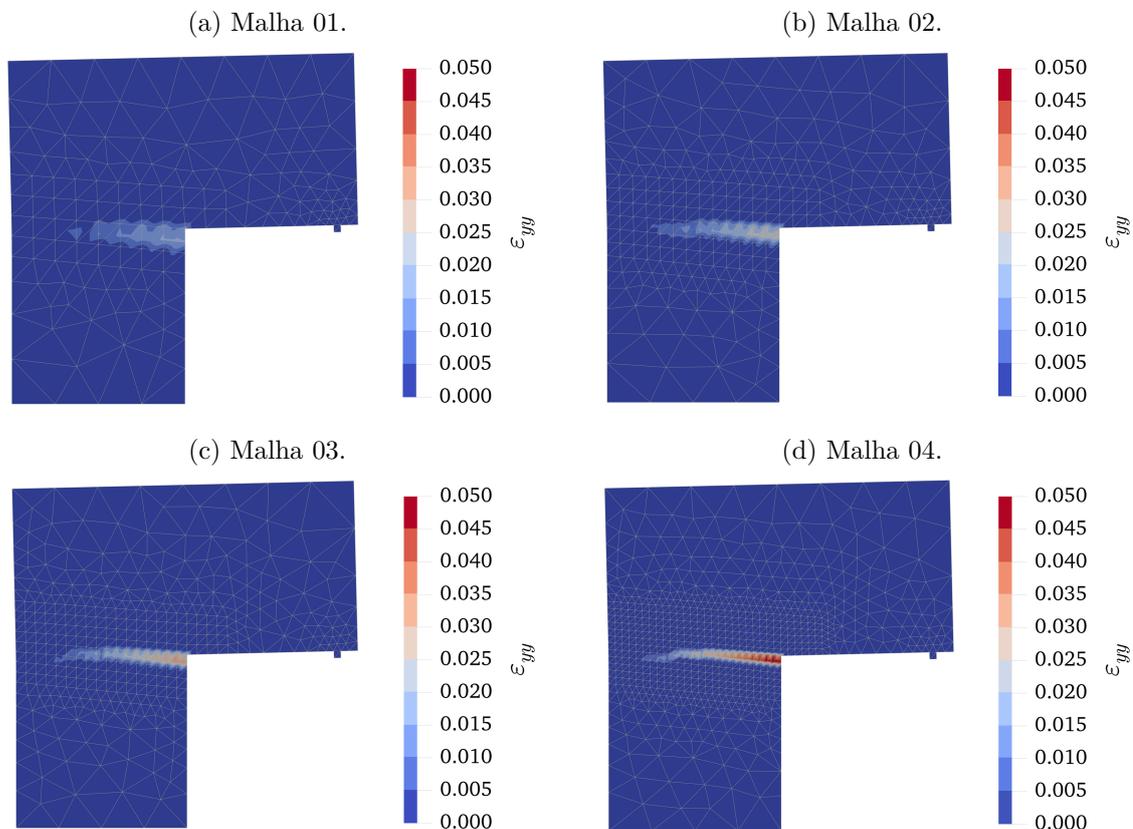
Fonte: O autor (2018).

### 6.1.3 Conclusões e considerações

Comparando as curvas numéricas com o espectro das curvas experimentais verificou-se que o modelo desacoplado e ortotrópico simulou com sucesso a fase elástica do painel em L ideal, o ponto crítico da curva força–deslocamento, a perda de rigidez após ocorrer a fissura e por fim, a tendência da fase plástica. Além disso, a curva numérica 1 conseguiu atingir com precisão razoável a carga de pico e seu respectivo deslocamento vertical. Ademais, verificou-se que a fase elástica e a carga de pico são similares para malhas com diferentes graus de refinamento. Por outro lado, elementos maiores plastificam mais rápido devido à dependência da função de amolecimento do comprimento efetivo do elemento sólido.

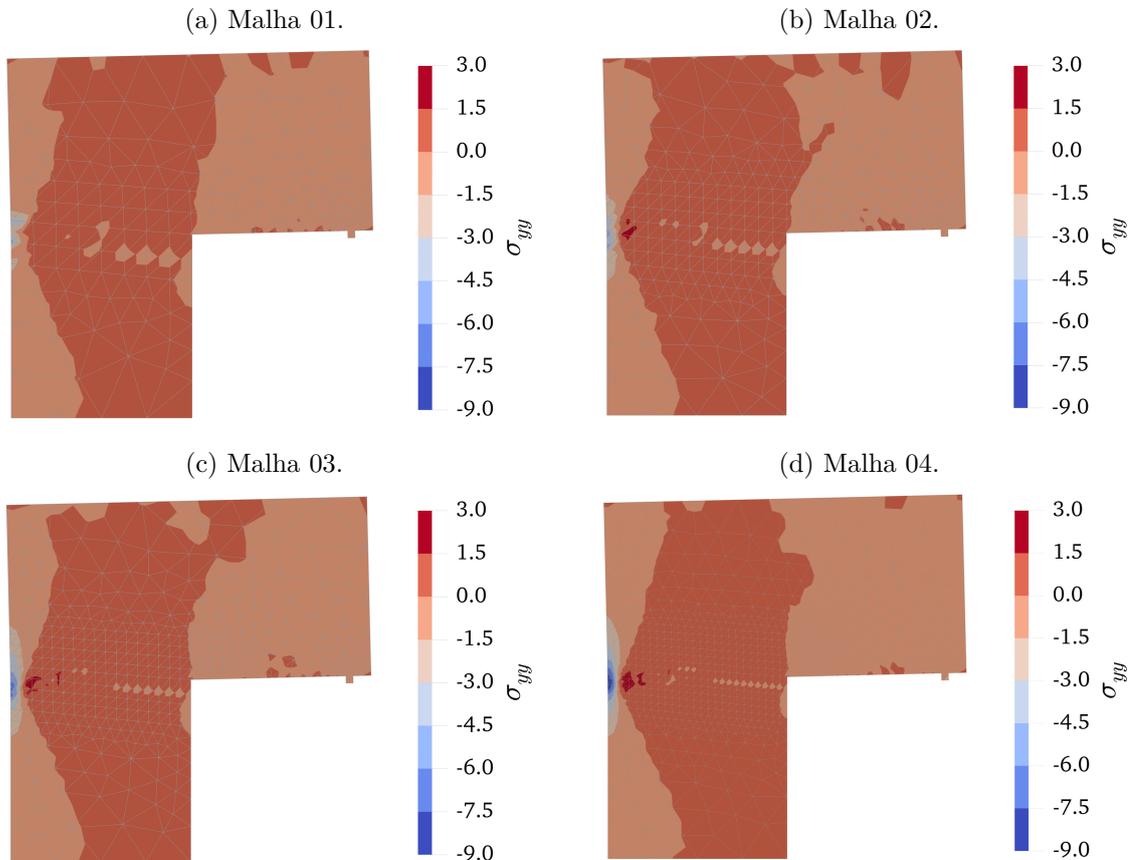
Verificou-se por meio de imagens dos painéis deformados que o campo de deformação  $\varepsilon_{yy}$  apresenta fissuração do concreto simples de acordo com a área de dispersão da fissura experimental, como pode ser visto na Figura 25. Ademais, o ensaio numérico está de acordo com o fenômeno físico, uma vez que após o ponto crítico observa-se o desenvolvimento da concentração de tensões de tração na ponta da fissura e tensões de compressão na face oposta da fissuração (Figura 26).

Figura 25 – Campo de deformação  $\varepsilon_{yy}$  no estado deformado do painel em L (deformação em mm/mm). Fator de escala 20.



Fonte: O autor (2018).

Figura 26 – Campo de tensão  $\sigma_{yy}$  no estado deformado do painel em L (tensão em MPa). Fator de escala 20.

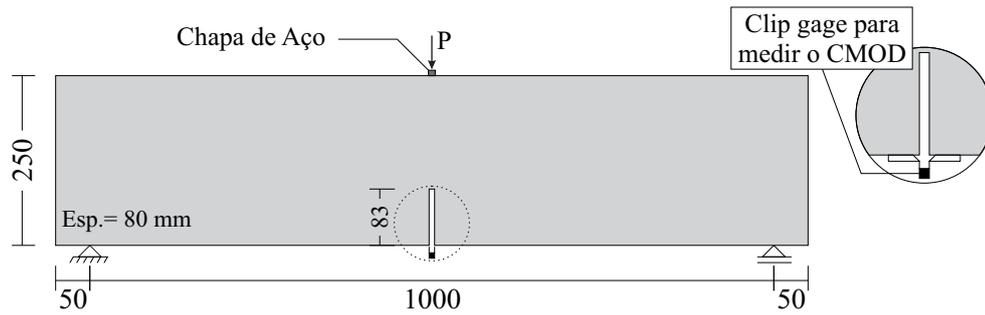


Fonte: O autor (2018).

## 6.2 Exemplo 02: Viga com entalhe

O experimento à flexão em três pontos em viga de concreto simples com entalhe é apresentado no trabalho de Roesler et al. (2007). Esse experimento visa induzir uma fissura única na área central da viga a partir do entalhe. Na Figura 27 é possível visualizar o desenho esquemático da viga adotada no experimento onde, na parte central da face superior, há um carregamento imposto sobre uma chapa de aço, enquanto na face inferior tem-se restrição ao deslocamento por meio de dois apoios, respectivamente, do segundo gênero do lado esquerdo e do primeiro gênero do lado direito. Além disso, observa-se no desenho o monitoramento do afastamento horizontal entre as faces do entalhe ou, em Inglês, *Crack Mouth Opening Displacement* (CMOD).

Figura 27 – Modelo esquemático da viga com entalhe. Medidas em milímetros.



Fonte: Adaptada de Silva (2017).

Os dados do modelo desacoplado e ortotrópico utilizados foram adaptados para corresponder a fase elástica inicial, a carga de pico e a fase plástica do ensaio experimental, com valores dados na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros físicos utilizados nas análises numéricas da viga com entalhe.

Parâmetro	Experimental	Numérico
Resistência à tração, $F_t$ (MPa)	4,15	4,15
Energia de fratura total, $G_f$ (N/m)	139,00	90,00
Módulo de elasticidade, $E$ (GPa)	32,00	30,00

Fonte: O autor (2018).

### 6.2.1 Discretização em elementos triangulares

Na discretização do sólido empregou-se malhas do tipo não estruturada e concentrada na área de dispersão da fissura extraídas do software Gid, com vários graus de refinamento. Na Figura 28 pode-se visualizar duas das quatro malhas com elementos triangulares empregadas nas análises numéricas. Assim como, os dados de cada malha encontra-se na Tabela 9.

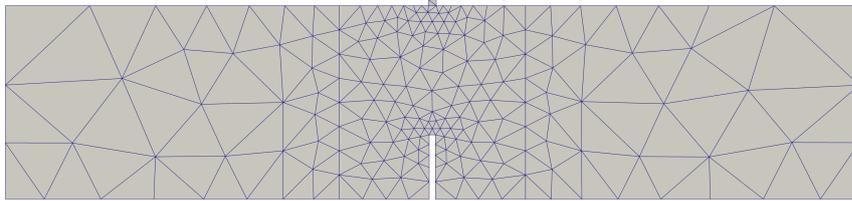
Tabela 9 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas.

Malha	Tipo de elemento	Graus de liberdade	Quantidades de nós	Quantidades de sólidos
Malha 1	T6	1474	737	332
Malha 2	T6	2350	1175	546
Malha 3	T6	3662	1831	868
Malha 4	T6	7010	3505	1692

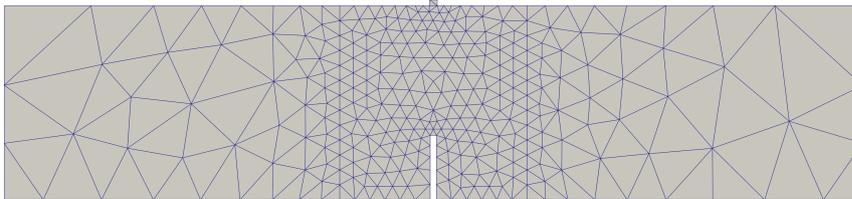
Fonte: O autor (2018).

Figura 28 – Discretização da viga com entalhe em concreto simples.

(a) Malha 01.



(b) Malha 02.



Fonte: O autor (2018).

### 6.2.2 Resultados do experimento

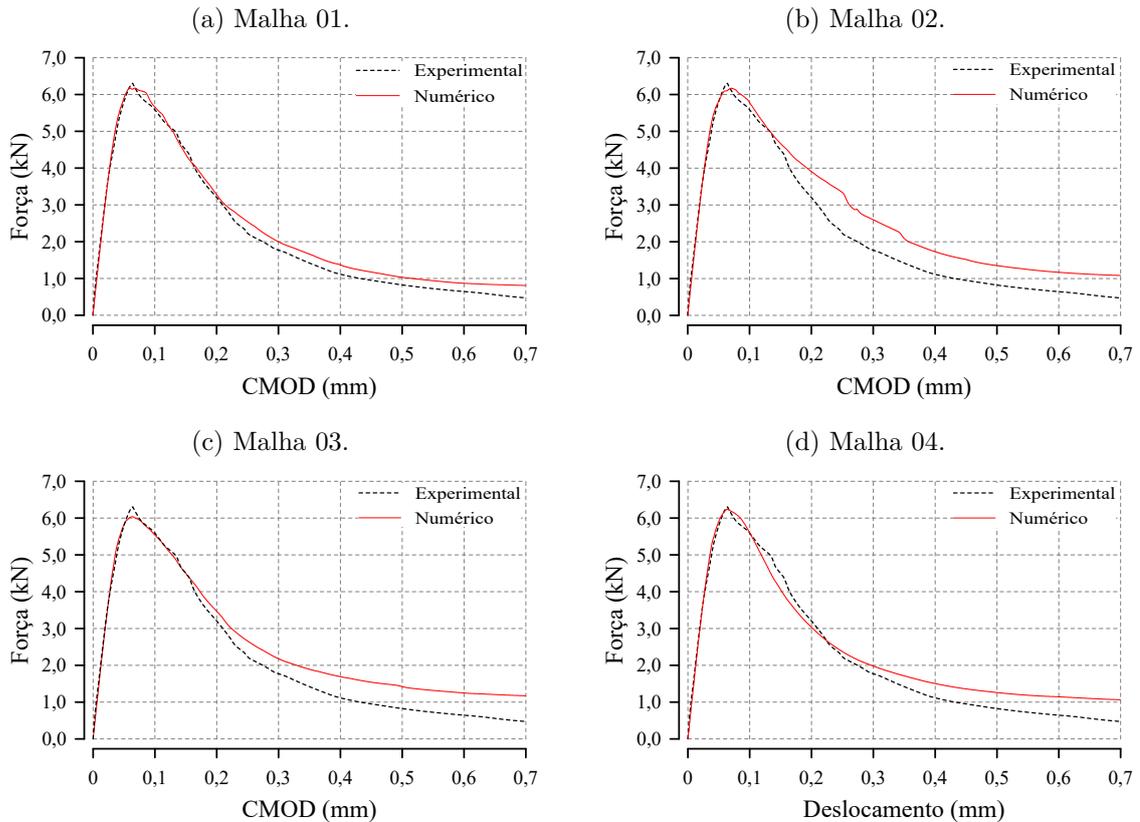
Após as análises numéricas obteve-se os afastamentos horizontais entre as faces do entalhe da viga (CMOD), devido a aplicação dos carregamentos impostos na face da chapa de aço. Com esses dados foi possível plotar a curva carga versus CMOD e compará-los com os resultados obtidos experimentalmente, como pode ser visto na Figura 29. A Tabela 10 apresenta um comparativo entre a carga máxima atingida no ensaio experimental e o seu respectivo CMOD e os resultados obtidos na análise numérica. Além disso, a razão entre o tempo de processamento e o número de passos utilizados para análise numérica é apresentado para avaliação do aspecto computacional.

Tabela 10 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica.

Malha	Análise	CMOD (mm)	P (kN)	$\frac{ \Delta\text{CMOD} }{\text{CMOD}}\%$	$\frac{ \Delta\text{P} }{\text{P}}\%$	$\frac{\text{Tempo (s)}}{\text{n.º passos}}$
-	Experimental	0.0646	6.3030	-	-	-
Malha 1	Numérica	0.0591	6.1914	8.55	1.77	0.264
Malha 2	Numérica	0.0705	6.1709	9.09	2.10	0.479
Malha 3	Numérica	0.0638	6.0375	1.24	4.21	0.745
Malha 4	Numérica	0.0639	6.2374	1.02	1.04	1.605

Fonte: O autor (2018).

Figura 29 – Curva de equilíbrio força–CMOD das análises experimental e numérica.



Fonte: O autor (2018).

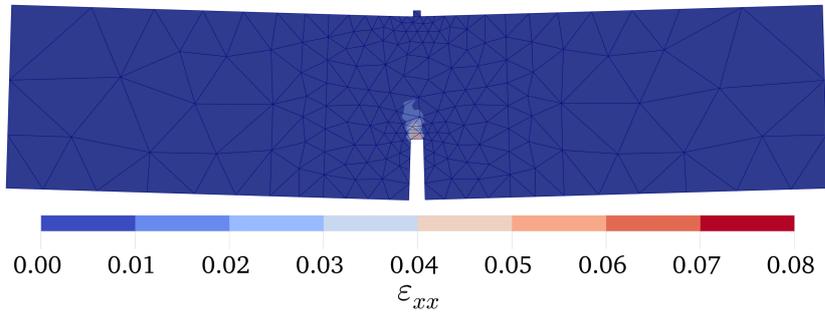
### 6.2.3 Conclusões e considerações

Comparando as curvas numéricas com a curva experimental verificou-se que o modelo desacoplado e ortotrópico simulou com sucesso a fase elástica inicial da viga com entalhe, o ponto crítico da curva força–CMOD e a tendência da fase plástica, com a perda de rigidez após ocorrer a fissura. Além disso, a curva numérica conseguiu atingir com precisão razoável a carga de pico e seu respectivo deslocamento vertical. Além disso, verificou-se que a fase elástica e a carga de pico são similares para malhas com diferentes graus de refinamento. Por outro lado, elementos maiores plastificam mais rápido devido à dependência da função de amolecimento do comprimento efetivo do elemento sólido.

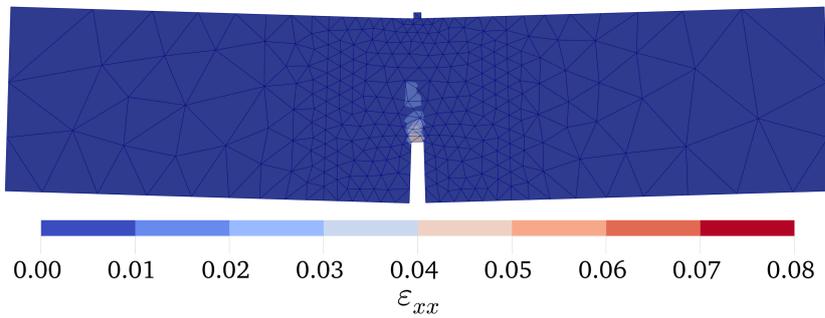
Verificou-se por meio de imagens da viga deformada que o campo de deformação  $\varepsilon_{xx}$  apresenta fissuração do concreto simples de acordo com a área de dispersão da fissura experimental, como pode ser visto nas Figuras 30 e 31. Ademais, o ensaio numérico está de acordo com o fenômeno físico, uma vez que após o ponto crítico observa-se o desenvolvimento da concentração de tensões de tração na ponta da fissura e tensões de compressão na face oposta da fissuração (Figuras 32 e 33).

Figura 30 – Campo de deformação  $\varepsilon_{xx}$  no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 01 e 02 (deformação em mm/mm). Fator de escala 20.

(a) Malha 01.



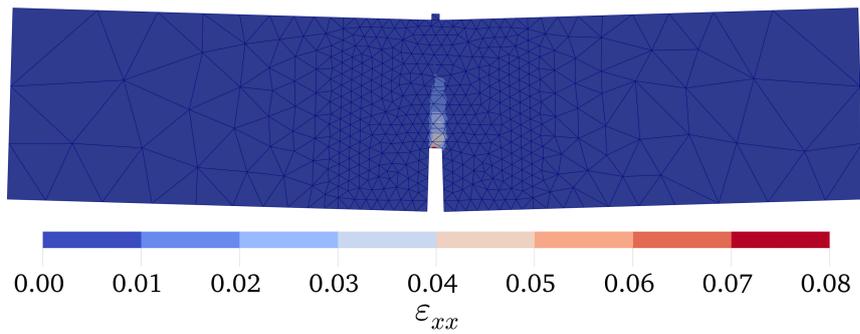
(b) Malha 02.



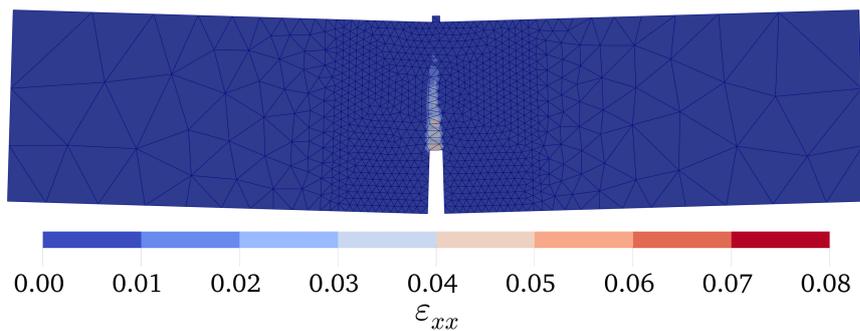
Fonte: O autor (2018).

Figura 31 – Campo de deformação  $\varepsilon_{xx}$  no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 03 e 04 (deformação em mm/mm). Fator de escala 20.

(a) Malha 03.

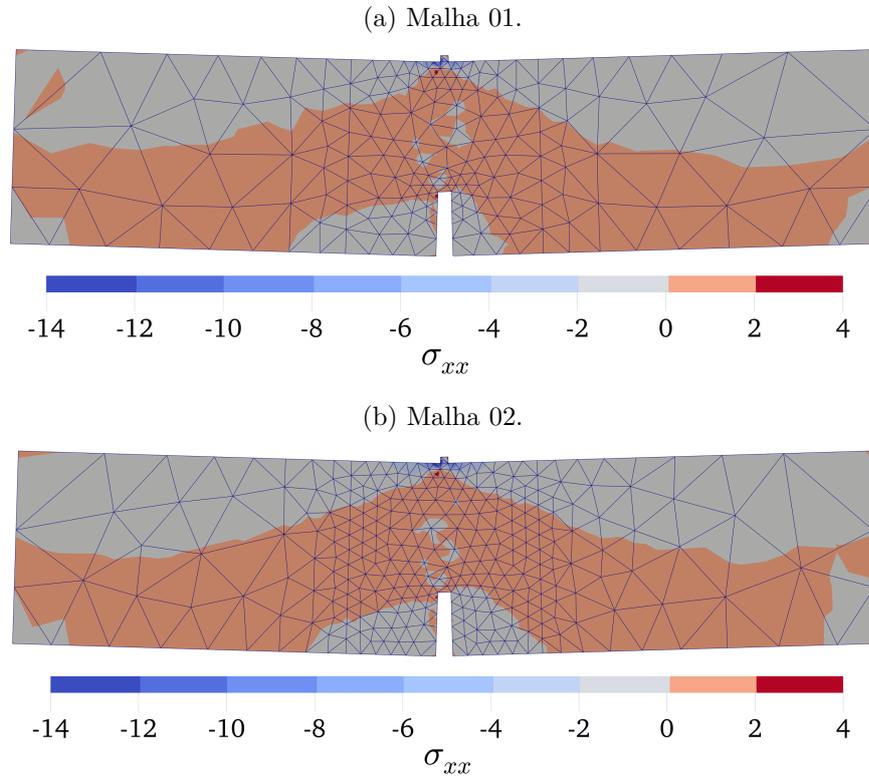


(b) Malha 04.



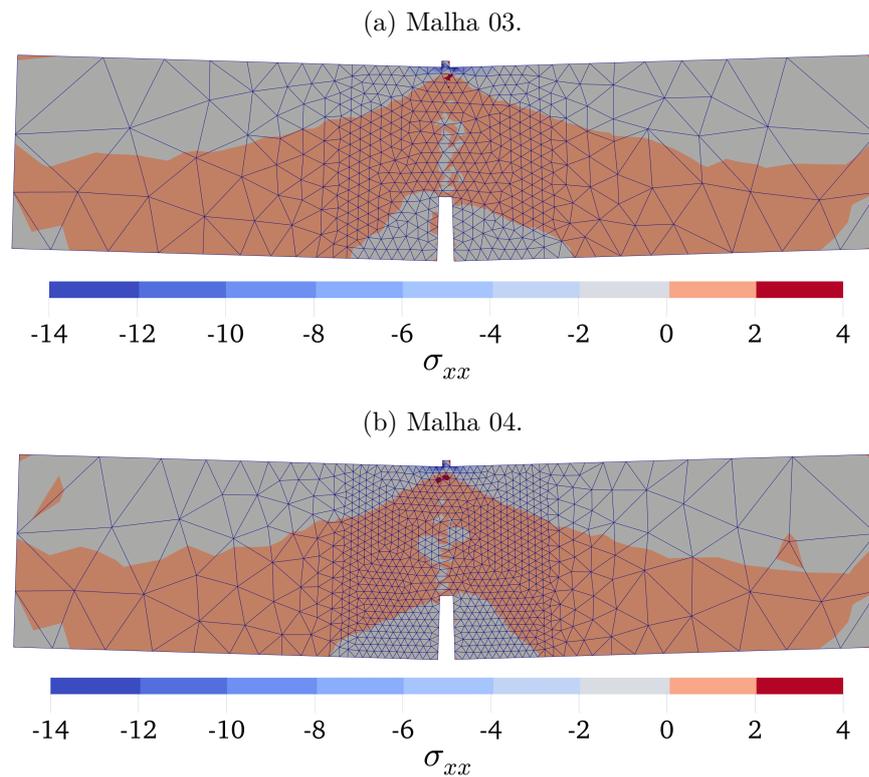
Fonte: O autor (2018).

Figura 32 – Campo de tensão  $\sigma_{xx}$  no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 01 e 02 (tensão em MPa). Fator de escala 20.



Fonte: O autor (2018).

Figura 33 – Campo de tensão  $\sigma_{xx}$  no estado deformado da viga com entalhe utilizando a Malha 03 e 04 (tensão em MPa). Fator de escala 20..

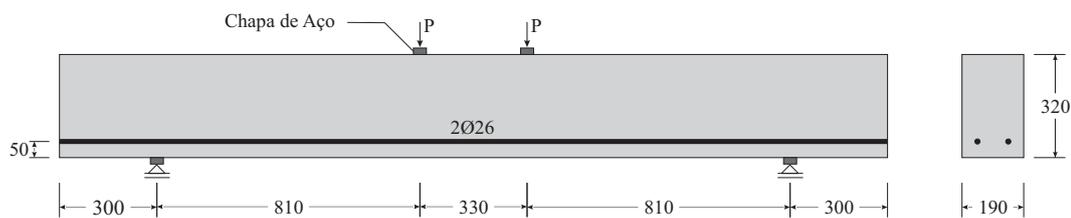


Fonte: O autor (2018).

### 6.3 Exemplo 03: Viga de concreto armado

O experimento à flexão em quatro pontos em viga de concreto armado é apresentado no trabalho Leonhardt e Walther (1962). Este experimento visa avaliar o comportamento ao cisalhamento da peça por meio da fissuração. Na Figura 34 é possível visualizar o desenho esquemático do experimento, onde na parte inferior temos dois apoios do primeiro gênero e na parte superior duas cargas aplicadas sobre uma chapa de aço.

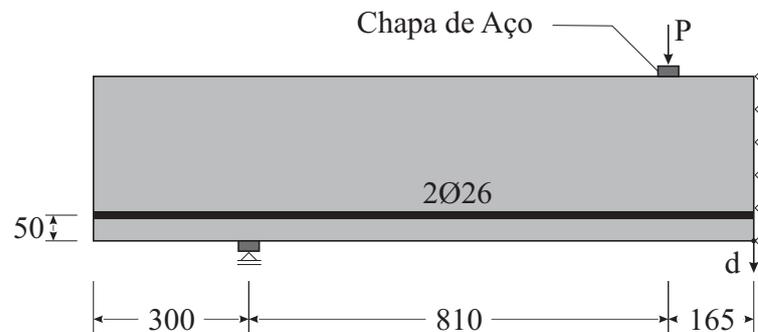
Figura 34 – Desenho esquemático do experimento à flexão em quatro pontos em viga de concreto armado com medidas em milímetros.



Fonte: Adaptada de Lyra (2011).

Nas análises numéricas utilizou-se o modelo reduzido devido à simetria do problema como pode ser visto na Figura 35. Durante a evolução do carregamento monitorou-se o ponto de aplicação da carga vertical ( $P$ ) e do deslocamento vertical ( $d$ ).

Figura 35 – Desenho esquemático do modelo reduzido para as análises numéricas com medidas em milímetros.



Fonte: Adaptada de Lyra (2011).

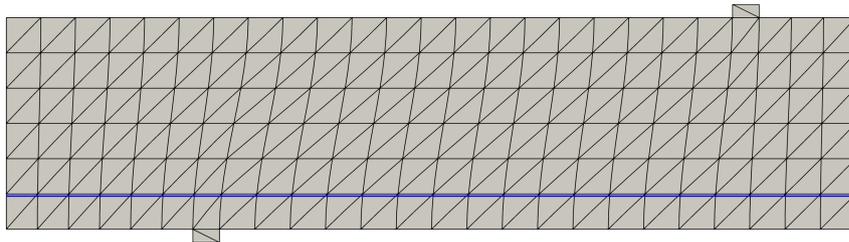
Os parâmetros do modelo constitutivo desacoplado e ortotrópico do concreto que foram utilizados nas simulações numéricas são o módulo de elasticidade, resistência à tração e energia de fratura total, os seus valores são dados, respectivamente, por  $E = 31,72 \text{ GPa}$ ,  $F_t = 1,64 \text{ MPa}$  e  $G_f = 62,35 \text{ N/m}$ . Enquanto que os parâmetros relativos ao aço como o módulo de elasticidade e a resistência à tração são dados, respectivamente, por  $E_a = 210 \text{ GPa}$  e  $F_y = 315 \text{ MPa}$ .

### 6.3.1 Discretização em elementos triangulares

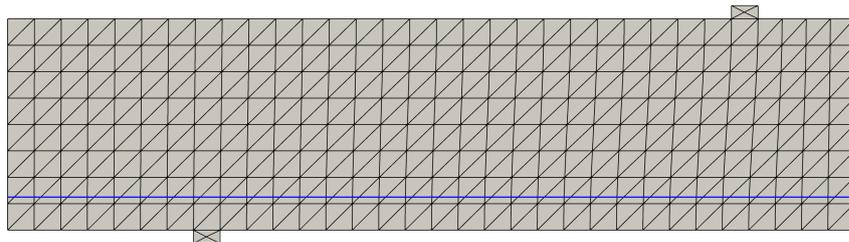
Na discretização do sólido bidimensional empregou-se malhas do tipo estruturada extraídas do programa Gid, com vários graus de refinamento para verificação de convergência. Na Figura 36 pode-se visualizar duas das quatro malhas com elementos triangulares empregadas nas análises numéricas. Assim como, os dados detalhados de cada malha encontram-se na Tabela 11.

Figura 36 – Discretização do modelo reduzido da viga em concreto armado.

(a) Malha 01.



(b) Malha 02.



Fonte: O autor (2018).

Tabela 11 – Dados das malhas empregadas nas análises numéricas.

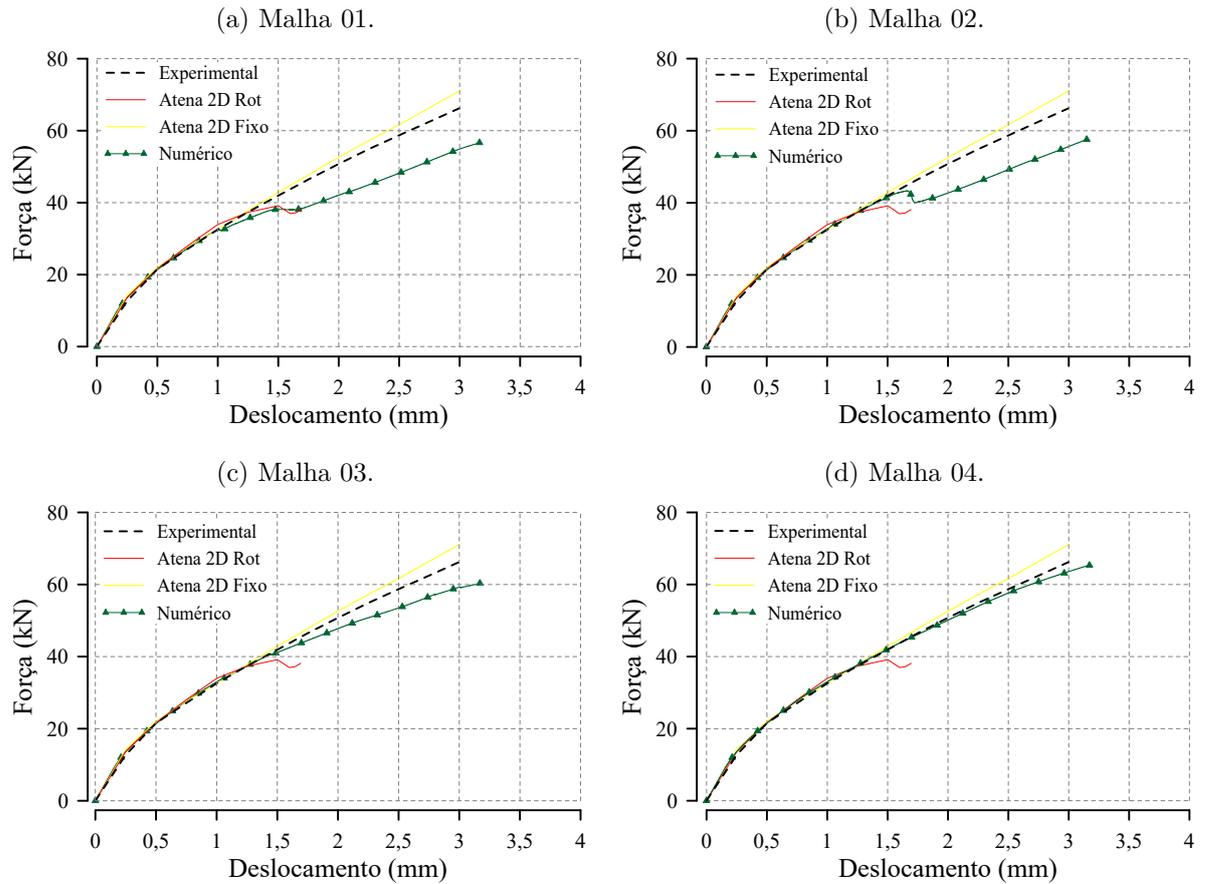
Malha	Tipo de elemento	Graus de liberdade	Quantidades de nós	Quantidades de sólidos	Elementos de barra
Malha 1	T6	1350	675	304	50
Malha 2	T6	2250	1125	520	64
Malha 3	T6	4042	2021	954	86
Malha 4	T6	8554	4277	2056	128

Fonte: O autor (2018).

### 6.3.2 Resultados do experimento

Após as análises numéricas obteve-se os deslocamentos verticais resultantes na face inferior da viga em concreto armado, devido a aplicação dos carregamentos impostos na face da chapa de aço. Com esses dados foi possível plotar a curva carga versus deslocamentos verticais e compara-los com os resultados obtidos experimentalmente, como pode ser visto na Figura 37.

Figura 37 – Curva força versus deslocamento do ensaio experimental e numérico.



Fonte: O autor (2018).

Além disso, os dados numéricos dos modelos bidimensionais de fissuração distribuída rotacional e fixa obtidos por Lyra (2011) mediante o programa computacional ATENA são plotados para comparação dos resultados. No primeiro modelo, a direção da fissura é atualizada por meio dos cossenos diretores das deformações principais do elemento sólido. Enquanto que no segundo, a direção da fissura é determinada no início da análise e permanece constante durante a evolução do carregamento.

A Tabela 12 apresenta um comparativo entre a carga máxima atingida no ensaio experimental e o seu respectivo deslocamento vertical e os resultados obtidos nas análises numéricas. Além disso, a razão entre o tempo de processamento e o número de passos utilizados para análise numérica é apresentado para avaliação do aspecto computacional.

Tabela 12 – Comparativo entre os resultados da análise experimental e numérica.

Malha	Análise	d (mm)	P (kN)	$\frac{ \Delta d }{d}\%$	$\frac{ \Delta P }{P}\%$	$\frac{\text{Tempo (s)}}{\text{n.º passos}}$
-	Experimental	3,10	68,00	-	-	-
-	Atena 2d Fixo	3,13	73,60	0,97	8,24	-
-	Atena 2d Rot	1,67	38,45	46,13	43,46	-
Malha 1	Numérica	3,10	55,98	0,01	17,67	0,088
Malha 2	Numérica	3,10	56,96	0,00	16,24	0,137
Malha 3	Numérica	3,10	59,77	0,01	12,11	0,222
Malha 4	Numérica	3,10	64,66	0,00	4,92	0,507

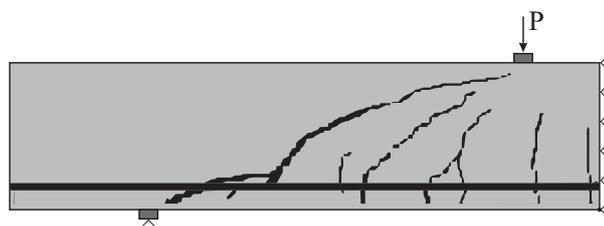
Fonte: O autor (2018).

### 6.3.3 Conclusões e considerações

Comparando-se a curva numérica com a curva experimental verificou-se que o modelo proposto simulou com sucesso a fase linear da curva referente à seção transversal ideal da viga; a perda de rigidez após ocorrer as primeiras fissuras de flexão no trecho entre as cargas aplicadas; finalmente, o comportamento plástico do concreto após atingir, aproximadamente, uma carga de  $P = 40 \text{ kN}$  onde a viga apresenta fissuras entre os apoios. No estado plástico do concreto observa-se o efeito da malha nas curvas numéricas por causa da dependência da relação constitutiva do comprimento efetivo do elemento. Como resultado os elementos maiores plastificam-se mais rápido, ocasionando o arrançamento entre os sólidos e as barras da armadura e os efeitos dinâmicos na curva (*“snap buckling”*).

A Figura 38 apresenta o padrão de fissuração na viga em concreto armado obtida no ensaio experimental. A fissuração está associada ao comportamento do concreto à tração, assim verifica-se por meio de imagens das vigas deformadas que o campo de deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}$  apresenta fissuração de acordo com o fenômeno físico, visto que as fissuras apresentam uma direção inclinada devido à inclinação das tensões principais de tração (fissuras de cisalhamento), como pode ser visto na Figura 39. Além disso, observa-se que a armadura ao longo da viga deformada encontra-se no regime elástico, pois a tensão atuante é menor que a tensão de escoamento da armadura (Figura 40).

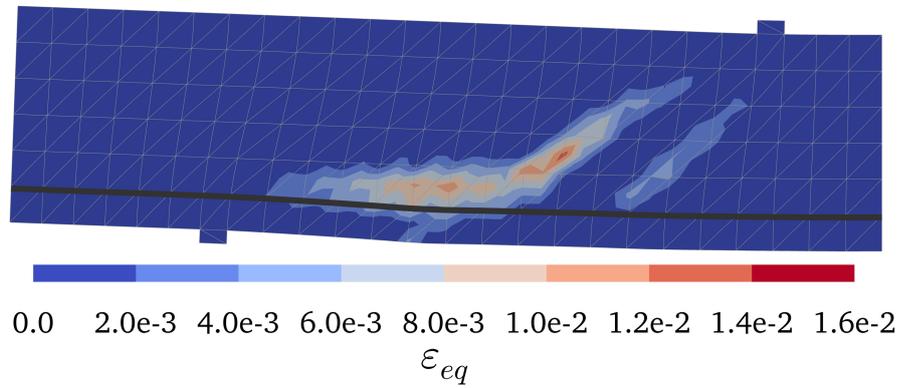
Figura 38 – Fissuramento experimental da viga



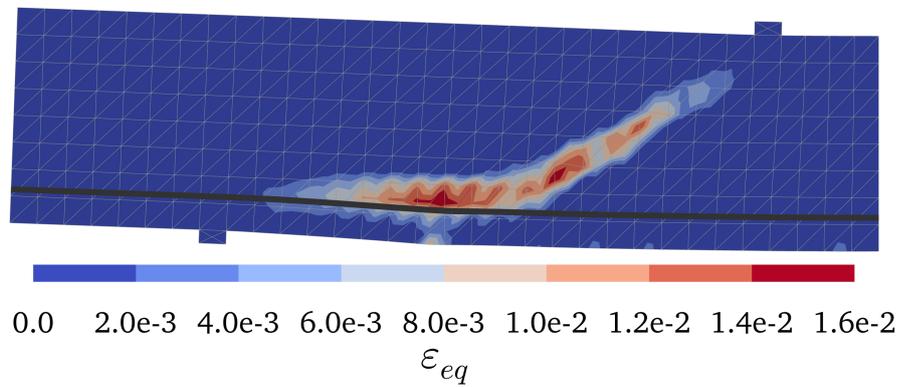
Fonte: Adaptada de Lyra (2011).

Figura 39 – Campo de deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}$  no estado deformado da viga em concreto armado (deformação em mm/mm). Fator de escala 10.

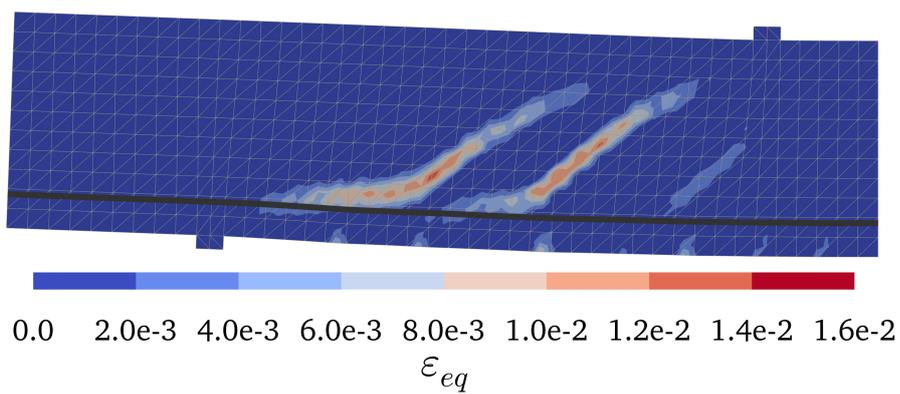
(a) Malha 01.



(b) Malha 02.



(c) Malha 03.



(d) Malha 04.

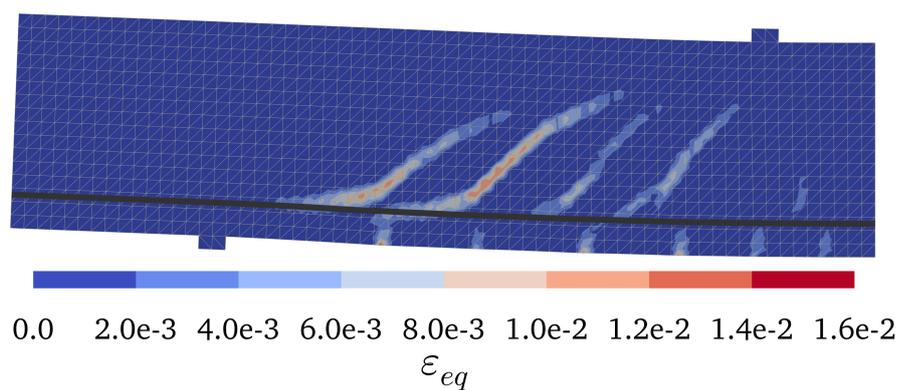
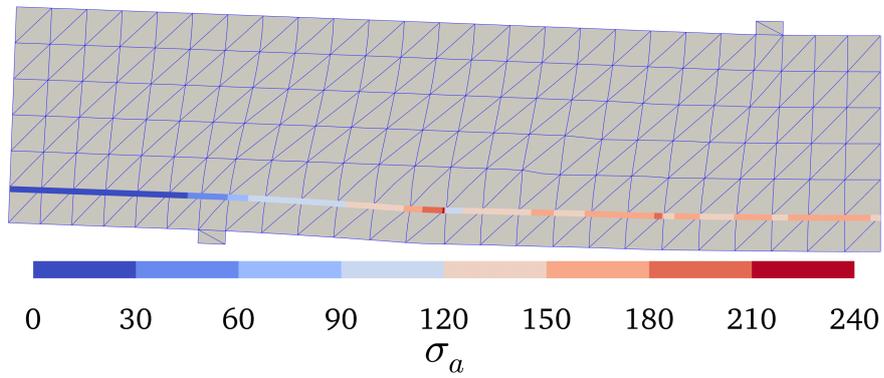
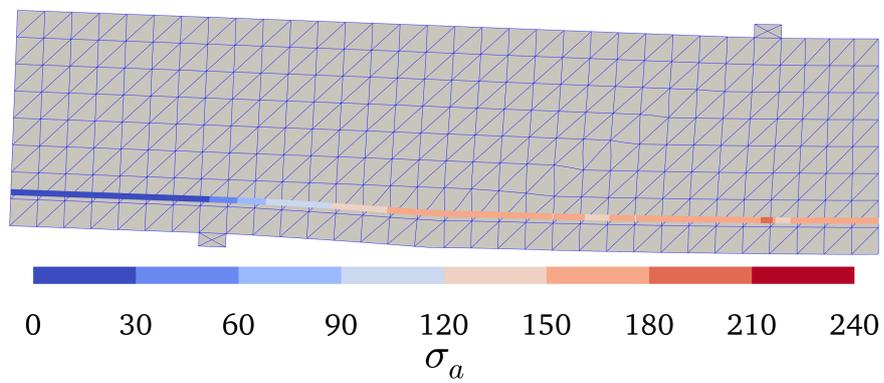


Figura 40 – Campo de tensão na armadura  $\sigma_a$  no estado deformado da viga em concreto armado (tensão em MPa). Fator de escala 10.

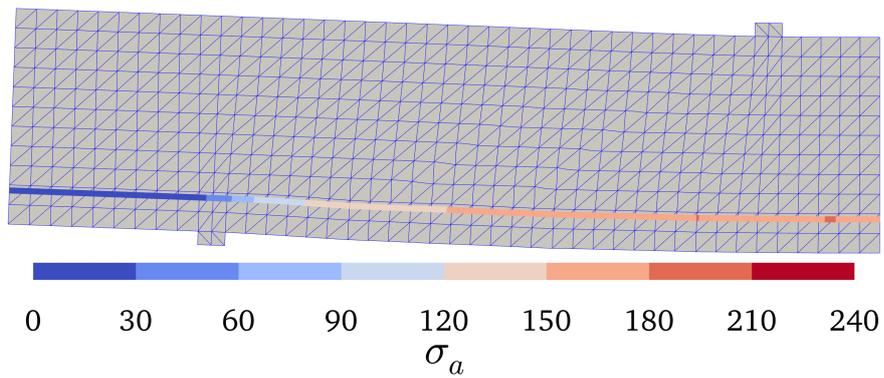
(a) Malha 01.



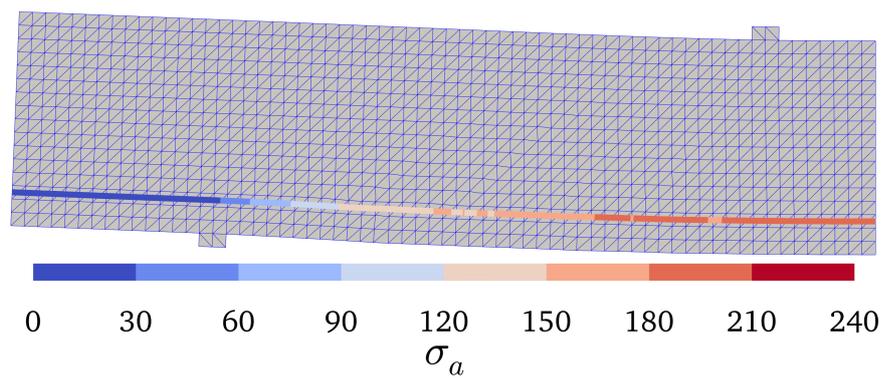
(b) Malha 02.



(c) Malha 03.



(d) Malha 04.



Fonte: O autor (2018).

## 7 CONCLUSÕES

Comparando-se os resultados dos experimentos computacionais, conclui-se que o modelo ortotrópico com relação constitutiva desacoplada conseguiu simular de forma satisfatória a fase elástica inicial dos experimentos, bem como os carregamentos máximos e seus respectivos deslocamentos. Ademais disso, o modelo proposto simulou a perda de rigidez e a tendência da fase plástica. Verificou-se, ainda, por meio das figuras das estruturas deformadas que os campos de deformações estão de acordo com o padrão de fissuração dos experimentos, assim como os campos de tensões foram condizentes com a física dos problemas avaliados. Além disto, a formulação da armadura embutida do elemento triangular para simulação de concreto armado mostrou-se apropriada, uma vez que a viga em concreto armado resistiu aos carregamentos após o concreto se deformar plasticamente.

Os resultados dos ensaios numéricos demonstram dependência de uma discretização mínima para obter precisão satisfatória em comparação aos ensaios experimentais, principalmente, do padrão de fissuração e dos carregamentos máximos e seus respectivos deslocamentos. Por outro lado, o refinamento da malha provoca um deslocamento da curva numérica na fase plástica do concreto. Isso se dá devido à relação entre o tamanho do elemento sólido da malha e a função de amolecimento empregada na relação constitutiva do concreto. Portanto, este tema necessita de um estudo mais aprofundado a fim de melhorar a precisão dos resultados numéricos.

Apesar do modelo proposto simular os resultados dos ensaios experimentais, aprimoramentos em sua formulação e implementação ainda são necessários devido ao elevado número de incrementos de carregamentos para convergência e simulação dos resultados experimentais dentro da precisão desejada, por isso as análises numéricas possuem um custo computacional elevado, independente do número de graus de liberdade da malha e a razão entre o tempo de processamento e o número de passos utilizados. Logo, o emprego de estratégias computacionais para melhorar o desempenho da atualização do sistema de equações mostra-se promissor.

### 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Ao final, propõe-se as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Expandir o modelo proposto para análises tridimensionais a fim de obter um programa completo para um maior número de aplicações, com obtenção de mais dados sobre deslocamentos, deformações e tensões.

- Implementar o elemento quadrilateral de ordem superior para concreto simples e armado, visando estudar o desempenho deste elemento no modelo proposto em comparação ao elemento triangular.
- Empregar o modelo constitutivo com coeficiente de Poisson diferente de zero. Apesar do modelo proposto simular de forma adequada o comportamento mecânico do concreto simples e armado, a implementação do modelo completo é essencial para investigar os efeitos do coeficiente de Poisson nulo na análise numérica.
- Aprimorar a implementação do modelo, visando melhorar o desempenho computacional e a precisão da análise numérica em relação aos ensaios experimentais. Para tanto, torna-se necessário um estudo detalhado visando obter convergência para incrementos de cargas maiores e malhas adaptativas em relação a fissuração.

## REFERÊNCIAS

- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. *Butterworths, 1960*, reprinted from *Aircraft Engineering*, 1954.
- ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2003.
- ATENA. *Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*. Prague: Cervenka Consulting., 2000.
- BARROS, W. M. d. *Matrizes explícitas em elementos finitos de alta ordem aplicadas a problemas de elasticidade 2D e 3D*. 150 p. Tese (em Engenharia Estrutural) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.
- BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- BATHE, K. J. et al. Nonlinear analysis of concrete structures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 32, n. 3-4, p. 563–590, 1989.
- BATHE, K. J.; RAMASWAMY, S. On three-dimensional nonlinear analysis of concrete structures. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 52, n. 3, p. 385–409, 1979.
- BELL, K. A refined triangular plate bending finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 101–122, 1969.
- CLOUGH, R. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. [S.l.]: American Society of Civil Engineers, 1960.
- CLOUGH, R. W.; WILSON, E. L. *Stress analysis of a gravity dam by the finite element method*. [S.l.]: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1962.
- COMPUTERS & STRUCTURES INC. *CSI Analysis Reference Manual: For SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge*. Califórnia, 2015. 488 p.
- COOK, R. D. et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4. ed. [S.l.]: John Wiley, 2001.
- COWPER, G. R. Gaussian quadrature formulas for triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, v. 7, n. 3, p. 405–408, 1973.
- CRISFIELD, M. An arc-length method including line searches and accelerations. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 19, n. 9, p. 1269–1289, 1983.
- CUVELIER, F.; JAPHET, C.; SCARELLA, G. An efficient way to perform the assembly of finite element matrices in matlab and octave. *arXiv preprint arXiv:1305.3122*, 2013.
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D. A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Reston, VA, v. 103, n. 02, p. 229 – 241, 1977.

DIANA. *Displacement Analyzer*. Delft: TNO Building and Construction Research Institute, 2003.

FAFARD, M.; MASSICOTTE, B. Geometrical interpretation of the arc-length method. *Computers & Structures*, Pergamon, v. 46, n. 4, p. 603–615, 1993.

GHOSH, A.; CHAUDHURI, P. Computational modeling of fracture in concrete using a meshfree meso-macro-multiscale method. *Computational Materials Science*, Elsevier, v. 69, p. 204–215, 2013.

GID. *The personal pre and postprocessor*: version 12.0.9. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2008.

GRIFFITHS, D. V. et al. Elastic stiffness of straight-sided triangular finite elements by analytical and numerical integration. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 25, n. 3, p. 247–262, 2009.

HAMMER, P. et al. Numerical integration over simplexes and cones. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, JSTOR, v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956.

HYER, M. W. *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. [S.l.]: Columbus, OH: WCB McGraw-Hill, 1998.

JAGD, L. K. *Non-linear FEM Analysis of 2D Concrete Structures*. 202 p. Tese (at the Structural Engineering and Materials) — Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby, 1997.

JULIA. *Julia*: version 0.5.0. Massachusetts: MIT, 2009.

KIM, N.-H. *Introduction to nonlinear finite element analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014.

KIM, N.-H. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. 1. ed. [S.l.]: Springer US, 2015.

KUMAR, S.; BARAI, S. V. *Concrete fracture models and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

KWAK, H.-G.; FILIPPOU, F. C. *Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads*. [S.l.]: Department of Civil Engineering, University of California Berkeley, CA, 1990.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. *Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung zur Ermittlung der Schubtragfähigkeit und der oberen Schubspannungsgrenze*. [S.l.]: W. Ernst, 1962. (Deutscher Ausschluß für Stahlbeton).

LOGAN, D. L. *A First Course in the Finite Element Method*. 4. ed. Ontário: Thomson, 2009.

LYRA, P. H. C. d. *Modelagem numérica de estruturas de concreto armado utilizando o programa ATENA*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.

MENIN, R. G. et al. Modelos de fissuração distribuída em vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. *RIEM-IBRACON Structures and Materials Journal*, v. 2, n. 2, 2009.

MIDAS. *Advanced Nonlinear and Detail Analysis System*. New York: MIDAS Information Technology Company, Ltd., 1996.

MOSER, K.; SWOBODA, G. Explicit stiffness matrix of the linearly varying strain triangular element. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 311–314, 1978.

OÑATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids*. 1. ed. Barcelona: Springer Science & Business Media, 2009.

PARAVIEW. *ParaView: version 5.4.1*. Clifton Park, NY: Sandia Corporation, Kitware Inc, 2005.

PHILLIPS, D. V.; ZIENKIEWICZ, O. C. Finite element non-linear analysis of concrete structures. In: *Institution of Civil Engineers, Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1976. v. 61.

RADAU, R. Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 6, p. 283–336, 1880.

RANJBARAN, A. Embedding of reinforcements in reinforced concrete elements implemented in dena. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 925–930, 1991.

RATHOD, H. Explicit stiffness matrices for axisymmetric triangular elements. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 1091–1100, 1988.

REDDY, J. N. An introduction to the finite element method. *New York*, 1993.

RIKS, E. The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 4, p. 1060–1065, 1972.

ROESLER, J. et al. Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 300–312, 2007.

SAP2000. *Structural Analysis Program: version 14.0.0*. California: Computers and Structures, Inc., 2009.

SENGUPTA, D.; DASGUPTA, S. Stiffness matrix for a quadratic strain triangle using area coordinates. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 36, n. 5, p. 963–970, 1990.

SILVA, F. H. B. T. d. *Análise numérica da fratura no concreto em modo I e modo misto utilizando elemento de junta*. Tese (Doutorado), 2017.

SUBRAMANIAN, G.; BOSE, C. J. Convenient generation of stiffness matrices for the family of plane triangular elements. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 85–89, 1982.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da elasticidade*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

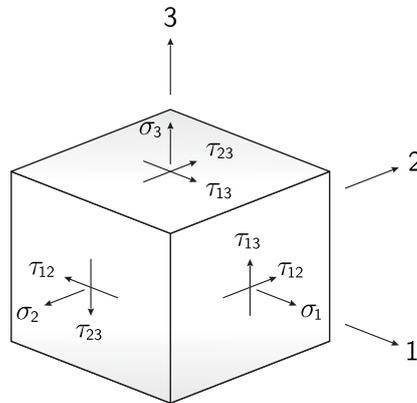
TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 09, p. 805 – 823, 1956.

- UNGER, J. F.; ECKARDT, S.; KÖNKE, C. Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 196, n. 41-44, p. 4087–4100, 2007.
- VECCHIO, F.; SELBY, R. G. Toward compression-field analysis of reinforced concrete solids. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 117, n. 6, p. 1740–1758, 1991.
- VECCHIO, F. J. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes. *ACI: Structural Journal*, Michigan, v. 86, n. 04, p. 26 – 35, 1989.
- VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI J.*, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.
- VECCHIO, F. J.; SELBY, R. G. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Ottawa, v. 24, n. 03, p. 460 – 470, 1997.
- VEUBEKE, B. F. Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress analysis*, Wiley, New York, v. 9, p. 145 – 197, 1965.
- WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.
- WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. *Reinforced Concrete: Mechanics and Design*. 6th ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2011.
- WINKLER, B. J. *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. [S.l.]: Innsbruck University Press, 2001.
- XU, W.; ZANG, M.; SAKAMOTO, J. Modeling mixed mode fracture of concrete by using the combined discrete and finite elements method. *International Journal of Computational Methods*, World Scientific, v. 13, n. 01, p. 1650007, 2016.
- ZIENKIEWICZ, O. *The finite element method in engineering science*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1971.
- ZIENKIEWICZ, R. L. T. O. C. *The finite element method*. 5th ed. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Volume 1. (Finite Element Method Ser, Volume 1).

## APÊNDICE A – ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL PARA MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Nesta seção é apresentado os conceitos fundamentais da teoria da elasticidade abordando elementos tridimensionais, constituídos por um material homogêneo e ortotrópico. Dessas hipóteses resultam que as propriedades físicas do material são as mesmas para qualquer elemento infinitesimal, entretanto elas são diferentes nas três dimensões. Inicialmente, considera-se um sólido cúbico infinitesimal submetido a um estado de tensões em suas faces, como pode ser visto na Figura 41.

Figura 41 – Elemento cúbico infinitesimal submetido a um estado de tensões.



Fonte: O autor (2018).

O estado de tensões é especificado pelas componentes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}$  e  $\tau_{13}$ . As três primeiras são as tensões normais atuando na mesma direção que a face normal correspondente e as três últimas são as tensões cisalhantes composta por duas componentes paralelas aos eixos principais. Essas tensões são representadas pelo vetor:

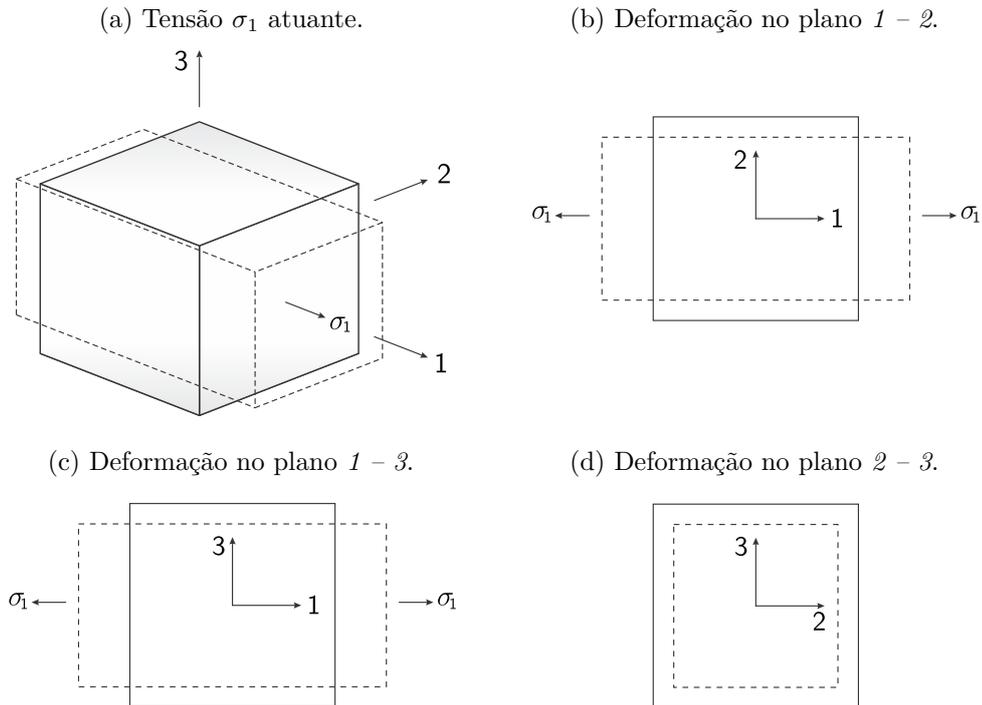
$$\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{13}\}^T \quad (1)$$

As tensões atuantes estão relacionadas com as deformações do elemento infinitesimal. Essas deformações são indicadas pelo vetor a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13}\}^T \quad (2)$$

onde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são as deformações normais e  $\gamma_{12}, \gamma_{23}$  e  $\gamma_{31}$  são as deformações cisalhantes. As três primeiras causam alterações no volume por meio de deformações laterais e as últimas provocam alterações na forma através de distorções angulares nos vértices do sólido.

A Figura 42 demonstra as relações entre deformações de um sólido cúbico e uma tensão normal  $\sigma_1$  atuando de forma isolada no elemento.

Figura 42 – Deformações devido à tensão normal  $\sigma_1$ .

Fonte: Adaptada de Hyer (1998).

A deformação linear na direção 1 devida à tensão normal  $\sigma_1$  é dada pela *Lei de Hooke*. Esta lei estabelece que a tensão é diretamente proporcional a deformação entre certos limites, assim:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (3)$$

onde  $E_1$  é a constante elástica do material na direção 1, chamada de *módulo de elasticidade*. Ao mesmo tempo, a deformação linear na direção 1 é acompanhada por contrações laterais, de forma que as razões entre deformações laterais e axial são dadas pelas expressões:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad e \quad \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (4)$$

sendo  $\nu_{21}$  e  $\nu_{31}$  constantes entre certos limites elásticos e chamados de *coeficientes de Poisson*. Os índices e a sua ordem no coeficiente são importantes. O primeiro índice refere-se a direção da contração lateral relativa, enquanto o segundo tem relação com alongamento axial relativo à tensão normal atuante.

Agora, substituindo a Eq. (3) nas expressões da Eq. (4) conduz as deformações laterais nas direções 2 e 3 devido à tensão normal  $\sigma_1$ . Assim:

$$\varepsilon_2 = -\nu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad e \quad \varepsilon_3 = -\nu_{31} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (5)$$

Em seguida, avaliando uma tensão normal  $\sigma_2$  de forma isolada obtém-se as deformações no sólido de forma análoga ao caso anterior. Estas deformações são expressas a

seguir:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_1 = -\nu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad e \quad \varepsilon_3 = -\nu_{32} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (6)$$

Do mesmo modo, escreve-se as deformações no sólido devido à tensão normal  $\sigma_3$ :

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3}, \quad \varepsilon_1 = -\nu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3} \quad e \quad \varepsilon_2 = -\nu_{23} \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (7)$$

Portanto, somando as parcelas das deformações em cada direção do sólido obtém-se a forma explícita da *Lei de Hooke* para o modelo elástico e ortotrópico conforme as expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{23} \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_3} - \nu_{31} \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{32} \frac{\sigma_2}{E_2} \end{aligned} \quad (8)$$

As Eqs. (8) são reescritas na forma matricial:

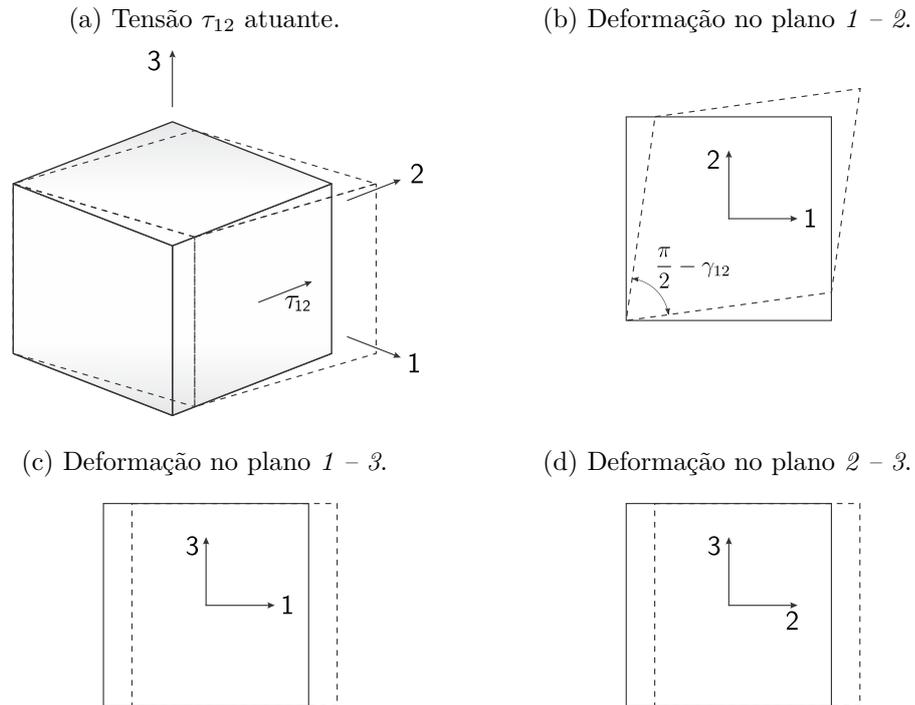
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

A *Lei de Hooke* estende-se à relação entre tensão e deformação de cisalhamento, dentro de certos limites, segundo as expressões:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  e  $G_{13}$  são constantes que dependem das propriedades físicas e chamadas de *módulos de elasticidade transversal*. Estas constantes são expressas em função dos módulos de elasticidade e dos *coeficientes de Poisson*. Para clarificar a formulação, a Figura 43 ilustra a componente de tensão cisalhante  $\tau_{12}$  atuando de forma isolada no elemento cúbico e as respectivas deformações, onde é possível observar que a deformação angular ocorre apenas no plano da tensão cisalhante.

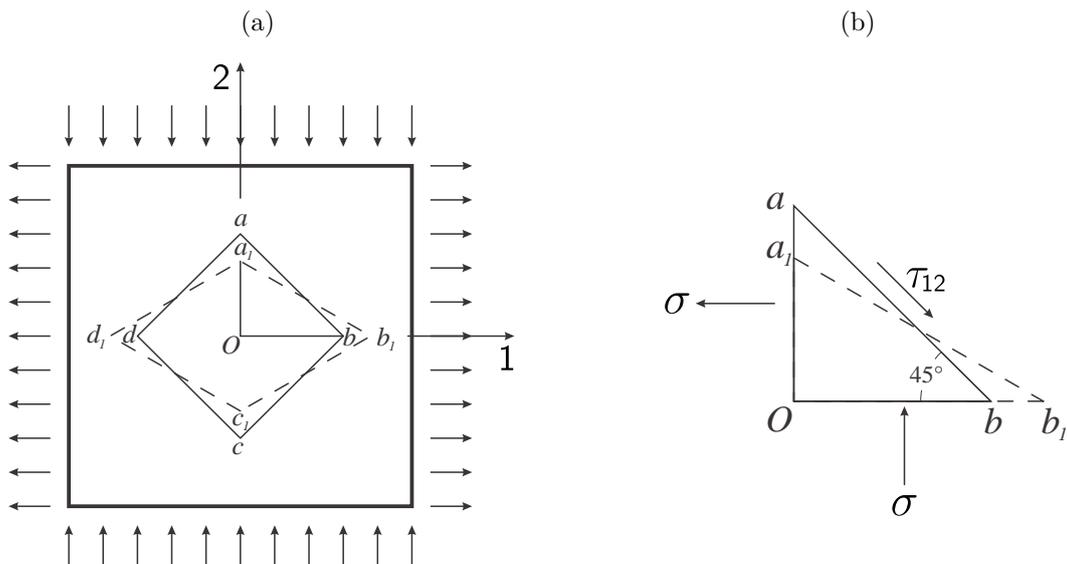
Figura 43 – Deformações devido à tensão cisalhante  $\tau_{12}$ .



Fonte: Adaptada de Hyer (1998).

Desta forma, considera-se apenas a deformação no plano 1 - 2 e o caso particular de cisalhamento puro. A Figura 44 ilustra este caso, onde as tensões normais no plano 1-2 são dadas por  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$  e  $\sigma_3 = 0$ .

Figura 44 – Elemento submetido a cisalhamento puro no plano 1 - 2.



Fonte: Adaptada de Timoshenko e Goodier (1980).

Cortando um elemento  $abcd$  por planos paralelos a direção 3 e a  $45^\circ$  com as direções 1 e 2, pode-se verificar a deformação do triângulo  $Oab$ , onde o alongamento do lado  $Ob$  e

o encurtamento do lado  $Oa$  serão determinados aplicando-se as equações explícitas da *Lei de Hooke*. Bem como, em função de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  temos:

$$\begin{aligned} Ob_1 &= Ob(1 + \varepsilon_1) \\ Oa_1 &= Oa(1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Além disso, pela relação dos lados do triângulo após a deformação temos:

$$\operatorname{tg}(Ob_1a_1) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right) = \frac{Oa_1}{Ob_1} = \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} \quad (12)$$

No entanto, para um ângulo pequeno  $\gamma_{12}$  temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{12}}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_{12}}{2}\right)} \approx \frac{1 - \frac{\gamma_{12}}{2}}{1 + \frac{\gamma_{12}}{2}} \quad (13)$$

Igualando as equações Eqs. (12) e (13) obtém-se:

$$\frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} = \frac{2 - \gamma_{12}}{2 + \gamma_{12}} \quad (14)$$

De onde encontramos a expressão da deformação de cisalhamento em função das deformações normais, a saber:

$$\frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (15)$$

Observando-se que no caso de cisalhamento puro temos  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ , podemos reescrever a Eq. (15) da seguinte forma:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (16)$$

e aplicar as expressões da Eq. (8) para as deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , considerando  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{12}$ . Como resultado, obtém-se a expressão final da deformação de cisalhamento em função dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson, a saber:

$$\gamma_{12} = \left( \frac{(1 + \nu_{21})}{E_1} + \frac{(1 + \nu_{12})}{E_2} \right) \tau_{12} \quad (17)$$

Finalmente, da Eq. (17) deduzimos as expressões para os módulos de elasticidade transversal, dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_{12}} &= \frac{(1 + \nu_{21})}{E_1} + \frac{(1 + \nu_{12})}{E_2} \\ \frac{1}{G_{23}} &= \frac{(1 + \nu_{32})}{E_2} + \frac{(1 + \nu_{23})}{E_3} \\ \frac{1}{G_{13}} &= \frac{(1 + \nu_{31})}{E_1} + \frac{(1 + \nu_{13})}{E_3} \end{aligned} \quad (18)$$

Uma vez que demonstramos as relações entre deformação e tensão de cisalhamento, podemos reescrever a Eq. (9) adicionado estas relações. Portanto:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Na Eq. (19) observa-se a relação matricial  $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{S}'\boldsymbol{\sigma}'$ . Onde  $\mathbf{S}'$  é a matriz quadrada das propriedades físicas designada por *matriz de conformidade*. Além disto, os termos fora da diagonal principal de  $\mathbf{S}$  possuem relação entre se, uma vez que a matriz é simétrica. Assim:

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3} \quad e \quad \frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3} \quad (20)$$

A inversa de  $\mathbf{S}'$  é chamada de *matriz constitutiva* e simbolizada por  $\mathbf{D}'$ . Neste caso, obtemos a relação matricial  $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'$ . Ademais, a matriz constitutiva  $\mathbf{D}'$  é dada abaixo:

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{\Phi} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) & E_1(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) & E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) & E_3(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) & E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi G_{13} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde  $\Phi = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32}$ .

## APÊNDICE B – ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

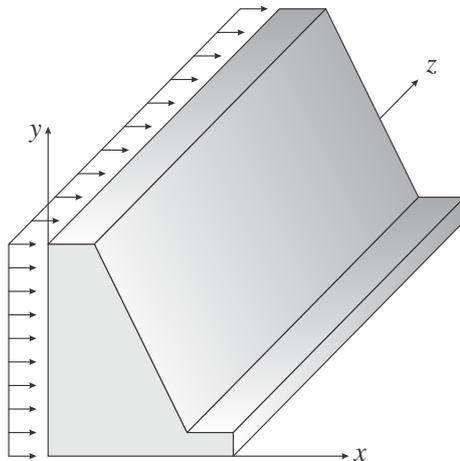
Na teoria da elasticidade um sólido é simplificado por meio de hipóteses que reduz o problema tridimensional para o plano. Destas hipóteses, resultam análises conforme o estado plano de deformações ou o estado plano de tensões, com aplicação em vários tipos de estruturas. Nesta seção, por conveniência, os eixos cartesianos são considerados nas demonstrações das relações constitutivas.

### Estado plano de deformações

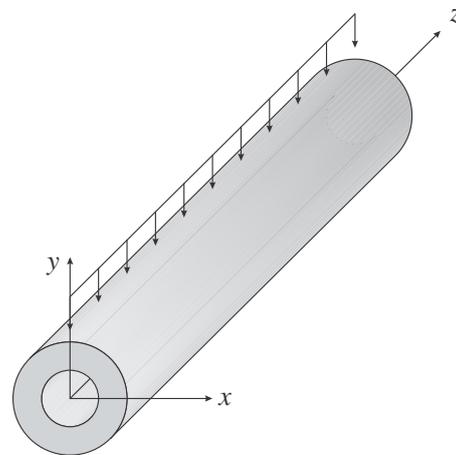
Sólidos com dimensão muito grande na direção  $z$  e seção transversal constante quando são solicitados por forças perpendiculares a direção longitudinal, pode-se admitir que todas as seções transversais estão nas mesmas condições (Figura 45).

Figura 45 – Exemplos de problemas de estado plano de deformações.

(a) Barragem com pressão lateral.



(b) Tubo submetido a carga vertical.



Fonte: Adaptada de Logan (2009).

Neste caso, temos o estado plano de deformações, onde as componentes de deformação  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  e a tensão normal  $\sigma_z$  é obtida através da *Lei de Hooke*. Assim, o estado plano de deformação é definido pelas componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , conforme a relação abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{xz}\nu_{zx})}{E_x} & -\frac{(\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy})}{E_y} & 0 \\ -\frac{(\nu_{yx}+\nu_{yz}\nu_{zx})}{E_x} & \frac{(1-\nu_{yz}\nu_{zy})}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

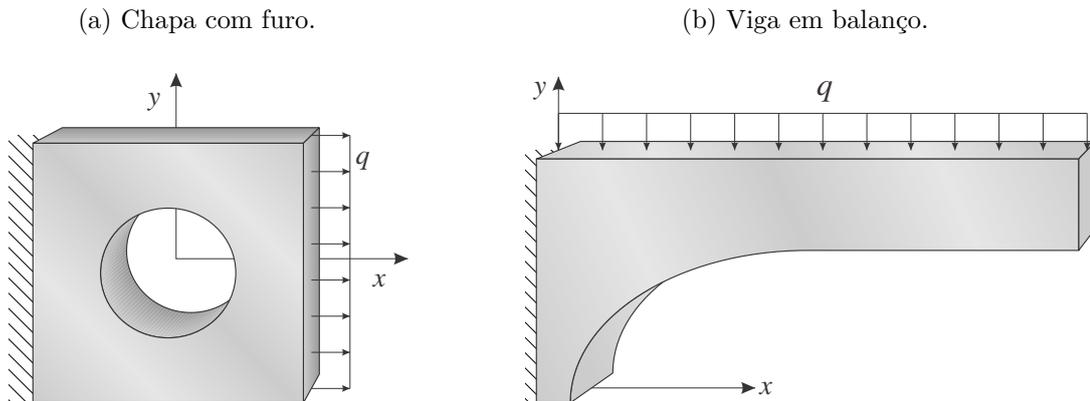
Invertendo a relação da Eq. (22) obtemos a matriz constitutiva para o estado plano de deformações e as componentes de tensões em função das deformações. Assim:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Phi} \begin{bmatrix} (1 - \nu_{yz}\nu_{zy})E_x & (\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy})E_x & 0 \\ (\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx})E_y & (1 - \nu_{xz}\nu_{zx})E_y & 0 \\ 0 & 0 & \Phi G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

### Estado plano de tensões

Sólidos bidimensionais são elementos com dimensões muito pequenas na direção  $z$  em relação às demais e são classificados em chapas ou placas de acordo com a direção das forças aplicadas. Neste trabalho consideramos elementos estruturais tipo chapa que segundo Timoshenko e Goodier (1980), no estado plano de tensões assume-se que uma chapa fina carregada no contorno por forças paralelas ao plano  $x$ - $y$ , as componentes de tensão  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  em ambas as faces e no interior da chapa (Figura 46).

Figura 46 – Exemplos de problemas de estado plano de tensão.



Fonte: Adaptada de Logan (2009).

A partir destas hipóteses, podemos rescrever as expressões da *Lei de Hooke* para obter a relação constitutiva do estado plano de tensões. Desta forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

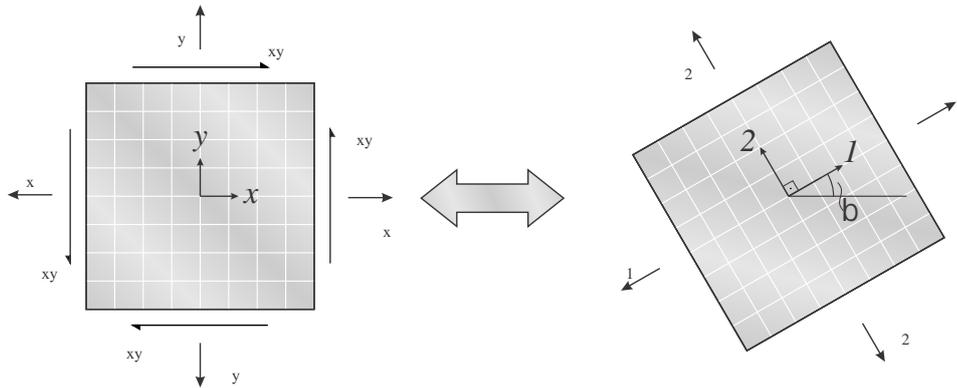
Finalmente, considerando a matriz inversa de  $\mathbf{S}$  conduz a expressão  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ , a saber:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

## Direções ortotrópicas principais

Nesta seção buscamos as relações entre  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  expressas no sistema de coordenadas cartesianas  $(x,y)$  e as respectivas componentes nas direções principais do elemento (Figura 47).

Figura 47 – Material ortotrópico com direções principais  $(1, 2)$ .



Fonte: Adaptada de Oñate (2009).

A transformação em duas dimensões conduz às equações que podem ser representadas graficamente por círculos de Mohr. Se as direções principais do plano estão inclinadas um ângulo  $\beta$  em relação aos eixos  $(x,y)$ , as deformações nos eixos principais  $(1,2)$  são expressas em termos das deformações cartesianas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_x \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_x \sin^2 \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta - \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \\ \gamma_{12} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \beta \cos \beta + \gamma_{xy}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\end{aligned}\quad (26)$$

Estas relações podem ser escritas na forma matricial  $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\quad (27)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação das deformações,  $c = \cos \beta_p$  e  $s = \sin \beta_p$ . Sendo  $\beta_p$  o ângulo das deformações principais do elemento obtido por meio da expressão:

$$\beta_p = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)\quad (28)$$

Segundo Cook et al. (2001) o trabalho interno feito por tensões durante um deslocamento virtual prescrito deve ser o mesmo se computado no sistema  $(x,y)$  ou no

sistema (1,2). Desta forma, considerando a igualdade do trabalho virtual  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}'^T\boldsymbol{\sigma}'$  na Eq. (27) conduz a expressão:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}'^T\mathbf{T}^T\boldsymbol{\sigma}' \quad (29)$$

Agora, simplificando a Eq. (29) em termos de  $\boldsymbol{\sigma}$  obtém a relação  $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\sigma}$ , a saber:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Finalmente a relação constitutiva entre tensão e deformação na direção principal é dada pela expressão  $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'$ . Sendo a matriz  $\mathbf{D}'$  obtida a partir das relações dadas nas Eqs. (27) e (30), segundo demonstração a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{T}^{-T}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^{-T}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}^{-T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}' \quad (31)$$

Portanto, da Eq. (31) atinge-se a expressão final de  $\mathbf{D}'$ , a saber:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{T}^{-T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} \quad (32)$$

### Equações governantes

Além das relações constitutivas, os problemas de elasticidade bidimensional são solucionados por meio de equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade. Em primeiro lugar, considera-se um elemento infinitesimal submetido à tensões e forças de corpo. Em seguida, apresenta-se a relação cinemática entre deformações e deslocamentos e as condições de compatibilidade que precisa ser satisfeita.

Para tanto considera-se um elemento de espessura unitária, assim como as tensões constante ao longo da espessura. Isto posto, efetua-se o somatório das forças atuantes na direção  $x$  a fim de obter a equação de equilíbrio:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - \tau_{xy}dx + f_x dxdy = 0 \quad (33)$$

onde  $f_x dxdy$  é a força de massa por unidade de volume.

A equação de equilíbrio das forças atuantes na direção  $y$  é obtida de forma semelhante. Além disto, com a simplificação dos termos obtêm-se as expressões:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Assim, temos um sistema com duas equações de equilíbrio e três componentes de tensões, o que caracteriza um sistema estaticamente indeterminado. Dito isto, precisamos adicionar uma equação ao sistema para resolução do problema a partir da relação cinemática entre deformações e deslocamento, conforme as componentes a seguir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{35}$$

Agora, derivando a primeira expressão duas vezes em relação a  $y$ , a segunda duas vezes em relação a  $x$  e a terceira uma vez em relação a  $x$  e a outra em relação a  $y$ , obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\end{aligned}\tag{36}$$

Em seguida, relacionando as Eqs. (36) conduz a expressão abaixo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{37}$$

onde a Eq. (37) é a *condição de compatibilidade* que precisa ser satisfeita para assegurar a existência de funções  $u$  e  $v$  relacionadas com as componentes de deformação (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).