



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PEDRO HENRIQUE AMORIM ANJOS

FORMAÇÃO DE PADRÕES EM FLUIDOS VISCOSOS CONFINADOS

Recife
2019

PEDRO HENRIQUE AMORIM ANJOS

FORMAÇÃO DE PADRÕES EM FLUIDOS VISCOSOS CONFINADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Dinâmica de fluidos e formação de padrões.

Orientador: Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto
Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Elaine Freitas CRB4-1790

A559f Anjos, Pedro Henrique Amorim
Formação de padrões em fluidos viscosos confinados / Pedro Henrique Amorim Anjos. – 2019.
200 f.: fig., tab.

Orientador: José Américo de Miranda Neto
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física. Recife, 2019.
Inclui referências e apêndice.

1. Dinâmica dos fluídos. 2. Instabilidade de Saffman-Taylor. 3. Célula de Hele-Shaw. I. Miranda Neto, José Américo de (orientador). II. Título.

532.05

CDD (22. ed.)

UFPE-FQ 2019-21

PEDRO HENRIQUE AMORIM ANJOS

FORMAÇÃO DE PADRÕES EM FLUIDOS VISCOSOS CONFINADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 21/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias
Coorientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo Roberto de Araújo Campos
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Renê Rodrigues Montenegro Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista
Examinador Externo
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Oscar Nassif de Mesquita
Examinador Externo
Universidade Federal de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, sou imensamente grato ao meu orientador e amigo, Prof. José Américo, por me guiar durante a minha graduação, mestrado e, agora, no doutorado. Eu o agradeço por toda a paciência e ajuda, e principalmente por ter acreditado no meu potencial para desenvolver esta tese. Sua forma única de encarar a ciência e o trabalho são as principais características que carregarei por toda a minha vida.

Ao amigo Prof. Eduardo Dias, gostaria de dizer que seu incentivo e suas constantes palavras de motivação foram, sem dúvida, essenciais para que eu conseguisse finalizar este trabalho. Suas brilhantes ideias também foram fundamentais para a resolução da maioria dos problemas encontrados ao longo desta tese.

Agradeço também a toda minha família, principalmente aos meus pais e avós, que tanto se sacrificaram para que todas as minhas conquistas se tornassem possíveis. Eles sempre estiveram presentes em todos os momentos de dificuldade, me ajudando da melhor forma possível. Também gostaria de agradecer a Bianca Marques por toda paciência e por compreender os momentos de ausência durante a produção deste trabalho. Obrigado por renovar minhas energias e me fazer continuar mesmo nos momentos mais difíceis. Ao amigo Clérison Vieira, gostaria de agradecer pelas revisões dos capítulos e por ter ouvido tantos desabafos ao longo desta jornada.

Aos professores da banca examinadora: Luiz Roberto Evangelista, Oscar Mesquita, Paulo Campos e Renê Montenegro pelo tempo dedicado à leitura e estudo desta tese. Pelas correções e sugestões construtivas que tornaram o trabalho mais rico.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os amigos do Departamento de Física: Fernando Benevides, Fillipe Cesar, Francisco Rocha, Gabriel Carvalho, João Vitor, Mário Rocha, Ricardo Batista, Rodolfo Brandão, Sérgio Lira, Tiago Araújo e Wellington Moreira.

RESUMO

Os chamados padrões de dedos viscosos ocorrem quando um fluido menos viscoso desloca outro de maior viscosidade, estando ambos espacialmente confinados entre duas placas planas e paralelas de um dispositivo efetivamente bidimensional conhecido como célula de Hele-Shaw. Nestas circunstâncias, deformações surgem na interface que separa os fluidos imiscíveis, dando origem à instabilidade de Saffman-Taylor. Ao longo de várias décadas, a dinâmica da interface que separa duas fases tem atraído a atenção de físicos, matemáticos e engenheiros devido às inúmeras implicações teóricas e aplicações práticas, além da sua conexão com vários fenômenos naturais. Os temas centrais desta tese de doutorado consistem no estudo da dinâmica da interface que separa dois fluidos, a determinação das morfologias adquiridas pela interface fluido-fluido e sua resposta à inclusão de efeitos físicos relevantes e/ou variações no problema original de Saffman-Taylor. Neste contexto, abordamos o desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor induzidas por meio de processos de injeção longitudinal e radial, levantamento da placa superior da célula de Hele-Shaw e, também, estudamos o caso da rotação das placas. Adicionalmente, investigamos a ação de efeitos inerciais, razões de viscosidade e densidade arbitrárias, *undercooling* cinético e rotação dependente do tempo. Para capturar e elucidar a física básica em cada um destes problemas, utilizamos uma teoria perturbativa e fracamente não linear de modos acoplados, em conjunto com simulações numéricas simples. O escoamento de fluidos newtonianos não magnéticos é a situação mais abordada nesta tese. Porém, também consideramos o caso de líquidos mais complexos que respondem a campos magnéticos aplicados, como, por exemplo, ferrofluidos (newtonianos) e fluidos magneto reológicos (não newtonianos). Para o estudo da formação de padrões em tais líquidos magnéticos confinados, além das soluções perturbativas dadas pela abordagem fracamente não linear, também empregamos o formalismo analítico da *vortex-sheet*. Este formalismo nos fornece soluções estacionárias exatas para os padrões formados, onde as forças desestabilizantes e estabilizantes são igualmente balanceadas na interface fluido-fluido. Considerando o acoplamento de apenas alguns poucos modos de Fourier, mostramos que as soluções perturbativas convergem para as soluções de equilíbrio exatas. Por fim, analisamos a formação de padrões para um ferrofluido confinado para o qual a interface fluido-fluido possui propriedades elásticas. Um conjunto interessante de padrões, formados por meio de múltiplos processos de enrugamento e dobramento, é obtido e, posteriormente, fazemos uma curiosa conexão destes padrões com os produzidos por forças centrífugas (sem qualquer atuação de forças magnéticas).

Palavras-chave: Instabilidade de Saffman-Taylor. Célula de Hele-Shaw. Efeitos de inércia. *Undercooling* cinético. Ferrofluido. Fluido magneto reológico.

ABSTRACT

The so-called viscous fingering patterns occur when a less viscous fluid displaces another of higher viscosity in the narrow gap separating two flat, parallel plates of an effectively two-dimensional device known as a Hele-Shaw cell. Under such circumstances, disturbances arise at the interface that separates the immiscible fluids, leading to the development of the Saffman-Taylor instability. Over the past decades, the dynamics of the interface separating two phases has captured the attention of physicists, mathematicians, and engineers due to its various theoretical and practical implications, in addition to the fact that it is related to a variety of natural phenomena. In this Ph.D. thesis, we focus on the study of the interfacial dynamics between two fluids, the determination of the possible patterned morphologies assumed by the fluid-fluid interface, and its responses to the inclusion of relevant physical effects and/or variations of the traditional Saffman-Taylor problem. More specifically, we examine the development of the Saffman-Taylor instabilities induced by longitudinal and radial injection, upper-plate lifting processes, and also by the rotating Hele-Shaw cell arrangement. Additionally, we investigate the action of inertial effects, the consideration of arbitrary values of viscosity and density ratios, the inclusion of kinetic undercooling, and the role of a time-dependent angular velocity in the rotating Hele-Shaw cell problem. In order to capture and elucidate the basic physics behind each of these problems, we employ a perturbative weakly nonlinear, mode-coupling theory, together with simple numerical simulations. The flow of Newtonian, nonmagnetic fluids is the most explored topic in this work. However, we also consider the case of more complex, structured liquids that respond promptly to applied magnetic fields, such as ferrofluids (Newtonian) and magnetorheological fluids (nonNewtonian). To tackle the formation of interfacial patterns in confined magnetic liquids, on top of the perturbative solutions given by the weakly nonlinear approach, we use a nonperturbative, vortex-sheet formalism. Such analytical technique allows us to find exact stationary solutions for the fluid-fluid interface in which destabilizing and stabilizing forces are equally balanced at the two-fluid boundary. By considering the coupling of a few Fourier modes, we demonstrate that a good match between exact and perturbative shape solutions is achieved. Finally, we analyze the formation of patterns for confined ferrofluids for which the fluid-fluid interface has elastic properties. An interesting set of magnetically-driven, wrinkling and folding equilibrium shape structures is found and then, a connection between these magnetoelastic shape solutions and those produced by nonmagnetic means through centrifugal forces is discussed.

Keywords: Saffman-Taylor instability. Hele-Shaw cell. Inertial effects. Kinetic undercooling. Ferrofluid. Magnetorheological fluid.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Clássico experimento de Saffman e Taylor retirado da Ref. [1]. A figura mostra a interface entre dois fluidos na configuração de uma célula de Hele-Shaw retangular, sendo o fluido superior ar (baixa viscosidade), e o fluido inferior glicerina (alta viscosidade). A interface inicial é levemente perturbada, possuindo pequenas ondulações que crescem em comprimento conforme o ar penetra e desloca a glicerina. As protuberâncias que tendem a crescer neste fluxo instável são conhecidas como dedos viscosos. 24
- Figura 2 – Representação esquemática da injeção em célula de Hele-Shaw radial, onde b representa o espaçamento constante entre as placas. O fluido vermelho, de menor viscosidade, é injetado pelo centro da célula e desloca o fluido externo cinza de maior viscosidade. As pequenas ondulações na interface crescem e dão origem a dedos viscosos ramificados. 25
- Figura 3 – Perfil típico das interfaces obtidas em experimentos de injeção na configuração da célula de Hele-Shaw radial. Em (a), o fluido é injetado no centro da célula e rapidamente a interface se torna instável, como é possível verificar pela sequência temporal (tempo cresce da esquerda para a direita). As setas vermelhas presentes no último padrão indicam a bifurcação dos dedos, fenômeno característico e de maior evidência nesse sistema. Em (b) e (c), o mesmo experimento é realizado, mas agora com uma taxa de injeção maior do que o caso anterior. Como podemos verificar pelo último padrão de (b), a seta vermelha aponta para um dedo que cresce desenvolvendo lóbulos laterais, fenômeno conhecido como *sidebranching*. Em (c), a morfologia do dedo indicado pela seta vermelha exibe quatro lóbulos centrais, comumente conhecido como quadrifurcação. Experimento realizado pelo Dr. Stephen W. Morris. 26
- Figura 4 – Representação esquemática da injeção em célula de Hele-Shaw com placa superior radialmente inclinada. Em (a) e (c), a placa superior apresenta um pequeno gradiente na direção radial a partir do seu centro, fazendo com que o espaçamento $b = b(r)$ não seja constante. A configuração (a) apresenta inclinação negativa e é conhecida como célula convergente, enquanto que a configuração (c), por apresentar inclinação positiva, é denominada de célula divergente. Em (b), temos a geometria usual de placas paralelas onde o espaçamento b é constante. A situação (b) é exatamente o mesmo caso mostrado na Fig. 2. A taxa de injeção de fluido é denotada por Q 28

- Figura 5 – Experimentos em célula de Hele-Shaw radial convergente (inclinação negativa) retirados da Ref. [63]. Em ambos os casos (a) e (b), ar é injetado e desloca óleo viscoso. Os parâmetros iniciais são os mesmos com exceção para a taxa de injeção, que no caso (b) é quase três vezes maior do que em (a). Como podemos verificar pela situação (a), a interface permanece estável mesmo para elevados valores de tempo, enquanto que em (b) a interface rapidamente deforma-se exibindo a formação de dedos viscosos característicos de um fluxo instável. Vale ressaltar que se o experimento fosse realizado em uma célula de placas paralelas (inclinação nula), ambos os casos seriam instáveis. 29
- Figura 6 – Simulação numérica ilustrando o processo de levantamento em célula de Hele-Shaw. Durante o processo, a placa inferior permanece fixa e a placa superior é levantada de forma que o espaçamento $b(t)$ possua uma dependência temporal. À esquerda, temos a visão lateral do levantamento para diferentes instantes de tempo, enquanto que à direita, temos a visão superior das interfaces fluido-fluido correspondentes. Durante a simulação, o fluido externo de menor viscosidade invade o fluido interno de maior viscosidade, fazendo com que a interface deforme-se, apresentando dedos viscosos que crescem e competem. Figura retirada da Ref. [71]. 31
- Figura 7 – Exemplos ilustrativos de padrões experimentais obtidos para o problema do levantamento em célula de Hele-Shaw. Na figura à esquerda (retirada da Ref. [72]), uma baixa velocidade de levantamento foi utilizada, resultando em um padrão final que apresenta longos dedos invasores. A figura à direita (retirada da Ref. [73]), obtida para experimentos com alta velocidade de levantamento, apresenta uma interface com morfologia distinta da situação anterior: em vez de apresentar dedos longos e suaves, o padrão exhibe dedos dendríticos com formação de protuberâncias laterais. 32
- Figura 8 – Na figura à esquerda (retirada da Ref. [21]), temos uma sequência temporal ilustrando os padrões de interface em um experimento de rotação em célula de Hele-Shaw, enquanto que à direita, é possível verificar uma simulação do problema feita na Ref. [22]. Neste processo, o espaçamento das placas é constante e não há injeção, porém a célula gira em torno do eixo perpendicular às placas. A interface, que inicialmente é circular, distorce devido às forças centrífugas e dá origem a longos dedos de comprimentos variados com formação de pequenas gotas em suas pontas. Aqui, a instabilidade da interface ocorre pela diferença de densidade entre os fluidos e não mais pela diferença de viscosidade, como foi mostrado nos casos abordados anteriormente. . . . 34

Figura 9 – Simulação numérica (cortesia do Dr. David Jackson) mostrando um exemplo de padrão típico para uma gota de ferrofluido em célula de Hele-Shaw. A gota de líquido magnético, inicialmente circular, é submetida a um campo magnético uniforme perpendicular ao plano da célula, dando origem ao interessante padrão em formato de labirinto.	35
Figura 10 – Na figura à esquerda, temos um fluido magneto reológico submetido a um campo magnético perpendicular ao plano da página. Devido ao campo, as partículas do fluido tendem a se agregar e o fluido em si adquire aspecto de uma substância sólida. A partir do momento que o campo magnético é desligado, caso ilustrado pela figura à direita, o fluido rapidamente volta a escoar e se comportar como um fluido convencional.	36
Figura 11 – Representação do menisco curvo da interface durante o deslocamento do fluido 2 pela injeção radial do fluido 1. Aqui, θ_s é o ângulo de contato estático medido entre as placas e o menisco curvo da interface.	43
Figura 12 – Evolução temporal das interfaces. Um mesmo intervalo de tempo separa interfaces subsequentes. É considerada a interação de dois modos cosseno (a_n e a_{2n} , com $n = 5$) e valores crescentes de parâmetro de <i>undercooling</i> cinético c . Todos estes padrões evoluem até o mesmo tempo final de $t_f = 3.2$ s, com $0 \leq t \leq t_f$. A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso).	49
Figura 13 – Evolução temporal das interfaces. Um mesmo intervalo de tempo separa interfaces subsequentes. É considerada a interação de dois modos cosseno (a_n e a_{2n} , com $n = 5$) e valores crescentes de parâmetro de <i>undercooling</i> cinético c . Diferentemente da Fig. 12, aqui, os padrões evoluem até o maior tempo permitido τ [$0 \leq t \leq \tau$], calculado pela Eq. (2.19): (a) 3.2 s, (b) 4.2 s, (c) 5.3 s e (d) 7.8 s. Note que a Fig. 12(a) é idêntica à Fig. 13(a). A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso).	50
Figura 14 – Comportamento de $a_{2n}(t)/R(t)$ com respeito ao $a_n(t)/R(t)$ para a evolução dos padrões mostrados na Fig. 12 e 13. É considerado tanto a ausência ($c = 0$) quanto a presença ($c \neq 0$) dos efeitos de <i>undercooling</i> cinético. Note que c é dado em unidades de $\text{g}/(\text{cm}^2\text{s})$. Curvas sólidas correspondem às situações ilustradas na Fig. 12, onde $0 \leq t \leq t_f$, com $t_f = 3.2$ s. Os pontos relacionados a este tempo final são representados por círculos sólidos. Curvas tracejadas correspondem às situações mostradas na Fig. 13, associadas com os intervalos de tempo $t_f \leq t \leq \tau$, onde τ é o maior tempo permitido para cada c e é calculado pela Eq. (2.19). Para um dado valor de c , o tempo $t = \tau$ é indicado por um círculo aberto.	51

Figura 15 – Evolução temporal de interface numa célula de Hele-Shaw retangular. É considerada a interação de dois modos cosseno a_k e a_{2k} , e dois valores para o parâmetro de <i>undercooling</i> cinético c : (a) 0 e (b) 50 g/(cm ² s). A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso). A seta vertical representa a direção da velocidade de escoamento.	53
Figura 16 – Variação da função ponta de dedos $T(2k, k)$ com o parâmetro de <i>undercooling</i> cinético c , para diferentes valores de velocidade v_∞ . Valores mais negativos de $T(2k, k)$ implicam no aumento da intensidade da bifurcação na ponta do dedo.	54
Figura 17 – Padrões representativos para o problema da injeção radial em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento. As simulações fortemente não lineares foram retiradas da Ref. [65]. As curvas sólidas pretas representam a interface para a célula uniforme, enquanto que as curvas tracejadas azuis e vermelhas representam, respectivamente, as interfaces para a célula divergente e convergente.	57
Figura 18 – Comprimentos característicos utilizados na definição da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}$ [conforme prescrita pela Eq. (3.37)]: $\mathcal{R}_{\max}$ é o valor máximo da coordenada radial da interface deformada (localizada na ponta do dedo), enquanto que $\mathcal{R}_{\min}$ é o raio mínimo correspondente (localizado na base do dedo).	66
Figura 19 – Interfaces fracamente não lineares obtidas para o tempo $t = t_f = 13$ (painéis superiores). As interfaces ilustram os padrões típicos de dedos viscosos para processos de injeção radial em células de Hele-Shaw divergente ($\alpha = 10^{-3}$), uniforme ($\alpha = 0$) e convergente ($\alpha = -10^{-3}$). Os seguintes valores para o número de capilaridade são analisados: (a) $Ca = 1200$, (b) $Ca = 1637$, (c) $Ca = 1905$ e (d) $Ca = 3000$. As interfaces são obtidas por meio do acoplamento não linear entre os modos n e $2n$, onde $n = 5$. As correspondentes evoluções temporais da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}(t)$, para $0 \leq t \leq t_f$, são apresentadas nos painéis inferiores.	67
Figura 20 – Evolução temporal da interface para a situação mais instável examinada na Fig. 19, ou seja, o caso para $Ca = 3000$ e $\alpha = -10^{-3}$ [ilustrado na Fig. 19(d)]. Interfaces consecutivas diferem pelo intervalo de tempo $\Delta t = 1$. A evolução temporal das interfaces é feita considerando-se: (a) $0 \leq t \leq t_f$ e (b) $0 \leq t \leq t_f + 5$, onde $t_f = 13$. O cruzamento entre interfaces é evidente em (b). Uma vez que cruzamentos entre interfaces não são observados em células de Hele-Shaw radiais para as quais $\beta \rightarrow \infty$, adotamos $t = t_f$ como o limite superior do tempo para o qual nossa abordagem perturbativa fracamente não linear é válida.	69

- Figura 21 – Determinação dos valores críticos do número de capilaridade para os quais ocorrem transições de instabilidade relativa. Isto é realizado por meio do gráfico da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}(t_f)$, calculada no tempo final $t = t_f$, em função de Ca para $\alpha = -10^{-3}$, $\alpha = 0$ e $\alpha = 10^{-3}$. O número de capilaridade crítico $Ca_{crit}^{\alpha>0}$ ($Ca_{crit}^{\alpha<0}$) é determinado pelo ponto no qual as curvas para $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) cruzam-se, conforme indicado pelas linhas verticais tracejadas. Aqui, todos os parâmetros físicos e condições iniciais são idênticos àqueles utilizados na (a) Fig. 19 [$n = 5$, $a_n(0) = 10^{-2}$ e $t_f = 13$] e (b) Fig. 22 [$n = 4$, $a_n(0) = 2.5 \times 10^{-2}$ e $t_f = 12$]. 71
- Figura 22 – Interfaces fracamente não lineares obtidas para o tempo $t = t_f = 12$ (painéis superiores). As interfaces ilustram os padrões típicos de dedos viscosos para processos de injeção radial em células de Hele-Shaw divergente ($\alpha = 10^{-3}$), uniforme ($\alpha = 0$) e convergente ($\alpha = -10^{-3}$). Os seguintes valores para o número de capilaridade são analisados: (a) $Ca = 1200$, (b) $Ca = 1687$, (c) $Ca = 1925$ e (d) $Ca = 4000$. As interfaces são obtidas por meio do acoplamento não linear entre os modos n e $2n$, onde $n = 4$. As correspondentes evoluções temporais da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}(t)$, para $0 \leq t \leq t_f$, são apresentadas nos painéis inferiores. 73
- Figura 23 – Experimento ilustrando os padrões de interface para diferentes razões de viscosidade. Os seguintes valores de β são considerados neste experimento: (a) $\beta = 1403$, (b) $\beta = 130.6$, (c) $\beta = 12.9$ e (d) $\beta = 2.69$. Esta ilustração, retirada da Ref. [68], torna clara a forte dependência da morfologia dos padrões em relação à razão de viscosidade. 78
- Figura 24 – Experimento exemplificando a mudança da morfologia dos padrões conforme a razão de viscosidade é diminuída. Aqui, os valores de β são: (a) $\beta = 303$, (b) $\beta = 7.1$ e (c) $\beta = 2.4$. Figura retirada da Ref. [69]. 78
- Figura 25 – Na Figura à esquerda (retirada da Ref. [34]), observamos a evolução temporal da interface em um experimento de injeção radial em célula de Hele-Shaw, enquanto que à direita, temos uma simulação deste mesmo problema feita na Ref. [158]. Em ambas as situações, o escoamento é realizado nas circunstâncias de alta razão de viscosidade. É possível verificar que a base dos dedos, espaço localizado entre os dedos adjacentes, praticamente não se move e a velocidade da interface tende a zero neste ponto. Estes pontos são comumente conhecidos como pontos de estagnação. 79
- Figura 26 – Representação esquemática do escoamento de um fluido impulsionado pela injeção Q em célula de Hele-Shaw radial. 81

- Figura 27 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) ilustrando os padrões típicos de dedos viscosos durante o escoamento radial na ausência de efeitos inerciais ($Re = 0$). A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos $n, 2n, 3n$ e $4n$, onde $n = 5$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores adotados para o número de capilaridade são: (a) $Ca = 800$, (b) $Ca = 4000$ e (c) $Ca = 8000$. Além disso, tomamos $\beta = 5$ e os valores de tempos finais usados são (a) $t_f = 70$, (b) $t_f = 15$ e (c) $t_f = 12$. Os pequenos pontos vermelhos na Fig. 27(a) representam a evolução temporal da base do dedo, também conhecida como "fjord", localizada a um ângulo $\theta = \pi/5$ 86
- Figura 28 – Variação da posição da base do dedo $\mathcal{R}(\pi/5, t)$ com o tempo t para dois valores de razão de viscosidade: $\beta = 5$ (curva tracejada) e $\beta = 100$ (curva sólida). Os parâmetros físicos restantes e as condições iniciais consideradas nesta figura são as mesmas daquelas usadas na Fig. 27(a). 88
- Figura 29 – Taxa de crescimento linear em função dos modos de Fourier n para $Re = 0$ (curva tracejada) e $Re = 0.1$ (curvas sólidas). Consideramos três valores para α : 2, 1 e 0.5. Aqui, $\beta = 5$ e $Ca = 1000$ 90
- Figura 30 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) na presença de efeitos inerciais ($Re = 0.1$). A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos $n, 2n, 3n$ e $4n$, onde $n = 5$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores adotados para a razão de densidade são: (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 1$ e (c) $\alpha = 0.5$. Além disso, tomamos $\beta = 5$ e $Ca = 1000$. Os tempos finais são (a) $t_f = 50$, (b) $t_f = 60$ e (c) $t_f = 70$ 91
- Figura 31 – Gráfico da posição da base do dedo $\mathcal{R}(\pi/5, t)$ em função do tempo t para dois valores de razão de viscosidade: $\beta = 5$ (curva tracejada) e $\beta = 100$ (curvas sólidas). Três valores de razão de densidade são considerados: $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.5$. Perceba que na curva tracejada associada à $\beta = 5$ e $\alpha = 2$ há, na verdade, três curvas superpostas (duas curvas tracejadas indistinguíveis para $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.5$ encontram-se ambas escondidas). Aqui, $Re = 0.1$ e $Ca = 1000$ 93
- Figura 32 – Diagrama de fase morfológico no espaço de parâmetros (Ca, α). A curva tracejada representa o limite entre duas regiões morfológicas distintas. O desenvolvimento de padrões que apresentam *sidebranching* é observado em ambas as regiões, porém em uma delas (região superior branca), é observado a ocorrência do alargamento de dedos, enquanto que na outra (região inferior cinza), o estreitamento de dedos ocorre com maior evidência. Aqui, $\beta = 5$ e $Re = 0.1$ 94

Figura 33 – Representação esquemática do arranjo para o processo de levantamento em célula de Hele-Shaw (esquerda) e visão superior do fluido interno confinado entre as placas (direita).	98
Figura 34 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função o modo n para três valores de número de Reynolds Re . O ponto máximo das curvas estão indicados por círculos. Aqui, $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$, $q = 10^3$ e $t = 1.3$	101
Figura 35 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) ilustrando os padrões típicos de dedos viscosos que podem surgir durante escoamento de fluido newtoniano em processos de levantamento. Um visão mais detalhada dos padrões resultantes (para as áreas delimitadas pelas linhas tracejadas) é apresentada no canto inferior esquerdo de cada plote. A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$, onde $n = 20$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores escolhidos para o número de Reynolds são: (a) $Re = 0$, (b) $Re = 0.01$ e (c) $Re = 0.1$. Além disso, $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$ e $q = 10^3$. Os tempos finais são (a) $t_f = 0.7$, (b) $t_f = 0.7$ e (c) $t_f = 1.3$	104
Figura 36 – Interface fluido-fluido apresentada para o tempo final considerando uma evolução (a) linear [obtida resolvendo a Eq. (5.14)] e (b) fracamente não linear [obtida por meio da Eq. (4.7)], para número de Reynolds $Re = 0.1$ e tempo final $t_f = 1.3$. Todo os parâmetros físicos e condições iniciais são as mesmas em ambas as situações (a) e (b), e, também, são idênticas àquelas utilizadas na Fig. 35(c).	106
Figura 37 – Amplitude de perturbação reescalada $a_{3n}(t)/R(t)$ plotada em função do tempo para número de Reynolds $Re = 0.1$. Três valores de número de capilaridade Ca e dois valores de razão de aspecto inicial q são usados.	107
Figura 38 – Plote paramétrico expressando o comportamento de $[b_{n/2}(t) - a_{n/2}(t)]$ com respeito às variações de $a_n(t)$ para dois valores de número de Reynolds Re e dois valores de número de capilaridade Ca	109
Figura 39 – Figura esquemática da célula de Hele-Shaw girante.	113
Figura 40 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n, t)$ em função do tempo t para $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0$ e $B = 3.0 \times 10^{-3}$. As ações da velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$) e com dependência temporal ($\gamma = 2$) são ambas examinadas. Em (a), $Re = 0.03$, $n = 2$, $n = 4$ e $n = 8$. Em (b), $n = 8$ e dois valores para o número de Reynolds ($Re = 0.03$ e $Re = 0.2$) são considerados.	120

- Figura 41 – Os painéis superiores ilustram a evolução temporal típica das interfaces fluido-fluido obtidas em processos de rotação em Hele-Shaw. A velocidade angular possui dependência temporal dada pela Eq. (6.17) com $\gamma = 2$. Três valores crescentes para o número de Reynolds são utilizados: (a) $Re = 0.03$, (b) $Re = 0.16$ e (c) $Re = 0.2$. Os padrões resultantes (áreas em cinza) obtidos para o tempo final $t = t_f$ são apresentados nos painéis da linha do meio. Os tempos finais correspondentes a cada um dos padrões são: (a) $t_f = 1.9107$, (b) $t_f = 2.072$ e (c) $t_f = 2.1599$, onde t_f é definido como o tempo para o qual a amplitude do modo fundamental atinge a magnitude de $a_n(t = t_f) = 0.15$ para cada valor de Re . As pequenas setas apontam na direção do movimento dos dedos que competem internamente ou externamente. Os círculos tracejados são adicionados para facilitar a visualização dos eventos de competição entre os dedos. A correspondente evolução temporal das amplitudes de perturbação $a_n(t)$, $a_{n/2}(t)$ e $b_{n/2}(t)$ para os modos $n = 10$ e $n/2 = 5$ é apresentada nos painéis inferiores. Aqui, adotamos $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0$ e $B = 3.0 \times 10^{-3}$ 124
- Figura 42 – Comportamento das amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ conforme o número de Reynolds Re é variado. Consideramos duas situações: velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$, representada pelas curvas tracejadas) e com dependência temporal ($\gamma = 2$, simbolizada pelas curvas sólidas). Todos os parâmetros físicos e condições iniciais são os mesmos daqueles utilizados na Fig. 41. 128
- Figura 43 – Variação das amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ conforme o número de Reynolds Re é variado. O caso da velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$) é representado pelas curvas tracejadas, enquanto que a situação da velocidade angular dependente do tempo ($\gamma = 2$) é ilustrada pelas curvas sólidas. Três valores representativos para a razão de viscosidade são considerados: (a) $\beta = 0$, (b) $\beta = 1$ e (c) $\beta = 100$. Aqui, adotamos $\alpha = 0.5$, $n = 8$ e $n/2 = 4$. Todos os outros parâmetros físicos e condições iniciais são exatamente os mesmos daqueles utilizados na Fig. 41. 129
- Figura 44 – Formatos característicos das interfaces estacionárias exatas que surgem quando uma gota de fluido magnético é submetida a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw: (a) Padrão poligonal de ferrofluido com seis arestas em formato côncavo, (b) estrutura de fluido MR com seis arestas em formato convexo. 133

- Figura 45 – Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b localizada na distância média entre duas bobinas na configuração anti-Helmholtz. Confinada entre as placas da célula, há uma gota de fluido magnético inicialmente circular e de raio R , circundada por um fluido não magnético de viscosidade desprezível. No plano das placas da célula de Hele-Shaw, um campo magnético radial $\mathbf{H}$ é produzido pelas bobinas. Os sentidos das correntes elétricas em ambas as bobinas são indicados por setas pretas. Neste arranjo, o campo magnético perturba a interface, enquanto que a tensão superficial e os efeitos viscoelásticos estabilizam a mesma. 134
- Figura 46 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de dois modos de Fourier n e $2n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$ e $2n = 14$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$ e $2n = 20$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$ e $2n = 26$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n e $2n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio não perturbado da gota de ferrofluido são (a) $R = 0.854418$, (b) $R = 0.937215$ e (c) $R = 0.964060$. O tempo usado nos padrões dos painéis (a)-(c) é $t = 0.015$. 142
- Figura 47 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de três modos de Fourier n , $2n$ e $3n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$ e $3n = 30$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$ e $3n = 39$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 46. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.03$, (b) $t = 0.0036$ e (c) $t = 0.015$ 144
- Figura 48 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de quatro modos de Fourier n , $2n$, $3n$ e $4n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$, $3n = 21$ e $4n = 28$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$, $3n = 30$ e $4n = 40$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$, $3n = 39$ e $4n = 52$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 46. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.02$, (b) $t = 0.006$ e (c) $t = 0.003$ 147

Figura 49 – Soluções perturbativas e estacionárias exatas relacionadas à situação do ferrofluido estudada na Fig. 48. Painéis superiores: comparação entre as soluções exatas (curvas sólidas) e fracamente não lineares (FNL) para quatro modos (curvas tracejadas), na situação da interface do ferrofluido quando (a) $N_B = 50$, (b) $N_B = 105$ e (c) $N_B = 175$. Painéis inferiores: gráficos correspondentes do módulo das amplitudes cosseno $|a_n|$ como função dos números de onda n . Os valores das constantes de integração para as soluções exatas são: (a) $a = -62.8$, (b) $a = -172.741226$ e (c) $a = -313.318659$ 149

Figura 50 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de dois modos de Fourier n e $2n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$ e $2n = 6$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$ e $2n = 8$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$ e $2n = 10$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n e $2n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio não perturbado da gota de fluido magneto reológico são (a) $R = 0.845625$, (b) $R = 0.908623$ e (c) $R = 0.923848$. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 1.5$, (b) $t = 0.15$ e (c) $t = 0.08$ 150

Figura 51 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de três modos de Fourier n , $2n$ e $3n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$ e $3n = 9$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$ e $3n = 12$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$ e $3n = 15$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 50. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.064$, (b) $t = 0.065$ e (c) $t = 0.06$ 151

- Figura 52 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de quatro modos de Fourier n , $2n$, $3n$ e $4n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$, $3n = 9$ e $4n = 12$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$, $3n = 12$ e $4n = 16$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$, $3n = 15$ e $4n = 20$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 50. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.12$, (b) $t = 0.1$ e (c) $t = 0.08$ 153
- Figura 53 – Soluções perturbativas e estacionárias exatas relacionadas à situação do fluido magneto reológico estudada na Fig. 52. Painéis superiores: comparação entre as soluções exatas (curvas sólidas) e fracamente não lineares (FNL) para quatro modos (curvas tracejadas), na situação da interface do fluido magneto reológico quando (a) $S = 102.40$, (b) $S = 93.13$ e (c) $S = 84.13$. Painéis inferiores: gráficos correspondentes do módulo das amplitudes cosseno $|a_n|$ como função dos números de onda n . Os valores das constantes de integração para as soluções exatas são: (a) $a = -23.910252$, (b) $a = -32.436107$ e (c) $a = -40.324116$ 154
- Figura 54 – Na parte superior desta figura (retirada da Ref. [205]), vemos uma representação esquemática da formação de um padrão de enrugamento no problema da membrana elástica sobre substrato fluido. Na parte inferior, é possível encontrar uma coleção representativa das estruturas deformadas que surgem quando a membrana é submetida a compressões. Para compressões de baixa magnitude, ondulações senoidais de pequena amplitude surgem na membrana e dão origem a padrões que exibem enrugamentos periódicos (curvas pretas). Quando a membrana é submetida a compressões ainda maiores, uma grande variedade de padrões contendo um único ou múltiplos dobramentos surgem na interface (curvas a-h). 160
- Figura 55 – Coleção de padrões assimétricos (com dobras distorcidas) que surgem para o problema da membrana elástica sobre substrato fluido. Figura retirada da Ref. [205]. 161
- Figura 56 – Simulação numérica do problema de cápsulas elásticas preenchidas com ferrofluido. Quando submetidas a campos magnéticos suficientemente intensos, as cápsulas alongam-se e, além disso, podem desenvolver instabilidades do tipo enrugamento se surgirem tensões compressivas circunferenciais. Figura retirada da Ref. [213]. 162

- Figura 57 – Ilustração esquemática (visão superior) do escoamento induzido por um campo magnético numa célula de Hele-Shaw. A célula contém uma gota de ferrofluido inicialmente circular. Esta gota possui raio R (curva tracejada) e viscosidade η , além de ser circundada por um fluido não magnético de viscosidade desprezível. A interface fluido-fluido é elástica e possui uma rigidez ν constante. O sistema é submetido a um campo magnético externo $\mathbf{H}$ no plano da célula de Hele-Shaw. Este campo aponta radialmente para fora. A interação entre forças magnéticas e elásticas deforma a interface (curva sólida) e a amplitude de perturbação é representada por $\zeta = \zeta(\theta, t)$, onde θ é o ângulo azimutal e $\zeta \ll R$ 163
- Figura 58 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função do número de onda n para $\chi = 0.5$ e três valores do número magnetoelástico N_B : 0, 200 e 400. Aqui, adotamos $R = 1$ 165
- Figura 59 – Painéis superiores: galeria dos padrões magnetoelásticos representativos para $N_B = 48$ e três valores crescentes de susceptibilidade magnética: (a) $\chi = 0.5731$, (b) $\chi = 0.6271$ e (c) $\chi = 0.6547$. Painéis inferiores: padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes às estruturas ilustradas nos painéis superiores. Aqui, (d) corresponde à (a), (e) à (b) e (f) à (c). Os padrões dos painéis inferiores são obtidos mantendo o produto χN_B constante e, além disso, tomando-se o limite $\chi \rightarrow 0$ 169
- Figura 60 – Padrões enrugados que surgem em sistemas biológicos. Da esquerda para a direita, temos as seguintes seções transversais de partes do corpo humano: cólon, ducto deferente, artéria muscular e brônquios. Figura retirada da Ref. [200]. 170
- Figura 61 – Painéis superiores: galeria dos padrões magnetoelásticos representativos para $N_B = 1143$ e três valores crescentes de susceptibilidade magnética: (a) $\chi = 0.0538$, (b) $\chi = 0.0729$ e (c) $\chi = 0.125$. Painéis inferiores: padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes às estruturas ilustradas nos painéis superiores. Aqui, (d) corresponde à (a), (e) à (b) e (f) à (c). Os padrões dos painéis inferiores são obtidos mantendo o produto χN_B constante e, além disso, tomando-se o limite $\chi \rightarrow 0$ 172
- Figura 62 – Ilustração do problema de empacotamento de um fino anel elástico dentro de outro anel flexível menor. Observe que no processo de empacotamento do anel vermelho (azul) dentro do anel verde (vermelho), a estrutura de equilíbrio formada dobra-se para dentro, lembrando os padrões de dobramento apresentados na Fig. 61. Figura retirada da Ref. [237]. 173
- Figura 63 – Padrões de dobramentos que surgem no problema do confinamento de fios elásticos em células de Hele-Shaw imóveis. Figura retirada da Ref. [239]. 174

Figura 64 – Neste experimento, um fio elástico encontra-se confinado dentro de uma célula de Hele-Shaw. Mediante rotação, uma série de estruturas dobradas surgem como possíveis configurações de equilíbrio. Figura retirada da Ref. [231].	175
Figura 65 – (a) Padrão magnetoelástico representativo para $N_B = 929$ e $\chi = 0.1794$; (b) Padrão do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondente à estrutura ilustrada em (a), produzido mantendo o produto χN_B constante e considerando o limite $\chi \rightarrow 0$	175
Figura 66 – Estruturas de dobramentos assimétricos encontradas pela Ref. [204] no estudo de interfaces de equilíbrio em membranas elásticas sobre substrato líquido. .	176

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Amplitudes estacionárias das soluções estacionárias FNL para o caso da gota de ferrofluido. As situações $N_B = 50, 105, 175$ correspondem aos mesmo parâmetros físicos utilizados nas Figs. 46, 47 e 48.	157
Tabela 2	– Amplitudes estacionárias das soluções estacionárias FNL para o caso da gota de fluido MR. As situações $S = 102.4, 93.13, 84.13$ correspondem aos mesmo parâmetros físicos utilizados nas Figs. 50, 51 e 52.	157
Tabela 3	– Autovalores associados às soluções estacionárias FNL para a gota de ferrofluido caracterizados pelas amplitudes estáticas mostradas na tabela 1. . . .	158
Tabela 4	– Autovalores associados às soluções estacionárias FNL para a gota de fluido MR caracterizados pelas amplitudes estáticas mostradas na tabela 2.	158

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Dedos viscosos e a instabilidade de Saffman-Taylor	23
1.1.1	Injeção em célula de Hele-Shaw radial	25
1.1.2	Célula de Hele-Shaw com espaçamento dependente do tempo	30
1.1.3	Rotação em célula de Hele-Shaw	33
1.1.4	Fluidos magnéticos em células de Hele-Shaw	35
1.2	Roteiro dos próximos capítulos	37
1.3	Lista de publicações	38
2	<i>UNDERCOOLING</i> CINÉTICO EM FLUXOS DO TIPO HELE-SHAW	40
2.1	Introdução	40
2.2	Problema físico e equações do sistema	42
2.2.1	Origem física do <i>undercooling</i> cinético em fluxos do tipo Hele-Shaw	42
2.2.2	Equação diferencial de modos acoplados com inclusão de <i>undercooling</i> cinético	46
2.3	Discussão	47
2.3.1	Efeitos do <i>undercooling</i> cinético: geometria radial	48
2.3.2	Efeitos do <i>undercooling</i> cinético: geometria retangular	52
3	TRANSIÇÕES DE ESTABILIDADE EM CÉLULAS DE HELE-SHAW COM PLACA SUPERIOR SUAVEMENTE INCLINADA	55
3.1	Introdução	55
3.2	Equação diferencial de modos acoplados	59
3.3	Transições de estabilidade no regime fracamente não linear	64
4	FORMAÇÃO DE DEDOS VISCOSOS PARA FLUXO RADIAL COM RAZÕES DE VISCOSIDADE E DENSIDADE ARBITRÁRIAS	77
4.1	Introdução	77
4.2	Equações do sistema	81
4.3	Dinâmica da formação de padrões no regime fracamente não linear	85
4.3.1	Influência de β e Ca na ausência de efeitos inerciais	87
4.3.2	Efeitos induzidos pela inércia: ação conjunta de β , Ca , α e Re	90
5	PADRÕES DENDRÍTICOS INDUZIDOS POR INÉRCIA EM PRO- CESSOS DE LEVANTAMENTO EM CÉLULA DE HELE-SHAW	96
5.1	Introdução	96
5.2	Equação diferencial de modos acoplados	98

5.3	Influência da inércia no regime linear	101
5.4	Efeitos da inércia nos mecanismo não lineares de formação de padrões	102
5.4.1	Padrões induzidos pela inércia: formação de <i>sidebranching</i>	103
5.4.2	Influência da inércia na competição dos dedos	108
6	ROTAÇÃO EM CÉLULA DE HELE-SHAW COM VELOCIDADE ANGULAR VARIÁVEL	111
6.1	Introdução	111
6.2	Equações básicas do sistema	113
6.3	Efeitos da velocidade angular dependente do tempo e da inércia . .	117
6.3.1	Regime linear	117
6.3.2	Regime não linear	122
7	PADRÕES DE DEDOS VISCOSOS EM FLUIDOS MAGNÉTICOS CONFINADOS: SOLUÇÕES PERTURBATIVAS E EXATAS	131
7.1	Introdução	131
7.2	Problema físico e embasamento teórico	134
7.2.1	Equações do sistema	134
7.2.2	Estruturas estacionárias exatas e o formalismo da <i>vortex-sheet</i>	137
7.2.3	Estruturas perturbativas e o método fracamente não linear	139
7.3	Contrastando as soluções perturbativas e as estacionárias exatas .	140
7.3.1	Caso do ferrofluido	141
7.3.2	Caso do fluido magneto reológico	149
7.4	Estabilidade das soluções	155
8	PADRÕES DE ENRUGAMENTO E DOBRAMENTO PARA FERROFLUIDOS CONFINADOS COM INTERFACE ELÁSTICA	159
8.1	Introdução	159
8.2	Dinâmica linear das perturbações da interface	163
8.3	Padrões estacionários fortemente não lineares	167
9	CONCLUSÃO	177
	REFERÊNCIAS	181
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DOS CAMPOS DE VELOCIDADE E PRESSÃO DO CAPÍTULO 6	199

1 INTRODUÇÃO

1.1 Dedos viscosos e a instabilidade de Saffman-Taylor

A instabilidade de dedos viscosos, como são conhecidas as ondulações (ou protuberâncias) na interface que separa dois fluidos de diferentes viscosidades, tem recebido bastante atenção desde a publicação do trabalho de Saffman e Taylor [1] em 1958. Originalmente, tal instabilidade hidrodinâmica foi descrita considerando dois fluidos newtonianos e imiscíveis confinados em um canal entre duas placas paralelas de espaçamento b . Este dispositivo é comumente conhecido como célula de Hele-Shaw retangular [2–5] e b corresponde à menor escala de comprimento ($b \approx 1$ mm), de forma que o fluxo é efetivamente bidimensional e governado pela lei de Darcy (velocidade proporcional ao gradiente de pressão do fluido). Um fluido newtoniano é aquele para o qual a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação, com coeficiente de proporcionalidade dado pela viscosidade (constante) do fluido. À medida que o fluido menos viscoso escoia longitudinalmente pelo canal e desloca o fluido mais viscoso, a interface entre eles, que inicialmente não apresenta ondulações (ou seja, é plana), deforma-se em pequenas perturbações que crescem e evoluem. Finalmente, a interface apresenta dedos viscosos longos e lisos em suas bordas, eventualmente atingindo um estado estacionário (ver Fig. 1).

A relevância do estudo da dinâmica das deformações (dedos viscosos) presentes na interface que separa dois fluidos torna-se evidente quando consideramos algumas aplicações práticas e tecnológicas onde tais instabilidades surgem naturalmente [6]. Dependendo da natureza do problema estudado, o desenvolvimento de instabilidades entre os fluidos pode ser desejável ou não. Na mistura de dois fluidos miscíveis, por exemplo, é de conhecimento que a aparição de dedos viscosos na interface fluido-fluido promove uma aceleração do processo de mistura [7], de forma que a instabilidade de Saffman-Taylor é bem-vinda. Por outro lado, durante importantes processos de extração de petróleo, o surgimento das instabilidades prejudica sua eficiência: neste caso, a água é bombeada em jazidas subterrâneas (um meio poroso onde o fluxo pode ser aproximado por um fluxo tipo Hele-Shaw) de forma a deslocar o petróleo, que passa a ser recolhido em outro ponto da jazida. Aqui, temos um fluido menos viscoso (água) deslocando um fluido mais viscoso (petróleo), existindo então formação espontânea de dedos viscosos. Devido à instabilidade de Saffman-Taylor, o que pode ocorrer é o recolhimento d'água em vez de petróleo. Neste contexto, a aparição de dedos viscosos é prejudicial. Portanto, o estudo detalhado da dinâmica e dos possíveis métodos de controle (estabilização e desestabilização) de dedos viscosos são tópicos com aplicações industriais e tecnológicas de grande interesse atual.

Nas últimas décadas, pesquisadores analisaram os efeitos de algumas variações interessantes no problema tradicional de Saffman-Taylor. Dentre as várias modificações, podemos citar estudos que incluem o uso de fluidos não newtonianos [8–10], miscíveis [7, 11, 12] e fluidos reativos [13–



Figura 1 – Clássico experimento de Saffman e Taylor retirado da Ref. [1]. A figura mostra a interface entre dois fluidos na configuração de uma célula de Hele-Shaw retangular, sendo o fluido superior ar (baixa viscosidade), e o fluido inferior glicerina (alta viscosidade). A interface inicial é levemente perturbada, possuindo pequenas ondulações que crescem em comprimento conforme o ar penetra e desloca a glicerina. As protuberâncias que tendem a crescer neste fluxo instável são conhecidas como dedos viscosos.

15]; a presença de campos magnéticos agindo em líquidos magnéticos (ferrofluidos e fluidos magneto reológicos) [16–18], a influência de forças centrífugas e de Coriolis na rotação em célula de Hele-Shaw [19–22] (uma variante da célula de Hele-Shaw retangular tradicional), o efeito da inércia do fluido [23–25] e dos efeitos de molhamento [26–28]; também podemos mencionar o escoamento de fluidos em células de Hele-Shaw de geometria curva (cilíndrica, esférica, perfil gaussiano, etc) [29–31].

Esta tese de doutorado concentra-se principalmente no estudo, por meio de métodos analíticos, de três variações do problema original de Saffman-Taylor: a injeção em célula de Hele-Shaw radial (de placas paralelas ou com placa superior levemente inclinada), além de processos de levantamento e rotação em célula de Hele-Shaw. Adicionalmente, ainda incluiremos a ação de efeitos inerciais, *undercooling* cinético, rotação dependente do tempo e, por fim, abordaremos problemas envolvendo fluidos magnéticos confinados. Para capturar e elucidar toda a física por trás de cada um dos problemas estudados, vamos utilizar uma teoria perturbativa de modos acoplados fracamente não linear em conjunto com simulações numéricas simples. Quando pertinente, também utilizaremos soluções exatas do problema encontradas por meio do formalismo de *vortex-sheet*. Nas próximas seções deste capítulo, vamos introduzir cada um dos tópicos citados neste parágrafo, fazendo uma detalhada revisão dos principais aspectos de cada tema, sempre

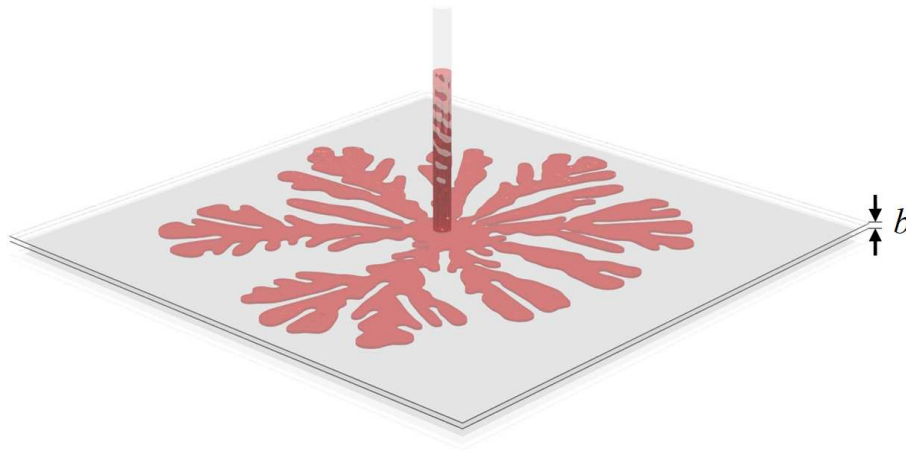


Figura 2 – Representação esquemática da injeção em célula de Hele-Shaw radial, onde b representa o espaçamento constante entre as placas. O fluido vermelho, de menor viscosidade, é injetado pelo centro da célula e desloca o fluido externo cinza de maior viscosidade. As pequenas ondulações na interface crescem e dão origem a dedos viscosos ramificados.

mostrando resultados experimentais e computacionais que motivem e justifiquem a necessidade do desenvolvimento desta tese.

1.1.1 Injeção em célula de Hele-Shaw radial

A primeira variante do problema de Saffman-Taylor a ser estudada será a injeção em célula de Hele-Shaw radial [32–34]. Neste problema, dois fluidos são confinados entre duas placas paralelas de espaçamento b constante. Uma representação esquemática do sistema estudado pode ser vista na Fig. 2. O fluido interno, de menor viscosidade, é injetado por um pequeno orifício no centro da placa superior e desloca o fluido externo (de maior viscosidade) radialmente. Durante o fluxo, qualquer ondulação (perturbação) formada na interface entre os fluidos aumenta o gradiente de pressão e, conseqüentemente, a velocidade local da interface. Essa ondulação cresce com maior velocidade em relação aos outros pontos da interface que não foram perturbados, dando origem aos dedos viscosos de Saffman-Taylor. Em contrapartida, se essa ondulação aparecer de forma mais afinada (estruturas pontiagudas), sua curvatura aumentará e a tensão superficial entre os fluidos tende a reduzir a pressão nesta área, fazendo com que essas perturbações se estabilizem e eventualmente desapareçam. Podemos dizer então que o processo de formação do dedos está relacionado com a competição dinâmica entre tensão superficial e forças viscosas (ou gradientes de pressão).

Uma vasta gama de experimentos [34–40] e sofisticadas simulações numéricas [41–43] mostraram que, mediante fluxo radial, a interface entre os fluidos rapidamente deforma-se, dando origem a dedos de diferentes comprimentos que competem e dividem-se em suas pontas por meio de mecanismos não lineares. Sendo assim, novos dedos são continuamente gerados, resultando

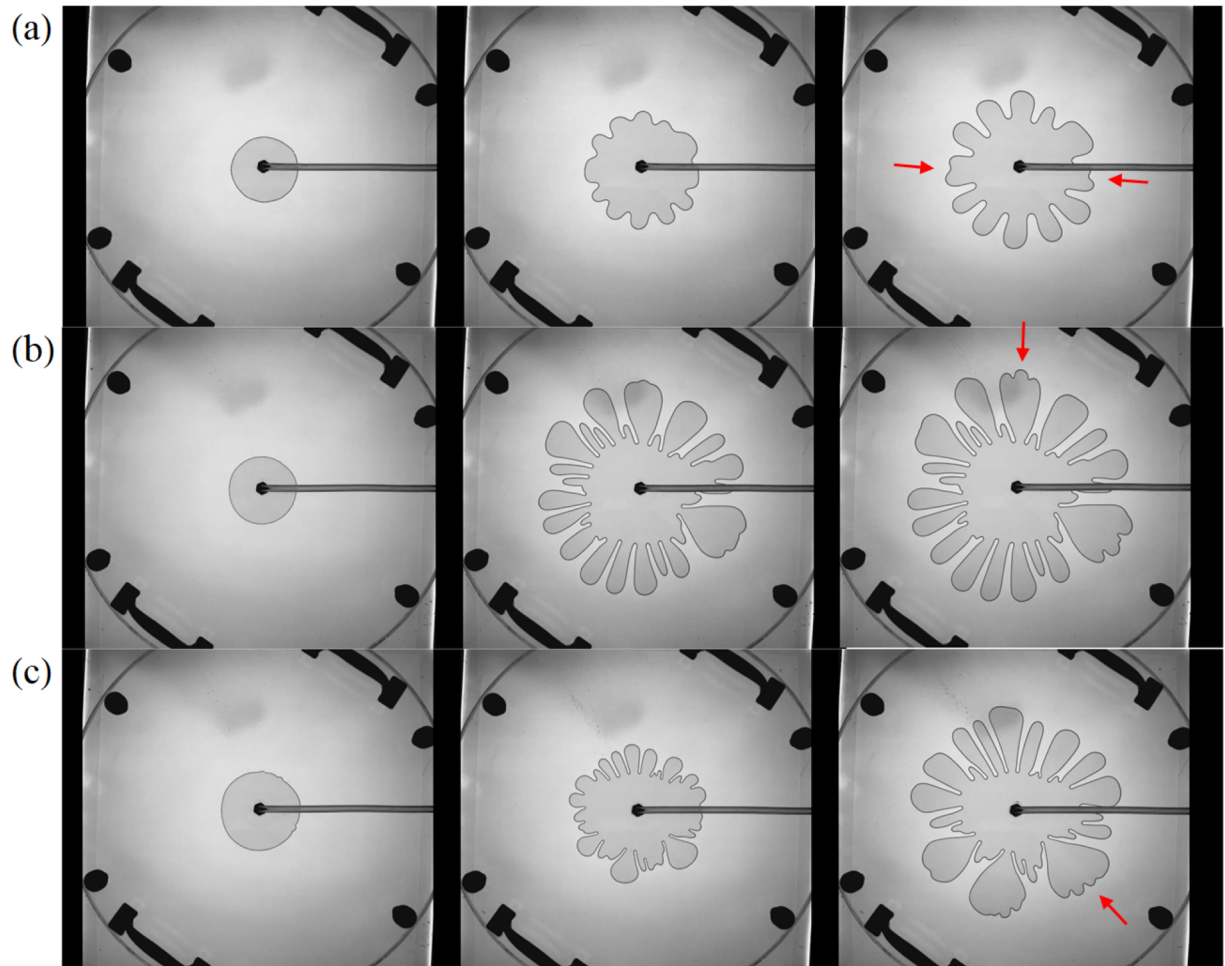


Figura 3 – Perfil típico das interfaces obtidas em experimentos de injeção na configuração da célula de Hele-Shaw radial. Em (a), o fluido é injetado no centro da célula e rapidamente a interface se torna instável, como é possível verificar pela sequência temporal (tempo cresce da esquerda para a direita). As setas vermelhas presentes no último padrão indicam a bifurcação dos dedos, fenômeno característico e de maior evidência nesse sistema. Em (b) e (c), o mesmo experimento é realizado, mas agora com uma taxa de injeção maior do que o caso anterior. Como podemos verificar pelo último padrão de (b), a seta vermelha aponta para um dedo que cresce desenvolvendo lóbulos laterais, fenômeno conhecido como *sidebranching*. Em (c), a morfologia do dedo indicado pela seta vermelha exibe quatro lóbulos centrais, comumente conhecido como quadrifurcação. Experimento realizado pelo Dr. Stephen W. Morris.

em padrões de interface bastante ramificados ao final da dinâmica. Vale ressaltar que o fluxo inverso, no qual o fluido mais viscoso desloca o menos viscoso, é estável e a interface entre os fluidos evolui circularmente.

As equações que regem o fluxo de Hele-Shaw, assim como as condições de contorno do problema, desempenham um papel fundamental na dinâmica dos dedos viscosos e, além disso, por meio de mudanças diretas nessas equações, é possível incluir uma série de efeitos físicos interessantes. Neste contexto, é necessário discutir de forma breve, e mais detalhadamente ao longo dos próximos capítulos, alguns aspectos gerais deste tópico. A evolução dinâmica do problema de Saffman-Taylor é governada lei de Darcy bidimensional e pela equação de incompressibilidade de fluidos (divergência nula do campo de velocidade). Além dessas duas equações fundamentais, ainda necessitamos de duas condições de contorno na interface fluido-fluido [1, 2, 6, 26, 34, 44, 45]: a condição de diferença de pressão, dada pela equação de Young-Laplace, e a condição cinemática de continuidade para a componente normal da velocidade do fluido na interface. A condição de pressão, em particular, é importante pois leva em consideração a competição entre efeitos estabilizantes e desestabilizantes que atuam na interface fluido-fluido. Efeitos estabilizantes, ou de regularização, podem ser incorporados no problema de contorno dinâmico de Hele-Shaw por meio da adição de termos extras na condição de pressão. Por exemplo, a inclusão de um termo envolvendo o produto entre tensão superficial σ e a curvatura da interface κ penaliza grandes curvaturas e previne a formação de singularidades não físicas em forma de cúspides na interface [46–49].

Uma estratégia alternativa de regularização considera a adição de um termo extra diferente na condição de contorno de Young-Laplace, na qual desfavorece o surgimento de grandes velocidades normais na interface. Este método de regularização é conhecido como *undercooling* cinético e é representado pelo produto cv_n , onde c é o parâmetro de *undercooling* cinético e v_n é a componente normal da velocidade na interface. Esta abordagem de regularização tem sido amplamente usada em estudos de derretimento e congelamento, problemas de Stefan [50–53] e, em particular, incorporada em investigações de instabilidades de interface e formação de padrões em crescimento dendrítico [51, 54, 55]. O *undercooling* cinético também tem aparecido em estudos envolvendo descargas elétricas que se desenvolvem em estruturas semelhantes a dedos, conhecidas como *streamers* [56, 57].

Apesar do considerável número de estudos envolvendo *undercooling* cinético, sua inclusão no fluxo de Hele-Shaw tem sido muito pouco abordada em comparação ao número de estudos equivalentes que levam em consideração o papel de regularização da tensão superficial [6, 46–49]. Sendo assim, no capítulo 2, pretendemos preencher algumas lacunas neste tópico. Em particular, vamos mostrar que a origem do termo de *undercooling* cinético em fluxos do tipo Hele-Shaw está relacionada com a consideração da ação do ângulo de contato dinâmico medido entre as placas e o menisco curvo da interface. Desta forma, o termo de *undercooling* cinético cv_n adquire naturalmente o formato de função linear da velocidade normal à interface e o parâmetro c pode ser escrito em função de outras grandezas físicas do problema. Por fim, investigaremos o papel

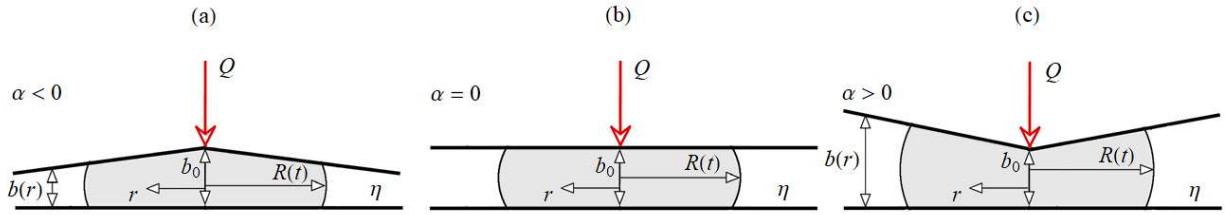


Figura 4 – Representação esquemática da injeção em célula de Hele-Shaw com placa superior radialmente inclinada. Em (a) e (c), a placa superior apresenta um pequeno gradiente na direção radial a partir do seu centro, fazendo com que o espaçamento $b = b(r)$ não seja constante. A configuração (a) apresenta inclinação negativa e é conhecida como célula convergente, enquanto que a configuração (c), por apresentar inclinação positiva, é denominada de célula divergente. Em (b), temos a geometria usual de placas paralelas onde o espaçamento b é constante. A situação (b) é exatamente o mesmo caso mostrado na Fig. 2. A taxa de injeção de fluido é denotada por Q .

deste termo extra na formação de padrões para o regime fracamente não linear no problema da injeção em célula de Hele-Shaw.

Ainda na geometria radial da célula de Hele-Shaw, outra curiosa modificação deste sistema tem ganhado atenção nos últimos anos. Introduzida primeiramente por Zhao *et al.* [58], a modificação consiste na adição de um pequeno gradiente no espaçamento b entre as placas. Desta forma, ao contrário da situação abordada anteriormente, o espaçamento $b = b(r)$ não é mais constante, ou seja, as placas da célula não são paralelas. Portanto, tal modificação oferece duas novas configurações além da situação usual de placas paralelas [Fig. 4 (b)]: a primeira configuração [Fig. 4 (a)] consiste num gradiente negativo, de forma que o espaçamento entre as placas converge lentamente na direção radial. O caso oposto [Fig. 4 (c)] consiste numa configuração onde o gradiente é positivo, fazendo com que o espaçamento seja lentamente divergente na direção radial.

Apesar da simples modificação geométrica, alguns estudos [58–62] têm demonstrado que o gradiente no espaçamento das placas pode ter grande impacto tanto na estabilidade quanto no formato dos dedos produzidos na interface, podendo assim ser usado como um método puramente geométrico de controle das instabilidades de Saffman-Taylor. Recentemente, Bongrand e Tsai [63] realizaram experimentos em célula de Hele-Shaw convergente e apresentaram resultados que demonstram os efeitos estabilizantes causados pelo gradiente negativo. Neste experimento, a célula convergente foi capaz de tornar um fluxo naturalmente instável (injeção de ar em óleo viscoso) em uma interface que evolui de forma circular e permanece estável mesmo para grandes tempos da dinâmica, como podemos verificar na Fig. 5.

Curiosamente, a maioria dos estudos publicados abordando este tópico concentram-se ou na análise de estabilidade linear [64], ou em elaboradas simulações numéricas do problema [65]. Estas investigações analíticas e numéricas proporcionam um bom entendimento do processo de formação de padrões no início (análise puramente linear) e no final da dinâmica (regime forte-

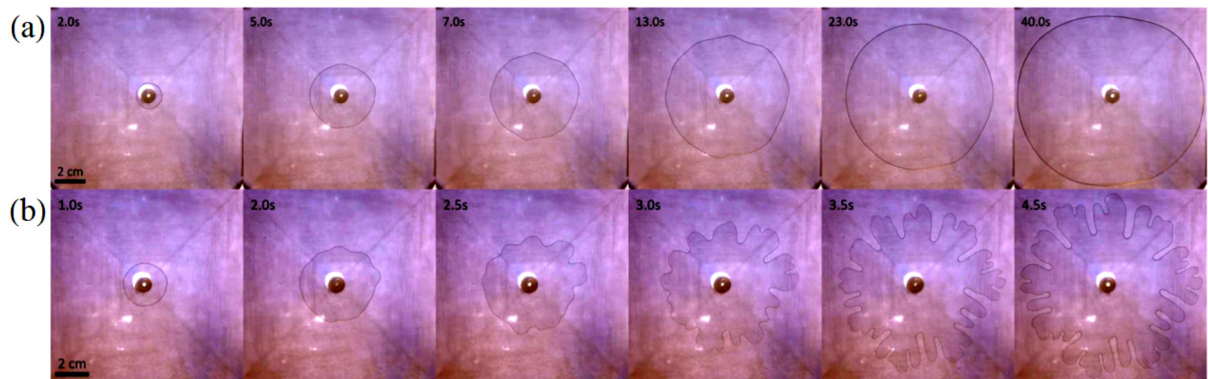


Figura 5 – Experimentos em célula de Hele-Shaw radial convergente (inclinação negativa) retirados da Ref. [63]. Em ambos os casos (a) e (b), ar é injetado e desloca óleo viscoso. Os parâmetros iniciais são os mesmos com exceção para a taxa de injeção, que no caso (b) é quase três vezes maior do que em (a). Como podemos verificar pela situação (a), a interface permanece estável mesmo para elevados valores de tempo, enquanto que em (b) a interface rapidamente deforma-se exibindo a formação de dedos viscosos característicos de um fluxo instável. Vale ressaltar que se o experimento fosse realizado em uma célula de placas paralelas (inclinação nula), ambos os casos seriam instáveis.

mente não linear). Portanto, no capítulo 3, nosso objetivo é desenvolver uma teoria fracamente não linear abordando o regime intermediário da dinâmica da interface para o problema da injeção em célula de Hele-Shaw radial com o espaçamento variável. Nossa análise será empregada para os casos convergente e divergente, sempre comparando os padrões obtidos com os equivalentes para o caso da geometria de placas paralelas. Por meio da variação do valor de número de capilaridade Ca (medida relativa entre forças viscosas e de tensão superficial), mostraremos que o sistema passa por interessantes transições de estabilidade.

Em ambos os estudos desenvolvidos nos capítulos 2 e 3, nos concentramos na situação em que o fluido deslocado (com viscosidade η_2) é muito mais viscoso do que o fluido injetado (com viscosidade η_1) e, portanto, a razão de viscosidade $\beta = \eta_2/\eta_1$ é muito grande ou até mesmo infinita. Na realidade, assim como nós consideramos anteriormente em nossas investigações, a grande maioria dos trabalhos computacionais e experimentais relatados na literatura consideram exatamente esta mesma situação. Em parte, isso se justifica devido ao fato que, do ponto de vista da aplicação prática, essa é exatamente a situação de interesse encontrada em processos de extração de petróleo [66, 67], onde gás é injetado nas jazidas subterrâneas. Pelo lado acadêmico, o limite de razão de viscosidade muito grande ou infinita é geralmente adotado pois torna a descrição teórica do problema muito mais simples. Fica claro então que estudos considerando a situação de um β arbitrário (e finito), caso em que ambas as viscosidades dos fluidos não são desprezíveis, e seu impacto nos mecanismos não lineares responsáveis pela formação de padrões em fluxo de Hele-Shaw radial ainda são relativamente escassos na literatura.

De fato, apenas alguns grupos analisaram de forma sistemática os efeitos de uma razão de viscosidade arbitrária na formação de padrões em fluxo radial. Investigações experimentais realizadas nas Refs. [68, 69] exploraram a formação de padrões para tempos avançados da dinâmica, onde estruturas complexas são formadas por meio de mecanismos fortemente não lineares. Nestas condições, os pesquisadores encontraram uma grande variedade de morfologias da interface conforme a razão de viscosidade β variava. De forma semelhante, a dependência da morfologia dos padrões com o β também foi verificada numericamente por meio das simulações fortemente não lineares da Ref. [70]. Além disso, as simulações foram realizadas tanto para valores baixos quanto para valores altos de número de capilaridade Ca . Os resultados indicaram que o número de dedos viscosos criados na primeira ramificação da interface, ou seja, no primeiro evento de divisão das perturbações iniciais, aumenta com o número de capilaridade.

Apesar dos esforços dedicados pelas Refs. [68–70] na melhora do entendimento do impacto de uma razão de viscosidade arbitrária e dos efeitos da variação do número de capilaridade na formação dos padrões para tempos avançados da dinâmica, um estudo analítico deste sistema ainda não foi realizado. No capítulo 4, pretendemos realizar uma descrição analítica da influência de um β arbitrário, em conjunto com a variação do número de capilaridade Ca , nos mecanismos não lineares responsáveis pela formação dos padrões e na morfologia das interfaces resultantes para o problema da injeção em célula de Hele-Shaw radial. Ao contrário do que foi feito nas Refs. [68–70], nosso trabalho concentra-se em tempos iniciais da dinâmica, regime conhecido como fracamente não linear.

Adicionalmente, vamos ainda mais fundo na descrição da física do sistema e investigaremos como a inércia dos fluidos influencia a dinâmica dos dedos viscosos quando ambos os fluidos (injetado e deslocado) possuem viscosidades e densidades não desprezíveis. Na hidrodinâmica, o papel da inércia pode ser quantificado pelo número de Reynolds Re (medida relativa das forças inerciais em relação às forças viscosas). Para o tipo de fluxo que estamos abordando, esse parâmetro é proporcional à separação b das placas, densidade do fluido, velocidade do fluxo e inversamente proporcional à viscosidade. Portanto, para situações em que a velocidade de escoamento é alta e a viscosidade do fluido deslocado não é muito grande, precisamente o caso tratado no capítulo 4, os efeitos inerciais não podem ser desprezados, justificando sua inclusão em nossa análise.

1.1.2 Célula de Hele-Shaw com espaçamento dependente do tempo

Além das tradicionais configurações retangular e radial comentadas anteriormente para o fluxo em células de Hele-Shaw, ainda é possível usar uma terceira variante da geometria para induzir a instabilidade de Saffman-Taylor: a configuração de levantamento em célula de Hele-Shaw [72–84]. Ao contrário das situações anteriores, que consideram o escoamento em células de espaçamento constante (com exceção do caso do gradiente de espaçamento), este novo aparato experimental faz uso de um espaçamento dependente do tempo, de forma que agora $b = b(t)$. No caso do levantamento, inicialmente, uma interface circular separa o fluido mais

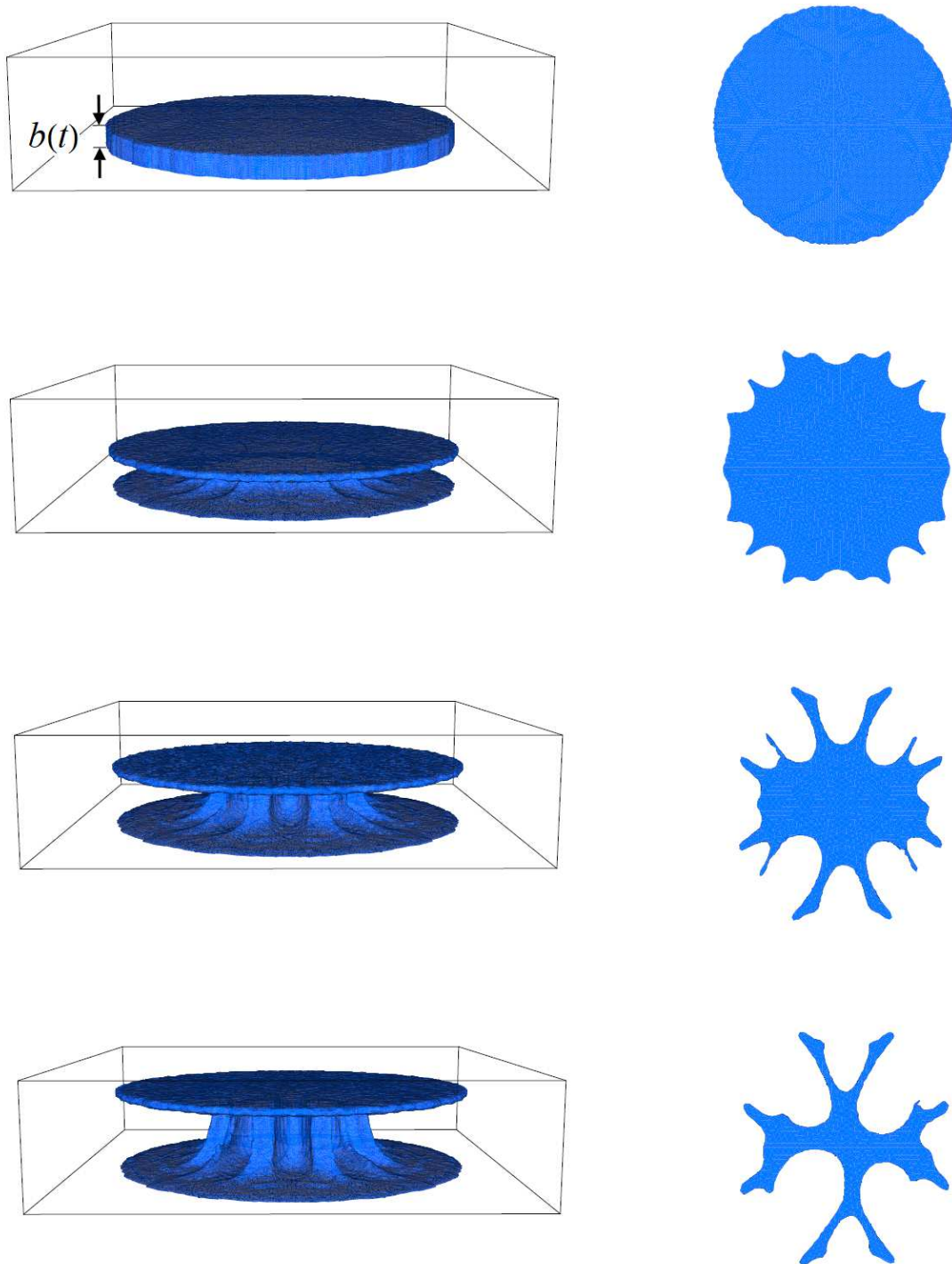


Figura 6 – Simulação numérica ilustrando o processo de levantamento em célula de Hele-Shaw. Durante o processo, a placa inferior permanece fixa e a placa superior é levantada de forma que o espaçamento $b(t)$ possua uma dependência temporal. À esquerda, temos a visão lateral do levantamento para diferentes instantes de tempo, enquanto que à direita, temos a visão superior das interfaces fluido-fluido correspondentes. Durante a simulação, o fluido externo de menor viscosidade invade o fluido interno de maior viscosidade, fazendo com que a interface deforme-se, apresentando dedos viscosos que crescem e competem. Figura retirada da Ref. [71].

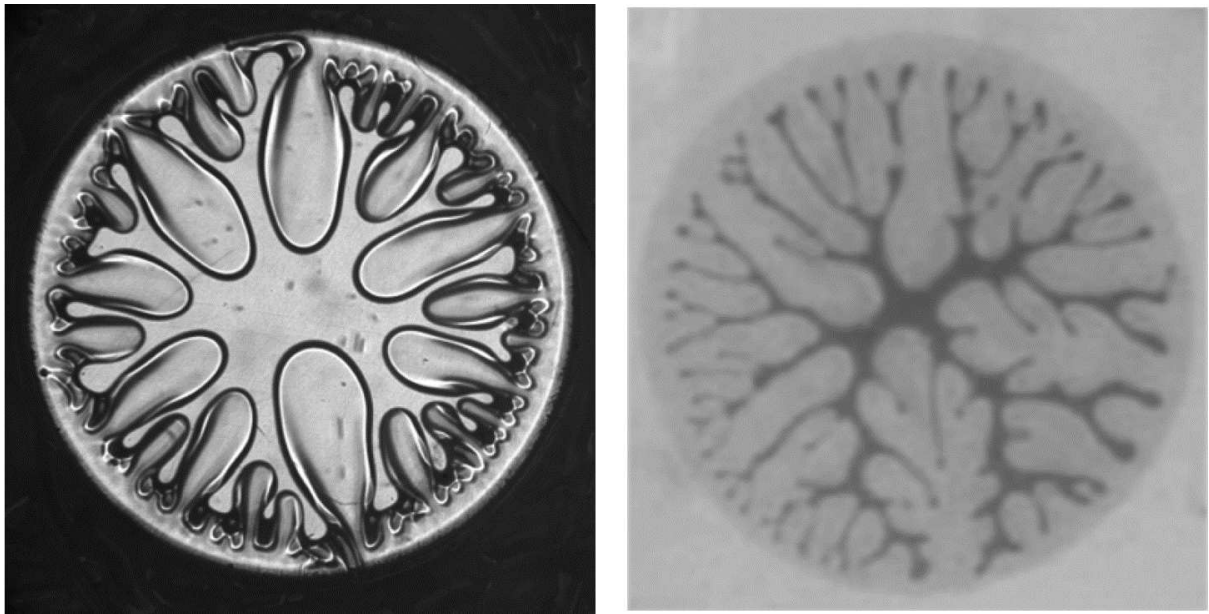


Figura 7 – Exemplos ilustrativos de padrões experimentais obtidos para o problema do levantamento em célula de Hele-Shaw. Na figura à esquerda (retirada da Ref. [72]), uma baixa velocidade de levantamento foi utilizada, resultando em um padrão final que apresenta longos dedos invasores. A figura à direita (retirada da Ref. [73]), obtida para experimentos com alta velocidade de levantamento, apresenta uma interface com morfologia distinta da situação anterior: em vez de apresentar dedos longos e suaves, o padrão exibe dedos dendríticos com formação de protuberâncias laterais.

viscoso interno do fluido menos viscoso externo. A dinâmica inicia-se quando placa superior da célula de Hele-Shaw é levantada paralelamente à placa inferior, que permanece fixa. Conforme as placas se separam, a pressão do fluido interno torna-se menor do que a pressão do externo. Neste caso, ao contrário do que ocorre no problema da injeção, é o fluido externo que invade o fluido interno de maior viscosidade, tornando a interface instável por meio da instabilidade de Saffman-Taylor. Uma simulação numérica do sistema estudado pode ser vista na Fig. 6.

Para o caso de fluidos newtonianos, a interface obtida por meio de experimentos em processos de levantamento normalmente exibe dedos que penetram em direção ao centro da célula, apresentando bordas lisas e levemente infladas. Estes dedos claramente competem entre si, alcançando diferentes comprimentos [72, 78, 81]. Um exemplo típico desses padrões pode ser visto na Fig. 7 (padrão do lado esquerdo). Vale salientar que os dedos viscosos deste problema não se bifurcam em suas pontas, diferentemente do caso anterior para o problema da injeção em célula de Hele-Shaw radial com espaçamento constante [34–36, 40, 43, 45].

Apesar do grande número de investigações neste tópico [72–84], alguns resultados experimentais envolvendo instabilidade de Saffman-Taylor em problemas de levantamento com fluidos newtonianos ainda permanecem sem uma explicação teórica adequada. Um bom exemplo disso são os resultados experimentais reportados pelas Refs. [73, 79, 85], para os quais maiores velocidades de levantamento são usadas. Nestes experimentos, os padrões resultantes são

completamente diferentes das estruturas encontradas nos experimentos das Refs. [72–84] para baixas velocidades de levantamento (ver padrão da esquerda na Fig. 7). Para velocidades altas, em vez de se obter padrões com dedos lisos e que não se dividem em suas pontas, a interface resultante exibe dedos com estruturas bastante ramificadas, apresentando crescimento dendrítico caracterizado pela ocorrência do fenômeno de *sidebranching* (surgimento de lóbulos que crescem lateralmente) (ver padrão da direita na Fig. 7).

No capítulo 5, nosso principal objetivo é oferecer uma explicação adequada para o surgimento desses curiosos padrões dendríticos e relacionar este fenômeno com os efeitos inercias durante o processo de levantamento em fluxo de Hele-Shaw.

1.1.3 Rotação em célula de Hele-Shaw

Um tipo diferente de formação de dedos viscosos ocorre quando a célula de Hele-Shaw é submetida a um movimento rotacional sobre o eixo perpendicular às placas paralelas [19]. Nesta configuração, um fluido denso é confinado entre o espaçamento constante das placas e cercado por um fluido de menor densidade. Sob rotação, a interface circular deforma-se devido às forças centrífugas [20, 86]. Como resultado, uma nova classe de padrões surge, sendo bastante diferente dos padrões anteriormente estudados para o caso da injeção e do levantamento em célula de Hele-Shaw. Geralmente, os dedos obtidos por meio da rotação não se dividem em suas pontas, mas competem entre si. Portanto, em vez da bifurcação de dedos, o padrão resultante é marcado majoritariamente pela variação no comprimento dos dedos. Dependendo da razão de viscosidade entre os fluidos, as interfaces resultantes podem assumir uma grande variedade de morfologias, indo desde largas estruturas semelhantes a gotas de lágrima, até finos braços filamentosos com quebra em suas pontas. Desta forma, fica claro que a instabilidade induzida por forças centrífugas é causada pela diferença de densidade dos fluidos e que o fenômeno não linear mais proeminente é a competição de dedos. Alguns exemplos destes curiosos padrões podem ser vistos na Fig. 8.

Nas últimas três décadas, vários aspectos do problema em célula girante de Hele-Shaw têm sido estudados tanto de forma teórica quanto experimental. No que diz respeito a experimentos, alguns grupos investigaram a dependência da morfologia dos padrões a efeitos viscosos [20, 21, 87, 88] e de molhamento [89]. Do ponto de vista teórico, muita atenção tem sido dada na busca do desenvolvimento de rigorosas soluções exatas do problema [90–94]. Métodos perturbativos também têm sido amplamente empregados, como análise linear [19–21] e teoria de modos acoplados fracamente não linear [95], para esclarecer problemas referentes à estabilidade da interface e o mecanismo por trás da competição dos dedos. Sofisticadas simulações numéricas também foram desenvolvidas usando-se diferentes abordagens: método espectral [96, 97], integrais de contorno [98], campo de fase [99] e interface difusiva [22] são apenas alguns dos métodos mais empregados na tentativa de se entender a física da dinâmica da competição dos dedos e do fenômeno de *pinch-off* que ocorre tanto em deslocamento de fluidos miscíveis quanto imiscíveis. Por fim, alguns grupos investigaram o papel da força de Coriolis na dinâmica da interface [19, 100–105].

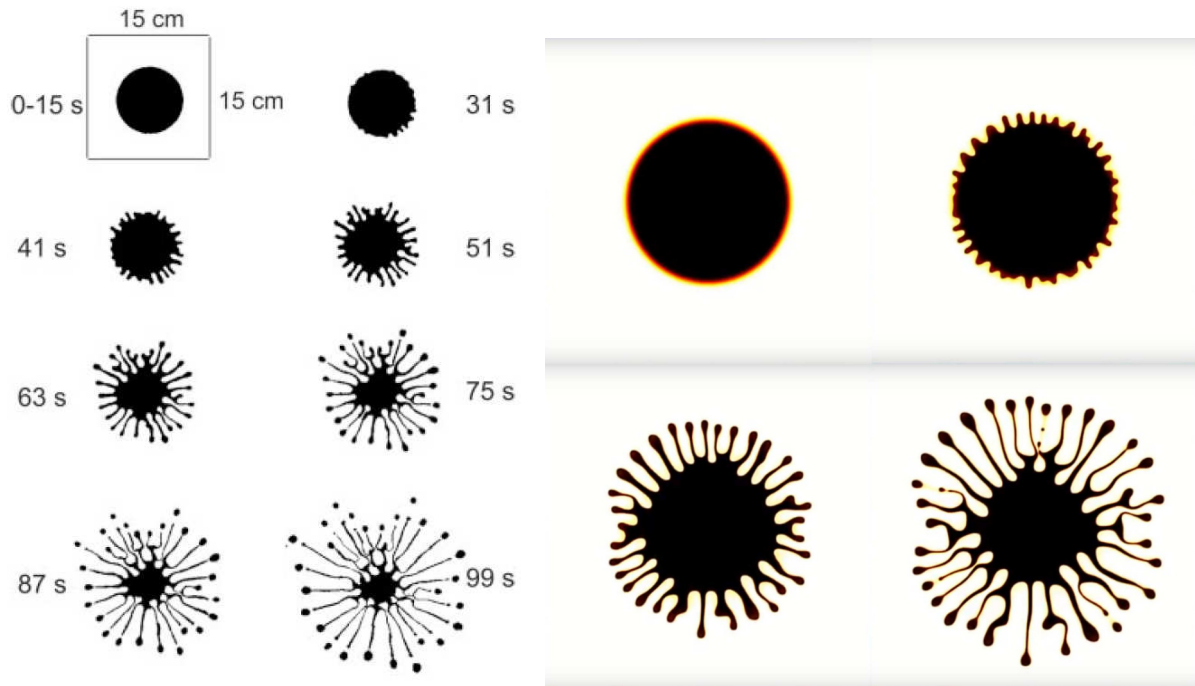


Figura 8 – Na figura à esquerda (retirada da Ref. [21]), temos uma sequência temporal ilustrando os padrões de interface em um experimento de rotação em célula de Hele-Shaw, enquanto que à direita, é possível verificar uma simulação do problema feita na Ref. [22]. Neste processo, o espaçamento das placas é constante e não há injeção, porém a célula gira em torno do eixo perpendicular às placas. A interface, que inicialmente é circular, distorce devido às forças centrífugas e dá origem a longos dedos de comprimentos variados com formação de pequenas gotas em suas pontas. Aqui, a instabilidade da interface ocorre pela diferença de densidade entre os fluidos e não mais pela diferença de viscosidade, como foi mostrado nos casos abordados anteriormente.

Apesar da grande e inegável contribuição científica trazida pelos inúmeros estudos [19–22, 86–105] no problema do fluxo girante em Hele-Shaw, a imensa maioria dos estudos existentes concentram-se na situação em que a velocidade angular da célula é constante no tempo. No entanto, como apontado pela Ref. [87], em experimentos de laboratório reais o dispositivo de Hele-Shaw não pode atingir velocidade angular constante instantaneamente. Na realidade, em cada realização do experimento, há um pequeno intervalo transiente onde a velocidade angular parte do valor nulo até um valor finito estacionário. Desta forma, rigorosamente falando, a velocidade angular do dispositivo tem dependência temporal.

Achar as condições físicas necessárias para que a ação da velocidade angular dependente do tempo seja relevante bem como seu efeito na dinâmica não linear de dedos viscosos em célula de Hele-Shaw girante são precisamente nossos objetivos no capítulo 6.

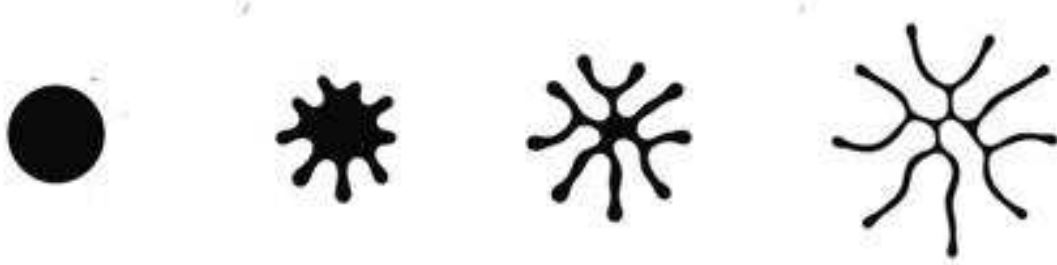


Figura 9 – Simulação numérica (cortesia do Dr. David Jackson) mostrando um exemplo de padrão típico para uma gota de ferrofluido em célula de Hele-Shaw. A gota de líquido magnético, inicialmente circular, é submetida a um campo magnético uniforme perpendicular ao plano da célula, dando origem ao interessante padrão em formato de labirinto.

1.1.4 Fluidos magnéticos em células de Hele-Shaw

Até o momento, todos os problemas mencionados anteriormente foram analisados considerando o escoamento de fluidos do tipo newtoniano e não magnéticos. Nesta seção, apresentaremos uma nova classe de fluidos que interagem com campo magnético externo e podem até mesmo assumir características de fluidos não newtonianos dependendo da situação. Ao contrário dos fluidos newtonianos, os não newtonianos não apresentam uma relação de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, e sua viscosidade (não constante) pode inclusive ter dependência na própria taxa de deformação. Os fluidos em questão são os ferrofluidos e fluidos magneto reológicos (MR). Tais líquidos magnéticos formam uma classe especial de materiais sintéticos para o qual escoamento, formato e algumas propriedades físicas como, por exemplo, viscosidade, *yield-stress* e propriedades ópticas não lineares, respondem imediatamente e podem ser manipulados por um campo magnético aplicado. Ferrofluidos [106–112] são suspensões coloidais estáveis compostas de pequenas partículas magnéticas, de domínio magnético único e tamanho nanométrico, dispersas em um líquido não magnético. Quando não há presença de um campo magnético externo, ferrofluidos se comportam como qualquer outro líquido não magnético. Caso contrário, na presença de um campo magnético externo, seus pequenos dipolos microscópicos se alinham na direção do campo aplicado, exibindo diferentes comportamentos responsáveis pela grande variedade de padrões. Na Fig. 9, por exemplo, ilustramos um destes padrões típicos para ferrofluido. Apesar da rápida resposta a campos magnéticos, ferrofluidos são capazes de manter sua fluidez mesmo quando submetidos a intensos gradientes de campo magnético. Além disso, este fluido é tipicamente newtoniano, sendo completamente livre de encadeamento de partículas, fenômeno resultante da atração magnética entre as partículas magnéticas suspensas no líquido.

Ao contrário dos ferrofluidos, fluidos MR [113–117] são suspensões coloidais compostas de partículas magnetizadas bem maiores, de multi domínio magnético e tamanho da ordem de microns, dispersas num líquido não magnético. Um interessante atributo desse fluido é



Figura 10 – Na figura à esquerda, temos um fluido magneto reológico submetido a um campo magnético perpendicular ao plano da página. Devido ao campo, as partículas do fluido tendem a se agregar e o fluido em si adquire aspecto de uma substância sólida. A partir do momento que o campo magnético é desligado, caso ilustrado pela figura à direita, o fluido rapidamente volta a escoar e se comportar como um fluido convencional.

sua capacidade de sofrer um processo de solidificação quando submetido a um forte campo magnético, tornando-o um fluido marcadamente não newtoniano. Na presença do campo aplicado, as partículas do fluido MR tendem a se agregar e assumir uma configuração de longas cadeias (o encadeamento das partículas é intenso). Isto, por sua vez, é responsável por uma mudança reológica no fluido, que passa do estado líquido para uma espécie de estado quase sólido, como podemos verificar na Fig. 10. Tal mudança é brusca e de natureza reversível. Estes fluidos apresentam também algumas interessantes propriedades viscoelásticas, possuindo uma considerável dependência do *yield-stress* com o campo magnético aplicado. Fluidos *yield-stress* são caracterizados pelo fato de suportarem tensões finitas sem, no entanto, escoarem [118–121].

Devido à peculiaridade desses fluidos inteligentes, os mesmos têm sido utilizados para o desenvolvimento de novas tecnologias e ainda possuem aplicações na medicina. Ferrofluidos, por exemplo, são usados como barreira impedindo a contaminação de disco rígidos por detritos indesejáveis. Eles também possuem a capacidade de diminuir o atrito entre superfícies. Quando aplicado no revestimento da superfície de um forte magneto, é capaz de fazer o mesmo deslizar acima de outra superfície sofrendo uma resistência mínima. Por fim, ferrofluidos ainda podem ser usados na medicina como agentes de contraste para exames de ressonância magnética [122, 123]. Por outro lado, os fluidos MR são mais utilizados no desenvolvimento de amortecedores de veículos pesados e até mesmo na proteção de construções contra abalos sísmicos. Militares norte-americanos também estão trabalhando no desenvolvimento de coletes e proteções que fazem uso deste tipo de fluido.

Vê-se por isso, que a aplicabilidade e uso de fluidos magnéticos é muito grande, o que impulsiona um crescente interesse da comunidade científica no entendimento das propriedades e da dinâmica dos mesmos. Os capítulos 7 e 8 serão destinados ao estudo de fluidos magnético confinados em célula de Hele-Shaw e submetidos a um campo magnético com dependência na coordenada radial.

1.2 Roteiro dos próximos capítulos

- No Cap. 2, faremos uma conexão do *undercooling* cinético com a ação do ângulo de contato dinâmico, mostrando de maneira quantitativa que a contribuição do *undercooling* cinético naturalmente aparece como uma função linear da componente normal da velocidade na interface. Mostraremos também que o *undercooling* cinético atrasa, mas não suprime, o desenvolvimento dos fenômenos de alargamento e divisão dos dedos no fluxo em célula radial. Por fim, nossos resultados indicam que o *undercooling* cinético possui um papel chave no aparecimento de dedos bifurcados para o fluxo em geometria retangular.
- No Cap. 3, nossa atenção será voltada para os efeitos do número de capilaridade Ca nas instabilidades de dedos viscosos numa célula de Hele-Shaw com placa superior radialmente inclinada. Por meio da abordagem fracamente não linear, identificaremos transições de estabilidade no nosso sistema. Mostraremos que, para pequenos valores de Ca , a interface é estabilizada (desestabilizada) na célula convergente (divergente) com respeito ao comportamento equivalente que ocorre na célula de Hele-Shaw com placas paralelas (uniforme). Entretanto, para grandes valores de Ca , observaremos uma mudança no comportamento da estabilidade relativa, ou seja, a célula convergente passa a desestabilizar a interface (em comparação com a célula uniforme), enquanto que a célula divergente produz interfaces relativamente mais estáveis.
- No Cap. 4, usaremos uma lei de Darcy generalizada para analisar a formação de dedos viscosos em fluxo radial considerando a ação conjunta da capilaridade e dos efeitos inerciais para valores arbitrários de razão de viscosidade e densidade. Se efeitos inerciais não são considerados, nossos resultados teóricos apontam para uma forte dependência da morfologia dos padrões com a razão de viscosidade, onde mecanismos de ramificação como a bifurcação e a quadrifurcação entram em ação conforme a capilaridade varia. Quando os efeitos inerciais são relevantes, os padrões adquirem aspecto de crescimento dendrítico, caracterizado pelo aparecimento do fenômeno de *sidebranching*.
- No Cap. 5, por meio da lei de Darcy generalizada, pretendemos mostrar que os efeitos inerciais são responsáveis pela formação das estruturas dendríticas reportadas pelos experimentos que usam valores altos para a velocidade de levantamento em célula de Hele-Shaw. Adicionalmente, mostraremos que os efeitos inerciais aumentam os eventos de competição entre os dedos.
- No Cap. 6, estudaremos o impacto da velocidade angular dependente do tempo na dinâmica da célula girante de Hele-Shaw. Mostraremos que, conforme as razões de viscosidade e densidade mudam, a ação conjunta de uma velocidade angular dependente do tempo e dos efeitos inerciais afetam significativamente os eventos de competição, induzindo a várias mudanças no comportamento tradicional (velocidade angular constante) da variabilidade do comprimento dos dedos.

- No Cap. 7, examinaremos a formação de padrões de interface quando uma gota de líquido magnético (ferrofluido ou fluido MR), cercada por um fluido não magnético, é submetida a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw. Soluções exatas estacionárias serão encontradas por meio do formalismo de *vortex-sheet* e, posteriormente, comparadas com as soluções perturbativas resultantes de uma dinâmica fracamente não linear. Nossos resultados indicam que, usando apenas alguns modos de Fourier, é possível obter uma boa concordância entre as soluções estacionárias exatas e as perturbativas. Além disso, nossa análise mostra que todas as soluções exatas são estáveis.
- No Cap. 8, investigaremos um problema magnetoelástico para o qual uma gota de ferrofluido viscosa, circundada por um fluido não magnético, é submetida a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw. A elasticidade entra em ação quando os fluidos são postos em contato e, devido a uma reação química, a interface entre eles torna-se uma fina camada elástica semelhante a um gel. Uma teoria perturbativa de estabilidade linear será usada para examinar como as ações conjuntas de forças elásticas e magnéticas podem levar ao desenvolvimento de enrugamentos senoidais de baixa amplitude na interface elástica. Além disso, a abordagem não perturbativa da *vortex-sheet* será empregada para examinar o surgimento de estruturas fortemente não lineares em equilíbrio, induzidas magneticamente e apresentado morfologias formadas por enrugamentos e dobramentos. Uma conexão entre as soluções magnetoelásticas (induzidas pelo campo magnético radial) e as estruturas elásticas produzidas por forças centrífugas também será discutida.
- No Cap. 9, apresentaremos as conclusões de nossos resultados.

1.3 Lista de publicações

Durante a realização deste programa de doutorado, nossa pesquisa resultou na publicação dos seguintes artigos científicos:

1. P. H. A. Anjos, E. O. Dias e J. A. Miranda, *Kinetic undercooling in Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **92**, 043019 (2015).
2. P. H. A. Anjos, E. O. Dias e J. A. Miranda, *Inertia-induced dendriticlike patterns in lifting Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. Fluids **2**, 014003 (2017).
3. P. H. A. Anjos, E. O. Dias e J. A. Miranda, *Radial fingering under arbitrary viscosity and density ratios*, Phys. Rev. Fluids **2**, 084004 (2017).
4. P. H. A. Anjos, V. M. M. Alvarez, E. O. Dias e J. A. Miranda, *Rotating Hele-Shaw cell with a time-dependent angular velocity*, Phys. Rev. Fluids **2**, 124003 (2017).

5. P. H. A. Anjos, S. A. Lira e J. A. Miranda, *Fingering patterns in magnetic fluids: Perturbative solutions and the stability of exact stationary shapes*, Phys. Rev. Fluids **3**, 044002 (2018).

6. P. H. A. Anjos, E. O. Dias e J. A. Miranda, *Fingering instability transition in radially tapered Hele-Shaw cells: Insights at the onset of nonlinear effects*, Phys. Rev. Fluids **3**, 124004 (2018).

7. P. H. A. Anjos, G. D. Carvalho, S. A. Lira e J. A. Miranda, *Wrinkling and folding patterns in a confined ferrofluid droplet with an elastic interface*, Phys. Rev. E **99**, 022608 (2019). **Este artigo foi selecionado para aparecer na seção *Kaleidoscope* da revista Physical Review E em Fevereiro de 2019.**

2 UNDERCOOLING CINÉTICO EM FLUXOS DO TIPO HELE-SHAW

2.1 Introdução

A instabilidade de Saffman-Taylor [1] é um dos problemas mais estudados entre sistemas dinâmicos que evoluem e apresentam formação de padrões [6]. Como mencionado no capítulo 1, a instabilidade ocorre quando um fluido desloca outro de maior viscosidade entre o estreito espaço que separa as duas placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw. Para fluxos longitudinais em uma célula de Hele-Shaw retangular [2, 4, 5, 26, 44, 124], o sistema evolui até que tipicamente um dedo estacionário domine a dinâmica. Em contrapartida, para injeção radial de fluido (Hele-Shaw radial) [24, 34, 39, 40, 45, 125] os dedos tendem a evoluir e passar por contínuos eventos de bifurcação em suas pontas, resultando em padrões de morfologia mais ramificada e complexa. Em comparação com o fluxo radial, normalmente, fluxos em geometria retangular não apresentam bifurcações nas pontas dos dedos. No entanto, simulações numéricas [44, 46, 126] e experimentos [124, 127, 128] na geometria retangular de Hele-Shaw mostraram que os dedos viscosos podem se tornar instáveis a ponto de exibir eventos de bifurcação em suas pontas, mas apenas em estágios avançados da dinâmica e para velocidades de fluxo suficientemente altas. Neste contexto, podemos dizer então que a bifurcação de dedos é um mecanismo básico para o processo de formação de dedos viscosos.

No capítulo 1, comentamos que a dinâmica do problema de Saffman-Taylor é regida pela lei de Darcy em conjunto com a equação de incompressibilidade de fluidos. Além destas equações fundamentais, duas condições de contorno na interface fluido-fluido [1, 2, 6, 26, 34, 44, 45] são necessárias para a descrição física do problema em questão: a condição de contorno cinemática e a condição de contorno de diferença de pressão, sendo esta última a equação chave para incluir a competição de efeitos estabilizantes (ou de regularização) e desestabilizantes atuando na interface que separa os fluidos. Uma das estratégias mais comuns e usadas como método de regularização é a inclusão do termo envolvendo o produto da tensão superficial σ e da curvatura interfacial κ na equação de Young-Laplace. Apesar de não ser a única estratégia de regularização existente, este método tem sido amplamente usado e estudado [6, 46–49] nos problemas de Saffman-Taylor. Em contrapartida, em se tratando de fluxo em Hele-Shaw, o método de regularização por inclusão do termo de *undercooling* cinético cv_n recebeu pouca atenção ao longo dos anos.

O termo de *undercooling* cinético cv_n envolve o produto entre o parâmetro de *undercooling* cinético c e a componente da velocidade normal à interface v_n . Em fluxo do tipo Hele-Shaw, este termo foi considerado algum tempo atrás por Romero [129]. Por meio de uma abordagem teórica do problema, o mesmo incluiu, de uma maneira *ad hoc*, uma contribuição linearmente proporcional à v_n na condição de contorno da diferença de pressão (equação de Young-Laplace).

Na Ref. [129], foi assumido que este termo de *undercooling* cinético era conectado com a curvatura interfacial ao longo da direção transversa às placas da célula de Hele-Shaw. Infelizmente, nenhuma justificativa quantitativa foi dada ao assumir esta conexão. Logo depois, no começo dos anos 90, Weinstein *et al.* [130] abordaram esta questão e incorporaram um modelo de ângulo de contato dinâmico para dedos viscosos na geometria retangular da célula de Hele-Shaw. No entanto, como apontado na Ref. [131], a análise assintótica implementada por Weinstein *et al.* é baseada na presunção de um estado estacionário e, portanto, não possui aplicação direta no problema mais geral do fluxo radial em Hele-Shaw, onde a interface não atinge um tal estado estacionário.

Apesar da natureza *ad hoc* do termo de *undercooling* cinético proposta pela Ref. [129] e da abordagem ainda incompleta apresentada na Ref. [130], Dallaston e colaboradores, recentemente, revisitaram o problema e analisaram os efeitos da tensão superficial e do *undercooling* cinético para ambas as geometrias retangular e radial da célula de Hele-Shaw [132–135]. Alguns resultados interessantes foram obtidos. Como exemplo, a análise analítica de estabilidade linear para o fluxo radial [132] mostrou que no caso da injeção (expansão de uma bolha de baixa viscosidade), tensão superficial e *undercooling* cinético são ambos estabilizantes. No entanto, para o caso da sucção (contração de uma bolha de baixa viscosidade) estes dois efeitos atuam de forma contrária: enquanto que a tensão superficial estabiliza a interface, o *undercooling* cinético tende a desestabilizá-la.

Na Ref. [133], Dallaston e McCue realizaram simulações numéricas para a expansão e contração de uma bolha para tempos avançados da dinâmica. Foi encontrado que o *undercooling* cinético tende a atrasar a formação de dedos durante a expansão, enquanto que favorece a ocorrência de *pinch-off* durante a contração. Técnicas numéricas e soluções exatas foram utilizadas na Ref. [134] para o fluxo radial e retangular. Foi verificado a formação de dedos para baixos valores de *undercooling* cinético e surgimento de cantos (ou quinas) para valores suficientemente altos de *undercooling* cinético. Finalmente, na Ref. [135], estes pesquisadores concentraram-se no estudo da formação e seleção de dedos nas circunstâncias de um fluxo retangular, onde foi demonstrado que *undercooling* cinético atua contra o estabelecimento de altas velocidades e previne divergência de soluções não regularizadas.

Diante deste cenário, dois principais motivos nos impulsionaram a desenvolver a pesquisa apresentada neste capítulo: primeiramente, a suposição *ad hoc* [129] de que, para escoamento em Hele-Shaw, o termo de *undercooling* cinético assume o formato funcional específico cv_n (uma função linear da velocidade normal à interface). Perceba que nas Refs. [129, 132–135], pouco foi discutido sobre a natureza física do parâmetro de *undercooling* cinético c e sua relação com outras grandezas físicas do problema. Sendo assim, esta questão ainda precisa ser examinada. A segunda motivação vem do fato de que os resultados obtidos nas Refs. [132–135] concentram-se na atuação do *undercooling* cinético no regime linear (análise de estabilidade linear) para baixos valores de tempo, e para o regime fortemente não linear (simulação numérica) que naturalmente domina a dinâmica para valores mais altos de tempo. Portanto, uma abordagem intermediária

entre estes dois regimes ainda precisa ser desenvolvida.

No presente capítulo, primeiramente mostraremos que a conexão assumida entre o ângulo de contato dinâmico e a velocidade normal à interface pode ser naturalmente derivada de forma quantitativa com a ajuda da chamada lei de Hoffman-Voinov-Tanner [136–141]. Posteriormente, nossa atenção será voltada para o regime intermediário da dinâmica da evolução dos dedos, onde efeitos não lineares começam a desempenhar um papel significativo nas características morfológicas da interface fluido-fluido. Faremos isso empregando uma análise fracamente não linear do problema [5, 45], examinando a influência do termo de *undercooling* cinético no formato dos dedos viscosos. De forma específica, estamos interessados no impacto deste termo nos eventos de alargamento e de bifurcação da ponta dos dedos. Nossa abordagem fracamente não linear permitirá acesso aos efeitos do ângulo de contato dinâmico no desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor para ambas as geometrias radial e retangular da célula de Hele-Shaw.

2.2 Problema físico e equações do sistema

Nesta seção, descrevemos o desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor induzidas pela injeção em célula de Hele-Shaw radial e também as equações envolvidas neste processo. Na seção 2.2.1, deduzimos de forma quantitativa a condição de contorno da diferença de pressão (eq. de Young-Laplace) que leva em consideração os efeitos do ângulo de contato dinâmico. Esta consideração, juntamente com o uso da lei de Hoffman-Voinov-Tanner, nos levará a uma contribuição de *undercooling* cinético que é de fato uma função linear da velocidade normal à interface [Eqs. (2.9) e (2.10)].

Seção 2.2.2 é reservada para a derivação da equação diferencial de modos acoplados (até segunda ordem de perturbação), permitindo descrever a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface [Eqs. (2.11)-(2.15)]. Esta equação diferencial não linear nos proporciona a investigação analítica do impacto do *undercooling* cinético na evolução dinâmica e nas principais características morfológicas dos padrões de dedos viscosos. A influência do *undercooling* cinético na geometria radial (retangular) da célula de Hele-Shaw é discutida na seção 2.3.1 (seção 2.3.2).

2.2.1 Origem física do *undercooling* cinético em fluxos do tipo Hele-Shaw

O sistema físico em questão consiste de uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b entre as placas. Um fluido de viscosidade η_2 é deslocado radialmente pelo processo de injeção de um fluido menos viscoso e de viscosidade η_1 . Os fluidos são imiscíveis e incompressíveis, possuindo uma tensão superficial σ entre eles. O fluido 1 é injetado no centro da célula a uma taxa constante de injeção Q (igual à área coberta por unidade de tempo). Levaremos em consideração a situação mais instável de Saffman-Taylor, na qual $\eta_2 \gg \eta_1$ de forma que o contraste de viscosidade seja $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_1 + \eta_2) \approx 1$.

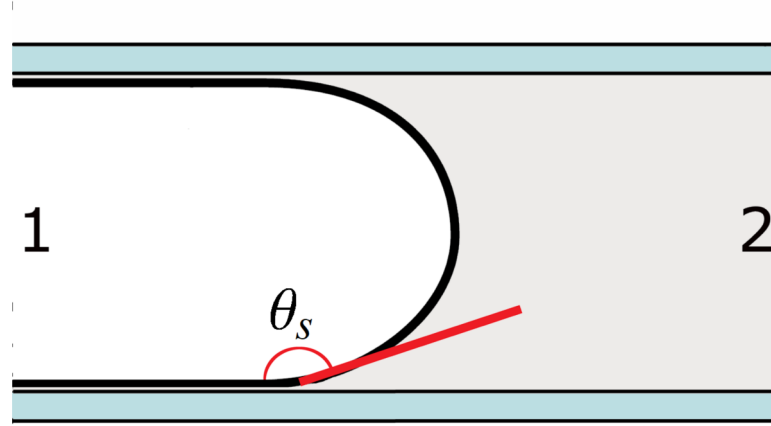


Figura 11 – Representação do menisco curvo da interface durante o deslocamento do fluido 2 pela injeção radial do fluido 1. Aqui, θ_s é o ângulo de contato estático medido entre as placas e o menisco curvo da interface.

Apesar do problema da célula de Hele-Shaw radial ser tridimensional, é possível torná-lo efetivamente bidimensional ao tomar médias transversais e obter $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(r, \varphi)$ e $p_j = p_j(r, \varphi)$, que são, respectivamente, as médias transversais da velocidade e da pressão ao longo do eixo z . Logo, as equações que regem a dinâmica de um fluido na célula de Hele-Shaw são a lei de Darcy bidimensional [1, 6, 34]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (2.1)$$

e condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (2.2)$$

onde $j = 1, 2$ denota o fluido interno (1) ou externo (2). A coordenada radial r representa a distância de um ponto qualquer até o ponto de injeção, o qual é escolhido como a origem do sistema de coordenadas polares. Além disso, o ângulo polar é representado por φ .

Tomando o rotacional da lei de Darcy é possível verificar que o fluxo é, de fato, irrotacional ($\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$), nos permitindo então definir um potencial de velocidade que obedece a equação de Laplace $\nabla^2 \phi_j = 0$. Para descrever a dinâmica da evolução da interface, é necessário relacionar o potencial de velocidade $\phi_j(r, \varphi)$ com a posição da interface $\mathcal{R}(\varphi, t)$. Isto pode ser feito fazendo-se uso da condição de contorno cinemática, a qual expressa a continuidade da componente normal da velocidade de cada fluido na interface $\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Observe que esta condição relaciona o movimento da interface com a cinemática dos fluidos. Sabendo que o vetor unitário normal à interface pode ser escrito como $\hat{\mathbf{n}} = \nabla(r - \mathcal{R})/|\nabla(r - \mathcal{R})|$, podemos expressar a condição cinemática em coordenadas polares

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \varphi} \right)_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.3)$$

O problema é então completamente especificado pela condição de contorno da diferença de pressão, matematicamente descrita pela equação de Young-Laplace [1, 2, 4–6, 24, 26, 34, 39, 40,

44, 45, 124, 125]. Esta relação considera a diferença de pressão na interface $\Delta p = (p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}}$, dada por

$$\Delta p = \sigma \kappa - \frac{2\sigma}{b} \cos \theta_s. \quad (2.4)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima representa a contribuição da tensão superficial relacionada com a curvatura da interface no plano da célula de Hele-Shaw. Em contrapartida, o segundo termo do lado direito da Eq. (2.4) refere-se ao efeito da curvatura associada com o perfil da interface na direção perpendicular às placas da célula. Aqui, θ_s é o ângulo de contato estático medido entre as placas e o menisco curvo da interface (ver Fig. 11). Em relação ao menisco, assumimos o formato de um perfil circular com raio $b/(2 \cos \theta_s)$.

Na realidade, a Eq. (2.4) é a forma mais simples e tradicional [1, 2, 4–6, 24, 26, 34, 39, 40, 44, 45, 124, 125] de representar a diferença de pressão na interface para o desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor. Entretanto, a maioria dos estudos em questão negligenciam o importante efeito hidrodinâmico relacionado à linha de contato dinâmica. Esta linha representa a região de contato entre os dois fluidos com a placa da célula, ou seja, a linha trifásica que se move em relação ao substrato sólido. Este fenômeno nos leva a um ângulo de contato dinâmico local θ_d dependente da velocidade local U a qual a linha de contato move-se em relação às placas de vidro. Neste trabalho, estamos interessados em ir um passo além do que já foi estudado na literatura e analisar o impacto do θ_d nas instabilidades de dedos viscosos. Portanto, usaremos a Eq. (2.4) como ponto de partida para adicionar, de forma simples, os efeitos relacionados ao ângulo de contato dinâmico. Desta forma, na Eq. (2.4), devemos substituir θ_s por θ_d .

Começaremos então considerando uma expressão dependente da velocidade para θ_d , representada pela clássica lei de Hoffman-Voinov-Tanner [11, 89, 136, 137, 139–141]

$$\theta_d^3 = \theta_s^3 + \ell \text{Ca}, \quad (2.5)$$

onde $\text{Ca} = \eta_2 U / \sigma$ é o número de capilaridade, o qual quantifica a razão entre forças viscosas e de tensão superficial. Aqui, $\theta_d < 3\pi/4$ e $\ell = 9 \ln(Y/Y_\infty)$, sendo Y uma escala macroscópica relacionada com o espaçamento b entre as placas e Y_∞ representa um comprimento microscópico de *cutoff* a partir do qual modelos hidrodinâmicos macroscópicos não mais se aplicam [89]. Como calculado nas Refs. [89, 136, 140], atribuindo o valor de $Y \approx b$, temos que $\ell \approx 80 - 100$. Como discutido em detalhes nas Refs. [11, 89, 136, 137, 139–141], é necessário mencionar que a Eq. (2.5) é válida somente se as seguintes condições se aplicarem: (i) o número de capilaridade é pequeno ($\text{Ca} \lesssim 0.1$); (ii) efeitos inercias podem ser negligenciados; (iii) as superfícies são perfeitas (sem heterogeneidade), de forma a não existir histerese do ângulo de contato. Todas estas condições são satisfeitas no atual problema de Hele-Shaw.

Assumindo baixos valores de número de capilaridade em (2.5) e considerado somente a correção cinética dominante para o ângulo de contato dinâmico, nós obtemos

$$\theta_d = \theta_s \left(1 + \frac{\ell \text{Ca}}{3\theta_s^3} \right). \quad (2.6)$$

A influência do ângulo de contato dinâmico na descontinuidade da pressão na interface pode ser acessada substituindo θ_s , na Eq. (2.4), por θ_d , definido pela Eq. (2.6). Fazendo esta substituição e expandindo $\cos[\theta_s + \ell Ca / (3\theta_s^2)]$ na expressão de Young-Laplace (2.4), obtemos

$$\Delta p = \sigma \kappa - \frac{2\sigma}{b} \left[\cos \theta_s \cos \left(\frac{\ell Ca}{3\theta_s^2} \right) - \sin \theta_s \sin \left(\frac{\ell Ca}{3\theta_s^2} \right) \right], \quad (2.7)$$

onde assumiremos que $Ca \ll 1$ para obter

$$\Delta p \approx \sigma \kappa - \frac{2\sigma}{b} \left[\cos \theta_s - \sin \theta_s \left(\frac{\ell Ca}{3\theta_s^2} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Examinando a Eq. (2.8), é possível verificar que, quando o limite de baixo número de capilaridade é considerado, a contribuição do ângulo de contato dinâmico naturalmente implica numa dependência linear na velocidade da interface. É importante mencionar que este resultado está de acordo com os obtidos na Ref. [142] para deslocamento de fluidos imiscíveis em tubos capilares.

Para completar a descrição das equações que regem o fluxo em célula de Hele-Shaw radial levando-se em consideração o efeito do ângulo de contato dinâmico, nós consideramos que a linha de contato move-se de forma que sua velocidade U é dada pela velocidade normal à interface v_n . Logo, podemos reescrever a Eq. (2.8) como

$$\Delta p = \sigma \kappa - \frac{2\sigma}{b} \cos \theta_s + c v_n, \quad (2.9)$$

onde

$$c = \frac{2\ell \eta_2 \sin \theta_s}{3b\theta_s^2}. \quad (2.10)$$

A Eq. (2.9) é um dos principais resultados deste capítulo. Ela claramente indica a conexão física entre o efeito de *undercooling* cinético (quantificado pelo termo $c v_n$) e a ação do ângulo de contato dinâmico. Vale a pena enfatizar que, como apontado na seção 2.1, esta conexão foi incorporada de uma maneira *ad hoc* na maioria dos trabalhos anteriores que abordaram este tópico. Além disso, pela Eq. (2.10), é possível verificar que, agora, o parâmetro de *undercooling* cinético c é explicitamente escrito em termos do ângulo de contato estático θ_s , viscosidade do fluido deslocado η_2 , espaço entre as placas b e pelo comprimento microscópico do fluxo ℓ .

Antes de avançarmos, é preciso comentar que o efeito do ângulo de contato dinâmico em dedos viscosos já foi analisado na Ref. [89]. No entanto, a análise foi feita em um diferente contexto. Na Ref. [89], as instabilidade dinâmicas eram causadas pela rotação em célula de Hele-Shaw para a qual um fluido perfeitamente molhante era confinado entre as placas. Nestas circunstâncias, o ângulo de contato estático pode ser negligenciado ($\theta_s \approx 0$) e, conseqüentemente, a ação do ângulo de contato dinâmico na condição de pressão era dado por um termo proporcional à $Ca^{2/3}$. Sendo assim, neste caso, a dependência linear da condição de pressão com a velocidade normal à interface, como mostrado pela Eq. (2.9), não acontece.

2.2.2 Equação diferencial de modos acoplados com inclusão de *undercooling* cinético

Neste ponto, possuímos todos os elementos necessários para obter a equação diferencial de modos acoplados até segunda ordem de perturbação. Tal equação descreverá a evolução temporal da interface considerando os efeitos de *undercooling* cinético. Em nossa abordagem perturbativa, podemos representar a posição da interface por $\mathcal{R}(\varphi, t) = R(t) + \zeta(\varphi, t)$, onde $R(t) = (R_0^2 + Qt/\pi)^{1/2}$ é o raio não perturbado dependente do tempo, com R_0 sendo o raio não perturbado para $t = 0$. Aqui, $\zeta(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\varphi)$ é a perturbação da interface com amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$ e números de onda inteiros n . Nossa análise fracamente não linear leva em consideração termos até segunda ordem em ζ e usa conservação de massa para conectar a amplitude do modo $n = 0$ com a amplitude dos outros modos, de forma que $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$. A inclusão do modo $n = 0$ é feita para manter a área da interface perturbada independente da perturbação ζ , ou seja, $\mathcal{A} = \pi R^2$.

Seguindo o procedimento tradicional realizado em estudos fracamente não lineares em fluxo de Hele-Shaw [5, 45], devemos calcular, primeiramente, o potencial de velocidade na interface fluido-fluido e usar a condição de contorno cinemática (2.3) para expressar ϕ em termos de ζ_n . Substituindo os resultados deste cálculo, juntamente com a condição de contorno da diferença de pressão (2.9), na lei de Darcy (2.1), sempre mantendo termos até segunda ordem em ζ obtemos, após tomada a transformada de Fourier, a equação de movimento para as amplitudes de perturbação (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \quad (2.11)$$

onde o ponto acima de ζ_n [na Eq. (2.11)] representa uma derivada total no tempo.

$$\lambda(n) = \frac{1}{1 + \Theta(n)} \left\{ \frac{Q(|n| - 1)}{2\pi R(t)^2} - \frac{\alpha |n|(n^2 - 1)}{R(t)^3} \right\} \quad (2.12)$$

é a taxa de crescimento linear, $\alpha = b^2 \sigma / (12\eta_2)$ e a função

$$\Theta(n) = \frac{c b^2 |n|}{12\eta_2 R(t)} \quad (2.13)$$

é responsável pela inclusão dos efeitos de *undercooling* cinético.

Os termos de acoplamento de segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned} F(n, n') = & \frac{1}{1 + \Theta(n)} \left\{ \frac{Q|n|}{2\pi R(t)^3} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] \right. \\ & \left. - \frac{\alpha |n|}{R(t)^4} \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] - \Theta(n) \frac{Q}{4\pi R(t)^3} n'(n - n') \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

e

$$G(n, n') = \frac{1}{1 + \Theta(n)} \left\{ \frac{1}{R(t)} \left[|n| [1 - \text{sgn}(nn')] \right] - 1 \right\}, \quad (2.15)$$

onde a função sinal sgn é igual a ± 1 de acordo com o sinal do seu argumento.

As equações (2.11)-(2.15) também constituem um dos principais resultados deste capítulo. A Eq. (2.11) é a expressão de modos acoplados do problema de Saffman-Taylor na geometria radial da célula de Hele-Shaw levando-se em consideração os efeitos de *undercooling* cinético. Note que ao tomarmos $c = 0$ na Eq. (2.13), recuperamos as expressões usuais para λ , F e G obtidas para fluxo em célula de Hele-Shaw radial sem a contribuição do *undercooling* cinético [45]. Vale ressaltar que a relação de dispersão linear (2.12) coincide com a expressão equivalente obtida por meio de uma análise puramente linear do problema da expansão de uma bolha com *undercooling* cinético, previamente estudado por Dallaston e McCue [132, 133]. A informação mais relevante que pode ser extraída da análise puramente linear é o comportamento estabilizante proporcionado à interface contra pequenas perturbações.

Como os aspectos lineares do problema já foram exaustivamente discutidos nas Refs. [132, 133], nossa atenção será voltada para o acoplamento de modos e as contribuições não lineares oriundas das funções $F(n, n')$ e $G(n, n')$ na Eq. (2.11). Uma importante característica da nossa abordagem até segunda ordem de perturbação é a possibilidade de, com o acoplamento apropriado de modos de Fourier, extrair informação analítica sobre a morfologia da interface (formato dos dedos) no início do surgimento das não linearidades [5, 45]. Nós estamos particularmente interessados em entender como o *undercooling* cinético influencia os mecanismos de alargamento e bifurcação de dedos nas circunstâncias de um fluxo radial e retangular em Hele-Shaw. Todas as questões não lineares serão discutidas na próxima seção.

2.3 Discussão

A análise de modos acoplados fracamente não linear, guiada pela Eq. (2.11), é bastante efetiva em fornecer pistas sobre os formatos típicos dos dedos que surgem nos padrões dinâmicos para o problema em Hele-Shaw, tanto para o fluxo em geometria retangular [5] quanto para fluxo radial [45]. Nesta seção, examinamos o impacto do *undercooling* cinético na morfologia dos dedos viscosos. Considerando a importância do fenômeno de bifurcação de dedos em fluxos do tipo Hele-Shaw, um ponto interessante a ser investigado é se há tendência dos dedos em se alargarem ou estreitarem quando o *undercooling* cinético é levado em consideração. Felizmente, tal investigação não necessita de um complicado acoplamento entre infinitos (ou vários) números de modos de Fourier. Como mostrado nas Refs. [5, 45], o fenômeno de bifurcação de dedos pode ser acessado considerando somente a interação de dois modos específicos: o modo fundamental e seu primeiro harmônico. Neste contexto, os mecanismos morfológicos básicos responsáveis pelo alargamento, bifurcação e estreitamento dos dedos podem ser eficientemente capturados já na

ordem não linear mais baixa de perturbação (segunda ordem) e apenas considerando a dinâmica entre dois modos de Fourier. Esta abordagem será usada nas seções 2.3.1 e 2.3.2 logo abaixo. A efetividade desta estratégia fracamente não linear, em particular, tem sido amplamente confirmada por um número substancial de estudos analíticos, numéricos e experimentais presentes na literatura referentes a fluxos do tipo Hele-Shaw (veja, por exemplo, as Refs. [21, 81, 95, 97–99, 143–145]).

É importante mencionar que os resultados teóricos apresentados no restante deste capítulo foram obtidos utilizando valores de parâmetros consistentes com os valores usados em experimentos típicos para fluxo retangular [1, 4, 26, 124] e radial [24, 34, 39, 40, 125] em célula de Hele-Shaw, assim como em estudos de ângulo de contato dinâmico [11, 89, 136, 137, 139–141].

2.3.1 Efeitos do *undercooling* cinético: geometria radial

Para examinar o formato da estrutura de dedos viscosos no regime fracamente não linear e sob influência dos efeitos do *undercooling* cinético, seguiremos a abordagem proposta na Ref. [45]. Nossa análise se inicia reescrevendo a Eq. (2.11) em termos dos modos cossenos e senos, onde as amplitudes reais para estes modos podem, respectivamente, ser escritas como $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$. Desta forma, a perturbação da interface adquire o formato $\zeta(\varphi, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos(n\varphi) + b_n(t) \sin(n\varphi)]$, onde $\zeta_0 = -1/4R \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2(t) + b_n^2(t)]$. Assim como na Ref. [45], a fase do modo fundamental é escolhida de forma que $a_n > 0$ e $b_n = 0$. Como mencionado anteriormente, no contexto da nossa análise de modos acoplados, alargamento e estreitamento de dedos podem ser descritos considerando a influência do modo fundamental n no crescimento do seu primeiro harmônico $2n$. Escrevendo as equações de movimento para os modos harmônicos, temos

$$\dot{a}_{2n} = \lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} T(2n, n) a_n^2, \quad (2.16)$$

$$\dot{b}_{2n} = \lambda(2n) b_{2n}, \quad (2.17)$$

onde a função ponta de dedos é definida como

$$T(2n, n) = F(2n, n) + \lambda(n) G(2n, n). \quad (2.18)$$

Pelo fato do crescimento do modo seno b_{2n} não ser influenciado pelo a_n e não possuir acoplamentos de segunda ordem [Eq. (2.17)], nossa atenção será voltada para o crescimento do modo cosseno a_{2n} , representado pela Eq. (2.16).

Mesmo sem resolver explicitamente a Eq. (2.16), apenas por inspeção é possível acessar informações valiosas a respeito do formato assumido pelos dedos emergentes da interface. É de conhecimento que a função $T(2n, n)$ dita o comportamento dos dedos em suas extremidades [45]. Pela Eq. (2.16), percebe-se que, dependendo do sinal de $T(2n, n)$, o termo de ordem a_n^2 pode desencadear o crescimento de a_{2n} tanto positivamente quanto negativamente. Se $T(2n, n) < 0$, a_n^2

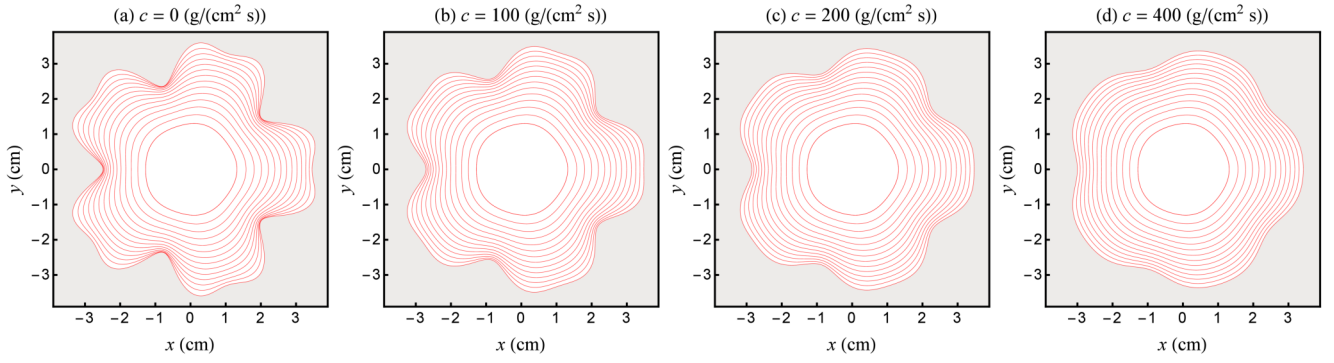


Figura 12 – Evolução temporal das interfaces. Um mesmo intervalo de tempo separa interfaces subsequentes. É considerada a interação de dois modos cosseno (a_n e a_{2n} , com $n = 5$) e valores crescentes de parâmetro de *undercooling* cinético c . Todos estes padrões evoluem até o mesmo tempo final de $t_f = 3.2$ s, com $0 \leq t \leq t_f$. A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso).

induz a um crescimento negativo, fazendo com que o dedos invasores, que apontam para fora e correspondem ao fluido 1, adquiram formato mais largo e achatado em suas pontas. Isso favorece os eventos de bifurcação de dedos. Revertendo o sinal de $T(2n, n)$, as conclusões anteriores também são revertidas. Se a função ponta de dedos é positiva, a_n^2 induz a um crescimento positivo, resultando assim num estreitamento dos dedos provenientes do fluido 1.

Para extrair, usando a abordagem fracamente não linear, as características morfológicas mais relevantes dos padrões de dedos viscosos, na Fig. 12, nós plotamos a evolução temporal da interface para valores crescentes de parâmetro de *undercooling* cinético c . Todos os padrões evoluíram até o mesmo tempo final $t_f = 3.2$ s e nós consideramos a interação do modo fundamental $n = 5$ com seu primeiro harmônico $2n = 10$. Neste gráfico, os valores usados para os parâmetros foram $Q = 3\pi$ cm²/s, $\eta_1 = 0$, $0.5 \leq \eta_2 \leq 7$ g/(cm s), $b = 0.15$ cm, $10 \leq \sigma \leq 60$ dyne/cm e $R_0 = 1$ cm. As amplitudes iniciais são $a_n(0) = R_0/100$ e $a_{2n}(0) = 0$. É importante mencionar que apesar de usarmos valores moderados para o parâmetro de *undercooling* cinético [$0 \leq c \leq 400$ g/(cm² s)], em princípio, tal grandeza pode assumir valores ainda maiores. Utilizando as múltiplas combinações possíveis de dados experimentais fornecidos pelas Refs. [1, 4, 11, 24, 26, 34, 39, 40, 89, 124, 125, 136, 137, 139–141], nós estimamos que c pode assumir valores da ordem de 10^3 g/(cm² s).

Ao examinarmos a Fig. 12, fica evidente que o *undercooling* cinético desfavorece a formação de dedos como um todo e, em particular, parece suprimir a ocorrência da bifurcação da ponta dos dedos. Enquanto que a Fig. 12(a) apresenta formação de dedos de tamanho considerável e com eventos de bifurcação evidentes, as Fig. 12(b)-Fig. 12(d), plotadas para valores crescentes de c , exibem dedos de menor comprimento e os eventos de bifurcação não são mais observados. Mesmo que o fenômeno de bifurcação de dedos não tenha sido analisado na Ref. [133], nossos resultados fracamente não lineares, provenientes da análise da Fig. 12, estão em acordo com as simulações numéricas realizadas pela Ref. [133] para tempos avançados da dinâmica de evolução das interfaces. Nestas simulações numéricas, os pesquisadores concluíram que o *undercooling*

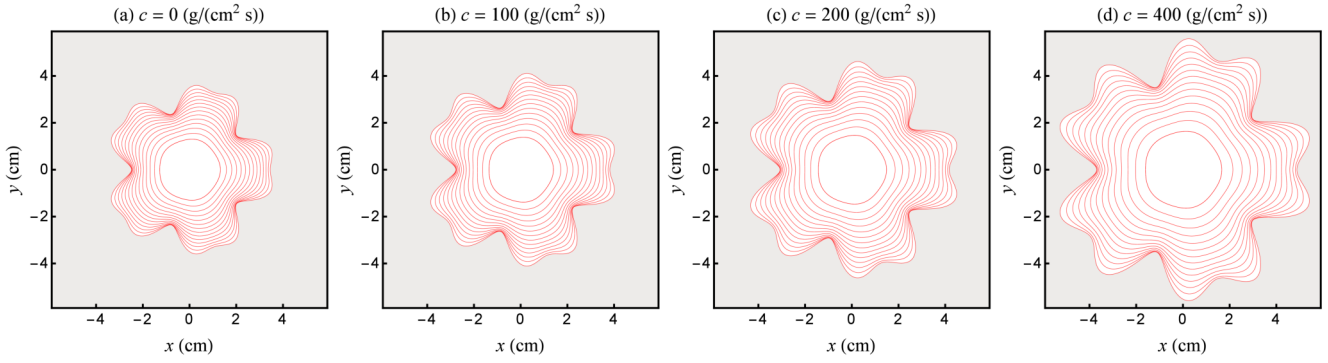


Figura 13 – Evolução temporal das interfaces. Um mesmo intervalo de tempo separa interfaces subsequentes. É considerada a interação de dois modos cosseno (a_n e a_{2n} , com $n = 5$) e valores crescentes de parâmetro de *undercooling* cinético c . Diferentemente da Fig. 12, aqui, os padrões evoluem até o maior tempo permitido τ [$0 \leq t \leq \tau$], calculado pela Eq. (2.19): (a) 3.2 s, (b) 4.2 s, (c) 5.3 s e (d) 7.8 s. Note que a Fig. 12(a) é idêntica à Fig. 13(a). A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso).

cinético atrasa a formação dos dedos.

Não obstante, pela Fig. 12, não fica evidente se o desenvolvimento da bifurcação de dedos é completamente suprimido ou simplesmente atrasado devido à ação do *undercooling* cinético. Para investigar esta relevante questão, na Fig. 13, nós usamos os mesmos valores para os parâmetros físicos e as mesmas condições iniciais utilizadas na Fig. 12, porém, agora, permitimos que cada um dos padrões evoluíssem até o maior tempo possível ($t = \tau$) para o qual nossa abordagem fracamente não linear ainda permanece válida. Para determinar estes valores de τ , seguimos a abordagem originalmente proposta por Gingras e Rácz [146] para o regime linear e estendemos seu limite de aplicabilidade para o estágio fracamente não linear da evolução das interfaces. Na Fig. 13, cada um dos padrões pode evoluir até o tempo limite onde a base dos dedos começa a se mover em direção ao centro do padrão, o que resultaria num cruzamento sucessivo de interfaces. Como estes cruzamentos não são observados em experimentos [6, 24, 34, 39, 40, 125], seguiremos a abordagem da Ref. [146] e adotaremos o maior tempo possível antes da ocorrência de cruzamentos como o tempo limite de validade da nossa descrição teórica. Neste contexto, cada um dos padrões pode evoluir até um tempo final imediatamente anterior à ocorrência de cruzamentos de interface. A utilidade e efetividade deste critério foi demonstrada na Ref. [146].

Sendo assim, para nosso problema de injeção radial, o instante em que a velocidade da interface se torna negativa pela primeira vez nos dá o limite superior para o período no qual nossa descrição fracamente não linear é válida. Esta condição de validade pode ser matematicamente representada por

$$\left[\frac{d\mathcal{R}}{dt} \right]_{t=\tau} = [\dot{R}(t) + \dot{\zeta}(\theta, t)]_{t=\tau} = 0. \quad (2.19)$$

Note que, diferentemente do que foi feito na Ref. [146], nós calculamos a Eq. (2.19) levando-se em consideração as contribuições de segunda ordem para a perturbação da interface $\zeta(\theta, t)$, descritas pela nossa equação de modos acoplados (2.11).

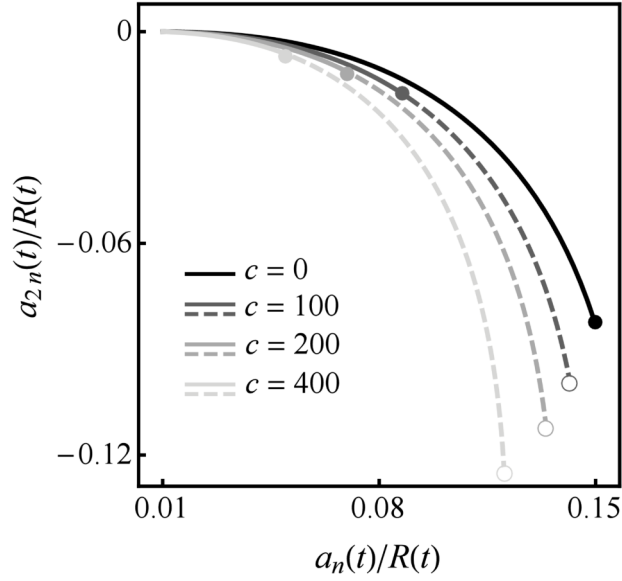


Figura 14 – Comportamento de $a_{2n}(t)/R(t)$ com respeito ao $a_n(t)/R(t)$ para a evolução dos padrões mostrados na Fig. 12 e 13. É considerado tanto a ausência ($c = 0$) quanto a presença ($c \neq 0$) dos efeitos de *undercooling* cinético. Note que c é dado em unidades de $\text{g}/(\text{cm}^2\text{s})$. Curvas sólidas correspondem às situações ilustradas na Fig. 12, onde $0 \leq t \leq t_f$, com $t_f = 3.2$ s. Os pontos relacionados a este tempo final são representados por círculos sólidos. Curvas tracejadas correspondem às situações mostradas na Fig. 13, associadas com os intervalos de tempo $t_f \leq t \leq \tau$, onde τ é o maior tempo permitido para cada c e é calculado pela Eq. (2.19). Para um dado valor de c , o tempo $t = \tau$ é indicado por um círculo aberto.

O que observamos na Fig. 13 é um tanto quanto diferente do que encontramos na análise da Fig. 12: agora, apesar dos crescentes valores de c , verificamos a formação de dedos largos e com pontas achatadas. De fato, é possível identificar claramente nas Fig. 13(a)-Fig. 13(d) o crescimento de dedos que começam a bifurcar por meio da divisão em suas pontas. Isto acontece até mesmo para valores grandes de parâmetro de *undercooling* cinético, como podemos observar na Fig. 13(d). Na realidade, o evento de bifurcação é justamente mais evidente na Fig. 13(d). Estes resultados indicam que o *undercooling* cinético atrasa o início da divisão de dedos, no entanto nunca é capaz de suprimi-lo por completo.

Finalizamos esta seção apresentando a Fig. 14, a qual ilustra um plote paramétrico exibindo o comportamento da razão $a_{2n}(t)/R(t)$ em relação à $a_n(t)/R(t)$ conforme o tempo avança. Este gráfico corresponde às situações mostradas na Fig. 12 e na Fig. 13. As curvas sólidas descrevem as situações mostradas na Fig. 12 à medida que c é variado e para tempos no intervalo $0 \leq t \leq t_f$, onde $t_f = 3.2$ s. Para cada valor de c , o tempo final t_f é indicado por círculos sólidos. Em contrapartida, as curvas tracejadas estão relacionadas com a evolução temporal dos padrões mostrados na Fig. 13 para tempos no intervalo $t_f \leq t \leq \tau$. Para cada valor de c , o correspondente valor do maior tempo permitido τ é representado por círculos vazados. É claro que t_f coincide com τ quando $c = 0$. Neste caso, o círculo sólido preto se superpõem com o círculo preto vazado, de forma que, na Fig. 14, somente o círculo sólido preto é visível.

O tipo de gráfico ilustrado na Fig. 14 é bastante conveniente para comparar as morfologias na presença e na ausência do *undercooling* cinético, uma vez que a razão $a_n(t)/R(t)$ está relacionada com o tamanho médio e com a simetria rotacional estabelecida pelo modo $n = 5$ nos padrões resultantes. Por sua vez, a razão $a_{2n}(t)/R(t)$ determina a morfologia típica da ponta dos dedos, controlando se os mesmos ficam largos e dividem-se ou se ficam estreitos e crescem mais agudos. Analisando os círculos sólidos na Fig. 14, é possível verificar de forma quantitativa o efeito de atraso proporcionado pelo *undercooling* cinético, evidenciado inicialmente na Fig. 12. Para grandes valores de c , os círculos sólidos indicam menores magnitudes em ambas as amplitudes de perturbação $a_n(t)$ e $a_{2n}(t)$ para o mesmo tempo final t_f de evolução temporal da interface fluido-fluido. Fica claro também que, conforme $a_n(t)/R(t)$ aumenta, $a_{2n}(t)/R(t)$ tende a ficar mais negativa. Esta é exatamente a fase do harmônico que favorece o alargamento e eventos de bifurcação de dedos. Além disso, para um dado valor de $a_n(t)/R(t)$, é evidente que a razão $a_{2n}(t)/R(t)$ assume valores mais negativos para os casos com $c \neq 0$. Estas informações mais qualitativas dão suporte aos resultados extraídos da Fig. 13 e indicam que, de fato, o *undercooling* cinético atrasa a ocorrência de eventos de bifurcação de dedos, mas não é capaz de impedir a sua ocorrência.

2.3.2 Efeitos do *undercooling* cinético: geometria retangular

Usando as equações fracamente não lineares para o caso do fluxo radial (2.12)-(2.15), é possível obter as equações correspondentes para o problema de dedos viscosos na geometria retangular da célula de Hele-Shaw [5, 147]. Esta transformação, mais conhecida como limite da geometria retangular, consiste em considerar as seguintes operações: $R \rightarrow \infty$ e $Q \rightarrow \infty$, de forma que $Q/(2\pi R) \equiv v_\infty$ e $n/R \equiv k$ são valores constantes. v_∞ é a velocidade de escoamento no infinito e k representa o número de onda da perturbação da interface. O limite da geometria retangular resulta numa equação de modos acoplados semelhante à expressão dada pela Eq. (2.11), onde as contribuições lineares e não lineares são dadas agora por

$$\lambda(k) = \frac{1}{1 + \Theta(k)} |k| (v_\infty - \alpha k^2), \quad (2.20)$$

$$F(k, k') = \frac{\Theta(k)}{1 + \Theta(k)} \left[\frac{v_\infty}{2} k' (k' - k) \right] \quad (2.21)$$

e

$$G(k, k') = \frac{1}{1 + \Theta(k)} |k| [1 - \text{sgn}(kk')], \quad (2.22)$$

com

$$\Theta(k) = \frac{c b^2 |k|}{12 \eta_2}. \quad (2.23)$$

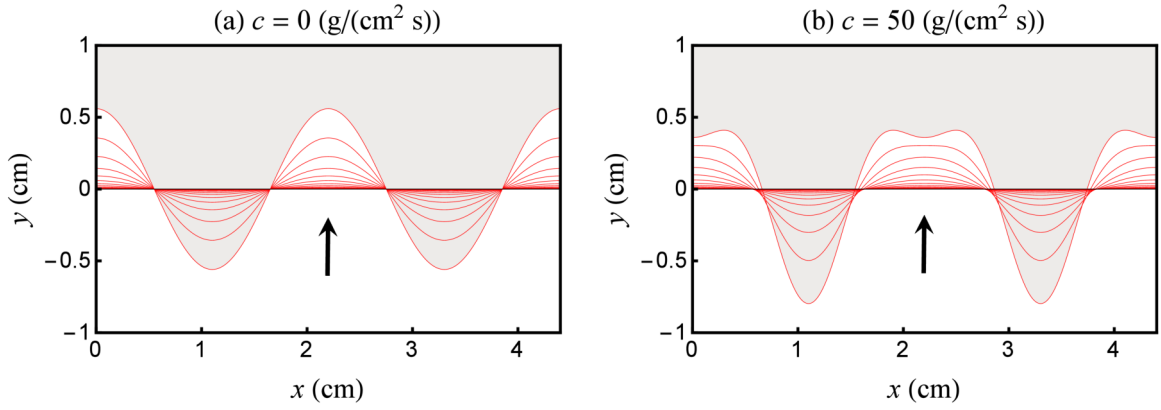


Figura 15 – Evolução temporal de interface numa célula de Hele-Shaw retangular. É considerada a interação de dois modos cosseno a_k e a_{2k} , e dois valores para o parâmetro de *undercooling* cinético c : (a) 0 e (b) 50 g/(cm²s). A região em cinza representa o fluido 2 (mais viscoso). A seta vertical representa a direção da velocidade de escoamento.

Observe que as expressões para λ , F e G são significativamente mais simples em relação às expressões do caso anterior para o fluxo radial. Além disso, em comparação com as equações do fluxo radial, onde as funções lineares e não lineares são dependentes do tempo, aqui, as Eqs. (2.20)-(2.23) são constantes no tempo.

Nesta seção, discutimos o papel do *undercooling* cinético no desenvolvimento do fenômeno da bifurcação de dedos na geometria retangular. Como comentado na introdução deste capítulo, eventos de bifurcação não são comuns na geometria retangular de Hele-Shaw e geralmente só ocorrem quando a velocidade de escoamento é suficientemente grande [44, 46, 124, 126–128].

Como discutido na seção 2.3.1, no contexto da análise fracamente não linear, o mecanismo da bifurcação de dedos é conectado com a função ponta de dedos (2.18) que, no caso do fluxo retangular, surge do acoplamento do modo fundamental k e seu primeiro harmônico $2k$

$$\dot{a}_{2k} = \lambda(2k) a_{2k} + \frac{1}{2} T(2k, k) a_k^2, \quad (2.24)$$

onde

$$T(2k, k) = -\frac{\Theta(2k)}{1 + \Theta(2k)} \frac{v_\infty}{2} k^2. \quad (2.25)$$

No decorrer desta seção, consideramos que $k = k^*$ é obtido para $c = 0$, onde k^* é o modo de maior crescimento e é calculado por $d\lambda(k)/dk = 0$.

Um aspecto muito importante da função ponta de dedos $T(2k, k)$ [Eq.(2.25)] é que a mesma assume valor nulo quando o efeito de *undercooling* cinético não é considerado. Em outras palavras, bifurcação de dedos [fenômeno que ocorre quando $T(2k, k) < 0$] pode somente aparecer se $c \neq 0$. Este fato é claramente ilustrado pela Fig. 15, onde plotamos a evolução temporal da interface fluido-fluido para o caso da interação de dois modos cossenos a_k e a_{2k} . Esta figura é feita de forma que a amplitude do modo fundamental atinge o valor de $a_k = 0.6$ cm para ambos

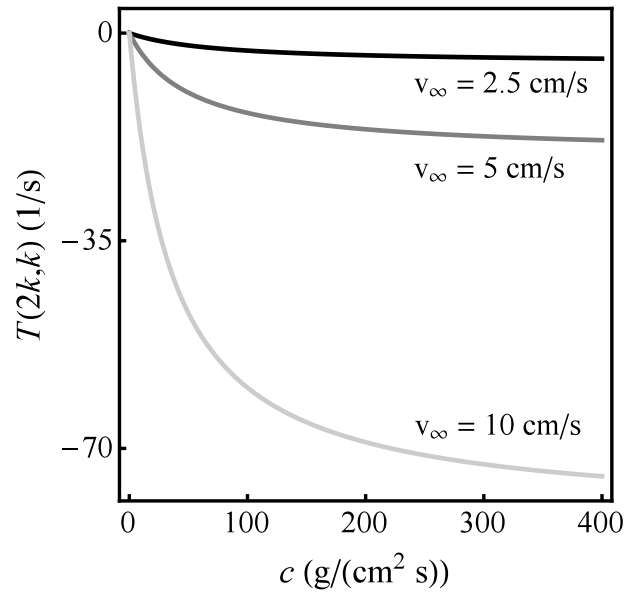


Figura 16 – Variação da função ponta de dedos $T(2k, k)$ com o parâmetro de *undercooling* cinético c , para diferentes valores de velocidade v_∞ . Valores mais negativos de $T(2k, k)$ implicam no aumento da intensidade da bifurcação na ponta do dedo.

os casos de $c = 0$ [Fig. 15(a)] e $c = 50 \text{ g}/(cm^2 s)$ [Fig. 15(b)]. Aqui, nós consideramos que $\eta_1 = 0$, $0.5 \leq \eta_2 \leq 7 \text{ g}/(cm s)$, $b = 0.15 \text{ cm}$, $10 \leq \sigma \leq 60 \text{ dyne/cm}$ e $v_\infty = 5 \text{ cm/s}$. As amplitudes iniciais são $a_k(0) = 1/1000 \text{ cm}$ e $a_{2k}(0) = 0$.

Informação adicional sobre o comportamento da divisão de dedos em fluxo retangular pode ser obtida na Fig. 16. Esta figura ilustra como a função ponta de dedos $T(2k, k)$ varia com o parâmetro de *undercooling* cinético c para três valores de v_∞ : 2.5 cm/s ($k^* = 2.02 \text{ cm}^{-1}$), 5.0 cm/s ($k^* = 2.85 \text{ cm}^{-1}$) e 10 cm/s ($k^* = 4.04 \text{ cm}^{-1}$). Uma vez que valores mais negativos de $T(2k, k)$ implicam em eventos de bifurcação de dedos mais intensos, fica óbvio que, para um dado valor de v_∞ , há maior tendência para eventos de bifurcação de dedos para valores mais altos de c . Isto é consistente com o comportamento equivalente para fluxo radial plotado nas Figs. 13 e 14. Finalmente, em acordo com o que foi encontrado nas Refs. [44, 46, 124, 126–128], na Fig. 16, também podemos observar que a bifurcação de dedos é favorecida para maiores valores de v_∞ .

3 TRANSIÇÕES DE ESTABILIDADE EM CÉLULAS DE HELE-SHAW COM PLACA SUPERIOR SUAVEMENTE INCLINADA

3.1 Introdução

No capítulo anterior, estudamos o escoamento de fluidos viscosos na geometria radial da célula de Hele-Shaw com espaçamento b constante. Como mencionado no capítulo 1, uma modificação geométrica bastante interessante consiste na adição de um pequeno gradiente no espaçamento entre as placas da célula. Esta modificação foi introduzida primeiramente por Zhao *et al.* [58] na geometria retangular da célula de Hele-Shaw, tendo como objetivo o entendimento dos efeitos deste gradiente tanto na estabilidade quanto no formato dos dedos produzidos na interface.

Pela realização de experimentos de laboratório e por análise de estabilidade linear, Zhao *et al.* [58] concentraram-se no regime de alto número de capilaridade Ca . Seus resultados para a estabilidade linear indicaram que o pequeno gradiente possui um efeito desprezível nos estágios iniciais da formação de padrões. Entretanto, seus achados experimentais revelaram o oposto, mostrando que o sinal do gradiente (o qual define se a célula é convergente ou divergente) afeta fortemente o comportamento da ponta dos dedos: um gradiente positivo (célula divergente) produz dedos largos que tornam-se susceptíveis a eventos de bifurcação, enquanto que o gradiente negativo (célula convergente) resulta em dedos estreitos que são mais estáveis do que os dedos correspondentes que surgem na célula de placas paralelas. Algum tempo depois, Dias e Miranda [59] foram bem sucedidos em explicar, por meio de uma análise fracamente não linear do problema da célula de Hele-Shaw retangular com gradiente entre as placas, os resultados experimentais observados na Ref. [58] para o caso de números de capilaridade altos.

Ao contrário do que foi feito nas Refs. [58, 59], Al-Housseiny *et al.* [60] estudaram o regime de baixo número de capilaridade e, por meio da análise de estabilidade linear e realização de experimentos, revelaram novos aspectos relacionados ao problema da célula de Hele-Shaw retangular com gradiente entre as placas [61, 62]. As investigações realizadas na Ref. [60] demonstraram que a introdução do pequeno gradiente pode ser utilizado para controlar o desenvolvimento da instabilidade de dedos viscosos. Em outras palavras, o gradiente de espaçamento pode causar tanto a supressão completa da usual instabilidade de dedos viscosos, quanto desencadear esta instabilidade mesmo sob circunstâncias de um escoamento reverso tradicionalmente estável.

De fato, os estudos teóricos e experimentais apresentados nas Refs. [58–60] estabelecem que o pequeno gradiente de espaçamento pode impactar profundamente o comportamento da interface fluido-fluido em escoamentos longitudinais em Hele-Shaw: no regime de alto Ca , o gradiente

pode determinar o formato da ponta dos dedos (mais larga ou mais estreita que o comportamento convencional na situação de placas paralelas), enquanto que no regime da baixo Ca , o gradiente pode ser usado no controle da ocorrência da instabilidade de Saffman-Taylor (suprimindo seu surgimento ou estimulando seu aparecimento em condições geralmente estáveis).

Diferentemente do caso para escoamentos longitudinais em Hele-Shaw, para os quais o papel de um pequeno gradiente de espaçamento foi investigado usando teoria (análise linear e fracamente não linear) e experimentos, o cenário correspondente para escoamentos radiais em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento é um pouco diferente. Os estudos existentes relacionados com este tópico são, em sua maioria, restritos a explorações teóricas, ou seja, o estudo do início da instabilidade de dedos viscosos por meio de análise de estabilidade linear [64] ou investigação dos estágios fortemente não lineares da evolução da interface por meio de sofisticadas simulações numéricas [65]. A análise de estabilidade linear realizada na Ref. [64] demonstrou que nos estágios iniciais do escoamento radial em células divergentes a interface fluido-fluido é inicialmente atrasada, mas eventualmente desestabiliza-se conforme o tempo avança. Adicionalmente, eles verificaram que para células de Hele-Shaw convergentes, o desenvolvimento de dedos viscosos pode ser completamente suprimido. Como reportado na Ref. [64], experimentos considerando a ação de um pequeno gradiente em células de Hele-Shaw radiais foram realizados por Maxworthy [148]. Entretanto, somente uma breve descrição dos resultados experimentais preliminares é apresentada na Ref. [148]: essencialmente, foi encontrado que, de forma geral, o efeito do gradiente radial em células divergentes é a desestabilização da interface. Isto está em acordo com os resultados de estabilidade linear obtidos na Ref. [64]. Infelizmente, uma descrição mais detalhada dos experimentos de Maxworthy em células radialmente divergentes nunca foram publicados. Somente muito recentemente, Bongrand e Tsai [63] realizaram experimentos em células de Hele-Shaw radialmente convergentes e apresentaram resultados demonstrando os efeitos de estabilização relacionados ao gradiente negativo (veja a Fig. 5). Também recentemente, Pihler-Puzović *et al.* [149, 150] estudaram experimentalmente o deslocamento radial de óleo viscoso pela injeção de um gás em uma célula de Hele-Shaw com placa superior composta de uma membrana flexível. Foi encontrado que a membrana elástica proporciona um escoamento semelhante a uma célula convergente e que, de fato, pode estabilizar os dedos viscosos radiais.

No lado teórico, uma investigação recente realizada por Jackson *et al.* [65] analisou estágios fortemente não lineares do escoamento em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento por meio de sofisticadas simulações numéricas. Ao contrário dos estudos anteriores [60, 64], para os quais o objetivo era o controle das instabilidades de dedos viscosos, a Ref. [65] concentrou-se em responder questões diferentes, mas também de grande relevância, relacionadas ao deslocamento de fluidos em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento. Motivados pela dissimilaridade dos comportamentos da interface para baixos e altos números de capilaridade em células de Hele-Shaw retangulares com pequeno gradiente [58–60], eles investigaram a possibilidade da ocorrência de transições de estabilidade para os dedos visco-

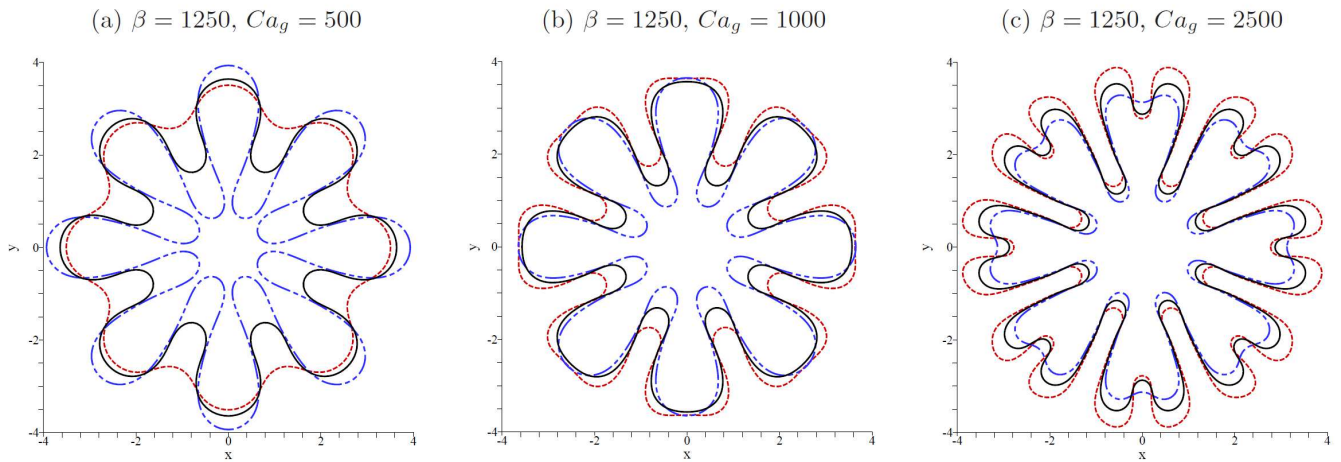


Figura 17 – Padrões representativos para o problema da injeção radial em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento. As simulações fortemente não lineares foram retiradas da Ref. [65]. As curvas sólidas pretas representam a interface para a célula uniforme, enquanto que as curvas tracejadas azuis e vermelhas representam, respectivamente, as interfaces para a célula divergente e convergente.

sos na geometria radial da célula de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento. Sendo assim, ao invés de estudarem um regime específico de número de capilaridade (baixo ou alto), os autores da Ref. [65] utilizaram suas sofisticadas técnicas numéricas para explorar sistematicamente o comportamento de transição de estabilidade em células de Hele-Shaw com gradiente ao longo da direção radial. Em seus estudos, eles consideraram uma série de valores para o número de capilaridade em estágios fortemente não lineares do escoamento. Os principais resultados podem ser resumidos da seguinte forma: em células radialmente convergentes (divergentes), os efeitos mudam de estabilizante (desestabilizante) para baixo Ca , para desestabilizante (estabilizante) para alto Ca .

Como mencionado na Ref. [65], em seu trabalho (e também no presente capítulo), os conceitos de estabilização ou desestabilização referem-se ao comportamento das situações com gradiente ao longo da direção radial comparadas com as respostas correspondentes da interface no caso da célula de Hele-Shaw de placas paralelas (ou uniforme). Por exemplo, no regime de baixo Ca mencionando anteriormente, quando falamos que a interface é estabilizada na situação com gradiente ao longo da direção radial, queremos dizer que a interface apresenta-se mais estabilizada com respeito à situação equivalente observada no caso da célula uniforme. Entretanto, tal interface relativamente mais estável ainda pode ser instável, no sentido de que ela ainda pode ser deformada (não circular) e apresentar estruturas compostas de dedos viscosos. Portanto, resumidamente, estamos lidando com o conceito de "estabilidade relativa"(ou, equivalentemente, "instabilidade relativa"), para o qual a interface na situação com gradiente ao longo da direção radial é sempre comparada com a interface correspondente que surge na célula de Hele-Shaw uniforme.

Em relação às mudanças relativas na morfologia e no tamanho das estruturas de dedos

viscosos resultantes, foi encontrado [65] que para um valor fixo de gradiente de espaçamento, os dedos tendem a ficarem mais largos e achatados em suas pontas conforme Ca aumenta, levando à ocorrência de fenômenos de bifurcação de dedos para valores mais altos de Ca . Estas respostas fortemente não lineares da interface a mudanças em Ca são claramente ilustradas na Fig. 17. Além disso, se Ca é mantido fixo e o sinal do gradiente é invertido, é possível observar padrões de diferentes tamanhos. Foi verificado que a análise de estabilidade linear não é capaz de prever com precisão o ponto (o valor crítico do número de capilaridade) para o qual ocorre as transições de estabilidade relativa. Este número de capilaridade crítico (Ca_{crit}) indica a situação para a qual uma interface relativamente estável torna-se relativamente instável em comparação com a interface equivalente na célula uniforme. Também foi mostrado que a previsão dada pela teoria de estabilidade linear para o Ca_{crit} superestima sua magnitude em comparação com as previsões mais robustas baseadas em suas simulações fortemente não lineares. Esta discrepância foi atribuída à ausência de importantes efeitos não lineares nos cálculos de estabilidade linear. Tais efeitos são naturalmente incorporados pelas simulações numéricas fortemente não lineares.

Pelas discussões dos parágrafos anteriores, fica claro que os estudos realizados até o momento, relacionados com a formação de padrões de dedos viscosos em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento, concentram-se nas análises de estabilidade linear [64] do problema ou são baseados em sofisticadas simulações numéricas [65]. Estas investigações analíticas e numéricas proporcionam um bom entendimento do processo de formação de padrões nos regimes iniciais de tempo (puramente linear) ou nos regimes para tempos avançados (fortemente não linear). Logo, um estudo da dinâmica de escoamentos em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento entre estes dois extremos ainda precisa ser realizado. Nosso principal objetivo neste capítulo é realizar uma análise fracamente não linear para estágios intermediários da evolução das interfaces nestas células com gradiente radial, tendo como foco a captura do início dos efeitos não lineares. Nos concentramos em tentar obter pistas úteis sobre os aspectos mais importantes das transições de estabilidade estudadas numericamente na Ref. [65]. Faremos isso considerando a ordem não linear mais baixa e utilizando predominantemente métodos analíticos. Pretendemos ir além da análise de estabilidade linear e usar a extensão mais simples da teoria de perturbação (teoria de segunda ordem de modos acoplados) para extrair informações valiosas a respeito dos aspectos não lineares mais relevantes do problema.

Na seção 3.2, apresentamos a derivação da equação de modos acoplados que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface para o problema da célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento. A seção 3.3 é reservada para a discussão da influência do número de capilaridade na transição de estabilidade relativa no estágio não linear inicial do escoamento. Concentramos nossa atenção em tentar compreender como o comprimento e formato dos dedos (uma atenção especial será dada os eventos típicos de bifurcação de dedos) são impactados por Ca e pelo sinal do pequeno gradiente de espaçamento.

3.2 Equação diferencial de modos acoplados

Neste trabalho, seguimos a abordagem dos estudos relacionados a fluxos em Hele-Shaw com gradiente de espaçamento [58–60] e consideramos uma situação amplamente explorada teoricamente e experimentalmente em células de Hele-Shaw (radial e retangular) de placas paralelas [1, 3–6, 34, 45, 151]. Nos concentramos no limite de razão de viscosidade $\beta = \eta_{\text{externa}}/\eta_{\text{interna}}$ infinita, para qual a viscosidade do fluido interno é desprezível em comparação com a viscosidade η do fluido externo. É de se esperar que este limite concorde bem com situações nas quais um óleo muito viscoso é deslocado por um gás, de forma que $10^4 \leq \beta \leq 10^5$ [6, 63, 149, 150]. Perceba que isto não é exatamente similar às situações estudadas numericamente na Ref. [65], a qual considera escoamento radial de duas fases em célula de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento sob baixa ($\beta = 10$) e alta ($\beta = 1250$), porém finitas, razões de viscosidade.

Considere a geometria de uma célula de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento ao longo da direção radial. Neste arranjo, o fluido externo de viscosidade η é deslocado por meio da injeção radial do fluido interno de viscosidade desprezível. Os fluidos são imiscíveis e incompressíveis, e existe uma tensão superficial σ não nula entre eles. O fluido interno é injetado a uma taxa de injeção volumétrica constante Q através de um pequeno orifício localizado no centro da placa superior da célula. Em contraste com o arranjo convencional de placas paralelas, a placa superior possui um pequeno gradiente constante α ($|\alpha| \ll 1$) ao longo da direção radial. Dependendo do sinal de α , podemos ter três tipos de células de Hele-Shaw radiais (veja Fig. 4): (a) convergente ($\alpha < 0$), (b) uniforme ($\alpha = 0$) e (c) divergente ($\alpha > 0$). O sistema de coordenadas é definido de tal maneira que sua origem localiza-se no centro da célula e r representa a coordenada radial. Neste cenário, o espaçamento entre as placas da célula de Hele-Shaw varia linearmente com a distância radial r , de maneira que podemos escrever

$$b(r) = b_0 + \alpha r, \quad (3.1)$$

onde $b_0 = b(r = 0)$ é o espaçamento entre as placas no centro da célula.

Durante o processo de injeção, a interface circular, inicialmente não perturbada, torna-se instável e deforma-se devido à competição entre forças viscosas e de capilaridade. A interface perturbada é representada por $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, onde $R = R(t)$ é o raio (dependente do tempo) da interface não perturbada e θ denota o ângulo azimutal no plano $r - \theta$. A deformação da interface é dada pela série de Fourier do capítulo passado. Aqui, é conveniente reescrever $b(r)$ [Eq. (3.1)] em termos de $R(t)$ como

$$b(r, t) = b_i(t) + \alpha[r - R(t)], \quad (3.2)$$

onde o espaçamento da célula em $r = R(t)$ é dado por

$$b_i = b_i(t) = b_0 + \alpha R(t). \quad (3.3)$$

Como estamos interessados no limite de um pequeno gradiente de espaçamento $|\alpha| \ll 1$, consideramos que

$$\frac{|\alpha|R}{b_i} \ll 1, \quad (3.4)$$

implicando em $|\alpha(r - R)| = |\alpha\zeta| \ll b_i$. Devemos enfatizar que, neste capítulo, nossa teoria perturbativa fracamente não linear mantém termos até segunda ordem em ζ e até primeira ordem na inclinação reescalada $\alpha R/b_i$.

A conservação de volume

$$Qt + \pi b_0 R_0^2 + \frac{2\alpha}{3} \pi R_0^3 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{b_0 \mathcal{R}^2}{2} + \frac{\alpha \mathcal{R}^3}{3} \right) d\theta \quad (3.5)$$

impõem que, até segunda ordem em ζ , o modo $n = 0$ é escrito em termos dos outros modos como

$$\zeta_0 = -\frac{1}{2R} \left[1 + \frac{\alpha R}{b_i} \right] \sum_{n=1}^{\infty} [|\zeta_n(t)|^2 + |\zeta_{-n}(t)|^2]. \quad (3.6)$$

Utilizando a Eq. (3.5) e considerando a situação na qual a interface fluido-fluido não é perturbada ($\mathcal{R} = R(t)$), é possível obter uma relação útil que expressa como $R(t)$ evolui no tempo

$$\pi b_0 [R^2(t) - R_0^2] + \frac{2\alpha}{3} \pi [R^3(t) - R_0^3] = Qt, \quad (3.7)$$

onde $R_0 = R(t = 0)$ é o raio da interface não perturbada em $t = 0$. Note que tomando a derivada temporal da Eq. (3.7) obtemos $Q = 2\pi R \dot{R} b_i$, onde $dR/dt = \dot{R}$.

A equação hidrodinâmica básica do problema é a lei de Darcy [6]

$$\mathbf{v} = -\frac{b^2(r, t)}{12\eta} \nabla P, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta)$ e $P = P(r, \theta)$ são, respectivamente, as médias transversais da velocidade e da pressão. A condição de incompressibilidade para esta situação em que o espaçamento varia linearmente com r é dada por [58, 59, 152]

$$\nabla \cdot [b(r, t) \mathbf{v}] = 0. \quad (3.9)$$

Substituindo Eq. (3.8) na Eq. (3.9) e usando a Eq. (3.4), obtemos uma equação diferencial parcial para a pressão

$$\nabla^2 P + \frac{3\alpha}{b_i} \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (3.10)$$

A solução mais geral da Eq. (3.10) pode ser escrita como [59, 152]

$$P(r, \theta) = f(r) + \sum_{n \neq 0} g_n(r) e^{in\theta}. \quad (3.11)$$

Substituindo Eq. (3.11) na Eq. (3.10), temos que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{3\alpha}{b_i} \frac{df}{dr} = 0, \quad (3.12)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg_n}{dr} \right) + \frac{3\alpha}{b_i} \frac{dg_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} g_n = 0. \quad (3.13)$$

A Eq. (3.11) é separada em duas diferentes contribuições para o campo de pressão: $f(r)$ está relacionada com a propagação da interface circular e $g_n(r)$ aparece devido à perturbação harmônica da interface. Neste contexto, df/dr é o gradiente de pressão para uma interface não perturbada que expande-se com velocidade $v_r = \dot{R}$, a qual satisfaz a lei de Darcy (3.8)

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{12\eta\dot{R}}{b_i^2}. \quad (3.14)$$

Para resolvermos a Eq. (3.12), definimos uma nova variável $\psi(r) \equiv rf'(r)$. Em seguida, reescrevemos a Eq. (3.12) em termos de ψ e integramos para obter

$$\frac{df}{dr} = \frac{\psi(R)}{r} \exp \left[-\frac{3\alpha}{b_i} (r-R) \right], \quad (3.15)$$

onde $\psi(R)$ pode ser determinado usando a condição (3.14). Integrando a Eq. (3.15), a solução para $f(r)$ pode ser escrita como

$$f(r) = \psi(R) \int \frac{1}{r} \exp \left[-\frac{3\alpha}{b_i} (r-R) \right] dr + C, \quad (3.16)$$

onde C é uma constante de integração.

Por outro lado, aplicamos o método de Frobenius [153] para resolver a Eq. (3.13) e utilizamos a condição $\lim_{r \rightarrow \infty} g_n(r) = 0$ para a situação na qual $\alpha = 0$. Desta forma, temos que (para $n \neq 0$)

$$g_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(n)} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-|n|}, \quad (3.17)$$

onde os coeficientes $P_k^{(n)}$ são todos relacionados entre si pela relação de recorrência (para $k > 0$)

$$P_k^{(n)} = -\frac{3\alpha}{b_i} \left[\frac{(k-|n|-1)}{k(k-2|n|)} \right] P_{k-1}^{(n)}. \quad (3.18)$$

Finalmente, utilizando as soluções (3.16) e (3.17), assim como a relação de recorrência (3.18), a pressão [Eq. (3.11)] pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P(r, \theta) = & \psi(R) \int \frac{1}{r} \exp \left[-\frac{3\alpha}{b_i} (r-R) \right] dr \\ & + \sum_{n \neq 0} P^{(n)}(t) \left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^{-|n|} + \frac{3\alpha R}{b_i} \left[\frac{|n|}{1-2|n|} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{1-|n|} \right\} \exp(in\theta) + C. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como assumimos a inclinação reescalada $|\alpha|R/b_i \ll 1$ [Eq. (3.4)] na solução de $g_n(r)$, mantemos termos até primeira ordem em $\alpha R/b_i$.

Para achar a relação entre $P^{(n)}(t)$, na Eq. (3.19), e as amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$, utilizamos a condição de contorno cinemática [6]

$$\left. \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(v_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} v_\theta \right) \right|_{r=\mathcal{R}}, \quad (3.20)$$

onde v_r e v_θ são, respectivamente, as componentes radial e azimutal da média transversal da velocidade $\mathbf{v}$. Mantendo termos até segunda ordem em ζ e após tomada a transformada de Fourier, obtemos para $P^{(n)}(t)$

$$\begin{aligned} P^{(n)}(t) &= \frac{\dot{\zeta}_n}{K(n)} + \frac{1}{K(n)} \frac{\dot{R}}{R} \left[1 + \frac{\alpha R}{b_i} \right] \zeta_n - \frac{1}{K(n)} \frac{\dot{R}}{R^2} \left[1 + \frac{\alpha R}{b_i} \right] \sum_{n' \neq 0} \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ \frac{b_i^2}{12\eta} \frac{\dot{R}}{R} \sum_{n' \neq 0} \frac{1}{K(n)K(n')} \left\{ M(n, n') + \frac{3\alpha R}{b_i} \left[N(n, n') - \frac{2|n'|}{3R^2} + \frac{1}{3} M(n, n') \right] \right\} \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ \frac{b_i^2}{12\eta} \sum_{n' \neq 0} \frac{1}{K(n)K(n')} \left\{ M(n, n') + \frac{3\alpha R}{b_i} \left[N(n, n') - \frac{2|n'|}{3R^2} \right] \right\} \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aqui, as funções $K(n)$, $M(n, n')$ e $N(n, n')$ são

$$K(n) = \frac{b_i^2}{12\eta R} \left[|n| - \frac{3\alpha R}{b_i} \frac{|n|(1-|n|)}{1-2|n|} \right], \quad (3.22)$$

$$M(n, n') = \frac{n'(n-n') + |n'|(|n'|+1)}{R^2}, \quad (3.23)$$

e

$$N(n, n') = \frac{n'|n'|(n-n') - n'^2(1-|n'|)}{(1-2|n'|)R^2}. \quad (3.24)$$

A condição de contorno restante é a condição da diferença de pressão na interface, a qual é dada pela equação de Young-Laplace [1, 6]

$$P(r = \mathcal{R}, \theta) = - \left(\frac{\pi}{4} \sigma \kappa - \frac{2\sigma \cos \phi}{b(r, t)} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}}. \quad (3.25)$$

Na Eq. (3.25), κ representa a curvatura da interface no plano da célula de Hele-Shaw e pode ser escrita, até segunda ordem na perturbação ζ , como

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\mathcal{R}^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \right)^2 - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \theta^2}}{\left[\mathcal{R}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{R^3} \left[\zeta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)^2 + 2\zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right] + O(\zeta^3/R^4). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Por outro lado, o termo proporcional à $1/b(r, t)$ é associado com a curvatura ao longo da direção perpendicular às placas e ϕ é o ângulo de contato estático medido entre as placas e menisco curvado do fluido (ver a Fig. 11). Como feito nas Refs. [60, 64, 65], nos concentramos na situação $\phi = \pi$ para a qual o fluido viscoso é completamente molhante. A presença do fator de $\pi/4$ na frente de κ [na Eq. (3.25)] é apropriada pois estamos lidando com a situação de molhamento $\phi = \pi$ [26–28].

Para obter a equação de movimento para as amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$, primeiramente, substituímos a Eq. (3.21) na Eq. (3.19) calculada na posição da interface. Em seguida, inserimos

a expressão resultante na condição de Young-Laplace (3.25). Mantendo termos até segunda ordem em ζ e primeira ordem em $\alpha R/b_i$, e após tomada a transformada de Fourier, obtemos a equação de movimento adimensional para as amplitudes de perturbação (para $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_n &= \left[\lambda(n) + \frac{\alpha R}{b_i} \Lambda(n) \right] \zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\ &+ \frac{\alpha R}{b_i} \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right],\end{aligned}\quad (3.27)$$

onde comprimentos e tempo são reescalados, respectivamente, por R_0 e $R_0^2 b_0 / Q$. As funções associadas com a taxa de crescimento linear $[\lambda(n) + (\alpha R/b_i) \Lambda(n)]$ são

$$\lambda(n) = \frac{\dot{R}}{R} (|n| - 1) - \frac{\pi}{4} \frac{q^2 b_i^2}{\text{Ca} R^3} |n| (n^2 - 1), \quad (3.28)$$

e

$$\Lambda(n) = \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{|n| + 1}{2|n| - 1} \right) + \frac{2q^2 b_i^2}{\text{Ca} R^2} |n| - \frac{\pi}{4} \frac{q^2 b_i^2}{\text{Ca} R^3} \frac{|n| (n^2 - 1)}{2|n| - 1}, \quad (3.29)$$

onde

$$\text{Ca} = \frac{12\eta Q R_0}{\sigma b_0^3} \quad (3.30)$$

é o número de capilaridade global [28, 65] e $q = R_0/b_0$ é a razão de aspecto inicial. O número de capilaridade global Ca é um importante parâmetro de controle do sistema da célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento e deve ser diferenciado do número de capilaridade local $\overline{\text{Ca}} = \eta \dot{R} / \sigma$ (ou instantâneo), o qual pode ser bem menor em magnitude. Valores típicos do número de capilaridade local utilizados em experimentos em célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento variam no amplo intervalo de $4.0 \times 10^{-4} \leq \overline{\text{Ca}} \leq 2.5 \times 10^2$ [58, 60, 63, 150].

Os termos de modos acoplados são dados por

$$F(n, n') = \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{\dot{R}}{R} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] - \frac{\pi}{4} \frac{q^2 b_i^2}{\text{Ca} R^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\}, \quad (3.31)$$

$$G(n, n') = \frac{|n|}{R} \left[1 - \text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(n, n') &= \frac{|n|}{R} \left\{ \frac{\dot{R}}{R} \left[\frac{2 - |n|}{2|n| - 1} + 2 \text{sgn}(nn') \frac{2 - |n'|}{2|n'| - 1} - \frac{1}{|n|} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{4} \frac{q^2 b_i^2}{\text{Ca} R^3} \frac{3}{2|n| - 1} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.33)$$

e

$$\mathcal{G}(n, n') = \frac{3|n|}{R} \left[\frac{1}{2|n| - 1} + \frac{\text{sgn}(nn')}{2|n'| - 1} - \frac{1}{3|n|} \right]. \quad (3.34)$$

A expressão (3.27) é a equação de modos acoplados do problema de Saffman-Taylor para células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento, convenientemente escrita em termos de três parâmetros adimensionais relevantes do problema: α , q e Ca . Na realidade, a Eq. (3.27) é um dos principais resultados deste capítulo. Após apropriada reintrodução das dimensões e considerando o limite de gradiente nulo ($\alpha = 0$), é possível mostrar que a Eq. (3.27) se reduz à expressão consideravelmente mais simples obtida na Ref. [45]. Enquanto que a taxa de crescimento linear $[\lambda(n) + (\alpha R/b_i) \Lambda(n)]$, composta pelas Eqs. (3.28) e (3.29), proporciona informações sobre a estabilidade linear da interface, os termos não lineares, representados pelas Eqs. (3.31)-(3.34), oferecem pistas sobre a transição de estabilidade relativa e, também, sobre a morfologia básica dos padrões emergentes no regime fracamente não linear. Chamamos atenção para o fato de que os valores adotados para os parâmetros adimensionais neste trabalho são consistentes com grandezas físicas típicas utilizadas em investigações experimentais, analíticas e numéricas em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento [58–60, 63–65, 149, 150].

3.3 Transições de estabilidade no regime fracamente não linear

Para examinar o papel do número de capilaridade Ca nas transições de estabilidade em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento, precisamos descrever a evolução temporal da interface perturbada $\mathcal{R}$ para as células convergente ($\alpha < 0$) e divergente ($\alpha > 0$), e, logo em seguida, comparar o formato das interfaces resultantes com as correspondentes interfaces obtidas na célula uniforme ($\alpha = 0$). Queremos realizar esta tarefa capturando importantes efeitos fracamente não lineares por meio de uma teoria perturbativa de modos acoplados que mantém termos até segunda ordem em ζ e primeira ordem em $\alpha R/b_i$. Esta abordagem é capaz de trazer à tona alguns aspectos fundamentais do comportamento de estabilidade relativa e, também, das morfologias dos padrões de interface resultantes. Neste contexto, é essencial entender como Ca influencia o formato dos padrões emergentes, principalmente em relação ao desenvolvimento dos fenômenos de alargamento, bifurcação e estreitamento de dedos.

No cenário da nossa teoria de modos acoplados, foi mostrado que estes fenômenos então relacionados com a influência do modo fundamental n no crescimento do seu harmônico $2n$ [45]. Logo, para descrever a morfologia da ponta dos dedos e as questões relacionadas com a estabilidade relativa, é conveniente reescrever a perturbação da interface em termos destes dois específicos modos de Fourier, ou seja, $\zeta(\theta, t) = \zeta_0(t) + a_n(t) \cos(n\theta) + a_{2n}(t) \cos(2n\theta)$. Sem perda de generalidade, escolhemos a fase do modo fundamental de forma que $a_n > 0$. Perceba que o termo ζ_0 expressa uma contribuição intrinsecamente não linear, consistindo em uma correção de segunda ordem na perturbação ζ . No regime puramente linear, temos que $\zeta_0 = 0$. Para uma discussão detalhada sobre a estratégia de modos acoplados, sua descrição e interpretação apropriada dos mecanismos típicos de formação de padrões em fluxos em célula de Hele-Shaw (retangular e radial), chamamos a atenção dos leitores para as Refs. [5, 45, 143, 154–156].

Para descrever a evolução temporal da interface deformada $\mathcal{R}(\theta, t)$, é necessário saber como

as amplitudes cosseno $a_n(t)$ e $a_{2n}(t)$ variam no tempo. Com este fato em mente, reescrevemos a equação de modos acoplados (3.27) em termos dos modos cossenos considerando a interação entre os modos n e $2n$, obtendo assim as seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{a}_n = & \lambda(n)a_n + \frac{\alpha R}{b_i} \Lambda(n)a_n \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[F(n, -n)a_na_{2n} + F(n, 2n)a_na_{2n} + G(n, -n)\dot{a}_na_{2n} + G(n, 2n)\dot{a}_{2n}a_n \right] \right. \\ & \left. + \frac{\alpha R}{b_i} \left[\mathcal{F}(n, -n)a_na_{2n} + \mathcal{F}(n, 2n)a_na_{2n} + \mathcal{G}(n, -n)\dot{a}_na_{2n} + \mathcal{G}(n, 2n)\dot{a}_{2n}a_n \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{2n} = & \lambda(2n)a_{2n} + \frac{\alpha R}{b_i} \Lambda(2n)a_{2n} + \frac{1}{2} \left\{ \left[F(2n, n)a_n^2 + G(2n, n)\dot{a}_na_n \right] \right. \\ & \left. + \frac{\alpha R}{b_i} \left[\mathcal{F}(2n, n)a_n^2 + \mathcal{G}(2n, n)\dot{a}_na_n \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A solução analítica para este tipo de equações diferenciais foi examinada na Ref. [45] [veja a Eq. (28) juntamente com as Eqs. (30)-(32) desta referência]. É claro que a evolução temporal das amplitudes $a_n(t)$ e $a_{2n}(t)$ pode ser prontamente obtida por meio da resolução numérica das Eqs. (3.35)-(3.36).

Para caracterizar o formato geral dos padrões para cada valor de gradiente de espaçamento utilizado ($\alpha < 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$) e, também, para quantificar o comportamento da estabilidade relativa, usaremos uma grandeza definida pelos raios interno e externo dos padrões como (veja Fig. 18)

$$\Delta \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\max} - \mathcal{R}_{\min}. \quad (3.37)$$

A quantidade $\Delta \mathcal{R}$ pode ser interpretada como uma escala típica do comprimento do dedo, a qual descreve a amplitude de perturbação do dedo em termos de dois comprimentos: (i) o valor máximo do raio da interface perturbada ($\mathcal{R}_{\max}$), ilustrado na Fig. 18 pelo círculo tracejado externo que envolve todo o padrão e é tangente à ponta dos dedos, e (ii) o valor mínimo do raio da interface perturbada ($\mathcal{R}_{\min}$), o qual é representado na Fig. 18 por um círculo tracejado tangente à base dos dedos. Bischofberger *et al.* [69] adotaram uma abordagem similar para quantificar com sucesso o desenvolvimento de características globais no crescimento não linear de padrões em células de Hele-Shaw uniformes. As Eqs. (3.35)-(3.37) serão utilizadas para se obter informações sobre a transição de estabilidade relativa em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento. Percebe que é possível calcular $\Delta \mathcal{R}$ analiticamente pela consideração da expressão de $\zeta(\theta, t)$ escrita em termos dos modos n e $2n$. Por meio do cálculo de $\partial \mathcal{R} / \partial \theta = 0$, encontramos as posições para os valores máximos e mínimos do raio da interface perturbada $\mathcal{R}$, nos levando às relações

$$\cos(n\theta) = \pm 1 \quad (3.38)$$

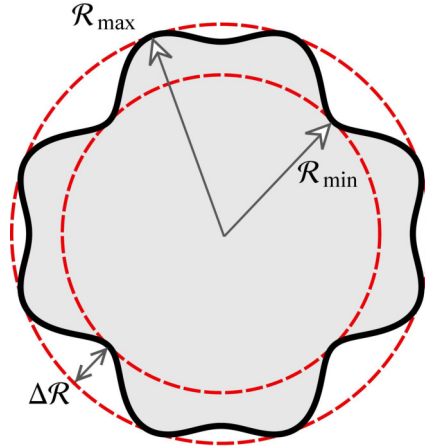


Figura 18 – Comprimentos característicos utilizados na definição da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}$ [conforme prescrita pela Eq. (3.37)]: $\mathcal{R}_{\max}$ é o valor máximo da coordenada radial da interface deformada (localizada na ponta do dedo), enquanto que $\mathcal{R}_{\min}$ é o raio mínimo correspondente (localizado na base do dedo).

e

$$\cos(n\theta) = -\frac{a_n}{4a_{2n}}. \quad (3.39)$$

Para situações nas quais $|a_n| > 4|a_{2n}|$, os dedos não bifurcam-se em suas pontas, implicando somente na Eq. (3.38) como possível solução. Logo, $\Delta\mathcal{R} = 2a_n$. Por outro lado, se $|a_n| < 4|a_{2n}|$, os dedos tendem a exibir eventos de bifurcação em suas pontas (exatamente como ilustrado na Fig. 18) e nós temos que considerar também a Eq. (3.39) como uma solução válida. Neste último caso, $\Delta\mathcal{R} = a_n - a_n^2/8a_{2n} - 2a_{2n}$.

Antes de prosseguirmos com nossa análise fracamente não linear do sistema da célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento, é necessário fazer alguns comentários a respeito dos resultados que serão apresentados neste trabalho. Primeiro, é necessário lembrar que nossa abordagem perturbativa fracamente não linear é válida somente o para o início dos efeitos não lineares, para o qual as perturbações da interface ζ são consideravelmente menores do que o raio da interface não perturbada R correspondente. Adicionalmente, com propósitos de simplificação e para melhor compreensão dos mecanismos por trás do processo de formação de padrões, nossa descrição fracamente não linear considera o acoplamento de um pequeno número do modos de Fourier relevantes [5, 45]. Consequentemente, os leitores não devem esperar que nossos padrões de interface fracamente não lineares e outras previsões relevantes irão reproduzir quantitativamente os aspectos fortemente não lineares obtidos nas sofisticadas simulações numéricas realizadas na Ref. [65] para o problema da célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento. Tais simulações concentram-se em estágios fortemente não lineares da evolução temporal dos padrões, para os quais os tamanhos dos dedos são grandes e suas formas geralmente são mais complexas do que as formas apresentadas em nosso estudo. Portanto, não temos a intenção de recriar exatamente os específicos resultados para tempos avançados obtidos na Ref. [65]. Por outro lado, pretendemos extrair o maior número possível

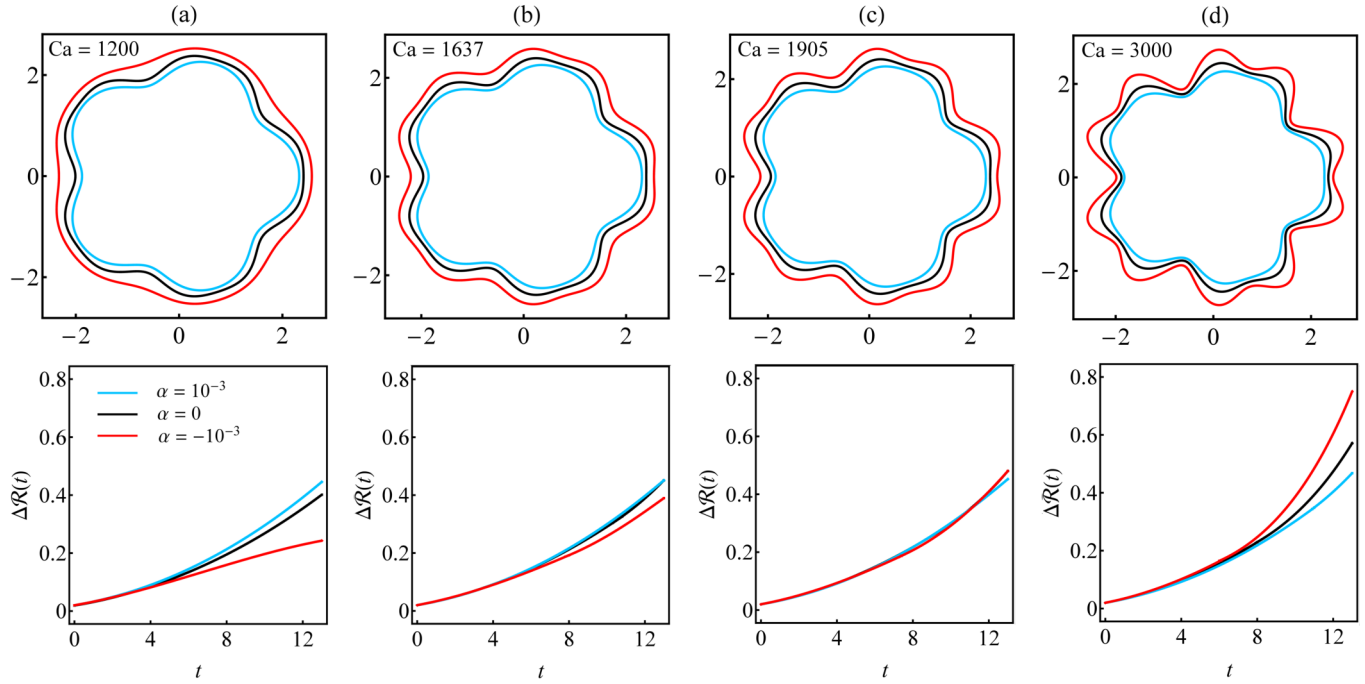


Figura 19 – Interfaces fracamente não lineares obtidas para o tempo $t = t_f = 13$ (painéis superiores). As interfaces ilustram os padrões típicos de dedos viscosos para processos de injeção radial em células de Hele-Shaw divergente ($\alpha = 10^{-3}$), uniforme ($\alpha = 0$) e convergente ($\alpha = -10^{-3}$). Os seguintes valores para o número de capilaridade são analisados: (a) $Ca = 1200$, (b) $Ca = 1637$, (c) $Ca = 1905$ e (d) $Ca = 3000$. As interfaces são obtidas por meio do acoplamento não linear entre os modos n e $2n$, onde $n = 5$. As correspondentes evoluções temporais da função comprimento de dedo $\Delta \mathcal{R}(t)$, para $0 \leq t \leq t_f$, são apresentadas nos painéis inferiores.

de informações, por meio do emprego de uma ferramenta teórica relativamente simples, sobre as características mais fundamentais da transição de estabilidade em células com gradiente de espaçamento.

Apesar das limitações discutidas acima, nosso modelo de modos acoplados ainda é capaz de proporcionar informações valiosas a respeito do papel dos efeitos não lineares nos estágios iniciais da dinâmica. Mais importante ainda, ele fornece pistas relacionadas com a morfologia das estruturas de dedos viscosos, indicando o início dos fenômenos de alargamento, estreitamento e bifurcação de dedos. Vale à pena ressaltar que tais aspectos morfológicos não podem ser capturados por uma análise de estabilidade puramente linear. Em âmbito linear, os modos de Fourier desacoplam-se e os mecanismos básicos de modos acoplados, responsáveis por providenciarem uma mímica realista do formato da interface, são completamente ausentes. Logo, enquanto a análise de estabilidade linear oferece acesso à estabilidade linear da interface por essencialmente levar em consideração a ação de único modo, nossa teoria fracamente não linear proporciona pistas úteis sobre o formato assumido pelos padrões emergentes. Isto pode ser feito já na ordem não linear mais baixa (segunda ordem de perturbação) e considerando o acoplamento do menor número possível de modos de Fourier (apenas dois). O acesso ao formato detalhado da interface, por meio da formulação fracamente não linear, será de grande importância para a

determinação do valor particular do número de capilaridade (Ca_{crit}) para o qual a estabilidade relativa passa por uma transição no sistema da célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento.

Começamos nossa discussão pela análise da Fig. 19, a qual investiga questões relacionadas às transições de estabilidade relativa em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento quando o número de capilaridade é aumentado: (a) 1200, (b) 1637, (c) 1905 e (d) 3000. A escolha destes valores específicos de Ca será melhor entendida durante nossa discussão da Fig. 19. Nos painéis superiores da Fig. 19, para cada valor de Ca , ilustramos as interfaces fracamente não lineares para três valores representativos do gradiente de espaçamento, ou seja, $\alpha = 10^{-3}$ (célula divergente), $\alpha = 0$ (célula uniforme) e $\alpha = -10^{-3}$ (célula convergente). As interfaces são apresentadas no tempo final $t = t_f = 13$. A determinação do tempo final t_f , para o qual todas as interfaces são plotadas, será discutida mais adiante. É preciso deixar claro que os valores de α que utilizamos neste trabalho ($-10^3 \leq \alpha \leq 10^3$) são precisamente os valores típicos usados em estudos experimentais e teóricos relacionados com células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento [58–65, 124]. Além disso, assim como na Ref. [65], durante nossas investigações vamos considerar o valor característico de $q = 100$ para a razão de aspecto inicial do sistema. Ao longo deste capítulo, consideramos o limite de razão de viscosidade infinita $\beta \rightarrow \infty$.

Nos padrões de interface expostos na Fig. 19 e em outras figuras deste capítulo, consideramos a interação entre dois modos cosseno n e $2n$. Na Fig. 19, adotamos $n = 5$. A escolha de $n = 5$ como modo fundamental é feita sem perda de generalidade: para $t = 0$, temos que $n = 5$ é um modo instável [$\zeta_5(0) > 0$]. Se outro modo de Fourier instável fosse escolhido como o modo fundamental em $t = 0$, os resultados físicos básicos seriam similares aos resultados obtidos para $n = 5$ (outro valor de n será examinado na Fig. 22). Nos painéis inferiores da Fig. 19, mostramos as evoluções temporais correspondentes do comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}$ [Eq. (3.37)] para os três valores de α considerados nos painéis superiores. Todos os padrões mostrados na Fig. 19 possuem as mesmas amplitudes iniciais, dadas por $a_n(0) = 10^{-2}$ e $a_{2n}(0) = 0$.

Neste capítulo, a amplitude inicial do primeiro harmônico $2n$ é escolhida como sendo zero para garantir que seu crescimento inicial seja impulsionado puramente por efeitos não lineares. Entretanto, inspecionando a Eq. (3.36), é possível observar que para tempos subsequentes a_{2n} não é mais nulo e a contribuição linear começa a agir. Conforme o tempo avança, o crescimento do modo $2n$ é essencialmente determinado pela contribuição linear dominante, auxiliada por um termo não linear relativamente menor e proporcional à a_n^2 (forçando o crescimento de $a_{2n} < 0$). Logo, no cenário da nossa abordagem fracamente não linear, quando a magnitude de a_{2n} aumenta um pouco, seu crescimento é, majoritariamente, devido ao efeito dos termos lineares da equação de movimento (3.36), mas modestamente ajustado por uma contribuição não linear de menor intensidade. A contribuição do primeiro harmônico induzirá importantes mudanças no formato dos dedos emergentes [45]. O ponto importante aqui é que o acoplamento fracamente não linear dita o sinal do modo harmônico, para o qual a amplitude cresce negativa apesar do seu valor inicial ser zero. Com esta particular fase do modo $2n$ forçada pela dinâmica, os n dedos do

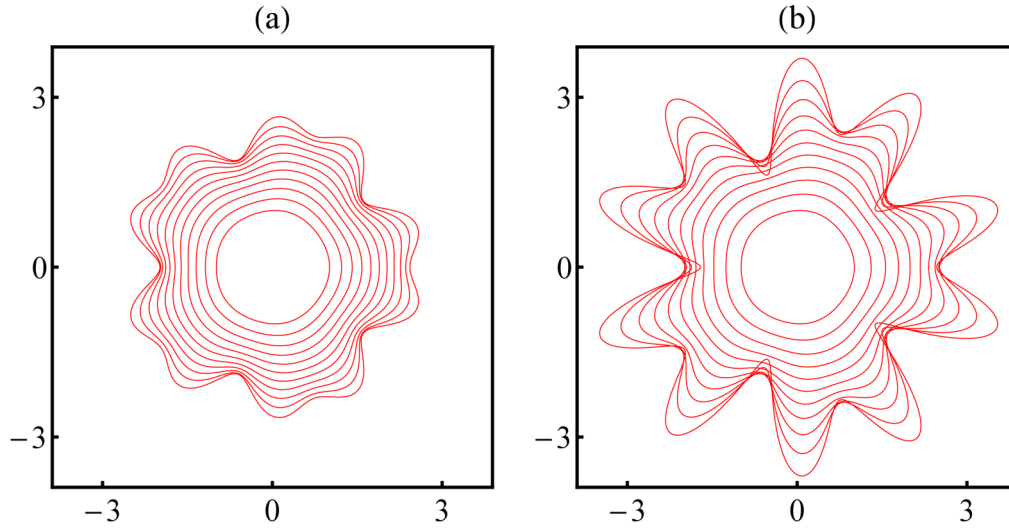


Figura 20 – Evolução temporal da interface para a situação mais instável examinada na Fig. 19, ou seja, o caso para $Ca = 3000$ e $\alpha = -10^{-3}$ [ilustrado na Fig. 19(d)]. Interfaces consecutivas diferem pelo intervalo de tempo $\Delta t = 1$. A evolução temporal das interfaces é feita considerando-se: (a) $0 \leq t \leq t_f$ e (b) $0 \leq t \leq t_f + 5$, onde $t_f = 13$. O cruzamento entre interfaces é evidente em (b). Uma vez que cruzamentos entre interfaces não são observados em células de Hele-Shaw radiais para as quais $\beta \rightarrow \infty$, adotamos $t = t_f$ como o limite superior do tempo para o qual nossa abordagem perturbativa fracamente não linear é válida.

modo fundamental n tendem, primeiramente, a se espalharem e, logo em seguida, a bifurcarem. Comportamentos similares para os modos fundamental e harmônico também foram encontrados em estudos numéricos relacionados à solidificação [157]. É claro que, devido à condição inicial $a_{2n}(0) = 0$, o modo harmônico $2n$ não crescerá se a dinâmica fosse restrita a contribuições puramente lineares e, desta forma, os fenômenos de alargamento e bifurcação de dedos não ocorreriam. Neste caso, apenas dedos de formato puramente senoidal surgiriam. Aplicando as condições iniciais $a_n(0) = 10^{-2}$ e $a_{2n}(0) = 0$, nós garantimos que os fenômenos de alargamento e bifurcação de dedos são espontaneamente induzidos pelos termos fracamente não lineares das Eqs. (3.35)-(3.36). Conjuntos diferentes de parâmetros envolvendo outros valores de n , $a_n(0)$, t_f e Ca também serão explorados e discutidos nesta seção.

Antes de avançarmos, é necessário explicar como determinamos o tempo final t_f utilizado ao longo deste capítulo. As interfaces mostradas na Fig. 19, para vários valores de Ca e α , foram obtidas após o tempo avançar no intervalo $0 \leq t \leq t_f$. Os valores para o tempo final t_f utilizados na Fig. 19 e em outras partes deste capítulo não são arbitrários. Na realidade, como feito no capítulo anterior, os valores para o tempo final foram calculados a partir da condição (2.19), determinando o tempo $t = t_f$ como limite superior de tempo para o qual nossa abordagem fracamente não linear permanece válida. Quando vários valores de Ca e α são considerados (como na Fig. 19), adotamos o tempo final t_f associado com a situação mais instável, ou seja, aquela para a qual utilizamos o maior valor de Ca e para o $\alpha < 0$ de maior magnitude. Por exemplo, na Fig. 19, o tempo final t_f foi determinado considerando a situação na qual $Ca = 3000$

e $\alpha = -10^{-3}$ [Fig. 19(d)]. Logo, se o cruzamento sucessivo de interfaces foi evitado no caso mais instável, ele não vai ocorrer nas outras situações (menos instáveis) analisadas na Fig. 19. A importância da determinação apropriada de t_f é claramente ilustrada na Fig. 20: a Fig. 20(a) apresenta a evolução temporal para $0 \leq t \leq t_f$ onde $t_f = 13$, a qual nos leva à interface mais instável exposta na Fig. 19(d). Por outro lado, a Fig. 20(b) mostra a mesma evolução temporal da interface, mas agora considerando a evolução até o tempo $t = t_f + 5 = 18$. Observe que na Fig. 20(b), algumas interfaces cruzam-se, indicando que nossa abordagem perturbativa não mais descreve de forma apropriada a evolução da interface neste tempo final exagerado. Vale a pena ressaltar que nossa análise perturbativa não necessariamente permanece quantitativamente precisa até o tempo $t = t_f$. Neste trabalho e também na Ref. [146], é somente argumentado que a análise não pode ser válida após o tempo t_f e não rigorosamente mostrado que ela deve ser válida para todos os tempos $t \leq t_f$. Consequentemente, é preciso deixar claro que, rigorosamente falando, nossas previsões para Ca_{crit} e para o tempo no qual os eventos de bifurcação de dedos ocorrem podem somente serem interpretados como aproximações. A exatidão quantitativa da expansão fracamente não linear para fluxos em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento pode ser verificada mais precisamente por meio de simulações fortemente não lineares como aquelas empregadas na Ref. [65].

Após apresentar os parâmetros relevantes do sistema e esclarecer o critério de determinação do tempo final t_f , nossa atenção será voltada para a discussão da Fig. 19. Examinando o painel superior da Fig. 19(a), verificamos de forma imediata que para este valor de número de capilaridade ($Ca = 1200$), a interface convergente ($\alpha = -10^{-3}$), para a qual dedos modestamente deformados e de pequenas amplitudes de perturbação são formados, não é muito distorcida em relação a uma interface de formato perfeitamente circular. Também é bastante claro que a interface convergente é menos deformada do que a interface uniforme ($\alpha = 0$). Isto indica que a geometria convergente possui um efeito de estabilização em relação ao comportamento equivalente observado nas circunstâncias de placas paralelas. Por outro lado, a interface do caso divergente ($\alpha = 10^{-3}$) parece similar ao caso de placas paralelas, sendo, talvez, apenas um pouco mais deformada. Adicionalmente, eventos de bifurcação de dedos não são observados. Estes achados são qualitativamente consistentes com os resultados numéricos da Ref. [65] para menores valores de Ca , para os quais não foram encontrados eventos de bifurcação de dedos (veja a Fig. 17). Vale a pena mencionar que, se menores valores de Ca são utilizados, todas as interfaces fracamente não lineares resultantes são ainda mais estáveis (quase circulares).

As conclusões visuais, discutidas no parágrafo anterior, relacionadas ao comportamento da interface são fortemente sustentadas pelos resultados mais quantitativos apresentados no painel inferior da Fig. 19(a), a qual ilustra a evolução temporal do comprimento do dedo $\Delta\mathcal{R}$ para os três valores de α considerados no painel superior. É possível verificar que a curva de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha = -10^{-3}$ ($\alpha = 10^{-3}$) encontra-se abaixo (acima) da curva correspondente de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha = 0$. Uma vez que a quantidade $\Delta\mathcal{R}$ é uma medida da amplitude de perturbação do dedo, isto significa que a interface associada com o valor $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$) é, de fato, relativamente mais

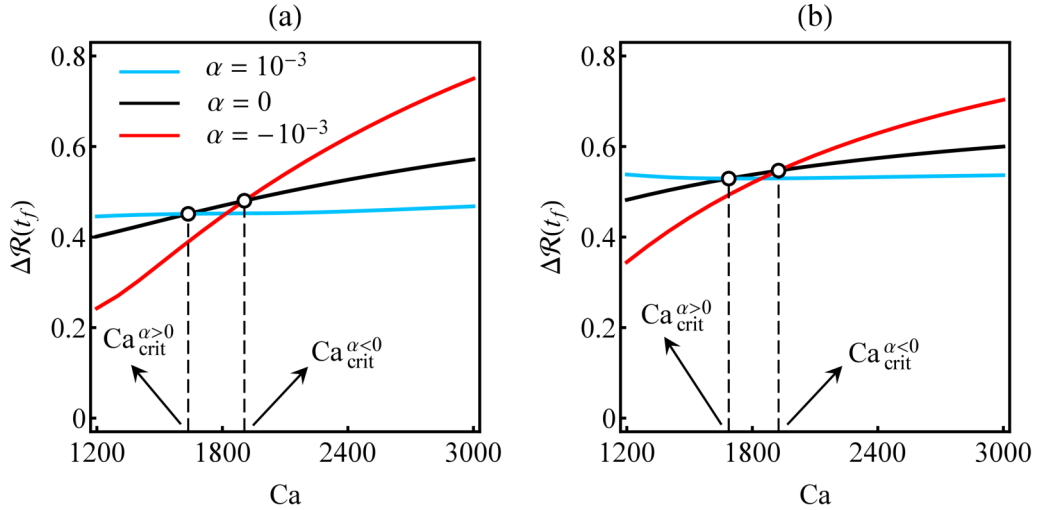


Figura 21 – Determinação dos valores críticos do número de capilaridade para os quais ocorrem transições de instabilidade relativa. Isto é realizado por meio do gráfico da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}(t_f)$, calculada no tempo final $t = t_f$, em função de Ca para $\alpha = -10^{-3}$, $\alpha = 0$ e $\alpha = 10^{-3}$. O número de capilaridade crítico $Ca_{crit}^{\alpha>0}$ ($Ca_{crit}^{\alpha<0}$) é determinado pelo ponto no qual as curvas para $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) cruzam-se, conforme indicado pelas linhas verticais tracejadas. Aqui, todos os parâmetros físicos e condições iniciais são idênticos àqueles utilizados na (a) Fig. 19 [$n = 5$, $a_n(0) = 10^{-2}$ e $t_f = 13$] e (b) Fig. 22 [$n = 4$, $a_n(0) = 2.5 \times 10^{-2}$ e $t_f = 12$].

estável (instável) do que a interface para $\alpha = 0$. Como nossa teoria é baseada numa expansão de primeira ordem na inclinação reescalada $\alpha R/b_i$, a princípio, poderíamos esperar que a distância entre as curvas de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$ fosse a mesma distância entre as curvas de $\alpha < 0$ e $\alpha = 0$. Entretanto, isto não é verdadeiro, uma vez que tanto b_i [veja Eq. (3.3)] quanto R [veja Eq. (3.5)] possuem dependência em α , de forma que efeitos de ordens maiores em α são levados em consideração. Isto é responsável por introduzir uma assimetria nas curvas de $\Delta\mathcal{R}$ apresentadas no painel inferior da Fig. 19(a). Estas conclusões também são válidas para as curvas que aparecem nas Figs. 19(b)-19(d), assim como na Fig. 22.

Se aumentarmos o valor de Ca , como ilustrado na Fig. 19(a)-Fig. 19(d), e analisarmos as respostas das interfaces emergentes, é possível detectar que o forte efeito de estabilização, proporcionado pela célula convergente na Fig. 19(a), torna-se cada vez menos efetivo. Em contrapartida, as interfaces mais instáveis da célula divergente, observadas para baixos valores de Ca , tendem a tornarem-se mais estáveis (quando comparadas com as interfaces para a situação de placas paralelas) conforme o valor de Ca aumenta. Logo, à medida que o número de capilaridade cresce, é possível alcançar um valor crítico para Ca [situação ilustrada na Fig. 19(b), onde $Ca = Ca_{crit} = Ca_{crit}^{\alpha>0} = 1637$] a partir do qual o comportamento de estabilidade relativa da interface divergente ($\alpha > 0$) em relação à interface uniforme ($\alpha = 0$) muda. Em outras palavras, se $Ca > Ca_{crit}^{\alpha>0}$, a interface divergente será agora mais estável do que a interface uniforme correspondente. Estes achados podem ser verificados na Fig. 19(b), particularmente no painel inferior, para o qual as curvas de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$ estão praticamente superpostas e

tocam-se no tempo $t = t_f$. Informação complementar sobre este comportamento de transição para células divergentes é dada pela Fig. 21(a), a qual descreve como o comprimento do dedo, calculado no tempo $t = t_f = 13 [\Delta\mathcal{R}(t_f)]$, varia conforme Ca aumenta. Pela Fig. 21(a), fica evidente que as curvas para $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$ cruzam-se em $Ca = Ca_{\text{crit}}^{\alpha>0} = 1637$ [como indicado pela linha tracejada vertical no lado esquerdo da Fig. 21(a)], de tal maneira que, se $Ca < Ca_{\text{crit}}^{\alpha>0}$, a interface da célula divergente é mais instável do que a interface uniforme. Por outro lado, se $Ca > Ca_{\text{crit}}^{\alpha>0}$, a interface da célula divergente torna-se mais estável do que a interface uniforme. Logo, em $Ca = Ca_{\text{crit}}^{\alpha>0} = 1637$, ocorre uma transição no comportamento da estabilidade do sistema para células divergentes.

Apesar do comportamento de transição para células de Hele-Shaw divergentes descrito anteriormente e ilustrado pela Fig. 19(b) e pela Fig. 21(a), a interface convergente apresentada na Fig. 19(b) ainda permanece mais estável do que a interface uniforme [assim como no caso da Fig. 19(a)]. Isto pode ser confirmado por meio da verificação do painel inferior da Fig. 19(b), para o qual a curva de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha < 0$ localiza-se abaixo da curva de $\Delta\mathcal{R}$ relacionada com $\alpha = 0$. Logo, a ocorrência de uma transição de estabilidade para o comportamento da interface em células divergentes não implica diretamente em uma mudança simultânea para o escoamento em células de Hele-Shaw convergentes. Note que por meio do aumento de Ca da Fig. 19(a) para Fig. 19(b), é possível verificar que as curvas de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$ aproximam-se da curva de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha = 0$, indicando que a desestabilização (estabilização) proporcionada pela célula divergente (convergente) torna-se menos intensa. Um outro aspecto interessante revelado pela Fig. 19(b) é fato de que, independentemente do valor e do sinal de α , a ponta dos dedos na Fig. 19(b) são um pouco mais largas e achatadas do que as pontas de dedos observadas nas interfaces expostas na Fig. 19(a). Então, é possível concluir que, por meio do aumento de Ca , existe uma tendência ao alargamento e achatamento da ponta dos dedos (curvas para $\alpha = 0$ e $\alpha > 0$), e até mesmo ao início do processo de bifurcação de dedos (curva para $\alpha < 0$). Estes resultados fracamente não lineares relacionados com o formato dos padrões também estão em acordo com as conclusões obtidas na Ref. [65], relacionadas com a produção de padrões que exibem pontas de dedo achatadas, para um intervalo similar de valores de Ca .

Se continuarmos a aumentar a magnitude do número de capilaridade, é possível revelar a existência de outra transição de estabilidade relativa, mas agora envolvendo os comportamentos da interface em células convergente e uniforme. Como mencionado nos parágrafos anteriores, conforme Ca aumenta, a interface convergente torna-se cada vez mais instável quando comparada à situação correspondente da interface uniforme. Neste cenário, alcançamos outro valor crítico para o número de capilaridade [veja Fig. 19(c), onde $Ca = Ca_{\text{crit}} = Ca_{\text{crit}}^{\alpha<0} = 1905$] a partir do qual a interface convergente será mais instável do que a interface uniforme equivalente. Esta situação pode ser facilmente identificada no painel inferior da Fig. 19(c), para o qual as curvas de $\Delta\mathcal{R}$ relacionadas com $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ são quase que indistinguíveis. A determinação deste segundo valor crítico para o número de capilaridade é ilustrada na Fig. 21(a), correspondendo ao ponto para o qual as curvas de $\Delta\mathcal{R}(t_f)$ para $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ intersectam-se [como indicado

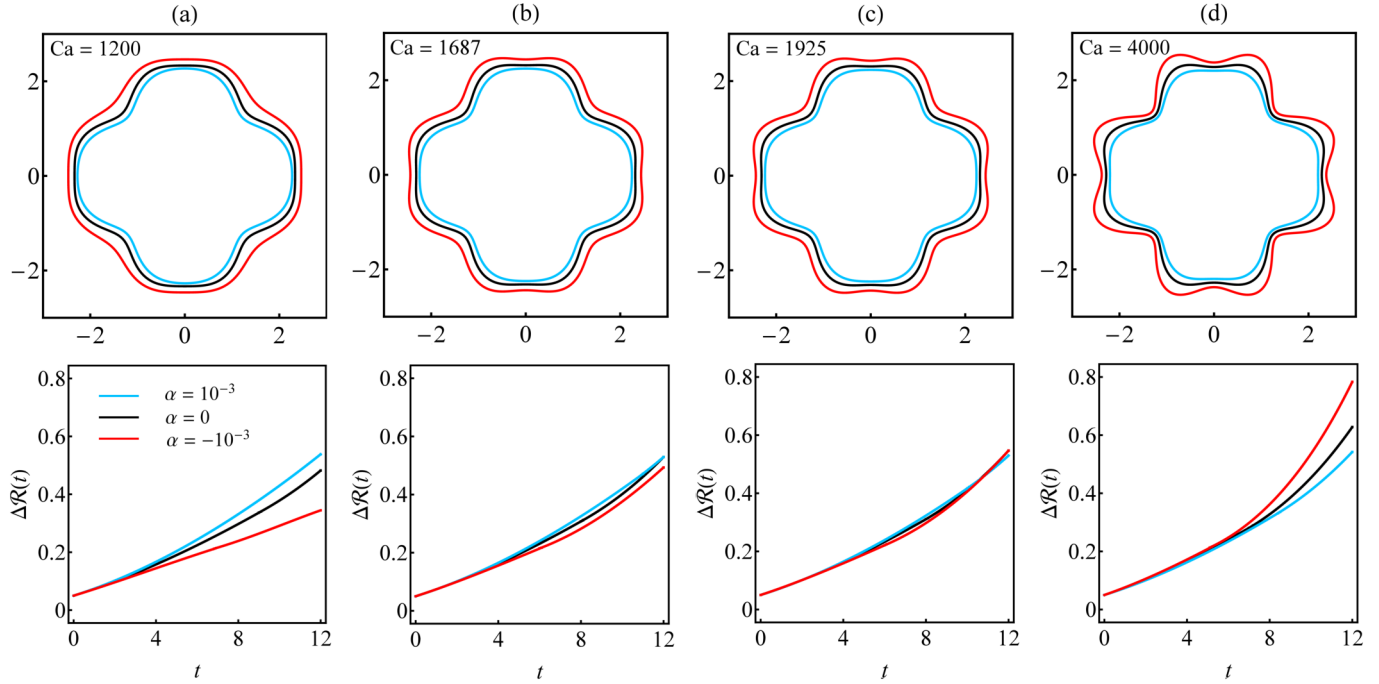


Figura 22 – Interfaces fracamente não lineares obtidas para o tempo $t = t_f = 12$ (painéis superiores). As interfaces ilustram os padrões típicos de dedos viscosos para processos de injeção radial em células de Hele-Shaw divergente ($\alpha = 10^{-3}$), uniforme ($\alpha = 0$) e convergente ($\alpha = -10^{-3}$). Os seguintes valores para o número de capilaridade são analisados: (a) $Ca = 1200$, (b) $Ca = 1687$, (c) $Ca = 1925$ e (d) $Ca = 4000$. As interfaces são obtidas por meio do acoplamento não linear entre os modos n e $2n$, onde $n = 4$. As correspondentes evoluções temporais da função comprimento de dedo $\Delta\mathcal{R}(t)$, para $0 \leq t \leq t_f$, são apresentadas nos painéis inferiores.

pela linha tracejada vertical no lado direito da Fig. 21(a)]. Este comportamento para valores mais altos de Ca pode ser visualizado no painel superior da Fig. 19(c), para o qual a interface convergente revela um padrão que exibe modestos eventos de bifurcação de dedos. Novamente, esta previsão fracamente não linear está em acordo qualitativo com os padrões simulados na Ref. [65] (veja a Fig. 17) para o regime de Ca alto, onde a bifurcação de dedos é predominante.

Se o valor de Ca cresce além do valor da capilaridade crítica para a transição envolvendo as interfaces convergente e uniforme, ou seja, se $Ca > Ca_{\text{crit}}^{\alpha < 0} = 1905$ [assim como Fig. 19(d), para a qual $Ca = 3000$], o papel destabilizante da célula convergente continua aumentando e, além disso, fenômenos mais intensos de bifurcação de dedos são detectados para a situação $\alpha < 0$. Equivalentemente, é possível verificar que para estes grandes valores de Ca , o papel estabilizante da célula divergente é reforçado. Isto pode ser visto no painel inferior da Fig. 19(d), para o qual a curva de $\Delta\mathcal{R}$ relacionada à $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) encontra-se agora abaixo (acima) da curva de $\Delta\mathcal{R}$ para $\alpha = 0$, notavelmente para maiores valores de tempo. Também investigamos como os valores críticos do número de capilaridade, obtidos por meio da análise da Fig. 19 e Fig. 21(a), são modificados se os valores de n e t_f são mantidos fixos e a amplitude de perturbação inicial $a_n(0)$ é variada. Em relação a este ponto específico, observamos que se $a_n(0)$ é diminuído (aumentado), o valor de Ca_{crit} aumenta (diminui). Por exemplo, no caso da Fig. 19, nossos testes indicam que

uma mudança de 2% em $a_n(0)$ [observe que a variação em $a_n(0)$ não pode ser muito grande, uma vez que, aqui, queremos manter t_f inalterado] nos leva a uma mudança média de cerca de 10% (5%) em $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha < 0}$ ($\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha > 0}$). Entretanto, também verificamos que o comportamento geral das transições de estabilidade reveladas na Fig. 19 é robusto perante estas mudanças em $a_n(0)$. É necessário deixar claro que estas conclusões também são verdadeiras para os dados conectados com a Fig. 22, para a qual o desenvolvimento de transição de estabilidade será examinado considerando-se outro conjunto de valores para n , $a_n(0)$, t_f e Ca .

Pela análise da Fig. 19, podemos inferir que nossa abordagem fracamente não linear é capaz de capturar os comportamentos mais proeminentes do processo de formação de padrões que surgem quando o número de capilaridade é variado em células de Hele-Shaw radiais com gradiente de espaçamento: enquanto que na geometria convergente a resposta da interface muda de estabilizante, no regime de baixo Ca , para desestabilizante, no regime de alto Ca , a interface da geometria divergente varia de mais instável, para baixo Ca , para mais estável no regime de alto Ca . Com o objetivo de fortalecer a relevância dos nossos resultados fracamente não lineares, revisitamos as situações examinadas na Fig. 19, mas usando um intervalo de parâmetros relevantes mais amplo. Especificamente, na Fig. 22, nós investigamos como o comportamento geral da transição de estabilidade, revelado na Fig. 19, é modificado se considerarmos diferentes valores para: (i) o número de onda n , (ii) a amplitude inicial $a_n(0)$ e (iii) o tempo final t_f . Enquanto que na Fig. 19 analisamos os casos para os quais $n = 5$, $a_n(0) = 10^{-2}$ e $t_f = 13$, na Fig. 22, examinamos a situação para a qual $n = 4$, $a_n(0) = 2.5 \times 10^{-2}$ e $t_f = 12$. Por inspeção das Figs. 19 e 22, comparando as respostas da interface mediante mudanças em Ca e as correspondentes evoluções temporais das curvas para o comprimento do dedo $\Delta\mathcal{R}(t)$, verificamos que apesar dos valores diferentes para n , $a_n(0)$ e t_f utilizados nestes gráficos, o comportamento geral da transição de estabilidade é identificado. Além disso, para as situações estudadas nas Figs. 19 e 22, também investigamos dois casos adicionais (figuras não apresentadas) referentes a dois conjuntos de parâmetros: (i) $n = 6$, $a_n(0) = 5.0 \times 10^{-3}$ e $t_f = 11$, e (ii) $n = 3$, $a_n(0) = 5.5 \times 10^{-2}$ e $t_f = 15$. Para estes dois últimos casos, também encontramos os mesmos comportamentos já evidenciados pelas Figs. 19 e 22.

Informação complementar a respeito dos comportamentos de transição observados na Fig. 22 é fornecida pela Fig. 21(b). É claro que os valores dos números de capilaridade crítica para os quais o comportamento de estabilidade relativa muda (Ca_{crit}) não são os mesmo na Fig. 19 [$\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha > 0} = 1637$, $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha < 0} = 1905$] e na Fig. 22 [$\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha > 0} = 1687$, $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha < 0} = 1925$]. De forma semelhante, outros valores de Ca_{crit} são encontrados para os dois conjuntos de parâmetros adicionais mencionados no parágrafo anterior: para (i), temos que $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha > 0} = 1294$ e $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha < 0} = 1928$, enquanto que para (ii), encontramos $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha > 0} = 2097$ e $\text{Ca}_{\text{crit}}^{\alpha < 0} = 2317$. Todos estes dados indicam que os valores específicos para Ca_{crit} dependem dos parâmetros n , $a_n(0)$ e t_f . Por outro lado, a variação destes valores não é tão significativa, apontando para a utilidade da nossa abordagem teórica em descrever as características gerais da transição de estabilidade relativa conforme n , $a_n(0)$ e t_f são modificados. Entretanto, é preciso deixar claro que não estamos argumentando que os valores

de Ca_{crit} , calculados para as situações ilustradas nas Figs. 19, 21, 22 e no casos adicionais (i) e (ii), são universais. Apesar disso, ainda podemos dizer que a descrição fracamente não linear é capaz de detectar e reproduzir de forma consistente o comportamento geral da transição de estabilidade, além das mudanças morfológicas associadas aos dedos (alargamento, achatamento e bifurcação da ponta dos dedos) que surgem nos escoamentos em célula de Hele-Shaw radial com gradiente de espaçamento [65].

Várias explicações para os efeitos estabilizantes e desestabilizantes que surgem durante os deslocamento de fluido em células de Hele-Shaw com gradiente de espaçamento têm sido dadas na literatura [58–65, 148–150]. Neste ponto, apresentamos um breve discussão sobre os mecanismos físicos responsáveis pela mudança da estabilidade relativa quando o número de capilaridade Ca é aumentado, assim como analisado nas situações ilustradas nas Figs. 19 e 22. Começamos com o caso da geometria convergente, a qual está relacionada com a ação de dois efeitos estabilizantes: o primeiro deles é conectado com a variação da curvatura transversal [$\sim 1/b(r)$]. Conforme a interface avança, $b(r)$ diminui ao longo da direção do escoamento e a interface encontra uma região de maior curvatura transversal que retarda as pontas dos dedos em comparação com partes da interface que estão mais para trás no plano da célula. O segundo efeito de estabilização é devido a uma diminuição na mobilidade do fluido $[b(r)]^2/12\eta$ na frente da interface. Em oposição a estes dois mecanismos estabilizantes, há um aumento no gradiente de pressão viscosa que tende a desestabilizar a interface. A competição entre estes três efeitos determina a estabilidade relativa discutida nas Figs. 19 e 22. Sob estas circunstâncias, quando valores mais baixos de Ca são considerados, a redução da mobilidade do fluido e o aumento da curvatura transversal dominam a dinâmica em relação ao aumento dos efeitos viscosos. Assim, a situação da célula convergente tende a ser mais estável do que o caso das placas paralelas. Por outro lado, se Ca aumenta, o gradiente de pressão viscosa supera as contribuições estabilizantes e, conseqüentemente, o espaçamento convergente nos leva a um aumento na formação de dedos viscosos em comparação com o caso da célula de Hele-Shaw uniforme. Sob a ação de tais mecanismos estabilizantes e desestabilizantes, as respostas da interface são exatamente invertidas na situação da geometria divergente.

Anteriormente neste capítulo, comentamos que, de forma geral, não deveríamos esperar um acordo quantitativo entre o formato das interfaces fracamente não lineares e as estruturas para tempos avançados obtidas por meio de sofisticadas simulações numéricas. Concluímos nossa discussão nesta seção abordando um assunto intimamente relacionado. De forma mais específica, justificamos o motivo pelo qual não proporcionamos uma comparação direta entre nossas interfaces fracamente não lineares e as fortemente não lineares obtidas por simulações realizadas na Ref. [65] (expostas na Fig. 17). Afinal de contas, uma pergunta que surge naturalmente é por qual motivo não usamos exatamente o mesmo conjunto de parâmetros utilizado na Ref. [65] e tentamos reproduzir, ao menos parcialmente, suas evoluções temporais de interface. Em princípio, para realizar tal comparação, deveríamos nos concentrar nas situações apresentadas na Ref. [65] para as quais as interfaces resultantes não são excessivamente deformadas, como as interfaces

convergente e uniforme mostradas na Fig. 17(a).

Infelizmente, não fomos bem sucedidos em tentar reproduzir os padrões examinados na Ref. [65]. Seguindo a Ref. [65], utilizamos os parâmetros da Fig. 6(a) deles [$\beta = 1250$, $Ca = 500$, $q = 100$, $\alpha = 0, \pm 10^{-3}$, $a_n(0) = 5.0 \times 10^{-2}$, $n = 8$ e $t = 24$] para examinar a evolução temporal das formas fracamente não lineares equivalentes. É necessário deixar claro que as interfaces fracamente não lineares produzidas por nós foram confeccionadas utilizando exatamente os mesmos parâmetros usados pela Ref. [65], com exceção de β . Como nosso modelo teórico considera o limite de razão de viscosidade infinita ($\beta \rightarrow \infty$), não podemos adotar $\beta = 1250$ (como feito na Ref. [65]). Lamentavelmente, quando tentamos simular as interfaces fracamente não lineares, observamos que as soluções perturbativas divergem já para tempos consideravelmente menores do que $t = 24$ (tempo usado na Ref. [65] para plotar suas interfaces fortemente não lineares). Os padrões fracamente não lineares resultantes apresentaram amplitudes muito grandes, revelando interfaces de aspecto extravagante com múltiplos cruzamentos entre interfaces subsequentes. A motivação por trás deste cenário fracamente não linear incomum é o fato de que no âmbito do nosso modelo de $\beta \rightarrow \infty$, a amplitude inicial $a_n(0)$ e o valor de tempo ($t = 24$) utilizados na Ref. [65] são muito grandes, de forma que nestas circunstâncias a descrição fracamente não linear deixa de ser válida. É claro que um importante fator que contribui para a discordância entre as interfaces fortemente e fracamente não lineares é o fato de que nossa situação $\beta \rightarrow \infty$ é ainda mais instável do que o caso equivalente estudado na Ref. [65], para a qual β é grande, porém finito.

Portanto, fica claro que com a escolha dos parâmetros feita na Ref. [65], não é plausível fazer uma comparação direta entre nossas interfaces modestamente perturbadas com as estruturas mais complexas obtidas para tempos avançados. Consequentemente, nos gráficos das várias interfaces representativas mostradas neste capítulo, tivemos que considerar conjuntos de parâmetros distintos daqueles estudados na Ref. [65]. Em particular, para o nosso modelo de $\beta \rightarrow \infty$, tivemos que usar menores valores para os tempos finais $t = t_f$. Além disso, com o objetivo de melhorar a representação das questões associadas com a transição de estabilidade e com as mudanças morfológicas dos padrões, selecionamos os valores apropriados para os números de onda n para garantir a validade da nossa abordagem perturbativa fracamente não linear.

4 FORMAÇÃO DE DEDOS VISCOSOS PARA FLUXO RADIAL COM RAZÕES DE VISCOSIDADE E DENSIDADE ARBITRÁRIAS

4.1 Introdução

No presente capítulo, abordaremos a formação de padrões de dedos viscosos para o caso da injeção radial em célula de Hele-Shaw em uma situação distinta das consideradas anteriormente: enquanto que nos capítulos 2 e 3 analisamos o caso em que a razão de viscosidade $\beta = \eta_2/\eta_1$ é infinita, aqui, estudaremos a formação de padrões durante o deslocamento radial em célula de Hele-Shaw para uma razão de viscosidade arbitrária. Desta forma, a viscosidade de ambos os fluidos (injetado e deslocado) não são desprezíveis.

Este trabalho se justifica devido à relativa escassez de pesquisas relacionadas com esta situação na literatura. Somente alguns grupos realizaram pesquisa neste tópico, como, por exemplo, as investigações experimentais realizadas nas Refs. [68, 69] e as análises numéricas feitas pela Ref. [70]. Em relação às pesquisas experimentais [68, 69], foi analisado o regime para tempos avançados da dinâmica de formação de padrões para o qual estruturas fortemente não lineares são formadas. Nestas circunstâncias, foi encontrada uma grande variedade de morfologias para a interface, onde padrões distintos se formam conforme a razão de viscosidade β é variada. Consistentemente com as observações experimentais previamente conhecidas [34–40], os resultados encontrados nas Refs. [68, 69], para a situação usual de grande (ou infinita) razão de viscosidade, apresentam padrões com dedos longos que crescem a partir de uma pequena região circular interna. No entanto, conforme a razão de viscosidade é diminuída, padrões consideravelmente distintos são formados. Nesta situação, a região circular é visivelmente maior, enquanto que o comprimento dos dedos tende a diminuir. Como exemplos ilustrativos desta peculiar dependência dos padrões de interface com a razão de viscosidade β , podemos citar a Fig. 2 da Ref. [68] (ver Fig. 23) e a Fig. 1 da Ref. [69] (ver Fig. 24). Este conjunto de resultados experimentais reforçam a forte dependência da morfologia da interface fluido-fluido em escoamento radial com a razão de viscosidade β .

As características morfológicas das interfaces detectadas experimentalmente nas Refs. [68, 69] para tempos avançados da dinâmica também foram analisadas, utilizando-se de técnicas numéricas, por Jackson *et al.* [70]. Na Ref. [70], os autores desenvolveram um eficiente método de integral de contorno em conjunto com elaboradas simulações numéricas para examinar o impacto da razão de viscosidade na formação de dedos viscosos em fluxo radial para uma série de valores

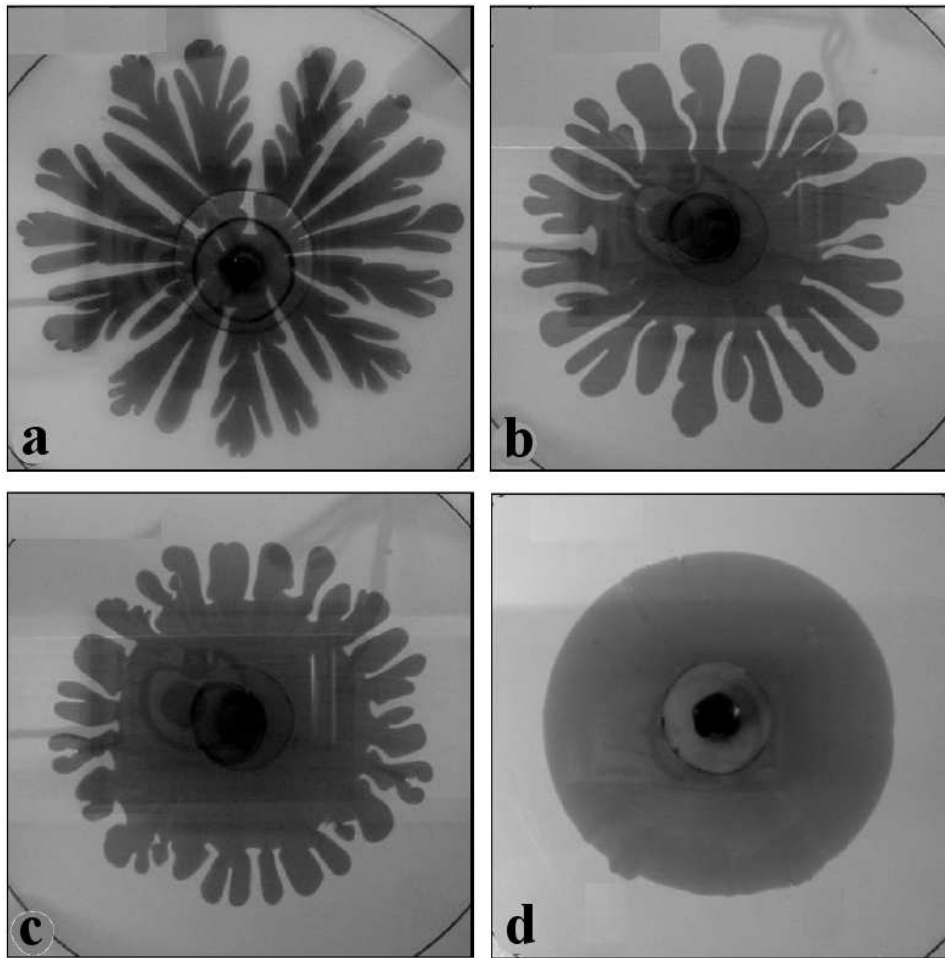


Figura 23 – Experimento ilustrando os padrões de interface para diferentes razões de viscosidade. Os seguintes valores de β são considerados neste experimento: (a) $\beta = 1403$, (b) $\beta = 130.6$, (c) $\beta = 12.9$ e (d) $\beta = 2.69$. Esta ilustração, retirada da Ref. [68], torna clara a forte dependência da morfologia dos padrões em relação à razão de viscosidade.

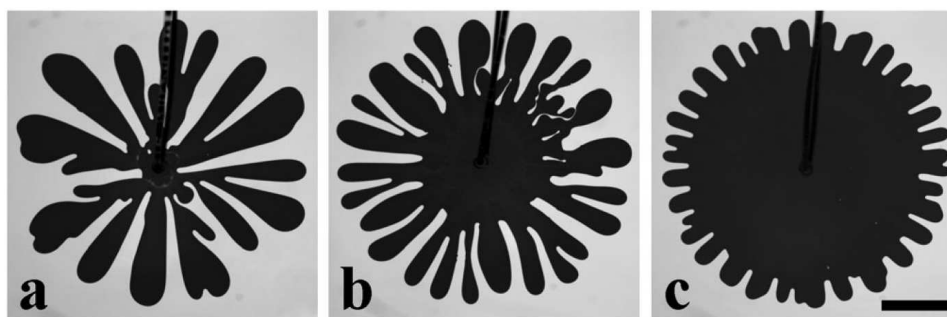


Figura 24 – Experimento exemplificando a mudança da morfologia dos padrões conforme a razão de viscosidade é diminuída. Aqui, os valores de β são: (a) $\beta = 303$, (b) $\beta = 7.1$ e (c) $\beta = 2.4$. Figura retirada da Ref. [69].

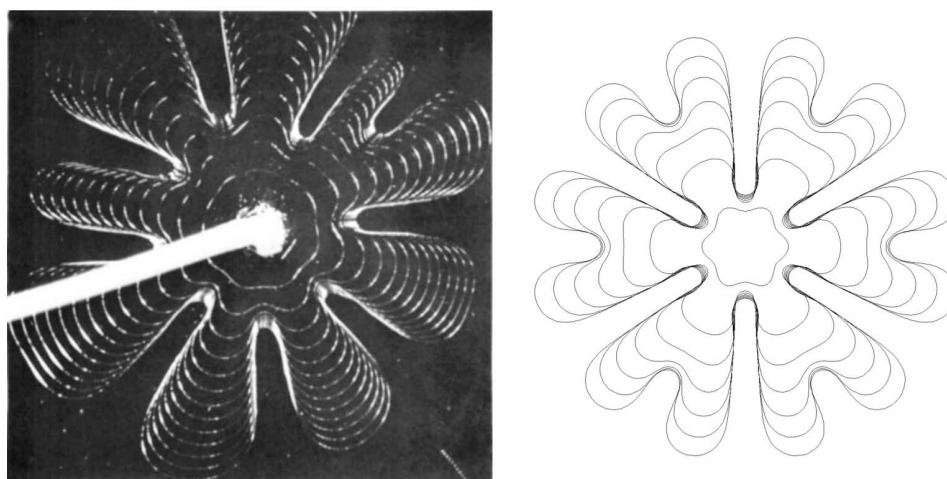


Figura 25 – Na Figura à esquerda (retirada da Ref. [34]), observamos a evolução temporal da interface em um experimento de injeção radial em célula de Hele-Shaw, enquanto que à direita, temos uma simulação deste mesmo problema feita na Ref. [158]. Em ambas as situações, o escoamento é realizado nas circunstâncias de alta razão de viscosidade. É possível verificar que a base dos dedos, espaço localizado entre os dedos adjacentes, praticamente não se move e a velocidade da interface tende a zero neste ponto. Estes pontos são comumente conhecidos como pontos de estagnação.

de número de capilaridade Ca . Em acordo com as Refs. [68, 69], as simulações numéricas para tempos avançados realizadas pela Ref. [70] também revelaram que as características morfológicas dos dedos formados na situação de baixa razão de viscosidade são bem diferentes daquelas comumente apresentadas nas circunstâncias usuais de alta ou infinita razão de viscosidade [34–43]. Além das características já identificadas nas Refs. [68, 69], as simulações apresentadas na Ref. [70] também evidenciaram outros aspectos dinâmicos interessantes conforme a razão de viscosidade β é variada. Primeiramente, eles verificaram que os pontos de estagnação (pontos para os quais a velocidade da interface tende a zero), localizados próximos às bases dos dedos (região também conhecida por *ffjords*), encontrados nas situações de escoamento para alta ou infinita razão de viscosidade (ver Fig. 25) não são encontrados nas condições de baixa razão de viscosidade. Para baixos valores de β , a base dos dedos move-se de forma a se afastar da sua posição inicial. Além disso, as simulações fortemente não lineares indicaram que o número de dedos originados da primeira ramificação da interface aumenta com o número de capilaridade, resultando assim em diferentes perfis de interface à medida que Ca varia. Também foi verificado que o movimento da base dos dedos é independente do número de capilaridade usado. Os importantes resultados fortemente não lineares obtidos na Ref. [70] demonstraram que os vários regimes de escoamento radial em Hele-Shaw podem ser convenientemente descritos por apenas dois parâmetros de controle: β e Ca .

Apesar dos esforços empregados nas Refs. [68–70] para melhorar o entendimento da dinâmica fortemente não linear da formação de dedos viscosos em escoamento radial em célula de Hele-Shaw para situações de razão de viscosidade e número de capilaridade arbitrários,

um estudo analítico da evolução deste sistema ainda não foi realizado. A escassez de estudos analíticos nesta situação é devida ao fato da característica fortemente não linear e da natureza não local da dinâmica de interface analisada para tempos avançados nas Refs. [68–70]. Sendo assim, um estudo predominantemente analítico da influência de β e Ca na formação de padrões de dedos viscosos em fluxo radial para tempo iniciais do regime não linear é bastante necessário.

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição analítica para o desenvolvimento de dedos viscosos em fluxo radial em célula de Hele-Shaw para a situação de razão de viscosidade arbitrária e para uma série de valores de número de capilaridade. Diferentemente do que foi feito nas Refs. [68–70], nosso estudo será voltado para tempos iniciais da dinâmica fracamente não linear, regime onde as não linearidades começam a se manifestar. De forma mais específica, usaremos a abordagem fracamente não linear de modos acoplados para identificar analiticamente alguns aspectos não lineares relacionados, por exemplo, à variabilidade dos perfis assumidos pela interface e a correspondente proliferação de dedos conforme Ca é variado. Analisaremos também os efeitos de supressão da estagnação da base dos dedos para baixos valores de β .

Adicionalmente, iremos além do que foi explorado nas Refs. [68–70] e investigaremos como a inércia afeta a dinâmica de formação de dedos viscosos em fluxo radial para o caso mais geral possível, ou seja, na situação para a qual ambos os fluidos (injetado e deslocado) possuem viscosidades e densidades não desprezíveis. A inclusão da inércia em nosso problema é motivada pela crescente atenção que este importante efeito físico tem recebido em estudos relacionados às instabilidades de Saffman-Taylor [23–25, 159–165]. Estes estudos inovadores têm revelado uma série de curiosas modificações induzidas pela inércia na dinâmica da formação de dedos viscosos. Aqui, mostraremos que quando efeitos inerciais são levados em consideração, em conjunto com a razão de viscosidade β e o número de capilaridade Ca , é preciso considerar o papel da razão de densidade $\alpha = \rho_2/\rho_1$ e, também, a influência do número de Reynolds Re , parâmetro físico que quantifica a importância dos efeitos da inércia no sistema. Por fim, considerando a ação conjunta de β , Ca , α e Re , vamos revisar o problema fundamental da formação de padrões previamente estudado nas Refs. [68–70], mas agora investigando como os aspectos fracamente não lineares da dinâmica são modificados pela consideração dos efeitos inerciais.

O restante deste capítulo será organizado da seguinte forma: na seção 4.2, derivamos as equações fracamente não lineares para o problema em questão considerando tanto a influência dos efeitos inerciais como, também, o papel das razões de viscosidade e densidade arbitrárias. Partindo de média transversal da lei de Darcy generalizada e empregando a abordagem fracamente não linear, vamos ganhar acesso aos mecanismos não lineares responsáveis pela formação de padrões. Na seção 4.3, analisamos vários aspectos relacionados ao desenvolvimento de dedos viscosos no regime fracamente não linear da dinâmica. Faremos a análise considerando tanto a ausência (seção 4.3.1) quanto a presença (seção 4.3.2) de efeitos inerciais. Além disso, investigamos a influência de cada um dos parâmetros de controle do sistema (β , Ca , α e Re) nas estruturas de interface não lineares.

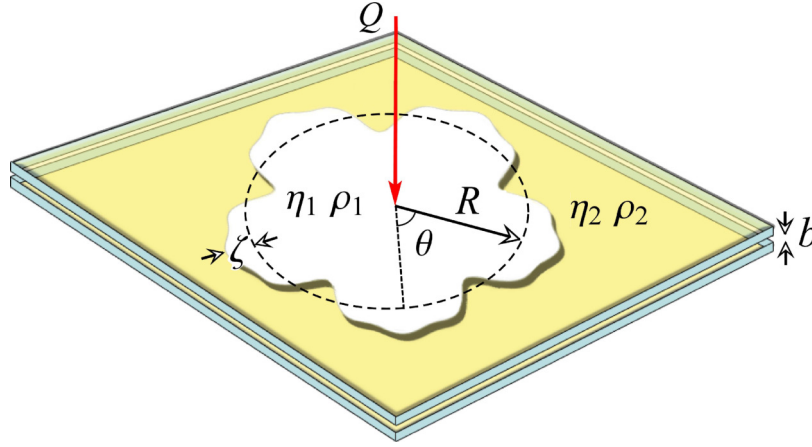


Figura 26 – Representação esquemática do escoamento de um fluido impulsionado pela injeção Q em célula de Hele-Shaw radial.

4.2 Equações do sistema

O sistema físico estudado neste capítulo é bastante similar ao sistema abordado no capítulo 2. Consideramos dois fluidos newtonianos e imiscíveis localizados espacialmente entre as duas placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw (ver Fig. 26) para a qual o espaçamento entre as placas é constante e representado por b . O fluido interno possui viscosidade η_1 e densidade ρ_1 , enquanto que o fluido externo tem viscosidade η_2 e densidade ρ_2 . No contorno que separa os dois fluidos há uma tensão superficial σ . Assim como nos casos abordados nos capítulos anteriores, estudamos o escoamento radial em célula de Hele-Shaw na situação em que o fluido interno menos viscoso é injetado por um pequeno orifício no centro da célula, causando assim o deslocamento do fluido externo mais viscoso. A taxa de injeção é constante e denotada por Q .

Inicialmente, em $t = 0$, a interface fluido-fluido é circular e possui raio $R(t = 0) = R_0$. Conforme o fluido interno é injetado e desloca o fluido externo, as instabilidades de Saffman-Taylor começam a se formar e a interface perturbada é descrita por $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, onde $R(t) = \sqrt{R_0^2 + Qt/\pi}$ segue a evolução temporal usual para o caso de injeção radial em Hele-Shaw de placas paralelas (sistema primeiramente abordado no capítulo 2) e $\zeta(\theta, t)$ é representada pela expansão em modos de Fourier. Aqui, θ representa o ângulo azimutal.

Com a inclusão dos efeitos inerciais, as equações hidrodinâmicas que descrevem o sistema são representadas pela média transversal da lei de Darcy não linear generalizada [23, 24, 159–162]

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \frac{6}{5} (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j - \frac{12\eta_j}{b^2} \mathbf{u}_j, \quad (4.1)$$

e pela equação de continuidade para fluidos incompressíveis

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0. \quad (4.2)$$

Nestas duas equações, $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j(r, \theta)$ e $p_j = p_j(r, \theta)$ são, respectivamente, as médias transversais da velocidade e da pressão dos fluidos $j = 1, 2$. Perceba que, devido à inclusão da inércia, a lei

de Darcy generalizada (4.1) assume um formato muito mais complicado do que sua forma usual (velocidade proporcional ao gradiente de pressão) apresentada nos capítulos 2 e 3. Esta versão generalizada da lei de Darcy é obtida tomando-se a média transversal da equação tridimensional de Navier-Stokes e mantendo os termos inerciais. Vale ressaltar que os coeficientes que aparecem na frente dos termos $\partial \mathbf{u}_j / \partial t$ e $(\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j$ podem variar dependendo da forma com que é média transversal for feita, no entanto são sempre de ordem 1. Os cálculos detalhados para se obter a Eq. (4.1) podem ser encontrados no apêndice da Ref. [159]. Uma derivação alternativa desta equação é dada na Ref. [23].

Para achar a equação de movimento da interface fluido-fluido, reescrevemos a Eq. (4.1) para cada um dos fluidos em termos do potencial de velocidade ϕ_j [24, 161], onde $\mathbf{u}_j = -\nabla \phi_j$. Logo após, subtraímos a equação para o fluido 1 pela equação do fluido 2 e calculamos o resultado na posição da interface $r = \mathcal{R}$. O resultado é a equação de movimento adimensional

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_1|^2 \right] - \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_2|^2 \right] \right\}_{r=\mathcal{R}} = \left[p_1 - p_2 - \frac{\phi_1}{\beta} + \phi_2 \right]_{r=\mathcal{R}}, \quad (4.3)$$

onde os parâmetros $\alpha = \rho_2 / \rho_1$ e $\beta = \eta_2 / \eta_1$ são, respectivamente, as razões de densidade e viscosidade mencionadas na seção 4.1. Na Eq. (4.3), comprimentos são reescalados por $L = R_0$ e velocidades pela velocidade característica $U = Q / R_0$. O número de Reynolds quantifica o efeito da inércia no sistema e é definido como

$$\text{Re} = \frac{\rho_2 U b^2}{12 \eta_2 L}. \quad (4.4)$$

Para parâmetros experimentais típicos [1, 6, 32–34, 34–40], o número de Reynolds é muito pequeno ($10^{-3} \leq \text{Re} \leq 10^{-2}$) e pode ser seguramente desconsiderado. Entretanto, para situações envolvendo um espaçamento b maior, velocidades altas e fluidos deslocados com viscosidades baixas, exatamente como nos casos tratados nas Refs. [24, 159], o número de Reynolds pode ser consideravelmente grande ($\text{Re} = 10^{-1}$) e, portanto, os efeitos inerciais precisam ser levados em consideração. A partir deste ponto, trabalharemos com equações adimensionais até o final do capítulo.

É necessário enfatizar que a grande maioria dos estudos relacionados a dedos viscosos em célula de Hele-Shaw (veja, por exemplo, as Refs. [1, 6, 34–43, 66–70]) simplesmente negligenciam o efeito da inércia. Isto é justificado pelo fato de que assumindo condições tradicionais em Hele-Shaw (baixa velocidade de escoamento, pequeno espaçamento entre as placas, fluidos deslocados de alta viscosidade, etc), o número de Reynolds é, de fato, muito próximo de zero e os efeitos da inércia podem ser negligenciados. Em contrapartida, para situações em que o escoamento é alto, o espaçamento entre as placas não é tão pequeno ou se o fluido deslocado não é excessivamente viscoso, o número de Reynolds pode atingir uma magnitude considerável e, conseqüentemente, torna-se necessário considerar os efeitos da inércia [23–25, 159–165]. Neste cenário, a descrição do problema de dedos viscosos usando a lei de Darcy usual [6] deve ser substituída por uma descrição mais generalizada relacionada à Eq. (4.1). Em particular, o estudo da evolução temporal da interface fluido-fluido na situação que

inclui inércia e considera valores arbitrários para β e α necessariamente precisa ser abordado à luz da Eq. (4.3). Vale ressaltar que a equação de movimento convencional, válida para a situação não inercial, pode ser obtida diretamente a partir da Eq. (4.3) considerando o limite em que $Re = 0$. Neste limite, a influência da razão de densidade α naturalmente desaparece.

Com o objetivo de estudar a movimentação da interface fluido-fluido perturbada, é preciso relacionar o potencial de velocidade (o qual obedece a equação de Laplace $\nabla^2 \phi_j = 0$) com a posição da interface $\mathcal{R}(\theta, t)$. Assim como mencionado no capítulo 2, isto pode ser realizado considerando a condição de contorno cinemática [Eq. (2.3)]. Adicionalmente, é necessário considerar a condição de contorno da diferença de pressão na interface, representada pela equação de Young-Laplace [6]

$$p_1 - p_2 = \frac{\kappa}{Ca}, \quad (4.5)$$

onde

$$Ca = \frac{12\eta_2 QR_0}{\sigma b^2} \quad (4.6)$$

denota o número de capilaridade, o qual proporciona uma medida relativa entre forças viscosas e de tensão superficial.

O restante dos cálculos é realizado seguindo procedimentos semelhantes aos que foram utilizados no capítulo 2: primeiramente, consideramos a condição de incompressibilidade (4.2) e definimos as expansões de Fourier para o potencial de velocidade. Em seguida, escrevemos ϕ_j em termos das amplitudes de perturbação ζ_n por meio da condição de contorno cinemática. Substituindo estas relações e a condição de contorno da diferença de pressão (4.5) na Eq. (4.3), mantendo termos até segunda ordem em ζ e após tomada a transformada de Fourier, obtemos, finalmente, a equação de movimento para as amplitudes de perturbação (para $n \neq 0$)

$$\begin{aligned} Re \ddot{\zeta}_n &+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta+1}{\alpha+1} \right) - Re \frac{1}{R^2} \left[\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \frac{|n|}{5} - 2 \right] \right\} \dot{\zeta}_n \\ &- \left\{ \Lambda(n) - Re \frac{1}{4\pi^2 R^4} \left[\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) |n| - 1 \right] \right\} \zeta_n = \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') + Re \mathcal{H}(n, n') \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{K}(n, n') + Re \mathcal{J}(n, n') \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ Re \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{G}(n, n') \ddot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{J}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$\Lambda(n) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right) \left\{ \frac{1}{4\pi^2 R^2} \left[\left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) |n| - \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) \right] - \frac{|n|(n^2-1)}{2\pi Ca R^3} \right\}. \quad (4.8)$$

Os termos de modos acoplados são dados por

$$\mathcal{F}(n, n') = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \frac{|n|}{R} \left\{ \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nn') \right] - \frac{2\pi}{Ca R^3} \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{K}(n, n') = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \frac{1}{R} \left\{ \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) |n| [1 - \text{sgn}(nn')] - \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) \right\}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{G}(n, n') = \frac{1}{R} \left\{ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) |n| [1 - \text{sgn}(nn')] - 1 \right\}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(n, n') &= \frac{|n|}{R^5} \left\{ \left[\frac{|n|}{5} + 2 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \right] \text{sgn}(nn') - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) - \frac{|n'|}{5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{5} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \text{sgn}(n'(n-n')) \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(n, n') &= \frac{|n|}{R^3} \left\{ \left(\frac{|n|}{5} - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \right) \text{sgn}(nn') + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) - \frac{|n'|}{5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{5} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \text{sgn}(n'(n-n')) - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \text{sgn}(n(n-n')) \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\mathcal{I}(n, n') = \frac{1}{R} \left\{ \frac{3}{5} |n| \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) [1 - \text{sgn}(n'(n-n'))] - |n| \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \text{sgn}(nn') - 1 \right\}. \quad (4.14)$$

As expressões (4.7)-(4.14) representam as equações de modos acoplados para a situação generalizada da formação de dedos viscosos em célula de Hele-Shaw radial considerando a ação de efeitos de inércia e de capilaridade. Elas também são válidas para valores arbitrários de razão de viscosidade e densidade. Observe que o sistema é descrito por quatro parâmetros físicos de controle: Re , Ca , β e α . Note que quando $Re = 0$ e $\alpha \gg 1$, a Eq. (4.7) recai nos resultados simplificados obtidos na Ref. [45] para o problema correspondente sem inclusão de inércia. Neste caso, $2\pi[\beta/(\beta+1)]\Lambda(n)$ é a taxa de crescimento linear para o sistema não inercial. De forma semelhante, quando $Re \neq 0$, $\beta \gg 1$ e $\alpha \gg 1$, a Eq. (4.7) recupera a versão do problema com inércia mas considerando apenas um fluido, caso estudado na Ref. [162].

A Eq. (4.7) é uma complicada equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes dependentes do tempo, uma vez que $R = R(t)$. A complexidade desta expressão não linear não deve ser subestimada, no sentido de que uma abordagem puramente analítica é realmente bastante complicada. Até mesmo as expressões de modos acoplados escritas somente considerando a interação de poucos modos de Fourier [obtidas por meio das Eqs. (4.7)-(4.14)] são geralmente muito extensas e complexas para serem abordadas analiticamente. Apesar deste impedimento teórico, nossa abordagem fracamente não linear ainda oferece a possibilidade de se analisar fisicamente os aspectos morfológicos mais importantes para os padrões oriundos do escoamento radial em Hele-Shaw. Além disso, nossa abordagem fracamente não linear serve como uma ferramenta teórica complementar às elaboradas técnicas numéricas fortemente não

lineares, permitindo a exploração de várias características morfológicas relacionadas à formação de padrões de uma maneira mais simples e menos trabalhosa do que as simulações computacionais. Para reforçar a relevância pragmática e acadêmica do nosso estudo, nós asseguramos que os valores de todos os parâmetros adimensionais usados (β , Ca , α e Re) estão consistentes com grandezas físicas realistas utilizadas em experimentos de fluxo radial em Hele-Shaw e com as propriedades materiais de fluidos [6, 24, 34–40, 68, 69].

4.3 Dinâmica da formação de padrões no regime fracamente não linear

Nesta seção, utilizamos as equações de modos acoplados (4.7)-(4.14) para examinar como as razões de viscosidade e densidade, juntamente com os números de capilaridade e de Reynolds, afetam o formato dos dedos viscosos no estágio fracamente não linear de dinâmica de formação de padrões em fluxo radial. É preciso deixar claro que nós não temos a intenção de reproduzir precisamente os complexos padrões para tempos avançados da dinâmica obtidos de forma experimental nas Refs. [68, 69] e por meio de simulações numéricas na Ref. [70]. Na realidade, o objetivo central do nosso estudo fracamente não linear é extrair informação física útil considerando apenas a ordem não linear mais baixa de perturbação, ou seja, em segunda ordem em ζ . Utilizando a interação de apenas alguns modos de Fourier, alcançaremos o objetivo de descrever a dinâmica de formação de padrões e também os mecanismos não lineares associados à proliferação dos dedos (alargamento e estreitamento de dedos, bifurcação, *sidebranching*, quadrifurcação, etc). Desta maneira, pretendemos capturar e prever os comportamentos não lineares mais proeminentes que eventualmente surgem para tempos avançados da dinâmica da interface fluido-fluido em fluxo radial em célula de Hele-Shaw. Isto será examinado tanto na ausência (seção 4.3.1) quanto na presença (seção 4.3.2) de efeitos inerciais.

Para termos acesso aos possíveis formatos para as estruturas dos dedos, vamos considerar o acoplamento não linear de um número finito N de modos de Fourier morfolologicamente relevantes e reescrevemos a Eq. (4.7) em termos das amplitudes cosseno $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$. A evolução temporal destas amplitudes reais pode então ser obtida por meio da resolução numérica das correspondentes equações diferenciais não lineares acopladas. A partir deste ponto, o formato da interface pode ser facilmente obtido usando $\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^N a_n(t) \cos n\theta$.

Para tempos iniciais do regime não linear, já mencionamos no capítulo 2 que os eventos de alargamento, estreitamento e bifurcação de dedos podem ser descritos considerando a influência do modo fundamental n no crescimento do seu harmônico $2n$. Além disso, como proposto nas Refs. [166, 167], se a amplitude do modo harmônico cosseno a_{3n} é positiva e suficientemente grande, ela é capaz de induzir o crescimento interfacial de lóbulos laterais que ramificam-se na borda dos dedos. Este fenômeno é conhecido como *sidebranching* e é responsável por desenvolver dedos ramificados em três dobras, bastante semelhante com as estruturas normalmente encontradas em processos de crescimento de cristais [168, 169]. De forma semelhante, podemos

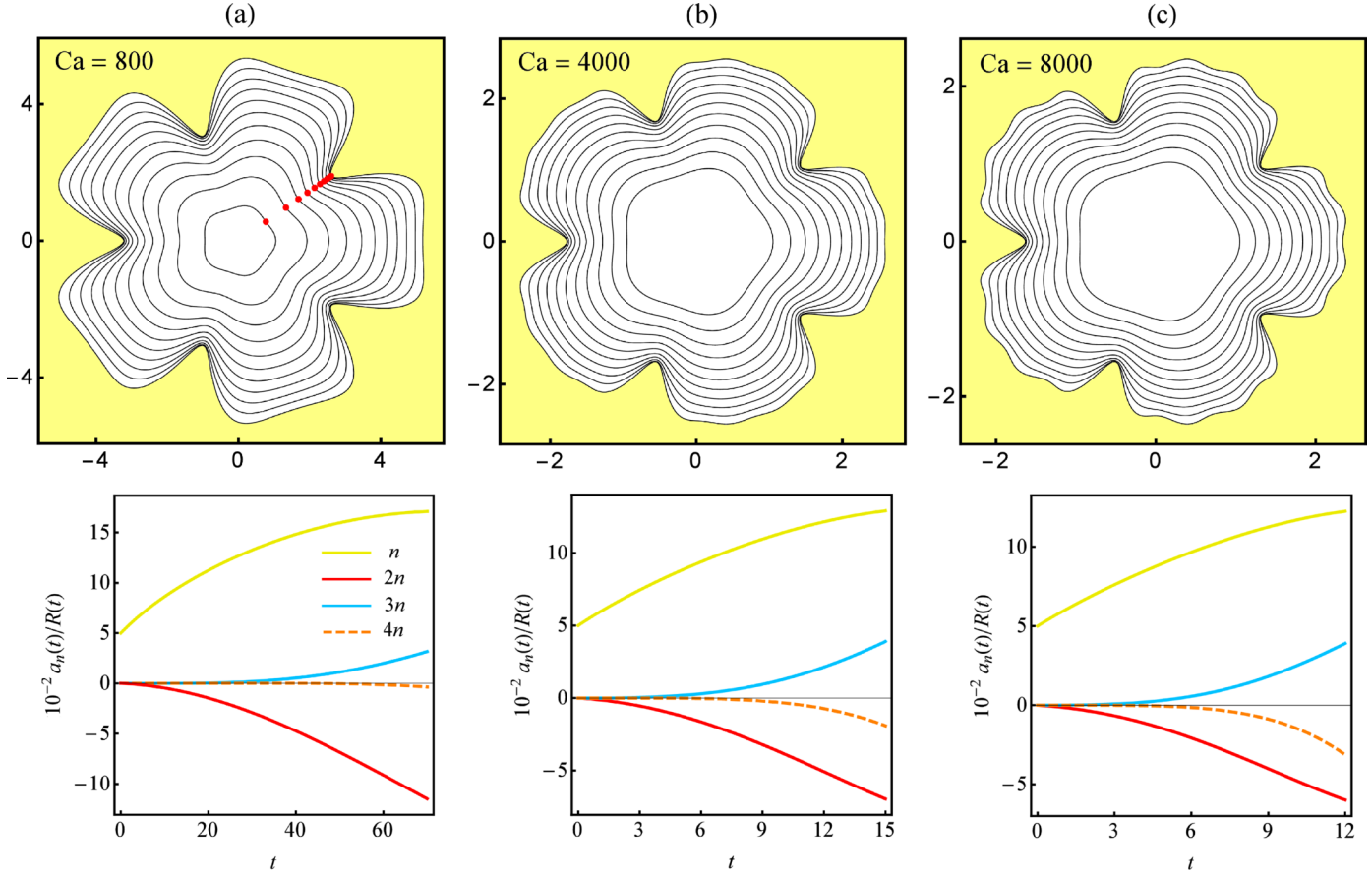


Figura 27 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) ilustrando os padrões típicos de dedos viscosos durante o escoamento radial na ausência de efeitos inerciais ($Re = 0$). A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$, onde $n = 5$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores adotados para o número de capilaridade são: (a) $Ca = 800$, (b) $Ca = 4000$ e (c) $Ca = 8000$. Além disso, tomamos $\beta = 5$ e os valores de tempos finais usados são (a) $t_f = 70$, (b) $t_f = 15$ e (c) $t_f = 12$. Os pequenos pontos vermelhos na Fig. 27(a) representam a evolução temporal da base do dedo, também conhecida como "fjord", localizada a um ângulo $\theta = \pi/5$.

relacionar o crescimento da amplitude do modo a_{4n} com o aparecimento de quatro lóbulos interfaciais nas pontas dos dedos provenientes do fluido injetado, fenômeno conhecido como quadrifurcação. Descrições similares se aplicam para modos de Fourier maiores.

Vale ressaltar que em experimentos reais, a ocorrência de eventos de quadrifurcação (ou ramificação de maiores ordens) não são comumente observados. De forma geral, é possível afirmar que o comportamento mais usual seria o fenômeno da bifurcação de dedos. No entanto, estruturas mais ramificadas e de maior complexidade podem surgir para maiores valores de número de capilaridade. Tais estruturas não são necessariamente formados por sucessivas bifurcações [36, 170]. Também devemos enfatizar que a quadrifurcação de dedos é, de fato, revelada por simulações numéricas realizadas para regimes de número de capilaridade alto [veja, por exemplo, Figs. 11(b) e 14(b) na Ref. [70]]. No contexto destes simples mecanismos de modos acoplados,

no restante do capítulo nós consideramos o acoplamento não linear dos modos n , $2n$, $3n$ e $4n$, e analisamos como os parâmetros de controle do sistema (β , Ca , α e Re) influenciam na evolução temporal e no formato dos padrões de interface para o escoamento radial em Hele-Shaw.

4.3.1 Influência de β e Ca na ausência de efeitos inerciais

Nossa discussão inicia-se pela análise da Fig. 27, a qual concentra-se no limite não inercial ($Re = 0$) do nosso modelo teórico. Nos painéis superiores da Fig. 27, ilustramos a evolução temporal da interface fluido-fluido considerando a interação de quatro modos cosseno ($n = 5$, $2n = 10$, $3n = 15$ e $4n = 20$). A escolha do modo fundamental $n = 5$ é feita sem perda de generalidade: este modo é simplesmente um modo instável para $t = 0$ [$\dot{\zeta}_5(0) > 0$]. Se, em $t = 0$, outro modo instável de Fourier for escolhido como sendo o modo fundamental os resultados físicos básicos são similares aos resultados obtidos para $n = 5$. Nos painéis inferiores, plotamos as evoluções temporais correspondentes, para cada um dos modos de Fourier, das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$. As interfaces são plotadas na ausência de inércia, para $\beta = 5$ e para três valores diferentes de número de capilaridade Ca : (a) 800, (b) 4000 e (c) 8000. Vale a pena mencionar que se outros valores relativante pequenos forem escolhidos para β (por exemplo, $\beta = 2.5$, 7.5 ou 10), comportamentos semelhantes para a dinâmica das interfaces seria obtido. Esta conclusão também é válida para Fig. 30. Todos os padrões ilustrados na Fig. 27 possuem as mesmas amplitudes iniciais $a_n(0) = 5 \times 10^{-2}$ e $a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = a_{4n}(0) = 0$. Desta forma, nos asseguramos que o crescimento inicial dos modos $2n$, $3n$ e $4n$ são impulsionados somente por efeitos não lineares. Em outras palavras, aplicando estas condições iniciais nós garantimos que os fenômenos de bifurcação de dedos, *sidebranching* e quadrifurcação são espontaneamente induzidos pelos termos fracamente não lineares da Eq. (4.7). Na Fig. 27, os padrões evoluem no intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_f$, onde t_f é o tempo para o qual interfaces sucessivas estão próximas de se cruzarem. Desta forma, adotaremos $t = t_f$ como o tempo limite de validade para nossa abordagem teórica.

Examinando a Fig. 27(a), observamos inicialmente uma interface quase circular que evolui em uma estrutura de cinco dedos, determinada pelo crescimento do modo fundamental $n = 5$. Em seguida, conforme o tempo avança, a ponta dos dedos torna-se larga e achatada, caracterizando o início de um fenômeno de bifurcação clássico. A morfologia de dedos bifurcados é gerada pelo crescimento negativo do primeiro harmônico $2n$ ($a_{2n} < 0$). É possível verificar este comportamento no painel inferior da Fig. 27(a), para o qual a_{2n} domina a dinâmica em relação aos outros modos harmônicos ($3n$ e $4n$) e, também, cresce assumindo valores negativos.

Continuamos a análise investigando o que acontece nos padrões de interface quando maiores valores de número de capilaridade são usados. Portanto, na Fig. 27(b) e Fig. 27(c) usamos, respectivamente, $Ca = 4000$ e 8000 . No padrão mostrado na Fig. 27(b) para $Ca = 4000$, o fenômeno convencional de bifurcação de dedos é substituído por uma estrutura mais complexa, caracterizada pela ocorrência de uma modesta quadrifurcação na ponta dos dedos. Inspeccionando o painel inferior da Fig. 27, podemos associar este novo comportamento com o fato de que o

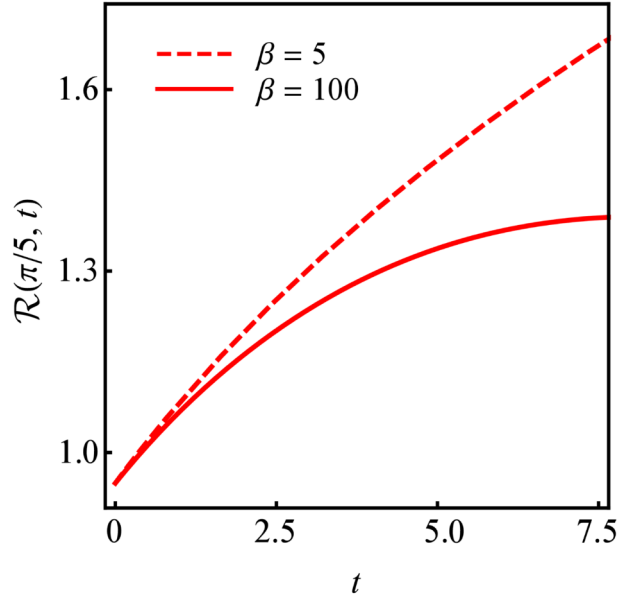


Figura 28 – Variação da posição da base do dedo $\mathcal{R}(\pi/5, t)$ com o tempo t para dois valores de razão de viscosidade: $\beta = 5$ (curva tracejada) e $\beta = 100$ (curva sólida). Os parâmetros físicos restantes e as condições iniciais consideradas nesta figura são as mesmas daquelas usadas na Fig. 27(a).

modo $4n$ começa a crescer negativamente, enquanto que o crescimento da amplitude a_{2n} torna-se menos intenso. Em seguida, se continuarmos aumentando o valor do número de capilaridade até 8000 [Fig. 27(c)], verificamos um crescimento ainda maior do modo $4n$ juntamente com uma atenuação da magnitude do a_{2n} , resultando assim num fenômeno de quadrifurcação mais evidente. Vale ressaltar que apesar da amplitude do modo $3n$ aumentar para maiores valores de número de capilaridade, isto ainda não é suficiente para provocar o surgimento da formação de *sidebranching* (ou fenômeno de trifurcação de dedos) nas morfologias da interface. Estes resultados fracamente não lineares, os quais evidenciam o favorecimento da proliferação de dedos à medida que o número de capilaridade Ca aumenta, então de acordo com os resultados numérico fortemente não lineares obtidos na Ref. [70]. O fato de podermos acessar aspectos físicos importantes, por meio da nossa simples teoria fracamente não linear, relacionados aos estudos numéricos fortemente não lineares da Ref. [70] (que, por sinal, negligencia efeitos inerciais) é realmente inesperado e de certa forma surpreendente.

Como mencionado na seção 4.1, para grandes valores de razão de viscosidade β , tanto os experimentos para tempos avançados da dinâmica [68, 69] quanto as simulações numéricas fortemente não lineares [70] reportaram que os pontos localizados na base dos dedos (fjords) simplesmente não se movem, definindo os chamados pontos de estagnação. Em contrapartida, estes estudos também demonstraram que a posição da base dos dedos move-se no sentido de se afastar do ponto de injeção durante o processo de formação de padrões quando baixos valores de β são considerados. Sendo assim, pontos de estagnação não são observados para estes baixos valores de β nas Refs. [68–70]. Aqui, nós também investigamos se este curioso comportamento

pode ser capturado no estágio fracamente não linear da dinâmica. Isto é feito no painel superior da Fig. 27(a), onde os pequenos pontos vermelhos representam a evolução temporal da posição da base do dedo para um baixo valor de razão de viscosidade ($\beta = 5$), para um ângulo $\theta = \pi/5$ e $Ca = 800$. Note que na Fig. 27(a), podemos observar uma evidente redução na velocidade dos pontos conforme o tempo avança. Apesar desta desaceleração, nós também observamos que a posição da base do dedo continua afastando-se do ponto de injeção durante este processo. Este comportamento caracteriza a ausência de pontos de estagnação no início dos efeitos não lineares para $\beta = 5$. Conclusões semelhantes podem ser obtidas para valores mais altos de número de capilaridade [veja Fig. 27(b) e Fig. 27(c)].

Informação complementar sobre a questão dos pontos de estagnação pode ser encontrada na Fig. 28, a qual ilustra a evolução temporal da posição da base do dedo $\mathcal{R}(\pi/5, t)$ para dois valores de razão de viscosidade: $\beta = 5$ (curva tracejada) e $\beta = 100$ (curva sólida). Analisando a Fig. 28, podemos verificar que para $\beta = 5$, a base dos dedos continua a se afastar do ponto de injeção conforme o tempo avança. De fato, a curva tracejada não exhibe tendência à saturação, apresentando inclinação positiva mesmo para o tempo final considerado. Em contrapartida, quando um maior valor de razão de viscosidade é utilizado ($\beta = 100$), o avanço da base do dedo diminui com o passar do tempo, tendendo a exibir saturação em seu crescimento e eventualmente atingindo um ponto de estagnação. Novamente, os resultados fracamente não lineares estão de acordo com os resultados fortemente não lineares apresentados nas Refs. [68–70].

Infelizmente, os estudos experimentais realizados nas Refs. [68, 69] não proporcionam informações quantitativas específicas sobre a evolução temporal da base dos dedos conforme a razão de viscosidade é variada. Em vez disso, eles exploram questões globais da dinâmica relacionadas à modificação da morfologia dos padrões como um todo, para alguns valores de razão de viscosidade e para tempos avançados da dinâmica (regime onde os dedos estão completamente desenvolvidos). Por esta razão, não é possível realizar uma comparação mais quantitativa entre nossos resultados fracamente não lineares com os dados experimentais fortemente não lineares reportados nas Refs. [68, 69]. Apesar disso, analisando os padrões experimentais apresentados nas Refs. [68, 69] (ver as Figs. 23 e 24), é possível ver claramente que os padrões de dedos viscosos exibem a presença de uma região circular interna de onde o fluido externo é completamente deslocado. Também fica claro que este círculo interno aumenta em tamanho conforme a razão de viscosidade β é diminuída. Portanto, apesar da impossibilidade de uma comparação mais quantitativa entre teoria e experimentos, os dados experimentais das Refs. [68, 69] estão consistentes com os resultados teóricos obtidos analiticamente neste capítulo e numericamente na Ref. [70]: para baixas razões de viscosidade, a região circular como um todo expande-se, incluindo a base dos dedos, e pontos de estagnação não são identificados.

A origem física para o comportamento da não estagnação da base dos dedos para baixos valores de razão de viscosidade pode ser entendida com a ajuda da grandeza mobilidade do fluido $M_j = b^2/12\eta_j$. Para baixo valor de razão de viscosidade $\beta = \eta_2/\eta_1$, a mobilidade do fluido 2 aumenta, significando que ele pode ser mais facilmente deslocado pelo fluido 1. Desta forma, a

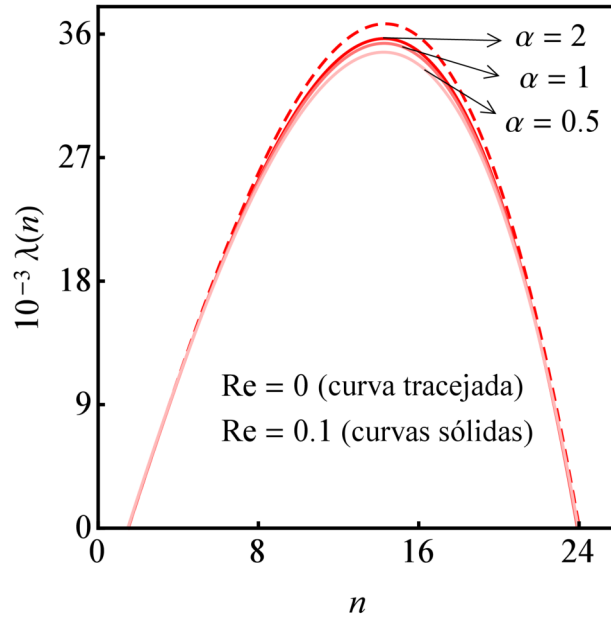


Figura 29 – Taxa de crescimento linear em função dos modos de Fourier n para $Re = 0$ (curva tracejada) e $Re = 0.1$ (curvas sólidas). Consideramos três valores para α : 2, 1 e 0.5. Aqui, $\beta = 5$ e $Ca = 1000$.

base dos dedos avança mais facilmente durante o processo de injeção. Uma outra explicação para este comportamento de não estagnação é apresentada na Ref. [70]: para baixa razão de viscosidade, a curvatura da base do dedo é relativamente baixa, diminuindo os efeitos de tensão superficial e favorecendo a movimentação da base dos dedos.

4.3.2 Efeitos induzidos pela inércia: ação conjunta de β , Ca , α e Re

Nesta seção, nossa atenção será voltada para o entendimento do papel dos efeitos inerciais no desenvolvimento de dedos viscosos em fluxo radial, para a situação física geral envolvendo razões de densidade e viscosidade arbitrárias. Como feito na seção anterior, também vamos analisar os padrões considerando vários valores para o número de capilaridade. Desta forma, além dos parâmetros β e Ca considerados anteriormente, agora adicionaremos a ação dos parâmetros α e Re .

Por uma questão de clareza e compreensão dos efeitos dos vários parâmetros físicos considerados, em vez de começarmos a análise imediatamente investigando aspectos não lineares, iremos inicialmente discutir brevemente alguns aspectos importantes puramente lineares do sistema. A Fig. 29 é um gráfico da taxa de crescimento linear $\lambda(n) = \dot{\zeta}_n / \zeta_n$ em função do modo n e para o tempo $t = 70$. Dois casos são considerados: (i) efeitos inerciais são negligenciados ($Re = 0$, curva tracejada) e (ii) inércia é relevante ($Re = 0.1$, curvas sólidas). Aqui, escolhemos $\beta = 5$ e $Ca = 1000$, e consideramos diferentes valores para a razão de densidade α . Primeiramente, nós verificamos que, no arcabouço da teoria linear, inércia tende a estabilizar a instabilidade de dedos viscosos, uma vez que as curvas sólidas encontram-se abaixo da curva tracejada. Além disso, é

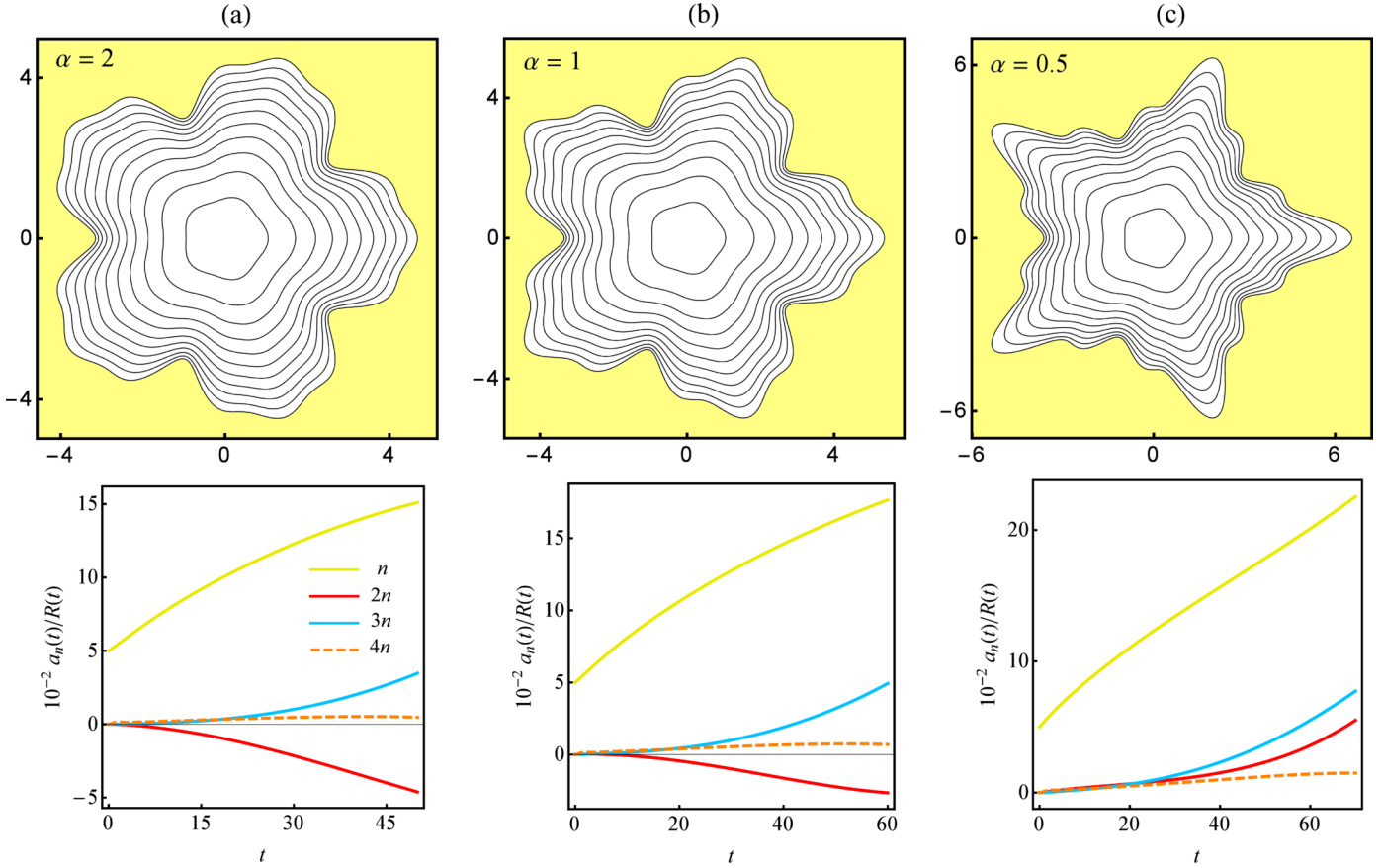


Figura 30 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) na presença de efeitos inerciais ($Re = 0.1$). A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$, onde $n = 5$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores adotados para a razão de densidade são: (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 1$ e (c) $\alpha = 0.5$. Além disso, tomamos $\beta = 5$ e $Ca = 1000$. Os tempos finais são (a) $t_f = 50$, (b) $t_f = 60$ e (c) $t_f = 70$.

evidente que este efeito estabilizante é mais forte para menores valores de razão de densidade α . Fisicamente, isto significa que quanto maior a densidade do fluido injetado, menos intensa é a instabilidade de Saffman-Taylor.

Outra informação útil fornecida pela teoria linear é o conceito do modo crítico n_c , obtido fazendo-se $\lambda(n)|_{n=n_c} = 0$. Este modo define a largura da banda de modos instáveis. Pela Fig. 29, fica claro que n_c não muda quando efeitos inerciais são levados em consideração. Uma conclusão similar é válida para o modo de maior crescimento $n_{\max}$ [obtido fazendo-se $d\lambda(n)/dn|_{n=n_{\max}} = 0$]. Consequentemente, no regime puramente linear, é possível dizer que o número de dedos emergentes (previsto pelo inteiro mais próximo ao $n_{\max}$) não deve ser influenciado pela ação da inércia. Além das questões já abordadas, não é possível extrair, da Fig. 29, mais informações a respeito do formato específico dos dedos nos padrões formados quando a inércia é relevante. Todas estas informações lineares dão a impressão de que a inércia não tem um efeito tão dramático na determinação do formato das estruturas de interface. Entretanto, como veremos a seguir, isso não condiz com a realidade.

Para acessar informações sobre a morfologia dos padrões formados na presença da inércia, precisamos nos voltar à dinâmica fracamente não linear. Isto é feito na Fig. 30, a qual ilustra os padrões fracamente não lineares formados sob influência de efeitos inerciais. Nos painéis superiores, plotamos a interface fluido-fluido para $Re = 0.1$, $\beta = 5$ e três valores decrescentes de razão de densidade α : (a) 2, (b) 1 e (c) 0.5. Aqui, usamos $Ca = 1000$. Similarmente ao que foi feito na Fig. 27, nos painéis inferiores da Fig. 30 ilustramos a evolução temporal das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para cada um dos modos de Fourier n , $2n$, $3n$ e $4n$, onde o modo fundamental foi escolhido como $n = 5$. As condições iniciais são: $a_n(0) = 5 \times 10^{-2}$ e $a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = a_{4n}(0) = 0$. Além disso, adotamos $\dot{a}_n(0) = 1.1 \times 10^{-2}$ e $\dot{a}_{2n}(0) = \dot{a}_{3n}(0) = \dot{a}_{4n}(0) = 0$.

A diferença entre os padrões ilustrados na Fig. 30, para $Re \neq 0$, e os padrões apresentados na Fig. 27, para $Re = 0$, é bastante aparente. Em contraste com o que é apresentado na Fig. 27, na Fig. 30, não observamos a ocorrência de bifurcação e nem de quadrifurcação de dedos. Em vez disso, independente do valor de α , o fenômeno morfológico de maior evidência é, de fato, a trifurcação de dedos (ou *sidebranching*). Logo, quando efeitos inerciais são relevantes, o cenário tradicional de dedos bifurcados ou quadrifurcados é substituído por estruturas de três lóbulos. Esta interessante mudança na morfologia dos padrões pode ser entendida analisando o painel inferior da Fig. 30, no qual verificamos a inibição do crescimento do modo $4n$ acompanhada de um aumento no crescimento do modo $3n$. O sinal positivo na amplitude a_{3n} favorece a formação de *sidebranching* [166, 167]. Além disso, também é possível notar que na Fig. 30(a), a amplitude a_{2n} permanece negativa para todos os valores de tempo, favorecendo a formação de dedos largos. Como resultado, na Fig. 30(a), observamos dedos relativamente largos, mas que ramificam-se lateralmente.

Dando continuidade à análise, um comportamento diferente é revelado quando diminuimos os valores da razão de densidade α , ou seja, quando consideramos um fluido externo com densidade igual ou mais baixa do que o fluido interno. Em particular, observe que para o caso de densidades iguais $\alpha = 1$ [Fig. 30(b)], o padrão final continua a apresentar dedos que ramificam-se lateralmente, mas que são um pouco menos largos do que os dedos correspondentes à Fig. 30(a). No cenário de modos acoplados, isso pode ser justificado pelo aumento no crescimento da amplitude do modo a_{3n} seguido por um crescimento menos pronunciável para o modo $2n$ (o qual torna-se menos negativo). Se continuarmos diminuindo α até que a densidade do fluido externo seja menor do que a do fluido interno [para $\alpha = 0.5$, como na Fig. 30(c)], é possível observar uma mudança de sinal na amplitude do modo $2n$, de forma que a_{2n} torna-se positivo. Este é precisamente o sinal de a_{2n} que favorece a formação de dedos mais estreitos [45]. Consequentemente, continuamos a ter formação de estruturas com três lóbulos, mas agora apresentando dedos mais estreitos e longos. Finalmente, vale a pena mencionar que, em oposição ao que foi observado na Fig. 27, quadrifurcação de dedos não é detectada na Fig. 30. Isto pode ser explicado pelo fato de que a amplitude do modo a_{4n} praticamente não varia com o passar do tempo, como podemos verificar pelos painéis inferiores da Figs. 30(a)-30(c).

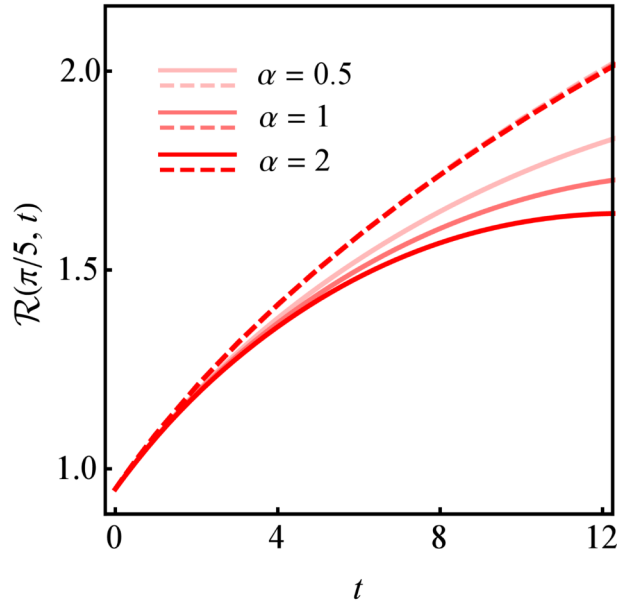


Figura 31 – Gráfico da posição da base do dedo $\mathcal{R}(\pi/5, t)$ em função do tempo t para dois valores de razão de viscosidade: $\beta = 5$ (curva tracejada) e $\beta = 100$ (curvas sólidas). Três valores de razão de densidade são considerados: $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.5$. Perceba que na curva tracejada associada à $\beta = 5$ e $\alpha = 2$ há, na verdade, três curvas superpostas (duas curvas tracejadas indistinguíveis para $\alpha = 1$ e $\alpha = 0.5$ encontram-se ambas escondidas). Aqui, $Re = 0.1$ e $Ca = 1000$.

Esta predominância de eventos de trifurcação quando a inércia é levada em consideração para escoamentos impulsionados por injeção radial em célula de Hele-Shaw também tem sido recentemente encontrada em processos de levantamento (espaçamento entre as placas é dependente do tempo) em célula de Hele-Shaw [165]. Este tópico será abordado no próximo capítulo desta tese de doutorado. Mas, em todo caso, é possível que a inércia seja a razão física por trás do desenvolvimento de padrões que apresentam dedos com três lóbulos (veja, por exemplo, Fig. 1 da Ref. [34]), ou até mesmo em complexas estruturas fractais (veja, por exemplo, Fig. 16(b) na Ref. [170]) oriundas da injeção radial em célula de Hele-Shaw.

Neste ponto, examinaremos a tendência à atividade ou estagnação da base dos dedos na presença de efeitos inerciais. Sendo assim, na Fig. 31, ilustramos a evolução temporal da base dos dedos para $Re = 0.1$. Este procedimento é bastante similar ao que foi feito na Fig. 28 para o caso do número de Reynolds nulo. Utilizamos os mesmos valores de razão de viscosidade usados na Fig. 28: $\beta = 5$ (curvas tracejadas) e $\beta = 100$ (curvas sólidas). Para cada valor de β , adotamos $\alpha = 2, 1$ e 0.5 . O resto dos parâmetros físicos e condições iniciais usados na Fig. 31 são os mesmos daqueles utilizados na confecção da Fig. 30. Observando a Fig. 31, notamos primeiramente que as três curvas tracejadas, correspondentes a três diferentes valores de α , estão superpostas. Isto significa que a inércia não possui influência no comportamento dos pontos de estagnação quando baixos valores de razão de viscosidade são considerados. Entretanto, pela Fig. 31, é possível verificar que para valores mais altos de razão de viscosidade ($\beta = 100$),

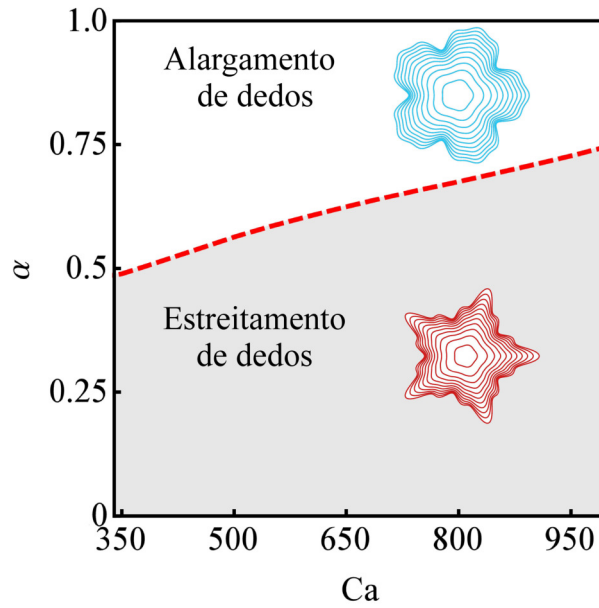


Figura 32 – Diagrama de fase morfológico no espaço de parâmetros (Ca , α). A curva tracejada representa o limite entre duas regiões morfológicas distintas. O desenvolvimento de padrões que apresentam *sidebranching* é observado em ambas as regiões, porém em uma delas (região superior branca), é observado a ocorrência do alargamento de dedos, enquanto que na outra (região inferior cinza), o estreitamento de dedos ocorre com maior evidência. Aqui, $\beta = 5$ e $Re = 0.1$.

a evolução da base dos dedos muda para os diferentes valores de α considerados. As três curvas tracejadas superpostas, para o caso $\beta = 5$, possuem inclinação não nula para o tempo final considerado e, conseqüentemente, a base dos dedos não atinge um estado estacionário. Na realidade, a base continua afastando-se do ponto de injeção. Em contrapartida, quando aumentamos o valor da razão de viscosidade ($\beta = 100$) e consideramos maiores valores de α , observamos uma diminuição na dinâmica da posição da base dos dedos. Isto é claramente verificado na Fig. 31, para a qual a curva sólida referente à $\alpha = 2$ tende a saturar conforme o tempo aumenta, eventualmente atingindo um ponto de estagnação para o qual a velocidade da interface é nula.

Na análise de Fig. 30, foi revelado que para menores valores de razão de densidade α e Ca fixo, uma mudança morfológica nos padrões de interface é observada: os dedos viscosos largos são substituídos por dedos mais finos e estreitos. Isto é induzido pela mudança no sinal da amplitude do primeiro harmônico a_{2n} . Diante desse cenário, finalizamos o presente capítulo examinando a Fig. 32, a qual apresenta o diagrama de fase das possíveis morfologias para os padrões emergentes no espaço de parâmetros (Ca , α). Os padrões de interface representativos ilustrados na Fig. 32 são plotados para $\beta = 5$ e $Re = 0.1$, possuindo as mesmas amplitudes iniciais usadas na Fig. 30. Neste diagrama, podemos identificar o estabelecimento de duas regiões morfológicas distintas separadas por uma linha tracejada: a primeira região, localizada abaixo da linha tracejada, é caracterizada pela ocorrência de padrões que desenvolvem *sidebranching* em dedos notavelmente

finos e longos (devido ao fato que $a_{2n} > 0$). A segunda região, localizada acima da linha tracejada, é marcada por padrões que desenvolvem um tipo diferente de *sidebranching*, onde os dedos são mais largos e bem menores do que o caso anterior (neste caso, $a_{2n} < 0$). A linha tracejada que separa as duas regiões da Fig. 32 é obtida calculando os valores dos parâmetros Ca e α para os quais a amplitude do primeiro harmônico é igual a zero [$a_{2n}(t_f) = 0$] no tempo final $t_f = 70$. Vale a pena ressaltar que na seção 4.3.1, onde investigamos a formação de padrões na ausência de inércia, vários perfis de interface foram identificados. Nestas interfaces, os dedos proliferavam-se por mecanismos de bifurcação ou quadrifurcação. Aqui, na presença de efeitos inerciais, apenas estruturas marcadas pela ocorrência de *sidebranching* são detectadas conforme varremos os valores dos parâmetros Ca e α .

A detecção de estruturas trifurcadas (para a situação de número de Reynolds finito), caracterizadas pelo desenvolvimento de *sidebranching* (protuberância central acompanhada de dois lóbulos laterais), é de certa forma surpreendente. Estas estruturas, compostas por uma configuração de dedos com três lóbulos, lembram o formato de estruturas dendríticas normalmente encontradas em processos de crescimento de cristais anisotrópicos [168, 169]. Tipos similares de morfologias caracterizadas pelo aparecimento de *sidebranching* também são encontradas durante injeção radial em célula de Hele-Shaw envolvendo fluidos anisotrópicos (fluidos *yield stress* ou *shear-thinning*). Também podem ocorrer em situações para as quais a anisotropia é imposta pelo meio em que o processo ocorre, como, por exemplo, em células de Hele-Shaw com placas apresentando ranhuras [37, 74]. Entretanto, em nosso estudo, não há nenhuma anisotropia aparente e, ainda assim, estruturas trifurcadas desenvolvem-se para números de Reynolds finitos.

5 PADRÕES DENDRÍTICOS INDUZIDOS POR INÉRCIA EM PROCESSOS DE LEVANTAMENTO EM CÉLULA DE HELE-SHAW

5.1 Introdução

Até o momento, a maioria dos casos que abordamos anteriormente consideraram escoamento em células de Hele-Shaw com placas paralelas e espaçamento b constante. Apenas no capítulo 3 foi considerada a situação do gradiente de espaçamento na direção radial, de forma que o espaçamento $b = b(r)$ deixava de ser constante e as placas da célula de Hele-Shaw não mais encontravam-se num arranjo paralelo. Neste capítulo, estudaremos o escoamento de fluidos em célula de Hele-Shaw, mas agora considerando uma nova situação: primeiramente, diferentemente dos casos anteriormente analisados, não há injeção de fluido. Em vez disso, vamos considerar a situação em que um fluido viscoso encontra-se confinado entre as placas paralelas da célula de Hele-Shaw. Este fluido confinado é envolvido por um fluido externo de menor viscosidade e o desenvolvimento da instabilidade de Saffman-Taylor ocorre durante o processo de levantamento da placa superior da célula. Devido ao processo de levantamento [72–84], o espaçamento entre as placas paralelas possui uma dependência temporal $b = b(t)$.

Para processos de levantamento com fluidos newtonianos, os dedos, provenientes da invasão do fluido externo, apresentam bordas laterais lisas e extremidades levemente infladas. Além disso, estes dedos possuem comprimentos variados [72, 78, 81], caracterizando assim os eventos de competição entre eles. Os padrões de dedos viscosos formados pelo processo de levantamento não apresentam bifurcações, de forma que a morfologia resultante é bem diferente das morfologias para os padrões bastante ramificados normalmente encontrados para processos de injeção radial em célula de Hele-Shaw com espaçamento constante [34–36, 40, 43, 45]. Estas distintas características morfológicas têm sido amplamente documentadas na literatura por meio de experimentos de laboratório e por simulações numéricas [72–84].

Como apontado no capítulo 1, alguns resultados experimentais envolvendo escoamento de fluidos newtonianos em processos de levantamento ainda carecem de uma explicação teórica adequada. De forma mais específica, os experimentos realizados nas Refs. [73, 79, 85] considerando altas velocidades de levantamento revelaram a existência de padrões bastante ramificados, apresentando dedos com estruturas dendríticas marcadas pela presença de eventos do tipo *sidebranching*. Estes padrões são notavelmente mais complexos do que aqueles formados para baixas velocidades de levantamento [72–84]. Para a situação de injeção radial em célula de

Hele-Shaw com espaçamento constante [9, 166, 167, 171–175] e para processos de levantamento com fluidos não newtonianos [176–178], é um fato bem estabelecido que padrões fractais, apresentando estruturas caracterizadas por crescimento dendríticos, podem se formar. No entanto, estes padrões ramificados não aparecem quando os fluidos são newtonianos e as velocidades de levantamento são baixas. Portanto, uma explicação teórica para o surgimento de dedos dendríticos em processos de levantamento com fluidos newtonianos ainda permanece inexistente.

Neste capítulo, nosso objetivo é oferecer uma descrição teórica do problema que possa justificar o aparecimento dessas curiosas estruturas dendríticas em padrões resultantes da dinâmica em processos de levantamento com fluidos newtonianos. Ao longo deste capítulo, mostraremos que o desenvolvimento dos eventos de *sidebranching* na interface fluido-fluido é induzido por efeitos inerciais. Como mencionamos no capítulo anterior, é necessário incluir os efeitos inerciais sempre que nos afastamos das condições tradicionais de Hele-Shaw (baixa velocidade de escoamento, pequena separação entre as placas, fluido deslocado excessivamente viscoso, etc).

O impacto da inércia no desenvolvimento das instabilidades de Saffman-Taylor [23–25, 159–164] tem recebido bastante atenção nos últimos anos. Por meio de experimentos e de métodos analíticos e numéricos, estes estudos analisaram vários aspectos de escoamento em Hele-Shaw onde a inércia desempenhou um papel relevante. Nestes casos, uma descrição mais elaborada, envolvendo uma modificação na lei de Darcy, foi derivada baseada na média transversal da equação tridimensional de Navier-Stokes para o sistema. A consideração da inércia resultou num aparecimento de respostas dinâmicas sugestivas relacionadas tanto à estabilidade linear quanto às morfologias dos padrões de interface: em âmbito linear, a inércia tende a estabilizar perturbações, enquanto que para o estágio não linear da dinâmica, efeitos inerciais podem alargar os dedos [24, 25, 161]. É preciso deixar claro que em todos esses estudos o papel da inércia foi analisado em células de Hele-Shaw com espaçamento constante, para os casos específicos de injeção em escoamento retangular e radial, e para situação de rotação em célula Hele-Shaw. Entretanto, a análise dos efeitos de inércia para fluxo em Hele-Shaw de espaçamento variável no tempo e seu impacto na dinâmica de formação de padrões ainda precisa ser examinado. Isto é precisamente o que pretendemos fazer no presente capítulo.

O restante deste capítulo será estruturado da seguinte forma: na seção 5.2, deduzimos as equações fracamente não lineares para o processo de levantamento em célula de Hele-Shaw, considerando o uso de fluidos newtonianos e, também, a ação de efeitos inerciais. Os aspectos da estabilidade linear do sistema serão brevemente examinados na seção 5.3. Logo em seguida, na seção 5.4, informações relevantes sobre a influência da inércia no desenvolvimento das estruturas não lineares dendríticas, assim como na dinâmica da competição dos dedos, serão introduzidas e discutidas.

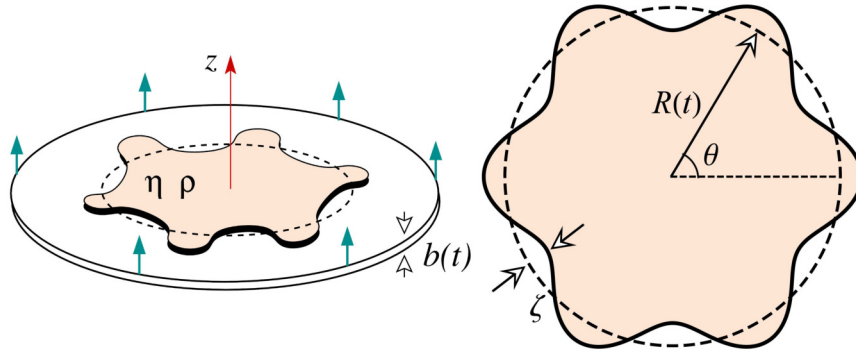


Figura 33 – Representação esquemática do arranjo para o processo de levantamento em célula de Hele-Shaw (esquerda) e visão superior do fluido interno confinado entre as placas (direita).

5.2 Equação diferencial de modos acoplados

A geometria básica do processo de levantamento em uma célula de Hele-Shaw é mostrada na Fig. 33. Considere então uma célula de Hele-Shaw com espaçamento variável no tempo contendo um fluido newtoniano e incompressível, de viscosidade η e densidade ρ , cercado por outro fluido de viscosidade e densidade desprezíveis. Entre os dois fluidos existe uma tensão superficial σ . No tempo $t = 0$, a interface fluido-fluido é circular e possui um raio inicial $R(t = 0) = R_0$, enquanto que a separação inicial das placas é representada por $b(t = 0) = b_0$. Em seguida, para um tempo $t > 0$, a placa superior da célula é levantada na direção perpendicular às placas (eixo z) e a placa inferior permanece fixa. O procedimento de separação das placas é feito de tal forma que elas sempre permanecem paralelas durante o levantamento.

Durante o processo de levantamento, o fluido externo invade o fluido interno e a interface entre eles torna-se instável por meio da instabilidade de Saffman-Taylor. Como de costume, a interface perturbada é descrita por $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, onde θ representa o ângulo azimutal. Como estamos lidando com um processo de levantamento e não de injeção, como nos casos estudados anteriormente, a evolução temporal do raio da interface não perturbada $R(t)$ adquire um formato diferente. Por meio da conservação de volume, podemos relacionar $R(t)$ com o espaçamento das placas dependente do tempo $b(t)$: $R^2(t)b(t) = R_0^2b_0$.

O impacto da inércia será incluído em nosso problema por meio da lei de Darcy generalizada [Eq. (4.1)] [23–25, 159–164], apresentada pela primeira vez no capítulo anterior desta tese. Perceba que, no atual problema, estamos considerando somente o escoamento do fluido interno confinado, de forma que não precisamos utilizar o índice j nas grandezas usadas na Eq. (4.1).

Além de lei de Darcy generalizada, consideramos uma equação de continuidade modificada para fluidos incompressíveis [74, 76]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}, \quad (5.1)$$

onde $\dot{b}(t) = db(t)/dt$ é a velocidade da placa superior na direção do eixo z . Note que tomando a derivada temporal da expressão de conservação de volume $R^2(t)b(t) = R_0^2 b_0$, é possível obter uma conexão entre a velocidade da interface não perturbada $\dot{R}(t) = \dot{R}$ com a velocidade da placa superior $\dot{b}$, resultando na relação $\dot{R} = -(\dot{b}R)/(2b)$.

Levando-se em consideração a natureza potencial do escoamento [24, 161], a Eq. (4.1) pode ser convenientemente reescrita como

$$\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi|^2 \right] = p - \frac{12\eta}{b^2} \phi, \quad (5.2)$$

onde ϕ é o potencial de velocidade. A Eq. (5.2) é escrita somente para um dos fluidos, de forma que ela é uma versão mais simplificada da Eq. (4.3) apresentada no capítulo anterior para o problema de escoamento de dois fluidos. Substituindo $\mathbf{u} = -\nabla \phi$ na Eq. (5.1), é possível verificar que ϕ obedece a equação de Poisson $\nabla^2 \phi = \dot{b}/b$, tendo como solução

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n \neq 0} \phi_n(t) \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} e^{in\theta} + \frac{\dot{b}r^2}{4b}. \quad (5.3)$$

Esta é mais uma diferença entre o problema da injeção (abordado em todos os capítulos anteriores) em relação ao processo de levantamento em Hele-Shaw: no primeiro, o fluxo é laplaciano, enquanto que no segundo, o escoamento é poissoniano.

Para completar a definição do problema de contorno dinâmico, precisamos da condição de contorno de Young-Laplace [6]

$$p = \sigma \kappa, \quad (5.4)$$

e da condição de contorno cinemática [6, 34] Eq. (2.3).

Seguindo exatamente os mesmos procedimentos utilizados no capítulo anterior para se obter a Eq. (4.7) e mantendo sempre termos até segunda ordem em ζ , a equação de movimento adimensional para as amplitudes de perturbação (para $n \neq 0$) é dada por

$$\begin{aligned} \text{Re } \ddot{\zeta}_n &+ \left[\frac{1}{b^2} - \text{Re} \frac{\dot{b}}{10b} |n| \right] \dot{\zeta}_n \\ &- \left\{ \Lambda(n) + \text{Re} \frac{1}{2b} (|n| - 1) \left[\ddot{b} - \frac{3\dot{b}^2}{2b} \right] \right\} \zeta_n = \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') + \text{Re } H(n, n') \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[\frac{1}{b^2} G(n, n') + \text{Re } I(n, n') \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \\ &+ \text{Re} \sum_{n' \neq 0} \left[G(n, n') \ddot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + J(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $\Lambda(n) = (|n| - 1)(\dot{b}/2b^3) - b^{3/2}|n|(n^2 - 1)/(q^3 \text{Ca})$,

$$\text{Re} = \frac{\rho b_0 \dot{b}_0}{12\eta} \quad (5.6)$$

define o número de Reynolds responsável por quantificar o efeito da inércia no atual estudo, $\dot{b}_0 = \dot{b}(0)$,

$$\text{Ca} = \frac{12\eta\dot{b}_0}{\sigma} \quad (5.7)$$

é o número de capilaridade e

$$q = \frac{R_0}{b_0} \quad (5.8)$$

representa a razão de aspecto inicial.

Além disso, os termos de modos acoplados são dados por

$$F(n, n') = |n|b^{1/2} \left\{ \frac{\dot{b}}{2b^3} \left[\text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} - \frac{1}{2} \right] - \frac{b^{3/2}}{q^3 \text{Ca}} \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] \right\}, \quad (5.9)$$

$$G(n, n') = b^{1/2} \{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 \}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} H(n, n') = & |n|b^{1/2} \left(\frac{\dot{b}}{2b} \right)^2 \left\{ \frac{3}{5} \text{sgn}[n'(n - n')] - \text{sgn}(nn') \left[2 \left(1 - \frac{b\ddot{b}}{\dot{b}^2} \right) + \frac{|n|}{5} \right] \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{2}{|n|} \right) \left(1 - \frac{b\ddot{b}}{\dot{b}^2} \right) + \frac{|n'|}{5} \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} I(n, n') = & |n|b^{1/2} \left(\frac{\dot{b}}{2b} \right) \left\{ \frac{6}{5} \text{sgn}[n'(n - n')] + \text{sgn}[n(n - n')] + \left(1 - \frac{|n|}{5} \right) \text{sgn}(nn') \right. \\ & \left. + \frac{|n'|}{5} - \frac{2}{|n|} - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$J(n, n') = b^{1/2} \left\{ \frac{3}{5} |n| [\text{sgn}[n'(n - n')] - 1] + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right\}. \quad (5.13)$$

A adimensionalização das Eqs. (5.5)-(5.13) foi feita da seguinte forma: (i) comprimentos no plano das placas foram reescalados por R_0 , (ii) $b(t)$ foi adimensionalizado pelo seu valor inicial b_0 e (iii) o tempo foi reescalado pelo tempo característico $T = b_0/|\dot{b}_0|$.

As Eqs. (5.5)-(5.13) constituem um dos resultados centrais deste capítulo, oferecendo a evolução temporal das amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$ até segunda ordem e incorporando a ação da inércia no problema de levantamento em célula de Hele-Shaw com fluidos newtonianos. Vale ressaltar que o sistema é praticamente descrito por apenas três parâmetros físicos: Re , Ca e q . Perceba que tomando $\text{Re} = 0$, Eq. (5.5) reproduz os resultados mais simplificados obtidos na Ref. [82] para o problema correspondente sem consideração de efeitos inerciais. Ainda no limite de $\text{Re} = 0$, $b^2\Lambda(n)$ representa a taxa de crescimento linear para o sistema sem inércia. Ao longo do restante deste capítulo, assim como na maioria dos experimentos e estudos teóricos em processos de levantamento em Hele-Shaw [72, 77, 78, 80, 81], vamos assumir uma velocidade de levantamento constante, de tal forma que $b = 1 + t$.

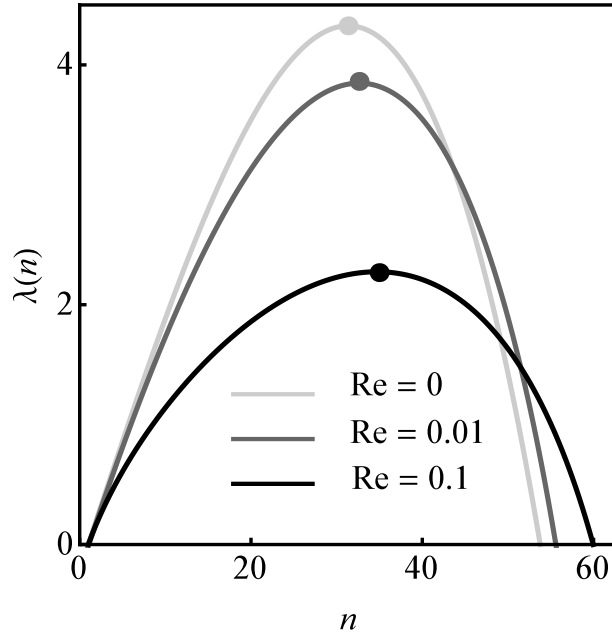


Figura 34 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função o modo n para três valores de número de Reynolds Re . O ponto máximo das curvas estão indicados por círculos. Aqui, $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$, $q = 10^3$ e $t = 1.3$.

5.3 Influência da inércia no regime linear

Apesar do nosso maior interesse estar relacionado com os aspectos intrinsecamente não lineares da dinâmica de interface diretamente conectados com a morfologia dos padrões resultantes, nesta seção, discutimos brevemente a parte puramente linear (em ζ) da equação de movimento (4.7)

$$Re \ddot{\zeta}_n + \left[\frac{1}{b^2} - Re \frac{\dot{b}}{10b} |n| \right] \dot{\zeta}_n - \left\{ \Lambda(n) + Re \frac{1}{2b} (|n| - 1) \left[\ddot{b} - \frac{3\dot{b}^2}{2b} \right] \right\} \zeta_n = 0. \quad (5.14)$$

A expressão (5.14) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e de coeficientes dependentes do tempo (uma vez que b varia no tempo). Observe que esta equação é uma versão bem mais complexa do que a equação de primeira ordem equivalente obtida no limite usual de número de Reynolds nulo para o problema do levantamento em célula de Hele-Shaw [72–84]. Desta forma, ao contrário do processo de levantamento sem inércia ($Re = 0$), já em âmbito linear é bastante complicado obter uma forma analítica fechada para a expressão do crescimento linear e análise de estabilidade do sistema quando $Re \neq 0$.

Entretanto, algumas informações úteis a respeito da influência da inércia em âmbito linear podem ser extraídas da taxa de crescimento linear $\lambda(n) = [\dot{\zeta}_n / \zeta_n]$, a qual é calculada numericamente utilizando-se a Eq. (5.14). A Fig. 34 ilustra a taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função do modo de Fourier n para três valores crescentes de número de Reynolds. O gráfico é confeccionado considerando os parâmetros físicos $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$, $q = 10^3$ e $t = 1.3$. Examinando a Fig. 34, é possível verificar que o número de onda do modo de maior crescimento $n_{\max}$ [modo

n associado com o valor máximo de $\lambda(n)$ aumenta modestamente ($31 \leq n_{\max} \leq 35$) quando Re é variado de 0 até 0.1. Como $n_{\max}$ é conectado com o número típico de dedos que surgem na interface no regime linear da dinâmica [72, 81, 83], é possível antecipar que o número de dedos que surgem na interface não deve ser drasticamente alterado pela ação da inércia. Em contrapartida, o valor máximo da taxa de crescimento $\lambda(n_{\max})$ é consideravelmente reduzido quando Re aumenta, indicando que a inércia tende a estabilizar o sistema.

Além disso, a Fig. 34 também nos mostra que o modo crítico n_{crit} do sistema [modo para o qual $\lambda(n) = 0$] sofre um pequeno aumento ($54 \leq n_{\text{crit}} \leq 60$) quando Re muda de 0 até 0.1. Desta forma, a largura da banda de modos instáveis (região de modos de Fourier no intervalo $0 \leq n \leq n_{\text{crit}}$) sofre um pequeno aumento conforme Re é variado. Portanto, assim como no caso de $n_{\max}$, n_{crit} não sofre uma alteração dramática quando Re assume outros valores. Logo, podemos afirmar que o maior efeito da inércia em âmbito linear é a estabilização do crescimento das perturbações da interface.

Estas previsões lineares para o processo de levantamento em Hele-Shaw estão em acordo com as previsões lineares obtidas para o escoamento induzido por injeção radial estudado nas Refs. [25, 161], onde os efeitos inerciais também foram levados em consideração. Além disso, nós verificamos que o sistema torna-se mais instável para maiores valores de Ca e q . Considerando as dificuldades mencionadas anteriormente a respeito da extração de informação analítica sobre o problema de levantamento em Hele-Shaw com inércia, os comportamentos de $n_{\max}$, n_{crit} e $\lambda(n_{\max})$ são essencialmente o que se pode obter em âmbito puramente linear.

Os impedimentos teóricos relacionados ao acesso a resultados analíticos são ainda mais graves na descrição da dinâmica fracamente não linear de segunda ordem, para a qual as expressões de modos acoplados para os modos envolvidos na dinâmica [obtidas por meio das Eqs. (5.5)-(5.13)] são geralmente muito complexas para serem abordadas analiticamente. Apesar disso, assim como foi possível no capítulo anterior, nossa abordagem fracamente não linear ainda permitirá a análise de aspectos morfológicos importantes relacionados aos padrões de interface formados durante o escoamento de fluido newtoniano no processo de levantamento em Hele-Shaw.

5.4 Efeitos da inércia nos mecanismo não lineares de formação de padrões

Nesta seção, utilizamos as Eqs. (5.5)-(5.13) na aplicação da nossa teoria fracamente não linear com o objetivo de investigar o impacto da inércia no formato da interface resultante e, também, na dinâmica da competição de dedos para o problema de escoamento de fluido newtoniano em processo de levantamento em Hele-Shaw. Como já fizemos anteriormente nesta tese, escrevemos a perturbação da interface em termos das amplitudes reais dos modos senos e cossenos. A fase do modo fundamental é escolhida de forma que $a_n > 0$ e $b_n = 0$.

Todas as considerações a respeito dos mecanismos de alargamento, estreitamento e bifurcação de dedos permanecem válidas para o atual problema. Em outras palavras, o formato característico dos dedos é descrito pelo acoplamento não linear do modo fundamental n e seu primeiro harmônico cosseno $2n$ [5, 45]. Assim como no capítulo 4, o desenvolvimento de *sidebranching* [9, 166, 167, 171–175] pode ser reproduzido considerando o acoplamento não linear entre o modo fundamental e seus harmônicos $2n$ e $3n$. Além destes mecanismos não lineares básicos, um outro mecanismo ainda não abordado até o momento será introduzido neste capítulo: como proposto por Miranda e Widom nas Refs. [5, 45], a dinâmica de competição dos dedos (relacionada com a variabilidade do comprimento destas estruturas) pode ser descrita pela interação do modo fundamental n e seus modos sub-harmônicos seno e cosseno $n/2$.

Antes de darmos continuidade ao capítulo, é importante fazer alguns comentários acerca dos resultados fracamente não lineares que serão apresentados adiante. Não esperamos que nossas simulações dos padrões fracamente não lineares reproduzam quantitativamente as características morfológicas fortemente não lineares reveladas pelos experimentos em processos de levantamento em Hele-Shaw, como aqueles apresentados na Fig. 7. Estes experimentos de laboratório concentram-se nos estágios fortemente não lineares da evolução dos padrões, onde o tamanho dos dedos é muito grande e seus formatos são consideravelmente complexos. Em contrapartida, nossa análise perturbativa fracamente não linear é válida para o início do aparecimento das não linearidades, situação em que a perturbação ζ necessita ser significativamente menor do que o raio da interface não perturbada $R(t)$. Além disso, com o objetivo de entender e descrever os mecanismos envolvidos no processo de formação de padrões, nossas simulações dos padrões fracamente não lineares consideram o acoplamento de um pequeno número de modos de Fourier relevantes. Portanto, nós não pretendemos recriar precisamente os complexos padrões obtidos experimentalmente para tempos avançados do escoamento no problema do levantamento em células de Hele-Shaw.

5.4.1 Padrões induzidos pela inércia: formação de *sidebranching*

Aqui, nosso propósito é obter informações sobre a possibilidade de produzir crescimento dendrítico por meio da inclusão da inércia nos padrões originados do escoamento de fluido newtoniano em levantamento em Hele-Shaw. Sendo assim, nosso interesse é de estudar os formatos assumidos pelos dedos quando a inércia é levada em consideração. Neste caso, a interação não linear entre o modo fundamental n e seu primeiro harmônico $2n$ pode fornecer algumas informações úteis: há uma maior tendência dos dedos invasores, provenientes do fluido externo, ficarem mais largos [82] (estreitos) quando $a_{2n} > 0$ ($a_{2n} < 0$). Além disso, como já é de conhecimento [166, 167], se a amplitude do modo harmônico cosseno a_{3n} for positiva e suficientemente grande, é capaz de induzir o crescimento de lóbulos laterais e eventos de *sidebranching*.

Nesta seção, nós consideramos o acoplamento não linear de apenas três modos relevantes para a morfologia dos padrões: n , $2n$ e $3n$, de forma que a Eq. (5.5) é escrita em termos das

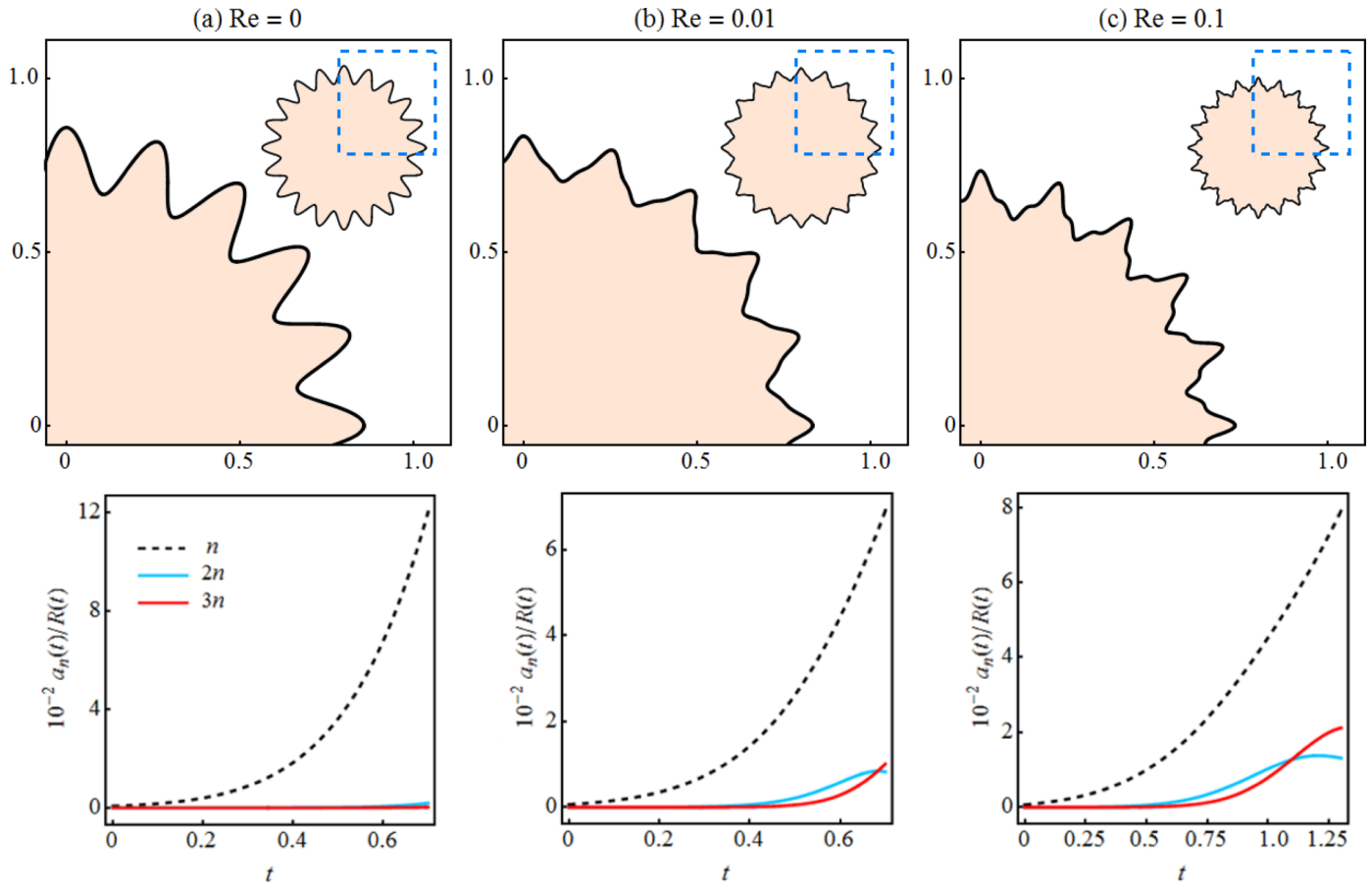


Figura 35 – Evolução temporal da interface fluido-fluido fracamente não linear (painéis superiores) ilustrando os padrões típicos de dedos viscosos que podem surgir durante escoamento de fluido newtoniano em processos de levantamento. Um visão mais detalhada dos padrões resultantes (para as áreas delimitadas pelas linhas tracejadas) é apresentada no canto inferior esquerdo de cada plot. A evolução temporal correspondente das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$, onde $n = 20$, é apresentada nos painéis inferiores. Os valores escolhidos para o número de Reynolds são: (a) $Re = 0$, (b) $Re = 0.01$ e (c) $Re = 0.1$. Além disso, $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$ e $q = 10^3$. Os tempos finais são (a) $t_f = 0.7$, (b) $t_f = 0.7$ e (c) $t_f = 1.3$.

amplitudes cosseno. Como é de se esperar, as equações de modos acoplados resultante são muito longas e complicadas. Entretanto, as evoluções temporais das amplitudes $a_n(t)$, $a_{2n}(t)$ e $a_{3n}(t)$ podem ser acessadas por meio das soluções numéricas das equações diferenciais não lineares acopladas. A partir disso, a perturbação ζ , escrita em termos destes modos cossenos, fica completamente definida e nos permite obter os possíveis formatos da interface.

Na Fig. 35, ilustramos as morfologias típicas dos padrões fracamente não lineares que podem surgir no problema de levantamento em célula de Hele-Shaw com fluidos newtonianos e quando a inércia é levada em consideração. Nos painéis superiores, apresentamos o formato da interface fluido-fluido para três valores crescentes de número de Reynolds Re . Com o objetivo de melhorar a visualização dos detalhes morfológicos das estruturas de dedos viscosos, plotamos a interface completa (para $0 \leq \theta \leq 2\pi$) no canto superior direito dos painéis e, além disso, uma visão

aumentada de parte da interface (para o setor angular $0 \leq \theta \leq \pi/2$) no canto inferior esquerdo. Finalmente, nos painéis inferiores da Fig. 35, mostramos a evolução temporal das amplitudes cosseno reescaladas $a_n(t)/R(t)$ para os três modos participantes e para cada um dos valores de Re considerados.

Na Fig. 35, as condições iniciais são $a_n(0) = 6.5 \times 10^{-4}$ e $a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = 0$, de forma que os modos $2n$ e $3n$ são ambos ausentes no início da dinâmica. De forma semelhante, usamos $\dot{a}_n(0) = 6.2 \times 10^{-3}$ e $\dot{a}_{2n}(0) = \dot{a}_{3n}(0) = 0$. Os valores iniciais para as amplitudes de perturbação foram escolhidos de tal forma que a amplitude do primeiro a_{2n} (responsável pelo estabelecimento do formato dos dedos como largos ou estreitos) e do segundo harmônico a_{3n} (responsável pelo comportamento de *sidebranching*) são consideravelmente menores do que a amplitude do modo fundamental a_n . Desta forma, garantimos que o comportamento da interface é induzido espontaneamente pela dinâmica fracamente não linear e não artificialmente pela imposição de grandes amplitudes iniciais para a_{2n} e a_{3n} . Além disso, usamos $Ca = 2.5 \times 10^{-4}$, $q = 10^3$ e $n = 20$.

Os padrões apresentados na Fig. 35 são obtidos após o tempo ter evoluído no intervalo $0 \leq t \leq t_f$, onde t_f é o tempo para o qual sucessivas interfaces estão a ponto de se cruzarem. O valor de n ($n = 20$) usado na Fig. 35 é obtido considerando a condição $\lambda(3n) = 0$ para os maiores valores de Re e t_f utilizados, ou seja, $Re = 0.1$ e $t_f = 1.3$. Isto assegura que $3n$ é o modo crítico no maior tempo considerado e, conseqüentemente, n , $2n$ e $3n$ sempre estarão dentro da banda de modos instáveis durante todo o processo de levantamento.

A Fig. 35 considera os possíveis formatos assumidos pelos dedos para os seguintes valores de número de Reynolds: (a) $Re = 0$, (b) $Re = 0.01$ e (c) $Re = 0.1$. Primeiramente, analisaremos o caso correspondente à ausência completa de efeitos inerciais [Fig. 35(a)]. Nesta situação, nada realmente surpreendente ocorre e dedos de estrutura simples são formados. Na ausência de inércia, a morfologia dos dedos invasores é basicamente determinada pelo crescimento do modo fundamental n , o qual atinge uma amplitude bem maior do que os modos $2n$ e $3n$. Isto é claramente ilustrado pelo crescimento das amplitudes representadas no painel inferior da Fig. 35(a). Logo, quando $Re = 0$, as amplitudes a_{2n} e a_{3n} são ambas muito pequenas e não há sinal de formação de *sidebranching*.

Em contrapartida, Fig. 35(b) revela algo diferente: para este valor não nulo de Re , é possível notar que a morfologia dos dedos invasores do fluido externo começa a mudar. Os dedos tornam-se um pouco mais finos nas pontas e largos nas laterais. Observando o painel inferior da Fig. 35(b), é possível inferir que este sugestivo comportamento morfológico é devido ao favorecimento do crescimento não linear de ambos os modos harmônicos $2n$ e $3n$, os quais agora possuem amplitudes positivas consideráveis. Pelo fato de que a única diferença entre as situações ilustradas nas Figs. 35(a) e 35(b) é o valor não nulo de Re usado na Fig. 35(b), podemos dizer que as mudanças no formato dos dedos estão sendo induzidas pelos efeitos inerciais.

Um comportamento morfológico ainda mais interessante que o anterior é observado na Fig. 35(c), para a qual Re é não nulo e maior do que o valor utilizado na Fig. 35(b). Inspecio-

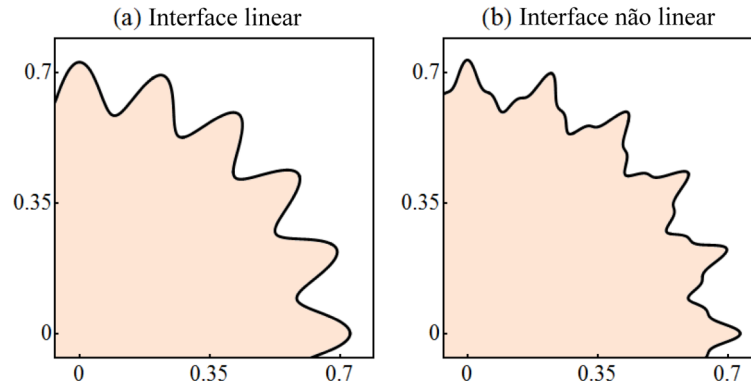


Figura 36 – Interface fluido-fluido apresentada para o tempo final considerando uma evolução (a) linear [obtida resolvendo a Eq. (5.14)] e (b) fracamente não linear [obtida por meio da Eq. (4.7)], para número de Reynolds $Re = 0.1$ e tempo final $t_f = 1.3$. Todos os parâmetros físicos e condições iniciais são as mesmas em ambas as situações (a) e (b), e, também, são idênticas às utilizadas na Fig. 35(c).

nando a interface ilustrada no painel superior da Fig. 35(c), verificamos algo bastante curioso: a evolução de dedos invasores largos que claramente apresentam lóbulos que ramificam-se lateralmente. Isto produz padrões de dedos viscosos com formação de *sidebranching* em nosso problema de escoamento de fluido newtoniano em levantamento em célula de Hele-Shaw. Este comportamento, responsável pela formação do padrão, pode ser justificado recorrendo-se à nossa abordagem de modos acoplados: pelo painel inferior da Fig. 35(c), podemos dizer que este cenário é proporcionado pelo aumento do crescimento não linear do modo $3n$ (com a fase positiva apropriada) o qual, juntamente com o crescimento não linear do modo $2n$, promove formação de dedos com três lóbulos. Todos estes resultados são devido à ação da inércia. O início da formação de *sidebranching* mostrado na Fig. 35(c) proporciona uma possível explicação teórica para o desenvolvimento das complexas estruturas dendríticas (painel direito da Fig. 7) detectadas experimentalmente nas Refs. [73, 79, 85].

Vale salientar que o fenômeno de *sidebranching* detectado na Fig. 35 é inerentemente não linear e, desta forma, não pode ser previsto ou capturado por uma descrição perturbativa puramente linear do problema de levantamento em célula de Hele-Shaw, mesmo se os efeitos inercias forem considerados. Para ilustrar esse importante aspecto, na Fig. 36(a), plotamos o formato da interface linear, enquanto que na Fig. 36(b), o formato da interface fracamente não linear é mostrada. Em ambos os casos, $Re = 0.1$ e $t_f = 1.3$. As interfaces apresentadas na Fig. 36 são plotadas utilizando-se exatamente os mesmos parâmetros físicos e condições iniciais usadas para produzir as interfaces ilustradas nos painéis superiores da Fig. 35. A única diferença entre as Figs. 36(a) e (b) é que enquanto a Fig. 36(a) é obtida por meio da solução numérica da Eq. (5.14) puramente linear (em ζ), a Fig. 36(b) resulta da solução numérica da equação de modos acoplados (5.5) de segunda ordem $[O(\zeta^2)]$.

Examinando a Fig. 36, é evidente que, mesmo para um valor não nulo do número de Reynolds, não é possível observar nenhuma tendência a formação de *sidebranching* na descrição linear

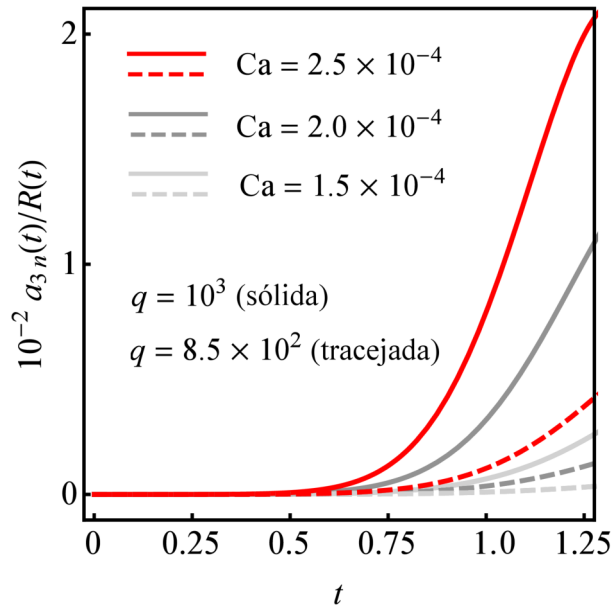


Figura 37 – Amplitude de perturbação reescalada $a_{3n}(t)/R(t)$ plotada em função do tempo para número de Reynolds $Re = 0.1$. Três valores de número de capilaridade Ca e dois valores de razão de aspecto inicial q são usados.

do problema [Fig. 36(a)]. Em âmbito linear, independente da incorporação de efeitos inerciais, o formato do padrão é dominado pelo crescimento do modo fundamental n , enquanto que os modos harmônicos $2n$ e $3n$ simplesmente não conseguem acompanhar este crescimento. Em contrapartida, a morfologia fracamente não linear, revelada na Fig. 36(b), surge devido ao acoplamento e aumento no crescimento não linear dos modos $2n$ e $3n$. Esta observação reforça a necessidade de se considerar a interação não linear entre os modos participantes [por meio das equações de modos acoplados de segunda ordem (5.5)-(5.13)] numa abordagem perturbativa. Tal consideração está diretamente ligada com a obtenção de morfologias que desenvolvem *sidebranching*. Apesar da natureza complicada das Eqs. (5.5)-(5.13), o uso destas expressões é recompensador, uma vez que, já na ordem não linear mais baixa [$\mathcal{O}(\zeta^2)$], se é capaz de trazer à tona o início da formação de dedos dendríticos no problema de escoamento de fluidos newtonianos em processos de levantamento em célula de Hele-Shaw.

Antes de fecharmos nossa análise a respeito da ocorrência de *sidebranching* induzido pela inércia, é preciso deixar claro que nós procuramos tipos adicionais de padrões considerando parâmetros (Re , Ca e q) e condições iniciais além dos que foram utilizados na confecção da Fig. 35 e, apesar disso, não foi encontrado nenhum tipo distinto de morfologia de dedos além das morfologias representativas já ilustradas na Fig. 35. Também vale a pena mencionar que não foi identificado o desenvolvimento de eventos de bifurcação de dedos no nosso sistema. Sendo assim, ao menos no âmbito da nossa teoria fracamente não linear, quando Re é suficientemente grande, o mecanismo morfológico básico para o problema escoamento de fluido newtoniano em processo de levantamento é, de fato, ramificação lateral ou *sidebranching*.

Ainda na questão da morfologia dos dedos, uma pergunta que surge naturalmente é o com-

portamento do fenômeno de *sidebranching* com relação a variações no número de capilaridade Ca e na razão de aspecto inicial q . Esta pergunta é respondida com ajuda da Fig. 37, a qual ilustra como a amplitude de perturbação reescalada do modo $3n$ $[a_{3n}(t)/R(t)]$ varia com o tempo para três valores característicos de Ca e dois valores de q , considerando $Re = 0.1$. Na confecção da Fig. 37 foi utilizado o mesmo conjunto de condições iniciais usadas na Fig. 35. Como fizemos na Fig. 35, os valores de n usados pra cada uma das situações analisadas na Fig. 37 são obtidos por meio da condição $\lambda(3n) = 0$ calculada no tempo $t = t_f = 1.3$.

Ao observarmos a Fig. 37, é bem aparente que, para todas estas situações, a amplitude reescalada $a_{3n}(t)/R(t)$ aumenta com o tempo. Isto garante um crescimento consistente do modo harmônico $3n$ com a fase positiva, algo que naturalmente induz a uma maior tendência de ocorrência de dedos com *sidebranching*. É também bastante claro que maiores valores de Ca e q são responsáveis pelo aumento de *sidebranching*. Estes resultados fracamente não lineares estão consistentes com os resultados de estabilidade linear discutidos na seção 5.3, onde vimos que maiores magnitudes de Ca e q tendem a desestabilizar o sistema. Portanto, é possível dizer pelas Figs. 35 e 37 que o cenário mais favorável para o aparecimento de estruturas dendríticas em escoamento de fluido newtoniano no problema de levantamento é aquele envolvendo maiores valores de Re , Ca e q .

5.4.2 Influência da inércia na competição dos dedos

Além do formato típico dos dedos discutidos na seção 5.4.1, outro aspecto fundamental que surge durante processos de levantamento em fluxo Hele-Shaw é o fenômeno da competição dos dedos. Simulações numéricas e experimentos [24, 72, 73, 76, 78, 81, 176–178] mostram consistentemente competição entre os dedos invasores provenientes do fluido menos viscoso, os quais avançam em direção ao centro da célula de Hele-Shaw com o passar do tempo. Levando-se em consideração a relevância da dinâmica da competição dos dedos no problema de levantamento em célula de Hele-Shaw, nesta seção, vamos examinar como este processo é afetado pela inércia.

Seguimos a abordagem da Ref. [45] e consideramos a variabilidade no comprimento dos dedos como uma medida da competição entre eles. Na abordagem fracamente não linear, o mecanismo de competição de dedos é descrito pela influência do modo fundamental n , assumindo que n é par, no crescimento do modo sub-harmônico $n/2$. Similarmente ao que foi feito na seção 5.4.1, as equações de movimento para as amplitudes dos modos sub-harmônicos $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ podem ser obtidas por meio das Eqs. (5.5)-(5.13). O mecanismo de modos acoplados para competição de dedos é baseado numa ideia bastante simples: a ação do modo sub-harmônico é quebrar a simetria rotacional, imposta pelo modo fundamental n , alternando entre aumento e diminuição no comprimento de cada um dos n dedos. Este mecanismo é capaz de fazer uma mímica do fenômeno real de competição dos dedos observado em experimentos de laboratório e em simulações numéricas para escoamento em Hele-Shaw. Vale ressaltar que a validade e exatidão deste mecanismo de competição de dedos para estágios avançados de tempo da dinâmica em célula de Hele-Shaw já foram testados por sofisticadas simulações numéricas [97, 98].

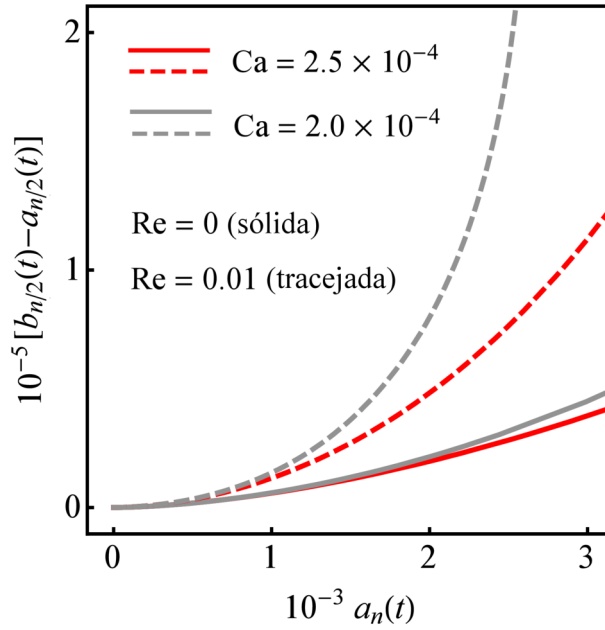


Figura 38 – Plote paramétrico expressando o comportamento de $[b_{n/2}(t) - a_{n/2}(t)]$ com respeito às variações de $a_n(t)$ para dois valores de número de Reynolds Re e dois valores de número de capilaridade Ca .

Como discutido nas Refs. [45, 82], no cenário de modos acoplados, um aumento na variabilidade do comprimento dos dedos provenientes do fluido invasor externo corresponde a um aumento no crescimento da amplitude do modo sub-harmônico seno $b_{n/2}$ ou, equivalentemente, numa diminuição do crescimento da amplitude do modo sub-harmônico cosseno $a_{n/2}$. Este efeito descreve a competição entre os dedos invasores que avançam em direção ao centro da célula de Hele-Shaw, exatamente a situação observada nos processos de levantamento [24, 72, 73, 76, 78, 81, 176–178]. Note que se estes comportamentos para $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ forem invertidos, ou seja, se o crescimento do modo $a_{n/2}$ for favorecido em relação ao modo $b_{n/2}$, então a descrição de modos acoplados iria revelar a competição entre os dedos provenientes do fluido interno (aqueles que apontam para fora). No entanto, esta não é a situação observada nas Refs. [24, 72, 73, 76, 78, 81, 176–178].

Para exemplificar o impacto da inércia no comportamento da competição dos dedos, ilustramos na Fig. 38 um plote paramétrico da diferença entre as amplitudes de perturbação seno e cosseno para o modo sub-harmônico $[b_{n/2}(t) - a_{n/2}(t)]$ em relação à amplitude do modo fundamental $a_n(t)$. Este gráfico é útil pois expressa simultaneamente o comportamento de ambas as amplitudes $b_{n/2}$ e $a_{n/2}$, as quais são responsáveis pelo mecanismo de competição dos dedos, em relação ao crescimento dos dedos como um todo (proporcionado pelo modo fundamental). Na Fig. 38, utilizamos dois valores para o número de Reynolds: $Re = 0$ (curvas sólidas) e $Re = 0.01$ (curvas tracejadas). Além disso, usamos dois valores distintos para o número de capilaridade $Ca = 2.0 \times 10^{-4}$ e 2.5×10^{-4} , e fixamos a razão de aspecto inicial em $q = 850$. As condições iniciais foram escolhidas como $a_n(0) = 10^{-7}$, $\dot{a}_n(0) = 5 \times 10^{-7}$, $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 10^{-8}$ e

$\dot{a}_{n/2}(0) = \dot{b}_{n/2}(0) = 5 \times 10^{-8}$. De forma similar ao que foi feito na Fig. 35, os valores de n usados para cada uma das situações analisadas foram impostos pela condição $\lambda(n) = 0$ calculada em $t = t_f = 0.7$. Na Fig. 38, é possível comparar o comportamento da competição de dedos tanto na ausência quanto na presença de efeitos inerciais.

Pela Fig. 38, verificamos primeiramente que a diferença $[b_{n/2} - a_{n/2}]$ aumenta quando a amplitude do modo fundamental a_n assume maiores valores. No contexto da descrição de modos acoplados, este é precisamente o comportamento dos modos sub-harmônicos que favorece a competição dos dedos que apontam para dentro (prevalência do crescimento de $b_{n/2}$ em relação à $a_{n/2}$). Além disso, para um dado valor de a_n , como as curvas tracejadas estão sempre acima das correspondentes curvas sólidas, é evidente que quando $Re = 0.01$ a diferença $[b_{n/2} - a_{n/2}]$ é maior do que quando $Re = 0$. Esta observação sugere que, devido à inércia, efeitos não lineares naturalmente proporcionam uma maior tendência a eventos de competição entre os dedos invasores. Ainda na Fig. 38, é possível notar um interessante aspecto da dinâmica não linear: um maior valor de Ca resulta numa modesta redução da competição dos dedos invasores, apesar do fato de que o sistema é mais linearmente instável para maiores valores de números de capilaridade. Este resultado teórico fracamente não linear é consistente com os resultados experimentais da Ref. [72] em relação ao papel dos efeitos de capilaridade no comportamento da variabilidade no comprimento dos dedos observado para o problema de escoamento de fluido newtoniano em processos de levantamento em células de Hele-Shaw.

6 ROTAÇÃO EM CÉLULA DE HELE-SHAW COM VELOCIDADE ANGULAR VARIÁVEL

6.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de um terceiro arranjo da célula de Hele-Shaw na qual um fluido denso encontra-se confinado entre duas placas paralelas de espaçamento b . Não há injeção de fluido e a distância b permanece constante no tempo, ou seja, também não ocorre separação das placas como no caso do processo de levantamento. Em vez disso, a célula é submetida a uma rotação sobre o eixo perpendicular ao plano das placas [19] e a interface, inicialmente circular, deforma-se devido às forças centrífugas [20, 86]. Como devidamente ilustrado no capítulo 1, as morfologias das interfaces obtidas pelo processo de rotação são bastante dependentes da razão de viscosidade e, em relação ao aspecto visual, diferem significativamente dos padrões obtidos por meio de processos de injeção [1, 6, 34] ou de levantamento em célula de Hele-Shaw [72–84]. Aqui, a instabilidade de interface surge devido à diferença de densidade entre os fluidos e o fenômeno não linear mais evidente é a intensa competição entre os dedos.

Em experimentos reais de laboratório [19–22, 86–105], a rotação da célula de Hele-Shaw inicia-se a partir do repouso e, após um certo tempo, atinge um valor finito estacionário para a velocidade angular de rotação. Desta forma, existe um regime transiente [87] no começo de cada experimento para o qual a velocidade angular aumenta do valor zero até o valor finito estacionário. Entretanto, a grande maioria dos estudos referentes à rotação em célula de Hele-Shaw concentram-se na situação em que a velocidade angular da célula é constante no tempo. Como discutido na Ref. [87], considerando as condições experimentais tradicionais exploradas nestes estudos, ou seja, número de Reynolds Re muito pequeno ou nulo, o intervalo transiente de aceleração da célula é bastante curto e, portanto, os efeitos da velocidade angular dependente do tempo podem ser desconsiderados.

Além de serem relevantes para descrever de forma apropriada o inevitável intervalo transiente que ocorre todas as vezes que a célula de Hele-Shaw é posta para rotacionar até atingir uma velocidade angular constante [87], os efeitos de uma legítima velocidade angular dependente do tempo na dinâmica destes fluidos confinados são importantes por si só e somente começaram a ser investigados na literatura [179] muito recentemente. No trabalho teórico apresentado na Ref. [179], os autores empregaram um análise de estabilidade linear para examinar como as amplitudes de perturbação da interface girante respondiam à ação de uma velocidade angular que variava de forma senoidal no tempo. A principal conclusão foi que a velocidade angular periódica no tempo simplesmente afetava o limite da instabilidade, tendendo a estabilizar as

perturbações da interface.

Pelos estudos realizados nas Refs. [87, 179], a consideração de uma velocidade angular que varia no tempo é de importância tanto no regime transiente, presente nos estudos que concentram-se na situação de velocidade angular constante, quanto nas investigações de estabilidade linear que consideram uma dependência explícita no tempo para a velocidade angular $\Omega(t)$, agindo durante toda a dinâmica da evolução da interface fluido-fluido no problema da célula de Hele-Shaw girante. Além disso, o estudo da influência da velocidade angular dependente do tempo na dinâmica não linear dos eventos de competição entre os dedos viscosos que surgem na célula de Hele-Shaw em rotação ainda precisa ser realizado. Adicionalmente, é necessário um maior entendimento das condições físicas para as quais o papel da velocidade angular dependente do tempo não possa ser ignorado. Estas são precisamente as questões que pretendemos responder neste capítulo.

Como estamos considerando a situação de escoamento de dois fluidos numa célula girante de Hele-Shaw com velocidade angular variável no tempo, é natural esperar que efeitos conectados à aceleração do sistema sejam relevantes. Neste contexto, em princípio, efeitos inerciais devem desempenhar um papel fundamental na dinâmica de formação de padrões. Sendo assim, em contraste com a grande maioria dos estudos realizados no arranjo rotacional da célula de Hele-Shaw, vamos considerar não só o papel da velocidade angular dependente do tempo na evolução da interface fluido-fluido, mas também o impacto dos efeitos inerciais nesta dinâmica. Vale a pena ressaltar que nas circunstâncias de um fluido com baixa viscosidade ou alta densidade, ou ainda se a separação das placas ou a velocidade angular de rotação forem grandes, os efeitos inerciais podem atingir magnitudes consideráveis e não podem ser desprezados. Em particular, esta situação foi demonstrada na Ref. [162] para o escoamento de um único fluido numa célula de Hele-Shaw girante que rotaciona com velocidade angular constante.

O restante do capítulo é organizado da seguinte forma: na seção 6.2, apresentamos o arranjo básico do problema físico e, também, introduzimos as equações que regem a dinâmica. Em seguida, levando-se em consideração os efeitos inerciais e utilizando a média transversal da lei de Darcy não linear generalizada, deduzimos a equação de modos acoplados que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface para o problema da rotação em célula de Hele-Shaw com velocidade angular dependente do tempo. Isto é feito considerando a situação generalizada de dois fluidos, ou seja, para valores arbitrários de razão de viscosidade e densidade, assim como para uma série de magnitudes para o número de Reynolds rotacional Re . Na seção 6.3, discutimos o impacto da velocidade angular dependente do tempo $\Omega(t)$ e dos efeitos inerciais no regime linear e fracamente não linear da dinâmica. Nossa atenção é voltada para a compreensão de como os fenômenos intrinsecamente não lineares da competição de dedos são influenciados por $\Omega(t)$ e Re .

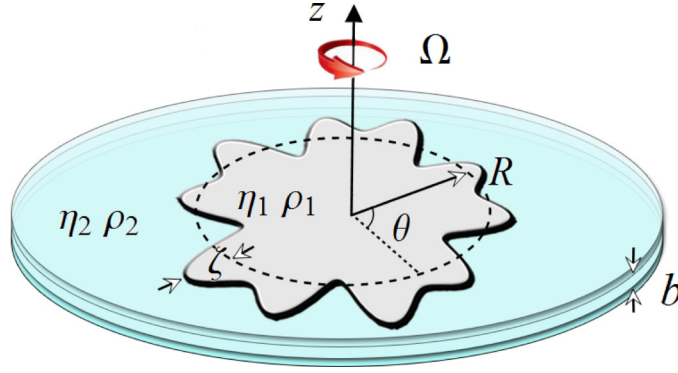


Figura 39 – Figura esquemática da célula de Hele-Shaw girante.

6.2 Equações básicas do sistema

A representação esquemática do arranjo da célula de Hele-Shaw girante é ilustrada na Fig. 39. Considere dois fluidos viscosos e imiscíveis em uma célula de Hele-Shaw de espaçamento b . A célula rotaciona com velocidade angular Ω em relação ao eixo z , o qual é perpendicular às placas. Ao contrário da maioria dos trabalhos teóricos relacionados com o problema da rotação em Hele-Shaw, nós consideramos que a velocidade angular $\Omega = \Omega(t)$ da célula girante pode variar com o tempo. O sistema de coordenadas girante é definido de tal forma que sua origem é localizada no centro da célula. As viscosidades do fluido interno e externo são, respectivamente, denotadas por η_1 e η_2 , e a tensão superficial entre eles é representada por σ . Analogamente, as densidades dos fluidos são definidas como ρ_1 e ρ_2 .

Para fluxos mediados por injeção ou processo de levantamento, o raio da interface não perturbada $R = R(t)$ depende do tempo e sua forma funcional específica foi apresentada nos capítulos anteriores para cada um dos casos abordados. Aqui, no problema da célula girante de Hele-Shaw, o raio da interface não perturbada é constante no tempo e representado por R , de forma que a posição da interface perturbada é escrita como $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$.

Estendemos a abordagem originalmente desenvolvida nas Refs. [23, 24, 159–161] para células de Hele-Shaw imóveis e expandimos para o fluxo rotacional, examinando a situação em que os efeitos da velocidade angular dependente do tempo e a inércia dos fluidos são levados em consideração. Neste contexto, o escoamento do fluido no referencial girante é governado pela média transversal da lei de Darcy generalizada [19, 20, 23–25, 159–162]

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \frac{6}{5} (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j - \frac{12\eta_j}{b^2} \mathbf{u}_j - \rho_j \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - \rho_j \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (6.1)$$

e pela equação de continuidade para fluidos incompressíveis Eq. (4.2). Os últimos dois termos do lado direito da Eq. (6.1) representam, respectivamente, as contribuições centrífugas e de aceleração angular. A introdução destes dois termos rotacionais na lei de Darcy generalizada pode ser encontrada nas Refs. [100, 101]. A velocidade angular dependente do tempo é denotada por $\Omega = \Omega(t)\hat{\mathbf{z}}$, onde $\hat{\mathbf{z}}$ é o vetor unitário na direção do eixo z e $\mathbf{r}$ é o vetor posição (no plano da célula) de um elemento de fluido medido a partir do eixo de rotação. Aqui, nos concentramos

na investigação da ação da velocidade angular dependente do tempo e da inércia do fluido na dinâmica da interface. Desta forma, negligenciamos efeitos das forças de gravidade e de Coriolis.

Reescalando comprimentos por $L = R$ e velocidades pela velocidade característica $U = (\rho_1 \Omega_0^2 b^2 R) / (12 \eta_1)$, a lei de Darcy generalizada (6.1) pode ser convenientemente reescrita na sua forma adimensional

$$\text{Re}^2 \alpha_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \frac{6}{5} (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j - \beta_j \mathbf{u}_j + \text{Re}^2 \alpha_j [\Omega^2 r \hat{\mathbf{r}} - \dot{\Omega} r \hat{\boldsymbol{\theta}}], \quad (6.2)$$

onde $\beta_j = \eta_j / \eta_1$, $\alpha_j = \rho_j / \rho_1$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ($\hat{\mathbf{r}}$) é o vetor unitário da direção azimutal (radial). O ponto acima da grandeza denota uma derivada total no tempo, de forma que $\dot{\Omega} = d\Omega/dt$. Na Eq. (6.2), o número de Reynolds Re para o escoamento rotacional é definido como

$$\text{Re} = \frac{\rho_1 \Omega_0 b^2}{12 \eta_1}, \quad (6.3)$$

onde Ω_0 é uma velocidade angular característica [veja Eq.(6.17)]. A partir deste ponto, trabalhamos apenas com a versão adimensional das equações.

Antes de prosseguirmos, é conveniente comentarmos algumas questões relacionadas à lei de Darcy usual [1, 6] e sua versão generalizada [Eq. (6.2)]. Na maioria dos trabalhos envolvendo escoamento em célula de Hele-Shaw girante [20–22, 86–99], para os quais a célula rotaciona com velocidade angular constante e efeitos inerciais são negligenciados ($\text{Re} = 0$), a lei de Darcy usual é a equação que rege a dinâmica do sistema, de forma que a velocidade é proporcional ao gradiente de pressão. Nesta situação, é possível relacionar a velocidade do fluido com o potencial de velocidade escalar devido à natureza irrotacional do escoamento. Entretanto, quando a velocidade angular dependente do tempo e os efeitos inerciais ($\text{Re} \neq 0$) são ambos levados em consideração, assim como considerado neste capítulo, a situação torna-se bem mais complexa. Nestas circunstâncias mais complicadas, o escoamento é descrito pela lei de Darcy generalizada (6.2), a qual apresenta uma natureza rotacional não nula. Este fato pode ser verificado tomando-se o operador rotacional em ambos os lados da Eq. (6.2). Portanto, não é possível escrever o campo de velocidade como um gradiente de um potencial escalar. Considerando este importante fato (escoamento não potencial) e, também, em acordo com a extensa literatura relacionada ao problema da rotação em célula de Hele-Shaw [19–22, 86–105], analisaremos a situação de baixo número de Reynolds. Nestas condições, e também notando a dependência da Eq. (6.2) com Re^2 , expandimos assintoticamente os campos de velocidade e de pressão na ordem mais baixa não nula de Re^2 como

$$\mathbf{u}_j \simeq \mathbf{u}_j^{(0)} + \text{Re}^2 \mathbf{u}_j^{(1)}, \quad (6.4)$$

$$p_j \simeq p_j^{(0)} + \text{Re}^2 p_j^{(1)}, \quad (6.5)$$

onde $\text{Re}^2 \ll 1$. $\mathbf{u}_j^{(0)}$ ($p_j^{(0)}$) é o termo viscoso de ordem zero e $\mathbf{u}_j^{(1)}$ ($p_j^{(1)}$) é a contribuição inercial de primeira ordem para o campo de velocidade (pressão). É necessário deixar claro que

nossa abordagem perturbativa é realizada com dois tipos independentes de expansões: enquanto que as grandezas dinâmicas (velocidade e pressão) são expandidas até primeira ordem em Re^2 [Eqs. (6.4)-(6.5)], a interface em si é expandida até segunda ordem em ζ . As expansões assintóticas feitas para velocidade e pressão em termos de Re^2 são realizadas no âmbito da lei de Darcy generalizada [Eq. (6.2)], anteriormente à expansão em ζ . Em seguida, os vários termos de velocidade e pressão, já escritos em termos de Re^2 , são expandidos em ζ , exatamente no momento em que é necessário calculá-los na interface fluido-fluido para $r = \mathcal{R}$.

A determinação dos campos de velocidade e pressão é essencial para se obter a equação de movimento para as amplitudes de perturbação da interface. Entretanto, os cálculos envolvidos nesta tarefa possuem muitos passos algébricos que podem distrair o leitor dos principais resultados deste capítulo. Desta forma, todos os cálculos relacionados com a obtenção dos campos de velocidade e pressão, tanto em ordem zero como em primeira ordem em Re^2 , estão detalhadamente especificados no apêndice A. A partir deste ponto, seguimos com os cálculos assumindo o conhecimento das expressões de tais campos.

Para especificar completamente o problema, ainda precisamos considerar a condição de contorno da diferença de pressão na interface (equação de Young-Laplace [6, 20])

$$(p_1 - p_2)_{r=\mathcal{R}} = B \kappa|_{r=\mathcal{R}}, \quad (6.6)$$

onde

$$B = \frac{\sigma}{\rho_1 \Omega_0^2 R^3} \quad (6.7)$$

representa o parâmetro adimensional de rotação (*Bond number*), uma medida da razão entre forças de tensão superficial e centrífugas.

Como passo necessário para se obter a equação dinâmica para a evolução temporal de ζ_n , substituímos as Eqs. (A.9)-(A.10) em $p_j = p_j^{(0)} + \text{Re}^2 p_j^{(1)}$ [Eq. (6.5)] e avaliamos a expressão resultante na posição da interface perturbada $r = \mathcal{R}$. Em seguida, substituindo p_1 e p_2 na condição de contorno da diferença de pressão (6.6), obtemos a seguinte equação dinâmica para sistema:

$$\left\{ \phi_1^{(0)} - \beta \phi_2^{(0)} + \text{Re}^2 \left[\left(\frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_1^{(0)}|^2 \right) + \Omega^2 \frac{r^2}{2} + \phi_1^{(1)} - \alpha \left(\frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_2^{(0)}|^2 \right) - \alpha \Omega^2 \frac{r^2}{2} - \phi_2^{(1)} \right] \right\}_{r=\mathcal{R}} = B \kappa|_{r=\mathcal{R}}, \quad (6.8)$$

onde os parâmetros $\alpha = \rho_2/\rho_1$ e $\beta = \eta_2/\eta_1$ são, respectivamente, as razões de densidade e viscosidade.

Finalmente, mantendo sempre termos até segunda ordem em ζ na Eq. (6.8) e usando a transformada de Fourier, obtemos a equação de movimento para as amplitudes de perturbação

(para $n \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\text{Re}^2 \ddot{\zeta}_n &+ \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha} \right) \dot{\zeta}_n \\
&- \left\{ \Lambda(n) + \text{Re}^2 |n| \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \Omega^2 + i \text{sgn}(n) \dot{\Omega} \right] \right\} \zeta_n = \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') + \text{Re}^2 \mathcal{H}(n, n') \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \mathcal{G}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \\
&+ \text{Re}^2 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{L}(n, n') \ddot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{K}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'} \right],
\end{aligned} \tag{6.9}$$

onde

$$\Lambda(n) = |n| \left[\frac{B}{1+\alpha} (1-n^2) \right]. \tag{6.10}$$

Os termos de modos acoplados de segunda ordem são dados por

$$\mathcal{F}(n, n') = -|n| \frac{B}{1+\alpha} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right], \tag{6.11}$$

$$\mathcal{H}(n, n') = |n| \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left\{ \frac{\Omega^2}{2} - in' \dot{\Omega} \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} - 1 \right) \right\}, \tag{6.12}$$

$$\mathcal{G}(n, n') = \left(\frac{1-\beta}{1+\alpha} \right) \left\{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 \right\}, \tag{6.13}$$

$$\mathcal{L}(n, n') = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left\{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] \right\} - 1, \tag{6.14}$$

e

$$\mathcal{K}(n, n') = |n| \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \left\{ \text{sgn}(nn') + \frac{3}{5} [\text{sgn}(n'(n-n')) - 1] \right\} - 1. \tag{6.15}$$

As expressões (6.9)-(6.15) representam as equações de modos acoplados para a situação generalizada do problema de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw girante, constituindo assim um dos resultados centrais deste capítulo. Estas equações abrem a possibilidade da investigação da evolução temporal das amplitudes de perturbação (até segunda ordem em ζ) considerando a ação da velocidade angular dependente do tempo e da inércia. Elas são válidas para valores arbitrários de razão viscosidade (β) e densidade (α), assim como para qualquer valor do parâmetro adimensional de rotação B . Vale ressaltar que estamos considerando uma situação de baixo (porém não nulo) número de Reynolds Re ($\text{Re}^2 \ll 1$). Para o caso particular

de $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ e $\dot{\Omega} = 0$, a Eq. (6.9) reproduz os resultados mais simples obtidos na Ref. [162] para a versão correspondente do problema considerando o fluxo de apenas um fluido e velocidade angular constante.

Como é de se esperar, a inclusão dos efeitos de uma velocidade angular dependente do tempo, juntamente com a inércia do fluido, nos leva a expressões relativamente complexas [Eqs. (6.9)-(6.15)]. Entretanto, estas equações proporcionam informações relevantes sobre o estágio linear (seção 6.3.1) da dinâmica de formação de padrões em fluxos mediados por rotação em célula de Hele-Shaw e, além disso, oferecem previsões úteis sobre a resposta dos importantes eventos de competição à ação de Ω e Re (seção 6.3.2).

6.3 Efeitos da velocidade angular dependente do tempo e da inércia

6.3.1 Regime linear

Nosso principal objetivo neste capítulo é examinar o impacto de $\Omega(t)$ e Re na dinâmica não linear da competição de dedos em célula girante de Hele-Shaw. Entretanto, alguns aspectos importantes relacionados à estabilidade linear do sistema serão discutidos nessa seção.

Neste ponto, pretendemos analisar as influências da velocidade angular dependente do tempo e da inércia do fluido na interface, mas considerando o regime de tempos iniciais da dinâmica de escoamento. Neste regime, a interface fluido-fluido é apenas modestamente deformada pelas forças centrífugas. Sob estas circunstâncias, as perturbações da interface são muito pequenas, de forma que termos de ordens mais altas em ζ podem ser seguramente desprezados. Na realidade, é por esta razão que o estágio inicial da formação de padrões é comumente conhecido como o regime dinâmico linear (significando linear em ζ). Assim, podemos ignorar os termos de segunda ordem em ζ que aparecem na Eq. (6.9), de tal forma que a equação de movimento para as amplitudes de perturbação é significativamente simplificada, sendo reduzida à

$$Re^2 \ddot{\zeta}_n + \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha} \right) \dot{\zeta}_n - \left\{ \Lambda(n) + Re^2 |n| \left[\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \Omega^2 + i \operatorname{sgn}(n) \dot{\Omega} \right] \right\} \zeta_n = 0. \quad (6.16)$$

Observe que devido à aceleração das placas da célula de Hele-Shaw girante, os coeficientes da Eq. (6.16) que envolvem $\Omega(t)$ e $\dot{\Omega}(t)$ dependem do tempo. Considerando um formato funcional arbitrário para $\Omega(t)$, esbarramos em um sério impedimento para calcular uma expressão analítica fechada para taxa de crescimento linear do sistema. Consequentemente, já em âmbito linear, o problema de rotação em célula de Hele-Shaw com uma velocidade angular dependente do tempo e uma forma funcional arbitrária para $\Omega(t)$ não é passível para tratamento analítico. Consequentemente, é mais sensato definir a taxa de crescimento linear como $\lambda(n, t) = \operatorname{Real}[\dot{\zeta}_n / \zeta_n]$ e lidar com esta questão resolvendo numericamente a Eq. (6.16).

Antes de continuarmos, é preciso mencionar alguns aspectos importantes a respeito do formato funcional específico que iremos utilizar para a velocidade angular dependente do tempo.

Tal função será usada no restante deste capítulo para ilustrar nossos resultados. A princípio, a forma funcional de $\Omega(t)$ pode ser completamente arbitrária. No entanto, para manter uma conexão próxima entre teoria e experimentos de laboratório reais em célula de Hele-Shaw girante, consideramos a forma específica usada nas medidas experimentais realizadas na Ref. [87]:

$$\Omega(t) = \Omega_0[1 - \exp(-\gamma t)], \quad (6.17)$$

onde Ω_0 é a velocidade angular estacionária alcançada assintoticamente após o tempo transiente de aceleração das placas e γ é uma constante positiva. É possível controlar a intensidade da aceleração angular das placas por meio da mudança do valor de γ . Perceba que o limite de velocidade angular constante é obtido fazendo-se $\gamma \rightarrow \infty$.

Para o formato específico dado pela Eq. (6.17), é possível obter uma solução fechada para equação diferencial (6.16), a qual é escrita como

$$\begin{aligned} \zeta_n(t) = & \exp \left[- \left(\sqrt{\delta^2 + 4c_1(n)} + \delta \right) t/2 - \frac{\sqrt{c_3(n)}}{\gamma} \exp(-\gamma t) \right] \times \\ & \left\{ A_1 U \left(\frac{\frac{c_2(n)}{\sqrt{c_3(n)}} + \gamma + \sqrt{\delta^2 + 4c_1(n)}}{2\gamma}, 1 + \frac{\sqrt{\delta^2 + 4c_1(n)}}{\gamma}, \frac{2\sqrt{c_3(n)}}{\gamma} \exp(-\gamma t) \right) \right. \\ & \left. + A_2 L \left(\frac{-\frac{c_2(n)}{\sqrt{c_3(n)}} - \gamma - \sqrt{\delta^2 + 4c_1(n)}}{2\gamma}, \frac{\sqrt{\delta^2 + 4c_1(n)}}{\gamma}, \frac{2\sqrt{c_3(n)}}{\gamma} \exp(-\gamma t) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde U é a função hipergeométrica confluyente de segunda espécie, L é o polinômio generalizado de Laguerre,

$$\delta = \frac{1}{\text{Re}^2} \left(\frac{1 + \beta}{1 + \alpha} \right), \quad (6.19)$$

$$c_1(n) = \frac{1}{\text{Re}^2} \Lambda(n) + |n| \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \Omega_0^2, \quad (6.20)$$

$$c_2(n) = i\Omega_0 \gamma n - 2|n| \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \Omega_0^2, \quad (6.21)$$

e

$$c_3(n) = |n| \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \Omega_0^2. \quad (6.22)$$

Na Eq. (6.18), as constantes A_1 e A_2 são determinadas pelas condições iniciais. Apesar da natureza complexa desta solução linear fechada, agora é possível calcular a taxa de crescimento linear $\lambda(n, t) = \text{Real}[\dot{\zeta}_n / \zeta_n]$ utilizando diretamente a Eq. (6.18).

Para reforçar a relevância acadêmica deste trabalho, durante o restante deste capítulo nós asseguramos que os valores usados para todos os parâmetros adimensionais relevantes estão consistentes com grandezas físicas realistas relacionadas com arranjos reais de célula de Hele-Shaw girante e com as propriedades materiais dos fluidos [20, 21, 87–89]. Vale a pena ressaltar

que os estudos experimentais para o problema da rotação em célula de Hele-Shaw com velocidade angular constante são realizados sob condições de baixo número de Reynolds. Nestas situações, o maior número de Reynolds usado foi $Re = 0.04$ [21]. Entretanto, pelos parâmetros típicos para célula de Hele Shaw (como, por exemplo, espaçamento entre as placas e velocidade angular de rotação) e pelas propriedades materiais dos fluidos envolvidos (viscosidades, densidades e valores de tensão superficial), valores consideravelmente maiores para o número de Reynolds podem ser utilizados. De fato, números de Reynolds da ordem de $Re = 0.1$ e $Re = 0.3$ são perfeitamente alcançáveis [20, 21, 24, 86–89, 159]. Portanto, em nosso trabalho teórico, o qual analisa o papel de efeitos inerciais e de $\Omega(t)$, nós consideramos números de Reynolds que variam no intervalo perfeitamente factível $O(10^{-2}) \leq Re \leq O(10^{-1})$.

Antes de continuarmos com a análise linear, é necessário fazer algumas observações relevantes sobre a Eq. (6.17). Apesar das equações de modos acoplados [Eqs. (6.9)-(6.15)] serem precisas e válidas para um formato funcional qualquer de $\Omega(t)$, é preciso justificar a razão por trás da escolha do formato exponencial específico dado pela Eq. (6.17) para exemplificar nossos resultados teóricos. A utilização da Eq. (6.17) foi motivada por razões práticas, no sentido de que esta forma funcional em particular surge naturalmente em experimentos reais em célula girante de Hele-Shaw, além do fato de já ter sido implementada e analisada em experimentos realizados na Ref. [87]. Adicionalmente, assim como comentado na seção 6.1, a velocidade angular dada pela Eq. (6.17) expressa o regime transiente que de fato ocorre durante a realização de experimentos em Hele-Shaw com velocidade angular constante, uma vez que, na prática, a célula não pode alcançar a velocidade angular constante instantaneamente. As investigações experimentais realizadas na Ref. [87] mostraram que, para as condições experimentais de número de Reynolds muito baixo [$Re \leq O(10^{-2})$], o curto espaço de tempo do regime transiente (tempo em que a velocidade angular é legitimamente dependente do tempo) não tem influência na dinâmica da evolução do fluido no problema da rotação em célula de Hele-Shaw. Diante desta situação, um questionamento que surge naturalmente é: qual o sentido de usarmos esta forma funcional para a velocidade angular dependente do tempo em nossas investigações, uma vez que, aparentemente, ela não possui qualquer influência na dinâmica da evolução dos padrões? É preciso lembrar que, neste capítulo, nós estudamos o problema da rotação em célula de Hele-Shaw com velocidade angular dependente do tempo $\Omega(t)$, levando-se em consideração também o papel dos efeitos inerciais e da aceleração angular das placas (quantificada por γ). Sendo assim, em nosso atual estudo, há a possibilidade de se considerar valores para o número de Reynolds maiores do que aqueles considerados na Ref. [87]. Além disso, ainda podemos lidar com menores valores de γ , de forma que o regime transiente do processo de rotação pode ser muito mais longo do que aqueles observados em experimentos usuais de rotação [20, 21, 87–89]. Isto abre a conveniente possibilidade de testar como a velocidade dependente do tempo, dada pela Eq. (6.17), afeta a dinâmica linear e fracamente não linear do problema de rotação em célula de Hele-Shaw quando os efeitos inerciais não são desprezíveis [ou seja, mediante à ação de um grande valor de número de Reynolds $Re \sim O(10^{-1})$] e para durações arbitrárias do regime de aceleração angular.

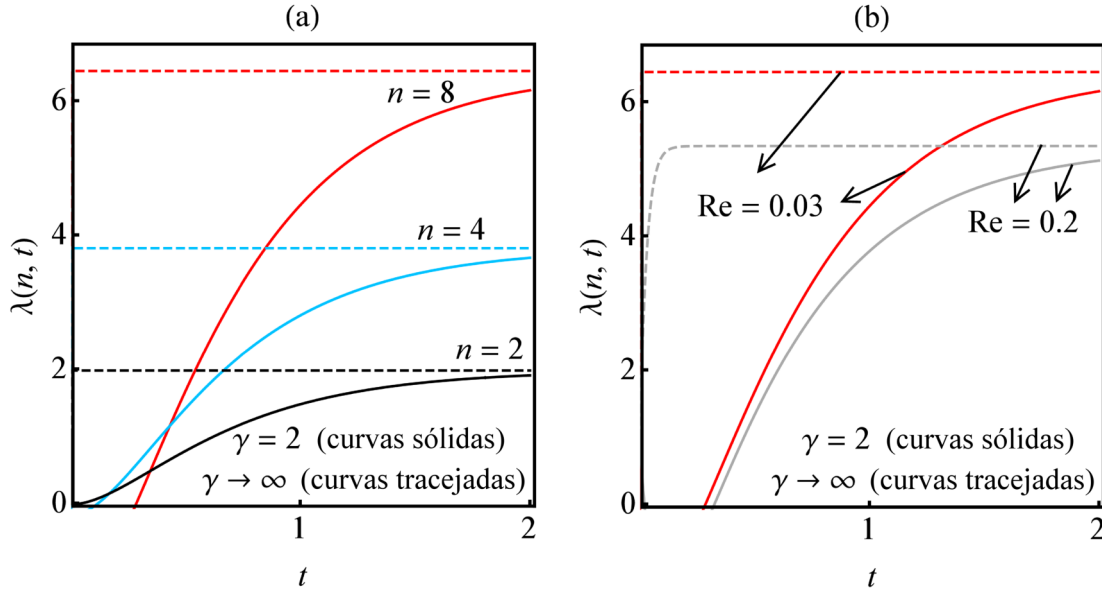


Figura 40 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n, t)$ em função do tempo t para $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0$ e $B = 3.0 \times 10^{-3}$. As ações da velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$) e com dependência temporal ($\gamma = 2$) são ambas examinadas. Em (a), $Re = 0.03$, $n = 2$, $n = 4$ e $n = 8$. Em (b), $n = 8$ e dois valores para o número de Reynolds ($Re = 0.03$ e $Re = 0.2$) são considerados.

Portanto, o uso da Eq. (6.17) para ilustrar nossos resultados não significa que nosso estudo se restringe em analisar somente efeitos do transiente desta particular forma para velocidade angular $\Omega(t)$ na dinâmica do escoamento mediado pela rotação em nosso sistema. Afinal, as Eqs. (6.9)-(6.15) são precisas e válidas para qualquer formato funcional arbitrário de $\Omega(t)$, na presença ou na ausência de um eventual regime transiente.

Agora, para examinar o comportamento da taxa de crescimento linear conforme o tempo avança, analisaremos a Fig. 40. Para simplificar a análise, nossa atenção será voltada para uma situação física comumente explorada em experimentos reais de rotação em célula de Hele-Shaw [20, 21, 87–89] na qual uma gota de óleo densa e viscosa é cercada pelo ar (de densidade e viscosidade desprezíveis). Neste caso, consistentemente com experimentos usuais, os valores assumidos pelas razões de densidade e viscosidade são, respectivamente, $\alpha = 10^{-3}$ e $\beta = 0$. Além disso, consideramos a ação de uma velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$, representada pelas curvas tracejadas) e, também, de uma velocidade dependente do tempo ($\gamma = 2$, ilustrada por curvas sólidas). Adotamos o valor típico para o parâmetro adimensional de rotação $B = 3.0 \times 10^{-3}$.

Na Fig. 40(a), plotamos a taxa de crescimento linear $\lambda(n, t)$ em função do tempo t para três modos de Fourier representativos: $n = 2$, $n = 4$ e $n = 8$. Além disso, utilizamos um pequeno valor para o número de Reynolds $Re = 0.03$. Pela análise da Fig. 40(a), verificamos que para uma velocidade angular constante, independente do modo de Fourier considerado, a taxa de crescimento não depende do tempo. Este fato está em acordo com os resultados previamente

obtidos na Ref. [162]. Em contrapartida, um comportamento notavelmente distinto é revelado quando a velocidade angular varia no tempo: para $\gamma = 2$, é possível observar que a taxa de crescimento varia no tempo de forma diferente para cada um dos modos n e, além disso, sua magnitude tende a se aproximar assintoticamente dos valores correspondentes ao caso da velocidade angular constante conforme o tempo avança.

Para o caso de $\gamma = 2$ na Fig. 40(a), identificamos, para cada modo n , a existência de uma série de tempos críticos para os quais a interface fluido-fluido torna-se instável [$\lambda(n, t) > 0$]. É também bastante aparente que os modos com menores valores de n tornam-se instáveis mais rapidamente em relação aos modos com maiores valores de n . Este efeito ocorre devido à ação da crescente velocidade angular, que desestabiliza a interface de tal forma que modos de Fourier mais altos tornam-se cada vez mais instáveis conforme o tempo avança. É claro que este efeito não pode ser detectado se a velocidade angular é constante no tempo. Curiosamente, este comportamento para escoamento mediado por rotação dependente do tempo é bastante similar ao crescimento em cascata das amplitudes de Fourier encontrado em processos de injeção radial em célula de Hele-Shaw [45, 125]. Entretanto, em contraste com o sistema rotacional que estudamos neste capítulo [para o qual $\Omega = \Omega(t)$ e R é constante], nos processos de injeção radial os tempos críticos surgem porque o raio da interface não perturbada aumenta com o tempo [ou seja, $R = R(t)$].

Com o objetivo de entender o papel dos efeitos inerciais no regime linear, na Fig. 40(b) nós ilustramos como a taxa de crescimento evolui no tempo para dois valores de número de Reynolds: um valor muito pequeno de $Re = 0.03$ e outro consideravelmente maior, dado por $Re = 0.2$. Aqui, descrevemos nossos resultados para um modo de Fourier fixo $n = 8$. Examinando a Fig. 40(b), vemos que a inércia tende a estabilizar a interface fluido-fluido de duas formas diferentes: quando o maior valor de número de Reynolds é considerado ($Re = 0.2$), observamos (i) uma diminuição na magnitude da taxa de crescimento e (ii) um pequeno atraso no instante de tempo para o qual o modo de Fourier torna-se instável.

Portanto, verificamos que, em âmbito linear, o efeito dinâmico dominante vem da velocidade angular Ω e não da aceleração angular $\dot{\Omega}$. Além disso, observamos que a aceleração provoca somente uma rotação como um todo (uma modulação de fase relacionada com a parte imaginária da taxa de crescimento) nos padrões da interface. Este efeito compartilha uma curiosa semelhança com o desvio de fase típico da dinâmica de rotação em célula de Hele-Shaw com efeitos da força de Coriolis [19, 100–105].

Os aspectos lineares básicos, discutidos na Fig. 40, são obviamente de interesse e úteis para entender as questões da estabilidade da interface para tempos iniciais do processo de formação de padrões. Porém, infelizmente, não é possível acessar, em âmbito linear, o fenômeno fundamental da competição de dedos usualmente detectado em fluxos mediados por rotação em célula de Hele-Shaw. Este aspecto não linear do problema, assim como a influência de $\Omega(t)$ e Re no seu desenvolvimento, será explorado na próxima seção por meio da abordagem fracamente não linear.

6.3.2 Regime não linear

Pelos estudos perturbativos fracamente não lineares de segunda ordem (em ζ) realizados nas Refs. [45, 95], foi mostrado que o fenômeno de competição de dedos, normalmente detectados em escoamentos em Hele-Shaw, pode ser precisamente descrito considerando apenas o acoplamento entre o modo fundamental n e seus modos sub-harmônicos $n/2$. Desta forma, reescrevemos a perturbação da interface em termos dos modos senos e cossenos relevantes: $\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + a_n(t) \cos(n\theta) + b_n(t) \sin(n\theta) + a_{n/2}(t) \cos(n\theta/2) + b_{n/2}(t) \sin(n\theta/2)$. Impondo a conservação de massa, temos que $\zeta_0 = -1/4R\{[a_n(t)]^2 + [a_{n/2}(t)]^2 + [b_n(t)]^2 + [b_{n/2}(t)]^2\}$.

Como demonstrado nas Refs. [45, 95], informações sobre a dinâmica da competição dos dedos em escoamentos em Hele-Shaw podem ser acessadas analisando o comportamento das amplitudes de perturbação seno e cosseno do modo sub-harmônico. A amplitude de perturbação cosseno $a_{n/2}$ quebra a simetria rotacional de n dedos imposta pelo modo fundamental, alternando entre crescimento e decrescimento do comprimento de cada um dos n dedos. Este efeito descreve a competição entre os dedos que apontam para fora, provenientes do fluido interno. Em contrapartida, a amplitude de perturbação seno $b_{n/2}$ distorce os dedos por meio da variação da profundidade dos vales entre os dedos do fluido interno (dedos estes que apontam para fora). Este vales são precisamente os dedos que apontam para dentro (em direção ao centro da célula de Hele-Shaw) e são formados pelo fluido externo invasor. Vale a pena ressaltar que para fluxos em célula de Hele-Shaw girante, ambos os dedos que apontam para fora ou para dentro podem se mover de forma a conservar massa no sistema rotacional.

No capítulo anterior, descrevemos como as amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ governam o mecanismo de competição de dedos no cenário fracamente não linear. Foi mostrado que um aumento no crescimento de $a_{n/2}$, acompanhado de uma atenuação na amplitude de $b_{n/2}$, resulta em um aumento na variabilidade do comprimento dos dedos que apontam para fora, significando uma maior competição entre estes dedos. Observe que este mecanismo não linear de competição determina a direção preferencial para o crescimento e variabilidade do comprimento dos dedos. Em outras palavras, se $a_{n/2}$ aumenta e $b_{n/2}$ diminui, mesmo existindo competição de dedos em ambas as direções (para dentro e para fora), a competição entre os dedos que apontam para fora é mais intensa do que a competição dos dedos que apontam para dentro. Estas conclusões são invertidas se o crescimento de $b_{n/2}$ for favorecido em relação à $a_{n/2}$. Neste último caso, competição entre os dedos que apontam para dentro teria um crescimento preferencial.

A possibilidade de capturar o importante fenômeno da competição de dedos já na ordem não linear mais baixa de perturbação (segunda ordem em ζ) e convenientemente utilizando somente dois modos de Fourier relevantes (o modo fundamental n e seu sub-harmônico $n/2$) não deve ser subestimada. Afinal de contas, a situação poderia ser bem mais complicada de se descrever por meio de uma abordagem teórica. Por exemplo, a inclusão da terceira, quarta ou maiores ordens de perturbação poderiam ser necessárias para ganhar acesso ao fenômeno da competição de dedos. Ou até mesmo a consideração do acoplamento entre muitos outros modos de Fourier poderia ser requisitada. Estas observações justificam a utilidade da nossa análise fracamente

não linear para escoamentos em célula girante de Hele-Shaw considerando os efeitos de $\Omega(t)$ e Re . Em relação a outras abordagens alternativas, como, por exemplo, a descrição e solução do sistema por meio de sofisticadas simulações numéricas fortemente não lineares não é exatamente simples de se implementar e, de fato, demanda um esforço computacional muito maior. Portanto, para analisar o início dos efeitos não lineares (por exemplo, eventos de competição) em nosso sistema rotacional, o método fracamente não linear que nós empregamos revela-se uma valiosa ferramenta teórica.

Para examinar o comportamento da competição de dedos em relação à velocidade angular dependente do tempo e sob condições de Re não nulo, é preciso descrever a evolução temporal da interface fluido-fluido. De forma específica, é preciso saber como as amplitudes $a_n(t)$, $b_n(t)$, $a_{n/2}(t)$ e $b_{n/2}(t)$ variam no tempo. Em termos práticos, fazemos isto reescrevendo a representação de amplitudes complexas da equação de modos acoplados (6.9) em termos dos modos reais senos e cossenos, considerando o acoplamento entre os modos n e $n/2$, e, posteriormente, resolvendo numericamente as equações diferenciais não lineares acopladas resultantes. Seguindo as Refs. [45, 95] e a abordagem dos capítulos anteriores, sem perda de generalidade, escolhemos a fase do modo fundamental de forma que $a_n(t) > 0$ e $b_n(t) = 0$.

Antes de procedermos com a análise da competição de dedos nas circunstâncias de uma velocidade angular dependente do tempo e $Re \neq 0$, comentaremos brevemente algumas informações científicas bem estabelecidas relacionadas à dinâmica da competição de dedos no problema da célula de Hele-Shaw girante com velocidade angular constante e $Re = 0$. Como mencionado em muitas investigações científicas, sob velocidade angular constante e Re desprezível, a competição de dedos depende fortemente da razão de viscosidade $\beta = \eta_2/\eta_1$ [20–22, 89, 95, 97–99]. De forma específica, se $0 \leq \beta < 1$ ($\beta > 1$) há um aumento na competição dos dedos que apontam para dentro (fora). Além disso, também foi verificado que a competição dos dedos (em ambas as direções) é significativamente atenuada quando $\beta = 1$. Nesta seção, investigaremos como estas reações convencionais da competição dos dedos em relação à mudança na razão de viscosidade são afetadas se a velocidade angular de rotação varia no tempo e se efeitos inerciais forem considerados.

Com o objetivo de estudar o comportamento da competição de dedos fracamente não linear, expressada pela estrutura dos padrões típicos do fluxo rotacional em Hele-Shaw, com respeito à velocidade angular dada pela Eq. (6.17), começamos nossa discussão examinando a Fig. 41. Nesta figura, adotamos $\gamma = 2$ e consideramos três valores crescentes para o número de Reynolds: (a) $Re = 0.03$, (b) $Re = 0.16$ e (c) $Re = 0.2$. Nos painéis superiores, plotamos a evolução temporal das interfaces fluido-fluido considerando a interação entre o modo fundamental $n = 10$ e seu sub-harmônico $n/2 = 5$. O tempo varia no intervalo $0 \leq t \leq t_f$, onde o tempo final t_f é definido como o tempo para o qual a amplitude do modo fundamental alcança a mesma magnitude [$a_n(t = t_f) = 0.15$] para cada valor de Re utilizado. Esta escolha para o tempo final t_f é feita com o objetivo de se obter padrões que tenham aproximadamente o mesmo tamanho no tempo $t = t_f$. A sequência de interfaces é plotada considerando um intervalo temporal de

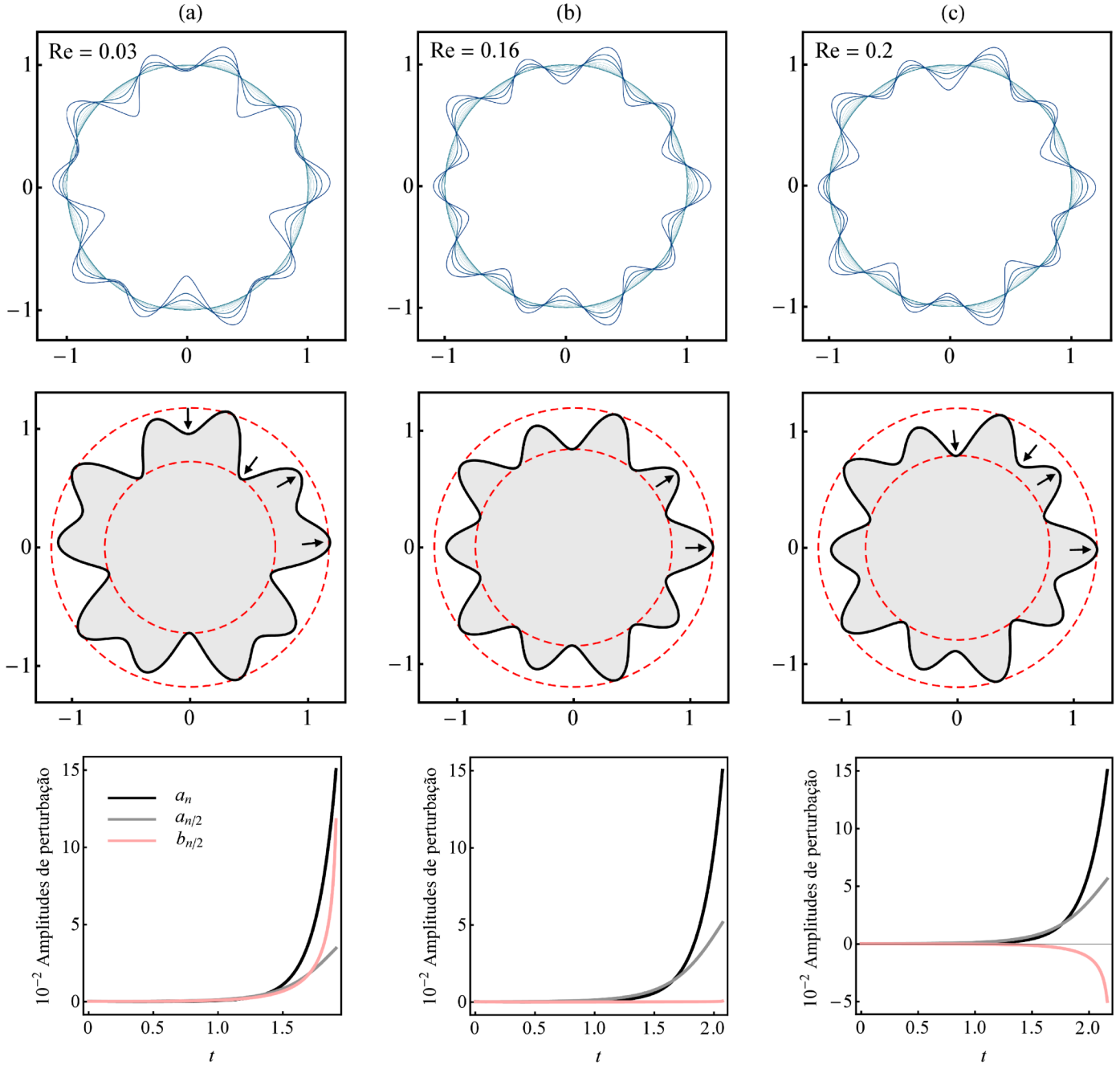


Figura 41 – Os painéis superiores ilustram a evolução temporal típica das interfaces fluido-fluido obtidas em processos de rotação em Hele-Shaw. A velocidade angular possui dependência temporal dada pela Eq. (6.17) com $\gamma = 2$. Três valores crescentes para o número de Reynolds são utilizados: (a) $Re = 0.03$, (b) $Re = 0.16$ e (c) $Re = 0.2$. Os padrões resultantes (áreas em cinza) obtidos para o tempo final $t = t_f$ são apresentados nos painéis da linha do meio. Os tempos finais correspondentes a cada um dos padrões são: (a) $t_f = 1.9107$, (b) $t_f = 2.072$ e (c) $t_f = 2.1599$, onde t_f é definido como o tempo para o qual a amplitude do modo fundamental atinge a magnitude de $a_n(t = t_f) = 0.15$ para cada valor de Re . As pequenas setas apontam na direção do movimento dos dedos que competem internamente ou externamente. Os círculos tracejados são adicionados para facilitar a visualização dos eventos de competição entre os dedos. A correspondente evolução temporal das amplitudes de perturbação $a_n(t)$, $a_{n/2}(t)$ e $b_{n/2}(t)$ para os modos $n = 10$ e $n/2 = 5$ é apresentada nos painéis inferiores. Aqui, adotamos $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0$ e $B = 3.0 \times 10^{-3}$.

$\Delta t = t_f/25$ entre interfaces subsequentes. Nos painéis centrais, ilustramos as interfaces resultantes produzidas no tempo final $t = t_f$. Com o objetivo de destacar visualmente os padrões, as regiões internas foram sombreadas. As pequenas setas indicam a direção do movimento (para dentro ou para fora) dos dedos que competem. Os círculos tracejados servem de guia para ajudar na visualização dos eventos de competição. Finalmente, nos painéis inferiores, mostramos as evoluções temporais correspondentes das amplitudes de perturbação a_n , $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$. Na Fig. 41, de forma similar ao que foi feito na Fig. 40, consideramos a situação amplamente explorada experimentalmente, ou seja, o fluido interno é muito mais denso e viscoso do que o fluido externo. Nestas circunstâncias, adotamos $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 0$ e $B = 3.0 \times 10^{-3}$. Além disso, utilizamos as condições iniciais $a_n(0) = 3.3 \times 10^{-4}$ e $a_{n/2}(0) = b_{n/2}(0) = 2.5 \times 10^{-4}$. Usamos também os valores $\dot{a}_n(0) = -9.9 \times 10^{-4}$ e $\dot{a}_{n/2}(0) = \dot{b}_{n/2}(0) = 0$.

É importante chamar a atenção do leitor a respeito de como os dados são apresentados na Fig. 41. Para os valores de tempo escolhidos para ilustrar os padrões representados nas Figs. 41(a)-41(c), as velocidades angulares correspondentes praticamente já atingiram o valor estacionário, ou seja, são todas aproximadamente iguais à Ω_0 ($\approx 0.98 \Omega_0$). Desta forma, para estes tempos, o regime transiente para o qual o sistema efetivamente acelera basicamente já encerrou. Logo, na Fig. 41, nós comparamos situações diferentes (cada uma tendo um determinado valor para Re), mas em todas elas são considerados tempos em que as velocidades angulares instantâneas são muito similares entre si.

Iniciamos nossa discussão examinando a Fig. 41(a), a qual considera a situação de baixo valor para o número de Reynolds ($Re = 0.03$). Pela evolução temporal da interface ilustrada no painel superior, em conjunto com o auxílio dos círculos tracejados e das pequenas setas presentes no painel central da Fig. 41(a), é possível verificar uma forte competição entre os dedos que apontam para dentro (provenientes do fluido externo), assim como uma competição não tão intensa entre os dedos que apontam para fora (provenientes do fluido interno). Estes resultados visuais estão em acordo com o que é exibido mais quantitativamente no painel inferior da Fig. 41(a), onde podemos observar um aumento no crescimento do modo sub-harmônico seno $b_{n/2}(t)$ em comparação com um crescimento mais modesto do modo cosseno $a_{n/2}(t)$. Todas estas informações não são muito surpreendentes, uma vez que é um fato bem estabelecido (para o caso usual de velocidade angular constante e baixo valor de Re) que para $\beta = 0$, o evento de competição mais proeminente ocorre, de fato, entre os dedos que apontam para dentro. Logo, apesar da velocidade angular variar no tempo na Fig. 41(a), devido ao baixo valor para o número de Reynolds, o comportamento da competição de dedos para $\gamma = 2$ não é tão diferente daquele tipicamente observado nas condições de velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$).

Um cenário significativamente diferente é revelado na Fig. 41(b), onde um maior valor de número de Reynolds é utilizado ($Re = 0.16$). Agora, pelos painéis superior e central da Fig. 41(b), é bastante aparente que, em contraste ao que foi observado na Fig. 41(a), não há qualquer evidência de competição entre os dedos que apontam para dentro. Além disso, é possível observar um aumento na competição dos dedos que apontam para fora. Estas conclusões visuais são

sustentadas pelos resultados complementares apresentados no painel inferior da Fig. 41(b), onde $b_{n/2}(t)$ é praticamente nulo e não muda com o passar do tempo. Em contrapartida, verificamos um maior crescimento de $a_{n/2}(t)$ para um tempo mais avançado, onde sua magnitude final é um pouco maior em comparação com a obtida na Fig. 41(a). Considerando estas observações e o fato de que aqui $\beta = 0$, certamente podemos dizer que estes resultados, para $Re = 0.16$, são inesperados. Uma análise comparativa entre a Fig. 41(a) e Fig. 41(b) indica que dependendo do valor de Re , as respostas dos eventos de competição de dedos obtidas na situação de velocidade dependente do tempo podem ser consideravelmente diferentes.

Na Fig. 41(c), analisamos a situação em que um valor de número de Reynolds ainda maior é utilizado ($Re = 0.2$). Examinando os painéis superior e central da Fig. 41(c), verificamos uma notável competição de dedos em ambas as direções. O comportamento resultante para a competição de dedos na Fig. 41(c) é uma espécie de combinação da competição já observada na Fig. 41(a) e Fig. 41(b). De forma mais específica, na Fig. 41(c), os dedos que apontam para dentro comportam-se de forma similar ao que foi observado para estes dedos na Fig. 41(a), enquanto que os dedos que apontam para fora reagem da mesma forma que os dedos correspondentes da Fig. 41(b). Estas conclusões podem ser entendidas de forma mais conveniente analisando os dados apresentados no painel inferior da Fig. 41(c). Aumentando o número de Reynolds além do valor para o qual $b_{n/2}(t) = 0$ [ou seja, $Re = 0.16$ como na Fig. 41(b)], o resultado é uma indução do crescimento negativo da amplitude de perturbação seno. Portanto, assim como na Fig. 41(a), a magnitude de $b_{n/2}(t)$ na Fig. 41(c) aumenta conforme o tempo avança, mas alcança um menor valor para o tempo final considerado. Entretanto, em vez de ser positivo, $b_{n/2}(t)$ adquire valores negativos. Apesar disso, esta mudança de sinal não expressa consequências para o comportamento da competição dos dedos que apontam para dentro. Adicionalmente, considerando que os crescimentos de $a_n(t)$ e $a_{n/2}(t)$ são bastante similares ao da Fig. 41(b), não é surpresa encontrar um comportamento semelhante para os dedos que apontam para fora nestas duas situações.

Pela Fig. 41, é evidente que os maiores efeitos relacionados com as variações em Re , sob as circunstâncias de uma velocidade angular dependente do tempo, se refletem no crescimento da amplitude de perturbação seno $b_{n/2}(t)$. Este crescimento é significativo na Fig. 41(a), praticamente nulo na Fig. 41(b) e volta a ter magnitude não nula na Fig. 41(c). Consequentemente, é possível dizer que a consideração de uma velocidade angular que varia no tempo em conjunto com os efeitos inercias permitem uma flexibilização dos possíveis eventos de competição para $\beta = 0$. Se $\beta = 0$ e a velocidade angular é constante, sempre é observada a mesma resposta dinâmica dominante: uma competição mais acentuada para os dedos que apontam para dentro. Em contrapartida, se $\beta = 0$ e a velocidade angular varia no tempo, é possível manipular o comportamento da competição entre os dedos que apontam para dentro de forma que ela diminua, simplesmente desapareça, ou ainda que ela cresça, tudo isso apenas fazendo os devidos ajustes no valor do número de Reynolds.

Como um comentário final a respeito dos resultados extraídos da Fig. 41, é preciso deixar

claro que a razão por trás do fato do comportamento da competição dos dedos [para $\Omega = \Omega(t)$], ilustrado pela Fig. 41(a), ser praticamente idêntico ao comportamento que ocorre no caso da velocidade angular constante não é devido ao formato exponencial específico dado pela Eq. (6.17), para a qual um regime transiente naturalmente ocorre. Em vez disso, podemos associar esta curiosa semelhança com o baixo número de Reynolds ($Re = 0.03$) usado na Fig. 41(a). Isto é exatamente o que aconteceu na Ref. [87]: apesar de terem utilizado uma velocidade angular dependente do tempo [também dada pela Eq. (6.17)], seus resultados experimentais (obtidos para valores muito baixos de Re) não mostraram diferença quando comparados com os resultados encontrados no regime em que a velocidade angular é constante no tempo. O papel chave desempenhado por Re torna-se evidente quando examinamos a Fig. 41(b), para a qual é utilizada exatamente a mesma expressão para $\Omega(t)$ usada na Fig. 41(a), mas detecta um comportamento para competição de dedos bastante distinto do observado para condições de velocidade angular constante. Isto ocorre pois, na Fig. 41(b), um número de Reynolds significativamente maior ($Re = 0.16$) é utilizado. Na realidade, esta última conclusão também se aplica para a Fig. 41(c). Além disso, isto ocorre independentemente do fato de que o regime transiente ainda esteja presente na Fig. 41(b) e Fig. 41(c). Portanto, os resultados apresentados na Fig. 41 mostram que os efeitos da velocidade angular dependente do tempo são determinantes na dinâmica da competição de dedos somente se um número de Reynolds suficientemente grande for considerado. Também vale a pena deixar claro que a teoria fracamente não linear desenvolvida aqui é válida para qualquer forma arbitrária da velocidade angular $\Omega(t)$ e não somente para o formato particular dado pela exponencial da Eq. (6.17). Na realidade, as Eqs. (6.9)-(6.15) aplicam-se para uma situação muito mais geral que pode, ou não, envolver a existência de um eventual regime transiente.

Informação complementar a respeito das mudanças que ocorrem no comportamento da dinâmica da competição de dedos quando o número de Reynolds varia é proporcionada pela Fig. 42. Utilizando os mesmos parâmetros físicos e condições iniciais usadas na Fig. 41, a Fig. 42 ilustra como as amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ comportam-se conforme o número de Reynolds é continuamente varrido no intervalo de valores $0 \leq Re \leq 0.2$. Isto é feito para a situação de velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$, representada pelas curvas tracejadas) e também para o caso da velocidade angular dependente do tempo ($\gamma = 2$, representada pelas curvas sólidas). De forma similar ao que foi feito na Fig. 41, os tempos utilizados na confecção da Fig. 42 são aqueles para os quais a amplitude de perturbação do modo fundamental atinge a magnitude $a_n = 0.15$ para cada valor assumido pelo número de Reynolds. Este critério também se aplica para a Fig. 43. Observando as curvas tracejadas da Fig. 42, é evidente que as magnitudes de $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ não variam muito se a velocidade angular é constante. Isto significa que, na situação de baixo número de Reynolds considerada aqui ($Re^2 \ll 1$), o comportamento da competição de dedos é praticamente insensível a mudanças em Re se a velocidade angular for constante no tempo. Entretanto, um cenário completamente diferente é revelado quando analisamos as mudanças das curvas sólidas conforme Re é modificado. Apesar das mudanças da amplitude

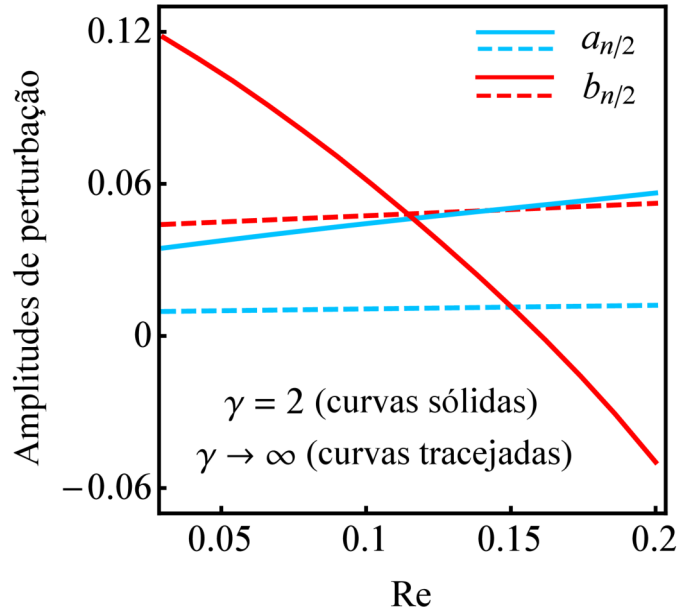


Figura 42 – Comportamento das amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ conforme o número de Reynolds Re é variado. Consideramos duas situações: velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$, representada pelas curvas tracejadas) e com dependência temporal ($\gamma = 2$, simbolizada pelas curvas sólidas). Todos os parâmetros físicos e condições iniciais são os mesmos daqueles utilizados na Fig. 41.

cosseno do sub-harmônico $a_{n/2}$ com o aumento de Re não serem realmente impressionantes, as modificações correspondentes na amplitude seno do sub-harmônico $b_{n/2}$ são muito mais intensas. Conforme Re aumenta, a magnitude de $b_{n/2}$ decai significativamente e, eventualmente, atinge o valor nulo. Como consequência, a competição entre os dedos que apontam para dentro é diminuída até desaparecer por completo durante o processo. Portanto, apesar do fato de $\beta = 0$, por meio do aumento de Re , há uma clara tendência na diminuição da competição entre os dedos que apontam para dentro. Isto é simultaneamente acompanhado por um modesto crescimento da competição entre os dedos que apontam para fora. Se Re aumenta ainda mais, o sinal de $b_{n/2}$ torna-se negativo, mas sua magnitude começa a crescer novamente. Neste caso, o resultado é a ocorrência da competição de dedos em ambas as direções. As conclusões da Fig. 42, para um intervalo de valores de Re , generalizam e dão suporte aos resultados discutidos na Fig. 41, a qual considera apenas três valores particulares para Re . Sendo assim, considerando todos estes fatos, podemos afirmar que, para $\beta = 0$, o cenário da competição de dedos para uma velocidade angular dependente do tempo $\Omega(t)$ e $Re \neq 0$ é consideravelmente mais intrigante do que aquele associado com a situação mais simples da velocidade angular contante e $Re = 0$.

Como mencionado anteriormente neste capítulo, é um fato bem estabelecido que, sob a condição de velocidade angular constante, o comportamento da competição de dedos na célula de Hele-Shaw girante depende fortemente da razão de viscosidade β [20–22, 89, 95, 97–99]. Sendo assim, é de interesse revisitar as situações examinadas nas Figs. 41 e 42, as quais são restritas para o caso $\beta = 0$, e explorá-las considerando outros valores para razão de viscosidade.

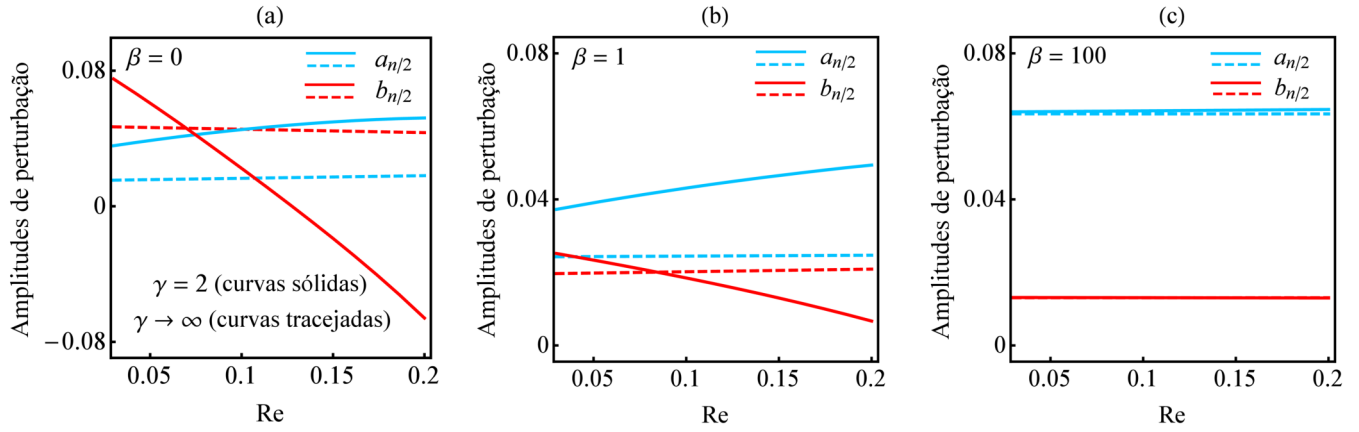


Figura 43 – Variação das amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ conforme o número de Reynolds Re é variado. O caso da velocidade angular constante ($\gamma \rightarrow \infty$) é representado pelas curvas tracejadas, enquanto que a situação da velocidade angular dependente do tempo ($\gamma = 2$) é ilustrada pelas curvas sólidas. Três valores representativos para a razão de viscosidade são considerados: (a) $\beta = 0$, (b) $\beta = 1$ e (c) $\beta = 100$. Aqui, adotamos $\alpha = 0.5$, $n = 8$ e $n/2 = 4$. Todos os outros parâmetros físicos e condições iniciais são exatamente os mesmos daqueles utilizados na Fig. 41.

Isto é feito na Fig. 43, a qual ilustra como as amplitudes de perturbação $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ respondem a mudanças no número de Reynolds Re , considerando velocidade angular constante (curvas tracejadas) e dependente do tempo (curvas sólidas). Três valores característicos de razão de viscosidade são usados: (a) $\beta = 0$, (b) $\beta = 1$ e (c) $\beta = 100$. Para acessar estes valores de β e ainda manter uma relação de proximidade com as propriedades materiais típicas dos fluidos envolvidos em experimentos reais, consideramos que, aqui, a razão de densidade é $\alpha = 0.5$. Além disso, adotamos $n = 8$ e $n/2 = 4$. Entretanto, os parâmetros físicos restantes e todas as condições iniciais são idênticas àquelas utilizadas na Fig. 42.

Primeiramente, na Fig. 43(a), consideramos a situação em que $\beta = 0$ (viscosidade do fluido externo é desprezível). Apesar do fato de que na Fig. 43(a) $\beta = 0$ e $\alpha = 0.5$, enquanto que na Fig. 42 $\beta = 0$ e $\alpha = 10^{-3}$, a maneira com que as amplitudes $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ reagem a mudanças em Re é bastante similar em ambos os casos. Se a velocidade angular é mantida constante (curvas tracejadas), as amplitudes $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ não mudam conforme Re aumenta. Isto significa que, sob estas circunstâncias, os eventos de competição de dedos são basicamente indiferentes a variações no número de Reynolds. Em contrapartida, se a velocidade angular é dependente do tempo (curvas sólidas), podemos identificar facilmente que $b_{n/2}$ muda significativamente conforme Re aumenta ($b_{n/2}$ decresce até o valor nulo e depois muda de sinal), enquanto que $a_{n/2}$ apenas aumenta modestamente. Logo, assim como aconteceu na Fig. 42, conforme Re aumenta na Fig. 43(a), é de se esperar uma atenuação inicial na competição dos dedos que apontam para dentro, seguida pela situação em que essa competição simplesmente deixa de existir e depois reaparece. Tudo isso ocorre enquanto a competição dos dedos que apontam para fora (medida pela magnitude de $a_{n/2}$) aumenta levemente conforme Re assume maiores valores.

Agora, nossa atenção será voltada para Fig. 43(b), a qual concentra-se na situação de

$\beta = 1$, ou seja, fluidos (externo e interno) com viscosidades iguais. Se a velocidade angular é constante (curvas tracejadas), vemos que as amplitudes $a_{n/2}$ e $b_{n/2}$ são um tanto quanto pequenas e praticamente não variam com mudanças em Re . Portanto, como é de se esperar para a situação de $\beta = 1$ e $\gamma \rightarrow \infty$, a competição de dedos em ambas as direções é bem modesta. Esta resposta dinâmica da competição dos dedos muda consideravelmente se a velocidade angular for dependente do tempo (curvas sólidas). Se $\gamma = 2$, verificamos que a amplitude de perturbação cosseno (seno) aumenta (diminui) se o número de Reynolds é variado. Como resultado, apesar de $\beta = 1$, no cenário da velocidade angular dependente do tempo, encontramos um favorecimento (decréscimo) da competição entre os dedos que apontam pra fora (dentro) conforme Re alcança maiores magnitudes.

Por último, analisamos a Fig. 43(c), a qual considera um maior valor para a razão de viscosidade ($\beta = 100$). Desta forma, o fluido externo é significativamente mais viscoso que o fluido interno. Para a situação de velocidade angular constante, podemos antecipar a ocorrência do favorecimento da competição entre os dedos que apontam para fora. Isto é precisamente o que identificamos na Fig. 43(c), onde a magnitude de $a_{n/2}$ é consideravelmente maior do que a de $b_{n/2}$ (situação representada pelas curvas tracejadas). Assim como nos casos anteriores, para $\gamma \rightarrow \infty$, estas curvas quase não mudam se Re é modificado. Porém, surpreendentemente, o mesmo tipo de comportamento para a competição dos dedos é observado se a velocidade angular variar no tempo. Se $\beta = 100$, fica claramente ilustrado na Fig. 43(c) que os comportamentos da competição dos dedos para velocidade angular constante e dependente do tempo são quase que indistinguíveis. Pelas Figs. 43(a)-43(c), podemos dizer que o impacto da velocidade angular dependente do tempo e da inércia no mecanismo da competição de dedos torna-se cada vez menos importante conforme a razão de viscosidade aumenta. Então, apesar da sensibilidade da variabilidade do comprimento dos dedos ao intervalo das possíveis magnitudes consideradas para β , verificamos que os efeitos mais significativos relacionados à ação de $\Omega(t)$ e Re devem aparecer para valores relativamente baixos de β (por exemplo, $0 \leq \beta \leq 10$).

7 PADRÕES DE DEDOS VISCOSOS EM FLUIDOS MAGNÉTICOS CONFINADOS: SOLUÇÕES PERTURBATIVAS E EXATAS

7.1 Introdução

Ao longo dos capítulos abordados anteriormente, de forma geral, investigamos a formação de padrões em células de Hele-Shaw. Nossos estudos analisaram diferentes sistemas, passando pelos processos de injeção longitudinal e radial (em célula de Hele-Shaw de placas paralelas ou levemente inclinadas), processos de levantamento e, também, o caso da rotação das placas da célula de Hele-Shaw. Além disso, também investigamos a inclusão de efeitos físicos interessantes: o papel da inércia dos fluidos, efeitos do *undercooling* cinético e a ação da velocidade angular dependente do tempo em células girantes de Hele-Shaw. No entanto, em todos estes casos os fluidos utilizados foram newtonianos e não magnéticos. Em outras palavras, fluidos que não respondem a campos magnéticos aplicados.

Neste capítulo, nosso objetivo é dar um passo além e investigar a formação de padrões para líquidos magnéticos confinados entre as placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw. Os fluidos magnéticos em questão são os ferrofluidos e fluidos magneto reológicos (MR). Evidentemente, como mencionado na introdução desta tese de doutorado, ferrofluidos e fluidos MR apresentam propriedades físicas bastante distintas, indo desde o tamanho e a natureza do domínio magnético de suas partículas, até as suas respostas newtonianas ou não newtonianas a campos magnéticos aplicados. De fato, essas diferenças provocam um impacto significativo nas respostas dinâmicas destes fluidos ao campo magnético. Uma forma interessante de se observar os diferentes comportamentos relacionados aos ferrofluidos e fluidos MR é oferecida pelo estudo da formação de padrões nestes líquidos. Um exemplo particularmente simples refere-se à investigação das instabilidades de interface que ocorrem quando uma gota de fluido magnético encontra-se confinada entre duas placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw [1, 6] e é submetida a campos magnéticos externos. Neste sistema, a tradicional instabilidade de Saffman-Taylor [1, 6] é complementada por interações magnéticas e, desta forma, os fluidos magnéticos podem formar complexas estruturas de interface.

Um processo de formação de padrões muito popular para ferrofluidos na geometria efetivamente bidimensional de uma célula de Hele-Shaw é o conhecido padrão labiríntico, o qual foi extensivamente estudado por meio de experimentos, teoria e simulações numéricas [16–18, 180, 181]. Esta instabilidade em formato de labirinto ocorre quando uma gota de ferrofluido,

inicialmente circular e circundada por um fluido não magnético, é submetida a um campo magnético uniforme aplicado perpendicularmente às placas da célula de Hele-Shaw. Esta configuração específica de campo magnético pode ser gerada por um par de bobinas de Helmholtz idênticas, para as quais as correntes elétricas são iguais e percorrem as bobinas no mesmo sentido. Este campo perpendicularmente aplicado tende a alinhar os pequenos momentos magnéticos do ferrofluido numa direção normal às placas da célula. Consequentemente, estes momentos magnéticos repelem-se no plano da célula de Hele-Shaw e a interface fluido-fluido começa a deformar-se. Em contrapartida, a tensão superficial entre os fluidos tende a estabilizar a interface. A competição entre estas duas forças opostas leva ao surgimento de estruturas com ramificações múltiplas, semelhantes a labirintos e visualmente bastante impressionantes (ver Fig. 9). Em comparação com o que acontece para ferrofluidos, uma atenção relativamente limitada tem sido dada ao estudo do problema equivalente de instabilidades induzidas por campos magnéticos em fluidos MR confinados. Uma exceção é a investigação experimental realizada na Ref. [182], a qual utilizou um fluido MR para controlar as amplitudes e os comprimentos de onda das perturbações iniciais oriundas do problema da instabilidade de Rayleigh-Taylor.

Uma pequena modificação no tradicional arranjo das bobinas de Helmholtz é capaz de produzir um campo magnético consideravelmente diferente do campo perpendicular gerado nos estudos referentes às Refs. [16–18, 180, 181]. Esta configuração alternativa do campo magnético pode ser produzida pelo mesmo par de bobinas de Helmholtz idênticas usadas nas Refs. [16–18, 180, 181], mas agora considerando correntes elétricas iguais e que percorrem as bobinas em sentidos opostos. Tal configuração para o campo magnético é conhecida como campo de "anti-Helmholtz": um campo magnético é produzido na distância média entre as bobinas e sua magnitude é zero no eixo de simetria das bobinas, mas aumenta linearmente com a distância radial. O resultado é o estabelecimento de um campo magnético desestabilizante que é puramente radial no plano da célula de Hele-Shaw. Esta configuração de campo magnético radial já foi utilizada como instrumento experimental para explorar a formação de padrões de interface em problemas de escoamentos em superfície livre para os casos de filmes finos de ferrofluido miscíveis e imiscíveis [151, 183].

Nosso grupo de pesquisa também realizou estudos teóricos que examinaram o desenvolvimento de padrões de interface quando uma gota inicialmente circular de ferrofluido [184] (ou fluido MR [185]), circundada por um fluido não magnético, é submetida ao campo magnético radial do tipo anti-Helmholtz numa célula de Hele-Shaw. Nestes trabalhos [184, 185], o objetivo central foi determinar as soluções estáticas fortemente não lineares e de tensão superficial não nula para a interface da gota de fluido magnético. A partir deste ponto, chamaremos estas soluções de soluções estacionárias "exatas", ou seja, não perturbativas. Tais soluções foram obtidas por meio da abordagem da *vortex-sheet* [3, 186–188], a qual considerada a situação de equilíbrio onde forças de capilaridade (tensão superficial) e forças magnéticas são igualmente balanceadas na interface fluido-fluido. Estas investigações [184, 185] demonstraram que os padrões de interface estacionários exatos para o fluido MR diferem significativamente das estru-

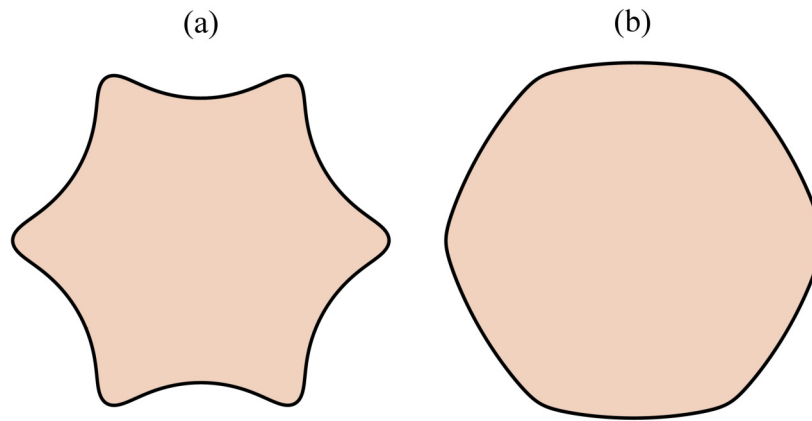


Figura 44 – Formatos característicos das interfaces estacionárias exatas que surgem quando uma gota de fluido magnético é submetida a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw: (a) Padrão poligonal de ferrofluido com seis arestas em formato côncavo, (b) estrutura de fluido MR com seis arestas em formato convexo.

turas equivalentes para ferrofluido: enquanto que os padrões para fluido MR lembram polígonos regulares levemente inflados e com arestas convexas curvadas para fora, as morfologias para ferrofluido assemelham-se a polígonos com arestas côncavas curvadas para dentro. Figura 44 ilustra as formas estacionárias exatas típicas adquiridas pelo ferrofluido [Fig. 44(a)] e pelo fluido MR [Fig. 44(b)] quando submetidos a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw.

É necessário deixar claro que soluções estacionárias exatas para problemas de fluxo do tipo Hele-Shaw para o caso de valores finitos de tensão superficial são relativamente raras [6]. Portanto, os estudos teóricos realizados nas Refs. [184, 185] estabelecendo estes tipos de soluções para fluidos magnéticos confinados sob ação de campos magnéticos radiais são realmente de interesse. Apesar da validade e da relevância das pesquisas realizadas nas Refs. [184, 185], um ponto muito importante relacionado a estes estudos ainda precisa ser examinado. Em outras palavras, ainda não é claro se as soluções exatas, anteriormente citadas, são estáveis. Se estas soluções são instáveis, então sua observação direta por meio de experimentos reais seria possivelmente difícil. Neste caso, a relevância destas soluções estacionárias exatas para a dinâmica em sistemas com fluidos magnéticos confinados seria questionável.

Neste capítulo, analisaremos aspectos relevantes da formação de padrões em líquidos magnéticos submetidos a um campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw e examinaremos a estabilidade das soluções estacionárias exatas obtidas para a interface da gota de fluido magnético confinado. Primeiramente, nossa atenção estará voltada para o entendimento de como as soluções perturbativas dependentes do tempo comparam-se com as soluções estacionárias exatas para o formato da interface. Isto é feito tentando-se sistematicamente contrastar as previsões dadas pelo acoplamento perturbativo fracamente não linear para a forma de interface em evolução [45] com as soluções estacionárias exatas produzidas por uma condição de equilíbrio na interface, conforme prescrita pela abordagem da *vortex-sheet* [3, 186–188]. Adicionalmente, a estabilidade

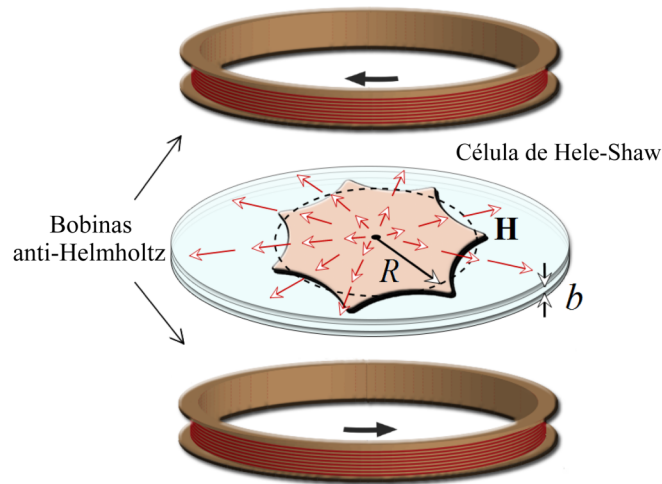


Figura 45 – Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw com espaçamento b localizada na distância média entre duas bobinas na configuração anti-Helmholtz. Confinada entre as placas da célula, há uma gota de fluido magnético inicialmente circular e de raio R , circundada por um fluido não magnético de viscosidade desprezível. No plano das placas da célula de Hele-Shaw, um campo magnético radial $\mathbf{H}$ é produzido pelas bobinas. Os sentidos das correntes elétricas em ambas as bobinas são indicados por setas pretas. Neste arranjo, o campo magnético perturba a interface, enquanto que a tensão superficial e os efeitos viscoelásticos estabilizam a mesma.

das soluções estacionárias exatas será investigada por meio de um processo de linearização padrão próximo da solução estacionária [189, 190], onde um sistema de equações de modos acoplados é diagonalizado, determinando os autovalores que regem a estabilidade de um ponto fixo.

Na seção 7.2, especificamos o problema físico e, também, apresentamos os métodos teóricos utilizados no estudo da morfologia e da estabilidade dos padrões para o fluido magnético confinado sob ação do campo magnético radial aplicado. As equações que regem a dinâmica do sistema são apresentadas na seção 7.2.1. Enquanto que a seção 7.2.2 introduz o formalismo da *vortex-sheet* e discute como obter as soluções estacionárias exatas, a seção 7.2.3 descreve o método de modos acoplados fracamente não linear e a obtenção das soluções perturbativas para as morfologias de interface. Por fim, a seção 7.3 é responsável por comparar os padrões perturbativos com os estacionários exatos. A estabilidade destas estruturas é finalmente estudada na seção 7.4.

7.2 Problema físico e embasamento teórico

7.2.1 Equações do sistema

Nesta seção, apresentamos as principais equações que regem a dinâmica do sistema de formação de padrões. Nós consideramos a interface em movimento que separa uma gota de

fluido magnético (ferrofluido ou fluido MR) inicialmente circular, com raio R e viscosidade η , de um fluido (externo) não magnético com viscosidade desprezível. Ambos os fluidos são incompressíveis e encontram-se confinados numa célula de Hele-Shaw com espaçamento b (Fig. 45). Neste cenário, um par idêntico de bobinas de Helmholtz, nas quais as correntes elétricas são idênticas e fluem em sentidos opostos, produz um campo magnético radial aplicado [183, 185]

$$\mathbf{H} = \frac{H_0}{L} r \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (7.1)$$

onde H_0 é uma constante, L é um comprimento característico e $\hat{\mathbf{e}}_r$ é um vetor unitário na direção radial. A célula de Hele-Shaw localiza-se na distância média entre as bobinas, de forma que o campo magnético radial é coplanar à célula. Como mencionado na seção 7.1, o campo magnético produzido pela configuração anti-Helmholtz é zero no eixo de simetria das bobinas e cresce linearmente com a distância radial r a partir da origem do sistema de coordenadas (localizada no centro da célula). Uma vez que o campo é estabelecido, uma força magnética $\sim M \nabla H$ [106, 107], onde $H = |\mathbf{H}|$ é a intensidade local do campo magnético e $M = |\mathbf{M}|$ a magnetização do fluido, tende a desestabilizar e deformar a interface fluido-fluido, empurrando-a para fora ao longo da direção radial. Em contrapartida, a tensão superficial γ entre os fluidos e os efeitos viscoelásticos agem de forma a estabilizar o contorno fluido-fluido, tentando manter seu formato circular. É precisamente a competição destes efeitos físicos que leva à formação dos padrões em formato poligonal com n arestas estudados neste capítulo.

A gota de líquido magnético pode ser tanto um ferrofluido newtoniano quanto um fluido MR não newtoniano. Para o caso do fluido MR, a característica reológica mais proeminente é a existência de um *yield stress* dependente do campo magnético. Como feito nas Refs. [115–117, 185, 191, 192], escrevemos a equação constitutiva relacionando o *yield stress* com a magnitude do campo magnético externo como

$$\sigma_y(H) = \sigma_{y0} + \alpha H^2, \quad (7.2)$$

onde σ_{y0} representa um pequeno *yield stress* presente mesmo na ausência de campo magnético e α é uma constante que depende das propriedades materiais do fluido MR, sendo proporcional à fração volumétrica de partículas [117].

Para a geometria efetivamente bidimensional da célula de Hele-Shaw, é possível reduzir o problema de escoamento tridimensional a um fluxo bidimensional. Isto é feito tomando-se uma média da equação de Navier-Stokes na direção perpendicular às placas. O procedimento da média transversal é realizado negligenciando termos inerciais, considerando uma geometria com alta razão de aspecto ($R \gg b$) e utilizando o modelo de Bingham para fluidos *yield stress* [193, 194]. Levando-se em consideração as contribuições de efeitos viscoelásticos e magnéticos, juntamente com a existência de um *yield stress* dependente do campo magnético [prescrito pela Eq. (7.2)], é possível escrever uma lei de Darcy modificada para a média transversal da velocidade [191–194]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \left[\nabla \Pi_j + \frac{3\sigma_y(H)}{b} \hat{\mathbf{e}}_r \right], \quad (7.3)$$

onde $j = 1$ ($j = 2$) representa o fluido interno (externo). No desenvolvimento da Eq. (7.3), assumimos um regime de alta viscosidade comparado com efeitos de *yield*, onde o escoamento é favorecido. Baseado na simetria do campo magnético aplicado, consideramos que o efeito de *yield* predominante ocorre ao longo da direção radial. Note que adotando o valor $\sigma_y(H) = 0$ na Eq. (7.3), o termo de *yield stress* desaparece e recuperamos a lei de Darcy usual para ferrofluidos newtonianos [16, 181]. Na Eq. (7.3), a média transversal da pressão generalizada é definida como $\Pi_j = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} [P_j - \Psi] dz = p_j - \Psi$ [17, 181, 184], onde P_j é a pressão tridimensional e $p_j = [\int_{-b/2}^{+b/2} P_j dz]/b$ é sua média transversal, e a pressão magnética é representada por [106, 107]

$$\Psi = \mu_0 \int_0^H M dH = \frac{\mu_0 \chi H^2}{2}, \quad (7.4)$$

onde a relação linear $M = \chi H$ foi utilizada. Aqui, χ representa a constante de susceptibilidade magnética e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Para o fluido externo não magnético, $\chi = 0$ e $\Psi = 0$. Perceba que pelo fato do campo magnético radial [Eq. (7.1)] ser independente de z , temos que a média transversal da pressão magnética é dada por $[\int_{-b/2}^{+b/2} \Psi dz]/b = \Psi$. Além disso, é preciso mencionar que nós consideramos somente a contribuição dominante da força magnética entre as partículas e, portanto, nós aproximamos o campo local pelo campo magnético aplicado H .

Uma vez que o termo de *yield stress* [segundo termo entre os colchetes na Eq. (7.3)] pode ser escrito como um gradiente de uma função escalar, o campo de velocidade é irrotacional na região dos fluidos. Sendo assim, podemos descrever nosso problema em termos do potencial de velocidade ϕ_j , onde $\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$. Além disso, pela condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, vemos que o potencial de velocidade é laplaciano ($\nabla^2 \phi_j = 0$).

Finalmente, é necessário apresentar as condições de contorno do nosso problema na interface fluido-fluido. Para o problema descrito neste capítulo, a condição de contorno da diferença de pressão na interface [106, 107] é escrita como

$$p_1 - p_2 = \gamma \kappa - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2, \quad (7.5)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor unitário normal à interface. O primeiro termo do lado direito da Eq. (7.5) expressa a tradicional contribuição relacionada à tensão superficial e a curvatura κ da interface. Em contrapartida, o segundo termo do lado direito da Eq. (7.5) está conectado com a natureza magnética do nosso problema. Tal termo é comumente conhecido como o termo de tração magnética normal [106, 107, 185] e é responsável por incorporar a influência da descontinuidade da componente da magnetização normal à interface. Esta contribuição magnética em particular tem um importante papel na determinação do formato dos padrões de interface emergentes.

A condição de contorno restante é a condição de contorno cinemática [6]

$$\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (7.6)$$

Como mencionado anteriormente nesta tese de doutorado, esta condição expressa o fato de que as componentes normais das velocidades de cada fluido são contínuas na interface e, além disso, são iguais à componente normal da velocidade da própria interface em movimento. Vale a pena ressaltar que, ao contrário do que ocorre com as componentes normais das velocidades de cada fluido, as componentes tangenciais não são contínuas na interface, gerando assim uma diferença de magnitude tangencial Γ expressa por

$$\Gamma = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (7.7)$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$ representa o vetor unitário tangente ao longo da interface. Esta diferença de velocidades, também conhecida como a intensidade da *vortex-sheet*, origina uma região de vorticidade não nula restrita à interface que separa os dois fluidos [3, 186].

A lei de Darcy [Eq. (7.3)], complementada pelas condições de contorno da pressão [Eq. (7.5)] e pela condição cinemática [Eq. (7.6)], constituem as equações que governam o problema de escoamento do fluido magnético. Nas próximas seções (7.2.2 e 7.2.3), usaremos estas equações para ter acesso ao formato da interface fluido-fluido por meio de duas ferramentas teóricas diferentes: um formalismo de *vortex-sheet* fortemente não linear [3] e um método perturbativo fracamente não linear [45].

7.2.2 Estruturas estacionárias exatas e o formalismo da *vortex-sheet*

Na presente seção, nossa atenção estará voltada para a procura das soluções estacionárias exatas para o problema da formação de padrões em uma gota confinada de fluido magnético submetida a um campo magnético radial. Estas soluções são precisamente as soluções de equilíbrio para as quais as forças magnéticas, viscoelásticas e de tensão superficial estão balanceadas na interface fluido-fluido. Para encontrá-las, na geometria efetivamente bidimensional da célula de Hele-Shaw, utilizaremos a abordagem da *vortex-sheet* [3, 184–186].

O formalismo da *vortex-sheet* explora a diferença das componentes tangenciais das velocidades de cada fluido na interface, expressa pela magnitude da *vortex-sheet* [dada pela Eq. (7.7)]. Utilizando a lei de Darcy (7.3), podemos dizer que

$$\eta_1 \mathbf{v}_1 = -\frac{b^2}{12} \left[\nabla p_1 - \nabla \Psi + \frac{3\sigma_y(H)}{b} \hat{\mathbf{e}}_r \right], \quad (7.8)$$

e

$$\eta_2 \mathbf{v}_2 = -\frac{b^2}{12} \nabla p_2. \quad (7.9)$$

Devido à forma funcional da *vortex-sheet* (7.7), subtraímos a Eq. (7.8) da Eq. (7.9), dividimos esta diferença pela soma da viscosidade dos dois fluidos e calculamos a expressão resultante na interface fluido-fluido. Desta forma, obtemos

$$\frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{2} + A \frac{(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1)}{2} = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left\{ \nabla [(p_1 - p_2) - \Psi] + \frac{3\sigma_y(H)}{b} \hat{\mathbf{e}}_r \right\}, \quad (7.10)$$

onde $A = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ é o contraste de viscosidade. Neste trabalho, consideramos que a viscosidade do fluido não magnético é desprezível ($\eta_2 \ll \eta_1 = \eta$) e, conseqüentemente, $A = -1$. Prosseguimos tomando o produto escalar da Eq. (7.10) com $\hat{\mathbf{s}}$. Utilizamos a diferença de pressão na interface Eq. (2.4) para reescrever $(p_1 - p_2)$ e obtemos

$$\frac{\Gamma}{2} - \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{2} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{b^2}{12\eta} \nabla \left[\gamma \kappa - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 - \Psi + \frac{3\sigma_y(H)}{b} r \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (7.11)$$

Finalmente, escrevendo explicitamente as expressões para o *yield stress* dependente do campo magnético $\sigma_y(H)$ [Eq. (7.2)] e para o potencial escalar Ψ [Eq. (7.4)] relacionado com o campo magnético radial [Eq. (7.1)] na Eq. (7.11), a equação adimensional para a *vortex-sheet* é diretamente obtida

$$\Gamma = 2\partial_s \left\{ \kappa - N_B r^2 \chi [1 + \chi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^2] + S_0 r + S r^3 \right\} + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (7.12)$$

onde os comprimentos e o tempo são reescalados, respectivamente, por r_0 e $12\eta r_0^3/\gamma b^2$. O parâmetro r_0 é um comprimento característico da ordem do raio não perturbado R da gota de líquido magnético. Na Eq. (7.12), $\partial_s = \partial/\partial s$ é a derivada ao longo da direção tangente à interface.

Pela Eq. (7.12), fica claro que, além da susceptibilidade magnética χ , o sistema é caracterizado pelos seguintes parâmetros adimensionais

$$N_B = \frac{\mu_0 H_0^2 r_0^3}{2\gamma L^2}, \quad S_0 = \frac{3\sigma_{y0} r_0^2}{\gamma b} \quad \text{e} \quad S = \frac{\alpha H_0^2 r_0^4}{\gamma L^2 b}.$$

O parâmetro N_B representa o número adimensional magnético e mede a razão entre forças magnéticas em relação às forças de capilaridade. Em contrapartida, S_0 e S estão relacionados, respectivamente, com as contribuições de *yield stress* a campo magnético aplicado nulo e não nulo.

De forma geral, o termo $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ que aparece na Eq. (7.12) (relacionado com a velocidade média da interface) é dado por uma fórmula integral. Esta fórmula é mais conhecida como fórmula integral de Birkhoff-Rott [3, 186–188] e, desta forma, a Eq. (7.12) acaba sendo uma complicada equação íntegro-diferencial para a vorticidade Γ . Felizmente, um cenário consideravelmente mais simples é revelado quando se considera as soluções estacionárias fortemente não lineares da Eq. (7.12). Na situação estacionária, temos que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$ e considerando a condição de vorticidade nula ($\Gamma = 0$), é possível dizer que, pela Eq. (7.12), a curvatura da interface fluido-fluido deve satisfazer a equação diferencial ordinária não linear

$$\partial_s \left\{ \kappa - N_B r^2 \chi [1 + \chi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^2] + S_0 r + S r^3 \right\} = 0, \quad (7.13)$$

que pode ser facilmente integrada, obtendo assim

$$\kappa = \kappa(r, r \sin \psi) = a + b r^2 + c (r \sin \psi)^2 - S_0 r - S r^3, \quad (7.14)$$

onde a é uma constante de integração. Para simplificar a notação, definimos $b = N_B \chi$ e $c = N_B \chi^2$. Na Eq. (7.14), usamos o fato de que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \pm \sin \psi$, onde ψ é o ângulo entre o vetor unitário radial $\hat{\mathbf{e}}_r$ e o vetor unitário tangente à interface fluido-fluido $\hat{\mathbf{s}}$.

A Equação (7.14) oferece uma maneira não perturbativa de se acessar os formatos das interfaces estacionárias não triviais e fortemente não lineares para o nosso problema do fluido magnético confinado. Estes formatos são as soluções estacionárias exatas com tensão superficial não nula, onde os efeitos competitivos viscoelásticos, magnéticos e de capilaridade são igualmente balanceados na interface fluido-fluido. Importantes características morfológicas das soluções estacionárias podem ser obtidas por meio da resolução numérica da equação diferencial não linear (7.13), sem necessidade de recorrermos a elaboradas simulações numéricas. Desta forma, podemos explorar uma rica família de curvas cujas curvaturas são prescritas pela Eq. (7.14). Isto é feito por meio da manipulação dos parâmetros de controle relevantes do nosso problema, ou seja, χ , N_B , S_0 , S , a constante a e as especificações $r_0 = r(\varphi = 0)$ e $\psi_0 = \psi(\varphi = 0)$, onde φ denota o ângulo azimutal no plano da célula de Hele-Shaw. Para uma discussão detalhada a respeito da abordagem numérica utilizada para resolver o tipo de equação diferencial dada por (7.13), veja a Ref. [195].

7.2.3 Estruturas perturbativas e o método fracamente não linear

Nesta seção, ao invés de nos concentrarmos nas soluções estacionárias exatas fortemente não lineares que surgem quando a interface fluido-fluido está em equilíbrio, vamos ganhar acesso às soluções de interface que evoluem no tempo e que aparecem no estágio fracamente não linear do escoamento. Isto será feito por meio da abordagem perturbativa de modos acoplados. Levando-se em consideração a teoria de modos acoplados, vamos derivar a equação diferencial que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface no início do regime não linear. Com esta equação diferencial em nossas mãos, seremos capazes de comparar as soluções perturbativas fracamente não lineares para os padrões de fluido magnético que evoluem no tempo com as soluções estacionárias exatas obtidas na seção 7.2.2 por meio do formalismo da *vortex-sheet*.

Devido à ação do campo magnético radial aplicado, a interface fluido-fluido deforma-se e sua posição é dada por $\mathcal{R}(\varphi, t) = R + \zeta(\varphi, t)$, onde φ é o ângulo azimutal e $\zeta(\varphi, t)$ é a perturbação usual da interface dada pela expansão em modos de Fourier (exatamente como feita nos capítulos anteriores). Como vimos na seção 7.2.1, o campo de velocidade [Eq. (7.3)] pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar e o escoamento é irrotacional na região dos fluidos. Consequentemente, o problema será descrito em termos de um potencial de velocidade ϕ_j .

O restante dos cálculos segue o mesmo procedimento padrão usado nos capítulos anteriores desta tese de doutorado: definimos as expansões de Fourier para o potencial de velocidade e usamos a condição de contorno cinemática [Eq. 2.3] para expressar os coeficientes de Fourier de ϕ_j em termos de ζ_n . Substituindo estas relações e a condição da diferença de pressão [Eq. (7.5)] na lei de Darcy [Eq. (7.3)], sempre mantendo termos até segunda ordem em ζ , obtemos, após

tomada a transformada de Fourier, a equação de movimento adimensional para as amplitudes de perturbação ζ_n (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{-n'} \right], \quad (7.15)$$

onde

$$\lambda(n) = |n| \left[2N_B \chi (1 + \chi) - \frac{1}{R^3} (n^2 - 1) - \frac{S_0}{R} - 3SR \right] \quad (7.16)$$

é a taxa de crescimento linear independente do tempo. Os termos de acoplamento de segunda ordem são representados por

$$F(n, n') = \frac{|n|}{R} \left\{ N_B \chi [1 + \chi(1 + n'(n - n'))] - \frac{1}{R^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] - 3SR \right\}, \quad (7.17)$$

e

$$G(n, n') = \frac{1}{R} \{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 \}. \quad (7.18)$$

As Eqs. (7.15)-(7.18) são adimensionalizadas usando o mesmo reescalonamento utilizado nas equações da seção anterior.

Pela análise da expressão da taxa de crescimento linear [Eq. (7.16)], é evidente que o primeiro termo dentro dos colchetes (proporcional à $N_B \chi$) é desestabilizante, ou seja, os efeitos magnéticos induzem uma taxa de crescimento positiva. Em contrapartida, os termos restantes estão relacionados com a capilaridade e com os efeitos de *yield stress* a campo magnético nulo e não nulo. Tais termos tendem a estabilizar a interface fluido-fluido. Além disso, os termos que aparecem na expressão para a função de modos acoplados $F(n, n')$ [Eq. (7.17)] surgem, respectivamente, devido ao campo magnético aplicado, à tensão superficial e ao *yield stress* dependente do campo. Finalmente, é fácil verificar que a função de modos acoplados $G(n, n')$ [Eq. (7.18)] não apresenta dependência nos efeitos magnéticos.

As expressões (7.15)-(7.18) representam as equações de modos acoplados que descrevem o formato da gota de fluido magnético submetida a um campo magnético radial externo no arranjo de uma célula de Hele-Shaw. Como ficará claro no decorrer deste capítulo, nosso método de modos acoplados permitirá a possibilidade de acessar as morfologias da interface de fluido magnético e, além disso, de testar a estabilidade das soluções estacionárias obtidas na seção 7.2.2.

7.3 Contrastando as soluções perturbativas e as estacionárias exatas

Pela utilização das Eqs. (7.15)-(7.18), encontraremos as soluções perturbativas para o formato da gota confinada de fluido magnético submetida a um campo magnético radial externo

considerando o acoplamento de um número crescente de modos de Fourier participantes. Além da análise do formato assumido pela interface dos padrões conforme o número de modos participantes aumenta, também estamos interessados em examinar como as amplitudes destes modos participantes evoluem no tempo. Isto nos dará uma indicação sobre tendências de saturação, ou não, para as amplitudes à medida que o tempo avança. Eventuais saturações das amplitudes perturbativas podem sugerir que os padrões perturbativos dependentes do tempo convirjam para a configuração estacionária. Neste caso, comparamos as amplitudes saturadas e os padrões perturbativos com as formas estacionárias exatas correspondentes obtidas por meio do formalismo da *vortex-sheet* [solução numérica da Eq. (7.13)].

Para termos acesso às possíveis estruturas de fluido magnético, consideramos o acoplamento não linear de um número finito de modos de Fourier e reescrevemos a Eq. (7.15) em termos das amplitudes reais cosseno $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$. A evolução temporal destas amplitudes podem ser obtidas por meio da resolução numérica das equações diferenciais não lineares acopladas correspondentes. Como de costume, o formato da interface pode ser facilmente encontrado utilizando-se a relação $\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos n\theta$, onde $\zeta_0 = -(1/4R) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^2$.

7.3.1 Caso do ferrofluido

Começamos nossa análise examinando as Figs. 46-48, as quais concentram-se na situação em que o líquido magnético é um ferrofluido, ou seja, $S_0 = S = 0$. Além disso, adotamos $\chi = 1$. De forma mais específica, a Fig. 46 ilustra os padrões fracamente não lineares que surgem quando somente dois modos de Fourier acoplam-se, o modo fundamental n e seu primeiro harmônico $2n$. A partir deste ponto, assumimos que o modo fundamental é dado pelo inteiro mais próximo do modo de maior crescimento $n_{\max}$, obtido pela condição $[d\lambda(n)/dn]_{n=n_{\max}} = 0$. Nos painéis superiores da Fig. 46, ilustramos a interface fluido-fluido para os seguintes valores de número adimensional magnético e de modos participantes: (a) $N_B = 50$, $n = 7$ e $2n = 14$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$ e $2n = 20$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$ e $2n = 26$. Nos painéis inferiores, apresentamos as evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para cada um dos modos de Fourier (n e $2n$). Um tipo similar de apresentação de dados, com as morfologias dos padrões típicos ilustradas nos painéis superiores e as evoluções temporais das amplitudes cosseno para os modos envolvidos mostradas nos painéis inferiores, será mostrada na Fig. 47 para três modos participantes (n , $2n$ e $3n$) e na Fig. 48 para o acoplamento não linear de quatro modos (n , $2n$, $3n$ e $4n$). Gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que apesar de $\lambda(n_{\max}) > 0$ impulsionar um crescimento linear positivo do modo fundamental, todos os modos harmônicos subsequentes ($2n$, $3n$, $4n$) apresentam uma taxa de crescimento negativo e, portanto, são linearmente estáveis. Logo, qualquer crescimento destes modos é genuinamente causado pelo acoplamento fracamente não linear.

Todos os padrões ilustrados na Fig. 46 possuem as mesmas condições iniciais, ou seja, $a_n(0) = 1/5000$ e $a_{2n}(0) = 0$. Como mencionado nos capítulos anteriores, estas condições iniciais são escolhidas para que todos os comportamento evidenciados pelos padrões de interface ocorram

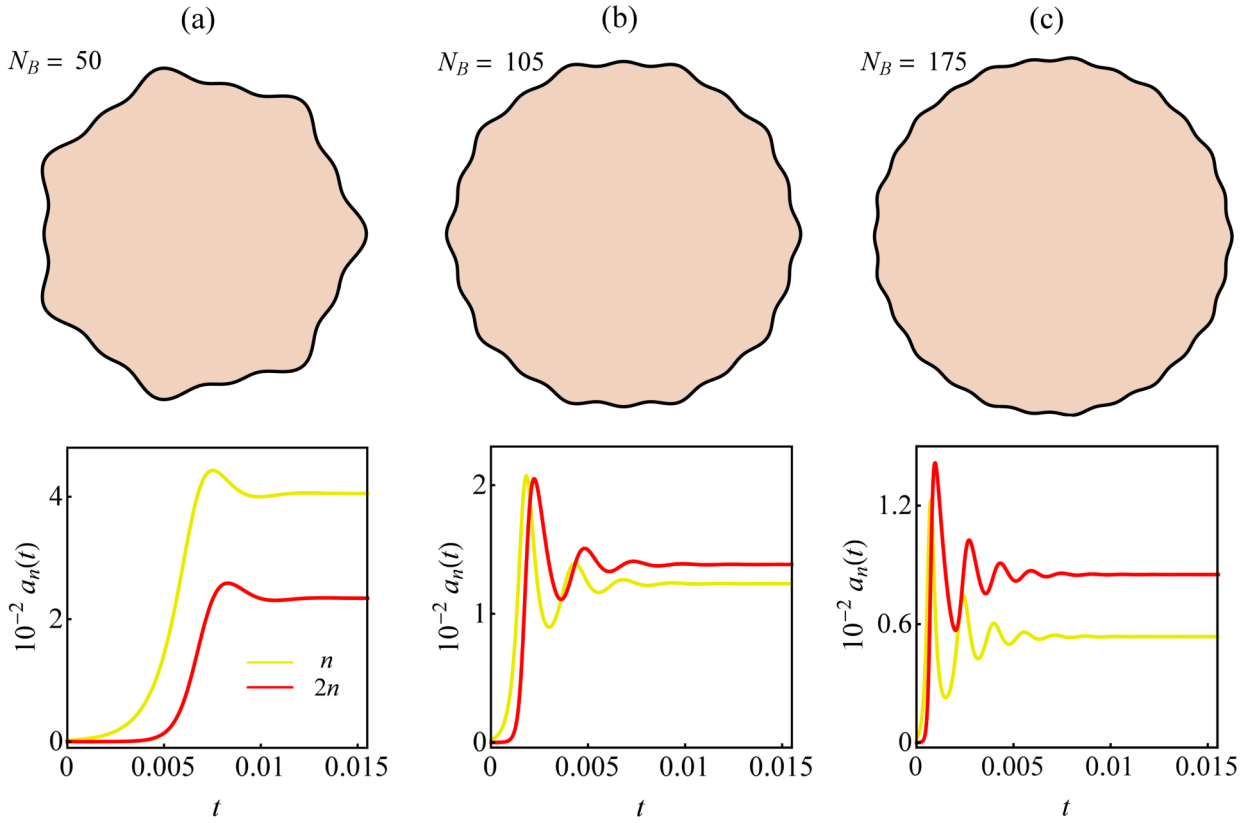


Figura 46 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de dois modos de Fourier n e $2n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$ e $2n = 14$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$ e $2n = 20$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$ e $2n = 26$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n e $2n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio não perturbado da gota de ferrofluido são (a) $R = 0.854418$, (b) $R = 0.937215$ e (c) $R = 0.964060$. O tempo usado nos padrões dos painéis (a)-(c) é $t = 0.015$.

espontaneamente devido à dinâmica fracamente não linear, e não pela imposição artificializada de grandes amplitudes iniciais para os modos harmônicos. Os dados apresentados na Fig. 46 são obtidos por meio da resolução numérica do seguinte sistema de equações diferenciais não lineares acopladas, derivadas considerando somente a interação [prescrita pelas Eqs. (7.15)-(7.18)] entre dois modos cosseno (n e $2n$):

$$\dot{a}_n = \lambda(n) a_n + \frac{1}{2} \{ [F(n, -n) + F(n, 2n)] a_n a_{2n} + G(n, -n) \dot{a}_n a_{2n} + G(n, 2n) \dot{a}_{2n} a_n \}, \quad (7.19)$$

$$\dot{a}_{2n} = \lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} \{ F(2n, n) a_n^2 + G(2n, n) \dot{a}_n a_n \}. \quad (7.20)$$

Examinando o painel superior da Fig. 46(a), observamos a formação de um padrão de aspecto poligonal, apresentando sete lados (determinados pelo modo fundamental $n = 7$) claramente

ondulados (relacionadas com o acoplamento não linear do modo fundamental n com seu primeiro harmônico $2n = 14$). Apesar de sua natureza poligonal, o padrão resultante não lembra exatamente o legítimo formato poligonal adquirido pelas estruturas estacionárias de ferrofluido que surgem a partir das soluções exatas do problema [184] [veja, por exemplo, Fig. 44(a)]. Inspeccionando o painel inferior da Fig. 46(a), podemos verificar que ambas as amplitudes crescem com o tempo, atingem um valor máximo e, logo em seguida, diminuem até adquirirem valores estacionários. O padrão apresentado no painel superior da Fig. 46(b) também apresenta uma estrutura de aspecto poligonal (com um maior número de lados, determinados pelo modo fundamental $n = 10$), mas ainda apresentando ondulações relativamente intensas em suas arestas. O surgimento de um padrão tendo um maior número de lados está conectado com o fato de N_B ter aumentado da Fig. 46(a) para Fig. 46(b). Entretanto, um comportamento mais interessante é detectado no painel inferior da Fig. 46(b): agora, após um crescimento abrupto, ambas as amplitudes decaem (por repetidas oscilações amortecidas) conforme o tempo avança e tendem a saturar, assumindo valores estacionários após certo tempo. Finalmente, pelo painel superior da Fig. 46(c), é possível encontrar um padrão um pouco mais característico em relação ao formato poligonal, apresentando treze lados com ondulações um pouco mais modestas. Aumento abrupto de ambas as amplitudes, seguido por um intenso comportamento de decaimento oscilatório e tendência a atingir valores estacionários também podem ser verificados no painel inferior da Fig. 46(c). As oscilações das amplitudes, detectadas nas Figs. 46(b) e 46(c), serão discutidos mais detalhadamente na seção 7.4.

Logo, pela Fig. 46, é possível concluir que quando o acoplamento de somente dois modos é considerado, as amplitudes de perturbação eventualmente atingem magnitudes estacionárias. Isto sugere que tais soluções perturbativas de dois modos para os padrões de ferrofluido seriam dinamicamente estáveis. Além disso, podemos dizer que para maiores valores de N_B , o padrão resultante fracamente não linear [painel superior da Fig. 46(c)] possui uma maior semelhança com o formato poligonal da interface equivalente dada pela solução estacionária exata (obtida por meio do formalismo da *vortex-sheet* [184]). Neste contexto, apesar de sua simplicidade, a solução fracamente não linear de dois modos é capaz de capturar razoavelmente bem as características gerais dos padrões estacionários exatos.

Agora, analisamos a Fig. 47. Aqui, iremos além do que foi feito na situação anterior (interação de dois modos de Fourier) por meio da consideração do acoplamento não linear de três modos participantes (n , $2n$ e $3n$). Nesta situação, os valores do número adimensional magnético e dos modos interagentes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$ e $3n = 30$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$ e $3n = 39$. Os padrões resultantes fracamente não lineares são mostrados nos painéis superiores, enquanto que as respectivas evoluções temporais das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$ são apresentadas nos painéis inferiores.

Similarmente ao que foi feito na Fig. 46, as estruturas dedilhadas ilustradas na Fig. 47 são produzidas pela consideração das mesmas condições iniciais $a_n(0) = 1/5000$ e $a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = 0$. A Figura 47 apresenta dados que são extraídos da solução numérica do seguinte

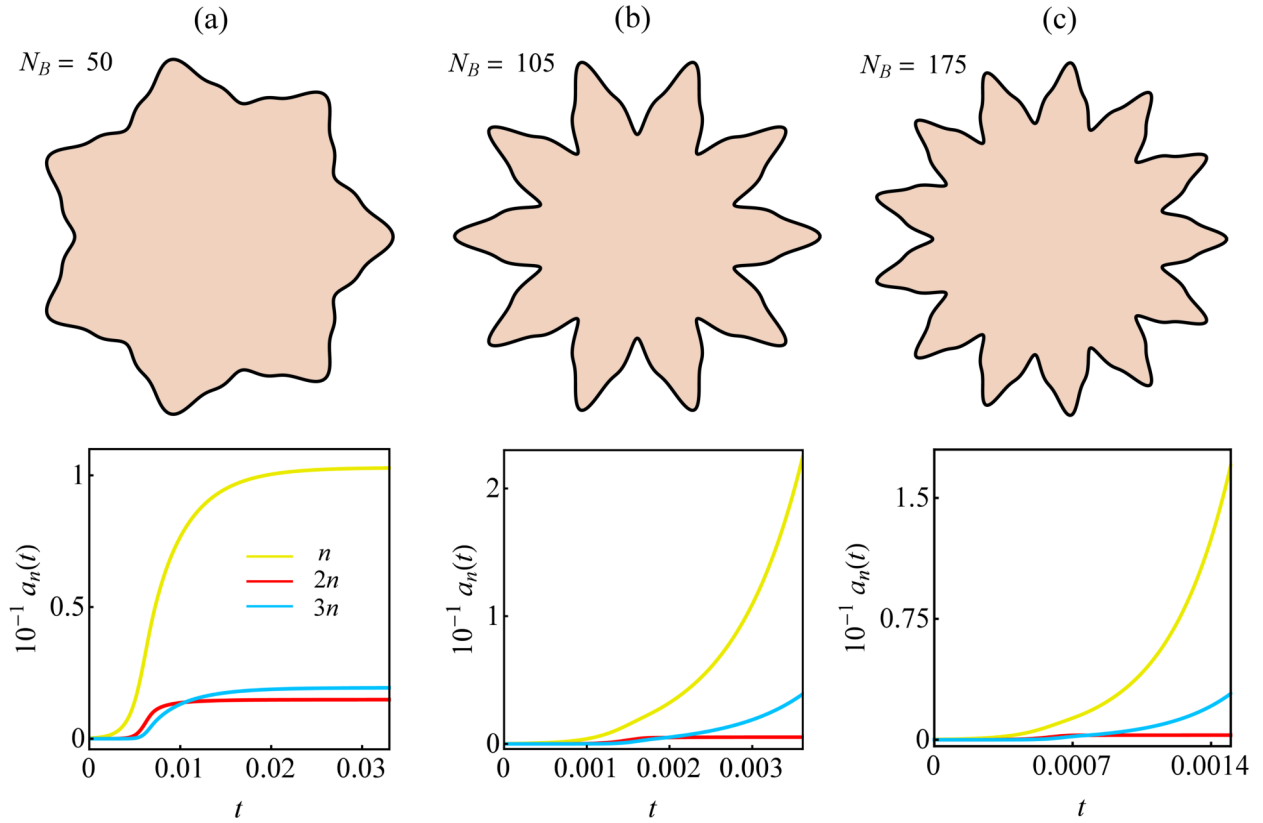


Figura 47 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de três modos de Fourier n , $2n$ e $3n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$ e $3n = 21$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$ e $3n = 30$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$ e $3n = 39$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 46. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.03$, (b) $t = 0.0036$ e (c) $t = 0.015$.

conjunto de equações diferenciais acopladas [obtidas por meio da utilização das Eqs. (7.15)-(7.18)]

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_n = \lambda(n) a_n &+ \frac{1}{2} \{ [F(n, -n) + F(n, 2n)] a_n a_{2n} \\
 &+ [F(n, -2n) + F(n, 3n)] a_{2n} a_{3n} \\
 &+ G(n, -n) \dot{a}_n a_{2n} + G(n, 2n) \dot{a}_{2n} a_n \\
 &+ G(n, -2n) \dot{a}_{2n} a_{3n} + G(n, 3n) \dot{a}_{3n} a_{2n} \},
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{2n} = & \lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} \{ F(2n, n) a_n^2 \\
 & + [F(2n, -n) + F(2n, 3n)] a_n a_{3n} \\
 & + G(2n, n) \dot{a}_n a_n + G(2n, -n) \dot{a}_n a_{3n} \\
 & + G(2n, 3n) \dot{a}_{3n} a_n \},
 \end{aligned}
 \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_{3n} = & \lambda(3n) a_{3n} + \frac{1}{2} \{ [F(3n, n) + F(3n, 2n)] a_n a_{2n} \\
 & + G(3n, n) \dot{a}_n a_{2n} + G(3n, 2n) \dot{a}_{2n} a_n \}.
 \end{aligned}
 \tag{7.23}$$

Pela análise da Fig. 47, é possível verificar rapidamente que os padrões apresentados nos painéis superiores claramente não se parecem com polígonos [forma característica das soluções estacionárias exatas para o problema, conforme calculada na Ref. [184] e exemplificada na Fig. 44(a)]. Na realidade, os padrões obtidos na Fig. 47, para o acoplamento de três modos, são bastante distintos daqueles apresentados na Fig. 46, onde a interação de apenas dois modos foi considerada. Em vez de apresentar pequenas amplitudes de perturbação e padrões semelhantes a polígonos, as estruturas ilustradas na Fig. 47 são significativamente mais perturbadas (as amplitudes de perturbação são tipicamente dez vezes maiores do que aquelas obtidas na Fig. 46) e revelam a formação de estruturas com n -lados (determinadas pelo modo fundamental n) marcadamente caracterizadas pelo crescimento de dedos com pontas finas, de onde ramificam-se pequenos lóbulos laterais. No contexto da abordagem de modos acoplados, já é de conhecimento que estes efeitos de estreitamento de dedos e de ramificação lateral (*sidebranching*) são induzidos pelo crescimento do modo $3n$ (com uma amplitude a_{3n} positiva) acompanhado por um crescimento mais modesto do modo $2n$ (também com $a_{2n} > 0$) [196]. Portanto, podemos dizer que a característica mais aparente dos padrões fracamente não lineares mostrados na Fig. 47 é o fato de que tais soluções perturbativas não correspondem aos associados padrões estacionários exatos do problema.

Outros aspectos dignos de nota relacionados às soluções perturbativas de três modos para ferrofuidos podem ser detectados pela análise dos painéis inferiores da Fig. 47. Por exemplo, no painel inferior da Fig. 47(a), observamos que, após um crescimento inicial, as amplitudes de perturbação saturam e alcançam valores estacionários. Isto nos leva a especular se esta específica solução fracamente não linear para $N_B = 50$ é dinamicamente estável. Entretanto, ela não parece corresponder às soluções estacionárias exatas tipicamente poligonais. Um cenário diferente é revelado nos painéis inferiores das Figs. 47(b) e 47(c): nestes casos, as amplitudes permanecem em crescimento conforme o tempo avança e não atingem um valor estacionário. Estes achados apontam para o fato de que estas soluções fracamente não lineares, mostradas nas Figs. 47(b) (para $N_B = 105$) e 47(c) (para $N_B = 175$), não são dinamicamente estáveis e, além disso, não

apresentam similaridade com as associadas soluções estacionárias exatas para o problema de formação de padrões em ferrofluidos.

Finalmente, examinamos a Fig. 48, a qual ilustra a situação onde quatro modos interagem (n , $2n$, $3n$ e $4n$). A evolução temporal dos modos é dada por meio da solução numérica das seguintes equações diferenciais acopladas [novamente, obtidas pela utilização das Eqs. (7.15)-(7.18)]:

$$\begin{aligned}\dot{a}_n = \lambda(n) a_n &+ \frac{1}{2} \{ [F(n, -n) + F(n, 2n)] a_n a_{2n} \\ &+ [F(n, -2n) + F(n, 3n)] a_{2n} a_{3n} \\ &+ [F(n, -3n) + F(n, 4n)] a_{3n} a_{4n} \\ &+ G(n, -n) \dot{a}_n a_{2n} + G(n, 2n) \dot{a}_{2n} a_n \\ &+ G(n, -2n) \dot{a}_{2n} a_{3n} + G(n, 3n) \dot{a}_{3n} a_{2n} \\ &+ G(n, -3n) \dot{a}_{3n} a_{4n} + G(n, 4n) \dot{a}_{4n} a_{3n} \} \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{2n} = \lambda(2n) a_{2n} &+ \frac{1}{2} \{ F(2n, n) a_n^2 \\ &+ [F(2n, -n) + F(2n, 3n)] a_n a_{3n} \\ &+ [F(2n, -2n) + F(2n, 4n)] a_{2n} a_{4n} \\ &+ G(2n, n) \dot{a}_n a_n + G(2n, -n) \dot{a}_n a_{3n} \\ &+ G(2n, 3n) \dot{a}_{3n} a_n + G(2n, -2n) \dot{a}_{2n} a_{4n} \\ &+ G(2n, 4n) \dot{a}_{4n} a_{2n} \} \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{3n} = \lambda(3n) a_{3n} &+ \frac{1}{2} \{ [F(3n, n) + F(3n, 2n)] a_n a_{2n} \\ &+ [F(3n, -n) + F(3n, 4n)] a_n a_{4n} \\ &+ G(3n, n) \dot{a}_n a_{2n} + G(3n, 2n) \dot{a}_{2n} a_n \\ &+ G(3n, -n) \dot{a}_n a_{4n} + G(3n, 4n) \dot{a}_{4n} a_n \} \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{4n} = \lambda(4n) a_{4n} &+ \frac{1}{2} \{ F(4n, 2n) a_{2n}^2 \\ &+ [F(4n, n) + F(4n, 3n)] a_n a_{3n} \\ &+ G(4n, n) \dot{a}_n a_{3n} + G(4n, 2n) \dot{a}_{2n} a_{2n} \\ &+ G(4n, 3n) \dot{a}_{3n} a_n \} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Na Fig. 48, o número adimensional magnético e os modos participantes são dados por: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$, $3n = 21$ e $4n = 28$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$, $3n = 30$ e

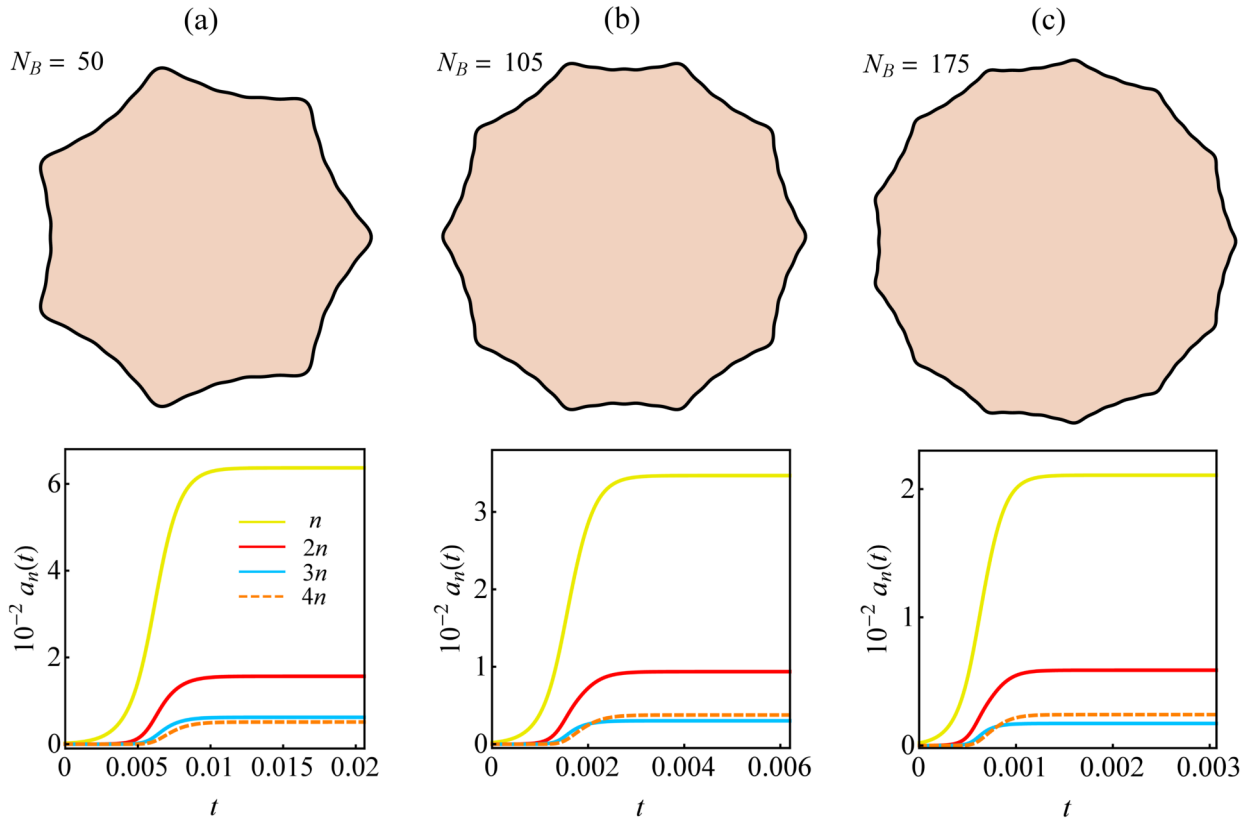


Figura 48 – Padrões representativos fracamente não lineares de ferrofluido (painéis superiores) considerando o acoplamento de quatro modos de Fourier n , $2n$, $3n$ e $4n$. Os valores para o número adimensional magnético e para os modos participantes são: (a) $N_B = 50$, $n = 7$, $2n = 14$, $3n = 21$ e $4n = 28$; (b) $N_B = 105$, $n = 10$, $2n = 20$, $3n = 30$ e $4n = 40$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$, $3n = 39$ e $4n = 52$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 1$ e $S_0 = S = 0$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 46. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.02$, (b) $t = 0.006$ e (c) $t = 0.003$.

$4n = 40$; (c) $N_B = 175$, $n = 13$, $2n = 26$, $3n = 39$ e $4n = 52$. Como nos casos das Figs. 46 e 47, os padrões característicos de dedos viscosos são apresentados nos painéis superiores, enquanto que as correspondentes evoluções temporais para as amplitudes cosseno $a_n(t)$ (para cada um destes quatro modos) são ilustradas nos painéis inferiores. Os padrões de interface mostrado na Fig. 48 foram confeccionados pela consideração das condições iniciais $a_n(0) = 1/5000$ e $a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = a_{4n}(0) = 0$.

Examinando a Fig. 48, é bastante evidente que a consideração de quatro modos de Fourier interagentes nos leva a resultados consideravelmente promissores. Os padrões fracamente não lineares de ferrofluido apresentados nos painéis superiores das Figs. 48(a)-48(c) definitivamente revelam morfologias poligonais com lados côncavos. Apesar das pequenas ondulações apresentadas nas arestas de cada padrão, podemos dizer que estas estruturas compartilham de uma grande semelhança com os formatos típicos das interfaces estacionárias exatas para ferrofluido

obtidas por meio da abordagem da *vortex-sheet* na Ref. [184]. Por meio da análise das evoluções temporais das amplitudes de perturbação ilustradas nos painéis inferiores das Figs. 48(a)-48(c), é possível notar que, após um período inicial de crescimento, todas as amplitudes tendem a valores estacionários. Isto indica que, além serem visualmente similares às correspondentes interfaces exatas estacionárias para ferrofluido, as soluções fracamente não lineares de quatro modos participantes são, de fato, dinamicamente estáveis.

Baseado nos resultados extraídos da Fig. 48, podemos dizer que, apesar do truncamento das soluções fracamente não lineares a somente quatro modos de Fourier participantes, tais soluções perturbativas fazem um trabalho bastante eficiente em reproduzir as morfologias típicas assumidas pelas soluções estacionárias exatas para ferrofluidos confinados sob ação de um campo magnético radial aplicado. Vale a pena mencionar que nós também analisamos uma solução fracamente não linear de cinco modos de Fourier e verificamos que os padrões resultantes, assim como as evoluções temporais das amplitudes, são literalmente indistinguíveis daqueles obtidos pela interação de apenas quatro modos. Portanto, a descrição fracamente não linear de quatro modos é suficientemente precisa e robusta em proporcionar uma mímica do comportamento das soluções estacionárias exatas geradas por meio do formalismo *vortex-sheet*.

Encerramos essa seção pela investigação da Fig. 49, a qual compara as soluções perturbativas fracamente não lineares (FNL) de quatro modos [obtidas por meio da solução numérica das Eqs. (7.24)-(7.27) e originalmente apresentadas na Fig. 48] com as correspondentes soluções estacionárias exatas do problema, obtidas resolvendo-se numericamente a Eq. (7.13). Os painéis superiores da Fig. 49 contrastam o formato estacionário exato da interface (curvas sólidas) com as correspondentes soluções perturbativas fracamente não lineares (curvas tracejadas). Verificamos que a teoria fracamente não linear funciona muito bem em aproximar-se do formato exato da interface, apesar da descrição perturbativa fazer uso de apenas quatro modos de Fourier. Além disso, podemos verificar que a concordância entre as soluções exatas e fracamente não lineares torna-se melhor para maiores valores de número adimensional magnético N_B , uma vez que esses parâmetros produzem menores amplitudes de perturbação.

Por outro lado, os painéis inferiores da Fig. 49 apresentam o gráfico do valor do módulo das amplitudes cosseno a_n para vários modos n . Os dados representados pelas barras verticais são extraídos diretamente dos padrões fortemente não lineares produzidos pela abordagem da *vortex-sheet* [Eq. (7.13)]. O espectro de Fourier das soluções estacionárias exatas demonstram que as amplitudes cosseno decaem rapidamente conforme n aumenta, tornando evidente o fato de que a descrição por meio de apenas quatro modos de Fourier (n , $2n$, $3n$ e $4n$) é suficiente. Os pequenos círculos vazados expressam os valores aproximados das amplitudes cosseno estacionárias para os quatro modos de Fourier participantes. Tais valores são encontrados fazendo-se uso das equações de modos acoplados (7.24)-(7.27) e adotando o valor nulo para as derivadas temporais que aparecem nestas equações. Novamente, é possível verificar uma ótima concordância entre as soluções exatas e fracamente não lineares. Os resultados apresentados na Fig. 49 nos fornecem um suporte quantitativo para o fato de que as soluções fracamente não lineares de apenas quatro

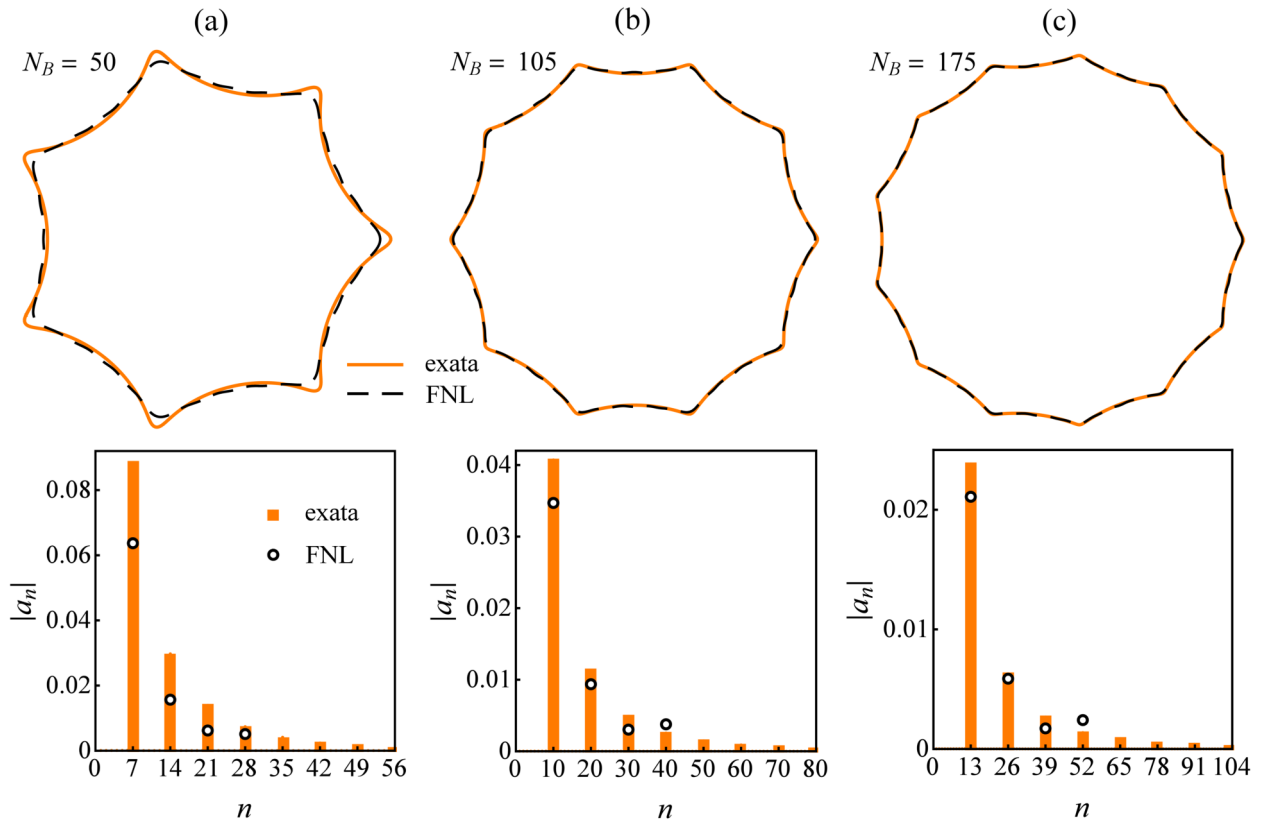


Figura 49 – Soluções perturbativas e estacionárias exatas relacionadas à situação do ferrofluido estudada na Fig. 48. Painéis superiores: comparação entre as soluções exatas (curvas sólidas) e fracamente não lineares (FNL) para quatro modos (curvas tracejadas), na situação da interface do ferrofluido quando (a) $N_B = 50$, (b) $N_B = 105$ e (c) $N_B = 175$. Painéis inferiores: gráficos correspondentes do módulo das amplitudes cosseno $|a_n|$ como função dos números de onda n . Os valores das constantes de integração para as soluções exatas são: (a) $a = -62.8$, (b) $a = -172.741226$ e (c) $a = -313.318659$.

modos interagente já proporcionam uma boa representação das soluções estacionárias exatas do problema. Além disso, estes resultados sugerem que tais soluções para os padrões estacionários exatos são estáveis. A análise de estabilidade formal destas soluções será discutida com mais detalhes na seção 7.4.

7.3.2 Caso do fluido magneto reológico

O caso no qual o líquido magnético confinado é um fluido MR será estudado nesta seção. Para esta situação específica, os parâmetros de *yield-stress* S_0 e S assumem valores não nulos. Aqui, adotamos $\chi = 0.5$, $N_B = 256$ e $S_0 = 57.6$. Como no caso do ferrofluido, todos os padrões ilustrados nas Figs. 50-52 possuem as mesmas condições iniciais: no tempo $t = 0$, a amplitude do modo fundamental é $a_n(0) = 1/5000$ e seus harmônicos $2n$, $3n$ e $4n$ são iguais a zero [$a_{2n}(0) = a_{3n}(0) = a_{4n}(0) = 0$]. Com o objetivo de explorar o papel do parâmetro de *yield-stress* dependente do campo S , nas Figs. 50-52 nós mantemos N_B e S_0 fixos, e utilizamos três valores decrescentes para S .

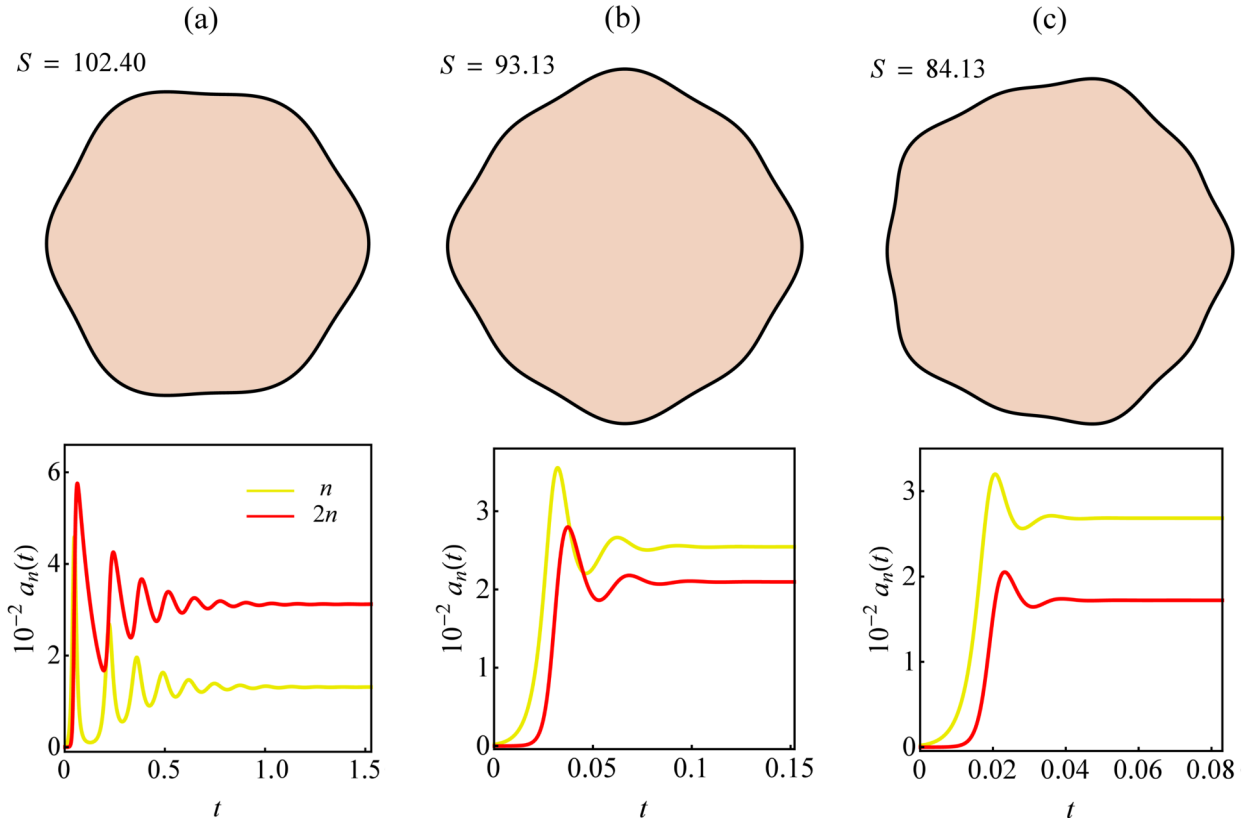


Figura 50 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de dois modos de Fourier n e $2n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$ e $2n = 6$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$ e $2n = 8$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$ e $2n = 10$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n e $2n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio não perturbado da gota de fluido magneto reológico são (a) $R = 0.845625$, (b) $R = 0.908623$ e (c) $R = 0.923848$. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 1.5$, (b) $t = 0.15$ e (c) $t = 0.08$.

Nossa análise inicia-se pela inspeção da Fig. 50, a qual considera o acoplamento de apenas dois modos de Fourier (n e $2n$). Nos painéis superiores da Fig. 50, apresentamos ilustrações das interfaces fluido-fluido obtidas pela resolução numérica do sistema de equações diferenciais não lineares acopladas (7.19)-(7.20). Os valores do parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e dos modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$ e $2n = 6$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$ e $2n = 8$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$ e $2n = 10$. As evoluções temporais das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para cada um dos modos de Fourier participantes são apresentadas nos painéis inferiores.

Por inspeção do painel superior da Fig. 50(a), observamos a formação de uma estrutura em formato poligonal apresentando três grandes protuberâncias (determinadas pelo modo fundamental $n = 3$), as quais são separadas por três lados contendo menores ondulações (induzidas pelo primeiro harmônico $2n = 6$). À medida que o valor do parâmetro S diminui, o número de protuberâncias aumenta (alcançando quatro e, ultimamente, cinco grandes protuberâncias), enquanto que

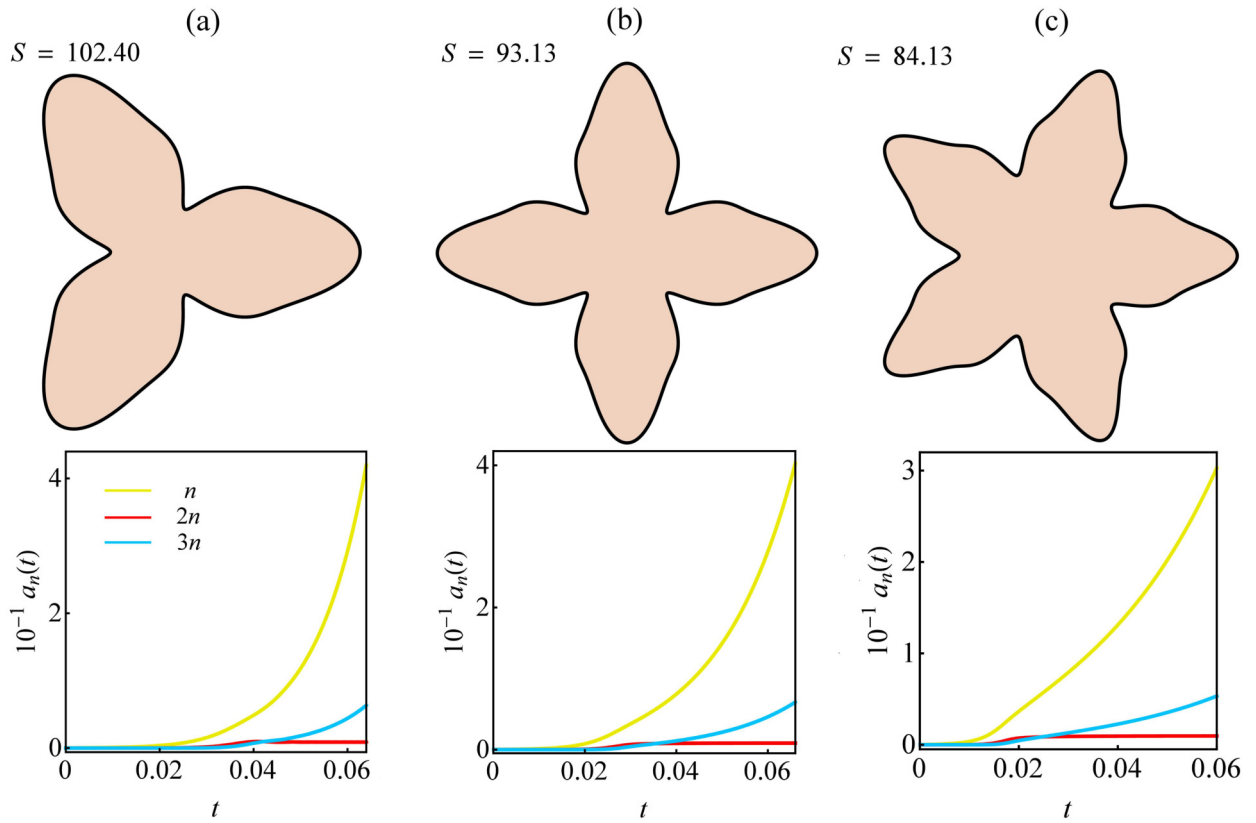


Figura 51 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de três modos de Fourier n , $2n$ e $3n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$ e $3n = 9$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$ e $3n = 12$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$ e $3n = 15$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$ e $3n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 50. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.064$, (b) $t = 0.065$ e (c) $t = 0.06$.

as ondulações das arestas tendem a diminuir em intensidade. Isto pode ser verificado nos painéis superiores das Figs. 50(b) e 50(c). Apesar da pequena melhora que ocorre para menores valores de S em relação à diminuição das ondulações das arestas, os padrões fracamente não lineares ilustrados na Fig. 50 não estão em boa concordância com as características interfaces estacionárias para o fluido MR que surgem pela consideração das soluções exatas do problema [185] [veja, por exemplo, Fig. 44(b)]. O comportamento das amplitudes cosseno é qualitativamente similar para os três valores de parâmetro S : examinando os painéis inferiores das Figs. 50(a)-50(c), as amplitudes de Fourier para n e $2n$ crescem conforme o tempo avança e alcançam um valor máximo, em seguida, ambas as amplitudes decaem de forma oscilatória até atingirem valores estacionários. Como observado no caso do ferrofluido, aqui, nossos resultados obtidos por meio do acoplamento de dois modos de Fourier indicam que as soluções perturbativas para o fluido MR seriam dinamicamente estáveis.

Damos continuidade a nossa investigação fracamente não linear considerando não apenas a participação do modo primeiro harmônico $2n$, mas também incluímos o modo segundo harmônico $3n$. Nos painéis superiores da Fig. 51, apresentamos as interfaces geradas por meio da resolução numérica das Eqs. (7.21)-(7.23) e, nos painéis inferiores, as correspondentes evoluções temporais das amplitudes cosseno são mostradas. Os três modos participantes (n , $2n$ e $3n$) e parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S são dados por: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$ e $3n = 9$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$ e $3n = 12$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$ e $3n = 15$.

De forma similar aos resultados que encontramos quando o modo segundo harmônico $3n$ foi adicionado no caso do ferrofluido, na Fig. 51, a adição do segundo harmônico nos leva a interfaces menos promissoras que aquelas obtidas na Fig. 50, onde a interação de somente dois modos de Fourier foi considerada. As interfaces apresentadas nos painéis superiores das Figs. 51(a)-51(c) não lembram o formato poligonal inflado típico das estruturas estacionárias exatas dadas pelo formalismo da *vortex-sheet* [185]. Quando o acoplamento de três modos de Fourier é considerado, os padrões de interface exibem o crescimento de dedos grandes e exageradamente perturbados, com pequenas protuberâncias que ramificam-se lateralmente, como podemos verificar pela análise dos painéis superiores da Fig. 51. Em relação às evoluções temporais das amplitudes de perturbação ilustradas nos painéis da Fig. 51, podemos dizer que, para os três valores de parâmetro S [Figs. 51(a)-51(c)] utilizados, o comportamento geral é sempre o mesmo: as amplitudes dos três modos continuam a crescer conforme o tempo avança e não apresentam sinais de saturação. Portanto, a partir dos resultados apresentados na Fig. 51, fica claro que as interfaces perturbativas obtidas pelo acoplamento dos modos n , $2n$ e $3n$ não reproduzem os padrões poligonais estacionários esperados para o caso do fluido MR. Além disso, podemos dizer também que os padrões fracamente não lineares exibidos na Fig. 51 não são dinamicamente estáveis.

Na tentativa de se obter uma melhor concordância entre as interfaces FNL e os formatos estacionários exatos fortemente não lineares, agora, consideramos o acoplamento do modo fundamental n com os harmônicos $2n$, $3n$ e $4n$. As interfaces FNL e as correspondentes evoluções temporais das amplitudes cosseno $a_n(t)$ são mostradas na Fig. 52. Os dados utilizados em todos os gráficos da Fig. 52 foram gerados por meio da resolução numéricas das Eqs. (7.24)-(7.26). Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$, $3n = 9$ e $4n = 12$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$, $3n = 12$ e $4n = 16$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$, $3n = 15$ e $4n = 20$.

Em relação ao formato das interfaces, é evidente que, pela observação direta dos painéis superiores da Fig. 52, todas as interfaces parecem muito melhores quando comparadas com aquelas obtidas na Fig. 50 (para dois modos de Fourier) e Fig. 51 (para três modos de Fourier). É possível verificar a presença de modestas ondulações nos lados do padrão reproduzido no painel superior da Fig. 52(a), mas estas ondulações são quase imperceptíveis nos outros dois padrões ilustrados nos painéis superiores das Figs. 52(b) e 52(c) para menores valores de parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S . É bastante evidente que quando levamos em

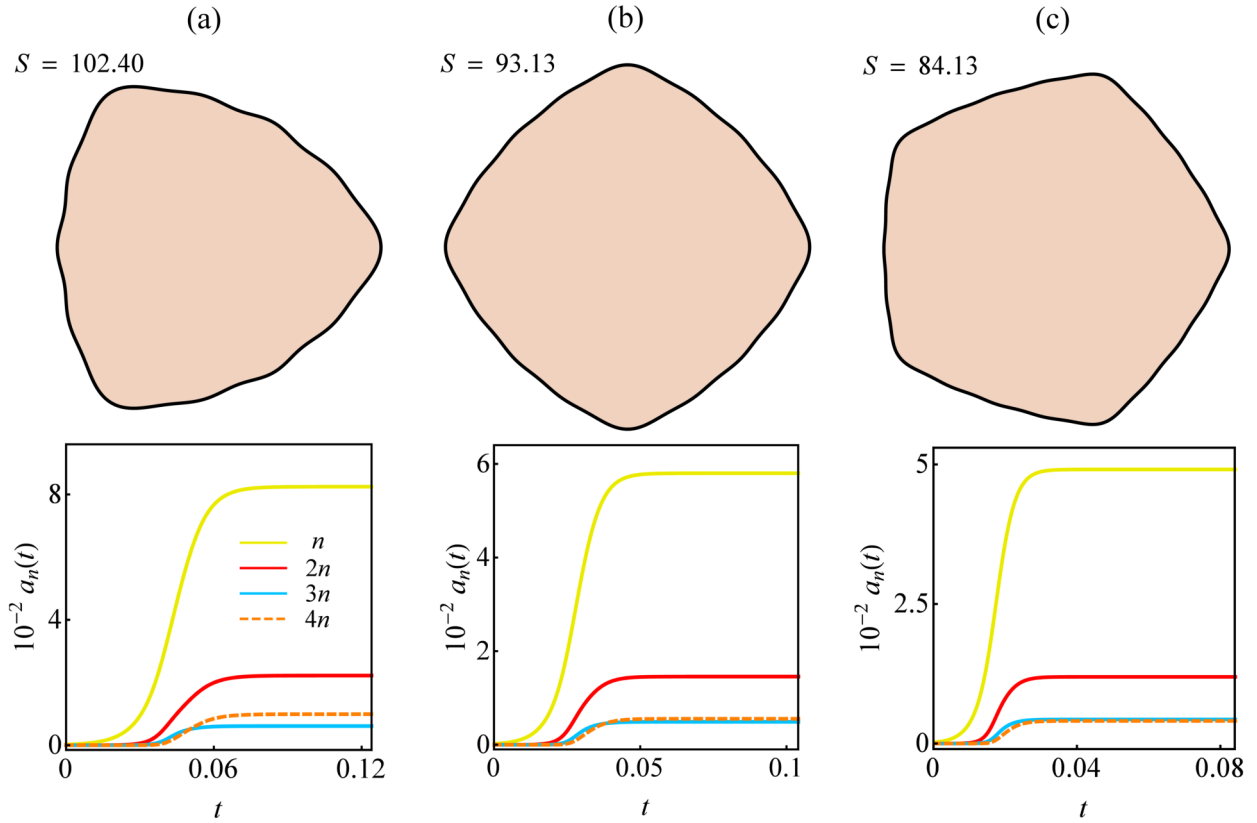


Figura 52 – Padrões representativos fracamente não lineares de fluido magneto reológico (painéis superiores) considerando o acoplamento de quatro modos de Fourier n , $2n$, $3n$ e $4n$. Os valores para o parâmetro de *yield-stress* dependente do campo magnético S e para os modos participantes são: (a) $S = 102.40$, $n = 3$, $2n = 6$, $3n = 9$ e $4n = 12$; (b) $S = 93.13$, $n = 4$, $2n = 8$, $3n = 12$ e $4n = 16$; (c) $S = 84.13$, $n = 5$, $2n = 10$, $3n = 15$ e $4n = 20$. As evoluções temporais correspondentes das amplitudes cosseno $a_n(t)$ para os modos n , $2n$, $3n$ e $4n$ são apresentadas nos painéis inferiores. Além disso, adotamos $\chi = 0.5$, $S_0 = 57.6$ e $N_B = 256$. Os valores para o raio inicial da gota nos painéis (a)-(c) são iguais aqueles utilizados na Fig. 50. Os tempos para os quais os padrões são confeccionados são: (a) $t = 0.12$, (b) $t = 0.1$ e (c) $t = 0.08$.

consideração o modo $4n$, juntamente com os modos n , $2n$ e $3n$, obtemos padrões inflados, de formato poligonal e com lados convexos. Estes padrões são bastante semelhantes aos padrões obtidos por meio do formalismo da *vortex-sheet* [185]. Na realidade, é possível comprovar que as soluções FNL estão realmente se aproximando das soluções estacionárias fortemente não lineares por meio da análise dos painéis inferiores da Fig. 52: para os três valores de S , nós temos um crescimento inicial das amplitudes cosseno e todas elas tendem a valores estacionários conforme o tempo avança. Baseado nestes resultados, podemos dizer que as soluções FNL de quatro modos são dinamicamente estáveis.

Para comparar a solução FNL de quatro modos com as formas estacionárias exatas geradas por meio da abordagem da *vortex-sheet* [185], superpomos ambas as soluções nos painéis superiores da Fig. 53. Examinando a Fig. 53(a), apesar das pequenas ondulações nos lados da solução perturbativa FNL (padrão tracejado), esta solução e a solução exata possuem praticamente o

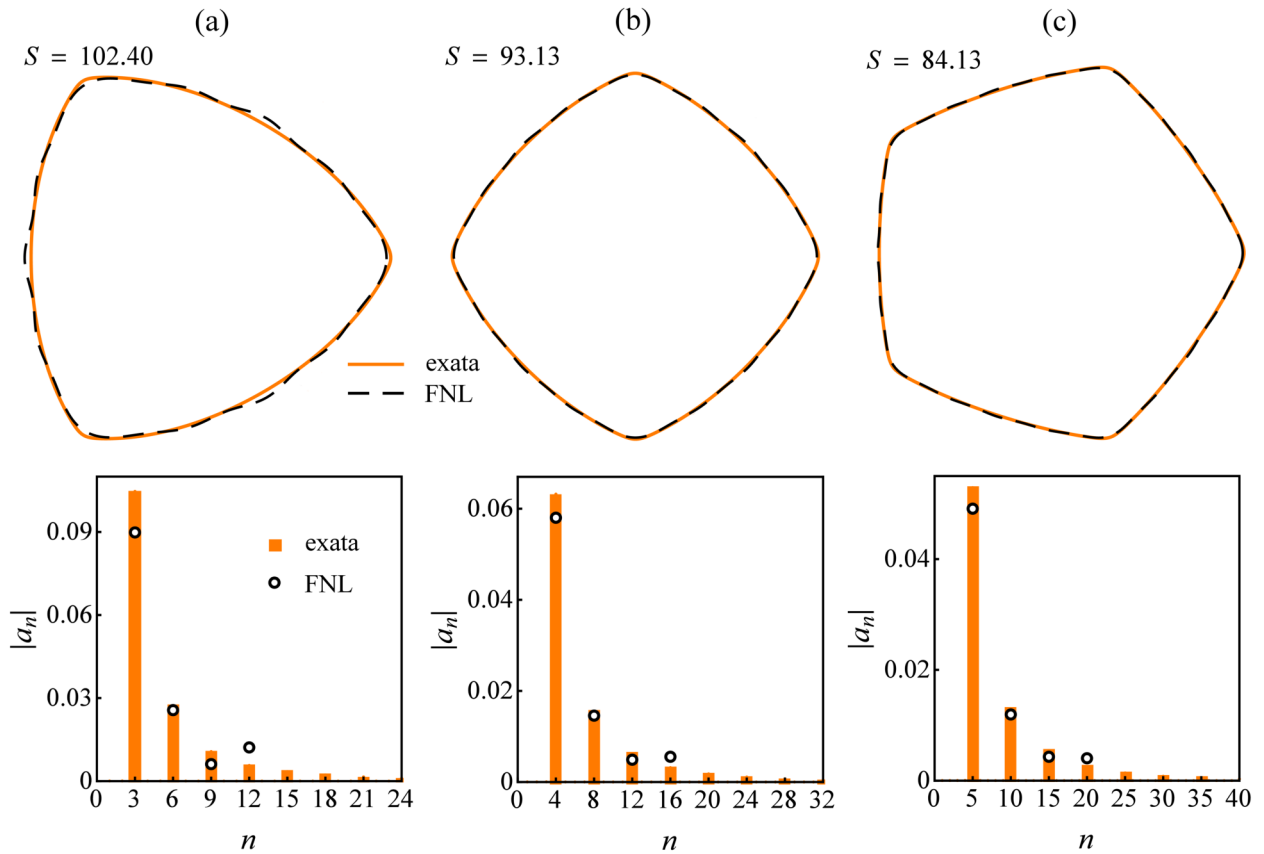


Figura 53 – Soluções perturbativas e estacionárias exatas relacionadas à situação do fluido magneto reológico estudada na Fig. 52. Painéis superiores: comparação entre as soluções exatas (curvas sólidas) e fracamente não lineares (FNL) para quatro modos (curvas tracejadas), na situação da interface do fluido magneto reológico quando (a) $S = 102.40$, (b) $S = 93.13$ e (c) $S = 84.13$. Painéis inferiores: gráficos correspondentes do módulo das amplitudes cosseno $|a_n|$ como função dos números de onda n . Os valores das constantes de integração para as soluções exatas são: (a) $a = -23.910252$, (b) $a = -32.436107$ e (c) $a = -40.324116$.

mesmo formato. A concordância é ainda melhor para menores valores de parâmetro S . Nas Figs. 53(b) e 53(c), a solução tracejada FNL e a solução sólida estacionária se sobrepõem, mostrando assim que nossas interfaces perturbativas de quatro modos estão de fato aproximando-se das correspondentes interfaces estacionárias exatas fortemente não lineares.

Com o objetivo de se obter uma comparação mais quantitativa entre as soluções perturbativas e exatas, nos painéis inferiores da Fig. 53 apresentamos o gráfico do valor do módulo das amplitudes cosseno a_n para vários modos n . As barras verticais representam o espectro de amplitudes de Fourier calculadas diretamente dos padrões estacionários exatos, enquanto que os pequenos círculos vazados são aproximadamente as amplitudes cosseno extraídas dos padrões FNL. Pelos gráficos dos painéis inferiores das Figs. 53(a)-53(c), fica claro que a concordância entre as amplitudes exatas e fracamente não lineares são muito boas e tornam-se melhores ainda quando menores valores de S são utilizados. Portanto, assim como no caso do ferrofluido, também podemos dizer que, aqui, a consideração da interação de apenas quatro modos de Fourier

$(n, 2n, 3n$ e $4n)$, no contexto da abordagem FNL, já é capaz de reproduzir suficientemente bem os padrões de fluido MR estacionários exatos obtidos por meio do método da *vortex-sheet*. Além disso, os resultados também indicam que estas soluções FNL de quatro modos são dinamicamente estáveis.

7.4 Estabilidade das soluções

Agora, vamos explorar um último e importante aspecto relacionado ao estudo formal da análise de estabilidade das soluções estacionárias. Isto é feito por meio da consideração das amplitudes reais cosseno da equação de modos acoplados (7.15) e pela utilização de um procedimento padrão de linearização próximo às amplitudes estacionárias não triviais do sistema dinâmico [189, 190]. Abaixo, apresentamos detalhadamente como isto pode ser realizado analiticamente no caso da interação de dois modos de Fourier e, além disso, mostraremos os resultados numéricos para os truncamentos de três e quatro modos.

Considere o sistema dinâmico descrito pelas duas amplitudes de Fourier das Eqs. (7.19) e (7.20), onde n é o modo de maior crescimento. Adotando $\dot{a}_n = 0$ e $\dot{a}_{2n} = 0$, obtemos as amplitudes estacionárias fracamente não lineares

$$a_{2n}^{st} = \frac{-2\lambda(n)}{F(n, -n) + F(n, 2n)} = a_2, \quad (7.28)$$

e

$$a_n^{st} = \sqrt{\frac{4\lambda(n)\lambda(2n)}{F(2n, n)[F(n, -n) + F(n, 2n)]}} = a_1. \quad (7.29)$$

Estas são precisamente as amplitudes saturadas observadas quando $t \rightarrow \infty$ na evolução temporal fracamente não linear ilustrada nas Figs. 46 e 50. Além disso, podemos reescrever as Eqs. (7.19) e (7.20) como

$$\dot{a}_n = g_1(a_n, a_{2n}), \quad \dot{a}_{2n} = g_2(a_n, a_{2n}), \quad (7.30)$$

onde

$$g_1(a_n, a_{2n}) = \frac{R a_n}{R^2 + 6Ra_{2n} - 4a_n^2} \left\{ 2Ra_{2n}[F(n, -n) + F(n, 2n)] - 4F(2n, n)a_n^2 + \lambda(n)R - 2\lambda(2n)a_{2n} \right\}, \quad (7.31)$$

e

$$g_2(a_n, a_{2n}) = \frac{R}{R^2 + 6Ra_{2n} - 4a_n^2} \left\{ -2a_n^2[2a_{2n}(F(n, -n) + F(n, 2n)) - 3F(2n, n)] - RF(2n, n) + \lambda(n) \right. \\ \left. + \lambda(2n)a_{2n}[R + 6a_{2n}] \right\}. \quad (7.32)$$

O comportamento do sistema dinâmico próximo ao ponto fixo é descrito por meio das variáveis de pequeno deslocamento $\varepsilon_1(t) = a_n(t) - a_1$ e $\varepsilon_2(t) = a_{2n}(t) - a_2$. Inserindo estas expressões na Eq.(7.30) e expandindo até primeira ordem em ε , obtemos um conjunto de equações que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

onde $\mathcal{A}$ é a chamada matriz jacobiana do sistema [189] e os elementos $\mathcal{A}_{ij} = \partial g_i / \partial a_{jn}$ são calculados em $a_n = a_1$ e $a_{2n} = a_2$. Finalmente, a estabilidade do ponto fixo é caracterizada pelos dois autovalores de $\mathcal{A}$, dados por

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22} \pm \sqrt{\mathcal{A}_{11}^2 + 4\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{21} - 2\mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{22} + \mathcal{A}_{22}^2} \right]. \quad (7.34)$$

Se a parte real de um autovalor da matriz $\mathcal{A}$ é negativo (positivo), isto indica que é um ramo estável (instável) do sistema dinâmico definido pela Eq. (7.30) e, conseqüentemente, implicando que as perturbações próximas ao ponto fixo diminuem (aumentam) com o tempo. No nosso sistema, os autovalores $\delta_{1,2}$ são complexos conjugados e suas partes reais podem ser simplificadas à

$$\text{Re}\{\delta_{1,2}\} = \frac{R [2\lambda(n)a_1^2 + \lambda(2n)a_2(R + 10a_2)]}{2a_2(R^2 + 6Ra_2 - 4a_1^2)}. \quad (7.35)$$

Além disso, temos que $\lambda(n) > 0$ e $\lambda(2n) < 0$ de tal forma que $\text{Re}\{\delta_{1,2}\} < 0$ e $\text{Im}\{\delta_{1,2}\} \neq 0$ para todas as soluções FNL estacionárias analisadas neste trabalho. Sendo assim, isto determina que elas correspondem a pontos fixos que são espirais estáveis, significando que todas as soluções estacionárias de dois modos são dinamicamente estáveis. Este fato está completamente em acordo com o comportamento dinâmico das amplitudes dependentes do tempo apresentadas nas Figs. 46 e 50, onde elas oscilavam conforme se aproximavam dos pontos fixos estacionários estáveis dados por $a_n = a_1$ e $a_{2n} = a_2$.

O procedimento descrito anteriormente pode ser generalizado para sistemas compostos de três ou quatro modos de Fourier, dados, respectivamente, pelo conjunto das Eqs.(7.21)-(7.23) e Eqs.(7.24)-(7.27). Todas as amplitudes estacionárias fracamente não lineares para o ferrofluido (fluido MR) são apresentadas na Tabela 1 (2). Nestas condições, obtemos, respectivamente, três e quatro autovalores para cada interface estacionária e o ponto fixo é classificado como estável se todos os autovalores apresentarem parte real negativa. Com o objetivo de organizar nossa análise de estabilidade, na Tabela 3, listamos todos os resultados numéricos para os autovalores calculados para o caso das interfaces de ferrofluido, enquanto que na Tabela 4, apresentamos os dados correspondentes ao caso das gotas de fluido MR. É importante deixar claro que estes autovalores regem a estabilidade das soluções FNL estáticas dadas pelas amplitudes estacionárias mostradas nas Tabelas 1 e 2, onde utilizamos os mesmos parâmetros físico correspondentes às Figs. 46-53. De forma geral, o resultado das investigações utilizando dois e quatro modos de Fourier é que todas as interfaces analisadas são, de fato, dinamicamente estáveis. Observe

		a_1	a_2	a_3	a_4
$N_B = 50$	2 modos	0.04053	0.02343	—	—
	3 modos	0.10292	0.01484	0.01935	—
	4 modos	0.06368	0.01565	0.00620	0.00511
$N_B = 105$	2 modos	0.01234	0.01383	—	—
	3 modos	—	—	—	—
	4 modos	0.03470	0.00936	0.00302	0.00377
$N_B = 175$	2 modos	0.00537	0.00851	—	—
	3 modos	—	—	—	—
	4 modos	0.02303	0.00527	0.00283	0.00342

Tabela 1 – Amplitudes estacionárias das soluções estacionárias FNL para o caso da gota de ferrofluido. As situações $N_B = 50, 105, 175$ correspondem aos mesmo parâmetros físicos utilizados nas Figs. 46, 47 e 48.

		a_1	a_2	a_3	a_4
$S = 102.4$	2 modos	0.01311	0.03120	—	—
	3 modos	—	—	—	—
	4 modos	0.08247	0.02221	0.00610	0.00989
$S = 93.13$	2 modos	0.02545	0.02097	—	—
	3 modos	—	—	—	—
	4 modos	0.05801	0.01457	0.00490	0.00554
$S = 84.13$	2 modos	0.02684	0.01721	—	—
	3 modos	—	—	—	—
	4 modos	0.04910	0.0119	0.004310	0.004045

Tabela 2 – Amplitudes estacionárias das soluções estacionárias FNL para o caso da gota de fluido MR. As situações $S = 102.4, 93.13, 84.13$ correspondem aos mesmo parâmetros físicos utilizados nas Figs. 50, 51 e 52.

que, como explicado nas seções anteriores, para a análise realizada com três modos de Fourier, a abordagem fracamente não linear geralmente falha em capturar as soluções estacionárias exatas do nosso problema. Apesar disso, é reconfortante saber que os resultados da análise de estabilidade obtidos nesta seção dão suporte aos achados das seções 7.3.1 e 7.3.2.

Finalmente, pelo fato de termos mostrado, nas seções 7.3.1 e 7.3.2, que por meio da utilização de quatro modos de Fourier somos capazes de capturar precisamente todas as características morfológicas das interfaces estacionárias fortemente não lineares, concluímos que as soluções estacionárias exatas também apresentam as mesmas propriedades dinâmicas das soluções FNL de quatro modos. Portanto, todas as soluções estacionárias exatas apresentadas neste capítulo são, de fato, estáveis.

		$\text{Re}\{\delta_1\}$	$\text{Im}\{\delta_1\}$	$\text{Re}\{\delta_2\}$	$\text{Im}\{\delta_2\}$	$\text{Re}\{\delta_3\}$	$\text{Im}\{\delta_3\}$	$\text{Re}\{\delta_4\}$	$\text{Im}\{\delta_4\}$
$N_B = 50$	2 modos	-792.017	1275.39	-792.017	-1275.39	—	—	—	—
	3 modos	-5168.18	11799.2	-5168.18	-11799.2	-228.946	0.0	—	—
	4 modos	-17541.1	11796.1	-17541.1	-11796.1	-6504.06	0.0	-1093.03	0.0
$N_B = 105$	2 modos	-647.471	2509.04	-647.471	-2509.04	—	—	—	—
	3 modos	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 modos	-34229.4	46842.5	-34229.4	46842.5	-14094.2	0.0	-3634.76	0.0
$N_B = 175$	2 modos	-693.44	4003.19	-693.44	-4003.19	—	—	—	—
	3 modos	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 modos	-58321.2	79074.0	-58321.2	-79074.0	-38928.0	0.0	-8463.66	0.0

Tabela 3 – Autovalores associados às soluções estacionárias FNL para a gota de ferrofluido caracterizados pelas amplitudes estáticas mostradas na tabela 1.

		$\text{Re}\{\delta_1\}$	$\text{Im}\{\delta_1\}$	$\text{Re}\{\delta_2\}$	$\text{Im}\{\delta_2\}$	$\text{Re}\{\delta_3\}$	$\text{Im}\{\delta_3\}$	$\text{Re}\{\delta_4\}$	$\text{Im}\{\delta_4\}$
$S = 102.4$	2 modos	-5.30473	48.9343	-5.30473	-48.9343	—	—	—	—
	3 modos	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 modos	-1199.66	2098.67	-1199.66	-2098.67	-519.33	0.0	-159.37	0.0
$S = 93.13$	2 modos	-68.96	204.87	-68.96	-204.87	—	—	—	—
	3 modos	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 modos	-2508.31	3042.80	-2508.31	-3042.80	-1000.98	0.0	-244.45	0.0
$S = 84.13$	2 modos	-185.55	400.99	-185.55	-400.99	—	—	—	—
	3 modos	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 modos	-4885.25	4598.78	-4885.25	-4598.78	-1865.39	0.0	-383.46	0.0

Tabela 4 – Autovalores associados às soluções estacionárias FNL para a gota de fluido MR caracterizados pelas amplitudes estáticas mostradas na tabela 2.

8 PADRÕES DE ENRUGAMENTO E DOBRAMENTO PARA FERROFLUIDOS CONFINADOS COM INTERFACE ELÁSTICA

8.1 Introdução

O estudo da formação de padrões de enrugamento e dobramento em finas membranas elásticas que repousam sobre um fluido ou sobre um substrato muito macio (semelhante a um gel) tem recebido bastante atenção nos últimos anos [197–200]. Experimentos de laboratório, simulações numéricas e estudos analíticos [201–205] mostram que quando uma membrana elástica localizada sobre a superfície plana de um líquido é submetida a compressões laterais, a mesma pode assumir uma série de diferentes formatos. A formação de padrões resulta da competição entre forças elásticas e hidrodinâmicas atuando na membrana. Para compressões de baixa magnitude, ondulações senoidais de pequena amplitude surgem na membrana e dão origem a padrões que exibem enrugamentos periódicos. Se a superfície enrugada é comprimida ainda mais, um tipo diferente de padrão aparece: os enrugamentos aumentam em amplitude e são substituídos por estruturas mais complexas na forma de uma única ou de múltiplas dobras. Se o processo de compressão continuar, a membrana elástica eventualmente faz contato consigo mesma, dando origem a dobramentos em forma de gotas. Foi demonstrado recentemente que o problema da membrana elástica sobre a superfície de um fluido admite uma grande variedade de padrões de múltiplos dobramentos [205]. Tais dobramentos podem ser idênticos ou diferentes entre si (para uma coleção representativa de tais estruturas deformadas, veja as Figs. 54 e 55).

Vale a pena ressaltar que além do seu valor científico e acadêmico, estes fenômenos de enrugamento e dobramento [197–205] possuem inúmeras aplicações práticas, sendo observados em vários contextos e escalas de comprimento, indo desde dobramento de camadas geológicas [206] até padrões em membranas celulares e tecidos biológicos [207–209].

Um outro sistema que também está relacionado com a interação entre forças elásticas e hidrodinâmicas é aquele que lida com cápsulas elásticas (monocamadas fechadas) ou vesículas elásticas (bicamadas fechadas) [210, 211]. Estes arranjos de membranas fechadas consistem de uma fina superfície elástica circundando um fluido em seu interior. Instabilidades de interface podem ser induzidas quando as cápsulas ou vesículas elásticas são submetidas a forças externas. Uma possível maneira de exercer forças em tais membranas elásticas fechadas é por meio da utilização de campos magnéticos externos. Esta técnica específica de mudança de formato requer a presença de um material magnético no interior da estrutura elástica. Sob estas circunstâncias,

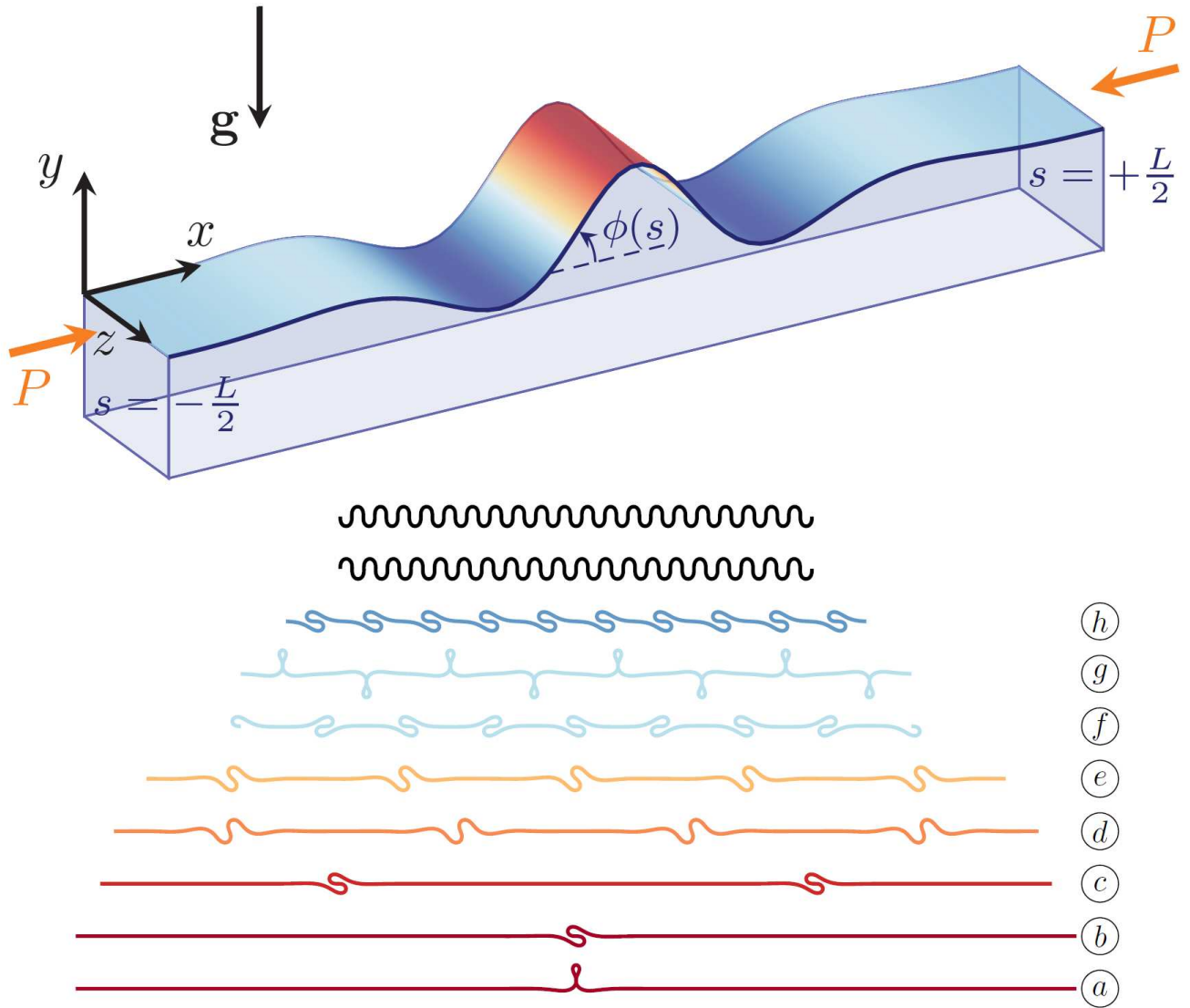


Figura 54 – Na parte superior desta figura (retirada da Ref. [205]), vemos uma representação esquemática da formação de um padrão de enrugamento no problema da membrana elástica sobre substrato fluido. Na parte inferior, é possível encontrar uma coleção representativa das estruturas deformadas que surgem quando a membrana é submetida a compressões. Para compressões de baixa magnitude, ondulações senoidais de pequena amplitude surgem na membrana e dão origem a padrões que exibem enrugamentos periódicos (curvas pretas). Quando a membrana é submetida a compressões ainda maiores, uma grande variedade de padrões contendo um único ou múltiplos dobramentos surgem na interface (curvas a-h).

a membrana fechada poderia adquirir um momento de dipolo magnético, o qual pode ser manipulado por um campo magnético externo.

Experimentos utilizando um campo magnético para examinar o formato de vesículas preenchidas com fluido magnético (ferrofluido) foram realizados há mais de duas décadas atrás por Bacri *et al.* [212]. Quando um campo magnético é aplicado, as forças magnéticas no ferrofluido competem com a rigidez da membrana elástica e os formatos de equilíbrio para as vesículas são alterados. Em particular, o campo magnético externo tende a alongar a estrutura elástica,

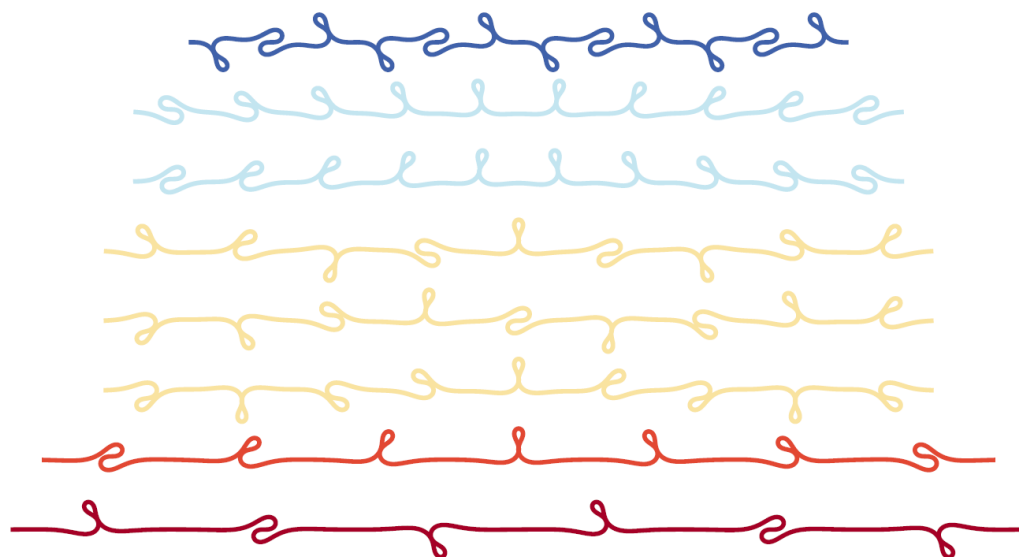


Figura 55 – Coleção de padrões assimétricos (com dobras distorcidas) que surgem para o problema da membrana elástica sobre substrato fluido. Figura retirada da Ref. [205].

inicialmente de formato quase esférico, na direção do campo. A estrutura assume então um formato mais alongado [212].

Recentemente, simulações numéricas e cálculos analíticos têm sido empregados na investigação teórica da deformação de cápsulas elásticas preenchidas com ferrofluido sob ação de campos magnéticos externos uniformes [213]. Formatos esferoidais têm sido identificados para campos magnéticos de intensidades baixas ou moderadas. Para campos magnéticos mais intensos, estruturas alongadas apresentando pontas cônicas foram detectadas. Verificou-se também que a cápsula pode desenvolver instabilidades do tipo enrugamento se surgirem tensões compressivas circunferenciais como resultado do alongamento ao longo da direção do campo magnético aplicado (veja a Fig. 56).

As estruturas magnéticas de membrana fechada estudadas experimentalmente na Ref. [212] e de forma teórica na Ref. [213], e o encapsulamento de fluidos magnéticos por membranas elásticas [214] têm se mostrado ferramentas úteis em permitir o ajuste magnético de lipossomas gigantes (ou magnetolipossomas) [215], assim como na investigação de propriedades mecânicas e reológicas de células vivas [216] e de tecidos em desenvolvimento [217].

Apesar da utilidade prática e da relevância científica dos problemas envolvendo a interação entre forças hidrodinâmicas, elásticas e magnéticas, as morfologias das interfaces deformadas para os sistemas de membranas elásticas preenchidas por ferrofluido estudadas nas Refs. [212–217] não são tão complexas e nem visualmente impactantes como os padrões de enrugamento e dobramento investigados nas Refs. [197–205]. Logo, um estudo do desenvolvimento de instabilidades de enrugamento e dobramento em sistemas de ferrofluido com interação entre efeitos magnéticos e elásticos ainda não foi realizado. O trabalho desenvolvido neste capítulo pretende preencher este espaço na literatura.

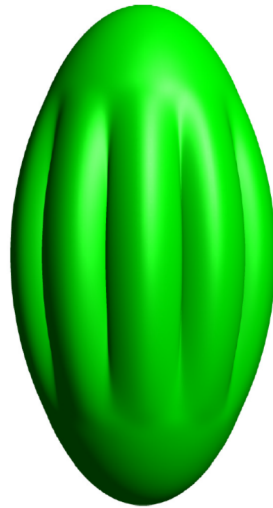


Figura 56 – Simulação numérica do problema de cápsulas elásticas preenchidas com ferrofluido. Quando submetidas a campos magnéticos suficientemente intensos, as cápsulas alongam-se e, além disso, podem desenvolver instabilidades do tipo enrugamento se surgirem tensões compressivas circunferenciais. Figura retirada da Ref. [213].

Dada a complexidade desta situação envolvendo a formação de padrões magnetoelásticos, começamos a examinar o problema por meio da consideração de uma descrição teórica simplificada. Primeiramente, em vez de lidar com um complicado problema ferrohídromagnético tridimensional, nos concentramos na situação efetivamente bidimensional da célula de Hele-Shaw. Desta forma, consideramos o escoamento de uma gota viscosa de ferrofluido, circundada por um fluido não magnético de viscosidade desprezível, confinada entre as placas da célula de Hele-Shaw [218, 219]. Para induzir mudanças na interface fluido-fluido, consideramos a ação de um campo magnético radial aplicado no plano da célula [184, 220]. Além disso, assim como feito nas Refs. [221–226], consideramos que a interface fluido-fluido é elástica e possui uma rigidez constante. Experimentos em célula de Hele-Shaw [13] demonstraram que tal interface elástica pode ser produzida quando os fluidos são postos em contato. Desta forma, uma reação química ocorre e o contorno fluido-fluido torna-se uma camada elástica semelhante a um gel. Nesta geometria confinada, a tradicional instabilidade de Saffman-Taylor [1] é complementada por interações elásticas e magnéticas. Portanto, a gota de ferrofluido pode, em princípio, evoluir e desenvolver complicados padrões de interface contendo enrugamentos e dobramentos. Neste contexto, nosso sistema físico consiste de um escoamento magnetoelástico em célula de Hele-Shaw sendo, portanto, análogo aos problemas de compressão de membranas elásticas sobre a superfície de um fluido estudados nas Refs. [197–205].

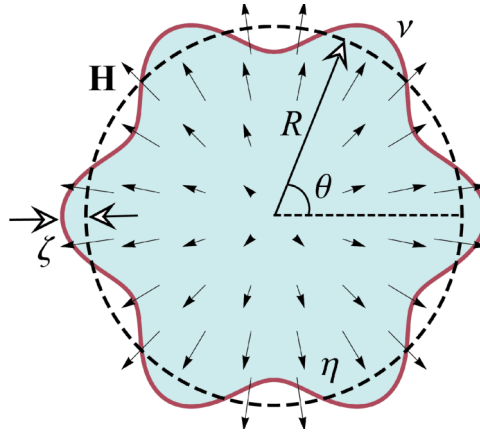


Figura 57 – Ilustração esquemática (visão superior) do escoamento induzido por um campo magnético numa célula de Hele-Shaw. A célula contém uma gota de ferrofluido inicialmente circular. Esta gota possui raio R (curva tracejada) e viscosidade η , além de ser circundada por um fluido não magnético de viscosidade desprezível. A interface fluido-fluido é elástica e possui uma rigidez ν constante. O sistema é submetido a um campo magnético externo $\mathbf{H}$ no plano da célula de Hele-Shaw. Este campo aponta radialmente para fora. A interação entre forças magnéticas e elásticas deforma a interface (curva sólida) e a amplitude de perturbação é representada por $\zeta = \zeta(\theta, t)$, onde θ é o ângulo azimutal e $\zeta \ll R$.

8.2 Dinâmica linear das perturbações da interface

Nesta seção, descrevemos de forma perturbativa os estágios iniciais da dinâmica da evolução da interface que separa a gota viscosa de ferrofluido do fluido externo não magnético e de viscosidade desprezível, considerando que ambos estão confinados em um pequeno espaço entre as duas placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw. Uma visão superior do sistema é representada pela Fig. 57. A viscosidade do ferrofluido (fluido não magnético) é representada por $\eta_1 = \eta$ ($\eta_2 \ll \eta$) e a separação constante das placas é denotada por b . Os fluidos são newtonianos e incompressíveis. A interface fluido-fluido é elástica e a constante de rigidez é dada por ν . O sistema é submetido a um campo magnético radial [184, 220] idêntico ao utilizado no capítulo 7, sendo, portanto, produzido pelo arranjo anti-Helmholtz e dado pela Eq. (7.1). Como o campo magnético aplicado apresenta um gradiente naturalmente não nulo, nós o tomamos como a principal contribuição do campo local à força magnética. Em nossa análise, não levamos em consideração a influência do campo de desmagnetização (ou indução) [106, 107, 110, 111]. No âmbito do nosso problema, ou seja, campo magnético aplicado no plano da célula de Hele-Shaw e valores relativamente baixos de susceptibilidade magnética, efeitos de desmagnetização podem ser seguramente desprezados.

Em contraste com o campo magnético radial utilizado nos capítulos 7 e 8 desta tese de doutorado, o campo magnético uniforme perpendicular [106, 107] mencionando no capítulo anterior, responsável pela formação dos interessantes padrões labirínticos [16, 17, 180, 181] para ferrofluido confinado em célula de Hele-Shaw, possui gradiente nulo e, desta forma, não produz

força magnética no ferrofluido. Consequentemente, efeitos do campo de desmagnetização são essenciais para descrever o aparecimento dos padrões em formato de labirintos para ferrofluido, não podendo ser negligenciados nesta situação específica.

Diferentemente do que foi feito nos capítulos anteriores, aqui, nossa teoria perturbativa vai até somente a primeira ordem de perturbação ζ . A dinâmica efetivamente bidimensional do nosso sistema é descrita pela lei de Darcy (7.3), tomando-se o devido cuidado em adotar $\sigma_y(H) = 0$, uma vez que estamos interessados em descrever o escoamento de ferrofluidos newtonianos. Vale a pena lembrar que o termo $\sigma_y(H)$ é somente utilizado quando estamos interessados em introduzir os efeitos de *yield stress* relacionados ao escoamento de fluidos MR.

Por meio da lei de Darcy (7.3) e da condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, é fácil verificar que nosso problema é laplaciano [218, 219] e, portanto, completamente especificado por duas condições de contorno na interface fluido-fluido $r = \mathcal{R}$. A primeira delas consiste na condição de contorno da diferença de pressão [106, 107, 221–226]

$$(p_1 - p_2)|_{r=\mathcal{R}} = \left[\nu \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right]_{r=\mathcal{R}}, \quad (8.1)$$

onde κ é a curvatura da interface no plano da célula e os índices em κ indicam derivadas com respeito ao comprimento de arco s . Além disso, $\hat{\mathbf{n}}$ denota o vetor unitário normal à interface. O primeiro termo do lado direito da Eq. (8.1) está relacionado com a diferença de pressão devido à elasticidade da interface. Tal termo é obtido por meio da minimização do funcional de energia de Canham-Helfrich [221–226]

$$E = \frac{1}{2} \int \nu \kappa^2 ds, \quad (8.2)$$

e representa o modelo mais simples responsável por adicionar as respostas elásticas da interface. O segundo termo do lado direito da Eq. (8.1) é o termo de tração magnética normal [106, 107], também utilizado no capítulo anterior. Note que, assim como feito nas Refs. [15, 227, 228] e ao contrário dos problemas usuais em célula de Hele-Shaw, efeitos de tensão superficial foram negligenciados. A outra condição de contorno relevante é a condição de contorno cinemática [218, 219], dada pela Eq. (2.3).

Levando-se em consideração a equação de movimento do sistema [Eq. (7.3)] e também as condições de contorno relacionadas [Eq. (8.1) e Eq. (2.3)], podemos apresentar agora a análise perturbativa de estabilidade linear do problema. Sendo assim, nosso principal objetivo é obter a relação de dispersão linear, ou seja, a taxa de crescimento linear. O procedimento necessário para encontrar a equação de movimento para as amplitudes de perturbação ζ_n é extremamente semelhante ao que foi feito em todos os capítulos anteriores desta tese. A única diferença é que aqui, a segunda ordem de perturbação não foi utilizada, pois os padrões obtidos são bastante deformados e, portanto, não são bem descritos por uma teoria fracamente não linear. Mantendo termos até primeira ordem em ζ , a equação adimensional de movimento para as amplitudes de perturbação ζ_n é representada por

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n, \quad (8.3)$$

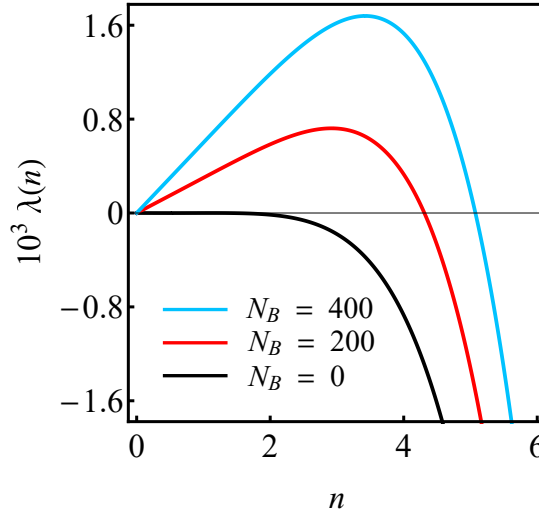


Figura 58 – Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ em função do número de onda n para $\chi = 0.5$ e três valores do número magnetoelástico N_B : 0, 200 e 400. Aqui, adotamos $R = 1$.

onde

$$\lambda(n) = |n| \left\{ 2N_B\chi(1+\chi) + \frac{(n^2-1)}{R^5} \left[\frac{5}{2} - (n^2+1) \right] \right\} \quad (8.4)$$

é a taxa de crescimento linear. Nas Eqs. (8.3) e (8.4), comprimentos e tempo são reescalados, respectivamente, por r_0 e $12\eta r_0^5/\nu b^2$. Nesta descrição adimensional do problema, o sistema é convenientemente caracterizado pela susceptibilidade magnética χ e pelo número magnetoelástico

$$N_B = \frac{\mu_0 H_0^2 r_0^5}{2L^2 \nu}, \quad (8.5)$$

o qual mede a razão entre forças magnéticas e elásticas [229, 230].

Examinando a Eq. (8.4), é possível notar imediatamente que a taxa de crescimento linear não depende do tempo. Consequentemente, a Eq. (8.3) pode ser facilmente integrada. Se $\lambda(n) > 0$ ($\lambda(n) < 0$), o resultado da integração é um crescimento (decaimento) exponencial das amplitudes lineares de perturbação. Também podemos verificar diretamente a dependência da taxa de crescimento linear com o modo n . Para os modos que preservam o formato circular da interface, ou seja, $n = 0$ e $n = 1$, temos que: o modo $n = 0$ (expansão uniforme da interface circular) é marginal ($\lambda(n=0) = 0$), enquanto que o modo $n = 1$ (translação global do centro da interface circular) é instável, uma vez que $2N_B\chi(1+\chi) > 0$. Entretanto, se $n \geq 2$, a estabilidade da interface elástica depende da interação dos dois termos da Eq. (8.4). Perceba que na Eq. (8.4), o único termo desestabilizante é aquele relacionado ao campo magnético radial (termo proporcional à N_B). Em contrapartida, a contribuição relacionada à elasticidade da interface [termo proporcional à $(n^2 - 1)$] atua em conter as deformações da interface.

A Figura 58 ilustra como a taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ varia com o modo n para três valores crescentes do número magnetoelástico N_B , considerando $\chi = 0.5$ e $R = 1$. Pela Fig. 58,

o papel desestabilizante de N_B torna-se bastante evidente: maiores valores de N_B aumentam a largura da banda de modos instáveis e, também, a localização do ponto máximo da taxa de crescimento linear. Logo, por meio da manipulação de N_B , é possível induzir deformações na interface elástica do nosso problema magnetoelástico.

Uma grandeza bastante útil que pode ser calculada numa forma fechada a partir da expressão da taxa de crescimento (8.4) é o modo de maior taxa de crescimento $n_{\max}$ (o modo responsável pela localização dos picos das curvas de $\lambda(n)$). Esta modo é obtido pela condição $[d\lambda(n)/dn]_{n=n_{\max}} = 0$ e dado por

$$n_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{9 + \frac{8}{5} [4N_B \chi (1 + \chi) R^5 - 3]}}. \quad (8.6)$$

Em âmbito linear, o inteiro mais próximo de $n_{\max}$ proporciona uma estimativa para o número de ondulações formadas na interface elástica. Observe que o número de ondulações aumenta tanto com N_B quanto com χ .

Uma outra grandeza de interesse que pode ser extraída da taxa de crescimento linear (8.4) é o valor crítico do número magnetoelástico para o qual o n -ésimo modo torna-se instável. Isto acontece quando $\lambda(n) = 0$, de forma que

$$N_B^{\text{crit}}(n) = \frac{(n^2 - 1)}{2\chi(1 + \chi)R^5} \left[(n^2 + 1) - \frac{5}{2} \right]. \quad (8.7)$$

Estas [Eqs. (8.4)-(8.7)] são basicamente as informações mais relevantes que podem ser extraídas em âmbito puramente linear, ou seja, comportamento da estabilidade de uma interface elástica circular contra pequenas perturbações induzidas pelo campo magnético radial.

Uma outra questão adicional e interessante que pode ser percebida já em âmbito linear é o chamado "limite da célula de Hele-Shaw girante" [195]. Por este termo, queremos dizer o limite para o qual $\chi \rightarrow 0$ de forma que o produto χN_B permanece constante. Neste limite, o comportamento da interface para a gota de ferrofluido sob influência do campo magnético radial numa célula de Hele-Shaw imóvel recai no comportamento de uma gota de fluido não magnético numa célula de Hele-Shaw girante [20, 21]. Esta curiosa conexão entre estes dois sistemas físicos aparentemente não relacionados vem do fato de que em ambos os problemas, magnético e centrífugo, os potenciais escalares são proporcionais à r^2 . Este limite pode ser útil na tentativa de se fazer uma conexão entre o nosso problema magnetoelástico com outras situações existentes para as quais forças elásticas e centrífugas atuam no arranjo espacialmente confinado da célula de Hele-Shaw [231–233].

No cenário da teoria de perturbação linear, as perturbações da interface devem ser pequenas em magnitude ($\zeta \ll R$). Além disso, em âmbito linear, os modos de Fourier n participantes desacoplam [como mostrado pela Eq. (8.3)]. Logo, no regime linear, cada modo participante cresce ou decresce independentemente do que acontece com os outros modos. Assim, a análise linear oferece acesso à estabilidade da interface com respeito à ação de um único modo em particular. Como resultado destas considerações, por meio da descrição linear, apenas dedos

pequenos de formato puramente senoidal podem aparecer na interface elástica. Logo, a análise linear seria capaz de fazer uma mímica do início do aparecimento das instabilidades de enrugamento [197–200] desde que os enrugamentos sejam pequenos e suaves, além de serem descritos como ondulações senoidais ao longo do contorno elástico. Entretanto, uma vez que os enrugamentos crescem em amplitude e seus formatos tornam-se mais complexos (não sendo exatamente senoidais), a descrição linear falha por completo. Nesta mesma linha de pensamento, uma abordagem perturbativa linear também não é capaz de reproduzir o formato dos dobramentos emergentes. Estes dobramentos são estruturas não lineares mais complexas e, às vezes, não periódicas, podendo apresentar formatos mais retorcidos que alcançam maiores amplitudes. As limitações da análise linear são ainda mais graves quando se deseja descrever os padrões de dobramentos assimétricos ou que apresentam uma configuração de dobras múltiplas próximas de se tocarem, como os padrões que aparecem no problema da compressão de uma membrana elástica sobre a superfície de um fluido [197–205].

8.3 Padrões estacionários fortemente não lineares

Na seção 8.2, verificamos que a análise perturbativa linear proporciona informações úteis a respeito da interface elástica nos estágios iniciais da dinâmica do escoamento em célula de Hele-Shaw. Na presente seção, vamos além do âmbito puramente linear do processo de formação de padrões e exploraremos, de maneira não perturbativa, aspectos importantes a respeito do regime fortemente não linear. Mais especificamente, vamos ter acesso às morfologias não lineares dos padrões de enrugamento e dobramento por meio do cálculo das soluções estacionárias (em equilíbrio) para o problema magnetoelástico. Para realizar tal tarefa, empregamos a técnica, detalhadamente desenvolvida no capítulo anterior, da *vortex-sheet* [3, 186, 187, 195]. Esta abordagem nos permite uma análise mais profunda do fenômeno da formação de padrões magnetoelásticos, dando acesso ao limite de grandes deformações e, também, incluindo situações para as quais a interface faz contato consigo mesma. Como no caso da compressão das membranas elásticas sobre substrato fluido [197–205], a capacidade de contemplar a formação de estruturas de interface mais fortemente deformadas e a possível ocorrência de auto-contato é essencial para descrever a instabilidade de dobramento em nosso problema magnetoelástico.

O formalismo da *vortex-sheet* explora a diferença das componentes tangenciais da velocidade de cada fluido na interface. Por meio da utilização da lei de Darcy (7.3) e da magnitude da *vortex-sheet* (7.7), seguindo exatamente os mesmos passos explicitados na seção 7.2.2 do capítulo anterior, obtemos a equação

$$\frac{\Gamma}{2} + A\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \nabla \left[\mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 - \Psi \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (8.8)$$

Esta equação é análoga à Eq. (7.11). Aqui, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ é a velocidade média da interface, a

qual pode ser expressa como uma integral de Birkhoff [3, 186, 187, 195]

$$\mathbf{V}(s,t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{P} \int ds' \frac{\hat{\mathbf{z}} \times [\mathbf{r}(s,t) - \mathbf{r}(s',t)]}{|\mathbf{r}(s,t) - \mathbf{r}(s',t)|^2} \Gamma(s',t), \quad (8.9)$$

onde $\mathbf{P}$ significa um valor principal da integral e $\hat{\mathbf{z}}$ é um vetor unitário na direção perpendicular às placas da célula. Finalmente, escrevendo explicitamente a expressão para Ψ [usando as Eqs. (7.1) e (7.4)] na Eq. (8.8) e considerando que em nosso problema a viscosidade do fluido não magnético é desprezível ($\eta_2 \ll \eta_1 = \eta$), temos que $A = -1$ e a equação adimensional para a *vortex-sheet* pode ser escrita como

$$\frac{\Gamma}{2} = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \partial_s \left[\left(\frac{1}{2} \kappa^3 + \kappa_{ss} \right) - N_B r^2 \chi [1 + \chi (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^2] \right], \quad (8.10)$$

onde $\partial_s = \partial/\partial s$ é a derivada ao longo da direção tangente à interface. Na Eq. (8.10), o termo $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^2$ é remanescente da contribuição da tração magnética normal da Eq. (8.1). Perceba que a Eq. (8.10) é adimensionalizada usando-se o mesmo reescalonamento utilizado nas Eqs. (8.3) e (8.4).

Para descrever a evolução temporal da interface, seria necessário resolver numericamente a complicada equação íntegro-diferencial definida pelas Eqs. (8.10) e (8.9) [3]. Entretanto, nossa intenção é encontrar as soluções não lineares estacionárias da Eq. (8.10), para as quais forças magnéticas e elásticas são igualmente balanceadas na interface fluido-fluido. Nesta situação de equilíbrio, temos que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$ [187]. Adotando $\mathbf{V} = 0$ na Eq. (8.10), considerando a condição de vorticidade nula ($\Gamma = 0$) e escrevendo $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = r\theta_s$ [195], encontramos a equação diferencial ordinária não linear

$$\frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} - 2N_B \chi [rr_s + \chi r^3 (2r_s \theta_s^2 + r\theta_s \theta_{ss})] = 0, \quad (8.11)$$

a qual descreve o formato da interface elástica. A determinação de uma solução analítica fechada e exata é desafiadora, e introduz uma dificuldade considerável para nosso problema. Neste capítulo, resolvemos a Eq. (8.11) numericamente por meio de uma abordagem numérica originalmente apresentada na Ref. [195]. Tais soluções numéricas oferecem uma forma não perturbativa de ganhar acesso aos formatos fortemente não lineares das interfaces em nosso problema de formação de padrões magnetoelásticos. Observe que no limite da célula de Hele-Shaw girante [187, 195, 233], a Eq (8.11) assume o formato consideravelmente mais simples

$$\frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} - 2C rr_s = 0, \quad (8.12)$$

onde $C = N_B \chi$.

Neste ponto, começamos a discussão referente à coleção de padrões representativos fortemente não lineares que surgem por meio das soluções da equação diferencial não linear (8.11). É preciso deixar claro que, nesta seção, todos os padrões apresentados são estacionários (formatos

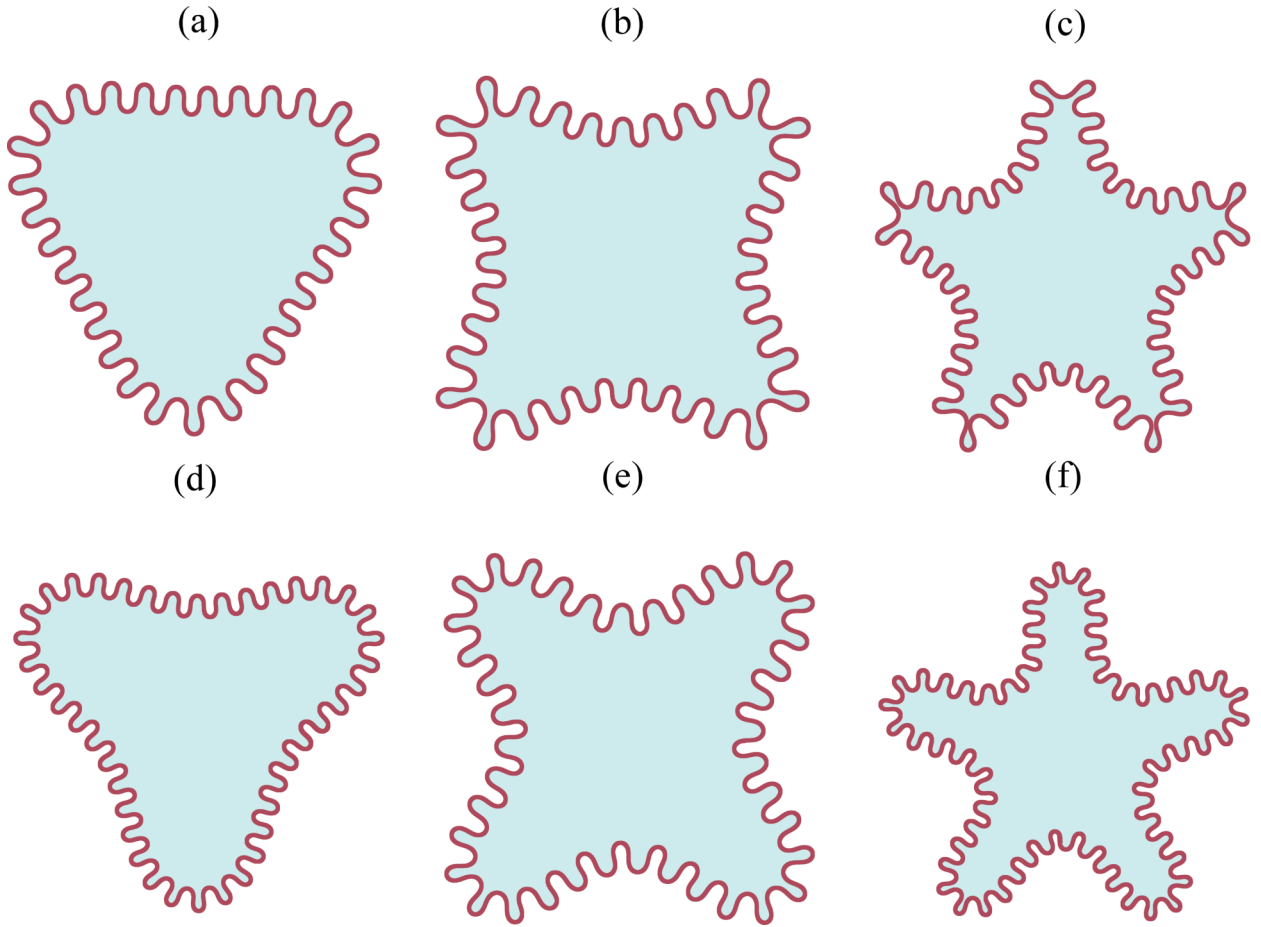


Figura 59 – Painéis superiores: galeria dos padrões magnetoelásticos representativos para $N_B = 48$ e três valores crescentes de susceptibilidade magnética: (a) $\chi = 0.5731$, (b) $\chi = 0.6271$ e (c) $\chi = 0.6547$. Painéis inferiores: padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes às estruturas ilustradas nos painéis superiores. Aqui, (d) corresponde à (a), (e) à (b) e (f) à (c). Os padrões dos painéis inferiores são obtidos mantendo o produto χN_B constante e, além disso, tomando-se o limite $\chi \rightarrow 0$.

de equilíbrio da interface) e correspondem à situação para a qual forças elásticas e magnéticas são igualmente balanceadas na interface. Importantes características morfológicas das soluções estacionárias podem ser obtidas pelo cálculo numérico da Eq. (8.11) e pela manipulação apropriada dos parâmetros de controle relevantes para o problema, ou seja, N_B e χ . Uma vez que esses parâmetros físicos são escolhidos, testamos vários conjuntos diferentes para as condições iniciais, procurando numericamente por padrões aceitáveis (fisicamente relevantes) cujo contorno seja fechado e não se cruze. Para uma discussão mais detalhada sobre a abordagem numérica utilizada para resolver o tipo de equação diferencial dada pela expressão (8.11), assim como a condição de não cruzamento e comensurabilidade das soluções estacionárias, veja as Refs. [195, 234–236].

Começamos nossa análise pela Fig. 59. Na linha superior [Figs. 59(a)-59(c)], apresentamos uma coleção de soluções estacionárias representativas para o problema considerando o valor $N_B = 48$ para o número magnetoelástico, enquanto que a susceptibilidade magnética da gota de ferrofluido assume os seguintes valores crescentes: (a) $\chi = 0.5731$, (b) $\chi = 0.6271$ e (c)

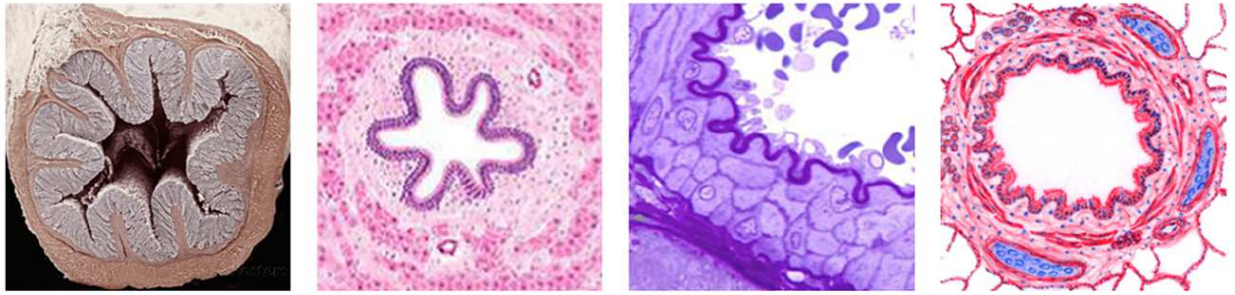


Figura 60 – Padrões enrugados que surgem em sistemas biológicos. Da esquerda para a direita, temos as seguintes seções transversais de partes do corpo humano: cólon, ducto deferente, artéria muscular e brônquios. Figura retirada da Ref. [200].

$\chi = 0.6547$. Em contrapartida, na linha inferior [Figs. 59(d)-59(f)], ilustramos os padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes aos padrões representados pelas Figs. 59(a)-59(c). Os padrões da linha inferior são obtidos mantendo-se o produto χN_B constante e adotando $\chi \rightarrow 0$.

Examinando os painéis superiores da Fig. 59, observamos que estes padrões magnetoelásticos apresentam morfologias bastante distintas: cada padrão de equilíbrio apresenta uma estrutura de envelope na forma de um polígono com lados côncavos, exibindo uma simetria de N arestas (com $N = 3, 4$ e 5). Além disso, é possível notar a formação de um perímetro enrugado ao longo da interface elástica de N arestas. Também é evidente que conforme maiores magnitudes de χ são usadas, há um aumento em N e, também, no número dos pequenos enrugamentos que surgem na interface elástica. Uma outra observação digna de nota é o fato de que, em contraste com os enrugamentos formados nos N lados curvos dos polígonos (estes enrugamentos são em sua maioria senoidais), os pequenos dedos formados nos vértices se assemelham a dobramentos (eles são mais deformados e apresentam formato de gota). Os padrões ilustrados na Fig. 59 lembram as estruturas elásticas enrugadas (em formato de serpentina) que surgem em alguns sistemas biológicos (veja a Fig. 60). Eles também são similares a alguns dos formatos enrugados que aparecem no problema da compressão da membrana elástica sobre substrato fluido [197–205].

Na realidade, conforme χ aumenta, é possível notar que os dobramentos isolados, localizados nos vértices, tornam-se mais distorcidos, favorecendo o contato da interface consigo mesma (veja a parte inferior da Fig. 59(c)). Atribuímos este comportamento ao fato de que os vértices de cada padrão alcançam a maior distância radial a partir do centro da gota de ferrofluido e, desta forma, maximizando a intensidade do campo magnético aplicado nestas locais. Maiores intensidades de campo magnético tendem a induzir deformações locais mais fortes na interface, facilitando o auto-contato. Formação de dobramento e tendência a auto-contato são também favorecidos pela ação do termo de tração magnética no ferrofluido (veja o segundo termo do lado direito da Eq. (8.1) e o termo envolvendo $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^2$ na Eq.(8.10)): o termo de tração magnética é maximizado quando $\hat{\mathbf{n}}$ é colinear à $\hat{\mathbf{e}}_r$, empurrando mais ferrofluido para os dobramentos localizados próximos aos vértices. Estes dobramentos sofrem a ação de forças magnéticas de maiores intensidades,

as quais empurram a ponta dos dobramentos para fora ao longo da direção radial, ultimamente favorecendo o auto-contato da interface. Em resumo, podemos dizer que as Figs. 59(a)-59(c) revelam o surgimento de peculiares estruturas magnetoelásticas, para as quais enrugamentos senoidais igualmente espaçados e deformados dobramentos localizados podem coexistir.

Em contrapartida, examinando os painéis inferiores da Fig. 59, encontramos os padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes às estruturas magnetoelásticas ilustradas nos painéis superiores. Primeiramente, nota-se prontamente que os padrões não magnéticos apresentados nas Figs. 59(d)-59(f) não são dramaticamente diferentes dos magnetoelásticos das Figs. 59(a)-59(c). Afinal de contas, eles também são caracterizados pela formação de estruturas poligonais de N lados que apresentam pequenos enrugamentos ao longo do perímetro. Entretanto, um olhar mais atento revela que existem algumas diferenças importantes. A dissimilaridade mais aparente é o fato de que, diferentemente do que é visto nos painéis superiores da Fig. 59, as pontas das estruturas de envelope (localizadas próximas aos vértices dos polígonos) são mais largas e arredondadas, como podemos verificar pelos painéis inferiores da Fig. 59. Além disso, nos padrões rotacionais, apesar da presença de enrugamentos regulares senoidais, não observamos a formação de dobramentos em formato de gota próximo do vértice dos polígonos. Também vale salientar que o auto-contato da interface não é observado. Estas diferenças nas características morfológicas são simplesmente devido à ausência da contribuição do termo de tração magnética no limite da célula de Hele-Shaw girante, para o qual $\chi \rightarrow 0$. Portanto, para os padrões rotacionais ilustrados nas Figs. 59(d)-59(f), observamos o favorecimento da formação de enrugamentos em relação à criação de dobramentos. Estas conclusões são consistentes com os resultados obtidos na Ref. [233], onde padrões similares em formato de serpentina (família I da Ref. [233]) foram encontrados para o problema não magnético da formação de dedos elásticos induzida por forças centrífugas.

Uma outra situação de interesse está relacionada com as respostas dos padrões a valores consideravelmente maiores para o número magnetoelástico N_B , enquanto que as magnitudes da susceptibilidade magnética χ são significativamente menores do que os valores equivalentes já considerados na Fig. 59. Esta situação é investigada na Fig. 61. Os painéis superiores [Figs. 61(a)-61(c)] ilustram os padrões de interface representativos quando se considera $N_B = 1143$ e três magnitudes diferentes para a susceptibilidade: (a) $\chi = 0.0538$, (b) $\chi = 0.0729$ e (c) $\chi = 0.125$. Similarmente ao que foi feito na Fig. 59, nos painéis inferiores da Fig. 61 [Figs. 61(d)-61(f)], apresentamos os padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante equivalentes às estruturas magnetoelásticas mostradas nos painéis superiores.

Por meio de uma rápida inspeção na Fig. 61, é possível notar que os padrões magnetoelásticos ilustrados nos painéis superiores são significativamente diferentes dos padrões não magnéticos correspondentes expostos nos painéis inferiores. Nos painéis superiores, verificamos a formação de estruturas completamente deformadas, apresentando dedos de diferentes tamanhos e espessuras para os quais processos de dobramento manifestam-se fortemente. Observe que o número de dedos dobrados aumenta conforme χ cresce em magnitude. Também é bastante aparente que a

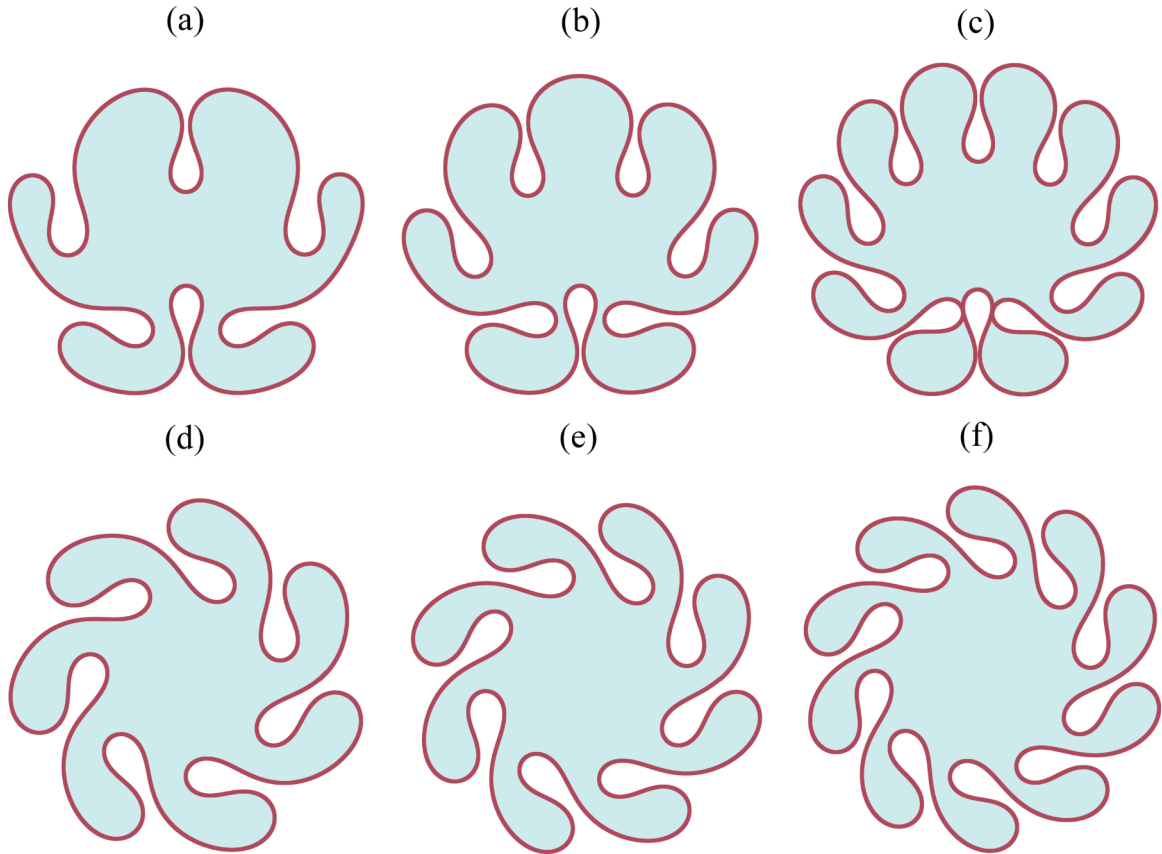


Figura 61 – Painéis superiores: galeria dos padrões magnetoelásticos representativos para $N_B = 1143$ e três valores crescentes de susceptibilidade magnética: (a) $\chi = 0.0538$, (b) $\chi = 0.0729$ e (c) $\chi = 0.125$. Painéis inferiores: padrões do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondentes às estruturas ilustradas nos painéis superiores. Aqui, (d) corresponde à (a), (e) à (b) e (f) à (c). Os padrões dos painéis inferiores são obtidos mantendo o produto χN_B constante e, além disso, tomando-se o limite $\chi \rightarrow 0$.

interface tende a se tocar (auto-contato) para maiores valores de χ [Fig. 61(c)]. Um fato curioso é que, apesar das suas complexidades morfológicas, os padrões expostos nas Figs. 61(a)-61(c) exibem uma clara simetria de reflexão ao longo da direção vertical: enquanto que as dobras do lado direito são retorcidas no sentido anti-horário, as dobras da parte esquerda de cada um dos padrões são retorcidas no sentido horário. Morfologias invaginadas de equilíbrio, bastante similares às estruturas de dobramento mostradas nas Figs. 61(a)-61(c), surgem quando uma membrana elástica é confinada dentro de recipientes rígidos de formato cilíndrico ou esférico [238]. Além disso, estruturas de equilíbrio que dobram-se para dentro, análogas aos padrões magnetoelásticos ilustrados nos painéis superiores da Fig. 61, também ocorrem no problema de empacotamento de um fino anel elástico (planar) confinado dentro de outro anel flexível menor [237] (veja a Fig. 62).

Um conjunto de padrões bastante distinto é revelado nos painéis inferiores da Fig. 61, para os quais é tomado o limite da célula de Hele-Shaw girante dos padrões magnetoelásticos apresentados nos painéis superiores. Nas Figs. 61(d)-61(f), é possível observar a peculiar formação

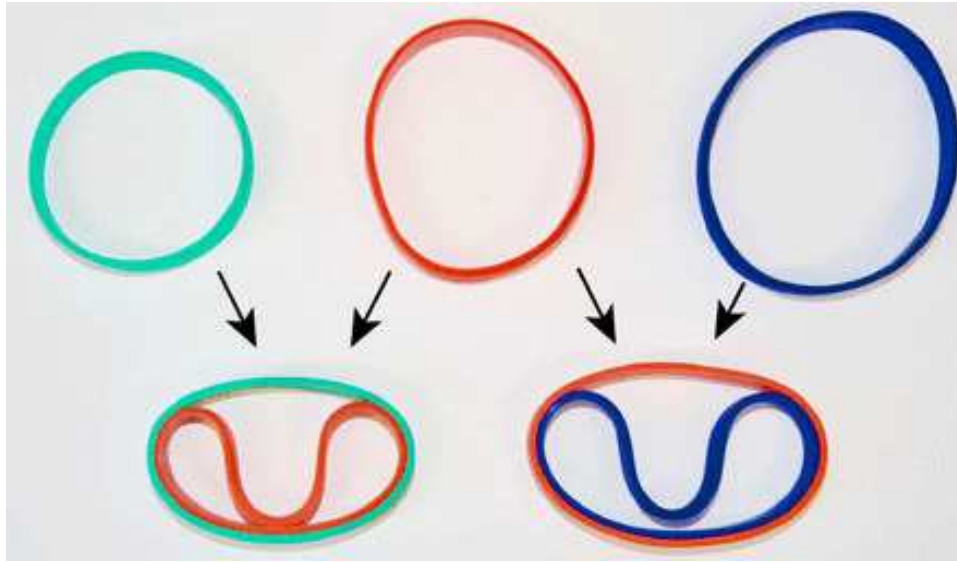


Figura 62 – Ilustração do problema de empacotamento de um fino anel elástico dentro de outro anel flexível menor. Observe que no processo de empacotamento do anel vermelho (azul) dentro do anel verde (vermelho), a estrutura de equilíbrio formada dobra-se para dentro, lembrando os padrões de dobramento apresentados na Fig. 61. Figura retirada da Ref. [237].

de padrões "em redemoinho" com dedos retorcidos. Novamente, por meio do aumento de χ um maior número de dobras retorcidas são produzidas na interface. Além disso, conforme χ aumenta, as bases destas dobras ficam cada vez mais estreitas, favorecendo o auto-contato da interface elástica. Um fato interessante é que, ao contrário do que acontece nos painéis superiores, os padrões são todos retorcidos num mesmo sentido (anti-horário) nos painéis inferiores. Consequentemente, em vez de exibirem uma simetria de reflexão (assim como as estruturas apresentadas nos painéis superiores), os padrões dos painéis inferiores possuem uma simetria de rotação. Apesar destes interessantes resultados, a física por trás desta quebra de simetria quando passamos da situação magnetoelástica para o caso da formação de dedos induzidos por forças centrífugas não é trivial, continua não sendo bem compreendida e requer um estudo adicional. Vale a pena mencionar que tipos similares de padrões de dedos dobrados surgem quando fios elásticos dobram-se na geometria confinada de células de Hele-Shaw tanto imóveis [239, 240] (veja a Fig. 63), quanto girantes [231, 232] (veja a Fig. 64). Adicionalmente, os padrões circulares não magnéticos apresentados nas Figs. 61(d)-61(f) são análogos às estruturas obtidas nas famílias II e III da Ref. [233]. Finalmente, ressaltamos que as estruturas de dobramento exibidas na Fig. 61 não possuem uma correspondência direta aparente com os padrões dobrados normalmente encontrados no problema da compressão lateral de membranas elásticas sobre substrato fluido estudado nas Refs. [197–205].

Vale ressaltar que nós procuramos por outros tipos de padrões para além do intervalo de parâmetros N_B e χ considerados nas Figs. 59 e 61, mas não achamos nenhum tipo de estrutura significativamente distinta das morfologias já apresentas neste capítulo. Exemplos

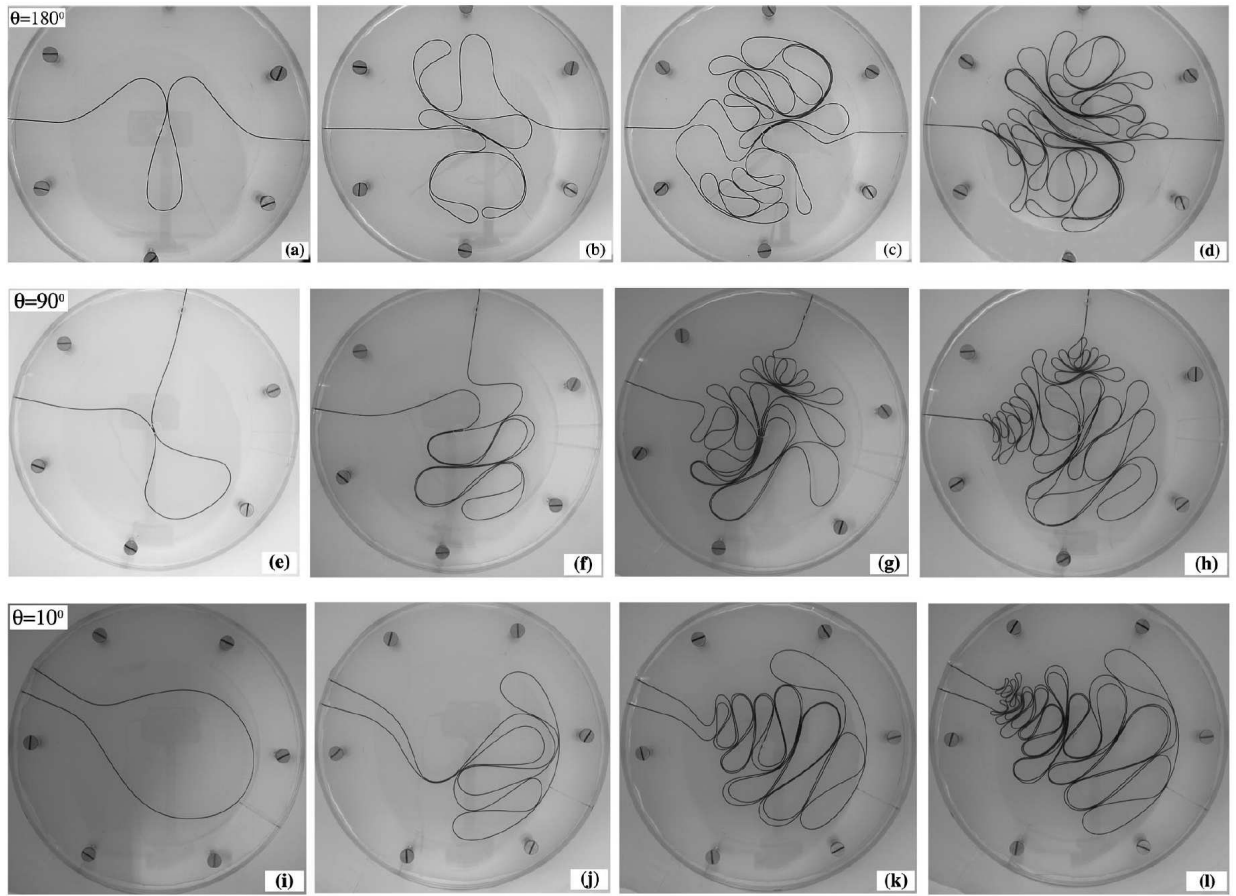


Figura 63 – Padrões de dobramentos que surgem no problema do confinamento de fios elásticos em células de Hele-Shaw imóveis. Figura retirada da Ref. [239].

representativos de padrões modestamente diferentes são ilustrados na Fig. 65, a qual apresenta estruturas morfologicamente relacionadas com aquelas exibidas na Fig. 61. É preciso deixar claro que, apesar de usarmos várias combinações para N_B e χ , não fomos bem sucedidos em encontrar outros tipos de padrões em formato de serpentina dramaticamente diferentes daqueles já mostrados na Fig. 59.

A Fig. 65(a) ilustra um padrão magnetoelástico obtido para $N_B = 929$ e $\chi = 0.1794$, enquanto que Fig. 65(b) exibe a estrutura correspondente no limite da célula de Hele-Shaw girante. O aspecto mais evidente dos padrões apresentados na Fig. 65 é o fato de que eles são morfologicamente mais complexos do que as estruturas da Fig. 61. Por exemplo, quando se compara o padrão magnetoelástico da Fig. 65(a) com a estrutura magnetoelástica equivalente mostrada Fig. 61(c), é possível observar um maior número de dedos e maior ocorrência de eventos de auto-contato da interface no padrão da Fig. 65(a). Quanto ao padrão do limite da célula de Hele-Shaw girante exibido na Fig. 65(b), também podemos dizer que ele é mais complicado do que a estrutura análoga obtida na Fig. 61(f). Em outras palavras, o padrão em redemoinho com dedos retorcidos da Fig. 65(b) possui um número muito maior de dobras em relação à estrutura da Fig. 61(f). Além disso, na Fig. 65(b), os dedos retorcidos estão prestes a se tocarem, enquanto

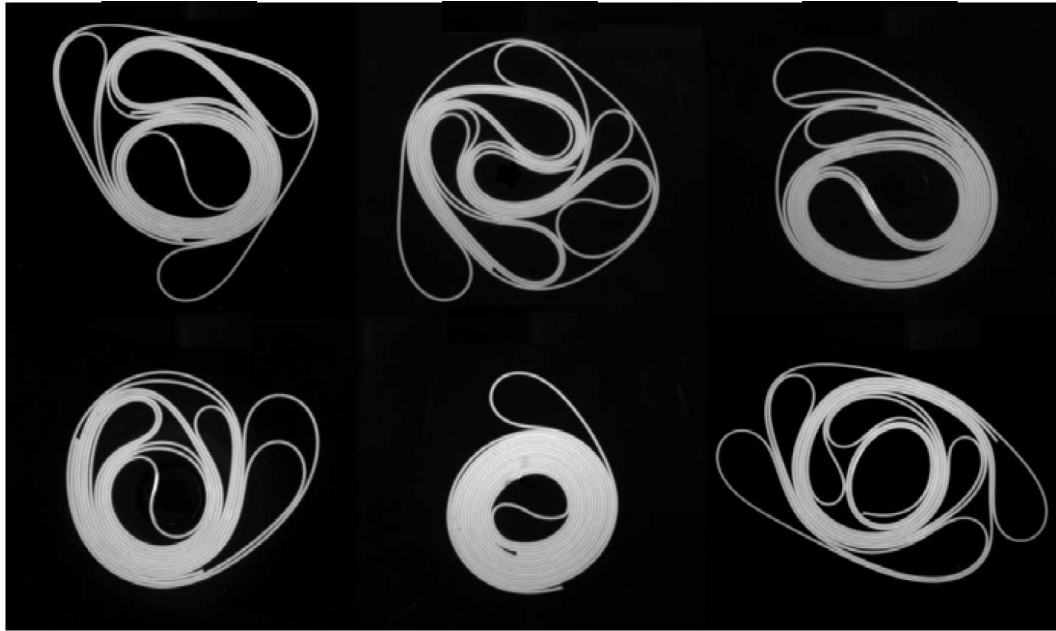


Figura 64 – Neste experimento, um fio elástico encontra-se confinado dentro de uma célula de Hele-Shaw. Mediante rotação, uma série de estruturas dobradas surgem como possíveis configurações de equilíbrio. Figura retirada da Ref. [231].

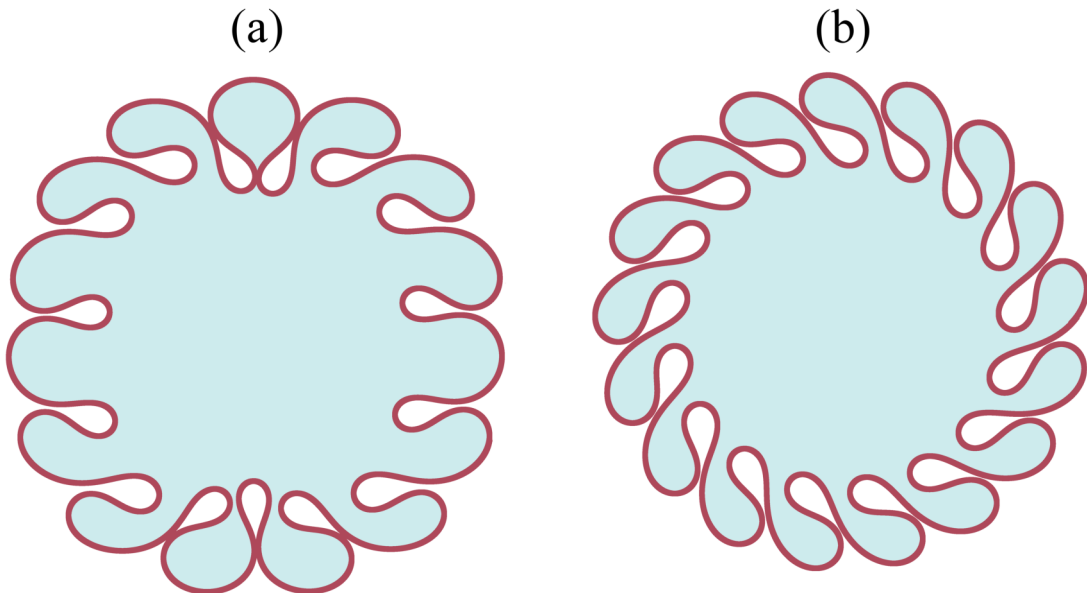


Figura 65 – (a) Padrão magnetoelástico representativo para $N_B = 929$ e $\chi = 0.1794$; (b) Padrão do limite da célula de Hele-Shaw girante correspondente à estrutura ilustrada em (a), produzido mantendo o produto χN_B constante e considerando o limite $\chi \rightarrow 0$.

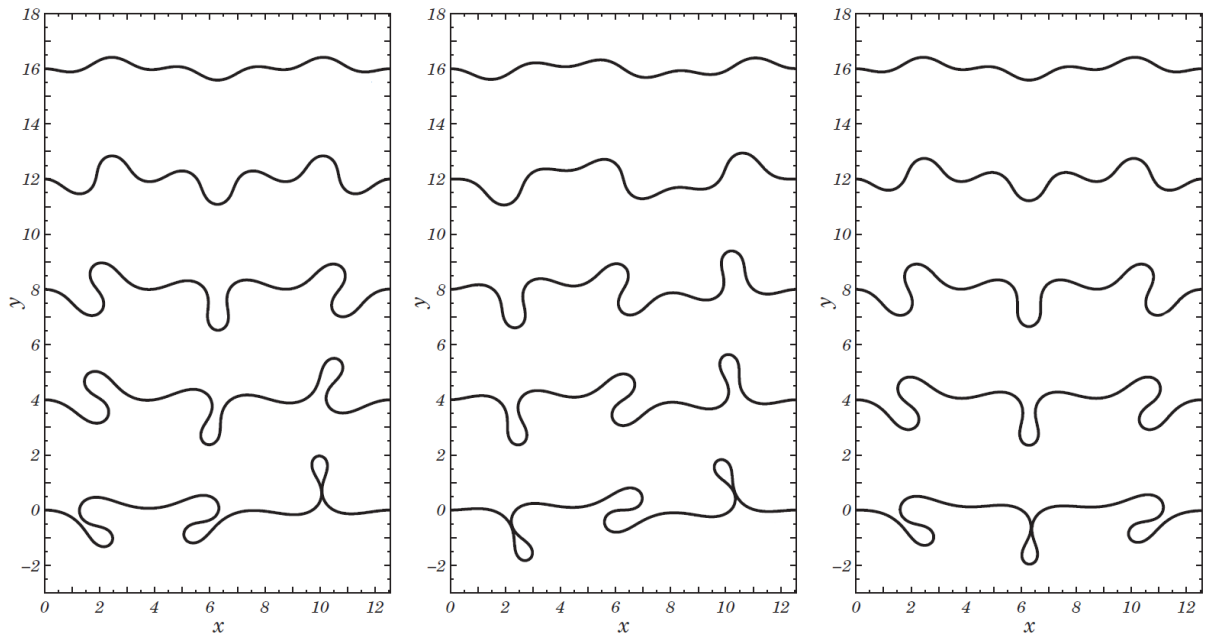


Figura 66 – Estruturas de dobramentos assimétricos encontradas pela Ref. [204] no estudo de interfaces de equilíbrio em membranas elásticas sobre substrato líquido.

que na Fig. 61(f), os dedos conservam uma certa distância entre eles.

Uma característica morfológica mais sutil, mas ainda assim notável, é o fato de que o padrão magnetoelástico da Fig. 65(a) não é completamente simétrico com respeito à linha vertical que divide-o em dois lados (esquerdo e direito). Na realidade, uma assimetria de reflexão quase imperceptível pode ser verificada. Além disso, ao contrário do que foi observado na Fig. 61(c), no padrão magnetoelástico da Fig. 65(a), dedos localizados em um mesmo lado da estrutura são retorcidos em sentidos opostos. Na Fig. 61(c), uma vez que o lado é escolhido, todos os dedos dobram-se em um mesmo sentido. Vale ressaltar que padrões de dobramento assimétricos (contendo dobras distorcidas) também foram identificados na Ref. [204] (veja a Fig. 66) e na Ref. [205] (veja a Fig. 55) para o estudo de interfaces de equilíbrio em membranas elásticas sobre substrato líquido.

9 CONCLUSÃO

A formação de padrões na natureza é um tema que desafia quem o estuda e tenta compreender os vários mecanismos não lineares responsáveis pelo desenvolvimento de tais estruturas, muitas vezes de grande complexidade. Em particular, os padrões formados devido à instabilidade hidrodinâmica de Saffman-Taylor numa célula de Hele-Shaw atraem nossa curiosidade e nosso interesse. No capítulo 1, mostramos de uma maneira simples e qualitativa a formação de padrões em três variantes do problema original de Saffman-Taylor: a injeção radial em célula de Hele-Shaw (de placas paralelas ou com placa superior inclinada), além de processos de levantamento e rotação em célula de Hele-Shaw. Por meio de uma série de ilustrações de experimentos e simulações computacionais, foi possível expor e entender as principais diferenças morfológicas entre os padrões que surgem nesses diversos problemas. Adicionalmente, apresentamos brevemente algumas constatações experimentais e teóricas que nos motivaram a incluir alguns efeitos físicos relevantes nos vários tópicos abordados ao longo desta tese.

O primeiro efeito físico relevante refere-se ao termo alternativo de regularização conhecido como *undercooling* cinético. Apesar da inclusão de efeitos de *undercooling* cinético serem, de certa forma, comuns em pesquisas relacionadas com problemas envolvendo derretimento e congelamento, e, também, em estudos envolvendo descargas elétricas, a consideração deste importante método de regularização em escoamentos em célula de Hele-Shaw tem sido relativamente negligenciada. Motivados principalmente por este fato e, também, devido à natureza *ad hoc* do termo de *undercooling* cinético proposta na literatura, no capítulo 2, nos propomos a preencher esta lacuna na literatura e abordamos a inclusão de efeitos de *undercooling* cinético em fluxos do tipo Hele-Shaw [241]. Duas questões principais foram estudadas neste capítulo: Primeiro, por meio da utilização da lei de Hoffman-Voinov-Tanner, mostramos que a consideração dos efeitos do ângulo de contato dinâmico resulta em uma condição de *undercooling* cinético a qual varia linearmente com a velocidade normal à interface. Além disso, nossa abordagem permitiu relacionar o parâmetro de *undercooling* cinético c com outras propriedades físicas do problema. Um segundo ponto importante evidenciado por nosso trabalho foi o entendimento de como o *undercooling* cinético influencia os processos de formação de padrões no problema de Saffman-Taylor para escoamentos longitudinais e radiais. Nossos resultados fracamente não lineares indicam que, para o fluxo radial, o *undercooling* cinético tende a atrasar (sem suprimir por completo) a ocorrência de eventos de bifurcação de dedos. Além disso, mostramos analiticamente que o *undercooling* cinético favorece o surgimento do fenômeno de bifurcação de dedos em escoamento longitudinal se a velocidade da interface for suficientemente alta.

Ainda na geometria radial da célula de Hele-Shaw, outra curiosa modificação deste sistema consiste na adição de um pequeno gradiente no espaçamento b entre as placas. No capítulo 3, verificamos que tal modificação oferece duas novas configurações além da situação usual

de placas paralelas: a primeira configuração consiste num gradiente negativo, de forma que o espaçamento entre as placas converge lentamente ao longo da direção radial. O caso oposto consiste numa configuração onde o gradiente é positivo, fazendo com que o espaçamento seja lentamente divergente na direção radial. Considerando a injeção radial nestas três diferentes configurações para a célula de Hele-Shaw, nossos resultados fracamente não lineares revelam que, por meio do aumento dos valores para o número de capilaridade, é possível induzir mudanças no comportamento da estabilidade da interface relativa à resposta correspondente da interface no caso da célula de Hele-Shaw uniforme (ou de placas paralelas) [242]. Verificamos que para baixos valores de Ca , a interface para a célula convergente é mais estável em comparação com a interface da célula uniforme, enquanto que para altos valores de Ca , a interface convergente torna-se relativamente mais instável. Curiosamente, estes efeitos são exatamente revertidos para o caso da célula divergente.

Em ambos os trabalhos desenvolvidos nos capítulos 2 e 3, analisamos situações de escoamento considerando o limite de razão de viscosidade infinita. Entretanto, alguns experimentos e simulações numéricas recentes demonstraram que o formato das interfaces fortemente não lineares, para o processo de injeção radial, muda drasticamente quando se considera uma série de valores finitos para a razão de viscosidade. Devido a este fato, o capítulo 4 foi dedicado à análise do desenvolvimento de padrões de dedos viscosos em célula de Hele-Shaw radial para a situação generalizada na qual efeitos de inércia, capilaridade e valores arbitrários de razões de viscosidade e densidade são todos levados em consideração [196]. Se efeitos de inércia são negligenciados, nossos resultados indicam que o formato das estruturas de dedos viscosos possui uma forte dependência na razão de viscosidade e no número de capilaridade. Em particular, mostramos que os dedos proliferam-se, por meio dos mecanismos de bifurcação e quadrifurcação, quando o número de capilaridade é aumentado. Adicionalmente, verificamos que a supressão da estagnação da base dos dedos já pode ser detectada no regime fracamente não linear do escoamento. Em contrapartida, quando a inércia é levada em consideração, dois novos parâmetros de controle surgem, ou seja, a razão de densidade e o número de Reynolds Re . Nestas circunstâncias, fomos capazes de observar o surgimento de padrões bastante distintos daqueles obtidos quando a inércia não foi levada em consideração. Nestes padrões, identificamos a formação de estruturas trifurcadas para as quais os comportamentos de estreitamento e alargamento de dedos são regulados pela razão de densidade e pela capilaridade.

Para processos de levantamento considerando-se o escoamento de fluidos newtonianos em célula de Hele-Shaw, alguns experimentos demonstraram que é possível ocorrer a formação de estruturas de interface bastante ramificadas e de crescimento dendrítico (caracterizadas pelo surgimento do fenômeno de *sidebranching*) quando altas velocidades de levantamento são utilizadas. Em busca de uma explicação teórica adequada que justifique o aparecimento de tais estruturas neste tipo de sistema, no capítulo 5, utilizamos uma lei de Darcy generalizada que inclui os efeitos inerciais no problema do levantamento de fluido newtoniano em célula de Hele-Shaw. Desta forma, nossos resultados teóricos apontam para o fato de que as estruturas dendríticas,

evidenciadas experimentalmente, surgem devido à inércia [165]. Também fomos capazes de mostrar que os efeitos inerciais aumentam a competição entre os dedos que deslocam-se em direção ao centro da célula de Hele-Shaw.

O estudo da dinâmica da competição de dedos em célula de Hele-Shaw que rotaciona com uma velocidade angular dependente do tempo $\Omega(t)$ também foi um tema abordado nesta tese [243]. Foi demonstrado no capítulo 6 que uma análise adequada dos efeitos causados por uma velocidade angular dependente do tempo requer necessariamente a inclusão da inércia. Em âmbito linear, detectamos o desenvolvimento de uma peculiar cascata de modos que torna-se mais instável com o tempo devido à ação de $\Omega(t)$. Além disso, encontramos que efeitos inerciais tendem a estabilizar o sistema por meio da atenuação da magnitude da taxa de crescimento linear e pela introdução de efeitos de atraso na dinâmica da estabilidade linear. Entretanto, os resultados mais significativos relacionados as influências de $\Omega(t)$ e Re na interface fluido-fluido foram revelados somente no regime fracamente não linear. Neste regime, foi demonstrado que a interação entre $\Omega(t)$ e Re afeta significativamente os eventos de competição de dedos, induzindo várias mudanças no comportamento tradicional (para o qual a velocidade angular é constante) da variabilidade do comprimento dos dedos em nosso sistema à medida que as razões de densidade e viscosidade são alteradas.

Por fim, os últimos dois capítulos desta tese concentraram-se no estudo da formação de padrões em líquidos magnéticos espacialmente confinados numa célula de Hele-Shaw. De forma mais específica, no capítulo 7, estudamos as estruturas de interface que surgem para o problema de uma gota de fluido magnético (ferrofluido ou fluido magneto reológico) submetida a um campo magnético radial na geometria de uma célula de Hele-Shaw [220]. Pela utilização do formalismo da *vortex-sheet*, soluções estacionárias exatas, fortemente não lineares e de tensão superficial não nula, foram obtidas para o formato assumido pela gota magnética em nosso problema. Com o objetivo de examinar a estabilidade destas soluções de equilíbrio, empregamos uma abordagem fracamente não linear de modos acoplados. A partir disso, derivamos um conjunto de equações diferenciais acopladas que descreve a evolução temporal das amplitudes de perturbação da interface para os tempos iniciais da dinâmica não linear do sistema. De forma inesperada e surpreendente, nossos resultados fracamente não lineares indicam que, pela consideração do acoplamento de apenas alguns modos de Fourier (n , $2n$, $3n$ e $4n$), é possível obter uma boa concordância entre as soluções perturbativas e exatas para a interface fluido-fluido e, além disso, que estas soluções compartilham das mesmas propriedades dinâmicas. Empregando um processo de linearização padrão próximo das amplitudes estacionárias não triviais do sistema, fomos capazes de demonstrar que todas as soluções exatas obtidas são, de fato, estáveis.

No capítulo 8, estudamos os padrões de interface para uma gota de ferrofluido confinada em uma célula de Hele-Shaw e submetida a um campo magnético radial. Porém, assumimos que, devido a uma reação química, o contorno fluido-fluido torna-se uma camada fina e elástica [244]. Desta forma, analisamos a possibilidade do aparecimento de estruturas de interface enrugadas e dobradas induzidas por meios magnéticos. Utilizando uma teoria perturbativa de estabilidade

linear, mostramos que é possível o desenvolvimento de padrões com pequenas ondulações senoidais, caracterizados pelo surgimento de enrugamentos na interface. Entretanto, a análise de estabilidade linear demonstrou-se incapaz de capturar a formação de estruturas mais complexas em forma de múltiplos dobramentos. Sendo assim, recorremos ao formalismo não perturbativo da *vortex-sheet* e encontramos duas classes distintas para as morfologias das interfaces em equilíbrio. A primeira delas, revelou a formação de padrões em formato de polígonos, possuindo múltiplos e pequenos enrugamentos semelhantes a serpentinas. Conforme a susceptibilidade magnética aumenta, obtemos padrões para os quais é possível observar a coexistência de enrugamentos senoidais e dobramentos semelhantes a gotas de lágrima. Esta coexistência tende a desaparecer no limite da célula de Hele-Shaw girante. A segunda classe de morfologias ilustra padrões muito mais complexos, contendo dobramentos de grande amplitude na interface. Estes padrões apresentam uma evidente simetria de reflexão. Valores mais altos de susceptibilidade facilitam o aumento no número de dobras e, também, os eventos de auto-contato da interface. Por outro lado, para o limite da célula de Hele-Shaw girante, os padrões de redemoinho obtidos apresentam simetria rotacional e todas as dobras são retorcidas num mesmo sentido.

Nesta tese, tivemos a oportunidade de investigar diversas variantes do problema de Saffman-Taylor em conjunto com a inclusão de uma boa variedade de efeitos físicos de relevância, conseguindo extrair importantes resultados que enriquecem a literatura científica neste tema de pesquisa. Finalmente, após a apresentação dos principais resultados obtidos, gostaríamos de mencionar que os mesmos proporcionaram a publicação de sete artigos científicos [165, 196, 220, 241–244].

REFERÊNCIAS

- [1] SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958.
- [2] SAFFMAN, P. Viscous fingering in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 173, p. 73–94, 1986.
- [3] TRYGGVASON, G.; AREF, H. Numerical experiments on Hele-Shaw flow with a sharp interface. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 136, p. 1–30, 1983.
- [4] BENSIMON, D. et al. Viscous flows in two dimensions. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 58, n. 4, p. 977, 1986.
- [5] MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Weakly nonlinear investigation of the Saffman-Taylor problem in a rectangular Hele-Shaw cell. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 12, n. 09, p. 931–949, 1998.
- [6] Para artigos de revisão neste tópico, veja HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987. MCCLOUD, K. V.; MAHER, J. V. Experimental perturbations to Saffman–Taylor flow. *Physics Reports*, Elsevier, v. 260, n. 3, p. 139–185, 1995. CASADEMUNT, J. Viscous fingering as a paradigm of interfacial pattern formation: Recent results and new challenges. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 14, n. 3, p. 809–824, 2004.
- [7] JHA, B.; CUETO-FELGUEROSO, L.; JUANES, R. Fluid mixing from viscous fingering. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 19, p. 194502, 2011.
- [8] SADER, J. E.; CHAN, D. Y.; HUGHES, B. D. Non-Newtonian effects on immiscible viscous fingering in a radial Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, APS, v. 49, n. 1, p. 420, 1994.
- [9] KONDIC, L.; SHELLEY, M. J.; PALFFY-MUHORAY, P. Non-Newtonian Hele-Shaw flow and the Saffman-Taylor instability. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 7, p. 1433, 1998.
- [10] ESLAMI, A.; TAGHAVI, S. Viscous fingering regimes in elasto-visco-plastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 243, p. 79–94, 2017.
- [11] TAN, C.; HOMSY, G. Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement. *Physics of Fluids*, AIP, v. 31, n. 6, p. 1330–1338, 1988.

- [12] CHEN, C.-Y.; MEIBURG, E. Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 371, p. 233–268, 1998.
- [13] PODGORSKI, T. et al. Fingering instabilities of a reactive micellar interface. *Physical Review E*, APS, v. 76, n. 1, p. 016202, 2007.
- [14] NAGATSU, Y. Viscous fingering phenomena with chemical reactions. *Current Physical Chemistry*, Bentham Science Publishers, v. 5, n. 1, p. 52–63, 2015.
- [15] ZHAO, M. et al. Nonlinear simulations of elastic fingering in a Hele-Shaw cell. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 307, p. 394–407, 2016.
- [16] CEBERS, A.; MAYOROV, M. Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable fluids. *Magnetohydrodynamics*, v. 16, n. 1, p. 21–27, 1980.
- [17] JACKSON, D. P.; GOLDSTEIN, R. E.; CEBERS, A. O. Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids. *Physical Review E*, APS, v. 50, n. 1, p. 298, 1994.
- [18] KENT-DOBIAS, J.; BERNOFF, A. J. Energy-driven pattern formation in planar dipole-dipole systems in the presence of weak noise. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 3, p. 032919, 2015.
- [19] SCHWARTZ, L. W. Instability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 1, n. 2, p. 167–169, 1989.
- [20] CARRILLO, L. et al. Experiments in a rotating Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, APS, v. 54, n. 6, p. 6260, 1996.
- [21] ALVAREZ-LACALLE, E.; ORTIN, J.; CASADEMUNT, J. Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 16, n. 4, p. 908–924, 2004.
- [22] CHEN, C.-Y.; HUANG, Y.-S.; MIRANDA, J. A. Diffuse-interface approach to rotating Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 4, p. 046302, 2011.
- [23] RUYER-QUIL, C. Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, Elsevier, v. 329, n. 5, p. 337–342, 2001.
- [24] CHEVALIER, C. et al. Inertial effects on Saffman-Taylor viscous fingering. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 552, p. 83–97, 2006.
- [25] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows. *Physical Review E*, APS, v. 83, n. 6, p. 066312, 2011.

- [26] PARK, C.-W.; HOMSY, G. Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: theory. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 139, p. 291–308, 1984.
- [27] REINELT, D.; SAFFMAN, P. The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, SIAM, v. 6, n. 3, p. 542–561, 1985.
- [28] JACKSON, S. et al. Dynamic-wetting effects in finite-mobility-ratio Hele-Shaw flow. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 2, p. 023021, 2015.
- [29] ZHAO, H.; MAHER, J. Viscous fingering experiments with periodic boundary conditions. *Physical Review A*, APS, v. 42, n. 10, p. 5894, 1990.
- [30] PARISIO, F. et al. Saffman-Taylor problem on a sphere. *Physical Review E*, APS, v. 63, n. 3, p. 036307, 2001.
- [31] AHARONI, H. et al. Internal stresses lead to net forces and torques on extended elastic bodies. *Physical Review Letters*, APS, v. 117, n. 12, p. 124101, 2016.
- [32] BATAILLE, J. Stabilité d'un écoulement radial non miscible. *Revue Inst. Pétrole*, v. 23, p. 1349–1364, 1968.
- [33] WILSON, S. A note on the measurement of dynamic contact angles. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 51, n. 3, p. 532–534, 1975.
- [34] PATERSON, L. Radial fingering in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 113, p. 513–529, 1981.
- [35] RAUSEO, S.; JR, P. B.; MAHER, J. Development of radial fingering patterns. *Physical Review A*, APS, v. 35, n. 3, p. 1245, 1987.
- [36] MAY, S.; MAHER, J. Fractal dimension of radial fingering patterns. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 3, p. 1723, 1989.
- [37] CHEN, J.-D. Radial viscous fingering patterns in Hele-Shaw cells. *Experiments in Fluids*, Springer, v. 5, n. 6, p. 363–371, 1987.
- [38] CHEN, J.-D. Growth of radial viscous fingers in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 201, p. 223–242, 1989.
- [39] THOMÉ, H. et al. The Saffman-Taylor instability: From the linear to the circular geometry. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 1, n. 2, p. 224–240, 1989.
- [40] PRAUD, O.; SWINNEY, H. L. Fractal dimension and unscreened angles measured for radial viscous fingering. *Physical Review E*, APS, v. 72, n. 1, p. 011406, 2005.

- [41] FAST, P.; SHELLEY, M. J. Moore's law and the Saffman-Taylor instability. *J. Comput. Physics*, v. 212, n. 1, p. 1–5, 2006.
- [42] MATHIESEN, J. et al. The universality class of diffusion-limited aggregation and viscous fingering. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 76, n. 2, p. 257, 2006.
- [43] LI, S. et al. Control of viscous fingering patterns in a radial Hele-Shaw cell. *Physical Review Letters*, APS, v. 102, n. 17, p. 174501, 2009.
- [44] DEGREGORIA, A.; SCHWARTZ, L. A boundary-integral method for two-phase displacement in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 164, p. 383–400, 1986.
- [45] MIRANDA, J.; WIDOM, M. Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 120, n. 3-4, p. 315–328, 1998.
- [46] HOWISON, S. Fingering in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 167, p. 439–453, 1986.
- [47] DAI, W.-s.; KADANOFF, L. P.; ZHOU, S.-m. Interface dynamics and the motion of complex singularities. *Physical Review A*, APS, v. 43, n. 12, p. 6672, 1991.
- [48] SIEGEL, M.; TANVEER, S. Singular perturbation of smoothly evolving Hele-Shaw solutions. *Physical Review Letters*, APS, v. 76, n. 3, p. 419, 1996.
- [49] CASADEMUNT, J.; MAGDALENO, F. Dynamics and selection of fingering patterns. Recent developments in the Saffman-Taylor problem. *Physics Reports*, Elsevier, v. 337, n. 1-2, p. 1–35, 2000.
- [50] KING, J. R.; EVANS, J. D. Regularization by kinetic undercooling of blow-up in the ill-posed Stefan problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 65, n. 5, p. 1677–1707, 2005.
- [51] CHEN, S. et al. A simple level set method for solving Stefan problems. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 135, n. 1, p. 8–29, 1997.
- [52] BACK, J. M. et al. The effect of surface tension and kinetic undercooling on a radially-symmetric melting problem. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 229, p. 41–52, 2014.
- [53] BACK, J. M.; MCCUE, S. W.; MORONEY, T. J. Including nonequilibrium interface kinetics in a continuum model for melting nanoscaled particles. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 7066, 2014.
- [54] MISBAH, C.; MÜLLER-KRUMBHAAR, H.; TEMKIN, D. Interface structure at large supercooling. *Journal de Physique I*, EDP Sciences, v. 1, n. 4, p. 585–601, 1991.

- [55] GIBOU, F. et al. A level set approach for the numerical simulation of dendritic growth. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 19, n. 1-3, p. 183–199, 2003.
- [56] MEULENBROEK, B.; EBERT, U.; SCHÄFER, L. Regularization of moving boundaries in a Laplacian field by a mixed Dirichlet-Neumann boundary condition: exact results. *Physical Review Letters*, APS, v. 95, n. 19, p. 195004, 2005.
- [57] BRAU, F. et al. Construction and test of a moving boundary model for negative streamer discharges. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 2, p. 026219, 2008.
- [58] ZHAO, H. et al. Perturbing Hele-Shaw flow with a small gap gradient. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 4, p. 2455, 1992.
- [59] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Finger tip behavior in small gap gradient Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 5, p. 056319, 2010.
- [60] AL-HOUSSEINY, T. T.; TSAI, P. A.; STONE, H. A. Control of interfacial instabilities using flow geometry. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 10, p. 747, 2012.
- [61] JUEL, A. Fluid dynamics: Flattened fingers. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 10, p. 706, 2012.
- [62] WILSON, R. M. Flow geometry controls viscous fingering. *Physics Today*, American Institute of Physics, v. 65, n. 10, p. 15, 2012.
- [63] BONGRAND, G.; TSAI, P. A. Manipulation of viscous fingering in a radially tapered cell geometry. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 6, p. 061101, 2018.
- [64] AL-HOUSSEINY, T. T.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering in tapered Hele-Shaw cells. *Physics of Fluids*, AIP, v. 25, n. 9, p. 092102, 2013.
- [65] JACKSON, S. et al. The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 320, p. 606–632, 2017.
- [66] GORELL, S. B.; HOMSY, G. M. A theory of the optimal policy of oil recovery by secondary displacement processes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 43, n. 1, p. 79–98, 1983; STOKES, J. P. et al. Interfacial stability of immiscible displacement in a porous medium. *Physical Review Letters*, APS, v. 57, n. 14, p. 1718, 1986.
- [67] FAYERS, F. J. *Enhanced Oil Recovery*. Amsterdam: Elsevier, 1981.
- [68] PERUGINI, D.; POLI, G. Viscous fingering during replenishment of felsic magma chambers by continuous inputs of mafic magmas: Field evidence and fluid-mechanics experiments. *Geology*, Geological Society of America, v. 33, n. 1, p. 5–8, 2005.

- [69] BISCHOFBERGER, I.; RAMACHANDRAN, R.; NAGEL, S. R. An island of stability in a sea of fingers: Emergent global features of the viscous-flow instability. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 11, n. 37, p. 7428–7432, 2015.
- [70] JACKSON, S. et al. A boundary element method for the solution of finite mobility ratio immiscible displacement in a Hele-Shaw cell. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 78, n. 9, p. 521–551, 2015.
- [71] BONITO, A.; PICASSO, M.; LASO, M. Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surfaces. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 215, n. 2, p. 691–716, 2006.
- [72] NASE, J.; DERKS, D.; LINDNER, A. Dynamic evolution of fingering patterns in a lifted Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 23, n. 12, p. 123101, 2011.
- [73] SINHA, S.; DUTTA, T.; TARAFDAR, S. Adhesion and fingering in the lifting Hele-Shaw cell: Role of the substrate. *The European Physical Journal E*, Springer, v. 25, n. 3, p. 267–275, 2008.
- [74] BEN-JACOB, E. et al. Experimental demonstration of the role of anisotropy in interfacial pattern formation. *Physical Review Letters*, APS, v. 55, n. 12, p. 1315, 1985.
- [75] ROCHE, H. L. et al. Diffusion-limited-aggregation model for Poisson growth. *Physical Review A*, APS, v. 44, n. 10, p. R6185, 1991.
- [76] SHELLEY, M. J.; TIAN, F.-R.; WLODARSKI, K. Hele-Shaw flow and pattern formation in a time-dependent gap. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 10, n. 6, p. 1471, 1997.
- [77] ROY, S.; TARAFDAR, S. Patterns in the variable Hele-Shaw cell for different viscosity ratios: Similarity to river network geometry. *Physical Review E*, APS, v. 54, n. 6, p. 6495, 1996.
- [78] DERKS, D. et al. Cohesive failure of thin layers of soft model adhesives under tension. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 93, n. 3, p. 1557–1566, 2003.
- [79] SINHA, S. et al. Radially interrupted viscous fingers in a lifting Hele-Shaw cell. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 36, n. 3, p. 297–300, 2003.
- [80] AMAR, M. B.; BONN, D. Fingering instabilities in adhesive failure. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 209, n. 1-4, p. 1–16, 2005.
- [81] LINDNER, A.; DERKS, D.; SHELLEY, M. Stretch flow of thin layers of Newtonian liquids: Fingering patterns and lifting forces. *Physics of Fluids*, AIP, v. 17, n. 7, p. 072107, 2005.

- [82] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Control of radial fingering patterns: A weakly nonlinear approach. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 1, p. 016312, 2010.
- [83] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Determining the number of fingers in the lifting Hele-Shaw problem. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 4, p. 043002, 2013.
- [84] ZHENG, Z.; KIM, H.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering using time-dependent strategies. *Physical Review Letters*, APS, v. 115, n. 17, p. 174501, 2015.
- [85] DAMME, H. V. *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry: Surfaces, Colloids, Polymers*. Chichester: editado por AVNIRS, D. Wiley, p. 199–226, 1989.
- [86] CASADEMUNT, J. Exploring topological singularities with phase-field methods. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 126, n. 10, p. 94, 2011, e referências deste artigo.
- [87] CARRILLO, L.; SORIANO, J.; ORTIN, J. Radial displacement of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 11, n. 4, p. 778–785, 1999.
- [88] CARRILLO, L.; SORIANO, J.; ORTÍN, J. Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 12, n. 7, p. 1685–1698, 2000.
- [89] ÁLVAREZ-LACALLE, E.; ORTÍN, J.; CASADEMUNT, J. Relevance of dynamic wetting in viscous fingering patterns. *Physical Review E*, APS, v. 74, n. 2, p. 025302, 2006.
- [90] ENTOV, V.; ETINGOF, P.; KLEINBOCK, D. Y. On nonlinear interface dynamics in Hele-Shaw flows. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 6, n. 5, p. 399–420, 1995.
- [91] MAGDALENO, F.; ROCCO, A.; CASADEMUNT, J. Interface dynamics in Hele-Shaw flows with centrifugal forces: Preventing cusp singularities with rotation. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 5, p. R5887, 2000.
- [92] CROWDY, D. Theory of exact solutions for the evolution of a fluid annulus in a rotating Hele-Shaw cell. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 60, n. 1, p. 11–36, 2002.
- [93] MCDONALD, N. Generalised Hele-Shaw flow: A Schwarz function approach. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 22, n. 6, p. 517–532, 2011.
- [94] EHRNSTRÖM, M.; ESCHER, J.; MATIOC, B.-V. Well-posedness, instabilities, and bifurcation results for the flow in a rotating Hele-Shaw cell. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 13, n. 2, p. 271–293, 2011.
- [95] GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells. *Physical Review E*, APS, v. 70, n. 6, p. 066308, 2004.

- [96] CHEN, C.-Y.; WANG, S.-W. Interfacial instabilities of miscible fluids in a rotating Hele-Shaw cell. *Fluid Dynamics Research*, IOP Publishing, v. 30, n. 5, p. 315, 2002.
- [97] CHEN, C.-Y.; CHEN, C.-H.; MIRANDA, J. A. Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 4, p. 046306, 2006.
- [98] MIRANDA, J. A.; ALVAREZ-LACALLE, E. Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 72, n. 2, p. 026306, 2005.
- [99] FOLCH, R. et al. Pattern formation and interface pinch-off in rotating Hele-Shaw flows: A phase-field approach. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 5, p. 056305, 2009.
- [100] WATERS, S.; CUMMINGS, L. Coriolis effects in a rotating Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 17, n. 4, p. 048101, 2005.
- [101] WATERS, S. et al. Tissue growth in a rotating bioreactor. Part i: mechanical stability. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, OUP, v. 23, n. 4, p. 311–337, 2006.
- [102] ABIDATE, A. et al. Effects of circular rigid boundaries and Coriolis forces on the interfacial instability in a rotating annular Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 4, p. 046307, 2007.
- [103] ALVAREZ-LACALLE, E.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Coriolis effects on fingering patterns under rotation. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 2, p. 026305, 2008.
- [104] CHEN, C.-Y. et al. Radial viscous fingering in miscible Hele-Shaw flows: A numerical study. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 1, p. 016306, 2008.
- [105] MIRANDA, J. A.; GADÊLHA, H.; DORSEY, A. T. Coriolis effects on rotating Hele-Shaw flows: A conformal-mapping approach. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 6, p. 066306, 2010.
- [106] ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [107] BLUMS, E.; CEBERS, A.; MAIOROV, M. M. *Magnetic Fluids*. New York: de Gruyter, 1997.
- [108] BACRI, J.-C.; PERZYNSKI, R.; SALIN, D. Magnetic liquids. *Endeavour*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 76–83, 1988.
- [109] RINALDI, C. et al. Magnetic fluid rheology and flows. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, Elsevier, v. 10, n. 3-4, p. 141–157, 2005.
- [110] ANDELMAN, D.; ROSENSWEIG, R. E. Modulated phases: review and recent results. *The Journal of Physical Chemistry B*, ACS Publications, v. 113, n. 12, p. 3785–3798, 2008.

- [111] BACRI, J.-C.; ELIAS, F. *Morphogenesis - Origins of Patterns and Shapes*. New York: editado por BOURGINE, P.; LESNE, A. Springer, 2011.
- [112] TORRES-DÍAZ, I.; RINALDI, C. Recent progress in ferrofluids research: novel applications of magnetically controllable and tunable fluids. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 10, n. 43, p. 8584–8602, 2014.
- [113] RABINOW, J. The magnetic fluid clutch. *Electrical Engineering*, IEEE, v. 67, n. 12, p. 1308, 1948.
- [114] GINDER, J. M. *Encyclopedia of Applied Physics*. Weinheim: editado por TRIGG, G. L. VCH, 1996. v. 16, p. 487.
- [115] GINDER, J. M. Behavior of magnetorheological fluids. *Mrs Bulletin*, Cambridge University Press, v. 23, n. 8, p. 26–29, 1998.
- [116] BOSSIS, G. et al. Magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 252, p. 224–228, 2002.
- [117] GENÇ, S.; PHULÉ, P. P. Rheological properties of magnetorheological fluids. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 11, n. 1, p. 140, 2002.
- [118] BARNES, H. A. The yield stress - a review or ‘ $\pi\alpha\nu\tau\alpha\rho\epsilon\iota$ ’ - everything flows? *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 81, n. 1-2, p. 133–178, 1999.
- [119] BONN, D.; DENN, M. M. Yield stress fluids slowly yield to analysis. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 324, n. 5933, p. 1401–1402, 2009.
- [120] OVARLEZ, G.; BARRAL, Q.; COUSSOT, P. Three-dimensional jamming and flows of soft glassy materials. *Nature Materials*, Nature Publishing Group, v. 9, n. 2, p. 115, 2010.
- [121] COUSSOT, P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 211, p. 31–49, 2014.
- [122] SCHERER, C.; NETO, A. M. F. Ferrofluids: properties and applications. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 35, n. 3A, p. 718–727, 2005.
- [123] WANG, Y.-X. J. Superparamagnetic iron oxide based mri contrast agents: Current status of clinical application. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*, AME Publications, v. 1, n. 1, p. 35, 2011.
- [124] MAXWORTHY, T. The nonlinear growth of a gravitationally unstable interface in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 177, p. 207–232, 1987.

- [125] CARDOSO, S. S.; WOODS, A. W. The formation of drops through viscous instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 289, p. 351–378, 1995.
- [126] MEIBURG, E.; HOMSY, G. Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows. II. Numerical simulation. *Physics of Fluids*, AIP, v. 31, n. 3, p. 429–439, 1988.
- [127] TABELING, P.; ZOCCHI, G.; LIBCHABER, A. An experimental study of the Saffman-Taylor instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 177, p. 67–82, 1987.
- [128] ARNEODO, A. et al. Uncovering the analytical Saffman-Taylor finger in unstable viscous fingering and diffusion-limited aggregation. *Physical Review Letters*, APS, v. 63, n. 9, p. 984, 1989.
- [129] ROMERO, L. A. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 1981.
- [130] WEINSTEIN, S. J.; DUSSAN, E.; UNGAR, L. H. A theoretical study of two-phase flow through a narrow gap with a moving contact line: viscous fingering in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 221, p. 53–76, 1990.
- [131] LU, H.-W. et al. A diffuse-interface model for electrowetting drops in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 590, p. 411–435, 2007.
- [132] DALLASTON, M. C.; MCCUE, S. W. Bubble extinction in Hele-Shaw flow with surface tension and kinetic undercooling regularization. *Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 26, n. 6, p. 1639, 2013.
- [133] DALLASTON, M. C.; MCCUE, S. An accurate numerical scheme for the contraction of a bubble in a Hele-Shaw cell. *ANZIAM Journal*, v. 54, p. 309–326, 2013.
- [134] DALLASTON, M. C.; MCCUE, S. W. Corner and finger formation in Hele-Shaw flow with kinetic undercooling regularisation. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 25, n. 6, p. 707–727, 2014.
- [135] GARDINER, B. P. et al. Saffman-Taylor fingers with kinetic undercooling. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 2, p. 023016, 2015.
- [136] HOFFMAN, R. L. A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas systems. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 228–241, 1975.
- [137] VOINOV, O. Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*, Springer, v. 11, n. 5, p. 714–721, 1976.
- [138] TANNER, L. The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 9, p. 1473, 1979.

- [139] COX, R. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 168, p. 169–194, 1986.
- [140] BLAKE, T. D. The physics of moving wetting lines. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 299, n. 1, p. 1–13, 2006.
- [141] BONN, D. et al. Wetting and spreading. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 81, n. 2, p. 739, 2009.
- [142] SHENG, P.; ZHOU, M. Immiscible-fluid displacement: Contact-line dynamics and the velocity-dependent capillary pressure. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 8, p. 5694, 1992.
- [143] ALVAREZ-LACALLE, E. et al. Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering. *Physical Review E*, APS, v. 68, n. 2, p. 026308, 2003.
- [144] BRANDÃO, R.; FONTANA, J. V.; MIRANDA, J. A. Suppression of viscous fingering in nonflat Hele-Shaw cells. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 5, p. 053003, 2014.
- [145] ANJOS, P. H.; MIRANDA, J. A. Influence of wetting on fingering patterns in lifting Hele-Shaw flows. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 10, n. 38, p. 7459–7467, 2014.
- [146] GINGRAS, M.; RÁCZ, Z. Noise and the linear stability analysis of viscous fingering. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 10, p. 5960, 1989.
- [147] CHAPMAN, S.; KING, J. The selection of Saffman-Taylor fingers by kinetic undercooling. *Journal of Engineering Mathematics*, Springer, v. 46, n. 1, p. 1–32, 2003.
- [148] MAXWORTHY, T. The effect of a stabilising gradient on interface morphology. In: *Interfaces for the 21st Century: New Research Directions in Fluid Mechanics and Materials Science*. London: Imperial College Press, 2002.
- [149] PIHLER-PUZOVIĆ, D. et al. Suppression of complex fingerlike patterns at the interface between air and a viscous fluid by elastic membranes. *Physical Review Letters*, APS, v. 108, n. 7, p. 074502, 2012.
- [150] PIHLER-PUZOVIĆ, D. et al. Viscous fingering in a radial elastic-walled Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 849, p. 163–191, 2018.
- [151] CHEN, C.-Y.; WU, W.-L.; MIRANDA, J. A. Magnetically induced spreading and pattern selection in thin ferrofluid drops. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 5, p. 056321, 2010.
- [152] ZHANG, S.-Z. et al. Linear stability analysis of the Hele-Shaw cell with lifting plates. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 1, n. 1, p. 123–127, 1998.

- [153] HASSANI, S. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [154] GUO, H.; HONG, D.; KURTZE, D. Surface-tension-driven nonlinear instability in viscous fingers. *Physical Review Letters*, APS, v. 69, n. 10, p. 1520, 1992.
- [155] GUO, H.; HONG, D. C.; KURTZE, D. A. Dynamics of viscous fingers and threshold instability. *Physical Review E*, APS, v. 51, n. 5, p. 4469, 1995.
- [156] ALVAREZ-LACALLE, E.; CASADEMUNT, J.; ORTÍN, J. Systematic weakly nonlinear analysis of interfacial instabilities in Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 1, p. 016302, 2001.
- [157] BRUSH, L.; SEKERKA, R. A numerical study of two-dimensional crystal growth forms in the presence of anisotropic growth kinetics. *Journal of Crystal Growth*, Elsevier, v. 96, n. 2, p. 419–441, 1989.
- [158] POWER, H. et al. A boundary element study of the effect of surface dissolution on the evolution of immiscible viscous fingering within a Hele-Shaw cell. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 37, n. 10, p. 1318–1330, 2013.
- [159] GONDRET, P.; RABAUD, M. Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 9, n. 11, p. 3267–3274, 1997.
- [160] PLOURABOUÉ, F.; HINCH, E. J. Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 14, n. 3, p. 922–929, 2002.
- [161] HE, A.; BELMONTE, A. Inertial effects on viscous fingering in the complex plane. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 668, p. 436–445, 2011.
- [162] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Inertial effects on rotating Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 83, n. 4, p. 046311, 2011.
- [163] YUAN, Q.; AZAIEZ, J. Inertial effects of miscible viscous fingering in a Hele-Shaw cell. *Fluid Dynamics Research*, IOP Publishing, v. 47, n. 1, p. 015506, 2014.
- [164] YUAN, Q.; AZAIEZ, J. Inertial effects in cyclic time-dependent displacement flows in homogeneous porous media. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Wiley Online Library, v. 93, n. 8, p. 1490–1499, 2015.
- [165] ANJOS, P. H.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Inertia-induced dendriticlike patterns in lifting Hele-Shaw flows. *Physical Review Fluids*, APS, v. 2, n. 1, p. 014003, 2017.
- [166] CONSTANTIN, M.; WIDOM, M.; MIRANDA, J. A. Mode-coupling approach to non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physical Review E*, APS, v. 67, n. 2, p. 026313, 2003.

- [167] FONTANA, J. V.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Radial viscous fingering in yield stress fluids: Onset of pattern formation. *Physical Review E*, APS, v. 87, n. 1, p. 013016, 2013.
- [168] BRUSH, L.; SEKERKA, R.; MCFADDEN, G. A numerical and analytical study of nonlinear bifurcations associated with the morphological stability of two-dimensional single crystals. *Journal of Crystal Growth*, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 89–108, 1990.
- [169] DEBROY, P. P.; SEKERKA, R. F. Weakly nonlinear morphological instability of a cylindrical crystal growing from a pure undercooled melt. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 6, p. 6244, 1996.
- [170] COUDER, Y. *Perspectives in Fluid Dynamics - A Collective Introduction to Current Research*. Cambridge: editado por BATCHELOR, G.K.; MOFFATT, H.K.; WORSTER, M. G. Cambridge University Press, p. 53–104, 2000.
- [171] BUKA, A.; PALFFY-MUHORAY, P.; RACZ, Z. Viscous fingering in liquid crystals. *Physical Review A*, APS, v. 36, n. 8, p. 3984, 1987.
- [172] ZHAO, H.; MAHER, J. Associating-polymer effects in a Hele-Shaw experiment. *Physical Review E*, APS, v. 47, n. 6, p. 4278, 1993.
- [173] KONDIC, L.; PALFFY-MUHORAY, P.; SHELLEY, M. J. Models of non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physical Review E*, APS, v. 54, n. 5, p. R4536, 1996.
- [174] FAST, P. et al. Pattern formation in non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physics of Fluids*, AIP, v. 13, n. 5, p. 1191–1212, 2001.
- [175] FAST, P.; SHELLEY, M. J. A moving overset grid method for interface dynamics applied to non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 195, n. 1, p. 117–142, 2004.
- [176] KABIRAJ, S. K.; TARAFDAR, S. Finger velocities in the lifting Hele-Shaw cell. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 328, n. 3-4, p. 305–314, 2003.
- [177] NASE, J.; LINDNER, A.; CRETON, C. Pattern formation during deformation of a confined viscoelastic layer: From a viscous liquid to a soft elastic solid. *Physical Review Letters*, APS, v. 101, n. 7, p. 074503, 2008.
- [178] TARAFDAR, S. et al. Computer simulation of viscous fingering in a lifting Hele-Shaw cell with grooved plates. *Pramana*, Springer, v. 73, n. 4, p. 743, 2009.
- [179] BOUCHGL, J. et al. Interfacial instability in a time-periodic rotating Hele-Shaw cell. *MATEC Web of Conferences*, v. 16, p. 09004, 2014.
- [180] CEBERS, A. Dynamics of magnetostatic instabilities. *Magnetohydrodynamics*, v. 17, n. 2, p. 3–15, 1981.

- [181] LANGER, S. A.; GOLDSTEIN, R. E.; JACKSON, D. P. Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids. *Physical Review A*, APS, v. 46, n. 8, p. 4894, 1992.
- [182] WHITE, J. et al. Experimental measurements of the nonlinear Rayleigh-Taylor instability using a magnetorheological fluid. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 2, p. 026303, 2010.
- [183] CHEN, C.-Y.; YANG, Y.-S.; MIRANDA, J. A. Miscible ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 1, p. 016314, 2009.
- [184] OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A.; LEANDRO, E. S. Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics, and exact solutions. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 1, p. 016304, 2008.
- [185] LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A.; OLIVEIRA, R. M. Field-induced patterns in confined magnetorheological fluids. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 4, p. 046303, 2010.
- [186] BIRKHOFF, G. Taylor instability and laminar mixing. Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report No. LA-1862, p. 1-76, 1954 (não publicado). Veja também BIRKHOFF, G. Taylor instability: appendices to Report LA-1862. Los Alamos Scientific Laboratory Technical Report No. LA-1927, p. 1-91, 1956 (não publicado).
- [187] ÁLVAREZ-LACALLE, E.; ORTÍN, J.; CASADEMUNT, J. Nonlinear Saffman-Taylor instability. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, n. 5, p. 054501, 2004.
- [188] MAJDA, A. J.; BERTOZZI, A. L. *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [189] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. New York: Addison-Wesley, 1994.
- [190] LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A.; OLIVEIRA, R. M. Stationary shapes of confined rotating magnetic liquid droplets. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 3, p. 036318, 2010.
- [191] LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Field-controlled adhesion in confined magnetorheological fluids. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 4, p. 046313, 2009.
- [192] EWOLDT, R. H. et al. Controllable adhesion using field-activated fluids. *Physics of Fluids*, AIP, v. 23, n. 7, p. 073104, 2011.
- [193] COUSSOT, P. Saffman-Taylor instability in yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 380, p. 363-376, 1999.
- [194] COVEY, G.; STANMORE, B. Use of the parallel-plate plastometer for the characterisation of viscous fluids with a yield stress. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 8, n. 3-4, p. 249-260, 1981.

- [195] LEANDRO, E. S.; OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Geometric approach to stationary shapes in rotating Hele-Shaw flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 237, n. 5, p. 652–664, 2008.
- [196] ANJOS, P. H.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Radial fingering under arbitrary viscosity and density ratios. *Physical Review Fluids*, APS, v. 2, n. 8, p. 084004, 2017.
- [197] GENZER, J.; GROENEWOLD, J. Soft matter with hard skin: From skin wrinkles to templating and material characterization. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 2, n. 4, p. 310–323, 2006.
- [198] LI, B. et al. Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials: a review. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 8, n. 21, p. 5728–5745, 2012.
- [199] BRAU, F. et al. Wrinkle to fold transition: influence of the substrate response. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 34, p. 8177–8186, 2013.
- [200] ZHAO, R.; ZHAO, X. Multimodal surface instabilities in curved film-substrate structures. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 84, n. 8, p. 081001, 2017.
- [201] POCIVAVSEK, L. et al. Stress and fold localization in thin elastic membranes. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 320, n. 5878, p. 912–916, 2008.
- [202] DIAMANT, H.; WITTEN, T. A. Compression induced folding of a sheet: An integrable system. *Physical Review Letters*, APS, v. 107, n. 16, p. 164302, 2011.
- [203] OSHRI, O.; BRAU, F.; DIAMANT, H. Wrinkles and folds in a fluid-supported sheet of finite size. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 5, p. 052408, 2015.
- [204] MARPLE, G. R.; PUROHIT, P. K.; VEERAPANENI, S. Equilibrium shapes of planar elastic membranes. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 1, p. 012405, 2015.
- [205] GORDILLO, L.; KNOBLOCH, E. Fluid-supported elastic sheet under compression: Multifold solutions. *arXiv preprint:1802.09624*, 2018.
- [206] HUDLESTON, P. J.; TREAGUS, S. H. Information from folds: a review. *Journal of Structural Geology*, Elsevier, v. 32, n. 12, p. 2042–2071, 2010.
- [207] MILNER, S.; JOANNY, J.; PINCUS, P. Buckling of Langmuir monolayers. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 9, n. 5, p. 495, 1989.
- [208] KÜCKEN, M.; NEWELL, A. C. Fingerprint formation. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 235, n. 1, p. 71–83, 2005.

- [209] TALLINEN, T.; BIGGINS, J. S.; MAHADEVAN, L. Surface sulci in squeezed soft solids. *Physical Review Letters*, APS, v. 110, n. 2, p. 024302, 2013.
- [210] NELSON, D. R.; PIRAN, T.; WEINBERG, S. *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces*. Singapore: World Scientific, 2004.
- [211] NIJHOUT, H. F.; NADEL, L.; STEIN, D. L. *Pattern Formation in Physical and Biological Systems*. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- [212] BACRI, J.-C. et al. Flattening of ferro-vesicle undulations under a magnetic field. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 33, n. 3, p. 235, 1996.
- [213] WISCHNEWSKI, C.; KIERFELD, J. Spheroidal and conical shapes of ferrofluid-filled capsules in magnetic fields. *Physical Review Fluids*, APS, v. 3, n. 4, p. 043603, 2018.
- [214] NEVEU-PRIN, S. et al. Encapsulation of magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 122, n. 1-3, p. 42–45, 1993.
- [215] SANDRE, O. et al. Shape transitions of giant liposomes induced by an anisotropic spontaneous curvature. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 3, p. 3865, 2000.
- [216] WILHELM, C.; GAZEAU, F.; BACRI, J.-C. Magnetic micromanipulation in the living cell. *Europhysics News*, EDP Sciences, v. 36, n. 3, p. 89–92, 2005, e referências deste artigo.
- [217] SERWANE, F. et al. In vivo quantification of spatially varying mechanical properties in developing tissues. *Nature Methods*, Nature Publishing Group, v. 14, n. 2, p. 181, 2017.
- [218] HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987.
- [219] MCCLOUD, K. V.; MAHER, J. V. Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow. *Physics Reports*, Elsevier, v. 260, n. 3, p. 139–185, 1995.
- [220] ANJOS, P. H.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Fingering patterns in magnetic fluids: Perturbative solutions and the stability of exact stationary shapes. *Physical Review Fluids*, APS, v. 3, n. 4, p. 044002, 2018.
- [221] CANHAM, P. B. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 61–81, 1970.
- [222] HELFRICH, W. Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments. *Zeitschrift für Naturforschung C*, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung, v. 28, n. 11-12, p. 693–703, 1973.

- [223] HELFRICH, W. Size distributions of vesicles: the role of the effective rigidity of membranes. *Journal de Physique*, Société française de physique, v. 47, n. 2, p. 321–329, 1986.
- [224] ZHONG-CAN, O.-Y.; HELFRICH, W. Bending energy of vesicle membranes: General expressions for the first, second, and third variation of the shape energy and applications to spheres and cylinders. *Physical Review A*, APS, v. 39, n. 10, p. 5280, 1989.
- [225] NAGILLA, A.; PRABHAKAR, R.; JADHAV, S. Linear stability of an active fluid interface. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 30, n. 2, p. 022109, 2018.
- [226] POWERS, T. R. Dynamics of filaments and membranes in a viscous fluid. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 82, n. 2, p. 1607, 2010.
- [227] HE, A.; LOWENGRUB, J.; BELMONTE, A. Modeling an elastic fingering instability in a reactive Hele-Shaw flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 72, n. 3, p. 842–856, 2012.
- [228] CARVALHO, G. D.; MIRANDA, J. A.; GADÊLHA, H. Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 5, p. 053006, 2013.
- [229] CEBERS, A.; JAVAITIS, I. Dynamics of a flexible magnetic chain in a rotating magnetic field. *Physical Review E*, APS, v. 69, n. 2, p. 021404, 2004.
- [230] ROPER, M. et al. On the dynamics of magnetically driven elastic filaments. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 554, p. 167–190, 2006.
- [231] BAYART, E. et al. Measuring order in the isotropic packing of elastic rods. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 95, n. 3, p. 34002, 2011.
- [232] BAYART, E.; BOUDAUD, A.; ADDA-BEDIA, M. Tuning the ordered states of folded rods by isotropic confinement. *Physical Review E*, APS, v. 89, n. 1, p. 012407, 2014.
- [233] CARVALHO, G. D.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Stationary patterns in centrifugally driven interfacial elastic fingering. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 6, p. 063009, 2014.
- [234] VASSILEV, V.; DJONDJOROV, P. A.; MLADENOV, I. Cylindrical equilibrium shapes of fluid membranes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 43, p. 435201, 2008.
- [235] VEERAPANENI, S. K. et al. Analytical and numerical solutions for shapes of quiescent two-dimensional vesicles. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 44, n. 3, p. 257–262, 2009.

- [236] GIOMI, L. Softly constrained films. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 34, p. 8121–8139, 2013.
- [237] NAPOLI, G.; GORIELY, A. A tale of two nested elastic rings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 473, n. 2204, p. 20170340, 2017.
- [238] RIM, J. E.; PUROHIT, P. K.; KLUG, W. S. Mechanical collapse of confined fluid membrane vesicles. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Springer, v. 13, n. 6, p. 1277–1288, 2014.
- [239] DONATO, C.; GOMES, M.; SOUZA, R. de. Scaling properties in the packing of crumpled wires. *Physical Review E*, APS, v. 67, n. 2, p. 026110, 2003.
- [240] LIN, Y.; LIN, Y.; HONG, T. Crumpling wires in two dimensions. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 6, p. 067101, 2008.
- [241] ANJOS, P. H.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Kinetic undercooling in Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 4, p. 043019, 2015.
- [242] ANJOS, P. H.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Fingering instability transition in radially tapered Hele-Shaw cells: Insights at the onset of nonlinear effects. *Physical Review Fluids*, APS, v. 3, n. 12, p. 124004, 2018.
- [243] ANJOS, P. H. et al. Rotating Hele-Shaw cell with a time-dependent angular velocity. *Physical Review Fluids*, APS, v. 2, n. 12, p. 124003, 2017.
- [244] ANJOS, P. H. et al. Wrinkling and folding patterns in a confined ferrofluid droplet with an elastic interface. *Physical Review E*, APS, v. 99, n. 2, p. 022608, 2019.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DOS CAMPOS DE VELOCIDADE E PRESSÃO DO CAPÍTULO 6

Neste apêndice, mostramos os passos necessários para se calcular os campos de velocidade e pressão utilizados na obtenção da equação de movimento para as amplitudes de perturbação do problema descrito no capítulo 6. Portanto, as contas apresentadas a seguir devem ser realizadas imediatamente depois das expansões assintóticas dos campos de velocidade [Eq. (6.4)] e pressão [Eq. (6.5)] até primeira ordem em Re^2 .

Substituindo Eqs. (6.4) e (6.5) na Eq. (6.2), e mantendo somente termos de ordem zero em Re^2 , é possível verificar que

$$\beta_j \mathbf{u}_j^{(0)} = -\nabla p_j^{(0)}. \quad (A.1)$$

Esta expressão nada mais é do que a lei de Darcy usual [1, 6], válida para o caso de Re nulo. Logo, o fluxo é irrotacional para a velocidade de ordem zero ($\nabla \times \mathbf{u}_j^{(0)} = 0$) e, considerando a condição de incompressibilidade para $\mathbf{u}_j^{(0)}$ ($\nabla \cdot \mathbf{u}_j^{(0)} = 0$), podemos definir um potencial de velocidade de ordem zero $\mathbf{u}_j^{(0)} \equiv -\nabla \phi_j^{(0)}$. É possível verificar facilmente que este potencial de velocidade de ordem zero $\phi_j^{(0)}$ obedece à equação de Laplace $\nabla^2 \phi_j^{(0)} = 0$. Nestas circunstâncias, a solução para $\phi_j^{(0)}$ em termos das amplitudes de perturbação ζ_n é a mesma daquela para o problema de rotação em célula de Hele-Shaw quando ambos os efeitos de inércia e da velocidade angular dependente do tempo não são levados em consideração [20, 86, 95].

Dando continuidade aos cálculos, é necessário obter a contribuição da velocidade de primeira ordem $\mathbf{u}_j^{(1)}$ em termos de ζ_n . Substituindo Eq. (6.4) e Eq. (6.5) na Eq. (6.2), e mantendo termos até primeira ordem em Re^2 , obtemos

$$\begin{aligned} Re^2 \alpha_j \nabla \left[\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_j^{(0)}|^2 \right] = & \nabla p_j^{(0)} + Re^2 \nabla p_j^{(1)} + \beta_j \left(-\nabla \phi_j^{(0)} + Re^2 \mathbf{u}_j^{(1)} \right) \\ & - Re^2 \alpha_j [\Omega^2 r \hat{\mathbf{r}} - \dot{\Omega} r \hat{\boldsymbol{\theta}}]. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Aplicando o operador rotacional em ambos os lados da Eq. (A.2), uma expressão bem mais simples é obtida

$$\beta_j \nabla \times \mathbf{u}_j^{(1)} = -\alpha_j \dot{\Omega} \nabla \times (r \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (A.3)$$

No entanto, analisando a Eq. (A.3), $\mathbf{u}_j^{(1)}$ pode ser escrita como

$$\beta_j \mathbf{u}_j^{(1)} = -\alpha_j \dot{\Omega} r \hat{\boldsymbol{\theta}} - \nabla \phi_j^{(1)}, \quad (A.4)$$

onde $\phi_j^{(1)} = \phi_j^{(1)}(r, \theta)$ é uma função escalar a ser determinada em breve. Pela Eq. (A.4), é evidente que $\mathbf{u}_j^{(1)}$ não pode ser escrita somente em termos do gradiente de uma função escalar e, portanto, imediatamente caracterizando sua natureza não potencial.

Visando a obtenção de $\phi_j^{(1)}$, tomamos o divergente da Eq. (A.4):

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j^{(1)} = -\frac{\nabla^2 \phi_j^{(1)}}{\beta_j}. \quad (\text{A.5})$$

Além disso, é preciso considerar a equação de continuidade (4.2) e ter em mente o fato de que $\nabla \cdot \mathbf{u}_j^{(0)} = 0$. Desta forma, a Eq. (6.4) implica diretamente em $\nabla \cdot \mathbf{u}_j^{(1)} = 0$ e, conseqüentemente, pela Eq. (A.5), concluímos que $\phi_j^{(1)}$ satisfaz a equação de Laplace ($\nabla^2 \phi_j^{(1)} = 0$). Logo, a solução geral para $\phi_j^{(1)}$ pode ser escrita como

$$\phi_j^{(1)} = \sum_{n \neq 0} \phi_{jn}^{(1)}(t) r^{-1(j+1)|n|} \exp(in\theta). \quad (\text{A.6})$$

Para determinar os coeficientes $\phi_{jn}^{(1)}(t)$ que aparecem na Eq. (A.6) até segunda ordem nas amplitudes de perturbação ζ_n , usamos a condição de contorno cinemática [6, 20]

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = (\mathbf{u}_j \cdot \hat{\mathbf{r}})_{r=\mathcal{R}} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} (\mathbf{u}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]_{r=\mathcal{R}}. \quad (\text{A.7})$$

Perceba que esta equação é exatamente a mesma condição cinemática [Eq. (2.3)] usada em todos os capítulos anteriores, mas agora convenientemente escrita em termos da velocidade $\mathbf{u}_j$. Utilizando a equação anterior, obtemos

$$\phi_{jn}^{(1)} = (-1)^{j+1} i \alpha_j \text{sgn}(n) \dot{\Omega} \zeta_n - i \alpha_j \dot{\Omega} \sum_{n' \neq 0} n' \left[\text{sgn}(nn') + \frac{(-1)^j}{|n|} \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'}. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a expressão resultante para $\phi_j^{(1)}$ na Eq. (A.4), obtemos, finalmente, o campo de velocidade $\mathbf{u}_j^{(1)}$ completamente determinado em termos das amplitudes de perturbação ζ_n .

Uma vez que o campo de velocidade $\mathbf{u}_j^{(1)}$ foi determinado, estamos aptos a calcular as contribuições de ordem zero e de primeira ordem para o campo de pressão p_j . Para obter a pressão de ordem zero, substituímos $\mathbf{u}_j^{(0)} = -\nabla \phi_j^{(0)}$ na Eq. (A.1) e realizamos uma integração. Após negligenciar a constante arbitrária de integração, $p_j^{(0)}$ é escrito como

$$p_j^{(0)} = \beta_j \phi_j^{(0)}. \quad (\text{A.9})$$

Note que aqui ($\text{Re} = 0$), o potencial de velocidade $\phi_j^{(0)}$ e a pressão $p_j^{(0)}$ são grandezas quase idênticas, diferindo somente por β_j .

Em relação à pressão de primeira ordem, procedemos da seguinte forma: substituímos a Eq. (A.4) na Eq. (A.2), agrupamos somente os termos de primeira ordem em Re^2 e integramos, obtendo assim

$$p_j^{(1)} = \alpha_j \left[\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial t} - \frac{3}{5} |\nabla \phi_j^{(0)}|^2 \right] + \alpha_j \Omega^2 \frac{r^2}{2} + \phi_j^{(1)}. \quad (\text{A.10})$$