

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

BRUNO SAMPAIO ALVES

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE PÓRTICOS DE
CONCRETO ARMADO**

Recife
2018

BRUNO SAMPAIO ALVES

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE PÓRTICOS DE
CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientadora: Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso

Coorientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

A474o Alves, Bruno Sampaio.
 Otimização baseada em confiabilidade de pórticos de concreto armado / Bruno Sampaio Alves - 2018.
 120 folhas, il., tabs., e símb.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva.

Coorientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2018.

Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Otimização. 3. Análise de confiabilidade. 4. Concreto armado. 5. Pórtico. 6. Otimização com base em confiabilidade. 7. Análise linear. 8. Análise não linear geométrica. I. Silva, Silvana Maria Bastos Afonso da (Orientadora). II. Motta, Renato de Siqueira (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2018-419

BRUNO SAMPAIO ALVES

**OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE DE PÓRTICOS DE
CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Trabalho aprovado. Recife, 13 de julho de 2018:

**Profa. Dra. Silvana Maria Bastos
Afonso - UFPE**
Orientadora

**Profa. Dra. Sylvia Regina Mesquita
de Almeida - UFG**
Examinadora externa

Prof. Dr. Bernardo Horowitz - UFPE
Examinador interno

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a minha família, que sempre me deu muito apoio para eu correrse atrás dos meus sonhos, em especial ao meu pai Antônio e à minha mãe Fátima, por me darem condições de ter uma boa educação além de, juntamente com o meu irmão Felipe, darem apoio em todos os momentos.

Agradeço a Universidade Federal de Pernambuco e aos professores do programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil por me propiciar uma boa formação acadêmica, em especial à professora Silvana Bastos e ao professor Renato Motta, como professores e orientadores, pela paciência, dedicação além de todo o incentivo. Também agradeço ao professor Paulo Marcelo por me estimular e apoiar quando comecei os estudos a respeito do método dos elementos finitos e a aplicação deste na linguagem Python.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram e motivaram ao longo de todo o mestrado, em especial a Filipe Ximenes pela paciência, dedicação e por me auxiliar diversas vezes na elaboração do código computacional; Eros Lima, Filipe Guedes e Renan Godoy por todo o apoio, motivação e por me ajudarem inúmeras vezes ao longo do curso desta pós-graduação.

Agradeço também a Gabriella Autran e a Halina Salles por todo o carinho e atenção dedicados a me ajudar a reproduzir exemplos extraídos de seus trabalhos.

Sem a contribuição de todos este trabalho não seria teria sido possível.

RESUMO

Tradicionalmente o dimensionamento estrutural de elementos de concreto armado é feito por meio de métodos semi-probabilísticos definidos pela ABNT (2014) que, a grosso modo, adota fatores majoradores para os carregamentos e minoradores para as resistências visando garantir a segurança estrutural. Entretanto, esse procedimento não permite se mensurar o nível de confiabilidade estrutural. Este trabalho, por sua vez, tem como objetivo estudar a otimização com base na análise de confiabilidade de estruturas reticuladas. Esta abordagem permite calcular o grau de confiabilidade, assim como o risco de falha do sistema estrutural e de cada elemento isoladamente. Esta análise será feita calculando a probabilidade de falha da estrutura através da avaliação dos estados limites pelo método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). Por fim, para otimizar os projetos a serem estudados será utilizada a programação quadrática sequencial (SQP) que minimizará o custo total da estrutura de modo a atender às restrições de projeto. Para executar as análises linear e não linear via método dos elementos finitos foi elaborado um código próprio na linguagem Python. As rotinas de confiabilidade e otimização adotadas foram tomadas de pacotes pré-existente também definidos nessa linguagem. Ao fim deste trabalho se fará uma comparação dos resultados obtidos através da otimização determinística obtida por este e outros trabalhos com a otimização estocástica aqui apresentada.

Palavras-chave: Otimização. Análise de confiabilidade. Concreto armado. Pórtico. Otimização com base em confiabilidade. Análise linear. Análise não linear geométrica.

ABSTRACT

Traditionally, the structural design of reinforced concrete elements is done by means of semi-probabilistic methods defined by the ABNT (2014), which, in a general way, adopts factors to increase the loadings and lowers material's resistances in order to guarantee structural safety. This procedure, unfortunately, does not allow to measure the level of structural reliability. This dissertation, however, aims to study the reliability based design optimization on the analysis of frameworks. This approach allows to calculate the level of reliability as well as the risk of failure of the structural system as a whole and of each element individually. This analysis will be done by calculating the reliability index of the structure through the evaluation of the limit states by the first order reliability method (FORM). Finally, to optimize the projects to be presented the sequential quadratic programming (SQP) will be used to minimize the total cost of the structure in order to meet the design constraints. In order to perform linear and nonlinear analysis of frameworks using the finite element method, a code was developed in the Python language. The reliability and optimization routines adopted were taken from pre-existing packages also defined in this language. At the end of this dissertation some results obtained from the deterministic optimization will be compared to the ones obtained from the stochastic optimization here presented.

Keywords: Optimization. Reliability analysis. Reinforced concrete. Framework. Reliability-based design optimization. Linear analysis. Geometric nonlinear analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Deslocamentos nodais.	25
Figura 2 – Exemplo de pórtico espacial.	28
Figura 3 – Esquema de montagem da matriz global.	29
Figura 4 – Esquema de cargas equivalentes para carga distribuída.	31
Figura 5 – Exemplo de análise feita pelos métodos de passo único.	33
Figura 6 – Elemento de pórtico espacial adotado.	35
Figura 7 – Pórtico espacial para validação da análise linear.	38
Figura 8 – Pórtico plano para validação da análise não linear.	41
Figura 9 – Resultados apresentados por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) para o deslocamento d_x do nó 2 para diversos passos de carga.	42
Figura 10 – Deslocamentos nodais.	43
Figura 11 – Pórtico espacial sugerido por Salles, Peters e Mansur (2017).	47
Figura 12 – Estruturas introduzidas no SAP2000 e no pacote desenvolvido.	48
Figura 13 – Exemplo de PDF da distribuição normal.	55
Figura 14 – Exemplo de PDF da distribuição lognormal.	56
Figura 15 – Gráfico da PDF de duas variáveis R, S e da PDF conjunta destas.	59
Figura 16 – Representação do índice de confiabilidade no subespaço das variáveis aleatórias padronizadas.	62
Figura 17 – Figura do exemplo 02 de validação da análise de confiabilidade.	67
Figura 18 – Distribuição de áreas de aço na seção de um pilar.	82
Figura 19 – Layout do código desenvolvido.	84
Figura 20 – Pórtico plano sugerido por Horowitz (2016).	86
Figura 21 – Pórtico plano sugerido por Coêlho et al. (2017).	89
Figura 22 – Pórtico espacial de 4 pavimentos.	96
Figura 23 – Sobrecarga no pórtico espacial de 4 pavimentos.	97
Figura 24 – Vento no pórtico espacial de 4 pavimentos.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo dos deslocamentos do exemplo 01 de validação do código em MEF	39
Tabela 2 – Esforços internos na barra 1 do exemplo 01 de validação do código em MEF	39
Tabela 3 – Esforços internos na barra 2 do exemplo 01 de validação do código em MEF.	40
Tabela 4 – Esforços internos na barra 3 do exemplo 01 de validação do código em MEF	40
Tabela 5 – Comparativos de deslocamentos no nó 2 do exemplo 02 de validação do código em MEF	41
Tabela 6 – Comparativos dos esforços internos na barra 1 do exemplo 02 de validação do código em MEF	42
Tabela 7 – Comparativos dos esforços internos na barra 2 do exemplo 02 de validação do código em MEF	42
Tabela 8 – Comparativo dos deslocamentos do ponto médio da viga de 4 m - exemplo 03 de validação do código em MEF	44
Tabela 9 – Comparativo dos deslocamentos do ponto médio da viga de 6 m - exemplo 03 de validação do código em MEF	44
Tabela 10 – Esforços internos para a viga de 4 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.	44
Tabela 11 – Esforços internos para a viga de 6 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.	45
Tabela 12 – Esforços internos no pilar na origem - exemplo 03 de validação do código em MEF.	45
Tabela 13 – Comparativos dos deslocamentos na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.	49
Tabela 14 – Esforços internos na viga mais solicitada na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.	49
Tabela 15 – Esforços internos no pilar central na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.	50
Tabela 16 – Exemplos funções estado limite	57
Tabela 17 – Comparativo dos resultados para o exemplo 01 de validação da análise de confiabilidade	66
Tabela 18 – Comparativo dos resultados para o exemplo 02 de análise de confiabilidade	67
Tabela 19 – Tabela para cálculo do adimensional χ	81

Tabela 20 – Comparativo dos resultados do exemplo 01 de validação do código de otimização.	85
Tabela 21 – Comparativo dos resultados do exemplo 02 de validação do código de otimização.	86
Tabela 22 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Horowitz (2016) ($\alpha = 1.0$).	88
Tabela 23 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Horowitz (2016) ($\alpha = 0.4$).	88
Tabela 24 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico plano apresentado por Coêlho et al. (2017).	90
Tabela 25 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Coêlho et al. (2017).	91
Tabela 26 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 5 pavimentos.	94
Tabela 27 – Comparativo dos resultados da otimização do pórtico espacial de 5 pavimentos.	94
Tabela 28 – Áreas de aço obtidas para a otimização do pórtico espacial de 5 pavimentos.	95
Tabela 29 – Combinações de carga pórtico espacial de 4 pavimentos.	99
Tabela 30 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 4 pavimentos.	100
Tabela 31 – Resultados da otimização do pórtico espacial de 4 pavimentos.	100
Tabela 32 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 01: definição das variáveis.	102
Tabela 33 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=1.0$	102
Tabela 34 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.4$	102
Tabela 35 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.6$	103
Tabela 36 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.2$	103
Tabela 37 – Fatores de importância - pórtico plano 01: $\alpha=1.0$	104
Tabela 38 – Fatores de importância - pórtico plano 01: $\alpha=0.4$	104
Tabela 39 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 02: definição das variáveis.	107
Tabela 40 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 02: Resultados.	107
Tabela 41 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico espacial: definição das variáveis.	110
Tabela 42 – Comparativo dos resultados RBDO do pórtico espacial de 5 pavimentos.	111
Tabela 43 – Áreas de aço obtidas para a RBDO do pórtico espacial de 5 pavimentos.	111
Tabela 44 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico espacial 4 pavimentos: definição das variáveis.	113

Tabela 45 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 4 pavimentos.	114
Tabela 46 – Resultados da RBDO do pórtico espacial de 4 pavimentos.	114

LISTA DE SÍMBOLOS

$[K]$	Matriz de rigidez
$[K_e]$	Matriz de rigidez de um elemento de barra em coordenadas locais
$[K_f]$	Matriz de redução plástica
$[K_g]$	Matriz de rigidez global
$[K_{ge}]$	Matriz de rigidez de um elemento de barra em coordenadas globais
$[K_{geo}]$	Matriz de rigidez geométrica
$[K_{geo}]_e$	Matriz de rigidez geométrica de um elemento de barra em coordenadas locais
$[K_{gr}]$	Matriz de rigidez global sem as colunas e linhas dos graus de liberdades restringidos
$[K_l]$	Componente linear elástica da matriz de rigidez tangente
$[K_t]$	Matriz de rigidez tangente
$[R_c]$	Matriz de correlação
$[T]$	Matriz rotação
$[\lambda_{3 \times 3}]$	Matriz componente da matriz de rotação
$\{F\}$	Vetor de forças nodais
$\{F_e\}$	Vetor de forças nodais de um elemento de barra em coordenadas locais
$\{F_{e_i}\}$	Esforços internos nos elementos calculados com base na configuração da estrutura ao final da iteração atual
$\{F_{e_{i-1}}\}$	Esforços internos nos elementos calculados na iteração anterior a atual
$\{F_g\}$	Vetor de forças nodais em coordenadas globais
$\{F_{gr}\}$	Vetor de forças nodais em coordenadas globais sem as colunas e linhas dos graus de liberdades restringidos
$\{x\}$	Vetor de deslocamentos
$\{x_e\}$	Vetor dos deslocamentos descrito em relação aos eixos locais de um dado elemento de barra

$\{x_g\}$	Vetor com os deslocamentos descrito em relação aos eixos globais
$\{x_{gr}\}$	Vetor com os deslocamentos descrito em relação aos eixos globais sem as colunas e linhas dos graus de liberdades restringidos
$\{\delta F\}$	Vetor carregamento incremental
$\{\delta F_e\}$	Incremento de esforços internos calculado na iteração atual
$\{\delta x\}$	Vetor deslocamento incremental
A	Área da seção transversal do elemento de barra
B, C e D	Eventos aleatórios quaisquer
E	Módulo de elasticidade ou Módulo de Young
$E(X)$	Função que fornece a média de uma variável aleatória X
F, Φ	Função de Distribuição Acumulada (CDF)
F_k	Esforço solicitante característico
F_m	Esforço solicitante médio
F_x	Esforço axial em um elemento de barra
F_y	Esforço cortante na direção local y em um elemento de barra
F_z	Esforço cortante na direção local z em um elemento de barra
G	Módulo de elasticidade transversal
G_c	Função estado limite
$ImpF_i$	Fator de importância
I_y	Inércia da seção transversal de um elemento de barra em torno do eixo local y
I_z	Inércia da seção transversal de um elemento de barra em torno do eixo local z
J	Constante de torção da seção transversal de um elemento de barra
L	Comprimento do elemento de barra
M_x	Torção em um elemento de barra
M_y	Momento fletor em um elemento de barra em relação ao eixo local y

M_z	Momento fletor em um elemento de barra em relação ao eixo local z
N	Número de amostras
R	Função que calcula uma determinada resistência de algum elemento ou sistema
S	Função que calcula um determinado esforço solicitante de um elemento ou sistema
Var	Variância associado a uma variável aleatória
V	Coefficiente de variação associado a uma variável aleatória
X	Variável aleatória
a	Maior dimensão de seção transversal retangular para cálculo da constante de torção
b	Menor dimensão de seção transversal retangular para cálculo da constante de torção
c, d	Limites de integração
d_x, d_y, d_z	Translações ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente
f	Função densidade de probabilidade (PDF)
f_k	Resistência característica
f_m	Resistência média
f_R	Função densidade de probabilidade associada ao cálculo de uma dada resistência
f_S	Função densidade de probabilidade associada ao cálculo de um dado esforço solicitante
g	funções de desigualdade
g_k	Carga permanente característica
g_m	Carga permanente média
h	funções de igualdade
l	Cosseno diretor do elemento de barra em relação ao eixo x
m	Cosseno diretor do elemento de barra em relação ao eixo y

n	Cosseno diretor do elemento de barra em relação ao eixo z
n_c	Número de vezes de ocorrência de um evento
o	Relação entre cossenos diretores para montar a matriz de rotação
p_f	Probabilidade de falha
t	Tempo
z	Variável aleatória padronizada
α_i	Cosseno diretor de busca
β	Índice de confiabilidade
β_{alvo}	Índice de confiabilidade alvo
γ_c	Peso específico do concreto
γ_g	Coefficiente majorador da carga permanente
γ_q	Coefficiente majorador da carga acidental
μ	Esperança ou média associado a uma variável aleatória
σ	Desvio padrão associado a uma variável aleatória
θ_x, θ_y e θ_z	Rotações em torno dos eixos x , y e z , respectivamente
λ, ϵ	Parâmetros associados à distribuição Lognormal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Considerações gerais	18
1.2	Revisão da literatura	18
1.3	Objetivo	22
1.4	Metodologia	22
1.5	Organização da dissertação	23
2	ANÁLISE ESTRUTURAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS	24
2.1	Definições e conceitos gerais	24
2.2	Equação governante	26
2.3	Análise linear	28
2.4	Análise não linear	30
2.4.1	Método do passo único	32
2.5	Matrizes dos elementos	35
2.6	Implementação computacional	37
2.7	Exemplos de validação	38
2.7.1	Exemplo 01: Análise linear de pórtico espacial	38
2.7.2	Exemplo 02: Análise não linear de pórtico plano	41
2.7.3	Exemplo 03: Análise não linear de pórtico espacial	43
2.8	Aplicações	47
2.8.1	Pórtico espacial de 5 pavimentos	47
3	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	51
3.1	Axiomas da probabilidade	52
3.2	Variáveis estocásticas	53
3.2.1	Funções básicas	53
3.2.2	Parâmetros	53
3.2.2.1	<i>Média ou esperança</i>	54
3.2.2.2	<i>Variância</i>	54
3.2.2.3	<i>Desvio padrão e coeficiente de variação</i>	54
3.3	Distribuições de probabilidade	55
3.3.1	Distribuição Normal	55
3.3.2	Distribuição Lognormal	56
3.4	Função Estado Limite	57
3.5	Análise de confiabilidade	60
3.5.1	Método de Monte Carlo	60

3.5.2	FORM	61
3.6	Análise da importância de variáveis estocásticas	63
3.7	Conversão dos valores semi-probabilísticos para probabilísticos	63
3.7.1	Resistência	64
3.7.2	Carregamento permanente médios	64
3.7.3	Carregamentos acidentais	64
3.8	Implementação computacional	65
3.9	Exemplos de validação	65
3.9.1	Exemplo 01: Momento plástico resistente de uma seção de aço	65
3.9.2	Exemplo 02: Probabilidade de falha no cisalhamento	66
4	OTIMIZAÇÃO	68
4.1	Formulação matemática	70
4.2	Elementos canônicos da otimização	71
4.2.1	Variáveis de projeto	71
4.2.2	Função objetivo	72
4.2.3	Restrições	72
4.3	Metodologia	73
4.3.1	Programação Quadrática Sequencial (SQP)	73
4.4	Otimização com base em confiabilidade	74
4.4.1	Formulação matemática	75
4.4.2	Elementos canônicos	75
4.4.3	Metodologias	76
4.5	Avaliação dos esforços resistentes	77
4.5.1	Esforço cortante resistente	77
4.5.2	Momento fletor resistente - Flexão simples	78
4.5.3	Momento fletor resistente - Flexo-compressão normal	80
4.5.4	Momento fletor resistente - Flexo-compressão oblíqua	81
4.6	Implementação computacional	83
4.6.1	Otimização	83
4.6.2	Otimização com base em confiabilidade	83
4.7	Exemplos de validação	85
4.7.1	Exemplo 01	85
4.7.2	Exemplo 02	85
4.8	Aplicações	86
4.8.1	Pórtico plano - Tensão admissível	86
4.8.2	Pórtico plano - Análise semi-probabilística	88
4.8.3	Pórtico espacial de 5 pavimentos	92
4.8.4	Pórtico espacial de 4 pavimentos	96

5	ESTUDOS DE CASO	101
5.1	Pórtico plano 01	101
5.2	Pórtico plano 02	105
5.3	Pórtico espacial de 5 pavimentos	109
5.4	Pórtico espacial de 4 pavimentos	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
6.1	Desenvolvimentos	115
6.2	Conclusões gerais	116
6.3	Trabalhos futuros	117
	REFERÊNCIAS	118

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma introdução geral sobre os assuntos que serão abordados nesta dissertação e uma breve revisão da literatura dos temas a serem tratados.

1.1 Considerações gerais

Atualmente, os projetos de estruturas de concreto armado no Brasil seguem as prescrições definidas pela norma NBR 6118:2014. O engenheiro lança a estrutura com base na sua experiência de projeto e, com base nesse lançamento inicial, a dimensiona de modo a atender às premissas normativas. No caso de alguma não conformidade o projetista faz os devidos ajustes na distribuição das peças e/ou nas suas geometrias/composições até que as exigências normativas sejam atendidas. Esta metodologia é muito prática e objetiva, entretanto, apresenta alguns pontos que podem ser questionados.

O primeiro ponto diz respeito ao fato de que, ao se atender a todas as restrições da norma está se garantindo a integridade da estrutura, entretanto, não se está garantindo necessariamente que a solução adotada é a mais econômica para o projeto. Pode haver uma outra configuração que também atenda a tais critérios e ainda seja mais econômica que a solução escolhida inicialmente.

O segundo ponto diz respeito ao tipo de análise que a norma recomenda. Tradicionalmente utilizam-se métodos semi-probabilísticos que, a grosso modo, lançam mão de coeficientes majoradores para os carregamentos e minoradores para as resistências, de modo a se evitar fazer análise estatística propriamente dita. Esse procedimento simplifica bastante os cálculos, entretanto, não permite mensurar o grau de confiabilidade das peças nem da estrutura, o que poderia ser um fator a mais a ser considerado no processo de otimização da mesma.

O processo de otimização com base em confiabilidade, por outro lado, permite analisar estes dois pontos tanto para os elementos isoladamente como para a estrutura como um todo. Sua aplicação exige uma boa capacidade de processamento computacional. Porém, trata-se de uma metodologia poderosa que o engenheiro estrutural pode utilizar para agregar qualidade e eficiência ao projeto.

1.2 Revisão da literatura

Muitos trabalhos podem ser encontrados na literatura tanto nacional como internacional que estudam a otimização e/ou análise de confiabilidade de estruturas de concreto armado.

A título de trabalhos envolvendo apenas a otimização de estruturas de concreto armado pode-se destacar os três autores a seguir:

- Sánchez-Olivares e Tomás (2017) aplicou um método heurístico na otimização de seções retangulares de concreto submetidas à flexo-compressão oblíqua seguindo as premissas da norma americana de concreto (ACI) e da norma europeia (Eurocode);
- No estudo de estruturas planas tem-se o trabalho de Jenkins (1992) no qual se executou a otimização de estruturas simulando pontes estaiadas seguindo as premissas também de normas estrangeiras;
- No que tange às normas brasileiras, Coêlho et al. (2017) apresentou a otimização, por meio do algoritmo genético de pórticos planos de concreto armado considerando a não linearidade geométrica da estrutura seguindo as premissas de dimensionamento da norma brasileira de concreto (NBR 6118);
- Por fim, o que diz respeito a análise de pórticos espaciais de concreto armado pode-se destacar o artigo Salles, Peters e Mansur (2017), o qual apresentou a otimização estrutural aplicando também o algoritmo genético a pórticos espaciais de concreto armado seguindo as premissas da NBR 6118.

A respeito da análise de confiabilidade de estruturas isoladamente, destaca-se, em nível internacional, o artigo de Abdelouafi, Benaissa e Abdellatif (2015) que apresentam uma análise de um pórtico espacial de concreto armado admitindo-se o comportamento não linear e sob a influência de uma carga sísmica seguindo as premissas da norma marroquina. A análise estocástica foi feita por dois métodos: momento de primeira ordem (FORM) combinada com a metodologia do *Importance Sampling* (IS) e através de superfícies de respostas, de modo a tentar contornar o excessivo tempo de processamento que advém da análise do FORM aplicado ao método dos elementos finitos.

Ainda no âmbito internacional, o livro de El-Reedy (2012) merece destaque por apresentar um estudo completo com exemplos de aplicações do uso da análise de confiabilidade aplicada a estruturas de concreto armado seguindo as premissas apresentadas pelas normas europeias e americanas. O autor trata desde as definições básicas de variáveis aleatórias e estatística, até a análise de confiabilidade relacionada a efeitos sísmicos e corrosão.

No que diz respeito à análise estatística de acordo com a norma brasileira de concreto, destacam-se o trabalho do professor José Milton de Araújo. Esse autor, no artigo Araújo (2017), aplicou a análise de confiabilidade no dimensionamento, por meio do modelo de bielas e tirantes, de blocos de concreto armado. Esse mesmo autor, no trabalho Araújo (2001), aplicou a análise probabilística ao dimensionamento de alguns pilares seguindo as

premissas da NBR 6118, de modo a avaliar a confiabilidade do dimensionamento desse tipo de elemento por esta norma.

No que tange o processo de otimização com base em confiabilidade, alguns autores estudaram metodologias para aplicação deste procedimento, dos quais pode-se destacar os seguintes trabalhos:

- Liu e Kiureghian (1991) avaliaram a eficiência e a robustez de 5 métodos de otimização na avaliação do FORM para tratar de problemas de análise de confiabilidade que envolvem análises por meio do método dos elementos finitos. Seu objetivo era determinar quais desses métodos era mais adequado para se fazer a análise linear e não linear de problemas de confiabilidade envolvendo elementos finitos. Esse estudo ressaltou a eficiência da utilização da programação quadrática sequencial para esse fim. Reforçando, mais uma vez, a eficiência do método.
- Enevoldsen e Sørensen (1994) fizeram uma extensa análise sobre a aplicação de otimização com base em confiabilidade a sistemas estruturais. Esses autores aplicaram o método dos elementos finitos juntamente com a programação quadrática sequencial e a estratégia para se obter projetos ótimos com segurança à falha. As conclusões sobre esse estudo podem ser estendida facilmente à análise estocástica de estruturas de concreto armado.
- Aoues e Chateauneuf (2008) aplicaram a otimização com base em confiabilidade para dimensionar sistemas estruturais de concreto armado por meio da análise adaptativa do índice de confiabilidade estrutural dos elementos, o qual é alterado conforme se procede o processo de otimização. Esse procedimento melhorou o processo de otimização por ajustar as restrições de modo a se evitar erros na convergência e/ou instabilidade numérica. Entretanto, esse processo levou a um aumento expressivo no tempo computacional.

Diversas aplicações do processo de otimização com base na análise de confiabilidade (*Reliability Based Design Optimization*) podem ser encontradas na literatura, aplicadas não somente à otimização da geometria estrutural, mas também da topologia do projeto como foi apresentado por Mogami et al. (2006).

Estudos diversos aplicaram a RBDO à otimização de estruturas reticuladas, como foi o caso do trabalho Ho-Huu et al. (2016) que aplicou este procedimento para otimizar estruturas de treliças metálicas; e Shayanfar, Abbasnia e Khodam (2014) que aplicaram a mesma metodologia, porém, com o auxílio do algoritmo genético para fazer a otimização de um pórtico plano e duas treliças, uma plana e uma espacial, ambas também metálicas.

Outros autores aplicaram a metodologia de otimização com análise estatística para estruturas de pórticos considerando-se materiais genéricos, como foi o caso de

Pedroso (2017), que aplicou a análise estocástica para avaliar as restrições do problema de otimização, utilizando um algoritmo evolucionário para analisar pórticos bidimensionais e tridimensionais. Além desse trabalho, os autores Liu e Li (2012) analisaram pórticos espaciais com a consideração de diafragma rígido submetidos à excitação dinâmica. Por fim, Motta (2015) apresentou uma análise de pórticos plano e espacial, além de uma placa com furo, analisadas por meio do *Reliability Index Approach* (RIA) e da *Performance Measure Approach* (PMA) aplicados à otimização multiobjetivo e robusta.

Atualmente são poucos os trabalhos que lidam especificamente com a otimização com base em confiabilidade de estruturas de pórticos espaciais de concreto armado aplicando as normas brasileiras vigentes. Muitas vezes restringem-se a aplicar a RBDO a partes da estrutura, como foi feito por Chaves (2004), que na sua dissertação de mestrado apresentou um estudo de otimização da seção e das armaduras de pilares de concreto armado com a análise de confiabilidade baseada nas formulações apresentadas pela NBR 6118.

Nogueira (2005) na sua dissertação fez a otimização com base em confiabilidade de vigas isostáticas, hiperestáticas e de um pórtico plano simples, todos de concreto armado, considerando as não-linearidades física e geométrica da estrutura através do emprego do Método das Superfícies de Respostas. Além desse autor, Almeida (2008), na sua tese de doutorado, aplicou a análise probabilística acoplada a diversos algoritmos de otimização a estruturas de pórticos planos de concreto armado e comparou os resultados obtidos com o ótimo determinístico. Esse mesmo autor atesta ter sido o primeiro a aplicar a programação quadrática sequencial (SQP) à otimização de pórticos planos de concreto armado considerando restrições determinísticas e não-determinísticas, além de incorporar a não linearidade física e geométrica ao problema.

Valdebenito e Schuëller (2011) apresentaram, em seu artigo publicado no jornal *Computers and Structures*, um procedimento para se aplicar a otimização estocástica à análise não linear de duas estruturas planas de concreto armado submetidas a um carregamento dinâmico.

Por fim, no que tange a otimização com base em confiabilidade de estruturas de pórticos espaciais de concreto armado seguindo as prescrições normativas da NBR 6118, pode-se destacar o trabalho de Andrade (2013) que aplicou a otimização estocástica a estruturas planas e espaciais considerando, inclusive, as lajes com o modelo de grelha equivalente, entretanto, limitando-se à análise de um único pavimento isolado.

As razões pelas quais ainda são poucos os trabalhos envolvendo a otimização com base em confiabilidade de estruturas espaciais de concreto armado seguindo as premissas da norma brasileira vigente NBR 6118:2014 fogem ao escopo deste trabalho, mas acredita-se que ausência de normas nacionais que versem sobre a análise de confiabilidade tenha uma certa influência nesse fato. Para contornar essa ausência normativa, este trabalho se baseia nas premissas apresentadas por JCSS (1997) para realizar as análises estatísticas.

1.3 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo executar a otimização com base em confiabilidade de estruturas para pórtico de concreto armado tanto planos quanto espaciais através de um código próprio, devidamente validado com exemplos da literatura e softwares comerciais. Esse código permite que se acople a análise estrutural, tanto linear como não linear, via Método dos Elementos Finitos (MEF) com a análise de confiabilidade e com o otimizador para se avaliar tais estruturas.

1.4 Metodologia

A linguagem de programação Python foi escolhida devido à simplicidade de seu uso e a sua rapidez e eficiência no processamento de operações matriciais. Além disso, a grande quantidade de pacotes disponíveis e o fato desses pacotes serem todos de código aberto (*Open Source*), o que permite que eles sejam estudados, modificados e adaptados para que melhor se adéquem ao seu propósito final, foram determinantes na escolha dessa linguagem para elaboração deste trabalho.

A metodologia empregada na elaboração deste trabalho pode ser descrita como se segue:

1. Desenvolvimento do código para análise linear de pórticos espaciais que seguem os princípios de Bernoulli;
2. Aplicação e validação do código de análise linear;
3. Acoplamento do código desenvolvido para análise estrutural com a rotina para execução da programação quadrática sequencial (SQP) do pacote de otimização `scipy.optimize`;
4. Validação dos resultados obtidos por meio do código com otimização apenas com exemplos da literatura;
5. Acoplamento do código para análise estrutural com o pacote de análise de confiabilidade (PyRe) para fazer a análise de confiabilidade por meio do *First Order Reliability Method*(FORM);
6. Validação dos resultados com a análise de confiabilidade com exemplos da literatura;
7. União dos três códigos aplicação do processo de otimização com base em confiabilidade;
8. Análise dos dados obtidos através dos três códigos acoplados;

9. Implementação da análise não-linear geométrica ao código de análise estrutural e validação;
10. Aplicação do código completo abrangendo a análise não linear com a otimização estocástica para analisar exemplos adaptados da literatura existente.

1.5 Organização da dissertação

Esta dissertação consiste em seis capítulos organizados de forma a se facilitar o entendimento do conteúdo aqui apresentado. Uma breve explicação dos capítulos está apresentada a seguir.

O **Primeiro Capítulo** apresenta uma visão geral da dissertação.

O **Segundo Capítulo** irá abordar a análise estrutural de estruturas reticuladas. Serão apresentadas a equação geral do problema de análise estrutural, as matrizes de rigidez, procedimento para análise linear e não linear e, por fim, uma implementação computacional da teoria apresentada com exemplos de validação do código.

O **Terceiro Capítulo** versa a respeito do procedimento de otimização, mais precisamente sobre a programação quadrática sequencial (SQP) e como empregá-la no processo de otimização com base em confiabilidade. Ao final deste capítulo serão apresentados exemplos de validação do pacote de otimização. Os exemplos de validação do código completo serão apresentados no capítulo seguinte.

O **Quarto Capítulo** dissertará sobre a análise de confiabilidade. Nele serão apresentadas a formulação geral do problema, definição do que é variável aleatória, apresentação dos métodos para avaliação da confiabilidade, apresentação do fator de importância e, por fim, a implementação computacional com os devidos exemplos de validação.

No **Quinto Capítulo** será feito uma breve apresentação do problema de otimização com base em confiabilidade e se fará uma síntese do código desenvolvido.

O **Sexto Capítulo** apresentará os estudos de casos que são o foco do procedimento de otimização com base em confiabilidade desenvolvido neste trabalho. Se iniciará com exemplos mais simples de pórticos planos e se finalizará esta sessão com os exemplos de pórtico espacial.

Por fim, o **Sétimo Capítulo** fará uma recapitulação do que foi visto ao longo deste trabalho, de modo a se tirar as conclusões gerais dos resultados obtidos e, por fim, apresentar sugestões para trabalhos futuros.

Ao fim deste trabalho é apresentada a bibliografia usada como referência para a sua elaboração.

2 ANÁLISE ESTRUTURAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Este capítulo versará sobre a análise estrutural de estruturas reticuladas. Será apresentado toda a formulação matricial envolvida no processo de cálculo dos deslocamentos e esforços internos tanto para análise linear como não linear geométrica desse tipo de estrutura. Toda a formulação aqui apresentada foi desenvolvida com base nos trabalhos de Logan (2011) e McGuire, Gallagher e Ziemian (2000).

Para facilitar o entendimento esta seção está organizada da seguinte forma:

- **Definições e conceitos gerais:** será feita uma breve introdução aos conceitos e definições necessários para se entender a análise estrutural de estruturas reticuladas.
- **Equação governante:** apresenta-se a equação governante do problema, explica-se o procedimento para se montar esta equação e de que formas esta pode ser aplicada para se obter a resposta da estrutura ao carregamento aplicado.
- **Análise linear:** o procedimento adotado para se executar a análise linear de estruturas reticuladas será apresentado.
- **Análise não linear:** serão apresentados os conceitos envolvendo a análise não linear, tipos de não linearidade, metodologias de análise e, por fim, o procedimento adotado neste trabalho para se fazer a análise não linear.
- **Matrizes dos elementos:** nesta seção estão apresentadas as matrizes de rigidez dos elementos de barra assim como a matriz de rotação.
- **Implementação computacional:** serão feitas as considerações referentes ao código desenvolvido para a análise de estruturas reticuladas.
- **Exemplos de validação:** alguns exemplos serão apresentados para comparar os resultados obtidos pelo código com exemplos dos trabalhos de referência e resultados obtidos por software específico.

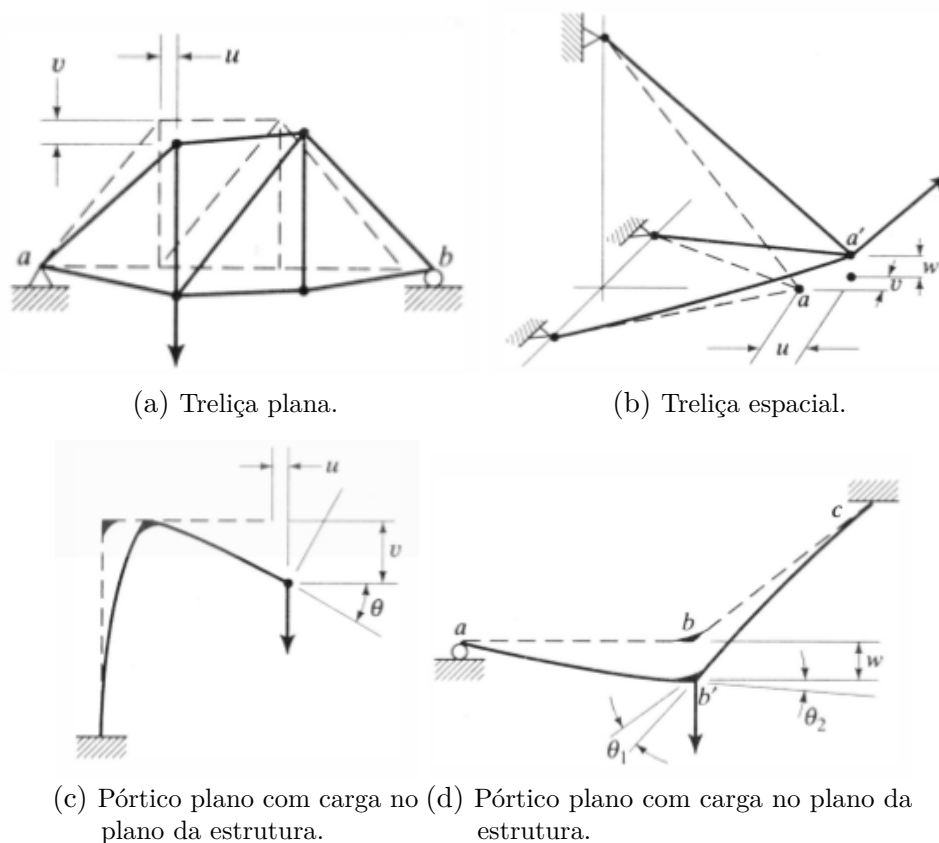
2.1 Definições e conceitos gerais

O método dos elementos finitos é uma generalização do método dos deslocamentos. Ele é um método geral capaz de resolver diversos tipos de problemas como, por exemplo, problemas de fluidos e de sólidos. A aplicação deste método à estruturas de pórticos pode levar ao mesmo sistema de equações, porém, é importante ressaltar que isso trata de um caso muito específico de aplicação desta metodologia.

Como já existe uma literatura extensa no que diz respeito a essa metodologia, o presente trabalho não apresentará o desenvolvimento das formulações destes métodos. Ao invés disso, se fará uma apresentação sucinta dos procedimentos e das formulações envolvidas neste processo.

Neste tipo de análise nós estamos interessados no comportamento dos elementos das estruturas, o qual se caracteriza pelos deslocamentos nodais do sistema devido à ação de cargas pontuais aplicadas nestes nós¹. A Figura 1 apresenta alguns exemplos de deslocamentos em estruturas planas e espaciais, com as estruturas deformadas em linha cheia e os deslocamentos em escala exagerada. Para o caso das treliças (Figura 1 a e b) se tem apenas os deslocamentos x , y e z , e, para o caso dos pórticos (Figura 1 c e d), além destes, se tem as devidas rotações em torno destes eixos.

Figura 1 – Deslocamentos nodais.



Fonte: adaptado de McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 10)

Uma vez calculados os deslocamentos associados a cada coordenada incógnita, a resposta completa da estrutura (reações de apoio e esforços internos nos elementos) pode ser calculada. Cada um desses deslocamentos (e rotações) apresentados é denominado de *grau de liberdade*.

¹ As cargas distribuídas são simuladas através de cargas nodais equivalentes (força e momentos), que provoquem na estrutura o mesmo efeito (deslocamento e esforços internos) que a carga distribuída original.

Para se permitir a análise estrutural algumas simplificações devem ser feitas aos elementos. A geometria complexa da estrutura é representada por elementos mais simples (elementos de barra lineares representando viga e pilares, por exemplo). As resistências destes elementos à deformação são representadas pelas propriedades dos materiais (módulos de elasticidade e coeficiente de *Poisson*), assim como as propriedades geométricas da seção transversal do elemento (área, inércias e constante de torção). As conexões podem ser estipuladas assumindo rigidez nodal para ligações (para o caso de ligações semi-rígidas em estruturas pré-moldadas, por exemplo). Por fim, as condições de apoio devem ser idealizadas assumindo-se como nulos os deslocamentos associados aos graus de liberdade restringidos pela condição de apoio escolhida, por exemplo, uma vez que se idealizou o apoio de um ponto como um engaste, todos os graus de liberdade relacionados a este ponto devem ter deslocamento nulo.

Note que os casos apresentados na Figura 1 representam modelos simplificados e não representam o caso geral de um elemento de barra. O elemento de barra completo que será utilizado neste trabalho possui exatamente 12 graus de liberdades (3 deslocamentos e 3 rotações associado a cada um dos dois nós de cada elemento). Este elemento será ilustrado mais à frente na Figura 6.

2.2 Equação governante

As relações entre forças e deslocamentos de uma estrutura e seus elementos podem ser escritas em termos de equações de rigidez ou equações de flexibilidade. Como este trabalho focará no método dos deslocamentos (também conhecido por método da rigidez), tem-se que a equação governante da análise elástica linear pode ser escrita na forma:

$$\{F\} = [K] \{x\} \quad (2.1)$$

Onde:

- $\{F\}$ é o vetor de forças nodais em coordenadas locais ou globais;
- $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento ou do sistema;
- $\{x\}$ é o vetor com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade em relação aos eixos de referência;

A Equação 2.1 pode ser usada tanto no âmbito global da análise, para calcular os deslocamentos e reações de apoio, como no local, para calcular os esforços internos (esforço normal, cortante, momento fletor, etc) em cada elemento, conforme for o caso.

Apesar da aparência simples da Equação 2.1, esta pode ser utilizada para se estudar a mais complexa das estruturas. A formulação matricial apresentada nada mais é do que uma forma simplificada de se escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \dots + k_{1n}x_n \\ F_2 &= k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + \dots + k_{2n}x_n \\ \vdots &= \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \dots + \quad \vdots \\ F_n &= k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + k_{n3}x_3 + \dots + k_{nn}x_n \end{aligned}$$

Onde os termos aqui apresentados continuam com o mesmo significado que foi anteriormente apresentado, porém, os índices que apareceram representam o grau de liberdade associado àquela força, rigidez ou deslocamento. No caso dos índices relativos às rigidezes, cada coluna está associada a uma força externa (ou momento) necessária(o) para um determinado deslocamento unitário. Por exemplo, os valores na coluna k_{i2} representam as forças externas (ou momentos) necessárias(os) para um deslocamento unitário no grau de liberdade 2.

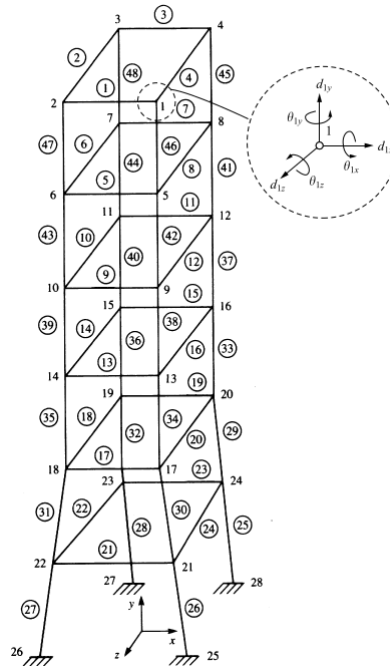
Uma outra forma de se apresentar o vetor de forças, a qual facilita o entendimento de cada índice, é a seguinte:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ \vdots \\ M_{nz} \end{Bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \vdots \\ \theta_{nz} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Onde denota-se F_{ij} para as forças nodais, M_{ij} para os momentos, d_{ij} para as translações e θ_{ij} para as rotações. Os índices i representam o ponto de aplicação da força ou momento e o j representa o grau de liberdade associado àquele carregamento aplicado. A Figura 2 ilustra bem o que a notação adotada representa no modelo.

A formulação apresentada pela Equação 2.1 também pode ser escrita das seguintes formas:

Figura 2 – Exemplo de pórtico espacial.



Fonte: Logan (2011, p. 16)

$$\{F_g\} = [K_g] \{x_g\} \quad (2.3)$$

$$\{F_e\} = [K_e] \{x_e\} \quad (2.4)$$

Onde os índices g e e denotam se os vetores e matrizes estão escritos em relação às coordenadas globais ou em coordenadas locais do elemento de barra, respectivamente. A matriz global, como foi apresentada, é montada com base nas matrizes de rigidez dos elementos que compõem o sistema, conforme será apresentado mais à frente.

2.3 Análise linear

A metodologia adotada para se executar a análise linear das estruturas reticuladas foi a do Método dos Elementos Finitos (MEF). Como foi dito anteriormente, este método se baseia na formulação do método da rigidez e sua equação governante foi apresentada na seção anterior.

Diversos tipos de elementos de barras com inúmeros graus de liberdades associados podem ser gerados pela formulação do MEF. A definição do tipo de elemento, entretanto, implicará na discretização que o usuário deve utilizar no problema (LOGAN, 2011). Como este trabalho se restringirá aos elementos de barras com 12 graus de liberdade, os comentários que se farão aqui se restringirão a este.

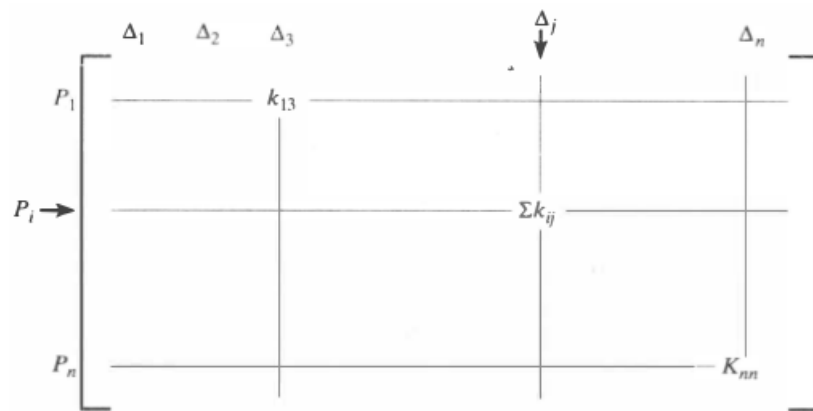
Uma vez que se definiu o tipo de elemento a ser utilizado na análise, pode-se proceder com o seguinte procedimento de análise.

1. **Discretizar.** Uma vez que se definiu o tipo de elemento a ser utilizado na análise, o usuário deve definir o nível de discretização que deve ser adotado para a estrutura de modo a se garantir a precisão desejada nos resultados obtidos.
2. **Calcular matriz de rigidez dos elementos.** Com base nas propriedades dos materiais e geométricas do elemento, calcula-se a matriz de rigidez em coordenadas locais de cada elemento. Esta matriz está apresentada na sessão seguinte.
3. **Calcular matriz de rigidez global.** Com a matriz de rigidez local de cada elemento, pode-se convertê-la para as coordenadas globais, para que todas fiquem escritas em função dos mesmos eixos, para em seguida gerar a matriz de rigidez global do sistema. A matriz de rigidez de cada elemento em coordenadas globais será notada como $[k_{ge}]$ e seus elementos serão notados como $k_{ge_{ij}}$, onde i designará à força ou momento referente àquela posição da matriz e j ao grau de liberdade associado. Os elementos da matriz de rigidez global, portanto, serão dados pela soma desses elementos, como apresentado a seguir.

$$k_{g_{ij}} = \sum k_{ge_{ij}} \quad (2.5)$$

Deste modo, o processo de formulação da matriz de rigidez global do sistema pode ser ilustrado como apresentado na Figura 3. Onde Δ representa os deslocamentos nodais e P as forças, de acordo com a notação do autor.

Figura 3 – Esquema de montagem da matriz global.



Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 40)

4. **Introduzir condições de contorno.** Idealizam-se os apoios adotando-se como nulo os deslocamentos restringidos e remove-se, tanto da matriz de rigidez global como do vetor carregamento global, os elementos cujo índice referem-se a esses deslocamentos.²
5. **Resolver problema para os deslocamentos desconhecidos.** Uma vez que foi aplicada as condições de contorno ao problema, resolve-se o seguinte sistema para se encontrar os deslocamentos.

$$\{F_{gr}\} = [K_{gr}] \{x_{gr}\} \quad (2.6)$$

Onde os índices gr indicam que estamos nos referindo às matrizes globais do sistema sem as linhas e colunas referentes aos deslocamentos restringidos.

6. **Calcular os esforços internos nos elementos.** Uma vez calculados os deslocamentos globais da estrutura, pode-se identificar os deslocamentos nodais referentes aos nós de cada elemento. De posse dessa informação, pode-se então calcular os esforços internos em cada elemento seguindo a seguinte adaptação da Equação 2.4:

$$\{F_e\} = [K_e] \{x_e\} \quad (2.7)$$

Note que x_e é um vetor 12x1 com os deslocamentos da estrutura associados aos graus de liberdades do elemento de barra analisado, escrito em relação aos eixos locais deste elemento.

7. **Interpretar os resultados.** É aqui onde o engenheiro estrutural irá analisar os resultados obtidos para se proceder com o dimensionamento da estrutura.

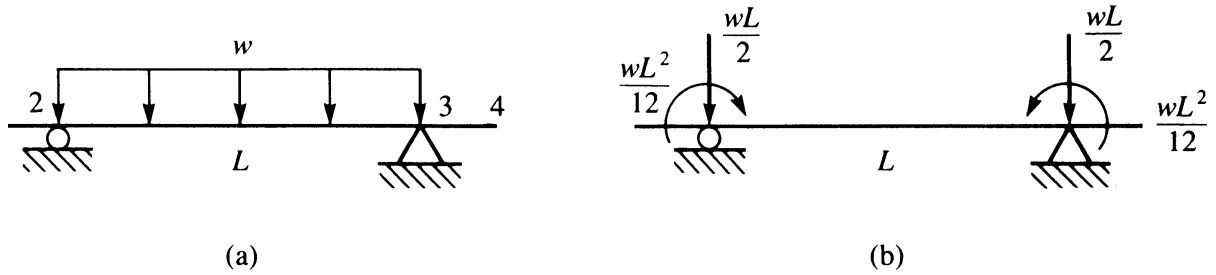
É importante salientar que, no que diz respeito aos carregamentos distribuídos, normalmente se convencionou substituir esses carregamentos por um conjunto de esforços nodais equivalentes (forças e momentos) aplicados nos nós de cada barra sujeita à carga distribuída. A Figura 4 ilustra esse procedimento.

2.4 Análise não linear

A grande maioria das estruturas do campo de engenharia civil apresentam um comportamento linear elástico. Exceções são feitas para estruturas muito esbeltas como,

² Outra metodologia possível seria a de multiplicar os elementos da diagonal da matriz de rigidez global da estrutura referente aos graus restringidos por um número grande para se simular o comportamento de um apoio fixo. Este procedimento, contudo, não foi aqui adotado pelo fato de que, além de ser um procedimento simples, a remoção das linhas e colunas reduz a escala do problema, o que diminui o tempo computacional.

Figura 4 – Esquema de cargas equivalentes para carga distribuída.



Fonte: Logan (2011, p. 176)

por exemplo, estruturas estaiadas, em arcos, edificações altas e estruturas que apresentem fissuras localizadas e escoamento precoce. Para estas estruturas pode-se adotar simplificações previstas em norma referente à análise linear (quando for o caso) ou pode ser feita uma análise não linear para simular seu correto comportamento. (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000)

Na análise linear considera-se o material com suas propriedades constantes independente do carregamento aplicado, além disso, as equações de equilíbrio são formuladas em função da geometria inicial do problema, pois considera-se que as deformações são pequenas para afetar na resposta final da estrutura.

Diversas metodologias podem ser empregadas para se considerar a não linearidade de uma dada estrutura. Pode ser considerado, por exemplo, apenas a *não linearidade geométrica*. Este tipo de análise assume que o comportamento do material ainda é elástico linear, porém, leva em conta o efeito das deformações na elaboração das equações de equilíbrio. Também é possível considerar a *não linearidade física*, que diz respeito à mudança das propriedades do material quando um elemento é carregado. Por fim, pode-se considerar estes dois tipos de não linearidade simultaneamente na análise, sendo este o caso mais complexo.

Este trabalho se restringirá a calcular por uma metodologia mais rigorosa apenas a não linearidade geométrica. A não linearidade física será considerada de acordo com simplificações previstas em norma.

Para se executar este tipo de análise, a análise linear continuará sendo necessária. Iremos designar a matriz elástica linear de rigidez por $[K_l]$ e a Equação 2.1 pode ser reescrita da seguinte forma.

$$[K_l] \{x\} = \{F\} \quad (2.8)$$

Se assumirmos que, para métodos de ordem superior, a equação de equilíbrio não

linear do problema foi reduzida para um conjunto de sistema de equações lineares que podem ser resolvidos de forma consecutiva por uma série de métodos (métodos de passo único e métodos incrementais, por exemplo),(MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000) o comportamento da estrutura pode ser registrado de forma incremental. Deste modo, os métodos para se implementar este tipo de análise podem ser escritos, de modo geral, pela seguinte formulação:

$$\{\delta F\} = [K_t] \{\delta x\} \quad (2.9)$$

Onde:

- $\{\delta F\}$ é o vetor carregamento incremental.
- $[K_t]$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura.
- $\{\delta x\}$ é o vetor deslocamento incremental.

Tipicamente $[K_t]$ possui uma componente linear elástica e uma ou mais outras componentes que são função do incremento de deslocamento ou de carga que ocorre no início desta iteração. Deste modo, esta matriz pode ser escrita na seguinte forma.

$$[K_t] = [K_l] + [K_{geo}] + [K_f] \quad (2.10)$$

Onde:

- $[K_l]$ é a componente linear elástica anteriormente mencionada.
- $[K_{geo}]$ é a matriz de rigidez geométrica.
- $[K_f]$ é a matriz de redução plástica.³

Como foi dito anteriormente, a matriz $[K_f]$ não vai ser abordada neste trabalho. Porém, $[K_{geo}]$ será explicitada na seção seguinte e sua dedução pode ser encontrada na bibliografia em McGuire, Gallagher e Ziemian (2000).

2.4.1 Método do passo único

Diversas são as metodologias que podem ser aplicadas para se obter a solução da Equação 2.9, porém, de acordo com McGuire, Gallagher e Ziemian (2000), destacam-se dois grupos de metodologias: os métodos de passo único⁴ e os métodos incrementais e/ou iterativos.

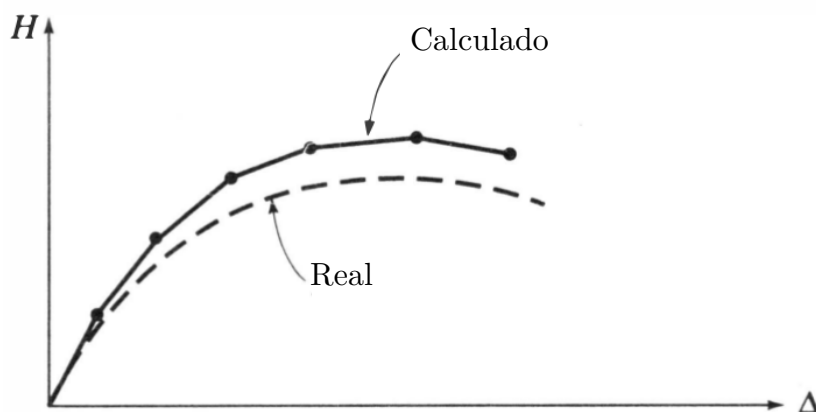
³ Tradução livre de *plastic reduction matrix*.

⁴ Tradução livre para *single-step methods*.

A família dos métodos de passo único é considerada como aquela que possui os métodos mais elementares para resolução de sistemas não lineares. Os dois métodos que merecem destaque nesta família são o método de Euler e o de Runge-kutta. Para estes métodos a matriz de rigidez tangente é formulada para um dado conjunto de forças, define-se o incremento de carga ou deslocamentos a ser adotado no procedimento e resolve-se a Equação 2.9 para se encontrar os incrementos de deslocamentos. Com os deslocamentos calculados para um dado passo, calcula-se os esforços internos e se atualiza a matriz de rigidez tangente com esses valores calculados.

Por fim, atualiza-se a geometria da estrutura e se inicia a próxima iteração. A resposta final da estrutura é dada pelo somatório das respostas em cada incremento de carga aplicado. O equilíbrio entre forças externas e internas não é verificado, por esta razão, a resposta obtida pode ter um pequeno erro em relação ao comportamento real da estrutura, como pode ser visto na Figura 5. Entretanto, se o tamanho do passo adotado for relativamente pequeno e para estruturas moderadamente não linear (que geralmente é o caso para os problemas de engenharia civil) uma boa precisão pode ser obtida com um custo computacional relativamente baixo (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000). Por esta razão optou-se por adotar este tipo de análise para se calcular a resposta das estruturas estudadas neste trabalho.

Figura 5 – Exemplo de análise feita pelos métodos de passo único.



Fonte: Adaptado de McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 237)

A análise não linear executada por meio da família de métodos de passo único pode ser descrita como se segue:

1. Define-se o passo ($d\lambda$) que será adotado na análise para aplicação da carga ou do deslocamento. A carga total atuante na estrutura $\{F\}$ será aplicada de forma

incremental, onde os incrementos de carga são denominados de $\{\delta F\}$.

$$\{F\} = \sum \{\delta F\} \quad (2.11)$$

De modo geral, recomenda-se que o valor de $d\lambda$ fique em torno de 10%-20%, de acordo com McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 340).

2. Calcula-se a matriz de rigidez tangente para cada um dos elementos com base nos esforços internos atuantes nos mesmos.
3. Calcula-se a matriz de rigidez tangente (global) representativa da estrutura $[K_{ti}]$ para aquela determinada iteração com base na posição da estrutura e nos esforços internos atuantes nos elementos.

$$[K_{ti}] = \sum \alpha_j [K_t]_j \quad \text{para } j = 1 \dots n \quad (2.12)$$

Alguns métodos de passo único permitem subdividir o passo $d\lambda$ em n passos menores, de modo a se obter uma melhor aproximação da matriz de rigidez tangente para o passo $d\lambda$, a qual é obtida através da média ponderada das matrizes $[K_t]_j$ calculadas para cada um dos n pontos. Deste modo, $[K_t]_j$ são as matrizes de rigidez calculadas para cada um dos n pontos de amostragem dentro do incremento atual, e α_j é o coeficiente de ponderação para estas matrizes.

Para o método de Euler, admite-se que $j = 1$ e calcula-se a matriz de rigidez tangente sem pontos internos de amostragem para essa dada iteração. Deste modo, tem-se:

$$[K_{ti}] = 1.00[K_t]_1 \quad (2.13)$$

4. Aplica-se o incremento de carregamento à estrutura e se obtém os deslocamentos referentes àquela iteração solucionando a Equação 2.9.
5. Calcula-se os esforços internos nos elementos em coordenadas locais da posição final da iteração.

$$\{F_{e_i}\} = \{F_{e_{i-1}}\} + \{\delta F_e\} \quad (2.14)$$

Onde $\{F_{e_i}\}$ são os esforços internos nos elementos calculados com base na configuração da estrutura ao final da iteração atual, $\{F_{e_{i-1}}\}$ são os esforços internos nos elementos calculados na iteração anterior, e o $\{\delta F_e\}$ é o incremento de esforços internos calculado na iteração atual. Note que para se avaliar esta equação, todos os vetores de força devem estar escrito em coordenadas locais dos elementos da estrutura considerando-se a posição desta ao final da iteração.

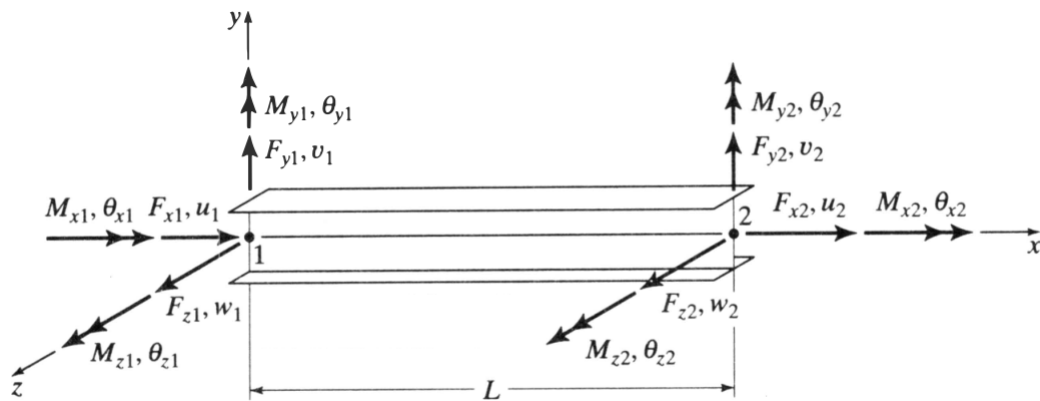
A bibliografia de referência apresenta diversas metodologias para se calcular estes esforços internos, a depender do grau de não linearidade da estrutura. Como este trabalho se restringirá a estruturas de grau pequeno ou moderado de não linearidade, se adotará a formulação apresentada em (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000, p. 352-355) que trata os elementos como corpos rígidos no processo de cálculo dos esforços internos.

6. Retorna-se ao passo 2 e reinicia-se o processo até que se tenha aplicado todo o carregamento $\{F\}$.

2.5 Matrizes dos elementos

Como foi mencionado anteriormente, o elemento de barra adotado para se fazer as análises estruturais possuem 12 graus de liberdades associados. Este elemento, assim como os respectivos graus de liberdade associados, estão apresentados na Figura 6.

Figura 6 – Elemento de pórtico espacial adotado.



Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 427)

Deste modo, a matriz de rigidez elástica para este elemento pode ser escrita como

apresentado na Equação 2.15.

$$[K_l]_e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & & & & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad \text{sim.} \quad (2.15)$$

Por outro lado, a matriz de rigidez geométrica depende fundamentalmente dos esforços internos atuantes no elemento. Ela pode ser escrita de diversas formas a depender das considerações feitas na sua concepção. Formulações distintas para o mesmo elemento com 12 graus de liberdade anteriormente mencionado podem ser encontradas em autores como Corrêa (1991) e Meek e Loganathan (1989). Entretanto, este trabalho se fixou no trabalho apresentado por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) pelo fato deste autor apresentar exemplos de validação, além de fornecer um programa gratuito desenvolvido em Python 2.7 para se comparar os resultados de novos exemplos.

Deste modo, a matriz de rigidez geométrica adotada neste trabalho é dada pela Equação 2.16.

$$[K_{geo}]_e = \begin{bmatrix} \frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{M_{y1}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & 0 & -\frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{M_{y2}}{L} & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} \\ & & \frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z1}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & 0 & 0 & -\frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z2}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{x2}}{L} \\ & & & \frac{F_{x2}I_p}{AL} & -\frac{2M_{z1}-M_{z2}}{6} & \frac{2M_{y1}-M_{y2}}{6} & 0 & -\frac{M_{y1}}{L} & -\frac{M_{z1}}{L} & -\frac{F_{x2}I_p}{AL} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{6} & \frac{M_{y1}+M_{y2}}{6} \\ & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & 0 & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{6} & -\frac{F_{x2}L}{30} & \frac{M_{x2}}{2} \\ & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & -\frac{F_{x2}}{10} & -\frac{M_{x2}}{L} & \frac{M_{y1}+M_{y2}}{6} & -\frac{M_{x2}}{2} & -\frac{F_{x2}L}{30} \\ & & & & & & \frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & -\frac{M_{y2}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & -\frac{F_{x2}}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6F_{x2}}{5L} & -\frac{M_{z2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} \\ & & & & & & & & & \frac{F_{x2}I_p}{AL} & \frac{M_{z1}-2M_{z2}}{6} & -\frac{M_{y1}-2M_{y2}}{6} \\ & & & & & & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2F_{x2}L}{15} \end{bmatrix} \quad \text{sim.} \quad (2.16)$$

Os índices 1 e 2 dizem respeito ao nó 1 e nó 2 do elemento de barra.

Todas as matrizes apresentadas pelas equações 2.15 e 2.16 estão escritas em termos das coordenadas locais do elemento. Para utilizá-las na construção da matriz de rigidez global da estrutura deve-se uniformizar o sistema de coordenadas que descreve estas matrizes, para isso é definida a matriz rotação, que é dada pela Equação 2.17.

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_{3x3} & & & \\ & \lambda_{3x3} & & \\ & & \lambda_{3x3} & \\ & & & \lambda_{3x3} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Onde $[\lambda_{3x3}]$ é definido pela relação apresentada na Equação 2.18.

$$[\lambda_{3x3}] = \begin{bmatrix} l & m & n \\ -\frac{m}{o} & \frac{l}{o} & 0 \\ -\frac{ln}{o} & -\frac{mn}{o} & o \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Os termos apresentados nesta formulação estão definidos a seguir.

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L} \quad (2.19)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (2.20)$$

$$n = \frac{z_2 - z_1}{L} \quad (2.21)$$

$$o = (l^2 + m^2)^{0.5} \quad (2.22)$$

Note que está matriz rotação é definida de modo que o eixo local y seja sempre perpendicular ao eixo global z. Para a análise linear este pressuposto pode ser utilizado sem problemas, porém, quando está se tratando de uma análise não linear, para cada iteração, a posição dos eixos tanto dos nós extremos como os de cada elemento de barrar devem levar em conta a deformação da estrutura ao longo das iterações. Para esta finalidade, um procedimento mais rigoroso de definição da matriz rotação para cada iteração da análise não linear é definido por Yang e Kuo (1994).

2.6 Implementação computacional

Para implementação dos procedimentos apresentados no presente capítulo foi desenvolvido um código próprio utilizando a linguagem Python (versão 2.7). Este código foi dividido em diversos arquivos de modo a se facilitar a organização das funções e classes criadas para resolução dos problemas. Diversas rotinas para verificação dos procedimentos foram criadas e são constantemente processadas conforme se executa qualquer exemplo,

de modo que o código é continuamente testado para se garantir que os resultados obtidos são confiáveis.

Toda formulação do programa foi elaborada em termos das matrizes para elementos de barras com 12 graus de liberdade. Note que para os exemplos de estruturas planas apresentados mais a frente, o que se fez foi a eliminação dos graus de liberdade associado às translações e rotações fora do plano da estrutura. Desta forma pode-se obter as matrizes reduzidas para estruturas mais simples como pórticos planos, grelhas, treliças, etc.

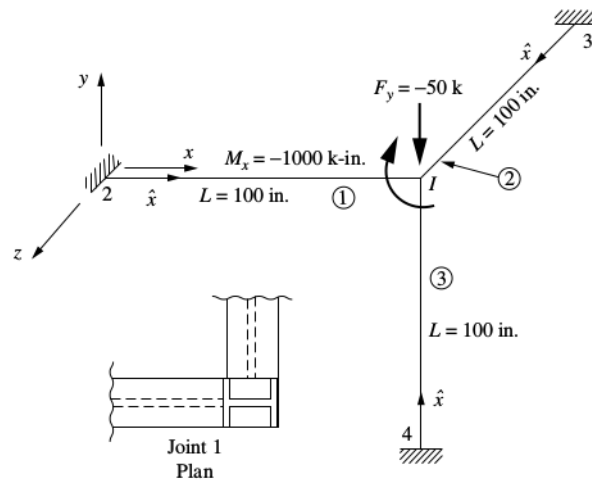
2.7 Exemplos de validação

A seguir serão apresentados alguns dos exemplos de validação do código elaborado. Para validação do código foi utilizado o software comercial SAP2000 (WILSON; HABI-BULLAH, 1997) para verificar a análise linear, e o software livre Mastan2 (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2016) para análise não linear (por apresentar um manual de referência com as formulações utilizadas (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000)).

2.7.1 Exemplo 01: Análise linear de pórtico espacial

Este exemplo foi apresentado por Logan (2011, p. 262) para validação do procedimento apresentado para análise linear de estruturas reticuladas espaciais. Os carregamentos e geometria da estrutura estão apresentados na Figura 7. As propriedades dos materiais e dos elementos são as dadas a seguir: $E = 30000$ ksi, $G = 10000$ ksi, $J = 50$ pol⁴, $I_y = I_z = 100$ pol⁴, $A = 10$ pol², $L = 100$ pol.

Figura 7 – Pórtico espacial para validação da análise linear.



Fonte: Logan (2011, p. 262)

Foi verificado passo-a-passo este exercício e os resultados obtidos para os deslocamentos estão apresentados na Tabela 1. Nota-se que os resultados obtidos conferem precisamente com os apresentados pela bibliografia.

Tabela 1 – Comparativo dos deslocamentos do exemplo 01 de validação do código em MEF.

Deslocamento	(LOGAN, 2011)	Autor
d_x	$7.098 * 10^{-5}$	$7.098 * 10^{-5}$
d_y	$-1.4 * 10^{-2}$	$-1.4 * 10^{-2}$
d_z	$-2.352 * 10^{-3}$	$-2.352 * 10^{-3}$
θ_x	$-3.996 * 10^{-3}$	$-3.996 * 10^{-3}$
θ_y	$1.78 * 10^{-5}$	$1.78 * 10^{-5}$
θ_z	$-1.033 * 10^{-4}$	$-1.033 * 10^{-4}$

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As translações estão em polegadas e as rotações em radianos.

Os esforços internos obtidos também tiveram a mesma precisão que os deslocamentos para todas as barras. Os resultados obtidos estão apresentados nas tabelas 2, 3 e 4 para, respectivamente, as barras 1, 2 e 3.

Tabela 2 – Esforços internos na barra 1 do exemplo 01 de validação do código em MEF.

Esforços internos	Logan (2011)	Autor
F_{x1}	-0.213	-0.213
F_{y1}	0.318	0.318
F_{z1}	0.053	0.053
M_{x1}	19.98	19.98
M_{y1}	-3.165	-3.165
M_{z1}	18.991	18.991
F_{x2}	0.231	0.231
F_{y2}	-0.318	-0.318
F_{z2}	-0.053	-0.053
M_{x2}	-19.98	-19.98
M_{y2}	-2.097	-2.097
M_{z2}	12.79	12.79

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em *kip* e os momentos em *kip * pol*.

Tabela 3 – Esforços internos na barra 2 do exemplo 01 de validação do código em MEF.

Esforços internos	Logan (2011)	Autor
F_{x1}	7.056	7.056
F_{y1}	7.697	7.697
F_{z1}	-0.029	-0.029
M_{x1}	0.517	0.517
M_{y1}	0.94	0.94
M_{z1}	264.957	264.957
F_{x2}	-7.056	-7.056
F_{y2}	-7.697	-7.697
F_{z2}	0.029	0.029
M_{x2}	-0.517	-0.517
M_{y2}	2.008	2.008
M_{z2}	504.722	504.722

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em *kip* e os momentos em *kip * pol.*

Tabela 4 – Esforços internos na barra 3 do exemplo 01 de validação do código em MEF.

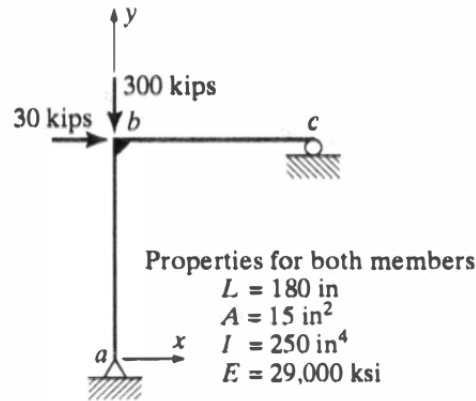
Esforços internos	Logan (2011)	Autor
F_{x1}	41.985	41.985
F_{y1}	-0.183	-0.183
F_{z1}	-7.108	-7.108
M_{x1}	-0.089	-0.089
M_{y1}	235.532	235.532
M_{z1}	-6.073	-6.073
F_{x2}	-41.985	-41.985
F_{y2}	0.183	0.183
F_{z2}	7.108	7.108
M_{x2}	0.089	0.089
M_{y2}	475.297	475.297
M_{z2}	-12.273	-12.273

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em *kip* e os momentos em *kip * pol.*

2.7.2 Exemplo 02: Análise não linear de pórtico plano

Figura 8 – Pórtico plano para validação da análise não linear.



Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 344)

Este exemplo foi apresentado por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 344) para validação do procedimento apresentado para análise não linear de estruturas reticuladas. Os carregamentos e geometria da estrutura estão apresentados na Figura 8. As propriedades dos materiais e dos elementos também estão apresentadas nesta figura. Este exemplo foi reproduzido no software Mastan2 para se obter valores mais precisos do que os apresentados no livro e para se verificar os valores de esforços internos nas barras.

O livro McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) apresenta apenas os resultados para o deslocamento d_x da estrutura apresentada conforme apresentado na Figura 9.

Os resultados obtidos pelo código desenvolvido estão apresentados juntamente com os obtidos utilizando pelo software Mastan2 (ZIEMIAN; MCGUIRE, 2016) nas tabelas 5, 6 e 7.

Como pode-se notar, todos os resultados obtidos conferem exatamente com os obtidos pelo software Mastan2. Os resultados, portanto, validam o código desenvolvido para análise não linear (planas, neste caso).

Tabela 5 – Comparativos de deslocamentos no nó 2 do exemplo 02 de validação do código em MEF.

$d\lambda$	d_x		d_r		θ_z	
	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor
1.0	15.98	15.98	-0.1117	-0.1117	-0.04407	-0.04407
0.5	25.29	25.29	-0.8723	-0.8723	-0.06681	-0.06681
0.1	35.17	35.17	-3.15	-3.15	-0.08707	-0.08707

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As translações estão em polegadas e rotações em radianos.

Tabela 6 – Comparativos dos esforços internos na barra 1 do exemplo 02 de validação do código em MEF.

$d\lambda$	$N_1 = N_2$		$V_{y1} = V_{y2}$		M_{z2}	
	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor
1.0	-266.3	-266.3	53.77	53.77	5400	5400
0.5	-245.2	-245.2	64.93	64.93	8658	8658
0.1	-219.5	-219.5	74.24	74.24	12640	12640

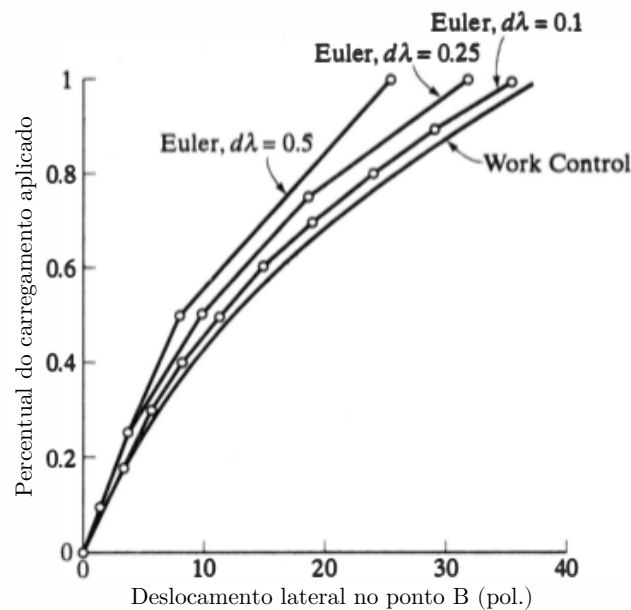
Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em *kip* e os momentos em *kip * pol.*

Tabela 7 – Comparativos dos esforços internos na barra 2 do exemplo 02 de validação do código em MEF.

$d\lambda$	$N_1 = N_2$		$V_{y1} = V_{y2}$		M_{z1}	
	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor	Mastan2	Autor
1.0	0.01862	0.01862	-30	-30	5400	5400
0.5	0.2331	0.2331	-48.1	-48.1	8658	8658
0.1	1.228	1.228	-70.19	-70.19	12640	12640

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em *kip* e os momentos em *kip * pol.*Figura 9 – Resultados apresentados por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000) para o deslocamento d_x do nó 2 para diversos passos de carga.

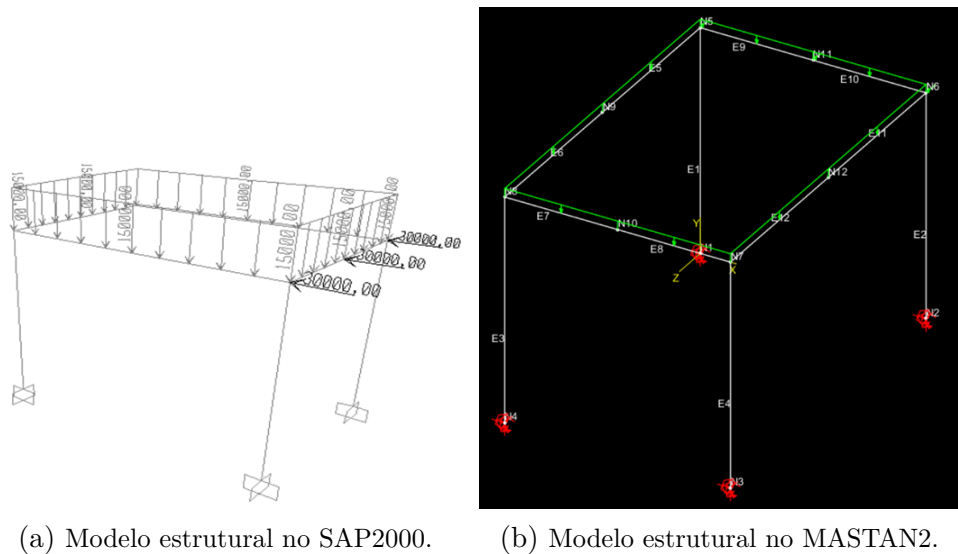
Fonte: McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 345)

2.7.3 Exemplo 03: Análise não linear de pórtico espacial

Por fim, será feita a análise não linear geométrica do pórtico espacial apresentado na Figura 10 e seus e comparar-se os resultados com aqueles obtidos através do software MASTAN2.

A estrutura a ser analisada é composta por vigas com 4 metros de vão na direção x, vigas com 6 metros de vão na direção Y e pilares com 4 metros de altura. Esta estrutura possui um carregamento de 15 kN/m aplicada ao longo de todas as vigas juntamente com cargas nodais de 30 kN aplicadas nos três nós da viga de 4 m mais próxima da origem.

Figura 10 – Deslocamentos nodais.



Fonte: o autor, 2018.

Para esta estrutura as vigas foram adotadas com seção 25x30 cm enquanto os pilares com seção 25x35 cm. Deste modo, as propriedades geométricas adotadas foram calculadas em função destas dimensões.

As constantes de torção foram calculadas para as seções retangulares pela seguinte formulação aproximada apresentada por Young e Budynas (2002):

$$J = ab^3 \left(\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right) \quad (2.23)$$

Onde a é a maior dimensão da seção retangular e b é a menor.

Desconsiderou-se o peso próprio dos elementos ($\gamma_c = 0.0 \text{ kN/m}^3$), mas considerou-se uma sobrecarga uniformemente distribuída ao longo de todas as vigas de valor igual a 15.0 kN/m assim como uma carga pontual de 30 kN atuante nos três nós da viga de 4 metros de comprimento.

O passo ($d\lambda$) adotado pelo método do passo único foi de 0.10, de modo a se reduzir o erro deste método na análise. Procedeu-se a análise não linear pelo método de Euler. Os resultados obtidos para os deslocamentos nos pontos médios das vigas estão apresentados nas tabelas de 8 a 12.

Tabela 8 – Comparativo dos deslocamentos do ponto médio da viga de 4 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.

Deslocamento	MASTAN2	Autor
d_x	0	0
d_y	-0.001427	-0.001427
d_z	0.01693	0.01693
θ_x	0.005117	0.005117
θ_y	0	0
θ_z	0	0

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As translações estão em metros e as rotações em radianos.

Tabela 9 – Comparativo dos deslocamentos do ponto médio da viga de 6 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.

Deslocamento	MASTAN2	Autor
d_x	-0.0009639	-0.0009639
d_y	-0.007421	-0.007421
d_z	0.01487	0.01487
θ_x	-0.00124	-0.00124
θ_y	0.0002014	0.0002014
θ_z	-0.0006308	-0.0006308

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As translações estão em metros e as rotações em radianos.

Tabela 10 – Esforços internos para a viga de 4 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.

Esforços internos	MASTAN2	Autor
F_{x1}	-7068	-7063
F_{y1}	29930	29927
F_{z1}	-15130	-15160
M_{x1}	0.4564	1.78
M_{y1}	9558	9570
M_{z1}	-15130	-15127
F_{x2}	-7078	-7083
F_{y2}	-72.32	-72.20
F_{z2}	-15040	-15007
M_{x2}	3.71	1.46
M_{y2}	-20640	-20631
M_{z2}	14690	14693

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em N e os momentos em $N * M$.

Tabela 11 – Esforços internos para a viga de 6 m - exemplo 03 de validação do código em MEF.

Esforços internos	MASTAN2	Autor
F_{x1}	-34330	-34309
F_{y1}	-32470	-32470
F_{z1}	-1426	-1432
M_{x1}	3.86	2.22
M_{y1}	-6513	-6517
M_{z1}	5965	5965
F_{x2}	-34390	-34418
F_{y2}	12530	12530
F_{z2}	-1410	-1404
M_{x2}	11.02	6.52
M_{y2}	-2252	-2255
M_{z2}	35850	35850

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em N e os momentos em $N * M$.

Tabela 12 – Esforços internos no pilar na origem - exemplo 03 de validação do código em MEF.

Esforços internos	MASTAN2	Autor
F_{x1}	-62350	-62348
F_{y1}	-5669	-5669
F_{z1}	-10850	-10850
M_{x1}	-3002	-3002
M_{y1}	37340	37341
M_{z1}	7526	7526
F_{x2}	-62350	-62348
F_{y2}	-5669	-5669
F_{z2}	-10850	-10849
M_{x2}	-3028	-3028
M_{y2}	-5962	-5962
M_{z2}	-15140	-15145

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em N e os momentos em $N * M$.

Nota-se que os resultados obtidos através do método de Euler são muito próximos para os softwares utilizados, entretanto, constata-se uma certa diferença no que tange os resultados relativos à torção.

Estas diferenças se devem às considerações adicionais que o software MASTAN2 faz em relação ao comportamento da estrutura. Este software considera os efeitos da torção não uniforme nos elementos espaciais e das deformações naturais dos elementos além daqueles referentes aos deslocamentos de corpo rígido.

As considerações de torção não uniforme se devem à consideração de matrizes de rigidez com 14 graus de liberdade associados a cada elemento, conforme apresentado por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000, p. 419).

A consideração referente às deformações naturais permite ao software calcular estruturas sujeitas a grandes deslocamentos. O código desenvolvido por este autor, por

outro lado, se limita a analisar os deslocamentos de corpo rígido das estruturas reticuladas, justificando, portanto, as diferenças encontradas nos resultados.

Nota-se que conforme se utiliza um passo ($d\lambda$) menor a diferença nos resultados da aplicação destas duas metodologias tende a aumentar, uma vez que estaria se repetindo o erro diversas vezes. Entretanto, como a diferença entre os dois procedimentos se mostrou pequena pode-se concluir que os resultados obtidos estão coerentes.

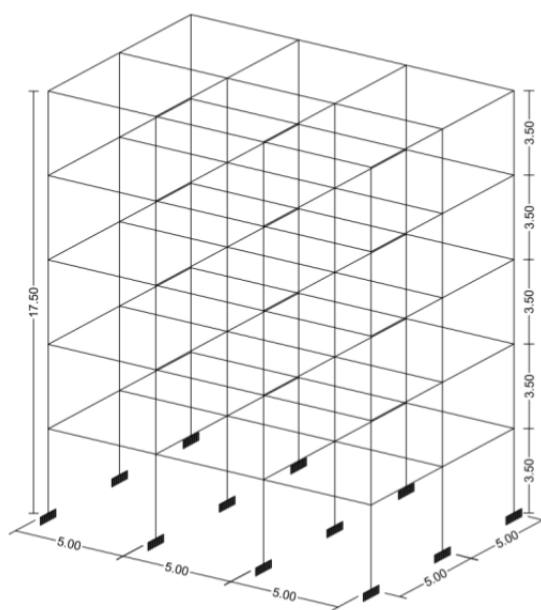
2.8 Aplicações

Nesta seção a metodologia que foi exposta ao longo deste capítulo será aplicada isoladamente a um dos estudos de caso desta dissertação. O modelo simulado serviu de referência para balizar o código desenvolvido e para comparação dos resultados finais deste trabalho.

2.8.1 Pórtico espacial de 5 pavimentos

O modelo adotado foi baseado naquele apresentado por Salles, Peters e Mansur (2017). Trata-se de um pórtico espacial com 5 pavimentos com carregamento distribuído aplicado ao longo de todas as vigas. O modelo adotado para o pórtico em questão é o apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Pórtico espacial sugerido por Salles, Peters e Mansur (2017).



Fonte: produzido por Salles, Peters e Mansur (2017).

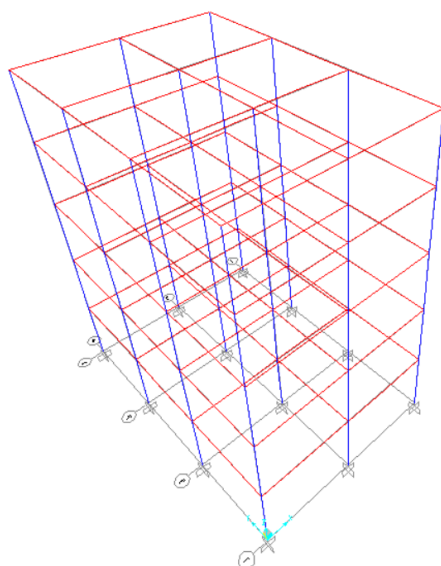
Para este pórtico foram feitas as seguintes considerações:

- **Carregamentos:** Considerou-se o peso próprio dos elementos ($\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$) e uma sobrecarga uniformemente distribuída ao longo de todas as vigas de valor igual a 15.0 kN/m ;
- **Combinação de cargas:** considerou-se os mesmos coeficientes majoradores para os carregamentos agrupados de edificações do tipo 01 previsto pela NBR 8681:2003: $\gamma_g = 1.35$ para a carga permanente e $\gamma_q = 1.5$ para carga acidental.

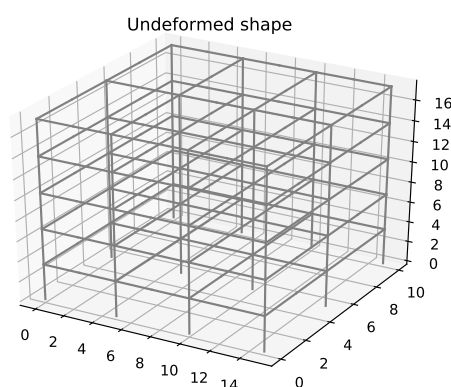
- **Módulo de elasticidade:** considerou-se para o concreto o valor de 27 GPa.
- **Coefficiente de Poisson:** adotou-se o mesmo valor previsto pela ABNT (2014): 0.2.
- **Dimensões das peças:** os pilares foram adotados com seção igual a 20x35 cm e as vigas 20x50 cm.
- **Não linearidade física:** a não linearidade física foi considerada de acordo com a simplificação sugerida pela ABNT (2014). A inércia do pilar foi considerada apenas 80% daquela da seção bruta de concreto e a das vigas 40%.
- **Constante de torção:** foi calculada para as seções retangulares pela formulação aproximada apresentada na Equação 2.23.

Este problema foi analisado pelo código desenvolvido pelo autor deste trabalho e pelo software comercial SAP2000. Foram tomadas como referências as vigas dos últimos pavimentos e os pilares do primeiro pavimento, por serem estes elementos os mais críticos no dimensionamento da estrutura. As estruturas introduzidas nestes dois programas estão apresentadas na Figura 12.

Figura 12 – Estruturas introduzidas no SAP2000 e no pacote desenvolvido.



(a) Modelo SAP2000.



(b) Modelo código próprio.

Fonte: o autor, 2018.

O ponto escolhido como referência para comparação dos resultados de deslocamentos é o de coordenada (15, 7.5, 17.5) e os resultados dos dois programas adotados estão apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Comparativos dos deslocamentos na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.

Deslocamento	SAP2000	Autor
d_x	$-4.969 * 10^{-5}$	$-4.969 * 10^{-5}$
d_y	$-1.000 * 10^{-5}$	$-1.000 * 10^{-5}$
d_z	$-8.20 * 10^{-3}$	$-8.20 * 10^{-3}$
θ_x	$6.187 * 10^{-5}$	$6.187 * 10^{-5}$
θ_y	$-1.66 * 10^{-3}$	$-1.66 * 10^{-3}$
θ_z	0.000	0.000

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As translações estão em metros e as rotações em radianos.

Prosseguimos com os resultados da análise linear agora para os esforços internos na barra que conecta o ponto (15, 5, 17.5) ao (15, 7.5, 17.5). Esta barra foi a escolhida por ser a viga mais solicitada na estrutura.

Tabela 14 – Esforços internos na viga mais solicitada na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.

Esforços internos	SAP2000	Autor
F_{x1}	$-1.080 * 10^4$	$-1.080 * 10^4$
F_{z1}	$7.356 * 10^4$	$7.356 * 10^4$
M_{y1}	$-6.445 * 10^4$	$-6.445 * 10^4$
F_{x2}	$-1.080 * 10^4$	$-1.080 * 10^4$
F_{z2}	$-8.881 * 10^3$	$8.881 * 10^3$
M_{y2}	$3.861 * 10^4$	$3.861 * 10^4$

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em N e os momentos em $N * m$.

Note que alguns graus de liberdade foram omitidos na Tabela 14 pois estes valores são na verdade zero. Ambos os programas calculam internamente estes esforços internos e fornecem valores muito pequenos (da ordem de 10^{-12}) para informar ao usuário que estes valores seriam muito próximos de zero. A comparação entre estes valores muito pequenos não é de interesse deste trabalho pois as diferenças que surgem se dão apenas devido a precisão adotada para os cálculos por cada programa.

Por fim, se analisa os esforços internos em um dos pilares internos na Tabela 15.

Nota-se claramente que os resultados obtidos pelo código elaborado conferem com os obtidos pelo modelo implementado no software comercial SAP2000.

Tabela 15 – Esforços internos no pilar central na análise do pórtico espacial de 5 pavimentos pelo MEF.

Esforços internos	SAP2000	Autor
F_{x1}	$-1.415 * 10^6$	$-1.415 * 10^6$
F_{z1}	$5.911 * 10^2$	$5.911 * 10^2$
M_{z1}	$6.757 * 10^2$	$6.757 * 10^2$
F_{x2}	$-1.406 * 10^6$	$-1.406 * 10^6$
F_{z2}	$5.911 * 10^2$	$5.911 * 10^2$
M_{z2}	$-1.393 * 10^3$	$-1.393 * 10^3$

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As forças estão em N e os momentos em $N * m$.

3 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Atualmente, os projetos de estruturas de concreto armado no Brasil seguem as prescrições definidas pela norma NBR 6118:2014. O projetista lança a estrutura com base na sua experiência de projeto e, com base nesse lançamento inicial, a dimensiona de modo a atender às premissas normativas. No caso de alguma não conformidade o projetista faz os devidos ajustes na distribuição das peças e/ou nas suas geometrias/composições até que as exigências normativas sejam atendidas.

Essas prescrições normativas, até o presente momento, baseiam-se na análise semi-probabilística que, a grosso modo, adota fatores majoradores para os carregamentos e minoradores para as resistências visando garantir a segurança estrutural. Essa formulação é adotada de modo a se dispensar a análise estocástica, que envolve o tratamento das variáveis aleatórias, para, a partir daí, determinar a resposta mais provável para o comportamento de uma estrutura.

A análise probabilística é normalmente evitada por se tratar de um processo computacionalmente dispendioso, já que para se fazer uma única análise deste tipo deve-se fazer inúmeras simulações da estrutura para se captar as possíveis respostas da mesma. Por esta razão normalmente se opta pela formulação semi-probabilística normativa que já prevê uma margem de segurança para a estrutura haja vista a simplificação no processo de cálculo. Essa abordagem, no entanto, passa a ser questionável quando se esta tratando, por exemplo, de projetos otimizados (MOTTA, 2009).

Estruturas resultantes de um processo de otimização podem ter seu desempenho drasticamente reduzido ou até vir a falha em casos mais drásticos, devido a adoção de modelos determinísticos na concepção de projeto (SILVA, 2016). Por esta razão o estudo de otimização com base em confiabilidade vem ganhando espaço na comunidade científica.

No Brasil ainda não se tem nenhum tipo de normatização referente à análise de confiabilidade, nem estudos que analisem as distribuições de probabilidade mais adequadas para os materiais, propriedades geométricas e carregamentos que melhor descrevam a nossa realidade. Entretanto, diversos trabalhos vêm sendo publicados há anos neste tema no exterior, entre eles, destaca-se o código modelo para análise probabilística apresentado por JCSS (1997). Por essa razão este trabalho seguirá as premissas apresentadas por esse código modelo.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos de análise de confiabilidade que serão aplicados nos estudos de casos mais à frente. Para que esta apresentação fique o mais didática possível, organizou-se o mesmo da seguinte forma.

- **Axiomas da probabilidade:** definem-se os axiomas básicos da análise estatística.
- **Variáveis estocásticas:** é apresentado o conceito de variáveis estocásticas, assim como as suas funções básicas e os parâmetros relacionados.
- **Distribuições de probabilidade:** apresenta-se o conceito de distribuição de probabilidade e definem-se as principais distribuições utilizadas neste trabalho.
- **Função Estado Limite:** definem-se os conceitos de estado limite e probabilidade de falha, além de se apresentar formulações para se avaliá-los.
- **Análise de confiabilidade:** são apresentados os métodos mais tradicionais utilizados para a obtenção da probabilidade de falha e/ou índice de confiabilidade.
- **Análise da importância de variáveis estocásticas:** será apresentado como se calcular a representatividade que uma dada variável aleatória tem em uma função estado limite.
- **Implementação computacional:** será apresentado brevemente o pacote computacional adotado para se executar a análise de confiabilidade neste trabalho.
- **Exemplos de validação:** alguns exemplos serão apresentados para comparar os resultados obtidos pelo pacote adotado com problemas expostos por alguns trabalhos de referência.

3.1 Axiomas da probabilidade

Definindo-se: Ω como o conjunto de todos os eventos possíveis; $B, C, D \dots$ como os eventos ou conjuntos relacionados ao espaço amostral Ω ; e a função $Prob$ como a função probabilidade em Ω . Os três axiomas podem ser definidos:

$$0 \leq Prob[B] \leq 1 \quad (3.1)$$

O primeiro axioma indica que a probabilidade de um dado evento A ocorrer vai sempre variar de 0 a 1 (ou 100%).

$$Prob[\omega] = 1 \quad (3.2)$$

O segundo axioma indica que a probabilidade de o evento ocorrer dentro do espaço amostral é de 100%.

$$Prob[B \cup C] = Prob[B] + Prob[C] - Prob[B \cap C] \quad (3.3)$$

Por fim, o terceiro axioma define que a probabilidade de dois eventos quaisquer B e C ocorrem é dada pela diferença entre a probabilidade de os mesmos ocorrerem isoladamente e a probabilidade de ocorrerem simultaneamente.

3.2 Variáveis estocásticas

Uma variável estocástica, também chamada de aleatória ou randômica, é uma variável cujos valores possíveis são resultados de um fenômeno aleatório. Essas variáveis devem ser mensuráveis e os valores que elas podem assumir podem ser discretos ou contínuos.

Se uma variável pode assumir infinitos valores distintos em um dado intervalo ela é denominada de variável contínua. Por outro lado, se essa variável só pode assumir uma quantidade finita de valores, ela é denominada variável discreta.

3.2.1 Funções básicas

De modo geral, uma variável aleatória pode ser descrita por uma série de funções que simulam seu comportamento. Alguns exemplos destas funções são a Função de Densidade de Probabilidade (*Probability Density Function* ou PDF) e a Função de Distribuição Acumulada (*Cumulative Density Function* ou CDF).

As PDF descrevem a distribuição de ocorrências de um valor ($x \in \mathfrak{R}$) associado a uma dada variável aleatória. Ela pode ser utilizada para avaliar a probabilidade que essas variáveis têm de assumir um dado valor em um determinado intervalo. Essa função é definida por Motta (2009) como:

$$Prob[c_1 < X_{cont} \leq c_2] = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \quad c_1 \leq c_2 \quad (3.4)$$

As CDF, por sua vez, são utilizadas para descrever a probabilidade de uma variável aleatória fornecer um valor igual ou inferior a um dado valor estipulado. Elas podem ser relacionadas às PDF pela seguinte formulação.

$$F_x(c_1) = Prob[X \leq c_1] = \int_{-\infty}^{c_1} f(x)dx \quad (3.5)$$

3.2.2 Parâmetros

Tendo-se definido uma variável aleatória x , uma função qualquer $f(x)$ também será aleatória e terá uma determinada PDF associada. Para cada PDF associada a uma variável aleatória têm-se diversos parâmetros associados a elas com interpretações práticas. Exemplos disso são a média e variância.

Diversos parâmetros estatísticos são apresentados na literatura de referência Melchers e Beck (2017). Entretanto, este trabalho se restringirá a apresentar os parâmetros que serão aplicados diretamente aqui.

3.2.2.1 Média ou esperança

Para uma dada PDF, a média ou esperança associada a mesma pode ser definida como:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.6)$$

Esta formulação também é referida pela bibliografia de referência (MELCHERS; BECK, 2017) como *primeiro momento*, por se tratar do primeiro momento de área da curva PDF em relação à origem.

3.2.2.2 Variância

A variância é a medida do grau de aleatoriedade da variável em torno da média.

$$Var(X) = E(X - \mu_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad (3.7)$$

Ou ainda,

$$Var(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 \quad (3.8)$$

A variância também é referida na literatura de referência como *segundo momento*, seguindo a mesma lógica apresentada anteriormente para a média.

3.2.2.3 Desvio padrão e coeficiente de variação

O desvio padrão, por sua vez, é definido em função da variância, como apresentado a seguir.

$$\sigma_x = [Var(X)]^{0.5} \quad (3.9)$$

Uma relação muito utilizada nos estudos de análise de confiabilidade é aquela entre a média e o desvio padrão. Essa relação é denominada de coeficiente de variação (V_x) e é dada pela equação:

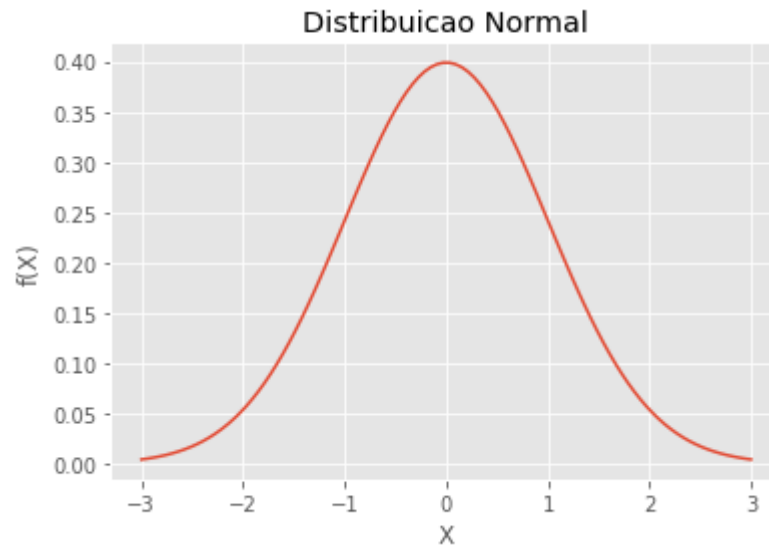
$$V_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (3.10)$$

3.3 Distribuições de probabilidade

Este trabalho se restringirá a tratar apenas as distribuições Normal e Lognormal. Mais informações referente às demais distribuições existentes e suas aplicações podem ser encontradas em JCSS (1997), Melchers e Beck (2017) e Ghali, Neville e Cheving (1986).

3.3.1 Distribuição Normal

Figura 13 – Exemplo de PDF da distribuição normal.



Fonte: o autor, 2018.

A Distribuição Normal ou Gaussiana é a mais recorrente nos problemas de engenharia (MELCHERS; BECK, 2017). As suas PDF e CDF, respectivamente, são dadas pelas seguintes funções:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.11)$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.12)$$

É muito comum que nas análises estocásticas se transforme as variáveis descritas por distribuições normais X em distribuições normais padronizadas Z (com média igual a zero e desvio padrão unitário). Isto é feito pois as CDF e PDF da distribuição normal não-padronizada são complexas de serem avaliadas. Por esta razão, convencionou-se utilizar a distribuição padronizada, pois, as PDF e CDF desta última são encontradas facilmente em forma de tabela na literatura (MELCHERS; BECK, 2017) (GHALI; NEVILLE;

CHEVING, 1986) (JCSS, 1997). Esta transformação é feita definindo-se uma variável aleatória padronizada (z).

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

Deste modo obtemos, podemos reescrever a PDF e CDF de z da seguinte forma:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x} \Phi(z)$$

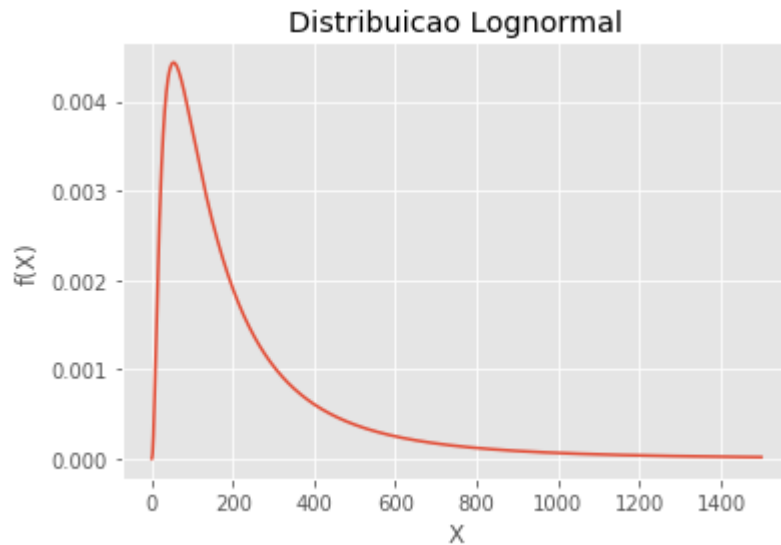
$$F_x(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z) \quad (3.13)$$

Note que a CDF da distribuição normal padronizadas é referida comumente na literatura pelo símbolo Φ .

3.3.2 Distribuição Lognormal

Outra distribuição muito comum nos problemas de engenharia é a Distribuição Lognormal (ver Figura 14), que é normalmente utilizada para dados cujos valores estatísticos são sempre positivos.

Figura 14 – Exemplo de PDF da distribuição lognormal.



Fonte: o autor, 2018.

Essa distribuição é similar à Normal, entretanto, nela se utiliza o logaritmo da variável aleatória X , ao invés do próprio valor de X . Desse modo, as PDF e CDF dessa distribuição são dadas pelas fórmulas:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x \epsilon}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\epsilon} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du = \Phi \left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\epsilon} \right) \quad (3.15)$$

Onde, conforme definido por Melchers e Beck (2017):

$$\lambda = E(\ln(x)) = \mu_{\ln(x)} \quad (3.16)$$

$$\epsilon^2 = \text{var}(\ln(x)) = \sigma_{\ln(x)}^2 \quad (3.17)$$

3.4 Função Estado Limite

O comportamento de uma estrutura a um dado carregamento depende do tipo e da magnitude do carregamento aplicado, assim como, da resistência dos materiais e da rigidez dos elementos. Para que a solução seja considerada satisfatória algumas exigências devem ser atendidas. Essas exigências incluem a segurança da estrutura contra o colapso, dano excessivo, limitação de deformações, entre outros critérios. A violação de um estado limite pode ser definida como a ocorrência de uma situação não desejada para a estrutura. Alguns exemplos de estados limite estão apresentados na Tabela 16, apresentada originalmente por Melchers e Beck (2017).

Tabela 16 – Típicos exemplos de funções estado limites para estruturas.

Tipo de estado limite	Descrição	Exemplos
Último	Colapso de toda ou parte da estrutura	Ruptura, colapso progressivo, corrosão, fadiga, fogo, etc..
Dano (normalmente incluída no tipo acima)		Fissuração excessiva ou prematura, deformação inelástica permanente
Serviço	Falha no uso normal	Deformação excessiva, vibrações, etc...

Fonte: Produzido por Melchers e Beck (2017, p. 1) e adaptado pelo autor deste trabalho.

A probabilidade de ocorrência de um evento que infrinja algum estado limite é a medida numérica da chance de esse evento ocorrer. Essa medida pode ser obtida através de aferições da ocorrência desse episódio ao longo do tempo para estruturas semelhantes, ou através de estimativas subjetivas desse valor. Na prática é raro se ter amostras suficientes de estruturas similares. Portanto, o que normalmente se faz é uma combinação das duas análises. Com base nos dados estatísticos de partes da estrutura, pode-se estimar o comportamento do conjunto.

A determinação da violação de estados limites pode ser feita através de duas metodologias tradicionais: o método das tensões admissíveis e o método dos fatores

parciais ou método dos estados limites. Porém, ambos os procedimentos não levam em consideração os fatores estocásticos do problema o que nos leva a procurar outra forma de se avaliar essas violações.

De modo geral, um estado limite será violado sempre que a relação apresentada a seguir for atendida, para qualquer tempo t .

$$R(t) - S(t) < 0 \quad (3.18)$$

Onde R representa as resistências e S as solicitações.

Os valores de esforços solicitantes e esforços resistentes podem ser definidos em função do tempo, pois tanto os carregamentos como as resistências dos materiais tendem a ter valores variáveis ao longo do tempo. De acordo com Melchers e Beck (2017), as cargas máximas tendem a aumentar com o tempo enquanto as resistências tendem a diminuir (devido à deterioração e outras variáveis). Desse modo, a incerteza associada a esses fatores tende a variar com o tempo. Apesar de essa variação com o tempo, em alguns casos pode ser conveniente assumir que tais variáveis independam do tempo (MELCHERS; BECK, 2017).

O problema básico de confiabilidade estrutural envolve a consideração de uma única solicitação S a qual é resistida por uma única resistência R . Cada uma descrita por uma PDF própria e expressas nas mesmas unidades.

Por conveniência, se considerará apenas a segurança estrutural de um único elemento a princípio. Considera-se que esse elemento falhou caso a resistência R seja menor que o esforço solicitante S . Deste modo, a probabilidade de falha para este dado elemento pode ser escrita como:

$$p_f = Prob(R \leq S) \quad (3.19)$$

Ou, alternativamente:

$$p_f = Prob(R - S \leq 0) \quad (3.20)$$

$$p_f = Prob(R/S \leq 1) \quad (3.21)$$

Que podem ser escritas, de modo geral, como:

$$p_f = Prob(G_c(R, S) \leq 0) \quad (3.22)$$

Onde G_c é denominada de *função estado limite* e sua probabilidade de falha é idêntica à probabilidade de o estado limite ser violado.

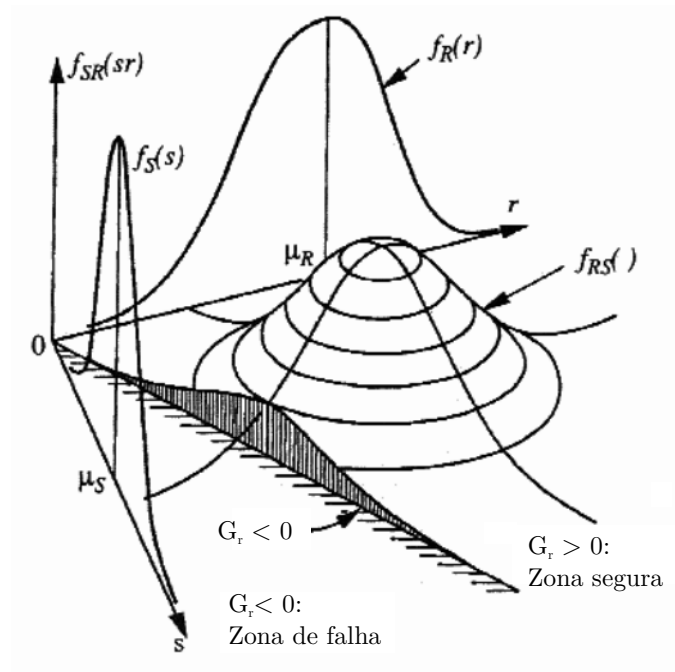
Apesar de esta equação ter sido escrita apenas para um elemento analisado isoladamente, ela pode, perfeitamente, ser estendida para a análise de um sistema estrutural como um todo.

De um modo geral, as variáveis aleatórias R e S possuem suas respectivas PDF f_R e f_S , respectivamente. Considerando estas variáveis como independentes, pode-se definir a função de falha pela seguinte integral.

$$p_f = Prob(R \leq S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r \leq s} f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (3.23)$$

Na Figura 15 a integral apresentada por esta equação representa o volume da PDF conjunta f_{RS} que está na região denominada de D , além da linha G_c que é definida como superfície de falha. G_c representa o conjunto de pontos no qual R e S tem mesmo valor e, portanto, $G_c = 0$.

Figura 15 – Gráfico da PDF de duas variáveis R, S e da PDF conjunta destas.



Fonte: Melchers e Beck (2017, p. 16).

Nas análises de confiabilidade é comum se usar o chamado *índice de confiabilidade* β que é definido pela Equação 3.24. A utilização desse índice é uma medida mais interessante que lidar com a probabilidade de falha de uma estrutura, uma vez que este último valor é usualmente um número muito pequeno (da ordem de 10^{-3} ou menor).

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (3.24)$$

Onde Φ é a CDF da distribuição normal padronizada, como definido anteriormente; β é o índice de confiabilidade; e p_f é a probabilidade de falha definida na Equação 3.19.

3.5 Análise de confiabilidade

Sendo uma variável aleatória x com distribuição de probabilidade conhecida, pode-se calcular diretamente a distribuição de probabilidade para uma função $f(X)$, caso f seja uma função monotônica, através da sua função inversa. Metodologias para se encontrar os parâmetros estatísticos da função f com base em x são apresentadas por Motta (2009) e Melchers e Beck (2017). Entretanto, para a maioria dos problemas envolvendo simulação numérica, onde pode-se ter várias variáveis aleatórias, cada uma com seus próprios parâmetros e distribuições associadas, tais procedimentos não podem ser aplicados.

De acordo com Melchers e Beck (2017) para se fazer a análise estocástica de um problema multidimensional, essencialmente três tipos de métodos podem ser utilizados. São eles:

1. Integração direta (aplicável apenas à casos especiais);
2. Integração numérica utilizando, por exemplo, o método de Monte Carlo;
3. Transformar o integrando em uma PDF multi-normal e integrar a partir da função obtida.

Como o processo de integração direta só pode ser aplicado para casos muito específicos, limitaremos nossos estudos apenas aos dois últimos casos. O método de Monte Carlo será apresentado para a família dos métodos de integração numérica, e o *First Order Reliability Method* (FORM) representará a família dos métodos de transformação.

3.5.1 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é a abordagem mais simples para se obter a probabilidade de falha de uma estrutura. Esse método envolve a geração de diversos valores para as variáveis aleatórias, os quais são gerados com base nas suas distribuições de probabilidade conhecidas. Com base nos resultados obtidos, é analisada a violação do estado limite ($G_c(\{x\}) \leq 0$) e a probabilidade de falha é estimada por:

$$p_f \approx \frac{n_c(G_c(\{x\})) \leq 0}{N} \quad (3.25)$$

Onde $n_c(G_c(\{x\}))$ representa o número de vezes em que foi gerado um vetor $\{x\}$ que correspondeu a um valor de G_c que violou o estado limite analisado. N , por outro lado, é o tamanho da amostra.

Note que a Equação 3.25 aproximará melhor o problema em questão conforme se aumenta a quantidade de amostras N .

Apesar da simplicidade que envolve o Método de Monte Carlo, o mesmo apresenta um custo computacional elevado, pois, para se obter uma boa aproximação da probabilidade de falha da estrutura deve-se gerar uma quantidade muito grande de amostras, o que encarece o processo computacionalmente.

3.5.2 FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem, mais conhecido pela sua abreviação na língua inglesa (FORM), transforma o integrando apresentado pela Equação 3.23 para facilitar o processo de integração. Todas as variáveis envolvidas na análise têm suas distribuições de probabilidades transformadas para distribuições Normais padronizadas equivalentes e a análise é feita para essa função densidade de probabilidade conjunta modificada.

A transformação de distribuições não-normais para normais padronizadas não é trivial. Porém, um estudo extenso dessas transformações pode ser encontrado na literatura de referência: Melchers e Beck (2017).

O termo *first order* no nome deste método diz respeito à aproximação linear (de primeira ordem) que este faz para função de falha. Outros métodos de ordem superior podem ser encontrado na literatura de referência Melchers e Beck (2017).

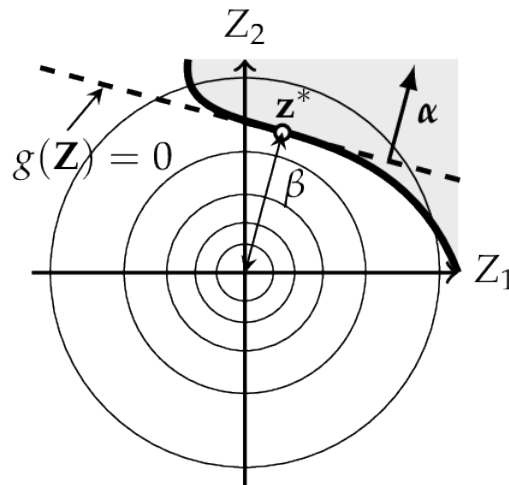
O espaço correspondente às variáveis aleatórias padronizadas tem simetria radial como pode ser visto nos círculos concêntricos na Figura 16, conforme Fridley (1999). O índice de confiabilidade é então definido nesse subespaço como a menor distância entre a superfície de falha ($G_c(x) = 0$) e a origem do sistema de coordenadas do espaço reduzido.

A aproximação obtida pela linearização da função de falha é exata quando se está tratando de um problema apenas com variáveis normais e com uma função de estado limite linear. Para os demais casos, os resultados obtidos são uma aproximação do ponto mais provável de falha da estrutura. A definição deste ponto é importante, pois, no espaço normalizado, a distância desse a origem deste subespaço representa o β .

O seguinte roteiro simplificado para a execução do FORM é apresentada por Fridley (1999):

1. Definir a função de falha (estado limite) a ser adotada;
2. Estimar um índice de confiabilidade inicial, β ;
3. Definir um valor inicial para todas as variáveis aleatórias;
4. Avaliar G_c no ponto corrente;

Figura 16 – Representação do índice de confiabilidade no subespaço das variáveis aleatórias padronizadas.



$$p_f = \Phi(-\beta)$$

Fonte: Hackl (2018).

5. Calcular a média e o desvio padrão normais equivalentes para as variáveis com distribuições não-normais;
6. Computar as derivadas parciais de G_c em relação às variáveis aleatórias reduzidas no ponto definido;
7. Encontrar o cosseno diretor de busca como:

$$\alpha_i = \frac{\frac{\delta g}{\delta x_i} \sigma_i^N}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{\delta g}{\delta x_i} \sigma_i^N \right)^2}} \quad (3.26)$$

8. Encontrar os novos valores para o ponto de máxima probabilidade de falha como:

$$x_i = \mu_i^N - \alpha_i \beta \sigma_i^N \quad (3.27)$$

9. Repetir os passos de 4 a 7 até que a estimativa de α estabilize;
10. Calcular o valor de β tal que $G_c(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$;
11. Repetir os passos de 4 a 9 até que o valor de β tenha convergido.

O roteiro completo com todas as formulações envolvidas para aplicação do FORM pode ser encontrado em Melchers e Beck (2017).

3.6 Análise da importância de variáveis estocásticas

Motta et al. (2015) apresentaram um procedimento para se avaliar a importância de cada variável aleatória na análise de confiabilidade. Esse procedimento avalia o impacto que a variação no valor de uma variável tem na função de falha. Para se fazer essa avaliação a seguinte formulação é utilizada.

$$ImpF_i = \frac{\frac{\delta f(x)}{\delta x_i} \sigma_{x_i}}{f(x)} \quad (3.28)$$

Onde $ImpF_i$ é o fator de importância da variável aleatória i ; f é a função de interesse; x são as variáveis de projeto; e σ_{x_i} é o desvio padrão associado a cada variável aleatória.

3.7 Conversão dos valores semi-probabilísticos para probabilísticos

Nesta seção serão apresentadas as formulações adotadas para se calcular os valores médios utilizados na análise de confiabilidade ao longo desta dissertação. Para esta finalidade, foram adotadas as seguintes ideias apresentadas pela ABNT (2014, p. 63 e 70):

- “Para as ações permanentes, os valores característicos devem ser adotados iguais aos valores médios das respectivas distribuições de probabilidade, sejam valores característicos superiores ou inferiores”;
- “Os valores característicos das ações variáveis, F_{qk} , estabelecidos por consenso e indicados em Normas Brasileiras específicas, correspondem a valores que têm de 25 % a 35 % de probabilidade de serem ultrapassados no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos (...);
- “A resistência característica inferior é admitida como sendo o valor que tem apenas 5 % de probabilidade de não ser atingido pelos elementos de um dado lote de material”.

Os parâmetros geométricos, assim como as ações permanentes, devido à falta de referência normativa nacional, foram considerados valores médios.

Tendo estas premissas em mente, e assumindo que ambos os carregamentos e as resistências possuem uma distribuição Normal associada, apresenta-se as formulações a seguir.

3.7.1 Resistência

Assumindo-se que as resistências possuem uma distribuição normal associada e sabendo-se que a resistência característica representa o valor cuja probabilidade de ser excedido é de 95%, pode-se encontrar a resistência média através da seguinte relação:

$$f_m = \frac{f_k}{1 - 1.645V_f} \quad (3.29)$$

Onde:

- f_m representa a resistência média do material considerado;
- f_k é a resistência característica;
- V_f é o coeficiente de variação relacionado ao material em questão.

O valor 1.645 está relacionado ao quantil de 5% mencionado anteriormente.

3.7.2 Carregamento permanente médios

Conforme previsto pela NBR 6118:2014, os carregamentos permanente característicos são adotados iguais aos valores médios das suas respectivas distribuições de probabilidade. Deste modo, pode-se escrever:

$$g_m = g_k \quad (3.30)$$

3.7.3 Carregamentos acidentais

Assumindo-se que as cargas acidentais possuem uma distribuição normal associada e adotando-se como valor característico aquele cuja probabilidade de ser excedido é de 30%, pode-se encontrar o carregamento acidental médio através da seguinte relação:

$$F_m = \frac{F_k}{1 + 0.5244V_F} \quad (3.31)$$

Onde:

- F_m representa a carga acidental média;
- F_k é o carregamento acidental característico;
- V_F é o coeficiente de variação relacionado ao carregamento acidental considerado.

3.8 Implementação computacional

Para fazer a aplicação dos procedimentos mencionados neste capítulo a fim se executar a análise de confiabilidade, foi adotado o pacote PyRe (*Python Reliability*) na versão 5.0.2, desenvolvido na linguagem Python 2.7. Esse pacote foi escolhido, dentro outros, pelo fato de apresentar uma excelente documentação explicando seu uso e as formulações envolvidas no seu desenvolvimento; além de apresentar bons resultados ao ser testado com alguns exemplos da bibliografia apresentados mais a frente.

Tanto o código como a documentação desse pacote são abertos e podem ser encontrada na referência Hackl (2018). Além dessa documentação, a dissertação de mestrado desse mesmo autor (HACKL, 2013) apresenta, além de alguns exemplos de validação aplicados a alguns problemas de engenharia civil, uma explicação detalhada dos procedimentos adotados na elaboração do pacote.

Por se tratar de um pacote *Open Source* qualquer usuário pode comentar, questionar e sugerir modificações ao autor. Até o ano de elaboração da presente dissertação a página do projeto indica que ele continua ativo.

Por fim, é importante salientar que na documentação desse pacote constam exemplos de implementação, utilizando a metodologia *multithreading*. Essa metodologia permite a execução de várias funções simultaneamente, sendo, portando, um ponto positivo no que diz respeito ao ganho de tempo de processamento quando se está tratando problemas complexos que demandam muito tempo computacional.

3.9 Exemplos de validação

A seguir serão apresentados alguns exemplos apresentados pela bibliografia de referência deste capítulo os quais foram utilizados para validar este pacote.

3.9.1 Exemplo 01: Momento plástico resistente de uma seção de aço

O primeiro exemplo testado foi o apresentado por Ghali, Neville e Cheving (1986, p. 725-726). Trata-se da verificação da capacidade resistente de uma seção de aço plastificada devido à aplicação de um dado momento fletor.

Inicialmente define-se o momento de plastificação da seção por $M_p = Z f_y$, onde f_y é a tensão de escoamento do aço e Z é o módulo de plástico da seção. Denomina-se Q o momento solicitante e pede-se o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha. Considera-se que todas as variáveis são independentes e possuem distribuição lognormal com as seguintes médias e coeficientes de variação: $\mu_{f_y} = 300$ MPa; $V_{f_y} = 10$ %; $\mu_Z = 0.9 \times 10^{-3}$ m³; $V_Z = 5$ %; $\mu_Q = 160$ kNm; $V_Q = 12$ %.

O exemplo é resolvido analiticamente pelo trabalho de referência através da Equ-

ção 3.32 e os resultados são comparados com os obtidos através da simulação através do PyRe.

$$P_f = P \left[\left(\frac{f_y Z}{Q} \right) < 1 \right] \quad (3.32)$$

Tabela 17 – Comparativo dos resultados para o exemplo 01 de validação da análise de confiabilidade.

Métodologia	β	Erro (%)	p_f	Erro (%)
Analítica	3.21	-	$0.664 * 10^{-3}$	-
Monte Carlo	3.203	0.21	$0.680 * 10^{-3}$	2.4
FORM	3.205	0.16	$0.675 * 10^{-3}$	1.7

Fonte: o autor, 2018.

Nota – Foram geradas 100000 amostras para o método de Monte Carlo.

Uma diferença muito pequena pode ser identificada nos resultados obtidos. Isso se deve ao fato de que os dois métodos utilizados pelo pacote mencionado são simulações e, portanto, aproximam os resultados reais do problema. Como as diferenças são muito pequenas para este exemplo, pode-se concluir que o problema foi resolvido de forma satisfatória.

3.9.2 Exemplo 02: Probabilidade de falha no cisalhamento

Este exemplo também foi apresentado por Ghali, Neville e Cheving (1986, p. 726-727). Pede para que se calcule a probabilidade de falha devido ao cisalhamento no ponto D da estrutura apresentada pela Figura 17, que está submetida a um carregamento permanente q e a cargas móveis P_1 e P_2 espaçadas de $L/15$.

Assume-se $L = 25$ m, e as demais variáveis com média e desvio padrão:

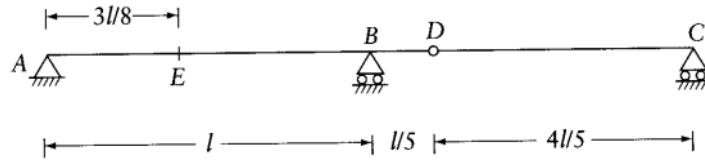
$$\mu_q = 360kN/m; \quad \mu_{P1} = 400kN; \quad \mu_{P2} = 300kN; \quad \mu_{V_d} = 6000kN$$

$$\sigma_q = 36kN/m; \quad \sigma_{P1} = 60kN; \quad \sigma_{P2} = 45kN; \quad \sigma_{V_d} = 1000kN$$

Considera-se também que $P1$ e $P2$ estão correlacionadas em que o coeficiente de correlação é $COV = 2500kN^2$.

Como as variáveis são correlacionadas, deve-se desenvolver a matriz de correlação para este problema. O formato que esta matriz deve ser introduzida no programa deve seguir o que prescreve Hackl (2013, p. 18). Aplicando-se a formulação apresentada por essa referência, chega-se à seguinte matriz de correlação para este problema.

Figura 17 – Figura do exemplo 02 de validação da análise de confiabilidade.



Fonte: Ghali, Neville e Cheving (1986, p. 370).

$$[R_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.056 \\ 0 & 0 & 0.056 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Ghali, Neville e Cheving (1986) ajudam o leitor ao definir a função estado limite como:

$$G_c = V_d - 0.4 * L * Q - P_1 - (2/3) * P_2 \quad (3.34)$$

Deste modo, pode-se avaliar facilmente este problema com o auxílio do PyRe. Os resultados obtidos desta simulação estão apresentados na Tabela 18

Tabela 18 – Comparativo dos resultados para o exemplo 02 de análise de confiabilidade.

Metodologia	β	Erro (%)	p_f	Erro (%)
Analítica	1.69	-	$4.55 * 10^{-2}$	-
Monte Carlo	1.6977	0.455	$4.48 * 10^{-2}$	1.54
FORM	1.6927	0.160	$4.525 * 10^{-2}$	0.55

Fonte: o autor, 2018.

Nota – Foram geradas 9000 amostras para o método de Monte Carlo.

Pode-se notar que, assim como no exemplo anterior, os resultados obtidos pelas simulações foram muito próximos daqueles obtidos pela solução analítica, corroborando com a ideia de que a simulação reproduziu o problema de forma satisfatória.

4 OTIMIZAÇÃO

A engenharia consiste de uma série de atividades bem definidas, as quais envolvem análise, dimensionamento, fabricação, pesquisa, venda e desenvolvimento de sistemas (ARORA, 2004). Os processos de dimensionamento e fabricação vêm se desenvolvendo por centenas de anos. Prova disso são as estruturas atuais de pontes, edificações, aeronaves, automóveis, etc.

Como todo o processo que envolve o estudo para melhoramento de alguma dessas etapas é muito custoso, seja do ponto de vista de recursos humanos ou de materiais, o que se convencionou fazer usualmente é adotar um sistema pré-definido para todas as etapas do projeto, independente de este ser ou não a melhor escolha para solucionar o problema em questão. Tradicionalmente, ajustes e melhorias são feitos conforme se obtêm os resultados dos projetos anteriores.

Por esta ótica, pode-se notar que várias alternativas de soluções podem ser utilizadas para se executar uma mesma tarefa. Algumas dessas podem ser melhores em determinados pontos e piores em outros. Como testar todas as possibilidades para definição de um sistema *ótimo* pode ser um processo muito custoso, costuma-se adotar uma solução que resulta do aprimoramento da solução com base na experiência adquirida através de projetos passados.

Note, contudo, que, com a evolução na capacidade de processamento computacional que ocorreu nas últimas décadas, os computadores atuais são capazes de processar uma grande quantidade de informações de forma rápida e eficiente. Deste modo, pode-se desenvolver sistemas melhores pelo fato de se poder analisar e otimizar diversos aspectos de projeto em um curto período de tempo.

O dimensionamento de um sistema pode ser formulado como um problema de otimização no qual pode-se definir parâmetros a serem otimizados de modo a se atender as restrições de projeto. O processo de otimização é aquele pelo qual se obtém a *melhor* solução para um dado problema, se for possível mensurar o que é bom ou ruim para o problema em questão. Na prática, o que se deseja normalmente é *maximizar* (ex.: o retorno, o lucro) ou *minimizar* (ex.: despesas) algum aspecto do projeto.

Para a maioria dos problemas reais de engenharia há uma infinidade de soluções possíveis. Partindo deste princípio, pode-se definir parâmetros a serem otimizados de modo a se definir um projeto ótimo que atenda a finalidade desejada. Diversas metodologias para se encontrar o projeto ótimo são apresentadas por Antoniou e Lu (2007) e Arora (2004). Entre essas metodologias destacam-se as seguintes famílias de métodos:

1. Métodos analíticos;
2. Métodos gráficos;
3. Métodos experimentais;
4. Métodos numéricos.

Os métodos numéricos merecem destaque por poderem ser aplicados a problemas de otimização de alta complexidade, os quais não podem ser resolvidos de forma analítica. Além disso, pode-se desenvolver um *script* para processamento em computador. Por estas razões, esses métodos cada vez mais vêm substituindo os demais nos processos de otimização (ANTONIOU; LU, 2007).

Este trabalho se restringirá aos métodos numéricos, mais precisamente à Programação Quadrática Sequencial (SQP), por se tratar da metodologia adotada nos procedimentos de otimização ao longo desta dissertação. Os fundamentos para este método assim como os conceitos básicos envolvendo o processo de otimização serão apresentados de forma sucinta ao longo deste capítulo. Mais detalhes sobre este e outros métodos podem ser encontrados nas bibliografias já mencionadas.

Este capítulo tem como objetivo elucidar os princípios básicos do processo de otimização e apresentar a metodologia utilizada neste trabalho para se analisar os casos estudados. Para esta finalidade, esta seção está organizada da seguinte forma:

- **Formulação matemática:** descreve-se a formulação básica envolvida em qualquer problema de otimização e se elucidam os princípios envolvidos nessa formulação;
- **Elementos canônicos da otimização:** serão apresentados os elementos básicos constituintes de um problema típico de otimização;
- **Metodologia:** a técnica da programação quadrática sequencial será apresentada brevemente;
- **Implementação computacional:** se fará uma breve apresentação do pacote adotado para uso das rotinas de otimização ao longo deste trabalho;
- **Exemplos de validação:** alguns exemplos de referência serão utilizados para validação do pacote adotado;
- **Aplicações:** se fará a aplicação da metodologia adotada para otimização aos modelos de estudo de caso.

4.1 Formulação matemática

Antes de se atentar à otimização propriamente dita, o problema em questão deve ser formulado de forma adequada. Uma função F para se avaliar a performance de um dado sistema deve ser definida em termos de n parâmetros de projeto $x_1, x_2, \dots, x_n$ como:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\{x\})$$

Onde:

- F é um escalar que pode assumir diversos valores a depender dos valores adotados para o vetor $\{x\}$;
- $\{x\}$ é o vetor que contém as variáveis de projeto $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- f é denominada *função objetivo*, a qual retorna o escalar F .

É comum nos problemas de otimização que as variáveis de projeto tenham valores limites, os quais denotaremos de x_L para os limites inferiores e x_U para os limites superiores. Deste modo, podemos escrever que:

$$\{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}$$

Além das restrições dos valores destas variáveis, é muito comum que elas estejam correlacionadas como, por exemplo, por leis físicas, como a lei de conservação da massa e/ou energia. Para estes casos, definem-se as restrições de igualdade.

$$h_i(\{x\}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Além das restrições de igualdade, é recorrente que se tenha equações de desigualdade para garantir a viabilidade, a segurança, a compatibilidade ou simplesmente para se viabilizar o modelo adotado para o problema em questão (ANTONIOU; LU, 2007). Nesses casos, definem-se as restrições de desigualdade.

$$g_j(\{x\}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Deste modo, um problema geral de otimização pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && f(\{x\}) \\
 &\text{Sujeito a:} && g_j(\{x\}) \geq 0 && j = 1, 2, \dots, m \\
 &&& h_i(\{x\}) = 0 && i = 1, 2, \dots, p \\
 &&& \{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tendo se definido a formulação geral para todo problema de otimização, dada pela Equação 4.1, serão agora apresentados os elementos básicos que compõem um problema padrão de otimização.

4.2 Elementos canônicos da otimização

A formulação de um problema de otimização consiste basicamente em traduzir um dado problema descrito em uma formulação matemática (ARORA, 2004) como apresentado na Equação 4.1. A descrição do problema propriamente dita é usualmente informada pelo idealizador/dono do projeto e envolve a apresentação do seu objetivo geral, assim como, as exigências às quais ele deve atender.

Uma vez tendo se definido o objetivo e as exigências, deve-se coletar informações sobre as propriedades dos materiais envolvidos, limitações de recursos (material/mão de obra), custos, etc. De posse dessas informações, para se formular o problema de otimização, os seguintes elementos devem ser identificados.

4.2.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são aquelas que descrevem o sistema analisado. Elas também são chamadas de *variáveis de otimização* e são consideradas como *livres* pelo fato de que podem, a princípio, assumir quaisquer valores.

Para alguns problemas, diferentes conjuntos de variáveis podem ser identificados como sendo capazes de descrevê-los. A formulação do problema adotado, portanto, dependerá do conjunto de variáveis escolhido. Uma vez que se assumem valores numéricos para as variáveis adotadas, tem-se um dimensionamento do sistema (independente de este dimensionamento atender ou não às exigências de projeto a princípio).

Nós, então, identificaremos como variáveis de projeto todas as variáveis cujos valores são desconhecidos a priori no problema de otimização, e cuja a definição de valores acarreta na definição de um dado sistema. Esse conjunto de variáveis será representado pelo vetor $\{x\}$.

As variáveis de projeto devem ser, sempre que possível, independentes entre si. Duas variáveis são ditas independentes quando se tem uma ou mais restrições de igualdade associadas a estas. O número de variáveis independentes determina o grau de liberdade do problema de otimização.

4.2.2 Função objetivo

Pode haver várias soluções para o sistema em questão e algumas podem ser melhores que outras. Para comparar essas soluções deve haver um critério. Esse critério deve ser uma grandeza escalar ($F = f(\{x\})$) cujo valor é definido uma vez que se atribuem valores a todas as variáveis de projeto. Esse critério é usualmente denominado de *função objetivo*, a qual deve ser maximizada ou minimizada de acordo com o problema analisado. Uma boa função objetivo deve ser influenciada diretamente ou indiretamente pelas variáveis de projeto.

Alguns exemplos de funções objetivo podem ser listados: custo (minimizar), lucro (maximizar), peso (minimizar) gasto energético (minimizar), etc.

4.2.3 Restrições

O último passo na definição de um problema de otimização diz respeito à definição das restrições do projeto e formular uma expressão matemática para cada uma delas. Essas restrições, como foi dito anteriormente, normalmente visam garantir a conservação de leis físicas, suprimento de recursos e critérios de desempenho. Por exemplo, sistemas estruturais não devem falhar quando carregados, a frequência natural da estrutura deve ser diferente da dos equipamentos que ela suporta, as estruturas não devem ter deformações excessivas que atrapalhem seu uso normal, etc.

As restrições definem a *região viável* de projeto. Definida como aquela que abriga todos os pontos que geram uma solução para o problema de otimização que atendem a todas as restrições do problema.

As restrições podem ser tanto de igualdade ($h(\{x\}) = 0$) ou desigualdade $g(\{x\}) \geq 0$. O problema deve ser estudado cuidadosamente para se definir quais tipos de restrições deve-se adotar. A definição do problema implicará na definição de qual método deverá ser usado para a otimização, uma vez que este deve ser capaz de lidar com as restrições definidas.

As restrições também podem ser escritas de forma explícitas ou implícitas. As explícitas são relativamente fáceis de serem escritas e podem ser correlacionadas diretamente com as variáveis de projeto por uma função explícita. Um exemplo deste tipo seriam as restrições relacionadas aos valores máximos e mínimos para as variáveis de projeto. Por outro lado, as implícitas são mais complexas, para as quais não se pode desenvolver uma

expressão explícita para se obter o seu valor. Exemplos destas seriam o deslocamento de um ponto e os esforços internos em um elemento que compõe uma estrutura.

É importante aqui destacar que a notação usada para as restrições desigualdade foi adotada no formato $g(\{x\}) \geq 0$ para se manter a mesma notação adotada pelo pacote escolhido para se executar a otimização. Deste modo, sempre que se falar nesse tipo de restrição ao longo deste texto, se estará fazendo referência a esta notação.

4.3 Metodologia

Uma metodologia de otimização refere-se a uma sequência de passos que devem ser seguidos repetitivamente de modo a se obter uma sequência de soluções melhoradas, partindo de uma solução inicial (ANTONIOU; LU, 2007).

O problema mais geral de otimização diz respeito aos problemas onde tanto a função objetivo como as restrições são não lineares. Para esses casos alguns métodos merecem destaque, como os métodos de Penalidade, de Barreira e o da *Programação Quadrática Sequencial* (SQP). Entretanto, o SQP tem se provado altamente eficaz quando aplicado a problemas de otimização em geral (ANTONIOU; LU, 2007). Por esta razão, foi a metodologia adotada nos casos estudados ao longo desta dissertação.

4.3.1 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

Neste método, o problema de otimização é resolvido aproximando-se este por uma sequência de subproblemas quadráticos convexos. Essa aproximação é feita repetidas vezes, utilizando os resultados de iterações anteriores, até que os valores das variáveis de projeto venham a convergir. Isso significa que a diferença entre os valores das variáveis de projetos entre duas iterações consecutivas é menor do que um dado valor (tolerância).

De um modo geral, dado um vetor inicial $\{x_0\}$, procura-se um vetor $\{S\}$ para resolver o problema original.

$$\text{Minimize} \quad f(\{x_0\} + \{S\})$$

Sujeito às seguintes condições:

$$\begin{aligned} h_i(\{x_0\} + \{S\}) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, p \\ g_j(\{x_0\} + \{S\}) &\geq 0 & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Este problema possui a seguinte função Lagrangiana associada:

$$L(\{x\} + \{S\}, \{\lambda\}, \{\phi\}) = f(\{x\} + \{S\}) + \{\lambda\}^T \{h\}(\{x\} + \{S\}) + \{\phi\}^T \{g\}(\{x\} + \{S\})$$

Onde $\{h\}$ e $\{g\}$ são os vetores com as restrições, e $\{\lambda\}$ e $\{\phi\}$ são os vetores que contêm os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Aplicando as condições de ótimo de primeira ordem ao problema original e simplificando-o por meio da série de Taylor, conforme apresenta Motta (2009), o problema inicial pode ser reescrito da seguinte forma.

$$\text{Minimize} \quad \nabla L(\{x_0\})^T \{S\} + \frac{1}{2} \{S\}^T \nabla^2 L(\{x_0\}) \{S\}$$

Sujeito às seguintes condições:

$$h(\{x_0\}) + \nabla h(\{x_0\}) \{S\} = 0$$

$$g(\{x_0\}) + \nabla g(\{x_0\}) \{S\} \geq 0$$

Este é o esquema básico de linearização do problema. O novo problema, como pode ser inferido, é de segunda ordem, e, para se encontrar uma solução ótima para ele, deve-se garantir que as condições de ótimo de segunda ordem sejam atendidas.

A apresentação completa das metodologias empregadas na programação sequencial quadrática pode ser encontrada nas bibliografias de referência: Antoniou e Lu (2007) e Arora (2004).

4.4 Otimização com base em confiabilidade

Os problemas de engenharia normalmente dependem de um número grande de variáveis. De modo geral, deve-se encontrar a combinação de valores para essas variáveis que leve a uma solução segura e que atenda às restrições do projeto. O processo para se encontrar a combinação ótima geralmente não é trivial e induz a utilização de algoritmos de otimização.

Além disso, normalmente não se têm todos os dados referentes às resistências dos materiais e os carregamentos atuantes no projeto. A falta de informações, aproximações feitas e/ou incerteza relacionadas a elas evidencia a necessidade de empregar a análise estocástica de modo a incorporar as incertezas inerentes ao sistema, o meio e aos modelos.

A otimização com base em confiabilidade (RBDO, *Reliability Based Design Optimization*) caracteriza-se, então, por um problema de otimização onde as incertezas de projeto são tratadas estatisticamente, permitindo avaliar corretamente seu nível de segurança (MOTTA, 2015). O parâmetro de referência normalmente utilizado nesse tipo de análise é o índice de confiabilidade (β).

Neste capítulo se fará uma breve apresentação ao problema da otimização estocástica. Se apresentará a sua formulação matemática, assim como seus elementos canônicos e se versará sobre algumas das metodologias aplicáveis. Por fim, será apresentado como essa metodologia foi aplicada no código elaborado de modo a processar os estudos de casos apresentados no capítulo seguinte.

4.4.1 Formulação matemática

De um modo geral, em um problema de otimização com base em confiabilidade, tem-se que uma ou mais funções relacionadas ao problema depende ou do índice de confiabilidade (β) ou da probabilidade de falha. Consequentemente, se faz necessária a aplicação da análise de confiabilidade na avaliação das restrições/função objetivo.

Por se tratar originalmente de um problema de otimização, a formulação geral se assemelha àquela do problema de otimização dado pela Equação 4.1, podendo ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && f(\{x\}) \\
 &\text{Sujeito a:} && g_i(\{x\}) \geq 0 && i = 1, 2, \dots, m \\
 &&& g_j^r(\{x\}) \geq 0 && j = 1, 2, \dots, n \\
 &&& h_k(\{x\}) = 0 && k = 1, 2, \dots, o \\
 &&& \{x_L\} \leq \{x\} \leq \{x_U\}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Onde $g_j^r(\{x\})$ são as funções restrições relacionadas à análise de confiabilidade. Normalmente essas restrições dependem ou da probabilidade de falha ou do índice de confiabilidade.

4.4.2 Elementos canônicos

Pelo fato de o problema de otimização com base em confiabilidade ser uma composição dos problemas de otimização e de análise de confiabilidade, seus elementos canônicos deste são os mesmos dos dois problemas apresentados nos itens anteriores. São eles:

- Função objetivo;
- Restrições;
- Variáveis de projeto;
- Variáveis estocásticas e suas distribuições de probabilidade associadas (note que as variáveis de projeto também podem ser estocásticas);
- Funções estado limite (utilizadas para avaliar as restrições e/ou a função objetivo que envolvem análise de confiabilidade);

4.4.3 Metodologias

Diversas são as metodologias possíveis de serem aplicadas para se efetuar a otimização com base em confiabilidade. Entre elas destacam-se a Aproximação Estocástica de Perturbação Simultânea (SPSA, *Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*) (ANDRADE, 2013) (HAMIDIAN; SEYEDPOOR, 2009), que adapta o método de maior declive (*Steepest descent*) para aplicação na otimização estocástica; a Abordagem via Medida de Desempenho (PMA, *Performance Measure Approach*), que não calcula o índice de confiabilidade diretamente quando se verificam as funções estado limite; e a tradicional Abordagem via Índice de Confiabilidade (RIA, *Reliability Index Approach*) (MOTTA, 2015).

Este trabalho, por sua vez, devido a limitações nos pacotes adotados, adotou a Abordagem via Índice de Confiabilidade para aplicação nos estudos de caso.

A Abordagem via Índice de Confiabilidade é a forma mais tradicional de solução de um problema de RBDO. O índice de confiabilidade é calculado para cada nova iteração (por meio do FORM ou Monte Carlo, por exemplo) e comparado com o índice de confiabilidade alvo. Desse modo, o processo do RIA resume-se a encontrar o ponto de maior probabilidade de falha para um dado problema. De acordo com Motta (2015) a solução (β^*) do laço interno do RBDO através do RIA pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad |\beta^*| \\ &\text{Sujeito a:} \quad G_c(\beta^*) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A restrição de confiabilidade do problema de RBDO pode ser declarada na forma:

$$\beta_{alvo} - |\beta^*| < 0$$

Essa metodologia, portanto, nada mais é do que uma rotina de otimização executada cada vez que se analisa uma restrição que dependa da avaliação de algum estado limite estocástico.

Deste modo, o processo de RBDO assim definido trata de dois ou mais processos de otimização acoplados. Pois, para se avaliar cada uma das restrições do problema de otimização formulado no formato da Equação 4.2, deve-se resolver um problema do tipo da Equação 4.3 para se obter o índice de confiabilidade ou a probabilidade de falha.

Por se tratar do principal foco deste trabalho, os problemas aos quais foi aplicada a RBDO são apresentados no capítulo 5 desta dissertação, onde estão os estudos de caso.

4.5 Avaliação dos esforços resistentes

As formulações aqui apresentadas para se avaliar os esforços resistentes das seções de vigas e pilares serão adotadas para se fazer verificações de alguns dos exemplos estudados ao longo desta dissertação.

Toda a formulação aqui apresentada foi baseada no prescrito por Araújo (2003).

4.5.1 Esforço cortante resistente

O esforço cortante resistente de cálculo será calculado conforme a formulação apresentada por Araújo (2003, vol. 1, p. 221-224) para se calcular a tensão limite de cisalhamento suportada por uma seção retangular.

Com base nos termos já definidos nos cálculos dos demais esforços resistentes, pode-se expressar a tensão última de cisalhamento pela fórmula.

$$\tau_{wu} = 0.27\alpha_v f_{cd} \quad (4.4)$$

$$\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (4.5)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (4.6)$$

Onde f_{ck} é a resistência do concreto e γ_c é o coeficiente minorador da resistência do concreto.

O valor calculado para τ_{wu} deve ser comparado com a tensão de cisalhamento atuante na seção, dada pela equação:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} \quad (4.7)$$

Onde:

- V_d é o esforço cortante solicitante de cálculo;
- b_w é a largura da alma para vigas com seção tipo T ou a largura da seção para vigas com seção retangular;
- d é a altura útil da seção.

Uma vez verificado que a tensão de cisalhamento atuante é inferior à tensão de cisalhamento resistente do concreto, com o valor da área de aço por metro linear

(A_{sw}) adotada como armadura transversal pode-se proceder com o cálculo da capacidade resistente da peça ao esforço cisalhante, calculando-se a tensão de compressão atuante no concreto através da seguinte equação.

$$\sigma_c = \frac{A_{sw} f_{yk}}{\gamma_s b_w} \quad (4.8)$$

Onde:

- A_{sw} é a área de aço por metro linear referente aos estribos;
- f_{yk} é a resistência característica do aço da armadura passiva do estribo.
- γ_s é o coeficiente minorador da resistência do aço.

No caso de análise estocástica, os coeficientes minoradores serão todos tomados como unitários.

A parcela do esforço cortante que pode ser resistida pelo concreto é dada em função do f_{ck} deste material.

Se $f_{ck} \leq 50$ MPa:

$$\tau_c = 0.09 f_{ck}^{2/3} \quad (4.9)$$

Caso $f_{ck} > 50$ MPa:

$$\tau_c = 0.636 \log(1 + 0.11 f_{ck}) \quad (4.10)$$

Por fim, o esforço cortante resistente é dado por:

$$V_{Rd3} = \tau_{wd} * b_w * d \quad (4.11)$$

Onde:

$$\tau_{wd} = \frac{\sigma_c}{1.11} + \tau_c \quad (4.12)$$

4.5.2 Momento fletor resistente - Flexão simples

O momento fletor resistente de cálculo de vigas será calculado conforme a formulação apresentada por Araújo (2003, vol. 1, p. 191-196) para se avaliar a capacidade resistente de uma seção retangular com armadura simples submetida à flexão simples.

Primeiramente calcula-se a resistência de cálculo do aço.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (4.13)$$

Onde f_{yk} é a resistência característica do aço e o coeficiente γ_s é o coeficiente minorador aplicado ao caso analisado. No caso de análise estocástica esse coeficiente é unitário.

A profundidade da linha neutra, considerando a viga normalmente armada, é dada pela fórmula.

$$x_b = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} d \quad (4.14)$$

Onde:

- ϵ_u é a deformação máxima admitida para as fibras de concreto (0.35%);
- d é a altura útil da seção;
- ϵ_y é a deformação de escoamento do aço dada pela equação

$$\epsilon_y = f_{yd}/E_s \quad (4.15)$$

Onde E_s é o módulo de elasticidade do aço, normalmente tomado como 210 GPa para armadura passiva.

A profundidade da linha neutra para a seção de interesse pode ser calculada pela seguinte equação:

$$x = \frac{A_s f_{yd}}{\lambda b_w \sigma_c} \quad (4.16)$$

Onde:

- λ é a razão entre a posição da linha neutra considerando-se o diagrama parábola retângulo de tensões no concreto e a linha neutra considerando-se o diagrama retangular (consultar Araújo (2003) para mais informações).
- $\sigma_{cd} = 0.85 f_{ck} / \gamma_c$

Caso $x \leq x_b$, a seção está sub-armada e o momento resistente de cálculo pode ser obtido por:

$$M_{rd} = \lambda b_w x (d - 0.5 \lambda x) \sigma_{cd} \quad (4.17)$$

Onde b é a largura da seção retangular.

Caso $x > x_b$, a seção está super-armada e o momento resistente é dado pela seguinte equação.

$$M_{rd} = \frac{-A_s E_s \epsilon_u + \sqrt{A_s E_s \epsilon_u (A_s E_s \epsilon_u + 4 \lambda b_w d \sigma_{cd})}}{2 \lambda b \sigma_{cd}} \quad (4.18)$$

4.5.3 Momento fletor resistente - Flexo-compressão normal

O momento fletor resistente de cálculo dos pilares será calculado conforme a formulação apresentada por Araújo (2003, vol. 3, p. 53-56) para se avaliar a capacidade resistente de uma seção retangular com duas camadas de armadura submetida à flexo-compressão normal, quando a resistência do concreto é inferior a 50 MPa.

Primeiramente calcula-se a resistência de dimensionamento do concreto.

$$\sigma_{cd} = \frac{0.85 f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 f_{cd} \quad (4.19)$$

Onde f_{ck} é a resistência característica do concreto e o coeficiente γ_c é o coeficiente minorador da resistência deste material aplicado ao caso analisado. No caso de análise estocástica este coeficiente é unitário.

Em seguida calculam-se os seguintes parâmetros adimensionais.

$$v_d = \frac{N_d}{b_p h_p \sigma_c} \quad (4.20)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b_p h_p \sigma_c} \quad (4.21)$$

$$\delta_d = \frac{d'}{h_p} \quad (4.22)$$

Onde:

- N_d é o esforço normal solicitante de cálculo;
- b_p e h_p são a base e altura do pilar, respectivamente;
- d' é a distância da face do pilar ao centroide da armadura dessa face.

Em seguida, calcula-se o adimensional χ através da Tabela 19.

De posse do adimensional χ , pode-se calcular o momento adimensional μ através das seguintes equações:

Tabela 19 – Tabela para cálculo do adimensional χ .

v_d	0.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	≥ 1.0
χ	1.00	1.00	0.93	0.88	0.88	0.90	0.93

Fonte: Produzido por Araújo (2003).

$$\mu = (0.5 - \delta_d)\chi\omega + 0.468v_d(1 - v_d) \quad \text{se} \quad v_d \leq 1.00 \quad (4.23)$$

$$\mu = (0.5 - \delta_d)\chi(\omega + 1 - v_d) \quad \text{se} \quad v_d > 1.00 \quad (4.24)$$

Por fim, o momento resistente é dado pela seguinte relação.

$$M_{Rd} = \mu b_p h_p^2 \sigma_c \quad (4.25)$$

4.5.4 Momento fletor resistente - Flexo-compressão oblíqua

A metodologia empregada para se verificar a flexo-compressão oblíqua em pilares baseia-se na verificação destes sujeitos a flexo-compressão normal, que foi apresentada anteriormente, e no processo aproximado para dimensionamento à flexão composta oblíqua sugerido por ABNT (2014, p. 124).

A ideia básica do processo aproximado para se tratar de flexão composta oblíqua é similar a de se avaliar duas flexões compostas normais separadamente. Conforme a NBR 6118:2014, para seções retangulares, pode-se escrever:

$$\left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^{1.2} + \left[\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^{1.2} = 1 \quad (4.26)$$

Onde:

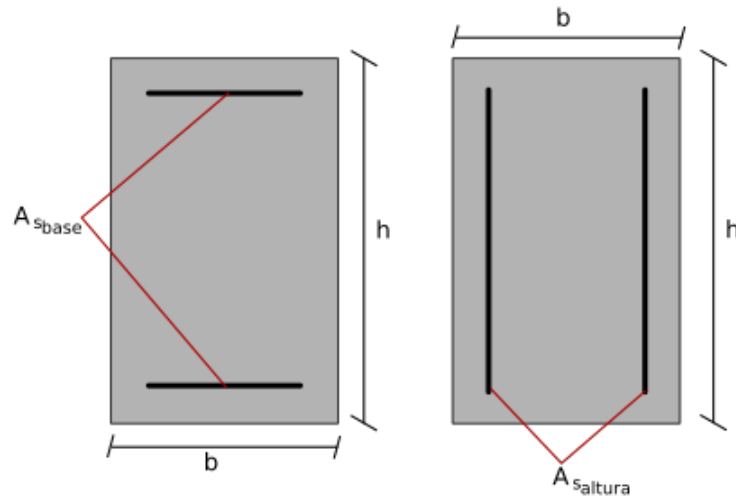
- $M_{Rd,x}$ e $M_{Rd,y}$ são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão composta oblíqua, segundo os eixos principais de inércia x e y , da seção bruta, para um esforço normal resistente de cálculo N_{Rd} de valor igual ao esforço normal solicitante N_{Sd} ;
- $M_{Rd,xx}$ e $M_{Rd,yy}$ são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com mesmo valor N_{Rd} . Esses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura na seção.

Para os problemas desta dissertação especificamente, não há uma configuração de número de barras e diâmetros definidos. Porém, mesmo sem tal definição, conseguimos, na seção anterior, calcular os esforços resistentes de uma seção submetida à flexo-compressão

oblíqua. Este mesmo princípio será usado para se avaliar a formulação aproximada prevista em norma.

Analisa-se, inicialmente, duas seções distintas, conforme apresentado na Figura 18, submetida ao mesmo esforço normal N_{Sd} mas cada uma resistindo a um momento fletor.

Figura 18 – Distribuição de áreas de aço na seção de um pilar.



Fonte: o autor, 2018.

O problema, então, transformou-se a princípio em dois subproblemas de flexo compressão normal. Avalia-se a capacidade resistente de cada uma destas seções e encontram-se os valores de $M_{Rd,xx}$ e $M_{Rd,yy}$.

De posse dos valores dos momentos resistentes para estas duas seções e da Equação 4.26, pode-se escrever a seguinte relação.

$$\left[\frac{M_{Sd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^{1.2} + \left[\frac{M_{Sd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^{1.2} \leq 1 \quad (4.27)$$

Onde:

- $M_{Sd,x}$ e $M_{Sd,y}$ são os esforços solicitantes de dimensionamento decompostos na direção dos eixos principais de inércia da seção bruta;
- $M_{Rd,xx}$ e $M_{Rd,yy}$ têm o mesmo significado que foi anteriormente descrito.

De posse da Equação 4.27 pode-se avaliar se a seção do pilar resiste ou não aos esforços solicitantes.

Note que a formulação apresentada, com base na Figura 18, é relativamente conservadora pois se ignora que uma possível contribuição das áreas de aço que encontram-se distribuídas ao longo da altura da seção (ou da base, a depender do caso analisado) possa dar a capacidade resistente da mesma. Entretanto, para seções menores, onde se tem apenas barras nos cantos ou muito próximo destes, esta aproximação é muito mais realista.

4.6 Implementação computacional

4.6.1 Otimização

Para aplicação da metodologia apresentada para otimização foi utilizada a função *minimize* presente no pacote Scipy. Esse pacote é definido como um sistema *open-source* de software destinado a matemática, ciência e engenharia (JONES et al., 2001), e tem sido aplicado amplamente pelos usuários dessas áreas que utilizam a linguagem Python.

O pacote SciPy adotado é muito bem documentado e apresenta um subpacote específico para aplicações relacionadas à otimização denominado SciPy.optimize. Esse subpacote agrupa uma vasta gama de funções capazes de implementar diversos algoritmos de otimização. Entretanto, este trabalho se restringirá à função *minimize* por ser ela a que deve ser utilizada para se executar o SQP. Esta função aplica a metodologia proposta por Kraft (1988) para implementação do SQP através de uma aproximação via método dos mínimos quadrados (*Sequential Least Squares Programming*).

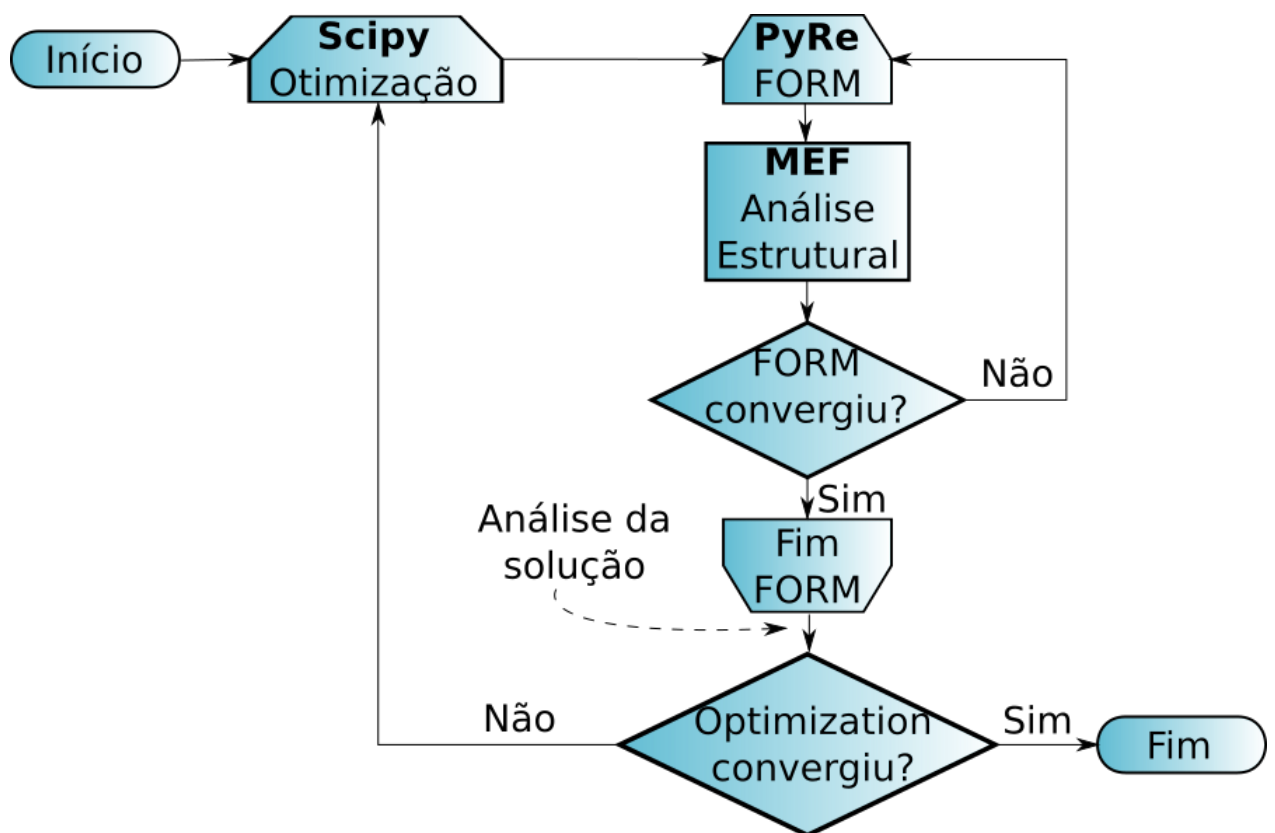
4.6.2 Otimização com base em confiabilidade

A implementação computacional do procedimento de otimização com base em confiabilidade foi feita acoplando-se os dois pacotes anteriormente apresentados: SciPy, para otimização via SQP; e PyRe, para análise de confiabilidade (conforme visto no capítulo 3). Para efetuar a análise de confiabilidade adotou-se o FORM devido ao fato de esta metodologia necessitar de um número relativamente pequeno de amostras, quando comparado com o Monte Carlo, por exemplo.

Os dois pacotes mencionados foram acoplados ao código desenvolvido para aplicação do método dos elementos finitos. O código resultante da união destes três pacotes foi utilizado para se aplicar a metodologia da otimização estocástica aos estudos de caso apresentados no capítulo seguinte.

Um layout simplificado do código elaborado é apresentado na Figura 19.

Figura 19 – Layout do código desenvolvido.



Fonte: o autor, 2018

4.7 Exemplos de validação

Nesta seção serão apresentados exemplos de validação da função *minimize* do pacote Scipy, adotada para a aplicação do SQP ao longo deste trabalho.

4.7.1 Exemplo 01

O primeiro exemplo de validação adotado foi o mesmo apresentado em Arora (2004, p. 348). Esse problema pode ser descrito pela seguinte formulação.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & f(\{x\}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \\
 \text{Sujeito a:} \quad & g_1(\{x\}) = 1 - \frac{1}{6}x_1^2 - \frac{1}{6}x_2^2 \geq 0 \\
 & g_2(\{x\}) = x_1 \geq 0 \\
 & g_3(\{x\}) = x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

O autor deste exemplo o resolve de diversas formas ao longo de seu trabalho, sempre chegando ao mesmo ponto ótimo $x = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$, onde a função objetivo tem o valor aproximado de $f = -3$. Os resultados obtidos pelo pacote adotado são apresentados na Tabela 20.

Tabela 20 – Comparativo dos resultados do exemplo 01 de validação do código de otimização.

Variável	Scipy	Arora (2004)
x_1	1.7321	1.7321
x_2	1.7321	1.7321
f	-3.000	-3.000

Fonte: o autor, 2018.

Como se pode notar, os resultados obtidos conferem perfeitamente com o resultado apresentado na literatura de referência.

4.7.2 Exemplo 02

O segundo exemplo de validação adotado foi o mesmo que apresentado em Antoniou e Lu (2007, p. 517). O problema em questão pode ser apresentado da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & f(\{x\}) = x_1^2 + x_2 \\
 \text{Sujeito a:} \quad & h_1(\{x\}) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \\
 & g_1(\{x\}) = x_1 \geq 1 \\
 & g_2(\{x\}) = -x_1 \geq -5 \\
 & g_3(\{x\}) = x_2 \geq 2 \\
 & g_4(\{x\}) = -x_2 \geq -4
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

O comparativo entre os resultados obtidos pelo pacote Scipy e os apresentados por Antoniou e Lu (2007) são apresentados na Tabela 21.

Tabela 21 – Comparativo dos resultados do exemplo 02 de validação do código de otimização.

Variável	Scipy	Antoniou e Lu (2007)
x_1	1.0000	1.0000
x_2	2.8284	2.8284
f	3.8284	3.8284

Fonte: o autor, 2018.

Como pode-se notar, mais uma vez, os resultados obtidos conferem perfeitamente com o resultado apresentado na literatura de referência.

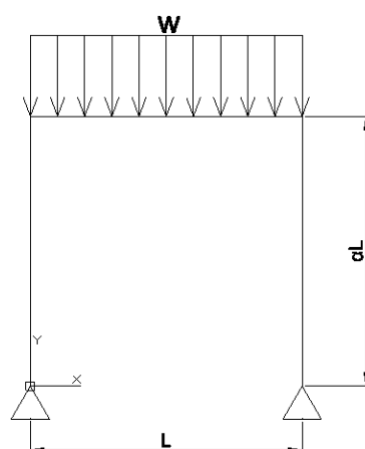
4.8 Aplicações

Nesta seção a metodologia que foi exposta ao longo deste capítulo será aplicada isoladamente aos estudos de caso da dissertação em questão. Estes valores serviram de referência para balizar o código desenvolvido e para comparação dos resultados finais deste trabalho.

4.8.1 Pórtico plano - Tensão admissível

Este primeiro problema de aplicação foi retirado das referências Horowitz (2016) e Coêlho et al. (2017). Trata-se de um pórtico plano com um único pavimento com carregamento uniformemente distribuído aplicado ao longo de sua viga. O modelo adotado para o pórtico em questão é aquele apresentado na Figura 20.

Figura 20 – Pórtico plano sugerido por Horowitz (2016).



Fonte: o autor, 2018.

Para este pórtico foram feitas as seguintes considerações:

- **Carregamentos:** foi adotado um único carregamento distribuído $w = 1.5$ tf/m;
- **Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson:** considerou-se para o concreto o valor de 25 GPa como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de $\nu = 0.2$. Estes valores foram adotados apenas para se processar a otimização com a aplicação via MEF, entretanto, como vai ser apresentado mais a frente, os resultados independem destes dois valores;
- **Dimensões das peças:** assumiu-se as duas peças com seção quadrada cujas dimensões x_1 (para o pilar) e x_2 (para a viga) são as variáveis de projeto. O comprimento do vão foi assumido constante e de valor igual a $L = 5.5$ m. Por fim, para α , que é a relação entre largura e altura do pórtico, foram atribuídos valores que variaram de 0.2 a 1.0, conforme trabalhos de referência;
- **Função objetivo:** adotou-se o volume total da estrutura como parâmetro a ser minimizado;
- **Restrições:** As restrições de projeto são referentes às tensões máximas atuantes em cada peça, as quais devem ser inferiores à tensão admissível do material em questão;
- **Tensão admissível:** adotou-se uma tensão admissível nas peças de $\sigma_{adm} = 1300$ tf/m²;
- **Tipo de análise considerada:** considerou-se apenas a análise linear elástica.

O problema em questão, portanto, pode ser descrito pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\{x\}) = 2\alpha L x_1^2 + L x_2^2 \\ \text{Sujeito a:} \quad & g_i(\{x\}) = \sigma_{adm} - \sigma_{max_i} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Note que os três pontos críticos aos quais as restrições se referem ($i = 1, 2, 3$) dizem respeito ao topo do pilar, ao meio do vão da viga e ao encontro desta com o pilar. Horowitz (2016) apresenta a seguinte formulação explícita para estas restrições:

$$g_1(\{x\}) = \sigma_{adm} - \left(\frac{wL}{2x_1^2} + \frac{3wL^2x_1}{6x_1^2 + 4\alpha x_2^4} \right) \geq 0 \quad (4.31)$$

$$g_2(\{x\}) = \sigma_{adm} - \frac{x_1^4(x_2 + 6\alpha L)}{x_2^3(6x_1^4 + 4\alpha x_2^4)} \frac{wL}{2\alpha} \geq 0 \quad (4.32)$$

$$g_3(\{x\}) = \sigma_{adm} - \frac{x_1^4x_2 + \alpha L(3x_1^4 + 6\alpha x_2^4)}{x_2^3(6x_1^4 + 4\alpha x_2^4)} \frac{wL}{2\alpha} \geq 0 \quad (4.33)$$

Note que estas formulações foram aplicadas para comparar os resultados com Horowitz (2016) e em seguida foram substituídas pela tradicional:

$$\sigma_{max} = \frac{N_k}{x^2} \pm \frac{M_k \frac{x}{2}}{\frac{x^4}{12}} \quad (4.34)$$

Onde N_k e M_k foram os esforços normais e momentos fletores, respectivamente, obtidos via análise estrutural do pórtico utilizando o código desenvolvido.

Aplicou-se o SQP tanto com as equações explícita para as restrições (Equação 4.31 a Equação 4.33) como com a aplicação da Equação 4.34 com os esforços obtidos por meio do MEF. Os comparativos dos resultados da otimização são apresentados na Tabela 22 e na Tabela 23.

Tabela 22 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Horowitz (2016) ($\alpha = 1.0$).

Variável	Horowitz (2016)	SciPy com Equações 4.31 a 4.33	SciPy com MEF
x_1	0.0635	0.0635	0.0635
x_2	0.2967	0.2967	0.2967
f	0.5286	0.5286	0.5286

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 23 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Horowitz (2016) ($\alpha = 0.4$).

Variável	Horowitz (2016)	SciPy com Equações 4.31 a 4.33	SciPy com MEF
x_1	0.0929	0.0929	0.0929
x_2	0.3108	0.3108	0.3108
f	0.5693	0.5693	0.5693

Fonte: o autor, 2018.

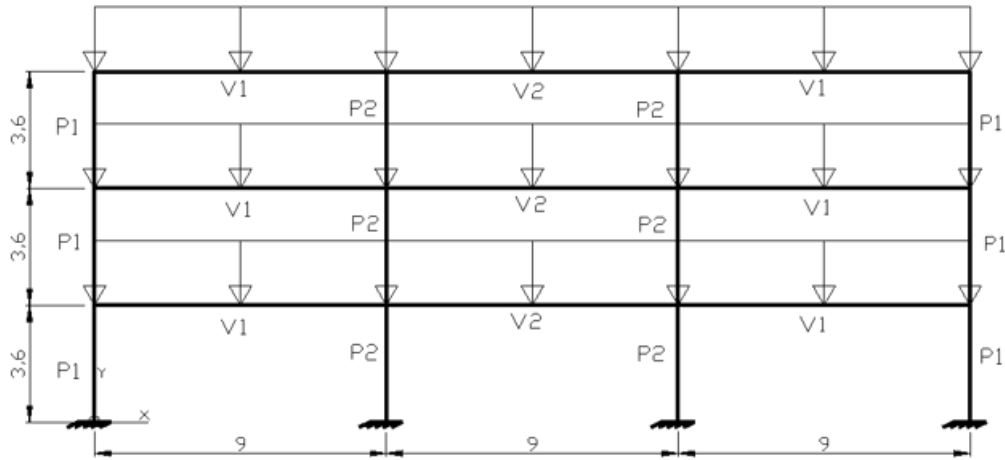
Como era de se esperar, constatou-se que os resultados conferem com aqueles apresentados pela bibliografia de referência tanto quando se usa a formulação explícita (Equação 4.31 a Equação 4.33), como quando se utiliza a análise estrutural via método dos elementos finitos (Equação 4.34).

4.8.2 Pórtico plano - Análise semi-probabilística

Este segundo problema de aplicação foi retirado da referência Coêlho et al. (2017). Trata-se de um pórtico plano com três pavimentos com carregamento uniformemente distribuído aplicado ao longo das suas vigas. O modelo adotado para o pórtico em questão é aquele apresentado na Figura 21.

Foram adotados dois grupos diferentes de vigas e pilares: os pilares do tipo 01 são os de canto e os do tipo 02 são os do centro; as vigas dos vãos extremos são as do tipo 01 e as do vão central do tipo 02.

Figura 21 – Pórtico plano sugerido por Coêlho et al. (2017).



Fonte: o autor, 2018.

Para se obter os esforços nas vigas estas foram discretizadas em dois elementos de mesmo tamanho em cada vão. A estrutura, portanto, possui um total de 30 barras (12 pilares + 18 vigas).

Para esta estrutura foram feitas as seguintes considerações:

- **Carregamentos:** considerou-se um carregamento permanente $g_k = 16.5 \text{ kN/m}$ e uma sobrecarga de $q_k = 7.2 \text{ kN/m}$;
- **Combinação de cargas:** considerou-se os mesmos coeficientes majoradores para os carregamentos que o trabalho de referência (COÊLHO et al., 2017): $\gamma_g = 1.4$ para a carga permanente e $\gamma_q = 1.7$ para carga acidental;
- **Módulo de elasticidade:** considerou-se para o concreto o valor de 28.4 GPa como módulo de elasticidade do concreto e 210 GPa para o aço no dimensionamento.
- **Coefficiente de Poisson:** adotou-se o mesmo valor previsto pela NBR 6118:2014: 0.2.
- **Resistência dos materiais:** conforme o trabalho de referência, adotou-se para o concreto $f_{cd} = 23.5 \text{ MPa}$ e para o aço $f_{yd} = 392 \text{ MPa}$;
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser minimizado. Este valor foi calculado pela seguinte equação:

$$f = \sum_{i=1}^{n_p} (C_c b_i h_i + C_a W_{a_i} + 2C_f (b_i + h_i)) L_i + \sum_{j=1}^{n_v} (C_c b_j h_j + C_a W_{a_j} + 2C_f (b_j + h_j)) L_j \quad (4.35)$$

Onde:

- n_p e n_v são os números de pilares;
 - C_c , C_a e C_f são os custos com volume de concreto, peso de aço e área de forma, respectivamente. Conforme o trabalho de referência, adotou-se $C_c = 54$ USD/m³, $C_a = 0.55$ USD/kg e $C_f = 54$ USD/m²;¹
 - b , h e L representam as bases, as alturas e os comprimentos dos elementos, respectivamente;
 - W_a é o peso do aço de cada peça. Note que este exemplo não faz o dimensionamento das armaduras transversais (estribos) e, portanto, essa ferragem não é considerada no custo total da estrutura.
- **Variáveis de projeto:** as variáveis adotadas como de projeto para o problema em questão foram:
 - As dimensões das vigas e dos pilares de cada grupo: b_{V1} , h_{V1} , b_{V2} , h_{V2} , b_{P1} , h_{P1} , b_{P2} e h_{P2} ;
 - As áreas de aço dos elementos: A_{sV1}^+ , A_{sV1}^- , A_{sV2}^+ , A_{sV2}^- , A_{sP1} e A_{sP2} ;

Um ponto importante a se salientar é que as variáveis de projeto foram tratadas como discretas por Coêlho et al. (2017) e neste trabalho elas serão tratadas como contínuas. Esta diferença deve-se às limitações das diferentes metodologias de otimização adotadas.

Para as variáveis de projeto também foram considerados os valores limites² apresentados na Tabela 24.

Tabela 24 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico plano apresentado por Coêlho et al. (2017).

Descrição	Limite superior	Limite inferior
Base das vigas	20	50
Altura das vigas	35	90
Base dos pilares	30	60
Altura dos pilares	30	90
Área de aço das vigas	5.67	22.81
Área de aço dos pilares	11.34	88.36

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As dimensões dos elementos está em *cm* e as áreas de aço em *cm*².

Nota – Os limites para as áreas de aço da viga se aplicam às áreas de aço positiva e negativa separadamente.

¹ USD refere-se a dólares americanos.

² Os valores limites para as áreas de aço foram calculados a partir das informações de quantidades de barras e diâmetros fornecidos pela bibliografia de referência para essas restrições.

- **Restrições:** Foi verificado o estado limite último (ELU) para cada um dos elementos. As restrições assumidas seguem o seguinte formato:

$$g_i(\{x\}) = 1 - \frac{S_{Sd}(\{x\})}{S_{Rd}(\{x\})} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

Onde S_{Sd} refere-se aos esforços solicitantes de dimensionamento e S_{Rd} aos esforços resistentes de projeto.

Foram avaliados um total de 8 restrições, sendo elas referentes aos momentos (positivos e negativos) e esforços cortantes resistentes nas vigas e aos momentos fletores resistentes nos pilares. A formulação adotada para se calcular os esforços resistentes está apresentada no seção 4.5.

Outras restrições como, por exemplo, deslocamento horizontal do pórtico e verificação do esforço cortante V_{rd3} conforme previsto pela NBR 6118:2014 foram negligenciadas. Como não há carregamento horizontal, se pressupôs que a exigência quanto ao deslocamento horizontal fosse atendida. Por fim, como não se está calculando a armadura transversal, não é necessário se verificar a V_{rd3} .

O problema assim descrito foi otimizado com o auxílio do pacote SciPy juntamente com aquele desenvolvido por esta dissertação para aplicação do Método dos Elementos Finitos e comparado com os resultados obtidos pela metodologia do Algoritmo Genético apresentada por Coêlho et al. (2017). Os resultados comparativos estão apresentados na Tabela 25.

Tabela 25 – Comparativo dos resultados do processo de otimização aplicado ao pórtico plano sugerido por Coêlho et al. (2017).

Metodologia	$f(x^*)$	b x h	V1		b x h	V2		b x h	P1		P2	
			A_s^+	A_s^-		A_s^+	A_s^-		A_s	A_s	A_s	A_s
GA	10087.54	25x50	15.2	22.81	25x40	11.40	22.81	30x30	32.27	30x30	11.34	11.34
SQP	9871.05	20x40	19.22	12.28	20x39	17.74	19.49	30x30	32.25	30x30	11.34	11.34

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As dimensões dos elementos está em *cm* e as áreas de aço em *cm*².

Pode-se notar claramente que o valor obtido para as funções objetivo foram relativamente próximos (diferença de 2.1%). No que diz respeito às dimensões das seções transversais pode-se notar que as seções obtidas para as vigas foram levemente diferentes para os dois modelos testados. Isso se deve provavelmente ao fato de que Coêlho et al. (2017) apenas utilizaram dimensões das seções múltiplas de 5 cm, por estar lidando com variáveis discretas. Por outro lado, no que diz respeito às seções dos pilares, as dimensões convergiram para as dimensões mínimas (30x30 cm).

Por fim, em relação às áreas de aço, como as vigas tiveram dimensões diferentes, era de se esperar que estas fossem diferentes para esses elementos. Entretanto, para os pilares, as áreas de aço obtidas foram muito próximas, corroborando com a ideia de que os resultados obtidos estão coerentes.

4.8.3 Pórtico espacial de 5 pavimentos

O terceiro pórtico estudado se baseia no mesmo código desenvolvido na seção 2.8.1 e sua estrutura está ilustrada na Figura 11.

A respeito desta problema foram feitas as mesmas considerações que foram apresentadas na seção 2.8.1. O que será adicionado aqui será apenas as informações referente à otimização.

- **Combinações de cargas:** além daquela mencionada na seção 2.8.1, a qual foi utilizada na verificação do Estado Limite Último, foram definidas as combinações para verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas (ELS-DEF) e de abertura de fissura (ELS-W). Para ambas as verificações de serviço, adotou-se $\gamma_g = 1.00$ para a carga permanente. No caso da verificação de deformações excessivas adotou-se a combinação quase permanente, onde tem-se que $\psi_2 = 0.60$ para carga acidental. Por outro lado, para a verificação de abertura de fissuras adotou-se a combinação frequente, onde tem-se que $\psi_1 = 0.70$ para a carga acidental. Estes coeficientes foram definidos conforme prevê a ABNT (2003) para bibliotecas, arquivos, depósito, etc;
- **Resistência dos materiais:** conforme o trabalho de referência (SALLES; PETERS; MANSUR, 2017), adotou-se para o concreto $f_{ck} = 30$ MPa e para o aço $f_{yk} = 500$ MPa;
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser minimizado. Este valor foi calculado como apresentado pela Equação 5.2, porém, com duas considerações importantes nesta formulação. A primeira diz respeito à consideração da armadura transversal no custo, conforme foi considerado no trabalho de referência, e a segunda diz respeito aos custos unitários, adotados como: $C_c = 332.44$ R\$/m³ ³, $C_a = 7.52$ R\$/kg ⁴ para as armaduras longitudinais, $C_a = 12.56$ R\$/kg para os estribos, por fim, os custos para formas dos pilares foram assumidos diferentes do das vigas, $C_{fP} = 47.98$ R\$/m² e $C_{fV} = 60.67$ R\$/m² ⁵;

³ Tomado como a média dos valores apresentados na tabela do SINAPI (Rio de Janeiro, julho/2017) para concreto de 30 MPa.

⁴ Tomado como a média do custo dos aços CA-50 para armação de vigas e pilares, conforme sugerido pelo SINAPI.

⁵ Fornecidos pela autora do trabalho de referência (SALLES; PETERS; MANSUR, 2017).

- **Variáveis de projeto:** as vigas terão todas uma única seção transversal, assim como os pilares. As alturas destes dois grupos de elementos serão tomadas como variáveis de projeto enquanto as larguras serão tomadas como constantes e iguais a 20 cm. Além das alturas, também foram consideradas como variáveis de projeto as áreas de aço longitudinal positiva, longitudinal negativa e transversal das vigas além das áreas de aço longitudinal e transversal do pilar.
- **Restrições:** os seguintes critérios foram considerados:
 - **Taxas de armaduras:** taxas máximas de 4% e taxas mínimas de 0.4% para os pilares e 0.15% para as vigas. Todos os valores limites adotados seguem o que foi prescrito pela NBR 6118:2014;
 - **Deformação excessiva:** os cálculos foram feitos considerando os redutores de rigidez dos elementos apresentados na seção 2.8.1. Aos deslocamentos encontrados acrescentou-se o efeito da fluência como um deslocamento adicional dado pela multiplicação do deslocamento calculado pelo coeficiente α_f , que leva em conta o efeito da fluência. Adotou-se um $\alpha_f = 2.0$, como sendo o caso mais extremo. O limite de flecha verificado foi o $L/500$, relacionado ao deslocamento total;
 - **Abertura de fissuras:** no que diz respeito esta verificação, a qual depende do diâmetro das barras e da distribuição de armaduras na seção transversal, adotou-se o critério previsto no item 17.3.3.3 da NBR 6118:2014 de modo a se verificar a tensão atuante no nível das armaduras longitudinais, a qual foi restrita ao valor de 200 MPa, para se permitir a adoção de barras de até 25 mm com espaçamento máximo de 25 cm entre elas.
 - **Capacidade resistente:** para as vigas, foram verificadas as capacidades resistentes referentes aos esforços cortantes e momentos fletores; para os pilares, verificou-se a capacidade resistente referente ao esforço cortante e à flexo compressão. Estes esforços resistentes foram avaliados conforme apresentado na seção 4.5.
 - **Valores limites:** adotou-se os valores limites apresentados na Tabela 26 para as variáveis de projeto.

Assim como no trabalho de referência, a direção considerada como a altura do pilar foi a mesma da menor dimensão da edificação.

Tendo-se definidos os critérios de avaliação do problema em questão, efetuou-se a otimização desta estrutura e os resultados obtidos pelo autor estão apresentados na Tabela 27.

Tabela 26 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 5 pavimentos.

Descrição	Limite superior	Limite inferior
Altura das vigas	25	50
Altura dos pilares	25	50
Áreas de aço longitudinal das vigas	0.75	Nenhum
Áreas de aço transversal das vigas	1.93	Nenhum
Área de aço longitudinal das vigas	2	Nenhum
Área de aço longitudinal dos pilares	1.96	Nenhum

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As dimensões dos elementos está em *cm* e as áreas de aço em *cm*².

Nota – Os limites para as áreas de aço da viga se aplicam às áreas de aço positiva e negativa separadamente.

Nota – As taxas de armadura máxima são verificadas como restrições de projeto, pois estas dependem da dimensão da seção transversal das peças e não faz sentido arbitrar um valor fixo para elas.

Tabela 27 – Comparativo dos resultados da otimização do pórtico espacial de 5 pavimentos.

Metodologia	Custo (R\$)	h_v (cm)	h_p (cm)
G.A.	146.468,88	46	35
S.Q.P.	118.112,04	38.1	38.3

Fonte: o autor, 2018.

Nota – Os resultados do G.A. foram obtidos de Salles, Peters e Mansur (2017).

Nota-se uma diferença da ordem de 19% para o valor do custo final da estrutura, e para as dimensões das peças uma diferença da ordem de 17% para as vigas e 9% para os pilares.

Apesar das diferenças encontradas, deve-se ter em mente as diferenças nas metodologias empregadas em ambos os trabalhos. Salles, Peters e Mansur (2017) usa o algoritmo genético (AG), que trata de variáveis discretas, para se executar o processo de otimização. Por outro lado, este trabalho utiliza o SQP, que trata de variáveis contínuas. Além disso, estes autores apenas utiliza dimensões múltiplas de 5 cm para as peças, o que aumentaria a diferença nos valores encontrados, podendo, inclusive, induzir a solução da otimização para um ponto mais distante daquele encontrado por um processo que considera as variáveis de projeto como contínuas.

Deste modo, considerando-se que as dimensões da estrutura estão discretizadas a cada 5 centímetros, pode-se concluir que as dimensões das peças encontradas via SQP estão coerentes com aqueles encontrados pelo trabalho de referência.

Outro ponto que pode causar essa diferença nos resultados encontrados diz respeito às áreas de aço adotadas nas verificações dos dimensionamento. Infelizmente Salles, Peters e Mansur (2017) não informam o valor das áreas de aço adotadas por eles no seu dimensionamento, entretanto, sabe-se que metodologia adotada por estes autores usa

apenas valores discretos para as áreas de aço dos elementos, pois se considera apenas os A_s dos vergalhões comerciais. Como estes valores serão sempre maiores que os valores de A_s teórico calculado, os resultados deste autor tenderá a ter um custo maior. Os valores encontrados para as áreas de aço através do SQP estão apresentados na Tabela 28.

Tabela 28 – Áreas de aço obtidas para a otimização do pórtico espacial 5 pavimentos.

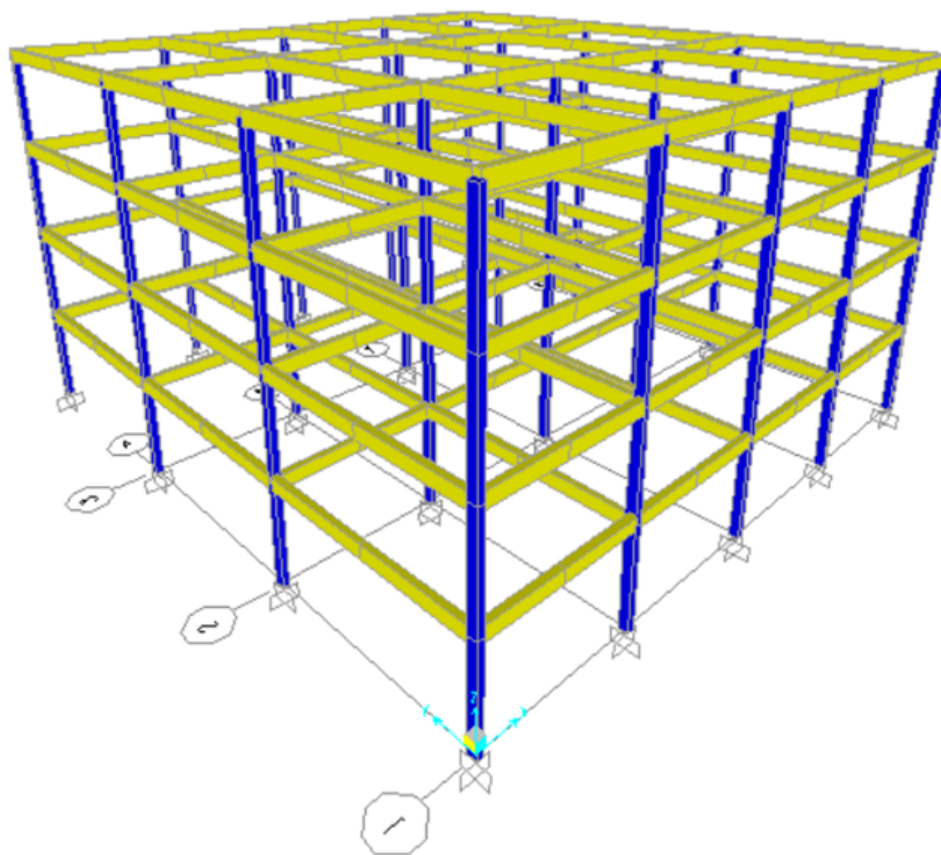
Metodologia	A_{sV}^+ (cm ²)	A_{sV}^- (cm ²)	A_{swV} (cm ² /m)	A_{sP} (cm ²)	A_{swP} (cm ² /m)
S.Q.P.	2.77	4.77	1.93	11.84	1.96

Fonte: o autor, 2018.

4.8.4 Pórtico espacial de 4 pavimentos

A estrutura a ser estudada é a de um pórtico espacial de 4 pavimentos com 4 vãos de 5 metros na direção x , 3 vãos de 7 metros na direção y e pilares com 3 metros, conforme apresentado na Figura 22.

Figura 22 – Pórtico espacial de 4 pavimentos.



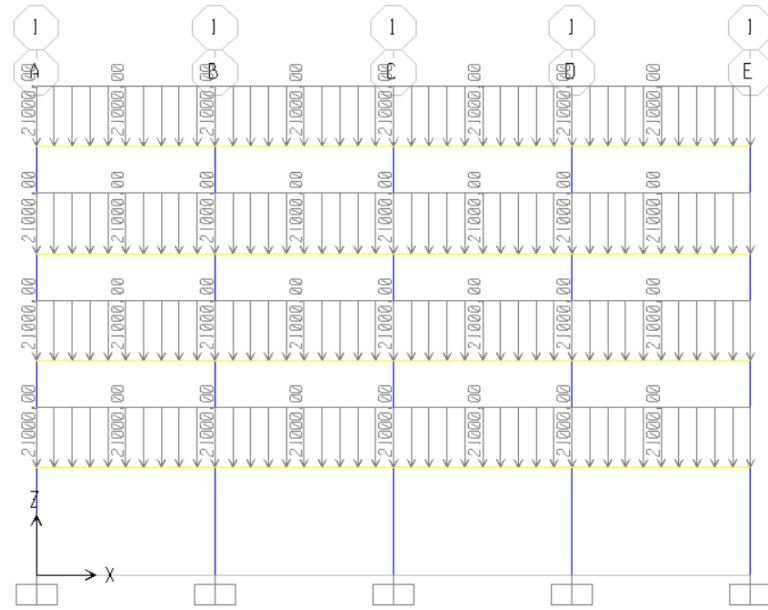
Fonte: o autor, 2018.

Os critérios considerados no processo de otimização foram os seguintes:

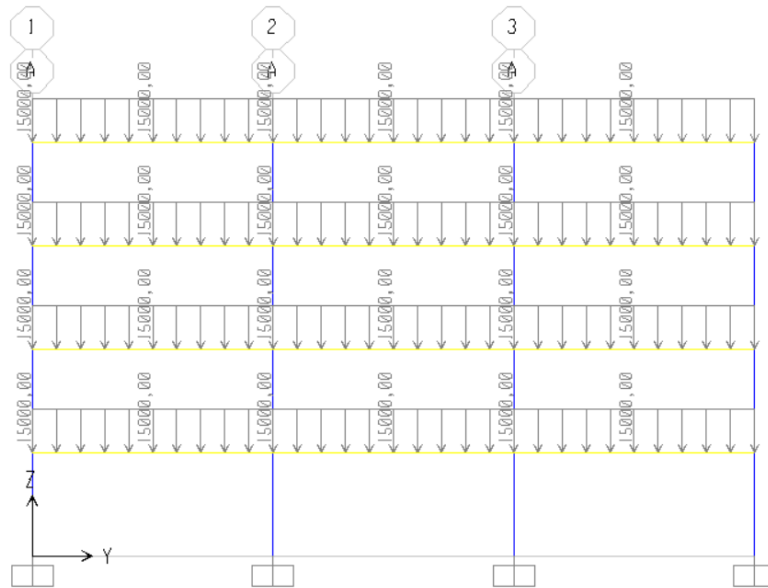
- **Carregamentos:** Esta estrutura possui uma sobrecarga de 21 kN/m nas vigas de 5 metros e um carregamento de 15 kN/m nas de 7 metros(ver Figura 23). Além disso, tem-se cargas pontuais de 2.5 kN nos nós de uma das faces menor da edificação (ver Figura 24), e o peso próprio dos elementos atuantes de forma uniformemente distribuída ao longo do eixo destes.
- **Combinações de cargas:** Foram adotadas as seguintes combinações apresentadas na Tabela 29:

Para estas combinações, a análise linear foi aplicada somente às verificações de serviço, como prevê a NBR 6118:2014, e a análise não linear geométrica foi aplicada

Figura 23 – Sobrecarga no pórtico espacial de 4 pavimentos.



(a) Carregamento distribuído ao longo da direção x .



(b) Carregamento distribuído ao longo da direção y .

Fonte: o autor, 2018.

às verificações do ELU. A análise não linear física foi considerada de forma simplificada como previsto por esta norma em todas as combinações.

- **Resistência dos materiais:** adotou-se para o concreto $f_{ck} = 30$ MPa e para o aço $f_{yk} = 500$ MPa;
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser minimizado. Este valor foi calculado como apresentado pela Equação 5.2 considerando-

Tabela 29 – Combinações de carga pórtico espacial de 4 pavimentos.

Combinação	Carga	Multiplicador
ELU	Peso Próprio	1.4
	Sobrecarga	1.5
	Vento	1.4
ELS-DEF	Peso Próprio	1.0
	Sobrecarga	0.6
	Vento	0.0
ELS-W	Peso Próprio	1.0
	Sobrecarga	0.7
	Vento	0.3

Fonte: o autor, 2018.

- **Deformação excessiva:** os cálculos foram feitos considerando os redutores de rigidez dos elementos apresentados na seção 2.8.1. Aos deslocamentos encontrados acrescentou-se o efeito da fluência como um deslocamento adicional dado pela multiplicação do deslocamento calculado pelo coeficiente α_f , que leva em conta o efeito da fluência. Adotou-se um $\alpha_f = 2.0$, como sendo o caso mais extremo. O limite de flecha verificado foi o $L/250$, relacionado ao deslocamento total;
- **Abertura de fissuras:** no que diz respeito esta verificação, a qual depende do diâmetro das barras e da distribuição de armaduras na seção transversal, adotou-se o critério previsto no item 17.3.3.3 da NBR 6118:2014 de modo a se verificar a tensão atuante no nível das armaduras longitudinais, a qual foi restrita ao valor de 280 MPa, para se permitir a adoção de barras de até 16 mm com espaçamento máximo de 15 cm entre elas.
- **Capacidade resistente:** para as vigas, foram verificadas as capacidades resistentes referentes aos esforços cortantes e momentos fletores; para os pilares, verificou-se a capacidade resistente referente ao esforço cortante e à flexo compressão. Estes esforços resistentes foram avaliados conforme apresentado na seção 4.5.
- **Valores limites:** adotou-se os valores limites apresentados na Tabela 30 para as variáveis de projeto.

A dimensão considerada como base do pilar foi aquela paralela ao eixo y , enquanto a altura ficou definida como a dimensão na direção x .

Os resultados obtidos para a otimização desta estrutura estão apresentados a na Tabela 31.

O custo total encontrado para esta estrutura foi de R\$ 198'435.17.

Tabela 30 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 4 pavimentos.

Descrição	Limite inferior
Base das vigas	15
Altura das vigas	20
Base dos pilares	20
Altura dos pilares	20
Áreas de aço longitudinal das vigas	0.75
Áreas de aço transversal das vigas	1.45
Área de aço longitudinal dos pilares	2
Área de aço transversal dos pilares	1.96

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As dimensões dos elementos estão em cm e as áreas de aço em cm^2 ou cm^2/m , conforme o caso.

Nota – Os limites para as áreas de aço da viga se aplicam às áreas de aço positiva e negativa separadamente.

Nota – As taxas de armadura máxima são verificadas como restrições de projeto, pois estas dependem da dimensão da seção transversal das peças e não faz sentido arbitrar um valor fixo para elas.

Tabela 31 – Resultados da otimização do pórtico espacial de 4 pavimentos.

Elemento	Base (cm)	Altura (cm)	A_s^+	A_s^-	A_{sw}
Vigas x	15	60	2.35	3.76	1.45
Vigas y	15	57	3.02	5.96	1.45
Pilares	35	21	14.11	1.96	

Fonte: o autor, 2018.

Como era de se esperar, no ótimo a maior dimensão do pilar foi aquela na direção do maior vão das vigas, de modo a dar maior rigidez a estas e reduzir as deformações e esforços neste elemento. É possível se perceber também que as áreas de aço transversal calculadas foram todas iguais a armadura mínima, não sendo, portanto, o esforço cortante um efeito preponderante no dimensionamento destas estruturas.

5 ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo alguns exemplos de pórticos de concreto armado serão estudados visando a otimização baseada em confiabilidade. O procedimento adotado utiliza a resposta da estrutura obtida por meio do código próprio desenvolvido para análise estrutural via o método dos elementos finitos para as múltiplas chamadas requeridas pelo otimizador (SQP) onde juntamente com o FORM, possa se fazer a otimização com base em confiabilidade

Os estudos de caso estudados estão organizados em ordem de complexidade:

- **Pórtico plano 01:** o mesmo pórtico que foi estudado na seção 4.8.1 será aqui estudado através da aplicação da otimização com base em confiabilidade;
- **Pórtico plano 02:** a RBDO será aplicada ao pórtico apresentado na seção 4.8.2;
- **Pórtico espacial de 5 pavimentos:** a estrutura apresentada na seção 4.8.3 será revisitada, porém, sobre a ótica da RBDO desta vez.

5.1 Pórtico plano 01

O primeiro estudo de caso envolverá o mesmo pórtico plano apresentado na seção 4.8.1 e que pode ser identificado na Figura 20.

Algumas das considerações feitas são similares às do problema original apresentado na seção 4.8.1. Note, contudo, que no problema original se está verificando a estrutura pelo Método das Tensões Admissíveis, método o qual não possui nenhuma norma nacional vigente que verse sobre sua aplicação deste ao dimensionamento de estruturas de concreto. Por esta razão, optou-se por correlacionar os valores apresentados no problema original através das diretrizes apresentadas por JCSS (1997).

- **Função objetivo:** adotou-se o volume total da estrutura como parâmetro a ser minimizado;
- **Restrições:** As restrições de projeto são relativas às tensões máximas atuantes em cada peça, as quais devem ser inferiores a tensão resistente do material em questão. Estas tensões são calculadas pela Equação 4.34;
- **Não linearidade:** Não foi feita qualquer consideração nem quanto a não linearidade física nem geométrica.

As variáveis aleatórias adotadas assim como as suas respectivas distribuições e parâmetros relacionados estão apresentadas na Tabela 32. Nessa tabela e nos exemplos

que se seguem V se refere ao coeficiente de variação, os quais foram obtidos a partir de JCSS (1997).

Tabela 32 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 01: definição das variáveis.

Variáveis	Símbolo	Unidade	PDF	Média	V
Dimensão do pilar	x_1	cm	Normal	Variável	0.025
Dimensão da viga	x_2	cm	Normal	Variável	0.025
Carregamento	w	tf/m	Lognormal	1.5	1.5
Tensão resistente	σ	tf/m ²	Lognormal	9100	0.17
Vão	L	m	Determinístico	5.5	-
Relação largura/altura do pórtico	α	-	Determinístico	Variável	-

Fonte: o autor, 2018.

O problema em questão, portanto, pode ser descrito pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = 2\alpha Lx_1^2 + Lx_2^2 \\
 &\text{Sujeito a:} \quad g_i^r(\mathbf{x}) = \beta_i - \beta_{alvo}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Note que as restrições de confiabilidade dependem da avaliação da tensão máxima nas peças pela aplicação da Equação 4.34, sendo esta a função estado limite que deve ser avaliada para obtenção dos valores do índice de confiabilidade (β).

Foram testados alguns valores variados de índice de confiabilidade alvo (β) e relação entre base e altura do pórtico (α). Os resultados comparativos estão apresentados na Tabelas 33 a 36. Essas tabelas também apresentam os valores relativos aos fatores de importância (F.I.), os quais foram definidos na Equação 3.28

Nas tabelas a seguir, quando se refere ao β_{alvo} apenas por β .

Tabela 33 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=1.0$.

-	Horowitz (2016)	Coêlho et al. (2017)	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.0635	0.0636	0.0506	0.0637	0.1954
x_2 (viga)	0.2967	0.2967	0.2573	0.2979	0.5965
f	0.5286	0.5288	0.3922	0.5328	2.3769

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 34 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.4$.

-	Horowitz (2016)	Coêlho et al. (2017)	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.0929	0.0920	0.7485	0.0931	0.2680
x_2 (viga)	0.3108	0.3111	0.2649	0.3121	0.6726
f	0.5690	0.5695	0.4107	0.5737	2.8041

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 35 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.6$.

Horowitz (2016)		RBDO	RBDO	RBDO	F.I.	F.I.	F.I.
		$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.0734	0.0571	0.0736	0.2458	0.1076	0.1788	1.994
x_2 (viga)	0.2963	0.2570	0.2975	0.6160	1.8170	2.4338	10.436
f	0.5185	0.3849	0.5225	2.4859	-	-	-

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 36 – Comparativo de resultados pórtico plano 01: $\alpha=0.2$.

Horowitz (2016)		RBDO	RBDO	RBDO	F.I.	F.I.	F.I.
		$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.0987	0.0789	0.0990	0.5164	0.0686	0.1079	2.9335
x_2 (viga)	0.3685	0.3143	0.3700	0.5128	2.7168	3.7638	7.2317
f	0.7685	0.5570	0.7743	2.0331	-	-	-

Fonte: o autor, 2018.

Nota-se que ao se adotar o grau de confiabilidade mínimo sugerido pelo JCSS (1997) ($\beta = 1.9$) pode-se obter dimensões das peças e um volume total de concreto inferiores aos calculados por meio do método das tensões admissíveis. Contudo, é importante ressaltar que o valor de β recomendado por esta referência para se garantir que a estrutura não venha a ruir é de 4.2.

Pode-se observar que ao se adotar um $\beta_{target} = 2.3$ obtém-se uma solução muito próxima dos resultados fornecidos por Coêlho et al. (2017) e Horowitz (2016). Este fato implicaria em dizer que este valor de índice de confiabilidade seria o valor adotado implicitamente no dimensionamento implementado por esses autores. Entretanto, como não se tem informações completas referentes ao problema (por exemplo, não se sabe qual a PDF associada ao carregamento nem qual parcela deste seria permanente e/ou acidental, etc), tal conclusão não pode ser tirada.

Observa-se, por fim, que ao se adotar o valor de índice de confiabilidade sugerido pelo JCSS (1997) ($\beta_{target} = 4.2$) obtém-se estruturas bem mais robustas que as obtidas nos problemas anteriores. Isso ressalta a ideia de que a definição das propriedades estocásticas do problema, assim como a definição do β_{target} a ser adotado, podem influenciar drasticamente o dimensionamento estrutural. Deste modo, quão melhor forem definidos os parâmetros estocásticos do problema, mais econômico poderá ser o projeto ótimo encontrado.

No que tange o fator de importância (Tabela 35 à Tabela 38) pode-se notar dois tipos de variação: uma que depende do índice de confiabilidade adotado e outra que depende do valor de α . No que diz respeito ao β_{target} adotado, essa variação se justifica pelo fato de que o aumento deste índice irá resultar em um aumento das dimensões das peças da estrutura que, portanto, terão maior impacto na função objetivo. Por outro lado, a variação no valor de α gera impactos distintos nos valores dos fatores de importância de x_1 e x_2 . Para a dimensão do pilar, este fator diminui uma vez que o pilar tem seu

comprimento diminuído com a diminuição de α . Por outro lado, a diminuição de α implica em um aumento do fator de importância associado à dimensão da viga, justificado pela maior representatividade que o volume da viga ganha frente ao volume total da estrutura.

Por fim, é conveniente destacar que o modo como o problema original foi formulado (todas as peças têm seções retangulares) implica diretamente em um maior fator de importância para a viga em relação aos pilares. Isso acontece porque para que a viga resista aos esforços solicitantes (momentos fletores e esforços normais) deve-se que aumentar tanto sua altura como largura, o que eleva consideravelmente o volume total da estrutura.

Tabela 37 – Fatores de importância - pórtico plano 01: $\alpha=1.0$.

Fatores de Importância	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.1409	0.2234	2.0991
x_2 (viga)	1.8201	2.4404	9.7853

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 38 – Fatores de importância - pórtico plano 01: $\alpha=0.4$.

Fatores de Importância	$\beta = 1.9$	$\beta = 2.3$	$\beta = 4.2$
x_1 (pilar)	0.1232	0.1907	1.5796
x_2 (viga)	1.9302	2.6780	12.441

Fonte: o autor, 2018.

5.2 Pórtico plano 02

O segundo estudo de caso envolverá o mesmo pórtico plano apresentado na seção 4.8.2 e que pode ser identificado na Figura 21. Assim como no problema original, foram adotados dois grupos diferentes de vigas e pilares: os pilares do tipo 01 são os de canto e os do tipo 02 são os do centro; as vigas dos vãos extremos são as do tipo 01 e as do vão central do tipo 02. No que se refere à discretização do problema, as vigas foram discretizadas em dois elementos de mesmo tamanho por vão e os pilares por apenas um elemento por andar. A estrutura, portanto, possui um total de 30 barras (12 pilares + 18 vigas).

Algumas das considerações feitas são similares às do problema original apresentado na seção 4.8.2:

- **Coefficiente de Poisson:** adotou-se o mesmo valor previsto pela NBR 6118:2014: 0.2.
- **Combinação de cargas:** todos os majoradores (γ_q e γ_g) foram mantido unitários nas análises de confiabilidade;
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser minimizado. Este valor foi calculado pela seguinte formulação:

$$f = \sum_{i=1}^{n_p} (C_c b_i h_i + C_a W_{a_i} + 2C_f(b_i + h_i)) L_i + \sum_{j=1}^{n_v} (C_c b_j h_j + C_a W_{a_j} + 2C_f(b_j + h_j)) L_j \quad (5.2)$$

Onde:

- n_p e n_v são os números de pilares;
- C_c , C_a e C_f são os custos com volume de concreto, peso de aço e área de forma, respectivamente. Conforme o trabalho de referência, adotou-se $C_c = 54$ USD/m³, $C_a = 0.55$ USD/kg e $C_f = 54$ USD/m²;¹
- b , h e L representam as bases, as alturas e os comprimentos dos elementos, respectivamente;
- W_a é o peso de aço para cada peça. Note que, assim como no problema de otimização original, a armadura de cisalhamento não é dimensionada, ficando, portanto, de fora do custo total.
- **Variáveis de projeto:** as variáveis adotadas como de projeto para o problema em questão foram:
 - As dimensões das vigas e dos pilares de cada grupo: b_{v1} , h_{v1} , b_{v2} , h_{v2} , b_{p1} , h_{p1} , b_{p2} e h_{p2} ;

¹ USD refere-se a dólares americanos.

- As áreas de aço dos elementos: A_{sV1}^+ , A_{sV1}^- , A_{sV2}^+ , A_{sV2}^- , A_{sP1} e A_{sP2} ;

É importante se salientar que as variáveis de projeto foram tratadas como discretas por Coêlho et al. (2017) e neste trabalho elas serão tratadas como contínuas. Esta diferença deve-se às limitações das diferentes metodologias de otimização adotadas. Para as variáveis de projeto também considerou-se os valores limites apresentados na Tabela 24.

- **Restrições:** Foi apenas verificado o estado limite último (ELU) dos elementos. As restrições assumidas seguem o seguinte formato:

$$g_i^r(\mathbf{x}) = \beta_i - \beta_{alvo}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (5.3)$$

Note que estas restrições de confiabilidade dependem da avaliação das equações apresentadas na seção 4.5, sendo estas as funções de estado limite que devem ser avaliadas para obtenção dos valores de índice de confiabilidade (β) associados a cada restrição. Foram avaliados um total de 8 estados limites, sendo elas referentes aos momentos (positivos e negativos) e aos esforços cortantes resistentes nas vigas e aos momentos fletores resistentes nos pilares. Outras restrições como, por exemplo, deslocamento horizontal do pórtico e verificação do V_{rd2} conforme previsto pela NBR 6118:2014 foram negligenciadas. Como não há carregamento horizontal, se pressupôs que a exigência quanto ao deslocamento horizontal fosse atendida. Por fim, como não se está calculando a armadura transversal, não é necessário verificar a V_{rd2} .

As variáveis aleatórias adotadas assim como as suas respectivas distribuições e parâmetros relacionados estão apresentadas na Tabela 39. Esta tabela foi elaborada com base no que foi apresentado na seção 3.7. Note que o módulo de elasticidade do concreto não aparece nesta tabela por este ser calculado em função da resistência do concreto f_c (seguindo-se os critérios da NBR 6118:2014 para cada iteração do processo).

Os resultados obtidos através da aplicação da otimização com base em confiabilidade estão apresentados na Tabela 40, onde são comparados com os resultados obtidos utilizando a otimização determinística tanto a partir do algoritmo genético fornecido por Coêlho et al. (2017), como os obtidos através do SQP apresentados na seção 4.8.2

Com relação aos resultados obtidos, optou-se por apresentá-los juntamente com aqueles obtidos pela abordagem determinística através da aplicação do Algoritmo Genético (COÊLHO et al., 2017) e do SQP para se ter uma melhor visão do resultado da aplicação das distintas metodologias ao mesmo problema analisado.

Claramente nota-se que os resultados obtidos pelo GA são maiores que aqueles obtidos pela aplicação dos demais métodos. Isso se deve ao fato de este lidar com variáveis discretas e não contínuas como faz o SQP (que também é aplicado na RBDO).

Tabela 39 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 02: definição das variáveis.

Variáveis	Símbolo	Unidade	PDF	Média	V
Base das vigas	b_{v_i}	cm	Normal	Variável	0.025
Altura das vigas	h_{v_i}	cm	Normal	Variável	0.025
Base dos pilares	b_{p_i}	cm	Normal	Variável	0.025
Altura dos pilares	h_{p_i}	cm	Normal	Variável	0.025
As positivo	As_i^+	cm ²	Determinístico	Variável	-
As negativo	As_i^-	cm ²	Determinístico	Variável	-
As pilares	As_{p_i}	cm ²	Determinístico	Variável	-
Resistência do concreto	f_c	MPa	Lognormal	39.38	0.10
Resistência do aço	f_y	MPa	Lognormal	491.2	0.05
Módulo de elasticidade do aço	E_s	GPa	Normal	210	0.05
Carga permanente	g_k	kN/m	Normal	16.5	0.04
Sobrecarga	q_k	kN/m	Normal	6.84	0.10

Fonte: o autor, 2018.

Tabela 40 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico plano 02: resultados.

	$f(x^*)$	Dif.	b x h	V1		V2		P1		P2		
	USD	%	cm	A_s^+	A_s^-	b x h	A_s^+	A_s^-	b x h	A_s	b x h	A_s
				cm ²	cm ²	cm	cm ²	cm ²	cm	cm ²	cm	cm ²
G.A.	10087.54	-	25x50	15.20	22.81	25x40	11.40	22.81	30x30	32.27	30x30	11.34
S.Q.P.	9871.05	2.1	20x40	19.22	12.28	20x39	17.74	19.49	30x30	32.25	30x30	11.34
RBDO $\beta = 4.2$	9085.66	9.9	20x36	8.38	14.5	20x35	8.03	18.57	30x30	24.80	30x30	11.34

Fonte: o autor, 2018.

Com relação aos pilares, nota-se que os elementos do grupo P2 não são determinantes no dimensionamento da estrutura uma vez que, para todos as metodologias aplicadas, esse elemento apresentou sempre dimensões e ferragem mínimas. Por outro lado, os elementos do grupo P1, apesar de apresentarem sempre dimensões mínimas para a seção transversal, apresentam uma diferença expressiva no que diz respeito à relação da metodologia aplicada com as áreas de aço calculadas. A otimização determinística utilizando o GA e o SQP fornecem resultados da ordem de 30% superiores àqueles obtidos pela RBDO.

No que diz respeito às vigas, nota-se uma certa diferença nos valores das dimensões, porém, as diferenças encontradas alteram sensivelmente os valores das áreas de aço destes elementos. Pode-se notar diferenças de até aproximadamente 50% nas armações. Esta diferença pode ser explicada pela alteração da metodologia adotada na análise, que acarreta em uma mudança nos carregamentos, nas resistências e consequentemente nos esforços internos nos elementos. Com estas diferenças não se pode garantir que o ótimo da estrutura avaliada por critérios diferentes venham a coincidir. Entretanto, os resultados, com exceção das áreas de aço positivas, apresentam uma divergência relativamente pequena em comparação com os resultados das otimizações determinísticas.

De um modo geral, para este estudo de caso em particular, pode-se notar que a aplicação da RBDO, apesar de ser computacionalmente mais dispendiosa, ocasionou em

uma solução ótima mais econômica do que a otimização determinística. É importante salientar, contudo, que as variáveis de projetos foram tratadas como determinísticas, deste modo, para aplicação destas em um projeto de engenharia deveria-se substituí-las pelos seus valores nominais (comerciais) e verificar as restrições de projetos novamente.

5.3 Pórtico espacial de 5 pavimentos

O terceiro estudo de caso envolverá o mesmo pórtico espacial de 5 pavimentos apresentado nas seções 2.8.1 e 4.8.3 e que pode ser identificado na Figura 11 e na Figura 12. Assim como no problema original, foi adotado um único grupo de vigas e um único grupo de pilares, dimensionando-se estes grupos para atender aos elementos mais solicitados. As considerações feitas para se realizar a otimização com base em confiabilidade foram as seguintes:

- **Combinação de cargas:** por se tratar de uma análise de confiabilidade e não semi-probabilística, foram considerados os coeficientes: $\gamma_g = 1.00$ para a carga permanente, $\gamma_q = 1.0$ para carga acidental e $\psi_2 = 1.00$ para a verificação de estado limite de serviço.
- **Módulos de elasticidade:** o módulo de elasticidade do concreto foi calculado para cada iteração em função de sua resistência dele. Por outro lado, o módulo de elasticidade do aço foi tomado como 210 GPa;
- **Coefficiente de poisson:** adotou-se o mesmo valor previsto pela NBR 6118:2014: 0.2.
- **Não linearidade:** foi apenas considerada a não linearidade física de acordo com a simplificação sugerida pela NBR 6118:2014. A inércia do pilar foi considerada apenas 80% daquela da seção bruta de concreto e a das vigas 40%. A não linearidade geométrica não foi considerada neste exemplo.
- **Constante de torção:** foi calculada para as seções retangulares pela formulação aproximada apresentada pela Equação 2.23.
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser otimizado. Este foi definido conforme apresentado na Equação 5.2 e com os mesmos valores de custos unitários definidos em 4.8.3.
- **Variáveis de projeto:** foi considerado apenas um único grupo para as vigas e um único grupo para os pilares, cada um com uma única seção transversal. As alturas dos dois elementos serão tomadas como variáveis de projeto enquanto as larguras serão tomadas como constantes e iguais a 20 cm. Além das alturas, também foi considerada como variável de projeto as áreas de armadura positiva, negativa e transversal das vigas e as áreas das armaduras longitudinal e transversal do pilar.
- **Restrições:** as restrições consideradas foram as seguintes:
 - **Taxas de armaduras máximas e mínimas:** conforme na seção anterior, adotou-se para os pilares uma taxa mínima de 0.4% e máxima de 4%. Para as

vigas adotou-se uma taxa mínima de 0.15% e máxima de 4%. Todos os valores limites adotados seguem o que foi prescrito pela NBR 6118:2014;

- **Deformação excessiva:** os deslocamentos encontrados foram multiplicados pelo coeficiente α_f , que leva em conta o efeito da fluência. Adotou-se $\alpha_f = 2.0$, como sendo o caso mais extremo. Por fim, o limite de flecha verificado foi o $L/500$, relacionado ao deslocamento total;
- **Abertura de fissuras:** no que diz respeito a esta verificação, a qual depende do diâmetro das barras e da distribuição de armaduras na seção transversal, adotou-se o critério previsto no item 17.3.3.3 da NBR 6118:2014 de modo a se verificar a tensão atuante no nível das armaduras longitudinais, a qual foi restrita ao valor de 200 MPa, para se permitir a adoção de barras de até 25 mm com espaçamento máximo de 25 cm entre elas.
- **Capacidade resistente das seções das vigas e dos pilares:** avaliadas conforme apresentado na seção 4.5..

As restrições relativas aos estados limites últimos (ELU) foram verificadas com $\beta_{alvo} = 4.2$ e aquelas relativas aos estados limites de serviço (ELS) com $\beta_{alvo} = 1.9$.

Assim como na seção anterior, a dimensão considerada como a altura do pilar foi a mesma direção da menor dimensão da edificação. As variáveis de projeto e as variáveis aleatórias adotadas, assim como suas respectivas distribuições e parâmetros relacionados, estão apresentadas na Tabela 41. Esta tabela foi elaborada com base no que foi apresentado na seção 3.7.

Tabela 41 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico espacial: definição das variáveis.

Variáveis	Símbolo	Unidade	PDF	Média	V
Base das vigas	b_v	cm	Determinístico	20.0	-
Altura das vigas	h_v	cm	Determinístico	Variável	-
Base dos pilares	b_p	cm	Determinístico	20.0	-
Altura dos pilares	h_p	cm	Determinístico	Variável	-
As positivo vigas	As^+	cm ²	Determinístico	Variável	-
As negativo vigas	As^-	cm ²	Determinístico	Variável	-
Estribo vigas	As_w	cm ² /m	Determinístico	Variável	-
As pilares	As_p	cm ²	Determinístico	Variável	-
Estribo pilares	As_w	cm ² /m	Determinístico	Variável	-
Resistência do concreto	f_c	MPa	Lognormal	38.16	0.13
Resistência do aço	f_y	MPa	Lognormal	554.8	0.05
Módulo de elasticidade do aço	E_s	GPa	Normal	210	0.05
Peso específico	γ_c	kN/m ³	Normal	25	0.04
Sobrecarga	q_k	kN/m	Normal	-14.252	0.10

Fonte: o autor, 2018.

Tendo-se definido todos estes critérios, pôde-se proceder com a RBDO da estrutura deste estudo de caso. Os resultados obtidos pela RBDO estão apresentados na Tabela 42 juntamente com aqueles obtidos pelas demais metodologias mencionadas.

Tabela 42 – Comparativo dos resultados RBDO do pórtico espacial de 5 pavimentos.

Metodologia	Custo (R\$)	h_v (cm)	h_p (cm)
G.A.	146.468,88	46	35
S.Q.P.	118.112,04	38.1	38.3
R.B.D.O.	122.192,11	53.9	26.6

Fonte: o autor, 2018.

Nota-se que os valores de custo total encontrados através da RBDO foram ligeiramente superiores àqueles obtidos pela otimização determinística via SQP. O que constatou-se foi que apesar dos pilares terem suas dimensões e ferragens reduzidas (consultar Tabela 43), as restrições referentes aos estados limite de serviço, apesar de serem verificadas para um $\beta = 1.9$, terminaram por ser as restrições mais críticas à estrutura por aumentar a dimensão das vigas.

Tabela 43 – Áreas de aço obtidas para a RBDO do pórtico espacial 5 pavimentos.

Metodologia	A_{sv}^+ (cm ²)	A_{sv}^- (cm ²)	A_{swV} (cm ² /m)	A_{sP} (cm ²)	A_{swP} (cm ² /m)
S.Q.P.	2.77	4.77	1.93	11.84	1.96
R.B.D.O.	3.74	5.57	1.93	6.11	1.96

Fonte: o autor, 2018.

No que tange o estado limite de deformações excessivas, a adoção de valores conservadores para α_f na consideração da fluência nas flechas, assim como, o fato de ter-se adotado o limite de deslocamento excessivo mais conservador ($L/500$), podem justificar o fato de essa restrição ter sido crítica quando se passou à análise de confiabilidade. Por outro lado, no que diz respeito ao estado limite de abertura de fissuras, a verificação por meio da tabela apresentada no item 17.3.3.3 da NBR 6118:2014 pode ter sido muito conservadora para a análise de confiabilidade. De todo modo, apesar da diferença nos valores obtidos para a altura das vigas, os valores dos custos totais entre a solução determinística via SQP e a solução obtida via RBDO não diferiram significativamente (em apenas 3%, aproximadamente).

5.4 Pórtico espacial de 4 pavimentos

A estrutura a ser estudada é a de um pórtico espacial de 4 pavimentos com 4 vãos de 5 metros na direção x , 3 vãos de 7 metros na direção y e pilares com 3 metros, conforme foi apresentado na Figura 22.

Os critérios considerados no processo na RBDO foram os seguintes:

- **Carregamentos:** Esta estrutura possui uma sobrecarga de 19.953 kN/m nas vigas de 5 metros e um carregamento permanente de 14.253 kN/m nas vigas de 7 metros. Além disso, tem-se cargas pontuais horizontais (vento) de 1.81 kN nos nós de uma das faces menor da edificação, e o peso próprio dos elementos atuantes de forma linear ao longo do eixo destes.
- **Combinações de cargas:** por se tratar de uma análise de confiabilidade e não semi-probabilística, considerou-se os coeficientes: $\gamma_g = 1.00$ para a carga permanente, $\gamma_q = 1.0$ para carga acidental e $\psi_2 = 1.00$ para a verificação de estado limite de serviço.

A análise não linear geométrica foi aplicada às verificações relacionadas à ruptura das peças, para a análise das restrições de serviço utilizou-se a análise linear. A análise não linear física foi considerada de forma simplificada como previsto pela NBR 6118:2014 em todas as combinações.

- **Resistência dos materiais:** adotou-se para o concreto $f_c = 38.16$ MPa e para o aço $f_y = 554.8$ MPa;
- **Função objetivo:** adotou-se o custo total da estrutura como parâmetro a ser minimizado. Este valor foi calculado como apresentado pela Equação 5.2 considerando-se a armadura transversal e considerando os mesmos custos que foram apresentados no exemplo da seção 4.8.3.
- **Variáveis aleatórias e de projeto:** estão definidas na Tabela 44.

A largura das vigas foi admitida como 15 cm, com base nos resultados obtidos pela otimização determinística, e este valor foi admitido constante pelo fato de essa dimensão ter uma menor influência nas restrições frente a altura dessas peças.

O peso específico do material também foi adotado como determinístico uma vez que sua parcela é muito pequena quando comparada àquela das sobrecargas.

O A_{swp} foi assumido constante pelo fato de o esforço cortante no pilar não ter sido preponderante em nenhum momento do dimensionamento das estruturas verificadas ao longo deste trabalho. Por esta razão, se ateve ao valor mínimo de 1.96 cm²/m previsto pela NBR 6118:2014.

Tabela 44 – Otimização baseada em confiabilidade do pórtico espacial 4 pavimentos: definição das variáveis.

Variáveis	Símbolo	Unidade	PDF	Média	V
Base das vigas x	b_{vx}	cm	Determinístico	15.0	-
Altura das vigas x	h_{vx}	cm	Determinístico	Variável	-
Base das vigas y	b_{vy}	cm	Determinístico	15.0	-
Altura das vigas y	h_{vy}	cm	Determinístico	Variável	-
Base dos pilares	b_p	cm	Determinístico	Variável	-
Altura dos pilares	h_p	cm	Determinístico	20.0	-
As positivo vigas x	A_{sx}^+	cm ²	Determinístico	Variável	-
As negativo vigas x	A_{sx}^-	cm ²	Determinístico	Variável	-
Estribo vigas x	A_{swx}	cm ² /m	Determinístico	Variável	-
As positivo vigas y	A_{sy}^+	cm ²	Determinístico	Variável	-
As negativo vigas y	A_{sy}^-	cm ²	Determinístico	Variável	-
Estribo vigas y	A_{swy}	cm ² /m	Determinístico	Variável	-
As pilares	A_{sp}	cm ²	Determinístico	Variável	-
Estribo pilares	A_{swp}	cm ² /m	Determinístico	1.96	-
Resistência do concreto	f_c	MPa	Lognormal	38.16	0.13
Resistência do aço	f_y	MPa	Lognormal	554.8	0.05
Módulo de elasticidade do aço	E_s	GPa	Normal	210	0.05
Peso específico	γ_c	kN/m ³	Determinístico	25	-
Sobrecarga nas vigas x	q_{kx}	kN/m	Normal	-19.953	0.10
Sobrecarga nas vigas y	q_{ky}	kN/m	Normal	-14.253	0.10
Vento y	V_y	kN	Normal	1.81	0.20

Fonte: o autor, 2018.

- **Restrições:** os seguintes critérios foram considerados:
 - **Taxas de armaduras:** taxas máximas de 4% e taxas mínimas de 0.4% para os pilares e 0.15% para as vigas;
 - **Deformação excessiva:** os cálculos foram feitos considerando os redutores de rigidez dos elementos apresentados na seção 2.8.1. Aos deslocamentos encontrados acrescentou-se o efeito da fluência como um deslocamento adicional dado pela multiplicação do deslocamento calculado pelo coeficiente α_f , que leva em conta o efeito da fluência. Adotou-se um $\alpha_f = 2.0$, como sendo o caso mais extremo. O limite de flecha verificado foi o $L/250$, relacionado ao deslocamento total;
 - **Capacidade resistente:** para as vigas, foram verificadas as capacidades resistentes referentes aos esforços cortantes e momentos fletores; para os pilares, verificou-se a capacidade resistente referente ao esforço cortante e à flexo compressão. Estes esforços resistentes foram avaliados conforme apresentado na seção 4.5.
- **Valores limites:** foram adotados os valores limites apresentados na Tabela 45 para as variáveis de projeto.

Tabela 45 – Valores limites das variáveis de projeto para o pórtico espacial de 4 pavimentos.

Descrição	Limite inferior	Limite superior
Altura das vigas	20	Nenhum
Base dos pilares	20	Nenhum
Áreas de aço longitudinal das vigas	0.75	Nenhum
Áreas de aço transversal das vigas	1.45	Nenhum
Área de aço longitudinal dos pilares	2.00	Nenhum

Fonte: o autor, 2018.

Nota – As dimensões dos elementos está em *cm* e as áreas de aço em *cm*².

Nota – Os limites para as áreas de aço da viga se aplicam às áreas de aço positiva e negativa separadamente.

A dimensão considerada como base do pilar foi aquela paralela ao eixo *y*, enquanto a altura ficou definida como a dimensão na direção *x*.

Os resultados obtidos para a otimização desta estrutura estão apresentados a na Tabela 46.

Tabela 46 – Resultados da RBDO do pórtico espacial de 4 pavimentos.

Elemento	Base (cm)	Altura (cm)	A_s^+	A_s^-	A_{sw}
Vigas <i>x</i>	15	58.2	1.99	2.96	1.45
Vigas <i>y</i>	15	49.1	3.23	5.44	1.61
Pilares	21.7	20	9.69		1.96

Fonte: o autor, 2018.

O custo total encontrado para esta estrutura foi de R\$ 171'386.72.

Pôde-se constatar que a consideração de limites diferentes para as verificações de estado limite de serviço proporcionou uma solução mais econômica do que aquela obtida via otimização determinística, apesar do pequeno aumento na altura das vigas.

De todo modo, através das comparações apresentadas ao longo deste trabalho pode-se constatar que o uso da otimização com base em confiabilidade pode resultar em estruturas mais econômicas que aquelas obtidas pela otimização determinística, ainda mantendo-se um nível de segurança aceitável para a estrutura.

É importante, contudo, salientar que a correta definição das funções de restrição assim como as informações referentes às distribuições de probabilidade associadas às variáveis de projeto podem ter um impacto importante na solução do problema.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta as considerações finais referentes aos trabalhos desenvolvidos ao longo desta dissertação.

6.1 Desenvolvimentos

Ao longo deste trabalho foi desenvolvida uma ferramenta para a otimização com restrições de confiabilidade para estruturas reticuladas espaciais. Para esta finalidade os seguintes trabalhos foram desenvolvidos.

- Foi estudada a aplicação do método dos elementos finitos à análise linear e não linear elástica e geométrica de estruturas reticuladas. No que diz respeito à análise não linear geométrica, este trabalho focou no método de Euler devido ao seu baixo custo computacional, o que viria a ser um fator importante mais a frente quando se aplicou esta metodologia à otimização com base em confiabilidade. Por fim, foi desenvolvido um código na linguagem Python para se automatizar os procedimentos de análise estrutural por meio destes métodos.
- O código desenvolvido para aplicação do MEF foi exaustivamente testado para diversas estruturas, além disso, diversas verificações internas foram inseridas para se analisar os dados de entrada e garantir que os resultados obtidos são, de fato, consistentes. Para esta finalidade, como a linguagem Python é uma linguagem orientada à objetos, criou-se várias classes para se automatizar a implementação das funções e suas verificações. Este procedimento facilitou, mais a frente, o acoplamento do código desenvolvido para o MEF aos pacotes utilizados para se fazer a otimização e a análise de confiabilidade;
- Foi apresentada um breve resumo a respeito da análise de confiabilidade e suas metodologias. Também foi apresentada a metodologia de cálculo do fator de importância e como se converter os valores característicos das resistências e solicitações para seus valores aleatórios, os quais devem ser utilizados na análise de confiabilidade. Por meio do pacote PyRe aplicou-se a análise estatística a diversos exemplos da literatura (além daqueles já apresentados pelo autor deste pacote (HACKL, 2013)). Por fim, acoplou-se este pacote àquele de aplicação do MEF para se avaliar exemplos de análise estrutural da literatura.
- Dissertou-se a respeito do processo de otimização tanto via a programação quadrática sequencial determinística como a respeito da aplicação desta metodologia à otimização com base em confiabilidade. Para se aplicar esta metodologia adotou-se o pacote Scipy

que apresenta em sua função *Minimize* a rotina para implementação do SQP. Para se validar esta função, foram analisados alguns exemplos simples da literatura, além disso, aplicou-se esta função a alguns trabalhos de referência os quais apresentaram a otimizaram de estruturas reticuladas. Para esta finalidade, o pacote Scipy foi acoplado juntamente àquele desenvolvido para aplicação do MEF.

- Por fim, acoplou-se os três pacotes (aquela para aplicação do MEF, o Scipy e o PyRe) para se executar se implementar a otimização com base na análise de confiabilidade de estruturas reticuladas. Os exemplos estudados foram adaptados daqueles apresentados pela literatura e foram apresentados como estudos de caso neste trabalho.

6.2 Conclusões gerais

As principais conclusões obtidas através dos estudos apresentados ao longo desta dissertação foram:

- Conseguiu-se desenvolver um código para aplicação do método dos elementos finitos para a análise linear elástica e não linear geométrica de estruturas reticuladas com sucesso. Os resultados encontrados nos exemplos de validação deste, corroboram com a ideia de que este código está executando as análises de forma correta.
- Aplicou-se com sucesso o código de elementos finitos aos pacotes de confiabilidade (PyRe) e otimização (Scipy.optimize) separadamente e em conjunto para se executar a RBDO. Os resultados obtidos, como era de se esperar, se mostraram mais econômicos que aqueles fornecidos pelo GA nos trabalhos de referência.
- De modo geral, os resultados obtidos pela otimização determinística via SQP e pela otimização baseada em confiabilidade, também via SQP, apresentaram resultados em concordância, o que corrobora com a ideia de que estes procedimentos foram corretamente configurados para se simular os problemas analisados.
- É importante salientar que, apesar de os resultados obtidos nas análises estatísticas terem sido relativamente próximos daqueles das análises determinísticas, como não há norma brasileira que explicita os dados estatísticos que estão implícitos nos preceitos das normas de dimensionamento, os resultados obtidos podem ser questionados.
- De um modo geral, constatou-se que a verificação dos Estados Limites Últimos via análise determinística apresentou resultados mais conservadores que aqueles obtidos via análise de confiabilidade. Por outro lado, as verificações de serviço via análise estatística se mostrou mais conservadora para os casos analisados.

- Apesar do alto custo computacional para se processar a análise de confiabilidade, em alguns casos constatou-se que foi possível obter soluções mais econômicas que aquelas obtidas via análise determinística. Esta informação pode ser importante para o caso de verificações de estruturas existentes, onde a análise determinística pode vir a ser muito conservadora em alguns casos.

6.3 Trabalhos futuros

- Implementar métodos iterativos para análise não linear, como o método de Newton-Raphson, por exemplo;
- Implementar o cálculo da não linearidade física no código de elementos finitos;
- Elaborar um pacote que automatize a união dos pacotes PyRe e Scipy para se fazer a otimização baseada em confiabilidade;
- Paralelizar o processo de cálculo de análise estrutural;
- Executar a otimização baseada em confiabilidade com o algoritmo genético;
- Processar a otimização baseada em confiabilidade via abordagem de medida de desempenho (*Performance Measure Approach*);
- Aplicar a RBDO à estruturas metálicas espaciais com a consideração da não linearidade física e geométrica.

REFERÊNCIAS

- ABDELOUAFI, E. G.; BENAÏSSA, K.; ABDELLATIF, K. Reliability analysis of reinforced concrete buildings: comparison between form and ism. *Procedia Engineering*, Elsevier, 2015.
- ABNT. NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas-procedimento. *Rio de Janeiro*, 2003.
- ABNT. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. *Rio de Janeiro*, 2014.
- ALMEIDA, A. F. *Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado*—. Tese (Doutorado) — Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- ANDRADE, N. F. d. A. Análise e otimização estocásticas de concepções de estruturas de concreto armado utilizando modelos de seleção. Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
- ANTONIOU, A.; LU, W.-S. *The Optimization Problem*. [S.l.]: Springer, 2007.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety—application to rc frames. *Structural Safety*, Elsevier, 2008.
- ARAÚJO, J. M. d. A confiabilidade no projeto de pilares de concreto armado. 2001.
- ARAÚJO, J. M. d. *Curso de concreto armado*. [S.l.]: Editora Dunas, 2003.
- ARAÚJO, J. M. d. Reliability analysis of rigid pile caps using an iterative strut-and-tie model. *Architecture Civil Engineering Environment*, SILESIAN UNIV TECHNOLOGY UL AKADEMICKA 2A, GLIWICE, 44-100, POLAND, 2017.
- ARORA, J. *Introduction to optimum design*. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- CHAVES, I. A. *Otimização de pilares de concreto armado mediante uniformização do índice de confiabilidade*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos—Universidade de São Paulo, 2004.
- COÊLHO, G. A. G. et al. Dimensionamento ótimo de pórticos planos em concreto armado de acordo com a nbr 6118 (2014). *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia-RIPE*, 2017.
- CORRÊA, M. R. S. *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1991.
- EL-REEDY, M. A. *Reinforced concrete structural reliability*. [S.l.]: CRC Press, 2012.
- ENEVOLDSEN, I.; SØRENSEN, J. D. Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural safety*, Elsevier, 1994.
- FRIDLEY, K. Structural engineering handbook ed. chen wai-fah boca raton: Crc press llc, 1999. 1999.
- GHALI, A.; NEVILLE, A.; CHEVING, Y. A unified classical and matrix approach. *Ankara University Printing House*, 1986.

- HACKL, J. *Generic framework for stochastic modeling of reinforced concrete deterioration caused by corrosion*. Dissertação (Mestrado) — Institutt for konstruksjonsteknikk, 2013.
- HACKL, J. *PyRe*. [S.l.]: GitHub, 2018. <<https://github.com/hackl/pyre>>. Acesso em: 15/03/2018.
- HAMIDIAN, D.; SEYEDPOOR, S. Structural optimization using the simultaneous perturbation stochastic approximation algorithm. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 3, n. 3, p. 407–424, 2009.
- HO-HUU, V. et al. An effective reliability-based improved constrained differential evolution for reliability-based design optimization of truss structures. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, 2016.
- HOROWITZ, B. Notas de aula. Disciplina de Otimização. 2016.
- JCSS. The jcss probabilistic model code. *Structural Safety*, Elsevier Science, 1997.
- JENKINS, W. Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, 1992.
- JONES, E. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>. Acesso em: 27/03/2018.
- KRAFT, D. A software package for sequential quadratic programming. *Forschungsbericht-Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt*, 1988.
- LIU, M.-Y.; LI, Y.-J. Reliability analysis of high-rise buildings under wind loads. 2012.
- LIU, P.-L.; KIUUREGHIAN, A. D. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural safety*, Elsevier, 1991.
- LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix structural analysis*. [S.l.: s.n.], 2000.
- MEEK, J.; LOGANATHAN, S. Geometrically non-linear behaviour of space frame structures. *Computers & Structures*, Elsevier, 1989.
- MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural reliability analysis and prediction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- MOGAMI, K. et al. Reliability-based structural optimization of frame structures for multiple failure criteria using topology optimization techniques. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, 2006.
- MOTTA, R. d. S. *Otimização sob incertezas de estruturas com comportamento não linear utilizando modelos de ordem reduzida*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, 2015.
- MOTTA, R. d. S. et al. Development of a computational efficient tool for robust structural optimization. *Engineering Computations*, Emerald Group Publishing Limited, v. 32, n. 2, p. 258–288, 2015.

- MOTTA, R. de S. *Otimização robusta de estruturas utilizando o método da base reduzida*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- NOGUEIRA, C. G. *Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2005.
- PEDROSO, D. M. Form reliability analysis using a parallel evolutionary algorithm. *Structural Safety*, Elsevier, 2017.
- SALLES, H. d. S.; PETERS, F. C.; MANSUR, W. J. otimização estrutural de um pórtico espacial de concreto armado utilizando algoritmos genéticos. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia-RIPE*, 2017.
- SÁNCHEZ-OLIVARES, G.; TOMÁS, A. Improvements in meta-heuristic algorithms for minimum cost design of reinforced concrete rectangular sections under compression and biaxial bending. *Engineering Structures*, Elsevier, 2017.
- SHAYANFAR, M.; ABBASNIA, R.; KHODAM, A. Development of a ga-based method for reliability-based optimization of structures with discrete and continuous design variables using opensees and tcl. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, 2014.
- SILVA, H. V. C. *Otimização estrutural sob incertezas*. [S.l.], 2016.
- VALDEBENITO, M.; SCHUËLLER, G. Efficient strategies for reliability-based optimization involving non-linear, dynamical structures. *Computers & Structures*, Elsevier, 2011.
- WILSON, E.; HABIBULLAH, A. Sap2000: integrated finite element analysis and design of structures. *Computers and Structures, Berkeley, California*, 1997.
- YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. Theory and analysis of nonlinear framed structures. Prentice Hall PTR, 1994.
- YOUNG, W. C.; BUDYNAS, R. G. *Roark's formulas for stress and strain*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2002. v. 7.
- ZIEMIAN, R.; MCGUIRE, W. *MASTAN2 v3. 5*. 2016.