Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

MARCOS ANDRÉ PEREIRA DE MELO

ECOLOGIA DO SABER: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica

Recife

2018

MARCOS ANDRÉ PEREIRA DE MELO

ECOLOGIA DO SABER: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

M528e Melo, Marcos André Pereira de.

Ecologia do saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica / Marcos André Pereira de Melo. – Recife, 2018.

204f. : il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2018.

Inclui Referências e Anexos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Livros didáticos. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos (Orientador). II. Título.

371.32 CDD (22. ed.) UFPE (CE2018-88)

MARCOS ANDRÉ PEREIRA DE MELO

ECOLOGIA DO SABER: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 02/10/2018

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Profª. Drª. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho (Examinadora Externa)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Paulo Figueiredo Lima (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

A Deus, agradeço todos os dias por tudo, seja nos momentos de alegria ou pelos momentos de aperreio, pois os dois momentos é que me fazem superar todas as dificuldades e frustrações. Ao professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos, agradeço pela sua amizade e pela construção do meu saber: nas formações quando fui funcionário da Prefeitura da Cidade do Recife e do Colégio Visão, na oportunidade de ter trabalhado com ele no CAp - UFPE, no CAEd-UFJF e principalemte pela confiança e compreensão que me tem dedicado como orientador os quais foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

À professora Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, a quem já admirava pelos trabalhos que foram orientados por ela e que possibilitaram na construção desta tese. Tive o prazer de vê-la durante o XVIII EBRAPEM em 2014, de me aproximar durante o 1º LADIMA e que muito contribui na qualificação e na defesa desta tese. Agradeço por compartilhar comigo de mais uma conquista em minha vida.

À professora Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain, agradeço pelas suas contribuições na trajetória do meu saber, quando me orientou no mestrado, quando participei do grupo Pró-Grandezas, na qualificação, na defesa dessa tese e que agora divide comigo mais uma aprendizagem.

Ao professor Dr. Paulo Figueiredo Lima, a quem muito admiro e que contribui na construção do meu saber desde quando fiz parte do grupo de pesquisa Pró-Grandeza, pelas pertinentes observações feitas na qualificação e nas aulas de seminários que foram imprescindíveis na construção desse trabalho.

Ao professor Dr. Marcus Bessa de Menezes, agradeço pela sua amizade fruto do compartilhamento dos trabalhos no CAEd-UFJF, e que agora muito me orgulha pela riqueza de suas contribuições no momento da qualificação e que foram fundamentais na realização desse trabalho.

À Patrícia, minha esposa, a Anne Karoline e a Bianca, minhas filhas, a Moab, meu amigo, agradeço pelo apoio, incentivo, paciência, dedicação e carinho na superação nos momentos de conflitos internos gerados de diferente formas.

À José Patriota Sobrinho *(in memoriam),* agradeço por ser meu PAI.

À Valdenice, minha mãe, a Girlene, minha irmã, a Renato, meu cunhado e aos meus sobrinhos, Yasmin e Rudah, agradeço pela compreensão durante a minha ausência.

Aos meus compadres, Gentil e Rosilene, agradeço pelo apoio e força nos momentos que eu pensava que não daria conta desse trabalho.

A família Barros agradeço por sempre me apoiar, acreditar no meu potencial e por compreender esse momento importante para mim.

Às professoras Dra. Marilene Rosa dos Santos e Anna Paula Avelar, agredeço pela disponibilidade como suplentes na banca de defesa.

À professora Rosinalda Teles que muito admiro, agradeço por sua amizade, pela leitura feita a este trabalho nas aulas de seminários e pelo empréstimo de alguns livros didáticos.

À professora Cristiane Pessoa, agradeço pela sua amizade e pelo apoio ainda no período de montar o projeto de tese ao conceder alguns textos sobre combinatória.

Aos professores e técnicos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, agradeço o carinho e atenção que sempre me tiveram, em especial aos professores Sérgio Abranches e Cristiane Pessoa; e aos técnicos Mário e Clara.

Aos professores, mestrandos e doutorandos do EDUMATEC, agradeço pelos pertinentes comentários feitos a este trabalho, ao longo dos anos nas aulas de seminários da linha de didática da matemática, em especial aos colegas doutorandos Alexandre Barros, Lúcia Durão e Aldinete Silvino.

Aos meus colegas professores do CAp – UFPE, em especial aos colegas e amigos professores de matemática, agradeço por estarem sempre a disposição para que eu pudesse ingressar no Doutorado e concluir esse trabalho.

Ao Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, em especial ao professor Abraão Juvencio de Araujo, agradeço pelos pertinentes comentários e observações feitas a este trabalho ainda em sua construção.

Às gestões do CAp- UFPE, agradeço pelo apoio e incentivo que me tem dedicado.

Ao Professor Carlos Alberto de Miranda Pinheiro, agradeço pelo envio da dissertação da professora Janice Rocha.

Ao Professor Adriano Pedrosa, agradeço pelo apoio em localizar alguns Livros Didáticos aprovados pelo PNLD.

A todos e todas que fazem parte do Memorial do PNLD – UFRN, agradeço pelo empenho e apoio em me conceder alguns Livros Didáticos de Matemática.

A Aguinalda, Alfredo e Marcos, meus amigos e professores de Biologia, agradeço pelo apoio nas reflexões que tiveram comigo sobre Ecologia.

A professora, Edna Medeiros, por conceder o seu trabalho de mestrado.

Por fim, à professora Fernanda Puça, de francês, e a professora, Carla Falcão, de inglês, ambas do CAp - UFPE, agradeço em traduzir nosso resumo para as respectivas línguas.

RESUMO

Essa tese teve por objetivo analisar as possíveis relações entre os documentos oficiais e livros didáticos da Educação Básica sobre Análise Combinatório no período das Reformas Campos e Capanema, dos Programas Mínimos de Simões Filho e dos Movimentos da Matemática Moderna e da Educação Matemática. O saber Análise Combinatória antes dos PCN habitava de forma declarativa o 2º ano do Ensino Médio e após os PCN passou a habitar toda Educação Básica. Isso fez com que levantássemos as seguintes questões de pesquisa: Como vive Análise Combinatória nos livros didáticos e nos documentos curriculares da Educação Básica antes dos PCN? Como vive Análise Combinatória nos livros didáticos e nos documentos curriculares da Educação Básica após os PCN? Quando mudam os documentos curriculares, muda o meio de vida da Análise Combinatória nos livros didáticos? Se sim, de que forma? O aporte teórico para responder esses questionamentos e alcançar nossos objetivos está alicerçado pela Teoria da Transposição Didática, Ecologia do Saber e pela Teoria Antropológica do Didático. A metodologia se baseia em uma pesquisa bibliográfica e documental. O procedimento metodológico se baseou em analisar livros didáticos que correspondesse aos programas vigentes de cada reforma, livros didáticos do período do Movimento da Matemática Moderna e para a vigência do Movimento da Educação Matemática, livros didáticos aprovados pelo PNLD e os documentos oficiais da Educação Básica. Os resultados indicaram que no período das reformas os autores de livros didáticos se assujeitavam aos documentos oficiais. Com o surgimento dos PCN e demais documentos oficiais, o saber Análise Combinatória passou a habitar toda Educação Básica se aproximando das orientações dadas pelos documentos (PCNEF, PCNEM, OCEM e PNLD), e assim, avançando em sua organização didática e nas técnicas, porém a ecologia das tarefas permaneceram as mesmas em todo período analisado.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Livros didáticos. Teoria Antropológica do Didático.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette thèse est d'analyser les relations possibles entre les documents officiels et les manuels d'éducation de base sur l'analyse combinatoire pendant la période des « réformes Campos et Capanema », et entre les « Programas Mínimos de Simões Filho » et les mouvements des Mathématiques Modernes et de l'Éducation Mathématique. Le choix de connaître l'analyse combinatoire est dû au fait qu'avant les PCN (Paramètres Curriculaires Nationaux), ces connaissances étaient présentées de manière déclarative au cours de la classe de première au lycée. Les PCN ont ensuite commencé à s'intéresser à toute l'éducation de base. Cela nous a conduit à soulever les questions de recherche suivantes: Comment l'analyse combinatoire dans les manuels et les manuels de l'éducation de base s'est-elle déroulée avant les PCN? Comment l'analyse combinatoire s'applique-t-elle dans les manuels et les documents pédagogiques de l'éducation de base après les PCN? Lorsque vous modifiez les documents du curriculum, changez-vous le mode de l'analyse combinatoire dans les manuels? Si oui, de quelle manière? La contribution théorique pour répondre à ces questions et atteindre nos objectifs est basée sur la théorie de la transposition didactique, l'écologie de la connaissance et la théorie anthropologique de la didactique. La méthodologie est basée sur une recherche bibliographique et documentaire. La procédure méthodologique est basée sur l'analyse de livres didactiques correspondant aux programmes actuels de chaque réforme, des livres didactiques de la période du Mouvement pour les mathématiques modernes et du Mouvement pour l'éducation mathématique, des manuels approuvés par le PNLD (Paramètres Nacionaux des Livres Didactiques) et des documents officiels de l'éducation de base. Les résultats ont indiqué que pendant la période de la réforme, les auteurs des manuels étaient associés aux documents officiels, avec l'apparition des PCN. Pour d'autres documents officiels, l'analyse combinatoire a commencé à s'approcher des PCNEF, PCNEM, OCEM et PNLD). Tout en progressant dans son organisation et ses techniques didactiques, l'écologie des tâches est restée la même tout au long de la période analysée.

Mots clés : Analyse combinatoire. Manuels scolaires. Théorie anthropologique du didactique.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Escala dos níveis de Codeterminação Didática.. 44

Figura 2 – Ecologia do Saber Matemática Discreta no Livro de Huter.............................64

Figura 3 – Dependências entre as seções do Livro de Hunter..65

Figura 4 – Tabela que ilustra as três possíveis linhas de curso 65

Figura 5 – Representação de uma teia alimentar que ocorre em um ecossistema mostrando a partilha entre dois ecossistemas: Matemática Discreta enquanto objeto do Curso em Ciências da Computação e objeto do Curso de Matemática..............67

Figura 6 – Ecossistema da Organização Matemática da Análise Combinatória.................87

Figura 7 – Contra capa do livro Curso de Matemática..96

Figura 8 – Noção de Agrupamento...97

Figura 9 – Fórmula para o cálculo do número de Arranjos com repetição.........................98

Figura 10 – Permutação com elementos repetidos...98

Figura 11 – Capa do livro Matemática 2º Ciclo...99

Figura 12 – Indice do livro didático de Matemática para os Cursos Clássico e Científico do 2º Ciclo – 2ª série..100

Figura 13 – Capítulo dedicado a noções sobre Análise Combinatória...............................101

Figura 14 – Capa do livro Matemática para os Cursos Clássico e Científico......................102

Figura 15 – Contra capa do livro Matemática para os Cursos Clássico e Científico...........102

Figura 16 – Programa de Matemática sobre Análise Combinatória para os Cursos Clássico e Científico – 2ª série..103

Figura 17 – Índice do livro Curso de Matemática...106

Figura 18 – Noção de agrupamentos..107

Figura 19 – Processo geral para formação de Arranjos simples..108

Figura 20 – Expressão que determina o número de arranjos simple..................................109

Figura 21 – Permutação como caso particular de arranjos simples...................................110

Figura 22 – Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática...........115

Figura 23 – Capa do Livro Matemática 2º grau, Vol.2..118

Figura 24 – Sumário do livro destacando os capítulos 8 e 9..119

Figura 25 – Primeira tarefa exemplo invocando o ostensivo gráfico.................................120

Figura 26 – Segunda tarefa exemplo invocando o ostensivo figural.................................120

Figura 27 – Terceira tarefa exemplo invocando o ostensivo letras do alfabeto...................120

Figura 28 – Quarta tarefa exemplo invocando o ostensivo elementos do conjunto............121

Figura 29 – Tarefa proposta para introduzir o conceito de P.F.C......................................121

Figura 30 – Modelo gráfico em forma de uma árvore..121

Figura 31 – Definição do Conceito de P.F.C...122

Figura 32 – Duas tarefas exemplos de espaço amostral...123

Figura 33 – Análise Combinatória como ideia de multiplicação..127

Figura 34 – Análise Combinatória como ideia de Divisão..127

Figura 35 – Procedimento gráfico e multiplicativo na resolução do tipo de tarefa de Análise Combinatória como ideia de divisão..128

Figura 36 – Conteúdos Estruturantes das Séries Iniciais...130

Figura 37 – Conteúdos do livro Matemática Todo Dia..130

Figura 38 – Livro Promat – Projeto Oficina de Matemática..131

Figura 39 – Domínios da Matemática: aritmética, álgebra, medidas e geometria..............131

Figura 40 – Proposta Inovadoras para o Ensino de Matemática..131

Figura 41 – Introduzindo o Conceito de Possibilidade..133

Figura 42 – Arranjo com Repetição..134

Figura 43 – Produto Cartesiano...135

Figura 44 – Arranjo Simples..136

Figura 45 – Combinações Simples...137

Figura 46 – Introduzindo o Conceito de Possibilidade..138

Figura 47 – Produto Cartesiano...139

Figura 48 – Introduzindo o Conceito de Possibilidade..140

Figura 49 – Orientações sobre diferentes técnicas para resolver mesmo tipo de tarefa.......141

Figura 50 – Produto Cartesiano...141

Figura 51 – Produto Cartesiano...143

Figura 52 – Produto Cartesiano...143

Figura 53 – Produto Cartesiano...146

Figura 54 – Institucionalização do Princípio Multiplicativo...146

Figura 55 – Produto Cartesiano...147

Figura 56 – Resolução da Tarefa...147

Figura 57 – Institucionalização do Princípio Multiplicativo...148

Figura 58 – Produto Cartesiano...149

Figura 59 – Produto Cartesiano 150

Figura 60 – Produto Cartesiano...151

Figura 61 – Registrando as possibilidades por meio dos ostensivos tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades..152

Figura 62 – Apresentação do Princípio Multiplicativo pelo autor.......................................152

Figura 63 – Arranjo Simples......152
Figura 64 – Etapas da Técnica......153
Figura 65 – Combinações Simples......154
Figura 66 – Diferenciar problema de arranjo simples de combinação simples......154
Figura 67 – Institucionalização do Princípio Multiplicativo......156
Figura 68 – Produto Cartesiano......157
Figura 69 – Institucionalização do Princípio Multiplicativo......158
Figura 70 – Uso do ostensivo tabela para listar todas as combinações de saia e blusa......158
Figura 71 – Uso do ostensivo tabela para listar todas as combinações de saia e blusa......160
Figura 72 – Introduzindo o Conceito de Contagem......163
Figura 73 – Definição do Princípio fundamental da contagem......163
Figura 74 – Produto Cartesiano de Codeterminação Didática......164
Figura 75 – Ecossistema dos níveis de codeterminação didática do período de Reforma/Movimento......173

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Categorias e critérios de análise da organização didática do Livro Didático......48

Quadro 2 – Critérios de análise das organização matemática do Livro Didático..................49

Quadro 3 – Ensino Fundamental - Séries Iniciais...50

Quadro 4 – Ensino Fundamental - Séries Finais...50

Quadro 5 – Livros Didáticos do Ensino Médio..51

Quadro 6 – Categorias e critérios de análise da organização didática do Livro Didático de Hunter (2011)..71

Quadro 7 – Programa de matemática da quinta série...93

Quadro 8 – Tópico de Análise Combinatória..112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Análise Combinatória
LD.	Livro Didático
PCN.	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEF	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
OCEM.	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN+.	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD.	Programa Nacional do Livro Didático
TD.	Transposição Didática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO...17

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA...20

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PERCURSO METODOLÓGICO.........31

3.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA...31

3.2 SABER E CONHECIMENTO...31

3.3 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS SABERES..32

3.4 PERCURSO METODOLÓGICO...45

4 ANÁLISE COMBINATÓRIA ENQUANTO OBJETO DO SABER SÁBIO.53

4.1 ECOLOGIA DO SABER ANÁLISE COMBINATÓRIA NO LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO SUPERIOR...59

4.2 NICHO DO PENSAMENTO LÓGICO NO ECOSSISTEMA DA MATEMÁTICA DISCRETA...68

4.2.1 Nicho do Pensamento Relacional no ecossistema da Matemática Discreta......68

4.2.2 Nicho do Pensamento Recursivo no ecossistema da Matemática Discreta.......69

4.2.3 Nicho do Pensamento Quantitativo no ecossistema da Matemática Discreta..69

4.2.4 Nicho do Pensamento Analítico no ecossistema da Matemática Discreta........69

4.2.5 Nicho do Pensamento Através de Aplicações no ecossistema da Matemática Discreta...70

4.3 CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE HUNTER (2011) EM SUA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA.................................70

4.3.1 Análise dos momentos de estudos ou momentos didáticos na obra de Hunter(2011) no objeto Pensamento Quantitativo..71

4.4 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO 85

5 ECOLOLOGIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS..88

5.1 AS REFORMAS CAMPOS E CAPANEMA..88

5.1.1 Ecologia do Programa do ensino secundário na Reforma Campos e Gustavo Capanema...91

5.1.2 Ecologia do Saber Análise Combinatória em Livros Didáticos durante o período das Reformas Campos e Capanema...92

5.2 O PROGRAMA DE MATEMÁTICA NO MINISTÉRIO DE SIMÕES FILHO..104

5.3 O PERÍODO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM) NO BRASIL..113

5.3.1 Análise ecológica dos livros didáticos no MMM...115

5.4 O PERÍODO DO MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – MEM 124

5.4.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA PCN..126

5.4.1.1 PCN do primeiro e segundo ciclos e os Livros Didáticos das séries iniciais..126

5.4.1.1.1 Análise ecológica da coleção Matemática todo dia das séries iniciais aprovado no PNLD de 1998..128

5.4.1.1.2 Análise ecológica do livro didático Matemática: Vivência e Constução das séries iniciais aprovado no PNLD de 2000-2001..132

5.4.1.1.3 Análise dos momentos de estudos ou momentos didáticos na coleção Matemática: Vivência e Constução das séries iniciais aprovado no PNLD de 2000-2001 em sua organização didática sobre o saber Análise Combinatória.................................133

5.4.1.1.4 Análise ecológica do livro didático A Conquista da Matemática das séries iniciais aprovado no PNLD de 2013...142

5.4.1.2 PCN do terceiro e quarto Ciclos e os Livros Didáticos das séries finais.............144

5.4.1.2.1 Análise ecológica do livro didático A Conquista da Matemática-Nova das séries finais aprovado no PNLD de 2002...145

5.4.1.2.2 Análise ecológica da coleção Praticando Matemática – Edição Renovada aprovada no PNLD de 2017...148

5.4.1.2.3 Análise ecológica da coleção Projeto Teláris aprovada no PNLD de 2017..........156

5.4.1.3 PCN do Ensino Médio – PCNEM, Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM e os Livros Didáticos do Ensino Médio...161

5.4.1.4 Análise ecológica do livro didático Matemática para o Ensino Médio, Vol. Único do autor Manoel Jairo Bezerra de 2001..163

6 ANÁLISE COMPARATIVA NO ECOSSISTEMA NOOSFERIANO.........167

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS...174

REFERÊNCIAS..178

ANEXO A – PROGRAMAS DO CURSO FUNDAMENTLA DO ENSINO SECUNDÁRIO E INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS NO PERÍODO DE REFORMA FRANCISCO CAMPOS...186

ANEXO B – PROGRAMA DE MATEMÁTICA DOS CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO DO ENSINO SECUNDÁRIO NO PERÍODO DE REFORMA GUSTAVO CAPANEMA...192

ANEXO C – PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA OS CURSOS COLEGIAIS NO MINISTÉRIO DE SIMÕES FILHO.................................201

1 **INTRODUÇÃO**

A presente tese tem por objetivo geral analisar as possíveis relações entre os documentos oficiais e Livros Didáticos (LD) sobre a Análise Combinatória (AC) na Educação Básica brasileira.

Esse objetivo geral emergiu diante das leituras em diversos trabalhos acadêmicos em Educação Matemática e outras áreas de ensino, que discutiam as propostas curriculares nas diversas Reformas/Movimentos do Ensino em nosso país desde o ano de 1931.

Em nosso estudo, tomaremos também como referência as principais reformas/movimentos para o ensino de matemática a partir do ano de 1931 com a chamada “Reforma Francisco Campos”, com a Reforma Gustavo Capanema em 1942, o “Programa Mínimo” de 1951 do então Ministro Simões Filho, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) entre os anos de 1950 a 1960 e por último o Movimento de Educação Matemática.

Retomar esse período é de suma importância em nossa pesquisa para compreender a seleção e organização do conteúdo AC em cada período citado anteriormente, como também, a força que esse conteúdo toma nos LD da Educação Básica quando são lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN em 1997, pois antes deles, o conteúdo de AC era só visto de forma declarativa no Ensino Médio.

Desse modo, recorrer aos períodos de Reformas/Movimentos em nossas análise, ajudará na compreensão das escolhas que são feitas na seleção e organização do saber AC em toda Educação Básica como diz Valente:

> Os livros para ensino da matemática não se explicam por si próprios – o que vale, creio eu, para qualquer livro; que há sempre necessidade de pesquisar suas origens, o meio em que foram produzidos, o destino a que estavam reservados inicialmente e o que ocorreu ao longo de sua utilização dentre outras tarefas...(VALENTE,1999, p.20).

A citação anterior, faz com que se configure a necessidade de retomar em nossa pesquisa esse período, pois por hipótese, há uma relação direta entre autores de LD se adequarem aos documentos oficiais a cada período de reforma/movimento vigente até hoje.

Essa hipótese levantada por nós, está apoiada nos pressupostos lançados por (VALENTE,2004), ao dizer que o uso dos LD como fonte de pesquisa para escrita da história da disciplina Matemática no Brasil, deve levar em conta que uma disciplina nasce, se desenvolve, estabiliza-se, transforma-se e pode até vir a morrer, está intimamente ligado aos documentos oficiais de ensino.

Partindo dessa hipótese e dos pressupostos apontados por Valente, poderíamos escolher qualquer conteúdo matemático, mas a escolha por AC se justifica em procurar entender o porque esse conteúdo se fortaleceu com o surgimento dos PCN e quais mudanças significativas são apresentadas nos LD ao longo das Reformas/Movimentos.

Para defender nossa hipótese, de que há uma relação direta entre autores de LD se adequarem aos documentos oficiais a cada período de reforma/movimento vigente até hoje, nos apoiaremos em três questões de pesquisa:

- Como vive, AC nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica antes dos PCN?

- Como AC vive nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica após os PCN?

- Quando mudam os documentos curriculares, muda o meio de vida da AC nos Livros Didáticos? Se sim, de que forma?

Esses questionamentos sobre como vive o conteúdo AC nos documentos oficiais e nos LD na Educação Básica Brasileira é o cerne de nossa pesquisa intitulada: Ecologia do saber: o caso da Análise Combinatória em documentos oficiais e Livros Didáticos da Educação Básica.

Na tentativa de responder essas questões para validar ou não nossa hipótese, desenhamos nossa tese em cinco capítulos da seguinte forma: O tópico dois, trata da revisão bibliográfica sobre Análise Combinatória tomando como foco a relevância e análise feitas sobre o raciocínio combinatório, a formação docente, o processo de ensino aprendizagem e Livros Didáticos. O tópico três, discorre sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD), nossa fundamentação teórica, abordando a noção de Transposição Didática, discutindo principalmente, a Transposição Didática Externa com os conceitos de “Noosfera” e vigilância epistemológica, em seguida, nos apoiaremos na Problemática Ecológica com os conceitos de ecossistema, habitat e nicho e sua relação com a Teoria Antropológica do Didático por meio das organizações matemáticas e didáticas e seus critérios de análise, os objetos ostensivos, não-ostensivos e os níveis de codeterrminação que serão as lentes de nossas análises, em seguida, apresentamos o percurso metodológico, justificando as escolhas dos documentos curriculares, como também, dos Livros Didáticos a serem analisados; O tópico quatro, é dedicado a Análise Combinatória enquanto objeto do saber sábio, fazendo uma pequena discussão entre a matemática do discreto/contínuo e dos saberes da Análise Combinatória; O tópico cinco, apresenta a análise ecológica dos documentos curriculares e dos Livros Didáticos da Educação Básica numa linha do tempo crescente a partir do ano de 1931 em sintonia com as Reformas/Movimentos; O tópico seis, apresenta a análise comparativa no ecossistema noosferiano; Finalizando nossa pesquisa, teremos às considerações finais seguida das referências e os anexos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), a Análise Combinatória (AC) é um conteúdo da Matemática discreta de grande importância, seja por sua conexão em outros campos da matemática ou por suas aplicações em outras áreas do conhecimento, como podemos ver na citação a seguir:

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias". Para esses autores, a combinatória constitui-se em um amplo campo de investigação com intensa atividade, devido às numerosas aplicações em diferentes áreas (ex. Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia) e às implicações em outros ramos da Matemática.

Kapur (1970), também apresenta algumas razões para o ensino da AC na Educação Básica dos quais destacamos:

a. Pode-se apresentar problemas que não dependam de cálculos complicados, permitindo que seja apresentado numa fase inicial no currículo escolar.

b. Pode ser usado para treinar os alunos nos conceitos de enumeração, por meio de conjecturas, generalizações, otimização, existência, pensamento sistemático etc.

c. Tem aplicações em física, química, biologia, probabilidade, entre outros campos científicos.

Nessa mesma direção, Gomes e Gitirana (2011) afirmam que a compreensão desse conteúdo matemático pode consistir em uma importante ferramenta para o cidadão, que inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e das transações financeiras, necessitam por sua vez da AC para resolver problemas reais exigidos pela sociedade.

Os pesquisadores, citados nos parágrafos anteriores, apontam que a AC é um campo da matemática com aplicações em diferentes áreas do conhecimento e em outros ramos da Matemática, o que revela a pertinência desse saber na Educação Básica.

Tanto que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL,1997, 1998 e 2000), sugerem o estudo da AC em toda Educação Básica, por meio de exploração dos diferentes tipos de problemas de contagem desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Pessoa e Borba (2010), concordam com o parágrafo anterior ao defenderem a tese que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre em um longo período de tempo, por meio da pesquisa envolvendo uma grande quantidade de alunos, dos três níveis da Educação Básica.

Elas aplicaram um teste com problemas de produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação, chegando à conclusão de que há avanços de desempenho entre os alunos pesquisados, à medida que se avança nos níveis de escolarização, seja por aspectos extra escolares ou por vivências escolares, sejam elas relacionadas direta ou indiretamente às situações de combinatória.

Silva (2010), também reforça o ensino da AC desde cedo nas escolas, pois em sua pesquisa destaca que crianças pequenas podem mostrar o início do raciocínio combinatório ao resolver problemas de produto cartesiano por meio da correspondência um-para-muitos.

Além dos problemas de produto cartesiano, Pacheco (2001), Pessoa e Borba (2010), Barreto (2012), Duro (2012) e Azevedo (2013), defendem que os problemas de contagem (arranjo, permutação e combinação), também sejam trabalhadas em toda Educação Básica, pois a medida que os alunos avançam em sua escolaridade, eles aperfeiçoam suas estratégias e melhoram seu desempenho com relação à compreensão dos significados desses problemas.

No entanto, pesquisas tem apontado que o estudo da AC ainda se constitui como um desafio, tanto para aquele que ensina quanto para aquele que aprende, como mostram alguns resultados de pesquisas que vêm sendo desenvolvidas nesse campo do saber e que passaremos a descrever nos parágrafos seguintes.

As pesquisas em formação docente, apontaram que há professores que não trabalham com seus alunos o conteúdo de AC, pois têm dificuldades de compreensão e na diferenciação dos problemas de arranjo e combinação, com isso, relegando a segundo plano o seu ensino e, quando ensinam, valorizam o uso de fórmulas nos problemas de contagem, mas não sabem justificar a origem e a validade das mesmas (COSTA, 2003; SANTOS, 2005; ROCHA, 2006; SABO, 2010; ROCHA, 2011, ALVES, 2012, MIRANDA SILVA, 2014).

Essa utilização precoce das fórmulas de contagem tem sido rejeitada em várias pesquisas ao apontarem que devemos explorar os diversos tipos de problemas de AC privilegiando na resolução dos mesmos, o princípio fundamental da contagem, árvores de possibilidades, a recursão, a indução e deixando o uso das fórmulas para serem inseridas por último, pois nesse caso o estudante terá construído técnicas para a compreensão na dedução das fórmulas.

(STURM,1999; ESTEVES, 2001; ROCHA 2002; DORNELAS, 2004; PINHEIRO, 2008; VARGAS, 2009; ALMEIDA, 2010; CALDEIRA ALVES, 2010;SOUZA, 2010; CAMPOS, 2011; MENDONÇA, 2011; SILVA 2013; CHILELA, 2013).

Por outro lado, temos como hipótese, que as dificuldades na construção do conceito de AC podem estar relacionado também na abordagem desse saber no LD, uma vez que o LD é para o professor mais que um simples material de uso no ensino-aprendizagem, é um objeto de apoio didático para estruturar e ministrar as suas aulas, apoiando-se no texto do saber, nos exemplos ou nos exercícios. (CARVALHO, 2007; SILVA JÚNIOR e RÉGNIER, 2007).

Essa nossa hipótese parece ser corroborada com a criação no Brasil, após passar por diferentes denominações por mais de 80 anos, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que tem por objetivo avaliar, por meio de critérios definidos e divulgados, os LD dos Ensinos Fundamental e Médio.

Os LD avaliados e aprovados de cada segmento, são divulgados no Guia de Livros Didáticos que contém as resenhas de cada obra, servindo de base para que o professor escolha o LD que mais atende a sua realidade.

Com isso, passaremos a descrever nos próximos parágrafos as análises das pesquisas feitas sobre AC na Educação Básica, porém procurando destacar a sua abordagem nos LD, pois os achados em cada pesquisa poderão trazer elementos que nos ajudarão a compreender o modo de vida desse saber nos períodos de Movimentos/Reformas em relação com os documentos vigentes.

A pesquisa de Sturm (1999) destaca uma maior preocupação com a prática de ensino que se concentravam no domínio de fórmulas ou procedimentos rotineiros, o que o impulsionou a "investigar as possibilidades pedagógicas de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa" em uma sala de 2ª série do Ensino Médio.

Ele descreve "alternativa" como característica a uma abertura à participação dos alunos e predominância do pensamento combinatório ao invés da ênfase nas fórmulas.

A forma como ele descreve "alternativa", deixa claro que nesse período de sua pesquisa, havia uma predominância de uma abordagem tradicional de ensino, na qual o professor é o personagem principal e o aluno mero espectador.

> A Análise Combinatória se dá de modo formal, apresentando definição e fórmula sem preocupação com o significado dos termos e símbolos envolvidos, aparecendo em seguida exercícios sob o título de "Aplicações" (STURM,1999, p.25).

Ou pela forma, de como, os exercícios eram apresentados nos LD.

> Na maior parte dos livros didáticos destinados ao Ensino Médio, o termo "exercícios" é utilizado para indicar tarefas repetidas, destinadas a treinar o aluno em um determinado procedimento e ou/algoritmo; não o utilizei nesse sentido." (STURM, 1999 ,p.36).

Esteves (2001), trabalhou com dois grupos em sua pesquisa. Um denominado de grupo experimental, composto por 25 alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental o qual trabalhou uma sequência de ensino elaborada por ela. O segundo denominado grupo de referência, foi formado por uma turma da 2ª série (2º ano) do Ensino Médio com 25 estudantes e trabalhou em suas aulas com o LD adotado pela escola.

No desenho de sua pesquisa, um dos tópicos estava reservado a analisar coleções de LD do Ensino Fundamental dos anos de 1996, 1997 e 1998, num total de cinco coleções, com o objetivo de analisar se elas abordam ou não problemas de contagem e cinco livros no total do Ensino Médio dos anos de 1992, 1993, 1996 e 1997, com o objetivo de saber como eles trabalham o tema.

Os critérios de análise dos LD para os dois segmentos usados por essa pesquisadora foram os mesmos usados pelo MEC: forma de introdução do conteúdo, apresentação dos conceitos de arranjo e combinação; como e quando são introduzidas as fórmulas, apresentação de problemas com enunciados diversificados, ênfase na resolução com auxílio de diagramas e inclusão de fatos históricos.

Ao analisar as cinco coleções do Ensino Fundamental, ela aponta uma fragmentação no conteúdo de contagem, pois apenas uma trabalha esse conteúdo em dois anos dos quatro anos (5ª a 8ª série) do Ensino Fundamental.

Essa coleção apresenta o conteúdo de contagem inicialmente na 5ª série (6ª ano) e volta a apresentar um pouco na 7ª série (8º ano) fazendo uma conexão na introdução do conceito de probabilidade. Tanto na 5ª série como na 7ª, o conteúdo é introduzido por meio da estratégia de contagem direta, trazendo problemas que podem, de modo gradativo, levar o aluno a desenvolver o raciocínio combinatório.

Ela diz ainda que nessa coleção não há preocupação em definir arranjo e combinação, como também na apresentação de fórmulas como possível uso na resolução de um problema e que os problemas de contagem apresentam enunciados bem diversificados.

Ela identificou no volume da 5ª série (6º ano) que o mesmo propõe a utilização de desenhos e esquemas como uso na resolução dos problemas e no volume da 7ª série (8º ano), a estratégia mobilizada na resolução dos problemas é o uso da árvore de possibilidades.

Quanto aos cinco livros do Ensino Médio, na categoria sob a forma de introdução do conteúdo, ela aponta que apenas um dos cinco livros analisados contempla o desenvolvimento do raciocínio combinatório pelo aluno, pois os demais procuram sistematizar o conteúdo.

Quanto à apresentação dos conceitos de arranjo e combinação, essa pesquisadora toma como hipótese, no momento em que os dois conceitos forem trabalhados juntos, fará com que o aluno compreenda a questão de ordem, mas isto não é identificado em três coleções, pois nelas a definição de arranjo e combinação já vem pronta, como também trabalhadas de forma isoladas e sem nenhuma relação entre elas.

Quanto à introdução das fórmulas, apenas um livro dos cinco, iniciou arranjo e permutação sem fórmulas, os demais, assim que foi definido cada tipo de agrupamento, as fórmulas foram enunciadas para serem utilizadas nos problemas propostos.

No que se refere à apresentação de problemas com enunciados diversificados, quatro dos cinco livros analisados pela pesquisadora só apresentam problemas com enunciados diversificados relacionando arranjo, combinação e permutação no final do capítulo.

Quanto à ênfase na resolução com auxílio de representação, ela conclui que nenhum livro analisado proponha de forma explícita o uso de diagramas, tabelas ou árvores de possibilidades, assim como não há nenhuma preocupação entre os cinco livros ao abordar fatos históricos.

Em suas conclusões, essa pesquisadora destaca as dificuldades dos alunos ao interpretar os problemas propostos por estar fortemente associado a memorização do algoritmo privilegiados pelos LD.

Sturm (1999) e Esteves (2001) foram os pioneiros no Brasil a tratar da seguinte questão: como ensinar AC na Educação Básica? Essa preocupação era latente na época e analisar esse saber nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental PCNEF (BARSIL,1997,1988) junto com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio PCNEM (BRASIL, 1999) é de suma importância em nossa pesquisa para ver a relação deles com os LD.

Acreditamos que a abordagem da AC vai se modificando nos LD não só com a implantação dos PCNEF e PCNEM, mas principalmente, com a divulgação, desde 1999, dos critérios de avaliação dos LD que são adquiridos pelo Ministério da Educação, para distribuição nas escolas públicas.

O que dissemos no parágrafo anterior parece ser evidenciado no trabalho de Costa (2003) que identificou o conteúdo de AC em duas coleções de LD 1ª a 8ª série (2º ao 9º ano) do Ensino Fundamental. Em suas análises descreve que embora as duas coleções tivessem uma apresentação diferente do conteúdo, as estratégias utilizadas na resolução dos problemas eram as mesmas já identificadas na pesquisa de Esteves.

Vargas (2009), analisou três LD do Ensino Médio de matemática (volume único) adotado no Brasil, sendo um do ano de 1997 e dois de 1998, chegando a conclusão de que o aluno, sem a presença do professor, não consegue assimilar o conteúdo de AC, em função da não exploração, com profundidade, da teoria exposta nos Livros Didáticos.

Já Souza (2010), analisou treze Livros Didáticos do Ensino Médio em ordem cronológica das décadas de 40, 50, 60, 70, 90 e anos 2000, com a finalidade de ver a abordagem da AC nesses livros e destacou:

> Os conceitos são definidos pelo professor, seguidos de alguns exemplos e com uma possível aplicação num problema a ser resolvido pelo professor, não permitindo a participação dos alunos na construção desses conceitos, uma vez que os problemas para os alunos resolverem são oferecidos somente no final do capítulo. Antes de um problema ser colocado para os alunos, *a* matemática necessária para resolvê-lo já é trabalhada pelo professor, com a apresentação das fórmulas para posterior aplicação. O ensino é totalmente centrado no professor. (SOUZA, 2010, p. 100).

Alves (2010), em sua pesquisa analisou quatro coleções de LD de 6º ao 9º do Ensino Fundamental, sendo duas coleções de 2006, uma de 2007 e uma de 2008. Em suas análises aponta os mesmos resultados destacados por Esteves (2001) e Costa (2003), a falta de tarefas que diferenciem arranjos simples de combinação simples, a falta de diferentes estratégias na resolução dos problemas de AC, mas destaca a articulação de AC com outros blocos de conteúdo: Número e Operações e Tratamento da Informação.

Mendonça (2011), em sua pesquisa analisou dois LD do Ensino Médio (volume único) dos anos de 2005, 2009 e Costa (2013) analisou quatro LD do 2º ano do Ensino Médio, sendo dois de 2005 e dois de 2010. Eles chegaram à mesma conclusão da organização do conteúdo de AC em suas obras analisadas, tais como: definição de cada tipo de agrupamento, seguida da apresentação da resolução de um problema com o uso da fórmula sem nenhuma justificativa da mesma e uma seção final do LD envolvendo todos os tipos de agrupamentos.

Alves (2012) teve como objetivo em sua pesquisa destacar a importância de considerar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da AC, e ao analisar três coleções de livros do Ensino Fundamental e dois livros (volume único) do Ensino Médio, descreve um avanço na organização do conteúdo AC nos LD ao construir esse conceito por meio da resolução problemas como ponto de partida, em contraste de como eram abordados nos livros antigos, ratificado também por (SOUZA, 2010).

Silva (2014), com o objetivo de compreender as relações do professor com a Matemática, identificou que o modelo de referência seguido por eles, estava pautado na reprodução ipsis litteris do LD de matemática. Isso fez com que esse pesquisador analisasse cinco coleções de LD de matemática, sendo duas dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º), uma dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º) e duas do Ensino Médio.

Em suas análises, destaca que os LD trazem uma sequência de problemas envolvendo AC entre 02 a 04 páginas, mas esses problemas não são retomados e não há articulação deles com outros conteúdos.

Sabo (2007), em sua monografia, analisou três Livros didáticos do Ensino Médio sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático em duas etapas: a primeira definiu praxeologicamente as tarefas e a segunda investigou as técnicas, tecnologias e teorias que envolvem as tarefas propostas e chegou à conclusão que as técnicas continuavam as mesmas, a aplicação de fórmulas.

Já em sua pesquisa de Mestrado, (SABO, 2010), concluiu que alguns professores valorizam o uso de fórmulas como técnica nas tarefas de contagem, mas não saberiam justificar a origem e a validade das mesmas.

Baseado em Chevallard et al (2001), Sabo (2010) diz: “não é possível para o matemático, o professor de Matemática, ou mesmo, o aluno atuar matematicamente sem compreender o que está fazendo. Por outro lado, não se pode entender uma organização matemática, sem uma prática matemática eficaz. “Então, não há práxis sem logos, como também, não há logos sem práxis” (SABO, 2010, p.63).

O parágrafo anterior, decreve o argumento de Sabo (2010) para justificar a importância da demonstração das fórmulas como técnicas usadas na resolução das tarefas de AC.

Para demonstrar o uso do Princípio Fundamental da Contagem – PFC como sendo uma técnica válida para resolver problemas de contagem que implicam **n** etapas sucessivas, fez uso do Princípio da Indução Finita em **n** como tecnologia.

Para chegar às fórmulas de permutação, arranjo e combinação Sabo (2007,2010) partiu de caso particular (problemas apresentando no enunciado um número pequeno de objetos a organizar) para caso geral (n finito, $n \in R$) empregando como técnica o PFC.

Oliveira (2014), em sua pesquisa de Mestrado, objetivou identificar quais invariantes operatórios os professores das séries iniciais do Ensino Fundamental mobilizam de forma estável, durante a análise de situações envolvendo combinatória. Para alcançar seu objetivo, optou por uma metodologia qualitativa, fazendo um estudo de caso, por meio de questionário e entrevista semiestruturada. Dessa forma, analisou os dados obtidos por esses meios tomando por base a Teoria dos Campos Conceituais.

Em suas conclusões, observou certo desconhecimento dos professores sobre o currículo prescrito do conteúdo de Combinatória; os docentes, de forma unânime, elegem o livro didático como recurso fundamental em suas aulas, mesmo que alguns deles buscassem outras fontes; os docentes possuem conceitos restritos sobre Combinatória e mobilizam mais invariante operatório da enumeração de possibilidades, do que os meios para generalizar o princípio multiplicativo.

Em um dos tópicos de sua pesquisa, analisou o estado atual do ensino de combinatória nos anos iniciais. Nesse tópico, a pesquisadora discute o que propõem as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais e como os autores de livros didáticos do 1º ao 5º ano aprovados no PNLD (BRASIL,2013) em um total de 24 obras tratam esse conteúdo.

Em suas análises, a pesquisadora concluiu que as coleções analisadas divergem do que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, entre esses destacamos: fragmentação em relação a abordagem do conteúdo ou nenhuma menção em toda coleção; Grande parte das coleções trata a Combinatória no contexto do raciocínio multiplicativo, mas não o integra ao bloco de Tratamento da Informação; Há pouca importância atribuída à combinatória dentro do conjunto de temas abordados nas coleções, pois a Combinatória entra mais como ferramenta para outros conteúdos e passando assim a ser tratada de forma superficial.

Ela ainda faz uma análise de que maneira duas coleções de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais aprovados pelo PNLD (BRASIL,2013) organizaram as atividades propostas referentes à Combinatória por meio da Teoria Antropológica do Didático relativa à Organização Praxeológica Matemática.

Em suas conclusões, afirma que as duas coleções analisadas não contribuem para o desenvolvimento do Letramento Combinatório porque o bloco tarefa-técnica é contemplado nas duas coleções pelo procedimento de só um tipo de técnica e as tarefas não vão se tornando mais abrangentes ao longo da coleção.

Pinheiro (2015) em sua pesquisa, se propôs a investigar os saberes da AC estudados nas escolas brasileiras do Ensino Médio entre os períodos de 1895-2009 à luz da Teoria Antropológica do Didático, especificamente sobre as organizações praxeológicas tanto matemáticas como didáticas, juntamente com a noção de modelos didáticos, proposta por Josep Gáscon.

Em suas análises, comprovou sua hipótese, da existência de um predomínio da memorização e da utilização de fórmulas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Esse autor ao analisar LD antes dos anos de 60, destacou que o saber AC tem seu nicho como criações didáticas no desenvolvimento do Binômio de Newton, na solução de tarefas envolvendo potências de um polinômio e as tarefas tinham a finalidade de aplicações das fórmulas de arranjo, permutação e combinação como técnicas. Ele também identifica em suas análises, que os LD entre 1940 e 1960, mesmo revelando um enfoque para resolução de problemas, a finalidade continuava a mesma de 60, treinar as fórmulas dos agrupamentos.

Durante o período de 1960 a 1980, os saberes da AC, passaram a ser fundamentados teoricamente pela noção de função injetora, a noção de função bijetora, a teoria dos conjuntos e o princípio da indução finita. Esse autor nos diz ainda, que no período Movimento da Matemática Moderna, os LD eram marcados pelo uso do princípio multiplicativo, aditivo, da inclusão-exclusão e da árvore das possibilidades como técnicas na solução de certos tipos de tarefas de contagem que não poderiam ser resolvidas por permutação, arranjo ou combinação.

Entre 1980 e 2009, identificou que os autores de LD, passaram a utilizar a árvore de possibilidades como um discurso tecnológico, para justificar o princípio multiplicativo, e que este por sua vez, como discurso tecnológico, para justificar a fórmula de arranjo. O princípio multiplicativo desaparece no momento que as fórmulas são institucionalizadas, ou seja, as fórmulas passam a ser a técnica predominante na execução das tarefas.

Nesse pequeno recorte das pesquisas sobre AC, nos apresentam de modo geral um descompasso entre documento curricular e LD, como se eles fossem água e óleo, ou seja, coisas que não dialogam entre si.

A pesquisa de Oliveira (2014), parece reforça isso ao analisar LD aprovados no PNLD de 2013 destacando a desfragmentação do conteúdo AC do 1º ao 5º ano em relação ao que preconiza os PCN, pois os PCN sugerem que o estudo da AC seja desenvolvido em todos os anos da Educação Básica.

Sabo (2007) analisou três LD do 2º ano do Ensino Médio, sendo dois do ano 2004 e um do ano de 2005. Pinheiro (2015) analisou LD entre 1895-2009. Esses autores chegaram a mesma conclusão no que concerne a não variação dos tipos de problemas de contagem, que o uso de estratégias de resolução são idênticas e repetitivas, há um predomínio das fórmulas na resolução dos problemas, mas que não são compreendidas de fato. O que eles conjecturaram que isso não propicia ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

De certo modo, as outras pesquisas, apesar de não usarem a Teoria Antropológica do Didático nas análises dos LD sobre o saber da AC, parecem corroborar também com o que foi dito por Sabo (2007,2010), Oliveira (2014) e Pinheiro (2015) sobre a evolução praxeológica do saber Análise Combinatória.

Isso nos inquietou, pois segundo Pires (2015), os documentos oficiais embora não sendo obrigatórios eles ainda continuam sendo um referencial na elaboração dos programas curriculares e na elaboração e análise de LD, como afirma:

> Destacamos, mais uma vez, que no Brasil há um problema crucial em relação à questão curricular. Os PCNEF e os PCNEM não foram documentos obrigatórios, e, por sua vez, as diretrizes curriculares do Conselho Nacional de Educação são muito genéricas. Desse modo, mesmo não sendo obrigatórios, os PCN acabaram influenciando e ainda influenciam a elaboração de currículos regionais; a elaboração e a análise de livros didáticos; e as próprias avaliações institucionais, com matrizes que são recortes dos currículos". (PIRES, 2015, p.485).

Essa inquietação nos conduziu a avançar nas pesquisas desenvolvidas já citadas, principalmente as desenvolvidas por Oliveira (2014) e Pinheiro (2015) tomando como análise os LD e os documentos oficiais.

Nossa análise permeará a Reforma Francisco Campos, a Reforma Gustavo Capanema, o Movimento da Matemática Moderna e o Movimento da Educação Matemática, período também analisado por Pinheiro (2015).

Em que então avançamos? Primeiro, que há um hiato entre as pesquisas de Oliveira (2014) e Pinheiro (2015), pois eles analisaram respectivamente os LD do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio e ao complementarmos em nossa pesquisa LD do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental poderemos encontrar alguma justificativa na seleção e organização do conteúdo de AC em toda Educação Básica.

Segundo, avançamos também na pesquisa de Oliveira (2014) e Pinheiro (2015), pois além de analisar os LD nos períodos de Reforma/Movimentos, analisaremos também os documentos oficiais vigentes em cada época o que poderá desvendar se há ou não um diálogo entre documentos oficiais e LD.

E por fim, ampliaremos o campo de análise dos documentos curriculares ao analisar também o PNLD, pois ao nosso ver, tem um papel regulador sobre as obras que se submetem aos critérios de avaliação durante o período de vigência.

Essa proposta de pesquisa será mediada pelas indagações já apresentadas na introdução e que retomamos a seguir.

- Como vive a Análise Combinatória nos Livros Didáticos e nos documentos curriculares da Educação Básica antes dos PCN?

- Como Análise Combinatória vive nos Livros Didáticos e nos documentos curriculares da Educação Básica após os PCN?

- Quando mudam os documentos curriculares, muda o meio de vida da Análise Combinatória neles e nos Livros Didáticos? Se sim, de que forma?

Tomando como referência essas indagações, apresentaremos, a seguir, o principal objetivo deste estudo.

Analisar as possíveis relações entre os documentos oficiais e Livros Didáticos sobre a Análise Combinatória na Educação Básica.

O próximo capítulo de nosso trabalho, descreverá a fundamentação teórica e o percurso metodológico.

Acreditamos que essas escolhas nos fornecerão elementos para alcançarmos respostas aos questionamentos levantados nessa pesquisa, o que ajudará atingir nosso objetivo.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PERCURSO METODOLÓGICO

3.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Em sala de aula, o professor ao trabalhar determinado conteúdo, por exemplo, Análise Combinatória (AC), ele não será ensinado da mesma forma como foi produzido ou trabalhado na comunidade científica, pois esse conteúdo (AC) para ser ensinado aos estudantes da Educação Básica terá que sofrer algumas transformações para se tornar um conteúdo do ambiente escolar da Educação Básica.

Esse processo de transformação de um conteúdo, é denominado por Chevallard (1991), de Transposição Didática (TD) e que por sua vez não é algo simples, pois a escola deverá propor formas e meios didáticos-pedagógicos para que o conteúdo, em nosso caso a AC, selecionado para ser trabalhado com os estudantes se torne viável nesse ambiente como afirmam BOSCH e GASCÓN:

> Esta teoria formula a necessidade de considerar que o que é ensinado na escola (os "conteúdos" ou "conhecimentos") é, de certa forma, uma produção exógena, algo que é gerado fora da escola e que é transportado ou "transposto" para a escola por necessidades de educação e divulgação social. Uma série de transformações adaptáveis são necessárias para que o conhecimento que eles querem ensinar possa "viver" no novo ambiente que a escola oferece. Para certos conhecimentos a serem ensinados na escola é necessário um trabalho transponível que possibilite algo não foi criado para a escola passar pelas mudanças necessárias para poder ser reconstruído dentro da escola. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p.2).

Chevallard (1991), associa TD a um conjunto de processos adaptativos que torna o objeto de **saber sábio (saber científico)** e tenha sido designado como **saber a ensinar,** em objeto de ensino **(saber ensinado).**

Para prosseguirmos nossa discussão entre os conceitos de saber sábio, saber a ensinar e saber ensinado no qual os dois primeiros estão envolvidos em nossa tese, achamos de pertinência tentar esclarecer ao nosso leitor o que concebemos por *saber* e *conhecimento.*

3.2 SABER E CONHECIMENTO

O saber e o conhecimento geralmente são palavras entendidas como sinônimas, mas em nossa tese optamos em entendê-las como palavras distintas, pois segundo Pais (2001) *"quando se trata da produção de um conhecimento, existe um processo que caracteriza a ideia de transposição. Por esta razão, ao estudá-la, é bom destacar uma diferença entre o saber e o conhecimento".*

Esse pesquisador faz uma distinção entre conhecimento e saber, quando trata da noção da Transposição Didática. Ele nos diz que o *saber* está relacionado ao plano histórico da produção de uma área disciplinar, enquanto o *conhecimento* é considerado mais próximo do fenômeno da cognição, ou seja, o primeiro possui caráter mais histórico, cultural e científico, o segundo possui um caráter mais individual e subjetivo, emergindo por meio da relação entre o sujeito e o saber.

> Todo processo de construção de um conhecimento há a subjetividade e um olhar individual do sujeito sob o objeto, construindo este conhecimento, a construção do saber se dá de forma diferenciada e, em geral, envolve critérios mais objetivos, científicos, histórico e cultural, submetendo-se à aprovação de uma comunidade para reconhecê-lo como tal. (PAIS, 2008, p.13).

O que foi exposto anteriormente nos remete que a palavra *conhecimento* implica uma relação (*conhecimento – sujeito – objeto do saber*), ou seja, o conhecimento é estabelecido pela relação cognitiva interna e ativa do sujeito sobre o objeto do saber.

Partindo então de nossa justificativa de diferenciar “saber” de “conhecimento” como elementos essenciais em nossa tese, consideramos então ao conceito de TD a Transposição Didática dos Saberes e que retomaremos no próximo item.

3.3 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS SABERES.

Vimos então que Chevallard desenvolveu a noção de TD para distinguir três diferentes saberes no processo de ensino aprendizagem. O primeiro, **o saber sábio**, é o conhecimento produzido, sistematizado, validado e reconhecido como pertinentes pela comunidade científica o qual se tornará público a sociedade após sua divulgação em artigos e revistas científicas.

Esse saber, o saber sábio, será ponto de discussões e de pesquisas até chegar à sala de aula por interesses da sociedade. Para isso terá que passar por uma primeira etapa da TD a qual Chevallard denominou de Transposição Didática externa (TDe), pois haverá necessidade que o saber original passe por deformações e adaptações para ser compreendido.

Pois esse saber é carregado de uma linguagem restrita à instituição que o produz (comunidade científica), desse modo terá que sofrer mudanças tanto em sua linguagem, como também, em seu contexto para se tornar algo a ser ensinado na Educação Básica.

A TDe que é a transformação do **saber sábio** para um outro saber**, o saber ensinável,** é feita fora do sistema de ensino e da sala de aula por uma instituição pensante, invisível, denominada por Chevallard (1991) de Noosfera.

A noosfera é composta por autores de livros didáticos, professores, técnicos de instituições do governo, etc., que estabelecem o que deve ser ensinado na escola, por sua vez, materializados por documentos oficiais, por exemplo os PCN e Livros Didáticos.

O terceiro, **o saber ensinado**, ocorre dentro da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são o professor e o(s) aluno(s). Nesse saber o professor é o elemento humano responsável por uma segunda etapa da transposição, denominada de Transposição Didática Interna (TDi).

É na TDi que se desenvolvem os processos de ensino e de aprendizagem, nos quais o professor utilizará vários recursos para planejar suas aulas, e entre esses recursos estarão os Livros Didáticos.

O parágrafo anterior reforça a pertinência de nosso estudo em focar na análise de documentos oficias (referência para o professor) e LD (material usado por professores e alunos).

Nesse caso, estaremos também atentos ao que Chevallard (1991) chama de vigilância epistemológica, isto é, estaremos interessados em analisar se as deformações e adaptações realizadas na TDe não 'desfiguram' o saber em jogo, no caso a AC no saber a ensinar.

> O conceito de Transposição Didática[1], enquanto refere-se à trajetória do saber sábio para o saber ensinado, e, portanto, a eventual distância obrigatória que os separa, testemunha o questionamento necessário, ao mesmo tempo em que se torna a sua primeira ferramenta. Para didática, é uma ferramenta que permite reconsiderar, examinar as evidências, colocar em cheque as ideias simples, se livrar de familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em uma palavra, que lhe permite exercer sua vigilância epistemológica. (CHEVALLARD, 1982, p.3. Tradução nossa.).

Isso reforça uma avaliação, questionamento e revisão do saber Análise Combinatória (AC) transposto do saber sábio ao saber a ensinar nos Documentos Oficiais e nos Livros Didáticos (LD) de modo que em nossas análises possamos ver se há uma convergência entre eles de acordo com a época vigente em nosso estudo.

Para isso, recorremos a **Problemática Ecológica** proposta por Chevallard (1994), que vai se fundamentar, apoiando-se na ideia de nicho, habitat, cadeia alimentar e ecossistema, como afirma a citação a seguir:

> Os ecologistas distinguiram, em termos de um organismo, seu habitat e seu nicho. Para dizer isso em uma linguagem voluntariamente antropomórfica, o habitat, é em

[1] Le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire, en même temps qu'il en est l'outil premier. Pour le didacticien, c'est un outil qui permet de prendre du recul, d'interroger les évidences, d'éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d'étude, bref, d'exercer sa vigilance épistémologique.

> certo sentido o endereço, o lugar de residência do organismo. O nicho são as funções que o organismo realiza lá; isto é de alguma forma a profissão que ele exerce lá[2]. (CHEVALLARD, 1994, p.4, tradução nossa)

Segundo Almouloud (2014), a inserção da problemática ecológica amplia o campo de análise sobre os processos de transposição didática e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar e suas inter-relações hierárquicas, como podemos ver na citação a seguir defendida pelo próprio Chevallard:

> [...a origem deste vasto campo de pesquisa que tenho dado o nome de ecologia didática do saber.... é de certa forma uma maneira de problematizar a ditática que foi introduzida. ... por meio de uma inundação de perguntas. De onde vêm esses novos objetos ensinados? Como eles chegaram lá? Quais suas inter-relações, com outros objetos? E, acima de tudo, por que eles chegaram tão longe? O qual passou a denominar de ecologia didática do saber[3]]. (CHEVALLARD, 1994, p.5, tradução nossa)

Nesse sentido, a transposição didática designava o saber matemático nas instituições em três objetos:

- paramatemáticos: ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos;

- matemáticos: além de instrumentos úteis para estudar outros objetos matemáticos, tornam-se objetos de estudo em si mesmo.

- protomatemáticos: apresentam propriedades utilizadas para resolver alguns problemas, sem contudo adquirir *o status* de objeto de estudo ou de ferramenta para o estudo de outros objetos.

---

[2] Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit; c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce.

[3] Cette simple observation est, au fond, à l'origine de ce vaste domaine de recherche auquel j'ai donné le nom d'écologie didactique des savoirs. Avec ce domaine, à vrai dire, c'est une certaine manière de problématiser le réel didactique qui s'introduisait. La problématique écologique, encore largement implicite dans le livre de 1985, apportait avec elle un flot de questions, auxquelles leur apparente naïveté faisait rendre un son culturellement étrange. D'où viennent ces nouveaux objets enseignés? Comment sont-ils arrivés là? Quelles interrelations, avec quels autres objets, y nouent-ils? Et, aussi, surtout: pourquoi sont-ils arrivés jusque-là?

Segundo Almouloud (2014), a insuficiência dessa classificação foi uma das razões que levaram Chevallard a desenvolver a Teoria Antropológica do Didático (TAD) que discutiremos a seguir.

A TAD pode ser considerada como um prolongamento da TD que, a partir da problemática ecológica como forma de questionar a realidade: O que existe e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Inversamente, dado um conjunto de condições, quais objetos podem ali viver ou, ainda, quais objetos são impedidos de viver nestas condições?

Nesse prolongamento, Chevallard(1991) introduz três termos primitivos que fazem uma modelização antropológica dos saberes: os objetos (O), os sujeitos (X) e as instituições (I).

Os objetos são os elementos de base da construção teórica elaborada por Chevallard (2003); tudo pode ser considerado um objeto a partir do momento que existe para ao menos uma pessoa ou uma instituição. Podemos então, considerar como objetos na TAD, por exemplo, o conceito de arranjo, o professor, a escola, entre outros.

Ele considera ainda, as instituições, as pessoas e as posições que ocupam as pessoas nas instituições como objetos particulares. Isso leva então Chevallard (1996) a acrescentar na TAD outros dois conceitos primitivos, a relação pessoal e a relação institucional, e os conceituam da seguinte forma:

> Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que denotarei por R(X,O) (resp. RI(O)), a que chamarei relação pessoal de X com O (resp. relação institucional de I com O). Por outras palavras, o objeto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I, isto é, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição tiver uma relação com esse objeto. (CHEVALLARD, 1996, p.127).

Bosch e Chevallard (1999), vão evidenciar a noção de relação com o saber ao colocar a didática no terreno da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva).

> O conhecimento - e o saber como uma certa forma de organização do conhecimento - entra então em cena com a noção de relação: um objeto existe se existe uma relação com esse objeto, isto é, se um sujeito ou uma instituição o "(re)conhece" como um objeto. Dado um objeto (por exemplo, um objeto do saber) e uma instituição, a noção de relação leva às práticas sociais que ocorrem na instituição e que envolvem o objeto em questão, ou seja, "o que é feito a instituição com esse objeto. " Conhecer um objeto é ter o que fazer com - e muitas vezes ter de lidar com – esse objeto. O saber matemático, como uma forma particular de conhecimento, é o resultado da ação humana institucional: é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, mais geralmente, se transpõe em instituições. Mas a matemática ainda é um termo primitivo, hipóstase de certas práticas institucionais – as práticas sociais em matemática. O que falta é o desenvolvimento de um método para analisar as práticas institucionais que permitem a descrição e estudo das condições de realização. Os últimos desenvolvimentos da

> teorização vêm preencher esta lacuna. O conceito-chave que aparece então é a de organização praxeológica ou praxeologia. [4](BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.4).

Como vimos anteriormente, Chevallard (1991) considera a noção de saber como certa forma de organização dos conhecimentos vinculados a pelo menos uma instituição. Por sua vez, o conhecimento, de acordo com Chevallard (1999), ocupa todos os espaços e momentos em que haja relações entre sujeitos e/ou instituições, com o objeto que se conhece ou que se queira conhecer.

Isso significa que um dado objeto do saber O, se não for reconhecido por uma instituição I, não haverá uma relação RI(O), isso poderá provocar, ao nosso ver, um desconhecimento para uma pessoa P, ou seja, não poderá haver uma relação pessoal R (X, O).

Mas o que é instituição? Para Chevallard (1999), uma instituição é um dispositivo social total que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar.

No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é para nós uma instituição, que exerce de certo modo, uma imposição aos autores de Livros Didáticos (pessoas), de maneira que eles atendam às exigências dos documentos norteadores do currículo, que é também uma instituição. Nesse caso, os autores de Livros Didáticos, passam de pessoas a sujeitos, pois se relacionam com a instituição PNLD pelo processo de assujeitamento aos critérios de avaliação do Programa.

O que acabamos de anunciar anteriormente é denominada por Chevallard (1999, apud, BESSA e CÂMARA, 2015) avaliação institucional. Essa avaliação é um dos mecanismos segundo os quais I é levada a pronunciar, por meio de alguns dos seus agentes, um veredicto de conformidade (ou de não conformidade) R(X, O) com R(I, O)".

Do mesmo modo, o Livro Didático é uma instituição para o professor, pois, por exemplo, a AC (objeto do saber), se este não for reconhecido no Livro Didático (instituição I), por exemplo em que um LD do 4º ano não aborde AC, isso poderá acarretar em um "vazio didático",

---

[4] La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissances – entre alors en scène avec la notion de rapport : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le « (re)connaît » en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à « ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». Connaître un objet c'est avoir à faire avec – et souvent avoir affaire à – cet objet.

pois o Livro Didático (LD) ainda continua sendo alicerce para o professor (sujeito) ancorar sua prática. Com isso, não haverá uma relação pessoal R(X,O), pois não há um reconhecimento do objeto do saber por I.

Como vimos, um mesmo objeto O, por exemplo AC, pode existir em diferentes instituições, tais como PCNEF, PCNEM LD e, portanto, ser objeto de diferentes relações institucionais RI(O), RI'(O), RI''(O), etc. E mais, um objeto O pode se desenvolver diferentemente em instituições diferentes, bem como mudar (evoluir, envelhecer ou desaparecer) ao longo do tempo em uma determinada instituição.

Isso nos faz retomar nossa questão: Quando mudam os documentos oficiais, ao longo dos anos, muda o meio de vida da AC neles e nos Livros Didáticos? Para tentar responder essa questão, nos apoiaremos na problemática ecológica, a qual, segundo Chevallard (1994), trará diversos questionamentos para que um objeto do saber possa existir ou continuar existindo.

Em termos da TAD, habitats de um objeto matemático são os diversos tipos de instituições em que ele vive. Em nosso trabalho, o habitat da AC pode ser o Ensino Fundamental, o Ensino Médio, um livro didático do 5º ano do Ensino Fundamental ou do 2º ano do Ensino Médio, um documento oficial, como, por exemplo, os PCN.

Desse modo, ao considerarmos esses diferentes habitats, percebemos a necessidade de identificar qual a função do saber, ou seja, seu nicho. Isto nos remete então à pertinência de estudar a problemática ecológica para analisar a transformação por que passa o saber análise combinatória no processo de transposição didática na Educação Básica partindo da problemática ecológica que, segundo Artaud (1998), se apresenta como:

> Um meio de questionar o real, o que existe e por que existe? O que não existe e por que não existe? O que existe poderia deixar de existir? Sobre quais condições o que existe poderia deixar de existir? O que não existe poderia existir? Sobre quais condições o que não existe poderia existir? (ARTAUD,1998,p.101).

Essa pesquisadora afirma ainda que "a ecologia didática tem sua raiz na ecologia biológica, tomando como premissa a noção de ecossistema que, segundo Colinvaux (1993 apud Artaud, 1998, p.102), descreve uma ideia, uma criação de homem: definimos uma parcela da terra conveniente e estudamos o funcionamento da vida, e nesse lugar consideramos o conjunto inerte e o conjunto vivo, para ver como eles interagiam. O conceito de ecossistema constitui um caminho de observar a natureza".

Segundo Artaud (1998), diante dessa definição, alguns pesquisadores em didática identificaram quatro tipos de ecossistemas: o ecossistema do saber, no qual se produz a matemática, como exemplo temos os departamentos de Matemática; o didático escolar, no qual se estuda a matemática, temos as escolas da Educação Básica; o profissional, o qual utiliza a matemática para realizar algumas tarefas, por exemplo, empresas que trabalham com inteligência artificial e o noosferiano, na qual a matemática é manipulada para fins de transposição, tais como documentos oficiais e Livro Didáticos, locus de nossa pesquisa.

Para estudar o saber AC, no ecossistema noosferiano, com enfoque da problemática ecológica, nos apoiaremos na noção de praxeologia, desenvolvida por Chevallard (1999). Esta noção é um modelo introduzido como uma resposta a uma necessidade metodológica, a de descrever as relações institucionais.

> Como método de análise, na TAD, Chevallard (1999) desenvolveu a noção de praxeologia que se ancora nos conceitos de tipos de tarefas a realizar, de técnicas mobilizadas para realizar os tipos de tarefas, de tecnologias que explicam ou justificam as técnicas e de teorias que fundamentam as tecnologias (propriedade matemática). Chevallard (1999) considera que esses quatro elementos fornecem uma grade que permite analisar e 'modelizar' as atividades matemáticas. (ARAÚJO, 2009, p. 19).

Diante da citação anterior, a TAD vai considerar que toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t, que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo T, através de uma técnica (τ), justificada por uma tecnologia θ, que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ, o que vai analisar e modelizar, através da articulação desse quarteto [T, τ, θ, Θ], as atividades matemáticas, se fundamentando em três postulados antropológicos. Os dois primeiros são, respectivamente: toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas e o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.

Para Chevallard (1998), uma tarefa t está relacionada com um tipo de tarefa T, que se situam em acordo com o princípio antropológico, supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza: eles são "*artefatos*, *obras*, construtos institucionais, como, por exemplo, uma sala de aula, cuja *reconstrução* é inteiramente um problema, que é o objeto da didática".

Elas são expressas por um verbo (calcular, resolver, encontrar, ...) e supõem um objeto relativamente claro e preciso. Por exemplo, calcular o número de anagramas [5]da palavra TAD

---

[5] Anagrama é a construção de várias palavras, com sentido ou não, a partir de uma primeira que serve como base, alterando sua ordem original e trocando as letras de lugar.

é uma tarefa, mas, se dissermos apenas o verbo calcular, chamaremos de um gênero de tarefas, pois não determina o que calcular.

Esse autor pontua ainda que, ao longo da escolarização, os gêneros de tarefas vão se enriquecendo e aprimorando como, por exemplo, o gênero calcular (calcular o número de anagramas de uma palavra dada, calcular o número de combinações simples, calcular a probabilidade de um evento dado, etc.).

Segundo Chevallard (1998), a praxeologia relativa a uma tarefa ou a um gênero de tarefas, determina também uma maneira ou caminho de como realizá- la; essa “maneira de fazer” uma determinada tarefa é chamada de técnica (τ).

Embora uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T contenha, em princípio, uma técnica (τ) relativa a T, pode ser que ela dê conta de uma determinada tarefa t ϵ T, mas não dê conta de resolver todas as tarefas t ϵ T, necessitando assim de mais de uma técnica. Isso significa que uma determinada técnica pode funcionar para uma parte P(τ) de tarefas do tipo T, as quais elas estão relacionadas, mas falham na outra parte. Dessa forma, na realização de certos tipos de tarefas poderemos ter uma técnica mais ampla que a outra.

Por exemplo, a tarefa de calcular o número de anagramas da sigla TAD admite possíveis técnicas na realização da tarefa, dentre elas, listar todas as palavras, fazer uso da árvore das possibilidades, porém, se a quantidade de letras de uma palavra ou sigla aumentar, essas técnicas podem não ser viáveis, acarretando a necessidade de uma técnica mais ampla.

Chevallard (1998) afirma ainda, a respeito da técnica, que uma dada instituição I pode ou não reconhecer uma determinada técnica como um caminho para resolver um determinado tipo de tarefas T. Por exemplo, o tipo de tarefa calcular o número de anagramas da palavra TAD pode ser resolvido por um aluno do Ensino Médio recorrendo ao uso de fórmula, enquanto que em outras instituições, como no 6º ano do Ensino Fundamental, essa maneira de resolver pode não ser reconhecida pelo aluno.

Fundamentado nos dois postulados já citados, Chevalard (2009) denomina um bloco prático-técnico, representado por [T/τ], que representa um saber-fazer, ou simplesmente a práxis, da associação entre certo tipo de tarefa e uma determinada técnica.

Ainda segundo Chevallard (2009), em uma instituição I, seja qual for o tipo de tarefa T, a técnica (τ) relativa a T está sempre acompanhada de um vestígio de tecnologia θ, que vem a descrever e justificar a técnica. Dessa forma, Chevallard postula que a ecologia das tarefas e técnicas obedecem as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.

> Supomos que, para existir em uma instituição, uma técnica deve aparecer compreensível, legível e justificada. Trata-se de uma restrição institucional mínima para permitir o controle e garantir a eficácia das tarefas, que são geralmente tarefas cooperativas, supondo a colaboração de vários atores. Esta restrição ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica.

O uso da fórmula de permutação simples em um tipo de tarefa de AC descreve uma técnica, ou seja, um modo de resolver a tarefa, por exemplo determinar o número de anagramas. Por sua vez, o uso do Princípio Fundamental da Contagem como meio de deduzir a fórmula de permutação simples, descreve o discurso tecnológico e pode por sua vez, produzir uma nova técnica.

Contudo esse postulado supõe, entre outras coisas, que o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, para as quais há uma necessidade de descrever essa tecnologia com precisão e rigor, que será feito pela teoria (Θ), um nível superior de justificação-explicação-produção, ou seja, o papel que faz a técnica à tarefa, a teoria faz a tecnologia. No caso da AC, a teoria pode ser a Álgebra ou Teoria dos Conjuntos.

Nasce então do postulado anterior, o bloco tecnológico-teórico representado por $[\theta, \Theta]$ relativo ao saber, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria que unido com o bloco prático-técnico $[T,\tau]$ formam uma organização praxeológica ou simplesmente uma praxeologia. Chevallard (2009), afirma que não há práxis sem logos, assim como não há logos sem práxis.

Uma praxeologia $[T, \tau, \theta, \Theta]$ vai modelizar toda uma estrutura de conhecimento de acordo com os níveis de organizações praxeológicas: pontual, local, regional e global. As organizações pontuais são desenvolvidas em relação a certo tipo (T) de tarefa, como, calcular o número de anagramas de uma palavra dada, no 9º ano do Ensino Fundamental; A organização local, diz respeito à resolução de diferentes tipos de tarefas, em torno de uma tecnologia (θ) determinada; por exemplo, a demonstração das fórmulas dos diferentes tipos de tarefas de combinatória de contagem, por meio do Princípio Fundamental de Contagem; a organização regional integra várias praxeologias locais que são justificadas e explicadas pela mesma teoria (Θ) como a Álgebra; a organização global integra várias organizações regionais correspondentes às várias teorias ($\Theta 1$, $\Theta 2$, etc) podendo ser citado o estudo da AC por meio das teorias Álgebra e Teoria dos Conjuntos.

Chevallard (1999) define praxeologia ou organização praxeológica em dois tipos. O primeiro é denotado por praxeologia matemática ou organização matemática (OM), que é uma praxeologia relativa às atividades matemáticas desenvolvidas pelo professor, ou atividades matemáticas propostas em Livros Didáticos, que é construída em torno de tipo de tarefa (T), de técnica (τ), de tecnologia (θ) e de teoria (Θ).

O segundo, denominado de praxeologia didática ou organização didática (OD), corresponde a reconstrução ou a transposição da organização matemática, seja na sala de aula ou nos Livros Didáticos. Ela emerge da necessidade de explicar como resolver determinadas tarefas propostas em uma organização matemática. Ela descreve o modo de iniciar o conteúdo, os tipos de tarefas, os conceitos que estarão em jogo, quais as técnicas que serão utilizadas, etc.

Podemos dizer, então, que OD determina a maneira como a OM se realiza. No entanto, uma OM não se dá de maneira única, por exemplo, a OM da AC pode variar em Livros Didáticos, mesmo sendo de uma mesma instituição, por exemplo, 2º ano do Ensino Médio.

Porém não quer dizer que não haverá situações didáticas ali presentes, por exemplo, nos Livros Didáticos do 2º ano do Ensino Médio sobre AC, que não serão semelhantes. Isso fez com que Chevallard (1999) diferenciasse o desenvolvimento de uma OD em seis momentos didáticos.

De acordo com Chevallard (1999), o momento do primeiro encontro com a organização matemática pode ocorrer de diferentes maneiras, desde um anúncio do professor de um conteúdo a ser estudado até outro extremo, em que o objeto do saber surge no processo de aceitação e resolução de uma tarefa pelo aluno. Por exemplo, o primeiro momento no Livro Didático pode ser um texto sobre AC ou até mesmo um tipo de tarefa.

O segundo momento é destinado à exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica, podendo não ocorrer, dependendo da abordagem adotada. Esse momento consiste, então, na constituição de uma ou mais técnicas na resolução de certo tipo de tarefa estudado, que se torna rotineira nas tarefas desse tipo.

O terceiro momento diz respeito à construção do ambiente tecnológico-teórico e está diretamente relacionado com cada um dos outros momentos anteriores, na medida em que a técnica que permite realizar certo tipo de tarefa é constituída em estreita relação com o ambiente tecnológico-teórico, a fim de poder explicar e justificar. Dependendo da concepção do autor do LD, existirá uma ênfase no boco tecnológico-teórico.

O quarto momento é reservado para o trabalho com a técnica em diferentes tarefas, esse é o momento de se colocar em prova o seu uso, como também, de buscar formas de torná-la mais eficiente e confiável. Por exemplo, calcular o número de anagramas da palavra PRAXEOLOGIA deve ser inviável por meio da técnica da árvore das possibilidades e, sendo assim, a necessidade de outra técnica mais econômica.

O momento de institucionalização ocorre com a oficialização de quais são os objetos que passarão a constituir definitivamente a organização matemática visada e os que serão dispensados. É aqui que o Livro Didático volta a atenção para o que não pode passar despercebido, pois é o momento de sistematização do que foi trabalhado.

O sexto momento é o da avaliação, e articula-se como o momento da institucionalização, na medida em que proporciona uma reflexão na qual se examina o que foi aprendido de fato, com a organização matemática construída e institucionalizada. Esse momento avalia as relações pessoais e a relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, do emprego das técnicas e tecnologias envolvidas nos tipos de tarefas.

Em nosso estudo, faremos uma análise da organização matemática no ecossistema do saber e uma análise da organização matemática e didática no ecossistema noosferiano. Desse modo, recorremos aos critérios definidos por Chevallard (1999, apud Almouloud, 2014), para que possamos analisar tipos de tarefas, técnicas e o bloco tecnológico-teórico, em torno do objeto do saber AC, os quais serão evocados na metodologia. Assim sendo, apresentaremos a seguir, os seguintes critérios:

1. Para analisar tipos de tarefas (T):

a) Critério de identificação: verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados;

b) Critério das razões de ser: verificar se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;

c) Critério de pertinência: verificar se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

2. Para a avaliação das técnicas (τ):

A avaliação de técnicas apoia-se nos mesmos critérios discutidos na avaliação de tipos de tarefa. Além disso, é preciso responder as seguintes indagações:

a) As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?

b) São fáceis de utilizar?

c) São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto?

d) São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto?

3. Com relação ao bloco tecnológico-teórico, Chevallard (1999, apud Almouloud,2014) define os seguintes critérios:

a) Dado um enunciado, o problema de sua justificação é somente posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?

b) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?

c) Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado?

d) Os argumentos usados são cientificamente válidos?

e) O resultado tecnológico de uma determinada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Segundo Almouloud (2014), o problema da "natureza" dos objetos matemáticos e o de seu funcionamento na atividade matemática conduziram Bosch e Chevallard (1999) a estabelecer uma dicotomia fundamental que os distingue em dois tipos: objetos ostensivos que são os objetos manipuláveis na realização da atividade matemática; por exemplo, o uso do princípio fundamental da contagem, a fórmula de arranjo, uma tabela de dupla entrada, um ramo da árvore das possibilidades, etc.

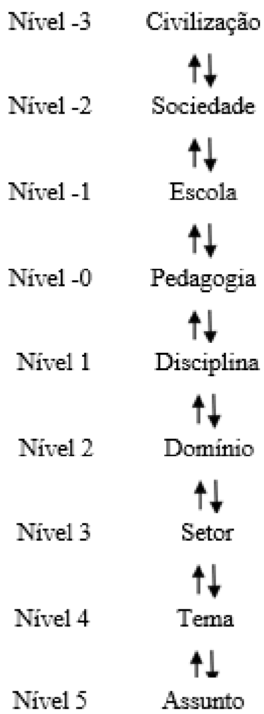
Os objetos não-ostensivos, que ao contrário dos objetos ostensivos, são todos os objetos que só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados, pois eles representam conceitos, ideias, etc; por exemplo, a noção ou conceito de arranjo são invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos que lhe são associados, entre esses o uso da fórmula de arranjo como uma técnica ou a sua dedução.

Segundo Almouloud (2014), Chevallard (2002) a fim de elaborar uma praxeologia associada a um saber matemático, em nosso caso AC, salienta a importância de situar esse saber em uma escala hierárquica na qual cada nível refere-se a uma realidade.

Em nossa pesquisa a identificação destes níveis ajudará a analisar e identificar como era apresentado o saber AC nos períodos de reformas e movimentos associados a ecologia das organizações matemáticas e didáticas relativas a esse saber.

Segundo Chevallard (2002), os nove níveis se inter-relacionam mutuamente, de baixo para cima, como também de cima para baixo, os quais são: Civilização(-3), Sociedade (-2), Escola (-1) e Pedogogia (0), Disciplina (1), Domínio (2), Setor (3), Tema (4) e Assunto (5). Como se pode ver na figura 1.

Figura 1 – Escala dos níveis de Codeterminação Didática.



Fonte: autoria própia (adaptado de CHEVALLARD, 2005)

A figura 1 mostra que os níveis de codeterminação têm consequências nos dois sentidos, e se alterar um determinado nível, por exemplo, o Domínio, teremos repercussões sobre os outros níveis, tantos os negativos, quanto os positivos.

Os níveis positivos de codeterminação didática são correspondentes à organização matemática, de modo que a organização pontual está associada ao nível de codeterminação assunto (nível 5); a organização local está associada ao nível de codeterminação tema (nível 4); a organização regional está associada ao nível de codeterminação setor (nível 3); e a organização global está associada ao nível de codeterminação domínio (nível 2).

Em nossa pesquisa a Civilização é o Brasil (América Latina), a sociedade estará representada pela noosfera (documentos oficiais e LD), a escola é da Educação Básica, a pedagogia se refere concepção de ensino e aprendizagem na Educação Básica; a disciplina, Matemática; o domínio, Números e Operações/Tratamento da Informação; o setor, Análise Combinatória; o tema, Combinatória de Contagem, o assunto, Resolver problemas de Combinatória de Contagem com e sem repetição.

Os níveis de codeterminação didática representam uma ferramenta adequada a fim de categorizar as diferentes condições e restrições para cada nível e que tomaremos como referência em nosso estudo sobre a ecologia do saber AC na Educação Básica brasileira, como se afirma a seguir:

> Segundo Chaachoua e Bittar (2016) a identificação destes níveis de codeterminação permite, portanto, entender melhor as condições e restrições institucionais sobre os sistemas didáticos e permite aos pesquisadores elaborar infraestruturas matemáticas alternativas, porém viáveis, em uma instituição e praxeologias didáticas alternativas associadas às OM.

Acreditamos que esse referencial teórico é adequado para nos ajudar a responder nossas indagações sobre a ecologia do saber Análise Combinatória no ecossistema noosférico.

3.4 PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa tem o caráter de uma abordagem qualitativa, tomando como pressupostos teórico-metodológicos elementos da Pesquisa Bibliográfica e Documental que segundo Gil (2002) se assemelham muito entre se, a diferença essencial entre ambas está na natureza das fontes. Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa.

Partimos inicialmente em fazer um levantamento das pesquisas realizadas sobre o saber Análise Combinatória e em seguida das escolhas dos documentos oficiais e dos Livros Didáticos que vão compor o corpus[6] de nossa pesquisa.

Após o levantamento das pesquisas sobre o saber Análise Combinatória, fizemos a leitura de cada uma procurando identificar o foco da pesquisa, seus objetivos, a metodologia utilizada, o referencial teórico e seus resultados para ver de que forma nossa pesquisa avança e que está reratada no capítulo 1, revisão bibliográfica.

Neste levantamento, identificamos quatro trabalhos que irão compor o quadro das Organizações Matemáticas e Didáticas da Análise Combinatória que são elas: a pesquisa de Oliveira (2014) para os anos iniciais do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental e as pesquisas de Sabo (2007;2010) e Pinheiro (2015) para a do Ensino Médio.

Ainda para compor o corpus de nossa pesquisa procuramos Livros Didáticos que correspondessem aos períodos de Reformas Francisco Campos, Gustavo Capanema e Simões Filho, Livros Didáticos adotados no período do Movimento da Matemática Moderna e para o Movimento da Educação Matemática, Livros Didáticos aprovados pelo PNLD na linha do tempo traçado por nós.

Como o lócus de nossa pesquisa está no ecossistema noosferiano, na qual a matemática é manipulada para fins de transposição, analisaremos além dos Livros Didáticos os documentos oficiais da Educação Básica sobre o saber Análise Combinatória em cada período destacado em nossa pesquisa.

As análises dos documentos oficiais e dos Livros Didáticos, serão sustentadas pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), por permitir o estudo de como um determinado objeto do saber vive em determinada instituição, bem como o nível de conformidade existente entre as relações institucionais com um determinado saber.

---

[6] "O corpus é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 1977, p. 96).

As análises serão feitas por meio da ecologia do saber, para identificar o habitat e o nicho ecológico da AC nessas instituições (documentos curriculares e Livros Didáticos), como também, os níveis de codeterminação didática para situar e justificar as organizações matemáticas e didáticas de cada instituição.

Dessa forma, dividiremos nossas análises em três etapas: a primeira, analisar a ecologia das organizações didáticas e matemáticas nos documentos curriculares, a segunda analisar a ecologia das organizações didáticas e matemáticas nos Livros Didáticos e por último, faremos uma análise comparativa no ecossistema noosferiano.

A seguir descreveremos para cada etapa, os objetivos e as escolhas dos Livros Didáticos e documentos oficiaisnos.

1ª etapa: análise ecológica dos documentos oficiais

Com o objetivo específico de analisar a ecologia das organizações didáticas e matemáticas nos documentos curriculares da Educação Básica sobre análise combinatória tomaremos para análise os seguintes documentos: Programas de Ensino Secundário no Brasil (Matemática) 1931 e 1952, PCN de terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (Matemática), PCN + (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), PCN do Ensino Médio (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (Linguagens, Códigos e suas Tecnlogias) , os Guias de Livros Didáticos e seus respectivos editais.

Nessas análises, procuraremos identificar o habitat e o nicho ecológico da AC e, se possível, articular com os critérios definidos por Chevallard (1999, apud Almouloud, 2014) para analisar tipos de tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico-teórico, em torno desse saber.

Os Programas de Ensino Secundário no Brasil, PCN e OCEM entram em nossas análises, por serem documentos curriculares oficiais do MEC e neles apresentarem o conteúdo de AC para Educação Básica.

Farão também parte de nossas análises os editais, pois os livros são selecionados a partir deles, que definem os critérios, prazos e procedimentos para os detentores dos direitos autorais encaminharem as obras para o Ministério da Educação.

O Guia de Livros Didáticos é publicado pelo MEC com resenhas das coleções aprovadas, por isso de sua pertinência em nossas análises por ser uma instituição que possa descrever as organizações didáticas e matemáticas das obras que selecionamos, os quais participaram do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.

O critério de seleção dos editais e dos guias de Livros Didáticos foram selecionados de acordo com a cronologia dos Livros didáticos a serem analisados que passaremos a apresentar.

2ª etapa: análise ecológica dos livros didáticos

Nessa etapa, faremos uma análise ecológica em coleções de livros didáticos antes e após o surgimento dos PCN procurando identificar os vários habitats do saber AC e seu nicho. Para analisar as organizações didáticas recorremos aos momentos de estudos definidos por Chevallard (1999).

Quadro 1 - Categorias e critérios de análise da organização didática do Livro Didático

Categorias (momentos)	Critérios de análise
Primeiro encontro.	**Como os LD iniciam o assunto de Combinatória?**
Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica.	**Como os LD exploram os tipos de tarefas? Como é feita a elaboração da técnica?**
Constituição do ambiente tecnológico-teórico.	**Como são organizadas as justificativas das técnicas nos LD?**
Trabalho da técnica	**As técnicas são utilizadas em diferentes tarefas? Há criação de novas técnicas?**
Institucionalização	**Como se concretiza a institucionalização nos LD?**
Avaliação	**Como acontece a avaliação nos LD?**

Fonte: autoria própria

Para analisar os tipos de tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico-teórico, em torno do objeto do saber AC, nos apoiaremos nos critérios definidos por Chevallard (1999, apud Almouloud, 2014).

Quadro 2 - Critérios de análise da organização matemática do Livro Didático.

Elementos da praxeologia	Critérios adotados
Tipo de tarefa (T)	**As tarefas de combinatória são claras e bem identificadas?**
	As tarefas de combinatória tem uma razão de ser?
	Quais são os tipos de tarefa de combinatória mais encontradas nos LD?
Técnica (τ)	**São efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?**
	São viáveis de utilizar?
	São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefa proposto?
	São fidedignas e confiáveis em diferentes tarefas?
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	**Dado um enunciado, o problema de sua justificação é somento posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?**
	As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?
	Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado?
	Os argumentos usados são cientificamente válidos?
	O resultado tecnológico de uma determinada tarefa pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Fonte: autoria própria (adaptado de CHEVALLARD 1999, apud ALMOULOUD,2014)

Como o objeto geral de nossa pesquisa está em analisar a ecologia do saber AC na Educação Básica, escolhemos LD das séries iniciais e finais do Ensino Fundamental e LD do Ensino Médio.

A análise dos Livros Didáticos obecerá a Cronologia dos documentos oficiais, ou seja, dos mais antigos para os mais recentes. Sendo assim, para os Programas de Ensino Secundário no Brasil de 1931 e 1952 escolhemos Livros Didáticos desse período.

Para o período do Movimento da Matemática Moderna, Livros Didáticos que estivessem compreendidos entre os anos de 1970 e 1990, e para o período do Movimento da Educação Matemática, escolhemos obras próximas ao surgimento dos PCN e dos demais documentos oficiais após os PCN.

Nesse caso, para o Movimento da Educação Matemática, escolhemos Livros Didáticos parovados pelo PNLD 2000-2001 e 2013 para as séries iniciais Ensino Fundamental com o objetivo de verificar se houve modificações em suas organizações didáticas e matemáticas. Livros Didáticos das séries finais do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2002,2006, 2011 e 2017 também com o objetivo de verificar se houve modificações em suas organizações didáticas e matemáticas e Livros Didáticos do Ensino Médio que contivessem obra de autor que participou do Movimento de Reforma e tenha publicado obra após os anos de 2000 eobras aprovadas pelo PNLD que fossem próximas ao surgimento dos PCNEM, PCN + e OCEM.

Vale ressaltar ainda, que entre essas escolhas dos LD para nossas análises, há uma variável importante, analisar LD que tivesse(m) autor(es) em pelo menos dois segmentos da Educação Básica. O que pra nós é algo que não podemos perder de vista em nossas análises. Pois esses dois aspectos podem estar diretamente ligadas ao assujeitamento pelos critérios do PNLD ou por hipótese, as orientações dadas pelos documentos curriculares.

Nos quadros a seguir, apresentamos os LD a serem analisados em toda Educação Básica, contendo título, autor(es), série/ano, editora e se constam ou não no PNLD.

Quadro 3 - Ensino Fundamental - Séries iniciais

Título	Autor	Série/Ano	Editora - Ano	PNLD
Matemática todo dia.	**Cláudia Mirian, et al.**	**1ª a 4ª**	**Módulo – 1998**	**2000-2001**
Vivência e Construção.	**Luiz Roberto Dante**	**1ª a 4ª**	**Ática-2001**	**2000-2001**
A Conquista da Matemática.	**José Ruy Giovanni Jr**	**1º ao 5º**	**Editora FTD -2011**	**2013**

Quadro 4 - Ensino Fundamental - Séries finais

Título	Autor	Série/Ano	Editora - Ano	PNLD
A Conquista da Matemática-Nova	**José Ruy Giovanni**	**5ª a 8ª**	**Editora FTD - 1998**	**2002**
A Conquista da Matemática A + Nova	**Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.**	**5ª a 8ª**	**Editora FTD - 2006**	**2006**
A Conquista da Matemática – Edição Renovada	**José Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci**	**6º a 9º**	**Editora FTD - 2011**	**2011**
Praticando Matemática – Edição Renovada.	**Álvaro Andrini**	**6º a 9º**	**Editora do Brasil - 2015**	**2017**
Projeto Teláris	**Luiz Roberto Dante**	**6º a 9º**	**Ática-2016**	**2017**

Quadro 5 - Livros Didáticos do Ensino Médio

Título	Autor	Série/Ano	Editora - Ano	PNLD
Matemática 2º Ciclo	**Roxo et al.**	**2ª série**	**Livraria Francisco Alves- 1944**	**Não Existia**
Matemática para os Cursos Clássico e Científico	**Thales Melo Carvalho**	**2ª série**	**Companhia Editora Nacional – 1944**	**Não Existia**
Curso de Matemática para os cursos clássico e científico.	**Manoel Jairo Bezerra**	**Volume Único - 1º, 2º e 3º ano**	**Companhia Editora Nacional – 1964**	**Não Existia**
Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição.	**Diretor de Publicação do G.E.E.M, L. H. JACY MONTEIRO.**	**Série Professor**	**L.P.M, 1965**	**Não Existia**
Matemática Para o curso Colegial Moderno	**Barbosa e Rocha**	**Volume 3**	**IBEP, 1970.**	**Não Existia**
Matemática	**Paulo Boulos e Ranate Watanabe.**	**Volume 2. 2º grau**	**Companhia Editora Nacional - 1976**	**Não Existia**
Matemática para o Ensino Médio	**Manoel Jairo Bezerra**	**Volume Único**	**Editora Scipione- 2001**	**Não consta**
Matemática Contexto e Aplicações	**Luiz Roberto Dante**	**1º ao 3º ano**	**Ática-2016**	**2018**

3ª etapa: análise comparativa no ecossistema noosferiano.

Nessa etapa faremos um estudo no ecossistema noosferiano que segundo Artaud (1997) é o local onde o objeto do saber, que no nosso caso, a AC, é manipulada para fins de transposição (documentos curriculares e livros didáticos).

Nessa etapa, teceremos uma análise comparativa da ecologia do saber AC identificadas nos documentos curriculares e nos LD, a fim de verificar se os autores de LD se assujeitam aos os documentos curriculares, se sim, como?

Desse modo ao considerarmos esses diferentes habitats, percebemos a necessidade de averiguar qual a função do saber, ou seja, seu nicho. Isto nos remete então a pertinência de estudar a problemática ecológica para analisar a transformação por que passa o saber análise combinatória no processo de transposição didática na Educação Básica partindo da problemática ecológica.

Pois a problemática ecológica se apresenta de imediato, como um meio de questionar o real. O que existe e por quê? Mas também o que não existe, e por quê? E o que poderá existir? Sob que condições? Inversamente, sendo dado um conjunto de condições, quais objetos foram conduzidos a viver? Ou ao contrário, quais foram impedidos de viver nestas condições? (ARTAUD,1997).

Parafraseando Artaud (1997) em nossa problemática ecológica dizemos assim: **como vivia o saber da AC nos LD da Educação Básica próximo ao surgimento dos PCN, e por quê? Como o saber de AC passou a sobreviver nos LD após os PCN? O que deixou de viver do saber da AC após os PCN, e por quê? Como o saber da AC vive nos documentos curriculares, ele modificou o meio de vida da AC nos LD, se sim, de que forma?**

Nesse caso, salienta a importância de situar saber AC em uma escala hierárquica de codeterminação na qual cada nível refere-se a uma realidade, ou seja, em cada período por nós destacados, faremos uma análise dos níveis de codeterminação. Com isso essa análise nos ajudará a identificar as diferentes condições e restrições que regulam a Educação Básica em torno desse saber.

4 ANÁLISE COMBINATÓRIA ENQUANTO OBJETO DO SABER SÁBIO

Nossa pesquisa está inserida no saber a ensinar e percebemos, então, a necessidade de olhar o saber da Análise Combinatória (AC) na esfera do saber sábio sob a ótica da TAD.

Segundo Batanero, Godino, e Navarro-Pelayo (1996), a AC é um componente essencial da matemática discreta e, como tal, tem um papel importante a desempenhar na matemática escolar.

Menino (2013), em sua Tese apresenta as seguintes justificativas sobre a importância da matemática discreta nos vários níveis escolares: a matemática discreta promove a elaboração de conexões matemáticas; a matemática discreta oferece um cenário para a resolução de problemas com aplicações do mundo real; a matemática discreta trabalha sobre cenários tecnológicos; a matemática discreta favorece o pensamento crítico e o raciocínio matemático.

O parágrafo anterior nos impõe a fazer uma discussão sobre a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo, por ser a AC como já dissemos, um componente essencial da Matemática Discreta, mas longe de nossa pretensão em fazer uma discussão muito aprofundada na diferenciação entre elas.

Nesse caso, passaremos a fazer uma breve discussão, procurando distinguir esses dois campos da matemática, para isso sentimos a necessidade de procurar respostas sobre algumas indagações: o que é matemática? O que se entende por contínuo e discreto? O que é Matemática Discreta? Quais os pilares de sustentação da Matemática Discreta?

Para responder nossa primeira inquietação sobre “O que é matemática?” Recorremos ao dicionário de filosofia de Nicola Abbagnano de 1988.

Segundo Abbagnano (1988, p. 642), podemos distinguir a matemática, por meio de quatro definições fundamentais: matemática como ciência da quantidade; matemática como ciência das relações; matemática como ciência do possível e matemática como ciência das construções possíveis.

Segundo esse autor, a matemática enquanto ciência da quantidade, implica nas considerações de Platão sobre aritmética e sobre geometria; a matemática enquanto ciência das relações, está ligada à lógica segundo Descartes. O conceito Leibniziano da arte combinatória pode ser encarado, certamente, como início do conceito da matemática como lógica; a matemática enquanto ciência do possível, não implica contradição. “Quando vos digo que há uma infinidade de mundos possíveis, entendo dizer que eles não impliquem contradições, assim como podem escrever romances que nunca se efetuarão, mas que são possíveis. Para ser possível basta que uma coisa seja inteligível" e a quarta concepção fundamental, a matemática é a ciência que tem por objeto a possibilidade de construção. Trata-se como se vê da noção kantiana da matemática como "construção de conceitos".

Em nossa busca de responder "O que é matemática?", emergiu também a necessidade de distinguir o que seria a matemática do discreto e matemática do contínuo.

Dessa forma, partiremos de duas ideias centrais da matemática, contar e medir, que está presente na história da civilização, como é corroborado por (BROLEZZI,1996) na citação a seguir:

> A medida nos vem da própria origem do algarismo e da ideia de contagem" (MOLES, 1995, apud BROLEZZI, 1996). "Contar e fazer correspondência um-a-um são, segundo muitos autores, a fonte da ideia de número. Essa associação entre a contagem e a ideia de correspondência um-a-um não é, entretanto, uma explicação suficiente para o surgimento da ideia de número. É preciso adequar essa teoria à complexa riqueza do conceito numérico, complementando-a. Os números não podem ter surgido apenas da necessidade de contar objetos. [...] o uso das noções numéricas pelo homem esteve sempre associado tanto à ideia de contagem quanto á de medida" (BROLEZZI, p. 5-6).

Mas, o contar e medir estão imbricados com a noção de quantidade, que enquanto para Platão a quantidade está entre o ilimitado e a unidade e que só ela é o objeto do saber. Para Aristóteles, a quantidade é aquilo que é divisível em partes determinadas ou determináveis.

Desse modo, uma quantidade numerável é uma pluralidade que é divisível em partes **discretas**. Uma quantidade comensurável é uma grandeza que é divisível em partes **contínuas**, em uma, duas ou três dimensões. Mas o que significa contínuo e discreto?

Segundo Brolezzi (1996), contínuo vem de con-tenere – ter junto, manter unido, segurar. Contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa.

A noção de contínuo, ainda está associada ao que é divisível em partes sempre divisíveis de acordo com Aristóteles na citação a seguir, feita por (ABBAGNANO, 1988).

> A noção de contínuo é de natureza francamente matemática, embora os filósofos tenham contribuído para elaborá-la e dela se hajam servido muitas vezes. A primeira definição explícita de contínuo é a dada por Aristóteles segundo o qual ele é "o que é divisível em partes sempre divisíveis". E que, portanto não pode resultar de elementos indivisíveis (ABBAGNANO, 1988, p. 186).

O discreto, segundo Brolezzi (1996), vem do Latim discretus, discernere = discriminar, separar, distinguir, ver claro. Discernere (epistemológicamente) – vem de cernere = passar pelo crivo, joeirar, decidir. Aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte.

Em Japiassu (2001), descontínuo no sentido matemático, grandeza ou quantidade **descontínua** ou discreta é a que varia por passagem súbita de um valor a outro: por exemplo, a sequência dos números inteiros. Oposto a contínuo. Mas o que seria comensurabilidade? E quantidades contínuas e descontínuas?

Para Azevedo (2004) o conceito de comensurabilidade é correspondente ao de número racional na nomenclatura da Matemática Contemporânea. A razão entre os comprimentos de dois segmentos comensuráveis é um número racional. Por outro lado, a razão entre os comprimentos de dois segmentos incomensuráveis é um número irracional, e o conceito de incomensurabilidade é correspondente ao de número irracional.

Um exemplo clássico e que aparecem em muitos livros didáticos é a demonstração por "redução ao absurdo[7]" para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Basta tomar um quadrado de lado *l* e diagonal *d* e mostrar que não pode haver *p* e *q* inteiros, com q diferente de zero, tais que $\frac{l}{d} = \frac{p}{q}$. Da demonstração por redução ao absurdo resultará que o lado e a diagonal do quadrado, ou a hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo isósceles, são grandezas incomensuráveis.

Para Lima (2002) quantidades contínuas são aquelas cujas unidades estão intimamente ligadas em um só todo, e somente podem ser avaliadas pelo peso ou pela medida. Assim uma barra de ferro, uma peça de pano, um tonel de vinho, a extensão de uma estrada são quantidades contínuas. Quantidades descontínuas são as que constam de um agregado de pessoas ou coisas, distintamente separadas, sendo cada uma delas uma unidade. Assim, uma porção de laranjas, de chapéus, de meninos são quantidades descontínuas.

Segundo Dossey (1991, p.1, apud MENINO, 2013, p.50) o dicionário define discreto como "distinto de outros; separado; consistindo de partes distintas; descontínuas". Matemática Discreta, então, potencialmente envolve o estudo de objetos e de ideias que podem ser divididos em partes "separadas" ou "descontínuas" [...] A Matemática Contínua é bem apropriada a situações cujo principal objetivo é a medida de uma quantidade. Em cenários de Matemática

---

[7] Redução ao absurdo é um tipo de argumento lógico no qual alguém assume uma ou mais hipóteses e, a partir destas, deriva uma consequência absurda ou ridícula, e então conclui que a suposição original deve estar errada.

Discreta, o foco está em determinar uma contagem. Embora alguns coloquem os dois ramos de Matemática, Contínua e Discreta, numa competição frente a frente, a realidade pode mostrar que as duas abordagens se complementam nas aplicações do mundo real. Por exemplo, abordagens discretas dão aproximações para o tamanho de algumas medidas, enquanto que métodos contínuos permitem o estabelecimento de alguns limites para o número de passos ao calcular algoritmos que são finitos na natureza.

Dessa breve discussão, passaremos agora, a responder qual a importância da Matemática Discreta por ser um Habitat da AC? Qual o nicho da AC nesse habitat?

Segundo Hunter (2011), a matemática discreta é aplicada em coisas que podemos contar: cadeias binárias, sequências de operações, listas de dados e conexões entre objetos. Como os computadores se tornaram melhores e mais comuns, o ponto de vista discreto se tornou mais aplicável a problemas na ciência e na indústria. O que é corroborado pelo NCTM (2007).

> A Matemática Discreta é um importante ramo da matemática contemporânea que é amplamente utilizada no mundo dos negócios e da indústria. Elementos de Matemática Discreta têm se apresentado ao longo da própria matemática. No entanto, a Matemática Discreta surgiu como um ramo distinto da matemática somente em meados do século XX, quando começou a expandir-se rapidamente, principalmente por causa da revolução da informática, mas também por causa da necessidade de técnicas matemáticas para ajudar a planejar e implementar projetos logísticos monumentais como aterrar um homem na lua. A Matemática Discreta tem crescido para ser ainda mais importante e difusa hoje. (NCTM, 2007, apud MENINO,2013, p.46)

Mas o que é Análise Combinatória?

Roxo et al (1944) denomina Análise Combinatória ao estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações e que podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Segundo Morgado et al. (1991), a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória, é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Eles dizem ainda que há dois tipos de problemas de Análise Combinatória que ocorrem com frequência. Um deles é demostrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem certas condições, o outro, se refere a contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Cerioli e Viana (2012), vem corroborar com Morgado et al. ao definir Análise Combinatória como ramo da matemática que estuda as estruturas[8] discretas, suas propriedades e inter-relações e apresentam os seguintes tipos de problemas:

- **Problema[9] de existência**: existe alguma configuração[10] satisfazendo a uma dada especificação? A resposta para esse problema pode ser sim ou não. Em certos casos, podemos também exigir que ao menos uma configuração seja exibida, quando a resposta é afirmativa.

- **Problemas de contagem**: quantas configurações existem, satisfazendo a uma dada especificação? A resposta para este problema pode ser exata ou aproximada. No primeiro caso, a resposta é o número de configurações; no segundo, a resposta pode ser um par de expressões fornecendo limites inferiores e superiores para o número de configurações.

- **Problemas de listagem**: listar todas as configurações, que correspondem a uma dada especificação. A resposta para este problema pode ser uma lista contendo todas as configurações dadas em uma certa ordem ou quando isto é impraticável, um método quando aplicado, nos permite obter as configurações em uma dada ordem.

- **Problemas de otimização**: qual é a melhor configuração (de acordo com um critério dado), satisfazendo a uma dada especificação? Neste caso, espera-se que a configuração seja exibida ou que se forneça um método que no momento de ser aplicado, nos permite obter a melhor configuração.

- Problema de Classificação: devido à inviabilidade de contagem é feita uma classificação mediante relações apropriadas.

Batanero, Godino e Pelayo (1996) traz os seguintes exemplos para essa tipologia.

---

[8] Cerioli e Viana (2012), uma estrutura é um objeto matemático complexo, que consiste essencialmente dos seguintes itens: – Um ou mais conjuntos de objetos; – Uma ou mais operações sobre objetos destes conjuntos; – Uma ou mais relações entre objetos destes conjuntos, podendo ser discreta se todos os conjuntos, operações e relações são finitos ou, no pior caso, podem ser dados como uma lista infinita de elementos e uma estrutura é finita se todos os conjuntos, operações e relações envolvidas são finitos.

[9]Problemas, é entendido por nós, como um certo tipo de tarefa de acordo com a TAD.

[10] Pra Cerioli e Viana (2012), configurações são objetos finitos, obtidos a partir de estruturas finitas, por meio de um número finito de aplicações de certas regras, isso o levará a desenvolver todo seu estudo definindo combinatória como sendo o ramo da matemática que estuda as configurações construídas a partir de estruturas finitas.

Problema de existência: "O problema dos matrimônios": Ana conhece André, José e Carlos; Beatriz conhece José e Carlos; Carmem conhece Carlos, Antonio e Julio; Daniela conhece André e José; Elisa conhece Carlos, José e André; Leticia conhece Antonio, João e Francisco. É possível achar um marido para cada moça entre os rapazes que elas conhecem?

Problemas de contagem: o dominó tem 2 tipos de peças, as peças duplas, cujos dois lados têm números iguais, e as ordinárias, cujos dois lados têm números diferentes. Quantas peças ordinárias têm a soma dos seus lados igual a seis?

Problemas de listagem: dado o conjunto {2, 3, 5}, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados? Faça os agrupamentos e ordene os números formando uma coluna.

Problemas de otimização: na informática, problemas como o algoritmo de busca linear em uma lista ordenada com **n** elementos executa **n** operações de comparação entre os elementos da lista e o elemento procurado. A otimização ao problema através de uma busca binária executa para o pior caso, $[\log_2 n] + 1$ operações, ou seja, tem uma complexidade computacional $O(\log_2 n)$, que é bem inferior à complexidade $O(n)$ da busca linear.

Problema de Classificação: quantos inteiros entre 0 e 1000 não são divisíveis por 2 e 3?

Essas tarefas permeiam a quantidade de configurações que se quer contar ou objetos que se quer contar, correspondentes a uma certa situação de Análise Combinatória, que são resolvidas por meio da aplicação de técnicas, tais como: princípio aditivo, princípio multiplicativo, listagem, árvore de decisão, fórmulas de: arranjo, permutação e combinação, princípio da casa dos pombos, e grafos.

A tecnologia (θ) que justifica e torna a técnica compreensível são: princípio bijetivo, princípio da inclusão-exclusão, recursão e princípio da indução, por sua vez, justificada pelas seguintes teorias: Lógica, Teoria dos conjuntos e a Álgebra.

Destacar esses diferentes tipos de problemas tem sua pertinência em nossa pesquisa pois segundo Morgado et al. (1991), os alunos associam Análise Combinatória aos problemas de combinação, Arranjo e Permutação os quais são alguns conceitos da Análise Combinatória que permitem resolver problemas de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

O parágrafo acima indica que apenas alguns desses tipos de problemas encontrados no saber sábio são transpostos para o saber a ensinar na Educação Básica? Essa resposta se dará por meio de nossas análises no ecossistema noosferiano.

No próximo tópico traremos uma análise ecológica do saber Análise Combinatória em um Livro Didático do Ensino Superior como um saber de referência em nossa pesquisa, pois embora saibamos que o saber Análise Combinatória ao sair do saber sábio ao saber a ensinar passará por um processo de Transposição Didática, e que nesse processo esse saber sofrerá algumas deformações e adaptações para que viva em uma determinada instituição, em nosso caso, na Educação Básica, a análise nesse Livro nos ajudará na vigilância epistemológica quando o objeto Análise Combinatória se encontrar no polo do saber a ensinar, ou seja, nos possibilitará analisar de que modo a "noosfera", instituição produtora de documentos oficiais e Livros Didáticos, se assujeita ao saber de referência.

4.1 ECOLOGIA DO SABER ANÁLISE COMBINATÓRIA NO LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO SUPERIOR.

Essa análise será feita no Livro de Fundamentos da Matemática Discreta do autor David J. Hunter (2011), traduzido por Paula Porto Martins.

O autor informa que o livro está voltado para graduandos do primeiro ou segundo ano de Ciências da Computação e de Matemática, como também, é uma excelente fonte de informação para estudantes de outras disciplinas, além da matemática Discreta.

O autor ainda informa que a obra apresenta o assunto de maneira adequada para um curso abrangente e coeso com duração de um semestre. Proporcionando aos alunos a aprender a pensar matematicamente e achar estruturas matemáticas em quase tudo, estruturando a obra em torno de cinco tipos de pensamentos matemáticos: lógico, relacional, recursivo, quantitativo e analítico.

Hunter (2011), descreve na sua obra que o pensamento **Lógico** busca pela precisão da linguagem matemática; o pensamento **Relacional** objetiva estabelecer relacionamentos matemáticos entre objetos; o pensamento **Recursivo** se dá por meio de estruturas recursivas e da indução matemática; o pensamento **Quantitativo** desenvolve as técnicas de contagem, <u>foco em nossa pesquisa</u>, e por último o pensamento **Analítico** que desenvolverá no aluno a capacidade de entender e analisar os algoritmos das aplicações da Matemática Discreta.

O livro possui 6 capítulos e autor descreve cada um deles da seguinte forma: o Capítulo 1: Pensamento Lógico. Explora formalmente (simbolicamente) a lógica, e segue ensinando o estudante a considerar como a lógica é usada em afirmações e argumentos matemáticos. O capítulo começa com uma introdução à lógica formal, focando a importância da notação e dos símbolos na matemática, e em seguida explica como podem serem aplicadas e termina com uma análise superficial sobre as diferentes maneiras de construção das demonstrações matemáticas.

Como a maioria dos problemas matemáticos contém diferentes objetos relacionados uns com os outros, o Capítulo 2 considera o Pensamento Relacional. Muitas vezes, encontrar as relações entre os objetos é o primeiro passo para se resolver um problema matemático. As estruturas matemáticas de conjuntos, relações, funções e grafos descrevem essas relações, e por isso esse capítulo concentra-se em explorar maneiras de usar essas estruturas para formular relações matemáticas.

O Capítulo 3 introduz precocemente a teoria dos grafos e a utiliza nos demais capítulos. Esse capítulo descreve o Pensamento Recursivo. O autor diz nesse capítulo que existem muitos objetos na natureza com estruturas recursivas: um galho de uma árvore se parece com uma árvore menor. Esse capítulo começa pelo estudo da ocorrência simples de relações e depois considera outras estruturas recursivas em contextos variados. Os estudantes também irão dominar definições recursivas, assim como aprender a escrever por conta própria e ampliar as técnicas de indução para provar fatos sobre objetos definidos recursivamente.

O Capítulo 4 engaja o leitor no Pensamento Quantitativo, da mesma forma que muitos problemas na matemática, na ciência da computação e em outras disciplinas envolvem contar os elementos de um conjunto de objetos. O capítulo examina as diferentes ferramentas utilizadas para contar certos tipos de conjuntos e ensina os estudantes a pensar sobre os problemas a partir de um ponto de vista quantitativo. Depois de explorar as diferentes técnicas de enumeração, os estudantes irão refletir sobre as aplicações, incluindo um primeiro olhar sobre como contar operações em um algoritmo. Esse capítulo também exercita a arte de fazer estimativas, uma habilidade valiosa quando é difícil enumerar precisamente.

O Capítulo 5 explora o Pensamento Analítico. Muitas das aplicações da Matemática Discreta são algoritmos, portanto é essencial ser capaz de entendê-los e analisá-los. Esse capítulo se baseia nos quatro fundamentos de pensamento abordados nos quatro primeiros capítulos, aplicando os pensamentos quantitativo e relacional ao estudo de complexidade algorítmica, e depois aplicando os pensamentos lógico e recursivo no estudo da precisão de programas. Finalmente, os estudantes vão aprender formas matemáticas de determinar a ocorrência e a eficiência dos algoritmos.

O capítulo final, Pensamento Através de Aplicações, examina diferentes formas de aplicação do pensamento da matemática discreta: padrões de DNA, redes sociais, estrutura de linguagem, modelos de população e música dodecafônica.

Depois de feita a descrição de cada capítulo pelo o autor, apresentaremos os capítulos de cada pensamento com seus respectivos tópicos. Vejamos no quadro a seguir a organização e seleção de cada pensamento.

Programa do ensino secundário na Reforma Campos e Gustavo Capanema.

Prefácio ix
Como Usar Este Livro xi
Capítulo 1 Pensamento Lógico 1
1.1 Lógica Formal 1
1.1.1 Conectivos e Proposições 2
1.1.2 Tabelas Verdade 2
1.1.3 Equivalências Lógicas 4
Exercícios 1.1 5
1.2 Lógica Proposicional 8
1.2.1 Tautologias e Contradições 8
1.2.2 Regras de Dedução 9
1.2.3 Sequências de Prova 10
1.2.4 Vai-Volta 11
Exercícios 1.2 11
1.3 Lógica de Predicados 13
1.3.1 Predicados 13
1.3.2 Quantificadores 14
1.3.3 Tradução 14
1.3.4 Negação 15
1.3.5 Duas Construções Comuns 16
Exercícios 1.3 17
1.4 Lógica em Matemática 19
1.4.1 O Papel das Definições em Matemática 20
1.4.2 Outros Tipos de Sentenças Matemáticas 21
1.4.3 Contraexemplos 21
1.4.4 Sistemas Axiomáticos 22
Exercícios 1.4 24
1.5 Métodos de Demonstração 26
1.5.1 Demonstrações Diretas 26
1.5.2 Demonstração por Contraposição 27
1.5.3 Demonstração por Contradição 28
Exercícios 1.5 29
Capítulo 2 Pensamento Relacional 32
2.1 Grafos 32
2.1.1 Arestas e Vértices 32
2.1.2 Terminologia 33
2.1.3 Modelando Relacionamentos com Grafos 34
Exercícios 2.1 37
2.2 Conjuntos 40
2.2.1 Adesão e Contenção 40
2.2.2 Novos Conjuntos a Partir de Antigos 41
2.2.3 Identidade 42
Exercícios 2.2 43
2.3 Funções 45
2.3.1 Definição e Exemplos 45
2.3.2 Funções Injetivas e Sobrejetivas 47
2.3.3 Funções Novas a Partir de Velhas 49
Exercícios 2.3 50
2.4 Relações e Equivalências 52
2.4.1 Definição e Exemplos 52
2.4.2 Grafos de Relações 52
2.4.3 Relações *versus* Funções 53
2.4.4 Relações de Equivalência 53
2.4.5 Aritmética Modular 55
Exercícios 2.4 56
2.5 Ordem Parcial 58
2.5.1 Definição e Exemplos 58
2.5.2 Diagramas de Hasse 59
2.5.3 Ordenação Topológica 60
2.5.4 Isomorfismo 61
2.5.5 Álgebras Booleanas‡ 62
Exercícios 2.5 63
2.6 Teoria dos Grafos 65
2.6.1 Grafos: Definições Formais 65
2.6.2 Isomorfismo entre Grafos 66
2.6.3 Contagem de Grau 67
2.6.4 Caminhos e Circuitos Eulerianos 67
2.6.5 Caminhos e Circuitos Hamiltonianos 68
2.6.6 Árvores 69
Exercícios 2.6 71
Capítulo 3 Pensamento Recursivo 73
3.1 Relações de Recorrência 73
3.1.1 Definição e Exemplos 73
3.1.2 A Sequência de Fibonacci 74
3.1.3 Modelando com Relações de Recorrência 75
Exercícios 3.1 77
3.2 Soluções em Forma Fechada e Indução 79

3.2.1 Adivinhando uma Solução em Forma Fechada 79
3.2.2 Sequências Polinomiais: Usando Diferenças[‡] 80
3.2.3 Verificando uma Solução por Indução 80
Exercícios 3.2 83
3.3 Definições Recursivas 84
3.3.1 Definições e Exemplos 84
3.3.2 Escrevendo Definições Recursivas 86
3.3.3 Geometria Recursiva 87
3.3.4 Piadas Recursivas 89
Exercícios 3.3 89
3.4 Demonstrações por Indução 91
3.4.1 O Princípio da Indução 91
3.4.2 Exemplos 92
3.4.3 Indução Forte 94
3.4.4 Indução Estrutural 96
Exercícios 3.4 97
3.5 Estruturas Recursivas de Dados 99
3.5.1 Listas 99
3.5.2 Eficiência 101
3.5.3 Árvores de Busca Binária Revisitadas 102
Exercícios 3.5 102

Capítulo 4 Pensamento Quantitativo 105
4.1 Técnicas Básicas de Contagem 105
4.1.1 Adição 105
4.1.2 Multiplicação 106
4.1.3 Mesclando Adição e Multiplicação 108
Exercícios 4.1 109
4.2 Seleções de Arranjo 111
4.2.1 Permutações: O Princípio do Arranjo 111
4.2.2 Combinações: O Princípio da Seleção 112
4.2.3 O Teorema do Binômio[‡] 114
Exercícios 4.2 115
4.3 Contando com Funções 117
4.3.1 Bijeções 118
4.3.2 O Princípio do Compartimento no Pombal 120
4.3.3 O Princípio Generalizado do Compartimento no Pombal 120
4.3.4 Teoria de Ramsey[‡] 121
Exercícios 4.3 121
4.4 Probabilidade Discreta 124
4.4.1 Definições e Exemplos 124
4.4.2 Aplicações 125
4.4.3 Valor Esperado 127
Exercícios 4.4 127
4.5 Contando Operações em Algoritmos 129
4.5.1 Algoritmos 129
4.5.2 Pseudocódigo 130
4.5.3 Sequência de Operações 130
4.5.4 Laços 131
4.5.5 Vetores 132
4.5.6 Ordenação 133
Exercícios 4.5 134
4.6 Estimativas 136
4.6.1 O Crescimento das Funções 136
4.6.2 Objetivos de Estimativas 138
4.6.3 Propriedades de Θ-Grande 139
Exercícios 4.6 140

Capítulo 5 Pensamento Analítico 142
5.1 Algoritmos 142
5.1.1 Mais Pseudocódigos 142
5.1.2 Condições Prévias e Condições Posteriores 143
5.1.3 Algoritmos Iterativos 144
5.1.4 Funções e Algoritmos Recursivos 145
Exercícios 5.1 147
5.2 Três Tipos Comuns de Algoritmos 148
5.2.1 Algoritmos de Percurso 148
5.2.2 Algoritmos Gulosos 150
5.2.3 Algoritmos Dividir-e-Conquistar 152
Exercícios 5.2 154
5.3 Complexidade de Algoritmos 156
5.3.1 O Bom, o Mau e o Médio 156
5.3.2 Cálculos Aproximados de Complexidade 158
Exercícios 5.3 160
5.4 Cotas na Complexidade 163
5.4.1 Algoritmos como Decisões 163
5.4.2 Uma Cota Inferior 165
5.4.3 Busca em um Vetor 165
5.4.4 Ordenação 165
5.4.5 P *versus* NP 166
Exercícios 5.4 167
5.5 Verificação de Programas 168
5.5.1 Verificação *versus* Teste 168
5.5.2 Verificando Algoritmos Recursivos 169
5.5.3 Buscando e Ordenando 170
5.5.4 As Torres Hanói 171
Exercícios 5.5 172
5.6 Invariantes de Laços 174
5.6.1 Verificando Algoritmos Iterativos 174
5.6.2 Buscando e Ordenando 176
5.6.3 Usando Invariantes para Projetar Algoritmos 178
Exercícios 5.6 178

Capítulo 6 Pensando Através de Aplicação 181
6.1 Padrões no DNA 182
6.1.1 Mutações e Distância Filogenética 182

6.1.2 Árvores Filogenéticas 183
6.1.3 UPGM 183
Exercícios 6.1 186
6.2 Redes Sociais 187
6.2.1 Definições e Terminologias 187
6.2.2 Noções de Equivalência 188
6.2.3 Agrupamento Hierárquico 190
6.2.4 Grafos com Sinal e Equilíbrio 192
Exercícios 6.2 194
6.3 Estrutura de Linguagens 195
6.3.1 Terminologia 195
6.3.2 Máquinas de Estados Finitos 196
6.3.3 Recursão 198
6.3.4 Questões Adicionais em Linguística 200
Exercícios 6.3 200
6.4 Modelos Populacionais a Tempo Discreto 201
6.4.1 Modelos Recursivos para o Crescimento Populacional 202
6.4.2 Pontos Fixos, Equilíbrio e Caos 203
6.4.3 Sistemas Predador-Presa 204
6.4.4 O Modelo SIR 206
Exercícios 6.4 206
6.5 Música Dodecafônica* 209
6.5.1 Composição Dodecafônica 209
6.5.2 Listando Todas as Permutações 209
6.5.3 Transformações das Séries 210
6.5.4 Classes de Equivalência e Simetria 211
Exercícios 6.5 212

Dicas, Respostas e Soluções para Exercícios Selecionados 214
1.1 Lógica Formal 214
1.2 Lógica Proposicional 215
1.3 Lógica de Predicados 215
1.4 Lógica em Matemática 216
1.5 Métodos de Demonstração 216
2.1 Grafos 217
2.2 Conjuntos 217
2.3 Funções 218
2.4 Relações e Equivalências 219
2.5 Ordem Parcial 219
2.6 Teoria de Grafos 220
3.1 Relações de Recorrência 220
3.2 Soluções em Forma Fechada e Indução 221
3.3 Definições Recursivas 221
3.4 Demonstração por Indução 221
3.5 Estruturas Recursivas de Dados 222
4.1 Técnicas Básicas de Contagem 223
4.2 Seleções e Arranjos 223
4.3 Contando com Funções 223
4.4 Probabilidade Discreta 224
4.5 Contando Operações em Algoritmos 224
4.6 Estimativas 224
5.1 Algoritmos 225
5.2 Três Tipos Comuns de Algoritmos 225
5.3 Complexidade de Algoritmos 225
5.4 Cotas na Complexidade 226
5.5 Verificação de Programas 226
5.6 Invariantes de Laços 227

Referências Selecionadas 228

Índice 230

Índice de Símbolos 235

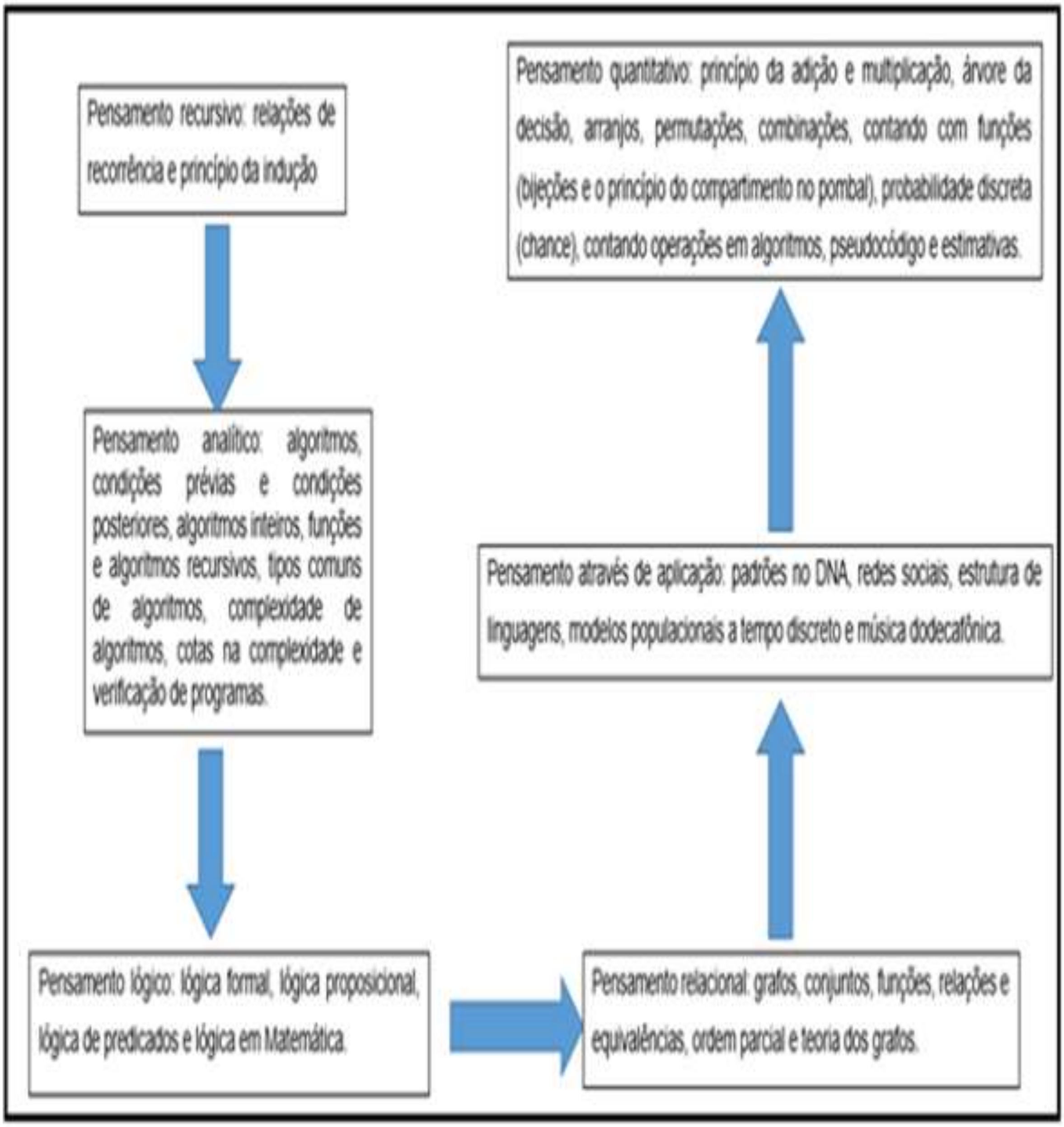
Fonte:Hunter, 2011.

Diante desse sumário, nos debruçaremos na tentativa de descrever a ecologia[11] da Matemática Discreta no livro de Hunter para analisar as relações entre os diferentes saberes da Matemática Discreta no ambiente em que vive (Ensino Superior). O quadro a seguir resume a ecologia do saber Matemática Discreta no Livro de Hunter.

---

[11] Segundo Amabis e Martho (2009), o temo ecologia foi empregada pela primeira vez pelo biólogo alemão E. Haeckel (1834-1919), designa o estudo das relações entre os seres vivos e o ambiente em que vive.

Figura 2 – Ecologia do Saber Matemática Discreta no Livro de Hunter



Fonte: autoria própria

Esse autor faz um diagrama que descreve como usar esse livro, ilustrando as dependências entre as seções. As 18 seções se constituem como parte central e as demais seções estabelece uma dependência de acordo com o público alvo. Vejamos figura a seguir:

Figura 3 – Dependências entre as seções do Livro de Hunter

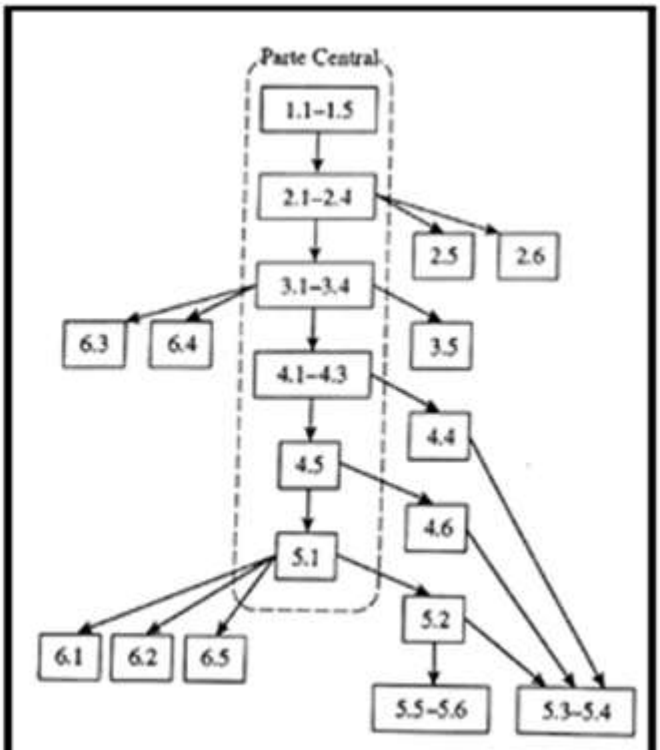


Figura 1 Dependências entre as seções deste livro.

Fonte: Hunter, 2011

Em seguida apresenta uma tabela que mostra três possíveis linhas de curso, com diferentes enfoques para cada uma. Vejamos tabela a seguir:

Figura 4 - Tabela que ilustra as três possíveis linhas de curso

Ênfase em Ciência da Computação	Ênfase em Matemática	Interdisciplinar
1.1–1.5	1.1–1.5	1.1–1.5
2.1–2.4	2.1–2.6	2.1–2.4
3.1–3.5	3.1–3.4	3.1–3.4
4.1–4.6	4.1–4.4	4.1–4.3
5.1–5.2	5.1	5.1
5.3–5.4 e/ou 5.5–5.6	6.3, 6.4, 6.5	6.1–6.5

Tabela 1 Três possíveis linhas de curso.

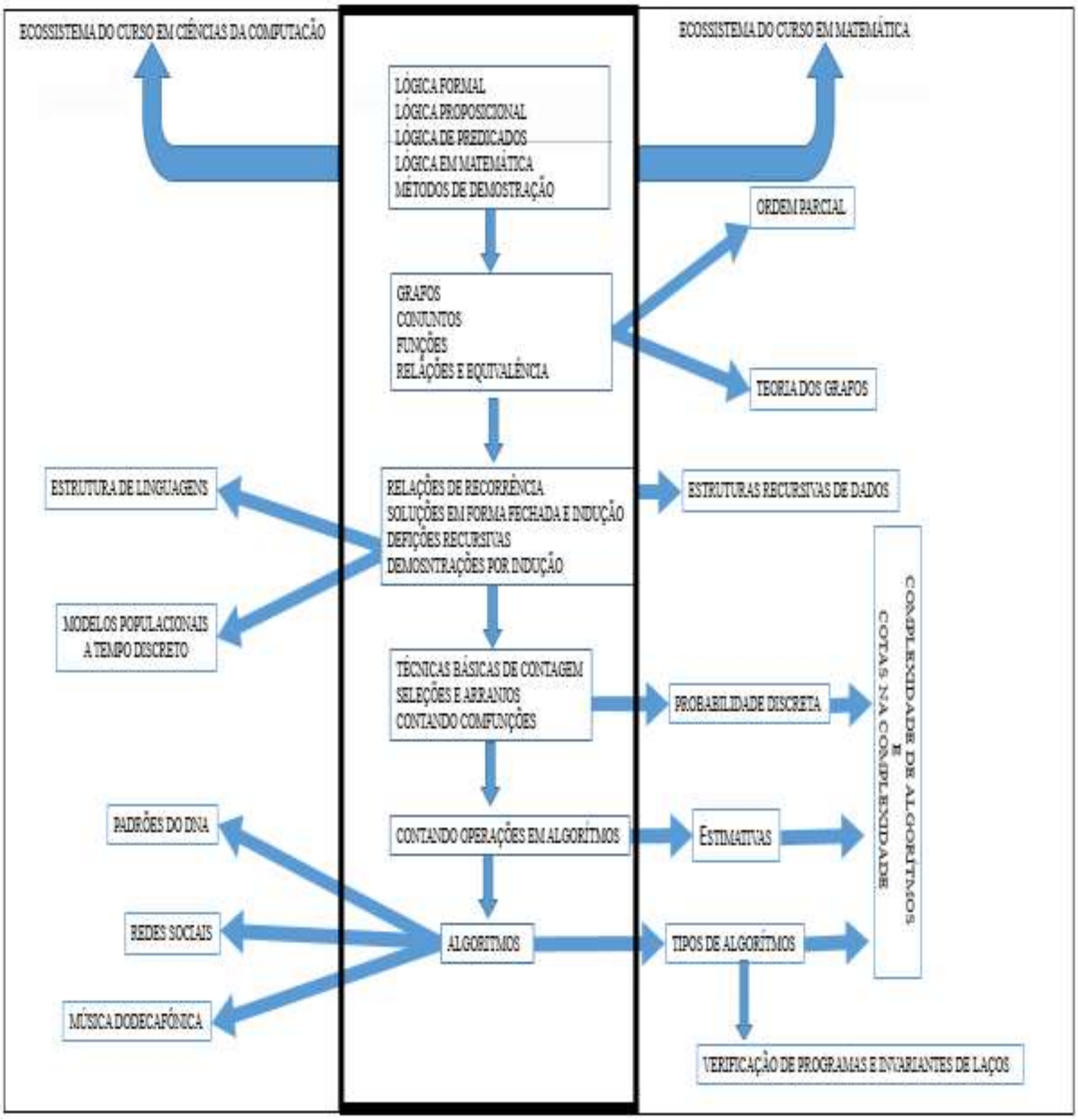
Fonte: Hunter, 2011

Ele descreve ainda, nessa parte de como usar esse livro, que as subseções da parte central (3.2.2, 4.2.3 e 4.3.4) elas podem ser seguramente omitidas sem interromper a continuidade do conteúdo.

Diante do exposto pelo o autor, podemos fazer uma representação de uma *teia alimentar* [12]para dois ecossistemas: curso em Ciências da Computação e curso em Matemática para que o saber Matemática Discreta possa existir, alimentando e sendo alimentado por eles. A representação mostra uma intersecção entre os dois ecossistemas, ou seja, os objetos que alimentam os dois cursos e os objetos que são alimentos específicos de cada curso. Vejamos o esquema a seguir:

[12] Segundo Amabis e Martho (2009), as relações alimentares entre os diversos organismos de um ecossistema costumam ser representadas por meio de diagramas, denominados teias alimentares, ou redes alimentares. Estes compõem-se de diversas cadeias alimentares interligadas por meio de linhas, que unem os diversos componentes da comunidade entre si, evidenciando suas relações alimentares.

Figura 5 - Representação de uma teia alimentar que ocorre em um ecossistema mostrando a partilha entre dois ecossistemas: Matemática Discreta enquanto objeto do Curso em Ciências da Computação e objeto do Curso de Matemática.



Fonte: Dados da pesquisa

Os pensamentos destacados por Hunter (2011), nós caracterizamos como os objetos dessas ecologias (figura 1) e esses objetos tem ações típicas nesse ambiente em que vive, ou seja, seu nicho. No próximo tópico procuraremos descrever os nichos de cada pensamento.

4.2 NICHO DO PENSAMENTO LÓGICO NO ECOSSISTEMA DA MATEMÁTICA DISCRETA.

A lógica formal tem função de descrever o processo que consiste em manipular notações por meio de ostensivos e não ostensivos de forma a evitar erros de raciocínio. Os ostensivos usados nesse pensamento são: discursivos (por meio do discurso), escriturais (as escritas e formalismos), gráficos (esquemas e desenhos) e algébricos. Os não-ostensivos são todos os objetos que só podem ser invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos que lhe são associados.

Os objetos ostensivos dos conectivos e das tabelas verdade (V: verdadeiro/F: falso) são a razão de ser no início do pensamento lógico formal. Por sua vez, os conectivos lógicos tem os seguintes nichos: são úteis para decompor sentenças[13] compostas em sentenças mais simples e alimentar a tabela verdade que por sua vez serão alimentos da lógica proposicional.

A lógica proposicional por meio de seus cálculos não é suficiente para expressar a validade de muitos argumentos, por exemplo *x é par*. Esse exemplo não é uma sentença, porque seus valores V/F dependem de x. Este exemplo descreve que a linguagem da lógica formal deve ser ampliada para evidenciar esta estrutura, o que Hunter (2011) denomina de lógica de predicados.

A lógica dos predicados será alimentada em seus cálculos por objetos que são da lógica proposicional e incluindo outros: (quantificadores: o quantificador universal "para todo" é denotado por $\forall$ e o quantificador existencial "existe" denotado por $\exists$).

Todas essas lógicas já citadas alimentam toda lógica em matemática cujas funções são: definições, contra exemplos, sistemas axiomáticos e nos métodos de demonstrações. Ela vai estruturar toda lógica simbólica.

4.2.1 Nicho do Pensamento Relacional no ecossistema da Matemática Discreta.

A função do pensamento relacional está em explorar diferentes maneiras pelas quais os elementos de um conjunto podem se relacionar entre si ou com elementos de outro conjunto.

[13] Segundo Hunter(2011), uma sentença (também conhecida por proposição) é uma frase declarativa que pode ser falsa ou verdadeira, mas não as duas ao mesmo tempo). Exemplo: 7 é ímpar.

Esses relacionamentos podem ser descritos por objetos matemáticos tais como funções, relações e grafos. O objeto grafos tem a função de modelar relações matemáticas e os objetos conjuntos, relações e funções alimentam a teoria dos grafos por meio dos ostensivos gráficos e ostensivos simbólicos de função.

4.2.2 Nicho do Pensamento Recursivo no ecossistema da Matemática Discreta.

O pensamento recursivo tem função de trabalhar com estruturas recursivas e desenvolver a habilidades de enxergar padrões recursivos em objetos matemáticos por meio de uma relação de recorrência. O objeto princípio da indução matemática tem a função de alimentar demonstrações de teoremas sobre estruturas recursivas. Os ostensivos gráficos e algébricos também são mobilizados nesse pensamento.

4.2.3 Nicho do Pensamento Quantitativo no ecossistema da Matemática Discreta.

A função do pensamento quantitativo é de analisar e resolver problemas discretos. Hunter (2011) apresenta algumas técnicas específicas de contagem e sugere um curso em Análise Combinatória para aprofundar mais sobre técnicas específicas de contagem.

As técnicas apresentadas em sua obra são permeadas pelos conceitos: princípio da adição[14], princípio da multiplicação, princípio do arranjo, princípio da seleção, contando com funções, princípio do compartimento no pombal, probabilidade discreta, algoritmos e estimativas.

4.2.4 Nicho do Pensamento Analítico no ecossistema da Matemática Discreta.

Os nichos desses quatro pensamentos citados acima resolvem diferentes problemas

---

[14] Hunter(2011). Princípio da adição. Suponha que A e B sejam conjuntos finitos com $A \cap B = ø$. Então existem $|A| + |B|$ maneiras de escolher um elemento de A U B; Princípio da multiplicação. Sejam A e B conjuntos finitos. O número de elementos (ou seja, pares ordenados) em A X B é $|A| \cdot |B|$. Portanto existem $|A| \cdot |B|$ maneiras de escolher dois itens em sequência, com o primeiro vindo de A e o segundo vindo de B; Princípio do arranjo. O número de maneiras de formar uma lista ordenada de r elementos distintos escolhidos em um conjunto de **n** elementos é P(n,r) = n.(n-1).(n-2)...(n-r+1). A notação P(n,r) vem do termo matemático para arrjanos: *permutações.* $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$; Combinações: O princípio da seleção. O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de **r** elementos a partir de um conjunto de **n** elementos é $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$; Probabilidade discreta. Suponha que A é um subconjunto de um conjunto finito não vazio U. A probabilidade de que um elemento de U escolhido ao acaso se encontre em A é a razão $P(A) = \frac{|A|}{|U|}$; Algoritmos. É uma lista de instruções(comandos) que precisam ser executadas em sequência.

discretos no Curso de Matemática e o pensamento analítico tem seu nicho bem particularizado na obra de Hunter (2011), o de resolver problemas discretos no Curso de Ciências da Computação.

4.2.5 Nicho do Pensamento Através de Aplicações no ecossistema da Matemática Discreta.

O nicho desse pensamento está na aplicação da Matemática Discreta para uma gama de diferentes estudos tais como: padrões no DNA, redes sociais, estruturas de linguagens, modelos populacionais a tempo discreto e música dodecafônica.

Segundo Artaud (1998), os objetos matemáticos e os objetos didáticos "vivem" em associação, desde que as organizações matemáticas iniciaram suas "vidas", por meio de pessoas ou instituições, por um processo de estudo.

Nesse caso, passaremos a situar o saber da Matemática Discreta na escala de níveis de codeterminação afim de discutir a ecologia da praxeologia didática. Não faremos uma análise da praxeologia matemática, mas procuraremos destacar a técnica, a tecnologia e a teoria que permearão nas tarefas exemplos propostas pelo o autor. Essas análises servirão para identificar as condições e restrições que cada nível impõe ao objeto Pensamento Quantitativo, visto que o foco de nossa pesquisa é a ecologia do saber Análise Combinatória.

Nesse caso, analisaremos o *tema* 'Pensamento Quantitativo' que é desenvolvido na *disciplina* 'Matemática Discreta' para o *domínio* 'Números e operações/Tratamento da Informação' no *setor* 'Análise Combinatória' e os assuntos associados a esse *tema* (pensamento quantitativo) para que possamos identificar de quais conhecimentos são esperados dos estudantes na realização das tarefas associadas ao tema em estudo.

4.3 CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DE HUNTER (2011) EM SUA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA.

Chevallard (1999) distingue seis momentos de estudo ou momentos didáticos que permitem construir possibilidades para analisar as praxeologias didáticas os quais são: primeiro encontro, exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica, construção do ambiente tecnológico-teórico, o trabalho com a técnica em diferentes tarefas, institucionalização e avaliação. Esses momentos já foram descritos na fundamentação teórica. O quadro a seguir descreve as categorias e seus respectivos critérios para análise do livro.

Quadro 6 - Categorias e critérios de análise da organização didática do Livro Didático de Hunter (2011)

Categorias (momentos)	Critérios de análise
Primeiro encontro.	**Como o LD inicia o assunto de Análise Combinatória?**
Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica.	**Como o LD explora os tipos de tarefas? Como é feita a elaboração da técnica?**
Constituição do ambiente tecnológico-teórico.	**Como são organizadas as justificativas das técnicas no LD?**
Trabalho da técnica	**As técnicas são utilizadas em diferentes tarefas? Há criação de novas técnicas?**
Institucionalização	**Como se concretiza a institucionalização no LD?**
Avaliação	**Como acontece a avaliação no LD?**

Fonte: autoria própria

Com ele nós veremos como esses momentos aparecem na obra de Hunter (2011)

4.3.1 Análise dos momentos de estudos ou momentos didáticos na obra de Hunter(2011) no objeto Pensamento Quantitativo.

O Livro Didático de Hunter (2011) tem um total de 235 páginas e seis capítulos. O capítulo sobre Pensamento Quantitativo tem 36 páginas e, entre elas, 10 páginas são sobre as técnicas de contagem: princípio aditivo, princípio multiplicativo, arranjo, permutação, combinação, teorema do binômio e contando com funções (incluindo o princípio do compartimento no pombal e teoria de Ramsey). Essas técnicas de contagem alimentarão os tópicos de probabilidade discreta, algoritmos e estimativas.

O autor inicia o capítulo descrevendo que contar é muito importante, pois muitos problemas em matemática, ciências da computação e outras áreas técnicas envolvem contar os elementos de algum conjunto de objetos e, nesse caso, o objetivo deste capítulo é ver como o pensamento quantitativo é útil para analisar problemas discretos, especialmente em ciência da computação.

Em seguida o livro apresenta o tópico: Técnicas básicas de contagem. Nesse tópico descreve que a maioria dos problemas de contagem pode ser reduzida a soma e multiplicação, em seguida apresenta os subtópicos: adição, multiplicação e mesclando adição e subtração. Cada subtópico apresenta um tipo de conceito específico que funcionará como técnica na resolução das tarefas de contagem e suas respectivas tecnologias que justificam cada técnica.

No subtópico adição é apresentada a técnica do *princípio da adição* que permeará todos os tipos de tarefas que tem como escolha “ou isso ou aquilo”. E a tecnologia que justifica essa técnica é o princípio da inclusão-exclusão que tem como teoria, a teoria dos conjuntos, que justifica a tecnologia.

Depois de anunciar a técnica do princípio da adição e a sua justificativa, o autor parte para dois tipos de tarefas exemplos, uma para aplicar a técnica e na outra para expandir a técnica do princípio da adição como *teorema*[15] e deixa como tarefa a demonstração desse teorema fazendo uso da *indução em **n***.

Se A e B são conjuntos finitos, então o tamanho da união entre A e B é dado por: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Dizemos que A e B são disjuntos se $A \cap B = ø$. Nesse caso, o princípio da inclusão-exclusão se reduz à equação $|A \cup B| = |A| + |B|$ anunciando assim **o princípio da adição**.
- Suponhamos que A e B sejam conjuntos finitos com $A \cap B = ø$. Então existem $|A| + |B|$ maneiras de escolher um elemento de A U B.

O momento da exploração do tipo de tarefa é feito na aplicação da técnica do princípio da adição por meio de um exemplo.

Exemplo 4.1 Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele pode chegar ao trabalho usando qualquer um desses veículos. De quantas formas diferentes ele pode chegar ao trabalho?

Solução: Uma vez que não é possível pegar *tanto* o carro quanto a bicicleta para ir ao trabalho, esses conjuntos são disjuntos. Portanto, Raul tem $5 + 3 = 8$ opções. ◇

Fonte: Hunter (2011, p. 106)

A ampliação da técnica do princípio da adição se dará na constituição do ambiente tecnológico-teórico quando é evocado o princípio da indução.

---

[15] Teorema. Proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico.

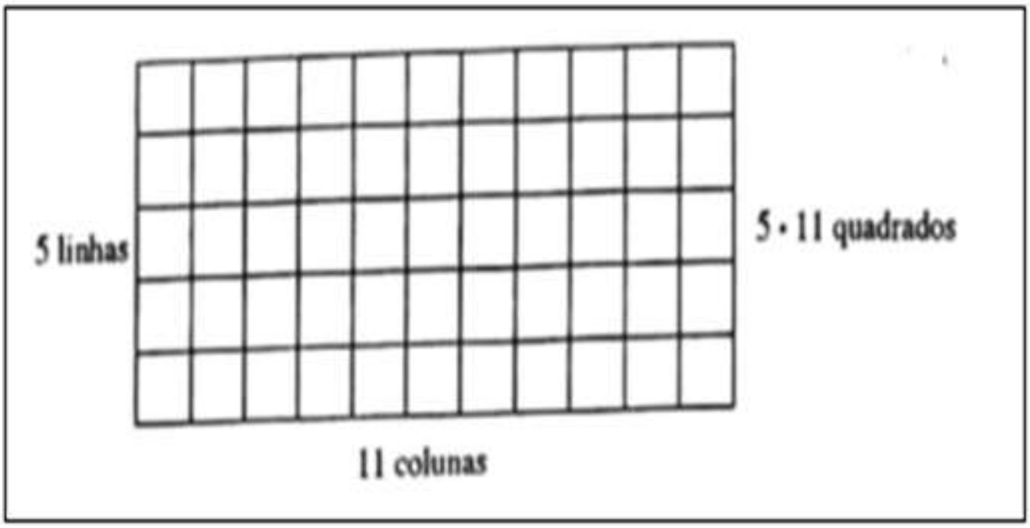
Teorema 4.1 *Suponha que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sejam conjuntos finitos disjuntos dois-a-dois, ou seja, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todos i e j com $i \neq j$. Então*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|.$$

Demonstração Exercício. Use indução em n. □

Fonte: Hunter (2011, p. 106)

b) O subtópico multiplicação se inicia por contar os elementos de uma grade retangular. O autor diz que basta multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.



Fonte: Hunter (2011, p. 106)

Em seguida descreve: Podemos sempre pensar em produto cartesiano A X B de dois conjuntos finitos A e B como uma grade, cujas colunas são indexadas por A e as linhas são indexadas por B.

Em seguida anuncia o **princípio da multiplicação**.

- Sejam A e B sejam conjuntos finitos. O número de elementos (ou seja, pares ordenados) em A X B é $|A| \cdot |B|$. Portanto, existem $|A| \cdot |B|$ maneiras de escolher dois itens em sequência, com o primeiro vindo de A e o segundo vindo de B.

O momento da exploração do tipo de tarefa é feito na aplicação da técnica do princípio da multiplicação por meio de um exemplo.

Exemplo 4.3 Raul tem cinco bicicletas e três carros. Ele planeja ir e voltar do trabalho pedalando uma bicicleta e depois pegar um de seus carros para dirigir até um restaurante onde irá jantar. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

Solução: Raul está fazendo duas escolhas em sequência, portanto ele está formando um par ordenado da forma (bicicleta, carro). Portanto existem $5 \cdot 3 = 15$ maneiras possíveis. ◊

Fonte: Hunter (2011, p. 106)

No trabalho da técnica há a criação de uma nova técnica (modelo gráfico em forma de uma árvore) explorado por meio uma tarefa exemplo.

4.2). Seja a raiz da árvore o que representa a situação de Raul antes de ele ter chegado a alguma decisão. Os vértices de profundidade 1 correspondem às cinco bicicletas diferentes que Raul pode pegar para o trabalho (*mountain*, de estrada, reclinada, dupla, elétrica), e os vértices de profundidade 2 representam a escolha do carro para o transporte até o jantar (Ford, BMW, GM). Cada caminho da raiz até a folha representa uma escolha de uma sequência ordenada da forma (bicicleta, carro),

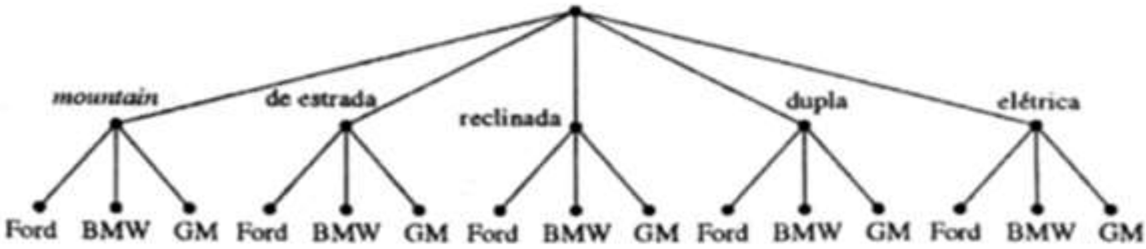


Figura 4.2 Uma árvore de decisão para o problema de contagem no Exemplo 4.3

então o número de caminhos pela árvore (ou seja, o número de folhas) é igual ao número de diferentes sequências que Raul pode escolher. Um modelo desse tipo é chamado de ***árvore de decisão***.

Assim como o princípio da adição, o princípio da multiplicação se generaliza para coleções de mais de dois conjuntos.

Fonte: Hunter (2011, p. 107)

A ampliação da técnica do princípio da multiplicação se dará na constituição do ambiente tecnológico-teórico quando evocado também a *indução em **n***.

Teorema 4.2 *Suponha que A_1, A_2, A_3, ..., A_n sejam conjuntos finitos. Então,*

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdots , |A_n|.$$

Demonstração Exercício. Use indução em n. □

Fonte: Hunter (2011, p. 107)

Em seguida o autor vai apresentar tarefas exemplos que abandonam a técnica da árvore de decisão ao dizer que elas seriam muito grandes para serem desenhadas e sugere a aplicação da técnica citada acima.

Exemplo 4.4 Quantas cadeias de profundidade 3 podem ser formadas a partir de um alfabeto com 26 símbolos?

Solução: Existem três escolhas a serem feitas em sequência: a primeira letra, a segunda letra e a terceira letra. Temos 26 opções para cada escolha. Portanto, o número total de strings com profundidade 3 é $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3 = 17.576$. ◇

Fonte: Hunter (2011, p. 107)

d) O último subtópico desse tópico vai apresentar a resolução de tarefas que mesclam adição e multiplicação. Esse autor reforça que uma tarefa de contagem pede uma mistura desses dois princípios ela fica um pouco mais complicada.

Exemplo 4.10 Em Illinois, as placas costumavam consistir ou em três letras seguidas por três dígitos ou em duas letras seguidas por quatro dígitos. Quantas placas como essas são possíveis?

Solução: Os dois tipos de placas podem ser considerados dois conjuntos disjuntos; os casos são mutuamente excludentes. O primeiro caso envolve um escolha de três letras (26^3) seguida pela escolha de três dígitos (10^3). Para o segundo caso, primeiro escolhemos duas letras (26^2) e depois escolhemos quatro dígitos (10^4). Colocando todos juntos, temos um total de

$$26^3 \cdot 10^3 + 26^2 \cdot 10^4 = 24.336.000$$

diferentes placas possíveis. ◊

Fonte: Hunter (2011, p. 109)

O momento da institucionalização ocorre ao mesmo tempo com o momento da avalição por meio dos exercícios no final do tópico.

O tópico seguinte é denominado de **seleções** e **arranjos** como novas técnicas na resolução de tarefas de contagem. Ao nosso ver o autor inicia o subtópico permutações como um caso particular de arranjo.

a) O subtópico **permutações: o princípio do arranjo** é iniciado por um exemplo de tarefa de arranjo.

Exemplo 4.12 Iago tem 26 ímãs de geladeira na forma de letras de A a Z. Quantas cadeias diferentes de três letras ele pode formar com os ímãs?

Solução: Este é um problema de "placa de carro" (veja o Exemplo 4.10), porém com uma restrição. Uma vez que Iago tem apenas um ímã para cada letra, ele não tem permissão para repetir letras. Existem três espaços a serem preenchidos. Ele tem 26 escolhas para o primeiro espaço. Uma vez que ele não pode reutilizar essa letra, ele tem 25 escolhas para o segundo espaço e, da mesma forma, 24 para o terceiro. Portanto, o número total de cadeias possíveis é $26 \cdot 25 \cdot 24$. ◊

Fonte: Hunter (2011, p. 111)

Após o exemplo, o autor explica que a solução utiliza o princípio da multiplicação, mas a cada decisão o número de letras é reduzido em um. O princípio de arranjo dá a regra geral.

Princípio do Arranjo. O número de maneiras de formar uma lista ordenada de r elementos distintos escolhidos em um conjunto de n elementos é

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1).$$

Uma lista como essa é chamada um *arranjo*. Note que os arranjos têm duas propriedades-chave: a ordem dos elementos importa, e todos os elementos são distintos.

A notação $P(n, r)$ vem do termo matemático para arranjos: *permutações*. Note que

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

é um jeito conveniente de expressar o número de permutações em termos da função fatorial. Lembre que a função fatorial é definida por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

e, por convenção, $0! = 1$. Note que $P(n, n) = n!$.

Fonte: Hunter (2011, p. 112)

Observamos que nesse tópico o autor apresenta o princípio do arranjo como uma técnica para tipos de tarefas de arranjo mais não há uma constituição do ambiente tecnológico-teórico. Ele apresenta o ambiente tecnológico-teórico após apresentar dois tipos de tarefas de arranjo, em que uma delas é o caso particular de arranjo (permutação).

Exemplo 4.13 Um time de beisebol é formado por 24 jogadores. De quantas maneiras diferentes o técnico pode escolher uma lista ordenada de 9 batedores?

Solução: Existem $P(24, 9) = 24!/15! = 474.467.051.520 \approx 4,74 \times 10^{11}$ maneiras de fazer tal lista. ◇

Exemplo 4.14 Quantas maneiras diferentes existem para rearranjarmos as letras na palavra CONVERSA?

Solução: É importante notarmos que todas as letras da palavra CONVERSA são diferentes. Assim, elas formam um conjunto de oito letras, e rearranjar as letras consiste em escolher uma lista ordenada de oito elementos distintos a partir desse conjunto. O número de maneiras para se fazer isso é $P(8, 8) = 8! = 40.320$. ◇

Rearranjar as letras na palavras CONVERSA é o mesmo que achar uma correspondência bijetiva:

$$f: \{C, O, N, V, E, R, S, A\} \longrightarrow \{C, O, N, V, E, R, S, A\}.$$

Para qualquer letra l em CONVERSA, $f(l)$ é a letra que a substitui no rearranjo. Em geral, se X é um conjunto finito com n elementos, então o número de correspondências bijetivas $f: X \longrightarrow X$ é $n!$. Uma função como esta é chamada de *permutação* do conjunto X.

Fonte: Hunter (2011, p. 112)

b) O subtópico combinações: **o princípio da seleção se** inicia por um exemplo de tarefa de seleção (combinação) com uma leve variação da tarefa 4.13; segundo o autor, apresentando a solução.

Exemplo 4.17 Um time de beisebol é formado por 24 jogadores. De quantas maneiras diferentes podemos escolher um grupo de nove jogadores para começar o jogo?

Solução: A única diferença entre este problema e o Exemplo 4.13 é que nenhuma ordem é imposta ao grupo. Observe que qualquer escolha dos nove jogadores corresponde exatamente a $P(9, 9) = 9!$ possíveis ordens de rebatedores. Assim, o número de ordens de rebatedores é 9! vezes maior do que o número de escolhas para um grupo de jogadores que iniciam o jogo. Por isso, o número de maneiras que podemos escolher para esse grupo é

$$\frac{P(24,9)}{9!} = \frac{24!}{15!\,9!} = 1.307.504.$$

◊

Fonte: Hunter (2011, p. 112)

Observemos que o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico se dá no momento da resolução da tarefa. Em seguida, ele vai anunciar a distinção entre o princípio de seleção e de arranjo e anunciar a fórmula do princípio de seleção.

A distinção entre os Exemplos 4.13 e 4.17 é importante: nesse último, o grupo era um conjunto não ordenado. Esse tipo de escolha é chamada de *seleção*.

Princípio da Seleção. O número de maneiras das quais podemos escolher um subconjunto de r elementos a partir de um conjunto de n elementos é

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Uma vez que seleções envolvem a escolha de um subconjunto, lemos a expressão "$C(n, r)$" como "n escolhe r". Algumas vezes usamos a notação

$$C(n,r) = \binom{n}{r}.$$

Note que $C(n, n) = 1$, porque existe apenas um subconjunto contendo todos os elementos: o conjunto inteiro. Similarmente, $C(n, 0) = 1$, porque o conjunto vazio é o único subconjunto com zero elementos.

Compare a fórmula para $C(n, r)$ com a fórmula para $P(n, r)$. No princípio da seleção, o $r!$ no denominador corresponde ao fato de que nenhuma ordem é imposta aos elementos do subconjunto. Tanto arranjos quanto seleções envolvem a escolha de um subconjunto de algum conjunto. Vale a pena repetir a distinção fundamental: *Em arranjos, a ordem dos elementos no subconjunto importa; em seleções, ela não importa.*

Exemplo 4.18 Como no Exemplo 4.16, suponha que uma urna contém 10 bolas de pingue-pongue numeradas de 1 a 10. Em vez de retirarmos quatro bolas em sequência, colocamos a mão na urna e retiramos as quatro bolas ao mesmo tempo. De quantas maneiras diferentes podemos retirar um punhado de quatro bolas?

Solução: Um "punhado" com quatro bolas de pingue-pongue é um conjunto não ordenado, portanto existem $C(10, 4) = 210$ resultados diferentes possíveis. ◇

Fonte: Hunter (2011, p. 113)

Na parte de **como usar este livro,** o autor deixa claro que alguns tópicos podem ser seguramente omitidos sem interromper a continuidade do conteúdo. Os subtópicos **o teorema**

do binômio e teorema de Ramsey estão incluídos neles.

O momento da institucionalização ocorre ao mesmo tempo com o momento da avalição por meio dos exercícios no final do tópico.

O tópico contando com funções usará o pensamento relacional. As tarefas de arranjo com elementos repetidos serão resolvidas por meio das técnicas anteriores e da técnica algébrico funcional.

Exemplo 4.28 Quantas cadeias diferentes você consegue formar ao rearranjar as letras na palavra ELEFANTES?

Solução: Este seria um problema simples de arranjos, exceto pelo fato de ELEFANTES conter letras repetidas — três Es, para sermos precisos. Vamos fingir que esses Es são diferentes por um momento: chame-os de E_1, E_2 e E_3. Seja X o conjunto de todas as cadeias que você pode formar ao rearranjar as letras na palavra $E_1LE_2FANTE_3S$. Uma vez que os elementos de X são apenas permutações de nove símbolos distintos, $|X| = 9!$. Agora, seja Y o número de maneiras de rearranjarmos ELEFANTES, e defina uma função $f: X \longrightarrow Y$ pondo $f(\lambda) = \lambda'$, em que λ' é a cadeia λ com os subscritos dos Es removidos. Esta função é sobrejetiva, porque você sempre pode pegar uma cadeia em Y e colocar os subscritos 1, 2 e 3 nos Es. Além disso, existem exatamente $3! = 6$ maneiras de fazer isso, e por isso f é seis-para-um. Portanto, pelo Teorema 4.6, $|X| = 6 \cdot |Y|$, então existem $|Y| = 9!/6 = 60.480$ arranjos. ◇

Fonte: Hunter (2011, p. 119)

Todos os tipos de tarefas até o momento apresentadas foram do tipo de Combinatória de Contagem, e o autor apresenta nesse tópico um tipo de tarefa até então não trabalhada: tarefa do tipo de Combinatória de Existência ao envolver *o princípio do compartimento no pombal.*

Após o autor anunciar que *o princípio do compartimento no pombal* é a simples observação de que se você colocar **n** pombos em **r** compartimentos, e n > r, então algum compartimento deve conter mais de um pombo.

Em seguida anunciará o teorema (técnica) justificando por meio da tecnologia álgebra das funções e apresentará 3 tipos de tarefas como exemplo e suas respectivas soluções.

Exemplo 4.30 Em um clube com 400 membros, devem existir alguns pares de membros que compartilham o mesmo dia de aniversário?

Solução: Sim. Seja X o conjunto de todos os membros do clube, e seja C o conjunto de todos os possíveis dias de aniversário. Defina $f: X \longrightarrow C$ de modo que $f(x)$ é o dia do aniversário da pessoa x. Uma vez que $|X| > |C|$, devem existir duas pessoas x e y que fazem aniversário no mesmo dia, ou seja, com $f(x) = f(y)$. ◇

Exemplo 4.31 Cornélio tem uma gaveta cheia de meias, 12 vermelhas e 14 verdes. A fim de evitar acordar seu companheiro de quarto, ele deve pegar uma seleção de roupas no escuro e se vestir no corredor. Quantas meias ele deve pegar no escuro a fim de ter certeza de ter um par combinando?

Solução: Seja $C = \{\text{vermelho, verde}\}$ e seja X o conjunto de meias que Cornélio seleciona. Seja $f: X \longrightarrow C$ a função que atribui uma cor a cada meia. Existem duas cores, portanto ele precisa de $|X| > 2$ meias. Três são o suficiente. ◇

Exemplo 4.32 Em um torneio todos-contra-todos, cada jogador joga com todos os outros jogadores somente uma vez. Suponha que nenhuma partida termina empatada.

Demonstre que, se nenhum jogador ficar invicto, então ao final do torneio devem ter dois jogadores com o mesmo número de vitórias.

Solução: Aplique o Teorema 4.7 com X sendo o conjunto de jogadores, e seja $|X| = n$. Cada participante joga $n - 1$ jogos, e nenhum jogador ganha todos os jogos, então o conjunto de todos os números possíveis de vitórias é $C = \{0, 1, 2, \ldots, n - 2\}$. Defina $f: X \longrightarrow C$ de modo que $f(x)$ é o número de vitórias do jogador x. Uma vez que $|C| < |X|$, existe um par de jogadores com o mesmo número de vitórias. ◇

Fonte: Hunter (2011, p. 120)

Esse autor vai também apresentar a generalização do compartimento no pombal fazendo uso do algébrico funcional.

Podemos estender um pouco o Princípio do Compartimento no Pombal. Se você tem muito mais pombos do que compartimentos, você esperaria encontrar pelo menos algum compartimento com um muitos pombos dentro.

Teorema 4.8 *Sejam* $|X| = n$ *e* $|C| = r$, *e seja* $f: X \longrightarrow C$. *Se* $n > r(l - 1)$, *então existe algum subconjunto* $U \subseteq X$ *tal que* $|U| = l$ *e* $f(x) = f(y)$ *para qualquer* $x, y \in U$.

Note que, se $l = 2$, este é o Teorema 4.7. Podemos apresentar novamente o teorema em termos de cores: "Suponha que a cada objeto em um conjunto X de n objetos é atribuída uma cor de um conjunto C de r cores. Se $n > r(l - 1)$, então existe um subconjunto $U \subseteq X$ com l objetos, todos da mesma cor."

Demonstração (Por contraposição.) Suponha que, quando você agrupa os elementos de X de acordo com a cor, o tamanho de qualquer um desses grupos é no máximo $l - 1$. Então o número total de elementos de X é no máximo $r(l - 1)$. □

Fonte: Hunter (2011, p. 120)

Quando você sabe n e r, é conveniente ter uma fórmula para l.

Corolário 4.3 Sejam $|X| = n$ e $|C| = r$, e seja $f: X \longrightarrow C$. Então existe algum subconjunto $U \subseteq X$ tal que

$$U = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$$

e $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in U$.

Demonstração Seja $l = \lceil n/r \rceil$. Então

$$r(l-1) = (\lceil n/r \rceil - 1)r < (n/r)r = n$$

portanto o resultado decorre do Teorema 4.8. □

Fonte: Hunter (2011, p. 120)

Depois apresentará uma tarefa com sua solução na qual aplicará o teorema ou o corolário como técnica.

Exemplo 4.33 Um site da internet exibe todo dia uma imagem proveniente de um banco de 30 imagens. Dado um período qualquer de 100 dias, mostre que alguma imagem deve ser exibida quatro vezes.

Solução: Aplique o Teorema 4.8, com X sendo o conjunto de dias e C sendo o conjunto de imagens. Seja $f: X \longrightarrow C$ a função que retorna a imagem $f(x)$ que é exibida no dia x. Uma vez que $100 > 30\ (4 - 1)$, existe alguma imagem que será exibida quatro vezes. ◊

De forma alternativa, poderíamos ter usado o Corolário 4.3: $\lceil 100/30 \rceil = \lceil 3,\bar{3} \rceil = 4$.

Fonte: Hunter (2011, p. 121)

No tópico *probabilidade discreta*, o autor vai definir o que é probabilidade e, em seguida, apresentar tarefas exemplos e suas soluções empregando as técnicas de contagem já estudadas. Vejamos os três exemplos a seguir.

Exemplo 4.35 Suponha que, de todas as possíveis placas descritas no Exemplo 4.10, você receba uma placa de carro aleatória. Qual a probabilidade de que a sua placa contenha a palavra CUB ou a palavra SOX?

Solução: O espaço amostral U é o conjunto de todas as placas possíveis, que sabemos ter 24.336.000 elementos. Estamos interessados no evento A, que a placa contenha a palavra CUB ou SOX, e esses dois casos são disjuntos. Se uma placa contém uma dessas palavras, ela deve ser do tipo que tem três letras seguidas por três dígitos. Existem 10^3 escolhas para os dígitos em uma placa como essa, portanto existem 10^3 placas em cada caso. Assim, a probabilidade desejada é

$$\frac{|A|}{|U|} = \frac{10^3 + 10^3}{24.336.000} = \frac{1}{12.168} \approx 0{,}000082,$$

o que não é muito provável. ◊

Exemplo 4.36 Se você lança dois dados padrões de seis lados, qual a probabilidade de você obter um 8 (isto é, que a soma dos valores nos dois dados seja 8)?

Solução: É importante sermos claros a respeito do nosso espaço amostral. Se D_1 representa os seis possíveis valores do primeiro dado e D_2 representa os seis valores do segundo, então o nosso espaço amostral é o produto cartesiano $D_1 \times D_2$. (Note que, embora os dados sejam idênticos, o resultado de o primeiro ser 3 e o segundo ser 5 é diferente de o primeiro ser 5 e o segundo 3.) Assim, o espaço amostral é $|D_1 \times D_2| = |D_1| \cdot |D_2| = 36$. Os pares ordenados a seguir

$$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

representam o evento de lançar um 8. Por isso a probabilidade de tal lance é $5/36 \approx 0{,}139$. ◊

Fonte: Hunter (2011, p. 124)

Exemplo 4.39 Suponha que existem 10 máquinas com defeito em um grupo de 200. Um inspetor de qualidade pega uma amostra de três máquinas e faz testes à procura de defeitos. Qual a probabilidade de o inspetor descobrir uma máquina com defeito?

Solução: Precisamos calcular a probabilidade de que uma máquina com defeito apareça em uma amostra aleatória. O espaço amostral é o número total de seleções de três máquinas: $C(200, 3)$. O evento de que pelo menos uma das máquinas está com defeito é o oposto do evento de máquinas sem defeito. Existem 190 máquinas sem defeito, então $C(190, 3)$ amostras não contêm defeitos. Portanto, a probabilidade desejada é

$$1 - \frac{C(190,3)}{C(200,3)} = 1 - \frac{1.125.180}{1.313.400} \approx 0{,}1433.$$

Portanto, é pouco provável que esse método de teste revele um defeito. ◊

Fonte: Hunter (2011, p. 126)

4.4 Conclusões do capítulo

Esse Capítulo teve como objetivo verificar, por meio da problemática ecológica, de que forma o objeto do saber Análise Combinatória (AC) vive na esfera do saber sábio, uma vez que nossa pesquisa está inserida no saber a ensinar na Educação Básica, o que ajudará na vigilância epistemológica no ecossistema noosferiano.

O nosso ponto de partida foi procurar distinguir a Matemática do Discreto e a Matemática do Contínuo, mas longe de nossa pretensão em fazer uma discussão muito aprofundada na diferenciação entre elas, e sim, a tentativa de definir a Matemática Discreta, a sua importância e o porquê de a AC ser um componente essencial desse campo matemático.

Da mesma forma, procuramos também definir o que é AC, apresentar os diferentes tipos de problemas, bem como exemplos de cada um pois, segundo Morgado et al. (1991), os alunos associam Análise Combinatória aos problemas de combinação, arranjo e permutação os quais são alguns conceitos da AC.

A análise feita no Livro Didático do Ensino Superior, não teve nenhuma intenção de se fazer um juízo de valor, e sim de analisar a ecologia da Matemática Discreta nele, procurando identificarmos as diferentes espécies (saberes) que alimentam a Matemática Discreta, analisar seus *nichos* e as formas que se apresentam os objetos ostensivos.

O esquema da figura 1 revela que essas espécies (o pensamento lógico, o pensamento relacional, o pensamento recursivo, o pensamento quantitativo, o pensamento analítico e o pensamento através de aplicações) se relacionam entre si, ou seja, elas se alimentam uma das outras, mas com nichos bem definidos. A figura 3 descreve uma teia alimentar de um ecossistema em partilha com dois outros ecossistemas: O Curso em Ciências da Computação e o Curso em Matemática.

Como nosso foco está no objeto do saber Análise Combinatória, fizemos uma análise da organização didática no Capítulo Pensamento Quantitativo com os critérios adotados na tabela 6. A análise mostrou que o autor parte da tríade: definição, exemplo e exercícios em sua obra.

As técnicas de contagem apresentadas são: *princípio da adição*, *princípio da multiplicação*, *árvore da decisão*, arranjo, permutação e seleção para resolver as tarefas por meio dos ostensivos (gráficos e algébricos).

O autor dedica poucas páginas às técnicas de contagem, abandona rapidamente o uso das técnicas do princípio fundamental da contagem e da árvore das decisões, para dar ênfase na utilização de fórmulas. O salto para a utilização do “ostensivo fórmula” está ligado diretamente ao setor probabilidade ou a tipos de tarefas que podem apresentar uma quantidade de dados muito grande, mas pesquisas têm apontado que o uso precoce da fórmula não valoriza nem favorece o desenvolvimento do pensamento combinatório.

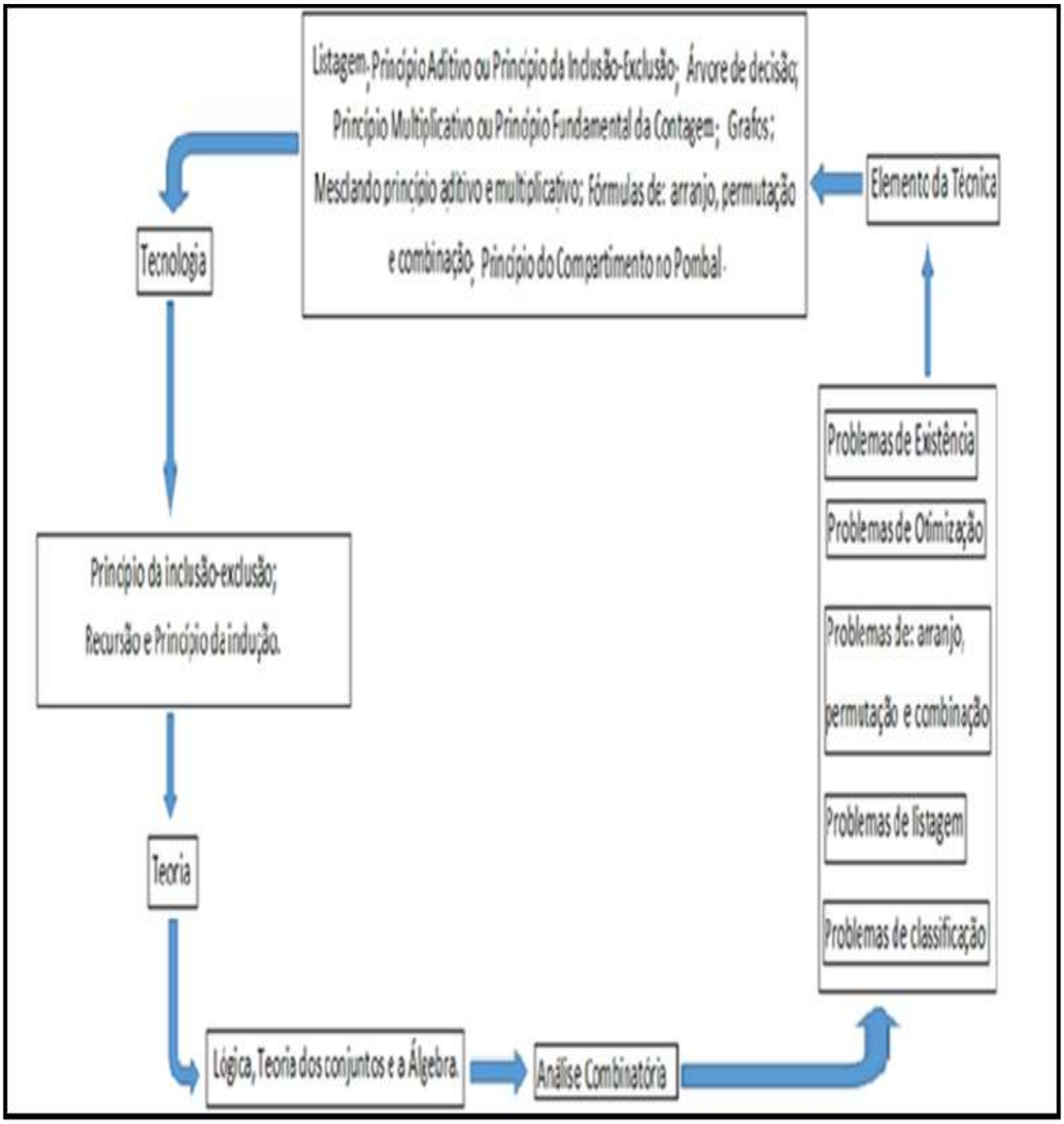
Vale ressaltar ainda que o autor distingue rapidamente seleção de arranjo como se fosse suficiente na construção desses conceitos, e a justificativa das técnicas se apresenta como tarefa ao fazer uso da indução em **n**. O que deixa claro que espera que o estudante mobilize os pensamentos anteriores já trabalhados no livro e as desenvolvidas no setor Análise Combinatória na Educação Básica.

Embora saibamos que se trata de uma obra indicada a estudantes do curso superior, a obra deveria dar um maior destaque ao princípio da indução matemática, por ser o coração do desenvolvimento do pensamento da Análise Combinatória.

Embora o autor apresente em sua obra outros tipos de problemas de Análise combinatória, tais como: as pontes de Konigsberg, a sequência de Fibonacci, o princípio do compartimento no pombal e as torres Hanói, ele não as destaca como sendo tipos de problemas da Análise Combinatória, o que favorece pensar que a Análise Combinatória se resume a arranjo, permutação e combinação como já apontado por Morgado et al. (1991).

Essa análise nos direcionou a apresentar o esquema a seguir, que ajudará na vigilância epistemológica quando o objeto Análise Combinatória se encontrar no polo do saber a ensinar na Educação Básica, ou seja, nos possibilitará analisar de que modo a “noosfera”, instituição produtora de documentos oficiais e livros didáticos, se assujeitam ao saber de referência, o saber sábio.

Figura 6 - Ecossistema da Organização Matemática da Análise Combinatória



Fonte: Elaboração do Pesquisador

5 ECOLOLOGIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E NOS LIVROS DIDÁTICOS.

5.1 AS REFORMAS CAMPOS E CAPANEMA

Os anos de 1920 foi marcada por fortes discussões a respeito das reformas educacionais permeadas pela proposta da Escola Nova que procurava criticar o ensino tradicional associado a sistemas fechados de conceitos estáticos, prontos e acabados na qual se privilegiava a memorização.

Segundo Carvalho (2012), é com base nos fundamentos da Escola Nova que Francisco Campos vai se apoiar em seus argumentos conceituais e teóricos em sua proposta de reforma ainda como Secretário do Interior do Governo de Antônio Carlos em Minas Gerais, como podemos ler na citação a seguir:

> Os programas devem ser organizados e executados, não com a preocupação da quantidade de noções e conhecimentos a serem ministrados, mas com a do mínimo essencial, tendo em vista a qualidade das noções para os usos da vida, a sua 'organização em torno dos centros de interesse da criança', de maneira 'que o' ensino não seja uma memorização de fatos e de dados desconexos, mas a compreensão das suas relações e da importância e significação de cada um no contexto das lições, experiências e problemas, e mais ainda, que os temas das lições devem ser tirados, sempre que possível da vida ordinária e expostos 'em termos da experiência infantil' (CAMPOS, 1930, p. 20, apud, CARVALHO, 2012, p.3).

O trabalho desenvolvido por Francisco Campos no sistema educativo mineiro foi sua vitrine para que no "Governo Provisório", chefiada por Getúlio Vargas, fosse escolhido a assumir o Ministério da Educação e Saúde Pública instituída pelo Decreto nº 19.402, de 14 de novembro de 1930 que de imediato, trata de organizar a estrutura e encaminhamento do ensino no país.

As mudanças no ensino secundário vão se efetivar por meio do decreto 19.890, de 18 de abril de 1931, e consolidadas pelo decreto 21.241, de 4 de abril de 1932 que compuseram a chamada Reforma Francisco Campos.

O principal objetivo dessa reforma era o de ampliar a finalidade do curso secundário, que deveria deixar de ser apenas um curso propedêutico para ingresso nas faculdades, mas possuir uma finalidade própria na formação dos sujeitos, ou seja, o mundo estava passando por transformações e mudanças e o ensino deveria garantir a formação do homem para todos os setores da atividade nacional.

Essa reforma, além de se preocupar com a formação do sujeito, modernizou o ensino secundário brasileiro por meio de várias estratégias escolares, como a seriação do currículo, a frequência obrigatória dos alunos, a imposição de um detalhado e regular sistema de avaliação discente e a reestruturação do sistema de inspeção federal. Essa reforma vai atingir profundamente a estrutura de ensino no país ao ser imposta a todo território nacional.

No que tange à seriação do currículo, o ensino secundário passou a ter sete anos, divididos em dois ciclos: o primeiro ciclo de cinco anos, chamado de Curso Fundamental que tinha como objetivo a formação geral do aluno secundarista; o segundo, era de dois anos, chamado de Curso Complementar, obrigatório aos alunos que pretendiam dar continuidade aos estudos no Ensino Superior e que poderiam optar por uma dessas três áreas de formação: Cursos de Direito; de Medicina, Farmácia ou Odontologia; e aos Cursos de Engenharia ou de Arquitetura.

Nessa proposta de seriação do currículo, o Ministro Francisco Campos convida professores de várias disciplinas escolares para organizar os programas e elaborar instruções metodológicas. Entre esses, foi convidado Euclides Roxo, Professor e Diretor do Colégio Pedro II, para fazer o programa de Matemática.

Com Euclides Roxo, nasce a disciplina “Matemática” (VALENTE,2004), fruto da fusão dos campos matemáticos (Aritmética, Álgebra e Geometria) de forma articulada e inter-relacionada (PIRES, 2008, p.4) defendida por ele desde 1929, pois, na perspectiva do ensino tradicional, esses campos eram trabalhados de forma rígida e desarticulada.

Com isso, segundo Rocha (2005), Euclides Roxo vai organizar o programa e elaborar instruções metodológicas para a disciplina Matemática, tomando como referência o modelo proposto pelo matemático alemão Felix Klein. Esse, defendia três grandes questões: **a metodologia**, que está relacionada a quem e de que maneira ensinar; **a seleção da doutrina**, ou seja, quais critérios devem ser utilizados na escolha dos conteúdos dos programas; e, por último, **a finalidade do ensino**, que está intimamente ligada às aplicações do que é aprendido, adequando-o às necessidades dos indivíduos.

Essa mudança de currículo, segundo Valente (2004), ao propor uma nova seleção e organização dos conteúdos matemáticos nos programas de ensino, vai se reverberar nos Livros Didáticos que terão que entrar em consonância com a proposta de ensino implantada por essa Reforma, como podemos ler na citação seguinte:

> Essa Reforma vai elucidar no Brasil, a organização dos programas e instruções metodológicas obrigatoriamente em todo o país prescritos pelo Ministério da Educação e Saúde Pública, sendo reformulada de três em três anos, por uma comissão formada pelo Ministro e que vai enquadrar professores e autores de livros didáticos quanto aos conteúdos a serem ensinados por meio do Decreto 19.890 de 18 de abril de 1931 (MEDEIROS, 1996, P.50).

Dessa forma, isso veio a provocar inúmeras publicações de Livros Didáticos nesse período. Em matemática, tivemos o Livro Didático de Euclides Roxo, intitulado “Curso de Matemática Elementar”, para ser adotado nos primeiros anos do ensino secundário e que serviu de referência para a própria elaboração do programa de Matemática nessa Reforma. Em seguida, vão surgir outras publicações de Livros Didáticos para as séries do Curso Fundamental de cinco anos, na qual as coleções tinham cinco volumes.

Segundo Soares, Dassie e Rocha (2004), os programas de Matemática do Curso Fundamental, idealizado por Euclides Roxo, vão sofrer várias críticas tanto dos professores do Colégio Pedro II quanto de professores das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria de outros estabelecimentos de ensino: o enciclopedismo presente nos programas; o ensino de funções nas primeiras séries secundárias; e o ensino simultâneo e não sucessivo da aritmética, álgebra e geometria. Este último, que engloba os três campos da matemática, vai ser ponto principal na reelaboração dos programas da próxima Reforma.

Surge então, em 1942, a chamada Reforma Gustavo Capanema (nome dado ao titular desse Ministério) que permaneceu em vigor até 1961. Ela irá repensar o ensino secundário brasileiro baseado pela nova Lei Orgânica do Ensino Secundário homologada pelo decreto nº 4.244 no dia 9 de abril de 1942. Essa Reforma mantém a divisão dos sete anos do ensino secundário em dois ciclos; porém, o primeiro ciclo que antes era de cinco anos correspondentes ao Curso Fundamental, passa ser quatro de duração, intitulado agora de Curso Ginasial.

O segundo ciclo, que na Reforma Francisco Campos, era nomeado de Curso Complementar e com duração de dois anos, passa a ter três com duas opções de Cursos: o clássico, que objetivava a formação intelectual dos alunos dando ênfase ao estudo das letras antigas; e o científico, marcado pela ênfase no estudo das ciências. Os cursos, clássico e científico, garantiam o ingresso do aluno em qualquer área do ensino superior.

Nessa Reforma, os programas de matemática quebram com a proposta de Euclides Roxo em unificar os campos da matemática em uma única disciplina e, passa agora, cada série a conter em seus programas mais de uma disciplina: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria mantendo, como também, na retirada do estudo da função desde as séries iniciais. Ficando apenas, os ideais metodológicos propostos por Euclides Roxo para o curso ginasial.

Novamente, segundo Valente (2004), os autores de Livros Didáticos de matemática terão que entrar em sintonia com o programa proposto por essa Reforma, pois, agora, além de incluir a Trigonometria, voltaria o desmembramento dos campos da matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), sendo preservadas as instruções metodológicas do programa de Matemática da Reforma Francisco Campos.

Esse período da Reforma Capanema, segundo Kuenzer (1995), é marcado também pela formação profissional surgindo o Senai em 1942, o Senac em 1946 e a criação das escolas técnicas, como resposta crescente ao desenvolvimento industrial que passa a exigir mão de obra qualificada.

5.1.1 Ecologia do Programa do ensino secundário na Reforma Campos e Gustavo Capanema.

O Ministério da Educação e Saúde Pública vai prescrever durante a gestão do Ministro Francisco Campos programas a serem cumpridos em todo país, enquadrando professores e autores de Livros Didáticos quanto aos conteúdos a serem ministrados, conforme publicação no Diário Oficial da União, de 31 de julho de 1931(Programas em anexo 1).

Nessa reforma a *disciplina* Matemática tem como *domínios* (Aritmética, Álgebra e Geometria) e o *assunto* função tinha seu nicho na integração desses *domínios* em toda matemática elementar e seu estudo levaria à compreensão das primeiras noções de cálculo infinitesimal.

> A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico, cujos partes estão em viva e intima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista — aritmético, algébrico e geométrico — não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas.
> Para dar unidade a matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diversas Modalidades do pensamento matemático, será adotada, como ideia central do ensino, a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica. Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física. Essas noções não serão ensinadas como meteria a parte, mas entrelaçadas ao corpo das demais disciplinas matemáticas. (BRASIL, D.O.U 30 jul. de 1931)

A *escola* da Educação Básica na Reforma Francisco Campos em nível da *pedagogia* fazia crítica a abordagem do conteúdo pela memorização e a sistematização das demonstrações e na concepção da Escola Nova propunha um ensino na qual o aluno fosse autor e coautor na construção do seu conhecimento como podemos identificar na citação a seguir:

> A exposição da matéria e a orientação metodológica, entretanto, devem subordinar-se sobretudo nas séries inferiores, às exigências da pedagogia, de preferência aos princípios puramente lógicos. Ter-se-á sempre em vista, em cada fase do ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno e os interesses para os quais tem maior inclinação.
> O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor, e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente á pratica da memorização sem raciocínio, do enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas. Ao invés disso, deve a Matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio da resolução de problemas e de questionários intimamente coordenados. Assim, os problemas não se devem limitar a exercícios dos assuntos ensinados, mas cumpre sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e de desenvolver a presteza na conclusão logica (BRASIL, D.O.U 30 jul. de 1931).

Em nível de *sociedade* de acordo o programa para o curso fundamental do ensino secundário tinha por finalidade desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habituando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa.

Por fim, a *civilização*, Brasil, representado por meio do Estado procurava combater o analfabetismo, levando a educação às classes menos favorecidas e gerar mão-de-obra qualificada para o mercado e também continuar formando elites.

E como essas orientações se reverberam nos livros didáticos nas Reformas Campos e Capanema? É o que passaremos a analisar nos próximo tópicos tomando como foco o *assunto* Análise Combinatória objeto matemático de nossa pesquisa.

5.1.2 Ecologia do Saber Análise Combinatória em Livros Didáticos durante o período das Reformas Campos e Capanema.

Iniciamos nossas análise apontando a mudança de habitat do saber Análise Cominatória. No período da Reforma Francisco Campos habitava a quinta série do curso fundamental nos *domínios*: da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. Como podemos ver a seguir:

SECRETARIAS DE ESTADO

Ministério da Educação e Saúde Pública

REPUBLICA DOS ESTADOS UNIDOS DO BRASIL

O Ministro de Estado da Educação e Saúde Pública, em nome do Governo Provisório:

Resolve, nos termos do art. 10. do decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931, expedir os programas do curso fundamental do ensino secundário, anexos a esta Portaria, que serão observados, de acordo com as respectivas instruções pedagógicas e com o número de horas semanais neles referido, em cada série do curso a que forem aplicáveis.

Rio de Janeiro, 30 de junho de 1931.

Francisco Campos.

Quadro 7 - Programa de Matemática da Quinta Série

QUINTA SÉRIE. (3 horas).

Aritmética, Álgebra e Geometria.
- Resolução de triângulos retângulos; prática das taboas do logaritmos. - Casos simples de resolução de triângulos obliquangulo. - Noções de analise combinatoria. - Binômio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo). Derivada de um polinômio inteiro em x. - Noção de limite. Derivada de $\sqrt{x}$ Derivada de seno de x, cosseno de x, tangente de x e cotangente de x. - Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples. - Processos elementares de desenvolvimento em séries; convergência de uma série. - Desenvolvimento em série do seno, cosseno e tangente. - Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas; Aplicação ao cálculo de certas áreas. - Volumes do prisma do cilindro; da pirâmide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes. - Estudo sucinto das secções cônicas.

Na Reforma Gustavo Capanema passou a habitar a segunda série dos cursos clássico e científico do ensino secundário no *domínio* da Álgebra. Como podemos ver a seguir:

PORTARIA MINISTERIAL N.º 177, DE 16 DE MARÇO DE 1943 *

Expede os programas de matemática dos cursos clássico e científico do ensino secundário

O Ministro de Estado da Educação e Saúde resolve expedir e determinar que se executem os programas de matemática, que se anexam à presente portaria ministerial, dos cursos clássico e científico do ensino secundário.

Rio de Janeiro, 16 de março de 1943. — *Gustavo Capanema.*

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CLÁSSICO

SEGUNDA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Progressões e logaritmos:* 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas eqüações exponenciais simples.

Unidade II — *O binômio de Newton:* 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTÍFICO

SEGUNDA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *A função exponencial:* Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logarítimos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas eqüações exponenciais.

Unidade II — *O binômio de Newton:* 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III — *Determinantes:* 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de eqüações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV — *Frações contínuas:* Noções sôbre frações contínuas.

Agora, passaremos a analisar os momentos de estudos ou momentos didáticos nas obras durante esses dois períodos da reforma de acordo com os critérios a seguir:

Quadro 6 - Categorias e critérios de análise da organização didática para os Livros Didáticos

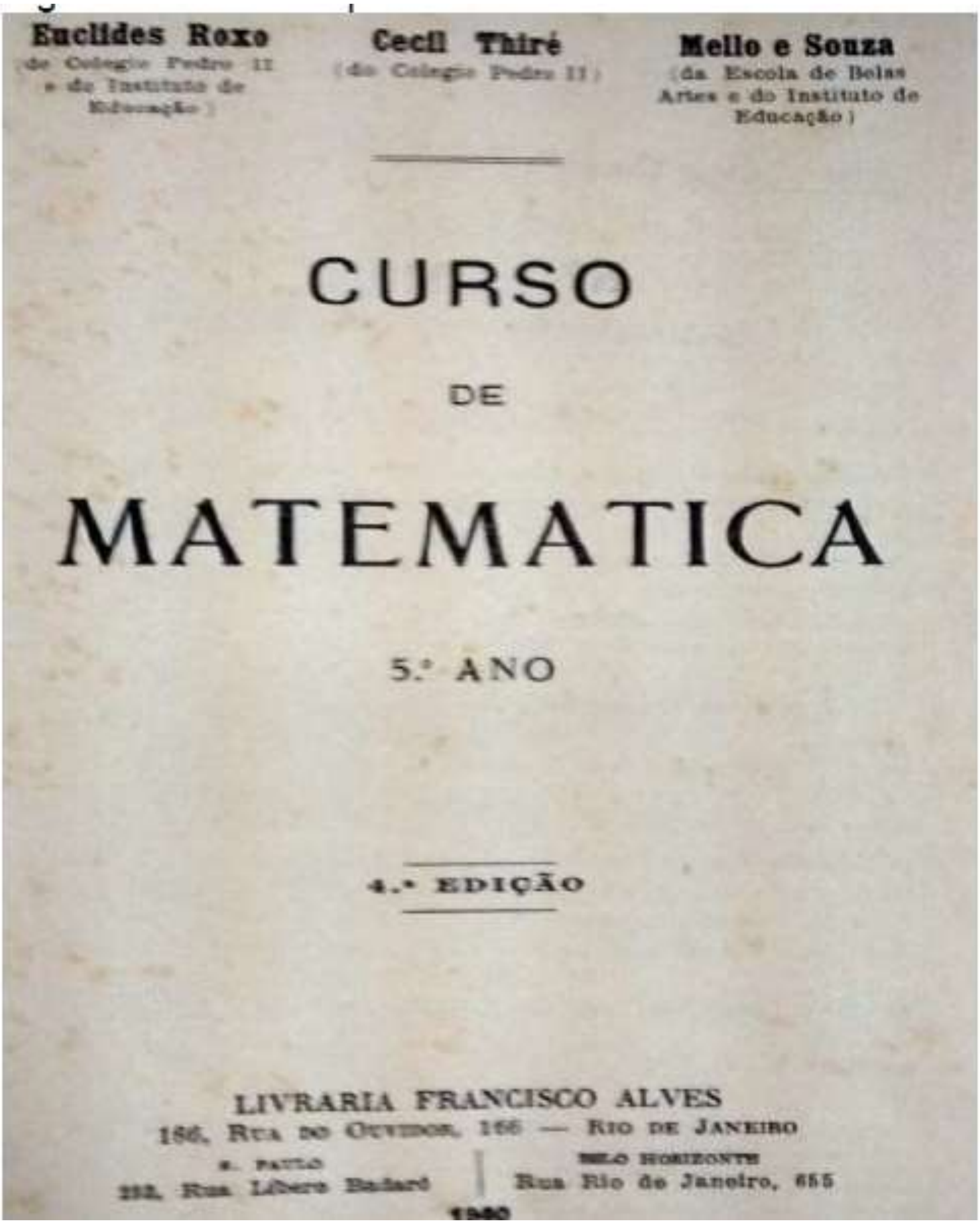
Categorias (momentos)	**Critérios de análise**
Primeiro encontro.	**Como os LD iniciam o assunto de Combinatória?**
Exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica.	**Como os LD exploram os tipos de tarefas? Como é feita a elaboração da técnica?**
Constituição do ambiente tecnológico-teórico.	**Como são organizadas as justificativas das técnicas nos LD?**
Trabalho da técnica	**As técnicas são utilizadas em diferentes tarefas? Há criação de novas técnicas?**
Institucionalização	**Como se concretiza a institucionalização nos LD?**
Avaliação	**Como acontece a avaliação nos LD?**

Fonte: autoria própria

O primeiro livro didático a ser analisado consta nas pesquisas de Tese de Pinheiro (2015). Segundo esse pesquisador, mesmo diante da possível crise que tenha ocorrido entre esses autores durante a reforma Campos, a coleção escrita por Cecil Thiré e Mello e Souza, após a reforma Campos, que passou a ser intitulada de Curso de Matemática para os dois últimos anos (4º e 5º) do ensino secundário, passou a ter Euclides Roxo como coautor.

Segundo Pinheiro (2015), a obra apresenta o Capitulo VII, intitulado noções de Análise Combinatória para os alunos do 5º ano. Nesse caso podemos considerar que o autor está em conformidade com o que preconiza a seleção e a organização do saber Análise Combinatória na Reforma Francisco Campos. A figura a seguir mostra a contracapa do Curso de Matemática, 4ª edição, produzido em 1940, para os alunos do 5º ano.

Figura 7- Contra capa do livro Curso de Matemática



Euclides Roxo
(do Colegio Pedro II e do Instituto de Educação)

Cecil Thiré
(do Colegio Pedro II)

Mello e Souza
(da Escola de Belas Artes e do Instituto de Educação)

CURSO

DE

MATEMATICA

5.º ANO

4.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro
S. Paulo
292, Rua Libero Badaró
Belo Horizonte
Rua Rio de Janeiro, 655
1940

Fonte: Tese de Pinheiro, 2015, Roxo, Thiré e Souza (1940).

Fazendo uma releitura da análise feita por Pinheiro (2015) sobre essa obra, apontamos que o primeiro encontro com o livro didático de Roxo, Thiré e Souza (1940) procura situar o leitor no contexto da Análise Combinatória por meio de cinco problemas de contagem, explicando que para resolver tais problemas deve-se levar em consideração a ordem e a maneira que são escolhidos os elementos que figuram a coleção que contém os referidos elementos.

> Quando num problema figura uma coleção de elementos, é possível que a solução desse problema vá depender da maneira por que se escolhem alguns desses elementos e também da ordem em que os elementos se dispõem [...]Tais problemas constituem objeto de uma parte da Matemática denominada Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório (ROXO, SOUZA e THIRÈ, 1940, p.75, apud PINHEIRO, 2015, p. 77).

Segundo Pinheiro (2015), os autores procuram explicar a noção de agrupamentos para em seguida explicar o que sejam agrupamentos simples e agrupamentos com repetição. Para isso os autores utilizam os ostensivos letras (*a*, *b*, *c* e *d*) como podemos observar na figura a seguir:

Figura 8 - Noção de Agrupamento

Consideremos uma coleção ou um conjunto de elementos, que podem ser objetos, letras, números, côres, figuras, etc. Designemos esses elementos pelas letras:

$$a, b, c, d, \ldots l$$

Se tomarmos um, dois, três... dêsses elementos, formaremos um *agrupamento.*

O número de elementos de um agrupamento definirá o *módulo* (**) desse agrupamento.

Exemplo: com as letras

$$a, b, c, d, e$$

podemos formar os agrupamentos

$$abe \qquad bcde \qquad aabccd$$

dos quais o primeiro tem o módulo 3, o segundo o módulo 4 e o terceiro o módulo 6.

Fonte: Tese de Pinheiro (2015), Roxo, Thiré e Souza (1940).

Pinheiro (2015), os autores informam que os arranjos, as permutações e as combinações, são as principais formas de agrupamentos estudadas na Análise combinatória. Porém, não explicam nesta etapa o que são essas formas de agrupamento.

Quanto ao assunto, *arranjo com repetição*, os autores apresentam o ostensivo fórmula como elemento da técnica, mais não há nenhum discurso tecnológico sobre ela.

Figura 9 - Fórmula para o cálculo do número de Arranjos com repetição.

13 — Arranjos com repetição.

Consideremos m elementos distintos:

$$a, b, c, d, \dots e$$

O número total de arranjos eneários, com repetição, dêsses m elementos, será dado pela fórmula:

$$\boxed{AR_m^n = m^n} \qquad (56)$$

lê-se: arranjos com repetição de m elementos n a n é igual a m elevado a n.

Fonte: Tese de Pinheiro (2015), Roxo, Thiré e Souza (1940).

O mesmo processo acontece no assunto *permutação com elementos repetidos.*

Figura 10 - Permutação com elementos repetidos.

20 — Permutações com ~~repetição.~~ com elem repetidos

Consideremos 10 elementos:

$$a, a, a, a, a, b, b, b, c, c$$

entre os quais existem 5 elementos iguais a a, 3 iguais a b e 2 iguais a c.

O número de permutações diferentes dêsses 10 elementos será:

$$PR_{10} = \frac{10!}{5!\ 3!\ 2!}.$$

De um modo geral: se tivermos n elementos, existindo entre êsses n elementos a' iguais a a; b' iguais a b, c' iguais a c etc., o número de permutações será dado pela fórmula:

$$\boxed{PR = \frac{n!}{a'!\ b'!\ c'! \dots l'!}} \qquad (58)$$

sendo a soma

$$a' + b' + c' + \dots l'$$

igual ao número n de elementos.

Fonte: Tese de Pinheiro (2015), Roxo, Thiré e Souza (1940).

Pinheiro (2015), observou na obra de Roxo, Souza e Thiré (1940) a forma como a fórmula para calcular o número de Combinações Completas (com elementos repetidos) é apresentada. Os autores optaram, sem nenhuma explicação, de apresentá-la por meio de uma nota de rodapé: "*deixamos de incluir exercícios numéricos sobre os problemas relativos às* *combinações com repetição, para o caso de* **m** *elementos o número total de combinações eneárias com elementos repetição será dado pela fórmula* $CR_m^n = C_{m+n-1}^n$, (ROXO, SOUZA e THIRÉ, 1940, p.78).

Nessa obra percebemos que a justificativa da técnica está intimamente ligada para a resolução das tarefas por meio do ostensivo fórmula para calcular o número de arranjos, permutações e combinações e não há criação de novas técnicas.

O momento da avaliação se dará no momento da institucionalização por meio das tarefas que possuem as mesmas características das tarefas exemplos.

Vimos que na gestão de Gustavo Capanema como Ministro da Educação e Saúde, a disciplina Matemática com o programa de 1942, caracterizou-se por suprimir o ensino simultâneo da Aritmética, Álgebra e Geometria em torno da noção de função, mas o que isso provocou de mudança no ensino da análise combinatória? É o que passaremos a analisar em três obras. Sendo duas dos anos de 1940 e uma do ano de 1964.

O primeiro livro, Matemática do 2º Ciclo dos autores: Roxo, Peixoto, Cunha e Dacorso Netto do ano de1944.

Figura 11 - Capa do Livro Matemática 2º Ciclo

Fonte: Roxo, PeixotoCunha e Decarato Netto, 1944.

Apresentam os conteúdos de análise combinatória de acordo com o programa de 1942 para os Cusos Clássico e Científico, como podemos ver a seguir.

Figura 12 - Indice do livro didático de Matemática para os Cursos Clássico e Científico do 2º Cico – 2ª série

ÍNDICE

Advertência 5
Programa da Segunda Série 6

Primeira Parte — Álgebra

Unidade I

Potências de expoente real 9
Progressões aritméticas 20
Progressões geométricas 32
Noção de função exponencial e de função inversa 47
Teoria dos logaritmos. Aplicações 51
Resolução de algumas equações exponenciais 73

Unidade II

Noções sôbre análise combinatória 81
Potenciação de polinômios 107

Unidade III

Teoria dos determinantes 117
Determinantes especiais 146
Aplicação aos sistemas de eqüações lineares. Regra de Cramer. Teorema de Rouché 159

Unidade IV

Frações contínuas. Noções sôbre frações contínuas 185
Frações contínuas periódicas 203

Fonte: Roxo, Peixoto, Cunha e Dacorso Netto, 1944.

Esses autores em nada modificam sua abordagem no estudo dos conceitos de arranjo, permutação e combinação com o livro publicado no ano de 1940.

Figura 13 - Capítulo dedicado a noções sobre Análise Combinatória

CAPÍTULO VI

NOÇÕES SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

79. **Preliminares.** — Com os objectos de uma colecção podem ser formados agrupamentos de diversos tipos, os quais se distinguem pelo critério adoptado na sua constituição.

Os objectos que formam um agrupamento denominam-se *elementos* do agrupamento. — Assim, os agrupamentos

$$abc, \quad acb, \quad cba, \ldots$$

são constituídos pelos elementos a, b e c.

O número de elementos de um agrupamento indica a sua *ordem* ou classe. — Assim, o agrupamento

$$abcd$$

é de quarta ordem.

Os agrupamentos de segunda, terceira e quarta ordem denominam-se, respectivamente, *binários*, *ternários* e *quaternários*.

Quanto ao modo de formação, distinguem-se os seguintes: *arranjos*, *permutações* e *combinações*.

80. **Arranjos simples.** — *Arranjos* de m elementos, tomados n a n, são os agrupamentos que se podem formar com n dos elementos dados, de modo que cada um difira do outro pela *ordem* ou pela *qualidade* dos seus elementos.

Consideremos alguns exemplos.

Com as três primeiras letras do alfabeto, tomadas duas a duas, podem formar-se os seguintes arranjos:

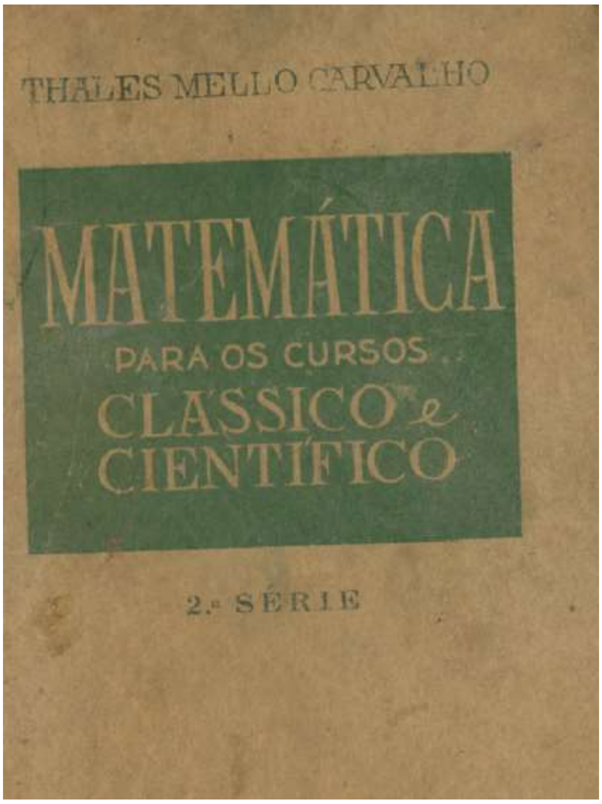
$$ab, \quad ba, \quad ca$$
$$ac, \quad bc, \quad cb.$$

Tomando, três a três, as quatro primeiras letras, os arranjos que se podem obter são

Fonte: Roxo, Peixoto, Cunha e Dacorso Netto, 1944.

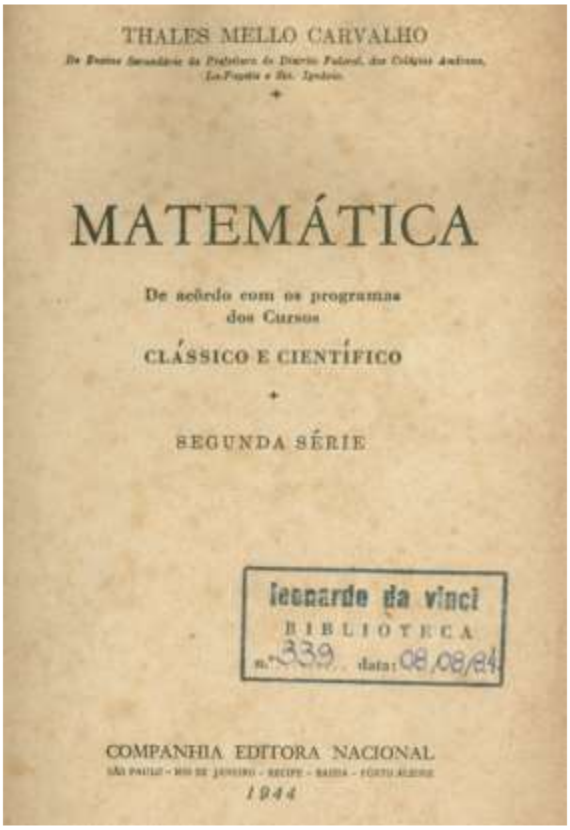
No segundo livro de Carvalho do ano 1944, Matemática para os Cursos Clássico e Científico, percebe-se em quase nada modificou com relação ao livro dos quatro autores analisados anteriormente, pelo menos no que se refere a Análise Combinatória, como podemos observar nas ilustrações a seguir.

Figura 14 - Capa do livro Matemática para os Cursos Clássico e Científico.



Fonte: Carvalho, 1944

Figura 15 - Contra capa do livro Matemática para os Cursos Clássico e Científico


THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

De acôrdo com os programas
dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

SEGUNDA SÉRIE

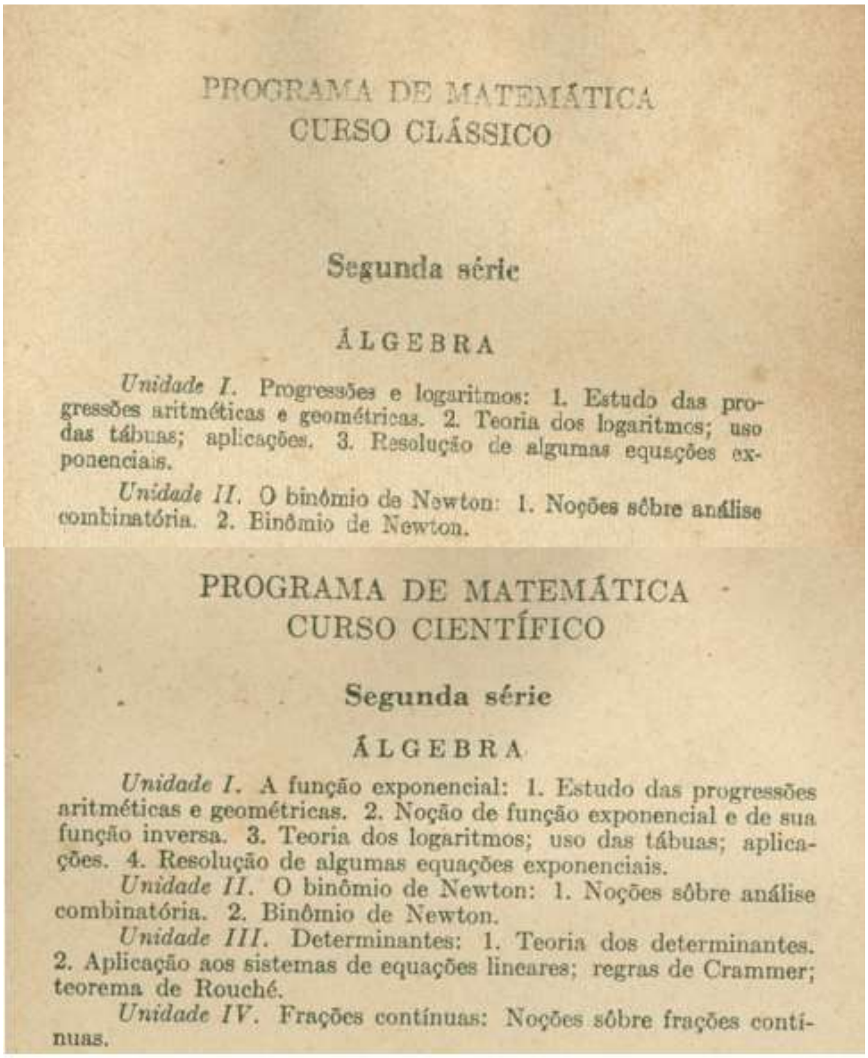
leonardo da vinci
BIBLIOTECA
n.º 339 data: 08/08/84

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

1944

Fonte: Carvalho, 1944

Figura 16- Programa de Matemática sobre Análise Combinatória para os Cursos Cléssico e Científico – 2ª série



PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CLÁSSICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. Progressões e logaritmos: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CIENTÍFICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV. Frações contínuas: Noções sôbre frações contínuas.

Fonte: Carvalho, 1944

A pesquisa de doutorado de Ribeiro (2011): um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da Matemática escolar do colégio – 1943 a 1961, corrobora com essa nossa afirmação ao fazer as análises nessas mesmas obras.

> O autor coloca a finalidade do livro como um local onde os estudantes desta série e nível escolar poderão encontrar toda a matéria a ser estudada e que os conceitos matemáticos estarão dispostos de forma tão clara quanto possível. Comparando-se este prefácio com o do *livro dos 4 autores*[16], editado para o mesmo nível de ensino, série e ano, podemos notar que a finalidade dos autores é a mesma e o que difere o livro de Thales Mello Carvalho do livro da coleção dos 4 autores é a explicação feita por este último, quanto a divisão dos assuntos que o livro apresenta estar em acordo com a divisão proposta nos programas oficiais de Matemática, desta série e deste nível de ensino. (RIBEIRO, 2011,p.175).

[16] Segundo Ribeiro (2011) o livro Matemática 2º Ciclo dos autores Roxo, Peixoto, Cunha e Dacorso Netto, assim ficou conhecido por outros autores.

Essa pesquisadora ainda faz uma comparação na abordagem no estudo da análise combinatória nessas duas obras, que com o par de lentes que estamos usando em nossa pesquisa revelam os momentos didáticos (CHEVALLARD, 1999) adotado por nós em nossas análises.

> Analisamos, agora, um exemplo situado no assunto "Álgebra", no capítulo dedicado ao estudo da "Análise Combinatória", item "Definição" ou "Preliminares". Thales Mello Carvalho aborda esse item iniciando com os conceitos de sequência $a_1, a_2, \dots, a_m$, casos particulares, agrupamentos binários, ternários e quaternários, a determinação do número de agrupamentos e termina com as definições de arranjos simples, permutações simples e combinações simples, unidas com explicações sobre a origem da Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório, utilizando fatos históricos e indicando leituras a respeito.
> No exemplar dos 4 autores, esse item está bem resumido (definição, informação sobre estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos e a citação dos diferentes tipos de agrupamentos – arranjos, permutações e combinações, e as notas de rodapé com explicações sobre a origem da Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório estão bem maiores. (RIBEIRO,2011,p. 178)

Ela diz ainda que os dois livros apresentam praticamente os mesmos exemplos e exercícios, á única diferença entre eles é na variação dos números nos exercícios e nas quantidade, que no de Roxo são 42 exercícios e no de Carvalho 21. Além disso, o livro de Carvalho apresenta resposta a todos os exercícios, enquanto que no de Roxo só apresenta resposta para os exercícios denominados "Exercícios Propostos", localizados ao final de cada capítulo.

Em 1951 surge o chamado "Programa Mínimo" que ajustou os programas da Reforma Gustavo Capanema no Ensino Secundário, permanecendo apenas sua divisão no 2º Ciclo, os chamados Cursos Clássico e Científico, que durou no sistema educacional brasileiro até 1961, ano da primeira Lei de Diretrizes e Bases - LDB 4.024/61.

O próximo tópico apresentaremos uma breve discussão sobre esse período e uma análise do livro de Manoel Jairo Bezerra, afim de identificarmos que mudanças significativas sofre o saber Análise Combinatória.

5.2 O PROGRAMA DE MATEMÁTICA NO MINISTÉRIO DE SIMÕES FILHO.

Segundo Medeiros (1996), além da prática pedagógica, a programação estabelecida pela Reforma Capanema, referente as diversas disciplinas, foram alvos de reclamação por educadores, alunos e pais, por considerarem os conhecimentos excessivos e de difícil assimilação.

Com isso, o Ministro da Educação e Saúde Simões Filho, por meio da Portaria nº 966 (publicado no suplemento do D.O.U de 26.11.1951 e retificada no D.O.U de 02.01.1952), estabelece os “Programas Mínimos”, cujo objetivo era de simplificar toda a programação destinada ao ensino secundário.

> A necessidade,por um lado de aliviar os deveres escolaresque congestionam os atuais programas do Ensino Secundário,e, de outro, atribuir maior elasticidade e rendimento à sua execução, tantas vezes reclamada, quer pelos educadores, quer pelos alunos e seus pais, levou o Ministério da Educação a estudar a conveniência de proceder a uma revisão da matéria neles contida, de modo a possibilitar o desenvolvimento racional de suas finalidades educativas (Ensino Secundário no Brasil. INEP, 1952. Esclarecimentos do Sr Ministro da Edcuação Simões Filho,em entrevista coletiva à imprensa. p.515, *a*pud MARQUES, 2005 p. 51).

Destacamos a seguir o programa de Matemática para os Cursos Colegiais da Segunda Série.

Programas de Matemática para os Cursos Colegiais, segundo ano, segundo Portaria Ministerial número 1 045, de 14 de Dezembro de 1951

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

I – *Análise combinatória simples.*

1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos.
2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout.
3. Permutações simples com objetos repetidos; cálculo do número de agrupamentos.
4. Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Relações de Stifel; triângulo aritmético de Pascal.

II – *Binômio de Newton.*

1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação de termos.
2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais.

Fonte: Brasil, 1951.

Com a exposição do programa acima, percebemos que o saber Análise Combinatória permanece habitando a segunda série do 2º Ciclo, no *domínio* a que pertence na *escala de níveis de codeterminação*, mas destacamos por hipótese, que seja o da Álgebra e Funções. Mas as mudanças nos programas mínimos influenciou nas organizações didáticas nos livros?

Para respoder essa questão, tomamos para a análise *dos momentos didáticos* nesse período, o livro: Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássicos e científico, 12ª edição, 1964 do autor Manoel Jairo Bezerra. Embora o ano da obra seja superior ao período vigente em nossa análise, em nada refutará, pois não houve mudanças.

Ribeiro (2011) destaca em sua pesquisa que as obras do autor Manoel Jairo Bezerra foram consultados por alunos, professores e inspetores durante as aulas, de acordo com registros encontrados nos arquivos da Escola Estadual de São Paulo. O que julgamos de pertinência essa obra em nossa análise.

O índice e a distribuição dos tópicos do capítulo que versa sobre o *tema* Análise Combinatória no livro de Bezerra (1964), indicam que esse autor está em conformidade, Chevallard (1999, apud, BESSA e CÂMARA, 2015), com a noosfera "Programa Mínimos" e toma como saber de referência o livro dos quatro autores, o que podemos ver ao longo das ilustrações a seguir dessa obra.

Figura 17 – Indice do Livro Curso de Matemática.

ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

(1.°, 2.° e 3.° Anos)

1. Noções sôbre o cálculo aritmético aproximado. Erros (1.° ano) 13
2. Progressões (1.° ano) 39
3. Logaritmos (1.° ano) 63
4. Equações exponenciais (1.° ano) 88
5. Análise combinatória simples (2.° ano) 94
6. Binômio de Newton (2.° ano) 110
7. Determinantes (2.° ano) 118
8. Sistemas lineares (2.° ano) 137
9. Trinômio do 2.° grau 151
10. Números reais e complexos (3.° ano) 155
11. Funções (3.° ano) 165
12. Limites (3.° ano) 179
13. Derivadas (3.° ano) 203
14. Primitivas imediatas (3.° ano) 250
15. Polinômios (3.° ano) 264
16. Introdução à teoria das equações (3.° ano) 281

Fonte: Bezerra, 1964.

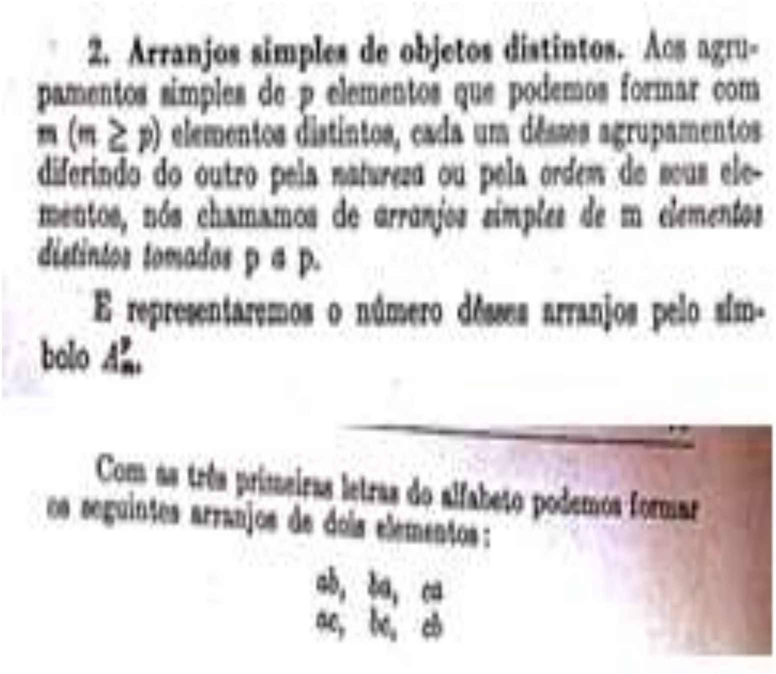
São destinados 10 páginas para o estudo desse *tema* distribuindo os *assuntos* como preconizam os programas mínimos.

O primeiro encontro com o *tema* aparece numa parte do livro denominado Preliminares para conceituar o que sejam agrupamentos e elementos. Depois procura distinguir os agrupamentos em dois tipos: os que tem elementos distintos e os que tem elementos repetidos a fim de denominar agrupamentos simples e agrupamentos com repetição. Em seguida classifica os tipos de agrupamentos em arranjos, permutações, combinações e só depois define análise combinatória simples.

O *assunto* arranjos simples é apresentado pelo ostensivo símbolo **(A_m^p)** sendo *A*=arranjo, ***m*** total de elementos e ***p*** números de elementos aos agrupamentos simples com $\boldsymbol{m \geq p}$**.**

O momento da elaboração da técnica se aglutina com momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico pela manipulação do ostensivo letras do alfabeto.

Figura18 - Noção de agrupamentos



2. Arranjos simples de objetos distintos. Aos agrupamentos simples de p elementos que podemos formar com m (m ≥ p) elementos distintos, cada um dêsses agrupamentos diferindo do outro pela natureza ou pela *ordem* de seus elementos, nós chamamos de *arranjos simples de* m *elementos distintos tomados* p a p.

E representaremos o número dêsses arranjos pelo símbolo A_m^p.

Com as três primeiras letras do alfabeto podemos formar os seguintes arranjos de dois elementos:

ab, ba, ca
ac, bc, cb

Fonte: Bezerra, 1964

Destacamos que o autor na elaboração do ostensivo fórmula para a expressão do número de arranjos simples usa a recursão, mas isso não fica claro. Vejamos a seguir o desenvolvimento feito pelo autor para determinar as fórmulas de arranjos simples com o olhar da TAD.

Tarefa 1: mostrar o processo geral para formação de Arranjos simples de **m** elementos tomados **p** a **p.**

Técnica1: a técnica para essa tarefa foi dividida em 9 etapas.

Primeira etapa: considerar as quatro primeiras letras do alfabeto como total de elementos: m = 4; Segunda etapa: formar grupos de uma só letra e definir que cada um destes ***m*** objetos é um arranjo simples de ***m*** elementos 1 a 1 e apresenta o ostensivo A_m^1=*m;* Terceira etapa: apresentar os elementos desses arranjos com uma só letra :*a, b, c, d;* Quarta etapa: formar grupos de duas letras colocando à direita de cada um desses elementos as *m* - 1 letras restantes: *ab, ba, ca, da, ac, bc , cb, db, ad, bd, cd, de*; Quinta etapa: apresentar os elementos desses arranjos com *m -1* letras restantes que contém todos os elementos e indica o ostensivo A_m^2; Sexta etapa: indica que o quadro acima (Figura 16) descreve todos os arranjos simples de *m* elementos 2 a 2 e apresenta o ostensivo $A_m^2 = A_m^1$ *(m – 1)*; Sétima etapa: juntar cada um dos A_m^2 elementos obtidos anteriormente as m - 2 elementos restantes; Oitava etapa: apresentar que dos grupos de 2 elementos formará m - 2 grupos de 3 elementos e indica o ostensivo $A_m^3 = A_m^2$ *(m -2);* Nona etapa: apresentar o processo geral para formação dos A_m^p que consiste em acrescentar a cada um dos A_m^{p-1}agrupamentos as *m-p+*1 letras restantes e indica o ostensivo $A_m^p = A_m^{p-1}$(m - p + 1). O discurso tecnológico-teórico: recursão. A teoria: Álgebra.

Figura 19 - Processo geral para formação de Arranjos simples.

3. **Formação dos arranjos simples.** Consideremos m elementos distintos e, para fixar idéias, suponhamos $m = 4$. Sejam as quatro primeiras letras do alfabeto êsses elementos.

Diz-se, por extensão, que cada um dêstes m objetos é um arranjo simples de m elementos 1 a 1. $A_m^1 = m$.

Êsses arranjos são pois:

a, b, c, d

Colocando à direita de cada um dêsses elementos as $m - 1$ letras restantes, obtemos o quadro:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

que contém, sem repetição nem omissão, todos A_m^2.

Então $A_m^2 = A_m^1 (m - 1)$.

Juntemos agora a cada um dos A_m^2 do quadro anterior os $m - 2$ elementos restantes.

Cada um dos grupos de 2 elementos formará $m - 2$ grupos de 3 elementos.

Logo, $A_m^3 = A_m^2 (m - 2)$.

Prolongando êsse raciocínio, temos que, de um modo geral,

$$A_m^p = A_m^{p-1} [m - (p - 1)]$$

ou, $\boxed{A_m^p = A_m^{p-1} (m - p + 1)}$ (I)

E podemos dizer que o processo geral para formação dos A_m^p, consiste em acrescentar a cada um dos A_m^{p-1} agrupamentos as $m - p + 1$ letras restantes.

OBSERVAÇÃO: Há problemas que exigem a formação dos A_m^p. Formar tais agrupamentos é teòricamente fácil. Se m e p não forem pequenos é trabalhoso e se m e p forem grandes valores é pràticamente impossível.

Fonte: Bezerra, 1964

A partir dessa fórmula (Figura 17) o autor cria nova técnica ao apresentar mais um ostensivo fórmula como elemento da técnica para resolver tipos de tarefas de arranjos simples.

Tarefa 2: apresentar a fórmula do número de Arranjos

Técnica 2: a técnica para essa tarefa foi dividida em 8 etapas.

Primeira etapa: recorrer ao ostensivo fórmula já apresentada A_m^p=A_m^{p-1}(m - p + 1) e fazer p = 2, 3, 4, ... p; Segunda etapa: considerar A_m^1= m; Terceira etapa: considerar p=2 e substituir na fórmula obtendo A_m^2=A_m^1(m – 1); Quarta etapa: considerar p = 3 e substituir na fórmula, obtendo A_m^3=A_m^2(m – 2); Quinta etapa: substituir p por p - 1, obtendoA_m^{p-1}=A_m^{p-2}(m –p + 2); Sexta etapa: a fórmula do processo geral dos arranjos; Sétima etapa: multiplicar membro a membro, essas relações e suprimir os fatores comuns aos dois membros; Oitava etapa: o resultado é a expressão que determina o número de arranjos simples, o ostensivo fórmula A_m^p= m(m-1)(m-2)....(m-p+2)(m-p+1). O discurso tecnológico-teórico: recursão e lei do cancelamento. A teoria: Álgebra.

Figura 20 - Expressão que determina o número de arranjos simples

96 *Arranjos e Permutações*

4. Número de arranjos simples. Fazendo na fórmula (I) $p = 2, 3, 4 \ldots\ldots p$ e tendo em vista que $A_m^1 = m$, temos:

$$\begin{aligned} A_m^1 &= m \\ A_m^2 &= A_m^1\ (m-1) \\ A_m^3 &= A_m^2\ (m-2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m^{p-1} &= A_m^{p-2}\ (m-p+2) \\ A_m^p &= A_m^{p-1}\ (m-p+1) \end{aligned}$$

Multiplicando, membro a membro, essas relações e suprimindo os fatôres comuns aos dois membros, obtemos a expressão do número de arranjos simples:

$$\boxed{A_m^p = m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-p+2)\ (m-p+1)} \quad \text{(II)}$$

Fonte: Bezerra, 1964

O autor conclui que o número de arranjos simples de ***m*** elementos distintos, tomados ***p* a *p***, é produto dos *p* números inteiros, consecutivos, a partir de ***m.*** Em seguida resolve duas tarefas exemplo “não verbal”[17] com o que acaba de concluir. Vamos destacar uma dessas tarefas a seguir:

[17] Pacheco(2003) em sua dissertação de mestrado usa essa expressão para indicar os problemas que não utiliza a língua materna.

Tarefa: Calcular A_5^3.

Técnica: a técnica é desenvolvida em três etapas.

Primeira etapa: descrever os três números inteiros, consecutivos decrescentes, a partir de 5;

Segunda etapa: multiplicar os três números inteiros obtidos;

Terceira etapa: representar ostensivamente a expressão do resultado A_5^3= 5x4x3=60.

Percebemos que todo o discurso racional que foi feito para determinar a fórmula que determina o número de arranjos simples foi abandonada, pois o autor mesmo que não seja sua intenção, vai determinar como técnica para quantificar o número de arranjos simples pelos produtos dos ***p*** números inteiros, consecutivos e decrescentes, a partir de ***m.***

Em seguida esse autor vai justificar o ostensivo fórmula de permutação simples com procedimento análogo ao que fora usado para os arranjos simples. A nota de rodapé, traz uma observação, que ao nosso ver, descreve a permutação como um caso particular de arranjo.

Figura 21 - Permutação como caso particular de arranjos simples.

Observação: Se em cada grupamento de arranjos simples formado de *m* elementos entrarem os *m* elementos os arranjos se denominam permutações.

Fonte: Bezerra, 1964

As técnicas utilizadas para demonstrar as fórmulas de arranjos são praticamente as mesmas para demonstrar as fórmulas de permutações simples e combinações simples.

O momento da exploração da técnica vai se dar inicialmente por meio de nove tipos de tarefas exemplos verbais e não verbais. O momento da institucionalização ocorre ao mesmo tempo com o momento da avalição por meio dos exercícios (tarefas) como as tarefas exemplos, que se encontram no final do capítulo de Análise Combinatória.

Encontramos aqui na obra de Bezerra (1964) as mesmas organizações didáticas apontadas por Pinheiro (2015) ao analisar livros das Reformas Campos e Capanema:

> A obra de Carvalho (1956) apresenta, inicialmente, as noções de agrupamentos; em seguida as noções de Arranjo simples, Permutação simples e Combinação simples; e as fórmulas do Arranjo, da Permutação e da Combinação, nas mesmas condições que observamos nas outras obras. Ou seja, as tarefas e as técnicas para mostrar as fórmulas gerais do cálculo do número de Arranjos, de Permutações e de Combinações são as

> mesmas identificadas nas obras anteriormente analisadas. Diante disso, a obra apresenta características de uma organização didática teoricista. (PINHEIRO, 2015, p.85).

Tomamos também por hipótese, que o autor Bezerra possa ter tomado o livro dos quatro autores analisados anteriormente, como saber de referência em sua organização Matemática e Didática no que se refere a Análise Combinatória. Isso fica mais evidente nas definições de Análise Combinatória que são utilizadas no livro de Bezerra e dos quatro autores, Ribeiro (2011).

> "ANÁLISE COMBINATÓRIA SIMPLES
>
> **1. Preliminares.** Existem diversas maneiras de dispor objetos de uma coleção em grupos. Esses grupos denominam-se *agrupamentos* e os objetos que os constituem chamam-se *elementos.* Em qualquer dessas maneiras de disposição dos elementos, há dois casos que distinguir:
>
> 1º) *em cada grupamento todos elementos são distintos;*
>
> 2º) *em cada grupamento pode haver repetição de elementos.*
>
> No primeiro caso, os grupamentos dizem-se *simples,* e no segundo caso chamam-se *repetição.*
>
> Os grupamentos, quando ao modo de formação, podem ser classificados em arranjos, permutações e combinações.
>
> Ao estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos simples denominamos *análise combinatória simples.*Dois grupamentos simples diferem pela *ordem* ou pela *natureza* de seus elementos" (...) (BEZERRA, 1955, p. 13)

> **"I – ANÁLISE COMBINATÓRIA SIMPLES**
>
> **1. Generalidades (1).** Denomina-se *análise combinatória* ao estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção.
>
> Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: *arranjos, permutações e combinações*, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.
>
> (1) – nota de rodapé com as origens da Análise Combinatória e suas aplicações à época em que o livro está situado." (ROXO, E., PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; NETTO, C., 1955, p. 07).

Fonte: Ribeiro, 2011, p. 202

Essa definição encontrada por Ribeiro (2011) no livro de Bezerra (1955) é a mesma do livro de Bezerra (1964) que analisamos. O que vem afirmar mais uma vez que nada prejudica nossas análises.

Em nossas análises durante esses períodos, destacamos que todos os autores de livros estavam em conformidade com os programas vigentes, inclusive Bezerra (1964), pois em sua obra todos os tópicos de Análise Combinatória estão de acordo com os Programas Mínimos de Matemática.

Quadro 8 - Tópico de Análise Combinatória

TÓPICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	
- Arranjos simples de objetos distintos; - Formação de arranjos simples; - Número de arranjos simples; - Permutações simples de objetos distintos; - Formação de permutações simples de elementos distintos; - Número de permutações simples; - Inversão; -Classe de uma permutação; - Teorema de Bezout; - Permutações simples com objetos repetidos;	- Número de permutações simples com objetos repetidos; -Combinações simples de objetos distintos; - Número de combinações simples; - Número combinatórios ou binomiais; -Números binomiais de módulos complementares; Relação de Stifiel; Triângulo aritmético de Pascal.

Fonte: Bezerra, 1964

Destacamos ainda que a ecologia das tarefas e técnicas sempre foram as mesmas no *Tema* Análise Combinatória ao habitar os livros didáticos da 5ª série na reforma Francisco Campos ou na 2ª série do 2º Ciclo tanto no Curso Clássico como no Curso Científico na Reforma Gustavo Capanema ou no Programa Mínimo do Ministério de Simões Filho. E por sua vez, *a razão de ser* do objeto Análise Combinatória entre os anos de 1931 a 1960 estava em alimentar o *Tema* Binômio de Newtom.

Essa realidade permanece ainda no Movimento da Matemática Moderna? É o que passaremos a discutir no próximo tópico fazendo uma análise da praxeologia matemática, mas procuraremos destacar a técnica, a tecnologia e a teoria que permearão nas tarefas exemplos propostas pelo o autor. Essas análises servirão para identificar as condições e restrições que cada nível impõe ao objeto Análise Combinatória.

5.3 O PERÍODO DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM) NO BRASIL

O MMM de caráter internacional chega ao Brasil em finais dos anos de 1950. Esse Movimento retoma a articulação dos campos matemáticos, porém estruturados em torno da

Teoria dos Conjuntos, o que vai provocar mudanças nos programas de Matemática do Ensino Secundário como afirma Filho (2013).

> A renovação pretendida pelo Movimento da Matemática Moderna estava baseada quase exclusivamente em mudança de conteúdo curricular, a qual cumpriria a tarefa de adequar o ensino de Matemática às novas exigências do mundo industrial e tecnológico. Dentre outros objetivos, a unificação dos três campos fundamentais da Matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), mediante a introdução de elementos unificadores, a Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções. (FILHO, 2013, p.151).

A Matemática Moderna não vai ser implantado no Brasil por nenhum decreto como aconteceu com as reformas anteriores como afirma a citação a seguir:

> "Ao contrário das Reformas Campos e Capanema, a Matemática Moderna não foi implantada por nenhum decreto, o que não impediu que ela fosse amplamente divulgada e adotada em todo o território nacional". (SOARES; DASSIE ; ROCHA, 2004).

A Matemática Moderna vai sendo difundida lentamente nas escolas, por meio dos congressos nacionais, com cursos de aperfeiçoamento para professores e por meio de livros didáticos publicados na época.

O pioneiro na divulgação do MMM no Brasil foi o professor Oswaldo Sangiorgi. Tudo começou quando ele foi fazer um estágio em julho de 1960 e ao tomar conhecimento pelo matemático George Springer das mudanças de proposta de reformulação do ensino que estava sendo empreendida nos Estados Unidos fica maravilhado e ao voltar do seu estágio em 1961, trata de reformular por completo sua coleção de livros didáticos para ginásio e funda o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM.

Segundo Silva (2013), a criação do GEEM foi marco decisivo para a constituição do Movimento Matemática Moderna no Brasil. O grupo ampliou e divulgou, por meio de materiais e dos cursos que promoveu, o ideário do movimento.

Durante esse período do MMM no Brasil, surge em 1961 a primeira Lei de Diretrizes e Bases (LDB/4024) aprovada pelo governo Jango. Essa lei vai regulamentar o ensino no Brasil e autorizar a criação de escolas particulares.

Segundo Silva (2013), a estrutura de ensino não sofre alterações significativas em relação a Reforma Campos. Os quatro níveis de escolaridade eram: O pré-primário destinado aos alunos menores de sete anos. O primário tinha duração de quatro anos e, ao finalizá-lo, os alunos deveriam ter no mínimo onze anos para prestar o Exame de Admissão, caso aprovados, eles ingressariam no ginásio, que durava quatro anos. Na sequência do ginásio havia os três anos de colégio, última etapa antes do Ensino Superior.

Em 1971 foi criada a segunda Lei de Diretrizes e Bases (LDB 5692/71). Nessa lei, o Exame a Admissão foi extinto e o primário e o ginásio se fundiram para formar o Ensino de Primeiro Grau, com duração de oito anos – 1ª a 8ª séries do Ensino de Primeiro Grau e o Ciclo Colegial do Ensino Médio passou a ser o Ensino de Segundo Grau.

Segundo Filho (2013), no período da Matemática Moderna, só houve publicações de livros para o Colegial a partir de 1964 e tinha como uma de suas finalidades *uma maior aproximação da Matemática do Colégio da Matemática do Ensino Superior*.

Esse pesquisador ainda diz que houve uma *alteração significativa* no programa de conteúdos que vinha do Programa Mínimo, com *novas finalidades do ensino* trazidas pelo Movimento da Matemática Moderna.

Diante do exposto indagamos: que alterações significativas houve no saber Análise Combinatória no MMM por meio dos livros didáticos? Esse saber passa a viver nos livros didáticos da mesma forma já que não houve mudanças em seu habitat? Esse saber se alimenta de quem e passar a alimentar a quem?

Para tentar responder a esses questionamentos faremos a análise ecológica sobre as tarefas e técnicas de três obras sobre o saber Análise Combinatória:

- Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição, editora L.P.M, São Paulo, 1965. Diretor de Publicação do G.E.E.M, L.H.JACY MONTEIRO.

- Matemática Para o curso Colegial Moderno, Barbosa e Rocha, 1970.

- Matemática - 2 º Grau - BOULOS,P.; WATANABE, R. Vol. 2, 1976.

5.3.1 Análise ecológica dos livros didáticos no MMM.

A LDB nº 4.024/61 acabaria com a lógica de um currículo fixo e rígido das reformas anteriores de seu Art. 35, § 2º

> O Conselho Federal e os conselhos estaduais, ao relacionarem as disciplinas obrigatórias, na forma do

> parágrafo anterior, definirão a amplitude e o desenvolvimento dos seus programas em cada ciclo.

O G.E.E.M em conformidade com a LDB apresenta em 1962 uma proposta de "Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e para o Colégio". Essa proposta não indicava uma organização dos conteúdos em série, só em 1965 que surge um modelo de organização, de acordo com a citação a seguir:

> Os "Assuntos Mínimos", todavia, não indicavam uma organização dos conteúdos segundo séries. Essa organização foi proposta pelo documento intitulado "Sugestões para um Roteiro de Programa para a Cadeira de Matemática" (1965), elaborado por uma comissão designada pelo Departamento de Educação de São Paulo. A comissão foi presidida por Benedito Castrucci, então Presidente do Conselho Consultivo do GEEM, e tinha como Secretário Osvaldo Sangiorgi, Presidente do GEEM desde sua fundação (BÚRIGO,2010,p.9).

Essas sugestões foram publicadas no diário oficial do Estado de São Paulo em janeiro de 1965 e que aparecem no prefácio do livro Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição do mesmo ano como podemos identificar a seguir:

Figura 22 - Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática

Pela sua oportunidade, constará dessa 2ª Edição a publicação das Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática, Curso Secundário: 1º Ciclo, 2º Ciclo e Normal, da Secretaria de Educação de S.Paulo (Departamento de Educação), que constou do Diário Oficial de São Paulo, do dia 19/1/1 965, pág. 42.

Contamos para essa nova edição, com segurança, o mesmo aproveitamento verificado da 1ª edição pelos nossos professôres que - a exemplo de outros países - buscam modernizar o ensino da Matemática no Brasil.

São Paulo, 30 de janeiro de 1 965

GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA = GEEM =

Fonte: G.E.E.M, 1965

Nessa sugestão destacamos o segundo ano colegial que trata do *tema*: Análise Combinatória.

SUGESTÕES PARA UM ROTEIRO DE PROGRAMA PARA A CADEIRA DE MATEMÁTICA

Curso Secundário - 1º Ciclo, 2º Ciclo e Normal

Ano - 1 965.

SEGUNDO ANO COLEGIAL

1. Análise Combinatória e Binômio de Newton:
   a) análise combinatória simples,
   b) noção de probabilidade,
   c) binômio de Newton.

Fonte: G.E.E.M, 1965

Na obra, Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição, observamos que é a primeira vez que aparece o *assunto* Probabilidade e que não tinha antes aparecido nos programas e nos livros didáticos analisados. Além disso, a ordem na organização dos *assuntos* descreve, de certa forma, uma necessidade primeira de estudar análise combinatória como sendo uma espécie que deverá alimentar o *assunto* de probabilidade.

Outro ponto a destacar é que no Curso Normal, destinados a formação matemática para futuros professores do primário, se insere o *tema* Estatística, mas não se faz nenhuma relação com a Análise Combinatória e a Probabilidade, como também, os Cursos Ginasial e Colegial não é habitat da Estatística.

Segundo Valente (2008, *apud* Búrigo,2010), a coleção foi também campeã de vendas ao longo da década. Constituiu-se, portanto, num importante instrumento de legitimação do novo programa o que parece ser corroborado com o livro de Barbosa e Rocha: Matemática para o Curso Colegial Moderno,1970 no qual a seleção dos conteúdos estão em conformidade com as sugestões do G.E.E.M de 1965.

> O livro de Barbosa e Rocha (1970) apresenta o primeiro capítulo com o título “Regras de Contagens”. O segundo capítulo é destinado ao ensino da noção de Probabilidade. Na sequência, os autores descrevem o terceiro capitulo intitulado “Fórmulas do Cálculo de Combinatória”. Observamos que a organização dos capítulos ocorre dessa maneira porque os autores utilizam o primeiro capítulo como fundamentação teórica para os dois seguintes. Este fato representa uma significativa na obra de Barbosa e Rocha (1970) em relação às obras analisadas antes do período em questão. (PINHEIRO, 2015, p.86).

Concordamos com Pinheiro(2015), ao destacar o *nicho* das Regras de Contagem como um discurso tecnológico para os assuntos de probabilidade e fórmulas do cálculo de combinatória.

As análises feitas por Pinheiro (2015) descrevem a força do MMM no Brasil, pois o saber Análise Combinatória na obra de Barbosa e Rocha (1970) apresenta as noções de Arranjos simples, Arranjos com repetições e Permutação simples fundamentados pela teoria dos conjuntos, pela adoção de um certo formalismo na linguagem e à valorização das estruturas algébricas.

> Análise Combinatória, no período de 1960 até 1980, passaram a ser fundamentados teoricamente pela noção de função injetora, a noção de função bijetora, a teoria dos conjuntos e o princípio da indução finita. As técnicas usadas nas tarefas para calcular os Arranjos simples, os Arranjos com repetição e a Permutação simples foram fortemente influenciadas no processo de transformação ocorrido nesse período, em decorrência do Movimento de Matemática Moderna. Nessa direção, o período em questão também é marcado pelo uso do princípio multiplicativo, aditivo, da inclusão-exclusão e da árvore de possibilidades na solução de certos tipos de problemas de contagem que não poderiam ser resolvidos pelos Arranjos, pela Permutação e pela Combinação. (PINHEIRO, 2015, p.129).

Diante do exposto por Pinheiro (2015) destacamos que os tipos de tarefas propostas nessa obra, requerem do professor e do estudante que estes mobilizem conhecimentos anteriores com novos conhecimentos para que sejam capazes de aplicá-los de forma consciente em novas tarefas escolares.

Esse modo de estruturar o saber Análise Combinatória na obra de Barbosa e Rocha (1970) está muito próxima do que analisamos na obra de Hunter (2011), o que descreve uma obra bem fundamentada, porém as teorias que a alimentam podem ter sido mal ingerido por professores e estudantes da Educação Básica. Como afirma Kline (1976)

> Um exame crítico dos usos da teoria de conjuntos nos textos das escolas elementares e “high school” rejeita a afirmação dos modernistas de que a teoria de conjuntos unifica a matemática. Além de usá-la artificialmente para definir conceitos, nenhum uso significativo é feito do assunto, que é de fato posto de lado e somente o vocabulário sobrevive no desenvolvimento posterior (KLINE, 1976, p.119, apud SILVA, 2013, p. 114).
> A teoria de conjuntos é para a matemática elementar um formalismo oco que dificulta ideias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente. A tentativa de envolvê-la é quase ridícula e uma grosseira imitação de pedagogia. A teoria de conjuntos não provou ser o elixir da pedagogia matemática (KLINE, 1976, p. 120, apud SILVA, 2013, p.114).

Essa forma de estruturar a Matemática Moderna segundo Soares, Dassie e Rocha (2004), não era bem compreendida pelos professores, provocando um ensino deficitário, agravando os problemas no processo de ensino e aprendizagem. Essa afirmativa é corroborada com os professores entrevistados na pesquisa de Silva (2013)

> Conforme podemos notar, vários pesquisadores e professores afirmam que o Movimento Matemática Moderna fracassou, várias de suas ideias iniciais foram “deformadas” ou não efetivamente colocadas em prática e o ensino da Matemática não sofreu a transformação esperada. Como as principais causas disso são apontadas

> tanto a ênfase exagerada na Teoria dos Conjuntos quanto a falta de preparação dos professores. (SILVA, 2013, p. 118).

Esse descompasso entre o ideário do MMM e sua efetivação na *instituição* escola, vai provocar um novo Movimento no Brasil, durante os anos de 1970, de crítica e oposição ao que preconizava o Movimento anterior o qual será denominado Movimento da Educação Matemática - MEM.

Segundo Pires (2008), o MEM é formado por matemáticos e especialistas da área de Educação que traziam discussões sobre a possibilidade de mudar a realidade do ensino de Matemática no período do MMM.

O reflexo desse Movimento sobre a organização didática nos LD já podemos identificar no Livro Boulos e Watanabe denominado Matemática - 2 º Grau de 1976.

Figura 23 - Capa do Livro Matemática 2º grau, Vol.2

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Nessa obra o objeto do saber Análise Combinatória encontra-se no capítulo 8 e intitulado Problemas de Contagem.

Figura 24 - Sumário do livro destacando os capítulos 8 e 9

Sumário

CAPÍTULO 8 – **Problemas de contagem (Análise combinatória)**

1. Introdução, *163*
2. Princípio fundamental de contagem, *164*
3. Técnicas de contagem: arranjos, *168*
4. Permutações simples – Fatorial, *173*
5. Combinações simples, *175*
6. Números binomiais, *180*
7. Permutações com elementos repetidos, *183*
8. Binômio de Newton, *186*

CAPÍTULO 9 – **Probabilidade**

1. Introdução, *192*
2. Espaço amostral, *192*
3. Eventos, *195*
4. Probabilidade, *199*
5. Probabilidade condicional, *206*
6. Distribuição binomial. Probabilidade de se obter *k* sucessos em *n* tentativas, *214*

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

O momento do primeiro encontro nessa obra com o saber Análise Combinatória, começa a desenvolver o *tema* Problemas de Contagem a partir de um questionamento feito pelo o autor: "você acredita que contar pode ser difícil?" O segundo momento da exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica, se aglutinam com momento do primeiro encontro por meio de quatro tarefas exemplos e em seguida, o estudante seja capaz de responder ao questionamento levantado.

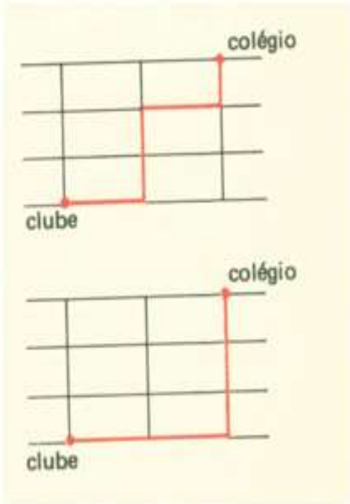
Um aspecto a destacar nessa obra em detrimento das outras, que nela o autor parte de situações particulares para o geral, enquanto nas outras era ao contrário, ou seja, com o par de lentes da TAD em sua organização praxeológica temos na obra: tarefa e técnica para em seguida, embora não explicitado, o discurso tecnológico-teórico enquanto nas anteriores o processo é inverso.

O momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico vai surgindo no momento em que há o trabalho da técnica qundo são evocados os seguintes ostensivos:

Figura 25 - Primeira tarefa exemplo invocando o ostensivo gráfico

1º problema

Quantos percursos distintos de 5 quarteirões existem entre o clube e o colégio? (dois deles estão desenhados nas figuras ao lado).



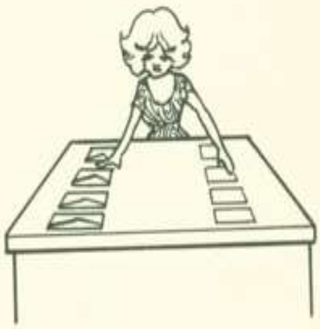
Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

A segunda tarefa exemplo explora a ideia de chance (probabilidade).

Figura 26 - Segunda tarefa exemplo invocando o ostensivo figural

2º problema

Sobre uma mesa estão 4 cartas e seus respectivos envelopes. Uma secretária muito míope, tendo esquecido os óculos, coloca, ao acaso, uma carta em cada envelope: Qual é a chance de cada carta estar no envelope que lhe corresponde?



Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Figura 27 - Terceira tarefa exemplo invocando o ostensivo letras do alfabeto

3º problema

De quantos modos é possível formar a palavra BRASIL partindo do B e indo sempre para a direita ou para baixo?

B R A S I L
R A S I L
A S I L
S I L
I L
L

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Figura 28 - Quarta tarefa exemplo invocando o ostensivo elementos do conjunto.

4º problema

Quantos subconjuntos tem um conjunto de 3 elementos $\{a, b, c\}$? E um conjunto de 30 elementos?

Como você deve ter percebido, a dificuldade nesses problemas é descrever *todas* as possibilidades. Se você não conseguiu resolvê-los,

$\emptyset$
$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$
$\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$
$\{a, b, c\}$

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Após esses tipos de tarefas exemplos, o autor vai introduzir o conceito de Princípio Fundamental de Contagem – P.F.C por meio da seguinte tarefa:

Figura 29 - Tarefa proposta para introduzir o conceito de P.F.C

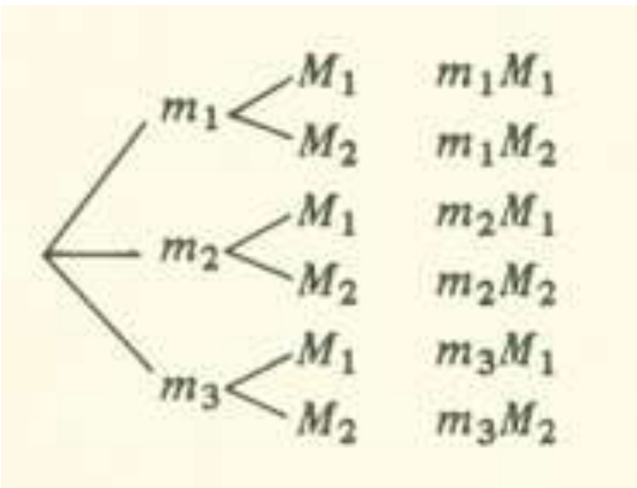
Responda agora às seguintes perguntas (essas são fáceis!):

1) Com 3 tipos de macarrão $\{m_1, m_2, m_3\}$, e 2 tipos de molho $\{M_1, M_2\}$, quantos tipos de macarronada podem ser preparados? (para cada macarronada usa-se um tipo de macarrão e um tipo de molho) (*).
Veja a descrição das macarronadas no esquema ao lado.

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

O autor apresenta a árvore de possibilidade como técnica na resolução da tarefa.

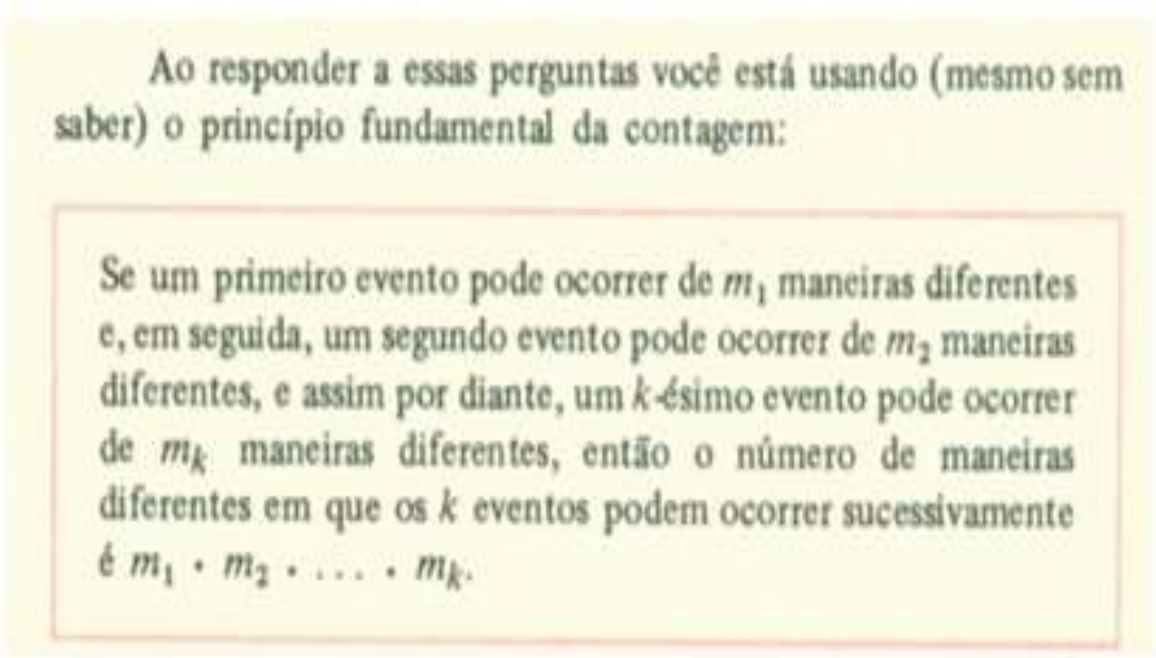
Figura 30 - Modelo gráfico em forma de uma árvore



Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Ele ainda utiliza mais duas tarefas propostas e apresenta a árvore de possibilidades para institucionalizar o conceito de Princípio Fundamental da Contagem e em seguida anuncia sua definição.

Figura 31 - Definição do Conceito de P.F.C



Ao responder a essas perguntas você está usando (mesmo sem saber) o princípio fundamental da contagem:

Se um primeiro evento pode ocorrer de m_1 maneiras diferentes e, em seguida, um segundo evento pode ocorrer de m_2 maneiras diferentes, e assim por diante, um k-ésimo evento pode ocorrer de m_k maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes em que os k eventos podem ocorrer sucessivamente é $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

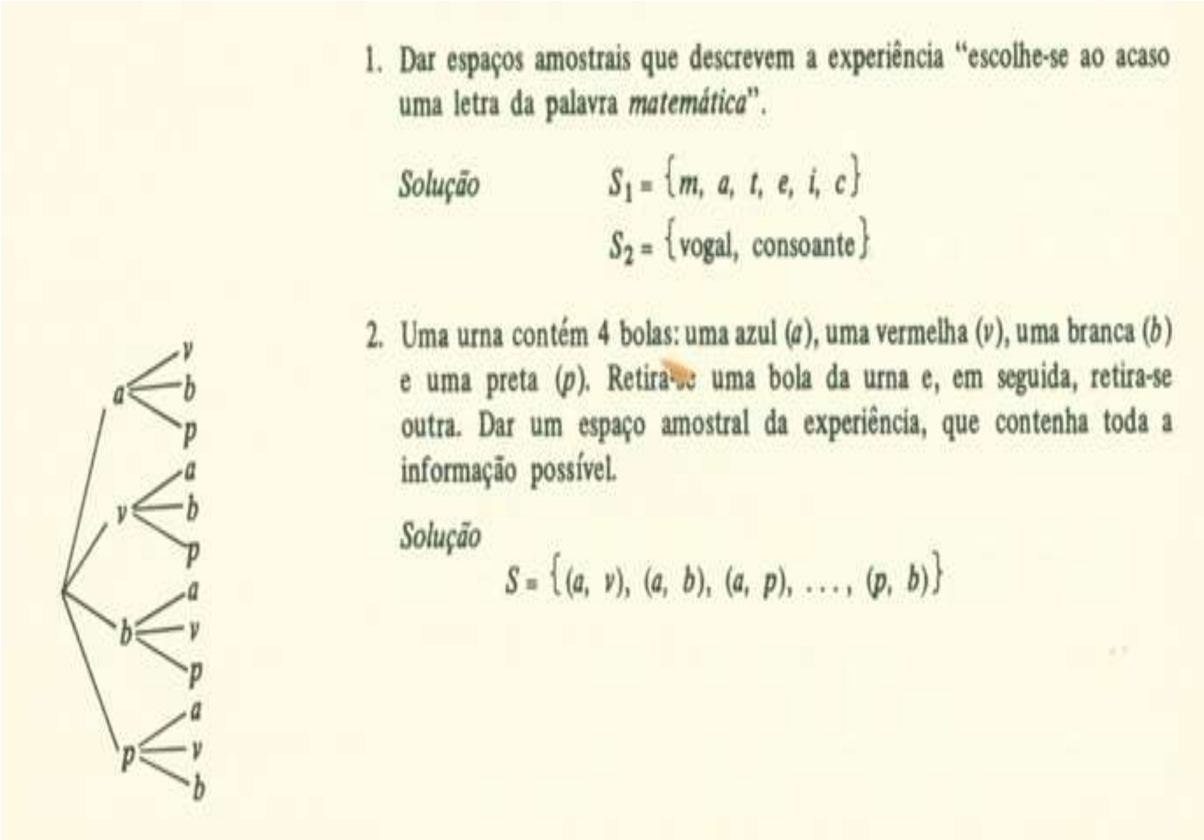
Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

O momento do trabalho da técnica se aglutinam com o momento da institucionalização e o momento da avaliação quando são utilizadas em diferentes tarefas.

Nessa obra, mesmo que não seja explícito, o pensamento recursivo e indutivo são evocados seja pela manipulação do ostensivo gráfico em forma de árvore ou pelo ostensivo aritmético, vale ressaltar ainda, o uso da técnica da árvore de possibilidade na criação de um novo elemento da técnica, o P.F.C.

Destacamos ainda em nossas análises que a manipulação desses ostensivos (gráfico, figural,..) vão emergir na resolução das tarefas exemplos de Probabilidade o que descreve pra nós que o saber da Análise Combinatória nessa obra é o de alimentar diferentes tipos de tarefas de contagem e a Probabilidade. Observemos as duas tarefas exemplos a seguir:

Figura 32 - Duas tarefas exemplos de espaço amostral.



1. Dar espaços amostrais que descrevem a experiência "escolhe-se ao acaso uma letra da palavra *matemática*".

Solução $S_1 = \{m, a, t, e, i, c\}$

$S_2 = \{\text{vogal, consoante}\}$

2. Uma urna contém 4 bolas: uma azul (a), uma vermelha (v), uma branca (b) e uma preta (p). Retira-se uma bola da urna e, em seguida, retira-se outra. Dar um espaço amostral da experiência, que contenha toda a informação possível.

Solução

$S = \{(a, v), (a, b), (a, p), \ldots, (p, b)\}$

Fonte: Boulos e Watanabe, 1976

Podemos destacar que o MMM trouxe muitos pontos positivos sobre o saber Análise Combinatória até então não vistos ainda nas Reformas anteriores, tais como: o aparecimento das técnicas do princípio aditivo, princípio multiplicativo, árvore de possibilidades e a fórmula como *condições* na resolução das tarefas, porém teve como elemento de *restrição,* a Teoria dos conjuntos, em seu discurso tecnológico-teórico.

Destacamos ainda, que é no MMM que encontramos os *Temas* Estatística e Probabilidade embora em nível *escola* diferentes.

Vimos também que nos finais dos anos de 1970 o MEM vai tomando forças em suas discussões *sobre o que e como ensinar* e tudo indica que alguns autores de livros, como o livro de Boulos e Watanabe (1976) em nossa análise sobre o saber Análise Combinatória, vão fazendo um filtro entre o formalismo matemático no período das Reformas permeados pela Álgebra e no MMM permeadas pela Teoria dos conjuntos.

O parágrafo anterior descreve mais uma vez que seja por Reformas ou por Movimentos, os autores de livros didáticos entram em *conformidade* com a proposta curricular vigente e nesse caso não deve ser diferente com as propostas curriculares que surgiram de estudos da Educação Matemática.

Até então, vimos como o saber da Análise Combinatória *viveu* no período das Reformas e do MMM, agora, passaremos a analisar como esse objeto do saber passa a *viver* com o MEM nos seguintes documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais –PCN (PCNEF, PCNEM e PCN+), OCEM e nos Guias de Livros Didáticos fruto das discussões da Educação Matemática.

Para esse fim, faremos análises ecológicas nos documentos curriculares e livros didáticos com o propósito de encontrar respostas as seguintes indagações: como o saber Análise Combinatória *vive* em cada um dos documentos curriculares e nos livros didáticos? Quando mudam os documentos, muda o meio de vida neles e nos livros didáticos? Se sim, de que forma? Como os Guias fazem a vigilância epistemológica sobre o saber da Análise Combinatória nos Livros Didáticos analisados por nós?

5.4 O PERÍODO DO MOVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – MEM

O pioneiro na divulgação do MEM no Brasil foi o professor Ubiratan D´Ambrósio por volta dos anos de 1960 e entorno dos anos de 1980 o número de pessoas interessadas nesse Movimento cresce quando é criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM.

O MEM no Brasil também é marcada pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9394/96) de 20 de dezembro de 1996 que vai estabelecer em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil (crianças até 6 anos), o Ensino Fundamental (duração mínima de oito anos) e o Ensino Médio (duração mínima de três anos), que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum.

Os pressupostos da LDB de 1996 e o avanço com as discussões feitas na área da Educação Matemática, vão ser a força motriz, na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (PCNEF e PCNEM).

Nessas discussões, o MEM propõe romper com a forma estanque, compartimentada, rígida e desarticulada que os conteúdos matemáticos nos *domínios* - da aritmética, da álgebra e da geometria eram trabalhados nas escolas. Justificando que nesse modelo, um certo conteúdo só pode ser introduzido após um determinado conteúdo precedente e cada unidade justifica-se em termos da sua utilidade para a unidade seguinte, como afirma Pires (2000):

> Essa linearidade – que se concretiza numa sucessão de tópicos que devem ser apresentados numa certa ordem, embora possa parecer, a princípio, detalhe de pouca importância – conduz a uma prática educativa excessivamente fechada, em que há pouco espaço para a criatividade, para a utilização de estratégias metodológicas como a resolução de problemas, para a abordagem interdisciplinar, para o estabelecimento de relações entre os diferentes campos matemáticos, enfim, para a consecução de metas colocadas para o ensino de Matemática pelas recentes propostas curriculares. (PIRES, 2000, p. 9).

Com isso, o MEM se apoiando em pesquisadores cognitivistas como Bruner (1974), vai propor um modelo de currículo em espiral por meio da seleção e organização dos conteúdos, no qual os conteúdos são retomados várias vezes em diferentes níveis de abordagem ou relacionados a novos conteúdos.

Essas discussões vão se reverberar nos PCN dos 1º e 2º Ciclos (1ª a 4ª série) e dos 3º e 4º Ciclos (5ª a 8ª série) divulgados respectivamente nos anos de 1997 e 1998, os quais vão distribuir os conteúdos matemáticos a serem ensinados no Ensino Fundamental em quatro *domínios*: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Geometria e Tratamento da Informação numa proposta de currículo em espiral.

Os PCN entre suas orientações, sugerem alguns ajustes na seleção e distribuição dos conteúdos, como é o caso do *tema* Análise Combinatória, que deve ser trabalhado ao longo da Educação Básica, por meio de exploração dos diferentes tipos de tarefas de contagem desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os PCN (BRASIL,1997,1998) inserem, em sua seleção e organização dos conteúdos, o *tema* Análise Combinatória no domínio Tratamento da Informação que abrange ainda outros dois *temas*: estatística e probabilidade.

O *domínio* Tratamento da Informação já vinha sendo discutido e incluído nos currículos de outros países também, por exemplo, nos Estados Unidos, desde a publicação, do National Council of Teachers of Mathematics - NCTM - dos Standards, em 1989 e que em seguida o NCTM divulgou os Principles and Standards, nos quais está incluído, com destaque, o bloco de conteúdos denominado Data Analysis and Probability (CAMPOS, LIMA,2005, p.1).

Campos e Lima (2005) apontam que esses diferentes *temas* do *domínio* Tratamento da Informação, vão surgindo de acordo com as necessidades que demandam de uma sociedade mais informadas e tecnologizada ao destacarem:

> Esse campo do saber está, hoje, no centro das práticas científicas e tecnológicas em todos os níveis, inclusive na fronteira do conhecimento e, além disso, permeia as várias atividades do dia-a-dia do cidadão. Em particular, os novos recursos

> tecnológicos do computador e da calculadora, de difusão crescente na sociedade, ampliaram de forma evidente as potencialidades de tratamento de dados de experimentos e de observações empíricas. Além disso, as pessoas são constantemente expostas a um grande volume de informações que, para serem entendidas e levadas em conta de modo crítico, exigem a leitura e interpretação de gráficos e tabelas e demandam o conhecimento de outras noções estatísticas básicas. (CAMPOS; LIMA, 2005, p. 3).

Logo, a *civilização* Brasil representada pela *sociedade* PCN (BRASIL, 1997e1998) terá inserido esse novo *domínio* Tratamento da Informação em conformidade com as justificativas já ditas anteriormente:

> A demanda social é que leva a destacar este tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade. Integrarão este bloco estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória (BRASIL, 1997, p. 56).

Os PCN (BRASIL,1997 e 1998) ainda sugerem o estudo da Análise Combinatória, por meio de exploração dos diferentes tipos de problemas de contagem desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Essa possibilidade de se trabalhar o saber Análise Combinatória em toda Educação Básica é ratificada por Pessoa e Borba (2010). Elas fizeram uma pesquisa envolvendo uma grande quantidade de alunos, dos três níveis da Escolarização Básica e chegaram à conclusão que o desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre em um longo período de tempo e que na medida que o estudante avança nas séries/ano também há avanço no nível de desempenho.

Diante do exposto, passaremos no próximo subtópico a analisar de que forma é feita essa Transposição Didática do tema Análise Combinatória por meio da ecologia do saber nos PCN e livros didáticos.

5.4.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DE MATEMÁTICA - PCN.

5.4.1.1. PCN do primeiro e segundo ciclos e os Livros Didáticos das séries iniciais

Nos PCN (1º e 2º ciclo) o saber Análise Combinatória habita o bloco de conteúdo Tratamento da Informação e que por sua vez, esse *tema* seja, desenvolvido pela identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.

Entendemos estratégias pessoais como sendo as possíveis técnicas na resolução de um determinado tipo de tarefa, essas técnicas serão evocados por meio dos ostensivos: gráficos, pictóricos, listagem, entre outros.

Nos PCN (BRASIL,1997), o *tema* Análise Combinatória tem por objetivo levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

O *nicho* da Análise Combinatória está fortemente associado a ideia de multiplicação e divisão e as técnicas para resolver o tipo de tarefa são sustentadas pela mobilização dos ostensivos: desenhos e diagramas de ávore.

Figura 33 - Análise Combinatória como ideia de multiplicação

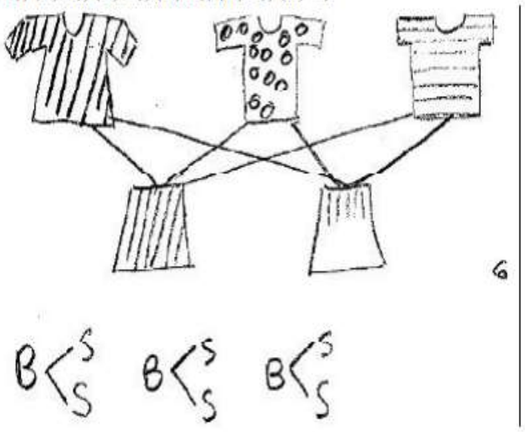
Num quarto grupo, estão as situações associadas à idéia de combinatória.

Exemplo:

— Tendo duas saias — uma preta (P) e uma branca (B) — e três blusas — uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Analisando-se esses problemas, vê-se que a resposta à questão formulada depende das combinações possíveis; no segundo, por exemplo, os alunos podem obter a resposta, num primeiro momento, fazendo desenhos, diagramas de árvore, até esgotar as possibilidades:

(P, R), (P, A), (P, C), (B, R), (B, A), (B, C):



Esse resultado que se traduz pelo número de combinações possíveis entre os termos iniciais evidencia um conceito matemático importante, que é o de produto cartesiano.

Fonte: Brasil, 1997, p.73

O discurso tecnológico-teórico é feito por meio da justificativa ao combinar saias com blusas é o mesmo que combinar blusas com saias e nesse caso evoca o produto cartesiano.

A Análise combinatória também está inserida como ideia da divisão:

Figura 34: Análise Combinatória como ideia de Divisão

— Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?

Os alunos costumam solucionar esse tipo de poblema por meio de tentativas apoiadas em procedimentos multiplicativos, muitas vezes representando graficamente o seguinte raciocínio:

Fonte: Brasil, 1997, p.73

Os PNC (1997), dizem que o estudante resolverá esse tipo de tarefa apoiando-se na técnica de procedimentos multiplicativos associado pela manipulação do ostensivo gráfico.

Figura 35 - Procedimento gráfico e multiplicativo na resolução do tipo de tarefa de Análise Combinatória como ideia de divisão

— Um rapaz e 3 moças formam 3 pares.

— Dois rapazes e 3 moças formam 6 pares.

— Três rapazes e 3 moças formam 9 pares.

— Quatro rapazes e 3 moças formam 12 pares.

Fonte: Brasil (1997, p.73)

O discurso tecnológico-teórico é feito por meio da correspondência de um para muitos, mas inibe a compreensão da divisão como operação inversa da multiplicação.

Ao nosso ver, o objeto do saber Análise Combinatória alimenta o *Tema* Números e Operações quando associado ao *assunto* das operações multiplicação e divisão. Nesse caso, ao nosso ver, há uma mudança de habitat quando seu nicho é na ideia de multiplicação, o que pode amalgamar o conceito de Análise Combinatória como sendo uma operação Matemática, como podemos ver na citação a seguir:

> Note-se que por essa interpretação não se diferenciam os termos iniciais, sendo compatível a interpretação da operação com sua representação escrita. Combinar saias com blusas é o mesmo que combinar blusas com saias e isso pode ser expresso por 2 x 3 = 3 x 2 (BRASIL,1997, p.73).

O próximo subtópico trará a análise ecológica dos livros didáticos das séries iniciais, já destacadas na metodologia em ordem cronológica procurando identificar seu habitat e nicho.

5.4.1.1.1 Análise ecológica da coleção Matemática todo dia das séries iniciais aprovado no PNLD de 1998.

Nos anos de 1993-1994 são definidos critérios para avaliação dos livros didáticos, com a publicação “Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos” MEC/FAE/UNESCO.

Entre os critérios definidos pelo MEC/FAE/UNESCO (BRASIL, 1994), estava na preocupação com o formalismo matemático pela teoria dos conjuntos, como podemos ver na citação a seguir:

> Embora os textos já estejam abandonando os exageros sobre a teoria dos conjuntos existentes há alguns anos, muitos deles ainda apresentam uma ênfase inútil sobre este assunto. Em verdade, no primeiro grau, sua linguagem é totalmente dispensável. A abstração de conceitos como o de conjunto vazio não torna esta linguagem apropriada à maturidade dos alunos. Por outro lado, o emprego de conceitos mais simples, como o de união de conjuntos não tem nenhuma utilidade essencial. Somente no f im do secuIo XIX é que o homem estabeleceu explicitamente a conexão entre o processo de contagem e a teoria dos conjuntos. (BRASIL,1994).

A vigilância epistemológica feito sobre a teoria dos conjuntos, foi um dos pontos mais marcantes para NÃO recomendar alguns livros didáticos, como destacamos a seguir (BRASIL,1994):

a) O livro enfatiza o formalismo inútil, neste estágio do desenvolvimento das crianças, da teoria dos conjuntos;

b) O livro apresenta uma introdução danosa e confusa à teoria dos conjuntos, do ponto de vista conceitual, com erros, inclusive do ponto de vista metodológico, enfatizando a apreensão de uma nomenclatura inútil, neste estágio do desenvolvimento da criança. A passagem da teoria dos conjuntos para a construção do conceito de número está mal feita.

c) O livro apresenta o formalismo da teoria dos conjuntos, com terminologia e simbolismo inútil nesta etapa do desenvolvimento da criança.

O guia de livros didáticos do PNLD (BRASIL,1998) ainda apresentava uma preocupação com o formalismo da Matemática pela teoria dos conjuntos e justificava sua retirada das séries iniciais pelos estudos que vinham sendo desenvolvidos nacionalmente e internacionalmente, por exemplo, pela International Conference on Mathemátical Education de 1976, realizada na Alemanha.

Talvez esse reforço tenha sido pelo fato que os critérios adotados (BRASIL,1994) não foram amplamente divulgados ou pelo desconhecimento das editoras e autores de livros didáticos, como afirma Marciel (2014).

> Em 1993 foi realizada, a pedido do MEC, uma avaliação pedagógica dos livros didáticos destinados às séries iniciais do ensino fundamental. Entretanto, o resultado dessa avaliação teve sua divulgação adiada por várias vezes e quando de fato foi tornada pública, causou grande repercussão entre autores, editoras e professores, sendo que os primeiros, recorreram judicialmente alegando desconhecerem os critérios da avaliação. (MARCIEL, 1994, p.273).

O PNLD (BRASIL,1998) não traz um destaque para o objeto do saber Análise Combinatória. Os *temas* destacados no guia de livros didáticos são: análise de gráficos, números e operações, geometria e medida. Como podemos observar na ilustração a seguir:

Figura 36 - Conteúdos Estruturantes das Séries Iniciais

Considera-se que o exercício da cidadania, na complexa sociedade atual, exige cada vez mais a habilidade de interpretar e analisar criticamente informações qualitativas e quantitativas, que freqüentemente se apresentam sob a forma de gráficos. Exige igualmente a capacidade de fazer estimativas e previsões, estabelecer relações e criar modelos representativos de situações reais. É portanto imprescindível incluir no ensino básico os conteúdos de dois domínios da Matemática: o estudo dos números e o da Geometria. Na articulação desses conteúdos, a noção de medida desempenha um papel importante. Além da construção da linguagem numérica, é necessário contemplar nesse processo a da linguagem dos gráficos e a da Geometria.

Conteúdo

Fonte: PNLD (BRASIL, 1998, p.176)

Isso fica claro na resenha do guia PNLD(BRASIL,1998), sobre o livro didático **Matemática todo dia de 1998** no qual o saber análise combinatória não vive nele e nem alimenta outros domínios**:** números e operações, medidas e geometria.

Figura 37 - Conteúdos do livro Matemática Todo Dia

O volume destinado à 1ª série estrutura-se em três unidades: números, Geometria e medidas. Elas estão subdivididas em módulos, que abordam semelhança e diferença; registro do tempo (relógio e calendário); contagem, cálculos e registro de quantidades; símbolos matemáticos, representação do espaço; dezena e centena; números pares; operações; medida de comprimento (metro), capacidade e massa; agrupamentos, composição e decomposição de figuras geométricas; representação de sólidos e figuras planas.

O volume destinado à 2ª série apresenta os seguintes conteúdos: medida de tempo (calendário e relógio) e comprimento; Geometria (formas geométricas e representações no espaço); números (contagem, pares e ímpares, sistema de numeração decimal – até a ordem do milhar); operações (multiplicação e divisão – significados, cálculos).

Os conteúdos do livro de 3ª série são: números naturais (sistema de numeração); números racionais (representação fracionária e decimal); operações (cálculos e registros); Geometria (figuras planas, composição e decomposição, ângulos, paralelismo e perpendicularismo, figuras tridimensionais); medida de tempo (minuto e hora), massa, capacidade e superfície.

Os conteúdos do livro da 4ª série são: números naturais (sistema de numeração decimal, múltiplos e divisores); número racional (representação fracionária e decimal); operações (cálculos com números naturais e racionais, expressões numéricas); medida (tempo, comprimento, superfície); Geometria (figuras planas – quadriláteros e círculos e sólidos – cubos); porcentagem; e sistema monetário.

Fonte: PNLD (BRASIL, 1998)

Porém, há lgumas obras analisadas no PNLD (1998) que trazem o saber Análise Combinatória como ideia de multiplicação (produto cartesiano). Isso parece descrever que o autor está em conformidade com os PCN (1997), já que não há um destaque no PNLD (BRASIL, 1998).

Figura 38 - Livro Promat – Projeto Oficina de Matemática

> A variedade de situações-problema apresentadas permite aprofundar o estudo dos significados das operações, inclusive com a introdução de novas idéias, como a de combinação (produto cartesiano). Ainda se propõe aos alunos que elaborem na multiplicação situações-problema, que favorecem o desenvolvimento da capacidade de análise lógica e da criatividade.

Fonte: PNLD (BRASIL, 1998)

Isso nos mostra que até o PNLD (1998), a vigilância epistemológica estava concentrada na teoria dos conjuntos, na sobrecarga de conteúdos nas quatro primeiras séries do 1º grau, na concentração do estudo das frações em detrimento do estudo dos números decimais e no abandono da geometria.

No PNLD (BRASIL, 2000-2001) ainda havia um distanciamento entre os blocos de conteúdos definidos pelos PCN (1997), pois o guia de livros didáticos (PNLD,2000-2001) ainda separava a *disciplina* Matemática em quatro domínios: aritmética, álgebra, medidas e geometria, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 39 - Domínios da Matemática: aritmética, álgebra, medidas e geometria

> Além disso, o uso da Matemática torna relevante uma inter-relação de seus conteúdos, articulando as áreas de Aritmética, Álgebra, Medidas e Geometria.

Fonte: PNLD (BRASIL,2000-2001)

Porém algumas obras, parecem estar em conformidade com os PCN (1997) ao introduzirem noções elementares sobre combinatória, estatística e probabilidade o que provocou, ao nosso ver, um olhar mais minucioso sobre os livros didáticos como podemos ver na figura a seguir:

Figura 40 - Proposta Inovadoras para o Ensino de Matemática.

> Este Guia traz uma rica seleção de livros de Matemática produzidos para o segmento de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental. Nota-se facilmente que, ao lado de textos já apresentados anteriormente, o Guia contém novos livros, muitos deles com propostas renovadoras do ensino de Matemática. As resenhas que aparecem a seguir devem ser lidas com bastante cuidado, pois reúnem material inédito e grande número de livros em primeira edição.

Fonte: PNLD, (BRASIL, 2000-2001).

A obra que escolhemos para retratar essa mudança é a coleção Matemática: Vivência e Constução, 2001 do autor Luiz Roberto Dante, pois a mesma obteve três estrelas as quais indicam que o livro é recomendado com distinção.

5.4.1.1.2 Análise ecológica do livro didático Matemática: Vivência e Constução das séries iniciais aprovado no PNLD de 2000-2001.

A coleção é formada por 4 volumes (1ª a 4ª série) e o objeto do saber AC vive ao habitar dos livros da 2ª a 4ª série. Ao longo dos três livros, encontramos tarefas de produto cartesiano, de arranjos (simples e com repetição), de permutação (simples e com repetição) de Combinação que alimentam o saber AC e que discutiremos nas análises dos momentos didáticos.

O Livro da 2ª série tem um total de 264 páginas e catorze capítulos. O objeto do saber Análise Combinatória aparece no Capítulo 9, intitulado *Possibilidades ou raciocínio combinatório* em um total de 4 páginas.

O Livro da 3ª série tem um total de 284 páginas e dezesseis capítulos. O objeto do saber Análise Combinatória aparece, também, no Capítulo 9 intitulado *Possibilidades ou raciocínio combinatório* em um total de 6 páginas.

O Livro da 4ª série tem um total de 280 páginas e quinze capítulos. O objeto do saber Analise Combinatória aparece no Capítulo 5 intitulado *Possibilidades ou raciocínio combinatório* em um total de 6 páginas.

A ecologia das tarefas nos livros da 3ª e 4ª série tem seu nicho em alimentar novas técnicas, tais como, árvore de possibilidades e princípio fundamental de contagem os quais ajudarão em seu pensamento recursivo.

Em nível da escala de codeterminação o *tema* AC nos PCN (1º e 2º ciclo) se situa no *domínio* Tratamento da Informação, porém nessa coleção, identificamos que o *tema* AC tem seu nicho em alimentar o *domínio* de Números e Operações, pois não há nenhuma articulação entre os temas da Estatística e da Probalidade.

No próximo subtópico faremos uma análise dos livros da 2ª a 4ª série usando os critérios de análise da organização didática.

5.4.1.1.3 Análise dos momentos de estudos ou momentos didáticos na coleção Matemática: Vivência e Constução das séries iniciais aprovado no PNLD de 2000-2001 em sua organização didática sobre o saber Análise Combinatória.

No livro da 2ª série, o momento do primeiro encontro com saber AC se dá por meio de um objeto ostensivo imagem com o objetivo de conceituar possibilidade e descrever o que seja raciocínio combinatório.

Figura 41 - Introduzindo o Conceito de Possibilidade.

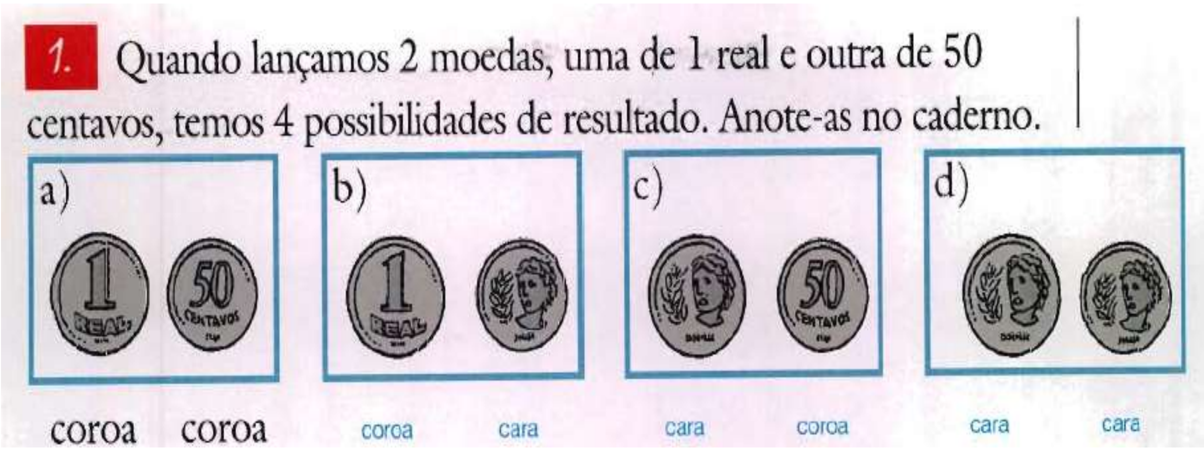
Fonte: Dante (2001), 2ª série

O momento da exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica se dará por meio das 12 tarefas propostas. Destacaremos a seguir, algumas delas.

Tipo de tarefa (t), arranjos com repetição (AR_m^p): Escrever todos os arranjos com repetição de m elementos p a p.

Tarefa (T_{AR}): Escrever todas as possibiidades ao lançar duas moedas de valores distintos de dar cara ou coroa.

Figura 42 - Arranjo com Repetição



Fonte: Dante (2001), 2ª série.

O autor não deixa claro as etapas da técnica (τ_1) para executar esse tipo de tarefa e pressupomos que ela possa ser dividida em duas etapas.

a) identificar o que seja cara e coroa nas moedas.

b) nomear as moedas restantes por cara ou coroa.

c) listar todas as possibilidades.

O discurso tecnológico-teórico: listagem

A figua a seguir, solicita dois tipos de tarefas para a mesma tarefa: quais e quantas possibilidades. Nesse caso, vamos separá-las em Tipo de tarefa (T_{2a}) e(T_{2b}).

Tipo de tarefa (t_{PC}), produto cartesiano[18] (PC): Determinar quais e quantas maneiras distintas de combinar elementos de dois ou mais conjuntos.

[18] Borba e Pessoa (2010) classificam os diferentes tipos de problemas Combinatórios da seguinte forma: Produto Cartesiano: Dados dois (ou mais) conjuntos distintos, os seus elementos são combinados para formar um novo conjunto. A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado; Permutação: Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); A ordem dos

Figura 43 - Produto Cartesiano

Fonte: Dante (2001), 2ª série.

Tarefa (T_a): Escrever todos os resultados possíveis de pares de roupas que a boneca poderá se vestir, escolhendo entre 2 camisetas e 3 saias.

O autor não deixa claro as etapas da técnica (τ_a) para executar esse tipo de tarefa e pressupomos que ela possa ser dividida em três etapas.

a) identificar o número de etapas, nesse caso, duas, na primeira, existem 2 possibilidades de escolher as camisetas e na segunda, 3 possibilidades de escolher as saias.

b) preencher a tabela de dupla entrada com todos os pares (camiseta e saia), por meio do ostensivo desenhos ou do ostensivo escrito.

c) escrever todos os pares de camisetas e saias obtidos pela utilização do objeto ostensivo desenho ou ostensivo escrito.

---

elementos gera novas possibilidades; Arranjo: Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; A ordem dos elementos gera novas possibilidades; Combinação: Os elementos de um conjunto único são combinados e nos quais a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

O discurso tecnológico-teórico: listar todas as combinações possíveis por meio do ostensivo desenho ou ostensivo escrito.

Tiarefa (T_b): Calcular o número de resultados possíveis que a boneca poderá se vestir, tendo 2 camisetas e 3 saias.

O autor não deixa claro as etapas da técnica (τ_b) para executar esse tipo de tarefa e pressupomos que ela possa ser dividida em em três etapas.

a) identificar o número de etapas, nesse caso, duas, na primeira, 2 possibilidades de escolher uma entre as camisetas (verde ou amarelo) e na segunda, 3 possibilidades de escolher uma saia (saia branca, saia listrada ou saia xadrez).

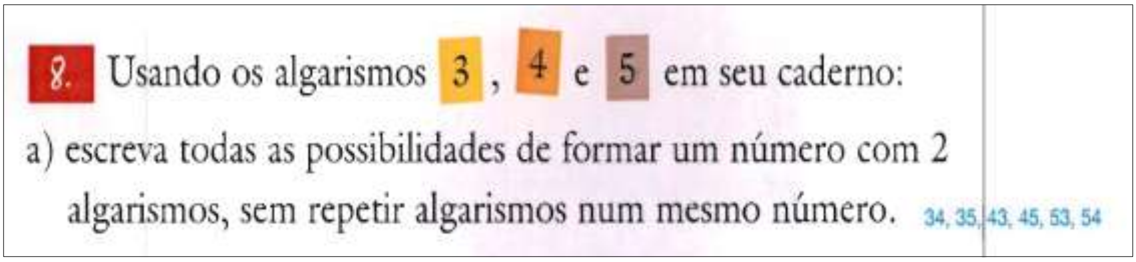
b) preencher a tabela de dupla entrada com todas as possibilidades de pares (camiseta e saia), por meio do ostensivo desenhos ou do ostensivo escrito.

c) contar o número de pares obtidos na listagem ou multiplicar o número de linhas pelo número de colunas (multiplicação retangular) por meio do ostensivo tabela, nesse caso 2x3=6.

O discurso tecnológico-teórico: contagem de um em um ou multiplicação retangular.

Tarefa (t_A), arranjos simples (A_m^p): Escrever todos os arranjos de ***m*** elementos distintos ***p*** a ***p.***

Figura 44 - Arranjo Simples


8. Usando os algarismos 3 , 4 e 5 em seu caderno:

a) escreva todas as possibilidades de formar um número com 2 algarismos, sem repetir algarismos num mesmo número. 34, 35, 43, 45, 53, 54

Fonte: Dante (2001), 2ª série.

Tipo de tarefa (T): Escrever todas as possibilidades para formar número com dois algarismos distintos, usando os algarismos 3, 4 e 5.

O autor não deixa claro as etapas da técnica (τ) para executar esse tipo de tarefa e pressupomos que ela possa ser dividida em quatro etapas.

a) identificar as possibilidades de algarismos para as unidades.

b) identificar que não pode repetir algarismos.

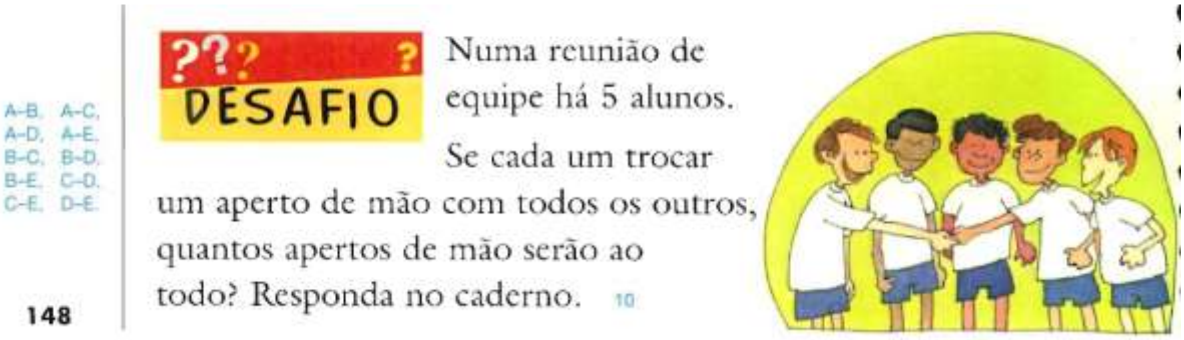
c) identificar as possibilidades de algarismos para as dezenas.

d) escrever todas as possibilidades de um número com 2 algarismos.

O discurso tecnológico-teórico: listar todos os pares forados.

Tipo de tarefa (t_A), combinações simples (C_m^p): Escrever todas as combinações de ***m*** elementos distintos ***p*** a ***p.***

Figura 45 - Combinações Simples


A-B, A-C,
A-D, A-E,
B-C, B-D,
B-E, C-D,
C-E, D-E.

148

??? ? DESAFIO

Numa reunião de equipe há 5 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão serão ao todo? Responda no caderno. 10

Fonte: Dante (2001), 2ª série.

Tarefa (T): Calcular o número de apertos de mãos, entre 5 alunos, se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros.

O autor não deixa claro as etapas da técnica (τ) para executar esse tipo de tarefa e pressupomos que ela possa ser dividida em três etapas.

a) identificar que o primeiro colega tem quatro possibilidades de trocar um aperto de mão.

b) identificar que o segundo colega já apertou a mão do primeiro, logo tem 3 possibilidades de trocar um aperto de mão, que o terceiro tem 2 possibilidades e o quarto 1 possibilidade.

c) escrever todas as possibilidades de trocar um aperto de mão por meio do ostensivo desenho ou pares de letras.

O discurso tecnológico-teórico: Listar os ostensivos desenhos ou pares de letras e fazer a contagem de um em um.

No livro da 2ª série, a técnica usada é a listagem para resolver os diferentes tipos de tarefa, porém há criação de novas técnicas à medida que se avança nos livros das séries seguintes, o que passaremos a descrever a seguir.

No livro da 3ª série, o momento do primeiro encontro com saber AC se dá por meio de um objeto ostensivo imagem com o objetivo de conceituar possibilidade e descrever o que seja raciocínio combinatório.

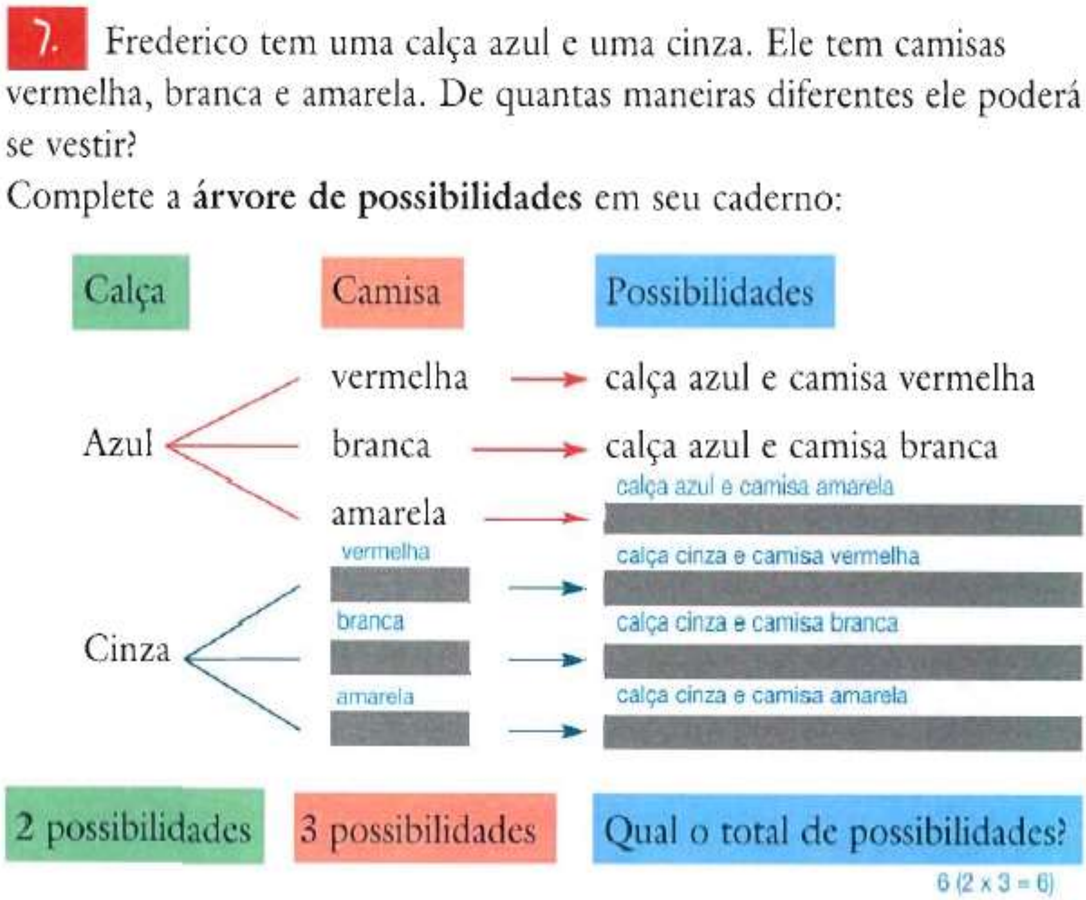
Figura 46 - Introduzindo o Conceito de Possibilidade.

Fonte: Dante (2001), 3ª série.

O momento da exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica se dará por meio das 13 tarefas propostas. Destacaremos a seguir, algumas delas, que inserem novas técnicas.

Tipo de tarefa (t_{PC}), produto cartesiano (PC): Determinar o número de maneiras distintas de combinar elementos de dois ou mais conjuntos.

Figura 47 - Produto Cartesiano



Fonte: Dante (2001), 3ª série.

A estrutura desse tipo de tarefa é a mesma encontrada no livro da 2ª série, mas o nicho dela está em desenvolver outras técncias, a árvore de possiblidades e de certa forma, procurando institucionalizar o princípio fundamental de contagem.

Tarefa (T): Calcular todos os resultados possíveis de uma pessoa se vestir, escolhendo entre 2 calças e 3 camisas.

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 45, que o autor divide a técnica (τ) em três etapas.

a) identificar o número de etapas, nesse caso, duas, na primeira, existem 2 possibilidades de escolher as calças (azul ou cinza) e na segunda, 3 possibilidades de escolher as camisas (vermelha, branca ou amarela).

b) completar a árvore de possibilidades ligando a calça azul à camisa vermelha, ligando a calça azul à camisa branca, ligando a calça azul à camisa amarela, ligando a calça cinza à camisa vermelha, ligando a calça cinza à camisa branca e ligando à calça cinza à camisa amarela.

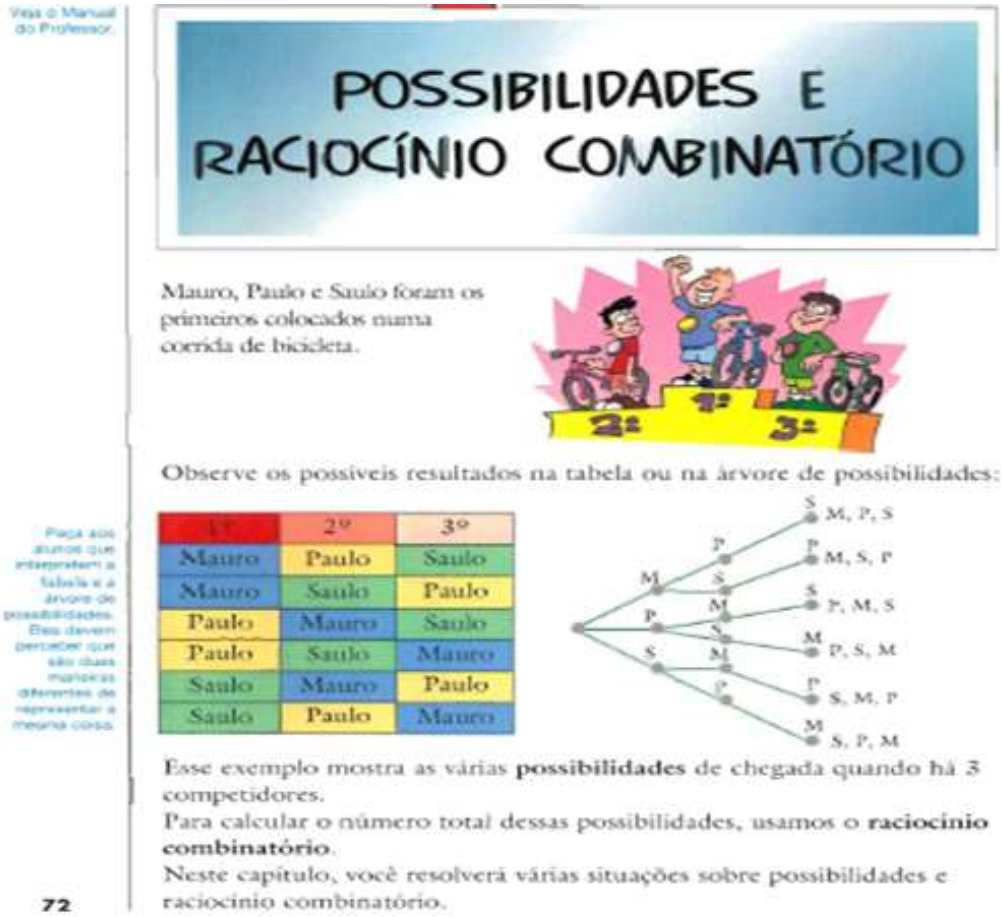
c) seguir as setas para listar todas as possibilidades de se vestir usando uma calça e uma camisa.

d) contar o número de possibilidades, nesse caso, 2x3=6.

O discurso tecnológico-teórico: justifica-se pela árvore de possibilidade e a noção do Princípio Fundamental da Contagem.

No livro da 4ª série, o momento do primeiro encontro com saber AC se dá por meio de um objeto ostensivo imagem com o objetivo de conceituar possibilidade e descrever o que seja raciocínio combinatório.

Figura 48 - Introduzindo o Conceito de Possibilidade.



Veja o Manual do Professor.

POSSIBILIDADES E RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Mauro, Paulo e Saulo foram os primeiros colocados numa corrida de bicicleta.

Observe os possíveis resultados na tabela ou na árvore de possibilidades:

1º	2º	3º
Mauro	Paulo	Saulo
Mauro	Saulo	Paulo
Paulo	Mauro	Saulo
Paulo	Saulo	Mauro
Saulo	Mauro	Paulo
Saulo	Paulo	Mauro

M, P, S
M, S, P
P, M, S
P, S, M
S, M, P
S, P, M

Peça aos alunos que interpretem a tabela e a árvore de possibilidades. Eles devem perceber que são duas maneiras diferentes de representar a mesma coisa.

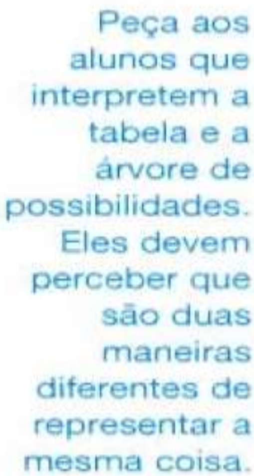
Esse exemplo mostra as várias **possibilidades** de chegada quando há 3 competidores.
Para calcular o número total dessas possibilidades, usamos o **raciocínio combinatório**.
Neste capítulo, você resolverá várias situações sobre possibilidades e raciocínio combinatório.

72

Fonte: Dante (2001), 4ª série.

A ecologia das tarefas são as mesmas, porém o autor procura orientar o professor para chamar a atenção dos estudantes que as técnicas de listagem, tabular e da árvore de possibilidades são diferentes para responderem as mesmas tarefas, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 49 - Orientações sobre diferentes técnicas para resolver mesmo tipo de tarefa

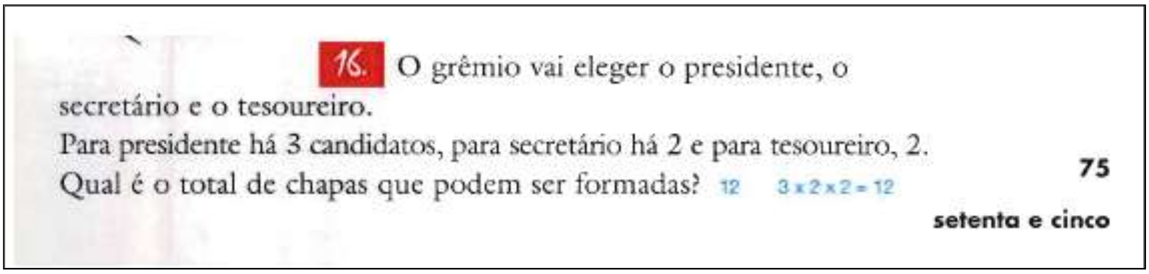

Peça aos alunos que interpretem a tabela e a árvore de possibilidades. Eles devem perceber que são duas maneiras diferentes de representar a mesma coisa.

Fonte: Dante (2001), 3ª série, p.72

No livro da 4ª série, o autor vai de fato, institucionalizar o princípio fundamental de contagem como técnica, como descreveremos na tarefa a seguir.

Tipo de tarefa (t_{PC}), produto cartesiano (PC): Determinar quantas maneiras distintas de combinar elementos de dois ou mais conjuntos.

Figura 50 - Produto Cartesiano


16. O grêmio vai eleger o presidente, o secretário e o tesoureiro.
Para presidente há 3 candidatos, para secretário há 2 e para tesoureiro, 2.
Qual é o total de chapas que podem ser formadas? 12 $3 \times 2 \times 2 = 12$

75
setenta e cinco

Fonte: Dante (2001), 4ª série.

Tarefa (T): Determinar quantas chapas podem ser formadas com 1 presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro.

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 48, que o autor divide a técnica (τ) em duas etapas.

a) identificar o número de etapas, nesse caso, três, na primeira, existem 3 possibilidades de escolher um presidente, na segunda, 2 possibilidades de escolher um secretário e na terceira, 2 possibilidades de escolher um secretário.

b) multiplicar o número de possibilidades de cada etapa, ou seja, aplicar o principiofundamental de contagem neste tipo de tarefa temos: 3x2x2=12.

O discurso tecnológico-teórico: justifica-se pela utilização do Princípio Fundamental da Contagem para determinar o número de chapas possíveis para serem formadas.

O momento da institucionalização ocorre ao mesmo tempo com o momento da avalição por meio dos exercícios ao longo das séries.

Com a promulgação da Lei n. 11.274, em 6 de fevereiro de 2006, o ensino fundamental brasileiro passa a ter nove anos de duração, ou seja, as séries iniciais (1º ao 5º ano) e as séries finais (6º ao 9º ano), pela inclusão das crianças de seis anos de idade. Nesse caso, passaremos a analisar a coleção de livro didático intitulado A Conquista da Matemática do 1º ao 5º ano do autor Giovanni Jr.

5.4.1.1.4 Análise ecológica do livro didático A Conquista da Matemática das séries iniciais aprovado no PNLD de 2013.

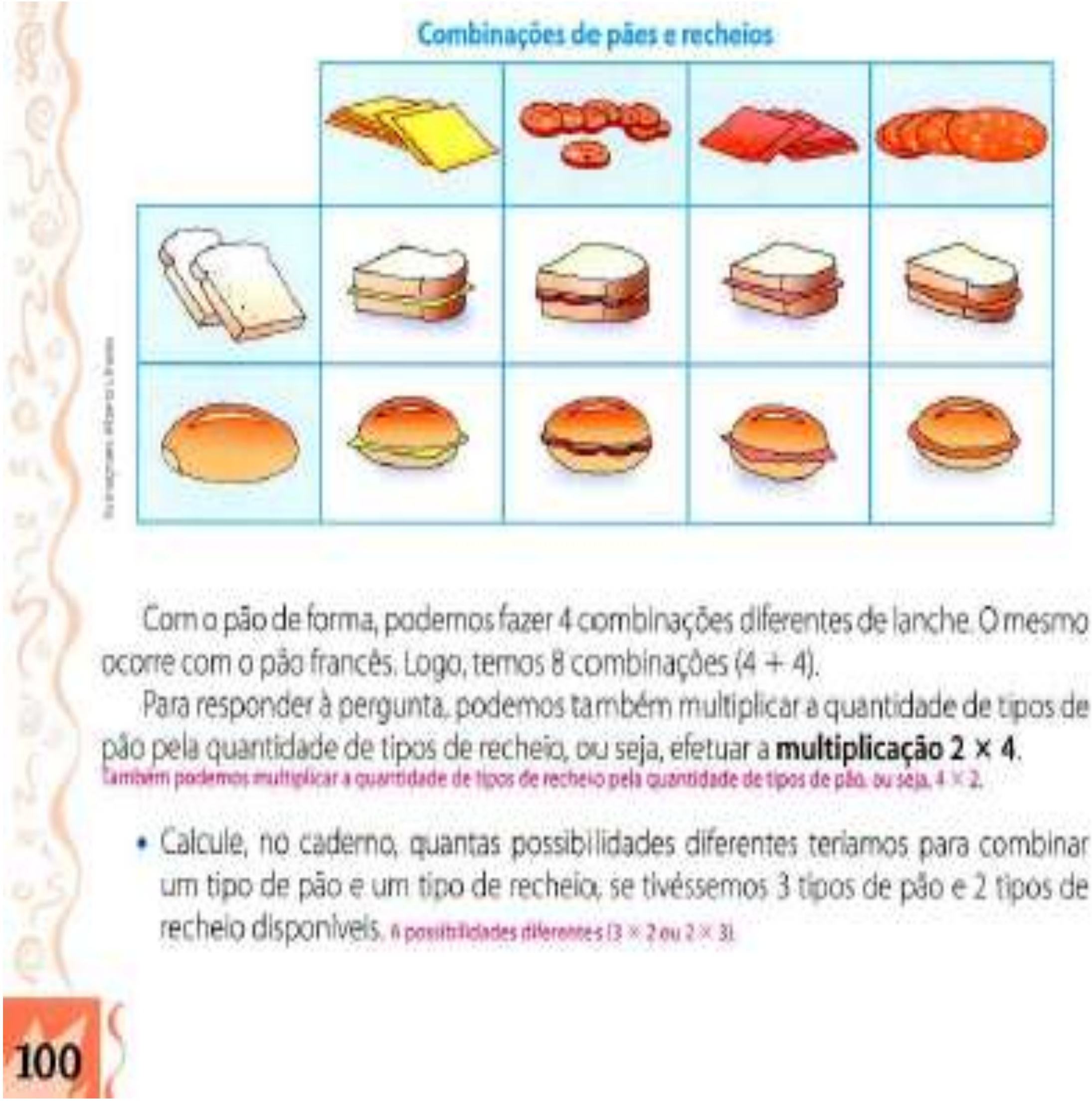
A coleção é formada por 5 volumes (1º ao 5º ano) e o objeto do saber AC vive ao habitar os livros do 4º e 5º ano. Ao longo dos dois livros só encontramos tarefas de produto cartesiano.

O Livro do 4º ano tem um total de 288 páginas, divididas em 7 unidades. O objeto do saber Análise Combinatória aparece na unidade 4 (Operações com números naturais: multiplicação e divisão), como tópico intitulado: Achar o número de possibilidades (fazer combinações) em um total de 1 página.

O Livro do 5º ano tem um total de 288 páginas, divididos em 7 unidades. O objeto do saber Análise Combinatória aparece na unidade 2 (Operações com números naturais), como tópico intitulado: disposição retangular.

As tarefas propostas para o 4º e 5º ano, em nada favorecem, para o desenvolvimento do raciocínio combinatória, pois não há uma ampliação das tarefas e nem das técnicas. Como podemos observar nas duas tarefas a seguir:

Figura 51 - Produto Cartesiano



Combinações de pães e recheios

Com o pão de forma, podemos fazer 4 combinações diferentes de lanche. O mesmo ocorre com o pão francês. Logo, temos 8 combinações (4 + 4).

Para responder à pergunta, podemos também multiplicar a quantidade de tipos de pão pela quantidade de tipos de recheio, ou seja, efetuar a **multiplicação 2 × 4**.
Também podemos multiplicar a quantidade de tipos de recheio pela quantidade de tipos de pão, ou seja, 4 × 2.

- Calcule, no caderno, quantas possibilidades diferentes teríamos para combinar um tipo de pão e um tipo de recheio, se tivéssemos 3 tipos de pão e 2 tipos de recheio disponíveis. 6 possibilidades diferentes (3 × 2 ou 2 × 3).

100

Fonte: Giovanni Jr, 4º ano.

Figura 52 - Produto Cartesiano

1. A equipe de futebol da escola tem 5 camisas e 3 calções, todos diferentes, para compor o uniforme.

a) Quantas possibilidades diferentes há para compor o uniforme? 15 possibilidades.

b) Use uma multiplicação para mostrar quantas possibilidades diferentes há para compor o uniforme. 5 × 3 = 15

62

Fonte: Giovanni Jr, 4º ano.

A ecologia da tarefa e da técnica nesses dois livros tem seu nicho em alimentar o *domínio* dos Número e Operações, ao trabalhar tarefa do tipo Produto Cartesiano como ideia de multiplicação.

Os resultados encontrados por nós nessa obra, Oliveira (2014) encontrou também em duas outras obras do 1º ao 5º ano aprovadas no PNLD de 2013 analisadas por ela e destaca: nos livros do 1º ao 3º ano o conteúdo de Combinatória não é contemplado; Os livros só trabalham problemas de Produto Cartesiano e usam a multiplicação retangular ou Princípio Fundamental da Contageme na resolução das tarefas.

Nossas considerações sobre as análise das obras das séries iniciais de 2000 e 2001, destacamos em nível da escala de codeterminação que o *tema* AC nos PCN (1º e 2º ciclo), como também, no PNLD 2103 se situa no *domínio* Tratamento da Informação, porém nessa coleção, identificamos que o *tema* AC tem seu nicho em alimentar o *domínio* de Números e Operações, pois não há nenhuma articulação entre os temas da Estatística e da Probalidade.

Vale ressaltar ainda, que entre as obras analisadas, a ecologia das tarefas e técnicas se concentram em tarefas de Produto Cartesiano para desenvolver a ideia de multiplicação retangular ou princípio multiplicativo.

Contudo, ao nosso ver, as obras estão em conformidade com os PCN (1º e 2º Cilcos) ao trabalhar a ideia de multiplicação, como, produto cartesiano, por outro lado, as obras aprovadas no PNLD 2013 se distância o que preconiza os PCN (1º e 2º Ciclos) em não trabalhar ao longo das séries iniciais esse saber e que cabe ao PNLD, como, *instituição* fazer essa vigilância epistemológica. O tópico seguinte trará as análises ecológicas dos PCN das séries finais e dos livros didáticos de 5ª a 8ª série.

5.4.1.2 PCN do terceiro e quarto Ciclos e os Livros Didáticos das séries finais.

Nos PCN (3º e 4º cilcos), embora o objeto do saber AC tenha seu habitat no domínio Tratamento da Informação, seu nicho é bem destacado no domínio de Números e Operações.

O *tema* AC alimenta o *tema* Operações Aritméticas, quando associado em situações relacionadas a multiplicação e divisão no conjunto dos números naturais, como podemos ver a seguir:

> Associadas à ideia de combinatória. Exemplo: Lancei dois dados: um vermelho e um azul. Quantos resultados diferentes é possível encontrar? A combinatória também está presente em situações relacionadas com a divisão: No decorrer de uma festa, foi

> possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todas elas dançaram com todos os rapazes, quantos eram os rapazes? (BRASIL, 1998, p. 111).

Vale ressaltar que nas obras analisadas do 1º ao 5º ano, a divisão não está associada à ideia de AC. Nesse caso, estaremos atentos, se as coleções, das séries finais do Ensino Fundamental abordarão essa ideia.

Os PCN (3º e 4º ciclos) propõem que a ecologia das tarefas de AC sejam ricas, diversificadas e que inicialmente, sejam resolvidas evocando os ostensivos: (desenhos, listagem, tabelas de dupla entrada e árvore de possibilidades) que levarão o estudante a compreender o princípio multiplicativo.

> Os primeiros contatos dos alunos com os problemas de contagem devem ter como objetivo a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos, de maneira formal e direta fazer uma lista de todos os agrupamentos possíveis e depois contá-los. A exploração dos problemas de contagem levará o aluno a compreender o princípio multiplicativo. Tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar? Além disso, o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1998, p.136)

No tópico seguinte faremos a análise ecológica das coleções das séries finais do Ensino Fundamental.

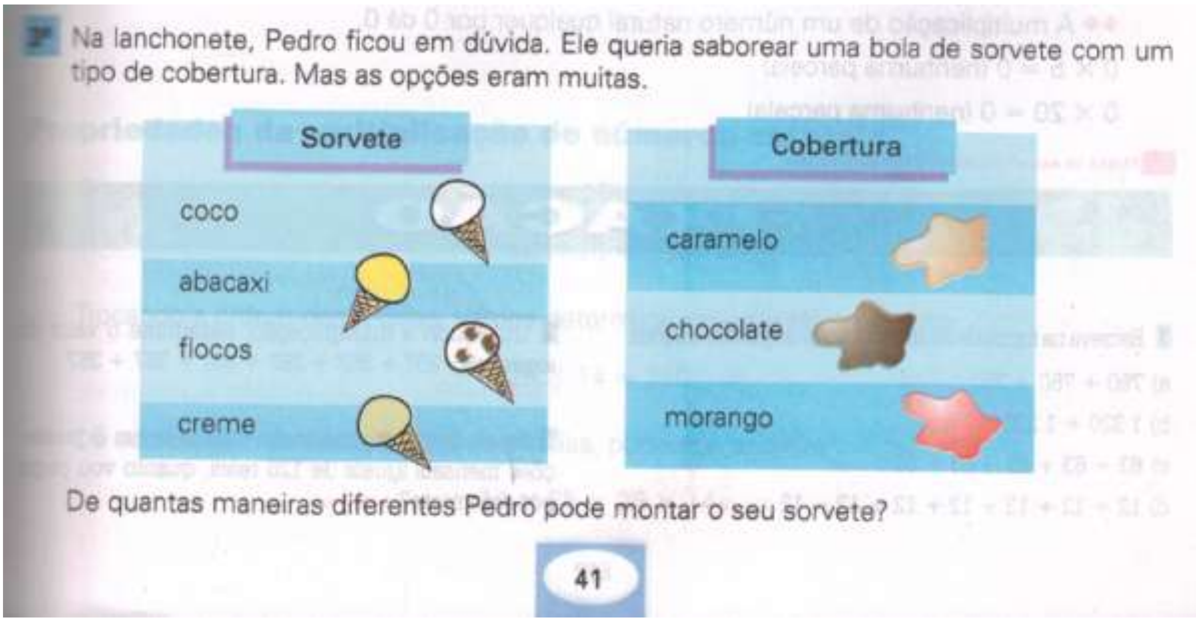
5.4.1.2.1 Análise ecológica do livro didático A Conquista da Matemática-Nova das séries finais aprovado no PNLD de 2002

A coleção é formada por 4 volumes (5ª a 8ª série) e o objeto do saber AC vive ao habitar o livro da 5ª série, tendo seu nicho associado a ideia de multiplicação.

O Livro da 5ª série tem um total de 264 páginas, divididos em 10 unidades. O objeto do saber Análise Combinatória aparece na unidade 3 (Operações com números naturais), como ideia associada a multiplicação.

As tarefas propostas para a 5ª série, em nada favorecem, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois não há uma ampliação das tarefas e nem das técnicas. Como podemos observar nas duas tarefas a seguir:

Figura 53 - Produto Cartesiano



2ª Na lanchonete, Pedro ficou em dúvida. Ele queria saborear uma bola de sorvete com um tipo de cobertura. Mas as opções eram muitas.

Sorvete
coco
abacaxi
flocos
creme

Cobertura
caramelo
chocolate
morango

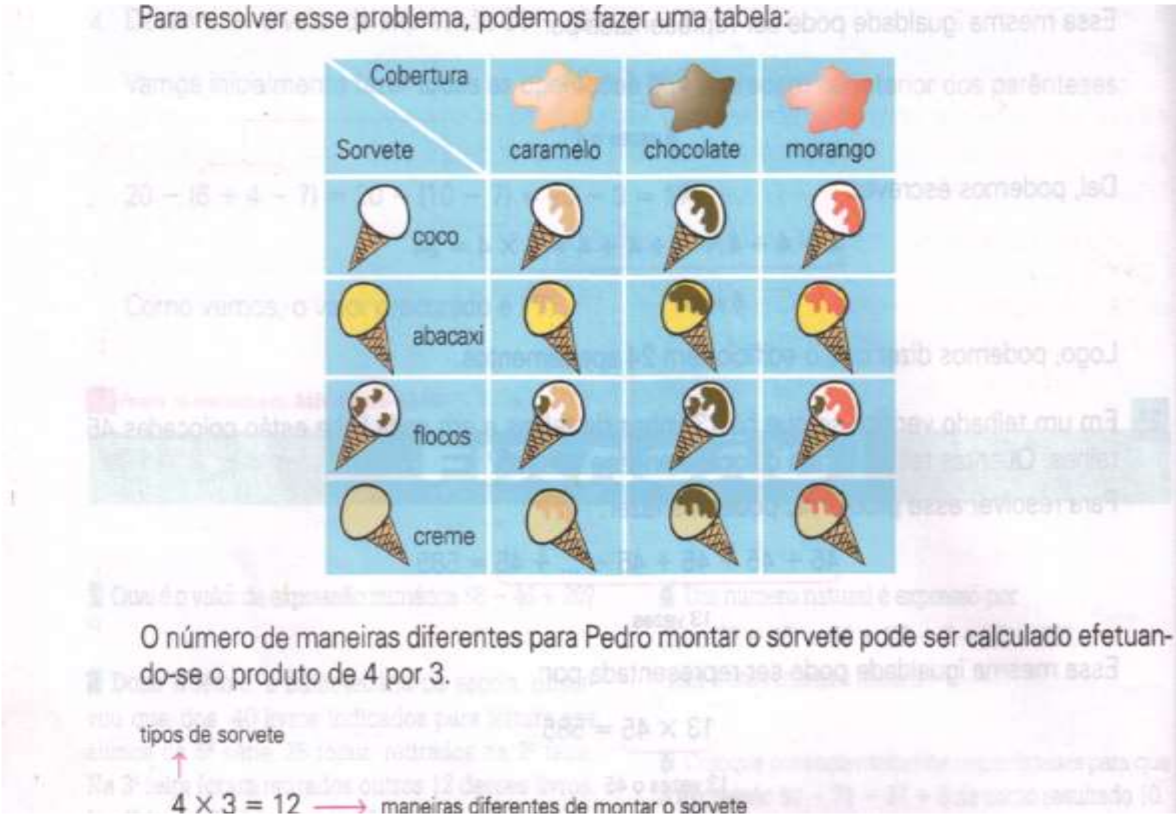
De quantas maneiras diferentes Pedro pode montar o seu sorvete?

41

Fonte: Giovanni, Fonte: Castrucci e Giovanni Jr, 2002

Em seguida esse autor apresenta a solução do problema por meio do ostensivo tabela para institucionaliza o Princípio Multiplicativo. Como podemos ver na figura a seguir:

Figura 54 - Institucionalização do Princípio Multiplicativo.



Para resolver esse problema, podemos fazer uma tabela:

Cobertura / Sorvete	caramelo	chocolate	morango
coco			
abacaxi			
flocos			
creme			

O número de maneiras diferentes para Pedro montar o sorvete pode ser calculado efetuando-se o produto de 4 por 3.

tipos de sorvete

$4 \times 3 = 12 \longrightarrow$ maneiras diferentes de montar o sorvete

Fonte: Giovanni, Fonte: Castrucci e Giovanni Jr, 2002

Nessa obra, só há mais um tipo de tarefa de AC e que está associada a ideia de multiplicação.

Essa obra participou do PNLD de 2005 e 2011, intituladas A Conquista da Matemática-a + Nova e A Conquista da Matemática-edição renovada respectivamente, mas não houve avanço no saber de AC, incluse mantendo as mesmas tarefas, embora que, nessa tarefa o autor resolve pela manipulação da técnica árvore de possibilidades.

Figura 55 - Produto Caresiano

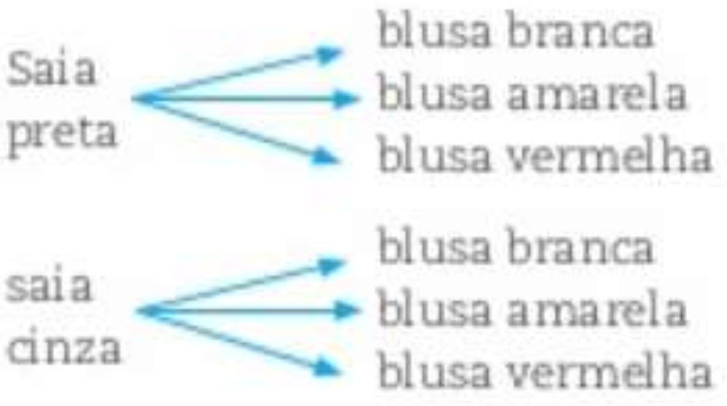
2 Marlene não consegue decidir o que vai vestir. Ela pode escolher entre 2 saias (preta ou cinza) e 3 blusas (branca, amarela ou vermelha). Quantas são as opções de Marlene? Para responder, faça uma tabela ou um desenho.

Fonte: Castrucci e Giovanni Jr, (2006, p. 57; 2011, p. 56).

Figura 56 - Resolução da Tarefa

4. São 6 opções diferentes.

saia \ blusa	branca	amarela	vermelha
preta			
cinza			



Fonte: Castrucci e Giovanni Jr (2011, p. 10).

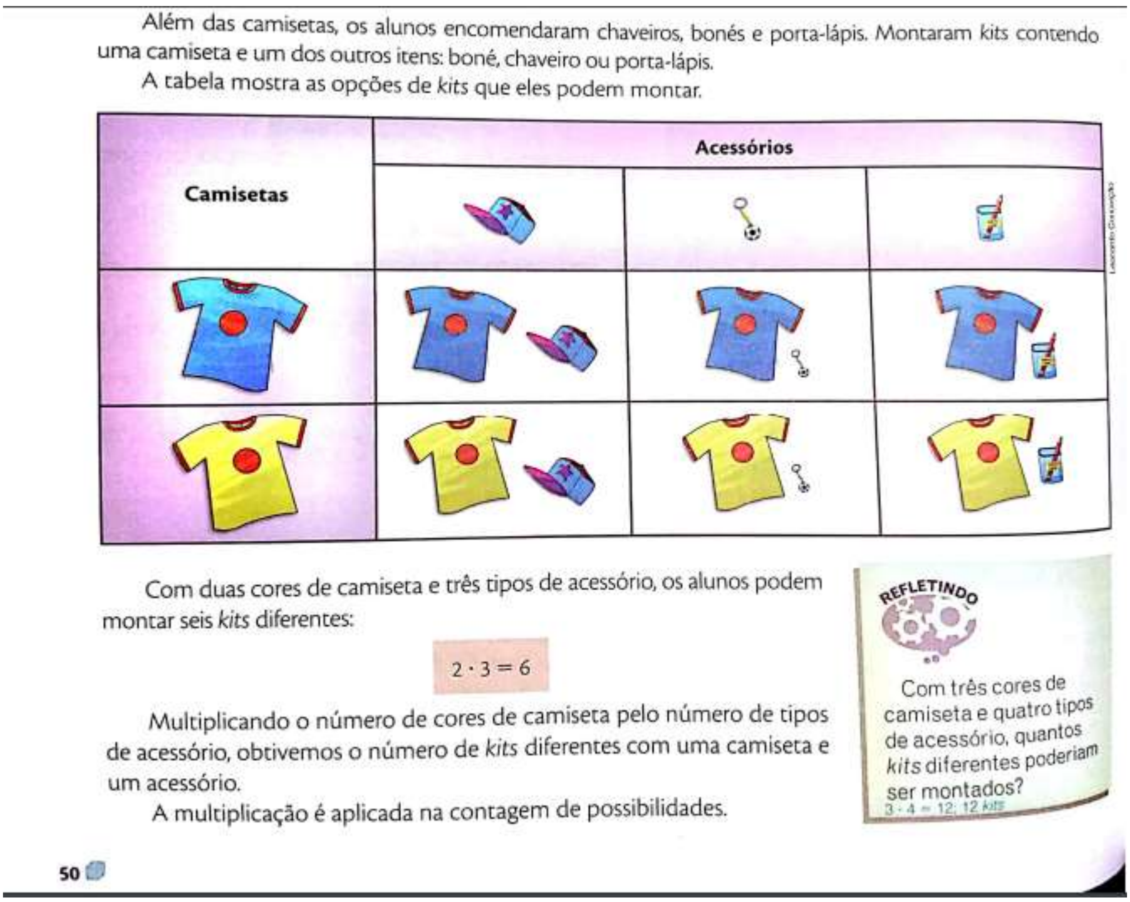
5.4.1.2.2 Análise ecológica da coleção Praticando Matemática – Edição Renovada aprovada no PNLD de 2017.

A coleção é formada por 4 volumes (6º ao 9º ano) e o objeto do saber AC vive ao habitar os livros do 6º e 8º ano.

O Livro da 6º ano tem um total de 288 páginas, divididos em 14 unidades. O objeto do saber Análise Combinatória aparece na unidade 4 associado às ideias da multiplicação.

O momento do primeiro encontro com o saber de AC no livro do 6º ano aparece intitulado Contando Possibilidades e logo em seguida o autor **vai institucionalizar o Princípio Fundamental da Contagem** por meio do ostensivo tabela de dupla entrada como elemento tecnológico-teórico. Como mostra a figura a seguir:

Figura 57 - Institucionalização do Princípio Multiplicativo.


Além das camisetas, os alunos encomendaram chaveiros, bonés e porta-lápis. Montaram kits contendo uma camiseta e um dos outros itens: boné, chaveiro ou porta-lápis.

A tabela mostra as opções de *kits* que eles podem montar.

Camisetas	Acessórios		

Com duas cores de camiseta e três tipos de acessório, os alunos podem montar seis *kits* diferentes:

$2 \cdot 3 = 6$

Multiplicando o número de cores de camiseta pelo número de tipos de acessório, obtivemos o número de *kits* diferentes com uma camiseta e um acessório.

A multiplicação é aplicada na contagem de possibilidades.

REFLETINDO

Com três cores de camiseta e quatro tipos de acessório, quantos *kits* diferentes poderiam ser montados?

$3 \cdot 4 = 12$; 12 *kits*

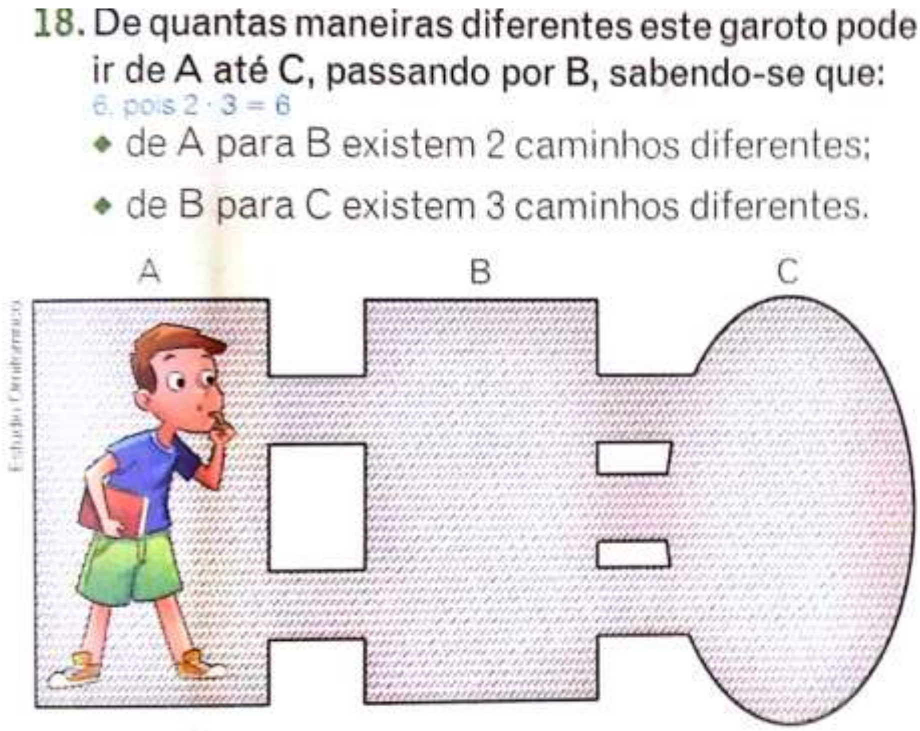
50

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 50)

O momento da institucionalização da técnica do princípio multiplicativo acontece ao mesmo tempo com o momento da avliação por meio de três tarefas do tipo produto cartesiano. A seguir, analizaremos duas delas.

Tipo de Tarefa (t_{PC1}), produto cartesiano (PC): Determinar de quantas maneiras diferentes pode-se ir de A pra C e passando por B, em que, de A para B existem **m** caminhos diferentes e de B para C existem **n** caminhos diferentes.

Figura 58 - Produto Cartesiano



Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 53).

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 56, que o autor divide a técnica (τ) em em três etapas.em duas etapas.

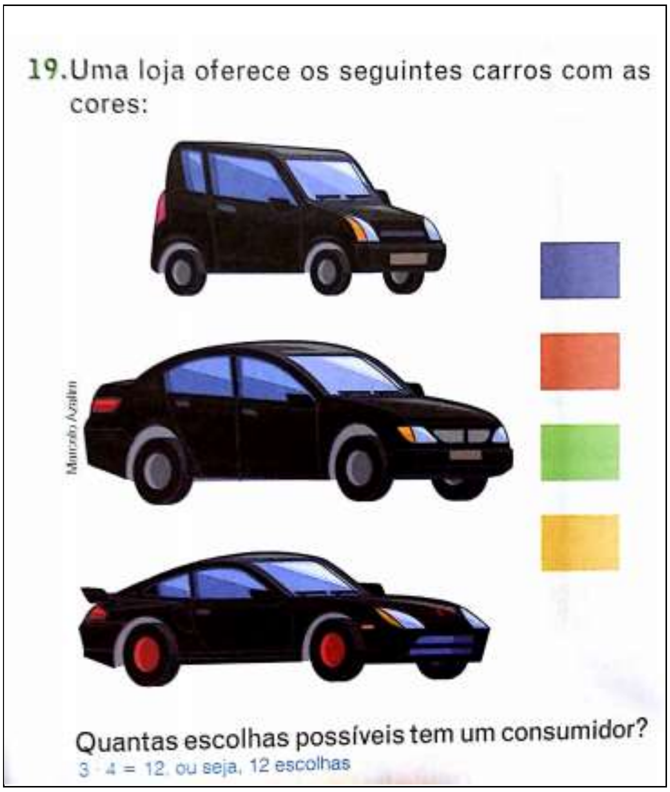
a) identificar o número de etapas, nesse caso, duas, na primeira, existem 2 caminhos para ir de a até b, na segunda, exixtem 3 possibilidades para ir de b até c.

b) multiplicar o número de possibilidades de cada etapa, ou seja, aplicar o principio fundamental de contagem neste tipo de tarefa temos: 2x3=6.

O discurso tecnológico-teórico: justifica-se pela utilização do Princípio Fundamental da Contagem para determinar o número de caminhos diferentes para ir de A até C.

Tipo de tarefa (t_{PC2}), produto cartesiano (PC): Determinar o número possibilidades de se fazer uma escolha de um carro e uma cor entre **m** carros distintos e **n** cores distantas.

Figura 59 - Produto Cartesiano



Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 53).

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 45, que o autor divide a técnica (τ) em duas etapas.

a) identificar o número de etapas, nesse caso, duas, na primeira, existem 3 possibilidades de escolhas de carro, na segunda, existem 4 possibilidades de escolhas de cor.

b) multiplicar o número de possibilidades de cada etapa, ou seja, aplicar o principio fundamental de contagem neste tipo de tarefa temos: 3x4=12.

O discurso tecnológico-teórico: justifica-se pela utilização do Princípio Fundamental da Contagem para determinar o número de escolhas de um carro e uma cor.

As tarefas propostas para o 6º ano, tem seu nicho em usar a técnica do princípio multiplicativo para desenvolver o conceito de contagem de possibilidades como ideia de multiplicação.

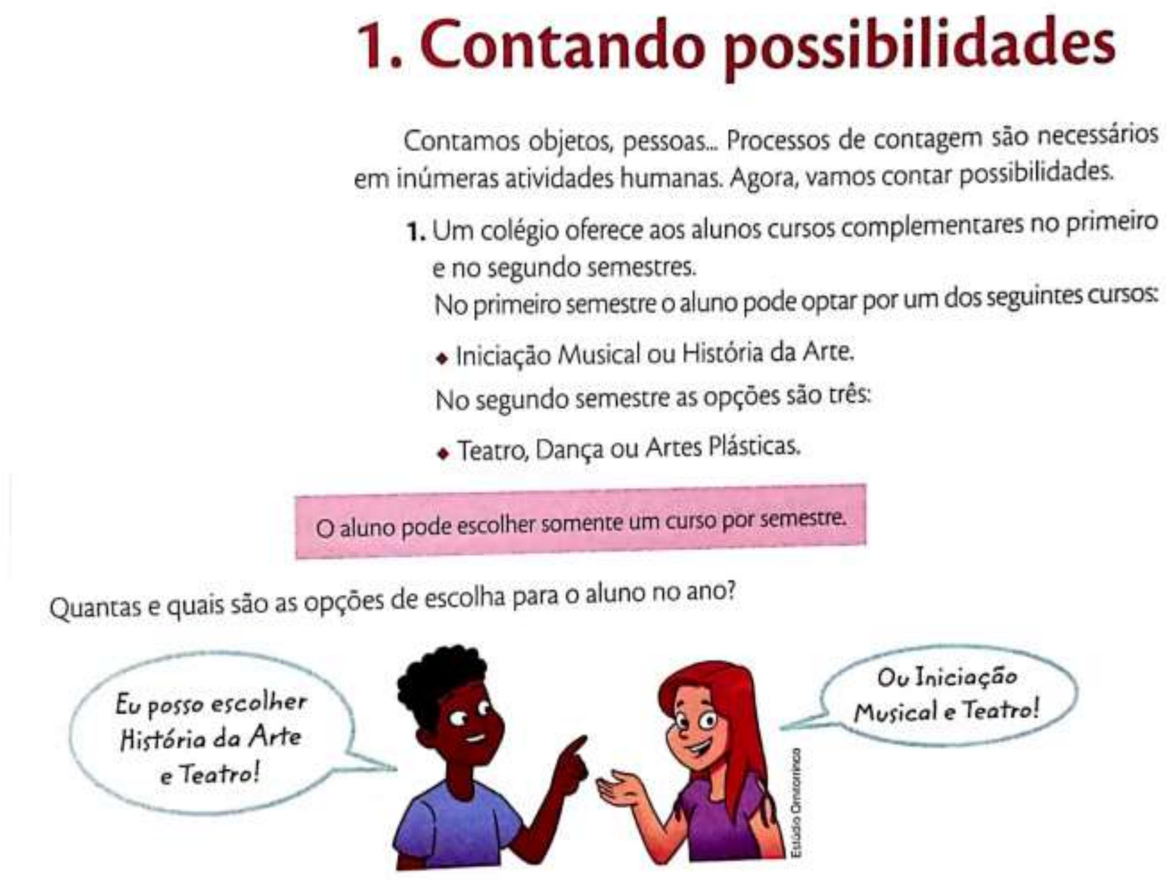
Passaremos agora a analisar de que forma o autor desenvolve o conceito de AC ao habitar o livro do 8º ano.

O Livro da 8º ano tem um total de 304 páginas, divididos em 15 unidades. O objeto do saber Analise Combinatória aparece na unidade 15, intitulado Possibilidades e estatística em um total de 2 páginas.

Neste livro, o momento do primeiro encontro com o saber AC se dará por meio dos tipos de tarefas produto cartesiano, arranjo simples e combinação simples, que passaremos a discutir a seguir:

Tipo de tarefa (t_{PC1}), produto cartesiano (PC): Determinar o número possibilidades de escolher um curso entre **m** cursos no primeiro semestre e **n** cursos no segundo semestre.

Figura 60 - Produto Cartesiano



1. Contando possibilidades

Contamos objetos, pessoas... Processos de contagem são necessários em inúmeras atividades humanas. Agora, vamos contar possibilidades.

1. Um colégio oferece aos alunos cursos complementares no primeiro e no segundo semestres.
No primeiro semestre o aluno pode optar por um dos seguintes cursos:
- Iniciação Musical ou História da Arte.
No segundo semestre as opções são três:
- Teatro, Dança ou Artes Plásticas.

O aluno pode escolher somente um curso por semestre.

Quantas e quais são as opções de escolha para o aluno no ano?

Fonte: Andrini e Vasconcelos, 2015, p. 271

A técnica (τ) utilizada pelo o autor para executar esses tipo de tarefa são duas:por meio do ostensivo tabela de dupla entrada e pelo ostensivo árvore de possibilidades.

Figura 6 -. Registrando as possibilidades por meio dos ostensivos tabela de dupla entrada e árvore de possibilidades

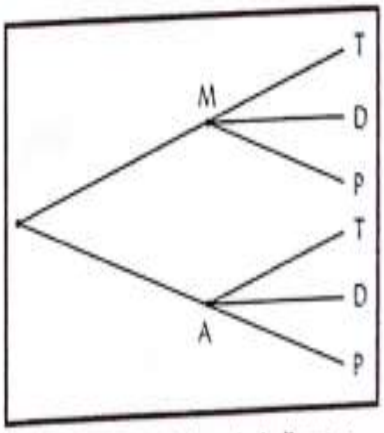
Há formas organizadas de registrar todas as possibilidades de escolha.

Podemos utilizar:

- uma tabela:

	Teatro (T)	Dança (D)	Artes Plásticas (P)
Iniciação Musical (M)	M - T	M - D	M - P
História da Arte (A)	A - T	A - D	A - P

- ou um diagrama:



Este tipo de diagrama é chamado de **diagrama de árvore**.

POSSIBILIDADES E ESTATÍSTICA 271

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 271).

Por meio destes dois ostensivos, como discurso tecnológico-teórico, o autor vai invocar o princípio multiplicativo como nova técnica.

Figura 62 - Apresentação do Princípio Multiplicativo pelo autor

O aluno tem no total 6 possibilidades de escolha. Observe:

- Número de possibilidades para o 1º semestre: 2
- Número de possibilidades para o 2º semestre: 3

$2 \cdot 3 = 6$

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 272)

Tipo de tarefa (t_A), arranjos simples (A_m^p): Calcular o número de arranjos de *m* elementos distintos *p* a *p*.

Figura 63 - Arranjo Simples

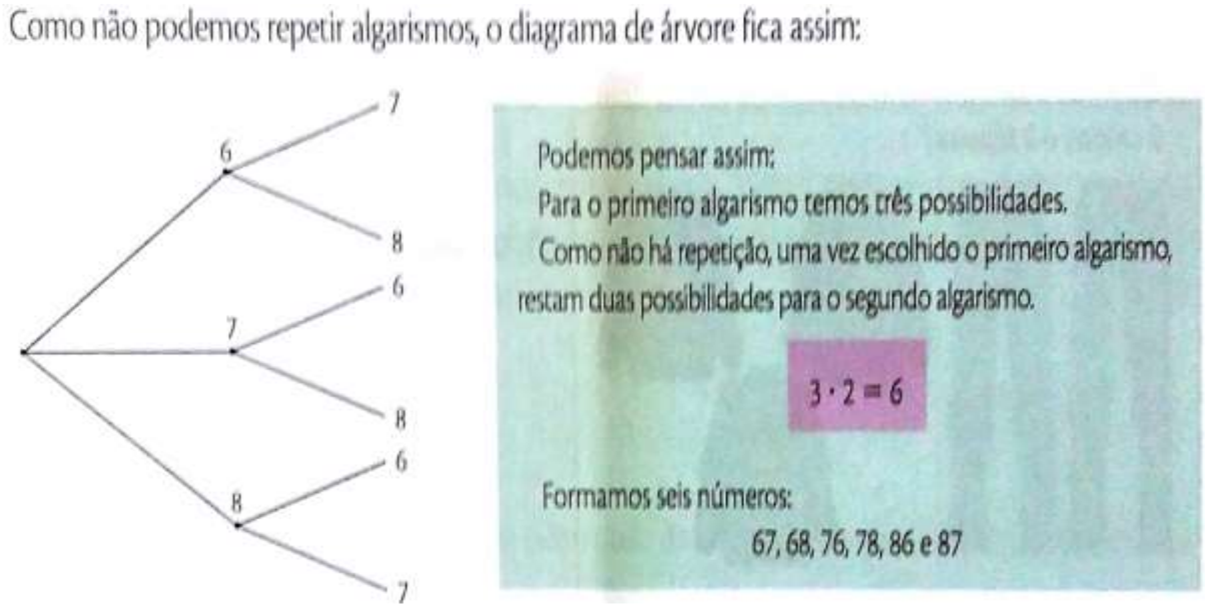
- Quantos números de dois algarismos *diferentes* podemos formar utilizando somente os algarismos 6, 7 e 8?

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 273).

Tarefa (T): Calcular o total de possibilidades de formar número com dois algarismos distintos, usando os algarismos 6, 7 e 8.

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 62, que o autor divide a técnica (τ) em quatro etapas.

Figura 64 - Etapas da Técnica



Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 273).

a) identificar que não pode repetir algarismos.

b) fazer o diagrama de árvore.

c) determinar a quantidade de possibilidades para o primeiro algarismos, nesse caso, são 3.

d) multiplicar o número de possibilidades para o primeiro algarismo pelo númerode possibilidades para o segundo algarismo, ou seja, 3 x 2 = 6.

e) listar todos os número de 2 algarismos formados pelos algarismos 6, 7 e 8.

O discurso tecnológico-teórico: principio multiplicativo.

Tipo de tarefa (t_A), combinações simples (C_m^p): Escrever todas as combinações de m elementos distintos p a p.

Figura 65 - Combinações Simples

3. O vôlei de praia é disputado entre duplas. Numa classe do 8º ano há quatro alunas que praticam esse esporte: Rita, Paula, Andréa e Joana. Quantas duplas diferentes o professor de Educação Física pode formar?

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 273).

Tarefa (T): Calcular o número de duplas de vôlei diferentes ao escolher entre 4 alunas que praticam esse esporte.

A técnica (τ) para executar esse tipo de tarefa o autor a dividiu em cinco etapas.

a) descreve que essa tarefa difere da anterior ao invocar o princípio multiplicativo e o ostensivo tabela de dupla entrada.

Figura 66 - Diferenciar problema de arranjo simples de combinação simples.

Se usássemos o mesmo raciocínio do problema anterior teríamos:

- número de possibilidades de escolha para a primeira jogadora da dupla: 4
- número de possibilidades de escolha para a segunda jogadora da dupla: 3

$4 \cdot 3 = 12$

Uma vez escolhida a primeira jogadora, restam três para a segunda escolha.

No entanto, o professor pode formar somente **seis duplas diferentes**. Observe:

Rita - Paula	Paula - Rita	Andréa - Rita	Joana - Rita
Rita - Andréa	Paula - Andréa	Andréa - Paula	Joana - Paula
Rita - Joana	Paula - Joana	Andréa - Joana	Joana - Andréa

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015, p. 273).

b) por meio de uma dupla, descreve que se trocar a posição entre elas ainda continua sendo a mesma dupla e generaliza para as demais duplas.

$$\left.\begin{matrix}\text{Rita - Paula}\\ \text{Paula - Rita}\end{matrix}\right\}\ \text{São a mesma dupla.}$$

c) descreve que quando multiplicor 4x3=12, contou duas vezes cada dupla.

O mesmo acontece com outras duplas. Cada dupla aparece duas vezes. Quando fizemos $4 \cdot 3 = 12$, **contamos duas vezes cada dupla.**

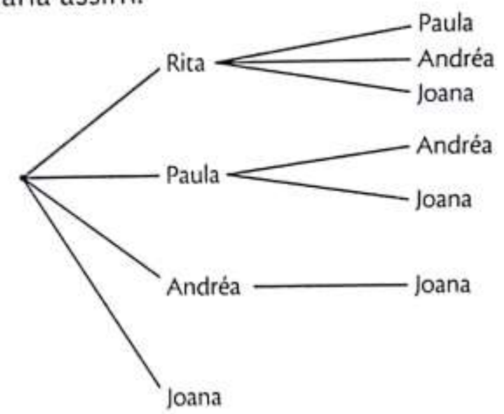
d) descreve que então deverá dividir por 2 o resultado total de duplas formadas, logo,

12 : 2 = 6 duplas diferentes.

Então o professor pode formar, na verdade, 12 : 2 = 6 duplas diferentes.

O discurso tecnológico-teórico: o autor apresenta o diagrama de árvore para listar todas as possibilidades.

O diagrama de árvore, neste problema, ficaria assim:



Queremos fazer dois destaques para essa tarefa anterior, baseado em Sabo (2010) partir de caso particular como este pode ajudar o estudante a compreender por um processo de generalização a elaboração de uma nova téncia, a fórmula de Combinação Simples e baseado em Pinheiro (2015) Um fato interessante que observamos após esse período envolve a que os autores de livros didáticos passaram a utilizar a árvore de possibilidades como uma técnica para apresentar o princípio multiplicativo. Mas ambas as técnicas são diferentes e conseguem resolver um determinado tipo de tarefa.

O momento da institucionalização se aglutina com o momento de avaliação por meio de 8 tarefas, sendo quatro do tipo produto cartesiano, um de arranjo simples e dois de combinação simples.

Passeremos agora analisar a coleção de livro didático de Luiz Roberto Dante intitulado Projeto Teláris.

5.4.1.2.3 Análise ecológica da coleção Projeto Teláris aprovada no PNLD de 2017.

A coleção é formada por 4 volumes (6º ao 9º ano) e o objeto do saber AC vive ao habitar os livros do 6º e 7º ano.

O Livro do 6º ano tem um total de 312 páginas, divididos em 9 capítulos com 4 unidades. O objeto do saber Analise Combinatória aparece na unidade 1 no capítulo 2 associado as ideias da multiplicação.

O momento do primeiro encontro com o saber de AC no livro do 6º ano aparece intitulado ideia associada à multiplicação: número de possibilidades ou combinações e logo em seguida o autor **vai institucionalizar o Princípio Fundamental da Contagem** por meio do ostensivo gráfico e figuras em um tipo de tarefa produto cartesiano. Como mostra a figura a seguir:

Figura 67 - Institucionalização do Princípio Multiplicativo

Fonte: Dante (2016, p. 48).

O momento da institucionalização da técnica do princípio multiplicativo acontece ao mesmo tempo com o momento da avaliação por meio de uma tarefa do tipo produto cartesiano.

Tarefa (T): Calcular todas as combinações de uma pessoa se vestir, escolhendo entre 3 ipos de bermuda e 2 cores.

Figura 68 - Produto Cartesiano

Em seu caderno, copie e complete a tabela, que apresenta 3 tipos de bermuda e 2 cores.

Tipos de bermuda

	Vermelha (V)	Azul (Az)
Bermuda A	A – V	A – Az
Bermuda B	B – V	B – Az
Bermuda C	C – V	C – Az

Dados fictícios.

Fonte: Dante (2016, p. 49).

Para executar esse tipo de tarefa, pressupomos de acordo com a figura 66, que o autor divide a técnica (τ) em em duas etapas.

a) completar a tabela.

b) multiplicar o número de linhas pelo número de colunas, ou seja, aplicar a multiplicação retangular nesta atividade, 3x2=6 combinações.

O discurso tecnológico-teórico: multiplicaçãoretangular.

O momento da institucionalização se aglutina com o momento da avaliação por meio dessa única tarefa.

O autor retoma o saber AC no livro do 9º ano o que passaremos a analisar em seguida.

O Livro do 9º ano tem um total de 328 páginas, divididas em 4 unidades num total de 9 capítulos. O objeto do saber Analise Combinatória aparece na unidade 4, capítulo 9 intitulado Combinatória: métodos de contagem em um total de 6 páginas.

Neste livro, o momento do primeiro encontro com o saber AC se dará por meio do tipo de tarefa exemplo produto cartesiano para institucionalizar o princípio multiplicativo.

Figura 69 - Institucionalização do Princípio Multiplicativo.

Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a resolução desta situação-problema.

Luciana estava indecisa sobre qual combinação de roupa utilizaria para ir a uma festa. Ela tinha à sua disposição 2 saias nas cores cinza e bege e 3 blusas nas cores rosa, verde e laranja. Sabendo disso, de quantas formas diferentes Luciana pode escolher um conjunto composto por uma saia e uma blusa para ir à festa?

Fonte: Dante (2016, p. 279).

A técnica (τ) utilizada pelo o autor para institucionalizar o princípio multiplicativo pode ser dividida em duas etapas.

a) construção de uma tabela com três colunas, a primeira coluna as opções, a segunda a saia e a terceira blusa.

Figura 70 - Uso do ostensivo tabela para listar todas as combinações de saia e blusa.

Para resolver esse problema simples do cotidiano, podemos montar uma tabela.

Opções de combinação das roupas de Luciana

Opções	Saia	Blusa
1ª	Cinza	Rosa
2ª	Cinza	Verde
3ª	Cinza	Laranja
4ª	Bege	Rosa
5ª	Bege	Verde
6ª	Bege	Laranja

Dados fictícios.

Há 2 possibilidades de saias (cinza e bege) e 3 possibilidades de blusas (rosa, verde e laranja), totalizando 6 possibilidades para o conjunto.

Fonte: Dante (2016, p. 279).

b) provocar uma reflexão para um número maior de saias e busas, ou seja, aumentara ordem de grandeza dos elementos de cada conjunto.

O discurso tecnológico-teórico: o autor apresenta a definição de princípio multiplicativo.

Para resolver esse problema, os matemáticos descobriram o seguinte princípio, denominado **princípio multiplicativo** ou **princípio fundamental da contagem**:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de n modos, então, o número de maneiras distintas de se tomar consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $m \cdot n$.

No exemplo da página anterior, tivemos duas decisões: D_1 (escolher a saia, na qual há 2 opções) e D_2 (escolher a blusa, na qual há 3 opções). Portanto, o número de maneiras distintas de tomarmos consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é 6 $(2 \cdot 3)$.

Nesse livro o autor descreve ainda que a árvore de possibiidades trata-se de uma maneira muito útil para apresentar todos os modos de uma decisão e em seguida generaliza o princípio multiplicativo para situações que há mais de duas etapas, em que uma das etapas de escolhas tem a ordem de grandeza do número grande de elementos, provavelmente para provocar a inviabilidade de usar outra técnica sem ser o princípio multiplicativo. Como podemos ver na tarefa a seguir:

Figura 71 - Uso do ostensivo tabela para listar todas as combinações de saia e blusa.

Após o último dia de aula, os alunos do 9º ano combinaram de se encontrar em uma sorveteria para comemorar o início das férias. A sorveteria dispunha de 50 sabores diferentes de sorvete, que podiam ser colocados em casquinha ou copinho. Oferecia-se, como cortesia, uma cobertura, que podia ser de caramelo, morango ou chocolate. De quantas formas diferentes um aluno podia montar um sorvete contendo uma bola e uma cobertura?

Para resolver essa situação, vamos aplicar o princípio multiplicativo. Desta vez, são 3 decisões:

- D_1: escolher o recipiente, ou seja, se casquinha ou copinho (2 opções);
- D_2: escolher o sabor, entre 50 opções;
- D_3: escolher a cobertura, que pode ser de caramelo, morango ou chocolate (3 opções).

Portanto, o número de possibilidades de um aluno escolher um sorvete da forma descrita é 300 $(2 \cdot 50 \cdot 3)$.

Fonte: Dante, 2016, p. 280

O momento da institucionalização se aglutina com omomento da avaliação por meio de sete tarefas.

A ecologia das tarefas nesse livro vai variar para os tipos de tarefas envolvendo arranjos simples e combinações simples, mas a técnica continua a mesma, princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem e não identificamos também a AC como idéia associada a divisão.

Nossas considerações sobre as obras analisadas em nível de escola (1º ao 9º ano) se aproxima das propostas dos PCN (1997,1998) em desenvolver o tema AC permeados por diferentes tipos de tarefas e contemplando na resolução das mesmas técnicas do tipo listagem, árvore de possibilidades e princípio multiplicativo, porém se afastam dos PCN (1997,1998) em trabalhar esse saber em todas as séries/anos do Ensino Fundamental, como também, se afastam do que preconizam o PNLD ao propor estabelecer relações entre os *temas* estatística e probabilidade.

Passaremos a seguir, analisar os domentos oficias e livros didáticos do Ensino Médio.

5.4.1.3 PCN do Ensino Médio -PCNEM, Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEN e os Livros Didáticos do Ensino Médio.

Nos PCNEM observamos que para esse ciclo de aprendizagem a matemática tem que ter o papel de se relacionar entre se, como também, com outros campos do conhecimento. No que tange o saber da AC o PCNEM destaca:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL,1999, p, 44).

Nos PCN +, no tópico, organização do trabalho escolar, destaca o objetivo para a disciplina Matemática.

> Na segunda série, já poderia haver uma mudança significativa no sentido de que cada disciplina mostrasse sua dimensão enquanto Ciência, com suas formas características de pensar e modelar fatos e fenômenos. (BRASIL, 2002, p. 128).

Nessa proposta, o objeto do saber AC tem seu habitat no 2º ano do Ensino Médio proposto pelo PCN + de acordo com o quadro a seguir:

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: (BRASIL,2002, p,128)

As OCEM (2006) aponta também para a articulação da matemática para outros campos científicos e faz o seguinte destaque para o saber AC que habita nesse documento no *domínio* Análise de dados e probabilidade.

> O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as idéias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas signifi cativamente no espaço amostral das variações. (BRASIL, 2006, p.79)

As OCEM(2006) traz um destaque na utilização do diagrama de árvores como técnica importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permiti a visualização da estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Também nas OCEM (2006) há uma recomendação na diversificação dos tipos de tarefas de AC no Ensino Médio, pois na maioria das vezes esse tema está concentrado nas tarefas de contagem, como podemos ver na citação a seguir:

> No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos fi nitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: "Partindose de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?" Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identifi cando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um efi - ciente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p.94).

Passaremos a seguir, a analisar duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio.

5.4.1.4 Análise ecológica do livro didático Matemática para o Ensino Médio, Vol. Único do autor Manoel Jairo Bezerra de 2001

O saber AC nesse livro didático vem intitulado de Contagens. O momento do primeiro encontro com esses saber se dará por meio do ostensivo figuras de placas e do cartão da Mega Sena para retratar situações do dia-a-dia que envolvem tarefas de contagem. Como podemos ver na figura a seguir:

Figura 72 - Introduzindo o Conceito de Contagem

>>> *Em inúmeras situações do dia-a-dia, deparamos com problemas de contagem. A determinação de quantas placas de carros diferentes podemos formar com três letras e quatro algarismos, a quantidade de apostas diferentes que podemos fazer escolhendo seis números num volante de apostas da Megasena ou qualquer outra situação que exija a organização e a contagem de grupos constituem nosso objeto de estudo.*

Fonte: Bezerra (2001, p.271)

Em seguida o autor vai definir o princípio fundamental da contagem.

Figura 73 - Definição do Princípio Fundamental da Contagem

Princípio fundamental da contagem

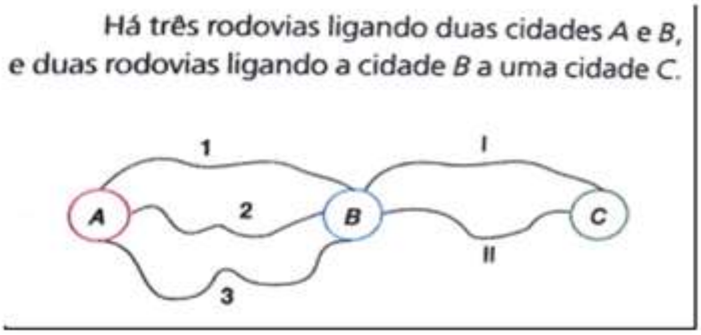
O *princípio fundamental da contagem* estabelece de quantas maneiras dois ou mais eventos correlacionados podem ocorrer. Assim, se um evento *A* pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras, um segundo evento *B* pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras que esses eventos podem ocorrer, um seguido do outro, é dada por $m \cdot n$.

Fonte: Bezerra (2001, p. 271)

O discurso tecnolçogico-teórico para utilizar o princípio fundamental da contagem como técnica vai ser a árvore de possibilidades apoiada em dois tipos de tarefas exemplos: produto cartesiano e arranjo simples. Que passaremos a apresentar a seguir:

Tipo de Tarefa (t_{PC1}), produto cartesiano (PC): Determinar de quantas maneiras diferentes pode-se ir de A para C e passando por B, em que, de A para B existem **m** caminhos diferentes e de B para C existem **n** caminhos diferentes.

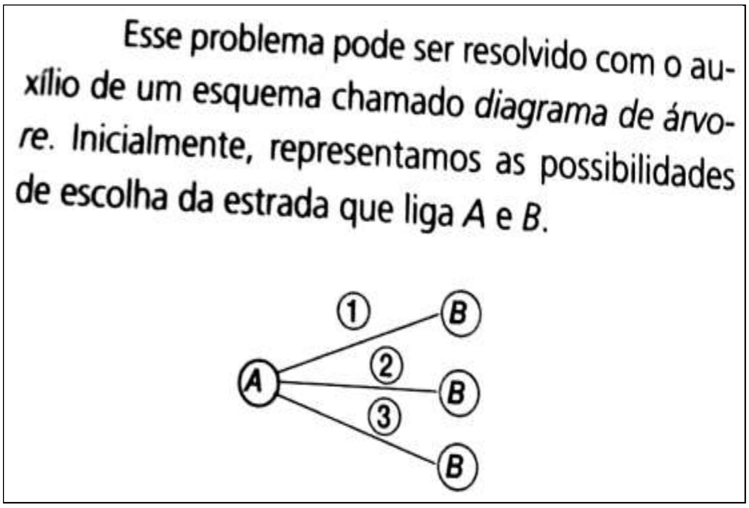
Figura 74 - Produto Cartesiano



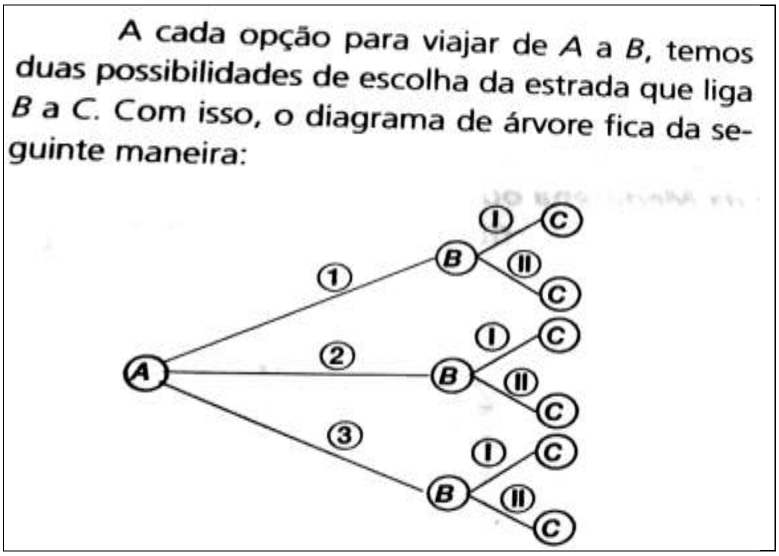
Fonte: Bezerra (2001, p. 271)

Para executar esse tipo de tarefa, o autor divide a técnica (τ) em três etapas.em duas etapas.

a) Identificar as possibilidades de escolha da estrada que liga A e B por meio do ostensivo árvore de possibilidade.



b) Identificar que a cada possibilidade de escolha de viajar de A a B, se tem duas possibilidades de escolha da estrada que liga B a C e completa a árvore de possibilidade.



c) Identificar que os terminais da árvore determina o número de possibilidades de escolha diferentes de viajar, logo 6.

d) institucionalizar o princípio fundamental da contagem pelo diagrama de árvore em que o núemro de possibilidades para ir de A a B são 3 e de ir de B a C são 2, logo 3x2=6.

e) discurso tecnológico-teórico: árvore de possibilidade como técnica na elaboração de nova técnica.

O autor em seguida vai utilizar o princípio fundamental da contagem como discurso tecnológico-teórico para produzir elemento de novas técnicas, tais como: a fórmula de permutações simples e arranjo simples, que por sua vez, vão servir de discurso tecnológico-teórico para produzir a fórmula de combinação como técnica.

Essa forma de elaborar novas técnicas na obra de Bezerra (2001), também foi apontado por Pinheiro (2015) no livro didático *Matemática: contexto & aplicações*, segundo volume, 2004 do autor Luiz Roberto Dante que o pesquisador o intitulou de L7.

> Outro aspecto interessante situa-se na segunda unidade do capítulo com a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem e da árvore de possibilidade. A necessidade de um desenvolvimento das fórmulas do arranjo simples, da permutação simples e da combinação simples ainda é muito forte na referida obra. (PINHEIRO, 2015, p. 106).
> A árvore de possibilidade e o processo de listagem direta são utilizados, no livro L7, como técnicas de contagem, especificamente para que sejam apresentados o Arranjo simples e a Permutação simples. Depois disso, a árvore e a listagem desaparecem no contexto da obra. (PINHEIRO, 2015, p. 124).

Essa organização didática também se mantém no livro didático *Matemática: contexto & aplicações*, segundo volume, 2016 do autor Luiz Roberto Dante, porém esse autor já aponta em sua obra outras tarefas de Análise Combinatória, tais como: Quantos são os hexagramas possíveis do *I Ching*?; quadrados mágicos e as 7 pontes de Königsberg.

No guia do PNLD (2018) o saber AC está no *domínio* dos Números uma vez que representa contagem de coleções finitas.

Embora a ecologia das tarefas de AC tenha se mantido em todo o período de Reformas/Movimentos, nossas análises apontam que com surgimento dos PCN e demais documentos esse saber tem evoluído em sua organização didática, como afirma o PNLD (2017)

> A análise combinatória, ou simplesmente combinatória, é uma parte da Matemática cujo objetivo é resolver, entre outros, problemas de contagem dos elementos de conjuntos finitos. Como ela é tema com muita tradição no Ensino Médio, sua renovação tem sido lenta nos livros didáticos. Um desses avanços é a introdução do princípio fundamental da contagem, com o qual é possível obter técnicas básicas e muito eficientes de contagem, dispensando a ênfase demasiada em fórmulas. (BRASIL,2018, p. 24).

Outro ponto a se destacar nos avanções e em conformidade com o PNLD é quanto o uso do princípio multiplicativo e os diagramas de árvore na resolução de problemas e na explicação de procedimentos de contagens, em situações que envolvem noções de permutação e arranjos, o que favorece a compreensão dos conceitos e de fórmulas, por exemplo.

Muito embora os livros didáticos do Ensino Médio logo abandonem o uso da árvore de possibilidades e do princípio fundamental da contagem em detrimento das fórmulas, afirmamos que esse fato seja decorrente de todo o trabalho que já venha sendo feito no Ensino Fundamental e que no Ensino Médio é preciso que as fórmulas sejam invocadas para tarefas de AC mais elaboradas, e se articulando nos *Temas* Estatística e Probabilidade e que de certo modo o PNLD(2018) ratifica essa nossa afirmação.

> É comum nos livros didáticos o estudo do princípio fundamental da contagem, mas muitas vezes ele é logo deixado de lado e volta-se para o tratamento tradicional e estanque das combinações, arranjos e permutações, simples e com repetições. De fato, os problemas de contagem mais interessantes exigem o uso de mais de uma dessas técnicas. Um dos objetivos de um bom ensino de análise combinatória é desenvolver no estudante a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas. É prejudicial um ensino que habitue o estudante a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso mecânico de fórmulas. (BRASIL,2018, p. 24).

No próximo capítulo traremos uma discussão comparativa dessas análises feitas nos LD e seus respectivos documentos para que possamos verificar a ecologia da AC ao londo de todo esses período.

6 ANÁLISE COMPARATIVA NO ECOSSISTEMA NOOSFERIANO

Com o objetivo de defender nossa hipótese de que há uma relação direta entre autores de LD se adequarem aos documentos oficiais a cada período de reforma/movimento vigente até hoje, nos apoiaremos em três questões de pesquisa: Como vive AC nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica antes dos PCN? Como AC vive nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica após os PCN? Quando muda os documentos curriculares, muda o meio de vida da AC nos Livros Didáticos? Se sim, de que forma?

Nesse caso, tomamos os níveis de codeterminação didática como ferramenta adequada para categorizar as diferentes condições e restrições para cada nível ao olhar os períodos de Reformas/Movimentos sobre a ecologia do saber AC na Educação Básica brasileira.

Em nível da civilização (Brasil), tivemos as seguintes *sociedades* em nossas pesquisa: Reforma Campos, Capanema, Simões Filho, Movimento da Matemática Moderna e Movimento da Educação Matemática.

Em nível de escola, o saber AC habitava a 5ª série do Curso Fundamental na Reforma Campos, a 2ª série dos Cursos Clássico e Científico na Reforma Capanema, no 2º ano Colegial no Período de Simões Filho e a 2ª séries do Ensino do 2º Grau no Movimento da Matemática Moderna (MMM). Com o surgimento do Movimento da Educação Matemática o saber AC passou a habitar todo a Educação Básica.

Em nível de *pedagogia,* o saber da AC até o período do MMM era trabalhado do geral para o particular, ou seja, em sua organização didática e matemática o desenvolvimento do *tema* AC seguia a seguinte sequência em sua organização praxeológica: teoria (Θ), seguida da tecnologia (θ), a técnica (τ) e a tarefa (T).

Essa forma de organização descreve uma abordagem tradicional cujo objetivo era trabalhar as fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

Segundo Chevallard (1999), a escala de níveis de codeterminação didática não tem sentido único ela é uma via de mão dupla, o que leva então a afirmar que tal abordagem estivesse em acordo com o período vigente de cada *sociedade*.

Na Reforma Francisco Campos o principal objetivo era o de ampliar a finalidade do curso secundário que deveria deixar de ser apenas um curso propedêutico para ingresso nas faculdades, mas possuir uma finalidade própria na formação dos sujeitos, ou seja, o mundo estava passando por transformações e mudanças e o ensino deveria garantir a formação do homem para todos os setores da atividade nacional.

Embora apoiada numa pedagogia dos ideais escolanovista, as Reformas Campos e Capanema continuaram formando elites num sistema fechado e sem nenhuma articulação entre os ramos do ensino secundário com os cursos profissionalizantes, pois ainda tinham caráter propedêutico.

Nesse período de transição entre a Reforma Campos e a Reforma Capanema, a ecologia do saber AC muda de habitat. No período da Reforma Francisco Campos habitava a quinta série do curso fundamental na *disciplina* Matemática e na Reforma Gustavo Capanema passou a habitar a segunda série dos Cursos Clássico e Científico do ensino secundário na *disciplina* Álgebra, mas nas duas Reformas o *domínio* é o mesmo, Álgebra e Funções.

Em nível de *sociedade*, os Programas Mínimos tiveram como objetivo simplificar toda a programação destinada ao ensino secundário, mas no que se refere ao *tema* AC esse ainda permaneceu habitando a segunda série do 2º Ciclo, no *domínio da* Álgebra e Funções.

Esses três períodos em nada modificou em sua organização didática e matemática sobre o saber AC, muito embora nossas análises aponte que todos os autores de LD estivessem em conformidade com os programas vigentes, inclusive Bezerra (1964), pois em sua obra todos os tópicos de Análise Combinatória estão de acordo com os Programas Mínimos de Matemática.

Destacamos ainda que a ecologia das tarefas e técnicas sempre foram as mesmas no *tema* Análise Combinatória ao habitar os livros didáticos da 5ª série na reforma Francisco Campos ou na 2ª série do 2º Ciclo tanto no Curso Clássico como no Curso Científico na Reforma Gustavo Capanema ou no Programa Mínimo do Ministério de Simões Filho. Diante disso, *a razão de ser* do objeto Análise Combinatória entre os anos de 1931 aos anos 1960 estava em alimentar o *Tema* Binômio de Newtom.

O período do Movimento da Matemática Moderna (MMM), segundo Filho (2013), foi um dos principais movimentos internacionais de renovação e modernização do currículo escolar. Surgiu como resposta à constatação de uma defasagem entre o progresso científico-tecnológico, observado após a 2ª Guerra Mundial e o currículo escolar vigente à época. Nos EUA surgiram vários grupos que se dedicaram à renovação curricular, dentre eles o School Mathematics Study Group (SMSG) e o lançamento do satélite Sputnik, pela URSS em 1957 que serviu como motor político e econômico dando fôlego aos Grupos e grande impulso ao Movimento. Buscava, dentre outros objetivos, a unificação dos 3 campos fundamentais da Matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), através da introdução de elementos unificadores a Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções

Esse Movimento será implantado no Brasil por nenhum decreto, como aconteceu com as reformas anteriores, mas em nada impediu que ela fosse amplamente divulgado e adotado em todo o território nacional. Tendo como pioneiro nessa divulgação do MMM no Brasil, o professor Oswaldo Sangiorgi.

Em nível de *sociedade,* podemos citar a obra Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição, pois nelas aparecem sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática e que foram publicadas no diário oficial do Estado de São Paulo em janeiro de 1965.

Podemos destacar que no período do MMM o saber AC continuava habitando em nível de *escola* o segundo ano colegial (2ª série do Ensino de 2º Grau pela 1ª LDB), mas trouxe muitos pontos positivos sobre o saber AC até então não vistos ainda nas Reformas anteriores, tais como: o aparecimento das técnicas do princípio aditivo, princípio multiplicativo, árvore de possibilidades e a fórmula como *condição* na resolução das tarefas, porém teve como elemento de *restrição* a Teoria dos conjuntos em seu discurso tecnológico-teórico.

Concordamos com Pinheiro(2015), ao destacar o *nicho* das Regras de Contagem como um discurso tecnológico para os assuntos probabilidade e fórmulas do cálculo de combinatória, mas ao nosso ver, tem uma função maior, o saber AC tem seu *nicho* o de alimentar o *assunto* Probabilidade.

A ecologia das tarefas permaneceram as mesmas dos períodos anteriores, como também em sua organização didática (teoria (Θ), seguida da tecnologia (θ), a técnica (τ) e a tarefa (T).

Nesse período, as obras analisadas estavam em conformidade com as sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática e a estruturação do saber AC está muito próxima do que analisamos na obra de Hunter (2011), o que descreve obras bem fundamentadas, porém as teorias que a alimentam (Teoria dos Conjuntos: princípio aditivo e multiplicativo) podem ser consideradas como *restrições*, por terem sido mal ingeridos por professores e estudantes da Educação Básica.

Em nível de *assunto,* os períodos citados até o MMM, a ecologia das tarefas é marcado por problemas verbais e não verbais do tipo: produto cartesiano, arranjos simples, permutações (simples ou com repetição) e Combinação simples.

Por volta dos anos de 1960, a *civilização,* Brasil, é marcada pelo Movimento da Educação Matemática difundida pelo professor Ubiratan D´Ambrósio e que teve um número crescente de pessoas interessadas nesse Movimento quando foi criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM entorno dos anos de 1980.

Nas discussões feitas por esse movimento e pelos pressupostos da LDB de 1996 serão a força motriz, na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (PCNEF e PCNEM).

Os PCN dos 1º e 2º Ciclos (1ª a 4ª série) e dos 3º e 4º Ciclos (5ª a 8ª série) divulgados, respectivamente, nos anos de 1997 e 1998, os quais distribuirão os conteúdos matemáticos a serem ensinados no Ensino Fundamental em quatro *domínios*: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Geometria e Tratamento da Informação, numa proposta de currículo em espiral.

Nessa proposta de um currículo em espiral para matemática, o saber AC passa a habitar toda a Educação Básica, na qual antes habitava apenas o Ensino Médio.

A *civilização* Brasil representada pela *sociedade* PCN (BRASIL, 1997e1998) terá inserido na *disciplina* Matemática um novo *domínio* denominado Tratamento da Informação. A razão de ser desse *domínio* é justificado em função de seu uso atual na sociedade e este integra os temas: estatística, probabilidade e combinatória.

Em nível de *escola,* (1ª a 4ª série ou 1º ao 5º ano), e em nível de *sociedade* representada pelos PCN (1º e 2º ciclos) o saber AC habita o *domínio* Tratamento da Informação e em nível de pedagogia os PCN sugerem que esse *tema* seja desenvolvido pela identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.

Nos PCN (BRASIL,1997), o *tema* AC tem por objetivo levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

Em nível de *sociedade*, com a publicação "Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos" MEC/FAE/UNESCO.), apontam a preocupação com o formalismo matemático pela teoria dos conjuntos.

Porém, o PNLD (BRASIL,1998) das séries iniciais, não traz um destaque para o objeto do saber Análise Combinatória. Os *temas* destacados no guia de livros didáticos são: análise de gráficos, números e operações, geometria e medida, mas algumas obras parecem estar em conformidade com os PCN (1997) ao introduzirem noções elementares sobre combinatória, estatística e probabilidade o que provocou, ao nosso ver, um olhar mais minucioso sobre os livros didáticos pelo PNLD.

Nossas considerações sobre as análises das obras das séries iniciais de 2000 e 2001 e os resultados encontrados por Oliveira (2014) ao analisar duas outras obras do 1º ao 5º ano aprovadas no PNLD de 2013, o saber AC nos LD trabalham só tarefas do tipo Produto Cartesiano e usam a multiplicação retangular ou Princípio Fundamental da Contagem na resolução das mesmas.

Em nível de pedagogia as obras estão em conformidade com os PCN (1º e 2º Cilcos) ao trabalhar a ideia de multiplicação, como produto cartesiano. Por outro lado, as obras se distanciam em não trabalhar ao longo das séries iniciais a AC e que cabe ao PNLD, como *instituição* fazer essa vigilância epistemológica.

Em nível de *sociedade* os PCN (3º e 4º ciclos) propõem que a ecologia das tarefas de AC sejam ricas, diversificadas e que inicialmente, sejam resolvidas evocando os ostensivos: (desenhos, listagem, tabelas de dupla entrada e árvore de possibilidades) que levarão o estudante a compreender o princípio multiplicativo.

A ecologia das tarefas nos LD analisados em nível de escola (5ª a 8ª série ou 6º ao 9º ano) variam os tipos de tarefas envolvendo produto cartesiano, arranjos (simples e com repetição) e combinações simples, mas a técnica continua a mesma, princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem. Além disso, não identificamos tarefa de AC associada a ideia divisão.

Nossas considerações sobre as obras analisadas em nível de escola (1º ao 9º ano) se aproxima das propostas dos PCN (1997,1998) em desenvolver o tema AC permeados por diferentes tipos de tarefas e contemplando na resolução das mesmas técnicas do tipo listagem, árvore de possibilidades e princípio multiplicativo, porém se afastam dos PCN (1997,1998) em trabalhar esse saber em todas as séries/anos do Ensino Fundamental, como também, se afastam do que preconizam o PNLD ao propor estabelecer relações entre os *temas* estatística e probabilidade, pois seu *nicho* é na ideia associada à multiplicação.

Passando agora em nível de *sociedade* PCNEM, PCN+, OCEM e PNLD do Ensino Médio, o saber AC passa a habitar apenas o 2º ano do Ensino Médio e isso faz com que os autores de LD abordem esse tema essencialmente no 2º ano por estar em conformidade com esses documentos.

Nos PCNEM, PCN+, OCEM e PNLD observamos que para esse ciclo de aprendizagem a matemática tem que ter o papel de se relacionar entre se, como também, com outros campos do conhecimento e em nível de domínio no PNLD está em Números e na OCEM está em Análise de dados e probabilidade.

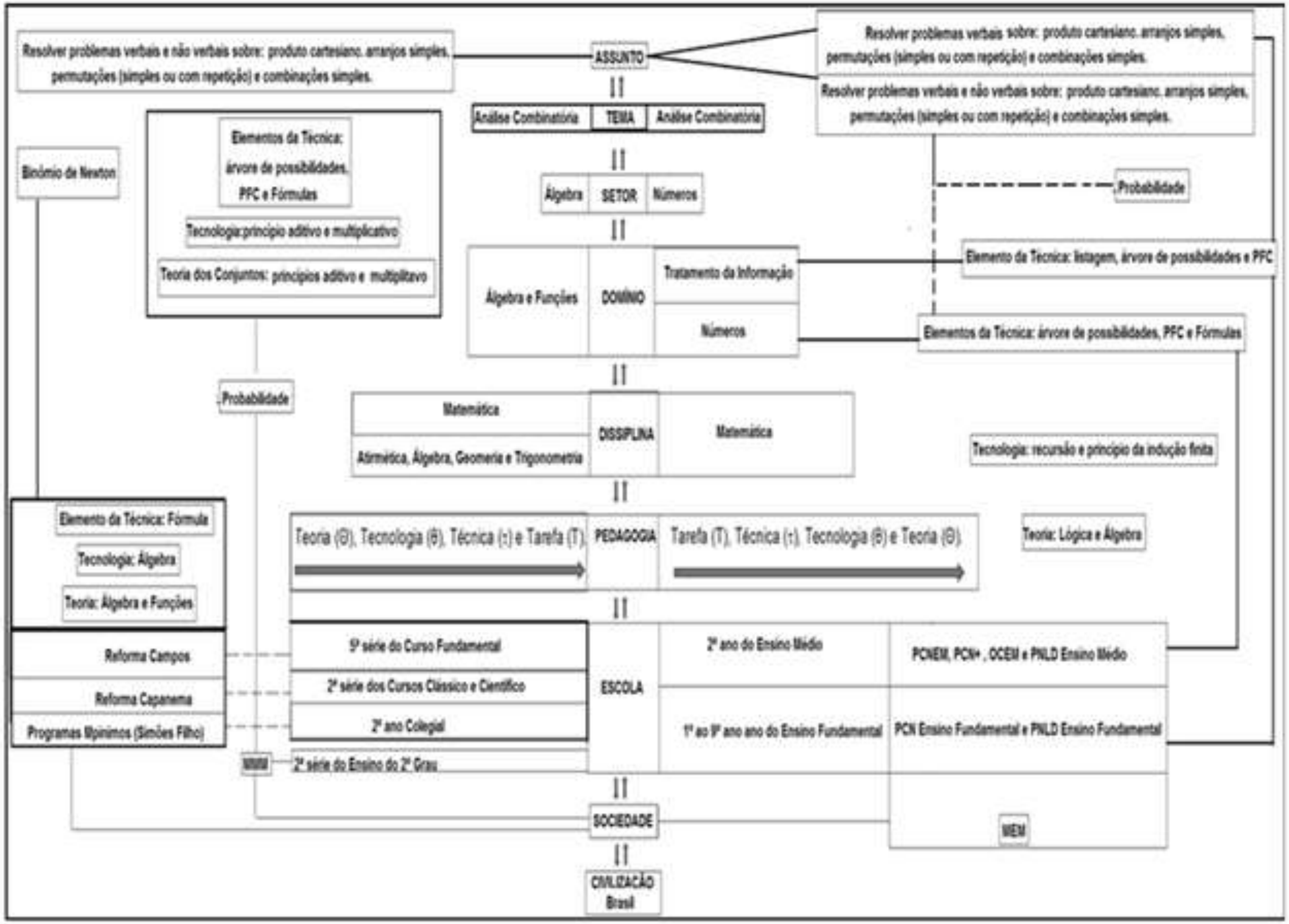
Embora a ecologia das tarefas de AC nos LD permaneçam em nível de *pedagogia* houve avanço com o uso do princípio multiplicativo e dos diagramas de árvore na resolução dos tipos de tarefas, o que favorecem a compreensão desses conceitos e na dedução de fórmulas.

Muito embora os LD do Ensino Médio abandonem o uso da árvore de possibilidades e do princípio fundamental da contagem em detrimento das fórmulas, afirmamos que esse fato seja decorrente de todo o trabalho que já venha sendo feito no Ensino Fundamental e que no Ensino Médio é preciso que as fórmulas sejam evocadas para tarefas de AC mais elaboradas, para alimentar os *temas* Estatística e Probabilidade.

Para finalizar, os tipos de tarefas sobre o saber AC estão concentradas nas tarefas de contagem, mas o livro didático *Matemática: contexto & aplicações*, segundo volume, 2016 do autor Luiz Roberto Dante, já aponta outras tarefas de Análise Combinatória, tais como: Quantos são os hexagramas possíveis do *I Ching*?; quadrados mágicos e as 7 pontes de Königsberg se aproximando o que propõe as OCEM (2006).

Essas análises modelizaram um ecossistema que denominamos de *Ecosssitema dos níveis de codeterminação didática* e que se encontra na página seguinte.

Figura 75 - Ecossistema dos níveis de codeterminação didática do período de Reforma / Movimento



Fonte: autoria própria

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um estudo que analisou a Ecologia do Saber Análise Combinatória nos documentos oficiais e livros didáticos da Educação Básica.

A escolha por AC se justifica em procurar entender o porquê esse conteúdo se fortaleceu com o surgimento dos PCN e quais mudanças significativas são apresentadas nos LD ao longo das Reformas/Movimentos o que nos direcionou às seguintes questões: Como vive AC nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica antes dos PCN? Como AC vive nos LD e nos documentos curriculares da Educação Básica após os PCN? Quando muda os documentos curriculares, muda o meio de vida da AC nos Livros Didáticos? Se sim, de que forma?

Os Programas Curriculares dos períodos de Reforma Campos, Capanema e Simões Filho são tomados como instituições, pois exerceram uma imposição aos autores de Livros Didáticos (sujeitos), de maneira que eles atendam às exigências desses programas, Chevallard (1999).

As análises feitas nesses períodos de Reformas em sua organização praxeológica revelaram que a ecologia das tarefas e técnicas (uso de fórmulas) sempre foram as mesmas no *tema* AC e que por sua vez*, a razão de ser* do objeto AC era do alimentar o *tema* Binômio de Newtom.

Nossas análises apontaram que antes dos PCN, embora mantendo a ecologia das tarefas, só houve alterações significativas no saber AC nos LD em sua organização Matemática e didática no período da Matemática Moderna, mesmo que não tenha sido implantada no Brasil por nenhum decreto como aconteceu com as reformas anteriores.

Nossas análises apontam que os autores de LD estavam em conformidade com as sugestões que foram publicadas no diário oficial do Estado de São Paulo em janeiro de 1965 e que aparecem no prefácio do livro Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição.

Nessas mudanças significativas de estruturar o saber AC no período do MMM, destacamos: a noção de função injetora, a noção de função bijetora, a teoria dos conjuntos e o princípio da indução finita e pelas técnicas usadas na resolução das tarefas de AC tais como: princípio multiplicativo, aditivo, e da árvore de possibilidades e que por sua vez passaram a alimentar as fórmulas do cálculo de combinatória e um novo *tema* Probabilidade que até então não era assunto estudado nos períodos anteriores. .

Por outro lado destacamos que os tipos de tarefas propostas nos LD durante o período do MMM, alimentadas pela teoria dos conjuntos e da Álgebra requerem do professor e do estudante que estes mobilizem conhecimentos anteriores com novos conhecimentos para que sejam capazes de aplicá-los de forma consciente em novas tarefas escolares, o que pode ter sido alvo de restrição.

Nossas análises apontaram que até o MMM em nível de *pedagogia* o saber AC se apresentava nos LD em sua organização didática partindo do geral para o particular, ou seja, a teoria (Θ) seguida da tecnologia (θ), da técnica (τ) e da tarefa (T).

No período do MEM analisamos (PCNEF, PCNEM e PCN+), OCEM e os LD aprovados pelo PND.

Nossas análises apontaram que obras em nível de *escola* (1º ao 9º ano), se aproxima em nível de *pedagogia* das propostas dos PCN (1997,1998) em desenvolver o tema AC permeados por diferentes tipos de tarefas e contemplando na resolução das mesmas técnicas do tipo listagem, árvore de possibilidades e princípio multiplicativo, porém se afastam, por não trabalhar esse saber em todas as séries/anos do Ensino Fundamental, como também, do que preconizam o PNLD ao propor estabelecer relações entre os *temas*, estatística e probabilidade.

Ao nosso ver, as obrar analisadas se aproximam dos PCN (1997,1998) ao trabalhar a ideia de multiplicação, como produto cartesiano, por outro lado, se distância do que preconizam os PCN (1997,1998) em não trabalhar ao longo das séries do Ensino Fundamental o saber AC, como também, se distância do que preconizam o PNLD ao propor estabelecer relações entre os *temas* estatística e probabilidade e cabe ao PNLD, como, *instituição*, fazer essa vigilância epistemológica.

Em nível de *sociedade* PCNEM, PCN+,OCEM e PNLD do Ensino Médio, nos LD o saber habita o saber AC no 2º ano do Ensino Médio, como sugerido pelos PCN +.

Em nível de *pedagogia*, as análises nos LD do Ensino Médio apontam uma aproximação com os documentos curriculares, mesmo que discreto, ao avançar com o uso do princípio multiplicativo e dos diagramas de árvore na resolução dos tipos de tarefas o que favorecem a compreensão desses conceitos e na dedução de fórmulas.

Nossas análises no LD do Ensino Médio apontam também o abandono do uso da árvore de possibilidades e do princípio fundamental da contagem, em detrimento das fórmulas. Acreditamos que seja em decorrência do que vinha sendo feito no Ensino Fundamental e que no Ensino Médio é necessário que as fórmulas sejam evocadas para as tarefas de AC mais elaboradas e de alimentar os *temas* Estatística e Probabilidade.

Nosso estudo também evidenciou que os tipos de tarefas sobre o saber AC nos LD estão concentradas nas tarefas de contagem. Mas, o livro didático *Matemática: contexto & aplicações*, segundo volume, 2016 do autor Luiz Roberto Dante, já aponta outras tarefas de Análise Combinatória, tais como: Quantos são os hexagramas possíveis do *I Ching*?; quadrados mágicos e as 7 pontes de Königsberg se aproximando o que propõe as OCEM (2006).

Em nossa pesquisa, foi apontado que o objeto AC, ao passar a existir nas diferentes instituições, tais como PCNEF, PCNEM, PCN + OCEM, PNLD e LD passou a ter diferentes relações institucionais RI(O), RI'(O), RI''(O), às vezes, se articulando com a própria matemática como a ideia associada a multiplicação ou aplicada a probabilidade e a estatística.

Essas análises corroboram com nossa hipótese, de que há uma relação direta entre autores de LD com os documentos oficiais a cada período de reforma/movimento vigente, mesmo que os documentos oficiais PCNEF, PCNEM, PCN + OCEM tenham função de orientar as propostas curriculares regionais e estaduais.

No MEM, a instituição é o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que exerce de certo modo uma imposição por meio de sua avaliação aos autores de Livros Didáticos (pessoas). Nesse caso, os autores de Livros Didáticos passam de pessoas a sujeitos, pois se relacionam com a instituição PNLD pelo processo de assujeitamento aos critérios de avaliação do Programa. Logo, os hiatos criados entre as obras e os dferentes tipos de tarefas de AC cabe ao controle do PNLD.

Nossas análises levantam a ideia de que o LD é uma instituição para o professor, pois a revisão de literatura aponta que o LD se constitui como o próprio currículo em sala de aula e nesse caso chamamos a atenção de que se o saber AC não for reconhecido em uma (instituição I), como identificado em nossas análises que há obras que não aborda o saber AC em todas as séries do Ensino Fundamental, fatalmente acarretará em um "vazio didático", pois o Livro Didático (LD) ainda continua sendo alicerce para o professor (sujeito) ancorar sua prática. Com isso, não haverá uma relação pessoal R(X,O), pois não há um reconhecimento do objeto do saber por I.

Esse trabalho abre pista para dar continuidade a um outro trabalho futuro que analisasse a ecologia da AC nos LD com o surgimento da Base Nacional Curricular Comum – BNCC que na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9. 394/1996), deve nortear os currículos dos sistemas e redes do ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007. 2ª Reimpressão:2014.

ANDRINI, Á, VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática – Edição Renovada.** 6º ao 9º ano. 4ª ed. São Paulo, Editora do Brasil, 2015.

ABBAGNANO, N. Dicionário de Filosofia. São Paulo: Mestre Jou, 1988.

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio**. 2010. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALVES, A.C. **Uma Introdução ao Pensamento Combinatório no 9º ano do Ensino Fundamental.** PUC-MG, Belo Horizonte, 2010.

ALVES, R.C**. O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores.** Dissertação de Mestrado. 172 f. Rio de Janeiro: UFRJ, 2012.

ARTAUD, M. **Introduction à L'Aproche écologique Du didactique, L'écologie dês organization mathématiques ET didactique.** Actes de La neuvème École d'éte de didactique dês Mathematiques. Hougate, Bailleul, 1998, p.101-139.

AZEVEDO, J. **Alunos de Anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?** (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Centro de Educação da UFPE, Recife, Pernambuco, 2013.

AZEVEDO, E. **Monografia do Curso de Matemática. Departamento de Matemática da UFSCar.** São Paulo: UFScar, 2004.

Barbosa e Rocha. **Matemática Para o curso Colegial Moderno, Volume 3.** Editora IBEP, 1970.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARRETO, F.L.S. **O Papel das Representações Simbólicas no Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Educação de Jovens e Adultos.** (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Centro de Educação da UFPE, Recife, Pernambuco, 2012.

BELLAMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental.** Editora da Sociedade Brasileira de História da Matemática, Natal 2002.

BEZERRA, M. J. Curso de Matemática**. 1º, 2º e 3º anos dos cursos clássico e científico. Volume único. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1960.**

_____________. **Matemática para o Ensino Médio, Volume Único.** Editora Scipione-2001.

BORBA, R. S. E. **X Encontro Nacional de Educação Matemática** Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique.** In: Recherches en Didactique des Mathématiques, 1999, p. 77-124.

BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la

Teoría Antropológica de lo Didáctico (pp. 385-406). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

BOULOS, P.; WATANABE, R**. Matemática 2º Grau**. v. 2. São Paulo, Editora Nacional, 1976.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática.** Tese de Doutorado. São Paulo: FEUSP, 1997.

BRASIL. **Ministério da Educação e Saúde. Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundado.** do art. 10. do decreto n. 19.800, de 18 de abril de 1931.

_____________. **Ministério da Educação e Saúde. Ensino Secundário no Brasil (organização, legislação vigente, programas).** Rio de Janeiro: INEP, 1942. (Publicação, n. 67).

_____________. **Ministério da Educação e Saúde. Ensino Secundário no Brasil.** Portaria n.° 1.045, de 14 de dezembro de 1951.

_____________. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1997, 10 vol.

_____________. Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais** (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998, 10 vol.

_____________. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura – MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Semtec, 1999.

_____________. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio +**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura – MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Semtec, 2002.

___________. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação,

___________. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. **Fixa as diretrizes e bases da educação nacional. Lei de Diretrizes e Bases da Educação-LDB**. Brasília, DF, 1961.

BRUNER, S.J. **O processo da educação / trad. De Lólio Lourenço de Oliveira** – São Paulo: Companhia Editora nacional, 1974.

BRASIL. MEC/ Fundação de Assistência ao Estudante. **Definição de critérios para avaliação dos livros didáticos: 1ª a 4ª séries.** Brasília: MEC/FAE/UNESCO, 1994.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; BESSA DE MENEZES, M. **A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, p. 648-670, 2015.

CAMPOS, M. A; LIMA, P. F. **Introdução ao tratamento da informação nos Ensinos Fundamental e Médio.** SBMAC, 2005.

CARVALHO, C.H. **Escola nova, educação e democracia: o projeto Francisco Campos para a escola em Minas Gerais.** Acta Scientiarum. Education. Maringá, v. 34, n. 2, p. 187-198, July-Dec., 2012.

CARVALHO, J. P. et al. **Os debates em torno das reformas do ensino de matemática: 1930-1942.** Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 4, núm.5, pp. 49-54, jan/jul, 1996. Faculdade de Educação – Unicamp: Campinas/SP, Brasil.

CARVALHO, J.B.P. de; LIMA, P. F; GITIRANA, V; MANDARINO, M. In: Ministério da Educação. Secretaria de Educação à distância. **O Livro Didático em Questão.** Salto para o futuro, boletim, out./2006, p. 18-27.

CARVALHO, T. M, **Matemática para os Cursos Clássico e Científico, 2ª Série.** Companhia Editora Nacional – 1944.

CERIOLI, M.R.; VIANA, P. **Mini Curso de Combinatória de Contagem.** IME, UFF, 2012**.**

CHAACHOUA, H; BITTAR, M.: **A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: PARADIGMAS, AVANÇOS E PERSPECTIVAS.** I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática 01 a 06 de novembro de 2016 Bonito - Mato Grosso do Sul – Brasil.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la transposition didactique?** Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. In : Actes de l'année 1981- 1982. pp. 167-194.

______. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. AIQUE. Trdución. Claudia Gilman. Título original: CHEVALLARD, Y. (1984), La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, 1991.

______. Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportées par une aproche anthropologique. In : **Recherches en didactique de mathématiques**, 1992, vol 12, p. 73-112.

______.**Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. Actes du Séminaire Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis, pp. 190-200, 1994 a.

______.**La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994 b. p. 135-180.

______.**Conceitos fundamentais da didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.** In: Brun, Jean (org). Didáctica das matemáticas. Instituto Piaget, Lisboa. Trad. Maria José Figueiredo. Delachaux et Niestlé, S.A., 1996. Coleção Horizontes Pedagógicos, p.115-153.

______La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs,1999. En collaboration avec marianna bosch. article paru dans recherches en didactique des mathématiques, vol. 19, no 1, p. 77-124.

______approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques

juin 2002

______Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Publications mathématiques et informatique de Rennes, Volume (1991) no. S6 , p. 160-163

______Communication aux 3es Journées d'étude franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

______La didactique dans la cité avec les autres sciences. Généricité et spécificité didactiques dans le cadre des journées 2005a. du REF (Réseau Education Formation).

______BOSH. **Les processus de transposition didactique et leur théorisation,1994.** Contribution à l'ouvrage dirigé par g. Arsac, y. Chevallard, j.-l. martinand, andrée tiberghien (éds), la transposition didactique à l'épreuve, la pensée sauvage, Grenoble, p. 135-180.

______. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle, IREM, Clermont-Ferrand, France, 1998.

______.**Organisations Didactiques 1**: Les Cadres Généraux. 1998.

______.**Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91-118.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 1999, p. 221-266.

______. BOSH; GASCÓN. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001

______.**Organiser l'étude 1. Structures et fonctions**. **Dorier J.-L. et al**, 2002.

______.**Organiser l'étude. 3**. **Écologie & regulation**. Dorier, J.-L.et al (2002).

______. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**. In : MAURY, S. & CAILLOT, M (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

______.**La TAD face au professeur de mathématiques**. Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse, le 29 avril, 2009.

MIRIAN, C, et al. **Matemática todo dia, 1ª a 4ª Série.** Editora Módulo – 1998.

COSTA, C. A. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2003, 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

COSTA,E.R.S. **Uma proposta de ensino de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Lavras, 2013.

COUTINHO, C.Q.S; OLIVEIRA, E.G. **Combinatória nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais: Uma Análise do PNLD 2013**. Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, PR, 2013.

CHILELA, R.R. **O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de combinatória.** (Mestrado Profissional). UFRGS, Porto Alegre, 2013.

DALLABRIDA, N. **A reforma Francisco Campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário.** Educação, v. 32, núm. 2, 2009.

DANTE, L. R. **Vivência e Construção, 1ª a 4ª Série.** Editora Ática-2001

______. **Projeto Teláris, 6º a 9º ano.** Editora Ática-2016.

______.**Matemática Contexto e Aplicações, 1º ao 3º ano.** Editora Ática-2016.

DORNELAS. A.C.B. **O Principio Multiplicativo como Recurso Didático Para a Resolução de Problemas de Contagem. 127 p.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

DURO, M.L. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades: o raciocínio formal no ensino médio.** (Mestrado em Educação). UFRGS, Porto Alegre, 2012.

ESTEVES, I. **Investigando os Fatores que Influenciam o Raciocínio Combinatório em Adolescentes de 14 anos- 8ª série do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

FREITAG, B. et al. **O livro didático em questão.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

Diretor de Publicação do G.E.E.M, L. H. JACY MONTEIRO. **Matemática Moderna para o Ensino Secundário 2ª edição, Série Professor.** São Paulo, Editora L.P.M, **1965.**

GIOVANNI, J. R. **A conquista da Matemática. 5ª a 8ª Série.** São Paulo, Editora FTD, 1998.

______________. **A conquista da Matemática. 5ª a 8ª Série.** São Paulo, Editora FTD, 2006.

______________. **A conquista da Matemática. 6º ao 9º ano.** São Paulo, Editora FTD, 2006.

______________. **A Conquista da Matemática. 1º ao 5º ano.** São Paulo. Editora FTD, 2011.

GIOVANNI, J. R. etal. **Matemática Fundamental – Uma Nova Abordagem. V. único.** São Paulo, Editora FTD,2002.

______________.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** 1º ao 3º ano do Ensino Médio. São Paulo, Editora FTD, 2009.

GIL, A. C.; **Métodos e Técnicas de PESQUISA SOCIAL.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

GOMES, T.M.S; GITIRANA, V**. Grandezas numéricas em questões de raciocínio combinatório do 6º ao 9º ano.** XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

HOMA, A.I.R; GROENWALD, C.L.O. **Análise Combinatória no Ensino Médio.** Educação Matemática em Revista, RS. Ano 14,2013, núm 14, v1, p. 65 a 74.

HUNTER, D.J. **Fundamentos da Matemática Discreta;** tradução Paula Porto Martins; revisão técnica Jairo da Silva Bochi. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

KAPUR, J. N. **Combinatorial Analysis and School Mathematics**. Educational Studies in Mathematics 3, p. 111-127, 1970.

KUENZER, A.Z. **A Reforma do ensino técnico no Brasil e suas consequências.** Texto publicado originalmente na revista Ensaio: avaliação e políticas públicas em Educação. RJ. V.6, núm. 20, pp. 365 – 384, julho/set, 1995.

LIMA, R.C.G. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio.** (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)-Centro de Educação da UFPE, Recife, Pernambuco, 2010.

MARCIEL, G.N. **Revista de Estudos e Pesquisas em Ensino de Geografia. Florianópolis, SC, v. 1, n. 1, out. 2014.** Universidade Federal de Santa Catarina.

MEDEIROS, E.M. R. **A geografia nas propostas curriculares, 1930 -1992.** 1996. 293 f. Dissertação (Mestrado em Geografia) – Centro de Filosofia e Ciências Humanas, UFPE, Recife (PE), 1992. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Filosofia e Ciências Humanas, UFPE, Recife (PE), 1992.

MENDONÇA, L. **Trajetória hipotética de aprendizagem: análise combinatória**. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC-SP, 2011.

MENINO, F. S. **Resolução de problemas no cenário da matemática discreta. (**Doutorado em Educação Matemática**)**. UNESP - Rio Claro, 2013.

MORGADO, A.C.O. et.al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

OLIVEIRA, E. G. **Raciocínio Combinatório na Resolução de Problemas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um estudo com professores.** (Mestrado em Educação Matemática). PUC-SP, 2014.

PACHECO, A.B. **Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não-verbais no campo da Análise Combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2001.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: Uma Análise da Influência Francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAVÃO, A.C. Ensinar Ciências fazendo ciência. In: PAVÃO, A.C. (Org.). **O livro didático em questão**. Publicado em 2006.

PELAYO, V. N; BATANERO, C.; GODINO, J.D., **Razionamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. Educación Matemática, México, 8 (1), p.26-39, abril, 1996.

PESSOA, C.; BORBA, R. **O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica**. EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Vol. 1, No 1 (2010).

PINHEIRO, C. A. M. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações-Problema.** Pará, 2008, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará.

PINHEIRO, C. A. M. **Análise Combinatória: organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009. Tese (Dutorado em Educação Matemática). PUC-SP, 2015.**

PIRES, C.C. **Reflexões sobre Relações entre Currículo, Avaliação e Formação de Professores na Área de Educação Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 473-492, ago. 2015.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C.M.C. **Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil.** Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 29, 2008, pp. 13-42. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

RIBEIRO, D. F. C.; PIRES, C. M. C. **CURSO COLEGIAL–1943 a 1961**. Revista Brasileira de História da Matemática, Vol. 13, núm. 27, pp. 55 – 75, abril de 2013.

RIBEIRO, D.F.C. **Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da Matemática escolar do Colégio – 1943 a 1961.** Tese de doutoramento – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

ROCHA, J. C. **O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas. 96 p.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

ROCHA, J.L. **Debates sobre o ensino da matemática na década de 1930**. Revista brasileira de história da educação n° 9 jan./jun. 2005.

ROCHA, J. de A. **Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática**. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Recife: UFRPE, 2006.

ROCHA, C.A. **Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos**.** 2011. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

ROXO, E.et al. Matemática 2º ciclo, 2ª série. 2ªed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

SABO, R.D. **Análise de livros didáticos do ensino médio: um estudo dos conteúdos referentes à combinatória.** Monografia. Centro Universitário Fundação Santo André. 2007.

SABO, R.D. **Saberes docentes: análise combinatória no ensino médio. Dissertação de Mestrado.** PUC-SP,2010.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. **A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n. 18, 2015.

SANTOS, C. R. **O tratamento da informação; currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula.** Dissertação de Mestrado Profissional. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, M.R. e SANTOS. **O Conceito de Área de Figura Geométrica Plana em Livros Didáticos De Matemática do 6º Ano do Ensino Fundamental: Um Olhar Sob a Ótica da Toria Antropológica do Didático**. VII CIBEM, setembro de 2013. Montevideo- Uruguay.

SILVA, A.P. **Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas: um olhar para a sala de aula.** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2013.

SILVA, J.F.G. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças.** (Mestrado em Psicologia Cognitiva), UFPE, Recife, Pernambuco, 2010.

SILVA, M.C. **A COMBINATÓRIA: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental.** 2016. 201f. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.

SILVA JUNIOR; RÉGNIER. J. C**. Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental do nordeste brasileiro.** Estudo exploratório baseado na analise estatística implicativa. In: IV Encuentro Internacional de Análisis Estadístico Implicativo. Castellón de la Plana – España, 2007.

SOBRINHO, F.E. **O raciocínio combinatório e probabilístico de alunos do 6º ano do ensino fundamental.** 2010. 136f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, UNICSUL, São Paulo (SP).

SOUZA, A. C. P. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado. UNESP - Rio Claro (2010).

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas.** 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2010.

STURM, W. **As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa.** Campinas, 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Mateática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

VALENTE, W.R. **LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA E AS REFORMAS CAMPOS E CAPANEMA.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. - VIII ENEM – Palestra. Educação Matemática: UM COMPROMISSO SOCIAL. Recife, 15 a 18 de julho de 2004, UFPE.

VARGAS, A.F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.** Dissertação de Mestrado. PUC-MG – Belo Horizonte, 2009.

ANEXO A – PROGRAMAS DO CURSO FUNDAMENTLA DO ENSINO SECUNDÁRIO E INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS NO PERÍODO DE REFORMA FRANCISCO CAMPOS.

Sexta-feira 31 DIARIO OFFICIAL Julho de 1931 12405

SECRETARIAS DE ESTADO

Ministerio da Educação e Saude Pública

REPUBLICA DOS ESTADOS UNIDOS DO BRASIL

O Ministro de Estado da Educação e Saude Publica, em nome do Governo Provisorio:

Resolve, nos termos do art. 10, do decreto n. 19.890, de 18 de abril de 1931, expedir os programas do curso fundamental do ensino secundario, anexos a esta Portaria, que serão observados, de acôrdo com as respectivas instruções pedagogicas e com o numero de horas semanais nelles referido, em cada série do curso a que forem applicaveis.

Rio de Janeiro, 30 de junho de 1931.

Francisco Campos.

PORTUGUÊS

O programa desta cadeira tem por objetivo proporcionar ao estudante a aquisição efetiva da lingua portuguesa, habilitando-o a exprimir-se corretamente, comunicando-lhe o gôsto da leitura dos bons escritores e ministrando-lhe o cabedal indispensavel á formação do seu espirito bem como á sua educação literaria.

Nas duas primeiras séries do curso o ensino será acentuadamente pratico, reduzidas ao minimo possivel as lições de gramatica e transmitidas por processos indutivos. A conversação bem orientada, as pequenas exposições orais e a reprodução livre de um trecho lido na aula darão ensejo a que o professor corrija a linguagem dos alunos e, assim, prepare os subsidios para a composição escrita, mais aconselhavel nas séries superiores.

Desde o principio do curso o professor procurará tirar o maximo proveito da leitura, ponto de partida de todo o ensino, não se esquecendo de que, além de visar a fins educativos, ela oferece um manancial de idéas que fecundam e disciplinam a inteligencia, prevenindo maiores dificuldades nas aulas de redação e estilo.

O conhecimento do vocabulario, da ortografia e das formas corretas fundar-se-á nos textos, cuidadosamente escolhidos, e pelo exame dêstes se notarão, pouco a pouco, os fatos gramaticais mais importantes, cujas leis jamais serão apresentadas a priori, mas derivadas naturalmente das observações feitas pelo proprio aluno.

Apesar da preferencia que nas duas primeiras séries se deve dar aos exercicios orais, convém se destinem, de quando em quando, uns quinze minutos da aula a breves trabalhos escritos, relacionados com a materia ensinada.

Cumpre limitar razoavelmente o uso da analise e não a considerar finalidade, porém simples meio auxiliar que pode de vezes intervir na interpretação de uma frase ou na explicação de um periodo mais ou menos obscuro. Basta que o estudante se familiarize com as partes essenciais da proposição, desprezados, por inuteis, os pormenores e as subdivisões, que fazem perder tempo e nada adiantam a quem aprende um idioma. Todos os esforços do professor hão de convergir para o ensino da significação e da forma.

A analise lexicologica é inseparavel da sintatica, pois que as duas se completam e as palavras só teem verdadeira expressão quando combinadas na frase.

A coordenação dos fatos gramaticais observados será feita no inicio da 3ª série, prosseguindo com algum desenvolvimento o estudo da morfologia e da sintaxe, baseado sempre em exemplos tirados de livros ou preparados pelo professor.

Os exercicios orais continuarão como nas duas primeiras séries, reservando-se, entretanto, boa parte do tempo á relação de cartas e ao dialogo, escritos no quadro negro e compostos pela classe, sôbre assunto por ela sugerido.

Sòmente na 4ª série começará a redação livre, dando-se-lhe daí por diante, até o termo do curso, maior atenção. Cerca de tres quartas partes do tempo letivo deverá ser destinado á correspondencia, ás descrições e narrações, entremeadas com exercicios de estilo e analise literaria dos textos.

Os trabalhos da composição escrita serão preparados fora da classe, indicando-se ao aluno, tanto quanto possivel, as leituras a que convém recorrer afim de melhor executá-los. Para que a correção seja eficaz, recomenda-se ao professor recolher as provas e, fora da aula, nelas assinalar todos os erros, classificando em lista especial os mais comuns (erros de ortografia, pontuação, concordancia, regencia, impropriedades, etc.); na aula seguinte, mandando fazer, no quadro negro, as emendas necessarias, com a colaboração da classe, deve verificar si os interessados as transportam para as respectivas provas.

Na 4ª série caberá ainda, pelo estudo elementar da gramatica historica, a justificação dos preceitos hauridos na gramatica expositiva. A feição arcaica da lingua será ligeiramente considerada em excertos curtos e caracteristicos, ao que se dará a redação atual, seguida de rapidos comentarios oportunos.

O ensino propriamente literario, subordinado ao da lingua na 1ª série, tornar-se-á preponderante na 5ª série, expondo-se então as regras da composição literaria e o estudo, ainda que sumario, das melhores obras de escritores nacionais e portugueses. Instruidos pela leitura dos textos, serão os alunos obrigados a tomar parte ativa na analise dos processos de cada autor, caracterizando-lhe a construção e o estilo, mencionando os conceitos e as passagens que mais os impressionaram, apontando as formas elegantes e vigentes ou as que, já arcaicas, não devem ser imitadas. Após o conhecimento fragmentario de uma obra, receberão sumaria noticia das demais partes que a constituem, do plano a que obedece, do fim que se propõe, da individualidade do autor, corrente literaria a que pertencera e outras obras que produziu. Com respeito ao estudo de um escritor ou a proposito de um pensamento notavel, colhido na leitura, desenvolverão temas literarios ou assuntos de moral privada e social.

Enquanto não existir uma seleta organizada em harmonia com o programa da 5ª série, o criterio do mestre regulará a extensão adequada á apreciação de cada autor. E' preferivel começar pelas obras modernas, porque sòmente elas, por mais comunicativas, provocam emoções sinceras e despertam o prazer dos estudos desta natureza. Como o que se pretende é, antes de tudo, educar o gôsto literario, quasi todo o ensino, para ser atraente, tem de gravitar em tôrno do pensamento hodierno, em qualidade conhecido, cumprindo, portanto, a preferencia pelas obras modernas e deixando-se a analise das obras classicas para o momento em que o aluno, dotado de algum senso critico, estiver apto a assimilar com real proveito os velhos exemplares da bôa linguagem.

Finalmente incumbe ao professor fazer a sinopse historica e a apreciação geral da literatura portuguesa e da brasileira, de sorte que, ao concluir o curso fundamental, tenha o estudante indicações seguras para poder consolidar por si as noções adquiridas na escola.

PRIMEIRA E SEGUNDA SÉRIES

(3 horas)

Leitura de trechos de pensadores e poetas contemporaneos, escolhidos de acôrdo com a capacidade média da classe. Explicação dos textos. Estudo metodico do vocabulario. Reprodução oral do assunto lido.

Recitação de pequenas poesias, previamente interpretadas.

Composição oral: pequenas descrições de cenas comuns da vida humana e da natureza; breves narrativas, fabulas, contos populares.

Estudo gramatical baseado no livro de leitura: flexão nominal; gradação; numerais; emprego frequente das formas verbais mais comuns, especialmente do imperativo; estudo simultaneo e moderado da analise lexicologica e da sintatica; substituição de frases por outras de forma diversa e sentido equivalente; conversão de frases compostas em frases simples; transformação de orações coordenadas em subordinadas, e vice-versa; passagem de orações conjuncionais a reduzidas, e vice-versa; exercicios de concordancia e regencia; colocação dos pronomes obliquos; exercicios ortograficos no quadro negro.

TERCEIRA SÉRIE

(3 horas)

Leitura de escritos de prosadores e poetas modernos. Explicação dos textos. Estudo metodico do vocabulario.

Composição oral: pequenas descrições de cenas da vida humana e da natureza; breves narrativas de episodios da historia do Brasil; reprodução livre de assuntos lidos fora da classe.

Composição escrita: cartas e dialogos redigidos pela classe, em colaboração, e escritos no quadro negro.

Estudo gramatical: resumo sistematico das observações feitas nos anos precedentes; noções elementares de fonetica; formação de palavras; particularidades sintaticas; sintaxe de colocação.

proporcionando-lhe a faculdade de discernir quando e em que condições admitem os fenômenos naturais a aplicação dos processos matemáticos. Para isso, é essencial que êle aprenda, analisando uma situação complexa, a fixar relações lógicas entre os fatos, descobrindo e estabelecendo a lei geral que os rege, cujas propriedades e significação devem ficar bem compreendidas.

A exposição da matéria e a orientação metodológica, entretanto, devem subordinar-se, sobretudo nas séries inferiores, às exigências da pedagogia, de preferência aos princípios puramente lógicos. Ter-se-á sempre em vista, em cada fase do ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno e os interêsses para os quais tem maior inclinação.

O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente à prática da memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das demonstrações já feitas. Ao invés disso, deve a matéria ser levada ao conhecimento do aluno por meio da resolução de problemas e de questionários intimamente coordenados. Assim, os problemas não se devem limitar a exercícios ou assuntos estudados, mas convém sejam propostos como processo de orientar a pesquisa de teoremas e ao descobrimento a prestar na conclusão lógica.

A proposta de alguns dêstes problemas, que revelam propriedades notáveis de figuras geométricas, ou envolvem relações analíticas interessantes, será oportuno mostrar que não figuram no corpo da doutrina didática porque não são indispensáveis a uma exposição dedutiva.

Partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; ou, por outras palavras, os conhecimentos serão adquiridos, a princípio, pela experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à Geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo.

A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico, cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista — aritmético, algébrico e geométrico — não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas.

Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diversas modalidades do pensamento matemático, será adotada, como idéia central do ensino, a noção de função, apresentada, a princípio, intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas do curso, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica.

Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 3ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais de cálculo das derivadas, tendo-se não só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiosos, como ainda aos fenômenos elementares da mecânica e da física. Essas noções não serão ensinadas como matéria à parte, mas entrelaçadas no corpo das demais disciplinas matemáticas.

Êste acréscimo de matéria será compensado com a exclusão de certos assuntos de interêsse puramente formalístico, com o abandono de construções de importância secundária e, ainda, de processos de cálculo desprovidos de interêsse didático.

O assunto deverá, portanto, ser escolhido de modo que se ensinem exclusivamente as noções e os processos que tenham importância nas aplicações práticas, ou sejam necessárias à ligação íntima das partes que o constituem.

Da mesma forma, como consequência natural do estudo das relações métricas no triângulo e, posteriormente, no desenvolvimento do conceito de função, deverão ser expostas as definições e principais propriedades das linhas trigonométricas. Essas noções, além do seu alcance nas questões da vida prática, ainda facilitam a penetração na natureza dos métodos de medida indireta das grandezas.

O ensino da Matemática será sempre animado com a acentuação dos vínculos existentes entre a matemática e o conjunto das demais disciplinas. Aludir-se-á constantemente às suas aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessem às cogitações dos alunos.

Desde cedo deverá o aluno acostumar-se a fazer, antes da resolução dos problemas, uma idéia aproximada do resultado, por estimativa ou por meio de esbôço gráfico. Convém ainda que se habitue a ter a intuição, quer a respeito da possibilidade de resolução do problema, quer sôbre a natureza e o número das soluções.

Também, desde o comêço, será de tôda a vantagem despertar a convicção de que, não havendo no mundo objetivo medidas exatas, os cálculos sôbre os valores aproximados apresentam um limite de precisão, que se não deve esquecer na interpretação dos resultados das questões práticas.

E, por fim, com o intuito de aumentar o interêsse do aluno, o curso será frequentemente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos capitais da história da Matemática, bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência.

I. Aritmética

Além do desembaraço nos cálculos, procurar-se-á desenvolver o senso da percepção dos valores numéricos. O cálculo, oral ou escrito, será objeto de constantes exercícios, nos quais deverá sobressair, pela sua importância, a prática do cálculo mental.

As operações sôbre frações serão, a princípio, explicadas intuitivamente, pelo fracionamento de objetos ou de grandezas geométricas. Aprendida assim, desde o início, a representação geométrica das séries numéricas, mais tarde será fácil passar à representação gráfica das funções empíricas, da qual se partirá para o estudo gráfico das funções analíticas.

As noções de divisibilidade, de número primo, de decomposição em fatores, bem como de formação do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum, devem ser explicadas, na primeira série sem preocupação de formalismo ou de rigor dedutivo, mas com o cuidado de se evitar a mecanização dos processos e com o objetivo de despertar a iniciativa do aluno, tanto no aproveitamento dos meios expeditos, como na faculdade de operar, quanto possível, mentalmente. Nos exercícios sôbre frações, evitar-se-á o cálculo de expressões exageradamente complicadas, impróprias aos fins de se fazer com que o estudante domine, firmemente, a significação das frações e do cálculo sôbre elas.

II. Álgebra

Em todo o curso, os conceitos e processos matemáticos serão sempre apresentados em graus sucessivos, passando-se paulatinamente dos mais fáceis aos mais complexos. O estudante familiarizar-se-á, no correr da exposição da matéria, com as expressões lineares, depois com as quadráticas, posteriormente com as cúbicas e, afinal, com as expressões de grau superior ao terceiro. Além disso, os conceitos fundamentais da Álgebra terão a base concreta da sua correlação com a geometria intuitiva. Assim, os números literais e os polinômios do primeiro grau serão introduzidos em conexão com as noções de distância, de perímetro, de ângulo e de medida da circunferência, ao passo que as avaliações de superfície fornecerão sentido real às expressões quadráticas, e o cálculo dos volumes ao das cúbicas.

A noção de números qualificados e as regras de operações com os mesmos serão, ainda, apoiadas na noção de segmentos dirigidos e de outras grandezas mensuráveis susceptíveis de sentido. As regras da adição e da subtração, suas propriedades associativas e comutativas serão estabelecidas por meio de exercícios, que obriguem o aluno a refletir antes de efetuar o cálculo indicado. Dêste modo se prepara a redução dos têrmos semelhantes.

A noção de equação surgirá naturalmente na resolução de problemas simples de aritmética, com uma só incógnita e do 1º grau.

É mister que na primeira fase do estudo das equações se evite a sistematização do processo de resolução. Antes convém que o aluno seja obrigado a repeti-lo e a raciocinar em cada um dos casos numéricos apresentados de acôrdo com o critério da complexidade crescente.

A Álgebra deve mostrar-se como linguagem simbólica eminentemente apta a exprimir, de maneira concisa, relações entre as grandezas. Assim, é de se adotar, logo de início, o uso da fórmula, a que se chegará naturalmente pelo estudo das regras de avaliação de áreas e volumes, ou pelos problemas de juros e desconto comercial, podendo-se mesmo alargar a exemplificação com outras fórmulas obtidas de formulários técnicos. A fórmula será considerada sob os aspectos da construção, significação, uso e correlação entre grandezas, a saber: a) como linguagem concisa; b) como regra abreviada de cálculo; c) como uma solução geral e d) como expressão da dependência de uma variável em relação a outra.

Da dificuldade e da complexidade crescente dos problemas resultará a necessidade das operações algébricas dos símbolos.

Importa, porém, que o aluno compreenda de modo claro, e ainda conscientemente, que tanto os simbolos como as operações se referem sempre a realidades. O grau de complexidade, a ser exigido das transformações e dos processos algebricos, será limitado pela necessidade da exposição da materia [illegible]

[illegible]

III. Geometria

[illegible]

— A ordem em que é enumerada a materia de cada série não é obrigatoria; serve apenas para mostrar como se podem subordinar os programas das normas de diretrizes metodologicas aqui estabelecidas.

PRIMEIRA SÉRIE

(3 horas)

I. Iniciação geometrica.

Principais noções sobre as formas geometricas.

Areas do quadrado, retangulo, paralelogramo, triangulo e trapezio; circunferencia e area do circulo.

Volumes do paralelepipedo retangulo, do cubo, do prisma triangular, do cilindro e do cone circular (retos). Piramides.

II. Aritmetica.

Pratica das operações fundamentais. Calculo abreviado. Exercicio de calculo mental.

Noção de multiplo e de divisor. Caracteres de divisibilidade.

Decomposição em fatores primos; aplicação ao m. d. c. e ao m. m. c.

Frações ordinarias e decimais. Operações com as frações. Explicação objetiva pelo fracionamento de objetos ou de grandezas geometricas.

Sistema metrico decimal. Pratica das medidas de comprimento, superficie, volume e peso.

Operações com os numeros complexos: unidades de tempo e de angulo.

Sistema inglês de pesos e medidas.

Quadrado e raiz quadrada de numeros inteiros e decimais; aproximação no calculo da raiz.

Traçado de graficos.

III. Algebra.

Simbolos algebricos; formulas; noção de expoente.

Numeros relativos ou qualificados; operações. Explicação objetiva das regras dos sinais.

Calculo do valor numerico de monomios e polinomios. Redução de termos semelhantes; adição e subtração.

Multiplicação de monomios e polinomios em casos simples. Explicação objetiva pela consideração de areas.

Potencias de monomios. Quadrado de um binomio.

Primeira noção de equação com uma incognita; resolução de problemas numericos simples.

SEGUNDA SÉRIE

(3 horas)

I. Iniciação geometrica.

Noção de angulo e de rotação; angulos adjacentes, [illegible], suplementares, opostos pelo vertice.

Medida dos angulos: uso do transferidor.

Paralelas e perpendiculares; problemas graficos sobre [illegible] traçado.

Triangulos: alturas, medianas e bissetrizes; soma dos angulos internos e externos.
Estudo sucinto dos quadrilateros.
Noções sôbre figuras semelhantes; escala.
Medida indireta das distancias.
Razões entre lados de um triangulo retangulo. Seno, coseno e tangente de angulo agudo. Uso de tabelas de senos, cosenos e tangentes naturais.

II. Aritmetica e Algebra.

Noção de função de uma variavel independente. Representação grafica.
Estudo das funções $y = ax$ e $y = a/x$: exemplos.
Proporções e suas principais propriedades.
Resolução de problemas sôbre grandezas proporcionais, percentagens, juros, desconto (comercial), divisão proporcional, cambio.
Equações do 1º grau com uma incognita. Problemas. Interpretação das soluções negativas.
Sistemas de equações do 1º grau com duas incognitas. Problemas.
Representação grafica da função linear de uma variavel. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incognitas.
Divisão algebrica. Expoente zero. Expoente negativo.
Decomposição em fatores.
Frações algebricas. Simplificações.

TERCEIRA SÉRIE

(3 horas)

I. Aritmetica e Algebra.

Equações e problemas do 1º grau com uma ou mais incognitas.
Desigualdades do 1º grau.
Potencias e raizes.
Estudos das funções $y = x^m$, $y = 1/x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$; representação grafica.
Cálculo dos radicais. Expoentes fracionarios.
Trinomio do 2º grau.
Equação do 2º grau. Resolução grafica; resolução analitica. Discussão; propriedades das raizes.
Desigualdades do 2º grau.

II. Geometria.

Conjunto de proposições fundamentais que servem de base á Geometria dedutiva. Noções sôbre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras. Simetria.
Estudo de triangulos.
Estudo dos poligonos; soma dos angulos internos e externos.
Noção e exemplos de logar geometrico.
Circulo; propriedades dos arcos e cordas. Tangente e normal.
Medidas dos angulos.
Linhas proporcionais; linhas proporcionais no triangulo.
Semelhança; homotecia.
Relações metricas no triangulo.
Relações metricas no circulo. Média proporcional.

QUARTA SERIE

(3 horas)

I. Aritmetica e Algebra.

Equações biquadradas e equações irracionais.
Problemas do 2º grau; discussão.
Progressão aritmetica. Propriedades. Interpolação.
Progressão geometrica. Propriedades. Interpolação.
Estudo da função exponencial.
Logaritmos; propriedades. Uso das taboas.
Regua logaritmica.
Juros compostos; anuidades.

II. Geometria.

Poligonos regulares; relações metricas nos poligonos regulares.
Medida da circumferencia; cálculo de π (metodo dos perimetros).
Areas; áreas equivalentes; relação entre áreas de figuras semelhantes.
Retas e planos no espaço.
Angulos poliedros. Triedros suplementares.
Prisma e piramide.
Cilindro e cone.
Esfera. Secções planas. Polos; plano tangente; cone e cilindro circunscritos.
Noção sôbre geração e classificação das superficies; superficies regradas, de revolução, desenvolviveis.
As funções circulares; relações entre essas funções. Graficos.
Expressões da tangente, cotangente, secante e cosecante em função do seno e coseno. Seno, coseno e tangente da soma de dois angulos, do dôbro de um angulo, da metade de um angulo.

QUINTA SERIE

(3 horas)

Aritmetica, Algebra e Geometria.

Resolução de triangulos retangulos; prática das taboas de logaritmos.
Casos simples de resolução de triangulos obliquangulos.
Noções de analise combinatoria.
Binomio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo).
Derivada de um polinomio inteiro em x.
Noção de limite. Derivada de $\sqrt{x}$. Derivada de seno de x, coseno de x, tangente de x e cotangente de x.
Interpretação geometrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.
Processos elementares de desenvolvimento em série; convergencia de uma série.
Desenvolvimento em série do seno, coseno e tangente.
Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Applicação ao cálculo de certas áreas.
Volumes do prisma e do cilindro; da piramide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes.
Estudo sucinto das secções conicas.

CIENCIAS FISICAS E NATURAIS

O ensino das Ciencias fisicas e naturais tem em vista dar uma noção geral dos fenomenos da natureza e das suas aplicações mais comuns á vida quotidiana, nas cidades e nos campos, de acôrdo com o desenvolvimento da civilização da nossa época. Além de transmitir os conhecimentos já adquiridos pela tradição e a ciencia, ainda procurará desenvolver, nos alunos, o hábito da experimentação e da observação atenta dos fenomenos naturais, estimulando-lhes os dotes da imaginação, a argucia do raciocinio e a habilidade nas realizações práticas, afim de despertar as suas tendencias vocacionais para os estudos posteriores.

O ensino das Ciencias fisicas e naturais deve ser orientado pelos metodos rigorosamente cientificos da Fisica, da Quimica e da História Natural sem, contudo, obedecer na exposição dos assuntos o aspecto restrito a qualquer dessas ciencias, porquanto é mais aconselhavel que eles sejam desenvolvidos e concatenados pelas suas correlações intimas e pelas associações logicas que despertam. Terá assim o carater educativo, como o exige a finalidade do curso secundario fundamental, compreendendo mais os aspectos de conjunto do que os de minucia, que serão reservados aos estudos tecnicos e profissionais.

O ensino será sempre feito pela apresentação direta dos fatos, pela indução e demonstração experimental das leis e pela verificação das propriedades e dos resultados previamente descritos e assinalados, em aula, pelo professor e, nos exercicios praticos, pelos alunos. Os exercicios individuais são imprescindiveis ao conhecimento dos fenomenos fisicos e naturais, mas convém não sejam em número excessivo, nem dependam de medidas, que correspondem a uma idade mental mais avançada; devem antes restringir-se a fatos tipicos e adequados a verificações faceis, que permitam uma apreciação geral do assunto, ou se relacionem com fenomenos já vistos e experimentados.

A exposição dos topicos do programa e a escolha dos exemplos deverão atender ao criterio da aplicação imediata das questões á vida comum, por que são essas as que mais despertam o interesse dos alunos. O professor começará explicando a materia da lição em linhas gerais, do modo mais concreto e visual possivel, servindo-se, para isso, de gravuras, diagramas, quadros murais, modelos apropriados e quaisquer outros meios de objetivação do ensino. A exposição será sempre em linguagem usual e accessivel, com carater descritivo mais pitoresco do que formal e limitado o vocabulario tecnico e cientifico ao estritamente necessario á aquisição do conhecimento a ministrar.

Triangulos: alturas, medianas e bissetrizes; soma dos angulos internos e externos.
Estudo sucinto dos quadrilateros.
Noções sôbre figuras semelhantes; escala.
Medida indireta das distancias.
Razões entre lados de um triangulo retangulo. Seno, coseno e tangente de angulo agudo. Uso de tabelas de senos, cosenos e tangentes naturais.

II. Aritmetica e Algebra.

Noção de função de uma variavel independente. Representação grafica.
Estudo das funções $y = ax$ e $y = a/x$: exemplos.
Proporções e suas principais propriedades.
Resolução de problemas sôbre grandezas proporcionais, porcentagem, juros, desconto (comercial), divisão proporcional, cambio.
Equações do 1º grau com uma incognita. Problemas. Interpretação das soluções negativas.
Sistemas de equações do 1º grau com duas incognitas. Problemas.
Representação grafica da função linear de uma variavel. Solução grafica de um sistema de duas equações com duas incognitas.
Divisão algebrica. Expoente zero. Expoente negativo.
Decomposição em fatores.
Frações algebricas. Simplificações.

TERCEIRA SÉRIE

(3 horas).

I. Aritmetica e Algebra.

Equações e problemas do 1º grau com uma ou mais incognitas.
Desigualdades do 1º grau.
Potencias e raizes.
Estudos das funções $y = x^m$, $y = 1/x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$; representação grafica.
Calculo dos radicais. Expoentes fracionarios.
Trinomio do 2º grau.
Equação do 2º grau. Resolução grafica; resolução analitica. Discussão; propriedades das raizes.
Desigualdades do 2º grau.

II. Geometria.

Conjunto de proposições fundamentais que servem de base á Geometria dedutiva. Noções sôbre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras. Simetria.
Estudo de triangulos.
Estudo dos poligonos; soma dos angulos internos e externos.
Noção e exemplos de lugar geometrico.
Circulo; propriedades dos arcos e cordas. Tangente e normal.
Medida dos angulos.
Linhas proporcionais: linhas proporcionais no triangulo.
Semelhança; homotetia.
Relações metricas no triangulo.
Relações metricas no circulo. Média proporcional.

QUARTA SÉRIE

(3 horas)

I. Aritmetica e Algebra.

Equações biquadradas e equações irracionais.
Problemas do 2º grau; discussão.
Progressão aritmetica. Propriedades. Interpolação.
Progressão geometrica. Propriedades. Interpolação.
Estudo da função exponencial.
Logaritmos; propriedades. Uso das tabuas.
Regua logaritmica.
Juros compostos; anuidades.

II. Geometria.

Poligonos regulares; relações metricas nos poligonos regulares.
Medida da circunferencia; calculo de π (metodo dos perimetros).
Areas; areas equivalentes; relação entre áreas de figuras semelhantes.
Retas e planos no espaço.
Angulos poliedros. Triedros suplementares.
Prisma e piramide.
Cilindro e cone.
Esfera. Secções planas. Polos; plano tangente; cone e cilindro circunscritos.
Noção sôbre geração e classificação das superficies; superficies regradas, de revolução, desenvolviveis.
As funções circulares; relações entre essas funções. Graficos.
Expressões da tangente, cotangente, secante e cosecante em função do seno e coseno. Seno, coseno e tangente da soma de dois angulos, do dôbro de um angulo, da metade de um angulo.

QUINTA SÉRIE

(3 horas)

Aritmetica, Algebra e Geometria.

Resolução de triangulos retangulos; prática das taboas de logaritmos.
Casos simples de resolução de triangulos obliquangulos.
Noções de analise combinatoria.
Binomio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo).
Derivada de um polinomio inteiro em x.
Noção de limite. Derivada de $\sqrt{x}$. Derivada de seno de x, coseno de x, tangente de x e cotangente de x.
Interpretação geometrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.
Processos elementares de desenvolvimento em série; convergencia de uma série.
Desenvolvimento em série do seno, coseno e tangente.
Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Applicação ao calculo de certas áreas.
Volumes do prisma e do cilindro; da piramide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes.
Estudo sucinto das secções conicas.

CIENCIAS FISICAS E NATURAIS

O ensino das Ciencias fisicas e naturais tem em vista dar uma noção geral dos fenomenos da natureza e das suas aplicações mais comuns á vida quotidiana, nas cidades e nos campos, de acôrdo com o desenvolvimento da civilização da nossa época. Além de transmitir os conhecimentos já adquiridos pela tradição e a ciencia, ainda procurará desenvolver, nos alunos, o hábito da experimentação e da observação atenta dos fenomenos naturais, estimulando-lhes os dotes de imaginação, a argucia do raciocinio e a habilidade nas realizações práticas, afim de despertar as suas tendencias vocacionais para os estudos posteriores.

O ensino das Ciencias fisicas e naturais deve ser orientado pelos metodos rigorosamente cientificos da Fisica, da Quimica e da História Natural sem, contudo, obedecer na exposição dos assuntos o aspecto restrito a qualquer dessas ciencias, porquanto é mais aconselhavel que eles sejam desenvolvidos e concatenados pelas suas correlações intimas e pelas associações logicas que despertam. Terá assim o carater educativo, como o exige a finalidade do curso secundario fundamental, compreendendo mais os aspectos de conjunto do que os de minucia, que serão reservados aos estudos tecnicos e profissionais.

O ensino será sempre feito pela apreciação direta dos fatos, pela indução e demonstração experimental das leis e pela verificação das propriedades e dos resultados previamente descritos e assinalados, em aula, pelo professor e, nos exercicios praticos, pelos alunos. Os exercicios individuais são imprescindiveis ao conhecimento dos fenomenos fisicos e naturais, mas convém não sejam em número excessivo, nem dependam de medidas, que correspondem a uma idade mental mais avançada; devem antes restringir-se a fatos tipicos e adequados á verificações faceis, que permitam uma apreciação geral do assunto, ou se relacionem com fenomenos já vistos e experimentados.

A exposição dos topicos do programa e a escolha dos exemplos deverão atender ao criterio da aplicação imediata das aquisições á vida comum, por que são essas as que mais despertam o interesse dos alunos. O professor começará explanando a materia da lição em linhas gerais, do modo mais concreto e visual possivel, servindo-se, para isso, de gravuras, diagramas, quadros murais, modelos apropriados e quaisquer outros meios de objetivação do ensino. A exposição será sempre em linguagem usual e acessivel, com carater descritivo mais pitoresco do que formal e limitado o vocabulario tecnico e cientifico ao estritamente necessario á aquisição do conhecimento a ministrar.

Triangulos: alturas, medianas e bissetrizes; soma dos angulos internos e externos.
Estudo sucinto dos quadrilateros.
Noções sobre figuras semelhantes; escala.
Medida indireta das distancias.
Razões entre lados de um triangulo retangulo. Seno, coseno e tangente de angulo agudo. Uso de tabelas de senos, cosenos e tangentes naturais.

II. Aritmetica e Algebra.

Noção de função de uma variavel independente. Representação grafica.
Estudo das funções y = ax e y = a/x; exemplos.
Proporções e suas principais propriedades.
Resolução de problemas sobre grandezas proporcionais. Percentagem, juros, desconto (comercial), divisão proporcional, cambio.
Equações do 1º grau com uma incognita. Problemas. Interpretação das soluções negativas.
Sistemas de equações do 1º grau com duas incognitas. Problemas.
Representação grafica da função linear de uma variavel. Resolução grafica de um sistema de duas equações com duas incognitas.
Divisão algebrica. Expoente zero. Expoente negativo.
Decomposição em fatores.
Frações algebricas. Simplificações.

TERCEIRA SÉRIE

(3 horas)

I. Aritmetica e Algebra.

Equações e problemas do 1º grau com uma ou mais incognitas.
Desigualdades do 1º grau.
Potencias e raizes.
Estudos das funções $y = x^m$, $y = 1/x^m$ e $y = \sqrt[m]{x}$; representação grafica.
Calculo dos radicais. Expoentes fracionarios.
Trinomio do 2º grau.
Equação do 2º grau. Resolução grafica; resolução analitica. Discussão; propriedades das raizes.
Desigualdades do 2º grau.

II. Geometria.

Conjunto de proposições fundamentais que servem de base á Geometria dedutiva. Noções sobre deslocamentos elementares no plano; translação e rotação de figuras. Simetria.
Estudo de triangulos.
Estudo dos poligonos; soma dos angulos internos e externos.
Noção e exemplos de logar geometrico.
Circulo; propriedades dos arcos e cordas. Tangente e normal.
Medida dos angulos.
Linhas proporcionais; linhas proporcionais no triangulo.
Semelhança; homotecia.
Relações metricas no triangulo.
Relações metricas no circulo. Média proporcional.

QUARTA SÉRIE

(3 horas)

I. Aritmetica e Algebra.

Equações biquadradas e equações irracionais.
Problemas do 2º grau; discussão.
Progressão aritmetica. Propriedades. Interpolação.
Progressão geometrica. Propriedades. Interpolação.
Estudo da função exponencial.
Logaritmos; propriedades. Uso das taboas.
Regua logaritmica.
Juros compostos; anuidades.

II. Geometria.

Poligonos regulares; relações metricas nos poligonos regulares.
Medida da circunferencia; calculo de π (metodo dos perimetros).
Areas; areas equivalentes; relação entre áreas de figuras semelhantes.
Retas e planos no espaço.
Angulos poliedros. Triedros suplementares.
Prisma e piramide.
Cilindro e cone.
Esfera. Secções planas. Polos; plano tangente; cone e cilindro circunscritos.
Noção sôbre geração e classificação das superficies; superficies regradas, de revolução, desenvolviveis.
As funções circulares; relações entre essas funções. Graficos.
Expressões da tangente, cotangente, secante e cosecante em função do seno e coseno. Seno, coseno e tangente da soma de dois angulos, do dôbro de um angulo, da metade de um angulo.

QUINTA SÉRIE

(3 horas)

Aritmetica, Algebra e Geometria.

Resolução de triangulos retangulos; prática das taboas de logaritmos.
Casos simples de resolução de triangulos obliquangulos.
Noções de analise combinatoria.
Binomio de Newton (caso de expoente inteiro e positivo).
Derivada de um polinomio inteiro em x.
Noção de limite. Derivada de $\sqrt{x}$. Derivada de seno de x, coseno de x, tangente de x e cotangente de x.
Interpretação geometrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.
Processos elementares de desenvolvimento em série; convergencia de uma série.
Desenvolvimento em série do seno, coseno e tangente.
Problema inverso da derivação. Primitivas. Integrais. Applicação ao calculo de certas áreas.
Volumes do prisma e do cilindro; da piramide, do cone e dos respectivos troncos. Volume da esfera e suas partes.
Estudo sucinto das secções conicas.

CIENCIAS FISICAS E NATURAIS

O ensino das Ciencias fisicas e naturais tem em vista dar uma noção geral dos fenomenos da natureza e das suas aplicações mais comuns á vida quotidiana, nas cidades e nos campos, de acôrdo com o desenvolvimento da civilização da nossa época. Além de transmitir os conhecimentos já adquiridos pela tradição e a ciencia, ainda procurará desenvolver, nos alunos, o hábito da experimentação e da observação atenta dos fenomenos naturais, estimulando-lhes os dotes da imaginação, a argucia do raciocinio e a habilidade nas realizações praticas, afim de despertar as suas tendencias vocacionais para os estudos posteriores.

O ensino das Ciencias fisicas e naturais deve ser orientado pelos metodos rigorosamente cientificos da Fisica, da Quimica e da Historia Natural sem, contudo, obedecer na exposição dos assuntos o aspecto restrito a qualquer dessas ciencias, porquanto é mais aconselhavel que eles sejam desenvolvidos e concatenados pelas suas correlações intimas e pelas associações logicas que despertam. Terá assim o carater educativo, como o exige a finalidade do curso secundario fundamental, compreendendo mais os aspectos de conjunto do que os de minucia, que serão reservados aos estudos tecnicos e profissionais.

O ensino será sempre feito pela apresentação direta dos fatos, pela indução e demonstração experimental das leis e pela verificação das propriedades e dos resultados previamente descritos e assinalados, em aula, pelo professor e, nos exercicios praticos, pelos alunos. Os exercicios individuais são imprescindiveis no conhecimento dos fenomenos fisicos e naturais, mas convém não sejam em número excessivo, nem dependam de medidas, que correspondem a uma idade mental mais avançada; devem antes restringir-se a fatos tipicos e adequados a verificações faceis, que permitam uma apreciação geral do assunto, ou se relacionem com fenomenos já vistos e experimentados.

A exposição dos topicos do programa e a escolha dos exemplos deverão atender ao criterio da aplicação imediata das questões á vida comum, por que são essas as que mais despertam o interesse dos alunos. O professor começará explanando a materia da lição em linhas gerais, do modo mais concreto e visual possivel, servindo-se, para isso, de gravuras, diagramas, quadros murais, modelos apropriados e quaisquer outros meios de objetivação do ensino. A exposição será sempre em linguagem usual e acessivel, com carater descritivo mais pitoresco do que formal e limitado o vocabulario tecnico e cientifico ao estritamente necessario á aquisição do conhecimento a ministrar.

ANEXO B – PROGRAMA DE MATEMÁTICA DOS CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO DO ENSINO SECUNDÁRIO NO PERÍODO DE REFORMA GUSTAVO CAPANEMA

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA SÉRIE

Geometria intuitiva

Unidade I — *Noções fundamentais:* 1. Sólidos geométricos, superfícies, linhas, ponto. 2. Plano, reta, semi-reta, segmento. 3. Ângulos. 4. Posições relativas de retas e planos; paralelas; perpendiculares e oblíquas.

Unidade II — *Figuras geométricas:* 1. Polignos; triângulos e quadriláteros. 2. Círculo. 3. Poliedros; corpos redondos.

Aritmética prática

Unidade III — *Operações fundamentais:* 1. Noção de número inteiro; grandeza; unidade; medida. 2. Numeração. 3. Adição, subtração, multiplicação e divisão de inteiros. 4. Cálculo mental e cálculo abreviado.

Unidade IV — *Múltiplos e divisores:* 1. Números primos; decomposição em fatôres primos. 2. Parte alíqüota de duas grandezas; m.d.c. e m.m.c.

Unidade V — *Frações ordinárias:* 1. Frações de grandezas; noção de fração. 2. Comparação, simplificação, redução ao mesmo denominador. 3. Operações fundamentais. 4. Problemas sôbre as frações de grandezas.

* Publicada no **D. O.** de 16-7-942 e retificada no **D. O.** de 24-7-942.

Unidade VI — *Números complexos:* 1. Unidades de ângulo e de tempo. 2. Moeda inglêsa e unidades inglêsas usuais de comprimento. 3. Operações com os números complexos.

Unidade VII — *Frações decimais:* 1. Noção de fração e de número decimal. 2. Operações fundamentais. 3. Conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa.

SEGUNDA SÉRIE

Geometria intuitiva

Unidade I — *Áreas:* 1. Área de uma figura plana; unidade de área. 2. As unidades legais brasileiras e as inglêsas mais usuais. 3. Áreas das principais figuras planas; fórmulas.

Unidade II — *Volumes:* 1. Noção de volume; unidade de volume. 2. As unidades legais brasileiras e as inglêsas mais usuais. 3. Volumes dos principais sólidos geométricos; fórmulas.

Aritmética prática

Unidade III — *Sistema métrico:* 1. Diferentes espécies de grandeza; medição direta e indireta. 2. Grandezas elementares; unidades fundamentais; noção de grandeza composta. 3. Unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo, tempo, velocidade, massa, densidade; múltiplos e submúltiplos.

Unidade IV — *Potências e raízes:* 1. Definições. 2. Operações com potências. 3. Quadrado da soma de dois números. 4. Potências das frações. 5. Regra prática para extração da raiz quadrada; aproximação no cálculo da raiz. 6. Uso de tábuas para obtenção do quadrado, do cubo, da raiz quadrada e da raiz cúbica dos números inteiros e decimais.

Unidade V — *Razões e proporções:* 1. Razão de duas grandezas. 2. Proporções; médias. 3. Grandezas proporcionais.

Unidade VI — *Problemas sôbre grandezas proporcionais:* 1. Divisão proporcional. 2. Regra de três. 3. Porcentagem. 4. Juros simples.

TERCEIRA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Números relativos:* 1. Noções concretas; segmentos orientados. 2. Operações.

Unidade II — *Expressões algébricas:* 1. Valor numérico e classificação das expressões algébricas. 2. Monômios e polinômios; ordenação e redução de têrmos semelhantes.

Unidade III — *Operações algébricas:* 1. Adição, subtração e multiplicação de polinômios. 2. Produtos notáveis; potência inteira de um monômio. 3. Divisão por um monômio. 4. Casos simples de fatoração.

Unidade IV — *Frações algébricas:* Definição, propriedades. 2. Frações racionais: simplificação, redução ao mesmo denominador, operações fundamentais.

Unidade V — *Eqüações do 1.º grau:* 1. Eqüação; identidade; eqüações eqüivalentes. 2. Resolução e discussão de uma eqüação com uma incógnita.

Geometria dedutiva

Unidade VI — *Introdução à geometria dedutiva:* 1. Proposições geométricas; hipótese, conclusão; demonstração. 2. Ponto, linha, superfície, reta, plano. 3. Figuras geométricas; lugares geométricos.

Unidade VII — *A reta:* 1. Ângulos. 2. Triângulos; igualdade de triângulos. 3. Perpendiculares e oblíqüas; mediatriz e bissetriz como lugares geométricos. 4. Teoria das paralelas. 5. Soma dos ângulos de um triângulo e de um polígono convexo. Quadriláteros; propriedades do paralelogramo, translação; trapézio. 7. Construções geométricas.

Unidade VIII — *O círculo:* 1. Determinação do círculo; posições relativas de uma reta e um círculo. 2. Diâmetros e cordas. 3. Tangentes: posição relativa de dois círculos. 4. Deslocamentos no plano. 5. Correspondência entre arcos e ângulos; ângulos inscritos, interiores e exteriores; segmento capaz; quadrilátero inscritível. 6. Construções geométricas.

QUARTA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Equações e desigualdades do 1.º grau:* Coordenadas cartesianas no plano; representações gráficas. 2. Resolução e discussão de um sistema de duas eqüações com duas incógnitas. 3. Resolução gráfica de um sistema de duas eqüações com duas incógnitas; interpretação gráfica da discussão. 4. Resolução de desigualdades do 1.º grau com uma ou duas incógnitas. 5. Problemas do 1.º grau: fases da resolução de um problema; generalização; discussão das soluções.

Unidade II — *Números irracionais:* 1. Grandezas incomensuráveis; noção de número irracional; operações. 2. Raíz m-ésima de um número; radicais; valor aritmético de um radical. 3. Cálculo aritmético dos radicais. 4. Frações irracionais; casos simples de racionalização de denominadores.

Unidade III — *Eqüações do 2.º grau:* 1. Existência das raízes no campo real; resolução. 2. Relações entre os coeficientes e as raízes; sinal das raízes. 3. Composição da eqüação dada às raízes; aplicação a sistemas simples do 2.º grau. 4. Problemas do 2.º grau.

Geometria dedutiva

Unidade IV — *Linhas proporcionais; semelhança:* 1. Pontos que dividem um segmento numa razão dada; definição de divisão harmônica. 2. Segmentos determinados sôbre transversais por um feixe de paralelas. 3. Linhas proporcionais no triângulo; propriedades das bissetrizes de um triângulo; lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante. 4. Semelhança de triângulos; semelhança de polígonos. 5. Construções geométricas.

Unidade V — *Relações métricas nos triângulos:* 1. Relações métricas no triângulo retângulo. 2. Altura de um triângulo eqüilátero e diagonal do quadrado.

Unidade VI — *Relações métricas no círculo:* 1. Linhas proporcionais no círculo. 2. Construções geométricas.

Unidade VII — *Polígonos regulares:* 1. Propriedades dos polígonos regulares; expressão do ângulo interno. 2. Construção e cálculo do lado do quadrado, do hexágono regular, do triângulo eqüilátero e do decágono regular convexo. 3. Cálculo dos apótemas dos mesmos polígonos. 4. Lado do polígono de 2n lados em função do de n lados. 5. Semelhança dos polígonos regulares. 6. Construções geométricas.

Unidade VIII — *Medição da circunferência:* 1. Comprimento de um arco de círculo. 2. Razão da circunferência para o diâmetro. 3. Expressões do comprimento da circunferência e de um arco; o radiano.

Unidade IX — *Áreas planas:* 1. Medição das áreas das principais figuras planas. 2. Relações métricas entre as áreas; áreas de polígonos semelhantes. Teorema de Pitágoras.

PORTARIA MINISTERIAL N.º 177, DE 16 DE MARÇO DE 1943 *

Expede os programas de matemática dos cursos clássico e científico do ensino secundário

O Ministro de Estado da Educação e Saúde resolve expedir e determinar que se executem os programas de matemática, que se anexam à presente portaria ministerial, dos cursos clássico e científico do ensino secundário.

Rio de Janeiro, 16 de março de 1943. — *Gustavo Capanema.*

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CLÁSSICO

PRIMEIRA SÉRIE

Aritmética Teórica

Unidade I — *A divisibilidade numérica:* 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.m.c. e m.d.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

Álgebra

Unidade II — *Os polinômios:* 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por x $\pm$ a; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade III — *O trinômio do 2.º grau:* 1. Decomposição em fatôres de 1.º grau; sinal do trinômio; desigualdade do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica.

Geometria

Unidade IV — *O plano e a reta no espaço:* 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíqüas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sôbre ângulos poliédricos.

Unidade V — *Os poliedros:* 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes dêsses sólidos.

Publicada no **D. O.** de 16-3-1943.

SEGUNDA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Progressões e logaritmos:* 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas eqüações exponenciais simples.

Unidade II — *O binômio de Newton:* 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Geometria

Unidade III — *Os corpos redondos:* 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esféricos; volumes da esfera.

Trigonometria

Unidade IV — *Vetor:* 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslizantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Charles.

Unidade V — *Projeções:* 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VI — *Funções circulares:* 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos da mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º.

Unidade VII — *Resoluções de triângulos:* 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de triângulos retângulos.

TERCEIRA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Funções:* 1. Noção de função de variável real. 2. Representação cartesiana. 3. Noção de limite e de continuidade.

Unidade II — *Derivadas:* 1. Definição: interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Geometria

Unidade III — *Curvas usuais:* 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As seções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria analítica

Unidade IV — *Noções fundamentais:* 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abscissas sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulos de duas direções.

Unidade V — *Lugares geométricos:* v. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangualr. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTÍFICO

Aritmética teórica

Unidade I — *As operações aritméticas fundamentais:* 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração.

Unidade II — *A divisibilidade numérica:* 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.d.c. e do m.m.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

Unidade III — *Os números fracionários:* 1. Teoria das operações aritméticas sôbre números fracionários. 2. Noções sôbre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.

Álgebra

Unidade IV — *Os polinômios:* 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; métodos dos coeficientes a determinar: identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade V — *O trinômio do 2.º grau:* 1. Decomposição em fatôres do 1.º grau; sinais do trinômio, ineqüações do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sôbre continuidade e sôbre máximos e mínimos.

Geometria

Unidade VI — *O plano e a reta no espaço:* 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíqüas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliedros; estudo especial dos tiedros.

Unidade VII — *Os poliedros:* 1. Noções gerais. 2. Estudos dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Teorema de Euler; noções sôbre os poliedros regulares.

SEGUNDA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *A função exponencial:* Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logarítimos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas eqüações exponenciais.

Unidade II — *O binômio de Newton:* 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III — *Determinantes:* 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de eqüações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV — *Frações contínuas:* Noções sôbre frações contínuas.

Geometria

Unidade V — *Os corpos redondos:* 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico, volume da esfera.

Trigonometria

Unidade VI — *Vetor:* 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslizantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII — *Projeções:* 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor de projeção de um vetor.

Unidade VIII — Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos da mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{Pn}{n}$

TERCEIRA SÉRIE

Álgebra

Unidade I — *Séries:* 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergências.

Unidade II — *Funções:* 1. Função de uma variável real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; pontos de descontinuidade de uma função racional.

Unidade III — *Derivadas:* 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV — *Números complexos:* Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das eqüações binômias.

Unidade V — *Eqüações algébricas:* 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma eqüação algébrica; aplicação à composição das eqüações. 3. Noções sôbre transformações das eqüações recíprocas; eqüações de raízes iguais.

Geometria

Unidade VI — *Relações métricas:* 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco; 3. Potência de um ponto: eixos radicais; planos radicais.

Unidade VII — *Transformação de figuras:* 1. Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e três dimensões. 3. Inversão pelos raios vetores recíprocos.

Unidade VIII — *Curvas usuais:* 1. Definição e propriedade fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As seções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria analítica

Unidade IX — *Noções fundamentais:* 1. Concepção e Descartes. 2. Coordenadas; abscissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X — *Lugares geométricos:* 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem de equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

ANEXO C – PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA OS CURSOS COLEGIAIS NO MINISTÉRIO DE SIMÕES FILHO

ESTADOS UNIDOS DO BRASIL

DIÁRIO OFICIAL

SEÇÃO I

SUPLEMENTO AO N.º 45 CAPITAL FEDERAL SEXTA-FEIRA 22 DE FEVEREIRO DE 1952

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E SAÚDE

GABINETE DO MINISTRO

PORTARIA N.º 1.045, DE 14 DE DEZEMBRO DE 1951

Expede os planos de desenvolvimento dos programas mínimos de ensino secundário e respectivas instruções metodológicas.

O Ministro de Estado da Educação e Saúde, tendo em vista os têrmos da Portaria n.º 966, de 2 de outubro de 1951, resolve:

Art. 1.º Ficam aprovados os planos anexos de desenvolvimento dos programas mínimos de Português, Francês, Inglês, Espanhol, Latim, Grego, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Desenho, Física, Química, Filosofia, História Geral e do Brasil e Economia Doméstica no curso secundário, elaborados pela Congregação do Colégio Pedro II, de acôrdo com o disposto no art. 5.º da Portaria ministerial n.º 966, de 2 de outubro de 1951, publicada no Suplemento do Diário Oficial de 26 do novembro último.

Art. 2.º Ficam igualmente aprovadas as considerações preliminares e as instruções metodológicas que a esta acompanham, para execução dos programas mínimos de Português, Francês, Inglês, Latim, Espanhol, Grego, Geografia Geral e do Brasil, Matemática, Desenho, Física, Química, Filosofia, História Geral e do Brasil, no curso secundário, elaboradas ex-vi do art. 3 da referida Portaria ministerial n.º 966.

Parágrafo único — Serão mantidas as instruções metodológicas de Economia Doméstica e de Trabalhos Manuais, expedidas pelas Portarias ministeriais n.º 14, de 7 de janeiro de 1946, e n.º 567, de 10 de novembro de 1945, respectivamente.

Art. 3.º Revogam-se as disposições em contrário. — *Simões Filho.*

A Congregação do Colégio Pedro II, no cumprimento da incumbência que lhe foi cometida pelo Senhor Ministro da Educação e Saúde, resolve aprovar, para que sejam executados no mesmo colégio, os programas analíticos que a esta acompanham, bem como as instruções metodológicas concernentes a cada qual das disciplinas que constituem o curso secundário.

Os referidos programas completam, pela dosagem e discriminação dos assuntos, os programas básicos já elaborados, e com êstes devem entrar em vigor gradativamente, na forma estabelecida pela resolução ministerial.

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

1. A Congregação do Colégio Pedro II julga-se no dever imperioso de declarar, inicialmente, que com estas instruções metodológicas não pretende sugerir inovações em matéria didática, nem ditar regras de metodologia aos docentes, para execução dos programas que se seguem. Admitir que êsses princípios de uso rotineiro sejam ignorados a tal ponto que se imponha sua determinação formal e expressa, importaria grave injúria ao corpo de professôres que tem dado sobejas provas de capacidade e dedicação no exercício do magistério no Colégio.

Apresenta, pois, a Congregação estas instruções com o objetivo exclusivo de proporcionar um roteiro, um subsídio, um repositório de esclarecimentos para elucidação de possíveis dúvidas que venham a surgir na execução dos novos programas, encargo que, evidentemente, compete aos respectivos redatores. De qualquer forma, porém, o que a Congregação deseja acentuar é que o bom êxito na aplicação destas, como de quaisquer programas, depende do zêlo, da boa vontade, do patriotismo dos dignos docentes que os devem pôr em prática na vigência de suas normas.

2. Confia, pois, a Congregação do Colégio Pedro II, em que os professôres tenham sempre em mente que a finalidade precípua do ensino secundário, nos têrmos da lei vigente, consiste em formar a personalidade integral do adolescente, preparando-o para a vida prática; fazer dêle um cidadão útil a si mesmo, à família e à Pátria; habilitá-lo ao exercício da [illegible]

namento oratório; por fim o comentário gramatical e filológico.

Pouco importa que êsse trabalho tenha de ser executado em algumas aulas. O essencial é que se complete.

E' bom evitar quanto possível, a fragmentação dos textos. Assim, a várias excertas das orações de Cícero deve preferir-se um discurso inteiro. Quando, porém, o professor sentir a impossibilidade ou inconveniência de empreender com os alunos o estudo integral de uma obra, poderá fazê-lo parcialmente escolhendo e ordenando os trechos indispensáveis ao conhecimento e apreciação do conteúdo.

Só depois de concluído o estudo de um discurso ou de um poema, virá o ensejo das considerações sôbre a personalidade, vida, produção do autor, fatos que teriam influído na concepção do plano de sua obra. Quase nenhuma vantagem resulta das lições de história literária quando não motivadas por textos familiares aos alunos.

Em vez das biografias e digressões históricas, recomendam-se, por mais proveitosos, os exercícios escritos em português, tais como a análise esquemática de textos conhecidos, o argumento de um canto da Eneida, o resumo de um discurso de Cícero, ou mesmo pequenas dissertações que exijam pesquisa e discernimento, e não esfôrço de memória.

Nada impede, entretanto, que nas últimas aulas do Curso Clássico o professor faça o resumo da história da literatura latina, indicando aos alunos os compêndios que poderão consultar, se quiserem prosseguir com pormenores o estudo da matéria.

GREGO

CURSO CLÁSSICO

Primeira série

I — Leitura e tradução

Far-se-ão com a maior freqüência possível, utilizando-se tópicos fáceis e graduados. Servirão, ainda, de textos as fábulas mais conhecidas de Esopo.

II — Gramática

1 — Alfabeto, espíritos, acentos. Regras gerais de acentuação. Vogais; ditongos; consoantes.

2 — Declinação do artigo.

3 — Declinação dos substantivos: 1.ª declinação: — a) Tipos femininos; — b) Tipos masculinos.

2.ª declinação: — a) Tipos masculinos — femininos; b) Tipos neutros.

3.ª declinação: tipos principais dos três gêneros.

4 — Declinação dos adjetivos: a) Adjetivos da 1.ª e 2.ª declinação; b) Adjetivos que seguem as flexões da 3.ª declinação;

5 — Graus dos adjetivos;

6 — Pronomes pessoais.

7 — Conjugação do auxiliar. Noções gerais da flexão verbal grega.

8 — Conjugação ativa do verbo em puro.

Conjugação médio-passiva do verbo em [illegible] puro.

III — Outros exercícios — Versões de pequenas orações.

Segunda série

I — Leitura e tradução

Far-se-ão sempre acompanhadas de comentários destinados não só à explicação dos fatos gramaticais, senão também ao conhecimento da civilização grega.

Servirão de tôda excertos fáceis dos Diálogos dos Mortos, de Luciano.

II — Gramática

1 — Revisão sumária das flexões nominais.

2 — Revisão sumária da flexão verbal.

3 — Adjetivos numerais.

4 — Flexão do pronome relativo. Flexão dos principais determinativos.

5 — Noções gerais das contrações no grego.

6 — Estudo da contração na flexão nominal.

7 — Verbos contratos, nas três vozes.

8 — Noções gerais da sintaxe do artigo.

9 — Noções gerais de sintaxe: — a) função casual; b) uso da preposição.

III — Outros exercícios: Versões de trechos fáceis.

3.ª série

I — Leitura e tradução

Far-se-ão sempre acompanhadas de comentários gramatical e cultural. São textos indicados e excertos da Ciropedia ou da Anábase, de Xenofonte.

II — Gramática

1 — Conjugação dos principais verbos em mi.

2 — Noções das principais irregularidades no verbo grego.

3 — Sintaxe de concordância nominal e concordância verbal.

III — Noções de literatura grega

1 — Menção dos principais dialetos gregos

2 — Caracteres gerais da literatura grega

3 — Influência da literatura grega na literatura latina.

4 — Influência da literatura grega nas literaturas modernas

5 — Ligeira apreciação bibliográfica dos principais autores gregos:

a) a poesia épica — Homero;

b) a poesia didática — Hesíodo;

c) a historiografia: — Heródoto, Tucídides e Xenofonte.

d) a tragédia — Ésquilo, Sófocles e Eurípedes;

e) a filosofia: Sócrates, Platão e Aristóteles

IV — outros exercícios: Comentários filológicos e literários de trechos dos autores citados.

INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS PARA EXECUÇÃO DO PROGRAMA DE GREGO

O ensino da língua grega é de livre escolha do aluno. Por êste motivo é necessário que o professor, logo de início, mostre a seus discípulos quais as finalidades dêsse estudo. Em primeiro lugar é preciso que se firme bem a noção de que a língua que se vai estudar é a clássica e não o grego moderno.

Língua de alfabeto típico e um tanto diferente do alfabeto latino, requer que se principie seu estudo pelo ensino da maneira de grafar êsses sinais. E' aconselhável que primeiro se adestre o aluno em escrever as minúsculas e depois as maiúsculas. Daí se passará ao valor fonético dos sinais e à leitura. Mesmo que se adotem, como é aconselhável, gramática e livro de texto, os exercícios de cópia são utilíssimos e mesmo indispensáveis.

Tratando-se do ensino do grego clássico, a pronúncia a adotar deverá ser a erasmiana ou etacismo, o que não impede que o professor faça referências à pronúncia de Reuchlin.

Conseguida a prática da escrita e da leitura devem ser iniciadas as noções gerais sôbre a língua grega.

Neste particular o professor deverá, quando possível, apresentar e aproximar as noções adquiridas pelos alunos no curso ginasial, sôbre o mecanismo do latim, e mostrar os pontos em que a flexão grega difere da flexão do latim.

O uso das preposições em lugar do ablativo e o emprêgo do artigo oferecem ensejo ao professor para mostrar a maior semelhança entre a sintaxe grega e a portuguêsa, apesar de serem duas línguas de famílias diferentes.

No estudo da flexão nominal há oportunidade para que o professor aproveite os conhecimentos latinos do aluno e os aplique no estudo flexional grego.

A terceira declinação deverá ser estudada, na primeira série, de modo sumário. Seria aconselhável que se desse a explicação dos temas em muda com o auxílio de noções sumárias sôbre o encontro de consoantes.

A declinação do adjetivo deve ser dada à proporção que se realizarem exercícios sôbre as declinações do substantivo, assinalando-se desta forma a semelhança de desinências entre ambos.

No estudo da flexão verbal é indispensável que se expliquem a sua formação e seus elementos componentes, distinguindo-os bem.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

1.º ciclo

1.ª Série

I — Números inteiros; operações fundamentais; números relativos.

1. Noção de número natural, grandeza, unidade, medida. Numeração, numeração falada; numeração escrita. Sistema decimal. Valor absoluto e valor relativo dos algarismos.

2. Adição. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.

3. Subtração. Propriedades. Prova. Complemento aritmético de um número.

4. Multiplicação. Propriedades. Processos de abreviação. Prova. Potência de um número. Produto e quociente de potências da mesma base.

5. Divisão. Divisão aproximada. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.

6. Números relativos; interpretações. Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação dos números relativos; regras práticas.

II — *Divisibilidade aritmética; números primos.*

1. Múltiplos e divisores. Divisibilidade. Princípios fundamentais. Caracteres de divisibilidade por 10 e suas potências; por 2, 4 e 8; por 5 e 25; por 3 e 9; por 11. Propriedades elementares dos restos. Provas das operações por um divisor.

2. Números primos e números compostos; números primos entre si. Crivo de Eratóstenes. Reconhecimento de um número primo. Decomposição de um número em fatores primos. Cálculo dos divisores de um número. Número divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois; aplicação à divisibilidade.

3. Máximo divisor comum. Algoritmo de Euclides; simplificações. Propriedades. Máximo divisor comum pela decomposição em fatores primos.

4. Mínimo múltiplo comum. Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Propriedades.

III — *Números fracionários.*

1. Frações. Fração ordinária e fração decimal. Comparação de frações; simplificação; redução ao mesmo denominador. Operações com frações ordinárias.

2. Frações decimais; números decimais. Propriedades dos números decimais; operações. Conversão de fração ordinária em número decimal e vice-versa. Número decimal periódico.

IV — *Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais.*

1. Unidade legal de comprimento; múltiplos e submúltiplos usuais. Área; unidade de área; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Área do retângulo, do paralelogramo, do triângulo, do trapézio e do círculo; fórmulas. Volume; unidade de volume; unidades legais; múltiplos e submúltiplos usuais. Volume do paralelepípedo, do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera; fórmulas. Pêso e massa; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Densidade; aplicações.

2. Unidade de ângulo e de tempo. Unidades inglêsas e norte-americanas mais conhecidas no Brasil. Números complexos: operações; conversões.

3. Unidade de velocidade. Velocidade angular.

2.ª Série

I — Potências e raízes; expressões irracionais.

1. Potência de um número; quadrado e cubo. Operações com potências; potências de mesma base e potências semelhantes. Expoente zero; expoente negativo. Potência das frações. Potência de um número decimal.

2. Expressão do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números; interpretação geométrica. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos.

3. Raiz quadrada. Regra prática para a extração da raiz quadrada dos números inteiros. Limite do resto na extração da raiz quadrada. Prova. Raiz quadrada de um produto. Aproximação decimal no cálculo da raiz quadrada. Raiz quadrada dos números decimais. Raiz quadrada das frações.

4. Raiz cúbica. Regra prática para a extração da raiz cúbica dos números inteiros. Prova. Raiz cúbica de um produto. Aproximação decimal no cálculo da raiz cúbica. Raiz cúbica dos números decimais. Raiz cúbica das frações.

5. Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais. Valor aritmético de um radical. Transformação do índice e do expoente; redução de radicais ao mesmo índice; comparação de radicais; redução de um radical à expressão mais simples. Operações com radicais. Potenciação e radiciação de potências; expoentes fracionários. Exemplos simples de racionalização de denominadores.

II — *Cálculo literal; polinômios.*

1. Expressão algébrica. Valor numérico. Classificação das expressões algébricas. Monômios e polinômios; ordenação.

2. Adição. Redução de têrmos semelhantes. Adição e subtração de polinômios.

3. Multiplicação de monômios e polinômios. Produtos notáveis.

4. Divisão de monômios; divisão de polinômios com uma variável.

5. Casos simples de fatoração; identidades.

6. Frações literais; propriedades; operações fundamentais.

III — *Binômio linear; equações e inequações do 1.º grau com uma incógnita; sistemas lineares com duas incógnitas.*

1. Igualdade, identidade, equação, classificação das equações. Equações equivalentes. Resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita; equações literais. Discussão de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Binômio linear; decomposição em fatores; variação do sinal e do valor.

2. Desigualdade. Comparação de números relativos. Propriedades das desigualdades; operações. Inequação. Resolução das inequações do primeiro grau com uma incógnita.

3. Equações do primeiro grau com duas incógnitas; sistemas de equações simultâneas. Resolução de um sistema linear com duas incógnitas pelos métodos de eliminação por substituição, por adição e por comparação. Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.

4. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas: generalização; discussão.

3.ª Série

I — Razões e proporções; aplicações aritméticas:

1. Razão de dois números; razão de duas grandezas. Propriedades das razões. Razões iguais; [illegible]. Proporção. Propriedade fundamental; recíproca. Transformações. Quarta proporcional. Cálculo de um têrmo qualquer de uma proporção. Proporção contínua; média proporcional;

[illegible] proporcional. Propriedades [illegible] Idéia geral de [illegible] e média harmônica [illegible].

2. Números proporcionais; propriedades. Divisão em partes diretamente proporcionais e em partes inversamente proporcionais a números dados.

3. Regra de três. Resolução de problemas de regra de três simples e composta.

4. Percentagem; problemas. Taxa [illegible].

5. Juros simples; problemas.

II — Figuras geométricas planas; reta e círculo:

1. Figuras geométricas; ponto, linha, superfície, reta e plano. [illegible]

2. Ângulos; definições; classificação e propriedades.

3. Linha poligonal; polígonos; classificação. Número de diagonais de um polígono.

4. Triângulos; definições; classificação. [illegible] relativa dos lados. Triângulo isósceles; propriedades. Casos clássicos de congruência de triângulos. Correspondência, na desigualdade, entre os lados e os ângulos. Comparação de linhas de mesmas extremidades.

5. Perpendiculares e oblíquas. Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.

6. Paralelas. Ângulos formados por duas retas quando cortadas por uma transversal; propriedades. Propriedades de duas retas perpendiculares a uma terceira. Postulado de Euclides; conseqüências. Propriedades dos segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas. Propriedades de ângulos de lados paralelos ou de lados perpendiculares.

7. Soma dos ângulos internos de um triângulo; conseqüências. Soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono.

8. Quadriláteros; classificação dos quadriláteros convexos; classificação dos paralelogramos e dos trapézios. Propriedades do paralelogramo e do trapézio. Translação. Retas concorrentes no triângulo.

9. Circunferência e círculo; definições. Propriedades do diâmetro. Arcos e cordas; propriedades. Distância de um ponto a uma circunferência. Tangente e normal. Posições relativas de dois círculos. Rotação.

10. Correspondência de arcos e ângulos. Medida do ângulo central, do ângulo inscrito, do ângulo de segmento, do ângulo excêntrico interior, do ângulo excêntrico exterior. Segmento capaz de um ângulo dado.

III — Linhas proporcionais; semelhança de polígonos:

1. Pontos que dividem um segmento numa razão dada. Divisão harmônica.

2. Segmentos determinados sôbre transversais por um feixe de paralelas.

3. Linhas proporcionais no triângulo; propriedades das bissetrizes de um triângulo; lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.

4. Semelhança de triângulos; casos clássicos. Semelhança de polígonos.

IV — Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais:

1. Definição do seno, do co-seno e da tangente de um ângulo agudo. Cálculo de um ângulo, sendo dado o seno, o co-seno ou a tangente.

2. Uso das tábuas naturais. Cálculo dos lados de um triângulo retângulo; [illegible] de um segmento.

4ª Série

I — Estudo do segundo grau: equações e inequações do segundo grau com uma incógnita:

1. Equações do segundo grau. Resolução das equações incompletas; resolução da equação completa; estabelecimento da fórmula de resolução por um dos métodos clássicos; fórmulas simplificadas. Discussão das raízes; casos de raízes diferentes, de raízes iguais e de não existência de raízes. Relações entre os coeficientes e as raízes. Composição da equação dadas as raízes.

2. Trinômio do segundo grau; decomposição em fatôres; casos do trinômio; forma canônica. Variação em sinal e em valor. Posição de um número em relação às raízes do trinômio. Valor máximo ou mínimo do trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau; tipos. Resolução de inequações do segundo grau.

3. Problemas do segundo grau; discussão. Divisão áurea.

4. Equações redutíveis ao segundo grau; equações biquadradas; equações irracionais. Transformação das expressões da forma [illegible].

V A E VII

II — Relações métricas nos polígonos e no círculo; cálculo de π:

1. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras; triângulos pitagóricos.

2. Relações métricas num triângulo qualquer. Relação dos [illegible].

3. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo.

4. Relações métricas no círculo. Corda e diâmetro que partem de um mesmo ponto. Ordenada de um ponto da circunferência. Cordas que se cortam. Potência de um ponto em relação a um círculo; expressão da potência. Construções geométricas elementares.

5. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot.

6. Polígonos regulares; propriedades.

7. Construção e cálculo do lado do quadrado, do hexágono regular, do triângulo equilátero e do decágono regular convexos. Cálculo dos apótemas.

8. Lado do polígono regular convexo de 2n lados em função do de n lados.

9. Medição da circunferência. Comprimento de um arco de curva. Razão da circunferência para o diâmetro. Expressão do comprimento da circunferência e de um arco qualquer.

10. Cálculo de π pelo método dos perímetros.

III — Áreas das figuras planas:

1. Medição das áreas das principais figuras planas. Área do triângulo equilátero em função do lado; área de um triângulo em função dos três lados, em função do raio do círculo circunscrito e em função do raio do círculo inscrito.

2. Relações métricas entre áreas; áreas dos polígonos semelhantes; teorema de Pitágoras. Construções geométricas. Problemas de equivalência.

2º CICLO

1ª Série

I — Noções sôbre o cálculo aritmético aproximado; erros.

1. Aproximação e êrro. Valor por falta ou por excesso. Êrro absoluto e êrro relativo. Algarismos exatos de um número aproximado. Êrro de arredondamento.

2. Adição, subtração, multiplicação e divisão com números aproximados. O cálculo de aproximação dos resultados e seu problema inverso; cálculo dos erros absolutos.

II — Progressões:

1. Progressões aritméticas; têrmo geral; soma dos têrmos. Interpolação aritmética.

2. Progressões geométricas; têrmo geral; soma e produto dos têrmos. Interpolação geométrica.

III — Logaritmos:

1. O cálculo logarítmico como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos; mudança de base. Característica e mantissa. Cologaritmos.

2. Logaritmos decimais; propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico.

3. Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprêgo de logaritmos.

IV — Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes:

1. Reta e plano; postulados; determinação; interseção; paralelismo; distância; inclinação e perpendicularismo. Diedros e triedros. Ângulos sólidos em geral.

2. Generalidades sôbre os poliedros em geral. Poliedros regulares; indicações gerais.

3. Prismas; propriedades gerais e, em especial, dos paralelepípedos; área lateral; área total; volume.

4. Pirâmides; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de prisma e troncos de pirâmide.

5. Estudo sucinto das superfícies em geral. Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.

6. Cilindros; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de cilindro.

7. Cones; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Tronco de cone de bases paralelas.

8. Esfera; propriedades gerais. Área e volume da esfera e das suas diversas partes.

V — Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais.

1. Elipse; definição e traçado; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente.

2. Hipérbole; definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente.

3. Parábola; definição e traçado; diretriz; tangente.

4. As seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin.

2ª Série

I — Análise combinatória simples.

1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de [illegible].

2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de [illegible]. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bezout.

3. Permutações simples, com objetos repetidos; cálculo do número de permutações.

4. Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de combinações. Relação de Stifel; triângulo aritmético de Pascal.

II — Binômio de Newton.

1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial, no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação dos têrmos.

2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da conversão [illegible] de números naturais.

III — Determinantes; sistemas lineares.

1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.

2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer.

3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas. Teorema de Rouché.

IV — Noções sôbre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.

1. Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Teorema de Chasles.

2. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. Teorema de Carnot.

3. Generalização dos conceitos de arco e de ângulo. Arcos côngruos. Arcos de mesma origem e de extremidades associadas.

4. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variação. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica. Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1º quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação [illegible].

n

V — Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.

1. Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos.

2. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas.

3. Equações trigonométricas simples; tipos clássicos.

VI — Resolução trigonométrica de triângulos.

1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo.

2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos.

3. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer. Lei dos senos. Relações dos co-senos. Expressão trigonométrica da área.

4. Casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.

3ª Série

I — Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade.

1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência.

2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.

3. Limite de variáveis e de funções; [illegible]. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções [illegible].

4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de distância. Interseção, paralelismo e distância, relativos à linha reta.

5. A equação geral do 2º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências.

II — Noções sôbre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações.

1. Definição de derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Função derivada. Derivadas sucessivas.

2. Regras de derivação; derivada de uma constante, de uma função de variável, de funções lineares, da soma, do produto, e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares.

3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decres-

crações; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica.

4. Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração.

5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares.

III — Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por x ± a; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.

1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x, por x ± a; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner.

2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sôbre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; conseqüências.

3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias.

4. **Transformação das equações; transformações de primeira ordem; aditivas, multiplicativas e recíprocas.**

5. **Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau.**

6. **Cálculo das raízes inteiras. Determinação das raízes pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.**

Observação — Os parágrafos em negrito destinam-se somente ao curso científico; os demais são comuns ao curso clássico e ao científico.

INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

No ensino secundário, a matemática desempenha, indiscutivelmente, um papel preponderante, como objeto de cultura, instrumento de trabalho e fator de aperfeiçoamento mental.

O alto valor educativo de seus métodos e processos de aprendizagem tem sido reconhecido e proclamado de um modo geral.

Tal aprendizagem presta-se a desenvolver, progressivamente no aluno a capacidade de julgamento, o hábito de concisão e rigor na expressão, a intuição, a agilidade de ação e de raciocínio e, também, a atenção e a presteza, para compreender, reter e elaborar.

Cumpre assinalar, ainda, que o ensino da matemática, quando orientado de modo que torne explícito, além de seu aspecto quantitativo, seu caráter eminentemente qualitativo, torna-se um fator bastante ponderável, no curso secundário, para o desenvolvimento da imaginação e do senso estético do aluno.

É essencial, portanto, que nesse ensino, não se percam jamais de vista [illegible] objetivos, mantendo suas características culturais, educativas, práticas e de utilidade, inclusive como instrumento da técnica em geral e das outras ciências.

Impõe-se, ainda, uma solicitação constante do aluno, que não poderá ser transformado em um mero receptor passivo de conhecimentos. O estudo de cada assunto deverá ser iniciado com aplicações e exemplos que lhe despertem a atenção e o interêsse.

A unidade da matemática deverá ser posta em evidência, a cada passo, a fim de que seja percebida, com facilidade, a identidade dos métodos e dos procedimentos empregados nos seus diferentes ramos, muitas vêzes sem aparente inter-relação.

Proceder-se-á sempre progressivamente, não impondo regras de raciocínio, senão quando o espírito do discente estiver apto para recebê-las.

Especialmente nos primeiros anos do curso ginasial, o ensino terá caráter eminentemente prático e intuitivo.

Procurar-se-á despertar, aos poucos, no aluno, o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração, introduzindo-se, ainda no curso ginasial, o método dedutivo, com a cautela que exige.

A idéia de rigor não deverá ser exagerada, mesmo no segundo ciclo, a fim de que não se torne formal e fastidiosa a explanação da matéria, com o conseqüente afastamento do aluno, pelo processo de encadeamento dos conceitos, das demonstrações e dos problemas. O apêlo à intuição jamais deverá ser dispensado. E a lição é de Jacques Hadamard, quando afirma que o rigor não tem tido outro objetivo senão o de sancionar e de legitimar as conquistas da intuição.

Não deverá ser esquecido que a matemática não é lógica pura, como se admitiu por muito tempo.

Dever-se-á dar especial atenção, principalmente no curso ginasial, ao exato significado dos têrmos empregados, fugindo-se, sempre, da prática de simples memorização, que cansa e enfastia; do uso abusivo de definições, em particular, de definições descritivas, e muito das vêzes viciosas; e, ainda, do recurso a demonstrações longas e pesadas que, ao invés de satisfazerem as necessidades lógicas que começam a ser despertadas, os embolam e atrofiam.

O exercício e o exemplo deverão acompanhar a explanação da matéria, entremeando-se com a sua exposição e, para os mesmos, necessário se torna solicitar, constantemente, a iniciativa do aluno.

O que importa não é ensinar muito, mas ensinar bem, com orientação adequada, evitando fatos e problemas puramente especulativos.

No curso ginasial, não será introduzido o conceito de número imaginário. Sòmente na última série do segundo ciclo, ao serem dadas as propriedades gerais das equações e dos polinômios, será feita uma apresentação elementar dêsse conceito, acompanhada de sumária exposição das propriedades dos números complexos; é essencial para a compreensão do assunto que se segue.

O estudo das equações algébricas terá menos o objetivo de instruir o aluno sôbre o cálculo de suas raízes, que o de demonstrar-lhe as dificuldades que o problema revela de um modo geral.

Tenha-se sempre presente que o ensino não depende da disciplina em si, mas, principalmente, do aluno ao qual se ensina.

Assim sendo, a reação da turma e sua maior ou menor rapidez de entendimento constituirão, para o professor, os fatores decisivos que o aconselharão a estender-se além dos limites prescritos ou a reduzir o assunto, nos pontos em que julgar indicado.

Os programas deverão ser cumpridos de acôrdo com a ordem e a disposição em que é apresentada a matéria.

FÍSICA

CURSO CIENTÍFICO

1.ª série

1 — a) Objeto da Física; observação e experimentação; hipótese e teoria; partes da Física. b) Matéria, sua qualidade e quantidade, propriedades da matéria, hipótese molecular, movimento e massa das moléculas; eléctrons; estados físicos da matéria. c) Lei física. d) Fenômenos físicos. e) Medidas das grandezas, grandezas mensuráveis, unidades, grandezas escalares e grandezas vetoriais, instrumentos de medidas, medidas dos comprimentos e dos ângulos; representação analítica da relação entre as grandezas e representação gráfica de sua variação. f) Erros de observação, sistemáticos e fortuitos; classificação dos erros, média aritmética, propriedades, freqüência, precisão das medidas físicas.

2 — a) Objeto da mecânica, sua divisão; móvel, ponto material e sistema rígido, trajetória. b) Noção de fôrça, classificação; elementos de uma fôrça, sua representação gráfica; unidades de fôrça; medidas das fôrças, dinamômetro. c) Sistemas de fôrças: na mesma direção, concorrentes, paralelas e no espaço; composição de fôrças na mesma direção, composição de fôrças concorrentes, expressão analítica da resultante, sua interpretação; composição de fôrças paralelas e de fôrças no espaço; binário. d) Momento de uma fôrça em relação a um ponto, sinais dos momentos; teorema de Varignon; decomposição de fôrças. e) Trabalho, definição; expressão geral do trabalho, caso particular; trabalho motor e trabalho resistente; unidades; ordem de grandeza de algumas potências. f) Deformações elásticas, deformação por tração, estudo experimental da tração, representação gráfica, lei de Hooke, deformação por flexão, deformação por torção. g) Máquinas, órgãos de uma máquina simples, sua utilidade; alavancas, tôrno, roldana, plano inclinado, parafuso; a máquina de dividir e o parafuso micrométrico. h) Rendimento. i) Resistências passivas; atrito, coeficiente de atrito. j) Princípio da conservação do trabalho.

3 — a) Do movimento. Repouso e movimento; diversas espécies de movimento; movimento retilíneo uniforme; velocidade, unidade e representação gráfica; equações do movimento uniforme, representação gráfica. b) Movimento retilíneo variado, definição; movimento uniformemente variado; aceleração; determinação da velocidade no movimento uniformemente variado; velocidade inicial; velocidade média e instantânea; representações gráficas das velocidades; expressões do espaço percorrido, representação gráfica do movimento uniformemente variado. c) Composição de movimentos retilíneos, vários casos. d) Movimento curvilíneo, movimento circular; movimento de rotação uniforme, velocidade angular, freqüência; movimento de translação; movimento harmônico.

4 — a) Princípios fundamentais da dinâmica. b) Proporcionalidade das fôrças às acelerações; massa, suas propriedades; equação fundamental da dinâmica. c) Quantidade de movimento e impulsão; energia, várias formas, sua transformação; conservação da energia; expressão do trabalho em função da velocidade; fôrça viva, energia potencial; energia cinética. d) Teorema das fôrças vivas. e) Fôrças centrípeta, centrífuga e tangencial; expressão da fôrça centrífuga, efeitos e aplicações da fôrça centrífuga. f) Choque, sua realização; choque de corpos rígidos; choque de corpos elásticos; choque oblíquo.

5 — a) Gravitação universal; campo de fôrças, campo uniforme, potencial; hipótese de Newton, constante de gravitação; gravitação; gravidade, seus elementos; direção e sentido da gravidade. b) Intensidade da gravidade. c) Centro de gravidade, sua determinação; equilíbrio dos corpos. d) Balanças; exatidão e sensibilidade; caixas de pesos marcados, pesadas; vários tipos de balanças; medida das áreas. e) Queda dos corpos, leis, verificação experimental; expressão das leis numéricas da queda dos corpos. f) Pêndulo, definição; estudo do movimento pendular; leis do pêndulo, suas verificações; fórmula do pêndulo reversível, aplicações do pêndulo.

6 — a) Grandeza física, unidades; sistemas; unidades fundamentais e unidades derivadas; unidades fundamentais dos sistemas métricos, MKS, C.G.S. e M.T.S.; b) Dimensões das grandezas, fórmulas ou equações dimensionais, mudanças de sistemas de unidades; homogeneidade; c) Legislação metrológica brasileira.

7 — a) Esforços exercidos por sólidos pesados sôbre seus apoios; definição de pressão, pressão dos sólidos, exemplos de efeitos das pressões. Unidades de pressão; c) Propriedades gerais dos líquidos, líquidos perfeitos; hidrostática, existência de pressões no interior de um líquido; princípio fundamental da hidrostática, conseqüências; transmissão das pressões, princípio de Pascal, prensa hidráulica. d) Líquidos em equilíbrio, diferentes casos, aplicações; e) Pressão sôbre os corpos imersos, princípio de Arquimedes; corpos imersos e flutuantes; equilíbrio dos corpos flutuantes. f) Densidade e pêso específico; massa específica da água, determinação do volume de um corpo insolúvel; determinação da densidade dos corpos sólidos e líquidos, areômetros. g) Hidrodinâmica, escoamento dos líquidos; princípio de Torricelli; [illegible] veia líquida, reação de saída. h) Tensão superficial nos líquidos, sua [illegible]lação; fenômenos capilares e [illegible]; generalidades sôbre difusão, diálise e osmose.

8 — a) Gases, suas propriedades. b) Pressões exercidas por um gás; pressão atmosférica, seu valor; barômetros. c) Compressibilidade dos gases; lei de Boyle-Mariotte; gases [illegible]. d) Mistura de gases, pressão de uma mistura gasosa; generalidades sôbre osmose e dissolução dos gases. e) Resistência do ar. f) Princípio de Arquimedes aplicado aos gases, barômetro, conseqüências; balões e dirigíveis; manômetros. g) Máquinas pneumáticas, bomba rotativa, trompas; máquinas de compressão; bombas hidráulicas; sifão e pipeta.

2.ª série

1 — a) Movimento periódico, período e freqüência; diferença de fase; movimento pendular, vibratório e oscilatório; movimento harmônico simples, sua equação, variações da elongação. b) Composição de vibrações; composição de movimento harmônico com o movimento retilíneo uniforme; estudo sumário de outros casos de composição de vibrações; pêndulo de Airy, registro gráfico do movimento vibratório. c) Vibrações longitudinais e transversais; representação geométrica das ondulações; relações analíticas entre as grandezas características do movimento ondulatório; equação do movimento ondulatório; propagação do movimento vibratório. d) Superposição de ondas, interferência; reflexão de ondas, ondas estacionárias; propagação de ondas no espaço; ressonância, suas condições.

2 — a) Acústica: som, sua natureza; infra-sons, ultra-sons; ondas sonoras, propagação do som; velocidade do som. b) Reflexão do som, eco; refração do som; interferências do som; sons diferenciais e sons adicionais; efeito Doppler-Fizeau. c) Ruídos e sons musicais; qualidades fisiológicas do som; intensidade dos sons; tubo e corneta acústica, porta-voz; altura dos sons, sereia acústica, roda de Savart; registro e reprodução mecânica dos sons, fonógrafo, filmes sonoros; timbre dos sons, análise e síntese de um som complexo. d) Música; intervalos musicais, acordes; comparação da gama física dos intervalos; escalas musicais; harmônicos de um som; limites dos sons utilizados na música. e) Fontes sonoras; cordas vibrantes, diversos sons produzidos por uma corda; estudo do som fundamental de uma corda, leis, aplicações das cordas vibrantes; vibração nas varas; diapasão; vibrações nas placas e nas membranas; vibração do ar nos tubos sonoros; definição e qualificação dos tubos; leis das vibrações nos tubos; aplicação dos tubos sonoros.

3 — a) Termologia, seu objeto; natureza do calor, temperatura, distinção entre calor e temperatura. [illegible] caloríficas. b) Efeitos do calor; [illegible]ção da temperatura, termometria; substâncias termométricas, sua escolha; termômetro de mercúrio, sua constituição, escala centesimal, outras escalas; determinação dos pontos fi[illegible]