UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thaís Lima Resende Amorim

DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS CIRCULARES NO PLANO COMPLEXO

Recife
2018

Thaís Lima Resende Amorim

DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS CIRCULARES NO PLANO COMPLEXO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Área de Concentração: Mecânica Celeste
Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho

Recife
2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A524d Amorim, Thais Lima Resende
Dinâmica de vórtices em domínios circulares no plano complexo / Thais Lima Resende Amorim. – 2018.
57 f.

Orientador: César Augusto Rodrigues Castilho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Vórtices pontuais. I. Castilho, César Augusto Rodrigues (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-137

THAIS LIMA RESENDE AMORIM

DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS CIRCULARES NO PLANO COMPLEXO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 26/07/2018

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Deus.

Aos meus pais e irmão.

Para meu esposo e filho.

AGRADECIMENTOS

Muitos são os que merecem meus agradecimentos por contribuírem, de forma direta ou indiretamente, para com minha formação e minha vida. Primeiramente, agradeço a Deus por ter me oferecido tantas oportunidades de superar desafios e admirar a arte de sua criação.

Quero agradecer em especial ao meu orientador, o professor César Castilho, que tornou-se mais que um orientador, se tornou um pai\amigo. Obrigada por toda paciência e dedicação a mim, por ser tão transparente e sincero. Seu empenho e amizade foram fundamentais para a elaboração desta dissertação.

Um obrigada especial aos meus pais e irmão por sempre terem investido e acreditado em mim, voçês são os grandes responsáveis por eu ter chegado até aqui. Ao meu esposo Charles, que me apoiou a todo momento, desde assuntos acadêmicos a cuidar de nosso filho Breno, quando eu não podia estar em casa. Você tornou realidade mais um de meus sonhos, e sei que não foi fácil para nenhum de nós três, serei eternamente grata.

No Departamento de Matemática também tive a oportunidade de conhecer ótimas pessoas com as quais muito aprendi, não necessariamente matemática. Dentre elas, Júlio César (o irmão mais novo que não tive) foi o que mais me ensinou e ajudou. Obrigada "bexiga" (apelido carinhoso) por todo apoio durante a pós, pelos estudos de segunda a domingo sem saber o que era feriado ou hora de almoço.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPE, agradeço por contribuírem com a minha formação através da ministração de disciplinas e seminários ao longo deste Mestrado.

Ao CNPQ, meus agradecimentos pelo financiamento deste curso.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o problema de N vórtices pontuais dispostos no plano complexo, onde a dinâmica de cada vórtice é pensada como um campo de velocidades com vorticidade concentrada em um único ponto. Mostramos, de acordo com Crowdy [5], como encontrar uma fórmula explícita para o Hamiltoniano (ou função de Kirchhoff-Routh) em domínios não simplesmente conexos, quando todas as circulações ao redor dos furos no domínio são zero. O método para encontrar tal expressão apresentado por Lin [14] faz uso da função Hidrodinâmica de Green em domínios circulares multiplamente conexos, que por sua vez necessita de uma outra função conhecida como *Função Prime de Schottky-Klein*, construída a partir dos mapas conformes do grupo de Schottky circular. Como exemplo ilustrativo, consideramos um domínio específico, consideramos o domínio circular como sendo o anel concêntrico centrado na origem com o círculo externo sendo o círculo unitário, para o qual encontramos a função de Green associada e a forma explícita para o seu Hamiltoniano.

Palavras-chave: Vórtices pontuais. Grupos de Schottky. Função prime. Hidrodinâmica de Green.

ABSTRACT

In this work we study the problem of N point vortices arranged in the complex plane, where the dynamics of each vertex are thought of as a velocity field with concentrated vorticity at a single point. We show according to Crowdy [5], how to find an explicit formula for the Hamiltonian (or Kirchhoff-Routh function) in domains not simply connected, when all the circulations around the holes in the domain are zero. The method for finding such expression presented by Lin [14] makes use of Green's hydrodynamic function in multiply-connected circular domains, which in turn requires another function known as the *Schottky-Klein Prime Function*, constructed from the conforming maps of the circular Schottky group. As an illustrative example, we consider a specific domain, we consider the circular domain to be the concentric ring centered on the origin with the outer circle being the unit circle, for which we find the associated Green function and the explicit form for its Hamiltonian.

Keywords: Point vortices. Schottky groups. Prime function. Hydrodynamics of green.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 DINÂMICA DOS FLUIDOS BIDIMENSIONAIS 12
2.1 Potencial Complexo e Vorticidade 12
2.2 Dinâmica de Vórtices Pontuais 18
3 DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS NÃO SIMPLESMENTE CONEXOS 26
3.1 A Função Hidrodinâmica de Green G 27
3.2 Construção da Função Hidrodinâmica de Green G em Domínios Circulares 30
3.3 Grupos de Schottky Circulares 31
3.4 Função Prime de Schottky - Klein 35
3.5 Solução Explícita para a Função Hidrodinâmica de Green G 40
4 DINÂMICA DE VÓRTICE PONTUAL EM UM ANEL CONCÊNTRICO 46
4.1 A Função Prime de Schottky-Klein para um Anel 46
4.2 Vórtice Pontual em um Anel Concêntrico 50
4.3 Solução do Problema de Vórtice Pontual no Anel 50
REFERÊNCIAS 55

1 INTRODUÇÃO

O estudo sobre a dinâmica de vórtices pontuais é uma área importante da dinâmica de fluidos, comandando uma vasta literatura. O modelo de vórtices pontuais estudados na atualidade teve início com o trabalho de Helmholtz em 1867 [11], o qual foi o primeiro a elucidar as principais propriedades daquelas partes de um fluido em que ocorre a vorticidade. Embora a investigação tenha sido motivada, pelo menos em parte, pelo interesse no efeito do atrito dentro de um fluido, a teoria desenvolvida se restringe à dinâmica de um fluido ideal com "vorticidade embutida". Em 1876 Kirchhoff [12] obteve a formulação Hamiltoniana para as equações de movimento e Sir William Thomson (Lord Kelvin) [24], em 1878, propôs o estudo das configurações de N vórtices idênticos no plano dispostos nos vértices de um polígono regular.

A revisão de Aref [1] apresenta uma pesquisa de resultados envolvendo vórtices de equilíbrio (ou cristais de vórtice), principalmente em configurações ilimitadas e periódicas. No entanto, a monografia de Newton [21] fornece uma perspectiva mais ampla do problema geral de N vórtices, incluindo discussões sobre o movimento de vórtices em domínios planares ilimitados e limitados, bem como em superfícies curvas como a superfície de uma esfera.

O movimento de vórtices pontuais em domínios ilimitados recebeu muita atenção, no entanto a teoria do movimento de vórtice pontual é muito menos desenvolvida em domínios delimitados por paredes impenetráveis. O exemplo mais simples é um unico vórtice pontual adjacente a uma parede reta infinita, esse vórtice se traduz em velocidade constante e mantêm sua distância da parede sempre constante. Este movimento é convenientemente entendido como sendo induzido por um vórtice de "imagem" de circulação oposta atrás da parede. Talvez esse seja o exemplo mais simples do célebre "método das imagens" (ver [19]). Alguns exemplos mais elaborados envolvendo regiões fluidas simplesmente conexas

são encontrados no capítulo 3 de Newton [21]. Em sua maioria, esses exemplos dependem das propriedades de transformação, sob mapeamento conforme, do que é conhecido como a função de Kirchhoff-Routh, que é essencialmente o Hamiltoniano que governa o movimento do vórtice.

A formulação hamiltoniana para a dinâmica de vórtices pontuais e a função de Kirchhoff-Routh remontam ao trabalho de Kirchhoff [12] e Routh [23]. Foi reavaliado muito mais tarde por Lin ([14], [15]), que considerou domínios multiplamente conexos, e mais recentemente por Flucher e Gustafsson (1997) [20] (veja também o capítulo 15 de Flucher [8]), que analisaram vários aspectos do problema geral de valor de fronteira, que surgiu do problema do movimento de vórtice pontual em domínios limitados.

O movimento de um único vórtice em domínios limitados e simplesmente conexos é relativamente bem estudado. Gustafsson [10] e Richardson [22] mostraram que a função do caminho de Kirchhoff-Routh satisfaz uma equação de Liouville elíptica no domínio delimitado D e é infinita em todos os lugares no limite. Em relação ao movimento de N vórtices em domínios multiplamente conexos, a literatura é dispersa. Lin [14] estabeleceu a existência e a singularidade de uma função de Kirchhoff-Routh generalizada neste caso, mas não a constrói explicitamente e nem fornece exemplos específicos. O trabalho de Crowdy e Marshall [5], o qual usamos como referência, faz essa construção explícita.

No entanto, Lin [15] também mostrou como derivar fórmulas para a função de Kirchhoff-Routh em domínios conformalmente equivalentes e multiplamente conectados. Assim, se uma fórmula para o mapeamento conforme de um dado domínio circular multiplamente conexo a um domínio mais geral for conhecida, então a função de Kirchhoff-Routh no novo domínio pode ser construída de uma forma analítica.

No capítulo 1 introduzimos conceitos básicos necessários sobre fluidos bidimensionais ideias, isto é, fluidos incompressíveis, irrotacionais e de densidade constante, mostrando que sob tais condições este fluido pode ser representado por um campo de velocidades. Associado a este campo de velocidades podemos definir um conceito muito importante, o conceito de vorticidade. O fato do fluido ser ideal, mas precisamente o fato de ser incompressível e irrotacional, nos fornece como resultado duas representações para o seu campo de velocidades. Estas representações no plano complexo possuem a relação de satisfazerem as equações de

Cauchy-Riemann, e juntas podem definir um potencial complexo.

Pensando em vórtice pontual como um campo de velocidades com vorticidade concentrada em um único ponto, podemos então encarar o vórtice como um ponto gerador de rotação. Portanto, dado um vórtice pontual, temos um campo de velocidades e consequentemente um potencial complexo que gera este campo, o qual então pode ser gerado a partir do potencial complexo de uma fonte. Tendo isso em mãos e utilizando a já conhecida função de Green para o plano, podemos escrever o hamiltoniano associado a dinâmica de N vórtices no plano (por superposição). Por fim é aplicada esta teoria a dois vórtices pontuais no plano complexo.

No capítulo 2 discutimos a dinâmica de vórtices em domínios não simplesmente conexos, mais especificamente domínios circulares, explicitando fórmulas, a menos de transformações conformes, para os Hamiltonianos em regiões fluidas de conectividade arbitrária. Estas fórmulas que governam o movimento dos N vórtices pontuais em domínios multiplamente conexos são derivadas quando todas as circulações ao redor dos furos no domínio são zero. A estrutura hamiltoniana do problema de vórtice pontual em tais domínios foi originalmente estudada por Lin [14] e seu método usa uma função transcendental especial chamada de **função prime de Schottky-klein**, construída a partir dos mapas conformes do grupo de Schottky clássico, afim de encontrar a representação da função hidrodinâmica de Green em domínios circulares multiplamente conexos. Um domínio circular é um domínio planar cujos componentes de limite (fronteiras) são círculos. Usando esta função de Green, construímos fórmulas para a função de Kirchhoff-Routh (ou Hamiltoniano) para o movimento geral de N vórtices em tais domínios circulares.

Por fim no capítulo 3 encontramos o hamiltoniano para o caso de um domínio circular especial, um anel concêntrico centrado na origem. Construímos a função prime de Schottky-Klein associada ao grupo de Schottky para este domínio específico, em seguida explicitamos a função hidrodinâmica de Green e finalmente encontramos a representação do hamiltoniano para este domínio.

2 DINÂMICA DOS FLUIDOS BIDIMENSIONAIS

Este capítulo é dedicado à teoria matemática que será empregada, afim de analisarmos a dinâmica de vórtices pontuais em fluidos ideais e bidimensionais. Inicialmente vamos introduzir os conceitos de fluido ideal, potencial complexo e sistema hamiltoniano. Em seguida, mostraremos que o campo de velocidades de um fluido bidimensional pode ser representado como um sistema hamiltoniano.

2.1 Potencial Complexo e Vorticidade

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento, isto é, uma força tangencial distribuída em uma área, segundo Brunetti [3].

O movimento de um fluido, isto é, o fluxo de um fluido, é o desenvolvimento no tempo do deslocamento e da deformação da matéria. Partículas compõem o corpo da matéria e estão se movendo e mudando continuamente suas posições relativas, evoluindo com o tempo.

Estes fluxos são fenômenos encontrados facilmente no mundo, como por exemplo, o vento é um fluxo de ar e a corrente de um rio é um fluxo de água. O movimento de nuvens ou partículas de fumaça flutuando no ar fornecem uma visualização do fluxo que as transporta.

Um fluido bidimensional será descrito pelo seu campo de velocidades. Denotaremos por

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t), \tag{2.1}$$

a velocidade do fluxo $\vec{u}$ em qualquer ponto $\vec{r} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (Ω um conjunto aberto e conexo) e

qualquer tempo t.

Definição 1. *Considere o campo de velocidades de um fluido representado pela equação* (2.1)*. Este campo é dito estacionário se*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r},t)=0,$$

isto é, se $\vec{u}$ *depende apenas de* $\vec{r}$*.*

Como trabalharemos em duas dimensões, o fluxo do fluido será representado como

$$\vec{u}(x,y)=(u(x,y),v(x,y)).$$

Definição 2. *Considere um fluido com campo de velocidades* $\vec{u}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$*. Este fluido é dito incompressível se dado um elemento de volume qualquer no espaço, a quantidade de fluido dentro deste volume for sempre contante ao longo do tempo.*

Portanto, considere um caminho simples, fechado e diferenciável $C\subset\Omega$ com vetor tangente $\hat{t}$ e vetor normal $\hat{n}=(s,t)$, onde $C=\partial A$ com A aberto simplesmente conexo. O fluxo total através de C, dado pela integral $\displaystyle\int_C \vec{u}\cdot\hat{n}\,dl$, deve ser igual a zero, donde segue, pelo Teorema de Green, que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_C \vec{u}\cdot\hat{n}\,dl,\\
&= \int_C (u,v)\cdot(s,t)\,dl,\\
&= \int_C (u.s+v.t)\,dl,\\
&= \int_C (-v,u)\cdot(-t,s)\,dl,\\
&= \int_C (-v,u)\cdot\hat{t}\,dl,\\
&= \iint_A \left(-\frac{\partial(-v)}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dA,\\
&= \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dA.
\end{aligned}$$

Como este resultado deve ser válido para toda área A, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$, ou seja, $\nabla\cdot\vec{u}=0$, nos proporcionando reescrever a definição de incompressibilidade:

Definição 3. *Considere um fluido com campo de velocidades* $\vec{u}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. *Este fluido é dito incompressível se* $\nabla \cdot \vec{u} = 0$.

Definição 4. *Considere um fluido com campo de velocidades* $\vec{u}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. *Este fluido é dito irrotacional se*

$$\nabla \times \vec{u} = 0. \tag{2.2}$$

Definição 5. *Um fluido possui densidade* ρ *(isto é, massa por unidade de volume) constante, se a densidade se mantém a mesma para todos os elementos do fluido em qualquer tempo* t.

Definição 6. *Um fluido é chamado de ideal se forem válidas as seguintes propriedades:*

1. *O fluido é incompressível;*
2. *O fluido é irrotacional;*
3. *O fluido possui densidade constante.*

Observação 1. *Note que a definição de irrotacionalidade, mais precisamente a equação* (2.2)*, nos fornece o seguinte resultado. Tomando* $\vec{u} = (u(x,y), v(x,y), 0)$ *(observe que neste caso estamos considerando* $\vec{u}$ *como uma função vetorial definido em* $\mathbb{R}^3$*), temos que*

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(x,y) & v(x,y) & 0 \end{vmatrix}, \\
&= 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}, \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k},
\end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Associado ao campo de velocidades de um fluido ideal definimos o conceito de vorticidade.

Definição 7. *Dado um fluido com campo de velocidades* $\vec{u} = (u(x,y), v(x,y))$. *A vorticidade* ω *é definida como o rotacional do campo de velocidades, isto é,*

$$\omega = \nabla \times \vec{u}. \tag{2.3}$$

Evidentemente, a irrotacionalidade de um fluido ideal implica que o campo de vorticidades associado ao mesmo seja nulo. Com isto, o campo de velocidades de um fluido irrotacional pode ser localmente representado [16] como o gradiente de uma certa função ϕ

$$\vec{u}(x,y) = \vec{\nabla}\phi(x,y).$$

Os fluxos que possuem seu campo de velocidades satisfazendo a essa condição são chamados de **fluxos potenciais**. A função ϕ é denominada **potencial velocidade**. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \vec{u}(x,y) &= (u(x,y), v(x,y)), \\ &= \vec{\nabla}\phi(x,y), \\ &= \left(\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Similarmente, a condição de incompressibilidade nos fornece a seguinte equação a ser satisfeita

$$\nabla \cdot \vec{u}(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0. \tag{2.5}$$

Implicando que o campo de velocidades também pode ser expresso em termos de outra função ψ, visto que uma condição suficiente para que (2.5) seja satisfeita é que

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ e } v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.6}$$

A função ψ é chamada de **função de fluxo** pois suas curvas de nível definidas por $\psi(x,y) = constante$, são as linhas de corrente do fluxo.

Definição 8. *Dado um fluido com campo de velocidades $\vec{u}(x,t)$, uma curva integral de $\vec{u}$ é chamada linha de corrente, isto é, $x(s) \subseteq \Omega$ é linha de corrente se, e somente se,*

$$\frac{dx}{ds} = u(x(s), s),$$

para todo $s \in (0,h)$, com $h \in \mathbb{R}$.

Combinando as equações (2.4) e (2.6) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Estas são as bem conhecidas equações de Cauchy-Riemann da análise complexa, as quais são discutidas em [17]. Segue-se então que, se as derivadas parciais das equações (2.7) são contínuas, a função w definida como

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{2.8}$$

é uma função analítica da variável complexa $z = x + iy$. A função $w(z)$ assim definida é chamada de **Potencial Complexo** associado ao fluxo. A derivada de w em relação à variável complexa z é

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ &= u + i(-v), \\ &= u - iv, \end{aligned}$$

que é chamado de **velocidade complexa** e é simplesmente o conjugado complexo do vetor de velocidade, tratado como um número complexo.

Observe que tanto o potencial velocidade ϕ quanto a função de fluxo ψ obedecem à equação de Laplace, como pode ser prontamente verificado tomando as derivadas das equações de Cauchy-Riemann (2.7),

$$\Delta\phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{2.9}$$

$$\Delta\psi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.10}$$

De fato, qualquer função analítica satisfaz as equações (2.9) e (2.10) para sua parte real e imaginária, como é bem conhecido. Note que qualquer função analítica pode representar um potencial complexo para algum fluxo potencial bidimensional.

Considere a função de fluxo ψ ao longo de uma curva $(x(t), y(t))$, isto é, $\psi(t) = \psi(x(t), y(t))$. Derivando em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\dot{y}, \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial y}\dot{x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\dot{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot (\dot{y}, -\dot{x}), \\ &= (u, v) \cdot (\dot{y}, -\dot{x}) \\ &= \vec{u} \cdot (\dot{y}, -\dot{x}), \end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda igualdade usamos as equações (2.7), e da terceira para a quarta igualdade usamos a equação (2.4). Se ψ for constante ao longo da curva $(x(t), y(t))$ obteremos

$$\vec{u} \cdot (\dot{y}, -\dot{x}) = 0,$$

portanto nos pontos onde

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0,$$

o campo de velocidades $\vec{u}$ é tangente à curva $\phi = constante$, pois o vetor $(\dot{y}, -\dot{x})$ é normal a curva ϕ.

Deste resultado podemos concluir que as curvas integrais as linhas de corrente do campo de velocidades do fluido são as curvas obtidas fazendo $\psi = constante$, sendo por isso denominadas *streamlines* ou linhas de corrente, enquanto que a função ψ é denominada *streamfunction* ou função corrente.

Tomando então $(x(t), y(t))$ como curvas integrais do campo de velocidades $\vec{u}$ do fluido, isto é, $(\dot{x}, \dot{y}) = (u, v)$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\dot{x} = u = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

e

$$\dot{y} = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Resultando no sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Obtemos então que $\vec{u}$ é um campo Hamiltoniano com função hamiltoniana ψ, ver por exemplo [18]. Substituindo (2.11) em (2.3), e tomando $\vec{r} = (x, y)$ nós obtemos

$$\Delta\psi(\vec{r}) = -\omega(\vec{r}),$$

isto é, uma Equação de Poisson com $-\omega$ como termo fonte. A solução desta equação é dada pela expressão (ver [7])

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\int G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\omega(\vec{r}\,')d\,r', \tag{2.12}$$

onde G é a Função de Green.

2.2 Dinâmica de Vórtices Pontuais

Pensaremos em um vórtice pontual como sendo um campo de velocidades com vorticidade concentrada em um único ponto, chamado de centro do vórtice. Em termos do movimento das partículas do fluido, isso significa que cada partícula gira em torno do ponto, digamos r_0, com velocidade tangencial inversamente proporcional à distância com relação a esse ponto [13].

Veremos adiante que cada partícula do fluido sujeita a ação de um único vórtice tem como trajetória uma circunferência de centro r_0, e se movimenta a uma velocidade angular constante. Podemos então encarar o vórtice como um ponto gerador de rotação.

Portanto, dado um vórtice pontual, temos um campo de velocidades associado e como consequência um potencial complexo que gera este campo (2.8). Este potencial complexo pode ser gerado a partir do potencial complexo de uma fonte (ou sumidouro) simplesmente trocando as funções ϕ e ψ.

Definição 9. *Uma fonte corresponde a um fluxo com o seguinte campo de velocidades,*

$$\vec{u} = \frac{m}{2\pi r}\hat{r}, \tag{2.13}$$

onde $\hat{r}$ é o vetor unitário na direção radial e m é a intensidade da fonte ($m > 0$) ou sumidouro ($m < 0$), representando a quantidade de área fluida injetada (removida) pela fonte (sumidouro) por unidade de tempo.

Este campo de velocidades (2.13) é obtido a partir do seguinte potencial

$$\phi = \frac{m}{2\pi}\log r,$$

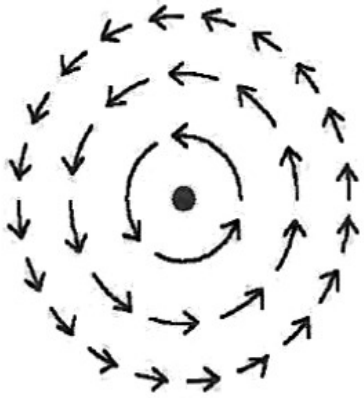

Figura 2.1: Esboço do campo de velocidades devido a um vórtice pontual de intensidade positiva (para intensidade negativa, as setas seriam no sentido horário).

que é a parte real do potencial complexo

$$w = \frac{m}{2\pi} \log z.$$

Observação 2. *Tomando z em sua forma polar, $z = r\, e^{i\theta}$, temos que o valor principal de* $\log z$ *é o número definido por,*

$$\log z = \log r + i\theta,$$

com $0 \leq \theta < 2\pi$.

Se ao invés de estar localizado na origem, a fonte (sumidouro) estiver localizada em um ponto diferente $z = z_0$ do plano complexo, o potencial complexo será

$$w = \frac{m}{2\pi} \log(z - z_0). \tag{2.14}$$

Sendo assim, o potencial velocidade de uma fonte desempenha o papel da função de fluxo para o vórtice. Esse intercâmbio pode ser alcançado simplesmente multiplicando o potencial complexo, equação (2.14), por $\pm\, i$. Para respeitar a convenção de que uma circulação positiva de vórtices é um fluxo no sentido anti-horário, escolhemos o sinal negativo

$$w = -i\, \frac{m}{2\pi} \log(z - z_0).$$

Mudando a nomenclatura da intensidade m por Γ, para denotar a intensidade do vórtice, obtemos

$$w = -i\, \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0). \tag{2.15}$$

As partes real e imaginária desta equação produzem, respectivamente

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta,$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log r,$$

onde $r = \|z - z_0\|$. Em resumo, dado um vórtice pontual no plano complexo, localizado em z_0, conseguimos por comparação encontrar seu potencial complexo, como mostra a equação (2.15). E por meio do princípio de superposição, é possível usar os potenciais complexos dados acima como blocos de construção para obter novos potenciais complexos.

Um sistema que possui um único vórtice pontual localizado em r_0 é um sistema que apresenta uma vorticidade

$$\omega(\vec{r}) = \Gamma\delta(\vec{r} - \vec{r_0}),$$

onde δ é a função conhecida, Delta de Dirac.

Agora consideremos um sistema com dois vórtices pontuais posicionados em r_1 e r_2. Separadamente, cada um criará seu campo de velocidades, e de forma bem intuitiva, o campo de velocidades de um vórtice afetará o campo de velocidades do outro vórtice, e vice versa, e o mesmo acontecerá quando o sistema for composto por N vórtices. Então a vorticidade ω deve ter a seguinte forma (ver [13])

$$\omega(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r_i}), \tag{2.16}$$

onde r_i, com $i = 1, \ldots, N$ é a posição do i-ésimo vórtice e Γ_i (ou circulação), com $i = 1, \ldots, N$, sua constante de intensidade. Isso significa que cada vórtice, isoladamente, induz as partículas do fluido a girarem em torno de si; o movimento efetivo, porém, é resultado do conjunto das influências de cada um dos vórtices.

No plano, a função de Green tem a forma [7]

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\pi}\log\|\vec{r}\|, \\ &= -\frac{1}{4\pi}\log\|\vec{r}\|^2. \end{aligned}$$

Logo, a função de fluxo terá seguinte forma (equação (2.12))

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\int \log\|\vec{r} - \vec{r}'\|\,\omega(\vec{r}')d\,r'.$$

Então, uma vez que especificamos o campo de vorticidade ω, podemos calcular ψ e por (2.11) sabemos o campo de velocidades. Tomando então o campo de vorticidade para um sistema de N vórtices, como em (2.16), obtemos que a função de fluxo deste sistema é

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \log\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^2.$$

Esta equação descreve, juntamente com (2.11), a dinâmica de uma partícula teste em um ponto $\vec{r}=(x,y)$ no plano.

Reescrevendo a equação acima substituindo $\vec{r}$ por sua representação em coordenadas, obtemos

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \log[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]. \tag{2.17}$$

A partir desta expressão, considerando que temos $\hat{n}=\hat{e}_3$ (o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$), e utilizando o fato que $u(\vec{r}) = \nabla\psi \times \hat{n}(\vec{r})$, podemos encontrar o campo de velocidades do fluido da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
\vec{u}(x,y) &= \frac{dx}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dy}{dt}\hat{e}_2, \\
&= \nabla\psi(x,y)\times\hat{e}_3, \\
&= \frac{\partial\psi}{dx}\hat{e}_1\times\hat{e}_3 + \frac{\partial\psi}{dy}\hat{e}_2\times\hat{e}_3, \\
&= \frac{\partial\psi}{dx}(-\hat{e}_2) + \frac{\partial\psi}{dy}\hat{e}_1,
\end{aligned}$$

implicando que,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\psi}{dy},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial\psi}{dx}.$$

Isto é, derivando a equação (2.17) em relação a x e y, e substituindo nas equações acima, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\frac{y-y_i}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

de modo que a velocidade do j - ésimo vórtice é dada por

$$\dot{\vec{r}_j} = \frac{1}{2\pi}\sum_{i\neq j}\Gamma_i \left(\frac{y_i - y_j}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, -\frac{x_i - x_j}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\right). \tag{2.18}$$

As equações obtidas podem ser colocadas na forma

$$\Gamma_j\,\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j} \text{ e } \Gamma_j\,\dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \tag{2.19}$$

definidas pelo "Hamiltoniano"

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\neq j}\Gamma_i\Gamma_j \log[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2].$$

Mostramos que a dinâmica de um sistema de vórtices pontuais no plano é dada pelas equações (2.19), com i variando de 1 até N. Estas equações formam um par de variáveis conjugadas e H é a generalização da função de fluxo ψ (2.17) para o sistema de vórtices. Tais equações são conhecidas como as Equações de Kirchhoff.

Exemplo 1. *DOIS VÓRTICES PONTUAIS NO PLANO.*

Considere um sistema com dois vórtices pontuais no plano em um fluido ideal. Como acabamos de ver a função Hamiltoniana associada a este sistema é

$$H = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2}\log\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2,$$

com $\|\vec{r_1} - \vec{r_2}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Sabemos que o campo de vetores satisfaz

$$\begin{aligned}\Gamma_i\,\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i},\\ \Gamma_i\,\dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i},\end{aligned} \tag{2.20}$$

para $i = 1, 2$. Iremos derivar H primeiro em relação a x_1 e y_1 e depois em relação a x_2 e y_2, e substituir nas equações do sistema (2.20).

$$\Gamma_1 \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2}\frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\,2(y_1 - y_2) \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = \Gamma_2\frac{(y_1 - y_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2},$$

$$\Gamma_1 \dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2}\frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\,2(x_1 - x_2) \;\Rightarrow\; \dot{y}_1 = -\Gamma_2\frac{(x_1 - x_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2},$$

$$\Gamma_2 \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2}\frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\,2(y_1 - y_2)(-1) \;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = -\Gamma_1\frac{(y_1 - y_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2},$$

$$\Gamma_2 \dot{y}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2}\frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\,2(x_1 - x_2)(-1) \;\Rightarrow\; \dot{y}_2 = \Gamma_1\frac{(x_1 - x_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}.$$

Temos então que as equações de movimento dos vórtices são

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Gamma_2\frac{(y_1 - y_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \quad \dot{y}_1 = -\Gamma_2\frac{(x_1 - x_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}, \\ \dot{x}_2 &= -\Gamma_1\frac{(y_1 - y_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \quad \dot{y}_2 = \Gamma_1\frac{(x_1 - x_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Seja $r_j(t) = (x_j(t), y_j(t)) = x_j(t) + i\,y_j(t)$, com $j = 1, 2$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \dot{x}_1 + i\,\dot{y}_1, \\ &= \Gamma_2\frac{(y_1 - y_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} + i\left(-\Gamma_2\frac{(x_1 - x_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\right), \\ &= \frac{\Gamma_2\,i}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}[-i(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)], \\ &= \frac{\Gamma_2\,i}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}[(x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y_1)], \\ &= \frac{\Gamma_2\,i}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}(r_2 - r_1), \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{dr_1}{dt} = i\,\dfrac{\Gamma_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}(r_2 - r_1).$

Analogamente para r_2,

$$\frac{dr_2}{dt} = i\,\frac{\Gamma_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}(r_1 - r_2).$$

Vamos agora resolver as equações de movimento, notando primeiramente que $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2$ independe do parâmetro t, isto é, é constante para todos os valores de t. Para tanto, mostraremos que sua derivada é sempre igual a 0.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2) &= \frac{d}{d\,t}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2),\\ &= 2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} + 2y_1\dot{y_1} + 2y_2\dot{y_2} - 2\dot{x_1}x_2 - 2x_1\dot{x_2} - 2\dot{y_1}y_2 - 2y_1\dot{y_2},\\ &= 2\,[\dot{x_1}(x_1 - x_2) + \dot{x_2}(x_2 - x_1) + \dot{y_1}(y_1 - y_2) + \dot{y_2}(y_2 - y_1)].\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas dadas pelas equações de movimento dos vórtices (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2) &= \frac{2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}[\Gamma_2(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) - \Gamma_1(y_1 - y_2)(x_2 - x_1)\\ &\quad -\Gamma_2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + \Gamma_1(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)] = 0,\end{aligned}$$

independentemente de Γ_1 e Γ_2.

Logo, $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2 = D$ é constante para todo t. Assim, nosso sistema resulta em um sistema de equações diferenciais lineares homogênias,

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dt} &= \frac{i\,\Gamma_2}{D}(r_2 - r_1),\\ \frac{dr_2}{dt} &= \frac{i\,\Gamma_1}{D}(r_1 - r_2).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Temos então

$$\dot{R} = \begin{pmatrix} \dot{r_1} \\ \dot{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-i\,\Gamma_2}{D} & \dfrac{i\,\Gamma_2}{D} \\ \dfrac{i\,\Gamma_1}{D} & \dfrac{-i\,\Gamma_1}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

que é um sistema de EDO's lineares com coeficientes constantes. Calculando seu polinômio característico, temos

$$\left(\frac{i\,\Gamma_2}{D} + \lambda\right)\left(\frac{i\,\Gamma_1}{D} + \lambda\right) - i^2\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{D^2} = 0,$$

implicando que os autovalores são,

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = \frac{-i\,(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{D}.$$

Portanto temos dois casos a analisar, o primeiro é quando a soma das vorticidades é igual a zero, e o segundo quando é diferente de 0. Se $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, a solução do sistema (2.22) será

$$R(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = a_1\, e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\, e^{\frac{-i(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D}t} \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Sendo assim,

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} a_2\, e^{\frac{-i(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D}t} \\ a_1 + a_2\, e^{\frac{-i(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D}t} \end{pmatrix}.$$

Aplicando a condição de valor inicial, isto é, $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} r_1(0) &= a_1 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} a_2, \\ r_2(0) &= a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Solucionando o sistema acima encontraremos os seguintes valores para a_1 e a_2,

$$a_1 = \frac{\Gamma_1 r_1(0) + \Gamma_2 r_2(0)}{\Gamma_1 + \Gamma_2},$$

$$a_2 = \frac{\Gamma_1 r_2(0) - \Gamma_1 r_1(0)}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Por fim, a solução do sistema Hamiltoniano inicial é

$$\begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} \Gamma_1 r_1(0) + \Gamma_2 r_2(0) + [r_1(0) - r_2(0)]\Gamma_2 e^{\frac{i(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D}t} \\ \Gamma_1 r_1(0) + \Gamma_2 r_2(0) + [r_2(0) - r_1(0)]\Gamma_1 e^{\frac{i(\Gamma_1+\Gamma_2)}{D}t} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, r_1 e r_2 são círculos.

Agora, se $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ então $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, logo por (2.22) $\dot{r_1} = \dot{r_2}$, implicando que $r_1 - r_2 = C$, com $C \in \mathbb{R}$. Por conseguinte,

$$\dot{r_1} = \frac{i\,\Gamma_2}{D} C,$$

e de forma análoga $\dot{r_2}$ também é constante. Consequentemente, r_1 e r_2 são retas.

3 DINÂMICA DE VÓRTICES EM DOMÍNIOS NÃO SIMPLESMENTE CONEXOS

O estudo do movimento de vórtices em domínios complexos, multiplamente conexos e delimitados tem recebido atenção recentemente. A estrutura hamiltoniana do problema de vórtices pontuais em tais domínios foi originalmente estudada por Lin [14], [15]. Apenas recentemente uma teoria construtiva para computação de movimento de vórtices em um domínio não simplesmente conexo apareceu, apresentada por Crowdy e Marshal [5]

Neste trabalho, são exibidas fórmulas explícitas a menos de transformações conformes, para os Hamiltonianos em regiões fluidas de conectividade arbitrária. Estas fórmulas que governam o movimento de N vórtices pontuais em domínios multiplamente conexos são derivadas quando todas as circulações ao redor dos furos no domínio são zero.

O método apresentado por Lin [14] usa a *Função Prime de Schottky-Klein*, doravante *função prime de SK*, para encontrar representações da função hidrodinâmica de Green em domínios circulares multiplamente conexos.

Definição 10. *Um domínio circular é um domínio $D \subseteq \mathbb{C}$ de conectividade finita tal que todas as componentes do bordo são círculos.*

Neste trabalho, o domínio circular de conectividade $M + 1$ a ser utilizado será o disco unitário, menos M discos pequenos C_j disjuntos em seu interior. Denotaremos este conjunto por D_ζ. Note que, se $M = 0$, então $D_\zeta = C_0$, que nada mais é que o próprio círculo unitário.

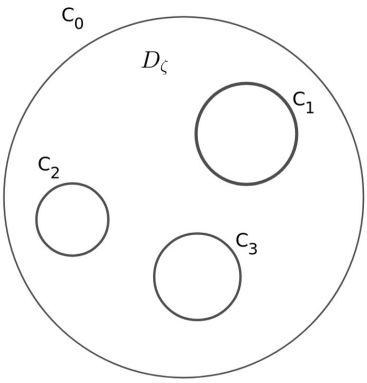

Figura 3.1: Esboço de um domínio circular de conectividade quatro.

3.1 A Função Hidrodinâmica de Green G

Lin [14] introduziu uma função especial de Green $G(x, y; x_0, y_0)$ em relação a dois pontos (x, y) e (x_0, y_0) em um domínio de fluido D. Três casos distintos do domínio D serão considerados, dependendo se D é limitado ou ilimitado. Seja $M \geq 0$ um inteiro e suponha que D seja delimitado por $M + 1$ paredes impenetráveis, denominando estes limites por $\{C_j, j = 1, \ldots, M\}$. Se D é limitado, então C_0 será tomado como o limite externo com $\{C_j, j = 1, \ldots, M\}$ denotando os M limites fechados internos. Se D é ilimitado mas tem um limite que se estende ao infinito, então este limite de comprimento infinito será denotado por C_0.

A função especial hidrodinâmica de Green é a função $G(x, y; x_0, y_0)$ satisfazendo as seguintes propriedades.

(i) A função

$$g(x, y; x_0, y_0) = G(x, y; x_0, y_0) - \frac{1}{2\,\pi} \log r_0, \tag{3.1}$$

é harmônica com relação a (x, y) em toda a região D, incluindo no ponto (x_0, y_0). Aqui r_0 é

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

(ii) Se $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ é a derivada normal de G ao longo de uma curva, então

$$G(x, y; x_0, y_0) = A_j, \text{ em } C_j,\ j = 1, \ldots, M,$$

$$\oint \frac{\partial G}{\partial n} ds = 0, \quad j = 1, \ldots, M,$$

onde ds denota o elemento de arco e $\{A_j, j = 1, \ldots, M\}$ são constantes.

(iii) *Caso 1.* Se D possui um limite externo fechado C_0, então

$$G(x, y; x_0, y_0) = 0, \text{ em } C_0.$$

Caso 2. Se D é ilimitado e se estende ao infinito em todas as direções, então, em um círculo muito grande de raio r_0, G se comporta da seguinte maneira

$$\begin{aligned} G(x, y; x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\,\pi} \log r_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0}\right), \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^2}\right), \\ \frac{\partial G}{\partial n} &= -\frac{1}{2\pi r_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^2}\right), \end{aligned}$$

onde $\dfrac{\partial G}{\partial s}$ é a derivada tangencial ao longo do círculo.

Caso 3. Se D é ilimitado mas tem limites que se estendem ao infinito, então G se comporta da seguinte forma

$$G(x, y; x_0, y_0) = 0, \text{ em } C_0,$$

$$G(x, y; x_0, y_0) = \mathcal{O}(1), \text{ em um círculo muito grande de raio } r_0.$$

Lin também estabeleceu os seguintes dois lemas.

Lema 1. *A função $G(x, y; x_0, y_0)$ definida pelas condições (i)-(v) acima existe unicamente e é uma generalização da função de Green satisfazendo a condição de reciprocidade*

$$G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y).$$

Lema 2. *Se N vórtices de intensidades $\{\Gamma_k, k = 1, \ldots, N\}$ estão presentes em um fluido incompressível nos pontos $\{(x_k, y_k), k = 1, \ldots, N\}$ em uma região geral D limitada por limites fixos, a função de fluxo é dada por*

$$\psi(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_N, y_N) = \psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k G(x, y; x_k, y_k),$$

onde as propriedades de G são dadas no lema 1 e $\psi_0(x, y)$ é a função de fluxo devido a agências externas e que satisfaz as condições de contorno sem fluxo através dos limites do domínio. ψ_0 é independente das posições dos vórtices pontuais.

Finalmente, Lin estabelece o seguinte teorema.

Teorema 1. *Para o movimento de vórtices de intensidades $\{\Gamma_k, k = 1, \ldots, N\}$ em uma região geral D limitada por limites fixos, existe uma função de Kirchhoff-Routh $H(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N)$ tal que*

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k} \quad e \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \tag{3.2}$$

onde $H(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N)$ é dada por

$$\begin{aligned} H(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) &= \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \psi_0(x_k, y) + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k>j}}^{N} \Gamma_k \Gamma_j G(x_k, y_k; x_j, y_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^2 g(x_k, y_k; x_k, y_k). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Colocando em coordenadas reescalonadas $(\sqrt{\Gamma_k}\, x_k, \sqrt{\Gamma_k}\, y_k)$ a equação (3.2) é um sistema Hamiltoniano na forma canônica.

Flucher e Gustafsson [9], referem-se à função especial de Green de Lin como a **Função Hidrodinâmica de Green** e adotaremos essa terminologia. Eles também consideram uma função associada chamada **Função de Robin**. É a parte regular da função hidrodinâmica de Green acima, avaliada na singularidade. Se a função hidrodinâmica de Green G é decomposta em uma parte singular simétrica e uma parte regular como na equação (3.1), então a função de Robin $\mathcal{R}(x_0, y_0)$ é definida como

$$\mathcal{R}(x_0, y_0) \equiv g(x_0, y_0; x_0, y_0).$$

Isto implica que, perto da singularidade (x_0, y_0), G pode ser expandida como

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2\,\pi} \log r_0 - \mathcal{R}(x_0, y_0) + \mathcal{O}(r_0).$$

É mais conveniente para o que segue introduzir coordenadas complexas $\zeta = x + iy$ e $\overline{\zeta} = x - iy$. Assim, tomando $\alpha = x_0 + i\,y_0$ como o número complexo que denota a posição complexa da singularidade da função de Green, doravante, escreveremos $G(\zeta; \alpha)$ ao invés de $G(x, y; x_0, y_0)$.

3.2 Construção da Função Hidrodinâmica de Green G em Domínios Circulares

Vamos agora mostrar como construir uma representação explícita para G em um domínio circular geral, multiplamente conexo, de conectividade finita arbitrária. Seja D_ζ o interior do disco unitário com M discos circulares menores disjuntos em seu interior. $M = 0$ é o caso simplesmente conexo. Denotemos os limites desses pequenos discos circulares por $\{C_j, j = 1, \ldots, M\}$, com δ_j e q_j sendo seus centros e raios, respectivamente. Considere o círculo unitário em torno da origem, isto é $\|\zeta\| = 1$, denotado por C_0.

Essa classe especial de domínios conexos é significativa por dois motivos. Em primeiro lugar, tais domínios circulares são conhecidos por serem domínios canônicos para mapeamento conformal de domínios mais gerais multiplamente conexos [20]. Ou seja, qualquer domínio multiplamente conexo dado pode ser obtido por mapeamento conforme de um domínio circular de mesma conectividade, para alguma escolha de parâmetros $\{\delta_j, j = 1, \ldots, M\}$ e $\{q_j, j = 1, \ldots, M\}$. Estes parâmetros devem ser determinados como parte da construção do mapeamento conforme e, neste último contexto, são referidos como módulos conformes do domínio [20].

Em segundo lugar, Lin [15] nos forneceu fórmulas explícitas para as propriedades de transformação da função de Kirchhoff-Routh pelos mapeamentos conformes. Em particular, se um mapa conforme $z(\zeta)$ mapeia uma dada região D_ζ no plano ζ para uma região D_z no plano z, e H^ζ e H^z, respectivamente, denotam os Hamiltonianos nos planos ζ e z, então esses

hamiltonianos se relacionam pela seguinte fórmula

$$H^z(z_1,\overline{z}_1,\ldots,z_N,\overline{z}_N) = H^\zeta(\zeta_1,\overline{\zeta}_1,\ldots,\zeta_N,\overline{\zeta}_N) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma_k^2}{4\pi}\log|z(\zeta_k)|,$$

onde $\{\zeta_k, k=1,\ldots,N\}$ e $\{z_k = z(\zeta_k), k=1,\ldots,N\}$ são as posições dos vórtices pontuais nos planos, ζ e z, respectivamente.

Em combinação, estes dois fatos significam que as fórmulas a serem derivadas neste trabalho teoricamente produzirão fórmulas para a função de Kirchhoff-Routh para N vórtices em qualquer domínio multiplamente conexo, para o qual um mapeamento conforme de uma região de pré-imagem circular é conhecido explicitamente.

Antes de estudarmos a construção explícita da função Hidrodinâmica de Green, nós precisaremos discutir alguns conceitos e resultados relacionados a função prime de SK. Para isto, começaremos pelos grupos de Schottky circulares.

3.3 Grupos de Schottky Circulares

Seja D_ζ um domínio circular de conectividade $M+1$, e defina M mapas de Möbius $\{\phi_j \mid j=1,\ldots,M\}$, correspondente ao mapa de conjugação para pontos no círculo C_j, de centro δ_j e raio q_j. Isto é, se C_j possui a equação

$$|\zeta-\delta_j|^2 = (\zeta-\delta_j)(\overline{\zeta}-\overline{\delta_j}) = q_j^2,$$

então

$$\overline{\zeta} = \overline{\delta_j} + \frac{q_j^2}{\zeta-\delta_j},$$

e assim

$$\phi_j(\zeta) \equiv \overline{\delta_j} + \frac{q_j^2}{\zeta-\delta_j}.$$

Se ζ é um ponto em C_j, então seu conjugado complexo é dado por $\overline{\zeta} = \phi_j(\zeta)$.

Introduziremos agora os mapas

$$\theta_j(\zeta) \equiv \overline{\phi_j}(\zeta^{-1}) = \delta_j + \frac{q_j^2\zeta}{1-\overline{\delta_j}\zeta}. \tag{3.4}$$

Proposição 1. *Seja $\theta_j(\zeta)$ um mapa como em (3.4), então este mapa é uma transformação de Möbius. E consequentemente $\theta_j(\zeta)$ é uma transformação conforme.*

Demonstração: De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned}\theta_j(\zeta) &= \delta_j + \frac{q_j^2\zeta}{1-\overline{\delta_j}\zeta},\\ &= \frac{\delta_j(1-\overline{\delta_j}\zeta)+q_j^2\zeta}{1-\overline{\delta_j}\zeta},\\ &= \frac{\delta_j+(q_j^2-|\delta_j|^2)\zeta}{1-\overline{\delta_j}\zeta}.\end{aligned}$$

Com $a = q_j^2 - |\delta_j|^2$, $b = \delta_j$, $c = -\overline{\delta_j}$ e $d = 1$, podemos verificar que $ad - bc = q_j^2 - |\delta_j|^2 - (-|\delta_j|^2) = q_j^2 \neq 0$ e que $\theta_j(\zeta) = \dfrac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$, isto é, está de fato escrita na forma de uma tranformação de Möbius. ■

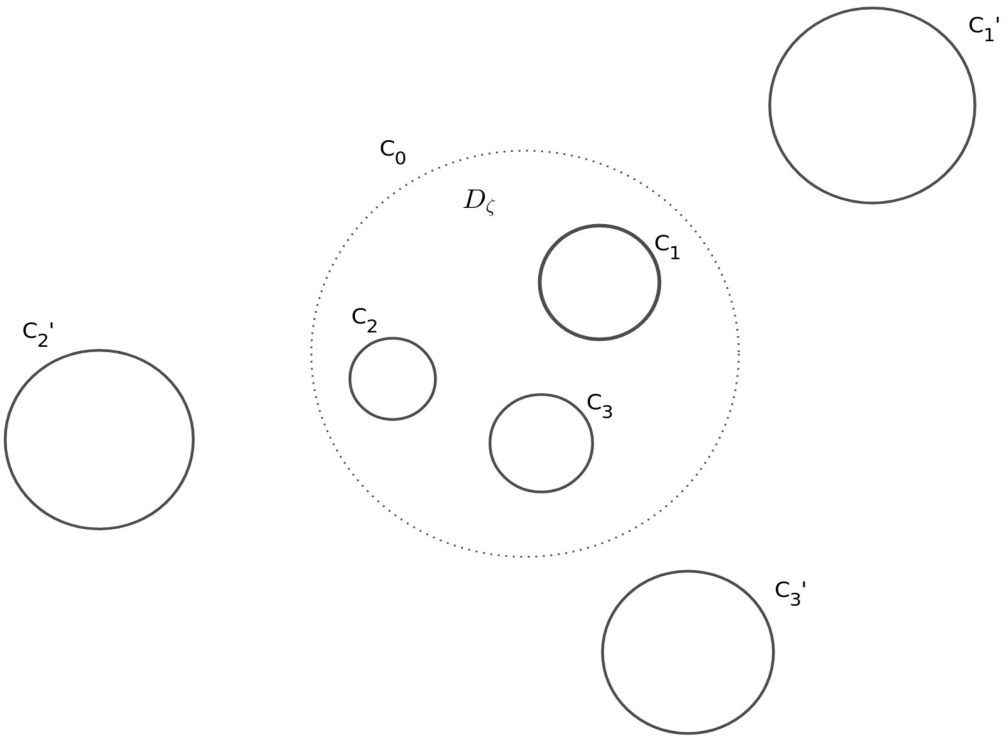

Figura 3.2: Uma região circular típica D_ζ é a região interior ao círculo unitário C_0 e exterior aos três círculos C_1, C_2 e C_3. No caso mostrado, D_ζ possui conectividade quatro. A região fundamental é a região não delimitada exterior a todos os seis círculos de Schottky $C_1, C_1', C_2, C_2', C_3, C_3'$. O raio do círculo C_j é denotado q_j e seu centro por δ_j.

Proposição 2. *Se C_j' é o círculo obtido pela inversão de C_j em C_0, então $\theta_j(C_j') = C_j$.*

Demonstração: Considere $\zeta_1 \in C_j'$. Por hipótese, temos necessariamente que

$$\zeta_1 = \frac{1}{\overline{\zeta}},$$

com $\zeta \in C_j$ (inversão em C_0). Portanto,

$$\theta_j(\zeta_1) = \theta_j(\frac{1}{\overline{\zeta}}) = \overline{\phi}_j(\overline{\zeta}) = \zeta,$$

ou seja, $\theta_j(\zeta_1) \in C_j$. Como ζ_1 foi escolhido arbitrariamente, segue que $\theta_j(C_j') \subseteq C_j$. Como θ_j é analítica, o conjunto $\theta_j(C_j')$ é uma curva fechada e, portanto, devemos ter $\theta_j(C_j') = C_j$. ■

Proposição 3. *Para todo ζ, valem as seguintes propriedades:*

(i) $\theta_j^{-1}(\zeta) = \dfrac{1}{\phi_j(\zeta)}$;

(ii) $\theta_j^{-1}(\zeta^{-1}) = \dfrac{1}{\overline{\theta_j}(\zeta)}$.

Demonstração: Para demonstrar o item (i) da proprosição acima considere $f = \theta_j(\zeta)$. Portanto

$$f = \delta_j + \frac{q_j^2 \zeta}{1 - \overline{\delta_j}\zeta}$$

se, e somente se

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{f - \delta_j}{q_j^2 + \overline{\delta_j}(f - \delta_j)}, \\ &= \frac{1}{\dfrac{q_j^2}{f - \delta_j} + \overline{\delta_j}}, \\ &= \frac{1}{\phi_j(f)}. \end{aligned}$$

Observando que $\theta_j^{-1}(f) = \theta_j^{-1}(\theta_j(\zeta)) = \zeta$, concluímos que

$$\theta_j^{-1}(f) = \frac{1}{\phi_j(f)}.$$

Trocando f por ζ, temos a tese.

Já o item (ii), segue diretamente do item (i). Com efeito,

$$\theta_j^{-1}(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\phi_j(\zeta^{-1})} = \frac{1}{\overline{\phi}_j(\overline{\zeta^{-1}})} = \frac{1}{\overline{\theta_j(\overline{\zeta})}} = \frac{1}{\overline{\theta_j}(\zeta)},$$

onde usamos a definição de função conjugação aplicada a θ_j, e assim concluímos nossa demonstração. ■

Definição 11. *Sejam D_ζ um domínio circular de conectividade $M+1$, $\hat{D}_\zeta$ a imagem de todos os círculos C_j por sua reflexão em relação a C_0, e θ_j como em (3.4). Definimos o* ***grupo de Schottky clássico*** *Θ como sendo o grupo livre gerado pelas composições das $2M$ transformações de Möbius $\{\theta_j, {\theta_j}^{-1}, j = 1, \dots M\}$, incluindo a identidade. Ou seja,*

$$\Theta = [Id, \theta_1, \dots, \theta_M, {\theta_1}^{-1}, \dots, {\theta_M}^{-1}].$$

Os $2M$ círculos são conhecidos como os círculos de Schottky.

Definição 12. *Considere a região do plano exterior aos $2M$ círculos $\{C_j\}$ e $\{C'_j\}$ (um esquema é mostrado na figura (2.2) para $M = 3$). Esta região é conhecida como a* ***região fundamental*** *associada ao grupo Schottky.*

Observação 3. *Esta região pode ser entendida como tendo duas "metades"; a metade que está dentro do círculo unitário, mas exterior aos círculos C_j a qual é a região física (a que estamos chamando de D_ζ), e a região que está fora do círculo unitário e exterior aos círculos C'_j, que é a metade não física.*

No decorrer do texto, faremos uso constante de alguns subgrupos do grupo de Schottky Θ.

Definição 13. *Seja Θ o grupo de Schottky. O subgrupo Θ_j denotará o conjunto de todas as transformações $\psi \in \Theta$ que não possuem uma potência positiva ou negativa de θ_j à direita. Analogamente, ${}_i\Theta$ denotará o conjunto das transformações $\psi \in \Theta$ que não possuem uma potência positiva ou negativa de θ_i à esquerda.*

Definição 14. *Considere Θ o grupo de Schottky. O subgrupo ${}_i\Theta_j$ denotará o conjunto das transformações $\psi \in \Theta$ que não possuem uma potência positiva ou negativa de θ_i à esquerda e uma potência positiva ou negativa de θ_j à direita.*

Definição 15. *Seja Θ o grupo de Schottky. Θ' denotará o grupo de Schottky menos a identidade, isto é, $\Theta' = \Theta \backslash Id$.*

Definição 16. *Considere Θ o grupo de Schottky. Θ'_j denotará o conjunto das transformações $\psi \in \Theta$ diferentes da identidade e que não possuem uma potência positiva ou negativa de θ_j à direita.*

Definição 17. *O conjunto Θ'' denotará o grupo de Schottky menos a identidade e todas as combinações (composições) das inversas θ_j^{-1}. Ou seja, se $\psi \in \Theta''$, então $\psi^{-1} \notin \Theta''$.*

3.4 Função Prime de Schottky - Klein

Em posse dos conceitos e resultados apresentados até então, estamos em condições de introduzir um conceito de extrema importância.

Definição 18. ***(Função Prime de Schottky - Klein)*** *Sejam D_ζ um domínio circular de conectividade $M+1$ e Θ o grupo de Schottky clássico associado. Definimos a função prime de Schottky-Klein por*

$$\omega(\zeta, \gamma) = (\zeta - \gamma)\, \omega'(\zeta, \gamma),$$

onde a função ω' é dada por

$$\omega'(\zeta, \gamma) = \prod_{\theta_i \in \Theta''} \frac{(\theta_i(\zeta) - \gamma)(\theta_i(\gamma) - \zeta)}{(\theta_i(\zeta) - \zeta)(\theta_i(\gamma) - \gamma)}. \tag{3.5}$$

Note que os termos do produtório (3.5) são, na verdade, as razões cruzadas dos argumentos $\zeta, \theta_i(\zeta), \gamma$ e $\theta_i(\gamma)$. Assim, podemos reescrever ω' da seguinte maneira

$$\omega'(\zeta, \gamma) = \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \theta_i(\zeta), \gamma, \theta_i(\gamma)\},$$

onde a notação de chaves indica a razão cruzada dos quatro argumentos.

Do ponto de vista computacional, o cálculo de $\omega(\cdot, \cdot)$ depende crucialmente da velocidade de convergência do produtório (3.5). Embora a função prime de Schottky-Klein esteja definida para todo ζ, ainda não é sabido se o produtório acima converge em toda região fundamental. E mesmo quando há a convergência, ela pode ocorrer muito devagar, o que na prática inviabiliza o cálculo [4].

Quando convergente, este produtório da equação (3.5) define uma função analítica e univalente em todo o domínio D_ζ, a qual possui um zero simples em $\zeta = \gamma$ e em todos os outros $\theta_i(\gamma)$, para toda transformação $\theta_i \in \Theta''$.

Recentemente, D. Crowdy e J. Marshall apresentaram uma maneira de contornar o problema da convengência do produtório [6]. Eles desenvolveram um algoritmo, baseado na representação da série de Laurent da função. A função prime de SK satisfaz diversas relações funcionais e possui uma variedade de propriedades algébricas e analíticas importantes. As proposições a seguir destacam algumas delas.

Proposição 4. *A função prime de Schottky-Klein é antissimétrica em seus argumentos, ou seja,*

$$\omega(\zeta,\gamma) = -\,\omega(\gamma,\zeta).$$

Demonstração: É suficiente mostrar que $\omega'(\zeta,\gamma) = \omega'(\gamma,\zeta)$, uma vez que

$$\omega(\zeta,\gamma) = (\zeta-\gamma)\,\omega'(\zeta,\gamma) = -\,(\gamma-\zeta)\,\omega'(\zeta,\gamma).$$

Da definição 13, temos que

$$\begin{aligned}
\omega'(\zeta,\gamma) &= \prod_{\theta_i\in\Theta''} \frac{(\theta_i(\zeta)-\gamma)(\theta_i(\gamma)-\zeta)}{(\theta_i(\zeta)-\zeta)(\theta_i(\gamma)-\gamma)}, \\
&= \prod_{\theta_i\in\Theta''} \frac{(\theta_i(\gamma)-\zeta)(\theta_i(\zeta)-\gamma)}{(\theta_i(\gamma)-\gamma)(\theta_i(\zeta)-\zeta)}, \\
&= \omega'(\gamma,\zeta),
\end{aligned}$$

onde apenas permutamos os termos do numerador e do denominador do termo geral do produtório. Assim,

$$\omega(\zeta,\gamma) = -(\gamma\ -\zeta)\,\omega'(\zeta,\gamma) = -\,(\gamma-\zeta)\,\omega'(\gamma,\zeta) = -\,\omega(\gamma,\zeta),$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 5. *A função prime de Schottky-Klein satisfaz*

$$\frac{\omega(\theta_i(\zeta),\gamma_1)}{\omega(\theta_i(\zeta),\gamma_2)} = \beta_i(\gamma_1,\gamma_2)\frac{\omega(\zeta,\gamma_1)}{\omega(\zeta,\gamma_2)},$$

onde θ_i é qualquer um dos mapas básicos (geradores) do grupo de Schottky, e $\beta_i(\gamma_1, \gamma_2)$ é dada por

$$\beta_i(\gamma_1, \gamma_2) = \prod_{\theta_k \in \Theta_i} \frac{(\gamma_1 - \theta_k(B_i))(\gamma_2 - \theta_k(A_i))}{(\gamma_1 - \theta_k(A_i))(\gamma_2 - \theta_k(B_i))}, \tag{3.6}$$

sendo A_i e B_i os dois pontos fixos da transformação θ_i, ou seja, $\theta_i(A_i) = A_i$ e $\theta_i(B_i) = B_i$, com $j = 1, \ldots, M$.

Demonstração: Capítulo 12 de [2]. ■

Observação 4. *É possível mostrar que as constantes A_i e B_i satisfazem uma equação da forma*

$$\frac{\theta_i(\zeta) - B_i}{\theta_i(\zeta) - A_i} = \mu_i e^{ik_i} \frac{\zeta - B_i}{\zeta - A_i},$$

para constantes reais μ_i, k_i. As raízes A_i e B_i acima são ordenadas de modo que $|\mu_i| < 1$.

Proposição 6. *Sejam C_j, C_j' os círculos construídos na proposição 2. A função prime satisfaz a seguinte equação*

$$\overline{\omega}(\zeta^{-1}, \gamma^{-1}) = -\frac{1}{\zeta\gamma}\omega(\zeta, \gamma),$$

onde a função conjugação é definida por $\overline{\omega}(\zeta, \gamma) = \overline{\omega(\overline{\zeta}, \overline{\gamma})}$.

Demonstração: Por definição temos que a função prime pode ser escrita da seguinte forma

$$\omega(\zeta, \gamma) = (\zeta - \gamma) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \theta_i(\zeta), \gamma, \theta_i(\gamma)\}.$$

Portanto,

$$\omega(\zeta^{-1}, \gamma^{-1}) = (\zeta^{-1} - \gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta^{-1}, \theta_i(\zeta^{-1}), \gamma^{-1}, \theta_i(\gamma^{-1})\}. \tag{3.7}$$

Considere um termo geral da forma $\theta_i(\zeta^{-1})$. Esta é uma composição do geradores do grupo Schottky. Suponha, por exemplo, que

$$\theta_i(\zeta^{-1}) = \theta_p(\theta_q(\theta_r(\zeta^{-1}))), \tag{3.8}$$

para alguma sequência de inteiros (p, q, r) rotulando os mapas de um nìvel. Lembre-se da equação da proposição 3 que se θ_k é um dos mapas básicos de nível um (ver a definição de nível de um mapa no final da página 37), então

$$\theta_k^{-1}(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\overline{\theta_k}(\zeta)}.$$

Equivalentemente,

$$\theta_k(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\overline{\theta_k}^{-1}(\zeta)}. \tag{3.9}$$

Usando a equação (3.9) repetidamente na equação (3.8)

$$\begin{aligned}
\theta_i(\zeta^{-1}) &= \theta_p(\theta_q(\theta_r(\zeta^{-1}))), \\
&= \theta_p\left(\theta_q\left(\frac{1}{\overline{\theta_r}^{-1}(\zeta)}\right)\right), \\
&= \theta_p\left(\frac{1}{\overline{\theta_q}^{-1}(\overline{\theta_r}^{-1}(\zeta))}\right), \\
&= \frac{1}{\overline{\theta_p}^{-1}(\overline{\theta_q}^{-1}(\overline{\theta_r}^{-1}(\zeta)))}, \\
&= \frac{1}{\overline{\theta_r\theta_q\theta_p}^{-1}(\zeta)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Introduziremos agora uma notação geral "r" em subscrição; dado o mapa θ_i (por exemplo, correspondente à sequência (p, q, r)), então θ_{ir} indicará o mapa correspondente à sequência invertida. Neste exemplo, a sequência invertida é (r, q, p) de modo que

$$\theta_{ir} = \theta_r(\theta_q(\theta_p(\zeta))).$$

Então a equação (3.10) pode ser escrita da seguinte forma

$$\theta_i(\zeta^{-1}) = \frac{1}{\overline{\theta_{ir}}^{-1}(\zeta)}. \tag{3.11}$$

Este resultado da equação (3.11) será verdadeiro para qualquer mapa θ_i. Segue de (3.7) que

$$\begin{aligned}
\omega(\zeta^{-1}, \gamma^{-1}) &= (\zeta^{-1} - \gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \left\{\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\overline{\theta_{ir}}^{-1}(\zeta)}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\overline{\theta_{ir}}^{-1}(\gamma)}\right\}, \\
&= (\zeta^{-1} - \gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \overline{\theta_{ir}}^{-1}(\zeta), \gamma, \overline{\theta_{ir}}^{-1}(\gamma)\},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde usamos a invariância das razões cruzadas para a transformação de Möbius em todos os quatro argumentos. Agora, usando o fato de que os inversos são excluídos do produto, a

equação (3.12) também pode ser escrita da seguinte maneira

$$\omega(\zeta^{-1},\gamma^{-1}) = (\zeta^{-1}-\gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \overline{\theta_{ir}}(\zeta), \gamma, \overline{\theta_{ir}}(\gamma)\}, \tag{3.13}$$

onde simplesmente rotulamos os mapas no produto novamente. Além disso, se um mapa θ_j for incluído no produto, é relativamente simples verificar que o mapa θ_{jr} também pode estar no produto. Assim, sob uma nova rotulação dos mapas, a equação (3.13) torna-se

$$\omega(\zeta^{-1},\gamma^{-1}) = (\zeta^{-1}-\gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \overline{\theta}_i(\zeta), \gamma, \overline{\theta}_i(\gamma)\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}(\zeta^{-1},\gamma^{-1}) &= \overline{\omega(\overline{\zeta}^{-1},\overline{\gamma}^{-1})}, \\
&= (\zeta^{-1}-\gamma^{-1}) \prod_{\theta_i \in \Theta''} \{\zeta, \theta_i(\zeta), \gamma, \theta_i(\gamma)\}, \\
&= (\zeta^{-1}-\gamma^{-1}) \frac{\omega(\zeta,\gamma)}{(\zeta-\gamma)}, \\
&= -\frac{1}{\zeta\gamma}\omega(\zeta,\gamma).
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. ■

É conveniente classificar todas as composiçõess possíveis dos mapas básicos de acordo com o seu nível. Para ilustrar, considere o caso em que existem três mapas básicos $\{\theta_j, j = 1,2,3\}$. O mapa de identidade é considerado o mapa de nível zero. Os três mapas básicos, junto com seus inversos, $\{\theta_j^{-1}, j = 1,2,3\}$ constituem os seis mapas de nível um. Todas as combinações possíveis de quaisquer dois destes seis mapas de nível um que não se reduzem a identidade, como por exemplo $\theta_1(\theta_1)$, serão considerados os mapas de nível dois; todas as combinaões possíveis de quaisquer três dos seis mapas de nível um que não se reduzem a um mapa de nível inferior serão chamados de mapas de nível três e assim sucessivamente.

Na prática, para escrever uma rotina de função para calcular ω numericamente, é necessário truncar o produto infinito na equação (3.5). Isto é feito de forma natural, incluindo todos os mapas de Möbius até um determinado nível escolhido e truncando a contribuição para o produto de todos os mapas de nível superior.

3.5 Solução Explícita para a Função Hidrodinâmica de Green G

Dado um domínio circular D_ζ (como o mostrado na figura 3.2), a função prime de SK associada $\omega(\zeta, \alpha)$ pode ser construída. Considere que a singularidade da função hidrodinâmica de Green G neste domínio está em α. O potencial complexo $W(\zeta; \alpha)$ para o fluxo é tal que

$$G(\zeta; \alpha) = Im[W(\zeta; \alpha)],$$

e uma expressão explícita para isso é

$$W(\zeta; \alpha) = -\frac{i}{4\pi} \log \left(\frac{\omega(\zeta, \alpha)\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \alpha^{-1})}{\omega(\zeta, \overline{\alpha}^{-1})\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \overline{\alpha})} \right). \tag{3.14}$$

É natural escolher o ramo do logaritmo para que o ramo aponte para α e $\overline{\alpha}^{-1}$ que são unidos por um corte da ramificação, assim como todos os pares de imagens desses dois pontos sob as transformações do grupo (ou seja, em todas as regiões "equivalentes" à região fundamental).

Teorema 2. *Seja W como em* (3.14) *o potencial complexo de um fluido. Uma representação explícita para a função de Green $G(\zeta; \alpha)$ satisfazendo a condição de se anular em C_0 e ser constante nos círculos internos C_j, $j = 1, \ldots, M$ é*

$$G(\zeta; \alpha) = -\frac{1}{4\pi} \log \left| \frac{\omega(\zeta, \alpha)\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \alpha^{-1})}{\omega(\zeta, \overline{\alpha}^{-1})\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \overline{\alpha})} \right|. \tag{3.15}$$

Demonstração: Para provar que as equações (3.14) e (3.15) satisfazem as condições descritas no enunciado, considere a função

$$S(\zeta; \alpha) \equiv \frac{\omega(\zeta, \alpha)\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \alpha^{-1})}{\omega(\zeta, \overline{\alpha}^{-1})\, \overline{\omega}(\zeta^{-1}, \overline{\alpha})},$$

$S(\zeta; \alpha)$ tem um zero de segunda ordem em $\zeta = \alpha$ (assim como em todos os pontos no plano equivalente a α sob a ação do grupo). $S(\zeta; \alpha)$ também tem um pólo de segunda ordem no ponto $\overline{\alpha}^{-1}$ (e todos os pontos equivalentes). Seja um ponto na metade física da região fundamental. Segue que $\overline{\alpha}^{-1}$ estará na metade não física. Sendo assim

$$G(\zeta; \alpha) = -\frac{1}{4\pi} \log |S(\zeta; \alpha)|, \tag{3.16}$$

isto significa que, na metade física da região fundamental D_ζ, $G(\zeta;\alpha)$ possui uma única singularidade logarítmica isolada em $\zeta = \alpha$, conforme necessário. Dado que o zero de S em α é de segunda ordem, localmente, $G(\zeta;\alpha)$ tem a expansão

$$G(\zeta;\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\log|\zeta-\alpha| + \mathcal{O}(1),$$

novamente conforme necessário.

Ainda precisa ser verificado que a equação (3.15) satisfaz as condições de contorno exigidas em todos os círculos $\{C_j, j = 1,\ldots,M\}$. Em C_0

$$\begin{aligned}
\overline{S(\zeta;\alpha)} &= \frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta},\overline{\alpha})\,\omega(\overline{\zeta}^{-1},\overline{\alpha}^{-1})}{\overline{\omega}(\overline{\zeta},\alpha^{-1})\,\omega(\overline{\zeta}^{-1},\alpha)},\\
&= \frac{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})\,\omega(\zeta,\overline{\alpha}^{-1})}{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})\,\omega(\zeta,\alpha)},\\
&= \frac{1}{\dfrac{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})\,\omega(\zeta,\alpha)}{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})\,\omega(\zeta,\overline{\alpha}^{-1})}},\\
&= \frac{1}{S(\zeta;\alpha)},
\end{aligned}$$

onde estamos fazendo uso a definição de função conjugada e o fato de que no círculo centrado na origem e de raio um, temos que $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ (como pode ser facilmente verificado usando as primeiras equações da seção sobre grupo de Schottky). Assim, $|S(\zeta;\alpha)| = 1$ em C_0, então segue da equação (3.16) que

$$G(\zeta;\alpha) = 0, \text{ em } C_0.$$

Esta é a condição de normalização estipulada na equação do item (iii) das propriedades da função hidrodinâmica de Green. Em outras palavras, em qualquer um dos círculos interiores $\{C_j, j = 1,\ldots,M\}$,

$$\begin{aligned}
\overline{S(\zeta;\alpha)} &= \frac{\overline{\omega}(\overline{\zeta},\overline{\alpha})\,\omega(\overline{\zeta}^{-1},\overline{\alpha}^{-1})}{\overline{\omega}(\overline{\zeta},\alpha^{-1})\,\omega(\overline{\zeta}^{-1},\alpha)},\\
&= \frac{\overline{\omega}(\phi_j(\zeta),\overline{\alpha})\,\omega(\phi_j(\zeta)^{-1},\overline{\alpha}^{-1})}{\overline{\omega}(\phi_j(\zeta),\alpha^{-1})\,\omega(\phi_j(\zeta)^{-1},\alpha)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})\,\omega(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1})^{-1},\overline{\alpha}^{-1})}{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})\,\omega(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1})^{-1},\alpha)},\\
&= \frac{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})\,[-\overline{\theta_j}(\zeta^{-1})^{-1}\,\overline{\alpha}^{-1}]\,\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})\,[-\overline{\theta_j}(\zeta^{-1})^{-1}\,\alpha]\,\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})},\\
&= \frac{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})\,\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})}{|\alpha|^2\,\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})\,\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})}, \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

onde usamos diretamente que se ζ pertence a C_j então $\overline{\zeta} = \phi_j(\zeta)$, as propriedades da proposição 3 e a proposição 6.

No entanto, agora podemos usar o resultado da proposição 5 na equação (3.17), mais precisamente nesta equação escrita da seguinte forma

$$
\overline{S(\zeta;\alpha)} = \frac{1}{|\alpha|^2}\,\frac{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})}\,\frac{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\overline{\theta_j}(\zeta^{-1}),\alpha^{-1})},
$$

porém observando que neste caso se faz necessária a aplicação da conjugação, o que nos fornecerá o seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
\overline{S(\zeta;\alpha)} &= \frac{1}{|\alpha|^2}\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}\,\frac{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})}\,\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}\,\frac{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})},\\
&= \frac{\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}^2}{|\alpha|^2}\,\frac{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}{\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})},\\
&= \frac{\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}^2}{|\alpha|^2}\,\frac{(-\frac{1}{\zeta\overline{\alpha}^{-1}})\,\omega(\zeta,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}{(-\frac{1}{\zeta\alpha})\,\omega(\zeta,\alpha)\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})},\\
&= \frac{\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}^2}{|\alpha|^2}\,\frac{|\alpha|^2\,\omega(\zeta,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}{\omega(\zeta,\alpha)\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})},\\
&= \overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}^2\left(\frac{1}{\frac{\omega(\zeta,\alpha)\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\alpha^{-1})}{\omega(\zeta,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\omega}(\zeta^{-1},\overline{\alpha})}}\right),\\
&= \frac{\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}^2}{S(\zeta;\alpha)}. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

A fórmula (3.18) implica imediatamente que, em C_j

$$|S(\zeta;\alpha)| = \overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})},$$

de modo que

$$G(\zeta;\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\log|S(\zeta;\alpha)| = -\frac{1}{4\pi}\log\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})} \text{ em } C_j.$$

Isso significa que os parâmetros $\{A_j, j = 1,\ldots,M\}$ da equação do caso 2 do item (iii) das propriedades da função hidrodinâmica de Green são

$$A_j = -\frac{1}{4\pi}\log\overline{\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})}.$$

Utilizando a equação (3.6), uma fórmula para $\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})$ é

$$\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1}) = \prod_{\theta_k\in\Theta_j}\frac{(\alpha-\theta_k(B_i))(\overline{\alpha}^{-1}-\theta_k(A_i))}{(\alpha-\theta_k(A_i))(\overline{\alpha}^{-1}-\theta_k(B_i))}. \tag{3.19}$$

Já da equação (3.18), $\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})$ deve ser uma quantidade real, mas não fica claro pela inspeção se o lado direito da equação (3.19) é sempre real (uma demonstração disso é dada no apêndice B de [5]). Acontece que para qualquer $\alpha\in\mathbb{C}$, $\beta_j(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})$ são todos valores reais positivos. ■

Finalmente, algumas manipulações algébricas revelam que a função de Robin associada é dada por

$$\mathcal{R}(\alpha;\overline{\alpha}) = \frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{\omega'(\alpha,\alpha)\,\overline{\omega}'(\alpha^{-1},\alpha^{-1})}{\alpha^2\,\omega(\alpha,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\omega}(\alpha^{-1},\overline{\alpha})}\right|. \tag{3.20}$$

Afim de ilustrar melhor como encontrar um Hamiltoniano escrito em termos da função de Green e da função de Robin, vamos considerar o caso de dois vórtices no círculo unitário, isto é, o domínio circular possui apenas uma componente conexa, o próprio círculo unitário.

Exemplo 2. *VÓRTICES PONTUAIS NO CÍRCULO UNITÁRIO.*

Considere um sistema com dois vórtices pontuais posicionados, respectivamente, em z_1 e z_2, no círculo unitário $C_0\subset\mathbb{C}$ em um fluido ideal. Queremos encontrar o Hamiltoniano associado ao sistema.

Como foi visto, para $N = 2$ temos que a função de Kirchhoff-Routh é da seguinte forma

$$H(z_1,z_2) = \Gamma_1\Gamma_2 G(z_1;z_2) - \frac{1}{2}\Gamma_1^2\mathcal{R}(z_1) - \frac{1}{2}\Gamma_2^2\mathcal{R}(z_2),$$

onde G é a função de Green e $\mathcal{R}$ é afunção de Robin. Além disso,

$$\mathcal{R}(z;\alpha) = -G(z;\alpha) - \frac{1}{2\pi}\log|z-\alpha|.$$

Para o círculo unitário $\|\zeta\| \leq 1$, o único elemento no grupo Schottky é o mapa identidade, visto que não há obstáculos no interior de C_0. Então, o subconjunto Θ'' é vazio e $\omega(z,\alpha) = z - \alpha$ pois $\omega'(z,\alpha) = 1$. Para encontrar a expressão de H temos que começar identificando a expressão da função de Green, e consequentemente a da função de Robin. Da equação (3.15) temos que

$$G(z;\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{\omega(z,\alpha)\,\overline{\omega}(z^{-1},\alpha^{-1})}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\omega}(z^{-1},\overline{\alpha})}\right|,$$

e usando o resultado da proposição 6 obtemos

$$\begin{aligned}
G(z;\alpha) &= -\frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{\omega(z,\alpha)\,\left(-\dfrac{1}{z\alpha}\omega(z,\alpha)\right)}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})\,\left(-\dfrac{1}{z\overline{\alpha}^{-1}}\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})\right)}\right|,\\
&= -\frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{\omega^2(z,\alpha)\,\dfrac{1}{\alpha}}{\omega^2(z,\overline{\alpha}^{-1})\,\overline{\alpha}}\right|,\\
&= -\frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{1}{|\alpha|^2}\left(\frac{\omega(z,\alpha)}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})}\right)^2\right|,\\
&= -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\alpha}\frac{\omega(z,\alpha)}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})}\right|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(z;\alpha) &= -G(z;\alpha) - \frac{1}{2\pi}\log|z-\alpha|,\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\alpha}\frac{\omega(z,\alpha)}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})}\right| - \frac{1}{2\pi}\log|\omega(z,\alpha)|,\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\omega(z,\alpha)}{\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})}}{\omega(z,\alpha)}\right|,\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\alpha\,\omega(z,\overline{\alpha}^{-1})}\right|.
\end{aligned}$$

Substituindo ω obtemos

$$G(z;\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\alpha}\frac{(z-\alpha)}{(z-\overline{\alpha}^{-1})}\right| = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\frac{(z-\alpha)}{(\overline{\alpha}z-1)}\right|,$$

e

$$\mathcal{R}(z;\alpha) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\alpha\,(z-\overline{\alpha}^{-1})}\right| = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\frac{1}{(\overline{\alpha}z-1)}\right|.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
H(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2}) &= \Gamma_1\Gamma_2 G(z_1;z_2) - \frac{1}{2}\Gamma_1^2\mathcal{R}(z_1;z_1) - \frac{1}{2}\Gamma_2^2\mathcal{R}(z_2;z_2),\\
&= \Gamma_1\Gamma_2\left(-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{z_2}}{z_2}\frac{(z_1-z_2)}{(\overline{z_2}z_1-1)}\right|\right) - \frac{1}{2}\Gamma_1^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{z_1}}{z_1}\frac{1}{(\overline{z_1}z_1-1)}\right|\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\Gamma_2^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{z_2}}{z_2}\frac{1}{(\overline{z_2}z_2-1)}\right|\right),\\
&= -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\log\left|\frac{\overline{z_2}(z_1-z_2)}{z_2(\overline{z_2}z_1-1)}\right| - \frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\log\left|\frac{\overline{z_1}}{z_1(|z_1|^2-1)}\right| - \frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\log\left|\frac{\overline{z_2}}{z_2(|z_2|^2-1)}\right|.
\end{aligned}$$

4 DINÂMICA DE VÓRTICE PONTUAL EM UM ANEL CONCÊNTRICO

Vamos agora aumentar a conectividade do nosso domínio de fluido considerando um anel concêntrico $\rho < |\zeta| < 1$ onde $0 < \rho < 1$ é algum raio escolhido. Queremos resolver o problema de um vórtice pontual neste domínio e para isto como vimos no decorrer do texto precisamos da função prime de SK associada ao mesmo.

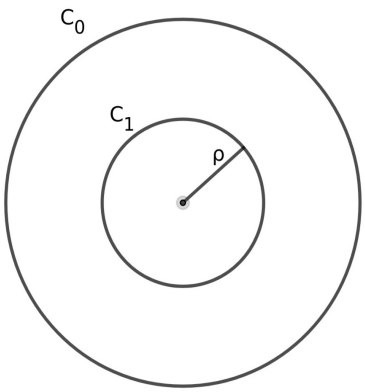

Figura 4.1: O domìnio D_ζ neste caso é um anel concêntrico, com raio maior igual a 1 e raio menor ρ.

4.1 A Função Prime de Schottky-Klein para um Anel

Antes de prosseguir, introduziremos um novo objeto matemático de muita importância. Assim como o monômio simples $\omega(\zeta, \alpha) = \zeta - \alpha$ foi introduzido como função prime de SK

para o disco unitário, queremos encontrar a função prime de SK para o anel concêntico, para isto observe que neste caso nosso grupo de Schottky possui três geradores: a identidade e mais um mapa de Möbius e sua inversa, relacionados ao círculo interno centrado na origem e de raio ρ, $\theta_1(\zeta) = \rho^2\zeta$. Portanto, $\Theta = [id, \theta_1, \theta_1^{-1}]$ e por definição $\Theta'' = [\theta_1]$.

Usando a definição da função prime de SK, temos que

$$\begin{aligned}\omega(\zeta,\alpha) &= (\zeta-\alpha)\omega'(\zeta,\alpha),\\ &= (\zeta-\alpha)\prod_{\theta_i\in\Theta''}\frac{(\theta_i(\zeta)-\alpha)(\theta_i(\alpha)-\zeta)}{(\theta_i(\zeta)-\zeta)(\theta_i(\alpha)-\alpha)}.\end{aligned}$$

Substituindo os θ_i's pelos elementos de Θ'', os quais são potências positivas (composições) de θ_1, podemos reescrever o produtório da equação acima da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\omega(\zeta,\alpha) &= (\zeta-\alpha)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\rho^{2k}\zeta-\alpha)(\rho^{2k}\alpha-\zeta)}{(\rho^{2k}\zeta-\zeta)(\rho^{2k}\alpha-\alpha)},\\ &= (\zeta-\alpha)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\rho^{2k}\zeta-\alpha)(\rho^{2k}\alpha-\zeta)}{\zeta(\rho^{2k}-1)\,\alpha(\rho^{2k}-1)},\\ &= (\zeta-\alpha)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha}-1)\,\zeta(\rho^{2k}\frac{\alpha}{\zeta}-1)}{\zeta\alpha(\rho^{2k}-1)^2},\\ &= -\alpha\left(1-\frac{\zeta}{\alpha}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha}-1)(\rho^{2k}\frac{\alpha}{\zeta}-1)}{(\rho^{2k}-1)^2},\\ &= -\alpha\left(1-\frac{\zeta}{\alpha}\right)\frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha})(1-\rho^{2k}\frac{\alpha}{\zeta})}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k})^2},\\ &= \frac{-\alpha}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k})^2}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2k}\frac{\alpha}{\zeta}\right)\\ &= \frac{-\alpha}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k})^2}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2k}\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Sendo assim, definiremos a função prime de SK para o anel concêntrico $\rho < |\zeta| < 1$ por

$$\omega(\zeta,\alpha) = -\frac{\alpha}{C^2}P\left(\frac{\zeta}{\alpha},\rho\right), \tag{4.1}$$

onde $C \equiv \prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k})$ é (para nós) uma constante sem importância e

$$P(\zeta,\rho) \equiv (1-\zeta)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\zeta)\,(1-\rho^{2k}\zeta^{-1}). \tag{4.2}$$

Note que $\omega(\zeta,\alpha)$ realmente depende do parâmetro ρ que define a geometria do anel mas é suprimido em nossa notação. Usando resultados padrões de produtos infinitos prova-se que o produto (4.2) converge para todo $\zeta \neq 0,\infty$ e para qualquer $0<\rho<1$.

Observação 5. *Daqui em diante, a notação $\omega(\zeta,\alpha)$ agora se refere à função prime de Schottky-Klein (mais complicada) para o anel (não a função prime simples para o disco).*

Proposição 7. *A função $P(\zeta,\rho)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $P(\zeta^{-1},\rho) = -\zeta^{-1}P(\zeta,\rho)$;

(ii) $P(\rho^2\zeta,\rho) = -\zeta^{-1}P(\zeta,\rho)$.

Demonstração: Por definição

$$\begin{aligned}
P(\zeta^{-1},\rho) &= (1-\zeta^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\zeta^{-1})\,(1-\rho^{2k}\zeta),\\
&= (1-\zeta^{-1})\frac{P(\zeta,\rho)}{(1-\zeta)},\\
&= \frac{(\zeta-1)}{\zeta}\frac{P(\zeta,\rho)}{(1-\zeta)},\\
&= -\frac{1}{\zeta}P(\zeta,\rho),
\end{aligned}$$

e com isto provamos o primeiro item. Utilizando um processo análogo, temos que

$$\begin{aligned}
P(\rho^2\zeta,\rho) &= (1-\rho^2\zeta)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\rho^2\zeta)\,(1-\rho^{2k}(\rho^2\zeta)^{-1}),\\
&= (1-\rho^2\zeta)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2(k+1)}\zeta)\,(1-\rho^{2(k-1)}\zeta^{-1}),
\end{aligned}$$

e desenvolvendo o produtório obtemos

$$P(\rho^2\zeta,\rho) = (1-\rho^2\zeta)(1-\rho^4\zeta)(1-\zeta^{-1})(1-\rho^6\zeta)(1-\rho^2\zeta^{-1})(1-\rho^8\zeta)(1-\rho^4\zeta^{-1})\dots\ .$$

Observe que precisamos apenas isolar o termo $(1-\zeta^{-1})$ e reagrupar os demais termos para que o produtório já conhecido da equação (4.2) apareça. Logo,

$$\begin{aligned} P(\rho^2\zeta,\rho) &= (1-\zeta^{-1})\frac{P(\zeta,\rho)}{(1-\zeta)}, \\ &= \frac{(\zeta-1)}{\zeta}\frac{P(\zeta,\rho)}{(1-\zeta)}, \\ &= -\frac{1}{\zeta}P(\zeta,\rho), \\ &= -\zeta^{-1}P(\zeta,\rho), \end{aligned}$$

e assim terminamos a desmonstração. ■

Como resultado direto da proposição acima temos que

$$P(\rho^2\zeta,\rho) = P(\zeta^{-1},\rho). \tag{4.3}$$

Outra consideração é que a partir da definição de que, assim como a função prime de SK para o disco, a função prime de SK no anel concêntrico também tem um zero simples em $\zeta=\alpha$, ou seja, pela definição (4.1)

$$\begin{aligned} \omega(\alpha,\alpha) &= -\frac{\alpha}{C^2}P\left(\frac{\alpha}{\alpha},\rho\right), \\ &= -\frac{\alpha}{C^2}P(1,\rho), \\ &= -\frac{\alpha}{C^2}(1-1)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k})\,(1-\rho^{2k}), \\ &= 0. \end{aligned}$$

4.2 Vórtice Pontual em um Anel Concêntrico

Desejamos encontrar o potencial complexo para um vórtice pontual de circulação unitária em algum ponto $\zeta = \alpha$ dentro deste anel. Continuaremos a usar a notação $W(\zeta;\alpha)$ para esta solução. Ou seja, precisamos encontrar $W(\zeta;\alpha)$ tal que

$$W(\zeta;\alpha) = \underbrace{-\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(\zeta-\alpha)}_{\text{singularidade logarítmica}} + \text{uma função analítica local,}$$

com

$$Im[W(\zeta;\alpha)] = \begin{cases} 0, & |\zeta| = 1 \\ c, & |\zeta| = \rho \end{cases} \tag{4.4}$$

onde c é uma constante real. O desafio aqui é que agora temos dois limites disjuntos nos quais devem ser satisfeitas a condição de fronteira (streamline).

Observação 6. *Não assumimos que a função de fluxo (ou seja, a parte imaginária de $W(\zeta;\alpha)$) também é igual a 0 no círculo de limite interno. Isso é muito restritivo.*

4.3 Solução do Problema de Vórtice Pontual no Anel

Com o auxílio de algumas manipulações no que foi visto em (3.14), podemos escrever

$$W(\zeta;\alpha) = -\frac{i}{2\pi}\log\left(\frac{\omega(\zeta,\alpha)}{|\alpha|\,\omega(\zeta,\frac{1}{\alpha})}\right), k \tag{4.5}$$

onde $\omega(\zeta,\alpha)$ aqui é agora função prime de SK do anel concêntrico que acabou de ser definida acima. Especificamente, no uso de (4.1), segue de (4.5) que

$$W(\zeta;\alpha) = -\frac{i}{2\pi}\log\left(\frac{|\alpha|\,P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right).$$

Observe que (4.5) atende a todos os nossos requisitos. Claramente possui a singularidade logarítmica correta em $\zeta = \alpha$ devido à propriedade que $\omega(\zeta,\alpha)$ desaparece em α. Para verificar se $W(\zeta;\alpha)$ satisfaz as duas condções de contorno, vamos escrever

$$W(\zeta;\alpha) = -\frac{i}{2\pi}\log\eta(\zeta;\alpha), \tag{4.6}$$

onde

$$\eta(\zeta;\alpha) = \frac{|\alpha|\, P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}. \tag{4.7}$$

Em $|\zeta| = 1$, isto é, $\zeta = \dfrac{1}{\overline{\zeta}}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\overline{\eta(\zeta;\alpha)} &= \frac{|\alpha|\, P(\frac{1}{\zeta\overline{\alpha}},\rho)}{P(\frac{\alpha}{\zeta},\rho)}, \\
&= \frac{|\alpha|\, \left(-\frac{1}{\zeta\overline{\alpha}} P(\zeta\overline{\alpha},\rho)\right)}{-\frac{\alpha}{\zeta} P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}, \\
&= \frac{|\alpha|\, P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}{|\alpha|^2\, P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}, \\
&= \frac{1}{|\alpha|\, \left(\frac{P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right)}, \\
&= \frac{1}{\eta(\zeta;\alpha)},
\end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda igualdade usamos um dos resultados da proposição 7. O cálculo acima implica que $|\eta(\zeta;\alpha)|^2 = 1$, ou seja, $Im[W] = 0$ no círculo unitário. Já em $|\zeta| = \rho$, ou seja, $\zeta = \dfrac{\rho^2}{\overline{\zeta}}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\overline{\eta(\zeta;\alpha)} &= \frac{|\alpha|\, P(\frac{\rho^2}{\zeta\overline{\alpha}},\rho)}{P(\frac{\rho^2\alpha}{\zeta},\rho)}, \\
&= \frac{|\alpha|\, P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}{P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}, \\
&= \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|\, \left(\frac{P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right)}, \\
&= \frac{|\alpha|^2}{\eta(\zeta;\alpha)},
\end{aligned}$$

onde da primeira igualdade para a segunda usamos o resultado (4.3) e portanto temos que $|\eta(\zeta;\alpha)| = |\alpha|$. Segue que

$$\eta(\zeta;\alpha) = \begin{cases} 0, & |\zeta| = 1 \\ |\alpha|, & |\zeta| = \rho \end{cases}$$

e então

$$Im[W(\zeta;\alpha)] = -\frac{1}{2\pi}\log|\eta(\zeta;\alpha)| = \begin{cases} 0, & |\zeta| = 1 \\ c, & |\zeta| = \rho \end{cases},$$

onde $c = -\dfrac{\log|\alpha|}{2\pi}$.

Agora já possuímos todas as ferramentas necessárias para encontrar o Hamiltoniano de um sistema de N vórtices pontuais em um anel concêntrico. Sendo assim, a função hidrodinâmica de Green terá a seguinte forma

$$G(\zeta;\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{|\alpha|\,P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right|,$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\zeta;\alpha) &= -G(\zeta;\alpha) - \frac{1}{2\pi}\log|\zeta-\alpha|, \\ &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{|\alpha|\,P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right| - \frac{1}{2\pi}\log|\zeta-\alpha|, \\ &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{|\alpha|\,P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{(\zeta-\alpha)P(\zeta\overline{\alpha},\rho)}\right|. \end{aligned}$$

Para o anel concêntico, a função de Green e a função de Robin ficaram escritas em função de um quociente da função P, o qual precisaremos encontrar. Logo, usando a definição da função P obteremos

$$\begin{aligned} \frac{P(\frac{\zeta}{\alpha},\rho)}{P(\zeta\overline{\alpha},\rho)} &= \frac{(1-\frac{\zeta}{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha})(1-\rho^{2k}\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{-1})}{(1-\zeta\overline{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(1-\rho^{2k}(\zeta\overline{\alpha})^{-1})}, \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha-\zeta}{\alpha}\right)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\frac{\zeta}{\alpha})(1-\rho^{2k}\frac{\alpha}{\zeta})}{(1-\zeta\overline{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(1-\rho^{2k}(\zeta\overline{\alpha})^{-1})}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{\alpha-\zeta}{\alpha}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha\zeta)^k}(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{(1-\zeta\overline{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta\overline{\alpha})^k}(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})},\\
&= \frac{(\alpha-\zeta)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha\,(1-\zeta\overline{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\alpha}^k}(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})},\\
&= \frac{(\alpha-\zeta)\prod_{k=1}^{\infty}\overline{\alpha}^k(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha\,(1-\zeta\overline{\alpha})\prod_{k=1}^{\infty}\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})},\\
&= \frac{\alpha-\zeta}{\alpha(1-\zeta\overline{\alpha})}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}^k\,(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})}.
\end{aligned}
$$

implicando que

$$
\begin{aligned}
G(\zeta;\alpha) &= -\frac{1}{2\pi}\log\left||\alpha|\frac{\alpha-\zeta}{\alpha(1-\zeta\overline{\alpha})}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}^k\,(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})}\right|,\\
&= -\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\alpha-\zeta}{1-\zeta\overline{\alpha}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}^k\,(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})}\right|.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\zeta;\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{|\alpha|\,(\alpha-\zeta)}{\alpha(\zeta-\alpha)(1-\zeta\overline{\alpha})}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}^k\,(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})}\right|,\\
&= \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{\zeta\overline{\alpha}-1}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}^k\,(\alpha-\rho^{2k}\zeta)(\zeta-\rho^{2k}\alpha)}{\alpha^k(1-\rho^{2k}\zeta\overline{\alpha})(\zeta\overline{\alpha}-\rho^{2k})}\right|.
\end{aligned}
$$

Agora já podemos escrever a função de Kirchhoff-Routh (o Hamiltoniano) para um sistema com N vórtices posicionados em $z_i, i = 1,\ldots,N$ no anel concêntrico

$$
\begin{aligned}
H(z_1,\overline{z}_1,\ldots,z_N,\overline{z}_N) &= \sum_{\substack{l,j=1\\ l>j}}^{N}\Gamma_l\Gamma_j G(z_l;z_j) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\Gamma_l^2\mathcal{R}(z_l;z_l),\\
&= \sum_{\substack{l,j=1\\ l>j}}^{N}\Gamma_l\Gamma_j\left(-\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z_j-z_l}{1-z_l\overline{z_j}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{z_j}^k\,(z_j-\rho^{2k}z_l)(z_l-\rho^{2k}z_j)}{z_j^k(1-\rho^{2k}z_l\overline{z_j})(z_l\overline{z_j}-\rho^{2k})}\right|\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\Gamma_l^2\left(\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1}{z_l\overline{z_l}-1}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{z_l}^k\,(z_l-\rho^{2k}z_l)(z_l-\rho^{2k}z_l)}{z_l^k(1-\rho^{2k}z_l\overline{z_l})(z_l\overline{z_l}-\rho^{2k})}\right|\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{l,j=1\\ l>j}}^{N} \Gamma_l \Gamma_j \left(-\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z_j - z_l}{1 - z_l \overline{z_j}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_j}^k \, (z_j - \rho^{2k} z_l)(z_l - \rho^{2k} z_j)}{z_j^k (1 - \rho^{2k} z_l \overline{z_j})(z_l \overline{z_j} - \rho^{2k})} \right| \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \Gamma_l^2 \left(\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1}{|z_l|^2 - 1} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_l}^k \, (z_l - \rho^{2k} z_l)^2}{z_l^k (1 - \rho^{2k} |z_l|^2)(|z_l|^2 - \rho^{2k})} \right| \right), \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l,j=1\\ l>j}}^{N} \Gamma_l \Gamma_j \log \left| \frac{z_j - z_l}{1 - z_l \overline{z_j}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_j}^k \, (z_j - \rho^{2k} z_l)(z_l - \rho^{2k} z_j)}{z_j^k (1 - \rho^{2k} z_l \overline{z_j})(z_l \overline{z_j} - \rho^{2k})} \right| \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{N} \Gamma_l^2 \log \left| \frac{1}{|z_l|^2 - 1} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_l}^k \, (z_l - \rho^{2k} z_l)^2}{z_l^k (1 - \rho^{2k} |z_l|^2)(|z_l|^2 - \rho^{2k})} \right|, \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l,j=1\\ l>j}}^{N} \Gamma_l \Gamma_j \log \left| \frac{z_j - z_l}{1 - z_l \overline{z_j}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_j}^k \, (z_j - \rho^{2k} z_l)(z_l - \rho^{2k} z_j)}{z_j^k (1 - \rho^{2k} z_l \overline{z_j})(z_l \overline{z_j} - \rho^{2k})} \right| \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{N} \Gamma_l^2 \log \left| \frac{1}{|z_l|^2 - 1} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{z_l}^k \, (1 - \rho^{2k})^2}{z_l^{k-2} (1 - \rho^{2k} |z_l|^2)(|z_l|^2 - \rho^{2k})} \right|.
\end{aligned}
$$

REFERÊNCIAS

[1] AREF, H. NEWTON, P. K. STREMLER, M. TOKIEDA, T. VAINCHTEIN, D. L. **Vortex Crystals**, Adv. Appl. Mech. 39, 2002.

[2] BAKER, H. F. **Abelian Functions: Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions**, Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1995.

[3] BRUNETTI, F. **Mecânica dos Fluidos**, 2ªEd., 2008.

[4] CROWDY, D. G. **The Schottky-Klein prime function on the Schottky double of planar domains**, Computational Methods and Function Theory, 10:501-517, 2010.

[5] CROWDY, D.G. MARSHALL, J.S. **Analytical formulae for the Kirchhoff-Routh path function in multiply connected Domains**, Proc. R. Soc. A (2005) 461, 2477-2501.

[6] CROWDY, D.G. MARSHALL, J.S. **Computing the Schottky-Klein prime function on the Schottky double of planar domains**, Computational Methods and Function Theory, 7:293-308, 2007.

[7] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, 1998.

[8] FLUCHER, M. **Variational problems with concentration**, Basel: Birkhäuser, 1999.

[9] FLUCHER, M. GUSTAFSSON, B. **Vortex motion in two dimensional hydrodynamics**, TRITAMAT - 1997-MA 02. Stockholm: Royal Institute of Technology.

[10] GUSTAFSSON, B. **On the motion of a vortex in two-dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains** TRITA-MAT-1979-7. Stockholm: Royal Institute of Technology, 1979.

[11] HELMHOLTZ, H. **Über Integrale der hydrodynamischen Gleinchungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen**, Journal für die reine und angewandte Mathematik. v. 55, p. 25-55, 1858.

[12] KIRCHHOFF, G. R. **Vorlesungen über Mathematische Physik**, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1876.

[13] LEAL, I. **Vórtices em Superfícies de Curvatura Constante**, 2012.

[14] LIN, C. C. **On the motion of vortices in two dimensions. I. Existence of the Kirchhoff-Routh function**, Proc. Natl Acad. Sci. 27, 570-575, 1941.

[15] LIN, C. C. **On the motion of vortices in two dimensions. II. Some further investigations on the Kirchhoff-Routh function**, Proc. Natl Acad. Sci. 27, 575-577, 1941.

[16] LOUREDO, A. T. OLVEIRA, A. M. LIMA, O. A. **Cálculo Avançado**, 2 ed., Campina Grande: EDUEPB, 2012.

[17] MARSDEN, J. E. HOFFMAN, M. J. **Basic Complex Analysis**, W.H. Freeman, 1999.

[18] MEYER, K. R. HALL, G. R. OFFIN, D. **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**, v. 90, 2009.

[19] MILNE-THOMSON, L. M. **Theoretical hydrodynamics**, London: Macmillan, 1968.

[20] NEHARI, Z. **Conformal mapping**, New York: McGraw-Hill, 1952.

[21] NEWTON, P. K. **The N-vortex problem**, New York: Springer, 2002.

[22] RICHARDSON, S. **Vortices, Liouville's equation and the Bergman kernel function**, Mathematika 27, 321-334, 1980.

[23] ROUTH, E. J. **Some applications of conjugate functions**, Proc. R. Soc. A 12, 73-89, 1881.

[24] THOMSON, W. **Foating magnets illustring vortex-systems**. ature (London) 18, 13 (1878); W. T. Kelvin, Mathematical and Physical Papers (Cambridge University Press, Cambridge, 1910), v. 4, p. 135-140.