



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ALDEMIR CIRILO DA SILVA

ACOPLAMENTO HIDRO-MECÂNICO EM RESERVATÓRIOS  
NATURALMENTE FRATURADOS COM DUPLA POROSIDADE E  
DUPLA PERMEABILIDADE UTILIZANDO A TÉCNICA DO *STRESS*  
*SPLIT*

Recife  
2018

ALDEMIR CIRILO DA SILVA

ACOPLAMENTO HIDRO-MECÂNICO EM RESERVATÓRIOS  
NATURALMENTE FRATURADOS COM DUPLA POROSIDADE E  
DUPLA PERMEABILIDADE UTILIZANDO A TÉCNICA DO *STRESS*  
*SPLIT*

Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia e Geociência da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

**Área de Concentração:** Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães

Recife

2018

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Valdicêa Alves, CRB-4 / 1260

S586a Silva, Aldemir Cirilo da.  
Acoplamento hidro-mecânico em reservatórios naturalmente fraturados com dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do stress Split / Aldemir Cirilo da Silva. - 2018.  
171folhas, Il.; Tab. e Símb..

Orientador (a): Prof<sup>o</sup>. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação Engenharia Civil e Ambiental, 2018.  
Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Civil. 2. Meios Porosos. 3. Reservatórios Naturalmente Fraturados. 4. Dupla Porosidade. 5. Dupla Permeabilidade. 6. Acoplamento Hidro-Mecânico. 7. Stress Split. I. Guimarães, Leonardo José do Nascimento. (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2018-431



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Tese de Doutorado

**ACOPLAMENTO HIDRO-MECÂNICO EM RESERVATÓRIOS NATURALMENTE  
FRATURADOS COM DUPLA POROSIDADE E DUPLA PERMEABILIDADE  
UTILIZANDO A TÉCNICA DO STRESS SPLIT**

defendida por

Aldemir Cirilo da Silva

Considera o candidato APROVADO

Recife, 14 de agosto de 2018

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães - UFPE  
(orientador)

---

Prof. Dr. Sidarta Araújo de Lima - UFRN  
(examinador externo)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Leila Brunet de Sá Beserra – UFPE  
(examinadora externa)

---

Dr. Jonathan da Cunha Teixeira – UFPE  
(examinador externo)

---

Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes – UFPE  
(examinador interno)

*Esta tese de doutorado é dedicada a minha esposa Juliana,  
que me ama apesar de todos os meu defeitos.*

## AGRADECIMENTOS

Elaborar uma tese de doutorado não é uma tarefa fácil, exige muito trabalho, perseverança e esforço. Foi necessária muita dedicação para chegar até aqui. Nesse momento de grande felicidade e realização na minha vida, não poderia deixar de agradecer as contribuições de algumas pessoas que conviveram comigo nesses anos de doutorado.

Agradeço primeiramente a Deus, por ser minha fortaleza nas horas mais difíceis, por está sempre ao meu lado e pelo fato de me amar.

Aos meus pais, Maria Dalva e Valmir Vicente, por acreditar no meu sonho, pelas forças que me deram e pela criação que tive. Também queria externar minha gratidão a minha esposa, Juliana, por todo esse tempo ao meu lado e por toda a distância que tivemos de conviver nesse período.

Quero expor aqui minha imensa gratidão ao meu orientador Leonardo José do Nascimento Guimarães, pela disponibilidade de me orientar e por ter tido tanta paciência ao longo desse doutorado. Também agradeço de coração ao Dr<sup>o</sup> Jonathan da Cunha Teixeira, pelas varias horas de reuniões e discussões sobre a tese de doutorado.

Obrigado a minha família, em especial aos meus irmãos Almir e José Jaizon, as minhas irmãs Lucyella e Jucyelle, por todo o incentivo que me deram nas horas que mais precisei e pela união que temos nos momentos de felicidade e de tristeza.

Agradeço aos meus colegas Ayrton, Darliane, Ana Itamara, Victor, Oscar e Laura, e a todos os outros que aqui não citei o nome, por serem prestativos nas horas que mais necessitei, pelas inúmeras vezes que estudamos juntos e por todas as angustias e alegrias que compartilhamos.

Gostaria de expressar meus agradecimentos a todo o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC), pelas disciplinas ministradas e as dúvidas tiradas, e aos funcionários do Centro de Tecnologia e Geociências (CTG) pelos seus serviços nas horas necessárias.

Também gostaria de agradecer ao PRH-26 e a Energi Simulation pelo apoio financeiro através da bolsa de estudo.

Por fim, queria reiterar meus agradecimentos a todos que de alguma forma direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração dessa tese de doutorado.

## RESUMO

O estudo de reservatórios naturalmente fraturados tem se intensificado nos recentes anos, e vem sendo um desafio para várias áreas das ciências como, matemática, engenharias, física, geologia, computação e outras. Esse tipo de reservatório, tem grande importância na indústria de petróleo, pois, representam quantidades significativas de reservas de petróleo, gás e outros recursos naturais. Neste trabalho, apresentamos dois modelos hidro-mecânicos acoplados aplicados a reservatórios naturalmente fraturados utilizando a abordagem de dupla porosidade e dupla permeabilidade, onde a matriz e a fratura são tratados como meios contínuos distintos, fazendo uso da técnica do *Stress Split*. Nesse modelo conceitual, a porosidade, a pressão do fluido, a permeabilidade e as outras variáveis são consideradas separadamente para cada meio poroso. Além disso, o problema de fluxo tem duas variáveis globais, que são as pressões de fluido associadas a cada meio. O acoplamento entre os dois meios porosos ocorre através de uma função de transferência de massa de fluido. Para as duas formulações matemáticas, apresentamos as equações do balanço de massa de sólido, onde obtemos a evolução da porosidade em função da deformação volumétrica. Além disso, desenvolvemos a equação de balanço de massa do fluido para os dois meios porosos (matriz e fratura). Enquanto que para a equação do balanço do momento linear utilizamos o deslocamento total dos dois meios. Utilizando a técnica de *Stress Split*, a equação de fluxo é então reformulada com a deformação volumétrica expressada em função da tensão média total. Esta técnica, permite a adoção de um esquema numérico onde a equação de fluxo é resolvida separadamente da equação de equilíbrio do problema geomecânico. Finalmente, discretizamos e implementamos o modelo matemático em um programa de elementos finitos *in house* CODE\_BRIGTH, que resolve o problema hidro-mecânico de forma acoplada e desacoplada. Para obtenção das simulações numéricas fazemos uso do acoplamento iterativo. As simulações numéricas obtidas são comparadas com soluções analíticas para problemas acoplados obtendo boa concordância entre elas, onde foram observadas que as soluções tendem aos resultados do modelo de simples porosidade e permeabilidade, além disso, mostramos um caso de aplicação de poço vertical, onde verificamos os comportamentos das pressões, tensões e deslocamentos ao longo do reservatório e das porosidades e permeabilidades ao redor do poço.

**Palavras-chave:** Meios Porosos. Reservatórios Naturalmente Fraturados. Dupla Porosidade. Dupla Permeabilidade. Acoplamento Hidro-Mecânico. *Stress Split*.

## ABSTRACT

The study of naturally fractured reservoirs has been developed on recent years, and has been a challenge for several areas of science such as mathematics, engineering, physics, geology, computing and others. This type of reservoir has great importance in the oil industry, because represents significant quantities of oil, gas and other natural resources. In this work, we present two hydromechanical coupled models applied in naturally fractured reservoirs using dual porosity and dual permeability approach, where matrix and fracture are treated as distinct continuous media, making use of the stress split technique. In this conceptual model, porosity, fluid pressure, permeability and other variables are considered separately for each porous medium. Moreover, the flow problem has two global variables, which are the fluid pressures associated with each medium. The coupling between the two porous media occurs through of mass transfer function. For the two mathematical formulation, we present the equations of the mass balance of solid, where we obtain the evolution of the porosity as a function of the volumetric deformation. Soon thereafter, we develop the fluid mass balance equation for the two porous media (matrix and fracture). Whereas for linear momentum equation was used total displacement. Using the stress split technique, the flow equation is then reformulated with the volumetric deformation expressed as a function of the total mean stress. This technique allows the adoption of a numerical scheme where the flow equation is solved separately from the equilibrium equation of the geomechanical problem. Finally, was discretized and implemented the mathematical model in CODE\_BRIGHT, in-house finite element program, which solves the hydromechanical problem in a coupled and uncoupled way. The numerical simulations, were performed using iterative coupling. The numerical simulations was compared with analytical solutions for coupled problems, obtaining a good agreement between them, where it was observed that the solutions tend to the results of the simple porosity and permeability model. Moreover, we show a case of vertical well application, where we verify the behavior of pressures, stresses and displacements along the reservoir and the porosity and permeability around the well.

**Keywords:** Porous Media. Naturally Fractured Reservoirs. Dual Porosity. Dual Permeability. Hydromechanical Coupling. *Stress Split*.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Reservatório naturalmente fraturado. . . . .	26
Figura 2 – Classificação de reservatórios naturalmente fraturados. . . . .	30
Figura 3 – Meios porosos fraturados com diferentes descontinuidades. . . . .	31
Figura 4 – Simples porosidade e simples permeabilidade. . . . .	33
Figura 5 – Dupla porosidade e simples permeabilidade. . . . .	33
Figura 6 – Dupla porosidade e dupla permeabilidade. . . . .	34
Figura 7 – Tripla porosidade e dupla permeabilidade. . . . .	35
Figura 8 – Tripla porosidade e tripla permeabilidade. . . . .	36
Figura 9 – Modelo em meios de dupla porosidade. . . . .	42
Figura 10 – Modelo representativo: a) Modelo físico, b) Modelo numérico. . . . .	44
Figura 11 – Decomposição do estado de tensões. . . . .	51
Figura 12 – Domínio do Problema $\Omega$ e Condição de Contorno $\partial\Omega$ . . . . .	62
Figura 13 – Tipos de Acoplamento. . . . .	72
Figura 14 – Malha do problema unidimensional e condição de contorno. . . . .	78
Figura 15 – Solução analítica versus numérica para poro pressão (Modelo 1). . . . .	79
Figura 16 – Solução analítica versus numérica para deslocamento (Modelo 1). . . . .	80
Figura 17 – Solução numérica para pressão em escalas de cores (Modelo 1). . . . .	80
Figura 18 – Solução numérica para o deslocamento em escalas de cores (Modelo 1). . . . .	81
Figura 19 – Solução analítica versus numérica para poro pressão (Modelo 2). . . . .	82
Figura 20 – Solução analítica versus numérica para deslocamento (Modelo 2). . . . .	82
Figura 21 – Solução numérica para pressão em escalas de cores (Modelo 2). . . . .	83
Figura 22 – Solução numérica para o deslocamento em escalas de cores (Modelo 2). . . . .	83
Figura 23 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para poro pressão. . . . .	84
Figura 24 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para deslocamento. . . . .	85
Figura 25 – Malha do problema de Mandel. . . . .	88
Figura 26 – Malha para o caso numérico do problema de Mandel. . . . .	88
Figura 27 – Solução analítica versus modelo 1 para poro pressão na matriz. . . . .	89
Figura 28 – Perfis da malha do problema de Mandel para o modelo 1. . . . .	90
Figura 29 – Solução analítica versus modelo 2 para poro pressão na matriz. . . . .	91
Figura 30 – Perfis da malha do problema de Mandel para o modelo 2. . . . .	91
Figura 31 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para poro pressão na matriz. . . . .	92
Figura 32 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades (Modelo 1). . . . .	95
Figura 33 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 1). . . . .	95
Figura 34 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 1). . . . .	96
Figura 35 – Deslocamento da superfície para diferentes permeabilidades (Modelo 1). . . . .	96

Figura 36 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).	97
Figura 37 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).	98
Figura 38 – Deslocamento da superfície para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).	98
Figura 39 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades (Modelo 2).	100
Figura 40 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 2).	100
Figura 41 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 2).	101
Figura 42 – Deslocamento da superfície para diferentes permeabilidades (Modelo 2).	101
Figura 43 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).	103
Figura 44 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).	103
Figura 45 – Deslocamento da superfície para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).	104
Figura 46 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na matriz.	105
Figura 47 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na fratura.	106
Figura 48 – Simples porosidade versus modelo 1 versus modelo 2 para pressão na matriz.	107
Figura 49 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na fratura.	107
Figura 50 – Perfis das soluções numéricas para o modelo de simples porosidade.	108
Figura 51 – Perfis das soluções numéricas para o modelo 1 de dupla porosidade.	109
Figura 52 – Perfis das soluções numéricas para o modelo 2 de dupla porosidade.	109
Figura 53 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidade (modelo 1).	112
Figura 54 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidade (modelo 1).	112
Figura 55 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidade (modelo 1).	113
Figura 56 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).	114
Figura 57 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).	114
Figura 58 – Pressão na matriz e fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).	115
Figura 59 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidade (modelo 2).	116
Figura 60 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidade (modelo 2).	116
Figura 61 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidade (modelo 2).	117
Figura 62 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).	118
Figura 63 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).	118
Figura 64 – Pressão na matriz e fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).	119

Figura 65 – Comparação da pressão na matriz para modelo de simples porosidade versus modelo 1 versus modelo 2. . . . .	120
Figura 66 – Comparação da pressão na fratura para os modelos 1 e 2. . . . .	121
Figura 67 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo de simples porosidade. . . . .	121
Figura 68 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo 1. . . . .	122
Figura 69 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo 2. . . . .	122
Figura 70 – Perfis da pressão na fratura do problema de Mandel para o modelo 1. . . . .	122
Figura 71 – Perfis da pressão na fratura do problema de Mandel para o modelo 2. . . . .	122
Figura 72 – Malha do problema de poço vertical, onde $p_0 = p_{10} = p_{20}$ que é a pressão inicial do reservatório e $p_w = p_{1w} = p_{2w}$ que é a pressão de fluido aplicada no poço. . . . .	123
Figura 73 – Linha diagonal onde foram obtidos os gráficos das pressões. . . . .	125
Figura 74 – Representação dos elementos 1, 27 e 40. . . . .	125
Figura 75 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 1). . . . .	127
Figura 76 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 1). . . . .	128
Figura 77 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 1). . . . .	128
Figura 78 – Permeabilidade na fratura para diferentes elementos (modelo 1). . . . .	129
Figura 79 – Pressão na matriz para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 1). . . . .	130
Figura 80 – Pressão na fratura para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 1). . . . .	130
Figura 81 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 1). . . . .	131
Figura 82 – Permeabilidade na fratura para diferentes elementos (modelo 1). . . . .	131
Figura 83 – Perfil de cores da pressão na matriz para $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ (modelo 1). . . . .	133
Figura 84 – Perfil de cores da pressão na matriz para $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$ (modelo 1). . . . .	133
Figura 85 – Perfil de cores da pressão na fratura para $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ (modelo 1). . . . .	134
Figura 86 – Perfil de cores da pressão na fratura para $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$ (modelo 1). . . . .	134
Figura 87 – Perfil de cores da porosidade na matriz (modelo 1). . . . .	135
Figura 88 – Perfil de cores da porosidade na fratura (modelo 1). . . . .	135
Figura 89 – Perfil de cores da permeabilidade na matriz (modelo 1). . . . .	136
Figura 90 – Perfil de cores da permeabilidade na fratura (modelo 1). . . . .	136
Figura 91 – Perfil de cores do modulo do deslocamento (modelo 1). . . . .	137
Figura 92 – Perfil de cores da tensão horizontal maior (modelo 1). . . . .	137
Figura 93 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 2). . . . .	139

Figura 94 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 2). . . . .	139
Figura 95 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 2). . . . .	140
Figura 96 – Pressão na matriz para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 2). . . . .	141
Figura 97 – Pressão na fratura para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 2). . . . .	141
Figura 98 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 2). . . . .	142
Figura 99 – Perfil de cores da pressão na matriz para $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ (modelo 2). . . . .	143
Figura 100 – Perfil de cores da pressão na matriz para $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$ (modelo 2). . . . .	143
Figura 101 – Perfil de cores da pressão na fratura para $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ (modelo 2). . . . .	144
Figura 102 – Perfil de cores da pressão na fratura para $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$ (modelo 2). . . . .	144
Figura 103 – Perfil de cores da porosidade na matriz (modelo 2). . . . .	145
Figura 104 – Perfil de cores da permeabilidade na matriz (modelo 2). . . . .	145
Figura 105 – Perfil de cores do modulo do deslocamento (modelo 2). . . . .	146
Figura 106 – Perfil de cores da tensão horizontal maior (modelo 2). . . . .	146
Figura 107 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior, para o tempo de 0.14 segundos. . . . .	148
Figura 108 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior, para o tempo de 0.14 segundos. . . . .	148

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros usados no adensamento unidimensional. . . . .	78
Tabela 2 – Parâmetros usados no problema de Mandel. . . . .	87
Tabela 3 – Parâmetros usados na análise de sensibilidade. . . . .	93
Tabela 4 – Parâmetros utilizados nas análises de sensibilidades. . . . .	110
Tabela 5 – Parâmetros usados no problema de poço vertical (Material 1). . . . .	124
Tabela 6 – Parâmetros usados no problema de poço vertical (Material 2). . . . .	124
Tabela 7 – Valores das condições inicial e de contorno. . . . .	124

## LISTA DE SÍMBOLOS

$(\cdot)$	Representa uma variável ou um parâmetro.
$(\cdot)_1$	O subíndice se refere a Matriz.
$(\cdot)_2$	O subíndice se refere a fratura.
$V_1$	Volume de vazio do meio 1.
$V_2$	Volume de vazio do meio 2.
$V_s$	Volume do sólido do meio poroso.
$V$	Volume total do meio poroso.
$\phi_1$	Porosidade do meio 1.
$\phi_2$	Porosidade do meio 2.
$\phi$	Porosidade total.
$\phi_i$	Porosidade do meio $i$ .
$\Gamma$	Termo de transferência de massa entre os meios porosos.
$\gamma$	Parâmetro de escape.
$\zeta$	Superfície específica da fratura.
$\beta$	Constante. (eq. 2.5)
$\mu$	Viscosidade do fluido.
$\rho_w$	Densidade de referência do fluido.
$k_{11}$	Componente do tensor de permeabilidade intrínseca.
$s$	Espaçamento entre as fraturas.
$a$	Intervalo de fratura entre as fraturas para a direção $x$ .
$b$	Intervalo de fratura entre as fraturas para a direção $y$ .
$c$	Intervalo de fratura entre as fraturas para a direção $z$ .
$n$	Conjunto de fraturas normais.
$K_s$	Módulo volumétrico da matriz.

$p_1$	Pressão de fluido do meio 1.
$p_2$	Pressão de fluido do meio 2.
$p_i$	Pressão de fluido do meio $i$ .
$\rho_s$	Densidade do sólido no meio poroso.
$\rho_1$	Densidade do fluido do meio 1.
$\rho_2$	Densidade do fluido do meio 2.
$\rho_i$	Densidade do fluido no meio $i$ .
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidade do sólido no meio poroso.
$\nabla \cdot$	Divergente.
$\nabla$	Gradiente.
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	Derivada parcial em relação $(\cdot)$ .
$\frac{D}{D(\cdot)}$	Derivada material em relação $(\cdot)$ .
$f$	Função diferenciável de um campo escalar.
$\dot{\epsilon}_v$	Incremento da taxa de deformação volumétrica no meio poroso.
$K_n$	Módulo volumétrico da Fratura.
$K_t$	Módulo volumétrico do esqueleto sólido.
$K_f$	Módulo volumétrico do fluido.
$K_1$	Módulo volumétrico do meio 1 ou $K_1 = K_s$ .
$K_2$	Módulo volumétrico do meio 2 ou $K_2 = K_n s$ .
$K_i$	Módulo volumétrico do meio $i$ .
$\alpha_1$	Alfa de Biot do meio 1.
$\alpha_2$	Alfa de Biot do meio 2.
$\alpha$	Alfa macro do meio poroso total.
$\mathbf{q}_i$	Fluxo de Darcy no meio $i$ .
$\mathbf{K}_1$	Tensor de permeabilidade intrínseca do meio 1.

$\mathbf{K}_2$	Tensor de permeabilidade intrínseca do meio 2.
$\mathbf{K}_i$	Tensor de permeabilidade intrínseca do meio $i$ .
$\mathbf{g}$	Vetor de gravidade.
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão Total.
$\mathbf{b}$	Vetor de força de corpo.
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tensor de deformação total.
$\boldsymbol{\epsilon}_i$	Tensor de deformação elástica do meio $i$ .
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamento.
$\mathbf{u}^T$	Vetor de deslocamento transposto.
$\boldsymbol{\sigma}'$	Tensor de tensão efetiva.
$\mathbf{I}$	Matriz identidade.
$\mathbf{D}$	Matriz elástica constitutiva.
$\mathbf{C}$	Inversa da matriz elástica constitutiva.
$\boldsymbol{\epsilon}_1$	Tensor de deformação do meio 1.
$\boldsymbol{\epsilon}_2$	Tensor de deformação do meio 2.
$\boldsymbol{\epsilon}_3$	Tensor de deformação do esqueleto ou do material drenado do meio poroso.
$\epsilon_v$	Deformação volumétrica.
$\bar{p}$	Tensão média total.
$\mathcal{L}$	Operador em derivadas parciais.
$l$	Termo de fonte.
$\Omega$	Domínio.
$\partial\Omega$	Condição de contorno.
$D(\Omega)$	Espaço das funções aceitáveis.
$W(\Omega)$	Espaço das funções testes.
$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\Omega^e$	Subdomínio de $\Omega$ .

$ne$	Número de elementos.
$\cup$	União.
$\cap$	Interseção.
$\varphi$	Função variável desconhecida do problema.
$\Phi$	Função variável conhecida do problema.
$\hat{\varphi}$	Solução aproximada.
$N_i$	Funções de formas.
$\psi_i$	Valores desconhecidos nos nós da malha.
$m$	Número de nós na malha.
$R_\Omega$	Resíduo ou erro.
$W_j$	Função peso.
$(\cdot)_n$	O subscrito se refere ao número de funções de forma do problema.
$(\cdot)_{nu}$	Número de funções de formas do problema de equilíbrio mecânico.
$(\cdot)_{npm}$	Número de função de forma da equação da pressão na matriz.
$(\cdot)_{npr}$	Número de função de forma da equação da pressão na fratura.
$\mathbf{N}_u$	Vetor de função de forma para o deslocamento.
$\mathbf{N}_{pm}$	Vetor de função de forma para a pressão na matriz.
$\mathbf{N}_{pr}$	Vetor de função de forma para a pressão na fratura.
$\hat{\mathbf{u}}$	Solução apropriada para a equação de equilíbrio mecânico.
$\hat{p}_1$	Solução apropriada para a equação de fluxo na matriz.
$\hat{p}_2$	Solução apropriada para a equação de fluxo na fratura.
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamento nodal.
$\mathbf{p}_1$	Vetor de pressão para matriz.
$\mathbf{p}_2$	Vetor de pressão para fratura.
$\hat{\bar{p}}$	Solução para a tensão média total.
$\bar{\mathbf{p}}$	Vetor de tensão média total.

$R_u$	Resíduo do problema mecânico.
$\Omega_u$	Domínio do problema mecânico.
$(\cdot)^T$	O sobrescrito se refere ao transposto da matriz ou vetor.
$\mathbf{t}$	Vetor da tensão aplicada em um contorno do domínio $\partial\Omega_u$ .
$\mathbf{n}$	Vetor normal a superfície do problema.
$\mathbf{B}_u$	Derivadas das funções de forma para o deslocamento.
$\mathbf{S}$	Operador de derivadas parciais.
$\mathbf{m}$	Vetor de traço de tensores na forma vetorial.
$\mathbf{K}_u$	Matriz de rigidez.
$\mathbf{C}_{1u}$	Coefficiente da matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico.
$\mathbf{C}_{2u}$	Coefficiente da matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico.
$\mathbf{f}_u$	Contribuição ao vetor de carga devido as forças de corpo e as condições de contorno.
$R_{pm}$	Resíduo do problema de fluxo na matriz.
$\mathbf{B}_{pm}$	Derivadas das funções de forma para pressão na matriz.
$\bar{\mathbf{q}}_m$	Condição de contorno mista.
$\mathbf{A}_{1m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{A}_{2m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{A}_{3m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{A}_{4m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{Q}_m$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\bar{\mathbf{Q}}_m$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{M}_{1m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{M}_{2m}$	Coefficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$R_{pf}$	Resíduo do problema de fluxo na fratura.
$\mathbf{B}_{pf}$	Derivadas das funções de forma para pressão na fratura.
$\bar{\mathbf{q}}_f$	Condição de contorno mista.

$\mathbf{A}_{1f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{A}_{2f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{A}_{3f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{A}_{4f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{Q}_f$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\bar{\mathbf{Q}}_f$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{M}_{1f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{M}_{2f}$	Coeficiente da equação de fluxo da fratura discretizada.
$\mathbf{A}_{22m}$	Coeficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\mathbf{A}_{44m}$	Coeficiente da equação de fluxo da matriz discretizada.
$\Delta t$	Passo de tempo.
$\mathbf{u}^{t+\Delta t}$	Deslocamento no passo de tempo atual.
$\mathbf{u}^t$	Deslocamento no passo de tempo anterior.
$\mathbf{p}_1^{t+\Delta t}$	Pressão na matriz no passo de tempo atual.
$\mathbf{p}_2^{t+\Delta t}$	Pressão na fratura no passo de tempo atual.
$\mathbf{p}_1^t$	Pressão na matriz no passo de tempo anterior.
$\mathbf{p}_2^t$	Pressão na fratura no passo de tempo anterior.
$\bar{\mathbf{p}}^{t+\Delta t}$	Tensão média total no passo de tempo atual.
$\bar{\mathbf{p}}^t$	Tensão média total no passo de tempo anterior.
$\phi_1^{t+\Delta t}$	Porosidade na matriz no passo de tempo atual.
$\phi_2^{t+\Delta t}$	Porosidade na fratura no passo de tempo atual.
$\phi_1^t$	Porosidade na matriz no passo de tempo anterior.
$\phi_2^t$	Porosidade na fratura no passo de tempo anterior.
$\phi^t$	Porosidade total no passo de tempo anterior.
$p$	Porosidade.
$\varepsilon_{sp}$	Deformação.

$S$	Estoratividade do espaço dos poros.
$k$	Condutividade hidráulica.
$\alpha_{sp}$	Coefficiente de Biot.
$\gamma_f$	Peso unitário do fluido nos poros.
$\phi_{sp}$	Porosidade.
$C_s$	Compressibilidade do sólido.
$C_{msp}$	Compressibilidade do meio poroso.
$\rho_f$	Densidade do fluido.
$g$	Gravidade.
$m_v$	Compressibilidade confinante do meio poroso.
$G$	Módulo de cisalhamento.
$q$	Carga aplicada.
$c_v$	Coefficiente de adensamento.
$t$	Tempo.
$z$	Coordenada espacial.
$h$	Altura.
$p_0$	Poros pressão no instante de carregamento aplicado.
$U$	Grau de adensamento.
$u_z$	Deslocamento.
$u_\infty$	Deslocamento final.
$u_0$	Deslocamento inicial.
$\epsilon_{yy}$	Deformação da componente $yy$ .
$\sigma'_{yy}$	Tensão efetiva da componente $yy$ .
$\sigma_{xx}$	Tensão horizontal.
$\sigma'_{xx}$	Tensão efetiva da componente $xx$ .
$\epsilon_{vsp}$	Deformação volumétrica.

$\sigma'_{zz}$	Tensão efetiva da componente $zz$ .
$\sigma_{zz}$	Tensão da componente $zz$ .
$c_{sp}$	Coefficiente de adensamento.
$\eta$	Constante elástica auxiliar.
$a_{sp}$	Largura da superfície do domínio.
$\xi$	Raízes.
$C_f$	Compressibilidade do fluido.
$p_w$	Pressão de referência.
$p'$	Tensão efetiva.
$tr(\cdot)$	Traço.
$C_{ma}$	Compressibilidade da matriz.
$C_{fr}$	Compressibilidade da fratura.
$\rho_{s0}$	Densidade do sólido em estado padrão.
$p_{s0}$	Pressão do sólido em estado padrão.
$p_s$	Pressão do sólido.
$C_s$	Compressibilidade do sólido.
$\frac{d}{d(\cdot)}$	Derivada total em relação $(\cdot)$ .
$C_p$	Compressibilidade.
$K_p$	Módulo volumétrico.
$E$	Módulo de Young.
$\nu$	Razão de Poisson.
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$\epsilon_{ij}$	Deformação na forma indicial.
$D_{ijkl}$	Matriz elástica Constitutiva na forma indicial.
$C_{ijkl}$	Matriz de conformidade na forma indicial.
$\mathbf{B}_{ju}$	Matriz deformação-deslocamento do elemento.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>24</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	24
1.2	OBJETIVOS . . . . .	26
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivo Geral . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Objetivo Específico . . . . .</b>	<b>26</b>
1.3	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	27
<b>2</b>	<b>REVISÃO . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1	RESERVATÓRIO NATURALMENTE FRATURADO (RNF) . . . . .	29
<b>2.1.1</b>	<b>Definição . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Classificações de Reservatórios Naturalmente Fraturados . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Tipos de Modelos . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1.3.1	Modelos Discretos . . . . .	31
2.1.3.2	Modelos Multi-Contínuos . . . . .	32
2.1.3.3	Modelos Híbridos . . . . .	36
2.2	MODELO DE SIMPLES POROSIDADE COM DEFORMAÇÃO . . . . .	36
2.3	MODELO DE DUPLA POROSIDADE SEM DEFORMAÇÃO . . . . .	37
2.4	MODELO DE DUPLA POROSIDADE COM DEFORMAÇÃO . . . . .	39
2.5	<i>STRESS SPLIT</i> . . . . .	40
2.6	CONCEITO DE DUPLA ESTRUTURA . . . . .	41
<b>2.6.1</b>	<b>Dupla Porosidade e Dupla Permeabilidade . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>2.6.2</b>	<b>Função de Transferência de Massa . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DE BALANÇOS: FORMULAÇÃO 1 . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO SÓLIDO . . . . .	45
3.2	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO FLUIDO . . . . .	48
3.3	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MOMENTO (EQUILÍBRIO) . . . . .	50
<b>3.3.1</b>	<b>Tensões Efetivas . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Obtenção da Deformação Volumétrica . . . . .</b>	<b>51</b>
3.4	EQUAÇÃO GERAL DO BALANÇO DE MASSA . . . . .	53
<b>3.4.1</b>	<b>Equação Geral do Balanço de Massa do Fluido . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Evolução da Porosidade . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3.4.3</b>	<b>Equação Geral do Balanço de Momento Linear . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>EQUAÇÕES DE BALANÇOS: FORMULAÇÃO 2 . . . . .</b>	<b>56</b>
4.1	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO SÓLIDO . . . . .	57
4.2	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO FLUIDO . . . . .	58
4.3	EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MOMENTO (EQUILÍBRIO) . . . . .	59
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>61</b>

5.1	DOMÍNIO DO PROBLEMA . . . . .	61
5.2	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO . . . . .	61
5.3	MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .	62
<b>5.3.1</b>	<b>Métodos dos Resíduos Ponderados (MRP) . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Método de Galerkin . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>5.3.3</b>	<b>Função de Forma . . . . .</b>	<b>63</b>
5.4	EQUAÇÕES A SEREM DISCRETIZADAS . . . . .	64
<b>5.4.1</b>	<b>Equação de Equilíbrio: Modelo 1 . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>5.4.2</b>	<b>Equação de Fluxo da Matriz: Modelo 1 . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>5.4.3</b>	<b>Equação de Fluxo da Fratura: Modelo 1 . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>5.4.4</b>	<b>Equação de Equilíbrio: Modelo 2 . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>5.4.5</b>	<b>Equação de Fluxo da Matriz: Modelo 2 . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>5.4.6</b>	<b>Equação de Fluxo da Fratura: Modelo 2 . . . . .</b>	<b>68</b>
5.5	DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO: MODELO 1 E 2 . . . . .	69
5.6	EVOLUÇÃO DA POROSIDADE . . . . .	69
5.7	TIPOS DE ACOPLAMENTOS . . . . .	70
<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO NUMÉRICA . . . . .</b>	<b>74</b>
6.1	MODELOS NUMÉRICOS SIMPLIFICADOS . . . . .	74
<b>6.1.1</b>	<b>Modelo 1 Simplificado . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>6.1.2</b>	<b>Modelo 2 Simplificado . . . . .</b>	<b>75</b>
6.2	ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL . . . . .	75
<b>6.2.1</b>	<b>Solução Analítica . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>6.2.2</b>	<b>Soluções Numéricas para o Caso de Adensamento Unidimensional . . . . .</b>	<b>77</b>
6.2.2.1	Modelo 1 . . . . .	78
6.2.2.2	Modelo 2 . . . . .	81
6.2.2.3	Comparação entre os Modelos 1 e 2 para Adensamento Unidimensional . . . . .	84
6.3	PROBLEMA DE MANDEL . . . . .	85
<b>6.3.1</b>	<b>Solução Analítica . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>6.3.2</b>	<b>Soluções Numéricas para o Problema de Mandel . . . . .</b>	<b>87</b>
6.3.2.1	Modelo 1 . . . . .	89
6.3.2.2	Modelo 2 . . . . .	90
6.3.2.3	Comparação entre os Modelos 1 e 2 para Mandel . . . . .	92
<b>7</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE . . . . .</b>	<b>93</b>
7.1	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O CASO DE ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL . . . . .	93
<b>7.1.1</b>	<b>Análise de Sensibilidade da Formulação 1 . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>7.1.2</b>	<b>Análise de Sensibilidade da Formulação 2 . . . . .</b>	<b>99</b>

7.1.3	Comparação entre os Modelos 1 e 2 Utilizando o Caso da Análise de Sensibilidade . . . . .	104
7.2	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O PROBLEMA DE MANDEL	110
7.2.1	Análise de Sensibilidade da Formulação 1 . . . . .	110
7.2.2	Análise de Sensibilidade da Formulação 2 . . . . .	115
7.2.3	Comparação entre os Modelos 1 e 2 Utilizando o Caso da Análise de Sensibilidade . . . . .	119
8	<b>POÇO VERTICAL . . . . .</b>	<b>123</b>
8.1	GEOMETRIA . . . . .	123
8.2	MODELO 1 . . . . .	126
8.3	MODELO 2 . . . . .	138
8.4	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS 1 E 2 . . . . .	147
9	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>149</b>
9.1	CONCLUSÃO . . . . .	149
9.2	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	151
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>153</b>
	<b>APÊNDICE A – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS . . . . .</b>	<b>158</b>
	<b>APÊNDICE B – EQUAÇÕES MATEMÁTICAS DAS PORO- SIDADES . . . . .</b>	<b>162</b>
	<b>APÊNDICE C – CÁLCULOS AUXILIARES . . . . .</b>	<b>166</b>
	<b>APÊNDICE D – FUNÇÃO DE FORMA E COEFICIENTES DAS MATRIZES . . . . .</b>	<b>169</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a motivação do estudo desse trabalho, assim como, os objetivos que se dividem em: objetivos geral e específico. Além, da estrutura organizacional do documento.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Os reservatórios de petróleo e gás são formações bastante complexas resultantes de processos de natureza geológica que ocorrem numa escala de tempo de milhares de anos. Em particular, os reservatórios naturalmente fraturados representam quantidades significativas de reservas de petróleo, gás e outros recursos naturais na terra. Alguns exemplos de reservatórios naturalmente fraturados, espalhados pelo mundo, são: campo do Golfo do México, bacia de Campos no mar do Brasil, Baía de China Bohai, os campos gigantes do Oriente Médio, campo de Wolmington Califórnia e o Pré-sal do Brasil. Segundo Firoozabadi<sup>[1]</sup> e Bourbiaux<sup>[2]</sup>, os reservatórios naturalmente fraturados representam pelo menos 20% das reservas mundiais de óleo e gás.

Há quase sessenta anos, o estudo do fluxo de fluidos em meios porosos fraturados tem recebido grande atenção e tem sido uma das áreas mais ativas na investigação de escoamento de fluido em reservatórios de subsuperfície. Isso acontece, devido à sua importância para a recuperação de recursos naturais subterrâneos e muitas outras aplicações. Desta forma, na indústria de petróleo, houve um crescente interesse no fluxo na fratura nos últimos anos, devido à necessidade de caracterizar o escoamento através de reservatórios naturalmente fraturados<sup>[3]</sup>.

Uma característica dos reservatórios naturalmente fraturados é que, devido aos diferentes níveis de porosidade e permeabilidade, os fenômenos envolvidos ocorrem em diferentes meios. Esses meios, podem consistir em uma matriz porosa que contém grandes quantidades de fluidos, mas tem uma permeabilidade muito baixa, e um conjunto de macroporos, fissuras ou fraturas que constitui um volume pequeno, mas são altamente condutoras em comparação com a matriz. Além disso, estes reservatórios podem ser representados por um sistema de dupla porosidade e dupla permeabilidade, ou seja, a maior parte da condução de fluido é fornecida pelas fraturas, enquanto que a maior parte do armazenamento de fluido se dar através da matriz porosa.

Desde a década de 60, houve um progresso significativo na compreensão e modelagem de fluxos de fluidos em rochas fraturadas. Apesar desses avanços, a modelagem dos processos acoplados de fluxo de fluidos em um meio poroso fraturado permanece um desafio conceitual e matemático. Segundo Wu<sup>[3]</sup>, o desafio surge principalmente de:

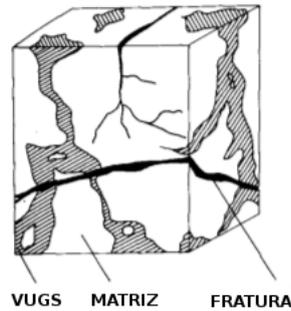
1. A heterogeneidade inerente e as incertezas associadas à caracterização de um sistema de matriz e fratura para qualquer problema de escala de campo e;
2. As dificuldades em conceituar, compreender e descrever os fluxos e os processos de em um sistema de formação tão complicado.

Além disso, podemos acrescentar, o forte acoplamento entre as diferentes escalas do problema e a não linearidade dos fenômenos envolvidos incorporam uma complexidade adicional. Portanto, a modelagem matemática e computacional do acoplamento hidromecânico (HM), do escoamento de fluidos e dos fenômenos geomecânicos em reservatórios naturalmente fraturados é um grande desafio atual nos domínios das engenharias, computação científica e indústria do petróleo e gás. O tema proposto neste trabalho se deve à necessidade da compreensão e análise crítica dos diferentes fenômenos físicos e mecânicos de natureza altamente complexa que envolve este tipo de reservatórios.

Assim, a modelagem dos reservatórios naturalmente fraturados, Figura 1, pela abordagem de dupla porosidade e dupla permeabilidade, possibilita uma representação mais realista dos meios porosos fraturados e por sua vez um maior entendimento do problema hidráulico e mecânico. Em vista disso, podemos tratar esses reservatórios como dois meios contínuos separados e sobrepostos. Além, de usar modelos constitutivos para cada meio. Também, podemos acoplar os dois meios via uma função de transferência de massa. Por isso, como principal contribuição deste trabalho de doutorado é propor derivar uma modelagem matemática e computacional do acoplamento (HM) em meios porosos, capaz de simular numericamente o escoamento de fluidos e a deformação em reservatórios com dupla porosidade e dupla permeabilidade, fazendo uso da técnica do *stress split*.

O *stress split* é uma técnica numérica considerado um esquema sequencial implícito. Essa técnica, possibilita o desacoplamento dos problemas de fluxo de fluido e geomecânico, ou seja, resolve o problema de fluxo de fluido primeiro e, em seguida, resolve o problema mecânico, de forma sequencial, no mesmo passo de tempo. Além disso, o termo mecânico nas equações de fluxo de fluido é tido como constante. Segundo Kim et. al <sup>[4, 5]</sup>, o *stress split* é um algoritmo incondicionalmente estável. Desta forma, utilizamos a técnica do *stress split* para modelagem acoplada de fluxo de fluido e geomecânica em reservatórios naturalmente fraturados.

**Figura 1 – Reservatório naturalmente fraturado.**



**Fonte:** Modificado de<sup>[6]</sup>

## 1.2 OBJETIVOS

Nesta seção mostraremos os objetivos geral e específico.

### 1.2.1 Objetivo Geral

Os objetivos principais deste trabalho consistem em:

- Derivar duas modelagens matemáticas do acoplamento HM em reservatórios naturalmente fraturados utilizando o conceito de dupla porosidade e dupla permeabilidade e a técnica do *stress split*, com o intuito de modelar computacionalmente fenômenos para a simulação do acoplamento hidro-mecânico e do escoamento de fluido, assegurando a viabilidade e segurança da utilização desta tecnologia.
- Implementar numericamente os dois modelos matemáticos utilizando o método dos elementos finitos, programado em Fortran no código *in house*, CODE\_BRIGTH, considerando o esquema de acoplamento iterativo, ou seja, o desacoplamento dos modelos de fluxo e mecânico.
- Empregar a formulação de dupla porosidade e dupla permeabilidade com a técnica do *stress split*, desenvolvida, em problemas de reservatórios naturalmente fraturados que levem em consideração o comportamento elástico do geomaterial.

### 1.2.2 Objetivo Específico

- As duas formulações para reservatórios naturalmente fraturados serão obtidas através do modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade.
- Para as modelagens do problema de meios porosos naturalmente fraturados, será considerado a função de transferência de massa de Warren e root<sup>[7]</sup>.

- Os modelos obtidos serão escritos em função da tensão média total e não da deformação volumétrica, para poder fazer uso da técnica do *stress split*.
- No acoplamento hidro-mecânico será utilizado o algoritmo do *stress split*, para poder desacoplar os modelos de fluxo e mecânico.
- Para simulação numérica será utilizado um código de elementos finitos, desenvolvido no Laboratório de Métodos Computacionais e Geomecânica (LMCG), programado em Fortran no código numérico *in house*, CODE\_BRIGTH.
- O código numérico *in house*, CODE\_BRIGTH, será calibrado e validado com problemas de Adensamento Unidimensional e de Mandel.
- Para a aplicabilidade das formulações propomos um caso de poço vertical, onde verificamos as soluções numéricas das pressões de fluidos, porosidades, permeabilidades, tensões e deslocamentos.
- Os resultados numéricos das duas formulações serão comparadas pelos problemas de Adensamento Unidimensional, Mandel e Poço Vertical, com o propósito de mostrar que ambos os modelos possuem diferenças e semelhanças nas suas respostas numéricas.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Além do Capítulo 1, que é a introdução onde falamos da motivação, dos objetivos e da organização do documento, o presente trabalho está organizado em mais 7 capítulos, da seguinte maneira:

- No Capítulo 2, fazemos a revisão bibliográfica, sendo apresentado os reservatórios naturalmente fraturados com sua definição, suas classificações, seus tipos de reservatórios e seus principais tipos de modelos. Ainda, revisamos os modelos de simples porosidades com deformação, dupla porosidade sem deformação e dupla porosidade com deformação.
- No Capítulo 3, abordamos o conceito de dupla porosidade, onde mostramos as definições das porosidades e expressamos os principais modelos para modelar a função de transferência de massa entre os meios porosos, matriz e fratura.
- No Capítulo 4, deduzimos as equações de balanços para a formulação ou modelo 1. Iniciamos por deduzir a equação do balanço de massa do sólido em função das pressões e deformação volumétrica, obtendo uma equação para cada meio poroso. Em seguida, obtemos a equação de balanço de massa do fluido para cada meio poroso, também em funções das pressões de fluido e deformação volumétrica. Logo após, mostramos a

equação de balanço de momento ou equação de equilíbrio. Posteriormente, calculamos a deformação volumétrica fazendo a decomposição do estado de tensões. Por fim, com a deformação volumétrica calculada, obtemos as equações geral do balanço de massa do fluido e evolução da porosidade, em funções da tensão média e da pressões dos meios porosos. E utilizando a relação de tensão efetiva expressamos a equação do balanço de momento linear.

- No Capítulo 5, deduzimos as equações de balanços para a formulação ou modelo 2. Seguindo a estrutura do Capítulo 4, obtemos as equações de balanços de massa do sólido e de massa do fluido para os dois meios porosos, matriz e fratura em funções das pressões e tensão média total. E por último, deduzimos a equação de balanço de momento linear.
- No Capítulo 6, mostramos a formulação numérica dos modelos matemáticos obtidos. Começamos, mostrando o domínio do problema e sua discretização. Posteriormente, utilizando o método dos elementos finitos para discretizar as equações de equilíbrio, de fluxo da matriz e de fluxo da fratura para a formulação 1, depois discretizamos as mesma equações para a formulação 2. Em seguida, fazemos a discretização do tempo e evolução da porosidade para os dois modelos. Por fim, apresentamos os tipos de acoplamentos.
- No Capítulo 7, apresentamos os resultados e discussões. Inicialmente, mostramos o problema de consolidação unidimensional onde expomos a solução analítica e mostramos as soluções numéricas para os dois modelos e também comparamos os modelos. Logo após, fazemos a análise de sensibilidade das formulações propostas e confrontamos as mesmas. Em seguida, apresentamos a solução analítica do problema de Mandel e comparamos com as soluções numéricas das duas formulações, além de confrontá-las. Após, isso, realizamos análise de sensibilidade das formulações propostas e também confrontamos as mesmas. Por último, fazemos um caso de aplicação de poço vertical, onde verificamos as pressões, tensões e deslocamentos ao longo do reservatório e das porosidades e permeabilidades ao redor do poço.
- No Capítulo 8, exibimos as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO

Neste Capítulo mostraremos uma breve revisão sobre os reservatórios naturalmente fraturados, suas: definição, classificações e tipos de modelos. Ainda, apresentaremos os modelos de simples porosidades com deformação, dupla porosidade sem deformação e dupla porosidade com deformação. Além disso, abordaremos o conceito de dupla porosidade e apresentaremos as principais funções de transferência de massa entre os meios porosos, matriz e fratura.

### 2.1 RESERVATÓRIO NATURALMENTE FRATURADO (RNF)

O estudo de reservatórios naturalmente fraturados tem sido desenvolvido nos últimos anos, sendo um desafio para várias áreas das ciências como, matemática, engenharias, geologia, computação, entre outras. A multidisciplinaridade tem sido de extrema importância nas modelagens desse tipo de reservatório de petróleo. A seguir mostramos a definição de RNF, os seus tipos e os modelos utilizados para poder modelá-los.

#### 2.1.1 Definição

A definição de um reservatório naturalmente fraturado é ampla, pois todo reservatório de petróleo contém fraturas, sejam elas induzidas, naturais ou ambas. As fraturas induzidas acontecem por diversas atividades, entre elas, o fraturamento hidráulico, injeção de fluidos, processos de perfurações e outros. Enquanto que, as fraturas naturais são resultantes das interações das tensões atuantes no subsolo. Desse modo, no presente trabalho a definição de RNF está relacionado as fraturas naturais.

Como os sistemas naturais de fratura podem ter uma variedade de efeitos no desempenho do reservatório, na recuperação primária, secundária e terciária, e como esses efeitos devem ser previstos muito antes de serem evidenciados nos dados de produção, temos que, segundo Nelson<sup>[8]</sup>, um reservatório fraturado é definido como um reservatório no qual as fraturas que ocorrem naturalmente têm, ou se prevê terem, um efeito significativo no fluxo do reservatório na forma de aumento da permeabilidade do reservatório e/ou reservas ou aumento da anisotropia de permeabilidade.

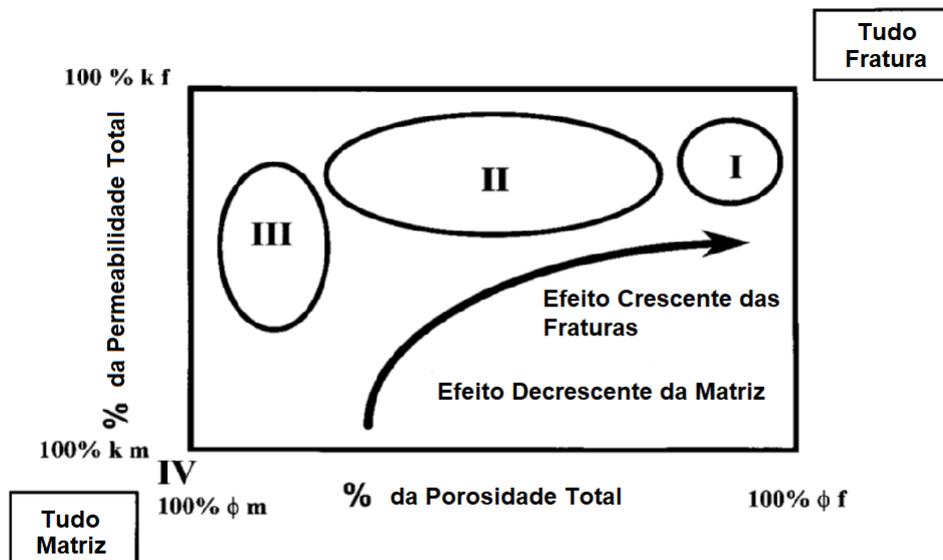
#### 2.1.2 Classificações de Reservatórios Naturalmente Fraturados

Definido o que são reservatórios naturalmente fraturados, vamos agora elencar os tipos. Segundo Nelson<sup>[8]</sup> são classificados quatro tipos de RNF, que são listados abaixo:

- Reservatório Tipo I: As fraturas fornecem a porosidade e permeabilidade essencial do reservatório.
- Reservatório Tipo II: As fraturas fornecem a permeabilidade essencial do reservatório.
- Reservatório Tipo III: As fraturas auxiliam na permeabilidade em um reservatório já produtivo.
- Reservatório Tipo IV: As fraturas não fornecem porosidade ou permeabilidade adicional, mas criam anisotropia significativa do reservatório (barreiras).

Os três primeiros tipos descrevem atributos positivos do reservatório do sistema de fratura (ver Figura 2). Porém, o quarto, embora um tanto não paralelo aos outros, ver Figura 2, descreve aqueles reservatórios nos quais as fraturas são importantes não apenas para a qualidade do reservatório que elas transmitem, mas para a anisotropia de fluxo inerente e partição de reservatório que elas criam.

**Figura 2 – Classificação de reservatórios naturalmente fraturados.**



Fonte: Modificado de<sup>[8]</sup>

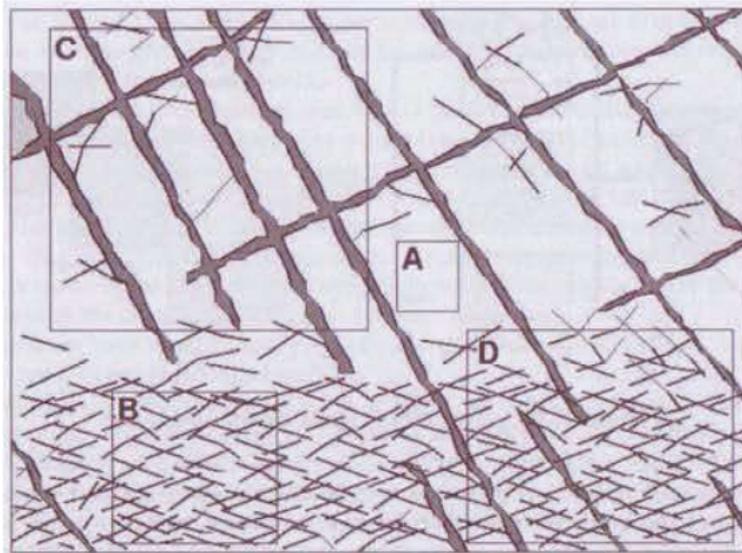
A Figura 2, um gráfico esquemático da porcentagem da porosidade do reservatório versus a permeabilidade percentual do reservatório, ou seja, percentual devido à matriz versus percentual devido a fraturas.

### 2.1.3 Tipos de Modelos

Apresentado a definição e classificações de reservatórios naturalmente fraturados, mostraremos agora os principais tipos de modelos que, devido à natureza desconhecida das fraturas *in situ* e das propriedades geométricas às distribuições espaciais, modelam essas fraturas desses reservatórios.

Os principais modelos de fraturas, segundo Tatomir<sup>[9]</sup>, são: modelos discretos, multi-contínuos e híbridos. A seguir, apresentamos um modelo com fraturas em diferentes escalas, conforme Figura 3, e seus diferentes recortes podem ser descritos pelos diferentes modelos. Na Figura 3, o recorte A representa a matriz rochosa não perturbada, isto é, o meio poroso. O recorte B representa a matriz rochosa altamente fraturada e pode ser considerada como um modelo contínuo com um fluxo equivalente. Por sua vez, o recorte C caracteriza as grandes fraturas e podem ser modeladas com um modelo discreto e por fim o recorte D descreve os modelos híbridos.

**Figura 3 – Meios porosos fraturados com diferentes discontinuidades.**



**Fonte:** <sup>[9]</sup>

O recorte B, é onde se encontra a modelagem proposta nesse trabalho e consequentemente utilizaremos modelos multi-contínuos para descreve-lo. Esses três modelos para meios porosos fraturados serão apresentado agora com mais detalhes.

#### 2.1.3.1 Modelos Discretos

A abordagem de modelagem de fratura explícita ou discreta inclui todas as fraturas no domínio de formação do modelo e descreve o fluxo explicitamente através de cada fratura com interação fratura-matriz<sup>[3]</sup>. O modelo de fratura discreta é, em princípio, um

método rigoroso em oposição a outras abordagens conceituais de modelagem de fratura. Entretanto, a aplicação deste método em estudos de modelagem em escala de campo é, em geral, exigente tanto em requisitos de dados quanto em intensidade computacional, porque o número de fraturas é normalmente muito grande para incluir em uma simulação de campo. Além disso, essa abordagem requer um conhecimento detalhado das propriedades geométricas da fratura e da matriz e suas distribuições espaciais, que raramente são conhecidas em um determinado campo de pesquisa para fraturas naturais<sup>[3]</sup>. Como a abertura da fratura é muito pequena em comparação com a extensão dos blocos rochosos e como as velocidades de fluxo nas fraturas são muito mais altas que na matriz rochosa devido à maior permeabilidade, a aplicação de modelos discretos em meios porosos fraturados é muito difícil<sup>[9]</sup>.

### 2.1.3.2 Modelos Multi-Contínuos

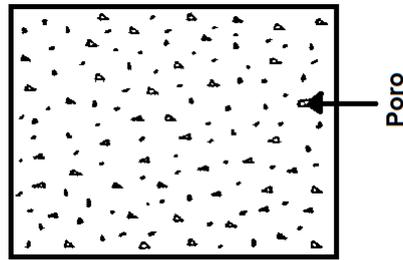
Nos modelos multi-contínuos, o pressuposto a ser feito é que o volume elementar representativo (REV) não pode ser obtido apenas para o meio poroso, matriz rochosa, mas também para o sistema fraturado. Parâmetros médios para matriz porosa e sistema de fratura são usados em modelos multi-contínuos.

O tamanho deste REV deve ser maior que o tamanho da heterogeneidade e muito menor que a escala de comprimento macroscópico, pois prognósticos confiáveis somente podem ser feitos apenas em escalas maior que ou igual à dimensão que foi definida o REV. Segue-se que a abordagem contínua é aplicável a um meio poroso fraturado desde que um REV possa ser determinado<sup>[9]</sup>.

Os modelos conceituais multi-contínuos podem ser divididos em três tipos:

1. Simples porosidade e simples permeabilidade ou porosidade equivalente: Neste modelo o meio poroso fraturado apresenta um grau elevado de fraturamento, onde essas regiões intensamente fraturadas podem ser simuladas como áreas com alta porosidade e permeabilidade. Este modelo conceitual pode apresentar algumas limitações por causa da escala e das características geológicas da matriz rochosa. Uma dessas limitações é a não praticidade devido ao número muito grande de elementos, ver Figura 4. Pois, quando a proporção das duas escalas de comprimento em um sistema fraturado, bem como a razão de permeabilidade da matriz e da fratura são muito altas, a abordagem de porosidade única torna-se muito ineficiente numericamente <sup>[9]</sup>.

**Figura 4 – Simples porosidade e simples permeabilidade.**



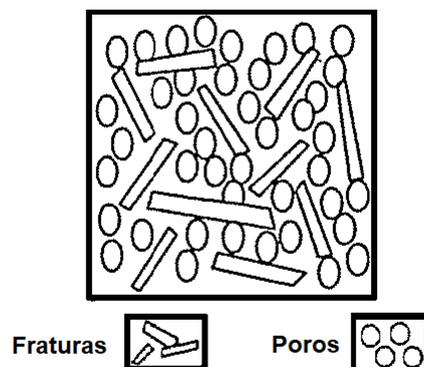
Fonte: Modificado de<sup>[10]</sup>

2. Dupla porosidade: Neste modelo conceitual o meio poroso fraturado é representado por dois meios contínuos distintos e interativos, um meio constituído pelos blocos porosos e o outro pela rede de fraturas. A interação entre os dois meios porosos contínuos é expresso por uma função de transferência de massa, como proposto por Barenblatt et. al<sup>[11]</sup> e Warren e Root<sup>[7]</sup>.

O modelo de dupla porosidade é capaz de lidar com a interação fratura-matriz mais facilmente do que o modelo de fratura discreta, porque representa o contínuo de fratura com o conceito de volume representativo (REV) que pode incluir várias fraturas ou estruturas de fraturas localmente<sup>[3]</sup>. Por essas razões, a abordagem de dupla porosidade foi desenvolvida e usada como a principal abordagem para modelar o fluxo de fluidos em reservatórios fraturados por Warren e Root<sup>[7]</sup> e Aifantis<sup>[12]</sup>. No entanto, deve-se afirmar que a aplicabilidade dessa abordagem é em geral dependente de (1) distribuição uniforme de estruturas densas, (2) conhecimento de propriedades físicas e matemáticas<sup>[3]</sup>. Esse modelo, pode ser dividido em dois tipos:

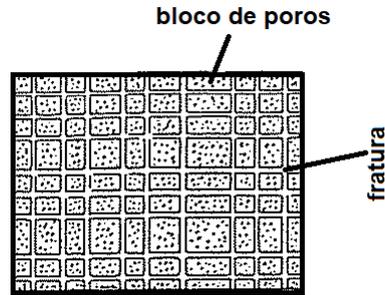
- Dupla porosidade e simples permeabilidade, Figura 5.
- Dupla porosidade e dupla permeabilidade, Figura 6.

**Figura 5 – Dupla porosidade e simples permeabilidade.**



Fonte: Modificado de<sup>[10]</sup>

**Figura 6 – Dupla porosidade e dupla permeabilidade.**



**Fonte:** Modificado de<sup>[10]</sup>

Esses dois tipos de modelos tem sido os mais amplamente utilizados na abordagem em simulação de reservatório fraturado na engenharia de petróleo<sup>[3, 7, 10, 12]</sup>. A abordagem de dupla porosidade trata a fratura e a matriz como contínuos distribuídos nos domínios de interesse do reservatório. O fluxo transiente nas fraturas e no sistema matricial é descrito pelas leis clássicas de escoamento em meios porosos, no entanto, a interação matriz-fratura é geralmente simplificada ou aproximada usando uma condição de fluxo de estado pseudo estável, sob a qual soluções analíticas estão disponíveis e usadas para calcular o fluxo dentro do sistema matricial, desta forma o sistema matricial é tratado como um termo fonte/sumidouro.

Entre os modelos conceituais de duplo-contínuo, o modelo de dupla porosidade que tem sido o mais popular e mais aplicado desde que foi proposto é o de Warren e Root<sup>[7]</sup>. Neste modelo de dupla porosidade, o fluxo no reservatório naturalmente fraturado é composto por blocos de matriz com baixa permeabilidade, embutidos em uma rede de fraturas interconectadas. Fluxo global na formação ocorrem somente através do sistema de fraturas, modelados como um contínuo. Este modelo trata blocos de matriz espacialmente distribuídas, como fontes ou sumidouros, para o sistema de fratura sem considerar o fluxo global matriz-matriz e o fluxo matricial de fratura nas interfaces matriz-fratura é calculado com base na solução analítica do fluxo de estado pseudo estável dentro do sistema matricial como uma geometria simples de blocos de matriz.

3. Multi porosidade: O modelo é uma generalização do modelo de dupla porosidade. O conceito multi-contínuos, trata o fluxo de interporosidade de maneira totalmente transitória, calculando os gradientes, que impulsionam o fluxo de interporosidade da interface matriz-fratura para dentro ou a partir do bloco da matriz<sup>[3]</sup>. O conceito multi-contínuos é baseado na noção de que mudanças nas pressões de fluidos, em reservatórios fraturados se propagarão rapidamente através do sistema de fraturas, enquanto que o fluxo dentro ou fora dos blocos de matriz é um processo lento.

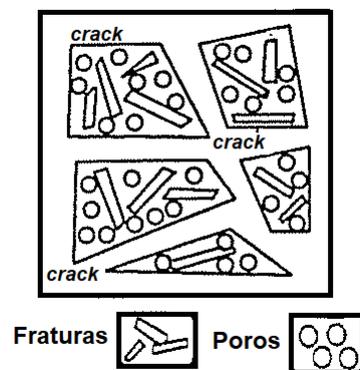
O modelo de Multi porosidade pode ser dividido em dois tipos:

- Modelo conceitual triplo-contínuo: Em reservatórios fraturados, pode haver heterogeneidade significativa nas fraturas ou na matriz rochosa. Para investigar o efeito da heterogeneidade em fraturas ou na matriz rochosa sobre o fluxo por meio de meios porosos fraturados, o conceito de dupla porosidade de Warren e Root tem sido estendido na literatura. Em particular, um número de modelos triplo-contínuo foram desenvolvidos para efeito de matriz de rocha heterogênea (por exemplo, Clossman<sup>[13]</sup>, Wu e Ge<sup>[14]</sup>, Abdassah e Ershaghis<sup>[15]</sup>, Bai et. al<sup>[10]</sup>, Liu et. al<sup>[16]</sup>), para efeito de pequena fratura (Wu e colaboradores<sup>[17]</sup>), e para reservatórios de *vuggy* fraturados (Wu et. al<sup>[18, 19]</sup>, Wu e Qin<sup>[20]</sup>)<sup>[3]</sup>. Em geral, esses modelos multi-contínuos têm se concentrado em lidar com diferentes níveis e heterogeneidades escalares de matrizes rochosas ou fraturas, por exemplo, subdividindo a matriz rochosa ou fraturas em dois ou mais subdomínios ou contínuos com propriedades diferentes para fluxo monofásico em tais reservatórios fraturados<sup>[3]</sup>. Assim, o modelo triplo-contínuo pode ser dividido em dois tipos:

**Tipo 1:** Tripla porosidade e dupla permeabilidade, Figura 7.

**Tipo 2:** Tripla porosidade e tripla permeabilidade, Figura 8.

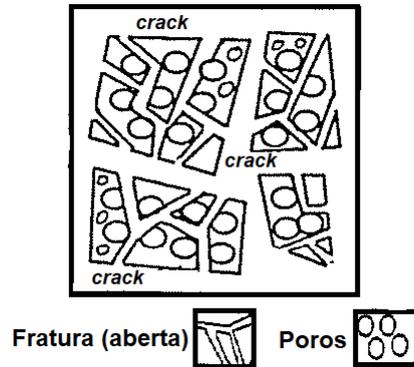
Figura 7 – Tripla porosidade e dupla permeabilidade.



Fonte: Modificado de<sup>[10]</sup>

- Multi porosidade e multi permeabilidade: Que aborda todos os outros níveis conceituais de multi-contínuos. Segundo a teoria de multi porosidade de Aifantis<sup>[12, 21]</sup>, quaisquer meios que exibem descontinuidades finitas no campo de porosidade são considerados para ter uma propriedade de multi porosidade.

Figura 8 – Tripla porosidade e tripla permeabilidade.



Fonte: Modificado de<sup>[10]</sup>

### 2.1.3.3 Modelos Híbridos

Os modelos conceituais híbridos representam a combinação dos dois outros modelos abordados anteriormente, ou seja, modelos conceituais discretos e multi-contínuos. As fraturas na escala de observação são consideradas discretamente e as fraturas nas escalas inferiores, com a ajuda de modelos contínuos.

Visto que podemos utilizar várias técnicas para poder modelar um reservatório naturalmente fraturado, como a discretização de fraturas naturais (DFN) e o modelo de dupla porosidade, que será o foco da continuação da revisão.

## 2.2 MODELO DE SIMPLES POROSIDADE COM DEFORMAÇÃO

O estudo do fluxo de fluidos em meios porosos deformáveis e saturados como um fenômeno de deformação de fluxo acoplado começou com o trabalho de Terzaghi<sup>[22, 23, 24]</sup> que desenvolveu e usou um modelo de consolidação unidimensional. Consolidação é o adensamento causado por uma adaptação gradual do solo/rocha à variação de carga. Este fenômeno se deve ao fato que um solo/rocha sob carga não assume uma deflexão instantânea sob aquela carga, mas se instala gradualmente a uma taxa variável. Sua teoria de consolidação tem sido um dos principais incentivos para o desenvolvimento da mecânica do solo/rocha.

Além dos estudos realizados por Terzaghi<sup>[24]</sup>, Biot<sup>[25, 26, 27]</sup> realizou uma série de trabalhos sobre o estudo da teoria de consolidação considerando a hipótese de porosidade simples com deformação. Primeiro Biot<sup>[25]</sup> propôs oferecer um tratamento mais rigoroso e completo da teoria de Terzaghi<sup>[24]</sup>. Biot<sup>[25]</sup> realizou duas generalizações: Uma delas sendo a extensão ao caso tridimensional e a outra o estabelecimento de equações válidas para qualquer variável de carga arbitrária com o tempo. Para isso, Biot<sup>[25]</sup> assumiu sete propriedades básicas para o meio poroso:

1. Isotropia do material;
2. Reversibilidade das relações tensão-deformação em condições de equilíbrio final;
3. Linearidade das relações tensão-deformação;
4. Pequenas deformações;
5. A água contida nos poros é incompressível;
6. A água pode conter bolhas de ar;
7. A água flui através do esqueleto poroso de acordo com a lei de Darcy.

Posteriormente Biot<sup>[26]</sup> ampliou sua teoria de consolidação de material isotrópico sob o carregamento de um meio poroso deformável contendo um fluido viscoso, para uma teoria mais geral, ou seja, envolvendo anisotropia. Para isso, Biot<sup>[26]</sup> fez a mesma suposição física, que o esqueleto é puramente elástico e contém um fluido viscoso compressível. Foi considerado também, a teoria como uma generalização da teoria da elasticidade em materiais porosos. Por último, Biot e Willis<sup>[27]</sup> determinaram os coeficientes da teoria de elasticidade, através de métodos de medidas, entre esses coeficientes, podemos destacar o alfa de Biot.

A contribuição desses autores, foi base de outros estudos de modelo de dupla porosidade em meios porosos deformáveis que veremos mais adiante.

### 2.3 MODELO DE DUPLA POROSIDADE SEM DEFORMAÇÃO

A abordagem de dupla porosidade em meios porosos naturalmente fraturado, tem início com o estudo realizado por Baremlatt et. al<sup>[11]</sup>. Neste trabalho, eles desenvolveram uma formulação matemática para um modelo de dupla porosidade, considerando o meio poroso homogêneo como dois meios contínuos sobrepostos, matriz e fratura, interconectados por uma função de transferência de massa. Além disso, foi considerado a hipótese de meio poroso rígido, ou seja, sem deformações. De posse do modelo matemático, Baremlatt et. al<sup>[11]</sup> obtiveram uma solução analítica para as equações de movimento de um líquido homogêneo em um meio com dupla porosidade.

Posteriormente, Warren e Root<sup>[7]</sup> desenvolveram uma formulação tridimensional e radial do meio de dupla porosidade, sendo o reservatório fraturado idealizado como um sistema formado por paralelepípedos retangulares idênticos, divididos por uma rede de fraturas ortogonais. Tal modelo, comumente denominado de *sugar cube model*, possui duas classes de porosidades: a porosidade primária controlada pelos blocos da matriz e a porosidade secundária, controlada pelas fraturas. Além disso, o modelo de Warren e Root<sup>[7]</sup> considera que o material contendo a porosidade primária é homogênea e isotrópica,

que são os paralelepípedos retangulares, já a porosidade secundária é toda contida dentro de um sistema ortogonal de fraturas contínuas e uniformes, que são orientadas para que cada fratura seja paralela a um dos principais eixos do tensor de permeabilidade. Warren e Root<sup>[7]</sup> também desenvolveram uma solução analítica para descrever o fluxo no meio de dupla porosidade.

Mais tarde, Odeh<sup>[28]</sup> desenvolveu um modelo semelhante ao trabalho de Warren e Root<sup>[7]</sup>, onde a diferença consiste na redefinição das duas porosidades, para acomodar um reservatório fraturado em que o padrão de fraturas não era conhecido. No modelo de Odeh<sup>[28]</sup> o movimento líquido do fluido em direção ao poço ocorreu apenas nas fraturas e a capacidade de fluxo nas fraturas e o grau de fratura do reservatório foram uniformes. Com isso, a capacidade de armazenamento dos dois sistemas, matriz e fratura, são geralmente tão semelhantes que o comportamento transitório terminará ao se aproximar do comportamento do reservatório convencional. Odeh<sup>[28]</sup> conseguiu obter uma solução analítica de seu modelo de dupla porosidade.

Em seguida, Kazemi<sup>[29]</sup> estendeu as soluções apresentadas por Warren e Root<sup>[7]</sup> e Odeh<sup>[28]</sup>. O modelo proposto por Kazemi<sup>[30]</sup> aproxima o meio de dupla porosidade por um sistema em camadas compostas por camadas finas. As camadas finas são altamente permeáveis representando as fraturas, alternadas com as camadas espessas de permeabilidade inferior que representavam a matriz. Com isso, foi possível descrever duas equações para o balanço de massa, uma para fratura e a outra para matriz. O modelo de Kazemi<sup>[30]</sup> diferiu do modelo de Warren e Root<sup>[7]</sup> em que o reservatório consistia em um conjunto de camadas de matriz horizontais uniformemente espaçadas por um conjunto de fraturas horizontais servindo como espaçadores. Desta forma, por meio de integração numérica da variação da pressão do poço versus tempo, o modelo de Kazemi<sup>[30]</sup> apresentou resultados que se mostraram satisfatórios com aqueles obtidos pelo modelo de Warren e Root<sup>[7]</sup> para casos de distribuição uniforme de fraturas onde alta capacidade de armazenamento da matriz contrasta com alta capacidade de interfluxo<sup>[6]</sup>. Além disso, Kazemi<sup>[30]</sup> investigou a validade de assumir a hipótese do estado quase estável para o fluxo fratura matriz.

Já Swaan<sup>[31]</sup> descreve o fluxo transiente assumindo os blocos de matriz aproximada por placas regulares, em vez de formas regulares. Swaan<sup>[31]</sup> também desenvolveu uma solução analítica para o regime de fluxo transiente, para um modelo de porosidade modificada. Depois, o modelo de Najurieta<sup>[32]</sup> mostrou uma descrição simplificada do comportamento de pressão dos reservatórios fraturados, com base numa solução aproximada do modelo de Swaan<sup>[31]</sup>. Neste modelo, também foi proposto um método sistemático para analisar testes de pressão transiente.

Duguid e Lee<sup>[33]</sup> trataram o meio poroso fraturado como um sólido elástico incompressível que contém dois tipos de porosidade. Eles também consideram que o fluido é levemente compressível, e a velocidade do fluido tanto nos poros primários como nas

fraturas é considerado pequena. Foram necessários dois conjuntos de equações governantes para descrever o fluxo no meio poroso fraturado, e por fim esses conjuntos de equações foram acoplados pela interação do fluido nos poros primários com o fluido nas fraturas.

## 2.4 MODELO DE DUPLA POROSIDADE COM DEFORMAÇÃO

Os modelos acima mencionados para fluxo monofásico em formações fraturadas ou trataram a formação como um corpo rígido ou ignoraram o acoplamento entre fluxo de fluido e deformação. Aifantis<sup>[12]</sup> foi quem apresentou uma formulação de dupla porosidade acoplada para modelagem monofásica em um meio poroso fraturado e deformável, combinando o conceito de Barenblatt<sup>[11]</sup> com a teoria de Biot<sup>[25, 26, 27]</sup> de poroelasticidade isotrópica linear. Além disso as outras teorias apresentadas por Aifantis<sup>[21]</sup>, Wilson e Aifantis<sup>[34]</sup> estenderam o conceito de dupla porosidade para examinar cenários de deformação de fluxo acoplados em meios poroelásticos fraturados usando métodos analíticos, eles obtiveram soluções analíticas para o problema da consolidação unidimensional. Posteriormente, Khaled e outros<sup>[35]</sup> fizeram abordagens numéricas semelhantes para obter soluções numéricas das equações de Aifantis de poroelasticidade de porosidade dupla. A teoria de Aifantis<sup>[12, 21, 34]</sup> forneceu uma derivação alternativa de suas equações de rochas fraturadas através de uma extensão adequada do modelo clássico de fluxo de Biot<sup>[25, 26, 27]</sup> em meios de porosidade simples. Depois, desenvolveu uma metodologia de elementos finitos para a solução numérica das equações resultantes. A derivação das equações governantes é feita observando o sistema como um esqueleto elástico infiltrado por um fluido de dois estados, um que flui através das fraturas e o outro fluindo através dos poros. Foram feitos pressupostos constitutivos tanto para as tensões efetivas quanto para a tensão total, em conformidade com a teoria clássica de Biot<sup>[25, 26, 27]</sup>. Os postulados básicos são: a equação de equilíbrio para a tensão total e a lei de Darcy especificando o processo de fluxo nos dois tipos de poros. Além disso, as equações de Barenblatt<sup>[11]</sup> podem ser recuperadas das equações de Aifantis<sup>[34]</sup> como um caso especial quando a rocha é considerada rígida.

Valliappan e Khalili-Naghadeh<sup>[36]</sup> mostraram um conjunto de equações diferenciais acopladas que regem o comportamento de meios porosos fraturados deformáveis com base no conceito de dupla porosidade. Sendo os coeficientes dessas equações diferenciais acopladas variáveis em vez de constantes, como no caso do modelo de Aifantis<sup>[12, 21, 34]</sup>.

Na década de 90, Elsworth e Bai<sup>[37]</sup> desenvolveram um modelo constitutivo para definir a resposta linear poroelástica de meios fraturados para determinar a influência de efeitos de duas porosidade. No entanto, se fez necessária uma relação tensão-deformação e duas equações que representam a conservação de massa no material poroso e fraturado. Além disso, as pressões geradas dentro do sistema de fraturas se equilibram com o tempo por fluxo inverso para os blocos porosos. Posteriormente, Bai et. al<sup>[10, 38, 39]</sup> deram continuidades a uma série de trabalhos publicados para estudar o fluxo de fluido em meios

de dupla porosidade.

Recentemente, Ghafouri e Lewis<sup>[40]</sup> propuseram um modelo em que o meio poroso fraturado é dividido em dois contínuos sobrepostos mas distintos, o primeiro representa fluxo e deformação na matriz porosa, enquanto o segundo representa o fluxo nas fraturas. Além disso, os pressupostos básicos são semelhantes aos de trabalhos anteriores, mas a formulação difere no que se refere a deformação na equação de fluxo da fratura que não é considerada. Ghafouri e Lewis<sup>[40]</sup>, também obtiveram resultados bastante significativos quando comparados ao modelo de porosidade simples equivalente. No entanto, a tendência obtida não é semelhante ao trabalho de Elsworth e Bai<sup>[37]</sup>.

Visto que os modelos de dupla porosidade e dupla permeabilidade desenvolvido resolve apenas o acoplamento hidro-mecânico do meio poroso fraturado, utilizando o termo de deformação volumétrica, incorporado nas equações de fluxo dos dois meios porosos, matriz e fratura, ou apenas na equação de fluxo da matriz, de forma totalmente acoplada. Propomos resolver o acoplamento hidro-mecânico em meio poroso naturalmente fraturado com dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split*.

## 2.5 STRESS SPLIT

O *stress split*, como já mencionado anteriormente no Capítulo 1, é um algoritmo numérica que é resolvido por um esquema sequencial implícito, e tem sido rigorosamente demonstrado como incondicionalmente estável e globalmente convergente<sup>[4, 5, 41, 42]</sup>, quando se considera fluxo ligeiramente compressível em meios porosos homogêneos. Essa técnica, resolve o problema de fluxo de fluido primeiro e, em seguida, resolve o problema mecânico, de forma sequencial, no mesmo passo de tempo. Além disso, o termo mecânico nas equações de fluxo de fluido é considerado constante, desta forma, podendo ser desacoplada da equação de fluxo de fluido<sup>[4, 5, 43]</sup>.

A vantagem de se utilizar essa técnica é que podemos desacoplar a parte mecânica da de fluxo. Assim, fazendo com que o problema acoplado torne-se “mais fácil” de se resolver minimizando a restrição deste tipo de simulação para certos tipos de problemas (acoplamento fraco entre as equações). Isso só será possível, pois, diferentemente do que já foi proposto na literatura, para problemas de reservatórios naturalmente fraturados com dupla porosidade e dupla permeabilidade, não utilizaremos o termo da deformação volumétrica inserida nas equações de fluxo, ou seja, substituiremos pelo termo da tensão média total, fazendo uso das tensões efetivas proposto por Terzaghi<sup>[24]</sup> e Biot<sup>[27]</sup>, além da decomposição do estado de tensões do meio poroso fraturado.

Como foi mostrada na revisão bibliográfica, foram propostos vários modelos para modelar um meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade. Neste trabalho deduziremos duas formulações ou modelos para um meio poroso naturalmente fraturado com dupla

porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split*. Desta maneira, a primeira formulação apresentará o termo mecânico nas equações de fluxo tanto para matriz quanto para fratura e a segunda formulação mostrará termo mecânico inserido apenas na matriz. Lembrando que a variável do termo mecânico na equação de fluxo será a tensão média total, para poder fazer uso da técnica do *stress split*.

## 2.6 CONCEITO DE DUPLA ESTRUTURA

Nesta seção apresentaremos o conceito de dupla porosidade e dupla permeabilidade (dupla estrutura) em um reservatório naturalmente fraturado, além disso, abordaremos o termo de acoplamento entre os meios que constitui esse tipo de reservatório.

### 2.6.1 Dupla Porosidade e Dupla Permeabilidade

Em um reservatório naturalmente fraturado existem descontinuidades ao longo de todo o reservatório, como o resultado de dois sistemas distintos de porosidade na mesma formação. A região da matriz porosa tem uma alta capacidade de armazenamento, mas uma baixa capacidade de fluxo e a região de rede fraturado interligada tem uma capacidade de armazenamento baixo, mas uma alta capacidade de fluxo<sup>[6]</sup>. Esse tipo de reservatório fraturados são chamados de não convencionais.

Desta forma, o reservatório naturalmente fraturado pode ser considerado como um modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade. O meio poroso fraturado é sobrepostos, considerando a matriz e fratura como um meio contínuo mas distintos, Figura 9. Neste trabalho, a matriz porosa é convencionada de meio 1 e as fraturas de meio 2. A porosidade, a pressão do fluido, a permeabilidade e outras propriedades são consideradas separadamente para cada meio contínuo. Nesse modelo conceitual o problema de fluxo tem duas variáveis globais, que são as pressões de fluido associadas a cada meio. Neste caso, assume-se que existam duas estruturas de poros interligados, com diferentes propriedades de fluido que flui através deles.

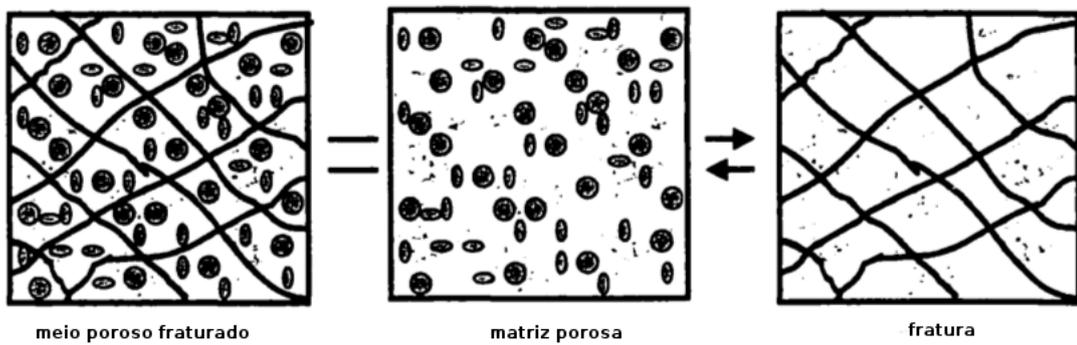
O acoplamento entre os dois meios se dá através de uma função de transferência de massa de líquido entre os meios abordado na próxima seção.

Antes de apresentar as principais equações do problema, temos que as porosidades e o volume total do meio poroso podem ser definidas como<sup>[12, 21, 45]</sup>:

$$\text{a) } \phi_1 = \frac{V_1}{V} \quad \text{b) } \phi_2 = \frac{V_2}{V} \quad \text{c) } \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \text{d) } V = V_s + V_1 + V_2 \quad (2.1)$$

onde  $\phi_1$  é a porosidade no meio 1,  $\phi_2$  é a porosidade no meio 2,  $\phi$  é a porosidade total,  $V_1$  é volume de vazio do meio 1,  $V_2$  é volume de vazio do meio 2 e  $V_s$  é volume de sólido e  $V$  é volume total do meio poroso.

Figura 9 – Modelo em meios de dupla porosidade.



Fonte: Modificado de [44]

### 2.6.2 Função de Transferência de Massa

A modelagem de fluxo em sistemas fraturados apresenta um grande desafio, uma vez que ambos os fluxos através da rede de fraturas e a transferência de massa entre estas e a matriz rochosa porosa praticamente impermeável necessitam ser modelados, simultaneamente. No conceito de dupla porosidade o termo que controla a transferência de massa entre os dois meios (rede de fraturas e matriz rochosa), pode ser expressado como:

$$\Gamma = \gamma(p_1 - p_2) \quad (2.2)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de escape. As pressões de fluido  $p_1$  e  $p_2$  são adotadas como a variável que controla a transferência de massa entre os meios.

O termo do lado direito da Equação 2.2 pode ser apresentado de forma genérica como:

$$\Gamma = \gamma(\Upsilon_1 - \Upsilon_2)$$

onde  $\Upsilon_1$  e  $\Upsilon_2$  representa de forma geral a força termodinâmica envolvida na transferência de massa. Que pode ser dadas por: diferenças de temperatura, potencial química da água, diferença de pressão, entre outros. Esse termo, indica que o ganho de massa de um meio significa a perda de massa do outro meio, ou seja, se a matriz ganha massa a fratura perde, de tal forma que a equação equilibre os dois meios. Isso acontece, devido a Primeira Lei da Termodinâmica que se relaciona com o princípio da conservação da energia<sup>[46]</sup>. Isto é, a energia em um sistema não pode ser destruída nem criada, somente transformada<sup>[46]</sup>.

Em alguns trabalhos, o parâmetro  $\gamma$  é associado a geometria característica do meio, tal como: à superfície específica da matriz rochosa, o número de fraturas e o intervalo de fraturas.

Existem inúmeros modelos para modelar a função de transferência de massa entre os meios. Como as funções proposta por Barenblatt<sup>[11]</sup>, Warren e Root<sup>[7]</sup>, Kazemi<sup>[47]</sup>,

Thomas<sup>[48]</sup>, Ueda<sup>[49]</sup>, Coats<sup>[50]</sup> e Lim<sup>[51]</sup>. Os principais modelos para modelar a transferência de massa entre os dois meios são: Barenblatt<sup>[11]</sup> e Warren e Root<sup>[7]</sup>.

O modelo proposto por Barenblatt<sup>[11]</sup>, sugere que a massa do líquido que flui a partir de um meio para outro, por: unidade de tempo e unidade de volume, pode ser dado por:

$$\Gamma = \frac{\beta k_{11} \zeta}{\mu} \rho_w (p_1 - p_2) \quad (2.3)$$

onde  $\beta$  é uma constante,  $k_{11}$  é a componente do tensor de permeabilidade intrínseca do meio 1,  $\zeta$  é a superfície específica da fratura (superfície da fratura por unidade de volume da rocha),  $\mu$  é a viscosidade do líquido e  $\rho_w$  é a densidade de referência do fluido no meio.

O modelo de Warren e Root<sup>[7]</sup>, considera um meio permeável que contém regiões que contribuem significativamente para o volume de poros do sistema, mas contribuem de forma insignificante para a capacidade de fluxo. A expressão a seguir é sugerida para o termo de transferência de massa:

$$\Gamma = \frac{\beta k_{11}}{\mu} \rho_w (p_1 - p_2) \quad (2.4)$$

onde

$$\beta = \frac{4n(n+2)}{s^2}; \quad (2.5)$$

$$s = a \quad \text{para } n = 1 \quad (2.6)$$

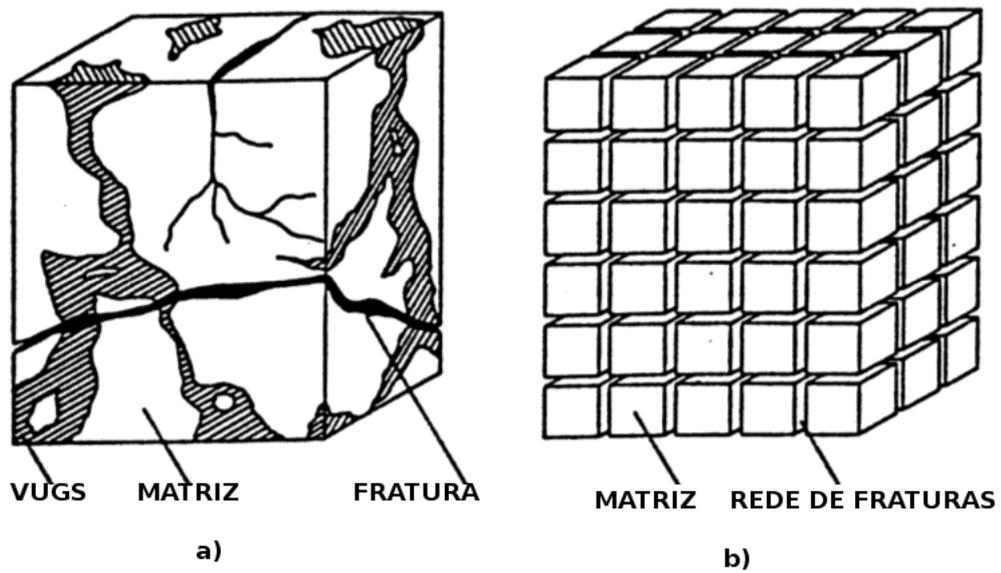
$$s = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{para } n = 2 \quad (2.7)$$

$$s = \frac{3abc}{ab+ac+bc} \quad \text{para } n = 3 \quad (2.8)$$

sendo  $s$  o espaçamento entre as fraturas, ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ) os intervalos de fraturas entre as fraturas para cada direção (comprimentos das faces dos blocos) e  $n$  o conjunto de fraturas normais, ver Figura 10.

Neste trabalho usaremos a função de transferência de massa de Warren e Root<sup>[7]</sup>.

Figura 10 – Modelo representativo: a) Modelo físico, b) Modelo numérico.



Fonte: Modificado de [7]

### 3 EQUAÇÕES DE BALANÇOS: FORMULAÇÃO 1

Neste capítulo, iremos formular o modelo matemático utilizado neste trabalho. Começamos deduzindo a equação do balanço de massa do sólido, onde obtemos a evolução da porosidade em função da deformação volumétrica, em seguida, desenvolvemos a equação de balanço de massa do fluido para os dois meios porosos (matriz e fratura), depois mostramos a equação do balanço do momento linear, onde obtemos a deformação volumétrica em função da tensão média total. Por fim, formulamos a equação geral do balanço de massa do fluido e evolução da porosidade em função da tensão média total, além da equação de equilíbrio. Para as equações de balanços foram admitidas as seguintes hipóteses abaixo:

- Meio poroso saturado.
- Meio poroso deformável.
- Meio poroso isotérmico.
- Fluxo monofásico.
- Fluido levemente compressível.
- Sólido compressível.
- Termo de fonte/sumidouro nulo.

#### 3.1 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO SÓLIDO

A equação de balanço de massa do sólido para os dois meios (matriz rochosa e fratura) pode ser expressa da seguinte maneira<sup>[52, 53]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) + \nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)\mathbf{\dot{u}}) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\rho_s$  é a densidade do sólido no meio poroso,  $\phi$  é a porosidade total do meio,  $\mathbf{\dot{u}}$  é o vetor de velocidade do sólido no meio poroso.

Expandindo o primeiro termo da Equação 3.1 e utilizando a identidade abaixo no segundo termo:

$$\nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)\mathbf{\dot{u}}) = \rho_s\mathbf{\dot{u}} \cdot \nabla(1 - \phi) + (1 - \phi)\mathbf{\dot{u}} \cdot \nabla(\rho_s) + (1 - \phi)\rho_s\nabla \cdot \mathbf{\dot{u}} \quad (3.2)$$

obtemos:

$$-\rho_s \frac{\partial(\phi)}{\partial t} + (1 - \phi) \frac{\partial(\rho_s)}{\partial t} - \rho_s\mathbf{\dot{u}} \cdot \nabla(\phi) + (1 - \phi)\mathbf{\dot{u}} \cdot \nabla(\rho_s) + (1 - \phi)\rho_s\nabla \cdot \mathbf{\dot{u}} = 0 \quad (3.3)$$

Considerando a definição de derivada material em relação a velocidade do sólido:

$$\frac{D(f)}{Dt} = \frac{\partial(f)}{\partial t} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla(f) \quad (3.4)$$

sendo  $f$  uma função diferenciável de um campo escalar. Usando a definição da derivada material na Equação 3.3 obtemos:

$$\frac{D(\phi)}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1-\phi)\dot{\epsilon}_v \quad (3.5)$$

onde  $\dot{\epsilon}_v = \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$  é o incremento da taxa de deformação volumétrica no meio poroso.

Derivando a Equação 2.1.(c) em relação ao tempo, temos:

$$\frac{D(\phi)}{Dt} = \frac{D(\phi_1)}{Dt} + \frac{D(\phi_2)}{Dt} \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação 3.6 na Equação 3.5 obtemos:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} + \frac{D(\phi_2)}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1-\phi)\dot{\epsilon}_v \quad (3.7)$$

Daí a equação do balanço de massa de sólido para cada meio fica:

- Meio 1:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1-\phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_2)}{Dt} \quad (3.8)$$

- Meio 2:

$$\frac{D(\phi_2)}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1-\phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_1)}{Dt} \quad (3.9)$$

Agora precisamos calcular os termos  $\frac{D(\phi_2)}{Dt}$  da Equação 3.8,  $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$  da Equação 3.9 e  $\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$ , que é o termo de compressibilidade do sólido (ver Apêndice A e Apêndice B).

Com os termos citados acima calculados, podemos reescrever as equações 3.8 e 3.9 em funções das pressões de cada meio e da taxa de deformação volumétrica, utilizando as equações B.18, B.19 e B.20, obtemos:

- Meio 1:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \frac{1-\phi}{1-\phi} \left( \frac{\alpha-\phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha-\phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \\ &+ (1-\phi)\dot{\epsilon}_v - \left( \frac{\phi_2(\alpha-\phi)}{K_s} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &- \left( \frac{\phi_2(\alpha-\phi)}{K_{ns}} - \frac{\phi_2(1-\phi_2)}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \phi_2(1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned}$$

- Meio 2:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \frac{1-\phi}{1-\phi} \left( \frac{\alpha-\phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha-\phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \\ &+ (1-\phi)\dot{\epsilon}_v - \left( \frac{\phi_1(\alpha-\phi)}{K_s} - \frac{\phi_1(1-\phi_1)}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &- \left( \frac{\phi_1(\alpha-\phi)}{K_{ns}} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \phi_1(1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned}$$

Organizando as equações acima, resulta na equação de balanço de massa do sólido para cada meio.

- Meio 1:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \left( (1-\phi_2) \frac{\alpha-\phi}{K_s} - \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left( (1-\phi_2) \frac{\alpha-\phi}{K_{ns}} + \frac{(1-\phi_2)\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ (\alpha(1-\phi_2) - \phi_1)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Meio 2:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \left( (1-\phi_1) \frac{\alpha-\phi}{K_s} + \frac{(1-\phi_1)\phi_1}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left( (1-\phi_1) \frac{\alpha-\phi}{K_{ns}} - \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ (\alpha(1-\phi_1) - \phi_2)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou de forma geral:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_i}{Dt} &= \left( (1-\phi_{(3-i)}) \frac{\alpha-\phi}{K_i} - \frac{\phi_i\phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \\ &+ \left( (1-\phi_{(3-i)}) \frac{\alpha-\phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1-\phi_{(3-i)})\phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \\ &+ (\alpha(1-\phi_{(3-i)}) - \phi_i)\dot{\epsilon}_v \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo  $K_s$  o módulo volumétrico dos grãos do sólido,  $K_n$  o módulo volumétrico da fratura ou rigidez normal da fratura,  $s$  o espaçamento das fraturas,  $\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$  o coeficiente macro dos coeficientes de Biot,  $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$  e  $\alpha_2 = 1 - \frac{K_t}{K_{ns}}$  os coeficientes de Biot,  $K_t$  o módulo volumétrico do esqueleto sólido,  $K_f$  o módulo volumétrico do fluido,  $K_1 = K_s$  e  $K_2 = K_{ns}$ .

Observamos que na Equação 3.12 a evolução da porosidade depende diretamente das pressões de cada meio poroso, matriz e fratura, além da deformação volumétrica. Assim, para poder fazer uso da técnica do *stress split*, precisamos substituir a deformação volumétrica pela tensão média total, que iremos deduzir mais adiante.

### 3.2 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO FLUIDO

Admitindo as hipóteses mencionadas na introdução do capítulo e além disso, desprezando o termo não-advectivo e considerando o conceito de dupla porosidade, o balanço de massa de líquido para o meio poroso  $i$  pode ser expressado como<sup>[52]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \phi_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i + \rho_i \phi_i \dot{\mathbf{u}}) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

onde  $\rho_i$  é a densidade de líquido, em função da pressão, no meio  $i$ ,  $\phi_i$  é a porosidade no meio  $i$ ,  $\mathbf{q}_i$  é o fluxo de Darcy no meio  $i$  e  $\Gamma$  é a função de transferência de massa entre os dois meios.

Desenvolvendo a Equação 3.13 e utilizando a Equação 3.2 obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{\partial(\rho_i)}{\partial t} + \rho_i \frac{\partial(\phi_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + \phi_i \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_i \\ + \rho_i \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi_i + \rho_i \phi_i \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \end{aligned}$$

Fazendo uso da definição da derivada material na equação acima temos:

$$\phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \frac{D\phi_i}{Dt} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + \rho_i \phi_i \dot{\epsilon}_v + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

Agora substituindo o segundo termo da Equação 3.14 pela Equação 3.12 e resolvendo a Equação 3.14 encontramos:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \left[ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_i} - \frac{\phi_i \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \right. \\ \left. + \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1 - \phi_{(3-i)}) \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \right. \\ \left. + \alpha(1 - \phi_{(3-i)}) \dot{\epsilon}_v - \phi_i \dot{\epsilon}_v \right] + \rho_i \phi_i \dot{\epsilon}_v + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \end{aligned}$$

então resulta:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \left[ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_i} - \frac{\phi_i \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \right. \\ \left. + \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1 - \phi_{(3-i)}) \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \right. \\ \left. + \alpha(1 - \phi_{(3-i)}) \dot{\epsilon}_v \right] + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3.15) \end{aligned}$$

Utilizando a equação de estado do líquido A.2, a Lei de Darcy A.3, a equação da função de transferência de massa entre os meios 2.2 na Equação 3.15, com velocidade do sólido pequena e admitindo o fato que as distribuições das variáveis no espaço não mudam drasticamente, isto é,  $\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla(f) \ll \frac{\partial(f)}{\partial t}$ , os termos convectivos,  $\nabla \rho_i \mathbf{q}_i$ , são negligenciados, assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi_i \frac{1}{K_f} \frac{Dp_i}{Dt} &+ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_i} - \frac{\phi_i \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \\
&+ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1 - \phi_{(3-i)}) \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \\
&+ \alpha (1 - \phi_{(3-i)}) \dot{\epsilon}_v - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) \\
&+ (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo  $\mathbf{K}_i$  o tensor de permeabilidade intrínseca para o meio  $i$ ,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do líquido e  $\mathbf{g}$  a aceleração da gravidade.

Reorganizando a Equação 3.16, resulta na equação de balanço de massa do fluido para o meio poroso  $i$ :

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_{(3-i)}) &\left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_i} + \frac{\phi_i}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{\phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} + \alpha \dot{\epsilon}_v \right] \\
&- \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) + (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim a equação do balanço de massa do fluido para cada meio fica:

- Meio 1:

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_2) &\left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \alpha \dot{\epsilon}_v \right] \\
&- \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} (\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g}) \right) + \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

- Meio 2:

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_1) &\left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \alpha \dot{\epsilon}_v \right] \\
&- \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} (\nabla p_2 - \rho_2 \mathbf{g}) \right) - \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  as densidades do fluido no meio 1 e 2 e  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  o tensor de permeabilidade intrínseca para o meio 1 e 2 respectivamente.

Assim como na Equação 3.12 da evolução da porosidade, notamos que as Equações 3.18 e 3.19 do balanço de massa do fluido para cada meio poroso, matriz e fratura, também dependem das pressões de cada meio e da deformação volumétrica. Então, para poder fazer uso da técnica do *stress split*, precisamos substituir a deformação volumétrica pela tensão média total, que deduziremos posteriormente.

### 3.3 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MOMENTO (EQUILÍBRIO)

O balanço de momento para os meios porosos reduz a equação de Equilíbrio para tensão total, sendo os termos inercias e aceleração negligenciados.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (3.20)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões totais e  $\mathbf{b}$  é o vetor de força de corpo.

Por meio de um modelo constitutivo adequado, a equação de equilíbrio é transformada numa forma expressa em termos das velocidades de sólidos e pressões de fluido. Além disso, presume-se que as tensões totais são macroscópica e é a mesma em ambos os meios. Em contraste, as tensões efetivas, que são causadas por variações líquidas de tensões (tensão total mais a pressão do fluido) são diferentes em cada meio.

Uma possível decomposição da deformação<sup>[52, 54]</sup> é :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (3.21)$$

onde  $\boldsymbol{\epsilon}$  é a deformação total, onde se compreende a deformação elástica, plástica e outros tipos de deformação para cada meio poroso, neste trabalho consideramos apenas a deformação elástica, a qual está relacionada com os deslocamentos de sólidos através das condições de compatibilidade que pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.22)$$

O equilíbrio de tensões totais está para todo o meio, enquanto que as deformações irá se decompor em contribuições diferentes para cada meio e isso depende do modelo constitutivo mecânico adotado.

#### 3.3.1 Tensões Efetivas

A relação entre as mudanças na tensão total  $\boldsymbol{\sigma}$  e tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}'$  é dada por Terzaghi<sup>[24]</sup> e Biot<sup>[27]</sup>. Para meios de dupla porosidade, a tensão efetiva pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha_1 \mathbf{I} p_1 - \alpha_2 \mathbf{I} p_2 \quad (3.23)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os alfas de Biot.

A relação constitutivas da tensão efetiva com a deformação para o sistema de meio poroso fraturado é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{D}$  a matriz elástica constitutiva.

A relação inversa da Equação 3.24 pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}' \quad (3.25)$$

sendo  $\mathbf{C}$  a inversa da matriz elástica constitutiva.

Substituindo a Equação 3.23 na Equação 3.25 obtemos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma} + \alpha_1 \mathbf{I}p_1 + \alpha_2 \mathbf{I}p_2) \quad \text{logo} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1 + \mathbf{C}\alpha_2 \mathbf{I}p_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou

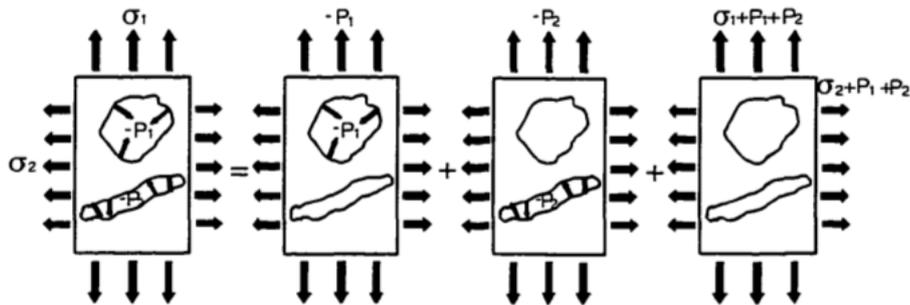
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1 - \mathbf{C}\alpha_2 \mathbf{I}p_2) \quad (3.27)$$

A matriz elástica constitutiva  $\mathbf{D}$  pode ser definida explicitamente numa geometria tri-dimensional para um meio isotrópico (ver Apêndice C).

### 3.3.2 Obtenção da Deformação Volumétrica

Agora vamos fazer a decomposição do estado de tensões do meio poroso de dupla porosidade, Figura 11.

Figura 11 – Decomposição do estado de tensões.



a) Componente total b) Componente 1 c) Componente 2 d) Componente 3

Fonte: Modificado de [44]

1. A Figura 11.b) representa a componente do carregamento hidrostática do meio 1 e o estado de deformação é representada da seguinte forma [45, 55, 56]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = -\mathbf{I} \frac{p_1}{3K_s} \quad (3.28)$$

onde  $K_s$  é o módulo volumétrico dos grãos do sólido.

2. A Figura 11.c) representa a componente do carregamento hidrostática do meio 2 e o estado de deformação é representada da seguinte forma [45]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = -\mathbf{I} \frac{p_2}{3K_n s} \quad (3.29)$$

onde  $K_n$  é o módulo volumétrico da fratura e  $s$  é o espaçamento entre as fraturas.

3. A Figura 11.d) representa a componente do carregamento do esqueleto ou material drenado do meio poroso, o estado de deformação é representada da seguinte forma [45, 55, 56].

$$\boldsymbol{\epsilon}_3 = \mathbf{C} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{I}p_1 + \mathbf{I}p_2) \quad (3.30)$$

sendo  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$  a inversa da matriz elástica constitutiva.

Utilizando a Equação 3.21 podemos expressar a deformação total do meio poroso como a soma das equações 3.28, 3.29 e 3.30:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3 \quad (3.31)$$

Substituindo cada estado de deformação temos:

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{I}\frac{p_1}{3K_s} - \mathbf{I}\frac{p_2}{3K_{ns}} + \mathbf{C} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{I}p_1 + \mathbf{I}p_2) \quad (3.32)$$

Aplicando o traço na Equação 3.32 e fazendo uso dos princípios das tensões efetivas, resulta:

$$\epsilon_v = \frac{1}{K_t} (\bar{p} + p_1 + p_2) - \frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} \quad (3.33)$$

onde  $\bar{p}$  é a tensão média total. (Para mais detalhes da passagem da Equação 3.32 para Equação 3.33 ver Apêndice C).

Reorganizando a Equação 3.33 obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \frac{1}{K_t} \bar{p} + \left( \frac{1}{K_t} - \frac{1}{K_s} \right) p_1 + \left( \frac{1}{K_t} - \frac{1}{K_{ns}} \right) p_2 \quad \text{dai,} \\ \epsilon_v &= \frac{1}{K_t} \bar{p} + \frac{1}{K_t} \left( \frac{K_s}{K_s} - \frac{K_t}{K_s} \right) p_1 + \frac{1}{K_t} \left( \frac{K_{ns}}{K_{ns}} - \frac{K_t}{K_{ns}} \right) p_2 \quad \text{então,} \\ \epsilon_v &= \frac{1}{K_t} \bar{p} + \frac{1}{K_t} \alpha_1 p_1 + \frac{1}{K_t} \alpha_2 p_2 \quad \text{logo,} \\ \epsilon_v &= \frac{1}{K_t} (\bar{p} + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Agora podemos expressar a taxa de deformação volumétrica  $\dot{\epsilon}_v$  em função da tensão média total como:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{1}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_1 \frac{Dp_1}{Dt} + \alpha_2 \frac{Dp_2}{Dt} \right) \quad (3.35)$$

Com a taxa de deformação volumétrica calculada podemos expressar a equação do balanço de massa do sólido quanto do fluido em função da tensão média total e pressões do fluido de cada meio.

### 3.4 EQUAÇÃO GERAL DO BALANÇO DE MASSA

Com todas as equações de balanços calculadas podemos escrever a equação geral para o balanço de massa do meio poroso.

#### 3.4.1 Equação Geral do Balanço de Massa do Fluido

Substituindo a Equação 3.35 na Equação 3.17 obtemos:

$$(1 - \phi_{(3-i)}) \left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_i} + \frac{\phi_i}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{\phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} + \alpha \frac{1}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} + \alpha_{(3-i)} \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \right) \right] - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) + (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2$$

Organizando a equação acima fica:

$$(1 - \phi_{(3-i)}) \left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_i} + \frac{\phi_i}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_i}{K_t} \right) \frac{Dp_i}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{\phi_{(3-i)}}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_{(3-i)}}{K_t} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} + \frac{\alpha}{K_t} \frac{D\bar{p}}{Dt} \right] - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) + (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3.36)$$

Assim a equação geral do balanço de massa do fluido para cada meio fica:

- Meio 1:

$$(1 - \phi_2) \left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \frac{\alpha}{K_t} \frac{D\bar{p}}{Dt} \right] - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} (\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g}) \right) + \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad (3.37)$$

- Meio 2:

$$(1 - \phi_1) \left[ \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha}{K_t} \frac{D\bar{p}}{Dt} \right] - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} (\nabla p_2 - \rho_2 \mathbf{g}) \right) - \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad (3.38)$$

Observamos que na equação do meio 1 e 2, ou seja, matriz e fratura, a equação geral do balanço de massa do fluido, equações 3.37 e 3.38 dependem das pressões de fluidos

de cada meio e da tensão média total. Com o termo mecânico expresso pela tensão média total, podemos fazer uso da técnica do *stress split*, ou seja, podemos desacoplar a parte de fluxo da parte mecânica e assim resolver as equações de forma sequencial.

### 3.4.2 Evolução da Porosidade

A equação geral da evolução da porosidade para o meio poroso de dupla porosidade, se obtém quando substituímos a Equação 3.35 na Equação 3.12:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_i}{Dt} &= \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_i} - \frac{\phi_i \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \\ &+ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1 - \phi_{(3-i)}) \phi_{(3-i)}}{K_f} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \\ &+ \alpha(1 - \phi_{(3-i)}) \frac{1}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} + \alpha_{(3-i)} \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \right) \\ &- \phi_i \frac{1}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} + \alpha_{(3-i)} \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \right) \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_i}{Dt} &= \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_i} - \frac{\phi_i \phi_{(3-i)}}{K_f} + \frac{\alpha_i (\alpha(1 - \phi_{(3-i)}) - \phi_i)}{K_t} \right) \frac{Dp_i}{Dt} \\ &+ \left( (1 - \phi_{(3-i)}) \frac{\alpha - \phi}{K_{(3-i)}} + \frac{(1 - \phi_{(3-i)}) \phi_{(3-i)}}{K_f} + \frac{\alpha_{(3-i)} (\alpha(1 - \phi_{(3-i)}) - \phi_i)}{K_t} \right) \frac{Dp_{(3-i)}}{Dt} \\ &+ \left( \frac{\alpha(1 - \phi_{(3-i)}) - \phi_i}{K_t} \right) \frac{D\bar{p}}{Dt} \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Portanto a equação geral da porosidade para cada meio poroso é,

- Meio 1:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \left( (1 - \phi_2) \frac{\alpha - \phi}{K_1} - \frac{\phi_1 \phi_2}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1)}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left( (1 - \phi_2) \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{(1 - \phi_2) \phi_2}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1)}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ \left( \frac{\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1}{K_t} \right) \frac{D\bar{p}}{Dt} \end{aligned} \quad (3.40)$$

- Meio 2:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \left( (1 - \phi_1) \frac{\alpha - \phi}{K_2} - \frac{\phi_2 \phi_1}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2)}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ \left( (1 - \phi_1) \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{(1 - \phi_1) \phi_1}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2)}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left( \frac{\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2}{K_t} \right) \frac{D\bar{p}}{Dt} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Podemos notar que a evolução da porosidade, assim como a equação geral de balanço de massa do fluido para o meio 1 e 2, equações 3.37 e 3.38, depende das pressões de cada meio poroso e da tensão media total.

### 3.4.3 Equação Geral do Balanço de Momento Linear

Para obtermos a equação geral do balanço de momento, basta substituir a Equação 3.27 na Equação 3.20:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1 - \mathbf{C}\alpha_2 \mathbf{I}p_2)) + \mathbf{b} = 0$$

organizando a equação acima, resulta:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1 - \mathbf{D}\mathbf{C}\alpha_2 \mathbf{I}p_2) + \mathbf{b} = 0 \quad (3.42)$$

Com essa última equação concluímos toda formulação matemática de um meio poroso com dupla porosidade e dupla permeabilidade para o primeiro modelo. A formulação até aqui desenvolvida segue uma abordagem que evidencia o termo mecânico,  $\frac{D\bar{p}}{Dt}$ , nas equações de fluxos, para podermos utilizar a técnica do *stress split*. Esse termo mecânico causado pela deformação do meio poroso apresenta uma menor variação, efeito de acoplamento, sobre o campo de pressão. Desta forma, o emprego do algoritmo do *stress split* poderá ser feito após a discretizações das equações.

Assim, como já mencionado anteriormente, as equações de fluxo dos meios porosos e as equações das evoluções das porosidades, matriz e fratura, estão em funções das pressões de fluido de cada meio e da tensão média total. Além disso, a equação geral do balanço de momento linear também depende das pressões de cada meio poroso, matriz e fratura.

No próximo capítulo, iremos desenvolver a segunda formulação de um meio poroso com dupla permeabilidade e dupla porosidade.

## 4 EQUAÇÕES DE BALANÇOS: FORMULAÇÃO 2

Neste capítulo, mostraremos uma formulação matemática mais reduzidas. Utilizando algumas equações matemáticas já mostradas e novas hipóteses, obteremos novas equações para o balanço de massa do sólido, balanço de massa do fluido e balanço de momento linear. Esta formulação segue as hipóteses adotada por<sup>[40, 55]</sup> que são:

1. O fluxo de fluido dentro de cada subdomínio é independente do fluxo no outro subdomínio e qualquer acoplamento entre o fluxo de fluido na matriz porosa e a rede de fraturas é controlado apenas pelo termo de transferência de massa, ou seja, o líquido expulso da matriz que entra nas fraturas e vice versa. Portanto, a pressão do fluido, a porosidade, a permeabilidade e as demais propriedades do solo e dos fluidos dentro dos dois subdomínios são consideradas separadamente.
2. Dentro do primeiro contínuo, o fluxo de fluido é assumido como acoplado com a deformação da matriz. Este acoplamento é controlado através da taxa de variação da deformação volumétrica  $\dot{\epsilon}_v$ .
3. Supomos que a deformação do primeiro subdomínio é apenas devido à deformação volumétrica total da matriz porosa e qualquer mudança de volume das partículas sólidas é ignorada.
4. Dois valores de porosidade diferentes devem ser definidos para a matriz porosa e a região fraturada Figura 9, respectivamente, da seguinte forma:

- Meio 1:

$$\phi_1 = \frac{V_1}{V} \quad (4.1)$$

- Meio 2:

$$\phi_2 = \frac{V_2}{V} \quad (4.2)$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os valores de porosidade da matriz porosa e da rede fraturada respectivamente,  $V_1$  e  $V_2$  são os volume poroso e fraturado e  $V$  é o volume total.

5. Assumimos que ambas as forças do contorno e do corpo são realizadas apenas pelo subdomínio da matriz porosa. Além disso, levando em consideração que o volume das fraturas é normalmente uma pequena fração dos espaços vazios totais, presumimos que a compressibilidade da rede fraturada não altera drasticamente a compressibilidade de todo o meio poroso e pode ser ignorada.

6. A imbibição e a depleção do fluido são apenas através do subdomínio da rede fraturada.
7. Os dois subdomínios são assumidos como totalmente saturados.

Admitimos que a deformação do primeiro subdomínio também é causada pela compressibilidade das partículas sólidas e o acoplamento se dar através da tensão média total. Obtemos uma nova formulação matemática mais simplificada em relação ao modelo deduzido no capítulo anterior.

#### 4.1 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO SÓLIDO

Sabendo que a equação de balanço de massa do sólido para os dois meios pode ser expressa da seguinte maneira<sup>[52, 53]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) + \nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)\mathbf{\dot{u}}) = 0 \quad (4.3)$$

Utilizando os mesmos raciocínios do Capítulo 3 a equação do balanço de massa de sólido para cada meio fica:

- Meio 1:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_2)}{Dt} \quad (4.4)$$

- Meio 2:

$$\frac{D(\phi_2)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_1)}{Dt} \quad (4.5)$$

Agora admitindo as novas hipóteses listadas anteriormente, obtemos:

- Meio 1:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi_1)\dot{\epsilon}_v \quad (4.6)$$

- Meio 2:

$$\frac{D(\phi_2)}{Dt} = 0 \quad (4.7)$$

De forma mais geral, temos:

$$\frac{D(\phi_i)}{Dt} = \left[ \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi_i)\dot{\epsilon}_v \right] (2 - i) \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

Substituindo o termo de compressibilidade do sólido, dependente só do meio 1, pela Equação A.16 (ver Apêndice A) e a deformação volumétrica pela Equação 3.35, lembrando que a deformação do meio 2 é desprezada na Equação 4.8, resulta:

$$\frac{D(\phi_i)}{Dt} = \left[ \frac{(\alpha_i - \phi)}{K_i} \frac{Dp_i}{Dt} + \frac{(\alpha_i - \phi_i)}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} \right) \right] (2 - i) \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

Portanto, a Equação 4.9 representa a evolução da porosidade do meio 1.

## 4.2 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA DO FLUIDO

Sabendo que a equação de balanço de massa do fluido pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \phi_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i + \rho_i \phi_i \dot{\mathbf{u}}) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.10)$$

Podemos utilizar as hipóteses mencionadas nesse capítulo na equação acima, além de usar os mesmos procedimentos feitos no Capítulo 3. Assim, obtemos:

$$\phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \frac{D\phi_i}{Dt} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + \rho_i \phi_i \dot{\epsilon}_v (2 - i) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

Agora substituindo o segundo termo da Equação 4.11 pela Equação 4.8, temos:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \left[ \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi_i) \dot{\epsilon}_v \right] (2 - i) + \rho_i \phi_i \dot{\epsilon}_v (2 - i) \\ + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Utilizando a Equação de estado do líquido, A.2, a Equação 4.9 que engloba a densidade do sólido e a deformação volumétrica, a Lei de Darcy A.3, a Equação da função de transferência de massa entre os meios, 2.2, e a Equação da deformação volumétrica, 3.35, na Equação 4.12, obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{1}{K_f} \frac{Dp_i}{Dt} + \left[ \frac{(\alpha_i - \phi)}{K_i} \frac{Dp_i}{Dt} + \frac{(\alpha_i - \phi_i)}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} \right) \right] (2 - i) \\ + \frac{\phi_i}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} \right) (2 - i) - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) \\ + (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima, encontramos:

$$\begin{aligned} \phi_i \frac{1}{K_f} \frac{Dp_i}{Dt} + \left[ \frac{(\alpha_i - \phi)}{K_i} \frac{Dp_i}{Dt} + \frac{\alpha_i}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_i \frac{Dp_i}{Dt} \right) \right] (2 - i) \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \right) + (-1)^{i+1} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Portanto, a Equação 4.13 representa o balanço de massa de fluido para o meio poroso  $i$ .

Escrevendo a Equação 4.13 para cada meio poroso, temos:

- Meio 1:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{(\alpha_1 - \phi)}{K_1} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha_1}{K_t} \left( \frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_1 \frac{Dp_1}{Dt} \right) \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} (\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g}) \right) + \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Meio 2:

$$\frac{\phi_2}{K_f} \frac{Dp_2}{Dt} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} (\nabla p_2 - \rho_2 \mathbf{g}) \right) - \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad (4.15)$$

Assim, a matriz porosa depende da tensão média total e da pressão do fluido no meio, enquanto que a fratura depende apenas da pressão do fluido no meio.

### 4.3 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MOMENTO (EQUILÍBRIO)

Para obtermos a equação de balanço de momento para a nova formulação matemática, basta desprezar a deformação do meio poroso fraturado. Assim, a equação de equilíbrio resulta em:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1) + \mathbf{b} = 0 \quad (4.16)$$

Com essa última equação concluímos toda a segunda formulação matemática para o meio poroso de dupla porosidade e dupla permeabilidade.

A diferença entre estas duas formulações matemáticas de dupla porosidade e dupla permeabilidade, acontece nas hipóteses adotadas para obtenções dos modelos matemáticos. Na primeira formulação obtemos as equações de fluxos da matriz e fratura em funções das pressões,  $p_1$  e  $p_2$  e da tensão média total,  $\bar{p}$ . Isso acontece, porque a densidade do sólido e a deformação volumétrica dependem das pressões de cada meio poroso, matriz e fratura, além da tensão média total. Enquanto que, na segunda formulação a equação de fluxo da matriz depende apenas da pressão do meio poroso 1 e da tensão média total e a equação da fratura depende apenas da pressão do meio poroso 2, pois, só existe compressibilidade das partículas sólidas e deformação volumétrica para a matriz, ou seja, a densidade do sólido depende apenas da pressão do meio 1 e da tensão média total. Além disso, a equação de balanço de momento (equilíbrio), do modelo 1 depende das pressões de fluidos dos dois meios porosos, já o modelo 2 precisa apenas da pressão de fluido da matriz.

A semelhança entre as duas formulações é que ambas foram obtidas para meios de dupla porosidade e dupla permeabilidade usando os princípios das tensões efetivas de Terzaghi<sup>[24]</sup> e Biot<sup>[27]</sup>, para poder expressar a deformação volumétrica em função da tensão média total. Pois, com o termo mecânico expresso pela tensão média total,  $\bar{p}$ , podemos fazer uso da técnica do *stress split*. Como já mencionado anteriormente, o *stress split* é um algoritmo numérico que é resolvido por um esquema sequencial implícito. Essa técnica, nos proporcionará um ganho em tempo computacional em relação aos modelos totalmente acoplado, pois, permite que os modelos de fluxos e mecânicos possam ser tratados de forma desacopladas ou iterativa.

No próximo capítulo é feita a discretização do modelo matemático de dupla porosidade e dupla permeabilidade via métodos dos elementos finitos. Além disso, mostraremos os tipos de acoplamento numérico e em qual desses está inserida a técnica do *stress split*.

No Capítulo 6, é mostrado a validação das duas formulações e a comparação entre ambas. Independente, do modelo utilizado para resolução de problema de dupla estrutura, temos dois modelos muito bons para esse tipo de problema.

## 5 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, apresentaremos a formulação numérica do modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade que foram discretizadas e implementadas no código de elementos finitos CODE\_BRIGTH (*Coupled Deformation Brine Gas and Heat Transport*)<sup>[57]</sup>.

Primeiro, mostraremos o domínio do problema e a discretização desse domínio. Em seguida, para a discretização do problema, introduziremos o método dos elementos finitos, utilizando o método dos resíduos ponderados e aplicando o método de Galerkin para a função peso. Logo após, discretizaremos as equações de equilíbrio mecânico e equações de fluxo tanto para matriz quanto para fratura. Posteriormente, discretizaremos o tempo via diferença finitas e com isso obteremos a evolução da porosidade explicitamente. E por fim, apresentaremos os tipos de acoplamentos numéricos e suas características.

### 5.1 DOMÍNIO DO PROBLEMA

Seja  $\mathcal{L}$  um operador em derivadas parciais e  $l$  um termo de fonte, o problema geral pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathcal{L}x = l \quad (5.1)$$

dentro do domínio  $\Omega$ , satisfazendo a condição de contorno em  $\partial\Omega$  (ver Figura 12).

A formulação fraca da Equação 5.1 pode ser modelada pelo método dos resíduos ponderados, da seguinte maneira:

$$(\mathcal{L}x, w)_\Omega = (l, w)_\Omega \quad x \in D(\Omega), \forall w \in W(\Omega) \quad (5.2)$$

sendo  $D(\Omega)$  e  $W(\Omega)$  os espaços das funções aceitáveis e testes respectivamente. Além disso,  $(l, w)_\Omega$  é o produto interno no domínio  $\Omega$  definido como:

$$(a, b)_\Omega = \int_{\Omega} (a \cdot b) d\Omega \quad (5.3)$$

Podemos também denotar o produto interno na fronteira  $\partial\Omega$  definido como:

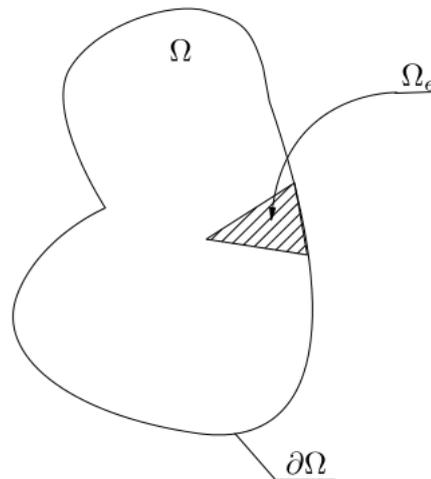
$$(\mathbf{a}, b)_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})b) d\partial\Omega \quad (5.4)$$

### 5.2 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Para discretizar o problema abordado neste trabalho, particionamos o domínio  $\Omega$  em subdomínio ou elementos  $ne$ , denotados como  $\Omega^e$ , tais que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{ne} (\Omega^e) \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{ne} (\Omega^e) = \emptyset \quad (5.5)$$

**Figura 12 – Domínio do Problema  $\Omega$  e Condição de Contorno  $\partial\Omega$ .**



**Fonte:** [58].

onde  $\emptyset$  denota o conjunto vazio. Com isso podemos introduzir os espaço de dimensão finita das funções peso e teste.

### 5.3 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS

Para resolver um modelo matemático existe em geral dois tipos de abordagem, o método analítico e o método numérico. Ao resolver problemas práticos, as abordagens numéricas são algumas vezes superiores aos tratamentos analíticos devido à sua versatilidade na reprodução das complexas condições físicas, mecânicas, hidráulicas e geológicas que existem na natureza. Na literatura encontramos alguns métodos numéricos, mas os dois tipos mais utilizados para resolver problemas de meio de dupla porosidade são os métodos de diferenças finitas e elementos finitos. Neste trabalho, abordaremos o método de elementos finitos para resolver numericamente o problema de dupla porosidade e dupla permeabilidade em meios porosos. Para isso, utilizaremos o método dos resíduos ponderados e o método de Galerkin.

#### 5.3.1 Métodos dos Resíduos Ponderados (MRP)

Obtido a discretização do domínio do problema, podemos aplicar o método dos resíduos ponderados para obter a equação integral do problema.

Considere a equação diferencial na forma<sup>[59]</sup>:

$$\mathcal{L}\varphi - \Phi = 0 \quad (5.6)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador diferencial,  $\varphi$  é a incógnita do problema e  $\Phi$  é uma função dada.

Como não podemos resolver esse problema direto, utilizamos uma solução aproximada, definida como:

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^m N_i \psi_i \quad (5.7)$$

onde  $N_i$  são as funções de forma,  $\psi_i$  são os valores desconhecidos nos nós da malha e  $m$  é o número de nós na malha.

Substituindo a Equação 5.7 na Equação 5.6, obtemos o seguinte termo residual:

$$\mathcal{L}\hat{\varphi} - \Phi = R_\Omega \quad (5.8)$$

onde  $R_\Omega$  é o resíduo ou erro causado pela substituição da solução aproximada.

A forma integral do método dos resíduos ponderados é dado pela equação abaixo:

$$\int_{\Omega} W_j R_\Omega d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (5.9)$$

sendo  $W_j$  a função peso. Observe que a aproximação de um número apropriado de integrais do resíduo ponderado no domínio  $\Omega$ , gerado de maneiras diferentes, sejam igual a zero.

Substituindo a Equação 5.8 na Equação 5.9, encontramos a equação integral do MRP que reduz ao valor de  $\psi_i$  : em cada nó.

$$\int_{\Omega} W_j (\mathcal{L}\hat{\varphi} - \Phi) d\Omega = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

Para resolução da equação acima precisamos definir a forma da função peso. Existem vários métodos de obter a função peso, entre eles temos, Petrov-Galerkin, Colocação Pontual e Galerkin. Neste trabalho utilizaremos o Método de Galerkin.

### 5.3.2 Método de Galerkin

A vantagem de se utilizar o Método de Galerkin é que a função peso pode ser a própria função de interpolação usada para definir a solução aproximada  $\hat{\varphi}$ , ou seja,

$$W_j = N_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (5.11)$$

### 5.3.3 Função de Forma

A função de interpolação ou forma,  $N_i$ , são usadas para mapear os elementos de deslocamentos e pressão de fluido nos pontos nodais no método de elementos finitos. A

função de forma é usado para obter as expressões para a variação das variáveis desconhecidas dentro de um elemento em termos dos valores nodais. Assim, seja  $\boldsymbol{\varphi}$  as funções incógnitas, temos:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{N}\boldsymbol{\varphi} = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

onde o subscrito  $n$  denota o número de funções de forma do problema. Quando  $n = n^u$ , temos o número de funções de forma do problema de equilíbrio mecânico, da mesma maneira, quando  $n = n^{pm}$  e  $n = n^{pf}$  será o número de funções de forma do problema das equações das pressões. Neste trabalho,  $n^u = n^{pm} = n^{pf}$ .

#### 5.4 EQUAÇÕES A SEREM DISCRETIZADAS

Nesta seção, abordaremos a discretização do problema hidro-mecânico. Para isso, iremos discretizar as equações do modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade, ou seja, as equações do momento linear e do balanço de massa para as pressões. As incógnitas do problema são os deslocamentos e as pressões de fluido da matriz e fratura.

Para resolução da equação de equilíbrio, numericamente, definimos uma solução apropriada da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \mathbf{u} \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{N}_u$  é o vetor de função de forma para o deslocamento e  $\mathbf{u}$  é um vetor de deslocamento nodal.

Analogamente a equação de equilíbrio, definimos uma solução apropriada para equação de fluxo na matriz e na fratura da seguinte forma:

$$\hat{p}_1 = \mathbf{N}_{pm} \mathbf{p}_1 \quad (5.14)$$

$$\hat{p}_2 = \mathbf{N}_{pf} \mathbf{p}_2 \quad (5.15)$$

onde  $\mathbf{N}_{pm}$  e  $\mathbf{N}_{pf}$  são os vetores de funções de forma para as pressões da matriz e fratura, respectivamente e  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  são os vetores de pressões.

Diferentemente das pressões, Equações 5.14 e 5.15, a tensão média total é o próprio vetor de tensão média, expressa da seguinte forma:

$$\hat{\bar{p}} = \bar{\mathbf{p}} \quad (5.16)$$

onde  $\bar{\mathbf{p}}$  é o vetor de tensão média total. Para mais detalhes das funções de formas e vetores das soluções ver Apêndice D.

Isso acontece, pois a tensão média total é um pós processo, que é definida sobre cada ponto de Gauss do elemento, ou seja, é um valor médio calculado em cada ponto de Gauss.

Por exemplo: se o elemento for um triângulo temos um ponto de Gauss, então a tensão média será o próprio ponto Gauss daquele elemento. Já se o elemento for um quadrado, teríamos quatro pontos de Gauss e o valor da tensão média total é a média no elemento desses quatro pontos de Gauss.

Neste trabalho, o número de função de forma do problema de equilíbrio mecânico será igual ao número de funções de forma dos problemas das equações das pressões.

#### 5.4.1 Equação de Equilíbrio: Modelo 1

Aplicando o MRP na Equação 3.20 sobre o domínio  $\Omega$ , o resíduo poder ser escrito da seguinte forma:

$$R_u = \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\Omega_u \quad (5.17)$$

onde  $R_u$  e  $\Omega_u$  são o resíduo e o domínio do problema mecânico respectivamente,  $\mathbf{N}$  é o vetor da função peso de Galerkin e o sobrescrito  $T$  é o transposto da matriz ou vetor.

Agora, aplicando a integração por partes e o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da Equação 5.17 obtemos:

$$R_u = \int_{\Omega_u} (\nabla \mathbf{N})_u^T \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega_u - \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\Omega_u - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}_u \mathbf{t}^T d\partial\Omega_u \quad (5.18)$$

onde  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  é a tensão aplicada em um contorno do domínio  $\partial\Omega_u$ .

As deformações dentro de um único elemento estão relacionados a deslocamentos nodais através das derivadas das funções de forma  $\mathbf{B}_u$  da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{u} \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{B}_u = \mathbf{S}_u \mathbf{N}_u = \nabla \mathbf{N}_u$ .

Por fim, substituindo as equações 3.27 e 5.19 na Equação 5.18, encontramos:

$$\begin{aligned} R_u &= \int_{\Omega_u} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u) d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \int_{\Omega_u} \alpha_1 (\mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_{pm}) d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} \\ &\quad - \int_{\Omega_u} \alpha_2 (\mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_{pf}) d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} - \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\partial\Omega_u \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.20)$$

sendo  $\mathbf{m}$  o vetor de traço de tensores na forma vetorial.

Colocando a equação de equilíbrio, Equação 5.20, em forma matricial, temos:

$$R_u = \mathbf{K}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{C}_{1u} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} - \mathbf{C}_{2u} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial t} \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{K}_u$  é a matriz de rigidez, definida pelos termos da integração de tensões interna,  $\mathbf{C}_{1u}$  e  $\mathbf{C}_{2u}$  são os coeficientes da matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico e  $\mathbf{f}_u$  é a contribuição ao vetor de carga devido as forças de corpo e as condições de contorno. (Para mais detalhes das matrizes e dos coeficientes ver Apêndice D).

#### 5.4.2 Equação de Fluxo da Matriz: Modelo 1

Agora aplicando o (MRP) na equação geral do balanço de massa do fluido para matriz, Equação 3.37, e colocando o termo de armazenamento do fluido em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{pm} = & \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm} \frac{\phi_1}{K_f} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pm} + \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm} \left[ \left( (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} \right) - \frac{\phi_1 \phi_2}{K_f} \right) \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial t} \right. \\
& + (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} + \frac{\phi_2}{K_f} \right) \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial t} + (1 - \phi_2) \frac{\alpha}{K_t} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \left. \right] d\Omega^{pm} \\
& - \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} (\nabla \hat{p}_1 - \rho_1 \mathbf{g}) \right) d\Omega^{pm} + \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm} \frac{\beta k_{11}}{\mu} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) d\Omega^{pm} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Utilizando o teorema da divergência no terceiro termo do lado direito da Equação 5.22, substituindo o valor da função aproximada e fazendo  $\mathbf{B}_{pm} = \nabla \mathbf{N}_{pm}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{pm} = & \int_{\Omega^{pm}} \frac{\phi_1}{K_f} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pm} \\
& + \int_{\Omega^{pm}} \left[ (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} \right) - \frac{\phi_1 \phi_2}{K_f} \right] \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pm} \\
& + \int_{\Omega^{pm}} (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} + \frac{\phi_2}{K_f} \right) \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pf} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} d\Omega^{pm} \\
& + \int_{\Omega^{pm}} (1 - \phi_2) \frac{\alpha}{K_t} \mathbf{N}_{pm}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega^{pm} + \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \mathbf{B}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pm} \\
& + \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \rho_1 \mathbf{g} d\Omega^{pm} - \int_{\partial \Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \bar{\mathbf{q}}_m d\partial \Omega^{pm} \\
& + \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pm} - \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pm} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

onde  $\bar{\mathbf{q}}_m$  é a condição de contorno mista aplicada em uma dada região do contorno do domínio,  $\partial \Omega^{pm}$ .

Expressando a equação de fluxo para matriz, Equação 5.23, em forma matricial, fica:

$$(\mathbf{A}_{1m} + \mathbf{A}_{2m}) \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_{3m} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} + \mathbf{A}_{4m} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + (\mathbf{Q}_m + \mathbf{M}_{1m}) \mathbf{p}_1 - \mathbf{M}_{2m} \mathbf{p}_2 + \bar{\mathbf{Q}}_m = 0 \quad (5.24)$$

sendo  $\mathbf{A}_{1m}$ ,  $\mathbf{A}_{2m}$ ,  $\mathbf{A}_{3m}$ ,  $\mathbf{A}_{4m}$ ,  $\mathbf{Q}_m$ ,  $\mathbf{M}_{1m}$ ,  $\mathbf{M}_{2m}$  e  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  os coeficientes da equação de fluxo discretizada (ver Apêndice D).

### 5.4.3 Equação de Fluxo da Fratura: Modelo 1

Analogamente a equação de fluxo da matriz, obtemos a equação de fluxo da fratura discretizada, como:

$$\begin{aligned}
R_{pf} &= \int_{\Omega^{pf}} \frac{\phi_2}{K_f} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} d\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} \left[ (1 - \phi_1) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} \right) - \frac{\phi_2 \phi_1}{K_f} \right] \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} d\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} (1 - \phi_1) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} + \frac{\phi_1}{K_f} \right) \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pm} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} (1 - \phi_1) \frac{\alpha}{K_t} \mathbf{N}_{pf}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega^{pf} + \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \mathbf{B}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \rho_2 \mathbf{g} d\Omega^{pf} - \int_{\partial\Omega^{pf}} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \bar{\mathbf{q}}_f d\partial\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pf} - \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pf} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{B}_{pf} = \nabla \mathbf{N}_{pf}$  e  $\bar{\mathbf{q}}_f$  é a condição de contorno mista aplicada em uma dada região do contorno do domínio,  $\partial\Omega^{pf}$ .

Expressando a equação de fluxo para fratura, Equação 5.25, em forma matricial, fica:

$$(\mathbf{A}_{1f} + \mathbf{A}_{2f}) \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} + \mathbf{A}_{3f} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_{4f} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + (\mathbf{Q}_f - \mathbf{M}_{1f}) \mathbf{p}_2 + \mathbf{M}_{2f} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_f = 0 \quad (5.26)$$

sendo  $\mathbf{A}_{1f}$ ,  $\mathbf{A}_{2f}$ ,  $\mathbf{A}_{3f}$ ,  $\mathbf{A}_{4f}$ ,  $\mathbf{Q}_f$ ,  $\mathbf{M}_{1f}$ ,  $\mathbf{M}_{2f}$  e  $\bar{\mathbf{Q}}_f$  os coeficientes da equação de fluxo discretizada (ver Apêndice D).

Analogamente ao modelo 1, podemos obter as equações discretizadas de equilíbrio, de fluxo da fratura e de fluxo da matriz para o modelo 2.

### 5.4.4 Equação de Equilíbrio: Modelo 2

Analogamente a equação de equilíbrio discretizada do modelo 1, temos:

$$\begin{aligned}
R_u &= \int_{\Omega_u} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u) d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \int_{\Omega_u} \alpha_1 (\mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_{pm}) d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} \\
&- \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\Omega_u \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\partial\Omega_u \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Colocando a equação de equilíbrio para o modelo 2, Equação 5.27, em forma matricial, temos:

$$R_u = \mathbf{K}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{C}_{1u} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial t} \quad (5.28)$$

A discretização segue o mesmo raciocínio do modelo 1, com isso apenas eliminamos o termo  $\mathbf{C}_{2u} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t}$  de acoplamento, referente ao meio 2, do problema de equilíbrio mecânico.

#### 5.4.5 Equação de Fluxo da Matriz: Modelo 2

Analogamente a equação de fluxo da matriz discretizada do modelo 1, temos:

$$\begin{aligned}
R_{pm} &= \int_{\Omega^{pm}} \frac{\phi_1}{K_f} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pm} \\
&+ \int_{\Omega^{pm}} \left( \frac{\alpha_1 - \phi}{K_1} + \frac{\alpha_1 \alpha_1}{K_t} \right) \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} d\Omega^{pm} \\
&+ \int_{\Omega^{pm}} \frac{\alpha_1}{K_t} \mathbf{N}_{pm}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} d\Omega^{pm} + \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \mathbf{B}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pm} \\
&+ \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \rho_1 \mathbf{g} d\Omega^{pm} - \int_{\partial\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \bar{\mathbf{q}}_m d\partial\Omega^{pm} \\
&+ \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pm} - \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pm} \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Expressando a equação de fluxo da matriz, modelo 2, Equação 5.29, em forma matricial, fica:

$$(\mathbf{A}_{1m} + \mathbf{A}_{22m}) \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_{44m} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + (\mathbf{Q}_m + \mathbf{M}_{1m}) \mathbf{p}_1 - \mathbf{M}_{2m} \mathbf{p}_2 + \bar{\mathbf{Q}}_m = 0 \quad (5.30)$$

onde  $\mathbf{A}_{1m}$ ,  $\mathbf{A}_{4m}$ ,  $\mathbf{Q}_m$ ,  $\mathbf{M}_{1m}$ ,  $\mathbf{M}_{2m}$  e  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  são iguais ao modelo 1 e  $\mathbf{A}_{22m}$  e  $\mathbf{A}_{44m}$  são diferentes de  $\mathbf{A}_{2m}$  e  $\mathbf{A}_{4m}$  do modelo 1. Além disso, o termo  $\mathbf{A}_{3m} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t}$  não existe no modelo 2. Assim, temos os coeficientes da equação de fluxo da matriz discretizada, ver Apêndice D.

#### 5.4.6 Equação de Fluxo da Fratura: Modelo 2

Analogamente a equação de fluxo da fratura discretizada do modelo 1, temos:

$$\begin{aligned}
R_{pf} &= \int_{\Omega^{pf}} \frac{\phi_2}{K_f} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} d\Omega^{pf} + \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \mathbf{B}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \rho_2 \mathbf{g} d\Omega^{pf} - \int_{\partial\Omega^{pf}} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \bar{\mathbf{q}}_f d\partial\Omega^{pf} \\
&+ \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pm} \mathbf{p}_1 d\Omega^{pf} - \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \mathbf{p}_2 d\Omega^{pf} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Expressando a equação de fluxo da fratura para o modelo 2, Equação 5.31, em forma matricial, fica:

$$\mathbf{A}_{1f} \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} + (\mathbf{Q}_f - \mathbf{M}_{1f}) \mathbf{p}_2 + \mathbf{M}_{2f} \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_f = 0 \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{A}_{1f}$ ,  $\mathbf{Q}_f$ ,  $\mathbf{M}_{1f}$ ,  $\mathbf{M}_{2f}$  e  $\bar{\mathbf{Q}}_f$  são iguais ao do modelo 1. Enquanto que  $\mathbf{A}_{2f}$ ,  $\mathbf{A}_{3f}$  e  $\mathbf{A}_{4f}$  não existem no modelo 2. Desta forma, esses são os coeficientes da equação de fluxo da fratura discretizada para o modelo 2, ver Apêndice D.

## 5.5 DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO: MODELO 1 E 2

A formulação de elementos finitos pode ser encontrada integrando-se no tempo. Para isso, vamos usar um esquema de diferença finita totalmente implícita no domínio de discretização temporal, tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t}{\Delta t} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}_1^{t+\Delta t} - \mathbf{p}_1^t}{\Delta t} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}_2^{t+\Delta t} - \mathbf{p}_2^t}{\Delta t} \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} = \frac{\bar{\mathbf{p}}^{t+\Delta t} - \bar{\mathbf{p}}^t}{\Delta t} \quad (5.36)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo.

Agora podemos discretizar as equações das evoluções das porosidades.

## 5.6 EVOLUÇÃO DA POROSIDADE

As discretizações das porosidades são realizadas utilizando o mesmo processo abordado no domínio do tempo, com isso temos:

- Matriz, Modelo 1:

$$\begin{aligned} \phi_1^{t+\Delta t} &= \phi_1^t + \left( (1 - \phi_2^t) \frac{\alpha - \phi^t}{K_1} - \frac{\phi_1^t \phi_2^t}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha (1 - \phi_2^t) - \phi_1^t)}{K_t} \right) (p_1^{t+\Delta t} - p_1^t) \\ &+ \left( (1 - \phi_2^t) \frac{\alpha - \phi^t}{K_2} + \frac{(1 - \phi_2^t) \phi_2^t}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha (1 - \phi_2^t) - \phi_1^t)}{K_t} \right) (p_2^{t+\Delta t} - p_2^t) \\ &+ \left( \frac{\alpha (1 - \phi_2^t) - \phi_1^t}{K_t} \right) (\bar{p}^{t+\Delta t} - \bar{p}^t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

- Fratura, Modelo 1::

$$\begin{aligned} \phi_2^{t+\Delta t} &= \phi_2^t + \left( (1 - \phi_1^t) \frac{\alpha - \phi^t}{K_2} - \frac{\phi_2^t \phi_1^t}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha (1 - \phi_1^t) - \phi_2^t)}{K_t} \right) (p_2^{t+\Delta t} - p_2^t) \\ &+ \left( (1 - \phi_1^t) \frac{\alpha - \phi^t}{K_1} + \frac{(1 - \phi_1^t) \phi_1^t}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha (1 - \phi_1^t) - \phi_2^t)}{K_t} \right) (p_1^{t+\Delta t} - p_1^t) \\ &+ \left( \frac{\alpha (1 - \phi_1^t) - \phi_2^t}{K_t} \right) (\bar{p}^{t+\Delta t} - \bar{p}^t) \end{aligned} \quad (5.38)$$

- Matriz, Modelo 2:

$$\begin{aligned} \phi_1^{t+\Delta t} &= \phi_1^t + \left( \frac{\alpha_1 - \phi^t}{K_1} + \frac{\alpha_1 (\alpha_1 - \phi_1^t)}{K_t} \right) (p_1^{t+\Delta t} - p_1^t) \\ &+ \frac{\alpha_1 - \phi_1^t}{K_t} (\bar{p}^{t+\Delta t} - \bar{p}^t) \end{aligned} \quad (5.39)$$

- Fratura, Modelo 2:

$$\phi_2^{t+\Delta t} = \phi_2^t \quad (5.40)$$

## 5.7 TIPOS DE ACOPLAMENTOS

Geralmente os tipos de acoplamento são classificados em quatro, que são: totalmente acoplado, acoplamento iterativo, pseudo-acoplamento e acoplamento fraco<sup>[60, 61, 62]</sup>. Dentre esses, o mais utilizado para resolver modelo de dupla porosidade numericamente é o totalmente acoplado. Mas, propomos resolver o modelo numérico usando o acoplamento iterativo. Cada técnica possui suas características que são:

- **Totalmente acoplado:** Sua principal característica é ser incondicionalmente estável, contudo, dependendo do problema a ser resolvido, a simulação pode apresentar um custo computacional bastante elevado e de difícil convergência. Neste tipo de acoplamento as equações de fluxo e equilíbrio mecânico são resolvidas simultaneamente a cada passo de tempo<sup>[60, 63]</sup> (ver Figura 13). Além disso, utiliza-se o método de Newton-Raphson para obter a solução do problema de acoplamento.
- **Acoplamento iterativo:** Neste tipo de acoplamento as equações de fluxo ou o problema de equilíbrio mecânico é resolvido primeiro e posteriormente o outro é resolvido, ou seja, são resolvidos separadamente e sequencialmente em cada passo de tempo até os problemas convergirem<sup>[4, 5, 41, 42, 64, 65, 66]</sup> (ver Figura 13). Este tipo de acoplamento permite que os critérios de convergência possam ser controlados mais facilmente, que os subproblemas possam ter diferentes aproximações e métodos de discretização em diferentes partes do domínio. A solução dessa forma de acoplamento é idêntica aos mesmo resultados obtidos usando a abordagem totalmente acoplada. Além disso, temos a vantagem da facilidade de implementação, diferentemente do totalmente acoplado, possibilitando uma maior flexibilidade e um menor custo computacional.

O acoplamento iterativo, pode ser dividido em quatro esquemas importantes<sup>[4, 5, 64]</sup>:

1. *Drained split.*
2. *Undrained split.*
3. *Fixed-strain split*
4. *Fixed-stress split*

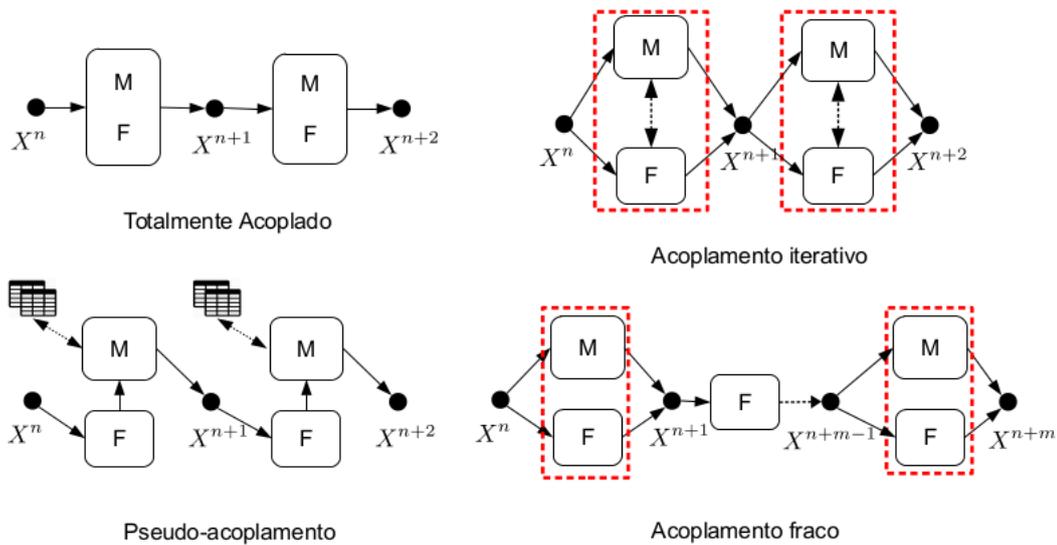
O acoplamento iterativo *drained split* e *undrained split* resolvem primeiro o problema mecânico e posteriormente o problema de fluxo, enquanto que os *fixed-strain split* e *fixed-stress split* resolvem primeiro o problema de fluxo e em seguida o problema

mecânico<sup>[4, 5, 41, 64, 65]</sup>. Além disso, o esquema sequencial *drained split* e *fixed-strain split* são condicionalmente estáveis e os limites de estabilidade dependem apenas da força do acoplamento entre o fluxo e a mecânica e são independentes do tamanho do intervalo de tempo<sup>[4, 5, 64, 65]</sup>. Portanto, os esquemas *drained split* e *fixed-strain split* não podem ser usados quando o acoplamento entre fluxo e mecânica é forte. Por outro lado, os esquemas sequenciais *undrained split* e *fixed-stress split* são incondicionalmente estáveis, independentemente da força de acoplamento, e não sofrem oscilações<sup>[4, 5, 64, 65]</sup>. Embora os esquemas *undrained split* e *fixed-stress split*, segundo os trabalhos de Kim<sup>[4, 5, 64]</sup>, sejam incondicionalmente estáveis, o *fixed-stress split* converge mais rapidamente do que o *undrained split*.

- **Pseudo-acoplamento:** Este tipo de esquema permite computar, algumas respostas mecânicas (compactação e variação da tensão) que são calculadas através de relações simples entre porosidade, permeabilidade e tensão. A porosidade e a permeabilidade são calculadas a partir de um modelo empírico dependente apenas do campo de pressão. O modelo empírico é implementado em forma de tabelas de porosidade e permeabilidade versus a pressão<sup>[67]</sup>. Este esquema economiza tempo e diminui o esforço computacional por não necessitar de um módulo para resolver o problema mecânico, desta forma, os dados precisam ser obtidos através de ensaios de laboratórios das amostras de testemunhos retirados do campo.
- **Acoplamento fraco:** Este esquema fornece a comunicação mais fraca entre o fluxo e a análise geomecânica. No acoplamento fraco, o problema de fluxo é calculado em cada passo de tempo e o problema mecânico é resolvido só para alguns passos de tempo selecionados<sup>[63]</sup>. Este método pode possibilitar a redução do custo computacional comparado aos acoplamento total e iterativo, mas perde precisão devido que a informação mecânica não retorna no mesmo intervalo de tempo e requer uma estimativas confiáveis do número de intervalos de tempo até a atualização das respostas mecânicas.

Assim, escolhemos o acoplamento iterativo, pois permite o uso do algoritmo *stress split*, onde podemos desacoplar o problema hidro-mecânico, resolvendo primeiro a parte hidráulica, fixando o termo mecânico na equação de fluxo de fluido e posteriormente resolvemos a parte mecânica em cada passo de tempo.

Figura 13 – Tipos de Acoplamento.



Fonte: [58].

Os Algoritmos de acoplamento podem ser descritos das seguintes formas:

- Modelo 1
  1. Atribuição das condições iniciais;
  2. Dado o estado de tensões iniciais calculamos a tensão média total inicial  $\bar{p}(x, 0)$ ;
  3. Com as porosidades  $\phi_1(x, t - 1)$  e  $\phi_2(x, t - 1)$  e fixando a tensão média total  $\bar{p}(x, t - 1)$  resolvemos o subproblema de fluxo, Equações 5.24 e 5.26, obtendo os campos de pressões  $p_1(x, t)$  e  $p_2(x, t)$ ;
  4. Com os campos de pressões,  $p_1(x, t)$  e  $p_2(x, t)$ , resolvemos o subproblema mecânico, Equação 5.21, obtendo o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(x, t)$ ;
  5. Através do deslocamento encontramos o estado de tensões e calculamos a tensão média total  $\bar{p}(x, t)$ ;
  6. Assim, com  $p_1(x, t)$ ,  $p_2(x, t)$  e  $\bar{p}(x, t)$  atualizamos as porosidades  $\phi_1(x, t)$  e  $\phi_2(x, t)$  nas Equações 5.37 e 5.38, respectivamente;
  7. Avançamos o tempo de simulação retornamos para o passo 3.
- Modelo 2
  1. Atribuição das condições iniciais;
  2. Dado o estado de tensões iniciais calculamos a tensão média total inicial  $\bar{p}(x, 0)$ ;

3. Com as porosidades  $\phi_1(x, t - 1)$  e  $\phi_2(x, 0)$  e fixando a tensão média total  $\bar{p}(x, t - 1)$  resolvemos o subproblema de fluxo, Equações 5.30 e 5.32, obtendo os campos de pressões  $p_1(x, t)$  e  $p_2(x, t)$ ;
4. Com o campo de pressão,  $p_1(x, t)$ , resolvemos o subproblema mecânico, Equação 5.28, obtendo o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(x, t)$ ;
5. Através do deslocamento encontramos o estado de tensões e calculamos a tensão média total  $\bar{p}(x, t)$ ;
6. Assim, com  $p_1(x, t)$  e  $\bar{p}(x, t)$  atualizamos a porosidade  $\phi_1(x, t)$  na Equação 5.39;
7. Avançamos o tempo de simulação retornamos para o passo 3.

## 6 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, mostraremos a validação numérica dos dois modelos matemáticos. Para isso, iremos fazer algumas simplificações numéricas dos modelos obtidos. Inicialmente, compararemos as soluções analíticas do problema de adensamento unidimensional com as soluções numéricas dos modelos simplificados, formulados no método de elementos finitos utilizando o acoplamento iterativo, fazendo uso da técnica do *stress split*. Posteriormente, confrontaremos as soluções analíticas do problema de Mandel com as soluções numéricas desenvolvidas neste trabalho.

Para os dois casos, de adensamento unidimensional e problema de Mandel, primeiramente inicializamos os campos de pressões e de tensões, para poder gerar os resultados numéricos apresentados neste trabalho.

### 6.1 MODELOS NUMÉRICOS SIMPLIFICADOS

Para comparação entre as soluções numéricas e as soluções analíticas para o caso de simples porosidade, foram consideradas algumas simplificações para os modelos numéricos de dupla porosidade e dupla permeabilidade, visando mostrar a validade da técnica do *stress split*.

Para o caso de meio poroso de porosidade única, ou seja, sem fratura, os modelos desenvolvidos também podem ser usados para simular os processos acoplados entre as deformações de rocha sólida e o fluxo de fluido.

Desta forma, temos que negligenciar a contribuição da pressão de fluido na fratura e o termo de pressão de fluido da fratura na equação de equilíbrio sólido. Além disso, precisamos considerar as seguintes mudanças:

- Nenhuma influência das fraturas no meio poroso.
- A troca de fluidos entre a matriz rochosa e as fraturas não existe, ou seja, o termo de transferência de massa entre os meios porosos é nulo.

#### 6.1.1 Modelo 1 Simplificado

Admitindo as considerações da seção 6.1, a equação de equilíbrio em forma matricial, Equação 5.20, é expressa da seguinte maneira:

$$R_u = \mathbf{K}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{C}_{1u} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial t} \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{K}_u$  é a matriz de rigidez, definida pelos termos da integração de tensões interna,  $\mathbf{C}_{1u}$  é o coeficiente da matriz de acoplamento do problema de equilíbrio mecânico e  $\mathbf{f}_u$  é a contribuição ao vetor de carga devido as forças de corpo e as condições de contorno.

Agora a equação de fluxo da matriz em forma matricial, Equação 5.24, é expressa da seguinte forma:

$$(\mathbf{A}_{1m} + \mathbf{A}_{2m}) \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_{4m} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_m \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_m = 0 \quad (6.2)$$

sendo  $\mathbf{A}_{1m}$ ,  $\mathbf{A}_{2m}$ ,  $\mathbf{A}_{4m}$ ,  $\mathbf{Q}_m$  e  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  os coeficientes da equação de fluxo discretizada.

### 6.1.2 Modelo 2 Simplificado

No modelo 2, a equação de equilíbrio e forma matricial, Equação 5.28, é igual para o modelo de simples porosidade, representado por:

$$R_u = \mathbf{K}_u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{C}_{1u} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial t} \quad (6.3)$$

Observamos que os dois modelo no caso de porosidade única tem as mesmas formas na equação de equilíbrio.

A equação de fluxo de fluido na matriz em forma matricial, Equação 5.30, para o modelo 2 é representado como:

$$(\mathbf{A}_{1m} + \mathbf{A}_{22m}) \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_{44m} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{Q}_m \mathbf{p}_1 + \bar{\mathbf{Q}}_m = 0 \quad (6.4)$$

Notamos, com as simplificações que os dois modelos numéricos reduzem as equações de porosidade única.

## 6.2 ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL

O problema de adensamento unidimensional é um dos exemplos mais conhecidos de poroelasticidade. Além disso, sua solução analítica para meios homogêneos de porosidade simples está amplamente disponível na literatura<sup>[68, 69]</sup>. Por isso, foi escolhida para análise da acurácia do modelo numérico.

### 6.2.1 Solução Analítica

A equação para obtenção da solução analítica para o problema de adensamento unidimensional<sup>[68]</sup> é dada por:

$$\alpha_{sp} \frac{\partial \varepsilon_{sp}}{\partial t} + S \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (6.5)$$

onde  $p$  é a poro pressão,  $\varepsilon_{sp}$  é a deformação do material poroso,  $\alpha_{sp}$  é o coeficiente de Biot's,  $S$  é a estoratividade do espaço dos poros,  $k$  é a condutividade hidráulica dos poros do material e  $\gamma_f$  é o peso unitário do fluido nos poros.

Sendo esses coeficientes expressos das seguintes formas:

$$\alpha_{sp} = 1 - \frac{C_s}{C_{msp}} \quad (6.6)$$

$$S = \phi_{sp} C_f + (\alpha_{sp} - \phi_{sp}) C_s \quad (6.7)$$

$$k = \frac{k_{11} \rho_f g}{\mu} \quad (6.8)$$

$$\gamma_f = \rho_f g \quad (6.9)$$

$$C_s = \frac{1}{K_s} \quad (6.10)$$

$$C_{msp} = \frac{1}{K_t} \quad (6.11)$$

$$C_f = \frac{1}{K_f} \quad (6.12)$$

onde  $\phi_{sp}$  é a porosidade,  $C_s$  é a compressibilidade do sólido,  $C_{msp}$  é a compressibilidade do meio poroso,  $\rho_f$  é a densidade do fluido e  $g$  é a gravidade.

No caso de deformação unidimensional a variação de volume é igual a deformação vertical. Assumindo o comportamento elástico linear e utilizando a teoria de tensão efetiva, que está relacionado com a tensão vertical efetiva dada pela equação abaixo:

$$\frac{\partial \varepsilon_{sp}}{\partial t} = -m_v \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial t} = -m_v \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} - \alpha_{sp} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (6.13)$$

onde  $m_v$  é o coeficiente de compressibilidade volumétrico do meio poroso, dado da seguinte forma:

$$m_v = \frac{1}{K_t + \frac{4}{3}G} \quad (6.14)$$

sendo  $G$  o módulo de cisalhamento do meio poroso.

Substituindo a Equação 6.13, que representa a taxa de deformação do volume, na Equação 6.5 obtemos a equação diferencial geral para o caso de adensamento unidimensional:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\gamma_f (S + \alpha_{sp}^2 m_v)} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\alpha_{sp} m_v}{S + \alpha_{sp}^2 m_v} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \quad (6.15)$$

Para uma carga axial constante,  $q$ , aplicada a Equação 6.15 reduz a uma equação de difusão homogênea dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (6.16)$$

onde  $c_v$  é o coeficiente de adensamento, representado como:

$$c_v = \frac{k}{\gamma_f (S + \alpha_{sp}^2 m_v)} \quad (6.17)$$

A condição inicial do problema é dada por:

$$p = p_0 = \frac{\alpha_{sp} m_v}{S + \alpha_{sp}^2 m_v} q \quad (6.18)$$

e as condições de contorno são dadas como:

$$p = 0 \quad \text{em} \quad z = h \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (6.20)$$

Assim, utilizando a transformada de Laplace no problema de adensamento unidimensional, Equações 6.16-6.20, a solução analítica para a poro pressão é dada pela equação abaixo<sup>[68]</sup>:

$$p = p_0 \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi z}{2h} \right] \exp \left[ - (2m-1)^2 \frac{\pi^2 c_v t}{4h^2} \right] \quad (6.21)$$

A equação diferencial para obter a solução analítica do deslocamento,  $u_z$ , é expressa por<sup>[68]</sup>:

$$U = \frac{u_z - u_0}{u_{\infty} - u_0} \Rightarrow u_z = U (u_{\infty} - u_0) + u_0 \quad (6.22)$$

onde  $U$  é o grau de adensamento,  $u_{\infty}$  é o deslocamento final, alcançado quando todas as poros pressões forem dissipadas e  $u_0$  é o deslocamento inicial, alcançado imediatamente a aplicação da carga  $q$ .

Os deslocamentos inicial e final são representados da seguinte forma:

$$u_0 = m_v h q \frac{S}{S + \alpha_{sp}^2 m_v} \quad (6.23)$$

$$u_{\infty} = m_v h q \quad (6.24)$$

quando  $S = 0$  o fluido e a partícula são incompressível.

Agora o grau de adensamento é expresso, usando a solução da Equação 6.21 para a distribuição da poro pressão, da seguinte maneira<sup>[68]</sup>:

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \exp \left[ - (2m-1)^2 \frac{\pi^2 c_v t}{4h^2} \right] \quad (6.25)$$

### 6.2.2 Soluções Numéricas para o Caso de Adensamento Unidimensional

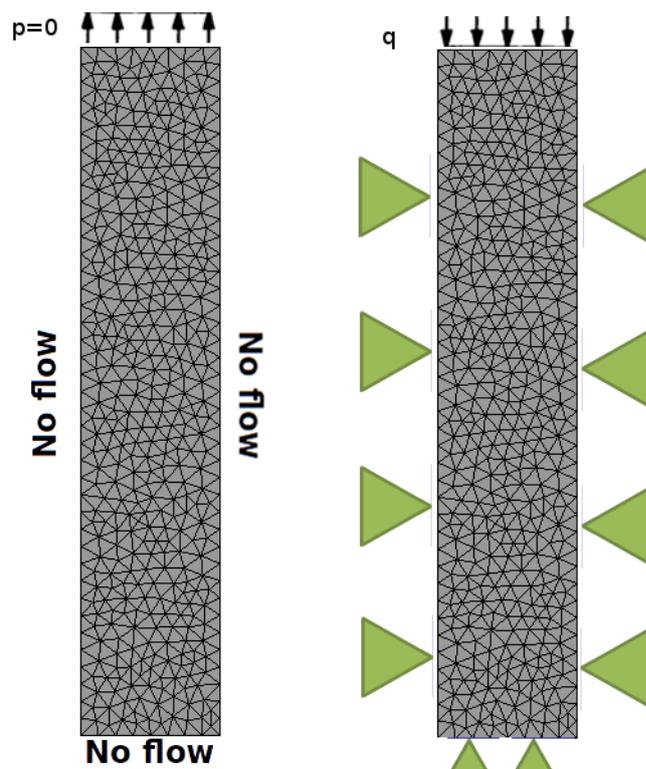
Para comparação entre as soluções analíticas e as soluções numéricas foram considerados os valores da Tabela 1. Nas soluções analíticas são utilizadas linhas contínuas enquanto que nas soluções numéricas foram utilizadas pontos dispersos, com sentido de obter as evoluções temporais para a poro pressão e deslocamento.

O domínio utilizado para obter as soluções, ver Figura 14, tem uma largura de 20  $m$  e altura de 100  $m$  e foi discretizado por uma malha composta por 464 nós e 830 elementos.

Tabela 1 – Parâmetros usados no adensamento unidimensional.

Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	2500	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.3	—
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.3	—
$K_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$3.3654 \times 10^{13}$	$MPa$
$q$	Carga aplicada	-1.4543	$MPa$

Figura 14 – Malha do problema unidimensional e condição de contorno.



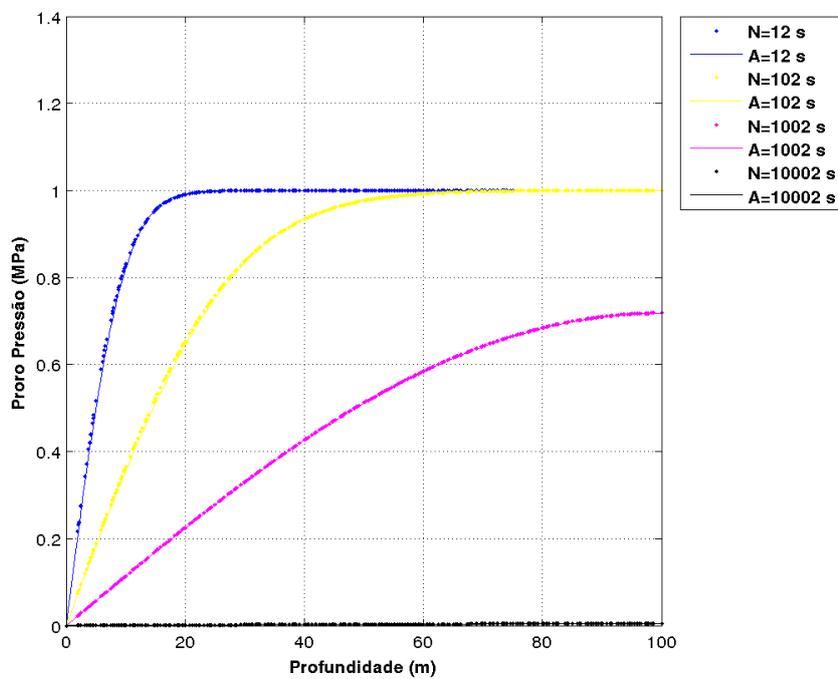
Fonte: Autor

### 6.2.2.1 Modelo 1

As Figuras 15 e 16 mostram a comparação entre as soluções numéricas e analíticas para a poro pressão e o deslocamento, respectivamente, considerando o modelo 1. Podemos observar que os resultados são bastante satisfatório mostrando uma coerência na poro pressão, Figura 15, e no deslocamento, Figura 16, para todos os tempos analisados. Na Figura 16 observamos que as curvas dos deslocamentos foram obtidas no topo do domínio, ou seja,  $h = 100$  m, e os resultados apresentados mostram uma boa concordância entre as curvas analítica e numérica. As Figuras 17 e 18 apresentam os perfis em escalas de cores para pressão e deslocamento nos tempos 12, 102, 1002 e 10002 segundos, respectivamente.

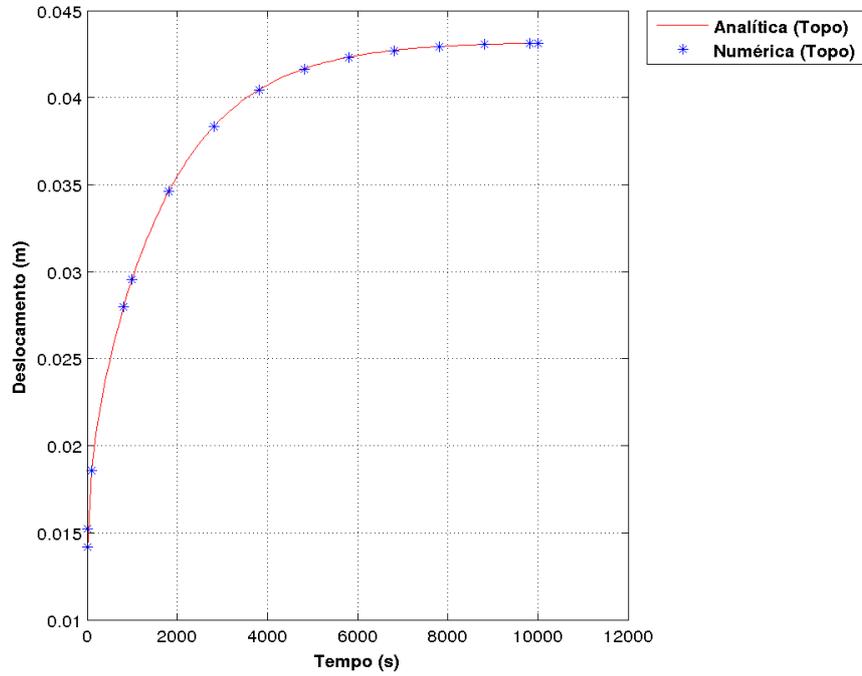
Observamos, na Figura 17 que o perfil de dissipação da pressão é bastante homogêneo, mostrando um comportamento na evolução da pressão coerente com o problema abordado. Já na Figura 18 também podemos notar uma distribuição homogênea e uma diminuição gradativa no deslocamento no decorrer do tempo. Com isso, mostramos que a nova formulação numérica de um meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade consegue se reduzir para o modelo de porosidade única sem perde de veracidade, mostrando que a técnica do *stress split* está bem posto no problema, pois foi capaz de reproduzir a solução analítica do problema de adensamento unidimensional, validando assim o método numérico empregado.

Figura 15 – Solução analítica versus numérica para poro pressão (Modelo 1).



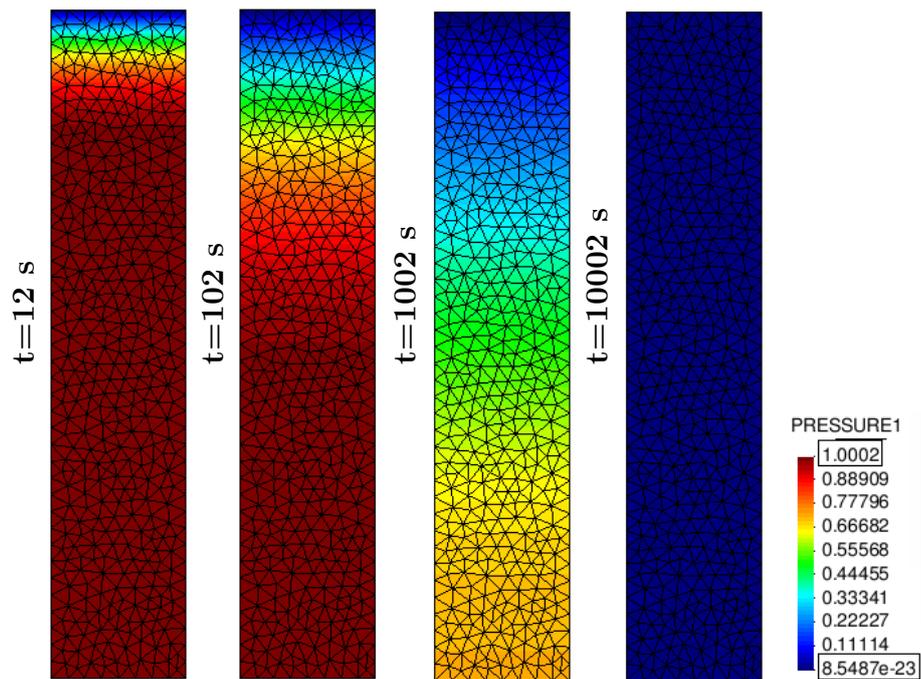
Fonte: Autor

Figura 16 – Solução analítica versus numérica para deslocamento (Modelo 1).



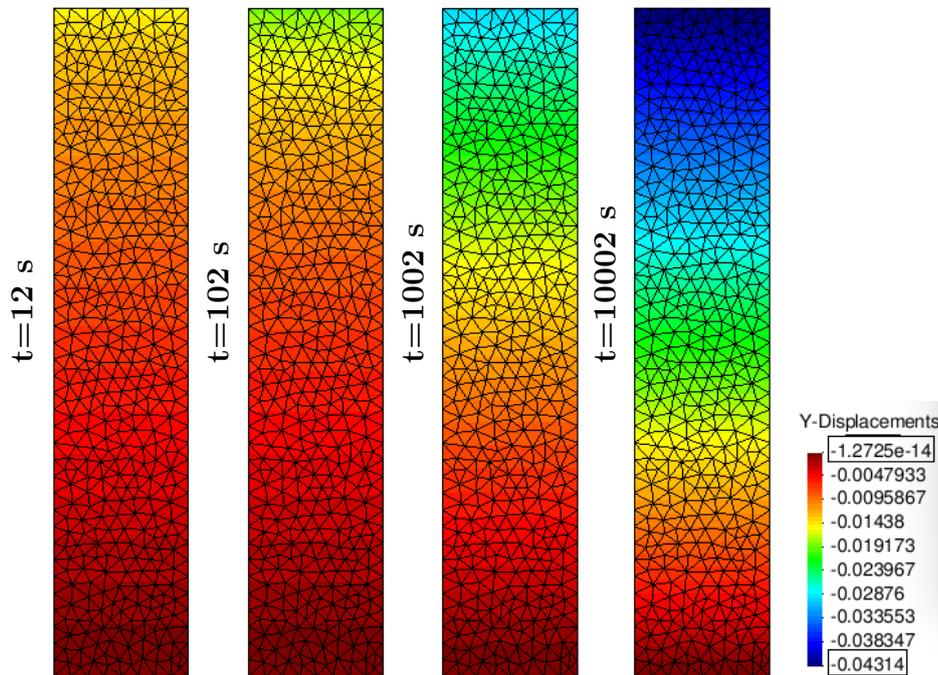
Fonte: Autor

Figura 17 – Solução numérica para pressão em escalas de cores (Modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 18 – Solução numérica para o deslocamento em escalas de cores (Modelo 1).

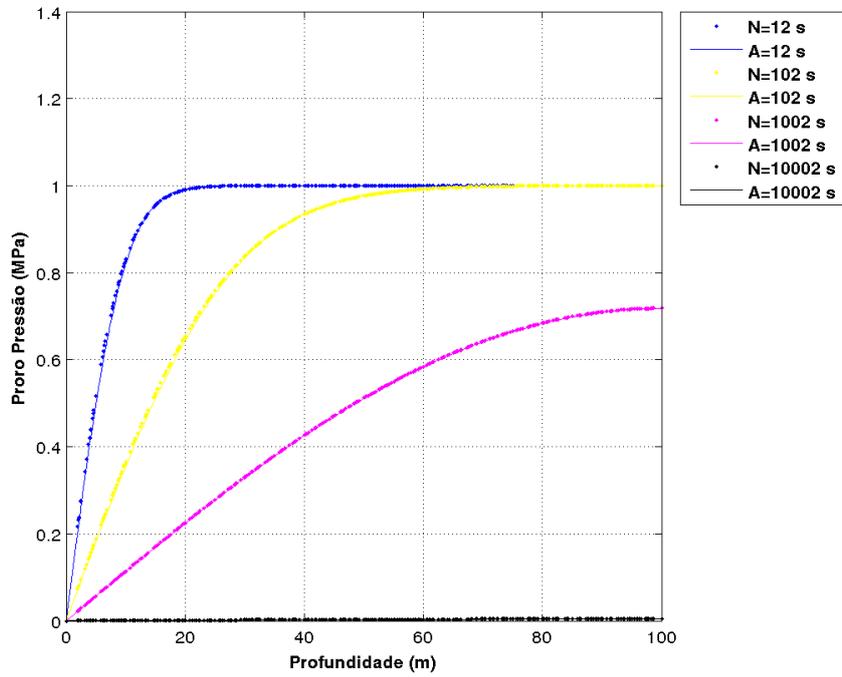


Fonte: Autor

#### 6.2.2.2 Modelo 2

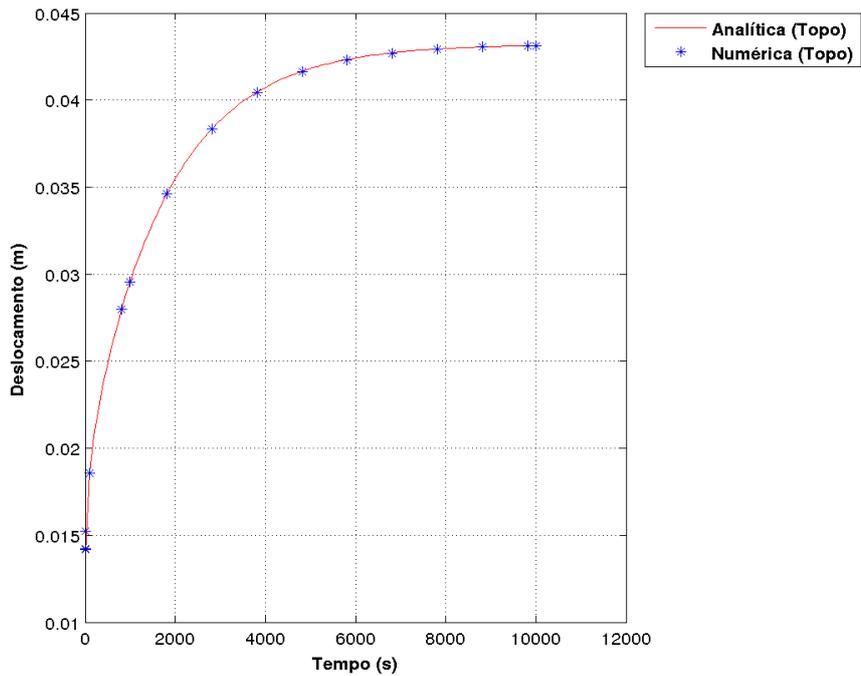
As Figuras 19 e 20 fazem comparação entre as soluções numéricas e analíticas para a poro pressão e o deslocamento, respectivamente, utilizando o modelo 2. Na Figura 19 observamos que os resultados são muito significativos, visto que as curvas analíticas e numéricas da poro pressão estão sobrepostas para todos os tempos analisados. Já na Figura 20 apresentamos as curvas dos deslocamentos para as soluções analítica e numérica, onde notamos que a curva numérica está sobreposta a analítica, obtendo uma coerência nos resultados analisados. Nas Figuras 21 e 22, apresentamos os perfis em escalas de cores para pressão nos tempos 12, 102, 1002 e 10002 segundos, respectivamente. A Figura 21, expressa a evolução da pressão distribuída homogênea ao longo da coluna do problema de adensamento unidimensional. Já na Figura 22, podemos observar uma distribuição homogênea e diminuição gradativa no deslocamento ao decorrer do tempo. Assim, a segunda formulação numérica de dupla porosidade e dupla permeabilidade também pode ser simplificada ao modelo numérico de porosidade única, mantendo a sua precisão nas soluções numéricas comparadas as soluções analíticas do problema de adensamento unidimensional de porosidade única, desta maneira, validando a técnica do *stress split* e mostrando que o segundo modelo numérico está bem posto.

Figura 19 – Solução analítica versus numérica para poro pressão (Modelo 2).



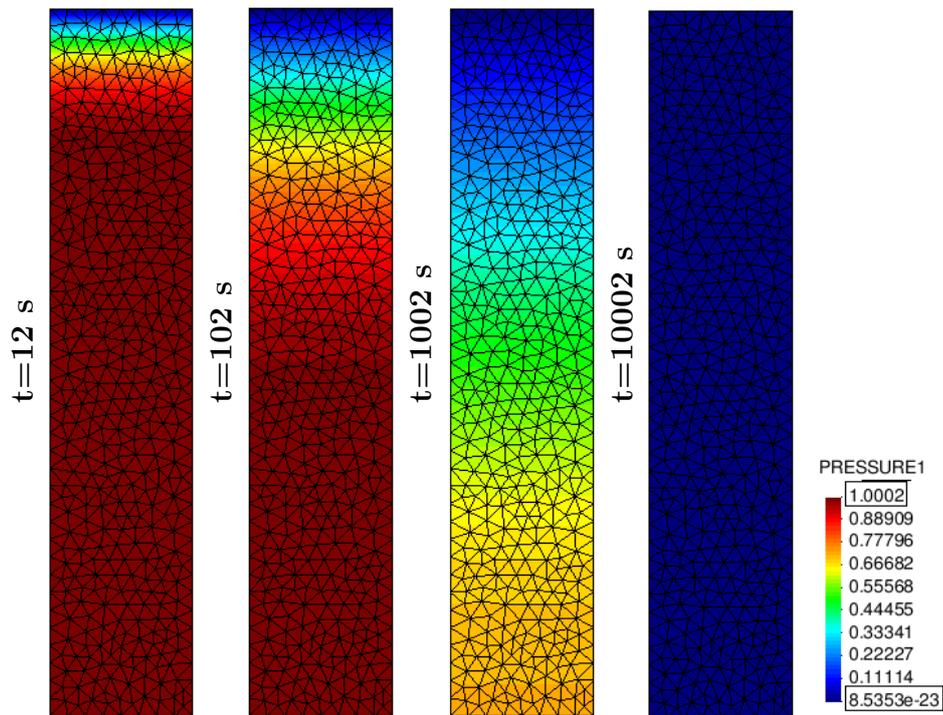
Fonte: Autor

Figura 20 – Solução analítica versus numérica para deslocamento (Modelo 2).



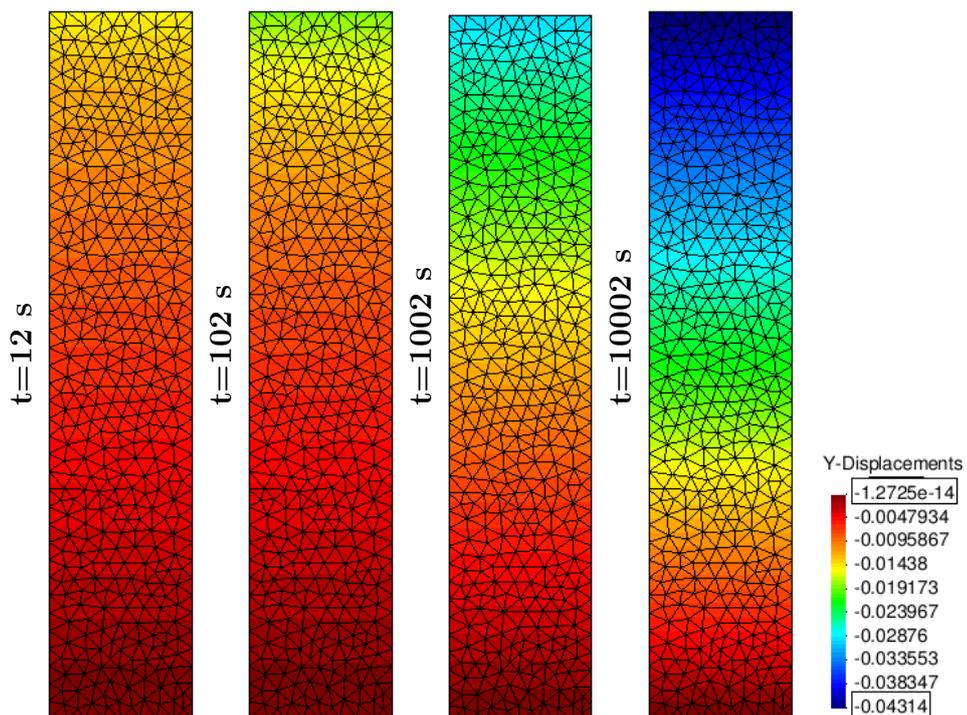
Fonte: Autor

Figura 21 – Solução numérica para pressão em escalas de cores (Modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 22 – Solução numérica para o deslocamento em escalas de cores (Modelo 2).



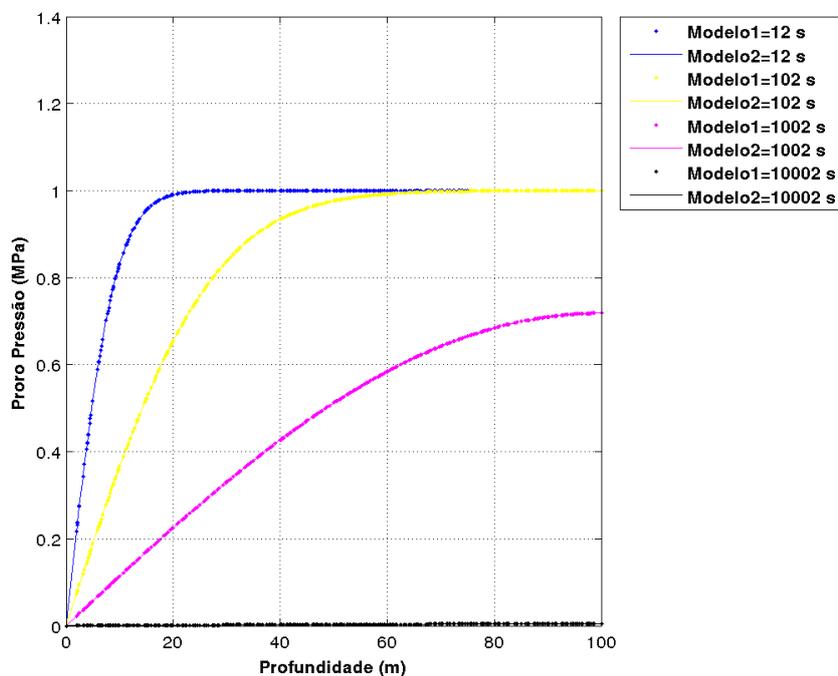
Fonte: Autor

### 6.2.2.3 Comparação entre os Modelos 1 e 2 para Adensamento Unidimensional

Nesta subseção apresentamos a comparação dos dois modelos numéricos de dupla porosidade e dupla permeabilidade simplificados aos modelos numéricos de porosidade única, para verificar se existem diferenças quando reduzimos os dois modelos para o caso de simples porosidade. Utilizamos os mesmos parâmetros mostrado na Tabela 1.

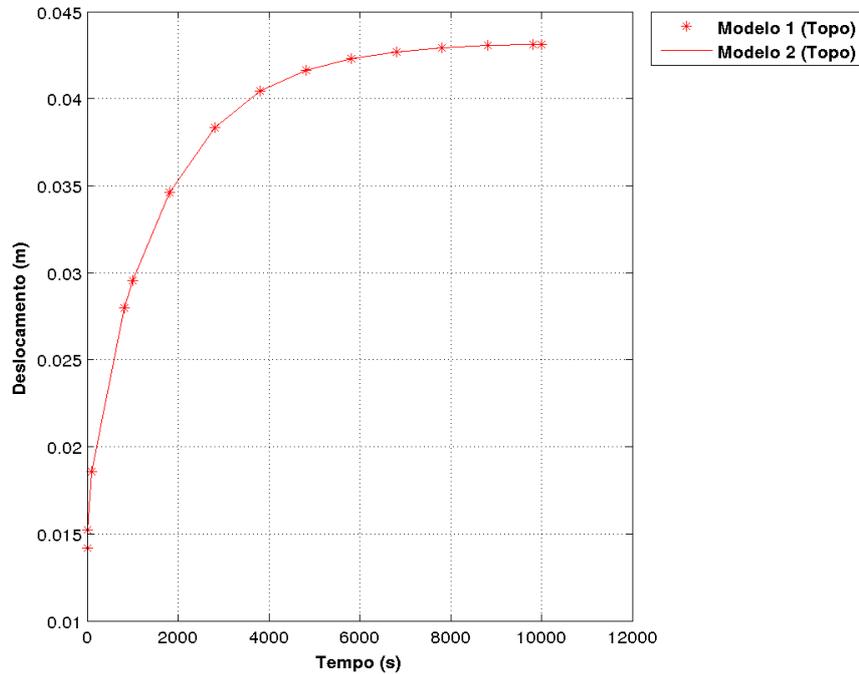
As Figuras 23 e 24 comparam as soluções numéricas, para a poro pressão e o deslocamento, respectivamente, entre os dois modelos numéricos simplificados. Podemos observar, que as curvas numéricas dos dois modelos estão sobrepostas, isso mostra que ambos os modelos numéricos de dupla porosidade e dupla permeabilidade quando reduzidos aos modelos de porosidade única com a técnica do *stress split* reproduzem as mesmas soluções numéricas. Desta maneira, não importa qual modelo numérico escolhemos para representar o problema de porosidade única, pois, mostramos que o acoplamento iterativo de ambos os modelos numéricos utilizando a técnica do *stress split* quando comparados com as soluções analíticas do caso de adensamento unidimensional de porosidade única, mostram uma boa concordância entre elas.

**Figura 23 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para poro pressão.**



Fonte: Autor

Figura 24 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para deslocamento.



Fonte: Autor

### 6.3 PROBLEMA DE MANDEL

Nesta seção iremos apresentar a solução analítica para o problema de Mandel<sup>[70]</sup> de porosidade única, bem como confrontar com as soluções numéricas do modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade simplificado, seção 6.1, utilizando a técnica do *stress split*.

#### 6.3.1 Solução Analítica

O pressuposto de deformação plana, significa que a deformação  $\epsilon_{yy} = 0$ , com isso segue que<sup>[68, 71, 72]</sup>:

$$\sigma'_{yy} = - \left( K - \frac{2}{3} \right) \epsilon_{vsp} - 2G\epsilon_{yy} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_{yy} = - \left( K - \frac{2}{3} \right) \epsilon_{vsp} \quad (6.26)$$

onde  $\sigma'_{yy}$  é a tensão efetiva da componente  $yy$ .

Sabendo que a condição de contorno para  $x = a$  a tensão horizontal  $\sigma_{xx} = 0$ , com isso segue que ao longo do domínio obtemos:

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (6.27)$$

$$\sigma'_{xx} = -p \quad (6.28)$$

Pelas relações das tensões efetivas com as deformações<sup>[68, 71, 72]</sup>, a deformação volumétrica é expressa como:

$$3K\epsilon_{vsp} = -(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) \quad (6.29)$$

Substituindo as equações 6.26 e 6.28 na Equação 6.29 fica:

$$3K\epsilon_{vsp} = -\left(-p - \left(K - \frac{2}{3}G\right)\epsilon_{vsp} + \sigma'_{zz}\right) \quad (6.30)$$

Sabendo que pelas leis de tensões efetiva temos que:

$$\sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - p \quad (6.31)$$

Agora, mudando o terceiro termo do lado direito da Equação 6.30 pela Equação 6.31 resulta:

$$3K\epsilon_{vsp} = -\left(-p - \left(K - \frac{2}{3}\right)\epsilon_{vsp} + \sigma_{zz} - p\right) \quad (6.32)$$

Organizando a equação acima, encontramos, a equação que expressa as relações entre a poro pressão, as tensões e a deformação volumétrica para o caso do problema de Mandel, que é dado por:

$$2\left(K - \frac{1}{3}\right)\epsilon_{vsp} = 2p + \sigma_{zz} \quad (6.33)$$

No caso de incompressibilidade do sólido e do fluido, conforme visto nas equações acima, a poro pressão, as tensões e a deformação volumétrica, das duas principais equações de poroelasticidade<sup>[68]</sup>, são independentes de  $y$  e  $z$ , deste modo essas equações reduzem para:

$$\frac{\partial\epsilon_{vsp}}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (6.34)$$

$$\left(K + \frac{4}{3}\right) \frac{\partial^2 \epsilon_{vsp}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (6.35)$$

Substituindo a Equação 6.35 na Equação 6.34 obtemos:

$$\frac{\partial\epsilon_{vsp}}{\partial t} - c_{sp} \frac{\partial^2 \epsilon_{vsp}}{\partial x^2} = 0 \quad (6.36)$$

onde  $c_{sp}$  é o coeficiente de adensamento dado por:

$$c_{sp} = \frac{k\left(K + \frac{4}{3}\right)}{\gamma_f} \quad (6.37)$$

Utilizando a transformada de Laplace obtemos a solução analítica do problema de Mandel:

$$p = p_0 2\eta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_m) \left[ \cos\left(\frac{\xi_m x}{a_{sp}}\right) - \cos(\xi_m) \right]}{1 - 2\eta \cos^2(\xi_m)} \exp\left(-\frac{\xi_m^2 c_{sp} t}{a_{sp}^2}\right) \quad (6.38)$$

onde  $\eta$  é uma constante elástica auxiliar,  $p_0$  é a poro pressão no instante de carregamento aplicado  $q$ ,  $a_{sp}$  é a largura da superfície do domínio e  $\xi$  são as raízes da Equação 6.41.

$$\eta = \frac{K + \frac{4}{3}G}{2G} = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \quad (6.39)$$

$$p_0 = \frac{1}{2}q \quad (6.40)$$

$$\tan(\xi) = 2\eta\xi \quad (6.41)$$

### 6.3.2 Soluções Numéricas para o Problema de Mandel

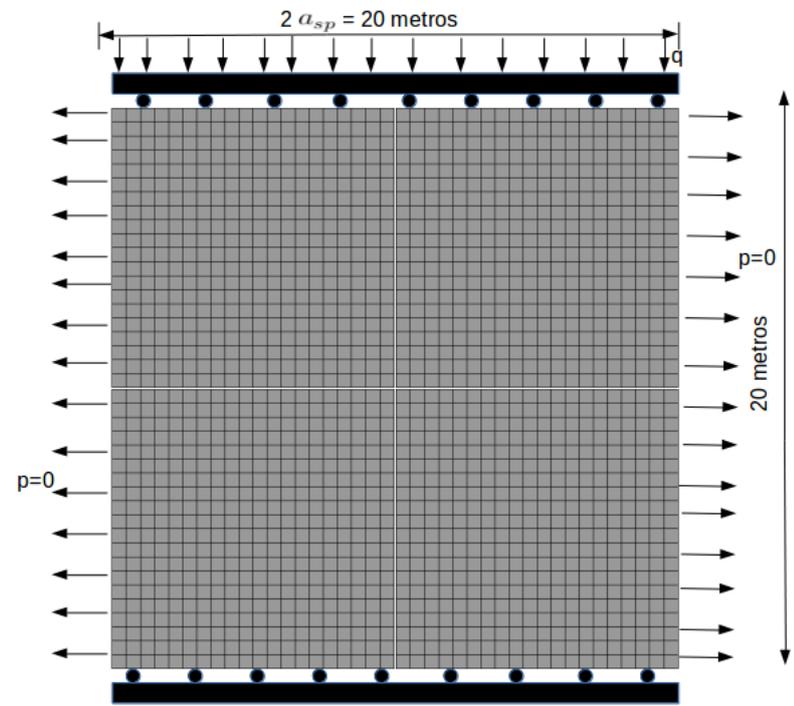
Nesta subseção comparamos as soluções analítica e numéricas para o problema de Mandel de simples porosidade, com o intuito de mostrar a validade da técnica do *stress split* para um problema mais sensível do que o problema de adensamento unidimensional. Para essa comparação utilizamos os dados da Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros usados no problema de Mandel.

Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	2500	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.3	—
$\mu$	Viscosidade do Fluido	$10^{-9}$	$MPa.s$
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.33	—
$\mathbf{K}_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$3.3654 \times 10^{13}$	$MPa$
$q$	Carga aplicada	-1.357	$MPa$

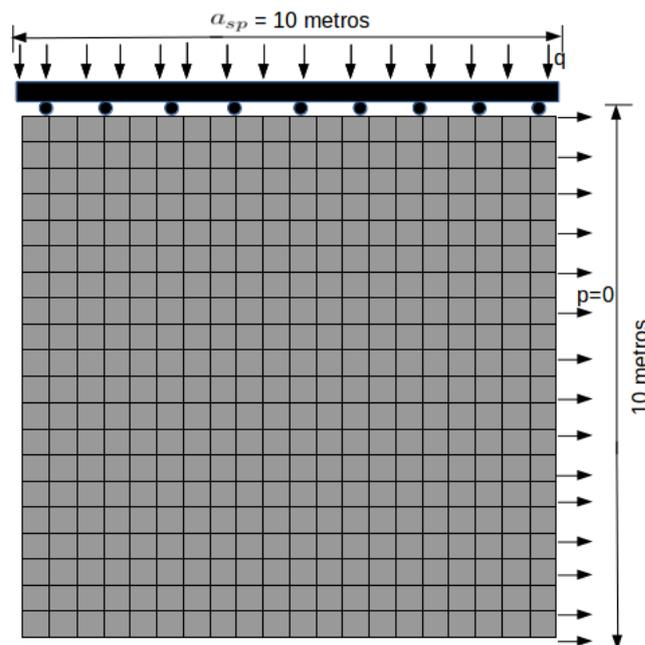
O domínio utilizado para obter as soluções, ver Figura 25, que apresenta uma geometria retangular sujeita a uma carga vertical aplicada em seu topo, com drenagem para os dois lados na direção horizontal, tem uma largura e altura de 20  $m$ . Devido a simetria do problema utilizamos só um quarto do domínio, ou seja, uma geometria com largura e altura de 10  $m$ , conforme ilustrado na Figura 26, apresentando uma malha composta por 441 nós e 400 elementos.

Figura 25 – Malha do problema de Mandel.



Fonte: Autor

Figura 26 – Malha para o caso numérico do problema de Mandel.

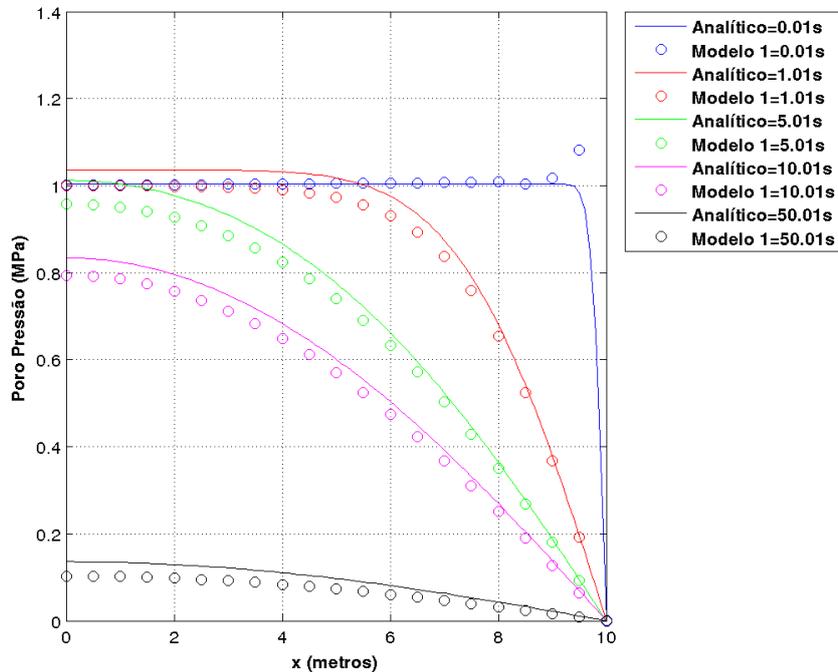


Fonte: Autor

### 6.3.2.1 Modelo 1

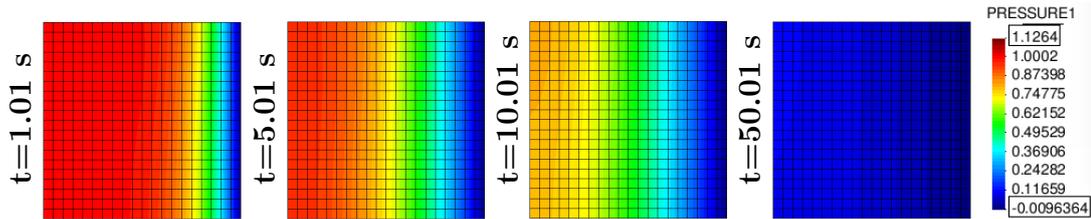
A Figura 27 mostra a comparação da solução numérica com a solução analítica para a poro pressão na matriz, foram simulado um tempo total de 101 segundo, mas na Figura 27 analisamos cinco tempos diferentes, 0.01, 1.01, 5.01, 10.01 e 50.01 segundos. Observamos que os resultados são satisfatórios, mostrando que as curvas analíticas e numéricas apresentam o mesmo perfil, exceto para o tempo de 0.01 segundo, onde ocorre uma pequena oscilação numérica devido ao efeito da aplicação de carga instantânea. Já na Figura 28, podemos notar as distribuição de poro pressão nos perfis dos tempos 1.01, 5.01, 10.01 e 50.01 segundos, respectivamente. A distribuição da poro pressão será homogênea no momento do carregamento, mas assim que a drenagem começa, a poro pressão no lado direito são reduzidas a zero e a pressão no interior da malha também serão gradualmente reduzidas a zero. Assim, podemos dizer que para um caso mais sensível do que o caso de adensamento unidimensional, o modelo numérico de dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split*, reduzido ao caso de porosidade única, continua válido, pois foi capaz de reproduzir os mesmos perfis da solução analítica.

**Figura 27 – Solução analítica versus modelo 1 para poro pressão na matriz.**



Fonte: Autor

**Figura 28 – Perfis da malha do problema de Mandel para o modelo 1.**

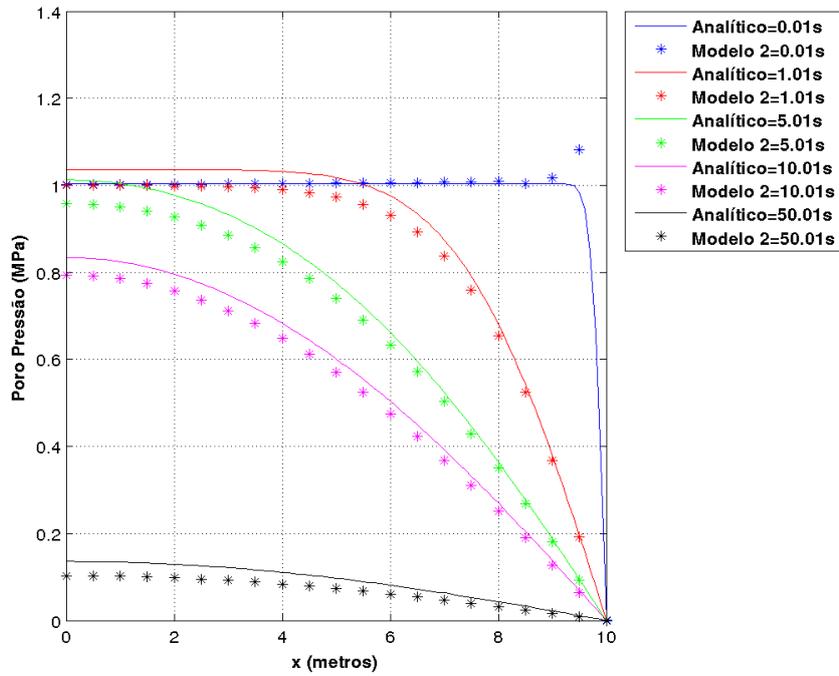


**Fonte:** Autor

### 6.3.2.2 Modelo 2

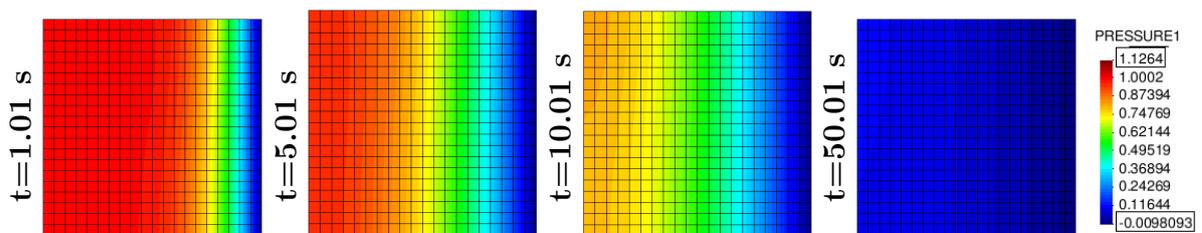
A Figura 29 apresenta a comparação da solução numérica com a solução analítica para a poro pressão na matriz. Foram simulado um tempo total de 101 segundo, desta forma na Figura 29 analisamos cinco tempos diferentes, 0.01, 1.01, 5.01, 10.01 e 50.01 segundos para obtenção dos resultados. Verificamos que os resultados numéricos são bem significativos em comparação com os analíticos, apresentando os mesmos perfis das curvas analíticas, com exceção para o tempo de 0.01 segundo, onde notamos uma oscilação numérica devido ao mesmo efeito que acontece na Figura 27 do modelo 1. Já na Figura 30, podemos observar as distribuição de poro pressão nos perfis dos tempos 1.01, 5.01, 10.01 e 50.01 segundos. Tal como no modelo 1 a distribuição da poro pressão será homogênea no momento do carregamento, porém quando a drenagem começa, a poro pressão no lado direito são reduzidas a zero e a pressão no interior da malha serão gradativamente diminuída a zero. Portanto, do mesmo modo do modelo 1, podemos concluir que o modelo numérico 2, também continua válido.

Figura 29 – Solução analítica versus modelo 2 para poro pressão na matriz.



Fonte: Autor

Figura 30 – Perfis da malha do problema de Mandel para o modelo 2.

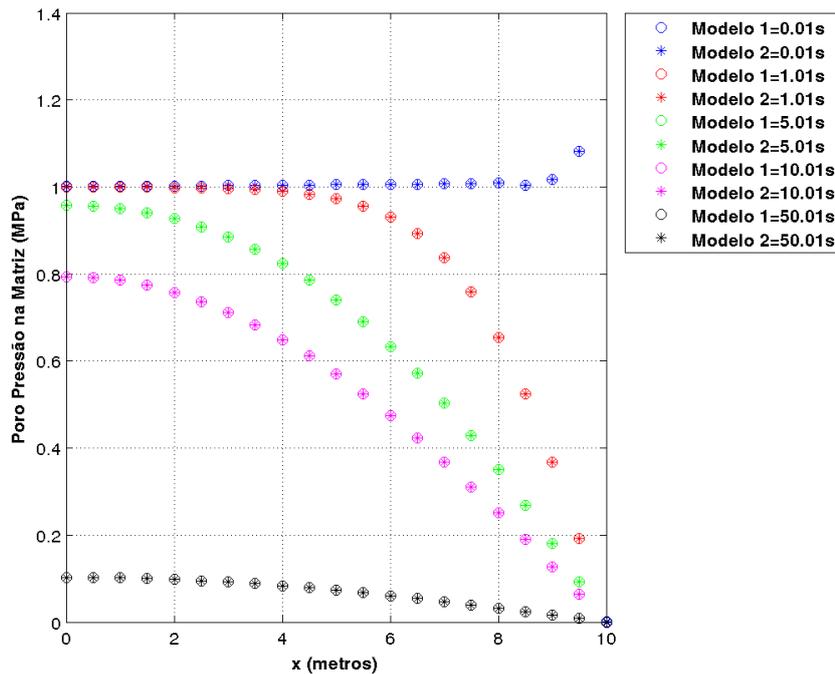


Fonte: Autor

### 6.3.2.3 Comparação entre os Modelos 1 e 2 para Mandel

A Figura 31 confronta as soluções numéricas para a poro pressão entre os dois modelos numéricos. Visto que os dois modelos possuem diferenças muito próximas em relação a solução analítica, observamos que na Figura 31 as curvas, dos dois modelos numéricos de dupla porosidade e dupla permeabilidade usando a técnica do *stress split* reduzidos ao modelo numérico de porosidade única, estão sobrepostas uma a outra. Isso mostra, que os dois modelos numéricos são capazes de ser reduzidos ao modelo numérico de simples porosidade com *stress split*, sem perda da acurácia do modelo numérico. Além disso, os dois modelos se tornam idênticos quando reduzidos ao modelo de porosidade única, algo que já era esperado. Assim, podemos escolher qualquer um dos dois modelos numéricos para representar o caso de simples porosidade utilizando a técnica do *stress split*.

**Figura 31 – Soluções numéricas modelo 1 versus modelo 2 para poro pressão na matriz.**



Fonte: Autor

## 7 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo apresentaremos algumas análises de sensibilidade para os parâmetros de permeabilidade intrínseca e espaçamento entre as fraturas para os casos de adensamento unidimensional e problema de Mandel, com intuito de mostrar o acoplamento iterativo dos modelos numéricos de dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split*. Para as análises de sensibilidades utilizaremos os modelos numéricos descritos no Capítulo 5.

### 7.1 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O CASO DE ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL

Nas análises de sensibilidades utilizamos os dados da Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros usados na análise de sensibilidade.

Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	2500	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.3	—
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.3	—
$\phi_2$	Porosidade da Fratura	0.03	—
$\mathbf{K}_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$\mathbf{K}_2$	Permeabilidade da Fratura	$10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$3.3654 \times 10^4$	$MPa$
$q$	Carga aplicada	-1.4543	$MPa$
$K_n$	Módulo Volumétrico da Fratura	$1.6827 \times 10^3$	$MPa/m$
$s$	Espaçamento entre as fraturas	10, 20, 30	$m$

Para estas análises a função de transferência de massa entre os meios porosos matriz e fratura é diferente de zero. Os parâmetros analisados, como se pode ver na Tabela 3, foram a permeabilidade da fratura em relação a permeabilidade da matriz e o espaçamento entre as fraturas, ou seja, considerando o meio poroso para os casos analisados em alguns momentos mais permeável e fraturado e em outros momentos menos permeável e fraturado. As Figuras 32, 33, 36, 37, 39, 40, 43 e 44 apresentam a variação da pressão para três tempos diferente, 12, 102 e 1002 segundos, sendo cada tempo representado por uma cor diferente, azul, vermelho e preto, respectivamente. Além disso, as curvas das pressões quando  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$  e  $s = 10$  são pontilhadas,  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  e  $s = 20$  são asteriscos e  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  e  $s = 30$  são bolas abertas. Nas Figura 34 e Figura 41 as curvas são analisadas para o tempo de 12 segundos, sendo que as curvas são representadas para matriz por linhas contínuas e para a fratura por pontos. Já as Figuras 35 e 42 mostram

o deslocamento versus o tempo para três valores de razão de permeabilidade,  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ , onde as curvas são representadas pelas cores vermelho, azul e preto, respectivamente, utilizando um espaçamento entre as fraturas,  $s = 20$  metros. Enquanto que as Figuras 38 e 45 apresentam a variação do deslocamento versus o tempo para diferentes valores de espaçamento entre as fraturas, onde a curva vermelha representa o  $s = 10$  m, a curva azul corresponde ao  $s = 20$  m e a curva preta descreve o  $s = 30$  m, para uma relação de permeabilidade de  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  MPa.

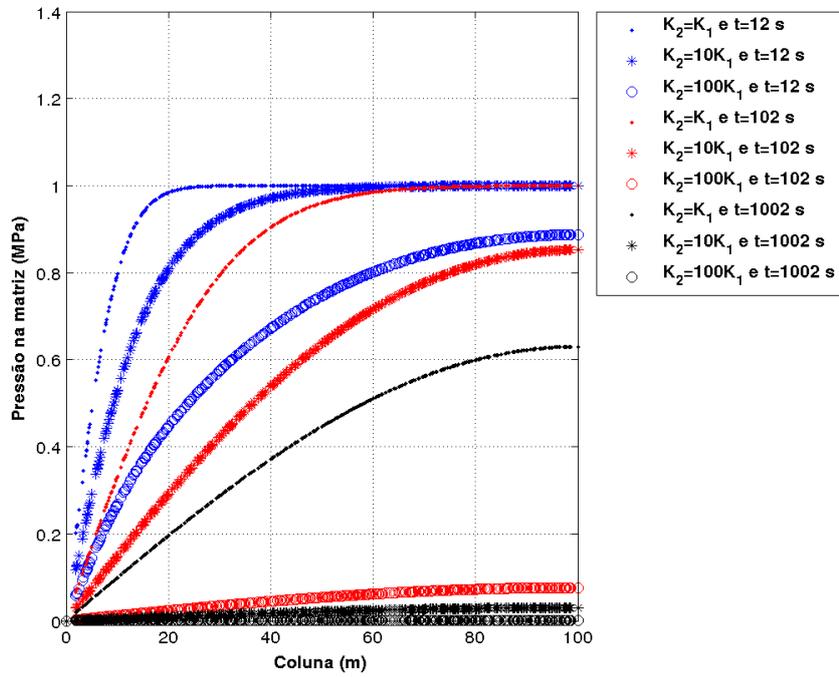
### 7.1.1 Análise de Sensibilidade da Formulação 1

- Análise 1: Variação da permeabilidade.

As Figuras 32, 33 e 35 mostram as pressões de fluido para matriz e fratura em relação a coluna da malha e o deslocamento em relação ao tempo para diferentes valores de permeabilidades, para um espaçamento entre as fraturas de  $s = 20$  m. A Figura 32 mostra as mudanças de pressões para três tempos diferentes. Nas Figuras 32 e 33 fica claro que a pressão de fluido diminui mais rapidamente para razões maiores de  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ . Isso significa que mais troca de fluxo ocorre da matriz rochosa para as regiões de fratura para maiores relações de  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ . Desta forma, o fluido dentro das fraturas é escoado rapidamente. Isso também, acontece porque em meios porosos fraturados a pressão de líquido é maior na matriz do que na fratura para maiores proporção de  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$  ou para menores razões de  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$  a pressão é mais próxima em ambos os meios, ver Figura 34.

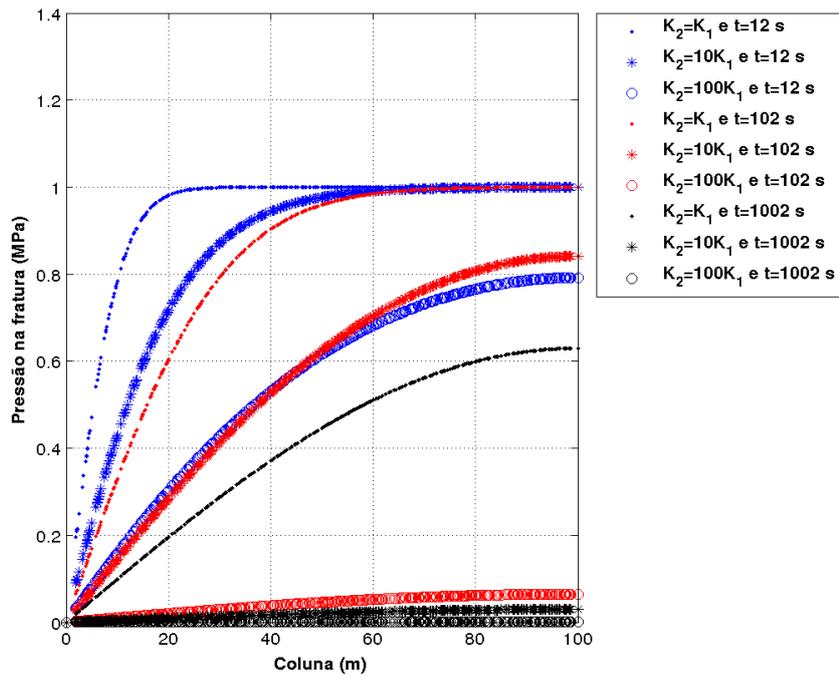
A Figura 35 mostra a subsidência do topo da superfície para diferentes razões  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ , sendo que a permeabilidade da matriz,  $\mathbf{K}_1$ , permanece constante, enquanto que a permeabilidade da fratura,  $\mathbf{K}_2$ , varia conforme Tabela 3. Podemos observar que a maior relação entre as duas permeabilidades provoca uma consolidação mais rápida para o meio poroso fraturado, isto acontece porque a dissipação da pressão de fluido e a taxa de consolidação são diretamente proporcionais, ou seja, por ser um processo acoplado, maior a taxa de dissipação e retirada de fluido e maior será a variação volumétrica do meio para compensar isto, e para isso a rocha vai se comprimindo mais rapidamente. Na Figura 35 ainda notamos que nos últimos passos de tempo a consolidação da superfície são as mesmas para todas as razões de permeabilidade,  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ , pois o problema atingiu o estado estacionário, ou seja, o fluido foi completamente escoado.

Figura 32 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades (Modelo 1).



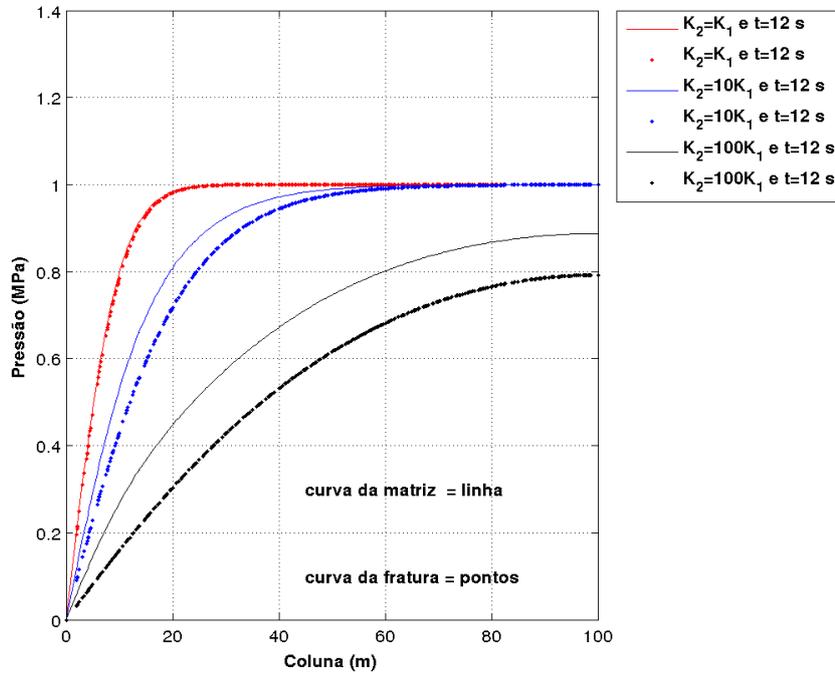
Fonte: Autor

Figura 33 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 1).



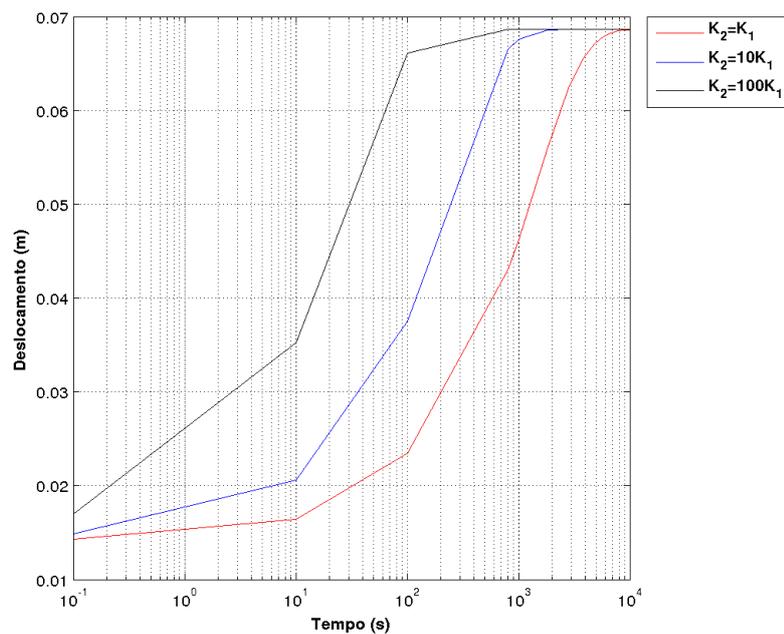
Fonte: Autor

Figura 34 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 35 – Deslocamento da superfície para diferentes permeabilidades (Modelo 1).

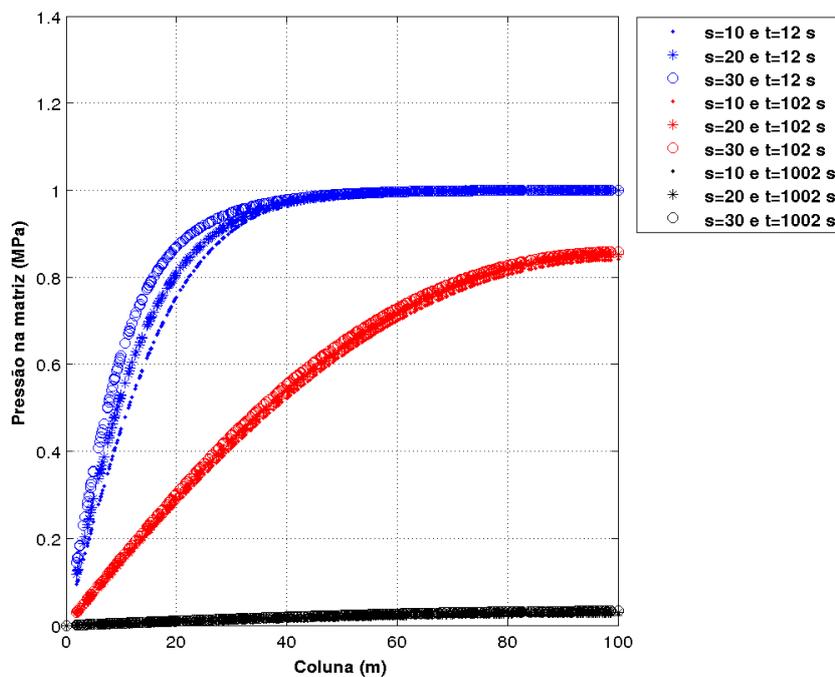


Fonte: Autor

- Análise 2: Variação do espaçamento entre as fraturas.

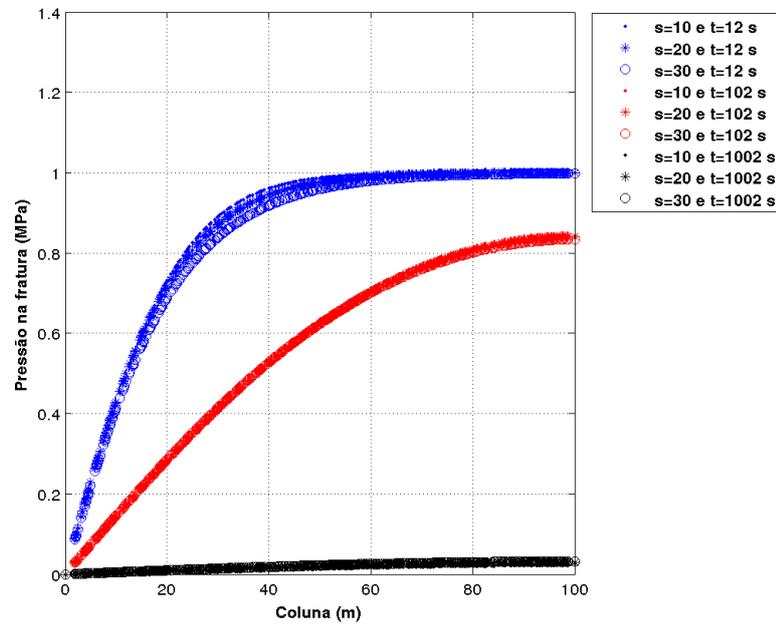
As Figuras 36, 37 e 38 mostram as pressões de fluido para matriz e fratura em relação a coluna da malha e o deslocamento em relação ao tempo para diferentes valores de espaçamento entre as fraturas, para uma relação de permeabilidade de  $K_2 = 10K_1 MPa$ . As Figuras 36 e 37 mostram o comportamento das pressões de fluido. Notamos nessas duas figuras que quanto menor for o espaçamento entre as fraturas, mais fratura o meio possui, desta forma a permeabilidade por unidade de volume é maior, logo o fluido será rapidamente escoado. Observamos também nas Figuras 36 e 37 que quanto maior o espaçamento entre as fraturas maior será a pressão na matriz e conseqüentemente menor será a pressão na fratura. Além disso, ao longo do tempo as pressões tanto na matriz quanto na fratura tende a diminuir, pois a quantidade de fluido é bem menor no meio poroso. Já na Figura 38 diferentes valores de espaçamentos entre as fraturas  $s = 10, 20$  e  $30 m$  são considerados nas obtenções das curvas. Desta maneira, parâmetros menores de espaçamento significa mais fratura no meio poroso e conseqüentemente formações altamente fraturadas, fazendo com que obtemos taxas de consolidações mais rápidas. Pois as fraturas são condutoras, fazendo com que a dissipação da pressão e diferença entre as pressões ( $p_1$  e  $p_2$ ) ocorram de maneira mais rápida e diminua com o tempo, respectivamente.

**Figura 36 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).**



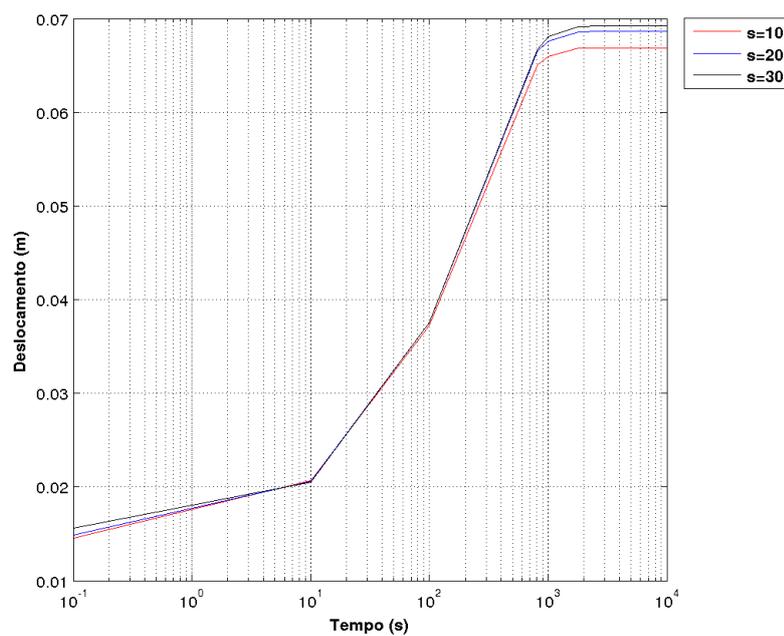
Fonte: Autor

Figura 37 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 38 – Deslocamento da superfície para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 1).



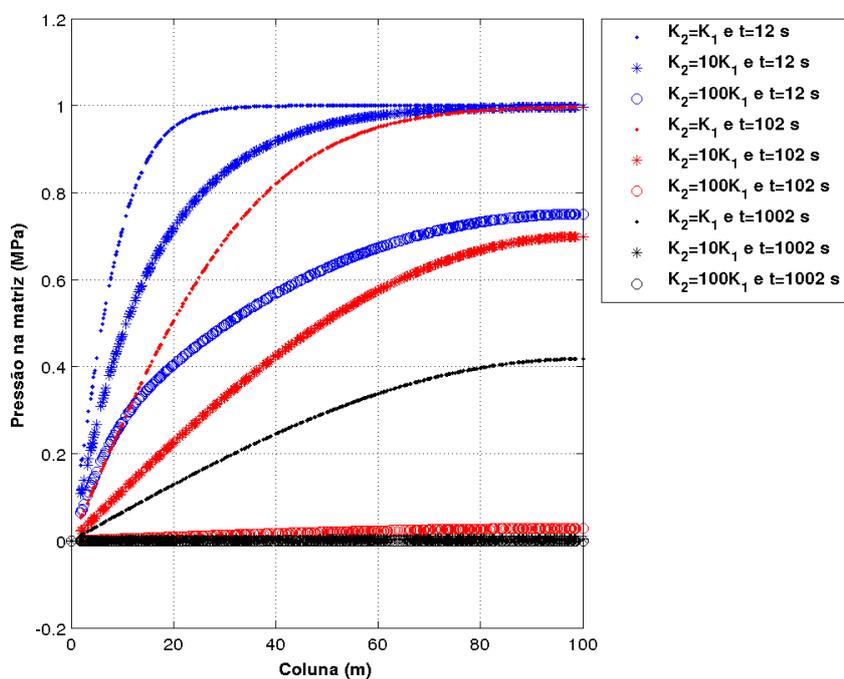
Fonte: Autor

### 7.1.2 Análise de Sensibilidade da Formulação 2

- Análise 1: Variação da permeabilidade.

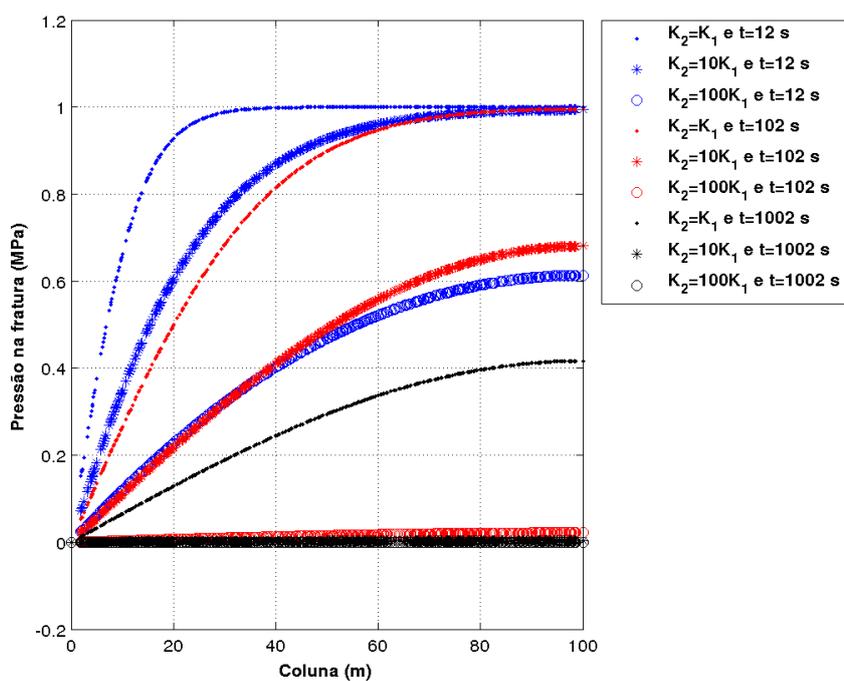
Assim como na formulação 1, as Figuras 39, 40 e 42 mostram as pressões de fluido para matriz e fratura em relação a coluna da malha e o deslocamento em relação ao tempo para diferentes valores de permeabilidades, para um espaçamento entre as fraturas de  $s = 20 \text{ m}$ . As mesmas observações feitas para a formulação 1 nas Figuras 32, 33 e 35 são válidas para a formulação 2 em relação as Figuras 39, 40 e 42. Na Figura 41 podemos observar que para o tempo de 12 segundos obtemos as pressões de fluido para diferentes valores de razões de permeabilidades,  $\frac{K_2}{K_1}$ . Na Figura 41 ainda notamos que em meios porosos fraturados a pressão de líquido é maior na matriz do que na fratura para maiores razões de  $\frac{K_2}{K_1}$  ou a pressão é mais próxima em ambos os meios para menores proporções de  $\frac{K_2}{K_1}$ . Além disso, verificamos que a diferença entre a diminuição da pressão da matriz para a fratura é maior no modelo 2 do que no modelo 1, isso acontece porque na equação de fluxo da fratura no modelo 2 não possui o termo mecânico, desta forma, consideramos a fratura rígida, fazendo com que a dissipação da pressão de fluido ocorra mais rápido no modelo 2, o que já era de se esperar pois estamos desprezando o efeito mecânico. Como no modelo 1 a fratura se deforma isso faz com que o acumulo de massa seja maior do que no modelo 2 que a fratura não se deforma.

Figura 39 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades (Modelo 2).



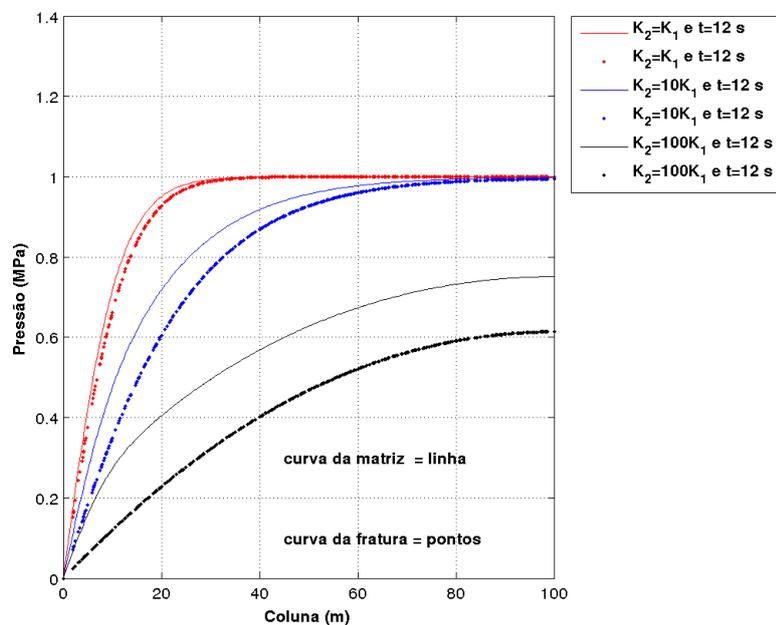
Fonte: Autor

Figura 40 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 2).



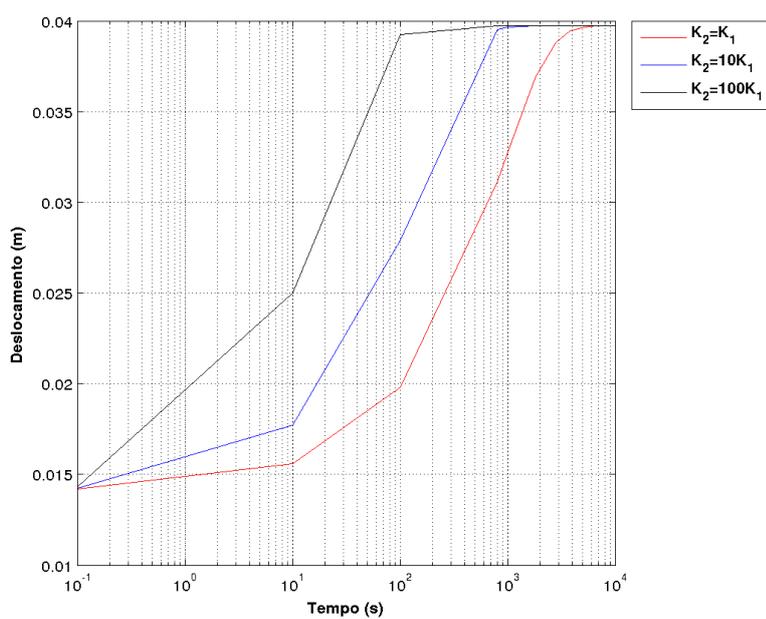
Fonte: Autor

Figura 41 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidades (Modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 42 – Deslocamento da superfície para diferentes permeabilidades (Modelo 2).



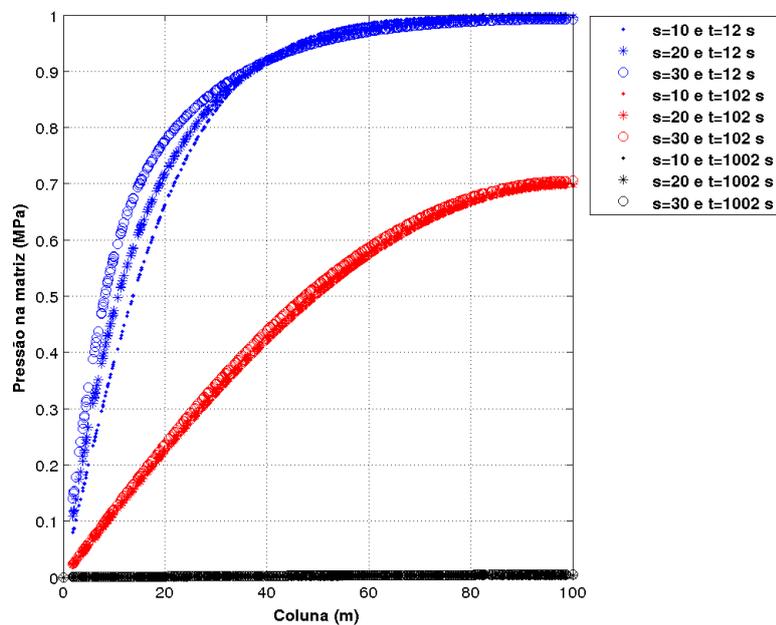
Fonte: Autor

- Análise 2: Variação do espaçamento entre as fraturas.

Assim como a análise 2 do modelo 1, para as Figuras 36, 37 e 38, as Figuras 43, 44 e 45 também mostram as pressões de fluido para matriz e fratura em relação a coluna da malha e o deslocamento em relação ao tempo para diferentes valores de espaçamento entre as fraturas, para uma relação de permeabilidade de  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  *MPa*. As Figuras 43 e 44 apresentam o comportamento das pressões de fluido. Nessas Figuras quanto menor for o espaçamento de fraturas, mais fraturado é o meio poroso, desta forma, o fluido será rapidamente escoado. Observamos também nas Figuras 43 e 44 que quanto maior o espaçamento entre as fraturas maior será a pressão na matriz e conseqüentemente menor será a pressão na fratura. Porém, ao passar de 40 metros para o tempo de 12 segundos na Figura 43, notamos que a pressão para o espaçamento menor, fica maior do que para espaçamentos maiores, isso acontece devido a permeabilidade por unidade de volume ser maior para o meio poroso mais fraturado. Além disso, ao longo do tempo as pressões tanto na matriz quanto na fratura tende a diminuir, pelo mesmo motivo da análise 2, do modelo 1.

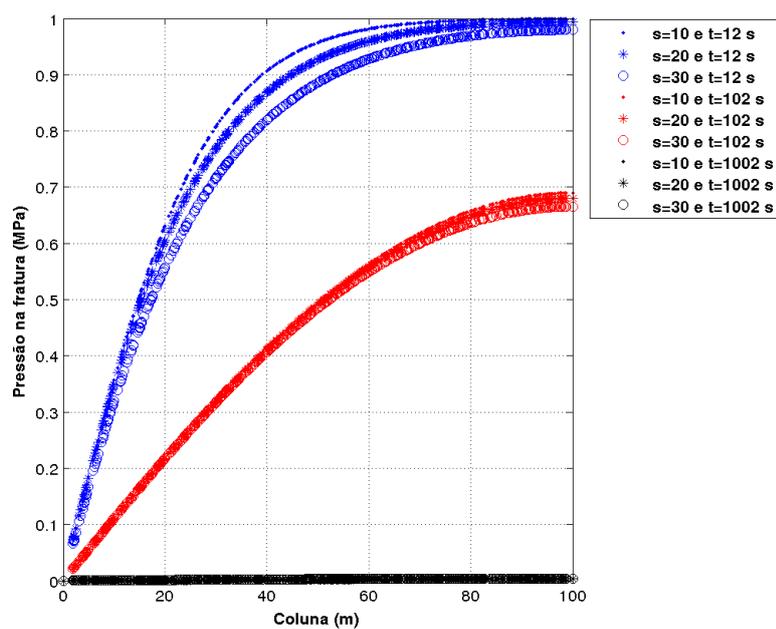
Na Figura 45 obtemos as curvas para diferentes valores de espaçamentos de fraturas  $s = 10, 20$  e  $30$  *m*. Desta maneira, para formações altamente fraturadas ocorre uma taxa mais rápida de subsidência da superfície superior da coluna, ou seja, para menores valores de espaçamento de fraturas significa mais fratura no meio poroso e conseqüentemente mostram taxas de consolidações mais rápidas. Além disso, na Figura 45 observamos uma variação maior entre os tempos de  $10^0$  à  $10^2$  segundos do que na Figura 38 da formulação 1, isso acontece pois o parâmetro  $s$  de espaçamento entre as fraturas no modelo 2 só aparece no termo de transferência de massa entre os meios nas equações de fluxo na matriz e na fratura, enquanto que no modelo 1 o espaçamento entre as fraturas aparece em mais termos nas equações de fluxo na matriz e na fratura.

Figura 43 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).



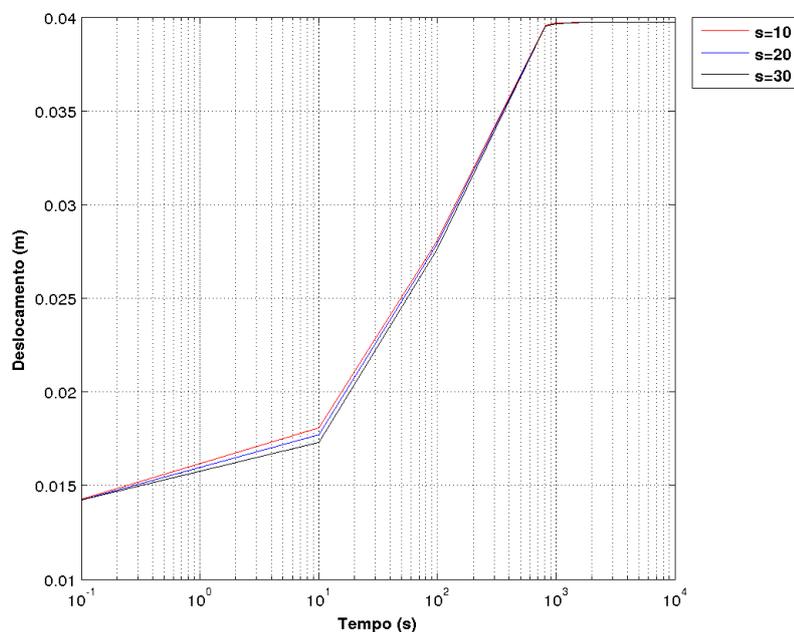
Fonte: Autor

Figura 44 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).



Fonte: Autor

**Figura 45 – Deslocamento da superfície para diferentes espaçamento de fraturas (Modelo 2).**



Fonte: Autor

### 7.1.3 Comparação entre os Modelos 1 e 2 Utilizando o Caso da Análise de Sensibilidade

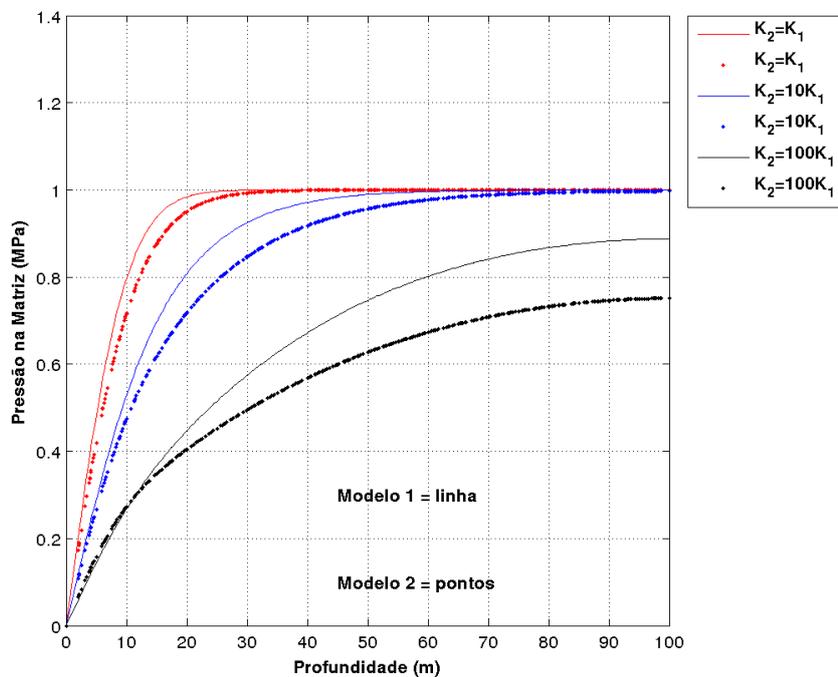
Nesta subseção iremos comparar as soluções numéricas dos modelos 1 e 2 da análise de sensibilidade para o caso de adensamento unidimensional. Para essas comparações foram utilizados os parâmetros descritos na Tabela 3, além dos modelos numéricos apresentados no Capítulo 5.

As Figuras 46 e 47 comparam as soluções numéricas, dos dois modelos, para as pressões de fluido para os dois meios porosos matriz e fratura, respectivamente. As curvas das Figuras 46 e 47 foram obtidas para um tempo de 12 segundos. O modelo 1 é representado pelas curvas contínuas e o modelo 2 é representados pelas curvas pontilhadas. As Figuras 46 e 47 combinam os resultados das Figuras 34 e 41 para as pressões na matriz e na fratura, respectivamente.

Podemos observar que em ambas as Figuras 46 e 47 existe uma diferença entre os dois modelos apresentados. Essa diferença acontece devido as hipóteses adotadas para os dois modelos numéricos. Na formulação 1, obtemos um modelo mais completo, onde consideramos que a fratura se deforme, enquanto que na formulação 2, encontramos um modelo mais enxuto, sendo considerado o meio rígido na fratura. Desta forma, computamos o efeito mecânico da tensão média,  $\frac{D\bar{p}}{Dt}$ , na fratura apenas para o primeiro modelo. Notamos

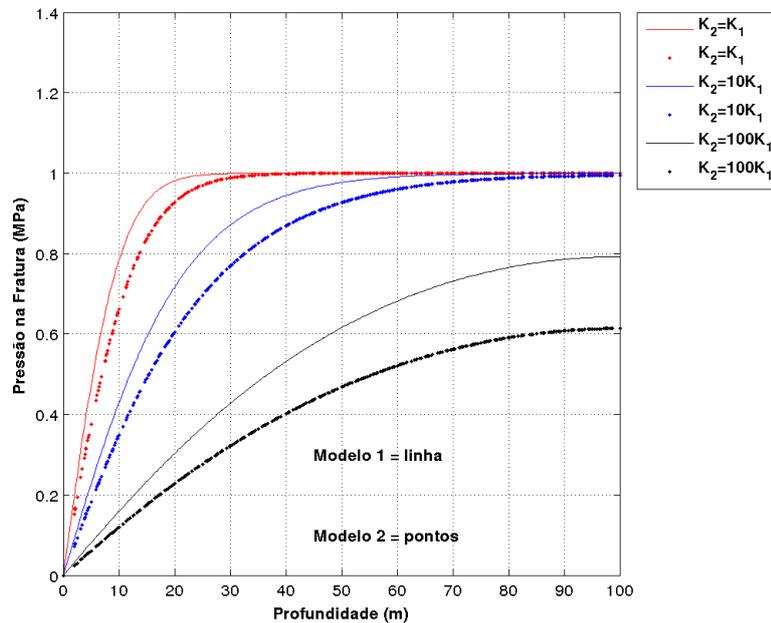
ainda que a pressão é maior para o modelo 1, ou seja, no modelo 2 a dissipação de pressão é mais rápida do que no modelo 1. Isso acontece, porque consideramos que na formulação 2 as fraturas são rígidas, ou seja, não se deformam. Assim, fazendo com que o fluido contido nas fraturas seja escoado mais rapidamente do que no modelo 1. Já por outro lado, a formulação 1 tende a reter mais o fluido nas fraturas, pois como as fraturas se deformam, fazem com que o acumulo de massa sejam maior, tornando mais lento o escoamento do fluido, estabelecendo assim uma dissipação da pressão mais lenta em relação ao modelo 2, fazendo com que a troca de fluido da matriz para a fratura também seja mais lenta.

**Figura 46 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na matriz.**



Fonte: Autor

Figura 47 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na fratura.

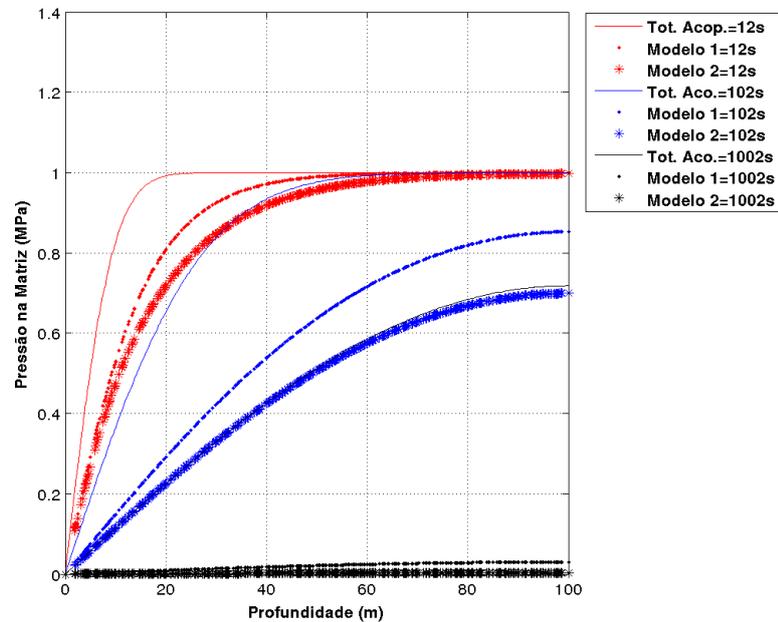


Fonte: Autor

As Figuras 48 e 49 mostram as curvas das pressões na matriz e na fratura respectivamente. Na Figura 48 comparamos as curvas do totalmente acoplado, no caso de simples porosidade (conforme Tabela 1), com os modelos numérico 1 e 2 de dupla porosidade e dupla permeabilidade com *stress split*, utilizando o acoplamento iterativo, com os parâmetros abordados na Tabela 3. Para o caso de dupla porosidade e dupla permeabilidade, as permeabilidades intrínsecas adotadas para matriz e fratura foram,  $K_1 = 10^{-12} MPa$  e  $K_2 = 10^{-11} MPa$ , respectivamente, já o espaçamento entre as fraturas foi de  $s = 20 m$ . Nessa Figura, mostramos as mudanças de pressão de fluido no topo da superfície ao longo da coluna para os tempos de 12, 102 e 1002 segundos para os três modelos citado acima. Como era esperado, as pressões de líquido nos modelos de dupla porosidade mudam mais rapidamente do que no modelo de simples porosidade. Isso, acontece devido a presença de uma rede de fraturas dentro do meio poroso fraturado resultando em uma drenagem mais rápida do fluido, causando uma razão de dissipação mais rápida de poro pressão e de consolidação superficial. Ainda na Figura 48 observamos que o modelo 1 demora mais a dissipar a poro pressão do que o modelo 2, isso acontece devido as explicações já mencionadas anteriormente nesta subseção. Já na Figura 49 mostramos a diferença entre os modelos 1 e 2 de dupla porosidade e dupla permeabilidade. Notamos nessa Figura, que a pressão na fratura é maior para o modelo 1 e conseqüentemente menor para o modelo 2. Como já mencionado anteriormente, isso ocorre devido as hipóteses adotadas para cada modelo, ou seja, no modelo numérico 1 as fraturas se deformam, enquanto que no modelo

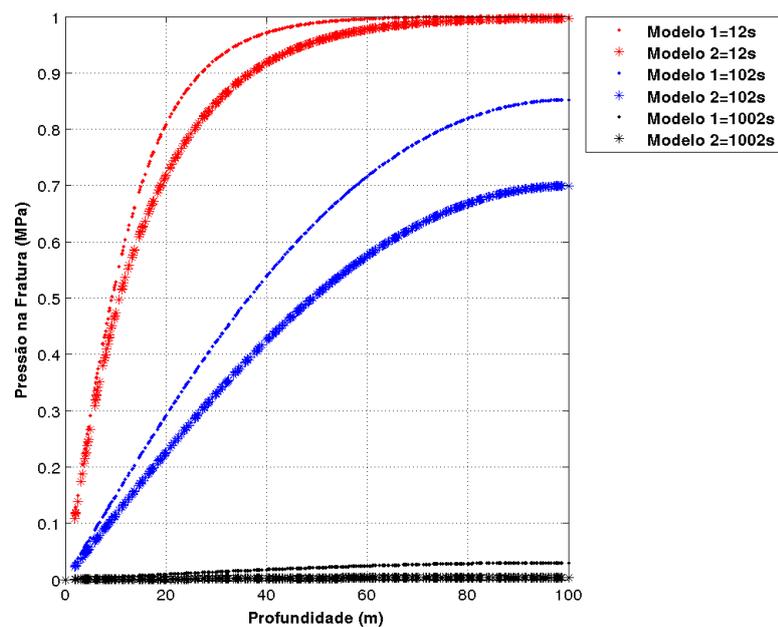
numérico 2 as fraturas não se deformam, sendo o meio poroso rígido na fratura.

Figura 48 – Simples porosidade versus modelo 1 versus modelo 2 para pressão na matriz.



Fonte: Autor

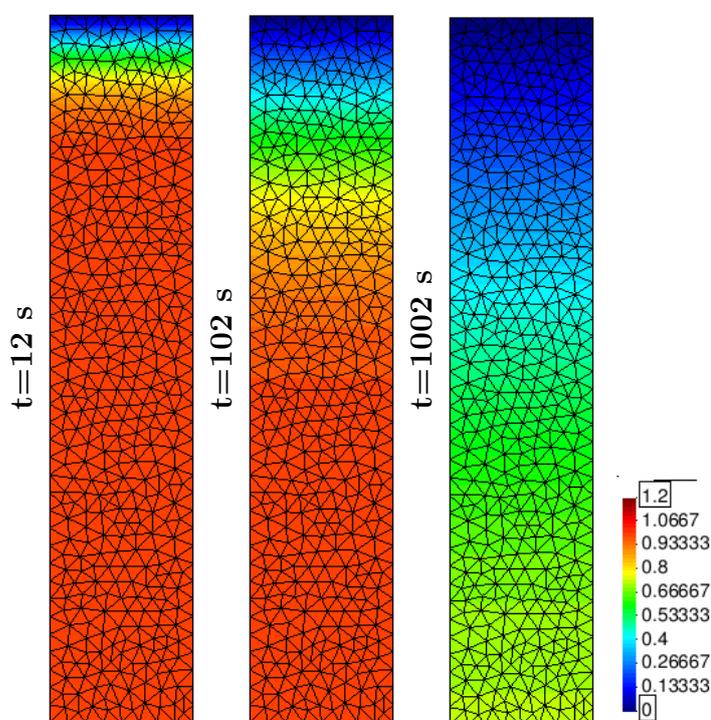
Figura 49 – Modelo 1 versus modelo 2 para pressão na fratura.



Fonte: Autor

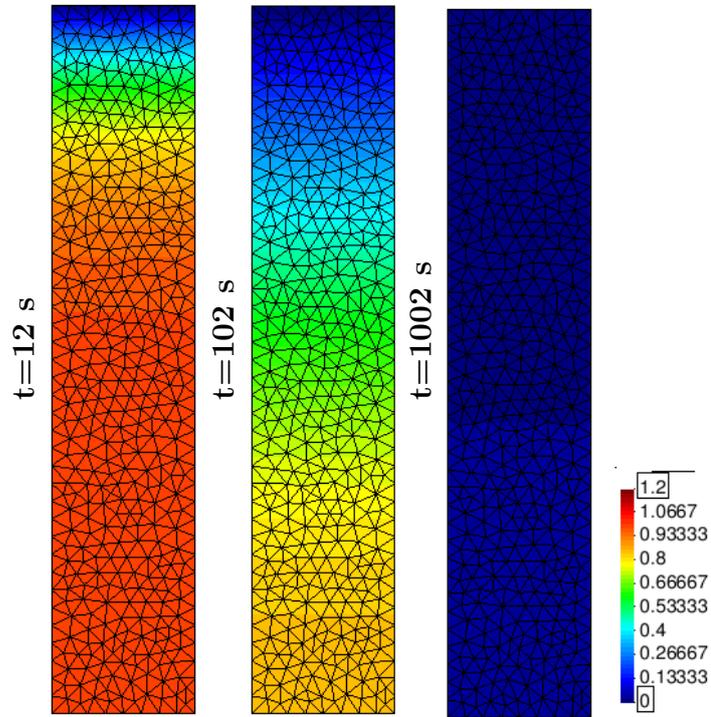
As Figuras 50, 51 e 52 demonstram os perfis das pressões na matriz ao longo das colunas para os tempos de 12, 102 e 1002 segundos. A Figura 50, representa o modelo de simples porosidade, obtido através do tipo de acoplamento total, já as Figuras 51 e 52, representam os modelos 1 e 2 de dupla porosidade, respectivamente, obtido através do tipo de acoplamento iterativo. Os resultados mostram que as soluções numéricas apresentam uma distribuição homogênea da pressão de fluido ao longo da coluna do problema. Além disso, na Figura 50 notamos que a pressão se dissipa mais lentamente em relação as Figuras 51 e 52, isso ocorre devido a rede de fraturas existente no meio de dupla porosidade, ocasionando assim um escoamento mais rápido nas Figuras 51 e 52.

**Figura 50** – Perfis das soluções numéricas para o modelo de simples porosidade.



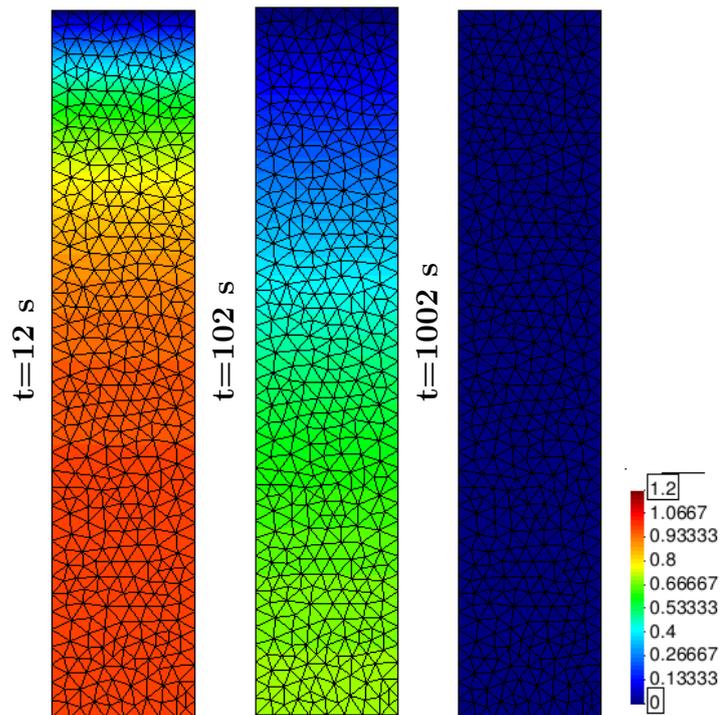
**Fonte:** Autor

Figura 51 – Perfis das soluções numéricas para o modelo 1 de dupla porosidade.



Fonte: Autor

Figura 52 – Perfis das soluções numéricas para o modelo 2 de dupla porosidade.



Fonte: Autor

## 7.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA O PROBLEMA DE MANDEL

Para as análises de sensibilidades do problema de Mandel utilizamos os parâmetros da Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados nas análises de sensibilidades.

Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	2500	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.3	—
$\mu$	Viscosidade do Fluido	$10^{-9}$	$MPa.s$
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.33	—
$\phi_2$	Porosidade da Fratura	0.033	—
$\mathbf{K}_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$\mathbf{K}_2$	Permeabilidade da Fratura	$10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$3.3654 \times 10^4$	$MPa$
$q$	Carga aplicada	-1.357	$MPa$
$K_n$	Módulo Volumétrico da Fratura	$1.6827 \times 10^3$	$MPa/m$
$s$	Espaçamento entre as fraturas	2, 3, 5	$m$

Assim como no caso de adensamento unidimensional, para estas análises a função de transferência de massa entre os meios porosos matriz e fratura é diferente de zero. Os parâmetros analisados, como se pode observar na Tabela 4, foram a permeabilidade da fratura em relação a permeabilidade da matriz e o espaçamento entre as fraturas, ou seja, considerando o meio poroso em alguns casos mais permeável e fraturado e em outros casos analisados menos permeável e fraturado. As Figuras 53, 54, 56, 57, 59, 60, 62 e 63 mostram a variação da pressão para três tempos diferente, 1.01, 5.01 e 10.01 segundos, sendo cada tempo representado por uma cor diferente, vermelho, azul e preto, respectivamente. Ainda podemos notar que, as curvas das pressões nessas Figuras, quando  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$  e  $s = 2$  são linhas contínuas,  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  e  $s = 3$  são bolas abertas e  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  e  $s = 5$  são asteriscos. Nas Figuras 55, 58, 61 e 64 as curvas são analisadas para o tempo de 1.01 segundos, sendo que as curvas são representadas para matriz por linhas contínuas e para a fratura por asteriscos.

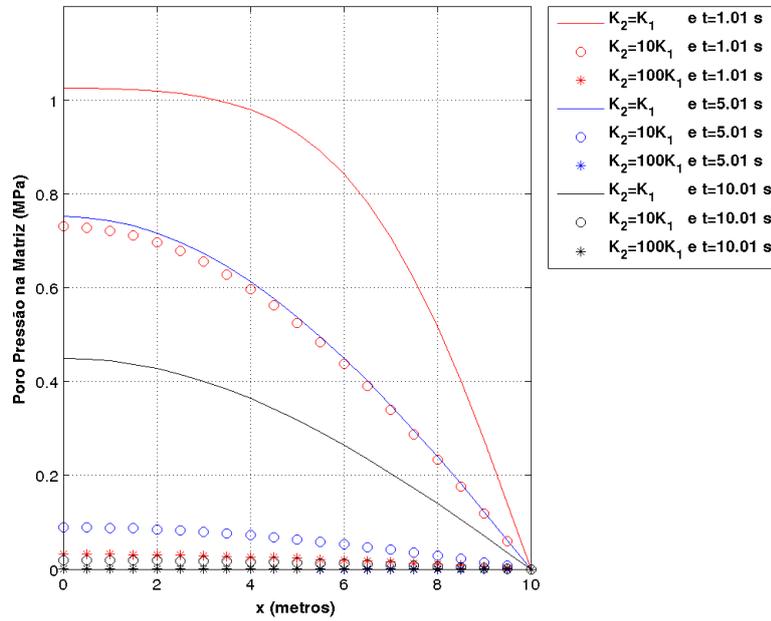
### 7.2.1 Análise de Sensibilidade da Formulação 1

- Análise 1: Variação da permeabilidade.

As Figuras 53, 54 e 55 apresentam as pressões de fluidos para matriz e fratura em relação ao eixo x, para diferentes valores de permeabilidade,  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ , onde os valores de  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são dados na Tabela 4, e considerando um espaçamento entre as fraturas de  $s = 2 m$ . Nas Figuras 53 e 54, observamos que quanto maior a razão  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ , mais rapidamente será a diminuição da pressão de

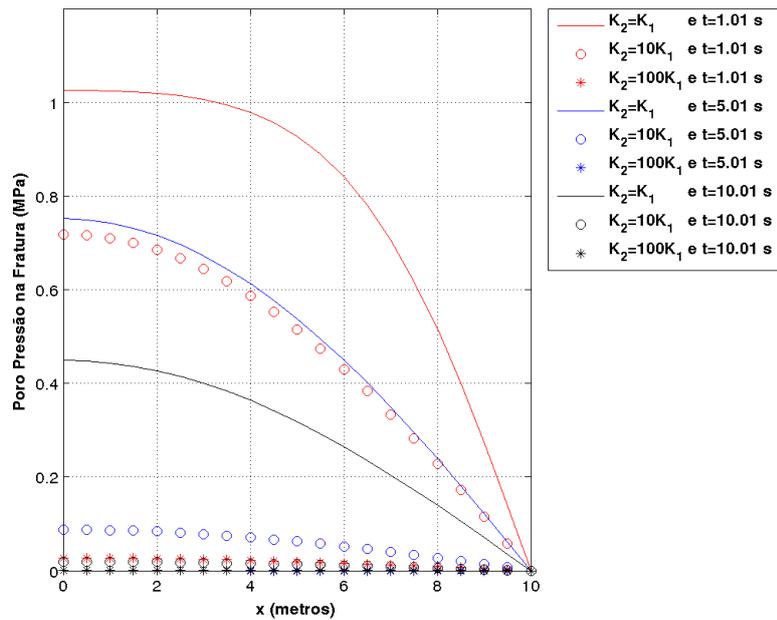
fluido no meio poroso. Isso, ocorre devido a troca de fluxo entre a matriz porosa e as regiões fraturadas. Assim quanto maior for a relação entre  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$  maior será a troca de fluxo entre os meios. Desta maneira, o fluido dentro das fraturas é escoado mais rapidamente, pois as fraturas são mais permeáveis. Já a Figura 55 compara as curvas para pressão na matriz e na fratura. Podemos notar nessa Figura que há uma diferença pequena entre as curvas da matriz e da fratura. Diferentemente do caso de adensamento unidimensional, como observado na Figura 34, que a diferença entre as pressões na matriz e na fratura é nítido para valores de permeabilidades  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ , a diferença entre as pressões na matriz e na fratura para o tempo de 1.01 segundos, só é perceptível quando temos  $\mathbf{K}_2 = 10\mathbf{K}_1$ . Isso, acontece pois quando  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1$  não há diferença entre os dois meios, ou seja,  $p_1$  é praticamente igual a  $p_2$ , fazendo com que a função de transferência de massa entre os meios seja praticamente nula e para  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  a troca de fluido é tão rápida que as pressões de fluido dos meios porosos se aproximam rapidamente do estado estacionário, fazendo com que não haja aproximadamente diferença nenhuma entre as curvas. Mas, assim como no caso de adensamento unidimensional a pressão de fluido na matriz tende a ser maior que a pressão de fluido na fratura, porque as fraturas do meio poroso atuam como corredores para o fluido, fazendo com que a pressão na fratura diminua mais rápido do que a pressão na matriz. Além disso, para razões maiores de permeabilidade observamos uma dissipação muito rápida da pressão de fluido, pois o meio poroso tornasse mais permeável. Desta maneira, em meio porosos fraturados quanto maior for a razão  $\frac{\mathbf{K}_2}{\mathbf{K}_1}$ , mais rápido será a dissipação de pressão de fluido.

Figura 53 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidade (modelo 1).



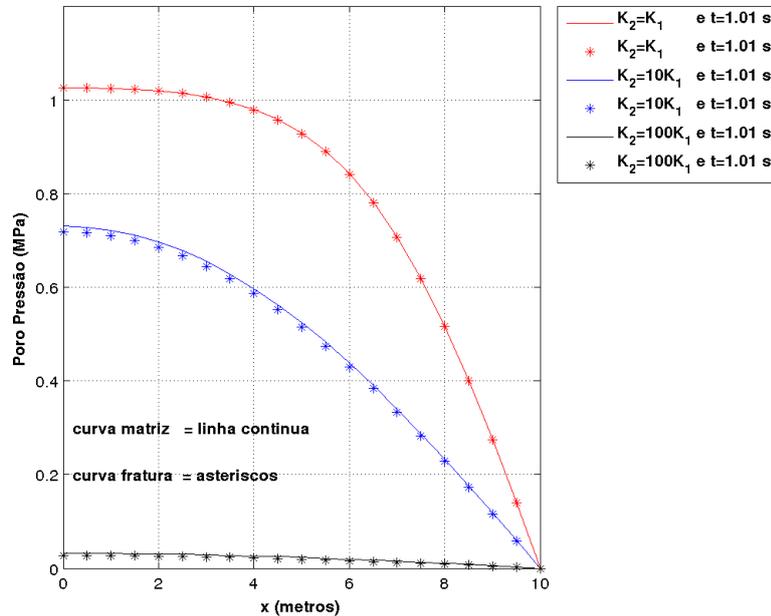
Fonte: Autor

Figura 54 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidade (modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 55 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidade (modelo 1).

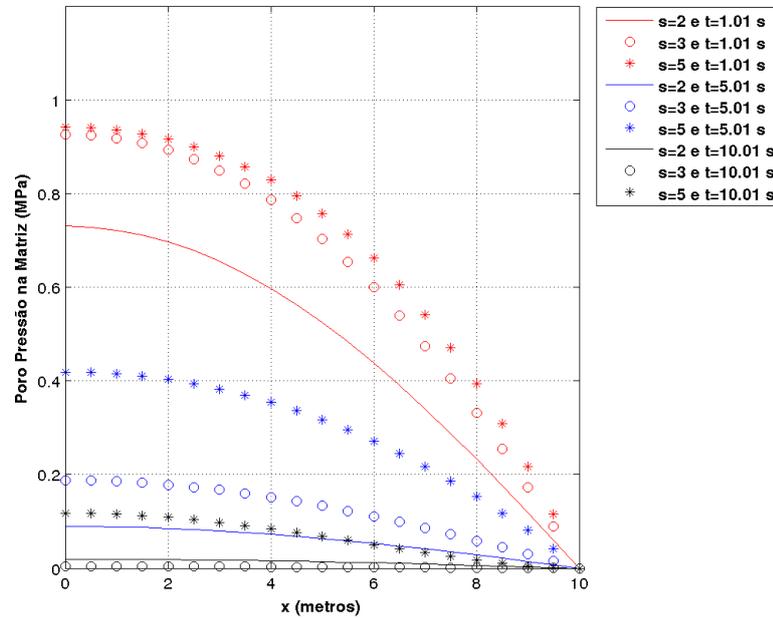


Fonte: Autor

- Análise 2: Variação do espaçamento entre as fraturas.

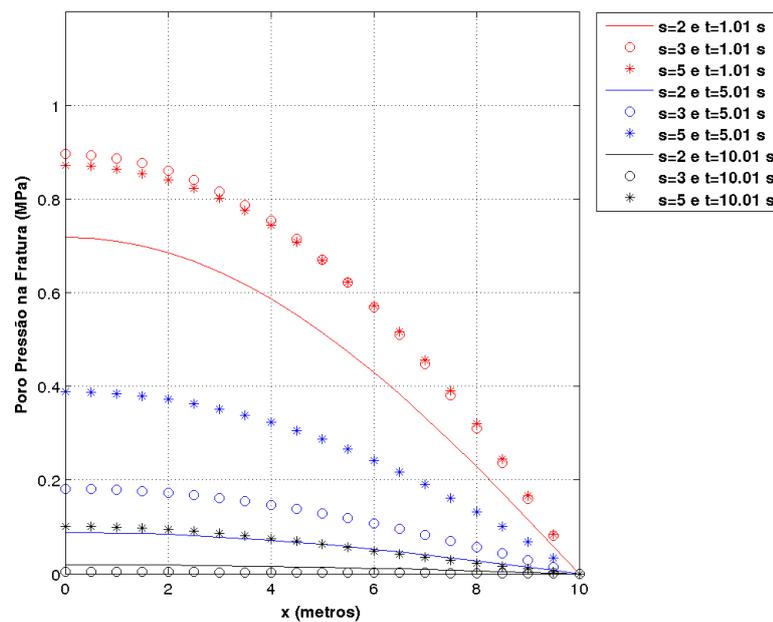
Nas Figuras 56, 57 e 58 apresentamos as pressões de fluido para matriz e fratura em relação ao eixo  $x$ , para diferentes valores de espaçamento entre as fraturas,  $s = 2$ ,  $s = 3$  e  $s = 5$  metros, com o valor da permeabilidade sendo de  $K_2 = 10K_1$  MPa, todos esses valores são dados na Tabela 4. Observamos nas Figuras 56 e 57 que quanto maior for o espaçamento entre as fraturas, menos fratura o meio possui. Desta forma, o escoamento de fluido acontece mais lentamente. Além disso, na Figura 56, notamos que quanto menor o espaçamento entre as fraturas menor será a pressão na matriz, pois o parâmetro  $s$ , entra na função de transferência de massa entre os meios como o inverso quadrado, ou seja,  $\frac{1}{s^2}$ , fazendo com que a troca de fluido entre os meios porosos ocorra em maiores quantidades e de maneiras mais rápidas. Já na Figura 58, mostramos que quanto maior for o espaçamento entre as fraturas maior será a diferença entre as pressões na matriz e na fratura. Isso acontece, porque quanto menor for o espaçamento entre as fraturas,  $s$ , maior será a variação de pressão,  $p_1 - p_2$ , ou seja, quanto mais fraturas maior dissipação das pressões, pois funcionam como corredores do fluxo e quanto maior for o espaçamento entre as fraturas,  $s$ , mais a pressão se manterá, pois menor será o número de fraturas, ocorrendo o efeito contrário.

Figura 56 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).



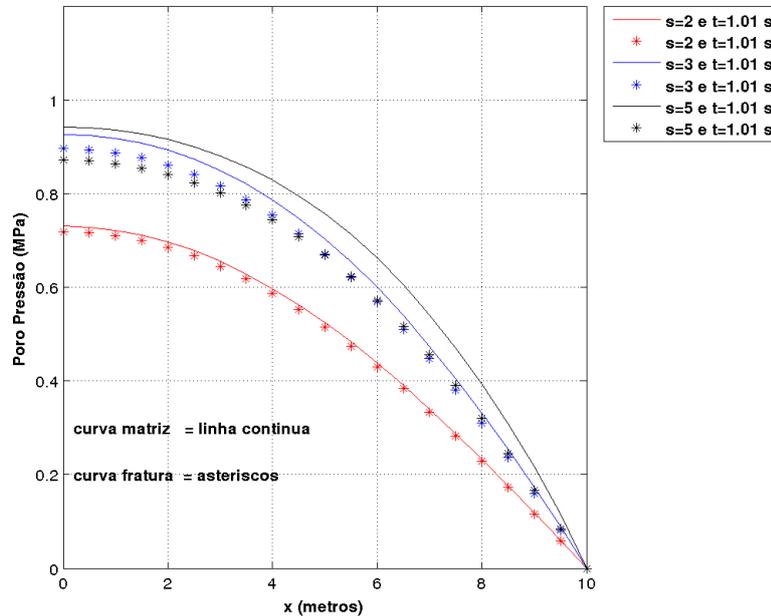
Fonte: Autor

Figura 57 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 58 – Pressão na matriz e fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 1).



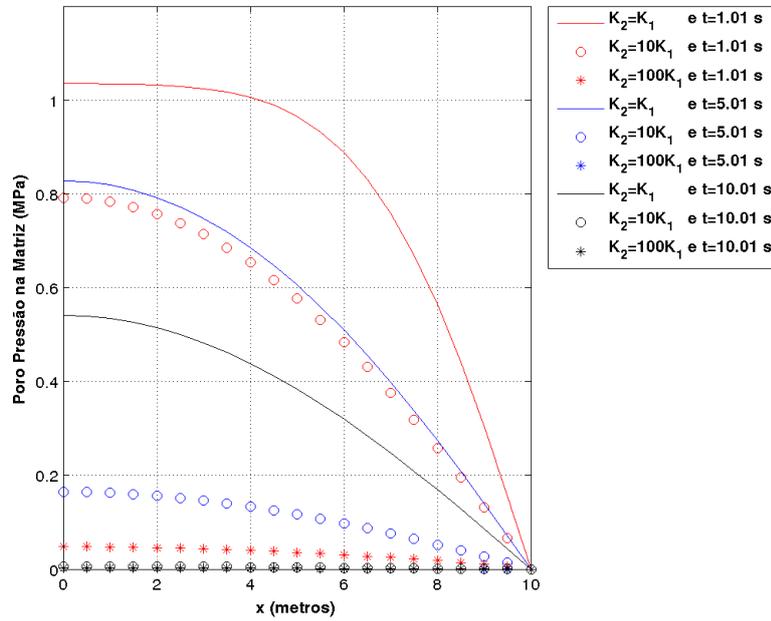
Fonte: Autor

## 7.2.2 Análise de Sensibilidade da Formulação 2

- Análise 1: Variação da permeabilidade.

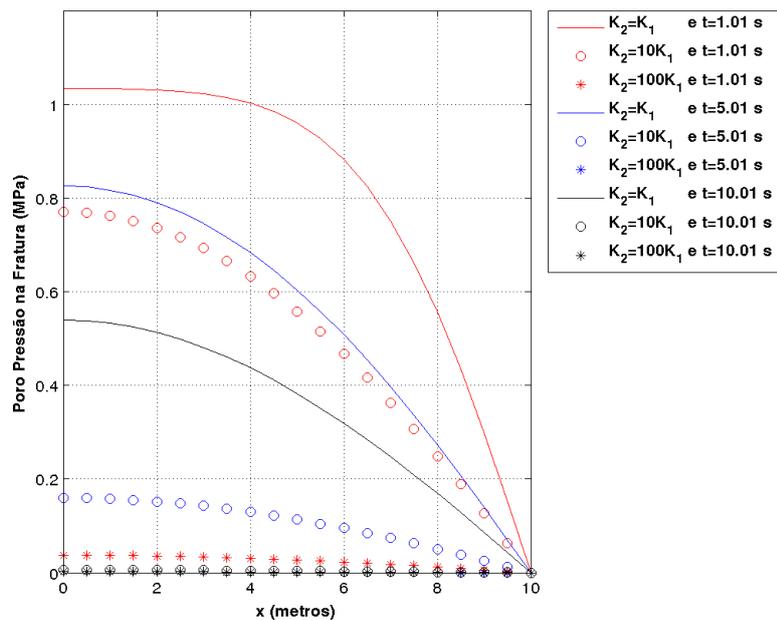
Assim como na formulação 1, as Figuras 59, 60 e 61 apresentam as pressões de fluidos para matriz e fratura em relação ao eixo x, para diferentes valores de permeabilidade e considerando um espaçamento entre as fraturas de  $s = 2 \text{ m}$ . Nas Figuras 59 e 60, notamos que quanto maior a razão de  $\frac{K_2}{K_1}$ , mais rapidamente será a diminuição da pressão de fluido no meio poroso. Isso acontece por causa da troca de fluxo entre a matriz porosa e as regiões fraturadas. Assim, quanto maior for a relação entre  $\frac{K_2}{K_1}$  mais rapidamente será a dissipação da pressão nos meios, conforme já discutido anteriormente. Desta maneira, o fluxo de fluido dentro das fraturas é escoado mais rapidamente. Na Figura 61, comparamos as curvas para pressão na matriz e na fratura para um tempo de 1.01 segundos. Podemos notar nessa Figura que há uma diferença pequena entre as curvas da matriz e da fratura. Essa diferença mostra que para maiores valores de permeabilidades a pressão na matriz será maior que a pressão na fratura, isso ocorre pelos mesmo motivos discutidos na subseção anterior da formulação 1 e também devido ao nível de fraturamento do meio poroso.

Figura 59 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidade (modelo 2).



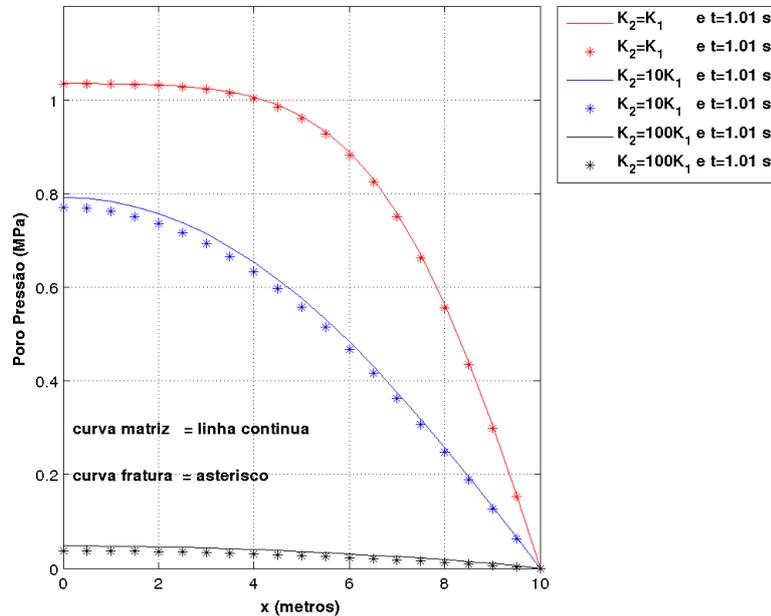
Fonte: Autor

Figura 60 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidade (modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 61 – Pressão na matriz e fratura para diferentes permeabilidade (modelo 2).

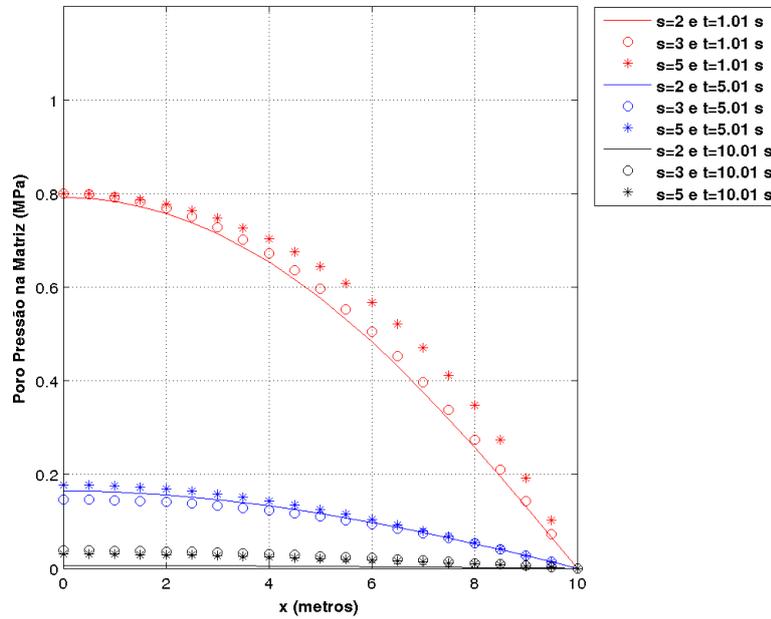


Fonte: Autor

- Análise 2: Variação do espaçamento entre as fraturas.

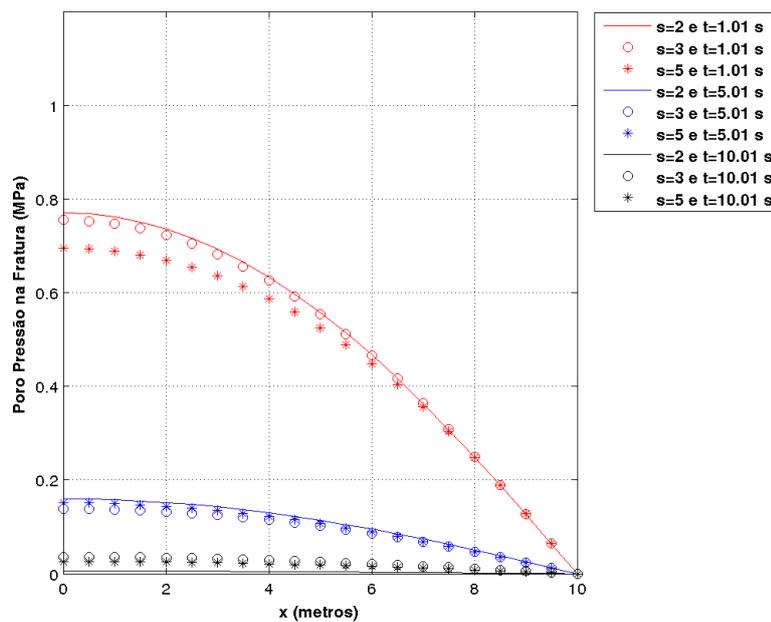
Nas Figuras 62, 63 e 64 mostramos as pressões de fluido para matriz e fratura em relação ao eixo  $x$ , para diferentes valores de espaçamento entre as fraturas,  $s = 2$ ,  $s = 3$  e  $s = 5$  m, com o valor da permeabilidade sendo de  $K_2 = 10K_1$ , todos esses valores são dados na Tabela 4. Notamos nas Figuras 62 e 63 que quanto menor for o espaçamento entre as fraturas, mais fratura o meio possui. Desta forma, o escoamento de fluido acontece mais rapidamente. Além disso, na Figura 62, notamos que quanto maior o espaçamento entre as fraturas maior será a pressão na matriz, enquanto que na Figura 63, quanto maior for o espaçamento entre as fraturas menor será a pressão na fratura. Da mesma forma que na Figura 58, a Figura 64, mostra que quanto maior for o espaçamento entre as fraturas, maior será a diferença entre as pressões na matriz e na fratura. Novamente como ocorrido na Figura 58, isso acontece, pois ao aumentar o espaçamento entre as fraturas,  $s$ , diminuimos a quantidade de blocos da matriz porosa, dessa maneira, aumentamos o tamanho do bloco da matriz, então a pressão de fluido na matriz será maior em relação a pressão de fluido na fratura. Já se ao diminuir o espaçamento entre as fraturas,  $s$ , aumentamos a quantidade de blocos da matriz porosa, ou seja, diminuimos o tamanho do bloco da matriz, ocasionando assim, a pressão de fluido na matriz próximo em relação a pressão de fluido na fratura, ocorrendo o efeito contrário (conforme ilustrado na Figura 10).

Figura 62 – Pressão na matriz para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).



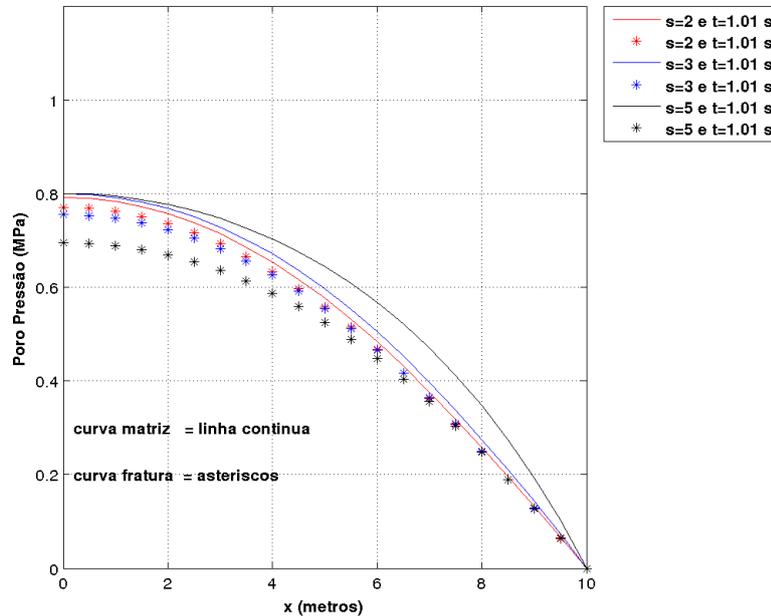
Fonte: Autor

Figura 63 – Pressão na fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 64 – Pressão na matriz e fratura para diferentes espaçamento entre as fraturas (modelo 2).



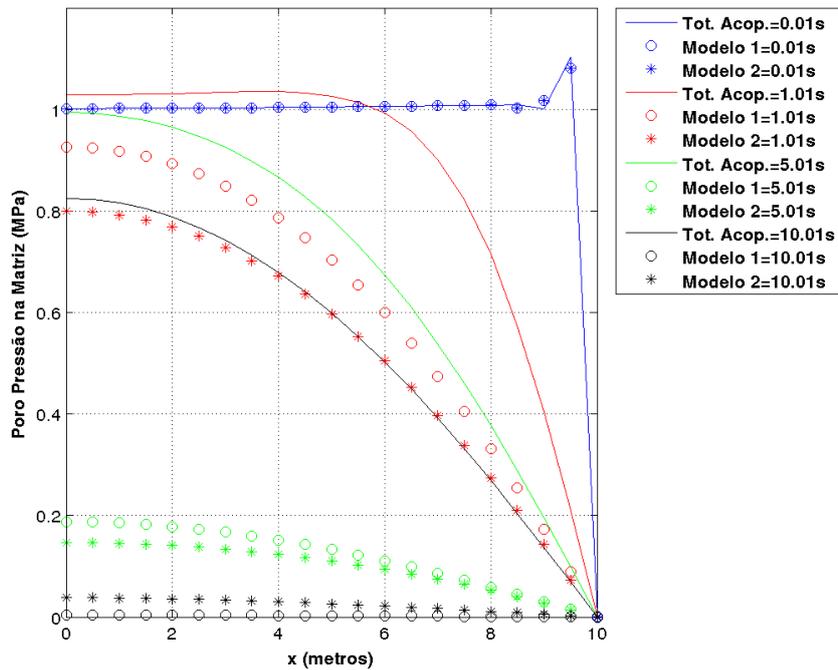
Fonte: Autor

### 7.2.3 Comparação entre os Modelos 1 e 2 Utilizando o Caso da Análise de Sensibilidade

As Figuras 65 e 66 mostram as curvas das pressões na matriz e fratura respectivamente. Assim como no caso de adensamento unidimensional, Na Figura 65 comparamos as curvas do totalmente acoplado, no caso de simples porosidade, onde os parâmetros são dados na Tabela 1, com os modelos numérico 1 e 2 de dupla porosidade e dupla permeabilidade com *stress split*, utilizando o acoplamento iterativo, onde os parâmetros são mostrados na Tabela 3. Para o caso de dupla porosidade e dupla permeabilidade, as permeabilidades intrínsecas adotadas para matriz e fratura foram,  $\mathbf{K}_1 = 10^{-12} \text{ MPa}$  e  $\mathbf{K}_2 = 10^{-11} \text{ MPa}$ , respectivamente, já o espaçamento entre as fraturas foi de  $s = 3 \text{ m}$ . Nessa Figura, mostramos as mudanças de pressão de fluido ao longo do eixo x para os tempos de 0.01, 1.01, 5.01 e 10.01 segundos para os três modelos citado acima. As pressões de fluido nos modelos de dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split*, se dissipam mais rapidamente do que no modelo de simples porosidade. Isso ocorre por causa da presença de uma rede de fraturas dentro do meio poroso fraturado resultando em uma drenagem mais rápida do fluido. Ainda na Figura 65, notamos que o modelo 1 demora mais a dissipar a poro pressão do que o modelo 2, conforme as explicações mencionadas no caso de adensamento unidimensional. Enquanto que na Figura 66, observamos a diferença entre os modelos de dupla porosidade e dupla permeabilidade 1

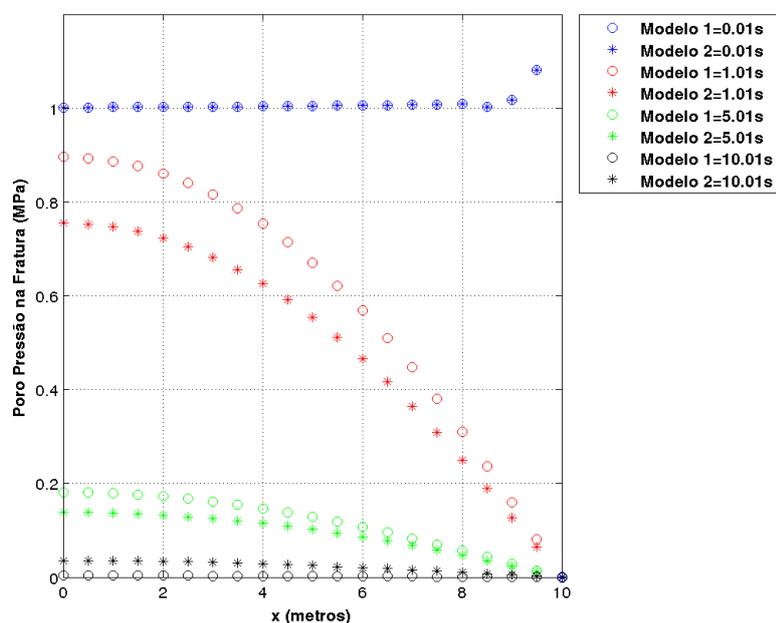
e 2 com a técnica do *stress split*, para a poro pressão de fluido na fratura. Constatamos nessa Figura, que a pressão na fratura é maior para o modelo 1 e conseqüentemente menor para o modelo 2. Assim como no caso de adensamento unidimensional, as explicações para o problema de Mandel para que isso ocorra são as mesmas já mencionadas na análise de sensibilidade da seção anterior.

Figura 65 – Comparação da pressão na matriz para modelo de simples porosidade versus modelo 1 versus modelo 2.



Fonte: Autor

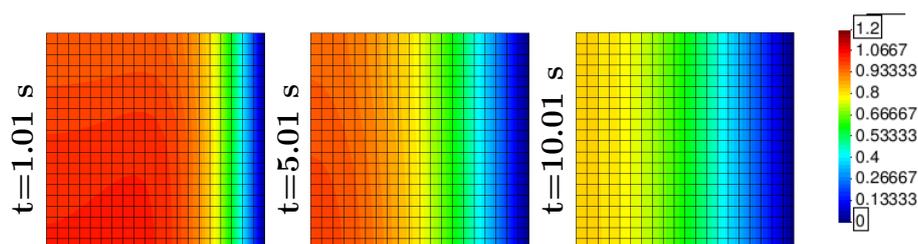
Figura 66 – Comparação da pressão na fratura para os modelos 1 e 2.



Fonte: Autor

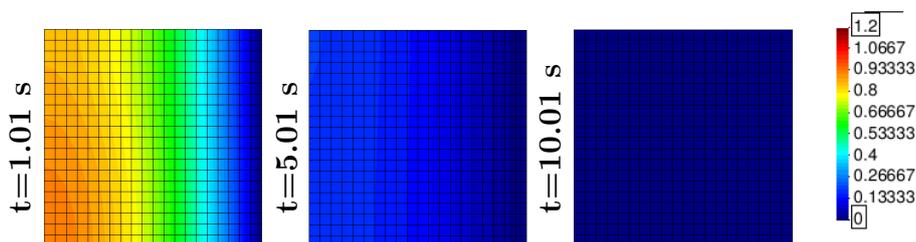
As Figuras 67, 68, 69, 70 e 71 apresentam os perfis das pressões na matriz e fratura ao longo do eixo  $x$  para os tempos de 1.01, 5.01 e 10.01 segundos. O modelo de simples porosidade foi obtido através do acoplamento total, já os modelos de dupla porosidade foram obtidos através do acoplamento iterativo. As Figuras 67, 68 e 69 mostram os perfis de evoluções das pressões na matriz. Notamos que a dissipação da pressão no meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade, como era esperado, ocorrem mais rapidamente do que no meio de simples porosidade, devido a rede de fratura que esses modelos possuem, conforme explicado anteriormente. Já nas Figuras 70 e 71, exibimos os perfis das evoluções das pressões na fratura. Percebemos que o modelo 2 dissipa a pressão de fluido mais rapidamente em relação ao modelo 1, conforme já discutido amplamente.

Figura 67 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo de simples porosidade.



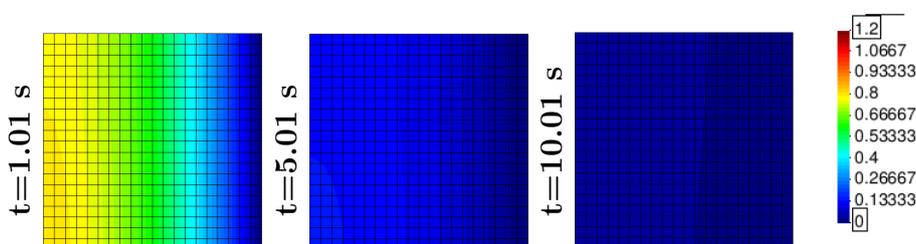
Fonte: Autor

Figura 68 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo 1.



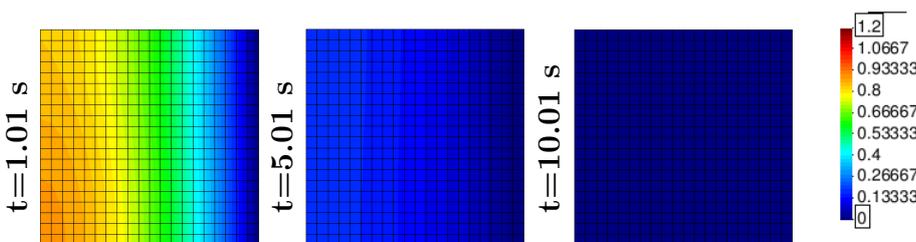
Fonte: Autor

Figura 69 – Perfis da pressão na matriz do problema de Mandel para o modelo 2.



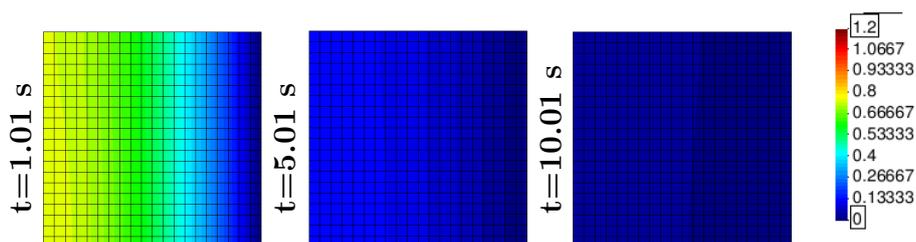
Fonte: Autor

Figura 70 – Perfis da pressão na fratura do problema de Mandel para o modelo 1.



Fonte: Autor

Figura 71 – Perfis da pressão na fratura do problema de Mandel para o modelo 2.



Fonte: Autor

## 8 POÇO VERTICAL

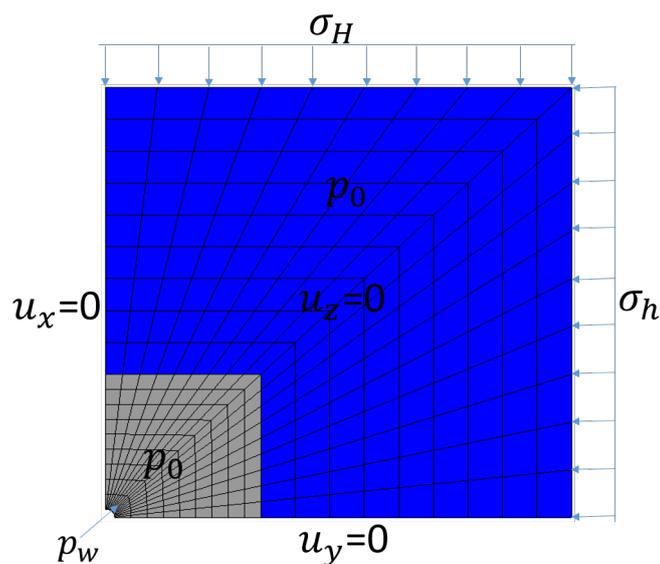
Neste capítulo mostraremos uma aplicação dos modelos de dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a técnica do *stress split* no problema de poço vertical, além de fazer comparações entre as formulações para mostrar as suas semelhanças e diferenças.

### 8.1 GEOMETRIA

Para o problema de poço vertical utilizamos uma malha, representada na Figura 72, com 6.35 metros, tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$  e raio do poço de 0.127 metros, sendo composta por 361 nós e 324 elementos. Além disso, a Figura 72, possui dois materiais, onde o primeiro material tem dimensões de  $1/3$  da malha nas duas direções,  $x$  e  $y$ , e o segundo material tem  $2/3$  da malha, também nas duas direções, e os valores dos parâmetros desses materiais estão representados nas Tabelas 5 e 6. Também podemos notar nessas Tabelas, que a densidade de fratura do material 1 é bem maior do que a do material 2. Isso é útil, porque podemos trabalhar com meios com diferentes densidades de fraturas.

As condições de contorno e inicial que são mostrada na Figura 72, tem seus valores apresentados na Tabela 7.

**Figura 72** – Malha do problema de poço vertical, onde  $p_0 = p_{10} = p_{20}$  que é a pressão inicial do reservatório e  $p_w = p_{1w} = p_{2w}$  que é a pressão de fluido aplicada no poço.



Fonte: Autor

Tabela 5 – Parâmetros usados no problema de poço vertical (Material 1).

Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	3000	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.2	—
$\mu$	Viscosidade do Fluido	$10^{-9}$	$MPa.s$
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.2	—
$\phi_2$	Porosidade da Fratura	0.05	—
$\mathbf{K}_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$\mathbf{K}_2$	Permeabilidade da Fratura	$10^{-10}, 10^{-9}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$1.2 \times 10^5, 1.2 \times 10^6$	$MPa$
$K_n$	Módulo Volumétrico da Fratura	$2.4 \times 10^4$	$MPa/m$
$s$	Espaçamento entre as fraturas	0.5	$m$

Tabela 6 – Parâmetros usados no problema de poço vertical (Material 2).

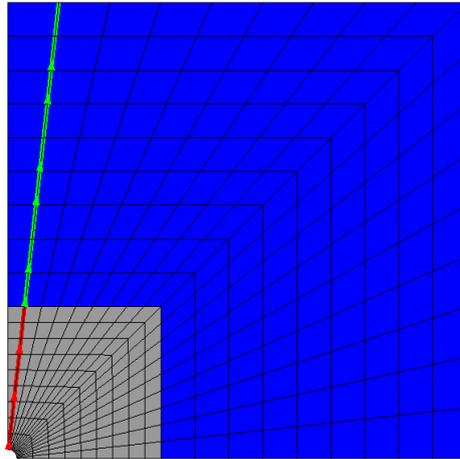
Parâmetros	Definição	Magnitude	Unidade
$E$	Módulo de Elasticidade	3000	$MPa$
$\nu$	Razão de Poisson	0.2	—
$\mu$	Viscosidade do Fluido	$10^{-9}$	$MPa.s$
$\phi_1$	Porosidade da Matriz	0.2	—
$\phi_2$	Porosidade da Fratura	0.05	—
$\mathbf{K}_1$	Permeabilidade da Matriz	$10^{-12}$	$m^2$
$\mathbf{K}_2$	Permeabilidade da Fratura	$10^{-10}$	$m^2$
$K_f$	Módulo Volumétrico do Fluido	$2.222 \times 10^3$	$MPa$
$K_s$	Módulo Volumétrico do Sólido	$1.2 \times 10^5, 1.2 \times 10^6$	$MPa/m$
$K_n$	Módulo Volumétrico da Fratura	$5.9999 \times 10^3$	$MPa$
$s$	Espaçamento entre as fraturas	2	$m$

Tabela 7 – Valores das condições inicial e de contorno.

Variável	Definição	Magnitude	Unidade
$p_0 = p_{10} = p_{20}$	Pressão inicial do reservatório	20	$MPa$
$p_w = p_{1w} = p_{2w}$	Pressão de fluido aplicada no poço	25	$MPa$
$\sigma_H$	Tensão horizontal maior	56	$MPa$
$\sigma_h$	Tensão horizontal menor	38	$MPa$

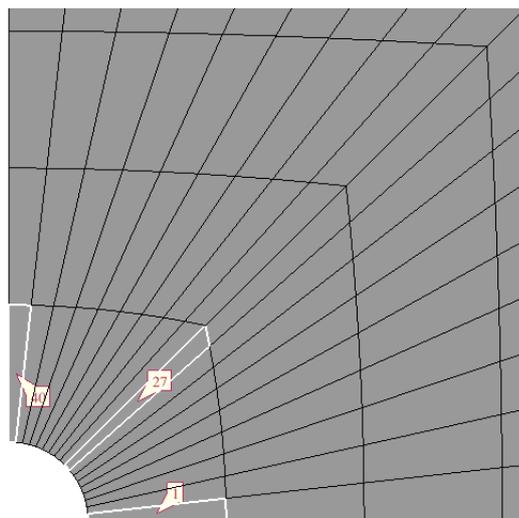
Os Gráficos, 75, 76, 79, 80, 93, 94, 96 e 97, das pressões de fluido para a matriz e fraturas nos dois modelos foram obtidos na direção da tensão horizontal maior, conforme Figura 73. Já os Gráficos, 77, 78, 81, 82, 95 e 98, da evolução da permeabilidade foram obtidos em três elementos diferentes ao redor do poço, conforme Figura 74.

Figura 73 – Linha diagonal onde foram obtidos os gráficos das pressões.



Fonte: Autor

Figura 74 – Representação dos elementos 1, 27 e 40.



Fonte: Autor

Para os dois modelos foram utilizados dois casos:

- Caso 1: Adotamos  $K_s = 10K_{ns}$ , ou seja,  $K_s = 1.2 \times 10^5$  e variamos a razão da permeabilidade na fratura do material 1 em  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 100$  e  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 1000$ , para podermos observar a influência da permeabilidade na pressurização do reservatório.
- Caso 2: Mantemos a relação da permeabilidade no material 1 de  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 100$  e variamos a razão  $K_s/K_{ns} = 10$  e  $K_s/K_{ns} = 100$ , ou seja, utilizamos o módulo volumétrico do sólido com os seguintes valores  $K_s = 1.2 \times 10^5$  e  $K_s = 1.2 \times 10^6$  para os dois materiais.

## 8.2 MODELO 1

- Caso 1: Variação da permeabilidade.

As Figuras 75 e 76 apresentam as pressões de fluidos para matriz e fratura em relação a distância, na direção da tensão horizontal maior, para diferentes valores de permeabilidades. Nas Figuras 75 e 76, observamos que quanto maior for a razão entre  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1$  mais rápido é a pressurização do reservatório, além disso devido a uma rede de fratura no meio poroso, junto com a função de transferência entre os dois meios, matriz e fratura, a pressurização tende a ser mais rápido nas fraturas do que na matriz. Ainda podemos notar nessas Figuras que entre a distância de 2 a 3 metros acontece uma variação de pressão maior quando a razão entre  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 1000$ , isso ocorre, porque o material 2 é menos permeável do que o material 1, ocasionando uma pressurização do segundo material mais lenta. Assim, quando vai começar a pressurizar o material 2 há uma mudança na pressão, causada pela alteração de densidade de fraturas entre os dois materiais, sendo o material 1, que fica próximo ao poço, com uma maior densidade de fraturas e o material 2, que fica mais afastado do poço, com uma menor densidade de fraturas verificada pelo valor do espaçamento entre as fraturas,  $s$ . Além disso, reparamos que quando a permeabilidade da fratura do material 1 é maior que a permeabilidade do material 2, essa queda de pressão é bem maior. Porque apresenta dois efeitos: primeiro a diferença de densidade de fratura e segundo a diferença de permeabilidade na fratura.

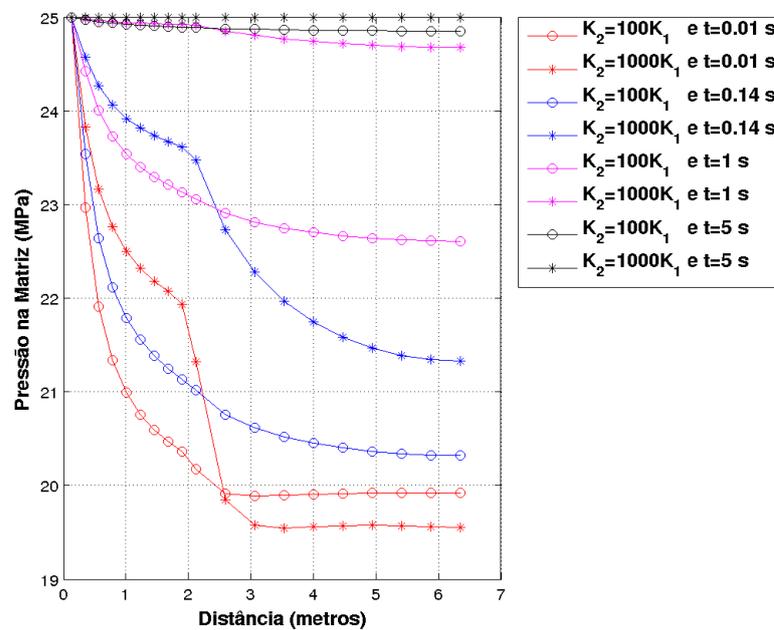
As Figuras 77 e 78 mostram a variação da permeabilidade em relação ao tempo, para os elementos 1, 27 e 40 que se localizam ao redor do poço. A permeabilidade foi obtida utilizando a lei exponencial que é:

$$K_{at} = K_{an} \exp(b(\phi_{at} - \phi_{an})) \quad (8.1)$$

onde  $K_{at}$  e  $K_{an}$  são as permeabilidades atual e anterior,  $b$  é o parâmetro de ajuste que na matriz tem um valor de 200 e na fratura dez vezes mais do que na matriz,  $\phi_{at}$  e  $\phi_{an}$  são as porosidades atual e anterior.

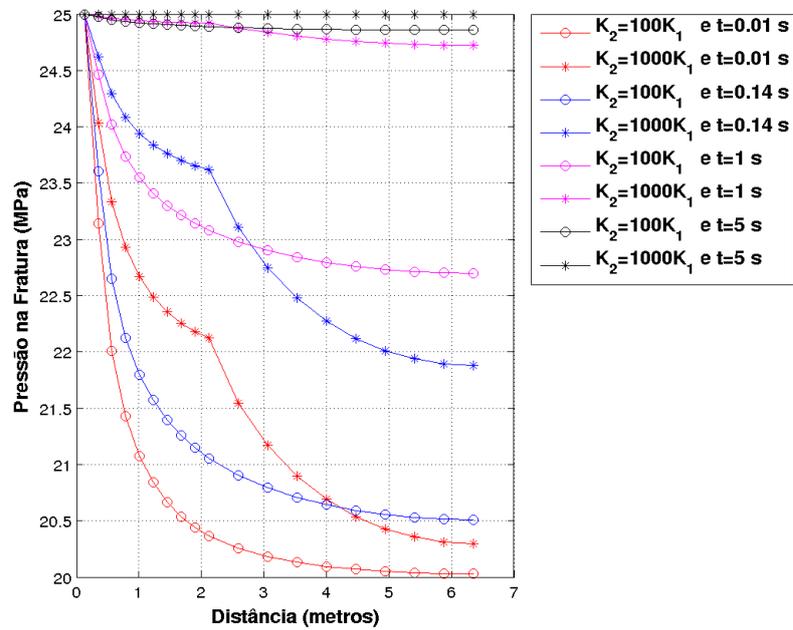
Nas Figuras 77 e 78, notamos que a permeabilidade da matriz varia bem menos em relação a permeabilidade da fratura, isso ocorre devido a porosidade variar mais na fratura do que na matriz e também porque o parâmetro  $b$  da lei exponencial da permeabilidade é dez vezes maior na fratura. Além disso, podemos verificar que a permeabilidade é maior no elemento 40 do que nos outros dois elementos, isso acontece porque esse elemento está na direção da tensão horizontal maior, pois para não ocorrer o colapso do poço, se faz necessário o aumento da permeabilidade nesse elemento para que aconteça o equilíbrio de tensões.

**Figura 75 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 1).**



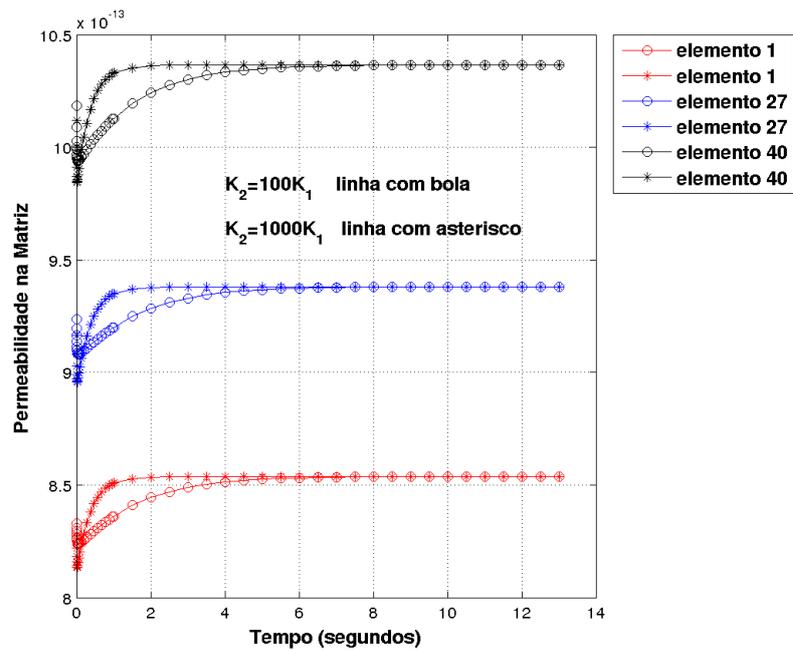
**Fonte:** Autor

Figura 76 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 1).



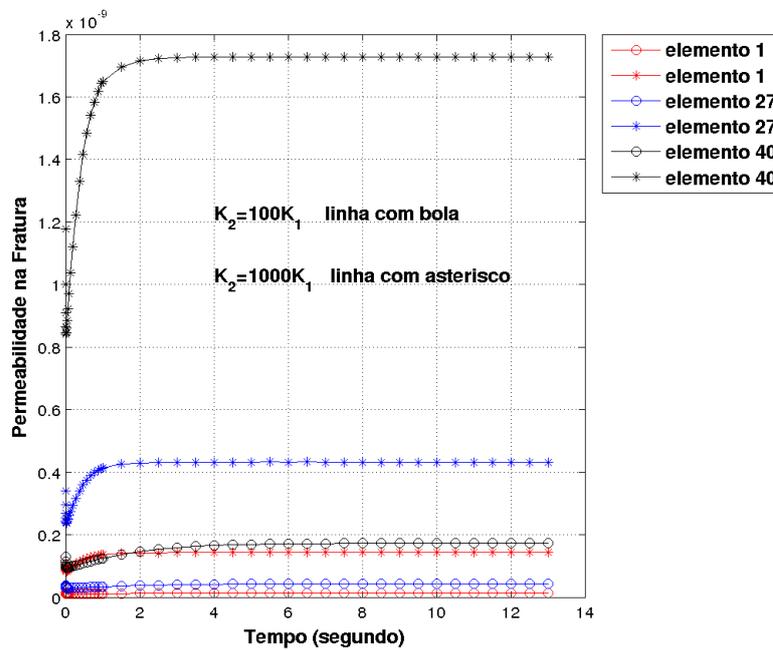
Fonte: Autor

Figura 77 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 78 – Permeabilidade na fratura para diferentes elementos (modelo 1).



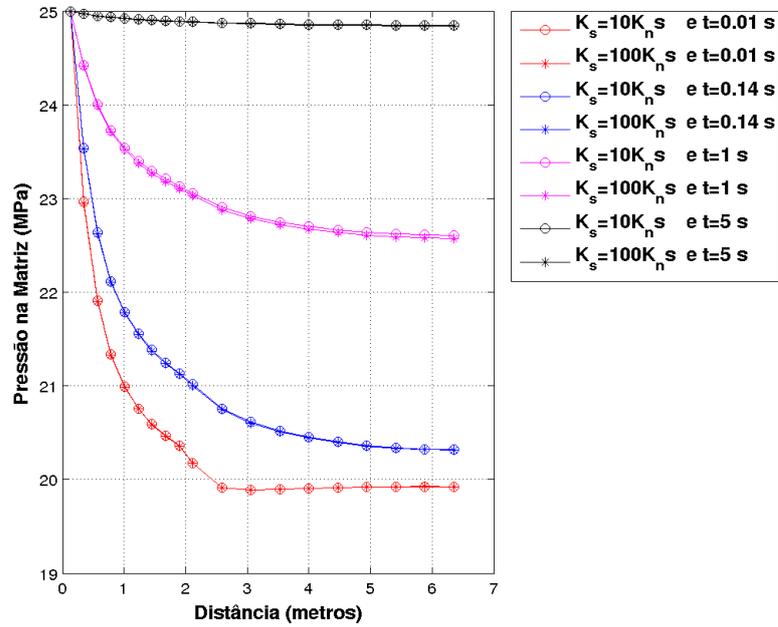
Fonte: Autor

- Caso 2: Variação do módulo volumétrico.

As Figuras 79 e 80, apresentam as pressões de fluidos na matriz e na fratura em relação à distância, na direção da tensão horizontal maior, para dois valores diferentes de módulo volumétrico do sólido. Podemos notar nas Figuras 79 e 80, que as curvas das pressões são semelhantes para as duas relações de  $K_s/K_n s$ . Isso indica, que nesse caso a variação de  $K_s/K_n s$ , mudando só o módulo volumétrico da matriz, não é suficiente para causar uma alteração na pressurização do reservatório. Desta forma, o aumento de pressão no meio poroso ocorre gradativamente nas diferentes razões de  $K_s/K_n s$ .

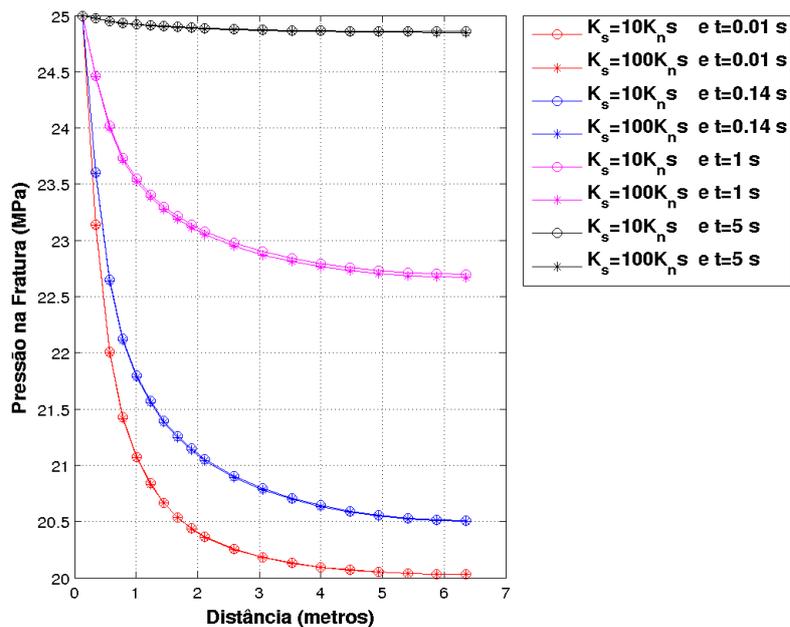
Nas Figuras 81 e 82, também observamos que não há diferença significativa entre as curvas de permeabilidade na matriz e na fratura com as diferentes razões de  $K_s/K_n s$ . Isso mostra, que a razão  $K_s/K_n s = 10$  e  $K_s/K_n s = 100$  afeta menos, que a variação do espaçamento entre as fratura,  $s$ , para alterações das pressões na matriz e na fratura, pois o espaçamento,  $s$ , influencia na função de transferência de massa entre os meios, como mostrado na análise de sensibilidade dos casos de adensamento unidimensional e problema Mandel. Já o módulo volumétrico influencia no termo mecânico, além de afetar o parâmetro alfa de Biot, mas sua variação não causa um efeito significativo para alterar a pressão de fluido para causar uma diferença entre os casos analisados.

Figura 79 – Pressão na matriz para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 1).



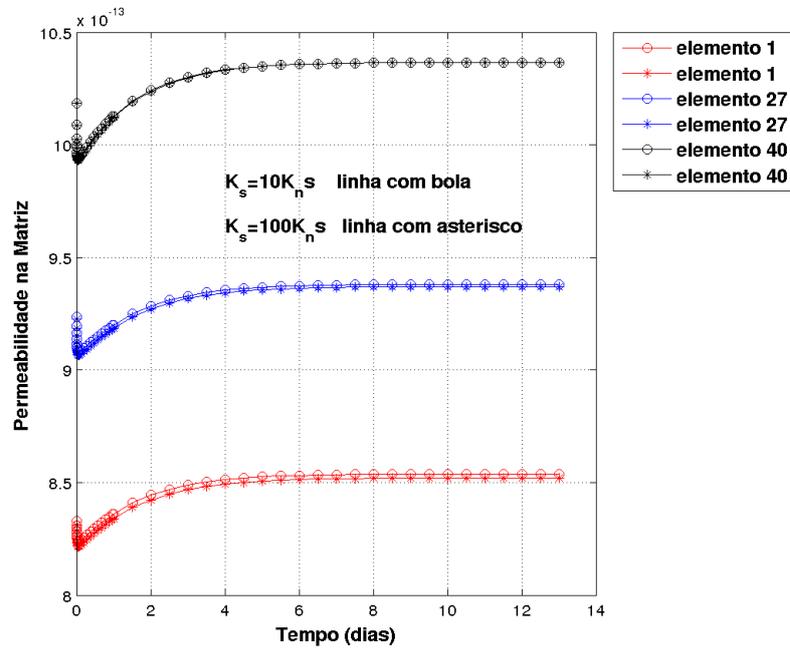
Fonte: Autor

Figura 80 – Pressão na fratura para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 1).



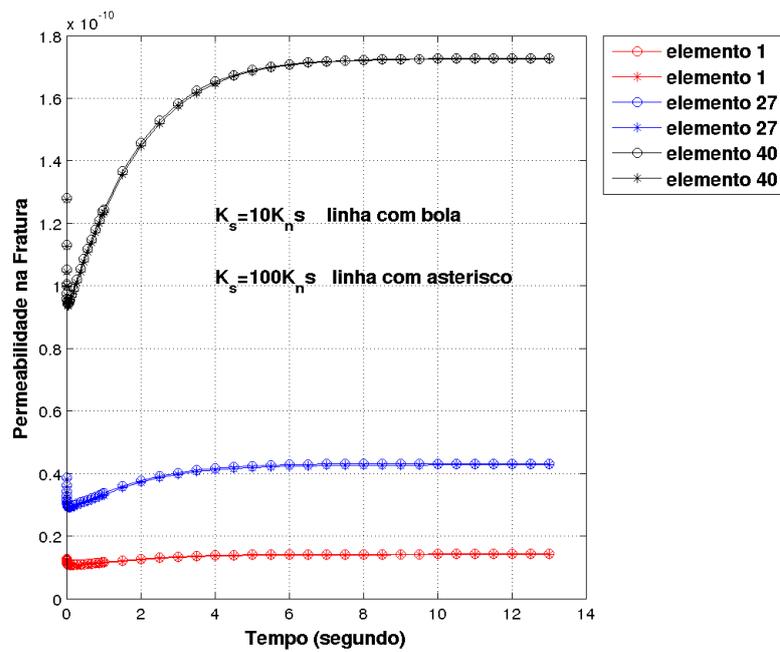
Fonte: Autor

Figura 81 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 82 – Permeabilidade na fratura para diferentes elementos (modelo 1).

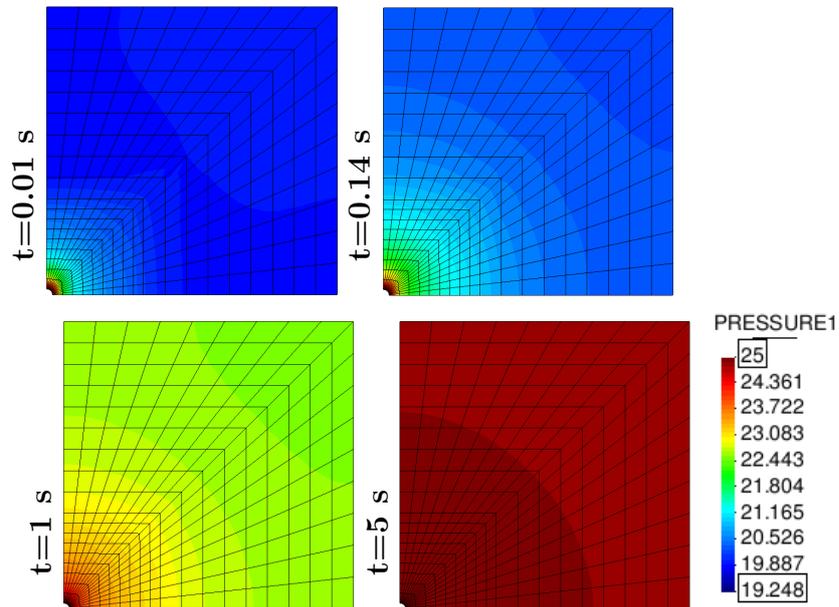


Fonte: Autor

As Figuras 83-86, mostram os perfis de cores das pressões na matriz e na fratura para a permeabilidade  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$  com  $K_S = 10K_n s$ , nos tempos de 0.01, 0.14, 1 e 5 segundos. Nessas Figuras, podemos observar que quanto mais permeável o meio poroso, mais rapidamente ocorre a pressurização do reservatório. Além disso, a diferença de permeabilidade do material 1 para o material 2, Figuras 84 e 86, ocasionando que a evolução da pressão não seja tão homogênea como nas Figuras 83 e 85.

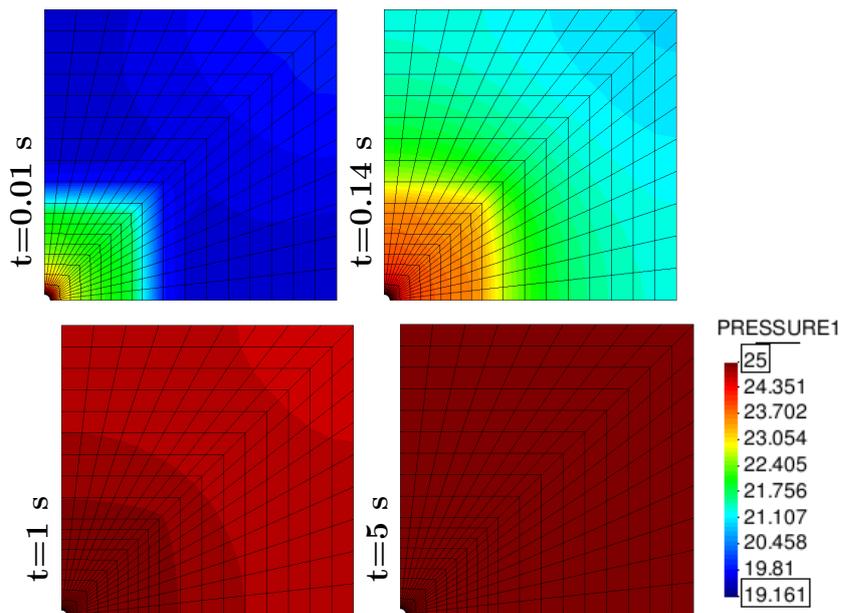
Já as Figuras 87-92, mostram os perfis de cores das porosidades e permeabilidades da matriz e da fratura, deslocamento e tensão, respectivamente, para o caso que  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  com  $K_S = 10K_n s$ . Nas Figuras 87 e 88, observamos a distribuição das porosidades na matriz e fratura, notamos que a maior variação da porosidade ocorre ao redor do poço vertical, pois é nessa região que se encontram as zonas de altas tensões provocadas pela aplicação de pressão de fluido no poço vertical. Além disso, devido a anisotropia da tensão a evolução da porosidade é maior na direção da tensão horizontal maior, pela mesma explicação dada anteriormente para a permeabilidade ser maior no elemento 40. Também notamos, que a porosidade na fratura varia mais que a porosidade na matriz, devido o acúmulo de massa na matriz ser maior que o acúmulo de massa na fratura. Nas Figuras 89 e 90, verificamos o mesmo comportamento da permeabilidade em relação a porosidade, isso acontece porque a permeabilidade depende da porosidade, ver Equação 8.1. Na Figura 91, observamos que o módulo do deslocamento aumento com passar do tempo, variando de 0 até 0.019843 metros, e o maior deslocamento acontece longe do poço devido as tensões aplicadas e a pressão de fluido no poço vertical. Já a Figura 92, mostra a evolução dos perfis da tensão horizontal maior, onde verificamos maiores aumento de tensões ao redor do poço vertical na direção da tensão horizontal maior, acontecendo por causa da aplicação da pressão de fluido no poço vertical.

Figura 83 – Perfil de cores da pressão na matriz para  $K_2 = 100K_1$  (modelo 1).



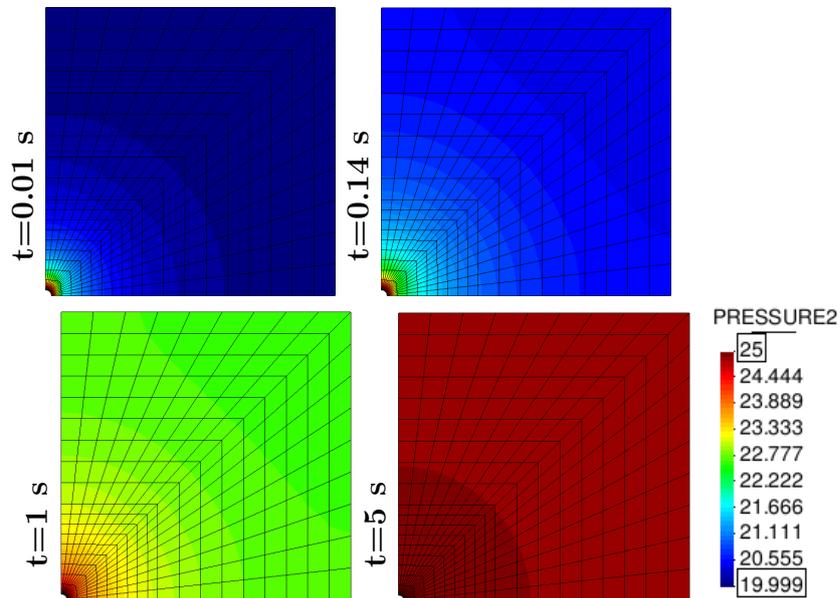
Fonte: Autor

Figura 84 – Perfil de cores da pressão na matriz para  $K_2 = 1000K_1$  (modelo 1).



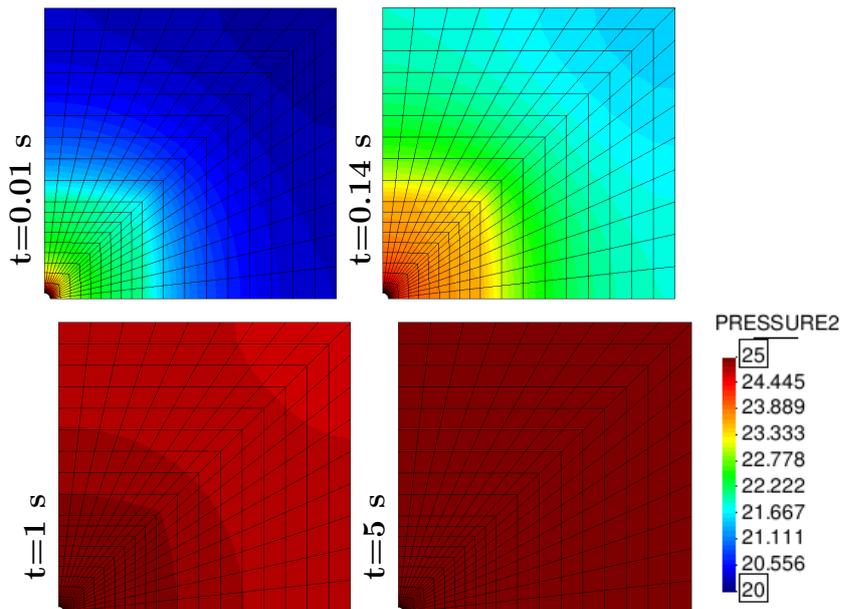
Fonte: Autor

Figura 85 – Perfil de cores da pressão na fratura para  $K_2 = 100K_1$  (modelo 1).



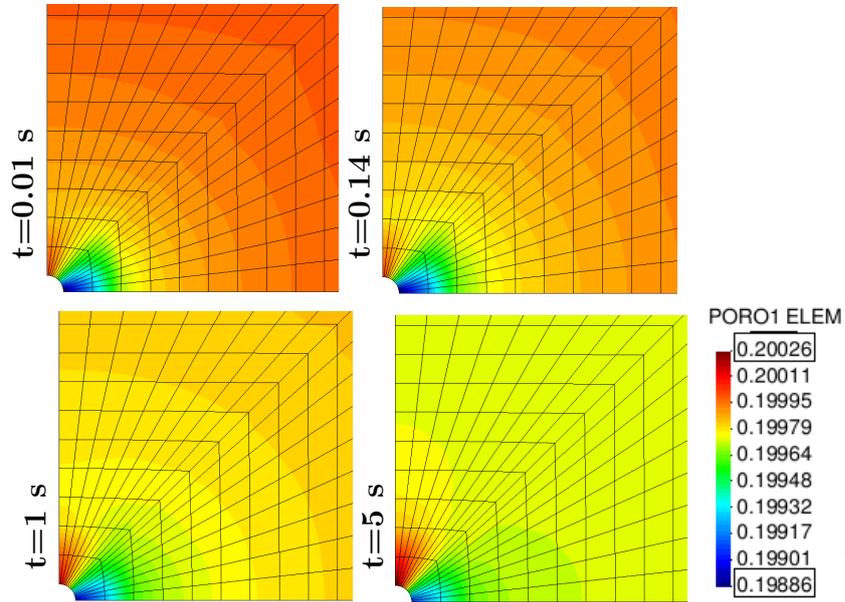
Fonte: Autor

Figura 86 – Perfil de cores da pressão na fratura para  $K_2 = 1000K_1$  (modelo 1).



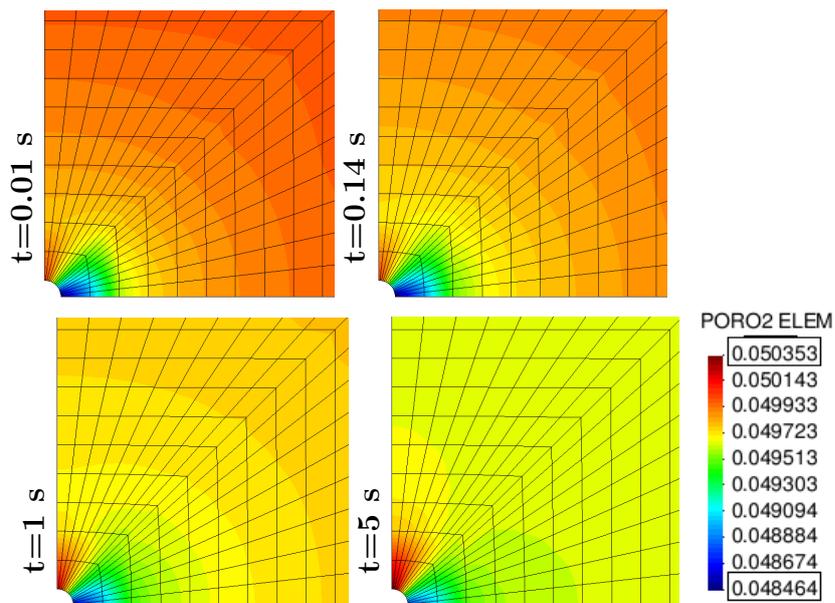
Fonte: Autor

Figura 87 – Perfil de cores da porosidade na matriz (modelo 1).



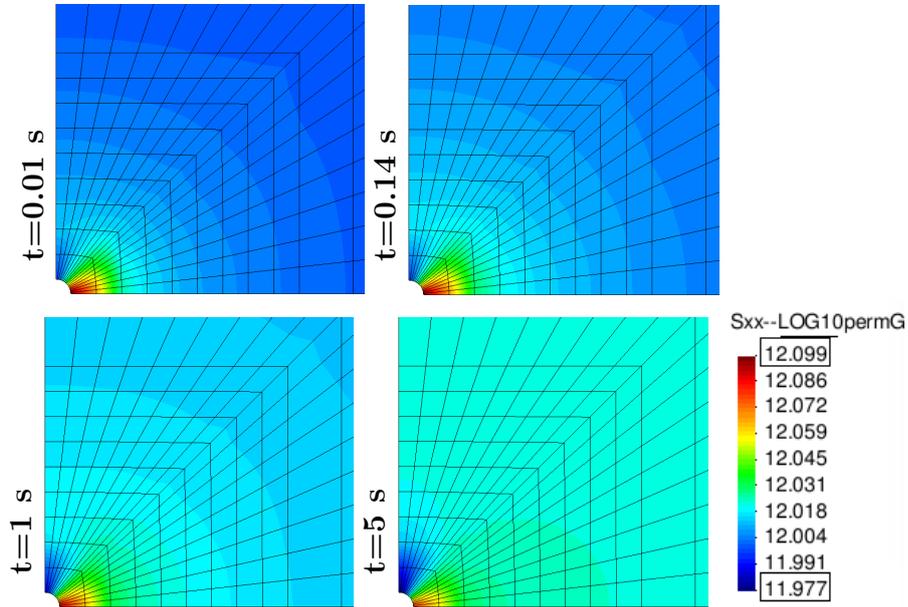
Fonte: Autor

Figura 88 – Perfil de cores da porosidade na fratura (modelo 1).



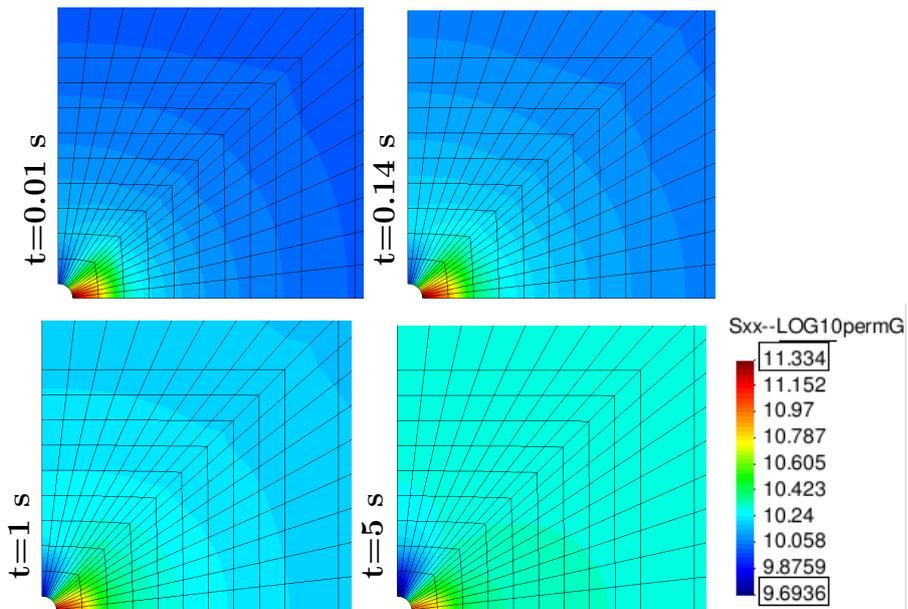
Fonte: Autor

Figura 89 – Perfil de cores da permeabilidade na matriz (modelo 1).



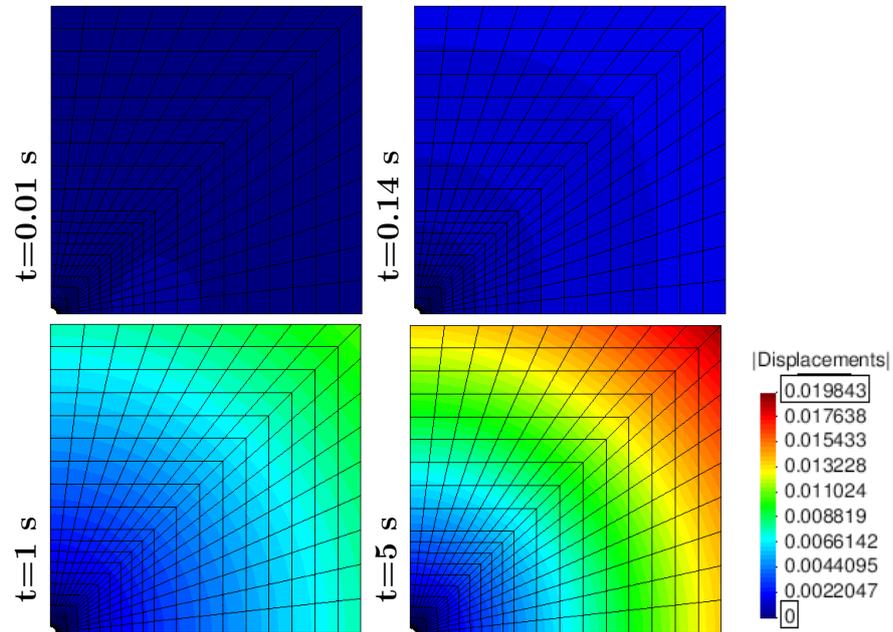
Fonte: Autor

Figura 90 – Perfil de cores da permeabilidade na fratura (modelo 1).



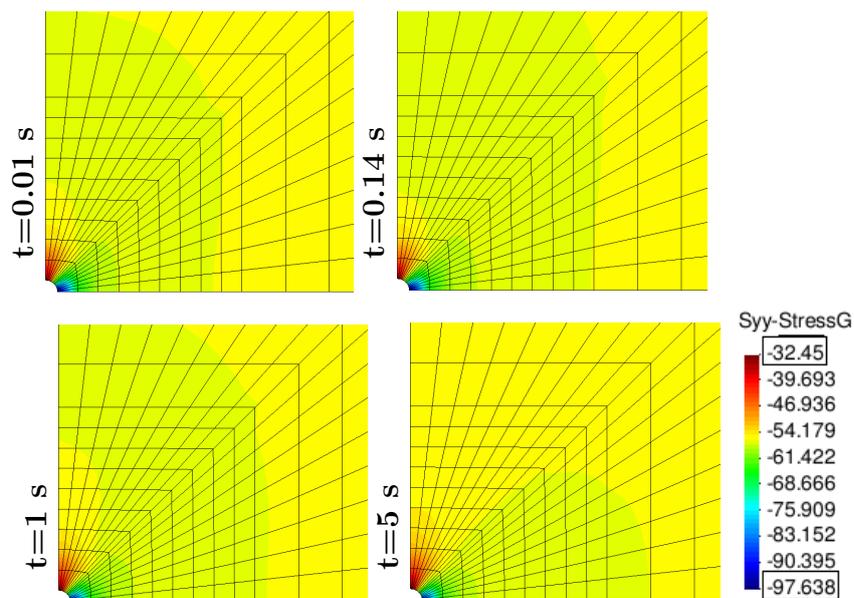
Fonte: Autor

Figura 91 – Perfil de cores do modulo do deslocamento (modelo 1).



Fonte: Autor

Figura 92 – Perfil de cores da tensão horizontal maior (modelo 1).



Fonte: Autor

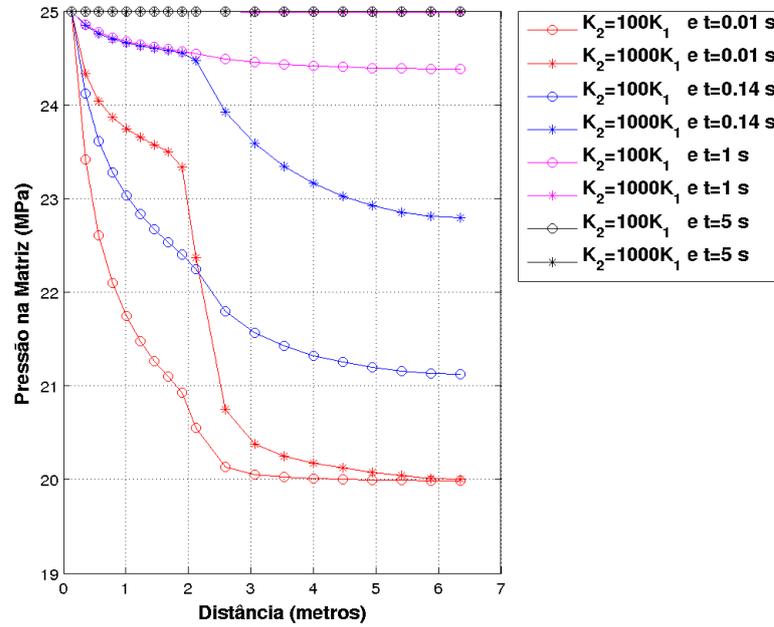
### 8.3 MODELO 2

- Caso 1: Variação da permeabilidade.

As Figuras 93 e 94, apresentam as pressões de fluidos para matriz e fratura em relação a distância, na direção da tensão horizontal maior, para diferentes valores de permeabilidade. Assim como no modelo 1, nas Figuras 93 e 94, observamos que quanto menor for a razão entre  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1$  mais lento é a pressurização do reservatório. Também podemos observar, que devido a função de transferência de massa, que liga os dois meios porosos, matriz e fratura, e a rede de fratura existente no meio, a pressurização do reservatório ocorre mais rápida no caso de dupla porosidade e dupla permeabilidade. Da mesma forma que o modelo anterior, notamos nessas Figuras que entre a distância de 2 a 3 metros acontece uma variação de poro pressão maior quando no material 1, se tem a razão entre  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 1000$  e quando no material 2, a razão é de  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1 = 100$ , isso ocorre, porque o material 2 é menos permeável do que o material 1, ocasionando uma pressurização do segundo material mais lenta. Além disso, podemos admitir as mesma explicações dadas para o modelo 1, na seção anterior.

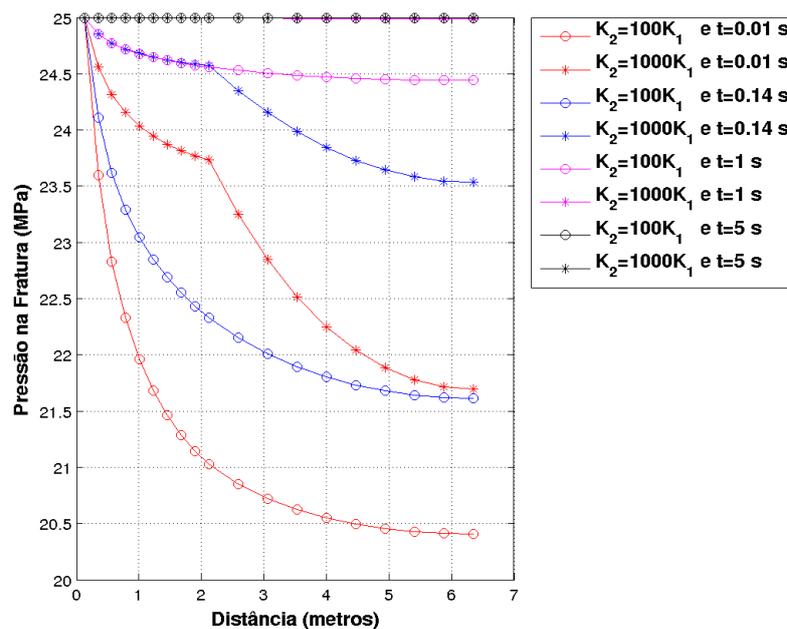
A Figura 95, exibi a variação da permeabilidade em relação ao tempo, para os elementos 1, 27 e 40 que se localizam ao redor do poço vertical. Da mesma maneira que o modelo 1 a permeabilidade foi obtida utilizando a lei exponencial, Equação 8.1. Diferentemente da primeira formulação, na segunda formulação não precisamos mostrar a evolução da permeabilidade para fratura, pois a porosidade da fratura é constante, fazendo com que a permeabilidade do meio 2 também permaneça constante. Na Figura 95, percebemos que no caso da permeabilidade  $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$ , a permeabilidade da matriz nos três elementos observados é maior do que quando  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$ . Isso se deve, por causa da função de transferência entre os meios e a rede de fraturas existente, pois mesmo que a matriz nos dois casos possua o mesmo valor inicial de permeabilidade, a pressão do meio 1, será afetada pela pressão do meio 2 devido a função de transferência de massa entre os meios. Desta maneira, ocasionando alteração na porosidade da matriz, que por consequência altera a permeabilidade. Assim como no modelo 1, a permeabilidade é maior no elemento 40, devido o elemento está na direção da tensão horizontal maior.

Figura 93 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 2).



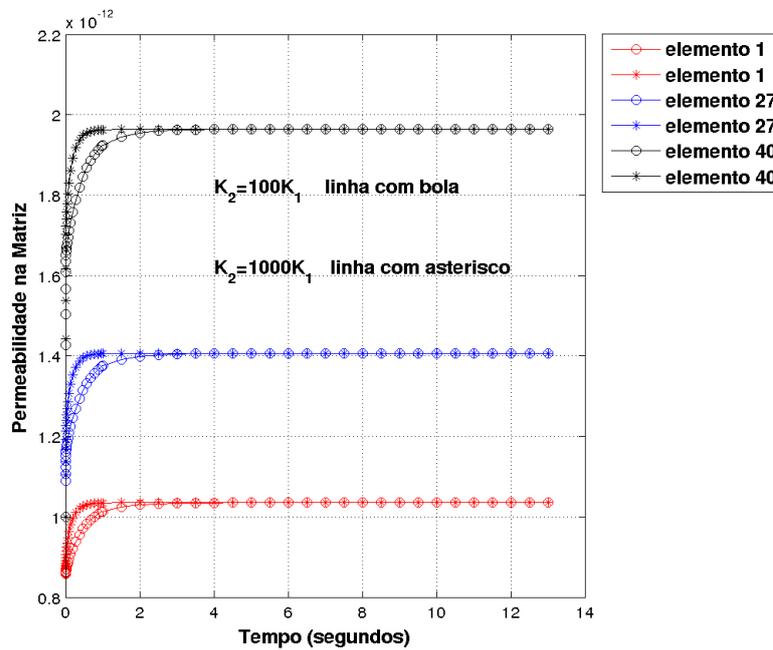
Fonte: Autor

Figura 94 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior (modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 95 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 2).



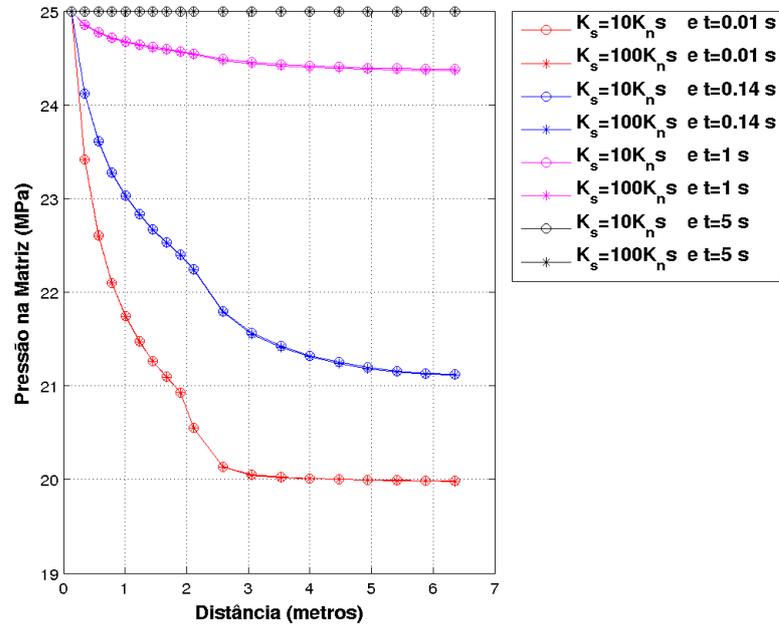
Fonte: Autor

- Caso 2: Variação do módulo volumétrico.

As Figuras 96 e 97, apresentam as pressões de fluidos na matriz e na fratura em relação à distância, na direção da tensão horizontal maior, para dois valores diferentes de módulo volumétrico do sólido. Da mesma forma que no modelo 1, constatamos nas Figuras 96 e 97, que as curvas das pressões são semelhantes para as duas relações de  $K_s/K_n s$ , mostrando que nesse caso a variação de  $K_s/K_n s$ , mudando só o módulo volumétrico da matriz não é suficiente para causar uma alteração na pressurização do reservatório. Sendo assim, o aumento de pressão no meio poroso ocorre gradativamente nas diferentes razões de  $K_s/K_n s$ .

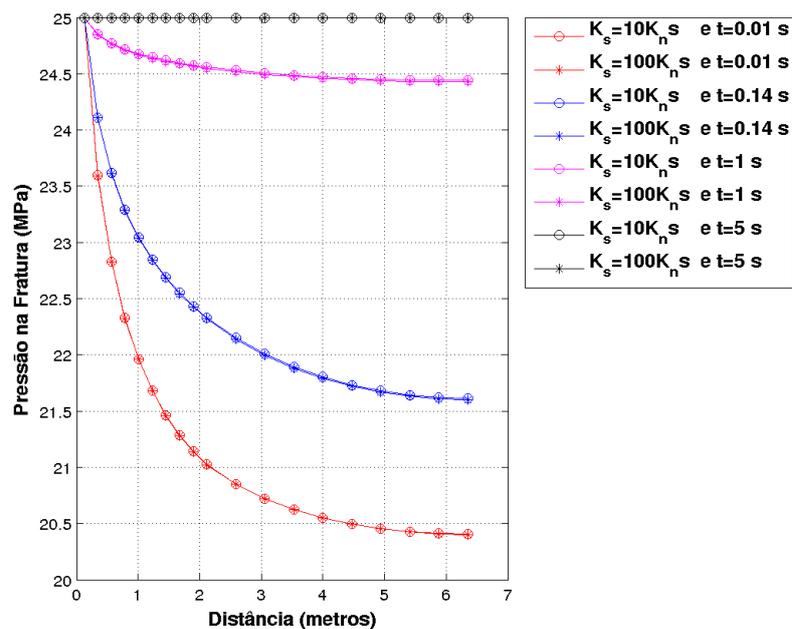
A Figura 98, mostra a evolução da permeabilidade em relação ao tempo para diferentes valores de módulo volumétrico do sólido. Na Figura 98, observamos que há uma pequena diferença das curvas no elemento 40, mas essa diferença não é muito significativa em relação a poro pressão mostrada nas Figuras 96 e 97. Nessa Figura, ainda notamos que a permeabilidade nos elementos 1, 27 e 40 permanece constante entre 2 a 4 segundos em diante.

Figura 96 – Pressão na matriz para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 2).



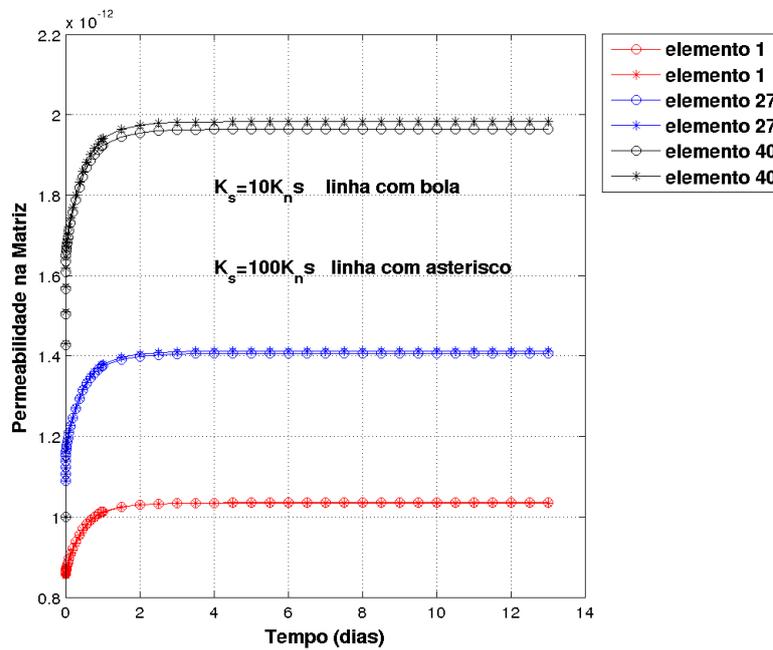
Fonte: Autor

Figura 97 – Pressão na fratura para diferentes módulos volumétricos, na direção da tensão maior (modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 98 – Permeabilidade na matriz para diferentes elementos (modelo 2).



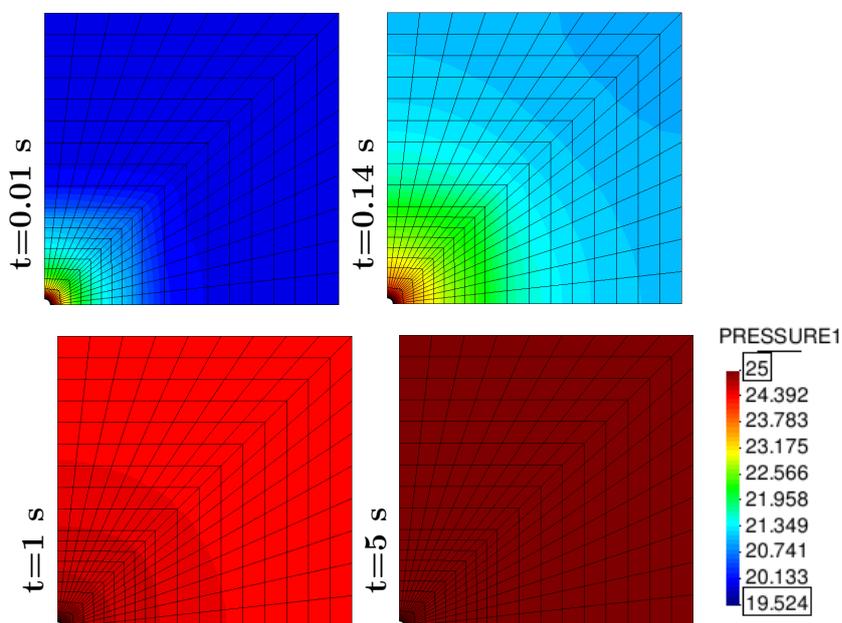
Fonte: Autor

As Figuras 99-102, mostram os perfis de cores das pressões na matriz e fratura para a permeabilidade  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2 = 1000\mathbf{K}_1$  com  $K_S = 10K_n s$ , nos tempos de 0.01, 0.14, 1 e 5 segundos. Novamente como no modelo 1, observamos que quanto menos permeável for o meio poroso, mais lento ocorre a pressurização do reservatório. Nas Figuras 100 e 102, observamos que a pressão atinge o estado estacionário em menos de 1 segundo, enquanto que nas Figuras 99 e 101 as poro pressões atinge o estado estacionário após 1 segundo, mostrando a clara influência da diferença da razão de permeabilidade  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1$ , além da rede de fratura existente no meio poroso.

Já as Figuras 103-106, mostram os perfis de cores da porosidade e permeabilidade da matriz, deslocamento e tensão, respectivamente, para o caso que  $\mathbf{K}_2 = 100\mathbf{K}_1$  com  $K_S = 10K_n s$ , para os tempos de 0.01, 0.14, 1 e 5 segundos. Na Figura 103, da mesma maneira que no modelo 1, verificamos a distribuição da porosidade na matriz, percebemos que a maior variação da porosidade ocorre ao redor do poço vertical, isso se deve devido a aplicação da pressão de fluido no poço vertical. Com o passar do tempo a porosidade vai aumentando no poço e no reservatório. Além disso, devido a anisotropia da tensão a evolução da porosidade é maior na direção da tensão horizontal maior. Na Figura 104, notamos o mesmo comportamento da permeabilidade da matriz em relação a porosidade. Como já mencionando anteriormente, isso acontece porque a permeabilidade depende da porosidade. Assim como no modelo 1, as Figuras 105 e 106, mostram os mesmos comportamento no modelo 2, diferenciando só nos valores apresentados, onde o módulo

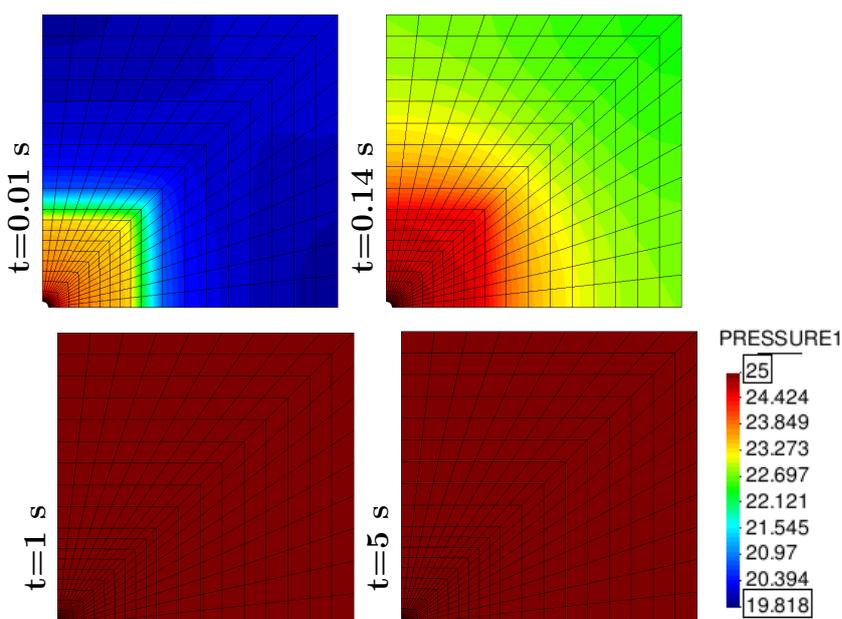
do deslocamento varia de 0 até 0.010566 metros e a tensão horizontal maior de  $-32.449$  até  $-95.412$  MPa.

Figura 99 – Perfil de cores da pressão na matriz para  $K_2 = 100K_1$  (modelo 2).



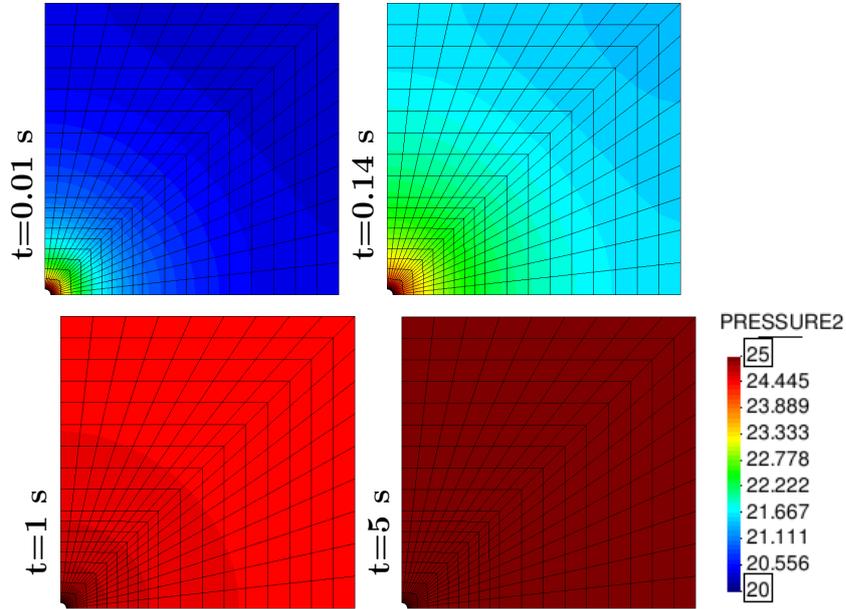
Fonte: Autor

Figura 100 – Perfil de cores da pressão na matriz para  $K_2 = 1000K_1$  (modelo 2).



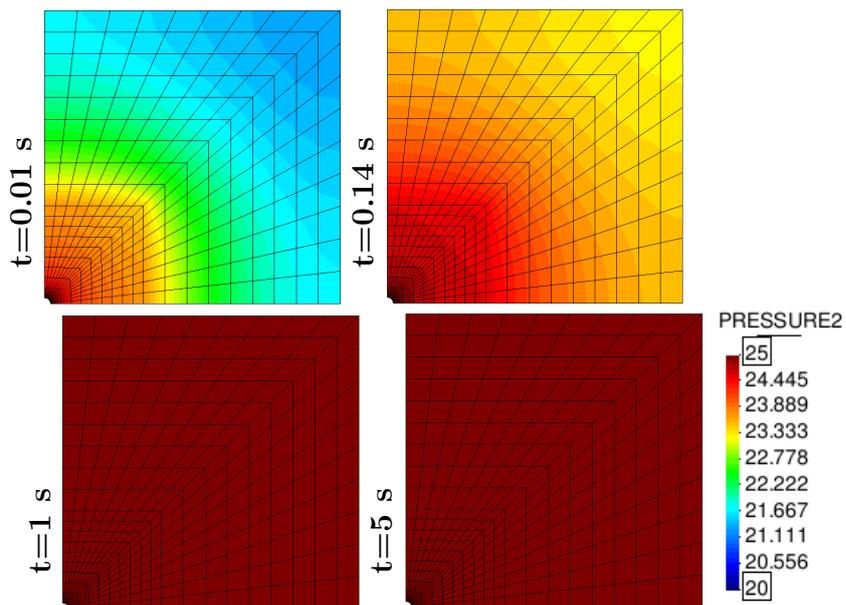
Fonte: Autor

Figura 101 – Perfil de cores da pressão na fratura para  $K_2 = 100K_1$  (modelo 2).



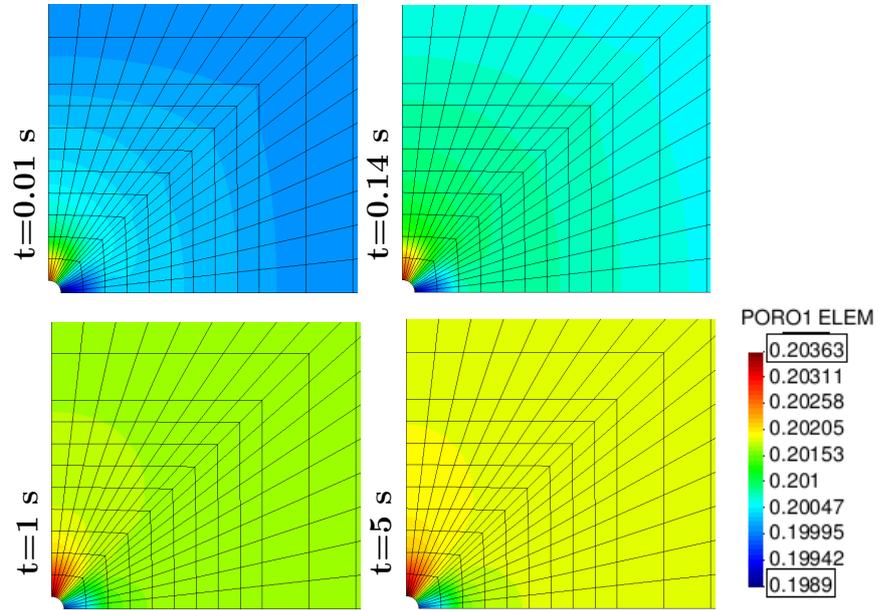
Fonte: Autor

Figura 102 – Perfil de cores da pressão na fratura para  $K_2 = 1000K_1$  (modelo 2).



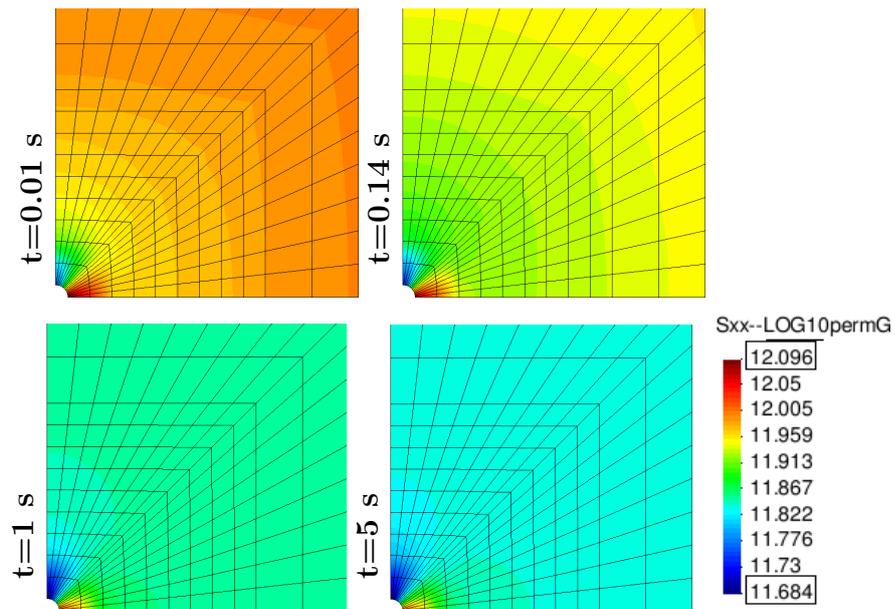
Fonte: Autor

Figura 103 – Perfil de cores da porosidade na matriz (modelo 2).



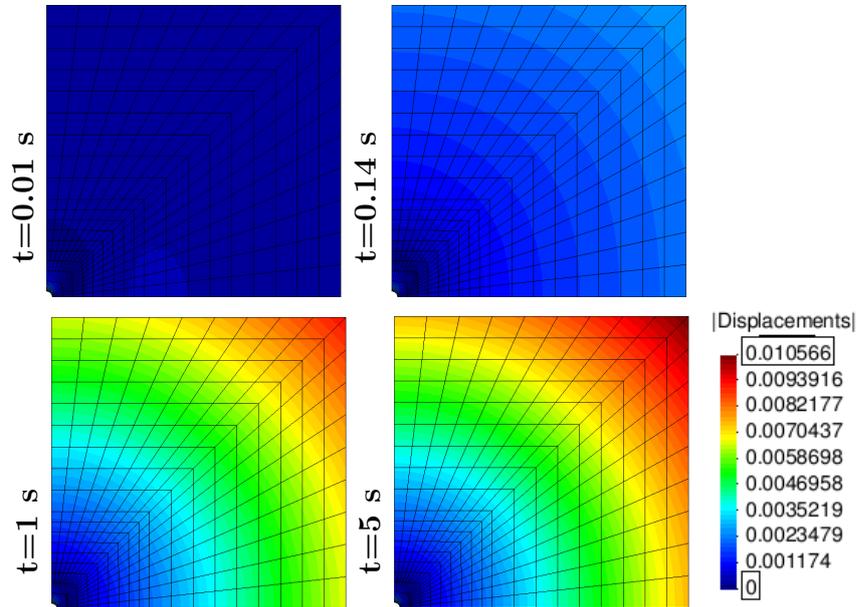
Fonte: Autor

Figura 104 – Perfil de cores da permeabilidade na matriz (modelo 2).



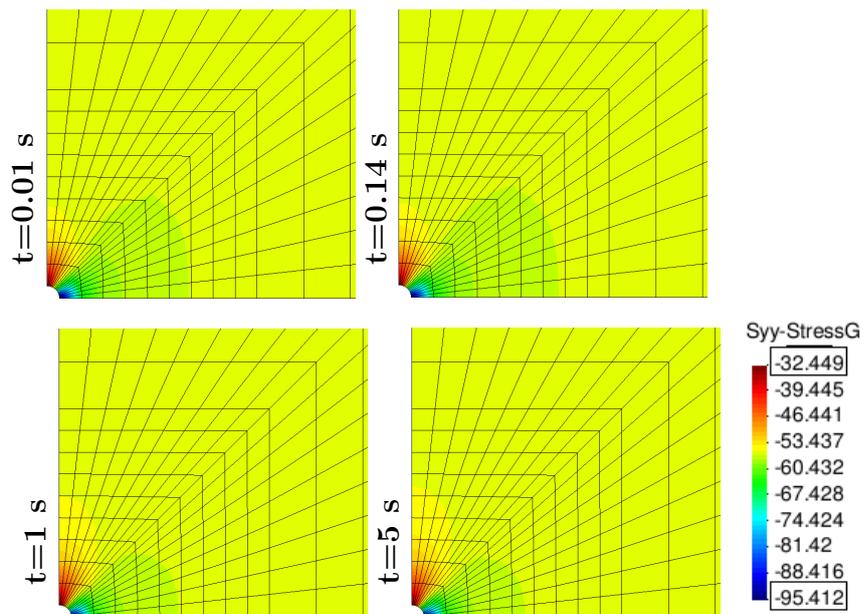
Fonte: Autor

Figura 105 – Perfil de cores do módulo do deslocamento (modelo 2).



Fonte: Autor

Figura 106 – Perfil de cores da tensão horizontal maior (modelo 2).



Fonte: Autor

## 8.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS 1 E 2

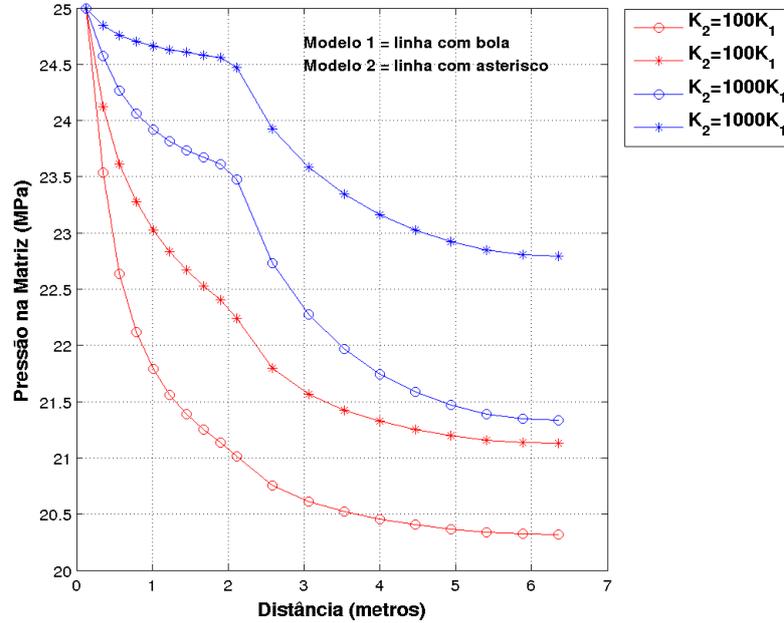
Para comparação dos modelos utilizamos o caso 1.

As Figuras 107 e 108, apresentam a evolução de pressão na matriz e na fratura ao longo da distância, para diferentes permeabilidades no tempo de 0.14 segundos. Na Figura 107, observamos que o modelo 2 exibiu uma pressão maior que no modelo 1, isso acontece, porque no modelo 1 temos o termo mecânico na equação da fratura, enquanto que no modelo 2 a equação da fratura não possui o termo mecânico, sendo afetado apenas pela pressão na própria fratura além da função de transferência de massa. Além disso, as explicações e comentários feitos no Capítulo 7 da análise de sensibilidade, para o caso de adensamento unidimensional e problema de Mandel continuam válidos para a aplicação do problema de poço vertical. Quando aumentamos a razão de  $\mathbf{K}_2/\mathbf{K}_1$ , também aumentamos a diferença na poro pressão de fluido na matriz entre os modelos. Fazendo com que o modelo 2 vá mais rápido para o estado estacionário. Assim, a pressurização no poço vertical e no reservatório ocorre mais rapidamente no modelo 2.

Como já mencionado anteriormente nesse capítulo, na Figura 107 percebemos que quando vai começar a pressurizar o material 2, há uma mudança na pressão, causada pela alteração de densidade de fraturas entre os dois materiais. Além disso, o material 1, que fica próximo ao poço, possui uma maior densidade de fraturas enquanto que o material 2, que fica mais afastado do poço, tem uma menor densidade de fraturas verificada pelo valor do espaçamento das fraturas,  $s$ . Na Figura 107, ainda constatamos que quando a permeabilidade da fratura do material 1 é maior que a permeabilidade da fratura do material 2, essa queda de pressão é bem maior. Isso acontece, porque apresenta dois efeitos: primeiro a diferença de densidade de fratura e segundo a diferença de permeabilidade na fratura. Já na Figura 108, verificamos que a mesma diferença entre os dois modelos acontece na pressão da fratura. Ainda notamos que a pressurização da fratura é mais rápida do que a pressurização da matriz, como era de se esperar.

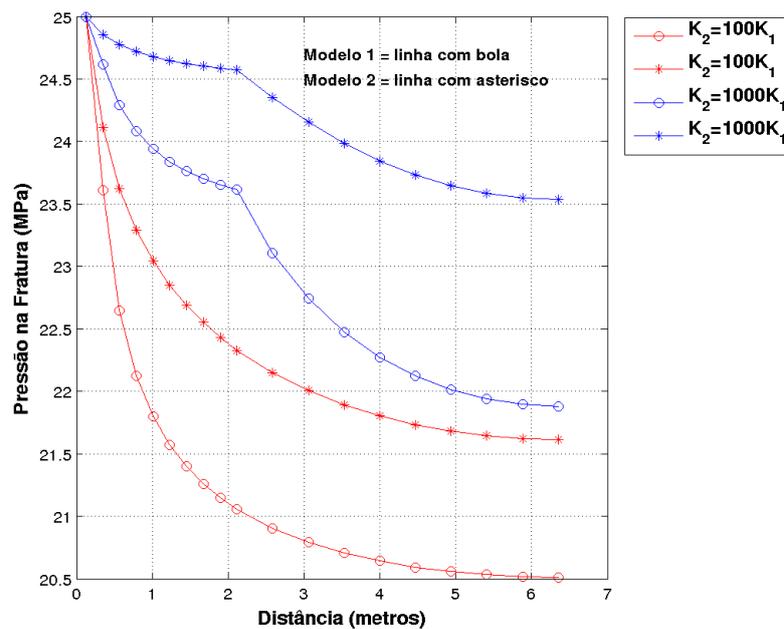
Assim, devido a formulação matemática dos dois modelos, notamos diferenças entre eles. No primeiro modelo, as equações da matriz e da fratura dependem das pressões da matriz, da fratura, da tensão média total e da função de transferência de massa entre os meios, fazendo com que a pressurização dos dois materiais sejam mais lenta do que o segundo modelo, onde a equação da matriz depende da pressão da matriz, da tensão média total e do termo de transferência de massa e a equação da fratura depende apenas da pressão da fratura e do termo de transferência de massa. Por isso, as Figuras 107 e 108, apresentam essas diferenças comentada acima.

Figura 107 – Pressão na matriz para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior, para o tempo de 0.14 segundos.



Fonte: Autor

Figura 108 – Pressão na fratura para diferentes permeabilidades, na direção da tensão maior, para o tempo de 0.14 segundos.



Fonte: Autor

## 9 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo apresentaremos as conclusões e trabalhos futuros.

### 9.1 CONCLUSÃO

Neste trabalho, propusemos duas formulações do acoplamento hidro-mecânico em meios porosos naturalmente fraturados com dupla porosidade e dupla permeabilidade, explicitando o termo de tensão média nas equações de fluxos, para poder fazer uso da técnica *stress split*. Desta forma, os dois modelos matemáticos foram discretizados via método de elementos finitos, utilizando o código numérico implementado em Fortran no simulador *in house* CODE\_BRIGTH. Deduzimos as formulações através do conceito de dupla porosidade e dupla permeabilidade, com a finalidade de modelar matematicamente e computacionalmente fenômenos para a simulação do escoamento de fluido e do acoplamento hidro-mecânico.

Primeiro, foi deduzida a formulação 1, onde iniciamos pela equação de balanço de massa do sólido na obtenção da evolução da porosidade em cada meio, para isso, foram utilizadas as equações constitutivas para a densidade do sólido, as equações matemáticas das porosidades, obtidas no Apêndice A e no Apêndice B, e a decomposição do estado de tensões na obtenção da deformação volumétrica em função da tensão média total, expressando assim, as evoluções das porosidades em funções das pressões de fluidos e tensão média total. Depois, deduzimos a equação de balanço de massa do fluido nos dois meios, matriz e fratura, com o intuito de obter as pressões de líquido para cada meio. Mas para isso, tivemos que admitir algumas hipóteses:

- Meio poroso saturado.
- Meio poroso deformável.
- Meio poroso isotérmico.
- Fluxo monofásico.
- Fluido levemente compressível.
- Sólido compressível.
- Termo de fonte/sumidouro nulo.
- Desprezar o termo não-advectivo.
- Considerar o conceito de dupla porosidade.

Além disso, utilizamos as equações constitutivas representadas pelas: equação de estado do líquido, Lei de Darcy e densidade do sólido. Além de, evidenciar a deformação volumétrica em função da tensão média total. Desta forma, as equações de fluido apresentaram os termos de armazenamento, advectivo, mecânico e a função de transferência de massa entre os meios. Sendo o termo mecânico expressado na tensão média total e por último, obtemos a equação de balanço de momento linear ou equação de equilíbrio mecânico, fazendo uso das tensões efetivas.

Segundo, foi deduzida a formulação 2, onde utilizamos procedimentos análogos nas deduções das equações de balanços. Para esta formulação foram utilizadas as hipóteses listadas no Capítulo 4, além de, admitirmos que a deformação do primeiro subdomínio também é causada pela compressibilidade das partículas sólidas. Desta maneira, começamos pela dedução da equação de balanço de massa do sólido, na aquisição da evolução da porosidade em cada meio, onde foi necessário a densidade do sólido em um único meio, podendo assim, expressar a evolução da porosidade da matriz em funções da pressão de fluido e tensão média total e a evolução da porosidade da fratura constante. Depois, deduzimos a equação de balanço de massa do fluido em cada meio poroso, fazendo uso das equações constitutivas e da decomposição do estado de tensões para substituir a deformação volumétrica pela tensão média total. Desta forma, a equação da matriz é apresentada em funções das pressões de fluido e tensão média total e a equação na fratura só em funções das pressões de fluido, ou seja, não apresentado o termo mecânico. Por fim, foi obtido a equação de balanço de momento linear em funções da deformação e pressão da matriz.

Terceiro, foi feita a formulação numérica dos dois modelos matemáticos, para isso, foi definido o domínio do problema e conseqüentemente sua discretização, posteriormente se aplicou o método dos elementos finitos, onde se utilizou os métodos dos resíduos ponderados e para obtenção da função peso o método de Galerkin, assim, foi possível discretizar as equações de equilíbrio mecânico, de fluxo na matriz e de fluxo na fratura. A evolução da porosidade foi discretizada utilizando um esquema em diferenças finitas, pois utilizamos o mesmo esquema para discretizar o tempo. Enfim, apresentamos os tipos de acoplamentos e, desses tipos, utilizamos o acoplamento iterativo para obter as soluções numéricas implementadas no código de elementos finitos programado em Fortran no simulador *in house* CODE\_BRIGHT (*Coupled Deformation Brine Gas and Heat Transport*). O acoplamento iterativo só foi possível, pois a técnica do *stress split* possibilita que o problema acoplado torne-se “mais fácil” de se resolver minimizando a restrição deste tipo de simulação para certos tipos de problemas (acoplamento fraco entre as equações).

Finalmente, os resultados obtidos e as discussões feitas, para os casos de adensamento unidimensional e problema de Mandel, mostram que as formulações obtidas em um meio naturalmente fraturados com dupla porosidade e dupla permeabilidade utilizando a

técnica do *stress split* foram significativas quando comparadas as soluções analíticas para esses casos, validando assim os dois modelos e demonstrando que os mesmos foram capazes de capturar o efeito de dissipação de pressão. Além disso, apresentamos alguns casos de análise de sensibilidade de alguns parâmetros como: permeabilidade e espaçamento entre as fraturas, para as duas formulações e também as comparamos entre se. Foi possível notar diferenças entre as duas formulações apresentadas. No caso de adensamento unidimensional observamos que a dissipação de pressão é mais rápida na formulação 2 e que quando os dois modelos comparados com o modelo de simples porosidade a pressão no meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade se dissiparam mais rapidamente o que já era esperado devido a rede de fraturas existente nesse meio. No caso do problema de Mandel quando comparamos as formulações de dupla porosidade e dupla permeabilidade com a de simples porosidade foi observado o mesmo comportamento da dissipação da pressão de fluido do caso de adensamento unidimensional, ou seja, a pressão de fluido escoou mais rapidamente no meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade.

Por fim, no caso de aplicação de poço vertical, podemos verificar que o reservatório é pressurizado mais rapidamente no modelo 2 do que no modelo 1, isso ocorre devido as formulações dos dois modelos, onde o primeiro modelo considera o termo mecânico tanto na matriz quanto na fratura e o segundo modelo considera o termo mecânico apenas na matriz. Mas, mostrando uma semelhança entre se, que é a rede de fraturas inserido no meio poroso, fazendo com que no caso de poço vertical ocorra uma pressurização do reservatório mais rapidamente. Isso também, acontece nos casos de adensamento unidimensional e do problema de Mandel onde ocorre uma dissipação mais rápida da pressão. No problema de poço vertical ainda observamos uma variação maior de porosidade e permeabilidade ao redor do poço, que era uma coisa já aguardada, pois é onde se encontra as zonas de altas tensões. Além disso, verificamos o efeito da diferença de densidade de fraturas nos dois materiais e a diferença de permeabilidade entre os materiais, na análise da poro pressão na matriz quanto na fratura.

Portanto, as duas modelagens apresentadas neste trabalho se mostraram bastantes promissoras para ser aplicadas em casos mais robustos de reservatórios naturalmente fraturados.

## 9.2 TRABALHOS FUTUROS

Como proposta de trabalhos futuros propomos:

- Aplicar as formulações em casos de campo de reservatórios naturalmente fraturados;
- Analisar a importância da função de transferência de massa entre os meios porosos, matriz e fratura. Como a de Barenblatt<sup>[11]</sup>, Kazemi<sup>[47]</sup>, Thomas<sup>[48]</sup>, Ueda<sup>[49]</sup>, Coats<sup>[50]</sup>

e Lim<sup>[51]</sup>. Pois neste trabalho não foram analisados o fator de forma dessas funções de transferência;

- Implementar o modelo totalmente acoplado para meio de dupla porosidade e dupla permeabilidade usando o *stress split*;
- Ampliar os modelos obtidos para os casos hidro-termo-mecânico, para ver a influencia da temperatura na porosidade e densidade;
- Ampliar o modelo elástico para o modelo elásto-plástico inserido na decomposição da deformação. Assim, obtendo uma matriz elásto-plástica constitutiva;
- Combinar o modelo de dupla porosidade com o modelo discreto, para problema que possua diferentes densidades de fraturas, para suportar diferentes escalas;
- Deduzir o modelo bifásico e trifásico para reservatórios naturalmente fraturados;
- Expandir o modelo de dupla porosidade para o modelo de tripla porosidade.

## REFERÊNCIAS

- 1 FIROOZABADI, A. Recovery mechanisms in fractured reservoirs and field performance. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 39. Nº6, p. 13–17, 2000.
- 2 BOURBIAUX, B. Fractured reservoir simulation: a challenging and rewarding issue. *Oil and Gas Science and Technology*, v. 65. Nº2, p. 227–238, 2010.
- 3 WU, Y. S. *Multiphase Fluid Flow in Porous and Fractured Reservoirs*. 1ª. ed. [S.l.]: Gulf Professional Publishing of Elsevier, Golden, 2016. ISBN 978-0-12-803848-2.
- 4 KIM, I. *Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow*. 274 p. Tese (Doutorado), 2010.
- 5 KIM, J.; TCHELEPI, H. A.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 13–16, p. 1591 – 1606, 2011.
- 6 GOLF-RACHT, T. D. *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. 12ª. ed. [S.l.]: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982. ISBN 0-444-442046-0.
- 7 WARREN, J. E.; ROOT, P. J. The behavior of naturally fractured reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.*, v. 228, p. 245–255, 1963.
- 8 NELSON, R. A. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. 2ª. ed. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, Houston, 2001. ISBN 0-88415-317-7.
- 9 TATOMIR, A. B. *Numerical Investigations of Flow Through Fractured Porous Media*. 79 p. Tese (Doutorado) — University Stuttgart, 2007.
- 10 BAI, M.; ELSWORTH, D.; ROEGIERS, J. C. Multi-porosity/multi-permeability approach to the simulation of naturally fractured reservoirs. *Water Resour. Res.*, v. 29, p. 1621–1633, 1993.
- 11 BARENBLATT, G. I.; ZHELTOV, I. P.; KOCHINA, I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Prikl. Mat. Mekh.*, v. 24. Nº5, p. 852–864, 1960.
- 12 AIFANTIS, E. C. Introducing a multi-porous medium. *Developments in Mechanics*, v. 9, p. 209–211, 1977.
- 13 CLOSSMAN, P. J. An aquifer model for fissured reservoirs. *Society Petroleum Engineers*, v. 15. Nº5, p. 385–398, 1975.
- 14 WU, Y. S.; GE, J. L. The transient flow in naturally fractured reservoirs with three-porosity systems. *Acta Mechanica Sinica*, v. 14. Nº1, p. 81–84, 1983.
- 15 ABDASSAH, D.; ERSHAGHI, I. Triple-porosity systems for representing naturally fractured reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, v. 1. Nº2, p. 113–127, 1986.
- 16 LIU, J.; BODVARSSON, G. S.; WU, Y. S. Analysis of flow behavior in fractured lithophysal reservoirs. *Journal of Contaminant Hydrology*, v. 62, p. 189–211, 2003.

- 17 WU, Y. S.; LIU, H. H.; BODVARSSON, G. S. A triple-continuum approach for modeling flow and transport processes in fractured rock. *Journal of Contaminant Hydrology*, v. 73. N<sup>o</sup>1, p. 145–179, 2004a.
- 18 WU, Y. S. et al. A triple-continuum pressure-transient model for a naturally fractured vuggy reservoirs. *Society Petroleum Engineers, Anaheim, California, U.S.A*, 2007b.
- 19 WU, Y. S.; DI, Y.; KANG, Z.; FAKCHAROENPHOL, P. A multiple-continuum model for simulating single-phase and multiphase flow in naturally fractured vuggy reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineers*, v. 78. N<sup>o</sup>1, p. 13–22, 2011.
- 20 WU, Y. S.; QIN, G. A generalized numerical approach for modeling multiphase flow and transport in fractured porous media. *Communications Computational Physics*, v. 6. N<sup>o</sup>1, p. 85–108, 1983.
- 21 AIFANTIS, E. C. On the problem of diffusion in solids. *Acta Mechanica*, v. 37, p. 265–296, 1980.
- 22 TERZAGHI, K. Die berechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamische spannungserscheinungen akademie der wissenschaften in wien. *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, v. 132, p. 125–138, 1923.
- 23 TERZAGHI, K. *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Leipzig u. Wien, F. Deuticke, 1925.
- 24 TERZAGHI, K. *Theory Soil Mechanics*. first edition. [S.l.]: John Wiley & Sons, New York, 1943.
- 25 BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, p. 155–164, 1941.
- 26 BIOT, M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic media. *Journal of Applied Physics*, v. 26, p. 182–185, 1955.
- 27 BIOT, M. A.; WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, p. 594–601, 1957.
- 28 ODEH, A. S. Unsteady-state behavior of naturally fractured reservoirs. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 5, p. 60–66, 1965.
- 29 KAZEMI, H. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 9, p. 451–462, 1969.
- 30 KAZEMI, H.; SETH, M. S.; THOMAS, G. W. The interpretation of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 9, p. 463–472, 1969.
- 31 SWAAN, A. Analytical solutions for determining naturally fractured reservoir properties by welltesting. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 6, p. 117–122, 1976.
- 32 NAJURIETA, H. L. A theory for pressure transient analysis in naturally fractured reservoirs. *Sot. Pet. Eng. J.*, p. 1241–1250, 1980.
- 33 DUGUID, J. O.; LEE, P. C. Y. Flow in fractured porous media. *Water Resources Research*, v. 13, p. 558–566, 1977.

- 34 WILSON, R. K.; AIFANTIS, E. C. On the theory of consolidation with double porosity-i. *Int. J. Eng. Sci.*, v. 20, p. 1009–1035, 1982.
- 35 KHALED, M. Y.; BESKOS, D. E.; AIFANTIS, E. C. On the theory of consolidation with double porosity-iii. a finite element formulation. *Int. J. Analytic. Numer. Meth. Geomech.*, v. 8, p. 101–123, 1984.
- 36 VALLIAPPAN, S.; KHALILIP-NAGHADEH, N. N. Flow through fissured porous media with deformable matrix. *Int. J. for Num. Methods in Engr.*, v. 29, p. 1079–1094, 1990.
- 37 ELSWORTH, D.; BAI, M. Flow-deformation response of dual-porosity media. *Journal of Geotechnical Engineering*, v. 118, p. 107–124, 1992.
- 38 BAI, M.; MA, Q.; ROEGIERS, J. C. A nonlinear dual-porosity model. *Appl. Math. Modelling*, v. 18, p. 602–610, 1994.
- 39 BAI, M.; ROEGIERS, J. C.; ELSWORTH, D. Poromechanical response of fractured porous rock masses. *JPSE*, v. 13, p. 155–168, 1995.
- 40 GHAFOURI, H. R.; LEWIS, R. W. A finite element double porosity model for heterogeneous deformable porous media. *Int. J. Analutic. Numer. Meth. Geomech.*, v. 20, p. 831–844, 1996.
- 41 MIKELC, A.; WHEELER, M. F. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Comput. Geosci.*, v. 17.
- 42 PREVOST, J. H. One-way versus two-way coupling in reservoir-geomechanical models. *Poromechanics V, American Society of Civil Engineers*.
- 43 BAUSE, M.; RADU, F. A.; KOCHER, U. Space–time finite element approximation of the biot poroelasticity system with iterative coupling. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 320.
- 44 ZHANG, J. *Dual-Porosity Approach to Wellbore Stability in Naturally Fractured Reservoirs*. 271 p. Tese (Doutorado) — University of Oklahoma, 2002.
- 45 MENG, F. *Three-Dimensional Finite Element Modeling Flow in Deformable Natural Fractured Reservoirs*. 210 p. Tese (Doutorado) — University of Oklahoma, 1998.
- 46 BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. *Fundamentos da Termodinâmica*. 8<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blucher, 2013. ISBN 9786521207924.
- 47 KAZEMI, H.; MERRILL, L.; PORTERHELD, K.; ZEMAN, P. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 16, p. 317–326, 1976.
- 48 THOMAS, L. K.; DIXON, T. N.; PIERSON, R. G. Fractured reservoir simulation. *Sot. Pet. Eng. J.*, v. 23, p. 42–54, 1983.
- 49 UEDA, Y.; MURATA, S.; WATANABE, Y.; FUNATSU, K. Investigation of the shape factor used in the dual-porosity reservoir simulator. *SPE 19469 presented at SPE Asia-Pacific Conf., Sydney, Australia*, sept, p. 13–15, 1989.

- 50 COATS, K. H. Implicit compositional simulation of single-porosity and dual-porosity. *SPE 18427, presented at 10th SPE Symp. Reservoir Simulation, Houston, Tex.*, Feb, p. 6–8, 1989.
- 51 LIM, K.; AZIZ, K. Matrix-fracture transfer shape factors for dual-porosity simulators. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 13, p. 169–178, 1995.
- 52 SANCHEZ, M.; GENS, A.; OLIVELLA, S. Thermo-hydro-mechanical modelling of low permeability media using a double-porosity formulation. *Mecanica Computacional*, v. 23, p. 733–754, 2004.
- 53 SANCHEZ, M. *Thermo-Hydro-Mechanical Coupled Analysis in Low Permeability Media*. 304 p. Tese (Doutorado) — Technical University of Catalonia, June 2004.
- 54 ZHANG, J.; ROEGIERS, J. C. Double porosity finite element method for borehole modeling. *Rock Mech. Rock Engne.*, v. 38, p. 217–242, 2005.
- 55 LEWIS, R. W.; SHREFLER, B. A. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. 2nd. ed. [S.l.]: Chichester, England ; New York : John Wiley, 1998. ISBN 0471928097.
- 56 CHARLEZ, P. A. *Rock Mechanics: Theoretical Fundamentals*. Volume 1. [S.l.]: Editions Technip, Paris, 1991. ISBN 2710805855.
- 57 OLIVELLA, S.; GENS, A.; CARRERA, J.; ALONSO, E. E. Numerical formulation for a simulator (code\_bright) for the coupled analysis of saline media. *Engineering Computations*, Society of Petroleum Engineers, v. 13, p. 87–112, 1996.
- 58 TEIXEIRA, J. C. *Simulação por Linhas de Fluxo com Acoplamento Geomecânico*. 172 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Agosto 2015.
- 59 ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite Elements and Approximation*. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Dover Publication, Inc., Mineola, New York, 2006.
- 60 SETTARI, A.; WALTERS, D. A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 8, 2001. ISSN SPE-74142-PA.
- 61 TRAN, D.; SETTARI, A.; NGHIEM, L. New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, p. 362–369, 2004. ISSN 1086-055X.
- 62 TRAN, D.; NGHIEM, L.; BUCHANAN, L. Improved iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, p. 362–369, 2005. ISSN 978-1-61399-010-0.
- 63 DEAN, R. H.; GAI, X.; STONE, C. M.; MINKOFF, S. E. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 11, n. 01, p. 132–140, 2006.
- 64 KIM, J.; TCHELEPI, H.; JUANES, R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 23–24, p. 2094 – 2116, 2011.

- 65 MIKELC, A.; WANG, B.; WHEELER, M. F. Numerical convergence study of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Comput. Geosci.*, v. 18.
- 66 CASTELLETTO, N.; WHITE, J. A.; TCHELEPI, H. A. Accuracy and convergence properties of the fixed-stress iterative solution of two-way coupled poromechanics. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, v. 39.
- 67 SAMIER, P.; GENNARO, S. D. Practical iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. In: *SPE Reservoir Simulation Symposium*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2007.
- 68 VERRUIJT, A. *Theory and Problems of Poroelasticity*. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Delft University of Technology, 2013.
- 69 DETOURNAY, E.; CHENG, A. H. D. *Fundamentals of Poroelasticity*. Chapter 5 in comprehensive rock engineering, vol. 2. [S.l.]: Fairhurst, Pergamon Press, 1993.
- 70 MANDEL, J. Consolidation des sols. *Géotechnique*, v. 7, p. 287–299, 1953.
- 71 SOKOLNIKOFF, I. S. *Mathematical Theory of Elasticity*. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 1956.
- 72 SADD, M. H. *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. 1<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: Elsevier, Amsterdam, 2005.

## APÊNDICE A – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Neste apêndice, apresentaremos a equação de estado do líquido, a Lei de Darcy, a densidade do sólido e a densidade do sólido em um único meio.

### EQUAÇÃO DE ESTADO DO LÍQUIDO

Considerando o meio poroso isotérmico, a equação de estado para o líquido é dada por<sup>[55]</sup>:

$$\rho_i = \rho_w [1 + C_f(p_i - p_w)] \quad \text{com} \quad C_f = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial p_i} \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.1})$$

onde  $\rho_w$  é a densidade de referência,  $C_f$  é o coeficiente de compressibilidade do fluido,  $p_w$  é a pressão de referência e  $p_i$  é a pressão de fluido no meio  $i$ , agora derivando temos:

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{D\rho_i}{Dt} = \frac{1}{K_f} \frac{Dp_i}{Dt} \quad (\text{A.2})$$

onde  $K_f = 1/C_f$  é a rigidez do líquido ou o módulo volumétrico do fluido.

### LEI DE DARCY

No caso de dois domínios de fluxo sobrepostos, o fluxo da fase fluida em cada meio pode ser computado usando a lei de Darcy generalizada que é escrita como:

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\mathbf{K}_i}{\mu} (\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g}) \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

onde  $\mathbf{K}_i$  é o tensor de permeabilidade intrínseca para o meio  $i$ ,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade.

### DENSIDADE DO SÓLIDO

Considerando a fase sólida compressível, a equação de conservação de massa para derivada material no tempo, pode ser dada da seguinte forma<sup>[55]</sup>:

$$\frac{D(\rho_s V_s)}{Dt} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Assumindo o meio poroso isotérmico e a densidade do sólido como uma função de  $p_1$ ,  $p_2$  e do primeiro invariante do tensor de tensão efetiva  $p' = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')$  e derivando a equação acima temos:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = -\frac{1}{V_s} \frac{DV_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - \frac{1-\alpha}{3(1-\phi)K_t} \frac{Dp'}{Dt} \quad (\text{A.5})$$

com

$$C_{ma} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial p_1} = \frac{1}{K_s} \quad (\text{A.6})$$

$$C_{fr} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial p_2} = \frac{1}{K_{ns}} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial p'} = \frac{1-\alpha}{3(1-\phi)K_t} \quad (\text{A.8})$$

onde  $C_{ma}$  e  $C_{fr}$  são as compressibilidades da matriz e fratura respectivamente,  $K_s$ ,  $K_n$  e  $K_t$  são os módulos volumétricos da matriz, fratura<sup>[45]</sup> e do esqueleto sólido respectivamente,  $s$  é o espaçamento entre as fraturas e  $\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ ,  $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$  e  $\alpha_2 = 1 - \frac{K_t}{K_{ns}}$  são os alfas macro, do meio poroso total<sup>[45]</sup>, e Biot, do meio 1<sup>[25, 27]</sup> e do meio 2<sup>[45]</sup> respectivamente.

Introduzimos a relação constitutiva de tensão efetiva<sup>[24, 55]</sup> para o primeiro invariante obtemos:

$$\frac{Dp'}{Dt} = 3K_t \left( \dot{\epsilon}_v + \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} \right) \quad (\text{A.9})$$

Agora substituindo a Equação A.9 na Equação A.5 fica:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - \frac{1-\alpha}{3(1-\phi)K_t} 3K_t \left( \dot{\epsilon}_v + \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} \right)$$

dai,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} - \frac{1-\alpha}{(1-\phi)} \frac{1}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - \frac{1-\alpha}{(1-\phi)} \frac{1}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - \frac{1-\alpha}{(1-\phi)} \dot{\epsilon}_v$$

logo,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \left( \frac{1-\phi-1+\alpha}{(1-\phi)} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{1}{K_{ns}} \left( \frac{1-\phi-1+\alpha}{(1-\phi)} \right) \frac{Dp_2}{Dt} - \frac{1-\alpha}{(1-\phi)} \dot{\epsilon}_v$$

Portanto a equação constitutiva da densidade do sólido é:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{(1-\phi)} \left[ \frac{\alpha-\phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha-\phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha) \dot{\epsilon}_v \right] \quad (\text{A.10})$$

## DENSIDADE DO SÓLIDO EM UM ÚNICO MEIO

Assumindo a fase sólida compressível, e o meio poroso isotérmico e a densidade do sólido como uma função da pressão do sólido  $p_s$  e do primeiro invariante do tensor de tensão efetiva  $p' = tr(\boldsymbol{\sigma})$  temos:

$$\rho_s = \rho_{s0} \left[ 1 + \frac{p_s - p_{s0}}{K_s} - \frac{p'}{3(1-\phi)K_s} \right] \quad (\text{A.11})$$

sendo  $\rho_{s0}$  a densidade do sólido em estado padrão e  $p_{s0}$  a pressão do sólido em estado padrão.

Derivando a equação acima pela conservação de massa<sup>[55]</sup> temos:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1}{3(1-\phi)K_s} \frac{Dp'}{Dt} \quad (\text{A.12})$$

com

$$C_s = \frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dp_s} = \frac{1}{K_s} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dp'} = \frac{1}{3(1-\phi)K_s} \quad (\text{A.14})$$

onde  $C_s$  é a compressibilidade do sólido.

Introduzimos agora a relação constitutiva para o primeiro tensor invariante devido os grãos serem deformáveis:

$$\frac{Dp}{Dt} = 3K_t \left( \dot{\epsilon}_v + \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) \quad (\text{A.15})$$

onde o termo  $\frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt}$  representa a taxa de deformação volumétrica do meio pela compressão uniforme das partículas (não da matriz rochosa) pela pressão média  $p_s$ . Esse termo é muito importante na mecânica das rochas.

Substituindo a Equação A.15 na Equação A.12, temos:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1}{3(1-\phi)K_s} 3K_t \left( \dot{\epsilon}_v + \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right)$$

daí,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1}{1-\phi} \frac{K_t}{K_s} \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1}{1-\phi} \frac{K_t}{K_s} \dot{\epsilon}_v$$

Sabendo que  $1 - \alpha_1 = \frac{K_t}{K_s}$ , temos:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1 - \alpha_1}{1 - \phi} \frac{1}{K_s} \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1 - \alpha_1}{(1 - \phi)} \dot{\epsilon}_v$$

logo,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \left( \frac{1 - \phi - 1 + \alpha_1}{(1 - \phi)} \right) \frac{Dp_s}{Dt} - \frac{1 - \alpha_1}{(1 - \phi)} \dot{\epsilon}_v$$

Utilizando o fato que na fase sólida  $p_s = p_1$ , obtemos a densidade do sólido em um único meio:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{1-\phi} \left[ \frac{\alpha_1 - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} - (1 - \alpha_1)\dot{\epsilon}_v \right] \quad (\text{A.16})$$

onde  $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$  é a constante de Biot.

## APÊNDICE B – EQUAÇÕES MATEMÁTICAS DAS POROSIDADES

Neste apêndice, calculamos os termos das porosidades no lado direito das Equações 3.8 e 3.9.

### RESOLUÇÃO VIA VOLUMES DO MEIO POROSO

Agora vamos calcular o termo  $\frac{D(\phi_2)}{Dt}$  da Equação 3.8,  $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$  da Equação 3.9 e  $\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$ , que é o termo de compressibilidade do sólido. Para isso precisamos das equações das porosidades e dos volumes do meio poroso. Exposto no Capítulo 2, Equação 2.1.

Derivando a Equação 2.1.(b) fica,

$$\begin{aligned} \frac{D(\phi_2)}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{V_2}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \left( \frac{DV_2}{Dt} V - \frac{DV}{Dt} V_2 \right) = \frac{1}{V} \left( \left( \frac{V}{V} \right) \frac{DV_2}{Dt} - \left( \frac{V_2}{V} \right) \frac{DV}{Dt} \right), \quad \text{dai} \\ \frac{D(\phi_2)}{Dt} &= \frac{1}{V} \left( \frac{DV_2}{Dt} - \phi_2 \frac{DV}{Dt} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Derivando a Equação 2.1.(d) temos,

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{DV_1}{Dt} + \frac{DV_2}{Dt} + \frac{DV_s}{Dt}. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a Equação B.2 na Equação B.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{D(\phi_2)}{Dt} &= \frac{1}{V} \left( \frac{DV_2}{Dt} - \phi_2 \left( \frac{DV_1}{Dt} + \frac{DV_2}{Dt} + \frac{DV_s}{Dt} \right) \right) \\ &= \frac{1}{V} \left( -\phi_2 \frac{DV_1}{Dt} + \frac{DV_2}{Dt} - \phi_2 \frac{DV_2}{Dt} - \phi_2 \frac{DV_s}{Dt} \right) \\ \frac{D(\phi_2)}{Dt} &= \frac{1}{V} \left( -\phi_2 \frac{DV_1}{Dt} + (1 - \phi_2) \frac{DV_2}{Dt} - \phi_2 \frac{DV_s}{Dt} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pela definição de compressibilidade,  $C_p = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$  e  $C_p = \frac{1}{K_p}$ , sendo  $K_p$  o módulo volumétrico, podemos escrever os volumes em função das pressões no meio poroso. Assim:

$$\frac{1}{V_1} \frac{DV_1}{Dt} = \frac{1}{V_1} \frac{dV_1}{dp_1} \frac{Dp_1}{Dt} = -C_f \frac{Dp_1}{Dt} = -\frac{1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt}, \quad \text{logo} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{V_1} \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{V_2} \frac{DV_2}{Dt} = -\frac{1}{K_f} \frac{Dp_2}{Dt} \quad (\text{B.5})$$

onde  $C_f$  é a compressibilidade do fluido e  $K_f$  o módulo volumétrico do fluido.

Multiplicando a Equação B.4 por  $V_1$  e Equação B.5 por  $V_2$  e as duas equações por  $\frac{V}{V}$ , fica

$$\frac{DV_1}{Dt} = -V_1 \frac{V}{V} \frac{1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{DV_2}{Dt} = -V_2 \frac{V}{V} \frac{1}{K_f} \frac{Dp_2}{Dt} \quad (\text{B.7})$$

Com isso podemos calcular a variação de volume de cada meio em relação ao tempo:

$$\frac{DV_1}{Dt} = -\phi_1 V \frac{1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{DV_2}{Dt} = -\phi_2 V \frac{1}{K_f} \frac{Dp_2}{Dt} \quad (\text{B.9})$$

Para termos a variação do volume total do meio poroso em relação ao tempo precisamos calcular o volume do sólido. Então calculando o termo de compressibilidade do sólido, fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} &= -\frac{1}{V_s} \frac{DV_s}{Dt} \\ &= \frac{1}{1-\phi} \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha - \phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde  $K_t$  é o módulo volumétrico do esqueleto sólido,  $K_s$  é o módulo volumétrico dos grãos do sólido,  $K_n$  é o módulo volumétrico da fratura ou rigidez normal da fratura e  $s$  é o espaçamento entre as fraturas.  $\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ , sendo  $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$  e  $\alpha_2 = 1 - \frac{K_t}{K_{ns}}$  os alfas de Biot<sup>[25, 27]</sup>. Para mais detalhe sobre a compressibilidade do sólido ver seção A do Apêndice A.

Agora vamos multiplicar a Equação 2.1.(d) pelo volume total do meio poroso  $\frac{1}{V}$ , fica

$$\begin{aligned} \frac{V}{V} &= \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_s}{V} \quad \text{dai} \\ 1 &= \phi_1 + \phi_2 + \frac{V_s}{V} \quad \text{logo} \\ \frac{V_s}{V} &= 1 - \phi \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Sabendo que a variação do volume do sólido é:

$$-\frac{1}{V_s} \frac{DV_s}{Dt} = \frac{1}{1-\phi} \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha - \phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \quad (\text{B.12})$$

Utilizando a Equação B.11 e o mesmo raciocínio que foi utilizado para obter as equações B.6 e B.7, a variação do volume do sólido em relação ao tempo fica:

$$\frac{DV_s}{Dt} = -V \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha - \phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1-\alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \quad (\text{B.13})$$

Agora Substituindo as equações B.8, B.9 e B.13 em B.3, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{D(\phi_2)}{Dt} &= \frac{1}{V} \left( -\phi_2 \left( -\phi_1 V \frac{1}{K_f} \frac{Dp_1}{Dt} \right) + (1 - \phi_2) \left( -\phi_2 V \frac{1}{K_f} \frac{Dp_2}{Dt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \phi_2 \left( -V \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha - \phi}{K_{ns}} \frac{Dp_2}{Dt} - (1 - \alpha) \dot{\epsilon}_v \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima encontramos o termo  $\frac{D(\phi_2)}{Dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \left( \frac{\phi_2(\alpha - \phi)}{K_s} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &\quad + \left( \frac{\phi_2(\alpha - \phi)}{K_{ns}} - \frac{\phi_2(1 - \phi_2)}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} - \phi_2(1 - \alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Analogamente encontramos o termo  $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$ , para isso precisamos derivar a Equação 2.1.(a). Derivando, fica

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{1}{V} \left( \frac{DV_1}{Dt} - \phi_1 \frac{DV}{Dt} \right) \quad (\text{B.15})$$

Substituindo a Equação B.2 na Equação B.4 obtemos:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{1}{V} \left( (1 - \phi_1) \frac{DV_1}{Dt} - \phi_1 \frac{DV_2}{Dt} - \phi_1 \frac{DV_s}{Dt} \right) \quad (\text{B.16})$$

Utilizando as equações B.8, B.9 e B.13 na Equação B.16, conseguimos o termo  $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \left( \frac{\phi_1(\alpha - \phi)}{K_s} - \frac{\phi_1(1 - \phi_1)}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &\quad + \left( \frac{\phi_1(\alpha - \phi)}{K_{ns}} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} - \phi_1(1 - \alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

## RESUMO DO APÊNDICE B

Neste Apêndice B calculamos o termo  $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$ ,  $\frac{D(\phi_2)}{Dt}$  e o termo de compressibilidade do sólido  $\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$  (ver Apêndice A, para mais detalhe), que são dados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \left( \frac{\phi_1(\alpha - \phi)}{K_s} - \frac{\phi_1(1 - \phi_1)}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &\quad + \left( \frac{\phi_1(\alpha - \phi)}{K_{ns}} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} - \phi_1(1 - \alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \left( \frac{\phi_2(\alpha - \phi)}{K_s} + \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left( \frac{\phi_2(\alpha - \phi)}{K_n s} - \frac{\phi_2(1 - \phi_2)}{K_f} \right) \frac{Dp_2}{Dt} - \phi_2(1 - \alpha)\dot{\epsilon}_v \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} = \frac{1}{1 - \phi} \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha - \phi}{K_n s} \frac{Dp_2}{Dt} - (1 - \alpha)\dot{\epsilon}_v \right) \quad (\text{B.20})$$

sendo  $K_t$  o módulo volumétrico do esqueleto sólido,  $K_s$  o módulo volumétrico dos grãos do sólido,  $K_n$  o módulo volumétrico da fratura ou rigidez normal da fratura e  $s$  o espaçamento entre as fraturas,  $\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$  o coeficiente macro dos coeficientes de Biot,  $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$  e  $\alpha_2 = 1 - \frac{K_t}{K_n s}$  os coeficientes de Biot.

## APÊNDICE C – CÁLCULOS AUXILIARES

Neste apêndice, mostraremos a aplicação do traço na deformação e a matriz elástica constitutiva.

### APLICAÇÃO DO TRAÇO NA DEFORMAÇÃO

Reescrevendo a Equação 3.32 em forma indicial temos:

$$\epsilon_{ij} = -\frac{p_1}{3K_s}\delta_{ij} - \frac{p_2}{3K_{ns}}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij} + p_1\delta_{ij} + p_2\delta_{ij}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2)\delta_{ij} \quad (C.1)$$

onde  $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ,  $E$  é o módulo de Young,  $\nu$  é a razão de Poisson e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, ou seja, se  $i = j$ , temos que  $\delta_{ij} = 1$  e se  $i \neq j$ , temos que  $\delta_{ij} = 0$ .

- Fazendo  $i = j$  e  $i = 1$ , obtemos:

$$\epsilon_{11} = -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{11} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \quad (C.2)$$

- Fazendo  $i = j$  e  $i = 2$ , obtemos:

$$\epsilon_{22} = -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{22} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \quad (C.3)$$

- Fazendo  $i = j$  e  $i = 3$ , obtemos:

$$\epsilon_{33} = -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{33} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \quad (C.4)$$

Somando as equações C.2, C.3 e C.4 fica:

$$\epsilon_v = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (C.5)$$

sendo  $\epsilon_v$  a deformação volumétrica.

Substituindo as equações C.2, C.3 e C.4 na Equação C.5 temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_v = & -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{11} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \\ & -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{22} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \\ & -\frac{p_1}{3K_s} - \frac{p_2}{3K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{33} + p_1 + p_2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \end{aligned}$$

Arrumando a equação acima fica:

$$\begin{aligned} \epsilon_v = & -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + 3p_1 + 3p_2) \\ & -\frac{\nu}{E}(3\sigma_{kk} + 9p_1 + 9p_2) \end{aligned}$$

dai,

$$\begin{aligned}\epsilon_v = & -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \\ & - \frac{\nu}{E}(3\sigma_{kk} + 9p_1 + 9p_2)\end{aligned}$$

expandindo o terceiro termo do lado direito da equação acima resulta:

$$\begin{aligned}\epsilon_v = & -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \\ & + \frac{\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) - \frac{\nu}{E}(3\sigma_{kk} + 9p_1 + 9p_2)\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\epsilon_v = & -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \\ & - \frac{\nu}{E}(2\sigma_{kk} + 6p_1 + 6p_2)\end{aligned}$$

colocando o 2 em evidência no quarto termo do lado direito da equação acima e somando o terceiro e quarto termos, obtemos:

$$\epsilon_v = -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{kk} + 3p_1 + 3p_2) \quad (\text{C.6})$$

Multiplicando o terceiro termo da Equação C.6 por  $\frac{3}{3}$  fica:

$$\epsilon_v = -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{3(1-2\nu)}{E}\left(\frac{\sigma_{kk}}{3} + p_1 + p_2\right) \quad (\text{C.7})$$

dai,

$$\epsilon_v = -\frac{p_1}{K_s} - \frac{p_2}{K_{ns}} + \frac{1}{K_t}\left(\frac{\sigma_{kk}}{3} + p_1 + p_2\right) \quad (\text{C.8})$$

sendo  $\bar{p} = \frac{\sigma_{kk}}{3}$  a tensão média total e  $\frac{1}{K_t} = \frac{3(1-2\nu)}{E}$  o inverso do módulo volumétrico do esqueleto sólido.

Portanto a Equação C.8 é o traço aplicado na Equação 3.32.

## MATRIZ ELÁSTICA CONSTITUTIVA

Definindo a matriz elástica constitutiva explicitamente, numa geometria tri-dimensional para um material isotrópico como:

$$D_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1} \quad (\text{C.9})$$

Assim,

$$D_{ijkl} = \frac{1}{|D_{ijkl}|} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

A matriz de conformidade é dada da seguinte forma:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

e

$$|D_{ijkl}| = \left( \frac{2(1+\nu)}{E} \right)^3 \left( \frac{1}{E^3} - \frac{3\nu^2}{E^3} - \frac{2\nu^3}{E^3} \right) \quad (\text{C.12})$$

$$d_{11} + d_{22} + d_{33} = \left( \frac{2(1+\nu)}{E} \right)^3 \left( \frac{1}{E^2} - \frac{\nu^2}{E^2} \right) \quad (\text{C.13})$$

$$d_{12} + d_{21} + d_{13} + d_{31} + d_{23} + d_{32} = \left( \frac{2(1+\nu)}{E} \right)^3 \left( \frac{\nu}{E^2} + \frac{\nu^2}{E^2} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$d_{44} + d_{55} + d_{66} = \left( \frac{2(1+\nu)}{E} \right)^2 \left( \frac{1}{E^3} - \frac{3\nu^2}{E^3} - \frac{2\nu^3}{E^3} \right) \quad (\text{C.15})$$

sendo  $E$  o módulo elástico e  $\nu$  a razão de Poisson.

## APÊNDICE D – FUNÇÃO DE FORMA E COEFICIENTES DAS MATRIZES

Neste apêndice, apresentaremos as funções de formas das equações de equilíbrio e de fluxo, além dos coeficientes das matrizes.

### FUNÇÃO DE FORMA: EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

A Equação 5.13 pode ser reescrita como:

$$\hat{u}_j = \sum_{i=1}^{n^u} N_{iu} u_{ji} \quad j = x, y, z \quad (\text{D.1})$$

Assim, o espaço da função de forma matricialmente e o vetor de incógnitas fica:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_{1u} & 0 & 0 & \dots & N_{n^u u} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1u} & 0 & \dots & 0 & N_{n^u u} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1u} & \dots & 0 & 0 & N_{n^u u} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{u} = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{z1} \quad \dots \quad u_{xn^u} \quad u_{yn^u} \quad u_{zn^u}]^T \quad (\text{D.3})$$

Também podemos reescrever a tensão e a deformação em forma vetorial, temos:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T \quad (\text{D.4})$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xz}]^T \quad (\text{D.5})$$

$$(\text{D.6})$$

Por fim, redefinimos o operador de derivadas parciais como uma matriz e admitimos que a regra do produto material possa ser aplicado sobre este operador, como:

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Com isso, definimos a matriz  $\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}_{1u} \ \dots \ \mathbf{B}_{n^u u}]$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_{ju} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ju}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{ju}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{ju}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_{ju}}{\partial y} & \frac{\partial N_{ju}}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial N_{ju}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{ju}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_{ju}}{\partial x} & \frac{\partial N_{ju}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

onde cada componente  $\mathbf{B}_{ju}$  é a matriz deformação-deslocamento do elemento segunda a Equação 5.19.

#### FUNÇÃO DE FORMA: EQUAÇÃO DE FLUXO

Sabendo que as equações 5.14 e 5.15 podem ser reescritas como:

$$\hat{p}_1 = \sum_{i=1}^{n^{pm}} N_{ipm} p_{1i} \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{p}_2 = \sum_{i=1}^{n^{pf}} N_{ipf} p_{2i} \quad (\text{D.10})$$

podemos fazer a analogia com a matriz  $\mathbf{N}_u$  da equação de equilíbrio.

Desta forma, podemos escrever  $\mathbf{N}_{pm}$  e  $\mathbf{N}_{pf}$  matricialmente como vetores linhas da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_{pm} = [N_{1pm} \ N_{1pm} \ \dots \ N_{n^{pm}pm}] \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{N}_{pf} = [N_{1pf} \ N_{1pf} \ \dots \ N_{n^{pf}pf}] \quad (\text{D.12})$$

e os vetores das incógnitas são escritos como:

$$\mathbf{p}_1 = [p_{11} \ p_{21} \ \dots \ p_{n^{pm}1}]^T \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbf{p}_2 = [p_{12} \ p_{22} \ \dots \ p_{n^{pf}2}]^T \quad (\text{D.14})$$

$$\bar{\mathbf{p}} = [\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \dots \ \bar{p}_n]^T \quad (\text{D.15})$$

Portanto, definimos o operado gradiente das funções de formas  $\mathbf{B}_{pm}$  e  $\mathbf{B}_{pf}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{pm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1pm}}{\partial x} & \frac{\partial N_{2pm}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p m pm}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{1pm}}{\partial y} & \frac{\partial N_{2pm}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p m pm}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{1pm}}{\partial z} & \frac{\partial N_{2pm}}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p m pm}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{B}_{pf} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1pf}}{\partial x} & \frac{\partial N_{2pf}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p f pf}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{1pf}}{\partial y} & \frac{\partial N_{2pf}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p f pf}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{1pf}}{\partial z} & \frac{\partial N_{2pf}}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial N_{n^p f pf}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

logo,  $\nabla \hat{p}_1 = \mathbf{B}_{pm} \mathbf{p}_1$  e  $\nabla \hat{p}_2 = \mathbf{B}_{pf} \mathbf{p}_2$  que são as igualdades utilizadas nas equações 5.23 e 5.25 respectivamente.

## COEFICIENTES DAS MATRIZES

Os coeficientes da Equação 5.21 são representados das seguintes formas:

$$\mathbf{K}_u = \int_{\Omega_u} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u) d\Omega_u \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{C}_{1u} = \int_{\Omega_u} \alpha_1 (\mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p) d\Omega_u \quad (\text{D.19})$$

$$\mathbf{C}_{2u} = \int_{\Omega_u} \alpha_2 (\mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p) d\Omega_u \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial t} = -\mathbf{f}_{bu} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{f}_{\Gamma u} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} \quad (\text{D.21})$$

sendo  $\mathbf{f}_{bu}$  e  $\mathbf{f}_{\Gamma u}$  os coeficientes das forças de corpo e das condições de contorno respectivamente, dadas das seguintes maneiras:

$$\mathbf{f}_{bu} = \int_{\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\Omega_u \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{f}_{\Gamma u} = \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{N}_u^T d\partial\Omega_u \quad (\text{D.23})$$

onde  $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Agora os coeficientes das equações 5.24 e 5.26 são representados das seguintes maneiras:

• Matriz:

$$\mathbf{A}_{1m} = \int_{\Omega^{pm}} \frac{\phi_1}{K_f} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{A}_{2m} = \int_{\Omega^{pm}} \left[ (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\alpha\alpha_1}{K_t} \right) - \frac{\phi_1\phi_2}{K_f} \right] \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{A}_{3m} = \int_{\Omega^{pm}} (1 - \phi_2) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\alpha\alpha_2}{K_t} + \frac{\phi_2}{K_f} \right) \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pf} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.26})$$

$$\mathbf{A}_{4m} = \int_{\Omega^{pm}} (1 - \phi_2) \frac{\alpha}{K_t} \mathbf{N}_{pm}^T d\Omega^{pm} \quad (\text{D.27})$$

$$\mathbf{Q}_m = \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \mathbf{B}_{pm} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.28})$$

$$\mathbf{M}_{1m} = \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{M}_{2m} = \int_{\Omega^{pm}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pf} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.30})$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_m = \int_{\Omega^{pm}} \mathbf{B}_{pm}^T \frac{\mathbf{K}_1}{\mu} \rho_1 \mathbf{g} d\Omega^{pm} - \int_{\partial\Omega^{pm}} \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} \bar{\mathbf{q}}_m d\partial\Omega^{pm} \quad (\text{D.31})$$

$$\mathbf{A}_{22m} = \int_{\Omega^{pm}} \left( \frac{\alpha_1 - \phi}{K_1} + \frac{\alpha_1\alpha_1}{K_t} \right) \mathbf{N}_{pm}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pm} \quad (\text{D.32})$$

$$\mathbf{A}_{44m} = \int_{\Omega^{pm}} \frac{\alpha_1}{K_t} \mathbf{N}_{pm}^T d\Omega^{pm} \quad (\text{D.33})$$

• Fratura:

$$\mathbf{A}_{1f} = \int_{\Omega^{pf}} \frac{\phi_2}{K_f} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.34})$$

$$\mathbf{A}_{2f} = \int_{\Omega^{pf}} \left[ (1 - \phi_1) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\alpha\alpha_2}{K_t} \right) - \frac{\phi_2\phi_1}{K_f} \right] \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.35})$$

$$\mathbf{A}_{3f} = \int_{\Omega^{pf}} (1 - \phi_1) \left( \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\alpha\alpha_1}{K_t} + \frac{\phi_1}{K_f} \right) \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.36})$$

$$\mathbf{A}_{4f} = \int_{\Omega^{pf}} (1 - \phi_1) \frac{\alpha}{K_t} \mathbf{N}_{pf}^T d\Omega^{pf} \quad (\text{D.37})$$

$$\mathbf{Q}_f = \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \mathbf{B}_{pf} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.38})$$

$$\mathbf{M}_{1f} = \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.39})$$

$$\mathbf{M}_{2f} = \int_{\Omega^{pf}} \frac{\beta k_{11}}{\mu} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pm} d\Omega^{pf} \quad (\text{D.40})$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_f = \int_{\Omega^{pf}} \mathbf{B}_{pf}^T \frac{\mathbf{K}_2}{\mu} \rho_2 \mathbf{g} d\Omega^{pf} - \int_{\partial\Omega^{pf}} \mathbf{N}_{pf}^T \mathbf{N}_{pf} \bar{\mathbf{q}}_f d\partial\Omega^{pf} \quad (\text{D.41})$$