Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Curso de Doutorado

JULIANA AZEVEDO MONTENEGRO

IDENTIFICAÇÃO, CONVERSÃO E TRATAMENTO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS AUXILIANDO A APRENDIZAGEM DE SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Recife

2018

JULIANA AZEVEDO MONTENEGRO

IDENTIFICAÇÃO, CONVERSÃO E TRATAMENTO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS AUXILIANDO A APRENDIZAGEM DE SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Co-orientadora: Profª. Drª Marilena Bittar

Recife

2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Amanda Nascimento, CRB-4/1806

M777i Montenegro, Juliana Azevedo.
Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias / Juliana Azevedo Montenegro. – Recife, 2018.
247 f. : il.

Orientadora: Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa.
Coorientadora: Bittar, Marilena.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2018.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Matemática (Ensino fundamental). 2. Análise combinatória 3. Combinações (Matemática). 4. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. II. Bittar, Marilena. III. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2018-60)

IDENTIFICAÇÃO, CONVERSÃO E TRATAMENTO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS AUXILIANDO A APRENDIZAGEM DE SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 28/08/2018

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Orientadora e presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Marilena Bittar (Examinadora externa)
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

____
Alina Galvão Spinillo (Examinadora externa)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Maria Alves de Azerêdo (Examinadora externa)
Universidade Federal da Paraíba

____
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro (Examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora interna)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a deus.

À minha orientadora, rute borba: mais que uma orientadora, uma mãe acadêmica! Mais que minha mãe acadêmica, minha amiga, minha madrinha! Sempre ao meu lado, em todos os momentos! Agradeço a deus por tê-la em minha vida, pois foi Ele quem a colocou em meu caminho, para me orientar não apenas na academia, mas, principalmente, na vida!

À minha co-orientadora, marilena bittar. Orientadora de doutorado sanduíche, que colaborou para a continuidade da pesquisa, e, não podendo ser diferente, tornou-se co-orientadora da tese. Obrigada por suas contribuições e por sua amizade.

À minha mãe, helena, meu exemplo de vida: sempre ao meu lado, me incentivando e me fazendo acreditar que posso realizar tudo aquilo que eu quiser! Adiando planos pessoais para que os filhos conseguissem realizar os deles! Mainha, obrigada por tudo! Te amo!

Ao meu pai, luciano, meu herói: que apesar da distância física sempre vibrou, junto comigo, todas as conquistas da minha vida.

Ao meu irmão, Guilherme: meu professor, meu amigo.

À minha irmã, Isabella: minha josefina que tomou meu posto de caçula e eu nem liguei.

Ao meu marido, Pedro Montenegro: pelo apoio, incentivo, amizade e, principalmente, amor!

A rafael e Aline, Sr Adilson e D. Tânia: a nova família que deus me permitiu escolher.

À minha cunhada Tarciana, pelo incentivo, apoio e pela ajuda nos momentos importantes.

À minha avó, Isabel (in memoriam) e meu avô Ivanildo: ajudando-me a percorrer meu caminho e ajudando minha mãe a me fazer ser o que sou hoje.

À minha avó Conceição (in memoriam): quem pouco tive o privilégio de conviver, mas que, com certeza, está sempre presente em minha vida.

Às minhas tias, Susana, Sandra, Ana e Flávia: mais que tias, verdadeiras mães!

Aos meus tios, Gilberto (in memoriam), Ivan e Tonico.

Aos meus primos, Carla, Chico, Marina, Josué, Amanda, Carolina, Renato, Pedro, Thiago, Gabriela, Vanessa, João e Gilbertinho: uns mais presentes, outros mais distantes, mas todos sempre me incentivando e apoiando.

Às minhas majestades mais ciumentas, Adry, Dani, Julia, e Sthenio: "não fazemos amigos, reconhecemo-os!" (vinícius de moraes).

Sim... eu os re-conheci!

À minha amiga Carol: pela amizade, amor, carinho e companheirismo dos tempos de colégio que perdura até hoje.

Aos amigos do #cordeirão: Rayssa, Cati, Ale, Jhone, Adelmo, Deck, Sol, Hiuri, Dani e Bruno que estão sempre torcendo por mim.

Aos amigos do #busão: Rodrigo e Júnior pelo apoio nos momentos que me fiz ausente para conclusão desta pesquisa.

Aos amigos do #casabobo, Adry e Rubens, Dani e Dudu, Kétura e Everton, pelo apoio e incentivo!

Às amigas de graduação, Adry, Nathália, Roberta e Lygia sempre presentes e levantando a plaquinha: eu já sabia!

às amigas do geração (grupo de estudos em raciocínio combinatório e probabilístico) com quem sempre aprendi muito. Paulinha, Ewellen, Dacy, Dani, Tiane, Mika, Glauce, Rita, Ari, Jaque, Lany, Flavinha: pelas contribuições a essa pesquisa, pela atenção, apoio, e pela alegria de estarmos juntas!

Aos professores, Alina Spnillo, Carlos, Monteiro, Maria Azerêdo e Paula Baltar: pela valiosa contribuição com a minha pesquisa.

Aos amigos do mestrado (turma 2011), principalmente: Edilza, Márcio, Natércia, Renata, Robson e Tâmara.

Aos amigos do doutorado companheiros dessa primeira turma (2014.2) que se forma!

Aos amigos da linha de pesquisa de processos: muito obrigada pelas contribuições ao longo dos oito seminários cursados.

Aos professores e amigos das turmas do mestrado e doutorado do Edumatec pela contribuição durante as disciplinas de seminários no decorrer do curso

Aos professores e alunos das turmas participantes dessa pesquisa.

À capes e ao cnpq pelos financiamentos que permitiram maior dedicação a essa pesquisa

A todos que fazem parte do programa de pós-graduação em educação matemática e tecnológica – edumatec.

A cada um que, direta ou indiretamente, contribuiu com a realização de um sonho, e que pode ter sido omitido pela falha da memória!

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar o papel que a *identificação* e as transformações de *conversão* e de *tratamento* de registros de representação têm na ampliação do conhecimento de Combinatória por parte de estudantes do Ensino Fundamental. Para isso, se faz necessária a discussão das diferentes *situações combinatórias* e dos seus *invariantes prescritivos* e *em-ação*. Dessa forma, a pesquisa se ampara na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), bem como em autores que abordam as duas teorias e o ensino da Combinatória no Ensino Fundamental. Na investigação, foram realizados dois estudos. O primeiro de sondagem de conhecimentos sobre a *identificação* de *conversões* – da língua natural para árvore de possibilidade ou para listagem e dessas para a expressão numérica – nas diferentes situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*); e o segundo estudo de intervenção em que essas situações combinatórias foram trabalhadas por meio de *representações auxiliares de transição* (árvore de possibilidades e listagem sistematizada), que se caracterizam como uma *representação intermediária* entre o registro de partida (língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica). No primeiro estudo, com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, foram confirmadas as hipóteses levantadas inicialmente, destacando que a *identificação* não é igualmente reconhecida em todas as situações combinatórias, tanto que os estudantes mostraram maior dificuldade com uma situação combinatória específica – a *combinação*. As identificações também são influenciadas pela conversão efetuada, sendo a conversão para expressão numérica a mais difícil de ser identificada. Em função dos resultados do primeiro estudo, no segundo estudo foram propostas distintas intervenções em turmas dos 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental. Neste estudo os resultados indicam que ambas as *representações intermediárias* – árvore de possibilidades e listagem sistematizada – são bons caminhos para o ensino da Combinatória, uma vez que ambos os grupos de intervenção avançaram em seus desempenhos. Apesar disso, quando se analisa por tipo de problema em cada ano de escolarização, percebe-se que no pós-teste o grupo que trabalhou com árvores (G1) apresentou melhores desempenhos em comparação com o grupo que trabalhou com listagens (G2). Também se percebe que no G1 houve maior número de acertos nas situações com maior número de possibilidades e de etapas de escolha do pós-teste, uma vez que o acerto desses problemas estava diretamente relacionado com o uso de uma expressão numérica. Desse modo, conclui-se que é possível desenvolver e ampliar o raciocínio combinatório dos estudantes do Ensino Fundamental por meio do uso de ambas as representações intermediárias utilizadas neste estudo, oportunizando, principalmente com o uso da árvore de possibilidades, um melhor desempenho na apresentação das expressões numéricas correspondentes à resolução das situações. Assim, enfatiza-se que o trabalho com as *diferentes situações combinatórias* por meio da discussão de seus *invariantes* e com o uso de *representações auxiliares* sistemáticas, a partir de um trabalho envolvendo *identificações*, *conversões* e *tratamentos de registros*, deve ser levado em consideração para um mais efetivo ensino e aprendizado da Combinatória na Educação Básica.

Palavras-chave: Identificação. Conversão. Tratamento. Situações combinatórias. Representações intermediárias. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The aim of this research is to analyse the role that *identification* and *transformations* of *conversion* and *treatment* of representation registers have in the expansion of the knowledge of Combinatorics by students of Elementary and Middle School. For this, it is necessary to discuss the different *combinatorial situations* and their *prescriptive* and *in-action invariants*. Thus, the research is based on the Theory of Registers of Semiotic Representation (DUVAL, 2003) and the Conceptual Fields Theory (VERGNAUD, 1986), as well as on authors who discuss the two theories and the teaching of Combinatorics in Elementary and Middle Education. Two studies were carried out in the research. The first one of probing knowledge on the *identification of conversions* - from natural language to trees of possibilities or to listing and from those to numerical expressions - in the different *combinatorial situations* (*arrangements*, *combinations*, *permutations* and *Cartesian products*); and the second an intervention study in which these combinatorial situations were worked through *auxiliary transitional representations* (trees of possibilities and systematised listings), which are characterised as *intermediate representations* between the starting register (natural language) and the arrival register (numerical expression). In the first study, students from the 5th grade of Elementary School confirmed the hypotheses initially raised, noting that *identification* is not equally recognized in all combinatorial situations, so that students showed greater difficulty with a specific combinatorial situation - *combination*. The identifications are also influenced by the conversion done, being the conversion to numerical expression the most difficult to be identified. Based on the results of the first study, in the second study, different interventions were proposed in 5th, 7th and 9th grade classes. In this study the results indicate that both *intermediate representations* - trees of possibilities and systematized listings - are good paths for the teaching of Combinatorics, since both intervention groups advanced in their performances. Nevertheless, when analysing the type of problem in each year of schooling, it is noticed that in the post-test the group that worked with trees (G1) presented better performances in comparison with the group that worked with listings (G2). It is also noticed that in G1 there were more correct answers in situations with greater number of possibilities and stages of choice of the post-test, since the correctness of these problems was directly related to the use of a numerical expression. Thus, it can be concluded that it is possible to develop and expand the combinatorial reasoning of Elementary and Middle School students through the use of both intermediary representations used in this study, making it possible, especially with the use of trees of possibilities, to perform better in the presentation of the numerical expressions corresponding to the resolution of situations. Thus, it is emphasised that the work with the different *combinatorial situations*, through the discussion of their *invariants*, as well as the use of systematic *auxiliary representations*, from a work involving *identifications*, *conversions* and *treatments* of registers, must be carried out for a more effective teaching and learning of Combinatorics in Basic Education.

Keywords: Identification. Conversion. Treatment. Combinatorial situations. Intermediate representations. Elementary and Middle School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE DIAGRAMAS E QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, p. 24), a Matemática possibilita despertar no aluno a curiosidade pela aprendizagem, e instiga a capacidade de generalização. Os PCN (BRASIL, 1997, p. 19) também destacam o ensino da Matemática como uma tarefa importante na qual os professores podem usar diferentes representações simbólicas e estratégias, visando atingir os objetivos de aprendizagem elencados por este documento.

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções [...].

Nestes documentos é enfatizada também a importância das representações simbólicas no aprendizado e da variedade de representações nesse processo. Ressalta-se que na aprendizagem pode ocorrer a evolução de representações pictóricas até representações que se aproximam cada vez mais da simbologia matemática formal (como expressões numéricas e fórmulas).

Essa também é uma particularidade de um conteúdo específico da Matemática – a Combinatória, que se caracteriza como um tipo de contagem baseada em raciocínio multiplicativo. Vergnaud (1986) insere esse tipo de situação no campo conceitual[1] das estruturas multiplicativas e a identifica como *produto de medidas*. Estes problemas, segundo Vergnaud, envolvem uma relação ternária, ou seja, entre três variáveis, das quais uma quantidade é o produto das outras duas.

No contexto da Educação Matemática, a importância do estudo da Combinatória por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental tem sido amplamente discutida e recomendada. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, este conteúdo deve ser introduzido neste nível de ensino com o propósito de discutir "combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (1997, p.40), por meio de diferentes tipos de

---

[1] Na seção 2.1 é apresentada a definição de campo conceitual.

representações. Nos anos finais do Ensino Fundamental os PCN destacam que os problemas combinatórios

> [...] podem ser resolvidos sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades. Nesse caso, o objeto da aprendizagem é a descoberta de um procedimento, como a construção de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis. Assim, é indispensável que os alunos produzam diversas representações para buscar os casos possíveis, antes de se pretender que reconheçam a utilização de um cálculo multiplicativo. Por outro lado, se lhes forem apresentados apenas problemas com quantidades pequenas, não terão a necessidade de aplicar o princípio multiplicativo, pois o procedimento da contagem direta é suficiente para obter a solução. (BRASIL. 1998, p. 111-112).

Pessoa e Borba (2010) destacam que na resolução de situações combinatórias há uma grande variedade de representações simbólicas utilizadas pelos alunos, como: *desenhos*, *listagens*, *árvores de possibilidades*, *quadros*, *diagramas*, *cálculos* ou uso de *fórmulas, Princípio Fundamental da Contagem*[2], entre outras. Borba, Pessoa, Barreto e Lima (2011) e Azevedo (2013) ressaltam, ainda, que estudantes de anos iniciais apresentam resoluções corretas que utilizam desenhos e listagens, dentre outras formas de representar situações combinatórias.

Azevedo e Borba (2013) ressaltam que alunos de 5º ano podem avançar em suas compreensões de relações combinatórias por meio de aprendizagem com árvores de possibilidades, virtuais ou escritas. Pessoa e Santos (2012) destacam que alunos do 5º ano podem aprender relações combinatórias por meio de listagens. Em ambas as representações utilizadas, a sistematização e a compreensão das relações e propriedades dos problemas são imprescindíveis para o sucesso dessa aprendizagem.

Apesar de os PCN (BRASIL, 1997) indicarem o aprendizado da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com o uso de diferentes recursos e

[2] Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como princípio multiplicativo, é uma forma de resolução de situações combinatórias e é base de fórmulas utilizadas no estudo de Combinatória, pois expressa a natureza multiplicativa dos diferentes tipos de problemas combinatórios (LIMA, 2015, p.22). O PFC também pode ser anunciado como Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio da Multiplicação e será apresentado com mais detalhes na Seção 1.2.

estratégias, e de diversos estudos já apontarem que o aprendizado deste conceito pelo uso de diferentes representações é possível desde os primeiros anos de escolarização (BARRETO; BORBA, 2011; BARRETO; BORBA, 2012; PESSOA; SANTOS, 2012; AZEVEDO; BORBA, 2013; AZEVEDO, 2013), este conhecimento só ganha maior espaço na sala de aula no Ensino Médio. Desse modo, o ensino da Combinatória acontece usualmente no 2º ano do Ensino Médio por meio do uso de fórmulas.

Sobre a importância das representações para a aprendizagem da Matemática, Vergnaud (1996, p. 184), em sua Teoria dos Campos Conceituais (TCC), enfatiza que "[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas". Vergnaud vai ainda mais além quando destaca que as representações simbólicas, no processo de conceitualização são tão importantes quanto as situações e seus invariantes operatórios: "A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceptualização e na ação. Sem os esquemas e as situações, permanecem vazios de sentido" (VERGNAUD, 1996, p. 191). Assim, Vergnaud considera que as *situações*, os *invariantes* e as *representações simbólicas* formam um tripé (*SIR*) fundamental para o desenvolvimento de conceitos, destacando que, "[...] para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo" (1996, p. 166).

Outro aspecto defendido por Vergnaud (1986) é que certos conceitos se desenvolvem durante um longo período de tempo, desde os anos iniciais de escolarização até o Ensino Médio, aproximadamente. Torna-se necessário, portanto, o trabalho progressivo com diversas *situações* que deem significado ao conceito estudado, pois, Vergnaud afirma que a aprendizagem de um conceito acontece por meio de resolução de problemas (com variadas *situações*) e é a partir dessa experiência que se explora o conceito, se elabora hipóteses – pela atenção aos seus *invariantes* – que são verificadas para que o problema seja solucionado por meio de distintas *representações simbólicas*.

Ainda sobre as representações, Duval, em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), afirma que "Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. [...] ela está no centro de toda reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo." (2009, p. 29). Assim, este autor destaca que todo conhecimento mobilizado necessita de uma atividade de representação, sendo ela, portanto, indispensável para a compreensão de um conceito. Entretanto, as representações não podem ser confundidas com o próprio conceito. Ele chama, assim, a atenção para este paradoxo o que implica na necessidade de trabalhar com muitas representações de um mesmo conceito, e, assim, ter "acesso" ao próprio conceito e não apenas à sua representação (DUVAL, 2011).

Além disso, o autor enfatiza a importância do fenômeno da *congruência* entre representações, ou seja, duas representações podem ser mais ou menos *congruentes* entre si, dependendo do grau de dificuldade da *conversão* entre elas. Duval (2011, p. 121) destaca que a "[...] variação de congruência ou não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos". Assim, para este autor, a diversidade de registros de representação advém justamente dos fenômenos de não congruência, uma vez que situações não-congruentes denotam a necessidade do uso de registros intermediários. Esses registros intermediários são caracterizados como registros de representação auxiliares de transição, uma vez que, na medida que os estudantes compreendem registros mais rápidos e formais, eles abandonam os registros intermediários (DUVAL, 2011).

Duval enfatiza, ainda, que a aprendizagem das matemáticas constitui "[...] um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos" (2009, p.13). Isso porque se utiliza de uma variedade de registros de representação[3] como a linguagem natural, sistema numérico, algébrico, geométrico, gráficos cartesianos, diagramas, redes, esquemas, etc. Tais registros apresentados aqui são representações semióticas, pois, seu significado é compartilhado por uma determinada comunidade. Cada um deles se caracteriza como um sistema semiótico, regido por regras próprias de funcionamento. Desse modo, listagens sistematizadas e árvores de possibilidades, assim como o PFC

---

[3] A seguir, na Seção 2.2, será discutida, detalhadamente, a definição de Registros de Representação Semiótica, segundo a teoria apresentada por Raymond Duval.

possuem suas regras de funcionamento, bem como são identificadas como resoluções próprias das situações combinatórias.

Além disso, Duval destaca, ainda, a importância do uso dos registros intermediários, chamados de registros de representação auxiliares de transição. Esses registros se configuram como intermediários, pois estão entre o registro de partida, que, em geral, são os enunciados em língua natural, e o registro de chegada, uma expressão numérica. São auxiliares, pois ajudam na conversão de uma forma de registro a outro e são de transição, no sentido de que, uma vez cumprido o seu papel de fazer compreender registros menos transparentes, poderão ser substituídos por outros, em geral mais econômicos.

Assim, as duas teorias aqui discutidas detalham – na TRRS – processos de identificação, conversão e tratamento de conversões[4] e ressaltam – na TCC – como situações e os invariantes das mesmas também devem ser levadas em consideração, além das representações nos processos de conceitualização. Desse modo, é preciso analisar os processos de *identificação*, *conversão* e *tratamento* para cada *situação combinatória*, de acordo com seus *invariantes*[5].

Neste sentido, o presente estudo visa discutir o uso de diferentes registros de representação, tais como, linguagem natural, listagens, árvores de possibilidades, e expressões numéricas – como as de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) – na ampliação do conhecimento combinatório. Considerando a linguagem natural o registro de partida; árvores ou listagens trabalhadas enquanto registros intermediários; e as expressões numéricas, o registro de chegada.

Desse modo, defende-se, nesta pesquisa, que o reconhecimento da Combinatória em diferentes situações, bem como, por meio de distintas formas de representação é essencial para a sua compreensão. Esta atividade cognitiva caracteriza-se como indispensável para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois, lidar com representações simbólicas está no cerne da compreensão de conceitos e se faz necessário realizar mais estudos que tenham

---

[4] Na Seção 2.2, são discutidas, detalhadamente, as definições de identificação, tratamento e conversão de registros, segundo a teoria apresentada por Raymond Duval.
[5] Na seção 1.2 são discutidas, detalhadamente, as situações combinatórias e seus invariantes de escolha e ordem.

como objetivo pesquisar como sistemas de registros auxiliam no entendimento de conceitos.

Em particular, no que se refere à Combinatória, investigar o uso de diferentes registros de representação em cada uma das situações combinatórias, que podem ser representações intermediárias menos formais ou representações de chegada, mais próximas da formalização, se faz necessário para a intenção de promover o desenvolvimento desse tipo de pensamento. Assim, ao final da presente pesquisa pretende-se responder algumas questões:

1) Como alunos do Ensino Fundamental identificam conversões de representações de situações combinatórias?

2) Nos variados tipos de situações combinatórias emergem dificuldades de diferentes características na identificação de conversões de registros de representação semiótica?

3) Como conversões e tratamentos de diferentes representações semióticas contribuem para a aprendizagem da Combinatória por parte de alunos de anos iniciais e finais do Ensino Fundamental?

4) Diferentes representações semióticas, utilizadas como registros de representações auxiliares (árvores de possibilidades e listagens) entre o registro de partida (linguagem natural) e o registro de chegada (expressões numéricas) suscitam distintas aprendizagens em Combinatória?

Dessa forma, no primeiro capítulo do texto de tese, é proposta uma discussão sobre o ensino e a aprendizagem da Combinatória no Ensino Fundamental, de forma a destacar as distintas situações em que é possível mobilizar o raciocínio combinatório, bem como, diferentes estudos nos quais se conclui que é possível trabalhar as situações combinatórias desde os primeiros anos deste nível de ensino.

No segundo capítulo são abordadas as duas teorias que fundamentam o presente estudo. Inicialmente é discutida a Teoria dos Campos Conceituais – TCC (VERGNAUD, 1986), de modo que se destaca a importância dos diferentes tipos de situações problemas, seus invariantes prescritos e operatórios, bem como, as distintas representações simbólicas utilizadas na formação de conceitos. Em seguida, apresenta-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS (DUVAL, 2003), de modo a dar destaque às representações enquanto elemento fundamental dos processos de ensino e de aprendizagem, por meio da identificação, conversão e tratamento de registros. Neste capítulo também são abordados diferentes estudos embasados nessas teorias (TCC e/ou TRRS), sendo possível, portanto, destacar que, apesar de se caracterizarem como teorias com olhares diferentes sobre a construção de conceitos, ambas possuem um caráter complementar.

Assim, pretende-se defender a tese, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), que para ampliar o conhecimento da Combinatória é preciso articular identificações, conversões e tratamentos dos diferentes registros aos distintos invariantes das situações combinatórias e, além disso, é recomendável trabalhar com registros de representação intermediários congruentes para partir de enunciados em linguagem natural e chegar a expressões numéricas formalizadas.

No terceiro capítulo, são apresentados os dois estudos que compõem a presente pesquisa, destacando seus objetivos, bem como os procedimentos metodológicos utilizados para comprovar, ou não, a tese defendida. O capítulo está organizado em seções que justificam o método utilizado em cada um dos estudos realizados.

No quarto capítulo são discutidos os resultados encontrados no Estudo 1, um estudo de sondagem realizado com 16 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Neste estudo foram realizadas análises quantitativas, referentes a conversões identificadas de forma correta no teste aplicado. Também foram realizadas análises qualitativas das justificativas apresentadas em entrevistas realizadas com quatro alunos, buscando verificar os argumentos utilizados para identificar as conversões realizadas. Assim, o capítulo está apresentado em seções que discutem a identificação de conversões de representações em situações combinatórias e nos diferentes tipos de problemas combinatórios; as dificuldades apresentadas para identificar as conversões e, por fim, uma análise de como os alunos explicam suas identificações de conversões.

No quinto capítulo são discutidos os resultados do Estudo 2, que se caracterizou como um estudo de intervenção com 121 alunos de seis turmas, sendo duas de 5º, duas de 7º e duas de 9º ano do Ensino Fundamental. O capítulo está dividido em seções que visam discutir as intervenções realizadas, bem como análises quantitativas realizadas por meio do software de análise estatística Statistical Package for the Social Sciences – SPSS sobre o desempenho dos estudantes antes e depois das intervenções. Os resultados estão apresentados por ano de ensino e por tipo de problema combinatório, destacando as especificidades de cada contexto. Também são realizadas análises qualitativas sobre as representações semióticas utilizadas, bem como as transformações de conversão e de tratamento que foram realizadas.

No sexto e último capítulo, são discutidas as conclusões dos Estudos 1 e 2, e suas implicações sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório à luz das teorias utilizadas.

2 A COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo serão discutidas as definições de Combinatória e de raciocínio combinatório, enfatizando a necessidade do trabalho com diferentes situações, de modo que seja possível garantir aos alunos, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o contato com situações que desenvolvem o raciocínio hipotético-dedutivo, por meio de sistematização, generalização e abstração. Ainda neste capítulo serão apresentados diferentes estudos realizados que atestam a importância desse trabalho com situações combinatórias diversificadas.

2.1 A COMBINATÓRIA E O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A Análise Combinatória[6] é uma área da Matemática relacionada com a contagem de quantidades discretas. Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) destacam que uma das primeiras atividades das crianças nas escolas está relacionada com quantidades de objetos de um determinado conjunto, enumerando-as. A Combinatória, entretanto, segundo os autores supracitados, estabelece que esta enumeração inicial de quantidades dê lugar a uma contagem dos elementos de um conjunto de modo que, por meio do princípio da multiplicação, seja possível “obter o número de elementos de um conjunto [...] sem que seja necessário enumerar seus elementos” (p.19). Assim, por exemplo, numa situação em que se pretende formar casais compostos por um homem e uma mulher, sabendo que são três homens e quatro mulheres, os autores destacam que:

> Chamando os homens de h1, h2, e h3 e as mulheres de m1, m2, m3, m4, é fácil ver que há 4 casais nos quais o homem é h1, outros 4 nos quais o homem é h2 e outros 4 nos quais o homem é h3. O número de casais é, portanto, 4 + 4 + 4 = 3 x 4 = 12. O exemplo acima ilustra o Princípio Fundamental da Enumeração[7] ou Princípio da Multiplicação, o qual diz: Se uma decisão d1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d1, a decisão d2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d1 e d2 é xy. (MORGADO, et al, 1991, p.19)

---

[6] Neste estudo ‘Análise Combinatória’ e ‘Combinatória’ são consideradas sinônimos.
[7] Neste estudo chama-se Principio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem.

Diferentes autores (GUIRADO; CARDOSO, 2007; PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO; BORBA, 2013) defendem que já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, se faz necessário que os professores trabalhem com seus alunos situações que exijam o raciocínio combinatório, de modo que seja possível pensar de maneira sistemática e generalizada na enumeração de elementos combinados entre si. Sobre isso, Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997, p. 181) afirmam que os problemas de Combinatória podem ser usados “[...] para treinar os alunos na contagem, fazendo conjecturas, generalização e pensamento sistemático, que pode contribuir para o desenvolvimento de muitos conceitos, tais como as relações de equivalência e ordem, função, amostra, etc. [...]”.

Segundo Borba (2010, p.3) o raciocínio combinatório é

> [...] entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis.

Essa perspectiva da Combinatória será adotada no presente estudo por ser de natureza essencialmente cognitiva que é a abordagem pretendida nessa investigação. Dessa forma, o pensamento combinatório se caracteriza por um tipo de raciocínio que possibilita a enumeração, sistematização, generalização e abstração de uma situação que indica certas condições que precisam ser respeitadas para a sua resolução.

Teixeira e Pietropaolo (2013, p.10) afirmam que os problemas combinatórios apresentados na Educação Básica “são bastante atraentes para motivar crianças e jovens acerca de aplicações da Matemática”. Isso porque, esses problemas demandam o uso de diferentes formas de representação que estão relacionados com a maneira como o problema é proposto, incentivando nos estudantes um pensamento criativo e um raciocínio crítico em busca da solução de um problema. Em geral, na resolução de um problema de Combinatória é necessário pensar com bastante cuidado nos elementos dados, nas condições presentes na situação e em estratégias próprias para cada tipo de situação combinatória. Usualmente, nos problemas combinatórios os modos de resolução não são imediatamente identificados. É preciso refletir bem e elaborar uma estratégia de resolução, seja por desenho, por listagem ou por fórmula, dentre outros modos de representação.

Assim, em consonância com o exposto pelos PCN de Matemática dos anos iniciais (BRASIL, 1997), se faz necessário que, desde os primeiros anos de escolarização, as crianças tenham contato com diferentes tipos de situações combinatórias, em diferentes contextos, com o uso de diversificadas representações, estimulando o raciocínio combinatório dos alunos. Essa ideia também é discutida nos PCN de Matemática dos anos finais quando se afirma que o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos, ou seja, com diferentes situações combinatórias, pois elas visam possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo. A Combinatória sendo trabalhada dessa forma incentiva a curiosidade, instiga a perseverança em busca de soluções, também é base para o aprendizado de outros conceitos, e é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e hipotético-dedutivo dos alunos.

O raciocínio hipotético-dedutivo está relacionado, de acordo com Inhelder e Piaget (1976, p.241), com a diferenciação entre o real, o possível e o necessário. Os autores destacam que essa dissociação está vinculada a um nível do pensamento relacionado à Combinatória e Probabilidade. Flavell (1988, p.210) afirma que o raciocínio hipotético-dedutivo é, fundamentalmente, “Uma estratégia cognitiva que tenta determinar a realidade no contexto das possibilidades”.

Nesse sentido, no exemplo de uma situação combinatória de *produto cartesiano* em que é solicitado ‘De quantas maneiras diferentes é possível se vestir se Maria tem três saias e duas blusas?’ – quando uma criança afirma que não pode haver mais de uma possibilidade para a resposta, pois só é possível usar ‘uma blusa e uma saia’, a criança não utiliza pensamento relacionado com hipóteses ou possibilidades, mas apenas com a realidade. O pensamento hipotético começa a se desenvolver quando a criança passa a admitir que saias e blusas podem ser combinadas de distintas formas e, mais avanços acontecem quando conseguem sistematizar as possibilidades e encontrar as seis maneiras diferentes de combinar três saias e duas blusas.

Pessoa e Borba (2009) ressaltam que o aprendizado da Combinatória deve ter início já nos primeiros anos de escolarização, por meio de diferentes situações combinatórias, pois, assim, novas aprendizagens poderão ser incentivadas, bem como poderão ser superados os erros e as dificuldades apresentadas inicialmente, favorecendo, dessa forma, o momento do aprendizado sistemático oferecido por ocasião do Ensino Médio.

Desse modo, apesar de a Combinatória ser mais fortemente trabalhada durante o Ensino Médio, por meio do uso de fórmulas, é imprescindível que suas relações e propriedades sejam discutidas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Guirado e Cardoso (2007) destacam que, trabalhando os problemas combinatórios desde os anos iniciais, os alunos poderão ser conduzidos para a "[...] abstração e generalização, e o hábito de adivinhar a fórmula adequada para resolver um problema de combinatória será substituído por um trabalho de análise e síntese" (p.1).

Assim, entende-se que, para que isso seja possível, é necessário que os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental oportunizem seus alunos a entrarem em contato com distintos problemas combinatórios, de modo que utilizem diferentes formas de representá-los e que possam discuti-los com seus pares e professores, estabelecendo maior ligação com as relações presentes nesse tipo de pensamento e, assim, possibilitando um mais amplo desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

A seguir serão discutidos os diferentes tipos de situações combinatórias.

2.2 TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda agrupamentos segundo critérios previamente estabelecidos. Sobre isso, Morgado, et al (1991) destacam dois tipos de problemas combinatórios. O primeiro consiste em *demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições* e o segundo está relacionado com *contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.*

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) ressaltam cinco tipos de problemas combinatórios. O primeiro, de *existência*; o segundo, de *enumeração*; o terceiro, de *contagem*; o quarto, de *classificação*; e o quinto, de *otimização*. No primeiro, de *existência*, o objetivo é observar a possibilidade, ou não, de solução diante dos elementos e condições determinadas. No segundo, de *enumeração*, é necessário indicar todas as possibilidades que satisfazem as condições postas. O terceiro, de *contagem*, o trabalho é de determinar o número total de soluções, sem necessariamente indicar todas. No quarto tipo de problema, de *classificação*, solicita-se que os elementos sejam classificados segundo critérios específicos. No quinto e último tipo de problema, de *otimização*, os autores indicam que se deve buscar a melhor condição para obter determinadas soluções para um problema. Assim, segundo Rocha (2011, p. 54),

> [...] pode-se: solicitar a verificação se determinado tipo de estrutura discreta *existe*; requerer que sejam listadas (*enumeradas*) possibilidades dentro de situações propostas; pedir que se determine (se *conte*) o número total de possibilidades de um evento; solicitar que sejam *classificados* os diferentes casos possíveis; ou, ainda, que se escreva uma função que represente conjuntos de soluções de maneira ordenada (*otimizados*) para determinar valores máximos e mínimos. [*grifo nosso*].

Segundo as classificações de Morgado, et al (1991) e Batanero, et al (1997) os problemas mais trabalhados na Educação Básica são os que se deve indicar a existência de possibilidades, enumerá-las e contá-las, segundo as condições dadas no enunciado do problema. Nesse sentido, no Ensino Fundamental, salienta-se a importância que, inicialmente, a ordem de grandeza da solução de um problema combinatório seja pequena, de modo que possibilite enumerar todos os casos, sistematizá-los, generalizar os casos possíveis, e, com isso, chegar ao total de casos por meio de uma expressão numérica. Gradativamente é desejado que a ordem de grandeza seja aumentada para que os estudantes percebam a necessidade do uso de estratégias mais generalizadoras, tais como as expressões numéricas resultantes da generalização de possibilidades ou do uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Os tipos de problemas elencados pelos autores acima citados podem ser usados em diferentes situações que apresentem distintas relações e propriedades para a resolução de problemas combinatórios. Essas situações são organizadas por

Pessoa e Borba (2009) numa classificação única que indica quatro situações diferentes nas relações e propriedades de cada problema: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. As autoras, com embasamento na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1991), destacam que esses problemas são diferentes do ponto de vista do cálculo relacional, ou seja, do ponto de vista da compreensão da lógica do problema (PESSOA; BORBA 2009). A classificação organizada por essas autoras centra-se nos invariantes das situações combinatórias e, por isso, é a classificação utilizada nesta pesquisa. Segundo Borba (2010) as relações e propriedades presentes nas situações combinatórias são destacadas de acordo com o agrupamento de elementos, atendendo aos critérios de *escolha* e *ordenação*, determinando-se, direta ou indiretamente, o número total de possibilidades. Borba e Braz (2012) destacam também a existência de problemas combinatórios condicionais, em que se pode considerar, ainda, outras relações referentes à *explicitação* (ou não) de determinados elementos, *posicionamentos*, *proximidades* e/ou *ordenações* específicas.

Como exemplo de um problema de *produto cartesiano* tem-se:

Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

Produto cartesiano é o termo denominado por Nunes e Bryant (1997) e é chamado por Vergnaud (1983) de *produto de medidas* e nos PCN (BRASIL, 1997) de *problema combinatório*. Esse é o tipo de problema explicitamente trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de forma que é proposta, nos livros didáticos, a resolução também com expressões numéricas (BORBA, AZEVEDO, BITTAR, 2016a). No exemplo, são dados três conjuntos (um de blusas, um de saias e um de sapatos) e pede-se para o aluno determinar a quantidade de possibilidades em que se deve *escolher* um elemento de cada conjunto, de modo que a *ordem* dos elementos escolhidos não determina possibilidades distintas. Assim, a possibilidade ‘blusa amarela, saia preta e sapato dourado’ é a mesma que ‘sapato dourado, blusa amarela e saia preta’. Para a resolução deste tipo de problema é possível listar todas as possibilidades, ou organizá-las em uma árvore de possibilidades, dentre outros tipos de representações menos formais ou mais formais, como a generalização de possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou pelo uso de fórmulas, na ocasião do Ensino Médio.

No Quadro 1, a seguir, pode-se ver exemplos de resoluções em diferentes registros de representações dessa situação combinatória de *produto cartesiano*.

Quadro 1: Resolução de situação combinatória de *produto cartesiano*, de escolhas dentre quatro blusas, duas saias e dois pares de sapatos, por diferentes representações.

Listagem:

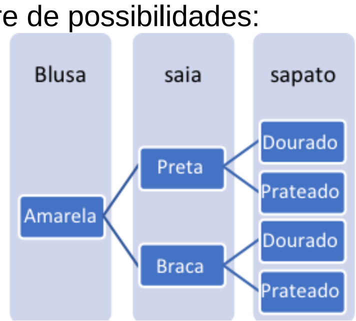
Blusa amarela, saia preta, sapato dourado.
Blusa amarela, saia preta, sapato prateado.
Blusa amarela, saia branca, sapato dourado.
Blusa amarela, saia branca, sapato prateado.

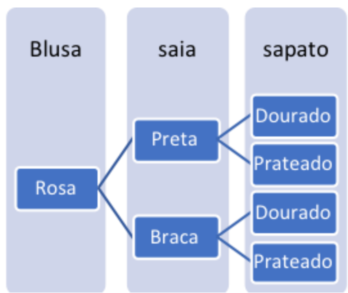
Blusa rosa, saia preta, sapato dourado.
Blusa rosa, saia preta, sapato prateado.
Blusa rosa, saia branca, sapato dourado.
Blusa rosa, saia branca, sapato prateado.

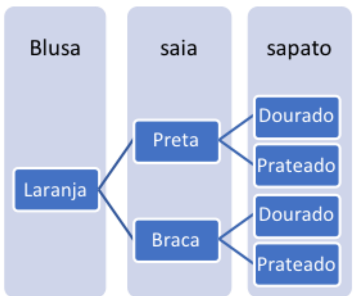
Blusa laranja, saia preta, sapato dourado.
Blusa laranja, saia preta, sapato prateado.
Blusa laranja, saia branca, sapato dourado.
Blusa laranja, saia branca, sapato prateado.

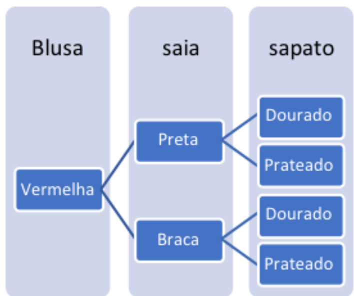
Blusa vermelha, saia preta, sapato dourado.
Blusa vermelha, saia preta, sapato prateado.
Blusa vermelha, saia branca, sapato dourado.
Blusa vermelha, saia branca, sapato prateado.

Árvore de possibilidades:









Expressão numérica - Generalização de possibilidades:
4 x 4 = 16

Expressão numérica - PFC:
4x2x2=16

Fonte: Autora mediante pesquisa.

A primeira resolução, em *listagem sistemática* de possibilidades, é caracterizada pela enumeração de todas as possibilidades, iniciando sempre com a mesma blusa, até finalizar os casos para essa blusa. Dessa forma, é possível ter certeza que já se listou tudo e realizar a contagem do total de possibilidades. Na *árvore de possibilidades* também se destaca a enumeração de todas as possibilidades, a qual, necessariamente, precisa ser realizada de forma sistemática, uma vez que o nó inicial da árvore se subdivide nas escolhas dos elementos dos demais conjuntos, permitindo a contagem de todas as possibilidades. A generalização de possibilidades resulta da multiplicação da quantidade de possibilidades elencadas para um elemento fixo na primeira escolha pelo número total de elementos, se caracterizando como um cálculo relacional diferente do expresso no PFC. A expressão numérica do PFC se caracteriza pela multiplicação das quantidades de elementos de cada conjunto, uma vez que, para cada uma das quatro blusas, é possível combiná-las com dois tipos de saias e, para cada combinação realizada com as saias, dois pares de sapato também podem ser escolhidos.

Lima (2015) destaca que o PFC pode ser considerado uma das estratégias mais importantes para a resolução de situações combinatórias, enfatizando ainda que

> O PFC pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não condicionais[8], e, também, é base das fórmulas empregadas no ensino da Análise Combinatória para a construção dos diferentes tipos de problemas (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) estudados neste campo da Matemática (p. 17).

Os problemas de *arranjo*, *combinação* e *permutação* são tratados de forma explícita, somente no Ensino Médio, por meio do uso de fórmulas. Como exemplo de um problema de *arranjo* simples, tem-se:

---

[8] Problemas combinatórios podem ser condicionados quanto à escolha, explicitada ou não, de seus elementos, à posição destes elementos, a ordem e a proximidade entre eles. Para mais detalhes sobre problemas condicionais consultar o texto das autoras Borba e Braz (2012).

Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Nesse problema, de um conjunto de quatro elementos, serão escolhidos elementos que formarão agrupamentos de acordo com as condições dadas no enunciado, em que a ordem dos elementos no agrupamento é importante na sua composição. No exemplo dado, tem-se um grupo de quatro letras em que serão usadas três letras na composição das placas, e a ordem das letras indica placas distintas, uma vez que a placa ‘XYK’ é diferente da placa ‘XKY’. Apesar de serem compostas pelas mesmas letras, a ordem dessas letras se faz importante na diferenciação das placas.

Assim como no problema de *produto cartesiano*, para os problemas de *arranjo* também são possíveis diferentes registros de representação (menos ou mais formais), como se pode observar no Quadro 2.

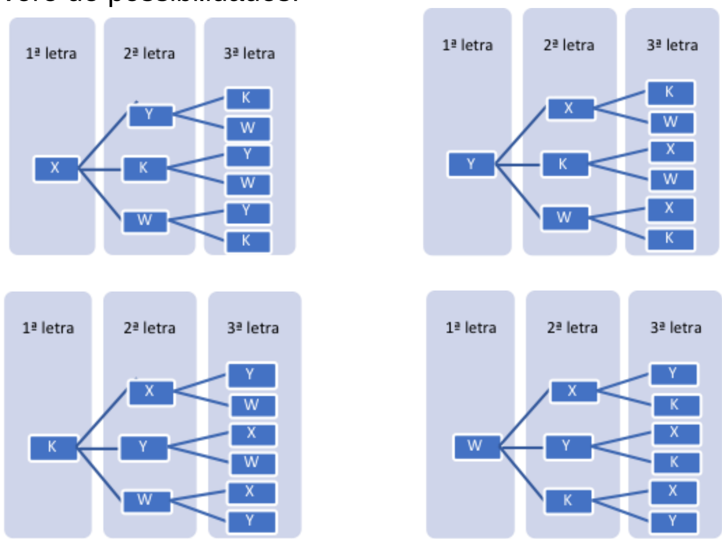
Na representação em *listagem sistemática* observa-se que são enumeradas todas as possibilidades, de forma que se inicia com a mesma letra, trocando apenas as outras duas letras da placa, sendo possível garantir que são listadas todas as possibilidades. Na *árvore de possibilidades* também se destaca a enumeração de todas as possibilidades, iniciando com a primeira letra no primeiro ramo da árvore, realizando, por fim, a contagem de todas as placas possíveis. Na generalização de possibilidades destaca-se a multiplicação do número de placas possíveis com uma letra na primeira posição pela quantidade de letras que podem ocupar essa primeira escolha. No PFC, destaca-se que, na escolha da primeira letra, todas as quatro letras estão disponíveis; já para a escolha da segunda letra, apenas três letras podem ser escolhidas, uma vez que uma delas já foi colocada na primeira escolha. Na terceira escolha restam duas letras disponíveis, sendo possível com isso realizar a multiplicação da quantidade de elementos possíveis para cada uma das três escolhas, uma vez que são três letras utilizadas na placa, resultando em 24 placas diferentes. No uso da fórmula, “n” caracteriza-se pelo total de elementos do conjunto dado e “p” o total de elementos que serão escolhidos para a formação dos agrupamentos solicitados.

Quadro 2: Resolução de situação combinatória de *arranjo*, de escolha de sequências de três dentre quatro letras, por diferentes registros de representação semiótica.

Listagem:

XYK	YXK	KXY	WXY
XYW	YXW	KXW	WXK
XKY	YKX	KYX	WYX
XKW	YKW	KYW	WYK
XWY	YWX	KWX	WKX
XWK	YWK	KWY	WKY

Árvore de possibilidades:



Expressão numérica - Generalização de possibilidades:
4 x 6 = 24

Expressão numérica - PFC:
4x3x2=24

Fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{1!} = n! \qquad A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4x3x2}{1} = 24$$

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Como exemplo de um problema de *permutação*, tem-se:

De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

Nesse problema, de um conjunto único serão utilizados todos os elementos, de forma que a ordem é importante na organização dos elementos. Assim, pelo exemplo dado, três pessoas estão na fila do banco e todas elas serão organizadas em relação à ordem, de modo que a fila ‘Maria, Luíz e Carlos’ é diferente da fila ‘Maria, Carlos e Luiz’.

Assim como nos problemas de *produto cartesiano* e *arranjo*, também são possíveis diferentes registros de representação (menos ou mais formais), como se pode observar no Quadro 3. Na representação em *listagem sistemática*, são organizadas todas as possibilidades de filas diferentes com as três pessoas elencadas no conjunto dado no enunciado. Em *árvore de possibilidades* também são explicitadas todas as situações, em uma organização na qual os ramos da árvore destacam os três elementos dados no problema. Na generalização de possibilidades é realizada a multiplicação do número de elementos pela quantidade de filas com cada um em primeiro lugar. Realiza-se, assim, a multiplicação dos três elementos pelas duas possibilidades de filas de cada um. No PFC a multiplicação é realizada de forma que, para o primeiro lugar, qualquer uma das três pessoas pode ser escolhida; restando duas pessoas para o segundo lugar, e apenas uma pessoa para o terceiro lugar, resultando em um total de seis possibilidades.

Quadro 3: Resolução de situação combinatória de *permutação* de três pessoas, por diferentes registros de representação semiótica.

Listagem:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Árvore de possibilidades:

Expressão numérica - Generalização de possibilidades:
3 x 2 = 6

Expressão numérica - PFC:
3x2x1= 6

Fórmula:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \qquad P_3 = A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na representação em *fórmula* é possível destacar que, matematicamente, as *permutações* também podem ser consideradas como casos particulares de *arranjos*

(*arranjos* de n elementos, n a n). Apesar disso, segundo Azevedo e Borba (2013) embora a *permutação* seja, do ponto de vista da Matemática, um caso particular de *arranjo*, cognitivamente são problemas distintos, ou seja, o estudante deve perceber que nos dois problemas a ordem dos elementos é essencial, mas necessita compreender que nas *permutações* todos os elementos formam as possibilidades, enquanto nos *arranjos* apenas alguns dos elementos do conjunto dado compõem as distintas possibilidades. Dessa forma, em termos de *ordem*, a relação presente nos dois tipos de problema é a mesma, mas são relações distintas, no que se refere ao invariante da *escolha*.

Para os problemas de *combinação*, temos como exemplo:

Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Para este problema, de um conjunto dado serão escolhidos agrupamentos em que a ordem dos elementos não é importante para sua composição. Nos problemas de *combinação*, assim como nos problemas de *arranjo* têm-se um conjunto dado, em que serão selecionados alguns de seus elementos para a formação das possibilidades. A diferença entre eles está no fato de que em *combinações*, a *ordem* dos elementos escolhidos não indica uma nova possibilidade. Desse modo, no exemplo dado, uma salada de frutas composta pelas frutas ‘mamão, abacaxi e laranja’ é a mesma salada de frutas que ‘mamão, laranja e abacaxi’, pois a ordem em que as frutas são escolhidas não altera a composição da salada. Assim como nos problemas de *produto cartesiano, arranjo* e *permutação*, também são possíveis diferentes registros de representação (menos ou mais formais), como se pode observar no Quadro 4.

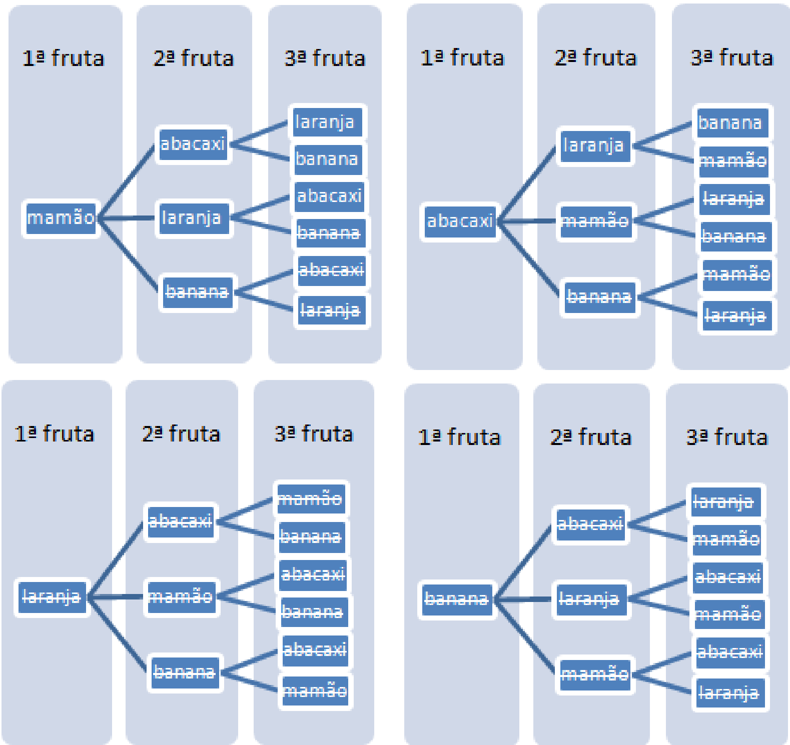
Na representação em listagem sistemática de possibilidades de *combinação*, são enumerados todos os casos, em que, no exemplo do Quadro 4, já são excluídos os casos repetidos. Isso também acontece na representação em árvore de possibilidades, de modo que, ao final da organização do diagrama, é possível estabelecer uma contagem dos casos válidos.

Quadro 4: Resolução de situação combinatória de *combinação*, de escolha de três dentre quatro frutas, por diferentes registros de representação semiótica.

Listagem:

Mamão, abacaxi e laranja Mamão, abacaxi e banana Mamão, laranja e banana ~~Mamão, banana e abacaxi~~ ~~Mamão, banana e laranja~~ ~~Mamão, laranja e abacaxi~~	Abacaxi, laranja e banana ~~Abacaxi, banana e laranja~~ ~~Abacaxi, mamão e laranja~~ ~~Abacaxi, laranja e mamão~~ ~~Abacaxi, banana e mamão~~ ~~Abacaxi, mamão e banana~~
~~Laranja, mamão e abacaxi~~ ~~Laranja, abacaxi e mamão~~ ~~Laranja, mamão e banana~~ ~~Laranja, banana e mamão~~ ~~Laranja, abacaxi e banana~~ ~~Laranja, banana e abacaxi~~	~~Banana, mamão e abacaxi~~ ~~Banana, abacaxi e mamão~~ ~~Banana, mamão e laranja~~ ~~Banana, laranja e mamão~~ ~~Banana, abacaxi e laranja~~ ~~Banana, laranja e abacaxi~~

Árvore de possibilidades:



Expressão numérica - Generalização de possibilidades:

6 x 4 = 24   24 ÷ 6 = 4

Expressão numérica - PFC:

$$\frac{4x3x2x1}{3x2x1} = \frac{24}{6} = 4$$

Fórmula: $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$. $C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4x3x2x1}{3x2\ x1} = \frac{24}{6} = 4$

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na generalização é necessário identificar que, caso a ordem gerasse novas possibilidades, haveria seis casos para cada uma das quatro frutas fixas na primeira escolha, que resultaria em 24 possibilidades, mas, como a ordem não gera novas possibilidades, é necessário dividir pelo número de casos repetidos (sendo as possibilidades iguais seis a seis, o que implica na divisão de 24 por seis). No PFC se faz necessário entender que além de multiplicar as possibilidades para cada escolha, também é preciso dividir o resultado pelo número de repetições da mesma possibilidade. Assim, na escolha da primeira fruta, qualquer uma das quatro frutas pode ser selecionada. Na segunda escolha, restam três frutas, e na terceira escolha só podem ser selecionadas duas frutas, pois as outras duas já forma escolhidas. Esse resultado precisa ser dividido por seis, pois esse é o número de repetições para a mesma possibilidade, uma vez que as três frutas em ordens diferentes se configura numa permutação de três elementos (1. mamão, abacaxi e laranja; 2. mamão, laranja e abacaxi; 3. laranja, abacaxi e mamão; 4. laranja, mamão e abacaxi; 5. abacaxi, laranja e mamão; 6. abacaxi, mamão e laranja).

Na fórmula, o cálculo é realizado pelo arranjo de quatro elementos organizados em grupos de três ($A_{4,3}$) dividido pela permutação de três (P_3), uma vez que o mesmo grupo de três elementos escolhidos se repete seis vezes.

Diversos autores têm pesquisado, em diferentes níveis de ensino e com distintos focos, a compreensão dos problemas combinatórios discutidos acima. Foram realizados estudos de sondagem, de intervenção e de análise de recursos didáticos, dentre outros. A seguir, serão relatados alguns desses estudos.

2.3 ESTUDOS ANTERIORES EM COMBINATÓRIA

O ensino e a aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais de escolarização, incluída na proposta curricular brasileira com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, PCN, (BRASIL, 1997), têm sido amplamente estudados nos últimos anos por diversos autores. A partir dos PCN, conteúdos tais como Combinatória, Estatística e Probabilidade passaram a ser foco de ensino nos primeiros anos do Ensino Fundamental e também nos anos finais desse segmento. Um dos motivos para essa inclusão se deve à presença de conceitos combinatórios, estatísticos e probabilísticos no cotidiano moderno. Em consequência disso, a Combinatória passou a ser de grande interesse por parte de educadores matemáticos, em particular dos que investigam o ensino e a aprendizagem da Matemática no começo da escolaridade.

Segue-se a apresentação de estudos considerando as temáticas: sondagem de conhecimentos de crianças e adolescentes; análise de livros didáticos; processos de intervenção (ensino); e formação de professores.

Inhelder e Piaget (1976), muito tempo antes, realizaram pesquisa em que crianças em diferentes estágios precisavam combinar corpos químicos líquidos, de modo que as combinações resultassem em diferentes cores. Os autores destacam que os resultados dessa experiência indicam que "combinatória sistemática só aparece no nível IIIA" (p.83), ou seja, com cerca de 11-12 a 14-15 anos. O nível IIIB (a partir de 14-15 anos) se caracteriza por uma equilibração do sistema, pois, segundo os autores "[...] as únicas novidades do subestádio IIIB são as combinações e, principalmente, as provas que se apresentam de maneira mais sistemática, isto é, este nível aparece como uma etapa de equilíbrio com relação ao precedente (IIIA), que é uma fase de organização." (p.90). Mesmo no nível IIIB, em que as operações são adquiridas de maneira mais sistemática, os autores explicitam que isso ocorre "[...] sem formulação explícita de sua expressão matemática, mas com uma execução através de método exaustivo" (p.232). Assim, as crianças se utilizam de representações que enumeram quais são as possibilidades, mas ainda não conseguem, de forma espontânea, explicitar uma expressão matemática que indique quantas são as possibilidades. As representações que indicam explicitamente todas as possibilidades são boas estratégias para responder problemas que resultam um número baixo de possibilidades. Entretanto, nas situações em que a resposta indica um grande número de possibilidades, é necessária a aplicação de uma expressão matemática.

Moro e Soares (2006) investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório de 50 crianças de 3ª e 4ª séries (4º e 5º anos) do Ensino Fundamental, especificamente com questões de *produto cartesiano.* Os resultados indicaram diferentes níveis de raciocínio combinatório, desde o primeiro nível, que se configura quanto à ausência de solução combinatória; o segundo nível, referente aos primeiros indícios de soluções combinatórias; o terceiro nível, relacionado com uma aproximação de uma solução combinatória totalmente correta; e o quarto nível, quando há uma solução combinatória totalmente correta, seja por meio do uso de tabelas e diagramas, ou o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica. Também se destaca a relação desses níveis com a escolaridade, revelando que a instrução escolar tem influência direta sobre o raciocínio combinatório dos alunos. Com isso, percebe-se a importância de investigar como acontece o desenvolvimento do pensamento combinatório nas diversas etapas do Ensino Fundamental.

Pessoa e Borba (2009) realizaram pesquisa cujo objetivo era analisar a compreensão de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio sobre situações que envolvem o raciocínio combinatório. As autoras tomaram por base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1991) na qual se considera que os conceitos são desenvolvidos em campos conceituais e são constituídos por três dimensões: as *situações* que dão significado ao conceito, seus *invariantes* operatórios – prescritos e em ação – e as *representações simbólicas* (ver detalhes no Capítulo 2). Neste estudo, participaram 412 alunos de escolas públicas e particulares, distribuídos nos 11 anos de escolaridade pesquisados. Todos os alunos responderam um teste com oito situações combinatórias sendo duas de cada tipo de problema (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). As autoras destacam que:

> [...] alunos dos anos iniciais aos dos anos finais do Ensino Básico são capazes de compreender problemas de raciocínio combinatório e que seus desempenhos são influenciados pelo tipo de escola que frequentam, pelo período de escolarização, pelo tipo de problema combinatório que estão resolvendo (e implicitamente pelas propriedades e relações envolvidas em cada tipo de problema), pela forma de representação simbólica utilizada para a resolução das situações, bem como pela ordem de grandeza dos números envolvidos. (p.11).

Dessa forma, Pessoa e Borba (2009) observaram que o tipo de situação combinatória é relevante, de forma que alguns tipos podem influenciar em um melhor ou mais fraco desempenho, sendo os problemas de *produto cartesiano* os mais fáceis para os alunos de todos os anos de escolarização pesquisados. Já os problemas de *combinação* se apresentaram como o tipo mais difícil de resolução, mesmo quando o número de possibilidades era baixo. As autoras enfatizam que esse nível de desempenho pode estar relacionado com o trabalho explícito envolvendo problemas de *produto cartesiano* desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

As autoras observaram ainda que outro fator que pode influenciar a resolução de problemas combinatórios são as representações simbólicas utilizadas. Verificou-se que muitos estudantes – mesmo os do Ensino Médio que já haviam sido instruídos formalmente em Análise Combinatória – preferiam representar as situações por meio de sistemas de registros mais *transparentes*, tais como listagens, nos quais as diferentes possibilidades ficavam visíveis, ao invés do uso de procedimentos nos quais os casos identificados, não estavam claramente à mostra. Há *transparência*[9] menor quando se faz uso do Princípio Fundamental da Contagem ou de fórmulas nos quais o produto indica o número de elementos de cada etapa de escolha, mas não indica explicitamente cada uma das possibilidades da situação combinatória posta.

Em estudo longitudinal, Maher e Yankelewitz (2010) acompanharam um mesmo grupo de alunos durante toda a escolarização básica. Na parte inicial desse estudo, as autoras investigaram a compreensão dos alunos de 2ª série (3º ano), e, posteriormente, dessas mesmas crianças durante a 3ª série (4º ano) em um problema de *produto cartesiano.* As autoras afirmam que, na 2ª série (3º ano) os alunos não conseguiam enumerar o total de possibilidades do problema de produto cartesiano, e as tentativas ocorriam com o uso do desenho. Já na 3ª série (4º ano) esses mesmos alunos que no ano anterior não obtiveram sucesso na resposta completa do problema, conseguiram finalizar a análise de possibilidades. Desta vez, o uso do desenho foi utilizado com menos frequência, dando lugar a resoluções por listagens e diagramas de árvore. Assim, essas representações podem ser auxiliares na sistematização de resoluções e, com isso, favorecer o esgotamento das possibilidades em problemas combinatórios.

Vega (2014) realizou um estudo de sondagem com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de analisar a influência do número de etapas de escolha na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios. Segundo a autora, *etapas de escolha* correspondem

---

[9] O que as autoras indicam como transparência pode estar relacionado com o que Duval (2011) denomina de congruência entre as representações.

> [...] ao número de escolhas que devem ser efetuadas em problemas combinatórios. Em produtos cartesianos pode-se, por exemplo, escolher um dentre quatro tipos de suco e um dentre cinco tipos de sanduíche e as etapas de escolha são duas: o tipo de suco e o tipo de sanduíche. [...] Já em uma permutação que, por exemplo, se deseja permutar três alunos numa fila, as etapas de escolha são três: o primeiro aluno da fila, o segundo e o terceiro. (p.18)

No estudo foram elaborados e aplicados com os alunos seis tipos de testes que realizavam comparações entre as diferentes situações combinatórias, em que eram controladas as etapas de escolhas das situações. Diante dos resultados, a autora conclui que o número de etapas de escolha influencia no desempenho dos alunos, pois, quando se comparou os mesmos problemas com diferentes números de etapas de escolha, o desempenho foi diferenciado.

Melo, Silva e Spinillo (2016) investigaram o efeito da explicitação de invariantes em problemas de *produto cartesiano* e *combinação* com crianças do 3º ano do Ensino Fundamental. A explicitação dos invariantes indicada pelas autoras se caracteriza pela exemplificação, no enunciado do problema, de escolhas possíveis de serem realizadas, informando ao menos duas possibilidades de respostas[10]. As autoras aplicaram testes de produto cartesiano e combinação em que havia problemas sem e com explicitação dos princípios invariantes da situação. Os resultados apontam que para os problemas de *produto cartesiano* a explicitação dos princípios invariantes exerce influência positiva na sua resolução. Em contrapartida, essa explicitação não produziu efeito positivo na resolução de problemas de *combinação*. Assim, é possível destacar a natureza complexa das situações de *combinação*, bem como ressaltar que as situações combinatórias não são igualmente compreendidas, sendo necessário analisar como se desenvolve a compreensão de cada uma das diferentes situações.

---

[10] Problema de combinação sem explicitação dos invariantes: Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?
Problema de combinação com explicitação dos invariantes: A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque têm seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes. Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio. Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio? (MELO; SILVA; SPINILLO, 2016)

Barreto e Borba (2010) pesquisaram como o raciocínio combinatório tem sido apresentado nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para isso foram analisadas à luz da TCC (VERGNAUD, 1983) cinco coleções de 1ª a 4ª série (2º ao 5º ano) do Ensino Fundamental. As autoras evidenciaram que os problemas mais frequentes nas cinco coleções analisadas são de *produto cartesiano* e *combinação*. Desse modo, destaca-se que é preciso que o livro didático proponha discussões sobre a variedade de situações combinatórias, pois trabalhar apenas algum ou alguns tipos pode levar os alunos a não reconhecerem as distintas relações presentes nos diferentes tipos de problemas da Combinatória. Enfatizaram também que os problemas são apresentados com uma boa variedade de representações simbólicas, entretanto, os manuais do professor não indicam para o professor as especificidades dos variados tipos de problemas, assim como não distinguem as diferentes relações envolvidas neles. As autoras chamaram a atenção para a necessidade de o manual do professor dar ênfase nesse tipo de raciocínio para um melhor ensino e, consequentemente, melhor aprendizagem de situações combinatórias.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970) observaram o efeito de instruções específicas sobre a capacidade de lidar com permutações e arranjos por meio do diagrama de árvore de possibilidades com alunos de 10, 12 e 14 anos. Os autores destacaram que "até mesmo os alunos de 10 anos aprenderam o uso do diagrama de árvore e os procedimentos adequados para permutações e arranjos" (p.261). Assim, Fischbein (1975) argumenta que apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não é suficiente para a resolução de problemas combinatórios, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, por exemplo, com o uso de árvore de possibilidades, de modo que os estudantes consigam organizar e sistematizar as informações e generalizar as possibilidades.

Barreto e Borba (2012) investigaram o efeito de intervenções específicas em Combinatória por meio de um estudo com estudantes dos anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos. Foi analisado o uso de listagens e/ou árvores de possibilidades para o ensino e aprendizagem em situações combinatórias. As autoras destacaram que houve avanço significativo dos participantes na comparação entre pré-teste e pós-teste, tanto no grupo que trabalhou só com árvores, quanto no grupo que trabalhou somente com listagens. Isso também aconteceu no grupo que utilizou ambas as representações no processo de intervenção. Assim, destaca-se que o uso de representações simbólicas mais transparentes e sistematizadas pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Ainda sobre a importância de intervenções específicas sobre a Combinatória, destaca-se o estudo de Azevedo (2013). A autora analisou a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um software educativo, na aprendizagem da Combinatória por parte de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Para isso, 40 estudantes responderam um pré-teste com 8 situações combinatórias, sendo duas para cada tipo de problema. Em seguida, os estudantes foram separados em quatro grupos, sendo dois grupos experimentais e dois grupos controle. No primeiro grupo experimental as crianças participaram de um processo de intervenção por meio da resolução de problemas combinatórios com o uso do software educativo *Diagramas de Árbol*[11]. O segundo grupo experimental participou de um processo de intervenção por meio da resolução de problemas com o uso do lápis e papel na construção de árvores de possibilidades. O primeiro grupo controle participou de intervenção por meio da resolução em desenhos de problemas não combinatórios e o segundo grupo controle não participou de processo de intervenção. A autora destacou que ambos os grupos experimentais desenvolveram significativamente seus raciocínios combinatórios após a intervenção, isso porque, por meio de um pós-teste imediato, aplicado logo após os processos de intervenção, foi possível perceber que os alunos melhoraram seus desempenhos na resolução de problemas combinatórios. Também foi possível analisar por meio de um pós-teste, aplicado nove semanas após o pós-teste imediato, que os alunos dos grupos experimentais permaneceram em desenvolvimento, uma vez que seus desempenhos foram ainda melhores no pós-teste posterior. Já os grupos controle não avançaram em seus raciocínios combinatórios.

---

[11] O software Diagramas de Árbol (AGUIRRE, 2005), através do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todas as possibilidades para a resolução de um problema combinatório, sejam elas válidas ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*), sem objetivar o uso precoce de fórmulas. Desse modo, os alunos devem analisar as possibilidades conforme os invariantes de cada situação e indicar quais são os casos válidos.

A autora afirma que, apesar de ambos os grupos experimentais terem apresentado bons resultados, o Grupo 2 (lápis e papel) apresentou resultados um pouco melhores do que o Grupo 1 (software Árbol). Ela indica que esse maior avanço do Grupo 2 em relação ao Grupo 1 pode ter sido porque:

> [...] os alunos deste segundo grupo, durante a intervenção, resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita com lápis e papel) adotada no pré-teste e no pós-teste imediato, enquanto os alunos do Grupo 1, durante a intervenção, resolveram as situações por meio de um *software* (representação virtual) e no pós-teste imediato tiveram que utilizar outra forma de representação: escrita com lápis e papel.[...] Além disso, outra explicação pode estar relacionada ao fato de que o G2, que construiu árvores de possibilidades com lápis e papel, envolvia-se mais ativamente na construção das árvores, tendo que pensar nos invariantes das situações concomitantemente à sua construção. Já o G1, que trabalhou com o *software Árbol*, tinha que selecionar os casos válidos – o que requeria também reconhecimento dos invariantes das situações – mas não tinha que, de início, refletir sobre todas as relações envolvidas. (AZEVEDO, 2013, p.87-88)

A autora indica que representar a árvore de possibilidades em diferentes meios de representação, virtual e escrito, pode ser um aspecto positivo para o aprendizado da Combinatória. A autora também enfatiza que o papel do professor é imprescindível para que o uso dessa representação se mostre um bom caminho para a aprendizagem, pois este deve ressaltar os invariantes de cada situação, no momento da construção da árvore de possibilidades, seja no papel ou no computador. Assim, acredita-se que o trabalho com árvores de possibilidades pode ser uma ótima estratégia para representar as situações combinatórias, pois esta representação parece revelar maior transparência na indicação de possibilidades para os quatro tipos básicos de problemas combinatórios.

Sobre a formação do professor que ensina Combinatória, Rocha (2012) investigou o conhecimento de quatro professores do Ensino Fundamental, sendo dois dos anos iniciais e dois dos anos finais, sobre Combinatória e seu ensino. Para isso foram realizadas entrevistas semi-estruturadas. Sobre os anos iniciais, a autora destaca que, os professores deste nível de ensino classificam os problemas a partir do enunciado, elegem os problemas de *produto cartesiano* como os mais difíceis e destacam a necessidade de um trabalho com material concreto para o ensino deste tipo de situação. A autora ressalta que os professores dos anos iniciais estão corretos ao afirmarem que o *produto cartesiano* é um problema multiplicativo complexo, mas, a partir dos resultados de estudos já mencionados nesta pesquisa, este não é o mais complexo dentre os problemas combinatórios. Já os professores de anos finais classificam os problemas combinatórios e relacionam sua dificuldade a partir da sua estrutura das situações. As autoras enfatizam que os professores destacam que é necessário um trabalho que auxilie na compreensão do que é possibilidade. Os professores entrevistados alertam, também, para a necessidade de mais formação inicial e continuada envolvendo este pensamento, de forma que sejam diferenciadas as relações e propriedades de cada situação combinatória, além de indicar possíveis estratégias eficientes de intervenção. Assim, destaca-se o papel que os professores podem exercer no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, mas, para isso, é preciso que os mesmos tenham amplo conhecimento das situações, dos invariantes e das representações simbólicas que caracterizam/solucionam problemas combinatórios.

Assis (2014) analisou o efeito de um processo de formação continuada sobre Combinatória, baseado na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986). O processo foi realizado com um grupo de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, entretanto, a análise foi realizada com foco nas atividades de apenas uma das professoras do grupo. Foram realizadas entrevistas antes e após o processo de intervenção composto por seis encontros, nos quais se incluem duas observações de aula ministradas pela professora em sua turma. Os resultados apontam para uma dificuldade no reconhecimento e trabalho da Combinatória, na entrevista inicial. No entanto, durante e após as intervenções, a professora reconheceu, mais detalhadamente, as diferentes *situações* e seus *invariantes*. Sendo assim, a autora enfatizou que a docente participante elaborou sentidos sobre a Combinatória que antes ainda eram confusos – especificamente, sobre o conhecimento relacionado com as situações, os invariantes e as representações simbólicas.

Os estudos discutidos nessa seção apontam para a necessidade do aprofundamento das discussões sobre a relação entre as distintas *situações* combinatórias, seus *invariantes* e as *representações simbólicas* que podem ser trabalhadas para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, nesta pesquisa, há o intuito de verificar e corroborar com o trabalho envolvendo diferentes tipos de representação, uma vez que se constitui uma importante estratégia para o ensino da Combinatória, de forma que sejam trabalhados à luz da discussão dos *invariantes* envolvidos nas diferentes *situações combinatórias*. As *representações* apontadas como relevantes no ensino de aprendizagem deste conceito, nos estudos aqui relatados, destacam a maior transparência de listagens e árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios, quando comparadas com o uso de uma expressão numérica. Desse modo, a presente pesquisa objetiva analisar o uso dessas três representações, à luz da TCC apresentada por Vergnaud (1983), bem como da TRRS proposta por Duval (2003) que são discutidas no próximo capítulo.

3 O USO DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA

A Combinatória, como um ramo da Matemática, consiste no estudo da contagem de elementos de um conjunto, em que podem ser utilizados diferentes tipos de representações simbólicas, desde as mais intuitivas, como listagens e desenhos, passando por tabelas, quadros, árvores de possibilidades, até chegar nas representações formais da Matemática – como o Princípio Fundamental da Contagem e fórmulas, como destacado anteriormente.

Sobre as representações simbólicas, Vergnaud (1986) ressalta que esta é uma das três dimensões fundamentais para a conceitualização. Para este autor, os conceitos são desenvolvidos em campos conceituais e, estes são constituídos por um tripé: *situações* que dão significado a um conceito; *invariantes* prescritos e operatórios que caracterizam este conceito e diversas *representações simbólicas* utilizadas para representar o conceito. Na próxima seção serão discutidas as ideias de Vergnaud relacionadas com as situações, invariantes e representações.

Colombo, Flores e Moretti (2007) destacam que a ideia de aquisição conceitual de Vergnaud (1986) assume que “um conceito só pode ser definido ao se considerarem mutuamente três conjuntos que formariam um tripé: situações, invariantes e representações” (p.183). Desse modo, Vergnaud defende que, para a formação de conceitos se faz necessário considerar as três dimensões simultaneamente, de modo que sejam consideradas as situações que dão significado ao conceito, seus invariantes prescritos e em ação que suscitam o uso de diferentes representações simbólicas.

Duval afirma que a apreensão conceitual acontece quando o sujeito mobiliza os diferentes registros de um mesmo objeto matemático, de maneira que possa diferenciar o representante e o representado (COLOMBO, FLORES E MORETTI, 2007). Dessa forma, Duval (2011) destaca que os *signos* e as *representações* possuem um papel central no desenvolvimento de um conceito, entretanto, enfatiza que *signo* e *representação* possuem uma diferença que os separa, em função da natureza de sua relação com os objetos (matemáticos). Adiante, neste capítulo serão discutidos os conceitos de *signo* e *representação* na visão de diferentes teóricos.

A presente pesquisa ressalta as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais, chamando atenção sobre as três dimensões necessárias para a formação de um conceito, bem como da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, referente ao papel fundamental das representações na conceitualização.

3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E A FORMAÇÃO DE CONCEITOS

Em sua Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1986) afirma que os conceitos estão inseridos em campos conceituais. Para Vergnaud (1986, p.84), “Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”.

Vergnaud (1996) reconhece que existem diferentes campos conceituais em todas as áreas do conhecimento humano, porém concentra seus estudos, com maior profundidade na Matemática, e discute detalhadamente os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Este autor define o *campo conceitual* das estruturas aditivas como o conjunto das situações resolvidas por meio de uma adição, uma subtração ou de ambas, assim como, o *campo conceitual* das estruturas multiplicativas é definido por Vergnaud como o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou a combinação de ambas.

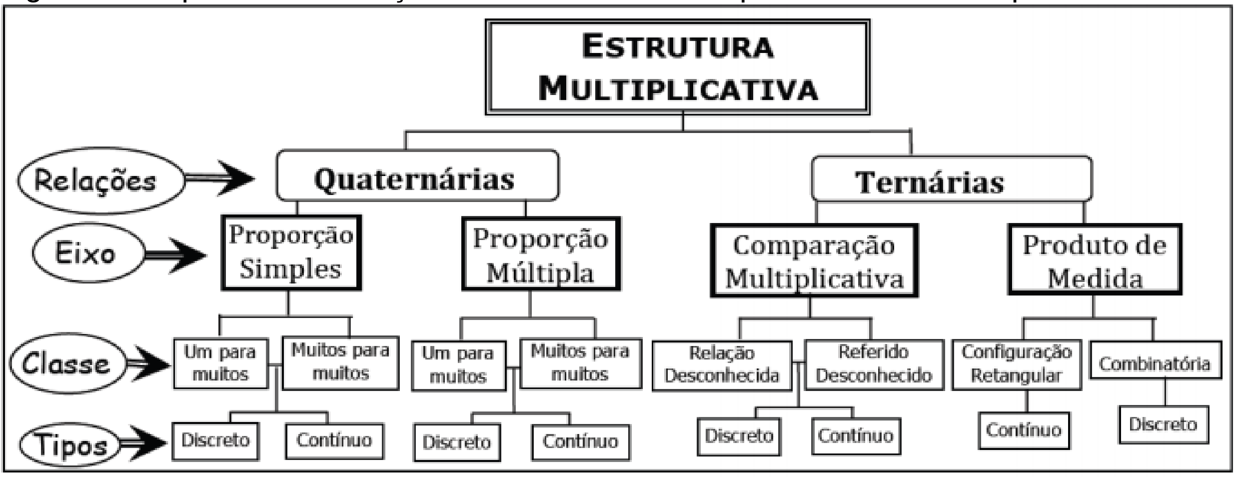
Para Vergnaud, em todo campo conceitual, há diversos conceitos que se articulam e, cada um desses conceitos mobiliza *situações*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Assim sendo, para a formação de um conceito, inserido em um *campo conceitual*, Vergnaud (1986) destaca que são necessários um conjunto de *situações*, que lhe dão *significado* psicológico; um conjunto de *invariantes*, que são propriedades *lógico-operatórias*; e um conjunto de *símbolos* utilizados na *representação* do conceito. Esses aspectos de cada conceito formam o tripé *significados, invariantes e representações*. Sobre isso, Vergnaud (1996, p. 166), enfatiza que “[...] para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo”, ou seja, articulados entre si.

No campo conceitual das estruturas multiplicativas, por exemplo, Vergnaud (1991) destaca diferentes situações, tais como: o *Isomorfismo de Medidas* e o

Produto de Medidas. Para essas diferentes situações têm-se diferentes invariantes e representações simbólicas. As situações que envolvem *Isomorfismo de Medidas* se diferem das situações de *Produto de Medidas*, pois, segundo Vergnaud, as primeiras possuem uma relação quaternária, enquanto nas outras, há uma relação ternária de medidas.

Nas relações quaternárias – *isomorfismo de medidas*, as situações podem ser de *proporção simples* ou de *proporção múltipla* e podem envolver multiplicação ou divisão. Nas relações ternárias temos as situações de *comparação multiplicativa* e de *produto de medidas*. Nestas também há situações que envolvem a multiplicação e a divisão. A seguir, tem-se a Figura 1, em que é possível visualizar as relações presentes na estrutura multiplicativa.

Figura 1: Esquema das relações envolvidas no Campo Conceitual Multiplicativo.



Fonte: Magina, Santos e Merlini (2014)

No Quadro 5, a seguir é possível observar exemplos de cada situação proposta por Vergnaud. Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014, p.10) destacam que os invariantes são “objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidos pelo sujeito para analisar e dominar as situações” e as representações simbólicas são aquelas que podem ser usadas para representar os invariantes e as situações. As autoras enfatizam que a relação entre os invariantes e as representações simbólicas não é simples, pois nem sempre se consegue representar aquilo que se está entendendo ou pensando.

Quadro 5: Diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud.

		Multiplicação	Divisão
Isomorfismo de medidas (Quaternárias)	Proporção simples	Um para muitos: A receita de brigadeiro de Maria leva 1 lata de leite condensado para 5 colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate ela usará? Muitos para muitos (quarta proporcional): Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos?	Partição: O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia? Quotição: Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias esse tratamento durou?
	Proporção Múltipla	A receita da massa de pastel do “seu” Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha vai precisar?	
Produto de medidas (Ternárias)	Comparação multiplicativa	Referido desconhecido: Uma loja do shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto custa a mesma sandália na loja do shopping?	Referente desconhecido: A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho? Relação desconhecida: Mário ganhou 18 bolas e Rosa ganhou 6 bolas. A quantidade de bolas que Rosa ganhou é quantas vezes menor que a de Mário? Relação desconhecida: Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?
	Combinatória	Produto cartesiano: Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinho ou copinho. Tem 4 sabores diferentes (menta, baunilha, chocolate, morango). Maria quer um sorvete de uma bola. Quantas maneiras diferentes ela tem para escolher? Área: A sala de aula da Escola Divertida tem formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula?	Produto cartesiano inverso: Uma loja vende bola de cores diferentes e em 2 tamanhos (pequeno e grande). Para cada cor tem bolsas dos dois tamanhos. No total são 12 bolas diferentes. Quantas cores diferentes poder ser as bolas?

Fonte: Situações-problema extraídas de Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014)

Sobre a relação entre significado e significante, Vergnaud (1996) destaca que:

> São as situações que dão *sentido* aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. Também não está nas palavras nem nos símbolos matemáticos. [...] O *sentido* é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente são os esquemas evocados no sujeito individual, por uma situação ou um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo. (p.179, *grifo nosso*)

Desse modo, Vergnaud (1996, p. 161) considera que o conceito de *esquema* – desenvolvido por Piaget – é peça-chave para o desenvolvimento da aprendizagem matemática, e, desse modo, esse conceito, é fundamental para a sua Teoria dos Campos Conceituais, uma vez que, para ele, "[...] o reconhecimento de *invariantes* é, pois, a chave da generalização do esquema". Por essa visão, é importante investigar os *esquemas* mobilizados – a partir do reconhecimento de relações e propriedades que se mantêm constantes, *invariantes* – quando alunos estão desenvolvendo seus conhecimentos de conceitos matemáticos.

Dentre as situações combinatórias, Vergnaud (1983) destaca a situação de *produto de medidas*, que envolve uma relação ternária, ou seja, entre três variáveis, das quais uma quantidade é o produto das outras duas. Nessa situação, Vergnaud aponta um tipo de situação combinatória denominada pelos PCN (BRASIL, 1997) como *combinatória*; e por Nunes e Bryant (1997) como *produto cartesiano*.

Pessoa e Borba (2009) apontam que outras situações, além desta, dão significado ao conceito de Combinatória e organizam essas situações em: *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações* – como anteriormente discutido. Os invariantes (relações constituintes das situações) estão relacionados à escolha e ordenação dos elementos, ou seja, quais escolhas devem ser realizadas na formação e contagem dos casos válidos e se nessas escolhas a ordem gera novas possibilidades. Os invariantes também se relacionam aos conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos indivíduos para resolução destas situações. Além disso, as situações podem ter diferentes representações, tais como: listagens, quadros, diagramas, árvores de possibilidades, Princípio Fundamental da Contagem, fórmulas, dentre outros.

No presente estudo serão usadas as ideias sobre a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986) e das autoras supracitadas para discutir as diferentes situações, invariantes e representações simbólicas que mobilizam a formação de conceitos combinatórios e, para aprofundar o estudo sobre representações, será utilizada a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2003) foco de atenção da próxima seção.

3.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O PAPEL DOS SIGNOS PARA A FORMAÇÃO DE CONCEITOS

Flores (2006) destaca que antes do século XVII, Foucault designava que os signos faziam parte de um “jogo de semelhanças” uma vez que não havia nada de oculto no signo, havendo neste uma relação analógica com a coisa que ele representa. Entretanto, após o século XVII, os signos deixam de se moverem apenas no sentido da semelhança e passam a ser analisados como representação. A autora destaca que “[...] a colocação em ordem das coisas se dá, agora, por meio dos signos, quer dizer, não mais pelo que é semelhante, mas por intermédio da identidade e da diferença”. O signo assumiu, portanto, um papel diferente daquele que ele tinha nas épocas anteriores.

Vigotski (1978), em sua teoria sócio-histórica da aprendizagem, destaca o papel dos signos e da mediação simbólica como importantes para a formação de conceitos. Este autor indica que, pelo uso de símbolos, a criança descobre, de forma espontânea, a relação entre os signos e seus significados. Assim, Vigotski revela que “O uso de signos leva os seres humanos a uma estrutura especifica de comportamento que rompe com a forma de desenvolvimento biológico e cria novas formas de um processo psicológico culturalmente baseado” (p. 40).

É nesse sentido que Oliveira (1997, p.24) afirma que “O homem transforma-se de biológico em sócio-histórico, num processo em que a cultura é parte essencial da constituição da natureza humana.”, sendo que “A relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas uma relação mediada [...]” por signos que podem ser organizados em sistemas simbólicos.

Dessa forma, Vigotski destaca que os signos podem estar relacionados com algum instrumento externo que atue como elo entre o sujeito e o objeto. Entretanto, os signos podem estar relacionados também com um processo interno de mediação, que se configuram representações mentais. Estas últimas são internalizações, tão importantes quantos os sistemas simbólicos, fundamentais para o desenvolvimento dos processos psicológicos, bem como, para a formação de conceitos. Duval (2009) destaca sobre isso que "[...] as representações semióticas não realizam apenas as mesmas funções que as representações mentais, mas outras que escapam a essas últimas." (p. 21).

Duval (2009, p.46-47) ressalta ainda que "[...] o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e à interiorização de sistemas de representações semióticas [...]" em que, entendem-se as representações semióticas como "[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento." (DUVAL, 2012, p.269). Assim, é importante destacar que Duval (2011) diferencia as representações mentais e as representações semióticas, pois, a primeira não é uma correspondência da segunda, e sim, interiorizações, uma vez que "as representações semióticas permitem ter uma variedade de representações para um mesmo objeto" (p. 47), enquanto as representações mentais "limitam-se a uma só visão do que é representado" (p. 46).

É sobre os registros de representação semiótica que Duval elabora sua teoria, com destaque para o pensamento matemático, pois, segundo ele, 'representação' é um termo muito importante para a aquisição de conceitos nessa área do conhecimento.

Sobre isso, Duval (2011, p.52) destaca que a característica fundamental para o pensamento matemático está na possibilidade de realizar transformações de representações semióticas em outras representações semióticas. Para o autor, esta característica é que faz distinguir a Matemática de outras ciências justamente pelo uso essencial das representações.

Assim, para Duval, não há outro modo de fazer matemática senão por meio da análise das transformações de representações semióticas, de modo que, nessa análise, sejam consideradas as diversas transformações realizadas pelo sujeito que aprende, pois, somente assim, o objeto matemático não será confundido com a sua representação.

Duval também enfatiza a importância dos signos, destacando que “A relação dos signos com as coisas que eles significam é uma relação de referência, e não uma relação de causalidade.” (DUVAL, 2011, p. 22), diferente das representações que possuem uma relação de causalidade com os objetos.

Para Duval (2011, p.37), há uma diferença muito importante entre signos, representações e objetos matemáticos. Para este autor, “o que separa radicalmente as representações e os signos é a natureza da relação com os próprios objetos”. Ele enfatiza que os signos e os objetos não possuem nenhuma interação, sendo apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado.

Assim, Duval considera que é preferível utilizar o termo ‘representações semióticas’ no lugar de ‘signos’, pois as representações têm “uma organização interna que varia de um tipo de representação para outra.” (2011, p.37-38) Signos são unidades elementares de sentido, ou caracteres, como letras e algarismos, enquanto que representações são mais abrangentes, como frases em língua natural, equações, etc. Desse modo, é por meio das representações semióticas que Duval acredita ser possível uma apreensão conceitual, pois, para ele “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação” (2009, p. 14). Nesse sentido, é importante que seja efetuado um trabalho envolvendo diversas representações para um mesmo objeto matemático, ressaltando que as representações semióticas são, portanto, “[...] necessárias para fins de comunicação [...] e igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento.” (DUVAL, 2012, p.269).

Duval (2009) denomina *nóesis* a apreensão conceitual de um objeto e *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, assim, *nóesis* está relacionada com o conceito, no caso, o objeto matemático, enquanto a *semiósis* é relativa à representação desse conceito. Com isso ele ressalta que, “não há *noésis* sem *semiósis*” (p.17), pois, é a representação do conceito que determina as condições para o exercício da *nóesis.* Ou seja, não é possível apreender o significado de um objeto matemático sem o uso de uma representação semiótica.

Assim, Duval (2009, p.29) destaca que “Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação”, diferenciando três tipos diferentes de noção de representação, são elas: representações mentais, representações computacionais e representações semióticas. As representações mentais “são todas as que permitem uma visão do objeto na ausência do todo significante perceptível.” (DUVAL, 2009, p.45). Elas são internas e conscientes e, na Matemática, são consideradas como representações semióticas internalizadas. As representações computacionais “[...] traduzem a informação externa a um sistema sob uma forma que a deixa acessível, recuperável e combinável no interior desse sistema.” (p.47). Assim como as representações mentais, são internas, porém não conscientes. As representações semióticas são “[...] representações ao mesmo tempo conscientes e externas. Com efeito, elas permitem uma ‘visão do objeto’ através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons...) [...].” (p.44).

Por serem, conscientes e externas, as representações semióticas são, para Duval (2012) essenciais para qualquer apreensão conceitual (*noésis*). Desse modo, este autor identifica um registro de representação semiótica como um sistema dotado de regras. Um sistema semiótico caracteriza um registro de representação semiótica quando satisfaz três condições: 1) *Identificação*; 2) Transformação de *Tratamento*; e 3) Transformação de *Conversão*.

1) Os símbolos presentes em um sistema de representação semiótica são *identificáveis* – quando o indivíduo é capaz de identificar o conceito representado. Segundo Duval (2009) os símbolos são um conjunto de elementos físicos ou de traços identificáveis

> [...] como sendo uma representação de qualquer coisa num sistema semiótico: seja um enunciado em alemão, seja um cálculo, seja uma fórmula de física, seja uma figura geométrica, seja uma caricatura, seja o esquema de um curto circuito... *Elas permitem então o reconhecimento das representações como representações num registro determinado.* (p.56).

2) O *tratamento* é uma transformação interna ao próprio registro. Duval (2009) destaca que um tratamento:

> [...] é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação

> a uma questão, a um problema ou a uma necessidade [...]. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escrita simbólica de algarismos e letras [...]. (p.57)

3) A *conversão* é uma transformação de um registro em outro registro.

> Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] A colocação em equação dos dados de um enunciado do problema é a conversão de diferentes expressões linguísticas de relações em outras expressões dessas relações no registro de uma escritura simbólica. (DUVAL, 2009, p.59).

Além disso, Duval (2009) ressalta que as conversões realizadas podem gerar uma diferença na compreensão do conhecimento em questão, em função do nível de congruência entre os registros. Este autor afirma que "Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso conforme o grau de não-congruência." (p.19).

Duval (2009) elenca três critérios que tornam um registro de representação congruente ou não-congruente com outro registro de representação:

> O primeiro *é a possibilidade de uma correspondência 'semântica' dos elementos significantes*: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. [...] O segundo critério é a *univocidade 'semântica' terminal*: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada. [...] O terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações. (p.68-69).

Desse modo, duas representações, sendo uma de partida e outra de chegada, são congruentes quando atendem aos três critérios de congruência estabelecidos. Quando os três critérios, ou apenas dois ou um deles, não são correspondidos entre duas representações pode haver diferença no grau de congruência, ou seja, duas representações que não atendem nenhum dos três critérios estabelecidos possuem maior grau de não-congruência quando comparado com duas representações que não atendem apenas a um dos critérios.

Duval (2011) destaca que o sentido da conversão é importante para a coordenação de diferentes registros de representação, ou seja, além de trabalhar com diferentes representações de um mesmo conceito, também é importante trabalhar a passagem de um registro para outro de maneira que o sentido contrário também seja trabalhado. Como afirma Duval (2011, p. 118), realizar uma conversão

> [...] em um sentido não implica jamais a possibilidade que ele possa fazê-lo no sentido inverso. A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha. Em outras palavras, para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um sentido único.

Nesta perspectiva Duval (2012, p. 270) destaca que “a coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos [...] é preciso que o objeto seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis”.

Damm (1992), utilizando as ideias de Duval (2009), apresentou os níveis de congruência em situações aditivas propostas por Vergnaud (1986). O primeiro nível, relacionado com o primeiro critério apontado por Duval: a operação semanticamente sugerida pelos verbos do enunciado do problema (ganhar = operação de adição/ perder = operação de subtração). O segundo, relativo à presença de verbos antônimos no enunciado do problema (perder/ganhar), pois quando os verbos do enunciado da situação são antônimos não há univocidade semântica terminal. O terceiro nível, referente à ordem de apresentação dos dados numéricos do enunciado do problema, quando, por exemplo, se inicia o enunciado pelo resultado, buscando uma das parcelas. Assim, converter o enunciado em língua natural para uma equação aritmética pode ser mais ou menos congruente, ou seja, quando há correspondência semântica, quando não há inversão, nem presença de verbos antônimos, há maior congruência entre as representações. E, no sentido oposto, quando não há correspondência semântica, quando há inversão e presença de verbos antônimos, as representações são consideradas fortemente não-congruentes. Há problemas ainda que podem situar-se entre esses dois polos, a depender dos critérios de congruência estabelecidos.

O presente estudo pretende, por meio das situações combinatórias, avaliar a congruência entre diferentes registros de representação semióticas - RRS (língua natural, listagens, árvores de possibilidades, expressões numéricas e fórmulas, dentre outros), e, com isso, analisar o papel que a identificação e as transformações de tratamento e de conversão de registros têm na ampliação do conhecimento combinatório, uma vez que, cada um desses registros possui regras internas de funcionamento que identificam tal objeto matemático e são essenciais para sua apreensão conceitual.

3.2.1 Registros de representação semiótica e a Educação Matemática: estudos anteriores

Flores (2006), em seu estudo sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), destaca que não há dúvidas sobre sua importância para a Educação Matemática. Para fundamentar essa afirmativa, a autora alega que muitas pesquisas têm sido realizadas já em âmbito nacional, em que se confirmam a relevância dos registros de representação semiótica no aprendizado matemático e enfatizam que "[...] um trabalho pedagógico realizado a partir destes registros possibilita um real funcionamento cognitivo do aluno" (p.2). Segundo a autora, Duval afirma que o funcionamento cognitivo acontece, na medida em que, na aprendizagem em matemática, é importante descrever, raciocinar e visualizar, e estas atividades "estão intrinsecamente ligadas à utilização de registros de representação semiótica" (p.2).

Como destacado por Flores (2006), diversas pesquisas fundamentaram a importância da TRRS para a Educação Matemática. Esses estudos são, principalmente, voltados para a análise dos RRS em diferentes conceitos, tais como: funções, vetores, matrizes, sistemas lineares, geometria, entre outros – nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Como o interesse do presente estudo é desde o início da escolarização, serão abordados, a seguir, estudos relativos aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental envolvendo diferentes conceitos matemáticos, relacionados às unidades temáticas *Números* e *Probabilidade e Estatística*[12], uma vez que estas se relacionam com o trabalho com a Combinatória, foco principal desse estudo.

Brandt e Moretti (2005) pesquisaram o papel dos RRS na compreensão do Sistema de Numeração Decimal (SND). Sobre isso, os autores destacam que na representação de quantidades "O número três e o numeral três são, respectivamente, o objeto matemático e a representação desse objeto matemático" (p.202). Destacam também a representação mental deste objeto pelo sujeito, revelando, então, neste caso para o Sistema de Numeração Decimal, três patamares distintos para o funcionamento cognitivo: "o objeto matemático, a representação mental desse objeto e a utilização de registros de representação semióticos desse objeto." (p.202).

Brandt e Moretti (2005) elencam diferentes representações que possuem regras diferentes de tratamento, como, por exemplo, algarismos do SND (hindu-arábico) e o sistema egípcio; e registros no ábaco e no material dourado[13] – ou material montessoriano. Os autores destacam que

> [...] um sistema de numeração representativo de quantidades pode valer-se da linguagem oral, matemática ou valer-se da utilização de materiais didáticos tais como ábacos, material montessoriano, quadro valor lugar[14], entre outros. Em se tratando de sistemas semióticos de representação, cada um desses registros possui especificidades próprias e interferem de forma distinta no funcionamento cognitivo. (p.220)

Os autores destacam que o SND e a figura do ábaco são representações com relação de congruência entre elas, uma vez que em ambas as representações o

---

[12] A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) chama de unidades temáticas (Números; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística; Álgebra) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 1998) chama de blocos de conteúdos (Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação).

[13] O Material Dourado é um dos muitos materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori para o trabalho com Matemática. Foi especialmente elaborado para o trabalho com aritmética e permite que as próprias crianças formem as dezenas e centenas. É constituído por cubinhos, barras, placas e um cubo em que o cubo é formado por 10 placas, a placa é formada por 10 barras e a barra é formada por 10 cubinhos.

[14] O quadro valor de lugar (QVL) é um instrumento de aprendizagem em Matemática, geralmente usado nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Auxilia na introdução dos conceitos de unidade, dezenas e centenas e no processo de contagem, formação dos números e operações matemáticas, em função da sua representação em colunas, destacando o valor posicional do algarismo na composição de quantidades.

valor posicional do número é necessário ser levado em consideração, pois o número 105 é diferente de 150 ou 510 e precisam ser registrados respeitando a posição das quantidades nas barras do ábaco e os números na composição de quantidades no SND. Assim o ábaco e o SND "são duas representações congruentes, pois existe a mesma correspondência semântica, a mesma ordem e a mesma unidade semâmtica significante na representação de partida e na representação de chegada" (BRANDT; MORETTI, 2005, p. 218). De modo semelhante, a representação do material dourado e o sistema egípcio são representações que possuem relação de congruência entre elas, pois, no sistema egípcio e no material dourado, não há a característica do valor posicional.

Os autores explicam que, no sistema egípcio a posição dos elementos deste sistema não indica um novo número, por exemplo, "ℂ ∧ | | | | | | |" representa a quantidade 117 se estiver escrito dessa forma, ou em sequência diferente "| | | ∧ | | ℂ | |". Isso também se aplica para a representação desta quantidade no material dourado, pois teremos uma placa, uma barra e sete cubinhos dispostos de qualquer forma. Assim, o uso de diferentes registros de representação pode facilitar no desenvolvimento de diferentes habilidades e, com isso, possibilitar a apreensão conceitual, ou seja, o desenvolvimento de um objeto matemático específico, no caso, o SND.

Damm (2003) analisou problemas aditivos sob a ótica da TRRS e destacou o nível de congruência entre distintas representações semióticas, como a língua natural e a expressão aritmética. Em sua pesquisa, Damm (2003), como destacado na seção anterior, ressalta que o grau de congruência presente na conversão do enunciado do problema (organização redacional do texto) para o tratamento aditivo (expressão aritmética correspondente) depende de três fatores: o primeiro concerne à necessidade, ou não, de realizar uma inversão; o segundo é referente à correspondência, ou não, entre o verbo de ação e a operação utilizada para resolver a situação (ganhar – adição; perder – subtração); e o terceiro é a presença ou a ausência de verbos antônimos no enunciado da situação (ganhar/perder).

No Quadro 6 é possível ver exemplos de problemas aditivos em que há maior e menor nível de congruência. A autora aplicou um teste com 12 situações aditivas e, de acordo com Passoni e Campos (2003, p. 52), "[...] constatou que os três fatores não têm o mesmo peso. O da inversão, por exemplo, é mais forte que o da correspondência". Além disso, nos problemas fortemente não-congruentes, os alunos permanecem com dificuldades mesmo na idade de 10-11 anos. Os autores, com base em Duval (1995), destacam que, quando há o fenômeno da não-congruência, a conversão de registros não pode ser realizada diretamente, mas é necessário passar para um terceiro registro, que se configura como um registro intermediário.

Quadro 6: Problemas aditivos por nível de congruência.

Nível de congruência	**Exemplo**	**Critérios de congruência estabelecidos**
Estritamente congruentes	- Pedro tem 6 bolinhas de gude, joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida?	Há correspondência; não há inversão; não há presença de verbos antônimos.
Entre os polos	- Miguel joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 4. Na segunda, perde 6. O que aconteceu? - Cristiano joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida, ganha 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas ele ganhou ao todo, 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?	- Há presença de verbos antônimos. - Não há correspondência; há inversão.
Fortemente não-congruentes	- Olívio joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 2. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 7 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?	Não há correspondência; há inversão; há presença de verbos antônimos.

Fonte: Situações extraídas de Passoni e Campos (2003)

Os problemas não-congruentes, segundo Damm (2003), são muito difíceis para alunos de início de escolarização, entretanto, com o uso de uma sequência de ensino por meio do uso de instrumentos representativos é possível aumentar as taxas de acertos nesses problemas não-congruentes. Esses instrumentos representativos, utilizados por Damm (2003) se caracterizam por ilustrações de situações que permitam deslocamentos sobre uma semi-reta graduada, de modo que identifique o antes, durante e depois de cada situação. Por meio de experiências utilizando tais ilustrações, a autora constatou que nos problemas mais difíceis (os não-congruentes) os alunos passaram de taxas entre 10% e 20% de acerto, antes da sequência de ensino, para 60% a 80% após a mesma.

Azerêdo (2013), em sua tese, defende que as representações semióticas da operação de multiplicação constituem instrumentos de mediação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. Para confirmação de sua tese, a autora realizou um curso de formação de professores, com carga horária de 30 horas, e contou com a participação de 8 professoras que ensinavam nos 2º, 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, bem como seus respectivos alunos. Durante a formação, foram discutidos diferentes registros de representação semiótica da multiplicação e foram aplicadas atividades com as turmas das professoras e os resultados dos alunos foram analisados no momento da formação.

Sobre as representações semióticas utilizadas pelas professoras e produzidas pelas crianças participantes do estudo de Azerêdo (2013), foi identificada uma variedade de representações utilizadas pelas professoras para o ensino da multiplicação, tais como: enunciados orais e escritos em língua natural, desenhos, organização de grupos com material manipulável, uso do algoritmo da adição, de adição de parcelas repetidas e do algoritmo da multiplicação. As professoras identificaram que as dificuldades apresentadas sobre o ensino da operação de multiplicação estão relacionadas com a necessidade de dinamizar a sala de aula, pois os alunos, segundo elas, estão desinteressados e desestimulados. Apesar disso, a autora enfatiza que todos os alunos responderam às situações propostas com interesse. Nas respostas dadas pelos alunos, embora se tenha identificado uma grande variedade de uso de diferentes registros pelos alunos, nem sempre os usos resultavam em acerto dos problemas.

Para a autora, o fato de as professoras usarem diferentes representações para o ensino reflete na grande variedade de representações usadas pelos alunos, contrariando a hipótese da autora de que o algoritmo convencional seria mais valorizado na escola. Entretanto, segunda a autora, o uso de diferentes representações não influenciou nas respostas corretas, e, para ela, isso pode estar relacionado ao fato de que, para isso acontecer, o professor precisa utilizá-la como instrumento de mediação, atribuído a elas significado, sendo os registros de representação semióticas produzidos pelas crianças instrumentos potencialmente eficazes para essa mediação.

Azerêdo (2013) abordou ainda, em uma das situações, o pensamento combinatório (*produto cartesiano*). No problema se questionava quantas eram as possibilidades de entrar e sair de um parque, havendo duas entradas e quatro saídas e era apresentado a ilustração com a indicação das entradas e saídas. Sobre esse tipo de problema, a autora destacou que a dificuldade das crianças na resolução de problemas combinatórios, foi mais evidente, quando comparada a outros tipos de situações multiplicativas. A autora destaca que, isso foi uma surpresa para as professoras entrevistadas, pois elas indicaram que, pelo fato da questão trazer a ilustração das entradas e saídas do parque, esperava-se que as crianças utilizassem a ilustração para representar os caminhos. Além disso, os desempenhos nos problemas combinatórios foram similares desde o 2º ano até o 5º ano, indicando que não houve uma gradação no desenvolvimento desse tipo de situação com o avançar dos anos escolares na primeira etapa do Ensino Fundamental. A autora destaca ainda que, nos problemas de *produto cartesiano*, isso pode estar relacionado ao de fato de que, em turmas maiores, não é incentivado o uso do desenho, que se configura como uma estratégia eficaz para a resolução do problema.

Arruda e Azerêdo (2015) realizaram um estudo com alunos de 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Com base na utilização de registros de representação semióticas, a atividade com diferentes registros de representação se configurou como uma mediação pedagógica, envolvendo problemas multiplicativos – tais como proporcionalidade, comparação, divisão e combinatória (produto cartesiano). As autoras encontraram, como resultados de um teste diagnóstico, índice muito alto de erros para o problema combinatório. Destaca-se que a atividade de análise por parte dos alunos se configurou como uma mediação por meio da identificação de diferentes registros semióticos, como o diagrama e a expressão numérica. As autoras enfatizam que, nesta etapa de desenvolvimento da atividade de análise de registros os índices de acertos em problemas combinatórios aumentaram de forma considerável, se configurando como importante o trabalho em que se dá aos alunos a oportunidade de analisar diferentes registros de representação.

Maranhão e Igliori (2003) pesquisaram sobre os registros de representação semiótica e números racionais. As autoras apontam que, para o número racional, temos diferentes tipos de registros de representação. São eles: registro simbólico numérico (fracionário e decimal); registro simbólico algébrico, registro simbólico figural e registro da língua natural. As autoras destacam que, mesmo alunos do Ensino Médio têm dificuldades em realizar conversões do registro numérico decimal (0,25) para o registro fracionário (¼), e essa dificuldade não é necessariamente a mesma na conversão de registro fracionário para o registro decimal. Isso porque na conversão de ¼ para 0,25 os alunos realizam uma divisão (1 ÷ 4), enquanto que para converter do registro decimal para o fracionário (0,25 = ¼) é necessário que o aluno realize uma conversão seguida de uma simplificação, que se configura como um tratamento dentro do próprio registro fracionário (0,25 = $^{25}/_{100}$ = ¼). Assim, as autoras destacam que a

> coordenação espontânea de registros está relacionada aos fenômenos de não congruência entre representações de dois sistemas semióticos. [...] em geral, no ensino fundamental, as conversões são menos utilizadas que os tratamentos e, quando utilizadas, prioriza-se um dos sentidos (p.60).

Na presente pesquisa se faz importante a discussão desse estudo, apesar de ser realizado com alunos de Ensino Médio, por sua relação com os conceitos trabalhados desde os anos iniciais. Além disso, pelo que as autoras concluem, é necessário que os resultados das pesquisas cheguem às salas de aula em diferentes níveis de ensino, de modo que seja superada a fragilidade dos conhecimentos matemáticos do estudante brasileiro. Assim, dificuldades de conversão de registros fracionários e decimais podem ser superadas, se, desde os anos iniciais, atividades que envolvam diferentes registros sejam oportunizadas pelo professor.

Nessa temática, pesquisas de formação de professores foram realizadas, como a de Santana, Lima, Silva e Oliveira (2013) que investigaram a percepção de licenciados de um curso de Pedagogia sobre diferentes registros de representação semiótica de fração. Por meio de entrevistas clínicas, as autoras encontraram como resultado evidências de dificuldades relacionadas ao conceito de fração e suas representações, concluindo, haver necessidade de maior destaque na formação inicial de professores para os diferentes registros de representações semióticas de modo a propiciar conversões entre registros e resultar em maior compreensão do conceito.

Buehring (2006), por meio da coordenação de diferentes registros de representação semiótica, analisou as contribuições de uma sequência didática voltada para o tratamento de dados em gráficos e tabelas com alunos da primeira série do Ensino Fundamental (entre 6 e 7 anos de idade). Para o estudo, a autora utilizou a engenharia didática como metodologia de pesquisa, de modo que realizou análises preliminares, análise a priori das situações didáticas, uma experimentação e uma análise a posteriori. Antes da sequência de ensino (experimentação), a autora realizou em outra turma de alunos com a mesma faixa etária uma pré-experimentação, com o objetivo de observar algumas dificuldades que poderiam surgir e verificar as ideias que as crianças podem construir sobre conceitos básicos de análise de dados. Na experimentação propriamente dita, a autora, elaborou atividades, com base nos resultados da pré-experimentação, em que os alunos pudessem sempre coordenar dois ou mais registros de representação semiótica, tais como histogramas, gráficos, tabelas e língua natural. A autora enfatiza que durante as atividades o duplo sentido da conversão era trabalhado, de modo que os alunos conseguissem visualizar, em pelo menos duas representações distintas, o mesmo objeto matemático, no caso, referente à análise de dados. Um exemplo seria a identificação de quantidades em histograma e conversão para tabela e, em seguida, retornando ao histograma para comparar as quantidades registradas.

Buehring (2006) destacou que o gráfico de barras e o histograma foram as representações mais utilizadas pelas crianças, inclusive após a sequência de ensino. No entanto, as crianças também passaram a usar dois ou mais registros de representação para um objeto, no caso, os dados. Ela destaca que, com apenas quatro momentos de ensino os alunos já apresentaram maior desenvolvimento na coordenação de diferentes registros de representação e acredita que, com mais encontros os resultados podem ser ainda melhores, com maior adequação na utilização dos diferentes registros.

Os trabalhos aqui discutidos são referência para um maior aprofundamento do uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), constituindo base para o desenvolvimento do presente estudo, voltado para o uso de diferentes registros de representação em situações combinatórias. A seguir serão discutidas pesquisas relacionadas ao raciocínio combinatório à luz da TRRS.

3.2.2 A Combinatória e os registros de representação semiótica: estudos anteriores

Os estudos sobre o raciocínio combinatório em que a base teórica está nos Registros de Representação Semiótica ainda são poucos. Em busca realizada, tendo como palavras chaves “Combinatória e Registros de Representação Semiótica” e “Combinatória, Registros de Representação Semiótica e Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental”, foram encontrados artigos e dissertações voltados principalmente para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Foi encontrado apenas um artigo relacionado aos anos iniciais e que trabalha exclusivamente com situações combinatórias. Os demais trabalham o campo multiplicativo, incluindo uma situação combinatória, já discutidos na seção anterior (AZERÊDO, 2013; ARRUDA; AZERÊDO, 2015). A seguir, serão discutidos os estudos voltados exclusivamente para o ensino e aprendizagem da Combinatória na Educação Básica.

Alves (2010) realizou uma pesquisa, por meio de uma engenharia didática, sobre a introdução ao pensamento combinatório e sua relação com o cálculo probabilístico com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Para isso, foi elaborada e aplicada uma sequência de ensino por meio do uso de diferentes registros de representações semióticas. Anteriormente a esta etapa da pesquisa, foram analisadas quatro coleções de livros didáticos de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Nesta primeira etapa, o autor destacou que o uso de diferentes registros foi menos frequente nos livros do 6º ano, passando a ser maior nos livros do 9º ano, quando são apresentadas representações por diagrama de árvore, tabela, escrita de opções (listagem) e representações simbólico-numéricas. Entretanto, apesar da utilização de diferentes registros, a conversão, segundo o autor, é pouco explorada.

O autor destaca que a análise dos livros realizada foi importante para a construção das sequências de atividades presentes no módulo de ensino, pois confirmou a necessidade do trabalho conjunto entre Análise Combinatória e Probabilidade, permeado da utilização dos registros de representação. A sequência de ensino foi desenvolvida em quatro módulos distintos que se caracterizaram pela resolução de atividades em duplas, sendo que os alunos tinham um tempo de duas aulas para responder as situações e, na terceira aula havia socialização das ideias e debate, momento em que os alunos podiam apresentar suas resoluções, dúvidas e questionamentos. No primeiro módulo foi proposta a introdução ao princípio multiplicativo e a exploração de diferentes representações para o cálculo de possibilidades. No segundo módulo ocorreu a exploração de situações problema e também de exercícios com o objetivo que os alunos identificassem o tipo de problema em que a ordem dos termos não faz diferença (*combinação*) e o tipo em que a ordem é importante (*arranjo* e *permutação*), em que, mais uma vez, o uso de diferentes registros foi uma importante ferramenta. No terceiro módulo foi introduzida a probabilidade por meio da resolução de situações problema que, segundo o autor, se justifica pela ligação intrínseca existente entre Combinatória e Probabilidade, buscando trabalhar as diferentes formas de se representar uma probabilidade (fracionária, decimal ou percentual). No último módulo foi sugerida a sistematização de conceitos da Análise Combinatória simples, propondo uma introdução do fatorial e das fórmulas, por meio de atividades de descoberta guiada. O autor constatou que, à medida que os alunos foram apresentados aos diferentes registros de representação, eles conseguiram perceber melhor as diferentes possibilidades nos cálculos de Análise Combinatória, bem como discernir sobre a importância, ou não, da ordem dos termos.

Fonseca (2015) realizou uma análise em livro didático do 2º ano do Ensino Médio aprovado no PNLD 2015. O autor destaca que as atividades que abordam o tratamento de situações combinatórias utilizam, em 62,5%, representações esquemáticas (diagrama de árvore, tabelas, figuras, gráficos e outras formas de organizar elementos) e, em 37,5%, o tratamento se dá em representações algébricas (utilização direta da fórmula ou a utilização de um algoritmo). Já para as conversões, em 39 situações, há transformação de linguagem natural para situação esquemática, enquanto que são 21 situações com conversão de linguagem natural para algébrica, apenas sete de situação esquemática para algébrica e nenhuma situação que aborde a conversão de algébrica para esquemática. A partir desses resultados foi proposta uma sequência de ensino para alunos do 2º ano do Ensino Médio com o objetivo de proporcionar a visualização das diferentes formas de representação identificadas no livro didático, privilegiando as conversões de representações.

A sequência de ensino envolveu a projeção de vídeos que abordam o ensino da Combinatória e a resolução de uma lista de situações problema. Para as resoluções foram utilizados registros de chegada algébricos e esquemáticos, sendo que o registro de partida consistia em linguagem natural. Para as situações de combinação e arranjo os alunos apresentaram maior dificuldade em utilizar uma representação esquemática, diferentemente do que foi percebido nas situações que envolviam o Princípio Fundamental da Contagem. Apesar disso, Fonseca (2015) concluiu que, com o desenvolvimento das aulas, os alunos passaram a se envolver e contribuir com a resolução das situações, evidenciando que o trabalho que permite a visualização de diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático, proporcionando a coordenação desses registros, favorece a construção do conhecimento.

Nos anos iniciais, Borba, Azevedo e Bittar (2016a; 2016b) analisaram duas coleções do mesmo autor, sendo uma referente à Alfabetização Matemática (1º a 3º ano) e a outra de Matemática (4º e 5º anos) do Ensino Fundamental. As autoras destacaram que, grande parte dos problemas encontrados é de *produto cartesiano,* principalmente nos livros de 1º a 3º ano. Nestas coleções, não foram encontrados problemas de *arranjo*. Além disso, enfatizaram que é comum a apresentação de problemas com mais de uma forma de representação (língua natural e desenho, por exemplo). Os problemas analisados apresentam ao menos uma conversão de representações, sendo mais frequente a conversão de linguagem natural para listagem e de linguagem natural para expressão numérica. Também afirmaram que algumas atividades envolvem múltiplas conversões, como por exemplo: linguagem natural e desenho para listagem e expressão numérica. Assim, nessas atividades era solicitado, por exemplo, que o aluno realizasse uma listagem e, em seguida, uma expressão numérica correspondente. Desse modo, destaca-se a importância, para o aprendizado da Combinatória, dos livros didáticos apresentarem atividades com múltiplas conversões.

Borba, Bittar, Montenegro e Silva (2017) também realizaram a análise de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. As autoras observaram que na análise de uma coleção do 6º ao 9º ano foram encontradas todas as situações combinatórias, diferente dos resultados encontrados na análise de livros do 1º ao 5º ano. Apesar disso, as autoras verificaram que não há, nesses livros, um alerta no manual do professor, para os diferentes invariantes de cada situação combinatória; um ponto negativo destacado pelas autoras. Sobre as conversões solicitadas no livro didático, as autoras destacaram que a conversão mais comum aconteceu do enunciado em língua natural acompanhado de um desenho que ilustra a situação para a resolução por meio de uma expressão numérica, em geral, uma multiplicação que determina o número total de possibilidades que atende à solução da situação. As autoras também ressaltaram a presença de listagens, quadros e árvores de possibilidades como representações utilizadas no livro didático, enfatizando que o uso de distintas representações é importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório pelo aluno.

A partir desses estudos foi proposto, no primeiro estudo desta pesquisa, que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental identificassem conversões de língua natural para listagem ou árvore e destas para a expressão numérica e, em seguida, no segundo estudo, foram realizadas diferentes formas de intervenção, com alunos de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, que levaram em consideração a TRRS de Duval, apontando as conversões de representações como uma estratégia de desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como a TCC de Vergnaud, sobre as diferentes situações e invariantes combinatórios.

3.2.3 A Combinatória e os registros de representação semiótica: contribuições sobre congruência entre diferentes registros de representações

Nesta seção são abordados exemplos de situações combinatórias, com o objetivo de verificar a congruência entre a representação em língua natural desse tipo de situação com a representação em tratamento multiplicativo, à semelhança do que foi realizado por Damm (1992) com problemas aditivos.

Como discutido anteriormente, o nível de congruência entre representações foi enfatizado por Duval (2009), levando em consideração três critérios fundamentais. O primeiro relativo à *correspondência semântica*, o segundo relacionado com a *presença de univocidade semântica terminal* e, por fim, o terceiro, que concerne à *ordenação das unidades significantes* que compõem cada uma das representações.

Nas situações aditivas, Passoni e Campos (2003) exemplificam, a partir dos estudos de Damm (1992), que uma situação pode atender a critérios isolados ou combinados para identificar o nível de congruência entre diferentes representações. A seguir serão apresentadas diferentes exemplos de cada um dos critérios de congruência para as situações aditivas.

> *Lourenço joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira perde 2, na segunda perde 5. O que aconteceu?*
>
> *-2 (*perde duas) *-5 (perde 5) = -7   (2 + 5 = 7) (perdeu 7 bolinhas).*

Nesta situação, o primeiro critério de congruência indica que não há correspondência semântica entre os elementos da representação de partida (linguagem natural) com a representação de chegada (tratamento aritmético), uma vez que na situação indica-se que Lourenço perdeu bolinhas, o que leva às crianças a realizarem uma subtração, pois perder indica diminuir. Entretanto, é necessário efetuar uma operação de adição para indicar a quantidade de bolinhas perdidas.

No próximo exemplo é possível destacar o segundo critério de congruência: a univocidade semântica terminal.

> *Miguel joga duas partidas. Na primeira ganha 4. Na segunda perde 6. O que aconteceu?*
>
> *+4 (ganha 4) - 6 (perde 6) = -2   (6 - 4 = 2) (perdeu duas bolinhas).*

Nessa situação, há presença de verbos antônimos no enunciado e é necessário escolher qual verbo é portador da informação numérica. Assim, quando há presença de dualidade, não é possível haver univocidade semântica terminal, uma vez que será realizada a operação de subtração, entretanto não há apenas uma unidade significante portadora dessa informação, uma vez que no enunciado há dois verbos de ação: ganhar e perder.

Na situação a seguir é possível identificar o terceiro critério de congruência de conversão entre a representação em linguagem natural e o tratamento aritmético de adição.

> *Cristiano joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas partidas ganhou ao todo 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?*
>
> *+5 (?) = + 9   (9 - 5 = 4) (ganhou 4 bolinhas na segunda partida)*

Neste exemplo é possível perceber a inversão da ordem entre as duas representações, ou seja, é informado o início e o resultado da situação, sendo desconhecido o valor intermediário. Passoni e Campos (2003) destacam que situações em que é necessária a inversão da ordem para realização da resolução são extremamente difíceis e este critério tem um peso muito forte na determinação da não-congruência entre representações.

Nas situações combinatórias, a correspondência semântica sempre irá caracterizar situações não-congruentes, pois os verbos portadores da informação numérica não relacionam o caráter multiplicativo implícito nas situações. Nas situações de *produto cartesiano*, como se pode observar no exemplo a seguir, há uma relação direta entre os números informados no problema com a operação a ser realizada, entretanto, normalmente, não há verbos que indiquem a necessidade de realizar uma multiplicação.

> *Tenho 5 blusas e 3 saias. De quantas maneiras diferentes posso me vestir?*
>
> *5 x 3 = 15 (15 maneiras diferentes de se vestir).*

A operação de multiplicação a ser realizada não é indicada por nenhum verbo que dê pistas sobre ela, diferentemente de uma situação de *comparação* multiplicativa, como a exemplificada a seguir.

Uma loja do shopping vende tudo três vezes mais caro que a lojinha da esquina. Na loja da esquina um caderno custa R$6,00. Quanto custa o mesmo caderno na loja do shopping?

3 x 6 = 18,00 (R$ 18,00 na loja do shopping).

Nesta situação, a palavra *vezes*, indicada na representação em linguagem natural, se caracteriza como o verbo portador da informação numérica, havendo, portanto, correspondência semântica entre as situações.

Nas situações de *combinação, arranjo e permutação*, além de não haver verbos portadores da informação numérica, não há uma relação direta entre a operação realizada com os números indicados no enunciado. O que indica não haver uma correspondência semântica, nem com relação ao verbo portador da informação, nem com os números expressos no enunciado. No exemplo de *combinação* a seguir é possível constatar essa situação.

Tenho 5 frutas e vou usar 3 para fazer uma salada de frutas. Quantas combinações de três frutas diferentes posso fazer?

(5 x 4 x 3) ÷ (3 x 2) = 10 (10 combinações).

Na situação de *combinação* exemplificada, a multiplicação resultante é 5 x 4 x 3, porque há cinco maneiras de escolher a primeira fruta, há quatro maneiras de escolher a segunda fruta (uma vez que uma já foi escolhida como primeira) e há três maneiras de escolher a terceira fruta (já que outras duas foram anteriormente escolhidas). Além disso, na divisão, é preciso considerar a *permutação* de três elementos entre si (3 x 2 x 1), uma vez que a ordem de escolha das três frutas não gera possibilidades distintas.

Nas situações combinatórias, como não há a presença de verbos portadores da ação e também não há a presença de verbos antônimos, não é atendido, em nenhuma situação, o segundo critério de congruência: univocidade semântica terminal. Destaca-se com isso que as situações combinatórias não possuem indicação semântica no seu enunciado que facilite a escolha da operação que deve ser realizada.

As situações combinatórias inversas indicam a presença do terceiro critério de congruência: a necessidade de inversão da ordem semântica entre as duas representações. No exemplo a seguir é possível visualizar uma situação de *produto cartesiano inverso*. Nesse exemplo destaca-se que além da inversão, também não há correspondência semântica entre as duas representações, uma vez que não há um verbo de ação que indique a necessidade de divisão.

Thalita tem algumas blusas e 2 saias. Combinando cada uma de suas blusas com cada uma de suas saias, ela pode formar 10 trajes. Quantas blusas Thalita tem?

$10 \div 2 = 5$ (5 blusas).

De acordo com Azevedo, Calheiros e Borba (2013), essas situações são extremamente difíceis, inclusive para alguns alunos de Ensino Médio. Os problemas combinatórios inversos não são muito trabalhadas na Educação Básica, mas, as situações de *produto cartesiano inverso* são as mais frequentes. Essas situações são destacadas por Selva, Borba, Campos, Bivar, Ferreira e Luna (2008), em um estudo sobre a resolução de problemas multiplicativos. As autoras enfatizam que os alunos de 3ª a 5ª séries (4º ao 6º anos do Ensino Fundamental) apresentam muitas dificuldades ao resolverem problemas de produtos cartesianos inversos.

Assim, a análise preliminar realizada nesta seção possibilita ver como são complexas, em termos de congruência, as situações combinatórias. Isso indica a necessidade de mais estudos sobre o papel dos registros de representação semiótica para a compreensão desse tipo de problema – e, em particular, de cada tipo de situação combinatória, do modo como é proposto no presente estudo. No próximo capítulo serão anunciados os objetivos e método que visam ampliar a discussão sobre os RRS e as distintas situações combinatórias.

Além da congruência entre representações, outro aspecto importante a ser considerado é o papel das representações auxiliares na atividade de conversão, principalmente quando as representações de partida e de chegada são fortemente não-congruentes. Na próxima seção esse aspecto é discutido com mais detalhes.

3.2.4 A Combinatória e os registros de representação semiótica: a necessidade de representações auxiliares de transição

Duval (2011) destaca a necessidade de representações auxiliares de transição, que se caracterizam como uma representação intermediária. Ele enfatiza que, entre a língua natural e os outros registros existe “uma distância cognitiva considerável” (p. 125), incluído-se outros registros simbólicos próprios da Matemática. Para ele, isso “[...] torna difícil a conversão dos enunciados em língua natural para representações em outro registro”, sendo necessário, portanto, passar por representações auxiliares de transição.

Com o exemplo dos problemas aditivos, Duval (2011, p. 128-130) afirma que:

> Para fazer compreender a resolução de todos os problemas aditivos, principalmente compreendendo aqueles cujos enunciados não são congruentes, é preciso recorrer a uma representação auxiliar. Essa deve permitir separar nos enunciados os dois tipos de informações relativas à situação descrita: aquelas relativas às fases sucessivas e aquelas relativas aos valores numéricos. [...] Esse tipo de representação auxiliar é evidentemente de transição. Elas são abandonadas pelos próprios alunos logo que eles compreendem, pois sua utilização lhes parece um procedimento lento e custoso.

Assim, Duval enfatiza que as representações auxiliares são usadas principalmente em situações cuja conversão do enunciado em língua materna para a resolução em expressão numérica não apresentam congruência, ou seja, quanto mais não-congruente é a conversão, maior a necessidade de uma representação intermediária. Isso porque, nesse tipo de situação, a expressão numérica não é clara o suficiente para que os estudantes façam seu uso, sem que haja uma intervenção específica. Assim, após uma instrução específica, os alunos, gradativamente, passam a usar uma representação matemática que lhes parece menos lenta e custosa, fazendo dessa representação auxiliar, uma representação de transição.

No caso das situações combinatórias, sendo caracterizadas pela não-congruência na conversão entre os registros em língua natural do enunciado e o registro matemático formal da sua resolução, uma vez que não há correspondência semântica entre as unidades significantes das representações de partida e de chegada, como já discutido na seção anterior, um registro auxiliar de transição é imprescindível.

Estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO; BORBA 2013) indicam o uso de listagens para a resolução de problemas combinatórios como uma representação utilizada pelos alunos, mesmo quando ainda não há uma instrução específica sobre o conceito. As listagens realizadas pelos estudantes antes do ensino formal de Combinatória são, em geral, listagens não sistematizadas. A sistematização da listagem passa, essencialmente, por um processo de intervenção que vai garantir uma melhor organização das possibilidades de modo que o esgotamento de todas é mais frequente. As autoras também destacam o uso de quadros, diagramas e árvores de possibilidades como representações possíveis de serem utilizadas.

Azevedo (2013) observou que o uso da árvore de possibilidades promoveu avanços no levantamento de possibilidades, e, em alguns casos, possibilitou que os alunos percebessem o caráter multiplicativo das situações combinatórias, corroborando com os resultados encontrados por Fischbein, Pampu e Minzat (1970). Esses autores indicam que mesmo alunos de 10 anos, com uma instrução específica, por meio do uso de árvore de possibilidades, conseguem organizar e sistematizar as informações e generalizar as possibilidades. Barreto e Borba (2012) também indicam que a árvore de possibilidades, assim como a listagem sistematizada são representações que promovem avanços no pensamento combinatório de adultos dos anos iniciais de escolarização.

Com isso, espera-se que listagens sistematizadas e árvores de possibilidades se configurem como registros auxiliares de transição para a chegada em um registro matemático formal como, por exemplo, o uso do Princípio Fundamental da

Contagem no Ensino Fundamental e, no caso do Ensino Médio, o uso de fórmulas. No presente estudo, se analisará o papel das listagens e da árvores de possibilidades como representações auxiliares da língua natural para a expressão numérica.

No próximo capítulo será apresentado o método da pesquisa, com a explicitação dos objetivos geral e específicos dos dois estudos propostos; a apresentação os participantes e dos procedimentos de coleta e análise de dados.

4 OBJETIVOS E MÉTODO

4.1 OBJETIVOS

O presente estudo tem o objetivo geral de analisar o papel que a identificação e as transformações de tratamento e de conversão de registros têm na ampliação do conhecimento de distintas situações combinatórias por parte de estudantes do Ensino Fundamental.

Para o alcance desse objetivo, foram realizados dois estudos: um de sondagem de conhecimentos e outro de intervenção, ou seja, de ensino. Os dois estudos da presente pesquisa têm como bases teóricas pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e também levam em consideração achados de pesquisas anteriores.

Assim, busca-se nessa tese uma triangulação referente ao importante papel das identificações e transformações de tratamento e de conversão de registros no aprendizado de distintas situações combinatórias, levando em consideração seus diferentes invariantes. A triangulação se dá: 1) pelo que diz a literatura; 2) pelo que a sondagem com as crianças aponta e 3) pelos resultados de superação de dificuldades no estudo de intervenção. A primeira parte da triangulação foi iniciada em capítulos teóricos anteriores e será retomada na discussão dos resultados obtidos. Já as propostas de sondagem de conhecimentos e de intervenção estão descritas a seguir.

4.2 OBJETIVOS: ESTUDO 1 - SONDAGEM

- Verificar o que os alunos de anos iniciais identificam na conversão em situações combinatórias de linguagem natural para árvore ou para listagem – Conversão 1 – e de árvore ou listagem para expressão numérica – Conversão 2.
- Analisar o que os alunos de anos iniciais identificam nas conversões de representações, por diferentes tipos de problemas combinatórios.

4.3 OBJETIVOS: ESTUDO 2 - INTERVENÇÃO

- Investigar o efeito de intervenções pedagógicas, que mobilizam transformações de conversão de registros, no desempenho de alunos do Ensino Fundamental em diferentes problemas combinatórios;
- Analisar a influência de distintas intervenções na conversão de diversificados tipos de registros, bem como no tratamento efetuado dentro do registro realizado.
- Avaliar a congruência dos registros auxiliares (listagem e árvore de possibilidades) com as expressões numéricas que podem ser aplicadas na resolução dos distintos tipos de problemas combinatórios.

4.4 MÉTODO – ESTUDO 1

Para responder os objetivos elencados no Estudo 1, foi aplicado um teste com 16 alunos do 5º ano de uma escola particular de Recife. A definição por essa turma se deu, uma vez que, por ser um teste escrito, com escolha de alternativas e solicitação de justificativa foram escolhidos alunos de anos iniciais com maior escolarização e bom domínio da leitura e da escrita.

No teste, os alunos deveriam identificar dois tipos de conversões diferentes. O primeiro tratava da conversão de Linguagem Natural – LN (ou língua materna) para Árvore de possibilidades (A) ou para Listagem (L). A segunda conversão se dava em identificar a operação correta para resolução em Expressão Numérica (EN), a partir de Árvore de possibilidades (A) ou de Listagem (L).

Assim, nas situações apresentadas nos testes havia sempre um registro de partida (Linguagem Natural), uma solução apresentada em um registro auxiliar (Árvore de possibilidades ou Listagem) e um registro de chegada (Expressão Numérica) apresentado em alternativas para resposta. Os testes eram compostos por oito situações combinatórias, sendo duas de cada tipo de problema (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*). Além disso, dois diferentes tipos de teste foram elaborados (Apêndice 1), em função do modo em que era apresentada a solução do problema de *combinação*. No Teste 1 os problemas de combinação eram apresentados na solução em árvore de possibilidades ou listagem, desconsiderando os casos repetidos. No Teste 2, os casos repetidos eram apresentados na solução marcados com riscos para fins de realce de exclusão, indicando que foram desconsiderados. Nos Quadros 7 e 8 é possível observar exemplos de resolução de problema de *combinação* em que os casos repetidos são desconsiderados e outro em que os casos repetidos são riscados.

Quadro 7: Problema combinatório em situação de *combinação* com a resolução por meio da listagem desconsiderando os casos repetidos.

Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas? Mamão, abacaxi e laranja Mamão, abacaxi e banana Mamão laranja e banana Abacaxi, laranja e banana

Fonte: A autora

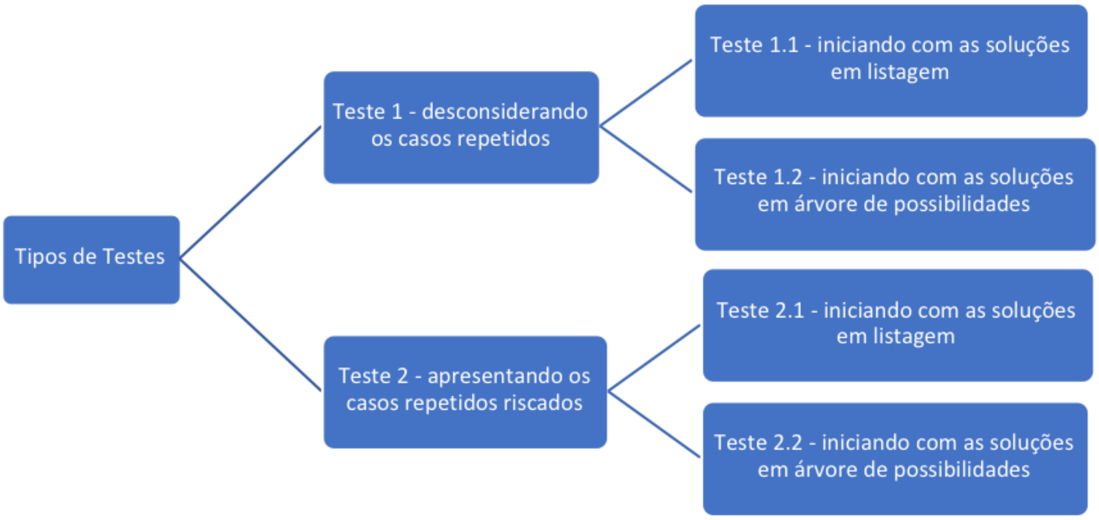
Quadro 8: Problema combinatório em situação de combinação com a resolução por meio da listagem considerando os casos repetidos riscados.

Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?	
Mamão, abacaxi e laranja	Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana	~~Abacaxi, banana e laranja~~
Mamão, laranja e banana	~~Abacaxi, mamão e laranja~~
~~Mamão, banana e abacaxi~~	~~Abacaxi, laranja e mamão~~
~~Mamão, banana e laranja~~	~~Abacaxi, banana e mamão~~
~~Mamão, laranja e abacaxi~~	~~Abacaxi, mamão e banana~~
~~Laranja, mamão e abacaxi~~	~~Banana, mamão e abacaxi~~
~~Laranja, abacaxi e mamão~~	~~Banana, abacaxi e mamão~~
~~Laranja, mamão e banana~~	~~Banana, mamão e laranja~~
~~Laranja, banana e mamão~~	~~Banana, laranja e mamão~~
~~Laranja, abacaxi e banana~~	~~Banana, abacaxi e laranja~~
~~Laranja, banana e abacaxi~~	~~Banana, laranja e abacaxi~~

Fonte: A autora

Os Testes 1 e 2 foram subdivididos em duas apresentações cada, como é possível visualizar no Diagrama 1, alternando o início da representação utilizada. Quatro crianças responderam o Teste 1 iniciando por listagem (Teste 1.1); outras quatro responderam o Teste 1 iniciando por árvore de possibilidades (Teste 1.2); mais quatro crianças responderam o Teste 2 iniciando por listagem (Teste 2.1); e as últimas quatro crianças responderam o Teste 2 iniciando por árvore de possibilidades (Teste 2.2), perfazendo um total de 16 crianças que responderam o teste de sondagem.

Diagrama 1: Organização dos diferentes tipos de testes realizados no Estudo 1.



Fonte: A autora

Havia duas hipóteses com respeito a esse estudo: a primeira em que se acreditava que os problemas de *combinação* seriam os mais difíceis de identificar as conversões, já que é necessário desconsiderar casos repetidos e as expressões numéricas que representam a situação precisam levar as repetições em consideração, por meio da divisão. A segunda hipótese estava relacionada com uma maior dificuldade em identificar a segunda conversão solicitada (para expressão numérica), uma vez que as crianças podem não reconhecer facilmente a expressão numérica, já que a mesma parece possuir pouca congruência com a representação em árvore de possibilidades ou em listagem.

Após a aplicação do teste de sondagem e a análise dos desempenhos, sentiu-se a necessidade de entrevistar alguns alunos para melhor esclarecimento das identificações realizadas. Assim, foi realizada uma entrevista com quatro alunos que obtiveram bons resultados nos testes, ou seja, identificaram corretamente ao menos uma das conversões solicitadas, ou apresentaram justificativas, corretas ou não. A entrevista foi realizada de modo que os alunos analisassem as respostas do seu próprio teste e explicassem como tinham pensando para realizar a primeira conversão, e, em seguida, explicar a segunda conversão. Objetivava-se, com a entrevista, esclarecer dúvidas sobre os procedimentos utilizados pelas crianças na identificação de conversões de registros e, principalmente, conseguir elementos para compreender como se pode obter sucesso nas conversões de linguagem natural para árvores ou listagens e, em seguida, para expressões numéricas.

A análise dos dados desse estudo foi quantitativa e qualitativa. Na análise quantitativa foi observado o acerto dos alunos em cada teste proposto, em cada conversão solicitada, bem como, pelo número de vezes que a justificativa dada era, ou não, coerente. A abordagem qualitativa aconteceu na verificação da coerência dessas justificativas e também, na análise da entrevista, quando os alunos explicavam as conversões realizadas e as justificativas dadas.

4.5 MÉTODO – ESTUDO 2

No segundo estudo, baseado nos resultados do primeiro estudo, na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1983) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), buscava-se defender que determinadas conversões de RRS de algumas situações combinatórias são mais acessíveis quando comparadas com outras conversões. Entretanto, acredita-se que seja possível auxiliar as crianças de anos iniciais (5º ano) e adolescentes de anos finais do Ensino Fundamental (7º e 9º anos) a realizarem esses diferentes tipos de conversões, e, com isso, apreender os conceitos envolvidos nas variadas situações da Combinatória.

A escolha pelo trabalho com o final dos anos iniciais, o meio e o fim dos anos finais, tem como objetivo de analisar o desenvolvimento do uso da expressão numérica em cada ano de escolarização, isso porque, no primeiro estudo, realizado apenas com crianças de 5º ano, os resultados indicaram maior dificuldade desses alunos em identificar a expressão numérica que respondia o problema combinatório. Com isso, pretendeu-se verificar se desde o 5º ano já é possível trabalhar com algumas expressões numéricas ou se esse entendimento só é possibilitado em anos posteriores (7º ou 9º ano). Nos 7º e 9º anos se pretendia observar, também, como acontece a ampliação do conhecimento combinatório, particularmente com relação ao uso das expressões numéricas.

Neste segundo estudo, realizado em uma escola pública municipal da cidade do Recife, foi aplicado um pré-teste, composto por oito situações combinatórias, sendo duas de cada tipo de problema, em que se perguntou quais são todas as possibilidades e qual a conta matemática que responde a pergunta. Em seguida, foram realizadas distintas intervenções e um pós-teste, com as mesmas características do pré-teste.

No Quadro 9 é possível observar as situações do pré-teste, as quais também foram usadas nas sessões de intervenção. No Quadro 10, estão descritas as situações do pós-teste.

Diferente do pré-teste, em que todas as questões não ultrapassavam 24 possibilidades como resposta, no pós-teste os quatro primeiros problemas tinha um número baixo de possibilidades (entre 6 e 30 possibilidades), já os quatro últimos problemas estavam entre 56 e 120 possibilidade. Desse modo, para responder os últimos problemas, a expressão numérica era imprescindível. Além disso, tanto no pré-teste, quanto no pós-teste, os quatro primeiros problemas apresentavam duas (*produto cartesiano, arranjo* e *combinação*) ou três (*permutação*) etapas de escolha e os quatro últimos problemas apresentavam três (*produto cartesiano, arranjo* e *combinação*) ou quatro (*permutação*) etapas de escolha.

Assim, pretendia-se avaliar os resultados de diferentes intervenções (descritas a seguir) na superação das dificuldades na conversão e coordenação de diferentes tipos de registro de representação. Também se pretendia avaliar a congruência entre diferentes registros de representação intermediários (listagem e árvores de possibilidades) com as expressões numéricas que podem ser aplicadas na resolução dos distintos tipos de problemas combinatórios. As intervenções, realizadas com o 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, aconteceu com seis turmas, de modo que, para cada ano de ensino participaram do estudo duas turmas, sendo que uma delas caracterizava o Grupo 1 e a outra turma compôs o Grupo 2.

Quadro 9: Lista de problemas combinatórios utilizados no pré-teste e na intervenção.

1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?
   Qual a conta que resolve esse problema?
2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?
   Qual a conta que resolve este problema?
3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
   Qual a conta que resolve este problema?
4. Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?
   Qual a conta que resolve esse problema?
5. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca), dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?
   Qual a conta que resolve este problema?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?
   Qual a conta que resolve este problema?
7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR? Qual a conta que resolve este problema?
8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?
   Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: A autora

As intervenções foram realizadas pela discussão das situações combinatórias partindo do registro em Língua Natural (LN), e chegando no registro em Expressão Numérica – PFC (Princípio Fundamental da Contagem), com a listagem (L) ou a árvore de possibilidades (Árv.) como registros intermediários.

Duval destaca que os registros intermediários são importantes principalmente quando a situação é fortemente não-congruente com o registro de chegada – uma linguagem matemática. No caso dos problemas combinatórios, que se caracterizam como não-congruentes com o registro em expressão numérica, como discutido na seção 2.2.3, os registros intermediários se configuram como muito importantes para seu desenvolvimento.

Quadro 10: Lista de problemas combinatórios utilizados no pós-teste.

1. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e I). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?
   Qual a conta que resolve este problema?
2. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Amanda, Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?
   Qual a conta que resolve este problema?
3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Gabriela, Letícia, e Natália) podem sentar-se num sofá de três lugares?
   Qual a conta que resolve este problema?
4. Seis pessoas (Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?
   Qual a conta que resolve este problema?
5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia oito opções de comida (sanduíche misto, sanduíche de frango, coxinha, empada de frango, empada de bacalhau, pão de queijo, enroladinho de salsicha e folheado de queijo), seis tipos de bebida (suco de fruta, refrigerante, água, água com gás, suco de lata e chá gelado) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?
   Qual a conta que resolve este problema?
6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?
   Qual a conta que resolve este problema?
7. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de cinco algarismos diferentes, usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?
   Qual a conta que resolve este problema?
8. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?
   Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: A autora

Desse modo, foram efetuadas duas conversões, ou seja, a primeira do registro de partida, caracterizado por um enunciado em língua natural, para o registro intermediário, que, nesse caso, é um registro de resolução auxiliar de transição (árvore de possibilidades ou listagem), mais transparente e, considerado mais congruente com o registro de partida. A segunda conversão, do registro intermediário para uma expressão matemática (PFC) – o registro de chegada. O esquema que segue indica a ordem das conversões trabalhadas nos dois grupos do estudo.

Grupo 1: Língua Natural → Árvore de possibilidades → Expressão Numérica (PFC)

Grupo 2: Língua Natural → Listagem de possibilidades → Expressão Numérica (PFC)

As intervenções tiveram a mesma duração de tempo e nelas foram trabalhadas as oito situações combinatórias do pré-teste com a mesma ordem de apresentação dos problemas. A seguir, nos Quadros 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18 é possível visualizar as respostas dos problemas em cada uma das representações e a passagem para o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). De um modo geral, buscou-se na intervenção, chegar às expressões numéricas evidenciadas nos quadros, a partir das discussões de escolha e ordenação dos elementos. Durante a intervenção a generalização de possibilidades era trazida pelos próprios estudantes, após a discussão da representação intermediária, no momento que a pesquisadora questionava qual a conta que resolvia o problema. Em seguida, a pesquisadora iniciava a discussão da expressão numérica pelo PFC, chamando atenção para cada etapa de escolha da situação e para a importância ou não da ordem em cada situação. Assim, o cálculo relacional realizado pela generalização de possibilidades era, em geral, realizado pelos próprios estudantes, e o cálculo relacional do PFC era proposto pela pesquisadora.

Acreditava-se que os grupos que tiveram intervenção utilizando a árvore de possibilidades apresentariam maior facilidade em demonstrar o PFC ou uma generalização de possibilidades por meio de uma multiplicação correspondente à resolução do problema combinatório. Isso porque, esta representação parece indicar com maior clareza a relação de um-para-muitos envolvida nas situações combinatórias, pois a organização em ramos que indicam essa ideia multiplicativa aparentemente é mais congruente com a operação matemática necessária para resolução de problemas.

No Quadro 11 é possível perceber a resolução para o problema de produto cartesiano com duas etapas de escolha. Na resolução em árvore nota-se que para cada uma das quatro meninas, que estão destacadas no ramo inicial, se tem seis meninos que podem fazer o par para a dança da quadrilha. Na solução em listagem também existe a ideia destacada na árvore, entretanto, não há uma ligação evidenciando a relação um a muitos, sendo necessário enumerar cada uma das possibilidades e realizar uma contagem. O PFC nas situações de *produto cartesiano* é considerado pela multiplicação da quantidade de elementos de cada conjunto explícito no enunciado do problema. Na generalização de possibilidades, a ideia é que, para cada menina, é possível formar seis casais, sendo quatro meninas, tem-se 24 casais diferentes.

Quadro 11: Situação de produto cartesiano com duas etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

PC 2 etapas: Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados? Qual a conta que resolve esse problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades

Taciana → Gabriel → Thiago → Matheus → Renato → Otávio → Felipe	Eduarda → Gabriel → Thiago → Matheus → Renato → Otávio → Felipe	Catarina → Gabriel → Thiago → Matheus → Renato → Otávio → Felipe	Rayssa → Gabriel → Thiago → Matheus → Renato → Otávio → Felipe

Grupo 2: Listagem

Taciana e Gabriel Taciana e Thiago Taciana e Matheus Taciana e Renato Taciana e Otávio Taciana e Felipe	Eduarda e Gabriel Eduarda e Thiago Eduarda e Matheus Eduarda e Renato Eduarda e Otávio Eduarda e Felipe	Catarina e Gabriel Catarina e Thiago Catarina e Matheus Catarina e Renato Catarina e Otávio Catarina e Felipe	Rayssa e Gabriel Rayssa e Thiago Rayssa e Matheus Rayssa e Renato Rayssa e Otávio Rayssa e Felipe

Grupos 1 e 2: PFC
4 (meninas) x 6 (meninos) = 24 possibilidades de casais.

Multiplicação por generalização de possibilidades:
4 x 6 = 24 possibilidades.

Fonte: A autora

No Quadro 12 destacam-se as resoluções para a situação de *produto cartesiano* com três etapas de escolha.

Na árvore de possibilidades são consideradas as três escolhas que são necessárias, permitindo a visualização de que, para cada uma das *quatro* blusas, é necessária a escolha de *duas* saias e, para cada saia, a escolha de *dois* pares de sapato. Na listagem, o que se tem é a enumeração de todas as possibilidades, descrevendo cada uma delas. Na situação com três etapas de escolha, o PFC se dá pela multiplicação dos números dos três conjuntos detalhados no enunciado. Na listagem fica mais evidente a generalização das possibilidades, podendo ser efetuada uma multiplicação das quatro blusas que compõem a primeira escolha vezes as quatro possibilidades para cada blusa inicial (4 x 4).

Quadro 12: Situação de produto cartesiano com três etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

PC 3 etapas: Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca), dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades

Blusa amarela ↗ saia preta → sapato dourado ↘ sapato prateado Blusa amarela ↘ saia branca → sapato dourado ↘ sapato prateado	Blusa rosa ↗ saia preta → sapato dourado ↘ sapato prateado Blusa rosa ↘ saia branca → sapato dourado ↘ sapato prateado
Blusa laranja ↗ saia preta → sapato dourado ↘ sapato prateado Blusa laranja ↘ saia branca → sapato dourado ↘ sapato prateado	Blusa vermelha ↗ saia preta → sapato dourado ↘ sapato prateado Blusa vermelha ↘ saia branca → sapato dourado ↘ sapato prateado

Grupo 2: Listagem

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado Blusa amarela, saia preta e sapato prateado Blusa amarela, saia branca e sapato dourado Blusa amarela, saia branca e sapato prateado	Blusa rosa, saia preta e sapato dourado Blusa rosa, saia preta e sapato prateado Blusa rosa, saia branca e sapato dourado Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa vermelha, saia preta e sapato dourado Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado Blusa vermelha, saia branca e sapato prateado	Blusa laranja, saia preta e sapato dourado Blusa laranja, saia preta e sapato prateado Blusa laranja, saia branca, sapato dourado Blusa laranja, saia branca e sapato prateado

Grupos 1 e 2: PFC
4 x 2 x 2 = 16 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
4 x 4 = 16 possibilidades

Fonte: A autora

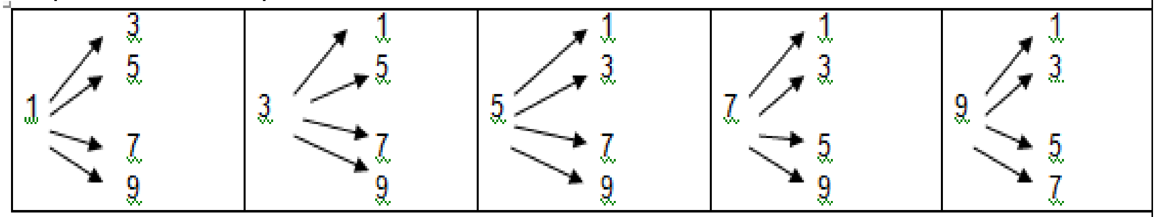
Na situação de arranjo com duas etapas de escolha, é possível perceber, observando o Quadro 13, que para a escrita dos números é necessária a escolha do primeiro algarismo, que pode ser qualquer um dos cinco citados no enunciado. Em seguida é necessária a escolha do segundo algarismo, que pode ser qualquer um dos quatro algarismos ainda não escolhidos na primeira etapa.

Assim, na resolução em árvore de possibilidades é possível perceber que para cada algarismo em primeira escolha, tem-se quatro algarismos possíveis para a segunda escolha. Na resolução em listagem, há essa relação implícita na organização sistemática da enumeração de cada possibilidade, que também pode evidenciar uma generalização das possibilidades. Desse modo, o PFC se caracteriza pela multiplicação do número de possibilidades para cada escolha, que não se encontram explícitos no enunciado, diferente dos problemas de produto cartesiano.

Quadro 13: Situação de arranjo com duas etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Arranjo 2 etapas: De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades



Grupo 2: Listagem

13	31	51	71	91
15	35	53	73	93
17	37	57	75	95
19	39	59	79	97

Grupos 1 e 2: PFC
5 x 4 = 20 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
5 x 4 = 20 possibilidades

Fonte: A autora

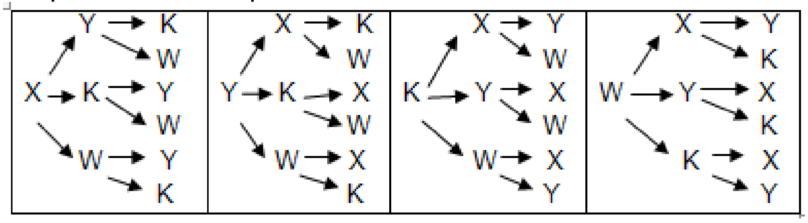
No Quadro 14 é possível visualizar as resoluções para a situação de arranjo com três etapas de escolha. Na árvore de possibilidades tem-se, no primeiro nó, a escolha da primeira letra da placa, sendo possível qualquer uma das *quatro* letras citadas no enunciado. Para a escolha da primeira letra, seguem *três* possibilidades de escolha para a segunda letra e, para cada possibilidade de escolha da segunda letra seguem *duas* possibilidades para a escolha da terceira letra.

Na listagem essa organização está implícita na enumeração de cada uma das possibilidades, sendo a generalização de possibilidades mais evidente, ou seja, para cada uma das *quatro* letras iniciando a listagem, seguem *seis* possibilidades, sendo possível de ser resolvido pela multiplicação dessas quantidades (4 x 6). A passagem para o PFC se dá pela multiplicação das possibilidades para cada etapa de escolha, evidenciado na explicação da árvore de possibilidades (4 x 3 x 2).

Quadro 14: Situação de arranjo com três etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Arranjo 3 etapas: Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades



Grupo 2: Listagem

XYK	YXK	KXY	WXY
XYW	YXW	KXW	WXK
XKY	YKX	KYX	WYX
XKW	YKW	KYW	WYK
XWY	YWX	KWX	WKX
XWK	YWK	KWY	WKY

Grupos 1 e 2: PFC
4 x 3 x 2 = 24 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
4 x 6 = 24 possibilidades

Fonte: A autora

No Quadro 15 nota-se a resolução em árvore de possibilidades e por listagem da situação de permutação com três etapas de escolha. Na resolução em árvore tem-se que, para a primeira pessoa na fila do banco é possível escolher qualquer uma das *três* descritas no enunciado. Para a segunda pessoa da fila, já tendo escolhido uma das três para a primeira posição, restam *duas* possibilidades e para a terceira pessoa da fila, sobra apenas *uma*. Assim, o PFC fica explícito nessa atividade (3 x 2 x 1). Na resolução em listagem a enumeração das possibilidades indica que, para cada uma das *três* pessoas escolhidas como primeira da fila, tem-se *duas* possibilidades, indicando uma generalização de possibilidades, que pode ser indicada por uma multiplicação (3 x 2).

Quadro 15: Situação de permutação com três etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Permutação 3 etapas: De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades

Maria → Luís → Carlos ↘ Carlos → Luís.	Luís → Maria → Carlos ↘ Carlos → Maria	Carlos → Maria → Luís ↘ Luís → Maria

Grupo 2: Listagem

Maria, Luís e Carlos Maria, Carlos e Luís	Luís, Maria e Carlos Luís, Carlos e Maria	Carlos, Maria e Luís Carlos, Luís e Maria

Grupos 1 e 2: PFC
3 x 2 x 1 = 6 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
3 x 2 = 6 possibilidades

Fonte: A autora

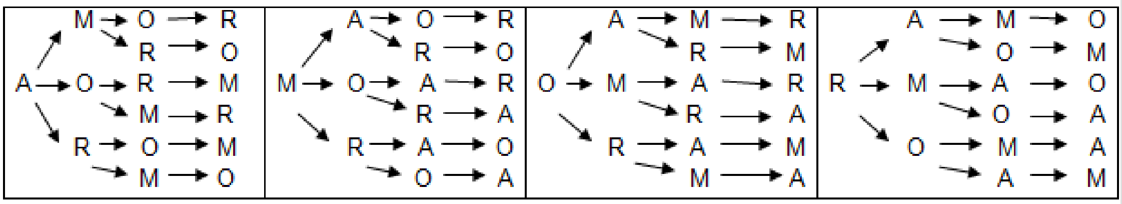
No Quadro 16 é possível observar as diferentes representações utilizadas para resolução da situação de permutação com quatro etapas. Na árvore de possibilidades, podem ser escolhidas qualquer uma das *quatro* letras para a primeira posição, sendo que para a segunda escolha restam *três* letras, para a terceira escolha, *duas* letras e para a quarta escolha, resta apenas *uma* letra. Nesse sentido, se evidencia o PFC, pela multiplicação das possibilidades em cada etapa de escolha. Na listagem, são enumeradas cada uma das palavras possíveis de serem formadas, ficando evidente também a possibilidade de resolução pela generalização das possibilidades, ou seja, para cada uma das *quatro* letras que podem iniciar a palavra, tem-se *seis* possibilidades diferentes, sendo possível realizar uma multiplicação (4 x 6).

Nas situações de combinação, para que fosse possível identificar a necessidade do uso da operação de divisão, além da multiplicação já realizada nos outros tipos de problemas combinatórios, foi decidido, a partir dos resultados do primeiro estudo, o uso de riscos nas possibilidades repetidas – o qual gerou melhor desempenho. Esse procedimento pode auxiliar alunos a perceberem que a ordem dos elementos não forma possibilidades distintas nesse tipo de problema, sendo necessário dividir pelo número de casos iguais.

Quadro 16: Situação de permutação com quatro etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Permutação 4 etapas: Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades



Grupo 2: Listagem

AMOR	MAOR	OAMR	RAMO
AMRO	MARO	OARM	RAOM
AORM	MOAR	OMAR	RMAO
AOMR	MORA	OMRA	RMOA
AROM	MRAO	ORAM	ROMA
ARMO	MROA	ORMA	ROAM

Grupos 1 e 2: PFC
4 x 3 x 2 x 1 = 24 possibilidades.

Multiplicação por generalização de possibilidades:
4 x 6 = 24 possibilidades

Fonte: A autora

No Quadro 17 é possível observar os diferentes tipos de resolução por meio do uso da árvore de possibilidades e da listagem para a situação de combinação com duas etapas de escolha.

Na árvore de possibilidades são escolhidas qualquer uma das cinco pessoas que podem iniciar o aperto de mão, considerando que as outras quatro farão parte da segunda escolha, ou seja, a segunda mão presente na ação. Entretanto, são riscados os casos repetidos, uma vez que não é necessário inverter a ordem dos apertos de mão. Nesse caso, o PFC se dá pela multiplicação das possibilidades para cada etapa de escolha, dividido pela quantidade de casos iguais. Na listagem são enumeradas todas as possibilidades incluindo as repetições para depois riscar os casos repetidos, chegando no PFC. No caso das situações de *combinação*, a generalização das possibilidades acontece pela multiplicação da quantidade de elementos do grupo pela quantidade de possibilidades para um elemento na primeira posição, mas, como a ordem não gera possibilidades distintas, é necessário dividir pelo número de casos repetidos da mesma possibilidade, ou seja, considerando que o aperto de mão dado por Beatriz e Daniel é o mesmo aperto de mão dado por Daniel e Beatriz, este não precisa ser contado duas vezes. E isso também vale para os demais casos. Assim, no total de 20 possibilidades, 10 delas (a metade) está repetida, sendo necessário dividir por dois para que não seja contado o mesmo aperto de mão duas vezes.

Quadro 17: Situação de combinação com duas etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Combinação 2 etapas: Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados? Qual a conta que resolve esse problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades

	→ Daniel		→ ~~Beatriz~~		→ ~~Beatriz~~		→ ~~Beatriz~~		→ ~~Beatriz~~
Beatriz	→ Joana	Daniel	→ Joana	Joana	→ ~~Daniel~~	Carlos	→ ~~Daniel~~	Marina	→ ~~Daniel~~
	→ Carlos		→ Carlos		→ Carlos		→ ~~Joana~~		→ ~~Joana~~
	→ Marina		→ Marina		→ Marina		→ Marina		→ ~~Carlos~~

Grupo 2: Listagem

Beatriz e Daniel	~~Daniel e Beatriz~~	~~Joana e Beatriz~~	~~Carlos e Beatriz~~	~~Marina e Beatriz~~
Beatriz e Joana	Daniel e Joana	~~Joana e Daniel~~	~~Carlos e Daniel~~	~~Marina e Daniel~~
Beatriz e Carlos	Daniel e Carlos	Joana e Carlos	~~Carlos e Joana~~	~~Marina e Joana~~
Beatriz e Marina	Daniel e Marina	Joana e Marina	Carlos e Marina	~~Marina e Carlos~~

Grupos 1 e 2: PFC
$5 \times 4 \div 2 = 10$ possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
$5 \times 4 = 20$ $\quad$ $20 \div 2 = 10$

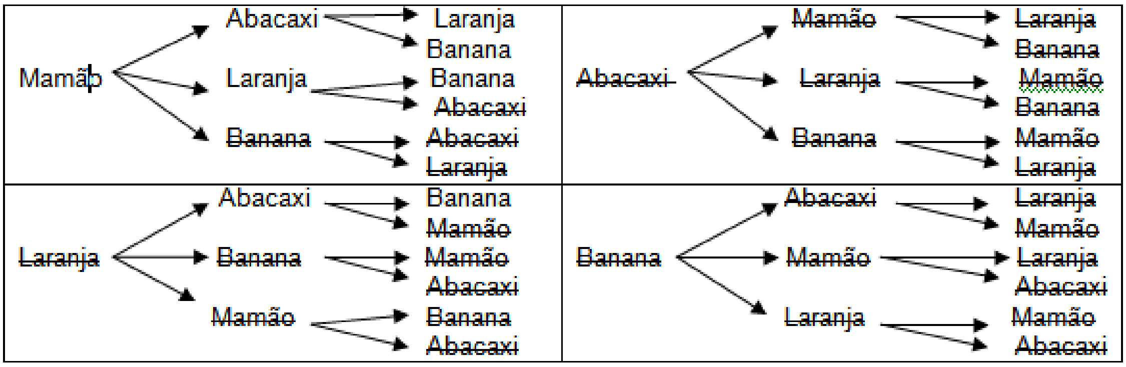
Fonte: A autora

No Quadro 18 é possível visualizar as resoluções para a situação de combinação com três etapas de escolha.

Quadro 18: Situação de combinação com três etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem e PFC.

Combinação 3 etapas: Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas? Qual a conta que resolve este problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades



Grupo 2: Listagem

Mamão, abacaxi e laranja Mamão abacaxi e banana Mamão, laranja e banana ~~Mamão, laranja e abacaxi~~ ~~Mamão, banana e abacaxi~~ ~~Mamão, banana e laranja~~	~~Abacaxi, mamão e laranja~~ ~~Abacaxi, mamão e banana~~ ~~Abacaxi, laranja e mamão~~ ~~Abacaxi, laranja e banana~~ ~~Abacaxi, banana e mamão~~ ~~Abacaxi, banana e laranja~~
Laranja, abacaxi e banana ~~Laranja, abacaxi e mamão~~ ~~Laranja, banana e mamão~~ ~~Laranja, banana e abacaxi~~ ~~Laranja, mamão e banana~~ ~~Laranja, mamão e abacaxi~~	~~Banana, abacaxi e laranja~~ ~~Banana, abacaxi e mamão~~ ~~Banana, mamão e laranja~~ ~~Banana, mamão e abacaxi~~ ~~Banana, laranja e mamão~~ ~~Banana, laranja e abacaxi~~

Grupos 1 e 2: PFC
4 x 3 x 2 ÷ 6 = 4 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:
4 x 6 = 24 24 ÷ 6 = 4

Fonte: A autora

Na listagem das possibilidades, são listadas todas as possibilidades com cada uma das frutas iniciando a enumeração e, em seguida, são riscados os casos repetidos. Na árvore de possibilidades são escolhidas qualquer uma das *quatro* frutas para a primeira escolha. Na segunda escolha restam *três* frutas e para a terceira escolha restam *duas* frutas. Em seguida são riscados os casos repetidos, uma vez que a ordem de escolha das frutas não gera novas possibilidades. Nesse caso, o PFC se dá pela multiplicação das possibilidades em cada etapa de escolha, dividido pelo número de vezes que a mesma escolha se repete. Na situação de *combinação* com três etapas de escolha a generalização de possibilidades acontece pela multiplicação da quantidade de elementos do conjunto dado pela quantidade de possibilidades de um elemento na primeira posição, dividido pelo número de repetições da mesma possibilidade, isso porque cada uma das quatro possibilidades apresenta seis maneiras diferentes de ordenação (por exemplo a possibilidade – mamão, abacaxi e banana que pode ser escrita nessa ordem ou nas ordens: mamão, banana e abacaxi; abacaxi, mamão e banana; abacaxi, banana e mamão; banana, mamão e abacaxi; banana, abacaxi e mamão) e, como nesse tipo de situação a ordem não importa, é necessário dividir pelo número de repetições. Essa discussão era realizada durante a entrevista para compreender a necessidade de divisão na expressão numérica dessa situação.

A análise dos resultados se deu de forma quantitativa e qualitativa. Para uma análise, prioritariamente quantitativa, foi utilizado o software de análise estatística Statistical Package for the Social Sciences – SPSS. Para a análise qualitativa foram examinadas as conversões e os tratamentos das representações utilizados pelos alunos nas diferentes etapas da pesquisa.

Acredita-se que, ambos os modos de intervenção, sendo ele por meio da árvore de possibilidades ou pela listagem, provocariam avanços nos raciocínios combinatórios dos alunos, mas acreditava-se em maior avanço do grupo que usou as árvores, principalmente com relação à percepção do raciocínio multiplicativo implícito nas situações combinatórias.

As intervenções realizadas tencionam abordar a ideia do trabalho por meio da coordenação de diferentes registros, pois, essa tarefa é apontada por Duval (2011) como fundamental para que haja o desenvolvimento dos conhecimentos sobre um determinado conceito e, com isso, poder fazer com que não se confunda o objeto com sua representação.

Além disso, também foi objetivo identificar a congruência, ou não, entre esses registros, observando o desempenho dos alunos antes e após as intervenções nos diferentes grupos, visando analisar como esses desempenhos, nos diferentes grupos, podem indicar qual das representações intermediárias utilizadas possuem maior congruência com a expressão numérica, de modo que seja possível perceber qual representação implica numa conversão mais transparente entre o registro de partida e o registro de chegada. Nesse caso, a análise se deu de forma quantitativa, com o uso do software SPSS. Assim, pretendia-se identificar como melhor incentivar desenvolvimento do raciocínio combinatório, de modo que fossem reconhecidas diferentes representações para a resolução de problemas combinatórios.

5 RESULTADOS DO ESTUDO 1: APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO

Neste capítulo são discutidos os resultados do Estudo 1. Assim, é apresentada a sistematização e discussão de dados quantitativos, bem como as análises de protocolos de resolução de alunos. A primeira seção aborda a identificação de conversões pelos alunos, destacando os diferentes tipos de conversões apresentadas em distintos registros de representações, bem como os diferentes tipos de testes resolvidos pelos alunos. Na segunda seção tem-se a discussão sobre a identificação de conversões levando em consideração os diferentes tipos de problemas combinatórios. Em todos os testes os alunos precisavam justificar as conversões realizadas e na terceira seção deste capítulo são analisadas essas justificativas. Na quarta e última seção são apresentados os resultados da entrevista realizada com quatro alunos, de modo que é discutido como eles explicam a identificação das conversões apresentadas.

5.1 IDENTIFICANDO DIFERENTES CONVERSÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Como anteriormente descrito no capítulo de Método, para o primeiro estudo foi elaborado um teste de sondagem, no qual era solicitado que 16 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental identificassem as conversões realizadas em três registros de representações semióticas diferentes, de modo que fosse possível analisar se e como esses alunos coordenavam diferentes representações de um mesmo objeto, ou seja, de uma mesma situação combinatória. Em quatro situações, os três registros envolvidos eram: linguagem natural, listagem e expressão numérica; e nas outras quatro situações os três registros eram: linguagem natural, árvore de possibilidades e expressão numérica.

Na Tabela 1 pode-se observar a quantidade de identificações corretas para as conversões solicitadas nos diferentes tipos de teste (Teste 1 – problema de *combinação* desconsiderando os casos repetidos; Teste 2 – problema de *combinação* com a apresentação dos casos repetidos riscados), sendo a primeira conversão de linguagem natural para listagem ou árvore e a segunda conversão de listagem ou árvore para a expressão numérica. O primeiro tipo de teste foi respondido por oito alunos e o segundo tipo pelos oito alunos restantes, sendo que em cada subtipo do teste quatro alunos responderam iniciando com árvores e os outros quatro iniciando por listagem de possibilidades. Assim, para o primeiro teste eram possíveis 32 acertos, sendo 4 em cada tipo de problema combinatório. O mesmo cenário acontece no segundo tipo de teste. Somando os dois tipos de teste, seriam possíveis 64 acertos.

Tabela 1: Identificações corretas em cada conversão por tipo de problema combinatório (de possíveis 4 acertos) e por tipo de teste (de possíveis 32 acertos).

Tipo de teste	**Tipo de problema**	**Conversão 1**		**Conversão 2**	
		LN → L	LN → A	L → EN	A → EN
1.1 **(Teste sem casos repetidos, primeiro listagens e depois árvores – 4 alunos)**	PC	3	2	0	0
	C	2	0	0	0
	A	1	2	0	0
	P	3	2	1	1
1.2 **(Teste sem casos repetidos, primeiro árvores e depois listagens – 4 alunos)**	PC	0	2	0	2
	C	2	1	1	0
	A	1	4	0	0
	P	2	1	0	0
Total Teste 1		**14/32**	**14/32**	**2/32**	**3/32**
2.1 **(Teste com casos repetidos riscados, primeiro listagens e depois árvores – 4 alunos)**	PC	2	1	2	1
	C	4	3	1	0
	A	3	2	0	3
	P	3	3	2	3
2.2 **(Teste com casos repetidos riscados, primeiro árvores e depois listagens – 4 alunos)**	PC	2	2	2	2
	C	1	2	2	2
	A	3	2	2	1
	P	4	4	3	1
Total Teste 2		**22/32**	**19/32**	**14/32**	**13/32**
Total (Teste 1 + Teste 2)		**36/64**	**33/64**	**16/64**	**16/64**

LN: Língua Natural; L: Listagem; A: Árvore de possibilidades; EN: Expressões Numéricas
PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Observando a Tabela 1, é possível perceber que identificar qual listagem ou qual árvore de possibilidades representa o enunciado registrado em língua natural foi mais fácil para os estudantes, em comparação com a segunda conversão solicitada – da listagem ou da árvore para uma expressão numérica correspondente. Destaca-se que é possível que os alunos tenham realizado uma conversão direta do enunciado para a expressão numérica, e, acredita-se que os alunos que realizaram essa conversão, provavelmente apresentaram maior dificuldade na atividade. Na conversão de língua natural para listagem 36 itens (de possíveis 64) foram respondidos corretamente e, na conversão de língua natural para árvore foram 33 itens. Já nas segundas conversões realizadas, o acerto caiu cerca de 50% (16 itens respondidos corretamente, tanto a partir de listagens, quanto a partir de árvores).

Segundo Duval (2009), a identificação de um objeto matemático a partir da diversidade de registros de representação semiótica indica que há apreensão conceitual desse objeto. Cada registro, seja ele em língua natural, diagramas ou simbólico matemático se configura como “[...] sistemas de representação muito diferentes entre si e que colocam, cada um, questões de aprendizagens específicas” (p. 38).

Assim, nos resultados observados, há diferentes níveis de identificação das situações combinatórias apresentadas em língua natural, árvores de possibilidades ou listagens e expressões numéricas. Da linguagem natural para a árvore ou para a listagem, a identificação pode ter sido facilitada, uma vez que há correspondência de cada elemento enunciado na linguagem natural para o seu registro nas representações intermediárias. Já na identificação desses elementos descritos em árvores ou listagens, para o descrito nas expressões numéricas, é necessário identificar nos símbolos numéricos os elementos presentes nas representações intermediárias, o que pode indicar a maior dificuldade em identificar o conceito nessa representação formal da situação.

A conversão de língua natural para listagem e da língua natural para árvore de possibilidades praticamente não apresentou diferenças o que, de certo modo, é surpreendente, pois implica que as crianças entenderam igualmente bem o registro em lista e em árvore. Esse resultado pode levar à suposição de que, possivelmente, os alunos desta pesquisa já trabalharam antes com árvores de possibilidades, uma vez que estudos anteriores (AZEVEDO, 2013) indicam que essa representação não é utilizada de forma espontânea, sendo necessária instrução específica para as crianças entenderem como usar esse modo de representar situações combinatórias. Dessa forma, não houve diferenças em desempenho na identificação da conversão de língua natural para árvore ou para listagem, o que parece indicar que há congruência entre árvores e listagens sistemáticas, uma vez que para cada elemento presente na listagem há um correspondente na árvore de possibilidades (critério de correspondência semântica). O mesmo não ocorre entre listagens/árvores e a expressão numérica, uma vez que, na língua natural todos os elementos dos conjuntos estavam presentes nos enunciados e os mesmos elementos se fizeram presentes tanto nas listagens quanto nas árvores, entretanto, essa mesma transparência (presença de todos os elementos) não está presente nas expressões numéricas.

A dificuldade apresentada na segunda conversão (de árvore de possibilidades ou de listagens para expressões numéricas) confirma a hipótese de que identificar a expressão numérica que responde uma dada situação combinatória é uma tarefa muito difícil para os estudantes de anos iniciais. Ressalta-se que a dificuldade identificada para esta segunda conversão se deu tanto a partir de árvores, quanto de listagens.

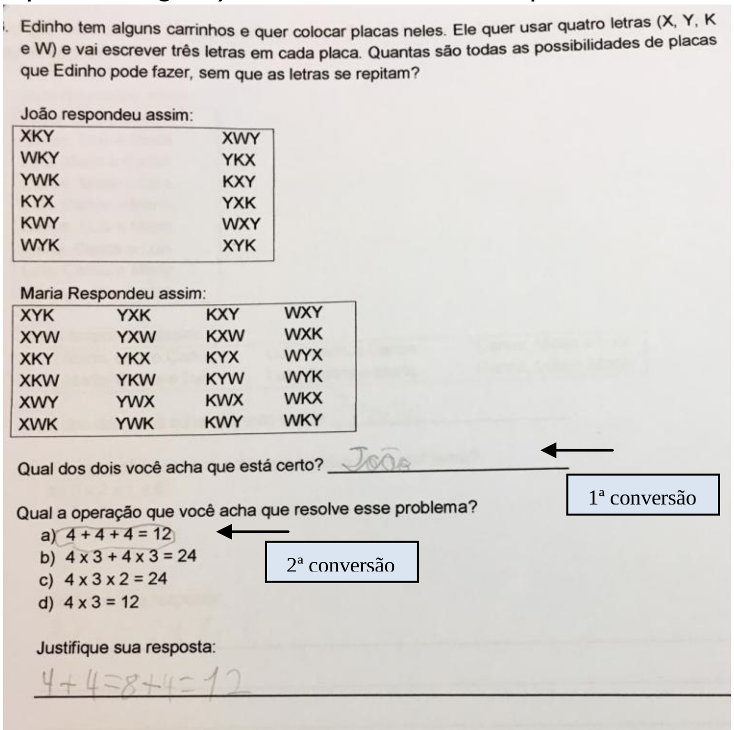
Segundo Borba, Azevedo e Bittar (2016) alguns livros didáticos, desde os anos iniciais, já propõem a conversão para a expressão numérica, mas apenas em situações de *produto cartesiano*. Ressalta-se que esse tipo de conversão pode ser possível nesse nível de ensino, mas não deve ser considerado como algo que os alunos precisem reconhecer de imediato. Assim, a hipótese deste estudo que este tipo de conversão seria uma atividade mais complexa se confirma em função dos critérios de congruência para a identificação de conversões realizadas.

Ainda na Tabela 1, é possível observar que para o Teste 1 houve menor número de acertos nas conversões solicitadas quando comparado com o Teste 2, sendo para a primeira conversão 28 respostas corretas no Teste 1 (14 para a conversão de língua natural para a listagem + 14 para a conversão de língua natural para a árvore) e, no Teste 2, 41 itens respondidos corretamente (22 para a conversão de língua natural para a listagem + 19 para a conversão de língua natural para a árvore). Já para a segunda conversão o Teste 1 apresentou apenas cinco casos (2 para a conversão de língua natural para a listagem + 3 para a conversão de língua natural para a árvore) com resposta correta, e no Teste 2 em 27 itens houve resposta correta (14 para a conversão de língua natural para a listagem + 13 para a conversão de língua natural para a árvore). A única diferença destes testes se caracterizava pelas situações de *combinação* em que eram apresentados os casos repetidos desconsiderados – Teste 1, ou casos repetidos riscados – Teste 2. Nessas situações, para o Teste 1, apenas em um caso houve resposta correta para a segunda conversão, enquanto que para o Teste 2 em cinco itens de *combinação* houve resposta correta para a conversão para a expressão numérica. A dificuldade nessa conversão para esse tipo situação se dá em função do fato que as *combinações* requerem forma de registro diferenciado e as maneiras de registrar os casos repetidos têm influência no modo como os estudantes identificam as *conversões*. Isso reforça a hipótese que as *conversões* e, em particular, a identificação de *conversões* são influenciadas pelas diferentes *situações combinatórias*. Assim, destaca-se a importância da análise envolvendo as duas teorias base dessa pesquisa, a TCC e a TRRS.

Nas respostas dadas pelos estudantes, é possível verificar que há muitas dificuldades em reconhecer, principalmente, a expressão numérica envolvida na resolução do problema, porém, os alunos também tiveram algumas dificuldades em identificar a árvore de possibilidades e a listagem, correspondentes à resolução da situação combinatória apresentada em linguagem natural. Esse é o caso da resolução retratada na Figura 2 na qual um aluno diante de uma situação de *arranjo* não consegue identificar qual a listagem que corresponde ao problema apresentado em linguagem natural. Destaca-se que o aluno marcou como opção correta a resposta de 'João', que não se utilizou de uma listagem sistemática e, por isso, não esgotou todas as possibilidades.

Em algumas situações, os estudantes indicavam corretamente a árvore ou a listagem que respondia à situação correspondente em língua natural, mas escolhiam a alternativa que resultava em outro número de possibilidades, o que se configura numa inconsistência, uma vez que se a árvore ou a listagem apresentava seis possibilidades, por exemplo, a resposta dada em expressão numérica também deveria resultar em seis possibilidades. Nesses casos, não se pode afirmar se os estudantes estão conscientes de qual árvore de possibilidades ou qual listagem, de fato, representa a solução da situação. Um exemplo de aluno que identificou corretamente a primeira conversão, mas que assinalou um número diferente de possibilidades pode ser visto na Figura 3 a seguir.

Figura 2: Situação de *arranjo* na qual a identificação da primeira conversão (de linguagem natural para listagem) está incorreta, dada pelo Aluno 8.



Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

João respondeu assim:

XKY	XWY
WKY	YKX
YWK	KXY
KYX	YXK
KWY	WXY
WYK	XYK

Maria Respondeu assim:

XYK	YXK	KXY	WXY
XYW	YXW	KXW	WXK
XKY	YKX	KYX	WYX
XKW	YKW	KYW	WYK
XWY	YWX	KWX	WKX
XWK	YWK	KWY	WKY

Qual dos dois você acha que está certo? João

1ª conversão

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 4 + 4 + 4 = 12
b) 4 x 3 + 4 x 3 = 24
c) 4 x 3 x 2 = 24
d) 4 x 3 = 12

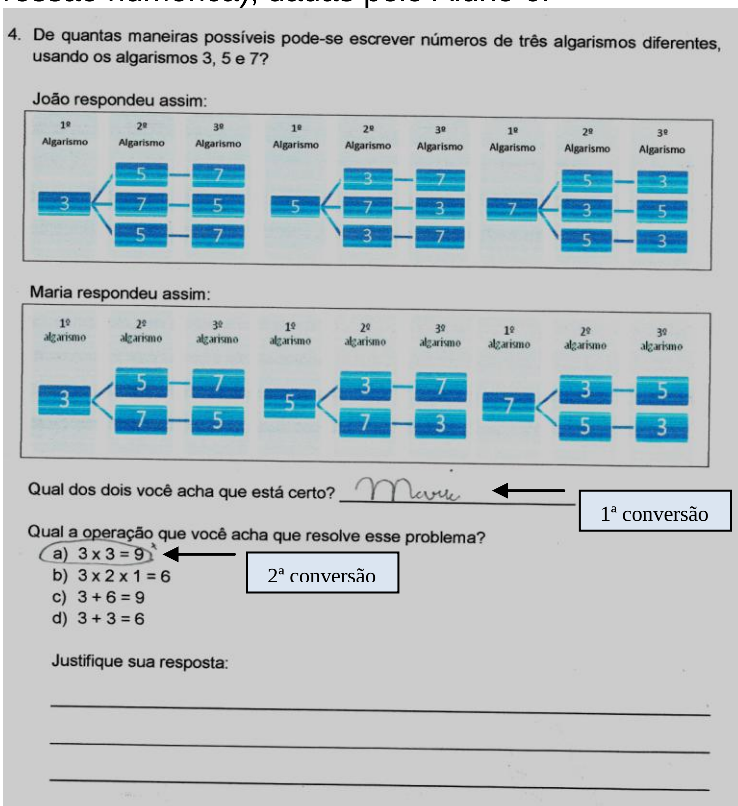
2ª conversão

Justifique sua resposta:

4+4=8+4=12

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Figura 3: Situação de *permutação* na qual a identificação da primeira conversão (linguagem natural para árvore) está correta e da segunda conversão incorreta (árvore para expressão numérica), dadas pelo Aluno 6.



4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de três algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5 e 7?

João respondeu assim:

Maria respondeu assim:

Qual dos dois você acha que está certo? Maria

1ª conversão

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 3 x 3 = 9
b) 3 x 2 x 1 = 6
c) 3 + 6 = 9
d) 3 + 3 = 6

2ª conversão

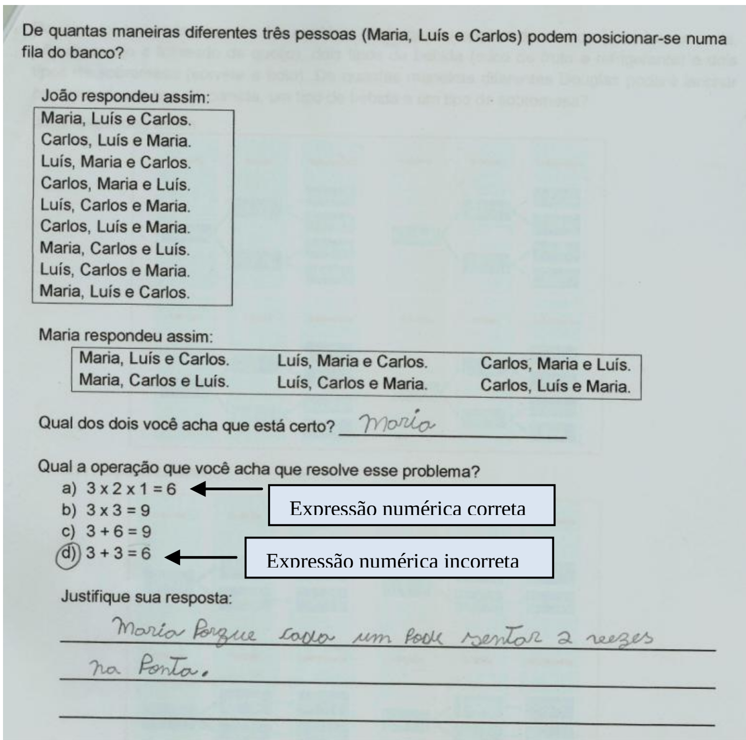
Justifique sua resposta:

Fonte: Montenegro, Borba e Bittar (2016, p. 8)

Nesse caso, não se pode afirmar se o aluno fez a identificação do *tratamento* adequado da árvore de possibilidades, pois, o resultado desse tratamento seriam seis possibilidades, e o aluno, na segunda conversão, indica que a resposta seriam nove possibilidades, a partir de uma multiplicação incorreta, uma vez que, o aluno pode ter feito a conversão do enunciado diretamente para a expressão numérica e não utilizou a árvore como intermediária. Assim, a identificação correta da conversão da linguagem natural para árvore não foi suficiente para identificar a expressão numérica correspondente.

A dificuldade em perceber a expressão numérica correta também pode ser visualizada no exemplo da Figura 4. Neste caso, o estudante identificou a listagem correta para a resolução do problema de *permutação*, justificou a resposta de modo que demonstrou o entendimento da situação, entretanto, identificou a operação errada. Isso reforça a hipótese discutida nesse estudo de que a identificação da expressão numérica que responde as situações combinatórias é muito difícil para alunos dos anos iniciais e não pode ser tratado como uma atividade trivial – como ocorre em livros didáticos analisados por Borba, Azevedo e Bittar (2016a e 2016b).

Figura 4: Resposta correta do Aluno 5 para a primeira conversão com justificativa correta para a solução de problema de *permutação* e com a segunda conversão incorreta.


De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

João respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.
Carlos, Luís e Maria.
Luís, Maria e Carlos.
Carlos, Maria e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Carlos, Luís e Maria.
Maria, Carlos e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Maria, Luís e Carlos.

Maria respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Qual dos dois você acha que está certo? Maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 3 x 2 x 1 = 6
b) 3 x 3 = 9
c) 3 + 6 = 9
d) 3 + 3 = 6

Expressão numérica correta

Expressão numérica incorreta

Justifique sua resposta:

Maria Porque cada um Pode sentar 2 veezes na Ponta.

Fonte: Montenegro, Borba e Bittar (2016, p. 9)

Como indica Duval (2011), “Para reconhecer quando duas representações semióticas de naturezas diferentes representam um mesmo objeto, é preciso poder colocar em correspondência as unidades de sentido entre os conteúdos respectivos das duas representações” (p. 66-67). Assim, para a conceitualização da Combinatória é necessário corresponder os diferentes registros de representação, e, os estudantes necessitam, ainda, reconhecer nas expressões numéricas a solução de situações combinatórias variadas.

5.2 IDENTIFICANDO CONVERSÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS EM DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS.

A Tabela 2 traz os dados quantitativos em relação à conversão realizada por tipo de problema. Nesta tabela em cada tipo de problema, para cada conversão, era possível chegar em 16 acertos, totalizando 64 acertos possíveis em cada tipo de problema, para cada conversão.

A análise dessa tabela permite reafirmar que as conversões e a identificação das conversões não apresentam os mesmos níveis de dificuldade para as distintas situações combinatórias. Assim, as diferentes *propriedades* e *relações* envolvidas nas distintas *situações combinatórias* influenciam na identificação de conversões de representações realizadas.

Na Tabela 2 é possível notar que, quantitativamente, nos problemas de *permutação* houve maior facilidade em identificar a listagem ou a árvore de possibilidades que resolvia o problema, assim como, em identificar a expressão numérica. Esse resultado difere dos apresentados em estudos anteriores, que afirmam que as situações de *produto cartesiano* são mais fáceis, mas, em tais estudos (PESSOA; BORBA, 2009) não foi controlado o número de etapas de escolha, comparando-se, por exemplo, *produtos cartesianos* de duas etapas de escolha com *permutações* de três etapas. Assim, o presente estudo reforça os resultados de Vega (2014), indicando que as situações de *produto cartesiano* de três etapas são mais difíceis que as *permutações* de três etapas.

Na segunda identificação de conversão, em 50% das situações em que havia acontecido uma identificação correta na primeira conversão (12 de língua natural para listagem + 10 de língua natural para árvore = 22), permaneceu correta a identificação da expressão numérica correspondente (6 de língua natural para listagem + 5 de língua natural para árvore = 11), isso porque diminuiu pela metade a quantidade de acertos da primeira conversão, em relação à segunda.

Tabela 2: Identificações corretas (de possíveis 16 acertos) em cada conversão por tipo de problema combinatório

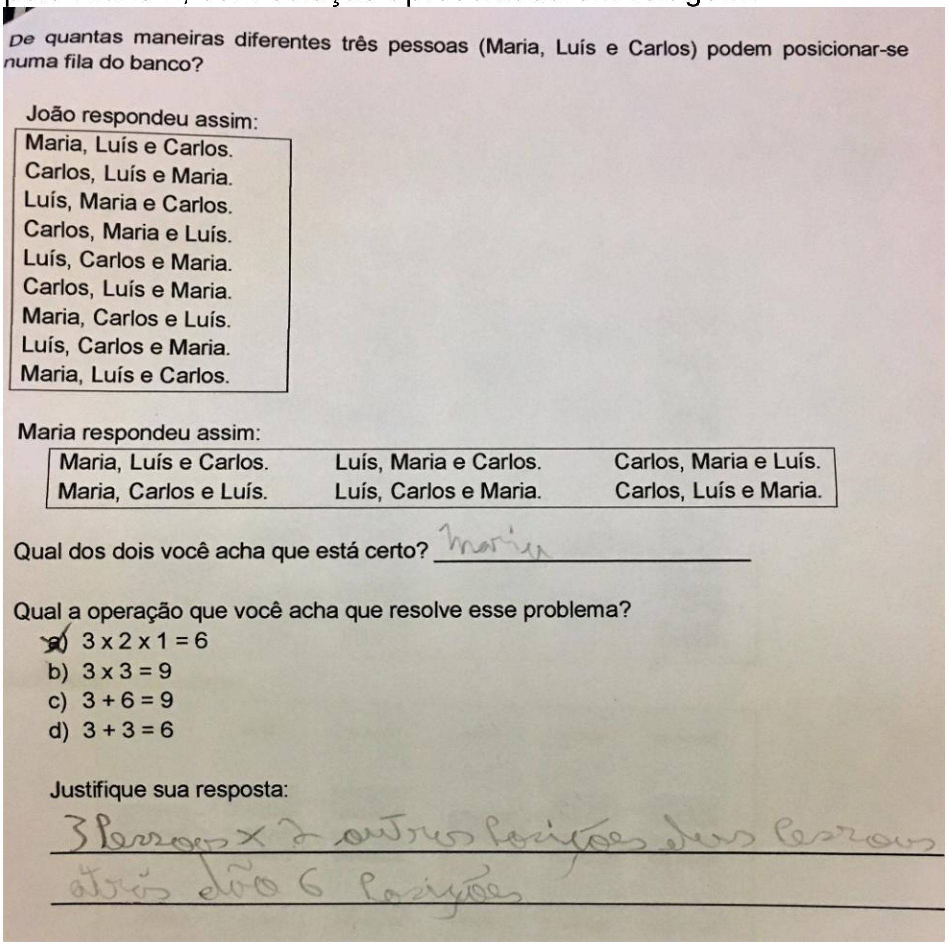
Tipo de problema	Conversão 1			Conversão 2		
	LN → L	LN → A	**Total**	L → EN	A → EN	**Total**
PC	7	7	**14**	4	5	**9**
C	9	6	**15**	4	2	**6**
A	8	10	**18**	2	4	**6**
P	12	10	**22**	6	5	**11**
Total	**36/64**	**33/64**	**69/128**	**16/64**	**16/64**	**32/128**

LN: Língua Natural; L: Listagem; A: Árvore de possibilidades; EN: Expressões Numéricas
PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: Autoras mediante pesquisa.

As situações de *permutação* foram as que apresentaram maior número de justificativas corretas. Nessas situações verificaram-se sete casos com justificativas coerentes para a escolha da expressão numérica que resolve o problema. Uma das justificativas coerentes pode ser observada na Figura 5.

No problema, que solicitava a determinação do número de possibilidades de três pessoas se posicionarem numa fila, o aluno respondeu que são “3 pessoas x 2 outras posições das pessoas atrás dão 6 posições”, ou seja, são três pessoas para se posicionar numa fila sendo que quando uma está em primeiro lugar da fila as outras duas pessoas ocupam ora o segundo, ora o terceiro lugar, assim, são duas possibilidades para cada um ocupando a primeira posição da fila. Com essa justificativa, é possível perceber que o aluno em questão percebeu o princípio multiplicativo envolvido no problema e coordenou de forma satisfatória os três registros de representações apresentados na situação. O mesmo não aconteceu para as situações de *arranjo*, pois, houve uma boa quantidade de identificações corretas para a primeira conversão (8 de língua natural para listagem + 10 de língua natural para árvore = 18), entretanto, para a segunda conversão apenas em 6 casos (2 de língua natural para listagem + 4 de língua natural para árvore) houve percepção da expressão numérica que correspondia à listagem ou árvore.

Figura 5: Situação de *permutação* respondida corretamente e com justificativa coerente pelo Aluno 2, com solução apresentada em listagem.


De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

João respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.
Carlos, Luís e Maria.
Luís, Maria e Carlos.
Carlos, Maria e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Carlos, Luís e Maria.
Maria, Carlos e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Maria, Luís e Carlos.

Maria respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Qual dos dois você acha que está certo? Maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 3 x 2 x 1 = 6
b) 3 x 3 = 9
c) 3 + 6 = 9
d) 3 + 3 = 6

Justifique sua resposta:

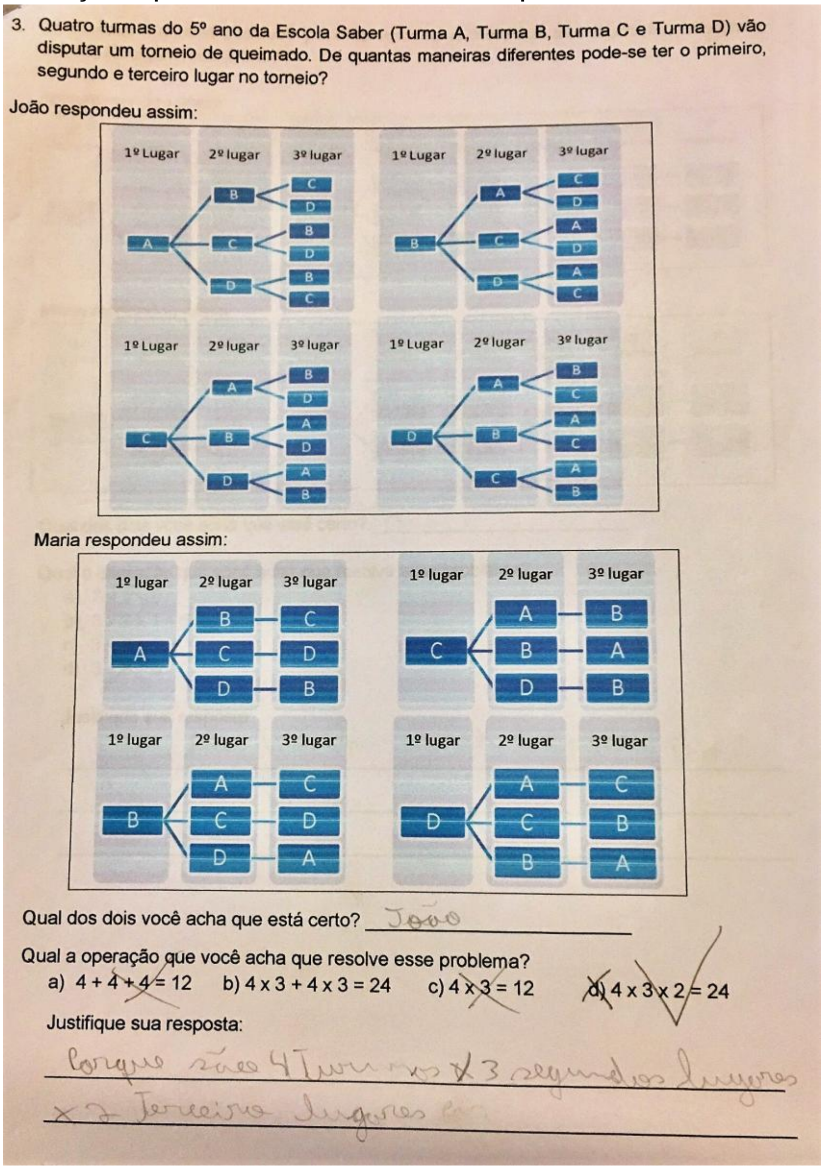
3 Pessoas x 2 outras posições dos pessoas atrás dão 6 posições

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Além disso, nas situações de *arranjo*, em apenas dois casos foram identificadas justificativas coerentes para a escolha da expressão numérica que corresponde à solução correta. A seguir é possível observar na Figura 6 um exemplo de justificativa correta para a situação de *arranjo*

Neste exemplo, de determinação de três lugares (1º, 2º e 3º) dentre quatro turmas, a criança responde que são “4 turmas x 3 segundos lugares x 2 terceiros lugares”. Entende-se que a criança percebeu que qualquer uma das quatro turmas pode ocupar o primeiro lugar, restando três turmas para o segundo lugar e duas turmas para o terceiro lugar, sendo necessário efetuar uma multiplicação entre os fatores.

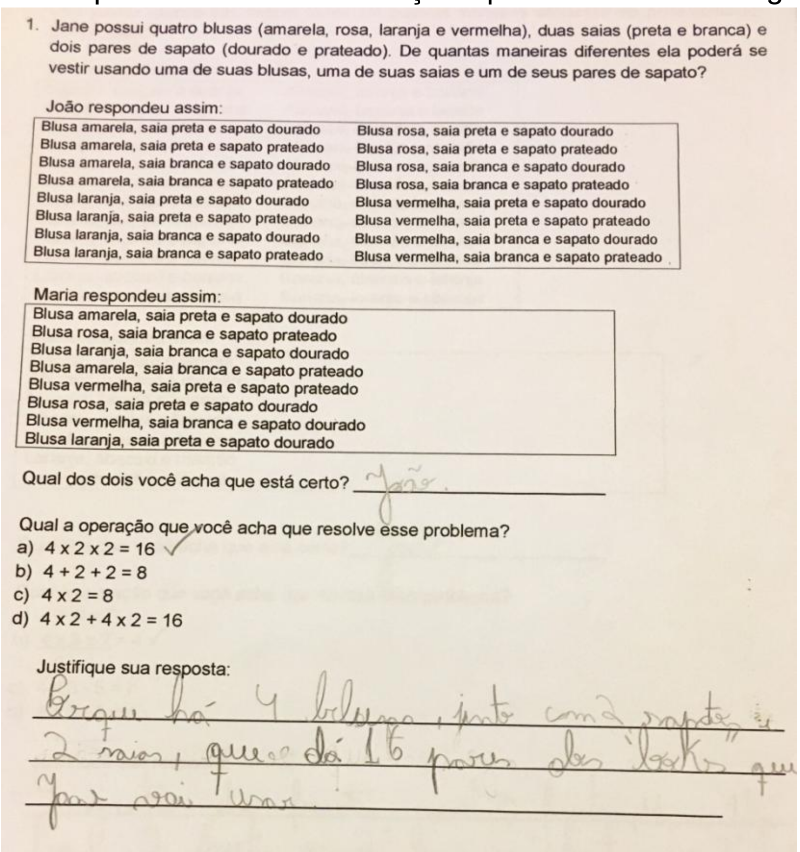
Figura 6: Situação de *arranjo* respondida corretamente, com justificativa coerente pelo Aluno 2 com solução apresentada em árvore de possibilidades.



Fonte: Autora mediante pesquisa.

Nos problemas de *produto cartesiano* houve menor número de acertos para a primeira conversão (7 de língua natural para listagem + 7 de língua natural para árvore = 14), quando comparado com *permutação* e *arranjo*, mas, apesar disso, em mais da metade das situações com identificação correta para a primeira conversão, permaneceu correta também para a segunda (4 de língua natural para listagem + 5 de língua natural para árvore = 9), isso porque na primeira se tinha 14 acertos e na segunda houve 9 acertos. Nesse tipo de problema, em cinco casos foram identificadas justificativas coerentes para a escolha da expressão numérica que responde à situação de *produto cartesiano*. A seguir é possível observar um exemplo na Figura 7, na qual se pede o número total de maneiras de se vestir com quatro blusas, duas saias e dois pares de sapatos. Neste exemplo, a criança responde: “Porque há 4 blusas, junto com 2 sapatos e 2 saias, que dá 16 pares obs ‘looks’ que Jane vai usar”. Nessa situação entende-se que, apesar da criança utilizar o termo “junto”, ela percebe a necessidade da multiplicação entre os fatores, pois é necessário multiplicar o número de blusas pelos números de sapatos e de saias.

Figura 7: Situações de *produto cartesiano* respondidas corretamente e com justificativa coerente pelo Aluno 1 com solução apresentada em listagem.


1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

João respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado	Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa amarela, saia preta e sapato prateado	Blusa rosa, saia preta e sapato prateado
Blusa amarela, saia branca e sapato dourado	Blusa rosa, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado	Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado	Blusa vermelha, saia preta e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato prateado	Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado	Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia branca e sapato prateado	Blusa vermelha, saia branca e sapato prateado

Maria respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado
Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado
Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado

Qual dos dois você acha que está certo? João

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?
a) 4 x 2 x 2 = 16 ✓
b) 4 + 2 + 2 = 8
c) 4 x 2 = 8
d) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

Justifique sua resposta:
Porque há 4 blusas, junto com 2 sapatos e 2 saias, que dá 16 pares obs 'looks' que Jane vai usar.

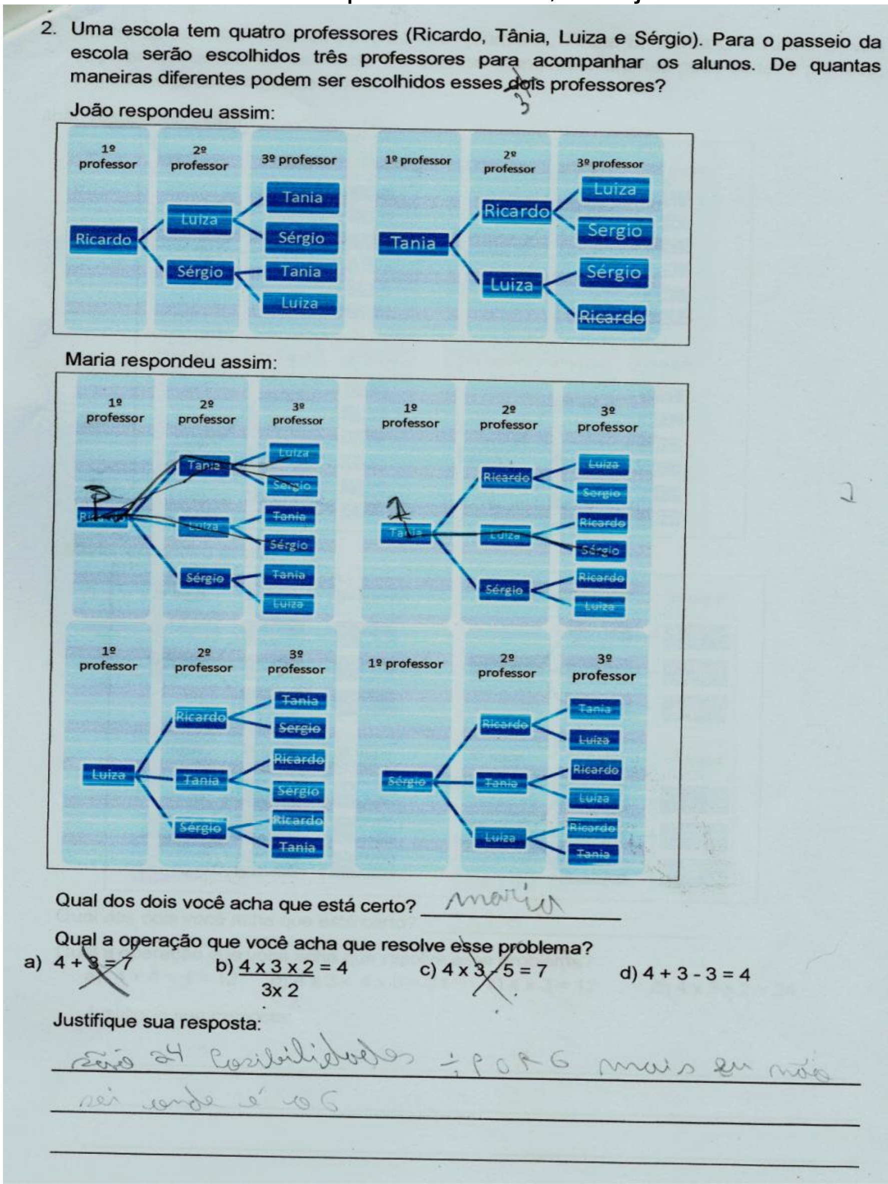
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Sobre os problemas combinatórios com situação de *combinação*, os dados quantitativos mostram que, para a primeira conversão, (9 de língua natural para listagem + 6 de língua natural para árvore = 15) houve um bom número de identificações, mostrando que a dificuldade não está relacionada com o fato de não perceber a listagem ou a árvore, mas em identificar a expressão numérica correspondente, pois em apenas 6 casos (4 de língua natural para listagem + 2 de língua natural para árvore) permaneceu a identificação correta para esta segunda conversão. Assim, em algumas situações, os alunos identificavam a primeira conversão, mas, muitas vezes apontavam a expressão numérica errada, indicando que a dificuldade não necessariamente seja compreender *combinações*, ou em como representá-las, mas como entender que na expressão numérica de uma *combinação* é necessário registrar que os casos repetidos devem ser contados apenas uma vez – expresso na divisão pelo número de casos repetidos. Assim, ressalta-se a maior dificuldade dos alunos com a identificação de conversões em situações de *combinação*, sendo possível destacar a importância do olhar conjunto para as representações, em suas três atividades cognitivas fundamentais: *identificação*, *tratamento* e *conversão*, bem como para as *situações* e seus *invariantes*.

Confirmando a segunda hipótese, houve baixo índice de apresentação de uma justificativa correta nas situações de *combinação*. E, além da situação de combinação, foi notado que nos problemas de *arranjo* os alunos também apresentaram dificuldade para justificar a expressão numérica. Nas situações de *arranjo*, apenas duas justificativas coerentes, foram apresentadas por alunos diferentes. Já na situação de *combinação* houve apenas uma justificativa correta. Assim, apenas um aluno conseguiu justificar de maneira coerente a expressão numérica necessária para responder a situação (com a divisão pelos casos repetidos), cujas respostas se pode observar nas Figuras 8A e 8B, apesar dos outros cinco terem marcado a alternativa correta.

Os alunos que marcaram a alternativa correta, mas não conseguiram justificar sua resposta parecem ter percebido a natureza multiplicativa da situação, pois escolheram a alternativa que envolve essa estrutura ao invés da alternativa aditiva. Na Figura 8 é possível visualizar que o aluno percebe essa característica pois ele corta as alternativas aditivas e depois escolhe a opção correta para a resposta da situação.

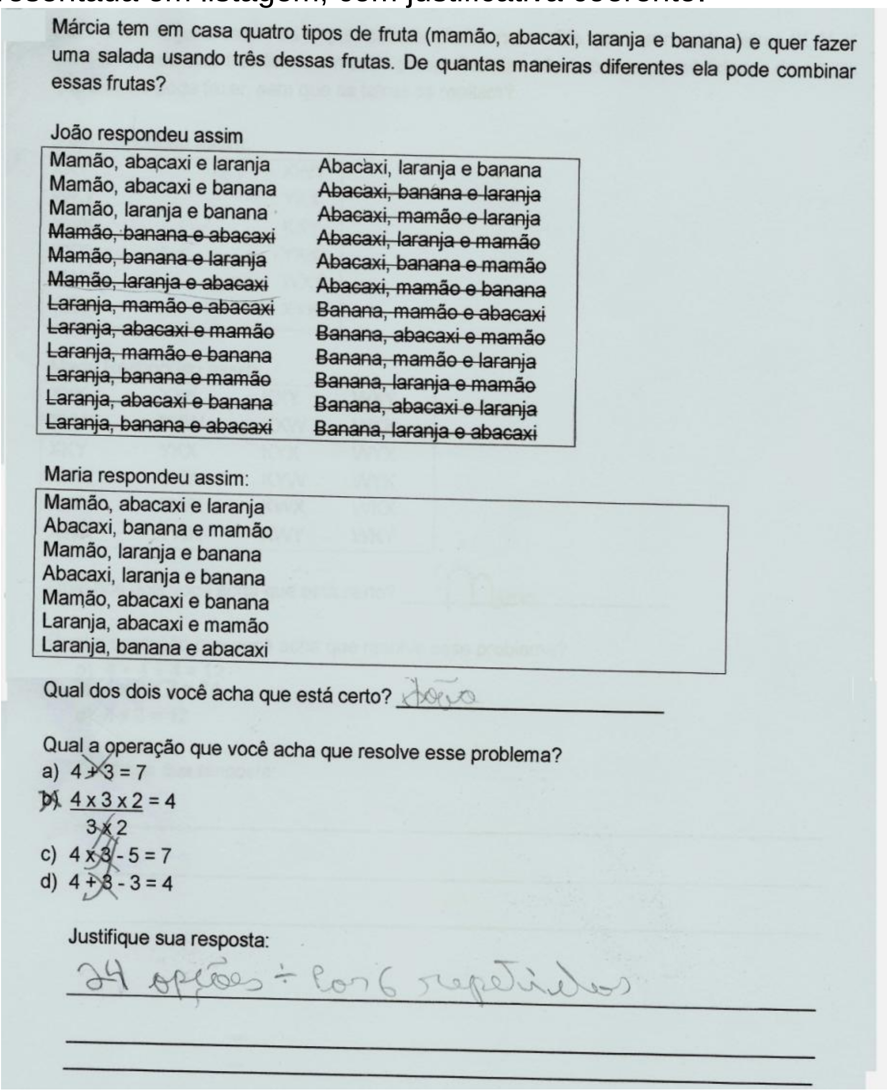
Figura 8A: Situação de *combinação* respondida corretamente pelo Aluno 2 com solução apresentada em árvore de possibilidades, com justificativa incompleta.



Fonte: Montenegro, Borba e Bittar (2016).

O Teste 2, no qual os problemas de *combinação* foram apresentados com os casos repetidos riscados, parece ter exercido influência positiva na resposta dos alunos, principalmente no segundo tipo de conversão (27 itens corretos de 64 possíveis) quando comparados com o primeiro teste – no qual na segunda conversão foram observados cinco itens corretos de 64 possíveis. Entende-se, com isso, que os casos repetidos riscados podem ter chamado a atenção dos alunos para a necessidade de pensar sobre a importância, ou não, da ordem nas diferentes situações combinatórias, pois, apesar dos riscos serem presentes apenas nas situações de *combinação*, essas eram apresentadas antes das situações de *arranjo* e *permutação*, influenciando quantitativamente no desempenho dessas outras situações. Os casos riscados também chamavam a atenção para a presença de possibilidades repetidas, de modo que os alunos precisavam analisar os casos válidos e identificar, se nas demais situações, a ordem era importante, ou não. Assim, a escolha de uma *representação* com a utilização de uma estratégia específica (riscar os casos repetidos) pode ressaltar os *invariantes* de cada *situação combinatória.*

Figura 8B: Situação de *combinação* respondida corretamente pelo Aluno 2 com solução apresentada em listagem, com justificativa coerente.


Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

João respondeu assim

Mamão, abacaxi e laranja	Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana	~~Abacaxi, banana e laranja~~
Mamão, laranja e banana	~~Abacaxi, mamão e laranja~~
~~Mamão, banana e abacaxi~~	~~Abacaxi, laranja e mamão~~
~~Mamão, banana e laranja~~	~~Abacaxi, banana e mamão~~
~~Mamão, laranja e abacaxi~~	~~Abacaxi, mamão e banana~~
~~Laranja, mamão e abacaxi~~	~~Banana, mamão e abacaxi~~
~~Laranja, abacaxi e mamão~~	~~Banana, abacaxi e mamão~~
~~Laranja, mamão e banana~~	~~Banana, mamão e laranja~~
~~Laranja, banana e mamão~~	~~Banana, laranja e mamão~~
~~Laranja, abacaxi e banana~~	~~Banana, abacaxi e laranja~~
~~Laranja, banana e abacaxi~~	~~Banana, laranja e abacaxi~~

Maria respondeu assim:

Mamão, abacaxi e laranja
Abacaxi, banana e mamão
Mamão, laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana
Laranja, abacaxi e mamão
Laranja, banana e abacaxi

Qual dos dois você acha que está certo? João

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) $4 + 3 = 7$
b) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$
c) $4 \times 3 - 5 = 7$
d) $4 + 3 - 3 = 4$

Justifique sua resposta:
24 opções ÷ por 6 repetidos

Fonte: Montenegro, Borba e Bittar (2016).

Além dos casos riscados terem, possivelmente, auxiliado na compreensão dos problemas de *combinação*, essa forma de representação pode também ter ajudado os estudantes a refletirem sobre os demais tipos de problemas combinatórios, pois houve aumento também nos acertos da segunda conversão nos testes do Tipo 2 para os problemas de *arranjo* e *permutação*. Assim, cortar os casos pode ter chamado a atenção sobre quando a repetição não indica casos distintos (*combinações*) e quando indica (*arranjos* e *permutações*).

Ainda no exemplo da Figura 8, podemos ver a resposta de um aluno para o problema de *combinação* em que os casos repetidos foram riscados. Inicialmente ele não conseguiu justificar porque é necessário dividir por 3x2 (situação em que a Conversão 2 se dá de árvore para expressão numérica), uma vez que justificou afirmando: “são 24 possibilidades dividido por 6, mas eu não sei onde é o 6”. No problema de *combinação* resolvido posteriormente (situação em que a Conversão 2 se dá de listagem para expressão numérica), ele percebeu os casos repetidos e explicou o motivo para esta expressão: “24 opções dividido por 6 repetidos”. Assim, é possível reforçar que o fato dos casos repetidos estarem riscados na listagem, com uma visualização individual de cada possibilidade, pode ter ajudado nesta tarefa.

Assim, é possível perceber que a identificação da conversão, quando realizada de língua natural para listagem ou para árvore de possibilidades, resulta em maior taxa de sucesso, em todos os tipos de situação combinatória, com maior destaque para as situações de *permutação*. Já a identificação da conversão para a expressão numérica se apresenta uma taxa de acertos mais fraca, principalmente quando se analisa as situações de *arranjo* e *combinação*. Os resultados parecem indicar, portanto, que a razão de maior sucesso na identificação de conversões ocorre quando há maior congruência, no caso do registro de língua natural para uma listagem ou uma árvore de possibilidades, enquanto que de árvore ou listagem para expressão numérica, o nível de congruência é menor. Isso pode estar relacionado também com o fato de tanto a árvore de possibilidades quanto a listagem e o enunciado estarem todos usando a linguagem natural, diferentemente da expressão numérica, que usa uma simbologia própria da Matemática. Além disso, também vale salientar que os *invariantes* envolvidos em cada *situação combinatória* também parecem exercer influência na identificação de conversões. Essa tendência pode ser destacada principalmente nas situações de *combinação* e *arranjo* em que possuem o mesmo invariante de escolha, mas se diferenciam no invariante de *ordem,* de modo que se faz necessária a discussão conjunta das *situações* e seus *invariantes*, bem como das representações em suas três atividades cognitivas fundamentais: *identificação, tratamento e conversão*.

5.3 JUSTIFICANDO AS CONVERSÕES EFETUADAS

Durante a análise dos testes foram observadas algumas dificuldades dos alunos para identificar as conversões corretas. Isso se intensifica em função das justificativas apresentadas e/ou deixadas em branco.

A seguir, no Quadro 19, é possível visualizar o tipo de justificativa dada por cada aluno, sendo: justificativas que apresentam relação correta com a situação (C), as incorretas (I) e as deixadas em branco (B). Os tipos de justificativas estão designadas por tipo de situação combinatória (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*).

Quadro 19: Tipo de justificativa dada por cada aluno por tipo de situação combinatória

Aluno	Produto Cartesiano		Combinação		Arranjo		Permutação	
	L.	Árv	L.	Árv.	L.	Árv.	L.	Árv.
A1	C	C	I	I	I	I	C	C
A2	C	C	I	C	B	C	C	C
A3	I	B	I	B	I	I	I	I
A4	I	I	I	I	I	I	I	I
A5	C	I	I	I	B	I	C	C
A6	B	B	B	B	B	B	B	B
A7	B	B	B	B	I	B	B	B
A8	I	I	I	I	I	I	I	I
A9	B	B	B	B	B	B	B	B
A10	I	I	I	I	I	I	I	I
A11	B	B	B	B	B	B	B	B
A12	B	B	B	B	B	B	B	B
A13	I	B	I	B	B	B	C	B
A14	B	I	B	I	B	B	B	B
A15	B	I	I	I	I	I	I	I
A16	I	I	I	I	I	I	I	I

C: Justificativa Correta; I: Justificativa Incorreta; B: Justificativa em Branco.
L: Listagem; Árv.: Árvore;
Fonte: Autora mediante pesquisa.

É possível notar que, em geral, cada aluno permanece com o mesmo tipo de justificativa em todas as situações. Assim, por exemplo, se ele inicia o teste deixando a justificativa em branco, permanece assim durante todo o teste. Neste tipo de justificativa não há possibilidade de entender o raciocínio utilizado pela criança para responder, corretamente ou incorretamente, as conversões anteriores, mas pode-se inferir que o fato de ter deixado em branco indica dúvidas quanto a como justificar a sua escolha de resposta. Além disso, justificar escolhas de respostas não é um procedimento usual em sala de aula da escolarização básica e isso pode ter levado grande parte dos alunos em deixar as justificativas em branco.

Na Tabela 3, tem-se a quantidade do tipo de justificativa dada para cada tipo de problema. É possível notar que, o número de respostas com justificativas em branco ou incorreta, é de quase 90% das situações, enquanto que em apenas 11% das situações houve resposta com justificativas corretas. Essas respostas foram dadas principalmente por três alunos de uma turma com total de 16. Destaca-se que as distintas situações combinatórias não levaram ao mesmo sucesso nas justificativas de identificação das conversões apresentadas, uma vez que houve mais sucesso em *permutações* e *produtos cartesianos*.

Tabela 3: Quantitativo do tipo de resposta em função de cada tipo de problema e do tipo de conversão intermediária realizada

Tipo de problema	Tipo de conversão intermediária	Justificativa correta	Justificativa incorreta	Justificativa em branco
PC	Listagem	3	6	7
	Árvore	2	7	7
C	Listagem	0	10	6
	Árvore	1	8	7
A	Listagem	0	8	8
	Árvore	1	8	7
P	Listagem	4	6	6
	Árvore	3	6	7
Total		14 (11,%)	59 (46%)	55 (43%)

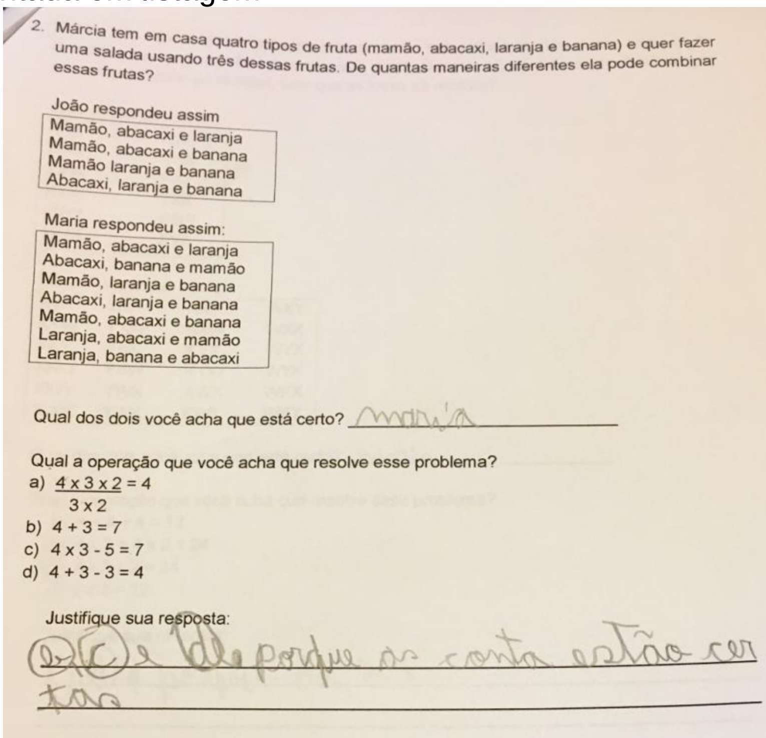
PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Acredita-se que o maior sucesso em situações de *produto cartesiano* está relacionado com a maior presença em livros didáticos, inclusive com a indicação da expressão numérica correspondente, bem como pelo fato de usar os números do enunciado na operação. Nas situações de *permutação* pode estar relacionado ao fato de não ser necessário selecionar elementos para compor o novo grupo, uma vez que todos são utilizados, modificando apenas a ordenação entre eles. A maior dificuldade nas situações de *arranjo* e *combinação* pode residir justamente em ter que selecionar elementos de modo que, em um tipo a ordem é importante na formação das possibilidades e, no segundo, a ordem não importa.

A seguir, nas Figuras 9, 10, 11 e 12 é possível observar exemplos de justificativas incorretas dadas por diferentes alunos.

Figura 9: Situação de *combinação* respondida incorretamente pelo Aluno 15 com solução apresentada em listagem.



2. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

João respondeu assim

Mamão, abacaxi e laranja
Mamão, abacaxi e banana
Mamão laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana

Maria respondeu assim:

Mamão, abacaxi e laranja
Abacaxi, banana e mamão
Mamão, laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana
Laranja, abacaxi e mamão
Laranja, banana e abacaxi

Qual dos dois você acha que está certo? maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$
b) $4 + 3 = 7$
c) $4 \times 3 - 5 = 7$
d) $4 + 3 - 3 = 4$

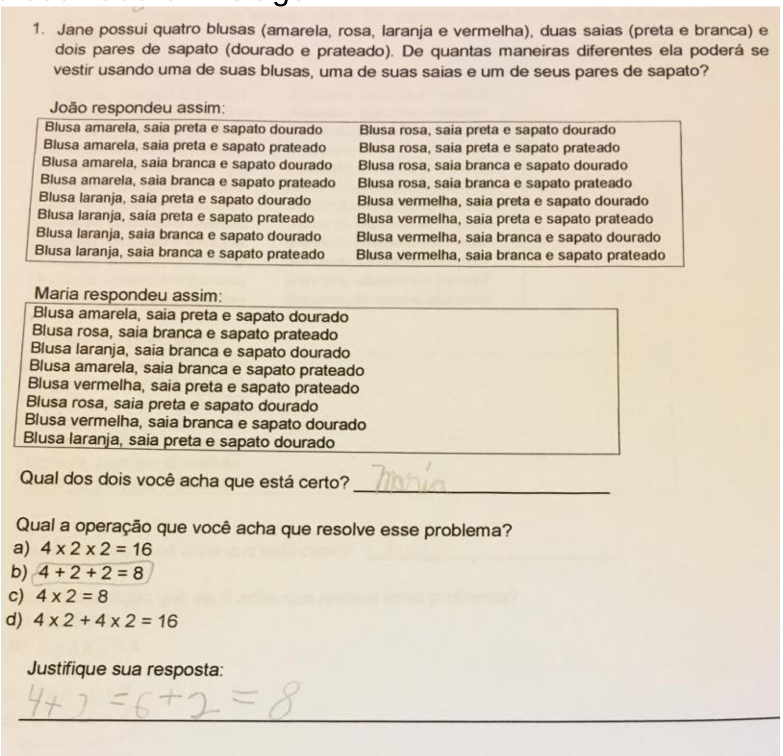
Justifique sua resposta: b c e d porque as conta estão cer tas

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na Figura 9 é possível observar que o aluno responde de forma incorreta à primeira conversão. Para a segunda conversão o aluno não assinala uma alternativa correta e na justificativa ele aponta que as alternativas ‘b’, ‘c’ e ‘d’ estão corretas, se referindo à conta e seu resultado, de forma que ele não associou a expressão numérica com a listagem ou com o enunciado em língua natural, mas resolveu, isoladamente as expressões, afirmando que os resultados eram corretos. Além disso, nota-se que, provavelmente, este aluno não entendeu a alternativa ‘a’ em que é necessário efetuar uma divisão.

Na Figura 10, observa-se que o aluno respondeu de forma incorreta tanto a primeira conversão, quanto a segunda, uma vez que afirmou ser Maria a autora da resposta correta e assinalou que a expressão numérica correspondente era: 4 + 2 + 2 = 8. Na justificativa, entende-se, apesar do erro de escrita da expressão, que ele resolveu isoladamente cada operação de forma seguida, registrando: “4 + 2 = 6 + 2 = 8”, como é possível visualizar na figura abaixo. Este tipo de registro foi utilizado pelo aluno em todo o teste.

Figura 10: Situação de *produto cartesiano* respondida incorretamente pelo Aluno 8 com solução apresentada em listagem.



1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

João respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado	Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa amarela, saia preta e sapato prateado	Blusa rosa, saia preta e sapato prateado
Blusa amarela, saia branca e sapato dourado	Blusa rosa, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado	Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado	Blusa vermelha, saia preta e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato prateado	Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado	Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia branca e sapato prateado	Blusa vermelha, saia branca e sapato prateado

Maria respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado
Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado
Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado

Qual dos dois você acha que está certo? Maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 4 x 2 x 2 = 16
b) 4 + 2 + 2 = 8
c) 4 x 2 = 8
d) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

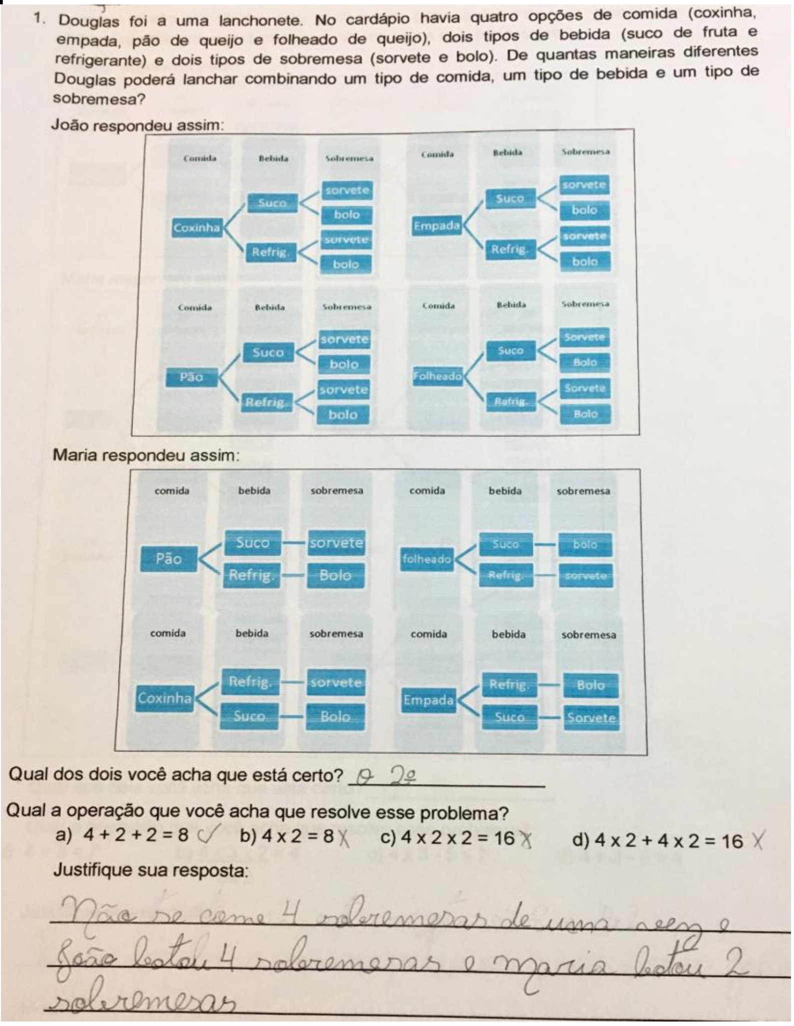
Justifique sua resposta:

4+2 = 6+2 = 8

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na Figura 11 o aluno respondeu de forma incorreta, tanto a primeira conversão solicitada, quanto a segunda. Na justificativa discorreu, de acordo com critérios pessoais, sobre o raciocínio que utilizou para responder a situação, afirmando: “Não se come 4 sobremesas de uma vez e João botou 4 sobremesas e Maria botou 2 sobremesas”. Essa afirmativa leva a entender que o aluno ainda não relaciona as situações combinatórias conforme um pensamento hipotético-dedutivo, pois, não há nenhuma possibilidade com quatro sobremesas, mas sim, cada sobremesa indicando uma possibilidade diferente.

Figura 11: Situação de *produto cartesiano* respondida incorretamente pelo Aluno 14 com solução apresentada em árvore.


1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia quatro opções de comida (coxinha, empada, pão de queijo e folheado de queijo), dois tipos de bebida (suco de fruta e refrigerante) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

João respondeu assim:

Maria respondeu assim:

Qual dos dois você acha que está certo? o 2º

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 4 + 2 + 2 = 8 ✓ b) 4 x 2 = 8 X c) 4 x 2 x 2 = 16 X d) 4 x 2 + 4 x 2 = 16 X

Justifique sua resposta:

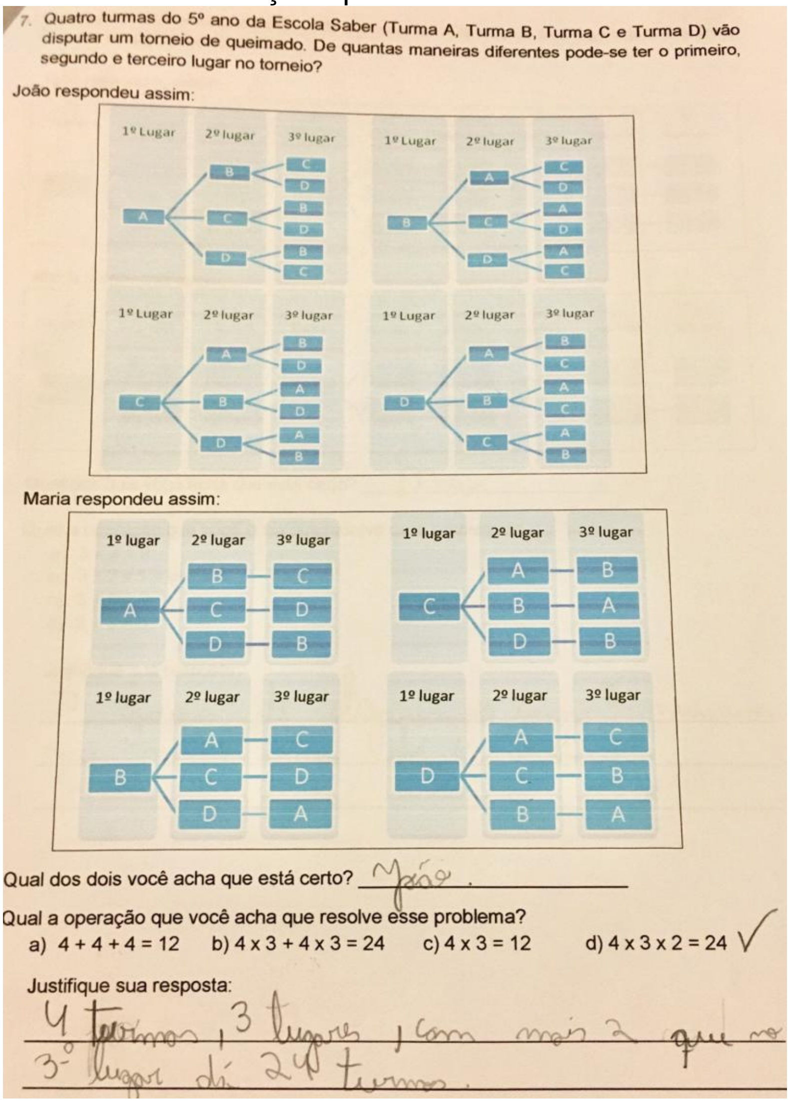
Não se come 4 sobremesas de uma vez e João botou 4 sobremesas e Maria botou 2 sobremesas

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na Figura 12 o aluno respondeu corretamente as duas conversões solicitadas, entretanto, justificou de forma incorreta a expressão numérica. Na justificativa ele indica que a solução correta está correta, pois há “4 turmas, 3 lugares, com mais 2 que no 3º lugar dá 24”. Nesse caso indicou os números do enunciado (quatro turmas e três primeiros lugares) na multiplicação e tentou encontrar uma justificativa para o terceiro número envolvido na expressão numérica.

Nas justificativas incorretas apresentadas, de um modo geral não há explicação, de fato, do motivo pelo qual uma expressão numérica é correspondente ao enunciado em língua natural ou à listagem e árvore de possibilidades. Isso pode ser em decorrência de que, no ensino da Matemática, poucas são as vezes em que se solicita que explique por meio de um texto em língua natural a operação utilizada.

Figura 12: Situação de *arranjo* respondida corretamente, mas com justificativa incoerente pelo Aluno 1 com solução apresentada em árvore.



Fonte: Autora mediante pesquisa.

5.4 EXPLICANDO COMO AS CONVERSÕES FORAM IDENTIFICADAS

Para esclarecer como os alunos pensaram quando realizaram as conversões, na segunda parte deste estudo foi realizada uma entrevista com quatro alunos, com o objetivo de que eles explicassem suas respostas e argumentassem suas justificativas, de modo que retornassem à linguagem natural a partir da expressão numérica gerada com base na listagem ou árvore apresentada na situação. Os alunos foram entrevistados conjuntamente, dois a dois.

A entrevista foi realizada com as duplas A2 e A5 (Aluno 2 e Aluno 5) e A1 e A4 (Aluno 1 e Aluno 4), que foram escolhidas de em função das respostas e justificativas dadas no teste realizado. Inicialmente as crianças demonstraram dificuldade para lembrarem-se do teste, isso pode ser devido ao fato de a entrevista ter sido realizada dois meses após a aplicação do teste. Depois das primeiras perguntas eles conseguiram explicar as expressões numéricas escolhidas, bem como porque cada listagem ou árvore estava certa ou errada.

Para o problema de *produto cartesiano* em que eram solicitadas diferentes maneiras para se vestir, os alunos foram questionados inicialmente sobre qual a listagem que respondia a situação e o motivo pelo qual a outra estava errada. Em seguida, foram questionados acerca da expressão numérica escolhida como resposta para a situação. No Quadro 20 é possível analisar o trecho da entrevista.

Quadro 20: Entrevista com o Aluno 2 e o Aluno 5 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *produto cartesiano* com a listagem como representação intermediária.

P: Jane possui quatro blusas (amarela, rosa laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois sapatos A5: Eu lembrei! A2: É três vezes a quantidade de sapatos que ela pode usar. P: Três? A2: Não quatro... A5: Eu coloquei João porque ele coloca blusa amarela com saia preta e sapato dourado e depois com o sapato prateado... e Maria colocou blusa amarela com saia preta e sapato dourado e depois blusa rosa, saia branca e sapato prateado. P: E porque Maria estava errada? A5: Porque ela não colocou todas as combinações. A2: É. P: Aí porque que era 4 x 2 x 2? A2: Por que são quatro modelos de roupas vezes as duas saias e vezes os dois sapatos.

P: Pesquisadora; A2: Aluno 2; A5: Aluno 5.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Nesta transcrição é possível notar que o Aluno 5 explicou corretamente a primeira conversão, pois enfatizou que na opção errada não havia todas as combinações possíveis. O Aluno 2 complementou a explicação com a segunda conversão, detalhando corretamente que para esse problema de *produto cartesiano* a expressão numérica é referente à multiplicação das quantidades de blusas, saias e sapatos.

Para esse mesmo problema, os Alunos 1 e 4 também conseguiram explicar as conversões, como é possível observar no Quadro 21.

Quadro 21: Entrevista com o Aluno 1 e o Aluno 4 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *produto cartesiano* com a listagem como representação intermediária.

P: essa questão dizia assim: Jane possui 4 blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus sapatos? Aí tinha duas opções... nessa João respondeu assim... e aqui Maria respondeu desse outro jeito... Qual dos dois você acha que está certo? Porque você achou que foi João? A1: [silêncio...] Porque aqui tem menos... P: Porque aqui tem menos? E porque tem menos não é o certo? A1: Por que assim... tem muito pouco para uma quantidade dessas... tem algumas faltando... P: E o que é que está faltando? A1: É porque assim... a blusa amarela aqui tem quatro tá vendo? E aqui só tem duas. P: Aí precisava ter mais? A1: Precisava mais duas. P: E você o que acha? Acha que ela tá certa? A4: Não sei... acho que ela tá certa... P: Qual era o objetivo da questão? Combinar... uma blusa... A1: Uma saia com um sapato P: Aí ela pode combinar a blusa amarela com a saia preta e o sapato dourado, mas ela também poderia combinar a blusa amarela com a saia branca e o sapato prateado, né? E aí? São quantas combinações possíveis com a blusa amarela? A1: Quatro P: Quatro... e com a blusa laranja? A1: Mais quatro... e mais quatro com a rosa e mais quatro com a vermelha... P: E aí depois ele perguntava: qual a operação que você acha que resolve esse problema? A4: Quatro vezes dois, vezes dois. P: Quatro vezes dois, vezes dois... A1: Dá 16... P: Porque quatro vezes dois, vezes dois? A1: Quatro blusas, duas saias e dois sapatos. Aí dá 16... P: Exatamente...

P: Pesquisadora; A1: Aluno 1; A4: Aluno 4.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Nessa situação, os alunos demonstram qual resposta estava expressa corretamente em listagem, enfatizando que na resposta errada faltavam possibilidades. Os alunos usam os números do enunciado para explicar a expressão numérica utilizada para responder a questão. Isso pode indicar que a conversão realizada nesse caso teve base principal no enunciado em língua natural, mas salienta-se que a listagem como representação intermediária justifica o valor correto da operação.

Na situação de *combinação* apresentada em listagem, os alunos também foram questionados com relação à expressão numérica que resolvia o problema. No Quadro 22 é possível observar a entrevista realizada com os Alunos 1 e 4.

Quadro 22: Entrevista com o Aluno 1 e o Aluno 4 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *combinação* com a listagem como representação intermediária.

P: Agora a segunda questão... Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas? [...] João respondeu assim... A4: Mamão, abacaxi e laranja; mamão, abacaxi e banana, mamão laranja e banana... aqui já repetiu... ah não... P: Onde foi que repetiu? A4: Repetiu não P: Repetiu não... A4: E abacaxi, laranja e banana P: E essas outras que estão aí? O que ele quer dizer com isso (possibilidades riscadas)? A4: Que já repetiu... P: Repetiu? Como assim? A4: Aqui ó... abacaxi, laranja e mamão e aqui já usou mamão, abacaxi e laranja. P: E porque ele riscou? A4: Pra dizer que já teve... P: Maria respondeu dessa outra forma... A1: Mamão abacaxi e laranja... P: Qual dos dois vocês acham que está certo? A4: Maria; A1: João P: Aí porque Maria e porque João? A4: não sei... A1: Porque... eu acho que é João de novo P: E porque seria João de novo? [silêncio] Ele quer fazer uma salada de frutas... com mamão, abacaxi e laranja ... ou... A4: Laranja, abacaxi e mamão... se repetiu... P: E aí? Será que pode repetir? [silêncio...] P: Se eu quero fazer uma sala de frutas e coloco mamão, abacaxi e laranja ou laranja, abacaxi e mamão... é a mesma salada de frutas? Na hora de colocar lá dentro?... elas se misturam... A4: é... P: Importa a ordem que coloca lá dentro? [silêncio] e aí? [silêncio] A1: Eu acho que a operação é essa aqui. P: Porque é essa? A1: Porque são quatro tipos de frutas, três frutas... quatro no primeiro lugar, três no segundo e duas no terceiro... P: Certo... e porque dá 4? A1: Isso que eu não sei... P: Esse sinal aqui é uma divisão... A4: Ah... então é quatro vezes três vezes dois que é 12... 24... dividido por seis... quatro. P: Aí quantos tem aqui? A4: Quatro... P: Então quem está certo... A4: Acho que é João... P: Então porque será que é essa operação? [silêncio] A4: Eu pensava que era esse aqui... acho que é esse porque ela vai poder usar quatro combinações diferentes... P: Hum... mais alguma coisa? [silêncio] P: Então vamos passar para a próxima questão?

P: Pesquisadora; A1: Aluno 1; A4: Aluno 4.

Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na transcrição fica claro que os alunos ainda têm dúvidas sobre a resposta dada e sobre o fato de repetir ou não a mesma possibilidade. A pesquisadora precisa dar exemplos, e nesse momento os alunos iniciam uma justificativa correta, mas se confundem com o sinal da divisão (escrita como barra). Ao final, os alunos não conseguem justificar nem a listagem e nem a operação que resolve o problema.

Para essa mesma situação, os Alunos 2 e 5 responderam corretamente no teste a listagem que resolvia o problema, entretanto, o Aluno 2 marcou a alternativa correta para a operação correspondente e o Aluno 5 marcou a alternativa que resultava na resposta correta, mas por meio da expressão numérica errada. Este aluno também não conseguiu justificar a resposta. No Quadro 23, a seguir, é possível acompanhar o trecho referente a esta situação.

Quadro 23: Entrevista com o Aluno 2 e o Aluno 5 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *combinação* com a listagem como representação intermediária.

P: Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. A5: Ah... Primeiro ele coloca todos com mamão primeiro. P: E o que é isso riscado? A2: É por que não pode. P: Não pode por quê? A5: Por que ele já fez. P: Porque ele já fez? Como assim? A5: Ele já fez ó...– mamão, banana e abacaxi; mamão, abacaxi e banana. P: Ai ele já fez e não precisa fazer de novo? A2: Não precisa... porque é a mesma coisa das pessoas sentadas no banco, cada uma fica num lugar. A5: Não... por causa que na salada de frutas é só uma fruta não pode ficar trocando. A2: Ah... P: Então ele riscou isso tudo porque? A2: Porque é o que já tá feito. A5: E Maria foi repetindo... P: Maria tá errada porque foi... A5: Repetindo... A2: Foi trocando os lugares P: Aí você colocou assim: são 24 opções dividido por 6 repetidos. A5: E eu coloquei que era João porque só tem 4 maneiras. Mamão + as 3 frutas, abacaxi mais as 3 frutas, laranja mais as 3 frutas e banana mais as três frutas. P: Quais três frutas? A5: Laranja, abacaxi e banana. P: E por que são 6 repetidos? A2: Eu acho que é porque tem seis possibilidades de repetir...

P: Pesquisadora; A2: Aluno 2; A5: Aluno 5.

Fonte: Autora mediante pesquisa.

O Aluno 5 não conseguiu explicar como escolheu a alternativa, apenas leu sua justificativa para a situação, explicitando que respondeu 4 + 3 – 3. Em nenhum momento este aluno percebeu a expressão numérica correta, entretanto, durante a entrevista, demonstrou ter entendido os casos repetidos, enquanto que o Aluno 2, mesmo acertando as conversões e a justificativa, ficou em dúvida e confundiu esse problema como sendo um em que a ordem é importante na composição das possibilidades. Ao final da entrevista, os alunos conseguem chegar à conclusão de que é necessário eliminar os casos repetidos e levantam a hipótese de que são seis os casos iguais, sendo a entrevista, portanto, um momento de aprendizado, pois anteriormente a justificativa, em especial do Aluno 5, não era realizada corretamente, e, ao final da entrevista, conseguiu perceber a necessidade de eliminar os casos iguais.

Isso indica que as conversões sucessivas realizadas são muito complexas, principalmente quando se incentiva que os alunos expliquem o procedimento utilizado, uma vez que esta prática não é abordada com frequência para a resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na situação de *arranjo* em que eram solicitados os três primeiros lugares para o torneio de queimado, apresentado em árvore, os alunos foram questionados sobre a organização da árvore de possibilidades e também a respeito da expressão numérica utilizada para responder a situação. O Aluno 2 havia respondido corretamente as duas conversões e justificado corretamente sua resposta, enquanto a o Aluno 5 não havia conseguido realizar corretamente as conversões. Durante a entrevista, o A2 explicou como foi seu raciocínio para o A5. Na medida em que o Aluno 2 falava, o Aluno 5 percebia seu erro e indicou que na árvore errada não havia todas as possibilidades. Isso é possível notar no Quadro 24.

No Quadro 25 é possível observar que os Alunos 1 e 4 perceberam que a ordem é importante nos problemas de arranjo, e conseguiram identificar qual árvore está correta. Entretanto, a justificativa da expressão numérica que responde a situação não é correta, uma vez que os alunos usaram os números do enunciado para tentar justificar os números da operação. Este procedimento está baseado no entendimento de muitos alunos de que em problemas matemáticos deve-se sempre utilizar os números dados nos enunciados. Além disso, justificaram utilizando os números quatro e três que são a quantidade de turmas e as posições solicitadas, o que não justifica a operação e ainda acrescentando o dois de forma equivocada, uma vez que este não é dado no enunciado.

Quadro 24: Entrevista com o Aluno 2 e o Aluno 5 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *arranjo* com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

P: Quatro turmas do 5º ano da escola Saber (Turmas A, B, C e D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º, 2º e 3º lugares?
A2: Aí aqui já é uma opção [apontando para o primeiro ramo da árvore] e aqui já é outra opção. Então aqui já são duas opções pelo 2º lugar B... aí se são quatro turmas 3 vão ficar em 2º lugar e 2 em 3º. [...]
A5: Hummm esse tá certo porque ele mostra todas as opções e Maria só coloca que pode ficar o A, o B e o C e não coloca o D.
A2: É ele não coloca que o D pode ficar em 3º lugar.

P: Pesquisadora; A2: Aluno 2; A5: Aluno 5.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Quadro 25: Entrevista com o Aluno 1 e o Aluno 4 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *arranjo* com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

P: Quatro turmas da Escola Saber (Turmas A, B, C e D) vão disputar o torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado? Quem vocês acham que está certo?
A4: Maria.
A1: João
P: Ele quer primeiro, segundo e terceiro lugar. E ele quer todas as possibilidades... ser primeiro lugar é diferente de ser segundo lugar?
A4: É... pode ser A em primeiro, B em segundo e C em terceiro ou C em primeiro, A em segundo...
P: Aí poderia ser A em primeiro, B em segundo e D em terceiro?
A4: Podia...
P: E aí? Ela colocou?
A4: Não...
P: João colocou?
A4: Colocou...
P: E aí? Quem está certo?
A4: João
P: E porque Maria está errada?
A4: Porque ela colocou menos possibilidades.
P: E qual será a conta que resolve?
A1: É essa.
P: Porque é quatro vezes três vezes dois?
A1: Porque são quatro turmas, três lugares com mais dois no terceiro lugar... que dá 24

P: Pesquisadora; A1: Aluno 1; A4: Aluno 4.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Na entrevista é possível perceber que a conversão da linguagem natural para árvore é realizada por meio de uma correspondência entre a especificação das turmas e a organização das possibilidades em primeiro, segundo e terceiro lugares, pois os alunos indicam quais as turmas podem ficar em cada posição. Essa correspondência não acontece quando é necessário efetuar uma conversão para a expressão numérica que responde a situação, pois a multiplicação envolvida é implícita, de modo que os alunos indicam os números envolvidos no problema (quatro e três) e, buscam uma justificativa incorreta para o número que não aparece no enunciado (dois), mas está na expressão numérica.

Na situação de *permutação* em que eram solicitados quantos números diferentes são possíveis utilizando três algarismos, os alunos entrevistados explicaram que 'João' não havia respondido corretamente porque ele indicou o mesmo número repetido, pois o número 357 é o mesmo que 357, mas que a ordem deve ser levada em consideração, de modo que o número 357 é diferente do número 375. Isso pode ser observado no Quadro 26 a seguir.

Quadro 26: Entrevista com o Aluno 2 e o Aluno 5 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *permutação* com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

P: De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de três algarismos diferentes usando os algarismos 3, 5 e 7? A5: Eu coloquei Maria porque ela respondeu primeiro o algarismo 3 e depois o 5... A2: Porque ela fez todas as combinações A5: Isso. P: E porque aqui tá errado? A2: Porque ele colocou três algarismos aqui... ele foi colocando o 5 de novo. P: O 357 e o 357.. A2 e A5: É a mesma coisa...

P: Pesquisadora; A2: Aluno 2; A5: Aluno 5.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Nesta situação os alunos apenas identificaram corretamente a primeira conversão realizada, destacando que, na situação de *permutação* a mesma ordem da posição dos algarismos indica a mesma possibilidade, sendo necessário alternar a ordem dos elementos selecionados do conjunto dado para encontrar todas as possibilidades.

Na situação de *permutação* em que se perguntava de quantas maneiras diferentes três pessoas poderiam se posicionar na fila, foi questionada a expressão numérica que respondia a situação, ou seja, a segunda conversão solicitada, como pode ser visto no Quadro 27.

Nesta situação o Aluno 2 tenta explicar seu raciocínio a partir do número de pessoas que precisam ser organizadas na fila e demonstra que ainda há dificuldade para explicitar a expressão numérica escolhida, mas ao final, consegue justificar com coerência. O Aluno 5 que respondeu a situação exemplificada na Figura 4, enfatizou que só viu o número que dava certo e não se preocupou em perceber a diferença nas operações envolvidas para responder o problema.

Quadro 27: Entrevista com o Aluno 2 e o Aluno 5 no qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *permutação* com a listagem como representação intermediária.

P: Nesta situação se pergunta de quantas maneiras diferentes três pessoas podem posicionar-se numa fila do banco [...] A5: Eu coloquei a letra ‘d’ e ele colocou a letra ‘a’. Quem tá certo? P: Os dois dá 6... Porque você colocou a letra ‘a’, 3 x 2 x 1? A2: Porque 3 são o número de pessoas, 2 é o número de cada combinação que tem na coluna e só um fica no início. P: No final? A2: No final... [...] A2: Com Maria em primeiro tem duas opções para segundo e só uma para terceiro. A5: Eu botei 3 + 3 porque eu vi a resposta 6 e não vi a conta...

P: Pesquisadora; A2: Aluno 2; A5: Aluno 5.

Fonte: Autora mediante pesquisa.

O Aluno 2 indica com clareza o princípio multiplicativo envolvido na situação quando afirma que para Maria em primeiro lugar tem duas opções de segundo e somente uma para terceiro. E como são três pessoas que poderiam estar em primeiro lugar, tem-se a multiplicação da quantidade de pessoas possíveis para cada posição. Se, por um lado, o Aluno 2 percebe intuitivamente o Princípio Fundamental da Contagem, o Aluno 5 admite que marcou a alternativa apenas pelo valor numérico da resposta.

No Quadro 28 os Alunos 1 e 4 percebem qual a árvore responde o problema e justificam que a resposta correta é a que apresenta apenas seis possibilidades, explicando que no resultado em que são elencadas nove possibilidades houve repetição do mesmo caso, uma vez que, apareceu duas vezes a possibilidade 357. Entretanto, quando foram questionados sobre a expressão numérica que responde a situação os alunos não conseguem justificar a operação correta (3x2x1). O Aluno 1 tenta explicar por meio de uma generalização de possibilidades, afirmando que são três grupos com dois números, mas nessa situação não consegue explicar a multiplicação por um do PFC. Já o Aluno 4 usa os números do enunciado e resolve de forma aditiva, de modo que não percebe o caráter multiplicativo das situações combinatórias, indicando que, possivelmente, há uma conversão da língua natural para a expressão numérica, não sendo utilizada a representação intermediária para a realização da conversão.

Quadro 28: Entrevista com o Aluno 1 e o Aluno 4 na qual se questiona as conversões realizadas para um problema de *permutação* com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

P: Oitavo... De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de 3 algarismos diferentes, usando 3, 5 e 7? Vocês colocaram que Maria estava certa. Porque Maria e não João? [silêncio] A4: Porque aqui João repetiu o 5. 357 e 357. P: Ele repetiu, então ele colocou mais possibilidades ou menos? A4: Mais P: Quantas são as possibilidades então? A4: Um, dois, três... nove. E Maria seis... P: E qual a resposta certa? A4: 6. P: João colocou quantas possibilidades a mais? A4: Três P: E qual a conta que responde a situação? A4: Três mais três igual a seis. P: Três mais três dá seis, mas não é essa... A1: É essa... 3 x 2 x 1. P: É essa, mas quero saber porque é essa? A1: Porque são 3 grupos de algarismos com 2 números que no terceiro grupo... dá 6. A4: Coloquei essa porque são 3 posições e 3 números. P: Três posições e três números... alguém quer falar mais alguma coisa? A1 e A4: Não...

P: Pesquisadora; A1: Aluno 1; A4: Aluno 4.
Fonte: Autora mediante pesquisa.

Pelas entrevistas realizadas foi possível notar que, em todas as situações, os alunos ainda tinham dúvidas em algumas expressões numéricas, mesmo marcando a opção correta no teste. Também foi possível observar que o uso da representação intermediária, em vários problemas, não foi fator determinante para a conversão para a expressão numérica, uma vez que os alunos demonstravam, na entrevista, que para chegar na expressão numérica retomavam o enunciado em língua natural. Observou-se uma segurança um pouco maior na identificação das conversões de *produto cartesiano*. Isso pode estar relacionado ao fato que, segundo Borba, Azevedo e Bittar (2016), os problemas de *produto cartesiano* são mais frequentes em livros didáticos de anos iniciais e são apresentados em mais de um registro de representação semiótica. Assim, a multiplicação envolvida nas situações de *produto cartesiano*, por envolver os números explícitos no enunciado, é mais ressaltado e o mesmo não acontece nas demais situações combinatórias (*combinação*, *arranjo* e *permutação),* uma vez que a multiplicação é implícita. Essa questão pode estar relacionada ao entendimento de alguns alunos de que na resolução dos problemas da Matemática deve-se sempre utilizar os números presentes no enunciado.

Assim, neste Estudo 1, foi possível perceber que a identificação da passagem da língua natural para a listagem e árvore de possibilidades foi realizada com maior facilidade em comparação com a identificação da conversão para a expressão numérica. Essa maior dificuldade na conversão para a expressão numérica pode ser constatada também com as justificativas apresentadas, bem como, por meio das entrevistas realizadas. Desse modo, destaca-se que a dificuldade de *identificação* das conversões entre as diferentes representações propostas no teste também foi apresentada durante a entrevista, mesmo esta sendo realizada pelos alunos com melhor desempenho nos testes. Na entrevista também foi salientada a dificuldade dos alunos nas situações de *combinação*, principalmente na segunda conversão, em que era solicitada a identificação da expressão numérica correspondente.

Esse conjunto de resultados ratifica que o melhor desempenho em identificação de conversões ocorre quando há maior congruência entre as representações utilizadas. Isso porque foi mais congruente a conversão de língua natural para listagens ou árvores de possibilidades, do que a conversão destas representações auxiliares para a expressão numérica.

Inhelder e Piaget (1976) destacam que a formulação explícita de expressões matemáticas para resolução de problemas combinatórios ainda não é evidenciada por estudantes mesmo quando eles estão no nível IIIB (14-15 anos), quando eles já realizam resoluções sistemáticas, porém ainda por meio de método exaustivo, como por exemplo, a enumeração das possibilidades. Em contrapartida, diversos autores (FISCHBEIN, PAMPU E MINZAT, 1970; BARRETO E BORBA, 2012; AZEVEDO E BORBA, 2013) já evidenciam que, por meio de instruções específicas, estudantes de na faixa etária de 10 anos já conseguem compreender situações combinatórias e desenvolver o caráter multiplicativo dessas situações. Isso também se ressalta, pelo fato de que, apesar da taxa de sucesso ser baixa nesse primeiro estudo, os bons resultados indicam a possibilidade nessa faixa etária de um estudo que tenha como objetivo o desenvolvimento do raciocínio combinatório, levando-se em consideração as três atividades cognitivas fundamentais da representação semiótica: *identificação*, *tratamento* e *conversão*.

Desse modo, a partir dos resultados desse primeiro estudo, em que foi identificada a grande dificuldade na identificação das conversões para expressão numérica, e, entre as situações combinatórias, essa dificuldade se apresenta maior nos problemas de *combinação*, destaca-se que, para o estudo de intervenção, foi levado em conta a necessidade de considerar as especificidades de cada situação combinatória. Também ressalta-se a particularidade dos riscos no caso dos problemas de *combinação*, os quais chamam a atenção sobre o invariante de *ordenação* – tanto nesse tipo de problema, como nos demais. Além disso, foi desenvolvido um trabalho com representações intermediárias (árvores de possibilidades e listagens) para auxiliar a transição entre a representação de partida (língua natural) e a representação de chegada (expressão numérica).

6 RESULTADOS DO ESTUDO 2: APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO

Neste capítulo são discutidos os resultados do Estudo 2. Assim, é apresentada a sistematização de dados quantitativos, bem como são analisados qualitativamente protocolos de resolução de alunos. Na primeira seção são discutidas as diferentes intervenções realizadas, por meio do uso da árvore de possibilidades e da listagem como representações auxiliares de transição. Na segunda seção são apresentadas as comparações de desempenho – gerais e por ano escolar – antes e depois da intervenção, com indicação de significâncias estatísticas.

6.1 AS INTERVENÇÕES: REPRESENTAÇÕES AUXILIARES DE TRANSIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

As intervenções foram realizadas com seis turmas de uma escola da rede pública municipal da cidade do Recife, totalizando 121 alunos, sendo duas turmas para cada ano de ensino, cada uma compondo um grupo de intervenção (Grupo 1 ou Grupo 2), como é possível visualizar no Quadro 29. Todas as turmas, em geral, tinham mais alunos matriculados, entretanto, para a pesquisa foram considerados aqueles que realizaram pré-teste e pós-teste e participaram de pelo menos uma das duas sessões de intervenção, havendo, portanto, alunos que realizaram alguma das etapas, mas faltaram em outras. Nesses casos, os seus protocolos não foram analisados.

Quadro 29: Quantidade de alunos por turma em cada ano de ensino, por grupo de intervenção

Ano	**Turma (Grupos)**	**Quantidade de alunos**
5º ANO	G1: árvore de possibilidades	19 alunos
	G2: listagem sistematizada	20 alunos
7º ANO	G1: árvore de possibilidades	21 alunos
	G2: listagem sistematizada	26 alunos
9º ANO	G1: árvore de possibilidades	19 alunos
	G2: listagem sistematizada	16 alunos
TOTAL	6 turmas	121 alunos

Fonte: A autora

Como indicado no capítulo de Método, em todas as turmas foram realizadas duas sessões de intervenção. Na primeira, foram trabalhados os quatro primeiros problemas do pré-teste, de modo que os alunos leram a situação problema em linguagem natural e discutiram o objetivo da questão com a mediação da pesquisadora. Nesses momentos, os alunos analisaram as possíveis respostas e a pesquisadora pontuou as características de *escolha* e de *ordem* em cada situação. Em seguida, a pesquisadora sugeriu um registro de representação auxiliar sistematizado (listagem ou árvore), menos formalizado, de modo que fosse possível chegar a um registro mais formal, ou seja, uma expressão numérica (Princípio Fundamental da Contagem – PFC). Em uma das turmas de cada ano escolar a *representação auxiliar* utilizada foi a árvore de possibilidades e na outra turma foram usadas listagens. Esse mesmo modelo foi repetido na segunda sessão de intervenção, na qual foram trabalhados os quatro últimos problemas do pré-teste.

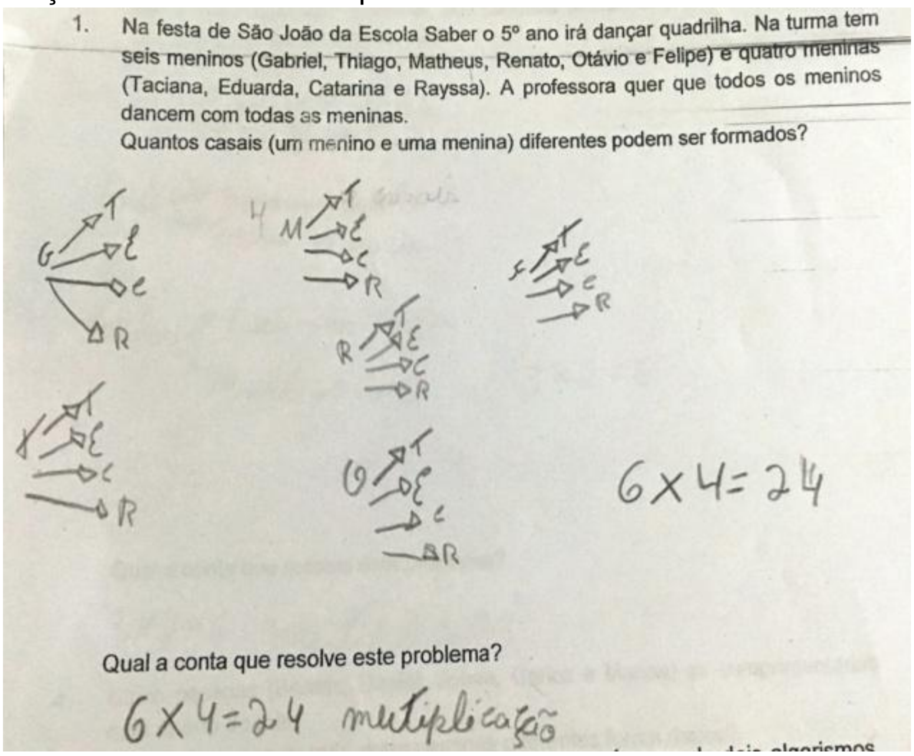
No 5º ano, cada sessão durou, em média, uma hora. O tempo foi disponibilizado pela professora que ensina Matemática em ambas as turmas. Nos 7º e 9º anos, cada sessão durou, em média, 50 minutos, o tempo destinado por uma aula de Matemática no dia da coleta, e foi disponibilizado pelo professor da disciplina das respectivas turmas. Os procedimentos adotados em todas as turmas foram semelhantes e serão exemplificados a partir de resoluções de alunos em cada um dos anos escolares.

Nas Figuras 13 e 14 é possível visualizar registros dos alunos do 5º ano durante as intervenções em seus respectivos grupos.

No Grupo 1 a pesquisadora construiu as árvores de possibilidades junto com os alunos, de modo que iniciava com a discussão sobre as possibilidades elencadas pelos alunos, e, em seguida, realizava a construção das árvores de possibilidades, organizando-as já nessa representação. Na medida em que elencava as possibilidades, indicava que faria todas iniciando com a mesma escolha, e, então, questionava os alunos sobre quais eram todas as possibilidades para essa escolha como primeira opção. Em seguida, repetia o processo para as outras escolhas iniciais.

Após a construção da árvore, iniciava a discussão sobre a passagem para a operação que resolvia o problema, utilizando a organização sistemática da representação para enfatizar o raciocínio multiplicativo presente nas diferentes situações combinatórias. Dessa forma, era indicado que para cada escolha inicial, os elementos de partida indicavam quantas eram as opções para a segunda escolha. Na Figura 13A, na situação de *produto cartesiano*, é possível observar a primeira escolha sendo seguida pelas setas que indicam a segunda escolha, assim, para cada um dos seis meninos, é possível realizar quatro opções de segunda escolha (quatro meninas).

Figura 13A: Primeira intervenção com o Grupo 1 do 5º ano. Resolução de situações de *produto cartesiano*, com duas etapas de escolha, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades



1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas.
Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?

6x4=24

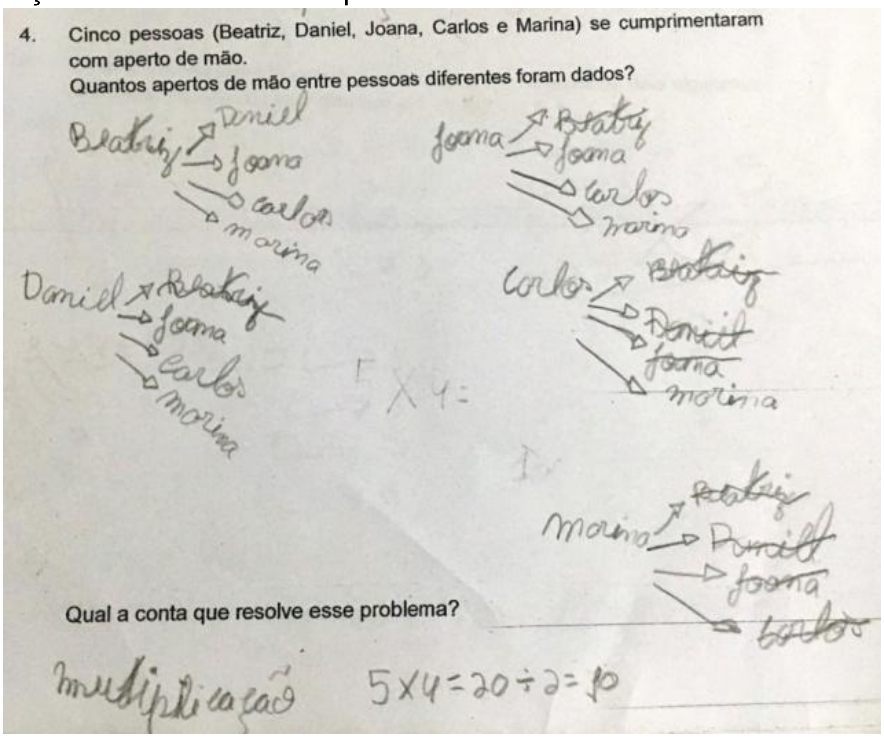
Qual a conta que resolve este problema?

6x4=24 multiplicação

Fonte: a autora

Na situação de *combinação* (Figura 13B), além de representar todas as possibilidades era necessário discutir seu invariante de ordem, uma vez que nessa situação a ordem não gera novas possibilidades. Nesse caso, as possibilidades repetidas eram riscadas. Assim, para cada uma das cinco escolhas iniciais ainda poderiam ser escolhidas quatro pessoas como segundo elemento do aperto de mão. Porém, sendo a mesma possibilidade repetida em outra ordem é preciso dividir pelo número de casos repetidos. Para isso eram exemplificados todos os casos como se a ordem fosse importante, e eram destacadas as possibilidades repetidas em função da ordem, discutindo o motivo de, nesses problemas, a ordem não ser importante. Ou seja, como pode ser observado na Figura 13B o aperto de mão dado entre Beatriz e Daniel é o mesmo aperto de mão dado entre Daniel e Beatriz. A discussão seguia pelo fato de não ser necessário dar dois apertos de mãos, uma vez que as mesmas pessoas estão envolvidas. Assim, é necessário dividir por dois, pois foi contado duas vezes o mesmo aperto de mão. Ressalta-se que a expressão da Figura 13B não está completamente correta do ponto de vista matemático (pois 5 x 4 não é igual a 20 ÷ 2), mas os alunos compreenderam que o total resultante de 5 x 4 teria que ser dividido por 2, uma vez que as possibilidades constantes da árvore estavam iguais duas a duas. A representação utilizada foi uma nova forma do trabalho com a Combinatória, uma vez que os alunos desse ano de ensino não faziam uso dessa representação antes do momento da intervenção.

Figura 13B: Primeira intervenção com o Grupo 1 do 5º ano. Resolução de situações de *combinação*, com duas etapas de escolha, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades



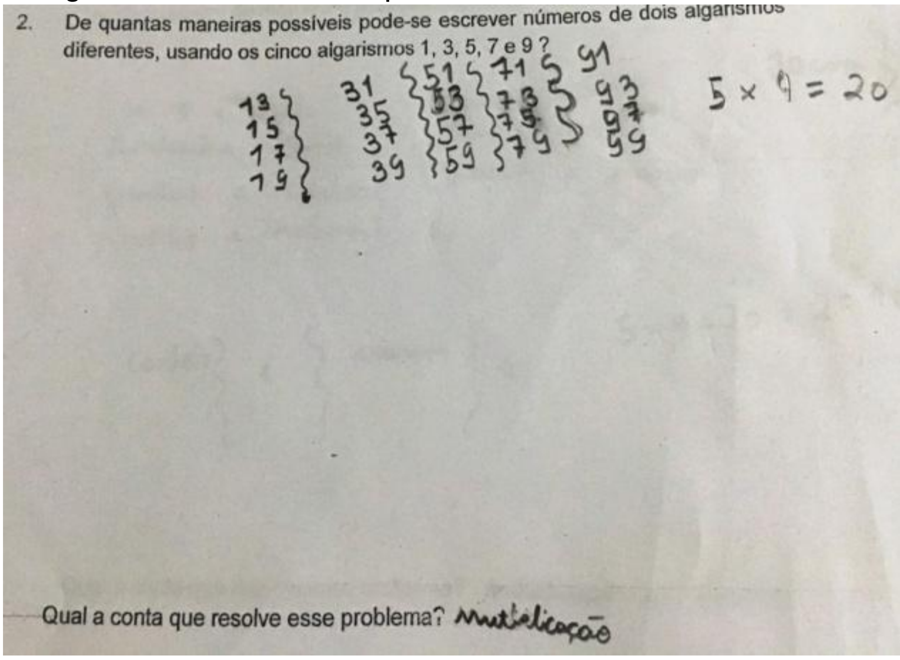
Fonte: a autora.

De forma semelhante, a pesquisadora, durante a intervenção com o Grupo 2, construiu junto com os alunos a listagem sistemática de possibilidades, de maneira que fosse possível destacar o raciocínio multiplicativo, chegando até o Princípio Fundamental da Contagem. Neste caso, a sistematização da listagem era sugestão da pesquisadora, uma vez que a resolução por meio da listagem pelos alunos acontecia por enumeração não sistemática das possibilidades. Assim como era realizado no grupo com a árvore de possibilidades, a pesquisadora iniciava com a discussão sobre as possibilidades e escrevia no quadro as possibilidades elencadas, de modo que indicava que iria iniciar com a mesma escolha inicial para finalizar, com a primeira escolha, todas as possibilidades. Em seguida, repetia o processo mudando a escolha inicial, de modo que eram listadas, de forma sistemática todas as possibilidades. A partir de então, era questionado quantas opções de segunda escolha eram possíveis para cada elemento de partida da escolha inicial, discutindo, com isso, a expressão numérica que resolve o problema.

A sistematização da listagem, destacando a primeira escolha, se faz necessária para a percepção do caráter multiplicativo das situações, como é possível observar na Figura 14A, a qual mostra a listagem sistemática para um problema de *arranjo*. Assim, no exemplo, a listagem era organizada com o primeiro algarismo sendo fixado na primeira escolha, modificando os demais algarismos na segunda escolha. Desse modo, se para cada uma das cinco opções iniciais se tem quatro possíveis segundas escolhas, chega-se na operação (5x4).

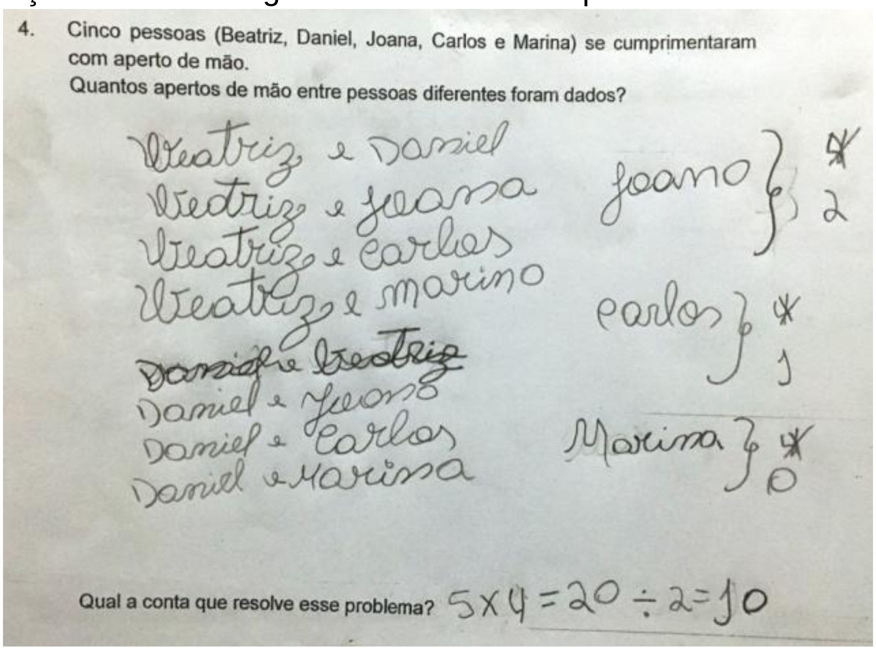
Assim como na árvore de possibilidades, os problemas de *combinação* eram discutidos de modo que levassem os alunos a perceber que a ordem não gera novas possibilidades, sendo necessário riscar os casos repetidos. Na Figura 14B, no problema de *combinação*, destaca-se que o aluno não escreveu todas as possibilidades, apenas representou o número de possibilidades que seriam caso todas se repetissem, e riscando esse número para informar quantas possibilidades diferentes ainda poderiam ser contadas. Assim como na Figura 13B, destaca-se que, para cada uma das cinco escolhas iniciais, tem-se quatro opções de segunda escolha. Entretanto, como o mesmo aperto de mão não pode ser contado duas vezes, é preciso dividir pelo número de repetições da mesma possibilidade. Nesta figura também se ressalta que a expressão numérica correta seria 5 x 4 ÷ 2 = 10, porém entende-se que os alunos conseguiram compreender a operação sugerida pela pesquisadora.

Figura 14A: Primeira intervenção com o Grupo 2 do 5º ano. Resolução de situações de *arranjo*, com duas etapas de escolha, por meio da representação auxiliar Listagem sistematizada de possibilidades.



Fonte: a autora

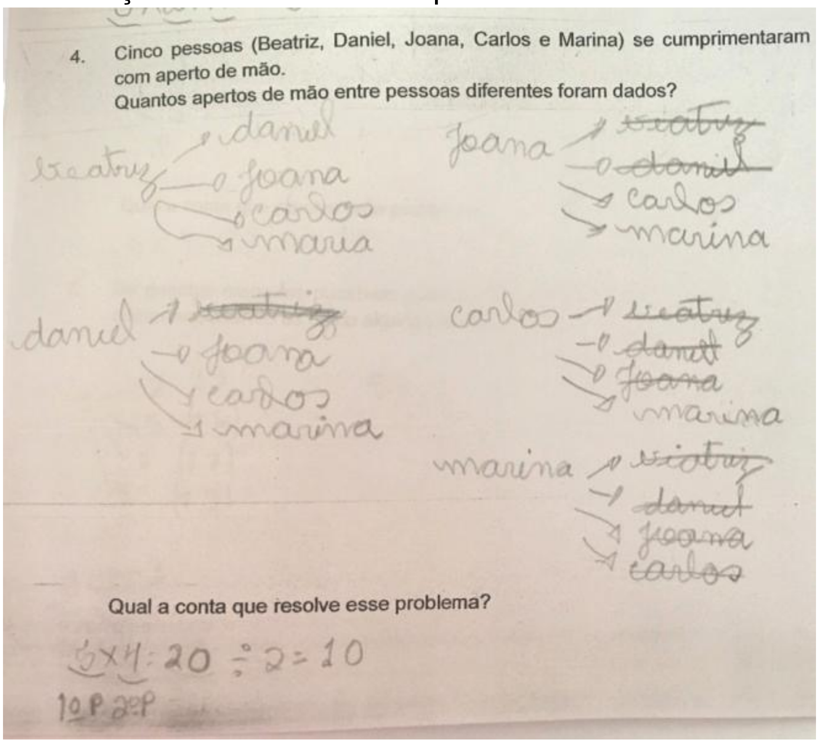
Figura 14B: Primeira intervenção com o Grupo 2 do 5º ano. Resolução de situações de *combinação*, com duas etapas de escolha, por meio da representação auxiliar Listagem sistematizada de possibilidades.



Fonte: a autora.

A seguir, é possível visualizar nas Figuras 15 e 16, registros de alunos do 7º ano durante as intervenções em seus respectivos grupos. No registro do G1 e do G2 observa-se na situação de *combinação* (Figuras 15A e 16A) o resultado da discussão sobre a necessidade de não considerar os casos repetidos. Em ambas as turmas desse ano era enfatizado que não era necessário contar duas vezes a mesma possibilidade, sendo, portanto, riscada a possibilidade que se repetia. Na imagem do G2 do 7º ano (Figura 16A) é possível visualizar o destaque[15] feito pelo aluno sobre a não possibilidade de repetir os casos em função da ordem.

Figura15A: Primeira intervenção com o Grupo 1 do 7º ano. Resolução de situações de *combinação*, com duas etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades.



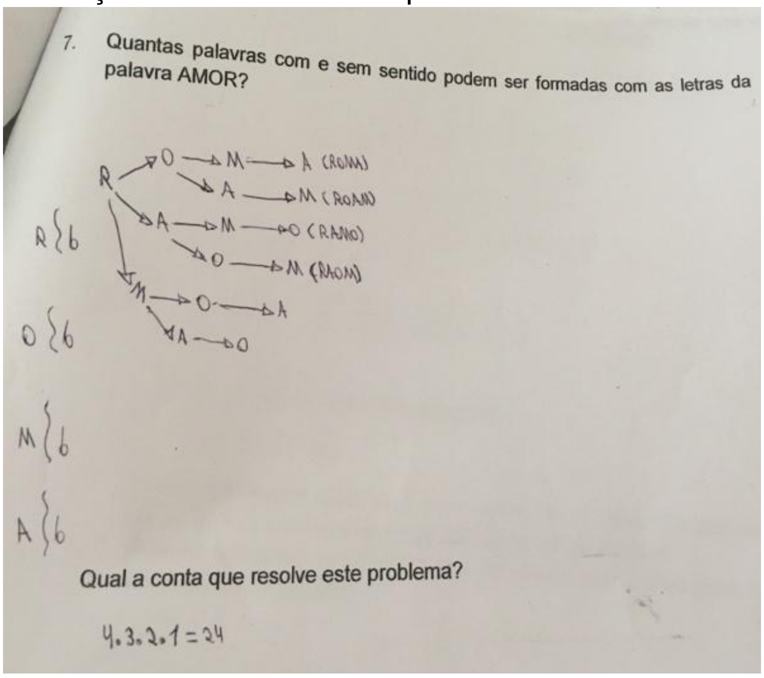
Fonte: a autora.

Para a discussão da expressão numérica da *combinação*, já com os casos repetidos riscados, era debatida a necessidade de, depois da operação de multiplicação, realizar uma divisão. Assim, os alunos registravam primeiro a multiplicação e seu resultado, para em seguida efetuar a divisão pelo número

15 Nesta pesquisa não serão analisados erros de escrita, como no caso desse aluno, pois o interesse é no entendimento sobre as situações combinatórias.

de casos repetidos da mesma possibilidade. Nas Figuras 15A e 16A, assim como nas Figuras 13B e 14B, também foram realizadas as operações 5 x 4 = 20 ÷ 2 = 10. Entende-se que, apesar da expressão numérica estar incorreta, a intenção do aluno era multiplicar e depois dividir por dois. Nas figuras 15B e 16B também se destaca o raciocínio que indica uma generalização de possibilidades.

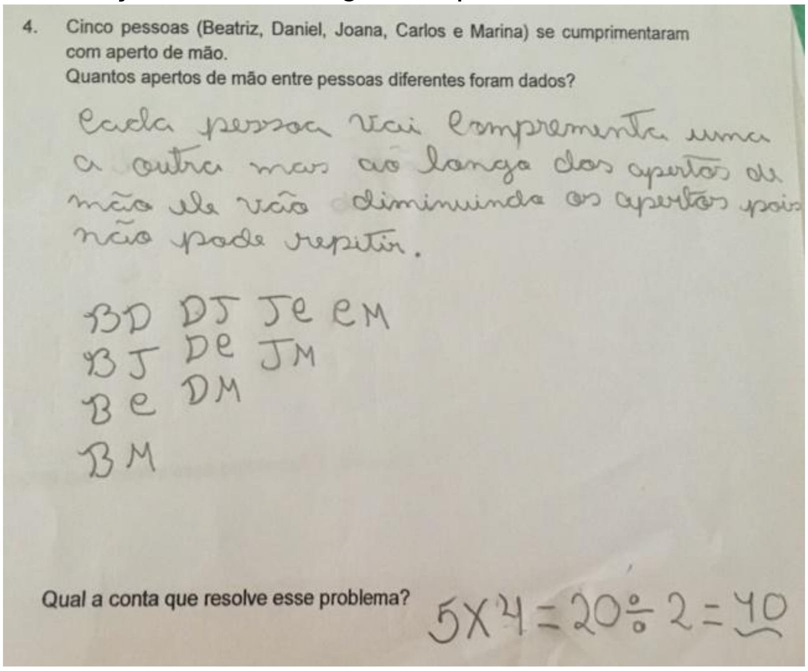
Figura15B: Segunda intervenção com o Grupo 1 do 7º ano. Resolução de situações de *permutação*, com quatro etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades.



Fonte: a autora.

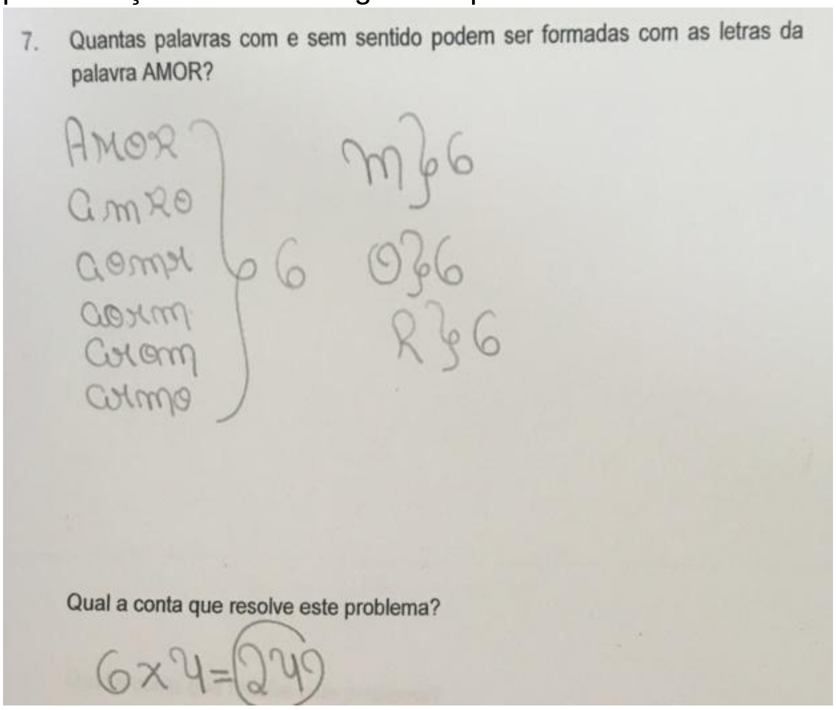
Nas Figuras 15 e 16 também se pode observar o problema de *permutação* (Figuras 15B e 16B) das letras da palavra AMOR, no qual os alunos generalizaram que, se para uma letra inicial (a primeira escolha) são seis possibilidades (segunda escolha), isso também acontece para as demais letras da situação. Nas situações de permutação o caso é diferente, uma vez que a ordem é determinante em situações desse tipo. No G1 (Figura 15B) o aluno registrou a árvore de possibilidades sugerida pela pesquisadora durante a intervenção e destacou, entre parênteses, a palavra formada, modificando a ordem das letras.

Figura 16A: Primeira intervenção com o Grupo 2 do 7º ano. Resolução de situações de *combinação*, com duas etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar listagem de possibilidades.



Fonte: a autora.

Figura 16B: Segunda intervenção com o Grupo 2 do 7º ano. Resolução de situações de *permutação*, com quatro etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar listagem de possibilidades.

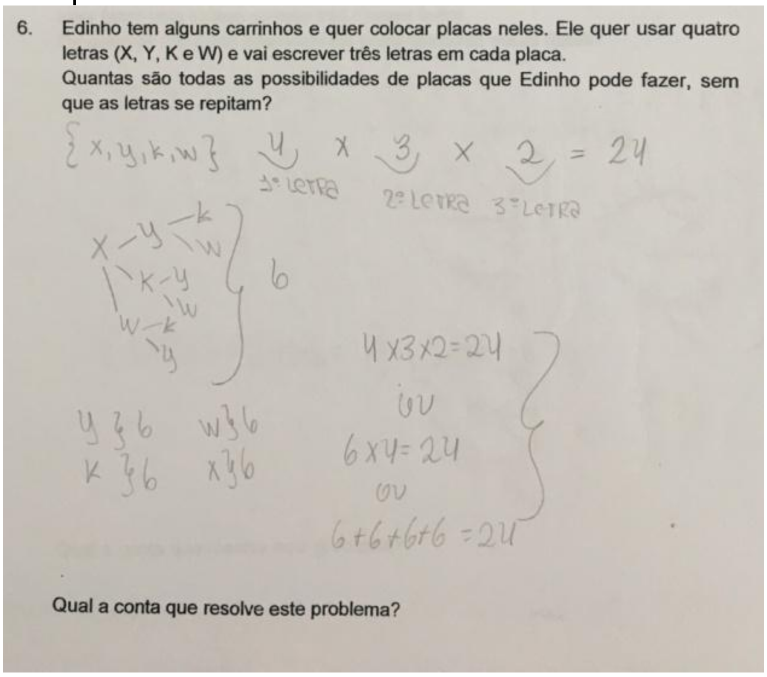


Fonte: a autora.

No Grupo 2 (Figura 16B) a listagem foi registrada pelo aluno, mas apesar de ser estimulado na intervenção o uso do PFC, o aluno registrou uma operação de multiplicação por meio da generalização de possibilidades, em que, se para a primeira letra tem 6 possibilidades, e existem quatro letras, a multiplicação indicada poderia ser 6 x 4, ou seja, seis anagramas iniciados com cada uma das letras. Outra maneira para se chegar ao mesmo resultado seria aplicar o PFC com quatro possibilidades de escolha da primeira letra, três possibilidades para a segunda letra, duas possibilidades para a terceira letra e apenas uma possibilidade para a quarta letra. Tem-se, com isso, a multiplicação 4 x 3 x 2 x 1, a qual também resulta em 24 possibilidades, ou seja, 24 anagramas com as letras da palavra AMOR. Ressalta-se, com isso, que as representações auxiliares (árvores e listagens) serviram de suporte para a conversão de língua natural para a expressão numérica.

A seguir, é possível observar os registros feitos durante a intervenção junto aos alunos do 9º ano. No G1 (Figura 17), na situação de *arranjo* (Figura 17A) o aluno registrou a árvore sugerida pela pesquisadora, assim como o PFC. No exemplo da Figura 17A é destacada a situação de *arranjo* com três etapas de escolha. Assim, inicialmente era realizada a primeira escolha, ou seja, a primeira letra da placa (quatro possibilidades). A partir dela, era realizada a segunda etapa de escolha com as opções para a segunda letra da placa (três possibilidades), por fim, a terceira etapa de escolha com as opções para a terceira letra da placa (duas possibilidades). Para a aplicação do PFC, eram destacadas as quatro possibilidades da primeira escolha vezes as três possibilidades para a segunda escolha, vezes as duas possibilidades para a terceira escolha. Para chegar no PFC era questionada qual a operação que resolvia o problema, e, assim, os alunos também destacaram outras possibilidades de operação para a resolução do problema. Sobre isso, o aluno da Figura 17A registrou as outras operações discutidas que também podem resolver a situação por meio da generalização de possibilidades, de modo que, se são seis possibilidades para cada uma das quatro primeiras escolhas realizadas, é possível realizar uma soma de parcelas repetidas ou a multiplicação desses fatores.

Figura 17A: Segunda intervenção com o Grupo 1 do 9º ano. Resolução de situações de *arranjo*, com três etapas de escolha, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades.

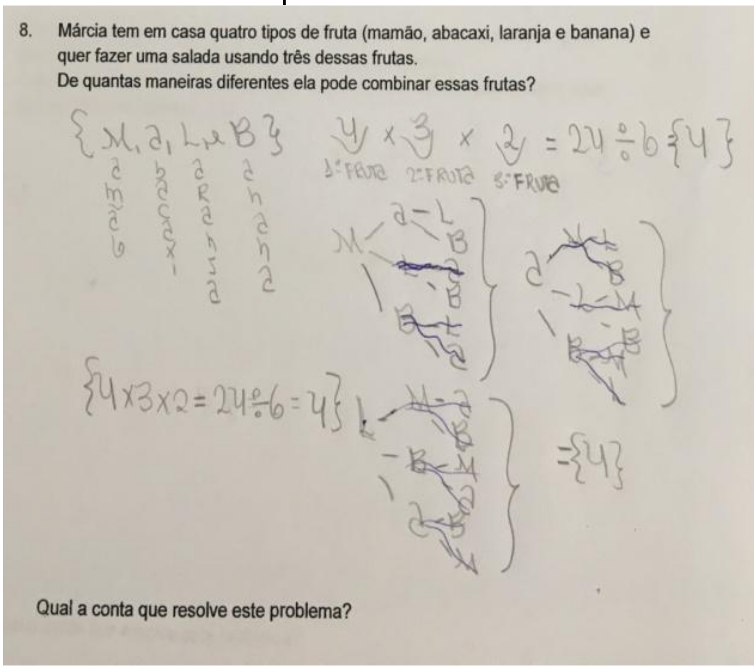


Fonte: a autora.

Na Figura 17B, em uma situação de combinação com três etapas de escolha, o aluno destaca, como realizado durante o processo de intervenção, a primeira escolha de cada uma das quatro frutas, que geram, para a segunda escolha, três opções, e, na terceira escolha, duas opções (4x3x2 = 24). Em seguida, os casos repetidos são riscados, de modo que era discutido o número de casos repetidos da mesma possibilidade (6). Desse modo, o PFC era aplicado com a divisão do total de possibilidades pelo número de casos repetidos.

No G2 (Figura 18B) o aluno registrou por meio da listagem, assim como realizado pelo aluno da Figura 17B com o uso da árvore, a informação dada pela pesquisadora para explicar o PFC na situação de *combinação* (Figura 18B), ressaltando a necessidade de dividir por seis, uma vez que esse é o número de casos repetidos que precisam ser contados uma única vez. Desse modo, ele listou todas as possibilidades para as três etapas de escolha (1ª; 2ª e 3ª fruta) e dividiu pelo número de casos repetidos, destacando as seis possibilidades iguais para a mesma possibilidade (L, M, B; L, B, M; M, L, B; M, B, L; B, M, L; B, L, M).

Figura 17B: Segunda intervenção com o Grupo 1 do 9º ano. Resolução de situações de *combinação*, com três etapas de escolha, por meio da representação auxiliar árvore de possibilidades.

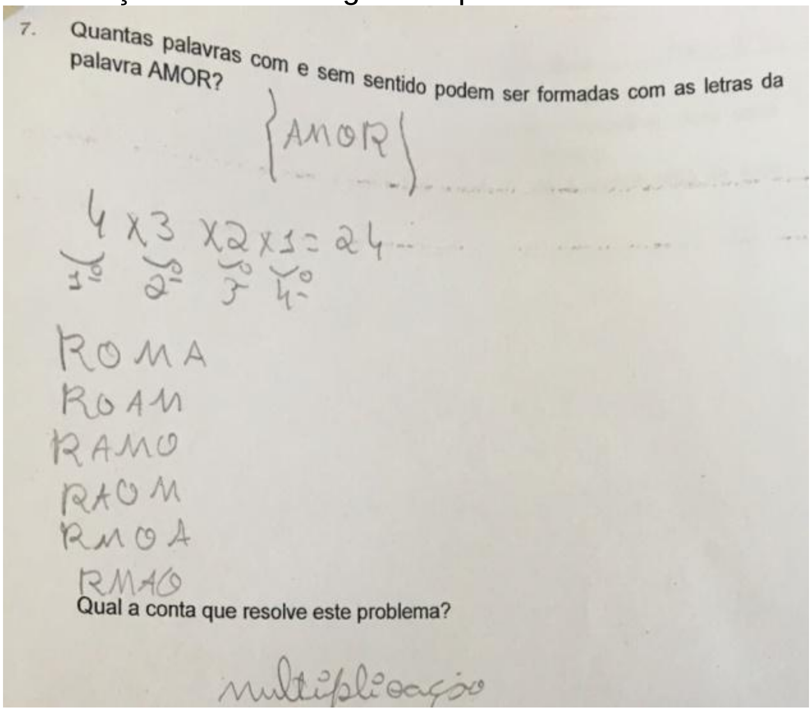


Fonte: a autora.

Na situação de *permutação* da Figura 18A, o aluno em questão registrou apenas a listagem com a escolha da primeira letra, indicando a segunda, terceira e quarta escolha para essa letra. Desse modo, o PFC era discutido salientando que, são quatro letras possíveis para a primeira escolha, restando três opções de letras para a segunda escolha; em segunda, na terceira escolha, restavam apenas duas opções e, por último, para a escolha da quarta letra, restava apenas uma opção (4x3x2x1).

Destacam-se algumas particularidades de cada ano de ensino, pois, apesar das intervenções serem realizadas buscando os mesmos questionamentos, no 5º ano os alunos perceberam, principalmente o uso do PFC como uma generalização de possibilidades, em especial nas situações de *produto cartesiano* e *arranjo* com duas etapas de escolha. No 7º ano os alunos, além do entendimento do PFC, também chegaram à generalização de casos e, no 9º ano, essa envolveu também a possibilidade de adição de parcelas repetidas. Outra diferença que também pode ser enfatizada foi que os alunos do 7º e, com mais frequência, do 9º ano colocavam os traços das etapas de escolha do PFC e escreviam 1ª escolha (1ª letra/ 1ª fruta), 2ª escolha. Assim, isso pode evidenciar uma mais clara compreensão do PFC. Desse modo, o uso de registros de representação parece ter sido ampliado do 5º ao 7º e desse ao 9º ano, pois os alunos perceberam outras formas válidas de representar as dadas situações.

Figura 18A: Segunda intervenção com o Grupo 2 do 9º ano. Resolução de situações de *permutação*, com quatro etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar listagem de possibilidades.

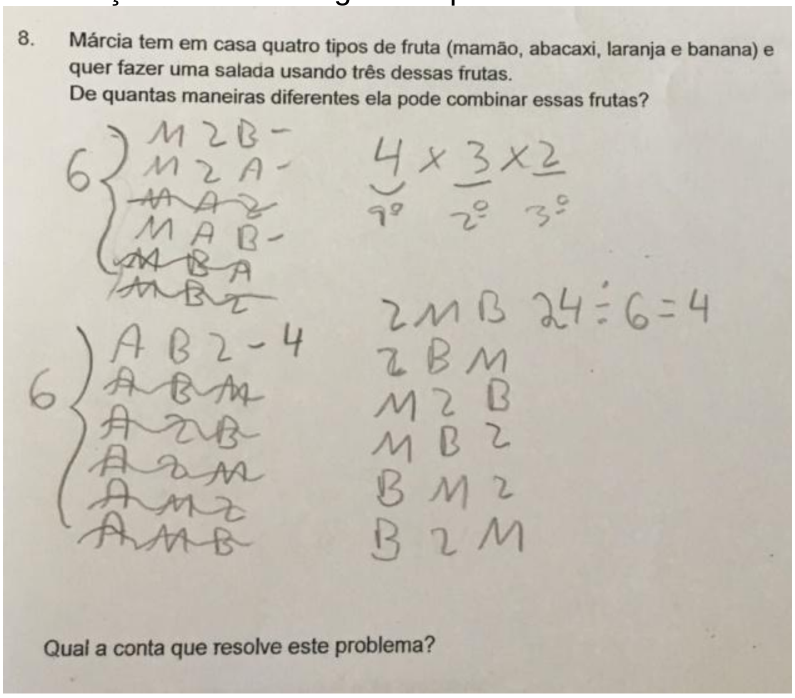


Fonte: a autora

Nos três anos pesquisados, durante a intervenção foram observados avanços, no sentido de perceber a necessidade de sistematização no levantamento das possibilidades, seja com árvore de possibilidades, ou com listagens. Também foram observados avanços na determinação das expressões numéricas que resolvem as situações – até mesmo para o caso mais difícil – a *combinação*. As intervenções também chamaram bem a atenção dos alunos quanto aos *invariantes* (quantas *escolhas* eram necessárias em cada problema apresentado e se a *ordenação* dos elementos indicava, ou não, possibilidades distintas). Com isso, o uso de uma representação auxiliar permitiu a utilização de distintas formas de expressões numéricas válidas para a resolução de diferentes situações combinatórias, chamando a atenção para seus invariantes específicos.

Na próxima seção foram analisados os avanços em cada ano de ensino especificamente, bem como em cada grupo de intervenção, comparando-se os desempenhos antes e depois dos processos interventivos.

Figura 18B: Segunda intervenção com o Grupo 2 do 9º ano. Resolução de situações de *combinação*, com três etapas de escolha, respectivamente, por meio da representação auxiliar listagem de possibilidades.



Fonte: a autora.

6.2 O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: DESEMPENHOS ANTES E DEPOIS DA INTERVENÇÃO

Os testes aplicados antes e depois das intervenções foram analisados, levando em conta o levantamento de possibilidades e a expressão numérica (operação, conta) utilizada para responder a situação.

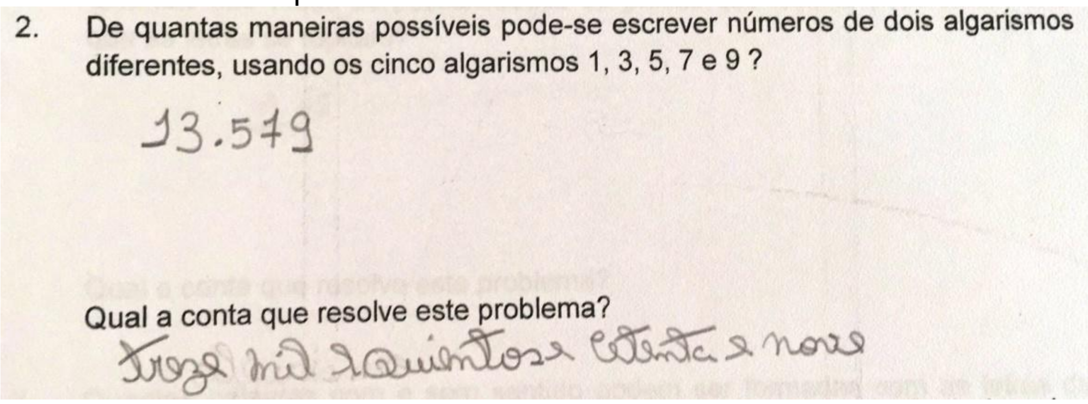
O levantamento de possibilidades foi analisado de acordo com o seguinte critério: pontuação 0 significava Erro, nesse caso eram consideradas as respostas em branco, ou aquelas que não indicavam claramente um raciocínio combinatório na sua resolução; 1 ponto = Acerto Parcial 1, nesse caso eram consideradas as respostas com raciocínio combinatório em que se apresentasse menos da metade de possibilidades que responde a situação; 2

pontos = Acerto Parcial 2, nessa pontuação estão os casos em que são apresentadas mais da metade de possibilidades, mas não há seu esgotamento; 3 pontos = Acerto Total, o total dos pontos eram designados àqueles que conseguiam responder corretamente a situação com esgotamento de todas as possibilidades. Assim, no teste contendo oito situações, cada aluno poderia chegar a um total de 24 pontos (oito problemas x três pontos no máximo em cada problema) no teste.

A análise para a expressão numérica que responde a situação também foi realizada com pontuação de 0 a 3 pontos, sendo que 0 ponto era designado para as respostas em branco ou que apresentavam um cálculo que não correspondia ao usado para responder a situação. Estudantes que escreviam o tipo de operação que deveria ser realizado, mas que não indicavam qual a expressão numérica, nem a resposta numérica, também foram classificados com 0 ponto. O Acerto Parcial 1 era caracterizado quando os alunos indicavam a expressão numérica correta, entretanto erravam o procedimento do cálculo, indicando um número de possibilidades que indicava menos da metade do total. No Acerto Parcial 2, os alunos erravam o procedimento, mas indicavam como resposta um número de possibilidades igual ou superior à metade do total de possibilidades. Assim, os alunos acertavam o que Vergnaud (1983) chama de cálculo relacional, mas erravam o cálculo numérico; ou ainda, dificuldade no tratamento dentro do próprio registro, como apontado por Duval (2012). Também foram encontrados acertos parciais com generalização incompleta de possibilidades. Os 3 pontos foram designados para os que indicavam a expressão numérica correta, seja ela por meio de uma generalização de possibilidades ou pelo PFC.

Nas Figuras 19, 20, 21, 22, 23 e 24 é possível observar exemplos de erros ou acertos, tanto no levantamento de possibilidades, quanto na indicação de uma expressão numérica. Na Figura 19 o aluno apresenta uma total incompreensão da situação e apenas utiliza os algarismos para a escrita de um único número. Na Figura 20 o aluno compreende a situação e indica algumas possibilidades por meio da listagem. Nesse caso, para indicar o total de possibilidades ele deveria listar os 24 casos, mas o aluno indica 11, ou seja, menos da metade do total, o que configura Acerto Parcial 1. O aluno não indica uma expressão numérica que responde a situação, o que indica Erro na expressão numérica.

Figura 19: Exemplo de aluno do 5º ano no pré-teste - erro no levantamento de possibilidades e na expressão numérica


2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?

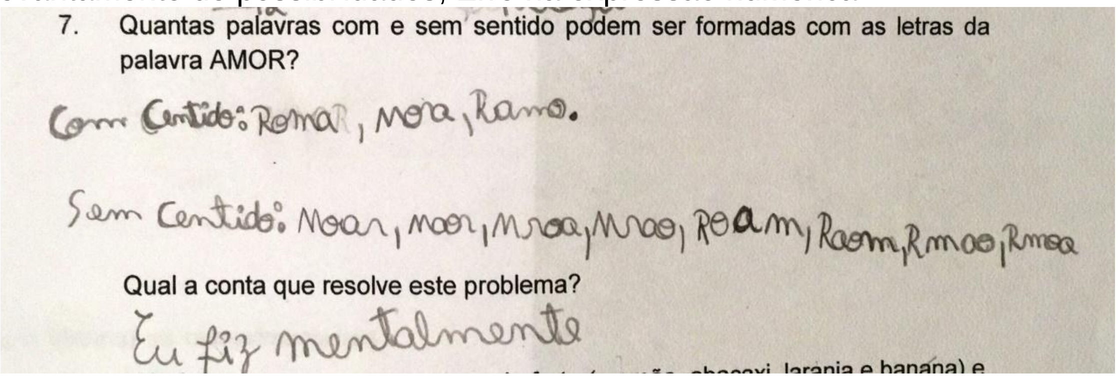
13.579

Qual a conta que resolve este problema?

Treze mil equinhentose cetenta e nove

Fonte: a autora

Figura 20: Exemplo de aluno do 5º ano no pré-teste - Acerto Parcial 1 no levantamento de possibilidades; Erro na expressão numérica.


7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Com Centido: Romar, mora, Ramo.

Sem Centido: Moar, moor, Mroa, Mrao, Roam, Raom, Rmao, Rmoa

Qual a conta que resolve este problema?

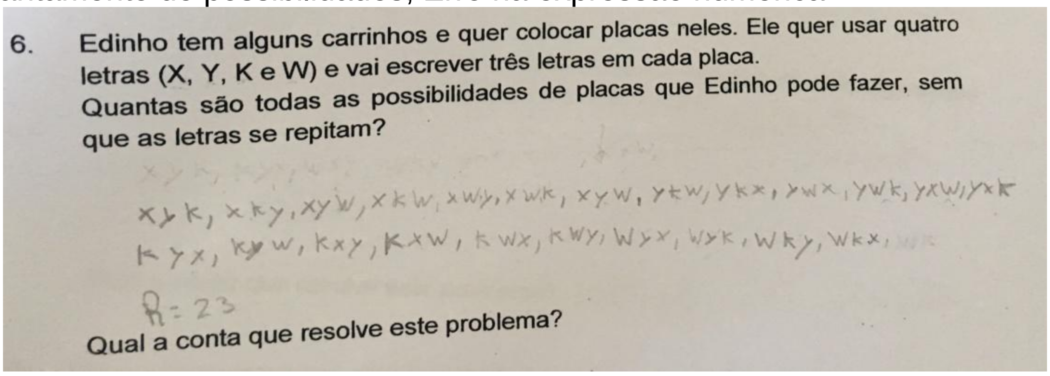
Eu fiz mentalmente

Fonte: a autora

Na Figura 21 é possível observar um exemplo de Acerto Parcial 2, pois, para indicar o total de possibilidades o aluno deveria ter listado 24 casos e ele lista 23. Assim, ele indicou mais da metade do número de possibilidades. Com relação à expressão numérica, o aluno não apresenta uma operação que resulte na resposta do problema, o que configura erro nesse quesito.

Na Figura 22 o aluno, no pós-teste, utiliza a generalização de possibilidades por meio do uso da árvore de possibilidades. Com isso, ele organiza o diagrama de árvore apenas para a Turma A em primeiro lugar e chega em dez possibilidades para essa turma ocupar a primeira posição. Compreende-se que o aluno percebeu não ser necessário repetir o procedimento com as outras turmas. Dessa forma, o aluno multiplicou as dez possibilidades pelo número de turmas, encontrando 50 possibilidades. Esse caso se configura como Acerto Parcial 2, tanto para o levantamento de possibilidades, quando para a expressão numérica, pois, embora o aluno não indique textualmente todas as possibilidades, entende-se que ele buscou um procedimento menos custoso para indicar a resposta correta. Além disso, para que o aluno tivesse Acerto Total ele deveria ter encontrado 12 possibilidades para a Turma A e, com a multiplicação, chegaria em 60 possibilidades totais, por isso, sua resposta indica que ele encontrou mais da metade das possibilidades, o que se configura como Acerto Parcial 2.

Figura 21: Exemplo de aluno do 9º ano no pré-teste - Acerto Parcial 2 no levantamento de possibilidades; Erro na expressão numérica



6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa.
Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

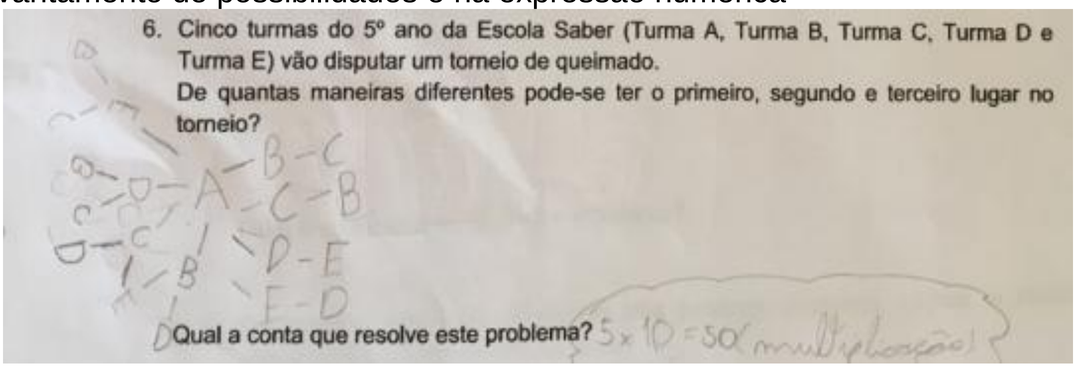
xyk, xky, xyw, xkw, xwy, xwk, xyw, ykw, ykx, ywx, ywk, yxw, yxk
kyx, kyw, kxy, kxw, kwx, kwy, wyx, wyk, wky, wkx,

R = 23

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora

Figura 22: Exemplo de aluno do 5º ano no pós-teste - Acerto Parcial 2 no levantamento de possibilidades e na expressão numérica



6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

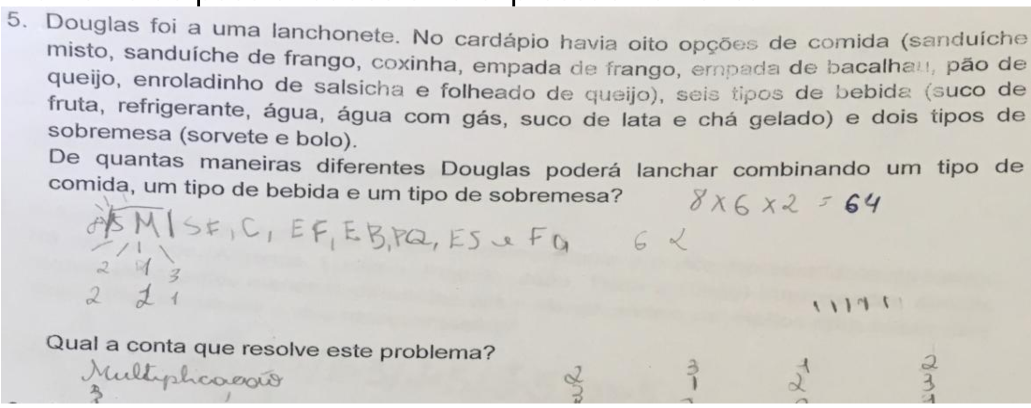
A – B – C
A – C – B
A – D – E
A – E – D

Qual a conta que resolve este problema? 5 x 10 = 50 (multiplicação)

Fonte: a autora

Na Figura 23 foi considerado o Acerto Parcial 2, tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica correspondente. Isso porque, nessa situação do pós-teste era necessário o uso de uma expressão numérica, pois listar ou organizar em árvore 96 possibilidades é um trabalho muito custoso. O aluno tentou iniciar o procedimento de levantamento de possibilidades e, em seguida, percebeu que seria melhor realizar uma multiplicação. Assim, o aluno indicou a expressão numérica correta (8x6x2). Apesar disso, há erro de cálculo numérico/erro de tratamento dentro do próprio registro, ou um erro de atenção no momento de realizado do procedimento.

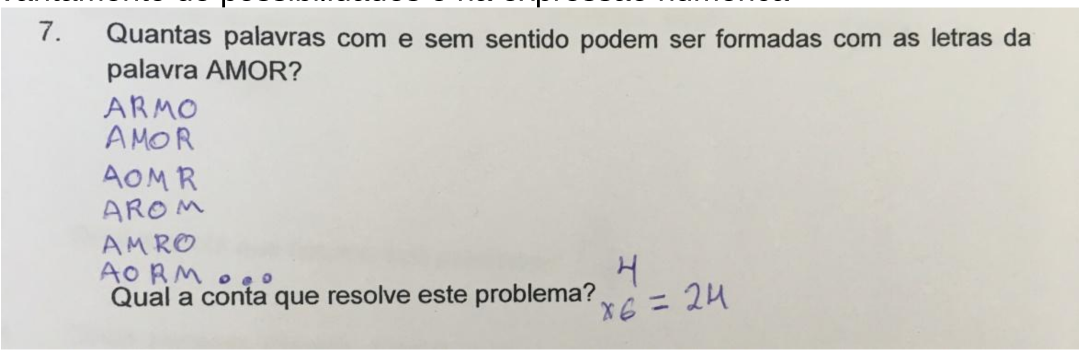
Figura 23: Exemplo de aluno do 5º ano no pós-teste - Acerto Parcial 2 no levantamento de possibilidades e na expressão numérica



Fonte: a autora

Na Figura 24 observa-se que o aluno listou todas as possibilidades iniciando com a letra A e, em seguida, indicou a expressão numérica que responde corretamente a situação por meio de uma generalização de possibilidades, o que foi considerado como Acerto Total nos dois quesitos: levantamento de possibilidades e expressão numérica.

Figura 24: Exemplo de aluno do 9º ano no pré-teste - Acerto Total no levantamento de possibilidades e na expressão numérica



Fonte: a autora

As situações com indicação da expressão numérica correta (parcial ou total – Figuras 22, 23 e 24), sem a apresentação completa da outra representação para o levantamento de possibilidades (seja listagem ou árvore) indicava o acerto correspondente também nessa etapa, uma vez que, entende-se que o aluno percebe que há outras possibilidades, mas decidiu não indicá-las, pois a operação é suficiente para dizer quantas são. Isso fica evidente no exemplo da Figura 24, pois, as reticências colocadas pelo aluno indicam que ele percebeu que são seis possibilidades para as palavras iniciadas com A, mas ainda há as possibilidades iniciadas em M, em O e em R. Assim, há seis possibilidades para cada um desses inícios, portanto, 4 x 6 possibilidades, ou seja, no total são 24 palavras com ou sem sentido formadas a partir das letras da palavra AMOR.

Com a pontuação estabelecida no pré-teste e no pós-teste, foi criado o banco de dados para realização da análise estatística com uso do software SPSS – Statistical Package for the Social Sciences. A primeira análise se deu em função da média de desempenho em cada teste para o levantamento de possibilidades e para a resposta dada na operação que responde o problema e, com isso, é possível observar na Tabela 4 as médias para cada grupo, em cada ano de ensino.

Tabela 4: Média de desempenho no pré-teste e no pós-teste por ano de ensino e por grupo de intervenção

		Pré-teste		Pós-teste	
		Levantamento*	**Expressão****	**Levantamento**	**Expressão**
5º Ano	**G1 (Árvore)**	1,89	0,31	6,11	4,57
	G2 (Listagem)	2,85	1,2	5,15	3,30
7º Ano	**G1 (Árvore)**	1,38	0,57	6,76	4,76
	G2 (Listagem)	1,77	0,46	6,23	3,46
9º Ano	**G1 (Árvore)**	6,74	3,68	9,52	7,89
	G2 (Listagem)	6,25	2,56	8,43	5,93

Fonte: a autora[16]

[16] O levantamento de possibilidades pode ser indicado por uma listagem, árvore de possibilidades, ou outra representação que indique parcial ou totalmente, as possibilidades. A

Destaca-se, na Tabela 4, a baixa média de desempenho em todas as situações, considerando que se poderia chegar até os 24 pontos. Além disso, em todas as situações, a média de acertos dos alunos no levantamento de possibilidades é superior à média na expressão numérica. Entretanto, é importante enfatizar o aumento na média em todos os grupos e em todos os anos de ensino na comparação do pré-teste com o pós-teste, principalmente quando se salienta que houve apenas duas sessões de intervenção com cada grupo. Além disso, nessas duas sessões foram trabalhados os quatro tipos de problemas. Certamente um tempo maior de ensino implicaria em maiores avanços. Esses resultados indicam o efeito positivo das intervenções, sendo o efeito maior observado no levantamento de possibilidades, mais do que na determinação de expressão numérica que resolve a situação. Isso indica que para os estudantes foi mais fácil a conversão da língua natural para alguma representação intermediária, mas houve ainda dificuldade na conversão da representação intermediária para a expressão numérica.

Também vale destacar que, independente de sua média inicial, os participantes do G1 possuem, em todos os casos, médias maiores que as do G2 no pós-teste. Os testes estatísticos descritos na próxima seção comprovaram que as diferenças no pré-teste não eram significativas entre os grupos dentro de cada ano escolar. Dessa forma, inicialmente os alunos do G1 possuíam desempenhos semelhantes aos do G2, no 5º, no 7º e no 9º ano. Assim, dentro de cada ano, os alunos partiram de desempenhos iniciais bem semelhantes. Salienta-se, ainda, que as médias do 5º e do 7º ano são equiparáveis, aparentando não haver trabalho escolar com a Combinatória nesse intervalo. Os alunos do 9º ano, no pré-teste, possuem médias semelhantes às médias do 5º e do 7º ano no pós-teste, o que pode caracterizar um trabalho com a Combinatória desenvolvido entre o 7º e o 9º ano de ensino.

---

expressão numérica é indicada por uma operação matemática possível de responder a situação.

6.2.1 O efeito das intervenções realizadas no desenvolvimento do raciocínio combinatório: índices de significância

Para analisar o efeito das intervenções realizadas no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos dos diferentes anos de ensino foram realizadas análises estatísticas por meio do software SPSS. Inicialmente foram comparados o pré-teste e o pós-teste de cada turma por meio da prova paramétrica T-Teste de amostras em pares (Pré-testeXPós-teste).

Comparando separadamente o resultado do pós-teste com o do pré-teste de cada grupo e cada ano escolar, também foram observadas diferenças significativas tanto para o levantamento de possibilidades ($p<0,001$[17]), quanto para expressão numérica ($p<0,001$) que responde às situações combinatórias Desse modo, verifica-se que as intervenções surtiram efeitos muito significativos em todos os anos de escolarização pesquisados.

Para analisar a diferença entre os diferentes grupos de intervenção foi realizada a prova paramétrica T-teste de amostras independentes, comparando o pós-teste do G1 (representação intermediária: árvore de possibilidades) com o pós-teste do G2 (representação intermediária: listagem), em cada ano escolar. Para o 5º ano a análise mostrou que não há diferenças nem no levantamento de possibilidades ($t(37)= 0,576$; $p=0,568$) nem na expressão numérica ($t(37)= 0923$; $p=0,362$). Também não há diferenças significativas no 7º ano em nenhuma situação (levantamento de possibilidades: $t(45)= 0,440$; $p=0,662$); (expressão numérica: $t(45)= 0,166$; $p=0,300$), assim como para o 9º ano (levantamento de possibilidades: $t(33)= 0,650$; $p=0,520$); (expressão numérica: $t(33)= 1,341$; $p=0,189$). Portanto, de modo geral, não foram observadas diferenças significativas entre os grupos de intervenção em nenhum ano de escolarização. Dessa forma, tanto a árvore de possibilidades,

---

[17] Em linguagem estatística ‘p’ indica se algo provavelmente é verdadeiro e não resultante de uma situação aleatória. Na estatística afirmar que um resultado é altamente significativo, significa que a hipótese que está sendo testada é muito provavelmente verdadeira. Em geral, quando $p <0,05$ assume-se que há uma probabilidade de apenas 5% de que a diferença encontrada não seja verdadeira. Assim, quanto menor o valor de p, menor será a probabilidade da diferença não ser verdadeira.

quanto a listagem, se mostraram ser representações auxiliares válidas que ajudaram no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos participantes do estudo.

Apesar de não terem sido observadas diferenças significativas, de modo geral, entre os dois grupos de intervenção (G1 x G2), foi realizada a análise do pós-teste apenas nas questões em que o número de possibilidades e de etapas de escolha era maior, sendo recomendável, portanto, uma expressão numérica para resolver a situação, seja ela por generalização de possibilidades, ou pelo uso do Princípio Fundamental da Contagem. Essa análise foi realizada por um T-teste de amostras independentes em que foi comparado o desempenho do G1 (árvore) e do G2 (listagem) nessa etapa do teste. Os resultados indicaram uma diferença significativa entre os grupos ($t(119)= 3{,}162$; $p=0{,}002$). Desse modo, o Grupo 1, que teve intervenção com o uso da árvore de possibilidades, obteve melhor desempenho nas situações em que era recomendável o uso de uma expressão numérica, indicando que, essa representação intermediária parece ter um maior grau de congruência com a expressão numérica necessária para a resolução dos problemas combinatórios. Assim, a árvore de possibilidade pode indicar uma dupla congruência. A primeira, com o enunciado, por também ser escrita em língua natural. E a segunda com a expressão numérica, pela maior clareza na relação um a muitos que indica o pensamento multiplicativo. Isso porque, se os alunos do G1 chegaram mais vezes à expressão numérica correta, provavelmente reconheceram nas árvores os números necessários para a sua utilização.

Foi realizada a prova paramétrica ANOVA[18], para comparar os desempenhos no pós-teste entre os diferentes anos de ensino. Na comparação entre 5º e 7º anos não foram identificadas diferenças significativas, nem no levantamento de possibilidades ($p=0{,}650$), nem na expressão numérica ($p=0{,}991$), uma vez que as médias entre as duas turmas foram muito similares. Na comparação com o 9º ano, foram observadas diferenças significativas com as outras duas turmas pesquisadas. Entre 5º e 9º anos no levantamento de

---

[18] ANOVA (Análise de Variância) é um procedimento estatístico usado para comparar três ou mais grupos de amostras independentes, como no caso três anos escolares distintos.

possibilidades (p=0,003) e na expressão numérica (p=0,007) foram observadas diferenças significativas. Entre o 7º e o 9º anos também foram verificadas diferenças, tanto no levantamento de possibilidades (p=0,023), quanto na expressão numérica (p=0,007).

Assim, destaca-se que, na comparação entre os três anos de ensino houve diferença significativa apenas quando comparados cada um dos dois primeiros anos com o 9º ano, indicando o melhor desempenho dessa turma, em comparação com as outras duas, isso porque os acertos no levantamento de possibilidades e nas expressões numéricas do 5º e 7º anos são muito semelhantes, não apresentando diferenças significativas. Além disso, no 9º ano os alunos iniciaram com melhores resultados e também avançaram em seus desempenhos, quando avaliados após a intervenção, apresentando diferenças significativas na comparação com 5º e com 7º anos.

Para analisar a diferença entre pré-teste e pós-teste em cada tipo de problema foi realizada o T-teste de amostras em pares. No Quadro 30 é possível visualizar que, para o 5º ano, houve diferença significativa no G1 para o levantamento de possibilidades nas situações de *produto cartesiano* e de *arranjo*.

Para a expressão numérica nas situações de *produto cartesiano*, *arranjo* e *permutação*. Nos problemas de *combinação* não foi observado índice de significância para o desempenho na operação, pois os alunos não apresentaram uma conta correspondente nem no pré-teste, nem no pós-teste. O G2 também não apresentou expressão numérica para o problema de combinação nem antes, nem depois da intervenção. Além disso, nesse grupo houve diferença significativa na operação apenas em situações de *permutação*. Assim como, no levantamento de possibilidades, que também houve diferenças apenas em problemas de *permutação*.

Tais resultados reforçam a hipótese de que a árvore de possibilidades se configura como uma representação intermediária mais vantajosa, principalmente para a indicação de uma expressão numérica. Além disso, tais avanços não são generalizados a todas as situações combinatórias, mas variam de situação a situação, o que salienta a importância do trabalho específico envolvendo cada uma das situações combinatórias e seus respectivos invariantes.

Quadro 30: Diferenças entre pré-teste e pós-teste do 5º ano por tipo de situação combinatória

Grupo	Comparação	Levantamento de possibilidades	Expressão numérica
G1 (árvore)	PCpréXPCpós	t (18) = - 3,441; **p= 0,003**	t (18) = - 3,444; **p= 0,003**
	CpréXCpós	t (18) = -1,694; p= 0,107	Como não foram apresentadas expressões numéricas nem no pré-teste nem no pós-teste, o programa não efetuou teste estatístico.
	ApréXApós	t (18) = -2,173; **p= 0,043**	t (18) = - 2,721 ; **p= 0,014**
	PpréXPpós	t (18) = - 2,082; p= 0,052	t (18) = - 2,163; **p= 0,044**
G2 (listagem)	PCpréXPCpós	t (19) = - 1,405; p= 0,176	t (19) = - 1,601; p= 0,126
	CpréXCpós	t (19) = - 1,798; p= 0,088	Como não foram apresentadas expressões numéricas nem no pré-teste nem no pós-teste, o programa não efetuou teste estatístico.
	ApréXApós	t (19) = - 0,754; p= 0,460	t (19) = - 1,675; p= 0,110
	PpréXPpós	t (19) = - 2,138; **p= 0,046**	t (19) = - 2,146; **p= 0,045**

PC: Produto cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: a autora.

No Quadro 31 se pode observar os resultados do 7º ano.

No Grupo 1, houve diferença significativa entre pré-teste e pós-teste no levantamento de possibilidades em situações de *produto cartesiano* e *permutação* e na expressão numérica também nas situações de *arranjo*. Já no G2 o levantamento de possibilidades apresentou diferenças significativas nos quatro tipos de problemas combinatórios, mas na expressão numérica houve diferenças apenas nas situações de *produto cartesiano* e *permutação*. Assim como nos resultados do 5º ano, o G1 do 7º ano também apresentou mais tipos de situações nas quais houve progressos na indicação de expressões numéricas corretas no pós-teste, do que o G2 (listagem).

Quadro 31: Diferenças entre pré-teste e pós-teste do 7º ano por tipo de situação combinatória

Grupo	Comparação	Levantamento de possibilidades	Expressão numérica
G1	PC pré X PC pós	t (20) = - 4,756; **p< 0,001**	t (20) = - 3,579; **p= 0,002**
	C pré X C pós	t (20) = - 1,160; p= 0,260	t (20) = - 1,826; p= 0,083
	A pré X A pós	t (20) = - 2,044; p= 0,054	t (20) = - 2,500; **p= 0,021**
	P pré X P pós	t (20) = - 5,645; **p< 0,001**	t (20) = - 2,905; **p= 0,009**
G2	PC pré X PC pós	t (25) = - 3,447; **p= 0,002**	t (25) = - 3,580; **p= 0,001**
	C pré X C pós	t (25) = - 2,952; **p= 0,007**	t (25) = - 1,443; p= 0,161
	A pré X A pós	t (25) = - 2,562; **p= 0,017**	t (25) = - 1,933; p= 0,065
	P pré X P pós	t (25) = - 3,904; **p= 0,001**	t (25) = - 2,945; **p= 0,007**

PC: Produto cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: a autora.

Nota-se que para a situação de *combinação* não se apresenta diferenças significativas na apresentação da expressão numérica correspondente em nenhum dos dois anos apresentados anteriormente. Isso acontece apenas no G1 do 9º ano, como é possível visualizar no Quadro 32. Mas, diferente do 5º ano, quando nenhum aluno apresentou a expressão numérica da *combinação*, no 7º e 9º anos houve avanços nesse quesito, pois, alguns alunos, com mais frequência para os alunos do 9º ano, conseguiram indicar essa expressão numérica. Além da diferença significativa nos problemas de *combinação*, destaca-se que, no G1 do 9º ano, houve diferença significativa para a expressão numérica também nas situações de *produto cartesiano* e *arranjo*.

No levantamento de possibilidades não houve diferenças significativas em nenhum tipo de problema. Acredita-se que, nessa turma, isso aconteceu em função da preferência pelo uso de uma expressão numérica, que, em algumas situações, não era a correspondente à situação, como por exemplo, o uso da expressão numérica da *combinação* em situações de *arranjo* e vice-versa. No G2 houve diferença significativa tanto no levantamento de possibilidades, quanto na expressão numérica apenas nas situações de *produto cartesiano*. Esse resultado também salienta os melhores desempenhos do G1 nas expressões numéricas.

Quadro 32: Diferenças entre pré-teste e pós-teste do 9º ano por tipo de situação combinatória

Grupo	Comparação	Levantamento de possibilidades	Expressão numérica
G1	PC pré X PC pós	t (18) = - 1,393; p= 0,181	t (18) = - 2,595**; p= 0,018**
	C pré X C pós	t (18) = - 2,042; p= 0,056	t (18) = - 2,882; **p= 0,010**
	A pré X A pós	t (18) = 0,518; p= 0,264	t (18) = - 2,249; **p= 0,037**
	P pré X P pós	t (18) = - 0,846; p= 0,408	t (18) = - 1,392; p= 0,181
G2	PC pré X PC pós	t (15) = - 2,498; **p= 0,025**	t (15) = - 3,149; **p= 0,007**
	C pré X C pós	t (15) = - 0,316; p= 0,756	t (15) = - 1,000; p= 0,333
	A pré X A pós	t (15) = - 1,192; p= 0,252	t (15) = - 1,431; p= 0,173
	P pré X P pós	t (15) = - 1,809; p= 0,091	t (15) = - 1,888; p= 0,078

PC: Produto cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: a autora.

Os resultados apresentados em todos os anos pesquisados reforçam a hipótese inicial de que o grupo que trabalhou com a árvore de possibilidades enquanto *representação intermediária* se configuraria como aquele que apresentaria mais expressões numéricas corretas. Tais avanços são específicos para cada situação combinatória, o que salienta a importância do trabalho por meio da discussão dos *invariantes* presentes em cada *situação*.

6.2.2 Estudantes do 5º ano resolvendo situações combinatórias: Pré-teste

O pré-teste, aplicado com os alunos do 5º ano mostrou o que estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; AZEVEDO; BORBA, 2013) já destacavam acerca das dificuldades no desempenho dos alunos desse ano de ensino em situações combinatórias antes de uma intervenção específica sobre o tema. O presente estudo destaca que a dificuldade dos alunos é ainda maior quando se solicita uma expressão numérica que resolve a situação. Nas Tabelas 5 e 6 é possível observar o percentual de erro, acerto parcial e acerto total, respectivamente, no levantamento de possibilidades e na expressão numérica.

No levantamento de possibilidades (Tabela 5) é possível observar o alto índice de erros no pré-teste, em que no G1, 82,9% das situações foram respondidas incorretamente, e no G2, esse quantitativo foi de 81,25%. Nos acertos totais observa-se um maior número no G2, 6,875%, enquanto no G1 apenas 1,97% das situações foram respondidas corretamente. Os índices de acertos parciais somam, no G1, 15,13%, e no G2, 11,875%. Desse modo, por meio dos resultados do pré-teste, pressupõe-se que as situações combinatórias não devem ter sido anteriormente trabalhadas.

Tabela 5: Desempenho do 5º ano no levantamento de possibilidades do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 20 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	15	16	2	0	0	0	2	4
A1	14	14	3	0	1	3	1	3
P1	18	18	0	2	1	0	0	0
C1	19	20	0	0	0	0	0	0
PC2	16	11	3	4	0	1	0	4
A2	15	19	4	1	0	0	0	0
P2	16	15	3	5	0	0	0	0
C2	13	17	4	2	2	1	0	0
Total	126 82,9%	130 81,25%	19 12,5%	14 8,75%	4 2,63%	5 3,13%	3 1,97%	11 6,87%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2; A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[19];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Ainda analisando a Tabela 5 com o desempenho no levantamento de possibilidades, observa-se que não houve acertos totais em problemas de *permutação* e *combinação*. Vale ressaltar que no primeiro problema de *combinação* as duas turmas apresentaram 100% de erro. Além disso, dos 14 acertos totais no levantamento de possibilidades, apenas quatro foram no primeiro

---

[19] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

problema de *arranjo* e os outros dez acertos totais aconteceram em problemas de *produto cartesiano*, situação que uma multiplicação direta dos números do enunciado é suficiente para a resolução, como acreditam muitos alunos em relação a todos os problemas matemáticos. O índice de acertos parciais do tipo 1 também é superior aos do tipo 2, evidenciando que os alunos apenas indicam algumas possibilidades, em geral, por meio de uma listagem não sistemática.

Quando os alunos foram questionados sobre qual a expressão numérica respondia a situação, o índice de erros aumentou, como é possível visualizar na Tabela 6.

Tabela 6: Desempenho do 5º ano na expressão numérica do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 20 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	17	17	0	0	0	0	2	3
A1	19	19	0	0	0	0	0	1
P1	19	20	0	0	0	0	0	0
C1	19	20	0	0	0	0	0	0
PC2	19	15	0	1	0	1	0	3
A2	19	20	0	0	0	0	0	0
P2	19	20	0	0	0	0	0	0
C2	19	20	0	0	0	0	0	0
Total	150 98,68%	151 94,37%	0 0%	1 0,63%	0 0%	1 0,63%	2 1,32%	7 4,37%

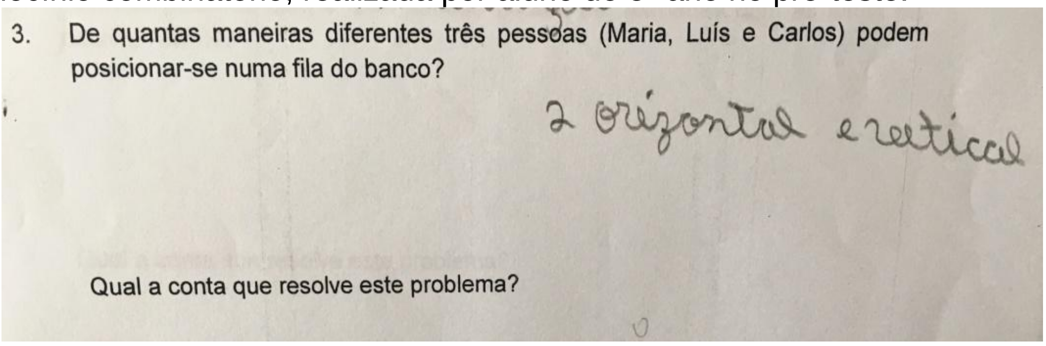
PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2; A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[20];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

[20] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

Assim, observa-se que, no G1, em 98,68% das situações os alunos não indicaram corretamente uma expressão numérica que respondesse o problema, e, no G2, esse número foi de 94,37%. Os acertos parciais no pré-teste para a expressão numérica aconteceram quando o aluno indicou a operação correta que respondia a questão, mas errou no cálculo numérico. Isso aconteceu apenas em dois casos na situação de *produto cartesiano* com três etapas de escolha, uma vez que era necessário realizar duas multiplicações sucessivas. Salienta-se que dos nove acertos totais na expressão numérica (dois do G1 e sete do G2), oito deles aconteceu em problemas de *produto cartesiano*.

Os erros apresentados no pré-teste foram desde resposta em branco, até as situações em que o aluno não apresentava resposta que envolvesse raciocínio combinatório, como é possível observar na Figura 25. Também destacam-se os erros em que os alunos aplicavam alguma operação de adição, subtração, divisão ou até mesmo a própria multiplicação de forma equivocada, como pode-se visualizar na Figura 26.

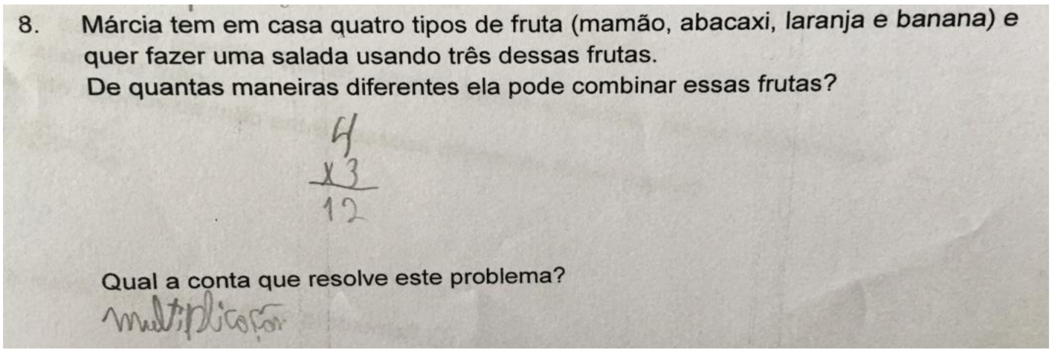
Figura 25: Situação de *permutação* com resposta errada sem relação com o raciocínio combinatório, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.



Fonte: a autora.

Os acertos parciais aconteciam quando os alunos listavam algumas possibilidades, mas não esgotavam todas elas. Na Figura 27 observa-se uma resposta parcial com menos da metade das possibilidades válidas, sem o reconhecimento da operação que responde o problema. Na Figura 28 tem-se resposta parcial com mais da metade das possibilidades válidas para a resolução do problema. Ambos os casos com resposta por meio da listagem de possibilidades.

Figura 26: Situação de *combinação* com resposta errada por meio de multiplicação que não responde o problema, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.



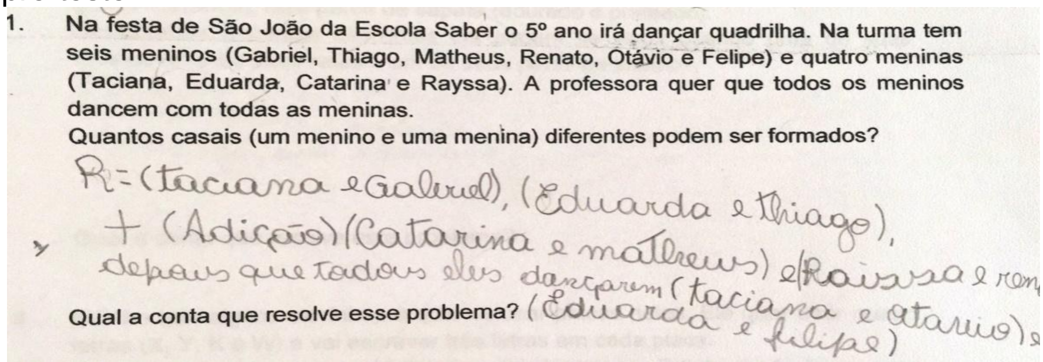
8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas.
De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

4
x3
12

Qual a conta que resolve este problema?
multiplicação

Fonte: a autora.

Figura 27: Situação de *produto cartesiano* com resposta parcialmente correta do tipo 1 por meio da listagem de possibilidades, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.

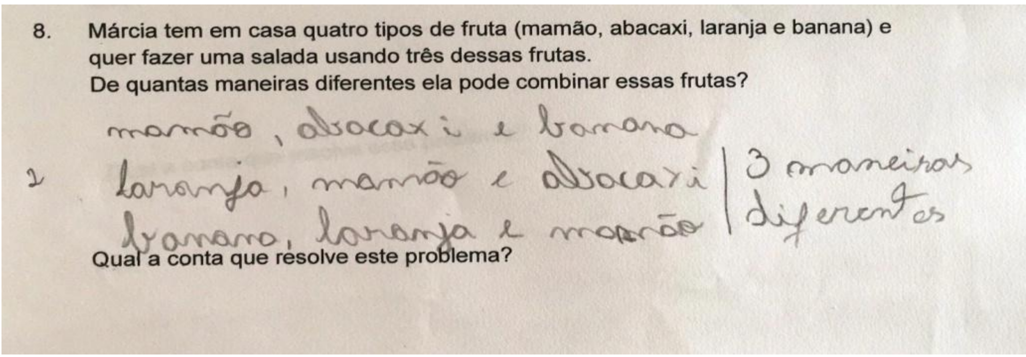


1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas.
Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?

R= (taciana e Gabriel), (Eduarda e thiago),
+ (Adição) (Catarina e matheus) e (Raissa e ren
depois que todos eles dançarem (taciana e otavio), e
Qual a conta que resolve esse problema? (Eduarda e felipe)

Fonte: a autora.

Figura 28: Situação de *combinação* com resposta parcialmente correta do tipo 2 por meio da listagem de possibilidades, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.



8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas.
De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

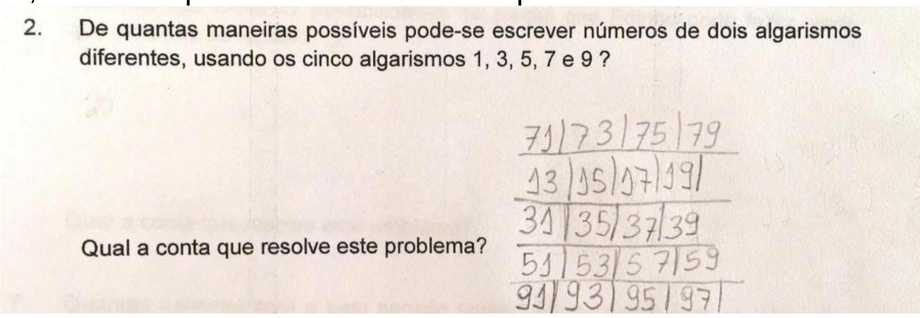
mamão, abacaxi e banana
laranja, mamão e abacaxi | 3 maneiras diferentes
banana, laranja e mamão

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

Os acertos totais são apresentados pelas crianças por meio de listagem de possibilidades ou apenas com a expressão numérica que responde a situação, (Ver Figuras 29 e 31). Em alguns casos, além de os alunos listarem as possibilidades, também indicavam a operação que resolvia o problema, como é possível observar na Figura 30.

Figura 29: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da listagem de possibilidades, sem indicação da expressão numérica que responde o problema, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.

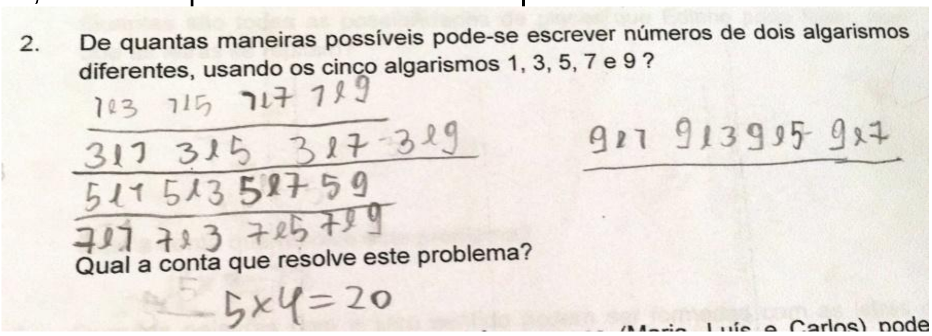

2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?

71 | 73 | 75 | 79
13 | 15 | 17 | 19
31 | 35 | 37 | 39
51 | 53 | 57 | 59
91 | 93 | 95 | 97

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

Figura 30: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da listagem de possibilidades, com indicação da expressão numérica que responde o problema, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.

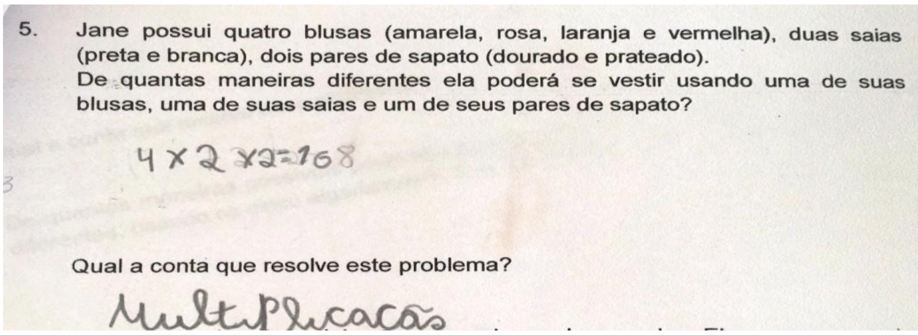

2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?

Qual a conta que resolve este problema?

5x4=20

Fonte: a autora.

Figura 31: Situação de *produto cartesiano* com resposta correta por meio da expressão numérica que responde o problema, realizada por aluno do 5º ano no pré-teste.


5. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca), dois pares de sapato (dourado e prateado).
De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

4 x 2 x 2 = 16

Qual a conta que resolve este problema?

Multiplicação

Fonte: a autora.

6.2.3 Estudantes do 5º ano resolvendo situações combinatórias: Pós-teste

Após as duas sessões de intervenção com cada turma do 5º ano - em que a primeira turma participou do G1, na qual foram trabalhadas as situações combinatórias por meio da árvore de possibilidades como representação auxiliar de transição entre a língua natural e a expressão numérica; e a segunda turma do G2, na qual a representação auxiliar foi a listagem de possibilidades - foi aplicado o pós-teste. Ao comparar com o pré-teste, é possível observar, analisando a Tabela 7, a diminuição do percentual de erros. Antes tinha-se 82,9% de erro no G1 e 81,25% de erros no G2 e no pós-teste o percentual diminuiu para 69,07% no G1 e 63,13% no G2. Assim, apesar do pouco tempo de intervenção, houve uma redução significativa de erros, e acredita-se que com mais sessões de intervenção, o percentual de erros diminuiria ainda mais.

Tabela 7: Desempenho do 5º ano no levantamento de possibilidades do pós-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação.

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 20 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	9	6	0	4	0	1	10	9
A1	11	10	2	6	0	1	6	3
P1	14	11	0	4	0	0	5	5
C1	13	13	1	6	0	0	5	1
PC2	11	12	0	5	2	1	6	2
A2	15	15	2	5	1	0	1	0
P2	14	17	5	2	0	1	0	0
C2	18	17	1	3	0	0	0	0
Total	105 69,07%	101 63,13%	11 7,24%	35 21,87%	3 1,97%	4 2,5%	33 21,72%	20 12,5%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2; A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2; [21]
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

---

[21] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

Analisando também o percentual de acertos totais percebe-se o avanço dos grupos em relação ao pré-teste, quando os estudantes do G1 tinham apenas 1,97% de acertos totais e passou para 21,72% no pós-teste. O G2 também avançou nos acertos totais de 6,87% para 12,5%. Destaca-se, ainda, que no pré-teste dos 14 acertos totais, dez eram em situações de *produto cartesiano* e os outros quatro na situação de *arranjo* com duas etapas de escolha. No pós-teste o número de acertos totais em *produto cartesiano* passou para 27, e conta-se com acertos totais em todas as situações combinatórias, principalmente nas situações com menor número de possibilidades (PC1, A1, P1 e C1). Nas questões em que a resposta era com maior número de possibilidades o número de acertos aconteceu prioritariamente no problema de *produto cartesiano*, e apenas um acerto na situação de *arranjo*. Nas questões com maior número de possibilidades relacionadas com as situações de *permutação* e *combinação* não houve acertos totais.

Desse modo, as duas sessões de intervenção tiveram mais efeito na solução de questões com menor número de possibilidades – as quais podem ser resolvidas com uso de árvores de possibilidades e listagens. Entretanto, as questões que exigem generalização ou aplicação de procedimentos como o PFC necessitariam, ainda, de mais tempo para que surtissem mais efeitos nos desempenhos dos alunos. Assim, a aprendizagem de situações combinatórias acontece ao longo do tempo, corroborando com o que afirma Vergnaud (1986) sobre a aprendizagem de conceitos. Para isso, o aluno precisa vivenciar diversas *situações*, discutindo seus respectivos *invariantes*, por meio da utilização de diferentes representações que, irão exercer o papel de auxiliar na conversão para uma representação menos congruente, porém, mais econômica: a expressão numérica (DUVAL, 2011).

Analisando a Tabela 8 em comparação com os resultados do pré-teste para a expressão numérica que responde cada situação, também destaca-se uma diminuição no percentual de erros, uma vez que, antes, o G1 tinha um percentual de 98,68% e o G2 94,37% de erros. No pós-teste esse número foi de 78,95% no G1 e 82,5% no G2. Também se destaca o aumento no número de acertos totais, uma vez que o G1 tinha 1,32% e o G2 estava antes com

4,37% e no pós-teste esse percentual avançou para 17,11% no G1 e 10,685% para o G2.

Tabela 8: Desempenho do 5º ano na expressão numérica do pós-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 20 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	10	8	0	2	0	1	9	9
A1	13	14	0	2	0	1	6	3
P1	15	17	0	0	0	0	4	3
C1	19	20	0	0	0	0	0	0
PC2	11	15	0	2	2	1	6	2
A2	16	19	1	1	1	0	1	0
P2	17	19	2	0	0	1	0	0
C2	19	20	0	0	0	0	0	0
Total	120 78,95%	132 82,5%	3 1,97%	7 4,375%	3 1,97%	4 2,5%	26 17,11%	17 10,625%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2; A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[22];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Analisando o desempenho na expressão numérica em cada tipo de problema combinatório, é possível concluir que nos problemas de *produto cartesiano*, *arranjo* e *permutação*, quando os alunos acertam no levantamento de possibilidades também apresentam, na maioria dos casos, a expressão numérica que responde corretamente o problema, seja por generalização das possibilidades ou pelo uso do PFC, uma vez que no levantamento de possibilidades há 27 acertos em *produto cartesiano* e desses, 26 apresentam a

---

[22] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

expressão numérica correspondente correta. Em *arranjo* todos os 10 acertos no levantamento de possibilidades são seguidos da expressão numérica correspondente correta e nas situações de *permutação* dos 10 acertos totais, em sete são apresentadas uma expressão numérica correta.

Contudo, nas situações de *combinação* foram apresentados seis acertos totais no levantamento de possibilidades e em nenhum dos casos os alunos apresentaram a expressão numérica correspondente, confirmando que parece haver menor congruência entre as representações intermediárias (sejam árvores ou listagens) e as expressões numéricas nas situações de *combinação* do que nas demais situações combinatórias. Isso também pode estar relacionado ao fato de que na generalização de possibilidades para essa situação, além de multiplicar para encontrar o total de possibilidades, é necessário também dividir pelos casos repetidos.

Outra análise importante é possível ser visualizada na Tabela 9, quando se compara a primeira parte do teste, em que o número de possibilidades no pós-teste era menor; e a segunda parte do teste, em que o número de possibilidades para resolução das situações no pós-teste era maior.

Nesta análise verifica-se que, no pós-teste, na segunda parte do teste, quando os alunos acertavam o levantamento de possibilidades, o faziam por meio de uma expressão numérica, uma vez que, não sendo possível listar ou organizar por um diagrama de árvore mais de 56 possibilidades, os alunos percebiam que era necessário realizar uma operação. Sendo assim, em alguns casos eles começavam a resolução por meio de listagem ou árvore, mas finalizavam com uma expressão numérica. Diferente da primeira parte do teste, em que listar ou organizar em árvore até 30 possibilidades era possível e, nem sempre quando resolviam por uma representação auxiliar, indicavam a expressão numérica correspondente, como é possível observar na Tabela 9. Além disso, destaca-se que no G1, houve 7 acertos na segunda parte do teste que representa apenas 4,60%, e no G2, 2 acertos, indicando 1,25%. Mais uma vez, observa-se maiores avanços no grupo que trabalhou com árvores do que o grupo que trabalhou com listagens. Isso parece reforçar que as árvores possuem maior grau de congruência com as expressões numéricas correspondentes.

Tabela 9: Frequência (e percentual) de acertos no 5º ano do levantamento de possibilidades e da expressão numérica no pré-teste e no pós-teste por grupo de intervenção em cada parte do teste.

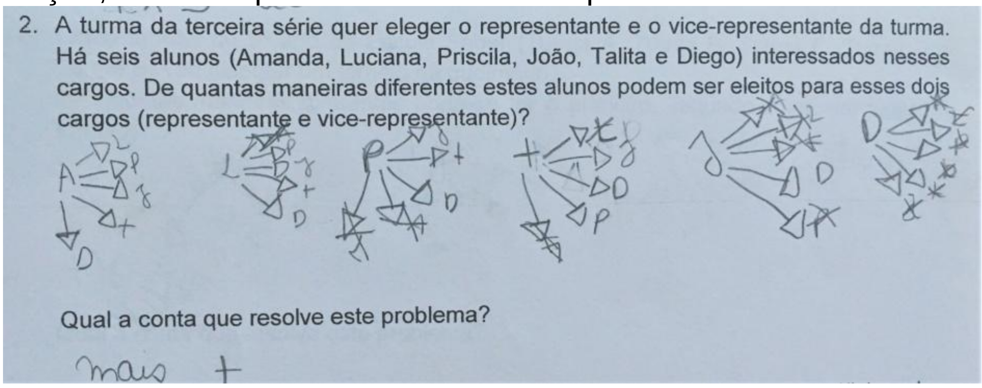
		G1 (19 alunos)		**G2 (20 alunos)**	
		Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
Levantamento de possibilidades	1ª parte	3 (1,97%)	26 (17,11%)	7 (4,375%)	18 (11,25%)
	2ª parte	0 (0%)	7 (4,60%)	4 (2,5%)	2 (1,25%)
Operação	1ª parte	2 (1,31%)	19 (12,5%)	4 (2,5%)	15 (9,37%)
	2ª parte	0 (0%)	7 (4,60%)	3 (1,87%)	2 (1,25%)

1ª parte: número menor de possibilidades; 2ª parte: número maior de possibilidades.
Fonte: a autora

No pós-teste os erros estavam relacionados com o uso de uma multiplicação direta que não respondia determinada situação, bem como com a dificuldade no invariante de ordem, quando os problemas de *combinação* eram respondidos considerando o invariante de ordem como importante, ou na resolução dos problemas de *arranjo* considerando a ordem como não sendo importante. Nas Figuras 32 e 33 é possível visualizar a dificuldade com o invariante de ordem nos problemas de *arranjo* e *combinação*. Também foram apresentadas respostas do tipo parcialmente correta, pela generalização dos casos possíveis tanto com o uso da listagem (G2), quanto pelo uso da árvore (G1).

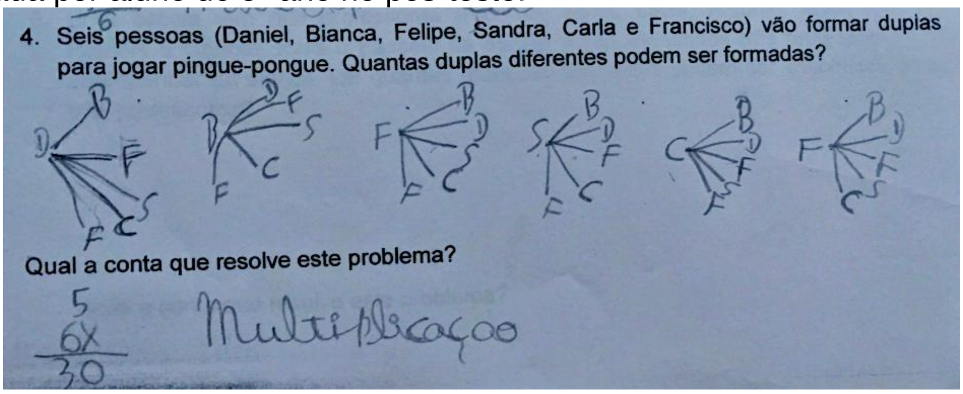
Na Figura 34 pode-se observar a resolução de um aluno que listou 16 possibilidades começando com o numeral 1 e multiplicou pela quantidade de numerais que poderiam iniciar cada listagem. Entretanto, ainda faltou listar possibilidades, resultando em uma resposta parcialmente correta para o problema de *permutação*, cujo resultado completo seria 120 possibilidades Desse modo, ele deveria listar 24 possibilidades começando com o algarismo 1, e multiplicar 24 pela quantidade de algarismos, ou realizar o PFC (5x4x3x2x1). Na Figura 35 o mesmo pensamento foi realizado por outro aluno, por meio da árvore de possibilidades, em que ele organizou 10 possibilidades com a turma A em primeiro lugar e multiplicou pela quantidade de turmas, resultando em um total de 50 casos possíveis, quando a resposta completa seria 60 possibilidades.

Figura 32: Situação de *arranjo* com resposta incorreta por meio da árvore de possibilidades com invalidação de casos repetidos próprios para situações de *combinação*, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.



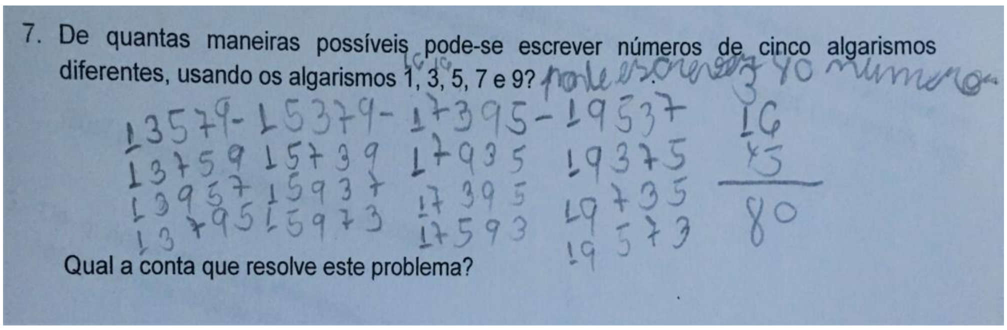
Fonte: a autora

Figura 33: Situação de *combinação* com resposta incorreta por meio da árvore de possibilidades e com expressão numérica que não responde a situação, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.



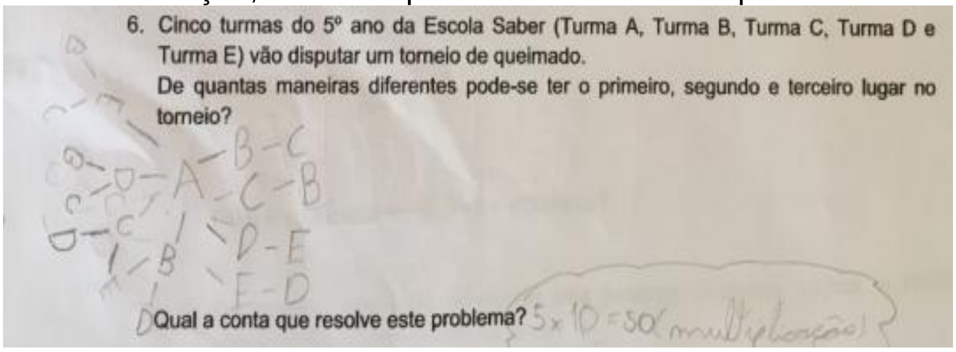
Fonte: a autora.

Figura 34: Situação de permutação com Acerto Parcial 2 por meio da generalização de possibilidades com uso da listagem e com expressão numérica que responde parcialmente a situação, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.



Fonte: a autora.

Figura 35: Situação de *arranjo* com Acerto Parcial 2 por meio da generalização de possibilidades com uso da árvore e com expressão numérica que responde parcialmente a situação, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.

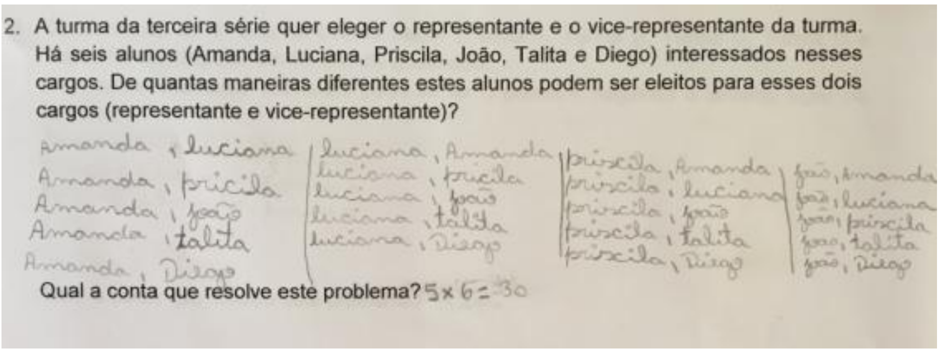

6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema? 5 x 10 = 50 multiplicação

Fonte: a autora.

As respostas corretas aconteciam, principalmente, por meio da generalização das possibilidades, em que são listadas algumas possibilidades e depois os alunos generalizam os casos por meio de uma operação de multiplicação (Figura 36). O uso do PFC foi observado principalmente nas situações de *produto cartesiano* (Figura 38) e apenas em uma situação de *arranjo* (Figura 37).

Figura 36: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da generalização de possibilidades com uso da listagem, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.

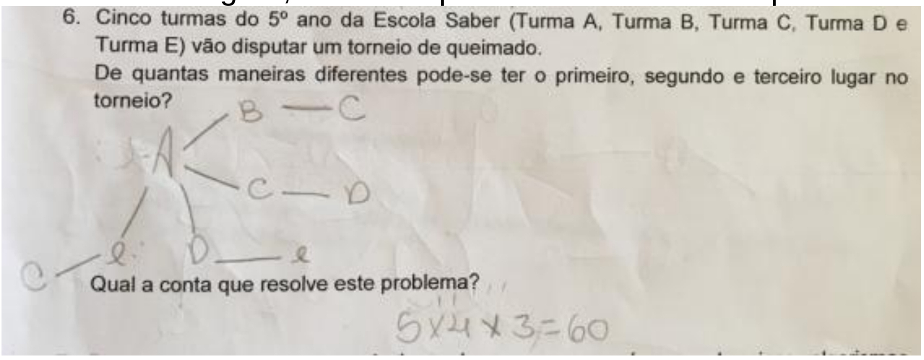

2. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Amanda, Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?

Amanda, luciana | luciana, Amanda | priscila, Amanda | João, Amanda
Amanda, pricila | luciana, pricila | priscila, luciana | João, luciana
Amanda, joão | luciana, joão | priscila, joão | João, priscila
Amanda, talita | luciana, talita | priscila, talita | João, talita
Amanda, Diego | luciana, Diego | priscila, Diego | João, Diego

Qual a conta que resolve este problema? 5 x 6 = 30

Fonte: a autora.

Figura 37: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.

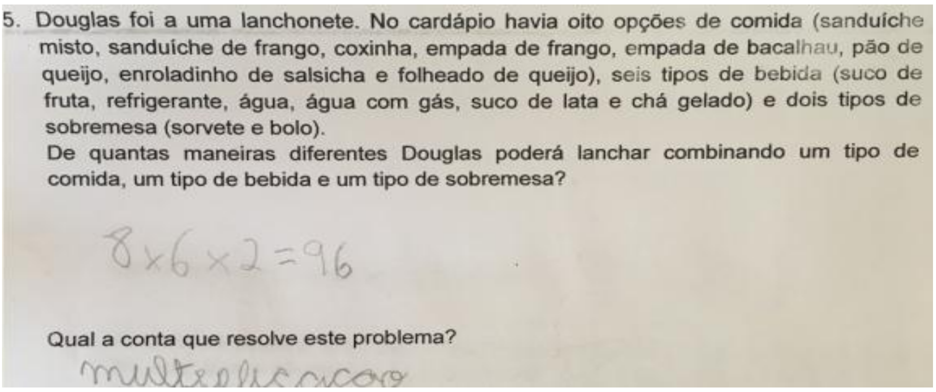

6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema?

5 x 4 x 3 = 60

Fonte: a autora.

Figura 38: Situação de *produto cartesiano* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 5º ano no pós-teste.



5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia oito opções de comida (sanduíche misto, sanduíche de frango, coxinha, empada de frango, empada de bacalhau, pão de queijo, enroladinho de salsicha e folheado de queijo), seis tipos de bebida (suco de fruta, refrigerante, água, água com gás, suco de lata e chá gelado) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo).
De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

8x6x2=96

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

6.2.4 Estudantes do 7º ano resolvendo situações combinatórias: Pré-teste

Assim como foi nos resultados do 5º ano, no qual foi confirmado o que já era discutido por estudos anteriores acerca dos desempenhos em situações combinatórias, o pré-teste do 7º ano também mostrou baixo desempenho desses alunos. Esse resultado leva à suposição de que entre o 5º e o 7º ano nenhum trabalho sistematizado sobre a Combinatória foi realizado.

Observando a Tabela 10 é possível perceber a dificuldade apresentada pelos alunos do 7º ano no pré-teste. O G1 teve 91,08% de erro, enquanto o G2 teve 87,5%. Destaca-se, consequentemente, o baixo desempenho no levantamento total das possibilidades, quando o G1 ficou com apenas 3,57% e o G2 com 4,33%. No pré-teste do 5º ano os erros também foram acima de 80% e o índice de acertos totais dos dois grupos juntos teve média menor que 5%.

Na Tabela 10 também é possível visualizar que dos acertos totais, os problemas de *produto cartesiano* concentram a maior parte, uma vez que dos 15 acertos totais, 10 foram dessa situação combinatória. Os problemas de *arranjo* e *combinação* estão com os outros cinco acertos totais, sendo que, em geral, os acertos nessas situações acontecem na primeira parte do teste na qual os problemas têm duas etapas de escolha. Os problemas de *permutação* não apresentaram acertos totais, apenas acertos parciais.

Tabela 10: Desempenho do 7º ano no levantamento de possibilidades do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	18	18	0	5	0	0	3	3
A1	19	24	1	0	0	1	1	1
P1	21	22	0	3	0	1	0	0
C1	19	25	0	0	1	0	1	1
PC2	20	22	0	1	0	0	1	3
A2	19	26	2	0	0	0	0	0
P2	18	21	3	5	0	0	0	0
C2	19	24	1	1	1	0	0	1
Total	153 91,08%	182 87,5%	7 4,16%	15 7,21%	2 1,19%	2 0,96%	6 3,57%	9 4,33%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2;[23]
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

A dificuldade se acentua quando é analisada a Tabela 11, específica sobre o uso da expressão numérica. O índice de erro no G1 é de 97,61% e no G2 é de 98,07%. Não há acertos parciais, e o índice de acertos totais é, consequentemente, muito baixo, ficando em 2,39% para o G1 e 1,93% para o G2. No 5º ano o índice de erro também foi acima de 90%, assim como os acertos totais tiveram menos de 5%.

Analisando os acertos totais nas expressões numéricas por tipo de problema é possível perceber que eles acontecem apenas em situações de *produto cartesiano*, uma vez que apenas uma multiplicação direta dos números do enunciado é suficiente para uma resposta correta. Nas outras situações, os alunos, mesmo os que acertam as situações apresentando todas as

[23] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

possibilidades, não conseguem converter para uma solução numérica correspondente.

Tabela 11: Desempenho do 7º ano na expressão numérica do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

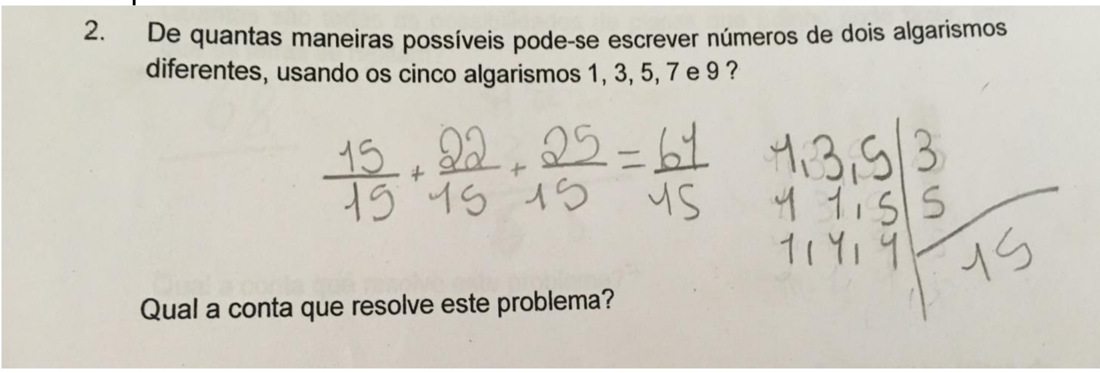
	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	18	24	0	0	0	0	3	2
A1	21	26	0	0	0	0	0	0
P1	21	26	0	0	0	0	0	0
C1	21	26	0	0	0	0	0	0
PC2	20	24	0	0	0	0	1	2
A2	21	26	0	0	0	0	0	0
P2	21	26	0	0	0	0	0	0
C2	21	26	0	0	0	0	0	0
Total	164 97,61%	204 98,07%	0	0	0	0	4 2,39%	4 1,93%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2;[24]
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Os erros apresentados pelos alunos do 7º ano são desde respostas em branco ou até mesmo respostas que não têm indícios de pensamento combinatório, como é possível observar na Figura 39, na qual o aluno responde por meio de M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comum), com alguns números envolvidos na questão, possivelmente um dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Essa estratégia de resolução indica que esse aluno não estabelece relação com o pensamento combinatório.

[24] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

Figura 39: Situação de *arranjo* com resposta incorreta, realizada por aluno do 7º ano no pré-teste.



2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?

$\frac{15}{15} + \frac{22}{15} + \frac{25}{15} = \frac{61}{15}$

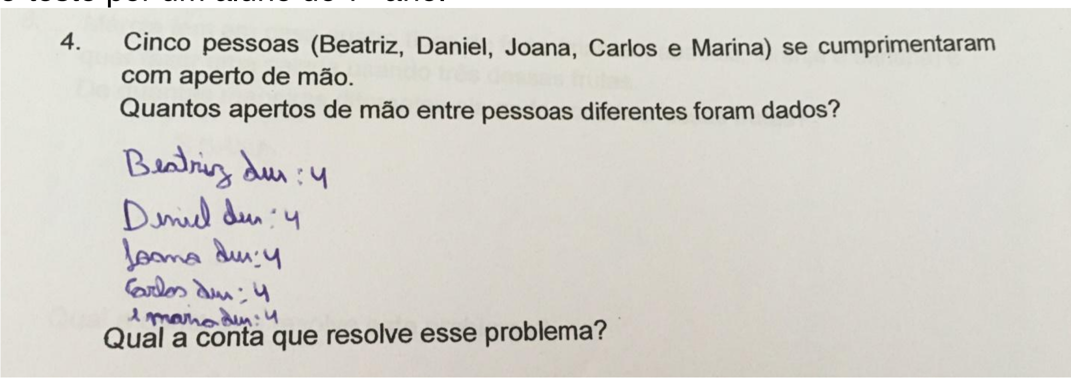
1,3,5 | 3
1 1,5 | 5
1,1,1 |
15

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

Na Figura 40 o erro do aluno está relacionado com o não entendimento do invariante de ordem no problema de *combinação*, uma vez que o aluno considera o mesmo aperto de mão duas vezes quando indica que cada um cumprimenta quatro vezes, uma vez que há mais quatro pessoas. Nessa situação há uma relação combinatória errada para o problema proposto, mas que poderia ser usada para responder outros tipos de problemas combinatórios. Diferente da resposta apresentada na Figura 41, na qual o estudante não estabelece uma relação combinatória para responder o problema.

Figura 40: Situação de *combinação* com resposta incorreta, por meio de uma interpretação da situação sem desconsiderar os casos repetidos, realizada no pré-teste por um aluno do 7º ano.



4. Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão.
Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

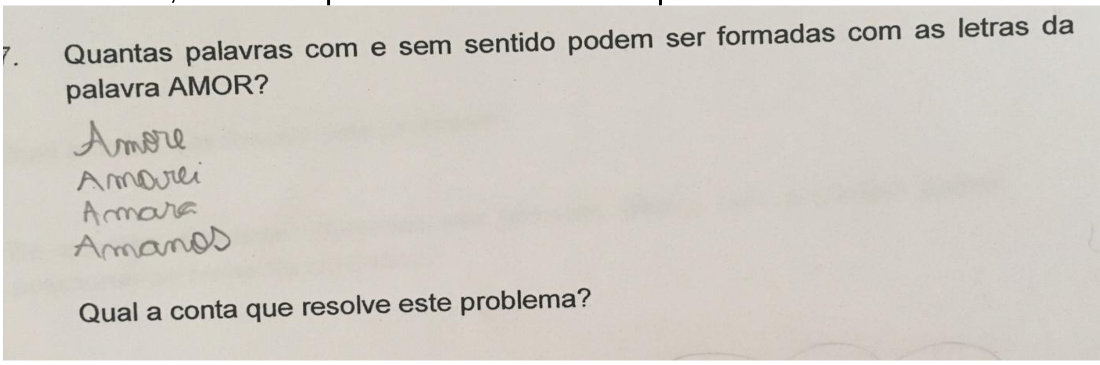
Beatriz deu: 4
Daniel deu: 4
Joana deu: 4
Carlos deu: 4
Marina deu: 4

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: a autora.

Destaca-se que, para muitos alunos do 7º ano, inicialmente não estavam claras as relações combinatórias presentes nos problemas propostos. Essa falta de compreensão dos *invariantes* combinatórios levou a grande número de erros no pré-teste.

Figura 41: Situação de permutação com resposta incorreta, sem relação combinatória, realizada por aluno do 7º ano no pré-teste


7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

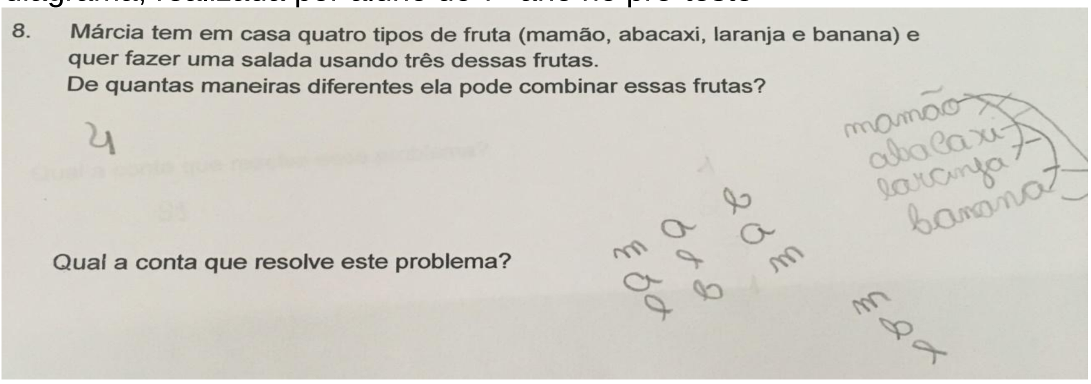
Amore
Amorei
Amora
Amamos

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

No pré-teste, do 7º ano, também foram apresentadas soluções corretas, por meio da listagem e diagrama, como é possível visualizar na Figura 42. Entretanto, na situação de *combinação* destacada não foi apresentada a expressão numérica que responde o problema, ficando esta resposta em branco.

Figura 42: Situação de *combinação* com resposta correta por meio da listagem e diagrama, realizada por aluno do 7º ano no pré-teste


8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas.
De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

4

mamão
abacaxi
laranja
banana

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

Os resultados no pré-teste do 7º ano indicam que os alunos apresentam grandes dificuldades em responder *situações combinatórias*. Tais dificuldades são equiparáveis ao que foi apresentado pelos alunos do 5º ano, tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a indicação de uma expressão numérica. A dificuldade nessa última conversão revela o caráter menos congruente entre as representações intermediárias, com a expressão numérica, como apontado no exemplo da Figura 42, em que o aluno utiliza duas *representações auxiliares* (listagem e diagrama), mas não indica uma expressão numérica correspondente.

Alves (2010) em estudo com alunos dos anos finais destaca que, quando os alunos são incentivados a discutir os *invariantes*, como por exemplo, o invariante de ordem, possibilitando a diferenciação entre situações de *arranjo* e *combinação*, os erros referentes a essa dissociação são minimizados, como no caso do erro da Figura 40. Assim, considera-se importante a realização de um trabalho de intervenção voltado para a discussão dos *invariantes* das distintas *situações combinatórias*, bem como a utilização de *representações intermediárias* que auxiliem na conversão de um enunciado em língua natural (representação de partida), para uma representação matemática formal (representação de chegada).

6.2.5 Estudantes do 7º ano resolvendo situações combinatórias: Pós-teste

Foi aplicado o pós-teste após as duas sessões de intervenção com cada turma do 7º ano. A primeira turma participou do G1, na qual foram trabalhadas as situações combinatórias por meio da árvore de possibilidades como representação auxiliar de transição entre a língua natural e a expressão numérica; e a segunda turma compôs o G2 no qual a representação auxiliar utilizada foi a listagem de possibilidades.

Na Tabela 12 verifica-se o percentual de erros no G1, 69,65%, o qual configura um alto índice, contudo, quando se compara com o percentual de erros no pré-teste (Tabela 10), que foi de 91,08%, conclui-se que a intervenção com o uso da árvore de possibilidades foi importante para o avanço no desempenho do levantamento de possibilidades. Isso também aconteceu com o G2, que no pré-teste tinha um índice de erros de 87,5% e após a intervenção com a listagem de possibilidades esse percentual diminuiu para 59,62%. Desse modo, tanto a árvore de possibilidades quanto a listagem foram representações importantes na diminuição no percentual de erros.

Tabela 12: Desempenho do 7º ano no levantamento de possibilidades do pós-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação.

	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	8	9	0	2	0	0	13	15
A1	17	20	0	2	2	1	2	3
P1	6	9	0	5	2	1	13	11
C1	17	14	0	5	3	2	1	5
PC2	14	18	0	6	2	1	5	1
A2	17	16	1	9	0	0	3	1
P2	19	20	0	5	0	1	2	0
C2	19	18	0	8	0	0	2	0
Total	117 69,65%	124 59,62%	1 0,59%	42 20,20%	9 5,36%	6 2,88%	41 24,40%	36 17,30%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2;[25]
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Além da diminuição no percentual de erros, destaca-se o aumento no percentual de acertos totais em ambos os grupos. O G1 no pré-teste apresentou apenas 3,57% de acertos totais e no pós-teste o percentual passou para 24,40%. O G2 apresentou no pré-teste 4,33% de acertos totais e no pós-teste 17,30%. Na comparação entre os dois grupos, percebe-se que o avanço quantitativo e qualitativo do G1 foi maior do que o do G2, uma vez que o G2 teve grande percentual de acertos do tipo Parcial 1, em que indicavam até a metade do número total de possibilidades, enquanto que o G1 concentrou maior percentual em acertos totais e Parcial 2, em que eram apresentadas metade ou mais do número total de possibilidades. Entretanto, essa diferença não é significativa, como destacado na Seção 5.2.1 deste capítulo.

---

[25] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

Na análise sobre o levantamento de possibilidades por tipos de problema, destacam-se avanços substanciais principalmente nas situações de *produto cartesiano* e *permutação*, na primeira etapa do teste, em que o número de possibilidades das respostas era baixo. Nas situações de *arranjo* e *combinação* os avanços são menores, pois, seus invariantes de escolha são os mesmos, diferenciando-se apenas pelo invariante de ordem, o que resultou em dúvidas para os alunos, que muitas vezes responderam situações de *arranjo*, com o invariante de ordem da situação de *combinação*. Ressalta-se, entretanto, que, com mais sessões de intervenção, possivelmente esses resultados indicariam melhores avanços.

Na segunda etapa do teste, em que o número de possibilidades da resposta era maior, houve maior número de acertos no G1, destacando que a árvore de possibilidades parece ter maior *congruência* com a expressão numérica, pois, na resolução dessas situações, o uso de uma representação matemática era mais indicado.

Na Tabela 13 é possível visualizar o percentual de desempenho na apresentação da expressão numérica que responde a situação proposta, ou seja, se os estudantes conseguiram converter a resposta em árvore ou listagem para uma operação matemática correspondente. Destaca-se uma diminuição no percentual de erros, de 97,61% para 79,76% no G1, e de 98,07% para 85,09% no G2. Também foi observado aumento no índice de acertos totais que, no G1, passou de 2,39% para 19,05% e no G2 de 1,93% para 13,46%.

Assim como aconteceu com os alunos do 5º ano, na análise por tipo de problema salienta-se, nos problemas de *produto cartesiano*, um bom quantitativo de apresentação de uma operação numérica, seja pelo uso de generalização de possibilidades, seja pelo PFC. Isso porque, dos 34 acertos totais no levantamento de possibilidades desse tipo de situação, 30 (88,23%) fizeram apresentando uma expressão numérica correspondente. Nas situações de *arranjo*, dos nove acertos totais, em todos (100%) foi apresentada uma operação correspondente. Nos problemas de *permutação* o percentual de efetividade diminui em relação aos outros problemas, pois, dos 26 acertos no levantamento de possibilidades, 16 (61,53%) são seguidos por uma operação que responde a situação. Nos problemas de *combinação*, apenas oito situações foram respondidas corretamente no levantamento de possibilidades, e cinco (62,5%) delas apresentaram o registro numérico correspondente.

Tabela 13: Desempenho do 7º ano na expressão numérica do pós-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação.

	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	11	12	0	0	0	0	10	14
A1	19	22	0	0	0	1	2	3
P1	14	19	0	0	0	0	7	7
C1	20	24	0	0	0	0	1	2
PC2	14	24	0	0	2	1	5	1
A2	18	25	0	0	0	0	3	1
P2	19	25	0	0	0	1	2	0
C2	19	26	0	0	0	0	2	0
Total	134 79,76%	177 85,09%	0	0	2 1,19%	3 1,45%	32 19,05%	28 13,46%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[26];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Tais resultados evidenciam a importância de um trabalho de intervenção que ressalte a necessidade da discussão articulada das diferentes situações combinatórias e seus invariantes (VERGNAUD, 1983), com o uso de diferentes registros de representação semiótica. Nesse trabalho se faz necessário o uso de representações intermediárias para a realização das atividades de

---

[26] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

identificação, *tratamento* e *conversão* (DUVAL, 2009), uma vez que essas representações favorecem essas atividades. Diante dos resultados, as identificações, conversões e tratamentos possuem diferentes níveis de dificuldade, dependendo do tipo de registro utilizado e da situação combinatória tratada.

Observou-se, também, que, nos problemas da segunda etapa do teste, em que a resposta continha um número de possibilidades mais alto, todos eles foram respondidos por meio de uma expressão numérica, seja ela uma generalização das possibilidades, ou um PFC. Isso pode ser visualizado de forma conjunta na Tabela 14. Percebe-se que na primeira etapa do pós-teste, quando os alunos respondiam corretamente a situação nem todos apresentavam a expressão numérica. No G1, dos 29 que acertaram na primeira parte, 20 apresentavam uma operação e, no G2, dos 34 que levantaram todas as possibilidades, 26 apresentaram uma operação correspondente. O número de acertos na segunda etapa (número maior de possibilidades) diminuiu sensivelmente, mas, quando aconteceu, se deu por meio da operação, pois no G1 foram 12 acertos para a segunda etapa do pós-teste e em todos foram apresentadas expressões numéricas corretas. No G2 foram apenas dois acertos totais na segunda etapa e em ambos foram apresentadas operações válidas.

Tabela 14: Frequência (e percentual) de acertos no 7º ano do levantamento de possibilidades e da expressão numérica no pré-teste e no pós-teste por Grupo de intervenção em cada parte do teste.

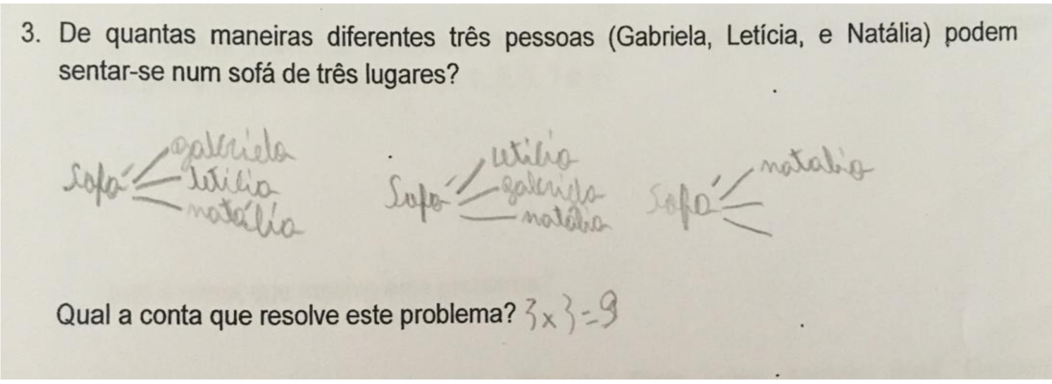
		G1		**G2**	
		Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
Levantamento de possibilidades	1ª parte	5 (2,98%)	29 (17,26%)	5 (2,40%)	34 (16,34%)
	2ª parte	1 (0,59%)	12 (7,14%)	4 (1,92%)	2 (0,96%)
Expressão Numérica	1ª parte	3 (1,78%)	20 (11,90%)	2 (0,96%)	26 (12,5%)
	2ª parte	1 (0,59%)	12 (7,14%)	2 (0,96%)	2 (0,96%)

1ª parte: número menor de possibilidades; 2ª parte: número maior de possibilidades.
Fonte: a autora.

Os erros apresentados no pós-teste estiveram relacionados, em geral, com uma multiplicação que não responde a solução, como apresentado na Figura 43, que apresenta um procedimento semelhante ao utilizado em situações de *produto cartesiano* para a situação de *permutação* de forma equivocada. Neste exemplo é possível verificar que o aluno não compreendeu o invariante de escolha, entendendo de forma equivocada que no problema há dois conjuntos diferentes (pessoas e lugares no sofá), quando na verdade só há um conjunto em que é necessário mudar a ordem das pessoas para que seja apresentada uma resposta correta.

Na Figura 44 é apresentada uma generalização de possibilidades que não é suficiente para responder o problema de *combinação*, uma vez que era necessário incluir a última escolha e dividir pelos casos repetidos. Da forma como o aluno respondeu, a multiplicação realizada indicaria que, para o primeiro elemento, teriam sete possibilidades, então, multiplicaria o número de possibilidades pelo total de elementos, se caracterizando como uma generalização incorreta de possibilidades que coincide com a resposta correta, que, no caso, de fato, são 56 possibilidades. Para uma generalização de possibilidades correta, ele deveria listar 42 possibilidades para um dos elementos em primeiro lugar e multiplicar pelo número de elementos (oito), para em seguida, dividir pelo número de casos repetidos (seis) e encontrar as 56 possibilidades.

Figura 43: Situação de *permutação* com resposta incorreta por meio de uma multiplicação que não responde a situação, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste.


3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Gabriela, Letícia, e Natália) podem sentar-se num sofá de três lugares?

sofá gabriela letilia natália

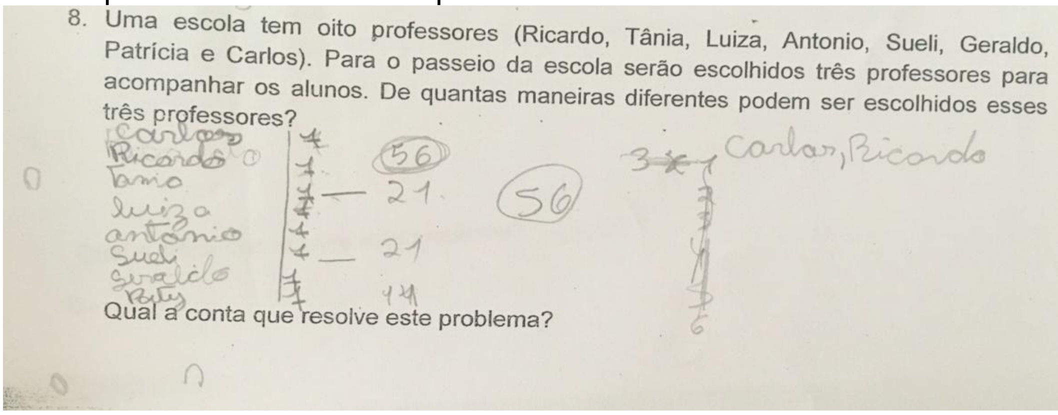
sofa letilia gabriela natalia

sofá natalia

Qual a conta que resolve este problema? 3x3=9

Fonte: a autora.

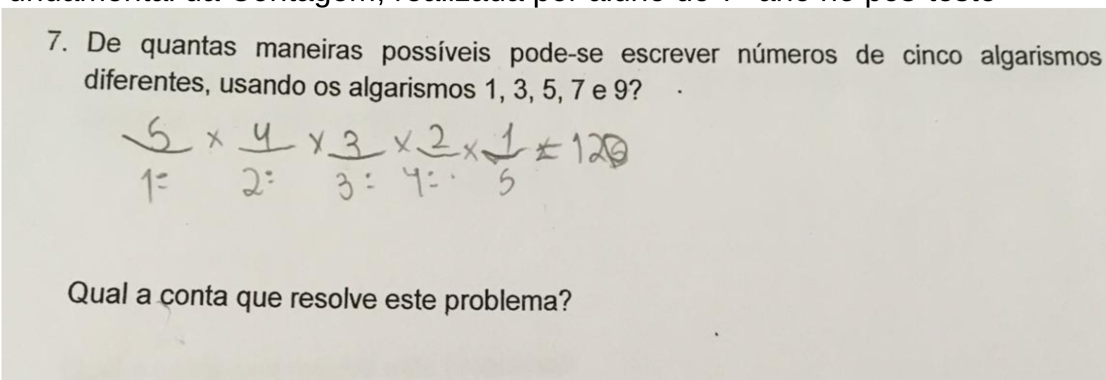
Figura 44: Situação de *combinação* com resposta incorreta por meio de uma generalização de possibilidades insuficiente para a solução do problema realizada por aluno do 7º ano no pós-teste.



Fonte: a autora.

Na Figura 45 observa-se o uso do PFC na situação de *permutação* com 120 possibilidades. Nesse problema era necessário o uso da expressão numérica, uma vez que listar ou organizar em árvore seria muito demorado e com grande chance de não conseguir finalizar o processo. Na situação de *combinação* apresentada na Figura 46 o aluno acerta, por meio do PFC indicando a necessidade de divisão pelo número de casos repetidos, discutida durante a intervenção.

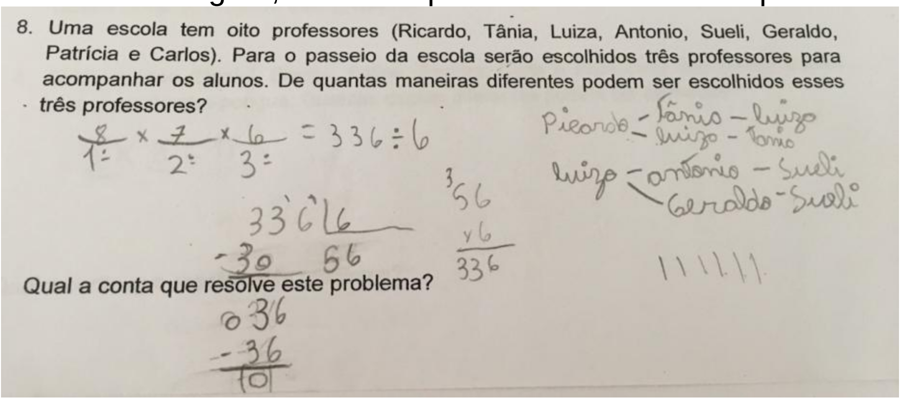
Figura 45: Situação de *permutação* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste



Fonte: a autora.

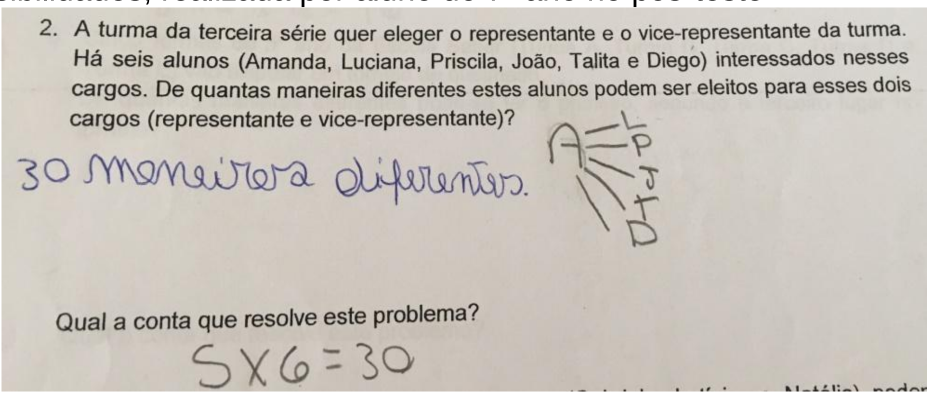
Nas Figuras 47, 48, 49 e 50 se podem observar acertos em situações de *arranjo*. Nas duas primeiras são situações que por meio da listagem ou do diagrama de árvore era possível chegar nas respostas sem a necessidade de uma expressão numérica correspondente. Entretanto, em ambos os alunos apresentam a operação, na Figura 47 por meio de uma generalização das possibilidades, em que o aluno organiza a árvore de possibilidades para um elemento em primeiro lugar e em seguida multiplica pelo número de elementos, e, na Figura 48, o aluno lista todas as possibilidades, sendo cinco possibilidades para cada um dos seis elementos, e, em seguida, também responde com a operação correspondente.

Figura 46: Situação de *combinação* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste



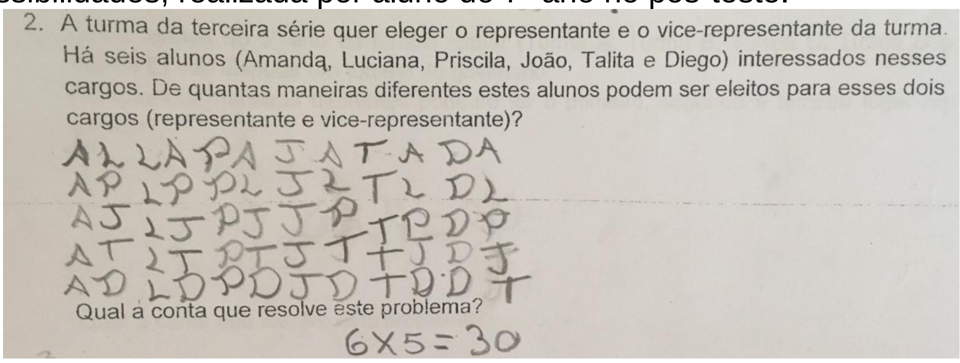
Fonte: a autora.

Figura 47: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da generalização de possibilidades, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste



Fonte: a autora.

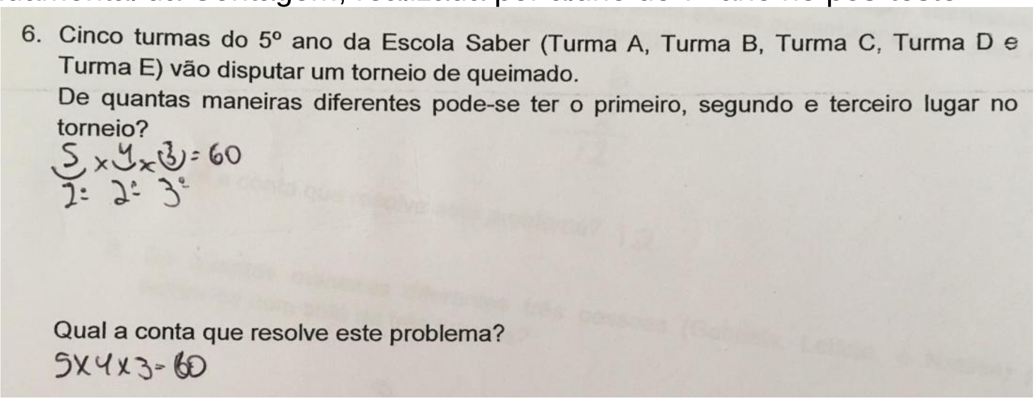
Figura 48: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da generalização de possibilidades, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste.



Fonte: a autora.

Nas Figuras 49 e 50, se esperava que a resposta fosse apresentada por uma operação, pois, listar 60 possibilidades pode demandar muito tempo. Nesse sentido, na Figura 49 é apresentado o PFC como representação, sem a necessidade do uso de um registro auxiliar de transição. Nesse sentido, o registro numérico já foi, para o aluno, utilizado como um recurso facilitador para a apresentação da resposta. Na Figura 50 o aluno ainda necessita de um registro auxiliar de transição, em que lista todas as possibilidades para um caso (começando coma Turma A) e generaliza por meio de uma multiplicação correta, com apoio na adição de parcelas repetidas.

Figura 49: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste



6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

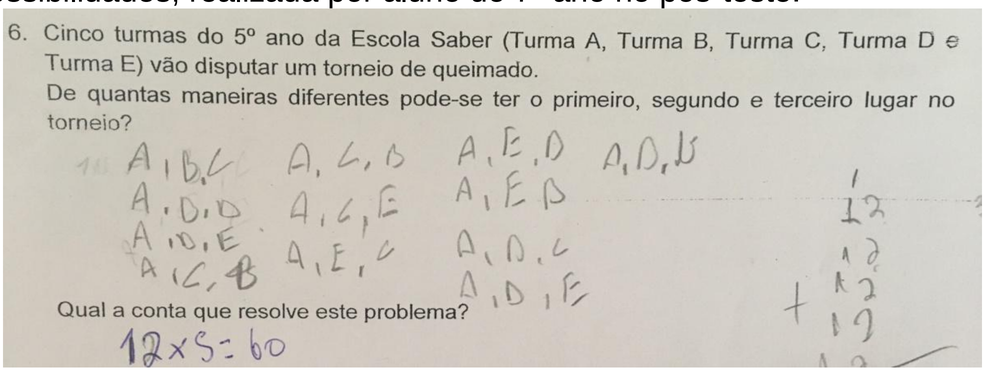
5 x 4 x 3 = 60
1º 2º 3º

Qual a conta que resolve este problema?

5x4x3=60

Fonte: a autora.

Figura 50: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio da generalização de possibilidades, realizada por aluno do 7º ano no pós-teste.



6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

A,B,C A,C,B A,E,D A,D,B
A,B,D A,C,E A,E,B
A,B,E A,E,C A,D,C
A,C,B A,D,E

12
12
12
\+ 12

Qual a conta que resolve este problema?

12x5=60

Fonte: a autora.

No 7º ano as intervenções, por meio da discussão dos *invariantes* das diferentes *situações combinatórias*, e com a utilização de representações intermediárias na *conversão* para expressões numéricas, favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório, uma vez que, os alunos apresentaram avanços quantitativos e qualitativos, como uso de representações eficientes, tanto com indicação explícita de todas as possibilidades, quanto pela indicação do número de possibilidades totais, sem a necessidade do uso de uma representação intermediária.

6.2.6 Estudantes do 9º ano resolvendo situações combinatórias: Pré-teste

O pré-teste aplicado com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental revelou diferença significativa com relação ao pré-teste do 5º e 7º anos, isso porque a média de desempenho dos alunos do 9º ano no pré-teste é semelhante às médias do 5º e 7º anos no pós-teste. Assim, o 9º ano já iniciou com um melhor conhecimento de situações combinatórias, quando comparado com os dois anos anteriores pesquisados. Observando a Tabela 15 é possível destacar o percentual de erros em ambos os grupos, que, no 9º ano fica entre 60 e 70% e nos 5º e 7º anos essa taxa de erros só acontece na ocasião do pós-teste.

Na Tabela 15, sobre o levantamento total das possibilidades, salienta-se, no pré-teste do 9º ano, o percentual de 25% no G1 e 18,75% no G2, também similar ao que acontece com as outras turmas depois da intervenção, pois, essa taxa no percentual de acertos totais só acontece, nos 5º e 7º anos, na ocasião do pós-teste. Isso pode indicar um trabalho com a Combinatória desenvolvido após o 7º ano e/ou um melhor desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo pelos alunos do último ano do Ensino Fundamental.

Quando se analisa o desempenho em cada tipo de problema é possível perceber que nos problemas de *produto cartesiano* os alunos apresentam melhores desempenhos, quando comparados aos demais tipos de problemas combinatórios. Entretanto, em nenhum tipo de problema, em nenhum grupo, houve 100% de erro, que acontecia em pelo menos uma situação nas turmas de 5º e 7º anos.

Tabela 15: Desempenho do 9º ano no levantamento de possibilidades do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 16 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	7	7	0	2	0	1	12	6
A1	14	12	0	0	0	2	5	2
P1	13	13	1	2	0	0	5	1
C1	15	11	0	0	1	0	3	5
PC2	8	9	1	1	0	0	10	6
A2	16	12	2	2	1	1	0	1
P2	13	7	4	8	1	0	1	1
C2	17	11	0	1	0	2	2	2
Total	103 67,76%	82 64,07%	8 5,26%	16 12,5%	3 1,98%	6 4,68%	38 25%	24 18,75%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[27];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Apesar dos melhores desempenhos do 9º ano, na Tabela 16 é possível verificar a dificuldade dos alunos desse ano em converter o levantamento de possibilidades em uma expressão numérica que responda o problema. Dos 62 acertos totais no levantamento de possibilidades, em 35 deles houve conversão para uma expressão numérica correspondente. Além disso, houve maior frequência de acertos de expressão numérica nas situações de *produto cartesiano*, uma vez que dos 35 acertos totais na expressão numérica, 26 são nesse tipo de situação. Nos problemas de *combinação*, por exemplo, os alunos não apresentaram nenhum tipo de operação que responda corretamente o problema. Nos outros dois tipos de problemas (*arranjo* e *permutação*) a expressão numérica é resultante de uma generalização de possibilidades ou identificação da operação após a listagem de todos os casos.

---

[27] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

Tabela 16: Desempenho do 9º ano na expressão numérica do pré-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 19 alunos / Grupo 2 - 16 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2	Pré G1	Pré G2
PC1	9	10	0	0	0	1	10	5
A1	17	14	0	0	0	0	2	2
P1	17	15	0	0	0	0	2	1
C1	19	16	0	0	0	0	0	0
PC2	12	12	0	0	0	0	7	4
A2	18	16	0	0	1	0	0	0
P2	17	15	0	0	1	0	1	1
C2	19	16	0	0	0	0	0	0
Total	128 84,21%	114 89,07%	0	0	2 1,31%	1 0,78%	22 14,48%	13 10,15%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[28];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

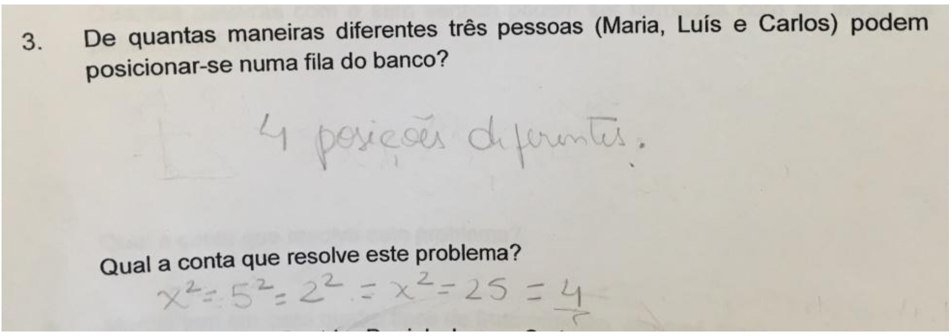
Nesta etapa final do Ensino Fundamental, os erros apresentados são desde respostas em branco até o uso de registros numéricos não relacionados com a Combinatória, que, possivelmente, estão sendo trabalhados em sala de aula, como é possível observar na Figura 51. Neste caso o aluno parece ter utilizado números aleatórios e a potenciação, de modo incorreto, para determinar que há “4 posições diferentes” numa permutação de três pessoas numa fila.

Também são apresentados acertos parciais, que acontecem desde o 5º ano do Ensino Fundamental, como o que pode ser visto na Figura 52, em que o estudante limita a resposta aos casais que podem dançar ao mesmo tempo, destacando também o tempo que cada casal pode dançar para que seja

[28] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente.

possível que todos dancem. Na Figura 53 também sobram meninos, uma vez que não são considerados os diferentes casais que são possíveis de serem formados. Além disso, também se apresenta uma operação de subtração que não responde a situação.

Figura 51: Situação de *permutação* com resposta incorreta sem desenvolvimento de pensamento combinatório, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.



3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

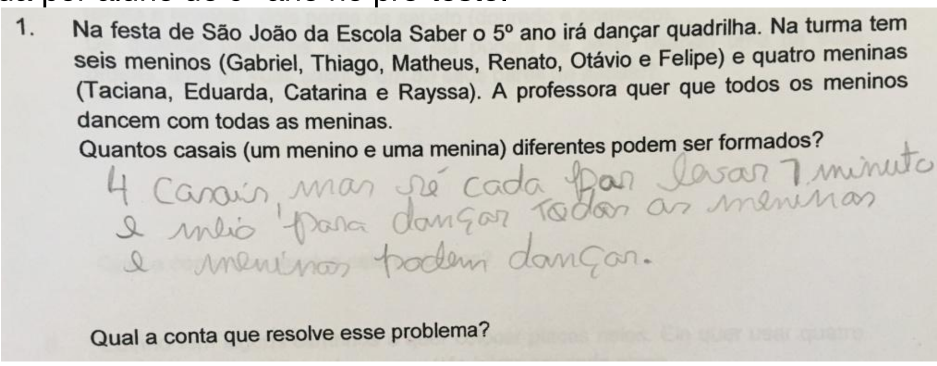
4 posições diferentes.

Qual a conta que resolve este problema?

$x^2 = 5^2 = 2^2 = x^2 = 25 = 4$

Fonte: a autora.

Figura 52: Situação de *produto cartesiano* com resposta parcialmente correta 1, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.



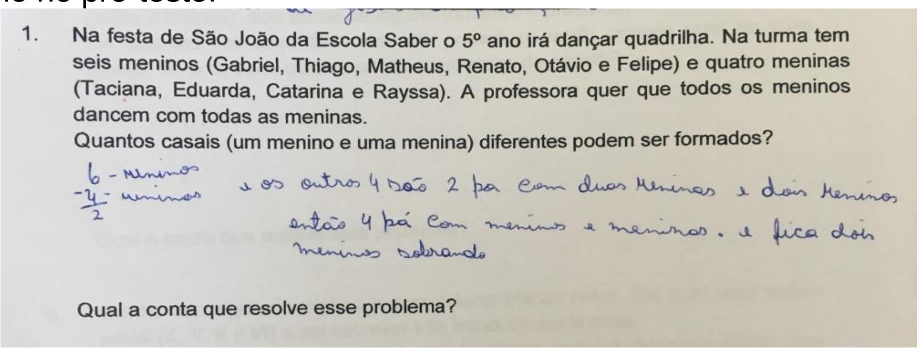
1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas.
Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?

4 Casais, mas se cada par levar 1 minuto e meio para dançar todas as meninas e meninos podem dançar.

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: a autora.

Figura 53: Situação de *produto cartesiano* com resposta parcialmente correta 1 com apresentação de uma expressão numérica incorreta, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.



1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas.
Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?

6 - meninos
-4 - meninas
2

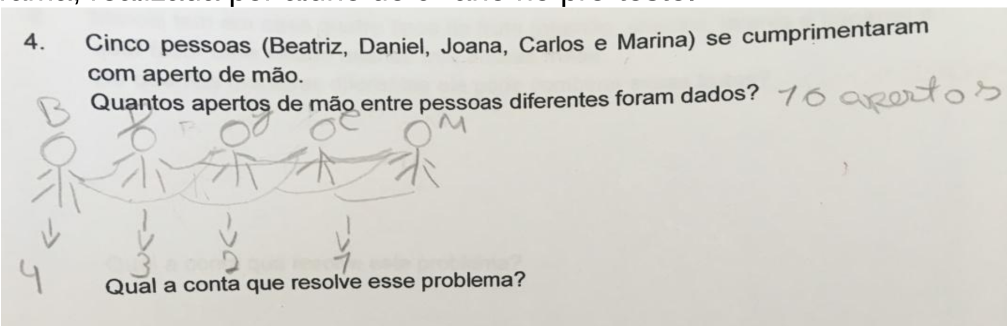
e os outros 4 são 2 pa com duas Meninas e dois Meninos então 4 pá com meninos e meninas. e fica dois meninos sobrando

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: a autora.

Na Figura 54 observa-se um acerto total em que, por meio de diagrama, o aluno do 9º ano consegue realizar a contagem necessária para a resolução do problema. O aluno desenha cada um dos elementos dados no enunciado e liga todas as possíveis combinações de apertos de mãos, com a soma de quatro apertos de mãos dados pelo primeiro elemento, três dados pelo segundo, dois dados pelo terceiro e um pelo quarto elemento. Com isso, o aluno soma todos os apertos de mãos dados e encontra as 10 possibilidades.

Figura 54: Situação de *combinação* com resposta correta por meio de diagrama, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.

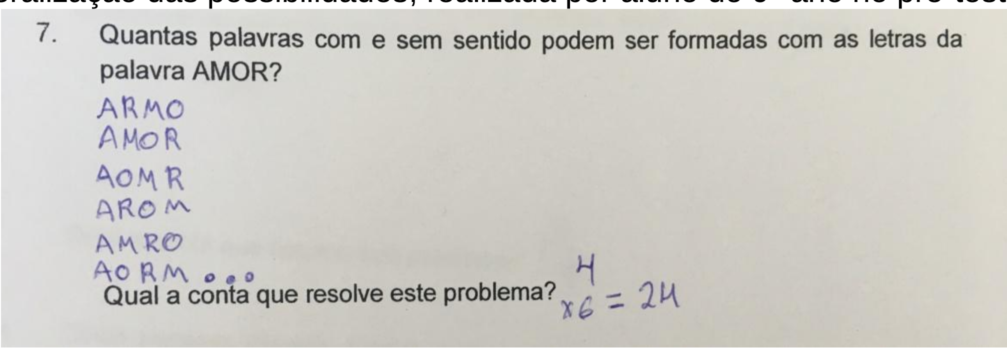

4. Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão.
Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados? 10 apertos

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: a autora.

Na Figura 55 também é apresentado um acerto total com listagem parcial das possibilidades, em que o aluno lista todas as possibilidades de palavras iniciadas com a letra A e generaliza para todos os casos iniciando com as demais letras da palavra AMOR, multiplicando o número de letras, pelo número de possibilidades em cada letra.

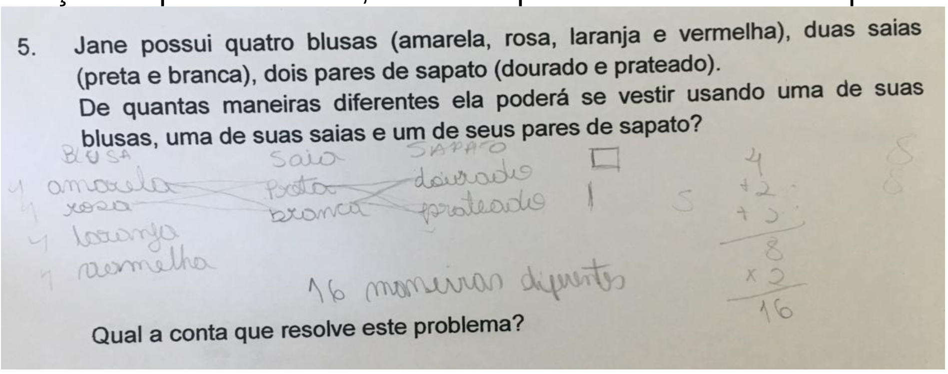
Figura 55: Situação de *permutação* com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.


7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?
ARMO
AMOR
AOMR
AROM
AMRO
AORM ...
Qual a conta que resolve este problema? 4 x6 = 24

Fonte: a autora.

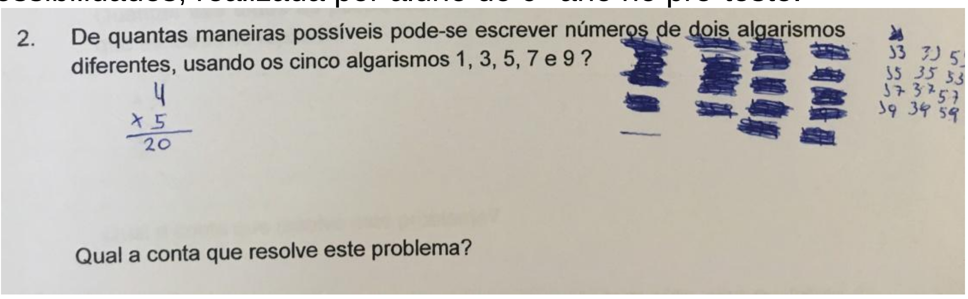
A generalização das possibilidades acontece ainda nos exemplos das Figuras 56 e 57. Na Figura 56 o aluno inicialmente tenta utilizar o diagrama como representação para responder a situação, ligando cada blusa, com cada saia e sapato, e, em seguida, soma as possibilidades para dois casos iniciais e multiplica pelos dois casos restantes. Na Figura 57 o aluno lista os casos para as três primeiras escolhas iniciando com os números 1, 3 e 5. Percebe que para cada número inicial, há quatro possibilidades e para os demais números também haveria quatro possibilidades, apresentando uma multiplicação da quantidade de possibilidades em cada caso por todos os casos iniciais.

Figura 56: Situação de *produto cartesiano* com resposta correta por meio da generalização de possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.



Fonte: a autora.

Figura 57: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pré-teste.



Fonte: a autora.

6.2.7 Estudantes do 9º ano resolvendo situações combinatórias: Pós-teste

O pós-teste, aplicado após as duas sessões de intervenção com cada grupo do 9º ano, mostrou uma diminuição no percentual de erros e um aumento nos acertos totais, indicando que houve avanços no desenvolvimento do pensamento combinatório dos alunos desse ano escolar, como é possível observar na Tabela 17.

Tabela 17: Desempenho do 9º ano no levantamento de possibilidades do pós-teste, por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Levantamento de possibilidades)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	3	3	0	0	1	0	15	12
A1	11	13	0	0	2	1	6	2
P1	9	5	3	3	0	0	7	8
C1	6	5	1	0	2	4	10	7
PC2	7	4	0	1	2	4	10	7
A2	16	15	0	0	0	0	3	1
P2	14	14	3	2	0	0	2	0
C2	18	16	1	0	0	0	0	0
Total	84 55,26%	76 59,38%	8 5,26%	6 4,69%	7 4,61%	9 7,03%	53 34,87%	37 28,90%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[29];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Isso ficou mais evidente no G1, que antes tinha 67,76% de erros e, no pós-teste, apresentou 55,26% de erro. Uma diferença de 12,5%. Já no G2, antes o percentual de erros era de 64,07% e, no pós-teste, ficou em 59,38%, uma diferença de 4,69%. Destaca-se nos grupos o aumento dos Acertos Totais, que indica que, mesmo iniciando com índices maiores que os do 5º e 7º ano, esta turma também avançou em seus desempenhos.

Além disso, é possível destacar que em todos os tipos de problemas com menor número de possibilidades houve aumento quantitativo no número de acertos totais, com maior evidência nos problemas de *combinação* para o G1. Entretanto, isso não aconteceu quando o problema tinha um maior número

---

[29] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

de possibilidades na resposta, uma vez que não houve acertos totais na situação de *combinação* cujo resultado era 56 (Combinação 2 - C2).

Analisando a Tabela 18 percebe-se um avanço nas apresentações das expressões numéricas que respondem o problema.

Tabela 18: Desempenho do 9º ano na expressão numérica do pós-teste por grupo de intervenção e por tipo de situação

	Grupo 1 - 21 alunos / Grupo 2 - 26 alunos (Expressão Numérica)							
	E		AP1		AP2		AT	
	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2	Pós G1	Pós G2
PC1	3	4	0	0	1	0	15	12
A1	12	13	0	0	2	1	5	2
P1	14	10	0	0	0	0	5	6
C1	13	15	0	0	0	0	6	1
PC2	7	6	0	0	2	4	10	6
A2	16	15	0	0	0	0	3	1
P2	15	15	2	1	0	0	2	0
C2	19	16	0	0	0	0	0	0
Total	99 65,14%	94 73,44%	2 1,31%	1 0,78%	5 3,29%	5 3,90%	46 30,26%	28 21,88%

PC1 e PC2: Produto cartesiano 1 e 2; C1 e C2: Combinação 1 e 2;
A1 e A2: Arranjo 1 e 2; P1 e P2: Permutação 1 e 2[30];
E: Erro; AP1: Acerto Parcial 1; AP2: Acerto Parcial 2; AT: Acerto Total.
Fonte: a autora.

Nesta etapa do Ensino Fundamental os alunos apresentavam um desempenho melhor no levantamento de possibilidades, mas o percentual de erros na expressão numérica, no pré-teste, estava em 84,21% para o G1 e 89,07% para o G2. No pós-teste esse percentual diminuiu para 65,14% e

[30] As situações do tipo 1 *produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo* do tipo 1 envolviam duas etapas de escolha e as mesmas situações do tipo 2 envolviam 3 etapas de escolha. As situações de *permutação* 1 e 2 envolviam 3 e 4 etapas de escolha, respectivamente. As situações do tipo 1 envolviam menor número de possibilidades e as situações do tipo 2 envolviam maior número de possibilidades.

73,44% nos Grupos 1 e 2, respectivamente. Uma diferença de 19,07% para o G1 e de 15,63% para o G2.

Percebe-se, ainda, a diferença nos acertos totais para a apresentação da expressão numérica correspondente, que antes, no G1, estava 14,48% e no pós-teste passou para 30,26%, e no G2, era 10,15% e depois foi para 21,88%. A diferença foi de 15,78% e 11,73% respectivamente. Com isso, nota-se que houve um bom avanço entre pré-teste e pós-teste.

Na análise por tipo de problema, percebe-se um bom avanço na apresentação das expressões numéricas para todas as situações combinatórias, com mais destaque para as situações de *produto cartesiano*. Esse tipo de problema já apresentava um bom quantitativo no pré-teste, uma vez que a multiplicação direta dos números do enunciado resolve esse tipo de problema. No pré-teste, dos 35 acertos totais na apresentação da expressão numérica, 26 eram em situações de *produto cartesiano*. No pós-teste, dos 74 acertos na apresentação da expressão numérica, 43 foram nessa situação.

Grande parte desses acertos foi nas situações da primeira parte do teste, em que a resposta era dada por um número de possibilidades menor. Na Tabela 19 é possível verificar a maior dificuldade dos alunos em resolver a segunda parte do pós-teste, uma vez que para conseguir responder totalmente a situação na segunda parte era mais viável o uso da expressão numérica. Quando os alunos resolviam corretamente o levantamento das possibilidades, sempre faziam, nesta etapa, usando a expressão numérica correspondente, uma vez que o percentual, tanto do levantamento de possibilidades, quanto da expressão numérica nessa etapa, é o mesmo (Ver Tabela 19). Isso não acontecia no pré-teste uma vez que a ordem de grandeza das possibilidades em cada questão menor, portanto, mais fácil de ser listada. Mesmo assim, no pós-teste houve avanços significativos no número de pontos e, consequentemente, na média e percentual de acertos.

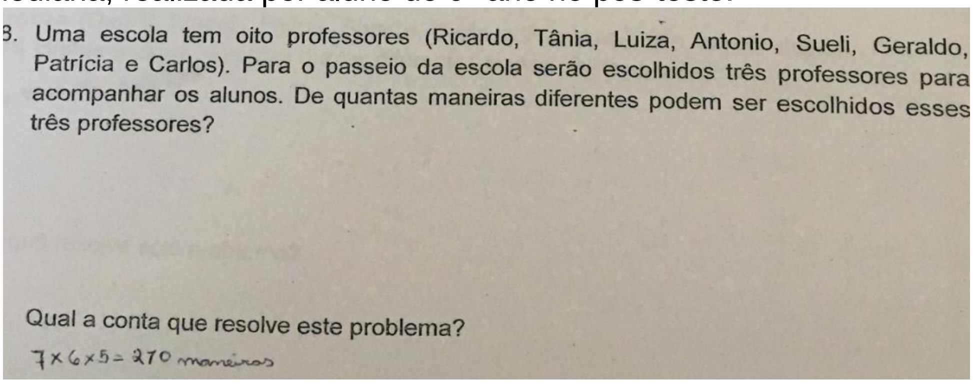
Tabela 19: Frequência (e percentual) de acertos no 9º ano do levantamento de possibilidades e da expressão numérica no pré-teste e no pós-teste por Grupo de intervenção em cada parte do teste.

		G1		**G2**	
		Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
Levantamento de possibilidades	**1ª parte**	25 (16,44%)	38 (25,01%)	14 (10,93%)	30 (23,43)
	2ª parte	13 (8,55%)	15 (9,86%)	10 (7,81%)	7 (5,46%)
Expressão Numérica	**1ª parte**	14 (9,21%)	31 (20,39%)	8 (6,24%)	21 (16,40%)
	2ª parte	8 (5,26%)	15 (9,86%)	5 (3,90%)	7 (5,46%)

1ª parte: número menor de possibilidades; 2ª parte: número maior de possibilidades.
Fonte: a autora.

No pós-teste do 9º ano surgiram erros pelo uso incorreto do PFC, principalmente nas situações de *combinação*, quando não se dividia o resultado da multiplicação pelo número de casos repetidos, como é possível visualizar na Figura 58. Nessas situações, o invariante de *ordem* não era considerado. Na Figura 59 o aluno realizou a multiplicação correta do número de possibilidades possíveis para cada uma das três escolhas e percebeu que precisava dividir pelo número de casos repetidos, mas confundiu-se e dividiu por dois e não por seis. Isso seria válido em situações de *combinação* com duas etapas de escolha. Dessa forma, o aluno ainda apresentou dúvidas em relação ao número de possibilidades repetidas, embora tenha identificado corretamente o número de possibilidades para cada uma das três escolhas.

Figura 58: Situação de *combinação* com resposta incorreta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, sem o uso de uma representação intermediária, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.

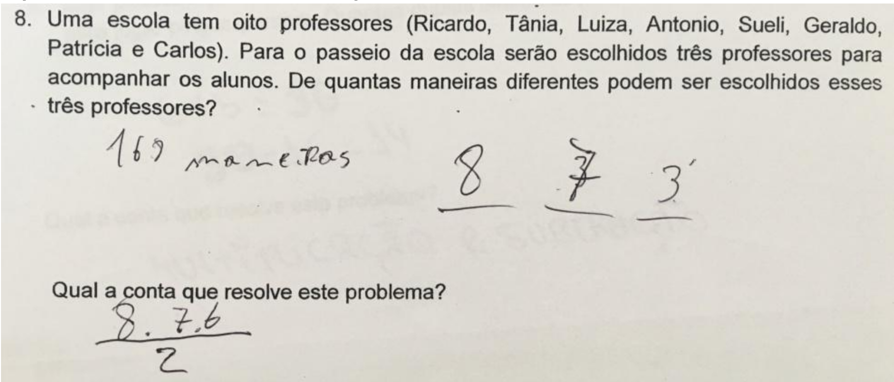

3. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?

Qual a conta que resolve este problema?

7x6x5= 210 maneiras

Fonte: a autora.

Figura 59: Situação de *combinação* com Acerto Parcial 2 por meio do PFC, , realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.


8. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?

169 maneiras 8 7 3

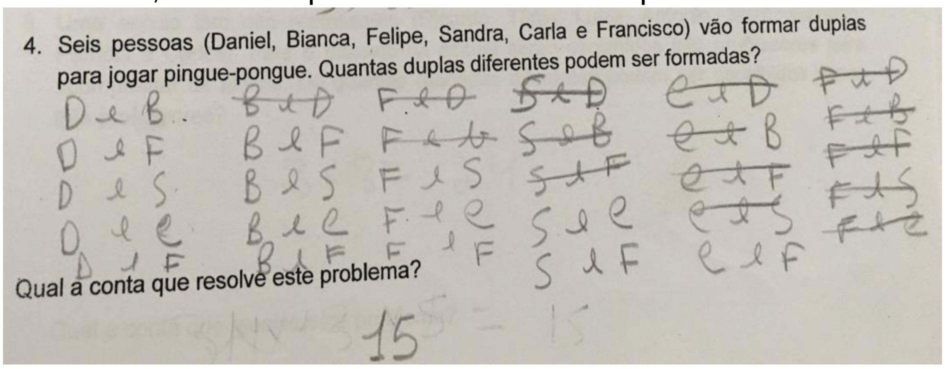
Qual a conta que resolve este problema?

$\frac{8.7.6}{2}$

Fonte: a autora.

Também foram identificadas respostas por meio da listagem total das possibilidades, e, no caso dos problemas de *combinação*, com a indicação dos casos repetidos, como se pode observar na Figura 60, na qual o aluno riscou os casos repetidos e contabilizou o número de possibilidades corretamente. Esse mesmo problema também foi resolvido por um diagrama, ligando os apertos de mãos e contabilizando as possibilidades (Ver Figura 61). Nesses dois casos, os alunos não conseguiram converter os registros para o registro numérico, quando se perguntava qual a conta que resolve o problema.

Figura 60: Situação de combinação com resposta correta por meio da Listagem de possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.


4. Seis pessoas (Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

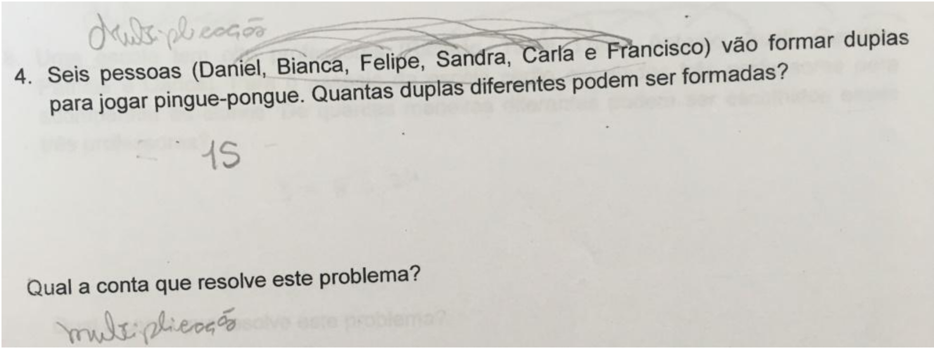
Qual a conta que resolve este problema?

15

Fonte: a autora.

Destaca-se ainda, a generalização de possibilidades, muito utilizada para indicar a conta que resolvia o problema. Isso acontecia quando os alunos listavam ou organizavam em árvore algumas possibilidades e não enumeravam todas as possibilidades, já percebendo a regularidade e apresentando uma expressão numérica correspondente. Esta estratégia se configura como uma conversão bem sucedida, em que o aluno percebe a regularidade da situação e generaliza para os demais elementos do conjunto dado, e pode ser observada nas Figuras 62 e 63.

Figura 61: Situação de *combinação* com resposta correta por meio de diagrama, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.


4. Seis pessoas (Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

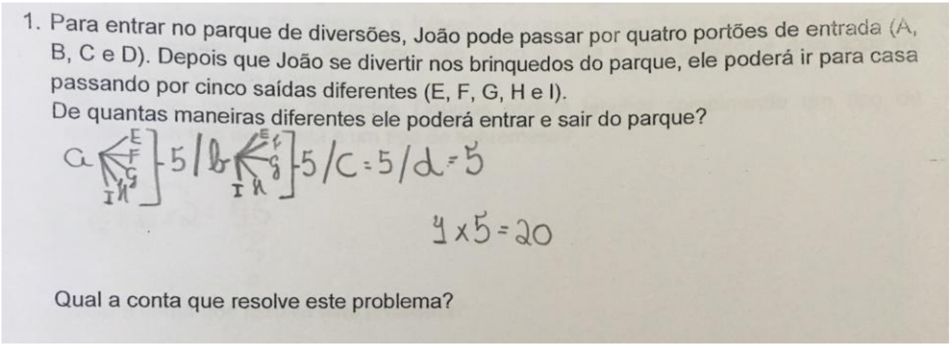
15

Qual a conta que resolve este problema?

multiplicação

Fonte: a autora.

Figura 62: Situação de *produto cartesiano* com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.


1. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e I).
De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

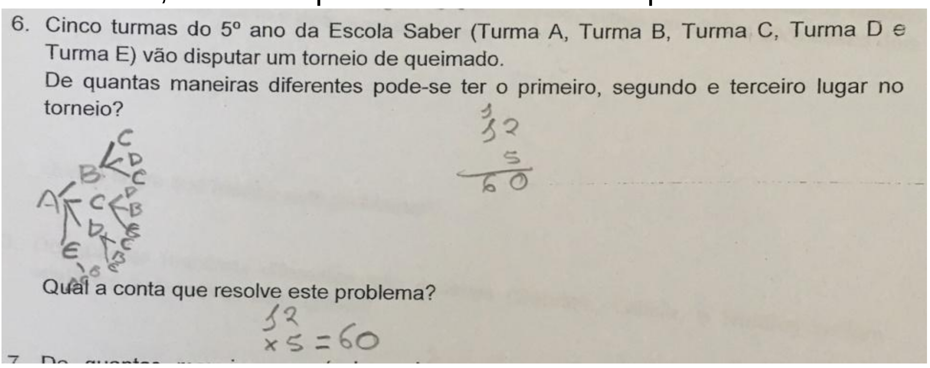
5/b 5/c=5/d=5

4x5=20

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: a autora.

Figura 63: Situação de *arranjo* com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.


6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

12
5
60

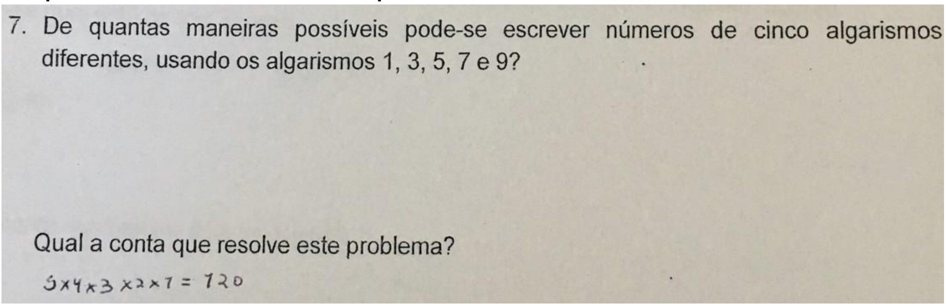
Qual a conta que resolve este problema?

12
x5 =60

Fonte: a autora.

Nas Figuras 64, 65 e 66 percebe-se o acerto por meio do uso do Princípio Fundamental da Contagem, destacando, principalmente, quando os alunos não precisavam enumerar os casos, nem o início das possibilidades, como era realizado na generalização das possibilidades. Na Figura 64 o aluno responde corretamente a situação, indicando que para a primeira escolha podem ser escolhidos qualquer um dos cinco números, e, já tendo escolhido um dos números, restam quatro opções para a segunda escolha, três para a terceira, e assim por diante, indicando corretamente o total de possibilidades.

Figura 64: Situação de *permutação* com resposta correta por meio do PFC, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.



7. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de cinco algarismos diferentes, usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

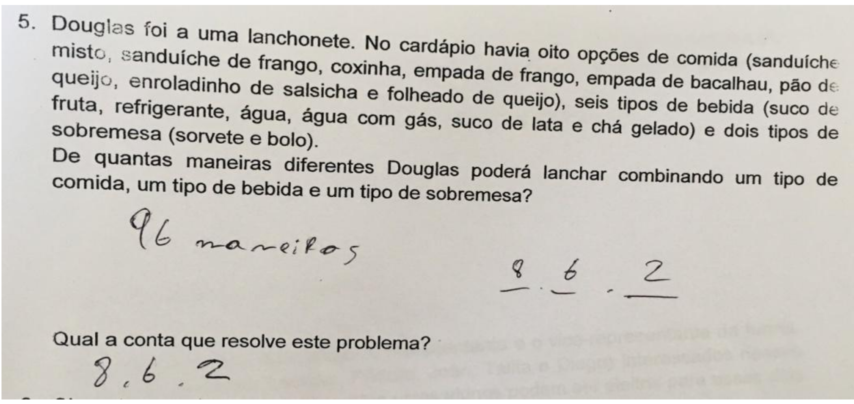
Qual a conta que resolve este problema?

5x4x3x2x1 = 120

Fonte: a autora.

Na Figura 65 o aluno identificou o caráter o multiplicativo da situação de *produto cartesiano* e utilizou os números do enunciado na realização do PFC. Na Figura 66, na situação de *combinação*, o aluno multiplicou o número de opções da primeira escolha (qualquer um das seis pessoas), pelo número disponível para a segunda escolha (já tendo escolhido um dos seis na primeira escolha, restam cinco para a segunda escolha), e dividiu pelo número de casos repetidos da mesma situação.

Figura 65: Situação de *produto cartesiano* com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.



5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia oito opções de comida (sanduíche misto, sanduíche de frango, coxinha, empada de frango, empada de bacalhau, pão de queijo, enroladinho de salsicha e folheado de queijo), seis tipos de bebida (suco de fruta, refrigerante, água, água com gás, suco de lata e chá gelado) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo).
De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

96 maneiras

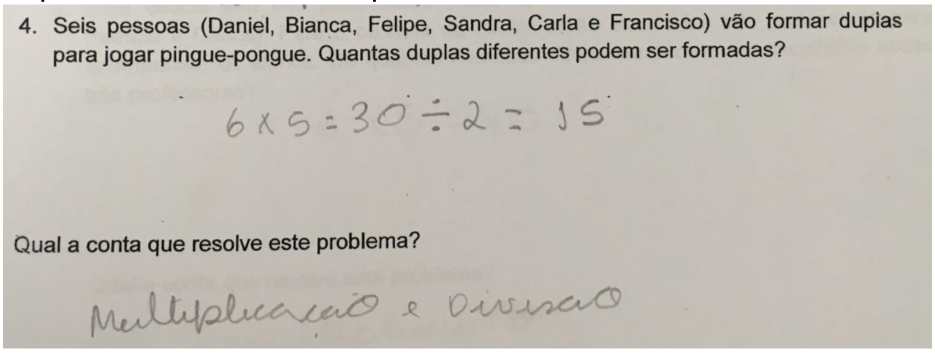
8 . 6 . 2

Qual a conta que resolve este problema?

8 . 6 . 2

Fonte: a autora.

Figura 66: Situação de *combinação* com resposta correta por meio de PFC, realizada por aluno do 9º ano no pós-teste.



4. Seis pessoas (Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

$6 \times 5 = 30 \div 2 = 15$

Qual a conta que resolve este problema?

Multiplicacao e Divisao

Fonte: a autora.

Nesses últimos problemas destacados é possível perceber que os alunos já indicavam uma expressão numérica para a resolução da situação, sem a necessidade do uso de um registro de representação auxiliar de transição. Neste ano de ensino é possível destacar que, além de já iniciarem com um desempenho melhor, quando comparados com os anos anteriores (5º e 7º anos), os alunos desenvolveram mais ainda seus raciocínios combinatórios, apresentando diversificadas representações, inclusive o uso exclusivo do PFC. Esta representação sendo usada sem a necessidade de um registro intermediário indica que os alunos já superaram a fase de transição, podendo responder de modo mais rápido situações que envolvam uma ordem de grandeza maior.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de analisar o papel que a *identificação* e as transformações de *conversão* e de *tratamento* de registros têm na ampliação do conhecimento de variadas *situações combinatórias*. Visando responder esse objetivo, primeiramente, foi realizado um estudo de sondagem com o objetivo de analisar a identificação de representações e suas transformações de conversão por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A partir dos resultados desse primeiro estudo foi realizado o segundo estudo, de intervenção. Neste, o objetivo era analisar o efeito de distintas intervenções com o uso de representações intermediárias na ampliação do raciocínio combinatório. Ao atender esses objetivos, pretende-se defender a necessidade do trabalho com diferentes *situações combinatórias* e diferentes *transformações* de representações semióticas no desenvolvimento do raciocínio combinatório, de modo que os alunos percebam o caráter multiplicativo desses tipos de problemas.

Para isso, foram utilizadas duas teorias – a Teoria dos Campos Conceituais e a da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. As duas teorias aqui discutidas detalham processos de identificação, conversão e tratamento de conversões de registros de representações semióticas – TRRS – e ressaltam como situações e os invariantes das mesmas também devem ser levadas em consideração, além das representações nos processos de conceitualização – TCC. As teorias se complementam, uma vez que, as diferentes situações combinatórias, e seus respectivos invariantes, podem ser trabalhadas por meio de diferentes registros de representação. Além disso, ao analisar as situações à luz da teoria de Duval, destaca-se o caráter não-congruente entre as diferentes representações, sendo necessário a identificação e as transformações de conversão e tratamento, com o uso de registros intermediários entre a representação de partida (situação combinatória em língua natural) e a representação de chegada (resolução por meio da expressão numérica).

Diferentes autores, tais como Pessoa e Borba (2009), Borba, Pessoa, Barreto e Lima (2011) e Azevedo e Borba (2013), por meio de suas investigações com base na Teoria dos Campos Conceituais, ressaltam que diferentes situações com relações e propriedades distintas demandam a utilização de diferentes representações simbólicas, como desenhos, listagens e árvores de possibilidades. Nos testes de sondagem, antes de uma instrução específica, os alunos usam, com maior frequência, desenhos e listagens não sistemáticas, que são representações menos formais (PESSOA, 2009). Após um processo de instrução específica, com o uso da árvore de possibilidades, por exemplo (AZEVEDO, 2013), os alunos passam a utilizar listagens sistemáticas e a própria árvore de possibilidades, sendo essas representações mais próximas das representações formalmente trabalhadas na Combinatória.

Alves (2010), Fonsêca, Souza e Santos (2014), já destacaram, em pesquisa com livros didáticos do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental, e Fonsêca, Souza e Dias (2015) em estudo de intervenção com estudantes do Ensino Médio, que a *identificação*, *conversão* e *tratamento* de diferentes registros de representação são importantes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório; Borba, Azevedo e Bittar (2016) e Borba, Bittar, Montenegro e Silva (2017), com base na TRRS, destacam que atividades com conversões múltiplas, em que se trabalha com o registro de partida em língua natural, solicita-se respostas em listagens, árvores ou tabelas (representações intermediárias), e por fim, as convertem no registro de chegada em expressões numéricas, são frequentes em livros didáticos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, respectivamente. Assim, essas pesquisas anteriores indicam o reconhecimento da necessidade de conversões de representações de variadas situações combinatórias para a compreensão da Combinatória e no presente estudo esse reconhecimento se dá pela articulação da TCC com a TRSS.

Nesse sentido, a presente pesquisa, se desenvolveu por intermédio de dois estudos que pretenderam discutir como alunos de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental identificam e realizam diferentes conversões e tratamentos de registros de representação semióticas, de modo que seja possível coordenar esses diferentes registros e reconhecê-los como sendo representações de um mesmo objeto matemático. Assim, os registros de partida em língua natural, as representações intermediárias como listagens sistematizadas e árvores de possibilidades, e o registro de chegada em expressões numéricas, se configuram como registros de representação de um mesmo objeto matemático – as situações combinatórias. Além disso, as diferentes situações combinatórias foram abordadas por meio da discussão de seus invariantes relacionados com *escolha* e *ordenação* de elementos (BORBA, 2010, 2013), ocasionando nas distintas representações de solução.

7.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PRIMEIRO ESTUDO

O Estudo 1 teve o objetivo de analisar como alunos do 5º ano do Ensino Fundamental identificam, em situações combinatórias, conversões realizadas de língua natural para listagem e para árvore de possibilidades e, em seguida, para expressões numéricas. A escolha dessa turma foi em função de ser a turma de anos iniciais com maior domínio da leitura e escrita.

A realização da pesquisa por meio de conversões múltiplas aconteceu, uma vez que, estudos anteriores já apontavam que listagens sistemáticas e árvores de possibilidades se configuram como representações simbólicas importantes para o trabalho com situações combinatórias, entretanto, faltavam estudos que às colocassem como representações intermediárias, entre o registro de partida (língua natural) e o registro de chegada (expressões numéricas).

Nesse primeiro estudo, foram confirmadas as hipóteses levantadas inicialmente, de maior dificuldade nos problemas com situação de *combinação*, bem como, maior dificuldade na conversão para uma expressão numérica correspondente à resolução do problema. Isso porque poucos alunos identificaram as conversões para a expressão numérica correspondente, poucos alunos conseguiram justificar com coerência suas respostas e apenas um aluno conseguiu justificar a expressão numérica para o problema de *combinação*. Além disso, em 43% das situações, as justificativas foram deixadas em branco, de modo que se reflete a insegurança dos alunos em explicitar o modo como identificaram as conversões apresentadas. Isso aconteceu, possivelmente, em função da não-congruência entre as representações em língua natural (enunciado) e a expressão numérica, pois, houve maior dificuldade nas conversões de árvore ou de listagem para a expressão numérica, do que nas conversões de língua natural para árvore ou para listagem. Além disso, há indícios nas respostas dadas nas entrevistas de que os alunos podem não realizar a conversão para a expressão numérica a partir da representação intermediária, e sim, do enunciado. Nesse caso, a identificação da expressão numérica correspondente, nesse primeiro estudo, pode, por vezes, ter sido uma atividade isolada, que não foi influenciada pela identificação do tratamento da representação intermediária. Esse cenário é salientado nas situações de *combinação*, na qual, além de uma multiplicação, é necessário realizar a divisão pelo número de casos repetidos.

A identificação da conversão de língua natural para árvores e listagens foi mais fácil, pois houve maior índice de acerto na indicação dessa representação correta. Em virtude de a árvore de possibilidades ser uma representação em que os alunos, geralmente, não realizam antes de uma intervenção específica (AZEVEDO, 2013), esperava-se maior dificuldade nesta conversão, quando comparada com a listagem, entretanto, não foi identificada diferença entre essas representações (árvore e listagem). Assim, a conversão da linguagem natural do enunciado para a representação em listagem sistemática e a conversão da linguagem natural do enunciado para a representação em árvore de possibilidades apresentam indícios de congruência entre si.

Há, portanto, indícios de que as conversões realizadas para a expressão numérica, não acontecem com facilidade para as crianças de anos iniciais e, sendo assim, estas conversões, no ensino de Combinatória, requerem muita atenção. Não podem ser consideradas como triviais ou transparentes e devem ser tratadas com atenção e cuidado nos contextos de ensino e de aprendizagem. Assim, para que se chegue às expressões numéricas são necessárias conversões para representações mais transparentes.

Nas duas conversões realizadas, foi possível concluir que, nos diferentes tipos de problemas, há maior facilidade nas situações de *permutação,* quando se analisa quantitativamente os resultados. Na análise das justificativas, percebe-se que nas situações de *produto cartesiano* há um índice maior de justificativas corretas. Já nas situações de *arranjo* e *combinação* há maior dificuldade. Isso se confirma na análise das justificativas apresentadas, pois, nas situações de *arranjo* e *combinação* foi identificado menor número de justificativas corretas. Assim, é necessário considerar as distintas situações quando se trata de conversões dentro da Combinatória.

Quando quatro alunos foram convidados para explicar seus raciocínios, eles demonstraram dificuldades na segunda conversão em todas as situações combinatórias, com maior segurança na explicação da expressão numérica para os problemas de *produto cartesiano*. Assim, nos problemas de *produto cartesiano*, que são trabalhados nos livros didáticos, já por meio de múltiplas conversões, como apontam Borba, Azevedo e Bittar (2016), os alunos conseguem justificar com maior clareza seu caráter multiplicativo.

Nos problemas de *arranjo* e *combinação*, o invariante de ordem que diferencia essas duas situações motivo de justificativas inadequadas, pois no caso do *arranjo*, os alunos precisam indicar a multiplicação contando com os casos repetidos, pois a ordem importa. Já nas situações de *combinação*, em que a ordem não importa, é necessário dividir pelo número de casos repetidos – isso gera maiores dificuldades na conversão para expressão numérica.

Conclui-se que há modos mais claros de auxiliar as crianças a entenderem quando os casos são distintos ou quando são repetidos e essas formas de representação podem ajudar na compreensão dos distintos tipos de problemas combinatórios. Quando os casos repetidos são apresentados (como no Teste 2), destacando que não podem ser contados mais de uma vez (com riscos, por exemplo), essa forma de representação pode auxiliar uma compreensão mais ampla de situações combinatórias, isso porque o invariante de ordem está mais explícito para o aluno que pode inferir o motivo daquelas possibilidades estarem riscadas, indicando a necessidade do trabalho com a discussão dos invariantes de cada situação. Portanto, dessa forma, é possível auxiliar os estudantes a entenderem que em *arranjos* e *permutações* os casos com mesmos elementos expressos em ordens diferentes não são repetidos, mas sim, casos distintos e, em *combinações* e *produtos cartesianos*, os casos com mesmos elementos, mas em ordens distintas devem ser considerados apenas uma vez.

Assim, ressalta-se que é de suma importância levar em consideração a identificação e a conversão de registros, para que os alunos reconheçam e percebam que há distintos modos de representar uma mesma situação combinatória e que esses modos variados podem auxiliá-los na compreensão dos distintos tipos de problemas combinatórios. Além disso, distintas formas de representação utilizadas enquanto representações intermediárias podem contribuir para que os estudantes identifiquem o caráter multiplicativo das situações combinatórias, o que, nesse estudo, se mostrou como fator de maior dificuldade, uma vez que os estudantes apresentaram dificuldades em identificar a expressão numérica/Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para a resolução das situações, bem como em justificar suas respostas, mesmo quando elas indicavam a alternativa correta.

Em função desses resultados, no Estudo 2 foram propostas distintas intervenções não apenas em turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, uma vez que a dificuldade com o uso do PFC se destacou neste primeiro estudo, mas também com turmas do 7º e 9º anos deste nível de escolarização. Nos 5º, 7º e 9º anos o objetivo era verificar se, e como, dificuldades para reconhecimento da expressão numérica como representação de chegada poderiam ser superadas e como pode acontecer a ampliação do conhecimento combinatório, particularmente com relação ao uso das expressões numéricas/PFC. Nos diferentes tipos de intervenção foram trabalhadas as situações combinatórias por meio da coordenação de diferentes registros de representação, de modo que entre o registro de partida (enunciado em língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica/PFC) foram trabalhadas, em dois grupos distintos, representações auxiliares de transição (listagem sistematizada ou árvore de possibilidades) com o intuito de perceber, por meio de representações intermediárias eficientes, como já destacaram Borba Azevedo e Barreto (2015), o caráter multiplicativo das situações combinatórias.

O primeiro estudo confirmou a dificuldade dos alunos em perceberem a expressão numérica correspondente aos registros de árvore de possibilidades, listagem e língua natural, isso porque, a conversão para expressão numérica de uma árvore ou de uma listagem se mostrou uma tarefa complexa, que pode evidenciar a pouca congruência entre essas representações, antes de um processo de intervenção específico. Isso também fica claro na análise por tipo de problema, em que, principalmente nas situações de *combinação,* os alunos não conseguem justificar as expressões numéricas escolhidas.

No segundo estudo, após processo de intervenção, baseado na TCC e na TRRS, esperava-se que essas dificuldades diminuíssem, de modo que o trabalho com as diferentes situações combinatórias e seus invariantes, em função da coordenação de diferentes registros de representação, possibilitasse a apreensão conceitual.

6.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O SEGUNDO ESTUDO

Com os resultados do primeiro estudo indicando a dificuldade em identificar a conversão para a expressão numérica correspondente à resolução de situações combinatórias, o Estudo 2 teve como objetivo investigar o efeito de diferentes intervenções pedagógicas, por meio da mobilização de transformações de conversão e tratamento de registros, no desempenho de alunos em diferentes problemas combinatórios. Para isso, foram realizadas intervenções em dois grupos, de modo que, no Grupo 1 os estudantes trabalharam com a árvore de possibilidades como representação intermediária; já no Grupo 2 os estudantes utilizaram a listagem sistematizada entre o registro de partida (língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica).

Estudos anteriores (BORBA, AZEVEDO, BARRETO, 2015; AZEVEDO, BORBA, 2013) já destacavam que listagens e árvores de possibilidades eram representações eficientes para que estudantes desenvolvessem o raciocínio combinatório referente ao levantamento de possibilidades, e, com isso, acreditava-se que ambas as representações intermediárias ajudariam os alunos a superar suas dificuldades no uso das expressões numéricas. Entretanto, era esperado que o grupo que participasse da intervenção com o uso da árvore de possibilidades apresentasse maior facilidade em demonstrar uma expressão numérica correspondente à resolução do problema combinatório. Isso porque, esta representação parece indicar com maior clareza a relação de um-para-muitos envolvida nas situações combinatórias, ou seja, ter maior congruência com a expressão numérica.

Neste segundo estudo os resultados indicam que ambas as representações intermediárias, árvore de possibilidades ou listagem sistematizada, são bons caminhos para o ensino da Combinatória, uma vez que a média de acertos aumentou na comparação entre pré-teste e pós-teste para os dois grupos, em todos os anos de escolarização, tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica. Isso pode indicar que a congruência entre os registros de partida (língua natural), intermediários (listagem ou árvore) e de chegada (expressão numérica), pode ser evidenciada nos dois tipos de intervenção realizados.

Destaca-se, entretanto, que a média inicial dos 5º e 7º anos são semelhantes, de modo que a escolarização não influenciou previamente o desempenho desses estudantes. Diferente dos resultados do 9º ano, que a média no pré-teste equipara-se com as médias no pós-teste dos 5º e 7º anos, indicando que entre o 7º e o 9º ano, provavelmente, já houve um trabalho específico com as situações combinatórias. Esse cenário é semelhante tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica que responde as situações combinatórias.

Além disso, é possível afirmar que ambas as representações são bons caminhos para o ensino da Combinatória, pois, em todos os anos de escolarização pesquisados, foi apresentada diferença muito significativa entre o pré-teste e o pós-teste, tanto no levantamento de possibilidades, quanto na expressão numérica correspondente. Desse modo, nesses anos de escolarização é possível viabilizar a aprendizagem da Combinatória, uma vez que todos avançaram em seus desempenhos, garantindo uma gradual ampliação do raciocínio combinatório.

Apesar do grupo que participou da intervenção com a árvore de possibilidades, apresentar melhores desempenhos em todos os anos, destaca-se que a média do pós-teste dos diferentes grupos são próximas, contrariando, assim, em parte, a hipótese inicial, de que a árvore de possibilidades indicaria melhor desempenho, principalmente com relação à expressão numérica. A média de desempenhos entre os grupos sendo semelhantes indicou, na análise estatística, que não há, de modo geral, diferenças significativas entre os grupos em nenhum ano de escolarização. Uma razão para isso está no fato de que as duas representações foram trabalhadas de forma sistemática, entretanto a listagem, diferente da árvore de possibilidades, pode ser trabalhada de forma não sistemática, o que poderia dificultar o entendimento da expressão numérica, caso fosse trabalhada dessa forma.

Apesar disso, quando se analisa por tipo de problema em cada ano de escolarização, percebeu-se que o G1 (árvore) nos três anos escolares pesquisados, apresentou diferenças significativas para a expressão numérica em três, das quatro situações combinatórias, enquanto que o G2 (listagem) apresentou diferenças significativas apenas em uma situação combinatória no 5º e 9º ano e em duas no 7º ano. Assim, o Grupo 1, que utilizou a árvore de possibilidades como representação intermediária, parece ter, na análise por tipo de problema, um desempenho melhor no uso da expressão numérica (registro de chegada). Esse resultado pode indicar uma maior congruência entre a árvore de possibilidades e a expressão numérica, hipótese inicial do segundo estudo, apesar de, no resultado geral, não apresentar diferenças significativas entre os grupos (G1 X G2).

Outra situação que pode comprovar o melhor desempenho do G1 também se destaca que nesse grupo houve maior número de acertos nas situações da segunda parte do pós-teste, com maior número de possibilidades e de etapas de escolha do pós-teste. Essa comparação indicou diferença significativa do G1 em relação ao G2, uma vez que, o acerto desses problemas estava diretamente relacionado com o uso do PFC ou de uma generalização de possibilidades, que se configura numa enumeração de algumas possibilidades, para então, generalizá-las para as demais escolhas sem a necessidade de listar tudo.

O G1 dos 5º e 7º anos apresentaram avanços significativos na apresentação da operação que resolve o problema sempre nas situações de *produto cartesiano, arranjo* e *permutação*, sendo que apenas o 9º ano apresentou avanços nas situações de *produto cartesiano*, *arranjo* e *combinação*. O fato de apenas o 9º ano apresentar diferenças significativas nas situações de *combinação* demonstra que esse tipo de problema combinatório possui maior grau de dificuldade, principalmente quando se solicita a expressão numérica que responde o problema, indicando, portanto, um menor grau de congruência na conversão para a expressão numérica dessa situação. Isso porque, na multiplicação encontra-se o total de possibilidades considerando os casos repetidos, e, para excluí-los, já que nessa situação a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, é necessário dividir pelo número de casos repetidos da mesma possibilidade. Percebe-se, com isso, que o avanço nas situações de *combinação* não foi significativo na maioria dos casos, corroborando com o que afirmam Montenegro, Borba e Bittar (2016), acerca da dificuldade com a identificação de conversões em situações de *combinação*.

Assim, as situações da segunda parte do pós-teste possibilitavam que os estudantes realizassem a conversão do enunciado em língua natural, diretamente para a expressão numérica, ou enumerando apenas algumas possibilidades para em seguida generalizá-las. Os alunos que acertaram por meio da generalização de possibilidades ainda precisavam de uma representação intermediária, enquanto que os que utilizaram diretamente o PFC, já estavam na fase em que a representação intermediária não se faz mais necessária. Duval (2011) destaca que as representações intermediárias precisam ser transitórias, de modo que os alunos abandonam seu uso no momento em que estejam diante de problemas com elevado número de possibilidades, pois, nesses casos, sua utilização demanda um processo lento e custoso.

Destaca-se que a generalização de possibilidades foi usada por todos os anos pesquisados, apesar de não ter sido o foco da intervenção. O 5º ano usou esta estratégia com mais frequência, sendo o PFC usado por essa turma principalmente nas situações de *produto cartesiano*. Já as turmas de 7º e 9º anos utilizaram o PFC com maior frequência também nas outras situações combinatórias. Acredita-se que os alunos do 5º ano tiveram preferência pela generalização de possibilidades, pois, a relação um-a-muitos fica mais evidente, demonstrando a regularidade da situação, fazendo que ela fique mais explícita. Já o uso do PFC se configura como um procedimento que possui maior nível de congruência com a situação de *produto cartesiano*, uma vez que os números utilizados estão explícitos no enunciado em língua natural, explicando seu uso nesse tipo de problema pelos alunos desse ano escolar. Já os alunos dos 7º e 9º anos que utilizam o PFC, não apenas nas situações de *produto cartesiano*, como também nas outras situações combinatórias, parecem estar num nível de pensamento no qual não é necessário que as possibilidades fiquem visíveis.

Desse modo, conclui-se que é possível desenvolver e ampliar o raciocínio combinatório dos estudantes de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental por meio do uso de ambas as representações intermediárias utilizadas neste estudo, oportunizando um melhor desempenho na apresentação das expressões numéricas correspondentes à resolução das situações, principalmente com o uso da árvore de possibilidades, uma vez que, diante do exposto na análise por tipo de problema, esta parece ter maior congruência com a expressão numérica. No 5º ano esta expressão numérica pode estar relacionada principalmente com a generalização das possibilidades, após o início da enumeração dos casos, utilizando uma representação auxiliar para a realização da operação de multiplicação. Já nos 7º e 9º anos o uso da árvore de possibilidades pode favorecer o uso do PFC de modo que, posteriormente, na ocasião do Ensino Médio, por exemplo, a resolução de problemas combinatórios aconteça sem a necessidade do uso de uma representação auxiliar, uma vez que, segundo Duval (2011), este tipo de representação precisa ser de transição.

6.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a presente investigação buscou-se defender a tese que, com base na Teoria dos Campos Conceituais (Gérard Vergnaud) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Raymond Duval), é preciso articular identificações, conversões e tratamentos dos diferentes registros aos distintos invariantes das situações combinatórias, para um mais amplo aprendizado da Combinatória. E, além disso, é recomendável trabalhar com registros de representação intermediários congruentes, como a árvore de possibilidades, para partir de enunciados em linguagem natural e chegar a expressões numéricas formalizadas.

As discussões realizadas evidenciam como é necessária e importante uma discussão articulando a TCC e a TRRS. Observou-se que as conversões possuem diferentes níveis de dificuldade, dependendo do tipo de registro utilizado, e da situação combinatória tratada. Dessa forma, comprova-se uma estreita relação entre registros de representação e situações combinatórias.

Os resultados quantitativos gerais revelam que não existem diferenças significativas entre os desempenhos no pós-teste dos grupos que trabalhavam com a árvore de possibilidades e a listagem sistematizada, evidenciando que a listagem sistematizada também pode se configurar como uma boa representação intermediária entre o registro de partida (enunciado em língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica).

Apesar disso, qualitativamente parece haver indícios de melhor desempenho do grupo que trabalhou com a árvore de possibilidades (G1), uma vez que as médias desse grupo foram relativamente maiores que as do grupo que trabalhou com a listagem (G2). Também se destaca o melhor desempenho do G1 na apresentação da expressão numérica na análise por tipo de problema, pois o G1 demonstrou diferenças significativas para a expressão numérica em três dos quatro tipos de problemas, enquanto o G2 com apenas um tipo de situação nos 5º e 9º anos e com dois tipos no 7º ano. Inclusive, salienta-se que o G1 do 9º ano foi o único grupo que conseguiu apresentar diferenças significativas na apresentação da expressão numérica nos problemas de *combinação*.

Além disso, o G1 apresentou resultados melhores, com indicação de diferenças significativas na comparação com o G2, na segunda parte do teste em que o número de possibilidades e de etapas de escolhas eram maiores, sendo necessário o uso de uma generalização de possibilidades ou do PFC. Isso pode indicar um maior grau de congruência entre a árvore de possibilidades e a expressão numérica, principalmente quando o número de possibilidades é maior.

Assim, para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, nas distintas situações combinatórias (*produto cartesiano, arranjo, combinação* e *permutação*) há necessidade de se trabalhar identificações de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, conversões entre essas representações e tratamentos de registros de representação semiótica, por meio de representações intermediárias que possam auxiliar na conversão entre o registro de partida (enunciado) e o registro de chegada (expressão numérica), em que essas representações auxiliares possuam maior grau de congruência entre os procedimentos menos e os mais formais. Desse modo, tanto a árvore de possibilidades, quanto a listagem se apresentaram como representações intermediárias possíveis de serem utilizadas para a conversão de uma linguagem natural para uma linguagem matemática formal, sendo a árvore de possibilidades uma representação com maior grau de congruência com a expressão numérica, principalmente quando o número de possibilidades é alto. Essas conclusões são possíveis uma vez que os diferentes grupos em todos os anos escolares pesquisados avançaram de forma significativa em seus desempenhos, no levantamento de possibilidades e na operação matemática que é utilizada para responder o problema, sendo nas situações com maior número de possibilidades e uma diferença significativa indicando melhor desempenho do grupo que trabalhou com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

Destaca-se que o objetivo deste estudo de discutir o papel de diferentes registros de representação, usados como representação de partida, representação intermediária e representação de chegada, implica na discussão da ampliação do conhecimento combinatório de estudantes, uma vez que indica possibilidades do trabalho com diferentes situações combinatórias, por meio de diferentes representações, de modo que seja possível compreender o conceito sem que o esteja confundindo com a sua representação. Também se enfatiza a discussão dos *invariantes* de cada *situação* combinatória no momento das *transformações de conversão* e de *tratamento* de cada registro. Desse modo, acredita-se que a intervenção com o uso da listagem e da árvore de possibilidades como representações intermediárias se configuram como um caminho viável para o aprendizado da Combinatória, de modo que os estudantes possam levantar as possibilidades que respondem um dado problema, e expressá-las em uma operação matemática. Também se acredita que essas representações, com maior destaque para as árvores de possibilidades, são muito importantes para se chegar ao uso de uma expressão numérica, principalmente quando está relacionada com a generalização de possibilidades no 5º ano, bem como o uso do PFC no 7º e 9º ano.

No primeiro estudo a dificuldade dos alunos em identificar as expressões numéricas a partir de árvores de possibilidades ou listagens, antes de um processo de intervenção específico, deu espaço para que, no segundo estudo, após a intervenção, fosse verificado que é possível a ampliação do raciocínio combinatório com um avanço significativo no uso de expressões numéricas, por meio da utilização dessas representações auxiliares.

Assim, enfatiza-se que o trabalho com as *diferentes situações combinatórias*, por meio da discussão de seus *invariantes*, bem como com o uso de *representações auxiliares* sistemáticas, envolvendo *conversões* e *tratamentos de registros*, deve ser levado em consideração para um mais efetivo ensino e aprendizado da Combinatória na Educação Básica. Desse modo, os estudantes poderão melhor desenvolver seus raciocínios combinatórios, percebendo o caráter multiplicativo das situações combinatórias e construindo eficientes estratégias de solução de problemas combinatórios.

Em estudos futuros se poderão investigar, ainda, conversões inversas, ou seja, de expressões numéricas para árvores de possibilidades ou para listagens sistematizadas e dessas representações intermediárias para a linguagem natural. A conversão direta e a conversão inversa se configuram como duas tarefas cognitivas bem diferentes e “para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um sentido único” (DUVAL, 2011, p. 218).

Outra possibilidade de estudo futuro reside na necessidade de maior aprofundamento na compreensão das situações de *combinação*, de modo que sejam discutidos os invariantes desse tipo de problema com o objetivo de entender o papel da divisão na expressão numérica desse tipo de situação.

Uma intervenção mais longa também pode ser realizada, no sentido de se ter maior tempo de discussão dos invariantes das distintas situações combinatórias e da relação desses com variados registros de representação semiótica. Acredita-se que um programa de ensino nesses moldes poderá promover ainda mais avanços no raciocínio combinatório do que os observados no presente estudo.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. **Diagrama de *Árbol*.** Multimidea. 2005.

ALVES, Alessandro Caldeira. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do Ensino Fundamental.** (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MG. Belo Horizonte: PUC-MG. 2010

ARRUDA, Thaline Cabral; e AZERÊDO, Maria Alves de. Atividades de análise de registros semióticos: uma possibilidade didática no ensino do campo multiplicativo. II Congresso Nacional de Educação – CONEDU. Campina Grande. 2015

ASSIS, Adryanne. **Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada**: reflexões e prática de uma professora. (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE. 2014

AZERÊDO, Maria Alves. **As representações simbólicas de multiplicação: Um instrumento de mediação pedagógica.** (Tese de Doutorado) Programa de Pós-graduação em Educação UFPB. João Pessoa: UFPB. 2013

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades**: É melhor no papel ou no computador? (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE. 2013

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **Alexandria**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.6, n.2, p. 113-140, jun, 2013.

AZEVEDO, Juliana; CALHEIROS, Julia. BORBA, Rute. Problemas combinatórios inversos resolvidos por alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 3º ano do ensino médio. **Revista Paranaense de Educação Matemática**: RPEM, Campo Mourão, Pr, v.2, n.2, jan-jun. 2013

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos de um programa de correção de fluxo na modalidade da educação de jovens e adultos. **Anais...** VI Encontro Paraibano de Educação Matemática. Monteiro - PB, 9 a 11 de novembro de 2010.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais...** XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática. CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

BARRETO, Fernada; BORBA, Rute. Estudantes de Anos Iniciais da Educação de Jovens e Adultos Resolvendo Problemas Combinatórios com Listagens e com Árvores de Possibilidades. In: **Educação Metemática em Revista**, n.35, p. 23-31, mar, 2012.

BATANERO, Carmen. NAVARRO-PELAYO, Virginia. GODINO, Juan.Diaz. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils**.** In: **Educational Studies in Mathematics**, v.32, n.2, p.181-199, fev, 1997. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Implicitmodel.pdf>. Acesso em: 6 jul. 2016.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na Educação Básica. **Anais...** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, jul. 2010

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais...** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, jul. 2013

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BARRETO, Fernanda. Using tree diagrams to develop combinatorial reasoning of children and adults in early schooling. **Proceedings...** Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – 9CERME, Praga. 2015. p. 2480-2486.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BITTAR, Marilena. Representações semióticas e situações combinatórias em livros didáticos dos anos iniciais. **Anais...** XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM – Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016a

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BITTAR, Marilena. Brazilian primary school textbooks: symbolic representations in combinatorial situations. **Proceedings...** 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg, 24-31 July 2016b

BORBA, Rute; BITTAR, Marilena; MONTENEGRO, Juliana; SILVA, Dara. How Combinatorial Situations Are Represented In Brazilian Primary And Middle School Textbooks. **Proceedings...** II International Conference on Mathematics Textbook Research and Development - ICMT2. Rio de Janeiro. 7-11 Maio. 2017

BORBA, Rute e BRAZ, Flávia M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: **Anais...** III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Fortaleza, 2012.

BORBA, Rute.; PESSOA, Cristiane.; BARRETO, Fernanda.; LIMA, Rita. Children's, young people's and adults' Combinatorial reasoning. In Ubuz, B. (Ed.). **Proceedings...** 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME. 2011.

BRANDT, Célia; MORETTI, Méricles. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 7, n. 2, pp. 201-227, 2005

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília, DF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasilia, DF. 2018.

BUEHRING, Roberta Schnorr. **Análise de dados no início da escolaridade**: Uma realização de ensino por meio dos Registros de representação semiótica. (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC. Florianópolis: UFSC. 2006.

COLOMBO, Janecler; FLORES, Cláudia; MORETTI, Méricles. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educ. Mat. Pesquisa.** São Paulo, v. 9, n. 2, pp. 181-203, 2007.

DAMM, Regina Fleimmind. **Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte**. (Tese de Doutorado), Estrasburgo: ULP. 1992.

DAMM, Regina Fleimmind. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 2003

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang. 1995.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 2003

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). (Fascículo I)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma – Entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology,** n. 40, 1970.

FLAVELL, John. **A Psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget.** São Paulo: Editora Pioneira. 1988

FONSECA, Antonio Jailson. **O ensino da Análise Combinatória: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de sequência didática**. (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática UFSE. São Cristóvão: UFSE. 2015.

FONSECA, Antônio Jailson; SOUZA, Divanízia; SANTOS,Suzana. Análise Combinatória: uma apreciação de conteúdo através dos registros de representação semiótica. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**/*On line* - v. 2, n. 1, 2014

FONSECA, Antonio Jailson. SOUZA, Divanízia; DIAS, Marlene Alves. O ensino da Análise Combinatória: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de sequência didática. **Anais...** Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM. v.8(4), 2015.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia e aprendizagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, v. 19, n. 26, 2006.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra e SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GUIRADO, João Cesar & CARDOSO, Evelyn. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. **Anais do IX Encontro Paranaense de Educação Matemática.** Paraná, 2007.

INHELDER, Barbel.; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976

LIMA, Ana Paula. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE. Recife. 2015

MAGINA, Sandra; SANTOS, Aparecido; MERLINI, Vera, . O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e educação**. v.20 nº.2 Bauru 2014

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. In: MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth (Editors). **Combinatorics and Reasoning**: Representing, Justifying and Building Isomorphisms**.** New York: Springer (2010)

MARANHÃO, Maria Cristina; IGLIORI, Sonia Camargo. Registros de Representação e números racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 2003

MELO, Liany; SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Raciocínio combinatório em crianças: uma análise dos efeitos da explicitação dos princípios invariantes. **Anais...** Eletrônicos do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. Recife: ENCEPAI. 2016

MONTENEGRO, Juliana. BORBA, Rute. BITTAR, Marilena. A identificação de conversões em situações combinatórias por alunos de anos iniciais a identificação de conversões em situações combinatórias por alunos de anos iniciais. **Anais...** X seminário sul-mato-grossensse de pesquisa em educação matemática. Campo Grande. 2016

MORGADO, Augusto, PITOMBEIRA DE CARVALHO, João, PINTO DE CARVALHO, Paulo. & FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade***.* Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, Maria Lucia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educ. Mat. Pesquisa**., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 99-124, 2006

NUNES, Terezinha.; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vigotski**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histótico. 4. Ed. São Paulo: Scipione, 1997.

PASSONI, João Carlos; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça: Revisitando problemas aditivos de Vergnaud de 1976. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.): **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 2003

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ.** Cempem, FE, Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Mério. **Anais...** 4 SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, OUT. 2009b.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. Estudo de Caso: como duas crianças passam a compreender a combinatória a partir de intervenções? **Revista Eletrônica de Educação**. V. 6, n. 1, mai. 2012b.

ROCHA, Cristiane. Conhecimentos sobre Combinatória de professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio. **Anais...** XV EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campina Grande, 2011.

ROCHA, Cristiane. Ensino de combinatória: expectativas de professores que atuam no Ensino Fundamental. **Anais...** V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação matemática. SIPEM. Petrópolis: Rio de janeiro. 2012

SANTANA, Larissa; LIMA, Luiza; SILVA, Silvana; OLIVEIRA, Bárbara. Fração e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. **Anais...** Encontro Nacional de Educação Matemática: Curitiba, 2013

SELVA, Ana; BORBA, Rute, CAMPOS, Tania; SILVA, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: o que compreendem? Que dificuldades apresentam? Anais... 2º SIPEMAT: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife. 2008

SOUSA, Ana Cláudia; SILVA, Maria Auricélia; BARRETO, Marcília Chagas. Formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental e representações semióticas: uma experiência contemplando números e operações. **Anais...** Encontro Nacional de Educação Matemática: Salvador, 2010

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PIETROPAOLO, Ruy Cézar. Professores de Matemática e Problemas de Contagem no Ensino Fundamental. **Anais...** XI Encontro Nacional de Educação matemática – ENEM. Curitiba, 2013

VEGA, Danielle Avanço. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha:** Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação? Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2014

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1**. p. 75-90. 1986.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

VIGOTSKI, Lev. **Mind in Society:** The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge MA: Harvard University Press, 1978.

APÊNDICE A – Teste 1 do Estudo 1

Aluno:____

1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

   João respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado
Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado
Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado

   Maria respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado	Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa amarela, saia preta e sapato prateado	Blusa rosa, saia preta e sapato prateado
Blusa amarela, saia branca e sapato dourado	Blusa rosa, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado	Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado	Blusa vermelha, saia preta e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato prateado	Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado	Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia branca e sapato prateado	Blusa vermelha, saia branca e sapato prateado

   Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

   Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

   a) 4 + 2 + 2 = 8
   b) 4 x 2 x 2 = 16
   c) 4 x 2 = 8
   d) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

   Justifique sua resposta:

   ____
   ____
   ____

2. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

João respondeu assim

Mamão, abacaxi e laranja
Mamão, abacaxi e banana
Mamão laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana

Maria respondeu assim:

Mamão, abacaxi e laranja
Abacaxi, banana e mamão
Mamão, laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana
Laranja, abacaxi e mamão
Laranja, banana e abacaxi

Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$

b) 4 + 3 = 7

c) 4 x 3 - 5 = 7

d) 4 + 3 - 3 = 4

Justifique sua resposta:

____

____

____

3. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

João respondeu assim:

XKY	XWY
WKY	YKX
YWK	KXY
KYX	YXK
KWY	WXY
WYK	XYK

Maria Respondeu assim:

XYK	YXK	KXY	WXY
XYW	YXW	KXW	WXK
XKY	YKX	KYX	WYX
XKW	YKW	KYW	WYK
XWY	YWX	KWX	WKX
XWK	YWK	KWY	WKY

Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 4 + 4 + 4 = 12
b) 4 x 3 + 4 x 3 = 24
c) 4 x 3 x 2 = 24
d) 4 x 3 = 12

Justifique sua resposta:
____
____
____

4. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

João respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Maria respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.
Carlos, Luís e Maria.
Luís, Maria e Carlos.
Carlos, Maria e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Carlos, Luís e Maria.
Maria, Carlos e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Maria, Luís e Carlos.

Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

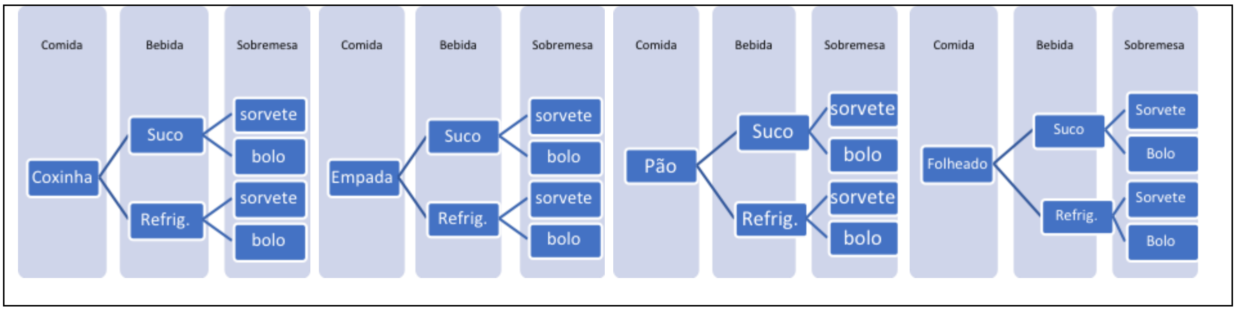
Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 3 x 3 = 9
b) 3 + 6 = 9
c) 3 + 3 = 6
d) 3 x 2 x 1 = 6

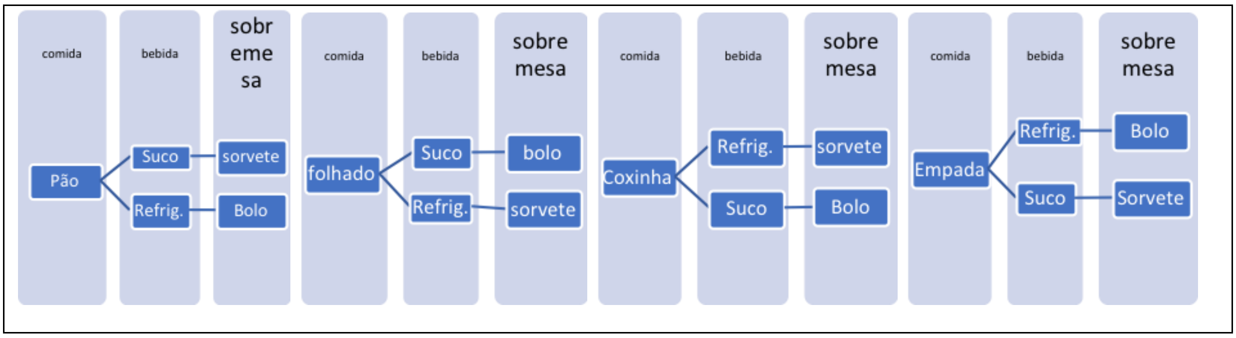
Justifique sua resposta:
____
____
____

5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia quatro opções de comida (coxinha, empada, pão de queijo e folheado de queijo), dois tipos de bebida (suco de fruta e refrigerante) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a conta que você acha que resolve esse problema?

a) 4 + 2 + 2 = 10
b) 4 x 2 + 2 = 10
c) 4 x 2 x 2 = 16
d) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

Justifique sua resposta:

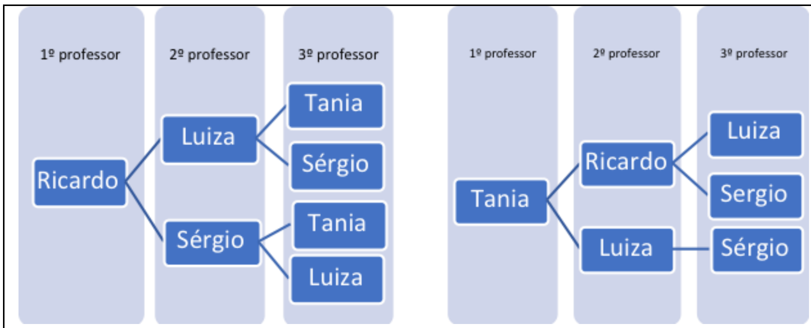
____

____

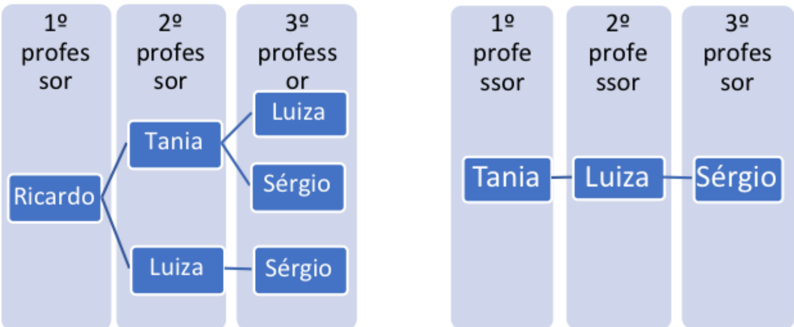
____

6. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

   João respondeu assim:



   Maria respondeu assim:



   Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

   Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) $4 + 3 = 7$
b) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$
c) $4 \times 3 - 5 = 7$
d) $4 + 3 - 3 = 4$

   Justifique sua resposta:

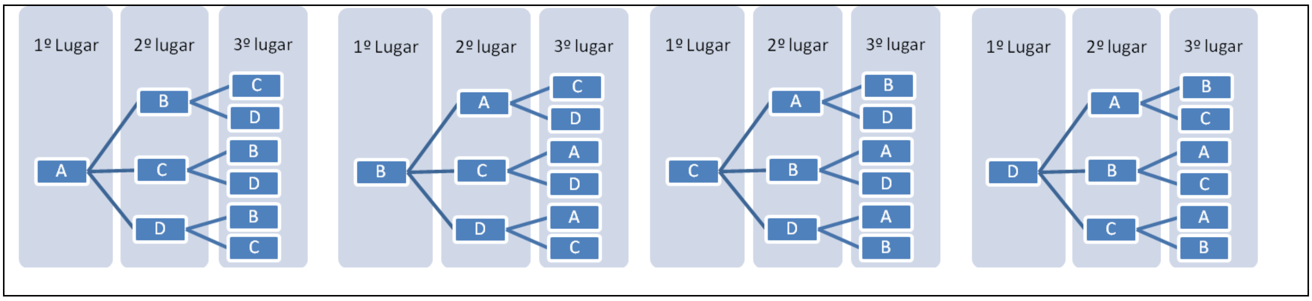
____

____

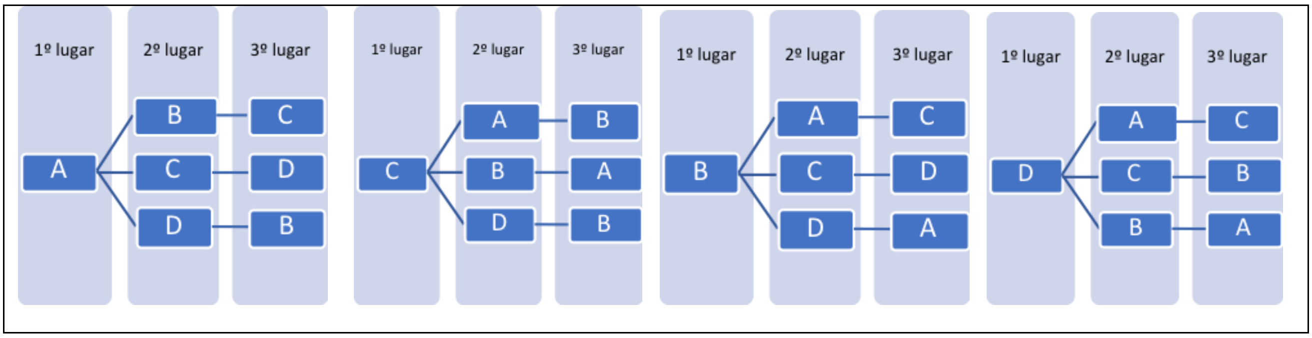
____

7. Quatro turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 4 + 4 + 4 = 12
b) 4 x 3 + 4 x 3 = 24
c) 4 x 3 = 12
d) 4 x 3 x 2 = 24

Justifique sua resposta:

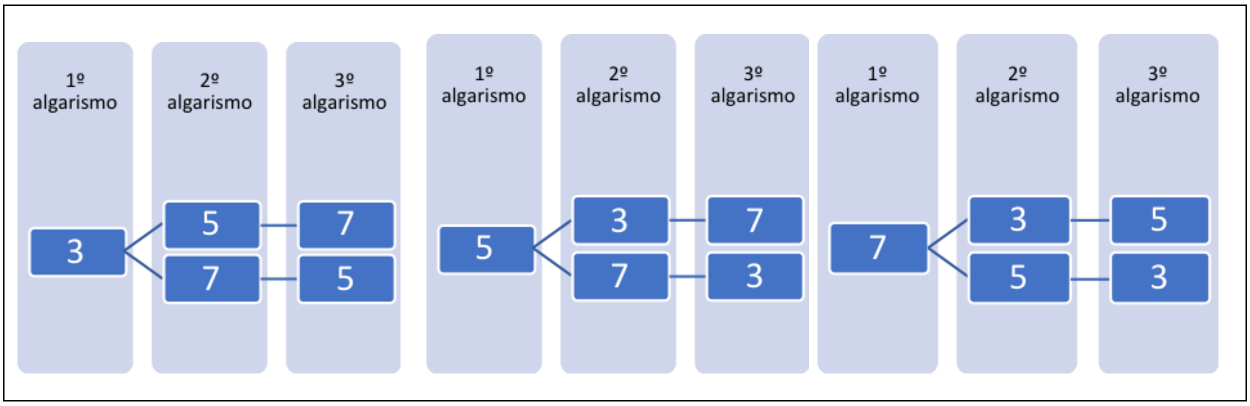
____

____

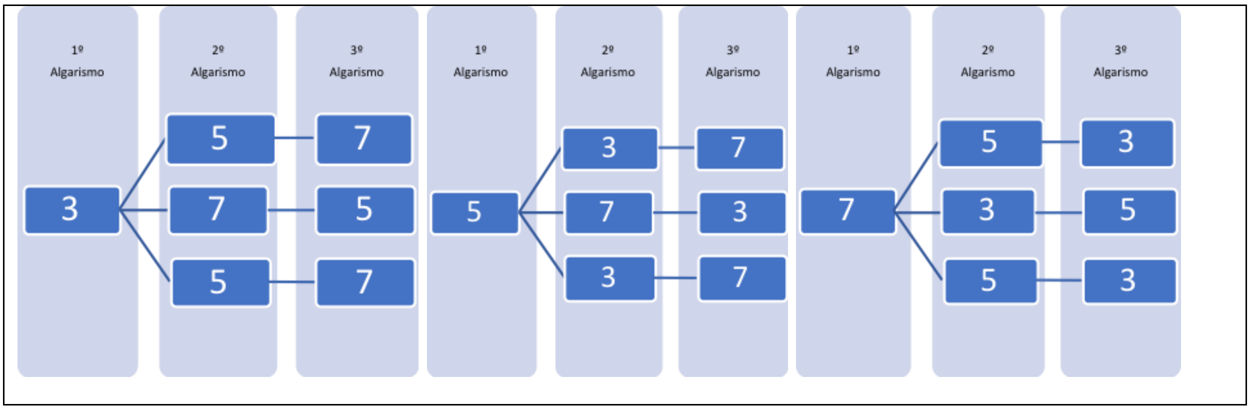
____

8. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de três algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5 e 7?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

a) 3 x 3 = 9
b) 3 + 6 = 9
c) 3 x 2 x 1 = 6
d) 3 + 3 = 6

Justifique sua resposta:

____
____
____

Apêndice B – Teste 2 do Estudo 1

Aluno____

1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

João respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado	Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa amarela, saia preta e sapato prateado	Blusa rosa, saia preta e sapato prateado
Blusa amarela, saia branca e sapato dourado	Blusa rosa, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado	Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado	Blusa vermelha, saia preta e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato prateado	Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado	Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia branca e sapato prateado	Blusa vermelha, saia branca e sapato prateado

Maria respondeu assim:

Blusa amarela, saia preta e sapato dourado
Blusa rosa, saia branca e sapato prateado
Blusa laranja, saia branca e sapato dourado
Blusa amarela, saia branca e sapato prateado
Blusa vermelha, saia preta e sapato prateado
Blusa rosa, saia preta e sapato dourado
Blusa vermelha, saia branca e sapato dourado
Blusa laranja, saia preta e sapato dourado

Qual dos dois você acha que está certo? __________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 4 x 2 x 2 = 16
f) 4 + 2 + 2 = 8
g) 4 x 2 = 8
h) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

Justifique sua resposta:

____
____
____

2. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

João respondeu assim

Mamão, abacaxi e laranja	Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana	~~Abacaxi, banana e laranja~~
Mamão, laranja e banana	~~Abacaxi, mamão e laranja~~
~~Mamão, banana e abacaxi~~	~~Abacaxi, laranja e mamão~~
~~Mamão, banana e laranja~~	~~Abacaxi, banana e mamão~~
~~Mamão, laranja e abacaxi~~	~~Abacaxi, mamão e banana~~
~~Laranja, mamão e abacaxi~~	~~Banana, mamão e abacaxi~~
~~Laranja, abacaxi e mamão~~	~~Banana, abacaxi e mamão~~
~~Laranja, mamão e banana~~	~~Banana, mamão e laranja~~
~~Laranja, banana e mamão~~	~~Banana, laranja e mamão~~
~~Laranja, abacaxi e banana~~	~~Banana, abacaxi e laranja~~
~~Laranja, banana e abacaxi~~	~~Banana, laranja e abacaxi~~

Maria respondeu assim:

Mamão, abacaxi e laranja
Abacaxi, banana e mamão
Mamão, laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana
Laranja, abacaxi e mamão
Laranja, banana e abacaxi

Qual dos dois você acha que está certo? ___________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) $4 + 3 = 7$
f) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$
g) $4 \times 3 - 5 = 7$
h) $4 + 3 - 3 = 4$

Justifique sua resposta:
____
____
____

3. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

João respondeu assim:

XKY	XWY
WKY	YKX
YWK	KXY
KYX	YXK
KWY	WXY
WYK	XYK

Maria Respondeu assim:

XYK	YXK	KXY	WXY
XYW	YXW	KXW	WXK
XKY	YKX	KYX	WYX
XKW	YKW	KYW	WYK
XWY	YWX	KWX	WKX
XWK	YWK	KWY	WKY

Qual dos dois você acha que está certo? ____________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 4 + 4 + 4 = 12
f) 4 x 3 + 4 x 3 = 24
g) 4 x 3 x 2 = 24
h) 4 x 3 = 12

Justifique sua resposta:

____

____

____

4. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

João respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.
Carlos, Luís e Maria.
Luís, Maria e Carlos.
Carlos, Maria e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Carlos, Luís e Maria.
Maria, Carlos e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Maria, Luís e Carlos.

Maria respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Qual dos dois você acha que está certo? ___________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 3 x 2 x 1 = 6
f) 3 x 3 = 9
g) 3 + 6 = 9
h) 3 + 3 = 6

Justifique sua resposta:

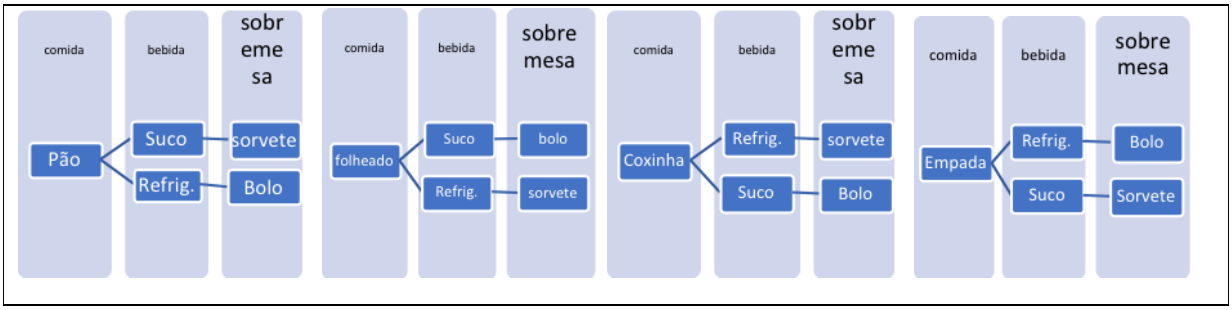
____

____

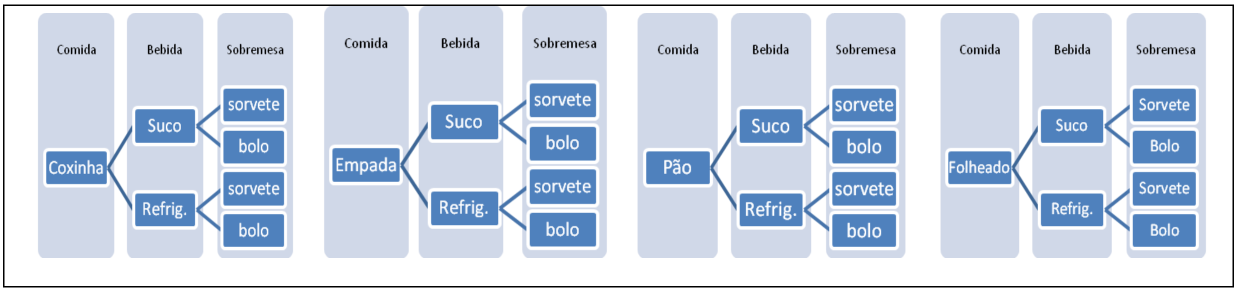
____

5. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia quatro opções de comida (coxinha, empada, pão de queijo e folheado de queijo), dois tipos de bebida (suco de fruta e refrigerante) e dois tipos de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ____________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 4 + 2 + 2 = 8
f) 4 x 2 = 8
g) 4 x 2 x 2 = 16
h) 4 x 2 + 4 x 2 = 16

Justifique sua resposta:

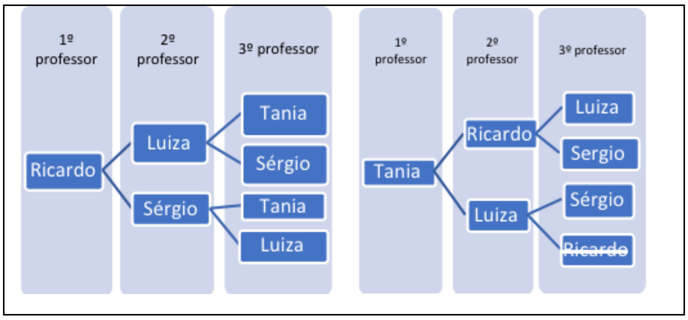
____

____

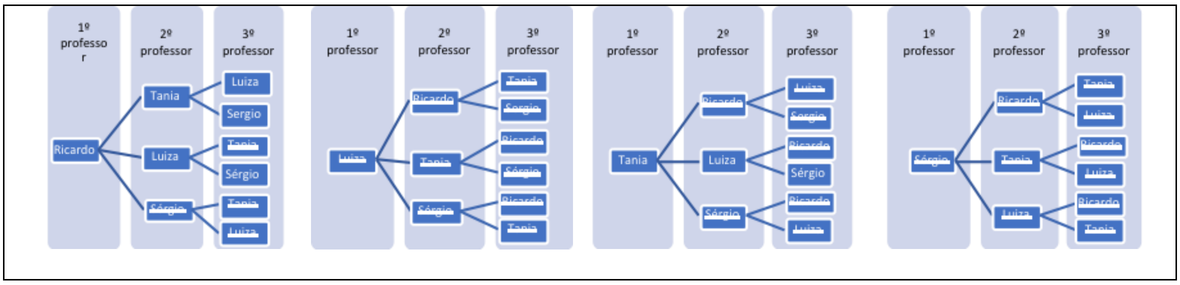
____

6. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

   João respondeu assim:



   Maria respondeu assim:



   Qual dos dois você acha que está certo? ____________________

   Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

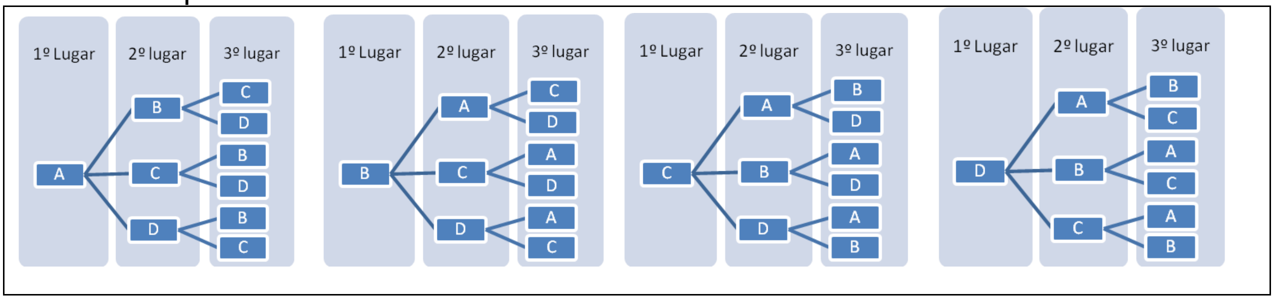
e) $4 + 3 = 7$
f) $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$
g) $4 \times 3 - 5 = 7$
h) $4 + 3 - 3 = 4$

   Justifique sua resposta:

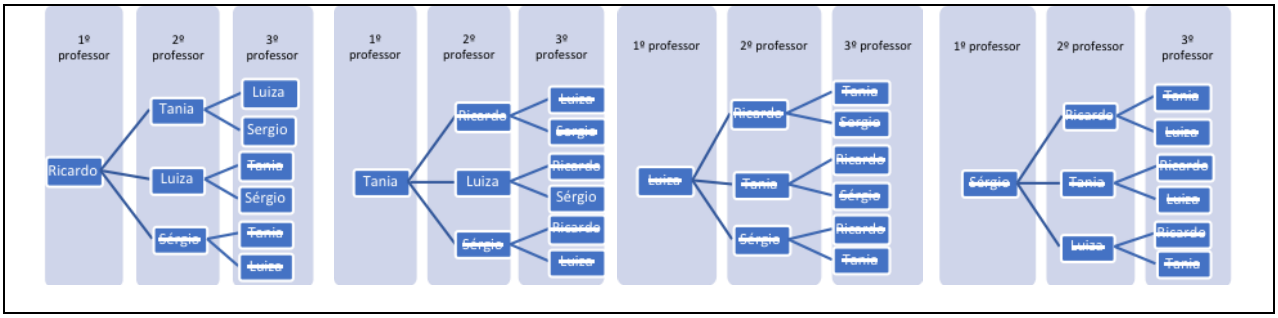
   ____
   ____
   ____

7. Quatro turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ______________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 4 + 4 + 4 = 12
f) 4 x 3 + 4 x 3 = 24
g) 4 x 3 = 12
h) 4 x 3 x 2 = 24

Justifique sua resposta:

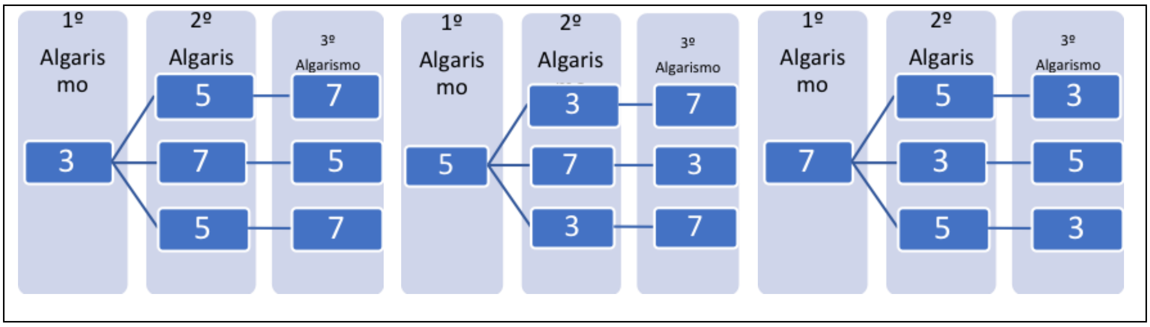
____

____

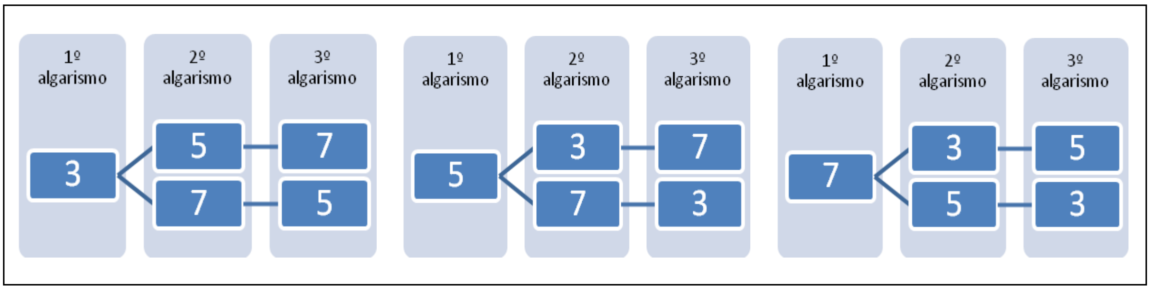
____

8. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de três algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5 e 7?

João respondeu assim:



Maria respondeu assim:



Qual dos dois você acha que está certo? ___________________________

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?

e) 3 x 3 = 9
f) 3 x 2 x 1 = 6
g) 3 + 6 = 9
h) 3 + 3 = 6

Justifique sua resposta:

____

____

____