UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS e MATEMÁTICA

JEREMIAS BATISTA SANTOS

O conceito de Função Quadrática nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma análise praxeológica das atividades propostas

Caruaru

2017

JEREMIAS BATISTA SANTOS

O conceito de Função Quadrática nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma análise praxeológica das atividades propostas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática PPGECM como requisito para conclusão do Mestrado Acadêmico.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador (a): Marcus Bessa de Menezes

Co-orientador (a): José Dílson Beserra Cavalcanti

Caruaru

2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva CRB/4 - 1223

S237c Santos, Jeremias Batista.
O conceito de função quadrática nos livros didáticos do ensino médio: uma análise praxeológica das atividades propostas. / Jeremias Batista Santos. – 2017.
88 f.; il.: 30 cm.

Orientador: Marcus Bessa de Menezes.
Coorientador: José Dilson de Bezerra Cavalcanti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, 2017.
Inclui referências.

1. Antropologia. 2. Didática (Ensino médio). 3. Livros didáticos (Brasil). 4. Matemática (Ensino médio). I. Menezes, Marcus Bessa de (Orientador). II. Cavalcanti, José Dilson de Bezerra (Coorientador). III. Título.

371.12 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2017-493)

JEREMIAS BATISTA SANTOS

O conceito de Função Quadrática nos Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma análise praxeológica das atividades propostas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

APROVADA EM: 31/10/2017.

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Orientador)

Universidade Federal de Campina Grande

____

Profº. Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti (Co-orientador)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Edelweis Tavares Barbosa (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Mônica Maria Lins Santiago (Examinador Externo)

Universidade Federal Rural de Pernambuco

RESUMO

Nossa pesquisa consiste em uma análise de Livro Didático. Esta buscou investigar como, e se, as atividades propostas no Livro Didático de Matemática do Ensino Médio sobre o conceito de Função Quadrática proporcionam que o estudante aprenda o conceito além do ‘saber fazer’, ou seja, de uma mera aplicação de uma técnica de modo automático. Para tal investigação, utilizamos como lente teórica metodológica a Teoria Antropológica do Didático-TAD (CHEVALLARD, 1998) e a sua noção de praxeologia e sua classificação que para Chevallard (1998) a praxeologia pode ser: pontual, local, regional ou global. Aqui, acreditamos que quando a praxeologia passa a ser regional ou global é que o estudante tem acesso ao discurso tecnológico-teórico do conceito - nesse ponto - podemos dizer que o estudante avança na compreensão de um conceito. Nosso trabalho, criou categorias para análise dos tipos de tarefas a partir das concepções de Função Quadrática apresentadas nos documentos curriculares estaduais (PERNAMBUCO, 2012). Categorias estas, que utilizamos para classificar as atividades de matemática propostas pelo autor do Livro Didático, e, a partir dessa classificação das atividades matemáticas em tipos de tarefa, puderam ser verificadas se estas atividades propostas proporcionavam elementos para que o estudante transitasse do bloco prático-técnico para o tecnológico-teórico. Em nosso estudo, podemos notar que em alguns momentos as praxeologias eram pontuais, ou seja, aplicação de uma mesma técnica. Contudo, em outros momentos, houve o que aqui chamamos de um avanço no alcance das praxeologias nas quais o estudante é convidado a refletir sobre uma dada situação ou regularidade apresentada e - isso - para nós - se aproxima de uma praxeologia regional.Com isso, podemos perceber que o livro analisado aproxima, sutilmente, o estudante do bloco tecnológico-teórico.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria antropológica do didático. Praxeologia. Função quadrática. Livro didático. Ensino médio.

ABSTRACT

Our research consists of an analysis of Didactic Book. This research sought to investigate how, and if, the activities proposed in the High School Mathematics Didactic Book on the concept of Quadratic Function allow the student to learn the concept beyond 'know-how', that is, from a simple application of a automatic mode. For this research we use the Anthropological Theory of Didactic-TAD (CHEVALLARD, 1998) and its notion of praxeology and its classification that for Chevallard (1998) praxeology can be: punctual, local, regional or global. Here we believe that when praxeology becomes regional or global, the student has access to the technological-theoretical discourse of the concept at this point we can say that the student advances in the understanding of a concept. Our work created categories for analysis of the task types from the conceptions of Quadratic Function presented in the state curricular documents (PERNAMBUCO, 2012). These categories, which we used to classify the mathematical activities proposed by the author of the Didactic Book, and from this classification of mathematical activities into task types, could be verified if these proposed activities provided elements for the student to move from the practical-technical block to the technological-theoretical. In Ours we can note that in some moments praxeologies were punctual, that is, application of the same technique. However, at other times there has been, what we call here, an advance in the reach of praxeologies in which the student is invited to reflect on a given situation or regularity presented and this for us approaches a regional praxeologia.En this we can see that the analyzed book subtly approximates the student of the technological-theoretical block.

KEYWORDS: Anthropological theory of didactics. Praxeologia. Quadratic function. Didactic book. High school.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> O processo educacional, em particular a Educação Matemática conjuga aspectos sócioeconômicos globais, visando a melhoria de qualidade de vida. O maior objetivo da educação deve ser oferecer uma possibilidade de eliminação de iniquidade, de arrogância e de prepotência, tão comuns na sociedade. (D’AMBRÓSIO, 2016, p. 1)

Se for feita a pergunta: A Matemática é importante? Para quê? Muitas pessoas podem até concordar que sim. Entretanto, se a pergunta for: A Matemática é importante para você? Em quê? As respostas aqui, provavelmente divergissem da primeira questão. Isso porque a Matemática é vista como algo ‘difícil’, ‘para poucos’, ‘é preciso ter um dom’. E quando o estudante ‘fracassa’ na matemática escolar, ele tende a cada vez mais, ver menos importância na Matemática para sua vida. Isso porque a matemática escolar bem estruturada, sequencial e abstrata tem cada vez menos a ver com problemas do dia a dia.

A Matemática enquanto Ciência tem papel fundamental na sociedade moderna. O desenvolvimento social e tecnológico atual ‘deve’ muito à contribuições de matemáticos que a usaram para desenvolver, procedimentos, ferramentas e teorias que permeiam grandes descobertas da humanidade.

Podemos exemplificar a partir do astrônomo Johannes Kepler, astrônomo e matemático do século XVII, uniu a Física a Astronomia quando postulou suas leis do movimento dos planetas no sistema solar, revolucionando a Astronomia, que até então era um ramo da Matemática. Kepler afirmou que as órbitas dos planetas ao redor do sol eram elípticas e o sol ocupava um dos focos dessa elipse. Esse fato ajudou aos físicos a compreenderem e preverem o movimento dos planetas com maior precisão e, também, veio a influenciar Isaac Newton em sua lei da gravitação universal. Existem outros grandes matemáticos que influenciaram diversos ramos da vida social, como Leonardo Da Vince na arte que utilizou as proporções de modo a produzir representações artísticas que são consideradas por críticos e admiradores belíssimas. René Descartes matemático francês do século XVII desenvolveu o sistema de localização em planos, que revolucionou a construção e leitura de mapas da Geografia.

Outro personagem que destacamos é Alan Turing matemático e criptógrafo britânico do século XX que ajudou o governo britânico a desvendar os códigos secretos das mensagens nazistas produzidos pela máquina enigma, um dos maiores desafios matemáticos durante a segunda guerra mundial, e criou uma máquina de criptografia que ficou conhecida mais tarde como máquina de Turing. Essa máquina é considerada a precursora do computador, assim como Turing é considerado um dos pioneiros na área de computação e dos algoritmos da computação e pai da Inteligência artificial. Esta última alcunha, pelo fato de sua máquina, por meio de alguns algoritmos matemáticos, desvendar em poucos instantes todos os códigos da máquina nazista Enigma. Ainda no fim século XX, Larry Page e Sergey Brin, cientistas da computação utilizando ferramentas matemáticas de otimização, desenvolveram um site de busca, com o objetivo de encontrar páginas da internet, por temas ou números de acessos dessas páginas, este buscador foi o precursor do Google site mais acessado no mundo atualmente, e detentor de inúmeros serviços inclusive apps para smartphones e computadores.

Tendo em vista todas essas aplicações e potencialidades à disciplina Matemática têm papel fundamental na Educação Básica. Por sua estrutura lógica, a linguagem matemática é utilizada como 'alfabeto para as Ciências' de modo que ela é utilizada para validar e comunicar a descoberta cientifica. Antes de tudo, através da resolução de problemas a matemática desenvolve maneiras específicas de pensamento e organização.

Todos esses fatos influenciam na Matemática da Educação Básica e isso fica evidente em alguns pontos, um deles é a distribuição da carga horária semanal da disciplina que geralmente é equivalente à carga-horária da disciplina de Língua Portuguesa (Língua materna). Outro fato que evidência a importância da Matemática diz respeito às avaliações nacionais, estaduais e internacionais que avaliam conhecimentos específicos destas duas disciplinas (Língua Portuguesa e Matemática). Além disso, vale ressaltar o reconhecimento e destaque que os próprios documentos curriculares atribuem à Matemática, tal como podemos ver no seguinte trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – PCNEM - (BRASIL, 2000):

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2000, p. 9).

Sobre a Matemática no Ensino Médio, o PCNEM (BRASIL, 2000) afirma que nessa etapa a Matemática possui um valor não só formativo estrutural, mas também um papel instrumental para realização de diversas atividades humanas. Neste ponto os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio também concordam quando afirmam que a “Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para fenômenos nas mais diversas áreas” (PERNAMBUCO, 2012, pg. 17)

Nesse estudo, elegemos como objeto de investigação o conceito de função mais precisamente Função Quadrática. Dentre as razões que justificam nossa opção por este objeto de investigação destacamos o fato das funções servirem como modelo matemático para explicar a variação de grandezas em fenômenos físicos, por exemplo, movimento, aceleração de um corpo, químicos para expressar velocidade de reação e estudos de variação da energia térmica. Esses fenômenos por estarem conectados diretamente com a nossa realidade, nos apresentam o conceito de função como um objeto matemático com amplo poder de aplicabilidade. Contudo, alguns autores (Cf. BARRETO, 2008; PONTE, 1990) alertam para que se evite o uso exagerado das manipulações algébricas, que limitam o estudo a resolução de equações.

Outra razão da nossa escolha se dá porque os documentos curriculares para o e Ensino Médio, PCNEM (BRASIL, 2000), PCN + (BRASIL, 2002), BCC (PERNAMBUCO, 2008) e os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio – PCPE (PERNAMBUCO, 2012), sinalizam o estudo de funções como um dos principais objetivos nesse nível de escolarização, essa observação é perfeitamente compreensível se considerarmos a natureza modeladora do conceito de função que permite representar e compreender fenômenos naturais que envolvem a variação de grandezas correlacionadas. Essa natureza é deixada clara no seguinte trecho do PCNEM (BRASIL, 2000)

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas... (BRASIL, 2000, p.42-43).

Os PCPE apontam ainda que o estudo das funções 'é essencial' no Ensino Médio para modelização de problemas de ordem natural ou social que envolva relações entre grandezas e inclusive esse aspecto deve 'ser priorizado' em vez de uma abordagem essencialmente simbólica, nesta etapa é mais importante que o estudante perceba aspectos como o "crescimento e decrescimento de cada uma das funções estudada o que permite que ele desenvolva uma pensamento funcional. Isso significa retirar a ênfase geralmente atribuída à manipulação Simbólico-algébrica..." (PERNAMBUCO, 2012, pg. 129).

Outra Instituição[1] divulgadora do ensino de função no Ensino Médio é o Livro Didático. É importante destacar que o Livro Didático é um recurso que tem ficado em evidência nas últimas décadas devido a programas governamentais tais como Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLDEM) que garantem livros didáticos a todas as escolas públicas do Brasil. Referindo-se ao Livro Didático de Matemática, Beltrame (2009) afirma que o livro é um instrumento que influencia muito as decisões do professor em sala de aula. Em alguns casos, o livro é o único instrumento ao alcance do professor. Já conforme Paes (2006), o Livro Didático tem a função de validar o saber ensinado. Em nossa opinião, o Livro Didático, antes de tudo, organiza o saber matemático que 'deve' ser ensinado. E é essa função de organizar o saber matemática, que nos motivou a tomá-lo como objeto de análise.

---

[1] Chamamos Instituição de acordo com os conceitos primitivos da Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991), seriam locais onde se reconhecem o saber.

Para tal estudo, propomos uma análise de Livro Didático à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida pelo pesquisador francês Yves Chevallard. Conforme alguns pesquisadores (Cf. CÂMARA e BESSA DE MENEZES, 2008; ARAUJO, 2009; CAVALCANTI, BRITO LIMA e BESSA DE MENEZES, 2016), essa teoria pode ser considerada como um prolongamento da teoria da Transposição Didática e fundamenta-se nos mesmos conceitos primitivos de Objeto, pessoas e instituições dessa teoria. Ainda, segundo Chevallard apud Araújo (2009), o que diferencia e expande a abrangência da Teoria antropológica do Didático em relação à Teoria da Transposição didática é a noção de praxeologia "ao permitir abordar as limitações que se criam entre os diferentes objetos de saberes a ensinar no interior de determinada instituição" (ibidem. p.33).

Conforme Chevallard (1991) apud Araujo (2009), o saber matemático é fruto das ações humanas institucionais, o que torna necessária elaboração de um método de análise, a descrição e o estudo das condições de realização das práticas institucionais. É a partir desse contexto que se originam as noções de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) que sustentam a praxeologia. Chevalard ainda identifica que uma praxeologia é formada por esses quatro elementos [T, τ, θ, Θ] e articula-se em dois blocos uma prático-técnico [T, τ] que ele chama de 'saber-fazer' e outro tecnológico-teórico [θ, Θ] chamado de o 'saber'.

Isso posto, apresentamos a seguir a principal questão que guiou nossa investigação durante a pesquisa.

O Livro Didático de Matemática do Ensino Médio propõe, por meio de suas atividades (exercícios propostos e exemplos) acerca do conteúdo funções quadráticas, que o estudante do ensino médio ao longo do desenvolvimento do conteúdo faça a 'passagem' do bloco prático-técnico [T, τ] ("saber-fazer") para o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] ("saber")?

Para responder tal questão, traçamos o seguinte objetivo Geral:

- Identificar se o Livro Didático de Matemática do Ensino Médio- mais adotado- pelas escolas da rede estadual localizadas no município de Caruaru - PE propõe que o estudante do ensino médio ao longo das atividades referentes ao conteúdo Função Quadrática realize a "passagem" do bloco prático-técnico [T, τ] ("saber-fazer") para o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] ("saber").

Para alcançarmos o objetivo geral proposto, pensamos ser conveniente traçarmos objetivos menores de maneira que a realização desses objetivos menores implique na realização do objetivo geral. Tais objetivos, ditos específicos, são apresentados abaixo:

i. Identificar a coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio mais adotada pelas escolas da rede estadual no município de Caruaru-PE;
ii. Construir as categorias de tipos de tarefa referentes ao conceito de Função Quadrática no Currículo de Matemática do estado de Pernambuco
iii. Identificar os tipos de tarefa referentes ao conceito de Função Quadrática propostas no Livro Didático escolhido;
iv. Identificar se as praxeologias matemáticas apresentadas no Livro Didático são praxeologias pontuais, locais ou regionais;

Nosso trabalho está organizado, no geral, em Capítulos, os capítulos estão, por sua vez, divididos em seções algumas seções foram dividias em subseções - e no capítulo 3 - temos apresentamos ainda umas subseções secundárias, ou seja, uma subseção da subseção. Logo, faremos aqui -então- um mapa geral do trabalho.

O primeiro capítulo foi dividido em 5 seções. Na primeira seção (1.1) do capítulo, trataremos da Matemática no Ensino Médio da Educação Básica e o que dizem os documentos legais a cerca dessa Matemática. Na segunda seção (1.2), apresentaremos um panorama histórico da evolução conceito de função e qual a definição mais comum nos livros didáticos atuais. Na terceira seção (1.3) destacaremos quais são as orientações, acerca do ensino de Função Quadrática no Ensino Médio, apresentadas pelos documentos curriculares construídos e publicados pelo MEC (Ministério da Educação e Cultura) e pela Secretária de Educação de Pernambuco para esta etapa de escolarização. Na quarta seção (1.4), apresentaremos a nossa lente teórico-metodológica a Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998) e seus principais elementos juntamente com a definição de Praxeologia (1.4.1) e os tipos de praxeologias (1.4.2). Por fim, na quinta seção (1.5) discorreremos um pouco a cerca do Livro Didático em especial o Livro Didático de Matemática. No Capítulo dois(02), descrevemos a metodologia utilizada, para realização do trabalho. E uma subseção que discute os procedimentos para escolha do livro adotado.

No terceiro capítulo, apresentamos nossa análise em três seções. Na primeira (3.1) apresentamos o livro escolhido e descrevemos suas principais características. Na segunda seção (3.2), apresentamos as categorias de análise que nos serviram de lente para análise das atividades do livro. Já na terceira seção (3.3), apresentamos a análise do livro selecionado segundo as categorias apresentadas na seção anterior (3.2), essa, apresenta subseções e subseções secundárias, pois algumas categorias de tipos de tarefa precisaram ser destrinchadas em subcategorias.

E, por fim, apresentamos as conclusões do trabalho, resultados obtidos, e as novas demandas que surgiram no decorrer e término do trabalho.

2 MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA E ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

> Segundo a versão mais difundida do "culturalmente correto", falar de didática das matemáticas, por exemplo, supõe falar de alguns objetos distintos – as matemáticas, primeiro, e depois, solidariamente, dos alunos, dos professores, dos livros didáticos, etc. – *excluindo quase todos os demais objetos*, e em particular todos aqueles que acreditamos não serem cientificamente pertinentes porque aparentam estar *culturalmente afastados* dos objetos considerados emblemáticos das questões da didática das matemáticas.(CHEVALLARD, 1998, p.222)

Historicamente, a Matemática se estabelece enquanto Ciência devido às diversas necessidades (contar, medir, organizar) humanas (cf. BRASIL, 2016). Contudo, a superação dessas necessidades gera novas necessidades e por sua vez a humanidade desenvolve novas ferramentas o que gera um ciclo (problemas-estratégia para solução-problema e novos problemas) que é responsável pelo desenvolvimento e produção de conhecimento. Deste modo, temos que em algum momento na história, ou em alguns momentos, essas estratégias foram condensadas e organizadas por uma ou mais pessoas que refletiram sobre essas estratégias (um exemplo na matemática, seria Euclides e seus Elementos) e essa organização torna possível o aprofundamento e solução de novos problemas mais complexos. Com isso, vai se formando um corpo de conceitos articulados com linguagem própria, que busca constantemente otimizar suas ferramentas, nesse nível, temos o que chamamos de conhecimento científico.

2.1 MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Quando pensamos na Matemática escolar não devemos considerá-la apenas como um conjunto de conceitos, regras e teoremas que devem ser ensinados e imediatamente aplicados numa ordem 'lógica' do tipo definição > exemplos > exercícios > avaliação. Desse modo, o objetivo fim é resolver problemas algumas vezes não tão lógicos focando no método cientifico e na sua estruturação por outro lado, desconsiderando, muitas vezes, o aspecto histórico e social de sua construção a Matemática na escola se torna enfadonha e obsoleta. Nesse ponto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM - (BRASIL, 2006) alertam que quando se refere ao Ensino de Matemática, deve-se evitar a exigência de memorização de fórmulas, bem como a prática de exercícios repetitivos, quando o foco é a utilização dessas regras desprovidas de justificativa e, até mesmo, de um objetivo. Sobre como deve ser o ensino de Matemática na Educação Básica, a BNCC pontua que:

> O estudante deve ser motivado a, em seu percurso escolar, questionar, formular, testar e validar hipóteses, buscar contra exemplos, modelar situações, verificar a adequação da resposta a um problema, desenvolver linguagens e, como consequência, construir formas de pensar que o levem a refletir e agir de maneira crítica sobre as questões com as quais ele se depara em seu cotidiano (BRASIL, 2016, p. 131).

Nesse trecho, vale também ressaltar que a BNCC corrobora com os PCPE que, com relação ao Ensino de Matemática, já apresentam desde 2012 que a "...a construção efetiva desse conhecimento implica o uso permanente da imaginação, de raciocínios indutivos plausíveis, de conjecturas, tentativas, verificações empíricas..." (PERNAMBUCO, 2012, p.19). Aqui, vemos que a Matemática da Educação Básica deve formar os sujeitos capazes de refletir matematicamente sobre uma dada situação construindo e validando suas hipóteses.

Outro fato é que a Matemática tem, na Educação Básica, um lugar de destaque no currículo escolar talvez pelo seu status social de uma Ciência que fornece ferramentas e metodologias de pesquisa para as demais Ciências como, por exemplo, na Física, Química, Astronomia etc. Algumas vezes, torna-se uma linguagem adotada para expressar conceitos e teorias como no caso da Física, por exemplo, cujos muitos de seus conceitos estão associados a variações de grandezas interdependentes e as funções matemáticas são essenciais ao se estudar essas grandezas.

Podemos perceber essa posição de destaque nas organizações dos programas anuais do Estado de Pernambuco, por exemplo, os Parâmetros curriculares do estado de Pernambuco que apresentam uma quantidade significativa de conteúdos a serem vistos nessa etapa, tanto novos quanto conteúdos que devem ser consolidados nessa etapa. Quando observamos a estrutura da Educação Básica consideramos aqui dois pontos pelos quais essa valorização da Matemática na Educação Básica torna-se evidente. O primeiro é a carga-horária que nada mais é que o tempo letivo -horas/aulas- dedicado à disciplina, já o segundo diz respeito às avaliações externas promovidas pelos governos e associações que propõe a avaliar a qualidade da educação de um estado ou país, por exemplo. Com essa avaliação, são obtidos indicadores que 'medem' essa qualidade da Educação Básica.

Como exemplo do primeiro ponto, podemos citar aqui o estado de Pernambuco que das 1000 horas/aulas anuais no Ensino Médio regular 160 horas/aulas são de Matemática o que representa 16% da carga-horária anual, já no Ensino Médio integral que tem um total de 1400 horas/ aulas anuais essa carga-horária de Matemática se iguala a de Língua portuguesa (Língua materna) com um total de 240 horas/aulas o que chega a pouco mais de 17% da carga-horária anual.

No que diz respeito às avaliações temos o SAEB (Sistema de avaliação escolar brasileiro) a nível nacional que é parte constituinte nos indicadores de qualidade da Educação Básica do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), as avaliações do SAEPE (Sistema de Avaliação Escolar de Pernambuco) a nível estadual avaliam em seu caderno de provas duas disciplinas, Língua Portuguesa e Matemática, como determina a portaria nº 89, de 25 de maio de 2005 publicada no Diário Oficial da União de 27 de maio de 2005, essa última que é componente do IDEPE (Índice de Desenvolvimento da Educação de Pernambuco) que gera os índices de desenvolvimento educacional no Estado.

Ainda internacionalmente existe o *Programme for International Student Assessment*[2] (Pisa) – elaborado pela *Organisation for Economic Co-operation and Development*[3] (OECD) na qual possui em suas avaliações competências de Matemática, leitura (no caso a Língua materna) e Ciências. Essas avaliações são realizadas a cada três anos e a partir dela define-se um ranking internacional de qualidade na educação entre os países participantes.

Devido ao seu caráter de disciplina obrigatória em todo território nacional, todos os documentos curriculares da Educação Básica, tanto a nível nacional quanto a nível estadual, dedicam uma seção ou um caderno que objetiva discutir tópicos referentes ao ensino de Matemática na Educação Básica.

As discussões de maneira geral abordam as subdivisões de eixos temáticos (Números e Operações, Geometria...), currículo para Matemática da Educação Básica, metodologias de ensino de Matemática, pesquisas dentro da área

[2] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
[3] Organização para Cooperação e o Desenvolvimento Econômico

do Ensino de Matemática (história da Matemática, resolução de problemas...) e métodos de avaliação da aprendizagem em Matemática.

Dito isso, não podemos ignorar em nossa pesquisa esses documentos, pois são essas orientações que direta ou indiretamente influenciam a prática do professor na sala de aula, pois elas norteiam a organização dos currículos das Secretárias de Educação, direcionam os autores de livros didáticos na elaboração de sua obra e ainda servem de parâmetros para elaboração das avaliações externas supracitadas.

Entre os documentos nacionais, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006) e a Base Nacional Comum Curricular- BNCC (BRASIL, 2016). A nível estadual têm-se a Base Curricular Comum – BCC - (PERNAMBUCO, 2008) que em 2012 foi ampliada nos PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros em Sala de aula (PERNAMBUCO, 2013).

Um discurso comum a todos os documentos orientadores para o Ensino Médio, tanto os nacionais quanto os estaduais, é de que o Ensino de Matemática deve consolidar nessa etapa os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, se mostrar como Ciência com linguagem própria com leis e estrutura própria e que tal como as demais Ciências é produtora de seus próprios conhecimentos específicos. Contudo, tais conhecimentos servem como ferramentas para compreender questões de outras ciências em especial Ciências da Natureza que constantemente utilizam a linguagem Matemática para descrever fenômenos naturais. Esse fato fica evidente no seguinte trecho do PCPE (PERNAMBUCO, 2012):

> ... nesta etapa (Ensino Médio) devem ser oferecidas condições para que o estudante possa complementar e consolidar as aprendizagens realizadas no Ensino Fundamental e desenvolver suas capacidades e competências. [...] a palavra-chave da Matemática do Ensino Médio seria ‘conexões’; conexões tanto com outras áreas do conhecimento e aplicações sociais, como também com outros campos da própria Matemática. [...] Contudo, não se pode esquecer que a Matemática do Ensino Médio, como disciplina estabelecida, também deve ser vista como uma ciência que apresenta características estruturais específicas. (PERNAMBUCO, 2012, pg. 120-121).

Conduzir o ensino de Matemática com o propósito de mostrar ao estudante a Matemática como uma Ciência é importante e necessário nesta etapa, porém, pesquisadores (Cf. BARRETO, 2008; PONTE, 1990.) e as próprias orientações dos documentos orientadores PCNEM (BRASIL, 2000), PCN+ (BRASIL, 2002), OCEM (BRASIL, 2006) BCC (PERNAMBUCO, 2008) e PCPE (PERNAMBUCO, 2012) alertam para não confundir essa importância da Matemática, como linguagem e ferramenta para uso das Ciências, como uma desculpa para manipulações algébricas excessivas, dando muita ênfase a propriedades e suas demonstrações ao invés de considerar seu potencial modelador para estudar fenômenos dentro das Ciências e da própria Matemática.

Desse potencial, modelador temos, por exemplo, se no ensino de Função Quadrática o professor concentrar todos os seus esforços em sua definição e simbologias ao invés de levar o estudante a compreender, por exemplo, as propriedades gráficas da função estudada e suas implicações na Matemática e em outras Ciências como, por exemplo, o significado dos coeficientes da Função Quadrática em seu gráfico e suas implicações na função horária do Movimento Uniforme uniformemente variado.

Os documentos curriculares enfatizam no Ensino médio o estudo de funções, principalmente, por sua capacidade modeladora de fenômenos que envolvem variação de grandezas. Portanto, agora, acreditamos ser pertinente fazermos um pequeno percurso histórico da evolução do conceito de função através dos séculos para construirmos uma compreensão melhor sobre as definições atualmente aceitas e divulgadas nos livros didáticos do Ensino Médio.

2.2**.** A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.

O conceito de função é bastante utilizado em diversos campos da Matemática e em diversas áreas de conhecimento. Nesse último caso, geralmente para expressar a relação entre duas ou mais grandezas, a exemplo, a Administração, a Física, a Geografia entre outras, desenvolveram campos de estudo que sem o conceito de função, não existiriam ou seriam um tanto arcaicos.

A seguir faremos um breve percurso na história da evolução do conceito de função. Para isso, tomamos como referências trabalhos como Ponte (1990), Rossini (2006) e Lopes (2014), pois, consideramos que a compreensão da construção história do conceito, nos será útil para realizar a análise das atuais definições do conceito de função presente nos livros didáticos da Educação Básica.

Sobre o surgimento do conceito de função, alguns pesquisadores afirmam que a origem do conceito de funções remonta desde a antiguidade com os egípcios e babilônios e suas tabelas de valores (cf. ROSSINI, 2006; OLIVEIRA, 1997). Contudo, deixam claro que os textos e as tabulações não mencionam em nenhum momento as ideias de função (dependência, variável...). Entre as pesquisas sobre o desenvolvimento do conceito de função é consenso que a real evolução e formalização do conceito de função se deu a partir do século XVII com o desenvolvimento em especial da Física e das Ciências da Natureza como afirmam alguns autores (cf. PONTE, 1990; OLIVEIRA, 1997; ROSSINI, 2006; LOPES, 2014).

Lopes (2014) fez um resumo do percurso percorrido por Ponte (1990) que achamos aqui pertinente de apresentar:

> Newton (1642-1716), utilizava os termos “relata quantias” para designar variável dependente e “genita” para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.
> Em 1673, foi Leibnitz (1646-1716) quem primeiro usou o termo “Função”, mas em termos muito gerais.
> João Bernoulli, em 1718, publicou um artigo onde definia Função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes.
> Em 1748, Euler (1707-1783), substitui na definição de Bernoulli o termo “quantidade” por “ expressão analítica”. A noção de Função ficava assim identificada com a noção de expressão analítica que iria vigorar nos séculos XVIII e XIX.
> Em 1837, Dirichlet, define Função como sendo uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.
> Cantor (1845-1918) inicia a teoria dos conjuntos e a partir daí, a noção de Função passaria a incluir tudo que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos.
> Em 1939, Bourbaki, citado por Domingos (1994), define Função como sendo uma relação entre dois conjuntos, ou seja, “uma Função é um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos” (PONTE, 1990. Pg. 3-4 e 18 *apud.* LOPES, 2014, pg.14.).

Podemos observar que o desenvolvimento do conceito de função não se deu de forma linear. Se considerarmos as tabelas dos babilônicos para quadrados e raízes quadradas da antiguidade, as tabulações de arcos feitas por Ptolomeu em seu livro *Almagest,* no qual foi encontrada a tabela de cordas mais antiga que foi utilizada pelos hindus alguns séculos mais tarde. Contudo, apesar de nenhum desses registros deixarem de maneira explicita por meio de palavras ou a definição de um conceito único de função ou não apresentarem formalmente termos como 'variáveis' ou 'dependência' para Rossini (2006), podemos considerar essas tabelas como a gênese do conceito de função.

Rossini (2006) afirma que há, após o século XVIII, algumas divergências na definição do conceito de função, isso devido às funções arbitrárias como o problema das cordas vibrantes no qual D'Alembert propõe uma solução no intervalo "$x = 0$ a $x = 1$" e esta entra em conflito com a definição de função contínua proposta por Euler, que em linhas gerais sugeria que uma função era continua se sua expressão analítica fosse a mesma para todos os valores de x e essas eram as funções "genuínas".

Essas controvérsias, segundo Youschkecitch (1981) *apud,* Rossini (2006, p.44), geraram uma grande evolução no conceito de função e surgimento de vários estudos, a saber, a teoria da elasticidade, hidrodinâmica e geometria diferencial que viriam a formular o que hoje conhecemos desse conceito, assim como também o grande desenvolvimento do Cálculo infinitesimal e com isso o desenvolvimento das Ciências principalmente a Física.

Ainda de acordo com Rossini (2006), Lacroix em seu *Traité du calcul différenciel et du calcul intégral* de 1797, propõe a definição de função como quantidades que dependem de outras quantidades quer se conheçam ou não as operações realizadas na passagem de uma quantidade para outra, porém, apesar de muito divulgado o trabalho de Lacroix, muitos manuais da época continuaram a utilizar a definição de função como uma expressão analítica proposta por Euler.

No século XIX, o conceito de função continua seu progresso. Em 1844, Augustin-Louis Cauchy mostra a inadequação da definição de função contínua proposta por Euler e Lagrange em sua publicação. Ainda segundo Rossini (2006), Augustin-Louis Cauchy, em *Mémoire sur les fonctions continues*, afirma que a função expressa abaixo seria "descontínua" por necessitar de mais de uma expressão para definí-la:

$$y = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Entretanto, ela também pode ser expressa pela expressão analítica, de maneira única: $y = \sqrt{x^2}$. O que a tornaria "contínua".

Contudo, segundo Youschkevitch (1981), citado por Rossini (2006), a definição de Euler é aceita por três grandes nomes da época do campo da teoria das séries trigonométricas são eles: Fourier (1768-1830), Lobachevsky (1793-1856) e Dirichlet (1805-1859). Desses vieram grandes contribuições como a série de Forrier pela, qual pode se definir qualquer função como uma série trigonométrica e a função de Dirichlet.

No fim do século XIX, Hankel apresenta uma definição de função que, de acordo com Youschkevitch (1991) citado por Rossini (2006), é a definição utilizada pela maioria dos cursos de análise durante o fim do século XIX e no século XX.

> Diz-se que y é função de x se a cada valor de x, em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y, sem que isso exija que y seja definida em todo o intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explícita de x. (HANKEL, 1870, p. 49 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1881, p. 61).

Rossini (2006) afirma que o inicio do século XX tiveram curiosidades interessantes. Baire, Borel e Lesbesgue Monna (1972) segundo Rossini (2006) destacam que havia um uma tendência a considerar apenas funções contínuas com expressões analíticas, apenas as demais eram tratadas como “objetos matemáticos ‘idôneos’” (ibidem, p.51).

De acordo com Rossini (2006), neste século, um pouco mais tarde, após a definição de Dedekind[4], Cantor “introduz a noção de produto cartesiano E x F”(ROSSINI, 2006, p. 52) e conecta a definição de função como sendo um subconjunto de um produto cartesiano.

Em 1935, um grupo de matemáticos franceses funda a associação Boubarki que, segundo Rossini (2006, p.52), tinha o “fim de organizar toda a Matemática conhecida até então” e, em 1939, publicam um livro no qual apresentam a seguinte definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja x $\in$ E, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.

[4] Sendo dados dois conjuntos E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei (‘Gesetz’) que faz corresponder e vale a qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor em x é denotado de modo geral por f(x). (DIEUDONNÉ, 1990, p.149, *apud* ROSSINI, 2006, p.52).

> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento x $\in$ E o elemento y $\in$ F que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOUBARKI, 1939, p. 6, *apud,* ROSSINI, 2006, p.52).

A definição de função apresentada pelo grupo Boubarki é bem próxima das definições atuais de função. Se compararmos a definição do grupo Boubarki com as definições propostas por Lezzi e Murakami (2004) e as definições de Lima *et*

Para Iezzi e Murakami (2004) função é assim definida:

> Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de *aplicação* de A em B ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ (IEZZI e MURAKAMI, 2004, p. 81, itálico do texto original).

Lima *et al* (2012) define função da seguinte maneira:

> Dados os conjuntos X, Y,uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X Chama-se de domínio e Y é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f tranforma (ou leva)x em f(x). (IEZZI *et al, 2012, p. 45-46. Aspas do texto original)*

Como podemos observar ambas as definições são bem próximas da proposta por Boubarki a primeira bem sucinta enquanto a segunda apresenta mas detalhes relativos domínio contradomínio e imagem. No entanto, as definições dos livros didáticos se aproximam das duas. Por exemplo, Souza (2013) apresenta a definição de função assim:

> Sejam os conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B é uma **função** quando associa a cada elemento x, pertencente ao conjunto A, um único elemento y, pertencente a B. Essa função pode ser indicada por:
>
> $$f: A \rightarrow B \text{ } ou \text{ } A \xrightarrow{f} B \text{ } (l\hat{e} - se \text{ função f de A em B})$$
>
> O conjunto A é denominado **domínio** (D(f)) e o conjunto B, **contradomínio** (CD(f)) da função f. Cada elemento y de B que possui correspondente x em A é chamado **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens é denominado **imagem da função** (Im(f)). (SOUZA, 2013, p.54. Destaques do próprio autor).

Como podemos observar a definição de função apresentada pelo autor do Livro Didático se aproxima de ambas as definições, dando certa e tal como Lima *et al* (2012) as definições dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem são bem destacadas.

Discutir os elementos da Função Quadrática e suas aplicações pode ser elementos motivadores em sala de aula. O gráfico da Função Quadrática é uma parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas. Segundo Lima *et.al* (2012) os estudos das parábolas remontam a "lenda grega" (LIMA *et.al,* 2012, p. 151) na qual Arquimedes, matemático de Siracusa, incendiou e destruiu uma frota de navios que cercavam sua cidade utilizando espelhos parabólicos para refletir e concentrar os raios de luz solar.

Segundo Lima *et al* (2012) esse fato teria ocorrido por volta de 250 A.C. e que embora fosse possível seja teoricamente improvável devido as capacidades tecnológicas da época. Contudo, hoje se utiliza amplamente as parábolas em sentido inverso. De modo que se potencializa em seu foco luz no farol do carro e as reflete com uma intensidade ampliada ou nas ondas de rádios as quais são consideradas fracas são potencializadas nas antenas do satélite e cobrem vasta área.

Tomando uma Função Quadrática como uma relação entre duas grandezas. Ao considerarmos um lançamento vertical e seu gráfico que representa a variação da posição no tempo, esse descreverá geometricamente uma parábola com concavidade para baixo. Teremos também que o y_v(ordenada do vértice da parábola) é a altura máxima atingida pelo corpo e que a variação entre o início do movimento x_0 e tempo que corpo atinge x_v (a abscissa do vértice da parábola) é por exemplo o tempo de subida do objeto lançado, e ainda que o corpo levará o mesmo tempo para atingir a posição inicial.

Pensando nessas possibilidades do trabalho com funções quadráticas na Educação Básica, a seção seguinte elenca pontos relevantes acerca desse conceito o que são apontados pelos documentos curriculares nacionais e estaduais.

.

2.3. CONSIDERAÇÕES DOS DOCUMENTOS ORIENTADORES PARA ENSINO MÉDIO SOBRE O ENSINO DE FUNÇÃO.

Apesar de ser introduzido na última série do Ensino Fundamental é no Ensino Médio que o estudo de função é expandido, esse fato é evidente nas propostas curriculares estaduais e nacionais e nos próprios livros didáticos em especial os livros da 1ª ano do Ensino Médio, que corresponde ao 10º ano da Educação Básica, onde se concentra as definições de funções, função afim, Função Quadrática, função modular, função exponencial e função logarítmica, enquanto na 2ª ano do Ensino Médio os livros didáticos apresentam as funções trigonométricas e no 3ª ano do Ensino Médio são generalizadas as funções polinomiais.

Os documentos oficiais para Educação Básica, PCNEM (BRASIL, 2000), PCN+ (BRASIL, 2002) e os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio (PERNAMBUCO, 2012), apontam que o estudo de funções é fundamental nesta etapa do ensino, pois, "permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema" (BRASIL, 2002, p.121) e este alto poder de modelização deve ser priorizado e visto como essencial em lugar de abordagens essencialmente simbólicas (PERNAMBUCO, 2012) e descontextualizadas.

Outro importante foco no estudo das funções são os gráficos associados a cada tipo específico de função. Desse estudo, se espera que os estudantes realizem estudos e compreendam o crescimento e decrescimento das funções, pontos de máximo ou mínimo quando existirem e realize a associações entre as leis gerais de cada uma das funções estudadas a seus respectivos gráficos.

Para tanto, o PCN+ (BRASIL, 2002) afirma que os problemas de aplicação de funções não devem ser deixados para o fim ou fechamento dos assuntos, por outro lado, consideram que essas situações podem e devem ser motivadoras para estudo de função e aprofundamento das suas representações e propriedades.

Outro ponto de concordância entre os documentos é de que o excesso de simbolismos e manipulações algébricas que acompanha este conceito desde sua estruturação, como vimos na seção anterior, deve ser "relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares" (BRASIL, 2002, p. 121).

No que concerne ao estudo de funções quadráticas, as orientações são para que esse seja motivado por problemas de aplicações de variações de grandezas em que se precisam encontrar máximos ou mínimos, por exemplo, problemas que envolvam a descoberta de uma área máxima ou um custo mínimo de uma produção, entre outros. Esse fato é destacado no seguinte trecho dos PSA (PERNAMBUCO, 2013):

> No estudo da função polinomial do segundo grau, é importante que os alunos compreendam o significado dos principais elementos do gráfico, como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo. Sugere-se que esses conceitos sejam abordados a partir de desafios em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (problemas clássicos de determinação de área máxima, por exemplo) (PERNAMBUCO, 2013, p.129)

Nesse trecho, fica exposta a ideia que a Álgebra por Álgebra, ou seja, manipulações permeadas de lógica matemática, podem ser deixados um pouco de lado e 'substituídos' por situações mais simples e de fácil aplicação e compreensão. Com objetivo de tornar visível para o estudante as características gráficas da Função Quadrática, bem como seus valores numéricos associados. Desse modo, a BNCC (BRASIL, 2016) aponta a importância do trabalho de situações que propiciem o estudante a perceber o comportamento dessa função, crescimento e decrescimento, bem como elementos como zero, e vértice da função (máximos e mínimos). Visto que, é nessas situações que o conhecimento matemático ganha significado

Dentre as orientações dos documentos curriculares analisados, destacamos a seguir as expectativas de aprendizagem e/ou objetivos de aprendizagem relacionados ao conceito Função Quadrática que norteiam a organização curricular, a própria produção de material didático (principalmente dos documentos nacionais) e -por conseguinte- a prática do professor.

Nos PCNEM (BRASIL, 2000), o trabalho com Função Quadrática não é evidenciado, porém, existem algumas competências gerais relacionadas ao ensino de funções em Matemática que se encaixam na nossa proposta agora, são elas: "Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc). [...] Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento." (BRASIL, 2000, p.46)

O tema função é tratado no PCN+ (BRASIL, 2002) como um tema essencial para se trabalhar no Ensino Médio, todavia, não é realiza nenhuma discussão sobre cada tipo de função e, por conseguinte não há nenhuma menção ao conteúdo de Função Quadrática. Há, no entanto, apresentações de competências a serem desenvolvidas pelos estudantes relacionadas ao estudo de função nessa etapa de escolarização. Como podemos ver nos trecho a seguir.

> Identificar Fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações [...]
> Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo; (BRASIL, 2002, p. 116-117)

Vemos que na página 117 são mencionados os cálculos de máximo e/ou mínimo que aqui podemos supor se tratar do vértice das funções quadráticas, porém, esse fato não é deixado explicito no documento.

A OCNEM (BRASIL, 2006) também aponta a importância do trabalho com Função Quadrática ser inspirado por problemas de aplicação como os cálculos de máximo e mínimo. O estudo do gráfico associado a essa função deve buscar a compreensão das relações entre os coeficientes da função e seu gráfico, por exemplo, perceber que a concavidade está associada ao coeficiente a da expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Uma das relevâncias do estudo do vértice de uma parábola representativa do gráfico da Função Quadrática segundo a OCNEM (BRASIL, 2006) é reconhecer o vértice como o valor do domínio cujo valor da imagem é máximo ou mínimo. Inclusive a afirma que no que concerne ao estudo de funções quadráticas as orientações são para que seja motivado por problemas de aplicações de variações de grandezas em que se precisa encontrar máximos ou mínimos, por exemplo, problemas que envolvam a descoberta de uma área máxima ou um custo mínimo de uma produção, entre outros. Isso fica bem claro no seguinte trecho:

> "*O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada ($f(x) = a. (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar Importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da Função Quadrática (a fórmula de 'Bhaskara') e a identificação do gráfico da Função Quadrática com a curva*

> *parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz)"* (BRASIL, 2006, p.73).

Ainda com relação ao estudo analítico da Função Quadrática, a OCNEM (BRASIL, 2006) afirma que no estudo dos zeros da Função Quadrática é um ótimo momento para se deduzir a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, esse ponto entra em discordância com outros documentos (cf. PERNAMBUCO, 2008; PERNAMBUCO, 2012; BRASIL, 2016), que no geral criticam utilização exclusiva da fórmula de Bhaskara e a não utilização de outras técnicas como a de completar quadrados.

A BCC (PERNAMBUCO. 2008) afirma que o ensino de Função Quadrática no Ensino Médio proporciona um bom momento para reflexões sobre a equação do segundo grau vivenciada pelos estudantes no Ensino Fundamental, porém explorando outras opções de resolução dessas equações além da fórmula resolutiva de Bhaskara como, por exemplo, complemento de quadrados.

A BCC (ibidem) ainda afirma que o estudo das parábolas e suas propriedades devem ser realizados, nesse momento, estabelecendo relações que levem o estudante a diferenciar a parábola das demais curvas representativas de gráficos de funções não lineares, nesse aspecto o documento orienta que " o estudo da Função Quadrática pode, por exemplo, ser explorado como modelo para o movimento uniformemente acelerado" (ibidem, p. 107).

Ainda em 2008 a Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco publicou as Orientações Teórico-Metodológicas – OTM que segundo o próprio documento tratava-se de um complemento que via o "apoio ao trabalho pedagógico do/a professor/a, [...], organizadas em 04 (quatro) Unidades Didáticas como referências básicas possibilitadoras da construção de aprendizagens significativas dos estudantes"(PERNAMBUCO, 2008b. p.5).

A OTM (PERNAMBUCO, 2008b) apresenta uma distribuição dos conteúdos do Ensino Médio em cada bimestre no decorrer dos três anos que compões essa etapa de escolarização, destacando também a qual dos eixos apresentados na BCC (PERNAMBUCO, 2008) pertence o conceito que será trabalhado. Por exemplo, os tópicos referentes à Função Quadrática estão distribuídos no bloco denominado de Álgebra e Funções.

Contudo, a OTM (PERNAMBUCO, 2008b) se reserva apenas em descrever quais e quando os conteúdos devem ser abordados, sem discussões metodológicas ou didáticas acerca do conteúdo, por exemplo, na figura 1, podemos ver uma parte dos conteúdos previstos para o 3º bimestre dentre eles os tópicos relacionados à Função Quadrática em destaque.

Figura 1 Função quadática na OTM

ENSINO MÉDIO ANO 1º UNIDADE: 3

ORIENTAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

1. NÚMEROS E OPERAÇÕES

- Operação com números inteiros e decimais finitos;
- Operação com frações, em especial com porcentagens;
- Porcentagem e juros presentes em situações nas práticas sociais (situações de finanças e economia, impostos, contribuições previdenciárias)
- Cálculo mental e estimativa da ordem de grandezas de números;
- Uso da calculadora e números em notação científica;
- Resolução de problemas de proporcionalidade direta e inversa;
- Interpretação de gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados nas mídias;

2. ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- O estudo da função quadrática, destacando:
  - a resolução de equação do 2º grau pela técnica de completar quadrados;
  - posição do gráfico- coordenadas do ponto de máximo/mínimo;
  - Zeros da função;
  - Relação entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica;
  - Identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida como esta o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz);
  - seu modelo para o movimento uniformemente variado.
- Característica da parábola e sua relação com a função quadrática
  - Função exponencial e sua inversa (função logaritmo) – características e gráficos

3. GRANDEZAS E MEDIDAS

- Problemas de aprofundamento envolvendo proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.

FONTE: OTM (PERNAMBUCO, 2008b)
NOTA: Grifo nosso.

Dentre os documentos curriculares o PCPE (PERNAMBUCO, 2012) tanto apresenta considerações gerais sobre Função Quadrática quanto às expectativas de aprendizagem específicas sobre esse conceito. Ou seja, o que se espera que um aluno em cada ano da Educação Básica matriculado em escolas localizadas no Estado saiba, ou conclua sabendo naquela etapa. A seguir expomos as expectativas de aprendizagem relacionadas com o conceito de Função Quadrática.

> - Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações de segundo grau.
> - Determinar as raízes de uma equação do segundo grau por fatoração.
> - Determinar as raízes de uma equação do segundo grau pelo método de completar quadrados.
> - Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma Função Quadrática, associando a curva a uma parábola.
> - Reconhecer, na representação gráfica da função do segundo grau, elementos como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo.
> - Relacionar as transformações sofridas pelo gráfico da função de segundo grau com modificações nos coeficientes de sua expressão algébrica, (por exemplo: utilizando recursos tecnológicos, observar que, ao variar o valor do coeficiente c na representação algébrica $y = ax^2 + bx + c$, a parábola sofre translações).
> - Reconhecer a função de segundo grau como um modelo para o movimento uniformemente variado. (PERNAMBUCO, 2012, p. 131)

Podemos observar que as orientações para o estudo de Função Quadrática são, neste documento, mais detalhadas e específicas abordando diversas situações representações relacionadas ao conceito de Função Quadrática, inclusive, sugestão para se trabalhar com recursos tecnológicos, contudo, sem impor ou indicar nenhum recurso para que fique a cargo do professor a escolha do recurso, software, material manipulável, etc.

Do exposto acima, podemos perceber que há uma série de cuidados sobre como deve ser apresentado o conceito de função no Ensino médio e também algumas reflexões sobre relevância e a importância desse ensino. Contudo, para não se perder em formalismos dentro da própria Matemática, a contextualização é um ponto chave no ensino de funções principalmente por sua característica modeladora que nos permite explorar as variações entre grandezas gerando modelos matemáticos que as represente.

Agora que temos nosso objeto (Função Quadrática) e temos o local de manifestação desse objeto (Livro Didático), nosso problema é descrever como construímos as categorias de análise e analisamos esse objeto na busca pelas respostas para as questões de nossa pesquisa? Adiantamos aqui que para tal análise escolhemos como lente teórico-metodológica a Teoria antropológica do Didático e discorremos um pouco sobre a mesma na seção seguinte.

2.4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) é considerada por alguns autores (cf. CAMARA e BESSA DE MENEZES, 2008; ARAUJO, 2009; CAVALCANTI, BRITO LIMA e BESSA DE MENEZES, 2016) como uma expansão da teoria da Transposição Didática (TD). Podemos perceber que na TD há uma preocupação com o saber e com as transformações por ele sofridas em suas passagens por instituições transpositivas[5] (ARAUJO, 2009). Entretanto, Bosch e Chevallard (1999) consideram que a TD situa o saber matemático em um plano epistemológico cujos modelos de análise têm limitações e em contrapartida apontam a TAD, em especial, a noção de praxeologia como uma possibilidade de explorar as limitação da TD e ampliar o 'campo de análise decorrente da *TD*', o que permite explorar os objeto dos saberes dentro de uma(s) instituição(ões) especifica(s).

Segundo Araújo (2009), a TAD é desenvolvida sob os conceitos primitivos de *objeto, pessoa* e *instituições* e nas noções de relações pessoais, e institucionais de um dado objeto.

Para Chevallard (2003) um objeto é "toda entidade, material ou não, que existe para ao menos um indivíduo" (CHEVALLARD, 2003, p.81). A partir dessa definição podemos pensar que 'tudo é objeto' e particularmente para Chevallard (2003) "qualquer atividade humana intencional, é um objeto" (ibidem.p.81). Com efeito, as próprias instituições e as próprias pessoas podem ser objetos.

Diante disso, temos que quando um indivíduo reconhece um objeto ele forma o que Chevallard (2003) chama de relação pessoal de um individuo X com um objeto O. Essa relação pessoal, por sua vez, é uma outra noção da TAD e é formada pelo conjunto de todas as experiências de X com O e indicado por Chevallard (2003) por R (X ,O). Assim se $R (X,O) \neq \emptyset$ diz-se que O "existe" para X. Chevallard (2003) ainda define o Universo cognitivo que seria o conjunto de todas as relações pessoais de X com o Objeto O. $U(x) = \{O ,R (X, O) \}$.

Outro conceito primitivo da TAD é o de *pessoa* como sendo o par formado pelo individuo X e todas as suas relações pessoais com os objetos conhecidos por X em determinado momento da história de X. Vale aqui salientar que

[5] São instituições que segundo que para Chevallard permitem que os saberes passem de uma instituição para outra, e que são consideradas um aporte Central da TD. São citadas por Chevallard com sendo as noosferas.

pessoa ≠ individuo. Para Chevallard (2003) o indivíduo é imutável enquanto a pessoa muda, de acordo, com que suas relações pessoais com determinados objetos mudam com o tempo.

Temos, então,que: para Chevallard (2003) segundo Araújo (2009), uma instituição I é “um dispositivo social ‘total’ que certamente pode ter uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos [...] maneiras próprias de fazer e pensar” (*ARAUJO*, 2009, p.34). Deste ponto podemos pensar a ‘família’ é uma instituição (é inclusive a primeira instituição do sujeito) e você é um sujeito dela, bem como na instituição ‘aula de Matemática’ e seus sujeitos professor e aluno, bem como na instituição ‘escola’, a instituição ‘Livro Didático’.

Dessa forma um indivíduo X passa a ser sujeito de I se ele se submete a esta instituição I por alguma finidade com I ou com Objetos de I. Então, outro ponto de vista para Chevallard (1998) é que um indivíduo pode ser sujeito de várias instituições simultaneamente e ao longo de sua trajetória de vida, e, o conjunto dessas sujeições. Aqui me atrevo a dizer, de outras tantas ‘insujeições’ que irão moldar a personalidade e- por sua vez -a pessoa. Em outras palavras, aqui ele deixa claro a mutabilidade da pessoa, pois em diferentes períodos o indivíduo será sujeito de diferentes instituições.

Os objetos estabelecem com as instituições relações analogamente como com a. Chevallard (1998) chama essa relação entre objetos e instituições de relação institucional definida por R_I (O). Então, se um objeto O existe para uma determinada instituição I, ou seja, se I reconhece O, então podemos dizer que este objeto O é um objeto institucional e que R_I (O) ≠ Ø.

Para Chevallard (1998), um bom sujeito X para I (“sujeito adequado”) é aquele em que: $R_I(O) \approx R(X,O)$, ou seja, quando as relações pessoais de X com O estão próximas das relações de I com O, caso contrário segue duas opções. Primeira, X se ‘insujeita’ a I ou tenta modificar R_I (O). Contudo, esta última é pouco provável que seja bem-sucedida, pois, em I há sujeitados adequados que por vez oferecerão resistência. Uma segunda opção é X modificar suas relações com O até estas estarem o mais próximo das relações de O com I, esta última é, em minha opinião, mais frequente em instituição, principalmente, de ensino como a escola nas quais os sujeitos “estudantes” são levados a modificar suas relações pessoais com certos objetos até ficarem adequadas ou, então , serão reprovados pela instituição até se adequarem.

De acordo com Chevallard (1998), um ponto importante é que a TAD situa a atividade matemática, e por consequência a atividade do estudo de Matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e de instituições sociais. E essa “postura epistemológica” (CHEVALLARD, 1998, p.92) leva-nos a transpor muitas “fronteiras institucionais” e ir além do que é considerado natural, ou seja, sem fazer a menor questão de entender o porquê de certas coisas serem bem aceitas enquanto outras não.

Para Chevallard (1998) o postulado básico da TAD é que podemos constituir toda atividade humana realizada regularmente de maneira única e isso ele chama de ‘praxeologia’. Esta visão é contrária à outra visão que Chevallard considera a mais difundida como sendo correta.

> Segundo a versão mais difundida do “culturalmente correto”, falar de didática das matemáticas, por exemplo, supõe falar de alguns objetos distintos – as matemáticas, primeiro, e depois, solidariamente, dos alunos, dos professores, dos livros didáticos, etc. – *excluindo quase todos os demais objetos*, e em particular todos aqueles que acreditamos não serem cientificamente pertinentes porque aparentam estar *culturalmente afastados* dos objetos considerados emblemáticos das questões da didática das matemáticas.(CHEVALLARD, 1998, p.92, aspas e itálicos do autor)

Contudo, os elementos primitivos (objeto, pessoas instituições e as relações pessoais e institucionais) associados à noção de praxeologia matemática e praxeologia didática permitem, em nossa visão e como afirma Chevallard (1998) ampliar o alcance das pesquisas em Educação Matemática passando a considerar outros elementos. Além dos culturalmente aceitos, ao inverter ordem, onde eu considero primeiro o professore, depois o aluno e, por fim, as matemáticas. E é essa noção de praxeologia e praxeologia matemática que detalharemos a partir de agora detalharemos.

2.4.1 Praxeologia e Praxeologia Matemática.

Para melhor compreensão da noção de praxeologia vamos recorrer a uma situação ilustrativa. Primeiro, pensaremos em uma atividade a ser realizada, ou seja, um tipo de Tarefa (T), por exemplo, conduzir um carrinho de supermercado, para realizar essa tarefa se pode utilizar algumas Técnicas (τ), por exemplo: empurrar pelo ponto de apoio ou segurar em outra extremidade para puxar ou empurrar, ou até mesmo, uma mais absurda: suspender o carrinho no ar, algumas como podemos deduzir aqui mais eficientes que outras.

Por sua vez ,essas técnicas são justificadas por uma Tecnologia (θ), por exemplo, fórmulas físicas de força resultante, atrito e alavancas. Todos esses conceitos são desenvolvidos e justificados em virtude de uma Teoria (Θ), no caso, podemos pensar nas leis de Newton.

A esse conjunto [T, τ, θ, Θ] Chevallard (1998) dá o nome de praxeologia. Nesse sentido, a atividade pode ser expressa como esse conjunto no qual os elementos estão inter-relacionados. Assim, para um tipo de *Tarefa*, há uma *técnica* que permite realizar a tarefa, uma *tecnologia* que é um porque se realiza determinada técnica e uma *teoria* que pela qual é permitido justificar determinada técnica com essa tecnologia, ou seja, a teoria é a justificativa da justificativa.

A TAD para Chevallard (1998) não é uma teoria matemática, apesar de ser desenvolvida dentro do contexto da Educação Matemática Chevallard defende que pode ser aplicada em qualquer Ciência. Contudo, aqui quando falarmos de praxeologia nos referimos a praxeologia matemática. Logo, para efeito, temos que praxeologia matemática é toda praxeologia quando se tem como tipos de tarefa: tarefas matemáticas. Que, por sua vez, serão realizadas por técnicas matemática. E estas justificadas através da linguagem e tecnologias matemáticas bem definidas dentro de teorias matemáticas.

2.4.1.1Tipos de Tarefas (T)

Para Chevallard (1998), "na raiz da noção de praxeologia se encontram as noções interdependentes de *tarefa* (*t*) e de *tipo* de tarefa (*T*)" (CHEVALLARD, 1998, p.93). As tarefas e tipos de tarefas estão sempre associadas a um verbo como, por exemplo, *determinar* as coordenadas do vértice da função $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Em seguida, Chevallard (1998) afirma que a noção de tarefa empregada na teoria é bem mais ampla que a noção social de tarefa, por exemplo, 'coçar a cabeça' e aponta que a um determinado tipo de tarefa tem que estar associado um objeto, por exemplo, *calcular* as raízes de uma equação do 1º grau, só o verbo 'calcular' ele considera como sendo gênero de tarefa. Por fim, ele diz que:

> ... tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas, não são dados da natureza, são “artefatos”, “obras”, são *construções institucionais*, cuja reconstrução em tal instituição, ou, por exemplo, em tal classe (sala de aula), é um problema completo, *que é um objeto mesmo da didática*. (CHEVALLARD, 1998, p.94)

Ou seja, as tarefas geralmente são propostas ou se originam a partir de problemas institucionais, dos quais os sujeitos adequados daquela instituição se proporão a construir uma (as) *técnica (as)* que permita (am) a solução do problema ‘em xeque’.

2.4.1.2 Técnicas (τ)

Ao se pensar em um tipo de tarefa *T* a ser realizada, se faz necessário uma técnica τ para realização dessa tarefa *T*. Para Chevallard (1998), a noção dessa *técnica* vem do grego τέχνη, *téchne, “saber* fazer”, “Know how” e para cada praxeologia referente a um tipo de tarefa *T* possui, ao menos, uma técnica para realização dessa tarefa. No entanto, considera-se que geralmente há mais de uma técnica.

Chevallard (1998) considera aqui três pontos importantes a serem colocados em evidência. O primeiro é que uma determinada técnica τ só pode realizar uma parte dos tipos de tarefa *T,* falhando ou tornando-se pouco eficiente para o restante das tarefas de tipo *T.*

O segundo ponto é que apesar de a técnica não ser, necessariamente, algorítmica como, por exemplo, derrubar um o adversário em um campeonato de judô ou pintar uma paisagem, há certa tendência à ‘algoritmetização’ das técnicas, mesmo que seja um processo longo.

A terceira observação se faz, sobre a tendência que, em uma instituição I geralmente se reconhece apenas uma técnica τ e a institucionalizam de tal forma que quando membros de I de deparam com uma técnica τ que I não reconhece tendem a ignorá-las ou a considerarem como ‘artificiais’. Neste ponto entra em xeque o que Chevallard (1998) chama de ‘paixões institucionais’ dos sujeitos de I pelas técnicas particulares de I. Contudo, uma técnica que é ignorada pelos sujeitos de I pode ser bem aceita em outra instituição I’, bem como, essa última pode não reconhecer as técnicas τ de I.

Estes dois elementos (tipo de tarefa e técnica) da praxeologia formam o que Chevallard (1998) chama de bloco prático-técnico [T, τ] ou 'saber fazer'. Podemos pensar aqui, por exemplo, que muitos exercícios propostos nas atividades escolares, e aqui falo pela minha experiência em ensino de matemática em escolas particulares e públicas do Município de Caruaru, se concentra nesse bloco, onde o aluno tem um tipo de tarefa e seu papel é de um reprodutor de técnicas para realizá-las.

2.4.1.3 Tecnologias (θ)

Nesta parte da praxeologia dá-se um passo além do "saber fazer" e começa alguns questionamentos, por exemplo, por que se faz assim? Fazer assim tem algum "sentido"? A tecnologia θ vem, justamente, justificar a técnica que se está a utilizar. Para Chevallard (1998), uma tecnologia θ é

> ... um discurso racional (logos) sobre a técnica [...] cujo primeiro objetivo é justificar "racionalmente" a técnica τ, para assegurar-se de que permite realizar as tarefas do tipo T, quer dizer, realizar o que se pretende (CHEVALLARD, 1998, p.94)

Chevallard (1998) alerta que essa racionalidade do discurso varia de instituição para instituição de tal maneira que
um discurso racional para uma instituição I pode ser considerado 'pouco racional' para a instituição I' e vice-versa. Então a respeito da tecnologia θ Chevallard (1998) faz mais três considerações.

A primeira trata que qualquer que seja o tipo de tarefa T e técnica τ utilizada para realizá-la no interior de uma instituição I, há de haver ao menos um vestígio de uma tecnologia existente em I e algumas vezes as técnicas estão 'intimamente ligadas' a elementos tecnológicos. Porém, se existe em I uma 'técnica canônica' única para determinado tipo de tarefas se *"*confere a esta técnica uma virtude "autotecnológica": atuar dessa maneira não exige justificação, porque é a boa maneira de atuar (em I)" *(*ibidem, p.94, aspas do autor).

As outras duas considerações são referentes a outras funções da tecnologia θ. Assim, além de justificar ela pode explicar a técnica ou agir como uma produtora de novas técnicas.

Chevallard (1998) considera que uma segunda função da tecnologia é

> "*explicar*, de *tornar inteligível*, de *aclarar* a técnica. Se a primeira função – justificar a técnica – consiste em assegurar que a técnica fornece o pretendido, esta segunda função consiste em expor *porque* é correta" (CHEVALLARD, 1998, p. 94 itálico do autor).

Contudo, Chevallard (1998) ressalva que em Matemática a primeira função (justificar) se sobressai pela necessidade de demonstração das técnicas.

Uma terceira função, a de produção de técnicas, Chevallard (1998) propõe que algumas tecnologias possuem poucas técnicas vinculadas a ela, em outros casos há também o que ele chama de 'tecnologias potenciais', seriam tecnologias que não justificam nenhuma técnica mas estão a espera de uma técnica que possa ser associada a esta.

2.4.1.4 Teoria (Θ)

As tecnologias θ justificam, explicam ou criam novas técnicas τ, porém, elas baseiam-se em axiomas e propriedades mais gerais (principalmente se falando de Matemática) propostas por uma Teoria Θ. A Teoria Θ, por sua vez justifica toda tecnologia θ de uma praxeologia, e assim a teoria é o último elemento da praxeologia. Esta ideia de Teoria fica explicita no seguinte trecho*:*

> Por sua vez o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, acerca das quais podemos investigar as razões. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação-produção, o da *teoria*, Θ, que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta última tem com respeito à técnica. (CHEVALLARD, 1998, p. 95)

Todavia, uma etapa de justificação pode parecer que será infinita, sempre poderá se construir uma justificativa 'maior' e assim sucessivamente, porém Chevallard (1998) afirma que esta "descrição em três níveis apresentada aqui (técnica/tecnologia/teoria) é suficiente para dar-se conta da atividade que se quer analisar" (ibidem, p.95).

Esses dois últimos elementos da praxeologia (tecnologia /teoria) formam um bloco que Chevallard denomina de *"tecnológico-teórico"* [θ, Θ] ou bloco do saber.

2.4.2 Tipos de Praxeologias

Chevallard (1998) subdivide as organizações praxeológicas em quatro tipos, organizações praxeológicas *pontuais*, organizações praxeológicas *locais,* organizações praxeológicas *regionais* e organizações praxeológicas globais.

As praxeologias pontuais são aquelas que se concentram em um único tipo de tarefas [T, τ , θ, Θ] e por sua vez é constituída por *“uma tripla formada por uma técnica (ao menos),* τ *, por uma tecnologia de θ, e por uma teoria de* Θ *”* *(*CHEVALLARD, 1998. p.96).

As praxeologias locais são segundo Chevallard (1998), originadas de uma combinação de praxeologias pontuais em torno de uma tecnologia θ, em outras palavras, é simplesmente o conjunto dos tipos de tarefa T_i e de todas as técnicas τ_i utilizadas para realizar essas tarefas que podem ser justificadas ou explicadas pela tecnologia θ e é designada por [T_i, τ_i, θ, Θ]

Por sua vez, as praxeologias regionais são a reunião das várias tecnologias θj e, consequentemente, todas as técnicas τ_{ij} e os tipos de tarefa T_{ij} associados a uma dada teoria Θ. As praxeologias regionais podem se representadas genericamente da seguinte forma [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ]

Resta-nos agora a praxeologia global. Então “se denominará por organização *global* o complexo praxeológico obtido [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{jk}, Θ_k], em uma instituição dada, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias” (CHEVALLARD, 1998, p. 97).

Uma ultima observação sobre praxeologias é que elas não são eternas e autossuficientes, ao longo do tempo algumas perdem a utilidade por *n* fatores, (o tipo de tarefa não é mais necessário de ser realizado, ou as técnicas de realização da tarefa evoluem...) e naturalmente são formadas novas praxeologias.

2.5 O LIVRO DIDÁTICO

Como nossa fonte de análise para pesquisa foi o Livro Didático de Matemática consideramos fundamental discutirmos acerca desse instrumento. Para Barbosa e Lins (2009) podem ser considerados como livros didáticos:

> ... *todos os livros que motivem o aluno apoiando sua autonomia e a organização de situações de Ensino-aprendizagem, e que criem condições para a diversificação e ampliação das informações que veiculam no seu texto* (BARBOSA e LINS, 2009, p.12).

Observando a Educação Básica brasileira, percebemos que o Livro Didático é um recurso que tem estado em evidência nas últimas décadas tanto na sala de aula, quanto nas pesquisas acadêmicas como afirmam Barbosa e Lins (2009). Provavelmente, uma das razões para isso é devido a programas como o Plano Nacional do Livro Didático-PNLD- (Decreto 91.542, de agosto de 1985) que fomenta a aquisição desse recurso nas escolas da rede pública do país.

Romanatto (2004), afirma que devido a programas de avaliação do Livro Didático como o PNLD a qualidade do Livro Didático nacional melhorou consideravelmente ao longo dos anos. Isso deve acontecer, pois, o `PNLD não só fomenta, mas também coordena uma avaliação dos livros didáticos por professores especialistas nas suas respectivas disciplinas, podendo aprovar ou reprovar uma coleção de livros este último caso não haja uma adequação as diretrizes nacionais ou haja inconsistências conceituais.

Monteiro e Barreto (2008) *apud* Beltrame (2009) afirmam que o Livro Didático é uma importante ferramenta pedagógica tanto para o aluno, quanto para o professor. No primeiro caso, por ser um 'suporte prático e teórico'. Já no caso do professor, é mais um instrumento de apoio. Temos que no Livro Didático é apresentada uma sequência que sugere como e quando deve acontecer a aprendizagem dos conceitos escolares. Porém, como sugere Paes(2009) o professor deve conduzir esse processo de ensino-aprendizagem e não o ser conduzido pelo livro.

Em consonância com este fato, Beltrame (2009) afirma que: "o Livro Didático é considerado um instrumento, se não o único, de grande poder nas decisões que orientam as ações docentes, e de fácil acesso tanto para professores, quanto para os alunos" (BELTRAME, 2009, p. 25). Nesse sentido, concordamos com Lins e Gimenez (1997) quando afirmam que o livro é uma 'voz revestida de *poder'* e que para muitos professores é o responsável pela noção conhecida de atividades matemáticas.

Esses autores afirmam que muitos pesquisadores consideram a análise de livros didáticos algo pouco produtivo, no que diz respeito à discussão sobre ensino e aprendizagem. Por outro lado, se defende que o Livro Didático é ‘a realidade’ das salas de aula, ou seja, muitas vezes em algumas escolas (cf. BELTRAME, 2009; PAES, 2006;) o livro é o único recurso disponível para o professor. O que nos leva a concordar com Barbosa e Lins (2009) quando apontam que o Livro Didático é um instrumento que influencia as ações adotadas pelos professores.

Na BCC (PERNAMBUCO, 2008), o Livro Didático de Matemática ganha uma seção própria. Nessa seção, afirma-se que o Livro Didático é um fator que não deve ser esquecido, pois em primeiro lugar, nas duas últimas décadas programas nacionais tem avaliado este recurso didático e distribuído em todas as escolas públicas. Em segundo lugar, é um recurso didático acolhido pela maioria dos educadores. Porém, a BCC (PERNAMBUCO, 2008) alerta, quanto ao seu uso, pontuando que:

> ...cabe ao professor, na escolha e no uso do livro, observar a adequação desse instrumento didático á sua prática pedagógica e ao seu aluno [...] o professor deve manter-se atento para que sua autonomia pedagógica não fique comprometida ao permitir que o Livro Didático assuma papel dominante no processo de ensino-aprendizagem e não o de recurso auxiliar desse processo”. (PERNAMBUCO, 2009, p.66)

A BCC (PERNAMBUCO, 2008) orienta que o Livro Didático levanta mais um sujeito participante do processo de ensino-aprendizagem, o autor, que por meio de seu texto didático influência esse processo com sua perspectiva sobre o saber a ser estudado. Nesse caso, o autor contribui sugerindo uma organização do saber e uma possível sequência de desenvolvimento desse saber.

De fato, podemos perceber que o Livro Didático, quando nos referimos ao ensino e aprendizagem de Matemática, não pode deixar ser considerado como uma variável importante que pode otimizar ou dificultar os resultados.

3 METODOLOGIA

> A pesquisa científica é a realização de um estudo planejado, sendo o método de abordagem do problema o que caracteriza o aspecto científico da investigação. Sua finalidade é descobrir respostas para questões mediante a aplicação do método científico. A pesquisa sempre parte de um problema, de uma interrogação, uma situação para a qual o repertório de conhecimento disponível não gera resposta adequada. Para solucionar esse problema, são levantadas hipóteses que podem ser confirmadas ou refutadas pela pesquisa. Portanto, toda pesquisa se baseia em uma teoria que serve como ponto de partida para a investigação. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 43)

Nossa pesquisa se insere no campo das pesquisas qualitativas. Segundo Gerhardt e Silveira (2009) esse tipo de pesquisa “não se preocupa com dados quantitativos, as pesquisas qualitativas tem como característica o aprofundamento sobre um dado grupo social ou organização” (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p.31). Por exemplo, em nosso estudo buscamos um aprofundamento a cerca dos tipos de tarefa relacionados ao conteúdo de Função Quadrática apresentados no Livro Didático, aqui o livro é a organização [6]na qual buscamos esse aprofundamento acerca de um conceito por ele abordado.

Nas pesquisas qualitativas se toma uma amostra com objetivo de “produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações” (DESLAURIERS, 1991, p. 58 *apud* GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p.32)

Em nosso estudo, investigamos os tipos de tarefa referentes ao conceito de Função Quadrática apresentados no volume 1 de uma coleção de livros didáticos do Ensino Médio como mencionado acima. Dessa maneira, podemos classificar nossa pesquisa, quanto ao procedimento, como análise documental, pois aqui realizamos uma análise do Livro Didático com intuito de observar algumas características especificas do mesmo com relação ao conceito de Função Quadrática.

[6] De acordo com Chevallard (1998) uma instituição seria um ‘local’ que reconhece e cria relações com um dado objeto então, aqui consideramos o Livro Didático como uma instituição, pois, ele reconhece e organiza nosso objeto. Desse ponto podemos considerar o Livro Didático como organização que agrega nosso objeto de estudo.

Como nossa investigação teve como objetivo classificar as atividades propostas no Livro Didático quanto as os tipos de tarefas associados ao conceito de Função Quadrática, utilizaremos para esse fim a noção de praxeologia proposta por Chevallard (1991) e a partir dessa noção identificou e discutiu se os tipos de tarefa proposto no livro proporcionam que o estudante realize a transição do bloco "prático-técnico" [T, τ] para *"tecnológico-teórico"* [θ, Θ].

Nesse ponto, acreditamos que o estudante terá uma aprendizagem eficiente do conceito se ele conhecer elementos da prática e compreender as justificativas que validam essa prática. Em outros termos, buscamos então identificar se as atividades do livro se organizam como uma praxeologia, pontual, local regional ou global.

Para construirmos nossas categorias de análise e podermos verificar se o livro propõe essa transição entre os blocos analisamos, primeiramente, o PCPE (PERNAMBUCO, 2012) buscando os possíveis tipos de tarefas relacionados ao conceito de Função Quadrática. Tomamos como referência as expectativas de aprendizagem relacionadas ao estudo de Função Quadrática propostas e apresentadas no documento, ou seja, é o que se espera que um(a) estudante do Ensino Médio do estado de Pernambuco saiba/aprenda sobre Função Quadrática.

Em seguida, analisamos as atividades presentes no livro que envolvem Função Quadrática e identificamos essas atividades propostas pelo autor do livro de acordo com tipos de tarefa (T) estabelecidos inicialmente, também observando as técnicas (τ) por ele sugeridas e as tecnologias (θ) utilizadas, se explicitadas, para justificar essas técnicas. Entretanto, se trata da análise de um conceito específico, não teremos mudança na teoria visto que Função Quadrática é um caso particular das funções polinomiais que em última estância se justifica na teoria das Estruturas Algébricas.

3.1 ESCOLHA DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Para realização da análise foi selecionada uma coleção de Livro Didático de Matemática do Ensino Médio seguindo os seguintes critérios.

1. Ter sido aprovada no Plano Nacional do Livro Didático PNLD 2015.

2. Ter sido adotada por mais de uma escola da rede municipal do Município de Caruaru-Pe.

3. Ter tido uma ampla aceitação a nível nacional.

A coleção escolhida foi a “Novo Olhar Matemática” por atender todos os três critérios. Foi aprovada pelos avaliadores do PNLD 2015 (vide o guia de livros didáticos do FNDE disponível em*: <http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/125-guias?download=9007:pnld-2015-matematica*>). É a coleção mais adotada nas Escolas da rede estadual localizadas no município de Caruaru. E também segundo o site do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) é a segunda coleção mais adotada no país com 1.481.977 exemplares distribuídos entre manuais e livros do aluno (Disponível em: <*http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/35-dadosestatisticos?download=9374:pnld-2015-colecoes-mais-distribuidas-por-componente-curricular-ensino-medio*>).

4 ANÁLISE

> O postulado básico da TAD é contrário a esta visão particular do mundo social: se admite, por definição, que *toda* atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo *único*, que se resume aqui com a palavra *praxeologia*. Antes mesmo de examinar o que é uma praxeologia, deve-se assinalar que estamos partindo de uma hipótese que não especifica de maneira alguma a atividade *matemática* entre as atividades humanas: as matemáticas devem ser reconhecidas em sua especificidade de outra maneira. (CHEVALLARD, 1998, p.222)

Em nossa análise usaremos a TAD (CHEVALLARD, 1998) como ferramenta metodológica de análise. Visto que utilizamos a noção de Praxeologia para construir as categorias de análise e analisar, propriamente dito, o Livro Didático.

Nas próximas seções apresentaremos o livro (3.1), ou seja, realizamos a apresentação de como é organizado a coleção escolhida. Na seção 3.2 apresentamos as categorias dos tipos de tarefa elaboradas com base nos PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e na seção 3.3 e suas subseções trataremos de nossa análise e classificação das atividades do Livro Didático de acordo com as categorias de tipos de tarefa apresentados.

4.1 DESCRIÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO ANALISADO

Segundo o guia do PNLD, um ponto positivo da coleção é que apresenta frequentemente e adequadamente contextualizações dos conceitos Matemáticos estudados (BRASIL, 2015). Contudo, a exposição é bem tradicional, com a sequência de apresentação comum em três etapas: definição, exemplo e exercícios de aplicação. De maneira geral as atividades estão distribuídas nos capítulos da seguinte maneira.

Após a elucidação de cada tópico relacionado ao conceito abordado no capítulo há uma sessão denominada ‘atividades resolvidas’ na qual se apresentam exemplos de aplicações do conceito que por vezes introduz alguns aspectos novos (complementares) do conceito. Por exemplo, na seção de ‘atividades resolvidas’, localizada após o tópico ‘zeros de uma Função Quadrática’, o estudante é apresentado a relação de Girrard $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$.Logo após vem a seção ‘atividades propostas’ na qual o estudante é apresentado a uma série de atividades de aplicação direta e algumas contextualizações referentes ao tópico estudado.

Ao final do capítulo, tem mais três seções: ‘explorando o tema’ que apresenta uma aplicação do tema estudado; a seção ‘refletindo sobre o capítulo’ que propõe reflexões sobre o conceito estudado e, por fim, a seção ‘atividades complementares’ na qual são propostas atividades para aplicação do conceito que foi abordado no capítulo. Essa é basicamente a estrutura de cada capítulo dos livros da coleção.

Como o conceito de Função Quadrática é objeto de estudo, apenas no Volume um da coleção. Restringimos nossa análise da coleção a este volume cuja estrutura está descrita na figura 2. Nossa análise, mais precisamente teve como foco o Capítulo quatro, do volume um denominado: ‘Função Quadrática’. Esse Capítulo contém 33 páginas nas quais é apresentado ao leitor, entre atividades resolvidas e propostas, um total de 103 atividades, sendo 15 resolvidas e 88 propostas.

A distribuição dessas atividades no decorrer do capítulo, se dá em sete (07) blocos de exercício um após cada uma das seis (6) subseções do capítulo e o último bloco no fim do capítulo que contém atividades acerca dos diversos tópicos do capítulo uma revisão geral esse último boco é denominado ‘atividades complementares’. Na próxima seção, apresentamos as categorias de tipos de tarefa, segundo a ideia de praxeologia proposta por Chevallard (1998), associadas ao conceito de Função Quadrática bem como suas justificativas.

Figura 2 divisão do livro

1º ANO – 4 unidades - 9 capítulos – 320 pp.		
1	Conjuntos: operações; conjuntos numéricos; intervalos	36 pp.
2	Produto cartesiano; funções: conceito; gráfico	35 pp.
	Função afim: gráfico; proporcionalidade e função linear; inequações do 1º grau	32 pp.
	Função quadrática: gráfico; inequações do 2º grau	34 pp.
	Potenciação; notação científica; função exponencial; equações e inequações exponenciais	23 pp.
	Logaritmos: propriedades; função logarítmica; equações e inequações logarítmicas	27 pp.
	Módulo de um número; função modular; equações e inequações modulares	17 pp.
3	Sequências; progressões aritméticas; progressões geométricas	38 pp.
4	Teoremas de Tales e de Pitágoras; trigonometria no triângulo retângulo; trigonometria em um triângulo qualquer	35 pp.

FONTE: Guia do PNLD 2015 (BRASÍLIA,2014. p.67)

4.2 CATEGORIZAÇÃO DOS TIPOS DE TAREFA

Para definição de nossas categorias de tipos de tarefa utilizamos como referências as expectativas de aprendizagem relacionadas ao conceito de Função Quadrática apresentadas no Currículo de Matemática[7] para o Ensino Médio com base nos PCPE (PERNAMBUCO, 2012b). Essas expectativas apontam o que o

[7] Disponível para acesso em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/curriculo_matematica_em_2.pdf>

estudante do Ensino Médio deve 'saber' sobre um dado conteúdo. Sendo assim, verificamos que em relação ao conteúdo Função Quadrática, por exemplo, espera-se que o aluno seja capaz de "Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma Função Quadrática, associando a curva a uma parábola" (PERNAMBUCO, 2012b, p. 7).

Em nossa análise, consideramos que essa expectativa pode ser alcançada com um tipo de tarefa, esse semelhante em seu enunciado. Ao definirmos os tipos de tarefa utilizando as expectativas, percebemos que em alguns casos esse tipo de tarefa fica muito abrangente. Para superarmos este fato e poder realizar uma análise mais rica, determinamos subcategorias de tarefa, tal como fez Bessa de Menezes (2010) em seu trabalho.

Denominamos essas subcategorias por 'subtipos de tarefa'. Com efeito, esses subtipos de tarefa são tarefas que tratam de aspectos específicos de um mesmo objeto, ou seja, são tarefas 'menores' cuja realização dá conta de algum ponto especifico de uma tarefa maior, por exemplo, para a tarefa: "Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma Função Quadrática, associando a curva a uma parábola" (PERNAMBUCO, 2012b, p. 7) um subtipo de tarefa seria 'esboçar o gráfico da Função Quadrática' ou 'Reconhecer uma Função Quadrática através de sua lei de formação'. A seguir apresentamos uma tabela resumo com as categorias de tipos de tarefa:

Quadro 1 Categorias de análise

Categorias de tipos de tarefa
T.1 - Reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma Função Quadrática, associando a curva a uma parábola.
T.1.1 - Reconhecer uma Função Quadrática através de sua lei de formação algébrica.
T.1.2 - Identificar os coeficientes da Função Quadrática.
T.1.3 - Determinar a lei da função conhecendo-se três pares ordenados da função. Ou elementos como coordenadas do vértice, zeros, o ponto $(0, c)$.
T.1.4 - Compreender a relação de pertinências entre par ordenado e a função, ou seja, 'se $(x, y) \in f$ então $f(x) = y$.
T.1.5 - Esboçar o gráfico
T.1.6 - Determinar a imagem $f(x)$ de um dado x do domínio.
T.2 - Reconhecer a Função Quadrática como modelo matemático para o

estudo das variações entre grandezas do mundo natural ou social
T.3 - Identificar o domínio de validade e situações de continuidade e descontinuidade (por exemplo: reconhecer que a grandeza tempo não pode ter domínio negativo ou que, um gráfico que relaciona o valor do lucro em função do número de peças vendidas, não pode ser representado por uma linha e sim por pontos)
T.4 - Reconhecer, na representação gráfica da Função Quadrática, elementos como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo.
T.4.1 - Identificar o eixo de simetria da parábola representativa do gráfico da Função Quadrática e suas propriedades (se a e b são equidistantes de $x = x_v$ então $f(a) = f(b)$)
T.4.2 - Reconhecer o conjunto imagem de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ conhecendo seu gráfico ou sua lei de formação. Se $a > (<)\ 0$ então o conjunto $IM = \{y \in \Re /\ y \geq (\leq)\ y_v\}$, com $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.
T.4.3 - Associar o numero de zeros da função ao discriminante da função, ou seja, $\Delta > 0, \Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.
T.4.4 - Determinar as coordenadas do vértice da parábola
T.5 - Relacionar as transformações sofridas pelo gráfico da Função Quadrática com modificações nos coeficientes de sua expressão algébrica.
T.6 - Determinar intervalos de crescimento e decrescimento na Função Quadrática.
T.7 - Reconhecer a Função Quadrática como um modelo para o movimento uniformemente variado.
T.8 - Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações de segundo grau.

FONTE: O AUTOR(2017)

Podemos observar no quadro que foram distinguidos oito (08) tipos de tarefas enumerados de T.1 até T.8. Contudo, para alguns desses, T.1, T.4, foram determinados, respectivamente, 6 e 4 subtipos de tarefa. Que em nossa opinião, os subtipos, juntos realizam a tarefa como um todo.

4.3 AS CATEGORIAS DE TIPOS DE TAREFA PRESENTES NO LIVRO DIDÁTICO

Nessa seção, apresentaremos e descreveremos cada um dos tipos de tarefas identificados no livro analisado, bem como seus exemplos, frequências e comentários de análise. Destacando sempre que a praxeologia se apresente além de uma praxeologia pontual, ou seja, vai além da aplicação de uma única técnica repetitiva ou realiza um discurso tecnológico justificando características ou propriedades em casos particulares de funções quadráticas.

4.3.1 T.1 - Reconhecer a Representação Algébrica e a Representação Gráfica de uma Função Quadrática, Associando a Curva a uma Parábola.

A tarefa T.1 é derivada de uma das expectativas de aprendizagem previstas no PCPE (PERNAMBUCO, 2012) para alunos da rede estadual de ensino e que está relacionada com o ensino de Função Quadrática. Em nossa leitura consideramos que um tipo de tarefa com essa descrição seria amplo e confuso para analisar as atividades.

Então, com objetivo de simplificar e, principalmente, organizar nossa análise de modo que ela possa suscitar questões mais específicas subdividimos T.1 em subtipos de tarefas. Como pôde ser visto no quadro um (01), T.1 foi subdividida em seis (06) subtipos de tarefa que dão conta de pontos específicos da tarefa maior. A seguir, descrevemos cada subtipo de tarefa com seus respectivos exemplos.

4.3.1.1 T.1.1 - Reconhecer uma Função Quadrática Através de Sua Lei de Formação Algébrica.

O tipo de tarefa T.1.1 é perceptível nas atividades em que são dadas algumas funções cujos comandos levam o estudante a identificar através da sua lei algébrica se a dada função é ou não uma Função Quadrática. Visto que pela definição do livro (figura 3) Função Quadrática é toda função cuja forma é $f(x) = ax^2 + bx + c$, com 'a' real e diferente de zero e 'b' e 'c' reais.

Figura 3 Definição de Função Quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número ax^2+bx+c, com *a*, *b* e *c* reais, e $a \neq 0$, é denominada **função quadrática**.

$$x \rightarrow ax^2+bx+c$$

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ ou } y=ax^2+bx+c$$

Dizemos que *a*, *b* e *c* são os **coeficientes** da função.

FONTE: Souza, (2013, p. 115)

Identificamos apenas uma atividade com esse tipo de tarefa que foi a atividade (um) 1 da página 116 (figura 4), onde são dadas algumas funções e se pede identificar as quadráticas.

Figura 4 Atividade 1 capítulo 4

1. Quais das funções a seguir são quadráticas? b; c; e

a) $f(x)=2x^3+x^2-6x+3$

b) $f(x)=x^2-8$

c) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+1$

d) $f(x)=2^x+5x-9$

e) $f(x)=x(7-x)$

f) $f(x)=(x+1{,}9)x^2-8{,}3x+6{,}5$

FONTE: Souza (2013, p. 116)

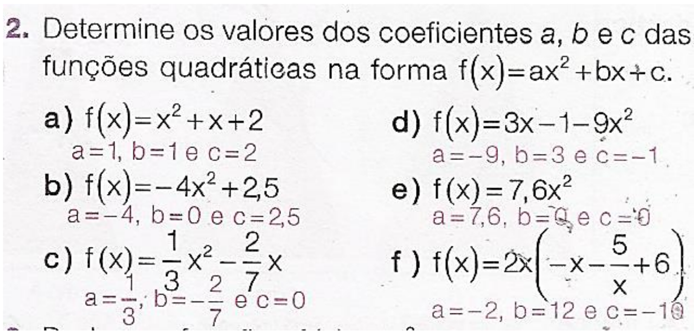
Podemos perceber que a atividade consiste em identificar quais das funções são quadráticas. Nos primeiros quatro itens da atividade, as leis de formação já estão desenvolvidas, porém nos dois últimos itens será necessário que o estudante realize algumas manipulações algébricas afim determinar se as funções podem ser escritas na forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Podemos então considerar que há um pequeno acréscimo de técnicas dos primeiros itens para os últimos, pois, nos primeiros a tarefa é apena verificar a forma como está descrita a lei de formação e se condiz com lei geral de formação. Enquanto que, nos últimos é necessário que o estudante realize algumas operações com o objetivo de desenvolver o polinômio e por fim é que se realiza a comparação para classificá-la como quadrática.

4.3.1.2 T.1.2 - Identificar os Coeficientes da Função Quadrática.

Essa atividade espera que o aluno identifique quais os valores dos coeficientes ‘a’, ‘b’ e ‘c’ das funções quadráticas dadas, observando-se suas respectivas leis de formação (figura 5). Desse tipo de tarefa é apresentado explicitamente em apenas uma atividade no capítulo quatro (04). Contudo, em todas as atividades que envolvem determinação dos zeros (pela fórmula de Bhaskara) ou determinar as coordenadas do vértice, sugerem a T.1.2 como uma pré-tarefa[8]. A figura 4 apresenta a atividade cuja tarefa é apenas identificar os valores dos coeficientes.

Figura 5 Atividade 2 capítulo 4



2. Determine os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* das funções quadráticas na forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

a) $f(x)=x^2+x+2$
$a=1$, $b=1$ e $c=2$

b) $f(x)=-4x^2+2{,}5$
$a=-4$, $b=0$ e $c=2{,}5$

c) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{7}x$
$a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{7}$ e $c=0$

d) $f(x)=3x-1-9x^2$
$a=-9$, $b=3$ e $c=-1$

e) $f(x)=7{,}6x^2$
$a=7{,}6$, $b=0$ e $c=0$

f) $f(x)=2x\left(-x-\frac{5}{x}+6\right)$
$a=-2$, $b=12$ e $c=-10$

FONTE: Souza (2013, p.116)

Nessa atividade ocorre algo semelhante à atividade 1 os primeiros exemplos são bem simples e diretos, apesar alguns itens modificarem a ordem ‘padrão’, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dos coeficientes. Possivelmente não gera grandes dificuldades, porém, o último item que o estudante tem que ter uma noção de conhecimentos algébricos;

4.3.1.3 T.1.3 - Determinar a Lei da Função Conhecendo Três Pares Ordenados da Função. Ou Elementos Como Coordenadas do Vértice, Zeros, o Ponto (0,C).

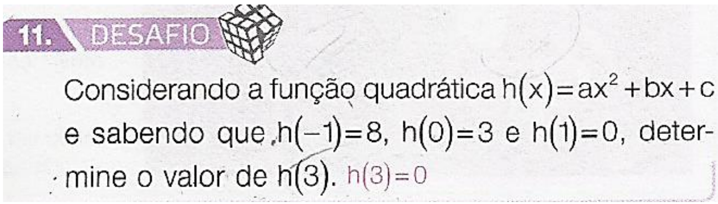
---

[8] Entenda-se como sendo uma tarefa que precede a tarefa objetivo. Por exemplo, se a tarefa for determinar os zeros da Função Quadrática $f(x) = x^2 + 5x - 6$. Para aplicar a fórmula de Bhaskara é necessário que o estudante identifique quais os valores dos coeficientes ‘a’, ‘b’ e ‘c’.

Esse tipo de tarefa apareceu em 12 das 103 atividades do capítulo. No geral o estudante deve determinar a lei da função conhecendo alguns elementos do gráfico, como três pontos quaisquer, ou as coordenados do vértice e o ponto (0,c), ou os zeros da função e um ponto. As atividades relacionadas a esse tipo de tarefa são distribuídas ao longo dos tópicos do capítulo.

A seguir destacamos o primeiro momento que uma atividade que envolve esse tipo de tarefa é apresentada (figura 6). Note que o objetivo final da atividade não é determinar a lei de formação da Função Quadrática, mas, determinar a lei é uma etapa necessária para se determinar ‘h(3)’. Podemos observar que ela aparece com a legenda ‘desafio’, entretanto, no manual do professor, o autor não justifica o motivo de essa atividade ser tratada como desafio.

Figura 6 Atividade 11 capítulo 4



11. DESAFIO

Considerando a função quadrática $h(x)=ax^2+bx+c$ e sabendo que $h(-1)=8$, $h(0)=3$ e $h(1)=0$, determine o valor de $h(3)$. $h(3)=0$

FONTE: Souza (2013, p.117)

No entanto, acreditamos que ela receba essa nomenclatura porque sua solução depende da montagem e solução de um sistema com três equações. Se for observado como o todo, no capítulo três o autor apresenta uma situação semelhante só que para função afim, logo era um sistema com duas equações. Então essa mudança nos números de variáveis pode ser considerada o desafio.

De acordo com nossa análise, não há evolução do ponto de vista da praxeologia envolvida, resolver um sistema de equações com duas incógnitas, ou um sistema de três equações com três incógnitas, sendo que uma delas é imediata, por exemplo, no caso da figura seis (06) onde $h(0) = 3$ e dessa, tem-se de imediato que $c = 3$, então recaio num sistema $2\ x\ 2$

.

Figura 7 Atividade 36 capítulo 4

36. (UFPA-PA) O vértice da parábola $y=ax^2+bx+c$ é o ponto de coordenadas $(-2, 3)$. Sabendo que 5 é a ordenada onde a curva corta o eixo vertical, podemos afirmar que: d

a) $a>1$, $b<1$ e $c<4$

b) $a>2$, $b>3$ e $c>4$

c) $a<1$, $b<1$ e $c>4$

d) $a<1$, $b>1$ e $c>4$

e) $a<1$, $b<1$ e $c<4$

FONTE: Souza (2013, p.132)

Na atividade 36 (figura 7), são dados dois pontos sendo que um deles é o vértice, e a pequena mudança aqui é que apesar de dado novamente o ponto (0,c). Para suprir a necessidade de um terceiro ponto utiliza-se as relações do vértice $x_v = -\frac{b}{2a}$, esta foi utilizada pelo autor na sua resolução, ou também pode-se utilizar a relação $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, para construir o sistema e determinar a solução que no caso são os valores de *a*, *b* e *c*.

4.3.1.4 T.1.4 - Compreender a Relação de Pertinências entre Par Ordenado e a Função, ou Seja, ‘Se $(x, y) \in f$ Então $f(x) = y$.

A atividade 12, apresentada na figura oito, é um bom exemplo desse tipo de tarefa. No enunciado é solicitado que o estudante identifique quais pontos pertencem ao gráfico da função, ou seja, quais pares ordenados (x_1, y_1) tornam a sentença aberta $y = f(x)$ verdadeira.

Figura 8 Atividade 12 Capítulo 4

12. Dentre os pontos a seguir, quais pertencem ao gráfico de $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$? B, C, E e F

- $A(-4, -1)$
- $C(3, 0)$
- $E(0, 3)$
- $B(1, 6)$
- $D(-3, 7)$
- $F\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

FONTE: Souza (2013, p.146)

A técnica aqui é direta no sentido, que o estudante vai apenas substituir a abscissa de cada ponto no lugar de x, ou seja, calcular as imagens das abscissas pela função g e verificar se as imagens são iguais à ordenada de cada ponto. Em todos os seis itens o procedimento é exatamente o mesmo.

Outras atividades relacionadas a esse subtipo de tarefa são aquelas cuja é dada uma Função Quadrática, na qual seus coeficientes são dados em função de outra variável, por exemplo, na variável k, ou seja, $f(x) = g(k)x^2 + h(k)x + j(k)$.

Conhecendo essa função é dado um ponto $(x_1, y_1) \in f$. Ou seja, se $(x_1, y_1) \in f$ então é verdadeira a expressão $y_1 = g(k){x_1}^2 + h(k)x_1 + j(k)$ na qual o objetivo é resolver a equação e determinar para quais valores de k se tem $(x_1, y_1) \in f$. A figura nove (09) é um exemplo desse tipo de atividade. Dentre as atividades do capítulo, três (03) abordam esse tipo de tarefa.

Figura 9 Atividade R3 Capítulo 4

R3. Qual é o valor de k, de modo que o gráfico de $f(x) = (k-2)x^2 + 2x - 3$ passe pelo ponto de coordenadas $(1, 4)$?

Resolução

Substituindo o ponto de coordenadas $(1, 4)$ em $f(x) = (k-2)x^2 + 2x - 3$, temos:

$$f(1) = 4 \Rightarrow (k-2) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 4 \Rightarrow \boxed{k = 7}$$

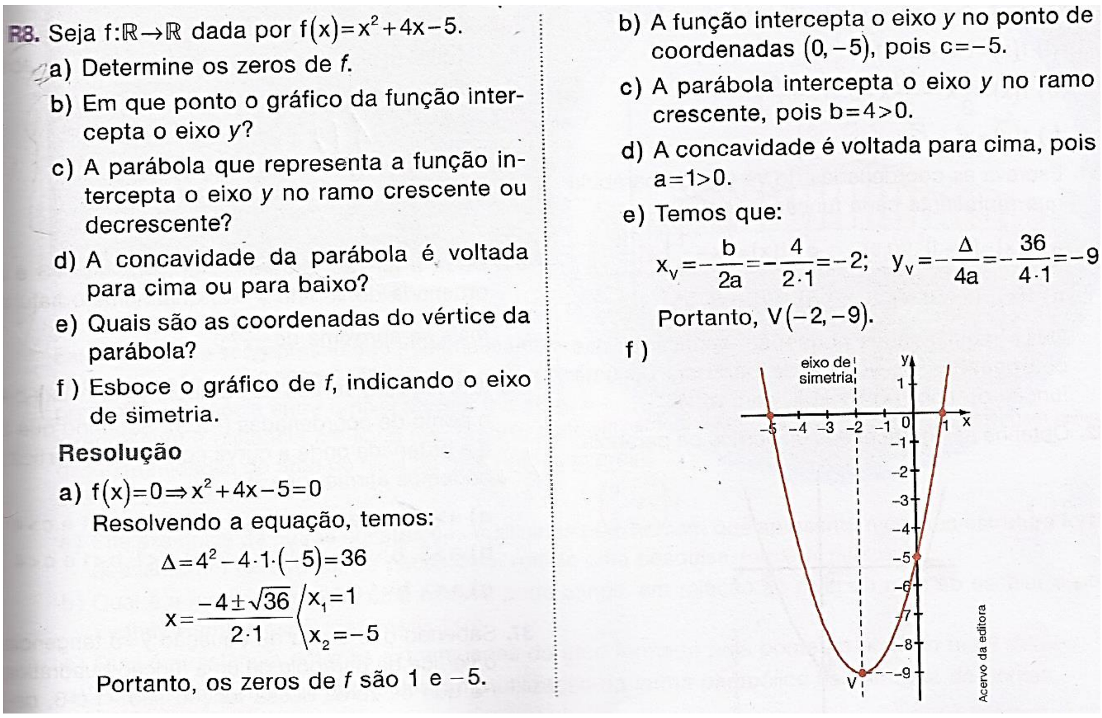
FONTE: Souza (2013, p.123)

Ao substituir $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{y_1}$ na função, se obtém uma equação de incógnita $\boldsymbol{k}$, cuja solução é o objetivo da questão. Aqui podemos considerar um pequeno avanço no alcance da praxeologia, onde leva o estudante perceber que tanto se pode verificar se um ponto faz ou não parte do gráfico da função, quanto às condições necessárias que os coeficientes da função têm que se adequar em uma dada situação para que o gráfico passe por um dado ponto $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$

4.3.1.5 T.1.5 - Esboçar o Gráfico

Três (03) atividades propõem que o estudante faça um esboço do gráfico da Função Quadrática e elas estão distribuídas da seguinte forma: a primeira após a seção que discute a relação dos coeficientes da função com gráfico, e nesse caso o autor tem feito anteriormente construção utilizando tabela onde ele determina alguns valores para x e em seguida determina suas imagens e obtêm os pontos. A segunda e terceira estão localizadas após as seções que discutem zero da função e vértice da parábola, na qual a construção segundo resolução proposta pelo autor é feita com o auxílio desses pontos (figura 10).

Figura 10 Atividade R8 capítulo 4



R8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4x-5$.

a) Determine os zeros de *f*.

b) Em que ponto o gráfico da função intercepta o eixo *y*?

c) A parábola que representa a função intercepta o eixo *y* no ramo crescente ou decrescente?

d) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo?

e) Quais são as coordenadas do vértice da parábola?

f) Esboce o gráfico de *f*, indicando o eixo de simetria.

Resolução

a) $f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

Resolvendo a equação, temos:

$$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-5)=36$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}\begin{cases}x_1=1\\x_2=-5\end{cases}$$

Portanto, os zeros de *f* são 1 e −5.

b) A função intercepta o eixo *y* no ponto de coordenadas $(0,-5)$, pois $c=-5$.

c) A parábola intercepta o eixo *y* no ramo crescente, pois $b=4>0$.

d) A concavidade é voltada para cima, pois $a=1>0$.

e) Temos que:

$$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot1}=-2;\quad y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{36}{4\cdot1}=-9$$

Portanto, $V(-2,-9)$.

f)

FONTE: Souza (2013, p.131)

Nessa questão o autor vai conduzindo o estudante, item a item, de modo que o estudante determine elementos significativos do gráfico da função. Por fim no item ‘e’ o autor solicita que o estudante construa o esboço do gráfico.

No percurso das três atividades há um significativo avanço na praxeologia, consideramos avanço neste trabalho, quando o autor sugere na atividade que o estudante vá além da aplicação de uma fórmula direta ou ainda quando o autor propõe que o estudante integre numa mesma atividade dois ou mais elementos característicos do conceito trabalhado.

Nas três atividades temos, em síntese a mesma tarefa, ‘esboçar o gráfico’. Contudo, é feito um avanço nas técnicas, que no caso esse avanço é dado devido a uma agregação de duas ou mais técnicas que juntas dão mais praticidade e/ou precisão na resolução dessa tarefa. No livro, antes de discutir zeros da função, vértice ou o ponto que intercepta o eixo x, o autor apresenta uma atividade para construção do gráfico de uma função dada, onde a única referência do estudante é um exemplo no qual se determina alguns valores de x do domínio calcula-se as suas respectivas imagem e em seguida marca os pontos no gráfico e estes devem dar uma ideia da forma do gráfico que é obtida ligando os pontos encontrados. Ou seja, a ideia das tabelas funcionais do Ensino Fundamental em que o estudante atribui valores para x, determina suas imagens e em seguida marca os pontos no plano cartesiano.

Na segunda e terceira atividades (figura 10) o estudante é instigado a fazer uma construção um pouco mais precisa onde a técnica de construção é aperfeiçoada com outras técnicas. Podemos observar no exercício R8 da figura 10 que o estudante é levado a calcular os pontos específicos como zero, vértice e o $f(0)$, em seguida são solicitados no item ‘f’ a esboçar o gráfico da Função Quadrática dada e espera-se que ele utilize para isso a representação desses pontos no plano cartesiano para que seja por eles traçado o gráfico.

Nessa atividade R8, consideramos que a praxeologia tem maior alcance dentro do conceito Função Quadrática, pois agrega diversas técnicas com o objetivo de resolver uma tarefa, proporcionando ao estudante um momento de reflexão pare que ele perceba que esses pontos são características cruciais no gráfico de funções, e reforce a relação entre a lei algébrica de formação da Função Quadrática e seu gráfico. Disto entendemos que essa praxeologia está além de uma praxeologia pontual, já pode se pensar em praxeologia local, ou seja, praxeologia que segundo a

TAD está focada em uma teoria e é composta por um conjunto de técnicas dentro das possibilidades de tarefas a serem realizadas com essas técnicas.

4.3.1.6 T.1.6 - Determinar a Imagem $f(x)$ de um Dado x do Domínio.

Essa categoria de tarefa engloba atividades nas quais é dado um valor $x = x_1$ pertencente ao domínio da função f onde o estudante tem que determinar sua imagem $f(x_1)$. Este é um tipo de tarefa bem comum no decorrer de todo o capítulo e também aparece explicitamente em questões do tipo: 'dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ calcule $f(x_1)$' (figura 11) e em problemas como o apresentado na atividade 11 apresentada na (ver figura seis (06)). Às vezes essa tarefa aparece implicitamente como processo para compreender ou realizar outra tarefa como, por exemplo, na atividade 12 (ver figura oito (08)) o estudante em meio a resolução da questão se depara com uma etapa na qual tem que determinar a imagem de um x dado.

Figura 11 Atividade 3 capítulo 4

3. Dadas as funções $f(x) = 2x^2 - 6x - 4$ e $g(x) = -3x^2 - 5x + 1$ calcule:

a) $f(3)$ -4	e) $g(1)$ -7
b) $f(-2)$ 16	f) $g(-4)$ -27
c) $f(0)$ -4	g) $g(0)$ 1
d) $f(-0{,}2)$ $-2{,}72$	h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{9}{4}$

FONTE: Souza (2013, p.116)

Essa atividade, do ponto de vista de nossa análise, não faz grandes avanços no tipo de praxeologia, visto que: consiste em todas as questões e seus itens em a aplicação de uma mesma técnica repetidamente.

4.3.2 T.2 - Reconhecer a Função Quadrática como Modelo Matemático para o Estudo das Variações Entre Grandezas do Mundo Natural ou Social

Esse tipo de tarefa, está relacionado com o aluno perceber que certas situações, principalmente, as que envolvem variações de grandezas correlacionadas, podem ser modelizadas matematicamente. Com isso, permitindo um estudo amplo de uma dada situação, por exemplo, ao se conhecer o modelo de variação podemos prever ou determinar certos resultados.

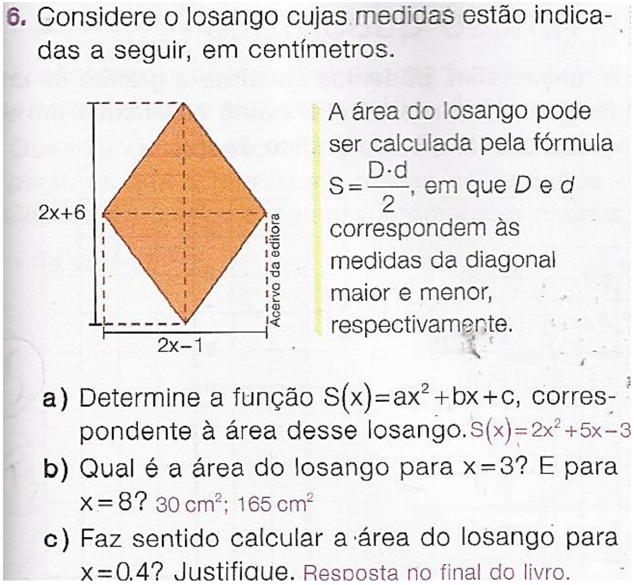
No que se refere ao estudo de funções, a tarefa T.2 é um das expectativas de aprendizagem desse conteúdo apresentadas no PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e entra em consonância com os próprios PCN+ como podemos ver no seguinte trecho que afirma que o estudo das funções:

> **“**permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das Ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática” (BRASIL, 2002. p.121).

As atividades que envolvem esse tipo de tarefa solicitam que a partir de uma situação problema, na qual ocorre variação funcional entre duas grandezas, os estudantes determinassem as leis das funções que representavam essas situações. Essa atividade foi bem comum ao longo do capítulo na grande maioria em problemas geométricos, porém também foram propostos problemas financeiros e físicos (velocidade, distância, etc.).

No capítulo analisado, identificamos 20 atividades desse tipo, das quais algumas solicitavam explicitamente através de comandos como ‘determine a lei da função’ (figura 12) e o estudante deveria ler a situação e tentar montar a lei algébrica da Função Quadrática que representava a situação proposta para estudo. Entretanto, em outras atividades não estava descrito esse comando, porém o objetivo era o cálculo de máximos ou mínimos ou zeros da função. No entanto, para determinar esses elementos são necessários os coeficientes da Função Quadrática, logo, é necessário conhecer a lei da função a qual não era dada e teria que ser construída de maneira que representasse a situação proposta (figura 13).

Figura 12 Atividade 6 do Capítulo 4



6. Considere o losango cujas medidas estão indicadas a seguir, em centímetros.

A área do losango pode ser calculada pela fórmula $S=\frac{D\cdot d}{2}$, em que *D* e *d* correspondem às medidas da diagonal maior e menor, respectivamente.

a) Determine a função $S(x)=ax^2+bx+c$, correspondente à área desse losango. $S(x)=2x^2+5x-3$

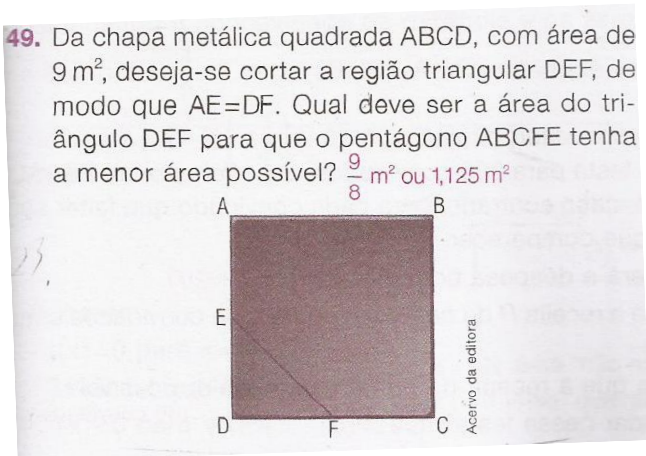
b) Qual é a área do losango para $x=3$? E para $x=8$? $30\ cm^2$; $165\ cm^2$

c) Faz sentido calcular a área do losango para $x=0{,}4$? Justifique. Resposta no final do livro.

FONTE: Souza (2013, p.117)

Na figura acima podemos ver que a lei da função será dada pela solução do produto $\frac{(2x+6).(2x-1)}{2}$, ou seja, esse exemplo está ilustrando a Função Quadrática como ferramenta modeladora para análise das variações entre as grandezas de uma dada situação. O mesmo pode ser dito da atividade 49.

Figura 13 Atividade 49 capítulo 4



49. Da chapa metálica quadrada ABCD, com área de $9\ m^2$, deseja-se cortar a região triangular DEF, de modo que AE=DF. Qual deve ser a área do triângulo DEF para que o pentágono ABCFE tenha a menor área possível? $\frac{9}{8}\ m^2$ ou $1{,}125\ m^2$

FONTE: Souza (2013, p.137)

Entretanto na atividade 49 construir a lei da função é apenas uma etapa, após o reconhecimento da Função Quadrática como modelo de representação da situação o estudante terá que analisar e perceber algumas propriedades dos elementos do gráfico, por exemplo, entender o vértice da parábola como sendo o valor do domínio cuja imagem é máxima ou mínima.

Em nossa análise podemos perceber que este tipo de tarefa envolve as manipulações algébricas de expressões dadas, por exemplo, a área de um polígono, como nos casos acima. Então, basicamente, a técnica a ser aplicada é sempre a mesma. Logo, aqui podemos considerar um praxeologia pontual.

4.3.3 T.3 - Identificar o Domínio de Validade e Situações de Continuidade e Descontinuidade (por exemplo: reconhecer que a grandeza tempo não pode ter domínio negativo ou que, um gráfico que relaciona o valor do lucro em função do número de peças vendidas, não pode ser representado por uma linha e sim por pontos).

A Função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é definida de $\Re \rightarrow \Re$. Contudo, em algumas situações de aplicação, dessa função, como por exemplo, na Física, onde temos que a função horária do Movimento Uniformemente Variado é uma função cujo domínio é estritamente positivo. Até mesmo na própria Geometria em situações que se propõem expressar área de um polígono em função dos lados também teremos restrições no domínio, de fato. Supondo um quadrado de lado $x + 1$ a função $f(x) = (x + 1)^2$ expressa a área em função do lado, entretanto, para os valores de x tais que $x \leq -1$, pois, não faz sentido algum um quadrado de lados negativo.

Nas situações supracitadas, torna-se incoerente definir estas funções de $\Re \rightarrow \Re$ visto que um valor x do domínio estará sujeito a certas condições, ou seja, o domínio dessa função seria um conjunto D tal que $D \subset \Re$. Essas atividades sugerem o tipo de tarefa T.3 e exige do aluno compreensões do eixo das Grandezas e Medidas (PERNAMBUCO, 2008).

Reconhecer que tempo e comprimento que são grandezas estritamente positivas ou como na questão da página 117 (figura 12), por exemplo, item c no qual leva o estudante a refletir que a função não faz sentido para $x = 0{,}4$. Então consideremos aqui um tipo tarefa que consiste em dada uma situação verificar o seu domínio de validade.

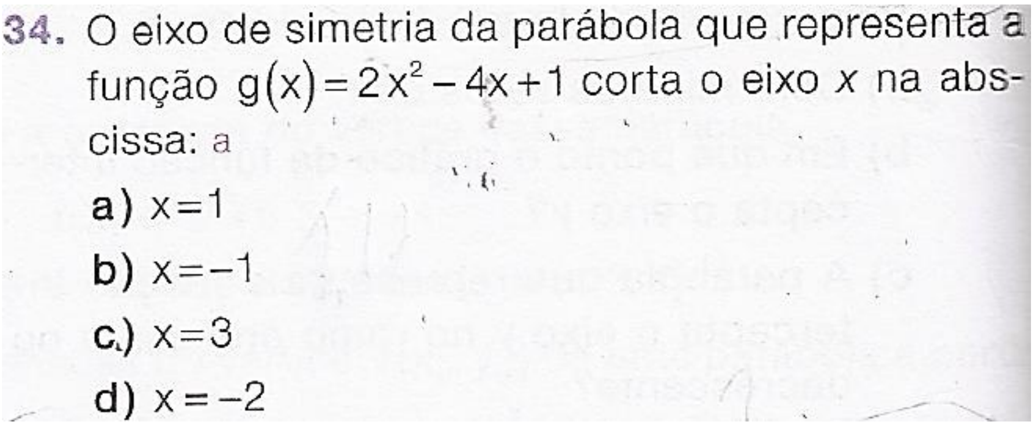
4.3.4 T.4 - Reconhecer, na Representação Gráfica da Função Quadrática. Elementos como Zeros, Intersecção com o Eixo das Ordenadas, Eixo de Simetria, Concavidade e Pontos de Máximo/Mínimo.

O tipo de tarefa T.4 consiste em atividades nas quais é necessário compreender e identificar essas relações na Função Quadrática de modo que cada um dos seus elementos e suas respectivas representações no gráfico da função seja compreensível. Percebemos –aqui- que é uma expectativa bem ampla e em nossa abordagem a subdividimos em quatro (04) subtipos de tarefas os quais apresentamos sua descrição e os exemplos do livro a seguir.

4.3.4.1 T.4.1 - Identificar o Eixo de Simetria da Parábola Representativa do Gráfico da Função Quadrática e Suas Propriedades (se a e b são equidistantes de $x = x_v$ então $f(a) = f(b)$)

Esse tipo de tarefa é perceptível, explicitamente, em duas das três atividades que abordam o tipo de tarefa T.1.5 (item “f” da figura 10) e na atividade 34 da página 132 (figura 14) na qual o foco é a determinação da equação do eixo de simetria. Vale ressaltar que a atividade 34 é proposta logo após o tópico que trata do vértice da parábola, e nele é mostrado ao estudante que o eixo de simetria passa pela abscissa $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Figura 14 Atividade 34 capítulo 4



34. O eixo de simetria da parábola que representa a função $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ corta o eixo x na abscissa: a

a) $x = 1$

b) $x = -1$

c) $x = 3$

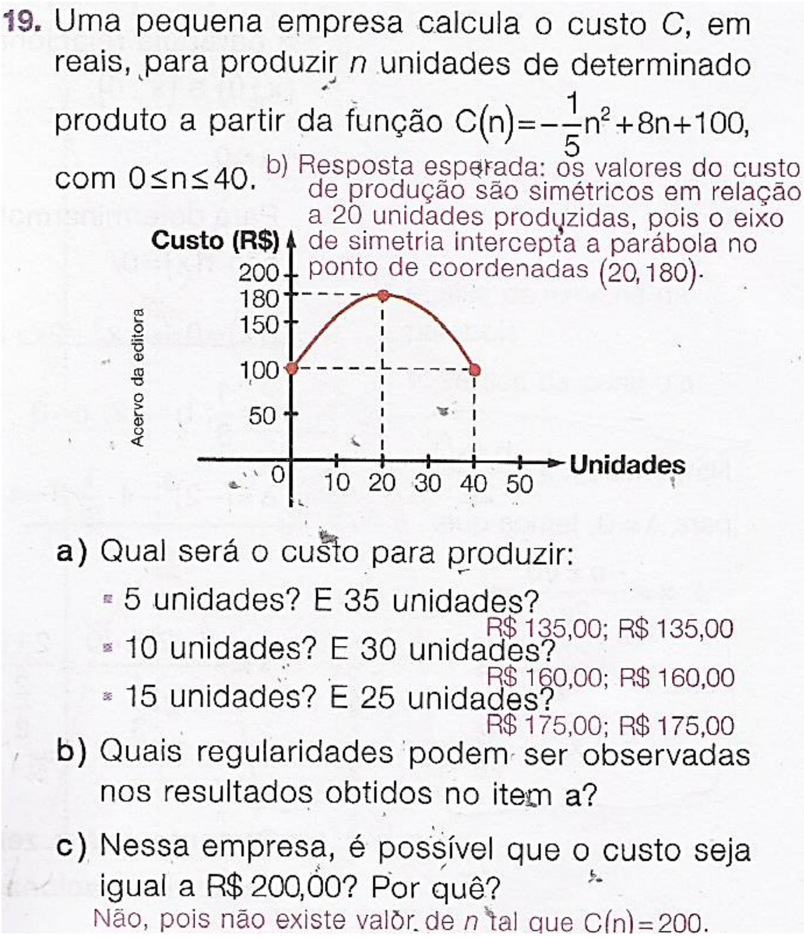
d) $x = -2$

FONTE: Souza (2013, p.132)

Aqui temos novamente a aplicação da técnica para calcular uma das coordenadas do vértice, porém a tarefa não determinar o vértice ou tão pouco máximo ou mínimo. Aqui o objetivo é determinar o eixo de simetria, ou seja, a reta que passa perpendicular ao eixo x na abscissa $x = x_v$.

Outras duas atividades abordam de maneira implícita relações e propriedades do eixo de simetria. Por exemplo, na questão 19 da página 123 não é mencionado, literalmente, ‘eixo de simetria’ mas, a questão aborda uma de suas propriedades: ‘**se a e b são equidistantes de** $\boldsymbol{x = x_v = \frac{-b}{2a}}$ **então** $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$’ (figura 15) nessa atividade no item ‘a’ é solicitado que o estudante calcule algumas imagens de pontos simétricos em relação à reta $x = \frac{-b}{2a}$ (eixo de simetria da parábola) e no item ‘b’ pede-se para o estudante identificar quais as regularidades que ocorrem da situação, no caso que os pontos simétricos tem mesma imagem.

Figura 15 Atividade 19 capítulo 4



19. Uma pequena empresa calcula o custo C, em reais, para produzir n unidades de determinado produto a partir da função $C(n) = -\frac{1}{5}n^2 + 8n + 100$, com $0 \leq n \leq 40$.

b) Resposta esperada: os valores do custo de produção são simétricos em relação a 20 unidades produzidas, pois o eixo de simetria intercepta a parábola no ponto de coordenadas $(20, 180)$.

a) Qual será o custo para produzir:
- 5 unidades? E 35 unidades? R$ 135,00; R$ 135,00
- 10 unidades? E 30 unidades? R$ 160,00; R$ 160,00
- 15 unidades? E 25 unidades? R$ 175,00; R$ 175,00

b) Quais regularidades podem ser observadas nos resultados obtidos no item a?

c) Nessa empresa, é possível que o custo seja igual a R$ 200,00? Por quê?
Não, pois não existe valor de n tal que $C(n) = 200$.

FONTE: Souza (2013, p.123)

A atividade 19 é proposta antes das discussões de vértice ou eixo de simetria, ela é proposta logo após a seção que apresenta o gráfico da Função Quadrática. No manual do professor Souza (2013) orienta quanto algumas possíveis discussões que podem ser (re) tomadas a partir da atividade acima. Porém, o autor se limita a discussões de domínio de validade, e conjunto imagem.

Em nossa análise, a atividade 19 pode servir de mola impulsora para discussões relacionadas ao vértice da parábola, ou eixo de simetria, visto que o estudante já se encontra aplicando essas propriedades. O item b poderia servir justamente para elevar essa discussão para propriedades do vértice da parábola.

4.3.4.2 T.4.2 - Reconhecer o Conjunto Imagem de uma Função $f(x) = ax^2 + bx + c$ Conhecendo seu Gráfico ou sua Lei de Formação (Se $a > 0$ então $IM = \{y \in \Re / y \geq yv = -\frac{\Delta}{4a}\}$ e se $a < 0$ então $\mathrm{IM} = \{y \in \Re / y \leq yv = -\frac{\Delta}{4a}\}$)

Identificamos esse tipo de tarefa em três (03) atividades uma delas de maneira indireta no item “c” da questão 19 (figura 15). Como esta atividade está localizada antes da seção que apresenta formalmente as fórmulas que permitem calcular as coordenadas do vértice da parábola e consequentemente da seção que apresenta as características do conjunto imagem da Função Quadrática. O recurso que o estudante deveria usar nessa questão é o esboço do gráfico que é dado junto com a questão.

As demais atividades propõem explicitamente que o estudante determine o conjunto imagem no exercício resolvido R10 da página 135 e na atividade proposta 39 da página 136 (figura 16), onde são dadas algumas funções quadráticas e é requisitado do estudante que ele determine o conjunto imagem de cada uma delas.

Figura 16 Atividade 39 capítulo 4

39. Determine o conjunto imagem de cada função quadrática: Respostas no final do livro.

a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$

b) $f(x) = -7x^2 + \sqrt{2}x$

c) $f(x) = 3x^2 - 10$

d) $f(x) = -6x^2 + 1$

e) $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + 9$

Quais regularidades podem ser verificadas no conjunto imagem das funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$?

FONTE: SOUZA (2013, p.136)

Um ponto que vale destacar na atividade 39 é a questão levantada fim após os itens da atividade, referente às funções quadráticas determinadas pela lei f(x) = ax^2 + c e seu conjunto imagem. Essa questão instiga estudante a seguinte compreensão: ‘Se para a Função Quadrática o conjunto imagem é dado pelo valor máximo ou mínimo que é $y_v = -\frac{\Delta}{\mathbf{4a}} = -\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\mathbf{4a}}$, então para b=0 teremos que $y_v = -\frac{\Delta}{\mathbf{4a}} = -\frac{\boldsymbol{0^2-4ac}}{\mathbf{4a}} = -\frac{\boldsymbol{(-4ac)}}{\mathbf{4a}} = \boldsymbol{c}$**.** Logo, para $a > 0$ temos que o conjunto imagem será $IM = \{y \in \Re / \ y \geq c\}$ e se $a < 0$ então $IM = \{y \in \Re / \ y \leq c\}$.

Do ponto de vista praxeológico, identificamos na questão 39 um avanço no alcance da praxeologia, onde o estudante é apresentado a outras formas (técnicas e/ou tecnológicas) de se determinar o conjunto imagem de uma Função Quadrática caso o coeficiente $b = 0$.

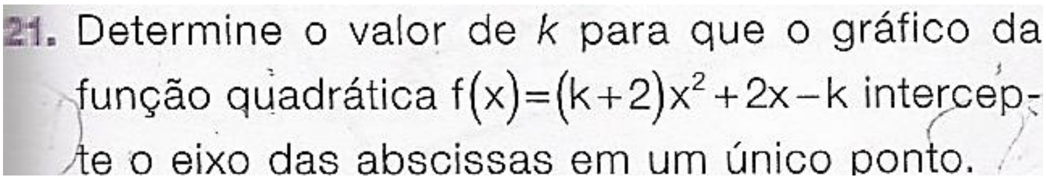
4.3.4.3 T.4.3 Relacionar o Discriminante Δ com o Número de Zeros Reais da Função Quadrática.

Nove (09) das atividades do capítulo analisado proporcionam ao estudante perceber que o discriminante Δ determina o número de zeros da Função Quadrática. Pois, se $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem-se que $f(x) = 0$ se $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e como $x \in \Re$ se, e somente se, o número $\sqrt{\Delta} \in \Re$. Logo temos que, $\Delta \geq 0$. Por outro lado, se $\Delta < 0$ então não existirão valores de x tais que $f(x) = 0$.

Algumas dessas atividades também instigam o aluno a compreender e identificar, por exemplo, que se existirem os zeros reais distintos, ou seja, $\Delta \geq 0$. Então a parábola representativa do gráfico da Função Quadrática intercepta o eixo x exatamente nas abcissas $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Dentro desse tipo de tarefa, dividimos duas situações as quais distinguimos a seguir.

A primeira situação desse tipo de tarefa, as atividades serão solicitadas para determinar valores para ‘k’, quando a, b ou c são dados em função de ‘k’, tal que a função possua dois, nenhum zero ou um zero, ou seja, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$. As atividades são bem diretas de modo que é dada uma função do tipo $f(x) = g(k)x^2 + h(k)x + j(k)$, ou seja, com os coeficientes dados em função de um k real e se propõe que seja determinado os valores k que satisfazem a condição de se ter um, dois ou nenhum zero. No exemplo da figura 17 pede-se o valor de k para que a função tenha um único zero.

Figura 17 Atividade 21 do Capítulo 4



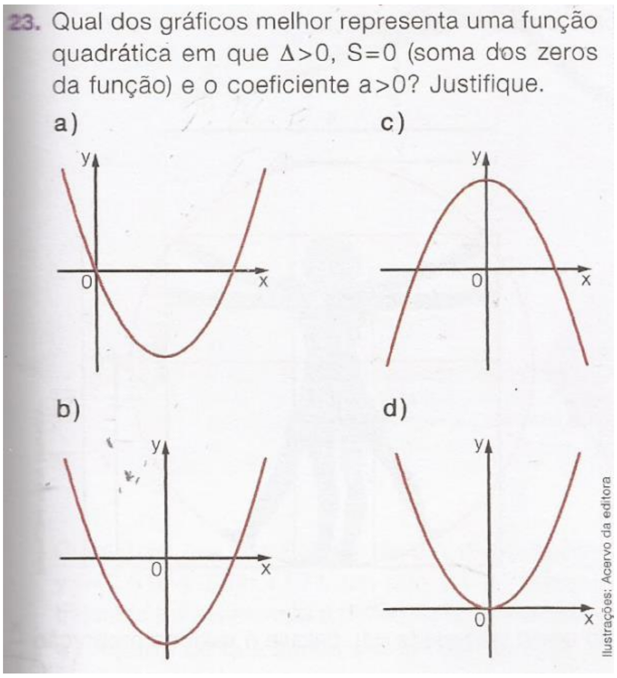
21. Determine o valor de k para que o gráfico da função quadrática $f(x)=(k+2)x^2+2x-k$ intercepte o eixo das abscissas em um único ponto.

FONTE: Souza (2013, p.127)

Na atividade 21 o terá então que reconhecer que para só existir um único x tal que $(x,0) \in f$ então, $\Delta = 0$. A partir desse reconhecimento ele terá apenas que resolver uma equação simples.

Outra situação são atividades em que o estudante deve associar o número de zeros reais da função ao discriminante da função, ou seja, $\Delta > 0$ a função possui dois zeros reais distintos, $\Delta < 0$ não possui zeros reais que satisfaçam a sentença e se $\Delta = 0$ possui apenas um zero real ou zero duplo. Ainda ter a habilidade de relacionar essas informações com gráfico da função dada, a atividade 23 dá página 127 (figura 18) aborda exatamente essa habilidade quando em seu enunciado solicita que o estudante identifique o gráfico cujo $\Delta > 0$, $a > 0$ e cuja soma das raízes é zero.

Figura 18 Atividade 23 Capítulo 4



FONTE: SOUZA (2013, p.127)

Como se pode observar, nessa atividade, os estudantes precisam, para realizar essa atividade, de uma ampla compreensão das relações estabelecidas entre os elementos algébricos e gráficos da Função Quadrática. Neste ponto, também conseguimos ver um avanço no alcance da praxeologia. De modo que, por meio dessa atividade o autor solicita que o estudante vá além das aplicações de fórmulas decoradas e chegue a observações práticas dos comportamentos do gráfico.

4.3.4.4 T.4.4 Estudar o Vértice da Função Quadrática

As atividades apresentadas no livro que se enquadram nesse tipo de tarefa são diversas. Algumas envolvem determinar as coordenadas do vértice, outras propõem identificar o eixo de simetria por meio da coordenada abscissa do vértice, determinar valor de máximo ou mínimo das funções quadráticas, ainda olhar graficamente para a Função Quadrática e perceber as implicações gráficas do vértice. Por esse leque de possibilidades, apresentaremos aqui três exemplos de atividades nas quais reconhecemos esse subtipo de tarefa.

O primeiro exemplo consiste em uma atividade que em seu enunciado indica para o estudante determinar as coordenadas do vértice da parábola representativa do gráfico de uma Função Quadrática. Aqui destacamos as questões que pedem para esboçar gráfico indicando o vértice como um dos elementos e as que solicitam as coordenadas do vértice onde é dada uma função na sua representação algébrica e o estudante utilizando as fórmulas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ como no exemplo mostrado na figura 19.

Figura 19 Atividade 30 capítulo 4

30. Determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente a cada função.

a) $f(x)=x^2-2x+3$ $V(1,2)$

b) $f(x)=4x^2+4$ $V(0,4)$

c) $f(x)=2x^2-12x+7$ $V(3,-11)$

d) $f(x)=3x^2-2x+1$ $V\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

e) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+5$ $V\left(5,-\frac{10}{3}\right)$

f) $f(x)=x^2-\sqrt{3}x$ $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{4}\right)$

FONTE: SOUZA (2013, p.132)

Nessa primeira situação, também, vale destacar a questão 31 página 132. Na qual o autor pede que se determine as coordenados do vértice de funções do tipo $f(x) = (x+p)^2$ (figura 20). Contudo, ao final dos itens questiona o estudante sobre a regularidade apresentada no vértice das funções dessa forma. Desse modo segundo o autor espera-se que o estudante chegue à conclusão que o vértice das funções desse tipo tem abscissa igual a –p.

Nesse ponto, novamente, podemos considerar um avanço no alcance da praxeologia matemática visto que autor instiga uma observação que vai além da simples aplicação de uma técnica para realizar a tarefa. O estudante aqui é convidado para perceber uma regularidade e - com isso - compreender novas relações entre o vértice da parábola representativa da Função Quadrática e sua forma fatorada.

Figura 20 Atividade 31 capítulo 4

31. Escreva as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função.

a) $f(x)=(x-1)^2$ $V(1,0)$

b) $f(x)=(x+3)^2$ $V(-3,0)$

c) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $V\left(\frac{1}{2},0\right)$

d) $f(x)=(x+\sqrt{5})^2$ $V(-\sqrt{5},0)$

Quais regularidades podem ser verificadas nas coordenadas do vértice da parábola de uma função do tipo $f(x)=(x+p)^2$, com $p\in\mathbb{R}$?

Possível resposta: a abscissa sempre será $-p$, e a ordenada, 0.

FONTE: Souza (2013, p.132)

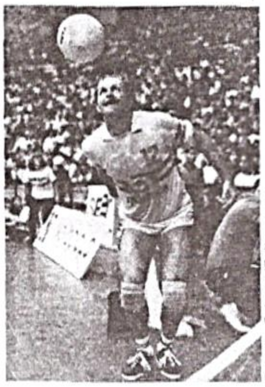
Outra situação é calcular valor máximo ou mínimo da Função Quadrática bem como o valor do domínio cujo valor da imagem é máximo ou mínimo. Os documentos curriculares analisados são unânimes quando apontam inclusive que o estudo das funções quadráticas pode e deve ser motivado por problemas em que se necessite calcular área máxima, ou custo mínimo (cf. BRASIL, 2000; 2002; 2006; 2016; PERNAMBUCO, 2008; 2008b; 2012;).

No livro há uma variedade de situações problemas que envolvem área máxima e área mínima (ver figura 13), altura máxima, lucro máximo a seguir traremos o exemplo na questão 50 onde a Função Quadrática é utilizada para representar a trajetória parabólica de um saque “jornadas nas estrelas” em uma partida de voleibol.

Nessa situação teremos que a função indica a trajetória da bola durante o saque, ou seja, o caminho percorrido pela bola do momento que ela sai da mão do atleta até tocar ao solo do lado adversário. Então o estudante vai ter uma situação diferente das situações usuais da Física, pois, não se trata de uma função horária, as grandezas aqui relacionadas são a distância horizontal e altura, de modo que a altura está variando em função da distância horizontal.

Figura 21 Atividade 50 capítulo 4

50. A popularização do vôlei no Brasil ocorreu no fim da década de 1970 e início da década de 1980. Um dos responsáveis foi o jogador Bernard Rajzman, que estreou aos 17 anos na seleção brasileira, foi capitão e um dos líderes da "geração de prata", assim chamada por ter conquistado a medalha de prata nos Jogos Olímpicos de Los Angeles, em 1984. Em 1982, o ginásio do Maracanãzinho, localizado no Rio de Janeiro, foi palco do primeiro Mundialito de vôlei. Na vitória brasileira sobre a extinta União Soviética, por 3 *sets* a 2, Bernard deu pela primeira vez, em competição internacional, o famoso saque "jornada nas estrelas". Sua estratégia era ficar de lado para a quadra, com o ombro direito paralelo à linha de fundo, lançar a bola suavemente para cima e golpeá-la com o braço direito. A bola alcançava cerca de 25 m, e fazia essa jornada com efeito, o que dificultava a recepção dos adversários.



Renata Falzoni/Folhapress

» Bernard executando o saque "jornada nas estrelas" em uma partida de 1984.

Em uma partida de vôlei, na aula de educação física, Rafael utilizou a jogada inventada por Bernard, executando o saque "jornada nas estrelas". O saque de Rafael descreveu aproximadamente uma trajetória parabólica que pode ser descrita pela função $h(x) = -0{,}398d^2 + 5{,}572d$, em que *d* representa a distância percorrida horizontalmente em metros, e *h*, a altura, também em metros.

a) Qual foi a distância horizontal que o saque de Rafael alcançou? 14 m

b) Qual foi a altura máxima alcançada pela bola no saque de Rafael? 19,5 m

c) Esboce um gráfico relacionando a distância e a altura alcançadas pela bola com $0 \leq d \leq 14$.

d) Em sua opinião, por que esse tipo de saque recebe o nome de "jornada nas estrelas"?

FONTE: Souza (2013, p.137)

Apesar do contexto, ou diria pretexto, a questão consiste em apenas calcular o vértice de uma dada função. O texto, nesse caso, é só uma alegoria para, talvez, chamar atenção do estudante, mas que em nada acrescenta, ao menos do ponto de vista praxeológico, no desenvolvimento do estudante dentro do conceito de Função Quadrática. Isso porque, a tarefa é a mesma calcular máximo e não acrescenta nenhuma nova técnica ou discussão tecnológica de técnica já utilizada.

A última situação relacionada a esse subtipo de tarefa é determinar o valor "p" para que $f(x) = g(p)x^2 + h(p)x + j(p)$ admita um determinado valor y_v mínimo ou máximo. Apenas uma atividade, a questão 41 dá página 136, apresenta essa situação, na qual o autor manda determinar o valor de p nas funções dadas na forma $f(x) = g(p)x^2 + h(p)x + j(p)$ para que elas admitam um certo valor máximo ou mínimo como pode ser observado na figura 22.

Figura 22 Atividade 41 capítulo 4

41. Em cada item, determine os valores de p para que a função quadrática:

a) $f(x)=(2p-8)x^2+5x-13$ admita valor mínimo
$p>4$

b) $g(x)=-4x^2+(p^2-1)x+9$ admita valor máximo para $x=6$ $p=-7$ ou $p=7$

c) $h(x)=3x^2+6x-(2-p)$ admita valor mínimo igual a -8 $p=-3$

FONTE: Souza (2013, p.136)

Aqui semelhante à atividade indagavam quais valores de k para que a função tivesse 1 zero. O estudante tem perceber que, por exemplo, na item 'a' a expressão $2p - 8 > 0$, pois, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ terá ponto de mínimo apenas quando $a > 0$. Enquanto nos itens 'b' e 'c', basta que ele iguale a expressão da ordenada do vértice ao valor que é dado, e depois resolva as equações obtidas.

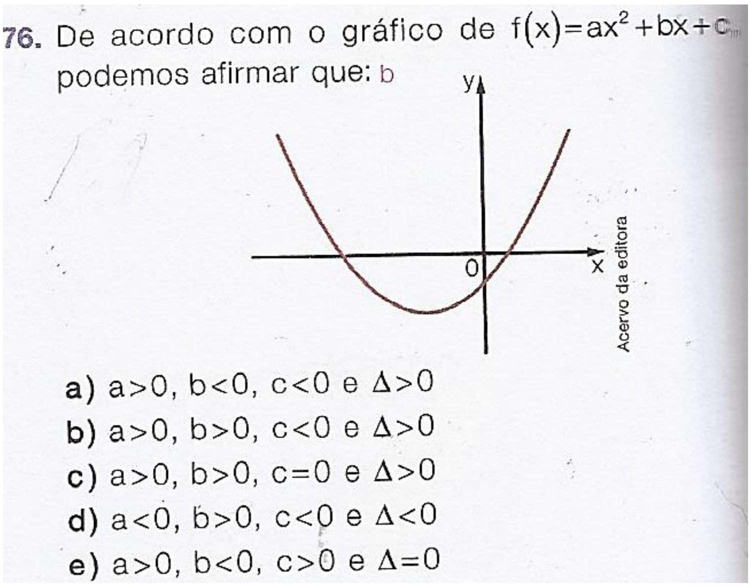
Podemos pensar, aqui em mais um avanço no alcance da praxeologia matemática, pois, precisamente, no item 'a' o estudante deve associar a concavidade da parábola ao fato da função possuir um valor máximo ou mínimo. Em outras palavras, se $a > 0$ então f possuirá valor mínimo e se $a < 0$ então f possui valor máximo. Aqui o estudante deve fazer a integração entre a concavidade da parábola, seu vértice e a definição de máximo e mínimo da Função Quadrática.

4.3.5. T.5 - Relacionar as Transformações Sofridas pelo Gráfico da Função Quadrática com Modificações nos Coeficientes de sua Expressão Algébrica.

As atividades que envolvem esse tipo de tarefa relacionam a representação algébrica da função com sua representação gráfica, destacando a importância de cada um dos coeficientes da Função Quadrática na determinação dos pontos que compõe o seu gráfico.

Desenvolver essa habilidade é inclusive uma recomendação do PCPE (PERNAMBUCO, 2012) que apresenta esse tipo de tarefa como uma das expectativas do 10º ano de escolaridade (1º ano do Ensino médio). Identificamos esse tipo de tarefa em sete (7) atividades do capítulo 4 (figura 22) das quais a maioria apresenta o gráfico e questiona para que o estudante identifique alguma relação entre os coeficientes da função e seu gráfico, por exemplo, se a>0 ou a<0.

Figura 23 Atividade 76 capítulo 4



76. De acordo com o gráfico de $f(x)=ax^2+bx+c$, podemos afirmar que: b

a) $a>0$, $b<0$, $c<0$ e $\Delta>0$
b) $a>0$, $b>0$, $c<0$ e $\Delta>0$
c) $a>0$, $b>0$, $c=0$ e $\Delta>0$
d) $a<0$, $b>0$, $c<0$ e $\Delta<0$
e) $a>0$, $b<0$, $c>0$ e $\Delta=0$

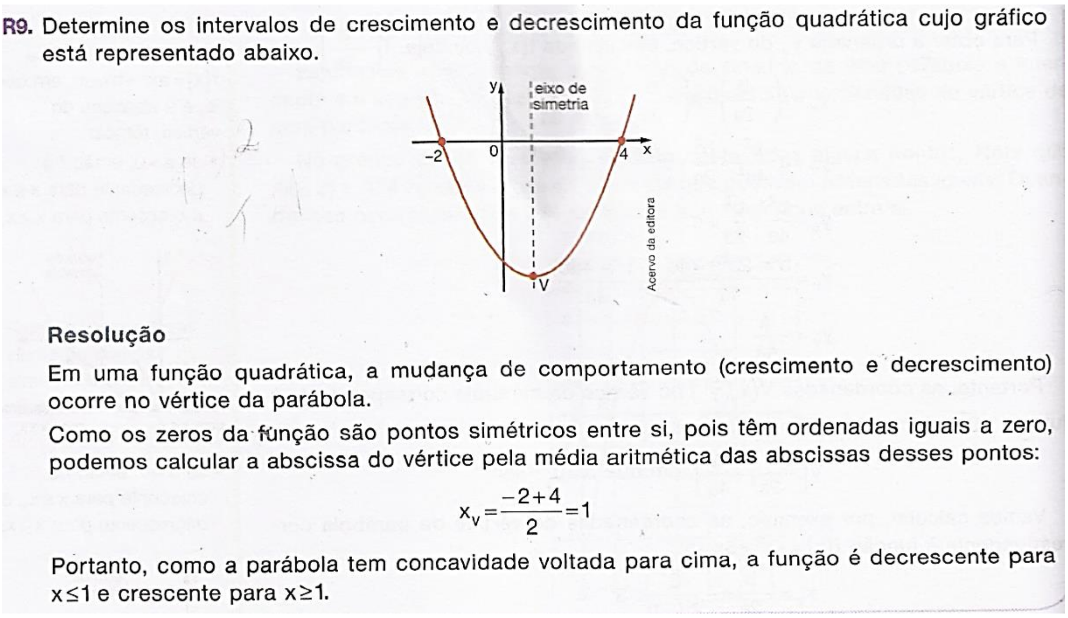
FONTE: Souza (2013, p.146)

Esse tipo de tarefa aponta para uma compreensão ‘macro’ do estudo de Função Quadrática e sua representação gráfica. De modo que o estudante que resolva essa atividade sem problema, pode-se dizer que consegue relacionar a representação algébrica com a representação gráfica em todas suas possibilidades. Temos uma tarefa que essa tarefa alavanca o alcance praxeológico das atividades propostas no livro, pois une elementos de vários tópicos de discussão do capítulo 4 em uma única situação. Ou seja, pode se perceber a maioria das características gráficas da função numa mesma atividade.

4.3.6. T.6 - Determinar intervalos de crescimento e decrescimento na Função Quadrática.

Duas (02) atividades propostas pelo autor foram identificadas com este tipo de tarefa. A proposta é que o estudante perceba o x_v como o valor do domínio que determina os intervalos de crescimento e de decrescimento da Função Quadrática o que o autor deixa claro na atividade R9 (figura 24).

Figura 24 Atividade R9 capítulo 4



R9. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática cujo gráfico está representado abaixo.

Resolução

Em uma função quadrática, a mudança de comportamento (crescimento e decrescimento) ocorre no vértice da parábola.

Como os zeros da função são pontos simétricos entre si, pois têm ordenadas iguais a zero, podemos calcular a abscissa do vértice pela média aritmética das abscissas desses pontos:

$$x_V = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Portanto, como a parábola tem concavidade voltada para cima, a função é decrescente para $x \leq 1$ e crescente para $x \geq 1$.

FONTE: Souza (2013, p.132)

Nessa atividade é introduzida a ideia de intervalos de crescimento e decrescimento na Função Quadrática, que seria outro aspecto da Função Quadrática relacionado ao vértice, mais precisamente a abscissa do vértice. Vemos aqui também mais um avanço na praxeologia, e novamente temos o subtipo de tarefa calcular coordenadas do vértice, como passo para realizar uma nova tarefa.

4.3.7 T.7 - Reconhecer a Função de Segundo Grau como um Modelo para o Movimento Uniformemente Variado.

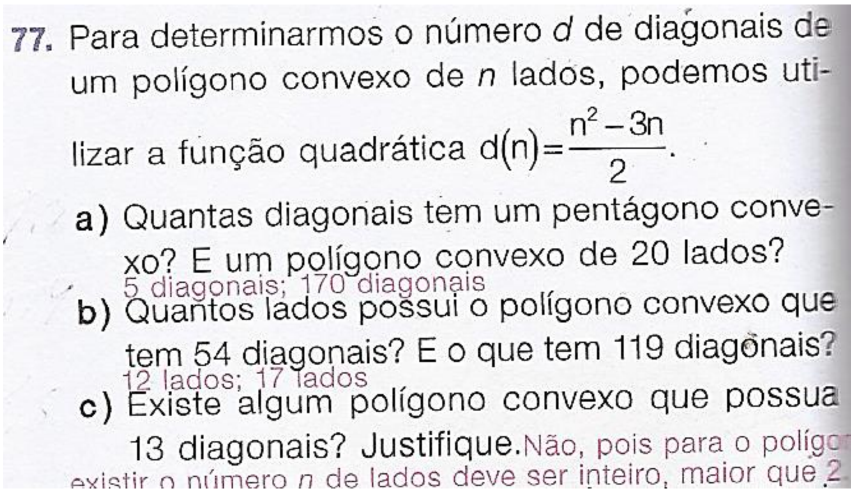
Como citado anteriormente, as categorias de tipo de tarefa foram inspiradas nas expectativas de aprendizagem, relacionadas ao estudo das funções quadráticas, apresentadas pelos PCPE (PERNAMBUCO, 2012). Não identificamos, no livro de Matemática analisado, nenhuma atividade que relacione a Função Quadrática com a função horária do Movimento Uniformemente variado com a Função Quadrática.

4.3.8 T.8 - Resolver e Elaborar Problemas que Possam ser Representados por Equações de Segundo Grau

Os estudos das funções, de maneira geral, segundo o PCPE (PERNAMBUCO, 2012) e os próprios PCNEM (BRASIL, 2000) devem ser motivados por problemas reais de variações entre duas grandezas, como no caso dos movimentos da Física, das progressões matemáticas, ou velocidade de uma reação na Química, e estes tipos de problemas quando se referem à Função Quadráticas resultam ou perpassam pela solução de uma equação do segundo grau.

Esse tipo de tarefa foi observado em meio a contextos de aplicações do conceito de Função Quadrática. Consiste em determinar um valor x_1 do domínio, tal que sua imagem $f(x_1)$ é dada. Esse tipo de tarefa está explícito na atividade 77 (figura 24) onde é dada uma função que relaciona o número d de diagonais de um polígono convexo com o número n de lados desse polígono.

Figura 25 Atividade 77 Capítulo 4



77. Para determinarmos o número *d* de diagonais de um polígono convexo de *n* lados, podemos utilizar a função quadrática $d(n)=\frac{n^2-3n}{2}$.

a) Quantas diagonais tem um pentágono convexo? E um polígono convexo de 20 lados?
5 diagonais; 170 diagonais

b) Quantos lados possui o polígono convexo que tem 54 diagonais? E o que tem 119 diagonais?
12 lados; 17 lados

c) Existe algum polígono convexo que possua 13 diagonais? Justifique. Não, pois para o polígo[no] existir o número *n* de lados deve ser inteiro, maior que 2.

FONTE: Souza (2013, p.146)

Como podemos observar, no item b, é dado o número de diagonais e se pergunta o número de lados. Esses problemas, no caso das funções quadráticas, sempre geram uma equação do segundo cuja solução é o valor do domínio que se pede. Entretanto, o autor, em suas resoluções, insiste em utilizar sempre a mesma técnica, fórmula de Bhaskara, o que não contribui na ampliação da praxeologia.

As atividades que têm o comando ‘determine os zeros da Função Quadrática’ ou que envolvem esse tipo de tarefa em sua resolução estão distribuídas por todo capítulo analisado e ,ao introduzir a discussão, o autor sugere explicitamente um método a ser utilizado para esse fim que o autor chama de forma resolutiva da equação do 2º grau, que é conhecida como a fórmula de Bhaskara.

No manual do professor, nas páginas 56 e 57, o autor, entre outras orientações, mostra uma maneira de demonstrar à validade dessa fórmula resolutiva com auxílio de geometria usando a técnica de completar quadrados. Outro ponto que deixa claro a preferência pela fórmula de Bhaskara é que apesar do autor usar essa fórmula para demonstrar a relação de ‘soma e produto’ das raízes de uma equação do segundo grau, conhecida como ‘relação de Girard’ (figura 26), o autor em suas resoluções contidas no manual do professor, em nenhum momento utiliza a relação de somo e produto, sempre recorre à fórmula de Bhaskara. A seguir, mostramos na figura 25 um exemplo de atividade que envolve esse tipo de tarefa.

Figura 26 Atividade 20 capítulo 4

20. Determine, caso existam, os zeros de cada função.

a) $f(x)=x^2-7x+10$ $x_1=2$ e $x_2=5$

b) $f(x)=x^2-6x+9$ $x_1=x_2=3$

c) $f(x)=-x^2+x-7$ não existem zeros reais

d) $f(x)=-4x^2+4$ $x_1=-1$ e $x_2=1$

e) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+6x$ $x_1=0$ e $x_2=-12$

f) $f(x)=-2x^2+3x-5$ não existem zeros reais

g) $f(x)=3x^2+x-2$* *$x_1=\frac{2}{3}$ e $x_2=-1$

h) $f(x)=-x^2+8x-16$ $x_1=x_2=4$

FONTE: Souza (2013, p.127)

A atividade 20 apresenta de maneira explicita esse tipo de tarefa, contudo - para os itens “d” e “e”- o autor apresenta resoluções alternativas. No primeiro, resolve realizando algumas operações e isolando a incógnita em um dos membros tal como os métodos conhecidos para resolver equações do primeiro grau. Já o segundo, ele resolve usando fatoração por um termo comum em todas as parcelas e reescreve a função na forma $f(x) = x(ax+b)$ de onde se conclui que se $x(ax+b) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.

Como citado acima, uma maneira alternativa de determinar ou identificar as raízes de uma Função Quadrática apresentada no livro é utilizar a relação de Girard de soma e produto das raízes. O livro em sua atividade resolvida R6 do capítulo de Função Quadrática propõe levar o estudante a perceber que a soma das raízes de uma Função Quadrática é igual a $-\frac{b}{a}$ e o produto dessas raízes é $\frac{c}{a}$ por meio de algumas poucas manipulações algébricas (figura 27), este método é conhecida pelos professores e estudantes de matemática como ‘regra da soma e do produto’.

Figura 27 Atividade R6 capítulo 4

R6. Mostre que, de modo geral, se x_1 e x_2 são zeros da função *f*, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Resolução

Se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Segue que:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Portanto, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

As relações $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$ são chamadas de **soma** e **produto** das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e podem ser utilizadas para determinar os zeros da função quadrática. Veja na atividade resolvida a seguir a determinação dos zeros da função utilizando soma e produto.

Extraído de Souza (2013, p.126)

Novamente, vale ressaltar que o autor, apesar de mostrar esse método o que já pode ser considerada uma ampliação da praxeologia, porém, em nenhuma outra atividade ele faz menção ao método e tão pouco utiliza esse método nas soluções das atividades no manual do professor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> […]A teoria antropológica da didática (TAD), as formas de organizar o ensino escolar em matemática são descritas em termos de praxeologias didáticas e, como tal, possuem uma estrutura composta por dois blocos inseparáveis: o bloco técnico prático (praxis ou "fazer" didática) e o bloqueio tecnológico-teórico (logos ou "conhecimento didático"). Como em todas as atividades humanas, a prática didática, que consiste em tarefas didáticas e técnicas, só pode viver normalmente em uma instituição se houver um discurso didático tecnológico-teórico capaz de descrever, justificar, interpretar e desenvolver a praxis, também fornecendo critérios para projetá-lo e gerenciá-lo (BOSCH e GASCÓN, 2010, p.57-58, tradução nossa.).

Nosso trabalho consiste em uma análise de um Livro Didático de matemática do 1º ano do Ensino Médio. Análise essa, que buscou identificar indícios nas atividades propostas pelo autor do Livro Didático que levassem o aluno para além de uma praxeologia pontual. Com isso, esperamos responder ou gerar elementos para discutir a questão de pesquisa, que foi verificar se o livro proporciona ao estudante uma passagem do bloco prático-técnico [T, τ] para o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ].

Para esse fim, percorremos algumas etapas, primeiro buscamos nos documentos curriculares sobre o que eles falam sobre o Ensino de Matemática na Educação Básica. Na sequência, realizamos uma pesquisa bibliográfica acerca da evolução histórica do conceito de função destacando essa evolução a partir dos personagens que contribuíram de maneira historicamente relevante para o desenvolvimento desse conceito. Procuramos também, esclarecer os fundamentos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta pelo Educador matemático Yves Chevallard na década de 90, como uma expansão da Teoria da Transposição Didática do mesmo autor, que em nosso trabalho utilizamos como proposta teórico-metodológica. Visto que nosso objeto foi Função Quadrática na sequência realizamos um levantamento de como é tratado esse conceito nos documentos curriculares nacionais e estaduais.

Para realizar a análise, elencamos oito (08) tipos de tarefa como categorias de análise sendo que em três delas, T.1, T.4 e T.8 determinamos, para realizar uma análise mais precisa e objetiva, alguns subtipos de tarefas sendo seis (06) subtipos para a primeira, quatro (04) subtipos para a segunda e dois (02) subtipos para a terceira. O que gera um total de 17 categorias de análise. Das quais, descrevemos e exemplificamos uma a uma na seção 3.3 da análise.

Quanto à tarefa T.1, percebemos que seus cinco (05) subtipos de tarefa evidenciam aspectos diferentes dessa tarefa. O subtipo de tarefa T.1.1 instiga o estudante a reconhecer uma Função Quadrática através de sua lei de formação, tanto se for dada já na forma de um polinômio de segundo grau, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, quanto se for dado como uma expressão algébrica (operações com monômios ou polinômios) qualquer, na qual ao realizar as operações necessárias se tem claramente um polinômio do segundo grau de uma variável na forma $ax^2 + bx + c$. O subtipo de tarefa T.1.2 os estudantes têm que identificar qual o valor dos coeficientes a, b e c, visto que todas as propriedades e pontos em destaque na representação gráfica da Função Quadrática (concavidade, zero, vértice...) dependem de um ou mais desses coeficientes - identificá-los - torna-se uma tarefa crucial para o estudo analítico dessa função.

O Subtipo T.1.3 envolve as atividades em que se pede, ouse faz necessário determinar a lei da Função Quadrática, ou seja, a atividade consiste em determinar os coeficientes dessa função conhecendo três de seus pontos, ou um ponto e o vértice da parábola, como sugerido na analise as atividades desse tipo de tarefa que sempre terminam em um sistema de equações onde as incógnitas são os coeficientes da função. Por exemplo, na atividade 11 (ver figura 6) eram dados $h(-1) = 8, h(0) = 3\ e\ h(1) = 0$ e era solicitado o valor de $h(3)$. Vemos que o objetivo é determinar a imagem de 3, porém é necessário determinar antes a lei da função.

Nas atividades do subtipo de tarefa T.1.4 o estudante tem que reconhecer que dado um ponto (x_1, y_1) e uma função f se $(x_1, y_1) \in f$ então é verdade a sentença $y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c$. Dois tipos de atividades foram encontrados com esse tipo de tarefa o primeiro em que é dado alguns pontos se pergunta quais deles pertencem a função dada. No outro de dá uma função do tipo $f(x) = g(k)x^2 + h(k)x + j(k)$,ou seja, com os coeficientes dados em função de uma variável k, e se pede para quais valores de k um ponto dado (x_1, y_1) pertence a função dada.

O subtipo de tarefa T.1.5 consiste em esboçar o gráfico de uma dada Função Quadrática, observamos na análise que nas três atividades que envolvem esse tipo de tarefa vão aperfeiçoando a técnica de construção de gráfico. Para resolução da primeira atividade o estudante tem três informações. Primeiro que o gráfico da Função Quadrática é uma parábola e pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo. Segundo que o eixo de simetria passa por um ponto da parábola chamado vértice. Terceiro que $f(0) = c$, ou seja, seu gráfico intercepta o eixo das ordenadas na ordena c. Com estas informações, só restará aos estudantes seguir o exemplo do autor, que determina valores para x encontra suas imagens e representar no plano os pontos encontrados.

Contudo, nas outras duas atividades, que são apresentadas depois do estudo em detalhes sobre o discriminante, os zeros as coordenadas do vértice da Função Quadrática, principalmente a R8 (ver figura 10), o estudante é guiado para construir o gráfico utilizando essas informações. Fato que em nossa análise, afirmamos que nesse momento ocorre uma ampliação da praxeologia, que deixa de ser uma praxeologia pontual e passa a ser uma praxeologia local que para TAD é aquela que é composta de varias técnicas em torno de uma teoria, de modo que podemos ver aqui que o estudante para desenvolver essa atividade tem que condensar e interpretar diversas técnicas, a saber: T.1.1, T.1.2, T.1.3, T.1.4, T.1.6, T.4 e T.8.

Nas atividades do tipo de tarefa T.1.6 se deve calcular a imagem de um dado x do domínio. Esta atividade é comum durante todo o capítulo, é um tipo de praxeologia pontual é sempre aplicação direta da mesma técnica. Do exposto acima, podemos afirmar que a atividade T.1 com todos seus subtipos de tarefas podem configurar uma praxeologia local, pois, esta é tida como uma combinação de praxeologias pontuais em torno de uma tecnologia θ. Ou seja, temos que cada subtipo de tarefa evidencia uma técnica diferente.

Já com relação à tarefa T.2 envolve uma habilidade muito citada nos documentos curriculares ‘reconhecer a função quadrática como representação de fenômenos naturais ou situações reais práticas’. Vimos na análise que as atividades que envolvem essa praxeologias não apresentam grandes variações é dada uma situação problema e para o estudante resolver o que se pede ele precisa determinar a lei da Função Quadrática que representa essa situação (ver figura 13). No geral, nessas atividades há sempre a aplicação de uma mesma técnica (manipulações de expressões algébricas) para resolver diferentes exemplos do mesmo tipo de tarefa. Então podemos afirmar que para T.2 a praxeologia é pontual.

No tipo de tarefa T.3 abrem discussões sobre o domínio de validade de uma Função Quadrática, ou seja, reconhecer que em dadas situações práticas o domínio de validade para a situação deve ser restringido, por exemplo, na atividade da figura 12 temos que a área do losango para valores $x < 0{,}4$ não faz sentido pois as imagens seriam negativas, entretanto, área é uma grandeza estritamente positiva. Essa também é uma habilidade que complementa o tipo de tarefa T.2. Pois, além o estudante saber representar uma situação utilizando uma função quadrática é importante que ele reconheça as limitações de sua representação.

O tipo de tarefa T.4 é bem variado quanto as suas tarefas e nas suas técnicas, seguindo o padrão da tarefa T.1 o subdividimos em quatro (04) subtipos de tarefas para melhor estudá-lo e tal como na tarefa T.1 os subtipos abordam aspectos diferentes do reconhecimento no gráfico de elementos da Função Quadrática.

Se destacarmos o subtipo T.4.4, podemos perceber que no decorrer do capítulo algumas praxeologias avançaram, no sentido, de que foram além de uma praxeologia pontual, por exemplo, na questão 31 da página 132 (ver figura 20) onde, o autor usa as fórmulas para calcular as coordenadas do vértice de funções quadráticas do tipo $f(x) = (x+p)^2$. Objetivando que o aluno perceba o padrão existente nas coordenadas do vértice, ou seja, que o vértice sempre será o ponto $(-p, 0)$

Consideramos que do ponto de vista praxeológico, apesar das tarefas ‘determinar as coordenadas do vértice da parábola’ e ‘calcular o máximo ou mínimo da Função Quadrática’, serem realizados com a mesma técnica. Consideramos aqui que ambas são tarefas essencialmente diferentes. Pois a primeira não interessa por exemplo a concavidade da parábola, enquanto que para classificar se o vértice é ponto de máximo ou mínimo tem que se considerar o valor do coeficiente o termo de grau 2.

Pensamos que no universo de técnicas, tarefas e tecnologias envolvidas na tarefa T.4, podemos aqui avançar para uma praxeologia regional ou o mais próximo que o livro chega de uma praxeologia regional dentro do conceito de Função Quadrática.

As atividades relacionadas ao tipo tarefa T.5 consistem em ‘reconhecer as relações entre os coeficientes da Função Quadrática e seu gráfico. A habilidade desenvolvida por esse tipo de tarefa pode ser utilizadas para que o estudante tenha uma visão ampla juntamente com os tipos de tarefa T.4, T.3 e T.6 da representação gráfica da Função Quadrática e de como esta, está associada a sua representação algébrica. Juntas esses tipos de tarefa também, em nossa análise, formam uma praxeologia local, novamente um conjunto de tarefas e técnicas em volta de uma tecnologia.

Já o tipo de tarefa T.7 foi proposto por nós, por ser uma das expectativas de aprendizagem apontadas no PCPE (2012), contudo, não identificamos no capítulo de Função Quadrática nenhuma atividade que proporcionasse ao estudante fazer essa relação entre o Movimento Uniformemente Variado e a Função Quadrática.

O ultimo tipo de tarefa T.8 é uma das expectativas dos PCPE (2012) e os problemas que envolvem Função Quadrática, nos quais tem que se determinar um valor do domínio cuja imagem é um y dado, ou nas questões que solicitam que sejam determinados os zeros da Função Quadrática, ou seja, quando este $y = 0$. No geral todas essas atividades, segundo as resoluções apresentadas pelo autor no manual do professor, consistem na aplicação de uma mesma técnica a ‘fórmula de Bhaskara’. Portanto, aqui percebemos que esta praxeologia é pontual.

Do exposto, consideramos que no geral há pontos em que a praxeologia é expandida, chegando a um discurso tecnológico de justificação e percepção de regularidades na aplicação de algumas técnicas, por exemplo, na questão 31 onde o estudante é convidado a perceber a regularidade das coordenadas do vértice de uma Função Quadrática na forma $f(x) = (x + p)^2$ ou a questão 19 onde o estudante observa que valores do domínio equidistantes da abscissa do vértice têm sempre mesma imagem. Nessas praxeologias, podemos classificá-las como praxeologias regionais.

Entretanto, em outros pontos a aplicação repetitiva de uma mesma técnica ou procedimento, Sobretudo quando se existem técnicas diferentes para se realizar essa tarefa como no caso a tarefa T.8, deixam a praxeologia matemática mais para uma praxeologia pontual. Onde se concentram os esforços na reprodução de uma mesma técnica.

Acreditamos que este trabalho, aponta para necessidade de se pensar a atividade matemática diferente do resolver ou calcular, no qual você tem uma técnica ‘receita’, ou seja, é só substituir os valores (ingredientes) na ordem correta e nas devidas proporções você acha a solução.

Quando questiono algumas pessoas (amigos, colegas de trabalho) que estudaram matemática na escola a respeito dessa experiência, mesmo aqueles que eram considerados bons alunos afirmam coisas como, ‘é só saber a fórmula’, ‘se resolvesse um conseguia resolver todos’ ou ainda afirmam ‘ nem lembro fazia o que professor mandava acertava’. Ou seja, a matemática muitas vezes se resume a execução de procedimentos, desconexos, desconectados do real e sem significado. São trabalhados e avaliados procedimentos sem levar em conta a construção da técnica, suas limitações ou a existência de técnicas que poderiam em determinadas tarefas diminuir ou até mesmo extinguir cálculos desnecessários.

Organizar as atividades de modo que sejam abordados, sempre que possível diversas tarefas e diversas técnicas que possam levar o estudante a estabelecer relações melhores entre os conceitos, e seus problemas, ou suas representações e construir um ‘discurso tecnológico’ (justificativas das técnicas utilizadas) coerente.

Lembramos também que o livro é só uma ferramenta, e que como tal, é parte do processo a outra parte e mais importante é o professor. Ao professor cabe a escolha do livro que melhor se adequa a realidade de seus estudantes, e é capaz inclusive de complementar o livro quando este mesmo adequado não for suficiente. E para professor além do livro podem ser utilizadas outras ferramentas que auxiliem o trabalho, por exemplo, um software matemático, um jogo ou até mesmo uma atividade prática de construções geométricas.

Este, como em outros trabalhos acadêmicos, faz-se um recorte sobre o que se observa. Consideramos apenas um aspecto de uma realidade de infinitas possibilidades, limitamo-nos aqui, a análise do Livro Didático. Contudo, o processo de ensinar e aprender, em relação à Função Quadrática é dinâmico e se forem observados outros pólos existentes na sala de aula, como o professor ou o aluno, possivelmente teremos outras considerações a serem feitas nesse processo. Podemos pensar em algumas questões, teoricamente, partimos da hipótese de que se o estudante for ‘apresentado’ a diversos tipos de tarefa e diversas técnicas e justificativas tecnológicas ele terá um diferencial em sua aprendizagem, ou seja, iria além do ‘saber-fazer’.

Algumas perguntas ainda nos acompanham e novas foram construídas pelo caminho. Podemos exemplificar essas nossas inquietudes:

- Os estudantes apresentados a mais técnicas, resolveriam mais facilmente problemas que outros que aprendem apenas uma técnica geral?

- O que seria uma boa tarefa Matemática?

- O que os professores da Educação Básica pensam das tarefas (atividades) que propõem em sala de aula, favorecem a ampliação de um conceito ou simplesmente é uma aplicação de um conceito?

Contudo, são hipóteses que poderão (e deverão) ser respondidas em um outro momento.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. J. *O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático*. 290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BARBOSA, Edelweis José Tavares; LINS, Abigail Fregni. *Introdução à Álgebra Escolar nos Livros Didáticos de matemática do ensino fundamental II. In*: Congresso de Pós-Graduação e Pesquisa, 2009, Campina Grande. Pos- graduação, 2009

BELTRAME, Juliana Thais. *A Álgebra nos livros didáticos: um estudo dos usos das variáveis, segundo o modelo 3UV*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). São Paulo: PUC, 2009. 157 f.

BELTRAME, J. T. ; BIANCHINI, B. L. . Concepções da Álgebra nos Livros Didáticos: a necessidade de uma inter-relação para o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro. Caderno de Resumos. Rio Claro, 2008.

BESSA DE MENEZES, M. (2004). *Investigando o processo de transposição didática interna: o caso dos quadriláteros.* 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

BESSA DE MENEZES, Marcus. Investigando o processo de transposição didática interna: o caso dos quadriláteros. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE-PE, Recife, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(PCNEM): Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 2000.

______. Secretaria de Educação Fundamental. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionai (PCN+):Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/SEF, 2002.

CAMARA, Marcelo; CASTRO, José Aires de; BITTAR, Marilena. *Desafios para a pesquisa em Educação Matemática na sala de aula*. In anais do 2º SIPEMAT (Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática) 2008.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Educação Matemática no Brasil: uma meta-investigação. **Quadrante-Revista Teórica e de Investigação**, Lisboa, v. 9, n. 1, p. 117-140, 2000.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91 - 118. Actes de l'Univessité d'été La Rochelle, IREM, Clermont-Ferrand, France, 1998.

_____________. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.
Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 81-

104, 2003.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática hoje: Porque e Como? In Anais do XII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática SBEM). 2016

LOPES, Luísa Adélia. *Aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações no 8º ano com Recurso à Calculadora Gráfica. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática). Faculdade de Ciências e Tecnologia- Universidade de Nova Lisboa. Lisboa, 2014.*

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NUNES, Everardo Duarte. *Pequeno guia/vocabulário para a utilização da história arqueológica como instrumento de pesquisa qualitativa.* In.: **Interface - Comunic, Saúde, Educ**, v6, n10, p.125-34, fev 2002

OLIVEIRA, Nanci de. *Conceito de função: uma abordagem do processo Ensino-Aprendizagem.Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.*

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação Estadual de Pernambuco. *Base Curricular Comum para as redes Públicas de Ensino em Pernambuco: Matemática*. Pernambuco, 2008.

______. Secretaria de Educação Estadual de Pernambuco. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. Pernambuco,2012.

PONTE, João Pedro da. *O conceito de função no curriculo de Matemática.In : Educação Matemática. V.15. Lisboa, 1990.*

PRADANOV, Cleber Cristiano. Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico, 2ªed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.