



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

Gabriel Oliveira Primo

**PADRÃO DE AGLOMERAÇÃO INTRADIÁRIO DO MERCADO DE AÇÕES
BRASILEIRO: ANÁLISE EXPLORATÓRIA COM PROCESSO DE HAWKES**

**Recife
2018**

GABRIEL OLIVEIRA PRIMO

**PADRÃO DE AGLOMERAÇÃO INTRADIÁRIO DO MERCADO DE AÇÕES
BRASILEIRO: ANÁLISE EXPLORATÓRIA COM PROCESSO DE HAWKES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Moura Azevedo.

Coorientador: Prof. Dr. Raydonal Ospina Martínez.

Recife

2018

Catálogo na Fonte

Bibliotecária Ângela de Fátima Correia Simões, CRB4-733

P953p

Primo, Gabriel Oliveira

Padrão de aglomeração intradiário do mercado de ações brasileiro: uma análise exploratória com processo de Hawkes / Gabriel Oliveira Primo. – 2018.

41 folhas: il. 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Moura Azevedo e coorientador Prof. Raydonal Ospina Martínéz.

Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal de Pernambuco, CCSA, 2018.

Inclui referências.

1. Processos pontuais. 2. Finanças. 3. Padrão intradiário. I. Azevedo, Rafael Moura (Orientador). II. Martínéz, Raydonal Ospina (Coorientador). III. Título.

336

CDD (22. ed.)

UFPE (CSA 2018-097)

GABRIEL OLIVEIRA PRIMO

**PADRÃO DE AGLOMERAÇÃO INTRADIÁRIO DO MERCADO DE AÇÕES
BRASILEIRO: análise exploratória com processo de Hawkes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas – Economia Aplicada.

Aprovada em: 23/02/2018.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Rafael Moura Azevedo (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Raydonal Ospina Martinez (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^o. Dr. José Javier Cerda Hernandez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

À Maria de Fátima Silva de Lira.

AGRADECIMENTOS

À Georgia Ramine Silva de Lira pela paciência e dedicação.

RESUMO

O presente trabalho demonstra, utilizando dados financeiros em alta-frequência, que o ajuste de uma classe específica de processo pontual, o processo de Hawkes, capta características bem conhecidas destes dados na literatura, tal como a maior intensidade de transações no início e final de um dia de transação. Revisa o conteúdo necessário para definir um processo pontual auto excitante, particularmente, o processo de Hawkes. Argumenta que o ajuste deste processo na sua forma univariada sobre a contagem da mudança (saltos) do preço de um ativo descreve as características irregulares com precisão maior que processos pontuais que não são auto excitantes. Contando os momentos de mudança do preço de um ativo cujo valor reflete o valor de mercado brasileiro, BOVA11, e de outro ativo com alto volume de negociação, PETR4, o presente trabalho dispõe a trajetória da média intradiária dos parâmetros do processo de Hawkes exponencial. Discute acerca da limitação do significado deste ajuste, em especial a noção de reflexividade de mercado e propõe os próximos passos para aprimorar em precisão e aplicabilidade a análise empírica aplicada.

Palavras-chave: Processos Pontuais. Finanças. Padrão Intradiário.

ABSTRACT

The present work demonstrates, using high-frequency financial data, that a class of point process, the Hawkes' Process, captures known aspects of this kind of data, e.g. the U-shaped intraday volume. The needed content to define a self-exciting point process is revised, specifically the Hawkes' Process. The author argue that the adjustment of a univariate Hawkes' Process is more precise in capture the irregularities of a count of an asset's price change than a not self-exciting point process. Observing the price change moments of an asset that reflects the Brazilian market value, BOVA11, and another with high negotiation volume, PETR4, the present work display the exponential Hawkes' Process average intraday parameters. It is discussed the limitation of the interpretation of the adjustment results, in special the market reflexivity concept, and next steps are proposed to develop the precision and application of the empirical analysis.

Keywords: Point Process, Finance, Intraday Pattern.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Aglomeração visualizada no intervalo de 10 minutos da manhã de 28/01/2016..	12
Gráfico 2 - Mediana Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita).	37
Gráfico 3 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 10 minutos.	37
Gráfico 4 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 20 minutos.	38
Gráfico 5 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 30 minutos.	38
Gráfico 6 - Trajetória Semanal de μ , n e volume - janelas de 10 minutos - BOVA11 40.	39
Gráfico 7 - Trajetória Semanal de μ , n e volume - janelas de 10 minutos - PETR4 . 40.	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Base Original PETR4.....	28
Tabela 2 – Base Tratada PETR4.....	30
Tabela 3 – BOVA11: eventos por intervalos.....	33
Tabela 4 – PETR4: eventos por intervalos.....	34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 DEFINIÇÕES E LOCALIZAÇÃO TEÓRICA	13
2.1 PROCESSO DE POISSON	17
2.2 PROCESSO DE HAWKES.....	20
3 MÉTODO E DADOS EM ALTA FREQUÊNCIA	27
3.1 TRATAMENTO E AJUSTE	28
3.2 DADOS DE TRANSAÇÃO	32
3.2.1 Bid-ask bounce.....	32
3.2.2 Saltos simultâneos.....	34
4 AJUSTE	35
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
REFERÊNCIAS	41
APÊNDICE A - ARMAZENAMENTO	43

1 INTRODUÇÃO

A disponibilidade de dados financeiros em alta-frequência dá a oportunidade de reaccessar conceitos bem conhecidos e estabelecidos na área de finanças. O formato em U no volume de transações intradiárias, picos no volume transacionado no início e final do período de bolsa aberta, é um destes conceitos. Propõem-se reobservar este fenômeno através de um método econométrico que leva em consideração características específicas destes dados. A irregularidade da distância de tempo entre eventos, sejam chegadas de ordens ou mudanças no preço, é uma característica fundamental na econometria de finanças em "ultra-alta-frequência" (HAUTSCH, 2011).

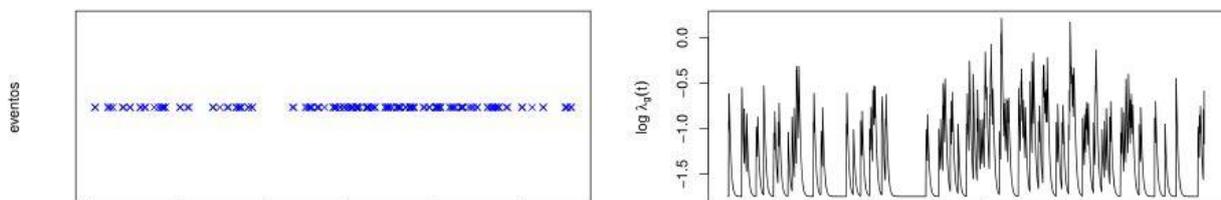
Dentre os modelos econométricos que observam estas características, o espaçamento irregular entre eventos nos dados de transação, ressalta-se aqueles que levam em consideração a dependência temporal destes eventos. Engle e Russel (1998) comparam a intensidade condicional do tempo entre eventos financeiros (observados como processos estocásticos) de modelos de duração condicional autorregressiva com outros modelos auto-excitantes. Esta discussão perdura de forma que o processo de Hawkes, um destes processos auto-excitantes, tem sido usado com sucesso em dados de alta-frequência.

As variáveis observadas no presente trabalho refletem o processo de precificação dos ativos considerados, quais sejam, o BOVA11 e o PETR4, negociados na BM&F Bovespa, que descreve, com o perdão do uso meramente descritivo da expressão, dinâmicas de aglomeração. Esta característica de aglomeração no tempo, a incidência de mudanças no preço com concentração em torno de pontos desigualmente espaçados e com dissipação gradual é modelada pelo processo de Hawkes. Apesar deste processo ser aplicável a processos multivariados, ou seja, a dois ou mais processos pontuais cujas intensidades são auto-excitantes e se influenciam cruzadamente o presente trabalho apela para a simplicidade do processo univariado. Para um resumo útil da aplicação do processo de Hawkes a dados financeiros recomenda-se Bacry, Mastromatteo e Muzy (2015).

A medida para precificação do ativo utilizada é o preço de transação, ou seja, o preço sob o qual cada observação, cada conjunto de transações da execução de uma ordem de compra ou venda, ocorreu. O salto no processo pontual derivado desta série é o momento de dada transação que se dá a preço diferente da

transação anterior. O uso dos preços de transação é a diferença fundamental entre o presente trabalho e o de Filimonov e Sornette (2012) que fornece o conjunto de tratamentos e estimações aqui apresentados. Para visualizar a série de saltos proveniente dos dados de transação disponibiliza-se 1, que demonstra os momentos em que se executou uma transação a um preço diferente da execução anterior.

Gráfico 1 - Aglomeração visualizada no intervalo de 10 minutos da manhã de 28/01/2016.



Fonte: Dados trabalhados pelo autor.

Nota: Esquerda: Saltos no preço de transação do ativo PETR4 no intervalo de 11:10 e 11:20 do dia 28/01/2016. Um salto é o momento em que uma transação se dá a preço diferente da anterior. Direita: Intensidade do modelo de Hawkes exponencial estimada por máxima verossimilhança. Na variável corrente as unidades são os segundos e o 1 é o tempo 11:10:15.742.

Modelar a formação de preço como um processo de saltos puro é uma das formas de decompor o processo estocástico em questão (SHREVE, 2010). Apesar da simplicidade esta abordagem tem se apresentado robusta (JING; KONG; LIU, 2012).

O recente sucesso da utilização do processo de Hawkes aplicado a finanças reside na sua simplicidade ao captar dois aspectos da forma como uma série de saltos se auto-excita e, portanto, indica como sua aglomeração pode ser decomposta: a intensidade com que um salto provoca saltos subsequentes e a duração deste efeito. A parametrização escolhida do processo fornece de maneira simples estas informações. No modelo usado aqui, a parametrização exponencial, estas informações são sintetizadas por dois parâmetros cuja razão fornece outras características fundamentais ao processo, informa se o processo é estacionário ou não e a fornece a proporção de saltos provocados por outros saltos, o que é possível argumentar que é uma medida parcimoniosa de sensibilidade do processo.

Portanto observamos a trajetória média intradiária da parcela da intensidade não auto-excitante e a mesma trajetória da medida de sensibilidade do processo. Tal

apresentação é feita na seção final e as seções anteriores formalizam o processo de Hawkes e detalham o processo de estimação.

2 DEFINIÇÕES E LOCALIZAÇÃO TEÓRICA

Processos estocásticos são o ramo da teoria da probabilidade dedicado a tratar sistemas probabilísticos que resultam em realizações no tempo (GALLAGER, 2013). O núcleo da teoria da probabilidade é o modelo de probabilidade ou espaço de probabilidade, definido com a ajuda da noção de experimento. Um experimento é o processo randômico pelo qual um elemento de um conjunto de possibilidades bem conhecidas se realiza.

Modelo de probabilidade: Um modelo de probabilidade é composto por três elementos, o espaço amostral, o conjunto dos eventos e uma função que associa a cada evento uma probabilidade, definidos entre si da maneira a seguir.

O espaço amostral, Ω , é o conjunto de resultados de um experimento. Se $\omega \in \Omega$, então ω é um resultado completo e especificado de tal forma que o conjunto $\{\omega\}$ não possui subconjuntos próprios.

O conjunto de eventos \mathbf{F} é um conjunto de subconjuntos de Ω . Consideraremos aqui somente \mathbf{F} que sejam σ -álgebra sobre Ω , ou seja, um conjunto que contém Ω e que dado que possui um elemento, possui o seu complementar (fechado sob complementares), e dado que possui um conjunto contável de elementos, então possui a união destes conjuntos (fechado sob união contável). O maior σ -álgebra de Ω é o conjunto de todos os seus subconjuntos. A σ -álgebra mínima de Ω é o conjunto $\{\Omega, \emptyset\}$.

A medida de probabilidade \mathbf{P} é uma função associada a \mathbf{F} que resulta em valores no intervalo real $[0, 1]$, associando 0 ao conjunto vazio e 1 a Ω , e que satisfaz a propriedade da aditividade contável. Portanto a medida de probabilidade $\mathbf{P} : \mathbf{F} \rightarrow [0, 1]$, com $E \in \mathbf{F}$ tal que

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Para qualquer sequência E_1, E_2, \dots de eventos mutuamente exclusivos;

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Variável aleatória: Uma variável aleatória, ou *va*, X é uma função associada a determinado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ que associa a cada elemento de Ω um valor real pertencente a um conjunto R_X de valores reais, de forma que, B , um subconjunto de R_X está associado a um evento $E_i \in \mathbf{F}$ como

$$E_i = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}, \quad (2.1)$$

de forma que E_i e B são eventos equivalentes, ou, $P\{E_i\} = P\{B\}$.

Para que esta definição esteja completa é necessário adicionar que X pode ser indefinida ou infinita para subconjuntos de Ω que a função P atribui valor nulo. Se X é *va* deve ter a propriedade de que $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$ é um evento para todo $x \in \mathbb{R}$. Se X_1, X_2, \dots, X_n é um conjunto finito de *vas*, então o conjunto $\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$ é um evento para qualquer conjunto de valores reais x_1, x_2, \dots, x_n .

Função de densidade acumulada: A função de densidade acumulada (FDA) associada a determinada *va* é uma função determinada para todo o conjunto dos reais que provê a probabilidade de X ser menor ou igual a dado valor real. Portanto, dada X *va*, a FDA de X é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \in (-\infty, x]\}. \quad (2.2)$$

Função de probabilidade: Se o conjunto de todos os valores que dada *va* X assume, R_X , é contável, então X é dita discreta. Para dada *va* discreta associa-se aos valores $x_i \in R_X$ função de probabilidade $p_X(x_i) = P\{X = x_i\}$, que como medida de probabilidade respeita

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq 0 \text{ e,} \\ \text{ou } \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) &= 1 \text{ se } R_X \text{ é infinito e contável,} \\ \text{ou } \sum_{i=1}^n p(x_i) &= 1 \text{ se } R_X \text{ contém } n \in \mathbb{R} \text{ elementos.} \end{aligned}$$

Função densidade probabilidade: Se a FDA de dada *va* X tem uma derivada finita no ponto x , esta derivada é chamada função de densidade probabilidade (fdp) de X no ponto x , $f_X(x)$. Para $\delta > 0$ suficientemente

pequeno $f_X(x) \cdot \delta$ aproxima a probabilidade de que X estará contida no intervalo $(x, x + \delta)$. Formalmente, com $h > 0$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) \\ &= \frac{d}{dx} Pr\{X \leq x\} \therefore \\ f_X(x) \cdot dx &= dPr\{X \leq x\}. \text{ Assim como, se} \\ f_X(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Pr\{X \leq x+h\} - Pr\{X \leq x\}}{h} \therefore \\ f_X(x) \cdot h &\rightarrow Pr\{X \leq x+h\} - Pr\{X \leq x\} = Pr\{x \leq X \leq x+h\} \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$. Uma *va* é dita contínua se existe uma função $f_X(x)$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$ a FDA associada a X satisfaz $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$.

Função de risco: Dada uma *va* contínua e funções associadas $F_X(x)$, FDA, e $f_X(x)$, fdp a função de risco $\lambda(t)$ é dada por

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}. \quad (2.3)$$

Função de distribuição conjunta: Sejam X_1, X_2, \dots, X_n *vas*, a função densidade probabilidade conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n , F_{X_1, X_2, \dots, X_n} é definida por

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}. \quad (2.4)$$

Se tais *vas* forem discretas, a função de probabilidade conjunta p_{X_1, X_2, \dots, X_n} se define por

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Pr\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}. \quad (2.5)$$

Se tais *vas* forem contínuas, a função de densidade probabilidade conjunta f_{X_1, X_2, \dots, X_n} se define por

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}}{dx_1 dx_2 \dots dx_n}. \quad (2.6)$$

Processo estocástico: Um processo estocástico é uma família de *vas* $\{X(t), t \in T\}$ onde T é um conjunto de índices, geralmente um conjunto de valores reais utilizados para denotar o tempo.

É usual se referir a um processo estocástico como uma variável aleatória que ocorre no tempo, ou seja, para cada elemento de certo conjunto de momentos a variável assume um valor, se realiza. Esta interpretação é limitada, dado que a definição de processo estocástico não presume que os índices em T , acima, são momentos, porém não há perdas, em se considerando que o presente trabalho trata de valores financeiros que variam temporalmente, em manter em mente que tais processos tenham essa conotação temporal. A seguir, usa-se a palavra "evento" de maneira diferenciada como até então e cabe a seguinte ressalva com o intuito de evitar a ambiguidade.

"Evento" a seguir se refere a um único fenômeno que pode ocorrer repetidamente, assim como pode se referir aos momentos em que estes ocorreram. Um exemplo chave para o presente trabalho é considerar o evento "o último valor pelo qual a ação x foi negociada muda", ou seja, se um grande número de transações de compra e venda ocorre por um mesmo valor durante dado período, o evento não ocorreu. Se a seguir realiza-se uma ordem a um preço diferente do praticado no intervalo o evento ocorreu no momento em que a ordem foi executada. Refere-se a esta ordem que foi executada no momento t como o evento t . Não por acaso esta última maneira de se referir ao momento de ocorrência do evento é dita também um salto, ou seja, o momento em que uma variável muda de valor.

Processo de chegadas: Um processo de chegadas $\{T_i\}_{i \geq 1}$, sequência crescente, é um processo estocástico em que $i \in \mathbb{Z}, T_{i+1} - T_i$ é uma va tal que $F_{T_{i+1}-T_i}(0) = 0$. A va $T_{i+1} - T_i = X_{i+1}$ é chamada duração entre eventos, subentendendo-se que T_i denota o momento da ocorrência de um evento e que X_i é medida sempre para eventos subsequentes. A relação entre a sequência de durações entre eventos e as chegadas é $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Processo de contagem: Um processo de contagem $\{N(t)\}_{t > 0}$ é uma família infinita e não-contável de vas $N(t)$ que denotam o número de vezes que um dado evento correu no intervalo $(0, t]$ e cuja probabilidade $\Pr\{N(0) = 0\} = 1$. Se a repetição de dado evento gera um processo de contagem $\{N(t)\}_{t > 0}$ e um processo de chegadas $\{T_i\}_{i > 1}$ em dada sequência de realizações, vale a identidade entre os eventos

$$\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}. \quad (2.7)$$

Processo de renovação: Um processo de chegadas cujas durações entre eventos $\{X_i\}_{i>1}$ são v.a.s independentes e identicamente distribuídas é chamado de processo de renovação.

2.1 PROCESSO DE POISSON

Processo de Poisson: Um processo de Poisson é um processo de renovação, cujas durações entre eventos são v.a.s independentes e com distribuição exponencial, i.e., a série $\{X_i\}_{i>1}$ é tal que $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \forall i > 1$.

Como o processo de Poisson constitui um processo de renovação, ele constitui um processo de chegadas, cuja distribuição é obtida com o fato de que $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$. As v.a.s $\{T_i\}_{i>1}$ associadas ao processo de Poisson podem ser obtidas por convolução das f.d.p.s de X_i , lançando-se mão do fato de que estas v.a.s são independentes e seus domínios são o conjunto real $[0, \infty[$. Portanto se nestas condições a f.d.p. de T_2 é obtida com a seguinte operação,

$$\begin{aligned} f_{T_2}(t) &= (f_{X_1} * f_{X_2})(t) \\ &= \int_0^t f_{X_1}(\tau) f_{X_2}(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(\tau)} \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda(\tau+t-\tau)} d\tau \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} t. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para a generalização para T_n observa-se que $T_n = X_n + T_{n-1}$ e o fato de que f_{T_n} também tem suporte em $[0, \infty[$ para obter $f_{T_n} = \int_0^t f_{X_n}(\tau) f_{T_{n-1}}(t-\tau) d\tau$. A generalização evidente é

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.9}$$

Para obter a f.d.p. da v.a. que consiste na duração entre o salto m e n , dado $n > m$, $T_n - T_m = \sum_{i=m+1}^n X_i$ usa-se o mesmo procedimento acima para obter

$$f_{\sum_{i=m+1}^n X_i}(t) = \frac{\lambda^{n-m} e^{-\lambda t} t^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \tag{2.10}$$

Para obter a distribuição conjunta das chegadas $\{T_n\}_{1 \leq i \leq n}$ pode-se observar a seguinte decomposição.

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{T_1}(t_1) \times f_{T_2|T_1}(t_2|t_1) \times \dots \times f_{T_n|T_1, T_2, \dots, T_{n-1}}(t_n|t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \quad (2.11)$$

Se observarmos que

$$\begin{aligned} f_{T_n|T_1, T_2, \dots, T_{n-1}}(t_n|t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) &= \frac{d}{dt} Pr\{T_n < t | T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_{n-1} = t_{n-1}\} \\ &= \frac{d}{dt} Pr\{X_n + t_{n-1} < t\} = \frac{d}{dt} Pr\{X_n < t - t_{n-1}\} \\ &= \frac{d}{dt} (1 - e^{-\lambda \cdot (t - t_{n-1})}) \\ &= \lambda e^{-\lambda \cdot (t - t_{n-1})}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

pode-se verificar que (2.11) se iguala a

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}. \quad (2.13)$$

Para obter a distribuição do processo de contagem associado ao processo de poisson, pode-se observar que, dado que seus resultados formam um conjunto contável, a função de probabilidade de $N(t)$ é obtida observando-se a independência entre as vas T_n e X_{n+1} como a seguir.

$$\begin{aligned} p_{N(t)}(n) &= Pr\{N(t) = n\} = Pr\{(T_n < t) \cap (T_{n+1} > t | T_n < t)\} \\ &= Pr\{(T_n < t) \cap (X_{n+1} > t - t_n)\} \\ &= \int_0^t \int_{t-t_n}^{\infty} f_{T_n, X_{n+1}} dx_{n+1} dt_n \\ &= \int_0^t \int_{t-t_n}^{\infty} f_{T_n}(t_n) f_{X_{n+1}}(x_{n+1}) dx_{n+1} dt_n \\ &= \int_0^t \int_{t-t_n}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n} t_n^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} dx_{n+1} dt_n \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t e^{-\lambda t} t_n^{n-1} dt_n \\ &= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

O processo de Poisson é dito ter incrementos estacionários, pois a distribuição do número de ocorrências entre quaisquer momentos s e t , onde $t > s > 0$, tem a mesma função de probabilidade que o número de ocorrências de 0 a $t - s$. Para observar tal fato define-se a função de probabilidade da va $N(t) - N(s)$, $p_{N(t)-N(s)}(n)$, dados s e t .

$$Pr\{N(t) - N(s) = n\} = Pr\{(N(s) = x - n) \cap (N(t) = x), \forall x \geq n, x \in \mathbb{Z}^+\} \quad (2.15)$$

$$= Pr\{(T_{x-n} < s) \cap (s < T_{x-n+1} < t | T_{x-n} < s) \cap \\ \cap (T_x < t | s < T_{x-n+1}) \cap (T_{x+1} > t), \forall x \geq n\} \quad (2.16)$$

$$= Pr\{(T_{x-n} < s) \cap (s - t_{x-n} < X_{x-n+1} < t - t_{x-n}) \cap \\ \cap (0 < \sum_{i=x-n+2}^x X_i < t - t_{x-n+1}) \cap (X_{x+1} > t - t_x), \forall x \geq n\}. \quad (2.17)$$

Fazendo proveito da independência entre as vas $T_{x-n}, X_{x-n+1}, \sum_{i=x-n+2}^x X_i$ e X_{x+1} pode-se obter a probabilidade conjunta do evento expresso em (2.17) para cada x .

$$Pr\{(T_{x-n} < s) \cap (s - t_{x-n} < X_{x-n+1} < t) \cap \\ \cap (0 < \sum_{i=x-n+2}^x X_i < t - t_{x-n+1}) \cap (X_{x+1} > t - t_x)\} = \\ = \int_0^s \int_{s-t_{x-n}}^{t-t_{x-n}} \int_0^{t-t_{x-n+1}} \int_{t-t_x}^{\infty} f_{T_{x-n}}(t_{x-n}) f_{X_{x-n+1}}(x_{x-n+1}) f_{\sum_{i=x-n+2}^x X_i}(\sum_{i=x-n+2}^x x_i) \\ f_{X_{x+1}}(x_{x+1}) dx_{x+1} d \sum_{i=x-n+2}^x x_i dx_{x-n+1} dt_{x-n} \\ = \frac{s^{x-n} (t-s)^n \lambda^x e^{-\lambda t}}{(x-n)! n!} \quad (2.18)$$

Dado que os eventos $\{(N(s) = x - n) \cap (N(t) = x)\}_{\forall x > n}$ são disjuntos obtém-se (2.15) com o seguinte somatório.

$$Pr\{(N(s) = x - n) \cap (N(t) = x), \forall x \geq n, x \in \mathbb{Z}^+\} = \sum_{x \geq n} \frac{s^{x-n} (t-s)^n \lambda^x e^{-\lambda t}}{(x-n)! n!} \\ = \frac{\lambda^n (t-s)^n e^{-\lambda \cdot (t-s)}}{n!} \quad (2.19)$$

A identidade (2.19) evidencia que $N(t-s)$ tem a mesma distribuição que $N(t) - N(s)$ e que qualquer contagem entre momentos arbitrariamente escolhidos em um processo de Poisson tem distribuição dependente somente da duração entre estes momentos, caracterizando a propriedade de incrementos estacionários.

O processo de Poisson possui a incrementos independentes, pois a distribuição da contagem de eventos em dado intervalo é independente da contagem em qualquer intervalo disjunto.

2.2 PROCESSO DE HAWKES

Para os fins da aplicação aqui apresentada é aceitável o entendimento de um processo pontual como qualquer método de alocar aleatoriamente um conjunto de pontos na reta \mathbb{R} , sendo este conjunto interpretado como os momentos de realizações de um processo aleatório subjacente, a repetição de um dado evento. Ao processo pontual são associados os processos de contagem e de chegadas pertinentes, de tal forma que um processo pontual pode ser completamente especificado pelo seu processo de contagem, ou de chegadas. Uma maneira direta de concentrar informação sobre um processo é definir sua função de intensidade condicional.

A função de intensidade condicional de um processo pontual é razão da quantidade esperada de ocorrências no momento infinitesimal subsequente a dado ponto t e esta extensão infinitesimal. Formalmente,

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}(N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t)}{\Delta t}, \quad (2.20)$$

onde \mathcal{F}_t é toda informação do processo até, mas não incluindo o tempo t . Verificando-se a identidade acima para um processo de Poisson vale a propriedade dos incrementos independentes e pode-se desconsiderar essa condicionalidade, resultando em

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}(N(t + \Delta t) - N(t)) | \mathcal{F}_t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}(N(t + \Delta t) - N(t))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = n\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n (\Delta t)^{n-1} e^{-\lambda \Delta t}}{n!} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda \Gamma(n, \Delta t \lambda)}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{\lambda \Gamma(n, 0)}{\Gamma(n)} = \lambda
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $\Gamma(a,b)$ e $\Gamma(a)$ são as funções Gamma incompleta e a Gamma.

Como a parametrização $\lambda(t)$ sugere é possível condicionar esta intensidade ao tempo e ampliarmos, assim, o processo de Poisson com intensidade constante para uma classe de processos pontuais com intensidade variável. Para depreender a forma como é possível definir tais ampliações, verifica-se as propriedades incrementais do processo de Poisson.

Diz-se que a função $f(x)$ é da ordem $o(x)$ se esta função decresce em menor velocidade que x na medida em que x tende a zero, ou seja, se

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= 0 \therefore \\
f(x) &= o(x).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Portanto, pode-se definir o comportamento incremental do processo de Poisson ao se observar que, dado que $Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} = e^{-\lambda \Delta t}$, e se

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) > 0\}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1 - Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\lambda \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} e^{-\lambda \Delta t} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\lambda \Delta t} - 1)}{\Delta t} \\
&= 1 \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(e^{\lambda \Delta t} - 1)/d\Delta t}{d\Delta t/d\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \lambda e^{\lambda \Delta t} = \lambda, \text{ e portanto,}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) > 0\} - \lambda \Delta t &= o(\Delta t) \therefore \\
Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} &= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Dessa forma pode-se caracterizar o comportamento incremental do processo de Poisson como a seguir.

$$\begin{aligned} Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} &= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) > 1\} &= o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Processo de Poisson: O processo de contagem $\{N(t)\}_{t>0}$ cuja distribuição respeita (2.25) e que possui incrementos estacionários e independentes constitui um processo de Poisson.

A maneira mais direta de ampliar este processo para um processo cuja intensidade condicional é função do tempo, o processo de Poisson não-homogêneo.

Processo de Poisson não-homogêneo: Um processo de Poisson não-homogêneo é o processo pontual com a intensidade condicional variante no tempo $\lambda(t)$ e contínua a direita, com a propriedade dos incrementos independentes e cuja

$$\begin{aligned} Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} &= 1 - \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} &= \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t + \Delta t) - N(t) > 1\} &= o(\Delta t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

distribuição respeita as seguintes identidades,

Por não haver igualdade entre a distribuição de $N(t - s)$ e $N(t) - N(s)$ o processo de Poisson não-homogêneo não tem incrementos estacionários.

Outra ampliação possível do processo homogêneo é o processo pontual auto-excitável. Um processo pontual auto-excitante é um processo $\{N(t)\}_{t>0}$ cuja distribuição possui a seguinte restrição, para $s < t < u$,

$$Cov(N(t) - N(s), N(u) - N(t)) > 0. \quad (2.27)$$

Um processo auto-excitante não possui a propriedade dos incrementos independentes, pois como as contagens entre dois intervalos disjuntos subsequentes tem covariância diferente de zero, estas não são independentes. Nesta classe inclui-se o processo de Hawkes definido pela seguinte parametrização de sua intensidade,

$$\begin{aligned}\lambda(t|\mu, \theta) &= \mu(t) + \int_{-\infty}^t \phi(t-u|\theta) dN(u), \\ &= \mu(t) + \sum_{i:t_i < t} \phi(t-t_i|\theta)\end{aligned}\quad (2.28)$$

sendo $\phi(\cdot|\theta)$ uma função estritamente positiva. Apesar da ligação com as demais distribuições dos processos de chegada e de contagem não estarem especificadas somente com esta definição, é possível afirmar que dado um processo pontual com função de intensidade condicional especificado sua estrutura de probabilidade está unicamente definida (DALEY; VERE-JONES, 2002). O comportamento incremental de um processo de Hawkes é definido como a seguir,

$$\begin{aligned}Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0 | \mathcal{F}_t\} &= 1 - \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1 | \mathcal{F}_t\} &= \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) > 1 | \mathcal{F}_t\} &= o(\Delta t).\end{aligned}\quad (2.29)$$

Uma estratégia de aplicação empírica deste modelo reside no ajuste de uma sequência $\{T_i = t_i\}_{i>1}^n$ observada de momentos em que um dado evento ocorre, no presente caso, os momentos em que transações de dado ativo são executadas a um preço diferente da execução anterior. Segundo Rubin (1972) o logaritmo da função de densidade probabilidade conjunta de $\{T_i\}_{S_1 \geq i \geq S_2}$ é

$$\log L = \sum_{i:S_2 \leq i \leq S_1} \log \lambda(t_i | \mathcal{F}_t) - \int_{S_1}^{S_2} \lambda(t | \mathcal{F}_t) dt \quad (2.30)$$

onde $S_1 < S_2$ é um intervalo tal que $t_0 < t_1 < \dots < t_{N(S_1)} < S_1 < \dots < t_{N(S_2)} < S_2 < \dots$. O método de estimação por máxima verossimilhança (EMV) reside em maximizar (2.30) através dos parâmetros μ e θ , cujos valores que levam ao máximo global são as estimações desejadas. Com a parametrização exponencial, $\phi(\cdot) = \alpha e^{-\beta u}$, e considerando o componente μ invariante no tempo as estimações desejadas são

$$\{\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} = \arg \max_{\mu, \alpha, \beta} \sum_{i:S_2 \leq i \leq S_1} \log(\mu + \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)}) - \int_{S_1}^{S_2} \left[\mu + \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} \right] dt \quad (2.31)$$

Para obter uma formulação mais direta pode-se observar a integral da parte direita da igualdade acima como a seguir.

$$\int_{S_1}^{S_2} \left[\mu + \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} \right] dt = \mu(S_2 - S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt \quad (2.32)$$

E, supondo que $S_1 = 0$ a seguinte decomposição,

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt = & \\ & \int_0^{t_1} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \\ & \int_{t_2}^{t_3} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \dots + \int_{t_{N(S_1)-1}}^{t_{N(S_1)}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \\ & \int_{t_{N(S_1)}}^{S_1} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \dots + \\ & \int_{t_{N(S_2)-1}}^{t_{N(S_2)}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_{N(S_2)}}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \\ & \int_{S_2}^{t_{N(S_2)+1}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

em conjunto com as observações sobre os valores acima,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt &= \int_0^{t_1} 0 dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \alpha e^{-\beta(t-t_1)} dt \\ \int_{t_2}^{t_3} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt &= \int_{t_2}^{t_3} \alpha e^{-\beta(t-t_1)} + \alpha e^{-\beta(t-t_2)} dt \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

permite compreender a notação mais geral quando $S_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt = & \\ & \int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_{N(S_1)+1}}^{t_{N(S_1)+2}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \dots + \\ & \int_{t_{N(S_2)-1}}^{t_{N(S_2)}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_{N(S_2)}}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Simplificando a notação,

$$\begin{aligned}
\int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt &= \int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \alpha e^{-\beta(t-t_1)} + \alpha e^{-\beta(t-t_2)} + \dots + \\
&\quad \alpha e^{-\beta(t-t_{N(S_1)-1})} + \alpha e^{-\beta(t-t_{N(S_1)})} dt = \int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \sum_{i=1}^{N(S_1)} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

obtem-se,

$$\begin{aligned}
\int_{S_1}^{S_2} \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt &= \\
&\int_{S_1}^{t_{N(S_1)+1}} \sum_{i=1}^{N(S_1)} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_{N(S_1)+1}}^{t_{N(S_1)+2}} \sum_{i=1}^{N(S_1)+1} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \dots + \\
&\int_{t_{N(S_2)-1}}^{t_{N(S_2)}} \sum_{i=1}^{N(S_2)-1} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \int_{t_{N(S_2)}}^{S_2} \sum_{i=1}^{N(S_2)} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt \\
&= \sum_{i=1}^{N(S_1)} \int_{S_1}^{S_2} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt + \sum_{i=N(S_1)+1}^{N(S_2)} \int_{t_i}^{S_2} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} dt \\
&= -\frac{\alpha}{\beta} \left[\sum_{i=1}^{N(S_1)} \left[e^{-\beta(S_2-t_i)} - e^{-\beta(S_1-t_i)} \right] + \sum_{j=N(S_1)+1}^{N(S_2)} \left[e^{-\beta(S_2-t_j)} - 1 \right] \right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto a função maximizada em (2.31) se resume a

$$\begin{aligned}
\log L &= -\mu(S_2 - S_1) + \sum_{i:S_2 \leq t_i \leq S_1} \log(\mu + \sum_{i:t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)}) + \\
&\quad + \frac{\alpha}{\beta} \left[\sum_{i=1}^{N(S_1)} \left[e^{-\beta(S_2-t_i)} - e^{-\beta(S_1-t_i)} \right] + \sum_{j=N(S_1)+1}^{N(S_2)} \left[e^{-\beta(S_2-t_j)} - 1 \right] \right].
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A parametrização exponencial, $\phi(u) = \alpha e^{-\beta u}$, apresenta dois parâmetros que moldam o padrão de aglomeração de um processo pontual. O parâmetro α determina a potência com a qual o um salto afeta intensidade futura, ou seja, quanto maior α maior o aumento na intensidade nos momentos subsequentes ao salto. O parâmetro β capta a velocidade de dissipação do impacto na intensidade, ou seja, quanto maior β mais rápido o impacto na intensidade se dissipa. A razão entre estes dois parâmetros, α/β , está diretamente relacionada a estabilidade do processo pontual.

Dado processo pontual auto-excitante pode ser descrito como um processo de ramificação (BACRY; MASTROMATTEO; MUZY, 2015) cujas propriedades permitem observar uma relação geracional entre os saltos do processo. O processo de ramificação tipifica cada salto ocorrido em um processo pontual como um salto

imigrante, no caso do processo de Hawkes um salto que ocorre com intensidade $\mu(t)$, ou descendente, um salto causado devido ao impacto na intensidade causado por saltos anteriores, sejam estes imigrantes ou descendentes.

Com certa liberdade apresenta-se em seguida o que Filiminov e Sornette (2012) explicitam para definir a relação de parentalidade entre os eventos. Dada certa sequência de saltos $\{t_i\}_{i>1}$ associa-se o status $\{k_i\}_{i>1}$, no qual $k_i \in \{I_i, d_{i,j}\}$ de forma que se o evento ocorrido em t_j for um evento imigrante então $k_j = I_j$ e caso este evento seja descendente diretamente do evento ocorrido em t_i , então, $k_j = d_{j,i}$. Diz-se que o número médio de eventos descendentes de primeira geração por evento existe e é dado por

$$\mathbb{E}_i(\#\{j : k_j = d_{j,i}\}) = n, \quad (2.39)$$

considerando o operador $\#$ como a contagem de elementos em dado conjunto. Lembrando que cada evento descendente gera outros descendentes, os autores afirmam que para obter o número esperado de descendentes de todas as gerações por imigrante é obtível da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{I_i}(\#\{j : k_j = d_{j,i}\} + \#\{j : (k_j = d_{j,m}) \cap (k_m = d_{m,i})\} + \dots) \\ = n + n^2 + n^3 + \dots = \frac{n}{1-n} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Apesar de tal afirmação, como apresentada no trabalho indicado, carecer de hipóteses de dependência entre eventos intra-geracionais, ou seja, se a ocorrência de descendentes da n -ésima geração é um evento independente da ocorrência de descendentes da $(n + j)$ -ésima, para qualquer j , geração, é possível, aceitando-se (2.40), estabelecer a seguinte relação. Para obter o número esperado de

$$\frac{\frac{n}{1-n}}{1 + \frac{n}{1-n}} = n. \quad (2.41)$$

descendentes por evento,

considerando que para cada imigrante há $n/(1 - n)$ descendentes, pode-se afirmar que para cada $n/(1 - n)$ descendentes existem $1 + n/(1 - n)$ eventos.

Ao refletir a proporção de saltos descendentes por cada salto, o parâmetro n pode ser considerado uma medida de instabilidade do processo, ou seja, pode ser usado para indicar que dado processo tende a auto-provocar saltos com menor ou maior intensidade que outro processo de Hawkes. Se $n < 1$ o processo é subcrítico, se $n = 1$ o processo é crítico e se $n > 1$, o processo é super-crítico ou explosivo. No regime sub-crítico e crítico o processo, quase certamente se extingue. No regime explosivo o processo tem uma probabilidade positiva de gerar uma quantidade infinita de saltos. A razão de ramificação n é obtida em qualquer processo de Hawkes através da identidade $\int_0^{\infty} \phi(t) dt = n$ que no caso da parametrização exponencial é α/β .

Filiminov e Sornette (2012) defendem que esta medida, n , reflete o que eles consideram como a endogeneidade do processo, ou, no contexto empírico em questão o quanto a variação do preço se dá pela própria variação do preço. O que no contexto da Hipótese da Eficiência de Mercado mensuraria sua ineficiência, ao verificar que a proporção de mudanças do preço de um ativo ocorre não devido a informações exógenas ao processo de mensuração do preço.

3 MÉTODO E DADOS EM ALTA FREQUÊNCIA

O ajuste executado reproduz o procedimento proposto por Filiminov e Sornette (2012) que ajusta o processo de Hawkes exponencial aos saltos no mid-price do contrato futuro e-mini S&P500 de 1998 a 2010. A seguir detalha-se o procedimento de obtenção da série de saltos e do ajuste da estimação por máxima verossimilhança sobre estes. Explicita-se a diferença entre o mid-price e o preço de transação, medida de valor utilizada no presente trabalho e consideramos o bid-ask bounce como fator de viés na estimação.

Os dados de transação ajustados são dos ativos BOVA11 e PETR4 em uma janela de dois anos, 2016 e 2017. O primeiro é um fundo de índice de ações (usualmente ETF, de Exchanged Traded Fund), ativo que permite transacionar como uma única ação uma cesta composta pelas ações e na mesma proporção de um dado índice, no caso o Índice Bovespa. O segundo são as ações preferenciais (que não dão direito a voto em Assembleias Gerais) da Petrobrás S.A.

Os dados iniciais têm uma quantidade considerável de observações, cada uma explicitando uma transação: 18.083.057 transações do ativo da Petrobrás e 5.616.539 observações do BOVA11.

3.1 TRATAMENTO E AJUSTE

Para obter o vetor de saltos no preço de transação de cada ativo considerado acessamos as bases disponibilizadas pelo FTP (File Transfer Protocol) da BMF&Bovespa (BOVESPA, 2018), um protocolo de disponibilização de dados que torna públicas bases de dados relativas a ativos transacionados por esta instituição. A Bolsa de Valores Mercadorias e Futuros, BMF&Bovespa S.A., instituição nascida em 2008 através da fusão entre a BMF, bolsa de derivativos, e a Bovespa, bolsa de ações, permite a negociação de títulos, valores mobiliários e derivativos, além de outros serviços de liquidação.

Dos dois anos de dados de cada ativo observou-se o volume de cada dia de transação a fim retirar-se os dias abaixo do quinto percentil para garantir que a série teria quantidade suficiente de saltos. Ambos os ativos tiveram 25 dias retirados por este procedimento dos inicialmente selecionados. Os dias levados em conta nesta seleção do PETR4 foram os entre 29-01-2015 a 05-01-2018 e do BOVA11 os dias de 21-12-2015 a 11-12-2017.

Para compilar os dados foi usado o software R, cujo pacote GetHFData (PERLIN; RAMOS, 2016) compila dados de qualquer conjunto de execuções de ordens ocorridas em período de bolsa aberta, individual ou agregadamente, da BMF&Bovespa nos últimos dois anos relativo ao momento de acesso ao FTP. Usa-se os dados não-agregados, que detalham as informações sobre cada transação. Tal base fornece dez variáveis que indicam o preço sob o qual a transação ocorreu, entre que instituições financeiras ocorreu, se foi iniciada por uma ordem de compra ou venda, o momento em que ocorreu e se uma transação que ocorreu entre uma instituição e ela mesma foi feita assim intencionalmente. As variáveis usadas no tratamento são as relativas ao tempo (dia e horário no dia) e o preço sob o qual cada transação ocorreu.

Tabela 1 – Base Original PETR4

	InstrumentSymbol	TradePrice	TradedQuantity	TradeDateTime
15378761	PETR4	13.80	500	2017-08-23 16:54:41
15378762	PETR4	13.81	100	2017-08-23 16:54:42
15378763	PETR4	13.81	1000	2017-08-23 16:54:45
15378764	PETR4	13.80	5000	2017-08-23 16:54:57
15378765	PETR4	13.80	11200	2017-08-23 16:54:58
15378766	PETR4	13.78	26900	2017-08-24 10:09:10
15378767	PETR4	13.78	100	2017-08-24 10:09:10
15378768	PETR4	13.78	100	2017-08-24 10:09:10
15378769	PETR4	13.78	1100	2017-08-24 10:09:10
15378770	PETR4	13.78	1000	2017-08-24 10:09:10

¹ Base Original, com as variáveis utilizadas, mais quantidade transacionada.

Um salto é considerado o momento associado a uma observação que ocorre a um preço diferente da observação antecedente. Portanto após o procedimento inicial de retirar os dias de menor volume, retiram-se todas as observações que possuem a variável preço igual a observação imediatamente anterior (as observações estão ordenadas pelo momento em que ocorreram). Restam, portanto, todas as observações cujo momento em que ocorreram é o momento do salto.

Resta obter o vetor de tempos de ocorrência como pedido pela equação de máxima verossimilhança, algo diferente da variável que denota o momento em que cada observação ocorreu em dia e hora. Para tanto é retirada a diferença entre o momento de cada observação e as 10:00:00 (dez horas) do primeiro dia de cada série, no caso 29-01-2015 para a PETR4 e 21-12-2015 para BOVA11. Tem-se que o vetor resultante indica a distância real em segundos de um salto para outro.

Para a análise intradiária poderíamos usar esta série, já que o ajuste se dará em janelas de dez minutos a trinta minutos de duração dentro de cada dia. Porém em análises em janelas de maior duração lança-se mão do procedimento proposto por Bowsher (BOWSHER, 2007), que trata a série de saltos no tempo contínuo desconsiderando todo o tempo de bolsa fechada. Não é necessário nos aprofundar neste procedimento, porém demonstramos rapidamente como fica a série de saltos nas tabelas desta seção.

Antes de aplicar o ajuste deve-se observar que há motivos para aplicar a randomização sobre observações cujo momento em que ocorreram são o mesmo. No início de cada dia de transação há um grande número de ordens executadas concomitantemente, parte destas ordens provocam mudanças no preço e, portanto, constituem saltos pelo critério escolhido. Por razões discutidas a seguir é aplicado um procedimento de randomização em $N-1$ de N saltos cujo momento em que ocorreram é o mesmo. A randomização consiste em adicionar a realização de uma variável aleatória de distribuição uniforme entre $-0,001$ e $0,001$. Este procedimento foi aplicado nas estimações do ativo BOVA11 e não o foi nas do PETR4.

Os saltos no preço totalizam 3.271.744 para o ativo PETR4 e 1.560.595 para o BOVA11. Em seguida, executa-se três sequências de ajustes, de janelas de 10, 20

Tabela 2 – Base Tratada PETR4

	InstrumentSymbol	TradePrice	TradeDateTime	stamps	arrivals
15378749	PETR4	13.80	2017-08-23 16:54:28	52127668	9852868
15378754	PETR4	13.81	2017-08-23 16:54:30	52127671	9852871
15378761	PETR4	13.80	2017-08-23 16:54:41	52127681	9852881
15378762	PETR4	13.81	2017-08-23 16:54:42	52127682	9852882
15378764	PETR4	13.80	2017-08-23 16:54:57	52127697	9852897
15378766	PETR4	13.78	2017-08-24 10:09:10	52189751	9853751
15378908	PETR4	13.79	2017-08-24 10:09:10	52189751	9853751
15378911	PETR4	13.78	2017-08-24 10:09:11	52189752	9853752
15378916	PETR4	13.79	2017-08-24 10:09:12	52189752	9853752
15378917	PETR4	13.78	2017-08-24 10:09:12	52189752	9853752

¹ Base somente com os saltos e localizada na sequência total de saltos.

e 30 minutos sobre toda a série. Na sequência de ajustes de 10 minutos obtém-se os parâmetros por máxima verossimilhança dos saltos dos primeiros 10 minutos do primeiro dia (entre 10:00:00 e 10:10:00) em seguida obtém-se da janela 5 minutos adiante (10:05:00 a 10:15:00) de forma que há uma interseção entre as janelas. A sequência se dá de forma que os inícios das janelas de ajuste subsequentes distam 5 minutos para todas as três sequências (de 10, 20 e 30 minutos). Uma característica importante para a estimação, em especial para a estimação do parâmetro μ é que dentro de cada intervalo dos momentos de ocorrência de cada salto era subtraído o momento de ocorrência do primeiro salto menos um, de forma que a série de saltos dentro de cada intervalo começa sempre na unidade. Os intervalos que não possuíam menos de dez saltos foram desconsiderados do resultado final por falta de procedimento explícito na literatura para lidar com este caso.

O procedimento de maximização fundamental a estimação por máxima verossimilhança (2.31) está suscetível a duas imprecisões que podem ser graves. A primeira é que da forma como foi executado permitia que os parâmetros estimados fossem negativos o que incorreu na perda dessas estimações já que estas foram desconsideradas do resultado final. A segunda é que o método de maximização Nelder-Mead, apesar de menos susceptível ao valor inicial e arbitrário dos

parâmetros (HARTE et al., 1998), no caso $\mu = 0,2$, $\beta = \alpha = 1$, ele ainda pode levar a pontos de máximo local e não global como se deseja (FILIMONOV; SORNETTE, 2015).

3.2 DADOS DE TRANSAÇÃO

A escolha dos dados de transação, ou os dados das ordens executadas, ao invés dos dados das ordens ativas, eventualmente executadas ou canceladas, que fornecem uma leitura mais aproximada dos movimentos de oferta e demanda por um ativo, acarretam em um viés na intensidade, o bid-ask bounce. Argumenta-se, porém, que este viés não deve modificar a dinâmica intradiária dos parâmetros estimados.

Estes dados, apesar de serem em alta frequência, ou seja, especificarem o momento da ocorrência da execução de uma ordem de compra ou venda ao nível da terceira casa decimal dos segundos, ainda apresentam saltos cuja ocorrência coincide com outros saltos. As consequências disto são observadas a seguir.

3.2.1 Bid-ask bounce

Uma potencial fonte de viés na intensidade é o bid-ask bounce, bem caracterizado quando se verifica a diferença entre dados de transação e o book de um determinado ativo. A medida de valor do ativo extraída do book é a média entre o valor de execução da menor ordem de venda, melhor ask, e da maior ordem de compra, melhor bid, ativas em dado segundo, o mid-price. Os momentos em que este valor se diferencia da observação anterior são considerados saltos. Como esta medida observa as ordens ativas, ela extrai informação das mudanças na oferta e demanda do ativo.

Já os dados em transação saltam entre os melhores bids e asks e, portanto, contabilizam-se saltos que não correspondem a mudanças consideráveis nas posições de compra e venda. Esse comportamento é enganoso, pois não reflete uma mudança na tensão entre oferta e demanda e a este ruído chama-se bid-ask bounce.

Como demonstrado anteriormente estamos interessados em duas medidas: uma que revela a regularidade dos saltos, μ , e outra o quão instável ou sensível é o processo, a razão de ramificação. Dado que os períodos de alta tensão entre oferta e demanda, ou seja, períodos de reavaliação intensa do valor de um ativo, estão presentes nas contagens dos saltos no preço de transação e do mid-price é razoável assumir que tais intensidades estejam fortemente correlacionadas.

A condição necessária para que a estimação da intensidade seja feita sobre os saltos no preço de transação é que a correlação com a intensidade do processo vindo do mid-price seja grande o suficiente para que a tendência seja preservada, ou seja, para que um aumento/declinação da intensidade seja verificável em ambos os processos.

Considerando que o número de saltos nos preços de transação é superiormente limitado pelo número de transações em dado período é razoável assumir correlação positiva entre estas duas variáveis. Portanto, dado que quanto maior o número de transações maior o volume negociado, dado certo preço, temos que volume e intensidade estão correlacionados.

Esta tripla relação, saltos, número de transações e volume, é evidenciada por Filiminov e Sornette (2012) nas Figuras 3.A e 4.A ao verificar que os saltos no mid-price do Contrato Futuro E-mini S&P500 e a quantidade de transações tem padrão intradiário em U e que o número de eventos e o volume tem trajetórias correlacionadas.

Além de verificar tal relação graficamente os autores explicitam a necessidade de considerar o padrão intradiário em U na estimação da intensidade e, de forma geral, a não-estacionariedade do processo. Para isso propõem que o ajuste dos saltos seja feita em curtas janelas de 10, 20 e 30 minutos. A implicação disto é que a intensidade é que a sensibilidade/reflexividade estimada é de curto-prazo. Apesar deste conceito não ser suficientemente definido, Hardiman, Bercot e Bouchaud (2013) afirmam que a diferença de resultados de sua abordagem em relação a de Filiminov é dada pela extensão desta janela de ajuste. Na sua réplica, Hardiman argumenta que apenas a reflexividade de curto-prazo é sub-crítica, já quando o ajuste se dá em janelas de 2 meses e com uma parametrização em potência, o parâmetro de sensibilidade/reflexividade é a unidade, ou seja, crítico.

3.2.2 Saltos simultâneos

A diferença que deve ser ressaltada entre o preço de transação e o mid-price é a especificação em milissegundos. O mid-price é obtido com a comparação dos melhores bid e asks em dado segundo, portanto, apesar das entradas das ordens serem especificadas em milissegundos o mid-price é contabilizado em segundos. Isto acarreta em observações rotuladas no mesmo tempo. As observações de transação também são rotuladas num mesmo milissegundo, porém devido a forma como as transações são computadas e não devido a uma transformação intencional dos dados.

Saltos simultâneos devem ser observados se se deseja utilizar a estimação por máxima verossimilhança, devido às propriedades necessárias para garantir a aproximação assintótica entre a intensidade empírica, que considera uma sequência finita de eventos, e a teórica (OGATA, 1978). Empiricamente é impossível obter a primeira linha de (2.28), observamos apenas a intensidade com início arbitrário

$$\Lambda(t) = \mu + \int_0^t \phi(t-u) dN(u). \quad (3.1)$$

Uma das condições para que os estimadores de máxima verossimilhança baseados em (3.1) convirjam para os valores teóricos reais, ou seja, aqueles obtidos por todo o histórico possível do processo é necessário que este não aceite observações simultâneas, ou seja, saltos que ocorram ao mesmo tempo.

Ao utilizar dados de transação em alta frequência eliminamos parte do problema de observações simultâneas, pois os saltos que ocorrem no mesmo segundo podem ser distinguíveis e por isso a ordem e distância entre estes saltos é melhor determinada que dados sem essa precisão. A quantidade de observações simultâneas observada em toda a série saltos do PETR4 foi de 204.251 e de 111.664 no BOVA11.

O tratamento proposto por Filiminov é a randomização, porém no caso aqui apresentado, a randomização dentro de um segundo mudaria a ordem de eventos muito próximos. A randomização se daria portanto nos decimais do segundo. Este procedimento afeta a estimação da intensidade, pois como verificado em (2.28), esta é mensurada através da soma das funções de auto-excitação anteriores a um momento em t , portanto a ordem dos eventos importa. Uma análise da quantidade de eventos por intervalos é verificada para que a quantidade de eventos simultâneos seja colocada em perspectiva.

Tabela 3 – BOVA11: eventos por intervalos

	média	mín	1º quartil	mediana	3º quartil	máx
10 min	74	0	32	56	94	1573
20 min	148	0	67	114	188	2295
30 min	221	0	103	173	279	3259

¹ Foram 38471 intervalos de 10 minutos, 38469 de 20 e 38467 de 30.

Tabela 4 – PETR4: eventos por intervalos

	média	mín	1º quartil	mediana	3º quartil	máx
10 min	164	0	92	135	198	4131
20 min	327	0	193	274	393	6323
30 min	491	0	298	417	586	7731

¹ Foram 39983 intervalos de 10 minutos, 39981 de 20 e 39979 de 30.

4 AJUSTE

Os dados obtidos nos permitem verificar a trajetória intradiária do parâmetro μ e da razão de ramificação. O que demonstramos é uma comparação destas trajetórias com a do volume em dinheiro transacionado e do número de transações ocorridas no período. A média de um período intradiário (de 10:00:00 às 10:30:00 por exemplo) é feita ao se obter a média de μ e da razão de ramificação dentre todos os dias considerados neste período.

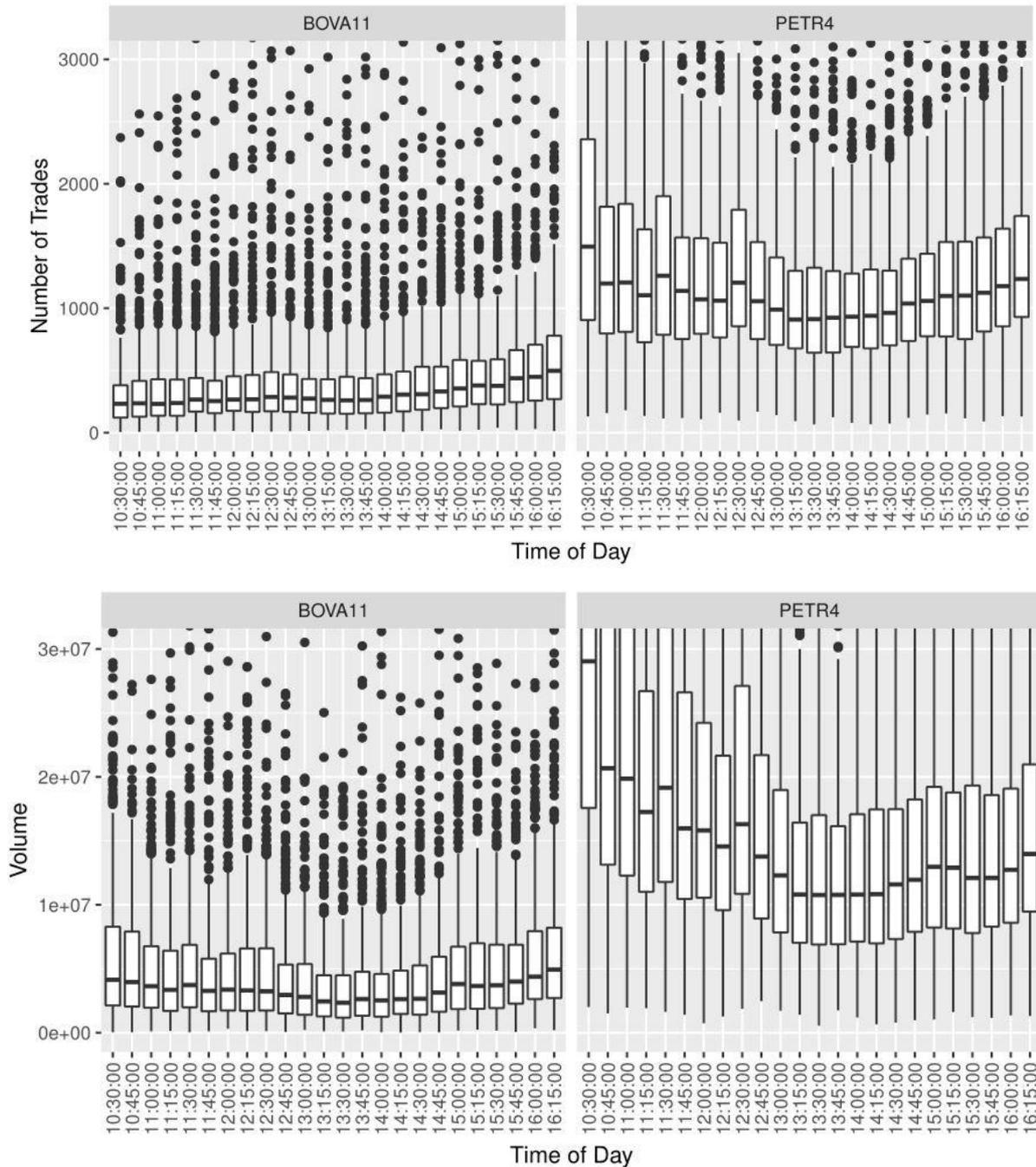
O gráfico 2 demonstra que o ativo BOVA11, muito menos transacionado que o ativo PETR4, não segue um padrão em U para a quantidade de transações, diferente do volume em dinheiro. As demais variáveis seguem, mesmo que levemente, o formato em U.

O padrão intradiário das médias dos parâmetros μ e n demonstra que a estimação capta, de fato, as características que se pretende. Para ressaltar quais sejam essas características podemos observar primeiro os gráficos relativos a PETR4. As estimações sobre intervalos de 10, 20 e 30 minutos da ação preferencial PETR4 sugerem que a parcela regular da intensidade e a sensibilidade do processo seguem um padrão em U. Isso significa que não só a intensidade de transações aumenta, como a reatividade do mercado aumenta no início e no final do dia.

Já para o BOVA11 observa-se que em todas trajetórias do μ seguem a tendência do número de transações e não do volume, ou seja, o início do dia tem menor quantidade de transações para este ativo assim como menor intensidade regular. Como já discutido, o número de transações limita superiormente o número de saltos, e é razoável assumir que ambas as sequências estejam correlacionadas, portanto este resultado é esperado. O que se deve ressaltar é que o parâmetro n demonstra explosividade consideravelmente maior neste período demonstrando a capacidade do procedimento de separar a intensidade regular da intensidade explosiva.

Os gráficos relativos a trajetória das médias semanais sugerem uma reatividade maior dos parâmetros para o ativo mais transacionado. Contudo a razão de ramificação não parece reativa ao volume no caso do ETF BOVA11, o que advém do fato de que o processo pontual observa somente os saltos no preço e não a magnitude dos saltos no preço.

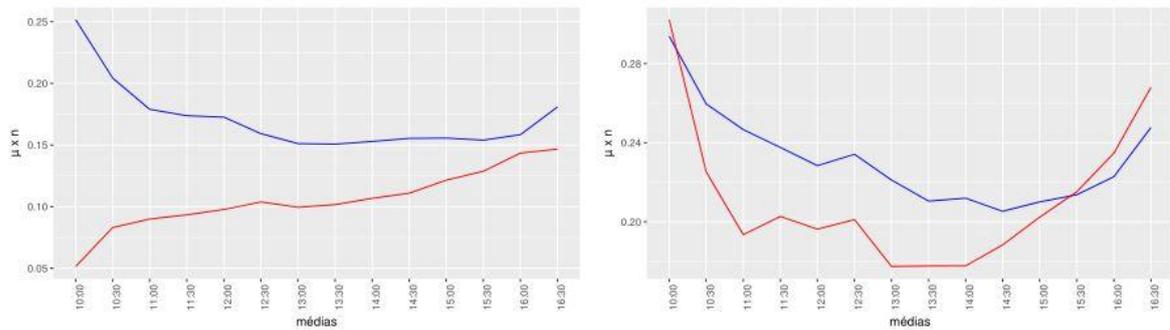
Gráfico 2 - Mediana Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Número de transações (acima) e volume (abaixo) intradiário: as velas são a extensão entre o primeiro e terceiro quartis do número de transações em cada dia no intervalo de 15 minutos observado, as linhas acima e abaixo são 1.5 vezes esta extensão e os pontos são outliers. A linha horizontal representa a mediana.

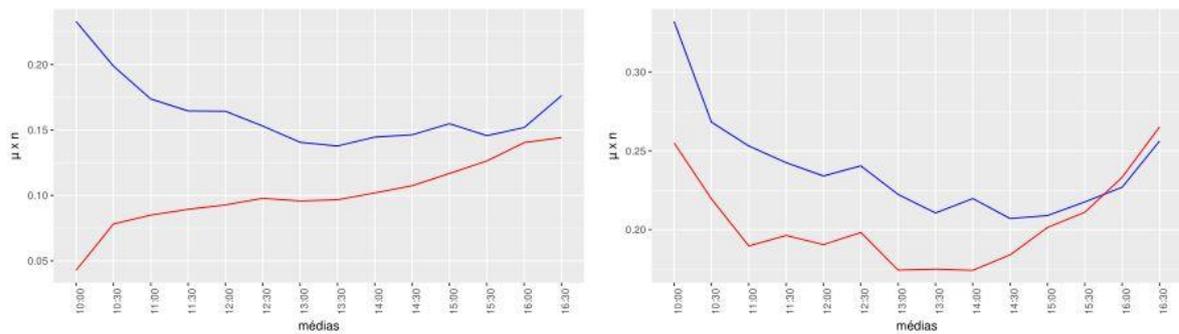
Gráfico 3 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 10 min.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n , janelas de 10 minutos - μ : em vermelho; n : em azul - média dos intervalos de 10 min. dentro de 14 intervalos de meia hora.

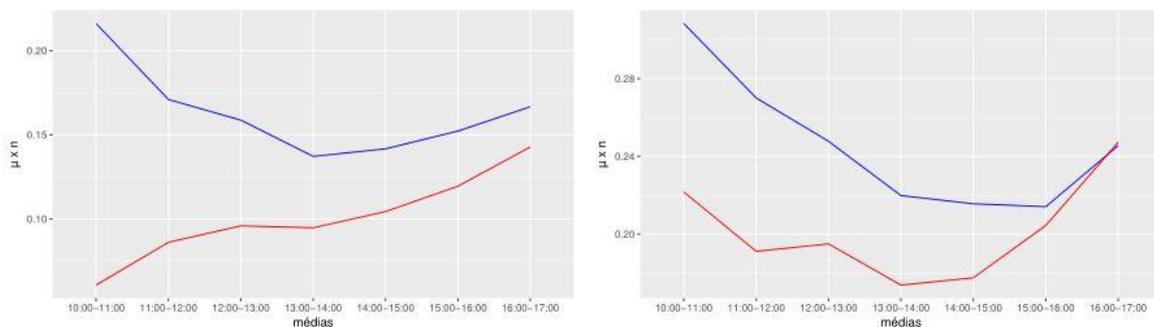
Gráfico 4 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 20 min.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n , janelas de 20 minutos - μ : em vermelho; n : em azul - mediados intervalos de 20 min. dentro de 14 intervalos de meia hora.

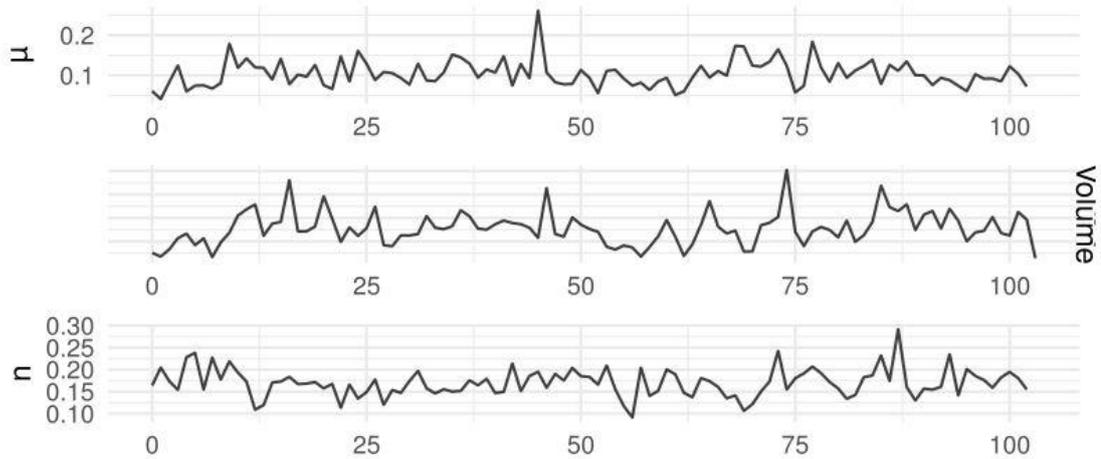
Gráfico 5 - Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n - interv. 30 min.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Média Intradiária BOVA11 (esquerda) e PETR4 (direita): μ e n , janelas de 30 minutos - μ : em vermelho; n : em azul - mediados intervalos de 30 min dentro das 7 horas de mercado aberto.

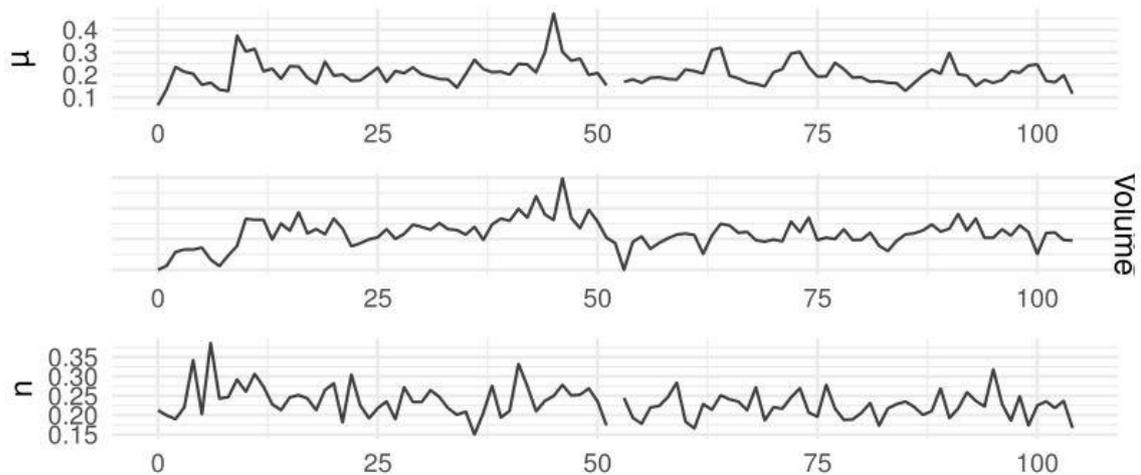
Gráfico 6 - Trajetória Semanal de μ , n e volume - janelas de 10 minutos - BOVA11 40.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Trajetória Semanal de μ , n e volume – janelas de 10 minutos - BOVA11.

Gráfico 7 - Trajetória Semanal de μ , n e volume - janelas de 10 minutos - PETR4 . 40.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Trajetória Semanal de μ , n e volume - janelas de 10 minutos - PETR4.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A discussão Filiminov-Hardiman, na qual esta abordagem se baseia, observa, através de três estimações diferentes, a trajetória da razão de ramificação ao longo de 13 anos de saltos no mid-price do e-mini S&P 500. A divergência desta discussão reside na criticalidade do processo, se o processo observado é crítico ou subcrítico, assim como se possui tendência crescente ou não.

As trajetórias da razão de ramificação observadas nos dois anos de dados de

transação, tanto para a série derivada da negociação do BOVA11, quanto para o PETR4, mostram que o processo é sub-crítico. Porém, diferente do resultado reportado por Filiminov e Sornette esta variável não apresenta tendência crescente, o pode ser devido ao período observado de dois anos, curto em relação ao verificado por Filiminov.

O procedimento de ajuste proposto captura com sucesso o formato em U do volume de transação, contudo há espaço para melhorar a análise aqui proposta. Cada aspecto considerado no ajuste pode ser rediscutido e aprimorado se se deseja explorar o potencial do ajuste a um processo de Hawkes.

Cabe assinalar, portanto, que estratégias que determinem a eficiência do tamanho da janela de ajuste à série sejam exploradas, possivelmente através de simulações, são um objetivo essencial á pesquisas empíricas posteriores. Para tanto cabe observar o critério mais profícuo sobre a qualidade de um ajuste, ou seja, a análise dos resíduos, objeto de pesquisas recentes (BOSWIJK; LAEVEN; YANG, 2018).

REFERÊNCIAS

- BACRY, E.; MASTROMATTEO, I.; MUZY, J.-F. Hawkes processes in finance. *Market Microstructure and Liquidity*, v. 1, n. 1, maio 2014. Disponível em: < [https://www.gc.cuny.edu/CUNY_GC/media/CUNY-Graduate-Center/PDF/Programs/Economics/Other%20docs/BLY-TSE\(Yang\).pdf](https://www.gc.cuny.edu/CUNY_GC/media/CUNY-Graduate-Center/PDF/Programs/Economics/Other%20docs/BLY-TSE(Yang).pdf)> Acesso em: 12 jan. 2018.
- BOSWIJK, H. P.; LAEVEN, R. J.; YANG, X. Testing for self-excitation in jumps, *Journal of Econometrics*, v. 203, n. 2, p. 256-266, 2018. Disponível em: < <https://arxiv.org/abs/1502.04592>> Acesso em: 1 dez. 2017.
- BOWSER, C. G. Modelling security market events in continuous time: intensity based, multivariate point process models. *Journal of Econometrics*, v. 141, n. 2, p. 876 – 912, 2007.
- DALEY, D.; VERE-JONES, D. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2002. 1 v. Disponível em: < <https://goo.gl/MMY7p3>> Acesso em: 2 nov. 2017.
- ENGLE, R. F.; RUSSELL, J. R. Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, v. 66, n. 5, p. 1127-1162, set. 1998. Disponível em: < <https://goo.gl/NvP6Qx>> Acesso em: 24 nov. 2017.
- FILIMONOV, V.; SORNETTE, D. Quantifying reflexivity in financial markets: toward a prediction of flash crashes. *Physical Review E*, v. 85, p. 056108, maio 2012.
- _____. *Apparent criticality and calibration issues in the Hawkes self-excited point process model: application to high-frequency financial data*. *Quantitative Finance*, v. 15, n. 8, p. 1293-1314, 2015.
- GALLAGER, R. *Stochastic processes, theory for applications: solutions to selected exercises*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- HARDIMAN, S. J.; BERCOT, N.; BOUCHAUD, J.-P. Critical reflexivity in financial markets: a Hawkes process analysis. *The European Physical Journal B*, v. 86, n. 10, p. 1-9, out. 2013. Disponível em: < <https://ideas.repec.org/a/spr/eurphb/v86y2013i10p1-910.1140-epjb-e2013-40107-3.html>> Acesso em: 4 ago. 2017.
- HARTE, D. et al. *Documentation for the Statistical Seismology Library*. [S.l.]: School of Mathematical and Computing Sciences, Victoria University of Wellington, 1998.
- HAUTSCH, N. *Econometrics of Financial High-Frequency Data*. [S.l.]: Springer, 2011.

JING, B.-Y.; KONG, X.-B.; LIU, Z. Modeling high-frequency financial data by pure jump processes. *Ann. Statist., The Institute of Mathematical Statistics*, v. 40, n. 2, p. 759–784, 2012.

OGATA, Y. The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer Nature, v. 30, n. 1, p. 243–261, dez.1978.

PERLIN, M.; RAMOS, H. Gethfdata: A R package for downloading and aggregating high frequency trading data from Bovespa. *Brazilian Review of Finance*, v. 14, n. 3, p. 443–478, 2016.

RUBIN, I. Regular point processes and their detection. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 18, n. 5, p. 547–557, set. 1972.

SHREVE, S. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* (SpringerFinance). [S.I.]: Springer, 2010.

APÊNDICE A - Armazenamento

O armazenamento dos códigos criados, compilados e usados para a execução deste projeto estarão disponíveis em <https://github.com/GPrimow> e serão organizados em dois temas: o tratamento dos dados e o ajuste do processo pontual ao modelo de Hawkes.

O armazenamento dos arquivos compilados para a exposição dos resultados encontrados estará disponível no link a seguir:

<https://www.dropbox.com/sh/kvudukz7n9aygc6/AADE6bqluH1QvhGGa1giGp6Ja?dl=0>

O conteúdo destes arquivos está sujeito a mudanças, com exceção dos utilizados para gerar os resultados aqui verificados. O autor está à disposição para esclarecer qualquer dúvida sobre o conteúdo destes arquivos.