



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

DOUGLAS MATEUS DE LIMA

**Análise da estabilidade elástica, análise dinâmica e controle de vibração em torres
tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal**

Recife

2018

DOUGLAS MATEUS DE LIMA

Análise da estabilidade elástica, análise dinâmica e controle de vibração em torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Linhas de pesquisa: Análise dinâmica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Coorientador: Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez.

Recife

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

- L732a Lima, Douglas Mateus de.
Análise da estabilidade elástica, análise dinâmica e controle de vibração em torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal / Douglas Mateus de Lima. - 2018.
319 folhas, il.; tab., abr., sigl. e simb.
- Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.
Coorientador: Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yané.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, 2018.
Inclui Referências e Apêndices.
1. Engenharia Civil. 2. Energia eólica. 3. Torre do aerogerador. 4. Estabilidade elástica. 5. Análise dinâmica. 6. Controle de vibrações. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira (Orientador). II. López-Yané, Pablo Aníbal (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2018-261



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Tese de Doutorado

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE ELÁSTICA, ANÁLISE DINÂMICA E CONTROLE DE
VIBRAÇÃO EM TORRES TUBULARES DE AÇO PARA AEROGERADORES DE EIXO
HORIZONTAL**

defendida por

Douglas Mateus de Lima

considera o candidato APROVADO.

Recife, 23 de maio de 2018.

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro – UFPE – Orientador
Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez – UFPE – Coorientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez – UFPE
(coorientador)

Prof. Dr. José Elias Laier – USP
(examinador externo)

Prof. Dr. José Luís Vital de Brito – UnB
(examinador externo)

Prof. Dr. José Antonio Riul – UFPB
(examinador externo)

Prof. Dr. Alex Maurício Araújo – UFPE
(examinador externo)

Dedico o presente trabalho a DEUS, aos meus pais, à minha esposa Marianny e ao meu sogro João Mariano da Silva Filho (in memoriam), exemplo típico de brasileiro (alegre, sofrido e batalhador).

AGRADECIMENTOS

A Deus, a razão de nossa existência, por ter enviado Vosso Filho para salvar-nos.

Aos meus pais, por constituírem a minha base e por não medirem esforços para auxiliar-me. Sem eles, não teria alcançado meus objetivos.

À minha esposa Marianny, por sua paciência, ternura e amor, além de suas contribuições inestimáveis para realização deste trabalho.

Aos professores que, de alguma maneira, contribuíram para minha formação como estudante, profissional e, acima de tudo, pessoa. Dentre os quais, cito alguns nomes:

- ✓ Professor Pós-Dr. Pablo Aníbal López-Yáñez, por estar sempre preparado em transmitir seus inúmeros conhecimentos técnicos científicos teóricos e práticos e por ter, realmente, me ensinado o significado da PERSEVERANÇA;
- ✓ Professor Paulo Marcelo Viera Ribeiro, pelas poucas, mas extremamente proveitosas conversas;
- ✓ Professores que contribuíram/contribuirão para este trabalho durante as bancas de qualificação e de defesa;
- ✓ Professor Humberto Correia Lima Júnior (meu orientador da época de graduação e de mestrado), por ter me ensinado a base da engenharia estrutural e por vossa amizade e auxílio;
- ✓ Professores (e também amigos de trabalho no CAA-UFPE) Flávio Eduardo Gomes Diniz, Giuliana Furtado Franca Bono, José Moura Soares e Gustavo Bono, por vossas amizades e torcidas durante esta fase de doutoramento;
- ✓ Meus professores da graduação (Élder Alpes Vasconcelos – físicas; Washington de Lima – eletrotécnica; Clécio – cálculo diferencial e integral);
- ✓ Meus professores do ensino fundamental e médio (Fátima – 1ª série; Mariluce – 3ª série; Susie – 4ª e 5ª séries, geografia; Wilma – 5ª série, português; Jurandir – 8ª série, geometria; Reginaldo – 8ª série, física e química; Ana Gorette – 8ª série, português; Arismário – 5ª série ao 3º ano, educação física; Vilma – 1º ano, português; Gorete Ferreira – 2º ano, matemática; Josenildo – 1º ao 3º ano, física; Solange - 3º ano, biologia; Edvaldo Jr. – 3º ano, matemática).

Ao colega Ives Adriano, pelas experiências compartilhadas durante o curso das disciplinas estudadas no doutorado.

À servidora pública Andréa Negromonte Vieira Matoso (em nome da qual agradeço aos servidores da UFPE que têm dedicação em seus ofícios), por sua competência e atenção

na função de secretária do PPGEC-UFPE.

A todas as pessoas, que foram postas em minha vida e contribuíram para minha formação, representadas aqui por Fábio Urso e Cristina Urso (*in memoriam*).

*“Vós sois o sal da terra. Vós sois a
luz do mundo.”
(Mt 5, 13a.14a)*

RESUMO

Em vista da perspectiva ambiental atual, a geração de energia encaminha-se para o uso de fontes renováveis, ditas inesgotáveis, como é o caso da energia eólica. Atualmente, o Brasil ocupa a 8ª posição em potência instalada no *ranking* dos países produtores de energia elétrica a partir de aerogeradores, que são uma alternativa para demanda da matriz energética brasileira. Localmente, o desenvolvimento da produção de energia eólica em Pernambuco ocorre de maneira promissora nos últimos anos. Assim, o porte dos aerogeradores e, conseqüentemente, de suas torres tem aumentado, fazendo com que os efeitos de 2ª ordem geométrico e de vibrações em tais torres tubulares de aço sejam cada vez mais significativos. Desta forma, esta tese tem como objetivo principal a análise da estabilidade elástica e o projeto de um dispositivo para controle de vibração de uma torre tubular de aço, com 120 m de altura, para um aerogerador de eixo horizontal. Realizou-se, inicialmente, uma vasta revisão bibliográfica sobre o tema de estudo. Em seguida, foi realizada uma análise de estabilidade da torre, para a qual foi desenvolvida a equação diferencial ordinária, solucionada via método das diferenças finitas. Ademais, a torre foi modelada utilizando elementos finitos de barra, em que, a não linearidade geométrica, foi considerada mediante a matriz de rigidez geométrica consistente. Posteriormente, foi desenvolvido o projeto estrutural da torre e de sua fundação (sapata), que foram modeladas, em conjunto com o solo, em elementos finitos com o auxílio do software ANSYS objetivando as análises de flambagem e de não linearidade geométrica do modelo. Adicionalmente, fez-se a análise dos deslocamentos verticais da sapata constatando-se que ocorre levantamento da mesma em virtude da flexibilidade do sistema fundação-solo, resultando em um incremento no deslocamento transversal total medido no topo da torre, situação para qual a estabilidade do conjunto foi confirmada. Para modelagem dinâmica da torre, foram utilizados elementos finitos de barra (implementação com código próprio) e elementos finitos de casca e sólidos (via ANSYS) para obtenção de suas propriedades dinâmica e da resposta da torre submetida à ação dinâmica harmônica ressonante. Por fim, um absorvedor dinâmico de vibração foi projetado para ser acoplado ao topo da torre, investigando um amortecedor de massa sintonizado (AMS), um amortecedor de massa ativo (AMA) e um amortecedor de massa híbrido (AMH). Para a determinação dos coeficientes do absorvedor, utilizou-se a teoria proposta por Den Hartog, sintonizando o absorvedor às duas primeiras frequências naturais da torre, e para a obtenção das variáveis ótimas de controle introduzidas pelos atuadores, foi aplicado o regulador quadrático linear (LQR). O AMH, foco principal de contribuição desta tese, alcançou excelentes níveis de

redução de vibração para a torre submetida às ações harmônicas, em regime transiente e permanente (estacionário), ressonantes ao primeiro modo de vibração da estrutura sem absorvedor.

Palavras-chave: Energia eólica. Torre do aerogerador. Estabilidade elástica. Análise dinâmica. Controle de vibrações.

ABSTRACT

In view of the current environmental perspective, the generation of energy is directed towards the use of renewable sources, called inexhaustible ones, as is the case with wind energy. Currently, Brazil occupies the 8th position in power installed in the ranking of countries producing electric energy from wind turbines, which are an alternative to demand of the Brazilian electric matrix. Locally, the development of wind energy production in Pernambuco has been promising in recent years. Thus, the size of the wind turbines and consequently of their towers has increased, making the 2nd order geometric and vibrations effects in such steel tubular towers more and more significant. Thus, this thesis has as main aim the analysis of the elastic stability and the design of a device for control of vibration of a horizontal axis wind turbine tubular steel tower, 120 m of high. A large bibliographical review on the topic of study was initially carried out. Then, a stability analysis of the tower was performed, for which the ordinary differential equation was developed, solved by the finite difference method. In addition, the tower was modeled using finite elements of bar, in which, the geometric nonlinearity, was considered by the consistent geometric stiffness matrix. Subsequently, the structural design of the tower and its foundation (slab foundation) were developed and modeled, together with the ground, in finite elements with the aid of the ANSYS software, aiming at the buckling and geometric nonlinearity analyzes of the model. In addition, the vertical displacements of the slab foundation were analyzed, showing that it is raised due to the flexibility of the foundation-soil system, resulting in an increase in the total transversal displacement measured at the top of the tower, for which the stability of the been confirmed. For dynamic modeling of the tower, finite bar elements (implementation with its own code) and shell and solids finite elements (in ANSYS) were used to obtain its dynamic properties and the response of the tower submitted to resonant harmonic dynamic excitation. Finally, a dynamic vibration absorber was designed to be coupled to the top of the tower, investigating Tuned Mass Damper (TMD), an Active Mass Damper (AMD), and a Hybrid Mass Damper (HMD). For the determination of the parameters of the absorber, the theory proposed by Den Hartog was used, tuning the absorber to the first two natural frequencies of the tower, and to obtain the optimal control variables introduced by the actuators, the Linear Quadratic Regulator (LQR) was applied. The HMD, the main focus of this thesis contribution, reached excellent levels of vibration reduction for the tower submitted to harmonic actions, in a transient and permanent (stationary) regime, resonant to the first vibration mode of the structure without control.

Keywords: Wind energy. Wind turbine tower. Elastic stability. Dynamic analysis. Vibration control.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Potência eólica instalada em MW entre 2011 e 2017. | 38 |
| Figura 2 – Potência eólica acumulada instalada (MW) ao fim de 2017..... | 38 |
| Figura 3 – Localização das Usinas geradoras de energia elétrica em Pernambuco. | 42 |
| Figura 4 – Desenho/esquema da metodologia da tese..... | 44 |
| Figura 5 – Esquema das pressões atuantes nas pás. | 47 |
| Figura 6 – Componentes principais de um HAWT moderno..... | 48 |
| Figura 7 – Avanço do porte dos aerogeradores ao longo dos anos. | 49 |
| Figura 8 – Processos de fabricação da torre tubular de aço para geradores eólicos..... | 51 |
| Figura 9 – Sistemas internos em torres tubulares de aço para turbinas eólicas de grande porte. | 52 |
| Figura 10 – Distribuição de tensões na abertura da porta da torre analisada. | 53 |
| Figura 11 – Quatro primeiros modos e frequências de vibração da torre analisada..... | 53 |
| Figura 12 – Configuração geométrica e modelagem da torre do aerogerador. | 54 |
| Figura 13 – Detalhe da ancoragem..... | 55 |
| Figura 14 – Abertura da torre para porta e distribuição das tensões equivalentes de <i>von Mises</i> | 56 |
| Figura 15 – Distribuição da pressão de vento na torre. | 57 |
| Figura 16 – Esquema da torre da turbina eólica MM92..... | 59 |
| Figura 17 – Seções de ligação e detalhe dos enrijecedores..... | 60 |
| Figura 18 – Malha de elementos finitos da torre e detalhes das aberturas na torre..... | 61 |
| Figura 19 – Distribuição das tensões equivalentes de <i>von Mises</i> na análise estática. | 62 |
| Figura 20 – Gráficos deslocamentos translacionais horizontais vs. tempo ao longo da altura da torre. | 63 |
| Figura 21 – Gráficos de carregamento vs. deslocamento para o modelo da torre eólica investigado. | 64 |
| Figura 22 – Flambagem local da parede do modelo de torre analisado. | 64 |
| Figura 23 – Modelo e discretização da torre analisada. | 66 |
| Figura 24 – Idealização do aerogerador modelado..... | 70 |
| Figura 25 – Esquema dos módulos do FAST..... | 76 |
| Figura 26 – Fotografias dos modelos de aerogerador e de absorvedor estudados. | 78 |
| Figura 27 – Diferentes arranjos de AMS investigados (dimensões em m, sem escala). | 81 |

| | |
|--|---------|
| Figura 28 – Modelo do aerogerador NREL 5 MW equipado com um AMH. | 81 |
| Figura 29 – Configuração da viga-coluna. | 84 |
| Figura 30 – Discretização da torre para análise por diferenças finitas. | 86 |
| Figura 31 – Forma modal considerada para a torre. | 87 |
| Figura 32 – Graus de liberdade do elemento finito de barra utilizado. | 89 |
| Figura 33 – Reações elásticas no elemento finito de barra utilizado. | 90 |
| Figura 34 – Representação das forças e momentos aplicados ao topo da torre. | 94 |
| Figura 35 – Distribuição da ação do vento atuante na torre. | 95 |
| Figura 36 – Esquema do projeto da torre (sem escala). | 96 |
| Figura 37 – Configuração dos modelos analisados. | 97 |
| Figura 38 – Representação geométrica dos elementos finitos utilizados. | 98 |
| Figura 39 – Representação das expressões de verificação das seções transversais da torre. | 99 |
| Figura 40 – Modos de instabilidade da torre. | 100 |
| Figura 41 – Representação das reações do solo sobre a sapata. | 102 |
| Figura 42 – Deslocamentos verticais da sapata (m). | 102 |
| Figura 43 – Distribuição de tensões de <i>von Mises</i> na torre (Pa). | 103 |
| Figura 44 – Detalhamento das ligações. | 104 |
| Figura 45 – Deslocamentos transversais à torre dos cinco primeiros modos de vibração. | 123 |
| Figura 46 – Opções de análise modal selecionadas no ANSYS. | 124 |
| Figura 47 – Frequências de vibração da torre engastada na base obtidas via ANSYS. | 125 |
| Figura 48 – Modos de vibração da torre engastada na base e modelada com EF de casca. | 126-129 |
| Figura 49 – Frequências de vibração da torre com fundação flexível obtidas via ANSYS. | 131 |
| Figura 50 – Modos de vibração da torre com fundação flexível. | 132-136 |
| Figura 51 – Deslocamentos verticais da sapata (m). | 137 |
| Figura 52 – Gráfico de deslocamento no topo da torre u_n versus tempo. | 140 |
| Figura 53 – Gráfico de deslocamento no topo da torre u_n^{FL} versus tempo. | 141 |
| Figura 54 – Gráfico de deslocamento no topo da torre u_n^V versus tempo. | 144 |
| Figura 55 – Sistema massa-mola amortecido com absorvedor de vibração passivo. | 148 |
| Figura 56 – Gráfico de $\frac{a_p}{a_{est}}$ versus β | 150 |

| | |
|--|-----|
| Figura 57 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração passivo de dois graus de liberdade. | 154 |
| Figura 58 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração híbrido de dois graus de liberdade. | 155 |
| Figura 59 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração ativo de dois graus de liberdade. | 159 |
| Figura 60 – Deslocamentos transversais à torre dos seis primeiros modos de vibração..... | 173 |
| Figura 61 – Gráfico da razão de massas modais (μ) e da razão entre frequências angulares (f) <i>versus</i> razão de massas ($\bar{\mu}$). | 177 |
| Figura 62 – Gráfico da rigidez do absorvedor dinâmico de vibração (k_t) <i>versus</i> razão de massas ($\bar{\mu}$). | 177 |
| Figura 63 – Gráfico do amortecimento do absorvedor dinâmico de vibração (c_t) <i>versus</i> razão de massas ($\bar{\mu}$). | 178 |
| Figura 64 – Gráfico da razão entre os valores eficazes dos deslocamentos controlado e sem controle do topo da torre <i>versus</i> razão de massas..... | 179 |
| Figura 65 – Gráfico da razão entre os valores eficazes de deslocamento do absorvedor e deslocamento controlado do topo da torre <i>versus</i> razão de massas. | 180 |
| Figura 66 – Gráfico dos valores eficazes da força de controle aplicada ao topo da torre <i>versus</i> razão de massas..... | 180 |
| Figura 67 – Gráfico do deslocamento do topo da torre sem controle e controlada passivamente (ação atuante durante 5 s)..... | 181 |
| Figura 68 – Gráfico do deslocamento do topo da torre controlada passivamente e hibridamente (ação atuante durante 5 s). | 182 |
| Figura 69 – Gráfico do deslocamento do absorvedor de vibração no sistema passivo e híbrido (ação atuante durante 5 s)..... | 183 |
| Figura 70 – Gráfico da força de controle induzida pelos atuadores do sistema híbrido (ação atuante durante 5 s). | 183 |
| Figura 71 – Gráfico do deslocamento do topo da torre sem controle e controlada passivamente (ação atuante durante toda análise). | 184 |
| Figura 72 – Gráfico do deslocamento do topo da torre controlada passivamente e hibridamente (ação atuante durante toda análise)..... | 185 |

| | |
|--|---------|
| Figura 73 – Gráfico do deslocamento do absorvedor de vibração no sistema passivo e híbrido (ação atuante durante toda análise). | 186 |
| Figura 74 – Gráfico da força de controle induzida pelos atuadores do sistema híbrido (ação atuante durante toda análise)..... | 186 |
| Figura 75 – Modelo construtivo do mecanismo de controle (sem escala). | 187-187 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 1 – Dados do padrão do aerogerador selecionado. | 94 |
| Tabela 2 – Carregamento aplicado ao topo da torre. | 94 |
| Tabela 3 – Deslocamentos transversais (m) no topo da torre. | 101 |
| Tabela 4 – Dados de vibração livre da torre. | 123 |
| Tabela 5 – Frequências de vibração dos modelos estudados. | 138 |
| Tabela 6 – Massa e rigidez modais referente aos 1° e 2° modos de vibração gerais da torre. | 168 |
| Tabela 7 – Parâmetros do absorvedor dinâmico de vibração para as direções laterais X e Z. | 169 |
| Tabela 8 – Dados de vibração livre da torre. | 172 |
| Tabela 9 – Parâmetros utilizados na análise paramétrica dos sistemas de controle. | 176 |
| Tabela 10 – Dados dos deslocamentos no topo da torre para excitação senoidal aplicada durante 5 s. | 181 |
| Tabela 11 – Dados dos deslocamentos no topo da torre para excitação senoidal aplicada durante toda análise. | 184 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|--|----|
| Quadro 1 – Usinas eólicas em operação em Pernambuco..... | 39 |
| Quadro 2 – Usinas eólicas já outorgadas pela ANEEL, mas ainda não concluídas..... | 40 |
| Quadro 3 – Classificação dos sistemas de controle..... | 74 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|--------|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Norma Técnicas |
| AG | Algoritmo Genético |
| ALS | Amortecedores de Líquido Sintonizado |
| AMA | Amortecedor de Massa Ativo |
| AMD | <i>Active Mass Damper</i> |
| AMH | Amortecedor de Massa Híbrido |
| AMS | Amortecedor de Massa Sintonizado |
| AMSM | Amortecedor de Massa Sintonizado Múltiplo |
| ANEEL | Agência Nacional de Energia Elétrica |
| ANSYS | <i>Swason Analysis Systems</i> |
| ASTM | <i>American Society for Testing and Materials</i> |
| CAA | Centro Acadêmico do Agreste |
| CTG | Centro de Tecnologia e Geociência |
| DNV | <i>Det Norske Veritas</i> |
| DWIA | <i>Danish Wind Industry Association</i> |
| EDO | Equação Diferencial Ordinária |
| EF | Elemento Finito |
| EIA | Estudo de Impacto Ambiental |
| ELFad | Estado Limite de Fadiga |
| ELFla | Estado Limite de Flambagem |
| ELP | Estado Limite de Plastificação |
| ELS | Estado Limite de Serviço |
| ELU | Estado Limite Último |
| FAST | <i>Fatigue, Aerodynamics, Structures and Turbulence</i> |
| GWEC | <i>Global Wind Energy Council</i> |
| HAWT | <i>Horizontal Axis Wind Turbines</i> |
| HMD | <i>Hybrid Mass Damper</i> |
| IEC | <i>International Electrotechnical Commission</i> |
| MATLAB | <i>MATrix LABoratory</i> |
| MDF | Método das Diferenças Finitas |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| MMC | Mecânica do Meio Contínuo |
| MTMD | <i>Multiple Tuned Mass Damper</i> |

| | |
|-------|--|
| NASA | <i>National Aeronautics and Space Administration</i> |
| NBR | Norma Brasileira |
| NREL | <i>National Renewable Energy Laboratory</i> |
| PCH | Pequenas Centrais Hidrelétricas |
| PDV | Princípio dos Deslocamentos Virtuais |
| PPGEC | Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil |
| RIMA | Relatório de Impacto Ambiental |
| SFG | Superintendência de Fiscalização dos Serviços de Geração |
| SGC | Sistema Global de Coordenadas |
| SI | Sistema Internacional |
| SIN | Sistema Integrado Nacional |
| SGC | Sistema Global de Coordenadas |
| SLC | Sistema Local de Coordenadas |
| SW | <i>sand well graded</i> |
| SWT | <i>Siemens Wind Turbine</i> |
| TLD | <i>Tuned Liquid Damper</i> |
| TMD | <i>Tuned Mass Damper</i> |
| UFPE | Universidade Federal de Pernambuco |
| VAWT | <i>Vertical Axis Wind Turbines</i> |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------------|--|
| x | coordenada ao longo da altura da torre |
| $M(x)$ | função de momento fletor |
| $V(x)$ | função de esforço transversal |
| $N(x)$ | função de esforço axial |
| $q(x)$ | função de carregamento transversal |
| $pp(x)$ | função de carregamento axial |
| $v(x)$ | função de deslocamento transversal à torre |
| dx | comprimento do elemento infinitesimal de torre na direção x |
| dx' | comprimento do elemento infinitesimal de torre na posição deformada |
| $\theta(x)$ | função de inclinação das seções transversais da torre |
| $\mathfrak{M}(x)$ | função de momento fletor interno |
| E | módulo de elasticidade longitudinal do material |
| $I(x)$ | função de momento de inércia da seção transversal da torre |
| i | subíndice utilizado para os nós do modelo da torre |
| h | comprimento do trecho de torre analisado |
| n | designação do nó relativo ao topo da torre; ou representa o número de graus de liberdade da estrutura sem absorvedor |
| M_H | momento de flexão aplicado ao topo da torre |
| F_H | força transversal aplicada ao topo da torre |
| A_j | constantes da forma modal polinomial da torre |
| L | comprimento da torre |
| δ | deslocamento transversal no topo da torre |
| m | máxima potência da forma modal polinomial proposta; ou representa o número de solicitações externas aplicadas |
| $u(x)$ | função de deslocamento axial à torre |
| T_{pp} | trabalho realizado pela carga axial distribuída pp ao longo da função de deslocamento axial u |
| P | força axial concentrada aplicada ao topo da torre |
| T_P | trabalho realizado pela força P |
| U | energia potencial de deformação à flexão |
| $d(x)$ | função de diâmetros (distância de eixo a eixo de parede do tubo da torre) variáveis ao longo da altura da torre |
| $A(x)_i$ | vetor de funções de áreas de seção transversal da torre |
| $pp(x)_i$ | vetor de funções de pesos próprios por unidade de comprimento de torre |

| | |
|------------------------|---|
| $I(x)_i$ | vetor de funções de momentos de inércia das seções transversais da torre |
| esp_i | vetor de espessuras da parede do tubo da seção transversal da torre |
| d_{base} | diâmetro (distância de eixo a eixo de parede) do tubo na base da torre |
| d_{topo} | diâmetro (distância de eixo a eixo de parede) do tubo no topo da torre |
| pp_{base} | peso próprio por unidade de comprimento na base da torre |
| e_{base} | espessura da parede do tubo na base da torre |
| β | relação β entre o peso próprio de uma torre com seção transversal constante da base e a força axial concentrada P aplicada ao topo da torre; ou razão entre a frequência angular da excitação e a frequência angular da estrutura principal |
| P_{CR} | carga de flambagem da torre |
| T | trabalho realizado por todas cargas verticais atuantes na torre |
| X_L | coordenada axial local do elemento finito de torre |
| Y_L | coordenada transversal local do elemento finito de torre |
| Z_L | coordenada transversal local do elemento finito de torre |
| u_i, u_f | deslocamentos nodais axiais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| v_i, v_f | deslocamentos nodais transversais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| θ_i, θ_f | rotações nodais flexionais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| φ_i, φ_f | rotações nodais torcionais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| $\{d\}$ | vetor de deslocamentos nodais do elemento finito de torre no SLC |
| $\{R_e\}$ | vetor de reações elásticas do elemento finito de torre no SLC |
| $\{R_e^F\}$ | vetor de reações de engaste perfeito do elemento finito de torre no SLC |
| $[K_e]$ | matriz de rigidez linear do elemento finito de torre no SLC |
| N_i, N_f | reações elásticas de forças axiais nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| V_i, V_f | reações elásticas de forças transversais nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| M_i, M_f | reações elásticas de momentos de flexão nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| T_i, T_f | reações elásticas de momentos de torção nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC |
| r | rigidez linear translacional axial do elemento finito de torre; ou representa o número de forças/momentos de controle dos atuadores |
| \hat{s} | rigidez linear rotacional torcional do elemento finito de torre |

| | |
|----------------------|--|
| t | rigidez linear translacional transversal do elemento finito de torre |
| b_i, b_f | rigidezes lineares translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| k_i, k_f | rigidez linear rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| a | rigidez linear rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $[\mathbf{K}_{e,g}]$ | matriz de rigidez geométrica do elemento finito de torre no SLC |
| $NN(x)$ | função de esforço normal no elemento finito de torre |
| $\psi_i(x)$ | i -ésima função de forma |
| r_g, r_T | rigidezes geométrica e tangencial translacionais axiais, respectivamente, do elemento finito de torre |
| t_g, t_T | rigidezes geométrica e tangencial translacionais transversais, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $b_{i,g}, b_{f,g}$ | rigidezes geométricas translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $b_{i,T}, b_{f,T}$ | rigidezes tangenciais translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $k_{i,g}, k_{f,g}$ | rigidezes geométricas rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $k_{i,T}, k_{f,T}$ | rigidezes tangenciais rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre |
| a_g | rigidez geométrica rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre |
| a_T | rigidez tangencial rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre |
| $[\mathbf{K}_{e,T}]$ | matriz de rigidez tangencial do elemento finito de torre no SLC |
| j | subíndice utilizado para enumerar os elementos finitos da torre; ou letra para designar a parte imaginária de um número complexo |
| $\{\mathbf{F}_E\}$ | vetor de forças nodais da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{D}\}$ | vetor de deslocamentos nodais da estrutura no SGC coordenadas |
| $[\mathbf{K}_E]$ | matriz de rigidez tangencial da estrutura no SGC |

| | |
|---|--|
| f_{ck} | resistência característica à compressão do concreto |
| $N_{c,Rd}$ | esforço resistente de cálculo à compressão |
| $N_{c,Sd}$ | esforço solicitante de cálculo à compressão |
| M_{Rd} | momento fletor resistente de cálculo |
| $M_{H,Sd}$ | momento fletor solicitante de cálculo segundo o eixo z |
| $M_{lat,Sd}$ | momento fletor solicitante de cálculo segundo o eixo y |
| t | variável temporal |
| E_c | energia cinética da estrutura |
| Ω | potencial das forças externas conservativas aplicadas fora dos nós da estrutura |
| $\{\mathbf{D}(t)\}$ | vetor de funções temporais de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura no SGC |
| $\{\dot{\mathbf{D}}(t)\}$ | vetor de funções temporais de velocidades dos graus de liberdade da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{F}(t)\}$ | vetor de funções temporais de forças aplicadas nos nós da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{F}_{NC}(t)\}$ | vetor de funções temporais de forças não conservativas no SGC |
| $[\mathbf{M}_E]$ | matriz de massa consistente da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{R}_E^F(t)\}$ | vetor de funções temporais das reações de extremo fixo da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{F}_{NE}(t)\}$ | vetor de funções temporais das forças não conservativas externas no SGC |
| $[\mathbf{C}_E]$ | matriz de amortecimento da estrutura no SGC |
| $\{\mathbf{F}_E(t)\}$ | vetor de funções temporais das forças nodais da estrutura no SGC |
| $[\mathbf{M}_e]$ | matriz de massa do elemento finito no SLC |
| $[\mathbf{C}_e]$ | matriz de amortecimento do elemento finito no SLC |
| V | volume do elemento finito |
| ρ | massa específica do material da estrutura |
| c | coeficiente de amortecimento viscoso do material |
| $[\mathbf{N}]$ | matriz das funções de forma do elemento finito |
| $[\mathbf{E}]$ | matriz da lei constitutiva do material da estrutura |
| $[\mathbf{B}]$ | matriz deformação-deslocamento do elemento finito |
| $[\mathbf{d}]$ | matriz de derivadas parciais, em relação as coordenadas locais, que relaciona deslocamentos e deformações específicas do elemento finito |
| $\{\mathbf{P}\}_j$ | forças concentradas aplicadas à estrutura |
| $\{\boldsymbol{\sigma}\}\{\mathbf{n}\}$ | forças de superfície aplicadas à estrutura |
| $\rho \{\mathbf{b}\}$ | forças de massa de origem gravitacional aplicadas à estrutura |

| | |
|---|---|
| $\{\mathbf{q}\}$ | forças de volume adicionais de origem qualquer aplicadas à estrutura |
| $[\mathbf{M}_g], [\mathbf{C}_g], [\mathbf{K}_g]$ | matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do elemento finito no SGC com os graus de liberdade associados aos nós do respectivo elemento finito |
| $\{\mathbf{R}^F\}, \{\mathbf{R}\}$ | vetores de reações de extremo fixo e de forças aplicadas nos nós do elemento finito no SGC com os graus de liberdade associados aos nós do respectivo elemento finito |
| $\{\mathbf{F}_{NC,g}\}$ | vetor de forças não conservativas no SGC com os graus de liberdade associados aos nós do respectivo elemento finito |
| $[\mathbf{T}_c]$ | matrizes de rotação do elemento finito |
| $\{\mathbf{F}_{NC,e}\}$ | vetor de forças não conservativas no SLC |
| $\{\mathbf{F}_{E,g}\}$ | vetor de forças do elemento finito no SGC com os graus de liberdade associados aos nós do respectivo elemento finito |
| $\{\mathbf{F}_{E,e}\}$ | vetor de forças do elemento finito no SLC |
| $[\mathbf{L}]$ | matriz de incidência cinemática, que relaciona os graus de liberdade locais e globais |
| $[\mathbf{M}_p], [\mathbf{C}_p], [\mathbf{K}_p]$ | matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do elemento finito no SGC com todos os graus de liberdade da estrutura |
| $\{\mathbf{F}_{E,p}\}$ | vetor de forças do elemento finito no SGC com todos os graus de liberdade da estrutura |
| jj | subíndice utilizado para enumerar os elementos finitos da estrutura |
| n_e | número de elementos finitos da estrutura |
| $[\boldsymbol{\varphi}]$ | matriz de autoversores da matriz de massa da estrutura $[\mathbf{M}_E]$ |
| $[\mathbf{M}^*]$ | matriz de massa diagonalizada da estrutura |
| $\{\mathbf{D}^*\}, \{\ddot{\mathbf{D}}^*\}$ | vetor de deslocamentos e de acelerações, respectivamente, no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada |
| $[\mathbf{K}^*]$ | matriz de rigidez da estrutura no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada |
| $\{\mathbf{F}^*\}$ | vetor de forças no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada |
| $[\mathbf{DI}]$ | matriz dinâmica inversa |
| $\{\mathbf{Y}\}, \{\ddot{\mathbf{Y}}\}$ | vetor de deslocamentos e de acelerações, respectivamente, no referencial em que a matriz de massa é transformada em uma matriz identidade |
| $\{\mathbf{F}^1\}$ | vetor de forças no referencial em que a matriz de massa é transformada em uma matriz identidade |
| $[\bar{\boldsymbol{\Psi}}]$ | matriz de autoversores da matriz dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$ |
| $[\boldsymbol{\omega}^2]$ | matriz diagonal com o quadrado das frequências angulares |
| $\{\bar{\mathbf{q}}\}, \{\ddot{\bar{\mathbf{q}}}\}$ | vetor de deslocamentos e de acelerações, respectivamente, no referencial intitulado de generalizado, em que a matriz $[\mathbf{DI}]$ fica diagonalizada |

| | |
|---|--|
| $[\Phi]$ | matriz modal ponderada |
| $\{\bar{\mathbf{F}}\}$ | vetor de forças no referencial denominado generalizado, em que a matriz $[\mathbf{DI}]$ fica diagonalizada |
| $\{\bar{\mathbf{q}}_0\}, \{\mathbf{D}_0\}$ | vetores de deslocamentos iniciais nos referenciais generalizado e original, respectivamente |
| $\{\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0\}, \{\dot{\mathbf{D}}_0\}$ | vetores de velocidades iniciais nos referenciais generalizado e original, respectivamente |
| $[\bar{\Phi}]$ | matriz modal |
| Φ^0_{ij} | as formas modais normalizadas em notação indicial, em que i representa o i -ésimo grau de liberdade dinâmico |
| η^0_j | módulo do j -ésimo modo de vibração |
| q_j | novo referencial generalizado, no qual as formas modais ficam normalizadas |
| $\{\Phi^0\}_j$ | j -ésimo modo de vibração normalizado |
| $[\mathbf{M}^0]$ | matriz diagonal de massas modais |
| $[\mathbf{K}^0]$ | matriz diagonal de rigidezes modais |
| $\{\mathbf{F}^0\}$ | vetor de forças modais |
| ω_j | frequência angular do j -ésimo modo de vibração |
| a_0 | coeficiente ponderador da matriz de massa na técnica de amortecimento proporcional ou amortecimento de Rayleigh |
| a_1 | coeficiente ponderador da matriz de rigidez na técnica de amortecimento proporcional |
| ξ_i | razão de amortecimento relativa ao i -ésimo modo de vibração da estrutura |
| $[\mathbf{C}^0]$ | matriz diagonal de amortecimentos modais |
| a_{kk} | kk -ésimo coeficiente ponderador na técnica de amortecimento de Caughey |
| $\{\ddot{\mathbf{d}}\}$ | vetor de acelerações nodais do elemento finito de torre no SLC |
| v_i, η, v_f | termos relacionados aos graus de liberdade axiais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$ |
| μ_i, δ, μ_f | termos relacionados aos graus de liberdade torcionais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$ |
| $\alpha_i, \gamma_i, \sigma, \tau_i, \beta_i, \tau_f, \lambda, \alpha_f, \gamma_f, \beta_f$ | termos relacionados aos graus de liberdade flexionais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$ |
| $J_0(x)$ | função de momento polar de inércia da seção transversal |
| $M_H(t)$ | função temporal do momento de flexão aplicado ao topo da torre |
| I_{nac}^{fl} | momento de inércia da nacele em relação ao eixo que passa pelo diâmetro da seção transversal de topo da torre (eixo em torno do qual tem-se a rotação θ_n) |
| $\theta_n, \ddot{\theta}_n$ | rotação e aceleração angular flexionais do topo da torre, respectivamente |

| | |
|--|---|
| u_n, \ddot{u}_n | deslocamento e aceleração translacionais transversais do topo da torre, respectivamente |
| ρ_{nac} | massa específica constante equivalente da nacele |
| $a_{nac}, b_{nac}, h_{nac}$ | dimensões do paralelepípedo equivalente à nacele |
| M_{nac} | massa da nacele, do rotor e das pás (todos equipamentos localizados no topo da torre) |
| $F_H(t)$ | função temporal da força horizontal aplicada ao topo da torre |
| v_n, \ddot{v}_n | deslocamento e aceleração translacionais axiais do topo da torre, respectivamente |
| $P(t)$ | função temporal da força vertical aplicada ao topo da torre |
| $\varphi_n, \ddot{\varphi}_n$ | rotação e aceleração angular torcionais do topo da torre, respectivamente |
| $T(t)$ | função temporal do momento de torção aplicado ao topo da torre |
| I_{nac}^{tr} | momento de inércia da nacele em relação ao eixo vertical da torre (eixo em torno do qual têm-se as rotações φ_j) |
| $\{\Delta\}, \{\ddot{\Delta}\}$ | vetor de deslocamentos e de acelerações verticais, de rotações torcionais e de rotações flexionais da torre (ou seja, os graus de liberdade condensados), respectivamente |
| $\{u\}, \{\ddot{u}\}$ | vetor de deslocamentos e de acelerações translacionais horizontais da torre (graus de liberdade dinâmicos), respectivamente |
| $\{F_{\Delta}\}$ | vetor de forças relacionado aos graus de liberdade condensados |
| $\{F_u\}$ | vetor de forças relacionado aos graus de liberdade dinâmicos |
| $[M_{\Delta\Delta}], [K_{\Delta\Delta}]$ | submatrizes de massa e de rigidez relacionadas aos graus de liberdade condensados |
| $[M_{uu}], [K_{uu}]$ | submatrizes de massa e de rigidez relacionadas aos graus de liberdade dinâmicos |
| $[M_{\Delta u}], [K_{\Delta u}]$ | submatrizes de massa e de rigidez relacionadas aos graus de liberdade condensados e dinâmicos |
| $[\bar{K}_u]$ | matriz de rigidez global condensada |
| $\{\bar{F}_u\}$ | vetor de forças transversais à torre condensado |
| $[\bar{C}_u]$ | matriz de amortecimento global condensada |
| F_{1k}, F_{2k} | k-ésimas amplitudes cossenoidal e senoidal do vetor de forças condensado |
| p | representa número de forças aplicadas em todos os nós da torre |
| $\bar{\omega}_k$ | k-ésima frequência angular da k-ésima componente do vetor de forças condensado |
| \bar{q}_{hj} | j-ésima solução homogênea da EDO de movimento no referencial generalizado |
| A_j, B_j | vetores das constantes da resposta homogênea da equação de movimento |
| ω_{dj} | frequência angular amortecida do j-ésimo modo de vibração |

| | |
|-----------------------------|--|
| C_{jk}, D_{jk} | Constantes, da resposta particular da equação de movimento em regime permanente, arranjadas em uma matriz com j linhas (j -ésimo grau de liberdade no referencial generalizado) e k colunas (numero de forças aplicadas ao GL j) |
| β_k | razão entre a frequência da excitação $\bar{\omega}_k$ e a correspondente frequência natural ω_j |
| t_F | instante a partir do qual o vetor de forças se anula |
| \bar{A}_j, \bar{B}_j | vetores das constantes, da resposta homogênea da equação de movimento em regime transiente, a serem determinadas pelas condições no instante t_F (\bar{q}_{tFj} e $\dot{\bar{q}}_{tFj}$) |
| \bar{V} | velocidade média de vento medida segundo um intervalo de tempo de 10 min a 10 m de altura do solo |
| X, Y, Z | Eixos coordenados no <i>software</i> ANSYS |
| $q_w(x)$ | função em relação ao nível geral do terreno da pressão dinâmica da parcela flutuante do vento em N/m^2 |
| ρ_{ar} | massa específica do ar em condições ambientais normais |
| $V_{3s}(x)$ | função em relação ao nível geral do terreno da velocidade de vento medida em um intervalo de tempo de 3 s |
| $V_{10min}(x)$ | função em relação ao nível geral do terreno da velocidade de vento medida em um intervalo de tempo de 10 min |
| Re | número de Reynolds |
| V_w | velocidade do fluxo de vento |
| D | diâmetro externo do tubo da torre |
| ν | viscosidade cinemática do fluido |
| $\{\mathbf{Re}\}$ | vetor dos números de Reynolds ao longo da altura da torre |
| V_{cr} | velocidade crítica de fluxo de vento |
| f_1 | frequência fundamental de vibração da torre |
| St | número adimensional de Strouhal |
| $\{\mathbf{V}_{cr}\}$ | vetor das velocidades críticas ao longo da altura da torre |
| $q_L(x, t)$ | ação transversal senoidal equivalente ao fenômeno de desprendimento cadenciado de vórtices e distribuída por unidade de comprimento de torre |
| C_L | coeficiente adimensional de sustentação da torre |
| ω_s | frequência angular de desprendimento de um par de vórtices de von Kármán |
| $\{\boldsymbol{\omega}_s\}$ | vetor das frequências angulares de desprendimento de um par de vórtices de von Kármán ao longo da altura da torre |
| $\{\mathbf{F}_L\}$ | vetor das amplitudes das forças de sustentação aplicadas à torre, |
| m_p, k_p, c_p | massa, rigidez e amortecimento da estrutura principal, respectivamente |

| | |
|---|--|
| m_t, k_t, c_t | massa, rigidez e amortecimento do absorvedor de vibração, respectivamente |
| $F_p(t)$ | função temporal da força aplicada a estrutura principal |
| $x_p(t)$ | função temporal do deslocamento da estrutura principal |
| $x_t(t)$ | função temporal do deslocamento do absorvedor de vibração |
| \ddot{x}_p, \dot{x}_p | aceleração e velocidade da estrutura principal |
| \ddot{x}_t, \dot{x}_t | aceleração e velocidade do absorvedor de vibração |
| F_0 | amplitude da excitação aplicada à estrutura principal |
| $\bar{\omega}$ | frequência angular da força aplicada à estrutura principal |
| \vec{a}_p, \vec{a}_t | quantidades vetoriais complexas que representam as amplitudes das respostas da estrutura principal e do absorvedor, respectivamente |
| μ | razão entre a massa do absorvedor e massa modal da estrutura principal |
| f | razão entre as frequências angulares do absorvedor e da estrutura principal |
| ω_p, ω_t | frequências angulares da estrutura principal e do absorvedor, respectivamente |
| a_{est} | deflexão estática do sistema principal |
| ζ | razão de amortecimento do absorvedor de vibração |
| c_c | grandeza especificada como “amortecimento crítico” |
| $\zeta_{ótimo}$ | valor de amortecimento ótimo |
| $\zeta_{médio}^{ótimo}$ | valor médio de amortecimento ótimo |
| $[\tilde{\mathbf{M}}], [\tilde{\mathbf{C}}], [\tilde{\mathbf{K}}]$ | matriz de massa, de amortecimento e de rigidez do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração, respectivamente |
| $\{\tilde{\mathbf{D}}\}, \{\tilde{\dot{\mathbf{D}}}\}, \{\tilde{\ddot{\mathbf{D}}}\}$ | vetor de deslocamentos, de velocidades e de acelerações (de ordem $n+r$) do sistema acoplado estrutura-absorvedor, respectivamente |
| $\{\tilde{\mathbf{F}}\}$ | vetor de solicitações externas de ordem m |
| $[\mathbf{J}]$ | matriz de posicionamento (mapeamento ou localização) das/dos forças/momentos externos de ordem $(n+r) \times m$ |
| $\{\mathbf{F}_c\}$ | vetor de forças/momentos de controle de ordem r |
| $[\mathbf{J}_c]$ | matriz de posicionamento (mapeamento ou localização) das/dos forças/momentos de controle de ordem $(n+r) \times r$ |
| $[\tilde{\mathbf{M}}_u], [\tilde{\mathbf{C}}_u], [\tilde{\mathbf{K}}_u]$ | matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez em relação aos graus de liberdade de translações transversais do conjunto torre-absorvedor, respectivamente |
| $\{\tilde{\mathbf{u}}\}, \{\tilde{\dot{\mathbf{u}}}\}, \{\tilde{\ddot{\mathbf{u}}}\}$ | vetor de deslocamentos (de ordem n_c+r_c) transversais à torre do conjunto torre-absorvedor, respectivamente |
| $\{\tilde{\mathbf{F}}_u\}$ | vetor de forças externas transversais à torre de ordem m_c |
| $[\tilde{\mathbf{J}}]$ | matriz de posicionamento das forças externas, de ordem $(n_c+r_c) \times m_c$ |

| | |
|--------------------------|---|
| $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$ | vetor de forças de controle de ordem r_c |
| $[\bar{\mathbf{J}}_c]$ | matriz de posicionamento das forças de controle (de ordem $n_c+r_c \times r_c$) |
| n_c | representa o número de graus de liberdade de translações transversais à torre da estrutura sem absorvedor |
| m_c | representa o número de forças externas horizontais aplicadas |
| r_c | representa o número de forças horizontais de controle do atuador segundo o grau de liberdade do absorvedor de vibração |
| $\{\mathbf{X}\}$ | vetor de variáveis de estado |
| $\{\dot{\mathbf{X}}\}$ | derivada temporal do vetor de variáveis de estado |
| $[\mathbf{A}]$ | matriz de estado do sistema (de ordem $2(n_c+r_c) \times 2(n_c+r_c)$) torre-absorvedor de vibração híbrido |
| $[\mathbf{B}]$ | matriz de entrada das forças externas (de ordem $2(n_c+r_c) \times m_c$) aplicadas aos graus de liberdade de translação horizontal do referido sistema |
| $[\mathbf{B}_c]$ | matriz de entrada das forças de controle (de ordem $2(n_c+r_c) \times r_c$) aplicadas ao absorvedor de vibração |
| $\{\mathbf{Y}\}$ | vetor de saída do sistema |
| $[\mathbf{CC}]$ | matriz de saída do sistema acoplado torre-absorvedor (de ordem $p_c \times 2(n_c+r_c)$) |
| $[\mathbf{DD}]$ | matriz de transmissão direta do sistema (de ordem $p_c \times r_c$) |
| p_c | representa o número de variáveis de saída do sistema |
| $[\mathbf{MC}]$ | matriz de controlabilidade (de ordem $N \times N$) |
| N | número de variáveis de estado do sistema em análise |
| $[\mathbf{PP}]$ | matriz modal da matriz de estados $[\mathbf{A}]$ |
| $\{\mathbf{Z}\}$ | vetor de variáveis de estado transformado no referencial em que a matriz de estados $[\mathbf{A}]$ fica diagonalizada |
| $\{\dot{\mathbf{Z}}\}$ | derivada temporal vetor de variáveis de estado transformado no referencial em que a matriz de estados $[\mathbf{A}]$ fica diagonalizada |
| $[\mathbf{\Lambda}]$ | matriz espectral da matriz de estados $[\mathbf{A}]$ |
| $[\mathbf{B}']$ | matriz de entrada das forças externas $[\mathbf{B}]$ pré-multiplicada por $[\mathbf{PP}]^{-1}$ |
| $[\mathbf{B}_c']$ | matriz de entrada das forças de controle $[\mathbf{B}_c]$ pré-multiplicada por $[\mathbf{PP}]^{-1}$ |
| $[\mathbf{CS}]$ | matriz de controlabilidade de saída |
| $[\mathbf{MO}]$ | matriz de observabilidade |
| $[\mathbf{CC}']$ | matriz de saída $[\mathbf{CC}]$ multiplicada por $[\mathbf{PP}]$ |
| $\{\mathbf{Z}\}$ | vetor de variáveis de estado no referencial que diagonalizada a matriz de estados $[\mathbf{A}]$ |
| $\{\dot{\mathbf{Z}}\}$ | derivada temporal do vetor de variáveis de estado transformado |
| λ_{ii} | ii-ésimo autovalor da matriz de estados $[\mathbf{A}]$ |

| | |
|--|--|
| ii | índice das variáveis de estado (deslocamentos e velocidades dos graus de liberdade translacionais transversais à torre) que variam de 1 a N |
| k | índice das variáveis de entrada (forças externas transversais à torre) que variam de 1 a m_c |
| $\tilde{F}_{1k}, \tilde{F}_{2k}$ | k-ésimas amplitudes cossenoidal e senoidal do vetor de forças, respectivamente |
| C_{ii} | vetor de constantes de integração determinado a partir das condições iniciais $Z_{ii}(t_0) = Z_{t_0ii}$ em um instante de tempo qualquer t_0 |
| $\{Z_{t_0}\}$ | condições iniciais no referencial que dasacopla as equações de estado |
| $\{X_{t_0}\}$ | condições iniciais no referencial original da estrutura |
| J | índice de desempenho quadrático |
| [KG] | matriz de ganho (de ordem $r_c \times N$) do vetor de controle ótimo |
| [Q] | matriz de ponderação das variáveis de estado, que é definida positiva (ou semidefinida positiva) e de ordem $N \times N$ |
| [R] | matriz de ponderação das variáveis de controle, que é definida positiva e de ordem $r_c \times r_c$ |
| []* | matriz hermitiana ou autoadjunta, em que sua transposta conjugada é igual a ela mesma |
| [P] | matriz de solução da equação matricial de Ricatti, que é definida positiva e de ordem $N \times N$ |
| $\{X(t \rightarrow \infty)\}$ | vetor de estados quando o tempo tende para infinito |
| $\{X(0)\}$ | vetor de estados para o instante de tempo nulo |
| [T] | matriz não-singular que é utilizada para desmembrar a matriz [R] |
| [M] | matriz, de ordem $2N \times 2N$, definida para resolução da equação de Ricatti |
| [S] | matriz, de ordem $N \times N$, definida para compor como submatriz a matriz [M] |
| [W] | matriz modal de [M] |
| $[W_{11}], [W_{12}], [W_{21}], [W_{22}]$ | submatrizes da matriz [W] |
| [J] | matriz espectral de [M] |
| [I] | matriz identidade |
| $[\bar{A}]$ | nova matriz de estados do sistema em malha fechada |
| $\bar{\mu}$ | razão entre massa do absorvedor e a massa total da estrutura |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 34 |
| 1.1 | <i>PROBLEMÁTICA ABORDADA</i> | 35 |
| 1.2 | <i>JUSTIFICATIVA E INOVAÇÃO</i> | 37 |
| 1.3 | <i>OBJETIVOS.....</i> | 43 |
| 1.3.1 | Objetivo geral..... | 43 |
| 1.3.2 | Objetivos específicos e metodologia | 43 |
| 1.4 | <i>LIMITAÇÕES DA TESE.....</i> | 44 |
| 1.5 | <i>CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DA TESE</i> | 45 |
| 2 | REVISÃO DA LITERATURA | 47 |
| 2.1 | <i>CARACTERÍSTICAS DOS AEROGERADORES</i> | 47 |
| 2.2 | <i>TORRES PARA AEROGERADORES.....</i> | 49 |
| 2.3 | <i>ANÁLISE DINÂMICA E ESTRUTURAL DAS TORRES PARA HAWT</i> | 52 |
| 2.4 | <i>CONTROLE DE VIBRAÇÕES</i> | 72 |
| 2.4.1 | Sistemas de controle de vibrações | 72 |
| 2.4.2 | Aplicação do controle estrutural de vibrações a torres para HAWT | 75 |
| 2.5 | <i>CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO</i> | 82 |
| 3 | ANÁLISE DA ESTABILIDADE ELÁSTICA DA TORRE..... | 83 |
| 3.1 | <i>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</i> | 83 |
| 3.1.1 | Mecânica do Meio Contínuo (MMC)..... | 83 |
| 3.1.2 | Método energético..... | 86 |
| 3.2 | <i>ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA CÓDIGO PRÓPRIO (EF DE BARRA)</i> | 89 |
| 3.2.1 | Técnica de divisão em elementos finitos | 89 |
| 3.2.2 | Graus de liberdade do elemento finito..... | 89 |
| 3.2.3 | Matriz de rigidez do elemento finito | 90 |
| 3.2.4 | Matriz de rigidez global da torre | 92 |
| 3.3 | <i>PARÂMETROS PARA O PROJETO DO MODELO DA TORRE.....</i> | 93 |
| 3.4 | <i>MODELAGEM NO SOFTWARE ANSYS.....</i> | 96 |
| 3.5 | <i>RESULTADOS E DISCUSSÃO</i> | 98 |
| 3.5.1 | Projeto da torre..... | 98 |
| 3.5.2 | Análise de flambagem da torre | 100 |
| 3.5.3 | Deslocamentos da torre | 101 |
| 3.5.4 | Análise da sapata | 101 |

| | |
|---|------------|
| 3.5.5 Distribuição de tensões na torre..... | 102 |
| 3.5.6 Ligações da torre | 103 |
| 3.6 <i>CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO</i> | 105 |
| 4 CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DA TORRE | 106 |
| 4.1 <i>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</i> | 106 |
| 4.1.1 Equação de movimento em elementos finitos..... | 106 |
| 4.1.2 Método da superposição modal..... | 109 |
| 4.1.3 Matriz de amortecimento..... | 113 |
| 4.2 <i>ANÁLISE DINÂMICA VIA CÓDIGO PRÓPRIO (EF DE BARRA)</i> | 114 |
| 4.2.1 Graus de liberdade do elemento finito..... | 114 |
| 4.2.2 Matriz de massa do elemento finito | 115 |
| 4.2.3 Equilíbrio dinâmico da torre | 115 |
| 4.2.4 Condensação estática..... | 118 |
| 4.3 <i>PARÂMETROS DE VIBRAÇÃO FORÇADA</i> | 119 |
| 4.3.1 Excitação harmônica permanente..... | 119 |
| 4.3.2 Excitação harmônica transiente | 121 |
| 4.4 <i>RESULTADOS E DISCUSSÃO</i> | 122 |
| 4.4.1 Obtenção das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da torre..... | 122 |
| 4.4.2 Análise modal da torre | 123 |
| 4.4.3 Resposta da torre a uma excitação harmônica | 138 |
| 4.4.4 Resposta da torre ao despredimento cadenciado de vórtices | 141 |
| 4.5 <i>CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO</i> | 145 |
| 5 CONTROLE DE VIBRAÇÃO DA TORRE..... | 146 |
| 5.1 <i>CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÃO</i> | 147 |
| 5.1.1 Absorvedor dinâmico de vibração passivo..... | 147 |
| 5.1.2 Absorvedor dinâmico de vibração passivo aplicado à torre..... | 152 |
| 5.2 <i>CONTROLE HÍBRIDO DE VIBRAÇÃO</i> | 154 |
| 5.2.1 Absorvedor dinâmico de vibração híbrido aplicado à torre | 154 |
| 5.2.2 Sistema no espaço de estados..... | 155 |
| 5.3 <i>CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO</i> | 158 |
| 5.4 <i>CONCEITOS DA TEORIA DE CONTROLE</i> | 158 |
| 5.4.1 Classificação do sistema de controle | 158 |
| 5.4.2 Controlabilidade do sistema de controle | 159 |
| 5.4.3 Observabilidade do sistema de controle | 161 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 5.4.4 | Resolução das equações de estado (desacoplamento) | 162 |
| 5.5 | <i>CONTROLE ÓTIMO</i> | 164 |
| 5.5.1 | Regulador quadrático linear | 164 |
| 5.5.2 | Resolução da equação de Ricatti | 167 |
| 5.6 | <i>RESULTADOS E DISCUSSÃO</i> | 168 |
| 5.6.1 | Controle passivo de vibração da torre | 168 |
| 5.6.2 | Controle híbrido de vibração da torre | 173 |
| 5.6.3 | Controle ativo de vibração da torre | 175 |
| 5.6.4 | Estudo paramétrico dos sistemas passivo, híbrido e ativo | 176 |
| 5.6.5 | Resposta da torre a uma excitação harmônica transiente | 180 |
| 5.6.6 | Resposta da torre a uma excitação harmônica permanente | 183 |
| 5.7 | <i>MODELO CONSTRUTIVO DO MECANISMO DE CONTROLE</i> | 187 |
| 5.8 | <i>CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO</i> | 190 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 192 |
| 6.1 | <i>SÍNTESE DA TESE, CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES</i> | 192 |
| 6.2 | <i>PERSPECTIVAS/SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</i> | 194 |
| | REFERÊNCIAS | 196 |
| | APÊNDICES | 203 |
| | APÊNDICE A – ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA E PROJETO | |
| | ESTRUTURAL DO CONJUNTO TORRE-SAPATA | 203 |
| | APÊNDICE B - CÓDIGO IMPLEMENTADO EM EF DE BARRA PARA | |
| | ANÁLISE DINÂMICA E DE CONTROLE DE | |
| | VIBRAÇÕES DA TORRE | 265 |

1 INTRODUÇÃO

Em vista da perspectiva ambiental relativamente recente, a geração de energia encaminha-se para o uso de fontes renováveis, ditas inesgotáveis, tais como: a solar, a eólica, a hidráulica, a marítima, a geotérmica (dos gêiseres, por exemplo), a biomassa (da cana de açúcar, por exemplo), os biocombustíveis etc.; em detrimento das fontes de energia não renováveis (petróleo, gás natural e carvão).

Dentre essas, destaca-se a energia eólica que consiste em uma energia cinética contida nas massas de ar em movimento (vento). Seus primeiros relatos reportam-se à antiguidade; no entanto, a primeira informação confiável sobre a existência da utilização da energia dos ventos é de 644 d. C., para o funcionamento de moinhos de vento (HAU, 2006). Além deste uso, a energia eólica foi aproveitada para o bombeamento de água e para a propulsão de barcos à vela.

Para a geração de eletricidade, as tentativas iniciais da utilização da energia eólica datam do século XIX. Na Dinamarca, o professor Poul La Cour construiu uma turbina eólica experimental; já na Alemanha, surgiram as primeiras turbinas eólicas de grande porte; e nos Estados Unidos foram desenvolvidos parques eólicos pioneiros (HAU, 2006). Entretanto, a intensificação do uso da energia eólica só ocorre em 1973 com a crise energética do petróleo e com a discussão do problema da poluição ambiental. Durante esse período, os Estados Unidos, através da NASA, desenvolveram modelos de aerogeradores para serem produzidos em escala comercial, formando a base para as tecnologias das turbinas multi-megawatt atuais.

No início do século XXI, a crise hídrica mundial e as questões de preservação ambiental resultaram em um crescimento acelerado na implantação de aerogeradores *onshore* e *offshore* de porte crescente, com torres cada vez mais altas, em busca de ventos tecnicamente aproveitáveis e viáveis economicamente. Logo, o desenvolvimento técnico, o comércio e a instalação de aerogeradores no mundo avançaram rapidamente, fazendo com que a geração de energia a partir de termoelétricas, usina nucleares e hidrelétricas tenha sido complementada e/ou substituída pela produção de tais equipamentos (HAU, 2006).

A crescente utilização dos aerogeradores modernos e sua importância para a geração de energia elétrica reforçam a necessidade de estudos que busquem melhorar o desempenho de seus componentes. Especificamente, a torre que dá suporte ao aerogerador é um elemento essencial para seu funcionamento. Fatores como a esbeltez e a rigidez da torre influenciam diretamente no comportamento estrutural, na estabilidade e na dinâmica do aerogerador. Por isto, esta tese propõe analisar a estabilidade elástica, o comportamento dinâmico e o projeto

de um aparelho de controle de vibrações para uma torre de aço tubular com 120 m de altura destinada a suportar um aerogerador com potência nominal de 3,2 MW.

A seguir, são apresentadas a problemática, as justificativas e a inovação da tese, bem como seus objetivos, limitações e síntese do conteúdo.

1.1 PROBLEMÁTICA ABORDADA

Os grandes centros urbanos, principalmente aqueles que apresentam baixa capacidade energética, devido às suas características geográficas (capacidade hídrica, relevo etc.), direcionaram seus estudos às fontes de energias renováveis que fossem mais eficientes, viáveis economicamente e que não fossem tão impactantes do ponto de vista ambiental. Dentre essas fontes naturais renováveis, a energia produzida a partir dos ventos vem ganhando destaque devido a sua disponibilidade, por não produzir gases de efeito estufa durante a geração de energia e pelo seu baixo impacto ambiental, em comparação com as outras formas de produção de energia.

No Brasil, questões políticas, sociais e técnicas têm sido estudadas de maneira a viabilizar e desenvolver a utilização desse tipo de energia para produção de energia elétrica (JUÁREZ et al., 2014). Especificamente, o Estado de Pernambuco tem realizado, ao longo dos últimos anos, uma série de ações, com o objetivo de fomentar o setor de energia renovável (ATLAS..., 2017). Dentre estas, destaca-se a atração de indústrias para o Polo Eólico de Suape, que resultou na instalação de um conjunto de empresas para fabricação de aerogeradores, torres tubulares, pás de grande porte e forjados em aço. Por exemplo, as Usinas de Ventos de Santa Brígida (no agreste, nos municípios de Caetés, Pedra e Paratama) e as Usinas de Ventos de Santo Estevão (na Chapada do araripe, no município de Araripina) totalizam mais de 600 torres de 80 m para suporte de aerogeradores em operação no estado, evidenciando o crescimento deste tipo de energia.

Em atenção ao vasto potencial eólico que pode ser aproveitado no estado de Pernambuco (ATLAS..., 2017), o porte dos aerogeradores a serem empregados no futuro, tende a ser cada vez maior e mais potente, tornando necessária a instalação destes equipamentos sob a ação de ventos mais intensos e contínuos e, assim, fazendo com que as dimensões das torres destes aerogeradores sejam continuamente incrementadas. Particularmente, a altura da torre é um parâmetro essencial para captação de ventos estáveis de grande altura; entretanto, o seu custo, que pode superar 20% do custo total do gerador eólico (HAU, 2006; YOSHIDA, 2006), faz com que o aumento de altura represente uma

desvantagem. Além disto, o transporte e a montagem da torre tornam-se mais custosos. Então, a busca pelo projeto e pela instalação de turbinas eólicas de maior capacidade, faz com que sejam necessárias torres cada vez mais altas que necessitam de análises estruturais, de estabilidade e dinâmica mais elaboradas, resultando, portanto, em um projeto mais complexo.

Assim, o incremento da esbelteza das torres resulta num aumento dos efeitos de 2ª ordem geométrico a que estas estruturas ficam submetidas e, concomitantemente, agravam a probabilidade de tombamento do conjunto fundação-torre-nacele-rotor. Este fato leva à necessidade de estudos mais detalhados para a previsão de deslocamentos e deformações, tanto da torre quanto da fundação. Alguns autores, a exemplo de Bazeos et al. (2002) e Lavassas et al. (2003), estudaram questões relacionadas com o projeto e com as análises estruturais estáticas, de estabilidade e de comportamento sísmico, de protótipos de torre com 38 e 45 m de altura para aerogeradores com potências nominais de 0,75 e 1 MW, respectivamente. Ademais, Sirqueira (2008) estudou o comportamento estrutural de uma torre com 76,2 m de altura para um aerogerador com 2 MW de potência nominal. Entretanto, percebeu-se a necessidade de estudos nacionais e regionais a respeito da estabilidade e do projeto de torres tubulares de aço para aerogeradores de maior porte.

Com o aumento da altura das torres para aerogeradores os efeitos de vibração a que os componentes dos aerogeradores ficam submetidos são amplamente aumentados, de forma que, nas últimas décadas, pesquisadores e fabricantes de componentes para aerogeradores têm buscado soluções para mitigar vibrações oriundas do funcionamento dos componentes mecânicos e dos efeitos eólicos e sísmicos aos quais estas estruturas são submetidas. Tais ações podem provocar vibrações excessivas, causando danos e comprometendo a integridade estrutural dos componentes do aerogerador. Mesmo em situações em que estas estruturas possam suportar a ação das cargas dinâmicas, sem obrigatoriamente sofrer danos estruturais, não se pode desprezar os efeitos de fadiga dos materiais constituintes.

Para alcançar o equilíbrio entre a segurança e a eficiência econômica no projeto de aerogeradores de grande porte, o controle estrutural, que pode mitigar as respostas excessivas da estrutura, é uma opção viável. Desta forma, os sistemas de controle passivos, ativos, híbridos e semiativos são indicados como uma ferramenta valiosa para o controle de vibrações de torres de suporte a aerogeradores de grande porte. Mesmo em vista dos estudos já realizados e das inúmeras aplicações práticas do controle estrutural em pontes, em torres para telecomunicações e em edifícios altos, o estudo e a aplicação de sistemas de controle para torres de aerogeradores são temas relativamente recentes.

A utilização de Amortecedores de Massa Sintonizados (AMS) tem sido objeto de

análises realizadas por diversos autores (MURTAGH et al., 2008; LACKNER; ROTEA, 2011a; STEWART; LACKNER, 2013; SHZU et al., 2015; COLHERINHAS et al., 2015; TONG; ZHAO; ZHAO, 2015; ZUO; BI; HAO, 2017). Entretanto, apesar dos estudos feitos, há campos de análises que ainda não foram totalmente abordados, como a idealização e projeto de um aparelho de controle com desempenho satisfatório e com condições de exequibilidade claramente demonstradas.

É importante mencionar que existem dados técnicos relevantes desenvolvidos pelas fabricantes de turbinas eólicas que auxiliariam às pesquisas acadêmicas. No entanto, tais informações são preservadas, evitando a divulgação de conteúdos que podem ser acessados por concorrentes, ainda que exista a patente. Os estudos oriundos da academia são, portanto, a única fonte pública possível para fomentar contribuições a serem amplamente compartilhadas.

Desta forma, é proposto na presente tese, o desenvolvimento de um projeto estrutural da torre de aço tubular e de sua fundação, bem como a análise de estabilidade elástica do conjunto. Ademais, o projeto de um aparelho absorvedor de vibração para o controle estrutural da torre é desenvolvido, considerando a caracterização dinâmica do modelo de torre proposto.

1.2 JUSTIFICATIVA E INOVAÇÃO

Uma das primeiras justificativas para este trabalho é o crescimento mundial da potência instalada de energia eólica nos últimos anos, que estabeleceu, em 2015, um recorde de 63.633 MW (Figura 1a). Ainda segundo o GWEC (2018), a potência eólica instalada no mundo situava-se em 539.581 MW no final de 2017 (Figura 1b).

Na Figura 2 expõe-se a potência instalada nos principais países que geram energia eólica mundialmente. O Brasil, apesar de sua baixa capacidade instalada em relação aos outros países, apresenta uma alta taxa relativa de crescimento da potência eólica instalada. No ano de 2014, conforme o GWEC (2015), o país figurava na 10^a posição do ranking dos produtores de energia eólica (5.939 MW). Ao final de 2017, passou a ocupar a 8^o posição em potência acumuladamente instalada (12.763 MW), e a 6^a posição em potência instalada de janeiro a dezembro de 2017 (2.022 MW) (GWEC, 2018).

A geração de energia elétrica por meio de turbinas eólicas constitui uma alternativa para diversos níveis de demanda no Brasil. As pequenas centrais podem suprir localidades distantes da rede de distribuição, contribuindo para o processo de universalização da energia elétrica. Já as centrais de grande porte têm potencial para atender uma significativa parcela do

Sistema Interligado Nacional (SIN) com importantes ganhos: contribuem para a redução da emissão de poluentes atmosféricos de usinas térmicas; diminuem a necessidade da construção de grandes reservatórios (hidrelétricas); e reduzem o risco gerado pela sazonalidade hidrológica, à luz da complementaridade sazonal hidroelétrica.

Figura 1 – Potência eólica instalada em MW entre 2011 e 2017.

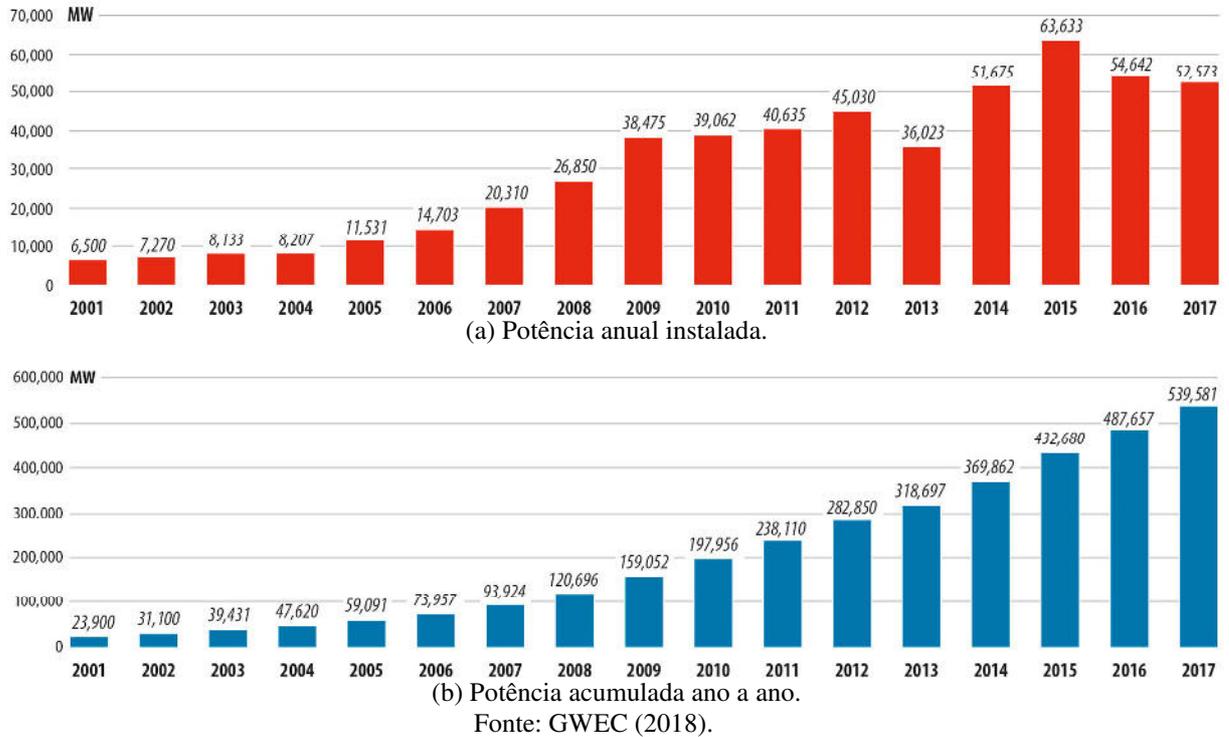
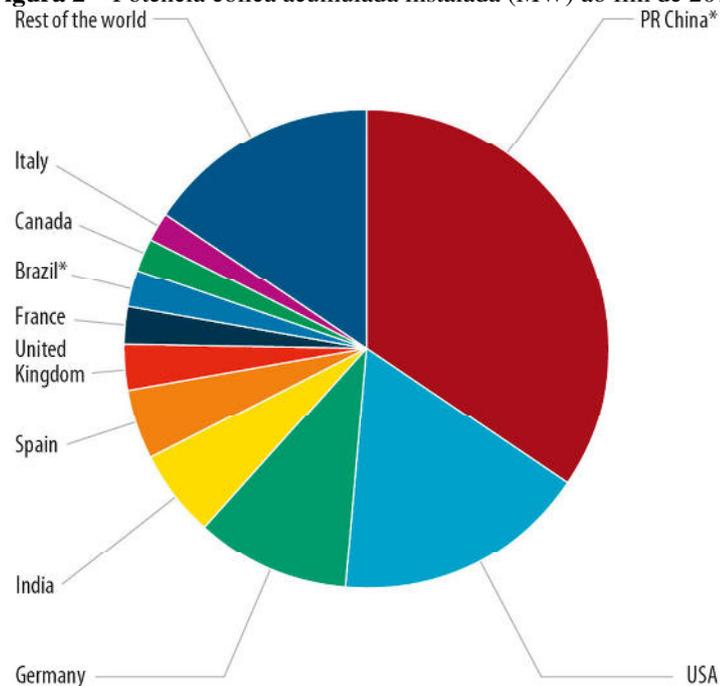


Figura 2 – Potência eólica acumulada instalada (MW) ao fim de 2017.



Segundo a ANEEL (2016), o estado de Pernambuco conta com um total de 119 usinas geradoras de energia elétrica, com cerca de 4.097 MW de potência instalada, das quais: 48%

da energia é produzida por 73 termelétricas em operação; 37% da produção de energia é baseada em Usinas Hidrelétricas, sendo a Usina Luiz Gonzaga (Itaparica) a principal produtora; 14,5% da produção gerada por 28 Usinas Eólicas; e o restante, menos de 0,5%, é produzido por 5 Usinas Fotovoltaicas.

O desenvolvimento da produção de energia eólica em Pernambuco se deu de maneira promissora nos últimos anos, pois o estado tem mais de 90% da sua área inserida no chamado “Polígono das Secas”, região onde há estiagens prolongadas e a precipitação é mal distribuída. Entretanto, é justamente nesta região que se observam potenciais energéticos eólico e solar altos. Por esta razão, foi publicado em 2017 o atlas eólico e solar de Pernambuco, que apresenta uma visão geral do potencial de geração de fontes eólicas e solares, por meio dos níveis de vento, de radiação solar e de uma série de mapas que ressaltam aspectos da geografia, da economia e da infraestrutura do Estado (ATLAS..., 2017). No Quadro 1 estão expostos os dados da ANEEL a respeito das usinas eólicas em operação no estado.

Quadro 1 – Usinas eólicas em operação em Pernambuco.

| Usina | Potência instalada (kW) | Município |
|--|--------------------------------|-------------------------|
| Pirauá | 4.950 | Macaparana |
| Xavante | 4.950 | Pombos |
| Mandacaru | 4.950 | Gravatá |
| Santa Maria | 4.950 | Gravatá |
| Gravatá Fruitrade | 4.950 | Gravatá |
| Tacaicó | 18.800 | Tacaratu |
| Pau Ferro | 30.550 | Tacaratu |
| Pedra do Gerônimo | 30.550 | Tacaratu |
| Caminho da Praia | 2.000 | Cabo de Santo Agostinho |
| Ventos de Santa Brígida I | 13.600,0 | Pedra |
| Ventos de Santa Brígida II | 27.200,0 | Paranatama |
| Ventos de Santa Brígida III | 28.900,0 | Pedra |
| Ventos de Santa Brígida IV | 27.200,0 | Caetés |
| Ventos de Santa Brígida V | 28.900,0 | Paranatama |
| Ventos de Santa Brígida VI | 28.900,0 | Caetés |
| Ventos de Santa Brígida VII | 27.200,0 | Caetés |
| Ventos de São Clemente 1 | 29.155,0 | Caetés |
| Ventos de São Clemente 2 | 29.155,0 | Caetés |
| Ventos de São Clemente 3 | 29.155,0 | Venturosa |
| Ventos de São Clemente 4 | 29.155,0 | Venturosa |
| Ventos de São Clemente 5 | 29.155,0 | Caetés |
| Ventos de São Clemente 6 | 25.725,0 | Caetés |
| Ventos de São Clemente 7 | 24.010,0 | Caetés e Pedra |
| Ventos de São Clemente 8 | 20.580,0 | Venturosa |
| Serra das Vacas I | 23.920,0 | Paranatama |
| Serra das Vacas II | 22.295,0 | Paranatama |
| Serra das Vacas III | 22.235,0 | Paranatama |
| Serra das Vacas IV | 22.295,0 | Paranatama |
| Total de potência instalada em PE | 593.385,0 | |

Fonte: ANEEL (2016).

O acompanhamento da expansão da oferta de energia elétrica é realizado de forma contínua pela Superintendência de Fiscalização dos Serviços de Geração (SFG) da ANEEL, por meio de fiscalizações das obras de centrais geradoras, in loco e à distância, mediante auxílio de agências reguladoras estaduais conveniadas. Este acompanhamento tem como objetivo divulgar informações atualizadas, mensalmente, da fiscalização da ANEEL em relação às usinas já outorgadas e em fase de implantação no país. No Quadro 2 estão mostrados os dados das usinas acompanhadas pela ANEEL.

Quadro 2 – Usinas eólicas já outorgadas pela ANEEL, mas ainda não concluídas.

| Usina | Viabilidade | Potência (kW) | Situação da obra | Previsão de início da obra | Município |
|-----------------------------|-------------|---------------|--|----------------------------|------------|
| Ouro Branco 1 | Média | 30.000,0 | Não iniciada | 28-03-2016 | Poção |
| Ouro Branco 2 | Média | 30.000,0 | Não iniciada | 28-03-2016 | Poção |
| Quatro Ventos | Média | 22.000,0 | Não iniciada | 28-03-2016 | Macaparana |
| Serra das Vacas V | Média | 26.000,0 | Não iniciada | 15-04-2016 | Garanhuns |
| Serra das Vacas VII | Média | 26.000,0 | Não iniciada | 15-04-2016 | Garanhuns |
| | | 134.000,0 | Potência total das Usinas (construção não iniciada) | | |
| Ventos de Santo Estevão I | Média | 25.300,0 | Em construção | 15-03-2017 | Araripina |
| Ventos de Santo Estevão II | Média | 25.300,0 | Em construção | 15-03-2017 | Araripina |
| Ventos de Santo Estevão III | Média | 29.900,0 | Em construção | 15-03-2017 | Araripina |
| Ventos de Santo Estevão IV | Média | 29.900,0 | Em construção | 13-12-2016 | Araripina |
| Ventos de Santo Estevão V | Média | 27.600,0 | Em construção | 15-03-2017 | Araripina |
| | | 138.000,0 | Potência total das Usinas (em construção) | | |

Legenda:

Os termos “alta” e “média” referem-se ao nível de viabilidade da implantação do empreendimento.

Alta: Usinas com licença ambiental de instalação vigente e obras civis em andamento, não havendo impedimentos para implantação da usina;

Média: Usinas com obras não iniciadas ou com licenciamento ambiental não finalizado, não havendo impedimentos para implantação da usina.

Fonte: ANEEL (2016).

Comenta-se também, que em 25 de setembro de 2015, foi inaugurado o primeiro parque híbrido brasileiro para geração de energia elétrica, que une as gerações de energia solar e eólica, e está situado no município de Tacaratu-PE, na região do Médio São Francisco. O empreendimento é formado por duas usinas fotovoltaicas (Fontes Solar I e II) com potência instalada de 11 MW, sendo o maior parque fotovoltaico em operação no país. Além destas, há um parque eólico de 80 MW (Fonte dos ventos). Conjuntamente, são capazes de gerar

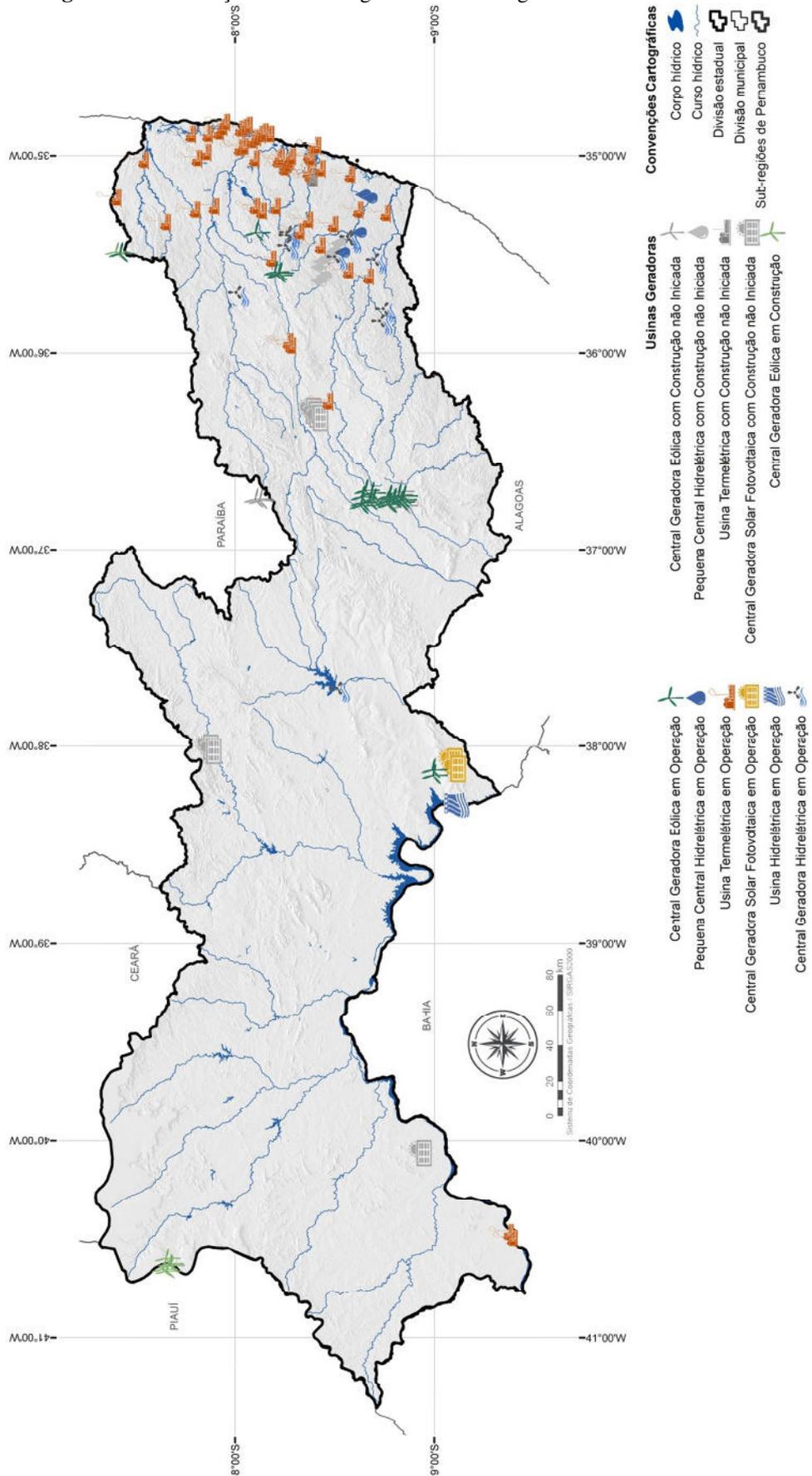
340 GWh/ano (G1, 2015). Tais dados apontam que Pernambuco apresenta-se como uma referência no país no que diz respeito à geração de energia elétrica utilizando fontes renováveis como a eólica e a solar, que de acordo com as suas características, apresentam baixo impacto ambiental e a possibilidade de instalação gradual e distribuída. Tais elementos justificam o estudo de energia eólica num dos estados da federação mais promissores no tema. Na Figura 3, apresenta-se a distribuição dos diversos empreendimentos de geração de energia em Pernambuco.

Objetivando contribuir e explorar ainda mais o potencial eólico pernambucano, esta tese propõe o desenvolvimento do projeto estrutural e da análise de estabilidade do conjunto fundação-torre para suporte de um aerogerador de grande porte com potência nominal de 3,2 MW visando desenvolver as análises estruturais de tal torre com as características das solicitações presentes em nosso país, e, ainda, nacionalizar/regionalizar os projetos e a normatização dos elementos componentes do gerador eólico, uma vez que, atualmente, os projetos destes componentes são, em sua maioria, importados.

Uma das justificativas para a escolha de aerogerador de grande porte (altura) e potência nominal é a economia de escala, uma vez que, em geral, uma turbina de porte maior gera energia com menor custo, pois o custo do aumento de potência resultantes das fundações, das obras de acesso, da interligação à rede elétrica, dos elementos da turbina e da manutenção é compensatório. Em especial, o custo do incremento de potência não eleva sobremaneira os custos de implantação de aerogeradores *onshore*. Outro motivo para utilização de turbinas de grande porte é a dificuldade de conseguir espaço para a instalação dos aerogeradores, fazendo com que a utilização dos equipamentos mais potentes resulte na diminuição da quantidade de turbinas em um parque eólico.

Além disso, o amortecedor de massa híbrido (AMH), projetado neste trabalho, apresenta-se como uma solução diferenciada aos estudos previamente citados. Ao invés de ficar alocado na nacela, o AMH desta tese foi projetado para ser instalado internamente à torre do aerogerador (próximo ao topo); desta forma, poupa-se o espaço interno da nacela para instalação dos componentes elétrico-mecânicos da turbina eólica (ZUO; BI; HAO, 2017). Com isso, tem-se a vantagem de facilitar o acesso ao equipamento de controle, contribuindo para melhores condições de manutenção. E a insensibilidade à orientação da nacela (STEWART; LACKNER, 2014), combinada com o projeto do amortecedor para obterem-se deslocamentos do AMH possíveis de serem restritos à parte interna da estrutura tubular da torre, permitem alocar o AMH ao topo da torre independentemente do posicionamento na nacela.

Figura 3 – Localização das Usinas geradoras de energia elétrica em Pernambuco.



Fonte: Atlas...(2017).

Adicionalmente, o presente trabalho, ao adotar um projeto de sistema de controle híbrido, destaca-se da maioria dos trabalhos citados na problemática desta tese, que optaram por utilizar controladores de vibração puramente passivos ou ativos. Também merece realce o desenvolvimento, aqui feito, de um modelo construtivo do absorvedor de vibração, no qual se descrevem seus principais componentes, de forma a mostrar a viabilidade de projeto e execução do sistema de controle de vibrações projetado para a torre tubular do aerogerador.

Por fim, cita-se o ineditismo do tema desta tese no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da UFPE, uma vez que, desde a implantação do doutorado na área de estruturas em 2000 (PPGEC, 2018), este é o primeiro trabalho que aborda a análise e o projeto (análise de estabilidade elástica, análise dinâmica e controle de vibrações) de uma torre tubular de aço para um aerogerador.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Esta tese tem como proposta/objetivo principal, analisar a estabilidade elástica e projetar um dispositivo para controle de vibração de uma torre tubular de aço, com 120 m de altura, para aerogerador de eixo horizontal.

1.3.2 Objetivos específicos e metodologia

Realizar um levantamento bibliográfico que servirá de base/fundamento para as análises realizadas nesta tese.

Realizar o projeto estrutural de uma torre tubular de aço com 120 m de altura e da sapata de suporte ao conjunto estrutural do aerogerador de eixo horizontal.

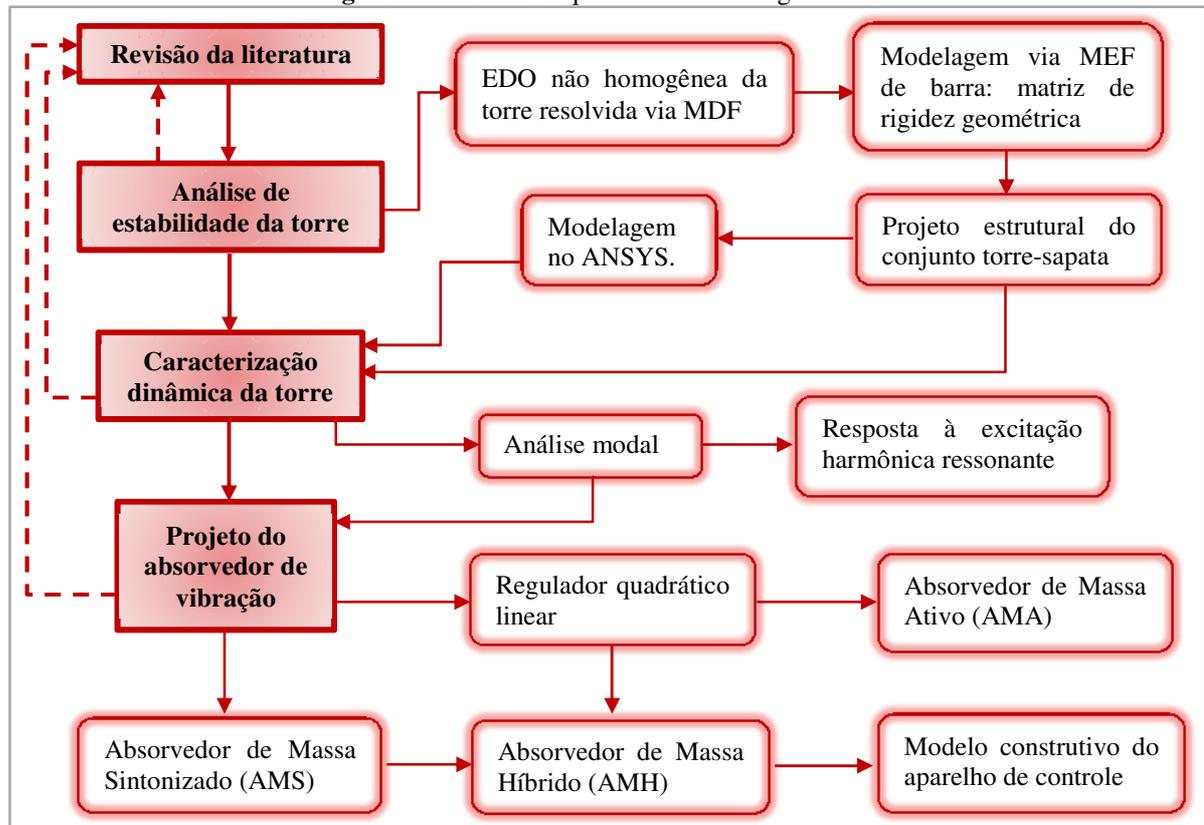
Analisar, teórica e numericamente, a estabilidade elástica (obtenção das cargas e dos modos de flambagem e consideração da não linearidade geométrica) da torre projetada.

Realizar a caracterização dinâmica da torre projetada, ou seja, obter as frequências e os respectivos modos de vibração e a resposta da torre quando submetida a ações harmônicas ressonantes.

Projetar um absorvedor de vibração híbrido a ser instalado no topo da torre de um aerogerador de grande porte, para o controle de vibração desta quando submetida a ações harmônicas ressonantes.

Na Figura 4 está apresentado o desenho/esquema metodológico desta tese:

Figura 4 – Desenho/esquema da metodologia da tese.



Fonte: Autor (2018).

1.4 LIMITAÇÕES DA TESE

Apesar de não serem limitações desta tese, comentam-se, inicialmente, as desvantagens intrínsecas da utilização da energia eólica para geração de energia: o impacto visual (a instalação dos parques eólicos gera uma grande modificação da paisagem); o impacto ambiental sobre aves migratórias, quando os parques eólicos são instalados interceptando as rotas migratórias (informação a ser posta nos EIA/RIMA); o impacto sonoro proveniente dos ruídos emitidos no escoamento de ar em torno das pás ou da interação dos componentes mecânicos da turbina; o efeito de sombra quando a turbina eólica está em funcionamento (sombra tremulante sobre o observador); e a interferência eletromagnética em sinais de comunicação e transmissão de dados (rádio, televisão etc.).

Alguns efeitos ocorrentes no comportamento de um aerogerador de eixo horizontal não foram considerados nas análises realizadas nesta tese. Não foi considerado o efeito de rotação das pás do aerogerador na resposta dinâmica da estrutura, como, por exemplo: a ação inercial relacionada à força centrífuga de rotação das pás e a ação gravitacional também devida à rotação das pás. Além disso, não foram realizadas análises acopladas (interações

fluido-estrutura) como as implementadas no código fonte do FAST (*Fatigue, Aerodynamics, Structures and Turbulence*), que é um código de análise acoplada (aero-hidro-servo-elástica), desenvolvido no NREL (*National Renewable Energy Laboratory*), que simula as cargas e o desempenho de aerogeradores modernos.

Adicionalmente, no projeto estrutural da torre realizado nesta tese não foram consideradas todas as situações de projeto e casos de carga estabelecidos pela ABNT NBR IEC 61400-1 (2008), tais como: transporte, montagem (principalmente da torre), manutenção e reparos dos componentes do aerogerador.

Por fim, comenta-se que este estudo não considerou a possibilidade de expansão do potencial eólico com a implantação de aerogeradores *offshore* na costa brasileira, uma vez que foram analisadas, por esta tese, apenas torres de aerogeradores *onshore*. Para análises e projeto de torre de aerogeradores *offshore* serão necessários estudos interdisciplinares aprofundados das análises estruturais e do controle de vibrações destas estruturas solicitadas também por ações marítimas.

1.5 CONTEÚDO E ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este trabalho é dividido em seis capítulos, uma lista de referências e dois apêndices, conforme a sequência de conteúdos descrita a seguir:

Neste capítulo (INTRODUÇÃO) estão apresentados a problemática a respeito do tema abordado, a justificativa e a originalidade do mesmo, bem como o objetivo geral e um resumo da metodologia utilizada (objetivos específicos). Ainda, são comentadas as suas limitações e é exposto este item de conteúdo da tese.

No segundo capítulo (REVISÃO DA LITERATURA), são descritos os componentes principais de um aerogerador, além das características das torres de suporte de tais equipamentos. Em seguida, faz-se um levantamento dos trabalhos que contribuíram para compreensão e para o desenvolvimento desta tese. Em especial, apresenta-se o estado da arte do controle de vibrações de aerogeradores.

No capítulo 3 (ANÁLISE DA ESTABILIDADE ELÁSTICA DA TORRE), as análises da estabilidade elástica aplicada ao conjunto torre-sapata e seus respectivos projetos estruturais são apresentados.

No capítulo 4 (CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DA TORRE) estão descritos a modelagem dinâmica da torre utilizando elementos finitos de barra (implementação com código próprio) e elementos finitos de casca e sólidos (modelagem feita no ANSYS) para

obtenção das propriedades dinâmicas da torre.

No capítulo 5 (CONTROLE DE VIBRAÇÕES DA TORRE), tem-se a aplicação de um amortecedor de massa sintonizado (AMS), de um amortecedor de massa ativo (AMA) e de um amortecedor de massa híbrido (AMH) para o controle de vibração da torre do aerogerador. Visando a obtenção dos parâmetros ótimos do controle passivo é utilizada a teoria de Den Hartog e, para obtenção dos parâmetros ótimos do controle ativo e híbrido, é utilizado o controle ótimo segundo a teoria do Regulador Quadrático Linear.

No capítulo 6 (CONSIDERAÇÕES FINAIS), apresentam-se as principais conclusões e contribuições obtidas nesta tese e, também, as perspectivas para realização de trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

O primeiro elemento pós-textual é uma lista de referências (REFERÊNCIAS) na qual se expõe o conjunto de materiais utilizados por base para elaboração da tese.

Em seguida, no apêndice A (ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA E PROJETO ESTRUTURAL DO CONJUNTO TORRE-SAPATA) são mostrados: os cálculos para a determinação da carga de flambagem utilizada para o projeto da torre, baseados na resolução da equação diferencial homogênea da torre via método energético de Rayleigh; a resolução da equação diferencial ordinária da torre modelada via método das diferenças finitas para obtenção dos deslocamentos transversais à torre; o projeto estrutural da torre a partir de um modelo em elementos finitos de barra em que a não linearidade geométrica foi considerada mediante a matriz de rigidez geométrica; e o projeto estrutural da sapata.

Por fim, no apêndice B (CÓDIGO IMPLEMENTADO EM EF DE BARRA PARA ANÁLISE DINÂMICA E DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES DA TORRE), o código implementado em EF de barra da torre é apresentado, para obtenção da resposta dinâmica da torre (frequências e modos de vibração, deslocamentos e velocidades em função do tempo) e dos parâmetros do sistema acoplado torre-absorvedor de vibração (massa, amortecimento e rigidez do absorvedor; deslocamentos, velocidades e forças de controle em função do tempo).

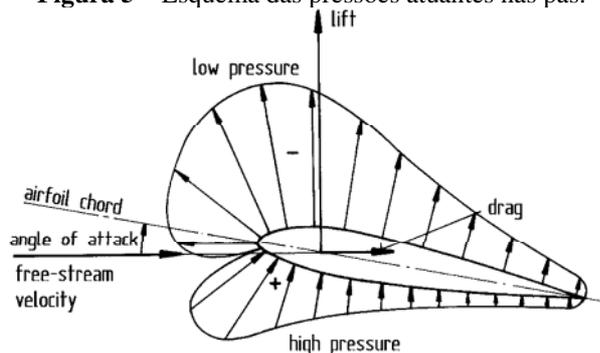
2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo são apresentados os conceitos teóricos essenciais para realização desta tese. Portanto, inicialmente são observados os elementos dos aerogeradores e as características das torres de suporte a turbina eólica (esbeltez, custo, rigidez, processo de fabricação, transporte, construção/montagem e tipos de torres). Em seguida, é apresentado um resumo dos principais trabalhos desenvolvidos a respeito do projeto e da análise dinâmica de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal. Logo após, são apresentados os conceitos das técnicas de controle de vibração estrutural empregadas na Engenharia Civil e, adicionalmente, expõem-se os principais trabalhos relacionados ao controle de vibrações de torres tubulares de aço para aerogeradores.

2.1 CARACTERÍSTICAS DOS AEROGERADORES

Aerogeradores são equipamentos cuja função é a conversão da energia cinética do vento em energia elétrica. Basicamente são compostos por rotor, sistemas de controle, gerador e torre. As turbinas eólicas podem ser classificadas quanto à sua maneira de interação com o vento e também quanto à disposição do eixo para o qual é transmitido o movimento mecânico. Segundo Ackermann (2002), há dois tipos de interação das pás: por arrasto ou sustentação. Nas turbinas de arraste, as pás são empurradas pelo vento incidente, semelhante ao que ocorre com os anemômetros. Nas turbinas de sustentação, as pás têm o formato de um aerofólio em que o vento atua empurrando as pás, como nas turbinas de arraste, mas o fluxo de ar através das pás também faz surgir uma força de sustentação que aumenta a eficiência da turbina. Na Figura 5 observam-se, esquematicamente, as forças (pressões) atuantes nas pás do aerogerador. Quanto à disposição do eixo as turbinas podem ser de eixo vertical, *Vertical Axis Wind Turbine* (VAWT), ou de eixo horizontal, *Horizontal Axis Wind Turbine* (HAWT).

Figura 5 – Esquema das pressões atuantes nas pás.

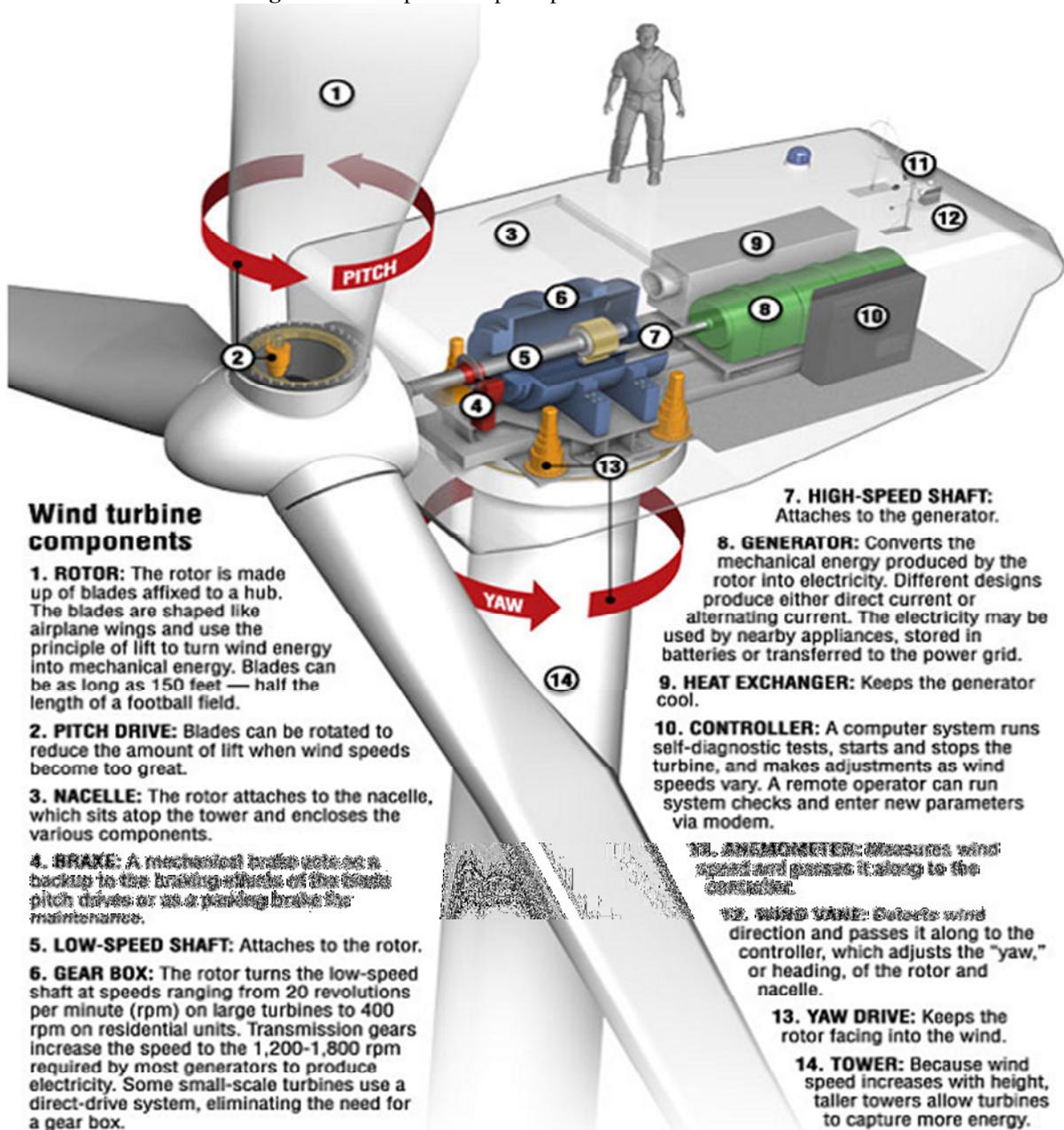


Fonte: Hau (2006).

O número de pás das turbinas comerciais do tipo HAWT pode variar de uma a quatro pás. Quanto maior é o número de pás, menor é a velocidade de rotação e maior o torque sobre o eixo do rotor, por esta razão os cata-ventos são tão eficientes no bombeamento de água de poços. Turbinas com três pás emitem menos ruídos sonoros que turbinas com duas pás em virtude de possuírem menor velocidade de giro do rotor, o que constitui uma característica importante se instaladas em regiões urbanas (ACKERMANN, 2002).

A nacelle do aerogerador abriga os dispositivos e sistemas de controle, o gerador, o freio de estacionamento da turbina e as caixas de transmissão. Na Figura 6 são apresentados os principais componentes de um HAWT com três pás.

Figura 6 – Componentes principais de um HAWT moderno.



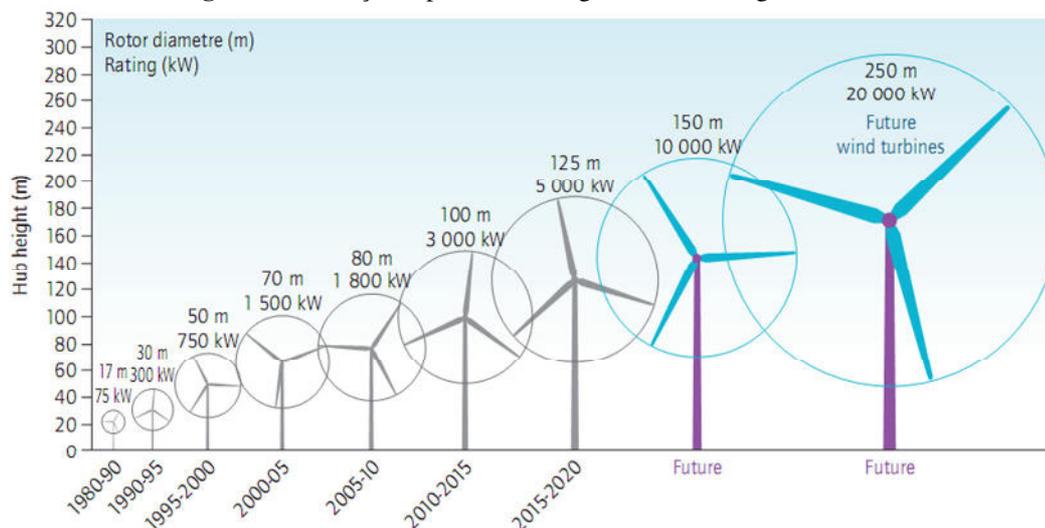
Fonte: Schubel e Crossley (2012).

As turbinas do tipo HAWT apresentam o maior aproveitamento de energia do vento. Este tipo de turbina também é a mais utilizada nos projetos modernos de aerogeradores de classe megawatt, mas é necessário posicioná-la a uma altura compatível com as características do local onde está sendo instalada para o melhor aproveitamento do vento.

2.2 TORRES PARA AEROGERADORES

Com a evolução da potência (porte) dos aerogeradores, cada vez mais pesados e potentes, torna-se necessário instalá-los sob a ação de ventos intensos e contínuos. Portanto, as dimensões das torres destes aerogeradores estão sendo incrementadas nos últimos anos (Figura 7).

Figura 7 – Avanço do porte dos aerogeradores ao longo dos anos.



Fonte: EWEA (2009).

Particularmente, a altura da torre é um componente essencial. O custo da torre, que pode superar 20% do custo total da turbina eólica (HAU, 2006; YOSHIDA, 2006), caracteriza uma desvantagem do aumento da altura das torres. Além disso, o transporte, a montagem e o erguimento da torre tornam-se mais caros e custosos. Assim, em turbinas eólicas de grande porte, a eficiência e o custo crescem com a altura da torre.

O segundo parâmetro de projeto mais importante é a rigidez da torre. Tal parâmetro é especialmente importante no estabelecimento da primeira frequência natural de flexão, pois a torre é uma estrutura esbelta e flexível que pode sofrer ressonância como resultado da proximidade com a frequência de excitação. Portanto, busca-se a rigidez mínima necessária, de forma a obter o menor custo possível.

O transporte e o erguimento têm sido dificultados pelo desenvolvimento de turbinas eólicas de multi-megawatt de potência nominal. Por exemplo, torres com altura de mais de

100 m e peso na extremidade da ordem de centenas de toneladas que requererem diâmetro na base com mais de 5 m dificultam o transporte por rodovias (HAU, 2006).

Adicionalmente, é importante mencionar que embora a torre possa ser analisada como uma estrutura independente, para o seu projeto torna-se necessário analisar o aerogerador como um sistema integrado, considerando as influências dos demais componentes na torre.

Em consequência do desenvolvimento dos aerogeradores, os projetos e os materiais para as torres têm aumentado em variedade, alguns exemplos são:

- ✓ Torres treliçadas de aço;
- ✓ Torres tubulares de concreto (armado e/ou protendido);
- ✓ Torres estaiadas de aço;
- ✓ Torres tubulares de aço;
- ✓ Torres híbridas de aço e concreto;
- ✓ Torres de madeira.

As torres tubulares de aço constituem o tipo mais comum de torre para aerogeradores e é o mais utilizado em construções comerciais de turbinas eólicas; a principal razão é o curto tempo necessário para montagem e ereção da torre com auxílio de guindastes e de equipamentos de içamento de carga específicos. Então, torres com altura maior que 100 m são compostas de diversos segmentos tipo casca (formados por chapas de aço) que são parafusados de forma a não ser necessária solda in loco.

Atualmente, as torres para turbinas eólicas de grande porte têm formato tronco-cônico com o diâmetro e espessura do tubo diminuindo da base ao topo da torre, para obter esbeltez local do tubo da torre semelhante ao longo de seu comprimento.

As torres são formadas de segmentos pré-fabricados com comprimento de 20 a 30 m. As seções são produzidas a partir de chapas de aço com espessura de 10 a 50 mm (em torno de 2"). As chapas, com largura de aproximadamente 2 m, são passadas em uma máquina que executa a calandragem (Figura 8a). Destes segmentos conformados, as seções são soldadas. Em muitos casos, soldadores automáticos são utilizados. A solda requer atenção especial em determinadas situações de carregamento da torre; desta forma, deve-se checá-la por métodos ultrassônicos, raios-X e exame de fissuras superficiais (HAU, 2006).

Nas extremidades de cada segmento de torre, flanges são soldados (Figura 8c). O processo de conformação e soldagem dos flanges requer experiência, uma vez que os componentes podem ficar distorcidos e, portanto, será dificultada a montagem e o aparafusamento entre flanges (Figura 8d). A ligação entre a torre e a fundação é realizada através da seção de fundação que, assim como os flanges, é fabricada, em geral, com um aço

de resistência maior que a dos segmentos intermediários. A seção de fundação é fabricada separadamente e a sua ligação com a fundação é estabelecida quando o concreto é lançado. Alternativamente, para a união torre-fundação, é realizada a ligação parafusada entre o flange da base e o concreto do elemento de fundação (sapata ou bloco de coroamento). A união entre o topo da torre e a nacelle é feita através do flange azimuthal.

Figura 8 – Processos de fabricação da torre tubular de aço para geradores eólicos.



(a) Calandragem da chapa em forma.



(b) Soldagem da chapa conformada.



(c) Flanges a serem soldados nos segmentos de torre.



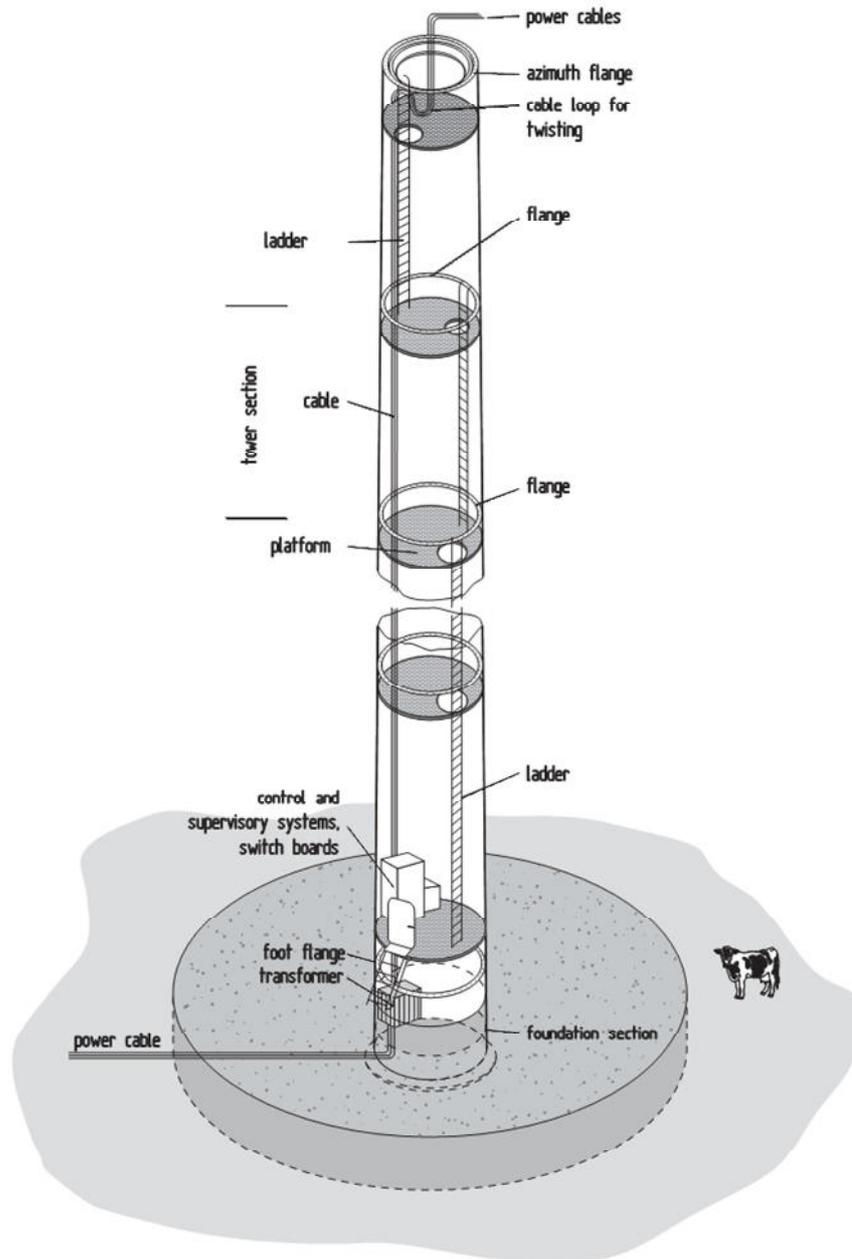
(d) Ligação parafusada dos flanges.

Fonte: DWIA (1999).

Salienta-se que, sendo a torre constituída de aço, é necessário aplicar proteção contra corrosão, principalmente em ambientes agressivos, como em zonas costeiras. Citam-se ainda as dificuldades inerentes às torres com alturas maiores que 90 m, pois o diâmetro da base da torre torna-se maior que 4,5 m e a espessura da parede maior que 40 mm. Desta forma, a calandragem da chapa de aço requer o uso de máquinas especiais e os segmentos da base da torre são difíceis de serem transportados por rodovias.

Na região interior da torre há uma série de instalações elétricas (cabos para transmissão de energia elétrica, transformador, sistema de climatização, sistema de iluminação, sistema de controle) e de equipamentos de segurança (porta de acesso na base da torre, sistema de ascensão/escadas, plataformas intermediárias) para manutenção do aerogerador (Figura 9).

Figura 9 – Sistemas internos em torres tubulares de aço para turbinas eólicas de grande porte.



Fonte: Hau (2006).

2.3 ANÁLISE DINÂMICA E ESTRUTURAL DAS TORRES PARA HAWT

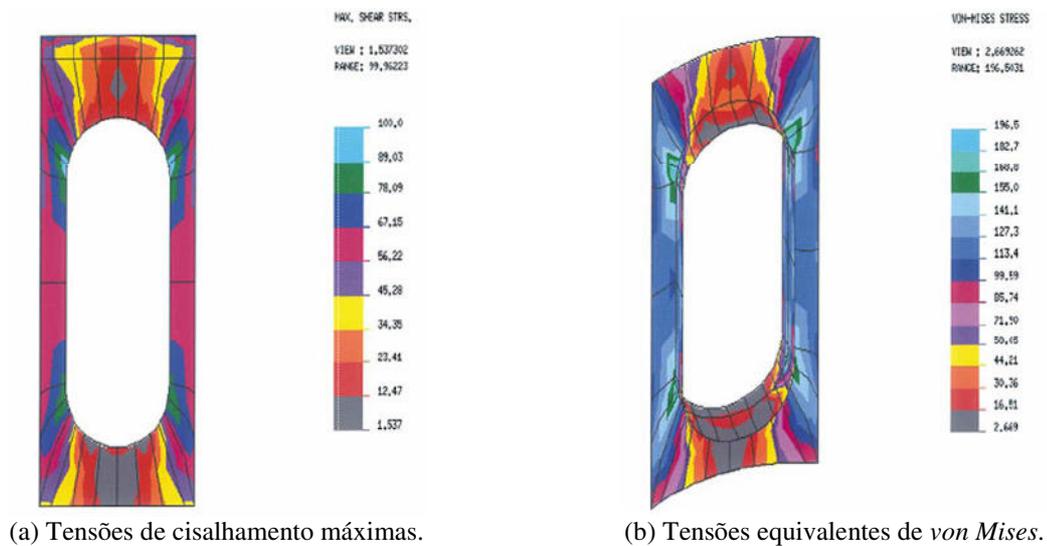
Nesta seção são apresentados os principais trabalhos relacionados à análise estrutural, ao projeto estrutural e à análise dinâmica de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal, considerando os objetivos desta tese relativos à análise da estabilidade elástica e ao projeto estrutural da torre tubular de aço do aerogerador.

Bazeos et al. (2002) analisaram um modelo em elementos finitos de uma torre eólica de 38 m de altura composta por três partes, com diâmetro inferior de 2,80 m e superior de

1,82 m. A ligação entre as partes da torre foi realizada por aparafusamento dos flanges destas. A deformação e a capacidade de carga foram decorrentes dos efeitos estático e dinâmico. Foram considerados na avaliação do carregamento, os efeitos da gravidade e das condições aerodinâmica na torre.

Na análise estática foi observado que as máximas tensões de cisalhamento ocorrem nas proximidades da abertura da porta com valores abaixo de 100 MPa. De forma semelhante, a máxima tensão equivalente de *von Mises* não ultrapassou 211 MPa (Figura 10).

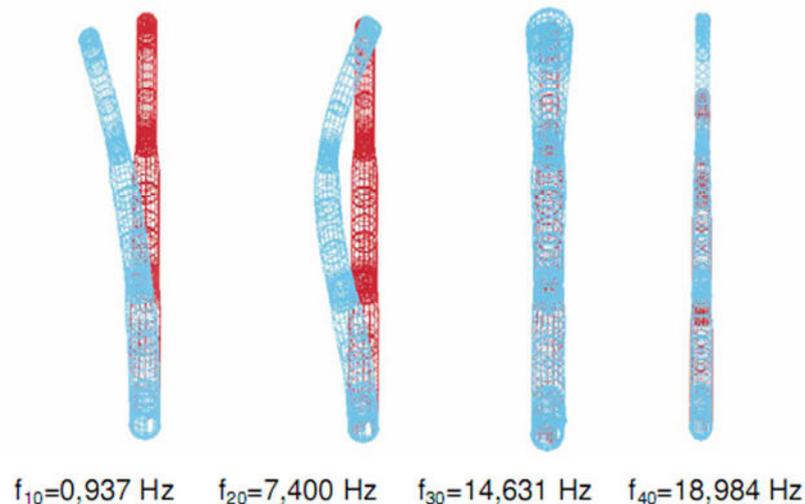
Figura 10 – Distribuição de tensões na abertura da porta da torre analisada.



Fonte: Bazeos et al. (2002).

Na Figura 11 é mostrado o comportamento da torre sob análise de vibração livre sem a consideração da influência da turbina, das pás e do rotor; na qual, f_{10} , f_{20} , f_{30} e f_{40} correspondem aos 1º e 2º modos de flexão, ao 1º modo torcional e ao 3º modo flexional, respectivamente.

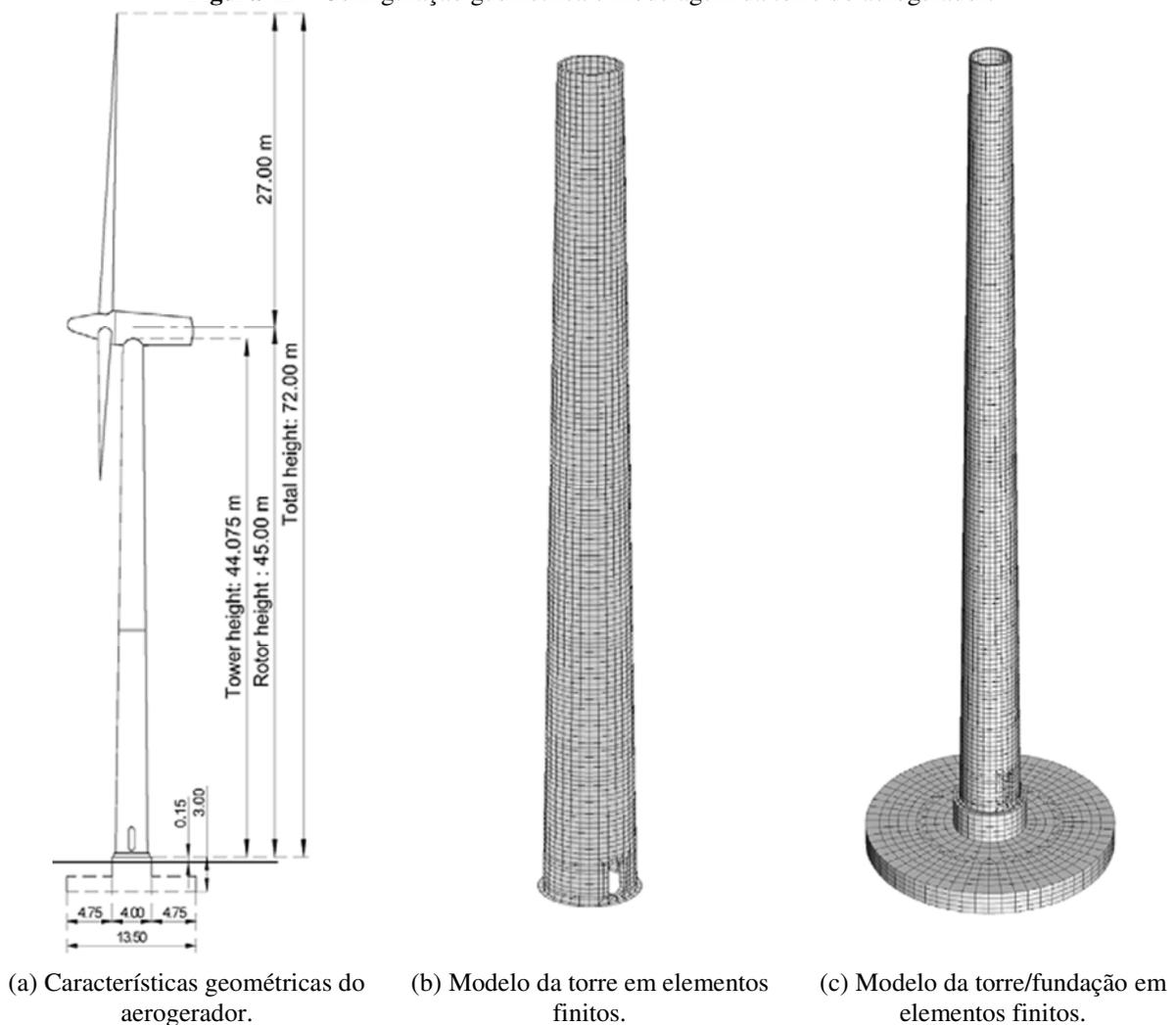
Figura 11 – Quatro primeiros modos e frequências de vibração da torre analisada.



Fonte: Bazeos et al. (2002).

Lavassas et al. (2003) analisaram e projetaram um protótipo de torre metálica de aerogerador com três pás de potência nominal de 1 MW, com 44,075 m de altura (Figura 12a) e formato tronco-cônico (3,30 m e 2,10m de diâmetros externos na base e no topo, respectivamente) e espessura variável da parede (18 mm e 10 mm de espessuras na base e no topo, respectivamente). Utilizou-se o aço S355J2G3 (EN 10025-2, 2004) para fabricação da torre. Para a simulação da resposta estrutural, dois modelos de elementos finitos distintos foram desenvolvidos. Como na análise de fadiga, o projeto da torre, com relação às cargas gravitacionais, sísmicas e eólicas foi feito de acordo com os Eurocodes. Em relação à carga sísmica, a análise dinâmica da torre foi baseada na norma de sismo grega. Por fim, foram discutidos aspectos referentes ao detalhamento de projeto da torre.

Figura 12 – Configuração geométrica e modelagem da torre do aerogerador.

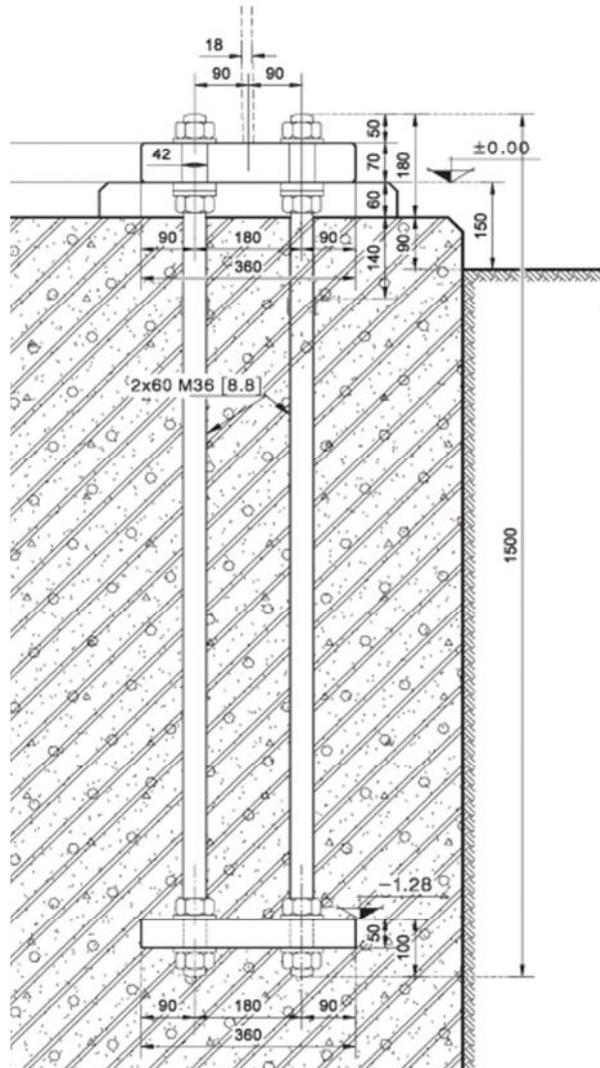


Fonte: Lavassas et al. (2003).

Para fins de transporte, a torre foi dividida em duas partes que são facilmente montadas in loco. Os segmentos são conectados com conexões aparafusadas internamente, com duplo flange, permitindo fácil manutenção. Uma ligação similar é empregada no topo da

estrutura, para fixar a nacelle que tem um rotor de três pás (fabricadas de poliéster reforçado com fibras de vidro). O flange da base é fixado à fundação por chumbadores protendidos dispostos em duas circunferências concêntricas, uma em cada lado da parede da torre (Figura 13). A fundação da torre consiste em uma sapata circular com 13,50 m de diâmetro e 1,30 m de altura e em um pedestal cilíndrico, onde a torre é ancorada, com 4,00 m de diâmetro e 1,64 m de altura.

Figura 13 – Detalhe da ancoragem.

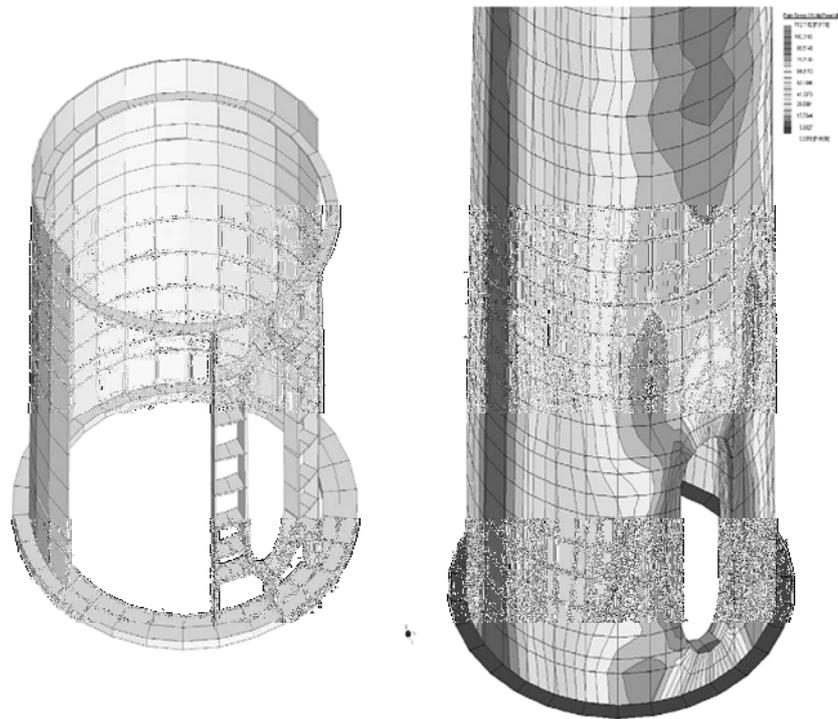


Fonte: Lavassas et al. (2003).

Lavassas et al. (2003) foram criteriosos com relação às chapas utilizadas na confecção das paredes da torre, utilizando chapas com características de excelência para os requisitos de tolerâncias admissíveis, em razão do papel crítico que a flambagem local desempenha na determinação da espessura da parede da torre. Pelo mesmo motivo foram dispostos anéis de enrijecimento a cada 3,025 m ao longo da altura da torre. Com relação aos requisitos de fadiga, todas as soldas utilizadas (nas junções das extremidades) são de alta qualidade e projetadas para serem de penetração total (soldas de entalhe). Com o objetivo de

contrabalancear o efeito da concentração local de tensões, foram adotados cantos totalmente arredondados para as aberturas, além de reforçá-las com uma estrutura vertical extra (Figura 14). O sistema de ascensão interna na torre foi feito com uma escada interna de alumínio, interrompida a cada 6,05 m por plataformas de painéis de madeira aparafusadas a cada dois anéis de enrijecimento.

Figura 14 – Abertura da torre para porta e distribuição das tensões equivalentes de *von Mises*.



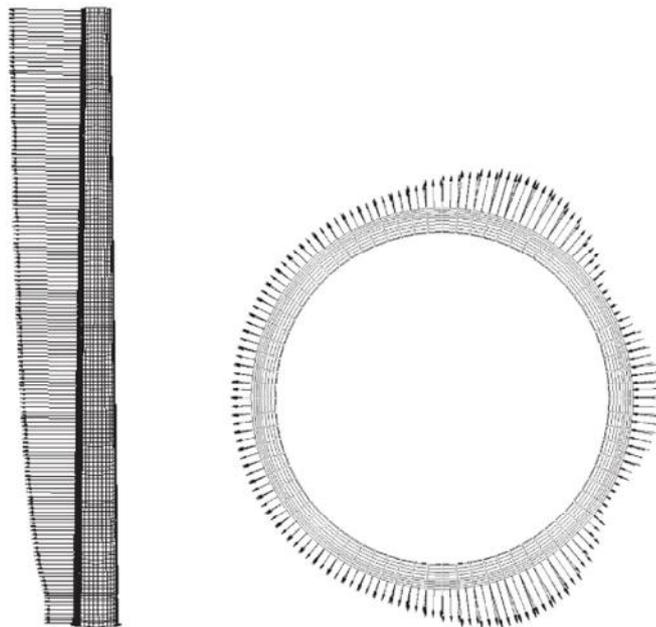
Fonte: Lavassas et al. (2003).

Lavassas et al. (2003) analisaram a torre pelo método dos elementos finitos (MEF) aplicando apropriadamente linearidade e não linearidade física e geométrica, utilizando-se dos programas computacionais Strand7 e STATIK-3, com avaliações dos efeitos da interação solo-estrutura quanto aos comportamentos estático e dinâmico da torre para dois modelos distintos de elementos finitos. Lavassas et al. (2003) avaliaram um primeiro modelo da torre considerando-a engastada na base, utilizando-se de uma análise linear estática com 5208 elementos de casca com 4 nós (Figura 12b). O segundo modelo torre/fundação apresenta 3720 elementos de volumes hexaédrico e tetraédrico de fundação (Figura 12c), apoiados elasticamente no solo por elementos de contato unilateral. Devido à existência dos elementos de contato unilateral, o tratamento numérico deste modelo requereu a aplicação de algoritmos não lineares. Investigaram-se também, para ambos os modelos, as condições de não linearidade geométrica com vistas a avaliar os efeitos de segunda ordem; no entanto, devido à adequada rigidez do elemento de casca e à rigidez do solo rochoso de apoio, a participação da supracitada não linearidade e da interação solo-estrutura no estado de deformação da torre foi

calculada como menor que 2%, não afetando as respostas estruturais da torre.

A frequência natural da torre, obtida dos produtores dessa turbina eólica, foi de 0,60 Hz. Lavassas et al. (2003) analisaram um série de situações de carregamentos extremos e de operação. A distribuição da pressão do vento foi computada pela aplicação das relações analíticas dadas no Eurocode 1, com variações ao longo da altura e em volta da circunferência da torre (Figura 15). Como a torre é uma estrutura esbelta, devem ser checados os seguintes fenômenos: vibração por desprendimento de vórtices, *ovalling*, galope e martelamento.

Figura 15 – Distribuição da pressão de vento na torre.



Fonte: Lavassas et al. (2003).

Segundo Lavassas et al. (2003) o espectro do carregamento de vento foi fornecido pelo fabricante e foi desenvolvido através do método Rain-flow para antecipar o tempo de vida da estrutura (20 anos). O processo de projeto da torre à fadiga foi baseado em séries de variações de tensões e a estrutura foi analisada para 18 casos de cargas do espectro de vento adotado. De fato, as ligações da torre são as regiões suscetíveis à fadiga (soldas, parafusos e chumbadores; conforme EUROCODE 1, 2005).

Lavassas et al. (2003) relatam que a frequência natural da torre (0,60 Hz) em relação às frequências de excitação do rotor da turbina eólica (0,37 Hz e 0,73 Hz) é um critério importante de investigação a ressonância da estrutura. Para a análise sísmica da estrutura, as tensões sísmicas máximas foram 60% menores que as tensões devidas aos carregamentos de vento. Conclui-se, então, que o carregamento de vento é dominante na combinação de ações para o projeto da torre, pois o local de implantação da turbina eólica encontra-se uma zona sísmica de baixa intensidade e com solo rochoso.

O protótipo da torre foi verificado em relação a quatro estados limites: Estado Limite de Plastificação (ELP); Estado Limite de Flambagem (ELFla); Estado Limite de Fadiga (ELFad) e Estado Limite de Serviço (ELS). Aplicando uma abordagem de tentativa e erro, a espessura da casca foi otimizada após diversos processamentos do programa até obter a melhor relação solicitação/resistência. Na base da torre, o ELP foi dominante, enquanto que, no topo da torre, o ELFla foi mais significativo com considerável participação da tensão compressiva próxima ao anel de enrijecimento na configuração do estado geral de tensões. Com relação ao ELFad, os enrijecedores (anéis de enrijecimento, enrijecedores na abertura da porta etc.) e os flanges não foram verificados à flambagem local, uma vez que suas relações largura/espessura satisfazem as exigências normativas. O mesmo se aplica às regiões da casca (parede da torre) próximas à porta (envolta com enrijecedores), ao flange de base e ao primeiro anel de enrijecimento. Com relação à prevenção à flambagem, a torre foi dividida em 16 segmentos de torre por flanges e anéis de enrijecimento ao longo da altura.

Lavassas et al. (2003) projetaram as ligações dos flanges (anéis, parafusos e chumbadores) utilizando modelos especiais em que duas partes conectadas são modeladas com elementos finitos de contato unilateral. Os parafusos e os chumbadores foram modelados com elementos de cabos protendidos. Além disso, o contato entre os elementos da fundação e o terreno foi realizado por elementos de contato unilateral, enquanto que os chumbadores protendidos foram modelados com elementos finitos de cabo conectando o flange metálico à fundação.

Hansen et al. (2006) fizeram uma extensa revisão bibliográfica, objetivando escrever o estado da arte da aerodinâmica e da aeroelasticidade das turbinas eólicas. Os autores comentam que o porte das turbinas eólicas tem aumentado drasticamente nos últimos 25 anos, de uma potência nominal de 50 kW e um diâmetro do rotor de 10-15 m para aquelas, comercialmente disponíveis, com potência de 5 MW e diâmetro do rotor com mais de 120 m.

Hansen et al. (2006) justificam que os aerogeradores modernos são concebidos para atender aos requisitos da norma internacional IEC61400-1. Uma vez que, em algum momento durante o desenvolvimento de turbinas eólicas comerciais cada vez maiores, tornou-se necessária a aplicação de modelos aeroelásticos precisos para avaliar estruturas esbeltas e altas sob a ação de cargas dinâmicas (vento, por exemplo). As ferramentas aeroelásticas foram desenvolvidas principalmente nas universidades e os laboratórios de pesquisa em paralelo com a evolução de turbinas eólicas comerciais.

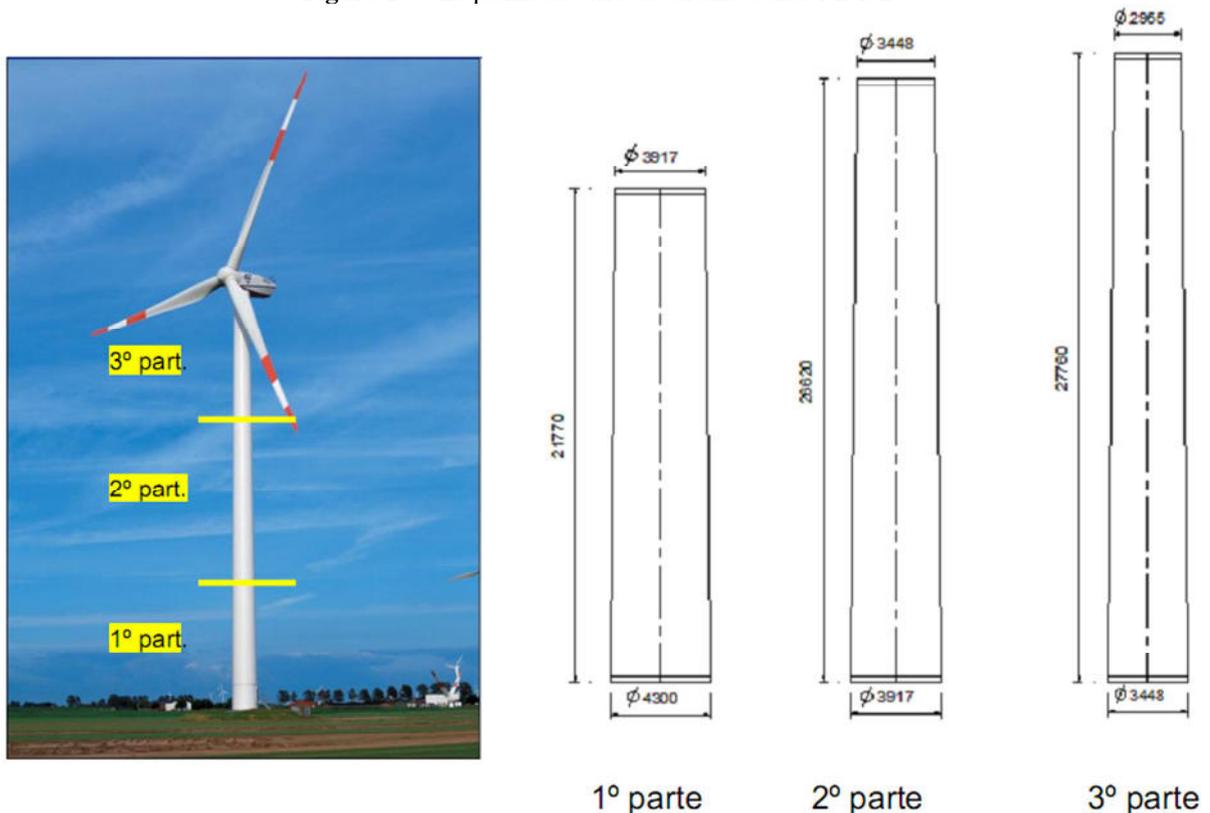
Sirqueira (2008) analisou uma torre de aerogerador modelo MM92 da empresa Repower. O projeto da torre seguiu as recomendações do Eurocode 3 e a análise numérica foi

realizada em um modelo de elementos finitos no *software* ANSYS empregando-se: análise estática linear, análise dinâmica linear e análise estática não linear geométrica e física.

Para o cálculo da resposta dinâmica do vento na direção do fluxo eólico foi utilizado o método simplificado conforme estabelecido na ABNT NBR 6123 (1988). A ação do vento, segundo Sirqueira (2008), pode ser vista como um carregamento distribuído sobre as pás do rotor ou, simplificando, adotou-se uma força resultante equivalente ao carregamento distribuído na altura do cubo do rotor da turbina eólica; além disso, considerou-se o peso próprio da torre distribuído ao longo da altura.

A turbina eólica estudada corresponde ao modelo MM92 da empresa Repower com potência nominal de 2 MW, bastante presente em países europeus como Portugal, Espanha e Alemanha. Este modelo de turbina trabalha em uma faixa de velocidade do vento entre 3 e 24 m/s. O modelo MM92 tem 76,20 m de altura e possui um formato tronco-cônico vazado formado por três segmentos (segmento do topo) para facilitar o transporte e a montagem. O primeiro segmento possui uma altura de 21,77 m, diâmetro na base de 4,30 m e no topo de 3,917 m; o segundo segmento possui uma altura de 26,62 m, diâmetro na base de 3,917 m e no topo de 3,45 m; e o terceiro segmento com altura de 27,81 m, diâmetros na base de 3,45 m e no topo de 2,96 m (Figura 16). A espessura da parede da torre varia ao longo de sua altura entre 30 mm na base e 12 mm no topo.

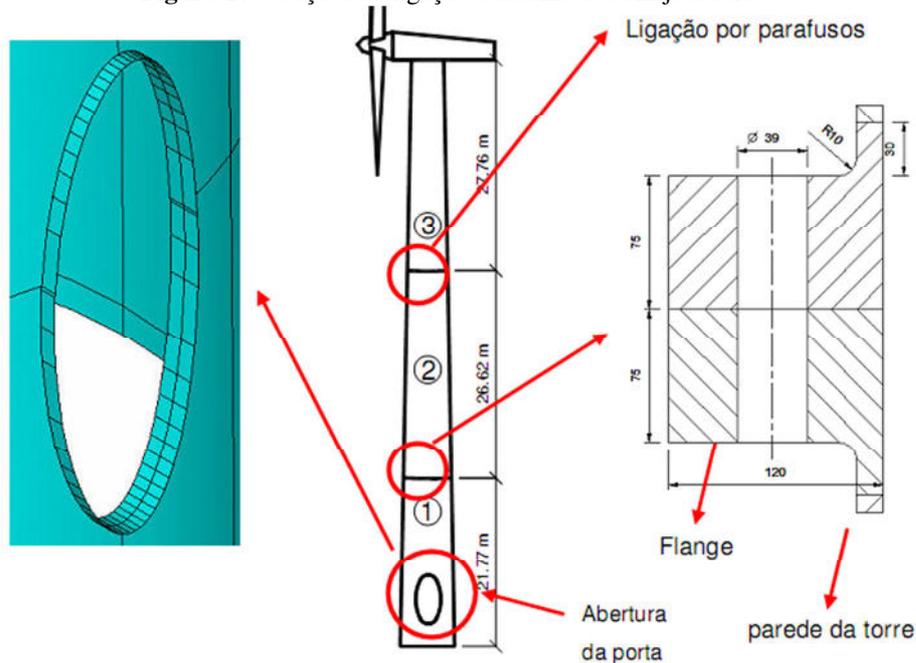
Figura 16 – Esquema da torre da turbina eólica MM92.



Fonte: Sirqueira (2008).

As ligações entre os segmentos da torre foram realizadas por aparafusamento, sendo empregado um total de 464 parafusos: parafusos com diâmetro de 45 mm para a ligação do primeiro segmento com a fundação e com o segundo segmento; parafusos de 39 mm de diâmetro ligando o segmento ao terceiro; e parafusos de 30 mm ligando o terceiro segmento ao topo. O modelo MM92 apresenta duas aberturas: uma maior para acesso interno e outra para ventilação, ambas com formato elíptico e com enrijecedores perpendicular a parede da torre (Figura 17). As pás do aerogerador são fabricadas com resina plástica reforçada com fibra de vidro medindo 45,20 m e com massa de 800 kg cada, desta forma, a superfície de varredura é de 6720 m². O conjunto de todos os equipamentos mecânicos e elétricos da nacelle tem uma massa de 6900 kg. A parede da torre, os flanges e os enrijecedores da abertura da porta são fabricados com aço S355 (EN 10025-2, 2004).

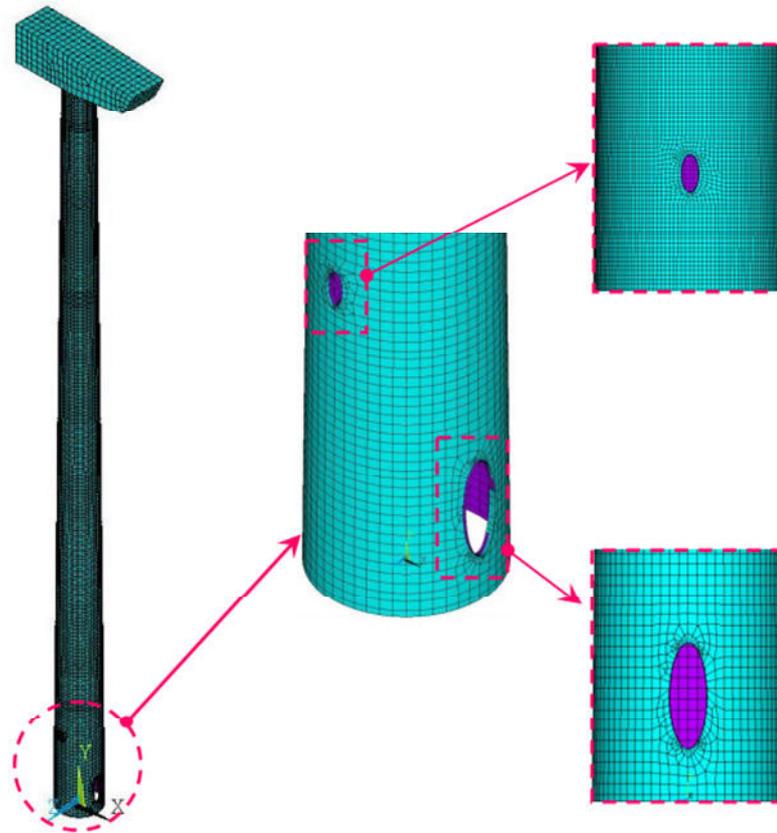
Figura 17 – Seções de ligação e detalhe dos enrijecedores.



Fonte: Sirqueira (2008).

Sirqueira (2008) modelou numericamente a torre com base no MEF utilizando elementos finitos de casca (SHELL 181 da biblioteca do *software* ANSYS). O elemento SHELL 181 é composto por quatro nós com seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações) e é apropriado para estruturas formadas por cascas de espessuras médias e finas e para análise linear e não linear física e geométrica. As malhas dos modelos de elementos finitos foram estabelecidas através de testes de validação de modelagem, ou seja, foi realizada a análise modal com diversos tamanhos de malhas até obter-se um grau de refinamento adequado. O modelo final foi constituído de 17094 elementos e 17124 nós. As pás, o rotor e a nacelle foram representados por elementos de casca com densidades equivalentes (Figura 18).

Figura 18 – Malha de elementos finitos da torre e detalhes das aberturas na torre.

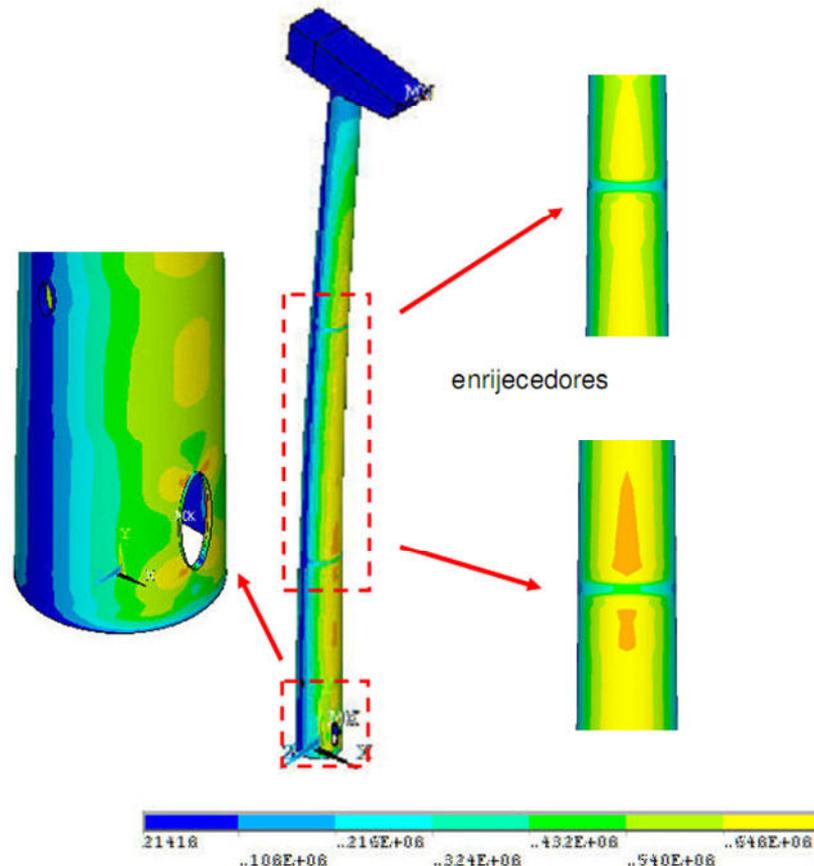


Fonte: Sirqueira (2008).

Foram adotadas algumas hipóteses simplificadoras para implementação computacional em elementos finitos do modelo matemático estudado: a validade da hipótese clássica de Bernoulli a qual considera que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares a linha neutra após as deformações, ou seja, os efeitos de empenamento e distorção foram desconsiderados na modelagem; as tensões impostas não causam plastificação na seção transversal dos elementos, mas os efeitos de segunda ordem foram considerados; a ligação das partes da torre não sofre o efeito de cisalhamento; o material da nacele, do rotor e da pá foi admitido com comportamento linear elástico e isotrópico; na parede da torre, no flange e no enrijecedor das aberturas o modelo numérico tem um comportamento elastoplástico bilinear com um encruamento de 5%. A modelagem do amortecimento foi realizada com o amortecimento proporcional ou de Rayleigh.

Na análise estática proposta por Sirqueira (2008), foi obtida a máxima tensão equivalente de *von Mises* igual a 97,2 MPa e um deslocamento máximo no topo da torre igual a 51 cm. Além disso, observaram-se valores menores de tensões equivalentes de *von Mises* nos enrijecedores (dispostos ao longo da altura da torre) em relação a parede de torre próxima destes. Os maiores valores de tensões equivalentes de *von Mises* estão localizados na região de abertura das portas e os menores, no topo da torre (Figura 19).

Figura 19 – Distribuição das tensões equivalentes de *von Mises* na análise estática.



Fonte: Sirqueira (2008).

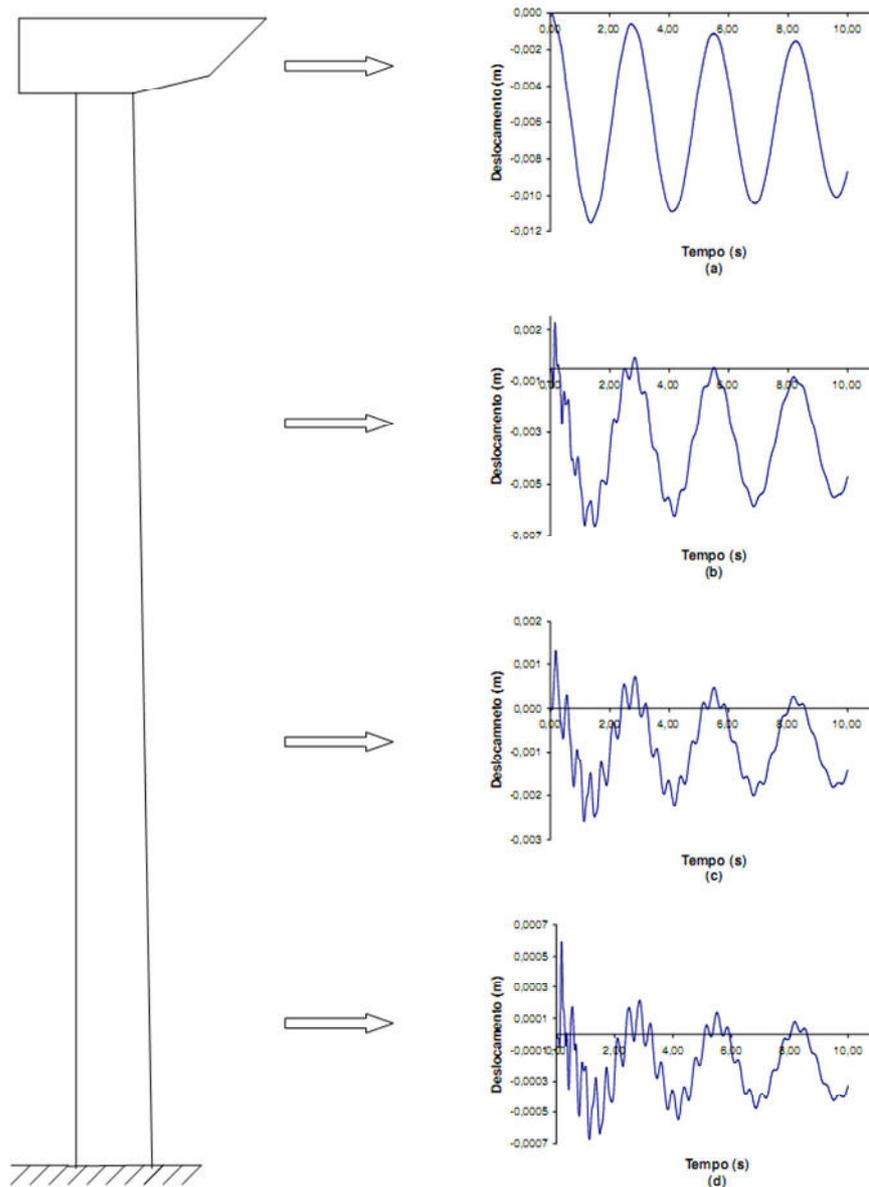
Sirqueira (2008) obteve da análise de autovalores e autovetores da torre que: no primeiro modo de vibração, predominou a flexão no plano XY (0,36 Hz); no segundo modo de vibração, predominou a flexão no plano YZ (0,36 Hz); no terceiro modo de vibração, predominou a torção em torno do eixo vertical global Y (2,59 Hz); no quarto modo de vibração, predominou novamente a flexão no plano XY (2,64 Hz); no quinto e no sexto modo, predominaram as flexões no plano YZ (2,89 Hz e 7,90 Hz, respectivamente).

A análise harmônica proposta por Sirqueira (2008) considerou uma carga determinística senoidal com valor máximo de 308,45 kN correspondente a ação do vento atuando sobre as pás da torre eólica. As frequências de excitação foram variadas considerando uma faixa de 0 a 20 Hz. É concluído que a influência do primeiro modo de vibração na resposta do modelo da torre é preponderante, ou seja, a torre comporta-se como uma viga engastada e livre.

Na análise transiente também se considerou uma carga determinística senoidal com valor máximo de 308,45 kN. Para a integração das equações de movimento foi utilizado o algoritmo de Newmark com um intervalo de integração igual a 0,002 s e foi adotado um coeficiente de amortecimento igual a 1,5%. Na Figura 20 são mostrados os deslocamentos

translacionais horizontais no tempo de vários pontos ao longo da altura da torre. Observa-se, claramente, a predominância da frequência fundamental no gráfico deslocamento vs. tempo do topo da torre. Além disso, a resposta dinâmica da torre diminui paulatinamente com o tempo devido ao amortecimento estrutural.

Figura 20 – Gráficos deslocamentos translacionais horizontais vs. tempo ao longo da altura da torre.



Fonte: Sirqueira (2008).

Na análise não linear estática realizada, foram considerados três posicionamentos distintos da nacele em relação às aberturas da torre: na direção do eixo x (vento 0°); na direção do eixo z (vento a 90°) e a 45° entre os eixos x e z. Na Figura 21 os gráficos carregamento vs. deslocamento no centro do rotor da torre estão ilustrados. De maneira geral: inicialmente surgem os primeiros valores de tensões próximos da tensão de escoamento entre enrijecedores e na(s) região(ões) de abertura(s) da torre; posteriormente observa-se um

aumento nas dimensões das regiões com valores das tensões equivalentes de *von Mises* iguais à tensão de escoamento do material indicando o início da plastificação da seção crítica; por fim, a ocorrência de flambagem local (Figura 22) pode ser observada e as regiões plastificadas continuam a aumentar havendo a redistribuição de tensões no modelo.

Figura 21 – Gráficos de carregamento vs. deslocamento para o modelo da torre eólica investigado.

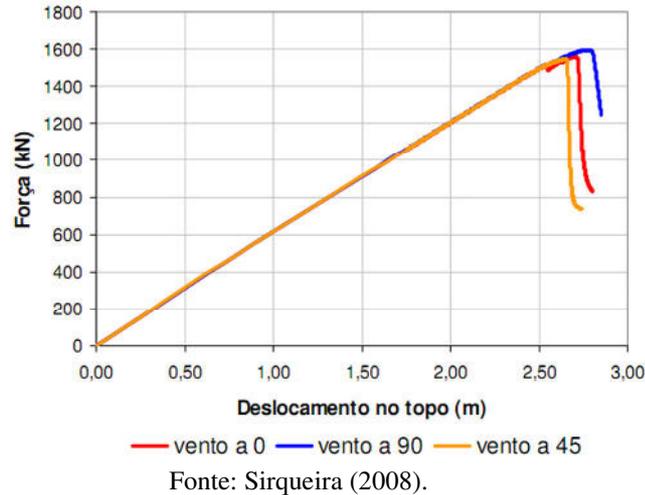
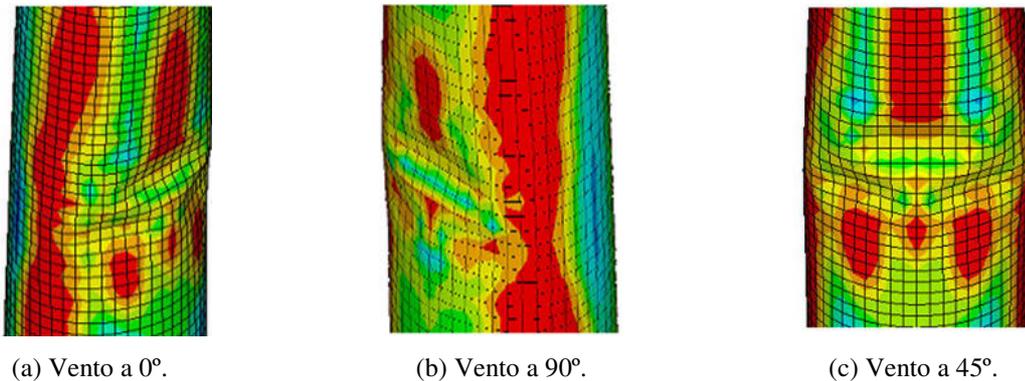


Figura 22 – Flambagem local da parede do modelo de torre analisado.



Fonte: Sirqueira (2008).

Wang, Qin e Lim (2010) aplicaram um modelo matemático para analisar dinamicamente uma turbina eólica de eixo horizontal via teoria de viga de parede fina. O aerogerador foi modelado utilizando-se múltiplos corpos rígidos e flexíveis. A torre e o rotor foram simulados por estruturas de parede fina e expressões compatíveis para suas deformações foram aplicadas; o que implicava em sucessivas transformações para local qualquer das pás e da torre em relação a sistema de coordenadas inercial. Os termos das energias cinéticas e potenciais para cada corpo rígido ou flexível foram introduzidos no sistema de equações de Lagrange, obtendo-se o sistema de equações de movimento sem amortecimento.

Wang, Qin e Lim (2010) obtiveram as frequências e modos de vibração livre para um exemplo numérico de um aerogerador com torre de 34,862 m de altura; enquanto que as

distribuições de tensões e de deslocamentos dinâmicos da torre e do rotor foram computadas por meio de uma análise de vibração forçada não amortecida. Além disso, a influência da rigidez da torre sobre as deformações das extremidades das pás do rotor foi estudada. Objetivou-se, portanto, aplicar um modelo mais sofisticado que o tradicional elemento de viga unidimensional, capaz de fornecer informações detalhadas sobre a resposta da torre e do rotor.

Feijó (2010) estudou duas formulações para otimização do projeto de torres tubulares para geradores eólicos de aço. Primeiramente, foi estudada uma torre de aço cilíndrica modelada segundo a teoria de viga clássica de Euler-Bernoulli; em seguida, a torre foi formada por segmentos de tronco de cone que foram modelados por elementos finitos de pórtico plano. Foi realizada uma análise estática considerando o comportamento linear físico, homogêneo e isotrópico do material (aço ASTM A36); portanto, não foram realizadas análises dinâmicas nem de fadiga.

As torres foram analisadas como vigas engastadas na base e livre no topo sujeitas a carga axial de compressão no topo da torre decorrente do peso da nacela e das pás da turbina; e, uma carga trapezoidal aplicada transversalmente ao longo do comprimento da torre referente à ação estática do vento que seguiu as prescrições da ABNT NBR 6123 (1988). As verificações de segurança relativas aos Estados Limites Últimos (ELU) e aos Estados Limites de Serviço (ELS) seguiram os seguintes códigos normativos: ABNT NBR 8800 (2008) e ABNT NBR 8681 (2004).

Feijó (2010) utilizou o método do Algoritmo Genético (AG) em um programa no ambiente MATLAB para otimização da torre. O objetivo do modelo de otimização corresponde à minimização do peso da torre, com imposição de restrições referentes à resistência, à rigidez, à estabilidade, ao deslocamento no topo da torre ($L/400$; conforme ABNT NBR 8800, 2008) e ao limite de diâmetro da torre para transporte.

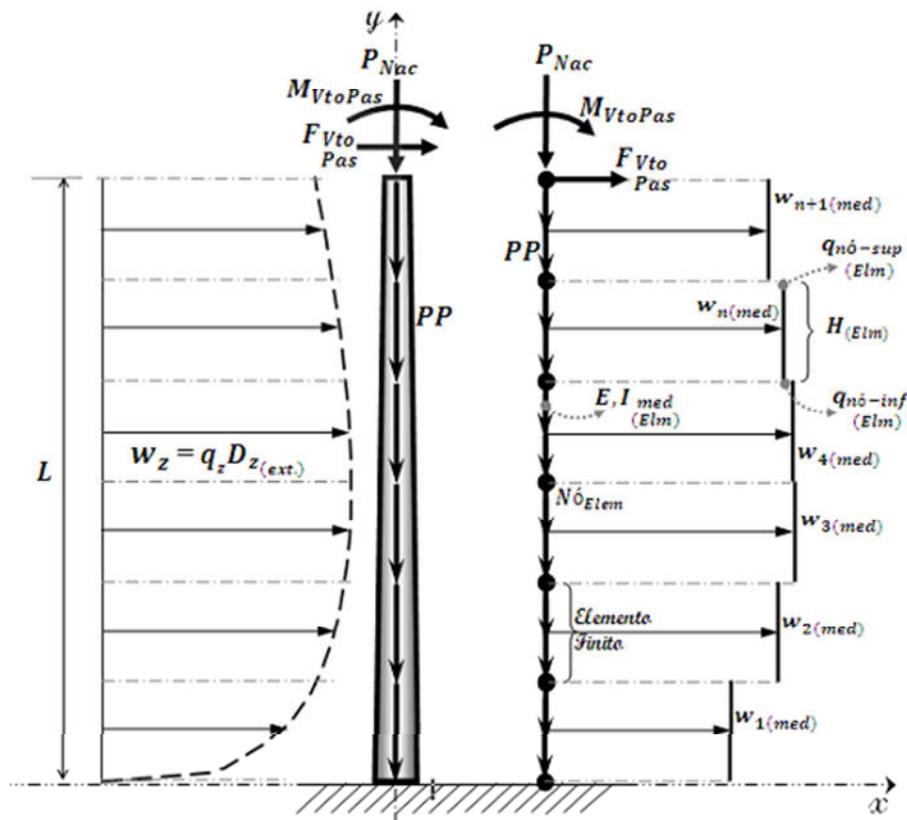
As soluções ótimas obtidas foram modeladas no software ABAQUS por meio de elementos finitos de casca para obter-se os resultados de deslocamento e de tensões equivalentes de *von Mises*. Feijó (2010) modelou: uma torre cilíndrica com 45 m de altura (três segmentos de 15 m); uma torre tronco-cônica com 45 m de altura (dois segmentos de 22,5 m e cada um destes discretizado em 3 elementos finitos); uma torre tronco-cônica com 45 m de altura (três segmentos de 15 m) e uma torre tronco-cônica com 60 m de altura (três segmentos de 20 m).

Lima (2011) estudou a otimização de torres tubulares metálicas de aerogeradores tomando como base os estudos de Lavassas et al. (2003) e de Feijó (2010). A modelagem da torre foi feita por meio do elemento finito de pórtico plano com seis graus de liberdade,

admitindo-se o elemento com seção transversal constante e desprezando-se os efeitos devidos à torção decorrente da ação da força do vento sobre as pás da turbina eólica.

As cargas consideradas atuando sobre a torre (Figura 23), são denominadas por: P_{Nac} peso do conjunto cubo/pás/nacele; PP peso próprio da torre; F_{VtoPas} força resultante do vento que incide perpendicularmente ao plano formado pela rotação das pás; e M_{VtoPas} momento resultante no topo da torre, devido à “ação de F_{VtoPas} ” com a excentricidade formada pela distância entre o eixo do rotor e o topo da torre.

Figura 23 – Modelo e discretização da torre analisada.



Fonte: Lima (2011).

A ação do vento sobre a torre foi simulada estaticamente utilizando a ABNT NBR 6123 (1988). Para ação do vento nas pás do aerogerador foi considerado o valor utilizado em Lavassas et al. (2003) para as torres de 45 m e 60 m de altura e, por extensão, aplicou uma carga proporcionalmente maior para as torres com 78 m e 91 m de altura. Lima (2011) justifica que nem sempre é possível obter informações técnicas (a respeito das forças sobre as pás, especificamente), pois os fabricantes de turbinas eólicas preocupam-se em reservar informações para não revelá-las aos concorrentes mesmo que sejam patenteadas.

Lima (2011) considerou o peso próprio da torre com uma carga distribuída ao longo do seu comprimento e o peso do aerogerador como uma carga concentrada centrada no topo da torre. Não foram consideradas as massas das instalações e dos equipamentos de

manutenção ao longo da torre justificando-se que esta parcela da carga forma uma pequena fração do peso próprio da estrutura.

Os coeficientes de ponderação de ações e de resistências utilizados seguiram a ABNT NBR 8681 (2004) e as equações de verificação a garantia de segurança estrutural seguiram as especificações da ABNT NBR 8800 (2008), considerando o comportamento elástico linear do aço (ASTM A36 e ASTM A572) e desconsiderando os efeitos de fadiga. Para a análise não linear geométrica pelo método dos elementos finitos (MEF) foi utilizado o método de Newton-Raphson. Adicionalmente, foi realizada uma análise de vibração livre pelo MEF.

Lima (2011) utilizou o método do Algoritmo Genético (AG) em um programa no ambiente MATLAB para otimização da torre e, complementarmente, o algoritmo de busca SQP. O objetivo do modelo de otimização corresponde à minimização do peso da torre, com imposição de restrições referentes à resistência, à rigidez, à estabilidade, ao deslocamento no topo da torre ($L/400$; conforme BRUGHUIS, 2003), à geometria, à frequência natural fundamental (mínimo de 0,5 Hz; conforme LAVASSAS et al., 2003) e ao limite de diâmetro da torre para transporte (adotado um máximo de 4,20 m). As soluções ótimas obtidas foram modeladas no software ABAQUS por meio de elementos finitos de casca.

Inicialmente foram implementados modelos de torres cilíndricas e, posteriormente, de torres tronco-cônicas. A torre cilíndrica com 45 m altura resultou mais pesada (35% maior) quando da consideração da restrição de frequência natural (0,50390 Hz) em relação à análise da mesma torre sem a restrição de frequência natural (ambos os casos com a carga de vento atuando apenas na torre para poder-se comparar com os resultados obtidos por FEIJÓ, 2010), mostrando a importância da decisão quanto à concepção de rigidez a ser adotada para o projeto da torre.

Segundo Lima (2011), a torre tronco-cônica de 45 m (três segmentos de 15 m) foi inicialmente modelada sem a restrição da frequência fundamental e com a ação do vento agindo apenas na torre. Foi observada uma redução de 35% do peso da torre quando comparada com a torre cilíndrica de mesma altura. Além disso, nesta situação, a torre apresentou frequência fundamental da ordem de 0,25 Hz que está contido na faixa de variação da velocidade inicial de rotação das turbinas entre 15 rpm e 18 rpm (0,25 Hz a 0,30 Hz de frequência); concluiu-se que há possibilidade de ocorrência de problemas de ressonância e reafirmou-se a importância de estabelecer restrições quanto a frequência fundamental. Posteriormente, a carga de vento nas pás e a restrição na frequência fundamental foram contempladas. A consideração da ação do vento nas pás aumentou em 560% o peso da torre,

permitiu, segundo Hau (2006), classificar a torre como estrutura muito rígida e afastou o risco de ressonância, já que a frequência natural fundamental da torre se elevou para 1,35748 Hz.

A aplicação do modelo para torres mais altas conduziu a pesos maiores. Para torre tronco-cônica de 60 (em quatro segmentos de 15 m) a restrição de deslocamento imposta foi responsável pela limitação da solução (assim como no caso da torre com 45 m de altura) e a primeira frequência natural foi de 1,11 Hz (18% inferior ao caso da torre com 45 m).

As torres com 78 m (seis segmentos de 13 m) e com 91 m (seis segmentos de 15,17 m) tiveram valores de frequência fundamental de 0,60 Hz e 0,53 Hz, respectivamente. As restrições de deslocamento no topo e de frequência limite foram as mais críticas para obtenção da solução ótima; então, indicou-se que a rigidez e a possibilidade de ressonância são pontos críticos inclusive na consideração dos efeitos dinâmicos dos carregamentos.

As análises no *software* ABAQUS utilizando elementos finitos de casca, mostraram resultados aceitáveis com relação ao deslocamento no topo da torre e às tensões equivalentes de *von Mises*. No entanto, não foram levados em consideração aberturas, enrijecimentos, flanges e plataformas internas nas torres.

Dellezopolles Jr. (2011) estudou o comportamento dinâmico de torres de aerogeradores utilizando a teoria de Euler-Bernoulli (considerando que o diâmetro da torre é pequeno quando comparado com o seu comprimento e que as deformações por cisalhamento e rotacionais são desprezíveis) com acoplamento torre-aerogerador. A torre foi considerada uma estrutura metálica uniforme de seção transversal circular constante ao longo do seu comprimento. Os elementos do aerogerador (pás, rotor e nacele) foram considerados como uma massa sujeita a carregamentos dinâmicos situada na extremidade da torre.

A análise não linear geométrica foi feita deduzindo uma equação não linear para modelar o comportamento da torre eólica baseada no método variacional de Hamilton (analiticamente) e aplicando carregamentos periódicos na extremidade da torre eólica, além de considerar o acoplamento da torre eólica e do aerogerador. Foi considerado um tipo de amortecimento que considera a resistência ao movimento transversal da torre, sendo proporcional a velocidade da seção da torre. Separou-se a interação do vento com a torre e com a turbina para compor um carregamento simplificado. Deduziu-se, então, uma equação diferencial parcial com termos referentes: à deformação dos elementos da torre em função da energia cinética do deslocamento lateral da torre; à inércia; à deformação elástica do elemento; à parcela de deformação devida à força do peso próprio da torre; à força de amortecimento; à força devida ao vento; e, à massa no topo da torre.

Reaplicando o princípio de Hamilton, as relações para as coordenadas lagrangeanas e

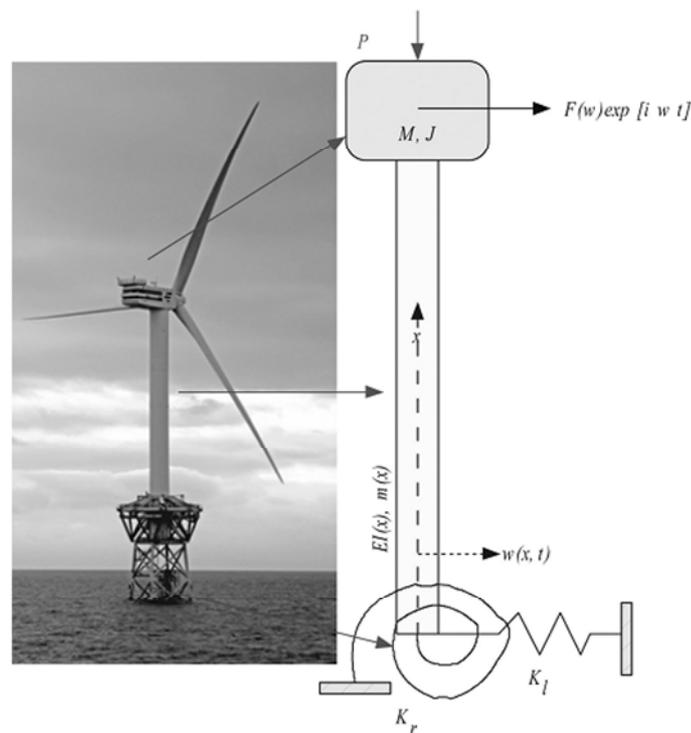
eulerianas e o conceito de inextensibilidade foram utilizados para modelar uma equação linear de movimento. Foram obtidos os modos de vibração e as respectivas frequências para a equação linear da vibração livre sem massa na nacela.

Dellezzopolles Jr. (2011) transformou a equação diferencial parcial não linear obtida em um sistema de equações de segunda ordem no tempo, resolvidas com o auxílio do *software* Maple, utilizando o método de discretização de Galerkin. O método numérico de Runge-Kutta foi aplicado para obter a solução das equações lineares e não lineares. Da equação linear com amortecimento e com a massa da nacela obtém-se que as frequências dos modos tendem a diminuir quanto maior for a massa da nacela quando comparada com a massa da torre. As equações obtidas para a solução do sistema dinâmico torre-aerogerador foram utilizadas para avaliar a resposta dinâmica do sistema quando submetido a cargas periódicas. Baseando-se nestas respostas mostrou-se o comportamento perante a variação de cada parâmetro (massa da nacela em relação a massa da torre; inércia em relação à rigidez da torre; frequência fundamental) da equação nas respostas não linear e linear da torre eólica.

Dellezzopolles Jr. (2011) aplicou dois tipos de carregamento aos diferentes parâmetros de torre. Foi analisada a resposta da amplitude do deslocamento no topo da torre devido ao acréscimo linear no valor do carregamento e a resposta do sistema à aplicação de carregamento súbito e sucessivo às condições iniciais do passo de carga anterior. Não foram identificadas diferenças significativas nas respostas lineares e não lineares em todas as combinações de parâmetros das torres analisadas para situações reais de funcionamento do aerogerador. Por fim, foi compreendido que os picos de ressonância ocorriam quando a frequência de rotação da turbina era aproximadamente igual a um terço do valor da frequência fundamental da torre (para as equações movimento linear e não linear). O autor justifica que tal fato decorre da ocorrência de carregamento máximo do vento em cada passagem das pás em frente à torre (efeito sombra em turbinas eólicas do tipo utilizado no referido trabalho); contrariando o que foi colocado por Lima (2011).

Adhikari e Bhattacharya (2012) caracterizaram analiticamente o comportamento dinâmico da torre do aerogerador utilizando a teoria da viga-coluna de Euler-Bernoulli com vinculações elásticas, que são consideradas para modelar a flexibilidade da interação destes sistemas com a fundação (para aerogeradores *onshore* e *offshore*, conforme Figura 24). A partir da forma fechada da equação diferencial de quarta ordem governante do sistema dinâmico, obtém-se as frequências naturais de exemplos numéricos práticos. Por fim, além da abordagem analítica, uma abordagem experimental é proposta para determinar os parâmetros de rigidez da fundação do aerogerador.

Figura 24 – Idealização do aerogerador modelado.



Fonte: Adhikari e Bhattacharya (2012).

Oliveira (2012), em sua dissertação de mestrado, objetivou analisar o comportamento dinâmico de torres de geradores eólicos, de forma a obter um modelo numérico que represente a estrutura real com a máxima precisão. Para tal, modelaram-se uma torre de aerogerador de 1 MW, originalmente analisado por Lavassas et al. (2003), e uma torre de aerogerador de 2 MW (*Repower MM82*), para as quais determinaram-se os modos de vibração e as respectivas frequências naturais, para três modelos: torre modelada com elementos finitos de barra e engastada na base; torre modelada com elementos de casca e engastada na base; e, por fim, torre modelada com elementos finitos de casca, sapata de concreto armado modelada com elementos finitos sólidos e o solo representado por molas lineares. Para os modelos com elementos finitos de casca foi estudada a capacidade dos anéis de rigidez (enrijecedores transversais), dispostos ao longo do comprimento da torre, em atenuar os modos locais de vibração; e foi averiguada também a sua maior eficiência na caracterização modal da estrutura, uma vez que, o modelo com elementos finitos de barras não são capazes de captar os modos de vibração locais. Por fim, Oliveira (2012) retratou o ensaio dinâmico experimental da torre que dá suporte ao *Repower MM82*, de forma a comparar os resultados provenientes da monitoração da estrutura com o estudo numérico previamente realizado.

Avila et al. (2013), primeiramente, estudaram um modelo simplificado com um grau de liberdade que representa o deslocamento transversal do topo da torre. Em seguida, a torre foi modelada com elementos finitos de barra e com um elemento de massa concentrada em

seu topo. O terceiro modelo foi considerado utilizando-se elementos finitos de casca para a torre e elemento de massa distribuído no topo da torre. Então, a comparação entre as respostas dos três modelos foi feita com o propósito de verificar se a simplicidade do modelo afeta a acurácia da solução final. As frequências naturais e os modos de vibrações dos modelos foram obtidos, assim como os resultados de uma análise harmônica e transiente para determinar a resposta dinâmica da torre no domínio do tempo. Por fim, os resultados obtidos numericamente foram comparados com os resultados provenientes de uma solução analítica de um modelo de viga em balanço com uma massa fixada à extremidade livre, com o objetivo de verificar a consistência dos resultados obtidos numericamente.

Santos (2013) formulou um modelo de otimização de torres tubulares de aço para aerogeradores eólicos buscando minimizar o volume total da torre utilizando como variáveis de projeto as espessuras da parede da torre. Foram impostas restrições relativas à frequência natural, à tensão e ao deslocamento máximo. A estrutura da torre foi modelada com base no Método dos Elementos Finitos e o carregamento atuante na estrutura incluiu os pesos da torre, do conjunto de equipamentos instalados no topo (cubo/pás/nacele), e o efeito estático da ação do vento sobre a torre. Para a verificação das tensões, deslocamentos e frequências naturais, foram utilizados elementos finitos de casca do programa de análise ANSYS. Os modelos de otimização foram também implementados no módulo de otimização do software ANSYS.

Os coeficientes de ponderação de ações e de resistências utilizados seguiram a ABNT NBR 8681 (2004) e as equações de verificação e garantia de segurança estrutural seguiram as especificações da ABNT NBR 8800 (2008) e do EUROCODE 3 (2006). A ação estática do vento foi modelada a partir da ABNT NBR 6123 (1988). Salienta-se que não foram consideradas as massas dos elementos acessórios da torre (escada, cabos, quadros etc.). Foi realizada uma análise estática linear física e geométrica e uma análise de vibração livre como fase inicial do estudo. Santos (2013) estudou o mesmo modelo estrutural de torre de turbina eólica investigado por Sirqueira (2008).

Santos (2013) modelou numericamente a torre com base no MEF utilizando o mesmo modelo de Sirqueira (2008). A malha selecionada tinha dimensões de 0,5 m, apresentando 16984 nós e 17010 elementos finitos de casca além de detalhar as aberturas.

Santos (2013) obteve, na análise de vibração livre da torre, que: no primeiro modo de vibração predominou a flexão no plano XY (0,36 Hz); no segundo modo de vibração predominou a flexão no plano YZ (0,36 Hz); no terceiro modo de vibração predominou a torção em torno do eixo vertical global Y (2,59 Hz); no quarto modo de vibração predominou novamente a flexão no plano XY (2,64 Hz); no quinto e no sexto modo predominaram as

flexões no plano YZ (2,88 Hz e 5,93 Hz, respectivamente).

Santos (2013) aplicou dois modelos de otimização, sendo que apenas um destes considerava restrições com relação às frequências naturais de vibração (0,1 Hz de frequência limite mínima adotada). Utilizando dois dos três processos de otimização do *software* ANSYS (método de primeira ordem e de aproximação por subproblemas), obteve-se uma redução de mais de 40% do volume da torre estudada.

2.4 CONTROLE DE VIBRAÇÕES

2.4.1 Sistemas de controle de vibrações

O controle estrutural, originalmente desenvolvido na engenharia aeroespacial, foi expandido para resolução de problemas na engenharia civil para proteger pontes e construções esbeltas suscetíveis às vibrações excessivas. Desta forma, um sistema de controle tem a função de regular outros sistemas, de maneira que o sistema controlado, que está sob a ação do controlador, atenda aos critérios desejados (de desempenho, de estabilidade etc.). Assim, o controle estrutural é um campo da engenharia estrutural que objetiva reduzir níveis excessivos de vibração por meio da instalação de dispositivos de controle externos ou da aplicação de forças externas de controle que gerem alterações nas propriedades dinâmicas (rigidez, amortecimento, massa etc.) da estrutura a ser controlada.

Os processos de controle passivo são baseados na utilização de dispositivos que não são alimentados por qualquer fonte de energia externa para exercer as ações de controle, de forma a serem mais empregadas na Engenharia Civil, especificamente na área de Engenharia Sísmica. Realmente, dispositivos passivos de elevadas dimensões são projetados para controlar forças elevadas, pois possuem elevada capacidade de dissipação de energia, convertendo energia cinética em calor. Adicionalmente, em comparação com outras técnicas de controle, o controle passivo apresenta-se mais interessante em termos de confiabilidade, custo e manutenção. Desta forma, no projeto de sistemas de controle deve-se, em geral, ponderar a utilização de um sistema passivo e, em caso de não ser suficientemente eficaz, parte-se à complementação do controle com outras técnicas mais avançadas. Portanto, a principal desvantagem dos sistemas passivos consiste no fato destes serem relativamente menos eficientes que os sistemas ativos e semiativos, particularmente em situações em que se necessita de adaptabilidade da ação de controle em função da resposta da estrutura (MOUTINHO, 2007).

Os processos de controle ativo, por sua vez, têm potencial para atingir elevados níveis de eficácia devido à possibilidade de aplicar forças de controle contínuas à estrutura, necessárias para atingir certo objetivo de controle. Os valores das forças de controle são calculados instantaneamente a partir dos dados de resposta captados pelos sensores estrategicamente posicionados na estrutura. Assim, a técnica de controle ativo apresenta elevada robustez, que representa a baixa medida da sensibilidade do sistema às variações de seus parâmetros. Como desvantagens, os sistemas de controle ativo têm elevado custo financeiro e necessitam de manutenção mais frequente e minuciosa; além disso, tem-se a dificuldade de aplicar forças de controle em uma determinada gama de frequências e amplitudes. Efetivamente, a energia requerida no controle ativo para alimentar os atuadores é elevada e pode vir a falhar, principalmente, em situações catastróficas, quando falhas gerais de energia podem ocorrer, fazendo com que o sistema de ativo fique inoperante. Desta forma, na concepção do projeto de um sistema de controle essencialmente importante à segurança da estrutura, busca-se o uso de um sistema de controle híbrido que combina o desempenho eficaz de um sistema ativo com a confiabilidade de um sistema passivo (MOUTINHO, 2007).

Os sistemas de controle híbrido constituem uma solução intermediária entre os sistemas de controle passivo e ativo. Neste tipo de sistema, os dispositivos passivos são responsáveis pela redução majoritária da resposta da estrutura a ser controlada, ao passo que os dispositivos ativos garantem o ajuste final (ajuste fino) da resposta estrutural controlada. Comparados com os sistemas ativos, os sistemas híbridos trabalham com forças de controle de menor magnitude, o que diminui o custo deste, além de apresentarem desempenho mais eficiente em relação aos sistemas passivos. Além disso, no caso de falta de alimentação de energia, o componente passivo continua a garantir certo grau de controle à estrutura; portanto, os sistemas híbridos superam as principais desvantagens dos sistemas de controle puramente ativo ou passivo.

Adicionalmente, de forma a superar os problemas de falta de alimentação dos sistemas de controle ativo e os possíveis problemas de eficiência dos sistemas passivos, têm-se desenvolvido os intitulados sistemas semiativos. Tais sistemas são também uma espécie de solução intermediária entre os sistemas ativos e passivos, pois conseguem solucionar problemas de alimentação de energia por meio da aplicação de forças de controle de grande amplitude, utilizando pequena quantidade de energia, mediante a modificação ativa da rigidez ou do amortecimento de elementos estruturais estrategicamente posicionados na estrutura. Assim, os sistemas semiativos não acrescentam energia mecânica à estrutura principal, mas variam suas propriedades dinâmicas podendo funcionar apenas com o uso de baterias ou

pilhas elétricas.

Apresenta-se a seguir (Quadro 3) um esquema de classificação dos tipos de sistemas de controle.

Quadro 3 – Classificação dos sistemas de controle.

| TIPOS | PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO | NOMENCLATURA |
|------------|----------------------------|---|
| Passivo | Absorvedores | Amortecedores de Massa Sintonizado (AMS) |
| | | Amortecedores de Líquido Sintonizado (ALS) |
| | Dissipadores | Amortecedores metálicos ou hysteréticos |
| | | Amortecedores viscofluidos |
| | | Amortecedores viscoelásticos |
| | | Amortecedores de fricção |
| Isoladores | Isolamento de base | |
| Ativo | | Amortecedores de Massa Ativo (AMA) |
| | | Cabos ativos |
| | | Diagonais ativas |
| | | Atuadores piezométricos |
| Semiativo | | Dispositivos de rigidez variável |
| | | Amortecedores de atrito variável |
| | | Amortecedores viscosos de orifício variável |
| | | Amortecedores de viscosidade variável |
| Híbrido | | Amortecedor de Massa Híbrido (AMH) |
| | | Isolamento de base ativo |

Fontes: Soong e Dargush (1997); Housner et al. (1997); Spencer e Nagarajaiah (2003).

Serão detalhados em seguida os tipos de dispositivos de controle projetados nesta tese: Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS), em inglês, *Tuned Mass Damper* (TMD); Amortecedores de Massa Ativo (AMA), em inglês, *Active Mass Damper* (AMD); e, Amortecedor de Massa Híbrido (AMH), em inglês, *Hybrid Mass Damper* (HMD).

Os AMSs são equipamentos formados por uma massa conectada à estrutura por um sistema de molas e por um sistema de amortecedores, que, quando devidamente sintonizados, transferem a energia cinética de vibração da estrutura principal (estrutura a ser controlada) para estrutura secundária (massa do absorvedor de vibração), pois o AMS é projetado para vibrar fora de fase com a estrutura principal. Este tipo de absorvedor de vibração é bastante eficiente no controle de vibrações provocadas por ações harmônicas, sendo, portanto, indicado ao controle de estruturas flexíveis e vulneráveis ao fenômeno de ressonância, tais como edifícios altos, pontes pênses, lajes de edifícios e torres esbeltas. Para ter-se um funcionamento correto, os AMSs devem estar sintonizados a uma frequência de vibração específica da estrutura, pois se pode ter perda significativa de eficiência devida a possíveis desvios de calibração ou, até mesmo, amplificação da resposta da estrutura controlada. Além disso, cada aparelho é sintonizado com apenas uma frequência de vibração, podendo utilizar uma quantidade maior de absorvedores, caso necessário, de forma a controlar maior número de modos de vibração, constituindo-se, assim, o Amortecedor de Massa Sintonizado Múltiplo (AMSM).

O AMA consiste em um dispositivo de controle ativo no qual uma massa, onde se aplicam as forças de controle mediante atuadores, é conectada à estrutura. A reação das forças de controle aplicadas é fornecida pelo local em que os atuadores estão vinculados a estrutura a ser controlada. Desta forma, este tipo de dispositivo constitui um sistema de controle puramente ativo, de forma a contar com as vantagens e desvantagens intrínsecas a este tipo de sistema de controle estrutural.

O AMH é uma combinação de um AMS com um atuador ativo (HOUSNER et al., 1997). A característica básica deste dispositivo de controle em reduzir respostas estruturais é governada principalmente pelo movimento natural do AMS, de forma que as forças de controle aplicadas pelos atuadores hidráulicos são empregadas para aumentar a eficiência do AMH e aumentar a sua robustez às mudanças nas características dinâmicas da estrutura. Como uma das principais vantagens deste tipo de aparelho em relação ao AMA, tem-se que a energia e as forças de controle requeridas na operação de um AMH típico são consideravelmente menores que as associadas a um AMA de desempenho semelhante.

2.4.2 Aplicação do controle estrutural de vibrações a torres para HAWT

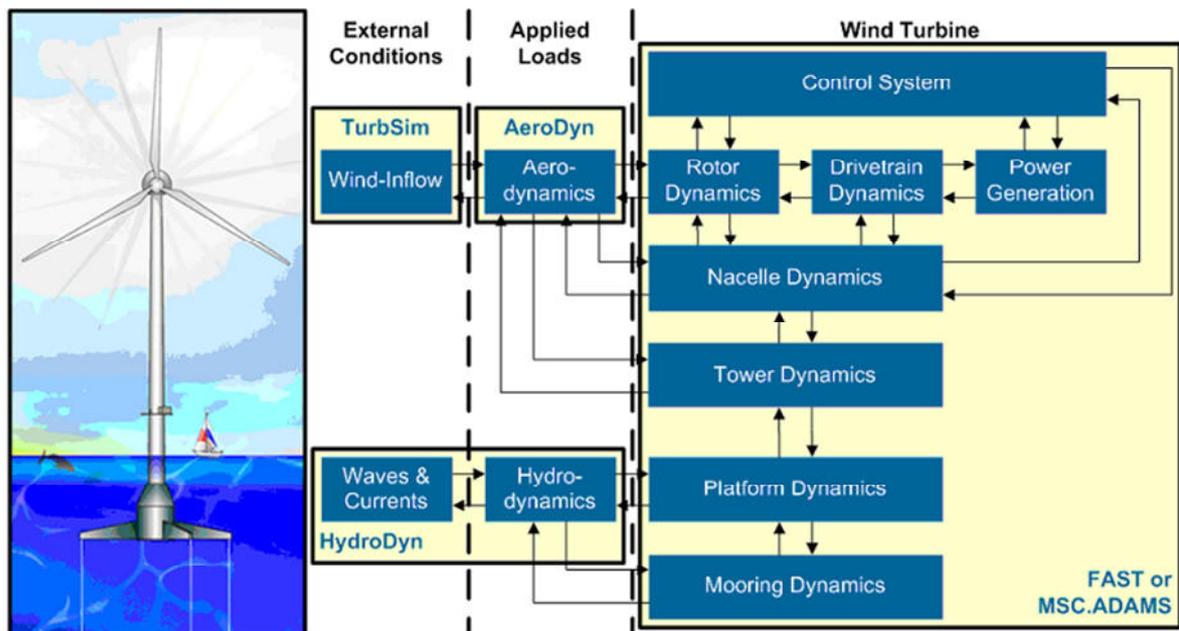
Nesta seção são apresentados os principais trabalhos relacionados ao controle de vibrações de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal, pois objetiva-se, nesta tese, projetar um sistema de controle híbrido de vibração para torres tubulares de aço de aerogerador de eixo horizontal.

Murtagh et al. (2008) investigaram o uso de um dispositivo de controle passivo (um AMS) para mitigar as vibrações devidas às forças eólicas na direção do vento em um modelo simplificado de aerogerador. As respostas obtidas foram adquiridas a partir da formulação teórica desenvolvida pelo mesmo autor (MURTAGH; BASU; BRODERICK, 2005), no qual o aerogerador é modelado por um sistema dinâmico composto por múltiplas subestruturas. Adicionalmente, foi analisada, neste estudo, a influência da interação da rotação das pás (rotor em funcionamento) no sistema torre-nacele, pela combinação das respectivas equações de movimento. A partir dos resultados numéricos obtidos, os autores concluíram que desconsiderar a interação pá-torre pode subestimar a resposta do topo da torre, particularmente se as frequências naturais da pá e da torre estiverem próximas, apesar da influência na torre ser relativamente menor que nas próprias pás.

Lackner e Rotea (2011a) investigaram o uso do controle estrutural passivo para reduzir as cargas e melhorar a resposta dos aerogeradores *offshore* flutuantes e de base fixa. Para

realizar este estudo, uma ferramenta de modelagem avançada foi desenvolvida para permitir que as técnicas de controle estruturais fossem aplicadas a aerogeradores *offshore*. De forma a determinar os parâmetros ótimos do amortecedor de massa sintonizado, que foi locado na nacelle, com movimentos de translação na direção do vento e perpendicular a esta. As equações de movimento do AMS foram incorporadas no código fonte do FAST (*Fatigue, Aerodynamics, Structures and Turbulence*), que é um código de análise acoplada (aero-hidro-servo-elástica), desenvolvido no NREL (*National Renewable Energy Laboratory*), que simula as cargas e o desempenho de aerogeradores modernos (Figura 25). Rotea, Lackner e Saheba (2010) investigaram a aplicação do controle ativo para compará-lo com o controle passivo estudado no artigo anterior. Adicionalmente, Lackner e Rotea (2011b) investigaram controladores ativo e passivo aplicados a um aerogerador flutuante tipo plataforma sobre barcaça, no qual foi demonstrado que o controle passivo otimizado na direção do vento resultou numa diminuição de 10% da carga de fadiga, enquanto o controle ativo resultou numa diminuição de, pelo menos, 30% desta carga. Entretanto, o controle ativo necessita de grandes quantidades de energia para atuar com eficiência maior que a do controle passivo.

Figura 25 – Esquema dos módulos do FAST.



Fontes: Lackner e Rotea (2011a); Lackner e Rotea (2011b); Rotea, Lackner e Saheba (2010).

Stewart e Lackner (2011) analisaram um modelo com um número de graus de liberdade limitados para investigar os efeitos da dinâmica do atuador e da interação estrutura-controle para um motor elétrico. Foi demonstrado que, enquanto o carregamento é reduzido para casos que incluem um modelo mais realístico do atuador, o consumo de energia do atuador é muito maior, fazendo com que negligenciar a interação entre estrutura e o controle

no projeto do controlador seja indesejável. Foi mostrado também, no projeto mecânico do atuador, que, mudando a razão das engrenagens do atuador, os efeitos da interação controle-estrutura podem ser reduzidos.

Tsouroukdissian (2011) estudou a eficiência de arranjos de amortecedores viscosos integrados internamente à torre de uma turbina eólica para mitigar as vibrações provocadas pelos carregamentos externos. Com resultados preliminares promissores, há expectativas de que o sistema seja eficiente tanto para turbinas eólicas *onshore* quanto para as *offshore*, mas tornam-se necessários estudos posteriores para melhorar a eficiência do sistema de controle proposto.

Stewart (2012) estudou como desenvolver um conjunto de amortecedores de massa sintonizados passivos de forma otimizada para quatro plataformas de aerogeradores *offshore* e quantificou os efeitos da dinâmica do atuador no projeto de amortecedor de massa sintonizado ativo. Esse conjunto de absorvedores foi desenvolvido a partir de um modelo com graus de liberdade limitados para cada uma das quatro plataformas de aerogerador *offshore* e foram integrados em uma função de otimização utilizando um algoritmo genético para um projeto global otimizado dos amortecedores de massa sintonizados. Os parâmetros otimizados dos amortecedores de massa sintonizados foram, então, integrados ao código FAST de análise acoplada de aerogeradores.

Li, Zhang e Chen (2012) investigaram experimentalmente, em uma mesa vibratória, um modelo de turbina eólica em escala de 1/13 (Figura 26). As reduções no deslocamento do topo, na aceleração do topo, da tensão na base e da tensão na plataforma da torre da turbina eólica, quando submetida à carga sísmica e a uma ação equivalente vento-marítimo, foram obtidas utilizando um absorvedor vibracional esférico. Inclusive, situações com aerogerador em operação também foram investigados para validar a eficiência do absorvedor em mitigar a vibração sob tais casos.

Guimarães et al. (2013) e Guimarães, Morais e Avila (2014) apresentaram em seus estudos modelos de pêndulo invertido para caracterizar o comportamento dinâmico e a estabilidade de uma turbina eólica *offshore* flutuante. Foram, então, analisados dois sistemas de controle passivo de vibração, um AMS pendular simples e um AMS pendular invertido, que foram vinculados à estrutura principal com o objetivo de reduzir a amplitude angular de vibração da torre do aerogerador. Os resultados obtidos nestes estudos mostraram que um AMS na conformação de pêndulo invertido é mais eficiente na redução das vibrações quando comparado ao AMS na geometria de pêndulo tradicional.

Figura 26 – Fotografias dos modelos de aerogerador e de absorvedor estudados.



(a) Aerogerador.



(b) Absorvedor de vibração.

Fonte: Li, Zhang e Chen (2012).

Stewart e Lackner (2013) estudaram a redução de carga em aerogeradores *offshore* empregando sistemas passivos de AMS. As fundações consideradas para os aerogeradores estudados são as seguintes: base fixa em *monopile*; plataforma flutuante; boia ancorada (*spar buoy*); e plataforma ancorada em cabos tensionados (*tension-leg platform*). Neste estudo, amortecedores de massa sintonizados passivos otimizados foram desenvolvidos através da criação de um modelo com número de graus de liberdade limitados para cada uma das quatro plataformas eólicas *offshore* investigadas. Esses modelos foram então integrados em uma função de otimização usando um algoritmo genético para encontrar um projeto globalmente otimizado para o AMS. Em seguida, os parâmetros dos AMS otimizados determinados pelo processo de otimização foram aplicados ao código FAST. Nos resultados apresentados, alcançaram-se reduções de até 20% nos danos causados por fadiga nas várias configurações de AMS investigados.

SHZU et al. (2015) estudaram três modelos (modelo simplificado com dois grau de liberdade; modelo de torre em elementos finitos de viga; e modelo de torre em elementos finitos de casca) para análise dinâmica de torre, com e sem controle de TMD pendular, de um aerogerador. As frequências naturais e os modos de vibração dos modelos em elementos finitos foram obtidos, assim como os resultados das análises harmônicas e transientes para determinar a resposta dinâmica da torre no domínio do tempo. Por fim, cita-se que a característica aleatória do carregamento de vento foi considerada utilizando o espectro de Davenport.

Colherinhas et al. (2015) apresentam uma aplicação de algoritmo genético para otimizar o desempenho de vibração de um AMS em pêndulo utilizando o *software* ANSYS

por meio de uma programação implementada no MATLAB. Para modelagem da torre de aerogerador e do respectivo AMS pendular foram utilizados um modelo com dois graus de liberdade (deslocamento lateral do topo da torre e rotação do pêndulo em relação a vertical) e um modelo em elementos finitos via ANSYS (com elementos finitos de casca, de viga, de massa e combinado). Então, foi feita a análise harmônica para obter as funções de resposta da estrutura no domínio das frequências dos sistemas sem controle e controlado passivamente. Colherinhas et al. (2016) introduziram no trabalho anterior um análise de sensibilidade (*response maps*) e incrementaram o processo de otimização.

Tong, Zhao e Zhao (2015) investigaram a aplicação de um AMS (na direção do vento e perpendicular a esta) para suprimir vibrações da torre de um aerogerador fundado em *monopile*. Utilizando o método do elemento espectral, os autores obtiveram um modelo dimensional-finito (\sum_d) no espaço dos estados a partir de um modelo dimensional-infinito (\sum) de uma torre de aerogerador controlado por um AMS localizado na nacele. O modelo \sum consiste em uma estrutura representada pela equação da viga de Euler-Bernoulli, que descreve a dinâmica da torre flexível, e pelas equações de Newton-Euler para corpos rígidos, que descrevem a dinâmica do conjunto rotor-nacele, em que se negligenciou qualquer efeito do movimento das pás sobre a torre. Já o modelo pode ser utilizado para realizar simulações rápidas e precisas da dinâmica da torre do aerogerador, assim como para o projeto otimizado do AMS, para o qual se utilizou o método de otimização H_2 . Os autores mostraram que o modelo \sum_d concorda com simulações, de uma turbina eólica modelo NREL 5 MW, feitas no FAST. O desempenho do AMS otimizado, na direção do fluxo de vento e na direção transversal ao vento, foi testado através de simulações no FAST, nas quais se alcançaram substanciais reduções nas cargas de fadiga. Portanto, esta pesquisa demonstrou como otimizar um AMS para reduzir vibrações de estruturas flexíveis representadas matematicamente por equações diferenciais parciais.

Fitzgerald e Basu (2016) estudaram os efeitos de interação solo-estrutura em estratégias de controle estrutural passivo e ativo. Para tal, um modelo matemático Euler-lagrangeano do aerogerador, baseado em uma formulação energética, foi desenvolvido para este fim considerando a dinâmica estrutural do sistema e a interação entre as vibrações das pás, no plano e fora do plano. A turbina foi solicitada por um carregamento aerodinâmico turbulento simulado utilizando uma modificação da teoria clássica do momento de elemento de pá; além disso, o efeito centrífugo da rotação das pás foi considerado. Foi verificado que os efeitos de interação solo-estrutura não produziram efeito nas vibrações das pás; entretanto, mostrou-se que as frequências naturais do sistema torre/nacele são afetadas significativamente

pela interação solo-estrutura. O sistema passivo de controle se mostrou ineficiente se houver incertezas em relação aos parâmetros do solo. Já o sistema de controle tipo amortecedor de massa sintonizado ativo foi capaz de reduzir as vibrações do sistema torre/nacele mesmo considerando os efeitos de interação solo-estrutura.

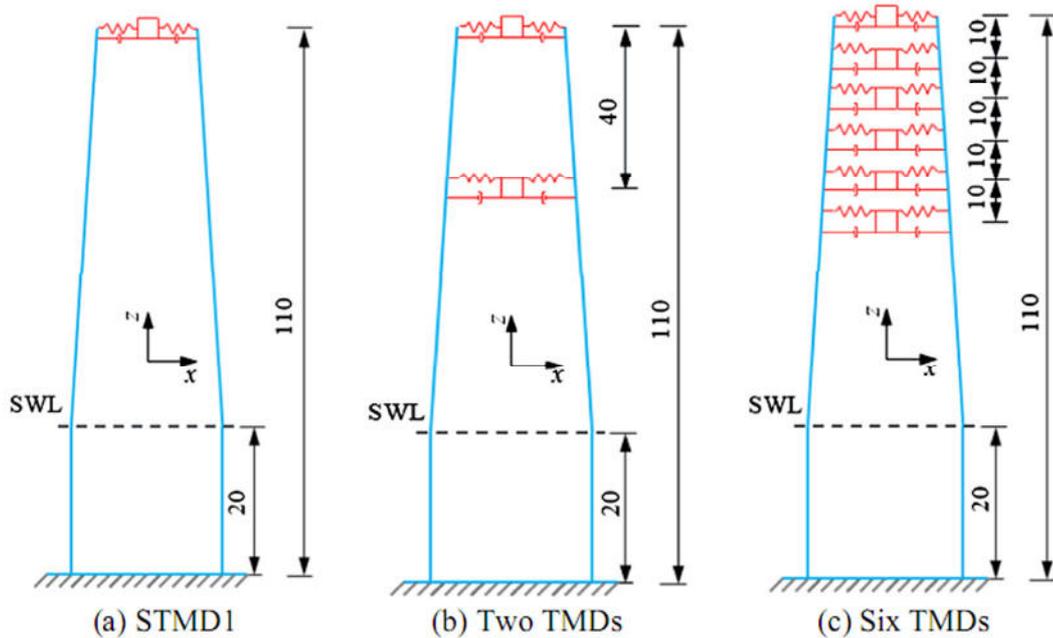
Guimarães (2016) estendeu seus estudos na análise de controle de vibrações de torres para aerogeradores *offshore* com a implementação do controle semiativo com duas estratégias de funcionamento do AMS tipo pêndulo invertido semiativo: dispositivo ON/OFF e variação contínua. Foi observado que o sistema semiativo se mostrou mais eficiente, para uma faixa de frequências mais ampla, que o sistema passivo.

Zuo, Bi e Hao (2017) propuseram a utilização de Amortecedores de Massa Sintonizados Múltiplos (AMSM) para o controle de vibrações provenientes da combinação dos modos de vibração (fundamental e de mais alta ordem) da torre um aerogerador *offshore* (NREL 5 MW) submetido a múltiplos carregamentos (excitações eólica, marítima e sísmica) (Figura 27). Justifica-se a influência dos modos de vibração de ordem mais alta na resposta da torre, pois estes podem ser excitados por um carregamento sísmico, já que a energia de um carregamento de terremoto está dentro de uma faixa de frequência mais ampla do que a energia para excitação do modo fundamental apenas. Nestas condições, os maiores deslocamentos não ocorrem necessariamente no topo da torre, mas em certas posições ao longo da altura da torre dependendo de quais modos são dominantes na resposta total; portanto, múltiplos dispositivos de controle são necessários. A eficiência do método proposto é numericamente investigada com auxílio do *software* de elementos finitos ABAQUS; e a resposta da torre sem dispositivos de controle é comparada com aquelas controladas por um AMS e por AMSM. Por fim, a robustez do sistema de controle sugerido é discutida, assumindo-se arbitrariamente que alguns absorvedores não funcionassem adequadamente. Comenta-se, ainda, que apenas a vibração da torre é de interesse deste trabalho, ficando o controle de vibração das pás para um estudo futuro.

Hu e He (2017) investigaram uma estratégia de controle ativo de vibração para um aerogerador flutuante tipo plataforma sobre barça, ancorada com linhas de amarração utilizando um amortecedor de massa híbrido instalado na nacele (Figura 28). Então, um método de modelagem não linear para a turbina eólica flutuante com base nas equações de Euler-Lagrange e um modelo de controle ativo de todo o sistema foi estabelecido. Além disso, foi realizado o projeto de um controlador, com realimentação de estados, tipo regulador quadrático linear, para reduzir as vibrações e as cargas da turbina eólica sob cinco condições típicas de carregamentos eólico e marítimo; e dois métodos de otimização foram combinados

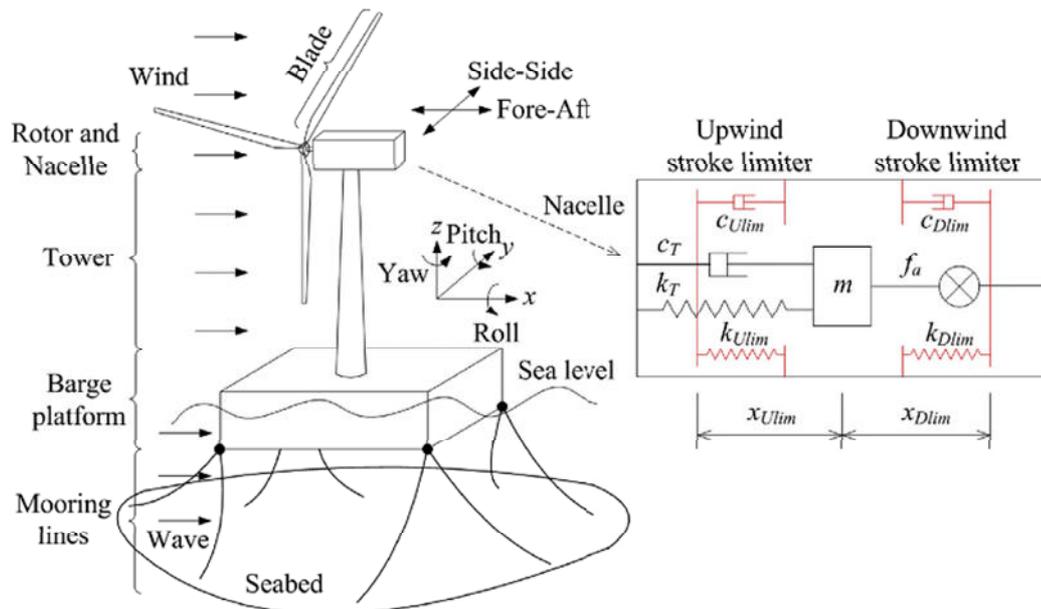
para otimizar os coeficientes de ponderação, quando consideradas as restrições dos parâmetros limites do AMH e o consumo de energia do controle ativo. Os resultados deste estudo mostraram a viabilidade da estratégia de controle ativo implementada e que os controladores projetados poderiam reduzir ainda mais a vibração e as cargas da turbina eólica sob as limitações dos parâmetros do absorvedor (rigidez, amortecimento e deslocamentos limites) e de consumo de energia.

Figura 27 – Diferentes arranjos de AMS investigados (dimensões em m, sem escala).



Fonte: Zuo, Bi e Hao (2017).

Figura 28 – Modelo do aerogerador NREL 5 MW equipado com um AMH.



Fonte: Hu e He (2017).

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentadas as principais referências consultadas que serviram de base para elaboração desta tese, objetivando apresentar uma síntese dos componentes de aerogerador e das características das torres tubulares de aço de suporte. Adicionalmente, foram apresentados os trabalhos relevantes, para a realização desta tese, sobre o projeto e a análise dinâmica destas torres juntamente com o estado da arte do controle de vibrações de aerogeradores. No próximo capítulo, estão descritas as análises de estabilidade elástica da torre.

3 ANÁLISE DA ESTABILIDADE ELÁSTICA DA TORRE

Neste capítulo apresenta-se inicialmente o desenvolvimento da equação diferencial ordinária da torre que foi modelada via método das diferenças finitas para obtenção dos deslocamentos transversais à torre. Em seguida, foi feito o desenvolvimento e a modelagem da torre utilizando elementos finitos de barra, em que, a não linearidade geométrica, foi considerada mediante a matriz de rigidez geométrica consistente. Posteriormente, o projeto do modelo de torre e da sua fundação foi realizado conforme os códigos normativos vigentes. Então, a torre, a fundação e a interação solo-estrutura foram modeladas via método dos elementos finitos com a utilização do *software* ANSYS. A partir desta modelagem, foram feitas as análises de flambagem e não linear geométrica do modelo, obtendo, assim, os modos de instabilidade da torre e seus respectivos deslocamentos de 2ª ordem geométricos. Adicionalmente, fez-se a análise das reações do solo sob a sapata, bem como dos deslocamentos verticais desta, na qual se constatou que ocorre levantamento da sapata em virtude da flexibilidade do sistema fundação-solo, resultando em um incremento no deslocamento transversal total medido no topo da torre. Entretanto, a estabilidade do conjunto foi confirmada. Por fim, é apresentada neste capítulo a distribuição de tensões na torre quando feita a análise de 2ª ordem geométrica, além do detalhamento das ligações entre os flanges dos segmentos de torre.

3.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1.1 Mecânica do Meio Contínuo (MMC)

Para a análise estrutural da torre tubular foram utilizadas as equações do equilíbrio da viga-coluna (Figura 29), considerando um elemento infinitesimal de torre e analisando o equilíbrio de momentos em torno do ponto A, obtém-se:

$$-M - \frac{q(dx)^2}{2} + pp dx \frac{dv}{2} - (V + dV) dx + M + dM - (N + dN)dv = 0 \quad (1)$$

na qual: x é a coordenada ao longo da altura da torre; $M = M(x)$ é a função de momento fletor; $V = V(x)$ é a função de esforço transversal; $N = N(x)$ é a função de esforço axial; $q = q(x)$ é a função de carregamento transversal; $pp = pp(x)$ é a função de carregamento axial; $e, v = v(x)$ é a função de deslocamento transversal da torre.

Simplificando a Eq.(1), resulta:

$$V = \frac{dM}{dx} - N \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

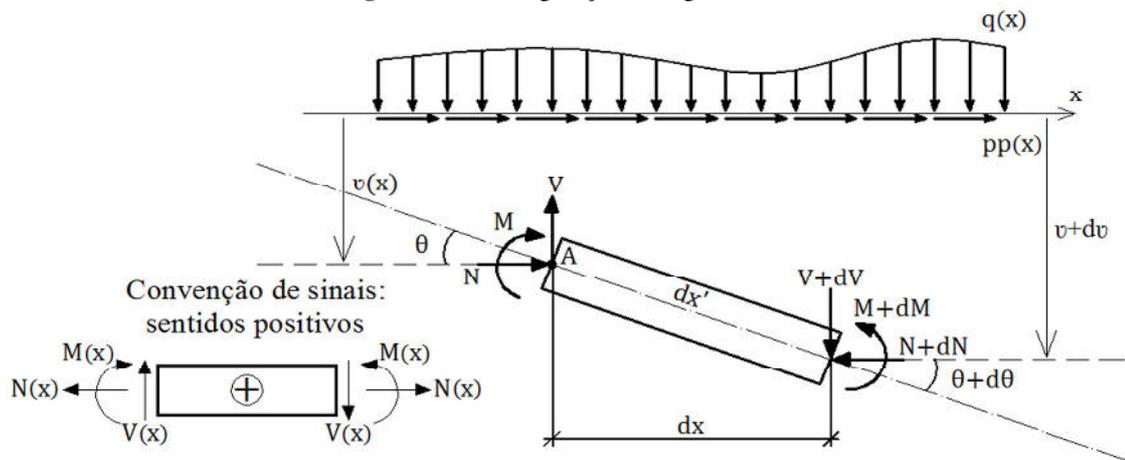
e avaliando o equilíbrio de forças na direção transversal, tem-se:

$$V - q dx - (V + dV) = 0 \quad (3)$$

donde, simplificando, resulta:

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad (4)$$

Figura 29 – Configuração da viga-coluna.



Legenda:

dx é o comprimento do elemento infinitesimal de torre na direção x ;
 dx' é o comprimento do elemento infinitesimal de torre na posição deformada;
 $\theta = \theta(x)$ é a função de inclinação das seções transversais da torre.

Fonte: Autor (2018).

Analisando agora o equilíbrio de forças na direção axial, tem-se:

$$N + pp dx - (N + dN) = 0 \quad (5)$$

ou, ainda, simplificando esta expressão, obtém-se:

$$pp = \frac{dN}{dx} \quad (6)$$

Desprezando as deformações por cisalhamento e considerando a teoria das pequenas deformações, para o trecho de torre, o momento fletor interno $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x)$ é:

$$\mathfrak{M} = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7)$$

na qual: E é o módulo de elasticidade longitudinal do material (considerado constante nesta análise) e $I=I(x)$ é a função de momento de inércia da seção transversal da torre. Então, substituindo a Eq.(7) na Eq.(2), onde se iguala o momento interno ao momento externo:

$$-\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = V + N \frac{dv}{dx} \quad (8)$$

donde, derivando a Eq.(8) e substituindo a Eq.(4) e a Eq.(6) e invertendo o sentido positivo de $pp(x)$ para considerar o módulo do peso próprio da torre, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p p \frac{dv}{dx} + N \frac{d^2 v}{dx^2} = q \quad (9)$$

que é a equação diferencial ordinária da viga-coluna, a qual, expandida, fica:

$$E I \frac{d^4 v}{dx^4} + 2 E \frac{d I}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + N \right) \frac{d^2 v}{dx^2} - p p \frac{dv}{dx} = q \quad (10)$$

Esta equação diferencial ordinária não homogênea, cuja incógnita é a função de deslocamento transversal da torre com seção transversal variável e que considera a influência da carga axial, permite analisar matematicamente a torre engastada na base (análise não linear geométrica). Entretanto, considerando que não se tem uma solução analítica, esta expressão é resolvida via método das diferenças finitas (conforme se apresenta no APÊNDICE A.2). Logo, substituindo as aproximações das diferenças finitas centrais na EDO não homogênea, Eq.(10), e simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{h^4} \left(I_i + \frac{I_{i-1} - I_{i+1}}{2} \right) v_{i-2} + \left(-\frac{6 E I_i}{h^4} + \frac{2 E I_{i+1}}{h^4} + \frac{N_i}{h^2} + \frac{p p_i}{2h} \right) v_{i-1} + \\ & + \left(-\frac{2 E I_{i-1}}{h^4} + \frac{10 E I_i}{h^4} - \frac{2 E I_{i+1}}{h^4} - \frac{2 N_i}{h^2} \right) v_i + \\ & + \left(-\frac{6 E I_i}{h^4} + \frac{2 E I_{i-1}}{h^4} + \frac{N_i}{h^2} - \frac{p p_i}{2h} \right) v_{i+1} + \frac{E}{h^4} \left(I_i + \frac{I_{i+1} - I_{i-1}}{2} \right) v_{i+2} = q_i \end{aligned} \quad (11)$$

a qual é avaliada entre os pontos 1 e n da malha (Figura 30) e h é o comprimento do trecho de torre analisado. Para a resolução de todos os nós da malha, são utilizadas também as condições de contorno essenciais da torre engastada na base:

$$v_0 = 0 \quad (12)$$

$$v'_0 = 0 \Rightarrow v_1 = v_{-1}$$

a condição de contorno natural de momento M_H aplicado ao topo da torre:

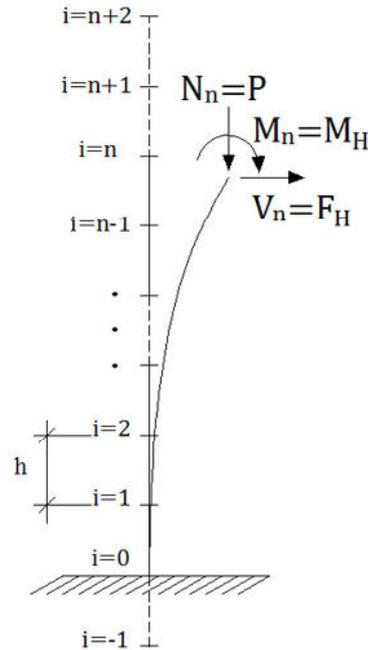
$$\frac{E I_n}{h^4} (v_{n-1} - 2 v_n + v_{n+1}) = \frac{M_H}{h^2} \quad (13)$$

e, ainda, a condição de contorno natural de força transversal F_H (Figura 30) também aplicada ao topo da torre:

$$\begin{aligned} & \frac{E I_n}{2h^4} v_{n-2} + \left(-\frac{E I_{n+1}}{2h^4} + \frac{E I_{n-1}}{2h^4} - \frac{E I_n}{h^4} + \frac{N_i}{2h^2} \right) v_{n-1} + \left(\frac{E I_{n+1}}{h^4} - \frac{E I_{n-1}}{h^4} \right) v_n + \\ & + \left(-\frac{E I_{n+1}}{2h^4} + \frac{E I_{n-1}}{2h^4} + \frac{E I_n}{h^4} - \frac{N_i}{2h^2} \right) v_{n+1} - \frac{E I_n}{h^4} v_{n+2} = \frac{F_H}{h} \end{aligned} \quad (14)$$

O conjunto das Eqs.(11) (para $i = 1, \dots, n$), (12), (13) e (14) resulta em n+4 equações a serem resolvidas para n+4 incógnitas ($v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}$). Para tal, são criadas algumas seções transversais fictícias (antes do engaste e além do topo da torre), as quais permitem completar o sistema requerido.

Figura 30 – Discretização da torre para análise por diferenças finitas.



Fonte: Autor (2018).

3.1.2 Método energético

Uma importante questão para o projeto da torre pauta-se no caso homogêneo da Eq.(10), a partir do qual se pretende obter a carga de flambagem da torre. Um método aproximado fundamenta-se no balanço energia (TIMOSHENKO; GERE, 1963; BAŽANT; CEDOLIN, 1991), logo, uma forma modal polinomial (Figura 31) é considerada, tal que:

$$v(x) = \sum_{j=0}^m A_j x^j \quad (15)$$

na qual, A_j são as constantes da forma modal polinomial. Utilizando-se as condições de contorno essenciais e natural da base da torre, de forma que:

$$v(0) = 0; v'(0) = 0 \quad (16)$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow v'''(0) = 0$$

e, para o topo, as condições de contorno naturais expressas como:

$$v''(L) = 0$$

$$V(L) = 0 \Rightarrow v'''(L) = -\frac{N(L)}{E I(L)} v'(L) = -\frac{P}{E I(L)} v'(L) = -\bar{\alpha}^2 v'(L) \quad (17)$$

e, ainda, uma condição de contorno acessória, no topo, definida mediante:

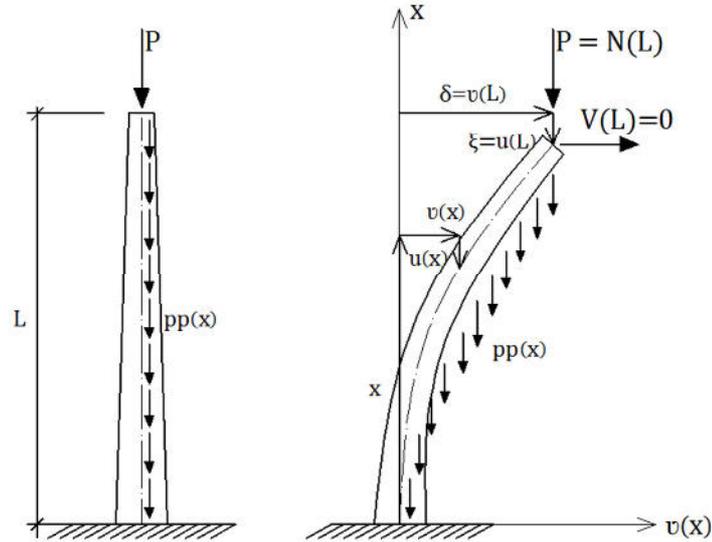
$$v(L) = \delta \quad (18)$$

sendo que, δ representa o deslocamento transversal no topo da torre e L é o comprimento da

estrutura. Então, utilizando até a quinta potência ($m=5$), a 1ª forma modal da torre fica:

$$v(x) = \frac{\delta}{L^2(\bar{\alpha}^2 L^2 - 28)} \left[\left(\frac{10}{3} \bar{\alpha}^2 L^2 - 40 \right) x^2 + \frac{5}{L^2} (4 - \bar{\alpha}^2 L^2) x^4 + \frac{8}{3L^3} (\bar{\alpha}^2 L^2 - 3) x^5 \right] \quad (19)$$

Figura 31 – Forma modal considerada para a torre.



Fonte: Autor (2018).

O trabalho, T_{pp} , realizado pela carga axial distribuída pp ao longo da função de deslocamento axial $u = u(x)$ da torre é dado, aproximadamente, por:

$$T_{pp} = \int_0^L pp(x) \left\{ \int_0^x \frac{[v'(x)]^2}{2} \right\} dx \quad (20)$$

Já o trabalho, T_p , realizado pela força axial concentrada P , aplicada ao topo, ao longo do deslocamento axial $u = u(x)$ da torre é aproximadamente:

$$T_p = \int_0^L P \frac{[v'(x)]^2}{2} dx \quad (21)$$

De outra parte, a energia de deformação oriunda da flexão, U , na qual se desprezam as energias de deformação por cisalhamento e axial, fica:

$$U = \int_0^L \frac{E I(x) [v''(x)]^2}{2} dx \quad (22)$$

Para a avaliação das integrais das Eqs.(20), (21) e (22) são estabelecidos os seguintes vetores contendo as funções relacionadas à variação da seção transversal do tubo da torre ao longo da altura: função de diâmetros $d(x)$, conforme Eq.(23); vetor de funções de áreas de seção transversal $A(x)_i$, conforme Eq.(24); vetor de funções de pesos próprios por unidade de comprimento $pp(x)_i$, conforme Eq.(25); e vetor de funções de momentos de inércia $I(x)_i$, conforme Eq.(26). Tais vetores foram estabelecidos a partir do vetor de espessuras da parede

do tubo esp_i , que considera o processo de fabricação da torre, no qual são utilizadas chapas grossas com espessuras comerciais calandradas para formar o tubo da torre:

$$d(x) = \frac{d_{base}}{L} \left[L - \left(1 - \frac{d_{topo}}{d_{base}} \right) x \right] \quad (23)$$

sendo, d_{base} e d_{topo} os diâmetros médios do tubo na base e no topo;

$$A(x)_i = \pi d(x) esp_i \quad (24)$$

em que, esp_i é o vetor de espessura da parede do tubo da torre avaliado nos níveis i ao longo do comprimento;

$$pp(x)_i = \frac{pp_{base}}{L} \left[L - \left(1 - \frac{d_{topo}}{d_{base}} \right) x \right] \frac{esp_i}{e_{base}} \quad (25)$$

na qual: pp_{base} é o peso próprio por unidade de comprimento na base da torre e e_{base} é a espessura da parede do tubo na base da torre;

$$I(x)_i = \frac{\pi}{64} \{ [d(x) + esp_i]^4 - [d(x) - esp_i]^4 \} \quad (26)$$

Estabelecendo uma relação β entre o peso próprio de uma torre com seção transversal constante da base e a força axial concentrada P aplicada ao topo da torre, tem-se:

$$\beta = \frac{pp_{base} L}{P} \quad (27)$$

substituindo os vetores de funções das Eqs.(23), (24), (25) e (26) na integral da Eq.(22), obtém-se a seguinte expressão para energia de deformação por flexão:

$$U = \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{i \cdot h}^{(i+1) \cdot h} I(x)_i [v''(x)]^2 dx \right] \quad (28)$$

na qual: n é o número de subdivisões escolhido para a torre e h é o comprimento do trecho de torre analisado.

Ademais, utilizando as Eqs.(23), (24), (25), (26) e (27) nas Eqs.(20) e (21), obtém-se a expressão do trabalho realizado por todas as cargas verticais:

$$T = \frac{P}{2} \left\{ \frac{\beta}{L^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{i \cdot h}^{(i+1) \cdot h} \left[L - \left(1 - \frac{d_{topo}}{d_{base}} \right) x \right] \frac{esp_i}{e_{base}} \left[\int_0^x [v'(x)]^2 dx \right] dx \right] + \int_0^L [v'(x)]^2 dx \right\} \quad (29)$$

Finalmente, mediante o princípio de conservação de energia, $T = U$, o quociente de Rayleigh para a carga de flambagem é definido por (conforme é mostrado no APÊNDICE A.1):

$$P_{CR} = \frac{E \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{i \cdot h}^{(i+1) \cdot h} I(x)_i [v''(x)]^2 dx \right]}{\frac{\beta}{L^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{i \cdot h}^{(i+1) \cdot h} \left[L - \left(1 - \frac{d_{topo}}{d_{base}} \right) x \right] \frac{esp_i}{e_{base}} \left[\int_0^x [v'(x)]^2 dx \right] dx \right\} + \int_0^L [v'(x)]^2 dx} \quad (30)$$

3.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA CÓDIGO PRÓPRIO (EF DE BARRA)

3.2.1 Técnica de divisão em elementos finitos

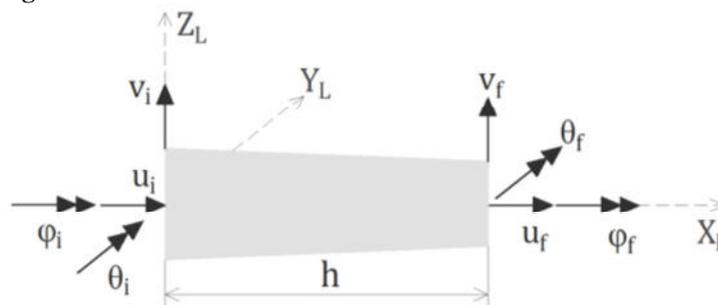
Para discretização da torre será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), que surgiu como uma ferramenta numérica para a solução de problemas de análise na indústria aeroespacial no começo da década de 50 do século passado e, desde então, constitui um dos métodos numéricos mais utilizados e validados para análise de problemas de engenharia (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; COOK et al., 2002). Este método consiste em subdividir o domínio de interesse, de modo que os vértices dos elementos representam os pontos nodais. A partir da obtenção da resposta estrutural nodal, obtêm-se as respostas internas dos elementos por uma superposição de funções especificamente selecionadas para cada caso, ditas funções de formas.

A aproximação é conseguida a partir de um dos princípios físicos como o: Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV); método de Rayleigh-Ritz; método dos resíduos ponderados (com funções de ponderação selecionadas de acordo a estratégia de minimização dos resíduos: método da colocação, método da colocação por sub-regiões, método dos momentos, método das diferenças finitas, método dos mínimos quadrados, método de Galerkin); e, as equações de Lagrange.

3.2.2 Graus de liberdade do elemento finito

Para análise de estabilidade elástica (com não linearidade geométrica) da torre, foi implementado um código próprio no *software* Mathcad 14 (conforme é apresentado no APÊNDICE A.3). A torre foi discretizada utilizando elementos finitos de barra (Figura 32) com 8 graus de liberdade (4 graus de liberdade por nó: translações axiais e transversais, rotação flexional e rotação torcional).

Figura 32 – Graus de liberdade do elemento finito de barra utilizado.



Fonte: Adaptado de Gere e Weaver (1987).

3.2.3 Matriz de rigidez do elemento finito

Considera-se que a torre pode ser representada por uma estrutura plana formada por barras retas, em que cada uma destas pode ser analisada como sendo elasticamente sustentada, de maneira que os esforços podem ser avaliados a partir dos deslocamentos dos extremos. Então, para cada barra define-se um referencial ortogonal orientado de forma que um de seus eixos fique ao longo do eixo da barra, ou seja, um Sistema Local de Coordenadas (SLC). Desta forma, para o elemento finito de barra estabelecido no item anterior, é possível definir 8 graus de liberdade $\{\mathbf{d}\}$ (Figura 32), que se relacionem com 8 reações elásticas $\{\mathbf{R}_e\}$ (Figura 33) no SLC, mediante:

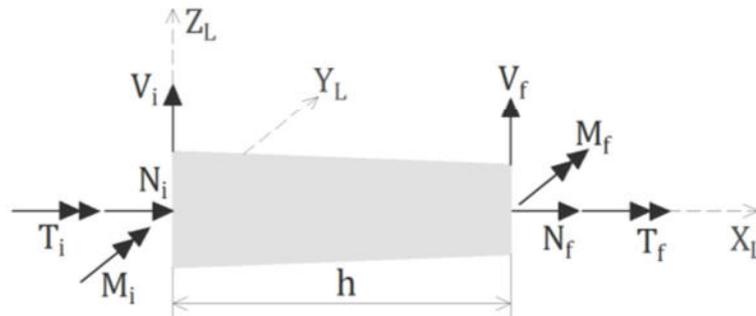
$$\{\mathbf{R}_e\} = [\mathbf{K}_e]\{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_e^F\} \quad (31)$$

na qual: $\{\mathbf{R}_e\}$ é o vetor de reações elásticas; $[\mathbf{K}_e]$ é a matriz de rigidez linear; $\{\mathbf{d}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais; e, $\{\mathbf{R}_e^F\}$ é o vetor de reações de engaste. Na forma expandida, a Eq.(31) fica:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ V_i \\ M_i \\ N_f \\ T_f \\ V_f \\ M_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{s} & 0 & 0 & 0 & -\hat{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -b_i & 0 & 0 & -t & -b_f \\ 0 & 0 & -b_i & k_i & 0 & 0 & b_i & a \\ -r & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{s} & 0 & 0 & 0 & \hat{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & b_i & 0 & 0 & t & b_f \\ 0 & 0 & -b_f & a & 0 & 0 & b_f & k_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ \varphi_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_i^F \\ T_i^F \\ V_i^F \\ M_i^F \\ N_f^F \\ T_f^F \\ V_f^F \\ M_f^F \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Os termos da matriz de rigidez linear podem ser calculados a partir das flexibilidades (considerando a energia de deformação por flexão, por corte, axial e por torção), que são calculadas utilizando o princípio dos trabalhos virtuais (TIMOSHENKO; GERE, 1984).

Figura 33 – Reações elásticas no elemento finito de barra utilizado.



Fonte: Autor (2018).

Define-se também a matriz de rigidez geométrica do elemento finito de barra, de maneira a considerar o efeito da força axial nas deformações da torre, pois a presença das

forças axiais geralmente causa uma redução na rigidez da estrutura, fazendo com que haja um incremento em suas deformações elásticas. A matriz de rigidez geométrica $[\mathbf{K}_{e,g}]$, a partir do princípio dos trabalhos virtuais aplicado à definição do método dos elementos finitos, será definida pela seguinte expressão indicial:

$$(K_{e,g})_{ij} = \int_0^h NN(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad (33)$$

na qual, $NN(x)$ é a função de esforço normal no elemento finito de torre analisado e $\psi_i(x)$ é a i -ésima função de forma, definida por:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - \frac{x}{h} & \psi_3(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 & \psi_4(x) &= -x + 2\frac{x^2}{h} - \frac{x^3}{h^2} \\ \psi_5(x) &= \frac{x}{h} & \psi_7(x) &= 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 & \psi_8(x) &= \frac{x^2}{h} - \frac{x^3}{h^2} \end{aligned} \quad (34)$$

Sendo, entretanto, $(K_{e,g})_{13}, (K_{e,g})_{14}, (K_{e,g})_{17}, (K_{e,g})_{18}$ e seus respectivos simétricos NULOS, pois o caso em que não há interação entre os graus de liberdade axiais e flexionais é considerado. Além disso, neste caso, são utilizadas seis funções de forma, relativas aos graus de liberdade de translações axial e transversal e rotação flexional (elemento finito de pórtico plano); uma vez que, considera-se que os graus de liberdade torcionais da matriz de rigidez linear não são afetados pela não linearidade geométrica; logo, $(K_{e,g})_{2j}$ e $(K_{e,g})_{6j}$ e seus respectivos simétricos são NULOS.

Na forma expandida, a matriz de rigidez geométrica, incluindo os graus de liberdade torcionais (linha e colunas nulas), fica:

$$[\mathbf{K}_{e,g}] = \begin{bmatrix} r_g & 0 & 0 & 0 & -r_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_g & -b_{i,g} & 0 & 0 & -t_g & -b_{f,g} \\ 0 & 0 & -b_{i,g} & k_{i,g} & 0 & 0 & b_{i,g} & a_g \\ -r_g & 0 & 0 & 0 & r_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_g & b_{i,g} & 0 & 0 & t_g & b_{f,g} \\ 0 & 0 & -b_{f,g} & a_g & 0 & 0 & b_{f,g} & k_{f,g} \end{bmatrix} \quad (35)$$

A matriz de rigidez tangencial do elemento finito de barra utilizado $[\mathbf{K}_{e,T}]$ é dada, genericamente, por:

$$[\mathbf{K}_{e,T}] = [\mathbf{K}_e] - [\mathbf{K}_{e,g}] \quad (36)$$

de outra maneira, a matriz de rigidez tangencial na forma expandida fica:

$$[\mathbf{K}_{e,T}] = \begin{bmatrix} r_T & 0 & 0 & 0 & -r_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{s} & 0 & 0 & 0 & -\hat{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_T & -b_{i,T} & 0 & 0 & -t_T & -b_{f,T} \\ 0 & 0 & -b_{i,T} & k_{i,T} & 0 & 0 & b_{i,T} & a_T \\ -r_T & 0 & 0 & 0 & r_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{s} & 0 & 0 & 0 & \hat{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_T & b_{i,T} & 0 & 0 & t_T & b_{f,T} \\ 0 & 0 & -b_{f,T} & a_T & 0 & 0 & b_{f,T} & k_{f,T} \end{bmatrix} \quad (37)$$

em que todos os termos são obtidos subtraindo-se dos elementos da matriz de rigidez linear os elementos da matriz de rigidez geométrica.

3.2.4 Matriz de rigidez global da torre

Para montagem da matriz de rigidez global da torre, utiliza-se um procedimento sistemático para adicionar convenientemente as contribuições de rigidez de cada elemento de barra da torre. Uma forma de se montar a matriz de rigidez global consiste em estabelecer as condições de equilíbrio das ações em cada nó da estrutura, com relação a cada grau de liberdade, devido às reações elásticas dos elementos que concorrem neste nó, bem como as possíveis ações externas aplicadas diretamente aos nós. Cada equação de equilíbrio resulta em uma linha da matriz de rigidez global, que é simétrica e tem o número de linhas e colunas igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Com esta abordagem, deixam-se, automaticamente, fora da matriz, os deslocamentos restringidos pelos apoios. Além disso, nesta metodologia, a numeração dos elementos, nós e graus de liberdade da estrutura é arbitrária, permitindo que a matriz seja formada da forma mais adequada para cada tipo de análise.

A composição da numeração dos graus de liberdade globais da torre (no SGC), bem como a numeração dos nós e dos elementos de barra da torre foi feita progressivamente da base para o topo da torre, de maneira que as linhas da matriz de rigidez global foram escritas do nó mais próximo da base até o nó do topo da torre. Assim, a torre foi subdividida em n elementos finitos de barra e foi analisado o equilíbrio das reações elásticas em todos os nós.

Logo, a expressão de equilíbrio de momentos de flexão é dada por:

$$\begin{aligned} M_f^{(j)} + M_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_T^{(j)} \theta_{j-1} + (k_{f,T}^{(j)} + k_{i,T}^{(j+1)}) \theta_j + a_T^{(j+1)} \theta_{j+1} + b_{f,T}^{(j)} u_{j-1} + \\ + (b_{i,T}^{(j+1)} - b_{f,T}^{(j)}) u_j - b_{i,T}^{(j+1)} u_{j+1} &= -M_i^{F(j+1)} - M_f^{F(j)} \end{aligned} \quad (38)$$

a qual é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$.

A expressão de equilíbrio de forças horizontais é dada por:

$$\begin{aligned}
 V_f^{(j)} + V_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -b_{i,T}^{(j)}\theta_{j-1} + (b_{i,T}^{(j+1)} - b_{f,T}^{(j)})\theta_j + b_{f,T}^{(j+1)}\theta_{j+1} - t_T^{(j)}u_{j-1} + \\
 + (t_T^{(j)} + t_T^{(j+1)})u_j - t_T^{(j+1)}u_{j+1} &= V_i^{F(j+1)} + V_f^{F(j)}
 \end{aligned} \tag{39}$$

também válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$.

A expressão de equilíbrio de forças verticais é dada por:

$$\begin{aligned}
 N_f^{(j)} + N_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -r_T^{(j)}v_{j-1} + (r_T^{(j+1)} + r_T^{(j)})v_j - r_T^{(j+1)}v_{j+1} &= -N_i^{F(j+1)} - N_f^{F(j)}
 \end{aligned} \tag{40}$$

a qual é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$.

A expressão de equilíbrio de momentos de torção é dada por:

$$\begin{aligned}
 T_f^{(j)} + T_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\hat{s}^{(j)}\varphi_{j-1} + (\hat{s}^{(j+1)} + \hat{s}^{(j)})\varphi_j - \hat{s}^{(j+1)}\varphi_{j+1} &= -T_i^{F(j+1)} - T_f^{F(j)}
 \end{aligned} \tag{41}$$

também válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$.

Para o equilíbrio do nó n , as reações elásticas do nó final do último elemento finito de barra e as cargas aplicadas ao topo da torre são utilizadas. As Eqs.(38), (39), (40) e (41) podem ser concatenadas para a forma matricial no SGC da torre, conforme:

$$\{\mathbf{F}_E\} = [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{D}\} \tag{42}$$

na qual: $\{\mathbf{F}_E\}$ é o vetor das forças nodais; $[\mathbf{K}_E]$ é a matriz de rigidez tangencial; e, $\{\mathbf{D}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais.

3.3 PARÂMETROS PARA O PROJETO DO MODELO DA TORRE

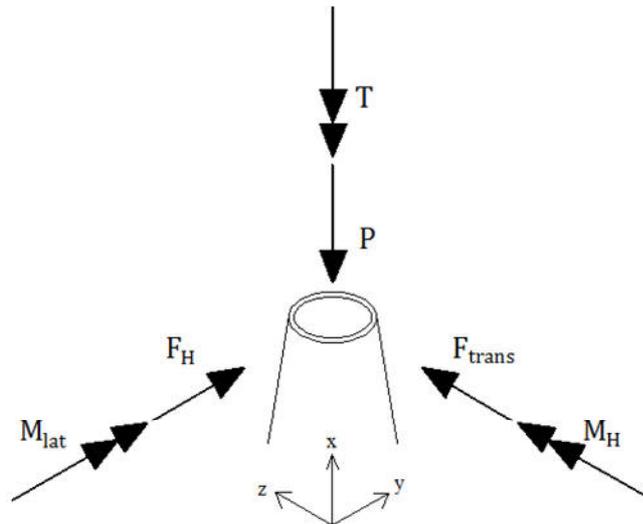
O modelo de torre tubular de aço analisado neste trabalho foi pautado no projeto estático da torre considerando as prescrições das seguintes referências: ABNT NBR 6123 (1988); ABNT NBR 8800 (2008); ABNT NBR 6118 (2014); ABNT NBR IEC 61400-1 (2008); EN 1991-1-4 (2005); EN 1993-3-2 (2006); Burton et al. (2001). Então, uma torre tubular de aço S355J2 foi considerada, segundo as especificações da EN 10025-2 (2004), a qual dá suporte a um aerogerador no padrão SWT-3.2-113 (SIEMENS, 2014), conforme características especificadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados do padrão do aerogerador selecionado.

| TIPO DE PARÂMETRO | |
|--|--------------------------------|
| Classe segundo IEC (<i>International Electrotechnical Commission</i>) | IIA |
| Potência nominal (MW) | 3,2 |
| Diâmetro do rotor (m) | 113,0 |
| Comprimento da pá (m) | 55,0 |
| Área varrida pelo rotor (m ²) | 10000 |
| Altura do cubo do rotor (m) | 79,5 – 142,0 (usou-se 122,5 m) |
| Regulação de potência | Ângulo de passo regulado |
| Energia elétrica produzida anualmente a 8,5 m/s | 14402 MWh |
| Peso da nacele (tf) | 78 |
| Peso do rotor (tf) | 67 |

Fonte: Siemens (2014).

Extrapolando os resultados de forças e momentos transmitidos ao topo da torre (Figura 34), em condições eólicas normais e extremas, estabelecidos por Asibor et al. (2015) que utilizaram o *software GL Bladed* e por Lavassas et al. (2003) que utilizaram dados fornecidos pelo fabricante, obtêm-se os valores de forças e momentos máximos aplicados ao topo da torre, conforme Tabela 2.

Figura 34 – Representação das forças e momentos aplicados ao topo da torre.

Fonte: Autor (2018).

Tabela 2 – Carregamento aplicado ao topo da torre.

| P (N) | F _H (N) | F _{trans} (N) | M _H (N.m) | M _{lat} (N.m) | T (N.m) |
|------------|--------------------|------------------------|----------------------|------------------------|------------|
| 4299033,45 | 662186,43 | 32106,07 | 46644600,79 | 4147943,60 | 1985250,43 |

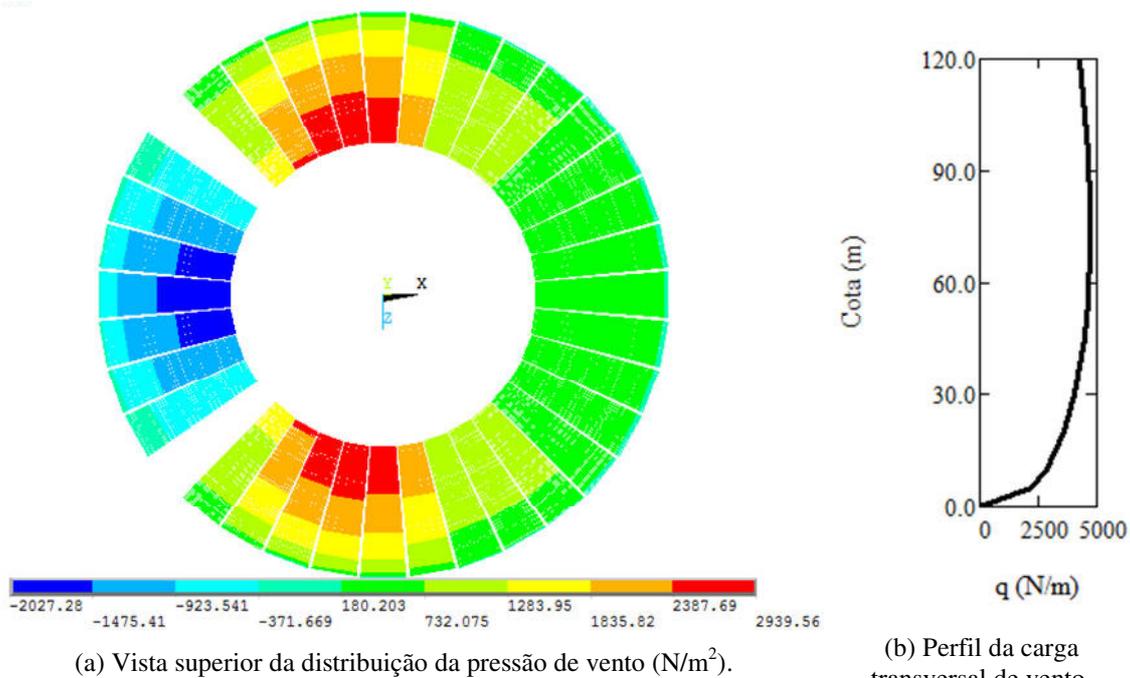
Fonte: Baseado em Asibor et al. (2015).

Além do carregamento aplicado ao topo da torre, utilizam-se as cargas aplicadas ao longo do comprimento da torre, ou seja:

- i. Carga permanente da torre distribuída axialmente;
- ii. Cargas dos equipamentos dispostos ao longo da altura da torre (equipamentos das instalações elétricas a exemplo de: cabos para transmissão de energia elétrica,

- transformador, sistema de climatização, sistema de iluminação, sistema de controle; e, equipamentos de segurança para manutenção tais como: sistema de ascensão/escadas, plataformas intermediárias etc.) também dispostas axialmente;
- iii. Carga de vento variável orientada radialmente (segundo recomendações das normas ABNT NBR 6123, 1988; ABNT NBR IEC 61400-1, 2008; EN 1991-1-4, 2005) e ao longo da altura da torre (Figura 35): utilizando uma velocidade básica de vento igual a 35 m/s (valor máximo desta velocidade para o estado de Pernambuco, onde se idealiza a implantação do parque eólico);
 - iv. Carga lateral distribuída ao longo da altura da torre equivalente ao desaprumo de L/2000 compatível ao processo de fabricação e montagem da mesma.

Figura 35 – Distribuição da ação do vento atuante na torre.



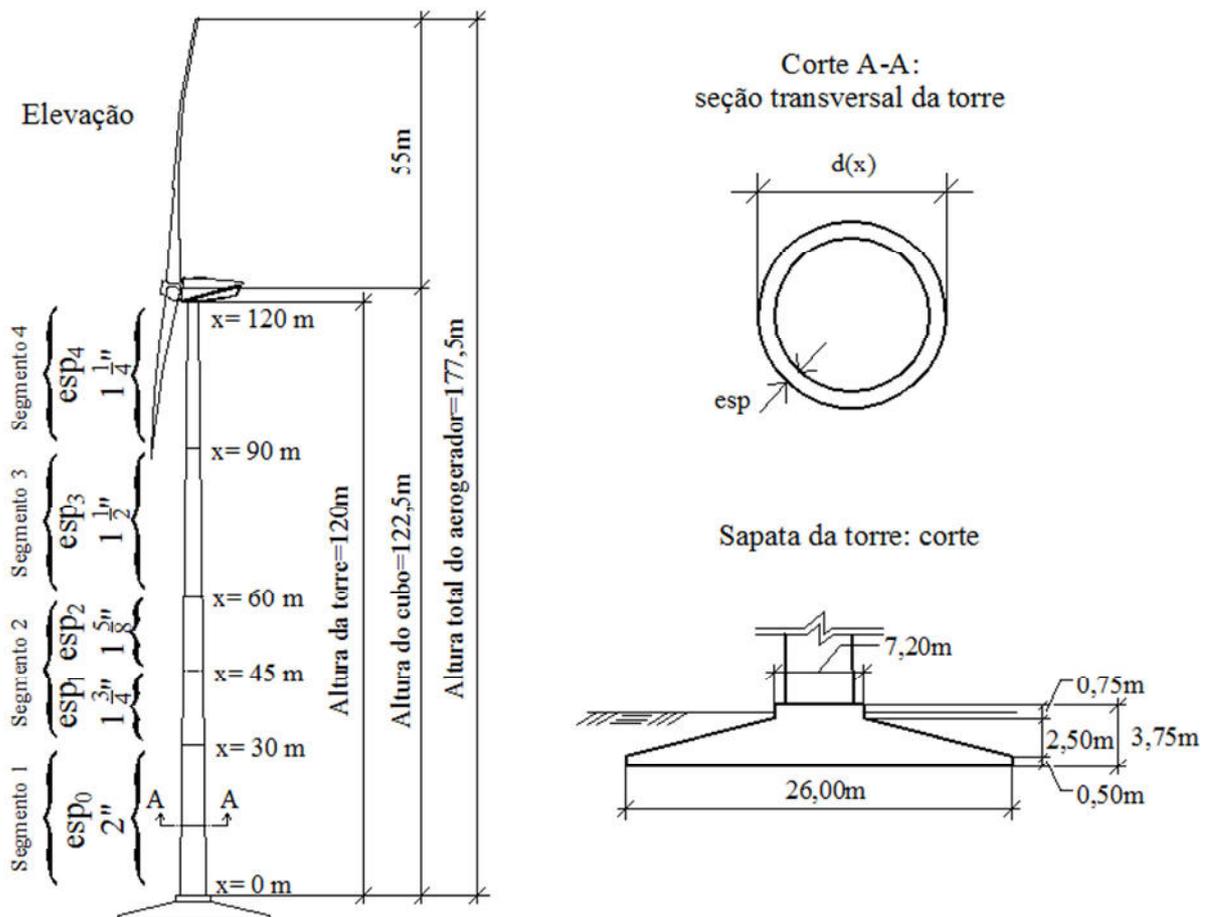
Fonte: Autor (2018).

A fundação da torre tubular consiste em uma sapata circular, de concreto armado com $f_{ck} = 30$ MPa, formada por: um cilindro de 26,0 m de diâmetro e 0,5 m altura apoiado sobre solo; acima deste é disposto um segmento com altura de 2,5 m de formato tronco-cônico no qual o diâmetro varia, ao longo da altura, de 26,0 m a 7,2 m; e, por fim, tem-se um pedestal com diâmetro de 7,2 m e altura de 0,75 m (Figura 36), da qual 0,25 m fica acima do solo por questões de durabilidade (evitar a corrosão do flange basal e do anel de fundação da torre). Para a definição das dimensões da sapata foi utilizada a DNV/Risø (2002), a partir da qual foram analisados o tombamento (critério determinante para o projeto com fator de segurança igual a 2) e o deslizamento da estrutura como um todo, além da análise das tensões atuantes

sob a sapata em comparação com a tensão admissível do solo (conforme exposto no APÊNDICE A.4).

A tensão admissível do solo de assentamento da sapata foi calculada a partir dos métodos teóricos de Meyerhof, Hansen e Vesic´ (BOWLES, 1996), considerando as seguintes propriedades: tipo SW (*sand well graded*) segundo o Sistema Unificado de Classificação, ângulo de atrito interno de 30° e peso específico aparente igual a 19 kN/m^3 . Em seguida, de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014), foram dimensionadas as armaduras longitudinais superiores e inferiores e a armadura transversal; além disto, foram feitas as verificações de punção, abertura de fissuras e ancoragem das barras de reforço (PFEIL, 1989; SUSSEKIND, 1981).

Figura 36 – Esquema do projeto da torre (sem escala).



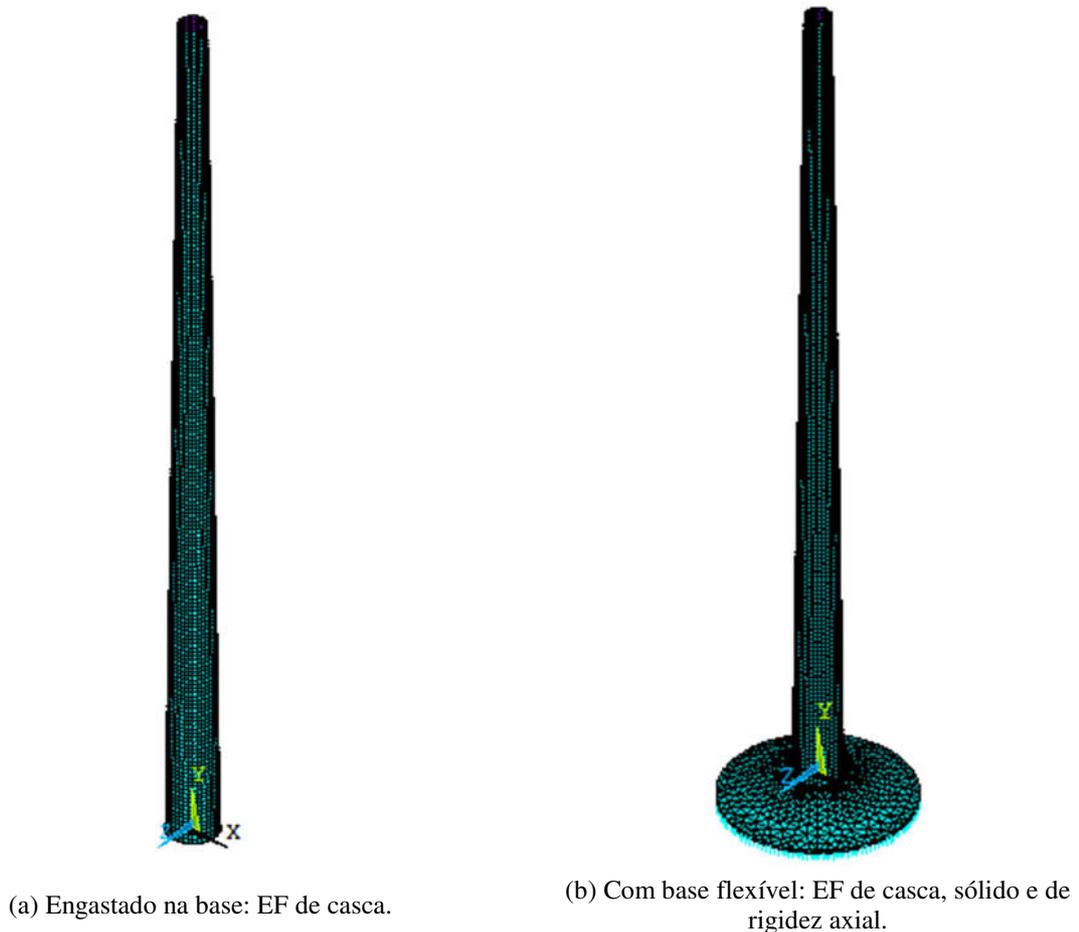
Fonte: Autor (2018).

3.4 MODELAGEM NO SOFTWARE ANSYS

A análise estrutural e o projeto da torre tubular de aço foram elaborados mediante o método dos elementos finitos (MEF), considerando materiais de comportamento elástico

linear, do ponto de vista físico, e não linear, do ponto de vista geométrico. Para este fim, foi criado um modelo de elementos finitos no software ANSYS... (2012) r.14.5, no qual se considerou a torre engastada na base (Figura 37a) com 7272 elementos de casca, designado por SHELL 181 (Figura 38a), com 4 nós e 6 graus de liberdade por nó. A nacele foi modelada com elementos finitos sólidos tetraédricos, designados por SOLID187 (Figura 38b), com 10 nós e 3 graus de liberdade de translação por nó; de forma considerar que a nacele é formada por uma massa uniforme. O motivo que levou à utilização de um modelo em elementos finitos detalhado e outro em elementos de barra, simplificado, portanto, foi a necessidade de avaliar a confiabilidade e a precisão dos resultados numéricos obtidos.

Figura 37 – Configuração dos modelos analisados.

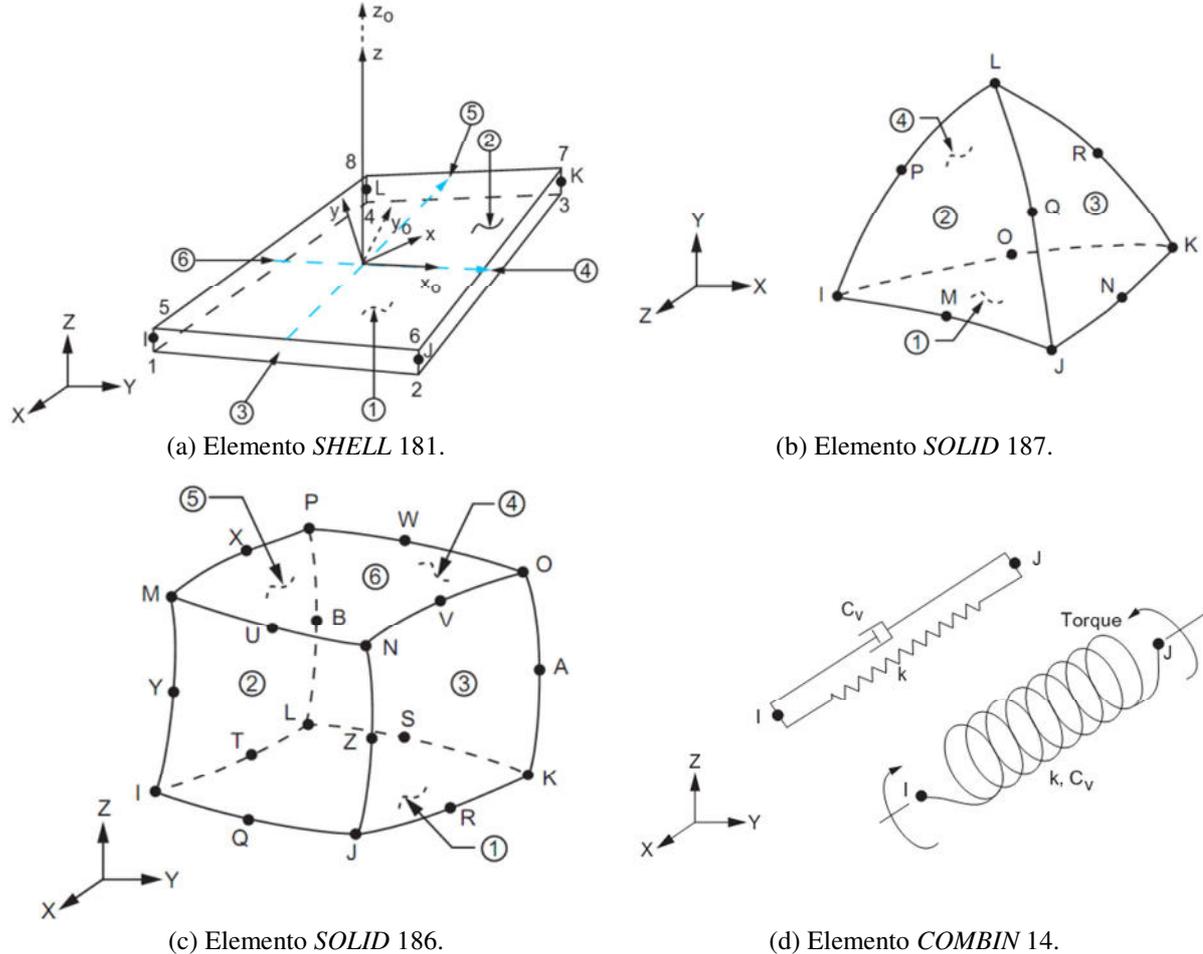


Fonte: Autor (2018).

O modelo com elementos finitos de casca foi complementado simulando-se a torre em conjunto com sua fundação (Figura 37b). Para tal, a sapata foi modelada com 11766 elementos sólidos tetraédricos, designados por SOLID 186 (Figura 38c), com 20 nós e 3 graus de liberdade de translação por nó. Além disto, com o objetivo de avaliar a interação solo-estrutura, a reação elástica do solo foi modelada com 2145 elementos de mola com rigidez axial, colocados na base da sapata e designados por COMBIN 14 (Figura 38d). A rigidez

destes elementos foi avaliada a partir do valor médio do coeficiente de reação vertical, de uma areia com densidade relativa média, proposto por Terzaghi (1955). Assim, o valor do coeficiente reação vertical do solo, que é igual a 45023 kN/m^3 , foi multiplicado pela área de influência de cada nó da base da sapata que está em contato com o terreno.

Figura 38 – Representação geométrica dos elementos finitos utilizados.



Fonte: ANSYS...(2012).

3.5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

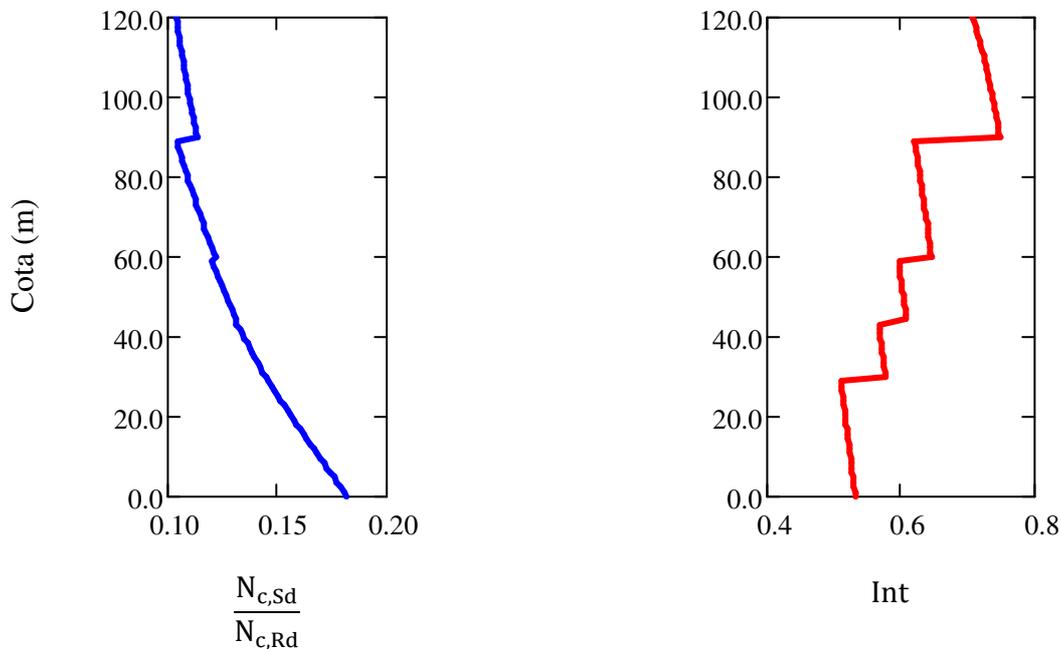
3.5.1 Projeto da torre

Apresentam-se, na Figura 39, as representações gráficas das expressões de interação correspondentes à verificação das seções transversais do modelo de torre projetado, no qual se considera o modelo com elementos finitos de barra para obtenção dos esforços solicitantes de cálculo de 2ª ordem geométrica, sem redução das rigidezes à flexão e axial, uma vez que, a análise realizada é elástica linear (análise física linear). Adicionalmente, observam-se, na Figura 39, os degraus resultantes da mudança brusca de espessura da chapa que forma a torre,

nas cotas de 30, 45, 60 e 90 m. Verifica-se, ainda, um aumento dos valores da expressão de interação (Figura 39b) com a altura da torre, uma vez que se tem uma diminuição dos diâmetros e das espessuras das chapas calandradas em uma proporção maior do que a diminuição dos esforços ao longo da altura. Com relação aos esforços cisalhantes, as seções mais solicitadas apresentaram valores de 4,7% entre esforços solicitantes e resistentes, não sendo, portanto, determinantes para o dimensionamento.

O máximo valor da expressão de interação é de 74,7% (Figura 39b). Ou seja, a seção mais solicitada conta ainda com 25,3% de capacidade resistente. No entanto, neste estudo não foram avaliados critérios referentes às ações dinâmicas, tais como fadiga nos elementos que compõem a torre (chapas, soldas, parafusos).

Figura 39 – Representação das expressões de verificação das seções transversais da torre.



(a) Relação entre os esforços axiais de compressão solicitantes e resistentes.

(b) Expressão de interação para esforços axiais.

Fonte: Autor (2018).

Na Figura 39: $N_{c,Rd}$ é o esforço resistente de cálculo à compressão; $N_{c,Sd}$ é o esforço solicitante de cálculo à compressão; e, Int é dado por:

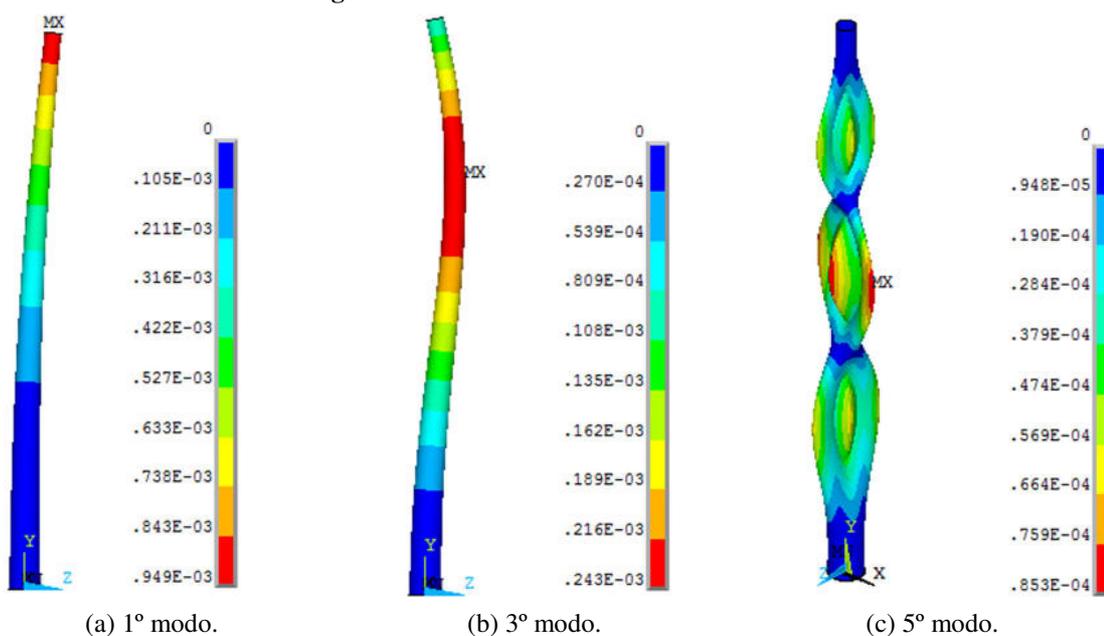
$$\text{Int} = \begin{cases} \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{H,Sd}}{M_{Rd}} + \frac{M_{lat,Sd}}{M_{Rd}} \right) & \text{para } \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} \geq 0,2 \\ \frac{N_{c,Sd}}{2 N_{c,Rd}} + \left(\frac{M_{H,Sd}}{M_{Rd}} + \frac{M_{lat,Sd}}{M_{Rd}} \right) & \text{para } \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} < 0,2 \end{cases} \quad (43)$$

na qual: M_{Rd} é o momento fletor resistente de cálculo; $M_{H,Sd}$ é o momento fletor solicitante de cálculo segundo o eixo z da Figura 34; e, $M_{lat,Sd}$ é o momento fletor solicitante de cálculo segundo o eixo y da Figura 34.

3.5.2 Análise de flambagem da torre

Para o cálculo do esforço resistente à compressão simples utilizou-se o valor de carga de flambagem (autovalor associado à parcela homogênea da equação diferencial (10)), calculado conforme o método energético descrito no item 3.1.2, igual a 99607,4 kN para o modelo engastado na base. Adicionalmente, na Figura 40, mostram-se os modos de instabilidade do modelo de torre engastado na base e discretizado com elementos finitos de casca. O primeiro (Figura 40a) e o segundo modos são referentes aos primeiros modos de flexão nos planos YZ e XY, respectivamente (o eixo Y está posto na vertical no ANSYS). O terceiro (Figura 40b) e o quarto modos referem-se a outros dois modos de flexão nos planos YZ e XY, respectivamente. A partir do quinto modo (Figura 40c) tem-se uma série de modos de flambagem de ovalização do tubo da torre, que não são capturados no modelo com elementos finitos de barra. Estes são modos de flambagem locais acoplados, pois enquanto em um modo de flambagem flexional têm-se deslocamentos segundo um determinado eixo, nos modos de oscilação ovais há deslocamentos em mais de um eixo coordenado; entretanto, o quinto modo tem um autovalor correspondente 6,4 vezes maior que o autovalor fundamental (do 1º modo), o que determina a menor importância destes modos superiores (a partir do quinto) à análise de estabilidade linear da torre.

Figura 40 – Modos de instabilidade da torre.



Fonte: Autor (2018)

3.5.3 Deslocamentos da torre

Verificou-se o estado limite de serviço de deslocamentos máximos no topo da torre, pois é necessário obedecer às limitações de deslocamentos estabelecidas pelos fabricantes dos equipamentos que se encontram na nacele. Além disto, limitam-se os deslocamentos da torre para evitar o contato das pás do aerogerador com a torre de sustentação. Assim, utilizou-se um limite de $L/70$ para o deslocamento no topo da torre, que, neste estudo, é de 1,70 m.

Para os modelos engastados na base, elaborados com elementos finitos de barra (em que se considerou a não linearidade geométrica, mediante a matriz de rigidez geométrica) e via mecânica dos meios contínuos, não houve diferença significativa entre os deslocamentos calculados (Tabela 3). O exemplar engastado na base e modelado com elementos finitos de casca, no software ANSYS, apresentou um deslocamento transversal de 1ª ordem no topo da torre praticamente igual ao dos dois anteriores; além de um deslocamento de 2ª ordem, 1% superior aos outros dois modelos com base engastada. Por fim, o modelo com base flexível apresentou deslocamentos transversais de 1ª ordem e 2ª ordem no topo da torre, pelo menos, 3,6% e 4,0% superiores aos deslocamentos dos modelos com base engastada, respectivamente. Na Tabela 3 apresenta-se, também, a relação entre os deslocamentos transversais de 2ª ordem e de 1ª ordem do topo da torre (susceptibilidade aos efeitos de 2ª ordem ou grau de deslocabilidade da estrutura).

Tabela 3 – Deslocamentos transversais (m) no topo da torre.

| Base engastada | | | | | | Base flexível | |
|--------------------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|--------------------|----------|
| M. M. C | | E. F. barra | | E. F. casca | | E. F. casca-sapata | |
| 1ª ordem | 2ª ordem | 1ª ordem | 2ª ordem | 1ª ordem | 2ª ordem | 1ª ordem | 2ª ordem |
| 1,50669 | 1,59969 | 1,50869 | 1,59930 | 1,50647 | 1,61563 | 1,56309 | 1,68092 |
| Graus de deslocabilidade | | | | | | | |
| 1,06172 | | 1,06006 | | 1,07246 | | 1,07538 | |

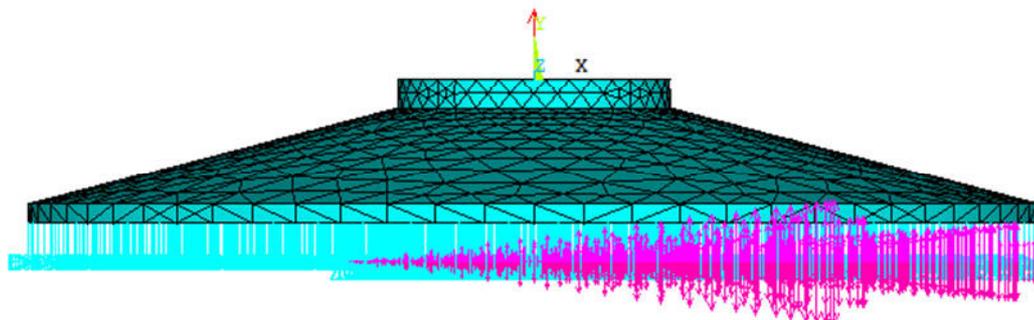
Fonte: Autor (2018).

3.5.4 Análise da sapata

Para a análise da estabilidade não linear geométrica dos deslocamentos transversais à torre tubular de aço em conjunto com a sapata e considerando a interação solo-estrutura, foram verificados, numa primeira etapa da análise, se os elementos finitos de mola que ligam a sapata ao terreno se encontravam tracionados ou comprimidos sob a aplicação das cargas descritas no item 3.3. Em seguida, iterativamente, nas etapas subsequentes, as molas tracionadas foram sendo desativadas até alcançar o equilíbrio da estrutura apoiada sobre o terreno deformável (Figura 41). Observa-se que 538 dos 2145 nós da base da sapata têm as

molas desativadas, desta forma, 25% da área da base da sapata se levanta e fica sem contato com o solo.

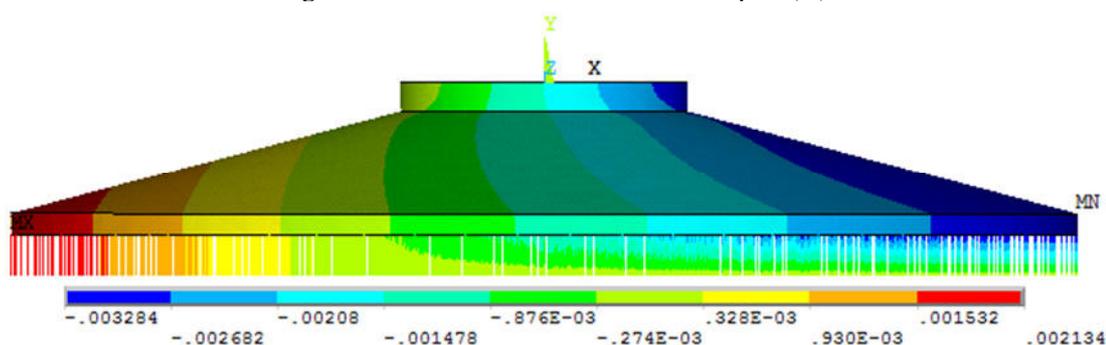
Figura 41 – Representação das reações do solo sobre a sapata.



Fonte: Autor (2018).

Na Figura 42 é exposta uma representação dos deslocamentos verticais da sapata, onde se constata as molas que não estão trabalhando (em vermelho, laranja e amarelo), ou seja, a região onde a sapata se levanta acima do terreno. Observa-se que o deslocamento vertical máximo para baixo, na borda da sapata, é 3,284 mm. Em virtude da flexibilidade do sistema fundação-solo, que resulta em uma rotação de $0,0289^\circ$ da base da torre, o deslocamento transversal do topo da torre é aumentado em 6,529 cm (Tabela 3) quando comparado com o modelo de elemento finito de casca engastado na base. Salienta-se que as deformações obtidas (deslocamentos e rotações) poderiam ser ainda maiores no caso desta fundação estar assente em um solo de menor qualidade, uma vez que, o tipo de solo utilizado neste estudo apresenta excelentes propriedades físicas e mecânicas, compatíveis com a região do agreste de Pernambuco, onde estão em fase de implantação alguns parques eólicos.

Figura 42 – Deslocamentos verticais da sapata (m).



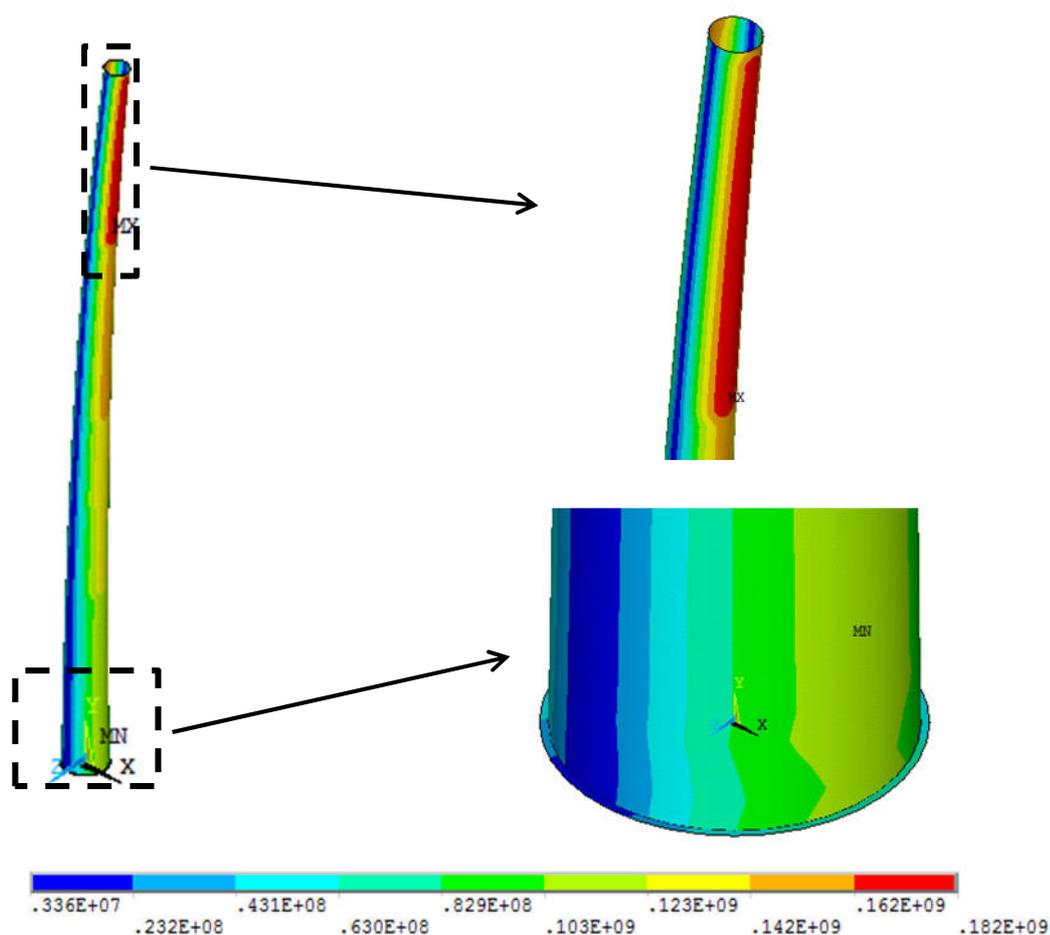
Fonte: Autor (2018).

3.5.5 Distribuição de tensões na torre

Na Figura 43 tem-se a distribuição de *von Mises* para o modelo de torre tubular de aço, no qual são consideradas a interação solo-estrutura e a não linearidade geométrica. A máxima

tensão de *von Mises* obtida (182,22 MPa) encontra-se na junção entre os dois últimos segmentos da torre na cota de 90 m, porém, com valor abaixo da tensão admissível (208,82 MPa) do aço utilizado (S355J2). Neste ponto, justifica-se a utilização do modelo linear para a equação constitutiva do aço. Observa-se que o critério determinante para análise de estabilidade foi a limitação dos deslocamentos máximos transversais no topo da torre. Desta forma, não houve necessidade de empregar modelos de falha, pois nenhum ponto da torre atingiu a tensão admissível do aço.

Figura 43 – Distribuição de tensões de *von Mises* na torre (Pa).



Fonte: Autor (2018).

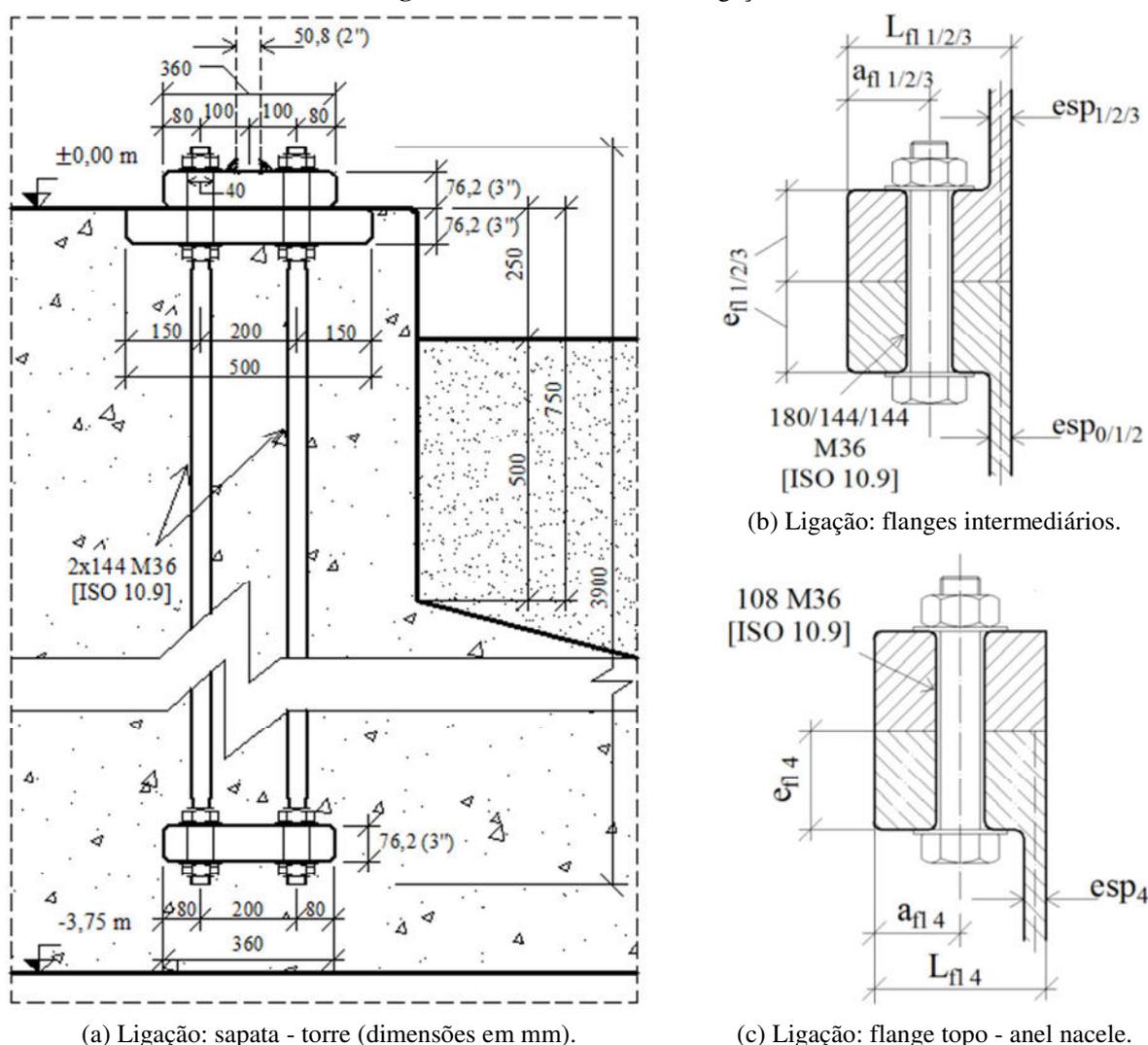
3.5.6 Ligações da torre

Por fim, tem-se o detalhamento das ligações parafusadas da torre, nas quais foram utilizados parafusos M36 (ISO 10.9):

- i. Ligação da sapata com o flange basal (entre a sapata e o segmento 1 da torre): barras de ancoragem, com 2x144 parafusos (Figura 36 e Figura 44a);

- ii. Ligação entre os flanges intermediários 1 (entre os segmentos 1 e 2 da torre): cota de 30 m com 180 parafusos (Figura 36 e Figura 44b);
- iii. Ligação entre os flanges intermediários 2 (entre os segmentos 2 e 3 da torre): cota de 60 m com 144 parafusos (Figura 36 e Figura 44b);
- iv. Ligação entre flanges intermediários 3 (entre os segmentos 3 e 4 da torre): cota de 90 m com 144 parafusos (Figura 36 e Figura 44b); e,
- v. Ligação do flange azimuthal da torre com a cremalheira da nacele (entre o segmento 4 e a nacele): cota de 120 m com 108 parafusos (Figura 36 e Figura 44c).

Figura 44 – Detalhamento das ligações.



Na Figura 44: esp_0 (2"), esp_1 (1 3/4"), esp_2 (1 5/8"), esp_3 (1 1/2") e esp_4 (1 1/4") são as espessuras da parede do tubo da torre; $e_{fl 1}$ (4"), $e_{fl 2}$ (4"), $e_{fl 3}$ (3 1/2") e $e_{fl 4}$ (4") são as espessuras dos flanges intermediários 1, 2 e 3 e do flange azimuthal da torre, respectivamente; $L_{fl 1}$ (28 cm), $L_{fl 2}$ (28 cm), $L_{fl 3}$ (24 cm) e $L_{fl 4}$ (24 cm) são as larguras dos flanges

intermediários 1, 2 e 3 e do flange azimutal da torre, respectivamente; e, $a_{fl\ 1}$ (12 cm), $a_{fl\ 2}$ (12 cm), $a_{fl\ 3}$ (11 cm) e $a_{fl\ 4}$ (11 cm) são as distâncias do eixo do parafuso a borda do flange intermediário 1, 2 e 3 e do flange azimutal da torre, respectivamente.

Os parafusos de alta resistência utilizados nas ligações entre os flanges foram dimensionados considerando ligações por atrito resistentes aos esforços cisalhantes e axiais a serem transmitidos entre os segmentos da torre. Em particular, na base da torre, para a transmissão da carga de tração entre a torre de aço e a sapata de concreto armado, calcularam-se a largura e a espessura do anel de aço embutido na base da sapata, no qual são fixadas as barras de ancoragem. A transmissão da carga de compressão se deu pelo contato entre o flange basal da torre e o anel de aço colocado no topo da sapata, de forma que a torre fica apoiada nas barras de ancoragem que estão contidas lateralmente pelo volume de concreto armado da sapata. No dimensionamento dos anéis da base e do topo da sapata considera-se que a aderência entre as barras de ancoragem (lisas) e o concreto armado da sapata seja nula, assim, a ancoragem é garantida pelo contato dos anéis com o concreto e pela capacidade resistente à flexão destes.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Além das análises de estabilidade feitas neste capítulo, sabe-se da necessidade da caracterização dos parâmetros dinâmicos da torre, uma vez que, este tipo de estrutura fica submetido aos diversos tipos de ações dinâmicas e tais parâmetros são indispensáveis à determinação das respostas dinâmicas da torre. Portanto, a análise dinâmica da torre será apresentada no próximo capítulo desta tese, onde é exposta a caracterização dinâmica dos modelos em EF propostos neste capítulo.

4 CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DA TORRE

Este capítulo tem por objetivo a modelagem dinâmica da torre utilizando elementos finitos de barra (código próprio) e elementos finitos de casca e sólidos (modelagem feita no ANSYS) para obtenção das propriedades dinâmicas. Para tal, apresenta-se uma fundamentação teórica que consiste no desenvolvimento da equação de movimento a partir da equação de Lagrange. Em seguida, mostra-se o método de superposição modal para resolução da equação de movimento matricial e obtenção da resposta dinâmica da torre. Na segunda parte do capítulo, apresenta-se o desenvolvimento para montagem das matrizes de massa e de amortecimento da torre modelada com código próprio em elementos finitos de barra, sendo a matriz de rigidez desenvolvida no capítulo anterior desta tese. Posteriormente, apresentam-se os parâmetros necessários à análise de vibração forçada quando o vetor de forças é harmônico. Na parte de resultados do capítulo, inicialmente, expõem-se as matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento para certo nível de discretização da torre modelada com elementos finitos de barra. Em seguida, foram mostrados os resultados da análise modal feita tanto para o modelo com elementos finitos de casca, com e sem base flexível, quanto para o modelo de elementos finitos de barra; em que se apresentam os modos e as frequências de vibração da torre em todos os modelos. Por fim, foram analisadas as respostas da torre: na direção do fluxo de vento, quando submetida por um vetor de forças ressonantes, com o 1º modo de vibração desta, que representam a parcela flutuante do vento; e, na direção transversal ao fluxo de vento em decorrência do desprendimento cadenciado de vórtices de von Kármán.

4.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1.1 Equação de movimento em elementos finitos

A equação de movimento de uma estrutura pode ser estabelecida a partir da equação de Lagrange, que consiste em um equacionamento formal baseado em princípios energéticos (via cálculo variacional). Para utilização desta equação será considerado que a estrutura foi discretizada, de forma que os deslocamentos da estrutura passam a ser descritos em função dos deslocamentos nodais dos diversos elementos finitos que a compõem.

A equação de Lagrange na forma indicial é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{D}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial D_i} + \frac{\partial (U + \Omega)}{\partial D_i} = F_i + F_{NCi} \quad (44)$$

e na forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{\mathbf{D}}\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{\mathbf{D}\}} + \frac{\partial (U + \Omega)}{\partial \{\mathbf{D}\}} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_{NC}\} \quad (45)$$

nas quais: t é a variável temporal; E_c é o escalar da energia cinética da estrutura; U é o escalar da energia potencial de deformação da estrutura; Ω é o escalar do potencial das forças externas conservativas aplicadas fora dos nós da estrutura; $\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{D}(t)\}$ é o vetor de funções temporais de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura no referencial global de coordenadas; $\{\dot{\mathbf{D}}\} = \{\dot{\mathbf{D}}(t)\}$ é o vetor de funções temporais de velocidades dos graus de liberdade da estrutura no referencial global de coordenadas; $\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$ é o vetor de funções temporais de forças aplicadas nos nós da estrutura no referencial global de coordenadas; e, $\{\mathbf{F}_{NC}\} = \{\mathbf{F}_{NC}(t)\}$ é o vetor de funções temporais de forças não conservativas no referencial global de coordenadas.

Para uma estrutura com comportamento linear físico, a energia cinética E_c é dada por:

$$E_c = \frac{\{\dot{\mathbf{D}}\}^T [\mathbf{M}_E] \{\dot{\mathbf{D}}\}}{2} \quad (46)$$

a energia potencial de deformação U é dada por:

$$U = \frac{\{\mathbf{D}\}^T [\mathbf{K}_E] \{\mathbf{D}\}}{2} \quad (47)$$

e o potencial das forças externas conservativas é:

$$\Omega = \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{R}_E^F\} \quad (48)$$

nas quais: $[\mathbf{M}_E]$ é a matriz de massa consistente da estrutura no referencial global de coordenadas, a qual recebe essa denominação de consistente, uma vez que, as matrizes de massa dos elementos finitos são obtidas utilizando-se as mesmas funções de forma $[\mathbf{N}]$ que geram a matriz de rigidez dos elementos finitos (COOK et al., 2002; HUEBNER et al., 2001; HUMAR, 2002); $[\mathbf{K}_E]$ é a matriz de rigidez tangencial da estrutura no referencial global de coordenadas (conforme Eq.(42), para caso de elementos finitos de barra); e, adicionalmente, $\{\mathbf{R}_E^F\} = \{\mathbf{R}_E^F(t)\}$ é o vetor de funções temporais das reações de extremo fixo da estrutura no referencial global de coordenadas.

Ademais, as forças não conservativas podem ser internas ou externas, ou seja, resultantes da deformação da estrutura (internas) ou de forças diretamente aplicadas (externas). Assim, estabelece-se:

$$\{\mathbf{F}_{NC}\} = \{\mathbf{F}_{NE}\} - [\mathbf{C}_E]\{\dot{\mathbf{D}}\} \quad (49)$$

em que: $\{\mathbf{F}_{NE}\} = \{\mathbf{F}_{NE}(t)\}$ é o vetor de funções temporais das forças não conservativas externas no referencial global de coordenadas; $[\mathbf{C}_E]$ é matriz de amortecimento da estrutura no referencial global de coordenadas, que resulta das forças não conservativas internas à estrutura.

Substituindo as Eqs.(46), (47), (48) e (49) em (45), obtém-se a equação de movimento da estrutura:

$$[\mathbf{M}_E]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{C}_E]\{\dot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}_E]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}_E\} \quad (50)$$

na qual, $\{\mathbf{F}_E\} = \{\mathbf{F}_E(t)\}$ é o vetor de funções temporais das forças nodais da estrutura no referencial global de coordenadas, dado por:

$$\{\mathbf{F}_E\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_{NC}\} - \{\mathbf{R}_E^F\} \quad (51)$$

As matrizes de massa $[\mathbf{M}_e]$, de amortecimento $[\mathbf{C}_e]$ e de rigidez $[\mathbf{K}_e]$ dos elementos finitos, no sistema de referência local, podem ser escritas em função da matriz de funções de forma dos elementos finitos utilizados na discretização da estrutura, conforme:

$$[\mathbf{M}_e] = \int_V [\mathbf{N}]^T \rho [\mathbf{N}] dV ; \quad [\mathbf{C}_e] = \int_V [\mathbf{N}]^T c [\mathbf{N}] dV ; \quad [\mathbf{K}_e] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (52)$$

na qual: V é o volume do elemento finito considerado; ρ é a massa específica do material da estrutura; c é a constante de amortecimento ou o coeficiente de amortecimento viscoso do material do elemento finito em análise; $[\mathbf{N}]$ é a matriz das funções de forma do elemento finito utilizado; $[\mathbf{E}]$ é a matriz da lei constitutiva do material do elemento finito; e, $[\mathbf{B}]$ é chamada de matriz deformação-deslocamento do elemento finito:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{d}][\mathbf{N}] \quad (53)$$

na qual, $[\mathbf{d}]$ é a matriz de derivadas parciais, em relação as coordenadas locais, que relaciona deslocamentos e deformações específicas do elemento finito.

O vetor de reações de extremo fixo $\{\mathbf{R}_e^F\}$ dos elementos finitos, no sistema de referencial local, pode ser escrito em função da matriz de funções de forma dos elementos finitos utilizados na discretização da estrutura, conforme:

$$\{\mathbf{R}_e^F\} = - \sum [\mathbf{N}]_j^T \{\mathbf{P}\}_j - \int_S [\mathbf{N}]^T [\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} dS - \int_V \rho [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\} dV - \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{q}\} dV \quad (54)$$

na qual, as parcelas do lado direito da equação representam: as forças concentradas $\{\mathbf{P}\}_j$; as forças de superfície $[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\}$; as forças de massa de origem gravitacional $\rho \{\mathbf{b}\}$; e as forças de volume adicionais de origem qualquer $\{\mathbf{q}\}$.

As matrizes de massa $[\mathbf{M}_g]$, de amortecimento $[\mathbf{C}_g]$ e de rigidez $[\mathbf{K}_g]$ dos elementos

finitos e os vetores de reações de extremo fixo $\{\mathbf{R}^F\}$, de forças aplicadas nos nós do elemento finito $\{\mathbf{R}\}$ e de forças não conservativas $\{\mathbf{F}_{NC,g}\}$, no sistema de referência global com os graus de liberdade associados aos nós do respectivo elemento finito, podem ser escritos em função da matriz de transformação de coordenadas $[\mathbf{T}_c]$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_g] &= [\mathbf{T}_c][\mathbf{M}_e][\mathbf{T}_c]^T; & [\mathbf{C}_g] &= [\mathbf{T}_c][\mathbf{C}_e][\mathbf{T}_c]^T; & [\mathbf{K}_g] &= [\mathbf{T}_c][\mathbf{K}_e][\mathbf{T}_c]^T \\ \{\mathbf{R}^F\} &= [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{R}_e^F\}; & \{\mathbf{R}\} &= [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{R}_e\}; & \{\mathbf{F}_{NC,g}\} &= [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{F}_{NC,e}\} \end{aligned} \quad (55)$$

nas quais: $\{\mathbf{R}_e\}$ é o vetor de forças aplicadas nos nós do elemento finito considerado no referencial local de coordenadas; e, $\{\mathbf{F}_{NC,e}\}$ é o vetor de forças não conservativas no referencial local de coordenadas. Além disso, pode-se escrever o vetor de forças do elemento finito no referencial global de coordenadas $\{\mathbf{F}_{E,g}\}$, conforme:

$$\{\mathbf{F}_{E,g}\} = [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{R}_e\} + [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{F}_{NC,e}\} - [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{R}_e^F\} = [\mathbf{T}_c]\{\mathbf{F}_{E,e}\} \quad (56)$$

sendo, $\{\mathbf{F}_{E,e}\}$ é o vetor de forças do elemento finito no referencial local de coordenadas.

As matrizes e os vetores da equação de movimento de cada elemento finito são transformados pela matriz de incidência cinemática $[\mathbf{L}]$, que relaciona os graus de liberdade locais e globais. Assim, as matrizes de massa $[\mathbf{M}_p]$, de amortecimento $[\mathbf{C}_p]$ e de rigidez $[\mathbf{K}_p]$ e o vetor de forças $\{\mathbf{F}_{E,p}\}$, no referencial global de coordenadas com todos os graus de liberdade da estrutura, são:

$$[\mathbf{M}_p] = [\mathbf{L}][\mathbf{M}_g][\mathbf{L}]^T; \quad [\mathbf{C}_p] = [\mathbf{L}][\mathbf{C}_g][\mathbf{L}]^T; \quad [\mathbf{K}_p] = [\mathbf{L}][\mathbf{K}_g][\mathbf{L}]^T; \quad \{\mathbf{F}_{E,p}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{E,g}\} \quad (57)$$

Por fim, as matrizes e os vetores da equação de movimento da estrutura são obtidos pelo somatório das parcelas de todos os elementos finitos à estrutura:

$$[\mathbf{M}_E] = \sum_{jj=1}^{n_e} [\mathbf{M}_p]_{jj}; \quad [\mathbf{C}_E] = \sum_{jj=1}^{n_e} [\mathbf{C}_p]_{jj}; \quad [\mathbf{K}_E] = \sum_{jj=1}^{n_e} [\mathbf{K}_p]_{jj}; \quad \{\mathbf{F}_E\} = \sum_{jj=1}^{n_e} \{\mathbf{F}_{E,p}\}_{jj} \quad (58)$$

na qual, o jj -ésimo elemento finito da estrutura varia de 1 a n_e elementos.

4.1.2 Método da superposição modal

Uma forma amplamente utilizada para obter a resposta dinâmica de uma estrutura é feita a partir da superposição das respostas de seus modos de vibração. Para isso, entretanto, é necessário que se consiga desacoplar as equações de movimento, de maneira a reduzir o problema à resolução de n (número de graus de liberdade dinâmicos do problema) equações de movimento com apenas 1 grau de liberdade, que terão suas soluções superpostas.

A aplicação do método da superposição é realizada por meio da seguinte marcha de

cálculo:

1º) Diagonalizar a matriz de massa $[\mathbf{M}_E]$:

Calcula-se a matriz de autoversores $[\boldsymbol{\varphi}]$ da matriz de massa $[\mathbf{M}_E]$ para diagonalizá-la mediante uma transformação linear ortogonal, uma vez que $[\mathbf{M}_E]$ é simétrica:

$$[\mathbf{M}^*] = [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{M}_E] [\boldsymbol{\varphi}] \quad (59)$$

na qual, $[\mathbf{M}^*]$ é a matriz de massa diagonalizada da estrutura, que contém os autovalores de $[\mathbf{M}_E]$. Com esta transformação:

$$\{\mathbf{D}(t)\} = [\boldsymbol{\varphi}] \{\mathbf{D}^*(t)\} \quad (60)$$

a equação matricial de movimento não amortecido passa a ter a seguinte forma:

$$[\mathbf{M}^*] \{\ddot{\mathbf{D}}^*\} + [\mathbf{K}^*] \{\mathbf{D}^*\} = \{\mathbf{F}^*\} \quad (61)$$

a qual está escrita no referencial que diagonaliza a matriz de massa. Sendo:

$$[\mathbf{K}^*] = [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{K}_E] [\boldsymbol{\varphi}] \quad \{\mathbf{F}^*(t)\} = [\boldsymbol{\varphi}]^T \{\mathbf{F}_E(t)\} \quad (62)$$

2º) Calcular a matriz dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$:

$$[\mathbf{DI}] = [\mathbf{M}^*]^{-\frac{1}{2}} [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{K}_E] [\boldsymbol{\varphi}] [\mathbf{M}^*]^{-\frac{1}{2}} \quad (63)$$

a qual é calculada desta maneira de forma a ficar simétrica e reduzir o custo computacional do sistema analisado. Com mais uma transformação:

$$\{\mathbf{D}^*(t)\} = [\mathbf{M}^*]^{-\frac{1}{2}} \{\mathbf{Y}(t)\} \quad (64)$$

a equação matricial de movimento passa a ter a seguinte forma:

$$\{\ddot{\mathbf{Y}}\} + [\mathbf{DI}] \{\mathbf{Y}\} = \{\mathbf{F}^I\} \quad (65)$$

a qual está escrita no referencial que transforma a matriz de massa original em uma matriz identidade $[\mathbf{I}]$ de ordem n. Sendo:

$$\{\mathbf{F}_I(t)\} = [\mathbf{M}^*]^{-\frac{1}{2}} \{\mathbf{F}^*(t)\} \quad (66)$$

3º) Diagonalizar a matriz dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$:

Calcula-se a matriz de autoversores $[\bar{\boldsymbol{\psi}}]$ da matriz de dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$ para diagonalizá-la mediante uma transformação linear ortogonal, uma vez que $[\mathbf{DI}]$ é simétrica:

$$[\boldsymbol{\omega}^2] = [\bar{\boldsymbol{\psi}}]^T [\mathbf{DI}] [\bar{\boldsymbol{\psi}}] \quad (67)$$

na qual, $[\boldsymbol{\omega}^2]$ é uma matriz diagonal que contém as frequências angulares quadradas referentes aos modos de vibração da estrutura (que contém os autovalores de $[\mathbf{DI}]$), obtida a partir da seguinte transformação ortogonal:

$$\{\mathbf{Y}(t)\} = [\bar{\boldsymbol{\psi}}] \{\bar{\mathbf{q}}(t)\} \quad (68)$$

Assim, a matriz $[\boldsymbol{\omega}^2]$ contém a solução do problema padrão de autovalores e autovetores dado

pela Eq.(65). É importante que a matriz de frequências angulares $[\omega^2]$ seja arranjada de maneira a terem-se as frequências organizadas da menor para maior, assim como a matriz de transformação $[\bar{\Psi}]$ seja correspondentemente organizada. Como são calculadas n frequências, é necessário que as frequências menores, que em geral são as mais importantes na contribuição modal, sejam visualizadas prioritariamente.

4º) Calcular a matriz modal ponderada $[\Phi]$:

$$[\Phi] = [\mathbf{M}^*]^{-\frac{1}{2}}[\bar{\Psi}] \quad (69)$$

5º) Calcular o vetor de forças no referencial denominado generalizado, em que a matriz $[\mathbf{DI}]$ fica diagonalizada:

$$\{\bar{\mathbf{F}}\} = [\Phi]^T[\varphi]^T\{\mathbf{F}_E\} \quad (70)$$

6º) Reescrever as equações de movimento (agora desacopladas) no referencial denominado generalizado:

$$\{\ddot{\bar{\mathbf{q}}}\} + [\omega^2]\{\bar{\mathbf{q}}\} = \{\bar{\mathbf{F}}\} \quad (71)$$

ou na forma indicial:

$$\ddot{\bar{q}}_j + \omega_j^2 \bar{q}_j = \bar{F}_j \quad (72)$$

na qual, j é o índice correspondente ao j-ésimo modo de vibração.

7º) Solucionar o conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) considerando-se as condições iniciais do problema em questão:

$$\{\bar{\mathbf{q}}_0\} = [\Phi]^{-1}[\varphi]^{-1}\{\mathbf{D}_0\} \quad \{\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0\} = [\Phi]^{-1}[\varphi]^{-1}\{\dot{\mathbf{D}}_0\} \quad (73)$$

nas quais, $\{\bar{\mathbf{q}}_0\}$ e $\{\mathbf{D}_0\}$ são os vetores de deslocamentos iniciais nos referenciais generalizado e original, respectivamente; e, $\{\dot{\bar{\mathbf{q}}}_0\}$ e $\{\dot{\mathbf{D}}_0\}$ são os vetores de velocidades iniciais nos referenciais generalizado e original, respectivamente.

8º) Calcular a resposta da estrutura:

Após a resolução das EDOs, retorna-se ao referencial original aplicando a combinação modal, conforme:

$$\{\mathbf{D}\} = [\bar{\Phi}]\{\bar{\mathbf{q}}\} \quad (74)$$

Sendo a matriz modal $[\bar{\Phi}]$ dada por:

$$[\bar{\Phi}] = [\varphi][\Phi] \quad (75)$$

em que os modos de vibração são ortogonais entre si.

9º) Calcular a matriz modal normalizada da estrutura:

É necessário normalizar a matriz modal para que toda informação referente aos modos de vibração provenham das funções de tempo $q(t)_j$ que ponderam os modos de vibração.

Logo, as formas modais normalizadas em notação indicial são dadas por:

$$\Phi^0_{ij} = \frac{\bar{\Phi}_{ij}}{\eta^0_j} \quad (76)$$

em que, i representa o i -ésimo grau de liberdade dinâmico e η^0_j o módulo do j -ésimo modo de vibração:

$$\eta^0_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_{ij}^2} \quad (77)$$

assim, a superposição modal é feita em um novo referencial generalizado q_j :

$$q_j = \eta^0_j \bar{q}_j \quad (78)$$

da seguinte forma:

$$\{\mathbf{D}(t)\} = [\Phi^0]\{q(t)\} \quad (79)$$

ou na seguinte forma, em que percebe-se claramente a superposição dos modos para obtenção da resposta da estrutura, de forma de cada modo de vibração tem uma contribuição (ponderação) para resposta total da estrutura:

$$\{\mathbf{D}\} = \sum_{j=1}^n q_j \{\Phi^0\}_j \quad (80)$$

na qual, $\{\Phi^0\}_j$ é o j -ésimo modo de vibração.

10º) Calcular as massas, rigidezes e forças modais:

A matriz de massas modais $[\mathbf{M}^0]$ é uma matriz diagonal obtida por meio de uma transformação ortogonal na matriz de massa da estrutura $[\mathbf{M}_E]$ utilizando a matriz modal normalizada:

$$[\mathbf{M}^0] = [\Phi^0]^T [\mathbf{M}_E] [\Phi^0] \quad (81)$$

de forma semelhante, a matriz de rigidezes modais $[\mathbf{K}^0]$ é dada por:

$$[\mathbf{K}^0] = [\Phi^0]^T [\mathbf{K}_E] [\Phi^0] \quad (82)$$

e o vetor de forças modais é:

$$\{\mathbf{F}^0\} = [\Phi^0]^T \{\mathbf{F}_E\} \quad (83)$$

Em notação indicial, as massas, as rigidezes e as forças modais são:

$$M^0_j = \{\Phi^0\}_j^T [\mathbf{M}_E] \{\Phi^0\}_j \quad K^0_j = \{\Phi^0\}_j^T [\mathbf{K}_E] \{\Phi^0\}_j \quad F^0_j = \{\Phi^0\}_j^T [\mathbf{F}_E] \quad (84)$$

A frequência angular do j -ésimo modo de vibração também pode ser calculada a partir das j -ésimas rigidez e massa modais:

$$\omega_j = \sqrt{\frac{K_j^0}{M_j^0}} \quad (85)$$

Especial importância será dada à determinação das massas, rigidezes e amortecimentos modais para o projeto dos absorvedores de vibração com massas sintonizadas (AMS), que será feito no próximo capítulo desta tese; pois as propriedades modais (massa, rigidez e amortecimento) do j -ésimo modo de vibração, aplicadas a um sistema com 1 grau de liberdade, refletem o comportamento dinâmico da estrutura com a resposta específica deste mesmo modo de vibração j .

4.1.3 Matriz de amortecimento

Em geral, a magnitude das forças de amortecimento é inferior às forças de inércia e de rigidez. Entretanto, é difícil de especificar as forças de fricção desenvolvidas nos componentes estruturais, sendo mais significativo especificar as razões de amortecimento modal para construir a matriz de amortecimento da estrutura (HUMAR, 2002; CLOUGH; PENZIEN, 2003; CHOPRA, 2012). Assim, para que o método da superposição modal possa ser utilizado, a matriz de amortecimento deve atender a condição de ortogonalidade, ou seja, deve ser possível diagonalizar a matriz de amortecimento no mesmo referencial em que as matrizes de massa e de rigidez da estrutura também ficam diagonalizadas. E com isso, continua a ser possível desacoplar as equações de movimento dinâmico da estrutura.

Uma forma classicamente utilizada para considerar o amortecimento é obtida a partir do intitulado amortecimento proporcional ou amortecimento de Rayleigh, conforme:

$$[\mathbf{C}_E] = a_0[\mathbf{M}_E] + a_1[\mathbf{K}_E] \quad (86)$$

na qual, os coeficientes a_0 (em s^{-1} no SI) e a_1 (em s no SI) podem ser determinados a partir de duas razões de amortecimento (ξ_i e ξ_k) relacionadas a duas frequências angulares de vibração distintas (ω_i e ω_k), montando-se o seguinte sistema (no referencial generalizado):

$$\begin{cases} \{\Phi\}_i^T [\mathbf{C}_E] \{\Phi\}_i = a_0 + a_1 \omega_i^2 = 2 \xi_i \omega_i \\ \{\Phi\}_k^T [\mathbf{C}_E] \{\Phi\}_k = a_0 + a_1 \omega_k^2 = 2 \xi_k \omega_k \end{cases} \quad (87)$$

onde, calcula-se os coeficientes por:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & \omega_i \\ \omega_i & \omega_i^2 \\ 1 & \omega_k \\ \omega_k & \omega_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_k \end{Bmatrix} \quad (88)$$

então, com os coeficientes a_0 e a_1 calculados, determina-se a matriz de amortecimento $[\mathbf{C}_E]$ e

todas as demais razões de amortecimento ξ_j do j -ésimo modo de vibração da estrutura. Logo, incluindo a parcela do amortecimento à Eq.(72), obtém-se:

$$\ddot{\bar{q}}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{\bar{q}}_j + \omega_j^2 \bar{q}_j = \bar{F}_j \quad (89)$$

que pode ser resolvida para cada j -ésimo modo de vibração. Assim, após a resolução das EDOs, retorna-se ao referencial original aplicando-se a superposição modal, conforme a Eq.(74). Como foi feito para as massas e rigidezes modais, a matriz de amortecimentos modais $[\mathbf{C}^0]$ é uma matriz diagonal obtida por meio de uma transformação ortogonal na matriz de amortecimento da estrutura $[\mathbf{C}_E]$ utilizando a matriz modal normalizada:

$$[\mathbf{C}^0] = [\mathbf{\Phi}^0]^T [\mathbf{C}_E] [\mathbf{\Phi}^0] \quad (90)$$

ou em notação indicial, os amortecimentos modais são:

$$C^0_j = \{\mathbf{\Phi}^0\}_j^T [\mathbf{C}_E] \{\mathbf{\Phi}^0\}_j \quad (91)$$

Há possibilidade de definir a matriz de amortecimento proporcional de diversas outras formas por meio da combinação linear de matrizes obtidas a partir das matrizes de massa e de rigidez, conforme:

$$[\mathbf{C}_E] = \sum_{kk=0}^{n-1} a_{kk} [\mathbf{M}_E] ([\mathbf{M}_E]^{-1} [\mathbf{K}_E])^{kk} \quad (92)$$

que é o amortecimento de Caughey. Entretanto, esta construção da matriz de amortecimento apresenta algumas limitações importantes (CHOPRA, 2012) e, por isso, não foi utilizada.

4.2 ANÁLISE DINÂMICA VIA CÓDIGO PRÓPRIO (EF DE BARRA)

Foi implementado no *software* Mathcad 14, a exemplo da análise de estabilidade realizada no capítulo 3, os parâmetros dinâmicos (matrizes de massa, de amortecimento, vetor de forças dinâmicas etc.) do modelo de elementos finitos de barra da torre.

4.2.1 Graus de liberdade do elemento finito

Assim como foi estabelecido no capítulo 3, são utilizados elementos finitos de barra com 8 graus de liberdade (4 graus de liberdade por nó: translações axiais e transversais, rotação flexional e rotação torcional) para modelagem dinâmica da torre feita com código próprio (APÊNDICE B). Comenta-se também que as matrizes de rigidez já foram estabelecidas.

4.2.2 Matriz de massa do elemento finito

O equilíbrio dinâmico do elemento finito de barra estabelecido, para o qual tem-se 8 graus de liberdade $\{\mathbf{d}\}$, que se relacionem com 8 reações elásticas $\{\mathbf{R}_e\}$ no SLC, é dado por:

$$\{\mathbf{R}_e\} = [\mathbf{M}_e]\{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{K}_e]\{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_e^F\} \quad (93)$$

A matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$ do elemento finito proposto pode ser genericamente definida por:

$$[\mathbf{M}_e] = \begin{bmatrix} v_i & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & -\gamma_i & 0 & 0 & \sigma & \tau_i \\ 0 & 0 & -\gamma_i & \beta_i & 0 & 0 & -\tau_f & \lambda \\ \eta & 0 & 0 & 0 & v_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & \mu_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau_f & 0 & 0 & \alpha_f & \gamma_f \\ 0 & 0 & \tau_i & \lambda & 0 & 0 & \gamma_f & \beta_f \end{bmatrix} \quad (94)$$

Os termos relacionados aos graus de liberdade **axiais**, na forma indicial, são dados por:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^h \rho A(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (95)$$

na qual, $i = 1 \text{ a } 5$ e $j = 1 \text{ a } 5$; ρ é a massa específica do material; $A(x)$ é a função de área da seção transversal no elemento finito de torre analisado; $\psi_i(x)$ é a i -ésima função de forma definida no item 3.2.3; e, h é o comprimento do EF (trecho de torre) analisado.

Os termos relativos aos graus de liberdade **torcionais**, na forma indicial, são:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^h \rho J_0(x) \psi_{i-1}(x) \psi_{j-1}(x) dx \quad (96)$$

na qual: $i = 2 \text{ a } 6$ e $j = 2 \text{ a } 6$; e, $J_0(x)$ é a função de momento polar de inércia da seção transversal no elemento finito de torre analisado.

Finalmente, os termos referentes aos graus de liberdade **flexionais** são:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^h \rho A(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (97)$$

sendo: $i = 3, 4, 7 \text{ a } 8$ e $j = 3, 4, 7 \text{ a } 8$.

4.2.3 Equilíbrio dinâmico da torre

De forma semelhante ao feito na montagem da matriz de rigidez global da torre, no SGC, o equilíbrio dinâmico da torre pode ser estabelecido pelas condições de equilíbrio das

ações em cada nó da estrutura, com relação a cada grau de liberdade, devido às reações elásticas dos elementos que concorrem neste nó, bem como as possíveis ações externas aplicadas diretamente aos nós.

Assim, a expressão de equilíbrio de momentos de flexão é dada por:

$$\begin{aligned}
 M_f^{(j)} + M_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \lambda^{(j)} \ddot{\theta}_{j-1} + (\beta_f^{(j)} + \beta_i^{(j+1)}) \ddot{\theta}_j + \lambda^{(j+1)} \ddot{\theta}_{j+1} - \tau_i^{(j)} \ddot{u}_{j-1} - (\gamma_i^{(j+1)} + \gamma_f^{(j)}) \ddot{u}_j - \\
 - \tau_f^{(j+1)} \ddot{u}_{j+1} + a_T^{(j)} \theta_{j-1} + (k_{f,T}^{(j)} + k_{i,T}^{(j+1)}) \theta_j + a_T^{(j+1)} \theta_{j+1} + b_{f,T}^{(j)} u_{j-1} + \\
 + (b_{i,T}^{(j+1)} - b_{f,T}^{(j)}) u_j - b_{i,T}^{(j+1)} u_{j+1} &= -M_i^{F(j+1)} - M_f^{F(j)}
 \end{aligned} \tag{98}$$

a qual é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$. Para o nó n , a expressão de equilíbrio de momento de flexão fica:

$$\begin{aligned}
 M_f^{(n)} + I_{nac}^{fl} \ddot{\theta}_n &= M_H(t) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \lambda^{(n)} \ddot{\theta}_{n-1} + (\beta_f^{(n)} + I_{nac}^{fl}) \ddot{\theta}_n - \tau_i^{(n)} \ddot{u}_{n-1} - \gamma_f^{(n)} \ddot{u}_n + \\
 + a_T^{(n)} \theta_{n-1} + k_{f,T}^{(n)} \theta_n + b_{f,T}^{(n)} u_{n-1} - b_{f,T}^{(n)} u_n &= -M_f^{F(n)} + M_H(t)
 \end{aligned} \tag{99}$$

na qual: $M_H(t)$ é a função temporal do momento de flexão aplicado ao topo da torre; I_{nac}^{fl} é o momento de inércia da nacele em relação ao eixo que passa pelo diâmetro da seção transversal de topo da torre (eixo em torno do qual tem-se a rotação θ_n). Considerando-se que a nacele tem formato paralelepípedo e massa específica constante equivalente ρ_{nac} e que suas dimensões horizontal e vertical ao plano de análise são, respectivamente, a_{nac} (12 m) e h_{nac} (5 m), o momento de inércia é dado por:

$$I_{nac}^{fl} = \frac{M_{nac}}{12} (a_{nac}^2 + 4 h_{nac}^2) \tag{100}$$

sendo, M_{nac} a massa da nacele, do rotor e das pás (todos equipamentos locados no topo da torre), tomada igual a 200 t neste trabalho.

A expressão de equilíbrio de forças horizontais fica:

$$\begin{aligned}
 V_f^{(j)} + V_i^{(j+1)} &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\tau_f^{(j)} \ddot{\theta}_{j-1} - (\gamma_i^{(j+1)} + \gamma_f^{(j)}) \ddot{\theta}_j - \tau_i^{(j+1)} \ddot{\theta}_{j+1} + \sigma^{(j)} \ddot{u}_{j-1} + (\alpha_i^{(j+1)} + \alpha_f^{(j)}) \ddot{u}_j + \\
 + \sigma^{(j+1)} \ddot{u}_{j+1} - b_{i,T}^{(j)} \theta_{j-1} + (b_{i,T}^{(j+1)} - b_{f,T}^{(j)}) \theta_j + b_{f,T}^{(j+1)} \theta_{j+1} - t_T^{(j)} u_{j-1} + \\
 + (t_T^{(j)} + t_T^{(j+1)}) u_j - t_T^{(j+1)} u_{j+1} &= V_i^{F(j+1)} + V_f^{F(j)}
 \end{aligned} \tag{101}$$

também válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$. Para o nó n , a expressão de equilíbrio de forças horizontais fica:

$$\begin{aligned}
& -V_f^{(n)} + M_{nac} \ddot{u}_n = F_H(t) \Rightarrow \\
& \Rightarrow -\tau_f^{(n)} \ddot{\theta}_{n-1} - \gamma_f^{(n)} \ddot{\theta}_n + \sigma^{(n)} \ddot{u}_{n-1} + (\alpha_f^{(j)} + M_{nac}) \ddot{u}_n - \\
& -b_{i,T}^{(n)} \theta_{n-1} - b_{f,T}^{(n)} \theta_n - t_T^{(n)} u_{n-1} + t_T^{(n)} u_n = V_f^{F(n)} + F_H(t)
\end{aligned} \tag{102}$$

na qual, $F_H(t)$ é a função temporal da força horizontal aplicada ao topo da torre.

A expressão de equilíbrio de forças verticais é dada por:

$$\begin{aligned}
& N_f^{(j)} + N_i^{(j+1)} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \eta^{(j)} \ddot{v}_{j-1} + (v_f^{(j)} + v_i^{(j+1)}) \ddot{v}_j + \eta^{(j+1)} \ddot{v}_{j+1} - r_T^{(j)} v_{j-1} + (r_T^{(j+1)} + r_T^{(j)}) v_j - \\
& -r_T^{(j+1)} v_{j+1} = -N_i^{F(j+1)} - N_f^{F(j)}
\end{aligned} \tag{103}$$

a qual é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n-1$. Para o nó n , a expressão de equilíbrio de forças verticais fica:

$$\begin{aligned}
& N_f^{(n)} + M_{nac} \ddot{v}_n = P(t) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \eta^{(n)} \ddot{v}_{n-1} + (v_f^{(n)} + M_{nac}) \ddot{v}_n - r_T^{(n)} v_{n-1} + r_T^{(n)} v_n = -N_f^{F(n)} + P(t)
\end{aligned} \tag{104}$$

na qual, $P(t)$ é a função temporal da força vertical aplicada ao topo da torre.

A expressão de equilíbrio de momentos de torção é dada por:

$$\begin{aligned}
& T_f^{(j)} + T_i^{(j+1)} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \delta^{(j)} \ddot{\varphi}_{j-1} + (\mu_f^{(j)} + \mu_i^{(j+1)}) \ddot{\varphi}_j + \delta^{(j+1)} \ddot{\varphi}_{j+1} - \hat{s}^{(j)} \varphi_{j-1} + (\hat{s}^{(j+1)} + \hat{s}^{(j)}) \varphi_j - \\
& -\hat{s}^{(j+1)} \varphi_{j+1} = -T_i^{F(j+1)} - T_f^{F(j)}
\end{aligned} \tag{105}$$

também válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n-1$. Para o nó n , a expressão de equilíbrio de momentos de torção fica:

$$\begin{aligned}
& T_f^{(n)} + I_{nac}^{tr} \ddot{\varphi}_n = T(t) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \delta^{(n)} \ddot{\varphi}_{n-1} + (\mu_f^{(n)} + I_{nac}^{tr}) \ddot{\varphi}_n - \hat{s}^{(n)} \varphi_{n-1} + \hat{s}^{(n)} \varphi_n = -T_f^{F(n)} + T(t)
\end{aligned} \tag{106}$$

na qual, $T(t)$ é a função temporal do momento de torção aplicado ao topo da torre; I_{nac}^{tr} é o momento de inércia da nacele em relação ao eixo vertical da torre (eixo em torno do qual têm-se as rotações φ_j) dado por:

$$I_{nac}^{tr} = \frac{M_{nac}}{12} (a_{nac}^2 + b_{nac}^2) \tag{107}$$

em que, b_{nac} é a largura da nacele (dimensão perpendicular ao plano de análise) igual a 4 m.

As Eqs.(98), (99), (101), (102), (103), (104), (105) e (106) podem ser concatenadas para a forma matricial no SGC da torre, conforme a Eq.(50), sem a parcela de amortecimento,

reescrita abaixo:

$$[\mathbf{M}_E] \{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}_E] \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}_E\} \quad (108)$$

4.2.4 Condensação estática

Em certas análises dinâmicas, não é conveniente considerar todos os graus de liberdade possíveis da estrutura. Neste estudo, por exemplo, para análise dinâmica da torre, se pretende estudar apenas as vibrações laterais. Portanto, para este caso específico, os graus de liberdade de interesse são aqueles que definem o movimento lateral da torre (designados graus de liberdade dinâmicos), podendo ser omitidos da análise os demais graus de liberdade, sem, contudo, deixar de se considerar a influência destes no comportamento global da estrutura. Assim, particionando-se a equação matricial de equilíbrio dinâmico, de maneira a separar os deslocamentos transversais à torre (u_j) dos demais, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{\Delta\Delta}] & [\mathbf{M}_{\Delta u}] \\ [\mathbf{M}_{u\Delta}] & [\mathbf{M}_{uu}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\Delta}\} \\ \{\ddot{u}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\Delta\Delta}] & [\mathbf{K}_{\Delta u}] \\ [\mathbf{K}_{u\Delta}] & [\mathbf{K}_{uu}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_{\Delta}\} \\ \{\mathbf{F}_u\} \end{Bmatrix} \quad (109)$$

em que: $\{\Delta\}$ é o vetor de deslocamentos verticais, de rotações torcionais e de rotações flexionais da torre (ou seja, os graus de liberdade condensados) e $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos horizontais.

Considerando-se que as forças e os momentos inerciais e de amortecimento associados aos deslocamentos axiais e às rotações torcionais e flexionais sejam desprezíveis, a Eq.(109) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}_{uu}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\Delta}\} \\ \{\ddot{u}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{\Delta\Delta}] & [\mathbf{K}_{\Delta u}] \\ [\mathbf{K}_{u\Delta}] & [\mathbf{K}_{uu}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\} \\ \{u\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_{\Delta}\} \\ \{\mathbf{F}_u\} \end{Bmatrix} \quad (110)$$

de onde:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]\{\Delta\} + [\mathbf{K}_{\Delta u}]\{u\} &= \{\mathbf{F}_{\Delta}\} \\ [\mathbf{M}_{uu}]\{\ddot{u}\} + [\mathbf{K}_{u\Delta}]\{\Delta\} + [\mathbf{K}_{uu}]\{u\} &= \{\mathbf{F}_u\} \end{aligned} \quad (111)$$

isolando-se o vetor de deslocamentos $\{\Delta\}$ da primeira:

$$\{\Delta\} = [\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]^{-1}(\{\mathbf{F}_{\Delta}\} - [\mathbf{K}_{\Delta u}]\{u\}) \quad (112)$$

e substituindo-se esta na segunda das Eqs.(111), obtém-se:

$$[\mathbf{M}_{uu}]\{\ddot{u}\} + ([\mathbf{K}_{uu}] - [\mathbf{K}_{u\Delta}][\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]^{-1}[\mathbf{K}_{\Delta u}])\{u\} = \{\mathbf{F}_u\} - [\mathbf{K}_{u\Delta}][\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]^{-1}\{\mathbf{F}_{\Delta}\} \quad (113)$$

a partir da qual define-se a matriz de rigidez global condensada $[\bar{\mathbf{K}}_u]$ (CLOUGH; PENZIEN, 2003; CHOPRA, 2012):

$$[\bar{\mathbf{K}}_u] = [\mathbf{K}_{uu}] - [\mathbf{K}_{u\Delta}][\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]^{-1}[\mathbf{K}_{\Delta u}] \quad (114)$$

e o vetor de forças transversais à torre condensado $\{\bar{\mathbf{F}}_u\}$:

$$\{\bar{\mathbf{F}}_u\} = \{\mathbf{F}_u\} - [\mathbf{K}_{u\Delta}][\mathbf{K}_{\Delta\Delta}]^{-1}\{\mathbf{F}_\Delta\} \quad (115)$$

Logo, a equação de equilíbrio dinâmico condensada fica:

$$[\mathbf{M}_{uu}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\bar{\mathbf{K}}_u]\{\mathbf{u}\} = \{\bar{\mathbf{F}}_u\} \quad (116)$$

Por fim, incorporam-se as forças de amortecimento, utilizando-se as matrizes de massa $[\mathbf{M}_{uu}]$ e de rigidez $[\bar{\mathbf{K}}_u]$ e o conceito de amortecimento proporcional, tem-se:

$$[\mathbf{M}_{uu}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\bar{\mathbf{C}}_u]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\bar{\mathbf{K}}_u]\{\mathbf{u}\} = \{\bar{\mathbf{F}}_u\} \quad (117)$$

4.3 PARÂMETROS DE VIBRAÇÃO FORÇADA

4.3.1 Excitação harmônica permanente

A obtenção da resposta dinâmica da torre, submetida a forças harmônicas aplicadas aos seus nós de discretização, será feita utilizando o princípio da superposição modal. No referencial generalizado (no qual as equações de movimento ficam desacopladas), tem-se a seguinte equação de movimento indicial:

$$\ddot{\bar{q}}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{\bar{q}}_j + \omega_j^2 \bar{q}_j = \bar{F}_j \quad (118)$$

na qual, o vetor de forças no referencial generalizado tem a seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{F}}_j = \bar{\Phi}_{jk} \left(\sum_{k=1}^p F_{1k} \cos(\bar{\omega}_k t) + \sum_{k=1}^p F_{2k} \sin(\bar{\omega}_k t) \right) \quad (119)$$

pois, no referencial original, o vetor de forças harmônicas, em notação indicial, é dado por:

$$\bar{F}_{u_k} = F_{1k} \cos(\bar{\omega}_k t) + F_{2k} \sin(\bar{\omega}_k t) \quad (120)$$

uma vez que, mediante a transformação de coordenadas do referencial original da estrutura para o referencial generalizado, passa-se a ter um somatório de forças harmônicas neste último sistema de referência. Sendo p o número de forças aplicadas em todos os nós da torre.

A solução da EDO da Eq.(118) é composta por uma solução homogênea e por uma solução particular. A solução homogênea \bar{q}_{hj} apresenta a seguinte forma indicial:

$$\bar{q}_{hj} = e^{-\xi_j \omega_j t} \left(A_j \cos(\omega_{dj} t) + B_j \sin(\omega_{dj} t) \right) \quad (121)$$

na qual: A_j e B_j são vetores de constantes a serem determinadas pelas condições iniciais \bar{q}_{0j} e $\dot{\bar{q}}_{0j}$ do problema em questão; ω_{dj} é o vetor de frequências angulares amortecidas com amortecimento subcrítico ($\xi_j < 1$), dado por:

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j} \quad (122)$$

Já a solução particular, pode ser escrita como:

$$\bar{q}_{pj} = \sum_{k=1}^p C_{jk} \cos(\bar{\omega}_k t) + \sum_{k=1}^p D_{jk} \sin(\bar{\omega}_k t) \quad (123)$$

na qual, C_{jk} e D_{jk} são constantes arranjadas em uma matriz com j linhas (j -ésimo grau de liberdade no referencial generalizado) e k colunas (numero de forças aplicadas ao GL j), que podem ser determinadas mediante substituição das primeira e segunda derivadas temporais de \bar{q}_{pj} na Eq.(118), conforme:

$$C_{jk} = \bar{\Phi}_{jk} \frac{(1 - \beta_k^2)F_{1k} - 2 \xi_j \beta_k F_{2k}}{\omega_j^2 [(1 - \beta_k^2)^2 + (2 \xi_j \beta_k)^2]} \quad D_{jk} = \bar{\Phi}_{jk} \frac{2 \xi_j \beta_k F_{1k} + (1 - \beta_k^2)F_{2k}}{\omega_j^2 [(1 - \beta_k^2)^2 + (2 \xi_j \beta_k)^2]} \quad (124)$$

em que, β_k estabelece a razão entre a frequência da excitação $\bar{\omega}_k$ e a correspondente frequência natural ω_j , segundo:

$$\beta_k = \frac{\bar{\omega}_k}{\omega_j} \quad (125)$$

Aplicando-se os vetores com as condições iniciais, $\bar{q}_j(0) = \bar{q}_{0j}$ e $\dot{\bar{q}}_j(0) = \dot{\bar{q}}_{0j}$, na solução completa (homogênea e particular) da Eq.(118), obtêm-se os vetores de constantes:

$$A_j = \bar{q}_{0j} - \sum_{k=1}^p C_{jk} \quad B_j = \frac{1}{\omega_{dj}} \left(\dot{\bar{q}}_{0j} + \xi_j \omega_j \bar{q}_{0j} - \xi_j \omega_j \sum_{k=1}^p C_{jk} - \sum_{k=1}^p D_{jk} \bar{\omega}_k \right) \quad (126)$$

Portanto, a solução completa da Eq.(118) fica:

$$\begin{aligned} \bar{q}_j(t) = & e^{-\xi_j \omega_j t} \left[\bar{q}_{0j} \cos(\omega_{dj} t) + \frac{\dot{\bar{q}}_{0j} + \xi_j \omega_j \bar{q}_{0j}}{\omega_{dj}} \sin(\omega_{dj} t) \right] - \\ & - e^{-\xi_j \omega_j t} \left[\left(\sum_{k=1}^p C_{jk} \right) \cos(\omega_{dj} t) + \left(\xi_j \omega_j \sum_{k=1}^p C_{jk} + \sum_{k=1}^p D_{jk} \bar{\omega}_k \right) \frac{\sin(\omega_{dj} t)}{\omega_{dj}} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^p C_{jk} \cos(\bar{\omega}_k t) + \sum_{k=1}^p D_{jk} \sin(\bar{\omega}_k t) \end{aligned} \quad (127)$$

na qual, pode ser entendida/dividida em três parcelas: **1ª**) parcela multiplicada pela exponencial que reduz a resposta com o tempo, a qual refere-se a vibração livre amortecida da estrutura; **2ª**) parcela também multiplicada pela exponencial, a qual refere-se a resposta transiente da vibração forçada amortecida; **3ª**) parcela referente a resposta permanente (estacionária) da vibração forçada.

Superpondo-se as soluções $\bar{q}_j(t)$, obtém-se a resposta dos deslocamentos horizontais à torre no referencial original:

$$u_i = \sum_{j=1}^n \bar{\Phi}_{ij} \bar{q}_j \quad (128)$$

sendo n o número de graus de liberdade dinâmicos.

Os vetores de velocidades e de acelerações podem ser determinados pela primeira e pela segunda derivadas temporais do vetor de deslocamentos horizontais da Eq.(128), respectivamente.

4.3.2 Excitação harmônica transiente

Outro desenvolvimento importante consiste na análise da resposta dinâmica da torre quando a excitação atua durante um intervalo de tempo e depois cessa. A resposta durante a aplicação das forças é obtida por meio das equações desenvolvidas no item anterior; entretanto, a resposta em vibração livre amortecida (após cessar a excitação) é formulada considerando-se as condições iniciais resultantes do instante em que o carregamento cessa.

A solução da EDO de movimento, a partir do instante t_F em que o vetor de forças se anula, apresenta a seguinte forma indicial:

$$\bar{q}_{h,tF_j} = e^{-\xi_j \omega_j t} \left(\bar{A}_j c\mathbb{L}s(\omega_{d_j} t) + \bar{B}_j \text{sen}(\omega_{d_j} t) \right) \quad (129)$$

na qual: \bar{A}_j e \bar{B}_j são vetores de constantes a serem determinadas pelas condições iniciais $\bar{q}_{h,tF_j}(t_F) = \bar{q}_{tF_j}$ e $\dot{\bar{q}}_{h,tF_j}(t_F) = \dot{\bar{q}}_{tF_j}$, que são os vetores de deslocamentos e velocidades no instante t_F , conforme:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= \frac{\bar{q}_{tF_j} e^{\xi_j \omega_j t_F}}{c\mathbb{L}s(\omega_{d_j} t_F)} - \left[\frac{\dot{\bar{q}}_{tF_j} + \bar{q}_{tF_j} (\omega_{d_j} \tan(\omega_{d_j} t_F) + \xi_j \omega_j)}{\omega_{d_j} e^{-\xi_j \omega_j t_F}} \right] \text{sen}(\omega_{d_j} t_F) \\ \bar{B}_j &= \left[\frac{\dot{\bar{q}}_{tF_j} + \bar{q}_{tF_j} (\omega_{d_j} \tan(\omega_{d_j} t_F) + \xi_j \omega_j)}{\omega_{d_j} e^{-\xi_j \omega_j t_F}} \right] c\mathbb{L}s(\omega_{d_j} t_F) \end{aligned} \quad (130)$$

Mais uma vez, os vetores de velocidades e de acelerações podem ser determinados pela primeira e pela segunda derivadas temporais do vetor de deslocamentos horizontais da Eq.(129), respectivamente.

4.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.4.1 Obtenção das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da torre

Para obter as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo de torre, projetado no capítulo anterior, é necessário estabelecer o número de elementos finitos a ser discretizada a torre. Devido à extensão das matrizes, só serão apresentadas abaixo as matrizes condensadas aos graus de liberdade dinâmicos (deslocamentos transversais à torre) com $n = 8$ (número de EF da torre), conforme Eqs.(131), (132) e (133):

$$[\bar{\mathbf{K}}_u] = \begin{pmatrix} 2.47 \times 10^5 & -1.31 \times 10^5 & 3.47 \times 10^4 & -2.9 \times 10^3 & 286.01 & -32.79 & 3.88 & -0.42 \\ -1.31 \times 10^5 & 1.69 \times 10^5 & -1.04 \times 10^5 & 2.84 \times 10^4 & -2.8 \times 10^3 & 321.11 & -38.01 & 4.08 \\ 3.47 \times 10^4 & -1.04 \times 10^5 & 1.33 \times 10^5 & -8.22 \times 10^4 & 2.33 \times 10^4 & -2.67 \times 10^3 & 316.65 & -34.02 \\ -2.9 \times 10^3 & 2.84 \times 10^4 & -8.22 \times 10^4 & 1.05 \times 10^5 & -6.58 \times 10^4 & 1.92 \times 10^4 & -2.27 \times 10^3 & 243.56 \\ 286.01 & -2.8 \times 10^3 & 2.33 \times 10^4 & -6.58 \times 10^4 & 8.29 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 1.46 \times 10^4 & -1.56 \times 10^3 \\ -32.79 & 321.11 & -2.67 \times 10^3 & 1.92 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 6.22 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 8.49 \times 10^3 \\ 3.88 & -38.01 & 316.65 & -2.27 \times 10^3 & 1.46 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 3.7 \times 10^4 & -1.31 \times 10^4 \\ -0.42 & 4.08 & -34.02 & 243.56 & -1.56 \times 10^3 & 8.49 \times 10^3 & -1.31 \times 10^4 & 5.94 \times 10^3 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \quad (131)$$

em unidades do SI.

$$[\mathbf{M}_{uu}] = \begin{pmatrix} 89.779 & 15.063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15.063 & 79.094 & 12.348 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.348 & 66.515 & 10.693 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.693 & 57.297 & 9.157 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.157 & 50.844 & 8.443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.443 & 42.908 & 6.441 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.441 & 35.499 & 5.847 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.847 & 226.428 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \quad (132)$$

em unidade do SI.

$$[\bar{\mathbf{C}}_u] = \begin{pmatrix} 358.43 & -188.45 & 49.97 & -4.18 & 0.41 & -0.05 & 5.59 \times 10^{-3} & -6.01 \times 10^{-4} \\ -188.45 & 245.74 & -149.62 & 40.89 & -4.04 & 0.46 & -0.05 & 5.89 \times 10^{-3} \\ 49.97 & -149.62 & 194.18 & -118.2 & 33.62 & -3.85 & 0.46 & -0.05 \\ -4.18 & 40.89 & -118.2 & 153.28 & -94.53 & 27.6 & -3.27 & 0.35 \\ 0.41 & -4.04 & 33.62 & -94.53 & 121 & -73.15 & 20.99 & -2.26 \\ -0.05 & 0.46 & -3.85 & 27.6 & -73.15 & 90.88 & -52.42 & 12.24 \\ 5.59 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.46 & -3.27 & 20.99 & -52.42 & 54.38 & -18.68 \\ -6.01 \times 10^{-4} & 5.89 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.35 & -2.26 & 12.24 & -18.68 & 15.22 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \quad (133)$$

em unidades do SI. Para montagem da matriz de amortecimento foi considerado uma razão de amortecimento ξ igual a 0,008 (conforme indicações de ABNT NBR 6123, 1988;

BLEVINS, 2001) para o modo fundamental e para o quinto modo de vibração, que é considerado como o modo mais alto que contribui significativamente para a resposta da torre. Assim, as constantes a_0 e a_1 do amortecimento de Rayleigh resultam iguais a $2,940 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ e $1,441 \times 10^{-4} \text{ s}$, respectivamente.

4.4.2 Análise modal da torre

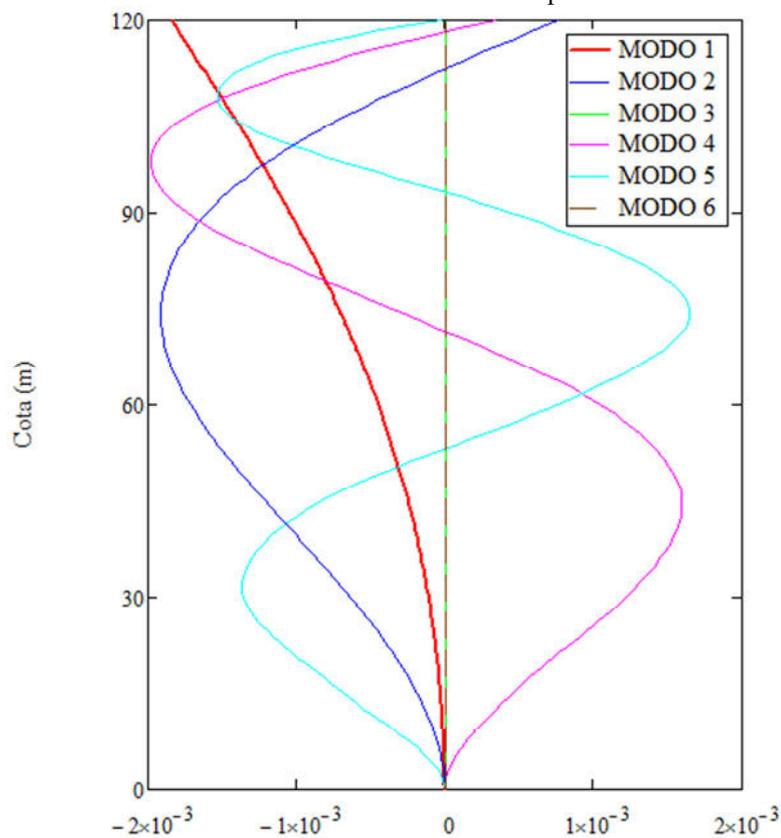
Partindo das matrizes de massa $[\mathbf{M}_E]$ e de rigidez $[\mathbf{K}_E]$ com $n = 16$ e resolvendo o problema de autovalores e de autovetores, inerente à questão da vibração livre, obtêm-se as frequências naturais e os respectivos modos de vibração não amortecidos da torre (Tabela 4 e Figura 45).

Tabela 4 – Dados de vibração livre da torre.

| Ordem | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª |
|----------------------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Natureza | Flexão | Flexão | Torção | Flexão | Flexão | Torção |
| Frequência (Hz) | 0,29745 | 1,72847 | 3,98035 | 4,52973 | 8,05650 | 8,75028 |
| Período (s) | 3,36187 | 0,57855 | 0,25123 | 0,22076 | 0,12412 | 0,11428 |
| Frequência angular (rad/s) | 1,86896 | 10,86030 | 25,00930 | 28,46116 | 50,62049 | 54,97963 |

Fonte: Autor (2018).

Figura 45 – Deslocamentos transversais à torre dos cinco primeiros modos de vibração.



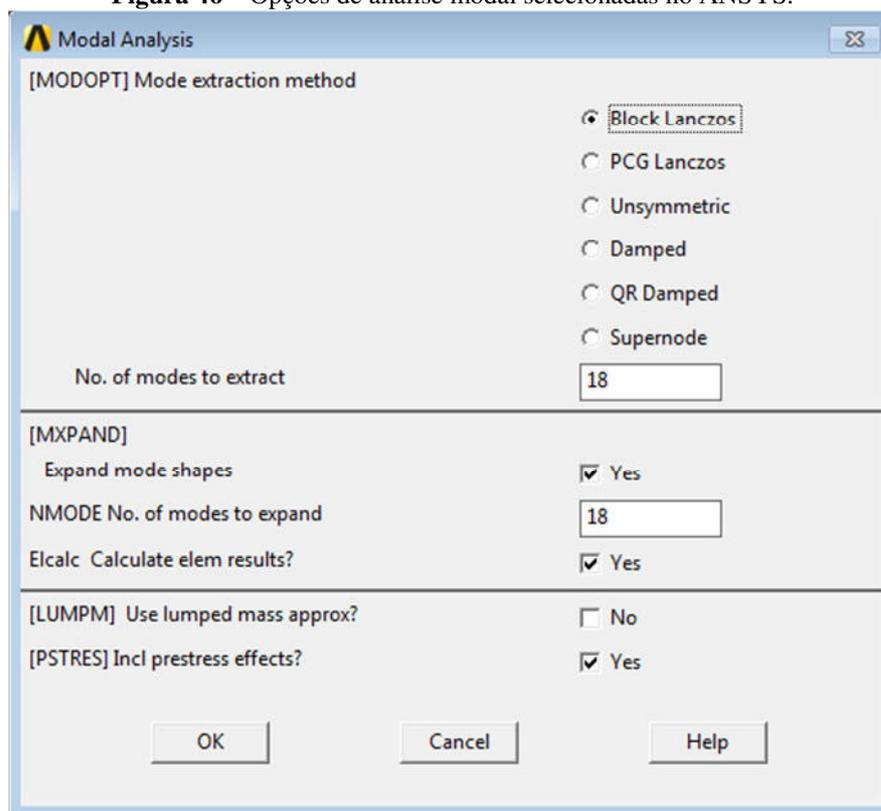
Fonte: Autor (2018).

Neste caso, a frequência fundamental da torre (0,29745 Hz) é a mais preocupante

quanto à possibilidade de haver ressonância tanto para o caso de vibração na direção do vento (*along-wind*) quanto para a vibração perpendicular a direção do vento (*across wind*) provocada pelo fenômeno de desprendimento cadenciado de vórtices (*vortex shedding*). Adicionalmente, comenta-se que a frequência fundamental é extremamente baixa resultando em um período de vibração de 3,362 s, tempo necessário a uma oscilação completa, o que corrobora a com a flexibilidade desta estrutura. Além disso, é mais provável que haja a excitação do modo fundamental, pois, por exemplo, assim como a velocidade do vento cresce com a altura em relação ao nível do solo, os deslocamentos horizontais à torre também aumentam com relação à altura no 1º modo de vibração e também se tem uma massa concentrada no topo (nacele), da mesma ordem de grandeza da massa da torre.

Também foi feita a análise modal da torre modelada utilizando o *software* ANSYS, conforme modelagem descrita no item 3.4 do capítulo anterior e as opções de análise modal expostas na Figura 46.

Figura 46 – Opções de análise modal selecionadas no ANSYS.

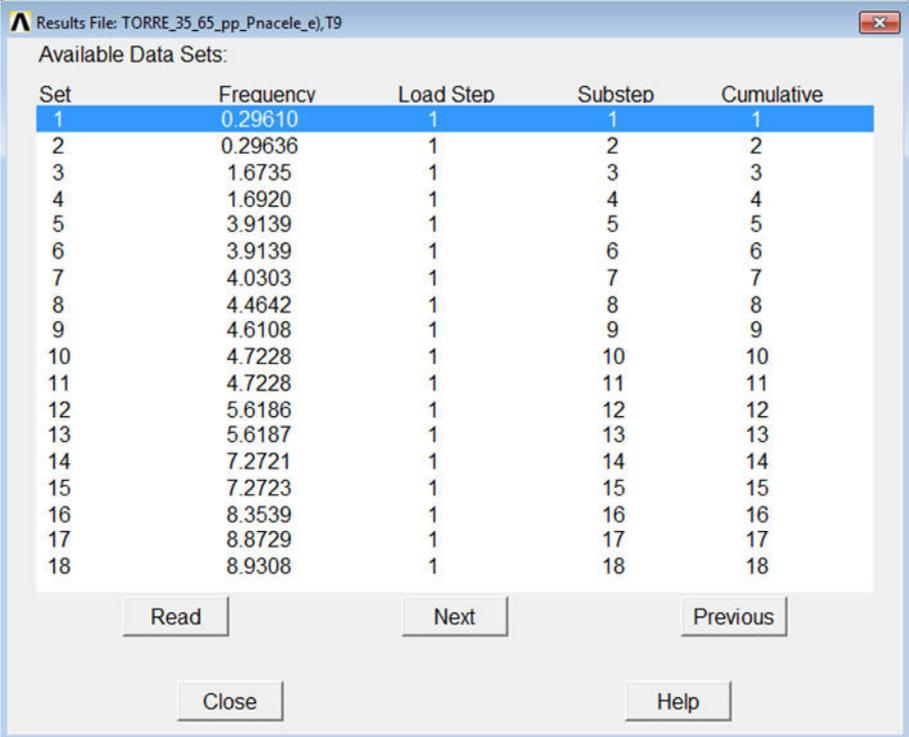


Fonte: Autor (2018).

O primeiro modelo para análise modal via ANSYS foi discretizado com EF de casca, no qual a torre foi considerada engastada na base (Figura 37a). O método de extração dos modos de vibração foi o *Block Lanczos* (LANCZOS, 1950), a partir do qual foram extraídos os 18 primeiros modos e frequências (Figura 47) de vibração da torre. Foram extraídos os 18 primeiros modos de vibração para se detectar os 6 modos de vibração obtidos no modelo

discretizado com EF de barra, previamente apresentado.

Figura 47 – Frequências de vibração da torre engastada na base obtidas via ANSYS.



The screenshot shows a window titled 'Results File: TORRE_35_65_pp_Pnacele_e), T9'. It displays a table of 'Available Data Sets' with the following columns: Set, Frequency, Load Step, Substep, and Cumulative. The table lists 18 data sets, with the first set highlighted in blue.

| Set | Frequency | Load Step | Substep | Cumulative |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 0.29610 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0.29636 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1.6735 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 1.6920 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 3.9139 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 3.9139 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 4.0303 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 4.4642 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 4.6108 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 4.7228 | 1 | 10 | 10 |
| 11 | 4.7228 | 1 | 11 | 11 |
| 12 | 5.6186 | 1 | 12 | 12 |
| 13 | 5.6187 | 1 | 13 | 13 |
| 14 | 7.2721 | 1 | 14 | 14 |
| 15 | 7.2723 | 1 | 15 | 15 |
| 16 | 8.3539 | 1 | 16 | 16 |
| 17 | 8.8729 | 1 | 17 | 17 |
| 18 | 8.9308 | 1 | 18 | 18 |

Below the table are buttons for 'Read', 'Next', 'Previous', 'Close', and 'Help'.

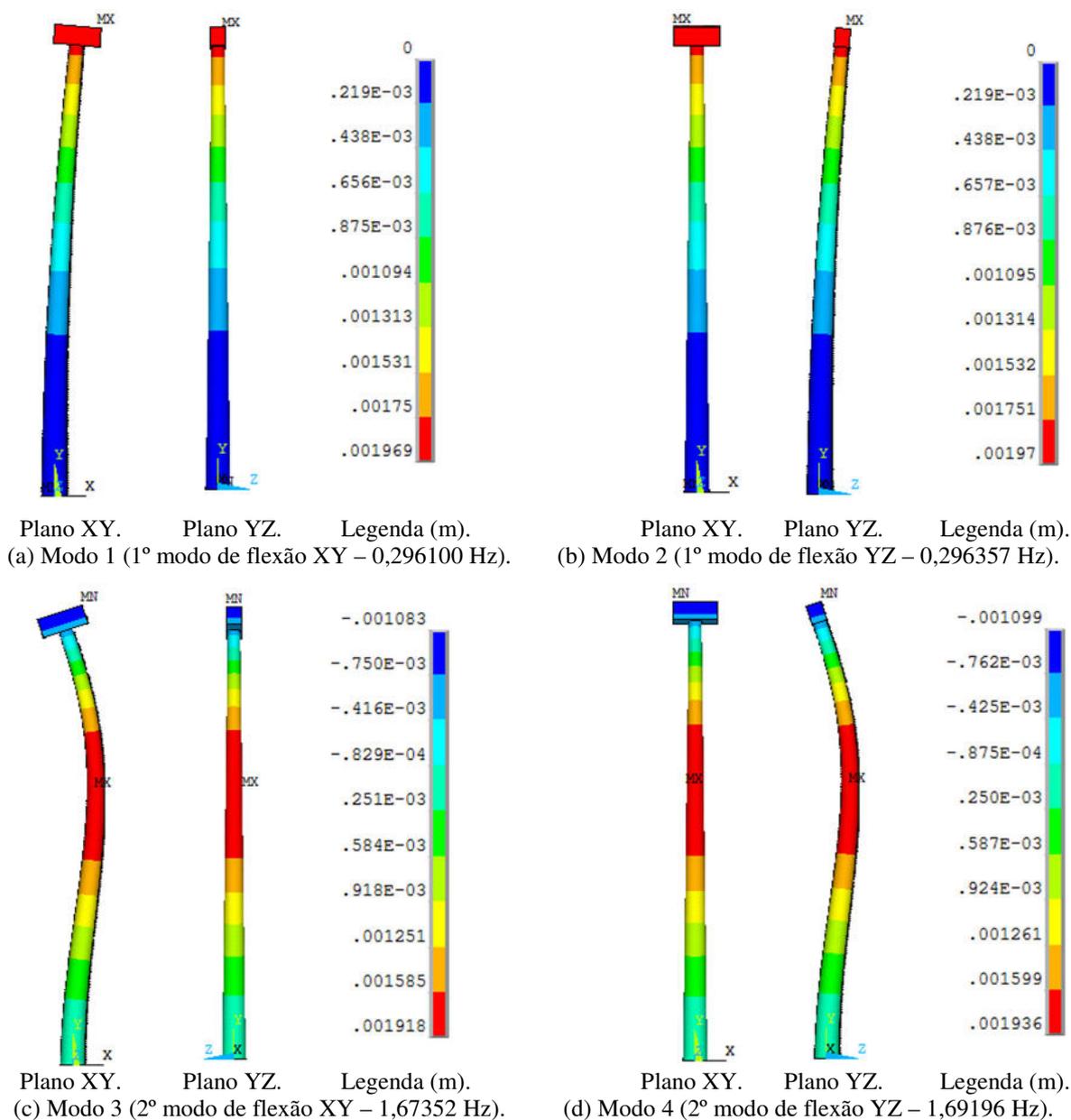
Fonte: Autor (2018).

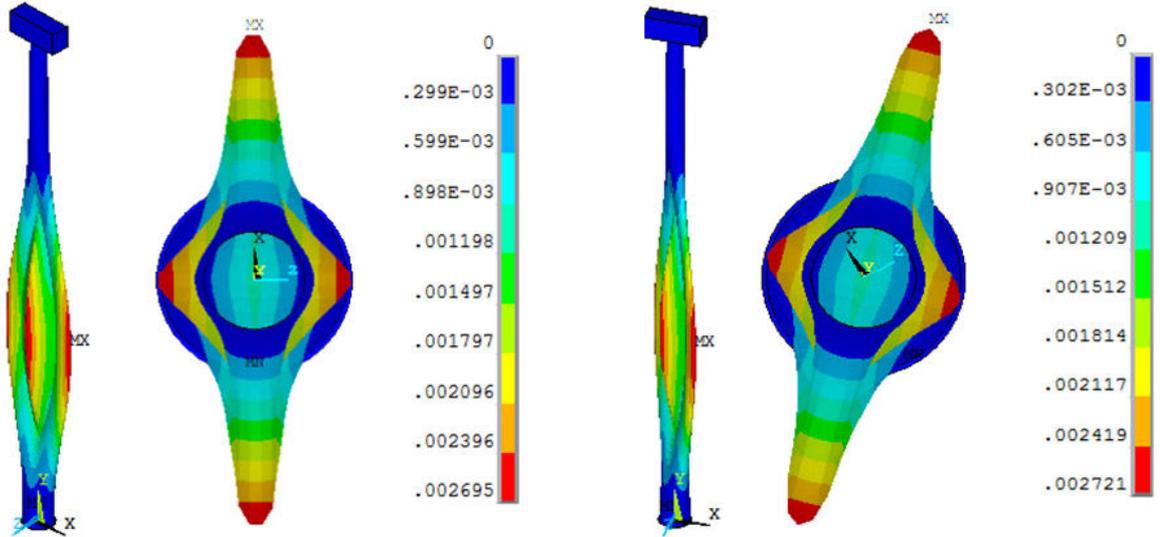
A primeira e a segunda frequências são referentes aos primeiros modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente (o eixo Y está posto na vertical no ANSYS). Há uma pequena diferença entre estas frequências devido à diferente disposição geométrica da nacele em relação aos planos XY e YZ. A terceira e a quarta frequências referem-se a outros dois modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente. Os modos de vibração 5 e 6 são modos de oscilação ovais (modos de ovalização) com mesma frequência, que não são captados na análise com EF de barra. Estes tipos de modos surgem devido à reduzida espessura da parede da torre, entretanto, podem ser eliminados ou posicionados em frequências superiores (de menor importância para a resposta da estrutura) com a utilização de enrijecedores transversais à torre (anéis de rigidez). A sétima frequência é referente ao primeiro modo de torção em torno do eixo Y. Os modos 8 e 9 também são modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente. Tornam a aparecer modos de ovalização nas frequências 10, 11, 12, 13, 14 e 15; estes são modos de vibrações locais acoplados, pois enquanto em um modo de vibração de flexão ou de torção globais tem-se deslocamento segundo um determinado eixo, nos modos de oscilação ovais há deslocamentos em mais de um eixo coordenado. Destes modos de ovalização, os seguintes pares têm a mesma frequência: 10° e 11°; 12° e 13°; e, 14° e 15°. Finalmente, as frequências 16 e 18 correspondem a outros modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente; e a frequência 17 a mais um

modo de torção em torno do eixo Y.

Na Figura 48 têm-se as representações gráficas dos modos de vibração descritos acima. Para os modos de vibração flexionais e torcionais, em que se tem deslocamento/rotação preponderante segundo um determinado eixo, os deslocamentos modais foram plotados segundo o respectivo eixo coordenado, a saber: translação em X para o 1º, 3º, 8º e 16º modos; translação em Z para o 2º, 4º, 9º e 18º modos; e, rotação em torno de Y para o 7º e 17º modos. Adicionalmente, para os modos de ovalização (5º, 6º, 10º, 11º, 12º, 13º, 14º e 15º), plotaram-se o módulo vetorial dos deslocamentos translacionais, uma vez que, nestes modos, têm-se deslocamentos pronunciados em todas as direções coordenadas.

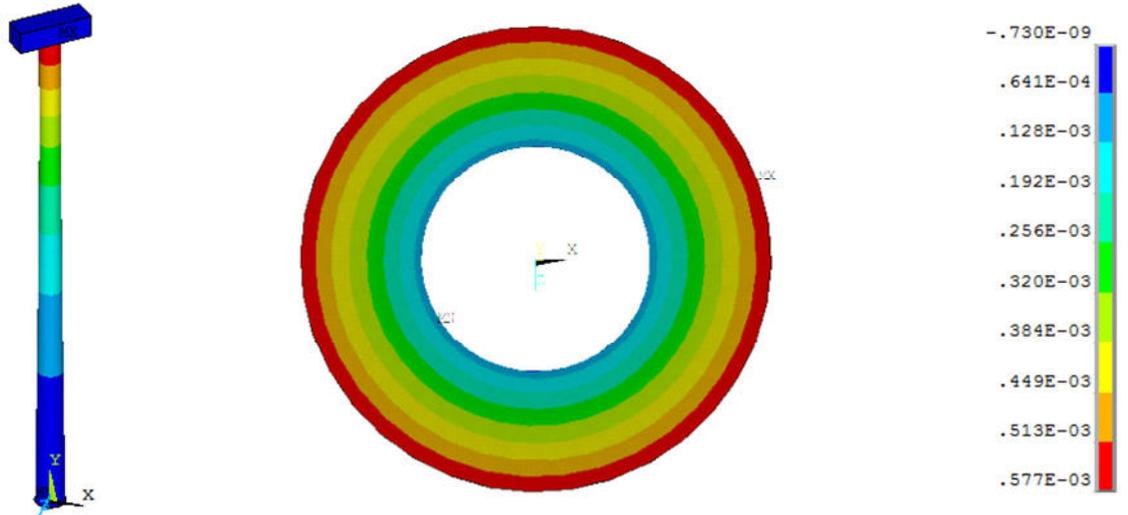
Figura 48 – Modos de vibração da torre engastada na base e modelada com EF de casca.





Perspectiva. Vista superior. Legenda (m).
 (e) Modo 5 (1º modo de ovalização – 3,91390 Hz).

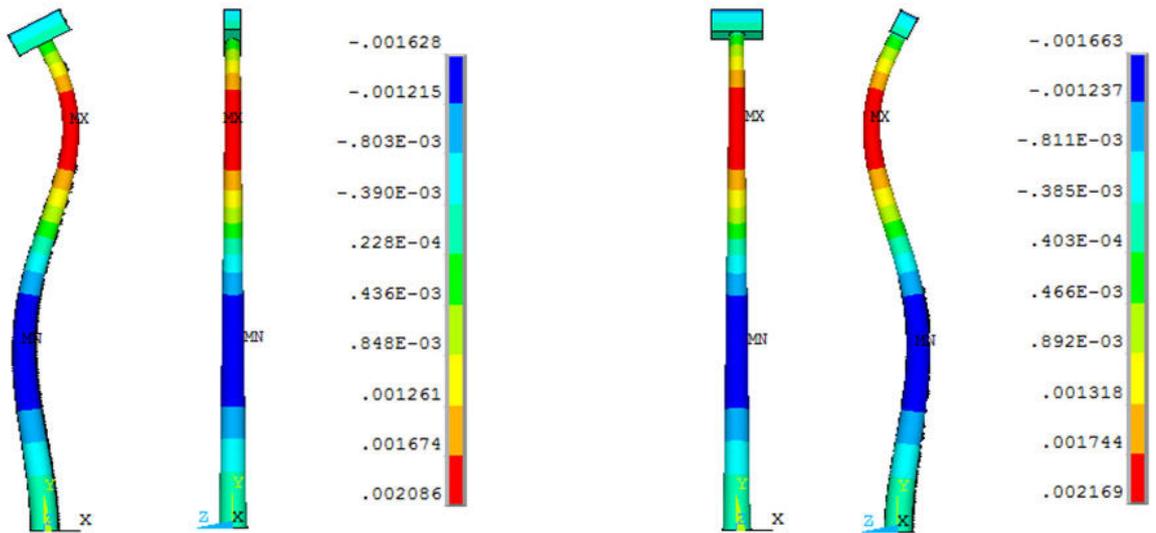
Perspectiva. Vista superior. Legenda (m).
 (f) Modo 6 (2º modo de ovalização – 3,91390 Hz).



Perspectiva.

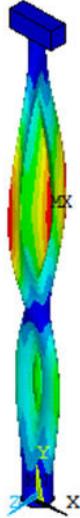
Vista superior.
 (g) Modo 7 (1º modo de Torção Y – 4,03033 Hz).

Legenda (rad).

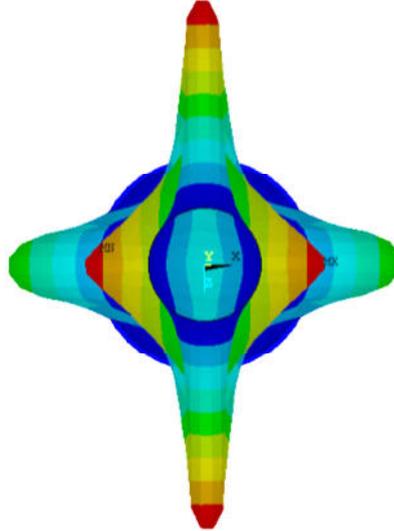


Plano XY. Plano YZ. Legenda (m).
 (h) Modo 8 (3º modo de flexão XY – 4,46417 Hz).

Plano XY. Plano YZ. Legenda (m).
 (i) Modo 9 (3º modo de flexão YZ – 4,61078 Hz).

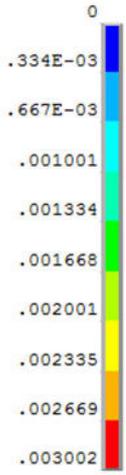


Perspectiva.

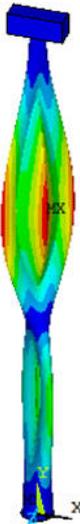


Vista superior.

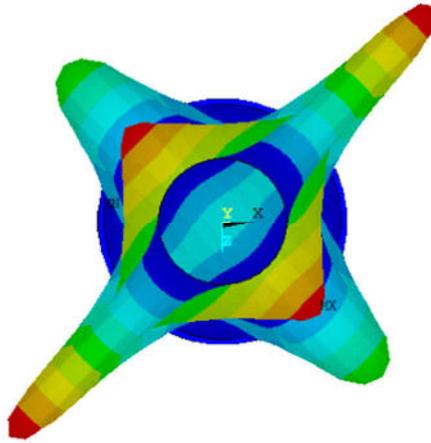
(j) Modo 10 (3º modo de ovalização – 4,72284 Hz).



Legenda (m).

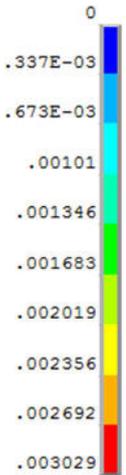


Perspectiva.

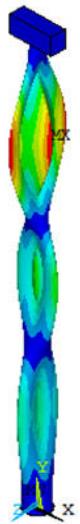


Vista superior.

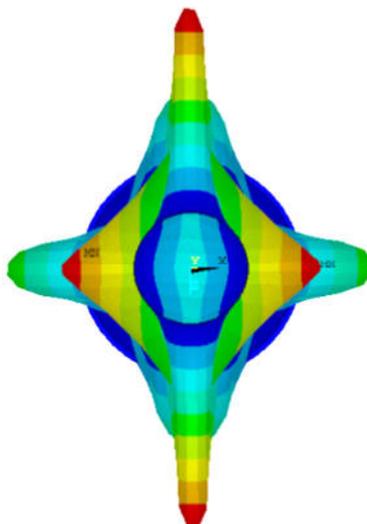
(k) Modo 11 (4º modo de ovalização – 4,72284 Hz).



Legenda (m).

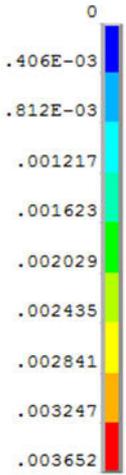


Perspectiva.

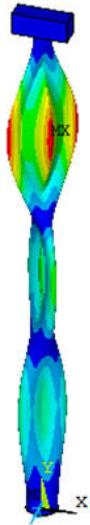


Vista superior.

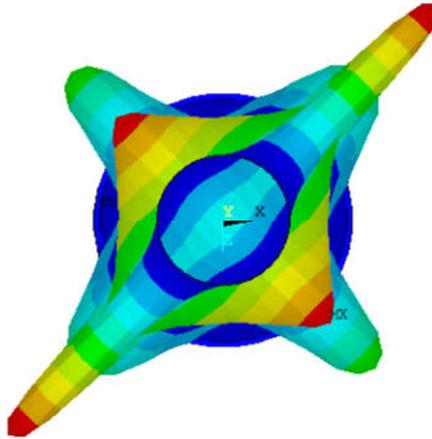
(l) Modo 12 (5º modo de ovalização – 5,61856 Hz).



Legenda (m).

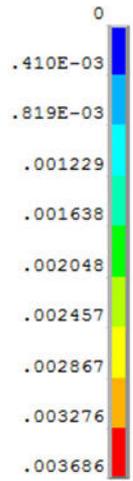


Perspectiva.

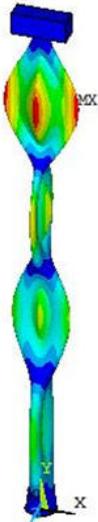


Vista superior.

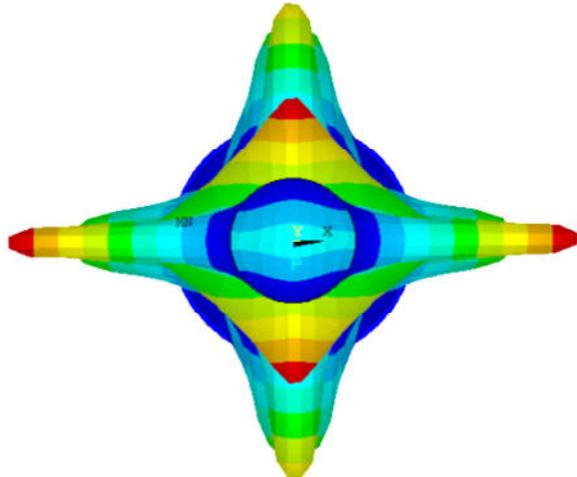
(m) Modo 13 (6º modo de ovalização – 5,61866 Hz).



Legenda (m).

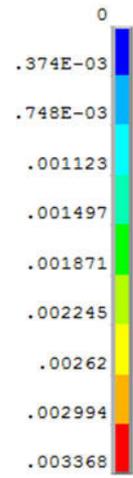


Perspectiva.

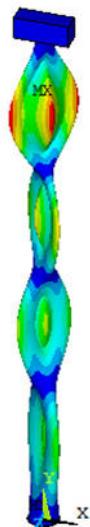


Vista superior.

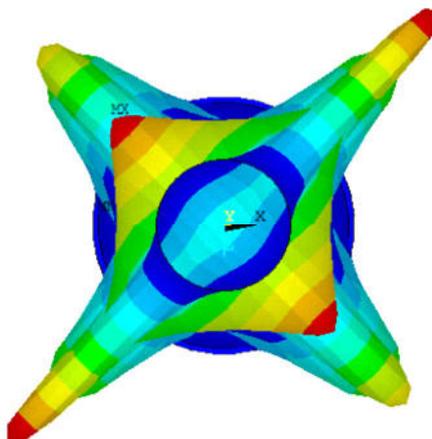
(n) Modo 14 (7º modo de ovalização – 7,27205 Hz).



Legenda (m).

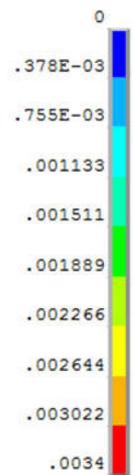


Perspectiva.

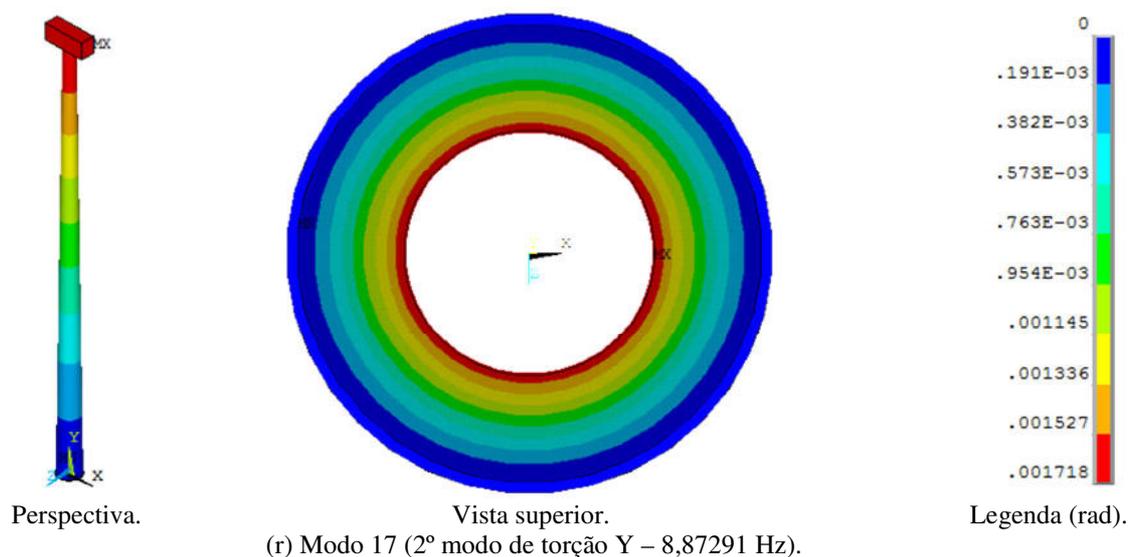
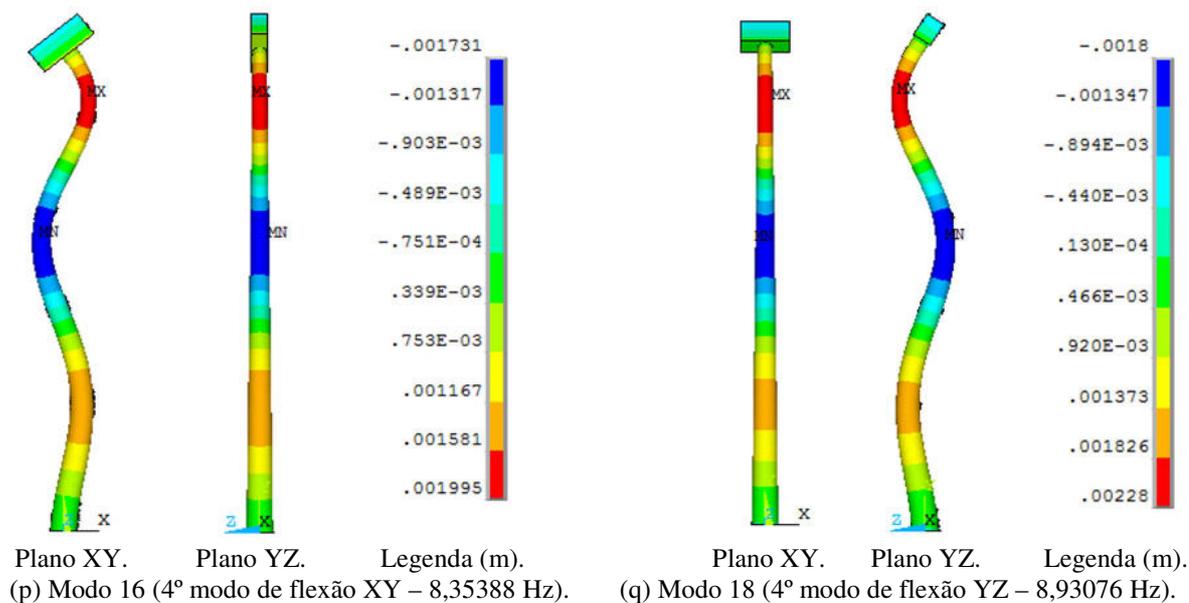


Vista superior.

(o) Modo 15 (8º modo de ovalização 7,27229 Hz).



Legenda (m).

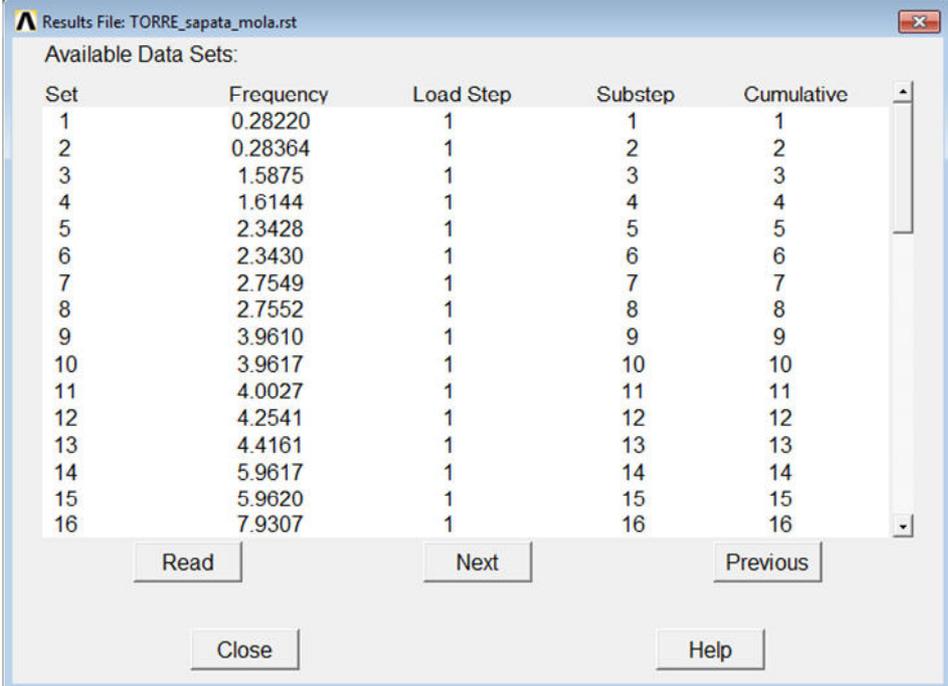


Fonte: Autor (2018).

No segundo modelo para análise modal via ANSYS, a torre foi discretizada com EF de casca e a fundação foi modelada com EF sólidos tetraédricos (Figura 37b). Para este modelo do sistema da torre, foram obtidos os 50 primeiros modos de vibração (Figura 49). Foram extraídos os 50 primeiros modos de vibração para se detectar o 2º modo de vibração torcional, uma vez que, este passou para uma frequência mais alta, quando comparado com vários outros modos de ovalização e flexionais que tinham frequências superiores a 2ª frequência torcional no modelo engastado na base. O nível de flexibilidade da fundação foi considerado de maneira semelhante ao feito na análise de estabilidade da torre exposta no capítulo 3; entretanto, o ponto de equilíbrio do conjunto torre-fundação apoiado sobre o solo deformável foi estabelecido utilizando-se a velocidade média de vento (\bar{V} , definida no item 9 da ABNT NBR 6123, 1988), de maneira que, nesta situação, 10% área da base da sapata está

sem contato com o solo (220 dos 2145 nós da base da sapata).

Figura 49 – Frequências de vibração da torre com fundação flexível obtidas via ANSYS.



| Set | Frequency | Load Step | Substep | Cumulative |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 0.28220 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0.28364 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1.5875 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 1.6144 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 2.3428 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 2.3430 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 2.7549 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 2.7552 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 3.9610 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 3.9617 | 1 | 10 | 10 |
| 11 | 4.0027 | 1 | 11 | 11 |
| 12 | 4.2541 | 1 | 12 | 12 |
| 13 | 4.4161 | 1 | 13 | 13 |
| 14 | 5.9617 | 1 | 14 | 14 |
| 15 | 5.9620 | 1 | 15 | 15 |
| 16 | 7.9307 | 1 | 16 | 16 |

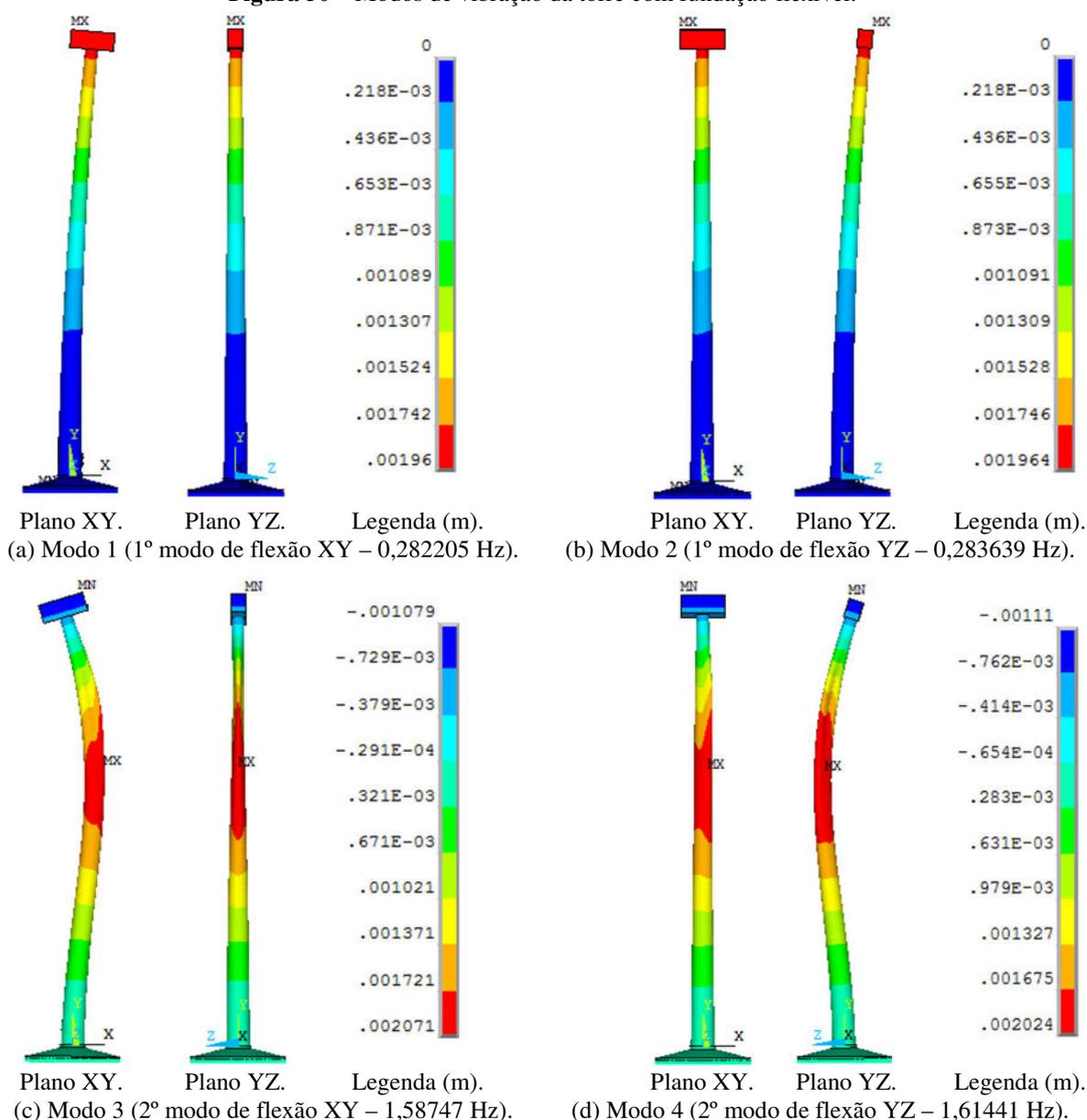
Fonte: Autor (2018).

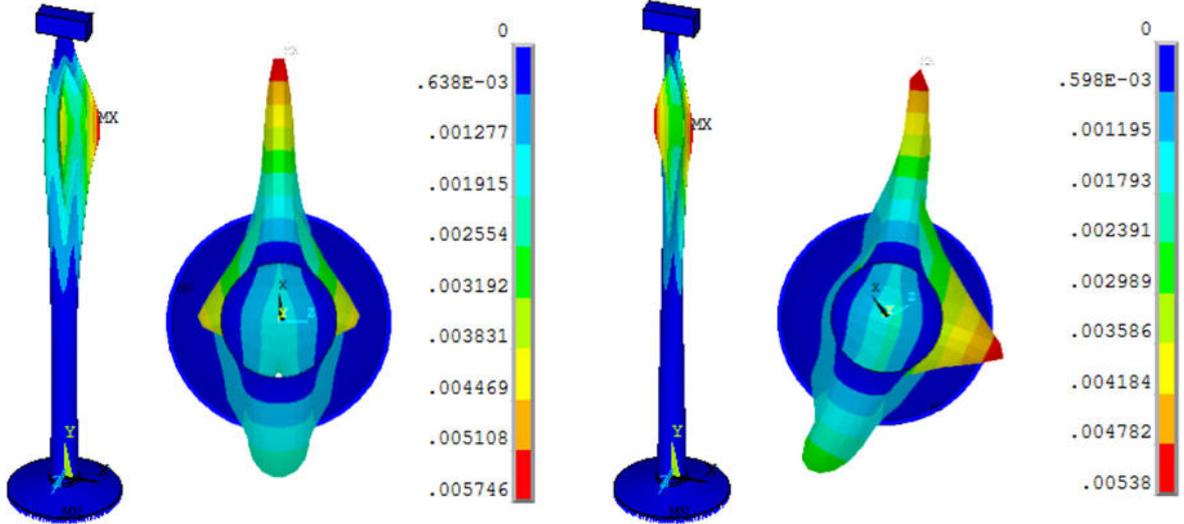
Assim como no modelo engastado na base, a primeira e a terceira e a segunda e a quarta frequências são referentes ao 1º e ao 2º modos de flexão no plano XY e YZ, respectivamente. Além disso, também há uma pequena diferença entre as 1ª e 2ª e entre a 3ª e 4ª frequências devido à diferente disposição geométrica da nacele em relação aos planos XY e YZ. Os pares de modos de vibração com a mesma frequência 5 e 6, 7 e 8 e 9 e 10 são modos de oscilação ovais (modos de ovalização). A 11ª frequência é referente ao 1º modo de torção em torno do eixo Y. Percebe-se, em comparação ao modelo com base engastada, que quatro modos de ovalização (3º, 4º, 5º e 6º modos de ovalização) passam a aparecer antes do 1º modo torcional da torre e que o 5º par de modos de ovalização (9º e 10º modos de ovalização) encontra-se entre as 18 primeiras frequências da estrutura com base flexível. Os modos 12 e 13 são os 3ºs modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente. Tornam a aparecer pares de modos de ovalização com mesmas frequências: 14 e 15; 17 e 18. Finalmente, as frequências 16 e 19 correspondem a outros modos de flexão nos planos XY e YZ, respectivamente; e apenas a frequência 36 corresponde ao 2º modo de torção em torno do eixo Y. Entre a frequência 20 e 35 tem-se os seguintes modos, em ordem: 6º par de modos de ovalização (20º e 21º modos); 7º par de modos de ovalização (22º e 23º modos); 8º par de modos de ovalização (24º e 25º modos); 9º par de modos de ovalização (26º e 27º modos); 5º modo de flexão XY (28º modo); 10º par de modos de ovalização (29º e 30º modos); 11º par de modos de ovalização (31º e 32º modos); 12º par de modos de ovalização (33º e 34º

modos); 5º modo de flexão YZ (35º modo).

Na Figura 50 são apresentadas as representações gráficas de alguns dos modos de vibração descritos acima. Para os modos de vibração flexionais e torcionais, em que se tem deslocamento preponderante segundo um determinado eixo, plotaram-se os deslocamentos modais segundo o respectivo eixo coordenado, a saber: translação em X para o 1º, 3º, 12º e 16º modos; translação em Z para o 2º, 4º, 13º e 19º modos; e, rotação em torno de Y para o 11º e 36º modos. Adicionalmente, para os modos de ovalização (5º, 6º, 7º, 8º, 9º, 10º, 14º, 15º, 17º e 18º), plotaram-se o módulo vetorial dos deslocamentos translacionais, uma vez que, nestes modos, têm-se deslocamentos pronunciados em todas as direções coordenadas.

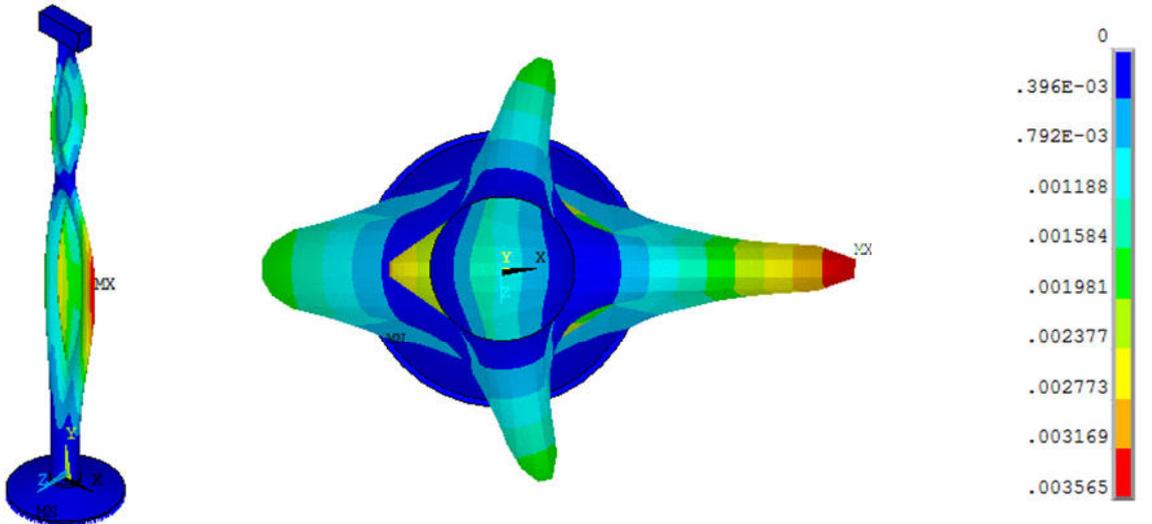
Figura 50 – Modos de vibração da torre com fundação flexível.





Perspectiva. Vista superior. Legenda (m).
 (e) Modo 5 (1º modo de ovalização – 2,34283 Hz).

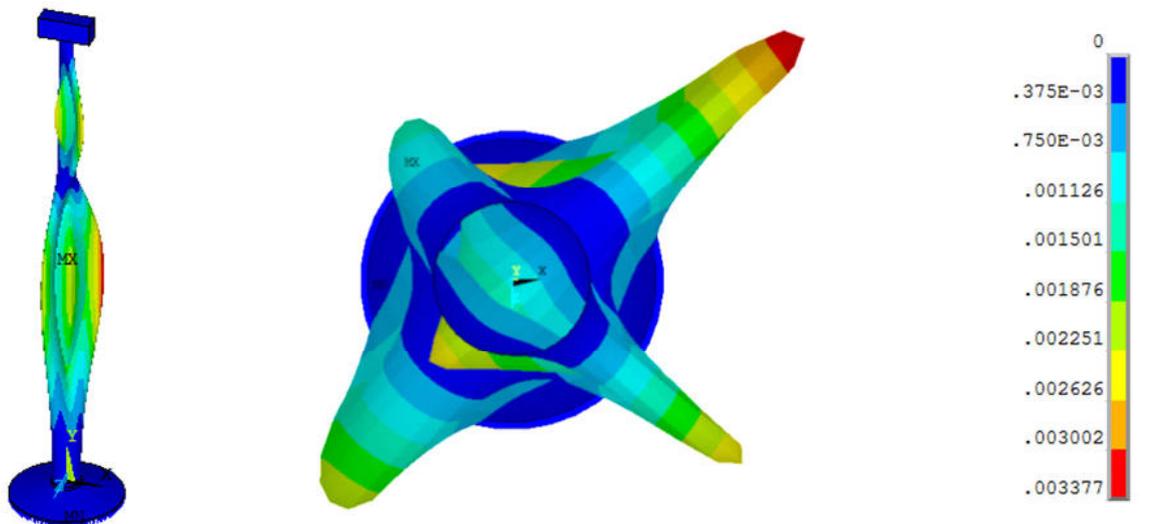
Perspectiva. Vista superior. Legenda (m).
 (f) Modo 6 (2º modo de ovalização – 2,34301 Hz).



Perspectiva.

Vista superior.
 (g) Modo 7 (3º modo de ovalização – 2,75494 Hz).

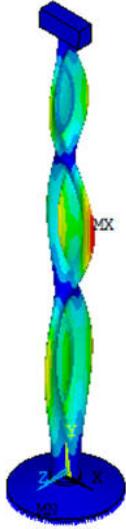
Legenda (m).



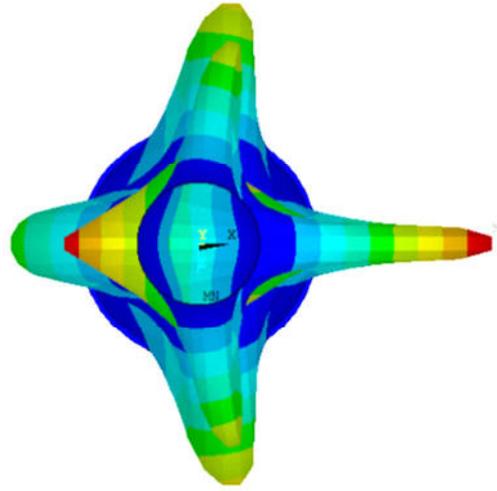
Perspectiva.

Vista superior.
 (h) Modo 8 (4º modo de ovalização – 2,75516 Hz).

Legenda (m).

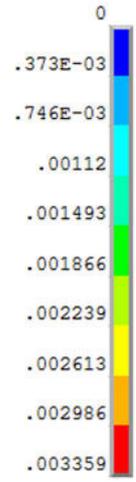


Perspectiva.

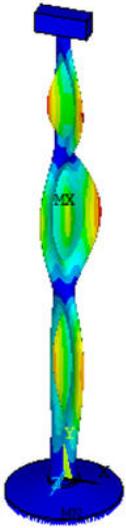


Vista superior.

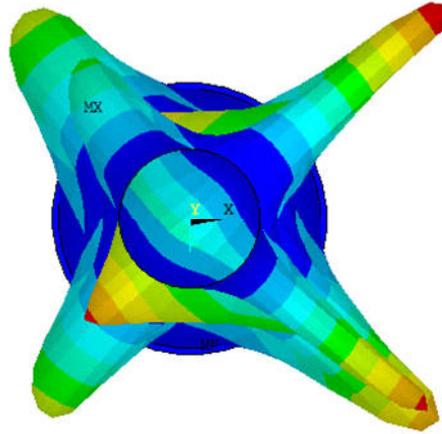
(i) Modo 9 (5º modo de ovalização – 3,96102 Hz).



Legenda (m).

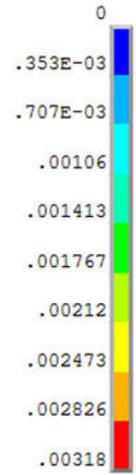


Perspectiva.

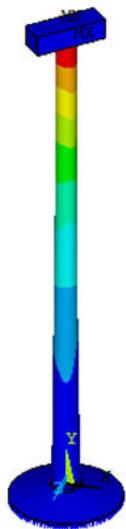


Vista superior.

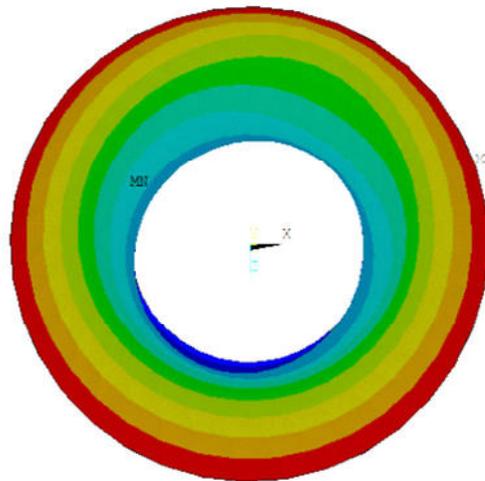
(j) Modo 10 (6º modo de ovalização – 3,96172 Hz).



Legenda (m).

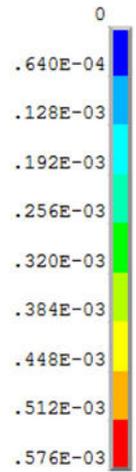


Perspectiva.

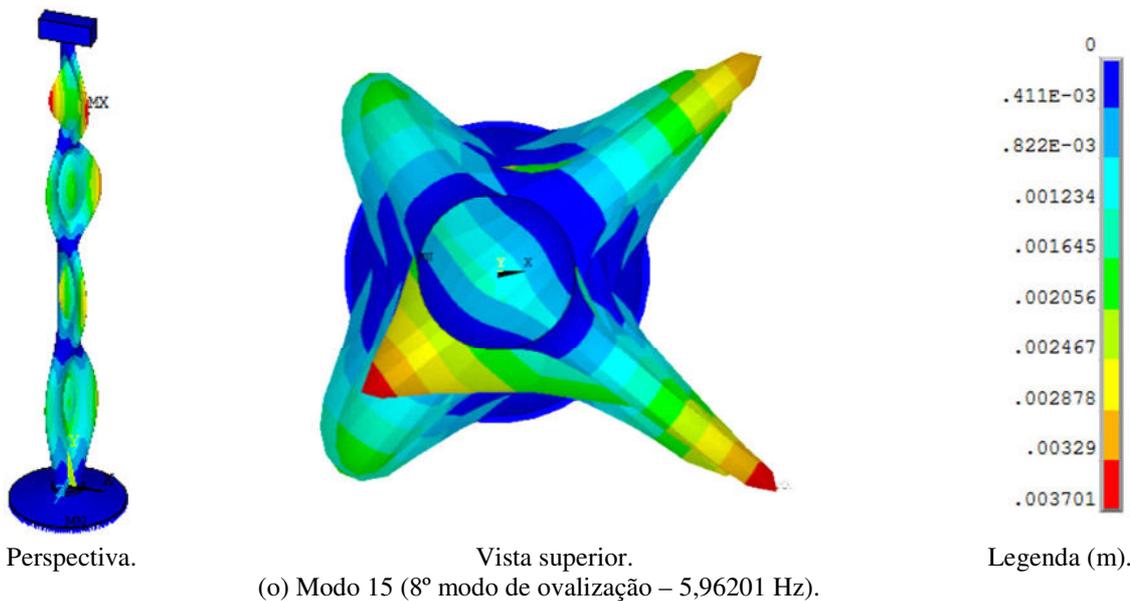
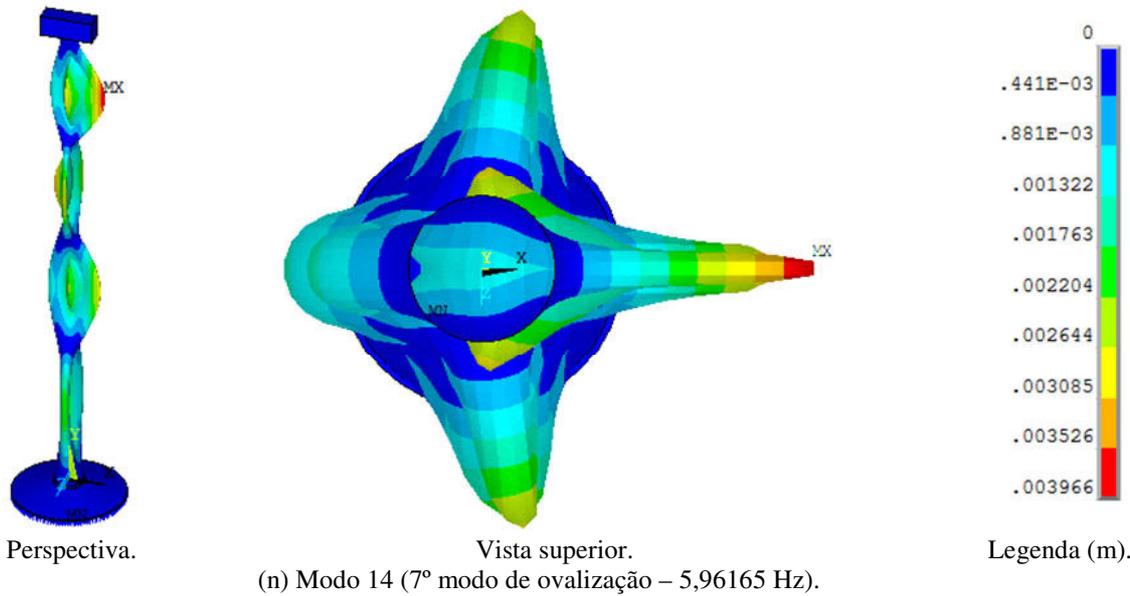
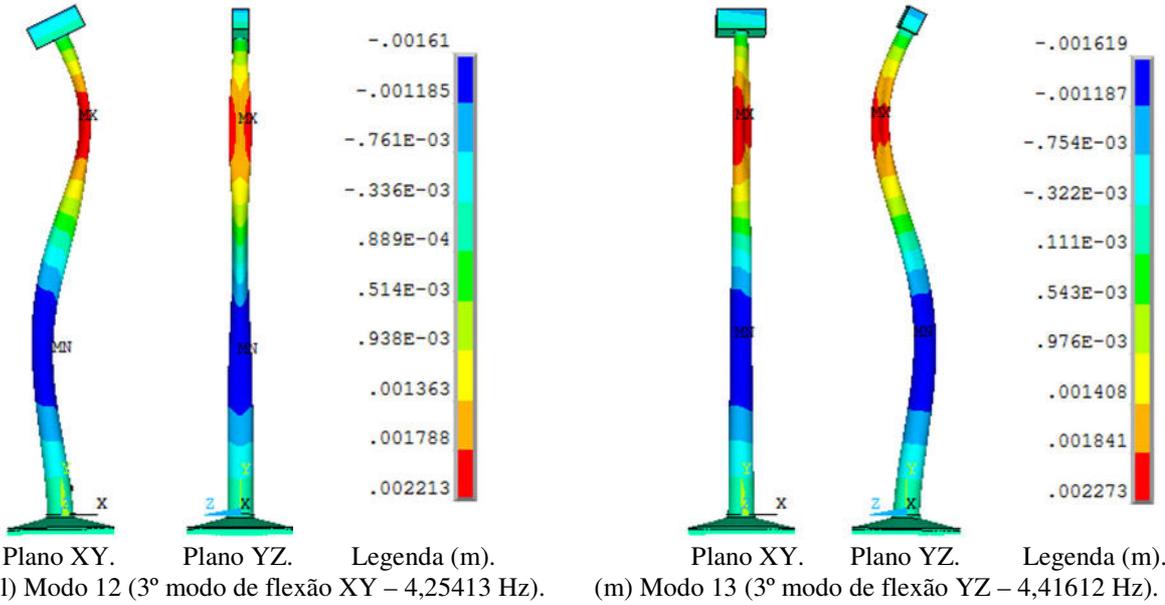


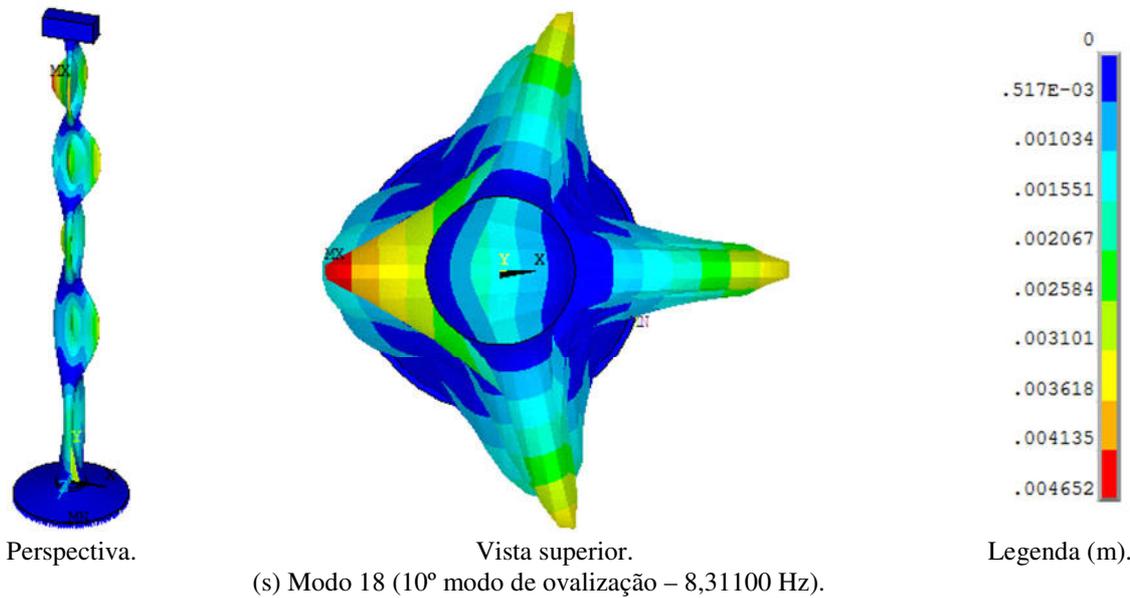
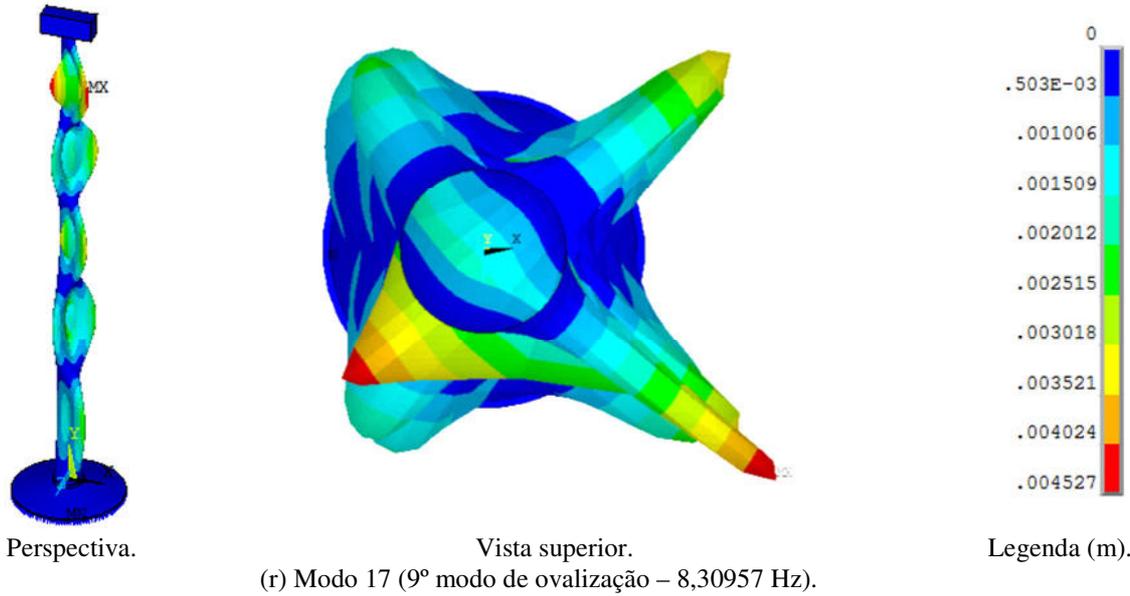
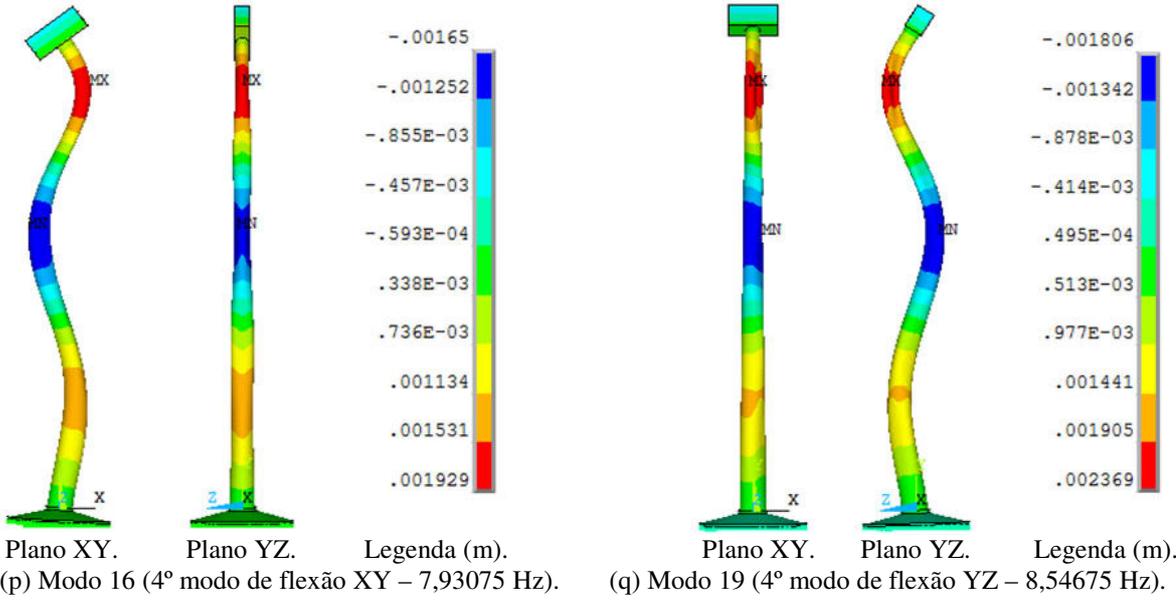
Vista superior.

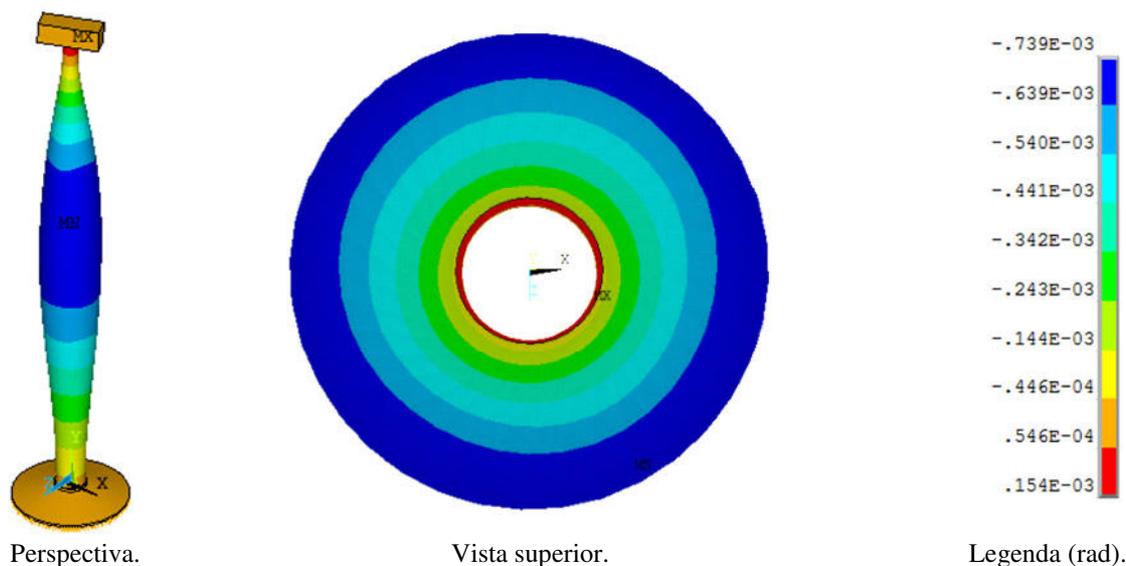
(k) Modo 11 (1º modo de torção Y – 4,00274 Hz).



Legenda (rad).







(t) Modo 37 (2º modo de torção Y – 13,7310 Hz).

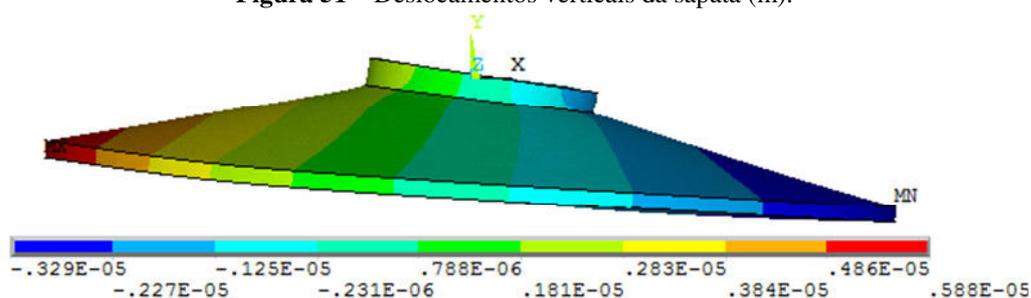
Fonte: Autor (2018).

Percebe-se a influência da flexibilidade da base da torre, no sentido de diminuir as frequências, em praticamente todos os modos de vibração; tendo como exceção a 2ª frequência torcional em torno do eixo Y. Além disso, a adição da sapata contribui com um aumento considerável da massa do modelo, o que naturalmente diminui o valor das frequências; embora a sapata esteja situada nas cotas mais baixas, fato que impede uma diminuição acentuada de tais frequências.

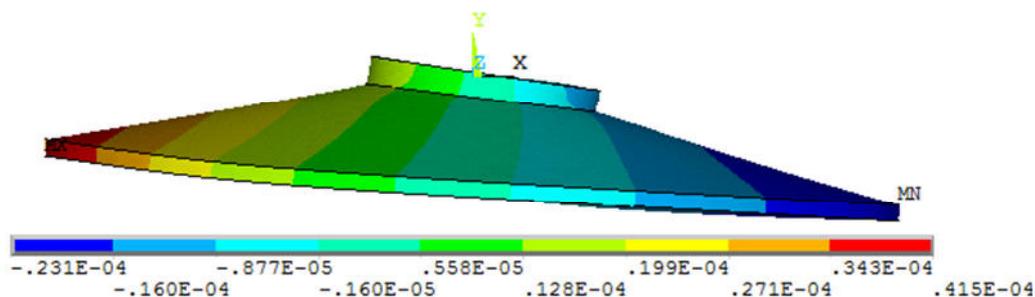
Outra questão observada no modelo com base flexível é notada no 8º modo, por exemplo, no qual há rotações e deslocamentos diferenciados em relação ao respectivo modo (3º modo de flexão YZ) do modelo engastado na base, tanto ao longo do tubo da torre quanto na nacela, que não mais rotaciona apenas em torno do eixo X. Uma característica a mais, relacionada ao modelo com base flexível, é a inexistência de simetria dos modos de ovalização em relação aos planos coordenados XY e YZ, quando comparados com os respectivos modos de ovalização do modelo engastado na base.

Na Figura 51, na qual estão plotados os deslocamentos verticais da sapata da torre (direção Y), observa-se a rotação da base da torre devido à flexibilidade da fundação.

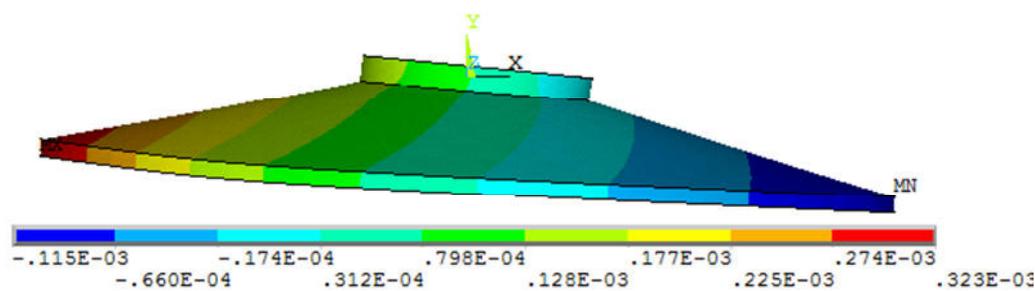
Figura 51 – Deslocamentos verticais da sapata (m).



(a) Sapata do 1º modo de vibração.



(b) Sapata do 3º modo de vibração.



(c) Sapata do 16º modo de vibração.

Fonte: Autor (2018).

Por fim, expõe-se na Tabela 5 um resumo das frequências de vibração obtidas nos três modelos estudados (EF de barra; EF de casca com base engastada; e, EF de casca com base flexível).

Tabela 5 – Frequências de vibração dos modelos estudados.

| Natureza dos Modos | Eixos | Frequências (Hz) | | |
|--------------------|-------|------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| | | EF de barra | EF de casca com base engastada | EF de casca com base flexível |
| 1º Flexão | XY | 0,29745 | 0,296100 | 0,282205 |
| | YZ | | 0,296357 | 0,283639 |
| 2º Flexão | XY | 1,72847 | 1,67352 | 1,58747 |
| | YZ | | 1,69196 | 1,61441 |
| 1º Torção | Y | 3,98035 | 4,03033 | 4,00274 |
| 3º Flexão | XY | 4,52973 | 4,46417 | 4,25413 |
| | YZ | | 4,61078 | 4,41612 |
| 4º Flexão | XY | 8,05650 | 8,35388 | 7,93075 |
| | YZ | | 8,93076 | 8,54675 |
| 2º Torção | Y | 8,75028 | 8,87291 | 13,7310 |

Fonte: Autor (2018).

4.4.3 Resposta da torre a uma excitação harmônica

As amplitudes dos termos do vetor de forças aplicadas horizontalmente à torre foram calculadas por meio dos parâmetros estabelecidos na ABNT NBR 6123 (1988), a saber: parcela flutuante de vento estabelecida segundo a diferença entre a velocidade de vento estática (velocidade básica do vento medida em um intervalo de tempo de 3 s) e a velocidade média do vento (medida em um intervalo de tempo de 10 min), conforme Eq.(134); e uma

força horizontal proveniente do sistema nacelle-rotor aplicada ao topo da torre (segundo ASIBOR et al., 2015). Esta parcela flutuante e a força aplicada ao topo foram adotadas segundo um carregamento harmônico considerado ressonante com o modo fundamental de vibração da torre. Desta forma, considerou-se que a torre vibra em torno da posição de equilíbrio que é determinada pelo carregamento obtido a partir da velocidade média de vento (\bar{V} , definida no item 9 da ABNT NBR 6123, 1988). Logo:

$$q_w(x) = \frac{\rho_{ar}}{2} [(V_{3s}(x))^2 - (V_{10min}(x))^2] \quad (134)$$

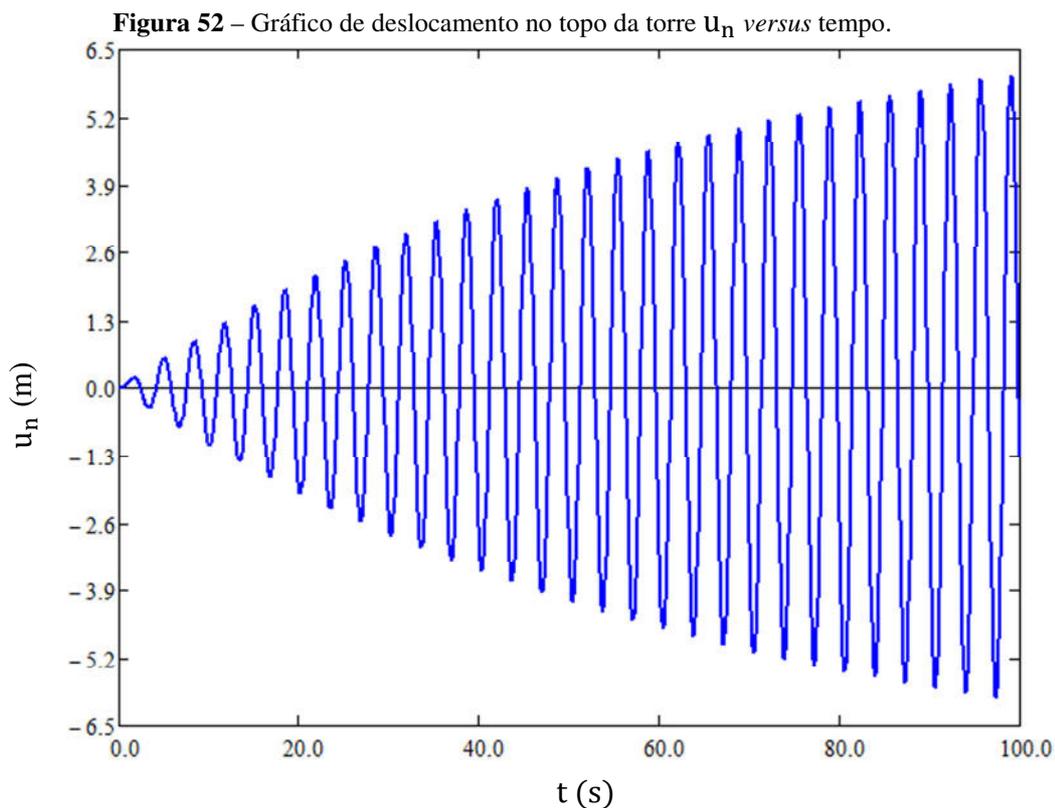
na qual: $q_w(x)$ é a função em relação ao nível geral do terreno da pressão dinâmica da parcela flutuante do vento em N/m^2 ; ρ_{ar} é a massa específica do ar em condições ambientais normais (ABNT NBR IEC 61400-1, 2008), tomada igual a $1,225 \text{ kg/m}^3$; $V_{3s}(x)$ é a função em relação ao nível geral do terreno da velocidade de vento medida em um intervalo de tempo de 3 s; $V_{10min}(x)$ é a função em relação ao nível geral do terreno da velocidade de vento medida em um intervalo de tempo de 10 min.

Assim, na Eq.(135) abaixo, se apresenta o vetor condensado das forças referentes à parcela flutuante do vento consideradas harmônicas ressonantes, com $n = 8$:

$$\{\bar{\mathbf{F}}_u\} = \begin{pmatrix} 4.374 \times 10^3 \\ 5.95 \times 10^3 \\ 6.417 \times 10^3 \\ 6.696 \times 10^3 \\ 6.797 \times 10^3 \\ 6.544 \times 10^3 \\ 7.251 \times 10^3 \\ 1.137 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{sen}(\omega_1 t) \quad (135)$$

em unidades do SI. Percebe-se que a amplitude da força aplicada ao topo da torre tem ordem de grandeza 100 vezes maior que as demais amplitudes, o que corrobora com a excitação do modo fundamental da torre. Comenta-se ainda, que não foi considerado o efeito aleatório da ação de vento na determinação do vetor de forças acima (Eq.(135)), mas apenas a intensidade da ação de vento que corresponde à sua parcela flutuante.

Considerando-se nulos os vetores de condições iniciais (deslocamentos e velocidades), nas equações desenvolvidas no item 4.3.1 deste capítulo, o gráfico de deslocamentos do topo da torre, quando submetida ao vetor de forças ressonantes da Eq.(135), é mostrado na Figura 52.

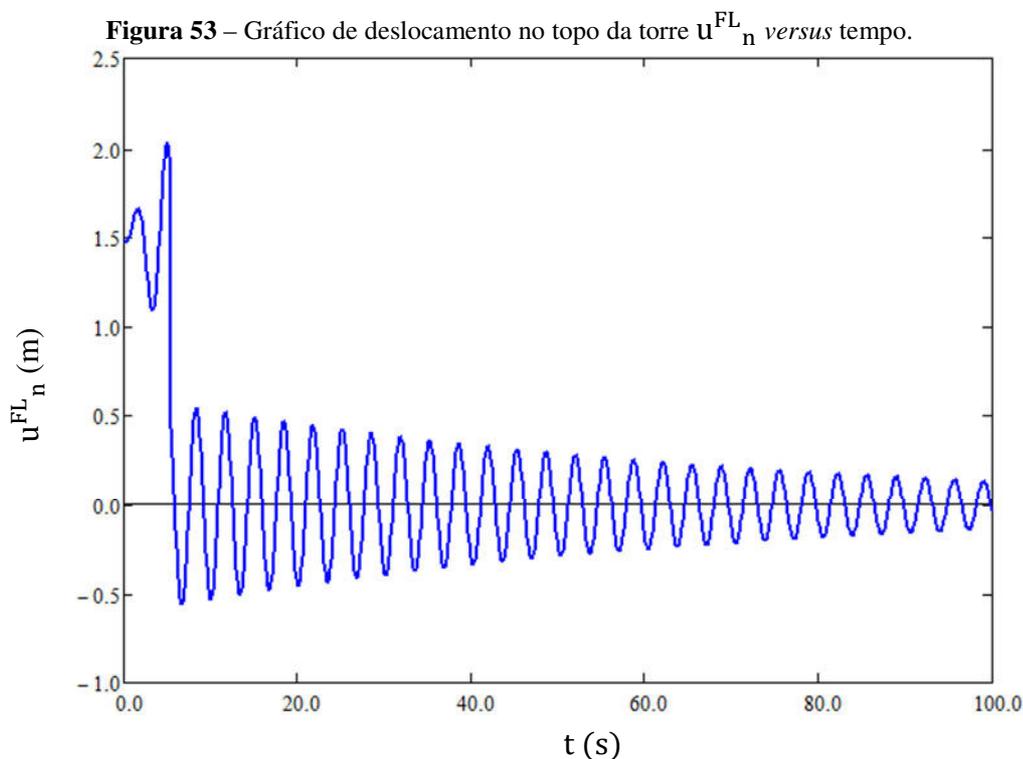


Fonte: Autor (2018).

Percebe-se na Figura 52, que o deslocamento cresce quase que infinitamente com o tempo, tendo valor máximo aproximadamente igual a 6 m, pois se trata de uma vibração forçada amortecida excitada por uma carga ressonante. Tal fato leva a torre a níveis de deslocamentos inaceitáveis do ponto de vista de projeto e, além disso, para um deslocamento no topo da ordem de 2 m, ter-se-ia o início do comportamento de não linearidade física na torre (entretanto, o comportamento implementado considerou o material em regime elástico linear, ou seja, não foi feita análise física não linear). Entretanto, é importante mencionar que a carga aplicada além de ser ressonante com o 1º modo da torre, está atuando em todo o tempo de análise, o que leva, inevitavelmente, a estrutura a deslocamentos elevados.

Desta forma, resolveu-se realizar uma segunda análise que consiste no fato de avaliar os deslocamentos quando a excitação atua em parte do tempo de análise. Além disso, é considerado que durante a atuação do carregamento a torre vibra em torno da posição de equilíbrio estático definida pela atuação da força eólica média (estabelecida pela velocidade média de vento \bar{V}), ou seja, a parcela flutuante do vento, adotada como harmônica, incide em torno da sua parcela média. Na Figura 53 é apresentada a função dos deslocamentos do topo da torre (em torno do deslocamento estático) quando esta é submetida ao vetor de forças da Eq.(135) durante 5 s (semelhante ao efeito de uma rajada). Após o tempo de atuação da força (t_F), a torre passa a movimentar-se sob vibração livre amortecida em torno da posição de

deslocamento nulo; entretanto, mesmo após 100 s de análise, a torre continua a vibrar com amplitude relativamente elevada (15 cm), acarretando problemas de fadiga do material.



4.4.4 Resposta da torre ao desprendimento cadenciado de vórtices

Será investigado nesta seção o efeito dinâmico de desprendimento cadenciado de vórtices (vórtices de von Kármán), que causa movimentos transversais à direção do vento (*across-wind*) em certa frequência de desprendimento de um par de vórtices, potencialmente preocupante quando esta se iguala a uma das frequências naturais da estrutura, dentro da faixa de velocidade de vento esperada. Mais uma vez, assim como no caso da vibração na direção do vento (*along-wind*), tem-se especial atenção à possibilidade de excitação do 1º modo de vibração da torre devido ao perfil de velocidade de vento, que obedece a uma função crescente em relação ao nível geral do terreno.

Dependendo do número de Reynolds do fluxo, Eq.(136), referido ao diâmetro externo da torre (dimensão característica da torre), observam-se três regiões características (BLEVINS, 2001): subcrítica ($300 < Re < 1,5 \cdot 10^5$), transicional ($1,5 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^6$) e supercrítica ($3,5 \cdot 10^6 < Re$).

$$Re = \frac{V_w D}{\nu} \quad (136)$$

na qual: Re é o número adimensional de Reynolds; V_w é a velocidade do fluxo de vento; D é o diâmetro externo do tubo da torre; e, ν é a viscosidade cinemática do fluido, que, neste caso, é igual a $70000^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ para o ar (ABNT NBR 6123, 1988). Para o perfil de velocidades média do vento \bar{V} em relação ao nível geral do terreno, o vetor de número de Reynolds para torre com $n = 8$, fica:

$$\{\mathbf{Re}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.132 \times 10^7 \\ 1.22 \times 10^7 \\ 1.237 \times 10^7 \\ 1.219 \times 10^7 \\ 1.18 \times 10^7 \\ 1.123 \times 10^7 \\ 1.057 \times 10^7 \\ 9.814 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (137)$$

A velocidade de vento, para a qual a frequência de desprendimento de um par de vórtices coincide com uma frequência natural (neste caso, será a 1ª frequência de vibração da torre), é chamada de velocidade crítica V_{cr} e é dada por:

$$V_{cr} = \frac{f_1 D}{St} \quad (138)$$

em que, St é o número adimensional de Strouhal definido por:

$$St = \frac{f_s D}{V_w} \quad (139)$$

na qual, f_s é a frequência de desprendimento de um par de vórtices. Segundo a ABNT NBR 6123 (1988), $St = 0,28$ para $Re > 10^6$. Logo, o vetor de velocidades críticas para a torre com $n = 8$ é dado por:

$$\{\mathbf{V}_{cr}\} = \begin{pmatrix} 6.958 \\ 6.56 \\ 6.155 \\ 5.753 \\ 5.352 \\ 4.953 \\ 4.548 \\ 4.15 \\ 3.751 \end{pmatrix} \quad (140)$$

em unidades do SI. Este vetor apresenta valores distintos e decrescentes de velocidade ao

longo da altura da torre, de forma que não é possível excitar o desprendimento de vórtices ressonante em toda a altura da torre. Segundo Blessmann (2005), o desprendimento de vórtices ocorre em trechos ao longo do comprimento da torre formando as chamadas células de vórtices, sendo constante a frequência de desprendimento em cada célula. Além disso, os efeitos dinâmicos do desprendimento cadenciado de vórtices são possíveis se a velocidade crítica for igual ou inferior à máxima velocidade média de vento, que, neste caso, para o topo da torre é igual a 39,7 m/s. Desta forma, a velocidade crítica é atingida primeiro no topo da torre à medida que o perfil de velocidades cresce desde zero na base até atingir o valor crítico no topo da torre.

Segundo Blevins (2001), devido ao fato de o processo de desprendimento cadenciado de vórtices ser aproximadamente senoidal, é razoável modelar o fenômeno de desprendimento de vórtices por um carregamento transversal senoidal distribuído por unidade de comprimento de torre, q_L (em N/m), conforme:

$$q_L(x, t) = \frac{\rho_{ar}}{2} [V_w(x)]^2 D(x) C_L \text{sen}[\omega_s(x)t] \quad (141)$$

na qual: C_L é coeficiente adimensional de sustentação tomado igual a 0,5, a favor da segurança, para a faixa de número de Reynolds em análise (BLESSMANN, 2005; BLEVINS, 2001); ω_s é a frequência angular de desprendimento de um par de vórtices de von Kármán, em rad/s, que varia em relação ao nível geral do terreno, pois o carregamento utilizado refere-se a situação em que a velocidade de vento se iguala a velocidade crítica apenas no topo da torre (condição para possível excitação do modo de vibração fundamental). Na Eq.(142) tem-se o vetor de frequências angulares de desprendimento de um par de vórtices quando a torre é discretizada em EF de barra com $n = 8$:

$$\{\omega_s\} = \begin{pmatrix} 0.705 \\ 0.863 \\ 1.001 \\ 1.14 \\ 1.288 \\ 1.455 \\ 1.645 \\ 1.869 \end{pmatrix} \quad (142)$$

em unidades do SI.

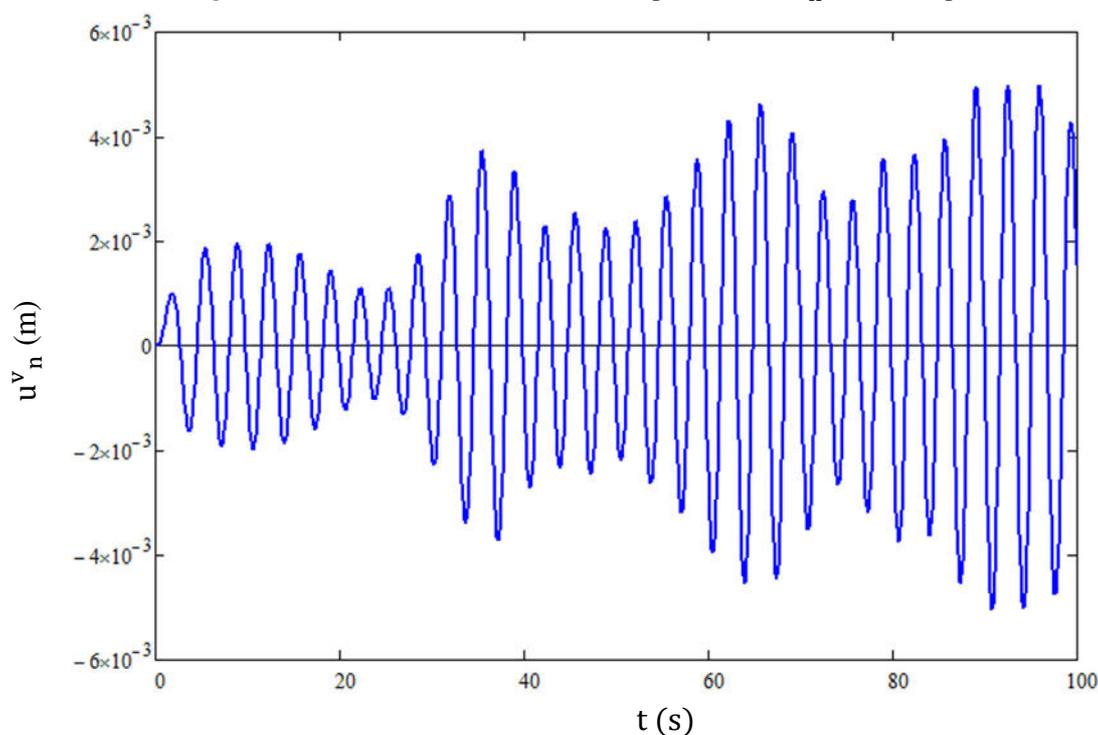
O vetor de amplitudes das forças transversais de sustentação $\{F_L\}$, que têm o efeito do desprendimento de vórtices de von Kármán, com $n = 8$, é dado por:

$$\{\mathbf{F}_L\} = \begin{pmatrix} 161.284 \\ 219.372 \\ 236.602 \\ 246.903 \\ 250.627 \\ 241.302 \\ 267.368 \\ 91.768 \end{pmatrix} \quad (143)$$

em unidade do SI.

Com a aplicação do referido vetor de forças tem-se a resposta da torre. Assim, na Figura 54 é plotado o gráfico de deslocamentos do topo da torre quando sujeita ao vetor de cargas transversais que simulam a ação do desprendimento de vórtices de Kármán.

Figura 54 – Gráfico de deslocamento no topo da torre u_n^V versus tempo.



Fonte: Autor (2018).

Percebe-se na Figura 54 que há um crescimento dos deslocamentos com tempo, mas isso ocorre até certo ponto (abaixo de 5 mm). Apesar da força aplicada ao topo ser ressonante, as demais forças aplicadas ao longo do comprimento da torre não o são; assim, há falta de sincronismo das forças excitadoras, o que impede que os deslocamentos cresçam infinitamente, como é o caso quando tem-se todas as forças aplicadas ressonantes. Adicionalmente, a intensidade das forças transversais é baixa quando comparada com as forças postas na direção do vento do item anterior, de maneira a ter-se baixa intensidade de deslocamentos no caso estudado nesta seção.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Conforme foi observado na análise de vibração forçada, os deslocamentos são elevados quando a torre é submetida a um carregamento ressonante; desta forma, percebe-se a necessidade de aparelhos de controle de vibração que façam com que as condições de projeto da torre sejam atendidas nas situações em que estas estejam submetidas a cargas dinâmicas. Tal análise será realizada no próximo capítulo desta tese, em que é proposto um projeto de absorvedor de vibração híbrido para a torre do aerogerador estudada.

5 CONTROLE DE VIBRAÇÃO DA TORRE

Neste capítulo apresenta-se, inicialmente, o desenvolvimento teórico do amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) proposto por Den Hartog para sistemas com dois graus de liberdade, sendo um destes necessário para descrever o movimento da massa principal (estrutura a ser controlada) e o segundo referente à massa secundária (massa do absorvedor de vibração). Em seguida, o amortecedor de vibração é aplicado ao topo da estrutura da torre e é sintonizado aos dois primeiros modos de vibração desta (modos de flexão), de forma a ter-se um sistema composto torre-absorvedor de vibração controlado passivamente. Continuadamente, são acrescentados ao sistema atuadores hidráulicos, de forma a converter o AMS em um Amortecedor de Massa Híbrido (AMH), que é aplicado ao topo da torre para obtenção de um sistema torre-absorvedor de vibração controlado hibridamente.

Posteriormente, são desenvolvidas as equações de movimento da estrutura do conjunto torre-absorvedor de vibração no espaço de estados, permitindo analisar matematicamente o sistema de controle proposto. Ademais, justifica-se a representação do sistema nos espaços de estados para resolução das equações de movimento em detrimento ao método da superposição modal, uma vez que este não é aplicável à torre equipada com absorvedor de vibração, pois a matriz de amortecimento (que contém um amortecimento localizado no topo) do conjunto torre-absorvedor de vibração não é, em geral, diagonalizada no mesmo referencial que as matrizes de massa e de rigidez do conjunto. Finalmente, foi aplicado à torre um Amortecedor de Massa Ativo (AMA) para avaliar o comportamento do sistema controlado por um absorvedor puramente ativo e ter-se informação do dispêndio de energia necessário para a realização do controle da torre por este tipo de absorvedor.

Na parte seguinte deste capítulo, são expostos os conceitos relacionados à teoria de controle (classificação, controlabilidade e observabilidade de sistemas de controle) e é apresentada a formulação para desacoplamento das equações de estados. Por conseguinte, é apresentada a teoria de controle ótimo do Regulador Quadrático Linear (em inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR) e um método de resolução da equação matricial de Ricatti resultante da aplicação do controle ótimo proximoamente citado. Por fim, apresentam-se os resultados obtidos dos sistemas de controle projetados, no qual são estabelecidos os valores de massa, rigidez e amortecimento do absorvedor de vibração e são expostas as matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento para certo nível de discretização da torre modelada com elementos finitos de barra, que foram utilizadas para construção das matrizes de estados e de entrada do sistema.

Em seguida, os resultados da análise modal do sistema torre-absorvedor de vibração são mostrados e as matrizes de ganho de realimentação de estados dos sistemas híbrido e ativo necessárias à implementação do LQR são apresentadas. Posteriormente, fez-se uma análise paramétrica em função da razão entre a massa do absorvedor e a massa total da estrutura. Também foram obtidas: as respostas da torre e do absorvedor sob a atuação de um vetor de forças ressonantes, com o 1º modo de vibração desta, para os sistemas sem controle, controlado passivamente e controlado hibridamente; bem como, informações a respeito do nível de controle de vibração obtido para torre e da intensidade de força de controle necessária. Na última parte do capítulo, detalha-se o modelo construtivo do aparelho de controle projetado neste capítulo.

5.1 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÃO

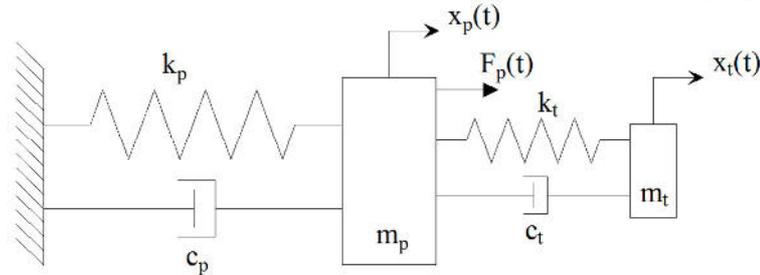
5.1.1 Absorvedor dinâmico de vibração passivo

Neste item será apresentada a conceituação matemática do intitulado Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS), ou em inglês, como é amplamente conhecido, *Tuned Mass Damper* (TMD). O AMS é um dispositivo que consiste em uma massa, uma mola (ou uma associação de molas) e um amortecedor que é fixado à estrutura principal com o objetivo de reduzir/controlar as respostas dinâmicas desta estrutura. A frequência do absorvedor é sintonizada a uma determinada frequência da estrutura principal de forma que quando esta frequência é excitada, o absorvedor vibre fora de fase em relação ao movimento da estrutura, dissipando a energia contida na estrutura principal por meio do movimento do absorvedor. Segundo Den Hartog (1972), o conceito de amortecedor de massa sintonizado foi inventado/aplicado por Frahm (1909), o qual utilizou um absorvedor de vibração não amortecido para reduzir a movimentação de cascos de navios. A teoria do AMS foi posteriormente apresentada em um artigo de Ormondroyd e Den Hartog (1928), que foi seguido por uma discussão detalhada dos parâmetros ótimos de sintonização e amortecimento do absorvedor, conforme descrito no livro original de vibrações mecânicas escrito por Den Hartog em 1940.

Na Figura 55 mostra-se um sistema dinâmico discreto massa-mola amortecido com dois graus de liberdade que representa a estrutura principal e o AMS anexo a esta. Os parâmetros de massa m_p , rigidez k_p , amortecimento c_p e força função do tempo $F_p(t)$ da estrutura principal são obtidos por meio da redução da estrutura a um sistema de um grau de

liberdade referente ao modo que se pretende controlar, ou seja, aqueles parâmetros passam a ser a massa, a rigidez, o amortecimento e a força modais. Os parâmetros do absorvedor (m_t massa, k_t rigidez e c_t amortecimento) serão determinados em função de seus requisitos de projeto (sintonização da frequência do absorvedor com uma requerida frequência da estrutura principal).

Figura 55 – Sistema massa-mola amortecido com absorvedor de vibração passivo.



Fonte: Autor (2018).

A equação de movimento do sistema da estrutura principal, que relaciona os deslocamentos $x_p(t)$ e $x_t(t)$, é dada por:

$$m_p \ddot{x}_p + c_p \dot{x}_p + k_p x_p - c_t (\dot{x}_t - \dot{x}_p) - k_t (x_t - x_p) = F_p \quad (144)$$

e a equação de movimento do absorvedor fica:

$$m_t \ddot{x}_t + c_t (\dot{x}_t - \dot{x}_p) + k_t (x_t - x_p) = 0 \quad (145)$$

A teoria do AMS foi aplicada a uma estrutura principal não amortecida. Então, sendo baixo o amortecimento estrutural da torre estudada nesta tese (razão de amortecimento de 0,8%), será desprezado o amortecimento do sistema principal. Desta forma, a equação de movimento da estrutura principal pode ser reescrita como:

$$m_p \ddot{x}_p + k_p x_p - c_t (\dot{x}_t - \dot{x}_p) - k_t (x_t - x_p) = F_p \quad (146)$$

Para resolução das equações acima, será utilizada a representação de números complexos para a excitação $F_p(t)$ e para soluções $x_p(t)$ e $x_t(t)$ da estrutura principal e do absorvedor, respectivamente. Será considerada, então, uma ação do seguinte tipo:

$$F_p(t) = F_0 [c \cos(\bar{\omega}t) + j \text{sen}(\bar{\omega}t)] = F_0 e^{j\bar{\omega}t} \quad (147)$$

em que: F_0 é a amplitude da excitação; $\bar{\omega}$ é a frequência angular do carregamento proposto; e , j representa a unidade imaginária de um número complexo. A resposta permanente (desprezando-se a parcela transiente) da estrutura principal fica:

$$x_p(t) = \vec{a}_p [c \cos(\bar{\omega}t) + j \text{sen}(\bar{\omega}t)] = \vec{a}_p e^{j\bar{\omega}t} \quad (148)$$

na qual, \vec{a}_p é uma quantidade vetorial complexa que representa a amplitude da resposta da estrutura principal. Já a resposta permanente do absorvedor fica:

$$x_t(t) = \vec{a}_t [c \cos(\bar{\omega}t) + j \text{sen}(\bar{\omega}t)] = \vec{a}_t e^{j\bar{\omega}t} \quad (149)$$

na qual, \vec{a}_t é uma quantidade vetorial complexa que representa a amplitude da resposta do absorvedor. Substituindo-se as expressões das soluções, de suas derivadas e a da excitação nas Eqs.(145) e (146) e resolvendo-se o sistema, obtêm-se:

$$\vec{a}_p = F_0 \frac{(k_t - m_t \bar{\omega}^2) + j\bar{\omega}c_t}{\left[(-m_p \bar{\omega}^2 + k_p)(-m_t \bar{\omega}^2 + k_t) - m_t \bar{\omega}^2 k_t\right] + j\bar{\omega}c_t(-m_p \bar{\omega}^2 - m_t \bar{\omega}^2 + k_p)} \quad (150)$$

para a amplitude complexa do sistema principal, e:

$$\vec{a}_t = F_0 \frac{k_t + j\bar{\omega}c_t}{\left[(-m_p \bar{\omega}^2 + k_p)(-m_t \bar{\omega}^2 + k_t) - m_t \bar{\omega}^2 k_t\right] + j\bar{\omega}c_t(-m_p \bar{\omega}^2 - m_t \bar{\omega}^2 + k_p)} \quad (151)$$

para amplitude complexa do absorvedor. Pondo as Eqs.(150) e (151) na forma complexa usual, multiplicando-as e dividindo-as pelo conjugado de seu respectivo denominador, e calculando os módulos das quantidades vetoriais complexas resultantes, obtêm-se:

$$a_p = F_0 \sqrt{\frac{(k_t - m_t \bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 c_t^2}{\left[(-m_p \bar{\omega}^2 + k_p)(-m_t \bar{\omega}^2 + k_t) - m_t \bar{\omega}^2 k_t\right]^2 + \bar{\omega}^2 c_t^2 (-m_p \bar{\omega}^2 - m_t \bar{\omega}^2 + k_p)^2}} \quad (152)$$

para amplitude do movimento da massa principal e:

$$a_t = F_0 \sqrt{\frac{k_t^2 + \bar{\omega}^2 c_t^2}{\left[(-m_p \bar{\omega}^2 + k_p)(-m_t \bar{\omega}^2 + k_t) - m_t \bar{\omega}^2 k_t\right]^2 + \bar{\omega}^2 c_t^2 (-m_p \bar{\omega}^2 - m_t \bar{\omega}^2 + k_p)^2}} \quad (153)$$

para amplitude do movimento da massa do absorvedor.

As duas últimas equações são comumente postas na forma adimensional a fim de generalizar o estudo e investigar os parâmetros ótimos de dimensionamento do absorvedor. Então, a amplitude do movimento da massa principal fica:

$$a_p = a_{est} \sqrt{\frac{(\beta^2 - f^2)^2 + (2 \zeta \beta)^2}{(2 \zeta \beta)^2 (\beta^2 - 1 + \mu \beta^2)^2 + [\mu f^2 \beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - f^2)]^2}} \quad (154)$$

e a amplitude do movimento da massa do absorvedor fica (RAO, 2008):

$$a_t = a_{est} \sqrt{\frac{f^4 + (2 \zeta \beta)^2}{(2 \zeta \beta)^2 (\beta^2 - 1 + \mu \beta^2)^2 + [\mu f^2 \beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - f^2)]^2}} \quad (155)$$

nas quais: μ é a razão entre a massa do absorvedor e massa modal da estrutura principal, conforme:

$$\mu = \frac{m_t}{m_p} \quad (156)$$

f é a razão entre as frequências angulares do absorvedor e da estrutura principal, conforme:

$$f = \frac{\omega_t}{\omega_p} \quad (157)$$

em que, ω_p e ω_t são dadas por:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}} ; \omega_t = \sqrt{\frac{k_t}{m_t}} \quad (158)$$

β é a razão entre a frequência angular da excitação e a frequência angular da estrutura principal, conforme:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_p} \quad (159)$$

a_{est} é a deflexão estática do sistema principal, dada por:

$$a_{est} = \frac{F_0}{k_p} \quad (160)$$

ζ é a razão de amortecimento do absorvedor de vibração, segundo:

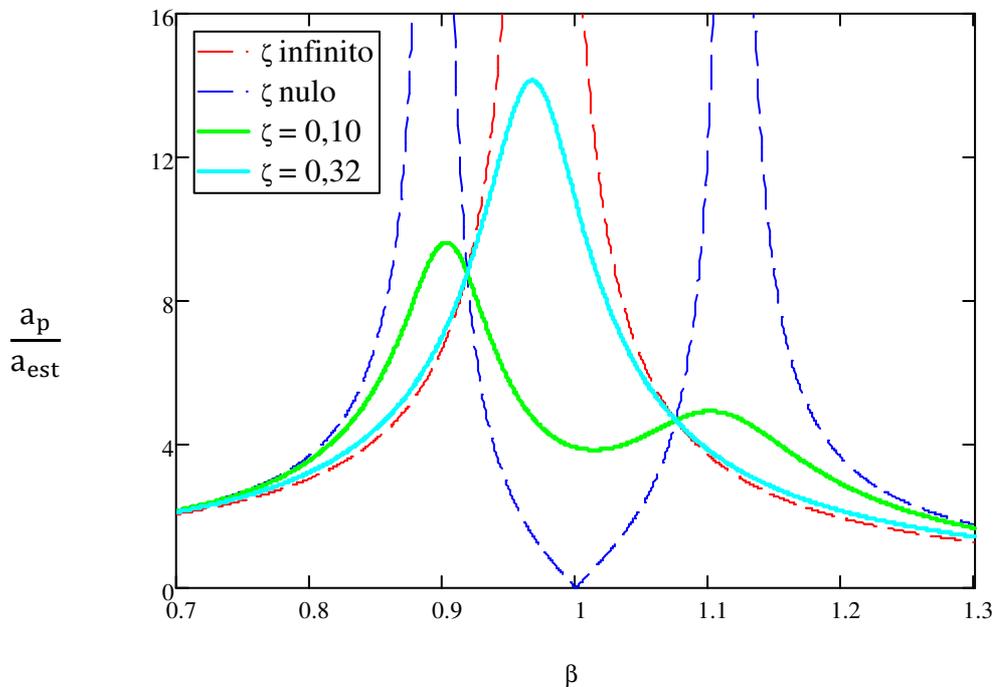
$$\zeta = \frac{c_t}{c_c} \quad (161)$$

na qual, c_c é uma grandeza especificada como “amortecimento crítico”, segundo:

$$c_c = 2 m_t \omega_p \quad (162)$$

Na Figura 56 mostra-se o gráfico da razão $\frac{a_p}{a_{est}}$ versus a razão entre frequências β para um sistema com $f = 1$, $\mu = 0,05$ e para alguns valores de razão de amortecimento.

Figura 56 – Gráfico de $\frac{a_p}{a_{est}}$ versus β .



Fonte: Autor (2018).

Com a adição do absorvedor ao sistema, pretende-se reduzir os picos de amplitude de movimento da massa principal para os valores mais baixos possíveis. Verifica-se na Figura 56 que os picos de amplitude da massa principal são infinitos quando o amortecimento do

absorvedor é nulo (ressonância) ou infinito. Entretanto, há um valor intermediário de amortecimento para o qual estes picos são mínimos.

Pode-se entender fisicamente o comportamento da amplitude da estrutura principal a partir da energia dissipada pelo amortecimento durante o movimento, ou seja, a energia convertida em calor. Quando a força de amortecimento executa um trabalho considerável, a amplitude da estrutura permanece pequena mesmo em uma situação de ressonância. Quando $\zeta = 0$, a força de amortecimento é nula e nenhum trabalho dissipativo é executado e a amplitude de ressonância é infinita. Já quando $\zeta \rightarrow \infty$, as massas principal e secundária estão ligadas (“coladas”) entre si, de forma que o deslocamento relativo é nulo e, conseqüentemente, nenhum trabalho é executado. Mais uma vez, comenta-se que haverá algum valor intermediário entre 0 e ∞ (chamado de “amortecimento ótimo”) para o qual o trabalho executado pela força de amortecimento é máximo e a amplitude da estrutura principal é baixa (DEN HARTOG, 1972).

Além do exposto acima, observa-se nas curvas da Figura 56, que todas se interceptam em dois pontos específicos que independem do nível de amortecimento. A curva mais favorável é aquela que passa com uma tangente horizontal pelo ponto mais alto dos dois pontos fixos em relação ao nível de amortecimento do absorvedor. Além disso, com a mudança da razão entre as frequências angulares do absorvedor e da estrutura principal f , tais pontos fixos podem ser deslocados para cima ou para baixo da curva de $\zeta = 0$. Portanto, o caso mais favorável é tal que, primeiro, por uma escolha adequada de f , os dois pontos fixos fiquem ajustados a iguais alturas (mesma amplitude) e, segundo, pela escolha apropriada de ζ , a curva se ajuste de maneira que uma tangente horizontal passe por um destes pontos.

Então, avaliando-se para que valores de β na Eq.(154), a amplitude da massa principal se torna independente de ζ , obtém-se:

$$f = \frac{1}{1 + \mu} \quad (163)$$

que é a modulação necessária aos pontos fixos para cada tamanho de absorvedor;

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \mu} \pm \frac{\sqrt{\mu}}{(1 + \mu)\sqrt{2 + \mu}} \quad (164)$$

que são os quadrados da razão entre a frequência da excitação e a frequência angular da estrutura principal nos pontos fixos para o absorvedor modulado;

$$a_p = a_{est} \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (165)$$

que corresponde a amplitude da estrutura principal para o absorvedor modulado nos pontos

fixos.

Finalmente, os valores dos amortecimentos ótimos podem ser calculados substituindo a Eq.(163) na Eq.(154), derivando-se a expressão resultante em relação a β e igualando-se a zero (para terem-se tangente horizontais nos pontos fixos). Logo, após longo trabalho algébrico, obtêm-se:

$$\zeta_{\text{ótimo}} = \sqrt{\frac{\mu \left(3 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right)}{8(1 + \mu)^3}} \quad (166)$$

como estes valores de amortecimento são ótimos em cada um dos pontos fixos, mas não em ambos simultaneamente, utiliza-se para projeto um valor médio conveniente dado por:

$$\zeta_{\text{ótimo}}^{\text{médio}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (5.167)$$

Assim, utilizando-se o valor de amortecimento acima se terá uma tangente quase horizontal em cada um dos pontos fixos das curvas da Figura 56.

O valor de rigidez do absorvedor modulado pode ser calculado substituindo-se a Eq.(157), a primeira das Eqs.(158) e a Eq.(156) na segunda das Eqs.(158):

$$k_t = f^2 k_p \mu \quad (168)$$

Portanto, com as equações desenvolvidas neste item, pode-se projetar um absorvedor dinâmico de vibração com parâmetros “ótimos” para controlar a resposta da massa principal da torre correspondente a um determinado modo de vibração desta.

5.1.2 Absorvedor dinâmico de vibração passivo aplicado à torre

Considerando a matriz de rigidez global da torre, conforme a utilizada na Eq.(42), a matriz de rigidez do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração $[\tilde{\mathbf{K}}]$ fica:

$$[\tilde{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{1,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{1,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{1,n-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{1,n} & 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{2,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{2,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{2,n-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{K}}_{n-1,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{n-1,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{n-1,n-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{n-1,n} & 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{n,1} & \tilde{\mathbf{K}}_{n,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{n,n-1} & \tilde{\mathbf{K}}_{n,n} + k_t & -k_t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_t & k_t \end{bmatrix} \quad (169)$$

ou seja, aumenta-se um grau de liberdade à estrutura original da torre que corresponde ao movimento de translação do absorvedor de vibração. Além disso, o AMS é preferivelmente alocado onde as deflexões da estrutura, neste caso a torre, são maiores; portanto, o movimento

do AMS está associado a um GL translacional adicionado próximo ao topo da torre.

A matriz de massa do conjunto torre-absorvedor de vibração é obtida incorporando-se a massa do absorvedor à matriz de massa da estrutura da torre utilizada na Eq.(65):

$$[\tilde{\mathbf{M}}] = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{1,1} & \tilde{M}_{1,2} & \cdots & \tilde{M}_{1,n-1} & \tilde{M}_{1,n} & 0 \\ \tilde{M}_{2,1} & \tilde{K}_{2,2} & \cdots & \tilde{M}_{2,n-1} & \tilde{M}_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{M}_{n-1,1} & \tilde{M}_{n-1,2} & \cdots & \tilde{M}_{n-1,n-1} & \tilde{M}_{n-1,n} & 0 \\ \tilde{M}_{n,1} & \tilde{M}_{n,2} & \cdots & \tilde{M}_{n,n-1} & \tilde{M}_{n,n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \quad (170)$$

De maneira semelhante, define-se a matriz de amortecimento $[\tilde{\mathbf{C}}]$ do sistema acoplado torre-absorvedor incorporando-se o amortecimento do absorvedor à matriz de amortecimento da torre definida pela Eq.(86):

$$[\tilde{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1,1} & \tilde{C}_{1,2} & \cdots & \tilde{C}_{1,n-1} & \tilde{C}_{1,n} & 0 \\ \tilde{C}_{2,1} & \tilde{C}_{2,2} & \cdots & \tilde{C}_{2,n-1} & \tilde{C}_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{n-1,1} & \tilde{C}_{n-1,2} & \cdots & \tilde{C}_{n-1,n-1} & \tilde{C}_{n-1,n} & 0 \\ \tilde{C}_{n,1} & \tilde{C}_{n,2} & \cdots & \tilde{C}_{n,n-1} & \tilde{C}_{n,n} + c_t & -c_t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_t & c_t \end{bmatrix} \quad (171)$$

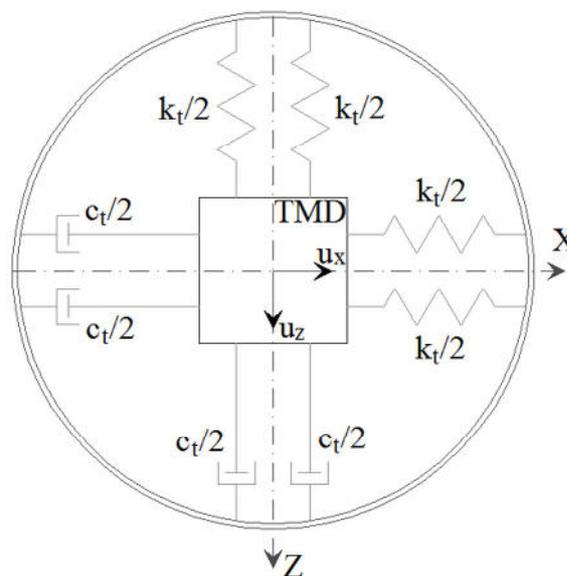
Os valores de projeto dos coeficientes de massa (m_t), de amortecimento (c_t) e de rigidez (k_t) do absorvedor de vibração são calculados considerando-se que o movimento da torre é regido, predominantemente, mas de maneira independente, pelos dois primeiros modos naturais de vibração (os dois primeiros modos flexionais que têm frequências de vibração praticamente iguais).

Assim, o absorvedor fica sintonizado, independentemente, às duas frequências naturais cujos modos definem movimentos segundo os dois primeiros modos de vibração da torre. Os valores ótimos dos coeficientes do absorvedor são obtidos, então, como se estes dois modos de vibração da torre representassem dois sistemas independentes de um grau de liberdade cada, de maneira a viabilizar a aplicação da teoria de Den Hartog (1972).

Portanto, mediante as equações de massa, rigidez e amortecimento modais (definidas no capítulo 4), obtêm-se os coeficientes correspondentes aos modos de vibração do sistema principal a serem controlados. Por fim, partindo-se da escolha da razão de massas μ , obtêm-se as rigidezes e amortecimentos do absorvedor segundo duas direções transversais à torre e perpendiculares entre si (Figura 57). Com os parâmetros ótimos do absorvedor determinados, aplica-se o mesmo a estrutura da torre para análise de desempenho do sistema de controle. Salienta-se que se o carregamento atuante não coincidir com a direção de nenhum dos eixos onde estão dispostas as rigidezes e os amortecimentos do absorvedor, ter-se-á a combinação

vetorial destes para a rigidez e amortecimento resultantes do controlador passivo em qualquer direção do plano da seção transversal da torre.

Figura 57 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração passivo de dois graus de liberdade.



Fonte: Autor (2018).

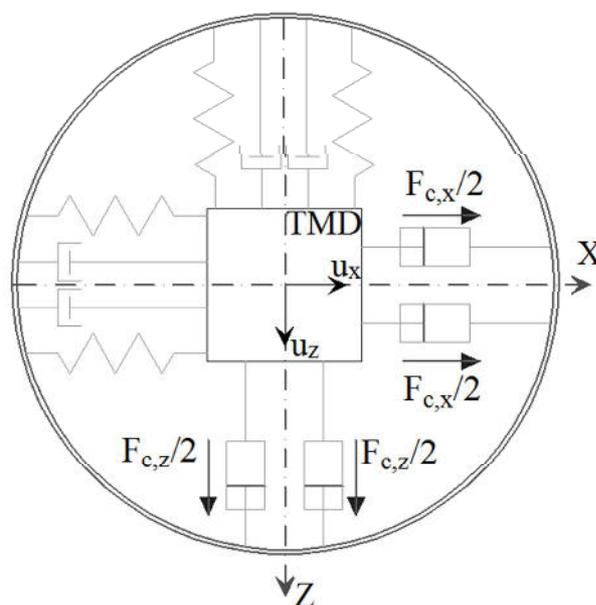
5.2 CONTROLE HÍBRIDO DE VIBRAÇÃO

5.2.1 Absorvedor dinâmico de vibração híbrido aplicado à torre

De maneira semelhante ao absorvedor dinâmico de vibração passivo de dois graus de liberdade translacionais, descrito no subitem 5.1.2, define-se o absorvedor de vibração híbrido de dois graus de liberdade translacionais (Figura 58). O sistema híbrido, neste caso, consiste em um sistema passivo provido de atuadores, que são responsáveis por produzir forças entre o topo da torre e o absorvedor dinâmico de vibração, com o objetivo de melhorar o desempenho do TMD puramente passivo. Tal sistema é chamado de Amortecedor de Massa Sintonizado Ativo (AMSA), em inglês, *Active Tuned Mass Damper* (ATMD); ou Amortecedor de Massa Híbrido (AMH), em inglês, *Hybrid Mass Damper* (HMD).

Este modelo é idealizado como parte integrante de um sistema de controle com realimentação completa de estados, o que significa relatar que os atuadores aplicam forças de magnitudes e sentidos pré-estabelecidos pelo controlador, geradas a partir dos sinais recebidos dos sensores posicionados de maneira a medir todas as variáveis de estados do modelo. Assim, para um modelo de torre com 8 EF de barra (que já apresenta boa precisão em relação à estrutura da torre excessivamente discretizada) são necessários posicionar os sensores a cada 15 m de comprimento de torre, por exemplo.

Figura 58 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração híbrido de dois graus de liberdade.



Fonte: Autor (2018).

5.2.2 Sistema no espaço de estados

Para trabalhar no campo da análise e projeto de sistemas de controle moderno, é conveniente representar as equações diferenciais que gerem o movimento de um sistema dinâmico no espaço dos estados. Este tipo de representação matemática, que é amplamente empregada em teorias de controle moderno (sistemas multivariáveis), permite reduzir a ordem de um sistema de equações diferenciais de ordem qualquer a um sistema com um número maior de equações diferenciais de primeira ordem, mediante uma mudança de variáveis. Além disso, a matriz de amortecimento do sistema acoplado torre-absorvedor dinâmico de vibração não pode, em geral, ser deduzida a partir do conceito de amortecimento proporcional descrito no capítulo anterior. Portanto, a representação das equações de movimento no espaço dos estados constitui um método alternativo à superposição modal e às técnicas numéricas de integração direta para resolução destas equações.

A análise de um sistema dinâmico (neste caso, a estrutura da torre) no espaço dos estados envolve três tipos de variáveis em sua modelagem, a saber: variáveis de estado, variáveis de entrada e variáveis de saída. As variáveis de estado de um sistema dinâmico são grandezas cujo conjunto de valores determina o estado do sistema (OGATA, 1997). As variáveis de entrada são grandezas relacionadas às solicitações externas ou as forças/momentos de controle aplicados à estrutura (também conhecidas como perturbações ou excitações exteriores). Já as variáveis de saída estão relacionadas com as variáveis de estado

ou de entrada susceptíveis de serem medidas, uma vez que, em muitas situações práticas, nem todos os estados ou entradas estão disponíveis para medida.

Considerando-se a equação de movimento dinâmico do conjunto estrutura-absorvedor dinâmico de vibração híbrido abaixo, proceder-se-á a passagem para o espaço dos estados.

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\tilde{\mathbf{C}}] \{\dot{\mathbf{D}}\} + [\tilde{\mathbf{K}}] \{\mathbf{D}\} = [\mathbf{J}]\{\tilde{\mathbf{F}}\} + [\mathbf{J}_c]\{\mathbf{F}_c\} \quad (172)$$

sendo: $[\tilde{\mathbf{M}}]$, $[\tilde{\mathbf{C}}]$ e $[\tilde{\mathbf{K}}]$ as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do conjunto estrutura-absorvedor, estas são matrizes consideradas constantes de ordem $(n+r) \times (n+r)$; $\{\mathbf{D}\}$ o vetor de deslocamentos (de ordem $n+r$) do sistema acoplado estrutura-absorvedor; $\{\tilde{\mathbf{F}}\}$ o vetor de solicitações externas de ordem m ; $[\mathbf{J}]$ é a matriz de posicionamento (mapeamento ou localização) das/dos forças/momentos externos de ordem $(n+r) \times m$, a qual é formada por zeros e uns que indicam em que graus de liberdade as/os forças/momentos atuam (considerando-se a situação mais geral em que nem todos o graus de liberdade estão submetidos à solicitações); $\{\mathbf{F}_c\}$ é o vetor de forças/momentos de controle de ordem r ; $[\mathbf{J}_c]$ é a matriz de posicionamento (mapeamento ou localização) das/dos forças/momentos de controle de ordem $(n+r) \times r$; n representa o número de graus de liberdade da estrutura sem absorvedor; m representa o número de solicitações externas aplicadas; r representa o número de forças/momentos de controle dos atuadores segundo os graus de liberdade do absorvedor de vibração; e, conseqüentemente, $n+r$ representa o número de graus de liberdade do conjunto estrutura-absorvedor dinâmico de vibração.

Considerando-se a condensação do sistema dinâmico (item 4.2.4) que representa o comportamento da torre, a Eq.(50) passa a ter a seguinte forma:

$$[\tilde{\mathbf{M}}_u]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\tilde{\mathbf{C}}_u]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\tilde{\mathbf{K}}_u]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{J}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{J}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (173)$$

em que: $[\tilde{\mathbf{M}}_u]$, $[\tilde{\mathbf{C}}_u]$ e $[\tilde{\mathbf{K}}_u]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez (de ordem $(n_c+r_c) \times (n_c+r_c)$) em relação aos graus de liberdade de translações horizontais do conjunto torre-absorvedor; $\{\mathbf{u}\}$ é o vetor de deslocamentos (de ordem n_c+r_c) transversais à torre do conjunto torre-absorvedor; $\{\tilde{\mathbf{F}}_u\}$ é o vetor de forças externas transversais à torre de ordem m_c ; $[\mathbf{J}]$ é a matriz de posicionamento das forças externas aplicadas de ordem $(n_c+r_c) \times m_c$, a qual, neste caso, será uma matriz identidade, pois as forças transversais atuam em todos os graus de liberdade de translação transversal do conjunto torre-absorvedor; $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$ é o vetor de forças de controle de ordem r_c ; $[\mathbf{J}_c]$ é a matriz de posicionamento das forças de controle (de ordem $n_c+r_c \times r_c$), que aloca as forças de controle, posicionando-as nos graus de liberdade de translações horizontais do conjunto torre-absorvedor; n_c representa o número de graus de liberdade de translações transversais à torre da estrutura sem absorvedor; m_c representa o

número de forças externas horizontais aplicadas; r_c representa o número de forças horizontais de controle do atuador segundo o grau de liberdade do absorvedor de vibração; e, conseqüentemente, n_c+r_c representa o número de graus de liberdade de translações horizontais do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração.

Na aplicação do absorvedor de vibração híbrido, considera-se que na massa do absorvedor não seja aplicada ação de forças externas, mas apenas as forças de controle impostas pelos atuadores. Assim, o vetor $\{\tilde{\mathbf{F}}_u\}$ tem a seguinte forma:

$$\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_{u,1} \\ \tilde{F}_{u,2} \\ \vdots \\ \tilde{F}_{u,n_c} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (174)$$

ou seja, será posta uma ($r_c = 1$) força de controle aplicada ao absorvedor de vibração, de maneira que:

$$\{\bar{\mathbf{F}}_c\} = \{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (175)$$

e a matriz $[\bar{\mathbf{J}}_c]$ é dada por:

$$[\bar{\mathbf{J}}_c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{(n_c+r_c-2) \times 1} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (176)$$

os termos 1 e -1 da matriz $[\bar{\mathbf{J}}_c]$ referem-se ao par de ação e reação da força de controle aplicada pelo atuador ao absorvedor e a respectiva reação na torre onde está fixado o atuador.

Para passagem do sistema dinâmico torre-absorvedor de vibração para o espaço de estados, isola-se o vetor $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ da Eq.(173) e considere-se o seguinte sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} \{\ddot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{0}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{I}]\{\dot{\mathbf{u}}\} \\ \{\dot{\mathbf{u}}\} = -[\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{K}}_u]\{\mathbf{u}\} - [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{C}}_u]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\bar{\mathbf{J}}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\bar{\mathbf{J}}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \end{cases} \quad (177)$$

definindo-se o vetor de variáveis de estado $\{\mathbf{X}\}$ (de ordem $2(n_c+r_c)$) dado por:

$$\{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\dot{\mathbf{u}}\} \end{Bmatrix} \quad (178)$$

obtem-se a EQUAÇÃO DE ESTADOS do sistema:

$$\{\dot{\mathbf{X}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} + [\mathbf{B}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{B}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (179)$$

na qual: $[\mathbf{A}]$ é a matriz de estado do sistema (de ordem $2(n_c+r_c) \times 2(n_c+r_c)$) torre-absorvedor de vibração híbrido, dada por:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \\ -[\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{K}}_u] & -[\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{C}}_u] \end{bmatrix} \quad (180)$$

$[\mathbf{B}]$ é a matriz de entrada das forças externas (de ordem $2(n_c+r_c) \times m_c$) aplicadas aos graus de liberdade de translação horizontal do referido sistema, dada por:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1} [\bar{\mathbf{J}}] \end{bmatrix} \quad (181)$$

e, $[\mathbf{B}_c]$ é a matriz de entrada das forças de controle (de ordem $2(n_c+r_c) \times r_c$) aplicadas ao absorvedor de vibração, dada por:

$$[\mathbf{B}_c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1} [\bar{\mathbf{J}}_c] \end{bmatrix} \quad (182)$$

Para representação completa do sistema no espaço de estados, tem-se ainda a equação de saída, que define o vetor de saída $\{\mathbf{Y}\}$ do sistema como uma combinação linear das variáveis de estado adicionada a uma combinação linear das variáveis de entrada de controle:

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{C}\mathbf{C}]\{\mathbf{X}\} + [\mathbf{D}\mathbf{D}]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (183)$$

na qual: $[\mathbf{C}\mathbf{C}]$ é a matriz de saída do sistema acoplado torre-absorvedor (de ordem $p_c \times 2(n_c+r_c)$); $[\mathbf{D}\mathbf{D}]$ é a matriz de transmissão direta do sistema (de ordem $p_c \times r_c$); e, p_c representa o número de variáveis de saída do sistema.

5.3 CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO

O absorvedor dinâmico de vibração ativo de dois graus de liberdade consiste em um sistema composto por uma massa guiada exclusivamente por um par de atuadores, sem a presença de molas nem de amortecedores (Figura 59). Desta forma, a partir do absorvedor de vibração híbrido, obtêm-se as matrizes de rigidez e de amortecimento do conjunto torre-absorvedor ativo atribuindo valores nulos aos parâmetros de rigidez e de amortecimento do absorvedor passivo (ou seja, fazendo-se $k_t = 0$ e $c_t = 0$). A matriz de massa permanece inalterada em relação ao sistema híbrido, dependendo apenas da razão de massas μ em estudo. Além disso, os vetores de forças externas e de controle têm o mesmo formato dos expostos nas Eqs.(174) e (175), respectivamente. Este tipo de sistema de controle ativo é chamado de Amortecedor de Massa Ativo (AMA), em inglês, *Active Mass Damper* (AMD).

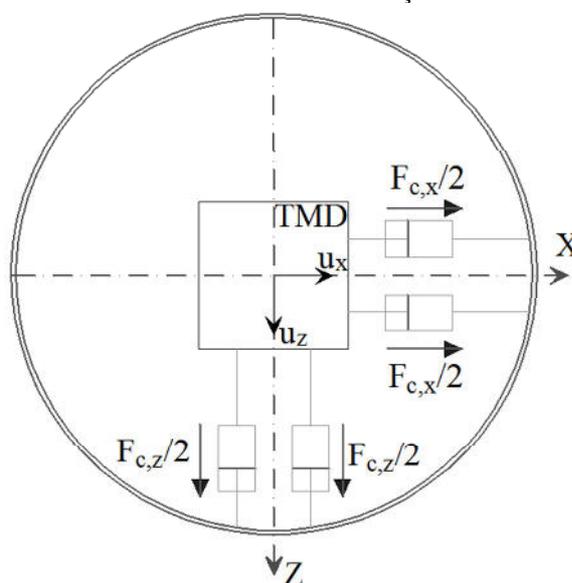
5.4 CONCEITOS DA TEORIA DE CONTROLE

5.4.1 Classificação do sistema de controle

Os conceitos relacionados à teoria de controle nesta tese serão aplicados a sistemas

considerados lineares e invariantes no tempo, ou seja, as equações diferenciais que descrevem o movimento da torre respeitam o princípio da superposição e têm coeficientes constantes no tempo.

Figura 59 – Esquema do absorvedor dinâmico de vibração ativo de dois graus de liberdade.



Fonte: Autor (2018).

5.4.2 Controlabilidade do sistema de controle

O estado de um sistema é dito controlável em um instante inicial, se for possível construir um sinal de controle não-restrito (qualquer) capaz de transferir o sistema deste estado inicial para um estado final qualquer num intervalo de tempo finito. Se todos os estados forem controláveis, então o sistema é dito completamente controlável. Ou seja, um sistema é completamente controlável se for possível transferir todos os seus estados, caso contrário haverá estados que não podem ser controlados. Entretanto, isso não quer dizer que o sistema de controle não possa ser utilizado, mas, se o sistema não for completamente controlável, haverá um ou mais modos de vibração sobre os quais não se pode exercer qualquer ação de controle (MOUTINHO, 2007).

Em termos físicos, a controlabilidade está relacionada com a posição da ação de controle na estrutura, pois depende essencialmente da matriz de entrada das solicitações de controle $[B_c]$. Ou seja, se uma determinada ação de controle estiver posicionada sobre um nó de um determinado modo de vibração, não será possível controlar este modo, uma vez que a força modal correspondente será sempre nula. Apesar disto, um sistema de controle que não é completamente controlável pode ainda ser utilizado, pois, por exemplo, pode ser uma situação na qual o modo não controlável não seja importante na dinâmica global do sistema (pode se

tratar de um modo com baixa contribuição da resposta total da estrutura). Portanto, a força de controle pode estar posicionada em relação às componentes modais máximas dos modos mais importantes (MOUTINHO, 2007).

Segundo Ogata (1997) e Junkins e Kim (1993), um sistema é de estados completamente controláveis se o posto da matriz de controlabilidade $[\mathbf{MC}]$ (de ordem $N \times N_{r_c}$), definida abaixo, for igual a N , ou seja, que contenha N vetores-coluna linearmente independentes.

$$[\mathbf{MC}] = [[\mathbf{B}_c] \quad [\mathbf{A}][\mathbf{B}_c] \quad \dots \quad [\mathbf{A}]^{N-1}[\mathbf{B}_c]] \quad (184)$$

sendo N o número de variáveis de estado do sistema em análise. Para o caso do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração modelado com graus de liberdade translacionais transversais à torre, N é igual a $2(n_c+r_c)$.

Para o caso de um sistema não ser completamente controlável, pode ser necessário saber qual(is) modo(s) de vibração não são controláveis e, principalmente, se este(s) são importantes para resposta da estrutura analisada. Graficamente, por meio da representação gráfica dos modos de vibração do sistema, pode-se identificar se os nós dos modos coincidem com a ação de controle. Mas uma abordagem numérica alternativa pode ser empregada para verificar a controlabilidade completa de estados do sistema, mediante uma transformação linear da equação de estado, conforme:

$$\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{PP}]\{\mathbf{Z}\} \quad (185)$$

aplicando-se na equação de estados:

$$[\mathbf{PP}]\{\dot{\mathbf{Z}}\} = [\mathbf{A}][\mathbf{PP}]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{B}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{B}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (186)$$

e pré-multiplicando-se por $[\mathbf{PP}]^{-1}$:

$$\{\dot{\mathbf{Z}}\} = [\mathbf{PP}]^{-1}[\mathbf{A}][\mathbf{PP}]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{PP}]^{-1}[\mathbf{B}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{PP}]^{-1}[\mathbf{B}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (187)$$

sendo a matriz $[\mathbf{PP}]$ a matriz modal da matriz de estados $[\mathbf{A}]$, a equação acima fica:

$$\{\dot{\mathbf{Z}}\} = [\mathbf{\Lambda}]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{B}']\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{B}_c']\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (188)$$

na qual, $[\mathbf{\Lambda}]$ é a matriz espectral da matriz de estados $[\mathbf{A}]$. Se os elementos de qualquer uma das linhas da matriz $[\mathbf{B}_c']$ (de ordem $N \times r_c$) forem todos nulos, então a variável de estado correspondente (relacionado à ordem do autovalor de $[\mathbf{\Lambda}]$) não pode ser controlada por nenhum dos componentes do vetor de controle $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$. Logo, a condição de controlabilidade de estados completa é: *se os autovetores de $[\mathbf{A}]$ forem todos distintos, então o sistema é de estados completamente controláveis se, e somente se, nenhuma das linhas de $[\mathbf{B}_c']$ for toda constituída de elementos nulos.* A representação do sistema segundo a Eq.(188) é chamada de representação modal da equação de estados, pois permite identificar diretamente os modos

controláveis e não controláveis.

Outro conceito importante refere-se à controlabilidade de saída, pois a controlabilidade de estados completa não é condição necessária nem suficiente para se controlar o sinal de saída (OGATA, 1997). Assim, um sistema é dito com saída completamente controlável se for possível, por meio do vetor de controle $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$ não-restrito, transferir qualquer saída $\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}(t_0)\}$ para qualquer outro valor de saída $\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}(t_1)\}$ num intervalo de tempo finito.

Um sistema é de saídas completamente controláveis se o posto da matriz de controlabilidade de saída $[\mathbf{CS}]$ (de ordem $p_c \times (N+1) r_c$), definida abaixo, for igual a p_c .

$$[\mathbf{CS}] = [[\mathbf{CC}][\mathbf{B}_c] \quad [\mathbf{CC}][\mathbf{A}][\mathbf{B}_c] \quad [\mathbf{CC}][\mathbf{A}]^2[\mathbf{B}_c] \quad \dots \quad [\mathbf{CC}][\mathbf{A}]^{N-1}[\mathbf{B}_c] \quad [\mathbf{DD}]] \quad (189)$$

5.4.3 Observabilidade do sistema de controle

O conceito de observabilidade de um sistema está relacionado ao conceito de controlabilidade na perspectiva de observação da resposta dos modos de vibração, e não na perspectiva de controle destes. Um sistema é dito completamente observável se qualquer estado pode ser determinado a partir da observação de uma saída num instante posterior qualquer durante um intervalo de tempo finito. Assim, um sistema será completamente observável se for possível observar todos os seus estados, caso contrário, não será completamente observável, ou seja, haverá modos de vibração que não contribuem para a saída do sistema definida pela matriz de saída $[\mathbf{CC}]$. Desta forma, se um sensor estiver posicionado sobre um nó de um determinado modo de vibração, será impossível medir a contribuição deste modo para a variável de saída associada a este ponto (MOUTINHO, 2007).

Segundo Ogata (1997), o conceito de observabilidade é muito importante, pois, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por retroação de estado reside no fato de algumas variáveis de estado não serem acessíveis diretamente para medição. Necessita-se, então, estimar as variáveis de estado não-mensuráveis, mas isso só possível se, e somente se, o sistema for completamente observável. De outra maneira, o fato de um sistema ser completamente observável não quer dizer que todos os estados são efetivamente observados, mas que os estados eventualmente não observados podem ser estimados a partir de relações que os vinculam com os estados que são diretamente medidos. Corroborando com isso, a modelagem de uma estrutura comum envolve, em geral, um elevado número de graus de liberdade, tornando-se impraticável medir integralmente o vetor de estados do sistema. Entretanto, a obtenção do vetor de estados é uma tarefa indispensável para determinação da

ação de controle. Neste caso, recorre-se a um estimador de estados, o qual, baseando-se nas medições feitas num modelo com número limitado de graus de liberdade, o vetor de estado completo é estimado.

Para tentar reduzir o número de graus de liberdade a medir, utiliza-se uma discretização menos refinada do sistema estrutural (MOUTINHO, 2007). Embora esta operação seja necessária, deve-se ter cuidado com a utilização de um modelo numérico de ordem reduzida, pois isto pode aumentar a vulnerabilidade do sistema à ocorrência de *spillover*, que é um fenómeno desencadeado devido à insuficiente discretização do modelo, uma vez que os modos de vibração de ordem mais elevada são ignorados na modelagem numérica.

Segundo Ogata (1997) e Junkins e Kim (1993), um sistema é completamente observável se o posto da matriz de observabilidade $[\mathbf{MO}]$ (de ordem $N_{pc} \times N$), definida abaixo, for igual a N , ou seja, que contenha N vetores-linha linearmente independentes.

$$[\mathbf{MO}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{CC}] \\ [\mathbf{CC}][\mathbf{A}] \\ \vdots \\ [\mathbf{CC}][\mathbf{A}]^{N-1} \end{bmatrix} \quad (190)$$

Uma abordagem numérica alternativa pode ser empregada para verificar a observabilidade completa do sistema, mediante a transformação linear da Eq.(185) aplicada à equação de saída do sistema:

$$\{\mathbf{YY}\} = [\mathbf{CC}][\mathbf{PP}]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{DD}]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (191)$$

ou na seguinte forma:

$$\{\mathbf{YY}\} = [\mathbf{CC}']\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{DD}]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (192)$$

Se os elementos de qualquer uma das colunas da matriz $[\mathbf{CC}']$ (de ordem $p_c \times N$) forem todos nulos, então a variável de estado correspondente não aparecerá na equação de saída e, por conseguinte, não poderá ser determinada a partir das observações de $\{\mathbf{YY}(t)\}$. Logo, a condição de observabilidade completa é: *se os autovetores de $[\mathbf{A}]$ forem todos distintos, então o sistema é de completamente observável se, e somente se, nenhuma das colunas de $[\mathbf{CC}']$ for toda constituída de elementos nulos.*

5.4.4 Resolução das equações de estado (desacoplamento)

Considerando-se a representação modal da equação de estados sem a atuação de forças de controle ($\{\bar{\mathbf{F}}_c\} = \{\mathbf{0}\}$):

$$\{\dot{\mathbf{Z}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{Z}\} + [\mathbf{B}']\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} \quad (193)$$

pode-se proceder a obtenção da resposta da estrutura mediante a superposição das solução das N equações de estado acima no referencial que as deixam desacopladas; ou seja, o problema reduz-se a resolução de N equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Na forma indicial, a equação de estados acima fica:

$$\dot{Z}_{ii}(t) = \lambda_{ii} Z_{ii}(t) + \sum_{k=1}^{m_c} B'_{ii,k} \tilde{F}_{u_k}(t) \quad (194)$$

na qual: ii é o índice das variáveis de estado (deslocamentos e velocidades dos graus de liberdade translacionais transversais à torre) que variam de 1 a N; k é o índice das variáveis de entrada (forças externas transversais à torre) que variam de 1 a m_c . Sendo também a matriz espectral $[\mathbf{A}]$ da matriz de estados $[\mathbf{A}]$ dada por:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (195)$$

o vetor de entrada (considerando-se solicitações harmônicas aplicadas à torre) dado por:

$$\tilde{F}_{u_k}(t) = \tilde{F}_{1_k} \cos(\bar{\omega}_k t) + \tilde{F}_{2_k} \sin(\bar{\omega}_k t) \quad (196)$$

na qual: \tilde{F}_{1_k} e \tilde{F}_{2_k} são as amplitudes cossenoidal e senoidal da ação, respectivamente; e, $\bar{\omega}$ é a frequência do carregamento proposto; e lembrando-se da solução de uma EDO de 1ª ordem:

$$Z_{ii}(t) = \frac{1}{e^{-\lambda_{ii}t}} \left\{ \int e^{-\lambda_{ii}t} \left[\sum_{k=1}^{m_c} B'_{ii,k} (\tilde{F}_{1_k} \cos(\bar{\omega}_k t) + \tilde{F}_{2_k} \sin(\bar{\omega}_k t)) \right] dt + C_{ii} \right\} \quad (197)$$

que após a resolução das integrais fica:

$$Z_{ii}(t) = \frac{1}{e^{-\lambda_{ii}t}} \left\{ \sum_{k=1}^{m_c} \frac{e^{-\lambda_{ii}t}}{\bar{\omega}_k^2 + \lambda_{ii}^2} [B'_{ii,k} \tilde{F}_{1_k} (\bar{\omega}_k \sin(\bar{\omega}_k t) - \lambda_{ii} \cos(\bar{\omega}_k t)) + B'_{ii,k} \tilde{F}_{2_k} (-\bar{\omega}_k \cos(\bar{\omega}_k t) - \lambda_{ii} \sin(\bar{\omega}_k t))] + C_{ii} \right\} \quad (198)$$

nas quais, C_{ii} é o vetor de constantes de integração determinado a partir das condições iniciais $Z_{ii}(t_0) = Z_{t_0ii}$ em um instante de tempo qualquer t_0 , conforme:

$$C_{ii} = e^{-\lambda_{ii}t} \left\{ Z_{t_0ii} - \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{\bar{\omega}_k^2 + \lambda_{ii}^2} [B'_{ii,k} \tilde{F}_{1_k} (\bar{\omega}_k \sin(\bar{\omega}_k t) - \lambda_{ii} \cos(\bar{\omega}_k t)) + B'_{ii,k} \tilde{F}_{2_k} (-\bar{\omega}_k \cos(\bar{\omega}_k t) - \lambda_{ii} \sin(\bar{\omega}_k t))] \right\} \quad (199)$$

e as condições iniciais $\{\mathbf{Z}_{t_0}\}$, no referencial que desacopla as equações de estado, são

definidas a partir das condições iniciais $\{\mathbf{X}_{t_0}\}$, no referencial original da estrutura, segundo:

$$\{\mathbf{Z}_{t_0}\} = [\mathbf{PP}]^{-1} \{\mathbf{X}_{t_0}\} \quad (200)$$

5.5 CONTROLE ÓTIMO

5.5.1 Regulador quadrático linear

Nos sistemas de controle ativo e híbrido é necessário determinar os valores das variáveis de entrada que serão aplicadas pelos atuadores. Desta forma, será considerado neste item, o projeto de sistemas de controle estáveis baseados em índices de desempenho (ou função de custo) quadráticos. Seja o sistema de controle cuja equação de estados é:

$$\{\dot{\mathbf{X}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} + [\mathbf{B}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} + [\mathbf{B}_c]\{\bar{\mathbf{F}}_c\} \quad (201)$$

pretende-se escolher o vetor de controle $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$ tal que um determinado índice de desempenho seja minimizado. Um índice de desempenho quadrático J , onde os limites de integração sejam 0 e ∞ , tal como:

$$J = \int_0^{\infty} L(\{\mathbf{X}\}, \{\bar{\mathbf{F}}_c\}) dt \quad (202)$$

sendo $L(\{\mathbf{X}\}, \{\bar{\mathbf{F}}_c\})$ uma função quadrática (para sistemas com vetores e matrizes reais) ou uma função hermitiana (para sistemas com vetores e matrizes complexos) de $\{\mathbf{X}\}$ e de $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$, conduz a leis de controle lineares (MEIROVITCH, 1990), tal que:

$$\{\bar{\mathbf{F}}_c\} = -[\mathbf{KG}]\{\mathbf{X}\} \quad (203)$$

sendo $[\mathbf{KG}]$ chamada de matriz de ganho (de ordem $r_c \times N$) do vetor de controle ótimo. Assim, o projeto de sistemas de controle ótimo e de sistemas reguladores ótimos baseados em índices de desempenho quadráticos se reduz à determinação dos elementos da matriz $[\mathbf{KG}]$.

O índice de desempenho para o sistema de controle proposto será dado, portanto, por:

$$J = \int_0^{\infty} (\{\mathbf{X}\}^*[\mathbf{Q}]\{\mathbf{X}\} + \{\bar{\mathbf{F}}_c\}^*[\mathbf{R}]\{\bar{\mathbf{F}}_c\}) dt \quad (204)$$

onde: $[\mathbf{Q}]$ é a matriz de ponderação de estados, que é hermitiana (para sistemas com matrizes e vetores complexos) ou real simétrica (para sistemas com matrizes e vetores reais), definida positiva (ou semidefinida positiva) e de ordem $N \times N$; $[\mathbf{R}]$ é a matriz de ponderação de controle, que hermitiana ou real simétrica, definida positiva e de ordem $r_c \times r_c$; e, $\{\bar{\mathbf{F}}_c\}$ é o vetor de forças de controle sem restrições, a não ser aquelas de cunho prático. Lembra-se que uma matriz hermitiana ou autoadjunta é aquela em que sua transposta conjugada

(representada pelo símbolo $[\]^*$) é igual a ela mesma. Considerando-se, finalmente, que as matrizes e vetores aqui tratados são reais, a Eq.(204) fica:

$$J = \int_0^{\infty} (\{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{Q}] \{\mathbf{X}\} + \{\bar{\mathbf{F}}_c\}^T [\mathbf{R}] \{\bar{\mathbf{F}}_c\}) dt \quad (205)$$

Note-se que o segundo termo do lado direito da equação acima contabiliza o dispêndio de energia dos sinais de controle, que será um fator determinante à operacionalização do sistema de controle, pois a intensidade (energia dispendida) da força de controle a ser aplicada será limitada pela capacidade dos atuadores.

Para resolver o problema de otimização, substitui-se a Eq.(203) na Eq.(201):

$$\{\dot{\mathbf{X}}\} = ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}])\{\mathbf{X}\} + [\mathbf{B}]\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} \quad (206)$$

Além disso, será admitido que a matriz $([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}])$ seja estável, ou seja, que seus autovalores tenham partes reais negativas; e, far-se-á a substituição da Eq.(203) na Eq.(205):

$$J = \int_0^{\infty} \{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{R}] [\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} dt \quad (207)$$

Segundo Ogata (1997), utiliza-se a abordagem de Lyapunov para resolver este problema de otimização, em que:

$$\{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{R}] [\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} = -\frac{d}{dt} (\{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}\}) \quad (208)$$

onde $[\mathbf{P}]$ é um matriz real simétrica definida positiva. Desenvolvendo-se a equação acima:

$$\{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{R}] [\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} = -\{\dot{\mathbf{X}}\}^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}\} - \{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{P}] \{\dot{\mathbf{X}}\} \quad (209)$$

e substituindo-se a Eq.(206) sem a consideração do vetor de forças externas, que podem ser associadas a distúrbios externos atuantes no sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{R}] [\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} &= \\ &= -\{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}])^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}\} - \{\mathbf{X}\}^T [\mathbf{P}] ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} = \\ &= -\{\mathbf{X}\}^T ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}])^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}] ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]) \{\mathbf{X}\} \end{aligned} \quad (210)$$

Comparando-se ambos os membros e observando-se que esta equação deve ser verdadeira para qualquer $\{\mathbf{X}\}$:

$$([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}])^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}] ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]) = -([\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{R}] [\mathbf{K}\mathbf{G}]) \quad (211)$$

Pelo segundo método de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), se $[\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]$ é uma matriz estável, então existe uma matriz $[\mathbf{P}]$ definida positiva que satisfaz a Eq.(211). Por conseguinte, o procedimento a adotar é determinar os elementos de $[\mathbf{P}]$ e verificar se esta resulta definida positiva.

Note-se que mais de uma matriz $[\mathbf{P}]$ pode satisfazer a Eq.(211), mas se o sistema é estável, existe sempre uma matriz que é positiva definida e satisfaz a equação. Outras

matrizes $[\mathbf{P}]$, que podem satisfazer a Eq.(211), não são definidas positivas e devem ser descartadas.

Retomando-se a expressão do índice de desempenho Eq.(207) e utilizando-se a Eq.(208), obtém-se:

$$J = -\{\mathbf{X}(t \rightarrow \infty)\}^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}(t \rightarrow \infty)\} + \{\mathbf{X}(0)\}^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}(0)\} \quad (212)$$

Como se admite que todos os autovalores de $[\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]$ têm parte real negativa, tem-se que $\{\mathbf{X}(t \rightarrow \infty)\} \rightarrow \{\mathbf{0}\}$ pelo segundo método de estabilidade de sistemas dinâmicos de Lyapunov (estabilidade assintótica):

$$J = \{\mathbf{X}(0)\}^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}(0)\} \quad (213)$$

Assim, o índice de desempenho pode ser obtido em termos do estado inicial $\{\mathbf{X}(0)\}$ e da matriz $[\mathbf{P}]$.

Para obter a solução do problema de controle ótimo quadrático, escreve-se a matriz $[\mathbf{R}]$, previamente estabelecida como simétrica definida positiva, da seguinte forma:

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{T}] \quad (214)$$

onde $[\mathbf{T}]$ é uma matriz não-singular. Então, a Eq.(211) pode ser reescrita como:

$$([\mathbf{A}]^T - [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{B}_c]^T) [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}] ([\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{K}\mathbf{G}]) + [\mathbf{Q}] + [\mathbf{K}\mathbf{G}]^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{K}\mathbf{G}] = [\mathbf{0}] \quad (215)$$

e pode ser reescrita sob a forma:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}] [\mathbf{A}] + [[\mathbf{T}][\mathbf{K}\mathbf{G}] - ([\mathbf{T}]^T)^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}]]^T [[\mathbf{T}][\mathbf{K}\mathbf{G}] - ([\mathbf{T}]^T)^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}]] - \\ & - [\mathbf{P}] [\mathbf{B}_c] [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{Q}] = [\mathbf{0}] \end{aligned} \quad (216)$$

A minimização de J em relação à $[\mathbf{K}\mathbf{G}]$ requer a minimização da forma quadrática:

$$\{\mathbf{X}\}^T [[\mathbf{T}][\mathbf{K}\mathbf{G}] - ([\mathbf{T}]^T)^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}]]^T [[\mathbf{T}][\mathbf{K}\mathbf{G}] - ([\mathbf{T}]^T)^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}]] \{\mathbf{X}\} \quad (217)$$

que é uma função de $[\mathbf{K}\mathbf{G}]$. Sendo esta última expressão não-negativa, o mínimo ocorre quando ela anula-se:

$$[\mathbf{T}][\mathbf{K}\mathbf{G}] - ([\mathbf{T}]^T)^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}] = [\mathbf{0}] \quad (218)$$

logo:

$$[\mathbf{K}\mathbf{G}] = [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}] \quad (219)$$

que é a matriz de ganho ótima requerida. Então, a lei de controle ótimo para o problema de controle ótimo quadrático, quando a função de custo é dada pela Eq.(204), é linear e dada por:

$$\{\bar{\mathbf{F}}_c\} = -[\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}] \{\mathbf{X}\} \quad (220)$$

A matriz $[\mathbf{P}]$ na expressão acima deve satisfazer a seguinte expressão baseada na Eq.(216):

$$[\mathbf{A}]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{P}] [\mathbf{A}] - [\mathbf{P}] [\mathbf{B}_c] [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{P}] + [\mathbf{Q}] = [\mathbf{0}] \quad (221)$$

que é chamada de EQUAÇÃO MATRICIAL DE RICATTI.

Em suma, as etapas de projeto ótimo são: **1)** resolver a equação matricial de Ricatti para a matriz $[P]$, que deve ser positiva definida para que o sistema seja estável, ou seja, que a matriz $[A] - [B_c][KG]$ tenha autovalores com parte real negativa; **2)** substituir a matriz $[P]$ obtida na etapa anterior na Eq.(219).

Assim, seguem-se os seguintes passos para obtenção da resposta da torre sob controle passivo ou ativo: **1)** altera-se a matriz de estados mediante a lei de controle ótimo linear; **2)** tomam-se as forças externas aplicadas à torre; **3)** recorre-se ao item de resolução das equações de estados por desacoplamento destas.

5.5.2 Resolução da equação de Ricatti

Para resolução da equação matricial de Ricatti pelo processo de diagonalização (KWAKERNAAK; SIVAN, 1972), considera-se a matriz $[M]$ (de ordem $2N \times 2N$), conforme:

$$[M] = \begin{bmatrix} [A] & -[S] \\ -[Q] & -[A]^T \end{bmatrix} \quad (222)$$

na qual, a matriz $[S]$ é dada por:

$$[S] = [B_c][R]^{-1}[B_c]^T \quad (223)$$

A matriz $[M]$ tem as seguintes propriedades: **1)** se λ_{M_i} é um autovalor de $[M]$, existe um autovalor λ_{M_j} de $[M]$, tal que $\lambda_{M_j} = -\lambda_{M_i}$, com $i, j = 1, 2, \dots, 2N$; **2)** $[M]$ não tem autovalores imaginários puros; **3)** os N autovalores de $[M]$ com partes reais negativas são iguais aos autovalores de $[A] - [S][P]$.

Seja a matriz $[W]$ (de ordem $2N \times 2N$) a modal de $[M]$:

$$[W] = \begin{bmatrix} [W_{11}] & [W_{12}] \\ [W_{21}] & [W_{22}] \end{bmatrix} \quad (224)$$

em que $[W_{11}]$, $[W_{12}]$, $[W_{21}]$ e $[W_{22}]$ são submatrizes de ordem $N \times N$. A solução da equação matricial de Ricatti é dada por:

$$[P] = [W_{22}][W_{12}]^{-1} \quad (225)$$

Esta é uma solução da equação de Ricatti para qualquer ordem de arrumação dos autovetores em $[W]$. Desse modo, a equação de Ricatti tem um número muito grande de soluções. Entretanto, para o problema de controle ótimo, só a solução positiva definida, que é única, satisfaz. Para obter a solução positiva definida, os autovetores devem ser arranjados em $[W]$ de modo que os autovalores de $[J_{22}]$ tenham partes reais negativas; sendo $[J]$ a matriz

espectral de $[\mathbf{M}]$, conforme:

$$[\mathbf{J}] = [\mathbf{W}]^{-1}[\mathbf{M}][\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_{11}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{J}_{22}] \end{bmatrix} \quad (226)$$

na qual, $[\mathbf{J}_{11}]$ e $[\mathbf{J}_{22}]$ são matrizes diagonais de ordem $N \times N$.

5.6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.6.1 Controle passivo de vibração da torre

Com o objetivo de projetar um absorvedor dinâmico de vibração com dois graus de liberdade que seja capaz de controlar as oscilações segundo as direções laterais X e Z, assume-se que o movimento segundo a direção X da torre seja regido pelo primeiro modo de vibração (1º modo de flexão no plano XY) e que o movimento segundo a direção Z seja regido pelo segundo modo (1º modo de flexão no plano YZ). Tal fato é possível por se tratar de uma estrutura simétrica, resultando em 1ºs modos de vibração (flexão XY e YZ) não acoplados. Assim, o absorvedor é projetado para controlar diretamente os dois primeiros modos flexionais de vibração da torre, mas tendo sua utilidade direcionada ao controle da torre como um todo, uma vez que, a composição vetorial das rigidezes e amortecimentos do absorvedor permite o controle em qualquer direção transversal à torre. Além disso, exclusivamente para fins de dimensionamento do absorvedor, desprezam-se os amortecimentos modais associados aos 1ºs modos de vibração da torre, de maneira a possibilitar a aplicação da teoria de Den Hartog descrita no item 5.1.1.

Os valores das massas e rigidezes modais (Tabela 6), referentes aos 1ºs modos de vibração da torre, são obtidos mediante as Eqs.(81) e (82), respectivamente, utilizando-se os modos de vibração associados. Tais valores são os mesmos para ambos os 1ºs modos flexionais, pois a torre tem seções transversais axissimétricas e não se tem a diferença desses modos em função da disposição da nacele, quando a estrutura é modelada com EF de barra.

Tabela 6 – Massa e rigidez modais referente aos 1º e 2º modos de vibração gerais da torre.

| Parâmetros modais | Valores | Unidades no SI |
|-------------------|----------------------|----------------|
| Massa | $1,37263 \cdot 10^5$ | kg |
| Rigidez | $4,79351 \cdot 10^5$ | N/m |

Fonte: Autor (2018).

Para o projeto do absorvedor, foi atribuído um valor a massa secundária, igual a 3% da massa total da estrutura (que é igual a $8,534 \cdot 10^5$ kg), diferentemente do que alguns autores sugerem que é de 0,5 a 1% (HOUSNER et al., 1997), pois trata-se uma estrutura de grande porte onde é necessária uma percentagem de massa maior para atenuar as vibrações da torre

sem que haja uma amplitude de deslocamento exacerbada do absorvedor dinâmico de vibração, uma vez que há limitação de espaços no topo da torre (o diâmetro do topo do modelo analisado é de 3,5 m). Assim, se ajustou o valor da massa secundária, de forma a diminuir a amplitude de vibração do aparelho de controle (absorvedor de vibração) e fazer com que esta amplitude se limitasse ao espaço dentro da estrutura tubular da torre. Com os valores da massa modal da torre (Tabela 6) e a da massa do absorvedor, determinam-se, utilizando as Eqs.(156) e (163), os parâmetros μ (18,651%) e f (0,843), respectivamente. Aplicando tais valores em conjunto com a rigidez modal (Tabela 6) à Eq.(168), as rigidezes requeridas para o absorvedor são obtidas, segundo as direções laterais X e Z. Por fim, calculam-se os valores das constantes de amortecimento, mediante as Eqs.(161), (162) e (5.167), segundo as direções laterais X e Z. Na Tabela 7 apresentam-se os valores dos parâmetros do absorvedor de vibração, que são iguais para ambas as direções X e Z.

Tabela 7 – Parâmetros do absorvedor dinâmico de vibração para as direções laterais X e Z.

| Parâmetros | Valores | Unidades no SI |
|---------------|----------------------|----------------|
| Massa | $2,56014 \cdot 10^4$ | kg |
| Rigidez | $6,35067 \cdot 10^4$ | N/m |
| Amortecimento | $1,95797 \cdot 10^4$ | kg/s |

Fonte: Autor (2018).

Para a massa do absorvedor, considera-se que o valor de 25601,4 kg é composto por uma caixa de aço, preenchida por chumbo, com lados iguais a 1,00 m e altura igual a 2,25 m. Foi utilizado o chumbo como material de preenchimento devido ao sua elevada massa específica (11340 kg/m^3) e, conseqüente, redução do volume da massa do aparelho.

Determinados os parâmetros do absorvedor de vibração, montam-se, a seguir, as matrizes de rigidez, de massa e de amortecimento do sistema acoplado torre-absorvedor de vibração (APÊNDICE B). Mais uma vez, devido à extensão das matrizes, só serão apresentadas abaixo as matrizes condensadas aos graus de liberdade dinâmicos (deslocamentos transversais à torre) com $n_c = 8$, conforme Eqs.(227), (228) e (229):

$$[\tilde{\mathbf{K}}_u] = \begin{pmatrix} 2.47 \times 10^5 & -1.31 \times 10^5 & 3.47 \times 10^4 & -2.9 \times 10^3 & 286.01 & -32.79 & 3.88 & -0.42 & 0 \\ -1.31 \times 10^5 & 1.69 \times 10^5 & -1.04 \times 10^5 & 2.84 \times 10^4 & -2.8 \times 10^3 & 321.11 & -38.01 & 4.08 & 0 \\ 3.47 \times 10^4 & -1.04 \times 10^5 & 1.33 \times 10^5 & -8.22 \times 10^4 & 2.33 \times 10^4 & -2.67 \times 10^3 & 316.65 & -34.02 & 0 \\ -2.9 \times 10^3 & 2.84 \times 10^4 & -8.22 \times 10^4 & 1.05 \times 10^5 & -6.58 \times 10^4 & 1.92 \times 10^4 & -2.27 \times 10^3 & 243.56 & 0 \\ 286.01 & -2.8 \times 10^3 & 2.33 \times 10^4 & -6.58 \times 10^4 & 8.29 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 1.46 \times 10^4 & -1.56 \times 10^3 & 0 \\ -32.79 & 321.11 & -2.67 \times 10^3 & 1.92 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 6.22 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 8.49 \times 10^3 & 0 \\ 3.88 & -38.01 & 316.65 & -2.27 \times 10^3 & 1.46 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 3.7 \times 10^4 & -1.31 \times 10^4 & 0 \\ -0.42 & 4.08 & -34.02 & 243.56 & -1.56 \times 10^3 & 8.49 \times 10^3 & -1.31 \times 10^4 & 5.95 \times 10^3 & -6.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.35 & 6.35 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \quad (227)$$

em unidades do SI.

$$[\tilde{\mathbf{M}}_u] = \begin{pmatrix} 89.779 & 15.063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15.063 & 79.094 & 12.348 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.348 & 66.515 & 10.693 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.693 & 57.297 & 9.157 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.157 & 50.844 & 8.443 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.443 & 42.908 & 6.441 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.441 & 35.499 & 5.847 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.847 & 226.428 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26.881 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \quad (228)$$

em unidades do SI.

$$[\tilde{\mathbf{C}}_u] = \begin{pmatrix} 358.43 & -188.45 & 49.97 & -4.18 & 0.41 & -0.05 & 5.59 \times 10^{-3} & -6.01 \times 10^{-4} & 0 \\ -188.45 & 245.74 & -149.62 & 40.89 & -4.04 & 0.46 & -0.05 & 5.89 \times 10^{-3} & 0 \\ 49.97 & -149.62 & 194.18 & -118.2 & 33.62 & -3.85 & 0.46 & -0.05 & 0 \\ -4.18 & 40.89 & -118.2 & 153.28 & -94.53 & 27.6 & -3.27 & 0.35 & 0 \\ 0.41 & -4.04 & 33.62 & -94.53 & 121 & -73.15 & 20.99 & -2.26 & 0 \\ -0.05 & 0.46 & -3.85 & 27.6 & -73.15 & 90.88 & -52.42 & 12.24 & 0 \\ 5.59 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.46 & -3.27 & 20.99 & -52.42 & 54.38 & -18.68 & 0 \\ -6.01 \times 10^{-4} & 5.89 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.35 & -2.26 & 12.24 & -18.68 & 34.8 & -19.58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.58 & 19.58 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \quad (229)$$

em unidades do SI.

Para obtenção das equações de estado do sistema acoplado torre-absorvedor de vibração passivo, substituem-se as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento dadas pelas Eqs.(227), (228) e (229), respectivamente, diretamente na Eqs.(180) e (181), reescritas a seguir:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \\ -[\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{K}}_u] & -[\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\tilde{\mathbf{C}}_u] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1}[\mathbf{J}] \end{bmatrix}$$

Calculando-se os módulos dos elementos complexos da diagonal da matriz espectral $[\mathbf{\Lambda}]$ da matriz de estados $[\mathbf{A}]$, obtêm-se as frequências angulares do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração, via representação de polos no plano complexo (método do lugar das raízes utilizado para dimensionar e analisar a estabilidade de sistemas de controle). De fato, o valor de cada polo está diretamente relacionado com as características dinâmicas do modo de vibração correspondente. Assim, utilizando o método do lugar das raízes, é possível avaliar as modificações impostas na estrutura em termos das frequências naturais e dos coeficientes de amortecimento. Sendo que, o coeficiente de amortecimento, associado à localização do polo, é calculado pelo cosseno do ângulo entre vetor definido pelo respectivo polo (no plano de Argand-Gauss) e ao lado negativo do eixo real.

Na Eq.(230) tem-se o vetor de autovalores (diagonal da matriz espectral $[\Lambda]$) da matriz de estados $[A]$ do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração:

$$\{\lambda\} = \begin{bmatrix} -4.49+272.098i \\ -4.49-272.098i \\ -3.06+219.706i \\ -3.06-219.706i \\ -1.855+162.956i \\ -1.855-162.956i \\ -1.043+109.157i \\ -1.043-109.157i \\ -0.614+64.625i \\ -0.614-64.625i \\ -0.438+31.765i \\ -0.438-31.765i \\ -0.389+11.214i \\ -0.389-11.214i \\ -0.383+1.967i \\ -0.383-1.967i \\ -0.382+1.381i \\ -0.382-1.381i \end{bmatrix} \quad (230)$$

A cada frequência de vibração do sistema estão associados dois polos complexos conjugados, um no plano associado à parte positiva do eixo imaginário e outro na parte negativa, de forma que existe simetria gráfica em torno do eixo real. Na Eq.(231) é mostrado o vetor com as respectivas razões de amortecimento do conjunto torre-absorvedor:

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} 0.017 \\ 0.017 \\ 0.014 \\ 0.014 \\ 0.011 \\ 0.011 \\ 9.557 \cdot 10^{-3} \\ 9.557 \cdot 10^{-3} \\ 9.5 \cdot 10^{-3} \\ 9.5 \cdot 10^{-3} \\ 0.014 \\ 0.014 \\ 0.035 \\ 0.035 \\ 0.191 \\ 0.191 \\ 0.267 \\ 0.267 \end{bmatrix} \quad (231)$$

Na Tabela 8 e na Figura 60 estão expostos os valores das frequências angulares e dos modos de vibração do conjunto torre-absorvedor dinâmico de vibração.

Tabela 8 – Dados de vibração livre da torre.

| Ordem | 1 ^a | 2 ^a | 3 ^a | 4 ^a | 5 ^a | 6 ^a | 7 ^a |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Natureza | Flexão | Flexão | Flexão | Torção | Flexão | Flexão | Torção |
| Frequência (Hz) | 0,22811 | 0,31893 | 1,72875 | 3,98035 | 4,52976 | 8,05650 | 8,75028 |
| Período (s) | 4,38381 | 3,13544 | 0,57845 | 0,25123 | 0,22076 | 0,12412 | 0,11428 |
| Frequência angular (rad/s) | 1,43327 | 2,00392 | 10,86206 | 25,00930 | 28,46129 | 50,62049 | 54,97963 |

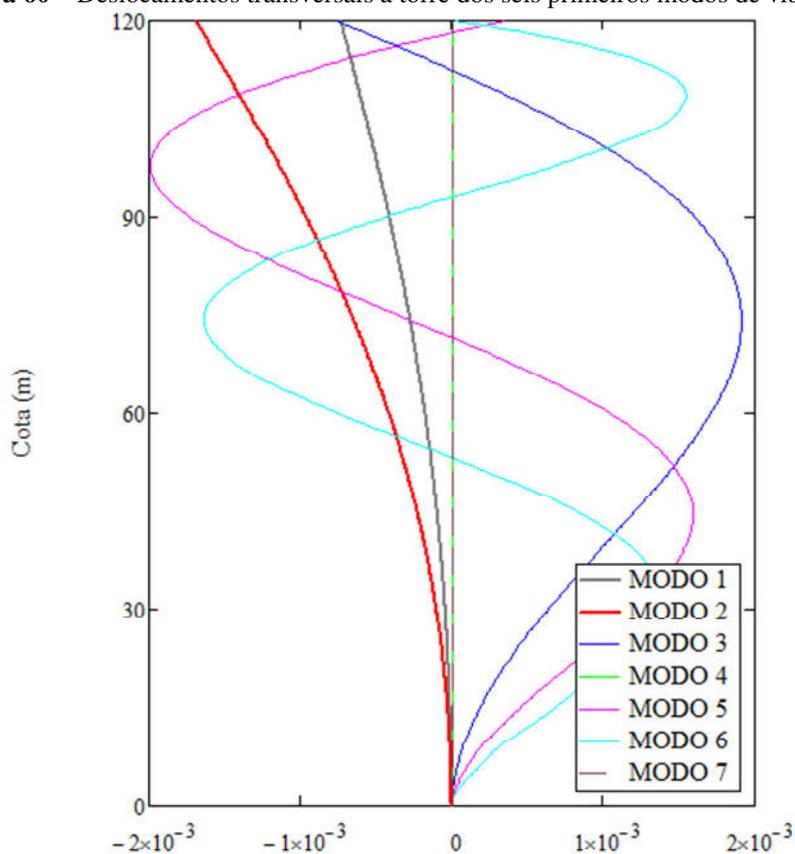
Fonte: Autor (2018).

Percebe-se que o papel do absorvedor de vibração passivo é dessintonizar a frequência natural em questão da torre (no caso, a frequência fundamental) da frequência da excitação proposta, pois a frequência fundamental da torre sem absorvedor de vibração, que é igual a 0,29745 Hz (Tabela 4), passa a ser igual a 0,22810 Hz, para o caso do conjunto torre-absorvedor de vibração. Adicionalmente, a 2^a frequência de vibração (0,31889 Hz) fica ligeiramente maior que a frequência fundamental da torre sem absorvedor. Entretanto, tal dessintonização é feita reduzindo a frequência natural da estrutura, ou seja, deixando a torre ainda mais flexível. Mesmo assim, há possibilidade de melhorar o comportamento dinâmico da torre (reduzir a intensidade e o número de ciclos de vibração) quando se implementa o controle híbrido de vibrações, o qual será descrito adiante.

Por fim, a partir das matrizes do sistema no espaço de estados, obtém-se a resposta do sistema acoplado torre-absorvedor por meio do método de desacoplamento descrito no item 5.4.4, sendo vetor de forças externas transversais à torre $\{\tilde{\mathbf{F}}_u\}$ dado por:

$$\{\tilde{\mathbf{F}}_u\} = \begin{pmatrix} 4.374 \times 10^3 \\ 5.95 \times 10^3 \\ 6.417 \times 10^3 \\ 6.696 \times 10^3 \\ 6.797 \times 10^3 \\ 6.544 \times 10^3 \\ 7.251 \times 10^3 \\ 1.137 \times 10^5 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \quad (232)$$

Figura 60 – Deslocamentos transversais à torre dos seis primeiros modos de vibração.



Fonte: Autor (2018).

5.6.2 Controle híbrido de vibração da torre

Tendo sido projetado o absorvedor passivo de vibrações para os dois graus de liberdade translacionais segundo as direções X e Z, os mesmos parâmetros para o absorvedor dinâmico de vibrações híbrido são utilizados e complementa-se o projeto com a determinação das variáveis de controle ótimas a serem introduzidas pelos atuadores.

Para determinação da matriz de ganho $[KG]$ de realimentação de estados do sistema, Eq.(219), é necessário resolver a equação matricial de Ricatti, Eq.(221), para obtenção da matriz $[P]$. Para isso, as matrizes de ponderação de estados $[Q]$ e de ponderação do controle $[R]$ do sistema, foram obtidas mediante um processo de análise: do controle requerido (amplitude de deslocamentos e velocidades da torre controlada); da energia dispendida para realizar este controle (intensidade das forças de controle impostas pelos atuadores); de custo construtivo (dimensões necessárias do absorvedor de vibração e faixa de valores das constantes de rigidezes e amortecimentos encontradas no mercado, para as molas e para os amortecedores viscosos); e de operacionalidade do absorvedor (faixa de amplitudes de deslocamentos e velocidades do aparelho de controle, de maneira a permitir a operação deste

dentro da torre, como, por exemplo, a limitação de deslocamento em função do espaço existente no topo da torre para passagem de equipamentos das instalações elétricas e de segurança e funcionamento do absorvedor).

A matriz de ponderação de controle $[\mathbf{R}]$ foi tomada igual a matriz identidade $[\mathbf{I}]$ de ordem r_c (número de variáveis de entrada), que, neste caso, é igual a unidade. A matriz de ponderação de estados $[\mathbf{Q}]$ foi tomada, inicialmente, a matriz identidade $[\mathbf{I}]$ de ordem N (número de variáveis de estado) e, após ajustes feitos em função dos motivos explicados no parágrafo anterior, os seguintes elementos passaram a: $Q_{\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}-1} = 10^{12}$ (elemento de ponderação do deslocamento do topo da torre) e $Q_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}} = 10^{10}$ (elemento de ponderação do deslocamento do absorvedor dinâmico de vibração). Então, definidas as matrizes $[\mathbf{R}]$ e $[\mathbf{Q}]$, obtém-se a matriz de ganho de realimentação de estados $[\mathbf{KG}]$:

$$[\mathbf{KG}]^T = \begin{bmatrix} -3.86460 \cdot 10^3 \\ -1.13233 \cdot 10^4 \\ -2.11243 \cdot 10^4 \\ -3.24078 \cdot 10^4 \\ -4.52418 \cdot 10^4 \\ -5.42614 \cdot 10^4 \\ -6.04834 \cdot 10^4 \\ -3.71621 \cdot 10^5 \\ 5.49534 \cdot 10^4 \\ -304.38244 \\ -921.85442 \\ -1.78735 \cdot 10^3 \\ -2.86233 \cdot 10^3 \\ -4.18788 \cdot 10^3 \\ -5.26227 \cdot 10^3 \\ -6.15280 \cdot 10^3 \\ -3.93278 \cdot 10^4 \\ 5.03705 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad (233)$$

que permite obter simulações do sistema à malha fechada.

Assim, a nova matriz de estado $[\bar{\mathbf{A}}]$ do sistema em malha fechada, com realimentação de estados, é dada por:

$$[\bar{\mathbf{A}}] = [\mathbf{A}] - [\mathbf{B}_c][\mathbf{KG}] \quad (234)$$

sendo:

$$[\mathbf{B}_c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_u]^{-1} [\tilde{\mathbf{J}}_c] \end{bmatrix} \quad (235)$$

na qual:

$$[\bar{\mathbf{J}}_c] = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{(n_c+r_c-2) \times 1} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (236)$$

A matriz de entrada das forças externas $[\mathbf{B}]$, neste caso, é igual a do sistema passivo, assim como o vetor de forças externas $\{\tilde{\mathbf{F}}_u\}$.

5.6.3 Controle ativo de vibração da torre

O procedimento para obtenção da matriz de ganho $[\mathbf{KG}]$ do sistema para controle ativo é idêntico ao do sistema híbrido, sendo inclusive utilizadas as mesmas matrizes de ponderação de estados $[\mathbf{Q}]$ e de controle $[\mathbf{R}]$. Entretanto, para formação da matriz de estado $[\mathbf{A}]$, nas matrizes de amortecimento $[\tilde{\mathbf{C}}_u]$ e de rigidez $[\tilde{\mathbf{K}}_u]$, os coeficientes de amortecimento e de rigidez do absorvedor são nulos, uma vez que, não há molas nem amortecedores no sistema de controle ativo (há apenas atuadores hidráulicos), de acordo com as Eqs.(237) e (238). A matriz de massa do sistema acoplado torre-absorvedor dinâmico de vibração continua a ser a mesma, conforme Eq.(228).

$$[\tilde{\mathbf{K}}_u] = \begin{pmatrix} 2.47 \times 10^5 & -1.31 \times 10^5 & 3.47 \times 10^4 & -2.9 \times 10^3 & 286.01 & -32.79 & 3.88 & -0.42 & 0 \\ -1.31 \times 10^5 & 1.69 \times 10^5 & -1.04 \times 10^5 & 2.84 \times 10^4 & -2.8 \times 10^3 & 321.11 & -38.01 & 4.08 & 0 \\ 3.47 \times 10^4 & -1.04 \times 10^5 & 1.33 \times 10^5 & -8.22 \times 10^4 & 2.33 \times 10^4 & -2.67 \times 10^3 & 316.65 & -34.02 & 0 \\ -2.9 \times 10^3 & 2.84 \times 10^4 & -8.22 \times 10^4 & 1.05 \times 10^5 & -6.58 \times 10^4 & 1.92 \times 10^4 & -2.27 \times 10^3 & 243.56 & 0 \\ 286.01 & -2.8 \times 10^3 & 2.33 \times 10^4 & -6.58 \times 10^4 & 8.29 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 1.46 \times 10^4 & -1.56 \times 10^3 & 0 \\ -32.79 & 321.11 & -2.67 \times 10^3 & 1.92 \times 10^4 & -5.09 \times 10^4 & 6.22 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 8.49 \times 10^3 & 0 \\ 3.88 & -38.01 & 316.65 & -2.27 \times 10^3 & 1.46 \times 10^4 & -3.65 \times 10^4 & 3.7 \times 10^4 & -1.31 \times 10^4 & 0 \\ -0.42 & 4.08 & -34.02 & 243.56 & -1.56 \times 10^3 & 8.49 \times 10^3 & -1.31 \times 10^4 & 5.94 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \quad (237)$$

em unidades do SI.

$$[\tilde{\mathbf{C}}_u] = \begin{pmatrix} 358.43 & -188.45 & 49.97 & -4.18 & 0.41 & -0.05 & 5.59 \times 10^{-3} & -6.01 \times 10^{-4} & 0 \\ -188.45 & 245.74 & -149.62 & 40.89 & -4.04 & 0.46 & -0.05 & 5.89 \times 10^{-3} & 0 \\ 49.97 & -149.62 & 194.18 & -118.2 & 33.62 & -3.85 & 0.46 & -0.05 & 0 \\ -4.18 & 40.89 & -118.2 & 153.28 & -94.53 & 27.6 & -3.27 & 0.35 & 0 \\ 0.41 & -4.04 & 33.62 & -94.53 & 121 & -73.15 & 20.99 & -2.26 & 0 \\ -0.05 & 0.46 & -3.85 & 27.6 & -73.15 & 90.88 & -52.42 & 12.24 & 0 \\ 5.59 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.46 & -3.27 & 20.99 & -52.42 & 54.38 & -18.68 & 0 \\ -6.01 \times 10^{-4} & 5.89 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.35 & -2.26 & 12.24 & -18.68 & 15.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \quad (238)$$

em unidades do SI.

5.6.4 Estudo paramétrico dos sistemas passivo, híbrido e ativo

Para obtenção dos resultados aqui apresentados, a estrutura da torre é excitada segundo o modo fundamental de vibração, uma vez que, sendo a estrutura simétrica, os eixos verticais que passam pelo centro de massa, pelo centro de rigidez (centro elástico) e pelo centro de torção das seções transversais da estrutura são coincidentes. Ou seja, não há acoplamento entre os deslocamentos horizontais e as rotações torcionais das seções transversais nos modos de vibração da torre.

Objetivando comparar os desempenhos dos sistemas de controle passivo, híbrido e ativo, foram feitas simulações da resposta da torre controlada, da saída do absorvedor de vibração e das forças de controle em função da razão de massa ($\bar{\mu}$), a qual é a razão entre massa do absorvedor dinâmico de vibração e massa total da estrutura.

Para a plotagem dos gráficos apresentados nesta seção, a razão de massa foi variada e os demais parâmetros do absorvedor, como rigidez e amortecimento, foram recalculados para cada valor de razão de massa, de forma a manter a sintonia da frequência do absorvedor com a frequência fundamental da torre, conforme dados da Tabela 9.

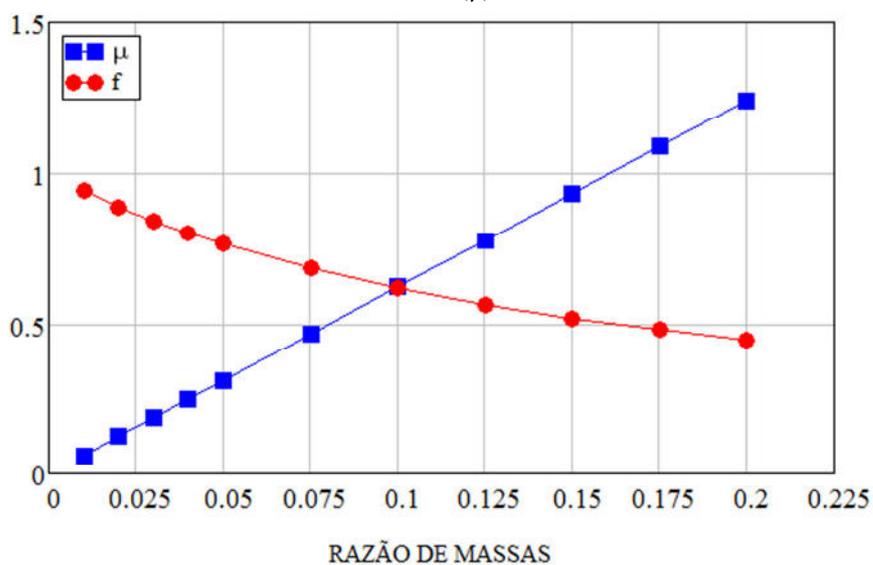
Tabela 9 – Parâmetros utilizados na análise paramétrica dos sistemas de controle.

| Razão entre massas $\bar{\mu}$ (%) | Razão entre massas modais μ (%) | Razão entre frequências angulares f | Rigidez do absorvedor k_t (N/m) | Amortecimento do absorvedor c_t (kg/s) |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1,0 | 6,217 | 0,941 | $2,64153 \cdot 10^4$ | $4,44880 \cdot 10^3$ |
| 2,0 | 12,434 | 0,889 | $4,71495 \cdot 10^4$ | $1,15540 \cdot 10^4$ |
| 3,0 | 18,651 | 0,843 | $6,35067 \cdot 10^4$ | $1,95797 \cdot 10^4$ |
| 4,0 | 24,869 | 0,801 | $7,64536 \cdot 10^4$ | $2,79219 \cdot 10^4$ |
| 5,0 | 31,086 | 0,763 | $8,67169 \cdot 10^4$ | $3,62791 \cdot 10^4$ |
| 7,5 | 46,629 | 0,682 | $1,03960 \cdot 10^5$ | $5,63376 \cdot 10^4$ |
| 10,0 | 62,171 | 0,617 | $1,13317 \cdot 10^5$ | $7,45715 \cdot 10^4$ |
| 12,5 | 77,714 | 0,563 | $1,17953 \cdot 10^5$ | $9,08481 \cdot 10^4$ |
| 15,0 | 93,257 | 0,517 | $1,19692 \cdot 10^5$ | $1,05310 \cdot 10^5$ |
| 17,5 | 108,800 | 0,479 | $1,19625 \cdot 10^5$ | $1,18167 \cdot 10^5$ |
| 20,0 | 124,343 | 0,446 | $1,18427 \cdot 10^5$ | $1,29632 \cdot 10^5$ |

Fonte: Autor (2018).

No gráfico da Figura 61, foram plotados no eixo das ordenadas: a razão (μ) entre as massas do absorvedor de vibração e a massa modal (correspondente ao modo fundamental) da torre e a razão (f) entre as frequências angulares do absorvedor (ω_t) e as frequências angulares do sistema principal (ω_p); e, no eixo das abscissas a razão ($\bar{\mu}$) entre massa do absorvedor e a massa total da estrutura. De acordo com este gráfico, a razão de massas μ cresce linearmente com a razão de massas $\bar{\mu}$; e, conforme Eq.(163), a razão entre frequência angulares f é inversamente proporcional à razão de massas μ , que é a expressão para modulação necessária do absorvedor em condições ótimas segundo a teoria de Den Hartog.

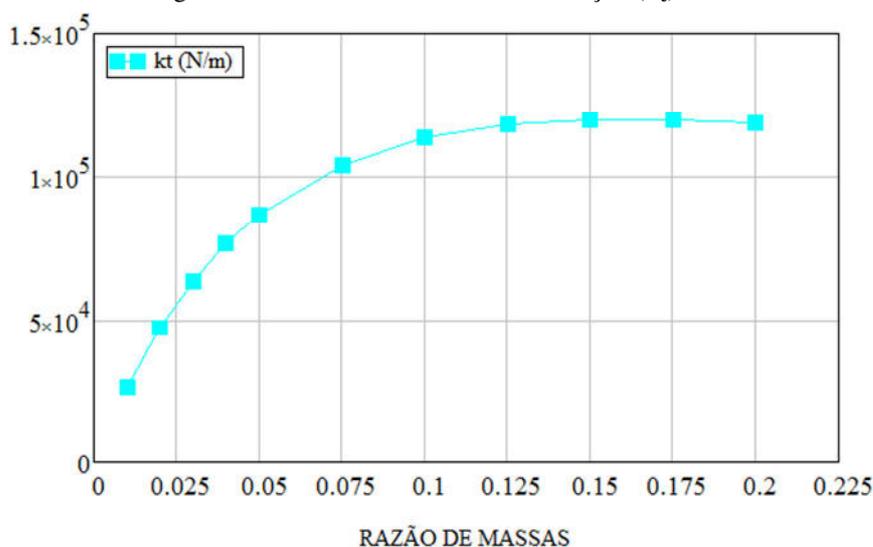
Figura 61 – Gráfico da razão de massas modais (μ) e da razão entre frequências angulares (f) *versus* razão de massas ($\bar{\mu}$).



Fonte: Autor (2018).

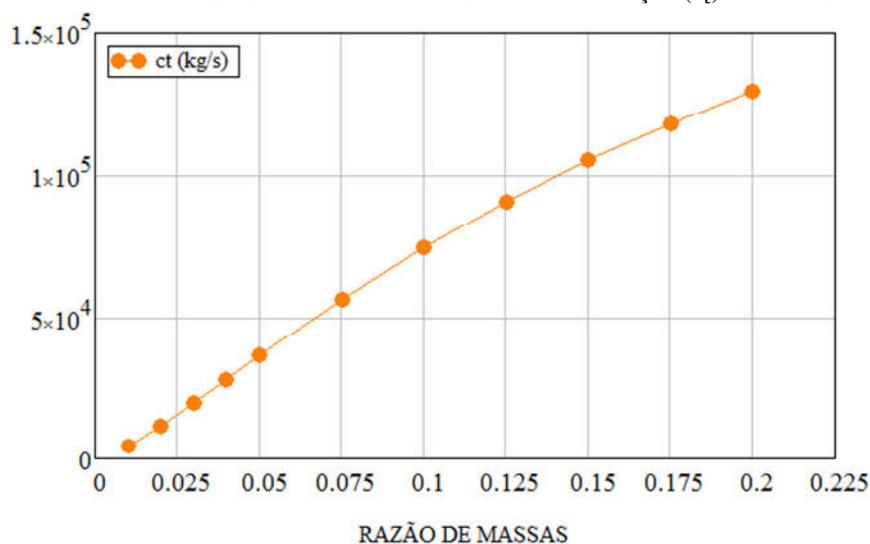
Na Figura 62 tem-se o gráfico da rigidez do absorvedor de vibração k_t em função da razão de massas $\bar{\mu}$, em que se observa um comportamento crescente de k_t até atingir um valor máximo ($1,19692 \cdot 10^5$ N/m) em torno do valor de 15% da razão de massas, a partir do qual a rigidez decresce levemente. Na Figura 63 é possível observar o gráfico do amortecimento do absorvedor c_t em função da razão de massas $\bar{\mu}$, no qual se observa um comportamento praticamente linear crescente do amortecimento à medida que se aumenta a razão de massas.

Figura 62 – Gráfico da rigidez do absorvedor dinâmico de vibração (k_t) *versus* razão de massas ($\bar{\mu}$).



Fonte: Autor (2018).

Figura 63 – Gráfico do amortecimento do absorvedor dinâmico de vibração (c_t) versus razão de massas ($\bar{\mu}$).

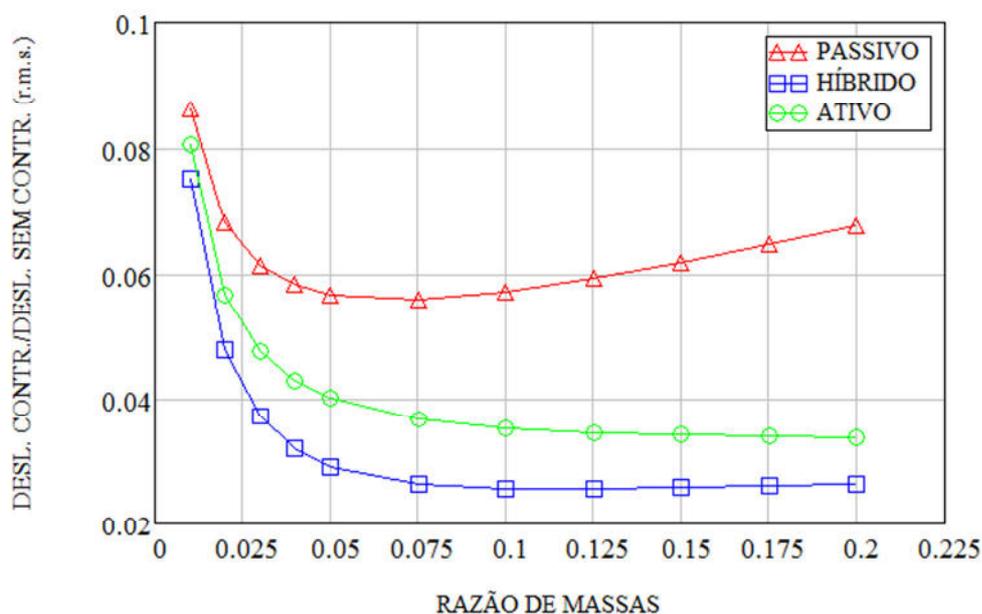


Fonte: Autor (2018).

Na Figura 64, mostra-se o gráfico da razão entre os valores eficazes dos deslocamentos controlado e sem controle do topo da torre, para os três tipos de controle aqui estudados (puramente passivo, híbrido e puramente ativo), em função da razão de massas $\bar{\mu}$. Sendo o valor eficaz ou raiz do valor quadrado médio (ou r.m.s. *root mean square*, em inglês) uma medida estatística da magnitude de uma quantidade variável, de forma a poder-se calcular um valor estatisticamente representativo de uma função de variáveis contínuas.

Como esperado, os sistemas de controle híbrido, ativo e passivo necessitam, nesta ordem, de uma quantidade menor de massa para realizar o mesmo nível de controle. Por exemplo, para uma razão de massa de 0,03, o sistema passivo reduz a amplitude de deslocamento do topo da torre controlada para um valor que equivale a 6,1% da amplitude de deslocamento do topo da torre sem controle; enquanto que os sistemas híbrido e ativo reduzem o valor eficaz do deslocamento do topo da torre controlado para 3,7% e 4,7% do valor eficaz do deslocamento do topo da torre sem controle, respectivamente. Adicionalmente, percebe-se que o sistema de controle passivo apresenta melhor desempenho para uma razão de massas em torno de 7,5%, o qual perde eficiência para razões de massas superiores. Já a eficiência no controle de deslocamentos do topo da torre, para os sistemas híbrido e ativo, aumenta com o crescimento da razão de massas até atingir um comportamento horizontalmente assintótico a partir de uma razão de massa em torno de 10%. De toda forma, para valores de razão de massa com este valor ou superiores, a viabilidade do uso do absorvedor de vibração é dificultada, senão impossibilitada.

Figura 64 – Gráfico da razão entre os valores eficazes dos deslocamentos controlado e sem controle do topo da torre *versus* razão de massas.

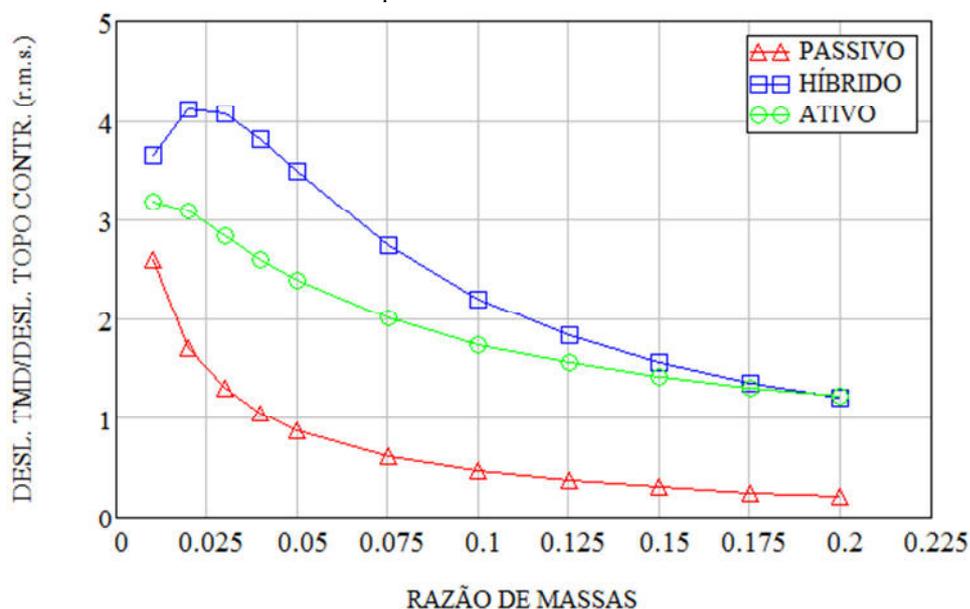


Fonte: Autor (2018).

Outro aspecto importante nesta análise paramétrica comparativa entre os sistemas de controle propostos refere-se à energia necessária para realizar certo nível de controle. É possível observar que os sistemas híbrido e ativo apresentam comportamento semelhante, tanto em relação à resposta da torre (Figura 64), como no que diz respeito à resposta do absorvedor de vibração (Figura 65). Na Figura 64, o comportamento de controle do sistema híbrido é superior quando comparado com o sistema ativo, pois, em média, o valor eficaz do deslocamento do sistema híbrido é 24,3% inferior ao do sistema ativo.

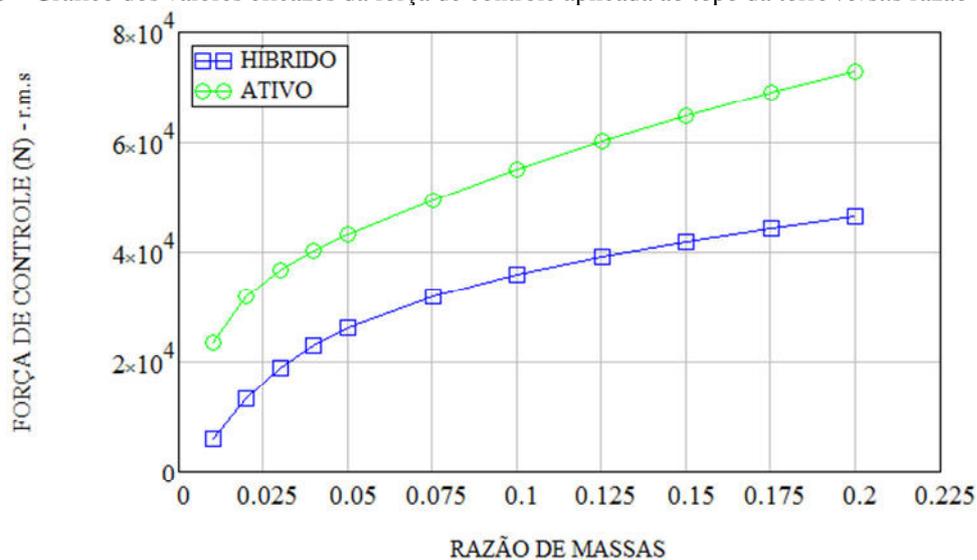
Corroborando com este fato, analisa-se a Figura 65, na qual, em média, a razão entre os valores eficazes dos deslocamentos do absorvedor e do topo da torre controlada no sistema híbrido é 26,7% superior a do sistema ativo. Finalmente, comparando os dados do gráfico da Figura 66, observa-se que o sistema híbrido necessita de uma força de controle com menor magnitude quando comparado com sistema puramente ativo; adicionalmente, as curvas têm praticamente o mesmo comportamento, estando apenas separadas verticalmente (em relação ao eixo das ordenadas), em média, por um valor de $1,846 \cdot 10^4$ N. Os comentários previamente feitos estabelecem e confirmam algumas vantagens do sistema de controle híbrido em relação ao sistema puramente ativo.

Figura 65 – Gráfico da razão entre os valores eficazes de deslocamento do absorvedor e deslocamento controlado do topo da torre *versus* razão de massas.



Fonte: Autor (2018).

Figura 66 – Gráfico dos valores eficazes da força de controle aplicada ao topo da torre *versus* razão de massas.



Fonte: Autor (2018).

5.6.5 Resposta da torre a uma excitação harmônica transiente

A excitação a que a torre foi solicitada foi estabelecida pela Eq.(232), mas por um tempo de apenas 5 s, a partir dos quais a excitação cessa e o conjunto torre-absorvedor de vibração passa a vibrar livremente (Figura 67, Figura 68 e Figura 69). Na Tabela 10 são apresentados os valores máximos e eficazes dos deslocamentos do topo da torre sem controle e controlada passiva, híbrida e ativamente; bem como os respectivos percentuais de redução

de tais deslocamentos com o uso do controle de vibração.

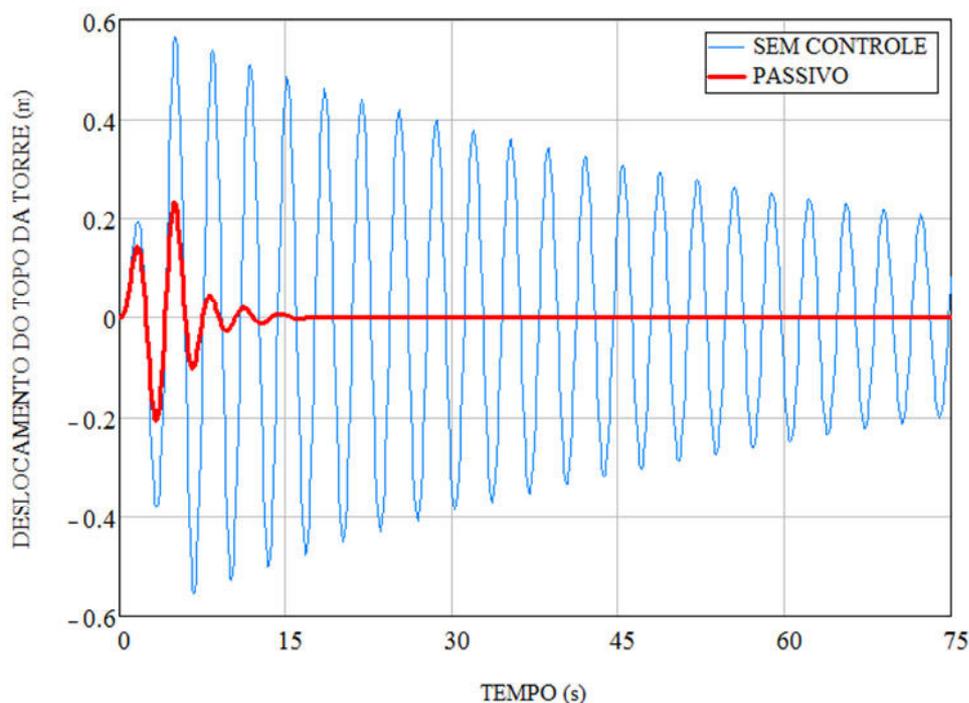
Tabela 10 – Dados dos deslocamentos no topo da torre para excitação senoidal aplicada durante 5 s.

| Sem controle | | Controle passivo | | Controle híbrido | | Controle ativo | |
|---|------------------|-------------------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) |
| 0,56497 | 0,23126 | 0,23190 | 0,07451 | 0,15757 | 0,05463 | 0,19671 | 0,06559 |
| Percentual de redução do valor eficaz (%) | | | | | | | |
| Sem controle → Controle passivo | | Controle passivo → Controle híbrido | | Sem controle → Controle ativo | | | |
| 67,78 | | 26,68 | | 71,64 | | | |

Fonte: Autor (2018).

Na Figura 67 tem-se o gráfico dos deslocamentos do topo da torre sem controle e controlada passivamente, a partir do qual se percebe grande redução de tais valores de deslocamentos; conforme é mostrado na Tabela 10. Há uma redução de 67,78 e de 71,64% no valor eficaz do deslocamento do topo da torre em relação ao caso sem controle, com a introdução do absorvedor dinâmico de vibração passivo e ativo no sistema estrutural da torre, respectivamente.

Figura 67 – Gráfico do deslocamento do topo da torre sem controle e controlada passivamente (ação atuante durante 5 s).

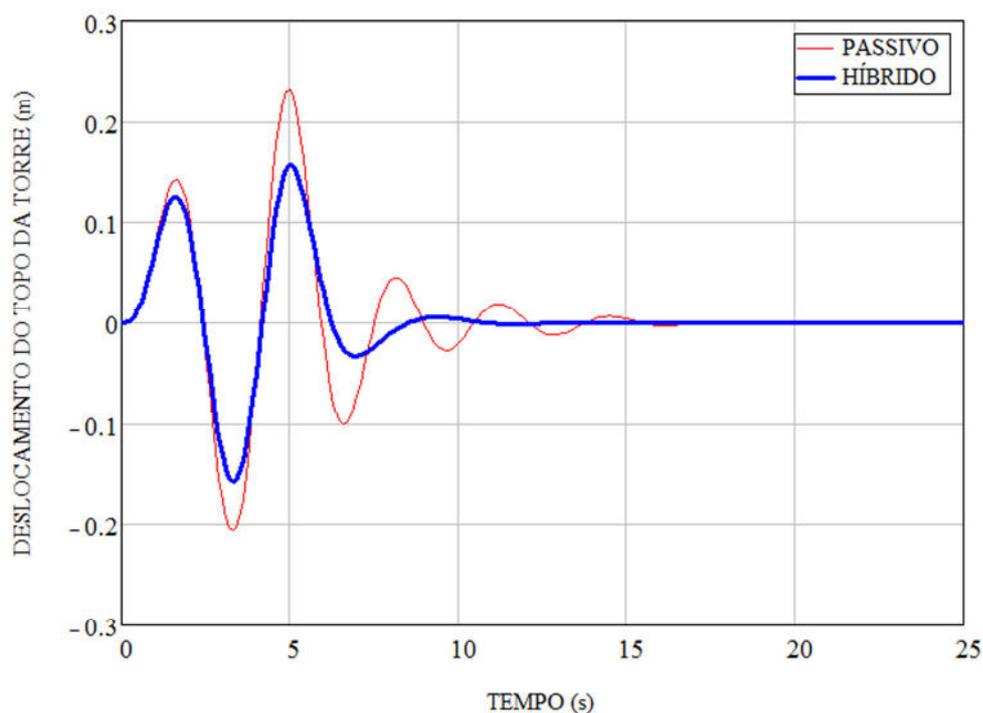


Fonte: Autor (2018).

Para comparação dos deslocamentos do topo da torre controlada passivamente e hibridamente, foram traçados os gráficos da Figura 68. Observa-se que o sistema híbrido apresenta melhor desempenho que o sistema puramente passivo, reduzindo o valor eficaz dos deslocamentos do topo da torre em 26,68% em relação ao deslocamento do topo da torre

controlada passivamente. Ademais, foi percebido que a vibração cessa mais cedo (Figura 68) e que o pico de vibração é menor (Tabela 10), quando se utiliza o sistema de controle híbrido.

Figura 68 – Gráfico do deslocamento do topo da torre controlada passivamente e hibridamente (ação atuante durante 5 s).

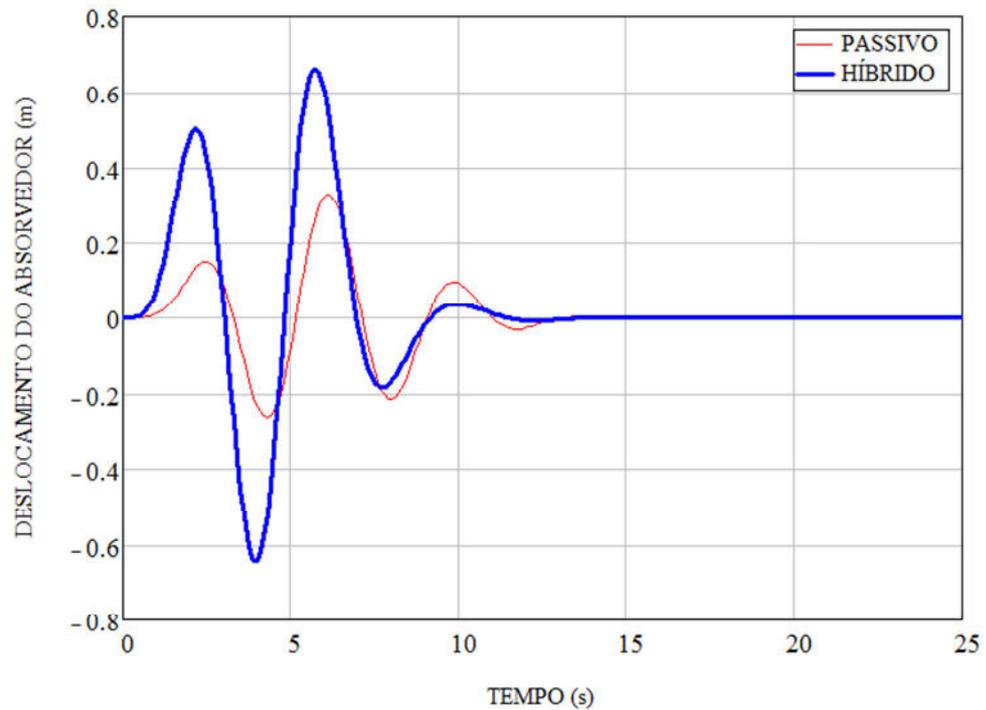


Fonte: Autor (2018).

Na Figura 69 tem-se o gráfico dos deslocamentos do absorvedor de vibração para torre equipada com controle passivo e híbrido. Nota-se que a resposta do absorvedor se torna mais rápida com a introdução dos atuadores que compõem os sistemas de controle híbrido e ativo, fazendo com que estes sistemas sejam mais adequados para situações em que se necessita de ação rápida de controle para eficácia e robustez do sistema de controle (como é o caso de controle de estruturas excitadas sismicamente).

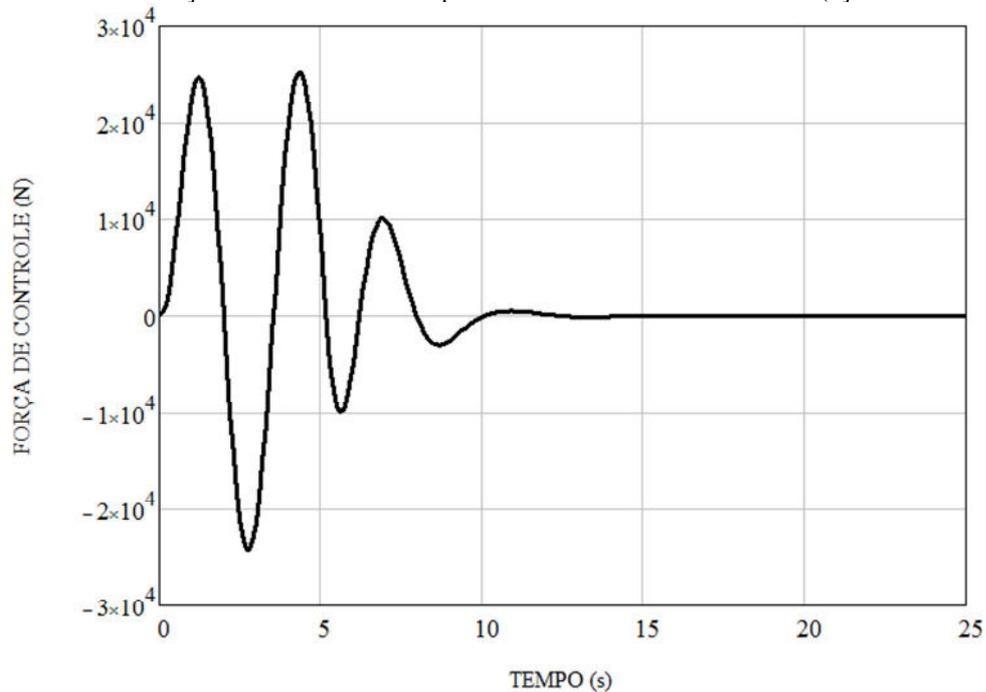
Finalmente, apresenta-se na Figura 70 o gráfico da força de controle que atua no absorvedor dinâmico de vibração com reação no topo da torre. Por meio dos valores das forças de controle, tem-se ideia da energia necessária para a realização do controle da torre pelo sistema híbrido. É importante observar que há defasagem (de cerca de 1,3 s) entre picos dos gráficos da força de controle (Figura 70) e do deslocamento do absorvedor de vibração (Figura 69), de forma que o pico da força de controle surge antes, para excitar o absorvedor de vibração, e este, posteriormente, movimentar-se em direção ao seu pico de deslocamento para controlar a estrutura da torre.

Figura 69 – Gráfico do deslocamento do absorvedor de vibração no sistema passivo e híbrido (ação atuante durante 5 s).



Fonte: Autor (2018).

Figura 70 – Gráfico da força de controle induzida pelos atuadores do sistema híbrido (ação atuante durante 5 s).



Fonte: Autor (2018).

5.6.6 Resposta da torre a uma excitação harmônica permanente

Nesta seção será analisada a estrutura do conjunto torre-absorvedor de vibração submetida a uma excitação senoidal, estabelecida pela Eq.(232), em um tempo de análise de

100 s para o cálculo dos valores eficazes. Na Tabela 11 apresentam-se os valores máximos e eficazes dos deslocamentos do topo da torre sem controle e controlada passiva, híbrida e ativamente; além dos percentuais de redução de tais deslocamentos com o uso do controle.

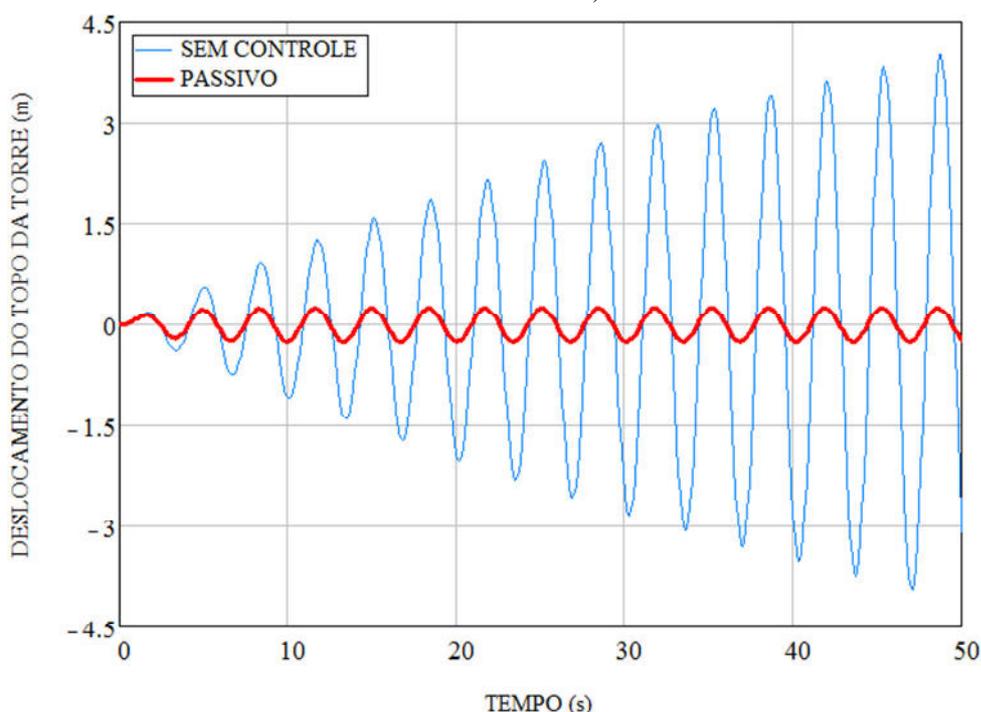
Tabela 11 – Dados dos deslocamentos no topo da torre para excitação senoidal aplicada durante toda análise.

| Sem controle | | Controle passivo | | Controle híbrido | | Controle ativo | |
|---|------------------|-------------------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) | Valor máximo (m) | Valor eficaz (m) |
| 6,02837 | 2,91768 | 0,25723 | 0,17884 | 0,15757 | 0,10828 | 0,19768 | 0,13833 |
| Percentual de redução do valor eficaz (%) | | | | | | | |
| Sem controle → Controle passivo | | Controle passivo → Controle híbrido | | Sem controle → Controle ativo | | | |
| 93,87 | | 39,46 | | 95,26 | | | |

Fonte: Autor (2018).

Na Figura 71 tem-se o gráfico dos deslocamentos do topo da torre sem controle e controlada passivamente, a partir do qual se percebe a elevada eficiência do sistema passivo no controle dos dois 1^os modos de vibração (flexão XY e YZ) da torre, tendo em vista que o absorvedor de vibração foi sintonizado a tais frequências. De acordo com os dados da Tabela 11, com a utilização dos sistemas passivo e ativo, observa-se que há uma redução de 93,87 e de 95,26% no valor eficaz do deslocamento do topo da torre em relação ao caso sem controle, respectivamente.

Figura 71 – Gráfico do deslocamento do topo da torre sem controle e controlada passivamente (ação atuante durante toda análise).



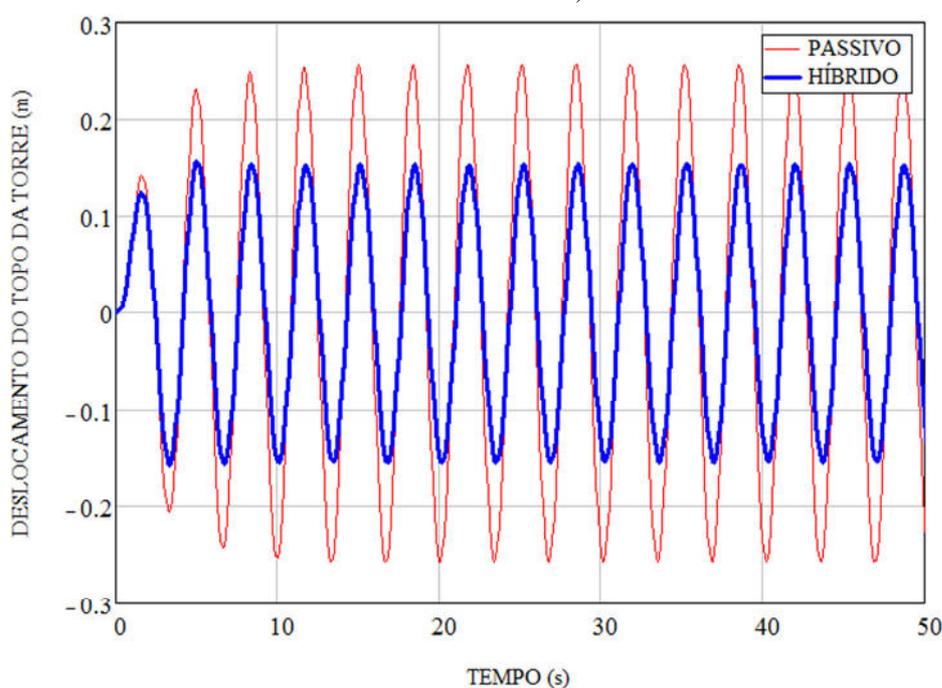
Fonte: Autor (2018).

Para comparação dos sistemas de controle passivo e híbrido, analisam-se o gráfico de deslocamentos do topo da torre controlada passivamente e hibridamente (Figura 72) e os

dados da Tabela 11; nos quais se consegue melhorar ainda mais o desempenho do sistema de controle dos dois 1^{os} modos de vibração da torre, uma vez que, reduz-se o valor eficaz dos deslocamentos do topo da torre em 39,46% em relação ao deslocamento do topo da torre controlada passivamente.

Desta forma, a introdução do controle ativo melhora a robustez do sistema nas situações em que é necessário refinar/melhorar o controle de vibrações. Por outro lado, o controle passivo reduz consideravelmente os deslocamentos, de maneira que o sistema de controle funcione bem em situações de perda de energia elétrica e, conseqüentemente, impossibilidade de atuação do sistema ativo. Entretanto, quando a estrutura está submetida a uma excitação dessintonizada em relação à frequência de vibração predominante da torre, os atuadores do controle ativo passam a corrigir ou melhorar/refinar o comportamento do controle puramente passivo, já que o controle ativo também funcionará bem para uma frequência de excitação não sintonizada com qualquer uma das frequências modais da estrutura da torre sem controle. Tal desempenho dos sistemas híbrido e ativo pode tornar-se, em certos casos de aplicação prática, indispensável ao bom funcionamento e à segurança da estrutura da torre, bem como de seus usuários.

Figura 72 – Gráfico do deslocamento do topo da torre controlada passivamente e hibridamente (ação atuante durante toda análise).

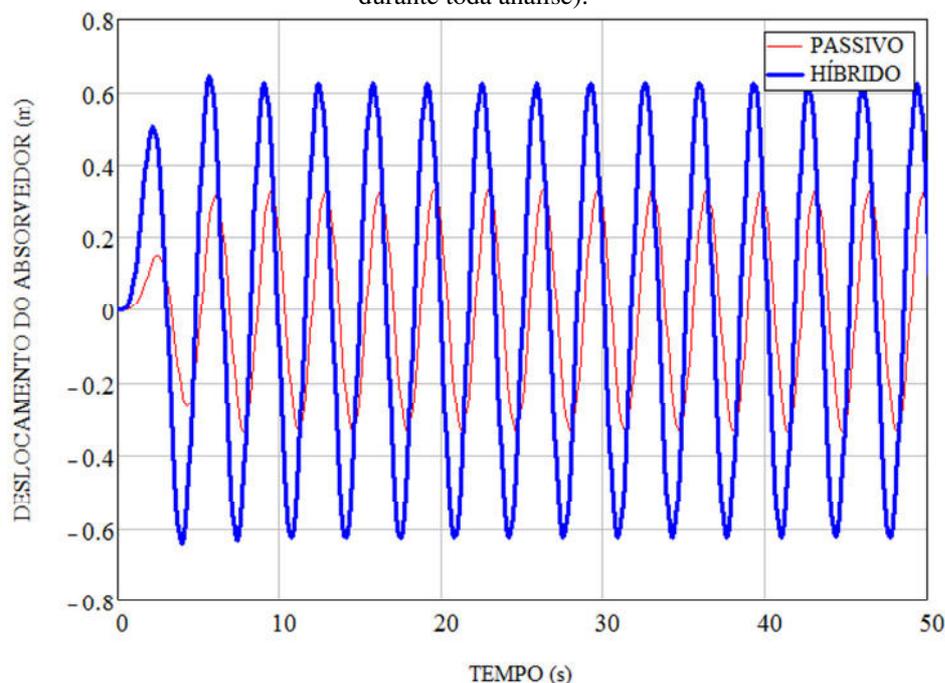


Fonte: Autor (2018).

Corroborando com o descrito acima, na Figura 73 é mostrado o gráfico dos deslocamentos do absorvedor de vibração para torre equipada com controle passivo e híbrido, em que se observa a ação mais eficaz do controle híbrido, pois o absorvedor dinâmico de

vibração responde mais rapidamente e mais significativamente à ação imposta à estrutura do conjunto torre-absorvedor de vibração.

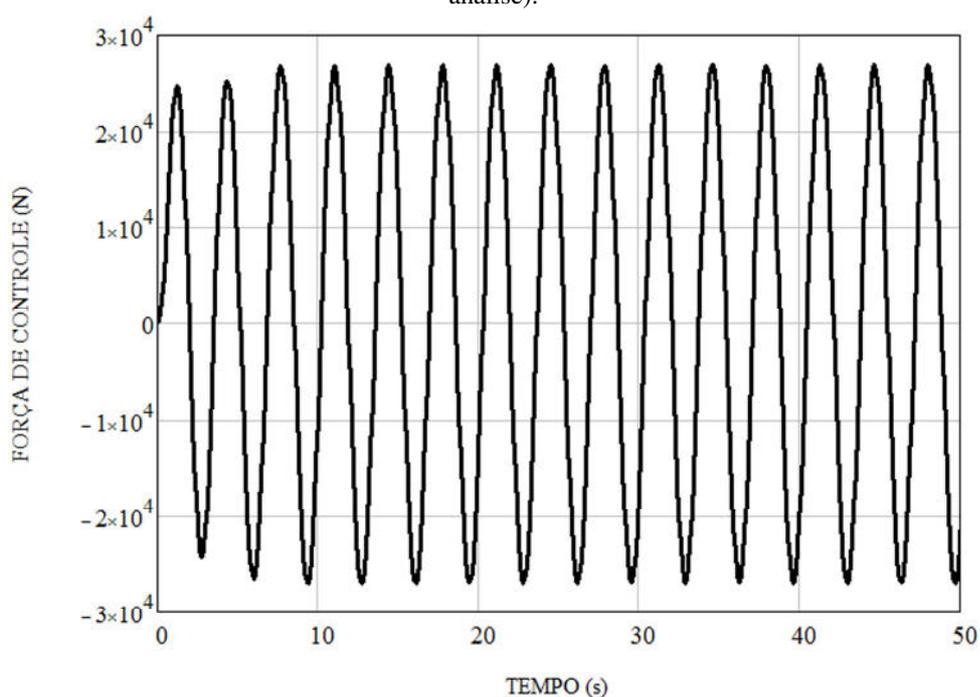
Figura 73 – Gráfico do deslocamento do absorvedor de vibração no sistema passivo e híbrido (ação atuante durante toda análise).



Fonte: Autor (2018).

Finalmente, apresenta-se na Figura 74 o gráfico da força de controle exercida pelos atuadores que atuam no absorvedor dinâmico de vibração e têm reação no topo da torre.

Figura 74 – Gráfico da força de controle induzida pelos atuadores do sistema híbrido (ação atuante durante toda análise).



Fonte: Autor (2018).

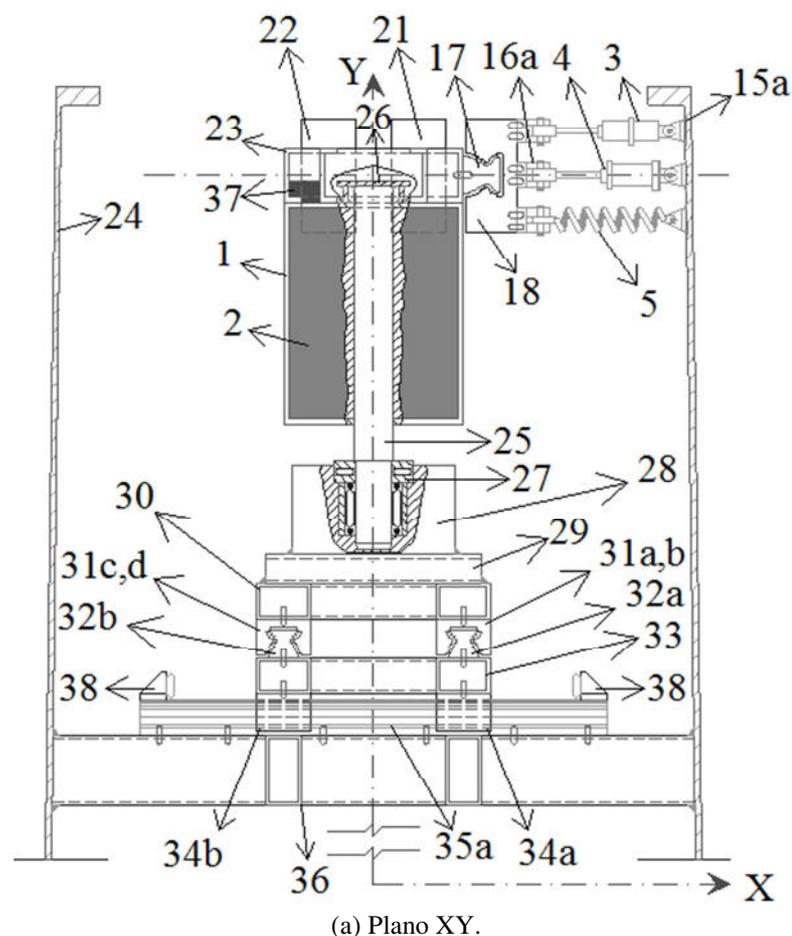
Os valores das forças de controle fornecem uma percepção da energia necessária para

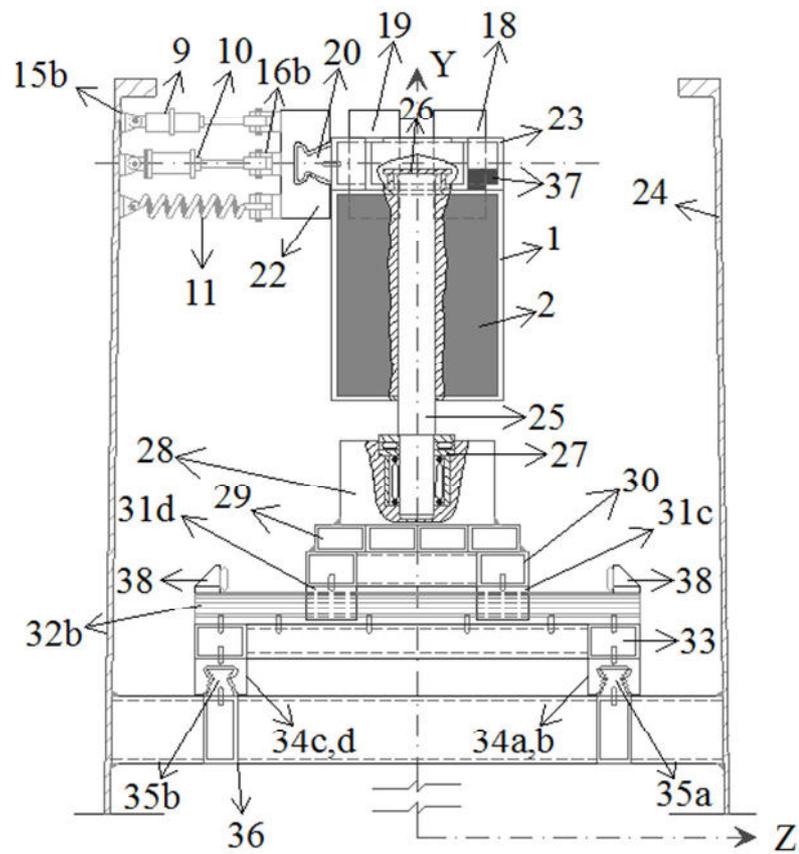
a realização do controle da torre pelo sistema híbrido. Além disso, a intensidade máxima da força de controle (entre 20,0 e 30,0 kN) é perfeitamente possível de ser aplicada utilizando-se uma bomba hidráulica controlada eletronicamente, com pressão de trabalho entre 1000 e 1500 bar, acoplada a um pistão com área de seção transversal de 200 cm²; o que ressalta a viabilidade técnica do sistema de controle proposto.

5.7 MODELO CONSTRUTIVO DO MECANISMO DE CONTROLE

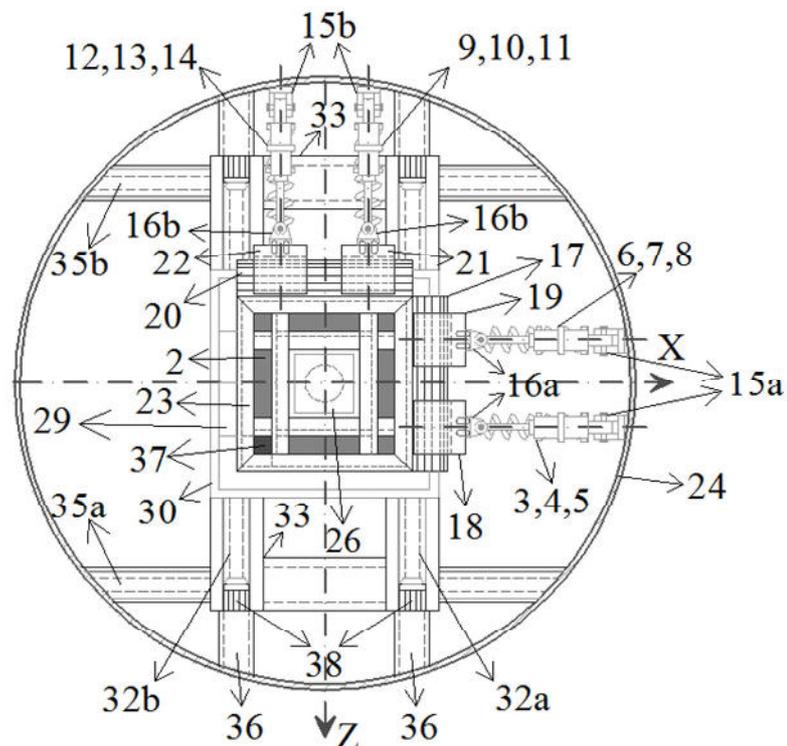
Neste item, apresenta-se, conforme Figura 75, um esboço do mecanismo de controle desenvolvido neste estudo e baseado no aparelho proposto por Accioly (2006). Descrevem-se a seguir, enumerando-as, as principais partes que compõem tal mecanismo, de forma a mostrar a viabilidade de projeto e execução do sistema de controle de vibrações em torres tubulares para aerogeradores desenvolvido neste trabalho.

Figura 75 – Modelo construtivo do mecanismo de controle (sem escala).





(b) Plano YZ.



(c) Plano XZ.

Fonte: Autor (2018).

1 – caixa de aço para suporte à massa de controle: dimensões externas da caixa 1,00 x 1,00 x 2,25 m;

- 2** – massa de controle de chumbo, que preenche a caixa de aço (nº 1);
- 3, 4, 5, 6, 7, 8** – amortecedores viscosos (nº 3 e 6), atuadores hidráulicos (nº 4 e 7) e molas lineares (nº 5 e 8) posicionados segundo a direção X;
- 9, 10, 11, 12, 13, 14** – amortecedores viscosos (nº 9 e 12), atuadores hidráulicos (nº 10 e 13) e molas lineares (nº 11 e 14) posicionados segundo a direção Z;
- 15a,b** – articulações: seis articulações (nº 15a: rotação livre em torno do eixo Z) que unem os componentes nº 3, 4, 5, 6, 7 e 8 ao elemento nº 24; e outras seis articulações (nº 15b: rotação livre em torno do eixo X) que unem os componentes nº 9, 10, 11, 12, 13 e 14 ao elemento nº 24;
- 16a,b** – articulações: seis articulações (nº 16a: rotação livre em torno do eixo Y) que unem os componentes nº 3, 4 e 5 ao elemento nº 18, e os componentes nº 6, 7 e 8 ao elemento nº 19. E outras seis articulações (nº 16b: rotação livre em torno do eixo Y) que unem os componentes nº 9, 10 e 11 ao elemento nº 21, e os componentes nº 12, 13 e 14 ao elemento nº 22;
- 17, 18, 19** – guia linear de rolos posicionada segundo o eixo Z: permite apenas movimento de translação dos patins (nº 18 e nº 19) na direção longitudinal do trilho nº 17. O trilho encontra-se fixado ao componente nº 23, que, por sua vez, está fixado à caixa de suporte (nº 1) à massa de controle (nº 2);
- 20, 21, 22** – guia linear de rolos posicionada segundo o eixo X: permite apenas movimento de translação dos patins (nº 21 e nº 22) na direção longitudinal do trilho nº 20. O trilho encontra-se fixado ao componente nº 23, que, por sua vez, está fixado à caixa de suporte (nº 1) à massa de controle (nº 2);
- 23** – estrutura para fixação dos trilhos: trata-se de uma estrutura de reforço composta por barras metálicas com perfis dobrados em formato “U”, a qual serve de suporte para os trilhos dos guias lineares de rolos (nº 17 e nº 20). Esta estrutura é, então, fixada à caixa de suporte (nº 1) à massa de controle (nº 2);
- 24** – estrutura tubular da torre: onde as articulações nº 15a,b estão fixadas.
- 25** – king pin: eixo metálico que suporta a massa de controle (nº 2). Liga-se o *king pin* à massa de controle por meio do componente nº 26;
- 26** – sistema de fixação do king pin: conjunto de chapas metálicas fixadas ao *king pin* (nº 25) e à massa de controle (nº 2);
- 27** – rolamento combinado de rolos: proporciona a rotação em torno do eixo Y do *king pin* (nº 25) e da massa de controle (nº 2). Tal tipo de rolamento é capaz de suportar esforços axiais e radiais. Comenta-se que, apesar do aparelho de controle projeto neste trabalho seja destinado ao controle das translações nas direções X e Z, a construção do absorvedor de

vibração com este tipo de rolamento permite a utilização do mesmo ao controle de rotações torcionais à torre (rotação em torno do eixo Y);

28 – cilindro metálico: o qual se encontra fixado ao componente nº 29, tem a função de comportar o rolamento combinado (nº 27);

29 – base metálica superior: fabricada utilizando-se tubos de seção transversal retangular. Tem a função de unir o cilindro metálico (nº 28) ao componente nº 30;

30 – carro metálico superior: fabricado utilizando-se tubos de seção retangular. Em sua parte superior, é fixado à base metálica superior (nº 29) e, na parte inferior, é fixado os componentes nº 31a,b,c,d;

31a,b,c,d; 32a,b – guias lineares de rolos posicionados segundo o eixo Z: permite apenas movimento de translação do carro metálico superior (nº 30) na direção dos trilhos nº 32a,b. Estes últimos estão fixados ao componente nº 33. Os componentes 31a,b,c,d representam os patins, que estão fixados ao elemento nº 30;

33 – carro metálico inferior: fabricado utilizando-se tubos de seção retangular. Em sua parte superior, é fixado à base metálica superior (nº 29) e, na parte inferior, é fixado os componentes nº 31a,b,c,d;

34a,b,c,d; 35a,b – guias lineares de rolos posicionados segundo o eixo X: permite apenas movimento de translação do carro metálico inferior (nº 33) na direção dos trilhos nº 35a,b. Estes últimos estão fixados ao componente nº 36. Os componentes 34a,b,c,d representam os patins, que estão fixados ao elemento nº 33;

36 – vigamento de suporte ao aparelho de controle: fabricado utilizando-se perfis tubulares de seção transversal retangular. Sobre o vigamento estão fixados os trilhos nº 35a,b;

37 – contrapeso: formado por uma massa de chumbo utilizada para balancear a massa de controle (nº2), mantendo o centro de massa da mesma coincidente com o centro de massa da torre tubular;

38 – batente amortecedor com borracha: dispositivo de segurança para limitação dos deslocamentos do aparelho de controle de vibração e para absorver o impacto dos patins nº 31a,b,c,d sobre os trilhos nº 32a,b e dos patins nº 34a,b,c,d sobre os trilhos nº 35a,b. Ou seja, serve para o caso de uma situação não prevista de carregamento que levaria o deslocamento dos patins além dos limites dos trilhos.

5.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Após as análises feitas neste capítulo, observa-se que os absorvedores de vibração

propostos, tanto passivo quanto híbrido, apresentaram eficiência no controle de vibração da torre, quando o conjunto torre-absorvedor está submetido a uma ação harmônica ressonante ao 1º modo de vibração da torre. Adicionalmente, por meio do esquema construtivo do absorvedor exposto, afirma-se a viabilidade executiva do sistema de controle de vibrações para torres tubulares de aerogeradores de eixo horizontal de grande porte, que foi estudado nesta tese.

No capítulo seguinte, descrevem-se as principais conclusões e contribuições deste trabalho, assim como as indicações para pesquisas futuras.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo é apresentada uma síntese das principais conclusões e considerações a respeito deste estudo, bem como, as perspectivas (sugestões) para trabalhos futuros a serem desenvolvidos no tema desta tese.

6.1 SÍNTESE DA TESE, CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES

Foram abordadas três estratégias bem definidas de análise de uma torre tubular de aço, com altura de 120 m, que serve de suporte a um aerogerador com potência nominal de 3,2 MW:

- i. Análise, teórica e numérica, da estabilidade elástica do conjunto estrutural torresapata (capítulo 3);
- ii. Análise dinâmica modal e transiente (capítulo 4);
- iii. Projeto de um aparelho de absorção de vibração (capítulo 5).

A técnica de meio contínuo aplicada à torre tubular de aço do aerogerador mostrou-se adequada para previsão da carga de flambagem (solução da parcela homogênea da equação diferencial), dos esforços e das deformações utilizados para realizar o projeto da torre com seção transversal variável e engastada na base. Salienta-se também que, para a elaboração do projeto da torre, a previsão das cargas utilizadas (peso próprio, peso de equipamentos, carga eólica, decorrentes do funcionamento do gerador e do desaprumo da torre) mostrou-se compatível com as dimensões das torres e das turbinas eólicas de potência nominal semelhantes à utilizada neste trabalho.

O modelo estrutural via elementos finitos foi comparado com o modelo de meio contínuo, resolvido mediante diferenças finitas. Foi observado que os resultados obtidos são consistentes e muito próximos, o que garante a validade das técnicas numéricas implementadas. Constatou-se, também, para o modelo simulado no *software* ANSYS em que se considera a interação solo-estrutura, que há estabilidade para o conjunto estrutural torresapata-solo; ou seja, o sistema tende para uma deformada final estável. Adicionalmente, na análise da distribuição de tensões de *von Mises*, ao longo da torre, não houve necessidade de empregar modelos de falha, pois nenhum ponto da estrutura atingiu a tensão admissível do aço empregado.

Os resultados da análise modal feita, tanto para o modelo com elementos finitos de casca, com e sem base flexível, quanto para o modelo de elementos finitos de barra mostram-

se similares, principalmente com relação ao 1º modo de vibração da torre. Portanto, o modelo representado por EF de barra pode ser utilizado como representativo do comportamento dinâmico da torre quando esta é submetida às excitações ressonantes à frequência fundamental da torre.

Com isso, a ação da parcela flutuante do vento e a excitação que simula o desprendimento cadenciado de vórtices de von Kármán foram modeladas por forças harmônicas ressonantes, considerando a tendência de que haja a excitação do modo fundamental da torre. A intensidade crescente das forças do vento com a altura em relação ao nível do solo, o aumento dos deslocamentos horizontais à torre com relação à altura no 1º modo de vibração e a massa concentrada no topo (nacele), da mesma ordem de grandeza da massa da torre, são fatores que contribuem para excitação do 1º modo de vibração da torre.

Adicionalmente, a influência da flexibilidade da fundação nos modos de vibração da torre foi investigada. Foram extraídos os 50 primeiros modos de vibração do modelo com base flexível para se detectar o 2ª modo de vibração torcional. Este passou para uma frequência mais alta, quando comparados aos outros modos locais e flexionais que tinham frequências superiores a 2ª frequência torcional do modelo engastado na base. Assim, com a consideração da flexibilidade da base, quase a totalidade dos valores das frequências de vibração diminuiu e alguns modos de vibração locais superiores passaram a ficar alocados em frequências mais baixas.

As equações para o projeto do absorvedor de vibração foram desenvolvidas no espaço dos estados para modelagem adequada do aparelho de controle (formado por uma massa e conjuntos de molas e amortecedores vinculados ao topo da torre) e; para obtenção das variáveis ótimas de controle introduzidas pelos atuadores, aplicou-se o regulador quadrático linear (LQR).

Foram, então, estudados comparativamente três tipos de absorvedores: amortecedor de massa sintonizado (AMS), amortecedor de massa ativo (AMA) e o amortecedor de massa híbrido (AMH). O AMH, foco principal de contribuição desta tese, alcançou excelentes níveis de redução de vibração para a torre submetida às ações harmônicas, em regime transiente e permanente (estacionário), ressonantes ao primeiro modo de vibração da estrutura sem absorvedor.

Em face aos resultados obtidos, verificou-se que o sistema puramente passivo foi bastante eficiente no controle de vibrações da torre excitada segundo o 1º modo de vibração para o qual o absorvedor foi sintonizado. Os sistemas híbrido e ativo conseguiram melhorar consideravelmente o desempenho do sistema passivo. Nota-se que a resposta do absorvedor se

torna mais rápida com a introdução dos atuadores componentes do sistema de controle híbrido, fazendo com que este sistema seja adequado para situações em que se necessita de ação rápida de controle para eficácia e robustez do sistema.

Conclui-se, então, que os resultados desta pesquisa envolvem contribuições de interesse prático imediato, uma vez que, se pretende desenvolver subsídios para análises estruturais e de controle de vibrações, além de projetos de torres e fundações para aerogeradores de multi-megawatt de potência nominal, a serem implantados no Brasil (especificamente, no estado de Pernambuco).

6.2 PERSPECTIVAS/SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Pesquisas futuras podem contribuir no desenvolvimento e ampliação das análises realizadas neste trabalho, de forma a completá-las e modelar casos mais complexos. Portanto, estão apresentadas a seguir algumas propostas para a elaboração de trabalhos futuros:

- i. Refinar a consideração dos carregamentos provenientes do gerador sobre a torre (principalmente, os efeitos dinâmicos resultantes do funcionamento do gerador). E modelar a influência das pás do aerogerador na resposta da torre, ou seja, quantificar a influência da interação da rotação das pás (rotor em funcionamento) no sistema torre-nacele, pela combinação das respectivas equações de movimento;
- ii. Considerar o efeito sísmico sobre a torre, tendo em vista a ocorrência de sismos no estado de Pernambuco, decorrentes de uma falha geológica que cruza de leste a oeste o estado. Desta forma, analisar-se-iam a estabilidade elástica e a eficiência do controle de vibrações híbrido propostas neste trabalho;
- iii. Implementar amortecedores de massa sintonizados múltiplos (AMSM), *multiple tuned mass damper* (MTMD), para o controle mais eficiente e robusto de modos de vibração superiores da torre;
- iv. Verificar a atuação do absorvedor dinâmico de vibração no controle de fadiga dos materiais que constituem a torre;
- v. Implementar o projeto dos observadores de estado para o modelo do sistema de controle proposto nesta tese, de maneira a considerar a situação na qual a quantidade de sensores não é suficiente para realimentar a malha de projeto do sistema de controle;
- vi. Considerar o efeito estocástico (aleatório) da ação de vento de maneira a simular mais precisamente as características de aleatoriedade e de instabilidade de tal

ação; considerando, por exemplo, a simulação de Monte Carlo no Método do Vento Sintético (FRANCO, 1993) ou até mesmo séries temporais de vento com velocidades reais nos locais de implantação dos parques eólicos;

- vii. Realizar o projeto executivo mais completo da torre, incluindo o detalhamento: das ligações soldadas necessárias; das aberturas da torre; das plataformas e dos elementos de ascensão à torre;
- viii. Desenvolver análises, semelhantes às expostas neste trabalho, aplicadas às torres de aerogeradores *offshore*, tendo em vista o promissor potencial eólico para geração de energia elétrica da costa brasileira (OLIVEIRA FILHO, 2011).

REFERÊNCIAS

- ACCIOLY, M. M. L. **Aplicação de métodos de controle ótimo à redução de vibrações em edifícios submetidos à ação de cargas dinâmicas**. 149 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.
- ACKERMANN, T. An overview of wind energy-status 2002. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 6, n. 1-2, p. 67-127. doi: 10.1016/S1364-0321(02)00008-4, 2002.
- ADHIKARI, S.; BHATTACHARYA, S. Dynamic analysis of wind turbine towers on flexible foundations. **Shock and Vibration**, v. 19, p. 37-56, 2012.
- Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL). Banco de Informações de Geração (BIG): Capacidade de Geração do Estado PERNAMBUCO. ANEEL, 2016. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br>>. Acesso em: 30 dez. 2016.
- ASIBOR, A. I.; GARCIA, J. R.; RAMOS, M. C.; SILVA, E. C. M.; ARAÚJO, A. M. Wind turbine performance and loading calculations using aero elastic modelling. In: International Congress of Mechanical Engineering, 23, 2015, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABCM, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988. 66p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004. 15p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **NBR 8800**: Projetos de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008. 237p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR IEC 61400-1**: Aerogeradores Parte 1: Requisitos de Projeto. Rio de Janeiro, 2008. 82p.
- AVILA, S. M.; SHUZU, M. A. M.; PEREIRA, W. M.; SANTOS, L. S.; MORAIS, M. V. G.; PRADO, Z. J. G. Numerical modeling of the dynamic behavior of a wind turbine tower. In: International Conference on Vibration Problems, 11., 2013, Lisbon. **Anais...** Lisbon: ICOVP, 2013.
- ATLAS EÓLICO E SOLAR DE PERNAMBUCO. **Capítulo III - O Estado de Pernambuco e Capítulo VII - O Potencial Eólico de Pernambuco**. ATLAS..., 2017. Disponível em: <<http://www.atlaseolicosolar.pe.gov.br/>>. Acesso em: 20 mar. 2018.
- BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1037 p. ISBN 0-13-301458-4.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of structures**: elastic, inelastic, fracture, and

damage theories. Oxford: Oxford University Press, 1991. ISBN 0-19-505529-2.

BAZEOS, N.; HATZIGEORGIU, G. D.; HONDROS, I. D.; KARAMANEAS, H.; KARABALIS, D. L.; BESKOS, D. E. Static, seismic and stability analyses of a prototype wind turbine steel tower. **Engineering Structures**, v. 24, n. 8, p. 1015-1025, 2002.

BLESSMANN, Joaquim. **Introdução ao estudo das ações dinâmicas do vento**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005. 282 p. ISBN 85-7025-802-X.

BLEVINS, R. D. **Flow-induced vibration**. 2. ed. Malabar (Florida): Krieger Publishing Company, 2001. 477 p. ISBN 1-57524-183-8.

BOWLES, J. E. **Foundation Analysis and Design**. 5th ed. Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1996.

BRUGHUIS, F. J. Advanced Tower Solutions for Large Wind Turbines and Extreme Tower Heights. Mecal Applied Mechanics BV. In: EUROPEAN WIND ENERGY CONFERENCE & EXHIBITION-EWEC, 16-19, 6., 2003, Madri. **Anais...** Madri: 2003.

BURTON, T.; SHARPE, D.; JENKINS, N.; BOSSANYI, E. **Handbook of wind energy**. Inglaterra: John Wiley & Sons, 2001. 617 p. ISBN 0-471-48997-2.

CHOPRA, A.K. **Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering**. 4. ed. Practice Hall, 2012. 944 p.

COLHERINHAS, G. B.; MORAIS, M. V. G.; SHZU, M. A. M.; AVILA, S. M. Genetic optimization of tower vibrations with pendulum TMD. In: Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 36., 2015, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: CILAMCE, 2015.

COLHERINHAS, G. B.; MORAIS, M. V. G.; SHZU, M. A. M.; AVILA, S. M. Genetic optimization analysis of wind tower vibrations controlled by a pendulum TMD. In: Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 37., 2016, Brasília. **Anais...** Brasília: CILAMCE, 2016.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. Madison: John Wiley & Sons, 2002. 719 p. ISBN 978-0-471-35605-9.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3. ed. Berkeley: Computers and Structures, 2003.

DANISH WIND INDUSTRY ASSOCIATION. DWIA. By Soren Krohn. **Guided Tour on Wind Energy**. 1999. Disponível em: <<http://xn--drmsttre-64ad.dk/wp-content/wind/miller/windpower%20web/en/tour/manu/towerm.htm>>. Acesso em: 22 ago. 2015.

DELLEZZOPOLLES Jr., C. F. **Análise dinâmica de torres de energia eólica**. 83 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

DEN HARTOG, J. P. **Vibrações nos sistemas mecânicos**. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

DNV/Risø. **Guidelines for Design of Wind Turbines**. 2 ed. Denmark: Jydsk Centraltrykkeri, 2002.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1991-1-4**: Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-4: General actions – Wind actions. Brussels, 2005.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-3-2**: Eurocode 3: Design of steel structures – Part 3-2: Towers, masts and chimneys – Chimneys. Brussels, 2006.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 10025-2**: Hot rolled products of structural steels – Part 2: Technical delivery conditions for non-alloy structural steels. Brussels, 2004.

European Wind Energy Association (EWEA). **Wind Energy – The Facts, a Guide to the Technology, Economics and Future of Wind Power**. 2009. Brussels, Belgium. Disponível em: < www.wind-energy-the-facts.org/>. Acesso em: 19 ago. 2015.

FEIJÓ, P. B. **Otimização de torres de aço para geradores eólicos**. 85 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil – Área de Concentração: Estruturas) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

FITZGERALD, B.; BASU, B. Structural control of wind turbines with soil structure interaction included. **Engineering Structures**, v. 111, p. 131–151, 2016.

FRAHM, H. **Device for damping vibrations of bodies**. U.S.: Patent No. 989958, 1909.

FRANCO, M., Direct Along-wind Dynamic Analysis of Tall Structures. **Boletim Técnico da Escola Politécnica**, Universidade de São Paulo. São Paulo: EPUSP, 1993. 22p.

GERE, J. M.; WEAVER Jr., W. **Análise de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S. A., 1987.

GLOBAL WIND ENERGY COUNCIL (GWEC). **Global statistics**. Brussels, 2015. Disponível em: <<http://gwec.net/global-figures/graphs/>>. Acesso em: 20 out. 2015.

GLOBAL WIND ENERGY COUNCIL (GWEC). **Global statistics**. Brussels, 2018. Disponível em: <<http://gwec.net/global-figures/graphs/>>. Acesso em: 15 abr. 2018.

GUIMARÃES, P. V. B. **Controle semiativo de modelo de pêndulo invertido para aerogeradores offshore**. 101 f. Dissertação (Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia) – Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília, 2016.

GUIMARÃES, P. V. B.; AVILA, S. M.; SHZU, M. A. M.; PRADO, Z. J. G.; MORAIS, M. V. G. Vibration control of an offshore wind turbine modeled as an inverted pendulum. In: Proceedings of International Conference on Vibration Problems, 11., 2013, Lisboa. **Anais...**Lisboa: ICOVP, 2013.

GUIMARÃES, P. V. B.; MORAIS, M. V. G.; AVILA, S. M. Tuned mass damper inverted pendulum to reduce offshore wind turbine vibrations. In: SINHA, J. K. (Org.). **Vibration Engineering and Technology of Machinery**: Proceedings of VETOMAC X 2014, held at the University of Manchester, UK, September 9-11, 2014. Mechanisms and Machine Science, v. 23. Springer, 2015. p. 379-388.

G1. Caruaru e região. TV Asa Branca. **Primeiro parque híbrido de energia renovável do país é inaugurado em PE**. 2015. Disponível em: <<http://g1.globo.com/pe/caruaru-regiao/noticia/2015/09/primeiro-parque-hibrido-de-energia-renovavel-do-pais-e-inaugurado-em-pe.html>>. Acesso em: 28 set. 2015.

HANSEN, M. O. L.; SORENSEN, J. N.; VOUTSINAS, S.; SORENSEN, N.; MADSEN, H. A. State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 42, n. 4, p. 285–330, 2006.

HAU, Erich. **Wind Turbines**: Fundamentals, Technologies, Application, Economics. 2 ed. Munich (Germany): Springer, 2006. 783 p.

HOUSNER, G. W.; BERGMAN, L. A.; CAUGHEY, T. K.; CHASSIAKOS, A. G.; CLAUS, R. O.; MASRI, S. F.; SKELTON, R. E.; SOONG, T. T.; SPENCER, B. F.; YAO, J. T. P. Structural control: past, present and future. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123, n. 9, p. 897-971, 1997.

HU, Y.; HE, E. Active structural control of a floating wind turbine with a stroke-limited hybrid mass damper. **Journal of Sound and Vibration**, v. 410, p. 447-472, 2017.

HUEBNER, K. H.; DEWHIRST, D. L.; SMITH, D. E.; BYROM, T. G. **The finite element method for engineers**. 4 ed. John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-37078-9.

HUMAR, J. L. **Dynamics of Structures**. 2 ed. Ottawa (Canada): A.A. Balkema Publishers, Lisse, 2002. 967 p.

JUÁREZ, A. A.; ARAÚJO, A. M.; ROHATGI, J. S.; OLIVEIRA FILHO, O. D. Q. Development of the wind power in Brazil: political, social and technical issues. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 39, p. 828–834, 2014.

JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. ISBN 1-56347-054-3.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear optimal control systems**. New York: Wiley & Sons, 1972.

LACKNER, M. A.; ROTEA, M. A. Passive structural control of offshore wind turbines. **Wind Energy**, v. 14, p. 373–388, 2011a.

LACKNER, M. A.; ROTEA, M. A. Structural control of floating wind turbines. **Mechatronics**, v. 21, p. 704–719, 2011b.

- LANCZOS, C. An efficient method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. **Journal of Research of National Bureau of Standards**, v.45, n. 4, p. 255-282, 1950.
- LAVASSAS, I.; NIKOLAIDIS, G.; ZERVAS, P.; EFTHIMIOU, E.; DOUDOUMIS, I. N.; BANIOPOULOS, C. C. Analysis and design of the prototype of a steel 1-MW Wind turbine tower. **Engineering Structures**, v. 25, p. 1097-1106, 2003.
- LI, J.; ZHANG, Z.; CHEN, J. Experimental study on vibration control of offshore wind turbines using a ball vibration absorber. **Energy and Power Engineering**, v. 4, n.3, p. 153-157, 2012.
- LIMA, J. B. C. A. **Contribuições para otimização estrutural de torres tubulares de aço para turbinas eólicas**. 149 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil – Área de Concentração: Estruturas) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. **International Journal of Control**, v. 55, n. 2, p. 531-773, 1992.
- MEIROVITCH, L. **Dynamics and control of structures**. New York: JohnWiley & Sons, 1990. ISBN 0-471-62858-1.
- MOUTINHO, C. M. R. **Controlo de vibrações em estruturas de engenharia civil**. 394 f. Dissertação (Doutorado) – Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia, Porto, 2007.
- MURTAGH, P. J.; BASU, B.; BRODERICK, B. M. Along-wind response of a wind turbine tower with blade coupling subjected to rotationally sampled wind loading. **Engineering Structures**, v. 27, p. 1209-1219, 2005.
- MURTAGH, P. J.; GHOSH, A.; BASU, B.; BRODERICK, B. M. Passive control of wind turbine vibrations including blade/tower interaction and rotationally sampled turbulence. **Wind Energy**, v. 11, p. 305-317, 2008.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3 ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. 813 p. ISBN 85-7054-074-4.
- OLIVEIRA, L. F. M. P. **Análise do comportamento dinâmico de torres de geradores eólicos**. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2012.
- OLIVEIRA FILHO, O. D. Q. **Uma metodologia simplificada para estimativa do aproveitamento eólico offshore no litoral brasileiro, estudo de caso: a Ilha de Itamaracá-PE**. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.
- ORMONDROYD, J. DEN HARTOG, J. P. The theory of the dynamic vibration absorber. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 50, p. 9-22, 1928.
- PFEIL, W. **Concreto armado: dimensionamento**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC). **O Programa**. PPGEC, 2018. Disponível em: <<https://www.ufpe.br/poscivil/o-programa>> . Acesso em: 20 mar. 2018.

RAO, S. **Vibrações mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 424 p. ISBN 978-85-7605-200-5.

ROTEA, M. A.; LACKNER, M. A.; SAHEBA, R. Active structural control of offshore wind turbines. In: AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 48., 2010, Orlando. **Anais...** Orlando: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010. p. 1-21.

SANTOS, N. A. A. S. **Otimização de torre de aço para aerogerador eólico**. 114 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Área de Concentração: Estruturas). Faculdade de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

SCHUBEL, P. J.; CROSSLEY, R. J. Wind Turbine Blade Design. **Energies**, v. 5, p. 3425-3449, 2012.

SHZU, M. A. M.; MORAIS, M. V. G.; DEL PRADO, Z. J. G. AVILA, S. M.. Finite element analysis of a wind turbine tower with a pendulum tuned mass damper. In: International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, 17., 2015, Natal. **Anais...** Natal: DINAME, 2015.

SIEMENS. **Siemens D3 platform – 3.0-MW and 3.2 – MW direct drive wind turbines: Reduced complexity, increased profitability**. Erlangen, Germany, 2014. Disponível em: <https://www.energy.siemens.com/br/pool/hq/power-generation/renewables/wind-power/platform20brochures/D3%20Onshore%20brochure_ENGLISH_Apr2014_WEB.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2015.

SIRQUEIRA, A. S. **Comportamento estrutural de torres de aço para suporte de turbinas eólicas**. 112f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. Passive energy dissipation systems in structural engineering. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1997.

SPENCER Jr., B. F.; NAGARAJIAH, S. State of the art of structural control. **Journal of Structural Engineering**, v. 129, p. 845-856, 2003.

STEWART, G. M. **Load reduction of floating wind turbines using tuned mass dampers**. 83 p. Masters Teses (Master of Science in Mechanical Engineering) – University of Massachusetts Amherst, Amherst, 2012.

STEWART, G. M.; LACKNER, M. A. The effect of actuator dynamics on active structural control of offshore wind turbines. **Engineering Structures**, v. 33, p. 1807-1816, 2011.

STEWART, G. M.; LACKNER, M. A. Offshore wind turbine load reduction employing optimal passive tuned mass damping systems. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 21, n. 4, p. 1090-1104, 2013.

- STEWART, G. M.; LACKNER, M. A. The impact of passive tuned mass dampers and wind-wave misalignment on offshore wind turbine loads. **Engineering Structures**, v. 73, p. 54-61, 2014.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de concreto**: concreto armado. 2 ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981.
- SWANSON ANALYSIS SYSTEMS Inc. **ANSYS Mechanical User's Guide**. Release 14.5. Canonsburg (Pennsylvania, USA): South pointe, 275 Technology Drive, PA 15317, 2012.
- TERZAGHI, K. Evaluation of coefficient of subgrade reaction. **Geotechnique**, v. 5, n. 4, p. 297-326, 1955.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. 2 ed. Nova Iorque: McGRAW-HILL, 1963.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. ISBN 85-216-0246-4.
- TONG, X. ZHAO, X.; ZHAO, S. Load reduction of a monopole wind turbine tower using optimal tuned mass dampers. **International Journal of Control**, v. 90, p. 1283-1298, 2015.
- TSOUROUKDISSIAN, A. R. Wind turbine tower load reduction using passive and semi-active dampers. In: European Wind Energy Association, 2011, Brussels. **Anais...** Brussels: EWEA, 2011.
- WANG, J.; QIN, D.; LIM, T. C. Dynamic analysis of horizontal axis wind turbine by thin-walled beam theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 17, p. 3565-3586, 2010.
- YOSHIDA, P. E. Wind Turbine Tower Optimization Method Using Genetic Algorithm. **Wind Engineering**, v. 30, n. 6, p. 453-470, 2006.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite element method**. 5 ed. Butterworth-Heinemann, 2000. v. 1. ISBN 0-7506-5049-4.
- ZUO, H.; BI, K.; HAO, H. Using multiple tuned mass dampers to control offshore wind turbine vibrations under multiple hazards. **Engineering Structures**, v. 141, p. 303-315, 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ANÁLISE DE ESTABILIDADE ELÁSTICA E PROJETO ESTRUTURAL DO CONJUNTO TORRE-SAPATA

A.1) CARGA DE FLAMBAGEM À FLEXÃO - TORRE SEÇÃO VARIÁVEL

1) Dados Iniciais

1.1) Dimensões da torre

Altura da torre: $L := 120$

Número de subdivisões da malha: $n := 100$

Comprimento dos trechos da malha: $h := \frac{L}{n} = 1.2$

1.2) Propriedades elastomecânicas do aço da torre

Propriedades do aço S355 (EN 10025-2, 2004):

$f_y := 355 \times 10^6$ $E := 205 \times 10^9$ $\rho := 7850$

Coefficiente de Poisson: $\nu := 0.3$

Módulo de elasticidade transversal do aço: $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 7.885 \times 10^{10}$

1.3) Propriedades geométricas da torre

Diâmetro da base da torre: $d_{\text{base}} := 6.5$

Diâmetro da topo da torre: $d_{\text{topo}} := 3.5$

Espessura da parede da base da torre: $e_{\text{base}} := 50.8 \cdot 10^{-3}$

Espessura da parede da topo da torre: $e_{\text{topo}} := 25.4 \cdot 10^{-3}$

Função de variação do diâmetro: $d(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (d_{\text{base}} - d_{\text{topo}}) + d_{\text{topo}}$

Função de variação da espessura: $e_s(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (e_{\text{base}} - e_{\text{topo}}) + e_{\text{topo}}$

Função de variação da área: $A(z) := \pi \cdot d(z) \cdot e_s(z)$

Função de variação do momento de inércia:
$$I(z) := \frac{\pi}{64} \cdot \left[(d(z) + e_s(z))^4 - (d(z) - e_s(z))^4 \right]$$

Função de peso próprio da torre:
$$pp(z) := A(z) \cdot \rho \cdot 9.807$$

1.4) Carregamentos na torre

Força vertical transmitida à torre:
$$P_n := 4299033.45$$

2) Parâmetros de flambagem

Parâmetro da condição de contorno (natural) no topo da torre:
$$\alpha_- := \sqrt{\frac{P_n}{E \cdot I(L)}} = 7.002 \times 10^{-3}$$

Parâmetros da forma de flambagem:
$$\alpha_1 := \frac{10}{3} \cdot \alpha_-^2 \cdot L^2 - 40 \quad \alpha_2 := 5 \cdot 4 - \alpha_-^2 \cdot L^2 \quad \alpha_3 := \frac{8}{3} \cdot \alpha_-^2 \cdot L^2 - 3$$

Constante da forma de flambagem (qualquer valor real):
$$Cte := 1$$

Forma de flambagem:
$$v(z) := Cte \cdot \left(\alpha_1 \cdot z^2 + \frac{\alpha_2}{L^2} \cdot z^4 + \frac{\alpha_3}{L^3} \cdot z^5 \right) \quad \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(L) = -3.93 \times 10^5 \end{array}$$

Primeira derivada da Forma de flambagem:
$$\frac{d}{dz} v(z) = \frac{z \cdot 2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 4 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 5 \cdot \alpha_3 \cdot z^3}{L^3}$$

Segunda derivada da Forma de flambagem:
$$\frac{d^2}{dz^2} v(z) = \frac{2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 6 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 10 \cdot \alpha_3 \cdot z^3}{L^3}$$

Vetor da Forma de flambagem considerada:
$$v_{\text{vet}} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ v_{\text{vet}_i} \leftarrow v\left(i \cdot \frac{L}{n}\right) \\ v_{\text{vet}} \end{cases} \quad \text{Niveis} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \text{Niveis}_i \leftarrow i \cdot \frac{L}{n} \\ \text{Niveis} \end{cases}$$

3) Cargas de flambagem: torre com variação linear

Parâmetro de relação entre a peso próprio na base da torre e a carga no topo:

$$\beta := \frac{pp(0) \cdot L}{P_n} = 2.229$$

Relação entre os diâmetros da torre no topo e na base:

$$\delta := \frac{d_{\text{topo}}}{d_{\text{base}}} = 0.538$$

Relação entre as espessuras da torre no topo e na base:

$$\gamma := \frac{e_{\text{topo}}}{e_{\text{base}}} = 0.5$$

$$U := E \cdot \int_0^L I(z) \cdot \left[\frac{2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 6 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 10 \cdot \alpha_3 \cdot z^3}{L^3} \right]^2 dz = 1.945 \times 10^{17}$$

$$T2 := \int_0^L \left[\frac{z \cdot (2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 4 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 5 \cdot \alpha_3 \cdot z^3)}{L^3} \right]^2 dz = 1.544 \times 10^9$$

$$T1 := \int_0^L [L - (1 - \delta) \cdot z] \cdot [L - (1 - \gamma) \cdot z] \cdot \left[\int_0^z \left[\frac{z \cdot (2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 4 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 5 \cdot \alpha_3 \cdot z^3)}{L^3} \right]^2 dz \right] dz = 3.409 \times 10^{14}$$

$$P_{CR} := \frac{U}{\frac{\beta}{L^3} \cdot T1 + T2} = 9.804 \times 10^7$$

$$K_{fl} := \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I(0)}{P_{CR}}} = 2.802$$

4) Cargas de flambagem: torre com trechos de espessuras constantes

Vetor de espessuras nos níveis estabelecidos:

$$e_{\text{com}} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{5}{8} \\ 1\frac{3}{4} \\ 2 \\ 2\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{2} \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 0.0254$$

| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 0 | 6.35 |
| 1 | 7.938 |
| 2 | 9.525 |
| 3 | 12.7 |
| 4 | 15.875 |
| 5 | 19.05 |
| 6 | 22.225 |
| 7 | 25.4 |
| 8 | 31.75 |
| 9 | 38.1 |
| 10 | 41.275 |
| 11 | 44.45 |
| 12 | 50.8 |
| 13 | 57.15 |
| 14 | 63.5 |
| 15 | ... |

$$e_{\text{com}} = \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \text{esp} &:= \text{for } i \in 0..n-1 \\ &\quad \text{esp}_i \leftarrow e_s(i-h) \end{aligned}$$

$$\text{esp} := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \quad j \leftarrow 0 \\ \quad \text{while } e_s(i-h) > e_{\text{com},j} \\ \quad \quad j \leftarrow j + 1 \\ \quad \text{esp}_i \leftarrow e_{\text{com},j} \end{array}$$

Vetor de diâmetros e de áreas nos níveis estabelecidos:

$$\phi := \text{for } i \in 0..n =$$

| | 0 |
|----|------|
| 0 | 6.5 |
| 1 | 6.47 |
| 2 | 6.44 |
| 3 | 6.41 |
| 4 | 6.38 |
| 5 | 6.35 |
| 6 | 6.32 |
| 7 | 6.29 |
| 8 | 6.26 |
| 9 | 6.23 |
| 10 | 6.2 |
| 11 | 6.17 |
| 12 | 6.14 |
| 13 | 6.11 |
| 14 | 6.08 |
| 15 | ... |

$\phi_i \leftarrow d(i \cdot h)$

$$A_{\text{tor}} := \text{for } i \in 0..n =$$

| | 0 |
|----|-------|
| 0 | 1.037 |
| 1 | 1.033 |
| 2 | 1.028 |
| 3 | 1.023 |
| 4 | 1.018 |
| 5 | 1.013 |
| 6 | 1.009 |
| 7 | 1.004 |
| 8 | 0.999 |
| 9 | 0.994 |
| 10 | 0.989 |
| 11 | 0.985 |
| 12 | 0.98 |
| 13 | 0.975 |
| 14 | 0.97 |
| 15 | ... |

$A_{\text{tor}_i} \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \phi_i$

Vetor de peso próprio da torre nos níveis estabelecidos:

$$pp_{\text{tor}} :=$$

| | 0 |
|----|----------|
| 0 | 79860.64 |
| 1 | 79492.05 |
| 2 | 79123.46 |
| 3 | 78754.88 |
| 4 | 78386.29 |
| 5 | 78017.70 |
| 6 | 77649.11 |
| 7 | 77280.52 |
| 8 | 76911.94 |
| 9 | 76543.35 |
| 10 | 76174.76 |
| 11 | 75806.17 |
| 12 | 75437.59 |
| 13 | 75069.00 |
| 14 | 74700.41 |
| 15 | ... |

$pp_{\text{tor}_i} \leftarrow A_{\text{tor}_i} \cdot \rho \cdot 9.807$

$$\begin{array}{l}
P_{cr} := \left| \begin{array}{l}
U_e \leftarrow 0 \\
T1_e \leftarrow 0 \\
\text{for } j \in 0..n-1 \\
\left| \begin{array}{l}
I_e(z) \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (d(z) + \text{esp}_j)^4 - (d(z) - \text{esp}_j)^4 \\
U_e \leftarrow U_e + \int_{j \cdot h}^{(j+1) \cdot h} E \cdot I_e(z) \cdot \frac{\left[2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 6 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 10 \cdot \alpha_3 \cdot z^3 \right]^2}{L^3} dz \\
\gamma_e \leftarrow \frac{\text{esp}_j}{\text{esp}_0} \\
T1_e \leftarrow T1_e + \int_{j \cdot h}^{(j+1) \cdot h} [L - (1 - \delta) \cdot z] \cdot \gamma_e \cdot \left[\int_0^z \frac{\left[z \cdot 2 \cdot \alpha_1 \cdot L^3 + 4 \cdot \alpha_2 \cdot L \cdot z^2 + 5 \cdot \alpha_3 \cdot z^3 \right]^2}{L^3} dz \right] dz \\
P_{cr} \leftarrow \frac{U_e}{\frac{\beta}{L^2} \cdot T1_e + T2} \\
P_{cr}
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
\end{array}$$

$$P_{cr} = 1.009 \times 10^8$$

$$P_{CR} = 9.804 \times 10^7$$

$$\text{dif} := \frac{P_{cr} - P_{CR}}{P_{cr}} = 2.861\%$$

$$K_{FL} := \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I(0)}{P_{cr}}} = 2.761763$$

A.2) ESTABILIDADE DA VIGA-COLUNA PELO MDF

1) Dados

Altura da torre: $\underset{ww}{H} := 120$

Número de subdivisões da malha: $n := 100$

Comprimento dos trechos da malha: $h := \frac{H}{n} = 1.2$

Diferença de nível entre o topo da torre e o centro do cubo do rotor: $\Delta h := 2.5$

Altura do cubo do rotor: $z_{\text{hub}} := H + \Delta h = 122.5$

Diâmetro do rotor: $D := 110$

Diâmetro da base da torre: $d_{\text{base}} := 6.5$

Diâmetro da topo da torre: $d_{\text{topo}} := 3.5$

Espessura da parede da base da torre: $e_{\text{base}} := 50.8 \times 10^{-3}$

Espessura da parede da topo da torre: $e_{\text{topo}} := 25.5 \cdot 10^{-3}$

Função de variação do diâmetro: $d(z) := \frac{H-z}{H} (d_{\text{base}} - d_{\text{topo}}) + d_{\text{topo}}$

Função de variação da espessura: $e_s(z) := \frac{H-z}{H} (e_{\text{base}} - e_{\text{topo}}) + e_{\text{topo}}$

Função de variação da área da seção transversal: $\underset{ww}{A}(z) := \pi \cdot e_s(z) \cdot d(z)$

Função de variação do momento de inércia: $I(z) := \frac{\pi}{4} \cdot \left[\left(\frac{d(z) + e_s(z)}{2} \right)^4 - \left(\frac{d(z) - e_s(z)}{2} \right)^4 \right]$

Propriedades do aço S355 (EN 10025-2, 2004):

$$f_y := 355 \times 10^6 \quad E := 205 \cdot 10^9 \quad \gamma := 7850 \times 9.807 = 7.698 \times 10^4$$

Coefficiente para consideração do peso dos equipamentos ao longo da torre: $\gamma_{\text{equipa}} := 1.05$

2) Carregamentos atuantes

Velocidade básica do vento (NBR 6123, 1988): $V_0 := 35$

Exponente do perfil de velocidade do vento (NBR 6123, 1988): $\alpha := 0.2$

Coefficiente de arrasto da torre tubular: $C_a := 0.6$

Perfil de velocidade do vento (ABNT NBR IEC 61400-1, 2008): $V(z) := V_0 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha$

Pressão dinâmica do vento (NBR 6123, 1988): $q_w(z) := \frac{1.225}{2} \cdot (V(z))^2$

Horizontal imperfections of self-supporting cantilevered chimneys should be allowed for by assuming a lateral deviation, Δ in [m], from the vertical at the top of (EN 1993-3-2, 2006; Design of steel structures: Towers, masts and chimneys - Chimneys):

$$\Delta := \frac{H}{500} \cdot \sqrt{1 + \frac{50}{H}} = 0.286$$

No entanto, o valor acima corresponde a um desaprumo que está bem além de um desaprumo correspondente ao processo de fabricação e montagem de torre eólicas metálicas. Logo, será considerada uma carga lateral equivalente a um desaprumo de 5 cm no topo da torre :

$$q_{\text{ea}}(z) := 1600$$

Pressão linear do vento (NBR 6123, 1988): $q_{w_linear}(z) := C_a \cdot (d(z) + e_s(z)) \cdot q_w(z)$

$$q_{\text{linear}}(z) := q_{w_linear}(z) + q_{\text{ea}}(z)$$

Força horizontal do rotor: $F_H := 662186.43$

Momento fletor no topo da torre devido à força horizontal do rotor: $M_H := 46644600.79$

Carga vertical da nacelle à torre:

$$P_n := 4299033.45$$

Função de variação do peso próprio da torre: $pp(z) := \gamma \cdot A(z)$

Peso próprio da torre: $PP := \int_0^H pp(z) dz = 5719637.25$

Esforço normal da torre: $NN(z) := \int_z^H pp(z) dz + P_n$

3) Vetor de espessuras nos segmentos da torre

$$e_{com} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{5}{8} \\ 1\frac{3}{4} \\ 2 \\ 2\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{4} \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} 0.0254$$

| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 0 | 6.35 |
| 1 | 7.938 |
| 2 | 9.525 |
| 3 | 12.7 |
| 4 | 15.875 |
| 5 | 19.05 |
| 6 | 22.225 |
| 7 | 25.4 |
| 8 | 31.75 |
| 9 | 38.1 |
| 10 | 41.275 |
| 11 | 44.45 |
| 12 | 50.8 |
| 13 | 57.15 |
| 14 | 57.15 |
| 15 | 76.2 |
| 16 | 88.9 |
| 17 | 101.6 |

$e_{com} = \cdot 10^{-3}$

$\text{esp} := \text{for } i \in 0..n + 1 =$
 $\text{esp}_i \leftarrow e_s(i \cdot h)$

| | |
|----|-------|
| | 0 |
| 0 | 0.051 |
| 1 | 0.051 |
| 2 | 0.05 |
| 3 | 0.05 |
| 4 | 0.05 |
| 5 | 0.05 |
| 6 | 0.049 |
| 7 | 0.049 |
| 8 | 0.049 |
| 9 | 0.049 |
| 10 | 0.048 |
| 11 | 0.048 |
| 12 | 0.048 |
| 13 | 0.048 |
| 14 | 0.047 |
| 15 | ... |

$\text{esp} := \text{for } i \in 0..n + 1$
 $\quad j \leftarrow 0$
 $\quad \text{while } e_s(i \cdot h) > e_{\text{com}_j}$
 $\quad \quad j \leftarrow j + 1$
 $\quad \text{esp}_{s_i} \leftarrow e_{\text{com}_j}$
 $\quad \text{esp}_s$

4) Vetor de diâmetros nos segmentos da torre

$\phi := \text{for } i \in 0..n + 1 =$
 $\phi_i \leftarrow d(i \cdot h)$

| | |
|----|------|
| | 0 |
| 0 | 6.5 |
| 1 | 6.47 |
| 2 | 6.44 |
| 3 | 6.41 |
| 4 | 6.38 |
| 5 | 6.35 |
| 6 | 6.32 |
| 7 | 6.29 |
| 8 | 6.26 |
| 9 | 6.23 |
| 10 | 6.2 |
| 11 | 6.17 |
| 12 | 6.14 |
| 13 | 6.11 |
| 14 | 6.08 |
| 15 | ... |

5) Vetor de áreas nos segmentos da torre

| | 0 |
|----|-------|
| 0 | 1.037 |
| 1 | 1.027 |
| 2 | 1.018 |
| 3 | 1.008 |
| 4 | 0.998 |
| 5 | 0.988 |
| 6 | 0.978 |
| 7 | 0.969 |
| 8 | 0.959 |
| 9 | 0.95 |
| 10 | 0.94 |
| 11 | 0.931 |
| 12 | 0.921 |
| 13 | 0.912 |
| 14 | 0.903 |
| 15 | ... |

$\underline{A} := \text{for } i \in 0..n \quad =$
 $A_i \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \phi_i$

6) Vetor de pesos próprios distribuídos nos segmentos da torre

| | 0 |
|----|--------------------|
| 0 | $8.385 \cdot 10^4$ |
| 1 | $8.305 \cdot 10^4$ |
| 2 | $8.225 \cdot 10^4$ |
| 3 | $8.146 \cdot 10^4$ |
| 4 | $8.067 \cdot 10^4$ |
| 5 | $7.988 \cdot 10^4$ |
| 6 | $7.91 \cdot 10^4$ |
| 7 | $7.832 \cdot 10^4$ |
| 8 | $7.754 \cdot 10^4$ |
| 9 | $7.677 \cdot 10^4$ |
| 10 | $7.6 \cdot 10^4$ |
| 11 | $7.524 \cdot 10^4$ |
| 12 | $7.448 \cdot 10^4$ |
| 13 | $7.372 \cdot 10^4$ |
| 14 | $7.297 \cdot 10^4$ |
| 15 | ... |

$\underline{pp} := \text{for } i \in 0..n \quad =$
 $pp_i \leftarrow \gamma_{\text{equipa}} \cdot A_i \cdot \gamma$

7) Vetor de forças verticais dos segmentos da torre

| | 0 |
|----|----------|
| 0 | 95611.61 |
| 1 | 94695.33 |
| 2 | 93783.46 |
| 3 | 92876.00 |
| 4 | 91972.93 |
| 5 | 91074.28 |
| 6 | 90180.03 |
| 7 | 89290.18 |
| 8 | 88404.74 |
| 9 | 87523.71 |
| 10 | 86647.08 |
| 11 | 85774.86 |
| 12 | 84907.05 |
| 13 | 84043.64 |
| 14 | 83184.63 |
| 15 | ... |

$P := \text{for } j \in 0..n-1$
 $A(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d(z)$
 $pp(z) \leftarrow A(z) \cdot \gamma$
 $P_j \leftarrow \int_{j \cdot h}^{(j+1) \cdot h} pp(z) dz$
 $P_n \leftarrow P_n$

8) Vetor de esforços normais nos segmentos da torre

| | 0 |
|----|--------------------|
| 0 | $1.004 \cdot 10^7$ |
| 1 | $9.941 \cdot 10^6$ |
| 2 | $9.847 \cdot 10^6$ |
| 3 | $9.753 \cdot 10^6$ |
| 4 | $9.66 \cdot 10^6$ |
| 5 | $9.568 \cdot 10^6$ |
| 6 | $9.477 \cdot 10^6$ |
| 7 | $9.387 \cdot 10^6$ |
| 8 | $9.298 \cdot 10^6$ |
| 9 | $9.209 \cdot 10^6$ |
| 10 | $9.122 \cdot 10^6$ |
| 11 | $9.035 \cdot 10^6$ |
| 12 | $8.949 \cdot 10^6$ |
| 13 | $8.864 \cdot 10^6$ |
| 14 | $8.78 \cdot 10^6$ |
| 15 | ... |

$NN := \text{for } j \in 0..n$
 $NN_j \leftarrow \sum_{i=j}^n P_i$

9) Vetor de momentos de inércia nos segmentos da torre

| | 0 |
|----|-------|
| 0 | 5.479 |
| 1 | 5.376 |
| 2 | 5.275 |
| 3 | 5.176 |
| 4 | 5.078 |
| 5 | 4.981 |
| 6 | 4.886 |
| 7 | 4.792 |
| 8 | 4.699 |
| 9 | 4.608 |
| 10 | 4.518 |
| 11 | 4.429 |
| 12 | 4.342 |
| 13 | 4.256 |
| 14 | 4.171 |
| 15 | ... |

$I_j := \text{for } j \in 0..n+1$
 $I_j \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (\phi_j + \text{esp}_j)^4 - (\phi_j - \text{esp}_j)^4$

10) Vetor de carga distribuída lateral (vento) nos segmentos da torre

| | 0 |
|----|--------------------|
| 0 | $1.6 \cdot 10^3$ |
| 1 | $2.857 \cdot 10^3$ |
| 2 | $3.251 \cdot 10^3$ |
| 3 | $3.533 \cdot 10^3$ |
| 4 | $3.758 \cdot 10^3$ |
| 5 | $3.949 \cdot 10^3$ |
| 6 | $4.114 \cdot 10^3$ |
| 7 | $4.262 \cdot 10^3$ |
| 8 | $4.394 \cdot 10^3$ |
| 9 | $4.515 \cdot 10^3$ |
| 10 | $4.626 \cdot 10^3$ |
| 11 | $4.728 \cdot 10^3$ |
| 12 | $4.823 \cdot 10^3$ |
| 13 | $4.912 \cdot 10^3$ |
| 14 | $4.995 \cdot 10^3$ |
| 15 | ... |

$qq := \text{for } i \in 0..n$
 $qq_i \leftarrow q_{\text{linear}}(i \cdot h)$

11) Resolução da EDO da torre - ESTABILIDADE

Equação diferencial ordinária da TORRE:

$$E \cdot I(z) \cdot \frac{d^4}{dz^4} v(z) + 2 \cdot E \cdot \left(\frac{d}{dz} I(z) \right) \cdot \frac{d^3}{dz^3} v(z) + \left(E \cdot \frac{d^2}{dz^2} I(z) + NN(z) \right) \cdot \frac{d^2}{dz^2} v(z) - pp(z) \cdot \left(\frac{d}{dz} v(z) \right) = q_{\text{linear}}(z)$$

Equações de aproximação via Método das Diferenças Finitas com fórmulas da diferença central:

$$\frac{d}{dz} v(z) = \frac{1}{2 \cdot h} (v_{i+1} - v_{i-1}) \quad \frac{d^2}{dz^2} v(z) = \frac{1}{h^2} (v_{i+1} - 2 \cdot v_i + v_{i-1})$$

$$\frac{d^3}{dz^3} v(z) = \frac{1}{2 \cdot h^3} (v_{i+2} - 2 \cdot v_{i+1} + 2 \cdot v_{i-1} - v_{i-2}) \quad \frac{d^4}{dz^4} v(z) = \frac{1}{h^4} (v_{i+2} - 4 \cdot v_{i+1} + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_{i-1} + v_{i-2})$$

$$\frac{d}{dz} I(z) = \frac{1}{2 \cdot h} (I_{i+1} - I_{i-1}) \quad \frac{d^2}{dz^2} I(z) = \frac{1}{h^2} (I_{i+1} - 2 \cdot I_i + I_{i-1})$$

Substituição das Equações de aproximação via MDF na EDO da TORRE:

$$\left[E \cdot I_i \cdot \left[\frac{1}{h^4} (v_{i+2} - 4 \cdot v_{i+1} + 6 \cdot v_i - 4 \cdot v_{i-1} + v_{i-2}) \right] \dots \right] = qq_1$$

$$+ 2 \cdot E \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h} (I_{i+1} - I_{i-1}) \right] \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h^3} (v_{i+2} - 2 \cdot v_{i+1} + 2 \cdot v_{i-1} - v_{i-2}) \right] \dots$$

$$+ \left[E \cdot \left[\frac{1}{h^2} (I_{i+1} - 2 \cdot I_i + I_{i-1}) \right] + NN_i \right] \cdot \left[\frac{1}{h^2} (v_{i+1} - 2 \cdot v_i + v_{i-1}) \right] - pp_i \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h} (v_{i+1} - v_{i-1}) \right]$$

$$\left[\left(\frac{E \cdot v_{i-2} \cdot I_i}{h^4} + \frac{E \cdot I_{i-1} \cdot v_{i-2}}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_{i+1} \cdot v_{i-2}}{2 \cdot h^4} \right) \dots \right] = qq_1$$

$$+ \left(\frac{v_{i-1} \cdot NN_i}{h^2} + \frac{v_{i-1} \cdot pp_i}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot v_{i-1} \cdot I_i}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{i+1} \cdot v_{i-1}}{h^4} \right) \dots$$

$$+ \left(\frac{2 \cdot NN_i \cdot v_i}{h^2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{i-1} \cdot v_i}{h^4} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{i+1} \cdot v_i}{h^4} + \frac{10 \cdot E \cdot I_i \cdot v_i}{h^4} \right) \dots$$

$$+ \left(\frac{v_{i+1} \cdot NN_i}{h^2} - \frac{v_{i+1} \cdot pp_i}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot v_{i+1} \cdot I_i}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{i-1} \cdot v_{i+1}}{h^4} \right) \dots$$

$$+ \left(\frac{E \cdot v_{i+2} \cdot I_i}{h^4} - \frac{E \cdot I_{i-1} \cdot v_{i+2}}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_{i+1} \cdot v_{i+2}}{2 \cdot h^4} \right)$$

$$\left[\left(\frac{E \cdot I_i}{h^4} + \frac{E \cdot I_{i-1}}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_{i+1}}{2 \cdot h^4} \right) \cdot v_{i-2} + \left(\frac{NN_i}{h^2} + \frac{pp_i}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_i}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{i+1}}{h^4} \right) \cdot v_{i-1} \dots \right] = qq_i$$

$$+ \left(\frac{2 \cdot NN_i}{h^2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{i-1}}{h^4} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{i+1}}{h^4} + \frac{10 \cdot E \cdot I_i}{h^4} \right) \cdot v_i \dots$$

$$\left[\left(\frac{NN_i}{h^2} - \frac{pp_i}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_i}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{i-1}}{h^4} \right) \cdot v_{i+1} + \left(\frac{E \cdot I_i}{h^4} - \frac{E \cdot I_{i-1}}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_{i+1}}{2 \cdot h^4} \right) \cdot v_{i+2} \right]$$

Condições de contorno essenciais ($z=0m$):

$$v_0 := 0m \quad v_1 = v_{-1}$$

Condições de contorno naturais ($z = 120 m$):

$$\frac{d^2}{dz^2} v(120) = \frac{1}{h^2} \cdot (v_{21} - 2 \cdot v_{20} + v_{19}) = \frac{M_H}{E \cdot I_{20}}$$

$$V = \frac{d}{dz} M(z) - NN(z) \cdot \left(\frac{d}{dz} v(z) \right) = -E \cdot \left[\left(\frac{d}{dz} I(z) \right) \cdot \frac{d^2}{dz^2} v(z) + I(z) \cdot \frac{d^3}{dz^3} v(z) \right] - NN(z) \cdot \left(\frac{d}{dz} v(z) \right)$$

Substituindo-se as Equações de aproximação via MDF na expressão acima:

$$V_{20} = F_H = -E \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h} (I_{21} - I_{19}) \cdot \left[\frac{1}{h^2} (v_{21} - 2 \cdot v_{20} + v_{19}) \right] \dots \right] - NN_{20} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h} (v_{21} - v_{19}) \right]$$

$$+ I_{20} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot h^3} (v_{22} - 2 \cdot v_{21} + 2 \cdot v_{19} - v_{18}) \right]$$

$$\frac{V_{20}}{h} = \frac{F_H}{h} = \frac{E \cdot I_{20}}{2 \cdot h^4} \cdot v_{18} + \frac{NN_{20}}{2 \cdot h^2} + \frac{E \cdot I_{19}}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_{20}}{h^4} - \frac{E \cdot I_{21}}{2 \cdot h^4} \cdot v_{19} + \left(\frac{E \cdot I_{19}}{h^4} + \frac{E \cdot I_{21}}{h^4} \right) \cdot v_{20} \dots$$

$$\left[\frac{NN_{20}}{2 \cdot h^2} + \frac{E \cdot I_{19}}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_{20}}{h^4} - \frac{E \cdot I_{21}}{2 \cdot h^4} \right] \cdot v_{21} - \frac{E \cdot I_{20}}{2 \cdot h^4} \cdot v_{22}$$

$$v_{MDF} := \begin{cases} M \leftarrow \text{identity}(n+2) - \text{identity}(n+2) \\ \text{for } i \in 1..n \\ qq_{MDF_{i-1}} \leftarrow qq_i \\ qq_{MDF_n} \leftarrow \frac{M_H}{h^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& q_{\text{MDF}_{n+1}} \leftarrow \frac{F_H}{h} \\
M_{0,0} & \leftarrow \frac{\left(\frac{E \cdot I_1}{h^4} + \frac{E \cdot I_0}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_2}{2 \cdot h^4} \right) \left(\frac{2 \cdot NN_1}{h^2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_0}{h^4} - \frac{2 \cdot E \cdot I_2}{h^4} + \frac{10 \cdot E \cdot I_1}{h^4} \right)}{\left(\frac{NN_1}{h^2} - \frac{pp_1}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_1}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_0}{h^4} \right)} \\
M_{0,1} & \leftarrow \frac{\left(\frac{NN_1}{h^2} - \frac{pp_1}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_1}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_0}{h^4} \right)}{\left(\frac{E \cdot I_1}{h^4} - \frac{E \cdot I_0}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_2}{2 \cdot h^4} \right)} \\
M_{0,2} & \leftarrow \frac{E \cdot I_1}{h^4} - \frac{E \cdot I_0}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_2}{2 \cdot h^4} \\
M_{1,0} & \leftarrow \frac{NN_2}{h^2} + \frac{pp_2}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{h^4} \\
M_{1,1} & \leftarrow -\frac{2 \cdot NN_2}{h^2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_1}{h^4} - \frac{2 \cdot E \cdot I_3}{h^4} + \frac{10 \cdot E \cdot I_2}{h^4} \\
M_{1,2} & \leftarrow \frac{NN_2}{h^2} - \frac{pp_2}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_2}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_1}{h^4} \\
M_{1,3} & \leftarrow \frac{E \cdot I_2}{h^4} - \frac{E \cdot I_1}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_3}{2 \cdot h^4} \\
& \text{for } j \in 4..n+1 \\
& M_{1,j} \leftarrow 0 \\
& \text{for } k \in 2..n-1 \\
M_{k,k-2} & \leftarrow \frac{E \cdot I_{k+1}}{h^4} + \frac{E \cdot I_k}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_{k+2}}{2 \cdot h^4} \\
M_{k,k-1} & \leftarrow \frac{NN_{k+1}}{h^2} + \frac{pp_{k+1}}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_{k+1}}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_{k+2}}{h^4} \\
M_{k,k} & \leftarrow -\frac{2 \cdot NN_{k+1}}{h^2} - \frac{2 \cdot E \cdot I_k}{h^4} - \frac{2 \cdot E \cdot I_{k+2}}{h^4} + \frac{10 \cdot E \cdot I_{k+1}}{h^4} \\
M_{k,k+1} & \leftarrow \frac{NN_{k+1}}{h^2} - \frac{pp_{k+1}}{2 \cdot h} - \frac{6 \cdot E \cdot I_{k+1}}{h^4} + \frac{2 \cdot E \cdot I_k}{h^4} \\
M_{k,k+2} & \leftarrow \frac{E \cdot I_{k+1}}{h^4} - \frac{E \cdot I_k}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_{k+2}}{2 \cdot h^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{n,n-2} &\leftarrow \frac{E \cdot I_n}{h^4} \\
M_{n,n-1} &\leftarrow -\frac{2 \cdot E \cdot I_n}{h^4} \\
M_{n,n} &\leftarrow \frac{E \cdot I_n}{h^4} \\
M_{n+1,n-3} &\leftarrow \frac{E \cdot I_n}{2 \cdot h^4} \\
M_{n+1,n-2} &\leftarrow \frac{NN_n}{2 \cdot h^2} + \frac{E \cdot I_{n-1}}{2 \cdot h^4} - \frac{E \cdot I_n}{h^4} - \frac{E \cdot I_{n+1}}{2 \cdot h^4} \\
M_{n+1,n-1} &\leftarrow -\frac{E \cdot I_{n-1}}{h^4} + \frac{E \cdot I_{n+1}}{h^4} \\
M_{n+1,n} &\leftarrow -\frac{NN_n}{2 \cdot h^2} + \frac{E \cdot I_{n-1}}{2 \cdot h^4} + \frac{E \cdot I_n}{h^4} - \frac{E \cdot I_{n+1}}{2 \cdot h^4} \\
M_{n+1,n+1} &\leftarrow -\frac{E \cdot I_n}{2 \cdot h^4} \\
v_2 &\leftarrow M^{-1} \cdot qq_{MDF} \\
v_{MDF_0} &\leftarrow 0 \\
\text{for } cc \in 0..n-1 \\
v_{MDF_{cc+1}} &\leftarrow v_{2_{cc}} \\
v_{MDF}
\end{aligned}$$

A.3) MÉTODO MATRICIAL DA RIGIDEZ NEGATIVA

1) Dados Iniciais

1.1) Dimensões da torre

Altura da torre: $L := 120$

Número de subdivisões da malha: $n := 100$

Comprimento dos trechos da malha: $h := \frac{L}{n} = 1.2$

Comprimento da caixa da nacela: $a_{nac} := 12$

Altura da caixa da nacela: $h_{nac} := 5$

Largura da caixa da nacela: $b_{nac} := 4$

Diferença de nível entre o topo da torre e o centro do cubo do rotor: $\Delta h := 2.5$

Altura do cubo do rotor: $z_{hub} := L + \Delta h = 122.5$

Diâmetro do rotor: $D_{hub} := 110$

1.2) Propriedades elastomecânicas do aço da torre

Propriedades do aço S355 (EN 10025-2, 2004):

$f_y := 355 \times 10^6$ $E := 205 \times 10^9$ $\rho := 7850$

Coefficiente de Poisson: $\nu := 0.3$

Módulo de elasticidade transversal do aço: $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 7.885 \times 10^{10}$

1.3) Propriedades geométricas da seção transversal da torre

Diâmetro da base da torre: $d_{base} := 6.5$

Diâmetro da topo da torre: $d_{\text{topo}} := 3.5$

Espessura da parede da base da torre: $e_{\text{base}} := 50.8 \cdot 10^{-3}$

Espessura da parede da topo da torre: $e_{\text{topo}} := 25.5 \cdot 10^{-3}$

Função de variação do diâmetro: $d(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (d_{\text{base}} - d_{\text{topo}}) + d_{\text{topo}}$

Função de variação da espessura $e_s(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (e_{\text{base}} - e_{\text{topo}}) + e_{\text{topo}}$

Função de variação da área $\overset{\text{www}}{A}(z) := \pi \cdot d(z) \cdot e_s(z)$

Função de variação do momento de inércia: $I(z) := \frac{\pi}{64} \cdot (d(z) + e_s(z))^4 - (d(z) - e_s(z))^4$

1.4) Carregamentos na torre

Peso da nacele (200 ton): $P_{\text{nac}} := 200 \cdot 1000 \cdot 9.807 = 1961400.000$

Força vertical transmitida à torre: $P_{\text{opera}} := 4299033.45 - P_{\text{nac}} = 2337633.450$

Força vertical total transmitida à torre: $P_n := P_{\text{nac}} + P_{\text{opera}} = 4299033.450$

Força axial ao cubo do rotor transmitida à torre (máquina em operação): $F_H := 662186.43$

Força transversal ao cubo do rotor transmitida à torre (máquina em operação): $F_{\text{trans}} := 32106.07$

Momento fletor que gera deflexão da torre para fora do plano do rotor - tower fore-aft (máquina em operação): $M_H := 46644600.79$

Momento fletor que gera deflexão da torre no plano do rotor - tower side-to-side (máquina em operação): $M_{\text{lat}} := 4147943.60$

Momento Torsor no topo da torre (máquina em operação): $T_{\text{ww}} := 1985250.43$

Momento Torsor distribuído ao longo da torre: $tt := 0$

1.5) Coeficientes ponderadores de ações e resistências

Coeficiente ponderador de resistência: $\gamma_{a1} := 1.1$

Coeficiente ponderador de ações permanentes (peso próprio de estruturas metálicas): $\gamma_{g_torre} := 1.25$

Coeficiente ponderador de ações permanentes (peso próprio de equipamentos): $\gamma_{g_nacele} := 1.5$

Coeficiente ponderador de ações variáveis (ação do vento): $\gamma_{q_w} := 1.4$

Coeficiente para consideração do peso dos equipamentos ao longo da torre: $\gamma_{equipa} := 1.05$

1.6) Dados do carregamento eólico

Velocidade básica do vento (NBR 6123, 1988): $V_0 := 35$

Exponente do perfil de velocidade do vento (ABNT NBR IEC 61400-1, 2008): $\alpha := 0.2$

Coeficiente de arrasto da torre tubular: $C_a := 0.6$

Perfil de velocidade do vento (ABNT NBR IEC 61400-1, 2008): $V_{\text{ww}}(z) := V_0 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha$

Pressão dinâmica do vento (NBR 6123, 1988): $q_w(z) := \frac{1.225}{2} \cdot (V(z))^2$

Pressão linear do vento (NBR 6123, 1988): $q_{w_linear}(z) := C_a \cdot (d(z) + e_s(z)) \cdot q_w(z)$

1.7) Efeito de desaprumo da torre

Horizontal imperfections of self-supporting cantilevered chimneys should be allowed for by assuming a lateral deviation, Δ in [m], from the vertical at the top of (EN 1993-3-2, 2006; Design of steel structures: Towers, masts and chimneys - Chimneys):

$$\Delta := \frac{L}{500} \cdot \sqrt{1 + \frac{50}{L}} = 0.286$$

No entanto, o valor acima corresponde a um desaprumo que está bem além de um desaprumo correspondente ao processo de fabricação e montagem de torre eólicas metálicas. Logo, será considerada uma carga lateral equivalente a um desaprumo de 5 cm no topo da torre :

$$q_{ea}(z) := 1600$$

$$e_a := \frac{L}{2000} = 0.06$$

1.8) Carga distribuída ao longo da altura da torre

Pressão linear total:

$$q_{linear}(z) := q_{w_linear}(z) + q_{ea}(z)$$

2) Vetor dos níveis estabelecidos

Níveis := for j ∈ 0..n =
 Níveis_j ← j·h

| | |
|----|------|
| | 0 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1.2 |
| 2 | 2.4 |
| 3 | 3.6 |
| 4 | 4.8 |
| 5 | 6 |
| 6 | 7.2 |
| 7 | 8.4 |
| 8 | 9.6 |
| 9 | 10.8 |
| 10 | 12 |
| 11 | 13.2 |
| 12 | 14.4 |
| 13 | 15.6 |
| 14 | 16.8 |
| 15 | ... |

3) Vetor das espessuras nos níveis estabelecidos

As chapas grossas são produtos planos de alta qualidade disponíveis nas espessuras de 6,00 a 150,00 mm; larguras entre 900 e 3900 mm e comprimentos de 2400 até 18000 mm (CATÁLOGO USIMINAS, CHAPAS GROSSAS, 2013; BENAFER, CHAPA GROSSA, 2016).

$$\begin{array}{l}
 \left(\frac{1}{4} \right) \\
 \frac{5}{16} \\
 \frac{3}{8} \\
 \frac{1}{2} \\
 \frac{5}{8} \\
 \frac{3}{4} \\
 \frac{7}{8} \\
 1 \\
 e_{\text{com}} := 1 \frac{1}{4} \quad 0.0254 \\
 1 \frac{1}{2} \\
 1 \frac{5}{8} \\
 1 \frac{3}{4} \\
 2 \\
 2 \frac{1}{4} \\
 2 \frac{1}{2} \\
 3 \\
 3 \frac{1}{2} \\
 \left(4 \right)
 \end{array}$$

| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 0 | 6.35 |
| 1 | 7.938 |
| 2 | 9.525 |
| 3 | 12.7 |
| 4 | 15.875 |
| 5 | 19.05 |
| 6 | 22.225 |
| 7 | 25.4 |
| 8 | 31.75 |
| 9 | 38.1 |
| 10 | 41.275 |
| 11 | 44.45 |
| 12 | 50.8 |
| 13 | 57.15 |
| 14 | 63.5 |
| 15 | 76.2 |
| 16 | 88.9 |
| 17 | 101.6 |

$e_{\text{com}} = \cdot 10^{-3}$

esp := for $i \in 0..n$
 $\text{esp}_i \leftarrow e_s(i \cdot h)$

```

esp :=
  for i ∈ 0..n
    j ← 0
    while es(i·h) > ecomj
      j ← j + 1
    espi ← ecomj
    j1i ← j
  for i ∈ 0..n - 1
    espi ← ecomj1i+1 if j1i ≠ j1i+1
  esp

```

4) Vetor de diâmetros, áreas, momentos de inércia e momentos polar de inércia nos níveis estabelecidos

| | 0 |
|----|------|
| 0 | 6.5 |
| 1 | 6.47 |
| 2 | 6.44 |
| 3 | 6.41 |
| 4 | 6.38 |
| 5 | 6.35 |
| 6 | 6.32 |
| 7 | 6.29 |
| 8 | 6.26 |
| 9 | 6.23 |
| 10 | 6.2 |
| 11 | 6.17 |
| 12 | 6.14 |
| 13 | 6.11 |
| 14 | 6.08 |
| 15 | ... |

$\phi :=$ for $i \in 0..n$ =
 $\phi_i \leftarrow d(i \cdot h)$

| | 0 |
|----|-------|
| 0 | 1.037 |
| 1 | 1.033 |
| 2 | 1.028 |
| 3 | 1.023 |
| 4 | 1.018 |
| 5 | 1.013 |
| 6 | 1.009 |
| 7 | 1.004 |
| 8 | 0.999 |
| 9 | 0.994 |
| 10 | 0.989 |
| 11 | 0.985 |
| 12 | 0.98 |
| 13 | 0.975 |
| 14 | 0.97 |
| 15 | ... |

$\underline{\underline{A}} :=$ for $i \in 0..n$ =
 $A_i \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \phi_i$

$\underline{\underline{I}} :=$ for $i \in 0..n$
 $I_i \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (\phi_i + \text{esp}_i)^4 - (\phi_i - \text{esp}_i)^4$

$\underline{\underline{J}} :=$ for $i \in 0..n$
 $J_i \leftarrow 2 \cdot I_i$

$$A_{36} := \text{for } i \in 0..n \quad =$$

$$A_{36}_i \leftarrow 36 \cdot \text{esp}_i \cdot \phi_i \cdot \sin\left(\frac{10\text{deg}}{2}\right)$$

| | |
|----|-------|
| | 0 |
| 0 | 1.036 |
| 1 | 1.031 |
| 2 | 1.026 |
| 3 | 1.022 |
| 4 | 1.017 |
| 5 | 1.012 |
| 6 | 1.007 |
| 7 | 1.003 |
| 8 | 0.998 |
| 9 | 0.993 |
| 10 | 0.988 |
| 11 | 0.983 |
| 12 | 0.979 |
| 13 | 0.974 |
| 14 | 0.969 |
| 15 | ... |

5) Vetor de forças verticais nos níveis estabelecidos

$$P := \text{for } j \in 0..n - 1 \quad =$$

$$\left| \begin{array}{l} A_e(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d(z) \\ pp_e(z) \leftarrow A_e(z) \cdot \rho \cdot 9.807 \\ P_j \leftarrow \gamma_{\text{equipa}} \int_{j \cdot h}^{(j+1) \cdot h} pp_e(z) dz \\ P_n \leftarrow P_n \end{array} \right.$$

| | |
|----|-----------|
| | 0 |
| 0 | 100392.19 |
| 1 | 99927.77 |
| 2 | 99463.35 |
| 3 | 98998.93 |
| 4 | 98534.51 |
| 5 | 98070.09 |
| 6 | 97605.67 |
| 7 | 97141.25 |
| 8 | 96676.83 |
| 9 | 96212.41 |
| 10 | 95747.99 |
| 11 | 95283.57 |
| 12 | 94819.15 |
| 13 | 94354.73 |
| 14 | 93890.31 |
| 15 | ... |

$P_0 = 100392.193$

6) Vetor de esforços normais nos níveis estabelecidos

NN := for j ∈ 0..n

$$NN_0 = 10704129.88$$

$$NN_j \leftarrow \sum_{i=j}^n P_i$$

NN_{pp} := for j ∈ 0..n

$$NN_{pp_j} \leftarrow \sum_{i=j}^n P_i - P_n$$

Peso próprio da torre:

$$PP_{\text{torre}} := NN_{pp_0} = 6.405 \times 10^6$$

7) Coeficientes das matrizes de rigidez e do vetor de cargas

f := 2

K := for j ∈ 0..n-1

$$d_e(z) \leftarrow \frac{h-z}{h} (\phi_j - \phi_{j+1}) + \phi_{j+1}$$

$$A_e(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d_e(z)$$

$$I_e(z) \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (d_e(z) + \text{esp}_j)^4 - (d_e(z) - \text{esp}_j)^4$$

$$J_e(z) \leftarrow 2 \cdot I_e(z)$$

$$\text{flex} \leftarrow \text{identity}(2) - \text{identity}(2)$$

$$\text{flex}_{0,0} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$\text{flex}_{1,1} \leftarrow \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^2 \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$\text{flex}_{0,1} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \left(\frac{z}{h}\right) \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$\text{flex}_{1,0} \leftarrow \text{flex}_{0,1}$$

$$k_e \leftarrow \text{flex}^{-1}$$

$$K_{j,0} \leftarrow k_{e_{0,0}}$$

$$K_{j,1} \leftarrow k_{e_{1,1}}$$

$$K_{j,2} \leftarrow k_{e_{0,1}}$$

$$K_{j,3} \leftarrow \frac{k_{e_{0,0}} + k_{e_{0,1}}}{h}$$

$$K_{j,4} \leftarrow \frac{k_{e_{1,1}} + k_{e_{0,1}}}{h}$$

$$K_{j,5} \leftarrow \frac{K_{j,3} + K_{j,4}}{h}$$

$$f_{\text{axial}} \leftarrow \int_0^h \frac{(-1)^2}{E \cdot A_e(z)} dz$$

$$K_{j,6} \leftarrow f_{\text{axial}}^{-1}$$

$$f_{1\text{tor}} \leftarrow \int_0^h \frac{(-1)^2}{G \cdot J_e(z)} dz$$

$$K_{j,7} \leftarrow f_{1\text{tor}}^{-1}$$

$$q_e(z) \leftarrow q_{\text{linear}}(z + j \cdot h)$$

$$V_{f_0} \leftarrow \frac{\int_0^h z \cdot q_e(z) dz}{h}$$

$$V_{i_0} \leftarrow \left(\int_0^h q_e(z) dz \right) - V_{f_0}$$

$$M_0(z) \leftarrow V_{i_0} \cdot z - \int_0^z z \cdot q_e(z) dz$$

$$V_0(z) \leftarrow V_{i_0} - \int_0^z q_e(z) dz$$

$$f_{10} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h} \right) \frac{f \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$f_{20} \leftarrow \int_0^h \left(\frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h} \right) \frac{f \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$K_{j,8} \leftarrow -(K_{j,0} \cdot f_{10} + K_{j,2} \cdot f_{20})$$

$$K_{j,9} \leftarrow -(K_{j,2} \cdot f_{10} + K_{j,1} \cdot f_{20})$$

$$\begin{aligned}
K_{j,10} &\leftarrow V_{i_0} - \frac{(K_{j,8} + K_{j,9})}{h} \\
K_{j,11} &\leftarrow V_{f_0} + \frac{(K_{j,8} + K_{j,9})}{h} \\
NN_0(z) &\leftarrow \gamma_{\text{equipa}} \int_0^z A_e(z) \cdot \rho \cdot 9.807 \, dz \\
f_{0\text{axial}} &\leftarrow \int_0^h \frac{NN_0(z) \cdot (-1)}{E \cdot A_e(z)} \, dz \\
K_{j,12} &\leftarrow -f_{0\text{axial}} \cdot K_{j,6} \\
K_{j,13} &\leftarrow P_j - K_{j,12} \\
TT_0(z) &\leftarrow - \int_0^z t \, dz \\
f_{0\text{tor}} &\leftarrow \int_0^h \frac{TT_0(z) \cdot (-1)}{G \cdot J_e(z)} \, dz \\
K_{j,14} &\leftarrow -f_{0\text{tor}} \cdot K_{j,7} \\
K_{j,15} &\leftarrow - \left(K_{j,14} + \int_0^h t \, dz \right)
\end{aligned}$$

K

8) Matrices de rigidez

$$\begin{aligned}
k_{AA} &:= \left\{ \begin{array}{l}
k_{AA} \leftarrow \text{identity}(3n) - \text{identity}(3n) \\
\text{for } i \in 0..n-2 \\
\quad k_{AA_{i,i}} \leftarrow K_{i+1,6} + K_{i,6} \\
\quad k_{AA_{n-1,n-1}} \leftarrow K_{n-1,6} \\
\text{for } i \in 0..n-2 \\
\quad k_{AA_{i,i+1}} \leftarrow -K_{i+1,6} \\
\text{for } i \in 0..n-2 \\
\quad k_{AA_{i+1,i}} \leftarrow -K_{i+1,6} \\
\text{for } i \in n..2n-2 \\
\quad k_{AA_{i,i}} \leftarrow K_{i+1-n,7} + K_{i-n,7} \\
\quad k_{AA_{2n-1,2n-1}} \leftarrow K_{n-1,7} \\
\text{for } i \in n..2n-2
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

```

kAAi,i+1 ← -Ki+1-n,7
for i ∈ n..2n-2
  kAAi+1,i ← -Ki+1-n,7
for i ∈ 2n..3n-2
  kAAi,i ← Ki+1-2n,0 + Ki-2n,1
kAA3n-1,3n-1 ← Kn-1,1
for i ∈ 2n..3n-2
  kAAi,i+1 ← Ki+1-2n,2
for i ∈ 2n..3n-2
  kAAi+1,i ← Ki+1-2n,2
kAA

```

```

kBB := kBB ← identity(n) - identity(n)
for i ∈ 0..n-2
  kBBi,i ← Ki,5 + Ki+1,5
kBBn-1,n-1 ← Kn-1,5
for j ∈ 0..n-2
  kBBj,j+1 ← -Kj+1,5
for k ∈ 0..n-2
  kBBk+1,k ← -Kk+1,5
kBB

```

```

kAB := for i ∈ 0..3n-1
  for j ∈ 0..n-1
    kABi,j ← 0
for i ∈ 0..n-2
  kABi+2n,i ← Ki+1,3 - Ki,4
kAB3n-1,n-1 ← -Kn-1,4
for j ∈ 0..n-2
  kABj+2n,j+1 ← -Kj+1,3
for j ∈ 0..n-2
  kABj+1+2n,j ← Kj+1,4
kAB

```

$$k_{BA} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..3n-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad \quad k_{BA_{j,i}} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-2 \\ \quad k_{BA_{i,i+2n}} \leftarrow K_{i+1,3} - K_{i,4} \\ k_{BA_{n-1,3n-1}} \leftarrow -K_{n-1,4} \\ \quad \text{for } j \in 0..n-2 \\ \quad \quad k_{BA_{j,j+1+2n}} \leftarrow K_{j+1,4} \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ \quad \quad k_{BA_{j+1,j+2n}} \leftarrow -K_{j+1,3} \\ k_{BA} \end{array} \right.$$

$$k_{AA_inv} := k_{AA}^{-1}$$

$$k_u := k_{BB} - k_{BA} \cdot k_{AA_inv} \cdot k_{AB}$$

9) Vetores de carga

$$s_A := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..3n-1 \\ \quad s_{A_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ \quad s_{A_j} \leftarrow -K_{j+1,12} - K_{j,13} \\ s_{A_{n-1}} \leftarrow -K_{n-1,13} - P_n \\ \text{for } j \in n..2n-2 \\ \quad s_{A_j} \leftarrow -K_{j+1-n,14} - K_{j-n,15} \\ s_{A_{2n-1}} \leftarrow -K_{n-1,15} + T \\ \text{for } j \in 2n..3n-2 \\ \quad s_{A_j} \leftarrow -K_{j+1-2n,8} - K_{j-2n,9} \\ s_{A_{3n-1}} \leftarrow M_H - K_{n-1,9} \\ s_A \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{F}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad F_j \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ \quad F_j \leftarrow K_{j+1,10} + K_{j,11} \\ F_{n-1} \leftarrow F_H + K_{n-1,11} \\ F \end{array} \right.$$

| | 0 | | 0 |
|-------|--------------------|---|--------------------|
| | $3.391 \cdot 10^3$ | | $3.385 \cdot 10^3$ |
| | $3.891 \cdot 10^3$ | | $3.888 \cdot 10^3$ |
| | $4.234 \cdot 10^3$ | | $4.232 \cdot 10^3$ |
| | $4.506 \cdot 10^3$ | | $4.506 \cdot 10^3$ |
| | $4.736 \cdot 10^3$ | | $4.736 \cdot 10^3$ |
| | $4.935 \cdot 10^3$ | | $4.935 \cdot 10^3$ |
| | $5.112 \cdot 10^3$ | | $5.113 \cdot 10^3$ |
| $F =$ | $5.272 \cdot 10^3$ | $F_u := F - k_{BA} \cdot k_{AA_inv} \cdot s_A =$ | $5.272 \cdot 10^3$ |
| | $5.417 \cdot 10^3$ | | $5.417 \cdot 10^3$ |
| | $5.55 \cdot 10^3$ | | $5.551 \cdot 10^3$ |
| | $5.673 \cdot 10^3$ | | $5.673 \cdot 10^3$ |
| | $5.787 \cdot 10^3$ | | $5.788 \cdot 10^3$ |
| | $5.893 \cdot 10^3$ | | $5.894 \cdot 10^3$ |
| | $5.993 \cdot 10^3$ | | $5.993 \cdot 10^3$ |
| | $6.086 \cdot 10^3$ | | $6.087 \cdot 10^3$ |
| | ... | | ... |

10) Vetores de deslocamentos laterais de 1ª ordem e de desaprumo

$$u := k_u^{-1} \cdot F_u$$

$$u_1 := \begin{cases} u_{1_0} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ u_{1_i} \leftarrow u_{1_{i-1}} \\ u_1 \end{cases}$$

$$u_{1_n} = 1.51620$$

11) Matriz de rigidez geométrica

$$KG := \begin{cases} PP \leftarrow \text{identity}(n) - \text{identity}(n) \\ \text{for } i \in 0..n-2 \\ PP_{i,i} \leftarrow NN_{i+1} + NN_{i+2} \\ PP_{n-1,n-1} \leftarrow NN_n \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ \begin{cases} PP_{j,j+1} \leftarrow -NN_{j+2} \\ PP_{j+1,j} \leftarrow -NN_{j+2} \end{cases} \\ G \leftarrow \frac{PP}{h} \\ G \end{cases}$$

12) Vetor de deslocamentos laterais finais

$$u_F := (k_u - KG)^{-1} \cdot F_u$$

$$u_{FINAL} := \begin{cases} u_{FINAL_0} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ u_{FINAL_i} \leftarrow u_{F_{i-1}} \\ u_{FINAL} \end{cases}$$

$$u_{FINAL_n} = 1.60770$$

13) Relação entre deslocamentos laterais finais e de 1ª ordem

| | |
|----|-------|
| | 0 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1.04 |
| 2 | 1.046 |
| 3 | 1.048 |
| 4 | 1.05 |
| 5 | 1.051 |
| 6 | 1.052 |
| 7 | 1.052 |
| 8 | 1.053 |
| 9 | 1.053 |
| 10 | 1.053 |
| 11 | 1.054 |
| 12 | 1.054 |
| 13 | 1.054 |
| 14 | 1.055 |
| 15 | ... |

$$\frac{u_{FINAL}}{u_1} =$$

$$\frac{u_{FINAL_n}}{u_{1_n}} = 1.0604$$

14) Deslocamento LIMITE

The maximum value of deflection as determined from EN 1991-1-4 (Actions on structures - Wind actions) in the along-wind direction at the top of a self-supporting chimney due to the characteristic value of along-wind loading should be limited (EN 1993-3-2, Design of steel structures: Towers, masts and chimneys - Chimneys). The following value is recommended:

$$u_{FINAL_n} = 1.608$$

$$\delta_{max} := \frac{L}{50} = 2.4$$

15) Vetor de horizontais fictícias

$$\underline{\underline{H}} := KG \cdot u_F$$

| | |
|----|---------------------|
| | 0 |
| 0 | $-2.006 \cdot 10^3$ |
| 1 | $-1.977 \cdot 10^3$ |
| 2 | $-1.948 \cdot 10^3$ |
| 3 | $-1.92 \cdot 10^3$ |
| 4 | $-1.891 \cdot 10^3$ |
| 5 | $-1.863 \cdot 10^3$ |
| 6 | $-1.834 \cdot 10^3$ |
| 7 | $-1.806 \cdot 10^3$ |
| 8 | $-1.777 \cdot 10^3$ |
| 9 | $-1.749 \cdot 10^3$ |
| 10 | $-1.72 \cdot 10^3$ |
| 11 | $-1.692 \cdot 10^3$ |
| 12 | $-1.664 \cdot 10^3$ |
| 13 | $-1.636 \cdot 10^3$ |
| 14 | $-1.608 \cdot 10^3$ |
| 15 | ... |

16) Esforços e Tensões na torre

Vetor de Momentos de 1ª ordem na torre devido à carga de vento na mesma:

$$M_{1_q} := \left| \begin{array}{l} M_{R_1q} \leftarrow \int_0^L z \cdot q_{w_linear}(z) dz \\ \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_qi} \leftarrow M_{R_1q} - \int_0^{i \cdot h} z \cdot q_{w_linear}(z) dz - (i \cdot h) \cdot \int_0^L q_{w_linear}(z) dz \dots \\ \quad + (i \cdot h) \cdot \int_0^{i \cdot h} q_{w_linear}(z) dz \\ M_{1_q} \end{array} \right.$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem na torre devido ao desaprumo da mesma:

$$M_{1_qea} := \left| \begin{array}{l} M_{R_1qea} \leftarrow \int_0^L z \cdot q_{ea}(z) dz \\ \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_qea_i} \leftarrow M_{R_1qea} - \int_0^{i \cdot h} z \cdot q_{ea}(z) dz - (i \cdot h) \cdot \int_0^L q_{ea}(z) dz + (i \cdot h) \cdot \int_0^{i \cdot h} q_{ea}(z) dz \\ M_{1_qea} \end{array} \right.$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem na torre devido à força axial ao cubo do rotor transmitida à torre :

$$M_{1_FH} := \begin{cases} M_{R_1FH} \leftarrow F_H \cdot L \\ \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_FH_i} \leftarrow M_{R_1FH} - F_H \cdot i \cdot h \\ M_{1_FH} \end{cases}$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem na torre devido ao momento tower fore-aft transmitido à torre:

$$M_{1_MH} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_MH_i} \leftarrow M_H \\ M_{1_MH} \end{cases}$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem total (tower fore-aft):

$$M_1 := M_{1_q} + M_{1_qea} + M_{1_FH} + M_{1_MH}$$

Momento de 1ª ordem característico na base da torre (tower fore-aft): $M_{1_0} = 1.699 \times 10^8$

Vetor de Momentos de 1ª ordem lateral na torre devido à força lateral ao cubo do rotor transmitida à torre:

$$M_{1_Flat} := \begin{cases} M_{R_1lat} \leftarrow F_{trans} \cdot L \\ \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_Flat_i} \leftarrow M_{R_1lat} - F_{trans} \cdot i \cdot h \\ M_{1_Flat} \end{cases}$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem na torre devido ao momento tower side-to-side transmitido à torre:

$$M_{1_Mlat} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ M_{1_Mlat_i} \leftarrow M_{lat} \\ M_{1_Mlat} \end{cases}$$

Vetor de Momentos de 1ª ordem total (tower side-to-side):

$$M_{1lat} := M_{1_Mlat} + M_{1_Flat}$$

Momento fletor de 1ª ordem na base da torre característico (tower side-to-side):

$$M_{1lat_0} = 8.001 \times 10^6$$

Vetor de Tensões normais da carga axial na torre:

$$\sigma_{NN} := \frac{NN}{A}$$

Vetor de Tensões normais do peso próprio da torre e dos equipamentos:

$$\sigma_{NN.pp} := \frac{NN_{pp}}{A}$$

Vetor de Tensões normais do momento fletor na torre:

$$\sigma_M := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \sigma_{M_i} \leftarrow \frac{M_{1_i} \cdot \phi_i + esp_i}{I_i \cdot 2} \\ \sigma_M \end{array} \right.$$

Tensão axial de compressão de 1ª ordem na base da torre:

$$\sigma_{c1} := \sigma_{NN} + \sigma_M$$

$$\sigma_{t1} := -\sigma_{NN} + \sigma_M$$

Acréscimo de momento devido ao efeito de 2ª ordem geométrico:

$$\Delta M_H := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n \\ \Delta M_{H_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ \Delta M_{H_j} \leftarrow \sum_{i=j}^{n-1} H_i \cdot (\text{Niveis}_{i+1} - \text{Niveis}_j) \\ \Delta M_H \end{array} \right.$$

$$\Delta M_P := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n \\ \Delta M_{P_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ \Delta M_{P_j} \leftarrow \sum_{i=j}^{n-1} P_{i+1} \cdot u_{FINAL_{i+1}} - u_{FINAL_j} \\ \Delta M_P \end{array} \right.$$

Acréscimo de momento devido ao efeito de 2ª ordem geométrico (tower fore-aft):

$$\Delta M_{P_0} = 9.066 \times 10^6$$

Momento de 2ª ordem na base da torre total:

$$M_2 := M_1 + \Delta M_H$$

Acréscimo de tensão axial devido ao efeito de 2ª ordem geométrico:

$$\sigma_{\Delta M} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \sigma_{\Delta M_i} \leftarrow \frac{\Delta M_{P_i}}{I_i} \cdot \frac{\phi_i + \text{esp}_i}{2} \\ \sigma_{\Delta M} \end{cases}$$

Fator de acréscimo de momento na base da torre:

$$f_{SM} := \frac{M_2}{M_1}$$

Tensão axial de compressão de 2ª ordem na base da torre:

$$\sigma_{c2} := \sigma_{c1} + \sigma_{\Delta M}$$

Tensão admissível:

$$\sigma_{adm} := \frac{355 \cdot 10^6}{1.7} = 2.088 \times 10^8$$

17) Parâmetros/Coefficientes de estabilidade

$$\alpha_{\overline{w}} := L \cdot \sqrt{\frac{N N_0}{E \cdot I_0}} = 0.37 \quad \gamma_z := \frac{1 - \left(\frac{\Delta M_H}{M_1} \right)^2}{1 - \frac{\Delta M_H}{M_1}}$$

$$N_{\overline{w}} := P_n = 4.299 \times 10^6$$

Relação entre o peso próprio da torre e carga aplicada no topo da mesma:

$$\beta := \frac{PP_{\text{torre}}}{P_n} = 1.49$$

K de flambagem aproximado (coeficiente de Rayleigh):

$$K_{fl} := 2.78$$

$$N_{cr} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_0}{(K_{fl} \cdot L)^2} = 9.961 \times 10^7 \quad \alpha_c := \frac{N}{N_{cr}} = 4.316\%$$

18) Dimensionamento da torre (ABNT NBR 8800, 2008)

18.1) Flambagem local de paredes de seções tubulares circulares - Anexo F.4

Diâmetro externo do tubo: $D := \phi + \text{esp}$

Esbeltez do tubo: $\lambda_{\text{tubo}} := \frac{D}{\text{esp}}$

$$Q := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \left| \begin{array}{l} Q_i \leftarrow 1 \text{ if } \lambda_{\text{tubo}_i} \leq 0.11 \cdot \frac{E}{f_y} \\ Q_i \leftarrow \frac{0.038 \cdot E}{\frac{D_i}{\text{esp}_i} \cdot f_y} + \frac{2}{3} \text{ if } 0.11 \cdot \frac{E}{f_y} < \lambda_{\text{tubo}_i} \leq 0.45 \cdot \frac{E}{f_y} \end{array} \right. \\ Q \end{cases}$$

18.2) Força axial de flambagem elástica e coeficiente de flambagem - Anexo E.1.1

$$C_w := 0$$

$$r_x := \sqrt{\frac{I}{A}} \quad r_y := r_x \quad r_o := \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$N_{ex} := N_{cr} \quad N_{ey} := N_{cr} \quad N_{ez} := \frac{1}{\left(r_o \cdot \text{Ceil}\left(\frac{2n}{3}, 1\right) \right)^2} \cdot \left[\frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{(K_{fl} \cdot L)^2} + G \cdot J \cdot \text{Ceil}\left(\frac{2n}{3}, 1\right) \right]$$

$$N_e := \min(N_{ex}, N_{ey}, N_{ez}) = 9.961 \times 10^7$$

18.3) Força axial resistente de cálculo - 5.3

Área da base da torre: $A_g := A$

Índice de esbeltez da torre (na verdade, é definido para seção constante, mas tem-se uma ideia da esbeltez dessa torre, mesmo com seção variável): $\lambda := \frac{K_{fl} L}{r_x}$

Índice de esbeltez reduzido:

$$\lambda_0 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \lambda_{0_i} \leftarrow \sqrt{\frac{Q_i \cdot A_{g_i} \cdot f_y}{N_e}} \\ \lambda_0 \end{cases}$$

Função do Fator de redução χ :

$$\chi := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \chi_i \leftarrow \begin{cases} 0.658 \lambda_{0_i}^2 & \text{if } \lambda_{0_i} \leq 1.5 \\ \frac{0.877}{\lambda_{0_i}^2} & \text{if } \lambda_{0_i} > 1.5 \end{cases} \\ \chi \end{cases}$$

Função de Esforço resistente de cálculo:

$$N_{cRd} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ N_{cRd_i} \leftarrow \frac{\chi_i \cdot Q_i \cdot A_{g_i} \cdot f_y}{\gamma_{a1}} \\ N_{cRd} \end{cases}$$

18.4) Estado limite de flambagem local da parede do tubo - G.2.7

Limites de esbeltez do tubo:

$$\lambda_p := \frac{0.07 \cdot E}{f_y} = 40.423$$

$$\lambda_r := \frac{0.31 \cdot E}{f_y} = 179.014$$

Módulo plástico da seção:

$$Z := \frac{D^3 - (D - 2 \cdot \text{esp})^3}{6}$$

Módulo elástico da seção:

$$W := \frac{I_2}{D}$$

Limite máximo do momento fletor resistente:

$$M_{Rd_max} := \frac{1.5 \cdot W \cdot f_y}{\gamma_{a1}}$$

| | |
|----|-------|
| | 0 |
| 0 | 1.283 |
| 1 | 1.283 |
| 2 | 1.283 |
| 3 | 1.283 |
| 4 | 1.283 |
| 5 | 1.283 |
| 6 | 1.283 |
| 7 | 1.283 |
| 8 | 1.284 |
| 9 | 1.284 |
| 10 | 1.284 |
| 11 | 1.284 |
| 12 | 1.284 |
| 13 | 1.284 |
| 14 | ... |

Função do Momento fletor resistente:

$$M_{Rd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left| \begin{array}{l} M_{Rd_i} \leftarrow \frac{Z_i \cdot f_y}{\gamma_{a1}} \text{ if } \lambda_{\text{tubo}_i} \leq \lambda_p \\ M_{Rd_i} \leftarrow \frac{1}{\gamma_{a1}} \cdot \left(\frac{0.021 \cdot E}{D_i} + f_y \right) \cdot W_i \text{ if } \lambda_p < \lambda_{\text{tubo}_i} \leq \lambda_r \\ M_{Rd} \leftarrow \frac{1}{\gamma_{a1}} \cdot \frac{0.33E}{\frac{D_i}{\text{esp}_i}} \cdot W \text{ if } \lambda_{\text{tubo}_i} > \lambda_r \end{array} \right. \\ M_{Rd} \end{array} \right.$$

Esforços solicitantes:

$$N_{Sd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ N_{Sd_i} \leftarrow \gamma_{g_nacele} \cdot P_n + \gamma_{g_torre} \cdot (NN_i - P_n) \\ N_{Sd} \end{array} \right.$$

$$M_{Sd} := \gamma_{g_torre} \cdot \Delta M_P + \gamma_{q_w} \cdot M_1$$

$$M_{Sd_lat} := \gamma_{q_w} \cdot M_{1lat}$$

18.5) Equação de interação - 5.5.1.2:

$$Int := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left| \begin{array}{l} Int_i \leftarrow \frac{N_{Sd_i}}{N_{cRd_i}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{(M_{Sd_i} + M_{Sd_lat_i})}{M_{Rd_i}} \text{ if } \frac{N_{Sd_i}}{N_{cRd_i}} \geq 0.2 \\ Int_i \leftarrow \frac{N_{Sd_i}}{2 N_{cRd_i}} + \frac{M_{Sd_i} + M_{Sd_lat_i}}{M_{Rd_i}} \text{ if } \frac{N_{Sd_i}}{N_{cRd_i}} < 0.2 \end{array} \right. \\ Int \end{array} \right.$$

| | | |
|-------|--------|----|
| | 0 | |
| | 53.179 | |
| | 53.096 | |
| | 53.012 | |
| | 52.927 | |
| | 52.842 | |
| | 52.756 | |
| | 52.669 | |
| Int = | 52.581 | ·% |
| | 52.493 | |
| | 52.404 | |
| | 52.314 | |
| | 52.224 | |
| | 52.134 | |
| | 52.043 | |
| | 51.951 | |
| | ... | |

$$\max(\text{Int}) = 74.815 \cdot \%$$

18.6) Força cortante resistente de cálculo - 5.4.3.6

Distância entre as seções com forças cortantes máxima e nula:

$$L_v := L$$

Espessura de cálculo da parede da seção transversal:

$$t_d := 0.93 \cdot \text{esp}$$

Tensão de cisalhamento crítica:

$$0.6 \cdot f_y = 2.13 \times 10^8$$

$$\tau_{cr1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \tau_{cr1_i} \leftarrow \frac{1.6 \cdot E}{\sqrt{\frac{L_v}{D_i} \cdot \frac{D_i}{t_{d_i}}}} \\ \tau_{cr1} \end{array} \right.$$

$$\tau_{cr2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \tau_{cr2_i} \leftarrow \frac{0.78 \cdot E}{\left(\frac{D_i}{t_{d_i}}\right)^2} \\ \tau_{cr2} \end{array} \right.$$

$$\tau_{cr} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \tau_{cr_i} \leftarrow \min \max \tau_{cr1_i}, \tau_{cr2_i}, 0.6 f_y \\ \tau_{cr} \end{array} \right.$$

Esforço cortante resistente de cálculo:

$$V_{Rd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ V_{Rd_i} \leftarrow \frac{0.5 \cdot \tau_{cr_i} \cdot A_{g_i}}{\gamma_{a1}} \\ V_{Rd} \end{array} \right.$$

Vetor de esforços cortante solicitante de cálculo:

$$V_{Sd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ V_{Sd_i} \leftarrow \gamma_{q-w} \cdot \sqrt{\left(\int_0^L q_{w_linear}(z) dz + F_H - \int_0^{i \cdot h} q_{w_linear}(z) dz \right)^2 + F_{trans}^2} \\ V_{Sd} \end{array} \right.$$

Força horizontal característica na base da torre:

$$\int_0^L q_{w_linear}(z) dz + F_H = 1.161 \times 10^6$$

Força horizontal transversal característica na base da torre:

$$F_{trans} = 3.211 \times 10^4$$

$$\max \left(\frac{V_{Sd}}{V_{Rd}} \right) = 4.706\%$$

18.7) Equação de interação geral: Seções tubulares submetidas a momento de torção, força axial, momento fletor e força cortante em relação a um dos eixos centrais de inércia - 5.5.2.2

Vetor de Módulo de resistência à torção:

$$W_T := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ W_{T_i} \leftarrow \frac{\pi \cdot (D_i - esp_i)^2 \cdot esp_i}{2} \\ W_T \end{array} \right.$$

Momento de torção resistente:

$$T_{Rd1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ T_{Rd1_i} \leftarrow \min \left[\frac{1}{\gamma_{a1}} \cdot \frac{1.23 \cdot W_{T_i} \cdot E}{\left(\frac{D_i}{esp_i} \right)^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{L}{D_i}}}, \frac{0.6 \cdot W_{T_i} \cdot f_y}{\gamma_{a1}} \right] \\ T_{Rd1} \end{array} \right.$$

$$T_{Rd2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ T_{Rd2_i} \leftarrow \min \left[\frac{1}{\gamma_{a1}} \cdot \frac{0.6 \cdot W_{T_i} \cdot E}{\left(\frac{D_i}{\text{esp}_i} \right)^2}, \frac{0.6 \cdot W_{T_i} \cdot f_y}{\gamma_{a1}} \right] \\ T_{Rd2} \end{array} \right.$$

$$T_{Rd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ T_{Rd_i} \leftarrow \max(T_{Rd1_i}, T_{Rd2_i}) \\ T_{Rd} \end{array} \right.$$

$$T_{Sd} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ T_{Sd_i} \leftarrow \gamma_{q_w} \cdot T \\ T_{Sd} \end{array} \right. \quad \max \left(\frac{T_{Sd}}{T_{Rd}} \right) = 4.179\%$$

Como o momento de torção solicitante de cálculo (T_{Sd}) é inferior a 20% do momento de torção resistente de cálculo (T_{Rd}), o efeito de torção pode ser desprezado. Nesse caso, a interação entre os efeitos da força axial e do momento fletor e força cortante segundo um dos eixos centrais de inércia da seção transversal deve ser determinada de acordo com 5.5.1.

19) Dimensionamento da torre (ABNT NBR 8800, 1986)

19.1) Classificação dos elementos de uma seção - 5.1.2.1

Caso 1: Elementos tubulares de seção circular

19.2) Resistência de cálculo (flambagem por flexão) - 5.3.4

$$\phi_c := 0.90$$

$$\text{Curva de flambagem } a: \quad \alpha_{fl} := 0.158$$

$$\lambda_- := \lambda_0$$

$$\beta := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \beta_i \leftarrow \frac{1}{2 \cdot (\lambda_-)_i^2} \left[1 + \alpha_{fl} \cdot \sqrt{(\lambda_-)_i^2 - 0.04} + (\lambda_-)_i^2 \right] \\ \beta \end{array} \right.$$

$$\rho_{fl} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \left| \begin{array}{l} \rho_{fl_i} \leftarrow 1 \text{ if } 0 \leq \lambda_{-i} \leq 0.20 \\ \rho_{fl_i} \leftarrow \beta_i - \sqrt{\left(\beta_i\right)^2 - \frac{1}{\left(\lambda_{-i}\right)^2}} \text{ if } \lambda_{-i} > 0.2 \end{array} \right. \\ \rho_{fl} \end{array} \right.$$

$$N_n := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ N_{n_i} \leftarrow \rho_{fl_i} \cdot Q_i \cdot A_{g_i} \cdot f_y \\ N_n \end{array} \right.$$

19.3) Equação de interação (momento fletor combinado com força normal de tração ou de compressão) - 5.6.1.3.1:

$$\text{Int1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \text{Int1}_i \leftarrow \frac{N_{Sd_i}}{0.9 \cdot Q_i \cdot A_{g_i} \cdot f_y} + \frac{M_{Sd_i}}{M_{Rd_i}} + \frac{M_{Sd_lat_i}}{M_{Rd_i}} \\ \text{Int1} \end{array} \right.$$

19.4) Equação de interação (momento fletor combinado com força normal compressão) - 5.6.1.3.2:

$$\gamma := 1.37$$

$$\text{Int2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \text{Int2}_i \leftarrow \frac{N_{Sd_i}}{\phi_c \cdot N_{n_i}} + \frac{M_{Sd_i}}{\left(\frac{N_{Sd_i}}{1 - \gamma \cdot \frac{N_{Sd_i}}{N_e}} \right) \cdot M_{Rd_i}} + \frac{M_{Sd_lat_i}}{\left(\frac{N_{Sd_i}}{1 - \gamma \cdot \frac{N_{Sd_i}}{N_e}} \right) \cdot M_{Rd_i}} \\ \text{Int2} \end{array} \right.$$

A.4) DIMENSIONAMENTO DA SAPATA DA TORRE

1) Dados

1.1) Esforços provenientes da TORRE

| | |
|--|---|
| Peso da nacele (200 tf): | $P_n := 200 \cdot 1000 \cdot 9.807 = 1.961 \times 10^6$ |
| Força vertical transmitida à torre: | $P_{nac_opera} := 4299033.45$ |
| Peso da torre: | $P_{torre} := 6.408 \times 10^6$ |
| Força vertical total de característico: | $NN := P_n + P_{torre} = 8.369 \times 10^6$ |
| Força horizontal característica na base da torre: | $F_{H_base} := 1.161 \times 10^6$ |
| Força horizontal transversal característica na base da torre: | $F_{trans_base} := 3.211 \times 10^4$ |
| Fator de correção da força horizontal para considerar a influência do momento torsor aplicado: | $\alpha_T := 1.2$ |
| Força horizontal total de característico: | $HH := \alpha_T \cdot \sqrt{F_{H_base}^2 + F_{trans_base}^2}$ |
| Momento de 1ª ordem característico na base da torre (tower fore-aft): | $M_{H_base_1} := 1.67 \times 10^8$ |
| Acréscimo de momento devido ao efeito de 2ª ordem geométrico (tower fore-aft): | $\Delta M_{H_base} := 8.978 \times 10^6$ |
| Momento fletor na base da torre de característico (tower fore-aft): | $M_{H_base} := M_{H_base_1} + \Delta M_{H_base}$ |
| Momento fletor de 1ª ordem na base da torre característico (tower side-to-side): | $M_{lat_base_1} := 8.001 \times 10^6$ |

Acréscimo de momento devido ao efeito de 2ª ordem geométrico (tower side-to-side):

$$\Delta M_{\text{lat_base}} := 0$$

Momento fletor de 1ª ordem na base da torre característico (tower side-to-side):

$$M_{\text{lat_base}} := M_{\text{lat_base}_1} + \Delta M_{\text{lat_base}}$$

Momento torsor na base da torre característico:

$$T_{\text{base}} := 1985250.43$$

Momento fletor total na base da torre característico (tower side-to-side):

$$M_{\text{torre}} := \sqrt{M_{\text{H_base}}^2 + M_{\text{lat_base}}^2}$$

Inclinação da resultante com a vertical:

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{\text{HH}}{\text{NN}}\right) = 0.165$$

1.2) Coeficientes de majoração e de ponderação

Coefficiente de peso próprio da sapata e do solo acima desta:

$$\gamma_{\text{pp}} := 0.95$$

Coefficiente ponderador de ações permanentes (peso próprio de estruturas metálicas):

$$\gamma_{\text{g_torre}} := 1.25$$

Coefficiente ponderador de ações permanentes (peso próprio de equipamentos):

$$\gamma_{\text{g_nacele}} := 1.5$$

Coefficiente ponderador de ações variáveis (ação do vento):

$$\gamma_{\text{q_w}} := 1.4$$

Coefficiente ponderador de resistência do concreto:

$$\gamma_{\text{C}} := 1.4$$

1.3) Propriedades físico-mecânicas do solo

Tensão admissível do solo estimada:

$$\sigma_{\text{adm}} := 5 \cdot 10^5$$

Peso específico do concreto armado:

$$\gamma_{\text{C}} := 2500 \cdot 9.807 = 2.452 \times 10^4$$

Ângulo de atrito do solo:

$$\phi := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Coesão do solo: $c_o := 0$

Peso específico do solo: $\gamma := 2100 \cdot 9.807 = 2.059 \times 10^4$

Coefficiente de aderência entre a sapata e o solo: $c_a := 0.6 \cdot c_o = 0$

Ângulo de atrito entre o solo e a sapata: $\delta := 0.5 \cdot \phi = 0.262$

1.4 Propriedades da sapata

Diâmetro nominal da sapata: $D := 26$

Diâmetro máximo da torre: $D_{\text{torre}} := 6.5$

Diâmetro do pescoço da sapata: $D_1 := D_{\text{torre}} + .7 = 7.2$

Altura do pescoço da sapata fora do solo: $h_{\text{up}} := 0.25$

Altura do segmento variável da sapata: $H_1 := 2.5$

Altura do segmento constante (disco) da sapata: $h_1 := 0.5$

Altura do pescoço da sapata: $h_2 := 0.75$

Cota de assentamento da sapata: $H := H_1 + h_1 + h_2 - h_{\text{up}} = 3.5$

Volume da sapata:
$$V_{\text{sap}} := \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H_1 \cdot \left(\frac{D^2 + D \cdot D_1 + D_1^2}{4} \right) + \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot h_2 = 894.893$$

Momento de tombamento: $M_{\text{Tomb}} := M_{\text{torre}} + HH \cdot H = 1.81 \times 10^8$

Excentricidade devida ao momento na base da sapata:

$$e_x := \frac{M_{Tomb}}{(NN + \gamma_{PP} \cdot V_{sap} \cdot \gamma_c)} = 6.197$$

Área total da base da sapata:

$$A_{base} := \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 530.929$$

Área efetiva da base da sapata (Meyerhof, 1953):

$$A_{eff} := 2 \cdot \left[\left(\frac{D}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{e_x}{D} \right) - e_x \cdot \sqrt{\left(\frac{D}{2} \right)^2 - e_x^2} \right]$$

Eixo menor da elipse com área efetiva:

$$b_e := 2 \cdot \left(\frac{D}{2} - e_x \right) = 13.606$$

Eixo maior da elipse com área efetiva:

$$l_e := \frac{4 \cdot A_{eff}}{\pi \cdot b_e} = 20.713$$

Lado maior de um retângulo equivalente à elipse com área efetiva:

$$l_{eff} := \sqrt{A_{eff} \cdot \frac{l_e}{b_e}} = 18.356$$

Lado menor de um retângulo equivalente à elipse com área efetiva:

$$b_{eff} := l_{eff} \cdot \frac{b_e}{l_e} = 12.058$$

Força horizontal total de característico incluindo a contribuição do momento torsor (Hansen, 1978):

$$HH_T := \frac{2 \cdot T_{base}}{l_{eff}} + \sqrt{HH^2 + \left(\frac{2 \cdot T_{base}}{l_{eff}} \right)^2}$$

Resistência característica do concreto armado:

$$f_{ck} := 30 \cdot 10^6$$

$$\alpha_E := 1 \quad E_{ci} := \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{10^6}} \cdot 10^6 = 3.067 \times 10^{10} \quad \alpha_i := \min \left(0.8 + 0.2 \cdot \frac{f_{ck}}{80 \cdot 10^6}, 1 \right) = 0.875$$

Módulo de elasticidade secante do concreto armado:

$$E_{cs} := \alpha_i \cdot E_{ci} = 2.684 \times 10^{10}$$

Coefficiente de Poisson do concreto armado:

$$\nu := 0.2$$

2) Verificação quanto ao tombamento da sapata

Momento Resistente ao tombamento: $M_{Rest} := (NN + \gamma_{PP} \cdot V_{sap} \cdot \gamma_c) \cdot \frac{D}{2} = 3.798 \times 10^8$

Fator de segurança ao tombamento: $FS_{tomb} := \frac{M_{Rest}}{M_{Tomb}} = 2.098$

3) Cálculo da capacidade de carga

Fator de segurança de tensão admissível: $FS_{q_adm} := 3$

Fator de redução (particularmente aplicável para grandes bases D em pequenos valores da relação H/D, quando o termo q_γ é preponderante): $\kappa := 2 \quad r_\gamma := 1 - 0.25 \cdot \log\left(\frac{D}{\kappa}\right) = 0.722$

3.1 Teoria de Terzaghi (1943): Theoretical soil mechanics

Coeficiente de empuxo passivo para $\phi=30^\circ$
(The spiral or the friction circle method): $K_{p\gamma} := 52$

Coeficiente de forma (sapata circular): $s_c := 1.3$

$$s_\gamma := 0.6$$

Fatores de capacidade de carga de Terzaghi: $a := e^{\left(\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \frac{\phi}{2}\right) \cdot \tan(\phi)} = 3.351$

Fatores de capacidade de carga de sobrecarga: $N_{q_Ter} := \frac{a^2}{2 \cdot \cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\phi}{2}\right)^2} = 22.456$

Fatores de capacidade de carga de coesão: $N_{c_Ter} := (N_{q_Ter} - 1) \cdot \cot(\phi) = 37.162$

Fatores de capacidade de carga de peso próprio: $N_{\gamma_Ter} := \frac{\tan(\phi)}{2} \cdot \left(\frac{K_{p\gamma}}{\cos(\phi)^2} - 1\right) = 19.726$

$$q_{c_Ter} := c_o \cdot N_{c_Ter} \cdot s_c = 0$$

$$q_{q_Ter} := \gamma \cdot H \cdot N_{q_Ter} = 1.619 \times 10^6$$

$$q_{\gamma_Ter} := 0.5 \cdot \gamma \cdot D \cdot N_{\gamma_Ter} \cdot s_{\gamma} \cdot r_{\gamma} = 2.286 \times 10^6$$

$$q_{ult_Ter} := q_{c_Ter} + q_{q_Ter} + q_{\gamma_Ter} = 3.905 \times 10^6$$

$$q_{adm_Ter} := \frac{q_{ult_Ter}}{FS_{q_adm}} = 1.302 \times 10^6$$

3.2 Teoria de Meyerhof (1951, 1953, 1955, 1957 e 1963)

Fatores de capacidade de carga de Meyerhof:

Fatores de capacidade de carga de sobrecarga:

$$N_{q_Mey} := e^{\pi \cdot \tan(\phi)} \cdot \tan\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\phi}{2}\right)^2 = 18.401$$

Fatores de capacidade de carga de coesão:

$$N_{c_Mey} := (N_{q_Mey} - 1) \cdot \cot(\phi) = 30.14$$

Fatores de capacidade de carga de peso próprio:

$$N_{\gamma_Mey} := (N_{q_Mey} - 1) \cdot \tan(1.4 \cdot \phi) = 15.668$$

Fatores de profundidade de Meyerhof:

$$d_{c_Mey} := 1 + 0.2 \cdot \tan\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \phi\right) \cdot \frac{H}{D} = 1.1$$

$$d_{q_Mey} := 1 + 0.1 \cdot \tan\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \phi\right) \cdot \frac{H}{D} = 1.05$$

$$d_{\gamma_Mey} := d_{q_Mey} = 1.05$$

Fatores de inclinação de Meyerhof:

$$i_{c_Mey} := \left(1 - \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 0.801$$

$$i_{q_Mey} := i_{c_Mey} = 0.801$$

$$i_{\gamma_Mey} := \left(1 - \frac{\theta}{\phi}\right)^2 = 0.469$$

$$q_{c_Mey} := c_o \cdot N_{c_Mey} \cdot d_{c_Mey} \cdot i_{c_Mey} = 0$$

$$q_{q_Mey} := \gamma \cdot H \cdot N_{q_Mey} \cdot d_{q_Mey} \cdot i_{q_Mey} = 1.116 \times 10^6$$

$$q_{\gamma_Mey} := 0.5 \cdot \gamma \cdot b_{\text{eff}} \cdot N_{\gamma_Mey} \cdot d_{\gamma_Mey} \cdot i_{\gamma_Mey} \cdot r_{\gamma} = 6.914 \times 10^5$$

$$q_{\text{ult_Mey}} := q_{c_Mey} + q_{q_Mey} + q_{\gamma_Mey} = 1.807 \times 10^6$$

$$q_{\text{adm_Mey}} := \frac{q_{\text{ult_Mey}}}{FS_{q_adm}} = 6.024 \times 10^5$$

3.3 Teoria de Hansen (1961 e 1970)

Fatores de capacidade de carga de Hansen:

Fatores de capacidade de carga de sobrecarga:

$$N_{q_Han} := e^{\pi \cdot \tan(\phi)} \cdot \tan\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\phi}{2}\right)^2 = 18.401$$

Fatores de capacidade de carga de coesão:

$$N_{c_Han} := (N_{q_Han} - 1) \cdot \cot(\phi) = 30.14$$

Fatores de capacidade de carga de peso próprio:

$$N_{\gamma_Han} := 1.5 \cdot (N_{q_Han} - 1) \cdot \tan(\phi) = 15.07$$

Fatores de profundidade de Hansen e de Vesic':

$$k := \begin{cases} k \leftarrow \frac{H}{D} & \text{if } \frac{H}{D} \leq 1 \\ k \leftarrow \text{atan}\left(\frac{H}{D}\right) & \text{if } \frac{H}{D} > 1 \\ k & \end{cases} = 0.135$$

$$d_{c_HV} := 1 + 0.4 \cdot k = 1.054$$

$$d_{q_HV} := 1 + 2 \cdot \tan(\phi) \cdot (1 - \sin(\phi))^2 \cdot k = 1.039$$

$$d_{\gamma_HV} := 1$$

Fatores de inclinação de Hansen:

$$\alpha_1 := 3$$

$$\alpha_2 := 4$$

$$H_B := F_{H_base}$$

$$H_L := F_{trans_base}$$

$$i_{q_H_beff} := \left(1 - \frac{0.5 H_B}{NN + A_{eff} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{\alpha_1}$$

$$i_{q_H_leff} := \left(1 - \frac{0.5 H_L}{NN + A_{eff} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{\alpha_1}$$

$$i_{\gamma_H_beff} := \left(1 - \frac{0.7 \cdot H_B}{NN + A_{eff} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{\alpha_2}$$

$$i_{\gamma_H_leff} := \left(1 - \frac{0.7 \cdot H_L}{NN + A_{eff} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{\alpha_2}$$

$$i_{c_H_beff} := i_{q_H_beff} - \frac{1 - i_{q_H_beff}}{N_{q_Han} - 1}$$

$$i_{c_H_leff} := i_{q_H_leff} - \frac{1 - i_{q_H_leff}}{N_{q_Han} - 1}$$

Fatores de forma de Hansen:

$$s_{c_H_beff} := 1 + \frac{N_{q_Han}}{N_{c_Han}} \cdot \frac{b_{eff} \cdot i_{c_H_beff}}{l_{eff}}$$

$$s_{c_H_leff} := 1 + \frac{N_{q_Han}}{N_{c_Han}} \cdot \frac{l_{eff} \cdot i_{c_H_leff}}{b_{eff}}$$

$$s_{q_H_beff} := 1 + \sin(\phi) \cdot \frac{b_{eff} \cdot i_{q_H_beff}}{l_{eff}}$$

$$s_{q_H_leff} := 1 + \sin(\phi) \cdot \frac{l_{eff} \cdot i_{q_H_leff}}{b_{eff}}$$

$$s_{\gamma_H_beff} := \max \left(1 - 0.4 \cdot \frac{b_{eff} \cdot i_{\gamma_H_beff}}{l_{eff} \cdot i_{\gamma_H_leff}}, 0.6 \right)$$

$$s_{\gamma_H_leff} := \max \left(1 - 0.4 \cdot \frac{l_{eff} \cdot i_{\gamma_H_leff}}{b_{eff} \cdot i_{\gamma_H_beff}}, 0.6 \right)$$

$$q_{c_Han_beff} := c_o \cdot N_{c_Han} \cdot s_{c_H_beff} \cdot d_{c_HV} \cdot i_{c_H_beff} = 0$$

$$q_{q_Han_beff} := \gamma \cdot H \cdot N_{q_Han} \cdot s_{q_H_beff} \cdot d_{q_HV} \cdot i_{q_H_beff} = 1.405 \times 10^6$$

$$q_{\gamma_Han_beff} := 0.5 \cdot \gamma \cdot b_{eff} \cdot N_{\gamma_Han} \cdot s_{\gamma_H_beff} \cdot d_{\gamma_HV} \cdot i_{\gamma_H_beff} \cdot r_{\gamma} = 7.388 \times 10^5$$

$$q_{ult_Han_beff} := q_{c_Han_beff} + q_{q_Han_beff} + q_{\gamma_Han_beff} = 2.143 \times 10^6$$

$$q_{c_Han_leff} := c_o \cdot N_{c_Han} \cdot s_{c_H_leff} \cdot d_{c_HV} \cdot i_{c_H_leff} = 0$$

$$q_{q_Han_leff} := \gamma \cdot H \cdot N_{q_Han} \cdot s_{q_H_leff} \cdot d_{q_HV} \cdot i_{q_H_leff} = 2.407 \times 10^6$$

$$q_{\gamma_Han_leff} := 0.5 \cdot \gamma \cdot l_{eff} \cdot N_{\gamma_Han} \cdot s_{\gamma_H_leff} \cdot d_{\gamma_HV} \cdot i_{\gamma_H_leff} \cdot r_{\gamma} = 1.22 \times 10^6$$

$$q_{ult_Han_leff} := q_{c_Han_leff} + q_{q_Han_leff} + q_{\gamma_Han_leff} = 3.627 \times 10^6$$

$$q_{ult_Han} := \min(q_{ult_Han_beff}, q_{ult_Han_leff})$$

$$q_{adm_Han} := \frac{q_{ult_Han}}{FS_{q_adm}} = 7.145 \times 10^5$$

3.4 Teoria de Vesic' (1963, 1969, 1973 e 1975)

Fatores de capacidade de carga de Vesic':

Fatores de capacidade de carga de sobrecarga:

$$N_{q_V} := e^{\pi \cdot \tan(\phi)} \cdot \tan\left(45 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{\phi}{2}\right)^2 = 18.401$$

Fatores de capacidade de carga de coesão:

$$N_{c_V} := (N_{q_V} - 1) \cdot \cot(\phi) = 30.14$$

Fatores de capacidade de carga de peso próprio:

$$N_{\gamma_V} := 2 \cdot (N_{q_V} + 1) \cdot \tan(\phi) = 22.402$$

Fatores de forma de Vesic':

$$s_{c_V} := 1 + \frac{N_{q_V}}{N_{c_V}} \cdot \frac{D}{D} = 1.611$$

$$s_{q_V} := 1 + \frac{D}{D} \cdot \tan(\phi) = 1.577$$

$$s_{\gamma_V} := 1 - 0.4 \cdot \frac{D}{D} = 0.6$$

Fatores de inclinação de carga de Vesic':

$$m_B := \frac{2 + \frac{D}{D}}{1 + \frac{D}{D}} = 1.5 \quad m_L := \frac{2 + \frac{D}{D}}{1 + \frac{D}{D}} = 1.5$$

$$m_H := \sqrt{m_B^2 + m_L^2} = 2.121$$

$$i_{q_V} := \left(1 - \frac{HH}{NN + A_{\text{eff}} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{m_H} = 0.679$$

$$i_{\gamma_V} := \left(1 - \frac{HH}{NN + A_{\text{eff}} \cdot c_a \cdot \cot(\phi)} \right)^{m_H+1} = 0.566$$

$$i_{c_V} := i_{q_V} - \frac{1 - i_{q_V}}{N_{q_V} - 1} = 0.661$$

$$q_{c_V} := c_o \cdot N_{c_V} \cdot s_{c_V} \cdot d_{c_{HV}} \cdot i_{c_V} = 0$$

$$q_{q_V} := \gamma \cdot H \cdot N_{q_V} \cdot s_{q_V} \cdot d_{q_{HV}} \cdot i_{q_V} = 1.477 \times 10^6$$

$$q_{\gamma_V} := 0.5 \cdot \gamma \cdot b_{\text{eff}} \cdot N_{\gamma_{\text{Han}}} \cdot s_{\gamma_V} \cdot d_{\gamma_{HV}} \cdot i_{\gamma_V} \cdot r_{\gamma} = 4.587 \times 10^5$$

$$q_{\text{ult}_V} := q_{c_V} + q_{q_V} + q_{\gamma_V} = 1.936 \times 10^6$$

$$q_{\text{adm}_V} := \frac{q_{\text{ult}_V}}{FS_{q_{\text{adm}}}} = 6.452 \times 10^5$$

4) Verificação quanto ao deslizamento da sapata

$$F_{\text{res}} := (NN + \gamma_{\text{PP}} \cdot V_{\text{sap}} \cdot \gamma_{\text{c}}) \cdot \tan(\delta) + c_a \cdot A_{\text{eff}} = 7.828 \times 10^6$$

$$FS_{\text{desl}} := \frac{F_{\text{res}}}{HH} = 5.616$$

5) Verificação quanto às tensões atuantes na base

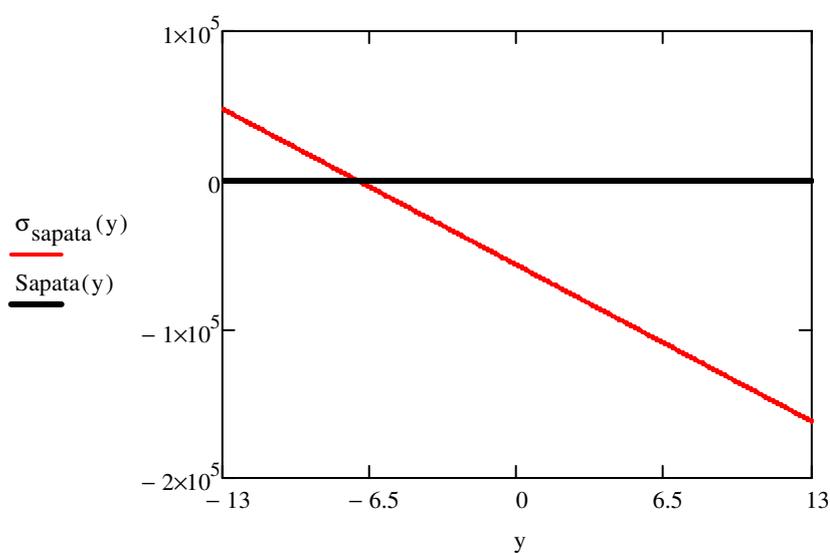
$$q_{\text{adm}} := \text{mean}(q_{\text{adm_Mey}}, q_{\text{adm_Han}}, q_{\text{adm_V}}) = 6.54 \times 10^5$$

$$\sigma_{\text{c_max}} := \frac{M_{\text{Tomb}} \cdot D}{\left(\frac{\pi \cdot D^4}{64}\right) \cdot 2} + \frac{(NN + V_{\text{sap}} \cdot \gamma_{\text{c}})}{\left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right)} = 1.62 \times 10^5$$

$$\frac{\sigma_{\text{c_max}}}{q_{\text{adm}}} = 24.771\%$$

$$\sigma_{\text{sapata}}(y) := -\frac{M_{\text{Tomb}}}{\left(\frac{\pi \cdot D^4}{64}\right)} \cdot y - \frac{NN + V_{\text{sap}} \cdot \gamma_{\text{c}}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

$$\text{Sapata}(y) := 0$$



6) Verificação quanto à punção na base

Coefficiente que fornece a parcela de M_{Sd} transmitida à torre por cisalhamento: $K_{\text{ww}} := 0.6$

Inclinação do capitel da sapata: $\text{atan} \left[\frac{2H_1}{(D - D_1)} \right] = 14.893 \cdot \text{deg}$

Momento fletor solicitante de cálculo transferido ao pescoço da sapata:

$$M_{Sd} := \sqrt{(\gamma_{q-w} \cdot M_{H_base_1} + \gamma_{g-torre} \cdot \Delta M_{H_base})^2 + (\gamma_{q-w} \cdot M_{lat_base_1} + \gamma_{g-torre} \cdot \Delta M_{lat_base})^2}$$

Força vertical solicitante de cálculo transferida ao pescoço da sapata:

$$F_{Sd} := \gamma_{g-nacele} \cdot P_{nac_opera} + \gamma_{g-torre} \cdot P_{torre}$$

6.1) Verificação da tensão resistente de compressão diagonal do concreto na superfície crítica C

Tensão resistente para a superfície no contorno crítico C (pescoço da sapata): $\alpha_v := 1 - \frac{f_{ck}}{250 \cdot 10^6} = 0.88$

$$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_C} = 2.143 \times 10^7 \quad \tau_{Rd2} := 0.27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = 5.091 \times 10^6$$

Distância da base da sapata ao centroide da armadura de flexão da sapata: $d_{linha} := 0.1$

Altura útil da sapata na face da torre: $d_c := H_1 + h_1 - d_{linha} = 2.9$

Perímetro do contorno crítico C (pescoço da sapata): $u_o := \pi \cdot D_1 = 22.619$

Módulo de resistência plástico do contorno crítico C (pescoço da sapata): $W_{P_C} := (D_1 + 4 \cdot d_c)^2 = 353.44$

Tensão solicitante no contorno crítico C: $\tau_{Sd_C} := \frac{F_{Sd}}{u_o \cdot d_c} + \frac{K \cdot M_{Sd}}{W_{P_C} \cdot d_c} = 3.64 \times 10^5 \quad \frac{\tau_{Sd_C}}{\tau_{Rd2}} = 7.149\%$

6.2) Verificação da tensão resistente de compressão diagonal do concreto na superfície crítica C₁'

Altura útil da sapata no contorno crítico C₁':
$$d_a := \frac{2H_1}{D - D_1} \left[\frac{D - D_1}{2} - (H_1 + h_1) \cdot 2 \right] + h_1$$

Perímetro do contorno crítico C₁':
$$u := \pi \cdot D_1 + 2 \cdot (H_1 + h_1) = 41.469$$

Módulo de resistência plástico do contorno crítico C₁':
$$W_{P_C1} := (D_1 + 4 \cdot d_a)^2 = 164.276$$

Tensão solicitante no contorno crítico C₁':
$$\tau_{Sd_C1} := \frac{F_{Sd}}{u \cdot d_a} + \frac{K \cdot M_{Sd}}{W_{P_C1} \cdot d_a} = 8.862 \times 10^5$$

Taxa geométrica da armadura de flexão:
$$\rho := 0.042$$

Tensão resistente para a superfície no contorno crítico C₁':
$$\tau_{Rd1} := 0.13 \left(1 + \sqrt{\frac{0.2}{d_a}} \right) \cdot \left(100 \rho \cdot \frac{f_{ck}}{10^6} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 10^6 = 8.977 \times 10^5$$

$$\frac{\tau_{Sd_C1}}{\tau_{Rd1}} = 98.725\%$$

7) Dimensionamento dos elementos da base da torre

7.1 Dimensionamento dos parafusos

Parafuso ISO Classe 10.9: $f_{yb} := 900 \cdot 10^6$ $f_{ub} := 1000 \cdot 10^6$ $d_b := \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot 0.0254$

Área bruta do parafuso:
$$A_b := \frac{\pi \cdot d_b^2}{4} = 1.14 \times 10^{-3}$$

Área efetiva à tração do parafuso:
$$A_{be} := 0.75 \cdot A_b = 8.551 \times 10^{-4}$$

Força de protensão mínima de aperto:
$$F_{Tb} := 70\% \cdot A_{be} \cdot f_{ub} = 5.985 \times 10^5$$

Coeficiente médio de atrito entre as chapas: $\mu := 0.35$

Fator de furo: $C_h := 1$

Número de planos de deslizamento: $n_s := 1$

Deslizamento como um Estado Limite de Serviço:

Força de tração solicitante característica no parafuso que reduz a força de protensão: $F_{tSk} := \frac{0.27597E+07}{8} = 3.45 \times 10^5$ $\frac{F_{tSk}}{F_{Tb}} = 0.576$

Força resistente nominal de um parafuso ao deslizamento: $F_{fRk} := 0.80 \cdot \mu \cdot C_h \cdot F_{Tb} \cdot n_s \cdot \left(1 - \frac{F_{tSk}}{0.8 \cdot F_{Tb}} \right) = 4.686 \times 10^4$

Força cortante solicitante característica: $F_{vSk} := \frac{\sqrt{94677.^2 + 10907.^2}}{8} = 1.191 \times 10^4$

Deslizamento como um Estado Limite Último:

Força de tração solicitante de cálculo no parafuso que reduz a força de protensão: $F_{tSd} := 1.4 \cdot F_{tSk} = 4.829 \times 10^5$

Coeficiente de ponderação de resistência: $\gamma_e := 1.2$

Força resistente de cálculo de um parafuso ao deslizamento: $F_{fRd} := \frac{1.13 \cdot \mu \cdot C_h \cdot F_{Tb} \cdot n_s}{\gamma_e} \cdot \left(1 - \frac{F_{tSd}}{1.13 \cdot F_{Tb}} \right)$

Força cortante solicitante de cálculo: $F_{vSd} := 1.4 \cdot F_{vSk} = 1.668 \times 10^4$

Número total de parafusos a serem utilizados no flange basal: $n_{total_b} := 8 \cdot 36 = 288$

7.2 Dimensionamento do flange da base

Distância mínima entre furos: $e_{ff} := 3 \cdot d_b = 0.114$

| | |
|---|---|
| Distância máxima entre furos: | $e_{ffmax} := 0.18$ |
| Distância mínima entre centro de furo-padrão à chapa: | $e_{fc} := 1.35d_b = 0.051$ |
| Distância mínima entre centro de furo-padrão à borda: | $e_{fb} := 1.25 \cdot d_b = 0.048$ |
| Espessura da parede da torre na base: | $e_{base} := 2 \cdot 0.0254 = 0.051$ |
| Largura mínima do flange basal: | $L_{fb_min} := 2 \cdot (e_{fc} + e_{fb}) + e_{base} = 0.249$ |
| Distância reta entre os centros dos furos: | $e_{furo} := 6.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{36 \cdot 4}\right) = 0.142$ |
| Largura do flange: | $L_{fb} := 0.36$ |
| Distância entre centro de furo à borda: | $a_{fb} := 0.08$ |
| Distância entre centro de furo à chapa: | $b_{fb} := \frac{L_{fb} - e_{base} - 2 \cdot a_{fb}}{2} = 0.0746$ |
| Largura de influência de um parafuso: | $p := 2 \min\left[\frac{e_{furo}}{2}, \left(b_{fb} + \frac{d_b}{2}\right)\right] = 0.142$ |
| Momento solicitante: | $M_{Sd_bf} := 1.4 \cdot F_{tSk} \cdot b_{fb} = 3.603 \times 10^4$ |
| Espessura do flange da base: | $t_{fb} := 3 \cdot 0.0254 = 0.076$ |
| Largura do flange do topo da sapata: | $L_{f_sap_topo} := L_{fb} + 2 \cdot t_{fb} = 0.512$ |
| Tensão de escoamento do aço do flange basal: | $f_y := 355 \cdot 10^6$ |
| Coefficiente poderador de resistência: | $\gamma_{a1} := 1.1$ |

Momento resistente:

$$M_{Rd_bf} := \frac{p \cdot t_{fb}^2}{4} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{a1}} = 6.643 \times 10^4$$

Verificação da compressão no concreto no anel de base da sapata (ancoragem):

$$\sigma_{comp} := \frac{F_{tSk}}{L_{fb} \cdot e_{furo}} = 6.758 \times 10^6$$

8) Dimensionamento da armadura de flexão da sapata

8.1 Dimensionamento da armadura longitudinal

Base da "fatia" de sapata (viga):

$$b_{w_eng} := \frac{\pi \cdot D_1}{36} = 0.628 \quad b_{w_borda} := \frac{\pi \cdot D}{36} = 2.269$$

Momento característico no engaste:

$$V_k := \sum_{i=0}^{48} R_{solo_i} = 1.7496 \times 10^6 \quad M_k := \sum_{i=0}^{48} \left[R_{solo_i} \left[\sqrt{(X_i)^2 + (Z_i)^2} - \frac{D_1}{2} \right] \right] = 1.005 \times 10^7$$

Cobrimento (Classe de agressividade IV):

$$c_{\min} := 0.05$$

Altura da sapata no engaste:

$$h_{eng} := h_1 + H_1 = 3$$

Barra da armadura longitudinal:

$$\phi_{\min} := 40 \cdot 10^{-3} \quad A_{40.0} := \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = 1.257 \times 10^{-3}$$

Altura útil da sapata no engaste:

$$d_{eng} := h_{eng} - c - 1.5 \cdot \phi = 2.89$$

Momento de cálculo no engaste:

$$M_d := \gamma_C \cdot M_k = 1.408 \times 10^7$$

Tensão de escoamento característica da armadura transversal:

$$f_{ys} := 500 \cdot 10^6 \quad f_{ysd} := \frac{f_{ys}}{1.15} = 4.348 \times 10^8$$

Armadura longitudinal:

$$k_{II} := \frac{d_{eng}}{\sqrt{\frac{M_d}{b_{w_eng} \cdot 10^3}}} = 0.0193 \quad \alpha_{As} := 396521.7 \quad A_s := \frac{M_d}{\alpha_{As} \cdot d_{eng} \cdot 10^3} = 0.012$$

$$\eta := \text{Ceil}\left(\frac{A_s}{A_{40.0}}, 1\right) = 10 \quad \frac{A_s}{A_{40.0}} = 9.774 \quad \text{esp} := \frac{b_{w_eng} - 2 \cdot c - \frac{\eta}{2} \cdot \phi}{\frac{\eta}{2} - 1} = 0.082$$

8.2 Dimensionamento da armadura transversal

$$\alpha_{v2} := 1 - \frac{f_{ck}}{250 \cdot 10^6} = 0.88$$

Resistência à tração do concreto:

$$f_{ctm} := 0.3 \cdot \left[\frac{f_{ck}}{10^6} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot 10^6 = 2.896 \times 10^6 \quad f_{ctkinf} := 0.7 \cdot f_{ctm} \quad f_{ctd} := \frac{f_{ctkinf}}{\gamma_C}$$

Tensão de escoamento característica da armadura transversal: $f_{ywk} := 500 \cdot 10^6 \quad f_{ywd} := \frac{f_{ywk}}{1.15}$

Barra da armadura transversal: $\phi_t := 12.5 \cdot 10^{-3} \quad A_{12.5} := \frac{\pi \cdot \phi_t^2}{4}$

Resistência da diagonal comprimida: $V_{Rd2} := 0.27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_{w_eng} \cdot d_{eng} = 9.245 \times 10^6$

Esforço Cortante solicitante de cálculo: $V_{Sd} := 1.4 \cdot V_k = 2.449 \times 10^6 \quad V_{Sd} \leq V_{Rd2} = 1$

Parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça: $V_c := 0.6 \cdot f_{ctd} \cdot b_{w_eng} \cdot d_{eng} = 1.578 \times 10^6$

$$V_{sw} := V_{Sd} - V_c = 8.716 \times 10^5$$

Armadura transversal mínima constituída por estribos:

$$A_{sw_s_min} := 0.2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \cdot b_{w_eng} = 7.28 \times 10^{-4}$$

Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal mínima:

$$V_{sw_min} := A_{sw_s_min} \cdot 0.9 \cdot d_{eng} \cdot f_{ywd} = 8.232 \times 10^5$$

$$V_{sw} := \max(V_{sw}, V_{sw_min}) = 8.716 \times 10^5$$

Armadura transversal constituída por estribos:

$$A_{sw_s} := \frac{V_{sw}}{0.9 \cdot d_{eng} \cdot f_{ywd}} = 7.708 \times 10^{-4}$$

Espaçamento longitudinal da armadura transversal:

$$s_w := \text{Floor} \left(\frac{2 \cdot A_{12.5}}{A_{sw_s}}, 0.01 \right) = 0.31$$

8.3 Comprimento de Ancoragem

Coefficientes para o cálculo da tensão de aderência:

$$\eta_1 := 2.25 \quad \eta_3 := \frac{132 - \phi \cdot 1000}{100} = 0.92$$

$$\eta_{2boa} := 1 \quad \eta_{2ma} := 0.7$$

Resistência à tração de cálculo do concreto:

$$f_{ctd} = 1.448 \times 10^6$$

Resistência de aderência de cálculo:

$$f_{bd_boa} := \eta_1 \cdot \eta_{2boa} \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} = 2.998 \times 10^6$$

$$f_{bd_ma} := \eta_1 \cdot \eta_{2ma} \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} = 2.098 \times 10^6$$

Comprimento de ancoragem reto:

$$l_{b_boa} := \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{ysd}}{f_{bd_boa}} = 1.45 \quad l_{b_ma} := \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{ysd}}{f_{bd_ma}} = 2.072$$

8.4 Verificação de abertura de fissuras (ELS-W)

Classe de agressividade IV:

$$w_k \leq 0.2\text{mm}$$

Módulo de elasticidade longitudinal do aço CA 50:

$$E_{si} := 210 \cdot 10^9$$

Área da região de envolvimento protegida pela barra:

$$A_{cri} := \frac{b_{w_eng}}{\frac{\eta}{2}} \cdot (c + 1.5 \cdot \phi) = 0.014$$

Taxa de armadura em relação à área da região de envolvimento:

$$\rho_{ri} := \frac{A_{40.0}}{A_{cri}} = 0.091$$

Relação entre os módulos de elasticidade longitudinal do aço CA50 e do concreto armado:

$$\alpha_e := 15$$

Momento de inércia da seção bruta de concreto:

$$I_c := \frac{b_{w_eng} \cdot h_{eng}^3}{12} = 1.414$$

Fator de correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta:

$$\alpha := 1.5$$

Resistência à tração direta:

$$f_{ct} := f_{ctkinf} = 2.028 \times 10^6$$

Momento de fissuração:

$$M_r := \alpha \cdot \frac{f_{ct} \cdot I_c \cdot 2}{h_{eng}} = 2.866 \times 10^6 \quad M_k = 1.005 \times 10^7$$

Posição da L.N. no Estádio II de deformação:

$$\frac{b_{w_eng} \cdot x^2}{2} - \alpha_e \cdot A_s \cdot (d_{eng} - x) = 0$$

$$x_{vet} := \frac{\left[\frac{A_s \cdot \alpha_e + \sqrt{A_s \cdot \alpha_e \cdot (A_s \cdot \alpha_e + 2 \cdot b_{w_eng} \cdot d_{eng})}}{b_{w_eng}} \right]}{\left[\frac{\sqrt{A_s^2 \cdot \alpha_e^2 + 2 \cdot b_{w_eng} \cdot d_{eng} \cdot A_s \cdot \alpha_e} - A_s \cdot \alpha_e}{b_{w_eng}} \right]} = \begin{pmatrix} -1.628 \\ 1.041 \end{pmatrix} \quad x := \max(x_{vet}) = 1.041$$

Momento de inércia da seção no estágio II de deformação:

$$I_{II} := \frac{b_{w_eng} \cdot x^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (d_{eng} - x)^2$$

Tensão na armadura no Estádio II:

$$\sigma_{si} := \alpha_e \cdot \frac{M_k}{I_{II}} (d_{eng} - x) = 3.219 \times 10^8$$

Valor característico da abertura de fissuras:

$$w_{k1} := \frac{\phi}{12.5 \cdot \eta_1} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \cdot \frac{3 \cdot \sigma_{si}}{f_{ctm}} = 0.73 \cdot 10^{-3}$$

$$w_{k2} := \frac{\phi}{12.5 \cdot \eta_1} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) = 0.19 \cdot 10^{-3}$$

$$w_k := \min(w_{k1}, w_{k2}) = 0.194 \cdot 10^{-3}$$

$$w_k \leq 0.2 \cdot 10^{-3} = 1$$

APÊNDICE B – CÓDIGO IMPLEMENTADO EM EF DE BARRA PARA ANÁLISE DINÂMICA E DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES DA TORRE

B.1) DINÂMICA E CONTROLE DE VIBRAÇÃO

1) Dados Iniciais

1.1) Características da nacele

Massa da nacele: $M_{nac} := 200000$

Comprimento da caixa da nacele: $a_{nac} := 12$

Altura da caixa da nacele: $h_{nac} := 5$

Largura da caixa da nacele: $b_{nac} := 4$

Momento de inércia da nacele em relação a um eixo diametral do topo da torre: $I_{nac} := \frac{M_{nac}}{12} \cdot (a_{nac}^2 + 4 \cdot h_{nac}^2) = 4.067 \times 10^6$

Momento de inércia da nacele em relação a um eixo CENTRAL da torre: $I_{tor} := \frac{M_{nac}}{12} \cdot (a_{nac}^2 + b_{nac}^2) = 2.667 \times 10^6$

1.2) Dimensões da torre

Altura da torre: $L := 120$

Número de subdivisões da malha: $n := 8$

Comprimento dos trechos da malha: $h := \frac{L}{n} = 15$

Diferença de nível entre o topo da torre e o centro do cubo do rotor: $\Delta h := 2.5$

Altura do cubo do rotor: $z_{hub} := L + \Delta h = 122.5$

1.3) Propriedades elastomecânicas do aço S355 (EN 10025-2, 2004) da torre

Massa específica do aço: $\rho := 7850$

Coefficiente de Poisson: $\nu := 0.3$

Módulo de elasticidade longitudinal do aço: $E := 205 \times 10^9$

Módulo de elasticidade transversal do aço: $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 7.885 \times 10^{10}$

1.4) Propriedades geométricas da seção transversal da torre

Diâmetro da base da torre: $d_{\text{base}} := 6.5$

Diâmetro da topo da torre: $d_{\text{topo}} := 3.5$

Espessura da parede da base da torre: $e_{\text{base}} := 50.8 \cdot 10^{-3}$

Espessura da parede da topo da torre: $e_{\text{topo}} := 25.5 \cdot 10^{-3}$

Função de variação do diâmetro: $d(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (d_{\text{base}} - d_{\text{topo}}) + d_{\text{topo}}$

Função de variação da espessura: $e_s(z) := \frac{L-z}{L} \cdot (e_{\text{base}} - e_{\text{topo}}) + e_{\text{topo}}$

Função de variação da área: $A(z) := \pi \cdot d(z) \cdot e_s(z)$

Função de variação do momento de inércia: $I(z) := \frac{\pi}{64} \cdot (d(z) + e_s(z))^4 - (d(z) - e_s(z))^4$

Coefficiente para consideração do peso dos equipamentos ao longo da torre: $\gamma_{\text{equipa}} := 1.05$

1.5) Cargas axiais aplicadas ao topo da torre

Peso da nacelle (200 ton): $P_{\text{nac}} := M_{\text{nac}} \cdot 9.807 = 1961400.000$

Força vertical transmitida à torre: $P_{\text{opera}} := 4299033.45 - P_{\text{nac}} = 2337633.450$

Força vertical total transmitida à torre: $P_n := P_{\text{nac}} + P_{\text{opera}} = 4299033.450$

2) Vetor dos níveis estabelecidos

Níveis := for $j \in 0..n$
 Níveis _{j} ← $j \cdot h$

3) Vetor das espessuras nos níveis estabelecidos

As chapas grossas são produtos planos de alta qualidade disponíveis nas espessuras de 6,00 a 150,00 mm; larguras entre 900 e 3900 mm e comprimentos de 2400 até 18000 mm (CATÁLOGO USIMINAS, CHAPAS GROSSAS, 2013; BENAFER, CHAPA GROSSA, 2016).

$$e_{\text{com}} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{5}{8} \\ 1\frac{3}{4} \\ 2 \\ 2\frac{1}{4} \\ 2\frac{1}{2} \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} 0.0254$$

| | | |
|----|--------|-----------------|
| | 0 | |
| 0 | 6.35 | |
| 1 | 7.938 | |
| 2 | 9.525 | |
| 3 | 12.7 | |
| 4 | 15.875 | |
| 5 | 19.05 | |
| 6 | 22.225 | |
| 7 | 25.4 | |
| 8 | 31.75 | $\cdot 10^{-3}$ |
| 9 | 38.1 | |
| 10 | 41.275 | |
| 11 | 44.45 | |
| 12 | 50.8 | |
| 13 | 57.15 | |
| 14 | 63.5 | |
| 15 | 76.2 | |
| 16 | 88.9 | |
| 17 | 101.6 | |

| | |
|---|---|
| $\text{esp} := \begin{array}{l} \text{cc} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{while } e_s(i \cdot h) > e_{\text{com}_j} \\ \quad \quad \text{j} \leftarrow \text{j} + 1 \\ \quad \quad \text{esp}_i \leftarrow e_{\text{com}_j} \\ \quad \quad \text{j}_{1_i} \leftarrow \text{j} \\ \text{for } i \in 0..n - 1 \\ \quad \text{esp}_i \leftarrow e_{\text{com}_{j_{1_{i+1}}}} \quad \text{if } j_{1_i} \neq j_{1_{i+1}} \\ \text{esp} \end{array}$ | $\text{esp} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \frac{3}{4} \\ 1 \frac{5}{8} \\ 1 \frac{1}{2} \\ 1 \frac{1}{2} \\ 1 \frac{1}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot 0.0254$ |
|---|---|

4) Vetor de diâmetros e áreas nos níveis estabelecidos

| | | | |
|--|---|--|---|
| $\phi_\phi := \text{for } i \in 0..n \\ \quad \phi_{\phi_i} \leftarrow d(i \cdot h)$ | $\phi_\phi = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 6.125 \\ 5.75 \\ 5.375 \\ 5 \\ 4.625 \\ 4.25 \\ 3.875 \\ 3.5 \end{pmatrix}$ | $\underline{\underline{A}} := \text{for } i \in 0..n \\ \quad A_i \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \phi_{\phi_i}$ | $A = \begin{pmatrix} 1.037 \\ 0.978 \\ 0.803 \\ 0.697 \\ 0.598 \\ 0.554 \\ 0.424 \\ 0.387 \\ 0.349 \end{pmatrix}$ |
|--|---|--|---|

| | |
|--|---|
| $D_{\text{ext}} := \phi_\phi + \text{esp} =$ | $\begin{pmatrix} 6.551 \\ 6.176 \\ 5.794 \\ 5.416 \\ 5.038 \\ 4.663 \\ 4.282 \\ 3.907 \\ 3.532 \end{pmatrix}$ |
|--|---|

5) Vetor de forças verticais nos níveis estabelecidos

$$\begin{array}{l}
 P := \text{for } j \in 0..n-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 A_e(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d(z) \\
 pp_e(z) \leftarrow A_e(z) \cdot \rho \cdot 9.807 \\
 P_j \leftarrow \gamma_{\text{equipa}} \cdot \int_{j \cdot h}^{(j+1) \cdot h} pp_e(z) dz \\
 P_n \leftarrow P_n
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 (1.222 \times 10^6) \\
 1.149 \times 10^6 \\
 9.418 \times 10^5 \\
 8.156 \times 10^5 \\
 P = 6.984 \times 10^5 \\
 6.44 \times 10^5 \\
 4.913 \times 10^5 \\
 4.46 \times 10^5 \\
 (4.299 \times 10^6)
 \end{array} \\
 P_0 = 1221522.206
 \end{array}$$

6) Vetor de esforços normais nos n\u00edveis estabelecidos

$$\begin{array}{l}
 NN := \text{for } j \in 0..n \\
 NN_j \leftarrow \sum_{i=j}^n P_i \quad \begin{array}{l}
 (1.071 \times 10^7) \\
 9.485 \times 10^6 \\
 8.336 \times 10^6 \\
 7.394 \times 10^6 \\
 NN = 6.579 \times 10^6 \quad NN_0 = 10706733.78 \\
 5.88 \times 10^6 \\
 5.236 \times 10^6 \\
 4.745 \times 10^6 \\
 (4.299 \times 10^6)
 \end{array}
 \end{array}$$

7) Propriedades do TMD

$$\text{Massa total da estrutura (torre+nacele):} \quad M_{\text{total}} := M_{\text{nac}} + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} P_i}{9.807} = 8.534 \times 10^5$$

Raz\u00e3o entre a massa do absorvedor e a massa total da estrutura:

$$\mu_u := 3\%$$

Massa do absorvedor de vibração: $m_{\text{TMD}} := \mu_u \cdot M_{\text{total}} = 2.56014 \times 10^4$

Massa específica do chumbo: $\rho_{\text{Pb}} := 11340$

Dimensão em planta da caixa de chumbo do absorvedor de vibração: $D_{\text{TMD}} := 1$

Altura da caixa de chumbo do absorvedor de vibração: $e_{\text{TMD}} := \frac{m_{\text{TMD}}}{\rho_{\text{Pb}} \cdot D_{\text{TMD}}^2} = 2.258$

$$V_{\text{TMD}} := \frac{m_{\text{TMD}}}{\rho_{\text{Pb}}} = 2.258$$

Rigidez do absorvedor de vibração: $k_{\text{TMD}} := 6.35067 \times 10^4$

Amortecimento do absorvedor de vibração: $c_{\text{TMD}} := 1.95797 \times 10^4$

8) Coeficiente das matrizes de rigidez e de massa

$f_v := 2$ $k_G := 1$

$$\text{KM} := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ d_e(z) \leftarrow \frac{h-z}{h} \phi_{\phi_j} - \phi_{\phi_{j+1}} + \phi_{\phi_{j+1}} \\ A_e(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d_e(z) \\ I_e(z) \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (d_e(z) + \text{esp}_j)^4 - (d_e(z) - \text{esp}_j)^4 \\ J_e(z) \leftarrow 2 \cdot I_e(z) \\ \text{flex} \leftarrow \text{identity}(2) - \text{identity}(2) \\ \text{flex}_{0,0} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f_v}{G \cdot A_e(z)} dz \\ \text{flex}_{1,1} \leftarrow \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right)^2 \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f_v}{G \cdot A_e(z)} dz \end{array} \right.$$

$$\text{flex}_{0,1} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \left(\frac{z}{h}\right) \frac{1}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{f_v}{G \cdot A_e(z)} dz$$

$$\text{flex}_{1,0} \leftarrow \text{flex}_{0,1}$$

$$k_e \leftarrow \text{flex}^{-1}$$

$$\text{KM}_{j,0} \leftarrow k_{e_{0,0}}$$

$$\text{KM}_{j,1} \leftarrow k_{e_{1,1}}$$

$$\text{KM}_{j,2} \leftarrow k_{e_{0,1}}$$

$$\text{KM}_{j,3} \leftarrow \frac{k_{e_{0,0}} + k_{e_{0,1}}}{h}$$

$$\text{KM}_{j,4} \leftarrow \frac{k_{e_{1,1}} + k_{e_{0,1}}}{h}$$

$$\text{KM}_{j,5} \leftarrow \frac{\text{KM}_{j,3} + \text{KM}_{j,4}}{h}$$

$$f_{1\text{axial}} \leftarrow \int_0^h \frac{(-1)^2}{E \cdot A_e(z)} dz$$

$$\text{KM}_{j,6} \leftarrow f_{1\text{axial}}^{-1}$$

$$f_{1\text{tor}} \leftarrow \int_0^h \frac{(-1)^2}{G \cdot J_e(z)} dz$$

$$\text{KM}_{j,7} \leftarrow f_{1\text{tor}}^{-1}$$

$$\text{KM}_{j,8} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,9} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \frac{z}{h} dz$$

$$\text{KM}_{j,10} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,11} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot J_e(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,12} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot J_e(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot \frac{z}{h} dz$$

$$\text{KM}_{j,13} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot J_e(z) \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,14} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right]^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,15} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot \left[-\frac{z}{h} + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h dz$$

$$\text{KM}_{j,16} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] dz$$

$$\text{KM}_{j,17} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h dz$$

$$\text{KM}_{j,18} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[\left[-\frac{z}{h} + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h \right]^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,19} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[-\frac{z}{h} + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] dz$$

$$\text{KM}_{j,20} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[-\frac{z}{h} + 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h \cdot \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h dz$$

$$\text{KM}_{j,21} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right]^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,22} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot \left[\left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h \right] dz$$

$$\text{KM}_{j,23} \leftarrow \int_0^h \rho \cdot A_e(z) \cdot \left[\left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right] \cdot h \right]^2 dz$$

$$\text{NN}_e(z) \leftarrow \left(\frac{\text{NN}_j - \text{NN}_{j+1}}{h} \right) \cdot z + \text{NN}_{j+1}$$

$$\text{KM}_{j,24} \leftarrow k_G \cdot \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \left(\frac{1}{h}\right)^2 dz$$

$$\begin{aligned}
 \text{KM}_{j,25} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[6 \cdot z \cdot (h-z)]^2}{h^3} dz \\
 \text{KM}_{j,26} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[(h-z) \cdot (h-3 \cdot z)] \cdot [6 \cdot z \cdot (h-z)]}{h^2 \cdot h^3} dz \\
 \text{KM}_{j,28} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[6 \cdot z \cdot (h-z)] \cdot [z \cdot (2 \cdot h - 3 \cdot z)]}{h^3 \cdot h^2} dz \\
 \text{KM}_{j,29} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[(h-z) \cdot (h-3 \cdot z)]^2}{h^2} dz \\
 \text{KM}_{j,27} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[(h-z) \cdot (h-3 \cdot z)] \cdot [z \cdot (2 \cdot h - 3 \cdot z)]}{h^2 \cdot h^2} dz \\
 \text{KM}_{j,30} &\leftarrow k_G \int_0^h \text{NN}_e(z) \cdot \frac{[z \cdot (2 \cdot h - 3 \cdot z)]^2}{h^2} dz
 \end{aligned}$$

KM

9) Matriz de rigidez [K]

9.1) Matriz de rigidez com 4 GL por nó

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_E := & \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{K}_E \leftarrow \text{identity}(4n) - \text{identity}(4n) \\
 \text{for } i \in 0..n-2 \\
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{K}_{E,i,i} \leftarrow (\mathbf{KM}_{i,6} - \mathbf{KM}_{i,24}) + (\mathbf{KM}_{i+1,6} - \mathbf{KM}_{i+1,24}) \\
 \mathbf{K}_{E,i,i+1} \leftarrow -(\mathbf{KM}_{i+1,6} - \mathbf{KM}_{i+1,24}) \\
 \mathbf{K}_{E,i+1,i} \leftarrow -(\mathbf{KM}_{i+1,6} - \mathbf{KM}_{i+1,24})
 \end{array} \right. \\
 \mathbf{K}_{E,n-1,n-1} \leftarrow \mathbf{KM}_{n-1,6} - \mathbf{KM}_{n-1,24} \\
 \text{for } i \in n..2n-2 \\
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{K}_{E,i,i} \leftarrow \mathbf{KM}_{i-n,7} + \mathbf{KM}_{i+1-n,7} \\
 \mathbf{K}_{E,i,i+1} \leftarrow -\mathbf{KM}_{i+1-n,7} \\
 \mathbf{K}_{E,i+1,i} \leftarrow -\mathbf{KM}_{i+1-n,7}
 \end{array} \right. \\
 \mathbf{K}_{E,2n-1,2n-1} \leftarrow \mathbf{KM}_{n-1,7}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\text{for } i \in 2n..3n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
K_{E_{i,i}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,0} - KM_{i+1-2n,29}) + (KM_{i-2n,1} - KM_{i-2n,30}) \\
K_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n,2} - KM_{i+1-2n,27} \\
K_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1-2n,2} - KM_{i+1-2n,27} \\
K_{E_{i+n,i}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) - (KM_{i-2n,4} - KM_{i-2n,28}) \\
K_{E_{i+n,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n,4} - KM_{i+1-2n,28} \\
K_{E_{i+n+1,i}} \leftarrow -(KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) \\
K_{E_{i,i+n}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) - (KM_{i-2n,4} - KM_{i-2n,28}) \\
K_{E_{i+1,i+n}} \leftarrow KM_{i+1-2n,4} - KM_{i+1-2n,28} \\
K_{E_{i,i+n+1}} \leftarrow -(KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26})
\end{array} \right. \\
K_{E_{3n-1,3n-1}} \leftarrow KM_{n-1,1} - KM_{n-1,30} \\
K_{E_{4n-1,3n-1}} \leftarrow -(KM_{n-1,4} - KM_{n-1,28}) \\
K_{E_{3n-1,4n-1}} \leftarrow -(KM_{n-1,4} - KM_{n-1,28}) \\
\text{for } i \in 3n..4n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
K_{E_{i,i}} \leftarrow (KM_{i-3n,5} - KM_{i-3n,25}) + (KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25}) \\
K_{E_{i,i+1}} \leftarrow -(KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25}) \\
K_{E_{i+1,i}} \leftarrow -(KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25})
\end{array} \right. \\
K_{E_{4n-1,4n-1}} \leftarrow KM_{n-1,5} - KM_{n-1,25} \\
K_E
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
K_{E.TMD} := \left| \begin{array}{l}
K_E \leftarrow \text{identity}(4n+1) - \text{identity}(4n+1) \\
\text{for } i \in 0..n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
K_{E_{i,i}} \leftarrow (KM_{i,6} - KM_{i,24}) + (KM_{i+1,6} - KM_{i+1,24}) \\
K_{E_{i,i+1}} \leftarrow -(KM_{i+1,6} - KM_{i+1,24}) \\
K_{E_{i+1,i}} \leftarrow -(KM_{i+1,6} - KM_{i+1,24})
\end{array} \right. \\
K_{E_{n-1,n-1}} \leftarrow KM_{n-1,6} - KM_{n-1,24}
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \text{for } i \in n..2n-2 \\
& \left| \begin{array}{l} K_{E_{i,i}} \leftarrow KM_{i-n,7} + KM_{i+1-n,7} \\ K_{E_{i,i+1}} \leftarrow -KM_{i+1-n,7} \\ K_{E_{i+1,i}} \leftarrow -KM_{i+1-n,7} \end{array} \right. \\
& K_{E_{2n-1,2n-1}} \leftarrow KM_{n-1,7} \\
& \text{for } i \in 2n..3n-2 \\
& \left| \begin{array}{l} K_{E_{i,i}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,0} - KM_{i+1-2n,29}) + (KM_{i-2n,1} - KM_{i-2n,30}) \\ K_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n,2} - KM_{i+1-2n,27} \\ K_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1-2n,2} - KM_{i+1-2n,27} \\ K_{E_{i+n,i}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) - (KM_{i-2n,4} - KM_{i-2n,28}) \\ K_{E_{i+n,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n,4} - KM_{i+1-2n,28} \\ K_{E_{i+n+1,i}} \leftarrow -(KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) \\ K_{E_{i,i+n}} \leftarrow (KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) - (KM_{i-2n,4} - KM_{i-2n,28}) \\ K_{E_{i+1,i+n}} \leftarrow KM_{i+1-2n,4} - KM_{i+1-2n,28} \\ K_{E_{i,i+n+1}} \leftarrow -(KM_{i+1-2n,3} - KM_{i+1-2n,26}) \end{array} \right. \\
& K_{E_{3n-1,3n-1}} \leftarrow KM_{n-1,1} - KM_{n-1,30} \\
& K_{E_{4n-1,3n-1}} \leftarrow -(KM_{n-1,4} - KM_{n-1,28}) \\
& K_{E_{3n-1,4n-1}} \leftarrow -(KM_{n-1,4} - KM_{n-1,28}) \\
& \text{for } i \in 3n..4n-2 \\
& \left| \begin{array}{l} K_{E_{i,i}} \leftarrow (KM_{i-3n,5} - KM_{i-3n,25}) + (KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25}) \\ K_{E_{i,i+1}} \leftarrow -(KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25}) \\ K_{E_{i+1,i}} \leftarrow -(KM_{i+1-3n,5} - KM_{i+1-3n,25}) \end{array} \right. \\
& K_{E_{4n-1,4n-1}} \leftarrow KM_{n-1,5} - KM_{n-1,25} + k_{TMD} \\
& K_{E_{4n,4n}} \leftarrow k_{TMD} \\
& K_{E_{4n,4n-1}} \leftarrow -k_{TMD} \\
& K_{E_{4n-1,4n}} \leftarrow -k_{TMD} \\
& K_E
\end{aligned}$$

$$K_{\theta uAA} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \\ K_{\theta uAA,i,j} \leftarrow K_{E,i,j} \\ K_{\theta uAA} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uBB} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \\ K_{\theta uBB,i,j} \leftarrow K_{E_{i+2n,j+2n}} \\ K_{\theta uBB} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uBB.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n \\ \text{for } j \in 0..2n \\ K_{\theta uBB.TMD,i,j} \leftarrow K_{E.TMD_{i+2n,j+2n}} \\ K_{\theta uBB.TMD} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uAB} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \\ K_{\theta uAB,i,j} \leftarrow 0 \\ K_{\theta uAB} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uBA} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \\ K_{\theta uBA,i,i} \leftarrow 0 \\ K_{\theta uBA} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uAB.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n \\ K_{\theta uAB.TMD,i,j} \leftarrow 0 \\ K_{\theta uAB.TMD} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta uBA.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \\ K_{\theta uBA.TMD,i,j} \leftarrow 0 \\ K_{\theta uBA.TMD} \end{array} \right.$$

$$K_{\theta u} := K_{\theta uBB} - K_{\theta uBA} \cdot K_{\theta uAA}^{-1} \cdot K_{\theta uAB}$$

$$K_{\theta u.TMD} := K_{\theta uBB.TMD} - K_{\theta uBA.TMD} \cdot K_{\theta uAA}^{-1} \cdot K_{\theta uAB.TMD}$$

9.3) Matriz de rigidez condensada com 1 GL por nó (deslocamento transversal)

$$K_{uAA} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..3n-1 \\ \text{for } j \in 0..3n-1 \\ K_{uAA,i,j} \leftarrow K_{E_{i,j}} \\ K_{uAA} \end{array} \right.$$

$$K_{uBB} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ K_{uBB,i,j} \leftarrow K_{E_{i+3n,j+3n}} \\ K_{uBB} \end{array} \right.$$

$$K_{uBB.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \text{for } j \in 0..n \\ K_{uBB,i,j} \leftarrow K_{E.TMD}_{i+3n,j+3n} \\ K_{uBB} \end{array} \right. \quad K_{uAB} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..3n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ K_{uAB,i,j} \leftarrow K_{E}_{i,j+3n} \\ K_{uAB} \end{array} \right.$$

$$K_{uAB.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..3n-1 \\ \text{for } j \in 0..n \\ K_{uAB,i,j} \leftarrow K_{E.TMD}_{i,j+3n} \\ K_{uAB} \end{array} \right. \quad K_{uBA} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..3n-1 \\ K_{uBA,i,j} \leftarrow K_{E}_{i+3n,j} \\ K_{uBA} \end{array} \right.$$

$$K_{uBA.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \text{for } j \in 0..3n-1 \\ K_{uBA,i,j} \leftarrow K_{E.TMD}_{i+3n,j} \\ K_{uBA} \end{array} \right.$$

$$K_u := K_{uBB} - K_{uBA} \cdot K_{uAA}^{-1} \cdot K_{uAB}$$

$$K_u.TMD := K_{uBB.TMD} - K_{uBA.TMD} \cdot K_{uAA}^{-1} \cdot K_{uAB.TMD}$$

10) Matriz de massa [M]

10.1) Matriz de massa com 4 GL por nó

$$M_E := \gamma_{\text{equipa}} \left| \begin{array}{l} M_E \leftarrow \text{identity}(4n) - \text{identity}(4n) \\ \text{for } i \in 0..n-2 \\ \left| \begin{array}{l} M_{E,i,i} \leftarrow KM_{i,10} + KM_{i+1,8} \\ M_{E,i,i+1} \leftarrow KM_{i+1,9} \\ M_{E,i+1,i} \leftarrow KM_{i+1,9} \end{array} \right. \\ M_{E,n-1,n-1} \leftarrow KM_{n-1,10} + M_{nac} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
\text{for } i \in n..2n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i,i}} \leftarrow KM_{i-n,13} + KM_{i+1-n,11} \\
M_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-n,12} \\
M_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1-n,12}
\end{array} \right. \\
M_{E_{2n-1,2n-1}} \leftarrow KM_{n-1,13} + I_{\text{tor}} \\
\text{for } i \in 2n..3n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i,i}} \leftarrow KM_{i+1-2n,18} + KM_{i-2n,23} \\
M_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n,20} \\
M_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1-2n,20} \\
M_{E_{i+n,i}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,15} - KM_{i-2n,22} \\
M_{E_{i+n,i+1}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,17} \\
M_{E_{i+n+1,i}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,19} \\
M_{E_{i,i+n}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,15} - KM_{i-2n,22} \\
M_{E_{i+1,i+n}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,17} \\
M_{E_{i,i+n+1}} \leftarrow -KM_{i+1-2n,19}
\end{array} \right. \\
M_{E_{3n-1,3n-1}} \leftarrow KM_{n-1,23} + I_{\text{nac}} \\
M_{E_{4n-1,3n-1}} \leftarrow -KM_{n-1,22} \\
M_{E_{3n-1,4n-1}} \leftarrow -KM_{n-1,22} \\
\text{for } i \in 3n..4n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i,i}} \leftarrow KM_{i-3n,21} + KM_{i+1-3n,14} \\
M_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1-3n,16} \\
M_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1-3n,16}
\end{array} \right. \\
M_{E_{4n-1,4n-1}} \leftarrow KM_{n-1,21} + M_{\text{nac}} \\
M_E
\end{array}$$

$$M_{E.\text{TMD}} := \gamma_{\text{equipa}} \left| \begin{array}{l}
M_E \leftarrow \text{identity}(4n+1) - \text{identity}(4n+1) \\
\text{for } i \in 0..n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i,i}} \leftarrow KM_{i,10} + KM_{i+1,8} \\
M_{E_{i,i+1}} \leftarrow KM_{i+1,9} \\
M_{E_{i+1,i}} \leftarrow KM_{i+1,9}
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
M_{E_{n-1, n-1}} \leftarrow KM_{n-1, 10} + M_{nac} \\
\text{for } i \in n..2n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i, i}} \leftarrow KM_{i-n, 13} + KM_{i+1-n, 11} \\
M_{E_{i, i+1}} \leftarrow KM_{i+1-n, 12} \\
M_{E_{i+1, i}} \leftarrow KM_{i+1-n, 12}
\end{array} \right. \\
M_{E_{2n-1, 2n-1}} \leftarrow KM_{n-1, 13} + I_{tor} \\
\text{for } i \in 2n..3n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i, i}} \leftarrow KM_{i+1-2n, 18} + KM_{i-2n, 23} \\
M_{E_{i, i+1}} \leftarrow KM_{i+1-2n, 20} \\
M_{E_{i+1, i}} \leftarrow KM_{i+1-2n, 20} \\
M_{E_{i+n, i}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 15} - KM_{i-2n, 22} \\
M_{E_{i+n, i+1}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 17} \\
M_{E_{i+n+1, i}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 19} \\
M_{E_{i, i+n}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 15} - KM_{i-2n, 22} \\
M_{E_{i+1, i+n}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 17} \\
M_{E_{i, i+n+1}} \leftarrow -KM_{i+1-2n, 19}
\end{array} \right. \\
M_{E_{3n-1, 3n-1}} \leftarrow KM_{n-1, 23} + I_{nac} \\
M_{E_{4n-1, 3n-1}} \leftarrow -KM_{n-1, 22} \\
M_{E_{3n-1, 4n-1}} \leftarrow -KM_{n-1, 22} \\
\text{for } i \in 3n..4n-2 \\
\left| \begin{array}{l}
M_{E_{i, i}} \leftarrow KM_{i-3n, 21} + KM_{i+1-3n, 14} \\
M_{E_{i, i+1}} \leftarrow KM_{i+1-3n, 16} \\
M_{E_{i+1, i}} \leftarrow KM_{i+1-3n, 16}
\end{array} \right. \\
M_{E_{4n-1, 4n-1}} \leftarrow KM_{n-1, 21} + M_{nac} \\
M_{E_{4n, 4n}} \leftarrow m_{TMD} \\
M_E
\end{array}$$

10.2) Matriz de rigidez condensada com 2 GL por nó (rotação por flexão e deslocamento transversal):
desconsiderando-se as acelerações dos graus de liberdade axiais e torcionais

$$M_{\theta u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \text{for } j \in 0..2n-1 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} M_{\theta u BB_{i,j}} \leftarrow M_{E_{i+2n,j+2n}} \\ M_{\theta u BB} \end{array} \right.$$

$$M_{\theta u.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n \\ \text{for } j \in 0..2n \\ M_{\theta u.TMD_{i,j}} \leftarrow M_{E.TMD_{i+2n,j+2n}} \\ M_{\theta u.TMD} \end{array} \right.$$

10.3) Matriz de rigidez condensada com 1 GL por nó (deslocamento transversal): desconsiderando-se as acelerações dos graus de liberdade axiais, torcionais e flexionais

$$M_u := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{u_{i,j}} \leftarrow M_{E_{i+3n,j+3n}} \\ M_u \end{array} \right.$$

$$M_{u.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \text{for } j \in 0..n \\ M_{u.TMD_{i,j}} \leftarrow M_{E.TMD_{i+3n,j+3n}} \\ M_{u.TMD} \end{array} \right.$$

11) Diagonalização da matriz de massa

Transformação para diagonalizar a matriz de MASSA:

$$\phi := \text{eigenvecs}(M_u) \quad \phi_{TMD} := \text{eigenvecs}(M_{u.TMD})$$

$$\phi_{\theta u} := \text{eigenvecs}(M_{\theta u}) \quad \phi_{\theta u.TMD} := \text{eigenvecs}(M_{\theta u.TMD})$$

$$\phi_E := \text{eigenvecs}(M_E) \quad \phi_{E.TMD} := \text{eigenvecs}(M_{E.TMD})$$

Matriz de MASSA diagonalizada:

$$M_{\text{diag}} := \phi^T \cdot M_u \cdot \phi \quad M_{\text{diag.TMD}} := \phi_{TMD}^T \cdot M_{u.TMD} \cdot \phi_{TMD}$$

$$M_{\theta u.\text{diag}} := \phi_{\theta u}^T \cdot M_{\theta u} \cdot \phi_{\theta u} \quad M_{\theta u.\text{diag.TMD}} := \phi_{\theta u.TMD}^T \cdot M_{\theta u.TMD} \cdot \phi_{\theta u.TMD}$$

$$M_{\text{diag.E}} := \phi_E^T \cdot M_E \cdot \phi_E \quad M_{\text{diag.E.TMD}} := \phi_{E.TMD}^T \cdot M_{E.TMD} \cdot \phi_{E.TMD}$$

Inverso da raiz da Matriz de MASSA diagonalizada:

$$M_{\text{diag}_1_2} := \text{for } i \in 0..n-1$$

$$M_{\text{diag}_1_2,i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\text{diag},i,i}}}$$

$$M_{\text{diag}_1_2.\text{TMD}} := \text{for } i \in 0..n$$

$$M_{\text{diag}_1_2.\text{TMD},i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\text{diag.TMD},i,i}}}$$

$$M_{\theta u.\text{diag}_1_2} := \text{for } i \in 0..2n-1$$

$$M_{\theta u.\text{diag}_1_2,i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\theta u.\text{diag},i,i}}}$$

$$M_{\theta u.\text{diag}_1_2.\text{TMD}} := \text{for } i \in 0..2n$$

$$M_{\theta u.\text{diag}_1_2.\text{TMD},i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\theta u.\text{diag.TMD},i,i}}}$$

$$M_{\text{diag}_1_2.E} := \text{for } i \in 0..4n-1$$

$$M_{\text{diag}_1_2.E,i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\text{diag.E},i,i}}}$$

$$M_{\text{diag}_1_2.E.\text{TMD}} := \text{for } i \in 0..4n$$

$$M_{\text{diag}_1_2.E.\text{TMD},i,i} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{\text{diag.E.TMD},i,i}}}$$

Raiz da Matriz de MASSA diagonalizada:

$$M_{\text{diag}1_2} := \text{for } i \in 0..n-1$$

$$M_{\text{diag}_1_2,i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\text{diag},i,i}}$$

$$M_{\text{diag}1_2.\text{TMD}} := \text{for } i \in 0..n$$

$$M_{\text{diag}_1_2.\text{TMD},i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\text{diag.TMD},i,i}}$$

$$M_{\theta u.\text{diag}1_2} := \text{for } i \in 0..2n-1$$

$$M_{\theta u.\text{diag}_1_2,i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\theta u.\text{diag},i,i}}$$

$$M_{\theta u.\text{diag1_2.TMD}} := \text{for } i \in 0..2n$$

$$M_{\theta u.\text{diag_1_2.TMD}}_{i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\theta u.\text{diag.TMD}}_{i,i}}$$

$$M_{\text{diag1_2.E}} := \text{for } i \in 0..4n - 1$$

$$M_{\text{diag_1_2.E}}_{i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\text{diag.E}}_{i,i}}$$

$$M_{\text{diag1_2.E.TMD}} := \text{for } i \in 0..4n$$

$$M_{\text{diag_1_2.E.TMD}}_{i,i} \leftarrow \sqrt{M_{\text{diag.E.TMD}}_{i,i}}$$

12) Matriz dinâmica inversa [D]

$$D := M_{\text{diag_1_2}} \cdot \phi^T \cdot K_u \cdot \phi \cdot M_{\text{diag_1_2}}$$

$$D_{\text{TMD}} := M_{\text{diag_1_2.TMD}} \cdot \phi_{\text{TMD}}^T \cdot K_{u.\text{TMD}} \cdot \phi_{\text{TMD}} \cdot M_{\text{diag_1_2.TMD}}$$

$$D_{\theta u} := M_{\theta u.\text{diag_1_2}} \cdot \phi_{\theta u}^T \cdot K_{\theta u} \cdot \phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.\text{diag_1_2}}$$

$$D_{\theta u.\text{TMD}} := M_{\theta u.\text{diag_1_2.TMD}} \cdot \phi_{\theta u.\text{TMD}}^T \cdot K_{\theta u.\text{TMD}} \cdot \phi_{\theta u.\text{TMD}} \cdot M_{\theta u.\text{diag_1_2.TMD}}$$

$$D_E := M_{\text{diag_1_2.E}} \cdot \phi_E^T \cdot K_E \cdot \phi_E \cdot M_{\text{diag_1_2.E}}$$

$$D_{E.\text{TMD}} := M_{\text{diag_1_2.E.TMD}} \cdot \phi_{E.\text{TMD}}^T \cdot K_{E.\text{TMD}} \cdot \phi_{E.\text{TMD}} \cdot M_{\text{diag_1_2.E.TMD}}$$

13) Diagonalização da matriz dinâmica inversa [D]

Matriz de transformação da matriz dinâmica inversa [D]:

$$\psi \psi := \text{eigenvecs}(D) \quad \psi \psi_{\text{TMD}} := \text{eigenvecs}(D_{\text{TMD}})$$

$$\psi \psi_{\theta u} := \text{eigenvecs}(D_{\theta u}) \quad \psi \psi_{\theta u.\text{TMD}} := \text{eigenvecs}(D_{\theta u.\text{TMD}})$$

$$\psi \psi_E := \text{eigenvecs}(D_E) \quad \psi \psi_{E.\text{TMD}} := \text{eigenvecs}(D_{E.\text{TMD}})$$

Matriz espectral:

$$\omega_{-2} := \psi \psi^T \cdot D \cdot \psi \quad \omega_{-2\text{TMD}} := \psi \psi_{\text{TMD}}^T \cdot D_{\text{TMD}} \cdot \psi \psi_{\text{TMD}}$$

$$\omega_{-2\theta_u} := \psi \psi_{\theta_u}^T \cdot D_{\theta_u} \cdot \psi \psi_{\theta_u} \quad \omega_{-2\theta_u.\text{TMD}} := \psi \psi_{\theta_u.\text{TMD}}^T \cdot D_{\theta_u.\text{TMD}} \cdot \psi \psi_{\theta_u.\text{TMD}}$$

$$\omega_{-2_E} := \psi \psi_E^T \cdot D_E \cdot \psi \psi_E \quad \omega_{-2_E.\text{TMD}} := \psi \psi_{E.\text{TMD}}^T \cdot D_{E.\text{TMD}} \cdot \psi \psi_{E.\text{TMD}}$$

Matriz de transformação ordenada da matriz dinâmica inversa [D]:

```

ψ :=
| ψ ← identity(n) – identity(n)
| for k ∈ 0..n – 1
|   | cont ← 0
|   | for i ∈ 0..n – 1
|   |   | cont ← cont + 1 if ω-2k,k > ω-2i,i
|   |   | vk ← cont
|   | for i ∈ 0..n – 1
|   |   | for j ∈ 0..n – 1
|   |     | ψj,vi ← ψj,i

```

```

ψTMD :=
| ψTMD ← identity(n + 1) – identity(n + 1)
| for k ∈ 0..n
|   | cont ← 0
|   | for i ∈ 0..n
|   |   | cont ← cont + 1 if ω-2TMDk,k > ω-2TMDi,i
|   |   | vk ← cont
|   | for i ∈ 0..n
|   |   | for j ∈ 0..n
|   |     | ψTMDj,vi ← ψTMDj,i

```

```

ψθu :=
| ψθu ← identity(2n) – identity(2n)
| for k ∈ 0..2n – 1
|   | cont ← 0
|   | for i ∈ 0..2n – 1
|   |   | cont ← cont + 1 if ω-2θuk,k > ω-2θui,i
|   |   | vk ← cont
|   | for i ∈ 0..2n – 1
|   |   | for j ∈ 0..2n – 1
|   |     | ψθuj,vi ← ψθuj,i

```


$$\omega_{\theta u}^2 := \psi_{\theta u}^T \cdot D_{\theta u} \cdot \psi_{\theta u}$$

$$\omega_{\theta u.TMD}^2 := \psi_{\theta u.TMD}^T \cdot D_{\theta u.TMD} \cdot \psi_{\theta u.TMD}$$

$$\omega_E^2 := \psi_E^T \cdot D_E \cdot \psi_E$$

$$\omega_{E.TMD}^2 := \psi_{E.TMD}^T \cdot D_{E.TMD} \cdot \psi_{E.TMD}$$

14) Frequências angulares

Frequências angulares naturais:

$$\omega := \text{for } i \in 0..n-1$$

$$\omega_i \leftarrow \sqrt{\omega_{2,i}^2}$$

$$\omega_{TMD} := \text{for } i \in 0..n$$

$$\omega_{TMD_i} \leftarrow \sqrt{\omega_{2,TMD,i}^2}$$

$$\omega_E := \text{for } i \in 0..4n-1$$

$$\omega_{E_i} \leftarrow \sqrt{\omega_{2,E,i}^2}$$

$$\omega_{E.TMD} := \text{for } i \in 0..4n$$

$$\omega_{E.TMD_i} \leftarrow \sqrt{\omega_{2,E.TMD,i}^2}$$

$$\omega_{\theta u} := \text{for } i \in 0..2n-1$$

$$\omega_{\theta u_i} \leftarrow \sqrt{\omega_{2,\theta u,i}^2}$$

$$\omega_{\theta u.TMD} := \text{for } i \in 0..2n$$

$$\omega_{\theta u.TMD_i} \leftarrow \sqrt{\omega_{2,\theta u.TMD,i}^2}$$

15) Matriz de amortecimento nos referenciais generalizado q e original u

Razão de amortecimento para o primeiro (Tabela 19 da NBR 6123:1988; Table 8-2 de Blevins, 2001) e para o último modos de vibração :

$$\xi_0 := 0.008$$

Razão de amortecimento para o primeiro e para o último modos de vibração da torre com TMD

$$\xi_{TMD0} := \frac{c_{TMD}}{2 \cdot m_{TMD} \cdot \omega_{TMD0}} = 0.267$$

$$\xi_{TMD4} := 0.0095$$

Constantes de proporcionalidade calculadas a partir da primeira e da última frequência angular de vibração para formar a matriz de amortecimento de Rayleigh :

$$\alpha_M := \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_0 \cdot \omega_4}{\omega_0 + \omega_4} = 2.940 \times 10^{-2}$$

$$\alpha_K := \frac{2 \cdot \xi_0}{\omega_0 + \omega_4} = 1.441 \times 10^{-4}$$

$$\alpha_{M.\theta u} := \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_{\theta u_0} \cdot \omega_{\theta u_4}}{\omega_{\theta u_0} + \omega_{\theta u_4}} = 0.029$$

$$\alpha_{K.\theta u} := \frac{2 \cdot \xi_0}{\omega_{\theta u_0} + \omega_{\theta u_4}} = 2.04 \times 10^{-4}$$

$$\alpha_{M.E} := \frac{2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_{E_0} \cdot \omega_{E_4}}{\omega_{E_0} + \omega_{E_4}} = 0.029$$

$$\alpha_{K.E} := \frac{2 \cdot \xi_0}{\omega_{E_0} + \omega_{E_4}} = 3.043 \times 10^{-4}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{0.TMD} \\ \alpha_{1.TMD} \end{pmatrix} := 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{TMD_0}} \omega_{TMD_0} \\ \frac{1}{\omega_{TMD_4}} \omega_{TMD_4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_{TMD_0} \\ \xi_{TMD_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.765 \\ 1.109 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{0.\theta u.TMD} \\ \alpha_{1.\theta u.TMD} \end{pmatrix} := 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{\theta u.TMD_0}} \omega_{\theta u.TMD_0} \\ \frac{1}{\omega_{\theta u.TMD_4}} \omega_{\theta u.TMD_4} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_{TMD_0} \\ \xi_{TMD_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.765 \\ 7.733 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{0.E.TMD} \\ \alpha_{1.E.TMD} \end{pmatrix} := 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{E.TMD_0}} \omega_{E.TMD_0} \\ \frac{1}{\omega_{E.TMD_5}} \omega_{E.TMD_5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_{TMD_0} \\ \xi_{TMD_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.765 \\ 7.733 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Matriz de amortecimento de Rayleigh no referencial original u :

$$C_u := \alpha_M \cdot M_u + \alpha_K \cdot K_u \qquad C_{\theta u} := \alpha_{M.\theta u} \cdot M_{\theta u} + \alpha_{K.\theta u} \cdot K_{\theta u}$$

$$C_E := \alpha_{M.E} \cdot M_E + \alpha_{K.E} \cdot K_E$$

$$C_{u.TMD} := \alpha_{0.TMD} \cdot M_{u.TMD} + \alpha_{1.TMD} \cdot K_{u.TMD}$$

$$C_{\theta u.TMD} := \alpha_{0.\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.TMD} + \alpha_{1.\theta u.TMD} \cdot K_{\theta u.TMD}$$

$$C_{E.TMD} := \alpha_{0.E.TMD} \cdot M_{E.TMD} + \alpha_{1.E.TMD} \cdot K_{E.TMD}$$

$$C_{u.TMDreal} := \begin{cases} C_{u.TMDreal} \leftarrow \text{identity}(n+1) - \text{identity}(n+1) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad \quad C_{u.TMDreal}_{i,j} \leftarrow C_{u,i,j} \\ C_{u.TMDreal}_{n,n} \leftarrow c_{TMD} \\ C_{u.TMDreal}_{n-1,n-1} \leftarrow C_{u_{n-1,n-1}} + c_{TMD} \\ C_{u.TMDreal}_{n,n-1} \leftarrow -c_{TMD} \\ C_{u.TMDreal}_{n-1,n} \leftarrow -c_{TMD} \\ C_{u.TMDreal} \end{cases}$$

$$C_{\theta u.TMDreal} := \left\{ \begin{array}{l} C_{\theta u.TMDreal} \leftarrow \text{identity}(2n+1) - \text{identity}(2n+1) \\ \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..2n-1 \\ \quad \quad C_{\theta u.TMDreal}_{i,j} \leftarrow C_{\theta u}_{i,j} \\ C_{\theta u.TMDreal}_{2n,2n} \leftarrow c_{TMD} \\ C_{\theta u.TMDreal}_{2n-1,2n-1} \leftarrow C_{\theta u_{2n-1,2n-1}} + c_{TMD} \\ C_{\theta u.TMDreal}_{2n,2n-1} \leftarrow -c_{TMD} \\ C_{\theta u.TMDreal}_{2n-1,2n} \leftarrow -c_{TMD} \\ C_{\theta u.TMDreal} \end{array} \right.$$

Matriz de amortecimento de Rayleigh no generalizado q :

$$C_q := \psi^T \cdot (\phi \cdot M_{diag_1_2})^T \cdot C_u \cdot (\phi \cdot M_{diag_1_2}) \cdot \psi$$

$$C_{q.TMD} := \psi_{TMD}^T \cdot (\phi_{TMD} \cdot M_{diag_1_2.TMD})^T \cdot C_{u.TMD} \cdot (\phi_{TMD} \cdot M_{diag_1_2.TMD}) \cdot \psi_{TMD}$$

$$C_{q.TMDreal} := \psi_{TMD}^T \cdot M_{diag_1_2.TMD} \cdot \phi_{TMD}^T \cdot C_{u.TMDreal} \cdot \phi_{TMD} \cdot M_{diag_1_2.TMD} \cdot \psi_{TMD}$$

$$C_{q.\theta u} := \psi_{\theta u}^T \cdot (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.diag_1_2})^T \cdot C_{\theta u} \cdot (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.diag_1_2}) \cdot \psi_{\theta u}$$

$$C_{q.\theta u.TMD} := \psi_{\theta u.TMD}^T \cdot (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.diag_1_2.TMD})^T \cdot C_{\theta u.TMD} \cdot (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.diag_1_2.TMD}) \cdot \psi_{\theta u.TMD}$$

$$C_{q.\theta u.TMDreal} := \psi_{\theta u.TMD}^T \cdot M_{\theta u.diag_1_2.TMD} \cdot \phi_{\theta u.TMD}^T \cdot C_{\theta u.TMDreal} \cdot \phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.diag_1_2.TMD} \cdot \psi_{\theta u.TMD}$$

$$C_{q.E} := \psi_E^T \cdot (\phi_E \cdot M_{diag_1_2.E})^T \cdot C_E \cdot (\phi_E \cdot M_{diag_1_2.E}) \cdot \psi_E$$

$$C_{q.E.TMD} := \psi_{E.TMD}^T \cdot (\phi_{E.TMD} \cdot M_{diag_1_2.E.TMD})^T \cdot C_{E.TMD} \cdot (\phi_{E.TMD} \cdot M_{diag_1_2.E.TMD}) \cdot \psi_{E.TMD}$$

Vetor de razão de amortecimento de Rayleigh:

$$\xi := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \xi_i \leftarrow \frac{C_{q,i,i}}{(2 \cdot \omega_i)} \\ \xi \end{array} \right. \quad \xi_{TMD} := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \quad \xi_{TMD_i} \leftarrow \frac{C_{q.TMD,i,i}}{2 \cdot \omega_{TMD_i}} \\ \xi_{TMD} \end{array} \right.$$

$$\xi_{\theta u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \xi_{\theta u_i} \leftarrow \frac{C_{q,\theta u_i,i}}{2 \cdot \omega_{\theta u_i}} \\ \xi_{\theta u} \end{array} \right. \quad \xi_{\theta u.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..2n \\ \xi_{\theta u.TMD_i} \leftarrow \frac{C_{q,\theta u.TMD_i,i}}{2 \cdot \omega_{\theta u.TMD_i}} \\ \xi_{\theta u.TMD} \end{array} \right.$$

$$\xi_E := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..4n-1 \\ \xi_{E_i} \leftarrow \frac{C_{q,E_i,i}}{2 \cdot \omega_{E_i}} \\ \xi_E \end{array} \right. \quad \xi_{E.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..4n \\ \xi_{E.TMD_i} \leftarrow \frac{C_{q,E.TMD_i,i}}{2 \cdot \omega_{E.TMD_i}} \\ \xi_{E.TMD} \end{array} \right.$$

Vetor de razão de amortecimento para todos os modos de vibração (Tabela 19 da NBR 6123:1988; Table 8-2 de Blevins, 2001):

$$\xi_{\text{Caughey}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \xi_{\text{Caughey}_i} \leftarrow 0.008 \\ \xi_{\text{Caughey}} \end{array} \right.$$

Matriz de amortecimento de Caughey no generalizado q :

$$C_{q\text{Caughey}} := \left| \begin{array}{l} C_{q\text{Caughey}} \leftarrow \text{identity}(n) - \text{identity}(n) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ C_{q\text{Caughey}_{i,i}} \leftarrow 2 \cdot \xi_{\text{Caughey}_i} \cdot \omega_i \\ C_{q\text{Caughey}} \end{array} \right.$$

Matriz de amortecimento de Caughey no referencial original u :

$$C_{u\text{Caughey}} := \Phi \cdot M_{\text{diag1}_2} \cdot \Psi \cdot C_{q\text{Caughey}} \cdot \Psi^T \cdot M_{\text{diag1}_2} \cdot \Phi^T$$

Frequências angulares de vibração amortecida:

$$\omega_d := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \omega_{d_i} \leftarrow \omega_i \cdot \sqrt{1 - (\xi_i)^2} \\ \omega_d \end{array} \right. \quad \omega_{d.TMD} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \omega_{d.TMD_i} \leftarrow \omega_{TMD_i} \cdot \sqrt{1 - \xi_{TMD_i}^2} \\ \omega_{d.TMD} \end{array} \right.$$

$$\omega_{d,E} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..4n-1 \\ \omega_{d,E_i} \leftarrow \omega_{E_i} \cdot \sqrt{1 - \xi_{E_i}^2} \\ \omega_{d,E} \end{cases}$$

$$\omega_{d,\theta u.TMD} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..2n \\ \omega_{d,\theta u.TMD_i} \leftarrow \omega_{\theta u.TMD_i} \cdot \sqrt{1 - \xi_{\theta u.TMD_i}^2} \\ \omega_{d,\theta u.TMD} \end{cases}$$

$$\omega_{d,\theta u} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..2n-1 \\ \omega_{d,\theta u_i} \leftarrow \omega_{\theta u_i} \cdot \sqrt{1 - \xi_{\theta u_i}^2} \\ \omega_{d,\theta u} \end{cases}$$

$$\omega_{d,E.TMD} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..4n \\ \omega_{d,E.TMD_i} \leftarrow \omega_{E.TMD_i} \cdot \sqrt{1 - \xi_{E.TMD_i}^2} \\ \omega_{d,E.TMD} \end{cases}$$

16) Frequências naturais

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad f_{TMD} := \frac{\omega_{TMD}}{2 \cdot \pi} \quad f_{\theta u} := \frac{\omega_{\theta u}}{2 \cdot \pi} \quad f_{\theta u.TMD} := \frac{\omega_{\theta u.TMD}}{2 \cdot \pi}$$

$$f_E := \frac{\omega_E}{2 \cdot \pi} \quad f_{E.TMD} := \frac{\omega_{E.TMD}}{2 \cdot \pi}$$

17) Períodos

$$T := \frac{1}{f} \quad T_{TMD} := \frac{1}{f_{TMD}} \quad T_{\theta u} := \frac{1}{f_{\theta u}} \quad T_{\theta u.TMD} := \frac{1}{f_{\theta u.TMD}}$$

$$T_E := \frac{1}{f_E} \quad T_{E.TMD} := \frac{1}{f_{E.TMD}}$$

18) Matriz modal ponderada

$$\Phi_{\omega\omega} := M_{diag_1_2} \cdot \psi$$

$$\Phi_{TMD} := M_{diag_1_2.TMD} \cdot \psi_{TMD}$$

$$\Phi_{\theta u} := M_{\theta u, \text{diag}_1_2} \cdot \psi_{\theta u}$$

$$\Phi_{\theta u, \text{TMD}} := M_{\theta u, \text{diag}_1_2, \text{TMD}} \cdot \psi_{\theta u, \text{TMD}}$$

$$\Phi_E := M_{\text{diag}_1_2, E} \cdot \psi_E$$

$$\Phi_{E, \text{TMD}} := M_{\text{diag}_1_2, E, \text{TMD}} \cdot \psi_{E, \text{TMD}}$$

19) Modos de vibração

$$u_{\text{mod}, E} := \Phi_E \cdot \Phi_E \quad u_{\text{modos}, E} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..4n-1 \\ \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}, E_{0,k}} \leftarrow 0 \\ u_{\text{modos}, E_{n+1,k}} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 0..4n-1 \\ \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}, E_{i,j}} \leftarrow u_{\text{mod}, E_{i-1+2n,j}} \\ u_{\text{modos}, E_{i+n+1,j}} \leftarrow u_{\text{mod}, E_{i+3n-1,j}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$u_{\text{mod}, E, \text{TMD}} := \Phi_{E, \text{TMD}} \cdot \Phi_{E, \text{TMD}}$$

$$u_{\text{modos}, E, \text{TMD}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..4n \\ \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}, E, \text{TMD}_{0,k}} \leftarrow 0 \\ u_{\text{modos}, E, \text{TMD}_{n+1,k}} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 0..4n \\ \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}, E, \text{TMD}_{i,j}} \leftarrow u_{\text{mod}, E, \text{TMD}_{i-1+2n,j}} \\ u_{\text{modos}, E, \text{TMD}_{i+n+1,j}} \leftarrow u_{\text{mod}, E, \text{TMD}_{i+3n-1,j}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$N_{\text{pontos}} := 20$$

$$N_{iv} := \text{for } i \in 0..n \cdot (N_{\text{pontos}} - 1)$$

$$N_{iv}_i \leftarrow i \cdot \frac{L}{n \cdot (N_{\text{pontos}} - 1)}$$

$$\text{MODOS}_E := \left| \begin{array}{l} \theta_i(\xi, L) \leftarrow (-\xi + 2 \cdot \xi^2 - \xi^3) \cdot L \\ \theta_f(\xi, L) \leftarrow (\xi^2 - \xi^3) \cdot L \\ v_i(\xi) \leftarrow (1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3) \\ v_f(\xi) \leftarrow (3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3) \\ \text{for } k \in 0..2n-1 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{for } j \in 1..N_pontos \\
 \left| \begin{array}{l}
 \xi_j \leftarrow \frac{j-1}{N_pontos-1} \\
 \text{MODOS}_{E_{j-1+i \cdot (N_pontos-1)}, k} \leftarrow \left[\begin{array}{l}
 \theta_i(\xi_j, h) \cdot u_{\text{modos}.E_{i,k}} \dots \\
 + \theta_f(\xi_j, h) \cdot u_{\text{modos}.E_{i+1,k}} \dots \\
 + (-v_i(\xi_j)) \cdot u_{\text{modos}.E_{n+1+i,k}} \\
 + (-v_f(\xi_j)) \cdot u_{\text{modos}.E_{n+2+i,k}}
 \end{array} \right] \dots
 \end{array} \right. \\
 \text{MODOS}_E
 \end{array}$$

20) *Matrizes de massa e de rigidez no referencial generalizado q*

$$M_q := (\phi \cdot M_{\text{diag}_1_2})^T \cdot M_u \cdot (\phi \cdot M_{\text{diag}_1_2})$$

$$M_{q.TMD} := (\phi_{TMD} \cdot M_{\text{diag}_1_2.TMD})^T \cdot M_{u.TMD} \cdot (\phi_{TMD} \cdot M_{\text{diag}_1_2.TMD})$$

$$M_{q.\theta u} := (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2})^T \cdot M_{\theta u} \cdot (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2})$$

$$M_{q.\theta u.TMD} := (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2.TMD})^T \cdot M_{\theta u.TMD} \cdot (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2.TMD})$$

$$M_{q.E} := (\phi_E \cdot M_{\text{diag}_1_2.E})^T \cdot M_E \cdot (\phi_E \cdot M_{\text{diag}_1_2.E})$$

$$K_q := \psi^T \cdot (\phi \cdot M_{\text{diag}_1_2})^T \cdot K_u \cdot (\phi \cdot M_{\text{diag}_1_2}) \cdot \psi$$

$$K_{q.TMD} := \psi_{TMD}^T \cdot (\phi_{TMD} \cdot M_{\text{diag}_1_2.TMD})^T \cdot K_{u.TMD} \cdot (\phi_{TMD} \cdot M_{\text{diag}_1_2.TMD}) \cdot \psi_{TMD}$$

$$K_{q.\theta u} := \psi_{\theta u}^T \cdot (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2})^T \cdot K_{\theta u} \cdot (\phi_{\theta u} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2}) \cdot \psi_{\theta u}$$

$$K_{q.\theta u.TMD} := \psi_{\theta u.TMD}^T \cdot (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2.TMD})^T \cdot K_{\theta u.TMD} \cdot (\phi_{\theta u.TMD} \cdot M_{\theta u.\text{diag}_1_2.TMD}) \cdot \psi_{\theta u.TMD}$$

$$K_{q.E} := \psi_E^T \cdot (\phi_E \cdot M_{\text{diag}_1_2.E})^T \cdot K_E \cdot (\phi_E \cdot M_{\text{diag}_1_2.E}) \cdot \psi_E$$

21) Dados eólicos

| | |
|--|--|
| Velocidade básica do vento (NBR 6123, 1988): | $V_0 := 35$ |
| Exponente do perfil de velocidade do vento (ABNT NBR IEC 61400-1, 2008): | $\alpha := 0.2$ |
| Velocidade média do vento em 10 min a 10 m de altura sobre o solo(NBR 6123, 1988): | $V_{p10} := 0.69 \cdot V_0 = 24.15$ |
| Perfil de velocidade do vento em 10 min (ABNT NBR 6123, 1988): | $V_{w10}(z) := V_{p10} \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha$ |
| | $V_{w10}(L) = 39.697$ |
| Perfil de velocidade do vento em 3 s (ABNT NBR 6123, 1988): | $V_{3s}(z) := V_0 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha$ |
| Coeficiente de arrasto da torre tubular: | $C_a := 0.6$ |
| Densidade do ar: | $\rho_{ar} := 1.225$ |
| Pressão dinâmica do vento flutuante (NBR 6123, 1988): | $q_w(z) := \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot (V_{3s}(z) - V_{w10}(z))^2$ |
| Pressão estática do vento médio (NBR 6123, 1988): | $q_{est}(z) := \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot (V_{w10}(z))^2$ |
| Pressão linear do vento flutuante (NBR 6123, 1988): | $q_{linear}(z) := C_a \cdot (d(z) + e_s(z)) \cdot q_w(z)$ |
| Pressão linear do vento médio (NBR 6123, 1988): | $q_{lw_est}(z) := C_a \cdot (d(z) + e_s(z)) \cdot q_{est}(z)$ |
| Pressão linear de carga acidental (desaprumo): | $q_{ea}(z) := 1600$ |
| Pressão linear estática: | $q_{l_est}(z) := q_{lw_est}(z) + q_{ea}(z)$ |

Porcentagem do carregamento de vento dinâmico em relação ao carregamento total (estático+dinâmico):

$$q\%(z) := \frac{q_w(z)}{q_{est}(z) + q_w(z)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FM} := & \text{for } j \in 0..n-1 \\
 & d_e(z) \leftarrow \frac{h-z}{h} \phi_{\phi_j} - \phi_{\phi_{j+1}} + \phi_{\phi_{j+1}} \\
 & A_e(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot d_e(z) \\
 & I_e(z) \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (d_e(z) + \text{esp}_j)^4 - (d_e(z) - \text{esp}_j)^4 \\
 & q_e(z) \leftarrow q_{\text{linear}}(z + j \cdot h) \\
 & V_{f_0} \leftarrow \frac{\int_0^h z \cdot q_e(z) dz}{h} \\
 & V_{i_0} \leftarrow \left(\int_0^h q_e(z) dz \right) - V_{f_0} \\
 & M_0(z) \leftarrow V_{i_0} \cdot z - \int_0^z z \cdot q_e(z) dz \\
 & V_0(z) \leftarrow V_{i_0} - \int_0^z q_e(z) dz \\
 & f_{10} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h} \right) \frac{f_v \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz \\
 & f_{20} \leftarrow \int_0^h \left(\frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(\frac{1}{h} \right) \frac{f_v \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz \\
 & \text{FM}_{j,0} \leftarrow -(\text{KM}_{j,0} \cdot f_{10} + \text{KM}_{j,2} \cdot f_{20}) \\
 & \text{FM}_{j,1} \leftarrow -(\text{KM}_{j,2} \cdot f_{10} + \text{KM}_{j,1} \cdot f_{20}) \\
 & \text{FM}_{j,2} \leftarrow V_{i_0} - \frac{(\text{FM}_{j,0} + \text{FM}_{j,1})}{h} \\
 & \text{FM}_{j,3} \leftarrow V_{f_0} + \frac{(\text{FM}_{j,0} + \text{FM}_{j,1})}{h} \\
 & \text{FM}
 \end{aligned}$$

$$q\%(L) \cdot 46644600.79$$

$$q\%(L) \cdot 662186.43$$

$$M_H := 0 = 0$$

$$F_H := q\%(L) \cdot 662186.43 = 1.112 \times 10^5$$

$$s_A := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..3n-1 \\ s_{A_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 2n..3n-2 \\ s_{A_j} \leftarrow -FM_{j+1-2n,0} - FM_{j-2n,1} \\ s_{A_{3n-1}} \leftarrow M_H - FM_{n-1,1} \\ s_A \end{array} \right. \quad \underline{F} := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ F_j \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ F_j \leftarrow FM_{j+1,2} + FM_{j,3} \\ F_{n-1} \leftarrow F_H + FM_{n-1,3} \\ F \end{array} \right.$$

$$F_u := F - K_{uBA} \cdot K_{uAA}^{-1} \cdot s_A$$

$$FM_{est} := \left\{ \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ d_e(z) \leftarrow \frac{h-z}{h} \phi_{\phi_j} - \phi_{\phi_{j+1}} + \phi_{\phi_{j+1}} \\ A_e(z) \leftarrow \pi \cdot esp_j \cdot d_e(z) \\ I_e(z) \leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot (d_e(z) + esp_j)^4 - (d_e(z) - esp_j)^4 \\ q_e(z) \leftarrow q_{l_est}(z + j \cdot h) \\ V_{f_0} \leftarrow \frac{\int_0^h z \cdot q_e(z) dz}{h} \\ V_{i_0} \leftarrow \left(\int_0^h q_e(z) dz \right) - V_{f_0} \\ M_0(z) \leftarrow V_{i_0} \cdot z - \int_0^z z \cdot q_e(z) dz \\ V_0(z) \leftarrow V_{i_0} - \int_0^z q_e(z) dz \\ f_{10} \leftarrow \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(-\frac{1}{h} \right) \frac{f_v \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz \\ f_{20} \leftarrow \int_0^h \left(-\frac{z}{h} \right) \cdot \frac{M_0(z)}{E \cdot I_e(z)} dz + \int_0^h \left(-\frac{1}{h} \right) \frac{f_v \cdot V_0(z)}{G \cdot A_e(z)} dz \\ FM_{j,0} \leftarrow -(KM_{j,0} \cdot f_{10} + KM_{j,2} \cdot f_{20}) \\ FM_{j,1} \leftarrow -(KM_{j,2} \cdot f_{10} + KM_{j,1} \cdot f_{20}) \\ FM_{j,2} \leftarrow V_{i_0} - \frac{(FM_{j,0} + FM_{j,1})}{h} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \text{FM}_{j,3} \leftarrow V_{f_0} + \frac{(\text{FM}_{j,0} + \text{FM}_{j,1})}{h} \\ \text{FM} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$M_{H,\text{est}} := (46644600.79) = 4.664 \times 10^7$$

$$F_{H,\text{est}} := (1 - q\%(L)) \cdot 662186.43 + 61780 = 6.128 \times 10^5$$

$$s_{A,\text{est}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..3n-1 \\ \quad s_{A,\text{est}_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 2n..3n-2 \\ \quad s_{A,\text{est}_j} \leftarrow -\text{FM}_{\text{est}_{j+1-2n,0}} - \text{FM}_{\text{est}_{j-2n,1}} \\ s_{A,\text{est}_{3n-1}} \leftarrow M_{H,\text{est}} - \text{FM}_{\text{est}_{n-1,1}} \\ s_{A,\text{est}} \end{array} \right.$$

$$F_{\text{est}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad F_{\text{est}_j} \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 0..n-2 \\ \quad F_{\text{est}_j} \leftarrow \text{FM}_{\text{est}_{j+1,2}} + \text{FM}_{\text{est}_j,3} \\ F_{\text{est}_{n-1}} \leftarrow F_{H,\text{est}} + \text{FM}_{\text{est}_{n-1,3}} \\ F_{\text{est}} \end{array} \right.$$

$$F_{u,\text{est}} := F_{\text{est}} - K_{uBA} \cdot K_{uAA}^{-1} \cdot s_{A,\text{est}}$$

$$F_{u,\text{est.TMD}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad F_{u,\text{est.TMD}_i} \leftarrow F_{u,\text{est}_i} \\ F_{u,\text{est.TMD}_n} \leftarrow 0 \\ F_{u,\text{est.TMD}} \end{array} \right.$$

$$u_{\text{est}} := K_u^{-1} \cdot F_{u,\text{est}} = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 0.066 \\ 0.066 \\ 0.155 \\ 0.155 \\ 0.29 \\ 0.48 \\ 0.731 \\ 1.057 \\ 1.47 \\ (1.47) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0.016) \\ 0.066 \\ 0.155 \\ 0.29 \\ 0.48 \\ 0.731 \\ 1.057 \\ 1.47 \\ (1.47) \end{matrix}$$

$$u_{\text{est.TMD}} := K_{u.TMD}^{-1} \cdot F_{u,\text{est.TMD}} = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 0.066 \\ 0.155 \\ 0.29 \\ 0.48 \\ 0.731 \\ 1.057 \\ 1.47 \\ (1.47) \end{pmatrix}$$

22) Condições iniciais nos referenciais original u e generalizado q

Vetor de deslocamentos inicial no referencial original u :

$$u_0 := \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad u_{0_i} \leftarrow 0$$

$$u_{0.TMD} := \text{for } i \in 0..n \\ \quad u_{0.TMD_i} \leftarrow 0$$

Vetor de velocidades iniciais no referencial original u :

$$u_{0_dot} := \text{for } i \in 0..n-1 \quad u_{0_dot,i} \leftarrow 0 \quad u_{0_dot.TMD} := \text{for } i \in 0..n \quad u_{0_dot.TMD}_i \leftarrow 0$$

Vetor de deslocamentos no referencial generalizado q :

$$q_0 := \psi^T \cdot M_{diag1_2} \cdot \phi^T \cdot u_0 \quad q_{0.TMD} := \psi_{TMD}^T \cdot M_{diag1_2.TMD} \cdot \phi_{TMD}^T \cdot u_{0.TMD}$$

Vetor de velocidades no referencial generalizado q :

$$q_{0_dot} := \psi^T \cdot M_{diag1_2} \cdot \phi^T \cdot u_{0_dot} \quad q_{0_dot.TMD} := \psi_{TMD}^T \cdot M_{diag1_2.TMD} \cdot \phi_{TMD}^T \cdot u_{0_dot.TMD}$$

Matriz de transformação do referencial generalizado q para o original u :

$$B := \phi \cdot \Phi \quad B_{\theta u} := \phi_{\theta u} \cdot \Phi_{\theta u} \quad B_E := \phi_E \cdot \Phi_E$$

$$B_{TMD} := \phi_{TMD} \cdot \Phi_{TMD} \quad B_{\theta u.TMD} := \phi_{\theta u.TMD} \cdot \Phi_{\theta u.TMD}$$

Matriz de massa no referencial generalizado q :

$$M_q := B^T \cdot M_u \cdot B \quad M_{q.TMD} := B_{TMD}^T \cdot M_{u.TMD} \cdot B_{TMD} \quad M_{q,E} := B_E^T \cdot M_E \cdot B_E$$

Matriz de rigidez no referencial generalizado q :

$$K_q := B^T \cdot K_u \cdot B \quad K_{q.TMD} := B_{TMD}^T \cdot K_{u.TMD} \cdot B_{TMD}$$

$$K_{q,E} := B_E^T \cdot K_E \cdot B_E$$

Matriz de amortecimento no referencial generalizado q :

$$C_q := B^T \cdot C_u \cdot B$$

$$C_{q.TMD} := B_{TMD}^T \cdot C_{u.TMD} \cdot B_{TMD}$$

$$C_{q,E} := B_E^T \cdot C_E \cdot B_E$$

Frequência angular do vetor de forças ω_F (adotou-se uma frequência de xx Hz) :

$$\omega_F := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ \omega_{F_i} \leftarrow \omega_0 \\ \omega_{F_{n-1}} \leftarrow \omega_0 \end{cases} \quad \omega_{F.TMD} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ \omega_{F.TMD_i} \leftarrow \omega_0 \\ \omega_{F.TMD_{n-1}} \leftarrow \omega_0 \\ \omega_{F.TMD_n} \leftarrow 0 \\ \omega_{F.TMD} \end{cases}$$

Amplitudes do vetor de forças senoidais e cossenoidais F_1 e F_2 no referencial original u
 $[F(t) = F_1 \cos(\omega_F t) + F_2 \text{sen}(\omega_F t)]$:

$$F_1 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ F_i \leftarrow 0 \\ F_{n-1} \leftarrow 0 \end{cases} \quad F_{1.TMD} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ F_{1.TMD_i} \leftarrow 0 \\ F_{1.TMD_{n-1}} \leftarrow 0 \\ F_{1.TMD_n} \leftarrow 0 \\ F_{1.TMD} \end{cases}$$

$$F_2 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ F_i \leftarrow F_{u_i} \\ F_{n-1} \leftarrow F_{u_{n-1}} \end{cases} \quad F_{2.TMD} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-2 \\ F_{2.TMD_i} \leftarrow F_{u_i} \\ F_{2.TMD_{n-1}} \leftarrow F_{u_{n-1}} \\ F_{2.TMD_n} \leftarrow 0 \\ F_{2.TMD} \end{cases}$$

Amplitudes das parcelas do vetor de forças senoidais e cossenoidais F^{10} e F^{20} no referencial generalizado q :

$$F_{10} := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ F_{10,j,k} \leftarrow B_{k,j} \cdot F_{1k} \end{cases} \quad F_{10.TMD} := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n \\ \text{for } k \in 0..n \\ F_{10.TMD_{j,k}} \leftarrow B_{TMD_{k,j}} \cdot F_{1.TMD_k} \end{cases}$$

$$F_{20} := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ F_{20,j,k} \leftarrow B_{k,j} \cdot F_{2k} \end{cases} \quad F_{20.TMD} := \begin{cases} \text{for } j \in 0..n \\ \text{for } k \in 0..n \\ F_{20.TMD_{j,k}} \leftarrow B_{TMD_{k,j}} \cdot F_{2.TMD_k} \end{cases}$$

Amplitudes das parcelas da resposta permanente senoidal e cossenoidal C^0 e D^0 no referencial generalizado q :

$C_0 :=$ for $j \in 0..n-1$

for $k \in 0..n-1$

$$C_{0,j,k} \leftarrow \frac{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2} \cdot F_{10,j,k} - 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \cdot F_{20,j,k}}{(\omega_j)^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2}}{\left(\frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right)^2} + 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right]} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2} \cdot F_{10,j,k} - 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \cdot F_{20,j,k}}{(\omega_j)^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2}}{\left(\frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right)^2} + 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right]} \right]}$$

$C_{0.TMD} :=$ for $j \in 0..n$

for $k \in 0..n$

$$C_{0.TMD,j,k} \leftarrow \frac{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2} \cdot F_{10.TMD,j,k} - 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \cdot F_{20.TMD,j,k}}{\omega_{TMD_j}^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2}}{\left(\frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right)^2} + 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right]} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2} \cdot F_{10.TMD,j,k} - 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \cdot F_{20.TMD,j,k}}{\omega_{TMD_j}^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2}}{\left(\frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right)^2} + 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right]} \right]}$$

$D_0 :=$ for $j \in 0..n-1$

for $k \in 0..n-1$

$$D_{0,j,k} \leftarrow \frac{2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \cdot F_{10,j,k} + \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2} \cdot F_{20,j,k}}{(\omega_j)^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2}}{\left(\frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right)^2} + 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right]} \right]}{\left[\frac{2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \cdot F_{10,j,k} + \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2} \cdot F_{20,j,k}}{(\omega_j)^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2}}{\left(\frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right)^2} + 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right]} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F_k})^2}{(\omega_j)^2}}{\left(\frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right)^2} + 2 \cdot \xi_j \cdot \frac{\omega_{F_k}}{\omega_j} \right]} \right]}$$

$D_{0.TMD} :=$ for $j \in 0..n$

for $k \in 0..n$

$$D_{0.TMD,j,k} \leftarrow \frac{2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \cdot F_{10.TMD,j,k} + \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2} \cdot F_{20.TMD,j,k}}{\omega_{TMD_j}^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2}}{\left(\frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right)^2} + 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right]} \right]}{\left[\frac{2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \cdot F_{10.TMD,j,k} + \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2} \cdot F_{20.TMD,j,k}}{\omega_{TMD_j}^2 \cdot \left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2}}{\left(\frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right)^2} + 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right]} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{(\omega_{F.TMD_k})^2}{(\omega_{TMD_j})^2}}{\left(\frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right)^2} + 2 \cdot \xi_{TMD_j} \cdot \frac{\omega_{F.TMD_k}}{\omega_{TMD_j}} \right]} \right]}$$

23) Parâmetros do TMD

$$D_p := M_u^{-1} \cdot K_u \quad \psi_p := \text{eigenvecs}(D_p)$$

$$\omega_{-2p} := \psi_p^{-1} \cdot D_p \cdot \psi_p$$

$$\psi_p := \left| \begin{array}{l} \psi_p \leftarrow \text{identity}(n) - \text{identity}(n) \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{cont} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \text{cont} \leftarrow \text{cont} + 1 \text{ if } \omega_{-2p_{k,k}} > \omega_{-2p_{i,i}} \\ \quad v_k \leftarrow \text{cont} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad \quad \psi_{p_{j,v_i}} \leftarrow \psi_{p_{j,i}} \end{array} \right. \quad \omega_{2p} := \psi_p^{-1} \cdot D_p \cdot \psi_p$$

Matriz de transformação normalizada do referencial generalizado q para o original u :

$$B_n := \left| \begin{array}{l} B_n \leftarrow \text{identity}(n) - \text{identity}(n) \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nor}_i \leftarrow \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (B_{k,i})^2} \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ \quad B_{n_{j,i}} \leftarrow \frac{B_{j,i}}{\text{Nor}_i} \end{array} \right. \\ B_n \end{array} \right.$$

$$B_{n.TMD} := \left| \begin{array}{l} B_{n.TMD} \leftarrow \text{identity}(n+1) - \text{identity}(n+1) \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nor}_{TMD_i} \leftarrow \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} B_{TMD_{k,i}}^2} \\ \text{for } j \in 0..n \\ \quad B_{n.TMD_{j,i}} \leftarrow \frac{B_{TMD_{j,i}}}{\text{Nor}_{TMD_i}} \end{array} \right. \\ B_{n.TMD} \end{array} \right.$$

$$B_{n,E} := \begin{cases} B_{n,E} \leftarrow \text{identity}(4n) - \text{identity}(4n) \\ \text{for } i \in 0..4n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{Nor}_i \leftarrow \sqrt{\sum_{k=0}^{4n-1} B_{E_{k,i}}^2} \\ \text{for } j \in 0..4n-1 \\ \quad B_{n,E_{j,i}} \leftarrow \frac{B_{E_{j,i}}}{\text{Nor}_i} \end{array} \right. \\ B_{n,E} \end{cases}$$

Massas modais:

$$MM := B_n^T \cdot M_u \cdot B_n \quad MM_E := B_{n,E}^T \cdot M_E \cdot B_{n,E}$$

Rigidezes modais:

$$KM := B_n^T \cdot K_u \cdot B_n \quad KM_E := B_{n,E}^T \cdot K_E \cdot B_{n,E}$$

Amortecimentos modais:

$$CM := B_n^T \cdot C_u \cdot B_n \quad CM_E := B_{n,E}^T \cdot C_E \cdot B_{n,E}$$

Massa modal correspondente ao primeiro modo de vibração da torre:

$$m_p := B_n^{(0)T} \cdot M_u \cdot B_n^{(0)} = 1.37263 \times 10^5$$

Amortecimento modal correspondente ao primeiro modo de vibração da torre :

$$c_p := B_n^{(0)T} \cdot C_u \cdot B_n^{(0)} = 4.104 \times 10^3$$

Rigidez modal correspondente ao primeiro modo de vibração da torre :

$$k_p := B_n^{(0)T} \cdot K_u \cdot B_n^{(0)} = 4.79351 \times 10^5$$

Razão entre as massas do absorvedor e do 1º modo da estrutura principal:

$$\mu := \frac{m_{TMD}}{m_p} = 18.651\%$$

Razão entre as frequências angulares do absorvedor e do 1º modo da estrutura principal:

$$f := \frac{1}{1 + \mu} = 0.843$$

Rigidez do absorvedor:

$$k_t := f^2 \cdot k_p \cdot \mu = 6.35067 \times 10^4$$

Massa do absorvedor:

$$m_t := \mu \cdot m_p = 2.56014 \times 10^4$$

Razão entre os amortecimento do absorvedor e o amortecimento crítico:

$$\zeta := \sqrt{\frac{3 \cdot \mu}{8 \cdot (1 + \mu)^3}} = 0.205$$

Frequência angular natural do 1º modo da estrutura principal:

$$\omega_p := \sqrt{\frac{k_p}{m_p}} = 1.869$$

Amortecimento "crítico":

$$c_c := 2 \cdot m_t \cdot \omega_p = 9.569 \times 10^4$$

Amortecimento do absorvedor:

$$c_t := \zeta \cdot c_c = 1.95797 \times 10^4$$

24) Resposta da torre

Deslocamentos em relação aos GL no referencial original u :

Intervalo de tempo na análise: $\Delta t := 0.1$

Período total de análise: $\frac{T}{\omega} := 100$

temp := for k ∈ 0.. $\frac{T}{\Delta t}$
temp_k ← k · Δt

Eixo := for k ∈ 0.. $\frac{T}{\Delta t}$
Eixo_k ← 0

```

u := for i ∈ 0.. n - 1
  ⌈   ⌈
  u(tt) ← ∑_{j=0}^{n-1} B_{i,j} · e^{-ξ_j · ω_j · tt} · ( q_{0j} · cos ω_{d_j} · tt + \frac{q_{0\_dot_j} + q_{0j} · ξ_j · ω_j}{ω_{d_j}} · sin ω_{d_j} · tt )
  for p ∈ 0.. \frac{T}{Δt}
    U_{p,i} ← u(p · Δt)
  U
  
```

$$u_{\text{rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left(u^{\langle n-1 \rangle}\right)_i^2} = 2.918$$

v := for i ∈ 0..n - 1

$$\begin{aligned}
 v(tt) \leftarrow & \sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{i,j} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left(-\omega_{d_j} \cdot q_{0_j} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt + \frac{q_{0_dot_j} + q_{0_j} \cdot \xi_j \cdot \omega_j}{\omega_{d_j}} \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \right) \right. \\
 & + \left. -\xi_j \cdot \omega_j \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left(q_{0_j} \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt + \frac{q_{0_dot_j} + q_{0_j} \cdot \xi_j \cdot \omega_j}{\omega_{d_j}} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \right) \right. \\
 & + \left. -e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left(-\sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} \cdot \omega_{d_j} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \right) \right. \\
 & + \left. \xi_j \cdot \omega_j \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{0_j,k} \cdot \omega_{F_k} \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \right. \\
 & + \left. \xi_j \cdot \omega_j \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \right) \right. \\
 & + \left. \frac{\xi_j \cdot \omega_j \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{0_j,k} \cdot \omega_{F_k}}{\omega_{d_j}} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \right. \\
 & + \left. -\sum_{k=0}^{n-1} \omega_{F_k} \cdot C_{0_j,k} \cdot \sin \omega_{F_k} \cdot tt \right. \\
 & + \left. \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{F_k} \cdot D_{0_j,k} \cdot \cos \omega_{F_k} \cdot tt \right] \\
 \text{for } p \in & 0.. \frac{T}{\Delta t} \\
 V_{p,i} \leftarrow & v(p \cdot \Delta t) \\
 V
 \end{aligned}$$

uTMD := for i ∈ 0..n

$$\begin{aligned}
 u_{TMD}(tt) \leftarrow & \sum_{j=0}^n B_{TMD,i,j} \cdot e^{-\xi_{TMD_j} \cdot \omega_{TMD_j} \cdot tt} \cdot \left(q_{0_dot.TMD_j} \cdot \cos \omega_{d.TMD_j} \cdot tt + \frac{q_{0.TMD_j}}{\omega_{d.TMD_j}} \cdot \sin \omega_{d.TMD_j} \cdot tt \right) \\
 \text{for } p \in & 0.. \frac{T}{\Delta t} \\
 U_{TMD_{p,i}} \leftarrow & u_{TMD}(p \cdot \Delta t) \\
 U_{TMD}
 \end{aligned}$$

$$u_{\text{TMD.rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left[u_{\text{TMD}}^{\langle n-1 \rangle} \right]_i^2} = 0.179$$

$$u_{\text{TMDp.rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left[u_{\text{TMD}}^{\langle n \rangle} \right]_i^2} = 0.231$$

Tempo de duração da aplicação do vetor de forças:

$$t_F := 5$$

$$u_F := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} \left[\right] \\ u_F(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,j} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left(q_{0,j} \cdot \cos \omega_{d,j} \cdot tt + \frac{q_{0_dot,j} + q_{0,j} \cdot \xi_j \cdot \omega_j}{\omega_{d,j}} \cdot \sin \omega_{d,j} \cdot tt \right) \\ \text{for } p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ U_{F,p,i} \leftarrow u_F(p \cdot \Delta t) \\ \text{for } p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ U_{F,p,i} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ U_F \end{array} \right.$$

$$u_{F.\text{total}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} \text{for } p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ u_{F.\text{total},p,i} \leftarrow u_{F,p,i} + u_{\text{est},i} \\ \text{for } p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ u_{F.\text{total},p,i} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ u_{F.\text{total}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 v_F := & \text{for } i \in 0..n-1 \\
 & \left[\begin{aligned}
 v_F(tt) \leftarrow & \sum_{j=0}^{n-1} \left[B_{i,j} \left[e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left[-\omega_{d_j} \cdot q_{0_j} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt + q_{0_dot_j} + q_{0_j} \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \right] \dots \right] \right. \\
 & + \left. \left[-\xi_j \cdot \omega_j \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left[q_{0_j} \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt + \frac{q_{0_dot_j} + q_{0_j} \cdot \xi_j \cdot \omega_j}{\omega_{d_j}} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \right] \dots \right] \right. \\
 & + \left. \left[-e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} \cdot \omega_{d_j} \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \dots \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[\xi_j \cdot \omega_j \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{0_j,k} \cdot \omega_{F_k} \right] \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \right] \right. \\
 & + \left. \left[\xi_j \cdot \omega_j \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tt} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} \right] \cdot \cos \omega_{d_j} \cdot tt \dots \right] \right. \\
 & \left. \left. + \left[\xi_j \cdot \omega_j \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{0_j,k} + \sum_{k=0}^{n-1} D_{0_j,k} \cdot \omega_{F_k} \right] \cdot \sin \omega_{d_j} \cdot tt \right] \right. \\
 & + \left. \left[-\sum_{k=0}^{n-1} \omega_{F_k} \cdot C_{0_j,k} \cdot \sin \omega_{F_k} \cdot tt \right] \dots \right. \\
 & \left. + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \omega_{F_k} \cdot D_{0_j,k} \cdot \cos \omega_{F_k} \cdot tt \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. \right] \right] \\
 & \text{for } p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\
 & \quad V_{F_{p,i}} \leftarrow v_F(p \cdot \Delta t) \\
 & \text{for } p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\
 & \quad V_{F_{p,i}} \leftarrow 0 \\
 & \left. \right] \\
 & V_F
 \end{aligned}$$

Vetor de deslocamentos no referencial generalizado q :

$$q_{tF} := \psi^T \cdot M_{diag1_2} \cdot \phi^T \cdot u_F^T \frac{\langle t_F \rangle}{\Delta t}$$

Vetor de velocidades no referencial generalizado q :

$$q_{tF_dot} := \psi^T \cdot M_{diag1_2} \cdot \phi^T \cdot v_F^T \frac{\langle t_F \rangle}{\Delta t}$$

$u_L := \text{for } i \in 0..n-1$

$$\left[\begin{array}{l}
 u_L(t) \leftarrow \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,j} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot t} \cdot \left[\frac{q_{tF_j} \cdot e^{\xi_j \cdot \omega_j \cdot t_F}}{\cos \omega_{d_j} \cdot t_F} - \frac{q_{tF_dot_j} + q_{tF_j} \cdot \omega_{d_j} \cdot \tan \omega_{d_j} \cdot t_F + \xi_j \cdot \omega_j}{e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot t_F} \cdot \omega_{d_j} \cdot \left(\frac{1}{\sin \omega_{d_j} \cdot t_F} \right)} \right] \\
 \text{for } p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\
 U_{L,p,i} \leftarrow 0 \\
 \text{for } p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\
 U_{L,p,i} \leftarrow u_L(p \cdot \Delta t) \\
 U_L
 \end{array} \right.$$

 $v_L := \text{for } i \in 0..n-1$

$$\left[\begin{array}{l}
 v_L(t) \leftarrow \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,j} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot t} \cdot \left[\frac{q_{tF_j} \cdot e^{\xi_j \cdot \omega_j \cdot t_F}}{\cos \omega_{d_j} \cdot t_F} - \frac{q_{tF_dot_j} + q_{tF_j} \cdot \omega_{d_j} \cdot \tan \omega_{d_j} \cdot t_F + \xi_j \cdot \omega_j}{e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot t_F} \cdot \omega_{d_j} \cdot \left(\frac{1}{\sin \omega_{d_j} \cdot t_F} \right)} \right] \\
 \text{for } p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\
 V_{L,p,i} \leftarrow 0 \\
 \text{for } p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\
 V_{L,p,i} \leftarrow v_L(p \cdot \Delta t) \\
 V_L
 \end{array} \right.$$

 $u_{FL} := u_F + u_L$

$$u_{FL,rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1 \right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left[u_{FL}^{(n-1)} \right]_i^2} = 0.231$$

 $u_{FL,total} := u_{F,total} + u_L$
 $v_{FL} := v_F + v_L$

$u_{L.TMD} := \text{for } i \in 0..n$

$$u_{L.TMD}(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^n B_{TMD_{i,j}} \cdot e^{-\xi_{TMD_j} \cdot \omega_{TMD_j} \cdot tt} \cdot \frac{q_{tF.TMD_j} \cdot e^{\xi_{TMD_j} \cdot \omega_{TMD_j} \cdot t_F}}{\cos \omega_{d.TMD_j} \cdot t_F}$$

for $p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t}$

$$U_{L.TMD_{p,i}} \leftarrow 0$$

for $p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t}$

$$U_{L.TMD_{p,i}} \leftarrow u_{L.TMD}(p \cdot \Delta t)$$

$U_{L.TMD}$

$v_{L.TMD} := \text{for } i \in 0..n$

$$v_{L.TMD}(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^n B_{TMD_{i,j}} \cdot e^{-\xi_{TMD_j} \cdot \omega_{TMD_j} \cdot tt} \cdot \frac{q_{tF.TMD_j} \cdot e^{\xi_{TMD_j} \cdot \omega_{TMD_j} \cdot t_F}}{\cos \omega_{d.TMD_j} \cdot t_F}$$

for $p \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t}$

$$V_{L.TMD_{p,i}} \leftarrow 0$$

for $p \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t}$

$$V_{L.TMD_{p,i}} \leftarrow v_{L.TMD}(p \cdot \Delta t)$$

$V_{L.TMD}$

$u_{FL.TMD} := u_{F.TMD} + u_{L.TMD}$

$u_{FL.total.TMD} := u_{F.total.TMD} + u_{L.TMD}$

$v_{FL.TMD} := v_{F.TMD} + v_{L.TMD}$

$$u_{FL.TMD.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F + 15}{\Delta t} + 1 \right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{t_F+15}{\Delta t}} \left[u_{FL.TMD}^{(n-1)} \right]_i^2} = 0.075$$

$$u_{FL.TMDp.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F + 15}{\Delta t} + 1 \right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{t_F+15}{\Delta t}} \left[u_{FL.TMD}^{(n)} \right]_i^2} = 0.111$$

25) Representação no espaço dos estados

Número de variáveis de ESTADO:

$$\underline{N} := (n + 1) \cdot 2 = 18$$

Número de variáveis de ENTRADA (solicitação externa):

$$\underline{m} := (n + 1) = 9$$

Número de variáveis de SAÍDA:

$$p := \frac{N}{2} = 9$$

Número de variáveis de ENTRADA (solicitação de controle):

$$r := 1$$

$$M_{u_inv} := M_{u.TMD}^{-1}$$

$$-M_{1K} := -M_{u_inv} \cdot K_{u.TMD}$$

$$-M_{1C} := -M_{u_inv} \cdot C_{u.TMD}$$

```

AA :=
  for i ∈ 0..N-1
    for j ∈ N-1
      AAi,j ← 0
    for i ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
      for j ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
        AAi,j +  $\binom{N}{2}$  ← 1 if i = j
      for i ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
        for j ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
          AAi +  $\binom{N}{2}$ ,j ← -M1Ki,j
        for i ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
          for j ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
            AAi +  $\frac{N}{2}$ ,j +  $\frac{N}{2}$  ← -M1Ci,j
  AA

```

Matriz de Posicionamento da variáveis de entrada (solicitações externas) em relação aos graus de liberdade da estrutura:

```

 $\underline{J}$  :=
  for i ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
    for j ∈ 0.. m-1
      Ji,j ← 0
    for i ∈ 0.. m-1
      Ji,i ← 1
  J

```

$$J_{\frac{N}{2}-1, m-1} \leftarrow 1$$

Matriz de Posicionamento da variáveis de entrada (solicitações de controle) em relação aos graus de liberdade da estrutura:

$$J_c := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \frac{N}{2} - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. r - 1 \\ \quad \quad J_{c,i,j} \leftarrow 0 \\ J_{c, \frac{N}{2}, r-1} \leftarrow -1 \\ J_{c, \frac{N}{2}-1, r-1} \leftarrow 1 \\ J_c \end{array} \right.$$

$$M_{1J} := M_{u_inv} \cdot J$$

$$M_{1J_c} := M_{u_inv} \cdot J_c$$

Matriz de ENTRADA (solicitações externas):

$$BB := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. N - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. m - 1 \\ \quad \quad BB_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 0.. \frac{N}{2} - 1 \\ \quad \quad \text{for } j \in 0.. m - 1 \\ \quad \quad \quad BB_{i+\frac{N}{2},j} \leftarrow M_{1J}_{i,j} \\ BB \end{array} \right.$$

Matriz de ENTRADA (solicitações de controle):

$$BB_c := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. N - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. r - 1 \\ \quad \quad BB_{c,i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 0.. \frac{N}{2} - 1 \\ \quad \quad \text{for } j \in 0.. r - 1 \\ \quad \quad \quad BB_{c, i+\frac{N}{2}, j} \leftarrow M_{1J_c}_{i,j} \\ BB_c \end{array} \right.$$

Matriz de SAÍDA:

$$CC := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..p-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N-1 \\ \quad \quad CC_{i,j} \leftarrow 1 \\ \quad CC_{p-1,p-1} \leftarrow 1 \\ \quad CC_{p-1,p-1+\frac{N}{2}} \leftarrow 1 \\ \quad CC \end{array} \right.$$

Autovalores e autovetores da matriz de ESTADO:

$$\underline{\underline{\Omega}} := \text{eigenvals}(AA)$$

$$\omega_A := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \omega_{A_i} \leftarrow \Omega_i \\ \quad \omega_A \end{array} \right.$$

$$\xi_A := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \xi_{A_i} \leftarrow \frac{-\text{Re}(\Omega_i)}{\Omega_i} \\ \quad \xi_A \end{array} \right.$$

$$PP := \text{eigenvecs}(AA)$$

Matriz de CONTROLABILIDADE (controlabilidade de estados):

$$MC := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N \cdot r - 1 \\ \quad \quad MC_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } cc \in 0..N-1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} AB \leftarrow AA^{cc} \cdot BB_c \\ \quad \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \quad \text{for } j \in 0..r-1 \\ \quad \quad \quad MC_{i,j+r \cdot cc} \leftarrow AB_{i,j} \end{array} \right. \\ \quad MC \end{array} \right.$$

$$\lambda_z := PP^{-1} \cdot AA \cdot PP$$

$$BB_z := PP^{-1} \cdot BB$$

Matriz de OBSERVABILIDADE:

```

MO :=
  for i ∈ 0..p·N - 1
    for j ∈ 0..N - 1
      MOi,j ← 0
    for cc ∈ 0..N - 1
      CA ← CC·AAcc
      for i ∈ 0..p - 1
        for j ∈ 0..N - 1
          MOi+p·cc,j ← CAi,j
      MO

```

Solução das Equações de ESTADO desacopladas:

$$\text{BzF}_1 := \text{BB}_z \cdot \text{F}_1 \cdot \text{TMD}$$

$$\text{BzF}_2 := \text{BB}_z \cdot \text{F}_2 \cdot \text{TMD}$$

$$t_0 := 0$$

Vetor de ESTADOS no instante inicial t_0 em relação ao referencial x :

```

xt0 :=
  for i ∈ 0..  $\frac{N}{2} - 1$ 
    xt0i ← u0.TMDi
  for i ∈  $\frac{N}{2} .. N - 1$ 
    xt0i ← u0_dot.TMD $i - \frac{N}{2}$ 
  xt0

```

Vetor de ESTADOS no instante inicial t_0 em relação ao referencial z :

$$z_{t0} := \text{PP}^{-1} \cdot x_{t0}$$

Vetor de constantes C_j em relação ao referencial z :

$$C_j := \left[\begin{array}{l} \text{for } j \in 0..N - 1 \\ C_j \leftarrow e^{-(\Omega_j \cdot t_0)} \cdot z_{t0_j} - \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{\omega_{\text{F.TMD}_k}^2 + (\Omega_j)^2} \right] \cdot \text{BzF}_{1_j} \cdot \omega_{\text{F.TMD}_k} \cdot \sin \omega_{\text{F.TMD}_k} \cdot t_0 \\ C \end{array} \right.$$

$$\Delta t = 0.1$$

$$T = 100$$

```

x :=
  nF ← 0
  for k ∈ 0..m-1
    nF ← nF + 1 if F1.TMDk ∨ F2.TMDk ≠ 0
  for i ∈ 0..N-1
    x(tt) ← ∑j=0N-1  $\frac{PP_{i,j} \cdot e^{\Omega_j \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \frac{e^{-\Omega_j \cdot tt}}{\omega_{F.TMD_k}^2 + (\Omega_j)^2} \right] \cdot BzF_{1j} \cdot \omega_{F.TMD_k} \cdot \sin \omega_{F.TMD_k} \cdot tt$ 
    for kk ∈ 0..  $\frac{T}{\Delta t}$ 
      Xkk,i ← x(kk·Δt)
  X
  
```

$$x_{rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{T}{\Delta t} \right\rceil} \left[\left(\frac{x^2}{\Delta t} \right)_i \right]} = 0.17884 \quad u_{TMD,rms} = 0.17884$$

$$x_{TMD,rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{T}{\Delta t} \right\rceil} \left[\left(\frac{x^2}{\Delta t} \right)_i \right]} = 0.23101 \quad u_{TMDp,rms} = 0.23101$$

```

x_F :=
  nF ← 0
  for k ∈ 0..m-1
    nF ← nF + 1 if F1.TMDk ∨ F2.TMDk ≠ 0
  for i ∈ 0..N-1
    x_F(tt) ← ∑j=0N-1  $\frac{PP_{i,j} \cdot e^{\Omega_j \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \frac{e^{-\Omega_j \cdot tt}}{\omega_{F.TMD_k}^2 + (\Omega_j)^2} \right] \cdot BzF_{1j} \cdot \omega_{F.TMD_k} \cdot \sin \omega_{F.TMD_k} \cdot tt$ 
    for kk ∈ 0..  $\frac{t_F}{\Delta t}$ 
      XF,kk,i ← x_F(kk·Δt)
    for kk ∈  $\left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1\right) \dots \frac{T}{\Delta t}$ 
      XF,kk,i ← 0
  X_F
  
```

Vetor de ESTADOS no instante em que a força cessa t_F em relação ao referencial z:

$$z_{tF} := PP^{-1} \cdot x_F^T \frac{\langle t_F \rangle}{\Delta t}$$

Vetor de constantes C_j em relação ao referencial z:

$$C_F := \begin{cases} \text{for } j \in 0..N-1 \\ C_{F,j} \leftarrow e^{-\left(\Omega_j \cdot t_F\right)} \cdot z_{tF,j} \\ C_F \end{cases}$$

$$x_L := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N-1 \\ x_L(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^{N-1} \left(PP_{i,j} \cdot C_{F,j} \cdot e^{\Omega_j \cdot tt} \right) \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ X_{L_{kk,i}} \leftarrow 0 \\ \text{for } kk \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ X_{L_{kk,i}} \leftarrow x_L(kk \cdot \Delta t) \\ X_L \end{cases}$$

$$x_{FL} := x_F + x_L$$

$$x_{FL_{rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F + 15}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{t_F + 15}{\Delta t} \left[\left(\frac{\langle N-2 \rangle}{2} \right) \right]^2}{\sum_{i=0} \left[\left(x_{FL} \right)_i \right]^2}} = 0.075 \quad u_{FL.TMD.rms} = 0.075$$

$$x_{FL.TMD.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F + 15}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \frac{\frac{t_F + 15}{\Delta t} \left[\left(\frac{\langle N-1 \rangle}{2} \right) \right]^2}{\sum_{i=0} \left[\left(x_{FL} \right)_i \right]^2}} = 0.111 \quad u_{FL.TMDp.rms} = 0.111$$

Matriz de ponderação de ESTADOS :

$$Q := \text{identity}(N)$$

$$\frac{Q_N}{2} \frac{N}{4}, \frac{N}{2} := 1 \quad \frac{Q_N}{2} \frac{N}{3}, \frac{N}{2} := 1 \quad \frac{Q_N}{2} \frac{N}{2}, \frac{N}{2} := 10^{12} \quad \frac{Q_N}{2} \frac{N}{1}, \frac{N}{2} := 10^{10}$$

$$Q_{N-4, N-4} := 1 \quad Q_{N-3, N-3} := 1 \quad Q_{N-2, N-2} := 1 \quad Q_{N-1, N-1} := 1$$

Matriz de ponderação de ENTRADA :

$$\underline{R} := \text{identity}(r) = (1) \quad R_{r-1, r-1} := 1 \quad R = (1)$$

Matriz S da equação de Riccati :

$$\underline{S} := \underline{B} \underline{B}_c^{-1} \cdot \underline{B} \underline{B}_c^T$$

Matrizes para solução da equação matricial de Riccati :

```

M :=
  for i ∈ 0..2N - 1
    for j ∈ 0..2N - 1
      Mi,j ← 0
    for i ∈ 0..N - 1
      for j ∈ 0..N - 1
        Mi,j ← AAi,j
    for i ∈ 0..N - 1
      for j ∈ 0..N - 1
        Mi,j+N ← -Si,j
    for i ∈ 0..N - 1
      for j ∈ 0..N - 1
        Mi+N,j ← -Qi,j
    for i ∈ 0..N - 1
      for j ∈ 0..N - 1
        Mi+N,j+N ← -AAj,i
  M

```

$$\underline{M}_W := \text{eigenvals}(M) \quad \underline{W}_W := \text{eigenvecs}(M) \quad \underline{J}_W := \underline{W}^{-1} \cdot M \cdot \underline{W}$$

Matrizes ordenadas para solução da equação matricial de Riccati :

```

MWW :=
  j ← 0
  k ← N
  for i ∈ 0..2N - 1
    if Re MWi > 0
      MWWj ← MWi
      j ← j + 1

```

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{l} \text{otherwise} \\ M_{WW_k} \leftarrow M_{W_i} \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \\
 M_{WW} \\
 \\
 WW := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ k \leftarrow N \\ \text{for } i \in 0..2N - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } \text{Re } M_{W_i} > 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} WW^{(j)} \leftarrow W^{(i)} \\ j \leftarrow j + 1 \end{array} \right. \\ \quad \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} WW^{(k)} \leftarrow W^{(i)} \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 WW
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

$$J_{WW} := WW^{-1} \cdot M \cdot WW$$

$$W_{12} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N - 1 \\ \quad \quad W_{12_{i,j}} \leftarrow WW_{i,j+N} \end{array} \right. \\
 W_{12}$$

$$W_{22} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N - 1 \\ \quad \quad W_{22_{i,j}} \leftarrow WW_{i+N,j+N} \end{array} \right. \\
 W_{22}$$

Matriz P da solução da equação matricial de Riccati :

$$P_R := W_{22} \cdot W_{12}^{-1} \quad \text{eigenvals}(P_R)$$

Verificação da equação matricial de Riccati :

$$P_R \cdot AA + AA^T \cdot P_R - P_R \cdot S \cdot P_R + Q$$

Os Nautovalores da matriz M_W com partes reais negativas são iguais aos autovalores da matriz $AA - S \cdot P_R$:

$$\text{eigenvals}(AA - S \cdot P_R) \qquad M_W$$

Matriz de GANHO G de controle ótimo:

$$GG := R^{-1} \cdot BB_c^T \cdot P_R \qquad GG =$$

| | | | | |
|---|------------------------|------------------------|------------------------|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | -3.865·10 ³ | -1.132·10 ⁴ | -2.112·10 ⁴ | ... |

Matriz de ESTADOS alterada pelo controle ótimo:

$$AG := AA - BB_c \cdot GG$$

$$\Omega_G := \text{eigenvals}(AG)$$

$$PP_G := \text{eigenvecs}(AG)$$

$$BB_{zG} := PP_G^{-1} \cdot BB$$

$$BzF_{1G} := BB_{zG} \cdot F_{1.TMD}$$

$$BzF_{2G} := BB_{zG} \cdot F_{2.TMD}$$

Vetor de constantes C_{G_j} em relação ao referencial z :

$$C_G := \begin{cases} \text{for } j \in 0..N-1 \\ C_{G_j} \leftarrow e^{-\Omega_{G_j} \cdot t_0} \cdot z_{t_0_j} - \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{\omega_{F.TMD_k}^2 + \Omega_{G_j}^2} \right] \cdot BzF_{1G_j} \cdot \omega_{F.TMD_k} \cdot \sin \omega_{F.TMD_k} \cdot t_0 \\ C_G \end{cases}$$

$$x_G := \begin{cases} n_F \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..m-1 \\ n_F \leftarrow n_F + 1 \text{ if } F_{1.TMD_k} \vee F_{2.TMD_k} \neq 0 \\ \text{for } i \in 0..N-1 \\ \left| \begin{aligned} x_G(tt) &\leftarrow \sum_{j=0}^{N-1} \frac{PP_{G_{1,j}} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{e^{-\Omega_{G_j} \cdot tt}}{\omega_{F.TMD_k}^2 + \Omega_{G_j}^2} \right] \cdot BzF_{1G_j} \cdot \omega_{F.TMD_k} \cdot \sin \omega_{F.TMD_k} \cdot tt \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{T}{\Delta t} \\ X_{G_{kk,i}} &\leftarrow x_G(kk \cdot \Delta t) \end{aligned} \right. \\ X_G \end{cases}$$

$$x_{G.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left[\left(\frac{\langle N-2 \rangle}{2} \right)^2 \right]_i} = 0.10828$$

$$u_{TMD.rms} = 0.17884$$

$$x_{rms} = 0.17884$$

$$x_{G.TMD.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} \left[\left(\frac{\langle N-1 \rangle}{2} \right)^2 \right]_i} = 0.4407$$

$$u_{TMDp.rms} = 0.23101$$

$$x_{TMD.rms} = 0.23101$$

$$\text{Reducao}_{\text{TMD}} := 1 - \frac{x_{\text{rms}}}{u_{\text{rms}}} = 93.87\% \quad \text{Reducao}_{\text{HIB}} := 1 - \frac{x_{\text{G,rms}}}{x_{\text{rms}}} = 39.46\%$$

$$F_c := \left| \begin{array}{l} n_F \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad n_F \leftarrow n_F + 1 \text{ if } F_{1.\text{TMD}_k} \vee F_{2.\text{TMD}_k} \neq 0 \\ \text{for } ii \in 0..r-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} F_c(tt) \leftarrow - \sum_{i=0}^{N-1} GG_{ii,i} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{PP_{G_{i,j}} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{e^{-\Omega_{G_j} \cdot tt}}{\omega_{F.\text{TMD}_k}^2 + \Omega_{G_j}^2} \right] \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{T}{\Delta t} \\ \quad F_{c,kk,ii} \leftarrow F_c(kk \cdot \Delta t) \end{array} \right. \\ F_c \end{array} \right.$$

$$F_{c,\text{rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{T}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{T}{\Delta t}} (F_c)_i^2} = 1.8941 \times 10^4$$

$$x_{G_F} := \left| \begin{array}{l} n_F \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad n_F \leftarrow n_F + 1 \text{ if } F_{1.\text{TMD}_k} \vee F_{2.\text{TMD}_k} \neq 0 \\ \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{G_F}(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^{N-1} \frac{PP_{G_{i,j}} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{e^{-\Omega_{G_j} \cdot tt}}{\omega_{F.\text{TMD}_k}^2 + \Omega_{G_j}^2} \right] \cdot BzF_{1G_j} \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ \quad X_{G_F,kk,i} \leftarrow x_{G_F}(kk \cdot \Delta t) \\ \text{for } kk \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1\right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ \quad X_{G_F,kk,i} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ X_{G_F} \end{array} \right.$$

Vetor de ESTADOS no instante em que a força cessa t_F em relação ao referencial z:

$$z_{G_tF} := PP_G^{-1} \cdot x_{G_F} \cdot \frac{\langle t_F \rangle}{\Delta t}$$

Vetor de constantes C_j em relação ao referencial z:

$$C_{G_F} := \begin{cases} \text{for } j \in 0..N-1 \\ C_{G_F_j} \leftarrow e^{-\Omega_{G_j} \cdot t_F} \cdot z_{G_tF_j} \\ C_{G_F} \end{cases}$$

$$x_{G_L} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N-1 \\ x_{G_L}(tt) \leftarrow \sum_{j=0}^{N-1} \left(PP_{G_{i,j}} \cdot C_{G_F_j} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt} \right) \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ X_{G_L_{kk,i}} \leftarrow 0 \\ \text{for } kk \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ X_{G_L_{kk,i}} \leftarrow x_{G_L}(kk \cdot \Delta t) \\ X_{G_L} \end{cases}$$

$$x_{G_FL} := x_{G_F} + x_{G_L}$$

$$x_{G_FLrms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F+15}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{t_F+15}{\Delta t}} \left[\left(\frac{\langle N-2 \rangle}{2} \right)_i \right]^2} = 0.05463$$

$$u_{FL.TMD.rms} = 0.07451$$

$$x_{FLrms} = 0.07451$$

$$u_{FL.rms} = 0.23126$$

$$x_{G_FLTMD.rms} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F+15}{\Delta t} + 1\right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{t_F+15}{\Delta t}} \left[\left(\frac{\langle N-1 \rangle}{2} \right)_i \right]^2} = 0.23337$$

$$u_{FL.TMDp.rms} = 0.11057$$

$$x_{FL.TMD.rms} = 0.11057$$

$$\text{Reducao}_{\text{TMD}.5} := 1 - \frac{x_{\text{FLrms}}}{u_{\text{FL.rms}}} = 67.78\%$$

$$\text{Reducao}_{\text{HIB}.5} := 1 - \frac{x_{\text{G_FLrms}}}{x_{\text{FLrms}}} = 26.68\%$$

$$F_{F_c} := \left| \begin{array}{l} n_F \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad n_F \leftarrow n_F + 1 \text{ if } F_{1.\text{TMD}_k} \vee F_{2.\text{TMD}_k} \neq 0 \\ \text{for } ii \in 0..r-1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} F_{F_c}(tt) \leftarrow - \sum_{i=0}^{N-1} GG_{ii,i} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \frac{PP_{G_{i,j}} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt}}{n_F} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e^{-\Omega_{G_j} \cdot tt}}{\left[\omega_{F.\text{TMD}_k}^2 + \Omega_{G_j}^2 \right]} \cdot BzF_{1G_j} \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ \quad FFc_{kk,ii} \leftarrow F_{F_c}(kk \cdot \Delta t) \\ \text{for } kk \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ \quad FFc_{kk,ii} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ FFc \end{array} \right.$$

$$F_{L_c} := \left| \begin{array}{l} \text{for } ii \in 0..r-1 \\ \quad \left[\begin{array}{l} F_{L_c}(tt) \leftarrow - \sum_{i=0}^{N-1} GG_{ii,i} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} \left(PP_{G_{i,j}} \cdot C_{G_F_j} \cdot e^{\Omega_{G_j} \cdot tt} \right) \\ \text{for } kk \in 0.. \frac{t_F}{\Delta t} \\ \quad FL_c_{kk,ii} \leftarrow 0 \\ \text{for } kk \in \left(\frac{t_F}{\Delta t} + 1 \right) .. \frac{T}{\Delta t} \\ \quad FL_c_{kk,ii} \leftarrow F_{L_c}(kk \cdot \Delta t) \end{array} \right. \\ FL_c \end{array} \right.$$

$$F_{FL_c} := (F_{F_c} + F_{L_c}) \quad F_{FL_c.\text{rms}} := \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{t_F + 15}{\Delta t} + 1 \right)} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{t_F + 15}{\Delta t}} (F_{FL_c})_i^2} = 9.019 \times 10^3$$