Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Aldryn Oscar Aparcana Orellana

Análise qualitativa de equações de evolução fracionárias e aplicações

Recife

2018

Aldryn Oscar Aparcana Orellana

Análise qualitativa de equações de evolução fracionárias e aplicações

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Claudio Cuevas Henríquez
Coorientador: Hernán Henríquez Miranda

Recife
2018

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

A66a Orellana, Aldryn Oscar Aparcana
Análise qualitativa de equações de evolução fracionárias e aplicações / Aldryn Oscar Aparcana Orellana. – 2018.
71 f.

Orientador: Claudio Cuevas Henríquez.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais fracionais. I. Henríquez, Claudio Cuevas (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-048

ALDRYN OSCAR APARCANA ORELANNA

ANÁLISE QUALITATIVA DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO FRACIONÁRIAS E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 21/02/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Rodrigo Cuevas Henrique (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa (Examinador Externo)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Herme Patrício Soto Segura (Examinador Externo)
Universidad de La Frontera - Chile

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof.Dr. Fábio Lima Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

"Deem-me um ponto de apoio e moverei a Terra"
(Arquimedes de Siracusa)

RESUMO

O Cálculo de Ordem Não inteira, tradicionalmente conhecido como cálculo fracionário é um ramo da análise matemática que estuda as possibilidades de usar potências de números reais ou potências de números complexos em operadores diferenciáis e o operador de integração. Há vários motivos para analisarmos esta questão. Um é que, deste modo o semigrupo das potências Dn na variável discreta n é vista como um semigrupo contínuo (espera-se) que os parâmetros a onde é um número real. Semigrupos contínuos pré-valentes em Matemática são de interesse teórico. Diz-se que fração é então o mesmo que o expoente, desde que precise ser um racional, mas que a expressão cálculo fracionário torne-se padrão por tradição. Utilizando ferramentas de Analise Funcional e Topologia, estudamos propiedades de limitação e periodicidade assintótica de soluções brandas para equações diferenciais fracionárias em espaços de Banach. Provamos que o conjunto das soluções brandas é compacto em certos espaços. Finalmente, aplicamos nossos resultados ao estudo de sistemas concretos que são modelados por equações de evolução fraccionaria.

Keywords: Equações diferenciais fraccionais. Equações integrais em espaços abstratos. Soluções brandas. Compacidade do conjunto de soluções. Periodicidade assintótica.

ABSTRACT

Fractional calculus is a branch of mathematical analysis that studies the several different possibilities of defining real number powers or complex number powers of the differentiation and of the integration operator and developing a calculus for such operators generalizing the classical one. This paper is devoted to the study of qualitative properties of solutions of fractional differential equations in Banach spaces. In the first part, we study the existence of L^p-bounded solutions. In the second part, we analyze the compactness of the set formed by the mild solutions of the equation. Finally, we apply our results to the study of some concrete systems which are modeled by fractional evolution equations as heat conduction problems and problems arising in the theory of viscoelastic materials. This work also deals with asymptotic periodicity and compactness for a class of composite fractional relaxation equation. Some difficulties arises when the effect of different kinds of nonhomogeneous terms are taken into consideration. To overcome these we use methods coming from regularized families and fixed point techniques, which are an important tool to study of nonlinear phenomena. We can cover a large class of nonlinearities.

Keywords: Fractional differential equations. Integral equations in abstract spaces. Mild solutions. L^p-bounded solutions. Compact sets of solutions. Asymptotic periodicity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de equações de evolução fracionárias (EEF) tem despertado um grande interesse por parte dos pesquisadores levando em conta sua ampla aplicabilidade em diversos problemas concretos da ciência e tecnologia.

A presente tese versa a respeito da análise qualitativa de equações de evolução fracionárias em espaço de Banach. Especificamente estamos exclusivamente interessados em obter propiedades de regularidade em espaços de Lebesgue, periódicidade assintótica e compacidade do conjunto de soluções para EEF. O embasamento teórico nosso provém de ferramentas de Análise Funcional juntamente com técnicas topologicas como a teoria de ponto fixo que resulta ser extremadamente eficiente na abordagem de situações não lineares.

O presente trabalho pode ser considerado como um aporte ao desenvolvimento da teoria qualitativa das EEF. O tipo de técnicas aquí desenvolvidas permitirá abrir um fértil campo de trabalho e interação com outras áreas das ciencias aplicadas. Nesta direção aplicamos nossos resultados e métodos ao estudo de sistemas concretos que permitem uma modelação através das EEF.

Esta tese está dividida em quatro capítulos. O primeiro deles intitulado “Preliminares”, possui o objétivo de tornar o texto o mais auto contido possivél. Nele algumas definições e propiedades dos objetos envolvidos são relembrados. Por exemplo, apresentamos a derivada fracionária no sentido de Caputo e as funções de Mittag-Leffler; fazemos uma revisão de diversas generalizações de funções periodicas. Revisamos também alguns elementos de teoria de operadores e teoria de puntos fixos. Mais precisamente introducimos as familias regularizadas, os operadores sectoriais e o operador solução, também enunciamos os teoremas de ponto fixo que sustentam nossos resultados de existência de soluções.

No segundo capitulo,nomeado “L^p-limitação e Compacidade” exibimos condições suficientes para a existencia de soluções L^p e estudamos a compacidade do conjunto de soluções da equação integro-diferencial fracionária

$$u'(t) \;=\; \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t,u(t)), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

com condição inicial

$$u(0) \;=\; u_0 \in X, \tag{1.2}$$

onde $1 < \alpha < 2,\ A : D(A) \subseteq X \to X$ é um operador linear de tipo setorial densamente definido sobre um espaço Banach X, f é uma função dada. Os resultados desta seção estão contidos no artigo (APARCANA et al., 2017).

Mencionamos que a convolução da equação anterior é conhecida como a integral de Riemann-Liouville. Usualmente condições a respeito do espectro do operador A junto com ideas da teoria de operadores e o principio de Duhamel nos permitem fazer um tratamento sistemático das soluções brandas. Notamos que se A é sectorial com ângulo θ satisfazendo $0 < \theta < \pi(1 - \alpha/2)$,então o problema anterior é bem posto.

Varias propiedades das soluções tem sido estudadas sob diferentes pontos de vista como são regularidade maximal (PRÜSS, 2013),métodos numéricos (CUESTA; LUBICH; PALENCIA, 2006), positividad e contratividade (CUESTA; PALENCIA, 2003), comportamento assintótico (CUESTA, 2007).

No capítulo 3 chamado “Equações de relaxamento fracionário composto” asseguramos a existência de soluções em L^p tanto da equação

$$u'(t) - A\ {}^cD_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t),\ t > 0 \tag{1.3}$$

como da sua versão semilinear associada

$$u'(t) - A\ {}^cD_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t, u(t)),\ t > 0 \tag{1.4}$$

ambas equações são consideradas com a condição inicial

$$u(0) = x \tag{1.5}$$

No caso semilinear analizamos a propiedade de compacidade do conjunto de soluções.

Sabemos que o estudo de periodicidade das soluções é um importante tópico de pesquisa na teoria qualitativa de equações de evolução. Note que sistemas reais usualmente apresentam variações internas ou são submetidas a perturbações externas. Nos podemos assumir que estas variações são somente aproximadamente periodicas num sentido amplio. Recentemente na literatura tem aparecido varios conceitos novos para representar a ideia de função aproximadamente periodica (ver (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008; PIERRI; ROLNIK, 2013; CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014)).

Neste capítulo faremos estudos de periodicidade assintótico com particular ênfase nas funções assintoticamente ω-periodicas.

Os resultados deste capitulo estão contidos nos artigos (APARCANA et al., 2017; APARCANA; CUEVAS; SOTO, 2018)

Finalmente no capítulo 4 intitulado “Aplicaciones e métodos” entregamos uma variedade de exemplos alguns deles com especial significado na literatura o que ajuda a construir uma intuição ao respeito dos resultados e métodos utilizados. Especificamente manejamos modelos fracionarios oscilatorios, também tratamos equações que aparecem no estudo da viscoelasticidade e condução de calor.

2 PRELIMINARES

Apresentaremos neste capítulo notações, definições e fatos relevantes que serão utilizados ao longo deste trabalho. Pretendemos com isso tornara apresentação o mais auto-suficiente possível. Entretanto, por motivo de brevidade não faremos detalhes das demonstrações de alguns resultados aqui apresentados.

No texto, $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ denotam espaços de Banach. Com o intuito de tornar o texto mais límpido, em alguns momentos usaremos apenas $\|\cdot\|$ para denotar a norma $\|\cdot\|_X$ ou a norma $\|\cdot\|_Y$. Pedimos que o leitor fique atento para que não haja confusão. Para $r > 0$, a notação $B_r(X)$ representa a bola fechada $\{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$.

A notação $\mathcal{B}(X,Y)$ representa o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y munido com a norma $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y;\ x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}$, e abreviamos para $\mathcal{B}(X)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$ quando $X = Y$. Seja A um operador linear fechado definido em $D(A) \subseteq X$ onde $D(A)$ denota o domínio de A, e consideramos $D(A)$ como um espaço de Banach munido com a norma do gráfico. Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente de A, e por $\sigma(A)$ o espectro de A (isto é, o complemento de $\rho(A)$ no plano complexo). Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo (possivelmente ilimitado), $C_b(I;X)$ denota o espaço de Banach formado pelas funções contínuas e limitadas de I em X equipado com a norma do supremo. Definimos $C_0([0,\infty);X)$ como o subespaço de todas as funções f em $C_b([0,\infty);X)$ tais que $\lim_{t\to\infty} \|f(t)\|_X = 0$. Além disso, se $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, escrevemos $C_b(I)$ e $C_0(\mathbb{R}^+)$ ao invés de $C_b(I,X)$ e $C_0(\mathbb{R}^+;X)$, respectivamente. $C^k(\mathbb{R}^+;X)$ denota o espaço das funções k-vezes contínuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}^+$ em X. Denotamos o espaço das funções localmente integráveis por L^1_{loc}. $L^p([0,\infty);X)$ denota o espaço usual das funções p-integráveis no sentido de Bochner.

Neste capítulo iremos expor os principais resultados que vamos usar no decorrer deste trabalho, e no caso de informações mais específicas complementaremos no respectivo capítulo.

2.1 Derivada de Caputo e Função de Mittag-Leffler

Para mas detalhes de esta seção o leitor pode procurar (GORENFLO et al., 2014).

Definição 2.1.1. Dizemos que Ha é um *caminho de Hankel*, se existem $r > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ tais que, $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, em que os caminhos Ha_i são dados por

$$Ha_1 := \{te^{i\theta}; t \in [r, \infty)\};$$

$$Ha_2 := \{re^{it}; t \in [-\theta, \theta)\};$$

$$Ha_3 := \{te^{-i\theta}; t \in [r, \infty)\}.$$

Também escrevemos $Ha = Ha(r, \theta)$ para mostrar da dependência do ângulo e do raio (ver Figura 1).

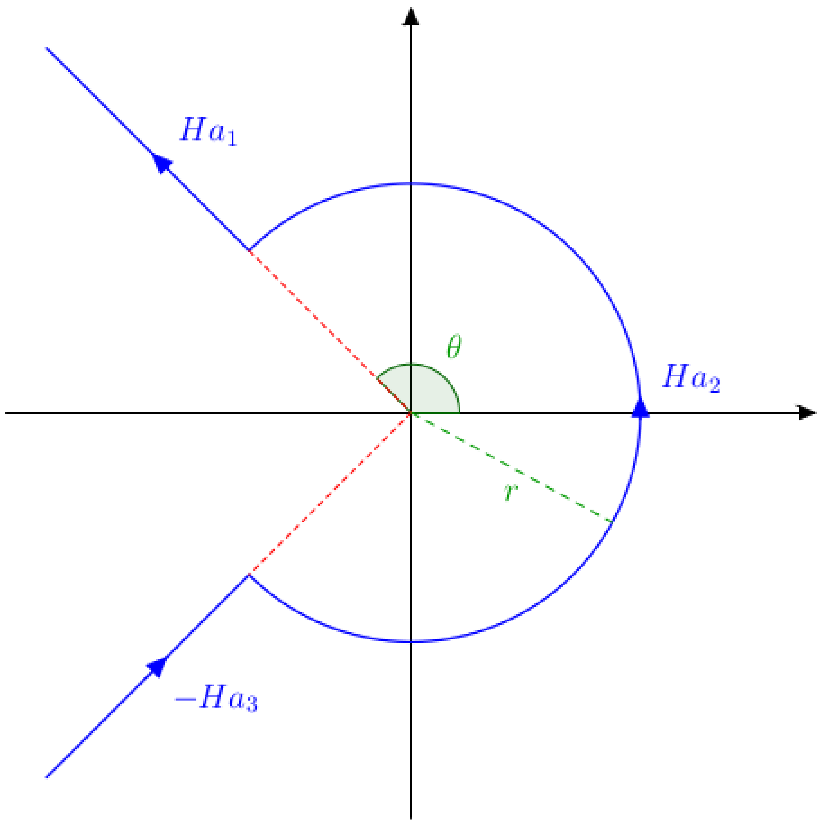

Figura 1: Caminho de Hankel $Ha = Ha(r, \theta)$.

Definição 2.1.2. A função Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ é definida por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} \frac{e^{\mu}\mu^{\alpha-\beta}}{\mu^{\alpha} - z} d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \ \alpha, \beta > 0, \ z \in \mathbb{C},$$

onde Ha é a curva de Hankel, isto é, um contorno com inicio e termino em $-\infty$ e que rodeia o disco $|\mu| \leq |z|^{1/\alpha}$ no sentido anti-horário.

2.1.1 Algumas relações de recurrencia

a) $E_{\alpha,\beta}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z),$

b) $E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \dfrac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z).$

2.1.2 Diferenciação e Integração

a) $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^m \left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)\right] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta+m}(z^\alpha)$,

b) $\displaystyle\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\alpha t^\alpha)t^{\beta-1}dt = z^\beta \beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha)$, $\beta > 0$.

2.1.3 Transformada de Laplace da função Mittag-Leffler

$$\mathcal{L}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right)(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda},$$

com $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda s^{-\alpha}| < 1$.

Definição 2.1.3. A derivada fracionaria de Caputo de ordem $\alpha > 0$ para f é definida por:

$${}^cD_t^\alpha f(t) := \int_0^t g_{m-\alpha}(t-s)f^{(m)}(s)ds,\ t > 0,$$

onde $m = \lceil \alpha \rceil$, $g_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$, $t > 0$, $\beta > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma.

2.2 Teoremas da integral de Bochner

Teorema 2.2.1. *(SIMON, 1986) Seja $F \subset L^p(0,T;X)$. F é relativamente compacto em $L^p(0,T;X)$ para $1 \leq p < \infty$ ou em $C(0,T;X)$ para $p = \infty$ se e somente se*

(i) $\left\{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt\ :\ f \in F\right\}$ *é relativamente compacto em X.*

(ii) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;X)} \longrightarrow 0$ *quando $h \to 0$ uniformemente $f \in F$, onde $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$ para $h > 0$.*

Se f é definida em $[0,T]$, então a função traslação $\tau_h f$ é definida em $[-h, T-h]$.

Teorema 2.2.2. *(DIESTEL; UHL, 1977, Corolário 8) Seja f Bochner integrável respeito de μ. Então*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu \in \overline{co}(f(E)),$$

onde $E \in \Sigma$ com $\mu(E) > 0$.

Teorema 2.2.3. *(ARENDT et al., 2001, Teorema 1.1.8) Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e (f_n) uma sequência de funções Bochner integrável de valores X em Ω. Se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ é μ-mensurável e se existe uma função Lebesgue integrável de valores reais g em Ω com $\|f_n\| \leq g$ q.t.p., então f é Bochner integrável e $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Omega$. De fato, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$.*

2.3 Funções periódicas e generalizações

O propósito desta seção é relembrar as definições e enunciar algumas das propriedades básicas da teoria de periodicidade que serão essenciais no decorrer deste trabalho. Começaremos definindo o espaço das funções periódicas.

Definição 2.3.1. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ é chamada *periódica*, se existe uma constante $\omega > 0$ tal que

$$f(t+\omega) = f(t), \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que ω é o período de f e dizemos que f é uma função ω periódica.

Denotamos por $P_\omega(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ que são ω-periódicas. Não é difícil verificar que $P_\omega(X)$ é um subespaço fechado de $C_b(\mathbb{R}; X)$ e que $P_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach.

A seguir, daremos o conceito de funções quase periódicas. Esse conceito é devido à Bohr (1933).

Definição 2.3.2. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ é chamada *quase periódica*, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $l(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo intervalo de comprimento $l(\varepsilon)$ contém um número τ com a propriedade

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. O número τ é chamado de ε-período de f. O conjunto de todas as funções quase periódicas $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ será denotado por $AP(X)$.

Observamos que $AP(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0,\infty); X)$. Além disso, $AP(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach (ver (CORDUNEANU, 2009, Seção 3.5)). É fácil observar que toda função periódica é quase periódica, porém a recíproca não é verdadeira (ver (CORDUNEANU, 2009, Observação 3.10)). A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela regra

$$f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t),$$

é uma função quase periódica que não é periódica (ver Figura 2).

Em geral, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ definida por

$$f(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t}, \; a, b \in X, a \neq 0, b \neq 0,$$

é uma função quase periódica que não é periódica.

Introduziremos agora a noção de quase periodicidade assintótica. Este conceito que generaliza as funções quase periódicas é devido M. Fréchet (ver (FRÉCHET, 1941a;

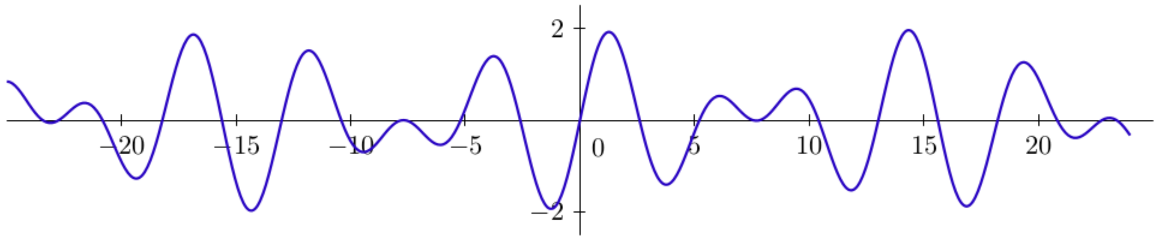

Figura 2: Gráfico da função $f(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2}t)$.

FRÉCHET, 1941b)). Denotaremos por $C_0([0, \infty); X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $h : [0, \infty) \longrightarrow X$ tais que $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$. É um fato bem conhecido que $C_0([0, \infty); X)$ equipado com a norma do supremo é um espaço de Banach.

Definição 2.3.3. Uma função contínua $f : [0, \infty) \longrightarrow X$ é chamada *assintoticamente quase periódica* se admite uma decomposição $f = g + h$, em que $g \in AP(X)$ e $h \in C_0([0, \infty); X)$. Representaremos por $AAP(X)$ o conjunto das funções assintoticamente quase periódicas.

Em (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.1) é mostrado que

$$AAP(X) = AP(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

Além disso, por (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.1), $(AAP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Um fato conhecido é que as funções assintoticamente quase periódicas são limitadas e uniformemente contínuas (ver (ZAIDMAN, 1985, Proposição 5.1.2)).

De maneira análoga, para $\omega > 0$, o espaço das funções *assintoticamente ω-periódicas*[1] é definido por

$$AP_\omega(X) := P_\omega(X) \oplus C_0([0, \infty), X).$$

O espaço $AP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach. Além disso, $AP_\omega(X)$ é um subespaço próprio de $AAP(X)$.

2.3.1 Funções S-assintoticamente ω-periódicas

O conceito de função S-assintoticamente ω-periódica com valores num espaço de Banach X é recente. Nos últimos anos, alguns autores têm estudado as propriedades e as aplicações dessas funções (ver (DE ANDRADE; CUEVAS, 2010; CAICEDO et al., 2012; CUEVAS; DE SOUZA, 2009; CUEVAS; DE SOUZA, 2010; HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008)). O seguinte conceito foi introduzido por Henríquez, Pierri e Táboas (2008).

Definição 2.3.4. Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}^+; X)$ é chamada S-assintoticamente ω-periódica se $\lim_{t\to\infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$. Nesse caso, dizemos que ω é um período assintótico de f.

[1] Funções assintoticamente periódicas apareceram pela primeira vez em De Bruijn (1949).

Usamos a notação $SAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b(\mathbb{R}^+; X)$ formado por todas as funções S-assintoticamente ω-periódica. Observamos que o espaço $SAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. É claro que toda função assintoticamente ω-periódica é uma função S-assintoticamente ω-periódica. No entanto, a recíproca não é verdadeira (HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008, Exemplos 3.1 e 3.2). Uma diferença importante entre esses dois tipos de funções é que a imagem de uma função assintoticamente ω-periódica é um conjunto relativamente compacto, enquanto a imagem de uma função S-assintoticamente ω-periódica é apenas um conjunto limitado.

Definição 2.3.5. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow Y$ é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X, se para todo subconjunto limitado K de X, o conjunto $\{f(t,x) : t \geq 0, x \in K\}$ for limitado, e para cada $\varepsilon > 0$ existir $T(K,\varepsilon) \geq 0$ tal que, $\|f(t,x) - f(t+\omega,x)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq T(K,\varepsilon)$ e todo $x \in K$.

Definição 2.3.6. Uma função contínua $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow Y$ é chamada assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X se para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subseteq X$, existirem constantes $T = T_{\varepsilon,K}$ e $\delta = \delta_{\varepsilon,K} > 0$ tais que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq T$ e $x, y \in K$ com $\|x - y\| < \delta$.

Lema 2.3.1. *(HENRÍQUEZ; PIERRI; TÁBOAS, 2008) Seja $f : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow Y$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X. Se $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica, então a função de Nemytskii $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow Y$ definida por $F(t) = f(t, u(t))$ é S-assintoticamente ω-periódica.*

2.3.2 Funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas

Começamos com alguns conceitos e notações.

Definição 2.3.7. (PIERRI; ROLNIK, 2013) Uma função $f \in C_b([0,\infty); X)$ é chamada pseudo S-assintoticamente periódica, se existir $\omega > 0$ tal que,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h \|f(s+\omega) - f(s)\|_X ds = 0. \tag{2.3.1}$$

Nesse caso, dizemos que f é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

Usamos a notação $PSAP_\omega(X)$ para representar o subespaço de $C_b([0,\infty); X)$ formado por todas as funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas. Observamos que $PSAP_\omega(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach. Além disso, em (PIERRI; ROLNIK, 2013, Proposição 2.1) foi mostrado que

$$AP_\omega(X) \hookrightarrow SAP_\omega(X) \hookrightarrow PSAP_\omega(X), \quad \text{com} \quad PSAP_\omega(X) \neq SAP_\omega(X).$$

Observação 2.3.1. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Observamos que $u \in PSAP_\omega(X)$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon = \{t \in [0, \infty) : \|u(t+\omega) - u(t)\|_X \geq \varepsilon\}$ é um conjunto ergódico[2].

Definição 2.3.8. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \longrightarrow Y$ é uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X, se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sup_{x \in K} \|f(s+\omega, x) - f(s, x)\|_Y ds = 0. \tag{2.3.2}$$

Observação 2.3.2. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Para $\varepsilon > 0$ e $x \in K$, definimos $C_{\varepsilon,x} = \{t \in [0, \infty) : ||f(t+\omega, x) - f(t, x)||_Y \geq \varepsilon\}$. Então (2.3.2) é equivalente à

$$\frac{\lambda\left(\bigcup_{x \in K} C_{\varepsilon,x} \bigcap [0, t]\right)}{t} \longrightarrow 0, \text{ quando } t \longrightarrow \infty,$$

onde λ é a medida de Lebesgue.

Definição 2.3.9. (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Uma função contínua $f : [0, \infty) \times X \longrightarrow Y$ é chamada assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X, se para todo subconjunto limitado $K \subseteq X$, existir $T_K > 0$ de forma que o conjunto $\{f(t, x) : t \geq T_K, x \in K\}$ seja limitado.

É bem conhecido que o estudo da composição de duas funções com propriedades especiais é básico e importante para investigações de comportamento de soluções. Começamos com o seguinte resultado na teoria de funções pseudo S-assintoticamente ω-periódicas.

Lema 2.3.2. *(CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Seja $f : [0, \infty) \times X \longrightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X, assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X. Se $u : [0, \infty) \longrightarrow X$ for uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Corolário 2.3.1. *(CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Seja $f : [0, \infty) \times X \longrightarrow Y$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de X, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X que satisfaz a seguinte condição:*

[2] Um conjunto mensurável $C \subseteq [0, \infty)$ é um conjunto ergódico se $\frac{\lambda(C \cap [0,t])}{t} \to 0$, quando $t \to \infty$, onde λ denota a medida de Lebesgue. (ZHANG, 2003)

($\mathcal{C}_{loc}$) *Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e quaisquer $x, y \in B_\sigma(X)$ temos*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_Y \leq L_f(\sigma)\|x - y\|_X,$$

onde $L_f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Se $u : [0,\infty) \longrightarrow X$ é uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

Lema 2.3.3. *(CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014) Seja $f : [0,\infty) \times X \longrightarrow Y$ uma função uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X e que satisfaz a condição:*

(C_1) *Para quaisquer $u, v \in C_b([0,\infty); X)$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds = 0$ implica que $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|_Y ds = 0$.*

Se $u : [0,\infty) \longrightarrow X$ for uma função pseudo S-assintoticamente ω-periódica, então a aplicação de Nemytskii $v(t) = f(t, u(t))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.

2.4 Familias regularizadas

Nesta subseção, analisamos a noção de famílias (a, k)-regularizadas e enunciamos os principais resultados que existem na literatura.

Definição 2.4.1. (PRÜSS, 2013, Definição 3.3) Seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ é de crescimento subexponencial e $k \in \mathbb{N}$. $a(t)$ é chamado k-regular se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|\lambda^n \widehat{a}^{(n)}(\lambda)| \leq c|\widehat{a}(\lambda)|,$$

para todo $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $0 \leq n \leq k$.

Definição 2.4.2. (LIZAMA, 2000) Seja X um espaço de Banach, $k \in C(\mathbb{R}^+)$, $k \neq 0$ e seja a em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, $a \neq 0$. Suponha que A é um operador linear fechado com dominio $D(A)$. Uma familia fortemente continua $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é chamada (a, k)-familia resolvente regularizada em X (ou simplemente (a, k)-familia regularizada) tendo A como a gerador se as seguintes propriedades se verificam.

(RF1) $R(0) = k(0)I$;

(RF2) $R(t)x \in D(A)$ e $R(t)Ax = AR(t)x$ para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;

(RF3) $R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)x ds$, $t \geq 0$, $x \in D(A)$.

Observação 2.4.1. (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013) Seja A um operador linear fechado e $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores exponencialmente limitada e fortemente contínua em $\mathcal{B}(X)$ de modo que a transformada de Laplace $\widehat{R}(\lambda)$ exista para $\lambda > \omega$. $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ é uma (a,k)-familia regularizada com gerador A se e somente se para cada $\lambda > \omega$, $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ existir em $\mathcal{B}(X)$ e

$$\frac{\hat{k}(\lambda)}{\hat{a}(\lambda)}\Big(\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}I - A\Big)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}R(s)xds,\ x \in X.$$

Observação 2.4.2. Quando $k(t) \equiv 1$ e a é arbitrario, então $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ corresponde a familia resolvente. Em particular, quando $k(t) \equiv 1$ e $a(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ com $0 < \alpha \leq 2$, ela é a α grupo resolvente estudada em (BAZHLEKOVA, 2001), e corresponde ao operador solução para equações de evolução fracionarias. Se $\alpha > 0$, $k(t) = \dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ e $a(t) = 1$, então $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ corresponde ao α semigrupo integrável. Em geral se k é arbitrário e $a(t) = 1$ então $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo k-regularizado para o problema abstrato de Cauchy de primeira ordem, introduzido em (CIORANESCU; LUMER, 1995) (see (LIZAMA; PRADO, 2009)). Em (KOSTIC, 2009) o autor introduziu a classe de familias (a,k)-regularizada C-resolvente, os resultados obtidos abrangem assuntos como regularidade, perturbação, propriedades espectrales e princípios de subordinação. Os resultados foram aplicados no estudo de equações de difusão fracionárias .

2.5 Operadores setoriais e operador solução

Definição 2.5.1. Um operador fechado linear e densamente definido A é dito setorial do tipo μ de ângulo θ se existem $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $M > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tal que o resolvente existe fora do setor.

$$\mu + S_\theta := \{\mu + \lambda\ :\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\arg(-\lambda)| < \theta\} \tag{2.5.3}$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|},\quad \lambda \notin \mu + S_\theta. \tag{2.5.4}$$

Observação 2.5.1. Seja a equação integro-diferencial linear da ordem fracionária.

$$u'(t) \;=\; \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}Au(s)ds + f(t),\quad t \geq 0, \tag{2.5.5}$$

com condição inicial

$$u(0) \;=\; u_0 \in X, \tag{2.5.6}$$

donde A um operador setorial do tipo μ de ângulo θ. Nós assumimos que $f : [0,\infty) \to X$ é uma função localmente integrável. A fórmula de variação de constantes (LIZAMA, 2011) permite-nos escrever a solução de (2.5.5)-(2.5.6) como $u = u_{sp} + u_{hom}$ com

$$u_{sp}(t) = \int_0^t E_\alpha(t-s)f(s)ds \tag{2.5.7}$$

e

$$u_{hom}(t) = E_\alpha(t)u_0, \tag{2.5.8}$$

onde a família de operadores $E_\alpha(t)$, é definida por

$$E_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{t\lambda}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda, \quad t \geq 0, \tag{2.5.9}$$

sendo γ um caminho adequado que se encontra fora do setor $\mu + S_\theta$. Observe que a potência λ^α é definida como $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\arg(\lambda)}$ com $-\pi < \arg(\lambda) < \pi$. O operador $E_\alpha(\cdot)$ é dito o operador solução (veja (CUESTA, 2007)).

O seguinte resultado foi estabelecido por Cuesta (2007, Teorema 1).

Teorema 2.5.1. *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador setorial satisfazendo as condições* (2.5.3) *e* (2.5.4) *para algum $M > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < \pi\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Então existe $C > 0$ dependiente só de θ e α, talque*

$$\|E_\alpha(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \begin{cases} CM(1+\mu t^\alpha)e^{\mu^{\frac{1}{\alpha}}t}, & \mu \geq 0, \\ \dfrac{CM}{1+|\mu|t^\alpha}, & \mu < 0. \end{cases}$$

Observação 2.5.2. Veja que para $\mu < 0$ o operador solução $E_\alpha(\cdot)$ decai como $t^{-\alpha}$ quando $t \to \infty$, embora não tenha ordem exponencial pois a integral em (2.5.9) não admite prolongação analítica no intervalo $(-\infty, 0]$ (veja (CUESTA, 2007)).

2.6 Viscoelasticidade linear

Uma rica fonte para equações de Volterra é a teoria de materiais viscoelásticos. Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos dessa teoria. Para mais detalhes nós indicamos a referência (PRÜSS, 2013, Seção I.5).

Considere um *corpo* tridimensional representado pelo conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Pontos em Ω (isto é, pontos materiais) serão denotados por $x, y, \cdots$. Associada a esse corpo, existe uma função estritamente positiva $\rho_0 \in C(\overline{\Omega})$ chamada *densidade de massa*. Forças atuantes deformarão o corpo, e o ponto material x será deslocado para uma nova direção $x + u(t,x)$ no tempo t; o campo vetorial $u(t,x)$ é chamado *deslocamento*. A *velocidade* do ponto material $x \in \Omega$ no tempo t é dada por $v(t,x) = \dot{u}(t,x)$, em que $\dot{u}$ representa a derivada parcial de u em relação a t. A *tensão* linearizada no corpo devido a uma deformação é definida por:

$$\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}(\nabla u(t,x) + (\nabla u(t,x))^T), \ t \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega,$$

isto é, $\varepsilon(t,x)$ é a parte simétrica de ∇u.

Uma certa história de tensão do corpo causa *estresse* de uma maneira especifica, expressando as propriedades do material do qual o corpo é feito. O tensor de estresse será denotado por $S(t,x)$; ambos, $\varepsilon(t,x)$ e $S(t,x)$, são simétricos. Seja $h(t,x)$ uma força externa ao corpo, por exemplo a *gravidade*. Então o *equilíbrio de força* no corpo torna-se

$$\rho_0(x)\ddot{u}(t,x) = \mathrm{div}S(t,x) + \rho_0(x)h(t,x),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega.$$

Um material é chamado *incompressível* se não existe mudança de volume no corpo Ω durante uma deformação, isto é, se

$$\det(I + \nabla u(t,x)) = 1,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{2.6.10}$$

é satisfeita; em outro caso, o material é chamado *compressível*. Para a teoria linear, (2.6.10) pode ser simplificada para

$$\mathrm{div}u(t,x) = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega.$$

Para tornar o sistema completo, temos que adicionar uma equação que relacione o estresse $S(t,x)$ com u e suas derivadas, tais relações são chamadas *leis constitutivas* ou *relações de estresse-tensão*. Se o material é *isotrópico* (suas propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas as direções), as leis constitutivas são

$$S(t,x) = 2\int_0^\infty da(\tau,x)\dot{\varepsilon}(t-\tau,x) + \frac{1}{3}\mathcal{I}\int_0^\infty (3db(\tau,x) - 2da(\tau,x))\mathrm{tr}\dot{\varepsilon}(t-\tau,x),$$
$$\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dk(\tau,x)S(t-\tau,x) + \frac{1}{3}\mathcal{I}\int_0^\infty \left(\frac{1}{3}dl(\tau,x) - \frac{1}{2}dk(\tau,x)\right)\mathrm{tr}S(t-\tau,x),$$

em que $\mathcal{I}$ é o tensor identidade. Os núcleos b e l descrevem o comportamento do material sobre compressão, enquanto a e k determinam sua resposta ao cisalhamento. Portanto, db é chamado *módulo de compressão* e da é chamado *módulo de cisalhamento*. Em geral, a e b são funções independentes, entretanto, se $b(t,x) = \beta a(t,x)$ para alguma constante $\beta > 0$, então o material é chamado *sícrono*. Um material é chamado *homogêneo* se $\rho_0,\ \mathcal{A},\ \mathcal{K}$ não dependem de $x \in \Omega$, em que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$ são expressões que aparecem nas leis constitutivas (PRÜSS, 2013, Seção I.5).

Se o material for incompreensível, isotrópico e homogêneo (com $\rho_0(x) = \rho_0 = 1$, para simplificar), então

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t,x) &= \int_0^\infty da(\tau)\Delta\dot{u}(t-\tau,x) - \nabla p(t,x) + h(t,x), \\ \nabla\cdot u(t,x) &= 0,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\Omega, \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

onde p é a *pressão hidrostática*. Estas equações devem ser suplementadas pelas condições de fronteira.

Materiais lineares isotrópicos e homogêneos são descritos por meio de duas funções materiais, o módulo de cisalhamento da e o módulo de compressão db. Se o material é além disso síncrono ou incompressível, apenas o módulo de cisalhamento é necessário. Vamos mencionar brevemente alguns modelos padrão bem conhecidos:

(i) Sólido de Hookean

$$a(t) = \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu}, \ t > 0.$$

(ii) Fluido Newtoniano

$$a(t) = \nu, \quad k(t) = \frac{t}{\nu}, \ t > 0.$$

(iii) Sólido de Kelvin-Voigt

$$a(t) = \nu + \mu t, \quad k(t) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu t/\nu}), \ t > 0.$$

(iv) Fluido de Maxwell

$$a(t) = \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \ t > 0.$$

(v) Sólido Poynting-Thompson

$$a(t) = \mu_0 t + \nu(1 - e^{-\mu t/\nu}), \quad k(t) = \mu_0^{-1}\left[1 - \mu(\mu_0 + \mu)^{-1} e^{-\frac{\mu\mu_0 t}{\nu(\mu+\mu_0)}}\right] \quad t > 0.$$

(vi) Material Tipo-Potência

$$a(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad k(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \ t > 0, \ \text{em que} \ \ \alpha \in (0,1).$$

Por fim, se considerarmos um fluido viscoelástico incompressível isotrópico e homogêneo que ocupa uma região Ω, o campo velocidade $v(t,x)$ do fluido é governado por (2.6.11), daí o problema de condição inicial correspondente torna-se

$$\begin{cases} v_t(t,x) = \displaystyle\int_0^t da(\tau)\Delta v(t-\tau,x) - \nabla p(t,x) + h(t,x), \ t > 0, \ x \in \Omega, \\ \nabla \cdot v(t,x) = 0, \ t > 0, \ x \in \Omega, \\ v(t,x) = 0, \ t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ v(0,x) = v_0(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.6.12}$$

utilizando as condições de contorno antiderrapantes; aqui $p(t,x)$ denota a pressão hidrostática no fluido e o núcleo $da(t)$ é o módulo de cisalhamento. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde a um fluido newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$, e (2.6.12) torna-se então o bem conhecido sistema linear de Navier-Stokes.

2.7 Métodos topológicos

Para conveniência do leitor, nesta seção, enunciaremos diversos resultados utilizados no texto.

Iniciaremos enunciando o Princípio de Contração de Banach, a demonstração desse resultado pode ser encontrada em (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema 1.1.1).

Teorema 2.7.1 (Princípio de Contração de Banach)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \to M$ uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

Corolário 2.7.1 (Princípio dos Iterados)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico completo não-vazio e seja $F : M \to M$ um mapa tal que, para algum $n \in \mathbb{N}$, F^n é uma contração. Então F possui um único ponto fixo.*

A demonstração dos próximos resultados podem ser encontrada em (GRANAS; DUGUNDJI, 2003, Teorema 6.3.2 e Teorema 6.5.4) respectivamente.

Teorema 2.7.2 (Teorema do ponto fixo de Schauder)**.** *Seja C um subconjunto convexo (não necessariamente fechado) de um espaço linear normado E. Então um mapa compacto $F : C \to C$ possui ao menos um ponto fixo.*

Teorema 2.7.3 (Leray-Schauder)**.** *Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X, e assuma que $0 \in C$. Considere $F : C \to C$ uma função completamente contínua, e seja*

$$\varepsilon(F) = \{x \in C; x = \lambda F(x) \text{ para algum } 0 < \lambda < 1\}.$$

Então $\varepsilon(F)$ é ilimitado ou F possui um ponto fixo.

3 L^p-LIMITAÇÃO E COMPACIDADE

O objetivo principal deste capitulo é analisar a existencia de soluções limitadas e algumas propiedades de compacidade do conjunto formados pelas soluções brandas da seguinte equação integro diferencial linear da ordem fracionária.

$$u'(t) \quad = \quad \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \tag{3.0.1}$$

e sua versão semilinear

$$u'(t) \quad = \quad \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \tag{3.0.2}$$

ambas equações com a condição inicial

$$u(0) \quad = \quad u_0 \in X, \tag{3.0.3}$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido de tipo setorial em um espaço de Banach complexo X e f é uma função com valores em X. Em particular, se assumimos que A é um operador setorial com ângulo θ satisfazendo $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, então os problemas (3.0.1)-(3.0.3) e (3.0.2)-(3.0.3) estão bem postos (veja (CUESTA, 2007)).

3.1 Soluções sob condições de Lipschitz

Na primeira subseção, estudamos a existência de soluções L^p limitadas para a equação linear (3.0.1) Com condição inicial (3.0.3). Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial em X satisfazendo as condições (2.5.3)) e (2.5.4), para algum $\mu < 0$ e $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, $1 < \alpha < 2$. Na próximas demonstrações C e M denotan as constantes introduzidas no Teorema 2.5.1.

3.1.1 O caso linear

Começamos com o seguinte resultado que é novo na literatura sobre equações fracionárias.

Teorema 3.1.1. *Seja $f \in L^p(0,\infty;X)$. Então problema (3.0.1)-(3.0.3) tem uma única solução branda $u \in L^{p'}(0,\infty;X)$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, e as seguintes estimativas se cumprem:*

$$\|u_{sp}\|_{L^{p'}(0,\infty;X)} \quad \leq \quad CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(0,\infty;X)}, \tag{3.1.4}$$

$$\|u_{hom}\|_{L^{p'}(0,\infty;X)} \quad \leq \quad CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{1}{p'}} \|u_0\|_X. \tag{3.1.5}$$

Em particular, se $p = +\infty$ nos temos

$$\|u_{sp}\|_{L^\infty(0,\infty;X)} \leq \frac{CM|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\|f\|_{L^\infty}, \tag{3.1.6}$$

$$\|u_{hom}\|_{L^\infty(0,\infty;X)} \leq CM\|u_0\|_X, \tag{3.1.7}$$

onde μ, C e M são as constantes do Teorema 2.5.1.

Demonstração. Usamos aquí as idéias contidas no argumento da prova em Beyn e Lorenz (2006, Teorema A.2). Dados p e q exponentes conjugados, $t \in \mathbb{R}^+$, aplicamos a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\|u_{sp}(t)\|_X^{p'} &\leq (CM)^{p'}\Big(\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s)\|_X ds\Big)^{p'}\\
&\leq (CM)^{p'}\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p'}{q}}\Big(\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s)\|_X^p ds\Big)^{\frac{p'}{p}}\\
&\leq (CM)^{p'}\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p'}{q}}\|f\|_{L^p(0,\infty;X)}^{p'-p}\Big(\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s)\|_X^p ds\Big).
\end{aligned}$$

Por integração da expressão acima em $[0,\infty)$ nós obtemos:

$$\|u_{sp}\|_{L^{p'}}^{p'} \leq (CM)^{p'}(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})})^{\frac{p'}{q}+1}\|f\|_{L^p}^{p'}. \tag{3.1.8}$$

De (3.1.8), nós obtemos (3.1.6). Por outro lado, nós calculamos a estimativa de $\|u_{hom}\|_{L^{p'}}$ como segue

$$\int_0^\infty \|u_{hom}(t)\|_X^{p'}dt \leq (CM)^{p'}\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\|u_0\|_X^{p'}.$$

Isso completa a prova do Teorema 3.1.1. □

Observação 3.1.1. Resultados semelhantes aos indicados no teorema anterior foram obtidos em (BEYN; LORENZ, 2006) e (CARDOSO; CUEVAS, 2009), para alguns problemas de valores fronteira em $\mathbb{R}^n$ e para equações em diferença de tipo Volterra, respectivamente.

3.1.2 O caso semi-linear

Nesta subseção, consideramos a questão da existência e unicidade de soluções brandas para o problema (3.0.2) com condição inicial (3.0.3).

Definição 3.1.1. (CUEVAS; DE SOUZA, 2009) Uma função contínua $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ satisfazendo a equação integral

$$u(t) = E_\alpha(t)u_0 + \int_0^t E_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds,\ t \geq 0 \tag{3.1.9}$$

onde $u_0 \in X$, é chamada de solução branda para o problema (3.0.2)-(3.0.3).

Nós temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.2. *Seja $f : [0,\infty)\times X \to X$ uma função contínua com $f(\cdot,0) \in L^p(0,\infty;X)$. e que f satisfaz a condição Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_X \leq L_f\|x-y\|_X,\ \forall\ t \in \mathbb{R}^+,\ \forall\ x,y \in X. \tag{3.1.10}$$

Se $CML_f\left(\dfrac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\right) < 1$, então existe uma única solução branda $u(\cdot)$ para o problema (3.0.2)-(3.0.3) *tal que $u(\cdot) \in L^p(0,\infty;X)$.*

Demonstração. Nós definimos o operador Λ no espaço $L^p(0,\infty;X)$, pela expressão

$$\Lambda u(t) = E_\alpha(t)u_0 + \int_0^t E_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds,\ t \geq 0. \tag{3.1.11}$$

Primeiro, podemos ver o que

$$\|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{1}{p}}\|u_0\|_X. \tag{3.1.12}$$

Segundo, seja u em $L^p(0,\infty;X)$, e sejam p e q expoentes conjugados.

Temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot-s)f(s,u(s))ds\Big\|^p_{L^p(0,\infty;X)}\\
&\quad\leq (2CM)^p\int_0^\infty\Big(\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s,u(s))-f(s,0)\|_X ds\Big)^p dt\\
&\qquad+(2CM)^p\int_0^\infty\Big(\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s,0)\|_X ds\Big)^p dt\\
&\quad\leq (2CML_f)^p\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|u(s)\|_X^p dsdt\\
&\qquad+(2CM)^p\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s,0)\|_X^p dsdt\\
&\quad\leq (2CML_f)^p\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\Big(\int_s^\infty \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\Big)dt\|u(s)\|_X^p ds\\
&\qquad+(2CM)^p\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\Big(\int_s^\infty \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}|dt\Big)\|f(s,0)\|_X^p ds\\
&\quad\leq (2CM)^p\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{p}{q}+1}(L_f^p\|u\|^p_{L^p(0,\infty;X)}+\|f(\cdot,0)\|^p_{L^p(0,\infty;X)}),
\end{aligned}$$

e finalmente temos

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot-s)f(s,u(s))ds\Big\|_{L^p(0,\infty;X)} &\leq 2CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)(L_f\|u\|_{L^p(0,\infty;X)}\\
&\quad+\|f(\cdot,0)\|_{L^p(0,\infty;X)}).
\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

Tendo em conta (3.1.12) e (3.1.13), temos a seguinte limitação L^p para Λu:

$$\|\Lambda u\| \leq CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{1}{p}}\|u_0\|_X + 2CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)(L_f\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^p(0,\infty;X)}).$$

Assim, Λ está bem definido. Seja u e v duas funções em $L^p(0,\infty;X)$, temos que:

$$\begin{aligned}\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^p(0,\infty;X)} &\leq CML_f\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^\infty\int_0^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|u(s)-v(s)\|_X^p dsdt\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &= CML_f\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)\|u-v\|_{L^p(0,\infty;X)},\end{aligned}$$

como $CML_f\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big) < 1$, Λ é uma contração, logo existe uma solução branda $u(\cdot)$ de (3.0.2)-(3.0.3) de modo que $u(\cdot) \in L^p(0,\infty;X)$. Isto completa a prova do Teorema 3.1.2. $\square$

Observação 3.1.2. Seja $f : [0,\infty) \times X \longrightarrow X$ uma função contínua que satisfaça a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_X \leq L_f(t)\|x-y\|_X,\ \forall\ t \in \mathbb{R}^+,\ \forall\ x,y \in X, \tag{3.1.14}$$

onde $L_f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é localmente integrável. Nós definimos:

$$W_f(t) = CM\int_0^t \frac{L_f(s)}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}ds.$$

Onde C e M são as constantes dadas no Teorema 3.1.1. Suponha que as seguintes condições são validas

(W_1) $\underset{t\geqslant 0}{Sup}\, W_f(t) < 1,$

(W_2) $f(\cdot,0) \in L^\infty(0,\infty;X).$

Então o problema (3.0.2)-(3.0.3) admite uma e apenas uma solução branda limitada.

Demonstração. Definimos o operador Λ no espaço $L^\infty(0,\infty;X)$ por (3.1.11). Primeiro, podemos ver que

$$\begin{aligned}\|\Lambda u(t)\|_X &\leq \|E_\alpha(t)u_0\|_X + \Big\|\int_0^t E_\alpha(t-s)\left[f(s,u(s)) - f(s,0)\right]ds\Big\|_X + \Big\|\int_0^t E_\alpha(t-s)f(s,0)\Big\|_X\\ &\leq CM\|u_0\|_X + \int_0^t \frac{CML_f(s)}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|u(s)\|_X ds + \int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s,0)\|_X ds\\ &\leq CM\|u_0\|_X + W_f(t)\|u\|_\infty + CM\left(\frac{|\mu|^{\frac{1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\right)\|f(\cdot,0)\|_\infty.\end{aligned}$$

Tomando o supremo temos

$$\|\Lambda u\|_{L^\infty(0,\infty;X)} \leq CM\|u_0\|_X + W_f(t)\|u\|_{L^\infty(0,\infty;X)} + CM\left(\frac{|\mu|^{\frac{1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\right)\|f(\cdot,0)\|_{L^\infty(0,\infty;X)}.$$

Portanto, Λ está bem definido. Em segundo lugar, seja u e v duas funções em $L^\infty(0,\infty;X)$; podemos inferir que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X &\leq \int_0^t \|E_\alpha(t-s)\left[f(s,u(s)) - f(s,v(t))\right]\|_X ds \\
&\leq \int_0^t \frac{CML_f(s)}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|u(s)-v(t)\|_X ds \\
&\leq W_f(t)\|u-v\|_\infty,
\end{aligned}$$

tomando o supremo temos

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^\infty(0,\infty;X)} \leq \left(\sup_{t\geq 0} W_f(t)\right)\|u-v\|_{L^\infty(0,\infty;X)},$$

Da condição (W_1) concluímos que Λ é uma contração. □

Observação 3.1.3. Observamos que condições análogas às feitas na observação anterior foram previamente consideradas na literatura (veja (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014)).

Inicialmente lembramos a seguinte propriedade da convolução.

Lema 3.1.1. *Seja $r : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função contínua que se anula no infinito. Então*

$$\int_0^t \frac{r(s)}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} ds \to 0,\ t \to \infty.$$

Proposição 3.1.1. *Seja $f : [0,\infty)\times X \to X$ uma função que satisfaz a condição Lipschitz* (3.1.10)*. Assuma que $f(\cdot,0)$ se anula no infinito. Se $CML_f\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big) < 1$, então existe uma única solução branda $u(\cdot)$ de* (3.0.2)-(3.0.3) *tal que $u(\cdot) \in C_0(0,\infty;X)$.*

Demonstração. Definimos o operador Λ sobre o espaço $C_0(0,\infty;X)$ por (3.1.11). Desde

$$\|f(t,u(t))\| \leq \|f(t,0)\| + L_f\|u(t)\| \to 0,\ t \to \infty,$$

para todo $u \in C_0(0,\infty;X)$, segue do Lema 3.1.1 que $\Lambda : C_0(0,\infty;X) \to C_0(0,\infty;X)$. Além disso, para $u,v \in C_0(0,\infty;X)$ temos

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{C_0(0,\infty;X)} \leq CML_f\Big(\frac{CM|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)\|u-v\|_{C_0(0,\infty;X)}$$

o que implica que Λ é uma contração. □

Também podemos estabelecer uma generalização do Teorema 3.1.2 para incluir funções f que satisfacem condições Lipschitz do tipo (3.1.14), onde L_f é limitada em (a,∞).

Teorema 3.1.3. *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $f : [0,\infty) \times X \to X$ *uma função contínua tal que* $f(\cdot,0) \in L^p(0,\infty;X)$ *e que satisfaz a condição Lipschitz* (3.1.14). *Assuma que existe* $a > 0$ *tal que* $L_f : [0,a] \to \mathbb{R}^+$ *é uma função* $p-$*integrável e* $L_f : [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *é uma função limitada. Se* $CM \sup\limits_{t \geq a} L_f(t) \Big(\dfrac{CM|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \Big) < 1$, *então existe uma solução branda* $u(\cdot)$ *de* (3.0.2)-(3.0.3) *tal que* $u(\cdot) \in L^p(0,\infty;X)$.

Demonstração. Nós definimos o espaço de Banach $Z_a = C([0,a];X)$ equipado com a norma da convergencia uniforme. Definimos o operador Λ no espaço Z_a pela expressão (3.1.11). Mostramos agora que o operador $\Lambda : Z_a \to Z_a$ tem um único ponto fixo. Seja u e v em Z_a, notemos que

$$\begin{aligned} \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\| &\leq CM \int_0^t L_f(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\ &\leq CM \int_0^t L_f(s)ds \max_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\|. \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2 u(t) - \Lambda^2 v(t)\| &\leq (CM)^2 \int_0^t L_f(s) \int_0^s L(\tau)\|u(\tau) - v(\tau)\|d\tau ds \\ &\leq \frac{(CM)^2}{2} \Big(\int_0^t L(s)ds \Big)^2 \max_{0 \leq s \leq t} \|u(s) - v(s)\|. \end{aligned}$$

Daqui resulta que

$$\|\Lambda^2 u - \Lambda^2 v\|_{Z_a} \leq \frac{1}{2}(CM\|L\|_{L^1[0,a]})^2 \|u - v\|_{Z_a},$$

e argumentando indutivamente podemos afirmar que

$$\|\Lambda^n u - \Lambda^n v\|_{Z_a} \leq \frac{1}{n!}(CM\|L\|_{L^1[0,a]})^n \|u - v\|_{Z_a}.$$

Isto implica que Λ^n é uma contração para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente e conseqüentemente Λ possui um único ponto fixo $\tilde{u} \in Z_a$.

Seja $h : [a,\infty) \to X$ dado por

$$h(t) = E_\alpha(t)u_0 + \int_0^a E_\alpha(t-s)f(s,\tilde{u}(s))ds. \tag{3.1.15}$$

É claro que $h \in L^p(a,\infty;X)$. Definimos o mapa

$$\Phi v(t) = h(t) + \int_a^t E_\alpha(t-s)f(s,v(s))ds, \;\; t \geq a,$$

para $v \in L^p(a,\infty;X)$. Decorre (3.1.15) que $\Phi : L^p(a,\infty;X) \to L^p(a,\infty;X)$. Além disso, procedendo como na prova do Teorema 3.1.2 onde obtemos que Φ tem um ponto fixo único $v \in L^p(a,\infty;X)$. Portanto, para $t = a$ temos

$$v(a) = h(a) = \tilde{u}(a).$$

Definimos

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & 0 \le t \le a, \\ v(t), & t > a, \end{cases}$$

obtemos isso $u(\cdot) \in L^p(0,\infty;X)$ é a solução única de (3.0.2)-(3.0.3). □

Em seguida, exibiremos um exemplo concreto de uma função f satisfazendo as condições do Teorema 3.1.3.

Exemplo 3.1.1. Seja $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(t,x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{|x|+1}{\sqrt{t}}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. É fácil ver que f é contínuo, e que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L(t)|x-y|,\ t \ge 0,\ x,y \in \mathbb{R},$$

onde

$$L(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Portanto, $L(\cdot) \in L^1(0,a)$ para $a > 0$, $L(\cdot)$ é no limitada sobre $[0,a)$ e $L(\cdot)$ é limitada em $[a,\infty)$.

3.2 Resultados de compacidade

Nosso interesse nesta seção é estabelecer a compacidade para o conjunto formado pelo soluções brandas de (3.0.2) definidas em um intervalo I. Nos consideramos os casos $I = [0,a]$, $0 < a < \infty$, e $I = [0,\infty)$. Com condição inicial (3.0.3). Para tratar esse problema de valor inicial, assumimos que as seguintes condições gerais são satisfeita

$(\mathcal{C}_{car})$. A função $f : I \times X \longrightarrow X$ satisfaz as seguintes condição de Carathéodory:

(i) $f(t,\cdot) : X \longrightarrow X$ é contínuo, q.t.p. $t \in I$.

(ii) Para cada $x \in X$, a função $f(\cdot,x) : I \longrightarrow X$ é fortemente mensurável.

Consideramos inicialmente o caso $I = [0,a]$, $0 < a < \infty$, e assumimos que $\mu \ge 0$.

Teorema 3.2.1. *Suponha que a condição ($\mathcal{C}_{car}$) e as seguintes premissas sejam válidas.*

(T_1) *Para cada $R > 0$ existe uma função integrable positiva $\gamma_R \in L^1(I)$ de tal modo que*

$$\sup\{\|f(t,x)\|_X : \|x\|_X \leq R\} \leq \gamma_R(t), \ \ a.e.\ t \in I.$$

(T_2) *Para cada $0 \leq s \leq a$ e $R > 0$ o conjunto $\{f(s,x) : \|x\|_X \leq R\}$ é relativamente compacto.*

(T_3) $\liminf\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^a \Theta(a-s)\gamma_R(s)ds < 1$, *onde $\Theta(s)$, $s \in I$, é dado por*

$$\Theta(s) = CM(1+\mu s^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}s}.$$

e C, M, μ sao constantes introducidas no Teorema 2.5.1. Então existe uma solução branda do problema (3.0.2)-(3.0.3) *em I. Além disso, se a seguinte condição é satisfeita:*

(T_4) $\limsup_{R\to\infty} \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^a \Theta(a-s)\gamma_R(s)ds < 1$, *então o conjunto $\mathcal{S}$ formado por as soluções brandas de* (3.0.2)-(3.0.3) *é compacto em $C(I;X)$.*

Demonstração. Definimos o operador $\Lambda : C(I;X) \longrightarrow C(I;X)$ por (3.1.11). A partir desse momento iremos dividir a demonstração em dois passos.

i. Claramente, Λ é bem definido e pelo Teorema da Convergência Dominada implica Λ é contínua.

i1. Afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda : B_\rho(C(I;X)) \longrightarrow B_\rho(C(I;X))$, onde $B_\rho(C(I;X))$ são as bolas fechadas em $C(I;X)$ de raio ρ e centradas na origem. Para isso, assumiremos que tal afirmação é falsa, então para cada $\rho > 0$ podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C(I;X))$ tal que $\|\Lambda u^\rho\|_{C(I;X)} > \rho$. Como a função $\Theta(\cdot)$ não é decrescente, segue-se que

$$1 \leq \frac{CM(1+\mu a^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}a}\|u_0\|_X}{\rho} + \frac{CM}{\rho}\int_0^a (1+\mu(a-s)^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}(a-s)}\gamma_\rho(s)ds. \qquad (3.2.16)$$

O que implica

$$1 \leq \liminf_{\rho\to\infty} \frac{CM}{\rho}\int_0^a (1+\mu(a-s)^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}(a-s)}\gamma_\rho(s)ds,$$

e esta desigualdade contradiz a hipótese (T_3).

i2. A seguir, iremos mostrar que o mapa Λ é completamente contínuo.

Pelo teorema de Arzelà-Ascoli é suficiente mostrarmos que para cada $R \geq 0$ o conjunto $\{\Lambda_0(u)(t) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é relativamente compacto em X para todo $0 \leq t \leq a$ e o conjunto $\{\Lambda_0(u) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é equicontínuo, onde

$$\Lambda_0(u)(t) = \Lambda(u)(t) - E_\alpha(t)u_0.$$

Usando o fato que $E_\alpha(\cdot)$ é fortemente contínuo junto com a condição (T_2) podemos afirmar que $\{\Lambda_0(u) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é um conjunto relativamente compacto (HENRÍQUEZ; POBLETE; POZO, 2014, Corolario 2.10).Além disso, da decomposição

$$\begin{aligned}\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t) &= \int_0^t (E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\, f(t-s,u(t-s))ds \\ &\quad +\int_t^{t+h} E_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))ds \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

nos inferimos que $\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t) \to 0$ onde $h \to 0$ uniformemente para $u \in B_R(C(I;X))$. De fato, podemos assumir que $t > 0$, e podemos tomar $0 < \delta < t$ bastante pequeno. A partir de (3.2.17) e o fato de que E_α é um operador contínuo em $(0,\infty)$ segue isso

$$\begin{aligned}\|\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t)\| &\leq \int_0^\delta \|E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|f(t-s,u(t-s))\|_X ds \\ &\quad + \int_\delta^t \|E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|f(t-s,u(t-s))\|_X ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|E_\alpha(t+h-s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|f(s,u(s))\|_X ds \\ &\leq \int_0^\delta \|E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s)\|_{\mathcal{B}(X)}\gamma_R(t-s)ds \\ &\quad + \sup_{\delta\leq s\leq t} \|E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s)\|_{\mathcal{B}(X)} \int_\delta^t \gamma_R(t-s)ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|E_\alpha(t+h-s)\|_{\mathcal{B}(X)}\gamma_R(s)ds\end{aligned}$$

que estabelece a nossa afirmação. Como consequência, inferimos que $\{\Lambda_0(u) : \|u\|_{C(I;X)} \leq R\}$ é equicontínuo.

(i_3) Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, inferimos que Λ tem um ponto fixo em $B_\rho(C(I;X))$.

(ii) Por outro lado, a continuidade de Λ implica que o conjunto $\mathcal{S}$ das soluções brandas de problema (3.0.2)-(3.0.3) é fechado. Assumindo agora que a condição (T_4) é válida, temos que o conjunto $\mathcal{S}$ é limitado. De facto, se assumimos que $\mathcal{S}$ não é limitado, então há uma sequência de funções $u_k \in \mathcal{S}$ tal que $R_k = \|u_k\|_{C(I;X)} \geq k$. Então teríamos

$$\|u_k(t)\|_X \leq CM(1+\mu a^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}a}\|u_0\|_X + CM\int_0^a (1+\mu(a-s)^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}(a-s)}\gamma_{R_k}(s)ds,$$

o que implicaria

$$1 \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{CM}{R_k}\int_0^a (1+\mu(a-s)^\alpha)e^{\mu^{1/\alpha}(a-s)}\gamma_{R_k}(s)ds,$$

que por (T_4) é um absurdo. Finalmente, utilizando que Λ é completamente contínuo, temos que $\mathcal{S}$ é compacto. □

Observação 3.2.1. Resultados semelhantes foram obtidos em (HENRÍQUEZ; CASTILLO, 2005, Teorema 2.2) e (CARDOSO; CUEVAS, 2009, Teorema 1.4), para o caso do problema abstrato de Cauchy de segunda ordem e para o caso de equações diferenciais funcionais com retardo respectivamente.

Vamos agora estudar a existência de soluções brandas do problema (3.0.2)-(3.0.3) no intervalo $I = [0, \infty)$. Neste caso, assumimos que $\mu < 0$. Inicialmente estudamos a existência de soluções brandas L^p.

Lema 3.2.1. *Sejam $F : [0, a] \to \mathcal{B}(X)$ um mapa avaliado pelo operador fortemente contínuo e $1 \leq p < \infty$. Suponha que as condições $(\mathcal{C}_{car})$ e (T_2) são válidas. Seja $R > 0$. suponha que $g_u \in L^1([0, a]; X)$ para todo $u \in L^p([0, a]; X)$ com $g_u(t) = f(t, u(t))$ e que a condição seguinte é satisfeita. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_J \|f(s, u(s))\| ds \leq \varepsilon$$

para todo $J \subseteq [0, a]$, $m(J) < \delta_\varepsilon$, e todo $u \in L^p([0, a]; X)$ com $\|u\|_{L^p([0,a];X)} \leq R$.

Então $\{\int_0^a F(a - s) f(s, u(s)) ds : \|u\|_{L^p([0,a];X)} \leq R\}$ é um conjunto relativamente compacto em X.

Demonstração. Suponha que $\|F(t)\| \leq N$ para todo $0 \leq t \leq a$. Seja $R > 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_J \|f(s, u(s))\| ds \leq \frac{\varepsilon}{N}$ para todo o conjunto mensurável $J \subseteq [0, a]$ com $m(J) < \delta$ e $\|u\|_{L^p([0,a];X)} \leq R$. Seja $J_n = \{s \in [0, a] : \|u(s)\| \geq nR\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Então $m(J_n) \leq 1/n^p$. Por isso, para n grande o suficiente, podemos assumir que $1/n^p < \delta$ e

$$\int_0^a F(a - s) f(s, u(s)) ds = \int_{J_n} F(a - s) f(s, u(s)) ds + \int_{[0,a] \setminus J_n} F(a - s) f(s, u(s)) ds.$$

Argumentando como na prova do Teorema 3.2.1 (i_2), podemos supor que

$$\int_{[0,a] \setminus J_n} F(a - s) f(s, u(s)) ds \in K,$$

onde K é um conjunto compacto. $\|\int_{J_n} F(a - s) f(s, u(s)) ds\| \leq \varepsilon$ da decomposição acima, inferimos que $\{\int_0^a F(a - s) f(s, u(s)) ds : \|u\|_{L^p([0,a];X)} \leq R\}$ é um conjunto relativamente compacto. □

Teorema 3.2.2. *Seja $1 < p < \infty$ e q o exponente conjugado de p. Assuma que a condição $(\mathcal{C}_{car})$ e (T_2) são válidos e além disso que as seguintes condições são satisfeitas.*

(T_5) *Existem funções $\gamma \in L^q(0, \infty)$ e $\eta \in L^1(0, \infty)$*

$$\|f(t, x)\|_X \leq \gamma(t) \|x\|_X + \eta(t), \ t \geq 0, \ x \in X.$$

(T_6) $CM \left(\dfrac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}} \pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \right)^{\frac{1}{p}} \|\gamma\|_{L^q(0,\infty)} < 1.$

Então existe uma solução branda $u \in L^p(0,\infty;X)$ *de* (3.0.2)-(3.0.3), *e o conjunto* $\mathcal{S}$ *formado pelas soluções brandas de* (3.0.2)-(3.0.3) *é compacto em* $L^p(0,\infty;X)$.

Demonstração. Nos definimos o mapa Λ sobre $L^p(0,\infty;X)$ por (3.1.11) e g_u a função dada por $g_u(t) = f(t,u(t))$ para $u \in L^p(0,\infty;X)$. Como

$$\|f(t,u(t))\|_X \leq \gamma(t)\|u(t)\|_X + \eta(t),\ t \geq 0, \tag{3.2.18}$$

a função g_u, pertence a $L^1(0,\infty;X)$, e aplicando (3.1.4) nos obtenemos que $\Lambda(u) \in L^p(0,\infty;X)$. Além disso, se $(u_n)_n$ é uma sequência em $L^p(0,\infty;X)$ que converge para u, então, usando o teorema de convergência dominado de Lebesgue (ver Teorema 2.2.3), nos inferimos que $g_{u_n} \to g_u$ para a norma em $L^1(0,\infty;X)$, e aplicando novamente (3.1.4), obtemos que $\Lambda(u_n) \to \Lambda(u)$ as $n \to \infty$, o que implica que $\Lambda : L^p(0,\infty;X) \to L^p(0,\infty;X)$ é contínuo.

Agora mostramos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda : B_\rho(L^p(0,\infty;X)) \to B_\rho(L^p(0,\infty;X))$. Para isso, assumiremos que tal afirmação é falsa, então para cada $R > 0$ podemos escolher uma função u^R com $\|u^R\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq R$ e $\|\Lambda(u^R)\|_{L^p(0,\infty;X)} > R$. A partir desta afirmação segue-se que

$$\begin{aligned}
R &< \|E_\alpha(\cdot)u_0 + \int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot - s)f(s,u^R(s))ds\|_{L^p(0,\infty;X)} \\
&\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} + \|\int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot - s)f(s,u^R(s))ds\|_{L^p(0,\infty;X)} \\
&\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} + k\|g_{u^R}\|_{L^1(0,\infty;X)} \\
&\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} + k\Big[\|\gamma\|_{L^q(0,\infty)}\|u^R\|_{L^p(0,\infty;X)} + \|\eta\|_{L^1(0,\infty)}\Big] \\
&\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} + k\Big[\|\gamma\|_{L^q(0,\infty)}R + \|\eta\|_{L^1(0,\infty)}\Big],
\end{aligned}$$

onde $k = CM\Big(\frac{|\mu|^{\frac{-1}{\alpha}}\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}\Big)^{\frac{1}{p}}$. Portanto

$$1 \leq \frac{\|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{L^p(0,\infty;X)} + k\|\eta\|_{L^1(0,\infty)}}{R} + k\|\gamma\|_{L^q(0,\infty)},\ R > 0,$$

o que contradiz a condição **(T6)**. Para provar que Λ é um mapa completamente contínuo, aplicamos a caracterização de subconjuntos compactos de $L^p(0,\infty;X)$ estabelecido em (SIMON, 1986).

(a) Neste passo, mostramos que $\int_a^\infty \|\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt \to 0$ quando $a \to \infty$, uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq R$. Nós sabemos que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_0(u)(t)\|_X &\leq \int_0^t \|E_\alpha(t-s)\|_{\mathcal{B}(X)}\|f(s,u(s))\|_X ds \\
&\leq CM(\|\gamma\|_{L^q(0,\infty)}\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} + \|\eta\|_{L^1(0,\infty)}).
\end{aligned}$$

A seguir, denotamos por k_1 constante dada pelo lado direito da expressão acima. Seja

$$N_a(s) = CM\int_a^\infty \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}dt,$$

para $s \leq a$. É claro que $N_a(s) \to 0$, como $a \to \infty$ e $N_a(s) \leq CMC_{\alpha,\mu}$. Por isso,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \|\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt &\leq k_1^{p-1} \int_a^\infty \| \int_0^t E_\alpha(t-s) f(s,u(s)) ds\|_X dt\\ &\leq k_1^{p-1} \int_a^\infty \int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} \|f(s,u(s))\|_X ds dt\\ &= k_1^{p-1} \int_0^a N_a(s) \|f(s,u(s))\|_X ds + k_1^{p-1} \int_a^\infty \int_s^\infty \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} \|f(s,u(s))\|_X dt ds.\end{aligned}$$

Denotamos por I_i, $i = 1, 2$, cada um dos termos no lado direito da última expressão. Vamos estimar cada termo separadamente.

$$\begin{aligned} I_1 &= k_1^{p-1} \int_0^a N_a(s) \|f(s,u(s))\|_X ds\\ &\leq k_1^{p-1} \int_0^a N_a(s)[\gamma(s)\|u(s)\|_X + \eta(s)] ds\\ &\leq k_1^{p-1} \Big(\int_0^a N_a(s)^q \gamma(s)^q ds\Big)^{1/q} R + k_1^{p-1} \int_0^a N_a(s)\eta(s) ds\\ &\leq k_1^{p-1} \Big(\int_0^\infty \widetilde{N}_a(s)^q \gamma(s)^q ds\Big)^{1/q} R + k_1^{p-1} \int_0^\infty \widetilde{N}_a(s)\eta(s) ds,\end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{N}_a(s) = \begin{cases} N_a(s) & 0 \leq s \leq a,\\ 0, & s > a.\end{cases}$$

Desde $\widetilde{N}_a(s) \to 0$ quando $a \to \infty$, usando o teorema de convergência dominada de Lebesgue (ver Teorema 2.2.3), obtemos $I_1 \to 0$ como $a \to \infty$.

De maneira semelhante,

$$\begin{aligned} I_2 &= k_1^{p-1} \int_a^\infty \int_s^\infty \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} \|f(s,u(s))\|_X dt ds\\ &\leq k_1^{p-1} \Big(\int_0^\infty \frac{CM}{1+|\mu| t^\alpha} dt\Big) \Big[\Big(\int_a^\infty \gamma(s)^q ds\Big)^{1/q} R + \int_a^\infty \eta(s) ds\Big]\\ &\to 0,\ a \to \infty.\end{aligned}$$

(b) Nesta etapa, mostramos que $\displaystyle\int_0^\infty \|\Lambda_0(u)(t+h) - \Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt \to 0$ quando $h \to 0$, uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \leq R$, para todo $R > 0$. Argumentando como na prova do Teorema 3.2.1 (i_2), somos levados a uma estimativa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))f(t-s,u(t-s))\|_X ds \\
&\qquad\qquad \le \int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|_{\mathcal{B}(X)}\|f(t-s,u(t-s))\|_X ds \\
&\qquad\qquad \le \int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|_{\mathcal{B}(X)}[\gamma(t-s)\|u(t-s)\|_X+\eta(t-s)]ds \\
&\qquad\qquad \le \int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|_{\mathcal{B}(X)}\gamma(t-s)\|u(t-s)\|_X ds \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|_{\mathcal{B}(X)}\eta(t-s)ds \\
&\qquad\qquad \le R\left(\int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|^q_{\mathcal{B}(X)}\gamma(t-s)^q ds\right)^{1/q} \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_0^t \|(E_\alpha(s+h)-E_\alpha(s))\|_{\mathcal{B}(X)}\eta(t-s)ds \\
&\qquad\qquad \to 0, \quad h\to 0,
\end{aligned}$$

uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R$. Além disso, procedendo de forma similar, é claro que

$$\int_t^{t+h} \|E_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))\|_X ds \to 0,\ h\to 0,$$

uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R$. Para $a>0$ fixo, usando a decomposição (3.2.17) e estimativas anteriores, inferimos que

$$\int_0^a \|\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt \to 0,\ h\to 0,$$

uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R$. Combinando esse resultado com a propriedade estabelecida em (a), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt &= \int_0^a \|\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt \\
&\quad + \int_a^\infty \|\Lambda_0(u)(t+h)-\Lambda_0(u)(t)\|_X^p dt \\
&\to 0,\ h\to 0,
\end{aligned}$$

uniformemente para $\|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R$.

(c) Nesta etapa, mostramos que, para cada um $R \ge 0$ o conjunto $\{\int_0^a \Lambda_0(u)(t)dt : \|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R\}$ é relativamente compacto em X.

Nós definimos o operador $F(t)$ por $F(t)x = \int_0^t E_\alpha(s)xds$ for $t \ge 0$. Então

$$\int_0^a \Lambda_0(u)(t)dt = \int_0^a\int_0^t E_\alpha(t-s)f(s,u(s))dsdt = \int_0^a F(a-s)f(s,u(s))ds.$$

Por outro lado, como$\gamma \in L^q(0,\infty)$ para $1<q<\infty$ e de (3.2.18) s segue que $\{g_u : \|u\|_{L^p(0,\infty;X)} \le R\}$ é equi-integrable. Portanto, a asserção segue do Lema 3.2.1.

Combininando (a), (b) e (c) e usando (SIMON, 1986), nós inferimos que Λ é completamente contínuo. Completamos a prova argumentando como na prova do Teorema 3.2.1. Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, o conjunto $\mathcal{S}$ consistindo em soluções brandas de problema (3.0.2)-(3.0.3) em $L^p(0,\infty;X)$ não está vazio. Usando novamente a condição **(T6)**, concluímos que $\mathcal{S}$ é um conjunto fechado limitado. Como $\mathcal{S} = \Lambda(\mathcal{S})$ obtemos que $\mathcal{S}$ é conjunto compacto. $\square$

Vamos agora estudar a existência de soluções brandas no espaço $C_0(0,\infty;X)$.

Teorema 3.2.3. *Assumiendo que f é contínua e a condição (T_1), com $\gamma_R(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e (T_2) são satisfeitas. Assuma além a seguinte condição:*

$$(T_7)\ \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R} \max_{t\geq 0} \int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\gamma_R(s)ds < 1.$$

Então a solução branda $u \in C_0(0,\infty;X)$ de (3.0.2)-(3.0.3)*. Além disso, se a seguinte condição for cumprida:*

$$(T_8)\ \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \max_{t\geq 0} \int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\gamma_R(s)ds < 1,$$

então o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (3.0.2)-(3.0.3) *é compacto em $C_0(0,\infty;X)$.*

Demonstração. Nós definimos o operador Λ no espaço $C_0(0,\infty;X)$ por (3.1.11). Seja $u \in C_0(0,\infty;X)$ tal que $\|u(t)\|_X \leq R$ para $t \geq 0$. Desde

$$\|f(t,u(t))\|_X \leq \gamma_R(t) \to 0,\ t\to\infty,$$

segue do Lema 3.1.1 que $\Lambda(u) \in C_0(0,\infty;X)$.

Vamos agora $(u_n)_n$ uma seqüencia em $C_0(0,\infty;X)$ que converge para $u \in C_0(0,\infty;X)$. Então existe $R > 0$ tal que $\|u_n(t)\|_X, \|u(t)\|_X \leq R$ para todo $t \geq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Fixamos $a > 0$. Logo

$$\begin{aligned}\|\int_a^t E_\alpha(t-s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))]ds\|_X &\leq 2\int_a^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\gamma_R(s)ds\\ &\leq 2\int_0^\infty \frac{CM}{1+|\mu|s^\alpha}ds \sup_{a\leq s}\gamma_R(s)\\ &to\ \ 0,\ a\to\infty.\end{aligned}$$

Além disso, existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $u_n(t), u(t) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq t \leq a$. A função $f : [0,a]\times K \to X$ é uniformemente contínua. Por isso,

$$\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|_X \to 0,\ n\to\infty,$$

uniformemente para $0 \leq t \leq a$. Isso implica que

$$\begin{aligned} &\| \int_0^t E_\alpha(t-s)[f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))]ds\|_X \\ &\qquad \leq \int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|_X ds \to 0,\ n \to \infty, \end{aligned}$$

uniformemente para $0 \leq t \leq a$. Combinando as afirmações anteriores, inferimos que $\Lambda : C_0(0,\infty;X) \longrightarrow C_0(0,\infty;X)$ é contínua.

Em seguida, mostramos que existe $\rho > 0$ tal que $\Lambda : B_\rho(C_0(0,\infty;X)) \longrightarrow B_\rho(C_0(0,\infty;X))$. Na verdade, assumindo o contrário, podemos afirmar que, para cada um $R > 0$ existe uma função u^R tal que $\|u^R\|_{C_0(0,\infty;X)} \leq R$ e $\|\Lambda(u^R)\|_{C_0(0,\infty;X)} > R$. Usando a definição de Λ obtenemos

$$\begin{aligned} R &< \|E_\alpha(\cdot)u_0 + \int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot - s)f(s,u^R(s))ds\|_{C_0(0,\infty;X)} \\ &\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{C_0(0,\infty;X)} + \|\int_0^{\cdot} E_\alpha(\cdot - s)f(s,u^R(s))ds\|_{C_0(0,\infty;X)} \\ &\leq \|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{C_0(0,\infty;X)} + \sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\gamma_R(s)ds. \end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$1 \leq \frac{\|E_\alpha(\cdot)u_0\|_{C_0(0,\infty;X)}}{R} + \frac{1}{R}\sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{CM}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}\gamma_R(s)ds,\ R > 0,$$

o que contradiz a condição **(T7)**.

Para provar que Λ é um mapa completamente contínuo, aplicamos o Ascoli-Arzelà caracterização de subconjuntos compactos em $C_0(0,\infty;X)$. Seja $R > 0$. Procedendo como na prova do Teorema 3.2.1, podemos afirmar que $\Lambda(B_R(C_0(0,\infty;X)))$ é relativamente compacto em $C([0,a];X)$ para todo $a > 0$. Além disso, utilizando (T_1) que obtemos $\Lambda(u)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ uniformemente para $u \in B_R(C_0(0,\infty;X))$. Combinando essas afirmações, inferimos que Λ é completamente contínuo. Completamos o processo da prova, como na demonstração do Teorema 3.2.1. $\square$

4 EQUAÇÃO DE RELAXAMENTO FRACIONARIA COMPOSTA

Neste capitulo, estudamos a limitação em L^p, periodicidade assintótica e as propriedades de compacidade das soluções para uma equação de relaxamento fracionária composta em um espaço de Banach X. Começaremos primeiro estudando o caso linear

$$u'(t) - A^c D_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0, \tag{4.0.1}$$

com a condição inicial

$$u(0) = x, \tag{4.0.2}$$

onde ${}^c D_t^\alpha$ denota a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha > 0$ e A é um operador linear fechado que é o gerador de uma família $(a, k)-$ regularizada $R_\alpha(t)$ de operadores lineares limitados de X em X (veja Definição 2.4.2), com $k(t) = e^{-t}$ e $a(t) = t^\alpha E_{1,1-\alpha}(-t)$, onde $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ denota a função de Mittag-Leffler, logo estudamos a equação de relaxação fracionária composta semilinear

$$u'(t) - A^c D_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0, \tag{4.0.3}$$

onde A é como acima e $\{f(t, y) \ : \ t \in \mathbb{R}^+, y \in \text{Ker}\,(A)\} \subseteq \text{Ker}\,(A)$.

4.1 Resultados

Vamos começar com o caso linear

$$u'(t) - A \ {}^c D_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t), \ 0 < \alpha < 1, \tag{4.1.4}$$

$$u(0) = 0, \tag{4.1.5}$$

Note-se que é caso escalar (4.1.4)-(4.1.5) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$ corresponde ao problema clássico do Basset que aparece na dinâmica dos fluidos (ver (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013)). A versão abstrata de (4.1.4)-(4.1.5) foi estudado em (LIZAMA; PRADO, 2009) e (KARCZEWSKA; LIZAMA, 2009). Nosso resultado para a equação composta linear de relaxamento fracionária é o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. *Se $f \in L^p(0, \infty; Ker(A))$ então a solução branda de* (4.1.4)-(4.1.5) *pertenece a $L^{p'}(0, \infty; Ker(A))$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $u(t)$ a solução branda de (4.1.4)-(4.1.5). Então nós temos (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013) $u(t) = \int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds$. Se $z \in \operatorname{Ker}(A)$ por Definição 2.4.2, então nós temos $R_\alpha(t)z = e^{-t}z$. Portanto, $\|u\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p}$. O que finaliza a demonstração. □

Agora consideramos as equações de relaxação fracionária composta abstrata semilinear

$$u'(t) - A\,{}^cD_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t, u(t)),\ 0 < \alpha < 1, \tag{4.1.6}$$

onde A é como na equação (4.1.4). Fixamos $Y = \operatorname{Ker}(A)$, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.2. *Seja $f : [0, \infty) \times Y \longrightarrow Y$ uma função contínua com $f(\cdot, 0) \in L^p$ que satisfaz uma condição L_f-Lipschitz na segunda variável uniformemente em relação à primeira variável. Se $L_f < 1$, então possui uma única solução branda para o problema* (4.1.6)-(4.1.5) *tal que $u(\cdot) \in L^p(0, \infty; Y)$.*

Demonstração. Definimos o operador Υ no espaço $L^p(0, \infty; Y)$ pela expressão

$$\Upsilon u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds.$$

Sejam u e v em L^p temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|\Upsilon u(t)\|_X^p dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s, u(s))\|_X ds\right)^p dt \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)} L_f \|u(s)\|_X ds + \int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s, 0)\|_X ds\right)^p dt \\
&\leq 2^p L_f^p \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)}\|u(s)\|_X ds\right)^p dt + 2^p \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s, 0)\|_X ds\right)^p dt \\
&\leq 2^p L_f^p \int_0^\infty \int_0^t e^{-(t-s)}\|u(s)\|_X^p dsdt + 2^p \int_0^\infty \int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s, 0)\|_X^p dsdt \\
&\leq 2^p L_f^p \int_0^\infty \|u(s)\|_X^p dsdt + 2^p \int_0^\infty \|f(s, 0)\|_X^p dsdt,
\end{aligned}$$

donde obtenemos

$$\|\Upsilon u\|_{L^p} \leq 2\left(L_f\|u\|_{L^p} + \|f(\cdot, 0)\|_{L^p}\right).$$

Sejam u e v em L^p, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|\Upsilon u(t) - \Upsilon v(t)\|_X^p dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds\right)^p dt \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)} L_f\|u(s) - v(s)\|_X ds\right)^p dt \\
&\leq L_f^p \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-(t-s)} dt\right)\|u(s) - v(t)\|_X^p ds \\
&\leq L_f^p \int_0^\infty \|u(s) - v(s)\|_X^p ds,
\end{aligned}$$

onde temos

$$\|\Upsilon u - \Upsilon v\|_{L^p} \leq L_f\|u - v\|_{L^p}.$$

Isto completa a demonstração do Teorema 4.1.2. □

Em (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013), os autores estudaram a existência de uma solução de problema (4.0.1)-(4.0.2) S-assintoticamente ω-periódica. Especificamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.1.3. *Sejam $x \in Ker(A)$, f uma função com valores em $Ker(A)$ e S-assintoticamente ω-periódica. Então cada solução branda do problema* (4.0.1)-(4.0.2) *é S-assintoticamente ω-periódica.*

Como ponto de partida, estabelecemos uma versão do Teorema 4.1.3 para este novo tipo de funções.

Teorema 4.1.4. *Sejam $x \in Ker(A)$, f uma função com valores em $Ker(A)$ e pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Então cada solução branda do problema* (4.0.1)-(4.0.2) *é pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Seja $u(t)$ solução branda do problema (3.0.1)-(3.0.2). Tendo em conta que $x \in \operatorname{Ker}(A)$ e que f é uma função com valores no $\operatorname{Ker}(A)$ temos que[1]

$$u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)ds.$$

É claro que a função $t \to e^{-t}x$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Podemos verificar que a função $v : t \longrightarrow \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)ds$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Na verdade, observamos que $\|v\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e por outra parte nós temos a seguinte identidade

$$v(\tau+\omega) - v(\tau) \;=\; \int_0^\omega e^{-(\tau+\omega-s)} f(s)ds + \int_0^\tau e^{-(\tau-s)}(f(s+\omega) - f(s))ds,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^t \|v(\tau+\omega) - v(\tau)\| d\tau \;&\leq\; \frac{1}{t}\int_0^t \int_\tau^{\tau+\omega} e^{-s} \|f(\tau+\omega-s)\| ds d\tau \\ &\quad + \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_0^{t-s} e^{-\tau} d\tau \Big) \|f(s+\omega) - f(s)\| ds \\ &\leq\; \frac{\|f\|_\infty}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \|f(s+\omega) - f(s)\| ds, \end{aligned}$$

o que mostra que v é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. $\square$

Agora, consideramos a equação de relaxação fracionária composta semilinear

$$u'(t) - A\,{}^cD_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0, \tag{4.1.7}$$

onde A é como acima e $\{f(t,y) \;:\; t \in \mathbb{R}^+, y \in \operatorname{Ker}(A)\} \subseteq \operatorname{Ker}(A)$. Temos o seguinte resultado provado em (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013).

[1] Veja (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013).

Teorema 4.1.5. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua uniformemente S-assintoticamente ω-periódica en conjuntos limitados do $Ker(A)$ (ver Definição 2.3.5) que verifica uma condição de Lipschitz na segunda variável uniformemente em relação à primeira variável, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \ u, v \in Ker(A), \ t \geq 0. \tag{4.1.8}$$

Se $x \in Ker(A)$ e $L < 1$, então o problema (4.1.7)-(4.0.2) *tem uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Observe que o teorema anterior é uma conseqüência do princípio de contração. O próximo resultado é um refinamento do Teorema 4.1.5 que oferece uma nova situação interessante. Na verdade, podemos livrar-nos da condição de pequenez imposta a constante L, o que foi intrumental na sua demonstração.

Teorema 4.1.6. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua uniformente S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados do $Ker(A)$ que verifique a condição de Lipschitz* (4.1.8). *Além disso, as seguintes condições são satisfeitas.*

($S_\omega 1$) *Existe uma função não decrescente contínua $W : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|f(t,u)\| \leq W(\|u\|)$ para todo $t \geq 0$ e $u \in Ker(A)$.*

($S_\omega 2$) *Para cada $a \geq 0$ e $\sigma > 0$ o conjunto $\{f(s,y) : 0 \leq s \leq a, \ y \in Ker(A), \ \|y\| \leq \sigma\}$ é relativamente compacto.*

($S_\omega 3$) *Existe $r > 0$ talque $\|x\| + W(r) \leq r$.*

Se $x \in Ker(A)$, então o problema (4.1.7)-(4.0.2) *possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Consideremos o espaço de Frechet $C([0, \infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ munido com a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos τ_C. Definimos o mapa Υ no espaço $C([0, \infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ pela expressão

$$\Upsilon(u)(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds. \tag{4.1.9}$$

A-1. O mapa Υ é contínuo de $C([0, \infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ em se mesmo. Seja $(u_n)_n$ é uma seqüencia em $C([0, \infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ que converge para u, então $(\Upsilon u_n)_n$ converge para Υu. De fato, para cada $a > 0$ temos que

$$\sup_{t\in[0,a]} \|\Upsilon(u_n)(t) - \Upsilon(u)(t)\| \leq L \sup_{t\in[0,a]} \|u_n(t) - u(t)\|.$$

A-2. Fixamos uma bola $B_r = \{u \in C([0, \infty); KerA) : \|u\|_\infty \leq r\}$, onde r é dado por ($S_\omega 3$). É claro que B_r é um subconjunto fechado convexo de $C([0, \infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Das condições

$(S_\omega 1)$ e $(S_\omega 3)$ deduzimos que B_r é invariante sob Υ. Note que $\Upsilon(B_r)$ é um subconjunto relativamente compacto em $C([0,\infty);\operatorname{Ker}(A))$. De fato, primeiro observamos que

$$\Upsilon(B_r)(t) \subseteq e^{-t}x + t\overline{co(K_r)},$$

onde

$$K_r = \{e^{-(t-s)}f(s,x) : 0 \le s \le t, \|x\| \le r\}.$$

Tendo em conta $(S_\omega 2)$ nós inferimos que $\Upsilon(B_r)(t)$ é relativamente compacto. Seja u em B_r e $h \ge 0$. A partir do seguinte decomposição

$$\begin{aligned}\Upsilon(u)(t+h) - \Upsilon(u)(t) &= e^{-(t+h)}x - e^{-t}x + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)}f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \left(e^{-(t+h-s)} - e^{-(t-s)}\right) f(s,u(s))ds.\end{aligned}$$

Segue-se que o conjunto $\Upsilon(B_r)$ é equicontínuous em $[0,a]$, para todo $a \ge 0$. Nós obtemos como conseqüência do teorema de Arzelà-Ascoli que o conjunto $\Upsilon(B_r)$ é relativamente compacto en $C([0,\infty);\operatorname{Ker}(A))$. Aplicando (ANDRADE et al., 2015, Lema 2.4) e (CUEVAS; LIZAMA, 2010, Lema 3.1) podemos afirmar que

$$\Upsilon\left(\overline{SAP_\omega(\operatorname{Ker}(A))}^{\tau_C}\right) \subseteq \overline{SAP_\omega(\operatorname{Ker}(A))}^{\tau_C}.$$

Definimos o seguinte conjunto invariante por Υ

$$C := B_r \cap \overline{SAP_\omega(\operatorname{Ker}(A))}^{\tau_C}.$$

Do teorema de Schauder-Tychonoff, inferimos que Υ tem um ponto fixo $\tilde{u} \in C$.

A-3. Definiendo $v(t) = \tilde{u}(t+\omega)$. Uma simples análise mostra que

$$\Upsilon v - v \in C_0([0,\infty);\operatorname{Ker}(A)).$$

De fato, desde que f seja uma função uniformemente contínua S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $T_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f(t+\omega, \tilde{u}(t+\omega)) - f(t, \tilde{u}(t+\omega))\| \le \varepsilon,$$

para todo $t \ge T_\varepsilon$. Usando $(S_\omega 1)$ nós temos

$$\|\Upsilon v(t) - v(t)\| \le e^{-t}((1+e^{-\omega})\|x\| + W(r)) + \varepsilon.$$

Portanto, $\Upsilon v(t) - v(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

A-4. Definimos $\varphi(t) = \|\Upsilon v(t) - v(t)\|$, $t \ge 0$. Mostramos que há uma função contínua positiva $\nu : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ que se anula no infinito

$$\nu(t) = \varphi(t) + L\int_0^t e^{-(t-s)}\nu(s)ds,\ t \ge 0. \tag{4.1.10}$$

De fato, seja $r(t)$ uma solução da equação

$$r(t) = -Le^{-t} + L\int_0^t e^{-(t-s)}r(s)ds. \tag{4.1.11}$$

Por (MILLER, 1971, Teorema IV.6.2) a equação (4.1.11) tem uma solução $r(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Defina $\nu(t) = \varphi(t) - \int_0^t r(t-s)\varphi(s)ds$. Nós temos isso

$$\begin{aligned} L\int_0^t e^{-(t-s)}\nu(s)ds &= L\int_0^t e^{-(t-s)}\varphi(s)ds - L\int_0^t \left(\int_\tau^t e^{-(t-s)}r(s-\tau)ds\right)\varphi(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^t r(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \\ &= \nu(t) - \varphi(t). \end{aligned}$$

Portanto a função $\nu(\cdot)$ é solução da equação (4.1.10). Por outro lado, desde $r(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\varphi \in C_0([0,\infty))$ inferimos que a função $t \to \int_0^t r(t-s)\varphi(s)ds$ pertence a $C_0([0,\infty))$. Donde ν é nula no infinito.

A-5. Consideramos o conjunto

$$C^\sharp = v + \{u \in C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A)) : \|u(t)\| \leq \nu(t),\ t \in \mathbb{R}^+\},$$

onde $v(\cdot)$ e $\nu(\cdot)$ são as funções indicadas na **A-3** e **A-4** respectivamente. Observe que $C^\sharp$ é o conjnto fechado convexo em $C_b([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Seja u definida em $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Observamos que $\Upsilon(v+u) - \Upsilon(v) \in C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Na verdade, nós temos

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(v+u)(t) - \Upsilon(v)(t)\| &\leq L\int_0^t e^{-(t-s)}\|u(s)\|ds \\ &\leq L\int_0^t e^{-(t-s)}\nu(s)ds \\ &= L(\nu(t) - \varphi(t)). \end{aligned}$$

Em seguida, levando em consideração que ν e φ se anulam no infinito deduzimos que $\Upsilon(v+u) - \Upsilon(v)$ se anula no infinito. Usando agora **A-3**, podemos concluir que $\Upsilon(v+u) - v$ se anula no infinito. Por outro lado, obtemos

$$\|\Upsilon(v+u)(t) - v(t)\| \leq L\int_0^t e^{-(t-s)}\nu(s)ds + \varphi(t) = \nu(t),$$

o que implica que $\Upsilon(v+u) \in C^\sharp$, portanto, inferimos que $C^\sharp$ é invariante sob o operador Υ.

A-6. Finalmente, procedendo como em **A-2** temos que Υ tem um ponto fixo $\tilde{u}_0 \in C^\sharp$. Portanto, existe $u_0 \in C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ tal que $\tilde{u}_0 = v + u_0$. Usando o fato de que Υ tem um ponto fixo único em $C_b([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$, concluímos que $\tilde{u}_0 = \tilde{u}$, o que implica que $\tilde{u} - v$ anula no infinito. Portanto $\tilde{u}$ é a função S-assintoticamente ω-periódica. $\square$

Observação 4.1.1. Um resultado semelhante ao Teorema 4.1.6 foi obtido em (ANDRADE et al., 2015) para obter a existência e a unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódicas para uma classe de equações diferenciais abstratas.

Em seguida, vamos enfocar nossa apresentação na questão da existência e unicidade de soluções brandas pseudo S-assintoticamente ω-periódicas para uma equação de relaxamento fracionária (4.1.7) sob a hipótese do tipo Lipschitz na não linearidade f. Agora descrevemos três resultados que não são conhecidos na literatura.

Teorema 4.1.7. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua assintoticamente limitada en conjuntos limitados de $Ker(A)$, e uniformente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de $Ker(A)$ que verifican a condição de Lipschitz* (4.1.8)*. Se $x \in Ker(A)$ e $L < 1$, então o problema* (4.1.7)-(4.0.2) *possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Definiendo o operador Π no espaço $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$ pela expressão

$$\Pi u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds,\; t \geq 0. \tag{4.1.12}$$

Mostramos, inicialmente, que $\Pi u \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$ para cada $u \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. É fácil ver que $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função limitada. Assim obtemos a seguinte estimativa: $\|\Pi u\|_\infty \leq \|x\| + \|f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty$. Usando (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 2.1) temos que a função $s \to f(s, u(s))$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica, Em seguida, usando a prova do Teorema 4.1.4 inferimos que $s \to \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds$ pertence a $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. Além disso, Π é uma L-contração no espaço $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$ assim podemos concluir que Π possui um único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. □

Observação 4.1.2. Sob as condições do Teorema 4.1.7 com a constante Lipschitz L não necessariamente pequena, há uma constante $\lambda_0 > 0$, de modo que, para qualquer $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, Teorema 4.1.7 se aplica à função $\lambda f(t, u)$.

Teorema 4.1.8. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados de $Ker(A)$, e uniformente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de $Ker(A)$ que satisfaz a condição Lipschitz*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L(t)\|u - v\|,\; \forall\; u, v \in Ker(A)\,,\; \forall\; t \geq 0, \tag{4.1.13}$$

onde $L : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável limitada em $[N, \infty)$, para algum $N > 0$. Se $x \in Ker(A)$, então o problema (4.1.7)-(4.0.2) *tem una única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Usamos as mesmas notações que na prova do Teorema 4.1.7. Seja u em $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$, tendo em conta que $\{L(t) : t \geq N\}$ é limitada, decorre de (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 2.2) que a função $s \to f(s, u(s))$ é pseudo S-assintoticamente

ω-periódica, então $\Pi u \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. Conseqüentemente Π é bem definido. Por outro lado, para $u, v \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$, obtemos

$$\|\Pi^n u - \Pi^n v\|_\infty \leq \frac{\|L\|_1^n}{n!}\|u - v\|_\infty.$$

Sempre $\dfrac{\|L\|_1^n}{n!} < 1$ para algum n suficientemente grande, por o metodo dos iterados Π possui uma único ponto fixo $u \in PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. □

Observação 4.1.3. Um resultado semelhante pode ser estabelecido quando f satisfaz uma condição Lipschitz local. Mais precisamente, consideramos $f : [0, \infty) \times \mathrm{Ker}\,(A) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(A)$ uma função contínua assintoticamente limitada em conjuntos de $\mathrm{Ker}\,(A)$ e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados de $\mathrm{Ker}\,(A)$ satisfazendo a seguinte condição:

(L_{loc}) Para cada $\sigma \in \mathbb{R}^+$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $x,\ y \in B_\sigma(\mathrm{Ker}\,(A))$ nós temos que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(\sigma)\|x - y\|$, onde $L : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Suponha que $x \in \mathrm{Ker}\,(A)$ e que existe $\tilde{r} > 0$ para que

$$L(\|x\| + \tilde{r}) + (1/\tilde{r})(L(\|x\|)\|x\| + \sup_{s\geq 0}\|f(s, 0)\|) < 1,$$

então o problema (4.1.7)-(4.0.2) tem uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

Teorema 4.1.9. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função assintoticamente limitada sobre conjuntos limitados do $Ker(A)$, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica en conjuntos limitados do $Ker(A)$ que satisfaz a condição Lipschitz* (4.1.13), *onde $L : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é localmente integrável. Álem disso, suponha verdadeiras as seguintes condições:*

($PS_\omega 1$) $\displaystyle\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(t-s)}L(s)ds < 1.$

($PS_\omega 2$) $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^t e^{-(t-s)}L(s)dsdt = 0.$

Se $x \in Ker(A)$, então o problema (4.1.7)-(4.0.2) *tem uma solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Definimos o operador Π no espaço $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$ pela expressão (3.1.8). Vemos que Π é bem definido. Seja u em $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$ tome $\varepsilon > 0$, existe um número $T = T(\mathrm{Im}\,(u)) \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande tal que $\{f(t, u(t)) : t \geq T\}$ é limitado e

$$\frac{1}{t}\int_0^t \sup_{x\in\mathrm{Im}(u)}\|f(s + \omega, x) - f(s, x)\|ds \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

para $t > T$. Veja que $f(\cdot, u(\cdot))$ é limitada sobre $\mathbb{R}^+$, daí Πu é limitada em $[0, \infty)$. Só resta mostrar que a função $v(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Para $l > T$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l}\int_0^l (v(t+\omega) - v(t))dt &= \frac{1}{l}\int_0^t \int_0^l e^{-(t-s)}\Big(f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s))\Big)dsdt \\
&\quad + \frac{1}{l}\int_T^l \int_0^t e^{-(t-s)}\Big(f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\Big)dsdt \\
&\quad + \frac{1}{l}\int_T^l \int_T^t e^{-(t-s)}\Big(f(s+\omega, u(s+\omega)) - f(s, u(s+\omega))\Big)dsdt \\
&\quad + \frac{1}{l}\int_T^l \int_0^t e^{-(t-s)}\Big(f(s, u(s+\omega)) - f(s, u(s))\Big)dsdt \\
&\quad + \frac{1}{l}\int_0^l \int_t^{t+\omega} e^{-s} f(t+\omega-s, u(t+\omega-s))dsdt \\
&:= \sum_{i=1}^{5} I_i(l).
\end{aligned}$$

Temos as seguintes estimativas para os termos I_i, $1 \leq i \leq 5$.

$$\|I_1(l)\| \leq \frac{2}{l}(T+1)\sup\{\|f(t,x)\| : t \geq 0,\ x \in \mathrm{Im}\,(u))\},$$

$$\|I_2(l)\| \leq \frac{1}{l}\int_T^l te^{-(t-T)}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \sup_{x\in \mathrm{Im}(u)} \|f(s+\omega, x) - f(s,x)\|ds\Big)dt \leq \frac{\epsilon}{2},$$

$$\|I_3(l)\| \leq \frac{1}{l}\int_0^l \sup_{x\in \mathrm{Im}(u)} \|f(s+\omega, x) - f(s,x)\|ds \leq \frac{\epsilon}{2},$$

$$\begin{aligned}
\|I_4(l)\| &\leq \frac{1}{l}\int_T^l \int_0^t e^{-(t-s)} L(s)\|u(s+\omega) - u(s)\|dsdt \\
&\leq \frac{2}{l}\|u\|\int_T^l \int_0^t e^{-(t-s)} L(s)dsdt,
\end{aligned}$$

$$\|I_5(l)\| \leq \frac{\omega}{l}\sup\{\|f(t,x)\| : t \geq 0,\ x \in \mathrm{Im}\,(u)\}.$$

Das estimativas acima, obtemos que v é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. Finalmente, podemos ver que Π é $\displaystyle\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(t-s)}L(s)ds$-contração no espaço $PSAP_\omega(\mathrm{Ker}\,(A))$. Com efeito, isto completa a demonstração do Teorema 4.1.9. □

Observação 4.1.4.

(i) Se a função $t \longrightarrow \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)}L(s)ds$ é integrável, então $(PS_\omega 2)$ satisfeita.

(ii) Se $L(\cdot)$ é integrável com $\|L\|_1 < 1$, então $(PS_\omega 1)$ e $(PS_\omega 2)$ satisfeita.

(iii) Se $L(\cdot)$ é locamente integrável e $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_9^l L(s)ds = 0$, então $(PS_\omega 2)$ é satisfeita.

A seguir, denotamos por $\mathcal{C}_{exp}$ o espaço

$$\mathcal{C}_{exp} = \{u \in C([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A)) \;:\; \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{e^t} = 0\},$$

dotado com a norma $|||u||| = \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|e^{-t}$. Agora, nosso objetivo é investigar comportamentos mais gerais das não-linearidades para a equação (4.1.7).

Teorema 4.1.10. *Seja $f : [0,\infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(a)$ uma função conitinua assintoticamente uniformemente limitada sobre conjuntos limitados de $Ker(A)$, assintoticamente limitada en conjuntos limitados de $Ker(A)$, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica en conjuntos limitados de $Ker(A)$ que satisfaz $(S_\omega 1)$ e $(S_\omega 2)$. Considere ademas*

$(PS_\omega 3)$ *Para cada $\xi > 0$,* $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t}\int_0^t e^{-(t-s)} W(\xi e^s) ds = 0.$

$(PS_\omega 4)$ *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathcal{C}_{exp}$, $|||u - v||| < \delta$ então*

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{-(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \varepsilon.$$

Defina, $\beta(\xi) = \displaystyle\sup_{t\geq 0} \frac{1}{e^t}\int_0^t e^{-(t-s)} W(\xi e^s) ds$. *Se* $\displaystyle\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1$ *e $x \in Ker(A)$, então o problema* (4.1.7)-(4.0.2) *possui solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}^0_{exp}$ o subespaço de $\mathcal{C}_{exp}$ que consiste das funções u tal que $u(0) = 0$. Definimos o operador Π^0 em $\mathcal{C}^0_{exp}$ por

$$\Pi^0 u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, e^{-s}x + u(s)) ds. \tag{4.1.14}$$

Decorre da condição $(PS_\omega 3)$ que o operador Π^0 é bem definido. Observamos que o mapa Π^0 é contínuo de $\mathcal{C}_{exp}$ em si mesmo. Esta afirmação é uma consequência direita da condição $(PS_\omega 4)$.

Nós afirmamos que Π^0 é um mapa completamente contínuo. Seja $r > 0$ e definimos o conjunto $V = \Pi^0(B_r(\mathcal{C}^0_{exp}))$ e $V(t) = \{\Pi^0 u(t) : u \in B_r(\mathcal{C}^0_{exp})\}$. Tendo em conta o teorema do valor médio para a integral de Bochner (ver Teorema 2.2.2) e a condição $(S_\omega 2)$, inferimos que $V(t)$ é relativamente compacto. Por outro lado, seguindo um argumento semelhante à demonstração do Teorema 4.1.6, pode-se concluir facilmente que V é equicontinuo em $[0, a]$ para todos $a \geq 0$. Para $u \in \mathcal{C}^0_{exp}$, com $|||u||| \leq r$ observamos que

$$\frac{\|\Pi^0 u(t)\|}{e^t} \leq \frac{1}{e^t}\int_0^t e^{-(ts)} W(e^s(\|x\| + r)) ds.$$

De $(PS_\omega 3)$ inferimos que $\dfrac{\|\Pi^0 u(t)\|}{e^t} \to 0$ quando $t \to \infty$, independente de $u \in B_r(\mathcal{C}^0_{exp})$. Usando (DE ANDRADE; CUEVAS; HENRÍQUEZ, 2012, Lema 2.8) obtemos que V é um conjunto relativamente compacto. Isso prova que Π^0 é completamente contínuo.

Observamos que o operador Π^0 mapeia $B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp})$ em si mesmo para algun $\rho > 0$. Na verdade, se assumirmos que a afirmação é falsa, então, para todo $\rho > 0$, podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp})$ tal que $|||\Pi^0 u^\rho||| > \rho$, esse fato implica que $\rho < \beta(\|x\| + \rho)$, donde $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{1}{xi}\beta(\xi) \geq 1$ é um absurdo.

Denotamos por $PSAP^0_\omega$ o subspaço vetorial das funções $u \in PSAP_\omega(\text{Ker}\,(A))$ com $u(0) = 0$. Tendo em conta (DE ANDRADE et al., 2016, Lema 2.1) e a demonstração do Teorema 4.1.4 obtemos que o espaço $PSAP^0_\omega$ é invariante sob o mapa Π^0, portanto, podemos inferir que o fecho de $B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp}) \cap PSAP^0_\omega$, $\overline{B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp}) \cap PSAP^0_\omega}$ é invariante sob o mapa Π^0. Aplicando o teorema do ponto fixo Schauder, deduzimos que o mapa Π^0 tem um ponto fixo $u \in \overline{B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp}) \cap PSAP^0_\omega}$. Portanto, há uma seqüência $(u^n)_n$ em $B_\rho(\mathcal{C}^0_{exp}) \cap PSAP^0_\omega$ que converge para u na norma de $\mathcal{C}_{exp}$. Da condição $(PS_\omega 4)$ nós conseguimos que $\Pi^0 u^n \to u$, as $n \to \infty$, uniformemente em $[0, \infty)$. Conseqüentemente $u \in PSAP^0_\omega$, assim completamos a demonstração do Teorema 4.1.10. □

Em contraste com o Teorema 4.1.6 temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.11. *Seja $f : [0, \infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua assintoticamente limitada en conjuntos limitados de $Ker(A)$, e uniformemente pseudo S-assintoticamente ω-periódica en conjuntos limitados de $Ker(A)$ que satisfaz a condição Lipschitz* (4.1.8). *Assuma que as condições $(S_\omega 1)$, $(S_\omega 2)$ e $(S_\omega 3)$ do Teorema 4.1.6 são satisfeitas. Se $x \in Ker(A)$, então o problema* (4.1.7)-(4.0.2) *possui uma única solução branda pseudo S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. No que se segue, consideramos o espaço Frechet $C([0, \infty); Ker(A))$ munido da topologia τ_C da convergência uniforme em conjuntos compactos. Definimos um mapa contínuo Υ no espaço $C([0, \infty); Ker(A))$ por (4.1.9). A partir de **A-2** da demonstração do Teorema 4.1.6 nos temos que B_r, onde r é dado por $(S_\omega 3)$, é invariante sobre Υ e $\Upsilon(B_r)$ é reltivamente compacto em $C([0, \infty); Ker(A))$. Seja u em $PSAP_\omega(\text{Ker}\,(A))$ aplicando (CUEVAS; HENRÍQUEZ; SOTO, 2014, Lema 2.3) e o fato que a função $s \to \int_0^t e^{-(t-s)} f(s, u(s))ds$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica (veja a demonstração do Teorema 4.1.4), nos obtemos que $\Upsilon u \in PSAP_\omega(\text{Ker}\,(A))$, donde $PSAP_\omega(\text{Ker}\,(A))$ é invariante sobre Υ. Agora nos definimos $\mathcal{H} = B_r \cap \overline{PSAP_\omega(\text{Ker}\,(A))}^{\tau_C}$ do teorema Schauder-Tychonoff, obtemos que Υ possui um ponto fixo $\tilde{u}$ em $\mathcal{H}$. Definimos $v(t) = \tilde{u}(t + \omega)$, $t \geq 0$. Nós afirmamos que $\Upsilon v - v$ é uma função ergódica. Na verdade, isso é uma conseqüência da seguinte estimativa:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|\Upsilon v(s) - v(s)\| ds \leq (2\|x\| + W(r))\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \sup_{\|x\|\leq r} \|f(\tau + \omega, x) - f(\tau, x)\| d\tau.$$

Fixando $\varphi(t) = \|\Upsilon v(t) - v(t)\|$. Observamos que existe uma única função ergodica positiva $\tilde{\nu} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\tilde{\nu}(t) = \varphi(t) + L\int_0^t e^{-(t-s)} \tilde{\nu}(s) ds.$$

De fato, por (MILLER, 1971, Teorema IV.6.2) o resolvente $r(t)$ de Le^{-t} existe como um elemento de $L^1(\mathbb{R}^+)$ e é único nesta classe, de onde $\tilde{\nu}(t)$ é dado por

$$\tilde{\nu}(t) = \varphi(t) - \int_0^t r(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Como φ é uma função ergodica, obtemos que a função $t \to \int_t^t r(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ é ergodica. Portanto $\tilde{\nu}$ é uma função ergodica. Consideramos o conjunto

$$\mathcal{H}_\sharp = v + \{u \in P_0(\mathbb{R}^+; \mathrm{Ker}\,(A)) : \|u(t)\| \le \tilde{\nu}(t),\, t \ge 0\}.$$

É fácil verificar que $\mathcal{H}_\sharp$ é um subconjunto convexo fechado de $C_b([0,\infty); Ker(A))$. Mostremos que $\mathcal{H}_\sharp$ é invariante pelo operador Υ. Seja u em $P_0(\mathbb{R}^+; \mathrm{Ker}\,(A))$, observamos que $\Upsilon(v+u) - \Upsilon v$ é uma função ergodica. Na verdade, temos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|\Upsilon(v+u)(s) - (\Upsilon v)(s)\| ds \quad \le \quad \frac{L}{t}\int_0^t \|u(s)\| ds.$$

Por outro lado, se $\|u(t)\| \le \tilde{\nu}(t)$, para todo $t \ge 0$, então

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(v+u)(t) - v(t)\| &\le \|\Upsilon(v+u)(t) - (\Upsilon v)(t)\| + \|(\Upsilon v)(t) - v(t)\| \\ &\le \tilde{\nu}(t) - \varphi(t) + \varphi(t) = \tilde{\nu}(t), \end{aligned}$$

o que implica que $\Upsilon(v+u) \in \mathcal{H}_\sharp$, portanto, $\mathcal{H}_\sharp$ é invariante sob o operador Υ. Assim, podemos afirmar isso Υ tem um ponto fixo $\tilde{u}_0 \in \mathcal{H}_\sharp$. Usando o fato de que Υ tem um ponto fixo único em $C_b([0,\infty); Ker(A))$, concluímos que $\tilde{u} = \tilde{u}_0$, consequentemente $\tilde{u} - v$ é uma função ergodica. Daí deduzimos que $\tilde{u}$ é pseudo S-assintoticamente ω-periódica. □

4.2 Compacidade do conjunto de Soluções

Nosso interesse nesta seção é estabelecer a compacidade para o conjunto formado pelo soluções brandas para o problema (4.1.7)-(4.0.2) no espaço $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Este tipo de informação não tem sido analisada na literatura (ver (LIZAMA; N'GUÉRÉKATA, 2013)).

Teorema 4.2.1. *Seja x em $Ker(A)$ e assuma que $f : [0,\infty) \times Ker(A) \longrightarrow Ker(A)$ uma função contínua. Suponha além disso que as seguintes condições são satisfeitas:*

($C_0$1) *Para cada $R > 0$ existe uma função positiva $\gamma_R \in C_0(0,\infty)$ tal que*

$$\sup\{\|f(t,x)\| : \|x\| \le R\} \le \gamma_R(t),\, t \ge 0.$$

($C_0$2) *Para cada $s \ge 0$ e $R > 0$ o conjunto $\{f(s,y) : y \in Ker(A)\,, \|y\| \le R\}$ é relativamente compacto.*

(C_03) $\liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_R(s)ds < 1.$

Então existe uma solução branda $u \in C_0([0,\infty); Ker(A))$ *para o problema* (4.1.7)-(4.0.2). *Além disso, se a seguinte condição for cumprida:*

(C_04) $\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_R(s)ds < 1.$

Então o conjunto $\mathcal{S}$ *formado pelas soluções brandas do problema* (4.1.7)-(4.0.2) *é compacto em* $C_0([0,\infty); Ker(A))$.

Demonstração. Definimos o operador Υ no espaço $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ por (4.1.9). Seja u em $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$, como $\|f(t,u(t))\|_X \leq \gamma_R(t) \to 0,\ t\to\infty$, para $R > 0$ tal que $\|u(t)\|_X \leq R$. Temos que $\int_0^t e^{-(t-s)} f(s,u(s))ds \to 0,\ t \to \infty$. Na verdade, fixamos $a > 0$, nossa afirmação segue-se a partir da seguinte desigualdade

$$\left\|\int_0^t e^{-(t-s)} f(s,u(s))ds\right\| \leq e^{-t}\int_0^a e^s \gamma_R(s)ds + \sup_{\sigma\geq a}\gamma_R(\sigma). \tag{4.2.15}$$

Daí, concluimos que $\Upsilon u \in C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$.

Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$ que converge para $u \in C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Então existe $R > 0$ tal que $\|u_n(t)\|, \|u(t)\| \leq R$ para todo $t \geq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Fixamos $a > 0$. Então

$$\left\|\int_a^t e^{-(t-s)}[f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))]ds\right\| \leq 2\sup_{\sigma\geq a}\gamma_R(\sigma). \tag{4.2.16}$$

Além disso, existe um conjunto compacto $K \subseteq \mathrm{Ker}\,(A)$ tal que $u_n(t), u(t) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq t \leq a$. A função $f : [0,a] \times K \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(A)$ é uniformemente contínua. Conseqüentemente, $\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\| \to 0,\ n \to \infty$, uniformenente $0 \leq t \leq a$. Isso implica que

$$\int_0^t e^{-(t-s)}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \to 0,\ n \to \infty, \tag{4.2.17}$$

uniformemente para $0 \leq t \leq a$. Combinando (4.2.16) e (4.2.17), deducimos que Υ é contínua.

Vejamos que existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A)))$ é invariante pelo o operador Υ. Na verdade, assumindo o contrário, para cada $R > 0$ existe uma função u^R tal que $\|u^R\| \leq R$ e $\|\Upsilon(u^R)\| > R$. Logo

$$1 \leq \frac{\|x\|}{R} + \frac{1}{R}\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_R(s)ds,$$

o que contradiz a condição (C_03). Para provar que Υ é um mapa completamente contínuo, aplicamos a caracterização de Arzelà-Ascoli de subconjuntos compactos em $C_0([0,\infty); \mathrm{Ker}\,(A))$. Nos consideramos $R > 0$, usando (HENRÍQUEZ; POBLETE; POZO, 2014, Corolário 2.10) e $(C_0 2)$, afirmamos que $\Upsilon(B_R(C_0([0,\infty);\mathrm{Ker}\,(A))))$ é relativamente compacto em $C([0,a];\mathrm{Ker}\,(A))$ para todo $a>0$. Além disso, aplicando $(C_0 1)$ e (4.2.15) obtenemos que $\|\Upsilon(u)(t)\| \leq e^{-t}\|x\| + e^{-t}\int_0^a e^s \gamma_R(s)ds + \sup_{\sigma\geq a}\gamma_R(\sigma)$, donde $\Upsilon(u)(t)\to 0$ como $t\to\infty$ uniformemente para $u\in B_R(C_0([0,\infty);\mathrm{Ker}\,(A)))$. Combinando essas afirmações deduzimos que Υ é completamente contínua. Aplicando o Teorema de Schauder, segue-se que Υ tem um ponto fixo $B_\rho(C_0([0,\infty);\mathrm{Ker}\,(A)))$. Além a continuidade de Υ implica que o conjunto $\mathcal{S}$ formado pelas soluções brandas de (4.1.7)-(4.0.2) é fechado. Por outro lado, se a condição $(C_0 4)$ for satisfeita, o conjunto $\mathcal{S}$ é limitado. Na verdade, se assumirmos que $\mathcal{S}$ é não limitado então uma seqüencia de funções $u_k\in\mathcal{S}$ tal que $R_k=\|u_k\|\geq k$. Daí se obtém que

$$\|u_k(t)\| \leq \|x\| + \sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_{R_k}(s)ds,$$

assim $1 \leq \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{R_k}\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_{R_k}(s)ds$, o que é contrário a condição $(C_0 4)$. Finalmente, usando que Υ é completamente contínuo deduzimos que $\mathcal{S}$ é compacto. $\square$

5 APLICAÇÕES E MÉTODOS

Ao usar nossos métodos introduzidos nas seções anteriores nós apresentamos propriedades L^p e de compacidade para equações diferenciais fracionárias que aparecem na literatura. Também damos aplicações para condução do calor e viscoelásticidade. Note que, nesta seção, todos os resultados são novos. Começamos, com o seguinte exemplo.

Exemplo 5.0.1. Consideramos a seguinte equação integro-diferencial

$$\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t} = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v \right) u(s,\xi)ds + g(t,\xi),\ t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], \tag{5.0.1a}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \geq 0, \tag{5.0.1b}$$

$$u(0,\xi) = u_0(\xi),\ \xi \in [0,\pi], \tag{5.0.1c}$$

onde $v > 0$. Estudamos o sistema na forma abstrata como em (3.0.1), para isto nós escolhemos o espaço $X = L^2(0,\pi)$, $u_0 \in L^2(0,\pi)$ e o operador A definido por $Au = u'' - vu$, com domínio $D(A) = \{u \in L^2(0,\pi)\ :\ u'' \in L^2(0,\pi),\ u(0) = u(\pi) = 0\}$. É bem sabido que $\Delta u = u''$ é gerador de um semigrupo analítico em $L^2(0,\pi)$. Daí A é setorial do tipo $\mu = -v < 0$. O sistema (5.0.1a)-(5.0.1c) pode ser formulado pela equação funcional integro-diferencial linear (3.0.1), onde $u(t)(x) = u(t,x)$ e a não-linearidade $f(t)(x) = g(t,x)$, $t \geq 0$ e $x \in [0,\pi]$. Se $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^\pi |g(t,x)|^2 dx \right)^{p/2} dt < +\infty$, então, pelo Teorema 3.1.1, o problema (5.0.1a)-(5.0.1b) possui uma única solução $u \in L^p(0,\infty; L^2(0,\pi))$.

Agora consideramos a equação fracionária

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi) \;=\; \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v \right) u(s,\xi)ds + a(t)f(u(t,\xi)), \tag{5.0.2}$$

onde $t \geq 0$, $\xi \in [0,\pi]$ com $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Suponha que $a(\cdot) \in L^p(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$ e que existe uma constante $L_f > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x-y|,$$

para todo $x,\ y \in \mathbb{R}$. Se a norma $\|a\|_\infty$ é suficientemente pequena, então o problema (5.0.2) com condições (5.0.1b) e (5.0.1c) tem uma única solução branda $u(\cdot) \in L^p(0,\infty; L^2[0,\pi])$.

Agora examinamos a compacidade das soluções da equação fracionária

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi) \;=\; & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v \right) u(s,\xi)ds \\ & + h\left(L(t) \int_0^\pi u(t,x)dx \right) \Phi_0(\xi),\ t \in [0,1],\ \xi \in [0,\pi]. \end{aligned} \tag{5.0.3}$$

onde $\Phi_0 \in L^2[0,\pi]$, $L : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável limitada e a função h é contínua. Suponha que existe uma constante $\beta \in (0,1)$ tal que $|L(\cdot)|^\beta \in L^1(0,1)$ e existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $|h(t)| \leq C_1|t|^\beta$, $t \in \mathbb{R}$. Seja agora

$$f(t,\varphi)(\xi) = h\Big(L(t)\int_0^\pi \varphi(x)dx\Big)\Phi_0(\xi),\ (t,\xi) \in [0,1] \times [0,\pi]. \tag{5.0.4}$$

a perturbação associada a equação (5.0.3). Podemos verificar se as hipóteses do Teorema 3.2.1 são válidas. Observe que

$$\begin{aligned}
\|f(t,\varphi)\|_{L^2[0,\pi]} &= \int_0^\pi |h\left(L(t)\int_0^\pi \varphi(x)dx\right)\Phi_0(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \\
&\leq c_1^2 \int_0^\pi |L(t)\int_0^\pi \varphi(x)dx|^{2\beta}|\Phi_0(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \\
&\leq c_1^2|L(t)|^{2\beta}|\int_0^\pi \varphi(x)dx|^{2\beta}\|\Phi_0\|^2 \\
&\leq c_1^2|L(t)|^{2\beta}\left(\int_0^\pi |\varphi(x)|^2dx\right)^\beta \pi^\beta\|\Phi_0\|^2
\end{aligned}$$

segue-se que

$$\|f(t,\varphi)\|_{L^2(0,\pi)} \leq C_1\pi^{\frac{\beta}{2}}\|\Phi_0\|_{L^2(0,\pi)}|L(t)|^\beta\|\varphi\|^\beta_{L^2(0,\pi)},$$

para todo $t \in [0,1]$, $\varphi \in L^2[0,\pi]$, assim a condição (T_1) é garantida com

$$\gamma_R(t) = C_1\pi^{\beta/2}\|\Phi_0\|_{L^2[0,\pi]}|L(t)|^\beta R^\beta,$$

e isso garante em termos da definição que (T_4) é cumprida para $\beta < 1$. Observamos que (T_2) é uma conseqüência do teorema de Simon (Ver Teorema 2.2.1). Consequentemente, pelo Teorema 3.2.1 o conjunto formado pelas solução brandas de (5.0.3)-(5.0.1b)-(5.0.1c) é compacto em $C([0,1];L^2[0,\pi])$. Terminando a discussão do exemplo.

Exemplo 5.0.2. Vamos considerar como a equação de onda não-linear de dois termos de difusão fracionária com o operador de tempo com derivada no sentido Caputo (veja a Definição 2.1.3) e o termo não linear de força $F(t,x)$, $t \in [0,T)$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\mu_1\ {}^cD_t^{\alpha_1}u(t,x) + \mu_2\ {}^cD_t^{\beta_1}u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = F(t,u(t,x)), \tag{5.0.5}$$

com as condições

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \tag{5.0.6}$$

onde $0 < \alpha_1, \beta_1 \leq 2$, $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Foi recentemente estudado por Stojanović e Gorenflo (2010) que existem soluções de superviscosidade e subviscosidade em $L^p(\mathbb{R})$ para (5.0.5) . Tomando $X = L^2[0,2\pi]$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = v$, $\alpha_1 = \alpha + 1$, $\beta_1 = \beta$ com $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ e $F(t,x) = \mathfrak{T}x +^c D_t^\alpha(f(t,x))$ onde $\mathfrak{T} > 0$, nós temos a equação

$$\begin{aligned}
{}^cD_t^{\alpha+1}u(t,x) + v^cD_t^\beta u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \mathfrak{T}u(t,x) \\
&\quad + {}^cD_t^\alpha(f(t,u(t,x))),\ t > 0,\ x \in [0,2\pi], \qquad (5.0.7)
\end{aligned}$$

é possível dar uma abordagem da equação abstrata (5.0.7) atraves de una família regularizada de operadores fortemente contínuos (veja Definição 2.4.2). Ao usar esta classe de famílias de operadores e o princípio de Duhamel, podemos definir as soluções brandas para a equação (5.0.7) (Veja (CUEVAS; LIZAMA, 2013; KEYANTUO et al., 2013)). isto da o marco referencial necessário para aplicar a teória de operadores na análise de propriedades L^p de soluções para a equação fracionária (5.0.7). Observamos que De Andrade et al. (2016) estudaram recentemente periodicidade assintótica das soluções para (5.0.7).

Teorema 5.0.1. *(KEYANTUO et al., 2013, Teorema 3.2 e 4.1) Seja* $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $\mu > 0$ *e* A *um operador de setorial de ângulo* $\beta\pi/2$*. Então,* A *gera uma família* $(\alpha, \beta)_\mu$*-regularizada limitada.*

Teorema 5.0.2. *(KEYANTUO et al., 2013, Teorema 4.1) Seja* $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, $\mu > 0$ *e* $\omega < 0$*. Suponha que* A *seja um operador* ω*-sectorial de ângulo* $\beta\pi/2$*, então* A *gera uma família* $(\alpha, \beta)_\mu$*-regularizada* $S_{\alpha,\beta}(t)$ *que satisfaz a estimativa*

$$\|S_{\alpha,\beta}(t)\| \leq \frac{C}{1 + |\omega|(t^{\alpha+1} + \mu t^{\beta})}, \quad t \geq 0, \tag{5.0.8}$$

para alguma constante $C > 0$ *dependendo apenas de* α, β*.*

Definição 5.0.1. (KEYANTUO et al., 2013) Seja $v > 0$ e $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ dados. Seja A um operdor linear fechado com dominio $D(A)$ definido em o espaço de Banach X. Nós chamamos A o gerador da familia (α, β)-regularizada se houver uma constante $\sigma \geq 0$ e uma função fortemente contínua $S_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ de tal modo que $\{\lambda^{\alpha+1} + v\lambda^{\beta} : \operatorname{Re}(\lambda) > \sigma\} \subseteq \rho(A)$ e

$$\lambda^{\alpha}(\lambda^{\alpha+1} + v\lambda^{\beta} - A)^{-1}x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S_{\alpha,\beta}(t)x dt,$$

para $\operatorname{Re}(\lambda) > \sigma$, $x \in X$.

Observamos que (5.0.7) pode ser escrito na forma

$${}^cD_t^{\alpha+1}u(t) + v\ {}^cD_t^{\beta}u(t) - Au(t) = {}^cD_t^{\alpha}f(t, u(t)), \tag{5.0.9}$$

com $Au = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau u$. Nós consideramos (5.0.9) sujeito a condições iniciais

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{5.0.10}$$

Sabe-se que o operador A é sectorial de tipo negativo τ e ângulo $\dfrac{\beta\pi}{2}$. Então, pelos Teoremas 5.0.1 e 5.0.2 A gera uma familia (α, β)-regularizada $S_{\alpha,\beta}$ que satisfaz a estimativa

$$\|S_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{B}(L^2[0,2\pi])} \leq \frac{C_{\odot}}{1 + |\tau|(t^{\alpha+1} + vt^{\beta})}, \ t \geq 0, \tag{5.0.11}$$

para uma constante $C_{\odot} > 0$ dependendo apenas de α, β. Sendo assim $S_{\alpha,\beta}(t)$ uniformemente integrable, isto é,

$$\|S_{\alpha,\beta}\|_1 := \int_0^{\infty} \|S_{\alpha,\beta}(t)\|_{\mathcal{B}(L^2[0,2\pi])} < +\infty.$$

Observação 5.0.1. Observe que uma função $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L^2[0, 2\pi]$ é dita uma solução branda para a equação (5.0.9) com condições iniciais (5.0.10) se satisfizer

$$u(t) = \int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-s) f(s, u(s)), \tag{5.0.12}$$

para cada $t \in \mathbb{R}^+$.

Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 5.0.3. *Seja $f \in L^p(0, \infty; L^2[0, 2\pi])$. Então o problema*

$$^cD_t^{\alpha+1} u(t) + v\ ^cD_t^{\beta} - Au(t) = \ ^cD_t^{\alpha} f(t), \tag{5.0.13}$$

admite uma única solução branda $u \in L^p(0, \infty; L^2[0, \pi])$. Esta solução u satisfaz que pertenece a $L^{p'}(0, \infty; L^2[0, \pi])$ para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ e se tem a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{L^{p'}(0,\infty;L^2[0,2\pi])} \leq C_{\odot}^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|S_{\alpha,\beta}\|_1^{1 + \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])}. \tag{5.0.14}$$

Em particular, se $p' = \infty$, temos que

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2[0,2\pi])} \leq \|S_{\alpha,\beta}\|_1 \|f\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2[0,\infty])}. \tag{5.0.15}$$

Demonstração. Por (KEYANTUO et al., 2013, Section 4), a solução branda do problema (5.0.13)-(5.0.10) sempre existe e é dada por $u = S_{\alpha,\beta} * f$. Sejam p e q expoentes conjugados e $t \in \mathbb{R}^+$ então

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2[0,2\pi]}^{p'} \leq\ & \|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p'}{q}} C_{\odot}^{\frac{p'-p}{p}} \|f\|_{L^p(0,\infty;L^2(0,2\pi))} \\ & \times \int_0^t \|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|_{\mathcal{B}(L^2[0,2\pi])} \|f(s)\|_{L^2(0,2\pi)}^p ds.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(t)\|_{L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])}^{p'} \leq C_{\odot}^{\frac{p'-p}{p}} \|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p'}{q}+1} \|f\|_{L^p(0,\infty;L^2(0,2\pi))}^{p'}.$$

Isto completa a demonstração do Teorema. □

Teorema 5.0.4. *Seja $f : [0, \infty) \times L^2[0, 2\pi] \longrightarrow L^2[0, 2\pi]$ uma função contínua com $f(\cdot, 0) \in L^p(0, \infty; L^2[0, 2\pi])$, que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \widetilde{L}_f \|\varphi - \psi\|_{L^2[0,2\pi]}, \tag{5.0.16}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e para todo $\varphi, \psi \in L^2[0, 2\pi]$ com a constante de Lipschitz $\widetilde{L}_f$ tal que $\|S_{\alpha,\beta}\|_1 \widetilde{L}_f < 1$. Então, existe uma única solução branda $u(\cdot)$ de (5.0.9) com as condições iniciais (5.0.10).

Demonstração. Definimos o operador $K_{\alpha,\beta}$ no espaço $L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])$ por

$$(K_{\alpha,\beta}u)(t) = \int_0^t S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s,u(s))ds, \ t \geq 0, \tag{5.0.17}$$

com $u \in L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])$. Seja u uma função de $L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])$ e dados p e q expoentes conjugados. Nós temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|K_{\alpha,\beta}u\|_{L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])} &\leq (\alpha\widetilde{L}_f)^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p}{q}+1}\|u\|^p_{L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])}\\ &\quad+\alpha^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p}{q}+1}\|f(\cdot,0)\|^p_{L^p(0,\infty;L^2[0,2\pi])}.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, $K_{\alpha,\beta}$ está bem definida. É simples de verificar que $K_{\alpha,\beta}$ é uma $\|S_{\alpha,\beta}\|_1\widetilde{L}_f$-contração, ou seja,

$$\begin{aligned}\|K_{\alpha,\beta}u - K_{\alpha,\beta}v\|^p_{L^p} &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \|S_{\alpha,\beta}(t-s)\left[f(s,u(s)) - f(s,v(s))\right]\|_X ds\right)^p dt\\ &\leq \widetilde{L}_f^p\int_0^\infty\left(\int_0^t\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|\|u(s)-v(s)\|_X ds\right)^p dt\\ &\leq \widetilde{L}_f^p\int_0^\infty\left(\int_0^t\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|ds\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_0^t\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|\|u(s)-v(s)\|^p_X ds\right)dt\\ &\leq \widetilde{L}_f^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\int_0^t\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|\|u(s)-v(s)\|^p_X dsdt\\ &\leq \widetilde{L}_f^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p}{q}}\int_0^\infty\left(\int_s^\infty\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|dt\right)\|u(s)-v(s)\|^p_X ds\\ &\leq \widetilde{L}_f^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1^{\frac{p}{q}+1}\int_0^\infty\|u(s)-v(s)\|^p_X ds,\end{aligned}$$

segue-se que

$$\|K_{\alpha,\beta}u - K_{\alpha,\beta}v\|_{L^p} \leq \widetilde{L}_f^p\|S_{\alpha,\beta}\|_1\|u-v\|_{L^p}.$$

□

Em contraste com a Observação 3.1.3 nós temos a seguinte consequência imediata.

Observação 5.0.2. Seja $f:[0,\infty)\times L^2[0,2\pi] \longrightarrow L^2[0,2\pi]$ função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\|_{L^2[0,2\pi]} \leq \widetilde{L}_f(t)\|\varphi-\psi\|_{L^2[0,2\pi]}, \tag{5.0.18}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e para todo $\varphi,\psi \in L^2[0,2\pi]$ onde a função $\widetilde{L}_f(\cdot)$ é localmente integrável. Assuma ainda que as seguintes propriedades são verificadas

$(W_1)^*$ $\sup_{t\geq 0}\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|_{\mathcal{B}(L^2[0,2\pi])}\widetilde{L}_f(s)ds < 1$,

$(W_2)^*$ $f(\cdot,0) \in L^\infty(0,\infty;L^2(0,\infty))$.

Então o problema (5.0.9)-(5.0.10) admite uma única solução branda limitada.

Teorema 5.0.5. *Sejam* $1 \leq p < \infty$. *e* $f : [0,\infty) \times L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$ *uma função contínua tal que* $f(\cdot,0) \in L^p(0,\infty;L^2(0,2\pi))$, *e que satisfaz a condição Lipschitz* (5.0.18). *Assuma que existe* $a > 0$ *tal que* $\widetilde{L}_f : [0,a] \to \mathbb{R}^+$ *é uma função p-integrável e* $\widetilde{L}_f : [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *é uma função limitada com* $\|S_{\alpha,\beta}\|_1 \sup\limits_{t\geq a} \widetilde{L}_f(t) < 1$, *então o problema* (5.0.9)-(5.0.10) *admite uma única solução branda* $u \in L^p(0,\infty;L^2(0,2\pi))$.

Demonstração. Por uma questão de brevidade, apenas damos um esboço da prova. Definimos o operador $K_{\alpha,\beta}$ no espaço $Z_a = C([0,a];X)$ pela expressão (5.0.17). Claramente $K_{\alpha,\beta} : Z_a \to Z_a$ esta bem definido. Procedemos como na demonstração do Teorema 3.1.3 onde obtemos que $K^n_{\alpha,\beta}$ é contração para algun n suficientemente grande. Segue-se que existe um único $\tilde{u} \in Z_a$ tal que $\tilde{u} = K_{\alpha,\beta}\tilde{u}$.

Nós definimos o mapa $\Phi : L^p(a,\infty;X) \to L^p(a,\infty;X)$ por

$$\Phi v(t) = \int_0^a S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s,\tilde{u}(s))ds + \int_a^t S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s,v(s))ds, \ \ t \geq a.$$

Resulta de nossa hipótese de que Φ tem um único ponto fixo $v \in L^p(a,\infty;X)$. Consequentemente, para $t = a$ temos que

$$v(a) = h(a) = \tilde{u}(a).$$

Definimos

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & 0 \leq t \leq a, \\ v(t), & t > a, \end{cases}$$

donde obtemos que $u(\cdot) \in L^p(0,\infty;X)$ é a única solução do problema (5.0.9)-(5.0.10). □

Temos o seguinte resultado de compacidade para o problema (5.0.9)-(5.0.10).

Teorema 5.0.6. *Seja* $f : [0,1] \times L^2[0,2\pi] \longrightarrow L^2[0,2\pi]$ *uma função que satisfaz* $(\mathcal{C}_{car})$, (T_1) *e* (T_2) *em* $L^2[0,2\pi]$. *Além disso, assuma que*

$$(F_1)\ \limsup_{R\to\infty} \frac{C_\odot|\tau|}{R}\int_0^1 (s^{\alpha+1} + vs^\beta)\gamma_R(s)ds < 1,$$

onde $C_\odot$ *esta dada em* (5.0.11). *Então existe uma solução branda de* (5.0.9) *em* $[0,1]$ *com a condição inicial* (5.0.10). *Além disso, se a seguinte condição é satisfeita:*

$$(F_2)\ \limsup_{R\to\infty} \frac{C_\odot|\tau|}{R}\int_0^1 (s^{\alpha+1} + vs^\beta)\gamma_R(s)ds < 1,$$

então o conjunto $\mathcal{S}$ *formado pelas soluções brandas de* (5.0.9)-(5.0.10) *é compacto em* $C([0,1];L^2[0,2\pi])$.

Demonstração. Nós definimos o mapa $K_{\alpha,\beta}$ no espaço $C([0,1];L^2[0,2\pi])$ por (5.0.17). Observe que $K_{\alpha,\beta}$ é bem definido e contínuo. Afirmamos que existe $\rho > 0$ de modo $K_{\alpha,\beta} : B_\rho(C([0,1];L^2[0,2\pi])) \longrightarrow B_\rho(C([0,1];L^2[0,2\pi]))$. De fato, se assumirmos que, para todo $\rho > 0$, podemos escolher $u^\rho \in B_\rho(C([0,1];L^2[0,2\pi]))$ de maneira que $\|K_{\alpha,\beta}u^\rho\|_{C([0,1];L^2[0,2\pi])} > \rho$, então

$$1 \leq \limsup_{\rho\to\infty} \frac{C_\odot|\tau|}{\rho} \int_0^1 (s^{\alpha+1} + vs^\beta)\gamma_\rho(s)ds,$$

que é uma contradição com (F_1).

Para provar que $K_{\alpha,\beta}$ é completamente contínua, basta observar que o conjunto $\{K_{\alpha,\beta}u(t) \ : \ u \in B_r(C([0,1];L^2[0,2\pi]))\}$ está incluído no seguinte conjunto relativamente compacto

$$\overline{t\text{co}\{S_{\alpha,\beta}(s)f(\xi,x) \ : \ s,\xi \in [0,t], \ \|x\|_{L^2[0,2\pi]} \leq r\}}$$

e que o conjunto $\{K_{\alpha,\beta}u \ : \ u \in B_r(C([0,1];L^2[0,2\pi]))\}$ é equicontínuo. Usando o teorema de Schauder deduzimos que $K_{\alpha,\beta}$ possui um ponto fixo. Por outra parte, observamos que se condição (F_2) é garantida, então S é limitado. De fato, se houver uma seqüência de funções $u_k \in S$ de tal modo que $R_k = \|u_k\|_{C([0,1];L^2[0,2\pi])} \geq k$. Assim, obtém-se

$$1 \leq \frac{C_\odot|\tau|}{R_k} \int_0^1 (s^{\alpha+1} + vs^\beta)\gamma_{R_k}(s)ds,$$

que pela condição (F_2) é absurdo.

Como S é fechado e $K_{\alpha,\beta}$ é completamente contínuo, deduzimos que S é compacto. □

Exemplo 5.0.3. Examinemos as propriedades de limitação L^p para a equação diferencial fracionária

$${}^cD^\alpha x(t) = -k(x(t) + f(t)), \ t > 0, \ 0 < \alpha < 1, \tag{5.0.19}$$

e também para a versão semilinear associada

$${}^cD^\alpha x(t) = -k(x(t) + G(t, x(t))), \ t > 0, \ 0 < \alpha < 1. \tag{5.0.20}$$

Ambas as equações são consideradas com condições iniciais nulas, onde k é uma constante positiva, $G : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas funções apropiadas. As equações anteriores foram discutidas em detalhes por Burton (2011).

Nós temos o seguinte resultado.

Teorema 5.0.7. *Suponha que $f \in L^p(0,\infty)$. Então o problema* (5.0.19) *com condições iniciais nulas possui uma única solução $u \in L^p(0,\infty)$.*

Demonstração. Usando a abordagem de (MILLER, 1971) temos a solução de (5.0.19) é dado por $u = R * f$, onde R é a função resolvente associada ao kernel $\dfrac{kt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. Por

(MILLER, 1971) obtemos que $R(s) \geq 0$ e $\displaystyle\int_0^\infty R(s)ds = 1$. Consequentemente podemos ver que $\|u\|_p \leq \|f\|_p$. $\square$

Para o problema semilinear (5.0.20) nós temos o seguinte resultado.

Teorema 5.0.8. *Seja $1 \leq p < \infty$. Suponha que G é uma função contínua com $G(\cdot, 0) \in L^p(0,\infty)$ tal que satisfaz uma condição L_G-Lipschitz $|G(t,x) - G(t,y)| \leq L_G|x-y|$ para algum $L_G > 0$, todo $x,\ y \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Se $L_G < 1$, então o problema* (5.0.20) *possui uma única solução branda $u(\cdot)$ em $L^p(0,\infty)$ con $u(0) = 0$.*

Demonstração. Começamos a demonstração definiendo o operador

$$(P\phi)(t) = \int_0^t R(t-s)G(s,\phi(s)),$$

para todo $t \geq 0$, $\phi \in L^p(0,\infty)$.

Sejam ϕ e ψ em $L^p(0,\infty)$ temos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \|(P\phi)(t)\|^p dt &\leq L_G^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|\phi(s)\|ds + \int_0^t \|R(t-s)\|\|G(s,0)\|ds \right)^p dt \\
&\leq 2^p L_G^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|\phi(s)\|ds \right)^p dt + 2^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|G(s,0)\|ds \right)^p dt \\
&\leq 2^p L_G^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|\phi(s)\|^p ds \right) dt + 2^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|G(s,0)\|^p ds \right) dt \\
&\leq 2^p L_G^p \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \|R(t-s)\|dt \right) \|\phi(s)\|^p ds + 2^p \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \|R(t-s)\|dt \right) \|G(s,0)\|^p ds \\
&\leq 2^p L_G^p \|\phi\|_{L^p}^p + 2^p \|G(\cdot,0)\|_{L^p}^p,
\end{aligned}$$

obtemos,

$$\|P\phi\|_{L^p} \leq 2\left(L_G\|\phi\|_{L^p} + \|G(\cdot,0)\|_{L^p} \right).$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\|P\phi - P\psi\|_{L^p}^p &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\left[G(s,\phi(s)) - G(s,\psi(s))\right]\|_X ds \right)^p dt \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t L_G \|R(t-s)\|\|\phi(s) - \psi(s)\|_X ds \right)^p dt \\
&\leq L_G^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \|R(t-s)\|ds \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t \|R(t-s)\|\|\phi(s) - \psi(s)\|_X^p ds \right) dt \\
&\leq L_G^p \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \|R(t-s)\|dt \right) \|\phi(s) - \psi(s)\|_X^p dsdt \\
&\leq L_G^p \int_0^\infty \|\phi(s) - \psi(s)\|_X^p dsdt,
\end{aligned}$$

donde

$$\|P\phi - P\psi\|_{L^p} \leq L_G\|\phi(s) - \psi(s)\|_{L^p}.$$

A primeira estimativa mostra que P esta bem definido e da segunda deduzimos que P é uma contração. Isto completa a demonstração do Teorema 5.0.8. $\square$

Exemplo 5.0.4. Consideremos a equação do oscilador fracionário

$$D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t) + f(t),\ t \geq 0,\ \rho > 0,\ 1 < \alpha < 2, \tag{5.0.21}$$

com condições iniciais

$$(g_{2-\alpha} * u)(0) = 0,\ (g_{2-\alpha} * u)'(0) = 0, \tag{5.0.22}$$

onde D_t^α denota o derivada fracionária de Riemann-Liouville. Por (ARAYA; LIZAMA, 2008), existe uma única solução do problema acima a qual é dada por

$$u(t) = \int_0^t s_\alpha(t-s) f(s) ds,\ t \geq 0,$$

com

$$\begin{aligned} s_\alpha(t) &= \frac{1}{\pi}\text{sen}(\pi\alpha)\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\alpha}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha\rho^\alpha(\pi\alpha) + \rho^{2\alpha}} \\ &\quad - \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}} e^{t\rho\cos(\pi/\alpha)} \cos\left(t\rho\text{sen}\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}\right),\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Por (ARAYA; LIZAMA, 2008, Corolário 3.7), existe $\varphi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$ tal que $|s_\alpha(t)| \leq \varphi_\alpha(t)$, $t \geq 0$. Se $f \in L^p(0,\infty)$, então $u \in L^{p'}(0,\infty)$, para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ e a estimativa seguinte se verifica

$$\begin{aligned} \|u\|_{p'} &\leq \left(\frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha\cos\frac{\pi}{\alpha}}\right)^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\pi}|\text{sen}\pi\alpha|\int_0^\infty \frac{r^\alpha}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha + \rho^{2\alpha}} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

De fato, notamos que

$$|u(t)|^{p'} \leq \|\varphi_\alpha\|_1^{\frac{p'}{q}} \|\varphi_\alpha\|_\infty^{\frac{p'-p}{p}} \|f\|_p^{p'-p} \int_0^t \varphi_\alpha(t-s)|f(s)|^p ds,\ t \geq 0,$$

donde

$$\|u\|_{p'} \leq \|\varphi_\alpha\|_1^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}} \|\varphi_\alpha\|_\alpha^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|f\|_p.$$

Agora, consideramos a versão semilinear do problema (5.0.21), isto é

$$D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t) + f(t, u(t)),\ t \geq 0, \tag{5.0.23}$$

com condições iniciais (5.0.22), onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz um condição L_f-Lipschitz na segunda variável e $f(\cdot, 0) \in L^p$.

Teorema 5.0.9. *Com as condições anteriores, o problema* (5.0.23)-(5.0.22) *tem uma única* L^p *solução sempre que*

$$L_f\left(\frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha\cos\frac{\pi}{2}}\right) < 1.$$

Demonstração. Definimos

$$(P^\alpha\phi)(t) = \int_0^t s_\alpha(t-s)f(s,\phi(s))ds, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

e $\phi \in L^p(0,\infty)$. O resultado é uma conseqüência das seguintes duas estimativas:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |(P^\alpha\phi)(t)|^p dt \\
&\quad \leq \int_0^\infty (2L_f)^p \left(\int_0^t \varphi_\alpha(t-s)|\phi(s)|ds\right)^p dt + \int_0^\infty 2^p \left(\int_0^t \varphi_\alpha(t-s)|f(s,0)|ds\right)^p dt \\
&\quad \leq 2^p\|\varphi_\alpha\|_1^{\frac{p}{q}} \left(L_f^p\int_0^\infty \left(\int_s^\infty \varphi_\alpha(t-s)dt\right)|\phi(s)|^p ds + \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \varphi_\alpha(t-s)dt\right)|f(s,0)|ds\right) \\
&\quad \leq 2^p\|\varphi_\alpha\|_1^{\frac{p}{q}+1} \left(L_f^p\int_0^\infty |\phi(s)|^p ds + \int_0^\infty |f(s,0)|ds\right)
\end{aligned}$$

dai segue que

$$\|P^\alpha\phi\|_{L^p} \leq 2\|\varphi_\alpha\|_1 \left(L_f|\phi|_{L^p} + |f(\cdot,0)|_{L^p}\right).$$

Sejam ϕ e ψ em L^p,

$$\begin{aligned}
\|P^\alpha\phi - P^\alpha\phi\|_{L^p}^p &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \|S_{\alpha,\beta}(t-s)\left[f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\right]\|ds\right)^p dt \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t L_f\|S_{\alpha,\beta}(t-s)\|\phi(s)-\psi(s)\|ds\right)^p dt \\
&\leq L^p\int_0^\infty \left(\int_0^t |\varphi_\alpha(t-s)|ds\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t |\varphi_\alpha(t-s)\|\phi(s)-\psi(s)|^p ds\right) dt \\
&\leq L^p\|\varphi_\alpha\|_1^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty |\varphi_\alpha(t-s)|dt\right)|\phi(s)-\psi(s)|^p ds \\
&\leq L^p\|\varphi_\alpha\|_1^{\frac{p}{q}+1}\|\phi-\psi|_{L^p}^p,
\end{aligned}$$

donde temos

$$\|P^\alpha\phi - P^\alpha\psi\|_p \leq L_f\|\varphi_\alpha\|_1\|\phi-\psi\|_p.$$

□

Exemplo 5.0.5. Aplicamos nossas técnicas a equação do fluxo de calor não linear em uma barra homogênea de comprimento unitário de material com memória com temperatura $u = u(t,x)$ mantida em zero nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Assumimos que a história de u é prescrita para $t \leq 0$ e $0 \leq x \leq 1$. (Veja (GRIMMER; LIU, 1994; GRIPENBERG; LONDEN; STAFFANS, 1990; NOHEL, 1981)), $u(0,x) = u_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$, é a distribuição de temperatura inicial, $f(t,x)$ é o calor fornecido por el medio externo. De acordo com a teoria de fluxo em materiais com memória, o fluxo de calor é tomado como

$$q(t,x) = -u_x(t,x) - \int_0^t b(t-s)u_x(s,x)ds, \; t \geq 0, \; 0 < x < 1,$$

onde os índices denotam diferenciação em relação a x. Ao escrever a função q é assumido por simplicidade e sem perda de generalidade que a história da temperatura u é considerado como sendo zero para $t < 0$. Para detalhes e referências à teoria física subjacente, encaminhamos ao leitor o trabalho de (NOHEL, 1981). A lei de balance baixo equilíbrio de calor é então $u_t = -\dfrac{\partial q}{\partial x} + f$. Daí a temperatura u satisfaz o problema do valor do inicial.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(u(t,x) \\ &+\int_0^\infty b(t-s)u(s,x)ds\Big) + f(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1], \end{aligned} \tag{5.0.24a}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0,\ t \geq 0, \tag{5.0.24b}$$

$$u(0,x) = u_0(x) = 0,\ x \in [0,1]. \tag{5.0.24c}$$

Se consideremos o problema (5.0.24a)-(5.0.35a) em $X = L^2(0,1)$, a função de relaxamento do fluxo de calor $b(\cdot)$ tal que $b \in L^1(\mathbb{R}^+)$, e nós definimos $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ então A gera um semigrupo analítico em X e para qualquer $\zeta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\Lambda(\zeta) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ |\arg\lambda| < \zeta\} \subseteq \rho(A)$. Agora defina $\widehat{b}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}b(t)dt$, $R(0) = I$ (identidade) e

$$R(t)u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\left(\lambda I - A(1+\widehat{b}(\lambda))\right)^{-1} ud\lambda,\ u \in X,\ t > 0,$$

onde Γ consiste dos caminhos Γ_1, Γ_2 e Γ_3 com $\Gamma_1 = \{re^{i\theta}\ :\ r \geq 1\}$, $\Gamma_2 = \{e^{i\beta}\ :\ -\theta \leq \beta \leq \theta\}$ e $\Gamma_3 = \{re^{-i\theta}\ :\ r \geq 1\}$ com $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, de modo que, para alguns $\zeta, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\lambda \in \Lambda(\zeta)$ implica $1 + \widehat{b}(\lambda)$ existe e u é não zero e $\lambda(1+\widehat{b}(\lambda))^{-1} \in \Lambda(\beta)$. Sob as condições anteriores, temos que se $u_0 \in D(A)$ então

$$u(t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds,\ t \geq 0$$

é solução de (5.0.24a)-(5.0.35c) (Veja (GRIMMER; LIU, 1994) para detalhes).

De (GRIMMER; LIU, 1994, Seção 3) existe uma constantes $\omega,\ \xi > 0$ tal que $\|R(t)\|_{B(X)} \leq \omega e^{-\zeta t}$ para todo $t \geq 0$. Se escolhermos $f \in L^p(0,\infty;X)$, $u_0 \in D(A)$, então as funções $t \longrightarrow R(t)u_0$ e $t \longrightarrow \displaystyle\int_0^t R(t-s)f(s)ds$ pertenecem a $L^{p'}(0,\infty;X)$, para todo $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^\cdot R(\cdot - s)f(s)ds\right\|_{L^{p'}(0,\infty;X)} &\leq \omega^{p'}\int_0^\infty\left(\int_0^t e^{\zeta(t-s)}\|f(t)\|ds\right)^{p'} dt \\ &\leq \omega^{p'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{p'}{q}}\int_0^\infty\left(\int_0^t e^{-\zeta(t-s)}\|f(s)\|^p ds\right)^{\frac{p'}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{1+\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\omega\|f\|_{L^p(0,\infty)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|R(\cdot)u_0\|_{L^{p'}(0,\infty;X)} &\leq \int_0^\infty \|R(t)\|^{p'}\|u_0\|_X^{p'}dt \\ &\leq \left(\frac{1}{\zeta p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\omega\|u_0\|_X. \end{aligned}$$

Portanto a solução $u(\cdot) \in L^{p'}(0, \infty; X)$.

Exemplo 5.0.6. Consideramos a equação integro-diferencial parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t,x) + \beta(0)\frac{\partial \theta}{\partial t}(t,x) = \alpha(0)\Delta\theta(t,x) - \int_{-\infty}^{t} \beta'(t-s)\frac{\partial \theta}{\partial s}(s,x)ds + \int_{-\infty}^{t} \alpha'(t-s)\Delta\theta(s,x)ds + \alpha(t)b(\theta(t,\cdot))(x). \tag{5.0.25}$$

Esta equação surge no estudo da condução de calor em materiais com memória (veja (DE ANDRADE; CUEVAS; HENRÍQUEZ, 2012; GRIMMER, 1982; GURTIN; PIPKIN, 1968)). Observe que $\beta(t)$ (respectivamente $\alpha(t)$) é chamada de função de relaxamento da energia (respectivamente Stress), $\theta(t,x)$ denota a distribução de temperatura do corpo no instante t e na posição x. Se assumirmos que $\beta(t) \equiv 0$ então (5.0.25) é a equação que rege movimentos longitudinais unidimensionais de uma barra viscoeslastica com densidade 1. Suponha que Ω é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^3$ com fronteira C^∞. Assuma também que α e β são funções de valores reales de classe C^2 em $[0,\infty)$ com $\alpha(0)$ e $\beta(0)$ positivo. Abreviando a notação, representando por $\theta(t)$ a função $\theta(t,x)$ para $x \in \Omega$ e assumindo que $\theta(t,x)$ é conhecida para todo $t \le 0$ podemos representar o problema (5.0.25) como

$$\begin{aligned} \theta''(t) + \beta(0)\theta'(t) &= \alpha(0)\Delta\theta(t) - \int_0^t \beta'(t-s)\theta'(s)ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha'(t-s)\Delta\theta(s)ds + a(t)b(\theta(t)),\ t \ge 0, \end{aligned} \tag{5.0.26}$$

onde Δ é o laplaciano em Ω com condição de fronteira $\theta|_{\partial\Omega} = 0$.

Consideramos (5.0.26) com condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \eta_0. \tag{5.0.27}$$

Para modelar o problema (5.0.26)-(5.0.27) consideramos o espaço $X = H_0^1 \times L^2(\Omega)$, e o operador linear

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \alpha(0)\Delta & -\beta(0)I \end{pmatrix}, \tag{5.0.28}$$

no domínio $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ e definimos $B(t) = G(t)A$, onde

$$G(t) = [G_{ij}(t)] : H_0^1(\omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

para $t \ge 0$, é definido por

$$\begin{cases} G_{1,1}(t) = G_{12}(t) = 0, \quad G_{21}(t) = -\beta'(t)I + \beta(0)\dfrac{\alpha'(0)}{\alpha(0)}, I \\ G_{22}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}I. \end{cases}$$

Com a introdução da variável

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{5.0.29}$$

e com a definição de

$$F(t,u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t)b(\theta(t)) \end{pmatrix}, \tag{5.0.30}$$

a equação (5.0.26) com condição iniciais

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é reduzida a seguinte equação Volterra integro-diferencial

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + F(t,u(t)),\ t \geq 0. \tag{5.0.31}$$

Se define de (CHEN, 1979) que o operador A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tal que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{B}(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))} \leq \widetilde{M}e^{-\gamma t}$$

para todo $t \geq 0$ e $\widetilde{M}$ e γ talque $\widetilde{M} \geq 1$ e $\gamma > 0$. Assuma que $\alpha'(t)e^{\gamma t}$, $\alpha''(t)e^{\gamma t}$, $\beta'(t)e^{\gamma t}$ e $\beta''(t)e^{\gamma t}$ são funções limitadas e uniformemente contínuas em $[0,\infty)$ e que

$$|\beta'(t)| + \max\{\beta(0),1\}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)} \leq \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{2\widetilde{M}},$$

$$|\beta''(t)| + \max\{\beta(0),1\}\frac{\alpha''(t)}{\alpha(0)} \leq \frac{\gamma^2 e^{-\gamma t}}{4\widetilde{M}}.$$

Então, por (GRIMMER, 1982, Teorema 4.1), existe um operador resolvent $R(t)$ para a equação (5.0.31) que satisfaz

$$\|R(t)\|_{\mathcal{B}(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))} \leq \widetilde{M}e^{\frac{-\gamma}{2}t},\ t \geq 0. \tag{5.0.32}$$

Para mais informações á respeito do operador resolvente, encaminhamos o leitor para (DESCH; GRIMMER; SCHAPPACHER, 1984; GRIMMER, 1982) e referências nele contidas.

Observação 5.0.3. (DESCH; GRIMMER; SCHAPPACHER, 1984) Uma função $u : [0,\infty) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é chamada de solução branda de (5.0.31) se

$$u(t) = R(t)u(0) + \int_0^t R(t-s)F(s,u(s))ds,\ t \geq 0.$$

Teorema 5.0.10. *Assuma que* $a \in L^p(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty)$ *e que a função* $b : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *satisfaz a condição Lipschitz*

$$\|b(\theta_1) - b(\theta_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_b\|\theta_1 - \theta_2\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $\theta_1,\ \theta_2 \in H_0^1(\Omega)$*. Se* $(2\widetilde{M}/\widetilde{\gamma})\|a\|_\infty L_b < 1$*, então o problema* (5.0.26)-(5.0.27) *possui uma única solução branda em* L^p*.*

Demonstração. Definimos o operador Ψ no espaço $L^p(0,\infty; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ por

$$(\Psi u)(t) = R(t)u(0) + \int_0^t R(t-s)F(s,u(s))ds, \ t \geq 0, \tag{5.0.33}$$

onde $u \in L^p(0,\infty; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$. Temos as seguintes estimativas responsables pelo fato que Ψ esteja bem definido

$$\int_0^\infty \|R(t)u(0)\|^p_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} dt \leq \frac{\alpha \widetilde{M}^p}{\gamma p} \|u(0)\|^p_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left\| \int_0^t R(t-s)F(s,u(s))ds \right\|^p_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} dt & \\ \leq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{p}{q}+1} (2\widetilde{M}\|a\|_\infty L_b)^p \int_0^\infty \|u(0)\|^p_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} ds & \\ + \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{p}{q}+1} (2\widetilde{M}\|b(0)\|_{L^2(\Omega)})^p \int_0^\infty |a(s)|^p ds. &\end{aligned}$$

Sejam u e v funções em $L^p(0,\infty; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ logo obtemos

$$\|\Psi u - \Psi v\|_{L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))} \leq \frac{2}{\gamma}\widetilde{M}\|a\|_\infty L_b \|u-v\|_{L^p(0,\infty;H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))} \tag{5.0.34}$$

Como $\frac{2}{\gamma}\widetilde{M}\|a\|_\infty L_b < 1$, Ψ é uma contração, então existe uma única solução branda $u(\cdot)$ do problema (5.0.26)-(5.0.27) tal que $u(\cdot) \in L^p(0,\infty; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$. $\square$

Exemplo 5.0.7. A viscoelasticidade é a propriedade de materiais que apresentam características viscosa e elástica quando submetidos à deformação. Um material viscoelástico retornará à sua forma original após a remoção de qualquer força de deformação. A viscoelasticidade pode ser indicada em termos de modelos mecânicos. Os modelos geram relações constitutivas que são equações integrais. O seguinte problema é um exemplo típico de viscoelasticidade (PRÜSS, 2013, Seção 5.4).

$$u_t(t,x) = \int_0^t da(\tau)u_{xx}(t-\tau,x) + h(t,x), \ t \geq 0, \ x \in [0,1], \tag{5.0.35a}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \ t \geq 0, \tag{5.0.35b}$$

$$u(0,x) = u_0(x) = 0, \ x \in [0,1]. \tag{5.0.35c}$$

Aqui $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada em cada intervalo compacto com $a(0) = 0$. Para obter uma formulação como uma equação integral de evolução abstrata, nós escolhemos o espaço de funções $X = L^2[0,1]$, defina o operador A por $Au(x) = u_{xx}(x)$ com domínio $D(A) = \{u \in L^2[0,1] \ : \ u_{xx} \in L^2[0,1], \ u(0) = u(1) = 0\}$. É bem sabido que A gera um semigrupo analítico limitado com $0 \in \rho(A)$.

Nós temos o seguinte resultado.

Teorema 5.0.11. *Suponha que $a(t)$ é 1-Regular, de tipo positivo, completamente monotono e satisfazendo $a(\infty) = \lim_{t\to\infty} a(t) > 0$ (veja (PRÜSS, 2013)). Seja $g : [0,\infty) \times L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ uma função contínua tal que*

$$\|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\|_{L^2[0,1]} \leq L_g \|\varphi - \psi\|_{L^2[0,1]}$$

para todo $\varphi, \psi \in L^2[0,1]$ e cada $t \geq 0$, onde $L_g \in \mathbb{R}^+$ é suficientemente pequena então o problema

$$u_t(t,x) = \int_0^t da(\tau) Au(t-\tau,x) + h(t,x), \; t \geq 0, \; x \in [0,1] \tag{5.0.36a}$$

$$u(0,x) = v_0 \in L^2[0,1], \tag{5.0.36b}$$

possui uma única solução branda em $L^p((0,\infty); L^2[0,1])$.

Demonstração. Como A gera um semigrupo limitado analítico com $0 \in \rho(A)$ e a é completamente monotônico e $a(\infty) > 0$. Segue de (PRÜSS, 2013, Corolário 10.2) que A gera uma resolvente $S(t)$ uniformemente integrable. Usando o fato que $a(t)$ é 1-regular segue de (LIZAMA; VERGARA, 2004, Corolário 3) que $S(t)$ é uniformemente estável, isto é $\lim_{t\to\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{B}(L^2[0,1])} = 0$. Definimos a aplicação

$$\Phi u(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s) g(s, u(s)) ds$$

em $L^p(0,\infty; L^2[0,1])$. Podemos ver que está bem definido e Φ é uma contração para L_g é suficiente pequeno. $\square$

Exemplo 5.0.8. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado compacto e suave $\partial\Omega$ que é ocupado por um fluido viscoelástico incompressível. Assumindo que o fluido está em repouso para $t \geq 0$, na velocidade $u(t,x)$ é modelado pela equação

$$u_t(t,x) = \int_0^t \Delta u(t-\tau,x) da(\tau) + \nabla p(t,x) + g(t,x), \; x \in \Omega, \; t \geq 0, \tag{5.0.37a}$$

$$(\nabla \circ u)(t,x) = 0, \text{ para } x \in \Omega, \; t > 0, \tag{5.0.37b}$$

$$u(t,x) = 0, \text{ para } x \in \Omega, \; t > 0, \tag{5.0.37c}$$

$$u(0,x) = v_0(x), \text{ para } x \in \Omega. \tag{5.0.37d}$$

Aqui $p(t,x)$ denota a pressão hidrostática; $g(t,x)$ um campo de força externo; $v_0(x)$ o campo de velocidade inicial; $\nabla\circ$ designa a divergência em relação a variável x, a condição

$\nabla \circ u = 0$ significa que o fluido é homogêneo e incompressivel. Nesse caso, chamamos u livre de divergência ou selenoidal. O módulo de relaxamento do estresse $da(t)$ de um material viscoelástico linear é de forma geral

$$a(t) = a_0 + a_\infty t + \int_0^t a_1(s)ds,\ t \geq 0,$$

onde $a_0,\ a_\infty > 0$ são constantes e $a_1(t) \geq 1$ não é crescente e positiva, $\lim_{t\to\infty} a_1(t) = 0$. O caso $a(t) \equiv a_0$ para $t > 0$ corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade $a_0 > 0$ então a equação obtida é a equação linear de Navier-Stokes (PRÜSS, 2013) que é bem conhecida.

Observamos o problema (5.0.37a)-(5.0.37d) pode ser reescrita como uma equação de tipo Volterra da forma

$$u(t) = \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t),\ t \geq 0,$$

em $X = L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (O espaço de todos os campos de vetores livres de divergência), com $A = P\Lambda$, o operador de Stokes, aqui P é a projeção de Helmholtz;

$$D(A) = W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

e $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ é definido por

$$f(t) = v_0 + \int_0^t g(s)ds$$

e $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $g(s)(x) = g(s,x)$, $v_0 \in L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. É bem sabido que o operador de Stokes é auto-adjunto e negativo semi definido e, portanto, dá origem a uma família limitada de cosenos em $L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Desde que Ω seja um domínio limitado obtemos que operador Stokes é inversível.

Nós temos o seguinte resultado.

Teorema 5.0.12. *Sejam $a_1 \in C^1(0,\infty)$ e $-\dot{a}_1(t)$ é não crescente e convexo e $a(t) \neq a_\infty t$. Se a força externa $g(\cdot)$ pertenece a L^p, então o problema* (5.0.37a)-(5.0.37d) *tem uma única solução branda em L^p.*

Demonstração. Por (ARENDT; PRÜSS, 1992, Teorema 7.4) o problema (5.0.37a)-(5.0.37d) admite uma resolvente $S \in L^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{B}(L_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n))) \cap C_0(\mathbb{R}^+; \mathcal{B}(\mathbb{R}^+; \mathcal{B}(L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))))$. Considerando $u(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)g(s)ds,\ t \geq 0$, o problema possui uma única solução branda. □

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. et al. Asymptotic periodicity for hyperbolic evolution equations and applications. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 269, p. 169–195, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

APARCANA, A. et al. Fractional evolution equations and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, 2017. Citado na página 9.

APARCANA, A.; CUEVAS, C.; SOTO, H. About a composite fractional relaxation equation via regularized families. *Scientia Iranica International Jounal of Science & Technology*, 2018. Citado na página 9.

ARAYA, D.; LIZAMA, C. Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 69, n. 11, p. 3692–3705, 2008. Citado na página 60.

ARENDT, W. et al. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. [S.l.]: Springer Basel AG, 2001. v. 96. Citado na página 12.

ARENDT, W.; PRÜSS, J. Vector-valued Tauberian theorems and asymptotic behavior of linear Volterra equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 412–448, 1992. Citado na página 67.

BAZHLEKOVA, E. G. *Fractional evolution equations in Banach spaces*. Tese (Doutorado), 2001. Citado na página 18.

BEYN, W.-J.; LORENZ, J. Stability of viscous profiles: proofs via dichotomies. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 18, n. 1, p. 141–195, 2006. Citado na página 24.

BOHR, H. *Almost periodic functions*. [S.l.]: Chelsea Publishing Company, 1933. Citado na página 13.

BURTON, T. Fractional differential equations and Lyapunov functionals. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 74, n. 16, p. 5648–5662, 2011. Citado na página 58.

CAICEDO, A. et al. Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach Spaces. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 1, p. 1–24, 2012. Citado na página 14.

CARDOSO, F.; CUEVAS, C. Exponential dichotomy and boundedness for retarded functional difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 15, n. 3, p. 261–290, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 31.

CHEN, G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 17, n. 1, p. 66–81, 1979. Citado na página 64.

CIORANESCU, I.; LUMER, G. On $K(t)$-convoluted semigroups. *Recent Developments in Evolution Equations*, CRC Press, v. 324, p. 86, 1995. Citado na página 18.

CORDUNEANU, C. *Almost periodic oscillations and waves*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. Citado na página 13.

CUESTA, E. Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Citeseer, p. 277–285, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 9, 19 e 23.

CUESTA, E.; LUBICH, C.; PALENCIA, C. Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equations. *Mathematics of Computation*, v. 75, n. 254, p. 673–696, 2006. Citado na página 9.

CUESTA, E.; PALENCIA, C. A numerical method for an integro-differential equation with memory in Banach spaces: Qualitative properties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 41, n. 4, p. 1232–1241, 2003. Citado na página 9.

CUEVAS, C.; DE SOUZA, J. C. S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 22, n. 6, p. 865–870, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 24.

CUEVAS, C.; DE SOUZA, J. C. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 1683–1689, 2010. Citado na página 14.

CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, H. R.; SOTO, H. Asymptotically periodic solutions of fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 236, p. 524–545, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 9, 16, 17, 27 e 48.

CUEVAS, C.; LIZAMA, C. S-asymptotically ω-periodic solutions for semilinear Volterra equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 33, n. 13, p. 1628–1636, 2010. Citado na página 42.

CUEVAS, C.; LIZAMA, C. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for two-times fractional order differential equations. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, v. 37, n. 5, 2013. Citado na página 54.

DE ANDRADE, B.; CUEVAS, C. S-asymptotically ω-periodic and asymptotically ω-periodic solutions to semi-linear Cauchy problems with non-dense domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 72, n. 6, p. 3190–3208, 2010. Citado na página 14.

DE ANDRADE, B.; CUEVAS, C.; HENRÍQUEZ, E. Asymptotic periodicity and almost automorphy for a class of Volterra integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 35, n. 7, p. 795–811, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 63.

DE ANDRADE, B. et al. Asymptotic Periodicity for Flexible Structural Systems and Applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, Springer, v. 143, n. 1, p. 105–164, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 44, 48 e 54.

DE BRUIJN, N. The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 71, n. 2, p. 313–330, 1949. Citado na página 14.

DESCH, W.; GRIMMER, R.; SCHAPPACHER, W. Some considerations for linear integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 104, n. 1, p. 219–234, 1984. Citado na página 64.

DIESTEL, J.; UHL, J. J. *Vector measures.* [S.l.]: American Mathematical Soc., 1977. Citado na página 12.

FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *Revue Sci.(Rev. Rose Illus.)*, v. 79, p. 341–354, 1941. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

FRÉCHET, M. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. *CR Acad. Sci.(Paris)*, v. 213, p. 520–522, 1941. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

GORENFLO, R. et al. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications.* [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 10.

GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. *Fixed Point Theory.* [S.l.]: Springer, 2003. (Springer monographs in mathematics). ISBN 9780387001739,0387001735. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

GRIMMER, R.; LIU, J. H. Limiting equations of integrodifferential equations in Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 78–91, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

GRIMMER, R. C. Resolvent operators for integral equations in a Banach space. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 273, n. 1, p. 333–349, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.

GRIPENBERG, G.; LONDEN, S.-O.; STAFFANS, O. *Volterra integral and functional equations.* [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. v. 34. Citado na página 61.

GURTIN, M. E.; PIPKIN, A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer, v. 31, n. 2, p. 113–126, 1968. Citado na página 63.

HENRÍQUEZ, H. R.; CASTILLO, G. The Kneser property for the second order functional abstract Cauchy problem. *Integral Equations and Operator Theory*, Springer, v. 52, n. 4, p. 505–525, 2005. Citado na página 31.

HENRÍQUEZ, H. R.; PIERRI, M.; TÁBOAS, P. On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 343, n. 2, p. 1119–1130, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 9, 14 e 15.

HENRÍQUEZ, H. R.; POBLETE, V.; POZO, J. C. Mild solutions of non-autonomous second order problems with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 412, n. 2, p. 1064–1083, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 51.

KARCZEWSKA, A.; LIZAMA, C. Solutions to stochastic fractional relaxation equations. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2009, n. T136, p. 014030, 2009. Citado na página 38.

KEYANTUO, V. et al. Asymptotic behavior of fractional order semilinear evolution equations. *Differential and Integral Equations*, Khayyam Publishing, Inc., v. 26, n. 7/8, p. 757–780, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

KOSTIC, M. Regularized-resolvent families: Regularity and local properties. In: HINDAWI PUBLISHING CORPORATION. *Abstract and Applied Analysis*. [S.l.], 2009. v. 2009. Citado na página 18.

LIZAMA, C. Regularized solutions for abstract Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 243, n. 2, p. 278–292, 2000. Citado na página 17.

LIZAMA, C. An operator theoretical approach to a class of fractional order differential equations. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 184–190, 2011. Citado na página 18.

LIZAMA, C.; N'GUÉRÉKATA, G. M. Mild solutions for abstract fractional differential equations. *Applicable Analysis*, Taylor & Francis, v. 92, n. 8, p. 1731–1754, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 18, 38, 39, 40 e 49.

LIZAMA, C.; PRADO, H. On duality and spectral properties of (a, k)-regularized resolvents. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 139, n. 3, p. 505–517, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 38.

LIZAMA, C.; VERGARA, V. Uniform stability of resolvent families. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 132, n. 1, p. 175–181, 2004. Citado na página 66.

MILLER, R.-K. Nonlinear Volterra integral equations. WA Benjamin, Inc., American Elsevier Publishing Co., 1971. Citado 4 vezes nas páginas 43, 49, 58 e 59.

NOHEL, J. A. Nonlinear Volterra equations for heat flow in materials with memory. *Integral and functional differential equations*, Dekker New York/Basel, v. 67, p. 3–82, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

PIERRI, M.; ROLNIK, V. On Pseudo-Asymptotically Periodic Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge Univ Press, v. 87, n. 02, p. 238–254, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.

PRÜSS, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. [S.l.]: Birkhäuser, 2013. v. 87. Citado 7 vezes nas páginas 9, 17, 19, 20, 65, 66 e 67.

SIMON, J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Annali di Matematica Pura Ed Applicata*, Springer, v. 146, n. 1, p. 65–96, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 12, 33 e 36.

STOJANOVIĆ, M.; GORENFLO, R. Nonlinear two-term time fractional diffusion-wave problem. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 3512–3523, 2010. Citado na página 53.

ZAIDMAN, S. *Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces*. [S.l.]: Pitman Advanced Pub. Program, 1985. v. 126. Citado na página 14.

ZHANG, C. *Almost Periodic Type Functions and Ergodicity*. [S.l.]: Springer Science & Business, 2003. Citado na página 16.