



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gilson Simões Ferreira Júnior

Um Modelo Matemático de Formação de Tecido

RECIFE

2018

Gilson Simões Ferreira Júnior

Um Modelo Matemático de Formação de Tecido

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Solange da Fonseca Rutz

RECIFE

2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

F383m Ferreira Júnior, Gilson Simões
Um modelo matemático de formação de tecido / Gilson Simões Ferreira Júnior. – 2018.
81 f.

Orientadora: Solange da Fonseca Rutz.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Formação de tecidos. I. Rutz, Solange da Fonseca (orientadora). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2018-043

GILSON SIMÕES FERREIRA JÚNIOR

UM MODELO MATEMÁTICO DE FORMAÇÃO DE TECIDO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 23/02/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Solange da Fonseca Rutz (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Antonio Nóbrega Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (Examinador Externo)
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Peter Louis Antonelli (Examinador Externo)
Universidade de Alberta

À minha família

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à prof^a Dr^a Solange da Fonseca Rutz pela excelente orientação e por todo apoio prestado durante o processo de execução deste trabalho. Sempre muito atenciosa e presente em todos os momentos. Também gostaria de agradecer ao prof^o Dr^o Peter Louis Antonelli pela sua colaboração neste trabalho e pelos conselhos e ensinamentos durante algumas conversas presenciais e trocas de e-mails. Estas duas pessoas foram fundamentais na construção deste trabalho.

Agradeço aos meus pais e as minhas irmãs por todo apoio que eles me deram não só durante a execução deste trabalho, mas também em toda minha vida acadêmica. Sempre muito paciêntes e compreensivos com todas as minhas ausências por conta do estudo.

Gostaria de agradecer à todos os meus amigos da UFPE. Em particular, aos amigos da 212. Foram muitos momentos de alegrias e tristezas que compartilhamos uns com ou outros e com isso criamos um forte vínculo de amizade que irei levar para toda a minha vida. Também gostaria de agradecer aos amigos fora da UFPE. Em particular, gostaria de citar o amigo José Carlos (Zé) por todos os nossos “papo cabeça”.

Gostaria de agradecer à todos os professores do Departamento de Matemática da UFPE pelos seus ensinamentos durante toda a minha vida acadêmica. Em particular, gostaria de citar o nome do prof^o Dr^o Antonio Fernando Pereira de Sousa (Tony), que me orientou durante o Mestrado, e do prof^o Dr^o Eduardo Shirlippe Góes Leandro, que me apresentou aos professores Solange e Peter.

Agradeço também a todos os professores que fazem parte da minha segunda casa, o Departamento de Matemática da UFRPE. Por todo apoio que eles me prestaram para a conclusão deste trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Um projeto que vem sendo desenvolvido por Peter Louis Antonelli e Solange da Fonseca Rutz é modelar matematicamente a evolução dos organismos multicelulares. Seguindo Lynn Margulis, as células eucarióticas, os blocos de construção dos organismos multicelulares, evoluíram a partir de uma interação ecológica entre as proto-mitocôndrias parasitárias e uma bactéria que mais tarde se tornaria a própria célula eucariótica. Um modelo matemático abordando o processo de evolução da célula eucariótica foi apresentado por Peter Louis Antonelli, Solange da Fonseca Rutz e Carlos Eduardo Hirakawa. O próximo passo no processo evolutivo é a formação de tecido a partir de células eucariotas. Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático de formação de tecido, estendendo a termodinâmica do Mecanismo da Adesão Diferenciada de Malcolm Steinberg para incluir estruturas da membrana celular. O trabalho sobre a modelagem da Teoria Endosimbiótica de Lynn Margulis é revisado e uma descrição matemática do Mecanismo de Simbioticismo de Ivan Emmanuel Wallin é apresentado usando a Teoria dos Referenciais Não-Holonômicos de Finsler e a Teoria da Dinâmica Modular Analítica para sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem (SODE's). Os tecidos aqui são considerados como meios deformáveis em analogia com a mecânica do contínuo.

Palavras-chave: Formação de tecidos. Células eucarióticas. Simbioticismo. Referenciais não-holonômicos. Teoria KCC. Espaços de Randers.

Abstract

A project that has been developed by Peter Louis Antonelli and Solange da Fonseca Rutz is the mathematical modelling the evolution of multicellular organisms. Following Lynn Margulis, eukaryote cells, the building blocks of multicellular organisms, evolved from an ecological interaction between the parasitic proto-mitochondria and a bacterium that would become the cell. A mathematical model addressing the process of evolution of the eukaryote cell was presented by Peter Louis Antonelli, Solange da Fonseca Rutz and Carlos Eduardo Hirakawa. The next step in the evolutionary process is the tissue formation from eukaryote cell. In this work, we presented a mathematical model of tissue formation, extending Malcolm Steinberg's thermodynamic Differential Adhesion Mechanism to include cell membrane structures. The work on modeling the Lynn Margulis serial endosymbiosis theory of the origin of eukaryote cells is reviewed and a mathematical description of Ivan Emmanuel Wallin's mechanism of symbioticism is presented using Finslerian anholonomic frame theory and Analytical Modular Dynamics theory for systems of second order ordinary differential equations (SODE's). Tissues are here regarded as strained media, by analogy with continuum mechanics.

Keywords: Tissue formation. Eukaryote cells. Symbioticism. Anholonomic frames. KCC-theory. Randers Spaces.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	12
2.1	A Conexão de Berwald no Fibrado Tangente	12
2.1.1	<i>O Fibrado Tangente</i>	12
2.1.2	<i>A Distribuição Vertical</i>	14
2.1.3	<i>Conexão Não-Linear</i>	16
2.1.4	<i>Curvatura e Torção de uma Conexão Não-Linear</i>	18
2.1.5	<i>A Conexão de Berwald no Fibrado Tangente</i>	20
2.2	Teoria KCC de um Semispray	23
2.2.1	<i>Semisprays</i>	23
2.2.2	<i>Teoria KCC de um Semispray</i>	27
2.3	Geometria Projetiva	31
2.3.1	<i>Mudança Projetiva de Parâmetro</i>	31
2.3.2	<i>Os invariantes Projetivos</i>	33
2.4	Espaços de Finsler	37
2.4.1	<i>Função Métrica</i>	37
2.4.2	<i>Geodésicas do Espaço de Finsler</i>	41
2.4.3	<i>Espaços de Finsler Bidimensionais</i>	44
2.5	Geometria Semiprojetiva	48
2.6	Uma Nova Classe de Métricas Projetivamente Planas	49
2.6.1	<i>Métricas em Relação Projetiva</i>	49
2.6.2	<i>Espaços de Finsler com Extremais Retilíneos</i>	50
2.6.3	<i>Uma Nova Classe de Métricas Projetivamente Planas</i>	51
2.6.4	<i>Cálculos do Teorema 2.63 no Finsler</i>	53
3	UM MODELO MATEMÁTICO DE FORMAÇÃO DE TECIDO	56
3.1	Dinâmica Modular Analítica (Teoria Local)	56
3.2	O Teorema do Portal de Finsler	59
3.3	O Modelo da Célula Eucariótica	64
3.4	Arquitetura da Superfície Celular	65
3.5	Formação de Tecido a partir de Agregados Celulares	68
3.6	Deformações: Tecidos como Meios Deformáveis	71
3.7	Estabilidade do Modelo	76
4	CONCLUSÃO	78

REFERÊNCIAS 79

1 INTRODUÇÃO

Para compreender um organismo multicelular, é fundamental entender os seus níveis de organização. O primeiro nível é o celular, em que analisa-se a célula, ou seja, a unidade funcional e estrutural dos seres vivos. O nível seguinte é o tecido; em seguida, os órgãos; depois, os sistemas e, por fim, o organismo como um todo.

Um projeto que vem sendo desenvolvido por P. L. Antonelli, S. F. Rutz e alguns colaboradores é modelar matematicamente a evolução desses organismos multicelulares. Seguindo L. Margulis (MARGULIS, 1981), as células eucarióticas, os blocos de construção dos organismos multicelulares, evoluíram a partir de uma interação ecológica clássica entre as proto-mitocôndrias parasitárias e uma bactéria que mais tarde se tornaria a própria célula eucariótica. A teoria de Margulis é discutida em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) e, mais tarde, é abordado o processo de evolução da célula eucariótica a partir do padrão de interação original entre bactérias unicelulares (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011). Neste trabalho, propomos dar um passo adiante na evolução dos organismos multicelulares. A partir da teoria que afirma que a ontogenia¹ recapitula a filogenia² (GOULD, 1977), isto é, que os estágios que um embrião atravessa durante o seu desenvolvimento se assemelham a trajetória evolutiva de sua espécie, propomos o desenvolvimento de tecidos a partir de conjuntos unicelulares.

Em 1973, Antonelli et al. publicaram uma bem recebida³ simulação computacional do processo de reorganização celular para dois tipos de células, a fim de testar o Mecanismo da Adesão Diferenciada de M. Steinberg (DAM) da formação de tecido na embriogênese dos vertebrados (ANTONELLI; ROGERS; WILLARD, 1973; STEINBERG, 2007). Hoje em dia, a termodinâmica baseada no DAM é bem aceita em todo mundo, mas os rápidos avanços em microscopia eletrônica e biologia celular deixaram o interesse na física do DAM um pouco de lado. No entanto, a fim de construir um modelo matemático de formação de tecido, incorporamos ambos, (1) os fatos mais recentes sobre como as células se aderem umas as outras e se comunicam na formação de tecido na embriogênese, e, (2) a termodinâmica que sustenta o DAM. Conseqüentemente, formulamos um modelo matemático abrangente de formação de tecido na ontogênese, que oferece a simplicidade original de Steinberg, mas em linguagem geométrica, além de fornecer um papel central para as organelas celulares.

¹ É o estudo das origens e desenvolvimento de um organismo desde o embrião (ovo fertilizado) até atingir sua forma plena, passando pelos diferentes estágios de desenvolvimento.

² É o estudo da relação evolutiva entre grupos de organismos (por exemplo, espécies, populações), que é descoberto por meio de sequenciamento de dados moleculares e matrizes de dados morfológicos.

³ O artigo citado apareceu em "*Mathematical Models for Cell Rearrangement*", ed. D. Mostow, Yale U. Press, 1976, e o autor principal de (ANTONELLI; ROGERS; WILLARD, 1973) foi convidado a dar uma palestra sobre isso em Middlesex Hospital medical School, London, UK.

Nossa abordagem é baseada na *célula eucariótica*, vista como uma *forma de vida composta* consistindo de uma *parte interna*, evoluída ao longo de bilhões de anos a partir de uma *proto-mitocôndria*, e uma *porção celular externa* envolvendo-a, de modo que:

- 1) A *parte interna* consiste de pelo menos uma *célula mitocondrial com seu próprio núcleo* fornecendo energia na forma de ATP⁴, enquanto reside dentro da célula que a envolveu.
- 2) A própria *célula envolvente, juntamente com seu núcleo* contendo DNA e RNA, constitui a *parte externa*.

Como já mencionado, nossa modelagem, além do DAM, é baseada em modelos matemáticos da *Teoria da Endossimbiose de L. Margulis* (MARGULIS, 1981; ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003; ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011).

A Teoria de L. Margulis diz respeito a evolução da célula eucariótica através da endossimbiose de *células procarióticas* individuais vivendo separadamente, as *proto-mitocôndrias* e as *proto-células nucleadas*, iniciada há cerca de 3,5 bilhões de anos atrás. O próximo estágio do processo evolucionário é a formação de tecido feito de células eucarióticas, que posteriormente irão se diferenciar e produzir os órgãos de um organismo multicelular, como sabemos hoje. Para o estágio de formação de tecido, a ideia central é *Symbiotoxicismo*, devido a I. E. Wallen (KHAKHINA, 1992), que fornece um mecanismo por meio do qual as células eucarióticas individuais se integram em um agregado de células capazes de sobreviver em novos nichos ambientais e atuados pela seleção natural darwiniana.

No presente trabalho, começamos onde (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) parou, mas abordamos ele a partir de uma perspectiva oferecida pelo *Torema do Portal de Finsler*, enraizado como é, em *Alometria*. Este *princípio organizacional* ou *Bauplan* para o desenvolvimento, originou-se de um trabalho experimental do início do século 20 de Julian Huxley, sobre a *forma orgânica* de vertebrados e invertebrados, e de Joseph Needham, sobre *embriologia química* em vertebrados (HUXLEY, 1972; NEEDHAM, 1934).

No primeiro capítulo deste trabalho introduzimos as principais ferramentas matemáticas usadas no estudo da Teoria da *Dinâmica Modular Analítica* (AMD). No final deste capítulo será apresentado uma nova classe de espaços de Finsler bidimensionais projetivamente plano. Este é um resultado paralelo ao modelo matemático de formação de tecido que apresentamos aqui. Já o segundo capítulo contém o principal resultado deste trabalho, que é o nosso modelo matemático de formação de tecido.

⁴ sigla utilizada para denominar a adenosina trifosfato, uma molécula indispensável que garante a liberação de energia para as células.

2 FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Neste capítulo veremos alguns conceitos relacionados a geometria de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem (SODE's). Mais especificamente, apresentaremos as ferramentas matemáticas que irão nos auxiliar no estudo da Dinâmica Modular Analítica (AMD) que será introduzida no capítulo seguinte. A abordagem que faremos aqui é baseada nas referências (ANTONELLI, 2003a; BUCATARU; MIRON, 2007).

2.1 A Conexão de Berwald no Fibrado Tangente

2.1.1 O Fibrado Tangente

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ um atlas de classe C^∞ em M . Para cada carta local (U, ϕ) em $p \in U \subset M$, denotaremos por (x^i) as coordenadas locais induzidas por ϕ , isto é, $\phi(p) = (x^i(p)) \in \mathbb{R}^n$. A fim de explicitar as coordenadas locais induzidas por ϕ , passaremos a denotar uma carta local por $(U, \phi = (x^i))$. Se $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ é outra carta local em $p \in M$, então as coordenadas (x^i) e (\tilde{x}^i) estão relacionadas pela aplicação de transição $\psi \circ \phi^{-1} : (x^i) \in \phi(U \cap V) \mapsto \tilde{x}^i(x^j) \in \psi(U \cap V)$, que é um difeomorfismo. Isto implica dizer que $\det \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right) \neq 0$.

Denotaremos por $T_p M$ o espaço tangente a M em $p \in M$. A união disjunta $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ é chamada o espaço tangente a M . Como é bem conhecido, uma carta local (U, ϕ) em $p \in U \subset M$ induz um isomorfismo $\phi_{*,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, se (V, ψ) é outra carta local em $p \in M$, então $\phi_{*,p}(v) = d_{\psi(p)}(\phi \circ \psi^{-1})\psi_{*,p}(v)$. Em coordenadas locais, se $\phi = (x^i)$ e $\psi = (\tilde{x}^i)$, então

$$y^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{y}^j,$$

onde $\phi_{*,p}(v) = (y^i)$ e $\psi_{*,p}(v) = (\tilde{y}^i)$.

Considere a projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$, isto é, se $v \in T_p M$, então $\pi(v) = p$. Consequentemente, tem-se que $\pi^{-1}(p) = T_p M$, $\forall p \in M$. Para uma carta local (U, ϕ) em M , é bem conhecido que a aplicação $\Phi : \pi^{-1}(U) \subset TM \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, dada por $\Phi(v) = (\phi(\pi(v)), \phi_{*,p}(v))$, define uma carta local em TM . Esta é chamada a *carta local induzida*. O conjunto de todas as cartas locais induzidas determina um atlas de classe C^∞ em TM . Para o que se segue, em TM devemos somente considerar cartas locais induzidas. A tripla (TM, π, M) é chamada o *fibrado tangente* da *variedade base* M , TM é o *espaço total* e π é a *submersão canônica*.

Seja $(U, \phi = (x^i))$ uma carta local em $p \in M$ e $\phi_{*,p} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ o isomorfismo induzido. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, considere $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \phi_{*,p}(e_i)$, onde $\{e_i\}$ é a base canônica

de \mathbb{R}^n . Então $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ é a base natural de $T_p M$. Para um vetor $v \in T_p M$, denotaremos por (y^i) as coordenadas locais com respeito a base natural, isto é, $v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$. Isto é equivalente a $\phi_{*,p}(v) = y^i e_i$. Assim, as coordenadas locais induzidas por Φ são (x^i, y^i) , pois $\Phi(v) = (\phi(\pi(v)), \phi_{*,p}(v)) = (x^i(\pi(v)), y^i e_i)$. Neste caso, usaremos a notação $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$ para denotar uma carta local induzida em TM . Com respeito a carta local induzida, a submersão canônica tem expressão local $\pi : (x^i, y^i) \mapsto (x^i)$.

Definição 2.1. Um *campo de vetores* X em M é uma seção diferenciável do fibrado tangente, isto é, $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$.

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores sobre M e por $\mathcal{F}(M)$ o conjunto de todas as funções a valores reais definidas em M . Também, usamos a notação \widetilde{TM} para denotar o espaço total TM com a seção nula $\mathbb{O} : M \rightarrow TM$ removida.

Definição 2.2. Seja $(U, \phi = (x^i))$ uma carta local em $p \in U \subset M$. Dizemos que as n^{k+l} funções $T_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k}(x)$ são as componentes de um *campo tensorial T do tipo (k, l)* sobre M se, sob mudança de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, estas funções se transformam de acordo com a regra

$$\tilde{T}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_l}^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_k}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}} T_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k}(x) \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}} \dots \frac{\partial x^{q_l}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_l}}. \quad (2.1)$$

Se $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$ e $(\pi^{-1}(V), \Psi = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i))$ são cartas locais induzidas em TM , então é um fato bem conhecido que as coordenadas (x^i, y^i) e $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)$ estão relacionadas pela fórmula de mudança de coordenadas em TM

$$\begin{cases} \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^1, \dots, x^n), \quad \det(\partial \tilde{x}^i / \partial x^j) \neq 0, \\ \tilde{y}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} y^j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Para cada $u \in TM$, denotaremos por $T_u TM$ o espaço tangente a TM em u . Este é um espaço vetorial de dimensão $2n$ cuja base natural induzida pela carta local $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$ será denotada por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_u \right\}$. Após mudança de coordenadas (2.2) em TM , a base natural muda como se segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_u &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(u) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_u + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}(u) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \Big|_u, \\ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_u &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(u) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \Big|_u. \end{cases} \quad (2.3)$$

Com respeito a base natural de $T_u TM$, um vetor $X_u \in T_u TM$ tem a forma

$$X_u = X^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(u) \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (2.4)$$

Sob mudança de coordenadas (2.2) em TM , as coordenadas de um vetor $X_u \in T_uM$ mudam como se segue:

$$\begin{cases} \tilde{X}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} X^j, \\ \tilde{Y}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} Y^j + \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} X^j. \end{cases} \quad (2.5)$$

Denotaremos por TTM o espaço tangente a TM , isto é, $TTM = \cup_{u \in TM} T_uTM$. Como antes, a tripla (TTM, τ, TM) denotará o fibrado tangente da variedade TM . Aqui, $\tau : TTM \rightarrow TM$ é a projeção natural, cuja expressão em coordenadas locais é $\tau : (x^i, y^i, X^i, Y^i) \in \tau^{-1}(\pi^{-1}(U)) \subset TTM \mapsto (x^i, y^i) \in \pi^{-1}(U) \subset TM$. Usaremos $\mathcal{X}(TM)$ e $\mathcal{F}(TM)$ para denotar o conjunto de todos os campos de vetores em TM e o conjunto de todas as funções a valores reais definidas em TM , respectivamente.

Definição 2.3. Seja $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$ uma carta local induzida em $u \in \pi^{-1}(U) \subset TM$. Dizemos que as n^{k+l} funções $T_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k}(x, y)$ são as componentes de um *campo tensorial de Finsler T do tipo (k, l)* sobre TM se, sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , estas funções se transformam de acordo com a regra de transformação

$$\tilde{T}_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_l}^{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_k}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{p_k}} T_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k}(x, y) \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_l}}{\partial \tilde{x}^{j_l}}. \quad (2.6)$$

Em outras palavras, as n^{k+l} funções componentes $T_{q_1 \dots q_l}^{p_1 \dots p_k}(x, y)$ do campo tensorial de Finsler T do tipo (k, l) em TM se transformam, sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , como as funções componentes de um campo tensorial do tipo (k, l) na variedade base M . Em particular, um campo tensorial de Finsler do tipo $(1, 0)$ será chamado um *campo de vetores de Finsler* em TM .

2.1.2 A Distribuição Vertical

A partir da fórmula (2.3), observamos que para cada $u \in TM$,

$$V_uTM = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_u, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_u \right\}.$$

é um subespaço vetorial de T_uTM com dimensão n . Este é chamado o *subespaço vertical* de T_uTM e ele determina uma distribuição n -dimensional integrável¹ $V : u \in TM \rightarrow V_uTM \subset T_uTM$, a qual é chamada de *distribuição vertical*. Note que este subespaço é exatamente o núcleo da aplicação linear $\pi_{*,u} : T_uTM \rightarrow T_{\pi(u)}M$, onde $\pi_{*,u}$ é a derivada da submersão canônica π . O conjunto de todos os campos de vetores verticais em TM será denotado por $\mathcal{X}^V(TM)$.

¹ Uma distribuição n dimensional na variedade diferenciável TM é uma correspondência V que associa a cada ponto $u \in TM$ um subespaço vetorial $H_uTM \subset T_uTM$ de dimensão n . Além disso, esta distribuição é integrável pois para cada $u \in TM$, a base de H_uTM é gerada por $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$.

Para cada $u \in TM$, definimos a aplicação linear $l_{v,u} : T_{\pi(u)}M \rightarrow T_uTM$, pondo

$$l_{v,u} \left(X^i(\pi(u)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(u)} \right) = X^i(\pi(u)) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_u.$$

Note que $l_{v,u} : T_{\pi(u)}M \rightarrow T_uTM$ é um isomorfismo linear. Ela é chamada o *levantamento vertical* do fibrado tangente. O levantamento vertical também pode ser pensado como uma aplicação $\mathcal{F}(TM)$ -linear entre $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{X}(TM)$. Neste caso, ela é definida como se segue: para todo campo de vetores $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(M)$, $l_v(X)(u) = l_{v,u}(X_{\pi(u)})$. O levantamento vertical de um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ será denotado por $X^v \in \mathcal{X}^V(TM)$.

Definição 2.4. Para uma função $f \in \mathcal{F}(M)$, definimos o seu *levantamento vertical e completo* por $f^v = f \circ \pi$ e $f^c = \frac{\partial f}{\partial x^i} y^i$, respectivamente.

Definição 2.5. O *levantamento completo* X^c de um campo de vetores $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(M)$ é definido por

$$\begin{aligned} X^c &= (X^i)^v \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^c \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com relação ao levantamento vertical e completo de funções e campos de vetores, o leitor pode verificar as seguintes propriedades (BUCATARU; MIRON, 2007);

- 1) $(fX)^v = f^v X^v$, $(fX)^c = f^v X^c + f^c X^v$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.
- 2) $[X^v, Y^v] = [X, Y]^v$, $[X^c, X^v] = [X, Y]^c$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Considere a aplicação $\mathcal{F}(TM)$ -linear $J : \mathcal{X}(TM) \rightarrow \mathcal{X}(TM)$, tal que

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Usando (2.4), para cada $X \in \mathcal{X}(TM)$ tem-se que

$$\begin{aligned} JX &= X^i J \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) + Y^i J \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Esta é a tão conhecida *estrutura quase tangente* (ou *endomorfismo vertical*) de TM (BUCATARU; MIRON, 2007; ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). Note que $J^2 := J \circ J = 0$.

Levando em consideração as fórmulas (2.2), (2.3), segue que

$$\Gamma = y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (2.9)$$

define um campo de vetores verticais em TM que não se anula em \widetilde{TM} . Ele é chamado *campo de vetores de Liouville*.

2.1.3 Conexão Não-Linear

Definição 2.6. Uma distribuição n -dimensional $H : u \in TM \mapsto H_u TM \subset T_u TM$ a qual é suplementar a distribuição vertical V é chamada uma *conexão não-linear* (ou *distribuição horizontal*) em TM . Isto significa dizer que para cada $u \in TM$, temos a decomposição em soma direta

$$T_u TM = H_u TM \oplus V_u TM. \quad (2.10)$$

Para uma dada conexão não-linear H em TM , denotaremos por h e v as projeções horizontal e vertical correspondentes a decomposição (2.10), respectivamente. Um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(TM)$ é chamado horizontal se $h(X) = X$ e vertical se $v(X) = X$. O conjunto de todos os campos de vetores horizontais em TM será denotado por $\mathcal{X}^H(TM)$.

Como $\pi_{*,u} : T_u TM \rightarrow T_{\pi(u)}M$ é uma aplicação linear sobrejetiva, a partir de (2.10) é possível notar que a restrição $\pi_{*,u}|_{H_u TM} : H_u TM \rightarrow T_{\pi(u)}M$ é um isomorfismo linear. Denotamos por $l_{h,u} : T_{\pi(u)}M \rightarrow H_u TM$ a inversa desse isomorfismo. Ela é chamada o *levantamento horizontal* induzido pela conexão não-linear H . O levantamento horizontal l_h também pode ser pensado como uma aplicação $\mathcal{F}(M)$ -linear entre $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{X}(TM)$ e é definida como se segue: se $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(M)$, então

$$l_u(X)(u) = l_{h,u}(X_{\pi(u)}) = X^i(\pi(u))l_{h,u}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(u)}\right).$$

O levantamento horizontal de um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ será denotado por $X^h \in \mathcal{X}^H(TM)$.

Considere $\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u = l_{h,u}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(u)}\right)$. É claro que o conjunto $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u\right\}$ define uma base para $H_u TM$, $\forall u \in TM$. Além disso, sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , tem-se

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(u) \frac{\delta}{\delta \tilde{x}^j}\Big|_u. \quad (2.11)$$

Para uma dada conexão não-linear H em TM , o conjunto $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u, \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_u\right\}$ define uma base para $T_u TM$ adaptada a decomposição (2.10). Esta é chamada a *base de Berwald* da conexão não-linear H . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_u = M_i^j(u) \frac{\delta}{\delta x^j}\Big|_u + N_i^j(u) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_u. \quad (2.12)$$

Como $\pi_{*,u}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(u)}$, então $M_i^j = \delta_i^j$ (delta de Kronecker). Portanto, com respeito a base natural de $T_u TM$, $\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u$ tem a seguinte expressão:

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_u - N_i^j(u) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_u. \quad (2.13)$$

Cada uma das funções (N_j^i) são definidas em uma vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ de uma carta local induzida e são chamadas os *coeficientes locais* da conexão não-linear H . Existem muitas maneiras de caracterizar uma conexão não-linear H em TM (BUCATARU; MIRON, 2007; ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). Aqui vamos usar a seguinte:

Proposição 2.7. *Dar uma conexão não-linear H em TM é equivalente a dar um conjunto de funções $(N_j^i(x, y))$, definidas em cada vizinhança coordenada de uma carta local induzida, tais que em vizinhanças coordenadas que se intersectam, elas são relacionadas por*

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} N_i^k = \tilde{N}_k^j \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}. \quad (2.14)$$

Demonstração. Para a parte “se” vamos usar a fórmula de mudança de base (2.3) em $T_u TM$ e expressão (2.13). Vejamos a seguir;

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^k \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} - N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} - \left(N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$ e depois fazendo a soma em i , obtem-se

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} - \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}.$$

Mas

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\delta}{\delta \tilde{x}^k}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} = \delta_k^j.$$

Segue que

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}.$$

Portanto

$$\tilde{N}_k^j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}.$$

Por fim, multiplique ambos os lados desta ultima igualdade acima por $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$ e depois faça a soma em k para obter a lei de transformação (2.14).

Já a parte a parte “somente se”, suponha que em cada vizinhança coordenada de uma carta local induzida é dado um conjunto de funções $(N_j^i(x, y))$ tais que na interseção de duas vizinhanças coordenadas, as funções \tilde{N}_j^i e N_j^i sejam relacionadas por (2.14). Então, em cada vizinhança coordenada de uma carta local induzida, defina $\frac{\delta}{\delta x^i} \Big|_u$ como em (2.13).

Usando (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^k \frac{\partial}{\partial y^k} \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} - N_i^k \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} - \left(\tilde{N}_k^j \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} - \tilde{N}_k^j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \right) \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\delta}{\delta \tilde{x}^k}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} \Big|_u \right\}$ gera um subespaço $H_u TM \subset T_u TM$ de dimensão n . Como $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} \Big|_u, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_u \right\}$ são linearmente independentes, então $H_u TM$ e $V_u TM$ satisfazem a decomposição (2.10). □

Exemplo 2.8. Seja γ_{jk}^i os coeficientes locais de uma conexão linear simétrica na variedade base M (LAUGWITZ, 1965). Sob mudança de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ na variedade base M , é conhecido que as funções γ_{jk}^i se transformam de acordo com a seguinte regra;

$$\tilde{\gamma}_{jk}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l} \gamma_{pq}^l \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^k} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^p \partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^k}.$$

Definindo $N_j^i(x, y) = \gamma_{jk}^i(x) y^k$ e levando em consideração a lei de transformação acima, é possível mostrar que $N_j^i(x, y)$ satisfaz a regra de transformação (2.14). Portanto, uma conexão linear simétrica na variedade base M induz uma conexão não-linear no fibrado tangente TM .

2.1.4 Curvatura e Torção de uma Conexão Não-Linear

Se H é uma conexão não-linear em TM , de acordo com o Teorema de Frobenius², H é integrável se, e somente se, $\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] \in \mathcal{X}^H(TM)$. Usando (2.13) e a definição do colchete, temos que

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] = R_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad (2.15)$$

onde

$$R_{ij}^k = \frac{\delta N_i^k}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^k}{\delta x^i}. \quad (2.16)$$

² Teorema de Frobenius: Uma distribuição é integrável se, e somente se, é involutiva. Neste caso, a distribuição horizontal é involutiva se $\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] \in \mathcal{X}^H(TM)$.

Usando a expressão (2.11), observa-se que sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , tem-se a seguinte regra de transformação para as funções $R_{ij}^k(x, y)$;

$$\tilde{R}_{qr}^p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^k} R_{ij}^k(x, y) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^r}. \quad (2.17)$$

Segue que R_{ij}^k são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler R do tipo (1, 2) em TM . Consequentemente, a equação $R_{ij}^k(x, y) = 0$ tem um significado geométrico.

Proposição 2.9. *Uma conexão não-linear H em TM é integrável se, e somente se, $R_{ij}^k(x, y) = 0$.*

Dizemos que R_{ij}^k são as funções componentes do *tensor de curvatura R da conexão não-linear H* . Deste modo, o tensor de curvatura R é dado por

$$R = R_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}. \quad (2.18)$$

Novamente, usando a definição do colchete, por um cálculo direto tem-se que

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^k}. \quad (2.19)$$

Considere as seguintes quantidades

$$t_{ij}^k = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} - \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i}. \quad (2.20)$$

Usando (2.3) e (2.11), tem-se que sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM ,

$$\tilde{t}_{qr}^p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^k} t_{ij}^k(x, y) \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^r}. \quad (2.21)$$

Segue que t_{ij}^k são as funções componentes de um tensor de Finsler t do tipo (1, 2) em TM . Dizemos que uma conexão não-linear H em TM é simétrica se $\frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} = \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i}$. Consequentemente, a equação $t_{ij}^k(x, y) = 0$ tem um significado geométrico.

Proposição 2.10. *Uma conexão não-linear H é simétrica se, e somente se, $t_{ij}^k(x, y) = 0$.*

O tensor de Finsler t é chamado o *tensor torção da conexão não-linear H* . Ele é dado por

$$t = \frac{1}{2} t_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}. \quad (2.22)$$

Definição 2.11. Uma curva suave $\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ é chamada uma *curva autoparalela* da conexão não-linear H se seu levantamento natural a TM , $\tilde{\gamma} : t \in I \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x(t), \frac{dx^i}{dt}(t)) \in \pi^{-1}(U) \subset TM$ é uma curva horizontal, isto é, se o campo tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ é horizontal.

Usando (2.13), observamos que em coordenadas locais, o campo tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ é expresso em termos da base de Berwald como

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} &= \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d^2x^i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta}{\delta x^i} + \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + N_j^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Portanto, uma curva suave $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ é uma curva autoparalela se, e somente se, suas coordenadas locais satisfazem o sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + N_j^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.23)$$

2.1.5 A Conexão de Berwald no Fibrado Tangente

É um fato bem conhecido que para uma variedade diferenciável M não existe isomorfismo canônico entre dois espaços tangentes T_pM e T_qM em $p, q \in M$. A existência de tal isomorfismo, o qual é chamado *transporte paralelo*, é equivalente a existência de uma conexão linear na variedade diferenciável M . Se o espaço tangente TM é munido de uma conexão não-linear H , então em todo ponto $u \in TM$ tem-se a decomposição $T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$. Para dois pontos $u, v \in TM$, estamos interessados em definir um transporte paralelo entre T_uTM e T_vTM que preserva a decomposição acima. A conexão linear correspondente a tal transporte paralelo é chamada uma *conexão de Finsler*. Aqui, nosso objetivo é definir a conexão de Finsler a partir de uma dada conexão não-linear H em TM . Além disso, vamos exibir a famosa *conexão de Berwald* em TM , que é uma conexão de Finsler. De posse da conexão de Berwald, vamos exibir todas as funções componentes da torção e da curvatura desta conexão linear.

Para o que se segue, fixaremos uma conexão não-linear H em TM com coeficientes locais N_j^i . Denotaremos por h e v as projeções horizontal e vertical induzidas por H . Com relação a base de Berwald $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} \Big|_u, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_u \right\}$, tem-se que

$$h \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad h \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = 0, \quad v \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = 0, \quad v \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (2.24)$$

Além disso, usando (2.8) podemos ver que a estrutura quase tangente J age sobre a base de Berwald como se segue:

$$J \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = J \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) - N_i^j J \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{e} \quad J \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Assim, temos que para todo $u \in TM$, $J_u : H_uTM \rightarrow V_uTM$ é um isomorfismo. Denote a inversa deste isomorfismo por $\theta_u : V_uTM \rightarrow H_uTM$. Neste caso, podemos escrever

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \frac{\delta}{\delta x^i} \quad \text{e} \quad \theta \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = 0. \quad (2.26)$$

θ é a tão conhecida a *estrutura adjunta* de TM . Note que $\theta^2 = \theta \circ \theta = 0$, $\theta \circ J = h$ e $J \circ \theta = v$.

Definição 2.12. Uma conexão linear D em TM é chamada uma *conexão de Finsler* (ou *N-conexão linear*) se

- 1) D preserva por paralelismo a distribuição horizontal H , isto é, se $D_X h = 0 \forall X \in \mathcal{X}(TM)$.
- 2) A estrutura quase tangente J é absolutamente paralela com respeito a D , isto é, se $D_X J = 0 \forall X \in \mathcal{X}(TM)$.

Para uma dada conexão de Finsler D em TM , é fácil verificar que D também preserva por paralelismo a distribuição vertical, isto é, $D_X v = 0 \forall X \in \mathcal{X}(TM)$. Além disso, uma conexão linear D em TM é uma conexão de Finsler se, e somente se, $D_X v = 0$ e $D_X \theta = 0$.

Com respeito a base de Berwald, uma conexão de Finsler D tem a seguinte expressão local (MIRON; ANASTASIEI, 1994),

$$\begin{cases} D_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = F_{ji}^k \frac{\delta}{\delta x^k}, & D_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = F_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = C_{ji}^k \frac{\delta}{\delta x^k}, & D_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = C_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \end{cases} \quad (2.27)$$

As funções $F_{ij}^k(x, y)$, $C_{ij}^k(x, y)$ são chamadas os *coeficientes locais* de uma conexão de Finsler D . É comum denotar uma conexão de Finsler pela tripla $D\Gamma = (N_j^i(x, y), F_{ij}^k(x, y), C_{ij}^k(x, y))$. Usando as fórmulas (2.3) e (2.11), um cálculo direto mostra que sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , tem-se que

$$\tilde{F}_{ij}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} F_{pq}^l \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^p \partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{C}_{ij}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} C_{pq}^l \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (2.29)$$

Assim, os coeficientes horizontais F_{ij}^k de uma conexão de Finsler D em TM tem a mesma regra de transformação que os coeficientes locais de uma conexão linear na variedade base M . Os coeficientes verticais C_{ij}^k são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo $(1, 2)$ em TM . O teorema a seguir exhibe um exemplo de uma conexão de Finsler em TM . Sua demonstração pode ser encontrada em (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b).

Teorema 2.13. A aplicação $D : \mathcal{X}(TM) \times \mathcal{X}(TM) \rightarrow \mathcal{X}(TM)$, definida por

$$D_X Y = v[hX, vY] + h[vX, hY] + J[vX, \theta Y] + \theta[hX, JY] \quad (2.30)$$

é uma conexão de Finsler em TM . Ela é chamada a *conexão de Berwald da conexão não-linear H* .

Em relação a base de Berwald, tem-se que a conexão de Berwald tem a seguinte expressão local

$$\begin{aligned} D_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} &= \theta \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right] = \theta \left(\frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} \frac{\delta}{\delta x^k}, \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} &= h \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] = 0. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos também que

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \text{e} \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0 \quad (2.31)$$

Portanto, os coeficientes locais da conexão de Berwald são $F_{ij}^k = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j}$ e $C_{ij}^k = 0$. É comum referir-se a conexão de Berwald como $B\Gamma = (N_j^i, \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j}, 0)$.

Para a conexão de Berwald $B\Gamma = (N_j^i, \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j}, 0)$, devemos considerar a torção $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$. Com respeito a base de Berwald, temos que

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) &= D_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} - D_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i} - \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] \\ &= \left(\frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} - \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i} \right) \frac{\delta}{\delta x^k} + \left(\frac{\delta N_j^k}{\delta x^i} - \frac{\delta N_i^k}{\delta x^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^k}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{cases} hT \left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = \left(\frac{\partial N_i^k}{\partial y^j} - \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i} \right) \frac{\delta}{\delta x^k} = t_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} & h(h) - \text{torção}, \\ vT \left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = \left(\frac{\delta N_j^k}{\delta x^i} - \frac{\delta N_i^k}{\delta x^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^k} = R_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k} & v(h) - \text{torção}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Note também que

$$T \left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = T \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = T \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Por fim, ainda com respeito a conexão de Berwald $B\Gamma = (N_j^i, \frac{\partial N_i^k}{\partial y^j}, 0)$, consideramos o tensor de curvatura $R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z$. Como D preserva por paralelismo as distribuições vertical e horizontal, então o operador $R(X, Y)$ leva campos de vetores horizontais em campos de vetores horizontais e campos de vetores verticais em campos de vetores verticais. Assim, com respeito a base de Berwald, tem-se que

$$\begin{cases} R \left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) \frac{\delta}{\delta x^h} := R_{hjk}^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \\ R \left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) \frac{\delta}{\delta x^h} := P_{hjk}^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \end{cases} \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{cases} R_{hjk}^i &= \frac{\delta F_{hj}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta F_{hk}^i}{\delta x^j} + F_{hj}^m F_{mk}^i - F_{hk}^m F_{mj}^i, \\ P_{hjk}^i &= \frac{\partial F_{hj}^i}{\partial y^j} = \frac{\partial^2 N_h^i}{\partial y^j \partial y^k} := D_{hjk}^i. \end{cases} \quad (2.35)$$

Note também que

$$\begin{cases} R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} &= R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} &= P_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \end{cases} \quad (2.36)$$

e

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \frac{\delta}{\delta x^h} = R\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^h} = 0. \quad (2.37)$$

Assim, (2.35) são as únicas componentes não-nulas do tensor de curvatura da conexão de Berwald.

2.2 Teoria KCC de um Semispray

Antes de iniciarmos com o estudo da teoria KCC de um semispray, vamos introduzir algumas definições e resultados que serão usados não somente nesta seção, mas também no restante deste trabalho.

2.2.1 Semisprays

Considere a aplicação $h_\lambda : TM \rightarrow TM$ definida por $h_\lambda(x, y) = (x, \lambda y)$. Esta é chamada uma *dilatação de raio* λ .

Definição 2.14. Uma função $f \in \mathcal{F}(TM)$ que é diferenciável em \widetilde{TM} e contínua na seção nula $\mathbb{O} : M \rightarrow TM$ é chamada *positivamente homogênea de grau* r ($r \in \mathbb{Z}$) sobre as fibras de TM (ou *positivamente homogênea de grau* r em y^i) se

$$f \circ h_\lambda = \lambda^r f, \quad \forall \lambda \in (0, +\infty). \quad (2.38)$$

Com respeito as funções positivamente homogêneas de grau r em y^i , temos o famoso Teorema Euler (BUCATARU; MIRON, 2007; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

Teorema 2.15. (Teorema de Euler) Uma função $f \in \mathcal{F}(TM)$ que é diferenciável em \widetilde{TM} e contínua na seção nula $\mathbb{O} : M \rightarrow TM$ é positivamente homogênea de grau r em y^i se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} y^i = r f(x, y).$$

As seguintes propriedades são válidas:

- 1) Se f e g são positivamente homogêneas de grau r em y^i , então a função $af + bg$, $a, b \in \mathbb{R}$ é positivamente homogênea de grau r em y^i .
- 2) Se f é positivamente homogênea de grau r em y^i e g é positivamente homogênea de grau s em y^i , então a função $f.g$ é positivamente homogênea de grau $(r + s)$ em y^i .

Definição 2.16. Um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(TM)$ é positivamente homogêneo de grau r em y^i , se

$$X \circ h_\lambda = \lambda^{r-1} (h_\lambda)_* \circ X$$

Com respeito a campos de vetores homogêneos de grau r em y^i , tem-se o seguinte teorema do tipo Euler para campos de vetores homogêneos (BUCATARU; MIRON, 2007; ANTONELLI; BUCATARU, 2001b).

Teorema 2.17. *Um campo de vetores $X \in \mathcal{X}(TM)$ é positivamente homogêneo de grau r em y^i se, e somente se,*

$$[\Gamma, X] = (r - 1)X, \quad (2.39)$$

onde Γ é o campo de vetores de Liouville.

As seguintes propriedades são válidas:

- 1) Os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ são positivamente homogêneos de grau 1 e 0 em y^i , respectivamente.
- 2) Se $f \in \mathcal{F}(TM)$ é positivamente homogênea de grau s em y^i e $X \in \mathcal{X}(TM)$ é positivamente homogêneo de grau r em y^i , então o campo de vetores fX é positivamente homogêneo de grau $(s + r)$ em y^i .
- 3) Se $X \in \mathcal{X}(TM)$ é um campo de vetores positivamente homogêneo de grau r em y^i e $f \in \mathcal{F}(TM)$ é positivamente homogênea de grau s em y^i , então $Xf \in \mathcal{F}(TM)$ é uma função positivamente homogênea de grau $(r + s - 1)$ em y^i .

Definição 2.18. Um campo de vetores $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$ é chamado um *semispray* se

$$JS = \Gamma, \quad (2.40)$$

onde J é a estrutura quase tangente de TM e Γ é o campo de vetores de Liouville.

Se S é positivamente homogêneo de grau 2 em y^i , então S será chamado um *spray*. A noção de um semispray local pode ser formulada tomando $S \in \mathcal{X}(\pi^{-1}(U))$.

Teorema 2.19. *São válidas as seguintes propriedades.*

- 1) Na vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ de uma carta local induzida, um semispray S é escrito unicamente na forma

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (2.41)$$

- 2) Sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , o conjunto de funções $G^i(x, y)$ se transformam de acordo com a seguinte regra:

$$2\tilde{G}^i = 2 \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} G^j - \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} y^j. \quad (2.42)$$

- 3) Se em toda vizinhança coordenada de uma carta local induzida é dado um conjunto de funções $G^i(x, y)$ tais que em vizinhanças coordenadas que se intersectam vale (2.42), então S em (2.41) é um semispray.

Demonstração. 1) Na vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ de uma carta local induzida, um campo de vetores S é escrito unicamente na forma $S = a^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Se S é um semispray, então $JS = a^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} = \Gamma = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. Tomando $b^i(x, y) = -2G^i(x, y)$, temos que S é um semispray se, e somente se, vale (2.41).

- 2) Usando as fórmulas (2.2) e (2.3), tem-se que

$$\begin{aligned} S &= y^j \frac{\partial}{\partial x^j} - 2G^j \frac{\partial}{\partial y^j} \\ &= y^j \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} + \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i} \right) - 2G^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i} \\ &= \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - \left(2G^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} y^j \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}. \end{aligned}$$

Como S é um campo de vetores em TM , segue a fórmula (2.42).

- 3) Usando a regra de transformação (2.42) para o conjunto de funções $G^i(x, y)$, segue que $S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} = \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - 2\tilde{G}^i(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}$ é um campo de vetores que satisfaz $JS = \Gamma$.

□

Segue deste teorema que um semispray S é unicamente determinado por um conjunto de funções $G^i(x, y)$ e inversamente. Por esta razão, as funções $G^i(x, y)$ são chamadas os *coeficientes locais* do semispray S . O resultado a seguir caracteriza *sprays* em termos de seus coeficientes locais.

Proposição 2.20. *Um semispray S é um spray se, e somente se, seus coeficientes locais, $G^i(x, y)$, são funções homogêneas de grau 2 em y^i .*

Demonstração. Usando as propriedades referentes as funções homogêneas e campos homogêneos, temos que $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ é um campo de vetores positivamente homogêneo de grau 2 em y^i e $\frac{\partial}{\partial y^i}$ é um campo de vetores positivamente homogêneo de grau 0 em y^i . Assim, um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$ é um campo de vetores positivamente homogêneo de grau 2 em y^i se, e somente se, as funções $G^i(x, y)$ são homogêneas de grau 2 em y^i . \square

Considere o seguinte conjunto de funções que são determinadas por um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$;

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} := G_j^i. \quad (2.43)$$

Com a regra de transformação (2.42) para os coeficientes $G^i(x, y)$, é possível mostrar sem muitas dificuldades que:

Teorema 2.21. *Seja $G^i(x, y)$ os coeficientes locais de um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$. Sob mudança de coordenadas (2.2) em \widetilde{TM} , as funções G_j^i definidas em (2.43) se transformam de acordo com a seguinte regra:*

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} G_i^k = \tilde{G}_k^j \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}. \quad (2.44)$$

Segue da Proposição 2.7 que um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$ determina uma conexão não-linear em \widetilde{TM} cujos coeficientes locais são dados por (2.43). Para o que se segue, vamos fixar a conexão de Berwald $B\Gamma = (G_j^i, G_{jk}^i, 0)$ induzida por esta conexão-não linear, onde

$$G_{jk}^i := \frac{\partial N_j^i}{\partial y^k} = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k} = F_{jk}^i. \quad (2.45)$$

Além disso, a regra de transformação para os coeficientes horizontais da conexão de Berwald (ou simplesmente, *coeficientes da conexão de Berwald*), G_{jk}^i , são

$$\tilde{G}_{ij}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} G_{pq}^l \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^p \partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (2.46)$$

Usando (2.13), observe que um semispray S tem a seguinte expressão local em relação a base de Berwald

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (2.47)$$

$$= y^i \frac{\delta}{\delta x^i} - \mathcal{E}^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (2.48)$$

onde

$$\mathcal{E}^i(x, y) = 2G^i(x, y) - G_j^i(x, y)y^j. \quad (2.49)$$

Usando as regras de transformação para as funções $G^i(x, y)$ e $G_j^i(x, y)$, dadas por (2.42) e (2.44), respectivamente, é possível mostrar que sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , as funções $\mathcal{E}^i(x, y)$ se transformam como as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo (1, 0) em \widetilde{TM} . Além disso, usando a Proposição 2.20 e o Teorema 2.15, tem-se

Proposição 2.22. *Um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$ é um spray se, e somente se, $\mathcal{E}^i = 0$.*

Em uma carta local induzida $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$, as curvas integrais de um semispray $S \in \mathcal{X}(\pi^{-1}(U))$ são dadas por

$$\frac{dx^i}{dt} = y^i, \quad \frac{dy^i}{dt} = -2G^i(x, y). \quad (2.50)$$

Portanto, na vizinhança coordenada $U \subset M$, estas curvas integrais são expressas como soluções do sistema de equações diferenciais de segunda ordem (SODE's)

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (2.51)$$

Definição 2.23. As curvas $\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$, soluções de (2.51), são chamadas os *caminhos do semispray* S .

Se em cada vizinhança coordenada $U \subset M$ é dado um sistema de equações diferenciais de segunda ordem do tipo (2.51) e a forma deste sistema é preservada por mudança do coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, então as funções $G^i(x, y)$, $y^i = dx^i/dt$, obedecem a lei de transformação (2.42). Neste sentido, temos provado o seguinte resultado:

Teorema 2.24. *Dar um semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$ com coeficientes locais $G^i(x, y)$ é equivalente a dar, em cada vizinhança coordenada $U \subset M$, um sistema de equações diferenciais de segunda ordem da forma (2.51).*

2.2.2 Teoria KCC de um Semispray

Do ponto de vista geométrico, é importante conhecer os objetos associados ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem (2.51) que não mudam sob mudança de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$. Estes são chamados os *invariantes do sistema*. O estudo destes invariantes é chamada a teoria KCC (nomeada assim após (KNOSAMBI, 1933; CARTAN, 1933; CHERN, 1996)). Existem *cinco* desses invariantes KCC. A seguir vamos determinar todos eles. Para isto vamos precisar definir uma derivada covariante que seja compatível com a mudança de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$. Esta é chamada a *derivada covariante KCC* (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

Definição 2.25. Seja $\xi^i(t)$ as componentes contravariantes de um campo de vetores $\xi(t)$ definido ao longo de um caminho $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ do semispray (2.51). A derivada covariante KCC de $\xi(t)$ é definida por

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + G_j^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \xi^j, \quad (2.52)$$

onde $G_j^i := N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ é a conexão não-linear associada ao semispray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$, como definido em (2.43).

Note que sob mudança de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, as componentes contravariantes $\xi^i(t)$ se transformam como

$$\tilde{\xi}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \xi^j.$$

Usando a regra de transformação (2.44) para os coeficientes G_j^i da conexão não-linear determinada pelo spray $S \in \mathcal{X}(\widetilde{TM})$, tem-se que

$$\frac{D\tilde{\xi}^i}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{D\xi^j}{dt}. \quad (2.53)$$

Isto significa que sob mudança de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ em M , a derivada covariante KCC de um vetor tangente ao longo da curva $\gamma(t)$ ainda é um vetor tangente ao longo da curva.

Usando a derivada covariante KCC, podemos reescrever o sistema (2.51) na seguinte forma equivalente

$$\begin{aligned} D\left(\frac{dx^i}{dt}\right) &= \frac{d^2x^i}{dt^2} + G_j^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^j}{dt} \\ &= -2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + G_j^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^j}{dt} \\ &= -\mathcal{E}^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Este é o *primeiro invariante* KCC do sistema (2.51), como introduzido em (CARTAN, 1933; CHERN, 1996). Quando $\mathcal{E}^i = 0$, as trajetórias soluções de (2.51) coincidem com as curvas autoparalelas da conexão não-linear induzida pelo spray S . Assim, quando \mathcal{E}^i não se anula, o campo de vetores de Finsler \mathcal{E}^i é interpretado como sendo uma força externa associada ao sistema (2.51).

Seja $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ um caminho de um semispray S . Então $(x^i(t))$ é solução de (2.51) ou (2.54). Considere variações desta solução de acordo com a relação

$$\tilde{x}^i(t) = x^i(t) + \eta \xi^i(t), \quad (2.55)$$

onde η é um parâmetro real com $|\eta| \ll 1$ e $\xi^i(t)$ são as componentes contravariantes de um campo de vetores $\xi(t)$ definido ao longo de $\gamma(t)$ com $\xi^i(a) = \xi^i(b) = 0$. Substituindo (2.55) em (2.51) e exigindo que $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}^i(t))$ também seja uma solução de (2.51), tem-se

$$0 = \frac{d^2\tilde{x}^i}{dt^2} + 2\tilde{G}^i\left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \eta \frac{d^2\xi^i}{dt^2} + 2\tilde{G}^i\left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{dt}\right). \quad (2.56)$$

Expandindo $\tilde{G}^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt)$ em série de Taylor em torno de $\eta = 0$ até a 1ª ordem, obtemos

$$\tilde{G}^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt) = G^i(x, dx/dt) + \left[\frac{\partial \tilde{G}^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt)}{\partial x^j} \xi^j + \frac{\partial \tilde{G}^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt)}{\partial y^j} \frac{d\xi^j}{dt} \right] \eta \quad (2.57)$$

Substituindo esta expressão acima em (2.56) e usando o fato de que $\gamma(t) = (x^i(t))$ é uma solução de (2.51), obtem-se que

$$\eta \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \left[\frac{\partial G^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt)}{\partial x^j} \xi^j + \frac{\partial G^i(\tilde{x}, d\tilde{x}/dt)}{\partial y^j} \frac{d\xi^j}{dt} \right] \eta = 0. \quad (2.58)$$

Por fim, dividindo esta expressão por η e após isso fazer $\eta \rightarrow 0$, obtem-se a *equação variacional*

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j + 2 \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{d\xi^j}{dt} = 0. \quad (2.59)$$

Vamos reescrever esta equação variacional em termos da derivada covariante KCC. Para isso, primeiro observe que

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^i}{dt^2} &= \frac{D}{dt} \left(\frac{d\xi^i}{dt} + G_j^i \xi^j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi^i}{dt} + G_j^i \xi^j \right) + G_r^i \left(\frac{d\xi^r}{dt} + G_j^r \xi^j \right) \\ &= \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \frac{d}{dt} (G_j^i) \xi^j + G_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + G_r^i \frac{d\xi^r}{dt} + G_r^i G_j^r \xi^j \\ &= \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \left(\frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} \frac{dx^r}{dt} + \frac{\partial G_j^i}{\partial y^r} \frac{dy^r}{dt} \right) \xi^j + 2G_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + G_r^i G_j^r \xi^j. \end{aligned}$$

Usando esta última expressão acima e a expressão (2.50), observa-se que a equação variacional (2.59) é reescrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j + 2 \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{d\xi^j}{dt} \\ &= \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j + 2G_j^i \frac{d\xi^j}{dt} \\ &= \frac{D^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j - \left(\frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} \frac{dx^r}{dt} + \frac{\partial G_j^i}{\partial y^r} \frac{dy^r}{dt} \right) \xi^j - G_r^i G_j^r \xi^j \\ &= \frac{D^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j - \frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} y^r \xi^j + 2 \frac{\partial G_j^i}{\partial y^r} G^r \xi^j - G_r^i G_j^r \xi^j \\ &= \frac{D^2 \xi^i}{dt^2} + \mathcal{B}_j^i \xi^j, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde

$$\mathcal{B}_j^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G_j^i}{\partial x^r} y^r + 2G_{jr}^i G^r - G_r^i G_j^r. \quad (2.61)$$

Usando as regras de transformação (2.42), (2.44) e (2.46), é possível mostrar que \mathcal{B}_j^i são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler \mathcal{B} do tipo (1, 1) em \widetilde{TM} . Este é o *segundo invariante* KCC, como descrito em (KNOSAMBI, 1933; CARTAN, 1933; CHERN, 1996) ou o *endomorfismo de Jacobi*, como descrito em (CRAMPIN; MARTINEZ; SARLET, 1996).

Note que (2.60) é a *equação de Jacobi* se o sistema (2.51) é a equação das geodésicas da geometria Riemanniana ou, como veremos mais adiante, a equação das geodésicas

da geometria de Finsler. Isto justifica o uso do termo estabilidade de Jacobi no estudo da teoria KCC. Neste contexto, estamos interessados no comportamento das trajetórias soluções do sistema (2.51) na vizinhança de um ponto $(x^i(t_0))$. Vamos descrever este conceito de estabilidade de Jacobi.

Definição 2.26. Seja $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ um caminho do semispray S . Se qualquer outro caminho com condições iniciais suficientemente próximas em t_0 permanece próximo a $\gamma(t)$ para todo $t > t_0^3$, então $\gamma(t)$ é uma trajetória *Jacobi estável* (abreviadamente, *J-estável*). Se toda solução é J-estável neste sentido, então dizemos que o sistema (2.51) é J-estável. Caso contrário, dizemos que o sistema (2.51) é J-instável.

O teorema a seguir mostra como os autovalores de \mathcal{B}_j^i fornecem informações sobre a estabilidade de Jacobi para o sistema (2.51) (ver (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; LAUGWITZ, 1965; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993; ANTONELLI, 2000)).

Teorema 2.27. (*Estabilidade de Jacobi*) O sistema (2.51) é J-estável se, e somente se, a parte real dos autovalores de \mathcal{B}_j^i são estritamente negativos, e J-instável, caso contrário.

O terceiro, quarto e quinto invariantes KCC, como definidos em (KNOSAMBI, 1933; CARTAN, 1933; CHERN, 1996), são respectivamente

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{jk}^i &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathcal{B}_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial \mathcal{B}_k^i}{\partial y^j} \right), \\ \mathcal{B}_{jkl}^i &= \frac{\partial \mathcal{B}_{jk}^i}{\partial y^l}, \\ \mathcal{D}_{jkl}^i &= \frac{\partial^2 G_j^i}{\partial y^k \partial y^l} = \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}. \end{cases}$$

Em (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b) é mostrado que o terceiro invariante KCC coincide com as funções componentes da curvatura da conexão não-linear determinada pelo semispray S , isto é

$$\mathcal{B}_{jk}^i := \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathcal{B}_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial \mathcal{B}_k^i}{\partial y^j} \right) = \frac{\delta N_j^i}{\delta x^k} - \frac{\delta N_k^i}{\delta x^j} := R_{jk}^i.$$

Mais ainda, o quarto e o quinto invariantes KCC são as componentes não-nulas do tensor de curvatura da conexão de Berwald induzida pelo semispray S , isto é, $\mathcal{B}_{jkl}^i = R_{jkl}^i$ e $\mathcal{D}_{jkl}^i = P_{jkl}^i$, como definidos em (2.35). O tensor \mathcal{D}_{jkl}^i é também chamado de *tensor de Douglas*.

O principal resultado da teoria KCC é o seguinte (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993; ANTONELLI, 2000).

³ Pelo Teorema de Imersão de Nash, podemos assumir que M está imersa isometricamente em algum espaço Euclidiano. Neste caso, a noção de proximidade em M é induzida pela norma Euclidiana.

Teorema 2.28. *Dois sistemas de equações diferenciais de segunda ordem da forma (2.51) podem ser transformados um no outro via mudança não-singular de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ se, e somente se, os cinco invariantes KCC são tensores equivalentes. Em particular, existem coordenadas locais (\tilde{x}^i) para o qual $\tilde{G}^i \equiv 0$ se, e somente se, os cinco invariantes $\mathcal{E}^i, \mathcal{B}_j^i, \mathcal{B}_{jk}^i, \mathcal{B}_{jkl}^i, \mathcal{D}_{jkl}^i$, são todos nulos.*

2.3 Geometria Projetiva

Na seção anterior, estudamos as propriedades intrínsecas do sistema (2.51) sob mudança não-singular de coordenadas locais $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$. Neste caso, o parâmetro associado aos caminhos do semispray S (parâmetro t) foi mantido fixo. Nesta seção, estamos interessados em estudar sistemas da forma (2.51) considerando mudanças de parâmetro $t \mapsto p(t)$. Para o que se segue, vamos nos restringir ao caso em que S é um *spray* em $\pi^{-1}(U)$.

2.3.1 Mudança Projetiva de Parâmetro

Como visto na seção anterior, os caminhos do *spray* S são localmente caracterizados como solução do sistema

$$y^i = \frac{dx^i}{dt} \quad \frac{dy^i}{dt} = -2G^i(x, y),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (2.62)$$

onde as funções $G^i(x, y)$ são de classe C^∞ em $\pi^{-1}(U)$ e homogêneas de grau 2 em y^i . O parâmetro t , chamado de *parâmetro de spray*, é especial. Para um parâmetro qualquer u ao longo de um caminho do *spray* S , tem-se

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{du}\right) = f(u)\frac{dx^i}{du}, \quad (2.63)$$

onde $f(u) = (d^2t/du^2)/(dt/du)$.

Seja $\varphi(x, y)$ uma função escalar de classe C^∞ em $\pi^{-1}(U)$ e positivamente homogênea de grau 1 em y^i . Defina

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + \varphi(x, y)y^i. \quad (2.64)$$

Note que $\bar{G}^i(x, y)$ é de classe C^∞ em $\pi^{-1}(U)$ e positivamente homogênea de grau 2 em y^i . Seja $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ um caminho do *spray* S . Definimos um novo parâmetro p , chamado de *parâmetro projetivo*, ao longo do caminho $\gamma(t)$ pondo

$$p = A + B \int e^{2 \int \varphi(x, dx/d\bar{t})d\bar{t}} dt. \quad (2.65)$$

onde A e B são constantes de integração. Esta é a tão conhecida *mudança projetiva de parâmetro* (ANTONELLI, 2003a; ANTONELLI; BUCATARU, 2001b).

Proposição 2.29. *Após uma mudança projetiva de parâmetro, o sistema (2.62) transforma-se no sistema*

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + 2\bar{G}^i\left(x, \frac{dx}{dp}\right) = 0. \quad (2.66)$$

Assim, mudança projetiva preserva a propriedade de spray.

Demonstração. De fato, a partir de (2.65), observe que

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 2\varphi\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} > 0. \quad (2.67)$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dp} \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{dp^2} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{dx^i}{dp} \frac{d^2p}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} \frac{dp}{dt} = \frac{d^2x^i}{dp^2} \left(\frac{dp}{dt}\right)^3 + \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2p}{dt^2}.$$

Segue que $\gamma(p) = (x^i(t(p))) \in U \subset M$ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dp^2} &= \frac{-2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dp}{dt} - \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2p}{dt^2}}{\left(\frac{dp}{dt}\right)^3} \\ &= \frac{-2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dp}{dt} - 2\frac{dx^i}{dt} \varphi\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dp}{dt}}{\left(\frac{dp}{dt}\right)^3} \\ &= \frac{-2G^i\left(x, \frac{dx}{dp}\right) \left(\frac{dp}{dt}\right)^3 - 2\varphi\left(x, \frac{dx}{dp}\right) \frac{dx^i}{dp} \left(\frac{dp}{dt}\right)^3}{\left(\frac{dp}{dt}\right)^3} \\ &= -2\bar{G}^i\left(x, \frac{dx}{dp}\right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

□

Vamos observar o que acontece com os coeficientes locais da conexão de Berwald G_{jk}^i após uma mudança projetiva de parâmetro. Como visto anteriormente, a conexão de Berwald induzida pelo spray S é dada pela tripla $B\Gamma = (G_j^i, G_{jk}^i, 0)$, onde

$$G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, \quad G_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}. \quad (2.69)$$

Além disso, como as funções $G^i(x, y)$ são homogêneas de grau 2 em y^i , pelo Teorema 2.15 tem-se que

$$2G^i(x, y) = G_j^i y^j = G_{jk}^i y^j y^k, \quad (2.70)$$

onde as funções G_j^i e G_{jk}^i são positivamente homogêneas de grau 1 e 0 em y^i , respectivamente. Portanto,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + G_{jk}^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (2.71)$$

é uma expressão equivalente para o sistema (2.62).

Definição 2.30. Dizemos que um spray S em $\pi^{-1}(U)$ é *quadrático* se as n^3 funções G_{jk}^i não dependem da variável y .

Note que sprays quadráticos são completamente caracterizados pelo anulamento do tensor de Douglas,

$$\mathcal{D}_{jkl}^i = \frac{\partial^2 G_j^i}{\partial y^k \partial y^l} = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l} = \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}. \quad (2.72)$$

De fato, $\mathcal{D}_{jkl}^i \equiv 0$ se, e somente se, as n^3 funções G_{jk}^i não dependem da variável y . Neste caso, as funções G_{jk}^i são como os coeficientes de uma conexão linear na variedade base M .

Definição 2.31. Dizemos que um spray S em $\pi^{-1}(U)$ é um *spray constante* se as n^3 funções G_{jk}^i são constantes.

Derivando parcialmente a expressão (2.64), primeiro com respeito a variável y^j , e em seguida com respeito a variável y^k , obtém-se que

$$\bar{G}_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j + \xi^i \varphi_{jk}, \quad (2.73)$$

onde $\varphi_j = \partial\varphi/\partial y^j$ e $\varphi_{jk} = \partial\varphi_j/\partial y^k$. Segue que

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \bar{G}_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{dp} \right) \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0 \quad (2.74)$$

é uma expressão equivalente para o sistema (2.66). Portanto, os coeficientes da conexão de Berwald G_{jk}^i se alteram de acordo com (2.73) quando uma mudança projetiva é aplicada. No próximo capítulo veremos a importância desta mudança projetiva de parâmetro e desta mudança de coeficientes da conexão de Berwald no estudo da Dinâmica Modular Analítica.

Por fim, derivando parcialmente a expressão (2.73) com respeito a variável y^l e usando a homogeneidade da função $\varphi(x, y)$, obtém-se que o tensor de Douglas se altera de acordo com a relação

$$\bar{\mathcal{D}}_{jkl}^i = \mathcal{D}_{jkl}^i + (n+1)\varphi_{jk} \quad (2.75)$$

quando uma mudança projetiva de parâmetro é aplicada.

2.3.2 Os invariantes Projetivos

Proposição 2.32. Para um dado spray S em $\pi^{-1}(U)$ com coeficientes locais $G^i(x, y)$, seja $B\Gamma = (G_j^i, G_{jk}^i, 0)$ a conexão de Berwald determinada por S . As n quantidades

$$\Pi^i(x, y) := G^i(x, y) - \frac{1}{n+1} G_a^a(x, y) y^i, \quad (2.76)$$

tem o mesmo valor antes e após qualquer mudança projetiva de parâmetro.

Demonstração. Após a mudança projetiva de parâmetro (2.65) ao longo dos caminhos do spray S , tem-se que $\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + \varphi(x, y)y^i$. Daí

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^i &= \bar{G}^i - \frac{1}{n+1}\bar{G}_a^a y^i \\ &= G^i + \varphi y^i - \frac{1}{n+1}(G_a^a + \varphi_a y^a + \varphi \delta_a^a)y^i \\ &= G^i + \varphi y^i - \frac{1}{n+1}G_a^a y^i - \frac{1}{n+1}\varphi_a y^a y^i - \frac{1}{n+1}\varphi \delta_a^a y^i.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.15, segue que $\varphi_a y^a = \varphi$. Além disso, $\varphi \delta_a^a = n\varphi$. Assim

$$-\frac{1}{n+1}\varphi_a y^a y^i - \frac{1}{n+1}\varphi \delta_a^a y^i = -\frac{1}{n+1}\varphi y^i - \frac{n}{n+1}\varphi y^i = -\varphi y^i.$$

Portanto

$$\bar{\Pi}^i = G^i - \frac{1}{n+1}G_a^a y^i = \Pi^i.$$

□

As funções Π^i são chamadas a *conexão projetiva do spray* $S \in \mathcal{X}(\pi^{-1}(U))$. Qualquer objeto definido a partir de Π^i será *projetivamente invariante*. Isto significa dizer que qualquer objeto definido a partir de Π^i não se alterará quando uma mudança projetiva de parâmetro for aplicada a um dado spray S em $\pi^{-1}(U)$.

Defina as quantidades

$$\Pi_j^i := \frac{\partial \Pi^i}{\partial y^j}, \quad \Pi_{jk}^i := \frac{\partial \Pi_j^i}{\partial y^k}. \quad (2.77)$$

Por diferenciação, é fácil verificar que

$$\Pi_{jk}^i = G_{jk}^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i G_{ak}^a + \delta_k^i G_{aj}^a + y^i \mathcal{D}_{ajk}^a). \quad (2.78)$$

Segue diretamente de (2.78) e da homogeneidade de \mathcal{D}_{jkl}^i (de grau -1 em y^i) via Teorema (2.15), que $\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i$ e $\Pi_{ak}^a = 0$. As n^3 funções Π_{jk}^i são chamadas os *coeficientes da conexão projetiva* do spray S .

É importante ressaltar que sob mudança de coordenadas induzida (2.2) em TM , as n^3 funções Π_{jk}^i , em geral, não se transformam como os coeficientes da conexão de Berwald G_{jk}^i e nem como as funções componentes de um campo tensorial de Finsler em TM . Sob mudança de coordenadas induzida em TM , a regra de transformação de coordenadas para as funções Π_{jk}^i é a seguinte:

$$\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^k} \tilde{\Pi}_{jk}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^h} \Pi_{jk}^h - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \theta}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \theta}{\partial x^j}, \quad (2.79)$$

onde $\theta = \frac{1}{n+1} \log \left[\det \left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right) \right]$. A partir da expressão acima observa-se que

Observação 2.33. As n^3 funções Π_{jk}^i se transformam como os coeficientes G_{jk}^i se, e somente se, a matrix Jacobiana da mudança de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ tem determinante constante.

Observação 2.34. As n^3 funções Π_{jk}^i são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo (1, 2) em \widetilde{TM} se, e somente se, a mudança de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ tem a forma

$$\tilde{x}^i = \frac{a_j^i x^j + b^i}{c_k x^k + h} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} & b_1 \\ a_j^i & \vdots \\ & b_n \\ c_1 \dots c_n & h \end{pmatrix}$$

é uma matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ não-singular e constante. Este é o *grupo projetivo clássico*.

Note que os coeficientes locais G^i de um dado spray S em $\pi^{-1}(U)$ determina uma única conexão projetiva Π^i , a qual é gerada pela mudança projetiva de parâmetro

$$p = A + B \int e^{-\frac{2}{n+1} \int G_a^a(x, dx/dt) dt} dt. \quad (2.80)$$

Neste caso, esta mudança projetiva de parâmetro transforma o sistema (2.71) no sistema

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \Pi_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{dp} \right) \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0. \quad (2.81)$$

Observação 2.35. O parâmetro projetivo p não se altera sob mudança não-singular de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, cujo Jacobiano está contido em $SL(n, \mathbb{R}^n)$, o grupo de todas as matrizes com determinante 1, e somente estas.

Seguindo Douglas (DOUGLAS, 1928), definimos a *curvatura projetiva* \mathcal{K} para o spray S por

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial y^l}. \quad (2.82)$$

Mais geralmente, é possível verificar que

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = \mathcal{D}_{jkl}^i - P \left(\frac{1}{n+1} \delta_j^i \mathbb{D}_{akl}^a \right) - \frac{1}{n+1} y^i \frac{\partial \mathbb{D}_{jkl}^a}{\partial y^a}, \quad (2.83)$$

onde P indica a soma dos três termos obtidos por permutação cíclica de j, k e l . É claro que \mathcal{K} é um invariante projetivo. Além disso, sob mudança não-singular de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, as funções \mathcal{K}_{jkl}^i se transformam como as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo (1, 3) em TM . A curvatura projetiva \mathcal{K} é frequentemente chamada o *tensor projetivo de Douglas*. Ainda em (DOUGLAS, 1928), é mostrado que

Teorema 2.36. $\mathcal{K} \equiv 0$ se, e somente se, existe uma mudança projetiva de parâmetro tal que os novos coeficientes \bar{G}_{jk}^i são independentes de y .

Em outras palavras, o anulamento do tensor projetivo de Douglas \mathcal{K} é equivalente a existência de uma mudança projetiva de parâmetro convertendo o sistema (2.41) em um spray *quadrático*.

É claro que $\mathcal{D} \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{K} \equiv 0$, mas não inversamente. De fato, qualquer mudança projetiva de um spray quadrático resultará em um spray com $\mathcal{K} \equiv 0$ mas frequentemente $\bar{\mathcal{D}} \neq 0$ (ver fórmula (2.75)).

Seguindo Berwald (BERWALD, 1947), definimos

$$\mathcal{W}_j^i = 2 \frac{\partial \Pi^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Pi_j^i}{\partial x^r} y^r + 2 \Pi_{jr}^i \Pi^r - \Pi_r^i \Pi_j^r. \quad (2.84)$$

Note que \mathcal{W}_j^i tem uma expressão similar a \mathbb{B}_j^i (o segundo invariante KCC - ver (2.61)). Apenas trocamos G^i , G_j^i e G_{jk}^i por Π^i , Π_j^i e Π_{jk}^i . Agora, de maneira similar aos demais invariantes KCC, definimos

$$\mathcal{W}_{jk}^i = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathcal{W}_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial \mathcal{W}_k^i}{\partial y^j} \right) \quad (2.85)$$

e a *curvatura projetiva de Weyl*

$$\mathcal{W}_{jkl}^i = \frac{\partial \mathcal{W}_{jk}^i}{\partial y^l} \quad (2.86)$$

Observamos aqui que, sob mudança não-singular de coordenadas, \mathcal{W}_{jkl}^i se transformam como as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo (1, 3) em TM . Entretanto, o mesmo não vale para as funções \mathcal{W}_j^i e \mathcal{W}_{jk}^i (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

Vamos apresentar os principais resultados da *geometria projetiva local*. A demonstração será omitida e o leitor poderá encontrá-la em (KNEBELMAN, 1929).

Teorema 2.37. *Existe uma carta local $(U, \phi = (x^i))$ em M^n , $n \geq 3$, tal que $\Pi_{jk}^i = 0$ se, e somente se, $\mathcal{W}_{jkl}^i \equiv 0$ e $\mathcal{K}_{jkl}^i \equiv 0$.*

Teorema 2.38. *Existe uma carta local $(U, \phi = (x^i))$ em M^2 tal que $\Pi_{jk}^i = 0$ se, e somente se, $\mathcal{K}_{jkl}^i \equiv 0$ e $\rho_{jkl} \equiv 0$, onde*

$$\begin{cases} \rho_{jkl} &= r_{jk/l} - r_{jl/k}, \\ r_{jk/l} &= \frac{\partial r_{jk}}{\partial x^l} - \Pi_{jl}^h r_{hk} - \Pi_{kl}^h r_{jh}, \\ r_{jk} &= \mathbb{B}_{jkh}^h, \\ \mathbb{B}_{jkl}^i &= \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial x^l} + \Pi_{jk}^s \Pi_{sl}^i + \mathcal{K}_{jls}^i \Pi_{mk}^s y^m - (k|l). \end{cases} \quad (2.87)$$

O símbolo $-(k|l)$ significa repetir todos os termos que vem antes, mas trocando k e l e colocando um menos na frente de toda a expressão.

Definição 2.39. Se $\Pi_{jk}^i = 0$ em alguma vizinhança coordenada de uma carta local induzida $\pi^{-1}(U)$, então dizemos que S é um spray *projetivamente plano*.

Para um dado spray bidimensional S em \widetilde{TM} , é possível encontrarmos $\mathcal{K}_{jkl}^i \equiv 0$ e $\rho_{jkl} \equiv 0$ em alguma vizinhança coordenada de alguma carta local induzida $\pi^{-1}(U)$, mas $\Pi_{jk}^i \neq 0$ nesta mesma vizinhança coordenada. O Teorema 2.38 afirma que existe uma carta local $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ em M^2 tal que $\tilde{\Pi}_{jk}^i = 0$ em $\pi^{-1}(V)$. Nestes casos, é necessário usar uma mudança não-singular de coordenadas $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ e, em seguida, aplicar a mudança projetiva de parâmetro para transformar o spray S em $\pi^{-1}(U)$ no spray

$$\frac{d^2 \tilde{x}^i}{dp^2} = 0. \quad (2.88)$$

Por fim, tem-se os seguintes resultados (ANTONELLI; HAN; MODAYIL, 1999; ANTONELLI, 2003b);

Teorema 2.40. *Em dimensão 2, todo spray constante é projetivamente plano.*

Teorema 2.41. *Em dimensão maior ou igual a 3, existe spray constante que não é projetivamente plano.*

2.4 Espaços de Finsler

Consideraremos M uma variedade diferenciável de dimensão n e \widetilde{TM} seu fibrado tangente com a seção nula $\mathbb{O} : TM \rightarrow M$ removida. Se $(U, \phi = (x^i))$ é uma carta local em M , então $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, y^i))$ denotará a carta local induzida em \widetilde{TM} , onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica.

2.4.1 Função Métrica

Definição 2.42. Um *espaço de Finsler* (ou *variedade de Finsler*) é o par $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$, onde $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz os seguintes axiomas

- i) F é uma função diferenciável em \widetilde{TM} e contínua na seção nula $\mathbb{O} : TM \rightarrow M$.
- ii) F é uma função positiva em \widetilde{TM} .
- iii) F é positivamente homogênea de grau 1 em y^i , isto é

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \quad \forall \lambda \in (0, +\infty).$$

- iv) A matriz hessiana de F^2 , cujas entradas são

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (2.89)$$

é positiva definida em \widetilde{TM} .

Se $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ é outra carta local em M e $(\pi^{-1}(V), \Psi = (\tilde{x}^i, \tilde{y}^i))$ é a carta local induzida em \widetilde{TM} , então a fórmula de mudança de coordenadas induzida (2.2) em \widetilde{TM} é usada para mostrar que o conjunto de funções $g_{ij}(x, y)$ se transformam de acordo com a regra

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^j} g_{rs}(x, y). \quad (2.90)$$

Segue que $g_{ij}(x, y)$ são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo $(0, 2)$ em \widetilde{TM} . Este tensor g será chamado o *tensor métrico* (ou *fundamental*) do espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$. Já a função $F(x, y)$ é chamada *função métrica* (ou *fundamental*) do espaço de Finsler.

É claro que $\det(g_{ij}) > 0$ em \widetilde{TM} , uma vez que $g_{ij}(x, y)$ é positiva definida em \widetilde{TM} . Denotaremos por $g^{ij}(x, y)$ inversa da matriz $g_{ij}(x, y)$, isto é, $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$. Como $F(x, y) > 0$ em \widetilde{TM} , podemos definir o *comprimento absoluto* $|v|$ de um vetor tangente v^i como sendo o valor de $F(x, v)$, isto é, $|v| = F(x, v)$. Mais ainda, desde que g_{ij} é positiva definida em \widetilde{TM} , podemos definir o *comprimento de v relativo a y* como sendo $|v|_y = g_{ij}(x, y)v^i v^j$.

A homogeneidade da função $F^2(x, y)$ (de grau 2 em y^i) nos permite verificar, via Teorema 2.15, que vale a relação

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j. \quad (2.91)$$

Definimos o *elemento suporte* como sendo o vetor de Finsler l cujas componentes contravariantes l^i são dadas por

$$l^i = \frac{y^i}{F}. \quad (2.92)$$

Usando a fórmula (2.91), concluímos que $|l|_y = g_{ij}(x, y)l^i l^j = 1$, isto é, o elemento suporte $l = (l^i)$ é unitário em relação ao comprimento relativo. Mais ainda, $|l| = F(x, l) = F(x, y/F(x, y)) = 1$, devido a homogeneidade da função métrica F . Assim, o elemento suporte $l = (l^i)$ é também unitário em relação ao comprimento absoluto. Seja $l_i = g_{ij}l^j$. Novamente, usando a homogeneidade da função F^2 e o Teorema 2.15, tem-se que

$$g_{ij}y^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} y^j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i} \right) y^j = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{F^2}{2} \right) = F \frac{\partial F}{\partial y^i}.$$

Segue que

$$l_i = g_{ij}l^j = \frac{1}{F} g_{ij}y^j = \frac{\partial F}{\partial y^i}. \quad (2.93)$$

O *tensor métrico angular* é definido como

$$h_{ij} = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}. \quad (2.94)$$

Note que

$$h_{ij}l^j = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \frac{y^j}{F} = \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) y^j = 0, \quad (2.95)$$

devido a homogeneidade da função $\frac{\partial F}{\partial y^i}$ (de grau 0 em y^i). Além disso,

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \left(F \frac{\partial F}{\partial y^j} \right) = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial y^j}.$$

Isto mostra que

$$g_{ij} = h_{ij} + l_i l_j. \quad (2.96)$$

A seguir, apresentaremos alguns espaços de Finsler que são bem conhecidos no estudo da geometria de Finsler. Nos restringiremos aqueles que irão aparecer em nosso modelo de formação de tecido.

Definição 2.43. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é chamado *localmente Minkowski* se para todo ponto $p \in M$, existe uma carta local $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ em $p \in V \subset M$ tal que em $\pi^{-1}(V)$ a função métrica F dependa apenas da variável \tilde{y} . Tal carta local $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ é chamada *adaptada* a um espaço localmente Minkowski.

Exemplo 2.44. Seja M uma variedade Riemanniana com métrica Riemanniana $a_{ij}(x)$. O Par $\mathcal{F}^n = (M, F(x, y))$, onde

$$F(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad (2.97)$$

é um espaço de Finsler. O tensor métrico deste espaço de Finsler, $g_{ij}(x, y)$, coincide com o métrica Riemanniana $a_{ij}(x)$.

Exemplo 2.45. Seja $a_{ij}(x)$ uma métrica Riemanniana em M . Considere a 1-forma $\alpha(x, dx) = \alpha_i(x)dx^i$ em M . Então $F(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ é uma métrica de Finsler e $\alpha(x, y) = \alpha_i(x)y^i$ é uma função escalar em TM . Definimos

$$TM_\alpha^+ = \{(x, y) \in TM; \alpha(x, y) > 0\}, \quad TM_\alpha^- = \{(x, y) \in TM; \alpha(x, y) < 0\},$$

$$TM_\alpha = TM_\alpha^+ \cup TM_\alpha^- = \{(x, y) \in TM; \alpha(x, y) \neq 0\}.$$

Em uma vizinhança coordenada $\pi^{-1}(U)$ de TM_α , definimos

$$\bar{F}(x, y) = \frac{F^2(x, y)}{|\alpha(x, y)|} \quad (2.98)$$

É bem conhecido que $\bar{F}(x, y)$ satisfaz todos os axiomas da Definição 2.42 (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). O par $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$ é chamado um *espaço de Kropina*. Além disso, o tensor métrico deste espaço,

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{F}^2}{\partial y^i \partial y^j},$$

é dado por (ANTONELLI; BUCATARU, 2001a)

$$g_{ij} = \frac{2F^2}{\alpha^2} \left[a_{ij} + \frac{2}{\alpha} (y_i \alpha_j + \alpha_i y_j) + \frac{3F^2}{2\alpha^2} \alpha_i \alpha_j + \frac{2}{F^2} y_i y_j \right], \quad (2.99)$$

onde $y_i = a_{ij}(x)y^j$.

Exemplo 2.46. Seja $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ um espaço de Kropina e $\beta(x, dx) = b_i(x)dx^i$ é uma 1-forma em M . Então $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ é uma função escalar em TM . Definimos

$$L(x, y) = F(x, y) + \beta(x, y). \quad (2.100)$$

É um fato bem conhecido que $L(x, y)$ satisfaz todo os axiomas da Definição 2.42 (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). O par $\mathbb{L}^n = (M, L(x, y))$ é chamado um *espaço de Randers Generalizado*. Denote por

$$h_{ij}(x, y) = \frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i \partial y^j} \quad (2.101)$$

o tensor métrico do espaço de Randers Generalizado e por $g_{ij}(x, y)$ o tensor métrico do espaço de Kropina $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$. Levando em consideração a homogeneidade das funções métricas F e L , tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} p^i := \frac{1}{F}y^i = g^{ij} \frac{\partial F}{\partial y^j} \quad p_i := g_{ij}p^j = \frac{\partial F}{\partial y^i} \\ l^i := \frac{1}{L}y^i = g^{ij} \frac{\partial L}{\partial y^j} \quad l_i := g_{ij}l^j = p_i + b_i \\ l^i = \frac{F}{L}p^i \quad l^i l_i = p^i p_i = 1 \quad l^i p_i = \frac{F}{L} \quad p^i l_i = \frac{L}{F} \\ b_i p^i = \frac{\beta}{F} \quad b_i l^i = \frac{\beta}{L} \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Os tensores métricos $g_{ij}(x, y)$ e $h_{ij}(x, y)$ são relacionados por (ANTONELLI; BUCATARU, 2000)

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{L}{F}g_{ij} + b_i p_j + p_i b_j b_i b_j - \frac{\beta}{F}p_i p_j \\ &= \frac{L}{F}(g_{ij} - p_i p_j) + l_i l_j, \end{aligned}$$

Para um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$, tem-se que $F^2(x, y)$ é positivamente homogênea de grau 2 em y^i , uma vez que $F(x, y)$ é positivamente homogênea de grau 1 em y^i . Segue, via Teorema 2.15, que o tensor métrico $g_{ij}(x, y)$ é positivamente homogêneo de grau 0 em y^i , isto é,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^k = 0 \quad (2.103)$$

e que as funções C_{ijk} , definidas por

$$C_{ijk} := \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}, \quad (2.104)$$

são positivamente homogêneas de grau -1 em y^i . Sob mudança de coordenadas induzidas (2.2) em TM , as funções C_{ijk} se transformam de acordo com a seguinte regra

$$\tilde{C}_{pqr} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^r} C_{ijk}.$$

Assim, C_{ijk} são as funções componentes de um campo tensorial de Finsler do tipo $(0, 3)$ em \widetilde{TM} . Este é chamado o *tensor torção de Cartan*.

Definição 2.47. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é Riemanniano se seu tensor métrico g_{ij} não depende da variável y .

A partir das definições para g_{ij} e C_{ijk} é possível notar que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 2C_{ijk}. \quad (2.105)$$

Disto, segue o seguinte resultado.

Teorema 2.48. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é Riemanniano se, e somente se o tensor de Cartan C_{ijk} se anula em \widetilde{TM} .

2.4.2 Geodésicas do Espaço de Finsler

Nesta seção vamos introduzir as geodésicas de um Espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$.

Para uma dada curva parametrizada $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$, seja $\tilde{\gamma} : t \in [0, 1] \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x^i(t), \frac{dx^i}{dt}(t)) \in \pi^{-1}(U) \subset \widetilde{TM}$ seu levantamento natural a \widetilde{TM} .

Definição 2.49. Definimos o *comprimento* da curva γ com extremidades $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ pelo número

$$L(\gamma) = \int_0^1 F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt. \quad (2.106)$$

O número $L(\gamma)$ não depende de mudança de coordenadas induzida em TM . Além disso, a homogeneidade da função métrica F (positivamente homogênea de grau 1 em y^i) nos permite mostrar o seguinte resultado (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

Proposição 2.50. O número $L(\gamma)$ não depende da parametrização da curva.

Portanto, podemos fixar um *parâmetro canônico* s sobre a curva γ , dado pelo *comprimento de arco* de γ . De fato, a função $s(t)$, $t \in [0, 1]$, definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t F\left(x(\tau), \frac{dx}{dt}(\tau)\right) d\tau, \quad t, t_0 \in [0, 1], \quad (2.107)$$

é diferenciável, tendo derivada

$$\frac{ds}{dt} = F\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) > 0, \quad t \in (0, 1). \quad (2.108)$$

Segue que a função $s = s(t)$, $t \in [0, 1]$, é invertível. Seja $t = t(s)$ sua inversa. A mudança de parâmetro $t \rightarrow s$, dada por $s = s(t)$, tem a propriedade

$$F\left(x(s), \frac{dx}{ds}(s)\right) = 1. \quad (2.109)$$

Assim, temos o seguinte resultado;

Teorema 2.51. *Em um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$, para qualquer curva suave $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ existe um parâmetro canônico s com a propriedade (2.109).*

Seja $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ uma curva parametrizada tendo extremidades $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$. Seu comprimento é dado pela fórmula (2.106). Seja $\xi^i(t) := \xi^i(x(t))$ as componentes contravariante de um campo de vetores $\xi(t) := \xi(x(t))$ definido ao longo da curva γ com a propriedade $\xi(0) = \xi(1) = 0$. Considere a família de curvas parametrizadas $\gamma_\epsilon : t \in [0, 1] \mapsto \gamma_\epsilon(t) = (x_\epsilon^i(t)) \in U \subset M$, dada por

$$x_\epsilon^i(t) = x^i(t) + \epsilon \xi^i(t), \quad (2.110)$$

onde ϵ é um número real com $|\epsilon|$ pequeno. Assim, $\gamma_\epsilon(t)$ tem as mesmas extremidades $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ e os mesmos vetores tangentes nesses pontos que a curva γ . O comprimento da curva γ_ϵ é dada por

$$L(\gamma_\epsilon) = \int_0^1 F \left(x(t) + \epsilon \xi(t), \frac{dx}{dt}(t) + \epsilon \frac{d\xi}{dt}(t) \right) dt.$$

Uma condição necessária para que $L(\gamma)$ seja um valor extremo (isto é, ser um ponto de máximo ou mínimo) de $L(\gamma_\epsilon)$ é a seguinte;

$$\left. \frac{dL(\gamma_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (2.111)$$

Mas

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL(\gamma_\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} \left[F \left(x(t) + \epsilon \xi(t), \frac{dx}{dt}(t) + \epsilon \frac{d\xi}{dt}(t) \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \xi^i + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{d\xi^i}{dt} \right) dt, \end{aligned}$$

onde $y^i = \frac{dx^i}{dt}$. Usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{d\xi^i}{dt} \right) dt &= \left. \frac{\partial F}{\partial y^i} \xi^i \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) \xi^i dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) \xi^i dt, \end{aligned}$$

pois $\xi(0) = \xi(1) = 0$. Segue que (2.111) é equivalente a

$$\int_0^1 \xi^i \left[\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) \right] dt = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Como $\xi(t)$ é arbitrário, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (2.112)$$

que são as bem conhecidas equações de Euler-Lagrange.

Definição 2.52. As curvas $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (x^i(t))$ soluções das equações de Euler Lagrange (2.112) são chamadas *geodésicas* do espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$.

Como $F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j}$, pela regra da cadeia tem-se que

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{2F} \frac{\partial F^2}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial F}{\partial y^i} = \frac{1}{2F} \frac{\partial F^2}{\partial y^i}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} &= \frac{d}{dt} \left(2F \frac{\partial F}{\partial y^i} \right) - 2F \frac{\partial F}{\partial x^i} \\ &= 2 \frac{dF}{dt} \frac{\partial F}{\partial y^i} + 2F \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) - 2F \frac{\partial F}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Assim, o sistema (2.112) é equivalente ao sistema de equações

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} = 2 \frac{dF}{dt} \frac{\partial F}{\partial y^i}, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}. \quad (2.113)$$

Substituindo $F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j$, obtemos que (2.113) é equivalente ao sistema de equações

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = 2 \frac{dF}{dt} \frac{\partial F}{\partial y^i}, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (2.114)$$

onde

$$G^i(x, y) = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i(x, y) y^j y^k \quad (2.115)$$

e γ_{jk}^i sendo os símbolos de Christoffel do tensor métrico $g_{ij}(x, y)$, isto é,

$$\gamma_{jk}^i(x, y) = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right). \quad (2.116)$$

Mudando agora para o parâmetro canônico s , temos que $F(x, \frac{dx}{ds}) = 1$. Assim, o sistema (2.114) torna-se

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \gamma_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (2.117)$$

Teorema 2.53. As geodésicas de um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ na parametrização canônica são dadas pelas soluções do sistema de equações diferenciais (2.117).

Exemplo 2.54. Seja $F^n = (M, F(x, y))$ um espaço localmente Minkowski. Seja $(V, \psi = (\tilde{x}^i))$ uma local adaptada. Em $\pi^{-1}(V)$, temos que $F = F(\tilde{y})$. Assim, o tensor métrico $g_{ij}(\tilde{y})$ não depende da variável \tilde{x} . Segue que $\gamma_{jk}^i = 0$. Portanto, em uma carta adaptada, as geodésicas de um espaço localmente Minkowski são soluções de

$$\frac{d^2 \tilde{x}^i}{ds^2} = 0, \quad (2.118)$$

isto é, são retas.

Observe que as geodésicas de um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ na parametrização canônica s determinam as curvas integrais do spray

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (2.119)$$

onde $G^i(x, y)$ é dada por (2.115). Este é chamado o *spray geodésico* do espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$, uma vez que $G^i(x, y)$ são funções positivamente homogêneas de grau *dois* em y^i . Além disso, esse spray geodésico é completamente determinado pela função métrica $F(x, y)$. A conexão não-linear em \widetilde{TM} induzida pelo spray geodésico S tem coeficientes locais

$$G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^j} (\gamma_{rs}^i(x, y) y^r y^s). \quad (2.120)$$

Esta é a tão conhecida *conexão não-linear de Cartan*. Como o spray geodésico S depende apenas da função métrica $F(x, y)$, segue que a conexão não-linear de Cartan depende somente da função métrica $F(x, y)$. Considere a conexão de Berwald induzida pela conexão não-linear de Cartan. Ela é dada pela tripla $B\Gamma = (G_j^i, G_{jk}^i, 0)$, onde

$$G_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k} = \frac{\partial G^i}{\partial y^i \partial y^j}.$$

Definição 2.55. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é chamado um *espaço de Berwald* se os coeficientes locais da conexão de Berwald, G_{jk}^i , são funções somente de x , isto é, se

$$\mathcal{D}_{jkl}^i := \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l} = 0. \quad (2.121)$$

Um espaço de Berwald será denotado por $\mathbb{B}^n = (M, F(x, y))$.

2.4.3 Espaços de Finsler Bidimensionais

Considere $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ um espaço de Finsler bidimensional. Seja $l^i = (1/F)y^i$ o elemento suporte e $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$ o tensor métrico angular, onde $l_i := g_{ij} l^j = \frac{\partial F}{\partial y^i}$. Desejamos definir um único vetor unitário $m^i(x, y)$ perpendicular ao elemento suporte $l^i(x, y)$. Para isso, vamos introduzir as matrizes anti-simétricas cujas entradas são

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 0, & \epsilon_{12} &= \sqrt{g}, & \epsilon_{21} &= -\sqrt{g}, & \epsilon_{22} &= 0, \\ \epsilon^{11} &= 0, & \epsilon^{12} &= \frac{1}{\sqrt{g}}, & \epsilon^{21} &= -\frac{1}{\sqrt{g}}, & \epsilon^{22} &= 0, \end{aligned}$$

onde $g = \det(g_{ij}) > 0$. Observe que

$$\epsilon_{ik} + \epsilon_{ki} = 0, \quad \epsilon^{ik} \epsilon_{jk} = \delta_j^i, \quad \epsilon^{ik} \epsilon_{ik} = 2. \quad (2.122)$$

Escolhendo uma *orientação* e fixando ela, defina o campo de vetores $m^i(x, y)$ (ou $m_i(x, y)$) por

$$l^i = \epsilon^{ik} m_k, \quad l_i = \epsilon_{ik} m^k. \quad (2.123)$$

Usando (2.122), concluímos que as seguintes relações são válidas;

$$\begin{aligned} m^i &= -\epsilon^{ik} l_k, & m_i &= -\epsilon_{ik} l^k, \\ l^i m^k - l^k m^i &= \epsilon^{ik}, & l_i m_k - l_k m_i &= \epsilon_{ik}. \end{aligned}$$

Além disso, o tensor métrico pode ser escrito como;

$$g_{ij} = l_i l_j + m_i m_j, \quad \delta_i^k = l_i l^k + m_i m^k. \quad (2.124)$$

O par (l^i, m^i) (ou (l_i, m_i)) é chamado o *referencial de Berwald* do espaço de Finsler bidimensional $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ (BERWALD, 1947). Note que este referencial é completamente determinado pela função métrica $F(x, y)$. Usando (2.96), tem-se que

$$h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j = m_i m_j. \quad (2.125)$$

Usando (2.95) e esta última expressão acima, obtem-se que

$$0 = h_{ij} l^j = m_i m_j l^j \Rightarrow m_j l^j = 0. \quad (2.126)$$

Agora, usando a primeira expressão de (2.124) e esta última relação acima, tem-se que

$$m_i := g_{ij} m^j = l_i l_j m^j + m_j m_i m^j = m_i m_j m^j \Rightarrow m_j m^j = 1. \quad (2.127)$$

Note que (2.126) e (2.127) mostra que (m^i, l^i) é um referencial ortonormal em relação ao tensor métrico $g_{ij}(x, y)$, pois

$$0 = m_j l^j = g_{ji} m^i l^j, \quad 1 = m_i m^j = g_{ij} m^i m^j. \quad (2.128)$$

Vamos agora obter algumas expressões envolvendo a base de Berwald. Elas serão de grande utilidade para introduzirmos o tão conhecido *escalar principal* de um espaço de Finsler bidimensional $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$. Para facilitar a notação, usaremos $\dot{\partial}_i$ para indicar diferenciação parcial com respeito a variável y^i .

Proposição 2.56. *Com respeito a base de Berwald (l^i, m^i) (ou (l_i, m_i)), tem-se que*

$$\begin{aligned} (1) \quad F \dot{\partial}_j l_i &= m_i m_j, & (2) \quad F \dot{\partial}_j l^i &= m^i m_j, \\ (3) \quad l_i \dot{\partial}_j m^i &= -m_j / F, & (4) \quad m_i \dot{\partial}_k m^i &= -C_{krs} m^r m^s. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) Usando as expressões (2.93), (2.94) e (2.125), temos que

$$F \dot{\partial}_j l^i = F \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\frac{\partial F}{\partial y^i} \right) = F \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} = h_{ij} = m_i m_j.$$

(2) Usando as expressões (2.92), (2.93) e a segunda expressão de (2.124), temos que

$$\begin{aligned} F \dot{\partial}_j l^i &= F \dot{\partial}_j \left(\frac{y^i}{F} \right) = F \frac{1}{F^2} \left(\delta_j^i F - y^i \frac{\partial F}{\partial y^j} \right) \\ &= \delta_j^i - l^i l_j = l^i l_j + m_i m^j - l^i l_j \\ &= m^i m_j. \end{aligned}$$

- (3) Como $l_i m^i = 0$, segue que $\dot{\partial}_j l_i + l_i \dot{\partial}_j m^i = 0$. Usando o item (1), e que $m_i m^i = 1$, tem-se

$$l_i \dot{\partial}_j m^i = -\dot{\partial}_j l_i m^i = -\frac{1}{F} m_i m^i m_j = -\frac{m_j}{F}.$$

- (4) Como $g_{ij} m^i m^j = 1$, segue que $\dot{\partial}_k g_{ij} m^i m^j + g_{ij} \dot{\partial}_k m^i + g_{ij} m^i \dot{\partial}_k m^j = 0$. Usando $m_i = g_{ij} m^j$ e $\dot{\partial}_k g_{ij} = C_{kij}$ obte-se o resultado. □

Agora, desde que o tensor torção de Cartan C_{jrs} satisfaz $C_{jrs} l^r = 0$, devemos ter que

$$FC_{ijk} = Im_i m_j m_k, \quad (2.129)$$

onde $I(x, y)$ é chamado o *escalar principal* de $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

Para o espaço de Finsler $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$, seja S o *spray geodésico* com coeficientes locais $G^i(x, y)$ dados em (2.115) e conexão não-linear de Cartan com coeficientes locais G_j^i como em (2.120). Seja $\Gamma B = (G_j^i, G_{jk}^i, 0)$ a conexão de Berwald associada ao spray geodésico S . A equação das geodésicas na parametrização canônica (2.117) podem ser reescritas como

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0. \quad (2.130)$$

Variando as trajetórias $\gamma(s) = (x^i(s))$ do sistema acima em outras próximas, de acordo com

$$\bar{x}^i(s) = x^i(s) + \epsilon \xi^i(s), \quad (2.131)$$

onde ϵ é um número real com $|\epsilon|$ pequeno e $\xi^i(s)$ são as componentes contravariantes de um campo de vetores $\xi(s)$ ao longo de $\gamma(s)$, obtem-se, substituindo (2.131) em (2.130) e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{dx^i}{ds^2} + 2\frac{\partial G^i}{\partial x^i} \xi^j + 2\frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{d\xi^s}{ds} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (2.132)$$

Para facilitar a notação, vamos usar ∂_i para denotar derivação parcial com respeito a x^i e continuaremos a usar a notação $\dot{\partial}_i$ para denotar derivação parcial com respeito a y^i . Usando a derivada covariante KCC (ver (2.53)), podemos reescrever a equação acima em sua *forma invariante* (equação de Jabobi)

$$\frac{D\xi^i}{ds^2} + \mathcal{B}_j^i \xi^j = 0, \quad (2.133)$$

onde

$$\mathcal{B}_j^i = 2\partial_j G^i - \partial_r G_j^i y^r + 2G_{jr}^i G^r - G_r^i G_j^r \quad (2.134)$$

é chamado o *Tensor Desvio de Berwald*. Note que \mathcal{B}_j^i é positivamente homogênea de grau dois em y^i . Definimos o *Tensor Torção de Berwald* por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jk}^i &:= \frac{1}{3}(\dot{\partial}_j \mathcal{B}_k^i - \dot{\partial}_k \mathcal{B}_j^i) \\ &= \partial_k G_j^i - \partial_j G_k^i + G_j^r G_{rk}^i - G_k^r G_{rj}^i. \end{aligned} \quad (2.135)$$

O *Tensor Curvatura de Berwald* é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{hjk}^i &:= \dot{\partial}_h \mathcal{R}_{jk}^i \\ &= \partial_k G_{hj}^i - \partial_j G_{hk}^i + G_{hj}^r G_{rk}^i - G_{hk}^r G_{rj}^i + G_j^r \mathcal{D}_{rhk}^i - G_k^r \mathcal{D}_{rhh}^i, \end{aligned} \quad (2.136)$$

onde $\mathcal{D}_{jkl}^i := \dot{\partial}_l G_{jk}^i = \dot{\partial}_j \dot{\partial}_k \dot{\partial}_l G^i$ é o *Tensor de Douglas*. Note que estes tensores definidos aqui são os quatro últimos invariantes KCC do sistema (2.130). O primeiro, \mathcal{E}^i , é identicamente nulo, devido a homogeneidade da função $G^i(x, y)$.

Usando o referencial de Berwald (l^i, m^i) , L. Berwald mostrou que o tensor (2.135) pode ser escrito em termos deste referencial como;

$$\mathcal{R}_{jk}^i = F \mathcal{K} m^i (l_j m_k - l_k m_j), \quad (2.137)$$

onde a função escalar $\mathcal{K}(x, y)$ é a tão conhecida *curvatura de Gauss Berwald* (BERWALD, 1941).

Usando

$$2G^i = G_j^i y^j = G_{jk}^i y^j y^k, \quad (2.138)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jk}^i y^j &= (\partial_k G_j^i - \partial_j G_k^i + G_j^r G_{rk}^i - G_k^r G_{rj}^i) y^j \\ &= 2\partial_k G^i - \partial_j G_k^i y^j + 2G_{kr}^i G^r - G_r^i G_k^r \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$= \mathcal{B}_k^i. \quad (2.140)$$

Agora, usando $l^j = (1/F) y^j$, $l_j l^j = 1$, $m_j l^j = 0$ e a expressão (2.137), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^i &= \mathcal{R}_{jk}^i y^j = F \mathcal{K} m^i (l_j m_k - l_k m_j) y^j \\ &= F^2 \mathcal{K} m^i (l_j m_k - l_k m_j) l^j \\ &= F^2 \mathcal{K} m^i m_k. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Desde que $F(x, dx/ds) = 1$, pois s é o parâmetro comprimento de arco, a equação de Jacobi (2.133) se reduz a

$$\frac{D^2 \xi^i}{ds^2} + \mathcal{K} m^i m_j \xi^k = 0. \quad (2.142)$$

Definição 2.57. Dizemos que um campo de vetores $\xi^i(s)$ ao longo de uma geodésica $\gamma(s)$ do espaço de Finsler $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é um campo de Jacobi se $\xi^i(s)$ satisfaz (2.142).

Em (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b) é mostrado que um campo de Jacobi $\xi^i(s)$ ao longo de uma geodésica $\gamma(s)$ de um espaço de Finsler bidimensional pode ser expresso como

$$\xi^i(s) = v(s) m^i. \quad (2.143)$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi^i}{ds} &= \frac{D}{ds} \left(\frac{dv}{ds} m^i + v(s) \frac{Dm^i}{ds} \right) \\ &= \frac{d^2v}{ds^2} m^i,\end{aligned}$$

onde temos usado que $Dm^i/ds = 0$ (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). Substituindo esta última expressão em (2.142), tem-se que a equação de Jacobi de um espaço de Finsler bidimensional se reduz a

$$\frac{d^2v}{ds^2} + Kv(s) = 0. \quad (2.144)$$

Portanto, o estudo da estabilidade do sistema (2.130) se reduz ao estudo de (2.144); e é determinada pelo sinal da curvatura de Gauss Berwald $\mathcal{K}(x, y)$ em \widetilde{TM} . Assim, temos

- Se $\mathcal{K}(x, y) > 0$ sobre \widetilde{TM} , então (2.130) é J-estável.
- Se $\mathcal{K}(x, y) \leq 0$ sobre \widetilde{TM} , então (2.130) é J-instável.

2.5 Geometria Semiprojetiva

Seja $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ um *espaço localmente Minkowski* e considere $(U, \phi = (x^i))$ uma carta local adaptada a \mathbb{F}^n . Então $F = F(y)$ em $\pi^{-1}(U)$. Assim, o tensor métrico $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ deste espaço de Finsler depende apenas da variável y . Segue que os símbolos de Christoffel, γ_{jk}^i , como definidos em (2.116), se anulam em $\pi^{-1}(U)$. Deste modo, as geodésicas de um espaço localmente Minkowski são soluções de

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0, \quad (2.145)$$

onde s é o *comprimento de arco* (ou parâmetro canônico) determinado por $F(y)$, isto é, $ds = F(dx/dt)dt$.

Seja $\sigma(x)$ uma função escalar definida $U \subset M$. Definimos uma *transformação semiprojetiva* de (2.145) como sendo o novo spray

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \left(\delta_j^i \partial_k \sigma(x) \right) \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0, \quad (2.146)$$

onde ∂_k indica derivada parcial com respeito a variável x^k e o parâmetro p é definido por

$$dp = e^{\sigma(x)} ds. \quad (2.147)$$

Assim, observamos que uma transformação semiprojetiva consiste de duas partes: (1) uma conexão não simétrica de Wagner, $F_{jk}^i = \delta_j^i \partial_k \sigma(x)$ (ANTONELLI; INGARDEN;

MATSUMOTO, 1993), e (2) uma mudança de parâmetro ao longo das trajetórias soluções de (2.145), dada por (2.147). A *Teoria da Geometria de Wagner* afirma que a função métrica $\bar{F}(x, y) = e^{\sigma(x)}F(y)$ é constante ao longo das soluções de (2.146), isto é, $F(x, dx/dp) = 1$ (HASHIGUSHI, 1975; HASHIGUSHI; ICHIJO, 1977). Soluções de (2.146) são chamadas *curvas autoparalelas da geometria de Wagner*. Estas são as retas desta geometria. Entretanto, é importante ressaltar que estas curvas autoparalelas quase nunca são as geodésicas do espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$. As geodésicas deste espaço de Finsler são soluções de

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \left(\delta_j^i \partial_k \sigma(x)\right) \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = C^i, \quad (2.148)$$

onde

$$C^i = F^2 \sigma^i - \left(\delta_k^i \partial_j \sigma(x)\right) \frac{dx^k}{dp} \frac{dx^j}{dp} \quad (2.149)$$

é o *vetor curvatura de Wagner* (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). Aqui, $\sigma^i = g^{ir} \sigma_r$, sendo g^{ij} as entradas da inversa da matriz Hessiana g_{ij} , isto é, $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$. Além disso, o vetor curvatura de Wagner satisfaz a condição

$$g_{ij} C^i \frac{dx^j}{dp} = 0. \quad (2.150)$$

A passagem de F para \bar{F} é chamada uma *transformação heterocrônica* em (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993).

2.6 Uma Nova Classe de Métricas Projetivamente Planas

2.6.1 Métricas em Relação Projetiva

Vimos que as geodésicas de um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ na parametrização canônica s são soluções do sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad (2.151)$$

onde

$$\begin{cases} G^i(x, y) &= \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i(x, y) y^j y^k, \\ \gamma_{jk}^i(x, y) &= \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right). \end{cases} \quad (2.152)$$

Se as geodésicas $\gamma(s) = (x^i(s)) \in U \subset M$ são escritas localmente em um parâmetro t qualquer, isto é, $\gamma(t) = (x^i(s(t))) \in U \subset M$, então o sistema de equações (2.151) é reescrito na forma

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i \left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(t) \frac{dx^i}{dt}, \quad (2.153)$$

onde $f(t) = (d^2s/dt^2)/(ds/dt)$.

Considere dois espaços de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ e $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$ sobre uma mesma variedade em comum M .

Definição 2.58. Se qualquer geodésica de \mathbb{F}^n coincide com uma geodésica de $\bar{\mathbb{F}}^n$ como conjunto de pontos e vice versa, então a mudança de métrica $F \rightarrow \bar{F}$ é chamada *projetiva* e $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é dito ser *projetivo* a $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$.

Seja $\gamma(t) = (x^i(t)) \in U \subset M$ uma curva de M que é uma geodésica de F^n e \bar{F}^n como conjunto de pontos. Então $\gamma(t) = x^i(t)$ é solução de (2.153) e solução de

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2\bar{G}^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = \bar{f}(t) \frac{dx^i}{dt},$$

onde $\bar{f}(t) = (d^2 \bar{s}/dt^2)/(d\bar{s}/dt)$. Segue que

$$2G^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) - 2\bar{G}^i \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = f(t) - \bar{f}(t) \frac{dx^i}{dt}. \quad (2.154)$$

Desde que esta equação acima vale para qualquer geodésica, tem-se

Proposição 2.59. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é projetivo a um outro espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$, se e somente se, existe uma função escalar positivamente homogênea de grau um em y^i , $\varphi(x, y)$, tal que

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + \varphi(x, y)y^i. \quad (2.155)$$

A função escalar $\varphi(x, y)$ é chamada *fator projetivo*. O leitor deve notar que aqui provamos apenas a parte “se” deste resultado. A parte “somente se” foi provada na seção 3 para um spray qualquer.

2.6.2 Espaços de Finsler com Extremais Retilíneos

Se um espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^n = (M, \bar{F}(x, y))$ é localmente Minkowski, então M é coberto por vizinhanças coordenadas de cartas locais adaptadas $(U, \varphi = (x^i))$ tais que em $\pi^{-1}(U)$, a função métrica F depende apenas das variáveis y^i . Segue que as funções G^i dadas por (2.152) se anulam em $\pi^{-1}(U)$, de modo que o sistema de equações (2.151) se reduz a $d^2 x^i/d\bar{s}^2 = 0$. Portanto, qualquer geodésica é dada por n equações lineares $x^i = x_0^i + \bar{s}v_0^i$ do parâmetro natural \bar{s} com $2n$ constantes x_0^i e v_0^i .

Definição 2.60. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ tem extremais retilíneos se é possível cobrir M com vizinhanças coordenadas $(U, \phi = (x^i))$ onde qualquer geodésica seja representada por n equações lineares $x^i = x_0^i + ta^i$ de um parâmetro t , ou $n - 1$ equações lineares, $a_i^\alpha(x^i - x^0) = 0$, $\alpha = 1, \dots, n - 1$, linearmente independentes.

Portanto, um espaço localmente Minkowski tem extremais retilíneos, e se \mathbb{F}^n é projetivo a um espaço localmente Minkowski $\bar{\mathbb{F}}^n$, então qualquer geodésica é representada em uma carta local adaptada $(U, \varphi = (x^i))$ de $\bar{\mathbb{F}}^n$ por $x^i = x_0^i + \bar{s}v_0^i$, como acima, de modo que \mathbb{F}^\times tem extremais retilíneos.

Definição 2.61. Um espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, y))$ é chamado *projetivamente plano* se ele é projetivo a um espaço localmente Minkowski.

Portanto um espaço de Finsler projetivamente plano tem extremais retilíneos. A recíproca também é verdadeira e sua demonstração pode ser encontrada em (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). Assim, temos o seguinte resultado;

Proposição 2.62. *Um espaço de Finsler tem extremais retilíneos, se e somente se, ele é projetivamente plano.*

2.6.3 Uma Nova Classe de Métricas Projetivamente Planas

O primeiro resultado obtido neste trabalho diz respeito a uma nova classe de espaços de Finsler bidimensionais projetivamente planos. Vamos considerar o espaço de Finsler $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$, onde a função métrica é dada por

$$F(x, y) = e^{\phi(x^1)} \left(\frac{(y^1)^2}{y^2} + Q(x^2)y^2 \right). \quad (2.156)$$

Se $\phi(x^1) \equiv 0$, então $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é projetivo ao espaço de Minkowski $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(y))$, onde

$$\bar{F}(x, y) = \frac{(y^1)^2}{y^2}, \quad (2.157)$$

pois $\beta(x, dx) = Q(x^2)dx^2$ é uma 1-forma fechada⁴ em M (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). Segue que $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é um espaço de Finsler projetivamente plano para $\phi(x^1) \equiv 0$. Contudo, se a função $\phi(x^1)$ é não nula, não há nenhuma garantia de que o espaço de Finsler $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ seja projetivamente plano. Por exemplo, em (ANTONELLI; RUTZ; FONSECA, 2012) é mostrado que $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é projetivamente plano para $\phi(x^1) = ax^1$ e $Q(x^2) = -c(x^2)^2$. Aqui, obtemos uma nova classe de espaços de Finsler bidimensionais projetivamente planos.

Teorema 2.63. *(Antonelli, Rutz, Ferreira Jr.) Suponha que $Q(x^2) \neq 0$. O espaço de Finsler $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é projetivamente plano se, e somente se,*

$$\phi'(x^1)\phi''(x^1) + \phi'''(x^1) = 0. \quad (2.158)$$

⁴ $d\beta = \frac{\partial Q}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^2 = 0$

Além disso, as soluções da equação diferencial de terceira ordem (2.158) são da forma

$$\phi(x^1) = 2 \ln \left(\cosh \left(\frac{\sqrt{2A}}{2} (x^1 + B) \right) \right) + C, \quad (2.159)$$

onde A , B e C são constantes.

Demonstração. Aqui, usaremos o Teorema 2.38. A fim de calcular as quantidades \mathcal{K}_{jkl}^i e ρ_{jkl} , precisamos calcular todas as outras quantidades envolvidas no Teorema 2.38. Estes cálculos serão feitos na próxima subseção usando o FINSLER (RUTZ; PORTUGAL, 2001; RUTZ; PORTUGAL, 2003) no MAPLE (MAPLE, 2017). Para todo $i, j, k, l \in \{1, 2\}$, temos que

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = 0.$$

Além disso, ρ_{jkl} são todos nulos, exceto

$$\begin{aligned} \rho_{212} &= \frac{1}{2} Q(x^2) \left(\phi'(x^1) \phi''(x^1) + \phi'''(x^1) \right), \\ \rho_{221} &= -\frac{1}{2} Q(x^2) \left(\phi'(x^1) \phi''(x^1) + \phi'''(x^1) \right). \end{aligned}$$

Note que se $Q(x^2) \equiv 0$, então $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, y))$ é projetivamente plano para qualquer função $\phi(x^1)$. Agora, se $Q(x^2) \neq 0$, o espaço de Finsler $F^2 = (M, F(x, y))$ é projetivamente plano, se e somente se,

$$\phi'(x^1) \phi''(x^1) + \phi'''(x^1) = 0. \quad (2.160)$$

Por fim, precisamos determinar a classe de funções $\phi(x^1)$ que satisfazem a equação diferencial (2.158). Para isso, vamos reduzi-la para uma equação diferencial de segunda ordem através da substituição $\phi'(x^1) = u(x^1)$. Assim, a equação diferencial (2.158) é equivalente a equação diferencial de segunda ordem

$$u(x^1) u'(x^1) + u''(x^1) = 0. \quad (2.161)$$

Vamos resolver esta equação diferencial de segunda ordem e após isso obter $\phi(x^1)$ por integração. Note que

$$\left(\frac{1}{2} u^2(x^1) \right)' = u(x^1) u'(x^1). \quad (2.162)$$

Substituindo (2.162) em (2.161) e integrando, obtem-se que

$$\frac{1}{2} u^2(x^1) + u'(x^1) = A, \quad (2.163)$$

onde A é uma constante de integração. Observe que (2.163) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem separável. Vamos usar as notações $u = u(x^1)$ e $u'(x^1) = du/dx^1$. Assim, podemos reescrever (2.163) como

$$\frac{du}{A - \frac{1}{2}u^2} = dx^1. \quad (2.164)$$

Note que

$$A - \frac{1}{2}u^2 = A \left(1 - \left(\frac{u}{\sqrt{2A}} \right)^2 \right).$$

Segue que

$$\frac{du}{A \left(1 - \left(\frac{u}{\sqrt{2A}} \right)^2 \right)} = dx^1. \quad (2.165)$$

Observando que

$$\frac{d}{du} \left(\sqrt{2A} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{2A}} \right) \right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{2A}} \right)^2},$$

obtemos, integrando ambos os lados de (2.165), que

$$\frac{\sqrt{2A}}{A} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{2A}} \right) = x^1 + B, \quad (2.166)$$

onde B é uma constante de integração. Seque então que

$$u(x^1) = \sqrt{2A} \tanh \left(\frac{\sqrt{2A}}{2} (x^1 + B) \right). \quad (2.167)$$

Por fim, como $\phi'(x^1) = u(x^1)$, por integração, temos que

$$\phi(x^1) = 2 \ln \left(\cosh \left(\frac{\sqrt{2A}}{2} (x^1 + B) \right) \right) + C, \quad (2.168)$$

onde C é uma constante de integração. □

Como consequência, tem-se.

Corolário 2.64. *O espaço de Finsler $F^2 = (M, F(x, y))$ tem extremais retilíneos.*

2.6.4 Cálculos do Teorema 2.63 no Finsler

Aqui mostraremos as contas omitidas na demonstração do nosso resultado. Como comentado anteriormente, vamos usar o FINSLER (RUTZ; PORTUGAL, 2001; RUTZ; PORTUGAL, 2003) no MAPLE (MAPLE, 2017).

- > with(Finsler);
- > dimension := 2;
- > coordinates(x1, x2);
- > Dcoordinates(y1, y2);
- > $F := \exp(\phi(x1)) * (y1^2/y2 + h * Q(x2) * y2);$

$$F := e^{\phi(x1)} \left(\frac{y1^2}{y2} + hQ(x2)y2 \right)$$

> metricfunction(F^2);

‘The components of the metric are:’

$$g_{x_1 x_1} = \frac{2 \left(e^{\phi(x_1)} \right)^2 (Q(x_2) y^2 + 3y^2)}{y^2}$$

$$g_{x_1 x_2} = -\frac{4 \left(e^{\phi(x_1)} \right)^2 y^3}{y^3}$$

$$g_{x_2 x_2} = \frac{\left(e^{\phi(x_1)} \right)^2 \left((Q(x_2))^2 y^4 + 3y^4 \right)}{y^4}$$

> show(G[i]);

$$G^{x_1} = -\frac{1}{4} \frac{\left(\frac{d}{dx_1} \phi(x_1) \right) \left((Q(x_2))^2 y^4 - 4Q(x_2) y^2 y^2 - y^4 \right) - 2 \left(\frac{d}{dx_2} Q(x_2) \right) y^3}{Q(x_2) y^2 + y^2}$$

$$G^{x_2} = \frac{1}{2} \frac{\left(2Q(x_2) \left(\frac{d}{dx_1} \phi(x_1) \right) y + \left(\frac{d}{dx_2} Q(x_2) \right) y^2 \right) y^3}{Q(x_2) y^2 + y^2}$$

> definetensor(Pi[i] = G[i]-(1/3)*N[a, -a]*Y[i]);

$$\Pi^i = G^i - \frac{1}{3} N^a_a Y^i$$

> definetensor(Pi[i, -j] = tddiff(Pi[i], Y[j]));

$$\Pi^i_j = tddiff_j \left(\Pi^i \right)$$

> definetensor(Pi[i, -j, -k] = tddiff(Pi[i, -j], Y[k]));

$$\Pi^i_{j k} = tddiff_k \left(\Pi^i_j \right)$$

> show(Pi[i, -j, -k]);

$$\pi^{x_1}_{x_1 x_1} = \frac{1}{6} \frac{d}{dx_1} \phi(x_1)$$

$$\pi^{x_1}_{x_2 x_2} = -\frac{1}{2} Q(x_2) \left(\frac{d}{dx_1} \phi(x_1) \right)$$

$$\pi^{x_2}_{x_1 x_2} = -\frac{1}{6} \frac{d}{dx_1} \phi(x_1)$$

$$\pi^{x_2}_{x_2 x_1} = -\frac{1}{6} \frac{d}{dx_1} \phi(x_1)$$

> definetensor(K[i, -j, -k, -l] = tddiff(Pi[i, -j, -k], Y[l]));

$$\mathcal{K}^i_{j k l} = tddiff_l \left(\Pi^i_{j k} \right)$$

> show(K[i, -j, -k, -l]);

$$\mathcal{K}^i_{jkl} = 0$$

> definetensor(B[i, -j, -k, -l] = tdiff(Pi[i, -j, -k], X[l]) + Pi[s, -j, -k]*Pi[i, -s, -l] + K[i, -j, -l, -s]*Pi[s, -m, -k]*Y[m] - tdiff(Pi[i, -j, -l], X[k]) - Pi[s, -j, -l]*Pi[i, -s, -k] - K[i, -j, -k, -s]*Pi[s, -m, -l]*Y[m]);

$$B_{jkl}^i = tdiff_l(\Pi_{jk}^i) + \Pi_{jk}^s \Pi_{sl}^i + \mathcal{K}_{jls}^i \Pi_{mk}^s Y^m - tdiff_k(\Pi_{jl}^i) - \Pi_{jl}^s \Pi_{sk}^i - \mathcal{K}_{jkl}^i \Pi_{ml}^s Y^m$$

> definetensor(r[-j, -k] = B[i, -j, -k, -i]);

$$r_{jk} = B^i_{jki}$$

> definetensor(rho[-j, -k, -l] = tdiff(r[-j, -k], X[l]) - Pi[i, -j, -l]*r[-i, -k] - Pi[i, -k, -l]*r[-j, -i] - tdiff(r[-j, -l], X[k]) + Pi[m, -j, -k]*r[-m, -l] + Pi[m, -l, -k]*r[-j, -m]);

$$\rho_{jkl} = tdiff_l^i(r_{jk}) - \Pi_{jl}^i r_{ik} - \Pi_{kl}^i r_{ji} - tdiff_k^i(r_{jl}) + \Pi_{jk}^m r_{ml} + \Pi_{lk}^m r_{jm}$$

> show(rho[-j, -k, -l]);

Neste passo irão aparecer apenas ρ_{212} e ρ_{221} , que são as únicas quantidades não nulas. O passo a seguir simplificará os cálculos obtidos no passo anterior.

> rho[212] := simplify(rhs(show(rho[-2, -1, -2])));

$$\rho_{212} := \frac{1}{2} Q(x2) \left(\left(\frac{d}{dx1} \phi(x1) \right) \frac{d^2}{dx1^2} \phi(x1) + \frac{d^3}{dx1^3} \phi(x1) \right)$$

> rho[221] := simplify(rhs(show(rho[-2, -2, -1])));

$$\rho_{212} := -\frac{1}{2} Q(x2) \left(\left(\frac{d}{dx1} \phi(x1) \right) \frac{d^2}{dx1^2} \phi(x1) + \frac{d^3}{dx1^3} \phi(x1) \right)$$

3 UM MODELO MATEMÁTICO DE FORMAÇÃO DE TECIDO

Neste capítulo apresentaremos o nosso modelo matemático de formação de tecido. Vamos proceder primeiro com uma breve descrição sobre a *Dinâmica Modular Analítica* (AMD), que é uma teoria não-linear baseada na análise geométrica de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem (SODE's). Em seguida, introduzimos o *Teorema do Portal de Finsler* e, finalmente, faremos uma introdução básica do modelo para a célula eucariótica de L. Margulis, como em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011). As últimas quatro seções deste capítulo são dedicadas ao nosso modelo de formação de tecido.

3.1 Dinâmica Modular Analítica (Teoria Local)

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e \widetilde{TM} seu fibrado tangente com a seção nula $\mathbb{O} : M \rightarrow TM$ removida. Se $(U, \phi = (x^i))$ é uma carta local em M , então $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, N^i))$ denotará a carta local induzida em \widetilde{TM} , onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica. Considere o sistema de EDO's¹

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = k_{(i)}N^i, \\ \frac{dN^i}{dt} = -G_{jk}^i N^j N^k + r_j^i N^j + e^i, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde todos os coeficientes dependem (possivelmente) de x^i, N^i, t ; as n^3 funções G_{jk}^i são positivamente homogêneas de grau zero em N^i ; e com condições iniciais x_0^i, N_0^i, t_0 . Este sistema é chamado um *sistema de Volterra-Hamilton*. Por quase 40 anos, este sistema tem desempenhado um papel importante nas teorias matemáticas de ecologia, evolução e desenvolvimento de invertebrados coloniais, tais como, corais, estrelas do mar, briozoários e outros da fauna marinha (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). As n primeiras equações neste sistema são as *equações de produção de Volterra*, onde as coordenadas x^i são as *variáveis de produção*, com taxa per capita constante k_i . As n equações restantes descrevem como as diferentes populações $N^i \geq 0$, *crecem* (r_j^i), *interagem* (G_{jk}^i) e *reagem* (e^i) a influências externas. Para o que se segue, vamos considerar $e^i = 0$, significando que não há influências externas, e que os coeficientes de interação G_{jk}^i não são funções explícitas do tempo t .

Para *interações ecológicas clássicas*, os coeficientes G_{jk}^i são funções constantes. Se eles dependem de x , mas não dependem de N , as interações são *metabólicas*. Para *interações sociais*, estes coeficientes são funções que podem depender de x^i e de razões

¹ Abreviação para o termo Equações Diferenciais Ordinárias. Além disso, no sistema de EDO's estamos usando a notação de somatório de Einstein nos índices repetidos, exceto nas n primeiras equações, onde há um parêntese para indicar que não há somatório.

N^i/N^j . Se denotarmos a primeira expressão da segunda equação por $2G^i(x, N)$, isto é, $2G^i(x, N) := G_{jk}^i(x, N)N^iN^j$, então os coeficientes de interação G_{jk}^i serão definidos por $\hat{\partial}_j \hat{\partial}_k G^i$, onde $\hat{\partial}_j$ indica diferenciação parcial com respeito a variável N^j . Além disso, pelo Teorema de Euler para funções homogêneas (Teorema 2.15), os coeficientes $G^i(x, N)$ são funções positivamente homogêneas de grau *dois* em N^i .

Assumimos que a taxa de crescimento de todas as populações sejam iguais a $\lambda > 0$, uma constante. Esta é a tão conhecida condição *pré-simbionte* (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). Assim, $r_j^i = \lambda \delta_j^i$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, onde δ_j^i é o delta de Kronecker. Esta condição nos permite introduzir o tão conhecido *parâmetro de produção* s , que define uma escala de tempo intrínseca maior do que t , via $ds = e^{\lambda t} dt$. Portanto, o sistema de Volterra-Hamilton (3.1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem (SODE's)

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \text{ou} \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (3.3)$$

onde todos os k_i foram tomados como sendo iguais a 1. Note que as trajetórias soluções de (3.1) são os caminhos de um spray S em $\pi^{-1}(U)$ cujos coeficientes locais são $G^i(x, dx/dt)$ e o parâmetro de produção s é o *parâmetro de spray*.

AMD estuda as propriedades de (3.2) (ou equivalentemente (3.3)) que são invariantes sob transformações entre diferentes conjuntos de variáveis x^i . Como visto no capítulo anterior, as propriedades intrínsecas de (3.2) sob mudança de coordenadas não-singulares $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ são descritas pelos *cinco* invariantes KCC do sistema. Por exemplo, os autovalores do segundo invariante \mathcal{B}_j^i dão informações sobre a estabilidade do sistema no sentido de Jacobi, enquanto que o anulamento do *quarto* invariante \mathcal{D}_{jkl}^i garante que as interações são metabólicas. Além disso, AMD utiliza a Lei de Alometria de Huxley (HAL) como um modelo “Bauplan” para crescimento e desenvolvimento (GOULD, 1977; HUXLEY, 1972; NEEDHAM, 1934; ANTONELLI; RUTZ, 2009). Matematicamente, HAL é equivalente a existência de um parâmetro s e um sistema de coordenadas (\tilde{x}^i) que exibem as trajetórias soluções de (3.2) como retas.

Neste trabalho vamos assumir que as trajetórias soluções de (3.2) sejam as geodésicas de algum espaço de Finsler $\mathbb{F}^n = (M, F(x, N))$ e o parâmetro de produção s seja o *comprimento de arco* determinado pela função métrica F , isto é, $ds = F(x, dx/dt) > 0$ ². Como visto no capítulo anterior, as geodésicas de um espaço de Finsler no parâmetro s

² Existem alguns modelos de produção onde (3.1) não são as geodésicas de nenhum espaço de Finsler (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b).

são soluções de (3.2) com

$$G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (3.4)$$

e γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel do tensor métrico $g_{ij}(x, N) = \frac{1}{2} \partial_i \partial_j F^2$. Neste contexto, $F(x, dx/dt)$ é interpretada como um *custo de produção*. Através da homogeneidade da função métrica F , temos que se o vetor de produção dx/dt é dobrado, então o custo de produção também é dobrado. A mesma propriedade é válida se o vetor de produção é triplicado ou quadruplicado, etc.

Observação 3.1. Geralmente, os coeficientes G_{jk}^i e γ_{jk}^i não são os mesmos. Enquanto G_{jk}^i são os coeficientes da conexão de Berwald, como visto no capítulo anterior, γ_{jk}^i não são coeficientes de conexão, exceto quando o *tensor torção de Cartan* é identicamente nulo, isto é, $C_{ijk} = 0$ (ver (2.104)). Neste caso, a geometria determinada pela função métrica $F(x, N)$ é Riemanniana (ver Teorema 2.48). No entanto, é sempre verdade que

$$2G^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = G_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \gamma_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \quad (3.5)$$

Trajetórias soluções de (3.2) são chamadas *curvas de produção*. Elas descrevem a quantidade produzida pela população total como uma função de s . É importante saber se esses processos de produção são *estáveis* ou não. Aqui, estabilidade de produção não é como o conceito de estabilidade linear de dinâmica populacional (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). A estabilidade de produção envolve *todas* as curvas de produção. Dada uma curva de produção $\gamma(s) = (x^i(s))$, se qualquer outra curva de produção com condições iniciais suficientemente próximas em s_0 permanece próxima a $\gamma(s)$ para todo $s > s_0$, então $\gamma(s)$ é *J-estável* (*estabilidade no sentido de Jacobi*). Se *toda* curva de produção é estável neste sentido, então o sistema (3.2) é dito *J-estável*. Caso contrário, dizemos que ele é *J-instável*. Para os *problemas bidimensionais*, isto é, quando os processos de produção envolvem apenas *interação entre populações de duas espécies distintas*, a estabilidade de produção é medida pela curvatura de Gauss-Berwald $\mathcal{K}(x, N)$ (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b; ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993). Formalmente, ela é definida pela fórmula

$$\mathcal{R}_{jk}^i = FK m^i (l_j m_k - l_k m_j), \quad (3.6)$$

onde \mathcal{R}_{jk}^i são as funções componentes do tensor de curvatura da conexão não-linear de Cartan $N_j^i = \dot{\partial}_j G^i$ (ou equivalentemente, o terceiro invariante KCC do sistema (3.2)), $l^i = N^i/F$ é o vetor unitário na direção N^i e m^i é o único (a menos de orientação) vetor unitário perpendicular a l^i , isto é, $g_{ij}(x, N) l^i m^j = 0$. Além disso, $m_i = g_{ij} m^j$. Se $\mathcal{K}(x, N) > 0$ em todo o fibrado tangente sobre uma carta aberta, as curvas de produção que partem de um determinado ponto tendem a permanecer próxima uma das outras. Neste caso, (3.2) é *J-estável*. Se $\mathcal{K}(x, N) \leq 0$ em todo fibrado tangente sobre uma carta

aberta, as curvas de produção que partem de um determinado ponto tendem a se afastar uma das outras e nesse caso o sistema (3.2) é *J-instável*.

Seja $\varphi(x, N)$ uma função escalar definida em \widetilde{TM} e positivamente homogênea de grau *um* em N^i . Considere a *mudança projetiva* ao longo das curvas de produção $\gamma(s) = (x^i(s))$,

$$p = A + B \int e^{2 \int \varphi(x, dx/ds) ds} ds, \quad (3.7)$$

onde A e B são constantes de integração. Como vimos no capítulo anterior, o efeito desta mudança projetiva é transformar o sistema (3.3) no novo sistema

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \bar{G}_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{dp} \right) \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0, \quad (3.8)$$

onde os novos coeficientes de interação (ou coeficientes da conexão de Berwald) $\bar{G}_{jk}^i(x, N)$ são dados por

$$\bar{G}_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j + N^i \dot{\partial}_k \varphi_j, \quad (3.9)$$

onde $\varphi_i = \dot{\partial}_i \varphi$.

Em biologia matemática, o termo *heterocronia* se refere à mudança do parâmetro temporal durante o processo ontogênico (que descreve a origem e o desenvolvimento do indivíduo a partir do ovo fertilizado até sua forma adulta). A partir da ideia de que a ontogenia recapitula a filogenia (GOULD, 1977), o termo heterocronia passa então a representar a mudança do parâmetro temporal durante o processo evolutivo. Cada estágio ao longo do processo evolutivo será representado por um sistema de produção e a mudança entre estes será chamada *transformação heterocrônica*.

3.2 O Teorema do Portal de Finsler

Nesta seção vamos nos restringir aos espaços de Finsler bidimensionais $\mathcal{F}^2 = (M, F(x, N))$. Esta seção diz respeito a um único conjunto de *oito* SODE's com coeficientes constantes, dos quais *três*, G^I , G^{II} e G^{III} , são geodésicos, mas todos satisfazem leis de conservação. Os *cinco* remanescentes são obtidos a partir de uma transformação semiprojetiva dos três geodésicos. Além disso, uma dessas SODE's dá origem aos 3 esquemas de interações clássicas de *competição*, *parasitismo* e *mutualismo* (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b).

Seja $\mathbb{F}^2 = (M, F(x, N))$ um espaço *localmente Minkowski*. Seja $(U, \phi = (x^i))$ uma carta local adaptada. Em $\pi^{-1}(U)$, a função métrica F não depende da variável x , isto é, $F = F(N)$. Como visto no capítulo anterior, nesta carta adaptada, as geodésicas deste espaço são soluções de

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0, \quad (3.10)$$

onde $ds = F(dx/dt)dt$. Em particular, vamos considerar o conjunto formado pelas três funções métricas

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad F_I(N) &= \left((N^1)^2 + (N^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} e^{p \tan^{-1} \left(\frac{N^1}{N^2} \right)}, & I^2 &= \frac{4p}{p^2 + 1} < 4, \\ \text{ii)} \quad F_{II}(N) &= |N^2| e^{\frac{N^1}{N^2}}, & I^2 &= 4, \\ \text{iii)} \quad F_{III}(N) &= \frac{(N^1)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{(N^2)^{\frac{1}{\lambda}}}, & I^2 &= \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda + 1} > 4, \end{aligned}$$

onde p e λ são constantes positivas. O escalar I é o bem conhecido *escalar principal*. Como vimos anteriormente, ele é dado pela fórmula

$$FC_{ijk} = I m_i m_j m_k, \quad (3.11)$$

onde m_i é o único vetor unitário, que é ortogonal a $l_i = \dot{\partial}_i F$, relativo ao tensor métrico g_{ij} . Esses espaços de Finsler constituem a lista completa dos *espaços alométricos de Huxley*, sendo F_I com $p = 0$ o espaço de Huxley Euclidiano (ANTONELLI; BUCATARU, 2001b). Estas três funções métricas dão origem a *oito* SODE's com coeficientes constantes que satisfazem leis de conservação. Os *três* geodésicos, G^I , G^{II} e G^{III} são obtidos multiplicando as funções métricas em i), ii) e iii), respectivamente, por um *fator conforme* específico (isto é, fazendo $F(x, N) = e^{\psi(x)} F(N)$, onde $F(N)$ é F_I , F_{II} ou F_{III} acima), enquanto que os *cinco* remanescentes são obtidos a partir de uma transformação semiprojetiva de parâmetros ao longo das curvas soluções de G^I , G^{II} e G^{III} . Além disso, como todas as oito SODE's são de coeficientes contantes, então elas são projetivamente planas (ver Teorema 2.40).

O resultado a seguir diz respeito as *três* SODE's com coeficientes constantes G^I , G^{II} e G^{III} , cujas soluções são as geodésicas de algum espaço de Finsler. Na literatura, este resultado é conhecido como o *Teorema do Portal de Finsler*. Sua demonstração pode ser encontrada no apêndice de (ANTONELLI; ZASTAWNIAK, 1999) ou em (ANTONELLI; MATSUMOTO, 1995).

Teorema 3.2. (*Portal de Finsler*) *Existem exatamente três SODE's com coeficientes constantes, G^I , G^{II} e G^{III} , exibidos abaixo, cuja solução, $\gamma(s) = (x^i(s))$, são as geodésicas de um espaço de Finsler bidimensional cuja função métrica é da forma $e^{\psi_\alpha(x)} F(N) = F_\alpha(x, N) = ds_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, onde F é F_I , F_{II} ou F_{III} e ψ_α são certas funções lineares de x^1 e x^2 (na carta local adaptada). Não existem outras SODE's com coeficientes constantes cujas soluções são geodésicas de algum espaço de Finsler bidimensional.*

Vamos agora exibir as *três* SODE's com coeficientes constantes G^I , G^{II} e G^{III} , que definem o Teorema do Portal de Finsler. Para o que se segue, consideramos α_1 e

α_2 constantes não-nulas. Além disso, usaremos a mesma notação s para o *parâmetro comprimento de arco* s_α , isto é, $ds = ds_\alpha = F_\alpha(x, dx/dt)$, $\alpha = \{1, 2, 3\}$.

$$G^I : \begin{cases} \frac{d^2x^1}{ds^2} + 2\alpha_2 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \alpha_1 \left[\left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 \right] = 0 \\ \frac{d^2x^2}{ds^2} + 2\alpha_1 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \alpha_2 \left[\left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 \right] = 0 \end{cases}, \quad \psi_1(x) = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2,$$

$$G^{II} : \begin{cases} \frac{d^2x^1}{ds^2} + 2\alpha_1 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} - \alpha_2 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2x^2}{ds^2} + \alpha_1 \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases}, \quad \psi_2(x) = \alpha_1 x^1 + (\alpha_1 - \alpha_2) x^2,$$

$$G^{III} : \begin{cases} \frac{d^2x^1}{ds^2} + \alpha_1 \lambda \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2x^2}{ds^2} + \alpha_2 \lambda \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases}, \quad \psi_3(x) = -\alpha_1 x^1 + (1 + \lambda) \alpha_2 x^2.$$

Cada uma dessas SODE's são classificadas, a menos de isometria, por 2 invariantes: (1) condição de curvatura $\mathcal{K} = 0$, e (2) o valor numérico do escalar principal I . Além disso, é claro que $F_\alpha(x, dx/d\bar{s})$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, é constante ao longo das soluções de G^I , G^{II} e G^{III} , respectivamente, uma vez que $s = s_\alpha$ é o parâmetro comprimento de arco.

As *cinco* SODE's remanescentes são obtidas considerando a conexão não-simétrica de Wagner $F_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \partial_k \sigma(x)$ (ANTONELLI; INGARDEN; MATSUMOTO, 1993), onde $\sigma(x)$ é uma função escalar definida na vizinhança coordenada $U \subset M$ da carta local adaptada, G_{jk}^i são os coeficientes constantes de G^I , G^{II} ou G^{III} , e as *curvas autoparalelas de Wagner*

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + F_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0,$$

onde o parâmetro p é obtido pela mudança semiprojetiva de parâmetro $s_\alpha \rightarrow p$, dada por (2.147).

Teorema 3.3. *Considere a função métrica*

$$F_1(x, N) = e^{\psi_1(x)} F_I.$$

Os coeficientes da conexão de Berwald G_{jk}^i são exibidos em G^I , isto é,

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \alpha_1, & G_{12}^1 &= \alpha_2 = G_{21}^1, & G_{22}^1 &= \alpha_1, \\ G_{11}^2 &= \alpha_2, & G_{12}^2 &= \alpha_1 = G_{21}^2, & G_{22}^2 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Considere $\sigma(x) = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2$ uma função escalar definida em $U \subset M$, onde β_1 e β_2 são constantes e tome

$$\bar{F}(x, N) = e^{\sigma(x)} F_1(x, N).$$

O espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, N))$ é um espaço de Wagner com coeficientes de conexão $F_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \partial_k \sigma(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} F_{11}^1 &= \alpha_1 + \beta_1, & F_{12}^1 &= \alpha_2 + \beta_2, & F_{21}^1 &= \alpha_2, & F_{22}^1 &= \alpha_1, \\ F_{11}^2 &= \alpha_2, & F_{12}^2 &= \alpha_1, & F_{21}^2 &= \alpha_1 + \beta_1, & F_{22}^2 &= \alpha_2 + \beta_2. \end{aligned}$$

Além disso, $\bar{F}(x, N)$ é constante ao longo das curvas autoparalelas de Wagner

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^1}{dp^2} + (\alpha_1 + \beta_1) \left(\frac{dx^1}{dp} \right)^2 + (2\alpha_2 + \beta_2) \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) + \alpha_1 \left(\frac{dx^2}{dp} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^2}{dp^2} + \alpha_2 \left(\frac{dx^1}{dp} \right)^2 + (2\alpha_1 + \beta_1) \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) + (\alpha_2 + \beta_2) \left(\frac{dx^2}{dp} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que (3.12) não são as geodésicas de $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, N))$.

Teorema 3.4. Considere a função métrica

$$F_2(x, N) = e^{\psi_2(x)} F_{II}.$$

Os coeficientes da conexão de Berwald G_{jk}^i são exibidos em G^{II} , isto é,

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= 0, & G_{12}^1 &= \alpha_1 = G_{21}^1, & G_{22}^1 &= -\alpha_2, \\ G_{11}^2 &= 0, & G_{12}^2 &= 0 = G_{21}^2, & G_{22}^2 &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Considere $\sigma(x) = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2$ uma função escalar definida em $U \subset M$, onde β_1 e β_2 são constantes e tome

$$\bar{F}(x, N) = e^{\sigma(x)} F_2(x, N).$$

O espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, N))$ é um espaço de Wagner com coeficientes de conexão $F_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \partial_k \sigma(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} F_{11}^1 &= \beta_1, & F_{12}^1 &= \alpha_1 + \beta_2, & F_{21}^1 &= \alpha_1, & F_{22}^1 &= -\alpha_2, \\ F_{11}^2 &= 0, & F_{12}^2 &= 0, & F_{21}^2 &= \beta_1, & F_{22}^2 &= \alpha_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

Além disso, $\bar{F}(x, N)$ é constante ao longo das curvas autoparalelas de Wagner

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^1}{dp^2} + \beta_1 \left(\frac{dx^1}{dp} \right)^2 + (2\alpha_1 + \beta_2) \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) - \alpha_1 \left(\frac{dx^2}{dp} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 x^2}{dp^2} + \beta_1 \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) + (\alpha_1 + \beta_2) \left(\frac{dx^2}{dp} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que (3.13) não são as geodésicas de $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, y))$.

Teorema 3.5. Considere a função métrica

$$F_3(x, N) = e^{\psi_3(x)} F_{III}.$$

Os coeficientes da conexão de Berwald G_{jk}^i são exibidos em G^{III} , isto é,

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \lambda\alpha_1, & G_{12}^1 &= 0 = G_{22}^1, \\ G_{22}^2 &= \lambda\alpha_2, & G_{12}^2 &= 0 = G_{11}^2. \end{aligned}$$

Considere $\sigma(x) = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2$ uma função escalar definida em $U \subset M$, onde β_1 e β_2 são constantes e tome

$$\bar{F}(x, N) = e^{\sigma(x)} \bar{F}_3(x, N).$$

O espaço de Finsler $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, N))$ é um espaço de Wagner com coeficientes de conexão $F_{jk}^i = G_{jk}^i + \delta_j^i \partial_k \sigma(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} F_{11}^1 &= \lambda\alpha_1 + \beta_1, & F_{22}^2 &= \lambda\alpha_2 + \beta_2, \\ F_{21}^1 &= 0 = F_{12}^2, & F_{12}^1 &= \beta_2 \quad F_{12}^2 = \beta_1. \end{aligned}$$

Além disso, $\bar{F}(x, N)$ é constante ao longo das curvas autoparalelas de Wagner

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dp^2} + (\lambda\alpha_1 + \beta_1) \left(\frac{dx^1}{dp} \right)^2 + \beta_2 \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 x^i}{dp^2} + (\lambda\alpha_2 + \beta_2) \left(\frac{dx^2}{dp} \right)^2 + \beta_1 \left(\frac{dx^1}{dp} \right) \left(\frac{dx^2}{dp} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Note que (3.14) não são as geodésicas de $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, y))$.

O leitor pode verificar que cada uma das $\bar{F}(x, N)$ nos teoremas acima satisfazem $\frac{d\bar{F}}{dp} = 0$ ao longo de cada curva autoparalela correspondente a cada espaço de Wagner $\bar{\mathbb{F}}^2 = (M, \bar{F}(x, N))$. Esta demonstração também pode ser encontrada em (ANTONELLI, 2003c).

Por fim, convertendo o parâmetro de produção p associado a SODE's (3.14) para o tempo t através da simples regra $dp = e^{\lambda t} dt$, obtemos o seguinte sistema de Volterra-Hamilton associado a (3.14)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^1}{dt} = N^1 \\ \frac{dx^2}{dt} = N^2 \\ \frac{dN^1}{dt} = \lambda N^1 - (\lambda\alpha_1 + \beta_1)(N^1)^2 - \beta_2 N^1 N^2 \\ \frac{dN^2}{dt} = \lambda N^2 - (\lambda\alpha_2 + \beta_2)(N^2)^2 - \beta_1 N^1 N^2 \end{array} \right. \tag{3.15}$$

Este é o sistema de Volterra-Hamilton associado aos esquemas de interação clássica de *competição* (se $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$), *parasitismo* (se $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 < 0$ ou $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 > 0$) e *mutualismo* (se $\beta_1 < 0$ e $\beta_2 < 0$).

3.3 O Modelo da Célula Eucariótica

Há bilhões de anos atrás, um parasitismo ativo dado por uma proto-mitocôndria em uma proto-célula nucleada, ambas vivendo de forma independente, evoluiu, via endossimbiose, para tornar-se a atual célula eucariótica. O primeiro aspecto a incluir em um modelo foi, em termos gerais, troca química (por exemplo, bits modulares de material nuclear mitocondrial serão entregues ao hospedeiro) (MARGULIS, 1981).

Um primeiro modelo (M-I) para a célula eucariótica foi proposto em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003). Este modelo foi gerado pela seguinte função métrica

$$F(x, N) = e^{-\alpha_1 x^1 + (1+\lambda)\alpha_2 x^2 + \nu_3 x^1 x^2} \frac{(N^1)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{(N^2)^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad \mathcal{I}^2 = \frac{(\lambda + 2)^2}{\lambda + 1} \quad (3.16)$$

A curvatura de Gauss-Berwald é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1} \nu_3 \left(\frac{N^2}{N^1} \right)^{1+\frac{1}{\lambda}} e^{-2[-\alpha_1 x^1 + (1+\lambda)\alpha_2 x^2 + \nu_3 x^1 x^2]}. \quad (3.17)$$

Se $\nu_3 > 0$, então as geodésicas de F são *estáveis* ($\mathcal{K} > 0$) e quando $\lambda = 1$,

$$I^2 = \frac{9}{2}. \quad (3.18)$$

Em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) foi mostrado que os coeficientes de interação do sistema de Volterra-Hamilton associado a (3.16) eram dependentes dos produtos gerados pelas populações, indicando uma interação metabólica entre estas, e os processos de produção eram estáveis ($\mathcal{K} > 0$). Contudo, esta função métrica não é projetivamente plana, como foi mostrado posteriormente em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011), e portanto, este modelo não é resultado de um processo evolutivo do parasitismo.

A fim de gerar um modelo mais adequado para a teoria de evolução proposta, ainda em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011), foi proposto um novo de modelo (M-II) para a célula eucariótica. Este modelo foi gerado pela classe de funções métricas de Berwald que são projetivamente planas (BERWALD, 1941)

$$F(x, N) = \frac{(N^1 + Z(x^1, x^2)N^2)^2}{N^2}, \quad (3.19)$$

onde $Z(x^1, x^2)$ é uma solução positiva para o polonômio quadrático em Z ,

$$x^1 + x^2 Z = \frac{a}{2} Z^2, \quad a > 0. \quad (3.20)$$

Entre todas as possíveis escolhas³ para a função $Z(x^1, x^2)$, no modelo foi usada

$$Z(x^1, x^2) = \frac{x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + 2ax^1}}{a}. \quad (3.21)$$

³ Esta escolha foi feita para simplificar o modelo, isto é, *não* foi uma escolha baseada em hipóteses biológicas associadas ao modelo.

As geodésicas desta função métrica são soluções de

$$\begin{cases} \frac{d^2x^1}{ds^2} + \frac{2}{\sqrt{(x^2)^2 + 2ax^1}} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} = 0 \\ \frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2}{\sqrt{(x^2)^2 + 2ax^1}} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

enquanto que a curvatura de Gauss-Berwald é

$$\mathcal{K} = \frac{a}{((x^2)^2 + 2ax^1)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{ay^2}{ay^1 + y^2 (x^2 + \sqrt{(x^2)^2 + 2ax^1})} \right)^3. \quad (3.23)$$

Este foi o modelo desenvolvido em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011) e ele é adequado para a célula eucariótica pois os coeficientes de interação do sistema de Volterra-Hamilton associado a (3.22) são dependentes dos produtos gerados pelas populações, indicando uma interação do tipo metabólica entre estas. Além disso, tem-se estabilidade ($\mathcal{K} > 0$) na produção de tais produtos e por fim, é projetivamente plano, satisfazendo assim HAL e sendo, portanto, resultado de um processo de evolução do parasitismo.

3.4 Arquitetura da Superfície Celular

A fim de modelar a transição de um conjunto de células eucarióticas individuais para um conjunto de células em interação dentro de um tecido, devemos construir um modelo para este último estágio que exiba não somente produção estável, mas que também seja heterocronicamente relacionado com o primeiro. Note que um modelo para células eucarióticas individuais, que, de acordo com a teoria de Margulis, evoluiu de um parasitismo, já foi fornecido em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011) e lembrado na seção anterior. Para construir nosso modelo matemático para o estágio do tecido, vamos analisar algumas estruturas presentes na superfície das células eucarióticas que fazem com estas mantenham-se conectadas umas às outras no tecido.

Caderinas são receptores de adesão transmembranares que mediam a adesão célula-célula dependente de cálcio. *Cadeias diméricas* através da matriz intracelular são grupos de hastes entre membranas celulares justapostas. Em uma baixa resolução, estas estruturas aparecem como pequenos discos (*demossomos*) de aderência sobre a superfície das células. Estas hastes individuais são de curta duração, sendo frequentemente quebradas devido ao movimento aleatório da membrana celular e estão continuamente sendo reparadas (TROYANOVSKY, 2005; TROYANOVSKY; SOKOLOV; TROYANOVSKY, 2006; VERRECCHIA et al., 1999). Este processo requer ATP fornecida pelas *mitocôndrias* que residem dentro de cada célula. A manutenção usa subunidades β da bomba de sódio/potássio, Na-K-ATPase. Diferentes tecidos tem diferentes demandas de ATP e,

portanto, células individuais podem ter um número variável de mitocôndrias, dependendo do tecido (por exemplo, as células do fígado podem ter 1000 por célula). Aqui, abordamos o tecido epitelial na embriogênese.

Existem outras estruturas, como as *junções tight* (*ocludentes* ou *apertadas*) e as *junções gap* (*comunicantes*), presentes na superfície das células eucarióticas. Estas junções funcionam como reguladores de permeabilidade e exigem a ação de uma enzima, Na-K-ATPase, para reparar e manter suas funções (VAGIN et al., 2012). É através destas junções que as células de um tecido sinalizam e compartilham seus conteúdos umas com as outras. As junções gap, em particular, permitem que sinais elétricos sejam enviados e recebidos e também são pontos de fixação para nanotubos que transmitem pacotes moleculares de uso para outras células (BAKER, 2017; WANG et al., 2010). *O papel da Na-K-ATPase no reparo e manutenção dos demossomos é realizado através da subunidade β desta enzima e é independente dos gastos de energia para as junções* (VAGIN; TOKHTAEVA; SACHS, 2006).

- Observação 3.6.**
- *Junções Tight:* Essa estrutura, na superfície das células do tecido epitelial, fazem completas barreiras para excluir água, mas permite que algumas moléculas passem entre as células, dependendo da carga elétrica e da forma destas moléculas. Estas junções também estabelecem polaridade celular. Não há distância entre células adjacentes nas junções tight. A permeabilidade das junções tight é diretamente proporcional ao número de bordas paralelas em uma dada junção.
 - *Junções Gap:* Essas junções permitem que pequenas moléculas (menor do que 1 kilodalton) passem através delas e também transmitem sinais elétricos entre células adjacentes. Estas nunca estão mais próximas do que 2 nanômetros. Essas junções produzem movimentos coordenados de tecidos, por exemplo, na atividade muscular durante o parto. Sob microscópio, as junções gap aparecem como agregados de partículas formando manchas ou grandes áreas da membrana celular. As junções gap são locais para comunicação de nanotubos entre células que também não podem ser justapostas. Obviamente, este tipo de junção também está envolvido na permeabilidade da membrana.
 - **Ponto Chave:** Permeabilidade, como descrito acima para junções tight e gap, pode ser entendida como transporte de substância para dentro de uma célula (ou para fora de uma célula adjacente). A taxa de transporte molecular diminui com a redução da produção de ATP pelas mitocôndrias nas células. Este é um exemplo de transporte ativo, significando que as moléculas podem mover-se contra o gradiente de concentração, pois o ATP está disponível.

No modelo matemático sendo construído aqui, existem duas populações, #1 significa *mitocôndria*, com N^1 denotando o *número total* em todo tecido, envolvidas na construção,

manutenção e reparação das junções tight e gap, e #2 significa *células eucarióticas*, com N^2 denotando o *número total* no tecido. Existem também *variáveis de produção independentes*, x^1 e x^2 que denotam a *permeabilidade total* no tecido e a *aderência total*, respectivamente. *Permeabilidade*, $x^1(t)$, é o peso total (em Kda-Kilodaltons - 1 Kda é equivalente a 1.000 g/mol) da enzima Na-K-ATPase, usada para manter as junções tight e as junções gap, em tempo t . *Aderência*, $x^2(t)$, é a área total de desmossomos (pequenos discos circulares) no tecido em tempo t (KELLY, 1966).

A fim de construir um modelo para tecidos multicelulares, começaremos a partir de (M-I), que é matematicamente mais simples. Entretanto, nosso modelo para tecido se adequará a (M-II) como resultado do processo evolucionário. Iniciando com o modelo (M-I), incorporamos a *tensão superficial*, $Q(x^1, x^2)N^2$, proposta pelo DAM (STEINBERG, 2007) e medida como *energia/cm²*, no tecido, de modo que a *energia total* é tomada como

$$F(x, N) = \exp\{M(x^1, x^2)\} \left[\frac{(N^1)^2}{N^2} + Q(x^1, x^2)N^2 \right], \quad (3.24)$$

onde M é dada por

$$M(x^1, x^2) = -\alpha_1 x^1 + (1 + \lambda)\alpha_2 x^2 + \nu_3 x^1 x^2. \quad (3.25)$$

Como discutido anteriormente, se $Q(x^1, x^2) \equiv 0$, esta função métrica não é projetivamente plana, como foi mostrado em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011), de modo que o *bauplan alométrico* (Lei de Huxley) não é válido. No entanto, se considerarmos a possibilidade de que o DAM na superfície das células evoluiu antes que as mitocôndrias internas evoluíssem para o status de organelas, isto é, de modo que a Lei de Huxley deixa de ser satisfeita, então esta falha não invalida o modelo determinado por F com $Q(x^1, x^2) \equiv 0$.

O anulamento de $Q(x^1, x^2)$ significa que não há aderência sobre a superfície das células. DAM exige que a tensão superficial total diminua quando a aderência total x^2 aumente (STEINBERG, 2007). Assim, escolhemos a seguinte forma para $Q(x^1, x^2)$;

$$Q(x^1, x^2) = Q(x^2) = h \exp\{-cx^2\}. \quad (3.26)$$

Aqui, h , c e ν_3 são parâmetros positivos e, em particular, ν_3 permanece próximo de zero, à medida que o papel da permeabilidade e da aderência aumentam. Além disso, *permeabilidade e aderência no modelo são denotadas por x^1 , x^2 , ambas quantidades positivas, e as densidades populacionais são N^1 , N^2 , onde produção de Volterra é assumida e é definida por dx^i/dt sendo positivamente proporcional a N^i como é sempre o caso em AMD.*

Em última análise, acabamos com a expressão da *Energia ARF* a ser investigada aqui,

$$F_T(x, N) = \exp\{-ax^1 + bx^2\} \left[\frac{(N^1)^2}{N^2} + h \exp\{-cx^2\}N^2 \right], \quad (3.27)$$

onde a e b são constantes positivas.

3.5 Formação de Tecido a partir de Agregados Celulares

Examinaremos agora a relação entre um conjunto de células eucarióticas movendo-se livremente e um conjunto de células eucarióticas em interação, dentro de um tecido. Podemos considerar essa transição como uma deformação de Randers, de forma semelhante a que um material isolado é deformado quando colocado dentro de um meio (ANTONELLI; RUTZ, 2009). Mas, como um primeiro passo nesta direção, o procedimento será aplicado ao modelo mais simples (M-I), como na seção anterior, gerando um modelo conveniente para o estágio do tecido que possui todas as propriedades necessárias.

A deformação de Randers corresponde ao processo referido por I. E. Wallin e L. Margulis como *Simbiotismo*, um mecanismo por meio do qual a *seleção natural pode atuar em agregados celulares, formando essencialmente novos, “em virtude de sua fisiologia modificada e sua subsequente habilidade alterada para sobreviver em seu ambiente”* (KHAKHINA, 1992). Para modelar este processo, usamos a teoria dos *Referenciais Não-Holonômicos de Finsler*, desenvolvida em (ANTONELLI; BUCATARU, 2000; ANTONELLI; RUTZ, 2009). Esta teoria descreve matematicamente um processo que começa a partir de *células eucarióticas que interagem livremente*, para agregados celulares de *forte* comunicação, situadas em um ambiente favorável. Uma forte interação cooperativa em tal *tecido* deve melhorar o estado das células individuais no conglomerado, fornecendo nichos fisiológicos e oportunidades para o tecido não disponíveis anteriormente, ou seja, um agregado comunitário com *aderência e permeabilidade*.

Como ponto de partida, consideramos a função métrica proposta no modelo (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003). Como visto anteriormente, este modelo é tal que o quadrado do escalar principal é igual a $9/2$, quando $\lambda = 1$, e é do tipo Kropina. Esta função métrica foi proposta como um primeiro modelo para a célula eucariótica de Margulis (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003), mas posteriormente, provou-se não ser projetivamente plana e, portanto, não é resultado de um processo evolutivo do parasitismo. No entanto, podemos considerá-lo como um ponto de partida matemático que, sob a deformação de Randers, levará a um modelo conveniente para o estágio do tecido.

Este modelo possui a propriedade adicional,

$$\mathcal{K} \approx 0, \text{ se e somente se, o parâmetro de troca química, } \nu_3 \approx 0.$$

Este anulamento da curvatura de Gauss-Berwald é a *condição de compatibilidade para estender a deformação para o status global*, e é *localmente definida* usando *referenciais não-holonômicos* e sua *conexão cristalográfica* (ANTONELLI; BUCATARU, 2000) associada. É também a condição para está na fronteira entre estabilidade e instabilidade.

A condição de compatibilidade permite que a deformação local se estenda por todo o espaço de produção. Se o *parâmetro de troca*, ν_3 , é positivo e pequeno, um certo grau de estabilidade de Jacobi é válida.

Começando com o caso especial $\lambda = 1$ e $\mathcal{K} \approx 0$ para a função métrica dada em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003), podemos realizar uma *deformação plástica* para obter uma *função métrica do tipo Randers Generalizada*, a qual também é uma *pertubação* do modelo inicial (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003). Além disso, essa métrica perturbada deve ser projetivamente plana, como será mostrado mais adiante. A forma geral desta métrica é dada por

$$F_T(x, N) = \exp\{L(x)\} \left[\frac{(N^1)^2}{N^2} + hQ(x^2)N^2 \right], \quad (3.28)$$

onde $L(x)$ é uma certa função escalar e linear nos x 's, h é uma pequena *constante positiva de perturbação*, Q é uma função escalar que depende somente da variável x^2 e a variável $x = (x^1, x^2)$ é definida abaixo. Ela tem um significado diferente do modelo original (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003).

Consideramos F_T acima como um modelo que inclui *aderência* e *permeabilidade* para um modelo de tecido. Esta métrica também é do tipo Kropina e não faz parte da classe de métricas de Berwald projetivamente planas (BERWALD, 1941). Isto significa, em particular, que a equação das geodésicas geradas por esta métrica não é quadrática, isto é, o tensor de Douglas

$$\mathcal{D}_{jkl}^i \neq 0. \quad (3.29)$$

No entanto, o *tensor projetivo de Douglas*, \mathcal{K}_{jkl}^i , é identicamente nulo e de fato, isto é verdade para qualquer espaço de Kropina bidimensional. Isto significa que existe uma transformação não-singular de coordenadas (movimento elástico) no espaço de produção e uma mudança de parâmetro de caminho (heterocronia), isto é uma *transformação projetiva*, convertendo a equação das geodésicas de Kropina em um sistema quadrático (ANTONELLI, 2003a). Portanto, temos que F_T é heterocronicamente relacionada ao modelo quadrático para a célula eucariótica de Margulis (M-II) (isto é, (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011)).

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *A função métrica (3.28) é projetivamente plana.*

Demonstração. Vamos usar o Teorema 2.38. Vamos calcular todas as quantidades envolvidas neste teorema usando o FINSLER (RUTZ; PORTUGAL, 2001; RUTZ; PORTUGAL, 2003) no MAPLE (MAPLE, 2017). Também vamos mostrar que $\mathcal{D}_{jkl}^i \neq 0$ para nossa métrica F_T . Isto significa que a adição dos mecanismos de *aderência* e *permeabilidade* produzem interações sociais entre as *mitocôndrias* e *células eucarióticas*.

- > with(Finsler);
- > dimension := 2;
- > coordinates(x1, x2);
- > Dcoordinates(y1, y2);
- > $F := \exp(-a * x1 + b * x2) * (y1^2/y2 + h * Q(x2) * y2)$;

$$F := e^{-ax1+bx2} \left(\frac{y1^2}{y2} + hQ(x2)y2 \right)$$

- > metricfunction(F^2);

'The components of the metric are:'

$$g_{x1x1} = \frac{2 \left(e^{-ax1+bx2} \right)^2 (h.Q(x2) y2^2 + 3y1^2)}{y2^2}$$

$$g_{x1x2} = -\frac{4 \left(e^{-ax1+bx2} \right)^2 y1^3}{y2^3}$$

$$g_{x2x2} = \frac{\left(e^{-ax1+bx2} \right)^2 \left((h.Q(x2))^2 y2^4 + 3y1^4 \right)}{y2^4}$$

- > show(G[i]);

$$G^{x1} = \frac{1}{4} \frac{(h.Q(x2))^2 ay2^4 - 4(h.Q(x2)) ay1^2 y2^2 + 4(h.Q(x2)) by1y2^3 + 2 \left(h. \left(\frac{d}{dx2} Q(x2) \right) \right) y1y2^3 - ay1^4}{h.Q(x2) y2^2 + y1^2}$$

$$G^{x2} = \frac{1}{2} \frac{\left(-2(h.Q(x2)) ay1y2 + (h.Q(x2)) by2^2 + h. \left(\frac{d}{dx2} Q(x2) \right) y2^2 - by1^2 \right) y2^2}{h.Q(x2) y2^2 + y1^2}$$

- > show(G[i,-j,-k,-l]);
- > definetensor(Pi[i] = G[i]-(1/3)*N[a,-a]*Y[i]);

$$\Pi^i = G^i - \frac{1}{3} N_a^a Y^i$$

- > definetensor(Pi[i,-j] = tddiff(Pi[i], Y[j]));

$$\Pi_j^i = tdiff_j^i(\Pi^i)$$

- > definetensor(Pi[i,-j,-k] = tddiff(Pi[i,-j], Y[k]));

$$\Pi_{jk}^i = tdiff_{jk}^i(\Pi_j^i)$$

- > definetensor(K[i,-j,-k,-l] = tddiff(Pi[i,-j,-k], Y[l]));

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = tdiff_l^i(\Pi_{jk}^i)$$

> show($\mathcal{K}[i, -j, -k, -l]$);

$$\mathcal{K}_{jkl}^i = 0$$

> definetensor($B[i, -j, -k, -l] = \text{tdiff}(\text{Pi}[i, -j, -k], X[l]) + \text{Pi}[s, -j, -k]*\text{Pi}[i, -s, -l] + \mathcal{K}[i, -j, -l, -s]*\text{Pi}[s, -m, -k]*Y[m] - \text{tdiff}(\text{Pi}[i, -j, -l], X[k]) - \text{Pi}[s, -j, -l]*\text{Pi}[i, -s, -k] - \mathcal{K}[i, -j, -k, -s]*\text{Pi}[s, -m, -l]*Y[m]$);

$$B_{jkl}^i = \text{tdiff}_l^i(\Pi_{jk}^i) + \Pi_{jk}^s \Pi_{sl}^i + \mathcal{K}_{jls}^i \Pi_{mk}^s Y^m - \text{tdiff}_k^i(\Pi_{jl}^i) - \Pi_{jl}^s \Pi_{sk}^i - \mathcal{K}_{jks}^i \Pi_{ml}^s Y^m$$

> definetensor($r[-j, -k] = B[i, -j, -k, -i]$)

$$r_{jk} = B_{jki}^i$$

> definetensor($\text{rho}[-j, -k, -l] = \text{tdiff}(r[-j, -k], X[l]) - \text{Pi}[i, -j, -l]*r[-i, -k] - \text{Pi}[i, -k, -l]*r[-j, -i] - \text{tdiff}(r[-j, -l], X[k]) + \text{Pi}[m, -j, -k]*r[-m, -l] + \text{Pi}[m, -l, -k]*r[-j, -m]$);

$$\rho_{jkl} = \text{tdiff}_l^i(r_{jk}) - \Pi_{jl}^i r_{ik} - \Pi_{kl}^i r_{ji} - \text{tdiff}_k^i(r_{jl}) + \Pi_{jk}^m r_{ml} + \Pi_{lk}^m r_{jm}$$

> show($\text{rho}[-j, -k, -l]$);

$$\rho_{x2x1x2} = \frac{1}{36} h.Q(x2) a^3 + \frac{1}{27} b^2 a + \frac{1}{6} a \left(-\frac{1}{6} h.Q(x2) a^2 - \frac{2}{9} b^2 \right)$$

$$\rho_{x2x2x1} = -\frac{1}{36} h.Q(x2) a^3 - \frac{1}{27} b^2 a - \frac{1}{6} a \left(-\frac{1}{6} h.Q(x2) a^2 - \frac{2}{9} b^2 \right)$$

> rho[212] := simplify(rhs(show(rho[-2, -1, -2])));

$$\rho_{212} := 0$$

> rho[221] := simplify(rhs(show(rho[-2, -2, -1])));

$$\rho_{221} := 0$$

□

3.6 Deformações: Tecidos como Meios Deformáveis

Nesta seção vamos mostrar como realizar uma deformação plástica da função métrica dada em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) com $\lambda = 1$ e $\mathcal{K} \approx 0$ a fim de obter a função métrica (3.28). Como comentado anteriormente, isto será feito usando a teoria dos *Referenciais Não-Holonômicos* (ANTONELLI; BUCATARU, 2000). Vamos relembrar um pouco desta teoria.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e \widetilde{TM} seu fibrado tangente com a seção nula $\mathbb{O} : M \rightarrow TM$ removida. Para uma dada carta local $(U, \phi = (x^i))$ em M , seja $(\pi^{-1}(U), \Phi = (x^i, N^i))$ a carta local induzida em \widetilde{TM} , onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica. Como visto no capítulo anterior, para todo $u \in \pi^{-1}(U)$, o núcleo da aplicação linear $\pi_{*,u} : T_u TM \rightarrow T_{\pi(u)} M$ determina um subespaço de $T_u TM$ com dimensão n . Este é o *subespaço vertical*, como o chamamos anteriormente, e é gerado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial N^i} \Big|_u \right\}$. Seja

$Y_\alpha : u \in \pi^{-1}(U) \mapsto Y_\alpha(u) \subset \text{Ker}(\pi_{*,u})$ um referencial vertical sobre $\pi^{-1}(U)$. Isto significa dizer que para cada $u \in \widetilde{TM}$, o conjunto $\{Y_\alpha(u)\}$, $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, forma uma base para o subespaço $\text{Ker}(\pi_{*,u})$. Para cada $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ e cada $u \in \pi^{-1}(U)$, escreva

$$Y_\alpha(u) = Y_\alpha^i(u) \frac{\partial}{\partial N^i} \Big|_u, \quad (3.30)$$

onde $(Y_\alpha^i(u))$ são as entradas de uma matriz não-singular (isto é, inversível). Denote por (Y_j^α) as entradas da inversa desta matriz. Isto significa dizer que

$$Y_\alpha^i Y_j^\alpha = \delta_j^i \quad Y_\alpha^i Y_i^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (3.31)$$

Definição 3.8. O referencial vertical (Y_α) é chamado *holonômico* se existem n funções escalares f_α definidas na vizinhança coordenada $U \subset M$ tal que $Y_\alpha = \nabla f_\alpha$. Neste caso, temos que

$$Y_\alpha^i = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}.$$

Se Y_α não é o gradiente de nenhuma função escalar f_α , dizemos que o referencial Y_α é *não-holonômico*. Referenciais holonômicos são completamente caracterizados pelo anulamento simultâneo dos dois *objetos de holonomia*:

$$\Omega_{\alpha\beta}^\gamma = Y_i^\gamma (\partial_\alpha Y_\beta^i - \partial_\beta Y_\alpha^i), \quad \Omega_{\alpha(\beta)}^\gamma = Y_\alpha^i (\dot{\partial}_j Y_i^\gamma) Y_\beta^j. \quad (3.32)$$

Proposição 3.9. O referencial Y_α é holonômico se, e somente se, $\Omega_{\alpha\beta}^\gamma = 0 = \Omega_{\alpha(\beta)}^\gamma$.

Demonstração. $\Omega_{\alpha(\beta)}^\gamma = 0$ implica que Y_α^i não depende da variável N . Agora $\Omega_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ implica que Y_α é dado pelo gradiente de n funções definidas em $U \subset M$. \square

Recordaremos aqui o conceito de deformação dado em (ANTONELLI; RUTZ, 2009). Seja ξ^α coordenadas cartesianas no espaço de produção, isto é

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} = 0, \quad (3.33)$$

com s sendo o comprimento de arco Euclidiano (de modo que, $ds^2 = \delta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$, onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker). Dizemos que o *elemento infinitesimal de produção* $d\xi^\alpha$ esta para ser deformado em dx^i se

$$dx^i = Y_\alpha^i(x, N) d\xi^\alpha, \quad (3.34)$$

onde (Y_α^i) são as funções componentes de um referencial vertical Y_α . A diferencial dx^i representa um incremento infinitesimal cartesiano. Se Y_α é holonômico, então a deformação é chamada *elástica*. Neste caso, a deformação é meramente uma transformação não-singular de coordenadas, isto é, (Y_α^i) é a matriz Jacobiana $(\partial x^i / \partial \xi^\alpha)$. Se Y_α é não-holonômico, então

a deformação é chamada *plástica*. Deformações elásticas são *reversíveis* ou *integráveis* enquanto que deformações plásticas são *não-integráveis*. Podemos entender esta ideia melhor quando consideramos a função métrica \bar{F} de um espaço bidimensional localmente Minkowski em coordenadas adaptadas. Neste caso, $\bar{F} = \bar{F}(N)$. Agora considere

$$ds = F(x, N) = e^{\psi(x)} \bar{F}(N) \quad (3.35)$$

com

$$g_{ij}(x, N) = \frac{1}{2} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F^2 = \frac{1}{2} e^{2\psi(x)} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j \bar{F}^2 = e^{2\psi(x)} \bar{g}_{ij}(N). \quad (3.36)$$

Seja (l_i, m_i) o referencial ortonormal de Berwald associado a função métrica \bar{F} . Lembre-se que

$$\bar{g}_{ij} = l_i l_j + m_i m_j \quad (3.37)$$

Como um importante fato, ds^2 é dado por qualquer uma das duas expressões.

$$g_{ij}(x, N) dx^i dx^j = e^{2\psi(x)} (l_i l_j + m_i m_j) dx^i dx^j = \delta_{\alpha\beta} Y_i^\alpha Y_j^\beta dx^i dx^j = \delta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

usando

$$Y_i^1 = e^{\psi(x)} l_i, \quad Y_i^2 = e^{\psi(x)} m_i \quad (3.38)$$

e (3.33), (3.36), (3.37). Isto significa que

$$g_{ij}(x, N) = \delta_{\alpha\beta} Y_i^\alpha(x, N) Y_j^\beta(x, N). \quad (3.39)$$

Esta relação explica a diferença entre o estado *relaxado* ($\delta_{\alpha\beta}$) e o estado *deformado* (g_{ij}).

A seguir, iremos fazer algo semelhante ao que foi feito acima, mas usaremos aqui outras funções métricas. Considere a função *métrica do tipo Kropina*, que tem a forma geral

$$F(x, N) = \frac{a_{ij}(x) N^i N^j}{\alpha_i(x) N^i}, \quad (3.40)$$

onde $a_{ij}(x)$ é uma métrica Riemanniana em M e $\alpha(x, N) = \alpha_i(x) N^i$ é uma função escalar não-nula em $\pi^{-1}(U)$. Denotaremos por $g_{ij}(x, N)$ o tensor métrico determinado por esta métrica, isto é,

$$g_{ij}(x, N) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial N^i \partial N^j}.$$

Considere a função métrica da forma

$$L(x, N) = F(x, N) + \beta(x, N), \quad (3.41)$$

onde $\beta(x, N) = b_i(x) N^i$ é uma função escalar não-nula em $\pi^{-1}(U)$. Esta função métrica é do tipo *Randers Generalizada*. Seja $h_{ij}(x, N)$ o tensor métrico determinado por esta função métrica, isto é,

$$h_{ij}(x, N) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial N^i \partial N^j}.$$

A relação entre os tensores métricos $g_{ij}(x, N)$ e $h_{ij}(x, N)$ é dada através da fórmula

$$h_{ij} = \frac{L}{F}(g_{ij} - p_i p_j) + l_i l_j,$$

onde

$$\begin{cases} p^i := \frac{1}{F}N^i = g^{ij} \frac{\partial F}{\partial N^j}, & p_i := g_{ij}p^j = \frac{\partial F}{\partial N^i}, \\ l^i := \frac{1}{L}N^i = h^{ij} \frac{\partial L}{\partial N^j}, & l_i := h_{ij}l^j = \frac{\partial L}{\partial N^i}. \end{cases}$$

Além disso, tem-se as seguintes relações:

$$l^i = \frac{F}{L}p^i, \quad l_i = \frac{F}{L}p_i, \quad l^i l_i = p^i p_i = 1, \quad l^i p_i = \frac{F}{L}, \quad p^i l_i = \frac{L}{F}. \quad (3.42)$$

Considere (Y_α^i) a matriz com entradas

$$Y_\alpha^i(x, N) = \sqrt{\frac{F}{L}} \left(\delta_\alpha^i - l^i l_\alpha + \sqrt{\frac{F}{L}} p^i p_\alpha \right). \quad (3.43)$$

Esta matriz tem inversa (Y_j^α) , cujas entradas são dadas por

$$Y_j^\alpha(x, N) = \sqrt{\frac{L}{F}} \left(\delta_j^\alpha + \sqrt{\frac{L}{F}} l^\alpha l_j - p^\alpha p_j \right). \quad (3.44)$$

Temos o seguinte resultado (ANTONELLI; BUCATARU, 2000).

Teorema 3.10. *Seja $L^n = (M, L(x, N))$ um espaço de Randers Generalizado com $\frac{L}{F} > 0$. Então $Y_\alpha = Y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial N^i}$ define um referencial não holonômico de Finsler em $\pi^{-1}(U)$.*

Demonstração. Temos que verificar que $Y_\alpha^i Y_j^\alpha = \delta_j^i$, $Y_\alpha^i Y_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$ e que os dois objetos de holonomia (3.32) são ambos não-nulos. Aqui vamos apenas verificar que $Y_\alpha^i Y_j^\alpha = \delta_j^i$. Um cálculo extenso mostra que os dois objetos de holonomia são, de fato, não-nulos (ANTONELLI; BUCATARU, 2000). Nos cálculos a seguir, o leitor deve notar o uso das relações (3.42).

$$\begin{aligned} Y_\alpha^i Y_j^\alpha &= \left(\delta_\alpha^i - l^i l_\alpha + \sqrt{\frac{F}{L}} p^i p_\alpha \right) \left(\delta_j^\alpha + \sqrt{\frac{L}{F}} l^\alpha l_j - p^\alpha p_j \right) \\ &= \delta_j^i - l^i l_j + \sqrt{\frac{F}{L}} p^i p_j + \sqrt{\frac{L}{F}} l^i l_j - \sqrt{\frac{L}{F}} l^i l_j + l^i l_\alpha p^\alpha p_j \\ &\quad - p_i p^j + p^i p_\alpha l^\alpha l_j - \sqrt{\frac{F}{L}} p^i p_j \\ &= \delta_j^i - l^i l_j + l^i p_j - p^i p_j + p^i l_j = \delta_j^i. \end{aligned}$$

□

Este referencial (Y_α^i) é chamado o *referencial de Holand* do espaço de Randers Generalizado. De posse deste referencial, tem-se o seguinte resultado (ANTONELLI; BUCATARU, 2000).

Teorema 3.11. *Com respeito ao referencial de Holland temos a seguinte relação*

$$h_{ij} = Y_i^\alpha Y_j^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (3.45)$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} Y_j^\beta g_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{L}{F}} \left(\delta_\alpha^\beta + \sqrt{\frac{L}{F}} l^\beta l_j - p^\beta p_j \right) g_{\alpha\beta} \\ &= \sqrt{\frac{L}{F}} g_{\alpha j} + p_\alpha l^j - \sqrt{\frac{L}{F}} p_\alpha p_j. \\ Y_i^\alpha Y_j^\beta g_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{L}{F}} \left(\delta_i^\alpha + \sqrt{\frac{L}{F}} l^\alpha l_i - p^\alpha p_i \right) \left(\sqrt{\frac{L}{F}} g_{\alpha j} + p_\alpha l^j - \sqrt{\frac{L}{F}} p_\alpha p_j \right) \\ &= \frac{L}{F} a_{ij} + \sqrt{\frac{L}{F}} p_i l_j - \frac{L}{F} p_i p_j + \frac{L}{F} \frac{F}{L} \sqrt{\frac{L}{F}} p_j l_i + \frac{L}{F} \frac{F}{L} l_i l_j - \frac{L}{F} \sqrt{\frac{L}{F}} \frac{F}{L} l_i p_j \\ &\quad - \frac{L}{F} p_i p_j - \sqrt{\frac{L}{F}} p_i l_j + \frac{L}{F} p_i p_j \\ &= \frac{L}{F} (a_{ij} - p_i p_j) + l_i l_j = h_{ij}. \end{aligned}$$

□

Desde que os 2 objetos de holonomia do referencial de Holland (Y_α^i) são ambos não-nulos, a deformação representada pelo referencial de Holland é *plástica*. Além disso, a compatibilidade da deformação segue do anulamento da curvatura da conexão cristalográfica (ANTONELLI; BUCATARU, 2000) definida pelo referencial de Holland. Em outras palavras, a relação (3.45) mostra que o tensor métrico dos espaços de Randers Generalizados são obtidos via deformação plástica do tensor métrico de um espaço de Kropina usando o referencial de Holland (3.43).

Começando com a função métrica de (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) com $\lambda = 1$ e $\mathcal{K} \approx 0$, obtemos que (3.16) se reduz a

$$F(x, N) = \exp\{-\alpha_1 x^1 + 2\alpha_2 x^2\} \frac{(N^1)^2}{N^2}, \quad (3.46)$$

onde α_1, α_2 são constantes positivas. Esta função métrica é do tipo Kropina. Adicione a F a função escalar $\beta(x, N) = h \exp\{-\alpha_1 x^1 + (2\alpha_2 - c)x^2\} N^2$, onde h e c são constantes positivas. A função métrica resultante fica da forma

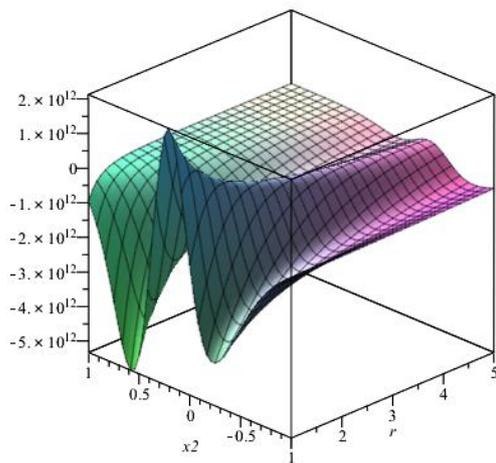
$$L(x, N) = \exp\{-\alpha_1 x^1 + 2\alpha_2 x^2\} \left[\frac{(N^1)^2}{N^2} + h \exp\{-c x^2\} N^2 \right], \quad (3.47)$$

que é do tipo Randers Generalizada. Esta é a expressão (3.27) para a Energia ARF com $a = \alpha_1, b = 2\alpha_2$.

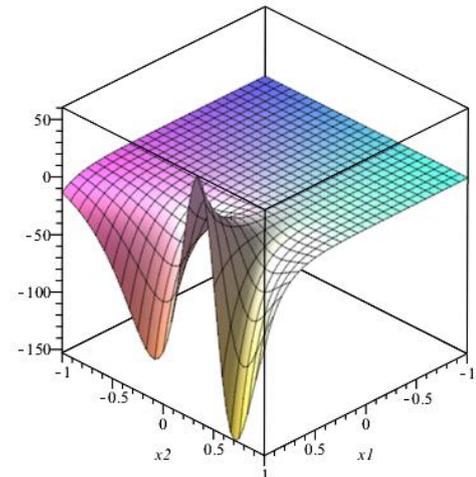
3.7 Estabilidade do Modelo

Abaixo, usando FINSLER, (RUTZ; PORTUGAL, 2001; RUTZ; PORTUGAL, 2003) no MAPLE (MAPLE, 2017), três gráficos de estabilidade \mathcal{K}_T versus os x 's e/ou a razão r entre as populações N 's são obtidos.

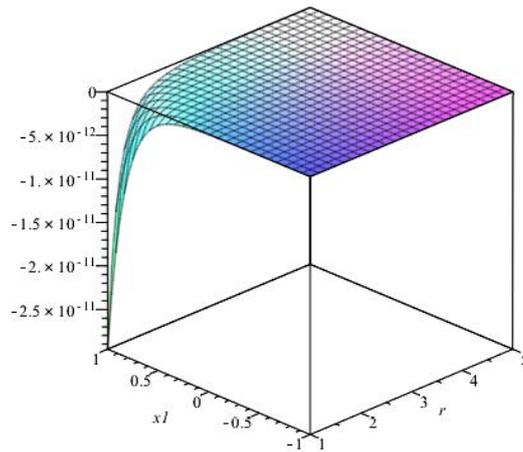
```
> with(Finsler);
> dimension := 2;
> coordinates(x1, x2);
> Dcoordinates(N1, N2);
> F := exp(-a * x1 + b * x2) * (N1^2/N2 + h * Q(x2) * N2);
      F := e^{-ax1+bx2} \left( \frac{N1^2}{N2} + hQ(x2)N2 \right)
> metricfunction(F^2);
> show(G[i]);
> K:= K(a, b);
> K[x1,x2,r] := simplify(factor(subs(N1 = r*N2, K)));
> K[x1, x2, r] := simplify(factor(eval(subs(Q(x2) = exp(-c*x2), N1 = r*N2, K))));
      K_{x1,x2,r} := -\frac{1}{4} \frac{he^{2ax1-2bx2-cx2}}{(he^{-cx2} + r^2)^4} \left( 3a^2 (he^{-cx2} - r^2)^2 + 6ar(2b - c)(he^{-cx2} - r^2) \right.
      \left. + 2bc(he^{-cx2} - 5r^2) - c^2(he^{-cx2} - 2r^2) + 12b^2r^2 \right)
> plot3d(subs(a = 3, b = 1, c = 5, h = 5, x1 = 5, K[x1, x2, r]), r = 1 .. 10, x2 = -1 ..
1, orientation = [-145, 75]);
> plot3d(subs(a = 3, b = 1, c = 5, h = 5, x1 = 5, K[x1, x2, r]), r = 1 .. 10, x2 = -1 ..
1, orientation = [-145, 75]);
> plot3d(subs(a = 3, b = 1, c = 5, h = 10, r = 1, K[x1, x2, r]), x1 = -1 .. 1, x2 = -1 ..
1, orientation = [45, 60]);
```



(a)



(b)



(c)

Na figura (a), a estabilidade, \mathcal{K}_T , é tratada como uma função de x^2 e $r = N^1/N^2$, enquanto que na figura (b) a estabilidade, \mathcal{K}_T , é tratada como uma função de x^1 e x^2 . Estes dois gráficos exibem produção positiva (estável) e negativa (instável) para as opções de parâmetros exibidos. A figura (c) exhibe produção instável. Neste caso, a curvarura, \mathcal{K}_T , é tratada como uma função de x^1 e $r = N^1/N^2$.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, realizamos um primeiro passo para um modelo matemático de evolução dos organismos multicelulares. Em (ANTONELLI; RUTZ; BEVILACQUA, 2003) é discutido a teoria de Lynn Margulis sobre a evolução das células eucarióticas e é proposto um primeiro modelo para estas (M-I), que são os blocos de construção fundamentais dos organismos multicelulares. Mais tarde, o modelo (M-I) foi melhorado para um modelo (M-II) em (ANTONELLI; RUTZ; HIRAKAWA, 2011), mas usando uma formulação matemática mais complexa. Portanto, para começar a abordar a fase de um agregado de células em um tecido, seguindo a ideia de que a evolução se assemelha ao desenvolvimento em seus estágios, usamos o primeiro modelo proposto da célula eucariótica (M-I), chegando a um modelo para o estágio de tecido que é compatível como resultado de um processo evolutivo do segundo modelo mais complexo (M-II). Observamos que, como consequência dos mecanismos adicionais de *aderência e permeabilidade*, que já existiam antes, mas não foram considerados em nenhum dos modelos de células individuais, produzimos interação *social* entre as mitocôndrias e as células eucarióticas, além do metabólico já presente antes do estágio do tecido. Essas interações mais integradas eram esperadas, e como resultado, a produção de energia pelas mitocôndrias pode responder a vários graus de necessidades do tecido, que podem surgir devido a influências externas ou a uma especialização da própria função do tecido. Para o futuro, pretendemos considerar o segundo modelo (M-II) como o ponto de partida do processo evolutivo para a formação de tecido, pois estes são de fato uma *família* de modelos que dependem de uma função arbitrária $Z(x^1, x^2)$ (ver (3.19)) que pode adquirir um significado especial no processo. Mais ainda, a diferenciação desse tecido em diferentes, com diferentes proporções de mitocôndrias nas células, que eventualmente gerarão os órgãos de um organismo multicelular como nós mesmos.

REFERÊNCIAS

- ANTONELLI, P. L. *Equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations*. Dordrecht: Encyclopedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- ANTONELLI, P. L. *Handbook of Finsler Geometry, 2 vols.* [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- ANTONELLI, P. L. The wagner theory of 2-dimensional constant sprays and its applications to evolutionary biology. *Open Syst. & Infor. Dynamiscs*, v. 10, p. 65–87, 2003.
- ANTONELLI, P. L. The wagner theory of 2-dimensional constant sprays and its applications to evolutionary biology. *Open Syst. & Infor., Dynamics*, v. 10, p. 65–87, 2003.
- ANTONELLI, P. L.; BUCATARU, I. On holland's frame for randers space and its applications in physics. *Steps in Differential Geometry, Proc. of the Colloq. on Diff. Geome.*, Debrecen, Hungary, p. 35–30, 2000.
- ANTONELLI, P. L.; BUCATARU, I. Finsler connection in anholonomic geometry of a kropina space. *Nonlinear Studies*, v. 8, n. 1, p. 171–184, 2001.
- ANTONELLI, P. L.; BUCATARU, I. New results about the geometric invariants in kcc-theory. *An. St. Univ. "Al. I. .Cuza" Iasi. Mat. N.S.*, v. 47, n. 22, p. 405–420, 2001.
- ANTONELLI, P. L.; HAN, B.; MODAYIL, J. New results on 2- dimensional constant sprays with an application to heterochrony. *Nonlinear Analysis*, v. 37, p. 545–566, 1999.
- ANTONELLI, P. L.; INGARDEN, R. S.; MATSUMOTO, M. *The Theory of Sprays and Finsler Space with Applications in Physics and Biology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- ANTONELLI, P. L.; MATSUMOTO, M. γ -berwald spaces of dimension two and associated heterochronic systems. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, v. 47, n. 12, p. 193–201, 1995.
- ANTONELLI, P. L.; ROGERS, T. D.; WILLARD, M. A. Geometry and the exchange principle in cell aggregation kineticst. *Journal of Theoretical Biology*, v. 41, p. 1–21, 1973.
- ANTONELLI, P. L.; RUTZ, S. F. Eco-strain in model forest. *Nonlin. Analysis:Real World Appls.*, v. 10, p. 576–588, 2009.
- ANTONELLI, P. L.; RUTZ, S. F.; BEVILACQUA, L. Theories and models in symbiogenesis. *Nolinear Analy., Real World Appls.*, v. 4, p. 743–753, 2003.
- ANTONELLI, P. L.; RUTZ, S. F.; FONSECA, K. T. The mathematical theory of endosymbiosis, ii: Models of the fungal fusion hypothesis. *Nonlinear Analy., Real World Appls.*, v. 13, p. 2096–2103, 2012.
- ANTONELLI, P. L.; RUTZ, S. F.; HIRAKAWA, C. E. The mathematical theory of endosymbiosis i. *Nonlinear Analy., Real World Appls.*, v. 12, p. 3238–3251, 2011.

- ANTONELLI, P. L.; ZASTAWNIAK, T. J. *Fundamentals of Finslerian Diffusion with Applications*. [S.l.]: Springer/Kluwer, 1999.
- BAKER, M. Lines of communication. *Nature*, v. 549, p. 322–324, 2017.
- BERWALD, L. On finsler and cartan geometries. iii: Two-dimensional finsler spaces with rectilinear extremals. *Annals of Mathematics*, v. 42, p. 84–112, 1941.
- BERWALD, L. On system of second order ode's whose integral curves are topologically equivalent to the system of straight lines. *Annals of Mathematics*, v. 48, n. 22, p. 193–215, 1947.
- BUCATARU, I.; MIRON, R. *Finsler-Lagrange Geometry. Applications to dynamical systems*. Cham: Academiei Romane, 2007.
- CARTAN, E. Observations sur le mémoire précédent. *Math. Zeitschrift*, v. 37, p. 619–622, 1933.
- CHERN, S. S. Sur la géométrie d'un système d'équations différentielles du second ordre. *Bull. Sci. Math*, v. 65, p. 223–249, 1996.
- CRAMPIN, M.; MARTINEZ, E.; SARLET, W. Linear connections for systems of second-order ordinary differential equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. 65, n. 2, p. 223–249, 1996.
- DOUGLAS, J. The general geometry of paths. *Ann of Math.*, v. 29, p. 143–169, 1928.
- GOULD, S. J. *Ontogeny and Phylogeny*. Cambridge: Harvard University Press, 1977.
- HASHIGUSHI, M. On wagner's generalized berwald space. *J. Korean Math. Soc.*, v. 12, p. 51–61, 1975.
- HASHIGUSHI, M.; ICHIJO, Y. On conformal transformations of wagner spaces. *Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., (Math., Phys. and Chem.)*, v. 10, p. 19–25, 1977.
- HUXLEY, J. *Problems of relative growth*. Cham: Dover Press, 2nd Edition, 1972.
- KELLY, D. Fine structure of desmosomes, hemi-desmosomes and an ad-epidermal globular layer in developing newt epidermis. *J. Cell Biol.*, v. 28, p. 51–72, 1966.
- KHAKHINA, L. N. *Concepts of Symbiogenesis. A Historical and Critical Study of the research of the Russian Botanists*. New Haven: D.C., Yale University Press, 1992.
- KNEBELMAN, M. S. Colineations and motions in generalized spaces. *Amer. J. Math.*, v. 51, p. 527–564, 1929.
- KNOSAMBI, D. D. Parallelism and path-space. *Math. Zeitschrift*, v. 37, p. 608–619, 1933.
- LAUGWITZ, D. *Differential and Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1965.
- MAPLE. *Maple Soft*. 2017. Disponível em: <www.maplesoft.com>.
- MARGULIS, L. *Symbiosis in cell evolution*. San Francisco: W.H. Freeman, 1981.

- MIRON, R.; ANASTASIEI, M. *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*. Dordrecht-Boston-London,: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- NEEDHAM, J. A. Heterogony, a chemical ground-plan for development. *Bio. Rev.*, v. 9, p. 79–109, 1934.
- RUTZ, S. F.; PORTUGAL, R. Finsler: A computer algebra package for finsler geometries. *Nonlinear Analysis*, v. 47, p. 6121–6134, 2001.
- RUTZ, S. F.; PORTUGAL, R. *Symbolic Finsler Geometry*. [S.l.]: In: P. L. Antonelli. (Org.). *Handbook of Finsler Geometry*. : Kluwer Academic Press, 2003.
- STEINBERG, M. Differential adhesion in morphogenesis: a modern view. *Current Opinion in Genetics & Development*, v. 17, p. 281–286, 2007.
- TROYANOVSKY, R.; SOKOLOV, E.; TROYANOVSKY, S. Endocytosis of cadherin from intracellular junctions is the driving force for cadherin adhesive dimer disassembly. *Molecular Biol. of The Cell*, v. 17, p. 3484–3493, 2006.
- TROYANOVSKY, S. Cadherin dimers in cell-cell adhesion. *European J. Cell Biol.*, v. 84, p. 225–233, 2005.
- VAGIN, O.; DADA, L. A.; TOKHTAEVA, E.; SACHS, G. (α_1, β_1) heterodimer as a cell adhesion molecule in epithelia. *Amer. J. Physiol. Cell Physiol.*, v. 302, n. 4, p. 1271–1281, 2012.
- VAGIN, O.; TOKHTAEVA, E.; SACHS, G. The role of the β_1 of the na, k-na-atpase and its glycosylation in cell-cell adhesion. *The Journ. of Biol. Chemis.*, v. 281, n. 51, p. 39573–39587, 2006.
- VERRECCHIA, F.; DUTHE, F.; DUVAL, S.; DUCHATELLE, I.; SARROUILHE, D.; HERVE, J. C. Atp counteracts the rundown of gap junctional channels of the rat ventricular myocytes by promoting protein phosphorylation. *J. Physiol.*, v. 516, p. 447–459, 1999.
- WANG, X.; VERUKI, M.; BUKORESHTILIEV, N.; HARTVEIT, E.; GERDES, H. H. Animal cells connected by nanotubes can be electrically coupled through interposed gap-junction channels. *Proc. Nat'l Acad. Sci.*, v. 107, n. 40, p. 17194–17199, 2010.