



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

RODOLFO BRANDÃO MACENA LIRA

**GEOMETRIA CURVA E TRIDIMENSIONALIDADE NO PROBLEMA DE
SAFFMAN-TAYLOR**

Recife
2018

RODOLFO BRANDÃO MACENA LIRA

**GEOMETRIA CURVA E TRIDIMENSIONALIDADE NO PROBLEMA DE
SAFFMAN-TAYLOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto

Recife
2018

Catálogo na fonte
Bibliotecária Elaine Cristina de Freitas CRB4-1790

M141g Lira, Rodolfo Brandão Macena
Geometria curva e tridimensionalidade no problema de Saffman-Taylor /
Rodolfo Brandão Macena Lira . – 2018.
95 f.: fig.

Orientador: José Américo de Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN.
Física. Recife, 2018.
Inclui referências

1. Dinâmica de Fluidos 2. Instabilidade de Saffman-Taylor 3. Célula de
Hele-Shaw 4. Curvas elásticas I. Miranda Neto, José Américo de
(Orientador) II. Título.

532.05

CDD (22. ed.)

UFPE-FQ 2018-24

RODOLFO BRANDÃO MACENA LIRA

**GEOMETRIA CURVA E TRIDIMENSIONALIDADE NO PROBLEMA DE
SAFFMAN-TAYLOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 28/02/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Mauro Copelli Lopes da Silva
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro
Examinador Externo
Universidade Federal de Pernambuco

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu pai e à minha mãe, por sempre terem me apoiado e me dado suporte quando eu necessitava. A decisão de cursar física é complicada, porém, meus pais sempre me encorajaram a seguir o meu próprio caminho e eu serei eternamente grato pela confiança que eles têm em mim. Aproveito para agradecer também ao restante dos meus familiares pela contribuição que eles tiveram durante a minha formação.

Agradeço fortemente ao meu orientador, Professor José Américo, pois sem ele nada do que está escrito nesta dissertação teria sido possível. Desde seis anos atrás, quando tive meu primeiro contato com Américo, ele sempre se manteve como um orientador atento, com um entusiasmo contagiante para a pesquisa, e capaz de extrair o melhor de todos os seus alunos. Muito do que eu aprendi sobre física, mecânica dos fluidos e sobre a vida acadêmica em geral, eu devo às minhas discussões semanais na sala de Américo.

Agradeço aos meus amigos do bacharelado e do mestrado, André, Arthur e Ricardo, por terem tornado o curso de física uma experiência única. Agradeço a Giulia pelo carinho, companhia e pela paciência durante o período de mestrado. Agradeço também a Biga, Bruno, Ciro, João, Jampa, Filipe, Mario, Matheus, Romero e Samuel pela amizade. Agradeço ao pessoal do grupo de pesquisa, Chico, Eduardo, Gabriel, Jonza, Sérgio e Pedro, pelas ajudas diversas. Agradeço aos professores Leonardo Cabral, Maurício Coutinho, Parísio, Rios e Wilson, pelas aulas e pelas conversas acadêmicas e não-acadêmicas. Por fim agradeço aos membros da banca, Prof. Mauro Copelli e Prof. Eduardo Leandro, pelos comentários que ajudaram a melhorar a dissertação, e agradeço também aos suplentes, Prof. Bruno Cunha e Prof. Marcelo Lira, pela leitura desta dissertação.

“Nobody expects the Spanish inquisition”
—Cardinal Ximenez, Monty Python’s Flying Circus

Resumo

A instabilidade de Saffman-Taylor ocorre quando um fluido desloca outro de maior viscosidade, formando estruturas chamadas “dedos viscosos” na interface de contato entre estes fluidos. Tal instabilidade hidrodinâmica é tradicionalmente estudada em uma região confinada entre duas placas planas e paralelas (dispositivo denominado célula de Hele-Shaw), de modo que o sistema é efetivamente bidimensional. Nesta dissertação, estudamos algumas generalizações geométricas do problema, mais especificamente, o comportamento dos fluidos em células de Hele-Shaw curvas e em meios porosos tridimensionais. Considerando o fluxo em células curvas, investigamos o caso da injeção de um fluido em outro e o caso de células de Hele-Shaw girantes. No primeiro caso, derivamos equações para a dinâmica da interface fluido-fluido em células de Hele-Shaw curvas de formatos distintos. A partir deste resultado, mostramos que o acoplamento de efeitos de capilaridade e geometria pode desestabilizar o sistema em situações usualmente estáveis. No caso da célula girante curva, concentramos nossa atenção em encontrar e analisar os formatos estacionários para as interfaces fluido-fluido, que exibem morfologias bastante distintas comparadas às usualmente vistas em células girantes planas. Finalmente, estudamos a injeção de um fluido em outro no interior de meios porosos tridimensionais, e obtemos que as interfaces apresentam algumas diferenças em relação à situação bidimensional. Por exemplo, temos que dedos viscosos em três dimensões podem ramificar-se em até três ramos, enquanto em duas dimensões apenas bifurcações em dois ramos são observadas.

Palavras-chave: Instabilidade de Saffman-Taylor. Célula de Hele-Shaw. Célula de Hele-Shaw girante. Curvas elástica. Meios porosos. Geometria.

Abstract

The Saffman-Taylor instability occurs when a fluid displaces another of higher viscosity, giving rise to structures known as “viscous fingers” at the contact interface between these fluids. This hydrodynamic instability is traditionally studied in a confined region between two plane parallel plates (a device called Hele-Shaw cell). In this dissertation, we study some geometric generalizations of this problem, more specifically, the behavior of the fluids inside curved Hele-Shaw cells, and three-dimensional porous media. Considering the flow inside curved cells, we investigate the case of injecting a fluid into another and the case of rotating Hele-Shaw cells. In the first case, we derive equations for the dynamics of the fluid-fluid interface inside curved Hele-Shaw cells of distinct shapes. Using this result, we show that the coupling between capillary and geometric effects can destabilize the system in situations which are usually stable. Regarding the rotating Hele-Shaw cell case, we concentrate our attention on finding and analyzing the stationary shapes of the fluid-fluid interfaces, which exhibit very distinct morphologies compared to the ones usually seen in flat rotating cells. Finally, we study the injection of a fluid into another inside three-dimensional porous media, and we obtain that the interfaces present some differences compared to the two-dimensional situation. For instance, we have that viscous fingers in three dimensions can split into three fingers, whereas in two dimensions only bifurcations into two branches are observed.

Key words: Saffman-Taylor instability. Hele-Shaw cell. Rotating Hele-Shaw cell. Elastica curve. Porous media. Geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Exemplos de padrões e interfaces em diversos sistemas físicos. (a) Líquen crescendo em uma rocha; (b) instabilidade na interface entre fluidos; (c) nebulosa apresentando estruturas filamentosas; (d) coral bastante ramificado; (e) padrões variados em conchas.	15
Figura 2	– Diagrama original do aparato utilizado por Darcy. Na descrição da imagem lê-se "Aparato destinado a determinar a lei de escoamento de água através de areia", em tradução livre do francês. Imagem retirada da Ref. [24]	17
Figura 3	– (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw retangular de espessura h , largura W e comprimento L . Nesta imagem, o fluido 1 é injetado com velocidade U no fluido 2. Ilustração retirada da Ref. [32]. (b) Exemplo de um aparato de Hele-Shaw moderno. Note a pequena espessura entre as duas placas de vidro, característica principal das células de Hele-Shaw.	19
Figura 4	– Formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw retangular. (a) Figura esquemática dos tipos de padrões obtidos, onde a seta vermelha representa a direção de deslocamento dos fluidos. (b) Experimento demonstrando o surgimento de um único dedo que se propaga no canal com velocidade constante. As imagens foram retiradas de Ref. [34].	20
Figura 5	– (a) Ilustração esquemática de um aparato de Hele-Shaw radial. As viscosidades dos fluidos são η_1 e η_2 , o espaçamento entre as placas da célula é b e a taxa de injeção do fluido é Q . Imagem retirada da Ref. [35]. (b) Interface experimental extraída da Ref. [36]. Perceba a presença do tip-splitting em vários dos dedos, dando origem a um padrão bastante ramificado.	20
Figura 6	– Evolução temporal da interface fluido-fluido em uma célula de Hele-Shaw girante. No canto superior esquerdo, as dimensões da célula estão especificadas e o sentido da rotação com velocidade angular Ω é indicado. Perceba que os padrões obtidos são bastante distintos daqueles vistos em Fig. 5(b). Imagem retirada de [40].	22
Figura 7	– Logomarca da empresa Sherwin-Williams. Exemplo da representação do fluxo de filmes finos em superfícies curvas na cultura popular.	23
Figura 8	– Na esquerda, célula de Hele-Shaw no formato de um hemisfério esférico. Na direita, exemplo de interface perturbada obtida na célula de Hele-Shaw esférica. As propriedades morfológicas, como aparecimento de tip-splitting, são bem similares às vistas na Fig. 5(b). Imagem retirada de [22].	24
Figura 9	– (a) Simulações numéricas de dedos viscosos em um meio poroso. Imagem retirada de [60]. (b) Padrões experimentais obtidos da Ref. [61].	25

Figura 10 – Algumas modificações na célula de Hele-Shaw com intuito de controlar a instabilidade de Saffman-Taylor. A figura (a) representa uma célula em que a placa de cima foi suavemente inclinada, já a figura (b) mostra um experimento para o caso usual de formação de dedos viscosos para uma célula retangular, enquanto (c) mostra a estabilização da interface devido ao efeito da placa inclinada. Similarmente, (d) mostra uma célula cuja placa superior é uma membrana elástica; em (e), vemos um exemplo experimental da instabilidade de Saffman-Taylor radial sem a presença da membrana; já em (f), temos a situação estável na presença da membrana. As figuras (a),(b) e (c) foram retiradas de [55] e as figuras (d),(e) e (f) de [56].	29
Figura 11 – Três exemplos de células de Hele-Shaw curvas. Da esquerda para a direita, vemos uma célula esférica de raio a , cilíndrica também de raio a e cônica com um ângulo de abertura 2γ . Todas elas têm um espaçamento b entre as placas. Figura retirada da Ref. [21].	33
Figura 12 – Ilustração esquemática do fluxo de dois fluidos em uma célula de Hele-Shaw curva. O fluido de viscosidade η_1 é injetado com taxa Q , deslocando outro fluido de viscosidade η_2 , o que causa uma perturbação ζ na interface dos fluidos (curva sólida). Um sistema de coordenadas polares (r, φ) é utilizado, onde $R = R(t)$ é o raio não perturbado (curva tracejada).	37
Figura 13 – Superfícies ilustrando os diversos parâmetros β : (a) cone convencional ($0 < \beta < 1$), (b) disco plano ($\beta = 1$), e (c) cone contorcido ($\beta > 1$), com β em torno de 2.5.	40
Figura 14 – Diagrama de estabilidade linear no espaço CaR - β , para os seguintes valores do contraste de viscosidade (a) $A = 0.95$, (b) $A = 0$, e (c) $A = -0.95$. As interfaces fracamente não lineares correspondentes são exibidas em (b) e (c). Os padrões não lineares correspondentes a I-IX em (a) estão ilustrados na Fig. 15. Perceba a presença em (a), (b) e (c) de uma região instável para valores de CaR pequenos.	42
Figura 15 – Padrões fracamente não lineares que aparecem nos pontos I-IX do diagrama da Fig. 14(a) para valores positivos do contraste de viscosidade $A = 0.95$. Estas interfaces se subdividem em: instabilidades de Saffman-Taylor usuais exibindo "tip-splitting"(I, IV, e VII), valores estáveis circulares (II, V, e VIII) e estrutura instáveis que não são esperadas usualmente e surgem pelo efeito do parâmetro β (II, VI, e IX).	43
Figura 16 – Interfaces da Fig. 15IX em cima de um cone generalizado com $\beta = 6.5$. . .	45
Figura 17 – Interface linear (curva tracejada) e fracamente não linear (denotada por WNL de "weakly non-linear") (curva sólida) para $R_f = 6.2$, $\beta = 6.5$, $A = 0.95$, $Ca = 0.212$, e $n = 3$. É aparente que o efeito de bifurcação nos dedos só é capturado por meio dos efeitos fracamente não lineares da Eq. (2.49).	47

Figura 18 – Variações na (a) função $T(2n, n)$ e (b) na razão das amplitudes $a_{2n}(R)/a_{2n}(R_0)$, quando o número de capilaridade Ca é variado. Três valores do contraste de viscosidade são considerados: $A = 0.95$ (curva vermelha), $A = 0$ (curva laranja), e $A = -0.95$ (curva azul) para $\beta = 4.5$	48
Figura 19 – (a) Construção geométrica de uma curva elástica feita por Euler em [96]. (b) Exemplo de uma curva elástica obtida experimentalmente em uma fita flexível, a figura tracejada corresponde ao formato teórico previsto. Imagem retirada da Ref. [97].	50
Figura 20 – Padrões típicos que emergem no caso tradicional em uma célula de Hele-Shaw plana girante [42, 43]: (a) curva elástica com três dedos longos e com pontas arredondadas; (b) estrutura com cinco dedos apresentando uma base bastante estreita. Essas soluções são análogas às curvas do tipo elástica que aparecem em diversos sistemas físicos [98–102].	51
Figura 21 – Exemplos de elásticas tradicionais em superfícies não-planas. Na linha de cima, duas curvas elásticas estão representadas para o caso esférico (imagens retiradas de [103]). A linha de baixo ilustra as soluções do problema da elástica no disco de Poincaré, um modelo geométrico que representa um espaço hiperbólico bidimensional (imagens retiradas de [104]).	52
Figura 22 – Ilustração esquemática do fluxo em uma célula de Hele-Shaw curva girante. Um fluido de viscosidade η_1 e densidade ρ_1 está cercado por um fluido de viscosidade η_2 e densidade ρ_2 . A célula gira com velocidade angular Ω ao redor do eixo da linha tracejada vermelha.	54
Figura 23 – Soluções estacionárias para o caso de (a) cone e (b) esfera. Nesta figura o eixo de rotação coincide com o eixo de simetria das superfícies. Temos que o forma dos padrões gerados tem características similares aos do caso plano. A interface obtida na esfera também é bastante similar a aquela para caso elástico, que está ilustrada na Fig. 21.	56
Figura 24 – Dois exemplos de célula curva com $\theta(\nu) = \theta(\nu(\varphi)) = C \cos(m\varphi)$. Nas duas superfícies temos que $m = 4$, porém em (a) $C = 0.1$ e em (b), $C = 0.3$. Perceba que C controla a amplitude das ondulações.	57
Figura 25 – Família representativa de padrões para uma célula de Hele-Shaw girante no formato de cone contorcido para diversos valores de C . Os valores do parâmetro C usados nesta figura foram: (a) 0; (b) 0.1677; (c) 0.5556; (d) 0.6495; (e) 0.7025; (f) 0.7462; (g) 0.7813; (h) 0.8046; (i) 0.8234; (j) 0.8865; (k) 0.9030, e (l) 0.9289. Os demais parâmetros relevantes são $a = -12$, $N_\Omega = 22.5$, $r(s = 0) = 1$, $r_s(s = 0) = 0$, $\varphi(s = 0) = 0$, e $m = 4$. Note a riqueza das formas obtidas para $C > 0$ em contraste com o caso plano usual $C = 0$	59

Figura 26 – Comparação entre o espectro completo das elásticas generalizadas da Fig. 25, e a interface contendo apenas os dois modos de maior amplitude, como n sendo o de maior amplitude e n' o de segunda maior amplitude. (a) O padrão com todos os modos do espectro é o mesmo da Fig. 25(e), e a solução de dois modos considera apenas $n = 8$, e $n' = 13$; (b) O padrão com todo o espectro é o mesmo da Fig. 25(h), enquanto a solução de dois modos considera apenas $n = 8$, e $n' = 16$	61
Figura 27 – (a) Valor absoluto da amplitude de Fourier cosseno $ a_n $ como função do modo n . (b) Comparação entre a solução numérica e linear para o formato estacionário da interface. Escolhemos $C = 0.58$, e $m = 2$. Note que $n = 2m = 4$, e $n' = 8$	64
Figura 28 – (a) Valor absoluto da amplitude de Fourier cosseno $ a_n $ como função do modo n . (b) Comparação entre a solução numérica e linear para o formato estacionário da interface. Escolhemos $C = 0.4965$, e $m = 3$. Note que $n = 2m = 6$, e $n' = 9$	64
Figura 29 – Esboço de uma interface entre dois fluidos em um meio poroso. Nesta figura, removemos uma região entre dois meridianos na interface para facilitar a visualização. O semi-círculo tracejado é uma representação do raio R não perturbado. Assim como na Fig. 12, temos que o fluido de viscosidade η_1 é injetado em outro de viscosidade η_2 causando uma perturbação ζ na interface fluido-fluido devido à instabilidade de Saffman-Taylor.	68
Figura 30 – Gráfico da taxa de crescimento Λ como função de l , para três valores do raio não perturbado R . Nesta figura, tomamos $Ca = 110$, e $A = 1$. Os pequenos círculos representam a taxa máxima de crescimento $\Lambda(l_{max})$. Está claro que variações em R não influenciam nem a banda de modos instáveis, nem o modo com l_{max} de maior crescimento.	73
Figura 31 – Diagrama de estabilidade linear no plano A - Ca ilustrando as regiões estáveis e instáveis. A fronteira entre as duas regiões é encontrada fazendo $\lambda(l_{max}) = 0$. Os padrões 3D ilustram o formato de duas interfaces fluido-fluido típicas que surgem no regime linear do processo de formação de dedos viscosos em um meio poroso 3D.	74
Figura 32 – Interfaces típicas para condições iniciais contendo apenas os modos $l = 3$. A primeira coluna (Fig. 32(a) e Fig. 32(d)) ilustra as interfaces puramente lineares. A segunda coluna (Fig. 32(b) e Fig. 32(e)) apresenta as interfaces fracamente não lineares equivalentes. Por último, na terceira coluna (Fig. 32(c) e Fig. 32(f)) temos as mesmas interfaces não lineares da segunda coluna, porém com o modo $l = 6$ removido. Os padrões ilustrados nas Figs. 32(a)-32(c) possuem $Ca = 60$, e $R = 500$, enquanto as estruturas das Figs. 32(d)-32(f) possuem $Ca = 80$, e $R = 50$	77

- Figura 33 – Interfaces características para condições iniciais contendo apenas os modos $l = 4$. A primeira coluna (Fig. 33(a) e Fig. 33(d)) ilustra as interfaces puramente lineares. A segunda coluna (Fig. 33(b) e Fig. 33(e)) apresenta as interface fracamente não lineares equivalentes. Por último, na terceira coluna (Fig. 33(c) e Fig. 33(f)) temos as mesmas interfaces não lineares da segunda coluna, porém com os modos $l = 8$ removidos. Os padrões ilustrados nas Figs. 33(a)-33(c) possuem $Ca = 110$, e $R = 105$, enquanto as estruturas das Figs. 33(d)-33(f) possuem $Ca = 130$, e $R = 57.5$ 79
- Figura 34 – Exemplos de interfaces perturbadas para $Ca = 110$, $R = 80$, $l = 4$, e $m = 4$. (a) Interface puramente linear; (b) interface fracamente não-linear; e (c) interface fracamente não-linear "filtrada", onde o modo a_{88} foi removido. 80
- Figura 35 – Variação da (a) amplitude do modo cosseno fundamental a_{44} , e (b) amplitude do modo cosseno para o segundo harmônico a_{88} , a medida que R aumenta. Utilizamos dois números de capilaridade distintos: $Ca = 110$ (curvas sólida), e $Ca = 120$ (curvas tracejadas). 81
- Figura 36 – Variedade de possíveis padrões ocorrendo na interface entre os fluidos. A primeira coluna consiste em interfaces possuindo $l = 3$, $Ca = 90$, mesma amplitude inicial $|\zeta_{lm}| = 0.03$ e com fases distintas. Já a segunda coluna apresenta interfaces possuindo $l = 4$, $Ca = 150$, mesma amplitude inicial $|\zeta_{lm}| = 0.0009$ e fases iniciais distintas. É possível identificar o tip-splitting usual em dois lóbulos (Figs. 36(a) e 36(c)), e o caso mais exótico de tip-splitting em três lóbulos (Figs. 36(b) e 36(d)). 82

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	O problema de Saffman-Taylor	16
1.2	Aspectos geométricos na formação de dedos viscosos	22
1.2.1	<i>Dinâmica de fluidos em células de Hele-Shaw curvas</i>	22
1.2.2	<i>Novos estudos de formação de dedos viscosos em sistemas com três dimensões</i>	24
1.3	Organização da dissertação	26
2	FORMAÇÃO DE DEDOS VISCOSOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW CURVAS	28
2.1	Introdução	28
2.2	Modelo matemático do problema	30
2.2.1	<i>Equações básicas e condições de contorno</i>	30
2.2.2	<i>Equação de modos acoplados</i>	35
2.2.3	<i>Equação de modos acoplados para cones generalizados</i>	39
2.3	Aparecimento de dedos viscosos por efeitos de capilaridade acoplados com a geometria da célula de Hele-Shaw	41
2.3.1	<i>Análise linear</i>	41
2.3.2	<i>Análise fracamente não linear: presença de tip-splitting</i>	45
3	CURVAS ELÁSTICAS GENERALIZADAS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW GIRANTES NÃO PLANAS	50
3.1	Introdução	50
3.2	Modelo matemático	53
3.2.1	<i>Lei de Darcy generalizada</i>	53
3.2.2	<i>Formalismo Vortex Sheet</i>	55
3.3	Padrões estacionários em células de Hele-Shaw cônicas generalizadas	57
3.3.1	<i>Galeria de elásticas generalizadas</i>	57
3.3.2	<i>Teoria linear das elásticas generalizadas considerando apenas dois modos de Fourier</i>	62
4	INSTABILIDADE DE SAFFMAN-TAYLOR EM MEIOS POROSOS TRI-DIMENSIONAIS	66
4.1	Introdução	66
4.2	Equação de modos acoplados para o sistema	67
4.3	Discussão	72
4.3.1	<i>Estágio linear: Estabilidade da interface</i>	72

4.3.2	<i>Estágio não-linear: Morfologias das interfaces em 3D</i>	74
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	84
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

A natureza é uma fonte infinita de diversos padrões e formas que encantam tanto leigos quanto cientistas por sua beleza e complexidade. Na figura 1 estão ilustrados alguns destes padrões, que ocorrem em sistemas fluidos, astronômicos e biológicos. Temos até mesmo situações que podem ser vistas no dia-a-dia, como o crescimento de líquens em rochas. Esses padrões naturais, no entanto, não são apenas esteticamente fascinantes, mas também ajudam no entendimento dos fenômenos físicos que ocorrem durante as suas formações. Por exemplo, o crescimento de corais, que são notáveis por suas diversas ramificações estruturais, está diretamente ligado aos processos de transporte e absorção de nutrientes, que forçam os diversos ramos do coral a se bifurcarem e a competirem entre si [1]. Curiosamente, apesar de existirem diversos mecanismos diferentes envolvidos nos processos de formação de padrões, em vários casos, eles podem ser explicados por meio de um estudo do crescimento e da dinâmica que ocorre na interface separando duas fases com propriedades distintas.

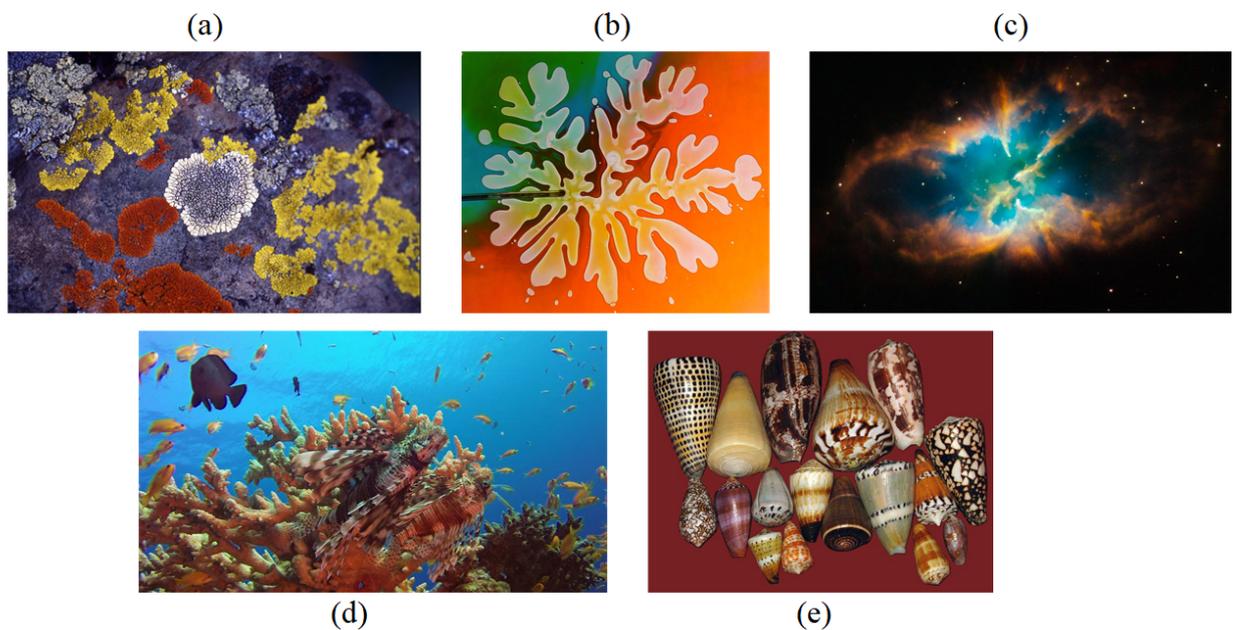


Figura 1 – Exemplos de padrões e interfaces em diversos sistemas físicos. (a) Líquen crescendo em uma rocha; (b) instabilidade na interface entre fluidos; (c) nebulosa apresentando estruturas filamentosas; (d) coral bastante ramificado; (e) padrões variados em conchas.

Uma inspeção mais cuidadosa na figura 1 mostra que o crescimento de interfaces e a formação de padrões também podem ocorrer em regiões com propriedades geométricas, como o número de dimensões e o formato do espaço, bem diversas. Com isso, uma questão natural a ser levantada é: qual a influência desses aspectos geométricos no processo de formação de padrões? Ou em outras palavras, o que aconteceria caso restringíssemos o crescimento de uma

interface (como a de um coral, utilizando o mesmo exemplo do primeiro parágrafo) a duas dimensões, confinando-o em uma região plana apertada? Além disso, o que mudaria caso essa região bidimensional não fosse plana, ou seja, caso a interface fosse restrita a crescer na superfície de uma esfera ou dentro uma rocha cheia de irregularidades?

Felizmente, estas questões estão recebendo cada vez mais atenção tanto experimentalmente quanto teoricamente, e modelos matemáticos de formação de padrões em regiões tridimensionais e superfícies bidimensionais curvas estão sendo constantemente desenvolvidos e investigados. Apenas para citar alguns exemplos de estudos neste tópico, temos que os padrões de Turing, que estão relacionados com as manchas e listras encontradas em vários animais, apresentam forte dependência com a curvatura [2, 3] e com o número de dimensões do sistema físico considerado [4, 5]. Efeitos geométricos também foram estudados em processos de crescimento de cristais [6–8], sistemas de fluidos [9, 10], entre outros [11–14].

No restante desta dissertação focaremos na formação de padrões e crescimento de interfaces no contexto da instabilidade de Saffman-Taylor. Esta instabilidade ocorre usualmente quando um fluido de menor viscosidade desloca um fluido mais viscoso, como água deslocando óleo, e tem como principal característica a formação de estruturas conhecidas como "dedos viscosos" [15] na interface que separa os fluidos. Este fenômeno aparenta ser bem simples em comparação aos outros mecanismos mencionados no parágrafo anterior, porém, ao longo dos anos, a instabilidade de Saffman-Taylor se tornou um paradigma no contexto de formação de padrões em interfaces [16], devido à conexão desse fenômeno com diversos outros processos, como solidificação e descargas elétricas [16, 17]. A influência da geometria na formação dos dedos viscosos recebeu uma considerável atenção, o que pode ser visto nas Refs. [18–23].

No restante desta dissertação, estudaremos alguns problemas relacionados à formação de dedos viscosos em superfícies bidimensionais curvas e em regiões tridimensionais. Mais especificamente, iremos analisar o impacto de fatores geométricos no controle da emergência da instabilidade de Saffman-Taylor e na morfologia dos padrões não lineares resultantes. No entanto, antes de começarmos a discussão destes problemas, é necessário que certos conceitos básicos sobre a instabilidade de Saffman-Taylor clássica sejam esclarecidos, o que será feito na seção seguinte.

1.1 O problema de Saffman-Taylor

Nesta seção, um pouco da literatura e dos conceitos básicos sobre a instabilidade de Saffman-Taylor serão apresentados. Como dito anteriormente, esta instabilidade está intimamente associada ao fluxo em meios porosos. Apesar do conceito de um meio poroso ser bem intuitivo, é conveniente darmos uma definição mais rigorosa de seu significado. Basicamente, um meio poroso consiste em uma matriz sólida contendo vários espaços vazios (buracos e pequenos canais capilares) interconectados em diversas direções por onde líquidos e gases podem fluir [25]. Um exemplo simples de meio poroso é uma pilha de areia, que permite que fluidos passem por entre

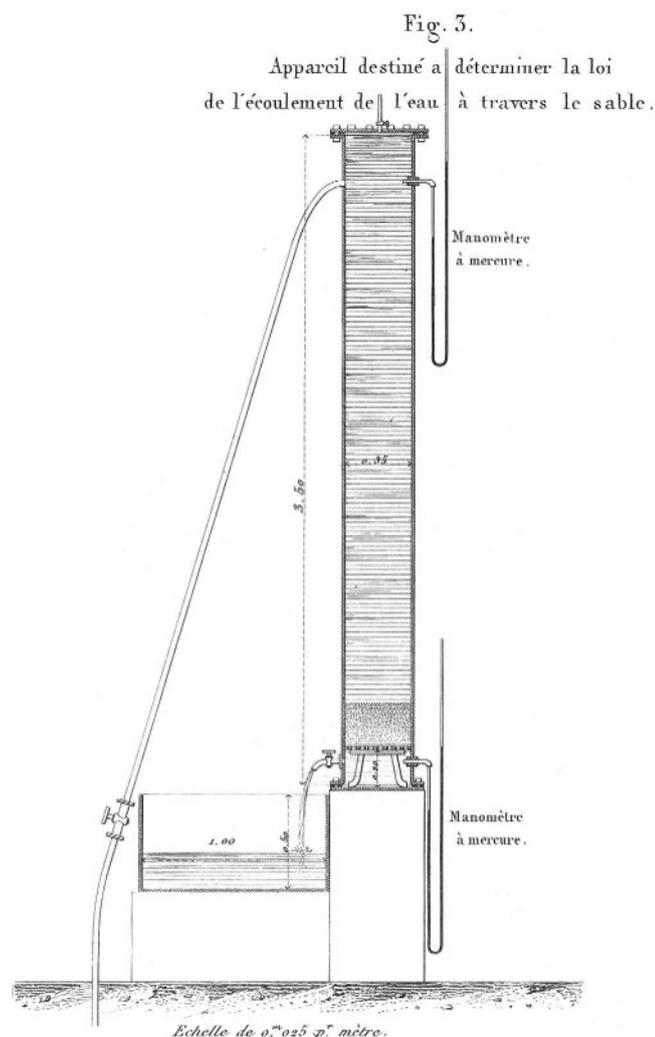


Figura 2 – Diagrama original do aparato utilizado por Darcy. Na descrição da imagem lê-se "Aparato destinado a determinar a lei de escoamento de água através de areia", em tradução livre do francês. Imagem retirada da Ref. [24]

os grãos. Por estar relacionado a diversos processos importantes para geologia e engenharia, como formação de aquíferos e extração de petróleo de rochas, sempre houve um grande interesse em estudar os aspectos físicos e hidrodinâmicos dos meios porosos. Dentre os cientistas que contribuíram inicialmente para esses estudos, que datam desde o século XVII, temos nomes conhecidos, como Charles Coulomb, Adolf Fick, Josef Stefan, dentre outros [26].

Uma das primeiras e mais influentes contribuições para o entendimento do fluxo em meios porosos ocorreu na metade do século XIX, com as publicações do engenheiro francês Henry Philibert Gaspard Darcy. Ao longo da maior parte de sua vida, Darcy ocupou cargos importantes no governo francês, como Inspetor Geral e Diretor Chefe de Águas e Pavimentos, além de ter recebido diversas honrarias pelo seu trabalho e pesquisa. Em 1855, devido a seu estado de saúde delicado, Darcy retornou a Dijon na França, sua terra natal. Lá, ele se dedicou exclusivamente a sua pesquisa e a escrever um livro extenso, detalhando os resultados de seus

experimentos e os conhecimentos sobre meios porosos e hidrologia que ele obteve durante sua carreira [27].

Em 1856, dois anos antes de sua morte, Darcy publicou "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon" [24], sua magnum opus, contendo cerca de 680 páginas abordando tópicos diversos de hidrodinâmica, geologia e reservatórios de água. A contribuição mais famosa de Darcy encontra-se em um experimento descrito em um apêndice deste livro. Conforme ilustrado na Fig. 2, neste experimento Darcy montou uma coluna de cerca de 3,5 metros de altura e a encheu de areia. Nas extremidades desta coluna, dois manômetros de mercúrio foram acoplados com o intuito de medir a diferença de pressão entre as extremidades do aparato. Utilizando um sistema de torneiras para variar a vazão de água, Darcy foi capaz de relacionar o fluxo volumétrico que escoava através da coluna de areia e a diferença nas pressões da extremidade do sistema. A relação obtida por ele ficou conhecida como "lei de Darcy" e é incrivelmente simples, com o fluxo linearmente proporcional ao gradiente de pressão.

Ainda no século XIX, desta vez na Inglaterra, outro engenheiro e pesquisador chamado Henry Shelby Hele-Shaw, também fez uma grande contribuição para a mecânica dos fluidos. Hele-Shaw, que na época era professor na Liverpool University College, tinha como principal objetivo construir um aparato que possibilitasse a visualização das linhas de corrente em um fluido para fazer demonstrações para seus alunos. Ele então teve a ideia de usar duas placas de vidro planas e paralelas e as fixar a uma pequena distância uma da outra (originalmente em torno de 0,5 mm) [28]. Devido à sua pequena espessura, o sistema se comportava como se fosse efetivamente bidimensional e com isso, era possível obter fotografias acuradas do fluxo em diversas situações, como, por exemplo, o fluxo em volta de um aerofólio. A simplicidade e a eficiência do seu aparato, que mais tarde seria chamado de célula de Hele-Shaw em sua homenagem, chamou a atenção dos grandes nomes da ciência e matemática britânica, como Sir George Stokes, Sir Horace Lamb e Lord Kelvin [28, 29]. Uma ilustração esquemática e uma célula de Hele-Shaw moderna estão exibidos na Fig. 3.

O primeiro tratamento matemático do fluxo na célula de Hele-Shaw foi realizado por Horace Lamb no seu clássico livro "Hydrodynamics" [30]. Curiosamente, as equações que governam o escoamento quase-bidimensional de um fluido no limite em que o espaçamento entre as placas de vidro é muito pequeno são idênticas àquelas que regem o fluxo em meios porosos uniformes tridimensionais, que foram estudados por Darcy. Devido a essa semelhança matemática, vários estudos atuais sobre fluidos em meios porosos são conduzidos utilizando células de Hele-Shaw, pois estas são mais simples de serem construídas e os resultados obtidos são mais fáceis de serem coletados e analisados.

Seguindo cronologicamente nossa discussão, nas primeiras décadas do século XX, vários cientistas expandiram as análises experimentais e o modelo matemático da dinâmica de fluidos tanto em meios porosos, quanto em células de Hele-Shaw [25, 26, 29]. No entanto, pouca atenção foi dada para a modelagem de fluxos multifásicos, ou seja, fluxos que envolvem mais de um fluido, nesses sistemas. Apesar da sua importância para fenômenos práticos, como extração

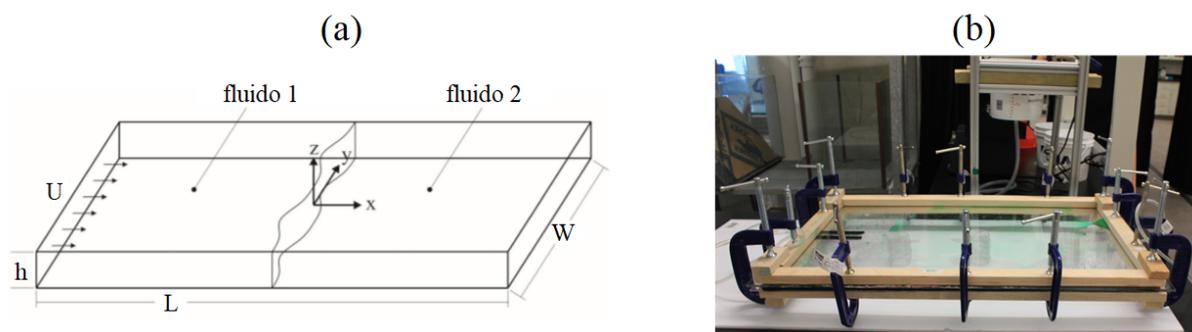


Figura 3 – (a) Figura esquemática de uma célula de Hele-Shaw retangular de espessura h , largura W e comprimento L . Nesta imagem, o fluido 1 é injetado com velocidade U no fluido 2. Ilustração retirada da Ref. [32]. (b) Exemplo de um aparato de Hele-Shaw moderno. Note a pequena espessura entre as duas placas de vidro, característica principal das células de Hele-Shaw.

de petróleo e refinamento de açúcar, a primeira análise do fluxo de dois fluidos em um meio poroso só foi publicada em 1952 por Hill [31]. Neste trabalho, Hill mostrou que a diferença de viscosidade entre os fluidos envolvidos é crucial para a dinâmica e estabilidade do escoamento. Linearizando as equações do sistema, Hill concluiu que quando um fluido menos viscoso desloca um de maior viscosidade, a interface se torna instável e diversas perturbações, conhecidas como dedos viscosos, começam a surgir. Contrariamente, caso o fluido mais viscoso seja injetado em um de menor viscosidade, a interface permanece plana e estável.

A análise feita por Hill foi expandida por Chuoke, Van Meurs e Van Der Poel [33]. Nos seus estudos, Chuoke e seus colaboradores foram os primeiros a considerar que a tensão superficial que existe entre os dois fluidos exerce um papel fundamental na estabilidade e na determinação do número de dedos que surgem na interface fluido-fluido. Mais especificamente, enquanto diferenças de viscosidade e taxas de injeções altas tornam sistema mais instável, a tensão superficial tende naturalmente a reduzir as irregularidades da interface e estabilizar o sistema. Levando em conta esses fatores, a Ref. [33] foi capaz de obter analiticamente o número de onda da perturbação de maior crescimento. Estes resultados foram apresentados em algumas palestras e publicados somente em 1959. Um ano antes, no entanto, usando algumas ideias introduzidas por Chuoke (e agradecendo a ele), os matemáticos britânicos Philip Saffman e Sir Geoffrey Ingram Taylor, ambos da Universidade de Cambridge, publicaram o artigo "The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid" [34]. Neste celebrado artigo, Saffman e Taylor fornecem uma análise clara e cuidadosa do problema do deslocamento de dois fluidos viscosos imiscíveis. Além disso, ao contrário das publicações de Hill e Chuoke, a Ref. [34] utiliza uma célula de Hele-Shaw retangular para fazer uma mímica da dinâmica em meios porosos, possibilitando a obtenção de imagens muito mais claras e precisas dos mecanismos físicos envolvidos.

O trabalho de Saffman e Taylor contém duas investigações analíticas distintas. Na

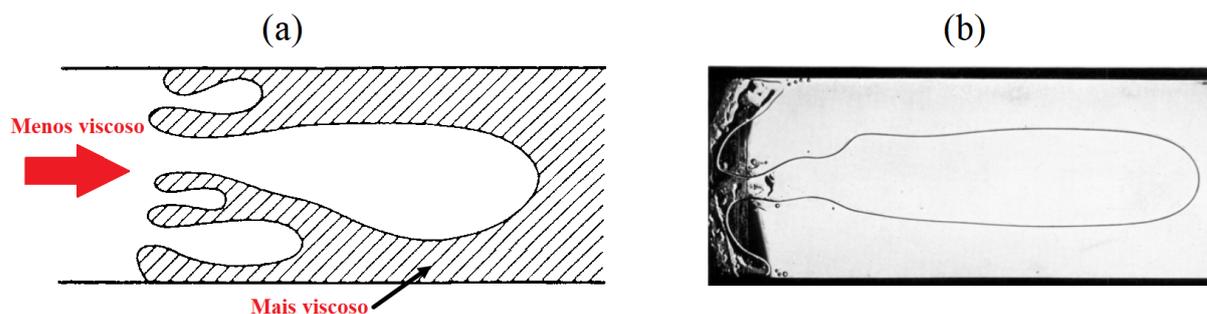


Figura 4 – Formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw retangular. (a) Figura esquemática dos tipos de padrões obtidos, onde a seta vermelha representa a direção de deslocamento dos fluidos. (b) Experimento demonstrando o surgimento de um único dedo que se propaga no canal com velocidade constante. As imagens foram retiradas de Ref. [34].

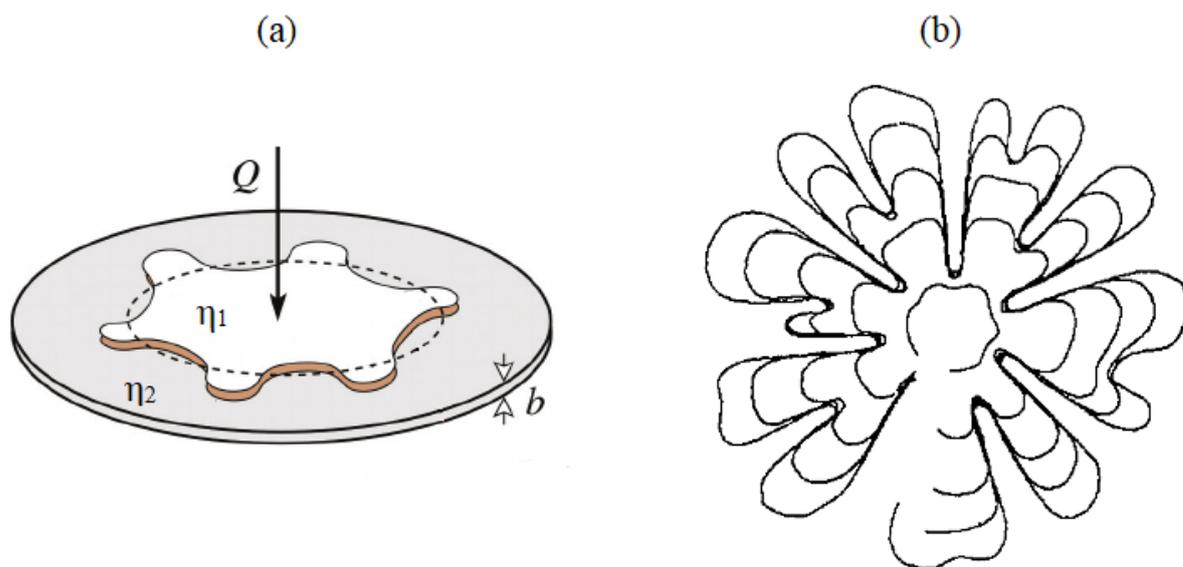


Figura 5 – (a) Ilustração esquemática de um aparato de Hele-Shaw radial. As viscosidades dos fluidos são η_1 e η_2 , o espaçamento entre as placas da célula é b e a taxa de injeção do fluido é Q . Imagem retirada da Ref. [35]. (b) Interface experimental extraída da Ref. [36]. Perceba a presença do tip-splitting em vários dos dedos, dando origem a um padrão bastante ramificado.

primeira, levando em conta a tensão superficial do sistema, e, por meio de uma decomposição em modos de Fourier e da linearização das equações de movimento, a Ref. [34] foi capaz de prever as condições de estabilidade do sistema e estimar o número de onda do modo de perturbação mais instável, obtendo resultados similares aos de Chuoke. Na segunda parte deste trabalho, efeitos de tensão superficial foram ignorados e, por intermédio de técnicas de análise complexa, os autores chegaram em uma expressão exata para o formato de um dedo viscoso emergindo na interface. Além destas duas análises teóricas, Saffman e Taylor também realizaram experimentos

na célula de Hele-Shaw, chegando à conclusão que o sistema de fluidos tendia naturalmente para uma situação com um único dedo largo se movendo com velocidade constante na célula, que pode ser vista na Fig. 4(b). Apesar de não ter sido a primeira publicação sobre o assunto, o trabalho de Saffman e Taylor pode ser considerado como o marco inicial para o estudo da instabilidade entre dois fluidos viscosos. O impacto da Ref. [34] foi tão grande que a formação de dedos viscosos até hoje é conhecida como instabilidade de Saffman-Taylor. Atualmente, o estudo dessa instabilidade continua sendo uma das áreas mais ativas da mecânica dos fluidos.

Com o aumento da popularidade da instabilidade de Saffman-Taylor, diversas modificações teóricas e experimentais foram introduzidas no problema original [15, 37]. Dentre elas, vários autores consideraram situações em que um fluido é injetado radialmente através de um ponto no centro da célula de Hele-Shaw radial [36, 38]. Neste sistema, ilustrado na Fig. 5(a), a interface entre fluidos também é instável somente quando o fluido menos viscoso é injetado no mais viscoso. No entanto, ao contrário do caso retangular da Fig. 4, a interface não se aproxima de um estado com apenas um dedo dominante e, à medida que o tempo avança, os dedos viscosos sofrem diversas mudanças morfológicas, ficando mais grossos e com pontas progressivamente mais achatadas, até o momento em que o dedo se bifurca em dois dedos menores. Uma interface perturbada obtida experimentalmente em uma célula radial está exibida na Fig. 5(b). O fenômeno de achatamento e bifurcação dos dedos viscosos, conhecido na literatura como "tip-splitting", se repete várias vezes durante a evolução temporal do sistema, até que a interface entre os fluidos adquire uma estrutura característica bem ramificada. Um aspecto importante ao se estudar tip-splitting teoricamente é que o mecanismo que o governa é exclusivamente não linear, de tal modo que uma análise linear não é suficiente para explicá-lo [39].

As células de Hele-Shaw radiais também permitem a investigação de outro tipo de instabilidade, que é um pouco diferente da de Saffman-Taylor usual. Esta instabilidade surge quando, ao invés de injetar um fluido no outro, todo o sistema é rotacionado com velocidade angular constante [40, 41], submetendo os fluidos a uma força centrífuga. Apesar de ocorrerem em sistemas parecidos, esta instabilidade centrífuga possui várias diferenças em comparação com a formação de dedos viscosos gerados por injeção discutida anteriormente. Primeiramente, a instabilidade centrífuga não é causada por uma diferença de viscosidade, e sim por um contraste nas densidade dos fluidos envolvidos, em situações em que o fluido interno possui densidade maior que o externo. A morfologia das interfaces deformadas por rotação também é bastante diferente e o tip-splitting, principal característica morfológica dos dedos viscosos em células radiais, não está presente no caso girante. Exemplos de interfaces típicas para este sistema estão ilustradas na Fig. 6. Podemos ver que os dedos obtidos são bem mais finos e apresentam comprimentos variados. Por último, o fluxo em células de Hele-Shaw girantes admite soluções estacionárias, que não mudam com o tempo [42, 43].

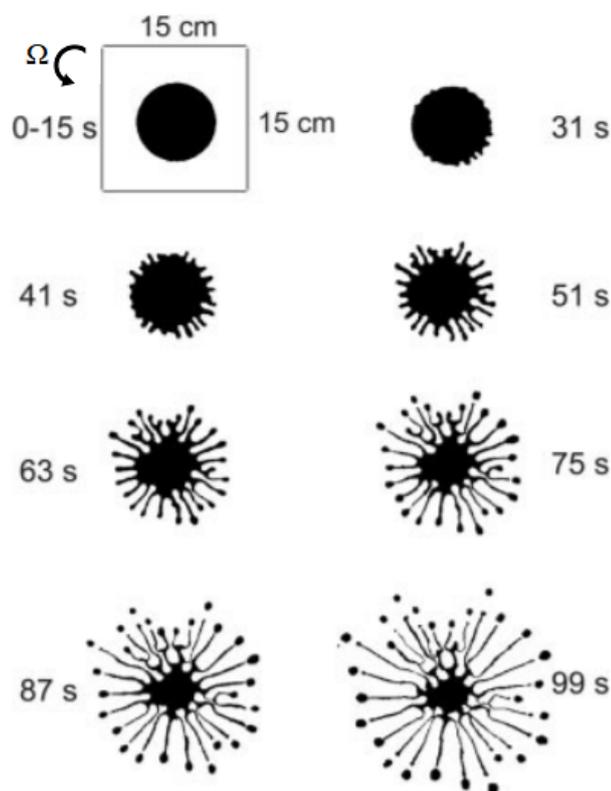


Figura 6 – Evolução temporal da interface fluido-fluido em uma célula de Hele-Shaw girante. No canto superior esquerdo, as dimensões da célula estão especificadas e o sentido da rotação com velocidade angular Ω é indicado. Perceba que os padrões obtidos são bastante distintos daqueles vistos em Fig. 5(b). Imagem retirada de [40].

1.2 Aspectos geométricos na formação de dedos viscosos

1.2.1 Dinâmica de fluidos em células de Hele-Shaw curvas

Sempre houve um grande interesse no comportamento e estabilidade de fluidos em meios curvos. Particularmente, o escoamento de filmes finos, ou seja, fluidos possuindo espessura pequena e uma superfície livre, foi estudado em substratos cônicos [44, 45], cilíndricos [46, 47] e esféricos [48, 49] e, até mesmo, em catenóides [10]. Grande parte do interesse neste tipo de problema se deve à sua vasta aplicabilidade em processos relacionados ao revestimento de superfícies (aplicação de pinturas, fabricação de semicondutores, entre outros), e em fenômenos geofísicos, como avalanches e o movimento de lava em regiões inclinadas [46]. Este tipo de fluxo pode ser visto até mesmo na logomarca da empresa multinacional Sherwin-Williams, que consiste em uma ilustração de uma camada de tinta fresca escorrendo pelo globo terrestre (Fig. 7).

A literatura sobre instabilidades hidrodinâmicas em regiões confinadas curvas é, no entanto, muito mais escassa, principalmente devido à dificuldade de construir, com precisão, um aparato de Hele-Shaw curvo. O primeiro trabalho experimental envolvendo uma célula não plana foi conduzido por Zhao e Maher [50] em uma célula cilíndrica. Utilizando este formato

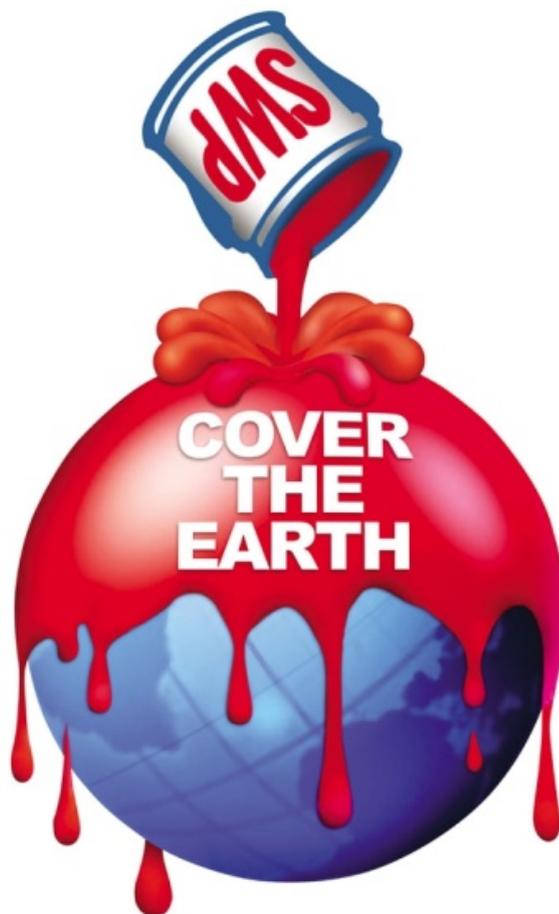


Figura 7 – Logomarca da empresa Sherwin-Williams. Exemplo da representação do fluxo de filmes finos em superfícies curvas na cultura popular.

de célula, a Ref. [50] foi capaz de demonstrar os efeitos da condição de contorno periódica do sistema cilíndrico na instabilidade de Saffman-Taylor. A dinâmica de dedos viscosos também foi estudada experimentalmente em uma célula de Hele-Shaw esférica [22]. Na Fig. 8, podemos ver uma foto do aparato experimental utilizado e também um exemplo de interface fluido-fluido. O padrão exibido na Fig. 8 possui uma grande similaridade com o do caso radial plano, que foi visto anteriormente na Fig. 5, com dedos grossos marcados pelo surgimento do fenômeno de tip-splitting. Indo além do contexto de instabilidades hidrodinâmicas, outro estudo em que uma célula de Hele-Shaw de placas curvas foi confeccionada se encontra na Ref. [51], na análise de corpos elásticos confinados. Com objetivo de investigar o aparecimento de estresses residuais devido a efeitos de variação da curvatura do ambiente, os autores da Ref. [51] montaram uma célula com um formato de sino (perfil gaussiano).

Apesar de existirem poucos experimentos envolvendo fluidos confinados em regiões curvas, há um número razoável de publicações teóricas sobre o assunto. Nas referências [52, 53] o fluxo de Hele-Shaw foi estudado matematicamente para superfícies hiperbólicas [possuindo curvatura gaussiana negativa]. Já na Ref. [21], leis de Darcy generalizadas foram obtidas explicitamente para uma variedade de espaços curvos. A formação de dedos viscosos em meios



Figura 8 – Na esquerda, célula de Hele-Shaw no formato de um hemisfério esférico. Na direita, exemplo de interface perturbada obtida na célula de Hele-Shaw esférica. As propriedades morfológicas, como aparecimento de tip-splitting, são bem similares às vistas na Fig. 5(b). Imagem retirada de [22].

bidimensionais curvos também recebeu atenção teórica. Na Ref. [54], o formato de bolhas na célula de Hele-Shaw foi obtido explicitamente, no limite de tensão superficial zero, por meio de técnicas de mapeamento conforme. Para tensões superficiais finitas, a dinâmica dos fluxos confinados foi investigada utilizando uma análise perturbativa de modos acoplados para superfícies esféricas [18], cones [19], cilindros [20] e para o plano hiperbólico [23]. Basicamente, os resultados das Refs. [18–20, 23] mostram que é possível inibir ou estimular o fenômeno de tip-splitting modificando apenas as propriedades geométricas da célula de Hele-Shaw.

Apesar do impacto da geometria no formato dos dedos viscosos, as superfícies estudadas em [18–20, 23] exercem pouca influência na estabilidade do sistema. Estudos mais recentes, por outro lado, mostram que é possível controlar a instabilidade de Saffman-Taylor alterando apenas o formato da célula de Hele-Shaw [55, 56]. No entanto, nas Refs. [55, 56], ao contrário das Refs. [18–20, 23], foram utilizadas células de espaçamento variável. Mais especificamente, em [55] foram realizados experimentos com uma célula retangular com a placa superior inclinada, e na Ref. [56], uma célula com uma placa elástica foi desenvolvida com o intuito de controlar a formação de dedos viscosos. Apesar das peculiaridades dos sistemas das Refs. [55, 56], os resultados obtidos mostram que o formato das células é capaz de exercer uma influência muito grande na estabilidade do sistema.

1.2.2 *Novos estudos de formação de dedos viscosos em sistemas com três dimensões*

Mesmo após vários séculos terem se passado desde as publicações seminais sobre o assunto, a mecânica de fluidos em meios porosos tridimensionais continua sendo um tópico de pesquisa bastante ativo. Além de sua relevância na extração de petróleo, estudos da hidrodinâmica

em meios porosos são cruciais para otimizar processos de obtenção de energia geotérmica e para a captura geológica de gás carbônico, que é importante no combate ao efeito estufa [57]. Recentemente, meios porosos também têm sido utilizados na modelagem de diversos fenômenos biológicos, como crescimento de tumores [58] e transporte de sangue na placenta [59]. Esta forte interdisciplinariedade está relacionada com o fato de que a definição de um meio poroso é bastante "ampla", ou seja, vários sistemas físicos, desde rochas até meios extracelulares, podem ser modelados como meios porosos.

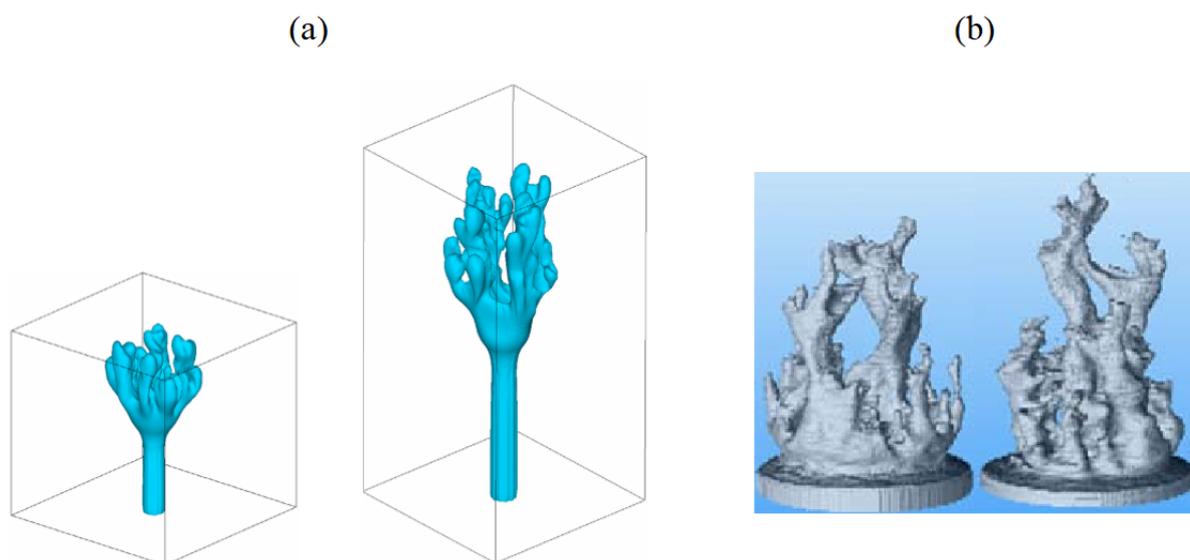


Figura 9 – (a) Simulações numéricas de dedos viscosos em um meio poroso. Imagem retirada de [60]. (b) Padrões experimentais obtidos da Ref. [61].

A instabilidade de Saffman-Taylor nestes meios também se manteve como uma área de pesquisa relevante ao longo dos anos. O advento de computadores potentes possibilitou diversas simulações intensivas do desenvolvimento da instabilidade em um ambiente totalmente tridimensional [60, 62–65]. Duas simulações, extraídas da Ref. [60], se encontram na Fig. 9(a), onde vemos estruturas não lineares fortemente deformadas e ramificadas, exibindo sucessivas bifurcações na ponta de vários dos dedos viscosos. Experimentalmente, técnicas de tomografia computadorizada foram capazes de revelar imagens da dinâmica de fluidos miscíveis em um meio poroso e verificar que fenômenos como tip-splitting também podem ser encontrados em três dimensões [61]. Imagens computadorizadas dos resultados experimentais [61] estão na Fig. 9(b).

Além de meios porosos, a instabilidade de Saffman-Taylor tridimensional também foi estudada em outros sistemas. Nas Refs. [66, 67], o deslocamento de fluidos miscíveis em uma célula de Hele-Shaw foi considerado. Porém, ao contrário de publicações anteriores, que se concentraram apenas na dinâmica efetivamente bidimensional de fluidos confinados, a análise numérica das Refs. [66, 67] levou em conta o sistema tridimensional completo. Com isso, os autores foram capazes de revelar um novo mecanismo de instabilidade que não pode ser explicado

por meio de uma análise 2D do sistema, sendo, portanto, verdadeiramente tridimensional. Outro problema em que uma versão 3D da instabilidade de Saffman-Taylor está presente é na formação de dedos em uma gota toroidal carregada [68]. Apesar dos experimentos conduzidos na Ref. [68] não envolverem nem meios porosos e nem células de Hele-Shaw, os autores mostraram, após uma análise cautelosa dos dados, que as propriedades dos dedos que surgem na interface da gota toroidal podem ser explicadas satisfatoriamente pela teoria linear da instabilidade de Saffman-Taylor usual.

1.3 Organização da dissertação

Nas seções anteriores, alguns aspectos da formação de dedos viscosos foram discutidos qualitativamente com o intuito de familiarizar o leitor com conceitos que serão importantes para o restante da dissertação. Vimos que, quando um fluido menos viscoso desloca um de maior viscosidade, seja em um meio poroso ou em uma célula de Hele-Shaw, a interface entre eles apresenta protuberâncias conhecidas como dedos viscosos. Devido à sua grande importância tanto em problemas práticos, quanto no entendimento teórico de formação de padrões em diversos sistemas físicos, várias versões modificadas da instabilidade de dedos viscosos foram estudadas. Na seção 1.2, exploramos um pouco a formação de dedos viscosos em células com geometria não usual e também em regiões porosas tridimensionais, tópicos que estão recebendo bastante atenção atualmente.

O objetivo dos próximos capítulos é investigar mais detalhadamente a maneira com que instabilidades na interface entre fluidos é impactada por efeitos de geometria, e da dimensionalidade do sistema (ou seja, comparar a dinâmica na região efetivamente bidimensional das células de Hele-Shaw com o sistema tridimensional de um meio poroso). Visando entender melhor estes efeitos, concentraremos nossa atenção em três problemas distintos, porém relacionados entre si. Estes problemas estão listados abaixo na ordem em que eles serão apresentados na dissertação.

- No capítulo 2, generalizaremos a análise de modos acoplados aplicada ao problema de Saffman-Taylor em espaços curvos, que está presente nas Refs. [18–20, 23], para uma variedade maior de geometrias curvas. Partindo deste resultado, concentraremos nossa atenção em uma família específica de superfícies, conhecida como "cones generalizados", que são capazes de desencadear uma instabilidade na interface dos fluidos por meio de um acoplamento entre efeitos de geometria e capilaridade.
- O capítulo 3 tratará de células de Hele-Shaw curvas e girantes. Aplicando o formalismo de vortex sheet [42], encontraremos numericamente as soluções estacionárias para as interfaces deste sistema. A partir disto, mostraremos que efeitos geométricos são capazes de alterar bastante a morfologia dos padrões emergentes no sistema. Uma explicação analítica simples destes padrões obtidos também será discutida.

- No capítulo 4, investigaremos o problema simples da formação de dedos viscosos em um fluxo esférico no interior de um meio poroso. Utilizando novamente o formalismo de modos acoplados, chegaremos nas equações para a evolução fracamente não linear deste sistema. Isto nos permitirá entender como a formação de padrões ocorre em três dimensões e como ela se compara com as situações bidimensionais usualmente exploradas na literatura.

Esta dissertação é baseada em alguns trabalhos já publicados que foram desenvolvidos com o professor José Américo Miranda. Ao todo, nossa colaboração resultou em seis artigos publicados no periódico *Physical Review E* [23, 69–73], e mais um artigo aceito no *Physical Review Fluids* [74]. Apesar de vários destes artigos terem relevância para o tópico estudado aqui, optamos por incluir apenas os resultados dos três trabalhos mais recentes [72–74], que estão mais diretamente ligados ao tema central desta dissertação de mestrado.

2 FORMAÇÃO DE DEDOS VISCO-SOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW CURVAS

2.1 Introdução

Conforme foi discutido na introdução, a instabilidade de Saffman-Taylor é regida pelas viscosidades dos fluidos e pela tensão superficial presente na interface entre eles. Mais detalhadamente, a instabilidade é determinada por apenas dois parâmetros adimensionais, sendo eles o contraste de viscosidade,

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad (2.1)$$

onde os índices correspondem ao fluido interno ($j = 1$) e externo ($j = 2$), e o número de capilaridade, que para fluidos confinados em uma célula de Hele-Shaw é dado por

$$Ca = \frac{12(\eta_1 + \eta_2)UR_0^2}{\sigma b^2}, \quad (2.2)$$

onde U é a velocidade característica da interface, R_0 é um comprimento característico, σ é a tensão superficial entre os fluidos, e b é o pequeno espaçamento separando as placas. O contraste de viscosidade A claramente varia de -1 até 1 , já o número de capilaridade Ca , que depende de diversos parâmetros do sistema, pode variar bastante. Em experimentos típicos ele é da ordem de 10 até 10^3 [34, 36], porém é, a princípio, possível escolhê-lo o quão pequeno se queira, basta injetar os fluidos lentamente. Alguns estudos chegaram a utilizar números de capilaridade diversas ordem de grandeza menores que os usuais [75, 76].

Na instabilidade de Saffman-Taylor clássica, quando o fluido 1 desloca o fluido 2, a situação é instável (estável) para um contraste de viscosidade $A > 0$ ($A < 0$). No caso instável, temos que valores de Ca altos, correspondentes a tensões superficiais baixas, fazem com que a instabilidade se desenvolva rapidamente e vários dedos viscosos surjam na interface entre os fluidos. De maneira oposta, valores baixos de Ca significam que a tensão superficial entre os fluidos é alta, o que estabiliza a interface, fazendo com que ela apresente menos perturbações, podendo até mesmo se tornar estável.

Muitos dos esforços relacionados ao estudo da instabilidade de Saffman-Taylor se concentram em encontrar maneiras para controlar e modificar o formato da interface entre os dois fluidos. Ou, em outras palavras, encontrar meios de alterar os critérios de estabilidade e instabilidade mencionados nos parágrafos anteriores. Existem algumas alternativas conhecidas para alcançar este controle, como por exemplo, o uso de taxas de injeção dependentes do tempo. Esta estratégia tem se tornado bastante promissora para situações em que é desejável tornar o sistema mais estável [17, 77, 78] ou controlar o número de dedos na interface [79, 80].

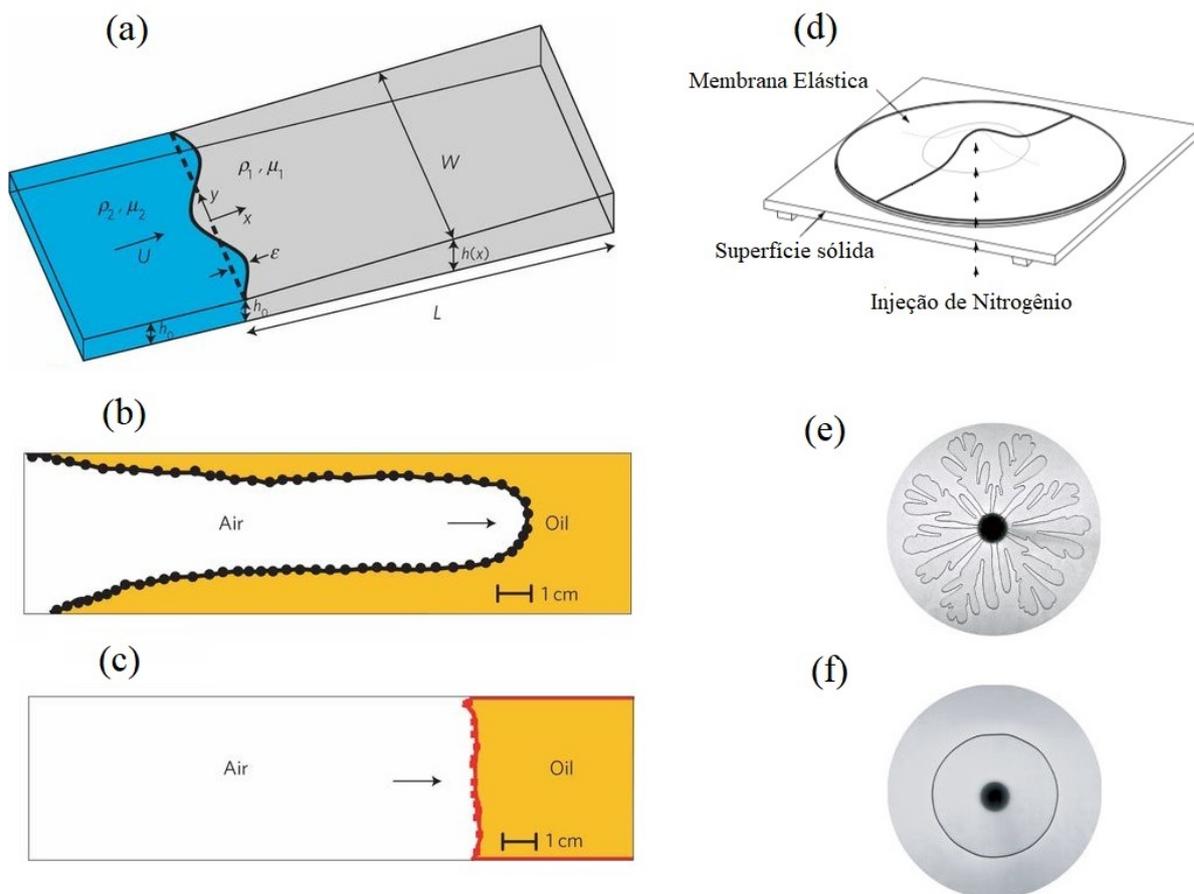


Figura 10 – Algumas modificações na célula de Hele-Shaw com intuito de controlar a instabilidade de Saffman-Taylor. A figura (a) representa uma célula em que a placa de cima foi suavemente inclinada, já a figura (b) mostra um experimento para o caso usual de formação de dedos viscosos para uma célula retangular, enquanto (c) mostra a estabilização da interface devido ao efeito da placa inclinada. Similarmente, (d) mostra uma célula cuja placa superior é uma membrana elástica; em (e), vemos um exemplo experimental da instabilidade de Saffman-Taylor radial sem a presença da membrana; já em (f), temos a situação estável na presença da membrana. As figuras (a),(b) e (c) foram retiradas de [55] e as figuras (d),(e) e (f) de [56].

Outra alternativa, que será utilizada neste capítulo, é modificar o problema de Saffman-Taylor por meio da adição de parâmetros extras e utilizar estes novos parâmetros para alterar a estabilidade da interface. Recentemente, o formato da célula de Hele-Shaw vem sendo modificado com o intuito de inibir a formação de dedos viscosos. Dentre essas modificações, temos a suave inclinação de uma das placas da célula [75, 81, 82], e também a substituição da placa superior por uma membrana elástica capaz de alterar o seu formato conforme o fluido se desloca [56, 82]. Ambas situações se encontram ilustradas na Fig. 10.

Este capítulo focará em outra alternativa para controlar o surgimento da instabilidade utilizando formatos distintos da célula de Hele-Shaw. Diferente dos métodos citados anteriormente, no caso que será estudado aqui ambas as placas da célula de Hele-Shaw são curvas e mantidas a uma distância fixa uma da outra, de tal modo que o fluxo ocorre efetivamente em uma superfície

bidimensional não plana. Além disso, o principal interesse da nossa análise é tornar a interface entre os dois fluidos instável em situações que são originalmente estáveis. A princípio isto parece ser algo indesejável, uma vez que, em casos como extração de petróleo, a instabilidade de Saffman-Taylor é comumente caracterizada como sendo algo prejudicial [15, 33], pois dificulta a extração de óleo em rochas. No entanto, diversos processos importantes, como em situações em que é preciso misturar dois fluidos, são favorecidos pela instabilidade de Saffman-Taylor [83, 84].

Antes de investigarmos a maneira de se modificar a geometria da célula para desestabilizar o fluxo, é preciso primeiramente derivar as equações que descrevem a instabilidade de Saffman-Taylor para superfícies curvas suficientemente gerais, o que será feito na seção 2.2. Esse resultado por si só é bastante interessante, uma vez que ele generaliza vários outros trabalhos anteriores relacionados à instabilidade de Saffman-Taylor em superfícies curvas [18–20, 23]. A partir deste resultado geral, a seção 2.3 focará na análise de certas superfícies, conhecidas como cones generalizados, mostrando que, nestas superfícies, a formação de dedos viscosos ocorre em situações em que a instabilidade não está usualmente presente ($A < 0$ e Ca pequeno). Além disso, iremos introduzir os métodos da análise linear e fracamente não linear para o problema de Saffman-Taylor [39], que serão fundamentais para o entendimento de processos de formação de tip-splitting tanto neste capítulo, quanto no Cap. 4 desta dissertação. O material que será discutido neste capítulo é baseado no artigo [72].

2.2 Modelo matemático do problema

Esta seção introduzirá as equações que governam o sistema hidrodinâmico de dois fluidos em uma célula de Hele-Shaw curva. Partindo das equações básicas da mecânica dos fluidos, derivaremos uma lei de Darcy generalizada para fluidos confinados em regiões curvas. Estas equações nos permitirão chegar a uma descrição da interface entre os dois fluidos no regime fracamente não linear, ou seja, durante o período em que a amplitude dos dedos viscosos ainda é suficiente pequena.

2.2.1 Equações básicas e condições de contorno

Considere um sistema contendo dois fluidos que serão identificados pelo índice $j = 1, 2$. Dado um pequeno elemento do fluido j possuindo densidade ρ_j e velocidade \mathbf{u}_j , temos que, como estamos no âmbito da mecânica clássica, o movimento deste elemento é regido pela segunda lei de Newton

$$\rho_j \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \mathbf{f}_j, \quad (2.3)$$

onde \mathbf{f}_j representa a densidade volumétrica de forças agindo em um determinado ponto do fluido j . Estas forças que agem em um fluido podem ter duas origens: forças internas, causadas pelas interações dos diversos elementos de fluidos entre si e forças externas causadas pelo efeito de fatores como campos eletromagnéticos e gravitacionais. Ignorando os efeitos de campos externos, é preciso explicitar as forças internas no fluido para completarmos a Eq. (2.3). Para

isso, considere uma região V do fluido, que é delimitada por uma fronteira ∂V . Temos que o restante do fluido, ou seja que está situado fora da região V , é responsável por uma força atuando na superfície ∂V no sentido normal, chamada de pressão hidrodinâmica. Em forma de equação, podemos expressar esta força como

$$\mathbf{F}_j = - \int_{\partial V} p_j \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_V \nabla p_j dV, \quad (2.4)$$

onde p_j é o campo de pressão no fluido j e a segunda igualdade acima decorre de uma aplicação do teorema da divergência. Com isso, a densidade de força que aparece em Eq. (2.3) é simplesmente $\mathbf{f}_j = -\nabla p_j$. O sinal negativo vem do fato que a normal da superfície $\hat{\mathbf{n}}$ aponta para fora, enquanto a pressão hidrodinâmica é responsável por uma força no sentido oposto.

Para um fluido perfeito, sem viscosidade e dissipação interna (ou, como o físico Richard Feynman costumava chamar, para um fluido "seco" [85]), o gradiente de pressão é a única força interna que precisa ser considerada. Esta simplificação, no entanto, deixa de lado o atrito entre as diversas camadas de fluidos, que é responsável pelo surgimento dos chamados "estresses viscosos". É possível incorporar estes efeitos de viscosidade de maneira similar ao como fizemos na Eq. (2.4), ou seja, escrevendo a força devido aos stresses viscosos como uma integral na superfície ∂V , dada por

$$\mathbf{F}_j = \int_{\partial V} \mathbf{\Pi}_j \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.5)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação acima, obtemos que a densidade de força neste caso pode ser escrita como $\mathbf{f}_j = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_j$, onde $\nabla \cdot$ é o operador divergente aplicado a um tensor [86]. Diferentemente da pressão, que só depende de um campo escalar p , os stresses viscosos são representados por um tensor de rank 2 (uma forma bilinear), aqui denotado por $\mathbf{\Pi}_j$. As componentes cartesianas desse tensor, ou seja, $\hat{\mathbf{e}}_\nu \cdot \mathbf{\Pi}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mu$, representam o estresse na direção $\hat{\mathbf{e}}_\nu$ exercido em uma superfície com normal na direção de $\hat{\mathbf{e}}_\mu$. Para certos fluidos conhecidos como "fluidos newtonianos", como água e óleo, temos que o tensor de estresse viscoso é da forma [85, 87]

$$\mathbf{\Pi}_j = \eta_j [\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T], \quad (2.6)$$

onde η_j é o coeficiente de viscosidade, e $\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T$ é o tensor taxa de cisalhamento, com o expoente T representando transposição da matriz, e os componentes do tensor $\nabla \mathbf{u}_j$ são, em coordenadas cartesianas, $(\nabla \mathbf{u}_j)_{ik} = \partial_i (u_j)_k$. Perceba que, na Eq. (2.6), caso $\nabla \mathbf{u}_j = 0$, dois elementos de fluido infinitesimalmente próximos se movem rigidamente com a mesma velocidade e, com isso, é de se esperar que não haja fricção entre eles [85] e $\mathbf{\Pi}_j = 0$.

Além da Eq. (2.3) expressando a dinâmica do sistema, temos ainda a conservação de massa dos fluidos, que fornece a seguinte equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (2.7)$$

que, para densidades constantes, se reduz à equação da incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0. \quad (2.8)$$

Finalmente, usando as Eqs. (2.3)-(2.8), temos que um fluido viscoso, newtoniano e incompressível obedece à expressão

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j, \quad (2.9)$$

que é a famosa equação de Navier-Stokes. Para chegar nesta expressão, utilizamos a regra da cadeia para expressar

$$\frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j, \quad (2.10)$$

onde foi usado que $dx_j/dt = \mathbf{u}_j$. No lado esquerdo da Eq. (2.9), a regra da cadeia foi utilizada para escrever a aceleração $d\mathbf{u}_j/dt$ de um elemento de fluido em um referencial fixo espacialmente. Já as forças internas vão ser uma combinação da pressão e dos estresses viscosos

$$\mathbf{f}_j = -\nabla p_j + \eta_j \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}_j + (\nabla \mathbf{u}_j)^T). \quad (2.11)$$

O segundo termo do lado esquerdo pode ser escrito explicitamente utilizando as definições usuais de operadores tensoriais presentes em [86].

Tendo obtido a equação de Navier-Stokes e a equação da incompressibilidade, precisamos "apenas" resolvê-las, aplicando condições de contorno e condições iniciais apropriadas, e, com isso, solucionar qualquer problema em mecânica dos fluidos. Infelizmente (ou felizmente), isto é uma missão praticamente impossível na maioria dos casos, o que faz com que seja necessário utilizar algumas considerações extras para se obter uma solução aproximada dessas equações. No caso investigado neste capítulo, temos que os fluidos estão confinados em uma região do espaço de espessura b pequena, que são as já mencionadas células de Hele-Shaw. Isso implica que a razão entre os termos inerciais e os termos viscosos na Eq. (2.9), conhecido como *número de Reynolds* Re , é dado por $Re = \rho U b^2 / (\eta R_0)$. Nesta expressão, U e R_0 são, respectivamente, a velocidade e o comprimento característicos do fluxo. Devido ao valor pequeno de b em comparação com outras escalas de comprimento, o número de Reynolds é muito menor que um para o nosso sistema, o que significa que os termos inerciais podem ser desprezados em uma primeira análise. Feito isso, obtemos então a equação de Stokes

$$\eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j = \nabla p_j, \quad (2.12)$$

que é bem mais simples matematicamente que a Eq. (2.9).

Até agora a análise apresentada é aplicável para fluidos no espaço euclidiano tridimensional usual. No entanto, podemos aproveitar novamente o fato de que o fluido está localizado em uma região de pequena espessura para obter uma descrição efetivamente bidimensional do sistema. Para isto, suponha que temos um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais (x_1, x_2, x_3) descrevendo o espaço. A métrica pode ser então escrita como

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \quad (2.13)$$

onde os fatores de escala $h_j = h_j(x_1, x_2, x_3)$ são funções das coordenadas e tem dimensão de comprimento (as coordenadas x_i não possuem dimensão). Considere também que as coordenadas

escolhidas são tais que a superfície $x_3 = 0$ corresponde à placa inferior de uma célula de Hele-Shaw hipotética, enquanto a placa superior é descrita por uma superfície $x_3 = f(x_1, x_2)$ qualquer. Exemplos de células de Hele-Shaw de formato curvo podem ser vistas na Fig. 11, onde o sistema de coordenadas usado também foi mostrado. Por meio da métrica da Eq. (2.13) é possível reescrever as Eqs. (2.8)-(2.12) utilizando os operadores diferenciais em coordenadas curvilíneas ortogonais [86]. As expressões exatas são longas e não são necessárias para o restante da discussão por isso não serão apresentadas aqui.

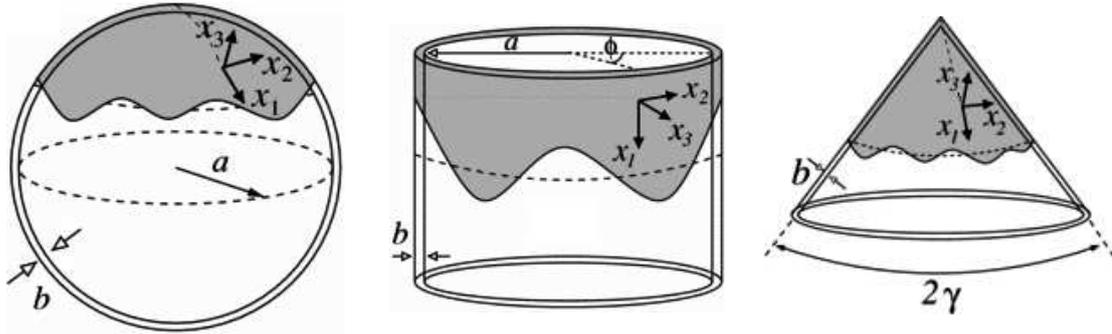


Figura 11 – Três exemplos de células de Hele-Shaw curvas. Da esquerda para a direita, vemos uma célula esférica de raio a , cilíndrica também de raio a e cônica com um ângulo de abertura 2γ . Todas elas têm um espaçamento b entre as placas. Figura retirada da Ref. [21].

Soluções exatas das Eqs. (2.12) são possíveis para diversos sistemas de coordenadas. Em [21], o fluxo confinado entre duas placas paralelas curvas foi investigado e soluções para casos em que a métrica exibe certas simetrias e o fluxo é unidirecional foram encontradas. A existência de certos tipos de solução, no entanto, depende da métrica utilizada, o que complica bastante uma análise geral de fluxos de Stokes confinados. Felizmente, é possível contornar este problema utilizando o fato de que o espaçamento entre as células é pequeno. Considere que a escala de distância característica do fluxo nas direções x_1 e x_2 é dada por R_0 , enquanto na direção x_3 (direção normal à placa $x_3 = 0$) é b . Similarmente, considere que a velocidade típica é U_0 nas direções x_1 e x_2 , e W_0 em x_3 . Temos então que $\epsilon = b/R_0 = W_0/U_0 \ll 1$ devido ao espaçamento pequeno entre as placas. Aplicando essas aproximações e mantendo apenas termos de mais baixa ordem em ϵ , a Eq. (2.12) se simplifica para

$$\begin{aligned}
 \frac{\eta_j}{h_3^2} \frac{\partial^2 (u_j)_{x_1}}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial p_j}{\partial x_1} \\
 \frac{\eta_j}{h_3^2} \frac{\partial^2 (u_j)_{x_2}}{\partial x_3^2} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial p_j}{\partial x_2} \\
 0 &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial p_j}{\partial x_3}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Na Eq. (2.14), os fatores de escala foram expandidos em série de Taylor em torno de $x_3 = 0$ e apenas o primeiro termo foi mantido, $h_j(x_1, x_2, x_3) \approx h_j(x_1, x_2, 0)$. Para esta expansão ser

válida, é necessário que as variações de $h_j(x_1, x_2, x_3)$ na direção x_3 só sejam significantes em distâncias de ordem consideravelmente maiores que b .

Para integrar a Eq. (2.14) usaremos as condições de contornos nas placas, que são dadas por $\mathbf{u}_j = 0$ em $x_3 = 0$ e $x_3 = f(x_1, x_2)$. Essa condição expressa o fato de que um fluido viscoso "gruda" em uma superfície e é conhecida como condição de não deslizamento (conhecida na literatura como "no-slip boundary condition" [39, 85, 87]). Desta forma, a solução para (2.14) é então dada por

$$\eta_j \mathbf{u}_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} h_3^2 x_3 (x_3 - f(x_1, x_2)) \nabla p_j(x_1, x_2). \quad (2.15)$$

Ou seja, em mais baixa ordem, o fluxo possui um formato parabólico em x_3 e a velocidade não possui componentes nesta direção.

A princípio a função $f(x_1, x_2)$, que descreve uma das placas da célula de Hele-Shaw, pode ter qualquer formato, desde que a distância até a placa $x_3 = 0$ se mantenha pequena. Neste e no próximo capítulo, iremos focar apenas nos casos em que as placas são mantidas a uma distância fixa b . Isto implica que, novamente utilizando o fato de que o espaçamento entre as placas é pequeno, $\int_0^{f(x_1, x_2)} h_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 \approx f(x_1, x_2) h_3(x_1, x_2, 0) \approx b$.

É conveniente fazer uma média transversal de Eq. (2.15), definida por

$$\mathbf{v}_j(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{b} \int_0^{f(x_1, x_2)} \mathbf{u}_j(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad (2.16)$$

para obter um fluxo puramente bidimensional, por sua vez dado por

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j, \quad (2.17)$$

que é a famosa lei de Darcy mencionada diversas vezes na introdução. O operador ∇ presente na Eq. (2.17) pode ser expresso como

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (2.18)$$

Pela definição do operador gradiente em duas dimensões, temos que a Eq. (2.18) é simplesmente o gradiente em uma superfície curva de métrica $ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2$. A Eq. (2.17) também implica que os campos \mathbf{v}_j são irrotacionais, ou seja, podem ser escritos como

$$\mathbf{v}_j(x_1, x_2) = -\nabla \phi_j(x_1, x_2), \quad (2.19)$$

onde os $\phi_j(x_1, x_2) = b^2 \eta_j p_j$ correspondem os potenciais escalares dos fluidos.

Utilizando as mesmas aproximações utilizadas para obter a Eq. (2.17), a equação da incompressibilidade [Eq. (2.8)] se torna

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad (2.20)$$

que é a equação da incompressibilidade para a velocidade bidimensional \mathbf{v}_j . Combinando esta última equação com a Eq. (2.19), temos que os potenciais dos fluidos obedecem à equação de Laplace em uma superfície curva (também conhecida como equação de Laplace-Beltrami),

$$\nabla^2 \phi_j = 0. \quad (2.21)$$

Para resolver a equação acima, é preciso aplicar condições de contorno na interface entre os fluidos. É importante enfatizar que, a princípio, a interface entre os dois fluidos é desconhecida, o que complica bastante o problema, uma vez que a função descrevendo a interface também é uma variável a ser descoberta. Problemas deste tipo são conhecidos como "free boundary problems" [15, 16], ou problemas de contornos livres. Para resolver o problema tratado aqui, em que um fluido desloca outro, duas condições de contorno são necessárias: (i) a condição de pressão, descrevendo a descontinuidade do campo de pressão na interface devido ao efeito da tensão superficial, (ii) condição cinemática, que, basicamente, expressa o fato de que um fluido empurra o outro.

A condição de contorno (i) está relacionada com o fato de que a pressão para fluidos imiscíveis sofre uma variação abrupta devido às interações microscópicas entre os átomos e moléculas presentes na interface dos dois fluidos. Essa variação de pressão é quantificada pela equação de Young-Laplace, que é válida na interface entre dois fluidos [18, 23, 88, 89]

$$p_1 - p_2 = \sigma \kappa_g, \quad (2.22)$$

onde κ_g é a curvatura geodésica da interface e σ é a tensão superficial. A curvatura geodésica é uma medida do quanto a interface se curva na direção tangente à superfície e uma curva com $\kappa_g = 0$ é conhecida como uma geodésica da superfície [88, 90–92]. É importante notar que κ_g pode ser escrita apenas em termos da métrica do sistema, ou seja, ela depende apenas do formato dos coeficientes que definem a métrica e não dos detalhes de como a superfície está embebida tridimensionalmente. Propriedades deste tipo são ditas intrínsecas [90].

A segunda condição de contorno para o nosso sistema é a condição cinemática. Considere que a interface separando o fluido é definida implicitamente por $I(x_1, x_2, t) = 0$, que descreve uma curva em uma superfície parametrizada por (x_1, x_2) . A derivada dessa expressão para o fluido j é

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla I = 0. \quad (2.23)$$

Levando em conta que a normal da interface é $\hat{\mathbf{n}} = \nabla I / |\nabla I|$, a condição da Eq. (2.23) implica que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (2.24)$$

ou seja a componente normal da velocidade é contínua através da interface que separa os fluidos.

2.2.2 Equação de modos acoplados

Nesta seção vamos utilizar as equações obtidas na seção 2.2.1 para obter a equação de modos acoplados descrevendo a evolução temporal da interface separando os fluidos. Mais

especificamente, iremos aplicar uma análise linear e fracamente não linear no problema de dedos viscosos em células curvas similar às adotadas nas Refs. [18, 39] para obter uma descrição perturbativa da evolução temporal da interface separando os fluidos. Porém, antes disso, é necessário descrever um pouco mais o sistema físico a ser considerado, bem como alguns detalhes sobre a métrica do sistema.

Considere a situação em que dois fluidos viscosos e imiscíveis estão em uma célula de Hele-Shaw curva cuja métrica bidimensional efetiva é dada por

$$ds^2 = dr^2 + \rho(r, \varphi)^2 d\varphi^2, \quad (2.25)$$

onde r e $\rho(r, \varphi)$ têm dimensão de distância. A princípio, pode parecer que essa métrica é bem restritiva, quando, na verdade, ela é bastante geral, podendo ser entendida como uma generalização das usuais coordenadas polares planas [12, 91]. Na Eq. (2.25), r representa a distância geodésica entre um determinado ponto de origem até outro ponto qualquer na superfície, enquanto $0 \leq \varphi < 2\pi$ é uma coordenada na direção ortogonal as geodésicas do sistema, de tal modo que, quando φ varia de 0 a 2π , a curva formada é fechada (círculo geodésico). Coordenadas deste tipo são conhecidas como geodésicas polares [12, 91], pois são uma generalização das coordenadas polares usuais do plano, onde $\rho(r) = r$. Pelo menos localmente, a métrica em torno de qualquer ponto de uma superfície regular [em certos casos, como cones, métricas do tipo (2.25) existem até na vizinhança de pontos singulares] pode ser escrita na forma da Eq. (2.25) escolhendo uma função $\rho(r, \varphi)$ apropriada. Por exemplo, para uma esfera de raio unitário temos $\rho(r, \varphi) = \sin(r)$, onde r é a distância ao longo de um meridiano. No restante desta discussão, concentraremos nossa atenção apenas em casos em que a função $\rho(r, \varphi)$ apresenta simetria azimutal, ou seja não depende do ângulo φ . Superfícies deste tipo incluem superfícies de revolução em torno de um ponto no eixo de rotação [90], cones generalizados (que serão discutidos ainda neste capítulo) e superfícies mais exóticas como superfícies de Amsler [93].

Nesta região curva de métrica dada pela Eq. (2.25), temos que o fluido de viscosidade η_1 é injetado na origem do sistema de coordenadas, deslocando o fluido viscosidade η_2 . A taxa de injeção é constante e dada por Q , correspondendo à taxa de aumento na área contendo o fluido 1, que inicialmente ocupava uma região de raio $R(t = 0) = R_0$. O sistema descrito está representado na Fig. 12. Conforme o tempo avança, a interface se perturba e é descrita pela função

$$r(\varphi, t) = \mathcal{R}(\varphi, t) = R + \zeta(\varphi, t), \quad (2.26)$$

onde R é o raio não perturbado e $\zeta(\varphi, t)$ é um termo de perturbação. No restante deste capítulo vamos considerar $\zeta(\varphi, t)/R \ll 1$. O raio R pode ser determinado por conservação de volume, ou seja, invertendo a função

$$Qt = 2\pi \int_{R_0}^R \rho(r) dr. \quad (2.27)$$

Além disso, é possível expandir a função $\zeta(\varphi, t)$ por meio de uma série de Fourier, uma vez que

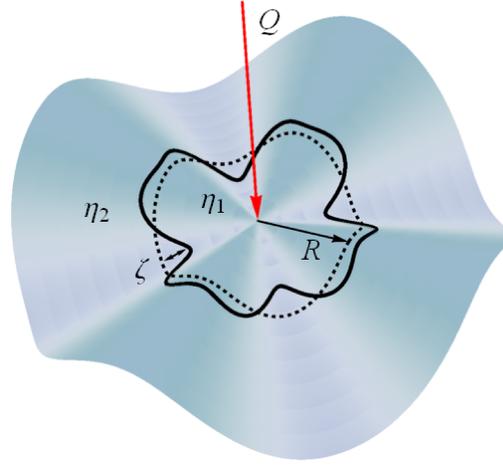


Figura 12 – Ilustração esquemática do fluxo de dois fluidos em uma célula de Hele-Shaw curva. O fluido de viscosidade η_1 é injetado com taxa Q , deslocando outro fluido de viscosidade η_2 , o que causa uma perturbação ζ na interface dos fluidos (curva sólida). Um sistema de coordenadas polares (r, φ) é utilizado, onde $R = R(t)$ é o raio não perturbado (curva tracejada).

a coordenada φ é periódica com período 2π . Esta série de Fourier é dada por

$$\zeta(\varphi, t) = \sum_{n \neq 0} \zeta_n(t) \exp(in\varphi), \quad (2.28)$$

onde n é inteiro e pode ser interpretado como o número de protuberâncias (dedos viscosos) presentes na interface fluido-fluido e a amplitude $\zeta_n(t)$ dos modos é definida por $\zeta_n(t) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi, t) \exp(-in\varphi) d\varphi$.

As Eqs. (2.26)-(2.28) mostram que para determinar o formato da interface entre os dois fluidos precisamos descobrir as amplitudes $\zeta_n(t)$. O primeiro passo em direção a tal objetivo é obter os potenciais ϕ_j resolvendo a Eq. (2.21). Por meio de separação de variáveis usuais (o que é possível pois $\rho(r)$ só depende de r), a solução da Eq. (2.21) pode ser diretamente obtida como

$$\phi_j = \phi_j^0 + \sum_{n \neq 0} \phi_{jn}(t) \exp[(-1)^{j-1} |n| \Omega(r)] \exp(in\varphi). \quad (2.29)$$

onde

$$\Omega(r) = \int_R^r \frac{d\varrho}{\rho(\varrho)}. \quad (2.30)$$

Na Eq. (2.29), ϕ_j^0 representa o fluxo não perturbado (circular e isotrópico), dado por

$$\phi_j^0 = -\frac{Q}{2\pi} \Omega(r) + D_j, \quad (2.31)$$

com D_j sendo constantes irrelevantes para o problema. Na Eq. (2.29), utilizamos a condição de que a perturbação em ϕ_j decresce longe da interface entre os fluidos.

Para relacionar os coeficientes ϕ_{jn} do potencial com as amplitudes ζ_n , iremos aplicar as condições de contorno de pressão [Eq. (2.22)] e cinemática [Eq. (2.23)]. A condição de pressão

pode ser reescrita em termos do potencial com o auxílio da Eq. (2.17),

$$A \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}} = - \frac{b^2 \sigma}{12(\eta_1 + \eta_2)} \kappa_g, \quad (2.32)$$

onde o contraste de viscosidade A , definido na Eq. (2.1), surge naturalmente na expressão. A expressão para a curvatura geodésica da interface fluido-fluido na métrica da Eq. (2.25) pode ser escrita como [91]

$$\kappa_g = \frac{\left[\rho'(r) \rho^2(r) + 2\rho'(r) \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 - \rho(r) \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} \right]}{\left[\rho^2(r) + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2.33)$$

Da mesma maneira a condição cinemática da Eq. (2.23) é dada por [39, 87]:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left[\frac{1}{\rho^2(r)} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \varphi} \right] \Big|_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.34)$$

Utilizando a expressão da Eq. (2.26) e Eq. (2.29) nas condições de contorno das Eqs. (2.33)-(2.34), mantendo apenas os termos de segunda ordem em ζ e suas derivadas e tomando inversas de Fourier, chegamos, com um pouco de paciência mas sem nenhuma conta complicada, no seguinte sistema de equações

$$\zeta'_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m) \zeta_m \zeta_{n-m} + G(n, m) \zeta'_m \zeta_{n-m}], \quad (2.35)$$

onde a taxa de crescimento $\lambda(n)$ é dada por

$$\lambda(n) = \frac{1}{\rho(R)} [A|n| - \rho'(R)] - \frac{1}{Ca \rho^2(R)} |n| [n^2 - \rho^2(R) + \rho''(R) \rho(R)], \quad (2.36)$$

onde Ca é o número de capilaridade definido em Eq. (2.2) com $U = Q/(2\pi R_0)$. É importante notar que a Eq. (2.35) está escrita em termos de derivadas de ζ_n em relação a R , aqui denotadas por ζ'_n , ao invés de derivadas em t . Ou seja, a Eq. (2.35) nos diz a taxa de crescimento da perturbação quando a interface não perturbada tem raio R . No entanto, devido a Eq. (2.27), é possível relacionar o tempo com o valor do raio não perturbado R , de tal modo que descrições por meio de R e t são equivalentes. Os termos de acoplamento de segunda ordem que aparecem em Eq. (2.35) são

$$\begin{aligned} F(n, m) &= \frac{\rho'(R)}{\rho^2(R)} |n| \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nm) \right] - \frac{|n|}{Ca} \left[\frac{1}{2} \frac{\rho'''(R)}{\rho'(R)} - \frac{3}{2} \frac{\rho''(R) \rho'(R)}{\rho^2(R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho^3(R)}{\rho^3(R)} - \frac{\rho'(R) m}{\rho^3(R) 2} (3m + n) \right] - \frac{1}{2} \frac{\rho''(R)}{\rho'(R)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$G(n, m) = \frac{1}{\rho(R)} \{A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - \rho'(R)\}. \quad (2.38)$$

A função sinal (sgn) é igual ± 1 dependendo do sinal de seu argumento. Note que nas Eqs. (2.35)-(2.38) as distâncias e velocidades foram reescaladas por R_0 , e U , respectivamente. Além dessas funções, em segunda ordem temos que a conservação de volume implica também na seguinte condição para a amplitude do modo $n = 0$:

$$\zeta_0 = -\frac{\rho'(R)}{2\rho(R)} \sum_{n \neq 0} |\zeta_n|^2. \quad (2.39)$$

As equações obtidas nesta seção generalizam diversos resultados anteriores da literatura, como o caso plano, esférico, hiperbólico, cônico e cilíndrico estudados em [18–20, 23, 39]. Similarmente ao que foi feito nessas outras publicações, as Eqs. (2.35)-(2.38) permitem analisar como efeitos de curvatura, defeitos cônicos, e até mesmo efeitos de variações de curvatura estão acoplados com os parâmetros hidrodinâmicos A e Ca , bem como a maneira que a geometria afeta a morfologia da interface entre os fluidos. Apesar disso, a maioria dos efeitos que foram reportados anteriormente apresentam mudanças muito suaves na estabilidade linear do sistema, ou seja, para essas superfícies simples das Refs. [18–20, 23, 39] ainda temos que para $A > 0$ ($A < 0$) a interface é instável (estável), o que é idêntico ao caso radial plano usual. Na próxima seção, a possibilidade de controlar a emergência da instabilidade por meio da geometria da célula de Hele-Shaw será investigada.

2.2.3 *Equação de modos acoplados para cones generalizados*

A princípio, olhando para a forte dependência em $\rho(r)$ nas Eqs. (2.35)-(2.38), aparenta ser fácil controlar a instabilidade de Saffman-Taylor pela da geometria. Por exemplo, uma escolha simples e direta para $\rho(r)$ é $\rho(r) = \beta r$, onde β é uma constante. Esta escolha é só um pouco diferente das coordenadas polares para um plano (que correspondem ao caso $\beta = 1$), porém, como veremos, ela já é suficiente para que efeitos geométricos não usuais apareçam. Há, no entanto, uma questão fundamental a ser levantada sobre essa métrica: existe alguma superfície que possa ser construída no espaço euclidiano usual cuja a métrica tenha este formato em coordenadas geodésicas polares? No geral, para uma métrica qualquer, a resposta é "não" [90] e, mesmo nos casos em que é possível, pode ocorrer da superfície estar bem definida apenas em uma região pequena do espaço. Felizmente, para o caso da métrica simples citada nesse parágrafo, a resposta é sim e as superfícies associadas são cones generalizados.

Um cone generalizado pode ser parametrizado partindo de uma curva fechada, sem auto-intersecções, definida na superfície de uma esfera unitária. O cone então é gerado por linhas retas ligando o centro da esfera aos pontos desta curva. Para obter uma métrica para esta superfície, considere as coordenadas esféricas usuais com r , θ e ν , a distância radial, latitude e ângulo azimutal respectivamente. Podemos descrever um cone utilizando uma função $\theta(\nu)$ que fornece como a latitude da curva na esfera unitária varia com o ângulo azimutal. Partindo da

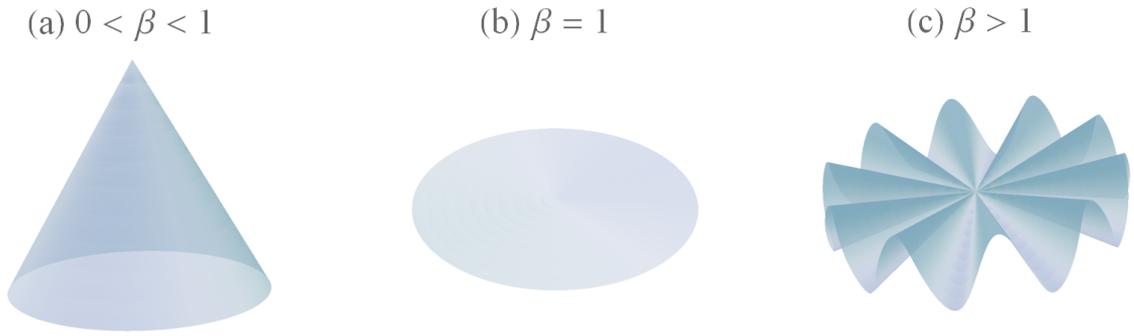


Figura 13 – Superfícies ilustrando os diversos parâmetros β : (a) cone convencional ($0 < \beta < 1$), (b) disco plano ($\beta = 1$), e (c) cone contorcido ($\beta > 1$), com β em torno de 2.5.

métrica de \mathbb{R}^3 em coordenadas esféricas, obtemos a seguinte métrica para o cone generalizado

$$ds^2 = dr^2 + r^2[\cos^2(\theta(\nu)) + \theta_\nu(\nu)^2]d\nu^2. \quad (2.40)$$

Perceba que esta métrica possui $\rho(r, \nu) = r[\cos^2(\theta(\nu)) + \theta_\nu(\nu)^2]^{1/2}$, que depende de r e ν , e que portanto não está no formato desejado. Contudo, realizando a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi = (1/\beta) \int_0^\nu [\cos^2(\theta(\nu)) + \theta_\nu(\nu)^2]^{1/2} d\nu, \quad (2.41)$$

com

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(\theta(\nu)) + \theta_\nu(\nu)^2} d\nu, \quad (2.42)$$

a Eq. (2.40) se torna

$$ds^2 = dr^2 + \beta^2 r^2 d\varphi^2, \quad (2.43)$$

com $0 < \varphi < 2\pi$. Observando a Eq. (2.40) temos $\rho(r) = \beta r$, como desejávamos. Curiosamente, a métrica não depende explicitamente da função $\theta(\nu)$, apenas do parâmetro β dado pela Eq. (2.42). Isto significa que dado dois cones de formatos diferentes, caso eles possuam o mesmo valor de β associado, ou seja, a mesma métrica, eles sofrem o mesmo efeito de instabilidade.

Na Fig. 13 é possível visualizar alguns casos especiais de cones generalizados. Em Fig. 13(a), temos um cone convencional de revolução, com $\theta(\nu) = \theta$ constante e diferente de zero e $\beta = |\cos(\theta)| < 1$. O caso $\beta = 1$, representado na Fig. 13(b), corresponde a um disco plano simples com ângulo azimutal $\theta(\nu) = 0$. No restante deste capítulo, estaremos interessados em casos com $\beta > 1$, um exemplo de superfície deste tipo se encontra na Fig. 2.42(c). Perceba que não temos mais superfícies de revolução para estes valores do parâmetro β , mas sim "cones contorcidos". Existem vários tipos de cones contorcidos diferentes e uma possível família deles é gerada por funções do tipo $\theta(\nu) = C \sin(m\nu)$, onde C é amplitude das ondulações no espaço curvo e m é o número de ondulações (periodicidade) da superfície. Perceba que, ao aumentar o valor de m , ou seja o número de ondulações na superfície, temos que β aumenta e, a princípio, pode atingir qualquer valor real. Neste e no próximo capítulo, no entanto, só

consideraremos situações com $\beta \leq 6.5$. O motivo desta escolha é que verificamos numericamente que para valores do parâmetro β consideravelmente maiores que $\beta = 6.5$, a superfície oscila muito, de tal modo que para valores de b e R_0 , típicos dos experimentos realizados em células planas [15,16,36,37,94,95], a célula de Hele-Shaw apresenta auto-interseções, o que corresponde a uma situação impossível fisicamente.

Tendo esclarecido os detalhes geométricos, podemos usar as Eqs. (2.35)-(2.38) e escrever a taxa de crescimento linear e as funções de acoplamento não lineares para os cones generalizados.

$$\lambda(n) = \frac{1}{\beta R} [A|n| - \beta] - \frac{1}{Ca\beta^2 R^2} |n| [n^2 - \beta^2], \quad (2.44)$$

$$F(n, m) = \frac{1}{\beta R^2} |n| \left[\frac{1}{2} - \text{sgn}(nm) \right] - \frac{1}{Ca\beta^2 R^3} |n| \left[\beta^2 - \frac{m}{2}(3m + n) \right], \quad (2.45)$$

e

$$G(n, m) = \frac{1}{\beta R} \{A|n|[1 - \text{sgn}(nm)] - \beta\}. \quad (2.46)$$

Essas funções possibilitam uma análise de como o parâmetro geométrico β influencia na estabilidade e na formação de padrões do sistema e como ele é capaz de causar novos tipos de instabilidades. Na próxima seção, iremos considerar o sistema a nível linear e fracamente não linear.

2.3 Aparecimento de dedos viscosos por efeitos de capilaridade acoplados com a geometria da célula de Hele-Shaw

2.3.1 Análise linear

Ignorando os termos não lineares em Eq. (2.35), a interface entre os fluidos é estável quando $\lambda(n) < 0$ para todos os n . Para que essa condição seja satisfeita, é suficiente que o modo n_{max} com a maior taxa de crescimento (obtido fazendo $d\lambda(n)/dn = 0$) dado por

$$n_{max} = \beta \sqrt{\frac{1}{3} (A Ca R + 1)} \quad (2.47)$$

satisfaça a condição $\lambda(n_{max}) < 0$. Utilizando este critério, a estabilidade é determinada completamente por três parâmetros independentes A , CaR e β . Fixando diversos valores para o contraste de viscosidade A é possível montar diagramas de estabilidade para o sistema bidimensional, que estão ilustrados na Fig. 14 para $A = 0.95, 0$ e -0.95 .

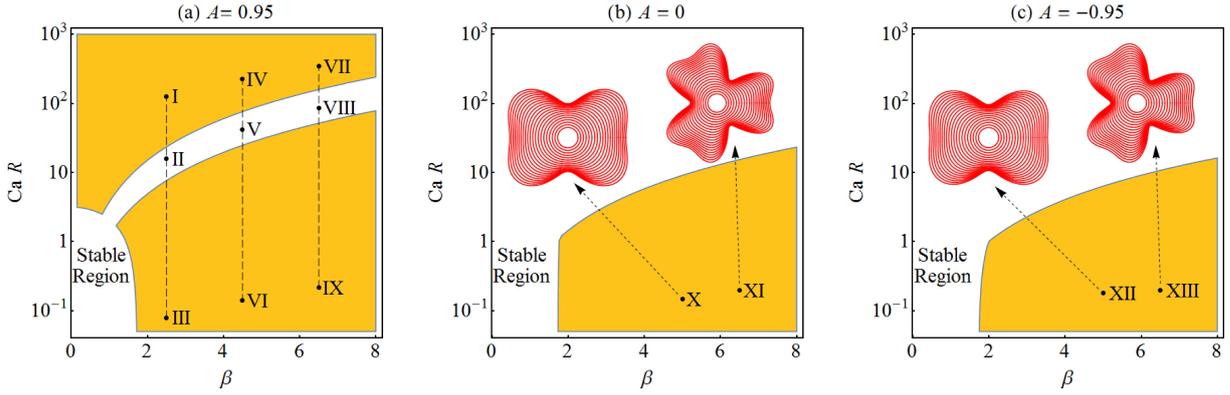


Figura 14 – Diagrama de estabilidade linear no espaço CaR - β , para os seguintes valores do contraste de viscosidade (a) $A = 0.95$, (b) $A = 0$, e (c) $A = -0.95$. As interfaces fracamente não lineares correspondentes são exibidas em (b) e (c). Os padrões não lineares correspondentes a I-IX em (a) estão ilustrados na Fig. 15. Perceba a presença em (a), (b) e (c) de uma região instável para valores de CaR pequenos.

Para tornar os diagramas mais claros, as Figs. 14 e 15 também mostram os diversos padrões para diferentes regiões no espaço de parâmetros CaR - β . É preciso no entanto, estar atento a alguns detalhes sobre a maneira pela qual os padrões mostrados foram gerados. Primeiramente, apenas dois modos foram considerados, o modo fundamental n de maior crescimento, que determina o número típico de dedos, e o modo $2n$, o primeiro harmônico de n . Além disso, apenas os modos cossenos da expansão de Fourier da interface [Eqs. (2.26) e (2.28)] foram considerados na perturbação, ou seja, temos

$$\zeta(\theta, t) = \zeta_0 + a_n(t) \cos(n\theta) + a_{2n}(t) \cos(2n\theta), \quad (2.48)$$

onde $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$ e $a_{2n} = \zeta_{2n} + \zeta_{-2n}$ são quantidades reais, além disso o modo ζ_0 é dado por (Eq. 2.39) $\zeta_0(t) = -[1/(4R)][|a_n(t)|^2 + |a_{2n}(t)|^2]$. A evolução temporal é obtida por meio das equações diferenciais [Eq. (2.35) e Eqs.(2.44)-(2.46)] e com as seguintes condições iniciais $a_n(R_0) = 5 \times 10^{-4}$, e $a_{2n}(R_0) = 0$, ou seja o modo $2n$ não está inicialmente presente. Na Fig. 14(a) o valor o raio final das interfaces é $R_f = 10$, enquanto nos diagramas (b) e (c) da Fig. 14 temos que $R_f = 6, 2$ (em todos os casos $R_0 = 1$ pela adimensionalização utilizada). Além disso, os pontos da Fig. 15 correspondem ao valor do parâmetro CaR da última interface exibida (interface com maior raio). As interfaces anteriores, de raio menor, são apenas para ilustrar a evolução temporal e condições iniciais.

Neste ponto é importante também enfatizarmos a maneira com que os padrões foram exibidos e projetados no plano. Um modo de representar as interfaces fluido-fluido é exibindo-as em cima da superfície, como foi feito na Fig. 12. O problema com este método é que ele ocupa muito espaço e o ângulo de visão que escolhemos para a exibição da superfície pode causar dificuldades na hora de visualizarmos as interfaces. Este problema se torna inconveniente no caso de superfícies com bastante ondulações (β grande) ou quando a interface entre fluidos apresenta vários detalhes (como será o caso das interfaces no próximo capítulo). Para evitar este problema,

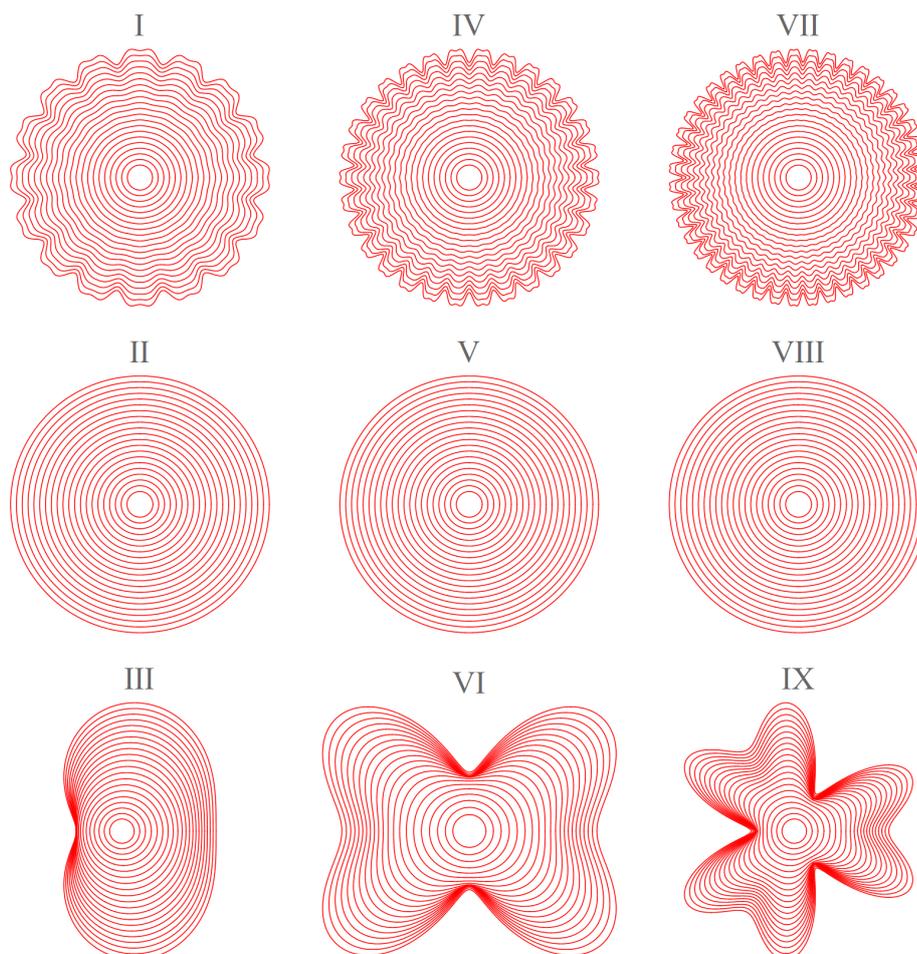


Figura 15 – Padrões fracamente não lineares que aparecem nos pontos I-IX do diagrama da Fig. 14(a) para valores positivos do contraste de viscosidade $A = 0.95$. Estas interfaces se subdividem em: instabilidades de Saffman-Taylor usuais exibindo "tip-splitting" (I, IV, e VII), valores estáveis circulares (II, V, e VIII) e estrutura instáveis que não são esperadas usualmente e surgem pelo efeito do parâmetro β (II, VI, e IX).

consideramos o seguinte mapeamento $(r, \varphi) \mapsto (r', \varphi')$, em que (r, φ) é a coordenada geodésica polar no cone e (r', φ') é a coordenada polar usual no plano. Para a métrica da Eq. (2.43), temos que o mapeamento que usamos para ilustrar os padrões encolhe as distâncias angulares, medidas em cima da superfície, por um fator β constante. Obviamente, este mapeamento mantém invariante todas as quantidades que serão discutidas neste e no próximo capítulo, como número de dedos na interface e presença bifurcação na ponta dos dedos. Note também que a distância radial não é alterada e círculos são mapeados em círculos. Outros tipo de projeções também são possíveis, como por exemplo, uma projeção conforme (preservando ângulos), no entanto, a projeção que escolhemos aqui é suficiente para satisfazer os nossos interesses.

O diagrama de estabilidade ilustrado na Fig. 14 revela que variando os valores de CaR e β para um dado A é possível identificar vários comportamentos dinâmicos e morfológicos distintos. Focando primeiramente na Fig. 14(a), temos que para $\beta = 1$, o caso plano tradicional

é recuperado. Nesta situação temos que o sistema é instável para valores altos de CaR , ou seja valores baixos da tensão superficial, e se torna estável quando CaR é reduzido abaixo de um determinado valor. Para valores de β entre $0 < \beta < 1$, que correspondem a superfícies cônicas usuais, não há muita diferença na dinâmica do sistema e apenas uma pequena mudança no formato da região de estabilidade é observada, o que está de acordo com uma análise interior [20].

Concentrando nossa análise agora em valores $\beta > 1$, percebemos um aparecimento de outra região instável, que é desconexa da região tradicional da instabilidade de Saffman-Taylor. O diagrama revela que, quando a tensão superficial domina a dinâmica do sistema (CaR pequeno), a interface também apresenta a formação de dedos viscosos. Ou seja, a partir de um certo valor de $\beta > 1$, existe apenas uma faixa de valores de CaR intermediários para quais a interface é estável. Os pontos I-IX da Fig. 14(a) correspondem aos padrões I-IX da Fig. 15. Temos que cada um dos padrões da Fig. 15 representam algumas interfaces para valores de raio entre $R_0 \leq R \leq R_f$, separados por $\Delta r = 0.31$ (21 interfaces no total).

Iniciaremos nossa análise da Fig. 15 pelos pontos I-III, que possuem $\beta = 2.5$. No ponto I da Fig. 14(a), com $A > 0$ e um valor alto de CaR , a interface associada apresenta um padrão usual de Saffman-Taylor, com dedos emergindo e se bifurcando (fenômeno de tip-splitting). Reduzindo o valor de CaR , checamos que a interface apresenta progressivamente menos perturbações, até o ponto em que a interface volta a ficar circular, o que corresponde ao ponto II. Surpreendentemente, ao reduzirmos ainda mais o valor de CaR a interface se desestabiliza novamente adquirindo um formato similar ao de um "feijão" no ponto III das Figs. 14 e 15. Para outros valores de $\beta > 1$, nos pontos IV-VI para $\beta = 4.5$, e nos pontos VII-IX para $\beta = 6.5$ da Fig. 14(a) e Fig. 15, temos o mesmo comportamento que ocorre no caso $\beta = 2.5$ ao variarmos CaR . Com isso, podemos concluir que, apesar dos pontos I, II, IV, V, VII, e VIII do diagrama apresentarem, como esperado, uma estabilidade de Saffman-Taylor tradicional para $A > 0$, os padrões que aparecem III, VI, e IX exibem características diferentes e não usuais, dominadas por efeitos de capilaridade (tensão superficial) e geometria. É também importante mencionar que em III, VI, IX, o fenômeno de tip-splitting, característico dos dedos viscosos em geometria radial, também está presente. Na figura VI e IX, vemos claramente dedos principais se formando e logo se bifurcando em suas pontas. Este fenômeno será melhor investigado na seção 2.3.2.

Tradicionalmente, a característica chave da instabilidade de Saffman-Taylor é sua dependência com o contraste de viscosidade A , de tal modo que para situações com $A \leq 0$ a instabilidade está completamente ausente. Isso pode ser verificado na Fig. 14(b), em que $A = 0$, onde vemos no diagrama que o sistema é sempre estável para o caso plano $\beta = 1$. Porém, para $\beta > 1$, uma região instável surge. Esta região nova só aparece para valores de CaR pequenos, ou seja, a região instável "de cima" que estava presente em Fig. 14(a) não existe mais para situações com $A = 0$. Isto novamente mostra que as duas regiões de instabilidade (CaR pequenos e CaR grandes) não estão relacionadas entre si.

Para concluir a análise da Fig. 14, comentaremos o caso em que $A = -0.95$, que está ilustrado no diagrama da Fig. 14(c). Esta situação corresponde ao fluido mais viscoso

empurrando o menos viscoso, o que faz com que instabilidade de Saffman-Taylor seja fortemente suprimida pelos efeitos do contraste de viscosidade. Apesar disso, o diagrama da Fig. 14(c) é praticamente idêntico ao da Fig. 14(b) e também apresenta uma região instável. Vemos também que, comparando a região inferior dos três diagramas, temos que ela sofre apenas uma variação muito sutil em seu formato à medida que valor de A é alterado. Além disso, as morfologias dos padrões para diferentes valores de β também não sofrem muitas alterações. Comparando as interfaces IX da Fig. 15 para $A = 0.95$ e as interfaces XIII da Fig. 14 para $A = -0.95$, temos que elas não apresentam muitas diferenças em suas formas.

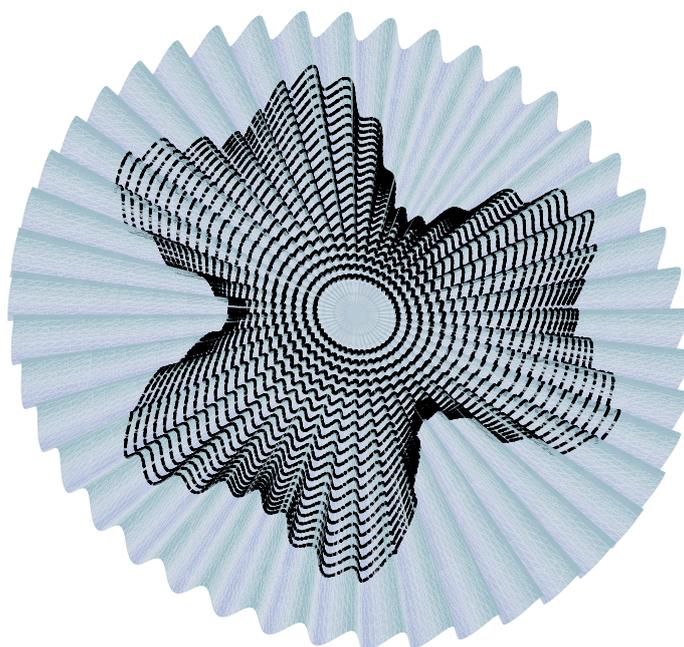


Figura 16 – Interfaces da Fig. 15IX em cima de um cone generalizado com $\beta = 6.5$.

Um último comentário importante sobre as interfaces é que a simetria da interface não é a mesma simetria da célula de Hele-Shaw. Na Fig. 16, vemos que a interface apresenta três dedos dominantes, enquanto a interface apresenta um número bem maior de ondulações. Como foi dito anteriormente, o único parâmetro relevante para a dinâmica é o β que, por sua vez, tem uma dependência não trivial com os parâmetros a geometria do sistema [vide Eq. (2.42)]. É importante também ressaltar que na Fig. (16), apenas um formato de célula foi escolhido, porém, existem infinitas outros cones generalizados para um mesmo valor de β .

2.3.2 *Análise fracamente não linear: presença de tip-splitting*

Como já foi discutido na introdução, o fenômeno do tip-splitting é uma das características morfológicas mais marcantes da formação de padrões gerados pela instabilidade de Saffman-Taylor para injeções radiais [15, 36, 39]. Este fenômeno consiste na bifurcação da ponta dos dedos viscosos, o que causa uma multiplicação e proliferação dos dedos resultando em padrões complexos e bastantes ramificados.

Não é possível, no entanto, extrair informações sobre o mecanismo de tip-splitting por meio de uma análise puramente linear, em que todos os modos são desacoplados (ver Eq. 2.35). Um aspecto vantajoso da análise de segunda ordem que empregaremos neste seção, é que, como foi mostrado na Ref. [39], é possível investigar o surgimento de diversas morfologias em fluidos, como o tip-splitting, por meio dos acoplamentos não lineares entre alguns modos de Fourier. No restante dessa seção, a Eq. (2.35) será utilizada para entender como a instabilidade de Saffman-Taylor em células curvas se comporta no regime fracamente não linear.

No segundo termo à direita da Eq. (2.35), temos infinitos modos acoplados uns aos outros. É possível, no entanto, fazer uma mímica acurada da morfologia da interface fluido-fluido considerando a ação de apenas dois modos: o modo fundamental n , que é o modo que domina a dinâmica no regime linear (modo que mais se desenvolve), e seu primeiro harmônico $2n$, que cresce espontaneamente devido às influências de segunda ordem causadas pelo modo fundamental. Partindo das Eq. (2.35), e Eqs. (2.44)-(2.46), e decompondo as amplitudes complexas ζ_n nas amplitudes dos modos cossenos (a_n) e senos (b_n), que também foram citadas na seção 2.3.1, chegamos em

$$a'_{2n} = \lambda(2n) a_{2n} + \frac{1}{2} T(2n, n) a_n^2, \quad (2.49)$$

$$b'_{2n} = \lambda(2n) b_{2n}, \quad (2.50)$$

onde a função

$$T(2n, n) = [F(2n, n) + \lambda(n) G(2n, n)], \quad (2.51)$$

é conhecida como função de tip-splitting [39]. Na Eq. (2.50), vemos que a evolução temporal do modo b_{2n} não depende do modo a_n e não apresenta acoplamentos de segunda ordem, sendo puramente linear. Desta maneira, vamos ignorar a participação dele selecionando a amplitude inicial deste modo como zero ($b_{2n}(R_0) = 0$). Além disso, vemos também que o único acoplamento de segunda ordem que aparece na Eq. 2.49 é dado pela função $T(2n, n)$, que multiplica o termo de segunda ordem a_n^2 .

Prosseguimos nossa análise investigando um pouco mais o significado da Eq. (2.49) para a formação de padrões. Temos que o segundo termo de Eq. (2.49) é dado por $\frac{1}{2}T(2n, n) a_n^2$, ou seja o modo a_n influencia diretamente o crescimento de a_{2n} e além disso, como $a_n^2 > 0$, o sentido do crescimento do primeiro harmônico é ditado somente pela função $T(2n, n)$. Isso significa que, caso a função $T(2n, n)$ seja positiva, temos um crescimento positivo do modo a_{2n} ($a_{2n} > 0$ conforme o tempo avança). Morfologicamente, isso faz com as pontas dos dedos cresçam para fora (ou seja, o dedo se torna pontudo). Em contraste, para $T(2n, n) < 0$, temos que a situação $a_{2n} < 0$ é favorecida, resultando no caso em que as pontas dos dedos se tornam mais achatadas, enquanto as laterais dos dedos continuam crescendo, caracterizando um formato típico de tip-splitting. Para os parâmetros usuais no caso plano ($\beta = 1$), a função $T(2n, n)$ é de fato negativa quando o tip-splitting está presente em situações experimentais [15, 16, 36, 37, 94, 95].

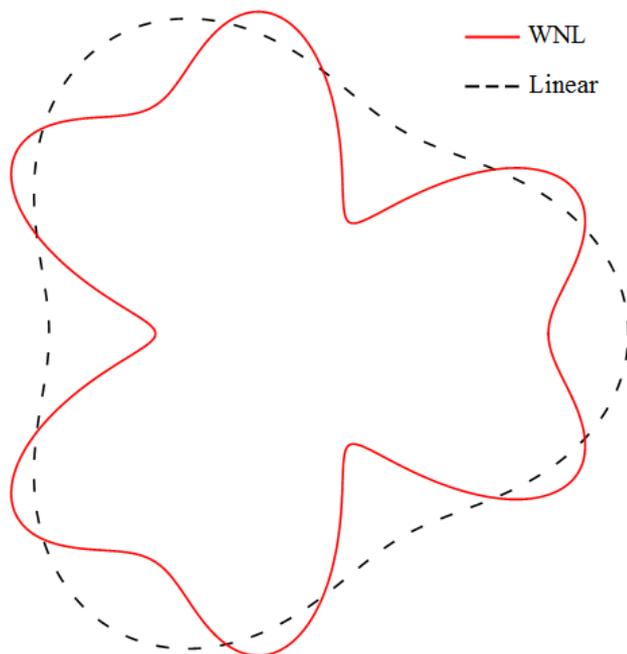


Figura 17 – Interface linear (curva tracejada) e fracamente não linear (denotada por WNL de "weakly non-linear") (curva sólida) para $R_f = 6.2$, $\beta = 6.5$, $A = 0.95$, $Ca = 0.212$, e $n = 3$. É aparente que o efeito de bifurcação nos dedos só é capturado por meio dos efeitos fracamente não lineares da Eq. (2.49).

Além disso o módulo de $T(2n, n)$ está diretamente ligado com a intensidade deste fenômeno [39]. Isto corrobora a análise fracamente não linear usando apenas dois modos que foi utilizada na seção 2.3.1.

Antes de continuar a discussão para o efeito de β na dinâmica, é preciso enfatizar que efeitos de bifurcação dos dedos são realmente não lineares. Um leitor atento pode se perguntar, por exemplo, se na equação Eq. (2.49), o termo linear $\lambda(2n) a_{2n}$ não é suficiente para capturar os efeitos de tip-splitting. Para mostrar que efeitos de tip-splitting são de fato não lineares, na Fig. 17 exibimos duas interfaces comparando o caso linear (interface tracejada) e fracamente não linear (interface contínua). Os valores dos parâmetros usados nesta figura são $\beta = 6.5$, $A = 0.95$, $Ca = 0.212$, $R_f = 6.2$, e o modo fundamental correspondente para este caso é $n = 3$. Esses parâmetros são os mesmos utilizados na interface IX da Fig. 15, a única diferença é que agora, na Fig. 17, também estamos mostrando a estrutura linear correspondente.

Examinando a interface tracejada de Fig. 17, é evidente que uma descrição linear não é suficiente para explicar a tendência dos dedos de se bifurcarem, uma vez que a curva tracejada não exhibe nenhum indício de tip-splitting. A ausência deste fenômeno ocorre pois, linearmente, o crescimento de a_n domina completamente o formato da interface, enquanto o crescimento de a_{2n} é muito lento para acompanhá-lo, de tal modo que, para valores realísticos de R_f , a interface apresenta apenas três dedos simples. Ao adicionarmos o termo fracamente não linear, $1/2 T(2n, n) a_n^2$, na Eq. (2.49), ocorre que o crescimento linear rápido de a_n força o surgimento do primeiro harmônico a_{2n} . Com isso, na interface contínua da Fig. 17, vemos claramente os

dedos se bifurcando em dois dedos menores. Esse resultado justifica o fato de que no diagrama da Fig. 14 e nas interfaces da Fig. 15, apenas dois modos de Fourier (n e $2n$) foram considerados.

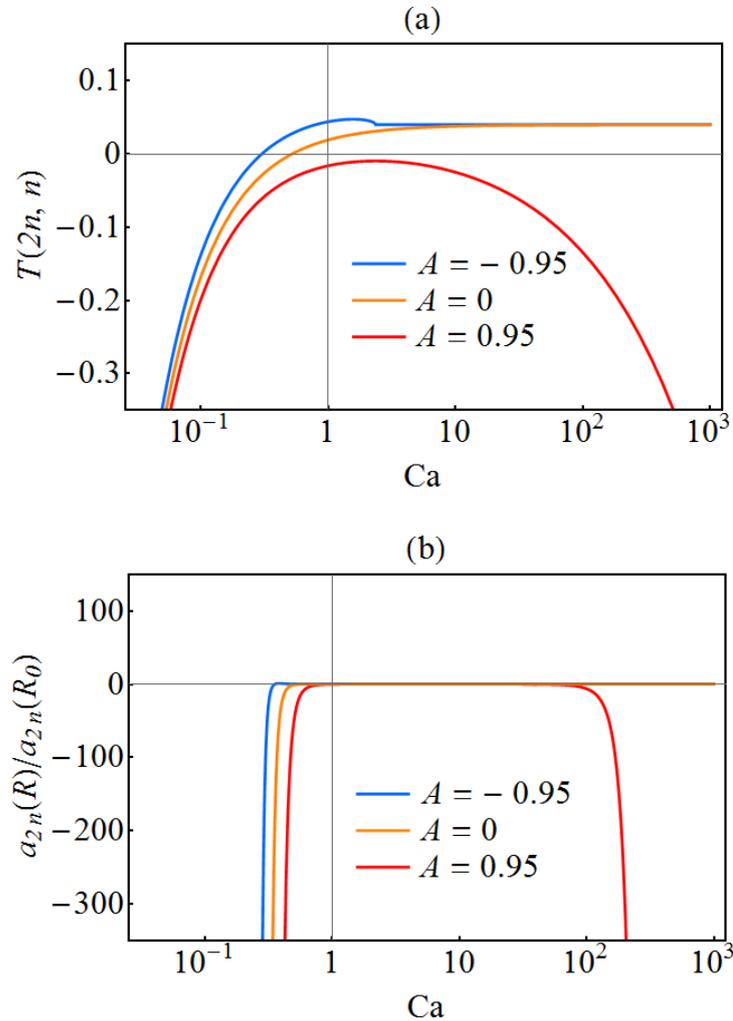


Figura 18 – Variações na (a) função $T(2n, n)$ e (b) na razão das amplitudes $a_{2n}(R)/a_{2n}(R_0)$, quando o número de capilaridade Ca é variado. Três valores do contraste de viscosidade são considerados: $A = 0.95$ (curva vermelha), $A = 0$ (curva laranja), e $A = -0.95$ (curva azul) para $\beta = 4.5$.

Vamos agora investigar a influência da geometria da célula, representada pelo parâmetro β , no processo de tip-splitting. Isso é feito com ajuda da Fig. 18(a) que demonstra como a função $T(2n, n)$ varia com o número de capilaridade Ca para três valores do contraste de viscosidade A (0.95, 0 e -0.95 , os mesmos da seção 2.3.1). Além disso, a Fig 18(b) ainda demonstra como a amplitude relativa do primeiro harmônico, dada por $a_{2n}(R)/a_{2n}(R_0)$, varia para os mesmos valores de A da Fig. 18(a). Nesta figura tomamos $\beta = 4.5$.

Da mesma maneira que foi feito na parte linear na seção 2.3.1, vamos começar a análise da Fig. 18 para um contraste de viscosidade positivo dado por $A = 0.95$ (linhas vermelhas), correspondente a situação classicamente instável. Conforme foi discutido na seção 2.1, no caso plano ($\beta = 1$) em que $A > 0$ e o número de capilaridade Ca é grande, a interface possui dedos

que se bifurcam. Desta maneira, é interessante ver o que ocorre para $\beta = 4.5$, como no caso da Fig. 18. Inspeccionando os gráficos, se torna evidente que, independentemente do valor de Ca , a função de tip-splitting só assume valores negativos, o que está associado a bifurcação dos dedos. Além disso, na Fig. 18(b), é perceptível que apesar de $T(2n, n)$ ser sempre negativa, a amplitude $a_{2n}(R)$ tende a zero para valores intermediários do número de capilaridade.

Já para os valores do contraste de viscosidade $A = 0$ (curva laranja) e $A = -0.95$ (curva azul), que são estáveis para o caso plano, quaisquer que sejam os valores do número de capilaridade Ca , os gráficos da Fig. 18 exibem um comportamento interessante. Vemos nestes dois casos que a função $T(2n, n)$ muda de sinal à medida que variamos o número de capilaridade e é positiva para valores de Ca maiores que um certo valor crítico entre 0.1 e 1. No entanto, observando a Fig. 18(b), percebemos que para esses valores de Ca a razão das amplitudes tende a zero, $a_{2n}(R)/a_{2n}(R_0) \rightarrow 0$, ou seja, o primeiro harmônico não apresenta nenhum crescimento. Isto está de acordo com o que era esperado pelo diagrama linear da Fig. 14 em que para $A \leq 0$ a interface só é instável para números de capilaridade suficientemente pequenos. Curiosamente, a Fig. 18 também revela que a amplitude de a_{2n} só cresce para valores de Ca pequenos, que correspondem a valores negativos da função de tip-splitting. Ou seja, no final das contas, temos que para $\beta = 4.5$, os dedos viscosos sempre têm tendência a se bifurcarem. Novamente, isto está em perfeito acordo com as análises linear e fracamente não linear que discutimos anteriormente.

3 CURVAS ELÁSTICAS GENERALIZADAS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW GIRANTES NÃO PLANAS

3.1 Introdução

No capítulo anterior, concentramos a nossa atenção no problema de um fluido injetado noutro no interior de uma célula de Hele-Shaw curva. O principal tópico investigado foi a possibilidade de induzir uma instabilidade na interface entre os fluidos mesmo em situações em que os efeitos do contraste de viscosidade e da capilaridade são usualmente estabilizantes. Ainda abordando o estudo da influência da geometria em fluidos confinados, o objetivo deste capítulo é investigar o problema da rotação de uma célula de Hele-Shaw curva contendo dois fluidos. Neste sistema, a interface entre os fluidos também pode se tornar instável dependendo da relação entre as densidades de cada um dos fluidos envolvidos. Mais especificamente, quando o fluido interno possui densidade maior que a do externo, vários dedos surgem e se desenvolvem na interface fluido-fluido.

A instabilidade que ocorre em uma célula girante possui algumas similaridades com a instabilidade de Saffman-Taylor discutida no capítulo 2, porém há algumas diferenças fundamentais entre elas, como, por exemplo, no formato dos dedos emergentes. Outra particularidade na formação de padrões em células girantes é a possibilidade de se obter soluções estacionárias para

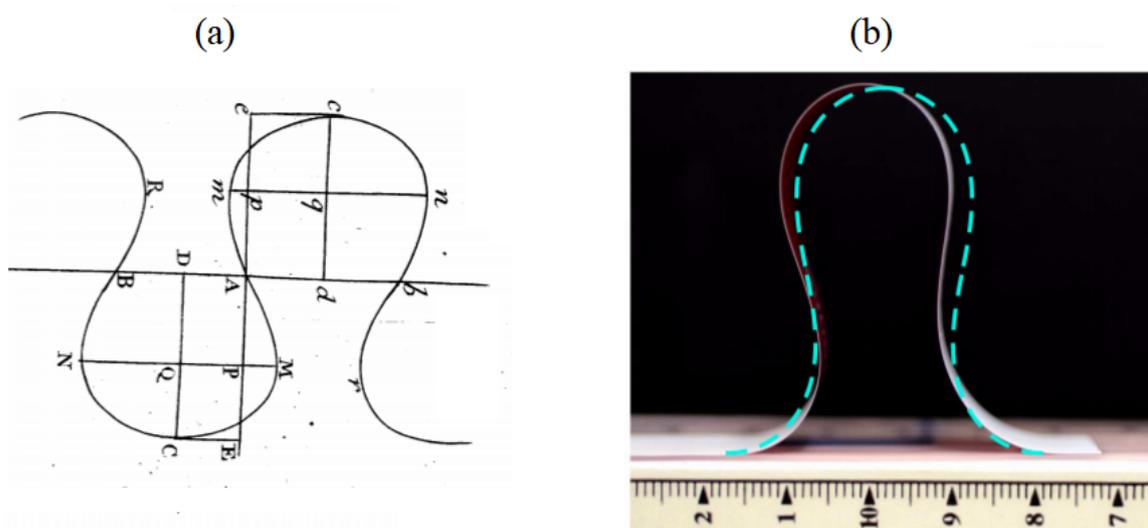


Figura 19 – (a) Construção geométrica de uma curva elástica feita por Euler em [96]. (b) Exemplo de uma curva elástica obtida experimentalmente em uma fita flexível, a figura tracejada corresponde ao formato teórico previsto. Imagem retirada da Ref. [97].

o problema [42, 43]. Estas soluções correspondem a casos em que os efeitos estabilizantes de capilaridade balanceiam exatamente as forças desestabilizantes geradas pela rotação, de modo que a interface fluido-fluido se mantém em equilíbrio. Exemplos destas interfaces estacionárias estão ilustrados na Fig. 20 para o caso de uma célula plana com simetria radial. No caso girante, como é possível observar na figura, os dedos não exibem tip-splitting, são longos, possuem uma base estreita e uma ponta bastante arredondada, formato similar a uma raquete de tênis ou uma lágrima.

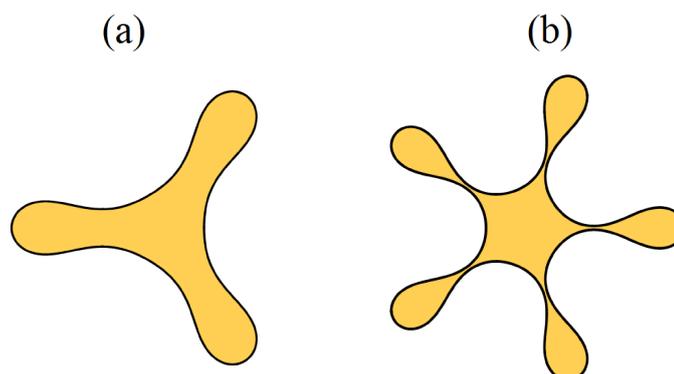


Figura 20 – Padrões típicos que emergem no caso tradicional em uma célula de Hele-Shaw plana girante [42, 43]: (a) curva elástica com três dedos longos e com pontas arredondadas; (b) estrutura com cinco dedos apresentando uma base bastante estreita. Essas soluções são análogas às curvas do tipo elástica que aparecem em diversos sistemas físicos [98–102].

Um aspecto bastante interessante das soluções estacionárias para a interface dos fluidos girantes é que elas estão relacionadas com um problema de elasticidade que, à primeira vista, não possui nenhuma conexão com fluidos confinados. Curvas com o mesmo formato daquelas apresentadas na Fig. 20 são conhecidas como "elásticas" e são soluções de um problema de minimização da energia elástica de barras flexíveis e finas em um plano [105]. Uma expressão matemática para o formato dessas barras foi um dos problemas mais estudados entre matemáticos e cientistas do século XVIII [106] e, assim como diversos problemas desta época, só foi resolvido por Leonhard Euler, no ano de 1744 [96]. Utilizando métodos de cálculo variacional recém descobertos por ele, Euler derivou a equação diferencial que descrevia as curvas elásticas e foi capaz de obter todos os possíveis tipos de formatos destas curvas. Na Fig. 19, vemos uma ilustração da curva elástica obtida por Euler e um exemplo experimental de uma curva elástica em um material fino e flexível.

Apesar de vários séculos terem se passado desde a publicação de Euler, as curvas elásticas e suas variações continuam sendo bastante estudadas. Além da já citada conexão com fluidos confinados girantes, estas curvas aparecem em diversos problemas atuais de elasticidade, mecânica dos fluidos e até mesmo biologia. Alguns destes problemas são o estudo do formato de uma gota de fluido pendente [107, 108], de membranas fluidas [100] e de vesículas [101]. Alguns desses estudos envolvem geometrias não planas, como por exemplo, o estudo do confinamento de polímeros em esferas [109] e em cilindros [110], além do estudo do empacotamento de

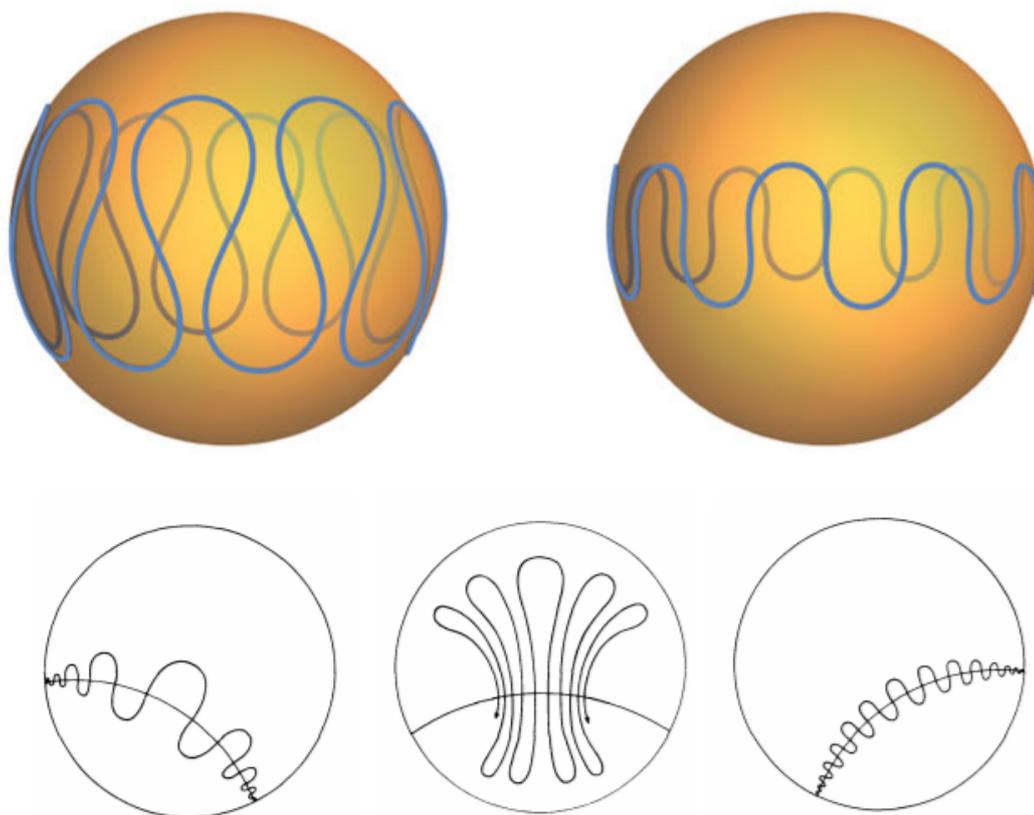


Figura 21 – Exemplos de elásticas tradicionais em superfícies não-planas. Na linha de cima, duas curvas elásticas estão representadas para o caso esférico (imagens retiradas de [103]). A linha de baixo ilustra as soluções do problema da elástica no disco de Poincaré, um modelo geométrico que representa um espaço hiperbólico bidimensional (imagens retiradas de [104]).

DNA dentro de um capsídio viral [111]. A importância e a beleza do problema da elástica em espaços curvos levou diversos pesquisadores a investigarem diversas versões generalizadas do problema em regiões curvas bidimensionais, como por exemplo em esferas [103, 104, 112–114], cilindros [115, 116], toros [114], catenóides [117], no plano hiperbólico (uma superfície de curvatura constante negativa) [104, 118, 119] e em outras superfícies mais gerais [120]. A Fig. 21 dá exemplos de curvas elásticas em duas das superfícies citadas, a esfera e o plano hiperbólico

Em contraste com o problema usual da curva elástica envolvendo barras flexíveis, que, como vimos, foram extensivamente estudados em regiões não-planas, a maioria dos estudos existentes sobre as soluções elásticas estacionárias para fluidos girantes e confinados se restringem a células de Hele-Shaw planas [42, 43, 121–125]. Neste capítulo, no entanto, vamos investigar recentes resultados para o problema de fluidos girantes confinados em regiões não-planas e obter as soluções estacionárias do tipo elástica nestes casos. Novamente, iremos utilizar os cones generalizados do capítulo 2 como "superfícies modelo" para o estudo dos efeitos de geometria. Essa escolha da superfície estudada não é arbitrária e foi feita pois, como será visto, o formato de alguns cones generalizados exerce um forte impacto na morfologia da interface entre os fluidos,

gerando uma família de interfaces bastante distintas das usuais.

Um ponto a ser comentado é que, apesar do problema de formação de padrões estacionários em fluidos girantes e problemas do formato de barras flexíveis serem governados pela mesma equação no caso plano, os dois problemas exibem algumas distinções no caso curvo. Desta maneira, seria mais rigoroso chamar as soluções estacionárias dos fluidos de "tipo elástica", uma vez que elas apresentam certas semelhanças às curvas elásticas usuais mesmo não sendo governadas pelas mesmas equações que o problema de elasticidade equivalente. No entanto, optaremos por chamá-las apenas de elásticas, uma vez que focaremos somente no contexto de fluidos em células de Hele-Shaw girantes, de forma que a denominação das curvas não irá causar nenhuma confusão.

Iniciaremos a análise na seção 3.2, onde descreveremos o modelo matemático para o problema de fluidos em células de Hele-Shaw curvas girantes. Ainda na mencionada seção, integraremos numericamente utilizando o software *Mathematica* as equações das interfaces para ilustrar as soluções estacionárias no caso de algumas superfícies simples. Na seção 3.3.1, concentraremos nossa análise em uma família de cones generalizados e exibiremos uma galeria de possíveis curvas elásticas nestas superfícies. Por último, na seção 3.3.2 mostraremos que é possível descrever as características gerais destas superfícies de maneira analítica, mostrando que a forma interfaces pode ser bem entendida por meio da participação de dois modos de Fourier. Este capítulo é baseado no artigo [73].

3.2 Modelo matemático

3.2.1 Lei de Darcy generalizada

O sistema investigado é similar ao apresentado no Cap. 2 e está ilustrado na Fig. 22. Neste sistema, considere o fluxo de dois fluidos incompressíveis e imiscíveis de densidade e viscosidade dadas por ρ_j e η_j respectivamente, com $j = 1(2)$ para o fluido de dentro (fora). Ambos os fluidos se encontram confinados em uma célula de Hele-Shaw curva de espaçamento b pequeno. Diferentemente da situação analisada no capítulo anterior, no caso considerado aqui não há injeção de um fluido no outro e o movimento dos fluidos se dá devido à rotação da célula com velocidade angular constante igual a Ω .

Para estudar o sistema é preciso adaptar um pouco a lei de Darcy, dada na Eq. (2.17), levando em consideração os efeitos de rotação. Para isso, iremos adotar um referencial R que gira junto com a célula. Podemos relacionar a derivada temporal de um vetor \mathbf{v} qualquer no referencial R com a derivada temporal deste mesmo vetor em um referencial inercial I por meio da seguinte expressão [45]

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

onde os índices da Eq. (3.1) se referem aos referenciais. É possível então calcular a aceleração

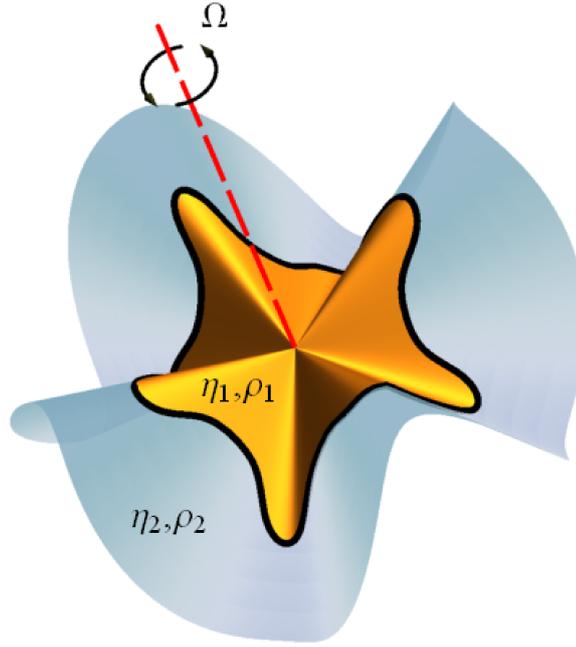


Figura 22 – Ilustração esquemática do fluxo em uma célula de Hele-Shaw curva girante. Um fluido de viscosidade η_1 e densidade ρ_1 está cercado por um fluido de viscosidade η_2 e densidade ρ_2 . A célula gira com velocidade angular Ω ao redor do eixo da linha tracejada vermelha.

de um elemento de fluido, que é dada por

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (3.2)$$

com \mathbf{u} sendo a velocidade do fluido no referencial girante e \mathbf{r} sendo a posição do elemento de fluido. Na Eq. (3.2), o termo dependente da velocidade $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ é a aceleração de Coriolis, enquanto o termo $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, que depende da posição, é a aceleração centrífuga. Adicionando estas duas acelerações extras, a equação de Navier-Stokes no referencial girante é dada por

$$\rho_j \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j \right] = -\nabla p_j + \eta_j \nabla^2 \mathbf{u}_j - 2\rho_j \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_j - \rho_j \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Assim como foi dito no capítulo anterior, o fluxo em um sistema confinado possui número de Reynolds $Re \ll 1$, ou seja, podemos desprezar todos os termos inerciais do lado esquerdo da Eq. (3.3). Similarmente, a razão entre os termos viscosos e a força de Coriolis é da ordem de $\rho_j \Omega b^2 / \eta_j \ll 1$, devido ao valor pequeno do espaçamento b . De fato, os efeitos da força de Coriolis são usualmente pequenos para fluxos confinados [126–128]. Com isso, o único termo extra que precisamos manter em 3.3 é a força centrífuga, que pode ser convenientemente escrita em termos de um potencial, $\rho_j \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\nabla \frac{1}{2} \rho_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$. Isso implica que o termo centrífugo pode ser incorporado a uma pressão efetiva $p'_j = p_j - \frac{1}{2} \rho_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$, de modo que o problema agora tem o mesmo formato daquele que foi tratado no capítulo passado. Repetindo os passos já discutidos no capítulo 2, chegamos na seguinte lei de Darcy

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla \left[p_j - \frac{1}{2} \rho_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right]. \quad (3.4)$$

As demais equações e condições de contorno, dadas pelas Eqs. (2.20)-(2.23), se mantêm inalteradas para o caso da célula girante.

3.2.2 Formalismo Vortex Sheet

Um método poderoso para analisar fluxos em células de Hele-Shaw é o formalismo do "vortex sheet" [42, 43, 129], ou folha de vórtices. Como vimos na Eq. (2.24), a componente normal das velocidades \mathbf{v}_j é contínua na interface entre dois fluidos. No entanto, a componente tangencial das velocidades, que é dada por

$$\Gamma = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (3.5)$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$ é um vetor tangente unitário na interface, sofre uma descontinuidade. O formalismo de vortex sheet consiste inicialmente em escrever Γ , a intensidade do vortex sheet, explicitamente em termos dos outros parâmetros do sistema, como contraste de viscosidade e tensão superficial. Com o auxílio da lei de Darcy [Eq. (3.4)] e da condição de pressão [Eq. (2.22)], podemos escrever a intensidade do vortex sheet como

$$\Gamma = 2A\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{s}} + \frac{b^2\sigma}{6(\eta_2 + \eta_1)} \nabla \left[\kappa - \frac{\Delta\rho}{2\sigma} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ e A é o contraste de viscosidade já definido na Eq. (2.1).

A utilidade da Eq. (3.6) é que ela torna possível expressar a velocidade média \mathbf{V} em termos de uma integral de Birkhoff dependendo de Γ [42, 43, 129]. Esta integral, por sua vez, também depende de \mathbf{V} e o problema resultante consiste em resolver uma equação integro-diferencial complicada [129]. É possível, no entanto, utilizar a Eq. (3.6) para investigar soluções estacionárias do problema, ou seja, soluções em que $\mathbf{V} = 0$ e $\Gamma = 0$, que são bem mais simples de serem analisadas [43]. Para o caso estacionário, a equação diferencial para o formato da interface separando os fluidos se reduz a

$$\kappa_s - \partial_s \left[\frac{\Delta\rho}{2\sigma} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right] = 0, \quad (3.7)$$

onde os subscritos se referem a derivadas tomadas com respeito ao comprimento de arco da interface. Neste ponto é conveniente fazermos algumas considerações a respeito do sistema. Primeiramente, iremos orientar o eixo de rotação na direção z , ou seja $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$. Além disso, vamos adimensionalizar os comprimentos por r_0 , que é o raio em algum ponto da interface. A Eq. (3.7), após a adimensionalização e integração, se torna

$$\kappa_g = a + N_\Omega r_\perp^2, \quad (3.8)$$

onde a é uma constante de integração e

$$N_\Omega = \frac{\Delta\rho \Omega^2 r_0^3}{2\sigma} \quad (3.9)$$



Figura 23 – Soluções estacionárias para o caso de (a) cone e (b) esfera. Nesta figura o eixo de rotação coincide com o eixo de simetria das superfícies. Temos que o forma dos padrões gerados tem características similares aos do caso plano. A interface obtida na esfera também é bastante similar a aquela para caso elástico, que está ilustrada na Fig. 21.

é conhecido como "Bond number". O termo r_{\perp} que aparece na Eq. (3.8) é a distância até o eixo de rotação (devidamente adimensionalizada por r_0). Finalmente, é importante notar que a Eq. (3.8) pode ser entendida como uma expressão para o balanço entre as forças centrífugas e forças capilares.

Antes de investigarmos a solução da Eq. (3.8) para os cones generalizados discutidos no capítulo 2, vamos resolvê-la para algumas outras superfícies familiares. Além disso, ao contrário do que foi feito no capítulo anterior, onde usamos um método perturbativo, iremos resolver a Eq. (3.8) numericamente. Na Fig. 23, escolhemos o eixo de rotação coincidindo com o eixo de simetria das superfícies e o parâmetro $a = -12$ para ambos os casos. Além disso, como a Eq. (3.8) é de segunda ordem no comprimento de arco s , precisamos de duas condições iniciais, que são $r(s = 0) = r_0 = 1$ e $r'(0) = 0$. A função $r(s)$ descrevendo a interface fluido-fluido é a distância geodésica (neste caso, distância ao longo de um meridiano) do eixo de rotação até a interface em função do comprimento de arco s . Na Fig. 23(a), escolhemos o parâmetro β do cone como sendo $\beta = 0.88$ e na Fig. 23(b), o raio da esfera é dado por $R = 0.7$. Os Bond numbers utilizados são $N_{\Omega} = 29.99$ e $N_{\Omega} = 38.91$ para o cone e esfera respectivamente. Estes parâmetros foram escolhidos de modo que a interface obtida é estacionária.

Uma análise da Fig. 23 deixa claro que não há muitas modificações morfológicas em relação ao caso plano. Em ambos os casos, os dedos possuem exatamente o mesmo tamanho, além de exibir o formato de raquete, típico das elásticas. Comparando com a Fig. 20 para o caso plano, não vemos nenhuma diferença morfológica significativa entre os padrões. Além disso, comparando com as elásticas em superfícies curvas da Fig. 21, também não vemos muitas diferenças entre elas. Até agora a geometria parece não ter um efeito muito relevante, no entanto, a Eq. (3.8) nos permite ir além das superfícies simétricas da Fig. 23 e possibilita o estudo de superfícies exibindo alguma anisotropia, ou seja, superfícies que exibem simetria em torno do

eixo de rotação. Exemplos simples de superfícies deste tipo são os cones generalizados que foram investigadas no capítulo anterior. Como será visto no restante deste capítulo, a anisotropia tem um papel crucial no formato das curvas elásticas generalizadas.

É importante comentar neste ponto um detalhe um pouco mais técnico sobre as soluções elásticas que foram obtidas. Em geral, ao resolver as equações numericamente, encontramos uma solução que não "se fecha", ou seja uma solução não física. As soluções físicas, em que a curva se fecha e não se intersecta, são raras e só ocorrem quando as condições iniciais e as constantes físicas do sistema são relacionadas de maneira muito específica.

3.3 Padrões estacionários em células de Hele-Shaw cônicas generalizadas

3.3.1 Galeria de elásticas generalizadas

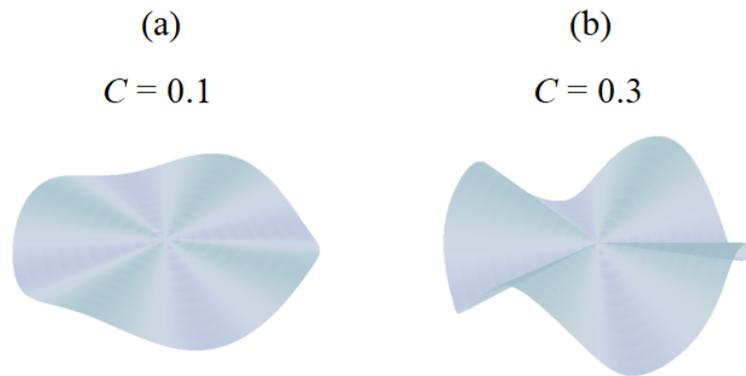


Figura 24 – Dois exemplos de célula curva com $\theta(\nu) = \theta(\nu(\varphi)) = C \cos(m\varphi)$. Nas duas superfícies temos que $m = 4$, porém em (a) $C = 0.1$ e em (b), $C = 0.3$. Perceba que C controla a amplitude das ondulações.

Nesta seção vamos considerar uma célula girante no formato de cone generalizado, os mesmos já discutidos na seção 2.2.2. Tendo em mente que o eixo de rotação se encontra na direção z , orientamos a superfície de modo que a mesma seja parametrizada por

$$\mathbf{r}(r, \nu) = [r \cos \nu \cos \theta(\nu), r \sin \nu \cos \theta(\nu), r \sin \theta(\nu)], \quad (3.10)$$

onde os ângulos θ e ν foram definidos na seção 2.2.2. Utilizando a Eq. (3.10) e a Eq. (2.43), a Eq. (3.8) se torna

$$\kappa_g(r, \nu) = a + N_\Omega r^2 \cos^2 \theta(\nu). \quad (3.11)$$

Perceba que no capítulo 2 não nos referimos nenhuma vez à orientação da superfície no espaço. De fato, no caso da injeção de um fluido em outro, não faz diferença se a superfície está de cabeça para baixo ou inclinada em um certo ângulo, desde que a taxa de injeção se mantenha a mesma. No caso de uma célula girante, no entanto, propriedades extrínsecas do sistema, como

a orientação da célula de Hele-Shaw no espaço tridimensional, passam a ser importantes. Em outras palavras, a direção do eixo de rotação e os detalhes da parametrização, vistos na Eq. (3.10), são cruciais para o estudo do problema. Uma consequência disso é que a Eq. (3.8) depende explicitamente da função $\theta(\nu)$, enquanto na situação do capítulo anterior, apenas o valor de β , que estava presente na métrica, é relevante. Neste capítulo, vamos considerar superfícies no formato

$$\theta(\nu) = \theta(\nu(\varphi)) = C \cos(m\varphi), \quad (3.12)$$

onde φ é uma coordenada medida na superfície, ao contrário de ν , que é o ângulo azimutal em coordenadas esféricas (ver o início da seção 2.2.2, onde os detalhes sobre as coordenadas foram discutidos). Exemplos de cones deste tipo estão ilustrados na Fig. 24. Curiosamente, para os valores de C que serão usados nesta seção, a diferença das coordenadas ν e ϕ é mínima. Perceba também que pelo fato da Eq. (3.11) depender de $\theta(\nu)$ dado pela Eq. (3.12), temos que a equação diferencial para a elástica depende explicitamente do ângulo φ . Em outras palavras, ao contrário da esfera que era simétrica em relação ao eixo de rotação, os cones generalizados aqui são assimétricos. Deste modo, o sistema possui naturalmente uma certa anisotropia devida a efeitos geométricos.

Para investigar o papel das superfícies descritas pelas Eqs. (3.10) e (3.12) na formação de padrões em células girantes, apresentamos na Fig. 25 uma compilação de possíveis interfaces fluido-fluido para diferentes valores de C mantendo o m fixo. Os valores de C considerados são: (a) 0; (b) 0.1677; (c) 0.5556; (d) 0.6495; (e) 0.7025; (f) 0.7462; (g) 0.7813; (h) 0.8046; (i) 0.8234; (j) 0.8865; (k) 0.9030, e (l) 0.9289. Os demais parâmetros adimensionais relevantes têm os seguintes valores: $a = -12$, $N_\Omega = 22.5$, $r(s=0) = 1$, $r_s(s=0) = 0$, $\varphi(s=0) = 0$, e $m = 4$. Alguns pontos precisam ser ressaltados, o primeiro é que, fixados os demais parâmetros, temos que só existe uma seleção discreta de valores de C tais que a interface correspondente é uma curva fechada sem auto-interseções [43]. Além disso, a escolha dos demais parâmetros foi feita de modo a tornar a exibição das interfaces mais clara e também checamos que ao variar a e N_Ω , os aspectos morfológicos gerais, que serão discutidos nessa seção, se mantêm os mesmos. Na Fig. 25, assim como nas demais interfaces deste capítulo, utilizamos a mesma projeção que foi definida na subseção 2.3.1 do capítulo passado.

Iniciando a análise com a Fig. 25(a) para $C = 0$ (limite plano), a interface obtida está de acordo com aquelas da Fig. 20 e exibe onze dedos com pontas arredondadas e base fina. Além disso, também observamos que todos os onze dedos são idênticos e a interface apresenta uma forte simetria. Isso contrasta com os demais padrões para $C > 0$, que são bastante assimétricos em geral, apresentando não somente dedos com tamanhos diferentes, mas também com formatos bastante variados. Outro detalhe importante é que a Fig. 25(a) é a única que apresenta onze dedos, enquanto as demais (Fig. 25(b)-Fig. 25(l)) apresentam oito dedos principais, que se ramificam para valores de C elevados. O fato das interfaces possuírem oito dedos está relacionado diretamente com a escolha de $m = 4$ na Eq. (3.12) e o motivo disto será discutido no final deste capítulo.

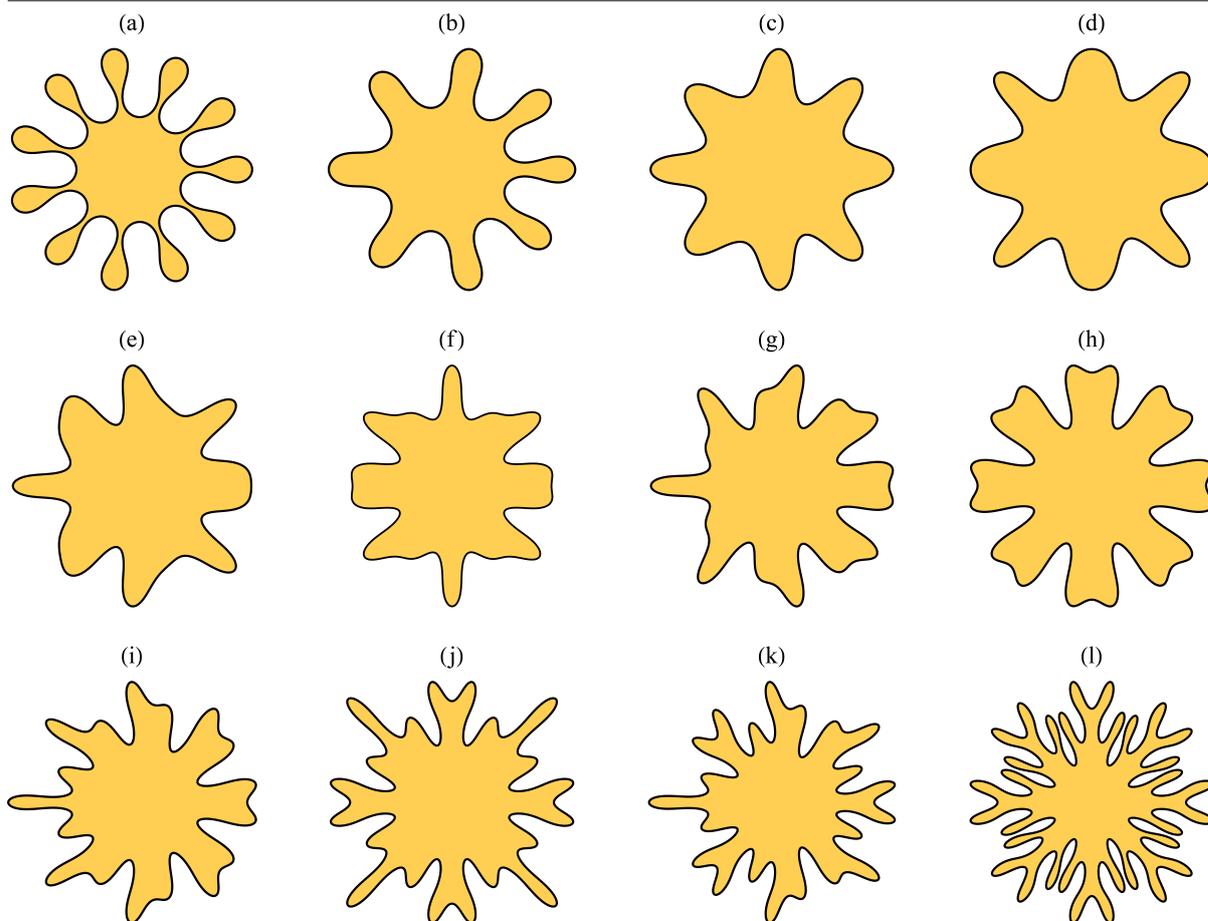


Figura 25 – Família representativa de padrões para uma célula de Hele-Shaw girante no formato de cone contorcido para diversos valores de C . Os valores do parâmetro C usados nesta figura foram: (a) 0; (b) 0.1677; (c) 0.5556; (d) 0.6495; (e) 0.7025; (f) 0.7462; (g) 0.7813; (h) 0.8046; (i) 0.8234; (j) 0.8865; (k) 0.9030, e (l) 0.9289. Os demais parâmetros relevantes são $a = -12$, $N_{\Omega} = 22.5$, $r(s = 0) = 1$, $r_s(s = 0) = 0$, $\varphi(s = 0) = 0$, e $m = 4$. Note a riqueza das formas obtidas para $C > 0$ em contraste com o caso plano usual $C = 0$.

Aumentando o valor de C gradualmente, chegamos na interface da Fig. 25(b), que apresenta um híbrido entre o formato usual das elásticas de um lado e dedos mais grossos de outro. Isso mostra que mesmo para valores pequenos de C , a assimetria dos padrões já é bem marcante. Prosseguindo a análise, a Fig. 25(c) exhibe oito dedos que são bem pontudos em comparação com os das interfaces anteriores. Outro detalhe importante a ser notado na Fig. 25(c) é que não há mais nenhum resquício do formato de lágrima usual da elástica e que estavam presentes nas Figs. 25(a) e 25(b).

Os formatos dos padrões se tornam ainda mais diferentes para valores maiores de C . Na Fig. 25(d), a interface exhibe uma mistura de dedos largos e dedos finos em alternância, o que dá origem a um padrão bastante simétrico. Essa mistura de dedos de grossuras diferentes se mantém da Fig. 25(e) até Fig. 25(g), porém os padrões exibidos são ainda mais assimétricos. Focando apenas nos dedos mais grossos nas interfaces das Fig. 25(e) até Fig. 25(g), percebemos que, à medida que C vai aumentando, as pontas destes dedos se tornam cada vez mais achatadas e

começam a apresentar uma morfologia característica do tip-splitting, com as pontas dos dedos se dividindo. Essa tendência culmina com a interface da Fig. 25(h), que é extremamente simétrica, com todos os dedos iguais e exibindo bifurcação em suas pontas. É importante enfatizar que apesar do tip-splitting ser comum na situação de injeção discutida no capítulo anterior, ele não é comumente observado em células de Hele-Shaw girantes. Isso indica que os casos de tip-splitting que surgem na Fig. 25 são causados pela geometria da célula.

Nas demais interfaces (Fig. 25(i)-Fig. 25(l)), os dedos continuam a apresentar bifurcações, porém outras características morfológicas também surgem. Por exemplo, na Fig. 25(i), o dedo mais à esquerda da interface se ramifica em três, com um dedo central longo e fino e dois dedos laterais menores. Esse tipo de estrutura é similar às que aparecem em outros problemas, como o crescimento de cristal com anisotropia [130–132]. A este tipo de trifurcação dá-se o nome de "side-branching". Outro processo em que também é possível encontrar side-branching é na formação de padrões que ocorrem na injeção de fluidos anisotrópicos (não-newtonianos) em células de Hele-Shaw planas [70, 133–135]. Assim como tip-splitting, o fenômeno de side-branching não é observado em células de Hele-Shaw girantes planas, sendo, portanto, outro efeito causado pela geometria.

Para finalizar a análise dos padrões da Fig. 25, a última interface apresentada (Fig. 25(l)) exhibe um padrão bastante simétrico, com todos os dedos idênticos e extremamente ramificados. Curiosamente, ela é a única figura que apresenta tanto tip-splitting quanto side-branching ocorrendo no mesmo dedo. Comparando apenas a Fig. 25(a) e a Fig. 25(l), os padrões são extremamente diferentes e, apesar de diferirem apenas no valor da constante C , eles não apresentam nenhuma relação morfológica clara entre si. Isto mostra que os efeitos de anisotropia induzidos pela geometria dos cones contorcidos têm um papel fundamental no formato das elásticas.

Concluimos essa subseção investigando um aspecto curioso dos padrões da Fig. 25: o número de dedos na interface. Como mencionamos anteriormente, existe uma aparente relação entre o número m governando o formato da superfície (vide Eq. 3.12) e o número de dedos que surgem na interface. Mais especificamente, vimos que para $m = 4$, a interface apresenta $2m = 8$ dedos. Isso é, de certa forma, esperado, uma vez que, pela Eq. (3.11), existe uma conexão entre a curvatura da superfície e o número m . Porém, este argumento não explica como os oito dedos dos padrões da Fig. 25 exibem tanta assimetria. Uma maneira de entender melhor a situação consiste em aplicar uma decomposição de Fourier nas interfaces da Fig. 25 e ver quais modos estão presentes. Como vimos no capítulo anterior, muitas vezes a ação conjunta de alguns modos de Fourier é suficiente para explicar um fenômeno aparentemente complexo. Na Fig. 26 apresentamos o resultado de uma filtragem de modos realizada nas interfaces das Figs. 25(e) e 25(f). Esta filtragem consiste basicamente em manter na interface apenas os dois modos de Fourier que possuem as maiores amplitudes. Iremos denotar os modos mantidos por n (modo de maior amplitude, ou fundamental) e n' (modo de segunda maior amplitude). A escolha de manter apenas os dois maiores modos, ao invés de um ou três modos por exemplo, se deve ao fato de que com dois modos é possível obter interfaces que se aproximam bastantes das soluções exatas. Caso tivéssemos mantido apenas o modo de maior amplitude, a interface filtrada seria

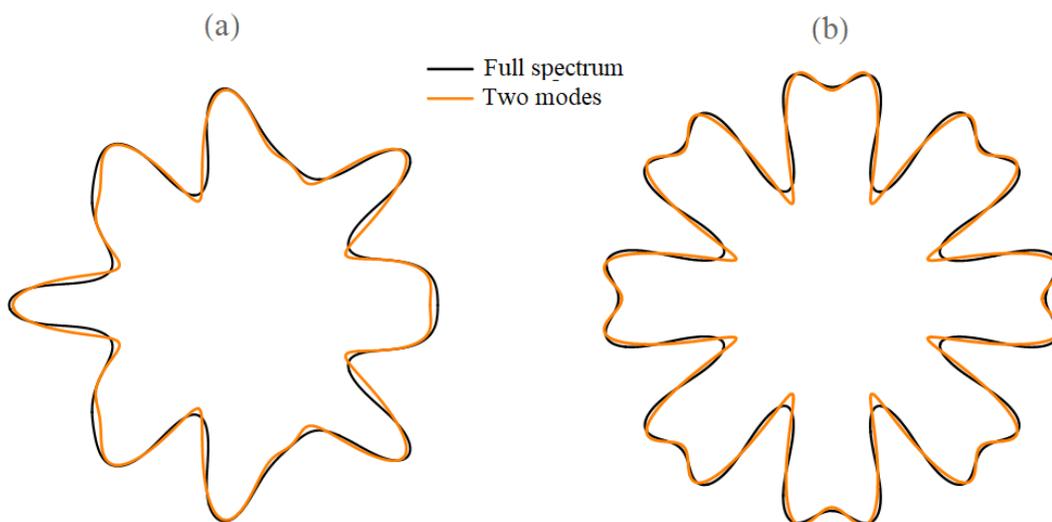


Figura 26 – Comparação entre o espectro completo das elásticas generalizadas da Fig. 25, e a interface contendo apenas os dois modos de maior amplitude, como n sendo o de maior amplitude e n' o de segunda maior amplitude. (a) O padrão com todos os modos do espectro é o mesmo da Fig. 25(e), e a solução de dois modos considera apenas $n = 8$, e $n' = 13$; (b) O padrão com todo o espectro é o mesmo da Fig. 25(h), enquanto a solução de dois modos considera apenas $n = 8$, e $n' = 16$.

bastante diferente da interface original.

Na Fig. 26(a), partimos da Fig. 25(e) e realizamos a filtragem discutida no parágrafo anterior. A curva preta representa a interface original com todo o espectro de Fourier ("full spectrum") incluído e a curva laranja em que apenas dois modos ("two modes") estão presentes, $n = 8$ de maior amplitude e $n' = 13$. O mesmo processo é aplicado na Fig. 25(h) e o resultado está ilustrado na Fig. 26(b). Os dois modos que foram incluídos na curva laranja da Fig. 26(b) são $n = 8$ e $n' = 16$. Como já era antecipado, o número de dedos está diretamente ligado com o modo de Fourier de maior amplitude, que é o dobro da periodicidade m do cone generalizado. Além disso, é possível explicar o porquê da assimetria entre os dedos. Temos que, em um caso geral, como na Fig. 26(a), a interferência de n com n' faz com que estas assimetrias surjam na interface. Para os casos em que o valor de n e n' está relacionado, como na Fig. 26(b), em que um modo é o dobro do outro, a interface é bem mais comportada, possuindo uma simetria clara.

A análise da Fig. 26 deixa claro que a interface contendo apenas os dois modos de maior amplitude fornece uma mímica bastante acurada da solução exata. Essa descoberta irá motivar a análise da próxima subseção, onde, considerando apenas dois modos de Fourier e ignorando os demais termos, iremos buscar soluções linearizadas aproximadas e analíticas para essas interfaces. A vantagem das soluções analíticas para este caso é que elas nos ajudarão a elucidar alguns aspectos dos padrões da Fig. 25, como, por exemplo, de onde surge o modo n' e qual a dependência dele com os parâmetros físicos do sistema.

3.3.2 Teoria linear das elásticas generalizadas considerando apenas dois modos de Fourier

Damos continuidade ao nosso estudo esclarecendo alguns aspectos do acoplamento entre a geometria e a hidrodinâmica do problema. Para isso, vamos aplicar uma análise linear perturbativa no sistema de dois fluidos girantes descrito na seção 3.2.2. Do mesmo modo que fizemos na análise linear do capítulo anterior (seção 2.2.2), iremos descrever a interface deformada entre os fluidos por $\mathcal{R}(\varphi, t) = R + \zeta(\varphi, t)$, onde R é o raio não perturbado e $\zeta(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) \cos(n\varphi)$, onde apenas os modos cossenos foram considerados. Aplicando a mesma análise linear descrita em 2.2.2, chegamos em

$$\dot{a}_n = \lambda(n) a_n - \frac{C^2}{4} N_\Omega R n \delta_{n,2m}, \quad (3.13)$$

onde

$$\lambda(n) = \frac{n}{\beta} \left[N_\Omega \left(1 - \frac{C^2}{2} \right) - \frac{1}{2R^3} \left(\frac{n^2}{\beta^2} - 1 \right) \right] \quad (3.14)$$

é a taxa de crescimento linear, com $\delta_{n,2m}$ sendo a função delta de Kronecker. Para chegar nas Eqs. (3.13) e (3.14) é necessário considerar C (ou, mais especificamente, C^2) como um parâmetro perturbativo. É também possível expressar a constante β , que aparece na Eq. (2.43), em termos de C , como

$$\beta = 1 + \frac{C^2}{4} (m^2 - 1). \quad (3.15)$$

Por último, ainda podemos relacionar o parâmetro a , a constante de integração presente na Eq. (3.11), com o raio não perturbado R , por meio da equação

$$aR + N_\Omega \left(1 - \frac{C^2}{2} \right) R^3 = 1. \quad (3.16)$$

Uma das maiores diferenças entre as Eqs. (3.14)-(3.16) e os resultado convencionais da análise linear de fluxos confinados é a presença do segundo termo no lado direito da Eq. (3.13). Este termo só age no modo $n = 2m$ e não é proporcional à amplitude a_n . De fato, termos deste tipo não estão presentes nas taxas de crescimento de células girantes planas [40, 41, 126] e nem no caso de injeção em células curvas visto no capítulo anterior, sendo encontrados tipicamente em problemas de crescimento de cristais na presença de anisotropia [130–132]. Essa semelhança entre o nosso problema e o de crescimento de cristais ajuda a compreender porque alguns aspectos morfológicos de cristais anisotrópicos, como side-branching, também são encontrado em algumas soluções estacionárias da Fig. 25.

Para obtermos as soluções estacionárias, tomamos $\dot{a}_n = 0$ na Eq. (3.13) e chegamos nas seguintes equações

$$a_{2m} = \frac{C^2 N_\Omega R 2m}{4 \lambda(2m)}, \quad (3.17)$$

e

$$n' = \beta \sqrt{N_{\Omega} R^3 \left(1 - \frac{C^2}{2}\right) + 1}. \quad (3.18)$$

A Eq. (3.17) revela que, no equilíbrio, o modo $2m$ sempre está presente e possui uma amplitude determinada pelos parâmetros do sistema. Perceba que a amplitude a_{2m} é zero para os casos em que $C = 0$, $m = 0$ ou $N_{\Omega} = 0$, o que significa que os efeitos de anisotropia envolvem um acoplamento de geometria e rotação. Este acoplamento explica o fato, que já era esperado, de que a assimetria dos dedos não está presente no caso plano ($C = 0$), no cone convencional ($m = 0$) e nem no caso de injeção ($N_{\Omega} = 0$).

A compreensão da Eq. (3.18) é um pouco mais sutil que a Eq. (3.17). Pois, ao contrário da Eq. (3.17), ela não define a amplitude de um modo específico, mas sim o valor do modo de Fourier secundário n' . Como n' é um inteiro, podemos entender a Eq. (3.18) como uma "regra de quantização", de maneira que só é possível obter soluções estacionárias caso os parâmetros N_{Ω} , R , C e m estejam relacionados de maneira que n' seja inteiro. Isto explica o porque de na Fig. (25) obtermos soluções apenas para alguns valores específicos do parâmetro C .

Outro aspecto importante da Eq. (3.18) é que ela nos permite entender analiticamente o que acontece conforme C é aumentado. Como vimos numericamente na Fig. (25), o número de ramificações nos dedos aumenta com o valor C , porém, olhando para a Eq. (3.18), não está claro que o modo de Fourier secundário n' aumenta com C , uma vez que este parâmetro exerce dois efeitos opostos na Eq. (3.18). O primeiro efeito de C se encontra no termo $N_{\Omega}(1 - C^2/2)$ que pode ser entendido como um Bond number efetivo, que diminui quando C aumenta. A segunda contribuição vem do parâmetro geométrico β , que aumenta com C , o que está explícito na Eq. (3.15). Podemos entender esta dependência de β com C percebendo que, à medida que C aumenta, a superfície se torna cada vez mais ondulada e contém mais espaço livre, possibilitando o crescimento de um maior número de dedos. Combinando estes dois efeitos, temos a seguinte expressão para n' :

$$n' = \sqrt{N_{\Omega} R^3 \left(1 + \frac{C^2}{2}(m^2 - 2)\right) + 1 + \frac{C^2}{2}(m^2 - 1)}. \quad (3.19)$$

A Eq. (3.19) deixa claro que o efeito total de C é aumentar o número de dedos, o que está de acordo com o que foi visto numericamente nas interfaces não-lineares da Fig. (25).

Vimos que as equações linearizadas do problema [Eq. (3.13)-(3.16)] são capazes de explicar qualitativamente diversos aspectos do problema. Para finalizar essa seção, vamos investigar como essas equações se comparam quantitativamente com as soluções exatas do problema. Esta comparação está ilustrada na Fig. 27 e na Fig. 28. Em ambas as figuras, exibimos um gráfico contrastando o módulo das amplitudes $|a_n|$ obtidas numericamente (linha preta sólida) e analiticamente pela teoria linear de dois modos discutida anteriormente (círculos laranjas). O modo $n = 0$ corresponde ao valor de R da Eq. (3.16). Além disso, na Fig. 27(b) e Fig. 28(b), mostramos uma comparação no mesmo estilo daquela que foi feita na Fig. 26, só que dessa vez comparando a interface numérica exata (linha preta) e a linear (linha laranja). Os

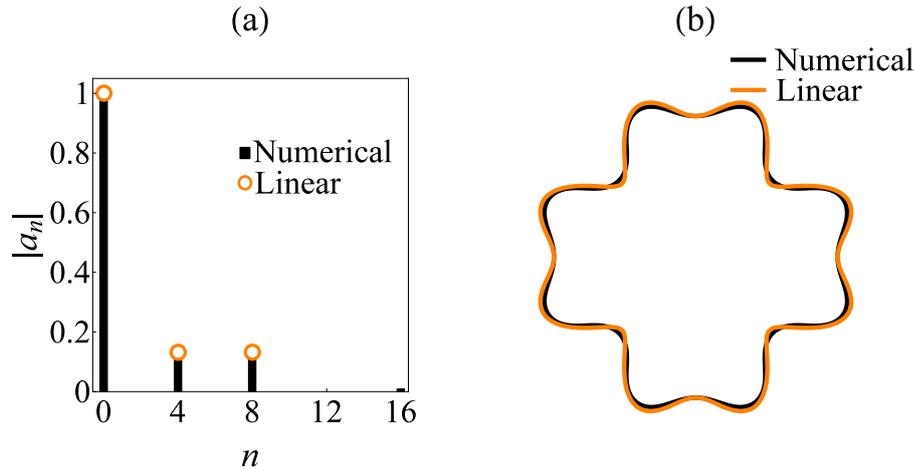


Figura 27 – (a) Valor absoluto da amplitude de Fourier cosseno $|a_n|$ como função do modo n . (b) Comparação entre a solução numérica e linear para o formato estacionário da interface. Escolhemos $C = 0.58$, e $m = 2$. Note que $n = 2m = 4$, e $n' = 8$.

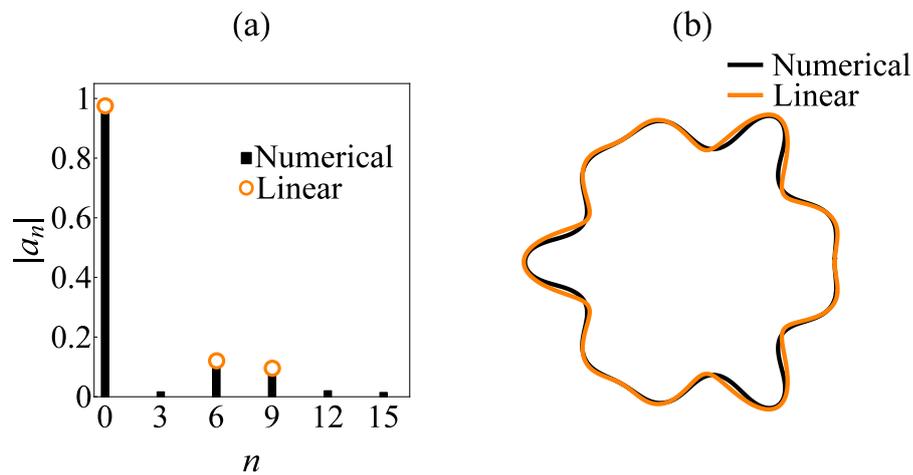


Figura 28 – (a) Valor absoluto da amplitude de Fourier cosseno $|a_n|$ como função do modo n . (b) Comparação entre a solução numérica e linear para o formato estacionário da interface. Escolhemos $C = 0.4965$, e $m = 3$. Note que $n = 2m = 6$, e $n' = 9$.

parâmetros utilizados na Fig. 27 são $C = 0.58$, $m = 2$, $N_\Omega = 25.74$ e $a = -20.4$, enquanto na Fig. 28 escolhemos os mesmos parâmetros, com exceção de $C = 0.4965$ e $m = 3$. Além disso, selecionamos $r(s = 0) = 1$, $r_s(s = 0) = 0$, $\varphi(s = 0) = 0$. Alguns detalhes técnicos precisam ser esclarecidos antes de começarmos a discussão dessas figuras. O primeiro é que, obviamente, tivemos que escolher interfaces exatas pouco deformadas para fazer a nossa comparação, uma vez que temos que nos manter no regime linear. Além disso, outro detalhe que é importante enfatizar é que a amplitude do modo $|a_{n'}|$ é determinada a partir das expressões para R , $|a_{2n}|$ e a condição inicial $r(s = 0) = 1$.

Uma análise dos resultados numéricos e analíticos nas Figs. 27 e 28 deixa claro que, para os parâmetros escolhidos, a teoria linear com dois modos consegue reproduzir bem o formato das elásticas. Outra comparação que também pode ser feita é entre a Fig. 25, a galeria dos padrões

fortemente não-lineares e os padrões das Fig. 27(b) e Fig. 28(b). Na Fig. 27(b), observamos um padrão bem simétrico, com quatro dedos sofrendo tip-splitting. Este padrão é bastante similar ao da Fig. 25(h), que exhibe as mesmas características morfológicas, só que o padrão é um pouco mais desenvolvido. Já a interface da Fig. 28(c) possui uma alternância entre os dedos finos e os dedos grossos, com os dedos grossos exibindo tip-splitting. Um padrão da Fig. 25 que também possui este tipo de interface é o da Fig. 25(d). Curiosamente, apesar dos dedos do padrão não-linear da Fig. 25(d) serem muitos mais longos, eles não exibem tip-splitting. Isso mostra que, ter as amplitudes dos dedos maiores não significa necessariamente que o padrão apresenta uma morfologia mais complexa. Por fim, a comparação entre as Fig. 25, Fig. 27 e Fig. 28 demonstra não só que a teoria linear de dois modos é eficaz para explicar quantitativamente padrões poucos deformados, mas que ela também consegue fazer uma mímica muito boa de padrões fora do regime não-linear.

Por fim, padrões como os da Fig. 25(l) claramente não podem ser acessados por meio de uma análise linear, uma vez que eles são extremamente ramificados. Apesar dessa limitação, temos que a teoria exibida aqui é mais do que satisfatória para entendermos como os efeitos de rotação, geometria e anisotropia participam na formação das elásticas generalizadas. Vale ressaltar que essa efetividade é bastante inesperada. No caso plano com $C = 0$, por exemplo, a teoria linear não é capaz de reproduzir o formato de raquete visto na Fig. 20 e que é típico das curvas elásticas [40, 42, 43].

4 INSTABILIDADE DE SAFFMAN-TAYLOR EM MEIOS POROSOS TRIDIMENSIONAIS

4.1 Introdução

Nos dois capítulos anteriores, estudamos a influência do formato da célula de Hele-Shaw na estabilidade linear e na formação de padrões em fluidos confinados em ambientes bidimensionais. Neste capítulo, iremos continuar investigando como as propriedades espaciais do sistema afetam a emergência de instabilidades na interface entre dois fluidos. Mais especificamente, buscaremos entender a evolução temporal e morfologia de dedos viscosos em uma região tridimensional (meio poroso), e, a partir disso, compará-las ao que ocorre em regiões efetivamente bidimensionais (como o sistema que foi investigado do capítulo 2).

Historicamente, como foi mencionado na introdução, o estudo da instabilidade de Saffman-Taylor iniciou-se com a investigação do comportamento de fluidos em meios porosos uniformes tridimensionais, em processos relacionados à extração de petróleo em rochas [33] e ao refinamento de açúcar em colunas de carvão [31]. Curiosamente, apesar de ter sido um dos primeiros casos investigados, o estudo da instabilidade de Saffman-Taylor totalmente tridimensional não recebeu muita atenção ao longo dos anos. Um dos motivos para este aparente desinteresse é que, a lei de Darcy, que governa o fluxo de fluidos viscosos em meios porosos, também rege os fluidos confinados nas células de Hele-Shaw [Eq. (2.17)]. Dessa maneira, como o sistema efetivamente bidimensional das células de Hele-Shaw é muito mais simples de ser analisado do que um meio poroso real, grande parte das investigações da instabilidade de Saffman-Taylor são realizadas no interior de células de Hele-Shaw.

Dentre os estudos existentes relacionados à formação de dedos viscosos em meios porosos tridimensionais, a maioria se restringe ao caso de fluidos miscíveis. Além disso, muitos destes trabalhos focam apenas em fluxos unidirecionais, em contraste ao caso 2D, onde muita atenção também é devotada aos fluxos radiais. Apesar da literatura limitada, muitas descobertas interessantes foram feitas sobre o comportamento em instabilidade de Saffman-Taylor em meios porosos. Utilizando simulações numéricas intensivas [62–65], diversos autores concluíram que o mecanismo de tip-splitting, comum em dedos viscosos em duas dimensões, também pode ser encontrado em três dimensões. Recentemente, o fenômeno de tip-splitting foi detectado experimentalmente na Ref. [61] com o uso de tomografia computacional (CT) por raio-x para o caso do fluxo miscível unidirecional em um meio poroso composto por pequenas esferas de plástico.

Curiosamente, além do tip-splitting usual, em que um dedo viscoso se bifurca em dois

dedos menores, outros casos mais exóticos também foram reportados na Ref. [60]. Nas diversas simulações numéricas de [60], situações em que os dedos se ramificavam em três, quatro ou mais dedos também foram vistas. Esse tipo de tip-splitting não está presente em duas dimensões, sendo, possivelmente, uma característica exclusiva do fenômeno em três dimensões.

O principal objetivo deste capítulo é investigar, de maneira teórica e analítica, as características morfológicas da interface entre dois fluidos localizados no interior de um meio poroso homogêneo e tridimensional. No entanto, invés de focarmos em fluidos miscíveis submetidos a um fluxo unidirecional, estudaremos a situação mais simples, porém menos investigada, de um fluido imiscível sendo injetado radialmente em outro. Até o presente momento, o único outro estudo desse sistema simples se encontra na Ref. [136]. Enfatizamos, no entanto, que a análise feita na Ref. [136] não aborda a formação de padrões na interface, focando apenas no estudo de mecanismos de controle capazes suprimir a instabilidade de Saffman-Taylor em um meio poroso. Além disso, em [136] apenas o regime linear da dinâmica foi levado em conta e, como foi visto na seção 2.3.2, acoplamentos não lineares são fundamentais para a análise analítica do mecanismo de tip-splitting.

No geral, este capítulo foi organizado de maneira similar ao Cap.2. Na seção 4.2 apresentaremos as equações para os dedos viscosos em um meio poroso uniforme 3D e derivamos a equação de modos acoplados. Após isso, na seção 4.3, discutiremos um pouco o regime linear (seção 4.3.1), e fracamente não linear (seção 4.3.2) da dinâmica. O maior foco da seção 4.3, no entanto, será a análise do mecanismo de tip-splitting por meio do acoplamento de segunda ordem entre o modo fundamental e seu primeiro harmônico, que é um análogo tridimensional da análise conduzida na seção 2.3.2 do capítulo 2. Este capítulo foi baseado na publicação [74].

4.2 Equação de modos acoplados para o sistema

Considere o fluxo de dois fluidos viscosos incompressíveis e imiscíveis em um meio poroso uniforme, ou seja que possui as mesmas propriedades em todas as direções. As viscosidades do fluido 1 e fluido 2 são, respectivamente, η_1 e η_2 , e existe uma tensão superficial σ na interface entre eles. Inicialmente, o fluido 1 se encontra em uma região esférica de raio R_0 , enquanto o segundo fluido ocupa completamente o restante do meio poroso. Exploraremos a situação tridimensional análoga àquela estudada no capítulo 2, em que o fluido 1 é injetado no fluido 2 a uma taxa de injeção volumétrica Q constante. Podemos descrever a interface perturbada entre os dois fluidos como

$$\mathcal{R}(\theta, \phi, t) = R(t) + \zeta(\theta, \phi, t), \quad (4.1)$$

onde $R(t)$ é o raio não-perturbado e $\zeta(\theta, \phi, t)$ é a perturbação da interface (θ denota o ângulo polar, e ϕ é o ângulo azimutal, ambos em coordenadas esféricas). Utilizando conservação de volume, $R(t)$ pode ser escrito como

$$R(t) = \left[R_0^3 + \frac{3}{4\pi} Q t \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (4.2)$$

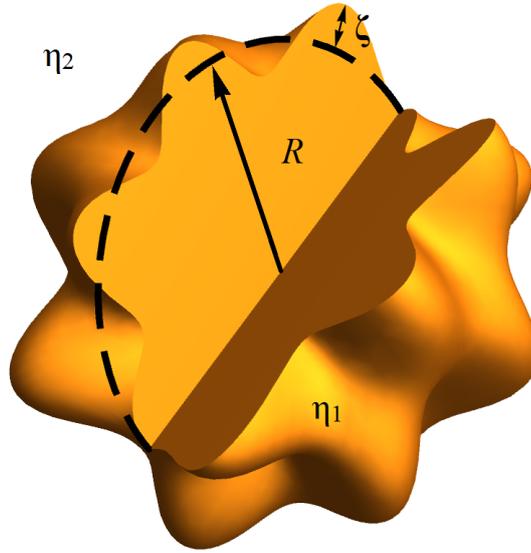


Figura 29 – Esboço de uma interface entre dois fluidos em um meio poroso. Nesta figura, removemos uma região entre dois meridianos na interface para facilitar a visualização. O semi-círculo tracejado é uma representação do raio R não perturbado. Assim como na Fig. 12, temos que o fluido de viscosidade η_1 é injetado em outro de viscosidade η_2 causando uma perturbação ζ na interface fluido-fluido devido à instabilidade de Saffman-Taylor.

Um esboço do sistema se encontra na Fig. 29.

Neste capítulo, iremos aplicar uma variação do método fracamente não linear já utilizado anteriormente no Cap.2 e realizar uma análise de segunda ordem na perturbação no problema de formação de dedos viscosos em três dimensões. Nesta análise, é conveniente expandirmos a perturbação $\zeta(\theta, \phi, t)$ em termos de harmônicos esféricos, ou seja

$$\zeta(\theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \zeta_{lm}(t) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.3)$$

onde $\zeta_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\Omega \zeta(\theta, \phi, t) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ são as amplitudes dos harmônicos esféricos da perturbação e $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido. Os inteiros l e m estão relacionados com o número de onda e o formato das deformações na interface fluido-fluido. Temos que $\zeta(\theta, \phi, t)$ é uma função real, o que implica na relação $\zeta_{lm}^*(\theta, \phi) = (-1)^m \zeta_{l-m}(\theta, \phi)$ entre as amplitudes de perturbação. Esta relação decorre da convenção $Y_{lm}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta, \phi)$ para harmônicos esféricos [86]. Aplicando a conservação de volume até segunda ordem, chegamos em outra relação entre as amplitudes,

$$\zeta_{00}(t) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}R} \sum_{\substack{lm \\ l \neq 0}} |\zeta_{lm}(t)|^2, \quad (4.4)$$

que é um análogo da Eq. (2.39) discutida no segundo capítulo.

Desconsiderando efeitos de gravidade (tomando as densidades dos fluidos como sendo muito próximas, por exemplo), a dinâmica do fluxo no meio poroso é regida pela lei de Darcy [33]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{k}{\eta_j} \nabla p_j, \quad (4.5)$$

onde o índice j é 1 (2) para o fluido interno (externo) e k é a permeabilidade do meio poroso. Os termos $p_j(r, \theta, \phi, t)$ e $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(r, \theta, \phi, t)$ são a pressão e a velocidade tridimensional dos fluidos, respectivamente. Comparando a Eq. (4.5) com a lei de Darcy bidimensional [Eq. (2.17)], percebemos que elas possuem o mesmo formato matemático, com a velocidade linearmente proporcional ao gradiente de pressão. Um detalhe a ser observado é que, em três dimensões, a permeabilidade k faz o papel do coeficiente $b^2/12$, que surge na lei de Darcy bidimensional devido à média transversal.

A Eq. (4.5) implica que o fluxo é irrotacional e, com isso, podemos definir potenciais de velocidade $\mathbf{v}_j = -\nabla \Phi_j$. Como o fluxo é incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, os potenciais satisfazem a equação de Laplace em três dimensões, $\nabla^2 \Phi_j = 0$, cujas soluções são

$$\Phi_1(r, \theta, \phi, t) = \frac{Q}{4\pi r} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{1lm}(t) \left(\frac{r}{R(t)} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.6)$$

para o fluido 1, e

$$\Phi_2(r, \theta, \phi, t) = \frac{Q}{4\pi r} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{2lm}(t) \left(\frac{r}{R(t)} \right)^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

para o fluido 2. Estas soluções estão consistentes com as condições de contorno $\Phi_j \rightarrow Q/(4\pi r)$ quando $r \rightarrow 0$, e $\Phi_j \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Para relacionarmos os coeficientes Φ_{jlm} das Eqs. (4.6) e (4.7) com as amplitudes de perturbação ζ_{lm} , aplicaremos a condição de contorno cinemática [Eq. (2.24)],

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \phi} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} \right]_{r=\mathcal{R}}. \quad (4.8)$$

Utilizando as soluções dos potenciais [Eq. (4.6)-(4.7)] e a expressão para a interface deformada [Eq. (4.3)] na Eq. (4.8), chegamos em uma expressão contendo duas integrais envolvendo harmônicos esféricos. Estas integrais possuem soluções fechadas, dadas por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) \left(\frac{\partial Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right) =$$

$$(-1)^{m+1} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)}$$

$$\times \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ são os símbolos 3j e 6j de Wigner, respectivamente. A derivação destas integrais, bem como os valores numéricos dos símbolos de Wigner, podem ser encontradas nas Refs. [86, 137–139]. Utilizando Eq. (4.9) e Eq. (4.10), chegamos no potencial do fluido 1,

$$\Phi_{1lm}(t) = -\frac{1}{l} \left(R\dot{\zeta}_{lm} + \frac{Q}{2\pi R^2} \zeta_{lm} \right)$$

$$+ \frac{(-1)^m}{l} \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \left\{ \frac{Q}{4\pi R^3} \left[2l_1 + 1 - \frac{2}{l_1} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \right] \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \zeta_{l_1 m_1} \zeta_{l_2 m_2} \right.$$

$$\left. + \left[l_1 - 1 - \frac{1}{l_1} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \right] \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \dot{\zeta}_{l_1 m_1} \zeta_{l_2 m_2} \right\}. \quad (4.11)$$

e em uma expressão similar para $\Phi_{2lm}(t)$. O termo $\dot{\zeta}_{lm}$ representa a derivada temporal de ζ_{lm} . Na Eq. (4.11), o somatório em l vai de 1 até ∞ , enquanto o somatório em m vai de $-l$ até l . A partir de agora, para tornar as expressões mais compactas, iremos continuar utilizando esta convenção nos limites inferiores e superiores dos somatórios tanto em l_1, m_1 quando em l_2, m_2 .

A segunda condição de contorno necessária é a relação entre a descontinuidade do campo de pressão com a curvatura do fluido na interface [Eq. (2.22)]. Para um fluido em um meio poroso, a equação de Young-Laplace modificada é dada por [33]

$$(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} = 2\bar{\sigma}\mathcal{H} + p_c(t), \quad (4.12)$$

onde \mathcal{H} é a curvatura média da superfície [87, 136], que pode ser expandida em segunda ordem em ζ , fornecendo

$$2\mathcal{H} = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla(r - \mathcal{R}(\theta, \phi, t))}{|\nabla(r - \mathcal{R}(\theta, \phi, t))|} \right] = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta + \nabla_\omega^2 \zeta}{R^2} + \frac{2\zeta^2 + 2\zeta \nabla_\omega^2 \zeta}{R^3} + O(\zeta^3), \quad (4.13)$$

onde operador ∇_ω^2 representa o laplaciano na esfera unitária. Na Eq. (4.12), temos que a tensão superficial efetiva macroscópica, representada por $\bar{\sigma}$, obedece uma relação linear com a tensão

microscópica σ , dada por $\bar{\sigma} = C\sigma$, onde a constante C varia dependendo das propriedades do meio poroso [33]. O último termo no lado direito da Eq. (4.12) está relacionado com variações na pressão capilar e, como não tem dependência espacial, não será relevante para a presente discussão. Mais detalhes sobre a lei de Young-Laplace em meios porosos, bem como valores experimentais de C , podem ser encontrados em Refs. [33, 136]. Comparando a condição de pressão para o caso 2D com a 3D, temos que, ignorando o termo $p_c(t)$, vemos que a curvatura geodésica κ_g na Eq. (2.22) dá lugar à curvatura média na Eq. (4.12).

Temos agora todos os ingredientes para chegarmos na equação diferencial de modos acoplados para as amplitudes $\zeta_{lm}(t)$. Substituindo a Eq. (4.11) (e o seu equivalente para o fluido 2), e utilizando a Eq. (4.12) junto com a Eq. (4.5), obtemos, após algumas manipulações algébricas e mantendo apenas termos até segunda ordem em ζ ,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{lm} &= \Lambda(l) \zeta_{lm} \\ &+ \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} \left[\mathcal{F}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) \zeta_{l_1 m_1} \zeta_{l_2 m_2} + \mathcal{G}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) \dot{\zeta}_{l_1 m_1} \zeta_{l_2 m_2} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

com

$$\Lambda(l) = \frac{2}{R^3} \left[A \frac{l(l+1)}{(2l+1-A)} - 1 - \frac{1}{\text{Ca}} \frac{l(l+2)(l^2-1)}{(2l+1-A)} \right], \quad (4.15)$$

que é a taxa de crescimento linear, onde A é o contraste de viscosidade [Eq. (2.1)] e

$$\text{Ca} = \frac{(\eta_1 + \eta_2)Q}{4\pi k\bar{\sigma}} \quad (4.16)$$

é o número de capilaridade para o nosso sistema. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) &= \frac{(-1)^m}{R^4} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \left[A \left(\frac{2l(l+1) - (2l_1+1)(2l+1)}{2l+1-A} \right. \right. \\ &- 2 \frac{(l+1)(l_1+1) + ll_1}{l_1(l_1+1)(2l+1-A)} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \left. \left. \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \right) \right. \\ &+ \frac{2l_1+1}{2l+1-A} + 2 \frac{(l+1)(l_1+1) - ll_1}{l_1(l_1+1)(2l+1-A)} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \left. \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \right. \\ &\left. \left. - \frac{4}{\text{Ca}} \frac{l(l+1)(1-l_1-l_1^2)}{2l+1-A} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) &= \frac{(-1)^m}{R} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \left[A \left(\frac{2l(l+1) - l(l_1+2) - (l+1)(l_1-1)}{2l+1-A} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(l+1)(l_1+1) + ll_1}{l_1(l_1+1)(2l+1-A)} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(l+1)(l_1-1) - l(l_1+2)}{2l+1-A} + \right. \\
 &\quad \left. 2 \frac{(l+1)(l_1+1) - ll_1}{l_1(l_1+1)(2l+1-A)} \sqrt{l_1(l_1+1)(2l_1+1)l_2(l_2+1)(2l_2+1)} \begin{Bmatrix} l & l_1 & l_2 \\ 1 & l_1 & l_2 \end{Bmatrix} \right]
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

são as funções de acoplamento de segunda ordem. Nas Eqs. (4.14)-(4.18), os comprimentos foram reescalados por R_0 , e o tempo por $(4\pi R_0^3)/Q$. Iremos utilizar essa adimensionalização no restante deste capítulo.

Assim como as equações de modos acoplados do capítulo 2 [Eqs. (2.35)-(2.38)], as equações (4.14)-(4.18) também permitem uma investigação da estabilidade linear e da formação de padrões não-lineares no sistema. Enfatizamos que, apesar das equações nos casos bi e tridimensional serem bastante similares, há várias diferenças importante entre elas. Por exemplo, o número de acoplamentos entre os modos é muito maior no caso 3D do que no caso 2D, o que torna a dinâmica tridimensional relativamente mais complexa. Além disso, comparando as equações do problema 2D e 3D, vemos que tanto as expressões para a taxa de crescimento quanto aquelas para as funções de acoplamento possuem dependências distintas com o raio R e com os modos l e m . Na próxima seção, veremos o impacto que estas diferenças exercem na dinâmica do sistema.

4.3 Discussão

4.3.1 *Estágio linear: Estabilidade da interface*

Nesta subseção discutiremos brevemente o comportamento linear do problema de Saffman-Taylor em meios porosos uniformes tridimensionais. Outras análises lineares de situações semelhantes podem ser encontradas nas Refs. [33, 136]. Começaremos examinando a taxa de crescimento linear da Eq. (4.15), que pode ser decomposta em

$$\Lambda(l) = \frac{1}{R^3} \lambda(l), \tag{4.19}$$

onde

$$\lambda(l) = 2 \left[A \frac{l(l+1)}{(2l+1-A)} - 1 - \frac{1}{Ca} \frac{l(l+2)(l^2-1)}{(2l+1-A)} \right]. \tag{4.20}$$

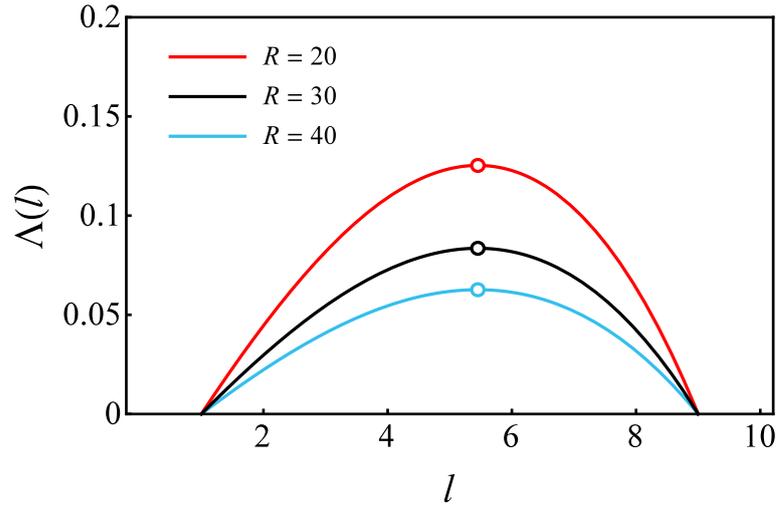


Figura 30 – Gráfico da taxa de crescimento Λ como função de l , para três valores do raio não perturbado R . Nesta figura, tomamos $Ca = 110$, e $A = 1$. Os pequenos círculos representam a taxa máxima de crescimento $\Lambda(l_{max})$. Está claro que variações em R não influenciam nem a banda de modos instáveis, nem o modo com l_{max} de maior crescimento.

Devido à simetria esférica do fluxo não-perturbado, temos que a Eq. (4.20) não depende do modo m . Isto implica que os modos com o mesmo l são degenerados, com uma degenerescência de $2l + 1$, de maneira que, a nível linear, estes crescem com a mesma taxa. A Fig. 30 ilustra algumas das características importantes de $\Lambda(l)$. Por meio dessa figura, vemos como a taxa de crescimento varia com cada modo l para uma situação usual em que $Ca = 110$ e $A = 1$. Analisando a Fig. 30, percebemos que a banda de instabilidade, definida como os modos instáveis do sistema, se mantém inalterada ao variarmos o tempo (e portanto, aumentarmos o raio não-perturbado). Compare esta simples dependência de $\Lambda(l)$ com R presente no problema tridimensional com a complicada expressão encontrada no problema bidimensional, dada pela Eq. (2.36). Até mesmo no caso 2D plano, a banda de instabilidade varia bastante com R , de modo que, para valores grandes de R (ou seja, para tempos longos), todos os modos da perturbação estão "acordados", em um fenômeno que é conhecido como "cascata de modos" [39, 94]. No entanto, como podemos ver na Fig. 30, a cascata de modos está ausente no caso tridimensional. Outra consequência da forma da Eq. (4.19), que também podemos observar na Fig. 30, é que o modo l_{max} , que possui a maior taxa de crescimento, não varia com o tempo. Podemos confirmar esta observação calculando l_{max} para o caso de $A = 1$,

$$l_{max} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{3Ca + 7} - 2 \right]. \quad (4.21)$$

A expressão acima mostra que l_{max} para $A = 1$ está determinado exclusivamente por Ca , sendo, portanto, independente de R . Novamente, esta situação é bastante diferente da bidimensional, em que o modo de maior crescimento aumenta com R [Eq. (2.47)]. Por último, a Eq. (4.19), combinada com a Eq. (4.14), nos permite calcular explicitamente as amplitudes $\zeta_{lm}(t)$, que

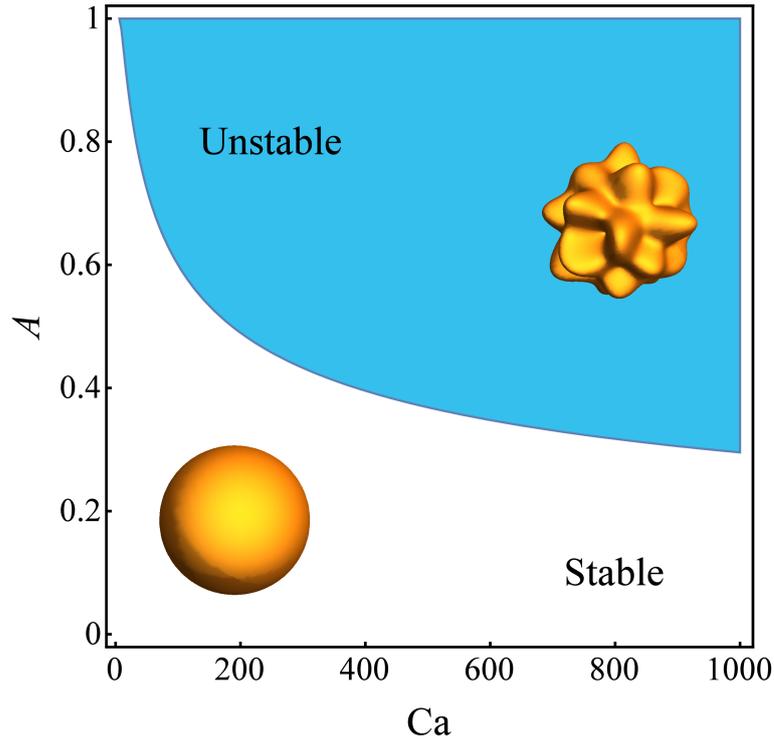


Figura 31 – Diagrama de estabilidade linear no plano A - Ca ilustrando as regiões estáveis e instáveis. A fronteira entre as duas regiões é encontrada fazendo $\lambda(l_{max}) = 0$. Os padrões 3D ilustram o formato de duas interfaces fluido-fluido típicas que surgem no regime linear do processo de formação de dedos viscosos em um meio poroso 3D.

podem ser expressas de maneira compacta como

$$\zeta_{lm}(t) = \zeta_{lm}(0) R^{\lambda(l)} = \zeta_{lm}(0) [1 + 3t]^{\lambda(l)/3}, \quad (4.22)$$

onde $\zeta_{lm}(0)$ é a amplitude inicial do modo lm . A Eq. (4.22) será útil para o cálculo das amplitudes no regime fracamente não linear da próxima seção.

Finalizamos esta seção discutindo o efeito combinado do contraste de viscosidade A , e do número de capilaridade Ca na formação de dedos viscosos em 3D. A Fig. 31 exibe um diagrama de estabilidade linear no espaço A - Ca , mostrando as regiões estáveis e instáveis da dinâmica linear. A região estável está em branco e a instável, em azul. A curva delimitando as duas regiões distintas mostradas na Fig. 31 é obtida utilizando a condição $\lambda(l_{max}) = 0$. Pela Eq. (4.22), percebemos que, acima desta curva, a amplitude inicial da perturbação cresce, enquanto abaixo dela, a amplitude decresce. Aproveitamos a Fig. (31) para ilustrar duas interfaces fluido-fluido lineares nas duas diferentes situações, estável e instável.

4.3.2 *Estágio não-linear: Morfologias das interfaces em 3D*

Considere agora o segundo termo à direita da Eq. (2.35), que representam a contribuição fracamente não linear (segunda ordem) na dinâmica. Conforme foi visto no capítulo 2, ao contrário do caso linear, em que todos os termos crescem de maneira independente, os termos

fracamente não lineares introduzem acoplamentos entre os diversos modos. Por sua vez, esses acoplamentos são responsáveis por forçar o crescimento de modos que não estavam presentes linearmente e gerar novos efeitos morfológicos nas interfaces. Conforme vimos na discussão da seção 2.3.2, em duas dimensões, esses modos são responsáveis pela emergência do tip-splitting, uma das características principais da instabilidade de Saffman-Taylor radial. Para visualizar os efeitos não-lineares na morfologia em 3D é preciso primeiro resolver a Eq. (4.14) consistentemente até segunda ordem. Isso pode ser feito de duas maneiras: (i) resolvendo as equações numericamente, ou (ii) substituindo a solução linear da Eq. (4.22) nos termos de segunda ordem da Eq. (4.14) e integrando a equação diferencial obtida. Usualmente, o método (i) é o mais prático e foi ele que aplicamos no capítulo 2. No entanto, para o caso 3D investigado aqui, iremos optar pelo método (ii) pois, como veremos, as soluções analíticas de segunda-ordem são relativamente simples. Ressaltamos que os métodos (i) e (ii) são equivalentes, uma vez que a diferença entre eles é de terceira ordem na perturbação e, portanto, pode ser descartada em uma análise de segunda ordem.

Para obtermos a solução fracamente não-linear, começaremos escrevendo o termo de acoplamento de segunda ordem como

$$W(l, m, t) = \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} [\mathcal{F}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) + \Lambda(l)\mathcal{G}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2)] \zeta_{l_1 m_1}^{lin} \zeta_{l_2 m_2}^{lin}, \quad (4.23)$$

onde ζ_{lm}^{lin} denota as amplitudes lineares dadas pela Eq. (4.22). Dessa forma, a equação diferencial para cada modo ζ_{lm} se torna

$$\dot{\zeta}_{lm} = \Lambda(l)\zeta_{lm} + W(l, m, t), \quad (4.24)$$

que é uma equação de primeira ordem com um termo forçado $W(l, m, t)$, que pode ser integrada, fornecendo

$$\zeta_{lm}(t) = \zeta_{lm}^{lin}(t) \left\{ 1 + \int_0^t \left[\frac{W(l, m, t')}{\zeta_{lm}^{lin}(t')} \right] dt' \right\}. \quad (4.25)$$

Uma expressão explícita para as integrais da Eq. (4.25) é bastante confusa no caso bidimensional [39], e por isso, não é muito útil. No entanto, podemos integrá-las facilmente no caso 3D definindo as seguintes funções auxiliares

$$\mathcal{F}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) = \frac{1}{[R(t)]^4} F(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) \quad (4.26)$$

e

$$\mathcal{G}(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) = \frac{1}{R(t)} G(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2). \quad (4.27)$$

Perceba que, pelas Eqs. (4.18) e (4.17), tanto $G(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2)$ quanto $F(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2)$ são independentes de R . Dessa maneira, a solução de segunda ordem da Eq. (4.14) pode ser escrita como

$$\zeta_{lm}(t) = \zeta_{lm}(0) R^{\lambda(l)} + \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} T(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) I(l; l_1, l_2, t) \zeta_{l_1 m_1}(0) \zeta_{l_2 m_2}(0), \quad (4.28)$$

onde

$$T(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) = F(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) + \lambda(l)G(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) \quad (4.29)$$

e

$$I(l; l_1, l_2, t) = R(t)^{\lambda(l)} \int_0^t R(t')^{\lambda(l_1) + \lambda(l_2) - \lambda(l) - 4} dt' = \frac{R(t)^{\lambda(l_1) + \lambda(l_2) - 1} - R(t)^{\lambda(l)}}{\lambda(l_1) + \lambda(l_2) - \lambda(l) - 1}. \quad (4.30)$$

A solução acima contém todas as informações necessárias para a análise fracamente não linear do sistema. Além disso, investigando a Eq. (4.28) um pouco mais, também é possível ver que existe uma dependência explícita em m na função $T(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2)$, de modo que a degenerescência que existia a nível linear não está mais presente em segunda ordem.

Um detalhe importante na expressão dada pela Eq. (4.28) é que ela contém um somatório entre todos os (infinitos) possíveis acoplamentos entre l_1, m_1, l_2 , e m_2 . A princípio, isso significa que todos os modos se tornam potencialmente ativos na dinâmica de segunda ordem, o que tornaria uma análise do problema impossível. Felizmente, temos como reduzir o número de acoplamentos no somatório considerando algumas regras de seleção, ou seja, condições necessárias para que $T(l, m; l_1, m_1, l_2, m_2) \neq 0$. Estas regras de seleção são dadas por

$$m = m_1 + m_2, \quad (4.31)$$

$$|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2, \quad (4.32)$$

e

$$l + l_1 + l_2 \text{ é um inteiro par}, \quad (4.33)$$

e são originárias das simetrias dos símbolos $3j$ de Wigner [140]. A primeira condição [Eq. (4.31)] é idêntica à que aparece no problema de Saffman-Taylor bidimensional [39]. Contudo, as demais regras de seleção [Eq. (4.32), e Eq. (4.33)] não possuem nenhum equivalente 2D. Além disso, como as Eqs. (4.32)-(4.33) são desigualdades, o número de acoplamentos a ser considerado em 3D é muito maior do que o do problema 2D equivalente. Para ilustrar melhor este ponto, considere a situação em que a perturbação consiste inicialmente em apenas um modo. No caso bidimensional, os efeitos de segunda ordem causarão o modo fundamental, que chamaremos de n , a forçar o crescimento de apenas um modo, o harmônico $2n$. Isto está de acordo com o que foi visto na seção 2.3.2. A situação é bastante diferente para o problema tridimensional, em que, por exemplo, o modo com amplitude ζ_{40} pode afetar sozinho o crescimento de três modos extras (ζ_{80} , ζ_{60} , ζ_{20}) durante a evolução fracamente não linear de segunda ordem. Devido a essas distinções, não é possível traçar um paralelo direto entre a formação de dedos viscosos em 2D e a 3D. Ou seja, isso implica que, rigorosamente, não é possível prever como a interface fluido-fluido irá se comportar em três dimensões apenas extrapolando o resultado bidimensional já estudado.

Para visualizar o surgimento de dedos viscosos em 3D, plotamos as interfaces perturbadas para diversas condições iniciais e para diversos valores do número de capilaridade Ca . Durante

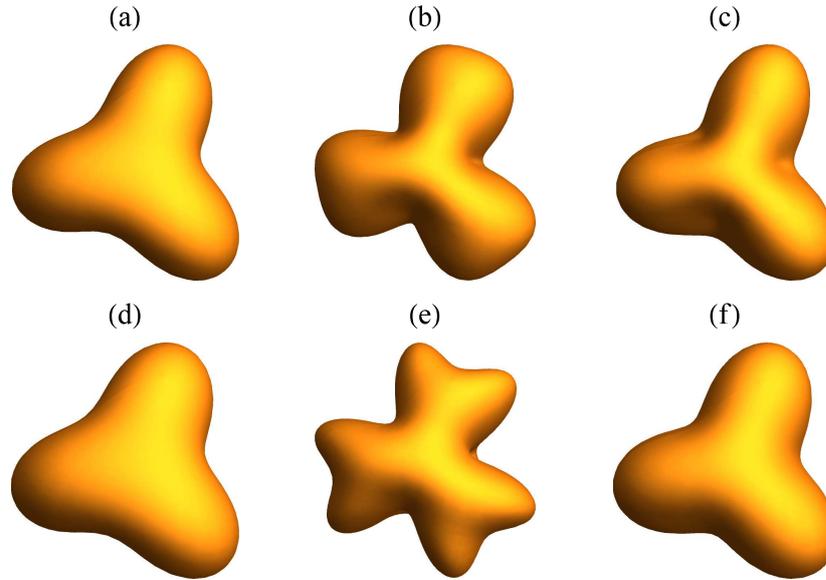


Figura 32 – Interfaces típicas para condições iniciais contendo apenas os modos $l = 3$. A primeira coluna (Fig. 32(a) e Fig. 32(d)) ilustra as interfaces puramente lineares. A segunda coluna (Fig. 32(b) e Fig. 32(e)) apresenta as interfaces fracamente não lineares equivalentes. Por último, na terceira coluna (Fig. 32(c) e Fig. 32(f)) temos as mesmas interfaces não lineares da segunda coluna, porém com o modo $l = 6$ removido. Os padrões ilustrados nas Figs. 32(a)-32(c) possuem $Ca = 60$, e $R = 500$, enquanto as estruturas das Figs. 32(d)-32(f) possuem $Ca = 80$, e $R = 50$.

nossa análise, concentramos nossa atenção apenas na situação em que o contraste de viscosidade é máximo ($A = 1$), pois verificamos que os únicos efeitos de reduzir A são retardar ou suprimir completamente a instabilidade de Saffman-Taylor. Esses dois cenários, no entanto, podem ser explicados satisfatoriamente por meio da análise linear discutida anteriormente, e não têm nenhuma implicação para o entendimento da formação de padrões na interface fluido-fluido. Ressaltamos que nos padrões das Figs. 32, 33, 34 e 36, a evolução temporal prosseguiu até o ponto em que as interfaces para tempos consecutivos estavam prestes a se interceptar. Este critério de parada foi justificado na Ref. [141] e se baseia no fato de que um cruzamento entre interfaces consecutivas implica que algum ponto da interface possui velocidade negativa. Isso corresponde a uma situação não física, visto que tanto em experimentos em células de Hele-Shaw [36, 142], quanto em simulações tridimensionais [62–65], a interface sempre possui velocidades maiores ou iguais a zero. Este critério tem se mostrado muito útil para o estudo teórico de formação de padrões em fluidos newtonianos e não-newtonianos confinados em células de Hele-Shaw [39, 77, 121, 135]. Também verificamos a validade do método não-linear checando que as correções de segunda ordem na perturbação, que podem ser estimadas pelo termo ζ_{00} na Eq.(4.4), satisfazem a condição $\zeta_{00} \ll R$.

Começamos a nossa discussão pela Fig. 32, que exhibe várias interfaces perturbadas. Para obter estas interfaces utilizamos o resultado da Eq. (4.28), e levando em conta o acoplamento de segunda ordem entre os modos $2 \leq l \leq 16$. Para ilustrar mais claramente a morfologia

do sistema, escolhamos as condições iniciais nas amplitudes como $|\zeta_{lm}| = 0.03$ se $l = 3$, e $|\zeta_{lm}| = 0$ para os demais l , ou seja, a condição inicial consiste apenas de modos $l = 3$. Como as amplitudes dos harmônicos esféricos são complexas, optamos por selecionar a fase de cada uma aleatoriamente. Desta maneira, garantimos que não estamos escolhendo uma direção preferencial que pode, em princípio, favorecer algum tipo de comportamento específico. Aplicando as regras de seleção das Eqs. (4.31)-(4.33), obtemos que os únicos modos participantes são ζ_{6m} , ζ_{4m} , ζ_{3m} , e ζ_{2m} , onde todos os m 's são levados em consideração. Para ter uma ideia de como o sistema se comporta, obtivemos interfaces para diversas fases e amplitudes iniciais. Após analisar os resultados, concluímos que a grande maioria das interfaces exibe características morfológicas semelhantes às da Fig. (32). Dessa maneira, a Fig. (32) é bastante típica e ilustra bem as possíveis interfaces do sistema. Iremos focar, por enquanto, apenas em interfaces com esse formato característico, deixando a discussão de casos especiais para o final da seção.

Na primeira linha da Fig. 32 (Figs. 32(a)-32(c)), todos os padrões possuem número de capilaridade $Ca = 60$, e $R = 500$. A figura 32(a) representa uma interface puramente linear, enquanto a Fig. 32(b) é a interface fracamente não-linear equivalente. Comparando estas duas figuras, fica claro que a situação linear exibe um padrão simples com três dedos de pontas relativamente finas. Por sua vez, a situação não linear possui características diferentes, com dedos mais grossos e pontas achatadas. Essa diferença entre as interfaces indica que os efeitos não lineares são responsáveis por uma tendência dos dedos de ficarem mais largos. Neste ponto, é importante lembrarmos da discussão feita na seção 2.3.2, onde verificamos a existência de um processo similar no caso bidimensional. Na presente situação, no entanto, não está claro quais dos modos presentes são responsáveis por este fenômeno. Dessa forma, para identificarmos qual modo, dentre todos aqueles que são acordados pela dinâmica linear, causa o alargamento dos dedos, mostramos na Fig. 32(c) uma versão "filtrada" da interface não linear da Fig. 32(b), contendo todos os modos menos os $l = 6$, que foram removidos. Com isso, podemos ver claramente que o padrão da Fig. 32(c) apresenta dedos finos similares àqueles da Fig. 32(a), o que sugere os modos $l = 6$ exercem um papel importante na emergência das características morfológicas não lineares na interface fluido-fluido. Novamente fazendo uma analogia com o caso bidimensional, temos que o fato dos modos $l = 6$, que são o dobro dos modos $l = 3$, serem os responsáveis pelo alargamento do dedo é, de certa forma, esperado, uma vez que em 2D o modo $2m$ é o causador do alargamento do modo m . No entanto, ao contrário do caso bidimensional, em que apenas o modo $2m$ surge no nível não-linear, temos agora que a interface da Fig. 32(c) também contém os modos com $l = 2, 3$, todos eles sendo acordados por efeitos não lineares. É, de certa forma, surpreendente que a participação dos modos $l = 6$ seja a mais favorecida e que, além disso, ela cause um efeito análogo ao do modo $2m$ em 2D. Vale ressaltar que se, ao invés do modo $l = 6$, removêssemos os modos $l = 2$ e $l = 4$ da interface da Fig. 32(b), teríamos que o impacto morfológico iria ser mínimo.

Para nos certificarmos que os modos $l = 6$ são de fato responsáveis pela morfologia da interface, nas Figs. 32(d)-32(f) exibimos as interfaces obtidas para $Ca = 80$. Primeiramente, percebe-se que os padrões Fig. 32(a) e Fig. 32(d), representando as interfaces lineares, são bastante

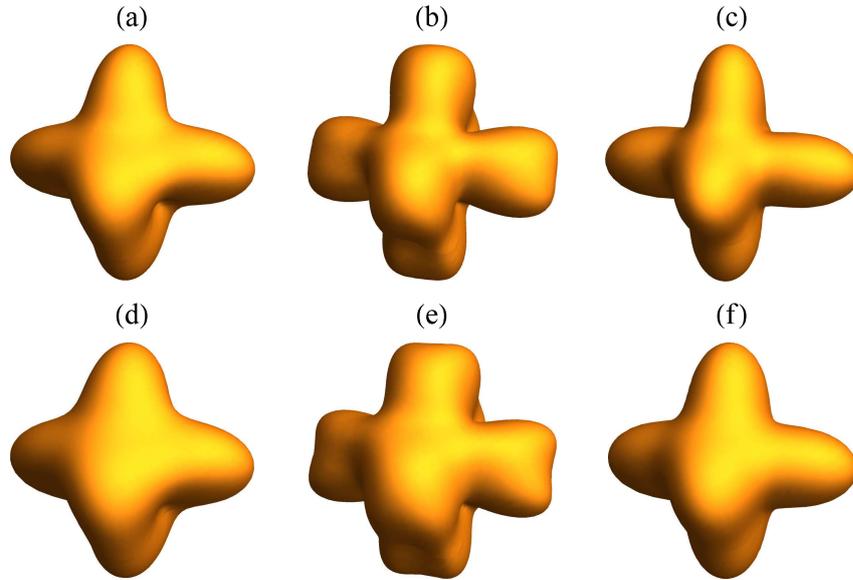


Figura 33 – Interfaces características para condições iniciais contendo apenas os modos $l = 4$. A primeira coluna (Fig. 33(a) e Fig. 33(d)) ilustra as interfaces puramente lineares. A segunda coluna (Fig. 33(b) e Fig. 33(e)) apresenta as interface fracamente não lineares equivalentes. Por último, na terceira coluna (Fig. 33(c) e Fig. 33(f)) temos as mesmas interfaces não lineares da segunda coluna, porém com os modos $l = 8$ removidos. Os padrões ilustrados nas Figs. 33(a)-33(c) possuem $Ca = 110$, e $R = 105$, enquanto as estruturas das Figs. 33(d)-33(f) possuem $Ca = 130$, e $R = 57.5$.

similares, o que indica que o efeito do aumento do número de capilaridade não é muito acentuado a nível linear. No entanto, temos que, na Fig. 32(e), que representa a interface não linear, existe um alargamento na ponta dos dedos e uma visível formação de tip-splitting. É possível ver claramente dois dedos finos emergindo na ponta dos dedos mais grossos, um processo muito similar ao que ocorre no caso bidimensional. Finalmente, a Fig. 32(f) exhibe a mesma interface fracamente não-linear presente na Fig. 32(e), porém sem incluir os modos $l = 6$. Neste ponto, deve estar claro que os modos $l = 6$ são responsáveis não somente pelo alargamento dos dedos como também pelo fenômeno de tip-splitting.

Para ter certeza que os fenômenos que ocorrem na Fig. 32 não são exclusivos para $l = 3$, na Fig. 33 conduzimos a mesma análise para $l = 4$. As interfaces na primeira linha da Fig. 33 (Figs. 33(a)-33(c)) são geradas utilizando $Ca = 110$, e $R = 105$, enquanto na segunda linha (Figs. 33(d)-33(f)), consideramos $Ca = 130$, e $R = 57.5$. Tomamos inicialmente $2 \leq l \leq 16$, perturbação inicial $\zeta_{4m}(0) = 0.0009$ e fases iniciais aleatórias. Após utilizar as regras de seleção, obtemos que os modos participantes são ζ_{8m} , ζ_{6m} , ζ_{4m} , e ζ_{2m} , onde todos m 's estão presentes. De maneira similar ao caso com $l = 3$ discutido na Fig. 32, temos que ambas as interfaces lineares da Fig. 33(a) e da Fig. 33(d) possuem dedos pontudos em oposição aos dedos largos presentes nos casos não lineares das Fig. 33(b) e Fig. 33(e). Além disso, removendo o modo $l = 8$, todos os efeitos morfológicos não lineares desaparecem, o que pode ser visto na Fig. 33(c) e na Fig. 33(f). Na Fig. 33(e), por sua vez, encontramos novamente a ocorrência de tip-splitting, o que mostra

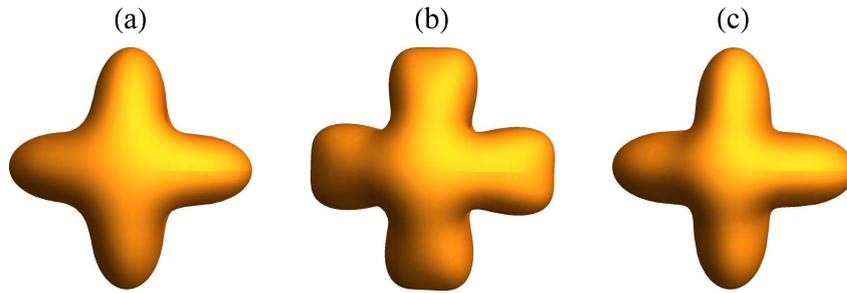


Figura 34 – Exemplos de interfaces perturbadas para $Ca = 110$, $R = 80$, $l = 4$, e $m = 4$. (a) Interface puramente linear; (b) interface fracamente não-linear; e (c) interface fracamente não-linear "filtrada", onde o modo a_{88} foi removido.

que este fenômeno ocorre independentemente do l escolhido. Nossas descobertas na Fig. 32 e Fig. 33 estão de acordo com os resultados numéricos [62–65, 99] e experimentais [61] que demonstraram a existência de tip-splitting para meios porosos 3D.

Enquanto na análise das Figs. 32 e 33 concluímos que os modos $2l$, os "primeiros harmônicos" dos modos l , são responsáveis pelo alargamento e tip-splitting dos dedos, é preciso ter em mente que os padrões exibidos nestas figuras partem de um estado inicial bastante degenerado, contendo vários m 's. Isso dificulta uma possível compreensão analítica do sistema, uma vez que existe um número muito grande de acoplamentos envolvidos durante a dinâmica. Em outras palavras, não está claro como cada par (l, m) , correspondente a uma amplitude de perturbação ζ_{lm} específica, contribui para o formato final da superfície. Por isso, consideraremos agora a condição inicial mais simples possível, em que apenas um modo ζ_{lm} está presente inicialmente. Para esta análise, é conveniente introduzirmos as duas amplitudes reais, $a_{lm} = \zeta_{lm} + \zeta_{lm}^*$ (amplitude do modo cosseno), e $b_{lm} = i(\zeta_{lm} - \zeta_{lm}^*)$ (amplitude do modo seno). Com isso, iremos escolher, sem perda de generalidade, uma fase inicial tal que $a_{lm} > 0$ e $b_{lm} = 0$. Na Fig. 34, exibimos as interfaces 3D geradas para o modo inicial com $l = 4$, $m = 4$, amplitude inicial $a_{44} = 0.0047$, número de capilaridade $Ca = 110$, e $R = 80$. Comparando o caso linear (Fig. 34(a)), e o fracamente não-linear (Fig. 34(b)), vemos novamente que efeitos não lineares favorecem um alargamento e uma eventual bifurcação dos dedos viscosos presentes na interface. Além disso, na Fig. 34(c), em que o modo a_{88} foi removido da interface, os efeitos morfológicos estão completamente ausentes. Apesar da evidência obtida na Fig. 32 e Fig. 33 de que os modos $2l$ são os responsáveis pelos fenômenos não lineares, não estava claro se este efeito era coletivo, gerado por muitos modos em conjunto, ou se eram vários efeitos individuais devido a alguns m 's específicos. Além disso, no caso da Fig. 34, por exemplo, tanto o modo a_{88} quanto o a_{80} , ambos presentes na interface não linear, possuem $2l = 8$, só que o valor da amplitude a_{80} é insignificante em comparação com a_{88} e não exerce muita influência na dinâmica. O que a Fig. 34 sugere é que é possível fazer uma mímica acurada do formato da interface com apenas dois modos a_{88} e a_{44} , enquanto os demais modos presentes (a_{80} , a_{60} , a_{44} , a_{40} , e a_{20} , obtidos usando as regras de seleção) não são relevantes para descrever a formação de padrões no sistema.

Com intuito de reforçar as conclusões a que chegamos por meio da análise da Fig. 34, a

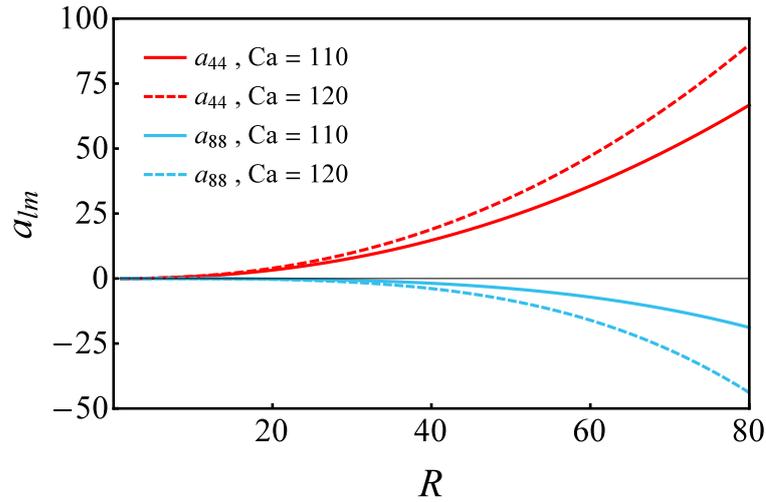


Figura 35 – Variação da (a) amplitude do modo cosseno fundamental a_{44} , e (b) amplitude do modo cosseno para o segundo harmônico a_{88} , a medida que R aumenta. Utilizamos dois números de capilaridade distintos: $Ca = 110$ (curvas sólidas), e $Ca = 120$ (curvas tracejadas).

variação das amplitudes a_{44} e a_{88} , à medida que o raio não-perturbado R cresce, estão ilustradas na Fig. 35 para dois valores de Ca . Como esperado, ao aumentar o valor do número de capilaridade, ambas as amplitudes a_{44} e a_{88} crescem em módulo. A princípio, isto não é nenhuma surpresa, porém, fazendo uma análise mais cuidadosa, a Fig. 34 mostra que a variação de a_{88} ao aumentarmos o Ca de 110 para 120 é consideravelmente maior de a de a_{44} . Verificamos que, ao variar o Ca e comparar os valores das amplitudes para $R = 80$, o modo a_{88} aumenta em torno de 130% com o Ca , mais do que duplicando o seu valor, enquanto o modo a_{44} aumenta em apenas 30%. Isto está de acordo com o que foi visto nas Figs. 32 e 33, em que o aumento no número de capilaridade acentua bastante a bifurcação dos dedos.

Utilizando a Eq. (4.28), é possível entender melhor o comportamento do modo a_{2l2m} e as contribuições não lineares do modo fundamental a_{lm} . Para isso, perceba que a expressão para a_{2l2m} é

$$a_{2l2m}(t) = a_{2l2m}(0) [R(t)]^{\lambda(2l)} + \frac{1}{2} T(2l, 2m; l, m, l, m) I(2l; l, l, t) a_{lm}^2(0). \quad (4.34)$$

Como $a_{lm}^2(0) > 0$, e $I(2l; 2l, 2l, t) > 0$ [pela Eq. (4.30)], a Eq. (4.34) revela que o sinal da contribuição não linear na amplitude $a_{2l2m}(t)$ depende inteiramente do sinal da função $T(2l, 2m; l, m, l, m)$. Note a semelhança da Eq. (4.34) com o resultado bidimensional presente nas Eqs. (2.49)-(2.51) do segundo capítulo. Temos que a função $T(2l, 2m; l, m, l, m)$ é um análogo 3D da função de tip-splitting, sendo também responsável pela ocorrência ou não deste fenômeno. Assim como no caso bidimensional, checamos numericamente que, quando o valor de $T(2l, 2m; l, m, l, m)$ é positivo, os dedos se tornam mais pontudos, enquanto que para $T(2l, 2m; l, m, l, m) < 0$, observamos o fenômeno de alargamento dos dedos e favorecimento do tip-splitting.

As figuras 34 e 35 focaram em uma condição inicial particular em que $l = 4$ e $m = 4$. É importante ressaltar que essa escolha foi feita para ilustrar melhor o fenômeno discutido, não tendo nenhum significado físico especial. Verificamos também que para escolhas variadas de l e m , sempre encontramos indícios de alargamento e bifurcação dos dedos. Aparentemente, esta descoberta combinada com a Eq. (4.34), leva a crer que o tip-splitting em três dimensões é um processo idêntico ao que ocorre em duas. Ou seja, um dedo viscoso cresce na interface entre os fluidos até o ponto em que ele se bifurca em dois dedos menores. Isso, no entanto, nem sempre é o caso, e existem algumas diferenças interessantes nas morfologias geradas para diferentes valores de l e m . Por exemplo, na Fig. 34 para $l = 4$ e $m = 4$, vemos um tip-splitting bastante convencional. No entanto, para valores m diferentes, como, por exemplo, $m = 3$ e $m = 2$, nem todos os dedos se ramificam em dois dedos secundários, ocorrendo também situações em que um dedo se bifurca em três.

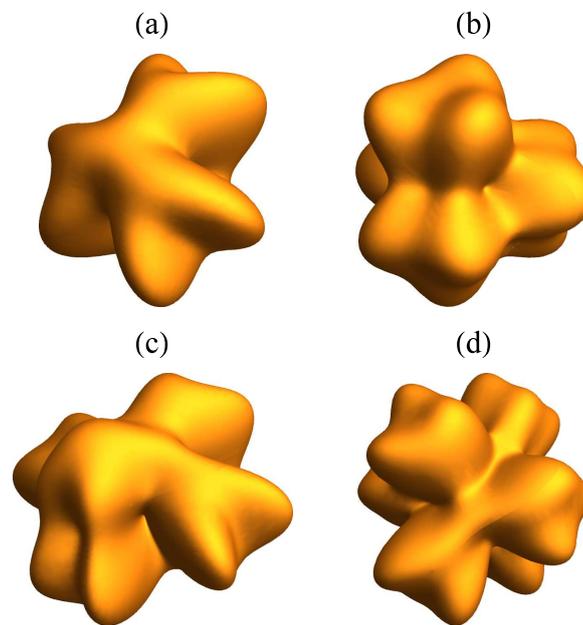


Figura 36 – Variedade de possíveis padrões ocorrendo na interface entre os fluidos. A primeira coluna consiste em interfaces possuindo $l = 3$, $Ca = 90$, mesma amplitude inicial $|\zeta_{lm}| = 0.03$ e com fases distintas. Já a segunda coluna apresenta interfaces possuindo $l = 4$, $Ca = 150$, mesma amplitude inicial $|\zeta_{lm}| = 0.0009$ e fases iniciais distintas. É possível identificar o tip-splitting usual em dois lóbulos (Figs. 36(a) e 36(c)), e o caso mais exótico de tip-splitting em três lóbulos (Figs. 36(b) e 36(d)).

Na figura 36 ilustramos algumas das diferentes morfologias que surgem durante o processo de tip-splitting. A primeira coluna da Fig. 36 (Figs. 36(a)-36(b)) ilustra interfaces para $l = 3$, $R = 30$, $Ca = 90$, e amplitudes iniciais $|\zeta_{lm}| = 0.03$. Já a segunda coluna (Figs. 36(c)-36(d)) exibe interfaces para $l = 4$, $R = 50$, $Ca = 150$, e amplitudes iniciais $|\zeta_{lm}| = 0.0009$. Além disso, de maneira similar ao que foi feito nas Figs. 32 e 33, as interfaces da Fig. 36 contêm todos os modos m de um dado l escolhido. Por último, cada padrão exibido foi obtido utilizando diferentes fases. Uma comparação entre as Figs. 36(a) e 36(b) mostra que, enquanto a figura 36(a)

exibe um tip-splitting tradicional resultando em apenas dois dedos secundários, a interface da figura 36(b) possui um padrão mais exótico, onde três dedos pequenos e pontudos emergem das pontas dos dedos principais. Um fenômeno similar também pode ser visto na segunda coluna da Fig. 36, onde comparamos duas interfaces com $l = 4$ e fases distintas. O motivo para a diferença entre os padrões da esquerda e da direita da Fig.36 é que, enquanto as fases aleatórias das Figs. 36(a) e 36(c) favorecem o crescimento do tip-splitting típico em dois lóbulos, as fases das Figs. 36(b) e 36(d) favorecem o crescimento de modos que geram um tip-splitting em três lóbulos. Vale ressaltar que o tip-splitting presente nas Figs. 36(b) e 36(d) é gerado pelo mesmo mecanismo (Eq. 4.34) que o das Figs. 36(a) e 36(c). Além disso, as estruturas das interfaces das Figs. 36(b) e 36(d) não são artefatos causados pelas fases aleatórias escolhidas. O tip-splitting em mais de um dedo é bastante robusto e pode ser visto também em situações em que apenas um modo inicial é escolhido.

A existência de tip-splitting em mais de dois dedos já havia sido verificada na Ref. [60], em um estudo numérico da formação de padrões fortemente não lineares em um meio poroso tridimensional. Na simulação de [60], foram encontradas situações em que os dedos viscosos apresentavam bifurcações em três, quatro ou mais dedos. Isto contrasta um pouco com as conclusões da análise fracamente não-linear deste capítulo, onde obtivemos apenas casos de tip-splitting em dois (situação usual) ou três dedos secundários. Há algumas razões para esta discrepância. A primeira é que, no trabalho numérico da referência Ref. [60], foi utilizado um fluxo unidirecional, enquanto consideramos um fluxo radial neste capítulo, além de condições de contorno um pouco diferentes das que usamos. Também existe a possibilidade de que a ocorrência tip-splitting em mais de três dedos seja um efeito fortemente não linear, e, dessa forma, não possa ser acessado por meio de uma análise fracamente não linear. De qualquer maneira, temos novamente, assim como no capítulo 2, que uma análise simples de segunda ordem foi suficiente para revelar aspectos morfológicos interessantes e confirmar analiticamente vários dos resultados numéricos e teóricos existentes na literatura da instabilidade de Saffman-Taylor em meios porosos tridimensionais [60–65].

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O estudo de instabilidades de interface é um dos tópicos de pesquisa mais ativos em mecânica dos fluidos devido à sua conexão com vários problemas práticos importantes, como, por exemplo, extração de petróleo, e também por ser um arquétipo para o processo de formação de padrões em diversos sistemas físicos. Nesta dissertação, investigamos como algumas destas instabilidades são afetadas pelo formato e dimensão do espaço em que elas estão inseridas. O nosso foco principal foi no uso de análises teóricas, consistindo em um híbrido entre cálculos analíticos perturbativos e investigações numéricas, para acessar os efeitos da geometria e tridimensionalidade na estabilidade e nas propriedades morfológicas da interface fluido-fluido.

No Cap. 2, iniciamos a nossa análise com uma investigação da instabilidade de Saffman-Taylor em fluidos confinados em uma célula de Hele-Shaw curva. Na instabilidade tradicional, ocorrendo em uma célula radial plana, temos que a interface entre os fluidos se torna instável quando um fluido menos viscoso é injetado em um mais viscoso (contraste de viscosidade $A > 0$), e o número de capilaridade Ca do fluxo é alto. Já para casos de baixo Ca ou $A < 0$, a interface entre os fluidos é tradicionalmente estável. Uma das características mais marcantes da instabilidade de Saffman-Taylor é que ela é responsável pela emergência dos chamados dedos viscosos. Essas estruturas emergem na interface entre os dois fluidos e, à medida que o tempo avança, as suas pontas começam a se bifurcar em dois dedos menores.

As condições discutidas acima para que a interface entre os dois fluidos seja estável em uma célula de Hele-Shaw plana, no entanto, não são sempre válidas para células com formatos não-planos. Ao generalizar a análise teórica linear e fracamente não linear para geometrias curvas, obtemos que é possível desestabilizar situações originalmente estáveis. Particularmente, no segundo capítulo vimos que uma família de superfícies capaz de desestabilizar a interface entre os fluidos são os cones generalizados. Por intermédio de um único parâmetro geométrico extra, células com o formatos de cones "contorcidos" são capazes de exercer um controle significativo na estabilidade da interface e dar origem a novas situações instáveis.

Ainda no capítulo 2, demonstramos também que as novas situações instáveis que surgem nas células cônicas contorcidas são causadas por um acoplamento entre efeitos de capilaridade e geometria. Curiosamente, essa nova instabilidade é virtualmente independente do contraste de viscosidade, o que é bastante distinto ao que acontece na instabilidade de Saffman-Taylor usual, onde o contraste A é o principal ingrediente desestabilizador. Além disso, outro resultado importante do capítulo foi que o fenômeno tip-splitting também se encontra presente nas interfaces deformadas pelos efeitos capilares e geométricos.

No terceiro capítulo, estudamos outro tipo de instabilidade em fluidos confinados em células curvas. Ao contrário da do caso do Cap. 2, que envolve a injeção de um fluido no outro, a instabilidade investigada no capítulo 3 se dá devido à rotação da célula de Hele-Shaw em torno

de um dado eixo. Para esse sistema específico, é possível obter famílias de soluções estacionárias tanto em células planas, quanto em células não-planas. Curiosamente, as interfaces estacionárias deste problema estão relacionadas matematicamente com as chamadas curvas elásticas, que descrevem o formato de barras finas e flexíveis na presença de forças externas.

Aplicando uma formulação de vortex-sheet, fomos capazes de calcular o formato das interfaces fluido-fluido em uma célula girante no formato de cone generalizado, o mesmo tipo de superfície que usamos no Cap. 2. Com isso, obtivemos uma galeria de curvas do tipo elástica bastante diferentes das convencionais que são encontradas tanto nas versões planas quanto curvas do problema elástico de barras flexíveis. Além disso, estas soluções também apresentam características dissimilares às interfaces simétricas encontradas em superfícies de revolução (como esferas e cones usuais). A principal diferença que encontramos foi que, devido à anisotropia do sistema, as soluções encontradas no capítulo 3 são bastante assimétricas e exibem fenômenos semelhantes ao tip-splitting e side-branching, que não são normalmente vistos em fluidos confinados em células girantes.

Apesar dos formatos inusitados dos padrões estacionários do capítulo 3, identificamos uma maneira simples de fazer uma mímica analítica do problema. Considerando apenas a interação entre dois modos de Fourier, e linearizando as equações do sistema, fomos capazes de reproduzir versões simplificadas das soluções estacionárias exatas. Além disso, a teoria linear de dois modos que desenvolvemos foi capaz de ajudar no entendimento de vários aspectos da dinâmica. Por exemplo, vimos que um dos modos de Fourier presente no espectro das soluções exatas é determinado unicamente pela simetria do cone generalizado. Já o segundo modo do espectro depende da combinação entre as propriedades geométricas e hidrodinâmicas do sistema [como velocidade angular, densidade dos fluidos e tensão superficial].

Por último, no capítulo 4, voltamos a analisar o problema de Saffman-Taylor, porém concentrando nossa atenção em instabilidades ocorrendo no interior de meios porosos uniformes tridimensionais. Essa versão do problema, além de ter grande importância em situações práticas, também nos permitiu investigar a maneira como a dimensionalidade do sistema afeta a dinâmica de formação de dedos viscosos. Considerando um fluxo radial em um sistema de fluidos imiscíveis, fomos capazes de estudar tanto a fase linear do sistema, quanto a emergência do fenômeno de tip-splitting, causada por efeitos não lineares. Ao invés de focarmos em técnicas numéricas complicadas, adotamos um método predominantemente analítico, por meio de uma análise de modos acoplados perturbativa e fracamente não linear [segunda ordem]. Nossos resultados indicaram que, assim como no problema de formação de dedos viscosos em 2D, o mecanismo de ramificação dos dedos em 3D é causado por acoplamentos não lineares de segunda ordem entre os modos fundamentais do sistema e seus segundos harmônicos. No entanto, em contraste ao que é normalmente visto na situação bidimensional, encontramos, em três dimensões, casos que os dedos viscosos davam origem a três dedos secundários.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar que existem diversas maneiras de expandir o trabalho que foi apresentado nessa dissertação. Dentre elas, a mais direta consiste em generalizar

os resultados obtidos aqui para situações com geometrias um pouco diferentes das estudadas. Por exemplo, a equação de modos acoplados apresentada do Cap. 2 [Eqs. (2.35)-(2.38)] pode ser diretamente aplicada para células de Hele-Shaw de formatos mais exóticos. Particularmente, células com curvatura gaussiana variável não foram, até agora, exploradas analiticamente no contexto de formação de dedos viscosos. Já o problema de células curvas girantes, investigado do terceiro capítulo somente para cones generalizados, foi ainda menos explorado na literatura. Nesse sistema girante, seria interessante ver não só o comportamento das soluções tipo elástica, mas também como a dinâmica do sistema evolui em diversos ambientes curvos.

Já no problema tridimensional do Cap. 4 optamos por investigar apenas a estabilidade do fluxo radial em meios porosos. Outro tipo de configuração geométrica interessante, e que já foi investigada numericamente em um contexto diferente [143], é o de um fluxo em formato de tubo tridimensional (simetria cilíndrica) em um meio poroso. Além disso, fora do contexto de meios porosos, mas ainda em um ambiente tridimensional, uma aplicação interessante da teoria de modos acoplados seria estudar gotas toroidais carregadas [68]. Esse problema, que vem recebendo muita atenção recentemente, também exhibe um processo de formação de dedos viscosos semelhante ao causado pela instabilidade de Saffman-Taylor usual.

O trabalho apresentado nos capítulos 2 até o 4 foi exclusivamente teórico. Esperamos que, eventualmente, os nossos resultados motivem um aumento no número de experimentos envolvendo tanto células de Hele-Shaw curvas, quanto fluidos imiscíveis em meios porosos. Atualmente, apenas células de Hele-Shaw com geometrias simples como esferas [22], cilindros [50] e superfícies de revolução com perfil gaussiano [51] foram construídas. A montagem de células com formatos mais assimétricos, como os cones contorcidos que estudamos, é um interessante desafio experimental e também uma maneira de se verificar nossas descobertas teóricas.

Uma perspectiva um pouco mais abrangente de pesquisa consiste em investigar como outros sistemas físicos exibindo formação de padrões de interface reagem a mudanças na geometria. Como foi dito na introdução, o processo de formação de dedos viscosos apresenta algumas similaridades com diversos outros problemas em física, matemática, engenharia e biologia. Os métodos e resultados discutidos nesta dissertação, apesar de não poderem ser diretamente aplicados a todos esses casos, encorajam possíveis estudos futuros relacionados a efeitos de geometria e dimensionalidade na formação de padrões em sistemas diversos.

REFERÊNCIAS

- 1 MERKS, R. et al. Models of coral growth: spontaneous branching, compactification and the laplacian growth assumption. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 224, n. 2, p. 153–166, 2003.
- 2 PLAZA, R. G. et al. The effect of growth and curvature on pattern formation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 16, n. 4, p. 1093–1121, 2004.
- 3 VANDIN, G. et al. Curvature-driven positioning of Turing patterns in phase-separating curved membranes. *Soft Matter*, The Royal Society of Chemistry, v. 12, n. 17, p. 3888–3896, 2016.
- 4 BÁNSÁGI, T.; VANAG, V. K.; EPSTEIN, I. R. Tomography of reaction-diffusion microemulsions reveals three-dimensional Turing patterns. *Science*, v. 331, n. 6022, p. 1309–1312, 2011.
- 5 LEPPÄNEN, T. et al. A new dimension to Turing patterns. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 168, p. 35–44, 2002.
- 6 DEBROY, P. P.; SEKERKA, R. F. Weakly nonlinear morphological instability of a spherical crystal growing from a pure undercooled melt. *Physical Review E*, APS, v. 51, n. 5, p. 4608, 1995.
- 7 DEBROY, P. P.; SEKERKA, R. F. Weakly nonlinear morphological instability of a cylindrical crystal growing from a pure undercooled melt. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 6, p. 6244, 1996.
- 8 MENG, G. et al. Elastic instability of a crystal growing on a curved surface. *Science*, v. 343, n. 6171, p. 634–637, 2014.
- 9 GASTINE, T.; WICHT, J.; AURNOU, J. M. Turbulent Rayleigh–Bénard convection in spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 778, p. 721–764, 2015.
- 10 GOLDSTEIN, R. E. et al. Instability of a gravity current within a soap film. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 753, 2014.
- 11 CHOPP, D. L.; SETHIAN, J. A. Flow under curvature: singularity formation, minimal surfaces, and geodesics. *Experimental Mathematics*, Taylor & Francis, v. 2, n. 4, p. 235–255, 1993.
- 12 GÓMEZ, L. R. et al. Phase nucleation in curved space. *Nature Communications*, v. 6, 2015.
- 13 STOOP, N. et al. Curvature-induced symmetry breaking determines elastic surface patterns. *Nature Materials*, v. 14, n. 3, p. 337–342, 2015.
- 14 SUMNER, R. W. *Pattern formation in lichen*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 2001.

- 15 HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, n. 1, p. 271–311, 1987.
- 16 CASADEMUNT, J. Viscous fingering as a paradigm of interfacial pattern formation: Recent results and new challenges. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 14, n. 3, p. 809–824, 2004.
- 17 DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Minimization of instabilities in growing interfaces: A variational approach. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 062404, 2013.
- 18 PARISIO, F. et al. Saffman-Taylor problem on a sphere. *Physical Review E*, APS, v. 63, n. 3, p. 036307, 2001.
- 19 MIRANDA, J. A. Analytical approach to viscous fingering in a cylindrical Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 2, p. 026303, 2002.
- 20 MIRANDA, J. A.; MORAES, F. Geometric approach to viscous fingering on a cone. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 36, n. 3, p. 863, 2003.
- 21 LEANDRO, E. S.; MIRANDA, J. A.; MORAES, F. Symmetric flows and Darcy's law in curved spaces. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 39, n. 7, p. 1619, 2006.
- 22 REIS, L. D.; MIRANDA, J. A. Controlling fingering instabilities in nonflat Hele-Shaw geometries. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 6, p. 066313, 2011.
- 23 BRANDAO, R.; MIRANDA, J. A. Viscous fluid fingering on a negatively curved surface. *Physical Review E*, APS, v. 92, n. 1, p. 013018, 2015.
- 24 DARCY, H. The public fountains of the city of Dijon. *Dalmont, Paris*, v. 647, 1856.
- 25 MUSKAT, M.; WYCKOFF, R. D. et al. Flow of homogeneous fluids through porous media. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937.
- 26 BOER, R. D.; EHLERS, W. A historical review of the formulation of porous media theories. *Acta Mechanica*, Springer, v. 74, n. 1, p. 1–8, 1988.
- 27 BROWN, G. Henry Darcy and the making of a law. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 38, n. 7, 2002.
- 28 HELE-SHAW, H. S. The flow of water. *Nature*, v. 58, n. 1489, p. 33–36, 1898.
- 29 VASIL'EV, A. From the Hele-Shaw experiment to integrable systems: a historical overview. *Complex Analysis and Operator Theory*, Springer, v. 3, n. 2, p. 551–585, 2009.
- 30 LAMB, H. *Hydrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1932.
- 31 HILL, S. et al. Channeling in packed columns. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 1, n. 6, p. 247–253, 1952.
- 32 MOSTAGHIMI, P.; ASHOURI, M.; EBRAHIMI, B. Hydrodynamics of fingering instability in the presence of a magnetic field. *Fluid Dynamics Research*, IOP Publishing, v. 48, n. 5, p. 055504, 2016.

- 33 CHUOKE, R. et al. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. *Petrol. Trans. AIME*.
- 34 SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958.
- 35 CARVALHO, G. D.; MIRANDA, J. A.; GADÊLHA, H. Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 5, p. 053006, 2013.
- 36 PATERSON, L. Radial fingering in a Hele Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 113, p. 513–529, 1981.
- 37 MCCLLOUD, K. V.; MAHER, J. V. Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow. *Physics Reports*, Elsevier, v. 260, n. 3, p. 139–185, 1995.
- 38 CHEN, J.-D. Growth of radial viscous fingers in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 201, p. 223–242, 1989.
- 39 MIRANDA, J.; WIDOM, M. Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 120, n. 3-4, p. 315–328, 1998.
- 40 ALVAREZ-LACALLE, E.; ORTIN, J.; CASADEMUNT, J. Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, AIP, v. 16, n. 4, p. 908–924, 2004.
- 41 SCHWARTZ, L. W. Instability and fingering in a rotating hele-shaw cell or porous medium. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 1, n. 2, p. 167–169, 1989.
- 42 ÁLVAREZ-LACALLE, E.; ORTÍN, J.; CASADEMUNT, J. Nonlinear Saffman-Taylor instability. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, n. 5, p. 054501, 2004.
- 43 LEANDRO, E. S.; OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Geometric approach to stationary shapes in rotating hele-shaw flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 237, n. 5, p. 652–664, 2008.
- 44 ZOLLARS, R. L.; KRANTZ, W. B. Non-parallel flow effects on the stability of film flow down a right circular cone. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 96, p. 585–601, 1980.
- 45 ACHESON, D. J. *Elementary fluid dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990.
- 46 SMOLKA, L. B.; SEGALL, M. Fingering instability down the outside of a vertical cylinder. *Physics of Fluids*, AIP, v. 23, n. 9, p. 092103, 2011.
- 47 MAYO, L. C.; MCCUE, S. W.; MORONEY, T. J. Gravity-driven fingering simulations for a thin liquid film flowing down the outside of a vertical cylinder. *Physical Review E*, APS, v. 87, n. 5, p. 053018, 2013.
- 48 TAKAGI, D.; HUPPERT, H. E. Flow and instability of thin films on a cylinder and sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 647, p. 221–238, 2010.
- 49 RUMPF, M.; VANTZOS, O. Numerical gradient flow discretization of viscous thin films on curved geometries. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, World Scientific, v. 23, n. 05, p. 917–947, 2013.

- 50 ZHAO, H.; MAHER, J. Viscous-fingering experiments with periodic boundary conditions. *Physical Review A*, APS, v. 42, n. 10, p. 5894, 1990.
- 51 AHARONI, H. et al. Internal stresses lead to net forces and torques on extended elastic bodies. *Physical Review Letters*, APS, v. 117, n. 12, p. 124101, 2016.
- 52 HEDENMALM, H.; SHIMORIN, S. Hele–shaw flow on hyperbolic surfaces. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Elsevier, v. 81, n. 3, p. 187–222, 2002.
- 53 HEDENMALM, H.; OLOFSSON, A. Hele-Shaw on weakly hyperbolic surfaces. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, p. 1161–1180, 2005.
- 54 ENTOV, V. M.; ETINGOF, P. I. Viscous flows with time-dependent free boundaries in a non-planar hele–shaw cell. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 8, n. 1, p. 23–35, 1997.
- 55 AL-HOUSSEINY, T. T.; TSAI, P. A.; STONE, H. A. Control of interfacial instabilities using flow geometry. *Nature Physics*, Nature Research, v. 8, n. 10, p. 747–750, 2012.
- 56 PIHLER-PUZOVIĆ, D. et al. Suppression of complex fingerlike patterns at the interface between air and a viscous fluid by elastic membranes. *Physical Review Letters*, APS, v. 108, n. 7, p. 074502, 2012.
- 57 WOODS, A. W. *Flow in porous rocks*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- 58 BYRNE, H.; CHAPLAIN, M. A. Free boundary value problems associated with the growth and development of multicellular spheroids. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 8, n. 6, p. 639–658, 1997.
- 59 CHERNYAVSKY, I.; JENSEN, O.; LEACH, L. A mathematical model of intervillous blood flow in the human placenta. *Placenta*, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 44–52, 2010.
- 60 BELOTSERKOVSKAYA, M.; KONYUKHOV, A. Numerical simulation of viscous fingering in porous media. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2010, n. T142, p. 014056, 2010.
- 61 SUEKANE, T. et al. Three-dimensional viscous fingering of miscible fluids in porous media. *Physical Review Fluids*, APS, v. 2, n. 10, p. 103902, 2017.
- 62 TCHELEPI, H. et al. Dispersion, permeability heterogeneity, and viscous fingering: Acoustic experimental observations and particle-tracking simulations. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 5, n. 7, p. 1558–1574, 1993.
- 63 ZIMMERMAN, W.; HOMSY, G. Three-dimensional viscous fingering: A numerical study. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 4, n. 9, p. 1901–1914, 1992.
- 64 CHRISTIE, M. et al. 3d simulation of viscous fingering and wagg schemes. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 8, n. 01, p. 19–26, 1993.
- 65 TCHELEPI, H.; JR, O. Interaction of viscous fingering, permeability heterogeneity, and gravity segregation in 3 dimensions. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, Richardson, USA, v. 9, n. 4, p. 266–271, 1994.
- 66 OLIVEIRA, R. M.; MEIBURG, E. Miscible displacements in Hele-Shaw cells: three-dimensional Navier–Stokes simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 687, p. 431–460, 2011.

- 67 OLIVEIRA, R. M.; MEIBURG, E. Saffman-Taylor instability and the inner splitting mechanism. *Physical Review Letters*, APS, v. 118, n. 12, p. 124502, 2017.
- 68 FRAGKOPOULOS, A.; AIZENMAN, A.; FERNÁNDEZ-NIEVES, A. Charge-induced Saffman-Taylor instabilities in toroidal droplets. *Physical Review Letters*, APS, v. 118, n. 26, p. 264501, 2017.
- 69 BRANDÃO, R.; FONTANA, J. V.; MIRANDA, J. A. Stretch flow of confined non-newtonian fluids: Nonlinear fingering dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 063003, 2013.
- 70 BRANDÃO, R.; FONTANA, J. V.; MIRANDA, J. A. Interfacial pattern formation in confined power-law fluids. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 1, p. 013013, 2014.
- 71 BRANDÃO, R.; FONTANA, J. V.; MIRANDA, J. A. Suppression of viscous fingering in nonflat Hele-Shaw cells. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 5, p. 053003, 2014.
- 72 BRANDÃO, R.; MIRANDA, J. A. Capillary and geometrically driven fingering instability in nonflat Hele-Shaw cells. *Physical Review E*, APS, v. 95, n. 3, p. 033104, 2017.
- 73 BRANDÃO, R.; MIRANDA, J. A. Generalized elastica patterns in a curved rotating Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, APS, v. 96, n. 2, p. 023103, 2017.
- 74 BRANDÃO, R.; DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Immiscible three-dimensional fingering in porous media: A weakly nonlinear analysis. (*Artigo aceito para publicação no Physical Review Fluids*).
- 75 AL-HOUSSEINY, T. T.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering in tapered Hele-Shaw cells. *Physics of Fluids*, AIP, v. 25, n. 9, p. 092102, 2013.
- 76 MÅLØY, K. J.; FEDER, J.; JØSSANG, T. Viscous fingering fractals in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 55, p. 2688–2691, Dec 1985.
- 77 DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Control of radial fingering patterns: A weakly nonlinear approach. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 1, p. 016312, 2010.
- 78 DIAS, E. O. et al. Minimization of viscous fluid fingering: a variational scheme for optimal flow rates. *Physical Review Letters*, APS, v. 109, n. 14, p. 144502, 2012.
- 79 LI, S. et al. Control of viscous fingering patterns in a radial Hele-Shaw cell. *Physical Review Letters*, APS, v. 102, n. 17, p. 174501, 2009.
- 80 ZHENG, Z.; KIM, H.; STONE, H. A. Controlling viscous fingering using time-dependent strategies. *Physical Review Letters*, APS, v. 115, n. 17, p. 174501, 2015.
- 81 DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Taper-induced control of viscous fingering in variable-gap Hele-Shaw flows. *Physical Review E*, APS, v. 87, n. 5, p. 053015, 2013.
- 82 AL-HOUSSEINY, T. T.; CHRISTOV, I. C.; STONE, H. A. Two-phase fluid displacement and interfacial instabilities under elastic membranes. *Physical Review Letters*, APS, v. 111, n. 3, p. 034502, 2013.
- 83 JHA, B.; CUETO-FELGUEROSO, L.; JUANES, R. Fluid mixing from viscous fingering. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 19, p. 194502, 2011.

- 84 JHA, B.; CUETO-FELGUEROSO, L.; JUANES, R. Quantifying mixing in viscously unstable porous media flows. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 6, p. 066312, 2011.
- 85 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter*. [S.l.]: Basic books, 2011. v. 1.
- 86 ARFKEN, G. B.; WEBER, H.-J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. [S.l.]: Academic, 2013.
- 87 ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- 88 KAMIEN, R. D. The geometry of soft materials: a primer. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 74, n. 4, p. 953, 2002.
- 89 AVRON, J. E.; LEVINE, D. Geometry and foams: 2d dynamics and 3d statics. *Physical Review Letters*, APS, v. 69, n. 1, p. 208, 1992.
- 90 CARMO, M. P. D. et al. Differential geometry. In: *Mathematical Models*. [S.l.]: Springer, 2017. p. 155–180.
- 91 ABBENA, E.; SALAMON, S.; GRAY, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- 92 KREYSZIG, E. *Introduction to differential geometry and Riemannian geometry*. [S.l.]: University of Toronto Press, 1968.
- 93 GEMMER, J. A.; VENKATARAMANI, S. C. Shape selection in non-euclidean plates. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 240, n. 19, p. 1536–1552, 2011.
- 94 CARDOSO, S. S.; WOODS, A. W. The formation of drops through viscous instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 289, p. 351–378, 1995.
- 95 MAXWORTHY, T. Experimental study of interface instability in a Hele-Shaw cell. *Physical Review A*, APS, v. 39, n. 11, p. 5863, 1989.
- 96 EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. [S.l.]: Additamentum I (De curvis elasticas), 1744.
- 97 WAGNER, T. J.; VELLA, D. The ‘sticky elastica’: delamination blisters beyond small deformations. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 4, p. 1025–1030, 2013.
- 98 ARREAGA, G. et al. Area-constrained planar elastica. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 3, p. 031801, 2002.
- 99 DJONDJOROV, P. A.; VASSILEV, V. M.; MLADENOV, I. M. Analytic description and explicit parametrisation of the equilibrium shapes of elastic rings and tubes under uniform hydrostatic pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 53, n. 5, p. 355–364, 2011.
- 100 VASSILEV, V.; DJONDJOROV, P.; MLADENOV, I. Cylindrical equilibrium shapes of fluid membranes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 43, p. 435201, 2008.

- 101 VEERAPANENI, S. K. et al. Analytical and numerical solutions for shapes of quiescent two-dimensional vesicles. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 44, n. 3, p. 257–262, 2009.
- 102 GIOMI, L. Softly constrained films. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 34, p. 8121–8139, 2013.
- 103 HUYNEN, A.; DETOURNAY, E.; DENOËL, V. Surface constrained elastic rods with application to the sphere. *Journal of Elasticity*, Springer, v. 123, n. 2, p. 203–223, 2016.
- 104 LANGER, J.; SINGER, D. A. et al. The total squared curvature of closed curves. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 20, n. 1, p. 1–22, 1984.
- 105 LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2013.
- 106 LEVIEN, R. The elastica: a mathematical history. *University of California, Berkeley, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103*, 2008.
- 107 NYE, J.; LEAN, H.; WRIGHT, A. Interfaces and falling drops in a Hele-Shaw cell. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 5, n. 2, p. 73, 1984.
- 108 BOSI, F. et al. Self-encapsulation, or the ‘dripping’ of an elastic rod. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 471, p. 20150195, jul. 2015.
- 109 OSTERMEIR, K.; ALIM, K.; FREY, E. Buckling of stiff polymer rings in weak spherical confinement. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 6, p. 061802, 2010.
- 110 VÁZQUEZ-MONTEJO, P. et al. Cylindrical confinement of semiflexible polymers. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 6, p. 063203, 2015.
- 111 SMITH, D. E. et al. The bacteriophage $\phi 29$ portal motor can package DNA against a large internal force. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 413, n. 6857, p. 748–752, 2001.
- 112 BRUNETT, G.; CROUCH, P. E. Elastic curves on the sphere. *Advances in Computational Mathematics*, Springer, v. 2, n. 1, p. 23–40, 1994.
- 113 ARROYO, J.; GARAY, O.; MENCÍA, J. Elastic circles in 2-spheres. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 39, n. 10, p. 2307, 2006.
- 114 GUVEN, J.; VÁZQUEZ-MONTEJO, P. Confinement of semiflexible polymers. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 2, p. 026603, 2012.
- 115 MANNING, G. S. The winding of a relaxed elastic line on a cylinder. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 45, n. 4, p. 809–815, 1987.
- 116 NICKERSON, H.; MANNING, G. S. Intrinsic equations for a relaxed elastic line on an oriented surface. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 27, n. 2, p. 127–136, 1988.
- 117 MCDARGH, Z. A. et al. Constriction by dynamin: Elasticity versus adhesion. *Biophysical Journal*, Elsevier, v. 111, n. 11, p. 2470–2480, 2016.
- 118 BRYANT, R.; GRIFFITHS, P. Reduction for constrained variational problems and $\kappa \geq 2/2$ ds. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 108, n. 3, p. 525–570, 1986.

- 119 ARROYO, J.; GARAY, O.; MENCÍA, J. Elastic curves with constant curvature at rest in the hyperbolic plane. *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, v. 61, n. 10, p. 1823–1844, 2011.
- 120 GUVEN, J.; VALENCIA, D. M.; VÁZQUEZ-MONTEJO, P. Environmental bias and elastic curves on surfaces. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 35, p. 355201, 2014.
- 121 OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A.; LEANDRO, E. S. Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics, and exact solutions. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 1, p. 016304, 2008.
- 122 LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A.; OLIVEIRA, R. M. Stationary shapes of confined rotating magnetic liquid droplets. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 3, p. 036318, 2010.
- 123 LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A.; OLIVEIRA, R. M. Field-induced patterns in confined magnetorheological fluids. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 4, p. 046303, 2010.
- 124 LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Ferrofluid patterns in Hele-Shaw cells: Exact, stable, stationary shape solutions. *Physical Review E*, APS, v. 93, n. 1, p. 013129, 2016.
- 125 CARVALHO, G. D.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Stationary patterns in centrifugally driven interfacial elastic fingering. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 6, p. 063009, 2014.
- 126 GADÊLHA, H.; BRITO, N.; MIRANDA, J. A. Dynamics of viscous fingers in rotating Hele-Shaw cells with coriolis effects. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 1, p. 016305, 2007.
- 127 GADÊLHA, H. A. B. et al. Efeitos da força de coriolis na célula de Hele-Shaw girante: estabilidade linear e dinâmica não-linear. Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- 128 ALVAREZ-LACALLE, E.; GADÊLHA, H.; MIRANDA, J. A. Coriolis effects on fingering patterns under rotation. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 2, p. 026305, 2008.
- 129 TRYGGVASON, G.; AREF, H. Numerical experiments on Hele Shaw flow with a sharp interface. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 136, p. 1–30, 1983.
- 130 BRUSH, L.; SEKERKA, R.; MCFADDEN, G. A numerical and analytical study of nonlinear bifurcations associated with the morphological stability of two-dimensional single crystals. *Journal of Crystal Growth*, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 89–108, 1990.
- 131 LI, S. et al. Nonlinear theory of self-similar crystal growth and melting. *Journal of Crystal Growth*, Elsevier, v. 267, n. 3, p. 703–713, 2004.
- 132 LI, S. et al. Nonlinear stability analysis of self-similar crystal growth: control of the Mullins–Sekerka instability. *Journal of Crystal Growth*, Elsevier, v. 277, n. 1, p. 578–592, 2005.
- 133 KONDIC, L.; SHELLEY, M. J.; PALFFY-MUHORAY, P. Non-newtonian Hele-Shaw flow and the Saffman-Taylor instability. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 7, p. 1433, 1998.
- 134 FAST, P. et al. Pattern formation in non-newtonian hele-shaw flow. *Physics of Fluids*, AIP, v. 13, n. 5, p. 1191–1212, 2001.
- 135 FONTANA, J. V.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Radial viscous fingering in yield stress fluids: Onset of pattern formation. *Physical Review E*, APS, v. 87, n. 1, p. 013016, 2013.

- 136 DIAS, E. O. Viscous-fingering minimization in uniform three-dimensional porous media. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 063007, 2013.
- 137 BEER, A. G. de; ROKE, S. Nonlinear Mie theory for second-harmonic and sum-frequency scattering. *Physical Review B*, APS, v. 79, n. 15, p. 155420, 2009.
- 138 JAMES, R. A review of basic computations with spherical harmonics in geomagnetism. *Pure and Applied Geophysics*, Springer, v. 111, n. 1, p. 2273–2285, 1973.
- 139 JAMES, R. New tensor spherical harmonics, for application to the partial differential equations of mathematical physics. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 281, n. 1302, p. 195–221, 1976.
- 140 MESSIAH, A. Quantum mechanics. vol. 2. 1979.
- 141 GINGRAS, M.; RÁCZ, Z. Noise and the linear stability analysis of viscous fingering. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 10, p. 5960, 1989.
- 142 BATAILLE, J. Stabilité d'un écoulement radial non miscible. *Revue Inst. Pétrole*, v. 23, p. 1349–1364, 1968.
- 143 LEVINE, H.; TU, Y. Mean-field diffusion-limited aggregation and the Saffman-Taylor problem in three dimensions. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 2, p. 1044, 1992.