

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PEDRO FILIPE DE LUNA CUNHA

**ROTINAS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

Recife

2017

PEDRO FILIPE DE LUNA CUNHA

**ROTINAS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Engenharia
Civil da Universidade Federal de Pernambuco,
como requisito para obtenção do diploma de
mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira
Ribeiro

Recife

2017

Catálogo na fonte

Bibliotecária: Neide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

C972 Cunha, Pedro Filipe de Luna.

Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas / Pedro Filipe de Luna Cunha – 2017.

156f., il., figs., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.

Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Civil. 2. Não linearidade geométrica. 3. Métodos dos elementos finitos. 4. Rotinas computacionais. 5. Treliças. 6. Pórticos planos. 7. Lagrangeana atualizada. 8. Co-rotacional. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira (Orientador). II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

**ROTINAS COMPUTACIONAIS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR
GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

defendida por

Pedro Filipe de Cunha Luna

Considera o candidato APROVADO

Recife, 04 de agosto de 2017

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro – UFPE
(orientador)

Prof. Dr. Wellington Andrade da Silva – UFG
(examinador externo)

Prof. Dr. Ézio da Rocha Araújo – UFPE
(examinador externo)

*À Deus, aos meus pais Conceição e Luiz Carlos,
aos meus tios Jaime e Edvan, à tia Edneide (in
memoriam), à minha família e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus por tudo que tem proporcionado à minha vida.

Aos meus pais, Conceição e Luiz, que sempre me ensinaram a não desistir dos meus sonhos e que sempre me apoiaram nas difíceis decisões que são necessárias serem tomadas ao longo da vida.

A minha família, em especial aos meus tios Edvan e Jaime, os quais considero como pais e me ensinaram diversos valores que levo até hoje comigo. Gostaria de dedicar também a minha tia Edneide (*in memoriam*) que me ajudou quando saí de Rondônia e fui morar na Paraíba para estudar.

Gostaria de agradecer aos professores que passaram em minha vida. Em especial ao professor Marco Aurélio, que na graduação, despertou meu interesse na área de estruturas. Ao meu orientador, professor Paulo Marcelo, que sempre se mostrou disposto e interessado em passar seus conhecimentos aos alunos nas disciplinas da pós-graduação, e em quem me espelho na minha carreira de docente que iniciei esse ano por seu comprometimento em transmitir conhecimento.

Ao meu primo Victor e aos meus colegas de mestrado: Wesley, Renan, Renato, Hildo e Phillipe.

Aos funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, em especial, Andréa, Claudiana e Cleide.

RESUMO

A análise linear é frequentemente utilizada para o cálculo de esforços e deslocamentos a que as estruturas são submetidas. Entretanto, quando elas se tornam esbeltas ou submetidas a grandes deslocamentos, a linearidade não representa um caminho real para determinação desses parâmetros.

A análise não linear geométrica (NLG) surge como uma ferramenta eficaz no estudo dessas estruturas, pois considera os efeitos de grandes deslocamentos. Ao contrário da análise linear, o carregamento é aplicado em incrementos de carga, e utilizando um processo iterativo, as translações e rotações são atualizados a cada iteração, para solução do sistema não linear, até que a convergência desejada seja obtida (geralmente em termos de equilíbrio de forças ou deslocamentos).

Para análise NLG utilizam-se diversas formulações para construção das equações governantes do problema, como por exemplo: Lagrangeana Total, Lagrangeana Atualizada e Co-rotacional. Neste estudo foram desenvolvidas rotinas computacionais em elementos finitos para treliças planas, treliças espaciais e pórtico planos, resolvidas através do processo iterativo de Newton-Raphson, com aplicação das formulações Co-rotacional e Lagrangeana Atualizada, para o estudo dos efeitos da não linearidade geométrica.

Exemplos clássicos foram resolvidos com as rotinas computacionais propostas e demonstraram excelentes resultados. Estas são apresentadas em sua totalidade nos apêndices deste trabalho.

Palavras-chave: Não linearidade geométrica. Treliças. Pórticos planos. Lagrangeana Atualizada. Co-rotacional. Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Linear analysis is usually applied in structures for evaluation of internal forces and displacements. However, when these structural members become slender or subjected to large displacements, linearity is not a realistic path to follow.

The geometric nonlinear analysis (GNL) emerges as an effective solution to study these cases, since large displacements are computed in the formulations. Unlike the traditional linear analysis, load steps are defined and an iterative process is applied. Translations and rotations are updated at every iteration, for solution of the nonlinear system, until the desired tolerance is achieved (generally in terms of force or displacement equilibrium).

For GNL analysis several formulations are used to construct the governing equations of the problem, as for example: Total Lagrangian, Updated Lagrangian and Co-rotational. In this study, computational routines were developed in finite elements for analyses of plane and space trusses, and plane frames. An iterative Newton-Raphson process was applied using the Co-rotational and Updated Lagrangian formulations as a basis for construction of geometric stiffness matrices.

Classical examples were solved using the proposed routines and are in excellent agreement with reference results. These computer codes are fully presented in the appendices of this work.

Keywords: Geometric nonlinearity. Trusses. Plane frames. Updated Lagrangian. Co-rotational. Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Diferentes tipos de análises em pórtico plano de concreto armado	18
Quadro 1.1 - Resumo das formulações utilizadas pelos autores citados na revisão bibliográfica.	21
Figura 1.2 – Estratégia para solução não linear.....	23
Figura 2.1- Treliça do tipo Von Misses indeformada.....	27
Figura 2.2 - Treliça do tipo Von Mises deformada.....	27
Figura 2.3 – Comparação entre solução linear e não linear para os deslocamentos horizontal e vertical do nó 2	34
Figura 2.4 - Comparação entre solução não linear e linear para treliça plana.....	34
Figura 2.5 - Formulação Lagrangeana Total.....	36
Figura 2.6 - Formulação Lagrangeana Atualizada.....	37
Quadro 2.1 - Comparação entre as formulações para abordagem não linear geométrica.....	38
Figura 2.7 - Método de Newton-Raphson Modificado	42
Figura 3.1 - Sistema de coordenadas Co-rotacionais no referencial local.	44
Figura 3.2 - Sistema de coordenadas Co-rotacionais no referencial global.	46
Figura 3.3 - Elemento barra translacionado.	50
Figura 3.4 - Sistema de coordenadas no referencial global para treliças espaciais.	54
Figura 3.5 - Forças nodais no elemento de treliça espacial translacionado.	54
Figura 3.6 - Elemento de pórtico plano translacionado.	57
Figura 3.7 - Elemento de pórtico plano rotacionado.....	58
Figura 3.8 – Deformação específica para grandes deflexões.	60
Figura 3.9 – Esforços internos para elemento de pórtico plano.	65
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo para treliças planas e espaciais.	70
Figura 4.2 – Fluxograma do algoritmo para pórticos plano.....	73
Quadro 5.1 – Exemplos e validações.	74
Figura 5.1 – Análise da carga crítica – Treliça plana.	76

Figura 5.2 – Análise da carga crítica – Pórtico plano	77
Figura 5.3 – Treliça plana proposta por Yaw (2009).....	78
Figura 5.4 – Coordenadas nodais para treliça plana de Yaw (2009).....	79
Figura 5.5 – Comparação entre o código próprio versus Yaw (2009).....	80
Figura 5.6 – Treliça Espacial.....	80
Figura 5.7 - Pilar em balanço com carga axial na extremidade livre.....	82
Figura 5.8 - Pilar em balanço com carga axial na extremidade livre.....	82
Figura 5.9 - Discretização dos elementos do pilar.....	83
Figura 5.10 – Deslocamento do pilar para os diferentes ângulos de rotação.....	85
Figura 5.11 – Viga com momento.....	85
Figura 5.12 – Discretização da malha para viga engastada com momento.....	86
Figura 5.13 – Caminho do equilíbrio para os deslocamentos horizontais e verticais.....	88
Figura 5.14 – Snaps em problemas com redução do carregamento.....	89
Figura 5.15 – Gráfico do deslocamento em função da carga.....	89
Figura 5.17 – Comportamento da viga submetida a diferentes momentos.....	90
Figura 5.18 – Comportamento da viga submetida a diferentes momentos.....	90
Figura 5.19 - Discretização do pórtico em estudo.....	92
Figura 5.20 - Discretização do pórtico em estudo.....	92
Figura 5.21 – Comparação da deformada para os diferentes casos analisados.....	93
Figura B.1- Funções de forma axiais e transversais de flexão de uma barra isolada de acordo com a teoria de vigas de Navier.....	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades geométrica e do material.	32
Tabela 2.2 - Solução Analítica.	33
Tabela 5.1 – Propriedades geométricas e do material para a treliça proposta.....	76
Tabela 5.2 – Comparação do resultado via MATLAB e por Willems & Lucas (1978).	77
Tabela 5.3 - Propriedades geométricas e do material para o pórtico proposto.....	78
Tabela 5.4 - Comparação do resultado via MATLAB e por Chajes (1974) e Renton (1967). 78	
Tabela 5.5 - Propriedades geométricas e do material para treliça.	78
Tabela 5.6 – Deslocamento vertical do nó 42 em função das cargas aplicadas.	79
Tabela 5.7 – Comparação dos resultados com os obtidos por Yaw (2009).	79
Tabela 5.8 – Propriedades geométricas e do material para treliça.....	81
Tabela 5.9 - Comparação dos resultados para a treliça espacial.	81
Tabela 5.10 – Propriedades geométricas e do material para o pilar proposto.....	82
Tabela 5.11 - Valores para o fator de multiplicação da carga crítica e os respectivos ângulos de rotação do pilar.	83
Tabela 5.12 – Comparação dos Resultados para o ângulo de rotação. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.....	84
Tabela 5.13 - Comparação dos Resultados para o deslocamento horizontal do nó 21. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.	84
Tabela 5.14 - Comparação dos Resultados para o deslocamento vertical do nó 21. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.	84
Tabela 5.15 – Propriedades geométricas e do material para a viga.	85
Tabela 5.16 - Comparação dos resultados para o deslocamento horizontal do nó 21 – Viga com momento.....	87
Tabela 5.17 - Comparação dos resultados para o deslocamento vertical do nó 21 – Viga com momento.....	88
Tabela 5.18 – Propriedades geométricas dos elementos estruturais.	91

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
NL	Não linear
NLF	Não Linearidade Física
NLG	Não Linearidade Geométrica

LISTA DE SÍMBOLOS

α_0	Ângulo da barra 1 para treliça indeformada
β_0	Ângulo da barra 2 para treliça indeformada
β_i	Ângulo da barra 2 para treliças deformada
ΔD	Incremento do vetor de deslocamentos
ΔF	Incremento global de forças
Δv	Incremento global de deslocamentos
Δx	Deslocamento horizontal do nó 2
Δy	Deslocamento vertical do nó 2
ε	Deformação específica
η	Incremento de carga
σ	Tensão normal
σ_c	Tensor de Cauchy
A	Área da seção transversal
$\mathbf{B}$	Matriz de deformação-deslocamento
c_x	Cosseno do ângulo referente ao deslocamento na direção x
c_y	Cosseno do ângulo referente ao deslocamento na direção y
c_z	Cosseno do ângulo referente ao deslocamento na direção z
$conec$	Matriz de conectividades
$coord$	Matriz de conectividades
E	Módulo de elasticidade linear do material
E_c	Módulo de Elasticidade linear do concreto armado
f_{ck}	Resistência característica do concreto
$\mathbf{F}_{ext}$	Vetor de forças externas

$\mathbf{F}_{int}$	Vetor de forças internas
I	Momento de inércia
$\mathbf{k}_e$	Matriz elástica linear
$\mathbf{k}_g$	Matriz geométrica.
$\mathbf{K}_t$	Matriz de rigidez tangente
L	Comprimento do elemento na estrutural indeformada
L'	Comprimento do elemento na estrutural deformada
M_1	Momento fletor do nó inicial do elemento
M_2	Momento fletor do nó final do elemento
M^*	Fator de proporcionalidade para o momento aplicado na viga.
N	Força axial interna
nel	Número de elementos
nn	Número de nós
P_{cr}	Carga crítica
$\mathbf{R}(\mathbf{U})$	Vetor de forças residuais
tol	Tolerância
u	Deformação da barra
u_o	Posição nodal u quando $y = 0$.
V	Esforço cortante
x_0	Eixo x para coordenadas locais na configuração deformada
X_{global}	Eixo x para coordenadas globais
y_0	Eixo y para coordenadas locais na configuração deformada
Y_{global}	Eixo y para coordenadas globais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Breve Histórico Sobre a Análise Não Linear Geométrica de Treliças Planas, Espaciais e Pórticos Planos	19
1.2	Objetivos do Trabalho	22
1.2.1	Objetivo Geral	22
1.2.2	Objetivos Específicos	22
1.3	Metodologia Proposta	22
1.4	Abrangências e Limitações do Trabalho	23
1.5	Estrutura da Dissertação	23
2	FUNDAMENTOS DA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	25
2.1	Não Linearidade Física	25
2.2	Não Linearidade Geométrica	25
2.3	Não Linearidade de Contato	26
2.4	Exemplos em Estruturas da Engenharia Civil	26
2.5	Solução Analítica para uma Treliça Plana	27
2.6	Formulações Gerais para Abordagem NLG	35
2.6.1	Formulação Lagrangeana Total	35
2.6.2	Formulação Lagrangeana Atualizada	36
2.6.3	Formulação Co-rotacional	37
2.6.4	Comparação Entre as Formulações	38
2.7	Estratégias para Solução Numérica de Sistemas Não Lineares	39
2.7.1	Método de Newton-Raphson	39
2.7.2	Método de Newton-Raphson Modificado	41
2.8	Interação Carga-Deformação	42
3	FORMULAÇÕES PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	44
3.1	Formulação Co-Rotacional Para Treliças Planas	44
3.1.1	Sistema de Referencial Local para Treliças Planas	44
3.1.2	Sistema de Referencial Global Para Treliças Planas	46

3.1.3	Matriz de Rigidez Tangente Para Treliças Planas	47
3.2	Formulação Lagrangeana Atualizada para Treliças Planas	50
3.3	Formulação Co-rotacional para Treliças Espaciais	53
3.3.1	Sistema de Referencial Global Para Treliças Espaciais	53
3.3.2	Matriz de Rigidez Tangente Para Treliças Espaciais	56
3.4	Formulação Lagrangeana Atualizada para Análise Não Linear Geométrica para Pórticos Planos	57
3.4.1	Definições Geométricas para Pórticos Planos	57
3.4.2	Matriz de Rigidez Geométrica	58
3.4.3	Esforços Internos	64
3.5	Estabilidade Estrutural	65
4	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	68
4.1	Estrutura da Rotina Computacional para Análise Não Linear Geométrica de Treliças Planas	68
4.2	Estrutura da Rotina Computacional para Análise Não Linear Geométrica de Pórticos Planos	71
5	EXEMPLOS E VALIDAÇÕES	74
5.1	Estabilidade Estrutural – Treliça Plana - Willems & Lucas (1978)	76
5.2	Estabilidade Estrutural – Pórtico Plano – Chajes (1974) E Renton (1967)	77
5.3	Treliça Plana Proposta Por Yaw (2009)	78
5.4	Treliça Espacial Composta Por 12 Barras	80
5.5	Pilar em Balanço com Carga Axial na Extremidade Livre – Timoshenko & Gere (1961)	81
5.6	Viga em Balanço Submetida a um Momento Fletor – Urthaler & Reddy (2005)	85
5.7	Edifício De Múltiplos Pavimentos	90
6	CONCLUSÕES	94
6.1	Sugestões Para Trabalhos Futuros	94

REFERÊNCIAS	95
APÊNDICE A - MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS	99
APÊNDICE B - FUNÇÕES DE FORMA PARA PÓRTICO PLANO	100
APÊNDICE C - APLICAÇÃO DO TEOREMA DE CASTIGLIANO EM ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO	101
APÊNDICE D - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 2 – EXEMPLO TRELIÇA PLANA - KASSIMALI (2012)	103
APÊNDICE E - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.1 - TRELIÇA PLANA – CARGA CRÍTICA	108
APÊNDICE F - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.2 - PÓRTICO PLANO – CARGA CRÍTICA	112
APÊNDICE G - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.3 - TRELIÇA PLANA – YAW (2009)	119
APÊNDICE H - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.4 - TRELIÇA ESPACIAL	124
APÊNDICE I - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.5 – PÓRTICO PLANO	130
APÊNDICE J - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.6 – PÓRTICO PLANO	139
APÊNDICE K - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.7 – PÓRTICO PLANO	147

1 INTRODUÇÃO

A análise linear ainda é amplamente utilizada no meio acadêmico para determinação de deslocamentos, rotações e esforços de uma estrutura, pelo fato de ser mais prática e com maior facilidade de implementação computacional.

De Borst *et. al* (2012) mencionam que os problemas de estabilidade estrutural constituem um importante campo de aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF). Geralmente, a instabilidade estrutural é assumida como sendo causada apenas pela não linearidade geométrica (NLG), mas deve-se salientar a relevância da não linearidade física (NLF).

Ainda que nos projetos estruturais as verificações quanto à flambagem e o desempenho da estrutura sejam relevantes para análise do projetista, as considerações de grandes deslocamentos e fator P-Delta, garantem que a edificação mantenha sua estabilidade.

A análise não linear mostra-se relevante se a rigidez do elemento altera suas condições de funcionamento. Se as mudanças na matriz de rigidez modificam somente a forma geométrica, o comportamento não linear é dito geométrico.

Todavia, estruturas mais esbeltas estão sendo utilizadas com maior frequência, tanto por fatores econômicos, quanto por arquitetônicos. Logo, exige-se cada vez mais do projetista conhecimentos sobre a não linearidade física e geométrica.

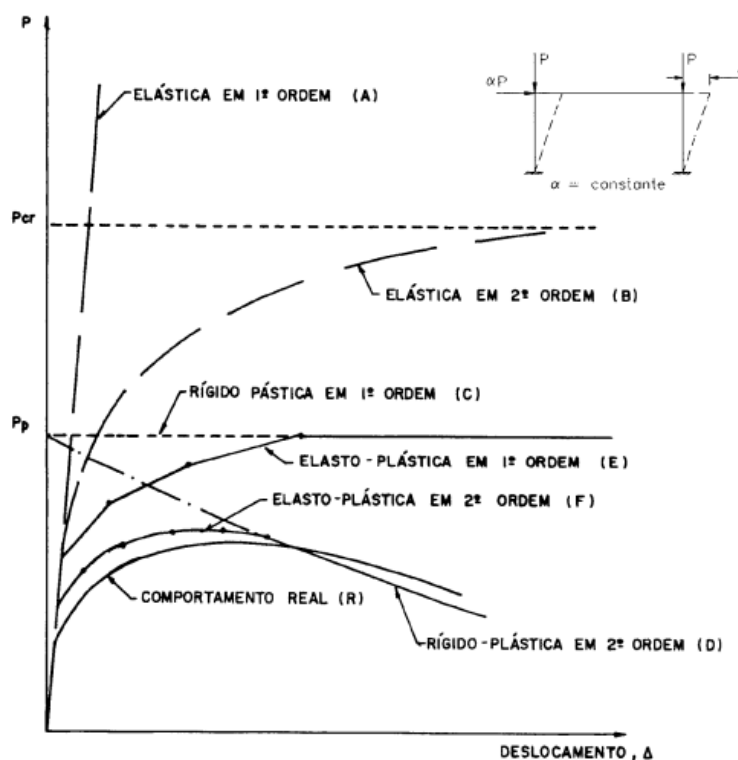
A NBR 6118 (ABNT,2014) indica um método simplificado que consiste na aplicação de um coeficiente de majoração de esforços horizontais, oriundos da análise linear, a fim de considerar uma aproximação para a não linearidade geométrica. Ainda de acordo com a mesma norma, existe uma solução aproximada para determinação dos esforços globais de 2ª ordem que consiste na avaliação dos esforços finais (1ª ordem + 2ª ordem) a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação de carregamento considerada por 0,95 γ_z . Esse processo só é válido para $\gamma_z \leq 1,3$.

Segundo a NBR 8800 (ABNT, 2004) é necessária uma análise mais rigorosa quando a estrutura apresentar grandes deslocamentos, tanto para consideração da não linearidade geométrica quanto para física.

De acordo com Gellati (2012) a NLG considera a configuração deformada para o equilíbrio de forças da estrutura e/ou a não linearidade das relações deformação específica versus deslocamento. Para as edificações existe uma interação entre as forças verticais atuantes e os deslocamentos horizontais a que a estrutura está submetida, também conhecida como

análise de segunda ordem global. Na figura 1.1 apresenta-se um comparativo entre as diferentes análises para um pórtico plano em concreto armado.

Figura 1.1 – Diferentes tipos de análises de pórtico plano em concreto armado.



Fonte: Adaptada de SILVA, 1996.

Paraski (2012) menciona em seu trabalho o crescente interesse dos pesquisadores no emprego de técnicas de análise de estruturas geometricamente não lineares, com grande foco em desenvolvimento de formulações através do MEF para sistemas reticulados planos, possibilitando uma análise rápida e eficaz de uma gama de estruturas reais, que posteriormente podem ser adaptadas para diversos tipos de elementos.

Logo, observa-se que a análise não linear é uma ferramenta que necessita ser explorada a fim de que se obtenha resultados para análise estrutural de modo mais próximo à realidade. Surge como proposta deste trabalho a análise não linear geométrica através de rotinas computacionais desenvolvidas via MATLAB (2013) para treliças planas, espaciais e pórticos planos, utilizando o Método dos Elementos Finitos com formulações Co-rotacional e Lagrangeana Atualizada.

1.1 Breve Histórico Sobre a Análise Não linear Geométrica de Treliças Planas, Espaciais e Pórticos Planos

A análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos teve início pela não linearidade geométrica e foi introduzida por Tuner *et al.* (1960).

Timoshenko e Gere (1963) no livro “Theory of Elastic Structural” formularam uma solução analítica incluindo a não linearidade geométrica para elementos do tipo vigas-colunas.

Przemieniecki (1968) abordou em seu livro “Theory of Matrix Structural Analysis” matrizes de rigidez geométricas para treliças e pórticos planos, baseadas em formulações lagrangeanas.

Zienkiewicz (1971) apresenta a importância da implementação incremental dos deslocamentos na análise não linear através atualização da matriz de rigidez tangente do elemento.

Yang (1973) desenvolveu um estudo para não linearidade de pórticos planos, utilizando uma abordagem tangencial incremental de ponto médio e coordenada, com formulação Lagrangeana Atualizada.

Wood e Zienkiewicz (1977) estudaram a não linearidade geométrica implementada via elementos finitos para vigas, barras, arcos e placas assimétricas utilizando a formulação Lagrangeana Total e o processo de Newton-Raphson Modificado para solução não linear.

Willems & Lucas (1978) analisaram a não linearidade geométrica de treliças e pórticos planos utilizando a formulação Lagrangeana Atualizada, verificando também a estabilidade estrutural dessas estruturas.

Meek e Tan (1984) abordaram a análise não linear geométrica de pórticos planos, utilizando o comprimento de arco de Crisfield e formulação Lagrangeana Total.

So e Chan (1991) estudaram pórticos planos submetidos à análise não linear geométrica, através da formulação Lagrangeana Total.

Yang (1991) realizou o estudo da não linearidade geométrica de pórtico planos, partindo de uma abordagem incremental tangencial de ponto médio e coordenadas para a solução da parcela não linear.

Araripe (1998) trabalhou com a análise não linear geométrica de pórticos planos com a

formulação Lagrangeana Total.

Pinto (2002) discutiu os aspectos inerentes à análise não linear física (NLF) e geométrica (NLG) das estruturas de contraventamento em concreto armado.

Urthaler e Reddy (2005) formularam modelos para estruturas planas baseadas em três teorias: Euler-Bernoulli, Timoshenko e a teoria de Reddy para elementos submetidos à grandes deslocamentos e pequenas tensões, utilizando a formulação Co-rotacional.

Yaw (2009) utilizou a formulação Co-rotacional para o estudo de treliças planas, mostrando o passo a passo para implementação do algoritmo de controle de cargas e deslocamentos.

Greco e Vicente (2009) apresentaram soluções analíticas de treliças planas do tipo Von Mises. A metodologia do trabalho baseou-se na cinemática do problema, nas leis constitutivas elásticas e no equilíbrio de forças nodais.

Carvalho (2010) abordou a aplicação do Método dos Elementos Finitos para pórticos planos através da formulação Co-rotacional, utilizando o processo incremental-iterativo de Newton-Raphson.

Yaw (2011) aplicou a formulação Co-rotacional, agora, para análise não linear geométrica de treliças espaciais.

Kassimali (2012) apresentou uma formulação Co-rotacional para análise de treliças planas e as técnicas computacionais necessárias para a solução do sistema não linear através de Newton-Raphson.

Paraski (2012) mostrou a análise não linear de pórticos planos via MATLAB (2013), descrevendo todo o processo de implementação computacional com aplicações em exemplos consagrados e novos, aplicando a formulação Lagrangeana Total.

Lacerda (2014) apresentou a análise não linear geométrica de treliças planas e espaciais pelo Método dos Elementos Finitos Posicional.

Oliveira (2016) analisou a NLG em elementos de pórticos planos, utilizando a formulação Co-rotacional e elementos de viga de Timoshenko.

Semelhante a Kassimali (2012) este trabalho apresenta a solução não linear geométrica para treliças planas, aplicando o processo de Newton-Raphson, utilizando formulação Co-rotacional, expandindo a análise para treliças espaciais. Ao contrário de Paraski (2012) que

adotou a formulação Lagrangeana Total para NLG em pórticos planos, nesse estudo foi usada a formulação Lagrangeana Atualizada. Nos apêndices estão dispostas as rotinas computacionais desenvolvidas e aptas para serem usadas no MATLAB (2013).

O quadro 1.1 apresenta um resumo de alguns trabalhos desenvolvidos na área da análise não linear geométrica:

Quadro 1.1 - Resumo das formulações utilizadas pelos autores citados na revisão bibliográfica.

ANO	AUTOR(ES)	ESTRUTURA ESTUDADA	FORMULAÇÃO UTILIZADA
1968	Przemieniecki	Treliças e pórticos planos	Lagrangeana Atualizada
1973	Yang	Pórticos planos	Lagrangeana Atualizada
1977	Wood e Zienkiewicz	Vigas, barras, arcos e placas assimétricas.	Lagrangeana Total
1978	Willems & Lucas	Treliças e pórticos planos	Lagrangeana Atualizada
1984	So e Chan	Pórticos planos	Lagrangeana Total
1991	Meek e Tan	Pórticos planos	Lagrangeana Total
1991	Yang	Pórtico planos	Lagrangeana Atualizada
1998	Araripe	Pórticos planos	Lagrangeana Total
2002	Pinto	Pórticos planos	Lagrangeana Total
2005	Urthaler e Reddy	Pórticos planos	Co-rotacional
2009	Yaw	Treliças planas	Co-rotacional
2010	Carvalho	Pórticos planos	Co-rotacional
2011	Yaw	Treliças espaciais	Co-rotacional
2012	Kassimali	Treliças planas	Co-rotacional
2012	Paraski	Pórticos planos	Lagrangeana Atualizada
2014	Lacerda	Treliças planas e espaciais	Lagrangeana Total
2016	Oliveira	Pórticos planos	Co-rotacional

1.2 Objetivos do Trabalho

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolvimento de rotinas computacionais para análise não linear geométrica via MATLAB (2013) para treliças planas, espaciais e pórticos planos, utilizando o Método dos Elementos Finitos com formulações Co-rotacional e Lagrangeana Atualizada.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Obter matrizes de rigidez geométricas para treliças planas, treliças espaciais e pórticos planos;
- Desenvolver algoritmos em MATLAB (2013) para análise não linear geométrica;
- Utilizar algoritmo de controle de força para solução não linear das estruturas;
- Validar as rotinas propostas.

1.3 Metodologia Proposta

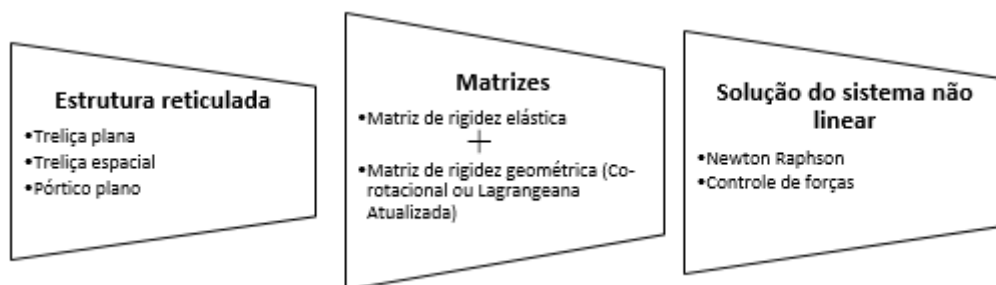
O princípio do estudo parte da obtenção das matrizes de rigidez elástica e geométrica para as estruturas estudadas. Essas foram avaliadas com abordagens Lagrangeana Atualizada e Co-rotacional.

Posteriormente foi desenvolvido um processo iterativo-incremental para solução de sistema de equações não linear com o método Newton-Raphson e controle de forças.

Definidos os itens explicados anteriormente, desenvolveram-se as rotinas computacionais via elementos finitos para os três casos estudados (treliças planas, treliças espaciais e pórticos planos). A última etapa surge com a validação dos códigos desenvolvidos, assim, fez-se uso de exemplos consagrados na literatura técnica para isso.

Apresenta-se na figura 1.2 uma sequência com a metodologia proposta neste trabalho para a solução de estruturas submetidas à análise não linear geométrica.

Figura 1.2 – Estratégia para solução não linear.



1.4 Limitações do Trabalho

As principais limitações deste trabalho são:

- Apenas algoritmo de controle de carga;
- Consideração de material elástico e linear.

1.5 Estrutura da Dissertação

Nesta seção detalha-se a estrutura adotada para melhor abordar este trabalho de maneira a torná-lo mais acessível ao leitor.

Neste capítulo foi introduzido o conceito de análise não linear, os primeiros estudos relativos à análise não linear em estruturas e a evolução no tema por parte de diversos pesquisadores.

No capítulo 2, apresenta-se o conceito de não linearidade geométrica e um caso prático na engenharia civil. Descreve-se uma solução analítica para uma treliça plana simples, estratégias para solução numérica (Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado) e abordagens para NLG.

No terceiro capítulo são desenvolvidas as matrizes para análise não linear geométrica de treliças e pórticos. A estabilidade estrutural para treliças planas e pórticos planos também é abordada neste capítulo, apresentando o conceito de carga crítica para estruturas submetidas a não linearidade geométrica.

O quarto capítulo descreve os aspectos computacionais envolvidos no desenvolvimento das rotinas computacionais para análise não linear geométrica.

O capítulo 5 é dedicado a validação e aplicação de exemplos com os códigos desenvolvidos via MATLAB (2013) de acordo com soluções propostas na literatura.

A conclusão deste trabalho encontra-se no capítulo 6, com comentários sobre o trabalho desenvolvido, considerações sobre os resultados obtidos e recomendações para trabalhos futuros.

No Apêndice apresenta-se a matriz de rigidez linear, funções de forma e aplicação do Teorema de Castigliano para pórticos planos, e as rotinas computacionais em elementos finitos desenvolvidas.

2 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Neste capítulo serão apresentados os tipos de não linearidades, incluindo a apresentação de um problema básico com atualização da geometria (treliça com duas barras e formulação analítica). Haverá uma breve descrição de problemas e aplicações envolvendo estruturas da engenharia civil, formulação geral dos problemas em termos de rigidez linear e geométrica e as estratégias para solução do sistema não linear.

2.1 Não Linearidade Física

A não linearidade física é fruto das relações constitutivas do material, pelo fato, que a partir de um certo nível de carregamento, o material não se comporta de maneira linear (Lei de Hooke).

Segundo Lacerda (2014), diversos materiais apresentam um comportamento não linear, tais como: elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência, dentre eles, pode-se citar: o concreto, o aço, o solo e o concreto betuminoso. Metais em alta temperatura, argila, borracha e polímeros apresentam viscoelasticidade.

Pinto (1997) ressalta que na análise estrutural de edifícios em concreto armado é importante que os deslocamentos laterais sejam avaliados da melhor maneira possível, pois, os efeitos de segunda ordem devidos à deslocabilidade horizontal da estrutura só podem ser corretamente analisados se a posição final desta for determinada de modo satisfatório. Ao passo que os deslocamentos horizontais oriundos de uma análise estrutural são diretamente afetados pela rigidez dos membros constituintes da estrutura, logo, necessita-se estimar a rigidez utilizando os processos que considerem a não linearidade física na estrutura.

A evolução do estudo da não linearidade é evidente ao longo dos anos, como foi mostrado no capítulo anterior, trazendo melhorias nas formulações teóricas, como nas rotinas computacionais com um potencial elevado, agilizando e possibilitando economia para o processamento dos dados.

2.2 Não Linearidade Geométrica

O comportamento não linear geométrico das estruturas é resultado das considerações das deformações de 2ª ordem, em que o equilíbrio é determinado numa posição deformada da estrutura, a partir do instante que a estrutura começa a sofrer grandes deslocamentos.

Carvalho (2010) menciona que a análise não linear geométrica das estruturas é necessária em alguns casos, tais como: estruturas submetidas à grandes deformações, pois sofrem grandes alterações geométricas e estão sujeitas à grandes rotações.

Pereira (2002) explica que a formulação para a análise não linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não linear, que faz parte da mecânica dos sólidos. A não linearidade geométrica aparece na teoria da elasticidade, tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas.

A análise não linear de uma estrutura ou a determinação de sua curva de equilíbrio, pode ser realizada por meio de procedimentos incrementais, iterativos ou incrementais-iterativos (JÚNIOR, 2012).

A principal diferença entre a análise linear e não linear geométrica deve-se que, na segunda, as condições de equilíbrio são condicionadas a configuração atual da estrutura, após ser submetida a uma parcela do carregamento.

2.3 Não Linearidade de Contato

A não linearidade de contato está relacionada à variação nas condições iniciais (tempo) e de contorno (apoios e carregamentos) da estrutura.

2.4 Exemplos em Estruturas da Engenharia Civil

De acordo com Pereira (2002) a maioria das estruturas de engenharia exibem um comportamento linear elástico quando submetidas às cargas de serviço, entretanto, existem exceções como arcos, edifícios altos e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração. Antes de alcançar seu limite de resistência, quase todas irão apresentar uma resposta não linear relevante.

No projeto de concreto armado, a não linearidade é função da seção do elemento estrutural e da armadura. Além disso, no dimensionamento de edifícios esbeltos, necessita-se que o engenheiro projetista leve em consideração a estabilidade global, pelo fato da edificação ser solicitada verticalmente (sobrecarga, peso próprio, peso da alvenaria, etc.) e horizontalmente (principalmente carga do vento).

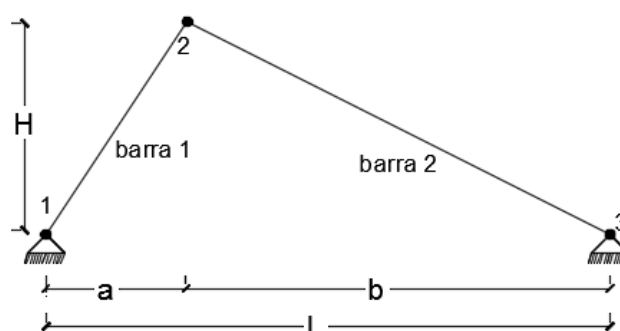
Gellati (2012) descreve em seu trabalho o recente surgimento de métodos simplificados

para consideração de NLF e NLG, introduzidos principalmente por programas comerciais no Brasil, como por exemplo: Eberick (AltoQi) e o Sistema CAD/TQS (TQS Informática). Logo, observa-se mais uma justificativa no estudo da não linearidade em estruturas para auxílio de projetistas no entendimento ao comportamento NL, bem como a importância do desenvolvimento de programas com modelos não lineares refinados para verificação ou desenvolvimento de métodos simplificados.

2.5 Solução Analítica para uma Treliça Plana

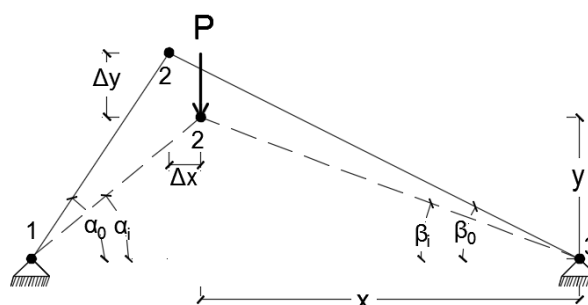
A treliça composta por duas barras mostrada na figura 2.1 foi proposta por Kassimali (2012), apresentando solução numérica. As barras possuem rigidez constante EA .

Figura 2.1- Treliça do tipo Von Misses indeformada.



Inicialmente, antes da aplicação da carga P , a treliça apresenta uma estrutura indeformada com ângulos α_0 e β_0 . Após a aplicação do carregamento concentrado, a barra deforma-se, como mostra a figura 2.2.

Figura 2.2 - Treliça do tipo Von Mises deformada.



Aplicando o método dos nós para o nó central, através do somatório de esforços horizontais igual a zero, tem-se:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad (2.1)$$

$$F_1 \cos \alpha_i = F_2 \cos \beta_i \quad (2.2)$$

$$F_1 = \frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} F_2 \quad (2.3)$$

Para o equilíbrio de forças verticais, utiliza-se a equação (2.4) e encontra-se uma equação correspondente para força axial na barra 2 (F_2).

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad (2.4)$$

$$F_1 \operatorname{sen} \alpha_i + F_2 \operatorname{sen} \beta_i = P \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.3) em (2.5):

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \operatorname{sen} \alpha_i F_2 + F_2 \operatorname{sen} \beta_i = P \quad (2.6)$$

$$F_2 \cos \beta_i \tan \alpha_i + F_2 \operatorname{sen} \beta_i = P \quad (2.7)$$

$$F_2 (\cos \beta_i \tan \alpha_i + \operatorname{sen} \beta_i) = P \quad (2.8)$$

$$F_2 = \frac{P}{(\cos \beta_i \tan \alpha_i + \operatorname{sen} \beta_i)} \quad (2.9)$$

O exemplo analisado indica uma treliça elástica com não linearidade geométrica. Combinado com a cinemática do problema, é possível determinar duas equações que relacionam o deslocamento vertical e horizontal.

$$\delta_1 = \frac{(L - x)}{\cos \alpha_i} - \frac{a}{\cos \alpha_0} \quad (2.10)$$

$$\delta_2 = \frac{x}{\cos \beta_i} - \frac{b}{\cos \beta_0} \quad (2.11)$$

Aplicando a lei de Hooke para barra 1, na estrutura deformada:

$$\delta_1 = \frac{F_1 L_1}{EA} \quad (2.12)$$

$$L_1 = \frac{a}{\cos \alpha_0} \quad (2.13)$$

$$F_1 = \delta_1 EA \frac{\cos \alpha_0}{a} \quad (2.14)$$

Substituindo as equações (2.9) em (2.3):

$$F_1 = \frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} F_2 = \frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left(\frac{P}{\cos \beta_i \tan \alpha_i + \sin \beta_i} \right) \quad (2.15)$$

E agora (2.10) e (2.15) em (2.14):

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left(\frac{P}{\cos \beta_i \tan \alpha_i + \sin \beta_i} \right) = \left(\frac{L-x}{\cos \alpha_i} - \frac{a}{\cos \alpha_0} \right) EA \frac{\cos \alpha_0}{a} \quad (2.16)$$

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left(- \frac{P}{\cos \beta_i \tan \alpha_i + \sin \beta_i} \right) = EA \left[\frac{\cos \alpha_0 (L-x)}{a \cos \alpha_i} - 1 \right] \quad (2.17)$$

Novamente pela lei de Hooke, para a barra 2:

$$\delta_2 = \frac{F_2 L_2}{EA} \quad (2.18)$$

$$L_2 = \frac{b}{\cos \beta_0} \quad (2.19)$$

$$F_2 = \delta_2 EA \frac{\cos \beta_0}{b} \quad (2.20)$$

Substituindo as equações (2.9) e (2.11) em (2.18):

$$\frac{P}{\cos \beta_i \tan \alpha_i + \sin \beta_i} = \left(\frac{x}{\cos \beta_i} - \frac{b}{\cos \beta_0} \right) EA \frac{\cos \beta_0}{b} \quad (2.21)$$

$$\frac{P}{\cos \beta_i \tan \alpha_i + \sin \beta_i} = EA \left(\frac{x \cos \beta_0}{b \cos \beta_i} - 1 \right) \quad (2.22)$$

Observa-se que o termo da esquerda da equação (2.22) está inserido na equação (2.17),

é possível determinar uma expressão que não dependa do carregamento externo, conforme a equação (2.23).

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left[EA \left(\frac{x \cos \beta_0}{b \cos \beta_i} - 1 \right) \right] = EA \left[\frac{\cos \alpha_0 (L - x)}{a \cos \alpha_i} - 1 \right] \quad (2.23)$$

,

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left[\left(\frac{x \cos \beta_0}{b \cos \beta_i} - 1 \right) \right] = \left[\frac{\cos \alpha_0 (L - x)}{a \cos \alpha_i} - 1 \right] \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.11) em (2.20):

$$F_2 = \left(\frac{x}{\cos \beta_i} - \frac{b}{\cos \beta_0} \right) EA \frac{\cos \beta_0}{b} \quad (2.25)$$

$$F_2 = \left(\frac{x \cos \beta_0}{b \cos \beta_i} - 1 \right) EA \quad (2.26)$$

A ideia básica para solução analítica para treliça é escolher um valor inicial para β_i próximo ao valor que a solução se aproxime. Através das equações (2.31) e (2.32), obtidas por relações trigonométricas na figura 2.2, é possível calcular os valores para x e y .

$$\tan \beta_i = \frac{y}{x} \quad (2.27)$$

$$y = x \tan \beta_i \quad (2.28)$$

$$\tan \alpha_i = \frac{y}{L - x} \quad (2.29)$$

Substituindo (2.28) em (2.29) e isolando a variável x :

$$\tan \alpha_i = \frac{x \tan \beta_i}{L - x} \quad (2.30)$$

$$x = \frac{L \tan \alpha_i}{\tan \beta_i + \tan \alpha_i} \quad (2.31)$$

A equação para o deslocamento em y é encontrada substituindo (2.31) em (2.28):

$$y = \frac{L \tan \alpha_i + \tan \beta_i}{\tan \beta_i + \tan \alpha_i} \quad (2.32)$$

Substituindo a equação (2.31) em (2.24):

$$\frac{\cos \beta_i}{\cos \alpha_i} \left[\left(\frac{L \tan \alpha_i}{\tan \beta_i + \tan \alpha_i} \cos \beta_0 \right) - 1 \right] = \left[\frac{\cos \alpha_0 \left(L - \frac{L \tan \alpha_i}{\tan \beta_i + \tan \alpha_i} \right)}{a \cos \alpha_i} - 1 \right] \quad (2.33)$$

As informações geométricas e do material para a treliça apresentada anteriormente estão indicadas na tabela 2.1:

Tabela 2.1 – Propriedades geométrica e do material.	
Área da seção transversal (m²)	Módulo de Elasticidade (GPa)
1,20E-03	10,0

Através da equação não linear (2.33) é possível determinar valores para β_i , em seguida pelas equações (2.31) e (2.32) determinam-se os valores de x e y , e subtraindo do comprimento L e da altura H , respectivamente, tem-se Δx e Δy . Para o cálculo das forças, utilizam-se as equações (2.3), (2.5) e (2.26). Na tabela 2.2 apresenta-se os valores calculados a partir da adoção de um valor para β_i .

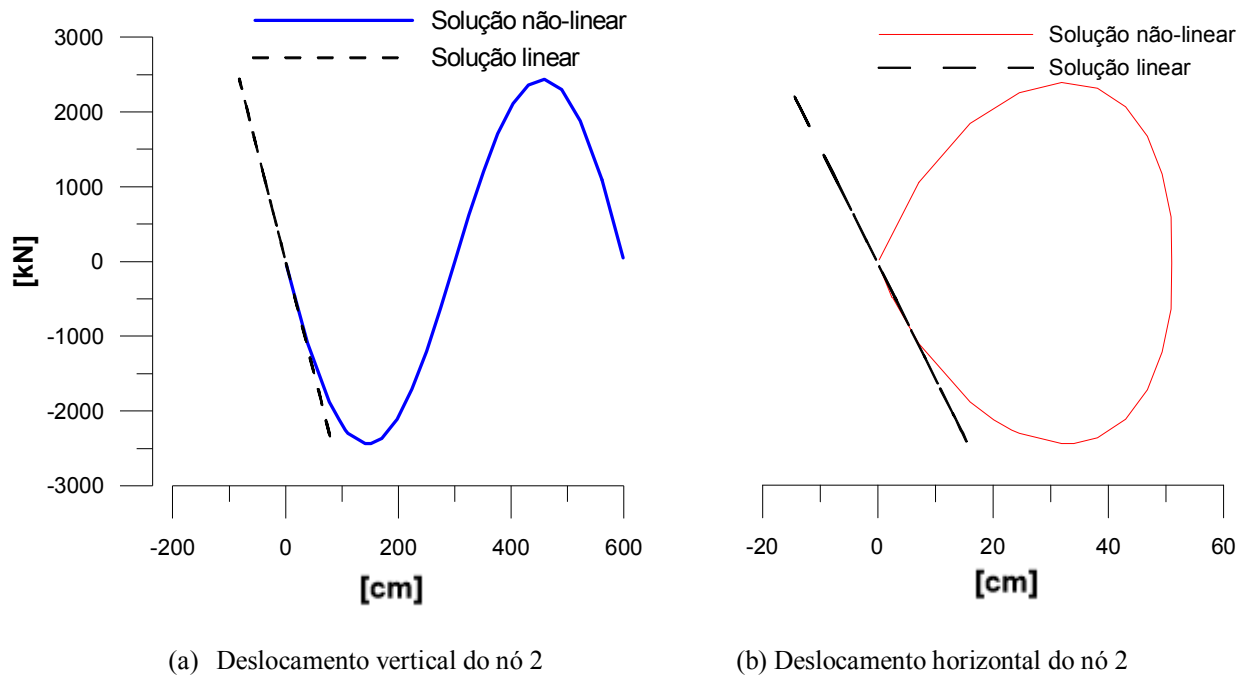
Tabela 2.2 - Solução Analítica.

α_i (rad)	β_i (rad)	Δx (m)	Δy (m)	F1 (kN)	F2 (kN)	P (kN)
0,98	0,641403793	0,002232578	-0,01475479	-36,691	-25,5071	-45,73325
0,952	0,621141796	0,0254329	-0,15566407	-378,607	-270,055	-465,56731
0,9	0,586359554	0,071120131	-0,39006095	-910,885	-679,762	-1089,65514
0,8	0,525246462	0,16090104	-0,77505297	-1677,27	-1350,63	-1880,44400
0,753	0,497613365	0,201563155	-0,93666023	-1957,73	-1625,59	-2114,70025
0,7159	0,475879098	0,232350116	-1,05821272	-2152,84	-1827,36	-2250,05320
0,7	0,46654416	0,245132274	-1,10895117	-2230,33	-1909,98	-2295,93364
0,6	0,406959434	0,319067367	-1,41344065	-2648,26	-2380,09	-2437,40564
0,5673	0,387001607	0,340651151	-1,50861701	-2762,89	-2516,19	-2434,30326
0,5	0,345016422	0,380878663	-1,69932006	-2970,6	-2770,2	-2361,09567
0,4	0,28025631	0,430242297	-1,97251004	-3218,46	-3084,75	-2106,57440
0,3	0,212814398	0,467572837	-2,23669027	-3403,47	-3326,5	-1708,39046
0,2	0,143167664	0,493552592	-2,49453187	-3532,16	-3497,54	-1200,75777
0,1	0,071978431	0,508836804	-2,74827668	-3608,16	-3599,46	-619,07474
0	0,000000	0,510000	3,000000	-3624	-3624	0,00000
-0,1	-0,07197843	0,508836804	-3,25172332	-3608,16	-3599,46	619,07474
-0,2	-0,14316766	0,493552592	-3,50546813	-3532,16	-3497,54	1200,75777
-0,3	-0,2128144	0,467572837	-3,76330973	-3403,47	-3326,5	1708,39046
-0,4	-0,28025631	0,430242297	-4,02748996	-3218,46	-3084,75	2106,57440
-0,5	-0,34501642	0,380878663	-4,30067994	-2970,6	-2770,2	2361,09567
-0,6	-0,40695943	0,319067367	-4,58655935	-2648,26	-2380,09	2437,40564
-0,7	-0,46654416	0,245132274	-4,89104883	-2230,33	-1909,98	2295,93364
-0,8	-0,52524646	0,16090104	-5,22494703	-1677,27	-1350,63	1880,44400
-0,9	-0,58635955	0,071120131	-5,60993905	-910,885	-679,762	1089,65514
-0,98	-0,64140379	0,002232578	-5,98524521	-36,691	-25,5071	45,73325

Os resultados dos deslocamentos do nó 2 encontrados por Kassimali (2012) através da solução numérica são referentes a uma força P equivalente a 2250 kN, nos valores de 0,23232 metros e -1,0581 metros nos eixos x e y , respectivamente, equivalentes aos encontrados pela solução analítica.

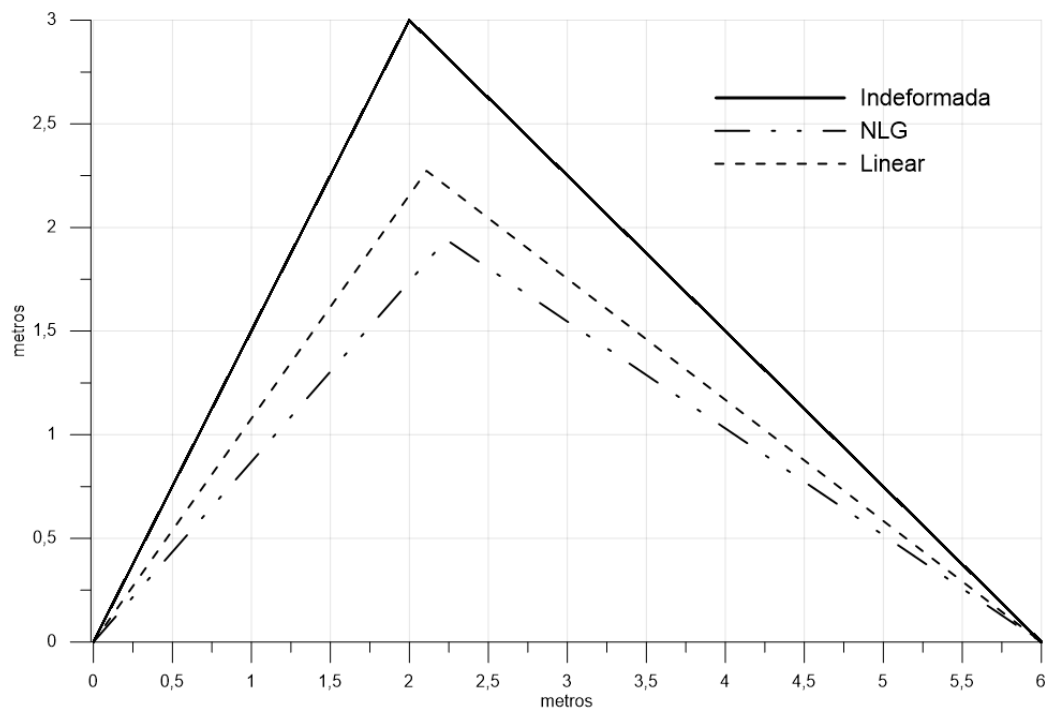
Na figura 2.3 observa-se o caminho dos deslocamentos em x e y , computando a força P correspondente a cada deslocamento.

Figura 2.3 – Comparação entre solução linear e não linear para os deslocamentos horizontal e vertical do nó 2.



Apresenta-se na figura 2.4 graficamente os valores encontrados para os deslocamentos pela solução não linear e linear para uma carga $P = -2250$ kN.

Figura 2.4 - Comparação entre solução não linear e linear para treliça plana.



Apesar de tratar-se de um exemplo simples, constata-se que a inclusão da não linearidade geométrica elevou consideravelmente os valores para o deslocamento nodal e os esforços nas barras.

2.6 Formulações Gerais para Abordagem NLG

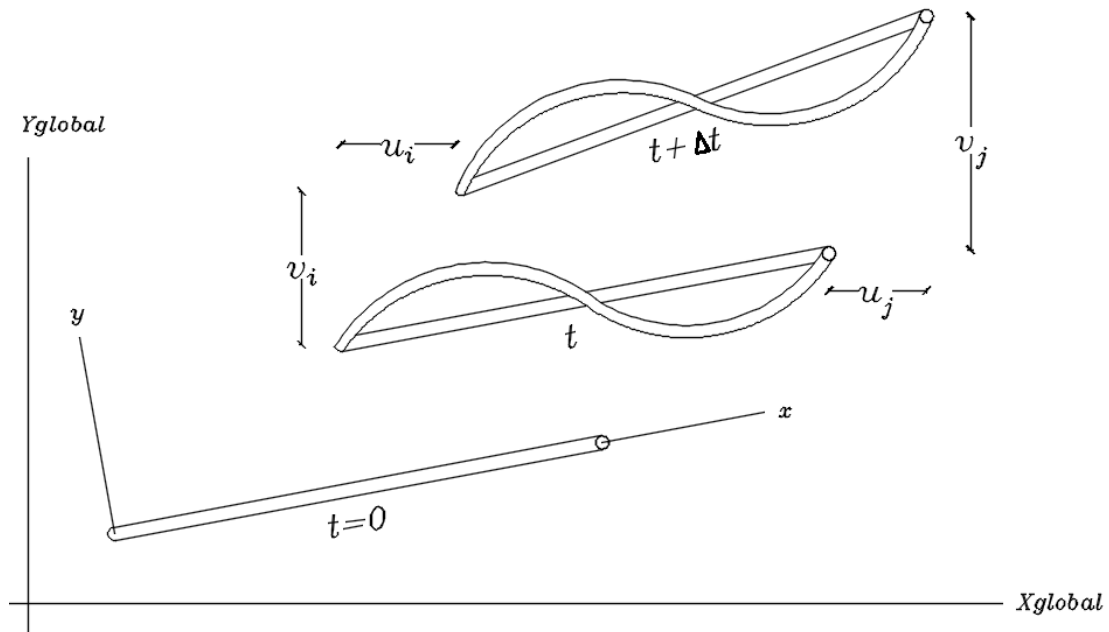
Existem na literatura diversas abordagens para formulação em termos de rigidez linear e geométrica para análise estrutural. Nesta seção são apresentados os detalhes de três abordagens clássicas: Formulação Lagrangeana Total, Atualizada e Co-rotacional.

2.6.1 Formulação Lagrangeana Total

Carvalho & Matos (2001) definem que o formalismo lagrangeano permite obter as equações de movimento de um sistema de modo elegante e sistemático, ou seja, separando a parcela linear da não linear, indo de encontro aos métodos baseados nas leis de Newton e este formalismo não exige a identificação das forças envolvidas, o que torna a análise mais abstrata. Todavia é possível simplificar o tratamento de sistemas de maior complexidade, especialmente quando não é relevante a determinação das forças associadas às restrições ao movimento dos elementos.

De acordo com Paraski (2012), na formulação Lagrangeana Total os deslocamentos decorrentes de um dado carregamento são medidos em relação à configuração inicial do sistema. A maioria das formulações de elementos finitos para análise de segunda ordem de estruturas encontradas na literatura é baseada em referenciais lagrangeanos.

Na formulação Lagrangeana Total os deslocamentos são mensurados a partir do elemento indeformado, como é observado na figura 2.5:

Figura 2.5 - Formulação Lagrangeana Total.

Na figura 2.5 tem-se que os eixos de coordenadas globais são representados por X_{global} e Y_{global} nos quais a estrutura é definida, já os eixos x e y determinam a configuração local no instante $t = 0$ e servirão de referência para as demais configurações de equilíbrio. Constatase também que para cada nova configuração são obtidos deslocamentos nodais do elemento baseados no referencial do elemento indeformado.

Alves (1995) mostrou que devido aos eventuais deslocamentos de corpo rígido ocorridos durante o processo incremental, cujas influências não são perfeitamente consideradas, bem como devido à utilização de funções de interpolação simplificadas, a tendência é que os resultados obtidos na formulação Lagrangeana Total se afastem do comportamento real à medida que a configuração deformada se distancia da configuração original.

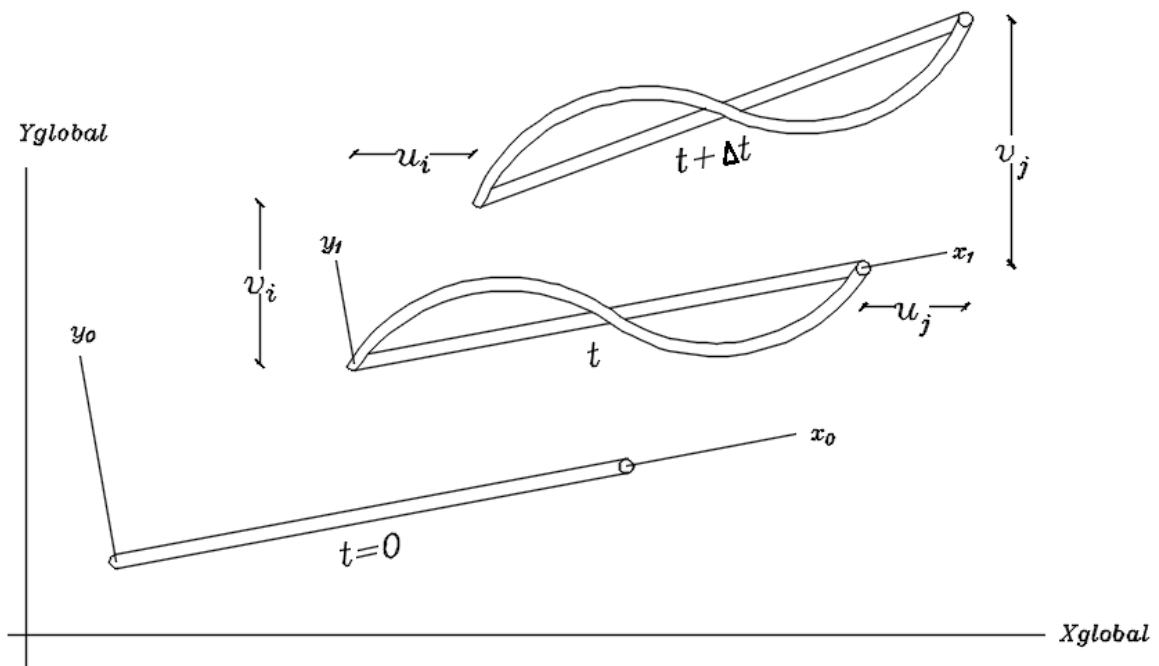
2.6.2 Formulação Lagrangeana Atualizada

De acordo com De Borst *et. al* (2012), pela Formulação Lagrangeana Total os deslocamentos são medidos a partir da configuração original da estrutura, enquanto a Lagrangeana Atualizada utiliza uma etapa anterior ao incremento de carga para configuração de referência. Neste caso, as rotações do corpo rígido são seccionadas em partes menores possibilitando aproximações mais exatas através das funções de interpolação.

Na figura 2.6 os eixos de coordenadas globais são representados por X_{global} e Y_{global}

nos quais a estrutura é definida, já os eixos x_0 e y_0 determinam a configuração local no instante $t = 0$ e servirão de referência para a configuração seguinte (t), e esta por sua vez, servirá de referência para configuração $t + \Delta t$. Para cada nova configuração são obtidos deslocamentos nodais do elemento partindo-se do referencial na iteração anterior.

Figura 2.6 - Formulação Lagrangeana Atualizada.



2.6.3 Formulação Co-rotacional

O método Co-rotacional foi originalmente introduzido por Wempner (1969) e Belytschko e colaboradores nos anos de 1973 e 1977.

Carvalho (2010) menciona que a formulação Co-rotacional é baseada no pressuposto de que os elementos estruturais sofrem grandes deslocamentos, afastando-se por isso significativamente da configuração inicial. Devido à sua esbeltez considerável, as amplitudes dos deslocamentos são elevadas, porém não ultrapassam o limite elástico do material, assim a formulação permite a utilização de relações cinemáticas envolvendo deformações infinitesimais e deslocamentos não lineares. A formulação Co-rotacional também pode ser utilizada em

elementos de casca e sólidos.

A descrição da cinemática Co-rotacional é uma das formulações mais atuais para a análise não linear geométrica.

Na formulação Co-rotacional derivam-se as matrizes de rigidez e vetores de carga utilizando coordenadas de sistema ligados ao elemento da estrutura e não é necessária apresentação explícita de equações para sua aplicação.

Menin (2006) cita que a formulação Co-rotacional utilizada na análise não linear geométrica é baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (rotações e translações) e dos movimentos oriundos das deformações.

Yaw (2009) expõe que a formulação Co-rotacional procura separar os movimentos do corpo rígido das tensões produzidas ao nível do elemento local. Isto é conseguido anexando um quadro de referência de elemento local (ou sistema de coordenadas), que translada com o elemento de viga.

A formulação Co-rotacional possibilita a determinação de grandes deflexões e rotações, por existir relação entre coordenadas locais e globais. Além do que é relativamente fácil introduzir os efeitos geométricos não lineares para elementos planos, supondo tensões em níveis locais.

2.6.4 Comparação entre as formulações

A seguir é apresentado no quadro 2.1 o resumo das formulações para análise não linear geométrica, ilustrando-se também as principais diferenças entre elas:

Quadro 2.1 - Comparação entre as formulações para abordagem não linear geométrica.

Formulação	Princípio
Lagrangeana Total	Os deslocamentos decorrentes de um carregamento dado são medidos em relação à configuração inicial do sistema.
Lagrangeana Atualizada	Utiliza-se uma etapa anterior ao incremento de carga para configuração de referência e conseqüente determinação dos deslocamentos.
Co-rotacional	Os deslocamentos são medidos a partir de um novo referencial, matriz de rigidez tangente consistente (linear e geométrica) para a nova posição do corpo rígido.

2.7 Estratégias para Solução Numérica de Sistemas Não lineares

A solução de sistemas não lineares passa na condição de equilíbrio em que a diferença das forças externas e forças internas nodais seja igual a tolerância desejada. So e Chan (1991) concluem que a parte incremental da solução é empregada para prever os incrementos de deslocamento e a parte iterativa é utilizada para verificar o erro de equilíbrio. A eficiência desse processo é ainda melhorada com a incorporação de vários métodos numéricos não lineares modificados, ligados a solução de Newton-Raphson. Na literatura existem inúmeros métodos numéricos capazes de resolver sistemas de equações não lineares, dentre eles: Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado, Comprimento de Arco, Picard, etc.

2.7.1 Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson consiste na aplicação de um incremento de carga de modo iterativo, o qual a cada iteração calcula-se uma nova matriz de rigidez. Esse processo baseia-se no traçado de retas tangentes a curva de equilíbrio do gráfico força versus deslocamento, até que haja convergência num determinado valor para o carregamento.

As forças externas são aquelas aplicadas na estrutura em estudo, as forças internas resistidas são determinadas através dos deslocamentos acumulados, e a diferença entre as forças externas e as forças internas é denominada forças não equilibradas.

Segundo Dipika (2011) é necessário obter o vetor de deslocamento $\mathbf{U}$ que satisfaça a equação (2.34), contidas em um domínio Ω .

$$\sum \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_c(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{U})) d\Omega \right] - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (2.34)$$

Onde:

$\mathbf{B}$: matriz de deformação-deslocamento;

σ_c : Tensor de Cauchy;

$\mathbf{F}_{ext}$: Vetor de forças externas.

A equação (2.34) reescrita de forma mais compacta é apresentada a seguir:

$$\mathbf{R}(U) = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(U) = 0 \quad (2.35)$$

Onde:

$\mathbf{R}(U)$: Vetor de forças residuais;

$\mathbf{F}_{int}$: Vetor de forças internas.

Ou ainda,

$$\mathbf{R}(U) = \Delta \mathbf{F} = 0 \quad (2.36)$$

Por se tratar de uma equação não linear, é essencial a aplicação de um método numérico para solução de $\mathbf{R}(U)$. Pelo método de Newton-Raphson o deslocamento no próximo passo é dado por:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \left(\frac{\partial \mathbf{R}(U)^n}{\partial U} \right)^{-1} \mathbf{R}(U)^n \quad (2.37)$$

Onde:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}(U)^n}{\partial U} \right): \text{Equivale à } \left(-\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial U} \right);$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial U} \right): \text{Matriz de rigidez } \mathbf{K}^n.$$

Logo,

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + (\mathbf{K}^n)^{-1} \Delta \mathbf{F}^n \quad (2.38)$$

$$\Delta \mathbf{F}^n = \mathbf{K}^n \Delta \mathbf{U} \quad (2.39)$$

Resolvendo a equação (2.38), atualizam-se os deslocamentos de acordo com:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^n \quad (2.40)$$

Calcula-se então $\Delta \mathbf{F}^n$, que é produto da matriz de rigidez e o vetor de deslocamentos acumulados, dado pela equação (2.39). Determina-se o incremento de forças:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{int}}^n + \Delta \mathbf{F}^n \quad (2.41)$$

Finalmente, obtém-se o vetor de forças residuais pela equação (2.42):

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1} \quad (2.42)$$

O último passo é analisar se a norma do vetor de forças residuais em razão da norma de vetor das forças internas é menor que a tolerância desejada pelo usuário. Se a equação (2.43) for verdadeira, encerra-se análise, caso contrário, aplica-se um novo incremento de carga.

$$\frac{\|\mathbf{R}^{n+1}\|}{\|\mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}\|} < \text{tolerância} \quad (2.43)$$

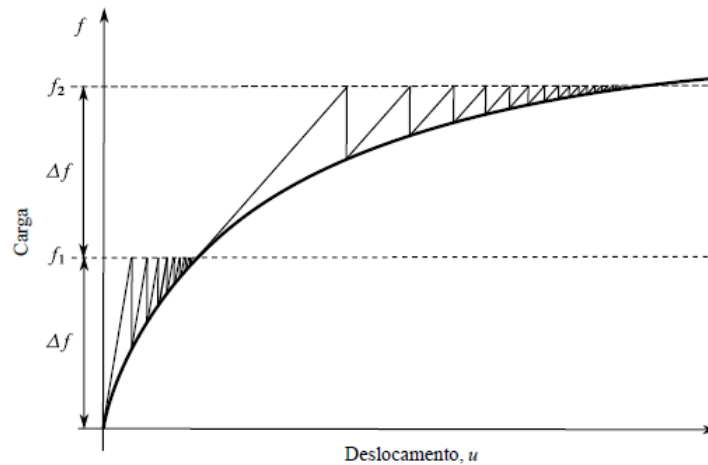
2.7.2 Método de Newton-Raphson Modificado

De acordo com Lacerda (2014) o Método de Newton-Raphson necessita computar e fatorar a matriz de rigidez tangente em cada iteração. Entretanto, dependendo do tipo de problema proposto (geralmente tridimensionais), as matrizes se tornam grandes, criando um elevado custo computacional. O método modificado propõe computar $\mathbf{K}_t$ na primeira iteração de cada ciclo de carga e reaproveitá-la nas demais iterações. A convergência do Método de Newton-Raphson Modificado é mais lenta que o Método de Newton-Raphson, causando, em alguns casos, a inexistência de vantagem na sua utilização.

Wood e Zienkiewicz (1977) e De Borst *et. al* (2012) citam que uma das vantagens da utilização do Método de Newton-Raphson Modificado é que as variáveis são calculadas com base em um passado (solução convergente na iteração com incremento de carga anterior). Como a matriz de rigidez é reformulada apenas no início da segunda iteração, nenhuma das não

linearidades, que durante a etapa de carregamento são incorporadas na matriz de rigidez, são usadas nos demais incrementos de carga.

Figura 2.7 - Método de Newton-Raphson Modificado.



Fonte: Lacerda, 2014.

2.8 Interação Carga-Deformação

A relação entre carregamento e a deformação para estruturas planas é dada pela equação (2.44).

$$P = f.d \quad (2.44)$$

Onde f representa o vetor de forças internas, d os deslocamentos dos nós e P o vetor de forças externas. Entretanto, os carregamentos externos geralmente são conhecidos diferentemente dos deslocamentos, que são atualizados a partir do processo iterativo que controlam os vetores de forças externas. A interação carga-deformação pode ser escrita em termos da equação diferencial abaixo:

$$\Delta P = S_t \cdot \Delta d \quad (2.45)$$

ΔP e Δd representam incrementos de cargas externas e deslocamentos dos nós,

respectivamente e para $\mathbf{S}_t$ tem-se:

$$\mathbf{S}_t = \left[\frac{df_i}{dd_j} \right], \text{ com } i, j = 1 \text{ até número de iterações} \quad (2.46)$$

3 FORMULAÇÕES PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Este capítulo é dedicado à formulação para análise geométrica em treliças planas, espaciais e pórticos planos. Serão abordadas as formulações Co-rotacional para treliças planas e espaciais, e Lagrangeana Atualizada para treliças planas e pórticos planos. Também é apresentado o conceito de Estabilidade Estrutural.

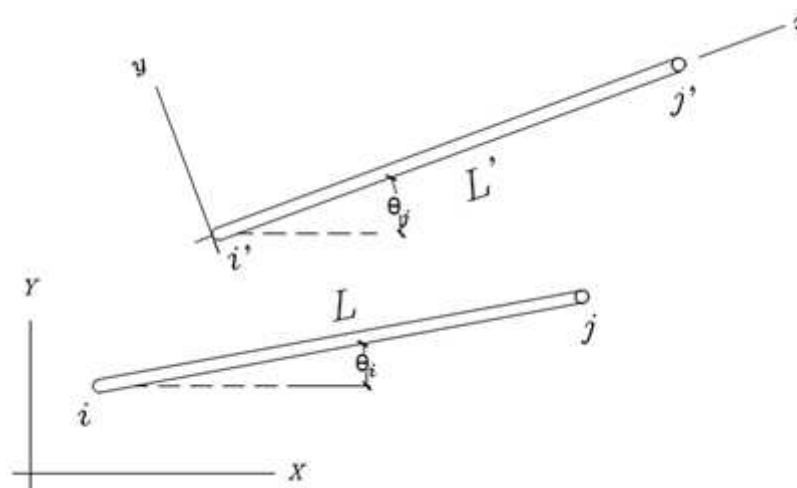
3.1 Formulação Co-Rotacional Para Treliças Planas

A formulação Co-rotacional apresentada a seguir baseia-se em Kassimali (2012), onde é demonstrada sem a inclusão de grandes conceitos matemáticos e físicos, como: Energia Potencial Mínima.

3.1.1 Sistema de Referencial Local para Treliças Planas

Para a análise geométrica não linear é satisfatório usar as coordenadas locais (rotações e translações) a fim de posicionar o elemento em estudo, conforme ilustrado na figura 3.1, onde a barra ij representa a posição inicial e $i'j'$ a posição deformada.

Figura 3.1 - Sistema de coordenadas Co-rotacionais no referencial local.



Quando a barra (figura 3.1) da treliça é submetida à carregamentos externos, ela deforma-se e forças axiais são introduzidas em suas extremidades. Note que a deformação u pode ser escrita em função do comprimento final (L') e inicial (L):

$$u = L - L' \quad (3.1)$$

Observa-se que a deformação é dita positiva, quando o elemento apresenta contração e negativa quando é alongado. Logo, se o elemento for tracionado, a força axial (N) é negativa. Se for comprimido, a força axial (N) será positiva. Sabe-se:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3.2)$$

Onde:

σ = Tensão normal;

A = Área da seção transversal.

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \quad (3.3)$$

Onde:

ε = Deformação específica;

u = Deformação longitudinal;

L = Comprimento do elemento na estrutura indeformada.

Para materiais elásticos lineares, homogêneos e isotrópicos, a relação tensão-deformação é descrita pela equação (3.4):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.4)$$

Onde:

E = Módulo de elasticidade longitudinal do material.

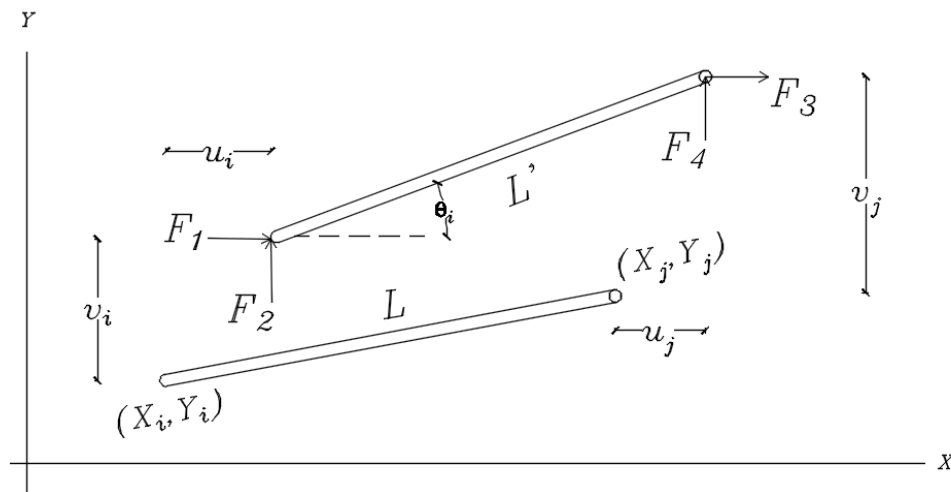
Substituindo as equações (3.2) e (3.3) em (3.4) e rearranjando-as, obtém-se:

$$N = \frac{EA}{L} u \quad (3.5)$$

3.1.2 Sistema de Referencial Global Para Treliças Planas

Anteriormente foi abordado um membro da treliça em referencial local, agora, será analisado o mesmo elemento, em coordenadas globais. Na figura 3.2 mostra-se o elemento em equilíbrio sob a ação do esforço axial (N) e apresenta este mesmo elemento em equilíbrio, entretanto, N foi decomposta seguindo as orientações dos eixos globais (X e Y). Também é possível visualizar u_i, v_i, u_j e v_j que representam as translações dos nós inicial e final da barra.

Figura 3.2 - Sistema de coordenadas Co-rotacionais no referencial global.



A ideia agora consiste em determinar o vetor de forças $\mathbf{F}$, conhecendo as coordenadas globais finais e iniciais do elemento. X_i, Y_i, X_j e Y_j correspondem às coordenadas dos nós na configuração indeformada, conforme observa-se na figura 3.2. Através do teorema de Pitágoras pode-se determinar o comprimento do elemento (L), onde:

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (3.6)$$

É possível determinar o comprimento do elemento deformado (L') utilizando o teorema de Pitágoras, coordenadas globais do elemento indeformado e os deslocamentos após a deformação, tem-se:

$$L' = \sqrt{[(X_j + u_j) - (X_i + u_i)]^2 + [(Y_j + v_j) - (Y_i + v_i)]^2} \quad (3.7)$$

Na figura 3.2 está representado o ângulo θ_i (adotando o sentido anti-horário positivo) que possui os cossenos diretores no sentido x e y , podendo ser obtidos pelas equações (3.8) e (3.9) respectivamente.

$$cx = \frac{(X_j + u_j) - (X_i + u_i)}{L'} \quad (3.8)$$

$$cy = \frac{(Y_j + v_j) - (Y_i + u_i)}{L'} \quad (3.9)$$

Novamente na figura 3.2 nos nós i' e j' pode-se determinar as forças globais F_1 e F_2 como componentes do esforço axial N , nas direções x e y .

$$F_1 = N.cx \quad (3.10)$$

$$F_2 = N.cy \quad (3.11)$$

$$F_3 = -N.cx \quad (3.12)$$

$$F_4 = -N.cy \quad (3.13)$$

Colocando na forma matricial:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{T}^T \mathbf{N} \quad (3.14)$$

Onde,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} cx & cy & -cx & -cy \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.1.3 Matriz de Rigidez Tangente Para Trelças Planas

Nos problemas usuais de engenharia estrutural o carregamento externo é especificado, ficando os deslocamentos a serem determinados pelo analista, o que muitas vezes demandam soluções de equações não lineares. A implementação de técnicas computacionais é amplamente utilizada para solução desses sistemas. Os membros de força podem ser escritos em termos de equações diferenciais:

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{K}_t \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (3.16)$$

$\Delta \mathbf{F}$ e $\Delta \mathbf{d}$ são incrementos globais de forças e deslocamentos em função dos termos $\mathbf{d}$, respectivamente. e $\mathbf{K}_t$ é representado por:

$$\mathbf{K}_t = \left[\frac{dF_{\text{int}_i}}{dd_j} \right], \text{ com } i, j = 1 \text{ até } 4 \quad (3.17)$$

Onde:

$$d_j = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Expandindo a equação (3.17), tem-se:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{dF_{\text{int}_1}}{du_i} & \frac{dF_{\text{int}_1}}{dv_i} & \frac{dF_{\text{int}_1}}{du_j} & \frac{dF_{\text{int}_1}}{dv_j} \\ \frac{dF_{\text{int}_2}}{du_i} & \frac{dF_{\text{int}_2}}{dv_i} & \frac{dF_{\text{int}_2}}{du_j} & \frac{dF_{\text{int}_2}}{dv_j} \\ \frac{dF_{\text{int}_3}}{du_i} & \frac{dF_{\text{int}_3}}{dv_i} & \frac{dF_{\text{int}_3}}{du_j} & \frac{dF_{\text{int}_3}}{dv_j} \\ \frac{dF_{\text{int}_4}}{du_i} & \frac{dF_{\text{int}_4}}{dv_i} & \frac{dF_{\text{int}_4}}{du_j} & \frac{dF_{\text{int}_4}}{dv_j} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

A matriz da equação (3.18) é denominada matriz de rigidez tangente. Para determinação da forma explícita do membro $\mathbf{K}_t$ diferenciou-se os termos de F_1 , F_2 , F_3 e F_4 com seus respectivos u_i , v_i , u_j e v_j utilizando as equações de (3.10) a (3.15) e fazendo a diferenciação parcial da equação (3.10) em u_i , tem-se:

$$\frac{dF_{\text{int}_1}}{du_i} = cx \left(\frac{dN}{du_i} \right) + N \left(\frac{dcx}{du_i} \right) \quad (3.19)$$

Para obtenção de dN/du_i é feita uma manipulação com as equações (3.1), (3.5) e (3.7), resultando em:

$$\frac{dN}{du_i} = cx \left(\frac{EA}{L} \right) \quad (3.20)$$

O mesmo procedimento é realizado para o segundo termo da equação (3.19), manipulando as equações (3.7), (3.8) e (3.9), obtém-se:

$$\frac{dcx}{du_i} = -\frac{cy^2}{L'} \quad (3.21)$$

Finalmente, reescreve-se a equação (3.19):

$$\frac{dF_{\text{int}_1}}{du_i} = cx^2 \left(\frac{EA}{L} \right) + cy^2 \left(\frac{N}{L'} \right) \quad (3.22)$$

Repetindo os mesmos procedimentos para os termos das forças F_2 , F_3 e F_4 e explicitando na matriz $\mathbf{K}_t$, determina-se a seguinte matriz em função dos senos e cossenos:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} cx^2 & cxcy & -cx^2 & -cxcy \\ cxcy & cy & -cxcy & -cy \\ -cx^2 & -cxcy & cx^2 & cxcy \\ -cxcy & -cy & cxcy & cy \end{bmatrix} \frac{EA}{L} + \begin{bmatrix} -cy & cxcy & cy & -cxcy \\ cxcy & -cx^2 & -cxcy & cx^2 \\ cy & -cxcy & -cy & cxcy \\ -cxcy & cx^2 & cxcy & -cx^2 \end{bmatrix} \frac{N}{L'} \quad (3.23)$$

Colocando na forma compacta:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \mathbf{k}_e + \frac{N}{L'} \mathbf{k}_g \quad (3.24)$$

Onde:

$\mathbf{k}_e$ é a matriz elástica linear;

$\mathbf{k}_g$ é a matriz geométrica.

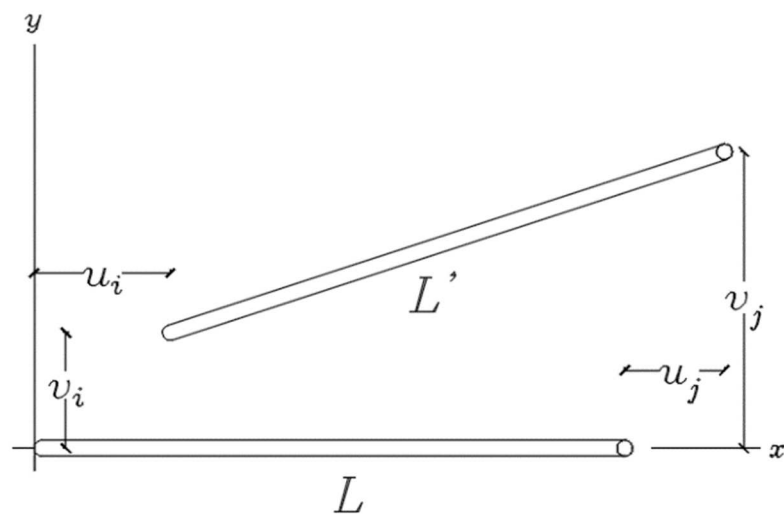
3.2 Formulação Lagrangeana Atualizada para Treliças Planas

Baseando-se em Willems & Lucas (1978), assumindo uma relação elástica linear, tem-se, para grandes deslocamentos:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \quad (3.25)$$

Observa-se pela figura 3.3 que os deslocamentos horizontais (u_i e u_j) variam linearmente ao longo do comprimento da barra.

Figura 3.3 - Elemento barra translacionado.



Logo:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A saber:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u_i + u_j}{L} \quad (3.27)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v_i + v_j}{L} \quad (3.28)$$

A energia de deformação axial para um material elástico é dada por:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \int_v E \varepsilon_x^2 dV = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon_x^2 dx = \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right]^2 dx = \\ &\int_0^L \left[\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] dx \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eliminando o termo de 4ª ordem:

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{du}{dx} dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3.30)$$

Substituindo (3.26) em (3.30) e integrando:

$$U_i = \frac{EA}{2L} (u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) + \frac{EA}{2L^2} (u_j - u_i) (v_i^2 - 2v_i v_j + v_j^2) \quad (3.31)$$

A equação (3.32) pode ser aplicada quando se trata de grandes deslocamentos:

$$N = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) \quad (3.32)$$

Portanto a equação (3.31) pode ser reescrita como:

$$U_i = \frac{EA}{2L}(u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) + \frac{N}{2L}(u_j - u_i)(v_i^2 - 2v_i v_j + v_j^2) \quad (3.33)$$

De acordo com o primeiro teorema de Castigliano:

$$A_1 = \frac{dU_1}{du_j} = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) = k_{1j} \cdot \{u_i \quad u_j\}^T \quad (3.34)$$

$$A_2 = \frac{dU_2}{dv_j} = \frac{N}{L}(v_i - v_j) = k_{2j} \cdot \{v_i \quad v_j\}^T \quad (3.35)$$

$$A_3 = \frac{dU_3}{du_k} = \frac{EA}{L}(-u_i + u_j) = k_{3j} \cdot \{u_i \quad u_j\}^T \quad (3.36)$$

$$A_4 = \frac{dU_4}{dv_k} = \frac{N}{L}(-v_i + v_j) = k_{4j} \cdot \{v_i \quad v_j\}^T \quad (3.37)$$

Ou ainda,

$$A_1 = \left(\frac{EA}{L}u_i - \frac{EA}{L}u_j \right) \quad (3.38)$$

$$A_2 = \left(\frac{N}{L}v_i - \frac{N}{L}v_j \right) \quad (3.39)$$

$$A_3 = \left(-\frac{EA}{L}u_i + \frac{EA}{L}u_j \right) \quad (3.40)$$

$$A_4 = \left(-\frac{N}{L}v_i - \frac{N}{L}v_j \right) \quad (3.41)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Na forma compacta, a equação (3.42) pode ser reescrita como:

$$A_i = (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g) \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j\}^T \quad (3.43)$$

Onde:

$\mathbf{k}_e$ é a matriz elástica linear;

$\mathbf{k}_g$ é a matriz geométrica.

3.3 Formulação Co-rotacional para Treliças Espaciais

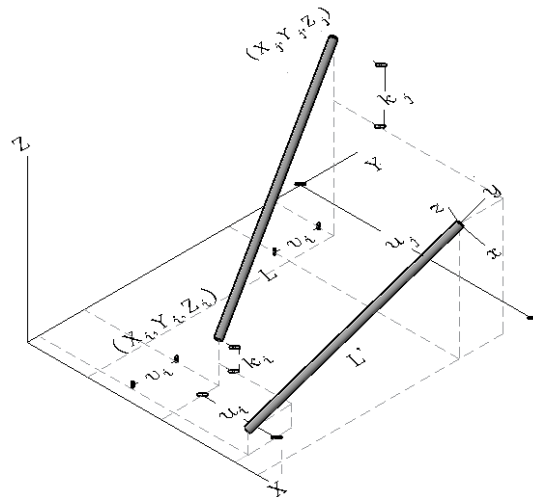
Semelhante ao que foi proposto na seção 3.1 deste capítulo, a matriz de rigidez linear e geométrica para treliças planas foram expandidas para treliças espaciais. Vale ressaltar que para o sistema em coordenadas locais é equivalente ao apresentado na seção anterior.

3.3.1 Sistema de Referencial Global Para Treliças Espaciais

Na figura 3.4 apresenta-se o sistema em coordenadas globais para um elemento de barra no espaço. É possível visualizar u_i, v_i, k_i, u_j, v_j e k_j que representam as translações dos pontos

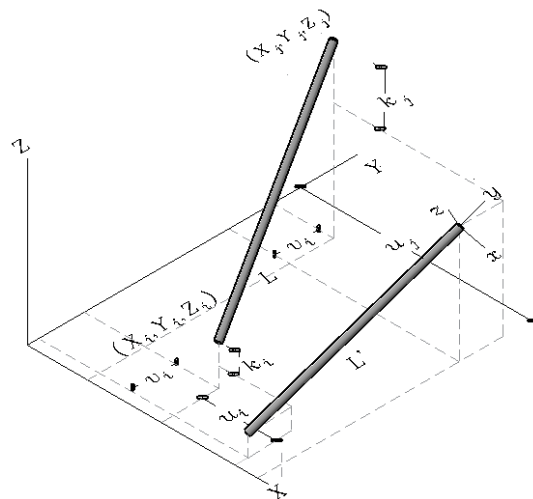
inicial e final da barra.

Figura 3.4 - Sistema de coordenadas no referencial global para treliças espaciais.



A figura 3.5 apresenta as forças nodais no elemento que surgem após a sua translação, em coordenadas globais (X, Y e Z).

Figura 3.5 - Forças nodais no elemento de treliça espacial translacionado.



Para determinar o comprimento do elemento (L), tem-se:

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (3.44)$$

Determina-se agora, o comprimento do elemento deformado (L'), seguindo o teorema

de Pitágoras, utilizando as coordenadas globais do elemento indeformado e os deslocamentos após a deformação:

$$L' = \sqrt{[(X_j + u_j) - (X_i + u_i)]^2 + [(Y_j + v_j) - (Y_i + v_i)]^2 + [(Z_j + k_j) - (Z_i + k_i)]^2} \quad (3.45)$$

Observa-se na figura 3.4, pela orientação dos eixos principais, que é possível determinar os cossenos diretores de acordo com as equações a seguir:

$$cx = \frac{(X_j + u_j) - (X_i + u_i)}{L'} \quad (3.46)$$

$$cy = \frac{(Y_j + v_j) - (Y_i + v_i)}{L'} \quad (3.47)$$

$$cz = \frac{(Z_j + k_j) - (Z_i + k_i)}{L'} \quad (3.48)$$

Analisando novamente a figura 3.4, que é possível determinar os componentes do esforço axial N , nas direções x , y e z .

$$F_1 = N.cx \quad (3.49)$$

$$F_2 = N.cy \quad (3.50)$$

$$F_3 = N.cz \quad (3.51)$$

$$F_4 = -N.cx \quad (3.52)$$

$$F_5 = -N.cy \quad (3.53)$$

$$F_6 = -N.cz \quad (3.54)$$

Colocando na forma matricial:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{T}^T \mathbf{N} \quad (3.55)$$

Onde,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} cx & cy & cz & -cx & -cy & -cz \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

3.3.2 Matriz de Rigidez Tangente Para Treliças Espaciais

A matriz de rigidez tangente para treliças espaciais é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{dF_{int_1}}{du_i} & \frac{dF_{int_1}}{dv_i} & \frac{dF_{int_1}}{dk_i} & \frac{dF_{int_1}}{du_j} & \frac{dF_{int_1}}{dv_j} & \frac{dF_{int_1}}{dk_j} \\ \frac{dF_{int_2}}{du_i} & \frac{dF_{int_2}}{dv_i} & \frac{dF_{int_2}}{dk_i} & \frac{dF_{int_2}}{du_j} & \frac{dF_{int_2}}{dv_j} & \frac{dF_{int_2}}{dk_j} \\ \frac{dF_{int_3}}{du_i} & \frac{dF_{int_3}}{dv_i} & \frac{dF_{int_3}}{dk_i} & \frac{dF_{int_3}}{du_j} & \frac{dF_{int_3}}{dv_j} & \frac{dF_{int_3}}{dk_j} \\ \frac{dF_{int_4}}{du_i} & \frac{dF_{int_4}}{dv_i} & \frac{dF_{int_4}}{dk_i} & \frac{dF_{int_4}}{du_j} & \frac{dF_{int_4}}{dv_j} & \frac{dF_{int_4}}{dk_j} \\ \frac{dF_{int_5}}{du_i} & \frac{dF_{int_5}}{dv_i} & \frac{dF_{int_5}}{dk_i} & \frac{dF_{int_5}}{du_j} & \frac{dF_{int_5}}{dv_j} & \frac{dF_{int_5}}{dk_j} \\ \frac{dF_{int_6}}{du_i} & \frac{dF_{int_6}}{dv_i} & \frac{dF_{int_6}}{dk_i} & \frac{dF_{int_6}}{du_j} & \frac{dF_{int_6}}{dv_j} & \frac{dF_{int_6}}{dk_j} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

A forma explícita para matriz $\mathbf{K}_t$ segue os mesmos passos realizados para a treliça plana, adicionando ainda as forças F_3 e F_6 . Logo, a matriz de rigidez tangente é descrita como mostra a equação (3.59), onde a primeira parcela representa a matriz de rigidez linear e a segunda a matriz de rigidez geométrica:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_t = & \begin{bmatrix} cx^2 & cxcy & cxcz & -cx^2 & -cxcy & -cxcz \\ cxcy & cy^2 & cy cz & -cxcy & -cy^2 & -cy cz \\ cxcz & cy cz & cz^2 & -cxcz & -cy cz & -cz^2 \\ -cx^2 & -cxcy & -cxcz & cx^2 & cxcy & cxcz \\ -cxcy & -cy^2 & -cy cz & cxcy & cy^2 & cy cz \\ -cxcz & -cy cz & -cz^2 & cxcz & cy cz & cz^2 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} + \\
& + \begin{bmatrix} -cy^2 & cxcy & cy cz & cy^2 & -cxcy & -cy cz \\ cxcy & -cx^2 & cxcz & -cxcy & cx^2 & -cxcz \\ cy cz & cxcz & -cz^2 & -cy cz & -cxcz & cz^2 \\ cy^2 & -cxcy & -cy cz & -cy^2 & cxcy & cy cz \\ -cxcy & cx^2 & -cxcz & cxcy & -cx^2 & cxcz \\ -cy cz & -cxcz & cz^2 & cy cz & cxcz & -cz^2 \end{bmatrix} \frac{N}{L}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

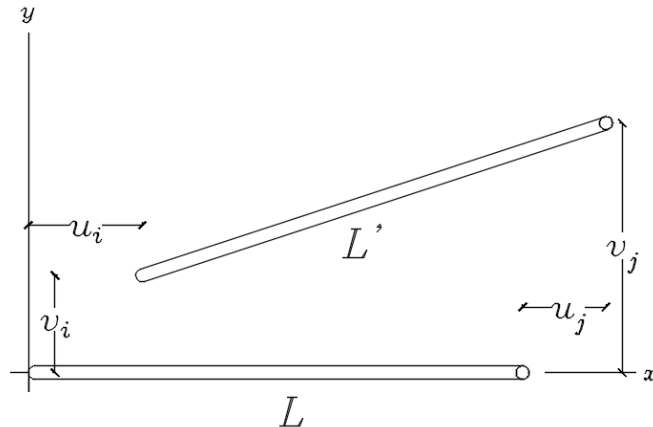
3.4 Formulação Lagrangeana Atualizada para Análise Não linear Geométrica para Pórticos Planos

Nesta seção serão abordados os conceitos e deduções da formulação em elementos finitos para análise não linear geométrica em pórticos planos, baseados no estudo de Willems & Lucas (1978).

3.4.1 Definições Geométricas Para Pórticos Planos

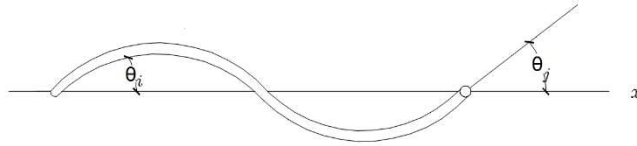
Considere uma barra que compõe um pórtico plano, antes de ser submetida a algum carregamento, com suas coordenadas nos eixos cartesianos x e y . Os graus de liberdade referentes aos nós são os deslocamentos u , v e rotação θ (sentido positivo, anti-horário), no eixo global. A figura 3.6 ilustra um elemento de barra de um pórtico plano composto por dois nós, coordenadas iniciais e o mesmo elemento após sofrer translação.

Figura 3.6 - Elemento de pórtico plano translacionado.



Contudo para um elemento de pórtico plano, além de sofrer um deslocamento, há uma deformação na barra, como mostra a figura 3.7:

Figura 3.7 - Elemento de pórtico plano rotacionado.



3.4.2 Matriz de Rigidez Geométrica

Para um deslocamento arbitrário ao longo do comprimento do elemento, de acordo com a teoria de Navier, as funções de forma ($H(x)$) para comportamento à flexão são dadas por:

$$H_1^u(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.59)$$

$$H_4^u(x) = \frac{x}{L} \quad (3.60)$$

$$H_2^v(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.61)$$

$$H_3^v(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.62)$$

$$H_5^v(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.63)$$

$$H_6^v(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.64)$$

$$H_2^\theta(x) = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \quad (3.65)$$

$$H_3^\theta(x) = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^3}{L^2} \quad (3.66)$$

$$H_5^\theta(x) = -\frac{6x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3} \quad (3.67)$$

$$H_6^\theta(x) = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \quad (3.68)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^u(x) & yH_2^\theta(x) & yH_3^\theta(x) & H_4^u(x) & yH_5^\theta(x) & yH_6^\theta(x) \\ 0 & H_2^v(x) & H_3^v(x) & 0 & H_5^v(x) & H_6^v(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

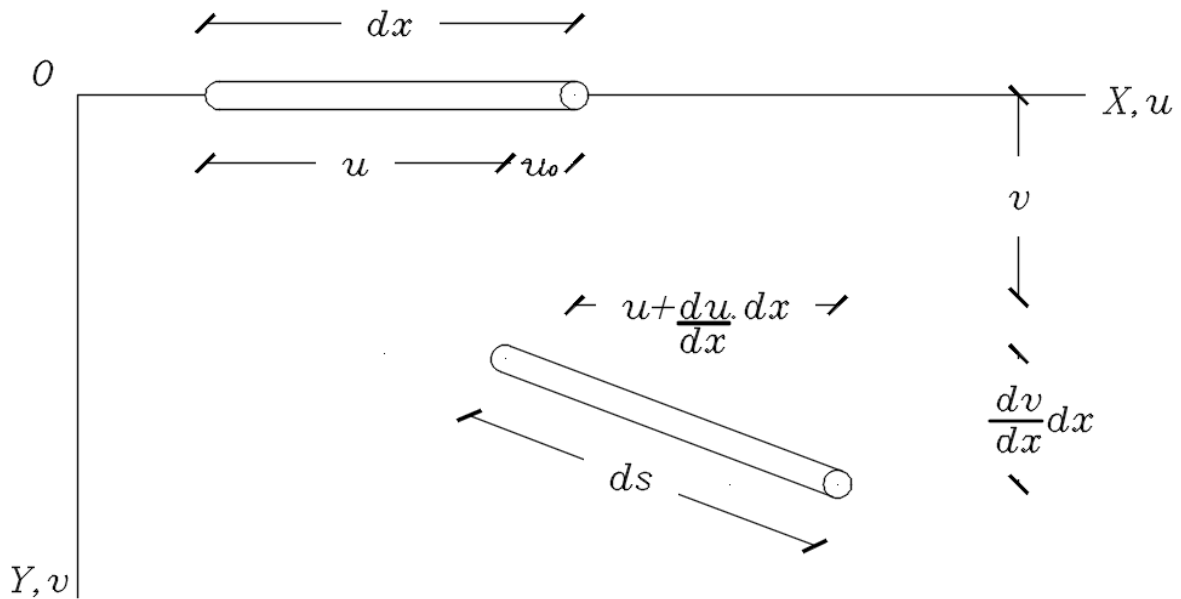
Onde o vetor u acumula o deslocamento horizontal devido ao esforço axial e a translação longitudinal pela rotação do elemento e o vetor v representa o deslocamento vertical.

Substituindo as equações (3.57) a (3.68) em (3.69) e fazendo $\lambda = x / L$ e $\xi = y / L$, logo:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 6(\lambda - \lambda^2)\xi & (-1 + 4\lambda - 3\lambda^2)L\xi & \lambda & 6(-\lambda + \lambda^2)\xi & (2\lambda - 3\lambda^2)L\xi \\ 0 & 1 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3 & (\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3)L & 0 & 3\lambda^2 - 2\lambda^3 & (-\lambda^2 + \lambda^3)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Na figura 3.8 descreve-se o efeito simultâneo da flexão e do esforço axial do elemento, para a teoria das grandes deflexões.

Figura 3.8 – Deformação específica para grandes deflexões.



Fonte: Adaptada de SZILARD, 2004.

A deformação específica causada pela translação do elemento é determinada por:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} + \frac{ds - dx}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad (3.71)$$

Já a deformação devido a rotação do elemento é dada por:

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2v}{dx^2} y \quad (3.72)$$

De acordo com Szilard (2004), a equação (3.73) pode ser aplicada à teoria das grandes deflexões:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad (3.73)$$

Onde:

u_0 : posição nodal u quando $y = 0$

Novamente a energia de deformação é dada para um elemento de viga plana por:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_v E \varepsilon_x^2 dV \quad (3.74)$$

Substituindo (3.73) em (3.74):

$$U_i = \frac{1}{2} \int_v E \left(\frac{du_o}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right)^2 dV \quad (3.75)$$

$$U_i = \frac{E}{2} \int_v \left[\left(\frac{du_o}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 y^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 - 2 \frac{du_o}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} y - \frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{du_o}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx dA \quad (3.76)$$

Excluindo o termo de quarta ordem e sabendo que $\int y dA = 0$, tem-se:

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{du_o}{dx} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{du_o}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (3.77)$$

Utilizando a equação (3.72) e integrando a equação (3.77):

$$\begin{aligned} U_i = & \frac{EA}{2L} (u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) + \frac{2EI}{L^3} (3v_i^2 + L^2 \theta_i^2 + 3v_j^2 + L^2 \theta_j^2 + 3Lv_i \theta_i - 6v_i v_j + 3Lv_i \theta_j \\ & - 3L\theta_i v_j + L^2 \theta_i \theta_j - 3Lv_j \theta_j) + \frac{EA}{L^2} (u_j - u_i) \left(\frac{3}{5} v_i^2 + \frac{1}{15} L^2 \theta_i^2 + \frac{3}{5} v_j^2 + \frac{1}{15} L^2 \theta_j^2 + \frac{1}{10} Lv_i \theta_i \right. \\ & \left. - \frac{6}{5} v_i v_j + \frac{1}{10} Lv_i \theta_j - \frac{1}{10} L\theta_i v_j - \frac{1}{30} L^2 \theta_i \theta_j - \frac{1}{10} Lv_j \theta_j \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

De acordo com o primeiro teorema de Castigliano (demonstrado no Apêndice C), obtêm-se os seguintes termos para a matriz de rigidez:

$$A_1 = \frac{dU_i}{du_i} = k_{1j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.79)$$

$$A_2 = \frac{dU_i}{dv_i} = k_{2j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.80)$$

$$A_3 = \frac{dU_i}{d\theta_i} = k_{3j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.81)$$

$$A_4 = \frac{dU_i}{du_j} = k_{4j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.82)$$

$$A_5 = \frac{dU_i}{dv_j} = k_{5j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.83)$$

$$A_6 = \frac{dU_i}{d\theta_j} = k_{6j} \cdot \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \quad (3.84)$$

Considerando $N \approx \frac{EA}{L}(u_j - u_i)$:

$$A_1 = \left(\frac{EA}{L}u_i - \frac{EA}{L}u_j \right) \quad (3.85)$$

$$A_2 = \left(\frac{12EI}{L^3}v_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_i - \frac{12EI}{L^3}v_j + \frac{6EI}{L^2}\theta_j \right) + \frac{N}{L} \left(\frac{6}{5}v_i + \frac{L}{10}\theta_i - \frac{6}{5}v_j + \frac{L}{10}\theta_j \right) \quad (3.86)$$

$$A_3 = \left(\frac{6EI}{L^2}v_i + \frac{4EI}{L}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}v_j + \frac{2EI}{L}\theta_j \right) + \frac{N}{L} \left(\frac{L}{10}v_i + \frac{2L^2}{15}\theta_i - \frac{L}{10}v_j - \frac{L^2}{30}\theta_j \right) \quad (3.87)$$

$$A_4 = \left(-\frac{EA}{L}u_i + \frac{EA}{L}u_j \right) \quad (3.88)$$

$$A_5 = \left(-\frac{12EI}{L^3}v_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{12EI}{L^3}v_j - \frac{6EI}{L^2}\theta_j \right) + \frac{N}{L} \left(-\frac{6}{5}v_i - \frac{L}{10}\theta_i + \frac{6}{5}v_j - \frac{L}{10}\theta_j \right) \quad (3.89)$$

$$A_6 = \left(\frac{6EI}{L^2} v_i + \frac{2EI}{L} \theta_i - \frac{6EI}{L^2} v_j + \frac{4EI}{L} \theta_j \right) + \frac{N}{L} \left(\frac{L}{10} v_i - \frac{L^2}{30} \theta_i - \frac{L}{10} v_j + \frac{2L^2}{15} \theta_j \right) \quad (3.90)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Reescrevendo (3.91):

$$A_i = (k_e + k_g) \{ u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j \}^T \quad (3.92)$$

Onde:

k_e é a matriz elástica linear;

k_g é a matriz geométrica.

3.4.3 Esforços Internos

Calculam-se os esforços internos a partir das deformações e rotações. Para um pórtico plano, sabe-se que os esforços atuantes em cada elemento são: esforço normal (N), esforço cortante (V), e momentos fletores (M_1 e M_2), sabendo que N e V são constantes ao longo do elemento e o momento fletor varia linearmente em função do comprimento da barra.

As equações para os esforços internos foram obtidas por Harrison (1973) e estão descritas a seguir:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{EA}{L}(u_j - u_i) \quad (3.93)$$

$$M_1 = \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j) \quad (3.94)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L}(\theta_i + 2\theta_j) \quad (3.95)$$

$$V = V_1 = V_2 = \frac{M_1 + M_2}{L'} = \frac{6EI}{L'L}(\theta_i + \theta_j) \quad (3.96)$$

Onde:

E = Módulo de elasticidade longitudinal do material;

A = Área da seção transversal;

I = Momento de inércia;

L = Comprimento inicial do elemento;

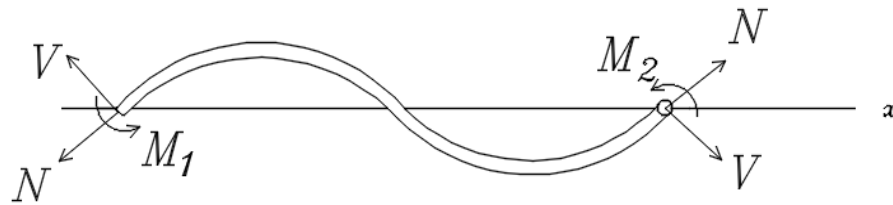
L' = Comprimento atual do elemento.

Ou ainda, na forma matricial:

$$\mathbf{F}_{int} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.97)$$

Na figura 3.9 ilustra-se esses esforços bem como as respectivas convenções de sinais.

Figura 3.9 – Esforços internos para elemento de pórtico plano.



3.5 Estabilidade Estrutural

A flambagem global é caracterizada por um fenômeno de instabilidade estrutural que eventualmente ocorre em elementos submetidos à compressão, e se manifesta pelo surgimento de deslocamentos transversais à sua direção axial. Na engenharia civil ocorre principalmente em pilares (pórticos planos) e em barras comprimidas, no caso de treliças planas e espaciais.

A carga crítica de uma estrutura é definida como: a carga axial máxima de compressão que um elemento pode suportar antes de ocorrer a flambagem. Qualquer carga adicional provocará flambagem na estrutura.

Através das matrizes de rigidez linear e geométrica é possível determinar a carga crítica que uma estrutura suporta. Observe a equação (3.98):

$$\Delta \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_{ext} \quad (3.98)$$

Onde:

ΔF é a parcela de carga aplicada;

F_{ext} é o carregamento aplicando;

λ é o incremento de carga

Para a solução não linear geométrica, é necessária a solução da equação (3.99):

$$\left[K_e + K_g \right] D = F_{ext} \quad (3.99)$$

Onde:

K_e é a matriz de rigidez linear;

K_g é a matriz de rigidez geométrica;

D é o vetor de deslocamentos.

Como a matriz de rigidez geométrica é proporcional aos esforços aplicados na estrutura:

$$K_g = \lambda \overline{K_g} \quad (3.100)$$

Para o incremento de forças:

$$\left[K_e + \lambda \overline{K_g} \right] \Delta D = F_{ext} \quad (3.101)$$

Fazendo $\lambda = 1$, tem-se a matriz de rigidez para um valor unitário, considerando que a matriz elástica permanece constante:

$$\left[K_e + \overline{K_g} \right] \Delta D = \lambda F_{ext} \quad (3.102)$$

De acordo com Kzam (2016) a análise da instabilidade baseia-se na determinação do parâmetro de carga para o qual a estrutura perde a estabilidade devido a ocorrência de pontos de bifurcação na trajetória de equilíbrio. Geralmente este é obtido a partir de um problema de autovalores, do tipo:

$$\left[\mathbf{K}_e + \overline{\mathbf{K}}_g \right] \Delta \mathbf{D} = 0 \quad (3.103)$$

A equação (3.104) apresenta a solução do tipo: $\Delta \mathbf{D} = 0$ ou $\left[\mathbf{K}_e + \overline{\mathbf{K}}_g \right] = 0$. Como mencionado anteriormente, o vetor de deslocamento não pode ser nulo, logo:

$$\left| \mathbf{K}_e + \overline{\mathbf{K}}_g \right| = 0 \quad (3.104)$$

4 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Os aspectos computacionais envolvidos na elaboração das rotinas computacionais são relevantes para compreensão dos códigos desenvolvidos. Este capítulo é dedicado para o melhor entendimento das rotinas computacionais desenvolvidas no MATLAB (2013) contidos nos apêndices deste trabalho.

4.1 Estrutura da Rotina Computacional Para Análise Não linear Geométrica de Treliças Planas

O primeiro passo para a aplicação do MEF em treliças planas e espaciais é a definição das propriedades geométricas (coordenadas e conectividades nodais, áreas das barras), módulo de elasticidade linear e vetor de forças externas.

Na primeira iteração calcula-se o deslocamento para uma pequena parcela de carga, que é obtida dividindo o vetor de forças externas pelo número de incremento adotado pelo usuário.

Atualizam-se os ângulos (c_x e c_y) no caso das treliças planas e c_x , c_y e c_z para treliças espaciais, que surgem com a nova posição da barra, o comprimento do elemento bem como as matrizes de rigidez linear e geométrica. Calcula-se o vetor de forças internas. Agora o vetor de forças é dado pela diferença do vetor de forças externas e internas. Resolve-se mais uma vez o sistema para obter a matriz de deslocamentos nodais.

É verificado se o vetor de deslocamentos é menor que a tolerância, caso afirmativo, a solução foi encontrada, caso contrário, atualiza-se a geometria do problema e calcula-se novamente o vetor de deslocamentos até o código convergir.

Abaixo descreve-se o algoritmo para implementação do processo de Newton-Raphson para análise não linear geométrica de treliças planas e espaciais:

1. INICIALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

- a) Matriz de coordenadas nodais: *coord*
- b) Matriz de conectividades: *conec*
- c) Módulo de Elasticidade: *E*
- d) Área da seção transversal das barras: *A*
- e) Número de nós: *nn* (quantidade de colunas de *coord*)
- f) Número de elementos: *nel* (quantidade de colunas de *conec*)

- g) Número de graus de liberdade: número de elementos multiplicado por 2 para treliças planas e por 3 para treliças espaciais
- h) Vetor de forças externas, em coordenadas globais: F
- i) Matriz de graus de liberdade restringidos: $elim$ (de acordo com os tipos de apoio de cada nó)

2. INICIALIZAÇÃO DO PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

2.1. Fase Preditora ($k = 1$)

- a) Cálculo do fator de carga: $lambda = inc / ninc$
- b) Tolerância: tol
- c) Incremento de força: $Fe = lambda F$
- d) Definição das coordenadas nodais dos elementos
- e) des : vetor de coordenadas globais
- f) Computa-se comprimento do elemento: L (eq. 3.6) para treliças planas
 L (eq. 3.44) para treliças espaciais
- g) Determinação do comprimento do elemento na configuração atualizada em coordenadas locais: L' (eq. 3.7) para treliças planas
 L' (eq. 3.45) para treliças espaciais
- h) Calcular: cx (eq. 3.8) e cy (eq. 3.9) para treliças planas
 cx (eq. 3.46), cy (eq. 3.47) e cz (eq. 3.48) para treliças espaciais
- i) Definição da matriz de rotação: T (eq. 3.15) para treliças planas
 T (eq. 3.56) para treliças espaciais
- j) $u = L - L'$
- k) Vetor de forças internas: $Fint$ (eq. 3.14) para treliças planas
 $Fint$ (eq. 3.55) para treliças espaciais
- l) Calcula-se: Kt (eq. 3.23) para treliças planas
 Kt (eq. 3.58) para treliças espaciais
- m) Eliminar os graus de liberdade restringidos para Fe , $Fint$ e Kt
- n) Para a primeira iteração, computar os deslocamentos nodais em coordenadas globais, através de: $sol = Kt^{-1}Fe$
- o) Atualiza-se o vetor de coordenadas globais: $des^{n+1} = des^n + sol$
- p) Calcula-se o erro: $R = sol' * sol$

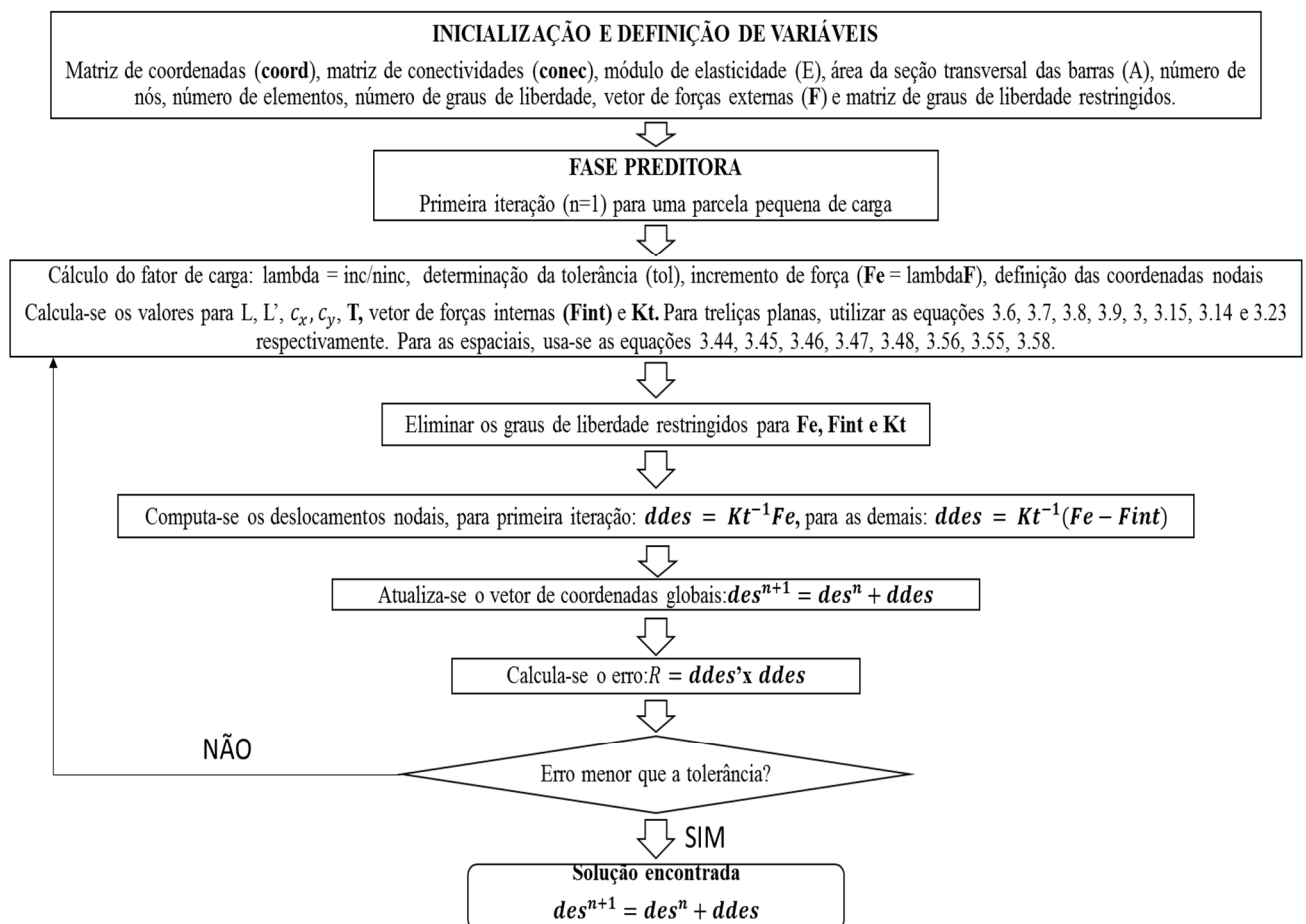
q) Se o erro for menor que a tolerância, solução encontrada, caso contrário:

2.2. Fase Corretora (Repete-se os passos *e* até *m* do item 2.1)

- Resolver: $sol = Kt^{-1}(Fe - Fint)$
- Atualiza-se o vetor de coordenadas globais: $des^{n+1} = des^n + sol$
- Calcula-se o erro: $R = sol' * sol$ (Verificação se o incremento de deslocamento comparado a iteração anterior foi menor que a tolerância).
- Se o erro for menor que a tolerância, solução encontrada, caso contrário, atualiza-se o vetor des e repete-se o item 2.2.

O passo a passo descrito anteriormente é apresentado na figura 4.1, para melhor compreensão do usuário:

Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo para treliças planas e espaciais.



4.2 Estrutura Da Rotina Computacional Para Análise Não Linear Geométrica De Pórticos Planos

A análise não linear geométrica para pórticos planos segue alguns passos semelhantes descritos para o estudo das treliças planas e espaciais, todavia como há rotação do elemento, surgem esforços cortantes e momentos fletores que necessitam ser computados.

Inicialmente definem-se as propriedades geométricas (coordenadas e conectividades nodais, área da seção transversal e momento de inércia), módulo de elasticidade linear e esforços externos.

Para a primeira iteração ($k=1$), calcula-se o vetor de deslocamentos, dado pela multiplicação da matriz de rigidez inversa pelo vetor de forças para um incremento de carga.

Atualizam-se os senos e cossenos diretores, as rotações dos nós inicial e final, comprimento de cada elemento, e as matrizes de rigidez linear e não linear geométrica. A partir da segunda iteração computa-se o vetor de forças internas. Calcula-se novamente o vetor de deslocamentos, agora dado pela multiplicação da matriz de rigidez inversa pelo vetor de forças, que a partir deste passo é representado pelo vetor de forças externas decrescido do vetor de forças internas.

É Verificado se o vetor de deslocamentos é menor que a tolerância desejada pelo usuário, caso afirmativo, a solução foi encontrada, senão, repete-se a atualização descrita no parágrafo anterior até a convergência ser estabelecida.

O algoritmo para implementação do processo de Newton-Raphson para análise não linear geométrica de pórticos planos é apresentado a seguir:

1. INICIALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

- a) Matriz de coordenadas nodais: *coord*
- b) Matriz de conectividades: *conec*
- c) Matriz dos módulos de elasticidade de cada elemento: *E*
- d) Matriz das áreas da seção transversal de cada elemento: *A*
- e) Matriz dos momentos de inércia da seção transversal de cada elemento: *I*
- f) Número de nós: *nn* (quantidade de colunas de *coord*)
- g) Número de elementos: *nel* (quantidade de colunas de *conec*)
- h) Número de graus de liberdade: número de elementos multiplicado por 3
- i) Vetor de forças externas, em coordenadas globais: *F*

- j) Matriz de graus de liberdade restringidos: $elim$ (de acordo com os tipos de apoio de cada nó)

2. INICIALIZAÇÃO DO PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

2.1. Fase Preditora ($k = 1$)

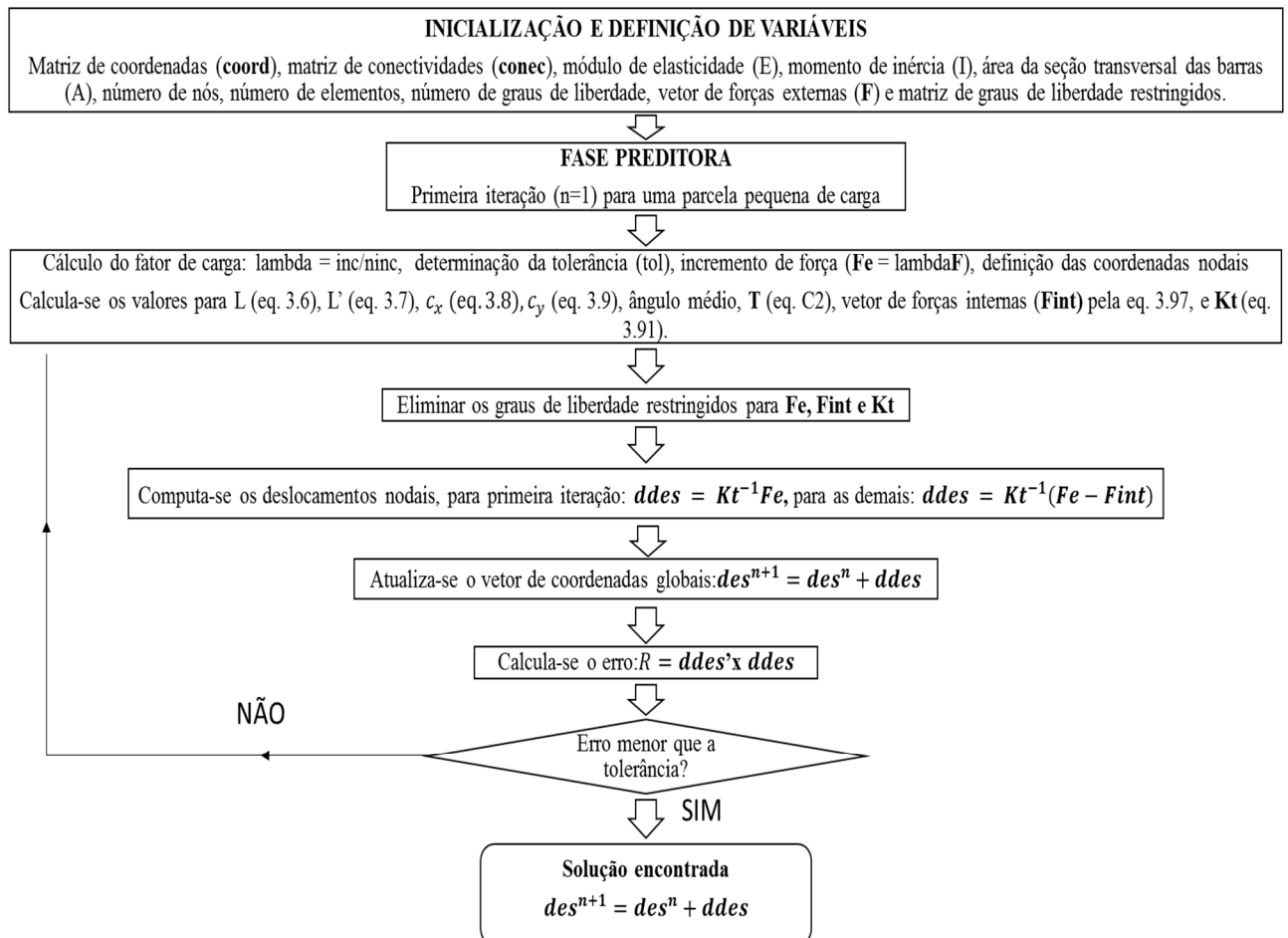
- a) Cálculo do fator de carga: $lambda = inc / ninc$
- b) Tolerância: tol
- c) Incremento de força: $Fe = lambda \cdot F$
- d) Definição das coordenadas nodais dos elementos ($x1, x2, y1$ e $y2$)
- e) des : vetor de coordenadas globais
- f) Computa-se comprimento do elemento: L (eq. 3.6)
- g) Calcula-se o ângulo médio da rotação do elemento, inicialmente igual a zero.
- h) Determinação do comprimento do elemento na configuração atualizada em coordenadas locais: L' (eq. 3.7)
- i) Calcular: cx (eq. 3.8) e cy (eq. 3.9).
- j) Definição da matriz de rotação: T (eq. A.2)
- k) $u = L - L'$
- l) Vetor de forças internas: $Fint$ (eq. 3.97)
- m) Calcula-se: Kt (eq. 3.91)
- n) Eliminar os graus de liberdade restringidos para $Fe, Fint$ e Kt
- o) Para a primeira iteração, computar os deslocamentos nodais em coordenadas globais, através de: $sol = Kt^{-1}Fe$
- p) Atualiza-se o vetor de coordenadas globais: $des^{n+1} = des^n + sol$
- q) Calcula-se o erro: $R = sol' * sol$
- r) Se o erro for menor que a tolerância, solução encontrada, caso contrário:

2.2. Fase Corretora (Repete-se os passos e até m do item 2.1)

- k) Resolver: $sol = Kt^{-1}(Fe - Fint)$
- l) Atualiza-se o vetor de coordenadas globais: $des^{n+1} = des^n + sol$
- m) Calcula-se o erro: $R = sol' * sol$ (Verificação se o incremento de deslocamento comparado a iteração anterior foi menor que a tolerância).
- n) Se o erro for menor que a tolerância, solução encontrada, caso contrário, atualiza-se o vetor des e repete-se o item 2.2.

Na figura 4.2 ilustra-se o fluxograma para o algoritmo desenvolvido para pórticos planos.

Figura 4.2 – Fluxograma do algoritmo para pórticos plano.

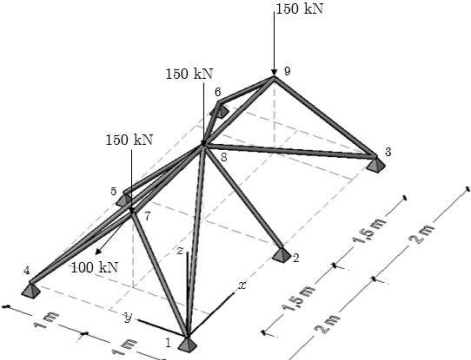
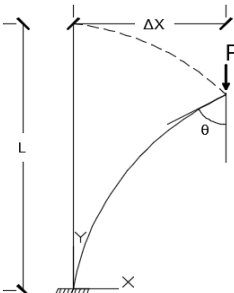
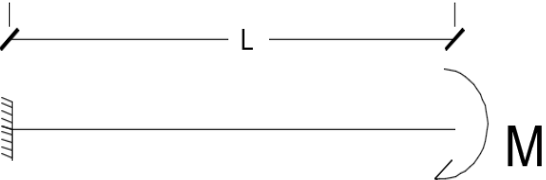
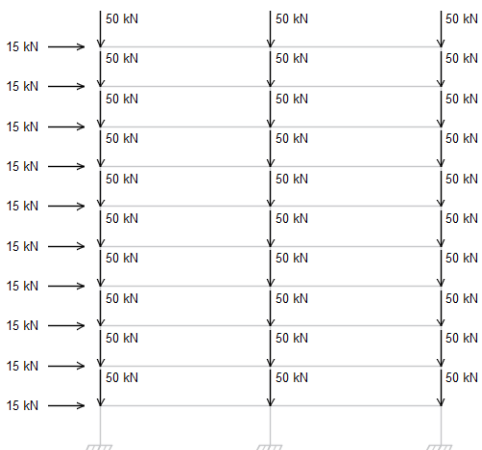


5 EXEMPLOS E VALIDAÇÕES

Os exemplos analisados neste trabalho encontram-se no quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Exemplos e validações.

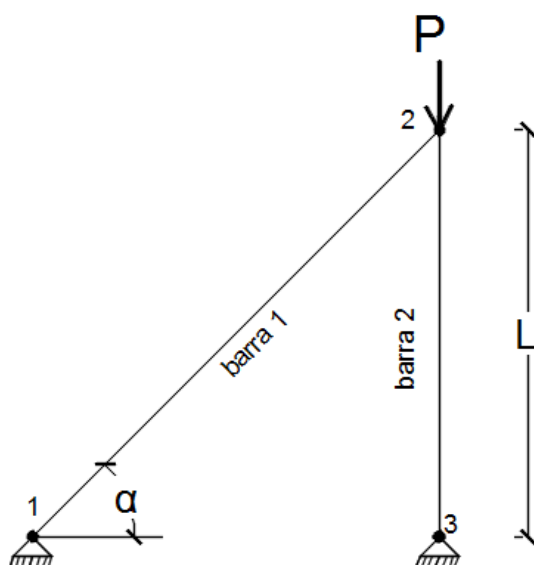
nº	Tipologia da estrutura	Solução comparativa	Descrição do problema	Representação gráfica da estrutura
5.1	Treliça plana	Willems & Lucas (1978)	Cálculo da carga crítica de uma treliça considerando a análise não linear geométrica.	
5.2	Pórtico plano	Willems & Lucas (1978)	Cálculo da carga crítica de um pórtico plano considerando a análise não linear geométrica.	
5.3	Treliça plana	Yaw (2009)	Análise não linear geométrica de uma treliça plana apoiada na extremidade da esquerda e submetida a uma carga vertical na extremidade livre.	

nº	Tipologia da estrutura	Solução comparativa	Descrição do problema	Representação gráfica da estrutura
5.4	Treliça espacial	-	Estudo do comportamento não linear geométrico de uma treliça espacial.	
5.5	Pórtico plano	Thimoshenko & Gere (1961)	Análise do comportamento de um pilar submetido a uma carga axial no trecho pós crítico.	
5.6	Pórtico plano	Urthaler e Reddy (2005)	Viga engastada e livre submetida a um momento fletor analisando a flexão em função do raio de curvatura.	
5.7	Pórtico plano	SAP 2000 versão 18	Análise não linear geométrica de edifício de concreto armado (f_{ck} 25 MPa) de 10 andares (3,5 metros de altura por pavimento).	

5.1 Estabilidade Estrutural – Treliça Plana - Willems & Lucas (1978)

A treliça abaixo foi proposta por Willems & Lucas (1978) a fim de analisar a estabilidade global computando a carga crítica que a estrutura pode ser submetida. A estrutura foi dividida em três nós e duas barras, como observado a seguir:

Figura 5.1 – Análise da carga crítica – Treliça plana.



A solução proposta por Willems & Lucas (1978) está descrita na equação abaixo:

$$P_{cr} = \frac{A_1 E \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha}{1 + \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \operatorname{sen}^3 \alpha} \quad (5.1)$$

Para este exemplo, adotou-se as seguintes propriedades geométricas e do material:

Tabela 5.1 – Propriedades geométricas e do material para a treliça proposta.

Área da seção transversal 1 (m ²)	Área da seção transversal 2 (m ²)	Módulo de Elasticidade (GPa)	α	L (m)
2,5 E-04	2E-04	10	45°	2,0

A tabela 5.2 apresenta o resultado encontrado via código MATLAB (2013) e comparado com a literatura.

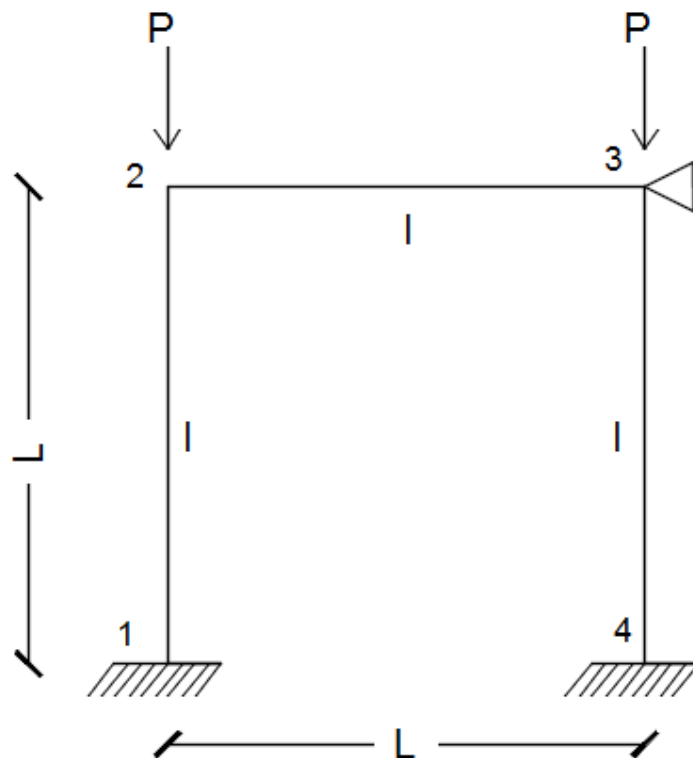
Tabela 5.2 – Comparação do resultado via MATLAB e por Willems & Lucas (1978).

Código MATLAB	Willems & Lucas (1978)
61,298 kN	61,298 kN

5.2 Estabilidade Estrutural – Pórtico Plano – Chajes (1974) E Renton (1967)

O pórtico abaixo foi proposto por Chajes (1974) e Renton (1967) no intuito de analisar a carga crítica para os pilares que o compõe:

Figura 5.2 – Análise da carga crítica – Pórtico plano.



A solução encontrada na literatura apresenta-se na equação (5.2):

$$P_{cr} = 25,5 \frac{EI}{L^2} \quad (5.2)$$

A tabela 5.3 contém as propriedades geométricas e do material para o pórtico da figura 5.2:

Tabela 5.3 - Propriedades geométricas e do material para o pórtico proposto.

Momento de Inércia (m^4)	Módulo de Elasticidade (GPa)	L (m)
1,33E-4	10	3,0

A tabela 5.4 apresenta o resultado encontrado via código MATLAB (2013) e comparado com a literatura.

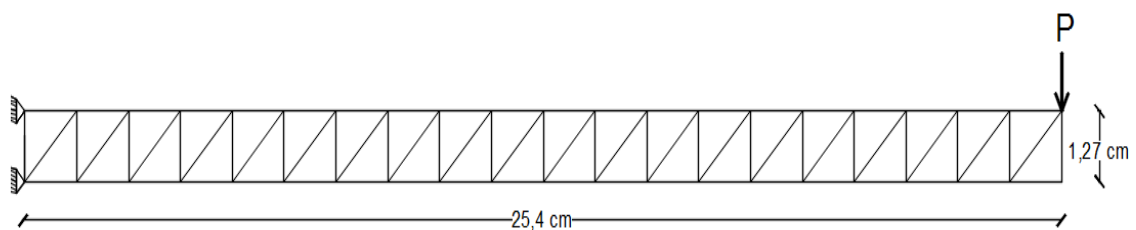
Tabela 5.4 - Comparação do resultado via MATLAB e por Chajes (1974) e Renton (1967).

Código MATLAB	Chajes (1974) e Renton (1967)
3777,77 kN	3777,77 kN

5.3 Treliça Plana Proposta Por Yaw (2009)

A treliça plana da figura 5.3 foi proposta por Yaw (2009).

Figura 5.3 – Treliça plana proposta por Yaw (2009).



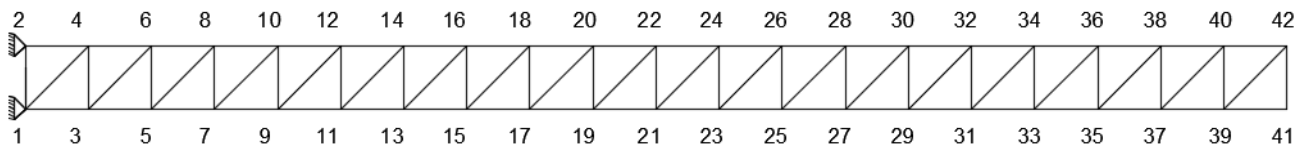
Na tabela 5.5 encontram-se as propriedades geométricas e do material.

Tabela 5.5 - Propriedades geométricas e do material para treliça plana.

Área da seção transversal (m^2)	Módulo de Elasticidade (GPa)
6,45E-04	199,95

Para a utilização da rotina computacional enumerou-se os nós de acordo com a figura 5.4 sendo que a carga P foi aplicada de zero até 89 kN, com 10 incrementos de carga, para validação com os resultados encontrados na literatura.

Figura 5.4 – Coordenadas nodais para treliça plana de Yaw (2009).



Na tabela 5.6 exibem-se os resultados do deslocamento vertical do nó 42 para os diversos níveis de cargas aplicados, considerando uma tolerância de $10e-6$.

Tabela 5.6 – Deslocamento vertical do nó 42 em função das cargas aplicadas.

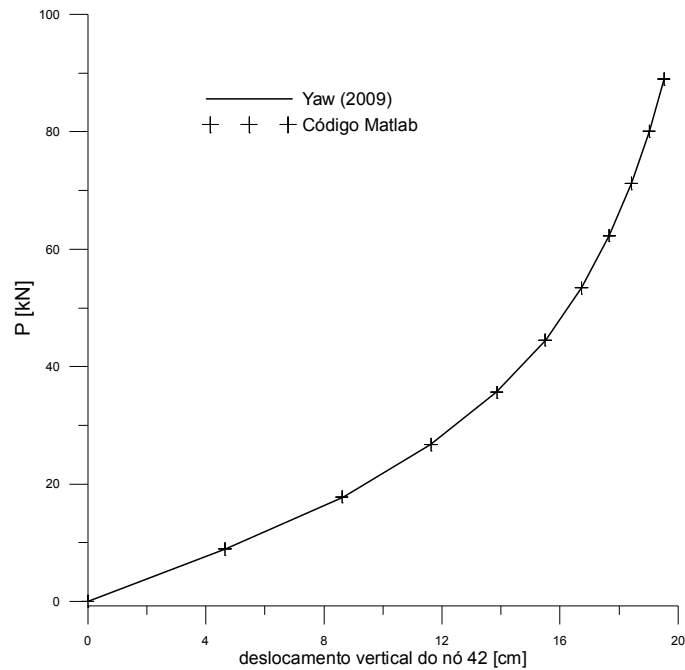
Código MATLAB	P (kN)	0	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1	89
	desl (cm)	0	4,65	8,61	11,63	13,86	15,49	16,72	17,67	18,42	19,02	19,52

Já a tabela 5.7 e a figura 5.5 mostram a comparação dos resultados obtidos pelo código próprio comparado com os propostos por Yaw (2009) para o nó 42, ambos utilizando formulação Co-rotacional, para uma tolerância de $1e-6$.

Tabela 5.7 – Comparação dos resultados com os obtidos por Yaw (2009).

Yaw (2009) Código MATLAB	P(kN)	0	8,9	17,8	26,7	35,6	44,5	53,4	62,3	71,2	80,1	89
	desl (cm)	0	4,67	8,65	11,61	13,85	15,51	16,72	17,65	18,42	19,02	19,53
		0	4,65	8,61	11,63	13,86	15,49	16,72	17,67	18,42	19,02	19,52
Erro		-	0,49%	0,47%	0,22%	0,09%	0,08%	0,00%	0,10%	0,04%	0,03%	0,08%

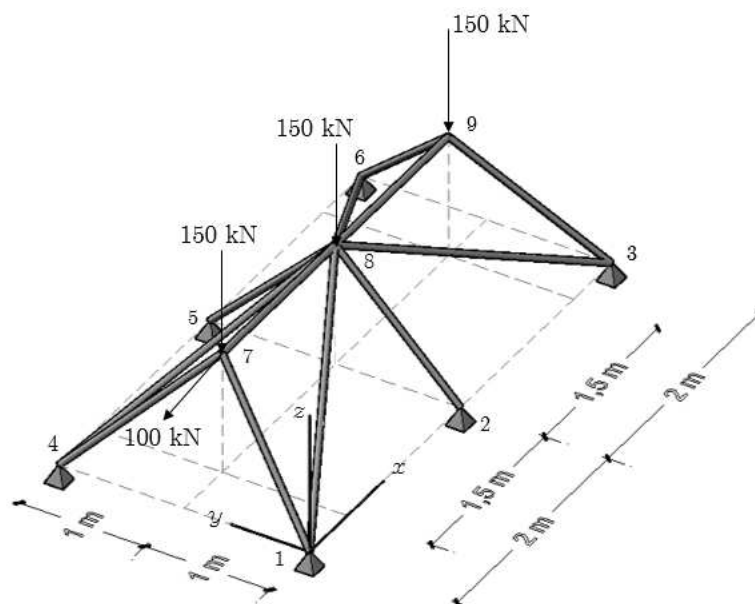
Figura 5.5 – Comparação entre o código próprio versus Yaw (2009).



5.4 Treliça Espacial Composta Por 12 Barras

Considere uma treliça espacial com altura de 2 metros e submetida aos carregamentos nos nós 7, 8 e 9, conforme mostrado na figura 5.6, também é apresentada a malha utilizada na rotina computacional:

Figura 5.6 – Treliça Espacial.



A treliça possui as seguintes propriedades geométricas e do material:

Tabela 5.8 – Propriedades geométricas e do material para treliça.

Área da seção transversal (m ²)	Módulo de Elasticidade (GPa)
1,963E-3	2,0

A tabela 5.9 traz os resultados encontrados através do código em MATLAB (2013) considerando a não linearidade geométrica, com 10 incrementos de carga e tolerância 1e-5. Os valores obtidos foram validados junto ao SAP 2000 versão 18, utilizando a abordagem P-Delta, também se apresenta a solução linear:

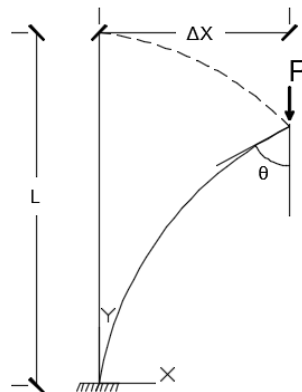
Tabela 5.9 - Comparação dos resultados para a treliça espacial.

	nó 7		nó 8		nó 9	
	desl x (cm)	desl z (cm)	desl x (cm)	desl z (cm)	desl x (cm)	desl z (cm)
Solução linear	0,328	-0,480	0,232	-0,390	0,517	-9,01
SAP 2000	0,425	-0,443	0,316	-0,384	0,709	-10,90
Código MATLAB	0,426	-0,447	0,315	-0,385	0,709	-10,91
Erro	0,24%	0,93%	0,35%	0,26%	0,00%	0,09%

5.5 Pilar em Balanço Com Carga Axial na Extremidade Livre – Timoshenko & Gere (1961)

A estrutura mostrada na figura 5.7 foi proposta por Timoshenko & Gere (1961), um pilar engastado e livre nas suas extremidades.

Figura 5.7 - Pilar em balanço com carga axial na extremidade livre.



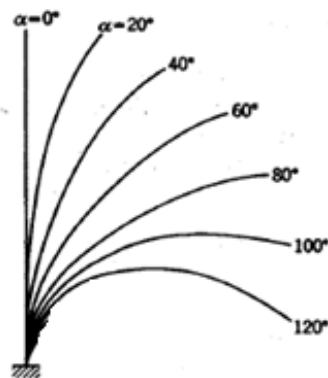
As propriedades geométricas e do material são apresentadas na tabela 5.10, as mesmas propostas por Carvalho (2010):

Tabela 5.10 – Propriedades geométricas e do material para o pilar proposto.

Área da seção transversal (m ²)	Momento de Inércia (m ⁴)	Módulo de Elasticidade (GPa)	L (m)
1,61E-04	2,17E-09	206,844	2,54

Timoshenko & Gere (1963) provam que o pilar se comporta conforme a figura 6.8, para uma análise de 2ª ordem elástica. Neste trabalho será validado os valores dos deslocamentos e rotações quando $\alpha = 120^\circ$, correspondente a maior carga aplicada.

Figura 5.8 - Pilar em balanço com carga axial na extremidade livre.



Fonte: Adaptada de TIMOSHENKO & GERE, 1963.

Para o cálculo da carga crítica, utilizou-se a equação (5.3):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = 171,49N \quad (5.3)$$

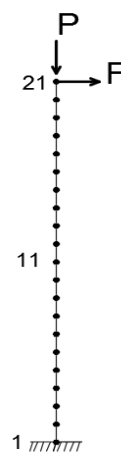
Ainda, de acordo com Timoshenko & Gere (1961), na tabela 5.11 apresentam-se os fatores de multiplicação para P_{cr} de modo que o pilar alcance o ângulo α desejado.

Tabela 5.11 - Valores para o fator de multiplicação da carga crítica e os respectivos ângulos de rotação do pilar.

α (graus)	0	20	40	60	80	100	120
P/P _{cr}	1	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884

Para a análise via algoritmo, o pilar foi discretizado com uma malha de 21 elementos, conforme figura 5.9. De acordo com Carvalho (2010) é aplicada uma pequena força (F), não maior que 3 N, com o intuito de provocar uma pequena perturbação de modo que o pilar se comporte de acordo com o desejado e posteriormente é retirada.

Figura 5.9 - Discretização dos elementos do pilar.



Na tabela 5.12 compara-se os valores obtidos com o algoritmo e os propostos pela literatura para os ângulos de rotação nos diferentes níveis de carga aplicados, para o nó 21.

Tabela 5.12 – Comparação dos Resultados para o ângulo de rotação. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.

P/Pcr		1	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884
α (graus)	Timoshenko e Gere (1963)	0	20	40	60	80	100	120
	Código MATLAB	0	19,402	39,643	59,959	79,844	99,943	120,05
	Erro	0%	2,99%	0,89%	0,07%	0,20%	0,06%	0,04%

Observa-se que os valores encontrados pelo algoritmo via MEF foram bem próximos aos propostos. Na tabela 5.13 são apresentados os dados obtidos para o deslocamento horizontal do nó 21 e comparados com Timoshenko e Gere (1963).

Tabela 5.13 - Comparação dos Resultados para o deslocamento horizontal do nó 21. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.

P/Pcr		1	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884
x/L	Timoshenko e Gere (1963)	1	0,97	0,881	0,741	0,55	0,349	0,123
	Código MATLAB	1	0,961	0,867	0,740	0,557	0,348	0,123
Erro		0%	0,83%	1,48%	0,04%	1,43%	0,23%	0,52%

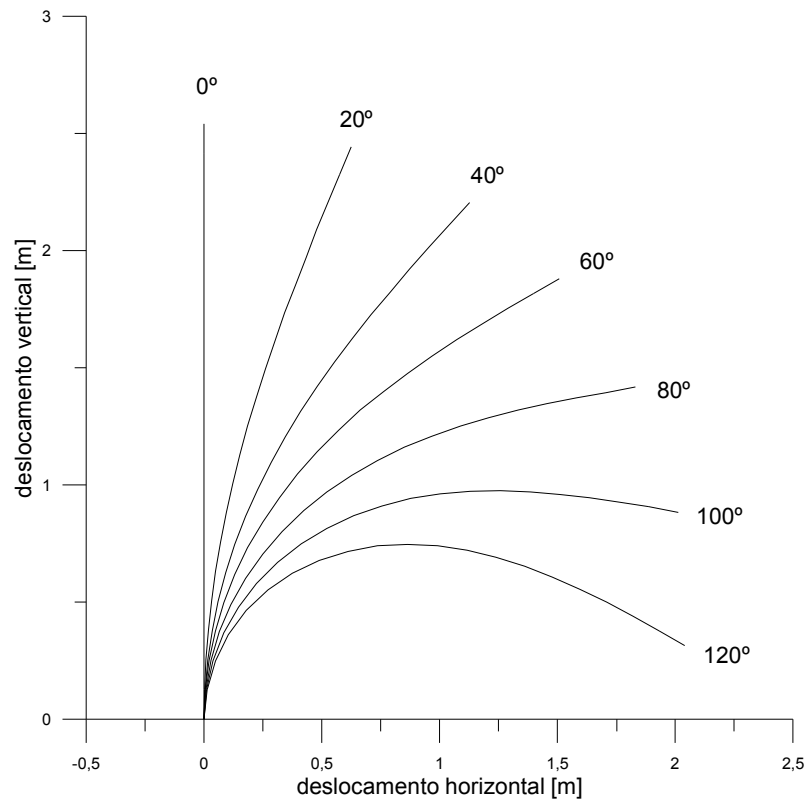
Também é apresentada na tabela 5.14 a comparação dos resultados para o deslocamento vertical do nó 21.

Tabela 5.14 - Comparação dos Resultados para o deslocamento vertical do nó 21. Timoshenko & Gere – Código MATLAB.

P/Pcr		1	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884
yo/L	Timoshenko e Gere (1963)	0	0,22	0,422	0,593	0,719	0,792	0,803
	Código próprio	0	0,23239	0,4434	0,59368	0,72058	0,79218	0,80325
	Erro	0%	5,63%	5,07%	0,11%	0,22%	0,02%	0,03%

A figura 5.10 exibe o deslocamento do pilar em estudo para os diferentes fatores de carga aplicados, onde é possível observar um resultado semelhante ao proposto por Timoshenko & Gere (1963), para 25 incrementos de carga e tolerância na ordem de 1e-6.

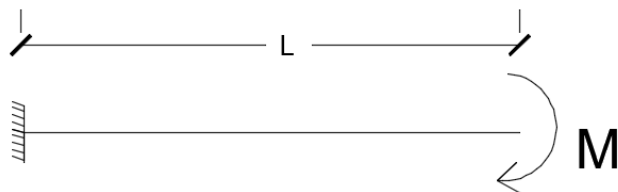
Figura 5.10 – Deslocamento do pilar para os diferentes ângulos de rotação.



5.6 Viga em Balanço Submetida a um Momento Fletor – Urthaler & Reddy (2005)

A viga em estudo nesse exemplo foi proposta por Urthaler & Reddy (2005) e está esquematizada na figura 5.11.

Figura 5.11 – Viga com momento.



A propriedades para a viga em estudo estão apresentadas na tabela 5.15.

Tabela 5.15 – Propriedades geométricas e do material para a viga.

Área da seção transversal (m ²)	Momento de Inércia (m ⁴)	Módulo de Elasticidade (GPa)	L (m)
1,61E-4	2,17E-09	206,84	2,54

A viga foi discretizada em uma malha com 21 elementos, como é observada na figura 5.12.

Figura 5.12 – Discretização da malha para viga engastada com momento.



Para a determinação do momento aplicado, utiliza-se a teoria de Euler-Bernoulli, onde:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (5.4)$$

Pelo fato da viga fletir até completar a volta em uma circunferência, o raio da curvatura é dado por:

$$\rho = \frac{L}{2\pi} \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.5) em (5.4):

$$\frac{2\pi EIM}{L} = 1,0 = M^* \quad (5.6)$$

Onde:

M^* é o fator de proporcionalidade para o momento aplicado na viga.

Neste exemplo, serão utilizados os fatores de proporcionalidade equivalentes a: 0,25, 0,50, 0,75 e 1,0.

Logo os momentos fletores aplicados são:

$$M = \frac{2\pi 206,84 \cdot 10^9 \cdot 0,2164 \cdot 10^{-8}}{2,54} = 1107,23 \text{ kN} \rightarrow p / M^* = 0,25 \quad (5.7)$$

$$M = \frac{2\pi 206,84 \cdot 10^9 \cdot 0,2164 \cdot 10^{-8}}{2,54} = 1107,23kN \rightarrow p / M^* = 0,50 \quad (5.8)$$

$$M = \frac{2\pi 206,84 \cdot 10^9 \cdot 0,2164 \cdot 10^{-8}}{2,54} = 1107,23kN \rightarrow p / M^* = 0,75 \quad (5.9)$$

$$M = \frac{2\pi 206,84 \cdot 10^9 \cdot 0,2164 \cdot 10^{-8}}{2,54} = 1107,23kN \rightarrow p / M^* = 1,00 \quad (5.10)$$

A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos pela rotina computacional e comparada com os resultados de Urthaler & Reddy (2005) dividindo o deslocamento horizontal do nó 21 pelo comprimento da viga:

Tabela 5.16 - Comparação dos resultados para o deslocamento horizontal do nó 21 – Viga com momento.

$M^* = 0,25$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código MATLAB	Erro	
0,365	0,363	0,49%	
$M^* = 0,50$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código MATLAB	Erro	
1,00	1,00	0,00%	
$M^* = 0,75$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código MATLAB	Erro	
1,22	1,212	0,60%	
$M^* = 1,0$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código MATLAB	Erro	
1,00	1,00	0%	

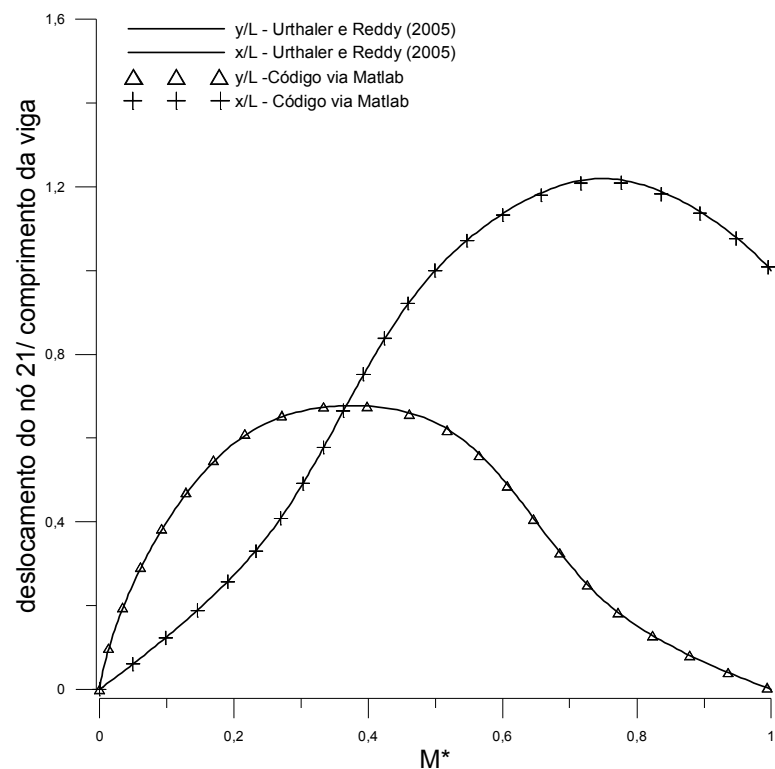
Na tabela 5.17 mostra-se a comparação dos resultados para a razão do deslocamento vertical do nó 21 pelo comprimento da viga.

Tabela 5.17 - Comparação dos resultados para o deslocamento vertical do nó 21 – Viga com momento.

$M^* = 0,25$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código Matlab	Erro	
0,64	0,636	0,50%	
$M^* = 0,50$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código Matlab	Erro	
0,634	0,637	0,52%	
$M^* = 0,75$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código Matlab	Erro	
0,212	0,212	0,33%	
$M^* = 1,0$			
Urthaler e Reddy (2005)	Código Matlab	Erro	
0	0	0%	

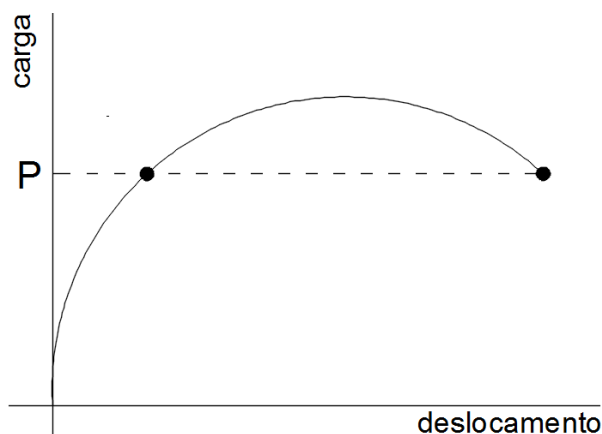
A figura 5.13 exibe o caminho do equilíbrio para a razão dos deslocamentos verticais e horizontais pelo comprimento da viga, para 25 incrementos de carga e tolerância 1e-6, comparando os resultados obtidos nesse trabalho aos propostos por Urthaler e Reddy (2005).

Figura 5.13 – Caminho do equilíbrio para os deslocamentos horizontais e verticais.



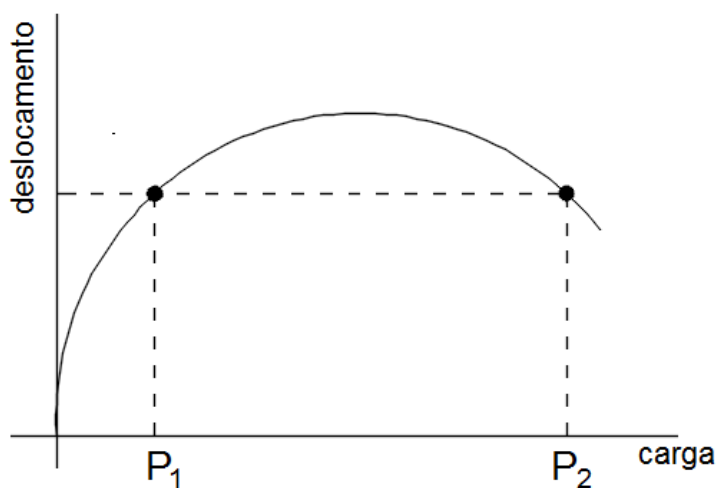
A figura 5.13 pode transmitir a ideia que a rotina computacional capturou pontos de snaps, observados na figura 5.14, o que não é possível quando se utiliza o método de Newton-Raphson.

Figura 5.14 – Snaps em problemas com redução do carregamento.



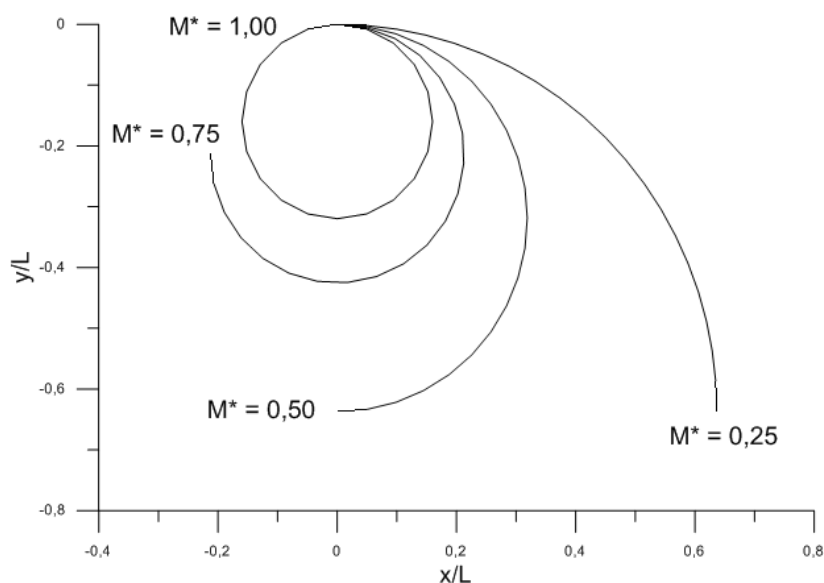
Entretanto, o que se tem na realidade é uma diminuição no deslocamento nodal, mas a carga continua sendo acrescida, como é mostrado na figura 5.15:

Figura 5.15 – Gráfico do deslocamento em função da carga.



Já a figura 5.16 traz o comportamento da viga submetida aos diferentes fatores de proporcionalidade para os momentos, concluindo que a viga submetida a $M^* = 1,0$ apresenta uma curvatura completa de 360° , como foi estudado por Urthaler & Reddy (2005).

Figura 5.16 – Comportamento da viga submetida a diferentes momentos.

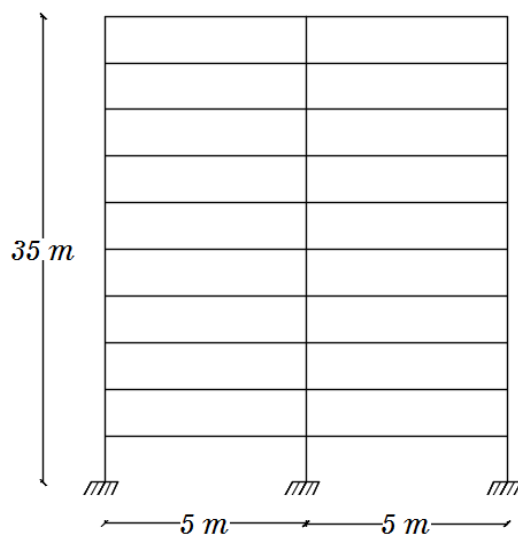


Analisando os resultados obtidos para a rotações, deslocamentos horizontais e deslocamentos verticais, obteve-se um resultado satisfatório.

5.7 Edifício De Múltiplos Pavimentos

O exemplo a seguir trata-se de um edifício de concreto armado (F_{ck} 25 MPa) de 10 andares (3,5 metros de altura por pavimento), conforme mostrado na figura 5.17. As vigas possuem seção transversal 12x30 cm, já os pilares são de 20x20 cm.

Figura 5.17 – Comportamento da viga submetida a diferentes momentos.



As propriedades geométricas são apresentadas na tabela 5.18:

Tabela 5.18 – Propriedades geométricas dos elementos estruturais.

	Área da seção transversal (m^2)	Momento de Inércia (m^4)
Vigas	0,036	2,7E-4
Pilares	0,04	1,33E-4

De acordo com NBR 6118 (ABNT,2014), o módulo de elasticidade tangente do concreto armado, para um F_{ck} de 20 a 50 MPa, é estimado pela equação a seguir:

$$E_c = \alpha_e 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (5.11)$$

Onde:

α_e : 1,2 para basalto e diabásio; 1,0 para granito e gnaiss; 0,9 para calcário e 0,7 para arenito;

E_c : Módulo de Elasticidade linear do concreto armado;

f_{ck} : Resistência característica do concreto.

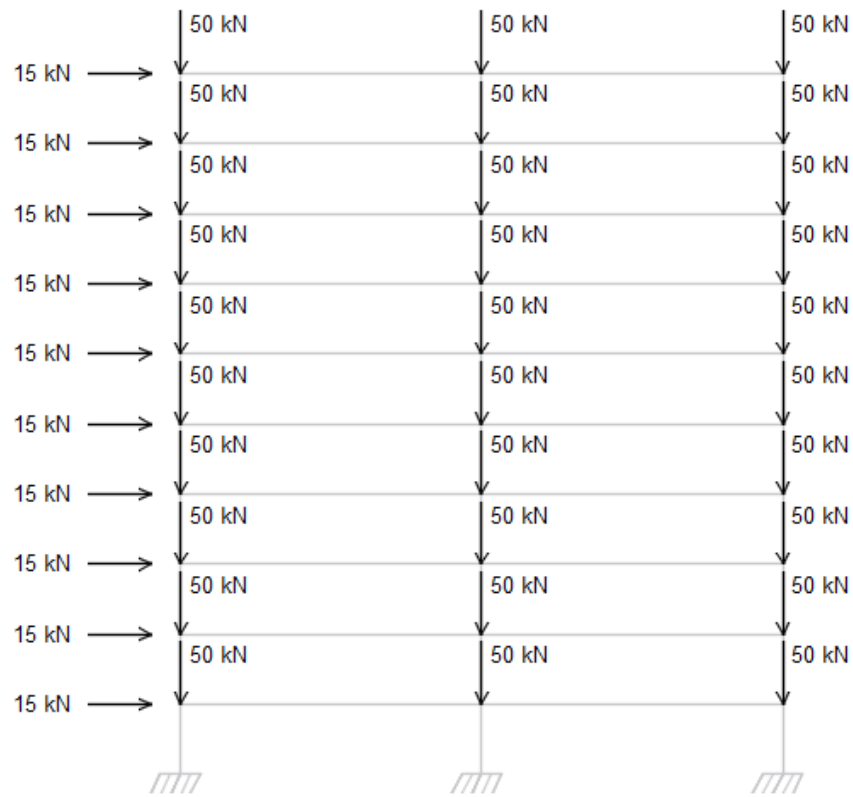
Considerando o agregado granítico, tem-se:

$$E_c = 1,0.5600 \sqrt{25} \quad (5.12)$$

$$E_c = 28000 MPa \quad (5.13)$$

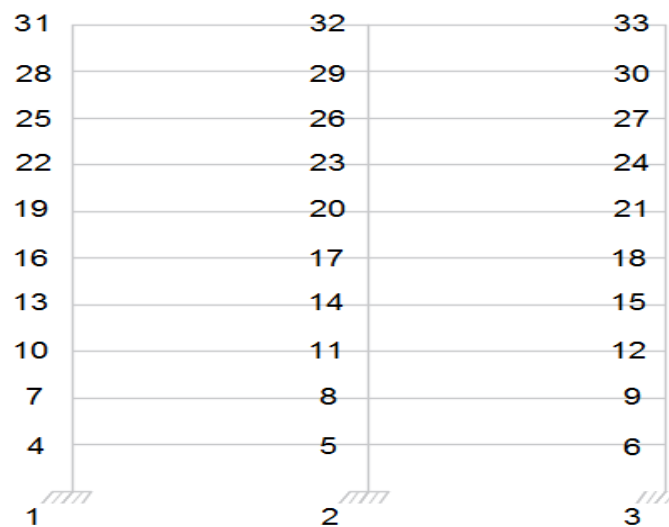
Ainda de acordo com a NBR 6118 (ABNT,2014), no item 15.3, a não linearidade física em estruturas de concreto armado pode ser considerada de modo aproximado através da redução da rigidez a flexão dos elementos estruturais. Para as vigas será considerado um fator de redução de 40% e para os pilares de 80%. O carregamento proposto para o edifício é exibido na figura 5.18.

Figura 5.18 - Discretização do pórtico em estudo.



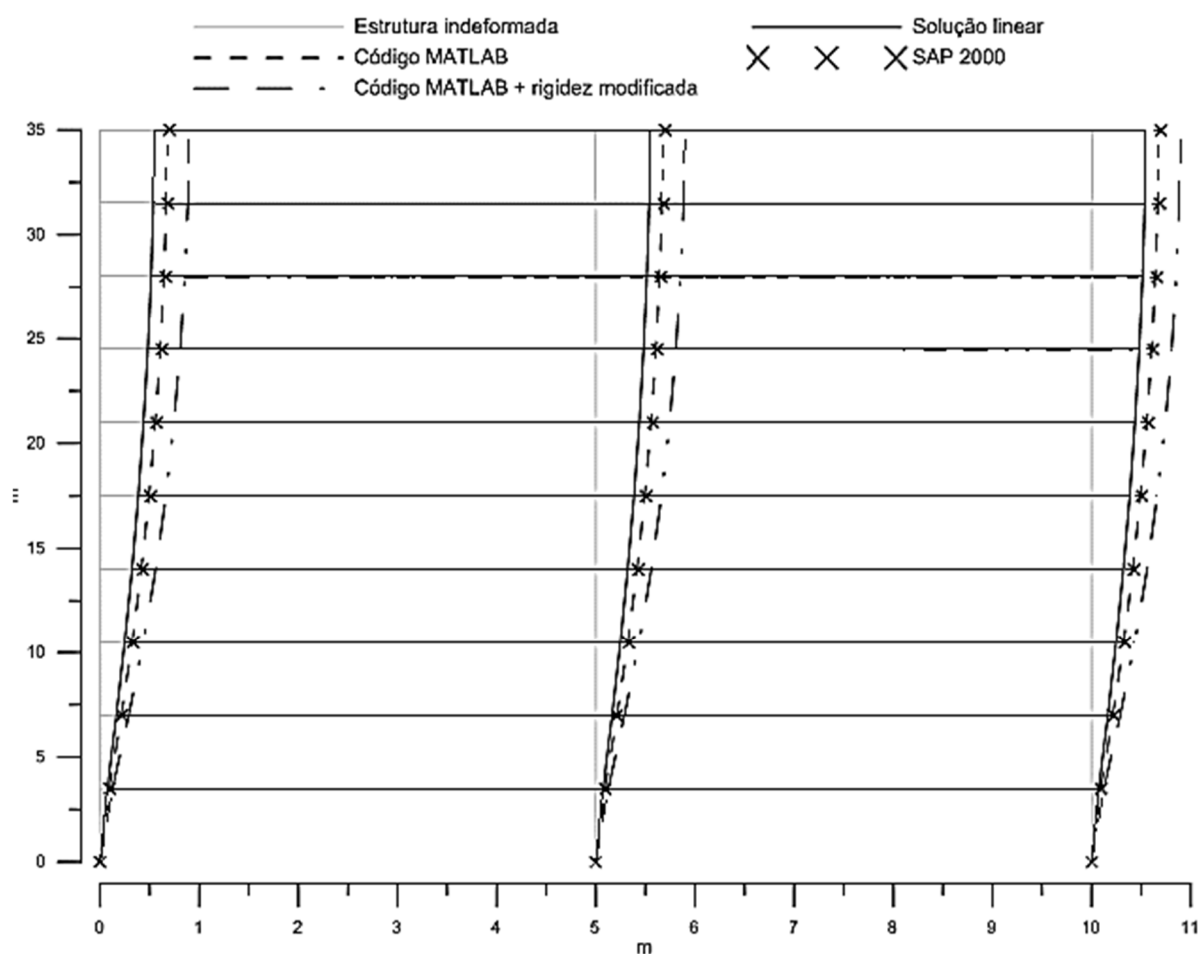
Para utilização do MEF desenvolvido, é necessário a discretização do pórtico em nós e elementos, como proposto na figura 5.19.

Figura 5.19 - Discretização do pórtico em estudo.



A figura a seguir apresenta a solução linear, com não linearidade geométrica e considerando a NLG em conjunto com a redução da rigidez a flexão dos elementos. Para validação, utilizou-se o SAP 2000 versão 18, com a mesma discretização de malha e abordagem P-Delta. Foram usados 25 incrementos de carga e tolerância $1e-6$.

Figura 5.20 – Comparação da deformada para os diferentes casos analisados.



6 CONCLUSÕES

Utilizando as formulações propostas aliadas ao processo iterativo-incremental de Newton-Raphson obteve-se êxito no desenvolvimento das rotinas computacionais para treliças planas, treliças espaciais e pórticos planos. As matrizes foram obtidas com estratégias simples, por meio das abordagens Co-rotacional e Lagrangeana Atualizada.

As formulações foram eficientes em todos os códigos, não necessitando de grandes discretizações de malhas de elementos finitos. Dentre as rotinas produzidas, a que necessitou maior discretização foi a de pórticos planos, entretanto, o tempo de processamento foi inferior a 10 segundos.

Apesar do uso de formulações distintas, ambas apresentaram matrizes geométricas semelhantes. A maior diferença é que na formulação Co-rotacional o comprimento do elemento que deve ser computado para matriz geométrica é calculado a partir das novas coordenadas das barras, ao contrário da formulação Lagrangeana Atualizada. As matrizes para todas estruturas reticuladas planas e treliças espaciais são desenvolvidas de forma detalhada.

Foi possível validar todas as rotinas com exemplos clássicos da literatura, incluindo problemas com solução de autovalores (cargas críticas) e aplicadas a casos práticos. Os códigos computacionais são apresentados nos apêndices.

Este trabalho apresenta um relevante acervo literário para pesquisadores que desejam estudar a análise não linearidade geométrica, com as formulações detalhadas, rotinas computacionais aptas a uso e matrizes de rigidez não lineares explícitas.

6.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Partindo do que foi desenvolvido nesse estudo, os trabalhos futuros podem abranger não só a não linearidade geométrica, mas também a não linearidade física. Além da análise para estruturas planas, é possível desenvolver rotinas computacionais para pórticos espaciais.

Outra continuação para esse trabalho é incrementar o estudo da dinâmica das estruturas com análise não linear e aplicação de otimização estrutural com a NLG.

Também fica como sugestão a implementação do controle de deslocamentos ou comprimento de arco para a solução do sistema de equações não linear.

REFERÊNCIAS

- ABNT, ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ALVES, R. V., 1995. Instabilidade Não Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- ARARIPE, M. A. F. A Não linearidade Física e Geométrica em Pórticos Planos de Concreto Armado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Dissertação de Mestrado. São José dos Campos, São Paulo. 1998.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B.; ELKHODARY, K. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. 2ª edição. Wiley. 2013.
- CARVALHO, M. I. B. C. & MATOS, A. C. C. Mecânica Lagrangeana. Apontamentos para disciplina: Introdução à Mecânica Clássica. Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto. 2001
- CARVALHO, M. F. M. S. Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos. Universidade Nova de Lisboa. Dissertação de Mestrado. Lisboa, 2010.
- CHAJES, A. Principles of Structural Stability Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. 1974.
- DE BORST, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J. C.; VERHOOSEL, C. V.. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. 2ª edição. Willey. 2012.
- DIPIKA, D. Object-Oriented Nonlinear Finite Element Analysis Framework for Implementing Modified Cam Clay Model. Departament of Civil Enineering. Indian Institute of Tecnology Guwahati. 2011.
- GELLATI, F. Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: modelagem por elementos finitos de barra. UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2012.

GRECO, M.; VICENTE, C. E. R. Analytical solutions for geometrically nonlinear trusses. Revista Escola de Minas, págs. 205-214, 62ª edição, 2009.

HARRISON, H. B. Computer Methods in Structural Analysis. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, Estados Unidos, 1973.

JÚNIOR, J. C. A. Dimensionamento de pórticos planos baseado em confiabilidade considerando não linearidade geométrica. Universidade Federal de Pernambuco. Dissertação de Mestrado. Recife, 2012.

KASSIMALI, A. Matrix Analysis of Structures. 2ª edição, Cengage Learning:2012.

KZAM, A. K. L. Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF Posicional com determinação de ponto críticos na trajetória de equilíbrio. Tese de Doutorado. São Carlos, 2016.

LACERDA, E. G. M. Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional. UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Dissertação de Mestrado. Natal, 2014.

MAHFOUZ, S. Y. Design Optimization of Structural Steel Work. Departament of Civil and Environmental Engineering. University of Bradford, UK. 1999.

MENIN, R. C. G. Aplicação da Descrição Cinemática Co-rotacional na Análise Não linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas. Universidade de Brasília. Tese de doutorado. Brasília, 2006.

MEEK, J. L.; TAN, H. S. Geometrically Nonlinear Analysis Of Space Frames By An Incremental Iterative Technique. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. Páginas 261-282. 1984.

OLIVEIRA, G. C. Aplicação Do Elemento De Viga Unificado Bernoulli-Timoshenko E Da Formulação Co-Rotacional Na Análise Não linear De Pórticos E Arcos. Universidade Federal de Brasília. Dissertação de Mestrado. Brasília. 2016.

PARASKI, N. V. Análise Estática Não Linear de Pórticos Planos via Matlab.UFF – Universidade Federal Fluminense. Dissertação de Mestrado. Volta Redonda, 2012.

PEREIRA, A. Projeto Ótimo de Pórticos Planos com Restrição à Flambagem. PUC-Rio.

Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. Rio de Janeiro, 2002.

PINTO, R. S. Não linearidade Física e Geométrica no Projeto de Edifícios Usuais de Concreto Armado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Dissertação de Mestrado. São Carlos, 1997.

PINTO, R. S. Análise Não linear Das Estruturas De Contraventamento De Edifícios Em Concreto Armado. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Tese de Doutorado. São Carlos, 2002.

PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. Dover Publications. 1968

RENTON, J. D. Buckling of Frames Composed of Thin-Walled Members, Thin-Walled Structures. Chilver, A. H, Chatto & Windus. 1967.

SILVA, R. M. Análise não linear de pórticos planos de concreto armado: Modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados. 264 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, 1996.

SO, A. K. W.; CHAN, S. L. Buckling and Geometrically Nonlinear Analysis of Frames Using One Element/ Member. J. Construct. Steel Research. 1991.

SZILARD, R. Theories and Applications of Plane Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. 2004.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J.E., 1963. Mecânica dos Sólidos. Livros Técnicos e Científicos, Vol. 01.

URTHALER, Y.; REDDY, J. N. A Corotational Finite Element Formulation for the Analysis of Planar Beams. Communications in Numerical Methods in Engineering. Págs 533-570. 2005

WEMPNER, G. Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells. International Journal of Solids and Structures 5: 117-153. 1969.

WILLEMS, N.; LUCAS, W. M. Strucutural Analysis for Engineers. McGraw-Hill. 1978.

WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. Computers & Structures, vol. 7, págs. 725-735. 1977.

YANG, T. Y. Matrix displacement solution to elastic problems of beams and frames. International Journal of Solids and Structures, v. 9, p 829-842. 1973.

YANG, Y. B.; LEU, L. J. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis of trusses. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 92, p. 121–131, 1991.

YAW, L. L. 2D Co-rotational Truss Formulation. 2009. Disponível em: <https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/Co-rotational_docs/2Dcorot_truss.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2017.

YAW, L. L. 3D Co-rotational Truss Formulation. 2011. Disponível em: <https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/Co-rotational_docs/3Dcorot_truss.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C. Incremental Displacement in Non-Linear Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, 587-592. 1971.

APÊNDICE A - MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS

A seguir encontra-se a matriz de rigidez linear para pórticos planos e a generalização para coordenadas locais.

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

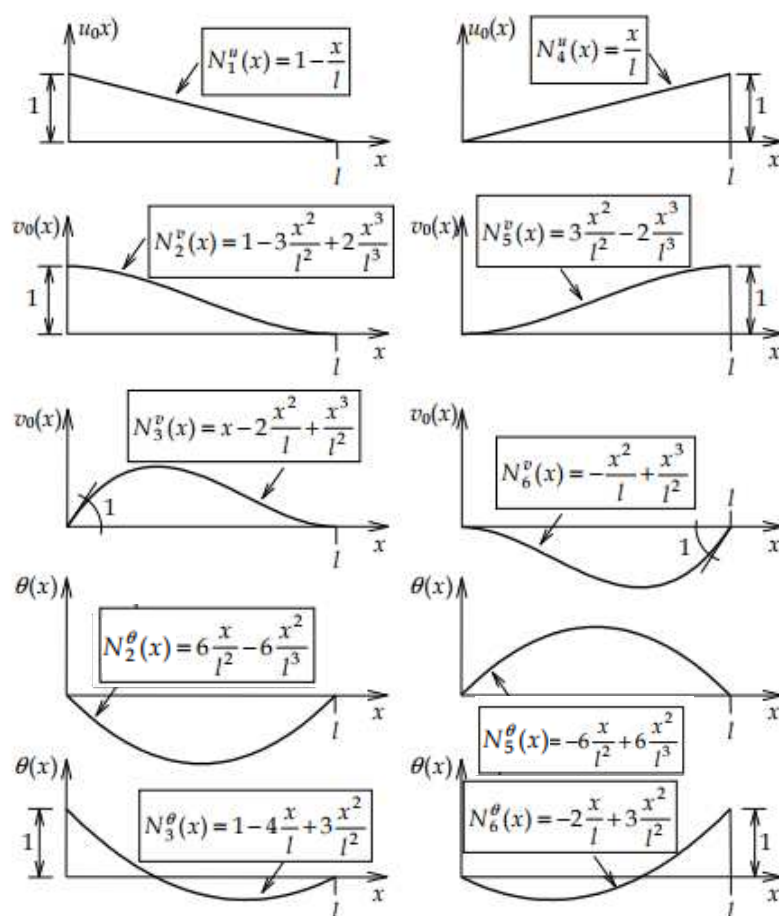
As matrizes de forças e de deslocamentos no referencial local descritas anteriormente, podem ser transformadas para o referencial global usando a matriz de transformação:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & c_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_y & c_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_x & c_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_y & c_x \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

APÊNDICE B - FUNÇÕES DE FORMA PARA PÓRTICO PLANO

A figura B.1 ilustra as funções de forma descritas no capítulo quatro:

Figura B.1- Funções de forma axiais e transversais de flexão de uma barra isolada de acordo com a teoria de vigas de Navier.



Fonte: Adaptada de MARTHA, (2016).

APÊNDICE C - APLICAÇÃO DO TEOREMA DE CASTIGLIANO EM ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

$$A_1 = \frac{dU_i}{du_j} = \frac{EA}{L}(u_j - u_k) - \frac{EA}{L^2} \left(\frac{3}{5}v_j^2 + \frac{1}{15}L^2\theta_j^2 + \frac{3}{5}v_k^2 + \frac{1}{15}L^2\theta_k^2 + \frac{1}{10}Lv_j\theta_j - \frac{6}{5}v_jv_k + \frac{1}{10}Lv_j\theta_k - \frac{1}{10}L\theta_jv_k - \frac{1}{30}L^2\theta_j\theta_k - \frac{1}{10}Lv_k\theta_k \right) \quad (C.1)$$

$$A_2 = \frac{dU_i}{dv_j} = \frac{12EI}{L^3} \left(v_j + \frac{1}{2}L\theta_j - v_k + \frac{1}{2}L\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{6}{5}v_j + \frac{1}{10}L\theta_j - \frac{6}{5}v_k + \frac{1}{10}L\theta_k \right) \quad (C.2)$$

$$A_3 = \frac{dU_i}{d\theta_j} = \frac{4EI}{L^3} \left(L^2\theta_j + \frac{3}{2}Lv_j - \frac{3}{2}Lv_k + \frac{1}{2}L^2\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{2}{15}L^2\theta_j + \frac{1}{10}Lv_j - \frac{1}{10}Lv_k - \frac{1}{30}L^2\theta_k \right) \quad (C.3)$$

$$A_4 = \frac{dU_i}{du_k} = \frac{EA}{L}(u_k - u_j) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{3}{5}v_j^2 + \frac{1}{15}L^2\theta_j^2 - \frac{6}{5}v_jv_k + \frac{3}{5}v_k^2 + \frac{1}{15}L^2\theta_k^2 + \frac{1}{10}Lv_j\theta_j + \frac{1}{10}Lv_j\theta_k - \frac{1}{10}L\theta_jv_k - \frac{1}{30}L^2\theta_j\theta_k - \frac{1}{10}Lv_k\theta_k \right) \quad (C.4)$$

$$A_5 = \frac{dU_i}{dv_k} = \frac{12EI}{L^3} \left(v_k - v_j - \frac{1}{2}L\theta_j - \frac{1}{2}L\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{4}{5}v_k - \frac{6}{5}v_j - \frac{1}{10}L\theta_j - \frac{1}{10}L\theta_k \right) \quad (C.5)$$

$$A_6 = \frac{dU_i}{d\theta_k} = \frac{4EI}{L^3} \left(L^2\theta_k + \frac{3}{2}Lv_j + \frac{1}{2}L^2\theta_j - \frac{3}{2}Lv_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{2}{15}L^2\theta_k + \frac{1}{10}Lv_j - \frac{1}{30}L^2\theta_j - \frac{1}{10}Lv_k \right) \quad (C.6)$$

Simplificando (C.1) a (C.6):

$$A_1 = \frac{dU_i}{du_j} = \frac{EA}{L}(u_j - u_k) \quad (\text{C.7})$$

$$A_2 = \frac{dU_i}{dv_j} = \frac{12EI}{L^3} \left(v_j + \frac{1}{2}L\theta_j - v_k + \frac{1}{2}L\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{6}{5}v_j + \frac{1}{10}L\theta_j - \frac{6}{5}v_k + \frac{1}{10}L\theta_k \right) \quad (\text{C.8})$$

$$A_3 = \frac{dU_i}{d\theta_j} = \frac{4EI}{L^3} \left(L^2\theta_j + \frac{3}{2}Lv_j - \frac{3}{2}Lv_k + \frac{1}{2}L^2\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{2}{15}L^2\theta_j + \frac{1}{10}Lv_j - \frac{1}{10}Lv_k - \frac{1}{30}L^2\theta_k \right) \quad (\text{C.9})$$

$$A_4 = \frac{dU_i}{du_k} = \frac{EA}{L}(u_k - u_j) \quad (\text{C.10})$$

$$A_5 = \frac{dU_i}{dv_k} = \frac{12EI}{L^3} \left(v_k - v_j - \frac{1}{2}L\theta_j - \frac{1}{2}L\theta_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{4}{5}v_k - \frac{6}{5}v_j - \frac{1}{10}L\theta_j - \frac{1}{10}L\theta_k \right) \quad (\text{C.11})$$

$$A_6 = \frac{dU_i}{d\theta_k} = \frac{4EI}{L^3} \left(L^2\theta_k + \frac{3}{2}Lv_j + \frac{1}{2}L^2\theta_j - \frac{3}{2}Lv_k \right) + \frac{EA}{L^2}(u_k - u_j) \left(\frac{2}{15}L^2\theta_k + \frac{1}{10}Lv_j - \frac{1}{30}L^2\theta_j - \frac{1}{10}Lv_k \right) \quad (\text{C.12})$$

APÊNDICE D - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 2 – EXEMPLO TRELIÇA PLANA - KASSIMALI (2012)

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Treliças Planas, NL Geométrica -Exemplo Kassimali - Capítulo 2
%-----

clc; clear all;
format longg;
tic

%% PASSO 01: DADOS DE ENTRADA DA TRELIÇA
E=10*10^9; % Módulo de elasticidade
A=0.001200; % área da seção transversal

coord=[0 0; 2 3; 6 0]; % Matriz de coordenadas
conec=[1 2; 2 3]; % Matriz de conectividades

nn=size(coord,1); % número de nós do sistema
nel=size(conec,1); % número de elementos
ngl=2*nn; % número de graus de liberdade

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
elim=[1,2,5,6]; % Restrições nos nós
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

Fe=zeros(ngl,1);
Fe(4,1)=-2250*10^3; % Vetor de forças externas

%% %% PASSO 03: PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=20;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-5;
% Inicialização do processo incremental
forcas_iniciais=Fe;
inc=1;
iter= 1;
%
for inc=1:ninc
%
% Inicialização do processo iterativo
%
lambda= inc/ninc; % factor de carga
erro= 9999;
Fe=[forcas_iniciais*lambda];
```

```

while erro > tolerancia && iter <= max

%% PASSO 03: CONDIÇÕES INICIAIS (CONTROLE DE CARGAS)

%Condição inicial para forças internas, matriz de rigidez e deslocamentos:

KGNL=zeros(ngl); % Matriz de rigidez não linear
f = zeros(ngl,1); % vetor auxiliar de forças internas
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições

for k=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

    % Preparação dos parâmetros para o próximas iterações

    f = zeros(ngl,1);

    for i=1:nel

        faux = zeros(ngl,1);
        no1=conec(i,1); % nó inicial
        no2=conec(i,2); % nó final

        m1=2*no1-1; %nó 1
        m2=2*no1;
        m3=2*no2-1; %nó 2
        m4=2*no2;

        % coordenadas dos nós do elemento
        x1=coord(no1,1);
        x2=coord(no2,1);
        y1=coord(no1,2);
        y2=coord(no2,2);

        desglobal = [des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4)];

        L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

        Ln = sqrt((x2 + desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))^2 +...
            (y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))^2);

        cos=(x2+ desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln; %coseno diretor
        sen=(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

        Rot = [cos sen -cos -sen];

        u = L - Ln;

        Q = ((E*A)/L)*(u);

        Fglobal = Q*(Rot');
    end
end

```

```

faux(m1,1)= Fglobal(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1);
faux(m3,1)= Fglobal(3,1);
faux(m4,1)= Fglobal(4,1);

f = f +faux;

end

KGNL=zeros(ngl);
%KG=zeros(ngl);

disp('----- ITERAÇÃO -----')
disp(k);

%>>> ETAPA B - LOOP PARA MATRIZ TANGENTE GLOBAL
for i=1:nel

K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
no1=conec(i,1); % nó inicial
no2=conec(i,2); % nó final

%transforma a posição local na posição correspondente na matriz
global
m1=2*no1-1; %nó 1
m2=2*no1;
m3=2*no2-1; %nó 2
m4=2*no2;

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

desglobal = [des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4)];

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

Ln = sqrt((x2 + desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))^2+...
(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))^2);

cos=(x2+ desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln; %coseno diretor
sen=(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

u = L - Ln;

Q = ((E*A)/L)*(u);

aux1 = (E*A)/L;
aux2 = (Q)/Ln;

Ke=aux1*[cos^2 cos*sen -cos^2 -cos*sen;
cos*sen sen^2 -cos*sen -sen^2;

```

```

        -cos^2 -cos*sen cos^2 cos*sen;
        -cos*sen -sen^2 cos*sen sen^2];

Kg=aux2*[-sen^2 cos*sen sen^2 -cos*sen;
        cos*sen -cos^2 -cos*sen cos^2;
        sen^2 -cos*sen -sen^2 cos*sen;
        -cos*sen cos^2 cos*sen -cos^2];

m=[2*no1-1;2*no1;2*no2-1;2*no2];

for z=1:4
    for j=1:4
        K(m(z,1),m(j,1))=Ke(z,j)+Kg(z,j);
    end
end

    KGNL=KGNL+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%% PASSO 02:SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KGNL; % matriz para manipulações preservando KGNL sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if k==1
    FR=Fe; % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f; % resíduo nas demais iterações
end

FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

% matriz geral de deslocamentos
%disp('>>> solução do vetor de deslocamentos')
x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo
%disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp('>>> solução do vetor de deslocamentos acumulados')
des=des+x

end
erro= sol'*sol;
fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
```

```

iter= iter + 1;
end
end

%% PASSO 04:Acúmulo dos deslocamentos
disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp(des);

%% PASSO 05: Gráficos

x11=des;

aaa=[0,2];
bbb=[0,3];
ccc=[2,6];
ddd=[3,0];

ab=[x11(1,1)+0,x11(3,1)+2];
co=[x11(2,1)+0,x11(4,1)+3];
ab1=[x11(3,1)+2,x11(5,1)+6];
co1=[x11(4,1)+3,x11(6,1)+0];

hold on
grid on
title('Kassimali (Section 10.2, page 601): Análise Não linear Geométrica')
plot([ab,ab1],[co,co1],'k+--','LineWidth',1)
plot([aaa,ccc],[bbb,ddd],'k','LineWidth',2)
legend('Treliça após o carregamento','Treliça no estado inicial')
xlabel('metros')
ylabel('metros')
set(gca,'XTick',0:0.25:8.5)
set(gca,'YTick',0:0.25:3.5)
toc

```

APÊNDICE E - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO

5.1 - TRELIÇA PLANA – CARGA CRÍTICA

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Treliças Planas, NL Geométrica CARGA CRITICA
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.1 -
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

clc; clear all;
format longg;

syms lambda;
%% PASSO 01: DADOS DE ENTRADA DA TRELIÇA
E=10E9
A1=2.5E-4
A2=2e-4
L=2
alpha=pi/4

% área da seção transversal
coord=[0 0;L/tan(alpha) L;L/tan(alpha) 0] % Matriz de
coordenadas

conec=[1 2;2 3]; % Matriz de conectividades

nn=size(coord,1); % número de nós do sistema
nel=size(conec,1); % número de elementos
ngl=2*nn; % número de graus de liberdade

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
elim=[1,2,5,6]; % Restrições nos nós
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

%% PASSO 02: CONDIÇÕES INICIAIS (CONTROLE DE CARGAS)
```

%Condição inicial para forças internas, matriz de rigidez e deslocamentos:

```

KGL=zeros(ngl); % Matriz de rigidez linear
KGNL=zeros(ngl); % Matriz de rigidez não linear
KG=zeros(ngl);

for i=1:nel

    faux = zeros(ngl,1);
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    m1=2*no1-1; %nó 1
    m2=2*no1;
    m3=2*no2-1; %nó 2
    m4=2*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

end

KGNL=zeros(ngl);
KGNLL=zeros(ngl);

for i=1:nel

    KEE=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
    KGG=zeros(ngl);
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    %transforma a posição local na posição correspondente na matriz
global

```

```

m1=2*no1-1; %nó 1
m2=2*no1;
m3=2*no2-1; %nó 2
m4=2*no2;

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

L1=L;
L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento
cos=(x2-x1)/L; %coseno diretor
sen=(y2-y1)/L;; %seno diretor
cos1=sin(alpha);
sen1=((1-(sin(alpha))^2)^(1/2));

Q = -1;
A(1)=A1;
A(2)=A2;

aux1 = (E*A(i))/L;
aux2 = (Q)/L;

Ke=aux1*[cos^2 cos*sen -cos^2 -cos*sen;
        cos*sen sen^2 -cos*sen -sen^2;
        -cos^2 -cos*sen cos^2 cos*sen;
        -cos*sen -sen^2 cos*sen sen^2];

Kg=Q/L*[-sen1^2 cos1*sen1 sen1^2 -cos1*sen1;
        cos1*sen1 -cos1^2 -cos1*sen1 cos1^2;
        sen1^2 -cos1*sen1 -sen1^2 cos1*sen1;
        -cos1*sen1 cos1^2 cos1*sen1 -cos1^2];

m=[2*no1-1;2*no1;2*no2-1;2*no2];

for z=1:4
    for j=1:4

```

```

        KEE(m(z,1),m(j,1))=Ke(z,j);
    end
end

for z=3:4
    for j=3:4
        KGG(m(z,1),m(j,1))=Kg(z,j);
    end
end

KGNL=KGNL+KEE; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)
KGNLL=KGNLL+KGG;
end

%% PASSO 02:SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES
KGNL;
KGNLL;

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KGNL(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KGNL(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez
KGNL

KGNLL(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KGNLL(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez
KGNLL

CARGACRITICA=(KGNL(1,1)*KGNL(2,2)-KGNL(1,2)*KGNL(2,1))/KGNL(2,2)*L

RESP=(A1*E*((1-
(sin(alpha))^2)^(1/2))^2*sin(alpha))/(1+(A1/A2)*((sin(alpha))^3))

```

APÊNDICE F - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.2 - PÓRTICO PLANO – CARGA CRÍTICA

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Pórticos Planos, NL Geométrica
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.2
% PORTICO PLANO - CARGA CRITICA
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

%% >>>> DADOS INICIAIS

coord=[0 0;0 3;3 3;3 0];
conec=[1 2;2 3;3 4];

A = [1 1 1]; % área da seção transversal
I = [1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4];
E = (10)*(10^9);

nnos=size(coord,1);          % número de nós do sistema
nel=size(conec,1);           % número de elementos
ngl=3*nnos;                   % número de graus de liberdade

F=zeros(ngl,1); % define o vetor de forças nodais do problema [K]{x}={F}

elim=[1 2 3 7 10 11 12]; % posições restringidas (eliminadas)

du = zeros(nnos,1);
dv = zeros(nnos,1);
angulo = zeros(nnos,1);
dulinear = zeros(nnos,1);
dvlinear = zeros(nnos,1);

%% %% PASSO 03: PROCESO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=10;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-6;
% Inicialização do processo incremental
inc=100;
iter= 1;
```

```

for i=1:nel
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    % coordenadas dos nós do elemento
    Xglobal(1,i)=coord(no1,1);
    Xglobal(1,i+1)=coord(no2,1);
    Yglobal(1,i)=coord(no1,2);
    Yglobal(1,i+1)=coord(no2,2);

end

%% <<<<< MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E SOLUÇÃO NL >>>>
KEG=zeros(ngl); % matriz de rigidez global do problema não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições
alfa = zeros(nnos,1); %inicializa vetor alfa que vai armazenar as rotações
%totais de cada nó
beta = zeros(nel,1); %inicializa vetor beta que vai armazenar rotação de
%corpo rígido de cada elemento
teta = zeros(nel,1); %inicializa vetor teta que vai armazenar ângulo
%inicial de cada elemento

for inc=1:ninc
    %
    % Inicialização do processo iterativo
    %
    lambda= inc/ninc; % fator de carga
    erro= 9999;
    Fe=[F*lambda];
    while erro > tolerancia && iter <= max

        for z=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

            for i=1:nel
                no1=conec(i,1); % nó inicial
                no2=conec(i,2); % nó final

                % coordenadas dos nós do elemento
                x1=coord(no1,1);
                x2=coord(no2,1);
                y1=coord(no1,2);
                y2=coord(no2,2);

                L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

                cosseno=(x2-x1)/L; %cosseno diretor
                seno=(y2-y1)/L; %seno diretor

                teta(i)= acos(cosseno);
                if seno < 0
                    teta(i)=-teta(i);
                end
            end
        end
    end
end

```

end

```
%>>> ETAPA C - PREPARA OS PARÂMETROS PARA A PRÓXIMA ITERAÇÃO
%>>> TENSÕES E DEFORMAÇÕES DE CADA ELEMENTO
f = zeros(ngl,1);

for i=1:nel

    faux = zeros(ngl,1);
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

    Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

    C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
    S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

    alfa(no1,1) = des(m3,1);
    alfa(no2,1) = des(m6,1);

    %%%%%%%%%%%%%CÁLCULO DA ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO "BETA" %%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%
if z ~= 1
    ang= acos(C);
if S < 0
    ang=-ang;
end
%
% O ângulo ang deve ser corrigido considerando o
% valor atual da rotação nos dois nós.

    alfam= (alfa(no1,1)+alfa(no2,1))/2;
%
```

```

lmin= 9999;
kmin= 9;
for k=-3:+3
%
angx= ang + 2*k*pi;
%
% Calcula a diferença entre os dois ângulos
d= alfa - angx;
%
% Calcula o comprimento de d
lx= abs(d);
if lx < lmin
lmin= lx;
kmin= k;
end
end
%
ang= ang + 2*kmin*pi;
%
beta(nel,1)= ang-teta(i);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Rot1 = [C S -C -S];

Rot2 = [-S C S -C];

u = L - Ln;

alfad1 = alfa(no1,1) - beta(nel,1);
alfad2 = alfa(no2,1) - beta(nel,1);

V = ((6*E*I(1,i))/(L*Ln))*(alfad1+alfad2);

N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

M1 = ((2*E*I(1,i))/L)*(2*alfad1+alfad2);

M2 = ((2*E*I(1,i))/L)*(alfad1+2*alfad2);

Fglobal = N*(Rot1');

Fglobal2 = V*(Rot2');

faux(m1,1)= Fglobal(1,1) + Fglobal2(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1) + Fglobal2(2,1);
faux(m3,1) = M1;
faux(m4,1)= Fglobal(3,1) + Fglobal2(3,1);
faux(m5,1)= Fglobal(4,1) + Fglobal2(4,1);
faux(m6,1) = M2;

f = f +faux;

end

f;

KEG=zeros(ngl);

```

```

%>>> ETAPA A - LOOP PARA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
for i=1:nel

    K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    %transforma a posição local na posição correspondente na matriz
%global
    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

    Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

    C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
    S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

    u = L - Ln;

    N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

    ke= zeros(6);
    g= zeros(6);

    % Matriz de rigidez em coordenadas locais
    ke(1,1)= (E*A(1,i))/ L ;
    ke(1,4)= -ke(1,1) ;
    ke(2,2)= (12*E*I(1,i))/ (L^3) ;
    ke(2,3)= (6*E*I(1,i)) / (L^2) ;
    ke(2,5)= -ke(2,2) ;
    ke(2,6)= ke(2,3) ;
    ke(3,2)= ke(2,3) ;
    ke(3,3)= (4*E*I(1,i)) / L ;
    ke(3,5)= -ke(3,2) ;
    ke(3,6)= ke(3,3) / 2.0 ;
    ke(4,1)= ke(1,4) ;

```

```

ke(4,4)= ke(1,1) ;
ke(5,2)= ke(2,5) ;
ke(5,3)= ke(3,5) ;
ke(5,5)= ke(2,2) ;
ke(5,6)= -ke(2,3) ;
ke(6,2)= ke(2,6) ;
ke(6,3)= ke(3,6) ;
ke(6,5)= ke(5,6) ;
ke(6,6)= ke(3,3) ;
%
% Matriz geométrica
%
axl= -N;
g(2,2)= 6*axl/(5*L) ;
g(2,3)= axl/10 ;
g(2,5)= -g(2,2) ;
g(2,6)= g(2,3) ;
g(3,2)= g(2,3) ;
g(3,3)= 2*axl*L/15 ;
g(3,5)= -g(2,3) ;
g(3,6)= -axl*L/30 ;
g(5,2)= g(2,5) ;
g(5,3)= g(3,5) ;
g(5,5)= g(2,2) ;
g(5,6)= -g(2,3) ;
g(6,2)= g(2,6) ;
g(6,3)= g(3,6) ;
g(6,5)= g(5,6) ;
g(6,6)= g(3,3) ;
%
%-----

T=[C S 0 0 0 0
   -S C 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0
     0 0 0 C S 0
     0 0 0 -S C 0
     0 0 0 0 0 1];

Ke = T'*ke*T;
Kgeo = T'*g*T;

% matriz de rigidez do elemento expandida em índices globais

K(m1,m1)=Ke(1,1)+ Kgeo(1,1); K(m1,m2)=Ke(1,2)+ Kgeo(1,2);...
K(m1,m3)=Ke(1,3)+Kgeo(1,3); K(m1,m4)=Ke(1,4)+Kgeo(1,4);...
K(m1,m5)=Ke(1,5)+Kgeo(1,5); K(m1,m6)=Ke(1,6)+Kgeo(1,6);
K(m2,m1)=Ke(2,1)+ Kgeo(2,1); K(m2,m2)=Ke(2,2)+ Kgeo(2,2);...
K(m2,m3)=Ke(2,3)+Kgeo(2,3); K(m2,m4)=Ke(2,4)+ Kgeo(2,4);...
K(m2,m5)=Ke(2,5)+ Kgeo(2,5); K(m2,m6)=Ke(2,6)+ Kgeo(2,6);
K(m3,m1)=Ke(3,1) + Kgeo(3,1); K(m3,m2)=Ke(3,2)+ Kgeo(3,2);...
K(m3,m3)=Ke(3,3)+Kgeo(3,3); K(m3,m4)=Ke(3,4)+ Kgeo(3,4);...
K(m3,m5)=Ke(3,5)+ Kgeo(3,5); K(m3,m6)=Ke(3,6)+ Kgeo(3,6);
K(m4,m1)=Ke(4,1) + Kgeo(4,1); K(m4,m2)=Ke(4,2) + Kgeo(4,2);...
K(m4,m3)=Ke(4,3)+Kgeo(4,3); K(m4,m4)=Ke(4,4)+Kgeo(4,4);...
K(m4,m5)=Ke(4,5)+Kgeo(4,5); K(m4,m6)=Ke(4,6)+Kgeo(4,6);
K(m5,m1)=Ke(5,1) + Kgeo(5,1); K(m5,m2)=Ke(5,2) + Kgeo(5,2);...
K(m5,m3)=Ke(5,3)+Kgeo(5,3); K(m5,m4)=Ke(5,4)+Kgeo(5,4);...
K(m5,m5)=Ke(5,5)+Kgeo(5,5); K(m5,m6)=Ke(5,6)+Kgeo(5,6);
K(m6,m1)=Ke(6,1) + Kgeo(6,1); K(m6,m2)=Ke(6,2) + Kgeo(6,2);...

```

```

K(m6,m3)=Ke(6,3)+Kgeo(6,3); K(m6,m4)=Ke(6,4)+Kgeo(6,4); ...
K(m6,m5)=Ke(6,5)+Kgeo(6,5); K(m6,m6)=Ke(6,6)+Kgeo(6,6);

    KEG=KEG+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%>>> ETAPA B - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KEG; % matriz para manipulações preservando KEG sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

CARGACRITICA=(KR(1,1)*KR(2,2)-KEG(1,2)*KR(2,1))/KR(2,2)

```

APÊNDICE G - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO

5.3 - TRELIÇA PLANA – YAW (2009)

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Trelanças Planas, NL Geométrica
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.3 - YAW (2009)
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

%% PASSO 01: DADOS DE ENTRADA DA TRELIÇA
E=199.947*10^9 % Módulo de elasticidade
A=6.45E-05; % área da seção transversal

coord=[0.0127*0 0;0.0127*0 0.0127;0.0127*1 0;0.0127*1 0.0127;0.0127*2 0;...
0.0127*2 0.0127; 0.0127*3 0;0.0127*3 0.0127;0.0127*4 0;...
0.0127*4 0.0127;0.0127*5 0;0.0127*5 0.0127;0.0127*6 0;...
0.0127*6 0.0127;0.0127*7 0;0.0127*7 0.0127;0.0127*8 0;...
0.0127*8 0.0127;0.0127*9 0;0.0127*9 0.0127;0.0127*10 0;...
0.0127*10 0.0127;0.0127*11 0;0.0127*11 0.0127;0.0127*12 0;...
0.0127*12 0.0127;0.0127*13 0;0.0127*13 0.0127;0.0127*14 0;...
0.0127*14 0.0127;0.0127*15 0;0.0127*15 0.0127;0.0127*16 0;...
0.0127*16 0.0127;0.0127*17 0;0.0127*17 0.0127;0.0127*18 0;...
0.0127*18 0.0127;0.0127*19 0;0.0127*19 0.0127;0.0127*20 0;...
0.0127*20 0.0127];

conec=[1 3;3 5;5 7;7 9;9 11;11 13;13 15;15 17;17 19;19 21;21 23;...
23 25;25 27;27 29;29 31;31 33;33 35;35 37;37 39;39 41;...
2 4;4 6;6 8;8 10;10 12;12 14;14 16;16 18;18 20;20 22;22 24;...
24 26;26 28;28 30;30 32;32 34;34 36;36 38;38 40;40 42;...
1 2;3 4;5 6;7 8;9 10;11 12;13 14;15 16;17 18;19 20;21 22;...
23 24;25 26;27 28;29 30;31 32;33 34;35 36;37 38;39 40;41 42;...
1 4;3 6;5 8;7 10;9 12;11 14;13 16;15 18;17 20;19 22;21 24;...
23 26;25 28;27 30;29 32;31 34;33 36;35 38;37 40;39 42];

nn=size(coord,1); % número de nós do sistema
nel=size(conec,1); % número de elementos
ngl=2*nn; % número de graus de liberdade

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
elim=[1,2,3,4]; % Restrições nos nós
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

Fe=zeros(ngl,1);
Fe(84,1)=-89*10^3; % Vetor de forças externas
%iter=input('Digite o número de iterações desejadas: ');

%% %% PASSO 03: PROCESO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=10;
```

```

% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-6;
% Inicialização do processo incremental
forças_iniciais=Fe;
inc=100;
iter= 1;
%
for inc=1:ninc
%
% Inicialização do processo iterativo
%
lambda= inc/ninc; % factor de carga
erro= 9999;
Fe=[forças_iniciais*lambda];

while erro > tolerancia && iter <= max

%% PASSO 03: CONDIÇÕES INICIAIS (CONTROLE DE CARGAS)

%Condição inicial para forças internas, matriz de rigidez e deslocamentos:

KGNL=zeros(ngl); % Matriz de rigidez não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições

for k=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

    % Preparação dos parâmetros para o próximas iterações

    f = zeros(ngl,1);

    for i=1:nel

        faux = zeros(ngl,1);
        no1=conec(i,1); % nó inicial
        no2=conec(i,2); % nó final

        m1=2*no1-1; %nó 1
        m2=2*no1;
        m3=2*no2-1; %nó 2
        m4=2*no2;

        % coordenadas dos nós do elemento
        x1=coord(no1,1);
        x2=coord(no2,1);
        y1=coord(no1,2);
        y2=coord(no2,2);

        desglobal = [des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4)];

        L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

        Ln = sqrt((x2 + desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))^2 +...
            (y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))^2);

```

```

cos=(x2+ desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln; %coseno diretor
sen=(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

Rot = [cos sen -cos -sen];

u = L - Ln;

Q = (E*A)/L*(u);

Fglobal = Q*(Rot');

faux(m1,1)= Fglobal(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1);
faux(m3,1)= Fglobal(3,1);
faux(m4,1)= Fglobal(4,1);

f = f +faux;

end

KGNL=zeros(ngl);

disp('----- ITERAÇÃO -----')
disp(k);

%>>> ETAPA B - LOOP PARA MATRIZ TANGENTE GLOBAL
for i=1:nel

K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
no1=conec(i,1); % nó inicial
no2=conec(i,2); % nó final

%transforma a posição local na posição correspondente na matriz
global
m1=2*no1-1; %nó 1
m2=2*no1;
m3=2*no2-1; %nó 2
m4=2*no2;

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

desglobal = [des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4)];

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

Ln = sqrt((x2 + desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))^2+...
(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))^2);

```

```

cos=(x2+ desglobal(3,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln; %coseno diretor
sen=(y2+desglobal(4,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

u = L - Ln;

Q = ((E*A)/L)*(u);

aux1 = (E*A)/L;
aux2 = (Q)/Ln;

Ke=aux1*[cos^2 cos*sen -cos^2 -cos*sen;
        cos*sen sen^2 -cos*sen -sen^2;
        -cos^2 -cos*sen cos^2 cos*sen;
        -cos*sen -sen^2 cos*sen sen^2];

Kg=aux2*[-sen^2 cos*sen sen^2 -cos*sen;
        cos*sen -cos^2 -cos*sen cos^2;
        sen^2 -cos*sen -sen^2 cos*sen;
        -cos*sen cos^2 cos*sen -cos^2];

m=[2*no1-1;2*no1;2*no2-1;2*no2];

for z=1:4
    for j=1:4
        K(m(z,1),m(j,1))=Ke(z,j)+Kg(z,j);
    end
end

KGNL=KGNL+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%% PASSO 02:SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KGNL; % matriz para manipulações preservando KGNL sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if k==1
    FR=Fe; % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f; % resíduo nas demais iterações
end

%disp('>>> resíduo de forças desbalanceadas')
FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

% matriz geral de deslocamentos
%disp('>>> solução do vetor de deslocamentos')

```

```

x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo
%disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp('>>> solução do vetor de deslocamentos acumulados')
des=des+x

end
erro= sol'*sol;
fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
iter= iter + 1;
end
end

%% PASSO 04:Apresentação dos Resultados
des;

DG=zeros(nn,3); % matriz auxiliar deslocamento global

for i=1:nn

    DD=zeros(nn,3);

    DD(i,1)=i; % primeira linha da matriz expandida

    DG=DG+DD; % acumula a matriz expandida (DD) na matriz de deslocamentos
    nodais global (DG)
end
DG;

for i=1:nn

    DD=zeros(nn,3);
    mm1=2*i-1;
    mm2=2*i;

    De=des; % matriz de nós sem restrição
    DD(i,2)=De(mm1,1); % primeira linha da matriz expandida
    DD(i,3)=De(mm2,1);
    %DD(i,3)=De(i,3);
    DG=DG+DD; % acumula a matriz expandida (DD) na matriz de deslocamentos
    nodais global (DG)
end

format shortg

disp('>>> solução do vetor de deslocamentos em metros')
disp('>>>          Nó          ux[m]          uy[m] ')
DG

```

APÊNDICE H - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO

5.4 - TRELIÇA ESPACIAL

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Treliças Espaciais, NL Geométrica
% CAPÍTULO 6 - EXEMPLO 6.4 - YAW (2009)
%-----

clc;
clear all;
format longg;
tic

%% PASSO 01: DADOS DE ENTRADA DA TRELIÇA
E=2*10^(9);
A=3.1416*(0.05^2)/4;

coord=[0 0 0;2 0 0;4 0 0;0 2 0;2 2 0;4 2 0;0.5 1 1;2 1 1;3.5 1 1];
% Matriz de coordenadas

conec=[1 7;1 8;2 8;3 8;3 9;4 7;4 8;5 8;6 8;6 9;7 8;8 9];
% Matriz de conectividades

nn=size(coord,1); % número de nós do sistema
nel=size(conec,1); % número de elementos
ngl=3*nn; % número de graus de liberdade

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
elim=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18];
% Restrições nos nós
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

Fe=zeros(ngl,1);
% Vetor de forças externas
Fe(21,1)=-150*10^3;
Fe(24,1)=-150*10^3;
Fe(27,1)=-150*10^3;
Fe(19,1)=-100*10^3;

%% %% PASSO 03: PROCESO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=20;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-5;
```

```

% Inicialização do processo incremental
forcas_iniciais=Fe;
inc=1;
iter= 1;

for inc=1:ninc
%
% Inicialização do processo iterativo
%
lambda= inc/ninc; % factor de carga
erro= 9999;
Fe=[forcas_iniciais*lambda];

while erro > tolerancia && iter <= max
%% PASSO 02: CONDIÇÕES INICIAIS (CONTROLE DE CARGAS)

%Condição inicial para forças internas, matriz de rigidez e deslocamentos:

KGNL=zeros(ngl); % Matriz de rigidez não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições

for k=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

    % Preparação dos parâmetros para as próximas iterações

    f = zeros(ngl,1);

    for i=1:nel

        faux = zeros(ngl,1);
        no1=conec(i,1); % nó inicial
        no2=conec(i,2); % nó final

        m1=3*no1-2; %nó 1
        m2=3*no1-1;
        m3=3*no1; %nó 2
        m4=3*no2-2;
        m5=3*no2-1;
        m6=3*no2;

        % coordenadas dos nós do elemento
        x1=coord(no1,1);
        x2=coord(no2,1);
        y1=coord(no1,2);
        y2=coord(no2,2);
        z1=coord(no1,3);
        z2=coord(no2,3);

        desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6)];

        L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2+(z2-z1)^2);

        Ln = sqrt((x2+desglobal(4,1)-x1-desglobal(1,1))^2 +...

```

```

(y2+desglobal(5,1)-y1-desglobal(2,1))^2+...
(z2+desglobal(6,1)-z1-desglobal(3,1))^2);

cx=(x2+desglobal(4,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
cy=(y2+desglobal(5,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor
cz=(z2+desglobal(6,1)-z1-desglobal(3,1))/Ln;

Rot = [cx cy cz -cx -cy -cz];

u = L - Ln;

Q = ((E*A)/L)*(u);

Fglobal = Q*(Rot');

faux(m1,1)= Fglobal(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1);
faux(m3,1)= Fglobal(3,1);
faux(m4,1)= Fglobal(4,1);
faux(m5,1)= Fglobal(5,1);
faux(m6,1)= Fglobal(6,1);

f = f +faux;

end

KGNL=zeros(ngl);

disp(k);

%>>> ETAPA B - LOOP PARA MATRIZ TANGENTE GLOBAL
for i=1:nel

K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
no1=conec(i,1); % nó inicial
no2=conec(i,2); % nó final

%transforma a posição local na posição correspondente na matriz
global
m1=3*no1-2; %nó 1
m2=3*no1-1;
m3=3*no1; %nó 2
m4=3*no2-2;
m5=3*no2-1;
m6=3*no2;

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);
z1=coord(no1,3);

```

```

z2=coord(no2,3);

desglobal = [des(m1,1);
             des(m2);
             des(m3,1);
             des(m4);
             des(m5,1);
             des(m6)];

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2+(z2-z1)^2);

Ln = sqrt((x2+desglobal(4,1)-x1-desglobal(1,1))^2 +...
          (y2+desglobal(5,1)-y1-desglobal(2,1))^2+...
          (z2+desglobal(6,1)-z1-desglobal(3,1))^2);

cx=(x2+desglobal(4,1)-x1-desglobal(1,1))/Ln;
cy=(y2+desglobal(5,1)-y1-desglobal(2,1))/Ln;
cz=(z2+desglobal(6,1)-z1-desglobal(3,1))/Ln;

Q = ((E*A)/L)*(u);

aux1 = (E*A)/L;
aux2 = (Q)/Ln;

Ke=aux1*[cx^2 cx*cy cx*cز -cx^2 -cx*cy -cx*cز
         cx*cy cy^2 cy*cز -cx*cy -cy^2 -cy*cز
         cx*cز cy*cز cz^2 -cx*cز -cy*cز -cz^2
         -cx^2 -cx*cy -cy*cز cx^2 cx*cy cy*cز
         -cx*cy -cy^2 -cy*cز cx*cy cy^2 cy*cز
         -cx*cز -cy*cز -cz^2 cx*cز cy*cز cz^2];

Kg=aux2*[-cy^2 cx*cy cx*cز cy^2 -cx*cy -cy*cز
         cx*cy -cx^2 cx*cز -cx*cy cx^2 -cx*cز
         cy*cز cx*cز -cz^2 -cy*cز -cx*cز cz^2
         cy^2 -cx*cy -cy*cز -cy^2 cx*cy cy*cز
         -cx*cy cx^2 -cx*cز cx*cy -cx^2 cx*cز
         -cy*cز -cx*cز cz^2 cy*cز cx*cز -cz^2];

m=[3*no1-2;3*no1-1;3*no1;3*no2-2;3*no2-1;3*no2];

for z=1:6
    for j=1:6
        K(m(z,1),m(j,1))=Ke(z,j)+Kg(z,j);
    end
end

KGNL=KGNL+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%% PASSO 02:SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KGNL; % matriz para manipulações preservando KGNL sem restrições

```

```

pos=1:ngl;      % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[];   % posições remanescentes

KR(:,elim)=[];  % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[];  % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if k==1
    FR=Fe;      % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f;  % resíduo nas demais iterações
end

FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

% matriz geral de deslocamentos

x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo
%disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
des=des+x;

end

erro= sol'*sol;
%fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
iter= iter + 1;
end
end
%% PASSO 04:Acúmulo dos deslocamentos
%disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp(des);

%%
% Apresentação dos Resultados
DG=zeros(nn,4); % matriz auxiliar deslocamento global
% matriz nós
for i=1:nn

    DD=zeros(nn,4); % matriz de deslocamento, auxiliar (inicialmente com
zeros)

    % matriz de deslocamentos do elemento expandida em índices globais

    DD(i,1)=i; % primeira linha da matriz expandida

    DG=DG+DD; % acumula a matriz expandida (DD) na matriz de deslocamentos
nodais global (DG)

```

```

end
DG;

for i=1:nn

    DD=zeros(nn,4); % matriz de deslocamento, auxiliar (inicialmente com
zeros)

    De=des; % matriz de nós sem restrição
    DD(i,2)=De(3*i-2,1);
    DD(i,3)=De(3*i-1,1);
    DD(i,4)=De(3*i,1);
    DG=DG+DD; % acumula a matriz expandida (DD) na matriz de deslocamentos
nodaís global (DG)
end
format shortg

disp('>>> solução do vetor de deslocamentos em metros')
disp('>>>      Nó      ux[m]      uy[m]      uz[m] ')
DG

```

APÊNDICE I - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.5

– PÓRTICO PLANO

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Pórticos Planos, NL Geométrica
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.5
% PILAR EM BALANÇO SUBMETIDO A UMA CARGA AXIAL DE COMPRESSÃO
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

%% >>>> DADOS INICIAIS

coord=[0 0
0 0.127
0 0.254
0 0.381
0 0.508
0 0.635
0 0.762
0 0.889
0 1.016
0 1.143
0 1.27
0 1.397
0 1.524
0 1.651
0 1.778
0 1.905
0 2.032
0 2.159
0 2.286
0 2.413
0 2.54];
conec=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;8 9;9 10;10 11;11 12;12 13;13 14;14
15;15 16;16 17;17 18;18 19;19 20;20 21];

A = [1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4)]; % área da seção transversal
I = [2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9)];
E = (2.06844)*(10^11);
```

```

nnos=size(coord,1);           % número de nós do sistema
nel=size(conec,1);           % número de elementos
ngl=3*nnos;                   % número de graus de liberdade

F=zeros(ngl,1); % define o vetor de forças nodais do problema [K]{x}={F}
F(62,1)= -171.493823804914*9.116; %introduz a força nodal
F(61,1)= 3;
elim=[1 2 3]; % posições restringidas (eliminadas)

du = zeros(nnos,1);
dv = zeros(nnos,1);
angulo = zeros(nnos,1);
dulinear = zeros(nnos,1);
dvlinear = zeros(nnos,1);

%% %% PASSO 03: PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=10;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-6;
% Inicialização do processo incremental
inc=100;
iter= 1;

for i=1:nel
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    % coordenadas dos nós do elemento
    Xglobal(1,i)=coord(no1,1);
    Xglobal(1,i+1)=coord(no2,1);
    Yglobal(1,i)=coord(no1,2);
    Yglobal(1,i+1)=coord(no2,2);

end

%% <<<< MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E SOLUÇÃO NL >>>>
KEG=zeros(ngl); % matriz de rigidez global do problema não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições
alfa = zeros(nnos,1); %inicializa vetor alfa que vai armazenar as rotações
%totais de cada nó
beta = zeros(nel,1); %inicializa vetor beta que vai armazenar rotação de
%corpo rígido de cada elemento
teta = zeros(nel,1); %inicializa vetor teta que vai armazenar ângulo
%inicial de cada elemento

for inc=1:ninc
    %
    % Inicialização do processo iterativo

```

```

%
lambda= inc/ninc; % fator de carga
erro= 9999;
Fe=[F*lambda];
while erro > tolerancia && iter <= max

for z=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

for i=1:nel
no1=conec(i,1); % nó inicial
no2=conec(i,2); % nó final

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

cosseno=(x2-x1)/L; %cosseno diretor
seno=(y2-y1)/L; %seno diretor

teta(i)= acos(cosseno);
if seno < 0
teta(i)=-teta(i);
end

end

%>>> ETAPA C - PREPARA OS PARÂMETROS PARA A PRÓXIMA ITERAÇÃO
%>>> TENSÕES E DEFORMAÇÕES DE CADA ELEMENTO
f = zeros(ngl,1);

for i=1:nel

faux = zeros(ngl,1);
no1=conec(i,1); % nó inicial
no2=conec(i,2); % nó final

m1=3*no1-2; %nó 1
m2=3*no1-1;
m3=3*no1;
m4=3*no2-2; %nó 2
m5=3*no2-1;
m6=3*no2;

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

```

```

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

alfa(no1,1) = des(m3,1);
alfa(no2,1) = des(m6,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CÁLCULO DA ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO "BETA" %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if z ~= 1
    ang= acos(C);
if S < 0
    ang=-ang;
end
%
% O ângulo ang deve ser corrigido considerando o
% valor atual da rotação nos dois nós.

alfam= (alfa(no1,1)+alfa(no2,1))/2;
%

lmin= 9999;
kmin= 9;
for k=-3:+3
%
    angx= ang + 2*k*pi;
%
    % Calcula a diferença entre os dois ângulos
    d= alfam - angx;
%
    % Calcula o comprimento de d
    lx= abs(d);
    if lx < lmin
        lmin= lx;
        kmin= k;
    end
end
%
ang= ang + 2*kmin*pi;
%
beta(nel,1)= ang-teta(i);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    Rot1 = [C S -C -S];

    Rot2 = [-S C S -C];

u = L - Ln;

alfad1 = alfa(no1,1) - beta(nel,1);
alfad2 = alfa(no2,1) - beta(nel,1);

```

```

V = ((6*E*I(1,i))/(L*Ln))*(alfad1+alfad2);

N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

M1 = ((2*E*I(1,i))/L)*(2*alfad1+alfad2);

M2 = ((2*E*I(1,i))/L)*(alfad1+2*alfad2);

Fglobal = N*(Rot1');

Fglobal2 = V*(Rot2');

faux(m1,1)= Fglobal(1,1) + Fglobal2(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1) + Fglobal2(2,1);
faux(m3,1) = M1;
faux(m4,1)= Fglobal(3,1) + Fglobal2(3,1);
faux(m5,1)= Fglobal(4,1) + Fglobal2(4,1);
faux(m6,1) = M2;

f = f +faux;

end

f;

KEG=zeros(ngl);

%>>> ETAPA A - LOOP PARA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
for i=1:nel

    K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    %transforma a posição local na posição correspondente na matriz
%global
    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

```

```

Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

u = L - Ln;

N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

ke= zeros(6);
g= zeros(6);

% Matriz de rigidez em coordenadas locais
ke(1,1)= (E*A(1,i))/ L ;
ke(1,4)= -ke(1,1) ;
ke(2,2)= (12*E*I(1,i))/ (L^3) ;
ke(2,3)= (6*E*I(1,i)) / (L^2) ;
ke(2,5)= -ke(2,2) ;
ke(2,6)= ke(2,3) ;
ke(3,2)= ke(2,3) ;
ke(3,3)= (4*E*I(1,i)) / L ;
ke(3,5)= -ke(3,2) ;
ke(3,6)= ke(3,3) / 2.0 ;
ke(4,1)= ke(1,4) ;
ke(4,4)= ke(1,1) ;
ke(5,2)= ke(2,5) ;
ke(5,3)= ke(3,5) ;
ke(5,5)= ke(2,2) ;
ke(5,6)= -ke(2,3) ;
ke(6,2)= ke(2,6) ;
ke(6,3)= ke(3,6) ;
ke(6,5)= ke(5,6) ;
ke(6,6)= ke(3,3) ;
%
% Matriz geométrica
%
axl= -N;
g(2,2)= 6*axl/(5*L) ;
g(2,3)= axl/10 ;
g(2,5)= -g(2,2) ;
g(2,6)= g(2,3) ;
g(3,2)= g(2,3) ;
g(3,3)= 2*axl*L/15 ;
g(3,5)= -g(2,3) ;
g(3,6)= -axl*L/30 ;
g(5,2)= g(2,5) ;
g(5,3)= g(3,5) ;
g(5,5)= g(2,2) ;
g(5,6)= -g(2,3) ;
g(6,2)= g(2,6) ;
g(6,3)= g(3,6) ;
g(6,5)= g(5,6) ;
g(6,6)= g(3,3) ;
%
%-----

```

```

T=[C S 0 0 0 0
   -S C 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0
     0 0 0 C S 0
     0 0 0 -S C 0
     0 0 0 0 0 1];

Ke = T'*ke*T;
Kgeo = T'*g*T;

% matriz de rigidez do elemento expandida em índices globais

K(m1,m1)=Ke(1,1)+ Kgeo(1,1); K(m1,m2)=Ke(1,2)+ Kgeo(1,2);...
K(m1,m3)=Ke(1,3)+Kgeo(1,3); K(m1,m4)=Ke(1,4)+Kgeo(1,4);...
K(m1,m5)=Ke(1,5)+Kgeo(1,5); K(m1,m6)=Ke(1,6)+Kgeo(1,6);
K(m2,m1)=Ke(2,1)+ Kgeo(2,1); K(m2,m2)=Ke(2,2)+ Kgeo(2,2);...
K(m2,m3)=Ke(2,3)+Kgeo(2,3); K(m2,m4)=Ke(2,4)+ Kgeo(2,4);...
K(m2,m5)=Ke(2,5)+ Kgeo(2,5); K(m2,m6)=Ke(2,6)+ Kgeo(2,6);
K(m3,m1)=Ke(3,1) + Kgeo(3,1); K(m3,m2)=Ke(3,2)+ Kgeo(3,2);...
K(m3,m3)=Ke(3,3)+Kgeo(3,3); K(m3,m4)=Ke(3,4)+ Kgeo(3,4);...
K(m3,m5)=Ke(3,5)+ Kgeo(3,5); K(m3,m6)=Ke(3,6)+ Kgeo(3,6);
K(m4,m1)=Ke(4,1) + Kgeo(4,1); K(m4,m2)=Ke(4,2) + Kgeo(4,2);...
K(m4,m3)=Ke(4,3)+Kgeo(4,3); K(m4,m4)=Ke(4,4)+Kgeo(4,4);...
K(m4,m5)=Ke(4,5)+Kgeo(4,5); K(m4,m6)=Ke(4,6)+Kgeo(4,6);
K(m5,m1)=Ke(5,1) + Kgeo(5,1); K(m5,m2)=Ke(5,2) + Kgeo(5,2);...
K(m5,m3)=Ke(5,3)+Kgeo(5,3); K(m5,m4)=Ke(5,4)+Kgeo(5,4);...
K(m5,m5)=Ke(5,5)+Kgeo(5,5); K(m5,m6)=Ke(5,6)+Kgeo(5,6);
K(m6,m1)=Ke(6,1) + Kgeo(6,1); K(m6,m2)=Ke(6,2) + Kgeo(6,2);...
K(m6,m3)=Ke(6,3)+Kgeo(6,3); K(m6,m4)=Ke(6,4)+Kgeo(6,4);...
K(m6,m5)=Ke(6,5)+Kgeo(6,5); K(m6,m6)=Ke(6,6)+Kgeo(6,6);

KEG=KEG+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%>>> ETAPA B - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KEG; % matriz para manipulações preservando KEG sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if z==1
    FR=Fe; % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f; % resíduo nas demais iterações
end

FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

```

```

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo
des=des+x;

end

erro= sol'*sol;
fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
disp('----- ITERAÇÃO -----')
disp(iter);
iter= iter + 1;
end

end

%% >>> APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

% acumula deslocamentos no processo iterativo
disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp(des);

dv(:,1) = des(2:3:end,1);
du(:,1) = des(1:3:end,1);
angulo(:,1) = des(3:3:end,1);

DG=zeros(nnos,4); % matriz auxiliar deslocamento global

for i=1:nnos

    DD=zeros(nnos,4);

    DD(i,1)=i; % primeira linha da matriz expandida

    DG=DG+DD;
end
DG;

for i=1:nnos
    DD=zeros(nnos,4);

    %De=ug'; % matriz de nós sem restrição
    %De1=alfa';
    DD(i,2)=angulo(i,1)*180/pi;
    DD(i,3)=du(i,1); % primeira linha da matriz expandida
    DD(i,4)=dv(i,1);
    DG=DG+DD;
end

format shortg

```

```
disp('>>>      Nó      rot(°)      ux[m]      uy[m]  ')
DG
```

```
Xglobalnovo = Xglobal + du';
Yglobalnovo = Yglobal + dv';
```

APÊNDICE J - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.6

– PÓRTICO PLANO

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Pórticos Planos, NL Geométrica
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.6
%VIGA EM BALANÇO SUBMETIDA A UM MOMENTO FLETOR-URTHALER E REDDY (2005)
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

%% >>>> DADOS INICIAIS

coord=[0 0; 0.127 0; 0.254 0; 0.381 0; 0.508 0; 0.635 0; 0.762 0; 0.889 0;
1.016 0; 1.143 0; 1.27 0; 1.397 0; 1.524 0; 1.651 0; 1.778 0; 1.905 0;
2.032 0; 2.159 0; 2.286 0; 2.413 0; 2.54 0];
conec=[1 2;2 3;3 4;4 5;5 6;6 7;7 8;8 9;9 10;10 11;11 12;12 13;13 14;14
15;15 16;16 17;17 18;18 19;19 20;20 21];

A = [1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4) 1.6129*(10^-4)
1.6129*(10^-4)]; % área da seção transversal
I = [2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)
2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9) 2.16787*(10^-9)];
E = (2.06844)*(10^11);

nnos=size(coord,1); % número de nós do sistema
nel=size(conec,1); % número de elementos
ngl=3*nnos; % número de graus de liberdade

F=zeros(ngl,1); % define o vetor de forças nodais do problema [K]{x}={F}
F(63,1)= (-1109.23284)*1.0; %introduz a força nodal

elim=[1 2 3]; % posições restringidas (eliminadas)

du = zeros(nnos,1);
dv = zeros(nnos,1);
angulo = zeros(nnos,1);
dilinear = zeros(nnos,1);
dvlinear = zeros(nnos,1);

%% %% PASSO 03: PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO
```

```

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=10;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-6;
% Inicialização do processo incremental
inc=100;
iter= 1;

for i=1:nel
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    % coordenadas dos nós do elemento
    Xglobal(1,i)=coord(no1,1);
    Xglobal(1,i+1)=coord(no2,1);
    Yglobal(1,i)=coord(no1,2);
    Yglobal(1,i+1)=coord(no2,2);

end

%% <<<<< MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E SOLUÇÃO NL >>>>
KEG=zeros(ngl); % matriz de rigidez global do problema não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições
alfa = zeros(nnos,1); %inicializa vetor alfa que vai armazenar as rotações
%totais de cada nó
beta = zeros(nel,1); %inicializa vetor beta que vai armazenar rotação de
%corpo rígido de cada elemento
teta = zeros(nel,1); %inicializa vetor teta que vai armazenar ângulo
%inicial de cada elemento

for inc=1:ninc
    %
    % Inicialização do processo iterativo
    %
    lambda= inc/ninc; % fator de carga
    erro= 9999;
    Fe=[F*lambda];
    while erro > tolerancia && iter <= max

        for z=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

            for i=1:nel
                no1=conec(i,1); % nó inicial
                no2=conec(i,2); % nó final

                % coordenadas dos nós do elemento
                x1=coord(no1,1);
                x2=coord(no2,1);
                y1=coord(no1,2);

```



```

if z ~= 1
    ang= acos(C);
if S < 0
    ang=-ang;
end
%
% O ângulo ang deve ser corrigido considerando o
% valor atual da rotação nos dois nós.

alfam= (alfa(no1,1)+alfa(no2,1))/2;
%

lmin= 9999;
kmin= 9;
for k=-3:+3
    %
    angx= ang + 2*k*pi;
    %
    % Calcula a diferença entre os dois ângulos
    d= alfa - angx;
    %
    % Calcula o comprimento de d
    lx= abs(d);
    if lx < lmin
        lmin= lx;
        kmin= k;
    end
end
%
ang= ang + 2*kmin*pi;
%
beta(nel,1)= ang-teta(i);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    Rot1 = [C S -C -S];

    Rot2 = [-S C S -C];

    u = L - Ln;

    alfad1 = alfa(no1,1) - beta(nel,1);
    alfad2 = alfa(no2,1) - beta(nel,1);

    V = ((6*E*I(1,i))/(L*Ln))*(alfad1+alfad2);

    N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

    M1 = ((2*E*I(1,i))/L)*(2*alfad1+alfad2);

    M2 = ((2*E*I(1,i))/L)*(alfad1+2*alfad2);

    Fglobal = N*(Rot1');

    Fglobal2 = V*(Rot2');

    faux(m1,1)= Fglobal(1,1) + Fglobal2(1,1);
    faux(m2,1)= Fglobal(2,1) + Fglobal2(2,1);
    faux(m3,1) = M1;

```

```

faux(m4,1)= Fglobal(3,1) + Fglobal2(3,1);
faux(m5,1)= Fglobal(4,1) + Fglobal2(4,1);
faux(m6,1) = M2;

f = f +faux;

end

f;

KEG=zeros(ngl);

%>>> ETAPA A - LOOP PARA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
for i=1:nel

    K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    %transforma a posição local na posição correspondente na matriz
%global
    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

    Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

    C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
    S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

    u = L - Ln;

    N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

ke= zeros(6);
g= zeros(6);

```

```

% Matriz de rigidez em coordenadas locais
ke(1,1)= (E*A(1,i))/ L ;
ke(1,4)= -ke(1,1) ;
ke(2,2)= (12*E*I(1,i))/ (L^3) ;
ke(2,3)= (6*E*I(1,i)) / (L^2) ;
ke(2,5)= -ke(2,2) ;
ke(2,6)= ke(2,3) ;
ke(3,2)= ke(2,3) ;
ke(3,3)= (4*E*I(1,i)) / L ;
ke(3,5)= -ke(3,2) ;
ke(3,6)= ke(3,3) / 2.0 ;
ke(4,1)= ke(1,4) ;
ke(4,4)= ke(1,1) ;
ke(5,2)= ke(2,5) ;
ke(5,3)= ke(3,5) ;
ke(5,5)= ke(2,2) ;
ke(5,6)= -ke(2,3) ;
ke(6,2)= ke(2,6) ;
ke(6,3)= ke(3,6) ;
ke(6,5)= ke(5,6) ;
ke(6,6)= ke(3,3) ;
%
% Matriz geométrica
%
axl= -N;
g(2,2)= 6*axl/(5*L) ;
g(2,3)= axl/10 ;
g(2,5)= -g(2,2) ;
g(2,6)= g(2,3) ;
g(3,2)= g(2,3) ;
g(3,3)= 2*axl*L/15 ;
g(3,5)= -g(2,3) ;
g(3,6)= -axl*L/30 ;
g(5,2)= g(2,5) ;
g(5,3)= g(3,5) ;
g(5,5)= g(2,2) ;
g(5,6)= -g(2,3) ;
g(6,2)= g(2,6) ;
g(6,3)= g(3,6) ;
g(6,5)= g(5,6) ;
g(6,6)= g(3,3) ;
%
%-----

T=[C S 0 0 0 0
   -S C 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0
     0 0 0 C S 0
     0 0 0 -S C 0
     0 0 0 0 0 1];

Ke = T'*ke*T;
Kgeo = T'*g*T;

% matriz de rigidez do elemento expandida em índices globais

K(m1,m1)=Ke(1,1)+ Kgeo(1,1); K(m1,m2)=Ke(1,2)+ Kgeo(1,2);...
K(m1,m3)=Ke(1,3)+Kgeo(1,3); K(m1,m4)=Ke(1,4)+Kgeo(1,4);...
K(m1,m5)=Ke(1,5)+Kgeo(1,5); K(m1,m6)=Ke(1,6)+Kgeo(1,6);
K(m2,m1)=Ke(2,1)+ Kgeo(2,1); K(m2,m2)=Ke(2,2)+ Kgeo(2,2);...

```

```

        K(m2,m3)=Ke(2,3)+Kgeo(2,3); K(m2,m4)=Ke(2,4)+ Kgeo(2,4); ...
        K(m2,m5)=Ke(2,5)+ Kgeo(2,5); K(m2,m6)=Ke(2,6)+ Kgeo(2,6);
        K(m3,m1)=Ke(3,1) + Kgeo(3,1); K(m3,m2)=Ke(3,2)+ Kgeo(3,2); ...
        K(m3,m3)=Ke(3,3)+Kgeo(3,3); K(m3,m4)=Ke(3,4)+ Kgeo(3,4); ...
        K(m3,m5)=Ke(3,5)+ Kgeo(3,5); K(m3,m6)=Ke(3,6)+ Kgeo(3,6);
        K(m4,m1)=Ke(4,1) + Kgeo(4,1); K(m4,m2)=Ke(4,2) + Kgeo(4,2); ...
        K(m4,m3)=Ke(4,3)+Kgeo(4,3); K(m4,m4)=Ke(4,4)+Kgeo(4,4); ...
        K(m4,m5)=Ke(4,5)+Kgeo(4,5); K(m4,m6)=Ke(4,6)+Kgeo(4,6);
        K(m5,m1)=Ke(5,1) + Kgeo(5,1); K(m5,m2)=Ke(5,2) + Kgeo(5,2); ...
        K(m5,m3)=Ke(5,3)+Kgeo(5,3); K(m5,m4)=Ke(5,4)+Kgeo(5,4); ...
        K(m5,m5)=Ke(5,5)+Kgeo(5,5); K(m5,m6)=Ke(5,6)+Kgeo(5,6);
        K(m6,m1)=Ke(6,1) + Kgeo(6,1); K(m6,m2)=Ke(6,2) + Kgeo(6,2); ...
        K(m6,m3)=Ke(6,3)+Kgeo(6,3); K(m6,m4)=Ke(6,4)+Kgeo(6,4); ...
        K(m6,m5)=Ke(6,5)+Kgeo(6,5); K(m6,m6)=Ke(6,6)+Kgeo(6,6);

        KEG=KEG+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

    end

%>>> ETAPA B - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KEG; % matriz para manipulações preservando KEG sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if z==1
    FR=Fe; % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f; % resíduo nas demais iterações
end

FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo

des=des+x;

end

erro= sol'*sol;
fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
disp('----- ITERAÇÃO -----')
```

```

disp(iter);
iter= iter + 1;
end

end

%% >>> APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

% acumula deslocamentos no processo iterativo
disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp(des);

dv(:,1) = des(2:3:end,1);
du(:,1) = des(1:3:end,1);
angulo(:,1) = des(3:3:end,1);

DG=zeros(nnos,4); % matriz auxiliar deslocamento global

for i=1:nnos

    DD=zeros(nnos,4);

    DD(i,1)=i; % primeira linha da matriz expandida

    DG=DG+DD;
end
DG;

for i=1:nnos
    DD=zeros(nnos,4);

    %De=ug'; % matriz de nós sem restrição
    %De1=alfa';
    DD(i,2)=angulo(i,1)*180/pi;
    DD(i,3)=du(i,1); % primeira linha da matriz expandida
    DD(i,4)=dv(i,1);
    DG=DG+DD;
end

format shortg

disp('>>>          Nó          rot(°)          ux[m]          uy[m] ')
DG

Xglobalnovo = Xglobal + du';
Yglobalnovo = Yglobal + dv';

format short
h = figure;
set(h,'name','PPNLG - PÓRTICO PLANO','numbertitle','off')
plot(Xglobal,Yglobal,'b');
xlim([-1,3])
ylim([-3,1])
hold on

plot(Xglobalnovo,Yglobalnovo,'r');

```

APÊNDICE K - ROTINA COMPUTACIONAL – NLG – CAPÍTULO 5 – EXEMPLO 5.7

– PÓRTICO PLANO

```
%-----
% Dissertação: Não linearidade geométrica
% Professor: Paulo Marcelo
% Aluno: Pedro Filipe de Luna Cunha
%-----
% PROJETO: Pórticos Planos, NL Geométrica
% CAPÍTULO 5 - EXEMPLO 5.7
% PORTICO PLANO DE CONCRETO ARAMDO
%-----

clc; clear all; close all
format longg;
tic

%% >>>> DADOS INICIAIS

coord=[0 0;5 0;10 0
        3.5 0; 3.5 5; 3.5 10
        7 0; 7 5; 7 10
        10.5 0; 10.5 5; 10.5 10
        14 0; 14 5; 14 10
        17.5 0; 17.5 5; 17.5 10
        21 0; 21 5; 21 10
        24.5 0; 24.5 5;24.5 10
        28 0; 28 5; 28 10
        31.5 0; 31.5 5; 31.5 10
        35 0; 35 5; 25 10];
conec=[1 4;4 7;7 10;10 13;13 16;16 19; 19 22;22 25; 25 28; 28 31
        2 5;5 8; 8 11; 11 14; 14 17; 17 20; 20 23;23 26; 26 29; 29 32
        3 6;6 9;9 12;12 15; 15 18;18 21; 21 24; 24 27;27 30;30 33
        4 5; 5 6; 7 8;8 9;10 11; 11 12; 13 14; 14 15; 16 17;17 18
        19 20;20 21; 22 23; 23 24; 25 26; 26 27; 28 29; 29 30
        31 32; 32 33];

A = [0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 % área
      0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04
      0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04 0.04
      0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036
      0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036 0.036];

I = [1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4
      1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4
      1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4
      1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4
      1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4 1.33E-4
      2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4
      2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4
      2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4
      2.7E-4 2.7E-4 2.7E-4];

E = (28)*(10^6);
```

```

nnos=size(coord,1);           % número de nós do sistema
nel=size(conec,1);           % número de elementos
ngl=3*nnos;                   % número de graus de liberdade

F=zeros(ngl,1); % define o vetor de forças nodais do problema [K]{x}={F}

F(11,1)= -50000;
F(14,1)= -50000;
F(17,1)= -50000;
F(20,1)= -50000;
F(23,1)= -50000;
F(26,1)= -50000;
F(29,1)= -50000;
F(32,1)= -50000;
F(35,1)= -50000;
F(38,1)= -50000;
F(41,1)= -50000;
F(44,1)= -50000;
F(47,1)= -50000;
F(50,1)= -50000;
F(53,1)= -50000;
F(56,1)= -50000;
F(69,1)= -50000;
F(62,1)= -50000;
F(65,1)= -50000;
F(68,1)= -50000;
F(71,1)= -50000;
F(74,1)= -50000;
F(77,1)= -50000;
F(80,1)= -50000;
F(83,1)= -50000;
F(86,1)= -50000;
F(89,1)= -50000;
F(92,1)= -50000;
F(95,1)= -50000;
F(98,1)= -50000;
F(10,1)= -15000;
F(19,1)= -15000;
F(28,1)= -15000;
F(37,1)= -15000;
F(46,1)= -15000;
F(55,1)= -15000;
F(64,1)= -15000;
F(73,1)= -15000;
F(82,1)= -15000;
F(91,1)= -15000;

elim=[1 2 3 4 5 6 7 8 9]; % posições restringidas (eliminadas)

du = zeros(nnos,1);

```

```

dv = zeros(nnos,1);
angulo = zeros(nnos,1);
dilinear = zeros(nnos,1);
dvlinear = zeros(nnos,1);

%% %% PASSO 03: PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

% Método incremental-iterativo
%
% Numero de incrementos da carga aplicada
ninc=10;
% Número máximo de iterações
max= 250;
% Erro máximo
tolerancia= 1e-6;
% Inicialização do processo incremental
inc=100;
iter= 1;

for i=1:nel
    n01=conec(i,1); % nó inicial
    n02=conec(i,2); % nó final

    % coordenadas dos nós do elemento
    Xglobal(1,i)=coord(n01,1);
    Xglobal(1,i+1)=coord(n02,1);
    Yglobal(1,i)=coord(n01,2);
    Yglobal(1,i+1)=coord(n02,2);

end

%% <<<<< MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E SOLUÇÃO NL >>>>
KEG=zeros(ngl); % matriz de rigidez global do problema não linear
f = zeros(ngl,1);
des=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos expandido
x=zeros(ngl,1); % vetor de deslocamentos com restrições
alfa = zeros(nnos,1); %inicializa vetor alfa que vai armazenar as rotações
%totais de cada nó
beta = zeros(nel,1); %inicializa vetor beta que vai armazenar rotação de
%corpo rígido de cada elemento
teta = zeros(nel,1); %inicializa vetor teta que vai armazenar ângulo
%inicial de cada elemento

for inc=1:ninc
    %
    % Inicialização do processo iterativo
    %
    lambda= inc/ninc; % fator de carga
    erro= 9999;
    Fe=[F*lambda];
    while erro > tolerancia && iter <= max

    for z=1:iter % SOLUÇÃO SIMULTÂNEA PARA 'n' ITERAÇÕES

    for i=1:nel
        n01=conec(i,1); % nó inicial

```

```

no2=conec(i,2); % nó final

% coordenadas dos nós do elemento
x1=coord(no1,1);
x2=coord(no2,1);
y1=coord(no1,2);
y2=coord(no2,2);

L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

cosseno=(x2-x1)/L; %cosseno diretor
seno=(y2-y1)/L; %seno diretor

teta(i)= acos(cosseno);
if seno < 0
teta(i)=-teta(i);
end

end

%>>> ETAPA C - PREPARA OS PARÂMETROS PARA A PRÓXIMA ITERAÇÃO
%>>> TENSÕES E DEFORMAÇÕES DE CADA ELEMENTO
f = zeros(ngl,1);

for i=1:nel

    faux = zeros(ngl,1);
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

    Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

    C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
    S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

```

```

        alfa(no1,1) = des(m3,1);
        alfa(no2,1) = des(m6,1);

        %%%%%%%%%CÁLCULO DA ROTAÇÃO DE CORPO RÍGIDO "BETA" %%%%%%%%%
        %%%%%%%%%
if z ~= 1
    ang= acos(C);
if S < 0
    ang=-ang;
end
%
% O ângulo ang deve ser corrigido considerando o
% valor atual da rotação nos dois nós.

alfam= (alfa(no1,1)+alfa(no2,1))/2;
%

lmin= 9999;
kmin= 9;
for k=-3:+3
%
    angx= ang + 2*k*pi;
%
    % Calcula a diferença entre os dois ângulos
    d= alfa - angx;
%
    % Calcula o comprimento de d
    lx= abs(d);
    if lx < lmin
        lmin= lx;
        kmin= k;
    end
end
%
ang= ang + 2*kmin*pi;
%
beta(nel,1)= ang-teta(i);
end
%%%%%%%%
%%%%%%%%
        Rot1 = [C S -C -S];

        Rot2 = [-S C S -C];

        u = L - Ln;

        alfad1 = alfa(no1,1) - beta(nel,1);
        alfad2 = alfa(no2,1) - beta(nel,1);

        V = ((6*E*I(1,i))/(L*Ln))*(alfad1+alfad2);

        N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

        M1 = ((2*E*I(1,i))/L)*(2*alfad1+alfad2);

        M2 = ((2*E*I(1,i))/L)*(alfad1+2*alfad2);

        Fglobal = N*(Rot1');

```

```

Fglobal2 = V*(Rot2');

faux(m1,1)= Fglobal(1,1) + Fglobal2(1,1);
faux(m2,1)= Fglobal(2,1) + Fglobal2(2,1);
faux(m3,1) = M1;
faux(m4,1)= Fglobal(3,1) + Fglobal2(3,1);
faux(m5,1)= Fglobal(4,1) + Fglobal2(4,1);
faux(m6,1) = M2;

f = f +faux;

end

f;

KEG=zeros(ngl);

%>>> ETAPA A - LOOP PARA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
for i=1:nel

    K=zeros(ngl); % matriz de rigidez expandida, auxiliar
    no1=conec(i,1); % nó inicial
    no2=conec(i,2); % nó final

    %transforma a posição local na posição correspondente na matriz
%global
    m1=3*no1-2; %nó 1
    m2=3*no1-1;
    m3=3*no1;
    m4=3*no2-2; %nó 2
    m5=3*no2-1;
    m6=3*no2;

    % coordenadas dos nós do elemento
    x1=coord(no1,1);
    x2=coord(no2,1);
    y1=coord(no1,2);
    y2=coord(no2,2);

    Desglobal =
[des(m1,1);des(m2);des(m3,1);des(m4);des(m5,1);des(m6,1)];

    L=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2); %comprimento do elemento

    Ln = sqrt((x2 + Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))^2 +
(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))^2);

    C=(x2+ Desglobal(4,1)-x1-Desglobal(1,1))/Ln; %cosseno diretor
    S=(y2+Desglobal(5,1)-y1-Desglobal(2,1))/Ln; %seno diretor

    u = L - Ln;

    N = ((E*A(1,i))/L)*(u);

```

```

ke= zeros(6);
g= zeros(6);

% Matriz de rigidez em coordenadas locais
ke(1,1)= (E*A(1,i))/ L ;
ke(1,4)= -ke(1,1) ;
ke(2,2)= (12*E*I(1,i))/ (L^3) ;
ke(2,3)= (6*E*I(1,i)) / (L^2) ;
ke(2,5)= -ke(2,2) ;
ke(2,6)= ke(2,3) ;
ke(3,2)= ke(2,3) ;
ke(3,3)= (4*E*I(1,i)) / L ;
ke(3,5)= -ke(3,2) ;
ke(3,6)= ke(3,3) / 2.0 ;
ke(4,1)= ke(1,4) ;
ke(4,4)= ke(1,1) ;
ke(5,2)= ke(2,5) ;
ke(5,3)= ke(3,5) ;
ke(5,5)= ke(2,2) ;
ke(5,6)= -ke(2,3) ;
ke(6,2)= ke(2,6) ;
ke(6,3)= ke(3,6) ;
ke(6,5)= ke(5,6) ;
ke(6,6)= ke(3,3) ;
%
% Matriz geométrica
%
axl= -N;
g(2,2)= 6*axl/(5*L) ;
g(2,3)= axl/10 ;
g(2,5)= -g(2,2) ;
g(2,6)= g(2,3) ;
g(3,2)= g(2,3) ;
g(3,3)= 2*axl*L/15 ;
g(3,5)= -g(2,3) ;
g(3,6)= -axl*L/30 ;
g(5,2)= g(2,5) ;
g(5,3)= g(3,5) ;
g(5,5)= g(2,2) ;
g(5,6)= -g(2,3) ;
g(6,2)= g(2,6) ;
g(6,3)= g(3,6) ;
g(6,5)= g(5,6) ;
g(6,6)= g(3,3) ;
%
%-----

T=[C S 0 0 0 0
   -S C 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0
     0 0 0 C S 0
     0 0 0 -S C 0
     0 0 0 0 0 1];

Ke = T'*ke*T;
Kgeo = T'*g*T;

```

```

% matriz de rigidez do elemento expandida em índices globais

K(m1,m1)=Ke(1,1)+ Kgeo(1,1); K(m1,m2)=Ke(1,2)+ Kgeo(1,2);...
    K(m1,m3)=Ke(1,3)+Kgeo(1,3); K(m1,m4)=Ke(1,4)+Kgeo(1,4);...
    K(m1,m5)=Ke(1,5)+Kgeo(1,5); K(m1,m6)=Ke(1,6)+Kgeo(1,6);
K(m2,m1)=Ke(2,1)+ Kgeo(2,1); K(m2,m2)=Ke(2,2)+ Kgeo(2,2);...
    K(m2,m3)=Ke(2,3)+Kgeo(2,3); K(m2,m4)=Ke(2,4)+ Kgeo(2,4);...
    K(m2,m5)=Ke(2,5)+ Kgeo(2,5); K(m2,m6)=Ke(2,6)+ Kgeo(2,6);
K(m3,m1)=Ke(3,1) + Kgeo(3,1); K(m3,m2)=Ke(3,2)+ Kgeo(3,2);...
    K(m3,m3)=Ke(3,3)+Kgeo(3,3); K(m3,m4)=Ke(3,4)+ Kgeo(3,4);...
    K(m3,m5)=Ke(3,5)+ Kgeo(3,5); K(m3,m6)=Ke(3,6)+ Kgeo(3,6);
K(m4,m1)=Ke(4,1) + Kgeo(4,1); K(m4,m2)=Ke(4,2) + Kgeo(4,2);...
    K(m4,m3)=Ke(4,3)+Kgeo(4,3); K(m4,m4)=Ke(4,4)+Kgeo(4,4);...
    K(m4,m5)=Ke(4,5)+Kgeo(4,5); K(m4,m6)=Ke(4,6)+Kgeo(4,6);
K(m5,m1)=Ke(5,1) + Kgeo(5,1); K(m5,m2)=Ke(5,2) + Kgeo(5,2);...
    K(m5,m3)=Ke(5,3)+Kgeo(5,3); K(m5,m4)=Ke(5,4)+Kgeo(5,4);...
    K(m5,m5)=Ke(5,5)+Kgeo(5,5); K(m5,m6)=Ke(5,6)+Kgeo(5,6);
K(m6,m1)=Ke(6,1) + Kgeo(6,1); K(m6,m2)=Ke(6,2) + Kgeo(6,2);...
    K(m6,m3)=Ke(6,3)+Kgeo(6,3); K(m6,m4)=Ke(6,4)+Kgeo(6,4);...
    K(m6,m5)=Ke(6,5)+Kgeo(6,5); K(m6,m6)=Ke(6,6)+Kgeo(6,6);

    KEG=KEG+K; % acumula a matriz expandida (K) na matriz de rigidez
global (KG)

end

%>>> ETAPA B - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

KR= KEG; % matriz para manipulações preservando KEG sem restrições

pos=1:ngl; % posições dos graus de liberdade
pos(elim)=[]; % posições remanescentes

KR(:,elim)=[]; % elimina colunas da matriz de rigidez
KR(elim,:)=[]; % elimina linhas da matriz de rigidez

KR;

if z==1
    FR=Fe; % parcela de força na 1a iteração
else
    FR=Fe - f; % resíduo nas demais iterações
end

FR(elim,:)=[]; % elimina linhas do vetor de forças

sol=pinv(KR)*FR; % solução p/ deslocamentos nodais não restringidos

x(pos,1)=sol; % inclui valores das posições livres

% acumula deslocamentos no processo iterativo

des=des+x;

end

```

```

erro= sol'*sol;
fprintf('erro= %e\n',erro);
%
% Incrementa o contador de iterações
%
disp('----- ITERAÇÃO -----')
disp(iter);
iter= iter + 1;
end

end
%% >>> APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

% acumula deslocamentos no processo iterativo
disp('>>> deslocamentos totais acumulados')
disp(des);

dv(:,1) = des(2:3:end,1);
du(:,1) = des(1:3:end,1);
angulo(:,1) = des(3:3:end,1);

DG=zeros(nnos,4); % matriz auxiliar deslocamento global

for i=1:nnos

    DD=zeros(nnos,4);

    DD(i,1)=i; % primeira linha da matriz expandida

    DG=DG+DD;
end
DG;

for i=1:nnos
    DD=zeros(nnos,4);

    %De=ug'; % matriz de nós sem restrição
    %Del=alfa';
    DD(i,2)=angulo(i,1)*180/pi;
    DD(i,3)=du(i,1); % primeira linha da matriz expandida
    DD(i,4)=dv(i,1);
    DG=DG+DD;
end

format shortg

disp('>>>          Nó          rot(°)          ux[m]          uy[m] ')
DG

```