Pós-Graduação em Ciência da Computação

THIAGO PEREIRA ROCHA

A CONFORMIDADE À LEI DE NEWCOMB-BENFORD DE GRADIENTE TRIPLO EM VIDEOS DIGITAIS

Universidade Federal de Pernambuco
posgraduacao@cin.ufpe.br
www.cin.ufpe.br/~posgraduacao

RECIFE
2013

Thiago Pereira Rocha

A conformidade à Lei de Newcomb-Benford de gradiente triplo em vídeos digitais

Este trabalho foi apresentado à Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre Profissional em Ciência da Computação.

ORIENTADOR(A): **Prof.. Silvio de Barros Melo**

RECIFE
2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

R672c Rocha, Thiago Pereira
A conformidade à Lei de Newcomb-Benford de gradiente triplo em vídeos digitais / Thiago Pereira Rocha. – 2013.
55 f.: il., fig., tab.

Orientador: Silvio de Barros Melo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, Recife, 2013.
Inclui referências.

1. Ciência da computação. 2. Vídeos digitais. I. Melo, Silvio de Barros (orientador). II. Título.

004 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2018-002

Dissertação de Mestrado apresentada por **Thiago Pereira Rocha** à Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco, sob o título "**A CONFORMIDADE À LEI DE NEWCOMB-BENFORD DE GRADIENTE TRIPLO EM VIDEOS DIGITAIS**" orientada pelo Prof. Silvio de Barros Melo e aprovada pela Banca Examinadora formada pelos professores:

_____

Prof. Silvio de Barros Melos
Centro de Informática / UFPE

_____

Prof. Josenildo Santos
Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais / UFPE

_____

Prof. Wilton Bernardino da Silva
Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais / UFPE

Visto e permitida a impressão.
Recife, 29 de agosto de 2013.

_____

Profa. Edna Natividade da Silva Barros
Coordenadora da Pós-Graduação em Ciência da Computação do
Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos colegas e amigos pela colaboração e incentivo mútuo. Obrigado ao professor Silvio Melo, pela paciência, dedicação e clareza que desprendeu desde o início de meu curso de graduação: sua orientação e contribuição foram fundamentais para o término e sucesso deste trabalho. Obrigado a Diogo Brandão Borborema Henriques e Felipe Maia pelo compartilhamento de sua pesquisa, referências e de suas opiniões em relação ao trabalho.

RESUMO

As sequências de números aleatórios advindas de situações reais são geralmente modeladas através de funções contínuas de densidade que associam valores de probabilidade a pontos na reta real correspondentes aos números das sequências. O agrupamento dos números aleatórios de acordo com o dígito mais significativo para algumas sequências do mundo real tem revelado um fenômeno já observado no século XIX: a chamada Lei de Benford. Esta lei afirma que as mantissas dos logaritmos desses números estão distribuídas segundo uma uniforme. Sequências tais como área da superfície de rios, população de cidades, razão de números da sequência de Fibonacci, lista de números que aparecem em documentos financeiros, valores em declarações de imposto de renda, tamanho das manchas solares, e muitas outras grandezas seguem esta lei. Esta propriedade presente em algumas grandezas tem sido útil na identificação de patologias nos dados. Neste trabalho, empregamos os métodos estatísticos mais utilizados na área para demonstrar que a norma do gradiente triplo aplicados a vídeos digitais comuns é uma grandeza que se conformam à Lei de Benford. O chamado "gradiente triplo" é um vetor de diferenças finitas que aproxima o gradiente da intensidade de cor com respeito às direções nas imagens e no tempo. A lista de normas dos gradientes em todos os pixels ao longo de um vídeo se conforma à Lei de Newcomb-Benford. No trabalho também discutimos o estado da arte e as limitações nas medidas de conformidade utilizadas na maioria dos ambientes aplicados.

Palavras-chave: Gradiente de Imagem. Lei de Benford. Lei dos Dígitos Significativos.

ABSTRACT

Sequences of random numbers from real situations are generally modeled by continuous functions of density that associate probability values to points in a line of real values corresponding to the numbers in the sequence. Grouping random numbers according to its most significant digit, for some sequences from the real world, has revealed a phenomenon observed in the XIX century: the so-called Benford's Law. This law states that the mantissa of the logarithm of these numbers is distributed according to a uniform distribution. Sequences such as the area of rivers surfaces, populations of cities, the ratio of numbers from the Fibonacci sequence, lists of numbers from financial documents, declared values of income taxes, sizes of sunspots, and many other magnitudes follow this law. Such property, present on some magnitudes has been useful to identify pathologies on data. In this work, we employ the most used statistical methods to demonstrate that the triple gradient norm applied to ordinary digital videos is a magnitude that conforms to the Benford's Law. The so-called "triple gradient" is a vector of the finite differences that approximates the gradient of the color intensity regarding the directions in the images and in time. The list of the norms of the gradients in all pixels within the vídeo conforms to the Benford's Law. In this work, we also discuss state of the art and the limitations of the conformity measurements used in the most of the applied environments.

Keywords: Image Gradient. Benford's Law. Law of the Significative Digits.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Probabilidade dos dígitos (1,..9) aparecerem como dígito mais significativo de acordo com a NB-Lei. 15
Figura 3-1: As setas da parte inferior do cubo são os gradientes. 25
Figura 3-2: À esquerda um quadro colorido de um vídeo e à diretia o mesmo quadro em tons de cinza. 27
Figura 4-1: Tabela apresentada no trabalho original de Benford, onde são vemos os percentuais encontrados do primeiro dígito para cada grupo analisado. 29
Figura 4-2: Tabela apresentada no trabalho original de Benford onde os grupos são organizados de acordo com sua conformidade à NB-lei, analisando as frequências observadas e esperadas. 30
Figura 4-3: Tabela apresentada no trabalho de Carslaw, onde são sumarizados os desvios entre as probabilidades esperadas e obtidas no primeiro dígito, juntamente com as estatísticas-Z para cada dígito e o valor do teste χ^2. 31
Figura 4-4: Tabela apresentada no trabalho de Carslaw, onde são analisadas as frequências encontradas para o segundo digito, e é encontrada uma discrepância particularmente alta nos dígitos nove e zero pelo teste Z. 31
Figura 4-5: Tabela apresentada no trabalho de Jolion: Adequações entre a NB-Lei e os valores da distribuição das imagens, seus gradientes e da decomposição piramidal baseada na transformada de Laplace (níveis 0, 1 e 2). Os valores mostrados na tabela são os níveis. 32
Tabela 4-6: Tabela apresentada no trabalho de Sanches e Marques onde são apresentadas as médias geométricas das probabilidades de rejeição Pe de acordo com o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov, computadas sobre 476 imagens. 32
Figura 4-7: Figuras apresentadas no trabalho de Acerbo e Sbert. Na esquerda são apresentadas duas imagens sintéticas geradas através de radiosidade; no meio é apresentado o gráfico da adequação dos valores de pixel à NB-Lei para o primeiro dígito. As imagens obtiveram respectivamente uma divergência X^2 de 0.00703 e 0.01549. 33
Figura 4-8: Gráfico apresentado no trabalho de Fu, Shi e Su, onde é apresentada a média das frequências encontradas para o primeiro digito do bloco-DCT para as 1.338 imagens. As barras vermelhas são as frequências esperadas pela lei de Benford, as barras amarelas representam a média obtida, contendo de erro representando o desvio padrão. 34
Figura 4-9: Gráfico apresentado no trabalho de Qadir et al.: em azul estão os valores esperados pela lei de Benford e em vermelho está representada a média encontrada dos primeiros dígitos da DWT sem compressão das 1.338 imagens contidas na UCID. 34
Figura 4-10: Quadros de vídeos analisados no segundo grupo. 37
Figura 4-11: Quadros de vídeos analisados. 38
Figura 4-12: Termos chaves associados a esse vídeo: Michael, Lucas, Dança, Casa, PlayStation 3 (Computer) (ROCHA, 2013B). 39
Figura 4-13: Quadros de dois exemplos que vídeos estáticos. 39
Figura 5-1: Proporções observadas para o primeiro dígito do primeiro dígito gradiente triplo para todos os vídeos do primeiro grupo. 41
Figura 5-2: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, primeiro conjunto de dados. 41

Figura 5-3: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito (gráfico em barras) para o primeiro conjunto de dados. 42
Figura 5-4: Frequência observadas do primeiro dígito gradiente triplo para cada um dos 100 vídeos. 43
Figura 5-5: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, segundo conjunto de dados. 44
Figura 5-6: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito (gráfico em barras). 44
Figura 5-7: À esquerda temos uma janela exibindo o conteúdo do vídeo e à direita temos o gráfico de barras com o resultado da análise dos dez últimos quadros. 46
Figura 5-8: À esquerda um quadro do vídeo de uma bola rolando no cenário estático e à direita a conformidade dos últimos dez quadros. 47
Figura 5-9: No quadro superior esquerdo tempos um quadro em um instante n e no lado superior direito temos a conformidade dos últimos 10 quadros. No canto inferior direito temos um quadro no instante n+1 (que podemos perceber que houve uma mudança brusca no conteúdo do vídeo) e a sua direita a conformidade. 47
Figura 5-10: À esquerda um quadro de um vídeo mostrando o interior da Estação Espacial Internacional e à direita temos o gráfico da conformidade (que passou dos 95%). 48
Figura 5-11: À esquerda temos um quadro de um vídeo com ruído e à direita a sua conformidade. . 48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Análise da conformidade da norma do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, primeira base de dados.....42
Tabela 2: Análise da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito.....45

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO** 11

2 **LEI DE NEWCOMB-BENFORD** 13

2.1 **Conceitos Gerais** 13

2.2 **Estado da Arte** 15

2.2.1 Aplicações 18

2.2.2 Aplicações em Imagens Digitais 20

2.3 **Critérios de Conformidade** 21

3 **O OPERADOR GRADIENTE** 25

3.1 **Cálculo da Norma do Gradiente Triplo** 26

4 **METODOLOGIA** 28

4.1 **Estado da Arte das Metodologias de Aderência à NB-Lei** 29

4.2 **Procedimento Adotado** 35

4.3 **Experimentos e Implementação** 36

4.3.1 Implementação 37

4.3.2 Base de Dados 37

5 **ANÁLISE DOS RESULTADOS** 40

5.1 **Gradiente Triplo** 40

5.1.1 Análise da Conformidade da Primeira Base de Dados 40

5.1.2 Análise da Conformidade para Segunda Base de Dados 43

5.2 **Sumarização dos Resultados da Análise das Bases de Dados** 45

5.3 **Análise em Tempo Real** 46

6 **CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO** 49

6.1 **Principais Contribuições** 49

6.2 **Trabalhos Futuros** 49

REFERÊNCIAS 51

1. INTRODUÇÃO

O crescimento do conhecimento e da cultura humana tem sido apontado como sendo "exponencial", e as medidas desse crescimento em geral estão associadas à geração de novas tecnologias. A ideia da aceleração exponencial das mudanças tecnológicas foi popularizada pelo matemático americano Vernor Vinge na década de 80 em sua ficção científica *Marooned in Realtime* (1986). No entanto, desde 1965 que o co-fundador da Intel Gordon Moore observou que a quantidade de componentes em circuitos integrados dobrava a cada dois anos desde a invenção do transistor em 1958. Naturalmente este crescimento estava também associado à demanda criada pelo crescimento populacional e da retroalimentação do próprio desenvolvimento tecnológico.

Nos últimos anos, com o advento da internet e a necessidade do processamento cada vez mais rápido de informações, viu-se aumentar vertiginosamente a demanda por produtos e processos associados às tecnologias de apresentação visual e, nesse contexto, desenvolveram-se duas áreas de pesquisa que hoje são essenciais em Ciência da Computação: a Realidade Virtual e a Realidade Aumentada. A primeira permite uma imersão do usuário no mundo sintético, inteiramente produzido através das técnicas de computação gráfica; e a segunda utiliza vídeos produzidos do mundo real por câmeras comuns, e insere em tempo real elementos sintéticos, que podem ser de alta complexidade gráfica, como objetos de geometria complexa 3D devidamente iluminados de acordo com a iluminação do ambiente real, ou mesmo elementos simples, como textos com informações turísticas.

A produção de objetos sintéticos 3D na cena real depende da reconstrução 3D (geração de modelos sintéticos) de pelo menos parte da cena real, para que se permita a síntese e a implantação dos objetos adicionais de forma fisicamente coerente com a cena real, conferindo ao usuário a sensação de plausibilidade física na imersão que se pretende na Realidade Aumentada. A reconstrução dos modelos da cena real, por sua vez, depende da identificação nas diversas imagens de certos objetos, através de sua geometria e posição, bem como de parâmetros da própria câmera, empregando conhecimentos desenvolvidos principalmente na década de 90 na área de Visão Computacional, que se assenta basilarmente na Geometria Projetiva e na Álgebra Linear.

A reconstrução 3D compreende uma série de etapas, todas envolvidas no processo de inferir sistemas de coordenadas, parâmetros de câmeras e objetos a partir de um vídeo. Nesse processo, uma etapa-chave é a identificação de pontos de interesse ao longo das imagens, tecnicamente chamada de "*feature tracking*" ou rastreamento de pontos de interesse (TUYTELAARS e MIKOLAJCZYK, 2008).

O conceito de features se baseia na ideia de selecionar alguns pontos especiais na imagem e realizar uma análise local sobre estes. A seleção desses pontos é dada, na maioria das técnicas

de extração de features (CALONDER, 2010) (LOWE, 2003), pela avalição do gradiente dos pixels da imagem onde os de maior valor são selecionados como “feature tracking”.

Esta abordagem funciona bem desde que um número suficiente de tais pontos possa ser detectado, e que estes pontos possuam características estáveis e distinguíveis, podendo ser precisamente localizados em uma imagem subsequente.

O conjunto de gradientes de todos os pixels de uma dada imagem pode ser modelado como uma sequência de números aleatórios. Embora não se conheça uma distribuição paramétrica que governe o comportamento de tal sequência, existe uma lei, descoberta no final do século XIX, que limita a ocorrência dos dígitos mais significativos dos números da sequência, quando esta for formada por números não enviesados, ou advindos de grandezas naturais: a chamada Lei de Newcomb-Benford.

Neste trabalho mostramos que a norma do gradiente triplo em vídeos digitais segue a Lei de Newcomb-Benford. Para tal, nós investigamos o estado da arte da Lei e suas aplicações, investigando os trabalhos na área de imagens digitais e suas metodologias utilizadas. Comprovamos experimentalmente que a norma do gradiente triplo seguem à Lei.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: no Capitulo 2 são apresentados os conceitos gerais referentes à Lei de Newcomb-Benford, juntamente com o relato do estado da arte da área, incluindo suas aplicações, e por fim são abordados os métodos de análise de conformidade de dados experimentais à Lei.

O Capítulo 3 apresenta os conceitos básicos de gradiente em imagens e vídeos, e a definição de gradiente triplo.

No Capítulo 4 é exposta a metodologia empregada na realização deste trabalho, incluindo o estado da arte das metodologias de aderência à Lei de Newcomb-Benford, o procedimento adotado para a análise, além dos detalhes dos experimentos e da implementação.

No Capítulo 5 são expostos os resultados das análises da conformidade da norma do gradiente triplo a Lei, com seus julgamentos e comentários, e então é realizada uma comparação direta dos resultados obtidos com os relatados pela literatura. Por fim, o Capitulo 6 realiza o fechamento do documento, ressaltando os resultados, as contribuições realizadas, e propondo os trabalhos futuros a serem realizados.

2. LEI DE NEWCOMB-BENFORD

A Lei de Newcomb-Benford, também chamada de Lei do Primeiro Dígito ou Lei do Dígito Significativo fala sobre a distribuição de frequência em dados numéricos vindos de fontes da natureza. Essa lei revela um padrão uniforme na distribuição em escala logarítmica do dígito mais significativo. A primeira referência escrita relatando este fenômeno é um artigo de duas páginas de Simon Newcomb publicado em 1881 no American Journal of Mathematics (NEWCOMB, 1881), onde o autor diz sobre a probabilidade de ocorrência da mantissa do logaritmo de qualquer número é equiprovável. Newcomb notou que as primeiras páginas das tabelas de logaritmo se desgastam muito mais rápido que as últimas, e após diversas pequenas heurísticas, concluiu a lei das mantissas equiprováveis.

Mais de meio século depois, o físico Frank Benford reforçou a lei (BENFORD, 1938) ao apoiá-la com mais de vinte mil observações em vinte tabelas distintas incluindo dados de áreas de rios, constantes físicas, massas atômicas, e números retirados de artigos e jornais.

Devido ao fato do artigo de Newcomb ter passado despercebido, e do artigo de Benford ter sido bem recebido pela comunidade científica, a Lei do Dígito Significativo ficou conhecida na literatura como Lei de Benford. Neste trabalho, os termos Lei de Benford, Lei de Newcomb-Benford, NB-Lei e Lei do Dígito Significativo, se referem a este mesmo fenômeno.

Neste capítulo, apresentaremos inicialmente os conceitos gerais referentes à Lei de Newcomb-Benford, depois iremos revisar o estado da arte da área, incluindo suas aplicações, e finalmente abordaremos os métodos de análise de conformidade de dados experimentais à Lei.

2.1 Conceitos Gerais

Qualquer número $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ pode ser reescrito como $\mathrm{x} = \mathrm{m_b} \cdot \mathrm{b^n}$, com $\mathrm{m_b} \in [1, \mathrm{b} - 1[$, para algum $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, onde $\mathrm{b} \in \{2,3,..\}$ representa a base do sistema numérico, e $\mathrm{m_b}$ é chamada a mantissa de x. $\mathrm{D_k^{(b)}(x)}$ denota o k-ésimo dígito significativo de $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^*$na base b, ou seja, $\mathrm{D_2^{(10)}(\pi)} = 1$. Quando no sistema decimal $(\mathrm{b} = 10)$ o sobrescrito é omitido.

Seja $\mathrm{m_b}$ a mantissa de um número real x, a versão mais geral da Lei do Primeiro Dígito (HILL, 1995A) é dada por:

$$prob\left(m \leq \frac{t}{b}\right) = \log_b(t),\ t \in [1, b) \quad (2.1)$$

Note que t acaba representando a probabilidade acumulada dos dígitos menores a d quando $t = d$, em escala logarítmica.

Partindo desta definição é possível deduzir que a probabilidade do digito d ser o dígito mais significativo de um número real na base decimal para uma sequência conforme é dada por:

$$prob(D_1 = d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right) \qquad d = 1,2,\dots,9 \quad (2.2)$$

Para calcular a probabilidade de um digito d aparecer na posição n numa sequência conforme (D_n), chegamos à fórmula:

$$prob(D_n = d) = \sum_{k=10^{n-2}}^{10^{n-1}-1} log_{10}(1 + (10k + d)^{-1}) \quad (2.3)$$

A probabilidade da sequência de dígitos ($d_1, d_2, \dots, d_n$) serem os dígitos mais significativos numa sequência conforme, por sua vez é dada por:

$$prob(D_1 = d_1, \dots, D_k = d_k) = \log_{10}\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{k} d_i \cdot 10^{k-i}\right)^{-1}\right) \quad (2.4)$$

Por exemplo, a probabilidade do algarismo "2" seguido do "0" ("20") serem os dígitos mais significativos de um número real, numa sequência conforme, é de $\log_{10}\left(1 + \frac{1}{20}\right) \cong 0.021$. A Figura 2-1 expõe as probabilidades dos dígitos 1,2,...,9 aparecerem na posição mais significativa.

Podemos perceber que os dígitos significativos são dependentes entre si, e que essa dependência entre dígitos decai rapidamente à medida que a distância entre os dígitos aumenta, e segue-se facilmente da equação genérica (2.4) que a distribuição do enésimo dígito mais significativo aproxima-se exponencialmente de uma distribuição uniforme à medida que $n \to \infty$.

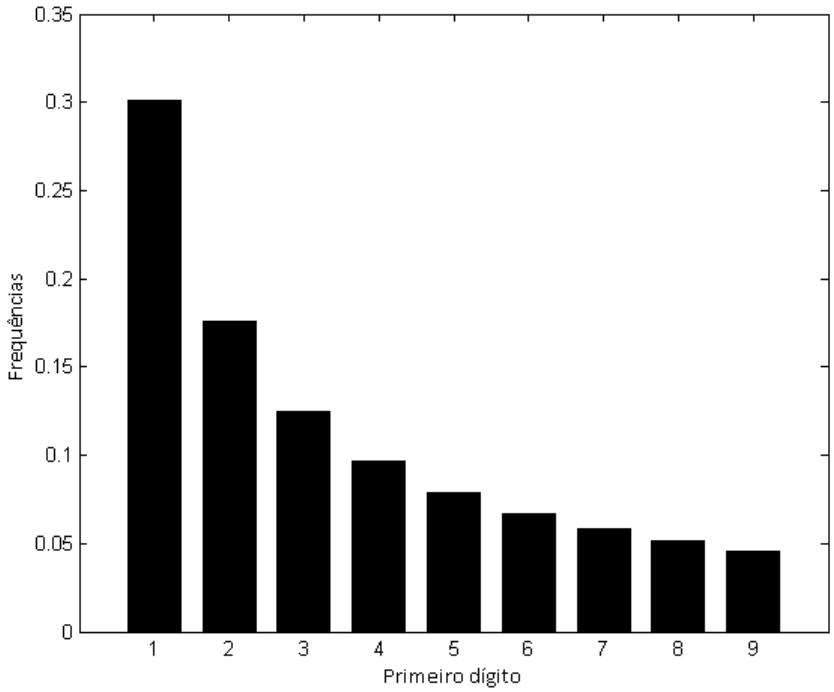

Figura 2-1: Probabilidade dos dígitos (1,..9) aparecerem como dígito mais significativo de acordo com a NB-Lei.

Uma sequência de números que atenda à NB-Lei é invariante escalar. Isto quer dizer que a proporção de cada dígito mais significativo não se altera quando se multiplicam todos os elementos por uma constante. A intuição disto parte de que a conformidade não deve ser sujeita à unidade de medida adotada e sua prova pode ser encontrada em (HILL, 1995C). O matemático Terry Tao fornece uma explicação mais simples para o fenômeno (KNUDSEN, 2001). Este autor ainda conclui que a invariância escalar acontece por este ser um caso particular do fato que medidas de Haar são únicas. Quando escalamos uma dada sequência em base 10 por 2, temos que a proporção de números começando com os dígitos 2 e 3 se igualará à proporção de números começando com o dígito 1.

Similarmente à invariância escalar, os números de uma sequência Benford são invariantes a mudanças de base. Isto significa que eles continuarão obedecendo à NB-Lei caso sofram uma mudança de base. A prova também pode ser encontrada em (HILL, 1995C).

2.2 Estado da Arte

Como descrito na sessão anterior, a Lei de Newcomb-Benford estipula uma distribuição de frequência da ocorrência, em uma lista numérica, na qual os dígitos aparecem quando surgem de uma lista numérica ordenada de fonte natural, sendo relatada inicialmente por Simon

Newcomb, ao observar livros de tabelas de logaritmos (NEWCOMB, 1881). Em seu estudo, Newcomb afirma que os logaritmos ocorrem com maior frequência nos dígitos mais baixos, diminuindo gradualmente ao se afastar do dígito 1 até o dígito 9. Através de um breve ensaio sobre as razões esperadas entre números que acontecem naturalmente, ele conclui seu trabalho afirmando que a probabilidade na qual os números ocorrem é tal que as mantissas de seus logaritmos são equiprováveis.

Em Calcul des Probabilités (POINCARÉ, 1912) o autor traz uma formalização da Lei de Newcomb-Benford usando o argumento de que, observados números consecutivos em uma lista suficientemente grande de logaritmos, intui-se que, em dada posição significativa, considerando os dígitos 0,1,…,9, a ocorrência de números pares ou impares são eventos equiprováveis. Avaliando uma função que retorna "1" caso o dígito observado seja par ou "-1" caso o dígito observado seja ímpar, Poincaré demonstra de forma elegante que a média de tal função tende a zero. Ao final de seu ensaio o autor exprime a necessidade de se fundamentar uma teoria sobre as probabilidades das ocorrências dos dígitos numa tabela numérica. Franel apresenta algumas correções ao trabalho de Poincaré, e confirma que a probabilidade de qualquer dígito de fato tende a 1/10 quando a posição do dígito observada tende ao infinito (FRANEL, 1917).

Em (WEYL, 1916) o autor trata da formulação da Lei de Newcomb-Benford na distribuição dos números em módulo. Dentre suas contribuições, explicita-se seu teorema e os critérios para determinar equidistribuição módulo um, fundamentando o caminho para a formulação de sequências de baixa discrepância, que são sequências aleatórias tais que, para cada n e os seus primeiros elementos, elas se aproximam de uma distribuição uniformemente espaçada no intervalo .

Cerca de meio século depois da publicação inicial, Frank Benford relatou de forma independente o mesmo fenômeno (BENFORD, 1938), desenvolvendo sua pesquisa em torno da distribuição do primeiro dígito significativo de diversas sequências de números provenientes de fontes tidas como naturais. Dentre os dados estudados por Benford, incluem-se, além dos previamente já informados, dados de taxas de mortalidade, taxas de população de cidades, calor específico de elementos, além de outros.

Apesar dos dados estudados por Benford possuírem certo desvio das frequências esperadas, os dados claramente convergem para uma distribuição logarítmica das probabilidades de ocorrências dos dígitos. Ele também apresentou casos não conformes com a NB-Lei. Em (WEISSTEIN, 2012), destaca-se que dos valores de uma base contendo mais de 54 milhões de constantes físicas, 30% deles começam com o dígito "1".

Outros autores como Levy (LEVY, 1939) e Robbins (ROBBINS, 1953) elaboram melhor a teoria estabelecida por Weyl, e outros como Goudsmith (A. GOUDSMIT e H. FURRY, 1944) e Hsü (H. HSÜ, 1948) trabalharam na fundamentação deixada por Benford. Porém é com Pinkham (PINKHAM, 1961) onde surge um avanço significativo na estruturação de uma lei das

probabilidades dos dígitos; é estabelecida uma forte relação entre a Lei de Newcomb-Benford e a invariância escalar. Fazendo uma analogia a uma agulha em um disco flutuante de raio unitário, Pinkham demonstra que os dígitos que ocorrem com probabilidade logarítmica são os únicos que mantém sua probabilidade de ocorrência constante, quando multiplicados por uma escala.

Alguns anos mais tarde Knuth aponta uma falha no trabalho de Pinkham (E. KNUTH, 1999). Pinkham assume que existe certa função de probabilidade contínua e Knuth demonstra que tal função não existe. Apesar das correções, o resultado de Pinkham é mantido. A referência da invariância escalar com a probabilidade de ocorrência dos dígitos é extremamente pertinente; descoberta que Pinkham atribui a R. Hamming, que demonstra os efeitos da computação de pontos flutuantes nas mantissas dos números cujos dígitos ocorrem com probabilidade logarítmica (HAMMING, 1970).

Nota-se que em sua publicação, Pinkham cita apenas dois livros e cinco trabalhos tratando sobre a distribuição dos dígitos (incluindo o trabalho original de Benford e sem fazer qualquer menção a Newcomb). No entanto, poucos anos mais tarde, Raimi (RAIMI, 1976) revisa uma vasta gama de literatura lidando diretamente com este fenômeno. Além de incluir a publicação de Newcomb e outro não mencionado por Pinkham, Raimi estuda outros 27 trabalhos sobre a lei, indicando uma grande explosão de publicações desde 61, dentre estas uma menção por Feller em seu livro (FELLER, 2008).

Raimi comenta sobre a falta de visibilidade do trabalho de Newcomb na área, mas menciona que o próprio Newcomb diz que o fenômeno já era conhecido em seu tempo, e que seria trabalhoso renomear o que na década 1970 já era conhecido como Lei de Benford, apenas para mais tarde descobrir que uma segunda mudança de nome é necessária: “Existe amplo precedente para nomear leis e teoremas não pelos seus descobridores, ou então metade da análise seria nomeada segundo Euler.” (tradução livre) (RAIMI, 1976).

Apesar de existir certa visibilidade do assunto, boa parte do entendimento sobre o fato estudado não se dá até a década de 90 com pesquisas publicadas por Hill (HILL, 1988B) (HILL, 1995A) (HILL, 1995C). O pesquisador solidifica boa parte do conhecimento gerado durante todo século passado, além de provar de forma definitiva que a distribuição em questão é a única que pode atender aos princípios de invariância de base e escala através da sua definição da σ-algebra de mantissas.

Ao se juntar com Berger, Hill publica um compêndio dedicado à NB-Lei (BERGER, HILL, *et al.*, 2011). Nele estão contidas definições, características e provas dentre outros conteúdos, apenas referentes ao assunto em questão. Uma lista completa e atualizada do estado da arte da área, contendo publicações referentes à Lei de Newcomb-Benford pode ser acessada em (BERGER e HILL, 2012A).

2.2.1 Aplicações

Uma das primeiras potenciais aplicações da NB-Lei surgiu no início do século XX com Boring. Em seu trabalho, o autor estuda de um ponto de vista psicofísico como pessoas atribuem probabilidades a eventos sobre os quais são leigas (BORING, 1920). A teoria melhor aceita na época era de que se a pessoa não tem qualquer motivo para viés, ela admite que todos os eventos são equiprováveis.

Em contextos mais próximos das ciências puras, Hamming propôs uma série de aplicações de hardware e software que podem se beneficiar do uso da NB-Lei (HAMMING, 1970). Outros autores tomam caminhos similares mostrando que algoritmos bem difundidos podem ter seus erros de cálculo minimizados pelas operações de ponto flutuante quando a lei de Newcomb-Benford é aplicada. Berger e Hill estudam os erros esperados nas operações de ponto flutuante do método de Newton (BERGER e HILL, 2007B). A mesma dupla, junto com Kaynar e Ridder estudaram o comportamento de cadeias de Markov, mostrando que de fato obedecem a NB-Lei, e também mostrando como os erros de underflow, overflow e round-off podem ser minimizados nos cálculos computacionais através deste fenômeno (BERGER, A. ET AL., 2011).

Aplicações de cunho mais exótico também podem ser encontradas quando se estuda a ocorrência de dígitos. Shao e Ma observaram a complacência de algumas propriedades de pulsares com a lei de Newcomb-Benford (SHAO e BO-QIANG, 2010). Dentre as características das pulsares estudadas encontram-se período baricêntrico e velocidade de rotação (e suas derivadas em relação ao tempo), notando-se uma conformidade com a lei.

Sistemas dinâmicos também foram bastante explorados no contexto da NB-Lei. Sob o incentivo da vasta aplicabilidade dos sistemas dinâmicos como modelos para sistemas físicos e sociais, diversos autores buscaram encontrar relações entre os modelos construídos e a lei dos dígitos. Tolle, et. al. avaliaram a distribuição dos dígitos de alguns modelos de autômato celular e de dinâmicas de fluidos (TOLLE, BUDZIEN e LAVIOLETTE, 2000). Os autores partiram sem qualquer viés de conformidade com o fenômeno e testaram os modelos sob condições consideradas ótimas pelos mesmos. Conclui-se que os modelos de autômato celular produzem dígitos uniformemente distribuídos, mas que este fato já era conhecido e esperado. Os autores, no entanto, ficaram surpresos em descobrir o grau de conformidade tanto em modelos de gases como de líquidos. Outros autores adotaram linhas similares de pesquisas avaliando a conformidade da lei de Benford em sistemas discretos unidimensionais (SNYDER, CURRY e DOUGH, 2001) (BERGER, BUNIMOVICH e HILL, 2004) e também em sistemas com comportamento exponencial (BERGER, 2006).

Varian foi o primeiro a utilizar a Lei na área de análise de dados como forma de validar dados no contexto sócio-econômico, avaliando resultados obtidos em uma simulação de um sistema de previsão de crescimento urbano para a área da baía de São Francisco (MORGAN, 1972).

No final da década de 80, o uso da NB-Lei começa a aparecer de forma significativa na contabilidade e auditoria. Carslaw foi o precursor desta conduta ao estudar o comportamento de dados financeiros de empresas da Nova Zelândia (CARSLAW, 1988). Carslaw indica que existe uma suspeita de que gerentes e administradores estejam arredondando valores de balancetes para melhorar o desempenho das empresas. Segundo ele, seres humanos tendem a memorizar apenas o primeiro dígito de um número e, portanto, um número na forma $\mathrm{n}10^{\mathrm{k}}$ possui alto valor cognitivo.

Para verificar se existia manipulação de dados visando esses valores, Carslaw verificou a quantidade de zeros que apareciam como segundo dígito mais significativo nos valores que constavam nas demonstrações contábeis das empresas avaliadas. Como base para sua análise o autor utilizou a NB-Lei como frequência esperada. Ele detectou não apenas que o dígito 0 mostrava um excesso na segunda posição, mas que havia uma carência do dígito 9 na segunda posição e considerou isso como evidência suficiente para suportar a hipótese que havia manipulação nos dados.

Thomas replicou o trabalho de Carslaw em firmas americanas (THOMAS, 1989). Assim como o autor tomado como base, Thomas utilizou a NB-Lei para encontrar excesso e falta de dígitos na primeira e segunda posição, concluindo que existe evidência suficiente para suportar a hipótese de que existe manipulação tanto no ganho (arredondamento para cima) quanto na perda (arredondamento para baixo).

Nigrini é um dos autores atuais que mais assiduamente defende o uso da Lei de Newcomb-Benford como procedimento analítico. Ele juntou algumas noções do trabalho de Carslaw com outras do trabalho de Thomas e elaborou em sua tese técnicas para detectar desvios no imposto de renda (NIGRINI, 1992B). Em outro trabalho, ele demonstrou que os dados coletados de imposto de renda possuem conformidade com a NB-Lei (NIGRINI, 1996A).

Anos mais tarde Nigrini aplica novamente a Lei para detectar desvios em dados fornecidos por companhias petrolíferas (NIGRINI e MITTERMAIER, 1997C), demonstrando como esta pode ser usada como ferramenta de revisão analítica no auxílio ao planejamento de auditoria.

Com uma abordagem um pouco diferente, Busta e Weinberg estudaram a possibilidade de se criar um sistema de apoio à decisão baseado na NB-Lei e redes neurais (BUSTA e WEINBERG, 1998). Como os autores não dispunham de dados reais, eles utilizaram bases de dados simulados, misturando dados selecionados de uma sequência pura (NB) com amostras de uma distribuição ruidosa em uma proporção predeterminada.

Seguindo uma linha similar, Bhattacharya, Xu e Kumar (BHATTACHARYA, DONGMING e KUMAR, 2011) propõem um sistema de suporte à decisão baseado em redes neurais. Novamente um procedimento de revisão analítica é utilizado para classificar os dados simulados por sua conformidade com a NB-Lei. Também foi utilizada uma técnica de otimização baseada em algoritmo genético para escolher qual modelo de rede neural melhor

classifica a conformidade de um conjunto de dados como sendo NB-Lei. Diferentemente de seus precursores, os autores deste utilizam conjuntos com mais elementos, além de testar novas entradas nas redes neurais, mantendo apenas aquelas que foram consideradas de sucesso.

Em (DOS SANTOS, RIBEIRO FILHO, *et al.*, 2009) os autores usaram a conformidade com a Lei de Newcomb-Benford em dados de auditoria tributaria do ISS (Imposto Sobre Serviço) de empresas de publicidade para determinar a ocorrência de desvio na emissão das escrituras das notas fiscais. Já em (COSTA, HENRIQUES, *et al.*, 2012) os autores ressaltam que apenas o desvio entre a média observada com a média esperada não eh o suficiente para avaliar a conformidade da distribuição, mostrando que testes locais são adequados ao planejamento das auditorias e os testes globais funcionam melhor como indicadores gerencias.

2.2.2 Aplicações em Imagens Digitais

Jolion foi o primeiro a estudar a distribuição dos dígitos em imagens digitais (JOLION, 2001). Neste trabalho foi demonstrado que apesar dos valores dos pixels das imagens não seguirem a lei de Benford, as magnitudes dos gradientes, além da decomposição piramidal baseada na transformação de Laplace, obedecem à lei do dígito significativo. O autor então sugeriu como aplicação um método de codificação baseado em entropia que se utiliza da probabilidade Benford esperada.

Acebo e Sbert (ACEBO e MATEU, 2005) propuseram o uso da Lei de Benford para determinar se imagens geradas sinteticamente foram renderizadas baseadas em métodos fisicamente realistas. No entanto, o fato de que muitas imagens não seguem a Lei de Benford no domínio de pixels coloca esta aplicação em questão.

Sanches e Marques (SANCHES e MARQUES, 2006) mostraram que o primeiro dígito da magnitude dos gradientes de imagens médicas de ressonâncias magnéticas, tomografias computadorizadas e ultrassons obedecem à Lei de Benford. Eles então propõem um algoritmo de reconstrução baseado na NB-lei que não requer ajuste de parâmetros regulatórios, obtendo bons resultados.

Fu, Shi e Su (FU, Q. SHI e SU, 2007) mostraram que a distribuição do dígito mais significativo dos coeficientes do bloco-DCT (transformada discreta de cosseno) segue satisfatoriamente a NB-lei e que os coeficientes quantizados JPEG seguem uma distribuição similar à lei logarítmica de Benford quando a imagem JPEG for comprimida somente uma única vez. Eles então propuseram um modelo empírico paramétrico para formular essa lei observada. Além disso, eles demonstraram que essa distribuição é muito sensível à compressão JPEG dupla, propondo então a aplicação da NB-lei na análise forense de imagens.

Em um trabalho relacionado, porém independente, Pérez-González, Heileman e Abdallah (PÉREZ-GONZÁLEZ, L. HEILEMAN e T. ABDALLAH, 2007) apresentaram uma generalização da lei de Benford para o dígito mais significativo. Esta generalização se baseia em manter os dois primeiros termos da expansão de Fourier da função densidade de probabilidade dos dados no domínio logarítmico modulado. Além disso, demonstraram que imagens no domínio da transformada discreta de cosseno (DCT) seguem esta generalização. Eles então propuseram a aplicação da lei de Benford na área de esteganálise de imagens para verificar se uma imagem contem uma mensagem escondida.

Qadir, Zhao e Ho (QADIR, ZHAO e TS HO, 2010) analisaram a NB-lei aplicada a imagens que utilizam o padrão de compressão JPEG 2000. Eles demonstraram experimentalmente que imagens no domínio da transformada discreta de wavelet (DWT) seguem a lei do dígito significativo. Eles então propuseram a aplicação da NB-lei para estimar o fator de qualidade utilizado na compressão JPEG 2000 de uma imagem. Posteriormente, Qadir et al. (QADIR, ZHAO, *et al.*, 2011) propuseram a aplicação da NB-lei a imagens no domínio DWT para identificar imagens naturais que contenham captação de brilho exacerbado (“*glare”*).

Heijer e Eiben (HEIJER e EIBEN, 2010) utilizaram a NB-lei como uma medida da qualidade estética para a evolução sem supervisão de arte sintética revolucionaria gerada por computação genética. A NB-lei é uma das três medidas de qualidade e a arte que evolui de acordo com sua avaliação possui características distintas das demais.

Em (MAIA, 2012) Maia empregou os métodos estatísticos mais utilizados na área para demonstrar que os qualificadores de pontos de interesse, como o detector de Harris (HARRIS e STEPHENS, 1988), aplicados a imagens digitais comuns são grandezas que se conformam à Lei de Benford. Os experimentos com as sequências de coeficientes extraídas de um grande banco de imagens confirmaram que os seletores de pontos de interesse se adequam à Lei de Benford: a conformidade do detector de Harris é tão boa, que Maia concluiu que na literatura ela é a grandeza extraída de dados reais que melhor se adequa à Lei até o momento.

2.3 Critérios de Conformidade

O primeiro teste de conformidade de dados naturais à Lei do Digito Significativo foi realizado pelo próprio Frank Benford em seu trabalho original (BENFORD, 1938), utilizando a diferença entre as probabilidades esperadas e observadas (MORGAN, 1972). O desvio das frequências, também conhecido por distância ou diferença entre frequências, ε é dado por:

$$\varepsilon = \sum |P_o - P_e|/2 \quad (2.5)$$

onde $\mathrm{P_o}$ e $\mathrm{P_e}$ representam as probabilidades observadas e esperadas, respectivamente. A divisão por 2 ocorre pois, como a soma das probabilidades é obrigatoriamente 1, a última célula de probabilidade é linearmente dependente das outras. Isto se espelha nos desvios, sempre que é gerado um excesso em algum dígito, uma ausência da mesma intensidade é refletida em um ou mais dígitos: quando olhamos para o somatório das diferenças absolutas, consideramos os desvios duas vezes (uma para o excesso e outra para a falta).

No entanto, as medidas de conformidade mais difundidas na literatura são baseadas nos testes estatísticos χ^2 de Pearson, no teste *Z*, e no teste Komolgorov-Smirnov (*K-S*). O teste χ^2 foi o primeiro a ser utilizado (DIACONIS, 1977), no entanto seu autor estava mais preocupado com o desenvolvimento teórico do que com aplicações em geral. O teste *Z* foi introduzido por Carslaw (CARSLAW, 1988) no contexto da NB-Lei e possui natureza local, analisando os desvios em um único dígito por vez. Os testes χ^2 e *K-S*, por outro lado, possuem natureza global e analisam todos os dígitos e todas as posições.

A vasta maioria dos autores verifica a conformidade apenas para o primeiro dígito. Algumas aplicações surgiram trabalhando com os demais dígitos, porém são poucas em número e ainda assim raramente vão além dos dois primeiros.

O teste Z aplicado à NB-lei (Thomas, 1989), pode ser calculado por:

$$Z = \frac{|P_o - P_e| - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{P_o - (1 - P_o)}{n}}} \quad (2.6)$$

onde $\mathrm{P_o}$ e $\mathrm{P_e}$ representam as probabilidades observadas e esperadas respectivamente, n é o tamanho total da amostra, e o termo $\frac{1}{2\mathrm{n}}$ é um fator de correção de continuidade e só é utilizado quando ele é menor que o primeiro termo do numerador.

O teste estatístico χ^2 de Pearson, por sua vez é dado por:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_o - O_e)^2}{O_e} \quad (2.7)$$

onde $\mathrm{O_{O_d}}$ e $\mathrm{O_{E_d}}$ representam respectivamente a quantidade de elementos observada e a quantidade de elementos esperada para o dígito.

Já a estatística do teste Kolmogorov-Smirnov (PRESS, FLANNERY, *et al.*, 1987) é dada por:

$$D = max_{0<x<1} |S(x) - P(x)| \quad (2.8)$$

onde $S(x)$ é a função de distribuição da probabilidade acumulada dos valores observados em escala logarítmica modular e $P(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada de valores em escala logarítmica modular que satisfazem à Lei de Newcomb-Benford.

Nigrini e Mittermaier sugeriram (NIGRINI e MITTERMAIER, 1997C) uma distância de conformidade para a NB-Lei chamada M.A.D (Mean Absolute Deviaton). O M.A.D é calculado dividindo o somatório das diferenças absolutas pela quantidade de dígitos, equivalendo-se à distância ε (Equação 2.5) por uma diferença de escala.

Busta e Weinberg (BUSTA e WEINBERG, 1998) utilizaram-se de redes neurais para a classificação da conformidade dos dados com a NB-Lei, que consideraram em sua análise elementos da estatística descritiva como a frequência de ocorrência dos dígitos das primeiras e segundas posições, média, mediana, desvio padrão, curtose e obliquidade além de valores de estatísticas calculadas como Z e χ^2. Estendendo o trabalho de Busta e Weinberg, Bhattacharya, Xu e Kumar (BHATTACHARYA, DONGMING e KUMAR, 2011) reaplicaram os critérios mais bem sucedidos de seus antecessores além de avaliar novos critérios como χ^2, Kolmogorov-Smirnov (K-S) discreto, distância de Kullbak-Lieber, entropia de Shannon, distância euclidiana, coeficiente de relação de Pearson e o alpha de Judge-Schechter.

Focando no poder de testes estatísticos, Steele e Chaseling (STEELE e JANET, 2006) demonstraram que para distribuições de tendência, dentre os testes avaliados, os que apresentaram melhor desempenho foram o K-S discreto, Anderson-Darling (A^2) discreto e o Cramér-von Mises (W^2) discreto. O teste χ^2 teve desempenho insatisfatório quando comparado com os outros testes e o teste Z não foi avaliado.

Em sua dissertação de mestrado, Wong (WONG, 2010) avaliou os poderes de diversos testes estatísticos para detecção de desvios em sequências NB. O autor simulou várias naturezas de desvios em proporções crescentes como forma de avaliação, medindo o poder do teste em cada caso. Os resultados de Steele e Chaseling foram comprovados, A^2 e W^2 apresentaram os melhores poderes enquanto o teste χ^2 se mostrou novamente menos poder que os outros (o K-S não foi avaliado).

Em (HENRIQUES, 2012) o autor avalia medidas de conformidade à Lei de Benford, propondo quatro métricas, ate então, inéditas e metodologias inovadoras para efetuar testes de conformidade locais e globais. Explorando os desafios das métricas, propôs uma métrica para dados discretos OVN (Ordered Vector Norm) baseada em análises exploratórias de dados financeiros de empenhos estaduais obtidos da base de dados do Tribunal de Contas do Estado de Pernambuco e também se efetuou uma análise de conformidade de todos os dígitos em

imagens digitais, avaliando o efeito da transformada de cosseno e compressão JPEG em imagens diversas.

3. O OPERADOR GRADIENTE

Em cálculo vetorial, o gradiente de uma função indica a direção e o sentido da maior alteração no campo escalar. Por exemplo, considere uma sala onde a temperatura do ambiente é dada por uma função de campo escalar T, então para cada ponto (x, y, z) da sala a temperatura é dada por T(x, y, z) (considerando que a temperatura de ambiente não muda com o passar do tempo). O gradiente de T indica a direção para onde a temperatura aumenta mais rapidamente.

Em imagens, o gradiente indica a mudança de intensidade ou da cor na imagem. Ele fornece duas informações, a magnitude que indica o quão rapidamente o conteúdo da imagem está se modificando, enquanto que a direção nos diz a orientação em relação à qual a intensidade na imagem está mudando. Para ilustrar isso, consideremos uma imagem como uma malha tridimensional, no qual em cada ponto temos um correspondente valor de altura, em vez da informação da cor Figura 3-1. Para qualquer ponto do terreno, a direção do gradiente indica as regiões de subida e a magnitude do gradiente nos diz a velocidade da inclinação da malha.

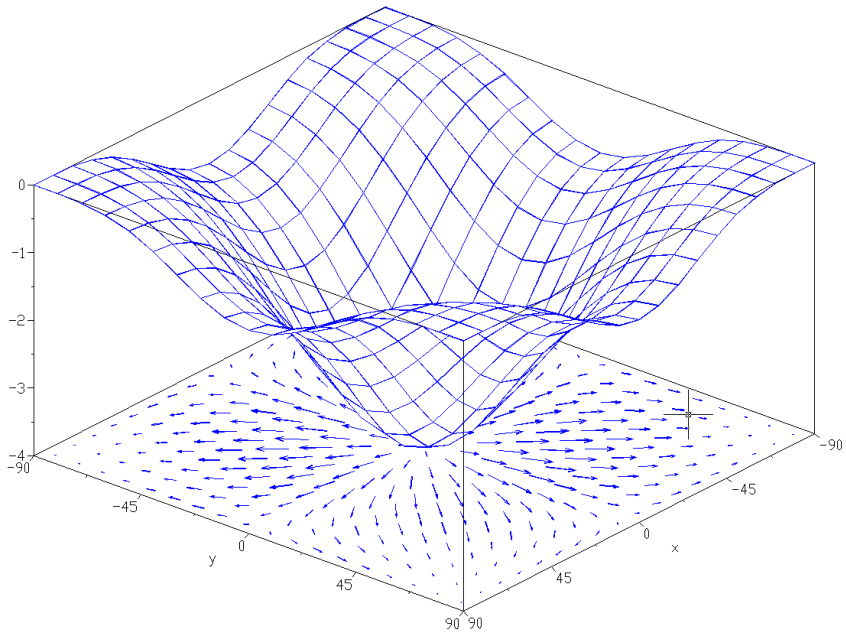

Figura 3-1: As setas da parte inferior do cubo são os gradientes.

Devido ao fato do gradiente ter uma direção e uma magnitude, é natural codificarmos as informações em um vetor. O comprimento deste vetor fornece a magnitude do gradiente, enquanto que a sua direção e sentido dão os correspondentes do gradiente. Como o gradiente pode ser diferente em cada local, representamos com um vetor diferente em cada localização da Figura 3-1.

A definição de gradiente em imagens digitais se assemelha bastante com o da definição de gradiente para imagens, a diferença é que o valor do elemento de cor é representada, em geral, como uma composição de três componentes (POYNTON, 2003). Entre as principais representações de cor temos; RGB, HSV, YCbCr, XYZ e suas variações (POYNTON, 2003). Para calcular o gradiente de imagem, misturamos de forma gradual cada componente de intensidade de cor, dos menores valores para os maiores, gerando um valor único para cor (GONZALEZ e WOODS, 2008). Uma vez gerado esse valor único podemos voltar a considerar o gradiente como um indicador de mudança de intensidade ou da cor na imagem, e então ponderamos o gradiente de imagem digital da mesma forma que o gradiente para imagem.

Um vídeo digital pode ser tratado com uma sequência de imagens digitais, logo temos valores de gradiente para cada quadro do vídeo. Adicionalmente a essa informação a diferença entre os valores de pixel de uma mesma posição entre os quadros gera uma grandeza (National Telecommunications & Information Administration, 1996), nesse contexto o gradiente vai indicar as regiões onde há uma grande variação no valor do pixel entre quadrados consecutivos.

3.1 Cálculo da Norma do Gradiente Triplo

Para o cálculo da norma do gradiente consideramos não só o gradiente da imagem, gradiente espacial, mas também o gradiente gerado pela diferença entre os quadros do vídeo, gradiente temporal. Nessas condições tem um espaço tridimensional formado pelo espaço bidimensional da imagem, onde temos o gradiente espacial, e o tempo, representado pela diferença entre os quadros (componente temporal), formando o que chamamos de gradiente triplo. A norma do gradiente triplo é obtida nesse espaço tridimensional (KLASER e MARSZALEK, 2008).

A equação a seguir resume o cálculo do gradiente:

$$\nabla f = \ < \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) > \quad (3.1)$$

onde x, y são as componentes do espaço da imagem, e z é a componente temporal. ∇f é o vetor gradiente composto pelas derivadas parciais de cada um dessas três componentes, onde a norma do vetor gradiente é a norma do gradiente triplo.

Antes de aplicarmos a Formula 3.1 aos dados dos vídeos temos que tratar a questão das três componentes da cor. Os vídeos que utilizamos para os testes usam o formato RGB (POYNTON,

2003), para determinar um valor único para a cor usamos uma transformação de espaço de cores de imagens coloridas para a escala de tons de cinza (STERNBERG, 1986), para tal transformação utilizamos a ferramenta OpenCV através da função:

cvtColor(const Mat& *src*, Mat& *dst*, int *code*)

onde const Mat& *src* é a matriz com os pixels, nas componentes RGB, da imagem que aplicar a transformação; Mat& *dst* é a matriz que vai conter a resultado da função, ou seja a *dst* contém a matriz de pixel em valores de tons de cinza; por fim o int *code* é um valor interior que representa que transformação deve ser aplicada, para a nossa aplicação o valor de *code* CV_RGB2GRAY (*RGB to GRAY*) (ITSEEZ, 2006). Em Figura 3-2 temos um exemplo do resultado da aplicação dessa função.

Figura 3-2: À esquerda um quadro colorido de um vídeo e à diretia o mesmo quadro em tons de cinza.

4. METODOLOGIA

Este trabalho tem como objetivo mostrar que a norma do gradiente triplo em vídeos digitais é uma grandeza que adere à Lei de Newcomb-Benford. Adicionalmente, e utilizando-se da mesma base de dados, pretende-se avaliar se vídeos individualmente estão em conformidade com a Lei, ou se sofrem de desvios anômalos à natureza subjacente da grandeza. A discussão levantada aqui está em como podemos inferir sobre a conformidade à NB-Lei da norma do gradiente triplo a partir de conjuntos de dados que podem e devem estar afetados de ruídos ou outras patologias que porventura perturbem a conformidade dos vídeos. Em outras palavras, pode ocorrer, por questões próprias da amostragem aleatória, que a norma do gradiente triplo possa mesmo ser conforme, porém os dados utilizados na análise sejam extremamente não conformes, mascarando a conformidade da grandeza. Ou mesmo o contrário, a grandeza não ser conforme, mas que os dados utilizados sejam suficientemente próximos de uma conformidade. Baseada no Estado da Arte discutido na seção 2.2, a escolha que fizemos foi: encontrarmos um conjunto de vídeos com temas aleatórios, e avaliarmos a média dos percentuais em cada algarismo, para a primeira posição, extraídos de todos os vídeos. Assumimos assim que os percentuais médios referentes a cada dígito da totalidade dos vídeos é um indicativo da conformidade da grandeza em si, enquanto que, para a avaliação de se um dado vídeo é conforme a Lei (ou se apresenta desvios), analisamos os percentuais em cada algarismo na primeira posição das normais dos gradientes triplos do vídeo em questão. A ideia por trás disso reside na esperança de que os desvios de conformidade, observados em grandezas quantitativas de vídeos, estejam distribuídos como uma normal de média nula, ou seja, sem viés, com respeito a cada algarismo.

Devido ao fato de que não existe um teste de conformidade à Lei de Benford universalmente aceito, nós primeiro vamos investigar como a análise de conformidade é realizada nos principais trabalhos relacionados à NB-lei com foco nos trabalhos realizados na área de imagens digitais, depois vamos explicar o método adotado, e finalmente iremos expor a implementação dos experimentos. A análise de trabalhos sobre imagens digitais e não sobre vídeos é devido ao fato de nós não termos encontrado trabalhos com esse tema, e o conjunto de dados analisados pelos principais trabalhos da área que mais se aproxima é o de imagens digitais, uma vez que podemos definir vídeo digital como uma sequência de imagens digitais.

4.1 Estado da Arte das Metodologias de Aderência à NB-Lei

Benford (BENFORD, 1938) foi o primeiro pesquisador a analisar a conformidade da lei do dígito mais significativo em dados reais. Ao analisar vinte grupos distintos de dados contendo um total de 20.229 observações, Benford utilizou-se da distância entre as frequências esperadas e as observadas para ordenar os grupos analisados. A Figura 4-1 apresenta uma cópia da tabela principal do artigo de Benford:

PERCENTAGE OF TIMES THE NATURAL NUMBERS 1 TO 9 ARE USED AS FIRST DIGITS IN NUMBERS, AS DETERMINED BY 20,229 OBSERVATIONS

Group	Title	First Digit									Count
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	$n^{-1}, \sqrt{n}, \cdots$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	$n^1, n^2 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Average		30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Probable Error		±0.8	±0.4	±0.4	±0.3	±0.2	±0.2	±0.2	±0.2	±0.3	—

Figura 4-1: Tabela apresentada no trabalho original de Benford, onde são vemos os percentuais encontrados do primeiro dígito para cada grupo analisado.

A menor distância calculada por Benford teve valor de 2.8% (em um grupo com 100 observações) e a maior distância foi de 35.4% (em um grupo com 91 observações). A média de todos os grupos obteve distancia de 3%. Benford não chegou a classificar quais dos grupos eram considerados conformes com a lei ou não, não gerando um limiar de comparação, no entanto, a literatura que se seguiu, baseando-se nesta tabela, considera que diversos desses grupos são grandezas conformes à Lei, como população, áreas de rios, itens de jornais, etc. A

Figura 4-2 mostra as diferenças totais (de todos os dígitos) entre as frequências observadas e as esperadas para as grandezas destacadas por Benford:

SUMMATION OF DIFFERENCES BETWEEN OBSERVED AND THEORETICAL FREQUENCIES

Order	Item	Nature	Difference	Order	Item	Nature	Difference
1	D	Newspaper Items	2.8	11	N	Cost Data, Concrete	12.4
2	F	Pressure Lost, Air Flow	3.2	12	S	$n^1 \cdots n^8, n!$	13.8
3	G	H.P. Lost in Air Flow	4.8	13	L	Design Data Generators	16.6
4	R	Street Addresses, A.M.S.	5.4	14	B	Population, U. S. A.	16.6
5	P	Am. League, 1936	6.6	15	I	Drainage Rate of Rivers	21.6
6	Q	Black Body Radiation	7.2	16	K	$n^{-1}, \sqrt{n} \cdots$	22.8
7	O	X-Ray Voltage	7.4	17	H	Molecular Wgts.	23.2
8	M	*Readers' Digest*	8.4	18	E	Specific Heats	24.2
9	A	Area Rivers	9.8	19	C	Physical Constants	34.9
10	T	Death Rates	11.2	20	J	Atomic Weights	35.4

Figura 4-2: Tabela apresentada no trabalho original de Benford onde os grupos são organizados de acordo com sua conformidade à NB-lei, analisando as frequências observadas e esperadas.

Carslaw (CARSLAW, 1988) foi o precursor do uso da lei de Newcomb-Benford para a validação de dados contábeis. Ao analisar a declaração de imposto de renda de diversas empresas da Nova Zelândia, Carslaw se utilizou da estatística Z para avaliar individualmente a frequência de cada digito e realizou o teste χ^2 como teste global analisando a conformidade da distribuição inteira à NB-lei. O grupo de dados analisado por Carslaw continha 805 observações retiradas das declarações de 220 empresas no período de 1981 a 1985. A Figura 4-3 apresenta a tabela divulgada no artigo por Carslaw contendo os dados da análise para o primeiro dígito.

Carslaw focou sua análise nas ocorrências do segundo dígito em específico, verificando uma discrepância entre o numero de zeros e noves esperados pela NB-lei e os reportados pelas empresas, como mostra a Figura 4-3. Carslaw concluiu que havia uma anormalidade nos dados reportados pelas empresas, sendo encontrada particularmente uma manipulação artificial de arredondamento, visando gerar valores no formato $n10^k$, considerados de maior valor cognitivo.

TABLE 1

FREQUENCY OF FIRST DIGITS IN INCOME NUMBERS
($n = 805$)

Digit	Expected Frequency[a] Percent	Ordinary Income: Observed Deviation Percent	Ordinary Income: Z-statistic	Net Income: Observed Deviation Percent	Net Income: Z-statistic
0	—	—	—	—	—
1	30.1	+2.5	+1.54	−0.9	−0.56
2	17.6	−2.8	−2.09*	−2.3	−1.76
3	12.5	+1.1	+0.94	+2.3	+1.97*
4	9.7	+0.5	+0.48	+0.5	+0.48
5	7.9	−1.1	−1.16	−0.9	−0.95
6	6.7	−0.1	−0.11	+0.7	+0.91
7	5.8	−0.2	−0.24	−0.6	−0.73
8	5.1	+0.2	+0.26	+0.6	+0.77
9	4.6	−0.1	−0.14	+0.6	+0.81
	100.0	—		—	
χ^2		=7.64		9.33	

[a] Computed via Feller's formula.
* Significant at the .05 percent level.

Figura 4-3: Tabela apresentada no trabalho de Carslaw, onde são sumarizados os desvios entre as probabilidades esperadas e obtidas no primeiro dígito, juntamente com as estatísticas-Z para cada dígito e o valor do teste χ^2.

TABLE 4

FREQUENCY OF SECOND DIGITS FOR INCOME NUMBERS
FOR OWNER AND MANAGER CONTROLLED FIRMS

Digit	Expected Frequency Percent	Owner Controlled Firms: Domestic ($n=244$) Observed Deviation Percent	Domestic Z-statistic	Overseas ($n=126$) Observed Deviation Percent	Overseas Z-statistic	Manager Controlled Firms ($n=434$) Observed Deviation Percent	Manager Controlled Firms Z-statistic
0	12.0	+9.3	+4.47***	−0.5	−0.18	+4.1	+2.63**
1	11.4	−1.1	−0.54	−0.6	−0.22	+0.6	+0.39
2	10.9	+0.6	+0.30	−4.7	−1.72*	−0.5	−0.33
3	10.4	−1.4	−0.71	+2.7	+1.01	+0.2	+0.14
4	10.0	−2.2	−1.15	−1.5	−0.57	−1.2	−0.83
5	9.7	−2.3	−1.22	+2.6	+1.00	−1.9	−1.34
6	9.3	+3.0	+1.61	−3.9	−1.53	+1.8	+1.30
7	9.0	+0.8	+0.44	+2.4	+0.96	−0.5	−0.37
8	8.8	−3.2	−1.93*	+1.2	+0.48	+0.6	+0.44
9	8.5	−3.5	−1.79*	+2.3	+0.94	−3.2	−2.39**
	100.0	—		—		—	
χ^2		=29.77**		8.80		15.45	

* Significant at the .10 level.
** Significant at the .05 level.
*** Significant at the .01 level.

Figura 4-4: Tabela apresentada no trabalho de Carslaw, onde são analisadas as frequências encontradas para o segundo digito, e é encontrada uma discrepância particularmente alta nos dígitos nove e zero pelo teste Z.

Na aplicação da NB-lei em imagens digitais, Jolion (JOLION, 2001) aplicou o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S) descrito em (PRESS, FLANNERY, *et al.*, 1987) a uma base de 221 imagens, avaliando a conformidade dos valores de cinza dos pixels, a magnitude dos gradientes, além da decomposição piramidal baseada na transformada de Laplace, como é exposto na Figura 4-5. Nenhuma informação é apresentada sobre as imagens utilizadas nos experimentos, não sendo fornecido o numero médio de observações extraídas das imagens.

Image nature	Min	Max	Mean	Standard deviation
Gray level	0.0036	1	0.455	0.381
Gradient	0	1	0.983	0.105
Laplacian (level 0)	0	1	0.9549	0.146
Laplacian (level 1)	0.0292	1	0.9663	0.124
Laplacian (level 2)	0.0706	1	0.9847	0.089

Figura 4-5: Tabela apresentada no trabalho de Jolion: Adequações entre a NB-Lei e os valores da distribuição das imagens, seus gradientes e da decomposição piramidal baseada na transformada de Laplace (níveis 0, 1 e 2). Os valores mostrados na tabela são os níveis.

Sanches e Marques (SANCHES e MARQUES, 2006) também utilizaram o teste K-S, baseado em (PETTITT e STEPHENS, 1977), para avaliar a adequação do gradiente de imagens médicas à lei que governa as proporções associadas ao primeiro dígito significativo. A análise foi realizada em três grupos de imagens distintos: ressonâncias magnéticas, tomografias computadorizadas e ultrassons, totalizando 476 imagens, no entanto a quantidade de observações por imagem também não é informada. Dois testes K-S foram realizados para cada grupo, calculando a medida de adequação à distribuição Benford e a uma distribuição uniforme. Na Tabela 4-6 nós vemos a tabela contendo as médias geométricas das probabilidades de rejeição *Pe* da hipótese nula de que a distribuição segue a distribuição Benford.

P_e	Benford	Uniform
CT	$7.06E-14$	$4.41E-01$
MRI	$1.06E-11$	$6.84E-01$
US	$2.38E-13$	$2.34E-01$

Tabela 4-6: Tabela apresentada no trabalho de Sanches e Marques onde são apresentadas as médias geométricas das probabilidades de rejeição Pe de acordo com o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov, computadas sobre 476 imagens.

Acebo e Sbert (ACEBO e MATEU, 2005) avaliaram a conformidade de valores de pixels de imagens sintéticas à NB-lei, propondo uma medida da qualidade de ajuste à lei de Benford de acordo com o que chamam de divergência χ^2. Eles, aparentemente inadvertidamente, aplicaram os valores de frequência ao teste χ^2 ao invés dos valores de observações obtidos, modificando o teste e removendo o seu valor estatístico, porém tornando-o em uma medida independente do tamanho da amostra. Um total de 18 imagens são analisadas e apresentadas diretamente no trabalho juntamente com a divergência χ^2 calculada, no entanto, o número de observações extraídas das imagens não é apresentado. A Figura 4-7 apresenta uma das análises realizada no trabalho.

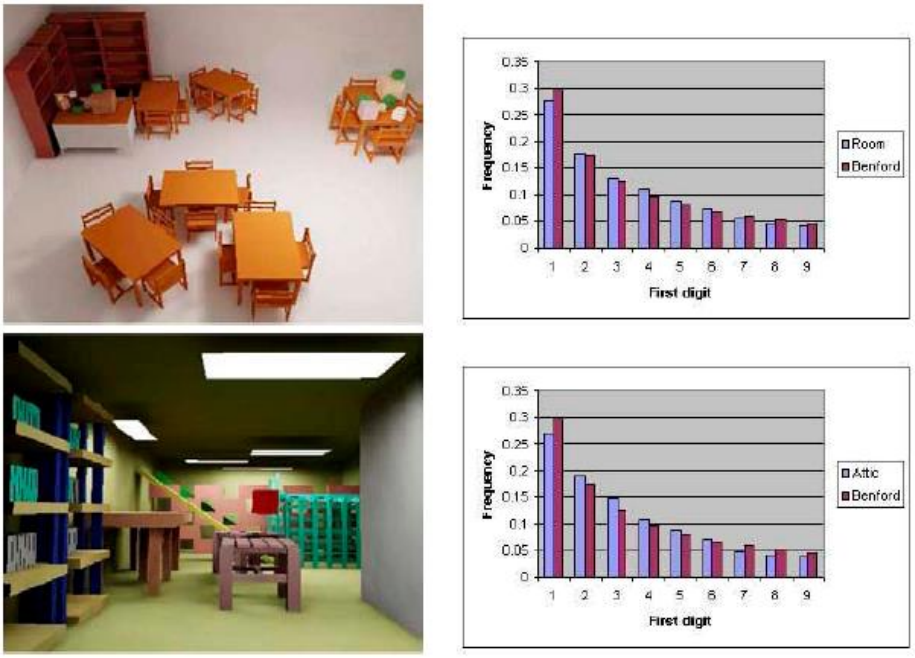

Figura 4-7: Figuras apresentadas no trabalho de Acerbo e Sbert. Na esquerda são apresentadas duas imagens sintéticas geradas através de radiosidade; no meio é apresentado o gráfico da adequação dos valores de pixel à NB-Lei para o primeiro dígito. As imagens obtiveram respectivamente uma divergência X^2 de 0.00703 e 0.01549.

Fu, Shi e Su (FU, Q. SHI e SU, 2007) utilizam-se do mesmo método de qualidade de adequação proposto por Acebo e Sbert para analisar a conformidade dos coeficientes do bloco-DCT em imagens. Fu, Shi e Su utilizaram como base de imagens a UCID. No trabalho é apresentado um gráfico sintetizando a adequação do bloco-DCT à NB-lei, mostrado na Figura 4-8.

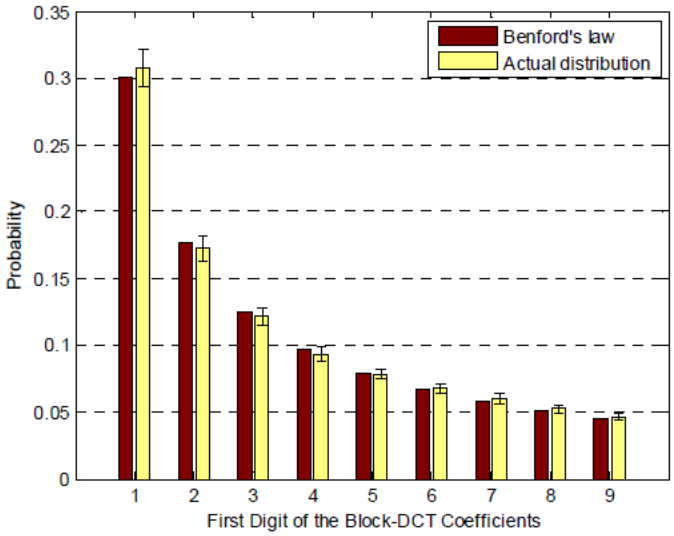

Figura 4-8: Gráfico apresentado no trabalho de Fu, Shi e Su, onde é apresentada a média das frequências encontradas para o primeiro digito do bloco-DCT para as 1.338 imagens. As barras vermelhas são as frequências esperadas pela lei de Benford, as barras amarelas representam a média obtida, contendo de erro representando o desvio padrão.

Qadir et al. em seus dois trabalhos (QADIR, ZHAO, *et al.*, 2011) (QADIR, ZHAO e TS HO, 2010) também se utilizam da divergência χ^2 como medida de qualidade de adequação à lei do dígito significativo. Eles também realizaram seus experimentos em cima da base de imagens UCID, verificando a conformidade à NB-Lei da transformada discreta de wavelet (DWT) em imagens. Assim como Fu, Shi e Su, os autores também apresentaram um gráfico sintetizando a adequação à NB-lei para o primeiro dígito, como é mostrado na Figura 4-9:

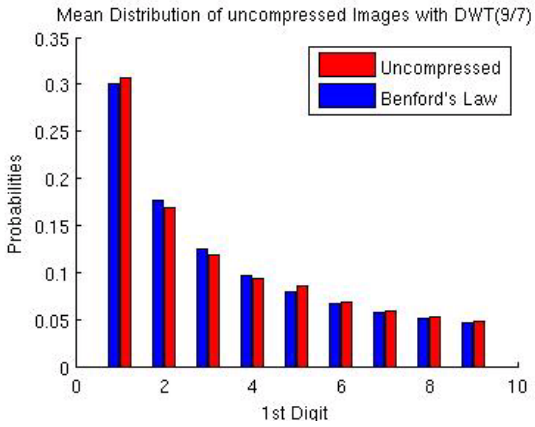

Figura 4-9: Gráfico apresentado no trabalho de Qadir et al.: em azul estão os valores esperados pela lei de Benford e em vermelho está representada a média encontrada dos primeiros dígitos da DWT sem compressão das 1.338 imagens contidas na UCID.

Do exposto acima tem-se uma clara ideia de que a demonstração da conformidade à NB-Lei de certas grandezas extraídas de imagens digitais, ou mesmo de outros modelos do mundo

real, é apenas experimental, seja para a comunidade de Processamento de Imagens ou para outras áreas aplicadas, por várias razões. Entre as razões para que a expressão probabilística que define a NB-Lei resulta em valores irracionais para elementos que não são potências racionais de 10, o que de início, invalida o rigorismo em uma afirmação de conformidade em sequências finitas. Outra razão é que ainda não existem estatísticas ou métricas que sejam plenamente adequadas para este fim, seja por limitações na sua aplicabilidade, como no caso do teste χ^2 de Pearson para amostras muito grandes, ou na ausência de um intervalo de confiança, como no caso das diversas outras métricas, inclusive as que atuam diretamente nas mantissas.

As exposições da conformidade à NB-Lei nos artigos da área sugerem que seus autores se valem da inspeção visual sobre gráficos e planilhas para concluírem que suas grandezas são conformes. Gráficos de barras das frequências dos dígitos na primeira posição onde há visualmente "pequena diferença" nas alturas das barras são os recursos mais comuns utilizados nesta literatura, constituindo-se talvez na aplicação de uma metodologia empregada pelo próprio Frank Benford em seu artigo seminal. Em muitos casos nem mesmo investigam o grau de aleatoriedade, independência ou adequação do tamanho das amostras para consubstanciarem os resultados ou mesmo para inferirem qual é a proporção de ruídos presentes nos dados.

Diante deste cenário, propusemos aqui uma metodologia que empregou as principais técnicas utilizadas na literatura específica e que propiciaram uma comparação direta de conformidade da norma do gradiente triplo em vídeos contra a conformidade das outras grandezas utilizadas na literatura, comparação tal que se mostrou amplamente favorável às primeiras.

4.2 Procedimento Adotado

Nosso objetivo é avaliar como o tamanho do gradiente triplo se comporta em relação à Lei do Dígito Significativo. Para tal, nós compilamos na seção anterior a metodologia utilizada pela literatura com foco na aplicação em imagens. Percebemos que não existe um método único difundido, e que o método mais utilizado na análise de imagens, a divergência χ^2, é uma aplicação inusitada do teste χ^2 de Pearson, sem valor estatístico.

Testes estatísticos são desenvolvidos para trabalhar com amostras de uma população. Como em nosso caso nós temos acesso a toda população, ou seja, todos os valores de uma grandeza de todos os quadros de um vídeo, estes testes tem seu valor reduzido para nosso uso. Nigrini (NIGRINI, 1999) classifica esse fenômeno como excesso de poder: quando o tamanho dos dados, ou seja, a quantidade de observações a serem avaliadas, se torna cada vez maior, os testes estatísticos se tornam cada vez mais rigorosos; segundo Nigrini, a partir de 10.000

observações, até pequenas diferenças se tornam significantes; para grandes grupos de dados (acima de 1.000.000 de observações), diferenças imperceptíveis em um gráfico são consideradas significantes, rejeitando a hipótese nula. O mesmo fenômeno é relatado por Krakar (ZDRAVKO e ŽGELA, 2009) ao descrever o teste χ^2. No texto, é dito que para conjuntos de dados com mais de 10.000 amostras o valor da estatística é quase sempre superior ao valor crítico, fazendo com que o auditor imagine que o conjunto não seja conforme com a NB-Lei. Os autores em (BARTOLO e LACASA, 2009) citam novamente o problema de excesso de poder com os teste Z e χ^2. Este fenômeno afeta os testes Z, χ^2, e Kolmogorov-Smirnov.

O conjunto de vídeos que utilizamos possuía uma variedade de resoluções, gerando aproximadamente 114 bilhões de valores de normas de gradiente. Ester tamanho de dados é significativamente alto, afetando a utilidade dos testes estatísticos mencionados.

Portanto, devido às limitações individuais de cada teste, a falta de consenso quanto a um teste universal difundido, e por motivos de comparação com outros trabalhos, nós aplicamos diversos métodos para avaliar a conformidade de nossos experimentos à Lei de Newcomb-Benford:

- Diferença entre as frequências observadas e esperadas ε (Equação 2.5), utilizada no trabalho original de Benford;

- Teste estatístico χ^2 de Pearson, utilizado por Carslaw e diversos outros autores (Equação 2.7). Este teste, porém, é suscetível ao alto tamanho de observações extraídas das imagens, como foi previamente discutido;

- Divergência χ^2 proposta por Acerbo e Sbert e difundida na aplicação da Lei de Benford à imagens, onde as frequências são aplicadas diretamente à formula χ^2 (Equação 2.7), no lugar do valor de observações;

- Teste estatístico Kolmogorov-Smirnov (PRESS, FLANNERY, *et al.*, 1987), utilizado por Jolion na análise da NB-Lei em imagens.

Nós também fizemos gráficos para melhor compreender a conformidade da lei de Newcomb-Benford dos gradientes triplos em vídeos.

4.3 Experimentos e Implementação

Nós avaliamos a conformidade da Lei de Newcomb-Benford para a norma do gradiente triplo em vídeo digitais. Análise do primeiro dígito, assim como é realizada em praticamente todos os trabalhos relacionados à NB-Lei. As probabilidades esperadas para o primeiro dígito são dadas pela Equação 2.2 e são apresentadas na Seção 5. Adicionalmente analisamos a distribuição empírica das mantissas através do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov (K-S),

como realizado pelos trabalhos de análise em imagens (JOLION, 2001) (SANCHES e MARQUES, 2006).

4.3.1 Implementação

Nossa implementação está dividida em três partes: a primeira, implementada utilizando a linguagem de computação C++ e a biblioteca OpenCV (BRADSKI e A., 2008) de Visão Computacional, calcula o valor da norma do gradiente triplo para cada pixel do vídeo de entrada e então salva os valores de mantissa em um arquivo para futura análise. Também utilizando C++ e OpenCV, calculando o gradiente triplo dos últimos 10 quadros do vídeo e exibindo a conformidade em tempo real. A terceira, implementada em MATLAB, por sua vez, realiza as análises da conformidade à NB-Lei, gerando a grandeza de qualidade de adequação explicitada na seção anterior, assim como os gráficos para análise visual.

4.3.2 Base de Dados

Em nossos experimentos geramos duas bases de dados de vídeos aleatórios, descritos a seguir.

O primeiro conjunto de vídeos (ROCHA, 2013A) é formado por elementos escolhidos aleatoriamente no site YouTube.com, selecionamos 78 vídeos (Figura 4-10). Esse grupo foi gerado pela busca direta de vídeos do YouTube fazendo buscas por termos distintos tais como: “Nature Uncut”, “Kirby Game”, “Dance”, “Psychedelic video”, “PORTA DOS FUNDOS”, “Dragon Ball”, “Uncut”, “Congo”, “Japanese Commercials”, entre outros. Os vídeos estão no formato MPEG-4 (IAIN, 2004) com resolução de 320x240, 480x352, 640x358, 480x360, 270x360, 450x360, 540x360, 1280x640, 408x720, 1280x720, 1440x1080, 1920x1080 pixels.

Figura 4-10: Quadros de vídeos analisados no segundo grupo.

Geramos uma segunda base de dados (ROCHA, 2013D) escolhidos de forma aleatória também no YouTube, foram escolhidos 100 vídeos Figura 4-11 no mesmo formato do primeiro grupo, o MPEG-4, e com mesma variedade de resolução do primeiro grupo. Para a criação desse segundo grupo foi utilizado a ferramenta web YouTubeRandom (GODADDY.COM, 2011), que acessa os vídeos em YouTube aleatoriamente como descrito a seguir.

Figura 4-11: Quadros de vídeos analisados.

Os vídeos no Youtube são armazenados nos servidores do site seguindo uma estrutura de dados especial chamada Tabela de Dispersão [também conhecida com tabela de espalhamento ou tabela hash (H. CORMEN, 2009)] onde a cada vídeo são associados alguns termos-chave para a posterior busca do mesmo. O conjunto de termos-chave de cada vídeo é composto pelo titulo do vídeo sem as Palavras de Parada (do inglês Stop Word (ATWOOD, 2008)) além de palavras-chave que os usuários que adicionaram o vídeo podem acrescentar, o vídeo então fica associado a esses termos-chave, podendo vários vídeos possuir o mesmo termo-chave (Figura 4-12). Quando uma busca é realizada os termos utilizados na busca são encontrados na lista de termos-chave e os vídeos que tenham os termos-chave encontrados são listados de forma que os primeiros resultados que possuam a maior quantidade de termos-chave correspondente à busca do usuário. O YouTube faz ainda uma série de otimizações para que o resultado seja ainda mais refinado e personalizado para o usuário que fez a busca.

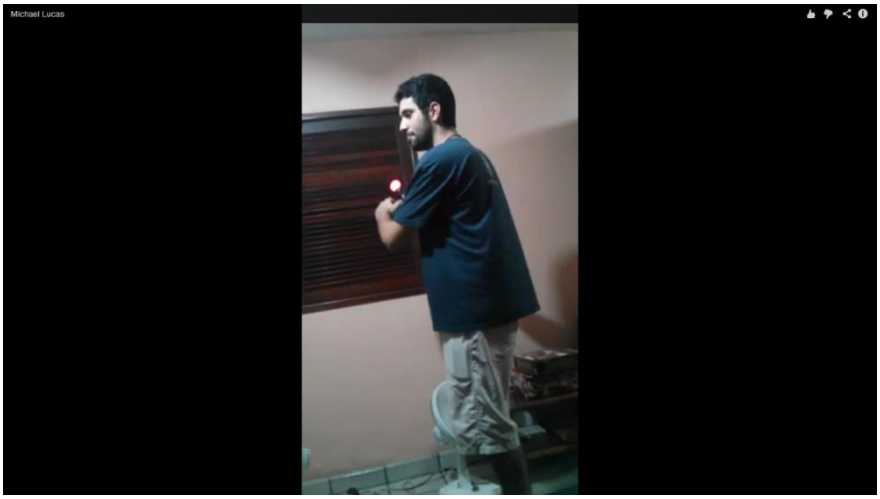

Figura 4-12: Termos chaves associados a esse vídeo: Michael, Lucas, Dança, Casa, PlayStation 3 (Computer) (ROCHA, 2013B).

O YouTubeRandom seleciona um conjunto aleatório de termos-chave do conjunto de termos do YouTube e realiza uma busca no conjunto de vídeos do YouTube, e seleciona de forma aleatória um vídeo dentre os vídeos retornados na busca; a função que gera o valor aleatório tanto na escolha do termo quanto na escolha do vídeo é Math.random (WALDO, EVILPIE, *et al.*, 2005).

Realizou-se uma filtragem nos resultados dos vídeos selecionados por YouTubeRandom ignorando os vídeos com imagens estáticas (Figura 4-13), uma vez que não haveria diferença entre os quadros da imagem. O conjunto de vídeos descartados se encontra em (ROCHA, 2013C).

Figura 4-13: Quadros de dois exemplos que vídeos estáticos.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados apresentar os resultados dos experimentos descritas na Seção 4.3.

Na Seção 5.2 é descrito o procedimento utilizado no tratamento de vídeos descrito na Seção 4.3.2, os resultados de cada análise são sumarizados em dois gráficos e uma tabela. O primeiro gráfico apresenta as frequências extraídas de cada um dos 100 vídeos, totalizando 100 linhas em um único gráfico. O segundo, apresentado em formato de linha e de barras, expressa os valores mínimos, máximos, médios, além das frequências esperadas pela NB-Lei para comparação, sumarizando o encaixe da grandeza à Lei. A tabela, apresenta o resultado dos quatro testes/medidas realizados, também incluindo mínimo, máximo, média, além do número de imagens que foram aprovadas pelo teste com nível de significância 0.05 (válido somente para o teste χ^2 de Pearson, e serve de referência para o teste Kolmogorov-Smirnov). Para todos os testes/medidas apresentados, quanto menor o valor obtido, maior é a conformidade à Lei do Dígito Significativo.

Na Seção 5.3 iremos tratar o segundo conjunto de vídeos também descritos na Seção 4.3.2, seguindo o modelo de analise do primeiro banco de dados os resultados de cada análise serão sumarizados em dois gráficos e uma tabela.

5.1 Gradiente Triplo

Nesta seção iremos apresentar os resultados da análise da conformidade da norma do gradiente triplo à NB-Lei.

5.1.1 Análise da Conformidade da Primeira Base de Dados

Na Figura 5-1 temos 76 linhas, representando as proporções observadas nos 76 vídeos do primeiro conjunto, do primeiro dígito da norma do gradiente triplo. No gráfico, percebemos que praticamente todas as linhas se concentram na mesma localidade, gerando um desvio-padrão baixo. Os vídeos se assemelham em sua conformidade à NB-Lei para o primeiro dígito.

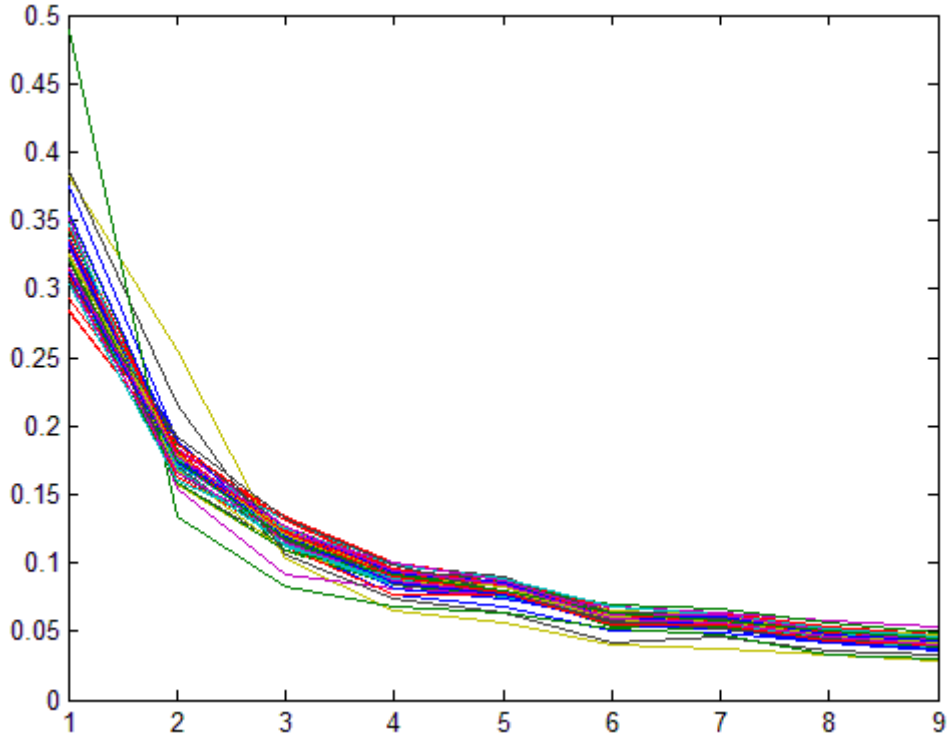

Figura 5-1: Proporções observadas para o primeiro dígito do primeiro dígito gradiente triplo para todos os vídeos do primeiro grupo.

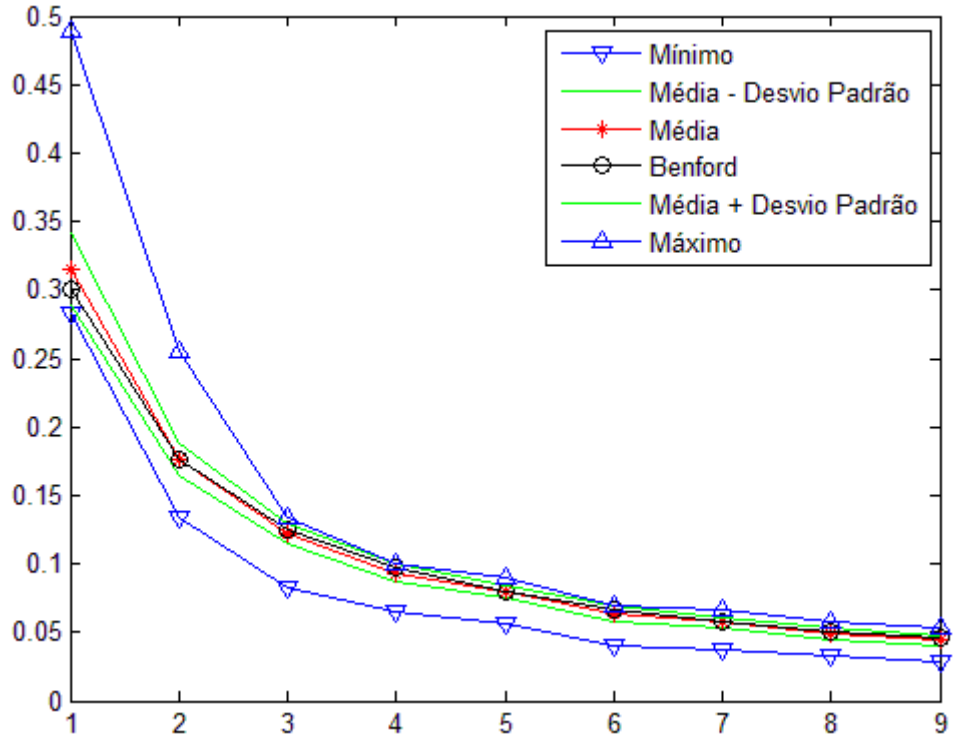

Figura 5-2: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, primeiro conjunto de dados.

Nas Figura 5-2 Figura 5-3, por sua vez, temos a adequação do gradiente triplo à NB-Lei. Percebemos que as probabilidades esperadas para a Lei de Benford (mostradas em preto), se aproximam da média obtida dos vídeos (mostrada em vermelho) estando entre as linhas do Desvio Padrão.

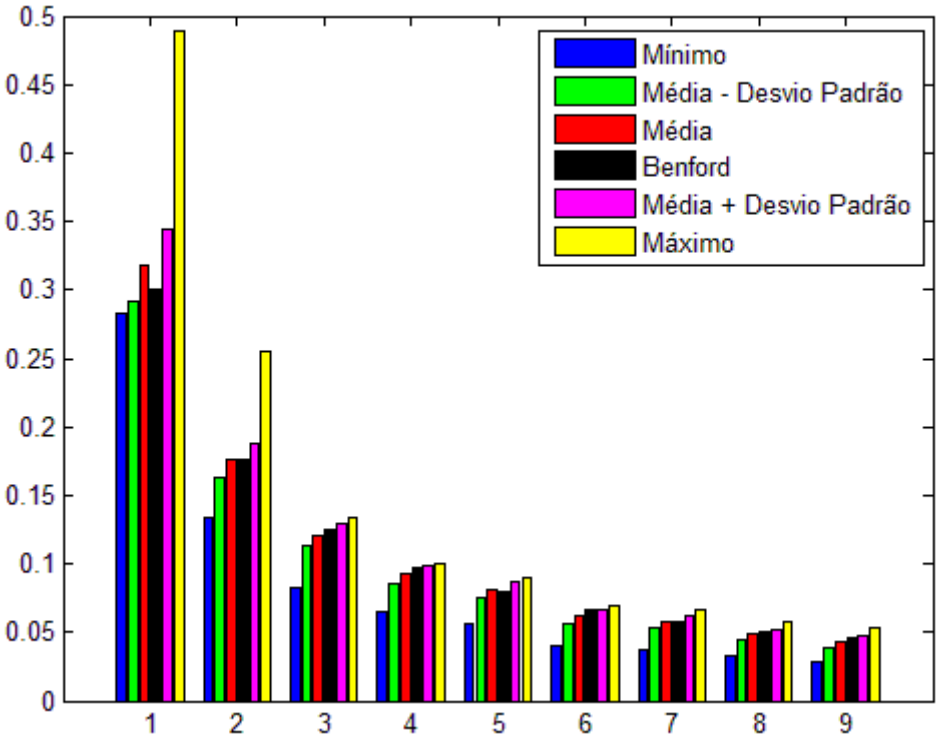

Figura 5-3: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito (gráfico em barras) para o primeiro conjunto de dados.

Tabela 1: Análise da conformidade da norma do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, primeira base de dados.

Conformidade	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Aceitação
Distância ε	1.79%	3.57%	0.20%	22.31%	N/A
χ^2 de Pearson	8679961.78	13876558.9	215906.949	50654282.5	-
Divergência χ^2	1.4071%	2.9218%	0.1461%	17.0795%	N/A
K-S	0.039354	0.0283739	0.014253	0.15237	66

Na Tabela 1 visualizamos a síntese dos testes/medidas de conformidade da norma do gradiente triplo para o primeiro dígito dos vídeos da primeira base de dados. Percebemos que a média e o desvio padrão da diferença ε entre as probabilidades esperadas e obtidas são baixíssimos, menor que 1%. Como podemos ver na tabela, o teste estatísticos χ^2 de Pearson não aceitou nenhum vídeo, isso se deu ao fato de teste ser extremamente sensível ao alto tamanho da amostra

utilizada (≈46 bilhões de valores). O teste de Kolmogorov-Smirnov aceitou 86% dos vídeos como conformes com nível de significância 0.05.

5.1.2 Análise da Conformidade para Segunda Base de Dados

Na Figura 5-4 visualizamos 100 linhas representando as frequências observadas para todos os 100 vídeos do primeiro dígito da norma do gradiente triplo. No gráfico, percebemos que o feixe formado por todas as linhas possui comportamento semelhante à NB-Lei, tendo os maiores valores de ocorrência no primeiro dígitos.

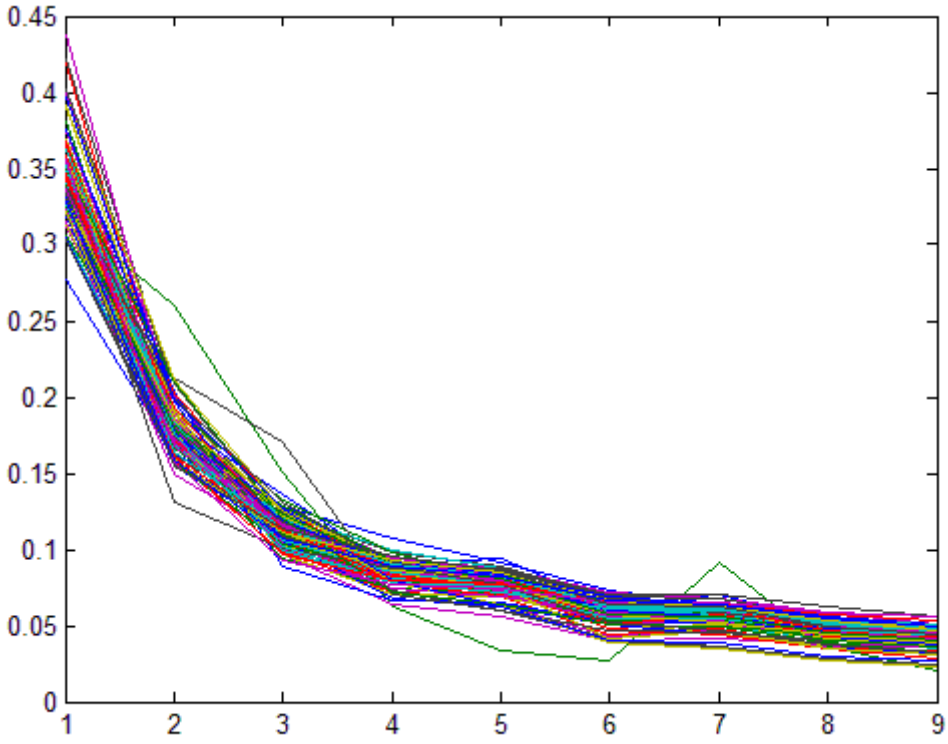

Figura 5-4: Frequência observadas do primeiro dígito gradiente triplo para cada um dos 100 vídeos.

Nas Figura 5-5 e Figura 5-6, por sua vez, visualizamos uma síntese dos dados formados pelos valores Mínimo, Máximo, Média, Média somada ao Desvio Padrão, Média menos o Desvio Padrão e os valores esperados pela NB-Lei. Percebemos que as probabilidades esperadas para a Lei de Benford (mostradas em preto), são próximas à média obtida dos vídeos (mostrada em vermelho).

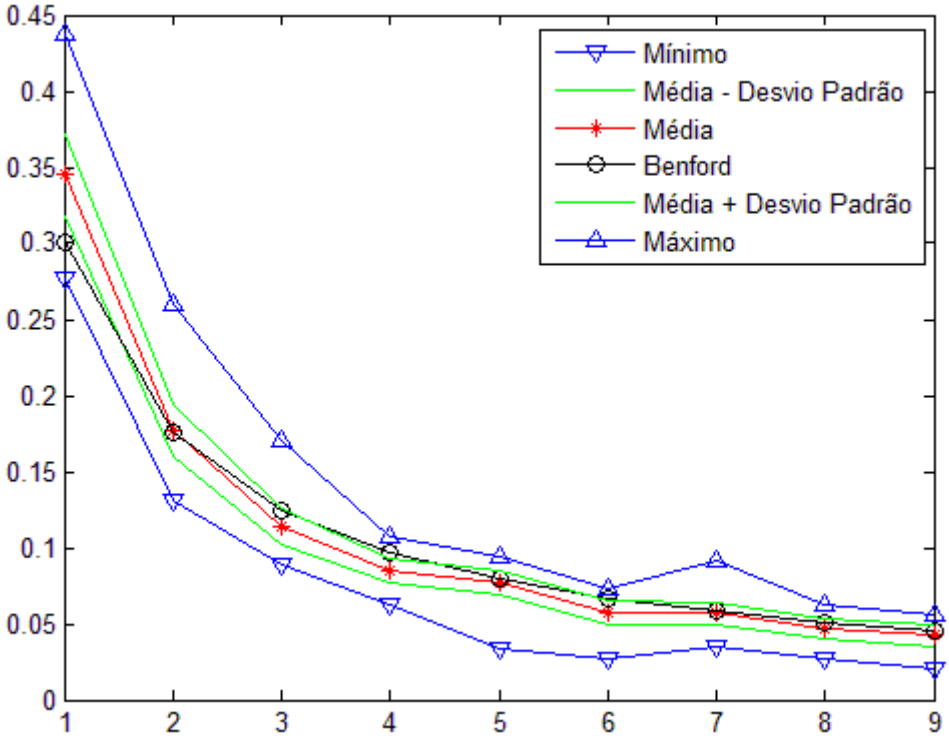

Figura 5-5: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito, segundo conjunto de dados.

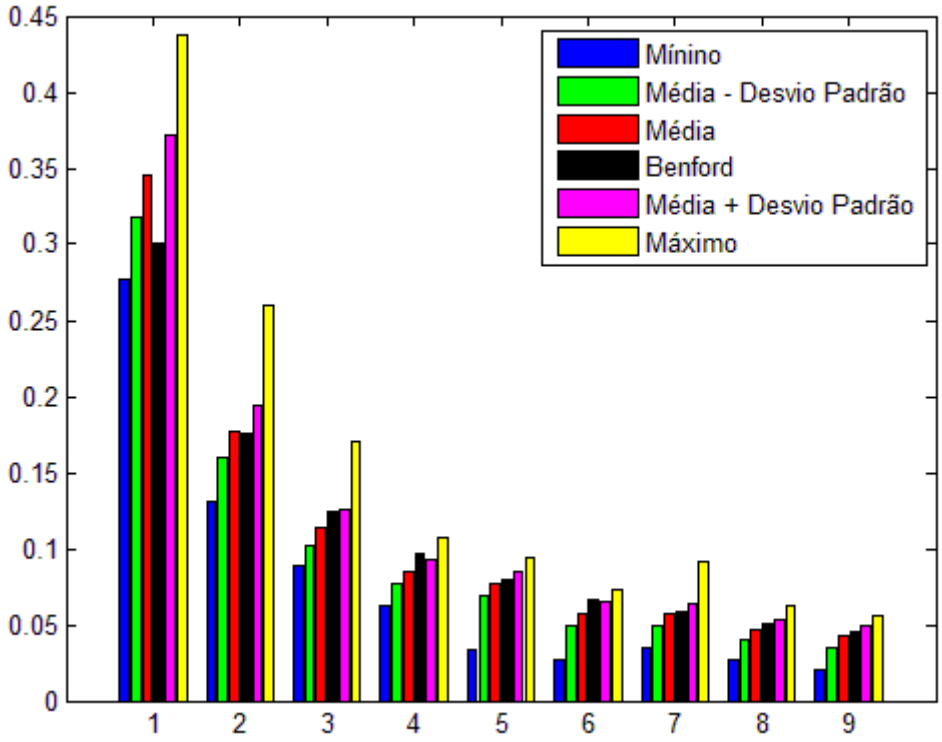

Figura 5-6: Síntese da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito (gráfico em barras).

Tabela 2: Análise da conformidade do gradiente triplo à NB-Lei para o primeiro dígito.

Conformidade	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Aceitação
Distância ε	2.92%	5.84%	0.18%	23.30%	N/A
χ^2 de Pearson	6958940.26	9881334.03	291576.0	65420776.19	-
Divergência χ^2	0.02117	0.02437	0.02131	0.144562	N/A
K-S	0.0541049	0.0274134	0.018873	0.130815	56

Na Tabela 2 visualizamos a síntese dos testes/medidas de conformidade da norma do gradiente triplo para o primeiro dígito dos vídeos da segunda base de dados. Percebemos que a média e o desvio padrão da diferença ε entre as probabilidades esperadas e obtidas ainda é baixa, 1.28%. O teste estatísticos χ^2 de Pearson teve um comportamento semelhante ao obtido a primeira base, aceitando nenhum vídeo, o que também é atribuído ao alto tamanho da amostra utilizada (≈67 bilhões de termos). O teste de Kolmogorov-Smirnov aceitou 56% dos vídeos como conformes com nível de significância 0.05.

5.2 Sumarização dos Resultados da Análise das Bases de Dados

Nas seções anteriores foram apresentados os resultados obtidos da análise de conformidade à Lei de Newcomb-Benford para o gradiente triplo. Iremos então comparar os resultados obtidos com alguns dos trabalhos relatados na Seção 4.1. Como os trabalhos informados só realizam a análise para o primeiro dígito, com exceção de Carslaw, as comparações são feitas só para o primeiro dígito.

Benford (BENFORD, 1938), obteve como a menor distância ε o valor de 2.8% para o grupo de itens numéricos retirados de jornais (grupo D) (Figura 4-2). Comparando-o com o nosso resultado com podemos observar que, nossa aderência média de 2.92%, da segunda base de vídeos analisados, ficou próximo da melhor aderência analisada por Benford e a aderência de 1.79%, para primeira base de vídeos, foi melhor do que a melhor aderência analisada por Benford de um grupo tido universalmente como conforme à Lei.

Podemos também fazer uma comparação direta dos nossos resultados com os obtidos por Jolion (JOLION, 2001), uma vez os trabalhos de Jolion também fazem suas análises sobre a grandeza gradiente, avaliando o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov (K-S). Ao comparar os nossos piores casos, 0.15237, para primeira base de dados de vídeos analisados, e 0.130815, para a segunda base dados de vídeos, com o resultado médio dos testes de Jolion, 0.983 (Figura 4-5), podemos afirmar que a norma do gradiente triplo se adere melhor a Lei de Newcomb-Benford do que o gradiente de imagem.

Mesmo com a média de ambos os grupos de dados testados estarem conformes a Lei de Newcomb-Benford, observamos que na Figura 5-5 a linha que representa a distribuição da Lei não permanece entre as linhas Média+Desvio Padrão e Média-Desvio Padrão. Esse fato pode indicar que há um viés nos vídeos escolhidos pela ferramenta YouTubeRandom, observando o as categorias desses vídeos pode-se nota que as categorias Musica e Esportes são a maioria, mas não temos certeza sobre o que gerou esse viés.

5.3 Análise em Tempo Real

Para entender como o conteúdo do vídeo influencia a conformidade da norma do gradiente triplo, desenvolvemos um software que faz a análise dos 10 mais recentes quadros do vídeo.

O software foi desenvolvido no ambiente de desenvolvimento Microsoft Visual Studio 2012 (Microsoft, 2012) na linguagem C++ (STROUSTRUP, 1997). O sistema trata a matriz de pixel, que é obtida do vídeo usando a biblioteca OpenCV ((BRADSKI e A., 2008)), de cada quadro do vídeo obtendo a norma do gradiente triplo dos dez últimos quadros.

O conteúdo do vídeo é exibido em uma janela do sistema operacional (Figura 5.7), em uma segunda janela exibimos um gráfico de barras com as percentagens esperada (as barras de cor laranja) para cada algarismo da Lei de Newcomb-Benford e as percentagens de ocorrência (as barras de cor azul), para cada algarismo, obtidas nos últimos dez quadros do vídeo. A barra verde, na janela da direita, indica o nível de conformidade dos últimos dez quadros, o tracejado azul faz uma divisão gradual (primeiro traço 5%, segundo 10%, com o ultimo indicando 95%) do percentual de conformidade, logo quanto maior a barra verde maior a conformidade do vídeo à Lei de Newcomb-Benford.

Figura 5-7: À esquerda temos uma janela exibindo o conteúdo do vídeo e à direita temos o gráfico de barras com o resultado da análise dos dez últimos quadros.

Analisando os resultados do software notamos que:

1. Vídeos com poucos elementos em cena tendem a ter uma baixa conformidade à Lei de Newcomb-Benford (Figura 5-8);

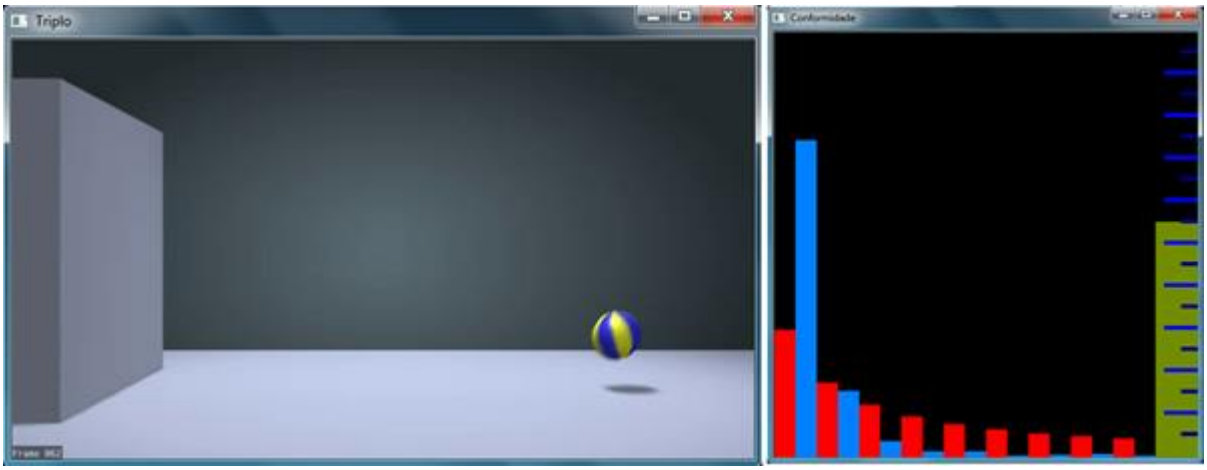

Figura 5-8: À esquerda um quadro do vídeo de uma bola rolando no cenário estático e à direita a conformidade dos últimos dez quadros.

Figura 5-9: No quadro superior esquerdo tempos um quadro em um instante n e no lado superior direito temos a conformidade dos últimos 10 quadros. No canto inferior direito temos um quadro no instante n+1 (que podemos perceber que houve uma mudança brusca no conteúdo do vídeo) e a sua direita a conformidade.

2. A conformidade à Lei de Newcomb-Benford sofre grande alteração quando há um corte repentino no conteúdo do vídeo (Figura 5-9), o que era de se esperar, uma vez que a componente temporal quebra a continuidade do vídeo;

3. Vídeos com muitos elementos em cena ou/e com movimentação tendem a ter maior conformidade (acima dos 90%) à Lei de Newcomb-Benford;

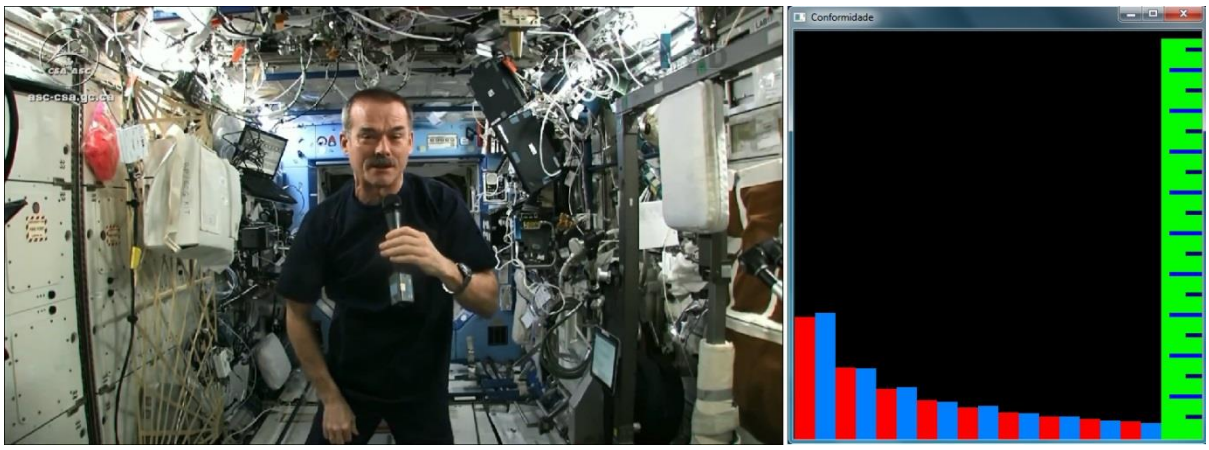

Figura 5-10: À esquerda um quadro de um vídeo mostrando o interior da Estação Espacial Internacional e à direita temos o gráfico da conformidade (que passou dos 95%).

Essas são as três principais características que associam o conteúdo do vídeo à conformidade da norma do gradiente triplo do mesmo. Quase que a totalidade dos vídeos analisados confirma essas constatações, contudo há um vídeo que demostrou um comportamento singular. Nesse vídeo temos um ruído de onde se forma o logo de uma empresa de entretenimento televisivo, mesma a cena sendo complexa e com muita movimentação a conformidade foi baixa em comparação aos outros vídeos com conteúdo complexos (Figura 5-11).

Figura 5-11: À esquerda temos um quadro de um vídeo com ruído e à direita a sua conformidade.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

Este trabalho realizou uma estudo empírico dobre a conformidade á Lei de Newcomb-Benford da norma do gradiente triplo em vídeos digitais. Fundamentamos nossa análise com diversos testes de conformidade difundidos na literatura, além de comparações diretas com os principais trabalhos relacionados. Tendo como base as métricas/medidas discutidas no texto, foi possível concluir então que a grandeza norma do gradiente triplo de vídeos digitais, nos vídeos examinados, possuem conformidade à Lei do Dígito Significativo, e que a conformidade da norma do gradiente é significativa (com a média da conformidade dos grupos avaliados maior que o melhor valor obtido por Benford), que podemos concluir que norma gradiente triplo é conforme a Lei.

6.1 Principais Contribuições

A principal contribuição deste trabalho foi à evidência empírica de que a grandeza norma do gradiente triplo apresenta conformidade à Lei de Newcomb-Benford. Acreditamos que os resultados obtidos possam ser aplicados como método de classificação de vídeos em níveis de complexidade, onde quanto maior for aderência mais complexa será a cena no vídeo.

6.2 Trabalhos Futuros

A primeira proposta de trabalho futuro a ser realizado é a investigação do conteúdo do vídeo em relação à conformidade, tendo como objetivo utilizar a conformidade da Lei de Newcomb-Benford como uma ferramenta auxiliar no reconhecimento de conteúdo em vídeos. Fazem-se necessárias umas investigações de quais propriedades encontradas nos vídeos afetam a conformidade. Isto inclui, porem não se limita a: análise de ruídos; análise de operadores comuns em processamento de vídeos, como filtros; compressão com perda de qualidade; composição ou adulteração de vídeos; tamanho e resolução do vídeo; e claridade. A partir desta investigação, estudar as possíveis aplicações práticas da análise de conformidade da norma do gradiente triplo à Lei de Newcomb-Benford.

Como trabalho futuro imediato, pode-se desenvolver um sistema visualizador em tempo real da ocorrência de cada dígito no vídeo, na forma de cores diferentes, ou só de um dígito, à escolha do usuário. E ideia é facilitar a identificação da causa dos desvios. Se isso for implementado até à defesa na próxima semana, pode ser que possamos incorporar seus resultados na dissertação.

Outra investigação que se faz necessária é analisar detalhadamente a causa do possível viés do segundo banco de dados (Figura 5-5). Esse viés foi gerado devido a propriedades dos vídeos do banco de dados, ou foi resultado das operações de ponto flutuante utilizadas durante o cálculo?

Adicionalmente, seria interessante investigar como a conformidade se comporta em partes do vídeo, dividindo o vídeo em seções não sobrepostas e verificando a conformidade em cada seção, comparando os resultados obtidos entre si e entre todo o vídeo.

Ademais, poderíamos analisar como cada uma das três componentes de cor (R-vermelho; G-verde, B-azul) interferem na conformidade. Gerando três vídeos, cada um com apenas um das três componentes (o equivalente a usar peso um, a cor escolhida para avaliação, e zero para as demais componentes) e comparar a suas conformidades buscando identificar qual das três componentes tem uma maior interferência na conformidade.

Finalmente, destacamos a necessidade da utilização de algum modelo estatístico/probabilístico que auxilie a não só prover a conformidade de uma grandeza à Lei de Newcomb-Benford, mas também, descreva uma forma de fazer a amostragem nos dados avaliados.

REFERÊNCIAS

A. GOUDSMIT, S.; H. FURRY, W. Significant Figures of Numbers in Statistical Tables. **Nature 154.3921**, p. 800-801, 1944.

ACEBO, E.; MATEU, S. Benford's law for natural and synthetic images. **Computational Aesthetics'05 Proceedings of the First Eurographics conference on Computational Aesthetics in Graphics, Visualization and Imaging**, p. 169-176, 2005.

ATWOOD, J. Stackoverflow. **Stackoverflow**, 31 Julho 2008. Disponivel em: <http://blog.stackoverflow.com/2008/12/podcast-32/>. Acesso em: 12 julho 2013.

AZUMA, R. T. A survey of augmented reality. **Presence**, p. 355-385, 1997.

BARTOLO, L.; LACASA, L. The first-digit frequencies of prime numbers and Riemann zeta zeros. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science**, 2009. ISSN 2197-2216.

BENFORD, F. The law of anomalous numbers. **Proceedings of the American Philosophical Society**, p. 551-572, 1938.

BERGER, A. Benford's law in power-like dynamical systems. **Stochastics and Dynamics**, v. 5, n. 4, p. 587-607, 2006.

BERGER, A. ET AL. Finite-state Markov Chains Obey Benford's Law. **SIAM J. on Matrix Analysis and Applications**, p. 655-684, 2011.

BERGER, A. et al. Finite-state markov chains obey Benford's law. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, p. 665-684, 2011.

BERGER, A.; BUNIMOVICH, L. A.; HILL, T. P. One-dimensional dynamical systems and Benford's Law. **American Mathematical Socisety**, v. 357, n. 1, p. 197-219, 2004.

BERGER, A.; HILL, T. P. Newton's Method Obeys Benford's Law. **The American Mathematical Monthly**, p. 588-601, 2007B.

BERGER, A.; HILL, T. P. BENFORD ONLINE BIBLIOGRAPHY. **BENFORD ONLINE BIBLIOGRAPHY**, 6 Dezembro 2012A. Disponivel em: <http://www.benfordonline.net/list/chronological>. Acesso em: 3 julho 2013.

BHATTACHARYA, S.; DONGMING, X.; KUMAR,. An ANN-based auditor decision support system using Benford's law. **Decision support systems**, p. 576-584, 2011.

BORING, E. G. The Logic of the Normal Law of Error in Mental Measurement. **American Journal of Psychology**, v. 31, n. 1, p. 1-33, 1920.

BRADSKI, G.; A., K. OpenCV. **OpenCV**, Outubro 2008. Disponivel em: <http://opencv.org/>. Acesso em: 15 Julho 2013.

BUSTA, B.; WEINBERG, R. Using Benford's Law and neural networks as a review procedure. **Managerial Auditing Journal**, p. 356-366, 1998.

CALONDER, M. E. A. Brief: Binary robust independent elementary features. **Computer Vision–ECCV 2010. Springer**, Berlin, p. 778-792, 2010.

CARSLAW, C. A. P. N. Anomalies in income numbers: Evidence of goal oriented behavior. **Accounting Review**, v. 63, n. 2, p. 321-327, 1988.

COSTA, J. I. D. F. et al. Análise de Métodos Contabilométricos para determinação de Conformidade da Lei de Newcomb-Benford Aplicados à Auditoria Contábil. **Gestão Pública: Práticas e Desafios**, Recife, v. 3, n. 6, 2012.

DIACONIS, P. The Distribution of Leading Digits and Uniform Distribution Mod1. **The Annals of Probability**, v. 5, n. 1, p. 72-81, 1977.

DOS SANTOS, J. et al. Aplicações da lei de Newcomb-Benford na auditoria tributária do imposto sobre serviços de qualquer natureza (ISS). **Revista Contabilidade & Finanças - USP**, v. 20, n. 49, p. 79-94, 2009.

E. KNUTH, D. **The art of computer programming**. [S.l.]: [s.n.], 1999.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

FRANEL, J. A propos des tables de logarithmes. **lectronic Research Archive for Mathematics**, p. 286-295, 1917.

FU, D.; Q. SHI, Y.; SU, W. A generalized Benford's law for JPEG coefficients and its applications in image forensics. **SPIE Electronic Imaging: Security, Steganography, and Watermarking of Multimedia Contents**, San Jose, CA, USA, v. 6505, 2007.

GODADDY.COM, L. Random Youtube Video Generator. **Random Youtube Video Generator**, 15 stembro 2011. Disponivel em: <http://www.youtuberandomvideo.com/>. Acesso em: 15 jul. 2013.

GONZALEZ, R.; WOODS, R. Digital Image Processing. 3. ed. [S.l.]: Upper Saddle River, 2008. p. 165-168.

H. CORMEN, T. Introduction to Algorithms. In: H. CORMEN, T. **Introduction to Algorithms**. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2009. p. 253-280.

H. HSÜ, E. An experimental study on "mental numbers" and a new application. **The Journal of General Psychology 38.1**, p. 57-67, 1948.

HAMMING, R. W. On the Distribution of Numbers. **Bell Systems Technical Journal**, p. 1609-1970, 1970.

HAMMING, R. W. On the Distribution of Numbers. **Bell Systems Technical Journal**, v. 49, n. 8, p. 1609-1625, 1970.

HARRIS, C. G.; STEPHENS, M. A combined corner and edge detector. **Proc. 4th Alvey Vision Vision Conf.**, p. 147-151, 1988.

HEIJER, E.; EIBEN, A. E. Using aesthetic measures to evolve art. **Evolutionary Computation**, 2010.

HENRIQUES, D. B. B. **Uma Investigação das Medidas de Conformidade à Lei de Benford em 1 e 2 Dimensões com Dados Reais**. Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Recife, p. 99. 2012.

HILL, T. P. Random-number guessing and the first digit phenomenon. **Psychological Reports**, p. 967-971, 1988B.

HILL, T. P. A statistical derivation of the significant-digit law. **Statistical Science**, p. 354-363, 1995A.

HILL, T. P. The significant-digit phenomenon. **The American Mathematical Monthly 102.4**, p. 322-327, 1995C.

IAIN, R. E. H. H. 264 and MPEG-4 video compression: video coding for next-generation multimedia. **Wiley**, 2004. Disponivel em: <wiley.com>. Acesso em: 20 jul. 2013.

ITSEEZ, W. G. cv:cvtColor. **OpenCVWiki**, 2006. Disponivel em: <http://opencv.willowgarage.com/documentation/cpp/miscellaneous_image_transformations.html#cv-cvtcolor>. Acesso em: 30 julho 2013.

JOLION, J.-M. mages and Benford's Law. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, v. 14, n. 1, p. 73-81, 2001.

KLASER, A.; MARSZALEK, M. A spatio-temporal descriptor based on 3D-gradients. **British Machine Vision Conference**, London, 2008.

KNUDSEN, T. Zipf's Law for Cities and Beyond: The Case of Denmark. **American Journal of Economics and Sociology 60.1**, p. 123-146, 2001.

LEVY, P. L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, p. 1-41, 1939.

LOWE, D. G. Demo software: Sift keypoint detector. **The University of British Columbia**, Columbia, 2003.

MAIA, F. **A CONFORMIDADE À LEI DE NEWCOMB-BENFORD DE QUALIFICADORES DE PONTOS DE INTERESSE EM IMAGENS DIGITAIS**. Recife: [s.n.], 2012. 72 p.

MICROSOFT. **Visual Studio Overview**, 2012. Disponivel em: <http://www.microsoft.com/visualstudio/ptb/products/visual-studio-overview>. Acesso em: 1 agosto 2013.

MORGAN, J. A. E. A. Letters to the Editor. **The American Statistician**, v. 26, n. 3, p. 62-66, 1972.

NATIONAL Telecommunications & Information Administration. **Gradient Model of Video Quality**, 1996. Disponivel em: <http://www.its.bldrdoc.gov/resources/video-quality-research/guides-and-

tutorials/ansi-video-quality-tutorial/gradient-model-of-video-quality.aspx>. Acesso em: 30 julho 2013.

NEWCOMB, S. Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers. **American Journal of Mathematics**, p. 39-40, 1881.

NIGRINI, M. J. The detection of income tax evasion through an analysis of digital distributions. **University of Cincinnati. [S.l.]: [s.n.].**, 1992B.

NIGRINI, M. J. A taxpayer compliance application of Benford's law. **Journal of the American Taxation Association**, v. 18, n. 1, p. 72-91, 1996A.

NIGRINI, M. J.; MITTERMAIER, L. The Use of Benford's Law as an Aid in Analytical Procedures. **Auditing: A Journal of Practice & Theory**, v. 16, n. 2, p. 52-67, 1997C.

PÉREZ-GONZÁLEZ, F.; L. HEILEMAN, G.; T. ABDALLAH, C. Benford's Lawin Image Processing. **Image Processing, 2007. ICIP 2007. IEEE International Conference**, v. 1, 2007.

PETTITT, A. N.; STEPHENS, M. A. The Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit statistic with discrete and grouped data. **Technometrics**, 1977. ISSN 205-210.

PINKHAM, R. S. On the distribution of first significant digits. **The Annals of Mathematical Statistics 32.4**, p. 1223-1230, 1961.

POINCARÉ, H. **Calcul des probabilités**. Paris, Gauthier-Villars: University of California Libraries, 1912.

POYNTON, C. A. Digital Video and HDTV: Algorithms and Interfaces. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2003. p. 234-240.

PRESS, H. et al. Numerical Recipes in C: the art of scienti c computing. **Cambridge University Press**, p. 472-475, 1987.

QADIR, G. et al. Image forensic of glare feature for improving image retrieval using Benford's Law. **Circuits and Systems (ISCAS), 2011 IEEE International Symposium**, 2011.

QADIR, G.; ZHAO, X.; TS HO, A. Estimating JPEG2000 compression for image forensics using Benford's Law. **SPIE Photonics Europe. International Society for Optics and Photonics**, 2010.

RAIMI, R. A. The first digit problem. **The American Mathematical Monthly**, p. 521-538, 1976.

ROBBINS, H. On the Equidistribution of Sums of Independent Random Variables. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 4, n. 5, p. 786-799, Outubro 1953.

ROCHA, T. P. Mestrado. **YouTube**, 2013A. Disponivel em: <http://www.youtube.com/playlist?list=PLg9mU4DmuEpVVJgoBScT4ZoNGOxdILRB8&feature=mh_lolz>. Acesso em: 20 julho 2013.

ROCHA, T. P. Michael Lucas. **You Tube**, 9 Junho 2013B. Disponivel em: <http://www.youtube.com/watch?v=ZkWPUFg8_Gs>. Acesso em: 20 Julho 2013.

ROCHA, T. P. YouTube. **YouTube**, 16 julho 2013C. Disponivel em: <http://www.youtube.com/watch?v=PND5jHQv1ys&list=PLg9mU4DmuEpXemN2-49DEShY3D00hTNDc>. Acesso em: 16 julho 2013.

ROCHA, T. P. YouTube Random. **YouTube**, 19 julho 2013D. Disponivel em: <http://www.youtube.com/playlist?list=PLg9mU4DmuEpVJ5mTcJrZ9-DpnwaGSEFsm>. Acesso em: 2013 julho 19.

SANCHES, J.; MARQUES, J. S. Image Reconstruction using the Benford Law. **Image Processing, 2006 IEEE International Conference on. IEEE**, p. 2029-2032, 2006.

SHAO, L.; BO-QIANG, M. Empirical mantissa distributions of pulsars. **Astroparticle Physics**, p. 255-262, 2010.

SNYDER, M. A.; CURRY, J. H.; DOUGH, A. M. Stochastic aspects of one-dimensional discrete dynamical systems: Benford's law. **Physical Review E**, p. 5, 2001.

STEELE, M.; JANET, C. Powers of discrete goodness-of-fit test statistics for a uniform null against a selection of alternative distributions. **Communications in Statistics—Simulation and Computation®**, p. 1067-1075, 2006.

STERNBERG, S. R. Grayscale morphology. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, p. 333-355, 1986.

STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. 3. ed. [S.l.]: Pearson Education India, v. 1, 1997.

THOMAS, J. K. Unusual patterns in reported earnings. **Accounting Review**, v. 64, n. 4, p. 773-787, 1989.

TOLLE, C. R.; BUDZIEN, J. L.; LAVIOLETTE, R. A. Do dynamical systems follow Benford's law? Chaos. **An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, p. 587-607, 2000.

TUYTELAARS, T.; MIKOLAJCZYK, K. Local invariant feature detectors: a survey. **Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision**, v. 3.3, p. 177-280, 2008.

WALDO et al. Mozzila Developer Network. **Mozzila Developer Network**, 2 Fevereiro 2005. Disponivel em: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/JavaScript/Reference/Global_Objects/Math/random>. Acesso em: 15 julho 2013.

WEISSTEIN, E. W. Newton-Cotes Formula: Mathworld. **Wolfram**, 2012. Disponivel em: <http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html>. Acesso em: 19 Janeiro 2012.

WEYL, H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. **Mathematische Annalen**, v. 77, p. 313-352, 1916.

WONG, S. C. Y. Testing Benford's Law with the First Two Significant Digits, 2010.

ZDRAVKO, K.; ŽGELA, M. Application of Benford's Law in Payment Systems Auditing. **Journal of Information and Organizational Sciences 33.1**, 2009.