



ORIGAMI EUCLIDIANO

Emanuella Martins de França

RECIFE

2016

Emanuella Martins de França

ORIGAMI EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain.

RECIFE

2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

F814o	França, Emanuella Martins de. Origami Euclidiano / Emanuella Martins de França. – 2016. 146 f. ; 30 cm. Orientador: Franck Gilbert René Bellemain. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016. Inclui Referências e Apêndices. 1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Origami. 4. UFPE - Pós-Graduação. I. Bellemain, Franck Gilbert René. II. Título. 372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2018-04)
-------	---

EMANUELLA MARTINS DE FRANÇA

ORIGAMI EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/04/2016.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Dra. Letícia Teixeira Mendes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esta pesquisa a todos que trabalham por uma educação de qualidade tanto para o próximo como para si mesmo.

AGRADECIMENTOS

Sou grata primeiramente a Deus pela oportunidade de viver e estar concluindo este projeto que é mais um passo dado para a vida profissional.

Aos amigos, profissionais e Professores: Ana Cláudia Colasso, Andiara Lopes, Ana Magda Alencar Correia, Artur Rodrigues, Auta Laurentino, Núbia Sousa, Thyana Galvão. Ao Sr. José Aduino de Mendonça que contribuiu presenteando-me com raros tesouros bibliográficos, a Thiago Alexandre da Silva, por ter me fornecido suporte tecnológico.

Ao meu orientador Franck René Gilbert Bellemain e sua esposa Paula Baltar Bellemain, examinadora interna e Letícia Mendes Teixeira, examinadora externa.

Em especial à minha Tia/Mãe Lúcia Martins de França (in memoriam). Por sempre pegar no meu pé para não perder os prazos.

"O que eu ouço, eu esqueço. O que eu vejo, eu lembro. O que eu faço, eu aprendo."

CONFÚCIO

RESUMO

Nosso trabalho mostra os resultados de um experimento utilizando origami para o ensino de Geometria; a atividade, mais precisamente, desafiou os voluntários a evocarem seus conhecimentos prévios para a resolução dos desafios propostos a partir do uso do origami e como essa utilização pode favorecer esse ensino. Devido as dificuldades, pudemos constatar que a Geometria foi e ainda é importante na formação não apenas de engenheiros, arquitetos, designers, desenhistas, topógrafos, cartógrafos, projetistas, pilotos, físicos, escultores, mas na vida profissional de qualquer cidadão, principalmente professores de Matemática e Geometria Gráfica. Para este propósito, sondamos o porquê do abandono da Geometria, mais precisamente das construções a régua e compasso, já que tínhamos a impressão de que esses instrumentos podem ter sido um dos responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem na formação de professores, e perpetuadas para os alunos ao longo das décadas. Temos como principal hipótese que os alunos, que ingressam nos cursos de Licenciatura em Expressão Gráfica e áreas afins, não possuem um conhecimento prévio favorável à aprendizagem destes e outros conteúdos necessários às suas formações, advindos da negligência do ensino desses saberes nas escolas públicas. Para comprovar nossa hipótese, iremos analisar a resolução de problemas de construção pelos sujeitos em dois ambientes: régua e compasso versus origami, para identificar técnicas e elementos tecnológicos e teóricos em jogo no cumprimento das tarefas do gênero “construir” por alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica à luz da Teoria Antropológica do Didático.

PALAVRAS-CHAVES: Construções Euclidianas. Geometria Gráfica. Origami. Régua e compasso. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

Our work shows the results of an experiment using origami for the teaching of Geometry, and the activity more precisely challenged the volunteers when and how Origami can favor this teaching and evoke their previous knowledge to solve the proposed challenges. Due to its difficulties we can verify that Geometry was and still is important in the formation not only of engineers, architects, designers, draftsmen, surveyors, cartographers, designers, pilots, physicists, sculptors, but in the professional life of any citizen, especially Mathematics, Geometry and Graphics teachers. For this purpose, we will enquire why the abandonment of geometry, specifically the structures to the rule and compass may have been one reason for the difficulties of learning in teacher education, transmitted to students over the decades. Our main hypothesis that the students in the Degree courses in Graphic Expression and correlated fields do not have a favourable previous knowledge learning these and other subject necessary for their formations, arising from negligence of teaching such knowledge in public schools. To prove our hypothesis, we will analyse the resolution of construction problems by who in both environments: ruler and compass versus origami, to identify technical and technological and theoretical elements at performance in the fulfilment of gender tasks "to build" by Degree Course Students Graphic Expression in the light of the Didactic Anthropological Theory.

KEYWORDS: Euclidean constructions. Graphic Geometry. Origami. Ruler and compass. Didactic Anthropological Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Evolução do Brasil no PISA em Matemática, Leitura e Ciências.	34
Figura 2: Edifício Walkie Tolkie em Londres.	35
Figura 3: Ideograma da palavra origami.	37
Figura 4: Vaso Verdi's Vase e caixa Lazy Susan.	37
Figura 5: Garrafa de Sake ornamentada com Ocho e Mecho.	38
Figura 6: Páginas do Ranma Zushiki.	38
Figura 7: Páginas do Hiden Senbazuru Orikata.	39
Figura 8: Páginas do Chushingura Orikata.	39
Figura 9: Xilogravura de Natsushika Hokusai e páginas do Kayaraguza.	40
Figura 10: Monumento à Sadako Sasaki e Tsuru ou grou em origami.	42
Figura 11: Diagrama do Tsuru pelo Sistema Yoshizawa – Randlett.	43
Figura 12: Alce feito de dobraduras e seu CP.	44
Figura 13: Projeto Arquitetônico de Ming Tang.	44
Figura 14: Vasos Growth.	45
Figura 15: Projeto de painel solar da NASA.	45
Figura 16: Protótipo do stent cardíaco e bomba d'água.	46
Figura 17: Leis do Origami.	47
Figura 18: Fazendo abas.	48
Figura 19: Empacotamento de círculos para criação de abas.	48
Figura 20: Concebendo um novo modelo de dobradura.	49
Figura 21: Poliedros Platônicos em origami modular.	50
Figura 22: Desenvolvimento das redes neurais cerebrais.	52
Figura 23: Primeiro axioma de Huzita.	54
Figura 24: Segundo axioma de Huzita e construção da mediatriz a régua compasso.	54
Figura 25: Terceiro axioma de Huzita.	55
Figura 26: Quarto axioma de Huzita.	55
Figura 27: Quinto axioma de Huzita.	55
Figura 28: Construção das tangentes a uma parábola em dobraduras.	56
Figura 29: Sexto axioma de Huzita.	56
Figura 30: Último axioma proposto por Justin e Hatori.	57

Figura 31: Triângulo Equilátero em Dobraduras	62
Figura 32: Tarefa T1 em régua e compasso.	71
Figura 33: Tarefa T2 técnica τ 2 em régua e compasso.....	73
Figura 34: Tarefa T2 técnica τ 3 em régua e compasso.....	73
Figura 35: Tarefa T2 técnica τ 4 em régua e compasso.....	74
Figura 36: Tarefa T2 técnica τ 5 em régua e compasso.....	75
Figura 37: Tarefa T3 em régua e compasso.	76
Figura 38: Tarefa T4, técnica τ 1 em régua e compasso.....	77
Figura 39: Tarefa T4 técnica τ 2 em régua e compasso.	77
Figura 40: Tarefa T4 técnica τ 3.....	78
Figura 41: Tarefa T4 técnica τ 4.....	79
Figura 42: Tarefa T5 em régua e compasso.	80
Figura 43: Tarefa T6 e régua e compasso.	81
Figura 44: Tarefa T7 em régua e compasso.	82
Figura 45: Tarefa T8 técnica τ 1 em régua e compasso.....	83
Figura 46: Tarefa T8 técnica τ 2 em régua e compasso.....	83
Figura 47: Tarefa T1 em Origami.	84
Figura 48: Tarefa T1 em Origami passos 1 e 2.	85
Figura 49: Tarefa T2 em Origami.	85
Figura 50: Tarefa T2 técnica τ 1 em Origami passos 2, 3 e 4.	86
Figura 51: Tarefa T2 técnica τ 2 em Origami passos 1, 2 e 3.	86
Figura 52: Tarefa T2 técnica τ 2 em Origami passos 4, 5 e 6.	86
Figura 53: Tarefa T2 técnica τ 2 em Origami passos 8 e 9.	87
Figura 54: Tarefa T3 em Origami.	87
Figura 55: Tarefa T3 em Origami passos 1 e 2.	88
Figura 56: Tarefa T4 em origami.....	88
Figura 57: Tarefa T4 técnica τ 1 em origami passos 3 e 4.....	89
Figura 58: Tarefa T4 em Origami passos 1 e 2.....	89
Figura 59: Tarefa T5 em Origami.	89
Figura 60: Tarefa T5 em Origami passos 1, 2 e 3.	90
Figura 61: Tarefa T5 em Origami passos 4, 5 e 6.	90
Figura 62: Tarefa T5 em Origami passos 7, 8 e 9.	90

Figura 63: Tarefa T5 em origami passo final.	91
Figura 64: Tarefa T6 em origami.	91
Figura 65: Tarefa T6 em origami passos 1, 2 e 3.	92
Figura 66: Tarefa T6 em origami passos 4, 5 e 6.	92
Figura 67: Tarefa T6 em origami passos 7, 8 e 9.	92
Figura 68: Tarefa T6 em origami passos 10, 11 e 12.	93
Figura 69: Tarefa T7 em Origami.	93
Figura 70: Tarefa T7 em Origami passos 1, 2 e 3.	94
Figura 71: Tarefa T7 em Origami passos 4, 5 e 6.	94
Figura 72: Tarefa T7 em Origami passos 7, 8 e 9.	94
Figura 73: Tarefa T7 em Origami passos 10, 11 e 12.	95
Figura 74: Tarefa T7 em origami.	95
Figura 75: Tarefa T8 em origami.	96
Figura 76: Tarefa T8 técnica τ 1 em origami passos 1, 2 e 3.	96
Figura 77: Tarefa T8 técnica τ 1 em origami passos 4, 5 e 6.	96
Figura 78: Tarefa T8 técnica τ 2 em origami passos 1, 2 e 3.	97
Figura 79: Tarefa T8 técnica τ 2 em origami passos 4, 5 e 6.	97
Figura 80: Tarefa T1 com única técnica correta, resposta dupla D4.	98
Figura 81: Tarefa T2 tecnologia θ do paralelogramo.	99
Figura 82: Tarefa T2 técnica τ 5.	100
Figura 83: Tarefa T3 técnica única.	100
Figura 84: Tarefa T4 técnica τ 1.	101
Figura 85: Tarefa T5 técnica τ única.	101
Figura 86: Tarefa T6 resposta correta.	102
Figura 87: Tarefa T6 respostas sem precisão no traçado das perpendiculares.	102
Figura 88: Tarefa T6 com a figura rotacionada.	103
Figura 89: Tarefa T7 resposta equivocada e resposta correta.	103
Figura 90: Tarefa T8 com técnica diferente τ d.	104
Figura 91: Tarefa T1 técnicas τ 1 e τ 2.	105
Figura 92: Tarefa T1, técnica τ d passos 1, 2 e 3.	106
Figura 93: Tarefa T2 com técnicas diferentes.	106

Figura 94: Tarefa T2.....	107
Figura 95: Tarefa T2 técnica τ d.....	107
Figura 96: Tarefa T3.....	108
Figura 97: Tarefa T4 técnicas τ 1 e τ 2.	108
Figura 98: Tarefa T5.....	109
Figura 99: Tarefa T6 com duas técnicas diferentes.	110
Figura 100: Tarefa T7.....	110
Figura 101: Tarefa T8 técnicas τ 1 e τ 2.	111
Figura 102: Apoio no formato do papel e dos instrumentos.....	112
Figura 103: Apoio no formato dos instrumentos.	112
Figura 104: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 0, 1 e 2.	113
Figura 105: Tarefa T6, técnica da Dupla D2 passos 3, 4 e 5.	114
Figura 106: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 6 e 7.....	114
Figura 107: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 8, 9 e 10.	114
Figura 108: Tarefa T6, técnica da Dupla 3 passos 0, 1 e 2.....	115
Figura 109: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 3 e 4.	116
Figura 110: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 5, 6 e 7.....	116
Figura 111: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 8, e 9.....	116
Figura 112: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 10, 11 e 12.....	117
<i>Figura 113: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 10, 11 e 12.....</i>	<i>117</i>
Figura 114: Construções análogas em régua e compasso.	118
Figura 115: Uso indevido dos instrumentos.	119
Figura 116: Apoio na dupla escala da régua.....	120
Figura 117: Evocação de conhecimentos prévios.....	120
Figura 118: Apoio métrico.	121

LISTA DE GRÁFICOS e TABELAS

Gráfico 1: Possíveis causas das dificuldades dos alunos.....	66
Gráfico 2: Conceituação dos entes geométricos.	67
Gráfico 3: Desempenho em nomenclatura geométrica.....	68
Gráfico 4: Comparação de acertos nas atividades entre Origami versus Régua e compasso.	123
Tabela 1: Complementaridade das duplas formadas.....	68
Tabela 2: Análise praxeológica das respostas em régua e compasso.	105
Tabela 3: Análise praxeológica das respostas em origami.....	111

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 GEOMETRIA: PRÓLOGO	23
3 ORIGAMI: A ARTE GEOMÉTRICA	37
3.1 O que é Origami	37
3.1.1 Origami Tradicional	41
3.1.2 Movimento Origami Moderno e Criativo	42
3.1.3 Origami na Contemporaneidade	43
3.1.4 Origami como modelo didático	49
3.2 Os Axiomas do Origami	53
4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD	58
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	61
5.1 O Experimento	62
5.1.1 Primeira etapa	63
5.1.2 Segunda etapa	64
5.2 Primeiros resultados: Questionário 1 e 2.	65
6 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EUCLIDIANAS PROPOSTAS NO EXPERIMENTO	70
6.1 Construções a régua e compasso	70
6.2 Construções em Origami	84
6.3 Análise praxeológica das resoluções dos voluntários	97
6.3.1 Tarefas em Régua e Compasso	98
6.3.2 Tarefas em Origami	105
6.3.3 Dupla 1	112
6.3.4 Dupla 2	113
6.3.5 Dupla 3	115
6.3.6 Dupla 4	118
6.3.7 Dupla 5	118
6.3.8 Dupla 6	119
6.3.9 Dupla 7	120
6.3.10 Dupla 8	121
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	122

REFERÊNCIAS.....	125
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS 1 E 2	131
APÊNDICE B – ATIVIDADES DO EXPERIMENTO.....	136
ANEXO A – TERMOS DE CONSENTIMENTO E ASSENTIMENTO DE LIVRE E ESCLARECIDO.	140

1 INTRODUÇÃO

Desde o surgimento formal da escola pública, vemos uma crescente busca para que o ensino chegue de modo igualitário, eficiente e eficaz para seus sujeitos. Pesquisas são feitas para descobrir modos de aperfeiçoar a aprendizagem e otimizar o tempo, para que assim, as desigualdades herdadas de nossa historicidade sejam amenizadas e finalmente aniquiladas.

Algumas categorias de saberes, no decorrer do tempo, apareceram e desapareceram dos currículos escolares de acordo com a necessidade de determinadas épocas. Um desses saberes são as construções euclidianas bidimensionais a régua e compasso, objeto de nosso estudo, conteúdo necessário à formação de engenheiros, arquitetos, designers e toda e qualquer profissão que transmita mensagens através de representações visuais.

A oscilação da permanência, não apenas deste conteúdo nos currículos escolares ao longo dos anos, mas, da própria disciplina de Desenho Geométrico depois das LDBs de 1961, 1971 e 1996, deu respaldo legal para que professores e alunos fossem deixando de lado a abordagem de um assunto pouco compreendido e apreendido por ambos, e isso acarretou em deficiências conceituais na formação dos professores de Matemática e áreas afins, dificultando, ainda mais, a aprendizagem destes saberes, no ingresso de alunos nos cursos que o exigem.

Um levantamento histórico do que houve com o ensino de Geometria nos responderá o que ocasionou o declínio na abordagem deste conteúdo, e também trará subsídios que comprovam o quanto este saber foi, e ainda é, importante na formação de qualquer cidadão, independentemente de sua aplicabilidade em determinadas profissões, comprovando a necessidade de seu retorno no ensino público.

Pilotos, arquitetos, designers, cirurgiões, engenheiros, cartógrafos, topógrafos, desenhistas, escultores, artistas visuais, projetistas, navegadores possuem um tipo especial de inteligência: a inteligência espacial. Esse tipo de inteligência, segundo Antunes (1998), precisa ser estimulada a partir dos 5 até os 10 anos de idade, de acordo com a teoria da janela das oportunidades. Podemos observar os grandes gênios da antiguidade, que eram exímios em várias áreas do conhecimento, provavelmente por terem sido estimulados em tenra idade e

prosseguido com a busca de conhecimento. Ainda segundo Antunes (1998), caso esse estímulo não ocorra, o indivíduo poderá ter dificuldades com a aprendizagem de conteúdos que estejam relacionados à espacialidade.

Pesquisas recentes em neurociência e neuropediatria defendem que exercícios geométricos têm o poder de formar as redes neurais da memória (GUIMARÃES, 2013). Jamais foi visto na atualidade tanta dificuldade pelos alunos na aprendizagem em conteúdos que precisem de uma habilidade de abstração bem desenvolvida como a Matemática. Aliás, segundo Montenegro (1931), “a função espacial é um processo mental que ocorre quando o cérebro tenta interpretar determinados tipos de informação, [...]” (p. 7), ou seja, qualquer conteúdo, independente de sua origem, passa do sentido visual ao processo mental, tanto dos conhecimentos das áreas humanas quanto das exatas.

Segundo Rabello (2005), a retirada da obrigatoriedade da disciplina de Desenho do Currículo das escolas brasileiras foi um dos principais fatores que irradiaram as crescentes dificuldades na apreensão destes conteúdos, tanto por parte dos alunos, quanto na formação de professores.

Como justificativa à iniciativa da proposta desta pesquisa, citamos as dificuldades vivenciadas como discente no curso de Licenciatura em Expressão Gráfica, os depoimentos de professores, que alegam as dificuldades dos alunos em visualizar a representação em perspectiva do hexaedro (cubo) em uma superfície plana (quadro negro), alunos de outros cursos (Design e Engenharias), que desejam montar grupos de estudos para melhorar o desempenho e preencher as lacunas deixadas pela educação básica nas disciplinas que envolvem Geometria e/ou Desenho Geométrico, e também os discentes do próprio curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco, que chegam à universidade sem dominar os conteúdos básicos, o que dificulta a aprendizagem de tópicos mais complexos; conteúdos esses que, de acordo com Rabello (2005), eram dados em pelo menos dois anos do ensino básico.

O atual estado do ensino no Brasil gera uma sensação de utopia de um possível retorno da disciplina Desenho Geométrico, ou uma carga mais profunda da abordagem do ensino de Geometria nos currículos, tanto de escolas públicas como privadas. Por este motivo, as instituições e cursos que ainda mantêm os conteúdos geométricos precisam repensar sua didática, devido às deficiências de

aprendizagem causadas pela pouca ou nenhuma exposição de tais conteúdos no ensino básico.

Segundo Carvalho e Lima (2010), a Geometria é importante pelo simples fato de ela estar constantemente presente em nosso cotidiano, desde os nossos primeiros meses de vida. Isto implicar dizer que, quem lida com o conhecimento geométrico no campo profissional, necessita dominá-lo num nível acima dos outros indivíduos. Por este motivo, escolhemos como voluntários os alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco, que estarão cursando a disciplina Geometria Gráfica Bidimensional. Disciplina esta que tem como um de seus principais conteúdos abordados as construções geométricas euclidianas a régua e compasso. Curso este, formador de professores para as áreas de Desenho, Arquitetura, Engenharias, Design e áreas afins.

Nossa escolha pelo Origami, como tecnologia analógica, se deu a partir da preferência da autora por esta arte, pelos motivos de acessibilidade de sua matéria prima e pela facilidade de manipulação. O origami, segundo Abe (2004), é um exercício que desenvolve a atenção, concentração, paciência, observação, ou seja, tudo o que as construções euclidianas também exigem de quem as estuda e as executa. Porém, ao mesmo tempo que dobrar uma folha de papel é algo simples, é, também, uma atividade altamente complexa, principalmente quando se tratam das construções a régua e compasso, análogas as dobraduras representando os entes matemáticos. Segundo Carvalho e Lima (2010), existem três tipos de objetos: os físicos, os gráficos e os geométricos. Os objetos geométricos podem ser representados pelos objetos físicos e gráficos. Com o papel, que é um objeto físico, podemos criar representações de retas (objeto geométrico), resultantes de suas dobras, que visualmente representam um objeto gráfico. Com as interseções das retas criadas, podemos representar o ponto ou pontos pertencentes à reta. O próprio papel é uma representação de uma parte limitada de um plano, porém, representações de retas, feitas com dobras no papel, também podem limitar, ainda mais, esse plano.

Enquanto o aluno permanece “preso” aos instrumentos de desenho, régua e compasso ou software de representação geométrica dinâmica, por conta da técnica a qual já estão familiarizados, com o origami, que apesar de ser conhecido, mas pouco praticado, perde-se o sentido da técnica, ou seja, o aluno terá que buscar

outras estratégias para conseguir responder ao desafio da compreensão entre os objetos físicos (concretos) e os objetos geométricos (abstratos ou ideais), para poderem manipulá-los e operá-los de acordo com suas necessidades. O domínio do aluno em determinada técnica não significa que eles constroem os conhecimentos que as justificam, isso fica claro quando expostos a outros instrumentos que necessitam da aplicação de outras técnicas, quando as anteriores dominadas não funcionam mais.

O objetivo principal desta pesquisa é analisar a resolução de problemas de construção geométricas euclidianas por alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica em dois ambientes: origami, régua e compasso. Propostos no experimento, à luz da Teoria Antropológica do Didático, mostrando eventuais potencialidades da utilização do origami para amenizar as dificuldades de aprendizagem de Geometria Gráfica.

Não queremos aqui, uma substituição das construções a régua e compasso pelas dobraduras, e muito menos acrescentar mais um método de resolução de problemas, cujas soluções foram sistematizadas e “decoradas”, por muitos estudantes ao longo dos anos, apenas para “livrarem-se” de uma matéria ou disciplina inoportuna, que muitos alegam não acrescentarem conhecimentos significativos em suas formações profissionais. Para este objetivo central, precisaremos ilustrar as construções possíveis e não possíveis. De acordo com Alperin e Lang (2006)¹, todas as construções geométricas a régua e compasso são possíveis em dobraduras a partir dos sete axiomas de Huzita-Justin e Hatori.

Segundo alguns autores (IMENES,1996; COSTA, 2007; RANCAN, 2011), que trabalharam com origami em suas pesquisas, há um consenso de que as dobraduras ajudaram os sujeitos a compreenderem os conceitos abstratos de ordem axiomática em atividades que envolvem conteúdos geométricos como: propriedades geométricas das figuras planas e espaciais, ângulos, segmentos de reta, paralelismo, perpendicularismo, aresta, face, vértice, frações. Porém, até o momento desta pesquisa, não se constatou a utilização das dobraduras em sala de aula para efetuar construções euclidianas a régua e compasso, tanto no ensino básico como no superior.

¹ Artigo publicado em 6 de dezembro de 2006 disponível em <http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf> acesso em 07/02/2013.

Nossa hipótese se fundamenta na possibilidade de que o origami pode surtir os mesmos resultados em um conteúdo pouco explorado por professores e alunos, que é o caso das construções a régua e compasso utilizando as dobraduras, como um método auxiliar na compreensão e aprendizagem dos conceitos trabalhados na disciplina de Geometria Bidimensional. Aprendizagem esta, abalada pelos acontecimentos históricos no Brasil e no mundo.

Tentar amenizar estas dificuldades, fez-nos imaginar uma abordagem de construções diferente da abordagem tradicional de receitas passo a passo das construções euclidianas. As construções, ainda abordadas com régua e compasso conjuntamente com softwares de representação geométrica dinâmica, auxiliam em parte essa apreensão do saber. Tendo em vista estas dificuldades, e, também, a utilização de um material de baixo custo e de fácil acessibilidade, optamos por uma tecnologia analógica como o origami, como suporte para esta nova abordagem das construções geométricas.

Alpérin e Lang (2006) nos fornecem dados sobre os axiomas do origami, também conhecido como Huzita-Hatori Axioms (axiomas de Huzita-Hartori), simbolizados pela sigla “HAS”. Estes HAS são baseados nos entes axiomáticos geométricos ponto, reta e plano, passíveis de serem representados em uma folha de papel de formato irrelevante, nos levanta a hipótese de suas potencialidades na amenização das deficiências de aprendizagem, já que pesquisas anteriores mostram resultados satisfatórios na aprendizagem de conteúdos geométricos. Sendo que, as pesquisas nacionais que utilizam o origami como ferramenta para o ensino de Geometria estão voltadas, em sua maioria, para o Ensino Fundamental.

De acordo com os estudos destes HAS, que são sete no total, já foi comprovado que é possível construir com dobraduras em papel todas as construções euclidianas bidimensionais a régua e compasso. E até algumas construções, não possíveis em régua e compasso, como a trisecção do ângulo agudo qualquer, e a duplicação do cubo. Baseados nestes HAS, iremos expor os sujeitos a uma situação experimental de construir algumas representações euclidianas em origami e também a régua e compasso, para podermos analisar quais saberes eles evocam na resolução das questões com ambas as ferramentas.

Teremos como suporte teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático, conhecida pela sigla TAD, que traz uma ferramenta para análise e modelagem das atividades humanas relacionadas à Matemática. Segundo a TAD, as

atividades humanas seguem uma praxeologia. Baseados nas análises praxeológicas das atividades matemáticas, no caso as atividades geométricas, que serão os tipos de tarefas T (tau maiúscula) propostas aos alunos, as técnicas τ (tau minúscula) usadas pelos alunos para resolver T , a tecnologia θ (teta minúscula), que fundamenta a técnica τ usada pelos sujeitos e a teoria Θ (teta maiúscula), que justifica a tecnologia θ . A TAD busca o conhecimento das diversas práticas matemáticas e quais delas são realmente significativas para uma melhor aprendizagem. Com isso iremos investigar a resolução de problemas de construção pelos sujeitos em dois ambientes: régua e compasso versus origami, para identificar técnicas e elementos tecnológicos e teóricos em jogo no cumprimento de tarefas do gênero “construir”.

No capítulo dois haverá um breve histórico das causas do gradativo abandono da Geometria, em particular nas construções euclidianas a régua e compasso, apoiadas em Zuin (2001), que faz um apanhado da ascensão, do declínio e da permanência das construções geométricas a régua e compasso na educação brasileira, e sua importância na formação de professores de Matemática e áreas afins e na Commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques (KAHANE, 2000)², na França, que faz um resumo histórico da importância da Geometria no currículo francês antes e depois do Movimento da Matemática Moderna.

O Capítulo três abordará um breve histórico do origami, suas leis, influência atual no mundo da Matemática, Engenharia, Medicina e Educação, seus axiomas que demonstram as construções geométricas a régua e compasso possíveis em dobraduras e suas analogias com os axiomas euclidianos.

O capítulo quatro explanará a teoria utilizada e como ela fundamentará no decorrer da pesquisa e na análise dos dados.

No capítulo cinco teremos a descrição da metodologia das etapas do experimento, a justificativa da escolha do locus da pesquisa, a escolha da atividade a ser proposta nas atividades do experimento, o procedimento na execução metodológica da coleta e análise dos dados, as construções geométricas a régua e compasso possíveis em origami.

² Comissão de reflexão sobre o ensino da matemática.

O capítulo seis abordará a análise praxeológica tarefa por tarefa, técnica, tecnologia e teoria de cada atividade proposta no experimento realizadas em paralelo com a praxeologia adotada pelos voluntários, dupla por dupla.

E o sétimo e último capítulo concluirá, com nossas considerações finais, o que dificultou ou facilitou a execução da pesquisa, inquições que surgiram ao longo do estudo, bem como sugestões de pesquisas posteriores.

2 GEOMETRIA: PRÓLOGO

Geometria, do grego *geo*, “terra” e *metron* “medida”, literalmente “medida da terra”. Apesar da popularidade do termo grego, seus primórdios surgiram no Egito, quando os agrimensores de terras tinham que remarcar as áreas cultiváveis após as inundações do Rio Nilo. É sempre essa a premissa que escutamos quando alunos e, que obviamente reproduzimos quando docentes nas aulas de Matemática ao fazermos uma breve introdução sobre o que é Geometria.

Muitas vezes, somos convidados a ver sua definição nos dicionários: “parte da Matemática cujo objeto é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo. [...]” (HOUAISS, 2009, p. 966), ou “Ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos; Ciência que estuda as propriedades dum conjunto de elementos que são invariantes sob determinados grupos de transformações. [...]” (FERREIRA, 2009, p. 977). Essas são definições gerais que limitam a amplitude do conhecimento geométrico, mas que retoma aos poucos sua importância e valor na sociedade.

Assim como outras áreas do conhecimento científico, a Geometria também passou por transformações, acrescentando novas visões e teorias. Em contrapartida, o campo educacional brasileiro não acompanhou de modo satisfatório as mudanças ocorridas no campo científico, pois segundo Pavanello (1993), o Brasil, influenciado pelas ideias pedagógicas francesas e estadunidenses, não renovou desde então seu sistema educacional.

Zuin (2001), Doutora em Educação Matemática pela PUC de São Paulo, em sua Dissertação de Mestrado pela UFMG, fez uma retrospectiva histórica do ensino de Geometria na Educação Básica, mais precisamente das construções a régua e compasso como um saber escolar no Brasil, a partir do século XIX. Para esta autora, a Era Vargas foi a época em que as construções euclidianas receberam mais importância porque:

Com a crescente industrialização, a partir da década de 20, o Desenho como instrumento da técnica adquire uma maior importância no currículo escolar; isto é comprovado, quando observamos que apesar da unificação das “matemáticas”, as construções geométricas que já vinham sendo estudadas separadamente, constituindo um conteúdo autônomo, assim permaneceram. Não houve preocupação de integrar as construções geométricas ao ensino da Geometria como seria natural.

A Portaria de 30 de junho de 1931, que tratava dos programas do curso fundamental do ensino secundário, dando instruções pedagógicas, veio implementar uma modificação no currículo. O ensino do Desenho, ganha maior destaque, dividido em quatro modalidades, a saber: Desenho do Natural, Desenho Decorativo, Desenho Geométrico e Desenho Convencional, [...] (ZUIN, 2001, p.74).

Porém, mesmo com essa dada importância das construções geométricas, visto que a ascensão comercial do Brasil na década de 30 exigia conteúdos geométricos específicos nos cursos técnicos, seu estudo isolado dos outros conteúdos e disciplinas foi um dos motivos de seu gradativo abandono por parte de alunos que um dia se tornaram professores. Professores estes, que tinham dificuldades na compreensão desses conteúdos, e por esses ou outros motivos deixaram de lado sua abordagem; porque “se não estiverem justificados pela Geometria euclidiana, os traçados geométricos não desenvolvem o raciocínio lógico, se mostram como uma sequência de procedimentos sem sentido para o estudante.” (ZUIN, 2001, p. 187). Carvalho e Lima (2010) esclarecem que

No entanto, as atividades de movimentação, manuseio, visualização e representação gráfica não são suficientes. Além delas, é imprescindível que, simultânea e progressivamente, sejam propostas aos alunos, atividades que favoreçam o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos associados aos fenômenos dos objetos físicos, bem como as suas representações. É preciso lidar com os conceitos abstratos de ponto, reta e plano, semirreta, paralelismo, triângulo, polígono, semelhança e simetria, e tantos outros.

Tais conceitos, e as relações entre eles, nos fornecem modelos abstratos de objetos do mundo físico. Esses modelos – que são objetos matemáticos – fazem parte do conhecimento matemático sistematizado que deve ser adquirido ao longo de várias fases da escolaridade (CARVALHO e LIMA in: CARVALHO, 2010, p. 138).

Podemos citar as Leis de Diretrizes e Bases da educação nacional dos anos de 1961 e 1971, as quais deram sinal verde para este possível abandono ao deixar nas mãos dos professores e do regimento escolar a organização do programa de cada disciplina e a escolha das disciplinas obrigatórias:

Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino (LDB, 1961, Art.35).

O programa de cada disciplina sob forma de plano de ensino, será organizado pelo respectivo professor, e aprovado pela congregação do estabelecimento (LDB, 1961, Art. 71).

O regimento escolar regulará a substituição de uma disciplina, área de estudo ou atividade por outra a que se atribua idêntico ou equivalente valor formativo, excluídas as que resultem no núcleo comum e dos mínimos fixados para habilitações profissionais (LDB, 1971, Art. 12).

Justamente no período da promulgação dessas duas LDBs, a ditadura instalada pelo Golpe Militar (1964 a 1985) encontrou o terreno propício para influir suas mudanças catastróficas. Segundo Rabello (2005), a universidade embora devesse, nada podia fazer para deter as reformas impostas pela ditadura.

A LDB 9394 de 1996, em seu artigo 26 apenas dispõe que:

Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigidas pelas características regionais, da cultura, da economia e da clientela. (LDB, 1996, Art. 26).

Em 25 anos após a promulgação da LDB de 1971, não houve tantas mudanças no currículo escolar, que permaneceram subordinados aos interesses econômicos e políticos.

Em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) tentam resgatar as construções geométricas dentro da disciplina de Matemática na seção Espaço e Forma. Porém focado no “ [...] ensino de procedimentos de construção a régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.” (BRASIL, 1998, p. 68 e 69). Mesmo com as recomendações dos PCNs, a abordagem dos conteúdos geométricos se restringe ao contexto algébrico. Segundo Pavanello (1989), um dos motivos da não abordagem da Geometria na disciplina de Matemática é a falta de domínio dos professores em relação ao conteúdo, e, por este motivo, deixavam para abordá-lo no final do ano letivo, geralmente sem sucesso.

Em 2012, todas as Instituições Federais brasileiras aderiram ao ENEM, o Exame Nacional do Ensino Médio, parcial ou integralmente como ferramenta de ingresso aos cursos universitários. Esta autora, em 2009, ainda fez a prova de

conhecimentos específicos para ingressar no curso de Licenciatura em Desenho e Plástica, porém em 2012 essa prova foi abolida e substituída pelo ENEM. Se já havia alunos que, mesmo estudando em cursinhos para essas provas de conteúdo específico, tinham dificuldades, com a adoção integral do ENEM, exceto para alguns cursos de Engenharia, Música, Dança e Teatro, a heterogeneidade dos ingressos é a mais diversa possível com o perdão do pleonasmo.

Com a prova de conhecimentos específicos abolida, Galvão (2015), conjuntamente com seus alunos, fizeram uma pesquisa sobre quantas questões da Geometria Gráfica apareciam na prova de Matemática e suas Tecnologias entre os anos de 2010 e 2014 no ENEM. A prova de Matemática e Tecnologia, nesses cinco anos, sempre possuíam 45 questões. Eles constataram que o ano com maior quantitativo de questões de abordagem geométrica foi em 2010, com 28% das 45 questões. Houve uma baixa nos anos de 2011 e 2012 com 18% e 20% respectivamente. E os anos 2013 e 2014 mantiveram 24%. Porém, mesmo com esse percentual, verificou-se que os assuntos geométricos abordados nas questões são, em sua maioria, tratados algebricamente, sem exploração das propriedades geométricas gráficas. Pode-se observar que, lentamente, alguns conteúdos de Geometria vêm novamente ganhando espaço, mesmo inseridos nos conteúdos aritméticos.

Há um verso bíblico que diz: “como, pois, invocaram aquele em que não creram? E como crerão naquele de quem não ouviram? E como ouvirão, se não há quem pregue?” (Romanos, 10.14). O curso de Expressão Gráfica, o único ofertado no Brasil é em Pernambuco na modalidade de licenciatura, e no Paraná na modalidade de bacharelado, é pouco conhecido por muitas pessoas. Se os jovens de hoje não são introduzidos no conhecimento geométrico desde cedo, como saberão escolher qual futuro profissional lhes serão satisfatórios, não apenas no aspecto financeiro, mas no humano, se não lhes for apresentado um leque maior de conhecimentos, escolhas enquanto ainda estão no ensino básico?

Segundo Zuin (2001), a França influenciou fortemente o campo educacional brasileiro no que se refere ao ensino da Matemática e mais precisamente no ensino de Geometria. O Movimento da Matemática Moderna, em 1959, também importado deste país, foi o grande responsável pelo declínio da Geometria euclidiana nas escolas europeias e brasileiras, sendo que este movimento chegou:

No Brasil, só a partir de 1961, em São Paulo, com a criação do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática, conhecido como GEEM, através de reuniões e cursos para professores de Matemática, é que são divulgadas as propostas do Movimento da Matemática Moderna. (ZUIN, 2001, p. 83).

Porém, é em meados do século XIX que as construções geométricas retomam sua importância na França para atender às demandas econômicas. Por questões de interesses econômicos entre Brasil e França, adotaram-se, nas escolas técnicas, livros de autores franceses como Bézout, Lacroix, Legendre, Bourdon e Vincent. As obras *Élèmens D'Algèbre* e *Élèmens D'Arithmétique* de Bourdon, e *Cours de Géométrie* de Vincent foram compilados pelo Professor mineiro Cristiano Benedito Ottoni (1811-1896) e utilizados na Escola Pedro II, no ensino secundário e nos cursos preparatórios ao ensino superior (ZUIN, 2001).

Em janeiro de 2000, na França, a Comissão de Reflexão sobre Ensino da Matemática escreve um relatório de Progresso sobre a Geometria e seu ensino (*Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*), editado, publicado sobre a direção do Matemático francês Jean-Pierre Kahane e apresentado ao Ministro da Educação Nacional da França em 2002. Nesse relatório objetivava-se responder às seguintes perguntas: como está o ensino de Geometria elementar no final do século XX?; ainda deve-se ensinar Geometria na escola e faculdade atualmente?; como analisar a evolução do ensino da Geometria, no colégio e no Ensino Médio, nas últimas décadas (desde 1960) e o que está em jogo atualmente?; que propostas podemos avançar em relação ao ensino da Geometria amanhã? Sendo que para esta última pergunta, houve subdivisões de outros temas inquiridores: o que ensinar de Geometria? Como ensinar Geometria? Quais as relações estabelecidas entre a Geometria e outras partes de Matemática, entre a Geometria e outras disciplinas? Qual o treinamento de professores para ensinar Geometria?

Ao responder a essas questões, a Comissão entra em reflexão sobre a importância do ensino de Geometria e destaca algumas justificativas de o porquê deve-se ensinar Geometria atualmente: a) a visão no espaço; b) aprendendo a raciocinar; c) aspectos estéticos e culturais da Geometria; d) a Geometria na vida cotidiana; e) a formação de técnicos e engenheiros; f) a Geometria em outras ciências; g) Geometria em Matemática.

Em relação à Geometria e à visão no espaço, pois ³“[...] a Geometria é o lugar onde se aprende a entender o espaço. ” (KAHANE et al, 2002, p.04). O currículo escolar francês da época foi influenciado por Piaget, na qual sua teoria afirmava que a apreensão do espaço se dá através da movimentação do sujeito no espaço, porém Kahane *et al* (2002) alegam que o conhecimento do espaço não se reduz à Geometria, por isto:

Entre os tópicos abordados por este espaço de conhecimento e prática, a importância é inegável. Exemplos incluem o seguinte: como mover, mover-se em uma grande cidade desconhecida, na zona rural, na floresta ou no mar? Como usar e produzir um mapa para determinar uma posição e oferecer uma carona? Como prever os seus movimentos em um grande edifício desconhecido? Como representar seus próprios movimentos, viajando em torno de objetos? Como representar o que vemos à nossa volta? Por um diagrama (por acidente), um mapa, uma vista em perspectiva? Como descrever os sólidos básicos, seus movimentos, as direções do espaço, as distâncias entre os objetos? Como descrever as figuras planas? (KAHANE et al, 2002, p.4) ⁴Tradução nossa.

Na época em que o relatório foi escrito, os estudos em neurociência ainda não eram tão difundidos como atualmente. Não se tinha tanto conhecimento sobre determinadas áreas cerebrais, que são ativadas quando executamos uma atividade específica. Algumas atividades podem acionar a mesma área do cérebro, outras não. Quando aprendemos algo novo “[...] as células nervosas cerebrais ramificam-se e criam novas ligações com outras células” (TOLDBOD, 1997, p.23). Quanto mais aprendemos conteúdos diversificados, estimulando diversas regiões cerebrais, mais ligações conseguiremos fazer de um conteúdo para outro. Por este motivo não se deve superestimar ou subestimar nenhum tipo de raciocínio, pois todos os tipos de conhecimentos e estímulos são o que formam a rede neural humana, por isso:

³ [...] la géométrie est le lieu où l'on apprend à appréhender l'espace. (KAHANE et al, 2002, p.04).

⁴ Parmi les thèmes qui relèvent de cette connaissance de l'espace et dont l'importance pratique est indéniable, on peut citer les suivants: comment se diriger, se déplacer dans une grande ville inconnue, dans la campagne, dans les bois ou en mer? Comment utiliser et produire un plan pour déterminer une position et prévoir un trajet? Comment prévoir ses déplacements dans un grand bâtiment inconnu? Comment représenter ses propres mouvements, ses déplacements par rapport aux objets environnants? Comment représenter ce que nous voyons autour de nous? Par un schéma (pour un accident), un plan, une vue en perspective? Comment décrire les solides élémentaires, leurs mouvements, les directions de l'espace, les distances entre les objets? Comment décrire les figures planes? (KAHANE et al, 2002, p.4).

⁵[...] devemos levar em conta a riqueza de raciocínio geométrico, que se baseia principalmente na observação da figura, antes de dar origem a um trabalho de investigação real, com o desenvolvimento de conjecturas, submetido a um exame crítico e, finalmente, permite uma validação definitivamente convincente pela demonstração, mantendo um diálogo permanente entre a intuição e rigor. (KAHANE et al, 2002, p. 06).

A importância de um conceito estético remonta, desde a antiguidade clássica, o estudo das formas e a contemplação do belo, de modo que ⁶“a geometria é o meio para identificar as invariáveis no infinito das formas que nos rodeiam.” (KAHANE et al, 2002, p.07). Nesse sentido, culturalmente

⁷Todos aqueles que estudaram geometria um pouco sabem bem que a contemplação das belas figuras é em si uma fonte de satisfação estética [...]. Além disso, certos conhecimentos geométricos são essenciais para entender e apreciar a composição de muitas pinturas clássicas (perspectiva, a proporção áurea, etc.) (KAHANE et al, 2002, p. 07).

Não apenas no sentido estético, mas a Geometria vem sendo amplamente usada em softwares de representação dinâmica, que por sua vez são utilizados no planejamento urbano, e na arquitetura, que se utilizam os conceitos da Geometria euclidiana pois:

⁸Atualmente, quando a ideia se desenvolve na cabeça do arquiteto, ele pode expressá-lo e passar isso geometricamente. Vários designers podem se comunicar uns com os outros através da geometria. Finalmente, para convencer o cliente ou o tomador de decisões, muitas vezes é a beleza de um diagrama (projeto) que dita as escolhas. (KAHANE et al, 2002, p. 07).

⁵ [...] il faut prendre en compte toute la richesse du raisonnement géométrique, qui s'appuie d'abord sur l'observation de la figure, avant de donner lieu à un véritable travail de recherche, avec l'élaboration de conjectures, soumises à un examen critique et qui permet enfin une validation définitivement convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre l'intuition et la rigueur. (KAHANE et al, 2002, p. 06).

⁶ La géométrie est le moyen de dégager des invariants dans l'infini des formes qui nous entourent. (KAHANE et al, 2002, p.07).

⁷ De fait, tous ceux qui ont étudié un peu la géométrie savent bien que la contemplation de belles figures est en soi une source de satisfaction esthétique [...]. De plus, certaines connaissances géométriques sont essentielles pour comprendre et apprécier la composition de maints tableaux classiques (la perspective, le nombre d'or, etc.). (KAHANE et al, 2002, p. 07).

⁸ Actuellement encore, lorsque l'idée s'élabore dans la tête de l'architecte, il ne peut l'exprimer et la transmettre que géométriquement. Plusieurs concepteurs ne peuvent communiquer entre eux que par le moyen de la géométrie. Enfin, pour convaincre le client ou le décideur, c'est souvent la beauté d'une épure qui dicte les choix. (KAHANE et al, 2002, p. 07)

Diariamente somos estimulados visualmente e tatilmente em nosso universo tridimensional. Vivemos dentro de poliedros feitos de tijolos, cimento ou concreto armado. Possuímos objetos e utensílios domésticos com as mais variadas formas de superfície de revolução, como conóides, cilindroides, paraboloides, elipsoides.

Não há como desconectar a Geometria da vida cotidiana de nenhum indivíduo, tanto no uso profissional como em tantas outras circunstâncias cotidianas como ler mapas, saber montar um móvel decifrando as orientações dos manuais ou fazer um conserto, transportar objetos calculando as manobras de entrada e saída deles em determinados espaços, interpretar corretamente representações geométricas em dados estatísticos (gráficos), calcular a menor distância de deslocamento em uma rua ou avenida (KAHANE *et al*, 2002).

Sabemos que, quando uma criança se apresenta hábil em alguma atividade específica, geralmente os pais ou responsáveis tendem a estimulá-la desde cedo para que ela desenvolva ainda mais suas habilidades. Podemos observar isso geralmente em países desenvolvidos, onde atletas, músicos e artistas são estimulados desde a tenra idade, através da família ou do próprio sistema escolar. Isso também acontece em outras áreas como Química, Física, Matemática. Formar profissionais bem qualificados é o objetivo de toda e qualquer nação que queira crescer econômica e culturalmente, e esse processo se dá no investimento em pesquisa, ciência e tecnologia. Nesse sentido, a Geometria tem papel importante na formação de técnicos e engenheiros, pois ⁹

para tirar a nação francesa de dependência onde tem sido até agora da indústria estrangeira, deve, em primeiro lugar, educação direta para o conhecimento de objetos que necessitam de precisão, que foi totalmente negligenciado até agora, [...] (KAHANE *et al*, 2002, p. 08).

Podemos perceber que a França investiu na preparação de seus cidadãos com todo o arcabouço conceitual e prático, com o objetivo de que tanto produtores quanto consumidores fossem sensíveis a precisão das formas, exigindo e ofertando produtos de boa qualidade. Com o avanço tecnológico digital, podemos citar o desenvolvimento de software de visão 3D, imagem e desenho assistidos por

⁹ Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut, premièrement, diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu'à ce jour, [...]. (KAHANE *et al*, 2002, p. 08).

computador, principalmente no campo da medicina, robótica, indústria automobilística e aeroespacial, no qual ¹⁰“tudo isso contribui para fazer da geometria fundamental na formação de técnicos e engenheiros, como evidenciado pelo interesse que lhe dizem respeito, hoje ainda, nas grandes escolas.” (KAHANE *et al*, 2002, p. 09).

A Geometria está inteiramente ligada à Matemática assim como a Matemática está ligada a outras ciências, por exemplo, a Física. Podemos dar exemplos da ligação da Geometria com outras disciplinas baseado no relatório de Kahane *et al* (2002), com alguns conteúdos em Física, como vetores que modelam velocidades e forças, produto vetorial em eletricidade, campos vetoriais, gradientes, eletromagnetismo, formas quadráticas na relatividade, os espaços de dimensões maior que três, vistos como configurações no espaço em mecânica, teoria da elasticidade linear. Porém,

¹¹O melhor exemplo dessa relação, exigente, mas frutífera entre a Física e a Geometria é a mecânica celeste. [...] Outro campo essencial da aplicação da Geometria em Física é a mecânica dos sólidos, onde os movimentos do espaço (rotação em torno de um eixo, etc.) são essenciais. (KAHANE *et al*, 2002, p. 09).

Podemos, ainda, citar a óptica geométrica, que utiliza não só a Geometria Euclidiana como a Geometria Projetiva e a Geometria Diferencial, física ou química dos sólidos, na qual deve-se compreender a estrutura dos materiais e suas propriedades de regularidade e simetria. ¹²“Há muitos outros exemplos de intervenção da Geometria em Ciência (a descrição geométrica de folheações e inflorescências em botânica, a codificação das proteínas em biologia etc.).” (KAHANE *et al*, 2002, p. 10).

¹⁰ Tout cela concourt à faire de la géométrie un point essentiel de la formation des techniciens et des ingénieurs comme en témoigne l'intérêt que lui portent, aujourd'hui encore, les grandes écoles. (KAHANE *et al*, 2002, p. 09).

¹¹ Le plus bel exemple de cette relation, exigeante mais fructueuse, entre la physique et la géométrie est sans doute celui de la mécanique céleste. [...] Un autre champ d'application essentiel de la géométrie en physique est la mécanique des solides, où les déplacements de l'espace (rotation autour d'un axe, etc.) jouent un rôle essentiel. (KAHANE *et al*, 2002, p. 09).

¹² I y a beaucoup d'autres exemples d'intervention de la géométrie dans les sciences (la description géométrique des foliations et des inflorescences en botanique, le codage des protéines en biologie, etc.). (KAHANE *et al*, 2002, p. 10).

Se esses exemplos já nos comprovam a importância da Geometria em outras áreas, o que não dizer da própria Matemática? Um dos argumentos da Kahane *et al* (2002) sobre a importância do conhecimento geométrico na formação dos matemáticos é o fato de que pensar geometricamente, considerado algo difícil, é extremamente útil, pois

¹³Confrontados com uma situação que não é a priori geométrica, acho que pensar geometricamente significa primeiro ser capaz de fazer um desenho. Na verdade, cada matemático tem representações concretas de situações complexas que lhe servem como atalhos no pensamento. (KAHANE *et al*, 2002, p. 11).

Para Kahane *et al* (2002), esse tipo de pensamento é importante porque o desenho ou a representação gráfica é usada amplamente na Geometria diferencial, na análise de dados (estudo de nuvens de pontos no espaço euclidiano com n dimensões), aproximação por mínimos quadrados, pesquisa operacional, através da programação linear, que em grande parte envolve poliedros (problema de determinação do casco convexo de um número finito de pontos), algumas áreas da computação, incluindo o que é chamado de Geometria computacional: tudo sobre gráficos, árvores, malhas, pavimentos, imagem e tudo relacionado à visão, e suas ligações com a Geometria projetiva. Por este motivo,

¹⁴devem entender-se que, para a nossa Comissão, manter a educação geométrica no Ensino Fundamental e Médio é um imperativo absoluto. A questão que se coloca agora é adaptar o ensino às novas condições de educação, [...]. (KAHANE *et al*, 2002, p. 12).

A OCDE (Organization for Economic Cooperation and Development) é uma organização formada por 34 países para a cooperação econômica e de desenvolvimento, que tem por objetivo a criação de novas políticas para a melhoria de qualidade de vida mundial. A cada 3 anos, a OCDE promove o PISA (Programme for International Student Assessment), que é um programa de avaliação internacional de estudantes. Este programa avalia estudantes de 70 países na faixa etária dos 15

¹³ Face à une situation qui n'est pas a priori géométrique, penser géométriquement signifie d'abord être capable de faire un dessin. De fait, chaque mathématicien a ses représentations concrètes de situations complexes qui lui servent de raccourcis de pensée. (KAHANE *et al*, 2002, p.11).

¹⁴ On aura compris que, pour notre commission, maintenir un enseignement de géométrie au collège et au lycée est un impératif absolu. La question qui se pose maintenant est d'adapter cet enseignement aux conditions nouvelles de l'enseignement, [...]. (KAHANE *et al*, 2002, p. 12).

anos, média de idade mínima de conclusão do ensino básico, com o objetivo de averiguar se estes jovens estão preparados para atuar na sociedade, se eles conseguem usar o que aprenderam na escola em situações reais nas áreas de Leitura, Ciências e Matemática. O teste dura cerca de duas horas e versa sobre esses três temas (Leitura, Matemática e Ciências), no qual um dos temas é exaltado e contém mais questões. Em 2012, os conteúdos de Matemática tiveram mais destaque do que os de Leitura e Ciências. O PISA busca averiguar a semelhanças entre países bem-sucedidos no teste. Com esses dados, a OCDE dispõe dos subsídios para assim criar as novas políticas, sugerindo-as para os países que não obtiveram um bom desempenho. É importante destacar que, para o teste, não importa a pontuação por si somente, mas, se todos os alunos averiguados de um mesmo país obtiveram boas notas independente de sua origem e status social, significando que a estrutura educacional de tal país funciona.

De acordo com o PISA, os alunos brasileiros vêm melhorando no ranking no que se refere aos conhecimentos em Matemática no último resultado de 2012, porém, ainda estamos na quinquagésima oitava posição em relação aos outros países avaliados. Apesar dos pequenos avanços na pontuação, vemos a posição no ranking descer, o que significa que se precisa reavaliar o sistema educacional como um todo. De acordo com Luiz Cláudio Costa, Presidente do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), apesar dos avanços reconhecidos internacionalmente a educação brasileira “ainda está em um patamar muito distante daquele ambicionado pela sociedade, que destaca a educação como o alicerce mais estável da competitividade econômica e da superação das desigualdades sociais e regionais.”¹⁵

¹⁵ Disponível no Relatório Nacional PISA 2012: Resultados brasileiros pelo link http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf acesso em 01/12/2015.

Figura 1: Evolução do Brasil no PISA em Matemática, Leitura e Ciências.

A EVOLUÇÃO DO BRASIL NO PISA (pontuação e posição no ranking mundial)					
Brasil	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012
Matemática	334	356	370	386 (57ª)	391 (58ª)
Leitura	396	403	393	412 (53ª)	410 (55ª)
Ciências	375	390	390	405 (53ª)	405 (59ª)
Média geral	368	383	384	401	402

Fonte: <https://blogtechne.techne.com.br/index.php/no-brasil-33-mil-alunos-farao-provas-para-o-ranking-mundial-de-educacao/>

Como a participação do Brasil no PISA é recente, começou a partir do ano 2000, algumas das causas apontadas pelo relatório de 2012 para seu desempenho ainda emergente são: a falta de autonomia escolar; a razão estudantes/professor de Matemática (219,9 alunos por professor); quantitativo de alunos por turma; baixo índice de recursos educacionais nas escolas (-0,62); e o mais gritante que são as diferenças regionais. Os alunos do Sul e Sudeste apontam melhores resultados em contrapartida aos do Norte e Nordeste. Mesmo que, historicamente, o currículo educacional brasileiro tivesse sofrido muitas alterações. A exclusão de conteúdos geométricos fora herdada de reformas no campo educacional feitas pelo governo brasileiro, na maioria deles seguindo padrões estrangeiros (RABELLO, 2005). Então, seria equivocado afirmar que a retirada de certos conteúdos também poderia ter ocasionado o declínio educacional nas Ciências Exatas, visto que esse não foi o escopo da pesquisa. Porém, não podemos negar que as sucessivas mudanças no currículo escolar afetaram a formação de muitos profissionais. Podemos citar o caso do prédio construído em Londres, Inglaterra, em 2013 conhecido como Walkie Talkie, que foi manchete em todos os jornais e noticiários. Seu formato côncavo reflete a luz solar em uma das ruas vizinhas, concentrando a radiação da luz e calor em seis vezes maior que a normal, e a temperatura do solo no local chegou em cerca de 92º graus. Em uma reportagem da TV Globo, no Jornal Nacional, um físico londrino, que estava no momento da cobertura, revelou estar surpreso em como os

responsáveis pela construção não tinham observado o efeito que o formato do prédio poderia causar em seu entorno, pois era assim que na antiguidade se fazia fogo. O arquiteto em questão, o uruguaio Rafael Viñoly Barreto, formado em Arquitetura na Faculdade de Arquitetura e Urbanismo na Universidade de Buenos Aires, em 1969, foi criticado apenas por duas construções de designe côncavo: O Walkie Tokie em Londres e um hotel em Las Vegas, no qual os hóspedes sofreram queimaduras enquanto se banhavam na piscina.

Figura 2: Edifício Walkie Tokie em Londres.



Fontes: <http://www.glossophilia.org/?cat=1588&paged=2;>
JÚNIOR, 2013.

Podemos ver com esse exemplo que conceituação e articulação de um conhecimento devem ser apreendidos simultaneamente. Os conceitos axiomáticos e as construções geométricas euclidianas por mais arcaicos que sejam não devem ser omitidos ou anulados do currículo escolar, pois

Convém observar que os objetos gráficos – desenhos, imagens, diagramas, ícones – constituem-se em um importante nível intermediário de abstração entre os objetos físicos e as entidades puramente matemáticas. (CARVALHO e LIMA, In CARVALHO, 2010).

Por isso a importância de certos conteúdos ou disciplinas retornarem aos currículos da educação básica pública, já que, segundo Pavanello (1989), em algumas instituições privadas eles nunca foram excluídos de fato. Somos chamados a observar, também, qual a forma que esses conteúdos são abordados, quando os são, pois não é simplesmente o fato de estarem sendo transmitidos aos alunos que há a garantia de aprendizado, pois de acordo com Zuin (2001):

Em nenhum momento, para os geómetras gregos, as construções geométricas poderiam se divorciar da teoria - as construções geométricas estão estreitamente ligadas à teoria da geometria plana, muito antes de Euclides.

Com as crescentes mudanças em todas as áreas, nos tempos atuais, maiores conhecimentos matemáticos despertam os alunos para encontrarem novas soluções e, sem dúvida, o domínio dos conceitos geométricos são imprescindíveis.

O grande progresso tecnológico, sobretudo na área de informática, dá às escolas uma ideia equivocada de que o computador resolve tudo, e que alguns conteúdos podem ser abandonados. Muito pelo contrário, um maior embasamento em Geometria e Desenho Geométrico só trará vantagens para que um técnico, um professor de Matemática, um Engenheiro ou um Arquiteto atuem como profissionais do século XXI, principalmente tendo o computador como ferramenta do seu trabalho. (ZUIN, 2001, p.19).

Se há dezesseis anos a França já se preocupava com o retorno imediato do ensino de Geometria nas escolas de Ensino Fundamental e Superior devido às lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna, no Brasil não aconteceu do mesmo modo, infelizmente. Uma das estratégias de algumas universidades foi criar cursos específicos para seus professores melhorarem a didática quando fossem tratar dos conteúdos de Geometria Gráfica. Nossa sugestão é a inserção da prática do origami como um método auxiliar nas aulas de Geometria Gráfica Bidimensional.

3 ORIGAMI: A ARTE GEOMÉTRICA

3.1 O que é Origami

Origami é uma palavra de origem japonesa que foi criada em 1880 para designar qualquer objeto feito através de papel dobrado (HINDERS, 2015). Ela vem da aglutinação do verbo oru, 'dobrar' e do substantivo kami, 'papel', que no processo de aglutinação gramatical japonesa oru vira ori e kami, gami. Literalmente, significa dobrar papel. É a arte de produzir objetos com papel dobrado.

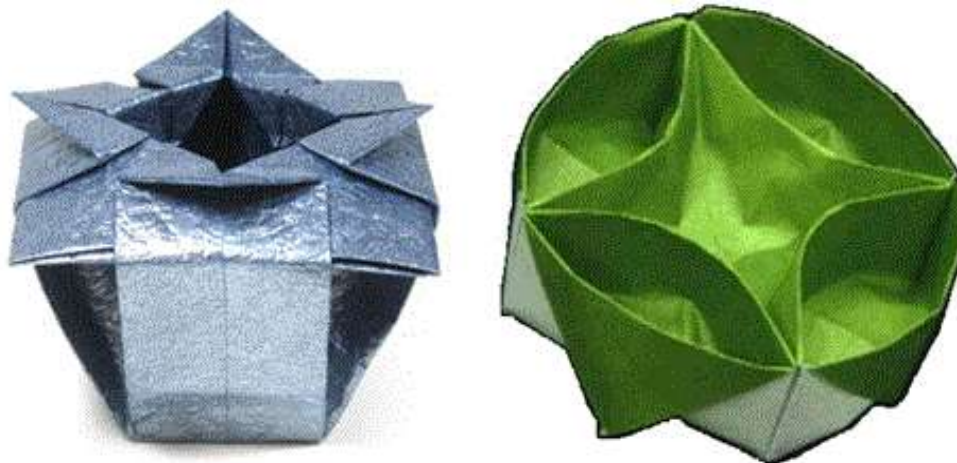
Figura 3: Ideograma da palavra origami.



Fonte: ABE, 2004.

Até hoje, não há um consenso sobre a origem e datação definitiva do origami. Sabemos que sua matéria prima surgiu na China por volta de 105 d.C. (GÊNOVA, 2001), e que também há modelos de dobraduras chinesas tradicionais como a caixa Lazy Susan e o vaso Verdi's Vase.

Figura 4: Vaso Verdi's Vase e caixa Lazy Susan.

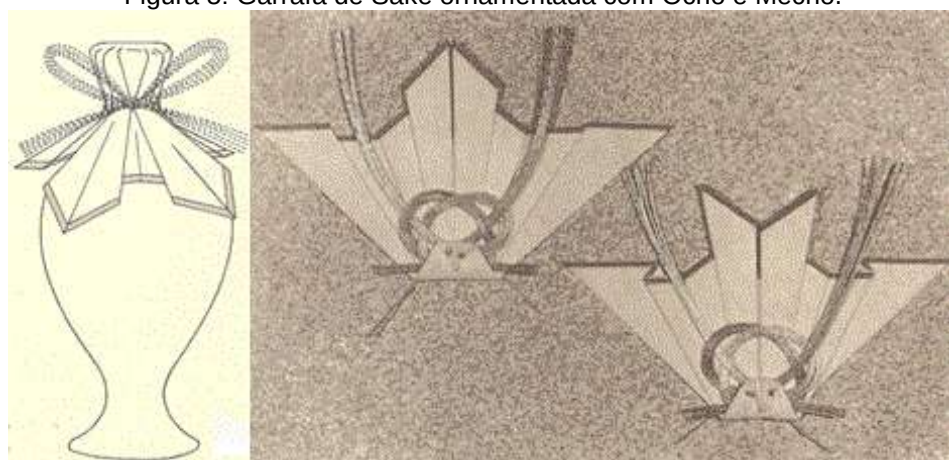


Fontes: www.origami-make.com/origami-vase-verdi/page-21.php;
<https://www.youtube.com/watch?v12Wb3H5rfeE>.

Porém, são de origem japonesa os primeiros registros bibliográficos até então encontrados, que são:

- Um poema composto por Ihara Saikaku em 1680 que diz: “Rosei ga yume no cho wa orisue” que quer dizer “As borboletas do sonho Rosei são dobraduras”, no qual o poeta refere-se a um modelo de origami chamado Ocho e Mecho (borboleta macho e borboleta fêmea) que são utilizados para ornamentar garrafas de sake em cerimônias de casamento simbolizando a união dos noivos (HATORI, 2013).

Figura 5: Garrafa de Sake ornamentada com Ocho e Mecho.



Fonte: HONDA, 1973.

- O Ranma Zushiki, livro de autoria de Hayato Ohoka, escrito em 1734, que trata de um compilado de cópias destinadas a melhorar o deslizamento de divisórias, e que em uma de suas ilustrações se encontram o Tsuru, Yakkosan, barco e o tematebako, um cubo modular cujo nome significa “arca do tesouro mágico” (MITCHELL, 2013).

Figura 6: Páginas do Ranma Zushiki.



Fonte: <https://corazondewashi.wordpress.com/origami/>

- O Hiden Senbazuru Orikata, publicado em 1797, de autoria de Akisato Hito, livro que contém a fórmula de dobrar mil grous em forma de guindaste (HATORI, 2013).

Figura 7: Páginas do Hiden Senbazuru Orikata.



Fonte: <http://zenorig.blogspot.com.br/2012/04/hiden-senbazuru-origami.html>.

- O Chushingura Orikata, escrito por volta de 1800 (HATORI, 2013), por um sacerdote chefe do templo Rokoan (HONDA,1973), trata-se de uma peça teatral em 11 atos registrados em xilogravura, sobre o conto dos 47 samurais, no qual mostra como fazer cada personagem e cenário em dobraduras¹⁶.

Figura 8: Páginas do Chushingura Orikata.



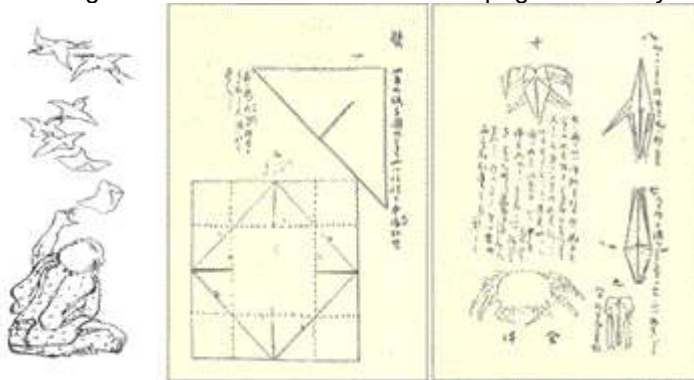
Fonte: <https://corazondewashi.wordpress.com/origami/>.

- Uma xilogravura intitulada: “Um mágico transforma folhas de papel em pássaros”, datada em 1819 de Katsushika Hokusai. (HAYASAKA; NISHIDA, 2015).
- E o Kayaraguza, de Adachi Katsuyuki de 1845, livro mais conhecido como Kan no Mado, erro devido a uma cópia (HATORI, 2013)

¹⁶ Disponível no site <http://artecompageis.blogspot.com.br/> Acesso em 20/01/2016.

descoberta e publicada nos Estados Unidos pela Biblioteca do Congresso em Washington 25, DC, em 23 de julho de 1934 (HONDA, 1973). Provavelmente esses documentos bibliográficos são o grande trunfo nipônico para a suposta origem desta arte.

Figura 9: Xilogravura de Natsushika Hokusai e páginas do Kayaraguza.



Fontes:

www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm; HONDA, 1973.

De acordo com Hatori (2013), antes de o termo origami ser introduzido na gramática japonesa, este tipo de artesanato era conhecido como orisue (sue, fazer/pôr/colocar), orikata (sendo kata 'como', 'modo', 'maneira') e orimono (mono, coisa). Segundo Kazuo (2010), na era Muromachi (1336 a 1573), regras de etiqueta chamada orikata, significando 'modo de dobrar', tornaram-se popular entre a classe dos samurais.

Apesar da popularidade do termo japonês, cada país tem sua própria nomenclatura para as dobraduras em papel como paper-folding em inglês, papiroflexia em castelhano, faltenpapier em alemão e pliage em francês (ALMEIDA, 2000). Na concepção de Hatori (2013), há uma grande possibilidade de o fenômeno das dobraduras em papel terem surgido tanto no oriente quanto no ocidente de modo independente, tanto que este autor cita a predominância de ângulos de 45° nos modelos europeus e de 22°5' nos orientais japoneses. Uma das maiores provas da independência entre as dobras orientais e ocidentais deve-se ao fato de o segredo da fabricação do papel ter chegado ao ocidente quando os árabes derrotaram os chineses na conquista de Samarkanda no século VIII, e levaram cativos, alguns chineses, que conheciam do segredo da fabricação do papel (CARRAMILLO NETO, 1997 *apud* UENO, 2003). O segredo da fabricação do papel revelado resultou em sua chegada a todos os reinos cristãos por volta do Século XII.

Pelo fato de os Mouros serem proibidos, pela religião muçulmana, de criarem representações de seres vivos, eles utilizavam as dobraduras apenas com fins de estudo das propriedades geométricas (RIBEIRO, 1996 *apud* ALMEIDA, 2000).

3.1.1 Origami Tradicional

Os Origamis tradicionais são os modelos, há aproximadamente de setenta a cento e cinquenta, que foram passados entre as gerações de modo oral e posteriormente foram compilados no livro Kayaraguza.

Quando a fabricação do papel conquistou o Japão e sua produção foi intensificada, as classes abaixo da nobreza começaram a ter acesso a esse material, antes caro e utilizado apenas para registro de documentos políticos e religiosos. Segundo Abe (2004), a classe samurai do Século XVII foi responsável pela criação e difusão deste tipo de dobradura tradicional que conhecemos hoje.

Não existem regras rígidas quanto à criação de modelos. Os mais puristas não aceitam cortes nem o uso de adesivos. Geralmente o formato do papel é um quadrilátero, mais especificamente o quadrado.

O modelo tradicional mais conhecido é o tsuru, o grou. Sua popularidade deu-se a partir da Segunda Guerra Mundial quando uma jovem, chamada Sadako Sasaki, contraiu leucemia advinda da radiação das bombas atômicas lançadas em Hiroshima e Nagasaki em 1945. A menina foi incentivada por uma amiga a dobrar mil grous de papel, pois segundo a lenda se dobrarmos mil tsuru qualquer desejo será realizado (ABE, 2004). Sadako se empenhou com a esperança de ser curada, entretanto em 25 de outubro de 1955, com 635 grous de papel concluídos e aos 12 anos de idade falece rodeada de amigos e familiares. Seus amigos completaram os grous que faltavam, e que foram cremados juntos com seu corpo. Amigos e crianças de outras escolas e províncias do Japão arrecadaram donativos que foram usados na construção do Memorial da Paz no local exato onde a bomba explodiu.

Figura 10: Monumento à Sadako Sasaki e Tsuru ou grou em origami.



Fontes: <http://powertothethechildren.org/2012/06/27/mensagem-do-ceu-12/>;
http://www.kamiarte.com.br/simbologia_grou.htm.

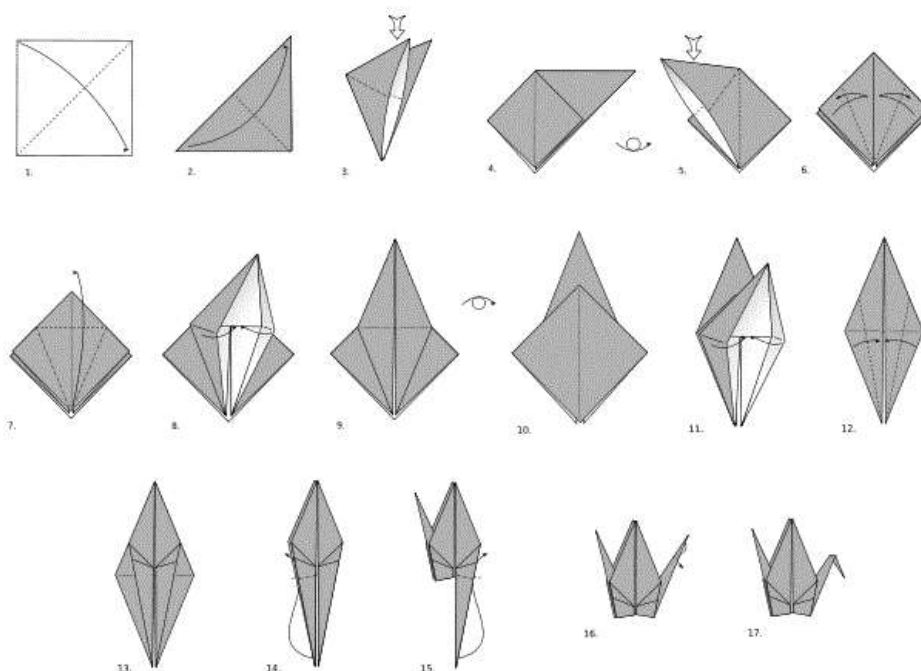
3.1.2 Movimento Origami Moderno e Criativo

O origami moderno, segundo Hatori (2013), começou com Uchiyama Koko que iniciou a produção de novos modelos a partir das bases dos modelos tradicionais e foi o primeiro a patentear suas produções.

Porém, foi o metalúrgico japonês Akira Yoshizawa que foi aclamado como o pai do origami moderno. Além de criar novos modelos, ele “quebra” as regras do origami tradicional quanto ao uso do formato do papel exclusivamente quadrado. Ele começa a explorar outros formatos de papel para a produção de novos modelos como triângulos equiláteros e isósceles, pentágonos, hexágonos e octógonos, e introduz pequenos cortes em algumas de suas peças, prática também utilizada em alguns modelos tradicionais como o kani, caranguejo, do livro Kan no Mado.

Yoshizawa, junto com o inglês Harbin e os americanos Randlett e Oppenheimer e entusiastas de vários outros países ao redor do mundo, fundam a International Origami Society, o Centro de Origami em Nova Iorque e a British Origami Society e são responsáveis pela difusão do origami na década de 1950 em suas terras natais. Yoshizawa cria um sistema de representação visual da sequência de dobras para a reprodução dos modelos que cria, sistema que recebeu contribuições de Samuel Radlett ficando conhecido como sistema Yoshizawa-Randlett. Como se trata de uma representação gráfica de como o papel se apresenta a cada dobra executada, o estímulo visual à percepção das formas geométricas fica evidente. Para realizar um modelo de Origami, basta seguir a sequência das dobras e a simbologia adotada.

Figura 11: Diagrama do Tsuru pelo Sistema Yoshizawa – Randlett.



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_Yoshizawa-Randlett.

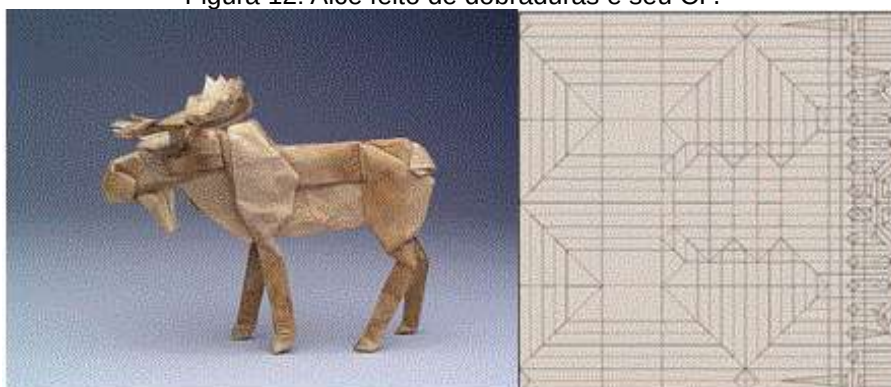
3.1.3 Origami na Contemporaneidade

A arte em papel, assim como a Ciência e outros campos de atividades humanas, está sempre evoluindo ao longo das décadas. Regras, formatos do papel, novos sistemas de sequências de dobras estão surgindo ao redor do mundo.

Robert J. Lang (2016)¹⁷, físico da NASA e entusiasta de dobraduras desde os 6 anos de idade, elaborou o software TreeMaker, o qual cria seus modelos virtualmente antes de executá-los no papel. Ele criou um novo sistema de reprodução de modelos de dobras chamado Crease Pattern ou simplesmente CP. A sigla vem do Inglês ‘Crease’, dobras/pregas/vincos e ‘Pattern’, molde/padrão, é o resultado dos vincos obtidos após o desdobramento de um Origami. Os vincos formados pelas dobras são construídos com cores diferentes pelo software para indicar as dobras côncavas ou convexas, que na linguagem do origami são chamadas de dobras de montanha ou vale respectivamente.

¹⁷ Disponível em <http://www.langorigami.com/article/treemaker> acesso em 26/02/2016.

Figura 12: Alce feito de dobraduras e seu CP.



Fonte: <http://www.langorigami.com/artwork/bull-moose-opus-413-0>.

Alperin e Lang (2006), assim como outros projetistas de origami, não se limitam a criar novos modelos de dobraduras, mas investigam suas propriedades matemáticas encontradas nas relações de proporção dos padrões dos vincos formados pelas dobras. Uma de suas últimas descobertas foi a quinseção, que é repartir um ângulo qualquer em cinco partes iguais através das dobraduras.

O Origami, hoje, serve de inspiração para projetos arquitetônicos, de jardinagem, painéis de satélites e, espantosamente, para projetos na medicina e em tantas outras áreas.

Em 2010, a China foi abalada por vários sismos que mataram milhares de pessoas e deixando outros milhares desabrigados. Sabendo que o governo chinês planejava a construção de 1,5 mil abrigos. O arquiteto Ming Tang, inspirado nas formas geométricas das dobraduras, idealizou um abrigo temporário que fosse dinâmico e que não degradasse o meio ambiente. Sua carcaça é feita de bambu e o telhado de papel impermeável.

Figura 13: Projeto Arquitetônico de Ming Tang.



Fonte: Casa e Jardim Online, 2011.

Os designers ingleses Bike e Begum Ayaskan, fundadores do Studio Ayaskan, inspirados no Origami, projetaram um vaso que “cresce” junto com a planta e deram o nome de Growth (crescimento). Como a troca da planta de um vaso para outro, além de ser trabalhosa requer um novo recipiente a cada etapa do crescimento da planta, e esses vasos milimetricamente calculados além de bonitos, encaixam-se no padrão de projetos voltados à sustentabilidade do planeta.

Figura 14: Vasos Growth.



Fonte: Casa Vogue online 2015.

Shannon Zirbel, uma estudante de PHD em Engenharia Mecânica, e Brian Trease, engenheiro mecânico do Laboratório de Propulsão da NASA, projetaram um painel solar para coletar energia solar diretamente do espaço. Eles tiveram a colaboração do físico e especialista em origami, Robert Lang, sobre os cálculos da espessura dos painéis. O projeto ainda está em fase de testes desde 2014.

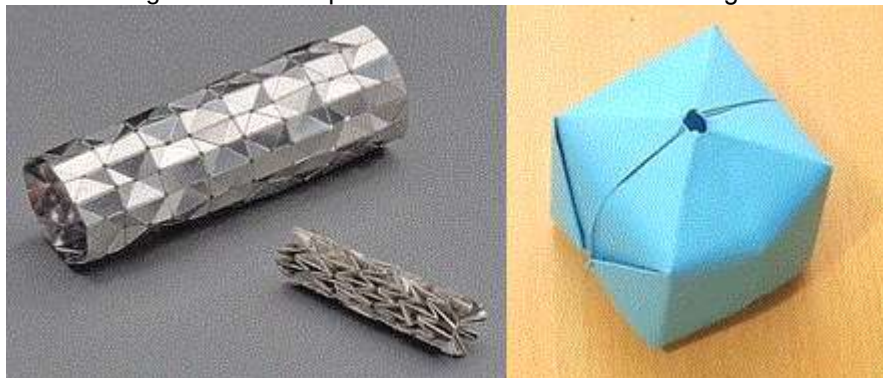
Figura 15: Projeto de painel solar da NASA.



Fonte: <http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2014-277>.

Zhong you, Doutor em Ciência da Engenharia na Universidade de Oxford, e a também Doutora em Engenharia Física, Kaori Kuribayashi Shigetomi, em 2003, criaram um protótipo de stent cardíaco baseado na dobra da bomba d'água, um modelo de origami tradicional. O stent precisa ser fino para viajar pelas veias e artérias até chegar no local em que será estendido viabilizando o fluxo sanguíneo. Esse protótipo retraído tem 12mm e estendido tem 23mm e é feito de aço inoxidável. Em 2005, o stent implantável foi finalmente fabricado e utilizado. Feito de bioplástico, o tecido do sistema circulatório humano pode crescer ao longo do stent e permanecer no paciente permanentemente.

Figura 16: Protótipo do stent cardíaco e bomba d'água.



Fontes: <http://www.laweekly.com/arts/know-how-to-fold-em-how-origami-changed-science-from-heart-stents-to-airbags-2372322>; <http://help-me.pp.ua/11274-yak-zrobiti-povtryanu-kulku-orgam.html>.

Como poderíamos imaginar que uma arte, criada ao longo de muitos séculos e transmitida oralmente, que evoluiu no processo de tentativa e erro, chegaria ao ponto de contribuir no salvamento de vidas? O que mudou entre o origami tradicional, criado apenas para diversão da classe feudal japonesa, e o origami moderno e altamente complexo que conhecemos hoje?

Robert Lang (2008)¹⁸ afirma que tudo começou a mudar quando pessoas começaram a aplicar princípios matemáticos na arte do origami. Descobriram que para fazer qualquer tipo de dobradura era preciso obedecer a quatro leis:

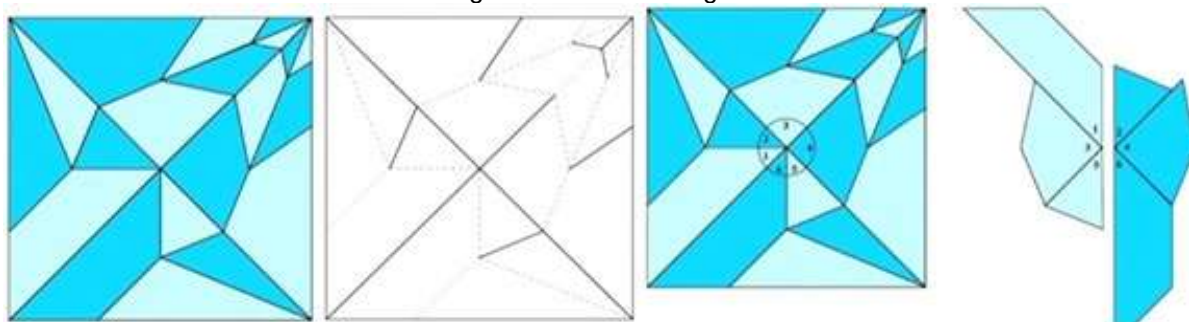
- 1) Qualquer padrão de vinco (CP) só pode ser colorido com apenas duas cores, sem ter a mesma cor em regiões subjacentes.
- 2) O número de dobras de monte e de vale (côncava e convexa) sempre diferem em dois, para mais ou para menos.

¹⁸ Argumento extraído da apresentação de Robert Lang no TED Talk Show em 2008 disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno> acesso em 01/02/2016.

- 3) Os ângulos alternados ao redor de um vértice somam para uma reta (ângulo raso).
- 4) Não há auto interseções em sobreposições de dobras. Independente de como juntamos as dobras e as folhas, uma folha nunca pode penetrar uma dobra.

Na figura 17, no segundo desenho, as dobras de montanha são representadas por linhas cheias e as dobras de vale pelas linhas tracejadas.

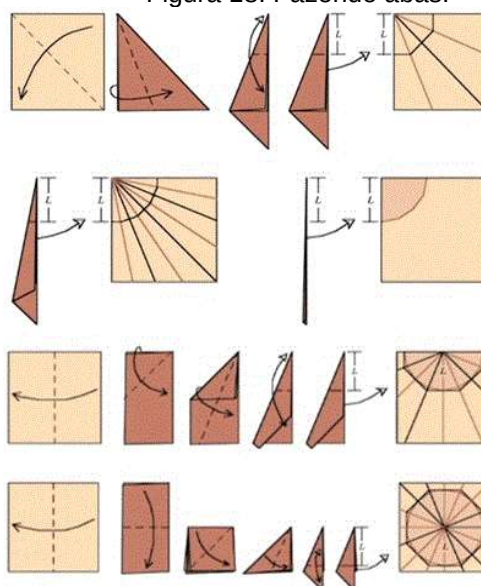
Figura 17: Leis do Origami.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno>.

A partir dessas quatro leis, todo e qualquer tipo de objeto pode ser representado por uma escultura de papel dobrado. Porém, há alguns objetos que podem ser bastante complexos de serem dobrados. Um exemplo são os insetos. Um CP de um inseto requereria bastante estudo e tempo para ser desenhado à mão antes de ser executado, pois eles possuem antenas e patas muito finas. Para resolver essa questão é que surge o software TreeMaker. Neste software, essas partes finas do inseto são chamadas de abas. Para se fazer uma aba, é preciso dobrar o papel diversas vezes.

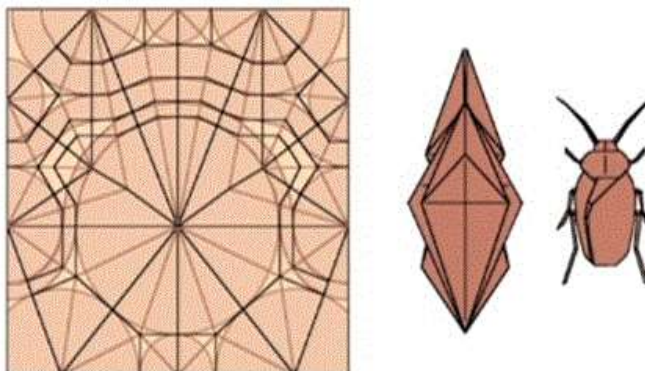
Figura 18: Fazendo abas.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno>.

Criar a representação de um inseto, dependendo da quantidade de antenas e patas, vai resultar no surgimento de muitas abas, que se olharmos mais de perto lembra uma circunferência. Observando que, será utilizado uma única folha de papel para dobrar o objeto final. Então, o que o software faz é o cálculo que Lang (2008) denomina de “empacotamento de círculos”, que são formados pelas abas. Claro, é praticamente impossível representar uma circunferência, já que é um ente abstrato, muito menos com dobras em origami. O máximo que se consegue são polígonos de n lados. Então o TreeMaker faz esse cálculo aproximado de quantas abas serão necessárias para criar o objeto desejado, entrelaçando-as através dessas circunferências. Na figura 18, vemos um CP ainda em formação, seguido de sua base e o objeto final.

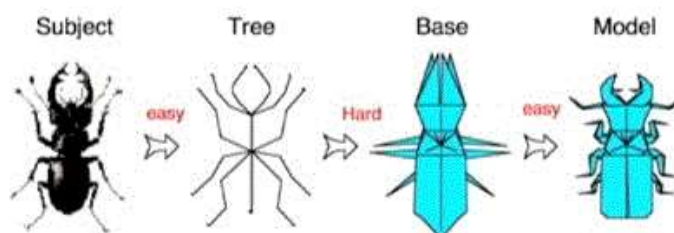
Figura 19: Empacotamento de círculos para criação de abas.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno>.

Projetado por Robert Lang (2016) em 1998, o software TreeMaker, literalmente do inglês “fazendo árvores” é a nova ferramenta de criação de origami através do computador. Ele reduz o objeto que se quer representar em abas e assim surge a “árvore” ou a representação linear do objeto, que depois é rebatida criando a base que será dobrada. A base pode ser dobrada de n maneiras, porém o origamista tem que observar se o modo de dobragem está de acordo com a quarta lei do origami, para que o modelo seja realizado com sucesso.

Figura 20: Concebendo um novo modelo de dobradura.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno>.

Geometricamente falando, o modelo de origami consiste em um objeto concreto, no qual todas as suas propriedades tridimensionais - altura, largura e profundidade – são preservadas. Enquanto que, sua representação em livros, tela do computador possuem apenas duas dimensões – altura e largura – configura-o como um objeto gráfico bidimensional. Os polígonos que as dobras do modelo deixam no papel são objetos geométricos, matemáticos e abstratos, pois só existem de fato em nossa mente. Tudo que vemos no mundo real não passam de representações aproximadas e imperfeitas dos entes ideais.

3.1.4 Origami como modelo didático

Foi na Alemanha, segundo Oliveira (2004)¹⁹, que o educador e criador do Jardim de Infância (Kindergarten), Friedrich Froebel (1782 - 1852), inseriu as dobraduras de papel em seu sistema pedagógico. Essa abordagem se dividia em três estágios: Dobras da verdade, dobras da vida e dobras da beleza. É justamente no primeiro estágio que a criança é estimulada a descobrir, por si só, os princípios da Geometria euclidiana através das dobraduras. O movimento Kindergarten de Froebel viajou para o Japão e teve ampla aceitação, visto que, naquele país, já

¹⁹ Disponível em <http://www.nilsonjosemachado.net/20041008.pdf> acesso em 15/11/2015.

havia a tradição de dobragem de papel. O formato padrão de papéis quadrados medindo 15cm por 15cm, comercializados no Japão, foi a herança deixada pelo modelo educacional de Froebel. Entretanto, segundo Abe (2004), logo após a Primeira Guerra Mundial, as aulas de origami são praticamente banidas das escolas japonesas, pois o sistema educacional da época considerava não didática a repetição arbitrária de receitas de dobraduras, sem explorar a criatividade da criança. O origami passou, então, a ser uma atividade cultural dentro do ambiente familiar.

O uso do origami como modelo didático vem sendo explorado por entusiastas, matemáticos, engenheiros, físicos e designers na atualidade. Dentre alguns podemos destacar David Michell (2008), com seus cubos engastados e exploração de poliedros modulares, Miyuki Kawamura (2001), com seus polígonos e poliedros regulares, semirregulares e estrelados, Tomoko Fuse (1992) e suas espirais, Alperin e Lang (2006), com suas pesquisas recentes sobre os axiomas do origami.

Figura 21: Poliedros Platônicos em origami modular.



Fonte: TORRES, 2012.

Segundo Almeida (2000), esses modelos matemáticos geométricos “são aproximações dos entes matemáticos devido à impossibilidade de se construir ou representar concretamente todas as abstrações exigidas por esses entes.” (p. 45). Então surge a expressão ‘modelos mentais’ ou abstratos, que precisam de um suporte físico para serem “demonstrados”. Esses suportes físicos concretos recebem a denominação de modelos concretos ou modelos plásticos didáticos. No caso do modelo concreto, ele já é apresentado pronto ao aluno, passível apenas de manipulação tátil e visual. Os modelos plásticos também podem ser assim

caracterizados, porém possuem um diferencial. Carvalho e Lima (2010) alegam a importância do material manipulativo porque “a passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato, é um dos objetivos centrais do ensino e da aprendizagem da Geometria, [...]” (p. 139).

Segundo um Site de Etimologia²⁰, plástico vem do Latim *plasticus* e do Grego *plastikos*, que quer dizer “capaz de ser moldado”. Nesse caso, um modelo plástico pode ter o mesmo valor conceitual a um modelo concreto, algo que possa ser manipulado pelo aluno para sua construção do conhecimento. Segundo Ferreira (2009), didático está “relacionado à didática que, é a técnica de dirigir e orientar a aprendizagem. ” (p. 235). Concordamos que um modelo plástico didático está inteiramente interligado ao processo de ensino e aprendizagem. Para Almeida (2000):

A importância do material manipulativo advém do fato de que o aluno ao confeccionar ou manusear os modelos fica com um grau maior de relacionamento com o modelo porque este foi visto em diferentes etapas e ângulos, permitindo-lhe, portanto, identificar melhor os relacionamentos e as propriedades do modelo. (p. 27).

No modelo plástico, o aluno tem a oportunidade de ele mesmo confeccionar o seu modelo concreto que irá lhe auxiliar na compreensão de conceitos, inferências e conjecturas resultantes do intercâmbio entre seus modelos concreto e abstrato. Nessa proposta, o origami se encaixa perfeitamente neste sentido.

No Brasil, podemos citar a recente pesquisa de Rancan (2011), que utilizou o origami em sua turma de 8º ano do Ensino Fundamental, na qual buscou relacionar conhecimentos de Geometria vinculados às dobraduras manuais, alegando que:

As dobraduras podem ser utilizadas de várias maneiras como um recurso interessante para a exploração de propriedades geométricas das figuras planas e espaciais, como ângulos, segmentos de reta, paralelismo, perpendicularismo, aresta, face, vértice, entre outros. A construção e utilização de exemplos e sua análise detalhada trazem sugestões para bem aproveitar essa alternativa de trabalho no ensino da Geometria. Uma vez que a manipulação de objetos permite a construção dos modelos mentais dos diversos elementos geométricos, é possível para o professor incluir um importante recurso didático que é o Origami. (RANCAN, 2011, p. 11).

A pesquisa monográfica de França (2013), na qual aplicou um questionário com diletantes e professores de origami da Associação Japonesa do Recife mostra que as pessoas que praticavam a arte do origami há mais de dez anos, mesmo

²⁰ Disponível em <http://origemdapalavra.com.br/site/?s=plasticus>. Acesso em 03/12/2015.

alegando que tinham dificuldades com os conteúdos geométricos, foram os que obtiveram mais acertos no questionário de conhecimentos específicos sobre polígonos, ângulos, simetria e malhas poligonais.

Podemos considerar também o ponto de vista dos sujeitos que alegaram que as dobraduras “auxiliaram o processo de aprendizagem dos conceitos geométricos, principalmente pelo fato de se apresentar como uma atividade divertida e o resultado bastante atrativo e bonito.” (RANCAN, 2011, p. 48). Podemos observar o quanto os sujeitos valorizam as atividades lúdicas, pois o ser humano, em toda sua trajetória na construção do conhecimento, é portador de dois fatores que o impulsionam: a necessidade e o prazer. Quando decidimos estudar, treinar, pesquisar ou conseguir algo, só o fazemos se isto for vital para a nossa sobrevivência ou se nos proporciona bem-estar (TOLDBOD, 1997). No modelo educacional atual, unir esses dois fatores é o desafio primordial para um ensino e aprendizagem significativos em meio a uma dispersa e distraída geração midiaticizada. As dobraduras, por exigir que os sentidos (tato, visão e audição) estejam concentrados na produção das peças, ou na execução de uma ideia proposta, pode ser uma ferramenta profícua na aprendizagem dos conhecimentos euclidianos, pois segundo Piazzzi (2014):

Em um computador eletrônico, “aprender significa acrescentar software (códigos) sem mexer no hardware (fiação).

Em um computador biológico como nosso cérebro, ao contrário, “aprender” significa alterar o próprio hardware, mudar circuitos e treinar redes neurais para que criem novos percursos”.

No processo da verdadeira aprendizagem há um crescimento dos dendritos neurais, ou seja, a própria fiação fica mais rica e complexa.

E, quanto mais complexa, maior será a inteligência operacional do cérebro. (PIAZZI, 2014, p.65).

Figura 22: Desenvolvimento das redes neurais cerebrais.



Fonte: PIAZZI, 2014.

3.2 Os Axiomas do Origami

O Axioma, palavra de origem grega, segundo Houaiss (2009), é uma premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém por ela mesma indemonstrável. Os axiomas de Euclides (ponto, reta e plano) são passíveis apenas de representações gráficas. Os axiomas do origami se utilizam dessas representações dos axiomas de Euclides para demonstrar cálculos gráficos geométricos que possuem correspondência analítica.

Segundo Monteiro (2009), na década de 70, estudiosos começaram a explorar as relações matemáticas das dobras do origami. O físico nuclear e origamista²¹ japonês naturalizado italiano, Humiaki Huzita, introduziu as seis operações de origami que hoje são conhecidas como os axiomas de Huzita ou HAs²², que consistem em maneiras diferentes de definir em uma única dobra do papel operações geométricas, reunindo combinações de pontos pré-existentes. A partir destes seis HAs, Huzita demonstrou que todas as construções a régua e compasso eram possíveis com as dobraduras em papel.

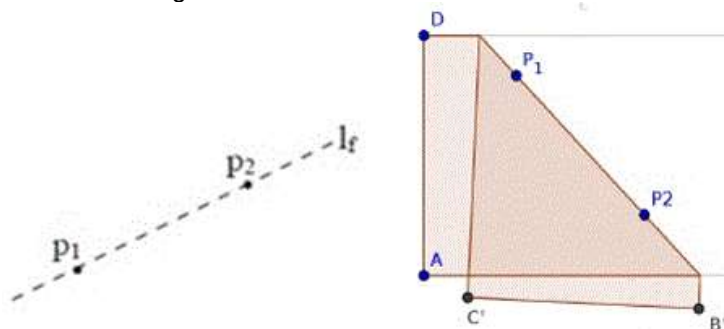
Em 1989, o matemático francês Jacques Justin publica um artigo apresentando sete operações de dobras. Paralelamente a Jacques Justin, Hatori Koshiro “descobre” o sétimo e até então último axioma, porém, isso no ano 2002. Mais tarde, em 2003, o físico e matemático americano Robert Lang comprova algebricamente esses sete axiomas.

Axioma 1: Dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar uma linha conectando-os. Este axioma possui descrição semelhante ao primeiro postulado do livro 1 de Euclides: “Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.” (EUCLIDES, 2009, p. 98).

²¹ Profissional em criar ou reproduzir objetos feitos com papel dobrado.

²² Sigla da expressão em Inglês “Huzita Axioms”.

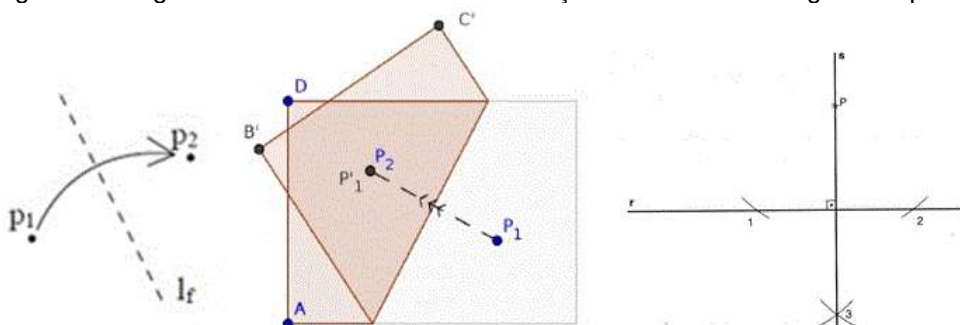
Figura 23: Primeiro axioma de Huzita.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Axioma 2: Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar P_1 para P_2 . Ou seja, a criação da mediatriz de P_1 e P_2 . Esta propriedade é justificada pelo quarto postulado do livro 1 de Euclides: “E serem iguais entre si todos os ângulos retos”. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

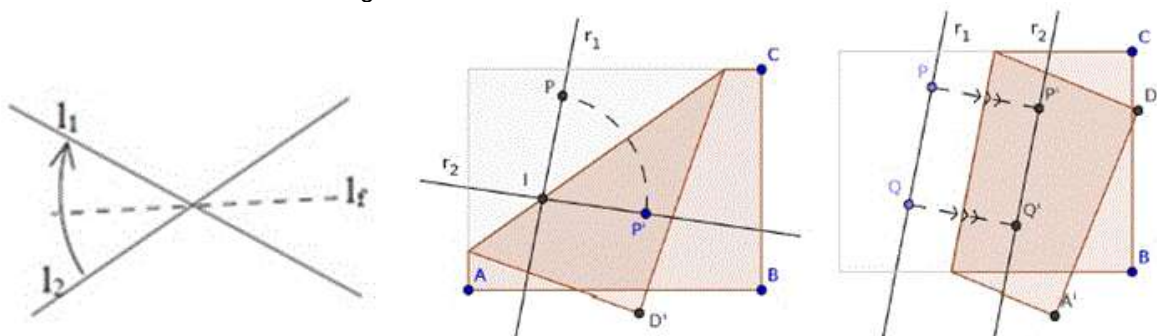
Figura 24: Segundo axioma de Huzita e construção da mediatriz a régua compasso.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009; MARCHESI JÚNIOR, 2009.

Axioma 3: Dadas duas linhas l_1 e l_2 , podemos dobrar linha l_1 para l_2 . Ou seja, a criação da bissetriz de l_1 e l_2 . Este axioma resulta na construção da bissetriz, caso as retas sejam concorrentes (o traçado está no item 6.1). No caso de retas paralelas, a dobra resultará em outra reta paralela e equidistante das duas retas dadas. Este axioma é justificado pelas sexta e sétima “noções comuns” do livro 1 de Euclides: “6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si. 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.” (EUCLIDES, 2009, p. 99). No caso das retas concorrentes, ajustando-as uma a outra através da dobra elas tornam-se iguais entre si, a dobra resulta na bissetriz do ângulo formado pelas duas retas. No caso das retas paralelas, ao se ajustarem entre si, sua dobra resulta em outra reta paralela equidistante das duas retas já existentes anteriormente.

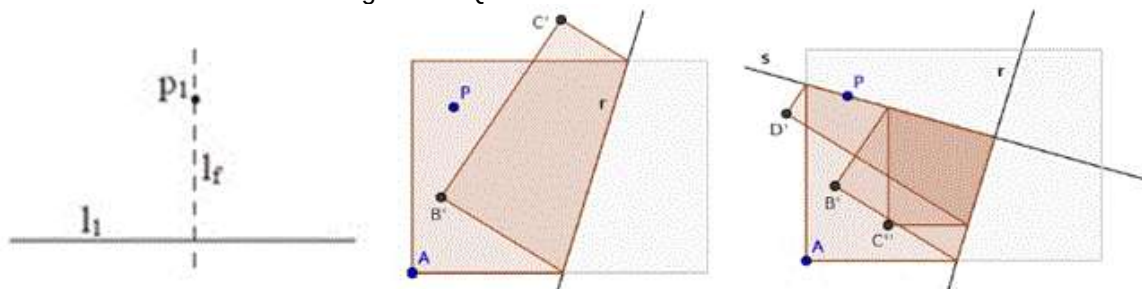
Figura 25: Terceiro axioma de Huzita.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Axioma 4: Dados um ponto P_1 e uma linha l_1 , nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l_1 passando através do ponto P_1 . Com este axioma, podemos determinar a menor distância entre uma reta e um ponto fora desta reta, porque todo segmento perpendicular em relação a outro elemento (reta, segmento) será sempre a menor distância entre esses elementos.

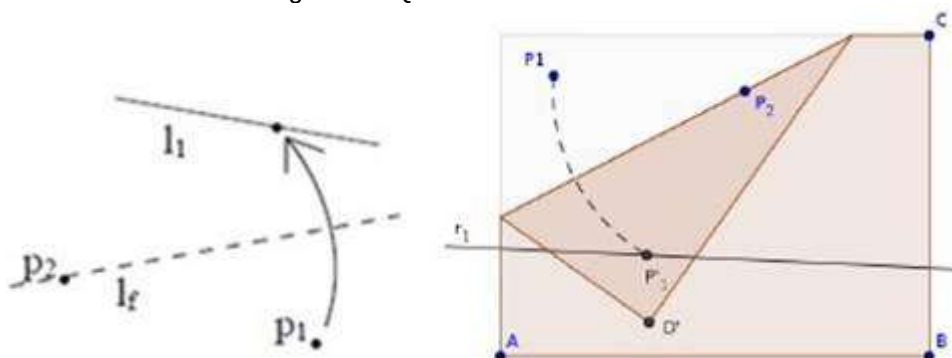
Figura 26: Quarto axioma de Huzita.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Axioma 5: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma linha l_1 , nós podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre l_1 e que passa através do ponto P_2 .

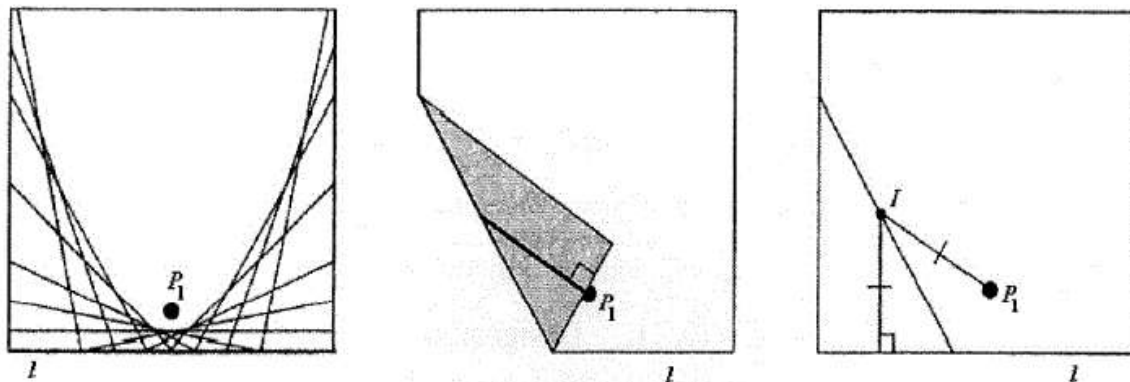
Figura 27: Quinto axioma de Huzita



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Com este axioma podemos construir as retas tangentes a uma parábola se tomarmos P_1 como o foco e l_1 como a reta diretriz. No caso da figura abaixo, a própria borda do papel é o segmento l_1 .

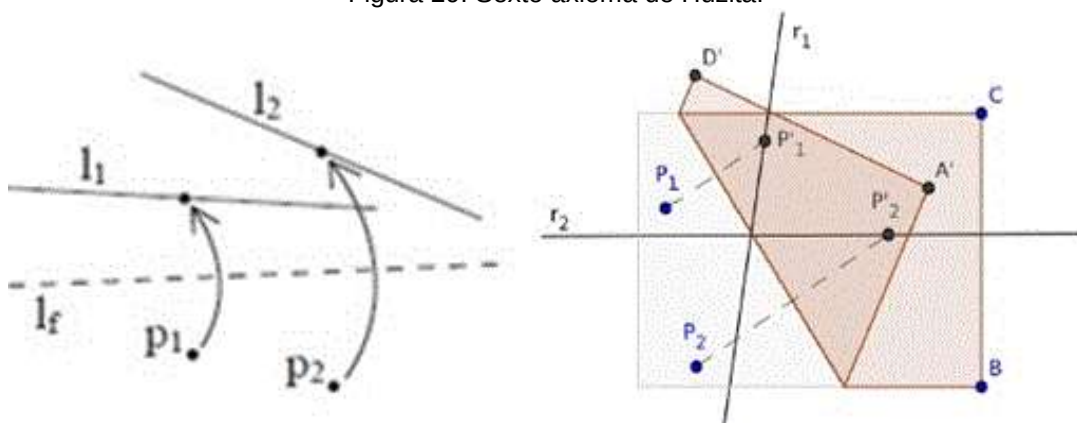
Figura 28: Construção das tangentes a uma parábola em dobraduras.



Fonte: MONTEIRO, 2009.

Axioma 6: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas linhas l_1 e l_2 , nós podemos fazer uma dobra que coloca P_1 sobre l_1 de linha e coloca P_2 para linha l_2 . Quando os pontos P_1 e P_2 são rebatidos respectivamente em l_1 e l_2 , estamos gerando os pontos P_1' e P_2' . A reta resultante dessa dobra é uma mediatriz comum entre os pares de pontos P_1/P_1' e P_2/P_2' e também uma reta tangente comum a duas parábolas, sendo P_1 foco e l_1 sua reta diretriz da primeira parábola e P_2 foco e l_2 reta diretriz da segunda parábola.

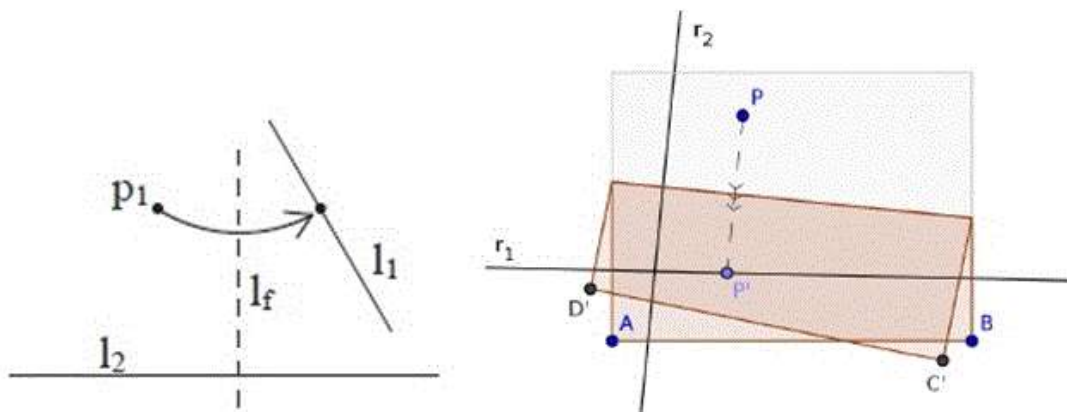
Figura 29: Sexto axioma de Huzita.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Axioma 7: Dados um ponto P_1 e duas linhas l_1 e l_2 , nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l_2 que coloca P_1 sobre linha de l_1 .

Figura 30: Último axioma proposto por Justin e Hatori.



Fontes: ALPERIN e LANG, 2006; CAVACAMI e FURUYA, 2009.

Segundo as últimas pesquisas de Alperin e Lang (2006), não existem outros axiomas até o momento presente.

É interessante notar como os pesquisadores transformam uma simples brincadeira, que é o origami, em uma ferramenta em potencial, na Física, na Medicina, na Ciências, na Matemática e por que não também na educação? Segundo Almeida (2000), nas escolas chinesas, o origami é uma disciplina obrigatória, e na maioria dos países asiáticos há a tradição de dobragem de papel. Seria este estímulo visual o divisor de águas, ou seria o sistema educacional em si? Seria o contexto histórico, político, cultural e educacional de cada instituição? Ou seria a praxeologia adotada? A Teoria Antropológica do Didático (TAD) poderá nos explicar melhor essas relações com o saber.

4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD

A Teoria Antropológica do Didático, também conhecida pela sigla TAD, foi formulada pelo Professor e Doutor em Matemática Yves Chevallard, nascido em 1946 em Marselha, França. Atualmente, Chevallard está aposentado pela IUFM d'Aix-Marseille e ficou reconhecido internacionalmente pelo seu trabalho A Transposição Didática que deu origem à atual TAD, que traz uma ferramenta para análise e modelagem das atividades humanas relacionadas à Matemática.

Para que a didática, que é uma construção cognitiva humana e uma técnica utilizada para dirigir e orientar o saber, se realize são necessários três pilares primitivos: os objetos 'O' (que são o alvo de ensino das instituições e de aprendizagem das pessoas), as pessoas 'X' (que serão sujeitas às relações de I com O), e as instituições 'I' (onde são criados, utilizados, ensinados e ou transportados os objetos).

Segundo Houaiss (2009), Instituição é uma estrutura material e humana que serve à realização de ações de interesse social ou coletivo, mas, para a TAD, a palavra instituição não se prende a um substantivo concreto. Tanto a escola, curso, família, vida cotidiana, estado amoroso podem ser instituições. Cada instituição possui seu conjunto de objetos chamados de Objetos Institucionais 'O_I'. Porém, os objetos podem deixar de existir ou não existir para I, em determinado tempo histórico ou em determinada cultura, respectivamente. Para qualquer instituição I, existe um tempo institucional 't_I'. Vemos claramente este fenômeno na instituição Escola Pública Brasileira, em que o objeto música não existia até uma década atrás no currículo. Com isso, temos a relação objeto institucional dependente do tempo = O_I(t), no qual esse tempo t também afeta I. Esse fenômeno também ocorreu com o conteúdo das construções geométricas. Essa mudança no conjunto de O_I dentro de I.

De acordo com a TAD, todas as pessoas X são sujeitos de instituições I, seja ela familiar, escolar, social, eclesiástica etc. Estamos sujeitos às suas regras, aos seus dogmas e às suas leis, induzidas ou por livre arbítrio. Podemos dizer que me torno sujeito da instituição I, Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica – LEG –, quando escolho ou decido ser um de seus membros. Suponhamos que a pessoa X

(eu) entra na instituição I (LEG) e seja O (usar os instrumentos de desenho) um objeto institucional para I. Segundo Chevallard (1992):

[...] O objecto O começará a <<viver>> para X *sob o constrangimento da relação* institucional $R_I(O)$. Por outras palavras, vai construir-se, ou alterar-se, uma relação pessoal $R(X,O)$, sob o constrangimento $R_I(O)$ – e, mais amplamente, sob o constrangimento do contrato institucional C_I . O objecto O poderia ou não existir para X antes de sua entrada em I. Em todos os casos, $R(X,O)$ [...]altera-se. Direi então *que há aprendizagem* (relativamente a O) (CHEVALLARD,1992, In BRUN, 1996. p. 130).

Quando $R(X,O)$ não se altera, pode-se dizer que X não aprendeu. Ou seja, não houve processo didático e X torna-se um sujeito inadequado de I, se ela não lhe introduziu alterações cognitivas. Para ocorrer essas alterações cognitivas é preciso que haja uma intenção didática de I manifestada através dos sistemas didáticos (SD), no qual:

Um sistema didático (SD) comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma *posição de professor* P, um ou vários sujeitos de I que nele ocupam uma *posição de aluno* a, e finalmente um objeto O, pertencente a $P_I(a)$, que é o conjunto dos investimentos didáticos para I. (CHEVALLARD, 1992, In BRUN, 1996. p. 133).

Para que os SD funcionem são necessárias duas condições: a primeira é que se estabeleça um contrato didático e a segunda que este esteja inserido em um sistema de ensino. Os estados desses SD pertencentes a I são chamados de situação institucional, no qual, segundo Chevallard (1992):

Tomemos então para I um sistema didático SD (X, Y, O), em que X é o aluno, Y o professor e O o investimento didático. Como qualquer instituição, um sistema como este só pode existir em determinadas condições do meio. ” (CHEVALLARD In BRUN, 1996.p. 138).

No caso, o “meio” aqui apresentado são os objetos O, já conhecidos por X, no qual para a aprendizagem de novos ou a transformação dessa $R(X, O)$ em $R(X, Y, O)$ serão reavivados por Y no qual: “Sem meio – sem os andares inferiores –, um sistema didático não pode funcionar: é impossível acrescentar um andar quando nada há por baixo, nem sequer fundamentos.” (CHEVALLARD In BRUN, 1996. p. 136). Ou seja, o meio é essencial para a aprendizagem, porém ele também pode se tornar um obstáculo cognitivo intransponível dependendo de X.

Voltando aos sistemas de ensino, no qual o objetivo primordial é a aprendizagem de O por X, X terá uma relação direta com o saber \$ produzida pelo aprendizado de O ou simplesmente o objeto “saber” qualquer coisa R (X, \$).

Sendo assim, todas as instituições I possuem seus respectivos sistemas didáticos (SD) pertencentes aos seus sistemas de ensino, nos quais ocorrem as situações didáticas decorrente das relações institucionais entre seus pilares primitivos (I, X, O), que são organizadas segundo uma sequência de atividades com o objetivo da alteração cognitiva, ou seja, a aprendizagem. O estudo da organização dessas práticas é denominado de praxeologia. Segundo Barbosa e Lins (2010):

Podemos entender uma organização praxeológica ou praxeologia, como a realização de certo tipo de tarefa T, que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo T, através de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ , que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ . (p. 04).

Segundo a TAD, toda atividade humana segue uma ordem prática. A essa ordem, a TAD chama de praxeologia, do latim *praxis*, ‘prática’ e logos, ‘estudo’, literalmente o ‘estudo da prática’. Essa praxeologia é composta por quatro componentes: os tipos de tarefa, representadas pela letra maiúscula grega T (tau), as técnicas, representadas pela letra minúscula grega τ (tau), as tecnologias, representadas pela letra minúscula grega θ (teta) e a teoria, representada pela letra maiúscula grega Θ (teta).

A tarefa T é um problema a ser resolvido ou uma atividade a ser realizada. A técnica τ é a maneira de fazer, realizar, resolver T, que pode ser organizada em subtipos de tarefas. A tecnologia θ vai justificar e compreender o porquê a técnica τ funciona e a teoria Θ por sua vez vai justificar a tecnologia.

Algumas construções geométricas possuem mais de uma técnica τ para ser realizada, outras possuem uma única τ . Não sabemos o número exato de técnicas de resolução de uma dada tarefa, pois novas técnicas podem surgir ao longo do tempo.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O curso de Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG) foi criado em 19 de Maio de 1951, e ofertado pela primeira vez em 16 de fevereiro de 1952 pela Universidade Federal de Pernambuco com o nome de Professorado de Desenho e sediado na Escola de Belas Artes de Pernambuco com o objetivo de suprir a deficiência didática de engenheiros e arquitetos que lecionavam disciplinas relacionadas à Geometria Gráfica.

O parecer do MEC 59/61 mudou a denominação do curso para Licenciatura em Desenho e Plástica. Após a retirada dos conteúdos de Desenho Geométrico dos vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharias na década de 70, resultando na quase extinção da disciplina de Desenho no ensino público, o curso de Professorado de Desenho foi desativado. Sendo reativado em 1983 na UFPE.

Em 1996, é incluído, nos concursos vestibulares, questões de conhecimentos específicos não apenas do curso, mas para outros cursos do mesmo grupo. Em 2009 sofre outra reforma curricular, aumentando a carga horária de 2535 para 3095, incluindo disciplinas voltadas à tecnologia computacional e às exigências do mercado e, por este, motivo apresentou a necessidade de mudança no nome do curso, sendo modificado para o que conhecemos hoje.

O curso, atualmente, tem o objetivo de formar professores que atuem tanto na Educação Básica e em cursos da Educação Profissional e Tecnológica, quanto no seguimento da carreira acadêmica. A entrada é anual e abrem 30 vagas por ano letivo em período integral. A duração mínima é de 8 períodos e a máxima de 14 períodos. Entretanto, os ingressos ao curso chegam com muitas dificuldades quando apresentados aos conteúdos de Geometria euclidiana e gráfica, principalmente as construções a régua e compasso. Por este motivo, o curso LEG configurou-se como o nosso locus da pesquisa. Introduzir métodos lúdicos, como o origami, pode ajudar a ampliar esse leque de opções, não apenas no ensino básico, a pergunta era por que não na universidade?

5.1 O Experimento

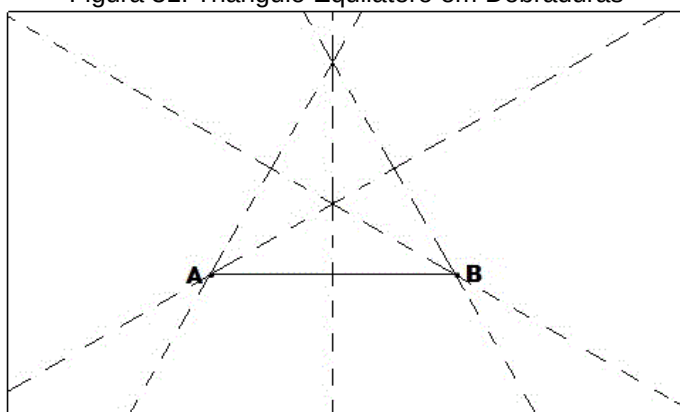
Em princípio, elaboramos um experimento contendo oito tarefas de construções euclidianas para serem resolvidas em régua e compasso e, depois, as mesmas tarefas, resolvidas em origami. Porém, acordamos na escolha de algumas construções que se encaixassem nas seguintes categorias:

- Uma questão econômica em origami, porém trabalhosa em régua e compasso.
- Uma questão trabalhosa em origami e econômica em régua e compasso.

Das tarefas que pesquisamos, as construções da mediatriz e bissetriz se encaixam na primeira exigência, pois, na sua construção a régua e compasso há a sequência de duas etapas, enquanto que para o origami apenas uma etapa é necessária como vemos nos segundo e terceiro axiomas do origami.

Para a tarefa trabalhosa em origami e mais simples em régua e compasso foi proposta a construção do triângulo equilátero por um segmento dado. Para sua construção, precisaremos primeiro construir a mediatriz do segmento AB dado, levando o papel até B tocar essa mediatriz, e essa reta criada irá apoiar as dobras dos lados que faltam para fechar o triângulo equilátero. A mesma construção a régua e compasso é feita com três passos simples: construir a mediatriz do segmento AB com a interseção dos arcos de raio com medida de AB. A própria interseção destes arcos já determina o vértice C do triângulo. Ou seja, em origami, a construção é mais complexa e trabalhosa do que parece, necessitando de mais tempo e etapas de dobras para ser resolvida.

Figura 31: Triângulo Equilátero em Dobraduras



Fonte: Arquivo da autora.

Na primeira etapa, utilizamos papel sulfite branco no formato A5 (10,5cm x 14,85cm) para as construções a régua e compasso. Na segunda etapa, utilizamos papel vegetal no formato A6 (10,5cm x 7,4cm) para as atividades em origami. Poderíamos ter utilizado papel sulfite branco para a segunda etapa, porém para os voluntários, seria interessante a visualização dos vincos e pontos formados pelas dobras para constatação de propriedades geométricas.

A primeira fase do experimento também consistiu em dois questionários (em anexo). O primeiro questionário, aplicado individualmente, com o objetivo de identificar o perfil dos sujeitos, contém nove questões sobre a relação dos voluntários com o origami, se tiveram aulas de Geometria na educação básica; se fizeram algum cursinho específico antes de ingressarem na universidade; se sempre estudaram em escola pública; se consideram que dominam bem os instrumentos de desenho (par de esquadros, régua, compasso); se sentem dificuldades nos conteúdos do curso e a que eles atribuem essas dificuldades.

O segundo questionário, composto por dezessete questões, com conteúdos referentes à ementa da disciplina Geometria Gráfica Bidimensional, na qual seriam abordados ao longo do semestre. Esse segundo questionário, teve o objetivo de analisar o quanto os voluntários estariam familiarizados com os conteúdos que fariam parte do experimento, com algumas questões de cunho conceitual, e também, através dessa familiaridade, corroborar ou não com nossas hipóteses de que eles ingressam nos cursos que exigem domínio desses conhecimentos com pouca ou nenhuma bagagem.

A segunda fase do experimento consistiu em um questionário contendo oito questões com conteúdos básicos da Geometria euclidiana (em anexo). As quatro primeiras questões sobre lugares geométricos retilíneos de equidistância e as outras quatro sobre polígonos regulares e semirregulares.

5.1.1 Primeira etapa

A primeira etapa consistiu nos questionários 1 e 2. Foi cedida uma aula para aplicarmos esses questionários. Os alunos tiveram duas horas para responder aos questionários. O questionário 1 foi importante para filtrarmos os sujeitos da pesquisa, que seriam os alunos do 1º período, já que a disciplina também era ofertada como

eletiva para alunos de outros cursos, como Artes Visuais, e também para alunos não bloqueados de LEG.

O questionário 2 trata de questões de relação do voluntário com o saber geométrico, baseado na ementa da disciplina Geometria Gráfica Bidimensional - GGB. Esse questionário teve uma fase de questões de definição de um ente geométrico, de nomenclatura geométrica e de identificação de transformações geométricas, curvas cíclicas, não cíclicas e curvas cônicas. As questões que pediam a definição de um ente geométrico compreenderam os termos como axioma; ponto, reta e plano; mediatriz; bissetriz; reta perpendicular; reta paralela; ângulo; polígonos; círculo e circunferência; lugar geométrico; e curvas cônicas. As questões que compreendiam sobre identificação de figuras e nomenclatura geométrica incluíam os conteúdos sobre polígonos, curvas não cíclicas, curvas cíclicas, concordância, curvas cônicas e transformações geométricas.

Apesar de nosso foco principal serem as construções geométricas euclidianas, a inclusão dos outros conteúdos contidos na ementa da disciplina de GGB, do segundo questionário, teve como objetivo verificar se os sujeitos possuíam algum conhecimento prévio destes conteúdos, obtidos no ensino básico ou cursinho.

A partir dos resultados da primeira etapa, questionários 1 e 2, montamos duplas complementares para assim seguir a segunda etapa que foi o experimento propriamente dito.

5.1.2 Segunda etapa

A segunda etapa consistiu em nosso experimento, que foi montado em duas etapas. A primeira, composta por oito questões a serem resolvidas com régua e compasso, com limite de uma hora, e a segunda, composta pelas mesmas oito questões, só que resolvidas através da técnica das dobraduras também com o limite de uma hora para serem resolvidas. Os voluntários poderiam passar para uma próxima questão caso não conseguissem resolvê-la na sequência pré-estabelecida, podendo voltar para a não resolvida ou desistir.

No final do experimento, as duplas foram inquiridas sobre o que foi mais difícil: as questões em régua e compasso ou em origami, e se achavam que o origami pode contribuir na compreensão dos conteúdos da Geometria Euclidiana.

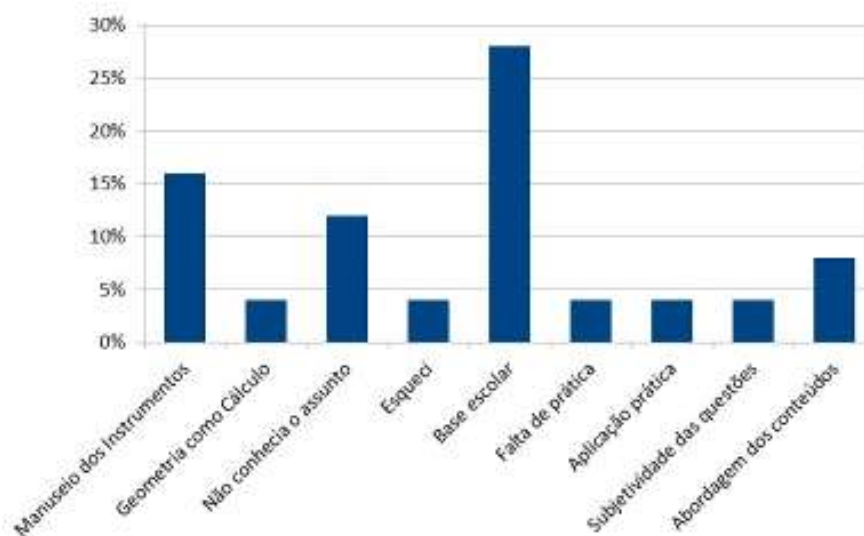
Todo o processo do experimento, a segunda etapa, foi registrado por meio audiovisual.

5.2 Primeiros resultados: Questionário 1 e 2.

Foram voluntários 25 alunos da disciplina Geometria Gráfica Bidimensional, nos quais 21 eram do primeiro período, 2 do terceiro período e 2 do quinto período do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica. Sendo que destes 25, que responderam aos primeiros questionários, apenas 16 participaram do experimento. Dentre estes 16, 14 foram do primeiro período e 2 do terceiro que tinham reprovado a disciplina.

A faixa etária de nossos voluntários foi de 17 a 30 anos. Todos os voluntários conheciam o que era origami e 52% dos que conheciam sabiam fazer algum projeto simples, também conhecido como origami nível fácil ou aprendiz. Oitenta e oito por cento dos voluntários teve aulas de Geometria na Educação Básica, sendo que aproximadamente 73% dos 88% alegaram que a Geometria foi ministrada como um conteúdo na disciplina de Matemática, 18% teve aula de Geometria como disciplina isolada e 9% tiveram aulas nas duas modalidades (isolada e conteúdo de Matemática). De 100% voluntários, 20% fizeram cursinho de Geometria Gráfica antes do vestibular, com duração de 8 a 12 meses. Apenas 24% dos voluntários foram originários do ensino público. Dos 100% dos voluntários 72% disseram dominar parcialmente os instrumentos de desenho. E 60% alegaram ter dificuldades com os conteúdos de Geometria Gráfica. Destes 60%, que alegaram ter dificuldades nos conteúdos de Geometria Gráfica, foi-lhes pedido, na questão nove do questionário 1, a descrição e a atribuição das dificuldades herdadas. A maioria destacou, como causadora de suas deficiências, a falta de uma boa base escolar. Base esta que não ensina os alunos a manusear os instrumentos de desenho, até porque o pouco de conteúdos geométricos que eles chegam a estudar são vistos de modo algébrico, como podemos ver no gráfico abaixo.

Gráfico 1: Possíveis causas das dificuldades dos alunos.



Fonte: Arquivos da Autora.

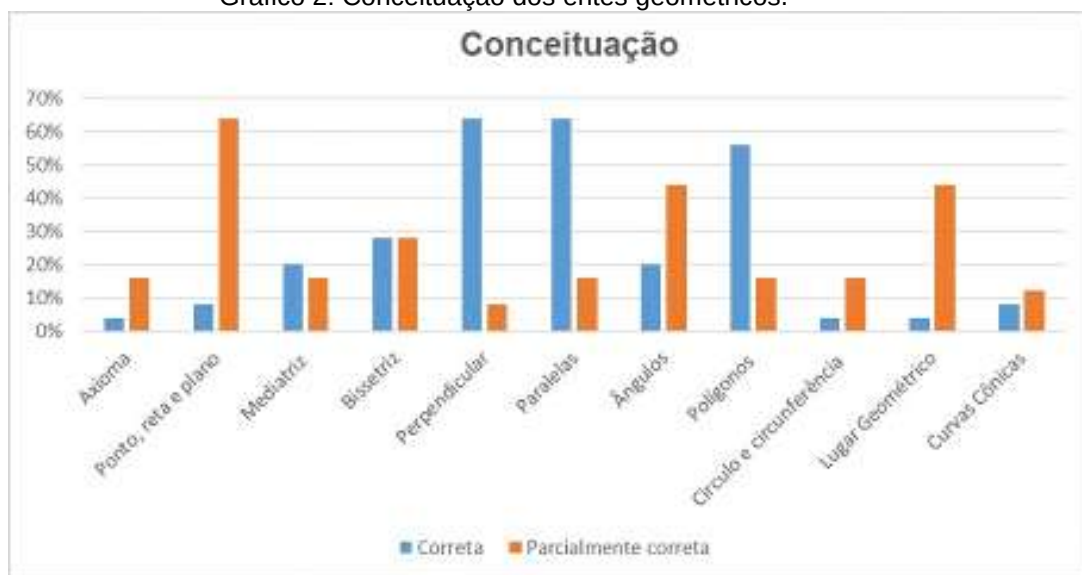
No segundo questionário, que foi sobre conteúdos geométricos, divididos em atividades de conceituação de alguns entes geométricos, identificação e nomenclatura de figuras geométricas. Todos os conteúdos, abordados no questionário 2, foram extraídos da ementa da disciplina de Geometria Gráfica Bidimensional. O Gráfico a baixo mostra o desempenho dos voluntários em relação à conceituação de alguns entes geométricos. Dividimos os resultados em duas performances. Em azul as respostas que consideramos válidas e em laranja as respostas incompletas ou equivocadas.

Os voluntários confundiam alguns conceitos, como definir que mediatriz “é o ponto médio em uma reta ou segmento”, quando o correto seria dizer que a mediatriz é um lugar geométrico retilíneo de equidistância entre dois pontos distintos A e B, e que o ponto médio M entre os pontos A e B é um ponto de interseção comum entre o segmento AB, e sua reta mediatriz, sendo M, também é a menor distância entre os pontos A e B, e que o segmento AB e sua mediatriz se interceptam em uma amplitude de 90° . Podemos definir o ponto médio de um segmento, mas não de uma reta, já que ela é infinitamente grande.

Outra definição confusa foi a afirmação de que a bissetriz é uma “reta que corta um vértice em dois”; a afirmação correta é que a bissetriz é um lugar geométrico retilíneo de equidistância entre duas retas concorrentes, que divide sua amplitude angular em dois ângulos congruentes. Como um vértice é a representação de um ponto, um ponto não pode ser dividido em dois, já que, na Geometria euclidiana, o ponto é o ente axiomático de dimensão zero. Podemos subentender

que o aluno quis se referir a amplitude angular, quando escreveu vértice. Deixamos claro que, as definições de um ente geométrico não são únicas, porém nos atemos as definições da Geometria Gráfica euclidiana.

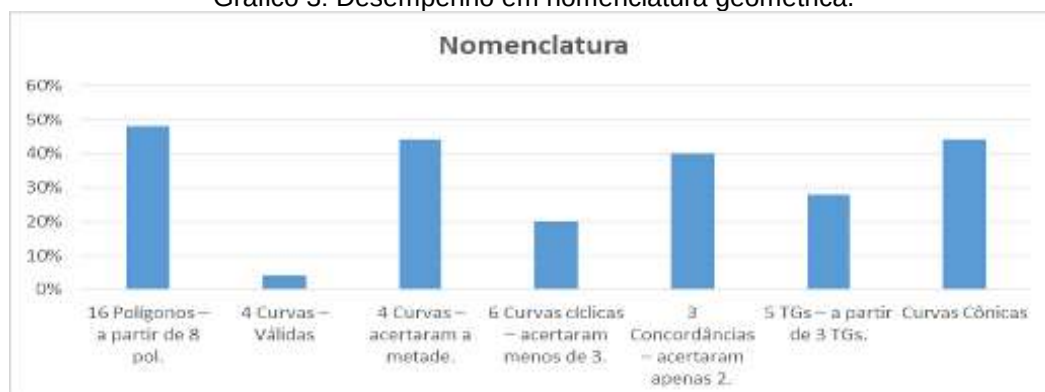
Gráfico 2: Conceituação dos entes geométricos.



Fonte: Arquivos da Autora.

Já no item nomenclatura de polígonos, curvas cíclicas e não cíclicas, concordância, transformações geométricas (TG) e curvas cônicas. Na questão nove do questionário 2, foram expostos 16 polígonos e 48% dos voluntários acertaram a nomenclatura destes a partir de oito polígonos. Na questão onze, em relação às quatro curvas não cíclicas, 4% acertaram todas e 44% acertaram a metade. Na questão doze, das seis curvas cíclicas, 20% acertaram menos de três curvas. Na questão treze, foram apresentados cinco exemplos de concordância, sendo que apenas três eram corretos, 40% dos voluntários acertaram dois apenas. Na questão quinze, foi solicitada a identificação de nomenclatura de cinco Transformações Geométricas, 28% acertaram a partir de três TGs. Na última questão, pediu-se para nomear as três curvas cônicas apresentadas, 44% acertaram todas.

Gráfico 3: Desempenho em nomenclatura geométrica.



Fonte: Arquivos da Autora.

Para a formação das duplas complementares, tivemos que atribuir uma pontuação de familiaridade dos alunos com os conteúdos abordados no questionário 2. A pontuação teve a mínima de 0,25 de familiaridade prévia dos conteúdos e máxima de 6,2. Apenas a Dupla 4, por questões de incompatibilidade de horários com os outros voluntários, não teve uma complementaridade significativa. Nosso alvo principal eram os ingressos do primeiro período do curso de LEG, porém, pelo mesmo motivo de incompatibilidade nos horários, formaram-se duas duplas com um voluntário do primeiro e outro do terceiro período (dupla 3 e dupla 8).

Tabela 1: Complementaridade das duplas formadas.

DUPLAS	Pontuação		Período	Período
1	5,5	3,3	1º	1º
2	5,2	3,1	1º	1º
3	4,7	4,1	1º	3º
4	2,8	2,6	1º	1º
5	5,1	3,1	1º	1º
6	6,2	1,0	1º	1º
7	5,7	0,25	1º	1º
8	5,7	3,9	1º	3º

Fonte: Arquivos da Autora.

A seguir, estão categorizadas algumas análises de construções euclidianas por régua e compasso, que foram propostas no experimento na visão praxeológica da TAD e, em sequência, as mesmas construções feitas com dobraduras em papel. Ao todo, foram oito questões - quatro abordando lugares geométricos retilíneos de equidistância e os outros quatro sobre polígonos regulares e semirregulares.

Algumas técnicas foram analisadas a partir de resoluções encontradas em livros didáticos. Outras foram baseadas nas resoluções dos alunos.

Uma determinada praxeologia pode nos fornecer dados das técnicas τ que o sujeito se utiliza para resolver a tarefa T, e se esse procedimento está apoiado em uma tecnologia θ e fundamentado em uma teoria Θ e se todas elas, em conjunto, realmente transformam a relação de X com O.

6 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EUCLIDIANAS PROPOSTAS NO EXPERIMENTO

Usamos como base, para a categorização das técnicas τ para solução de cada tarefa T, o volume 3 de uma coleção em quatro volumes do livro Desenho Geométrico, do autor Marchesi Júnior (2009). Esse volume abordava as construções geométricas euclidianas a régua e compasso. O diferencial desta coleção foi o fato de o autor, depois de demonstrar o passo a passo de cada construção, explicar o porquê de cada etapa da resolução da tarefa. De acordo com a TAD, Marchesi (2009) explicitava as tecnologias θ que justificam as técnicas τ para resolver as tarefas T propostas.

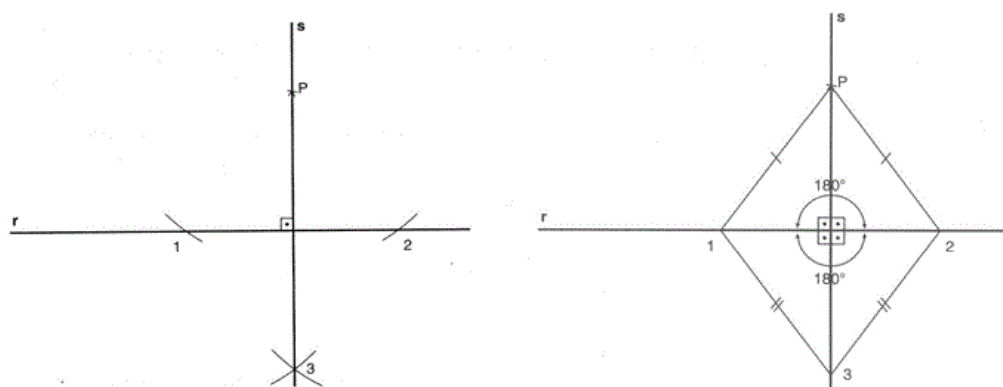
Algumas resoluções dos voluntários da pesquisa também foram incluídas nesta categorização, como a técnica τ_5 da tarefa T2; a técnica τ_1 da tarefa T4; a técnica τ_2 da tarefa T8, nas construções a régua e compasso; as técnicas τ_1 da tarefa T4; e a técnica τ_2 na tarefa T8 em origami, explicitadas a seguir.

6.1 Construções a régua e compasso

T1: Construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P.

τ : Por a ponta seca do compasso em P e, com abertura maior que a distância de P a r , traçar um arco que intercepte r em dois pontos 1 e 2. Com a mesma abertura do compasso, centrar a ponta seca em 1 e traçar um arco oposto a P. Depois, com a mesma abertura, apoiar a ponta seca em 2 e interceptar o arco anterior criando um ponto 3. Apoiando a régua em P e 3, podemos traçar a reta perpendicular s .

Figura 32: Tarefa T1 em régua e compasso.



Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

θ : Se ligarmos os pontos P, 1, 2 e 3, podemos observar que eles formam um losango, figura geométrica de quatro lados congruentes e dois pares de ângulos opostos congruentes, sendo um par agudo e outro obtuso, de lados P2, 23, 31 e 1P. Nas retas r e s estão coincidentes as diagonais deste losango (P3 e 12), que se interceptam em seus respectivos pontos médios e em ângulos retos. Por este motivo, centramos a ponta seca do compasso em P, com abertura do compasso maior que a distância entre P e r, pois se esta abertura for menor, não conseguiremos interceptar r e determinar os pontos 1 e 2 (dois dos vértices do losango) e com a mesma abertura do compasso, pois os lados do losango são congruentes, com a ponta seca centrada em 1 e depois em 2, determinaremos o ponto 3 que é o último vértice do losango, fechando o quadrilátero. Por isto que s é a reta perpendicular a r que passa pelo ponto P.

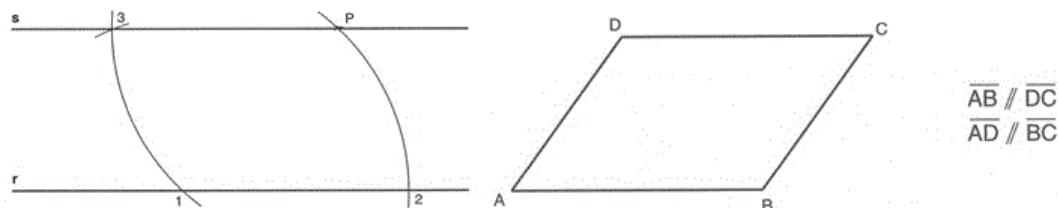
Θ : Uma reta só pode ser apoiada a partir de dois pontos (primeiro postulado de Euclides). Não poderíamos traçar a reta s apenas a partir de P, precisaríamos determinar outro ponto simétrico a P para traçarmos s. Por este motivo, utilizamos as propriedades do losango na técnica descrita acima.

T2: Construir a reta paralela s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P.

τ 1: Com uma abertura maior que a distância entre P e r, centrar o compasso em P e traçar um arco que intercepte a reta r, determinando um ponto auxiliar 1. Com a mesma abertura, centrar o compasso no ponto 1 e traçar um arco que intercepte r criando o ponto 2. Com o compasso aberto na distância de 2 a P,

transportar essa medida para o outro arco, com ponta seca apoiada em 1, determinando o ponto 3. Apoiando a régua em 3 e P, traçaremos a paralela s pedida.

Figura 25: Tarefa T2 técnica τ 1 em régua e compasso.

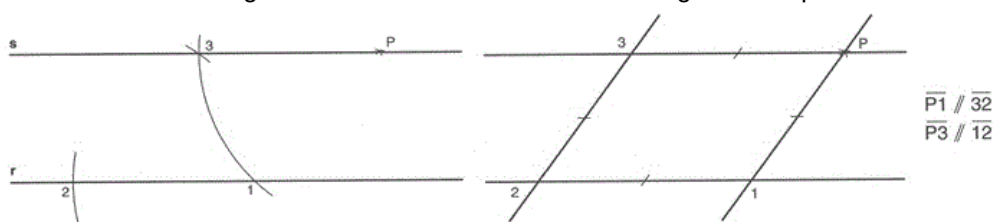


Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

θ 1: Podemos observar que, se traçarmos segmentos de reta com origem e extremidade P2 e 31 respectivamente, veremos que determinamos um paralelogramo, figura geométrica que possui dois pares de lados opostos paralelos congruentes dois a dois, e dois pares de ângulos opostos congruentes também dois a dois, e que os lados 3P e 12 estão apoiados nas retas s e r respectivamente. Por isso que, ao centrarmos a ponta seca do compasso em P com uma abertura maior que a distância de P a r e traçamos um arco que intercepta r, estamos determinando o vértice 1 oposto ao vértice P do paralelogramo e, quando fazemos o inverso, centrando a ponta seca em 1 com a mesma abertura e traçando um arco que passa por P e intercepta r, estamos determinando o tamanho dos lados 12 e P2, e quando transferimos esse tamanho ou distância de 2 a P, com ponta seca centrada em 1, determinamos o vértice 3 e assim fechamos o paralelogramo. Como uma das propriedades do paralelogramo são os lados opostos paralelos e congruentes, ao encontrarmos o ponto ou vértice 3, determinamos onde a reta s, paralela à reta r dada e passando pelo ponto P dado, será apoiada.

τ 2: Com abertura maior que a distância entre P e r, centrar a ponta seca do compasso em P e traçar um arco que intercepte r marcando o ponto 1. Com a mesma abertura, centrar a ponta seca em 1 e traçar um arco curto interceptando r, determinando o ponto 2. Com a mesma abertura e ponta seca em 2, traçar um arco interceptando o primeiro arco traçado criando o ponto 3. Com a régua apoiada em P e 3, traçar a paralela pedida.

Figura 33: Tarefa T2 técnica τ_2 em régua e compasso.

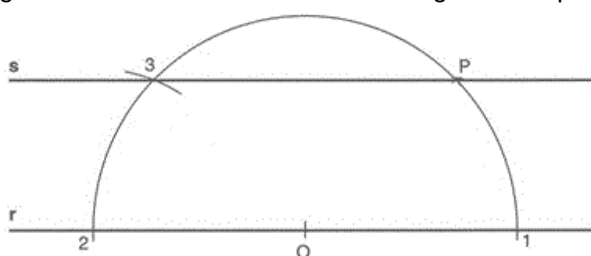


Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

θ 2: Trançados segmentos com extremidades em 32 e P1, podemos observar que determinaremos um losango, cujas principais propriedades são os quatro lados congruentes e os pares de ângulos opostos congruentes, sendo um par agudo e outro obtuso, porém, o losango também é um paralelogramo, pois seus pares de lados opostos são paralelos entre si. Por este motivo, quando abrimos o compasso com uma distância maior entre P em relação a r, conseguimos interceptar r com um arco longo e determinar o ponto 1 colinear a P; transferimos a mesma distância em relação a 1 em r, determinando o vértice 2, e transferindo essa mesma distância com ponta seca em 2, interceptando o arco, determinamos o ponto 3, que é simétrico ao vértice 1 e equidistante de P e 2.

τ 3: Marcar um ponto qualquer 'O' na reta r dada, com a ponta seca centrada neste ponto 'O', com abertura igual à distância de O e P, traçar um arco que intercepte r em dois pontos: 1 e 2. Com abertura igual à distância entre 1 e P, centrar a ponta seca em 2 e transportar essa distância para o arco, marcando um ponto auxiliar 3. Com a régua apoiada em 3 e P traçar a reta paralela s pedida.

Figura 34: Tarefa T2 técnica $\tau 3$ em régua e compasso.



Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

θ 3: Fechando os lados 32 e P1, podemos observar que se determina um quadrilátero P123, mais precisamente um trapézio. O trapézio é uma figura geométrica cuja principal propriedade é que apenas um de seus pares de lados opostos são paralelos. Quando marcamos o ponto O em r e traçamos um arco de raio OP, estamos delimitando a base do trapézio em r. Como o trapézio em questão

é isóscele, cuja propriedade é que seu par de lados opostos não paralelos são congruentes, transfere-se a distância P1 com a ponta seca do compasso centrado em 2, interceptando o arco, determinando o vértice 3; assim, garantimos que s é a reta que passa por P paralela à reta r.

τ 4: Traçar uma reta perpendicular passando por P. Marcar na reta r um ponto qualquer 2. Traçar outra reta perpendicular passando por 2. Com abertura igual à distância P1, transportá-la para a outra perpendicular, com ponta seca apoiada em 2, determinando o ponto auxiliar 3. Com a régua apoiada em P e 3, traçar a paralela s pedida.

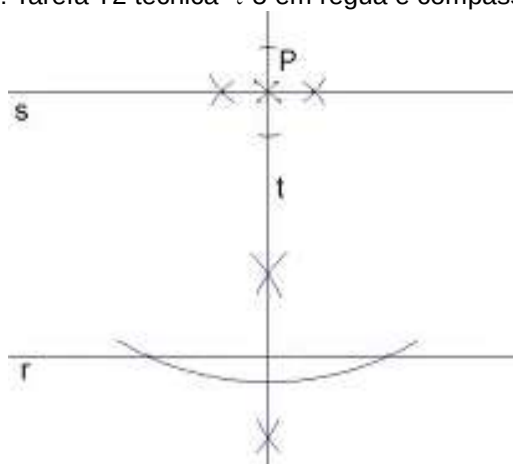


Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

θ 4: Os quadriláteros retângulos têm por principais características pares de lados opostos paralelos entre si e quatro ângulos retos internos. Como a tarefa T1 foi determinar uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P dado, fora da reta r , o aluno, sabendo executar a tarefa T1, conseguirá fazer a mesma relação com a tarefa T2 utilizando-se da propriedade do retângulo, quando ele cria uma perpendicular em relação a r , passando por P ; perpendicular esta que intercepta r , criando um ponto auxiliar 1 que determina a menor distância entre P e r (o segmento $P1$), com isto, é só replicar o processo de construção de outra reta perpendicular a r , sendo o pé dessa perpendicular um ponto 2 colinear ao ponto 1, e transferindo o mesmo tamanho do segmento $P1$ para a outra perpendicular criada, estaremos determinando o vértice de fechamento de um retângulo, que é o ponto 3, onde será apoiada a reta s paralela à reta r passando pelo ponto P .

τ 5: Traçar uma perpendicular t passando por P . Traçar uma perpendicular s em relação a t , passando por P . As retas r e s são paralelas entre si.

Figura 36: Tarefa T2 técnica τ 5 em régua e compasso.



Fonte: Arquivo da autora.

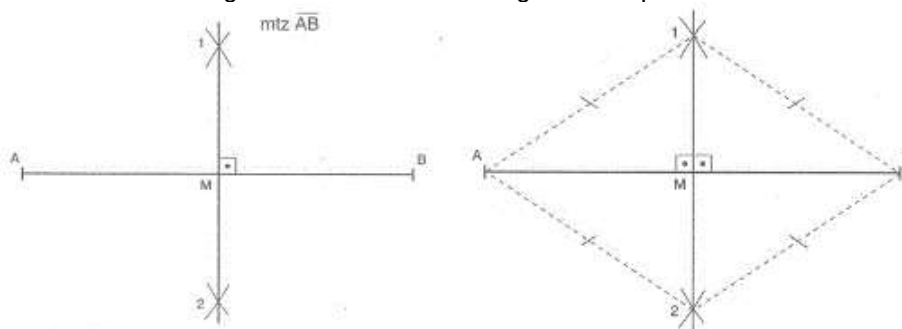
θ 5: Podemos utilizar as propriedades do retângulo sem criarmos todos os seus vértices para determinarmos um de seus lados paralelos à reta r dada. Pois, se duas retas paralelas são interceptadas por uma reta com amplitude angular de 90° graus em relação a elas, então todos os seus ângulos formados pelas interseções serão congruentes. Por este motivo, traçar uma perpendicular t em relação a r , passando por P , e depois traçar outra reta perpendicular s em relação a t , garante que as retas r e s sejam paralelas entre si.

Θ : São iguais entre si todos os ângulos retos (quarto postulado de Euclides).

T3: Construir a mediatriz do segmento AB dado.

τ : Abrir o compasso com a abertura maior que a metade do tamanho do segmento AB , centrar a ponta seca em A e traçar um arco acima e abaixo do segmento. Com a mesma abertura, centrar a ponta seca em B e traçar outro arco acima e abaixo do segmento AB de modo que os arcos se interceptem e criem dois pontos auxiliares 1 e 2. Apoiando a régua nos pontos 1 e 2 podemos traçar a mediatriz de AB .

Figura 37: Tarefa T3 em régua e compasso.



Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

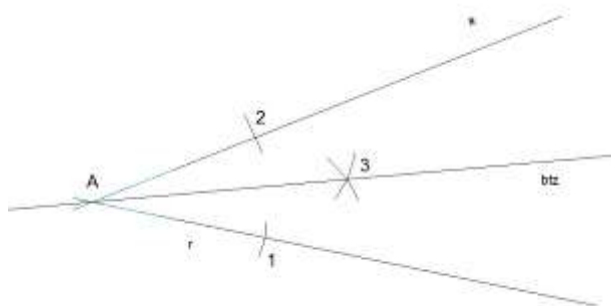
θ : A mediatriz, que é um lugar geométrico retilíneo de equidistância entre dois pontos dados A e B, tem por característica principal ser uma reta que divide o segmento AB determinado pelos pontos A e B em dois segmentos menores congruentes, interceptando AB em seu ponto médio M a um ângulo de 90° graus. Se ligarmos os pontos, A, 1, B e 2, vemos que fechamos o traçado de um losango. Utilizando-se da propriedade das diagonais do losango, na qual suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios e em ângulos retos, o segmento AB, considerado como uma das diagonais de um losango, necessita da criação de uma reta que o intercepte perpendicularmente dividindo-o em dois segmentos congruentes. Como também aos lados do losango são congruentes, não mudamos a abertura do compasso, que deve ser maior que a metade do tamanho de AB, pois se assim não for, os arcos não irão se interceptar. Apoando a reta nos pontos de interseção entre os arcos acima e abaixo de AB, podemos traçar a mediatriz de AB.

Θ : As retas apoiadas nos centros e nas intercessões de duas circunferências de mesmo raio são perpendiculares entre si.

T4: Construir a bissetriz do ângulo dado.

τ 1: Prolongar as retas r e s dadas (caso tenha espaço no papel) até se interceptarem, determinando o vértice A do ângulo $\angle sAr$. Com uma abertura qualquer, centrar a ponta seca do compasso em A e traçar um arco que intercepte as duas retas r e s determinando pontos auxiliares 1 e 2. Com abertura do compasso maior que a metade do tamanho do segmento 12, centrar a ponta seca em 1 e traçar um arco do lado oposto do vértice A. Com a mesma abertura, com ponta seca centrada em 2, traçar um arco interceptando o arco anterior determinando o ponto auxiliar 3. Apoando a régua em A e 3 traçaremos a bissetriz pedida.

Figura 38: Tarefa T4, técnica τ 1 em régua e compasso.

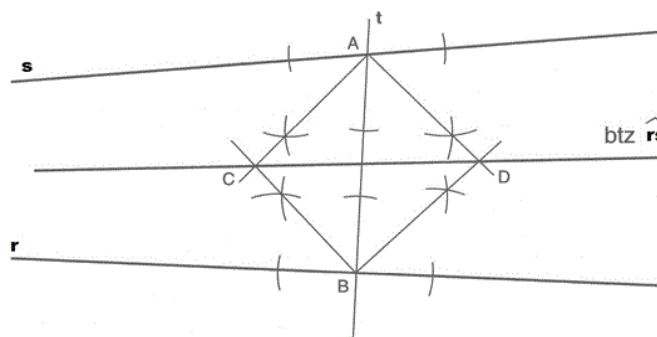


Fonte: Arquivo da Autora.

θ 1: A bissetriz, lugar geométrico retilíneo de equidistância entre duas retas concorrentes ou paralelas, é o nome dado a uma reta que divide uma amplitude angular em dois ângulos congruentes. Ao marcarmos os pontos 1 e 2 com a mesma abertura do compasso nas retas r e s , os pontos 1 e 2 são equidistantes do vértice A . Os pontos 1 e 2 formam o segmento 12. Determinando o ponto 3, onde será apoiada a bissetriz do ângulo $s\hat{A}r$, com arcos de medida com ponta seca em 1 e 2, 3 fica equidistante dos pontos 1 e 2. Se 3 é equidistante de 1 e 2, e 1 e 2 equidistantes de A , o ponto 3 pertence à bissetriz do ângulo $s\hat{A}r$, pois esta reta apoiada em A e 3 divide-o em dois ângulos iguais.

τ 2: Traçar uma reta qualquer transversal t às retas r e s dadas, determinando dois pontos auxiliares A e B e quatro ângulos internos a r e s , sendo dois em A e dois em B . Traçar as bissetrizes desses quatro ângulos internos a r e s . As intercessões das bissetrizes de origem em A com as bissetrizes de origem em B pertencem à bissetriz de r e s .

Figura 39: Tarefa T4 técnica τ 2 em régua e compasso.



Fonte: MARCHESI JÚNIOR, 2009.

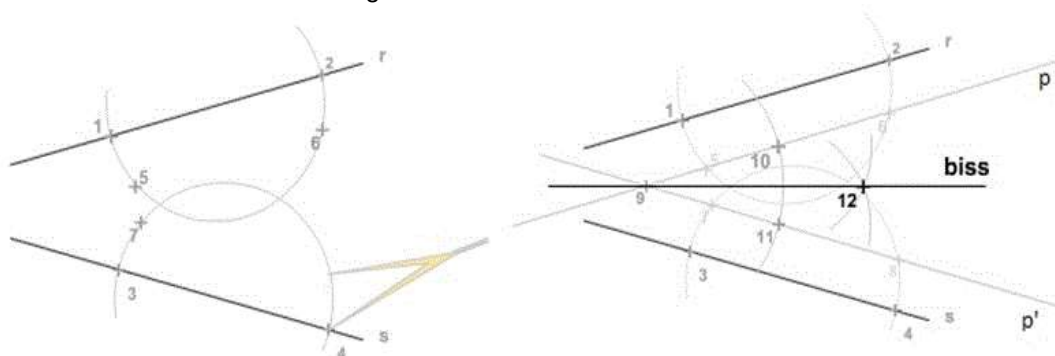
θ : Sabemos que a bissetriz é uma reta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes e também é o lugar geométrico de equidistância entre duas

retas concorrentes. Nesse caso, como não temos a intersecção de r e s , criamos uma reta auxiliar t que intercepta s e r nos pontos A e B respectivamente, formando quatro ângulos com vértices conhecidos. Quando traçamos as bissetrizes desses quatro ângulos internos, a r e s , temos dois lugares geométricos de equidistância entre r e t de vértice B e dois entre s e t com vértice em A . Essas bissetrizes se interceptam em dois pontos, C e D , que são equidistantes das retas r , s e t . Os pontos C e D também são os centros de circunferências que tangenciam r , s e t . Sendo C e D equidistantes de r e s podemos apoiar neles a bissetriz de r e s .

Θ : Ângulos alternos internos são geometricamente congruentes.

τ 3: Traçar um arco de raio maior que a metade da distância entre r e s , e o centro sobre um ponto qualquer de r , esse arco, ao interceptar r , dará origem aos pontos 1 e 2. Com o mesmo raio, repetir o processo em s , dando origem aos pontos 3 e 4. Com uma abertura um pouco menor que a distância da intersecção dos arcos próximo ao vértice, centrar a ponta seca do compasso em 1 e traçar uma intercessão. Com a mesma abertura, repetir o processo nos pontos 2, 3 e 4. Essas intercessões darão origem aos pontos 5, 6, 7 e 8. Traçar uma paralela p em relação à reta r , apoiada nos pontos 5 e 6. Traçar uma paralela p' em relação àa reta s , apoiada nos pontos 7 e 8. As paralelas p e p' ao se interceptarem darão origem ao ponto de intercessão 9. Com a ponta seca em 9, traçar um arco, de raio qualquer, que intercepte p e p' , marcando os pontos 10 e 11. Com abertura qualquer, e ponta seca em 10, traçar um arco. Com a ponta seca em 11 e com mesma abertura, traçar outro arco que originará o ponto se intercessão 12. A reta apoiada nos pontos 9 e 12 é a bissetriz de r e s procurada.

Figura 40: Tarefa T4 técnica τ 3.



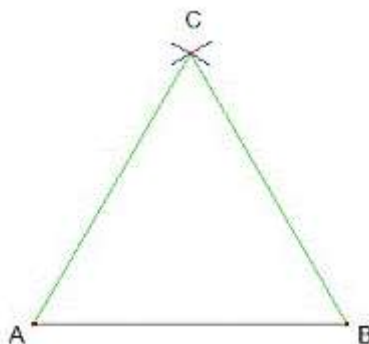
Fonte: HOFFMANN, 2011.

entre r e s . Ou seja, a amplitude angular entre p e s é congruente à amplitude angular entre r e s .

T5: Construir o triângulo equilátero ABC a partir do segmento dado.

τ : Com abertura de mesma medida que AB, apoiar a ponta seca em A e traçar um arco acima ou abaixo de AB. Com a mesma abertura, ponta seca em B, traçar outro arco que intercepte o primeiro determinando o ponto C.

Figura 42: Tarefa T5 em régua e compasso.



Fonte: Arquivo da autora.

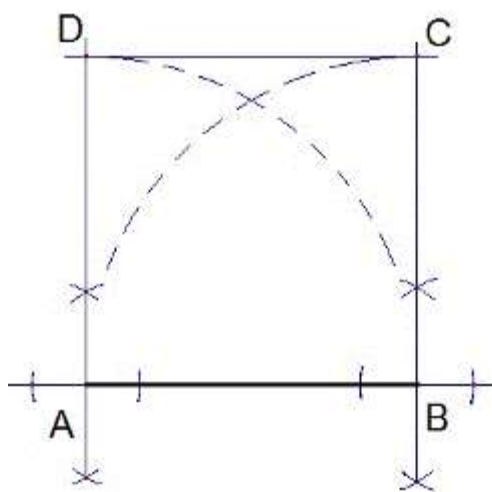
θ : Traçando uma circunferência de raio AB sendo o ponto A o centro da primeira circunferência, traçar outra circunferência de mesmo raio sendo o ponto B o centro da segunda circunferência, suas intersecções são equidistantes de AB. Escolhendo um desses pontos de intersecção, fecham-se os lados de um triângulo equilátero e equiângulo.

Θ : As propriedades das figuras não dependem de seu tamanho. (Postulado de Wallis).

T6: Construa o quadrado ABCD a partir do segmento dado.

τ : Prolongar o segmento AB. Levantar uma perpendicular a partir de A e outra a partir de B. Com abertura igual a AB, ponta seca em A, traçar um arco na perpendicular de A determinando o ponto D. Com mesma abertura, ponta seca em B, traçar o arco que intercepte a perpendicular com pé em B, determinando o ponto C. Com régua apoiada em D e C, fechar o quadrado ABCD.

Figura 43: Tarefa T6 e régua e compasso.



Fonte: Arquivo da autora.

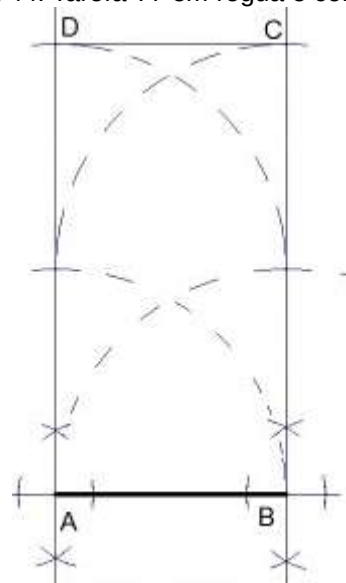
θ : Os quadriláteros retângulos têm como principal propriedade possuir os quatro ângulos retos. O quadrado, em específico, além dos quatro ângulos congruentes, também possui os quatro lados congruentes, e suas diagonais também são as bissetrizes de seus ângulos internos e elas se interceptam em seus respectivos pontos médios. Por este motivo, quando levantamos as perpendiculares do quadrado, basta apenas transferir o tamanho do lado dado para as perpendiculares levantadas, determinando, assim, sua altura e os pontos onde se apoia o seguimento ou lado paralelo a sua base.

Θ : São iguais entre si todos os ângulos retos.

T7: Construa o retângulo ABCD com o lado maior sendo o dobro do lado menor dado.

τ : Prolongar o segmento AB. Com abertura igual a AB, ponta seca em B, traçar arco interceptando o segmento prolongado determinando o ponto D. Levantar uma perpendicular com pé em D e outra em A. Com mesma medida AB, ponta seca em A, traçar arco na perpendicular de A determinando o ponto B. Com mesma abertura, ponta seca em D, traçar arco na perpendicular de D determinando o ponto C.

Figura 44: Tarefa T7 em régua e compasso.



Fonte: Arquivo da autora.

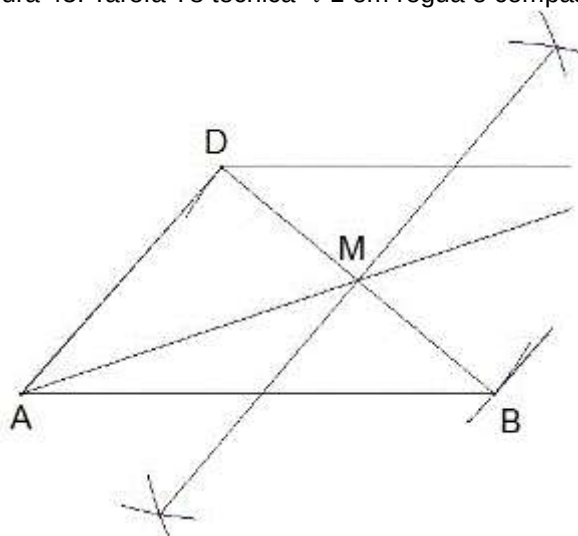
θ : Os quadriláteros retângulos têm como principal propriedade possuir os quatro ângulos retos, o que também resulta no paralelismo de seus lados, que são congruentes opostos dois a dois. Como o lado maior deste retângulo deve ser o dobro do menor lado dado, podemos observar que este retângulo é o resultado da junção de dois quadrados. Por este motivo, que ao levantarmos as perpendiculares a AB, que passam pelos pontos A e B, transferimos duas vezes a medida de AB para ambas as perpendiculares, determinando suas extremidades e também o apoio do segmento para fechar o polígono.

Θ : São iguais entre si todos os ângulos retos.

T8: Construir a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC:

τ 1: Traçar a diagonal BD. Achar o ponto médio M da diagonal BD. Com a régua apoiada em A e M podemos traçar a diagonal AC.

Figura 45: Tarefa T8 técnica τ 1 em régua e compasso.

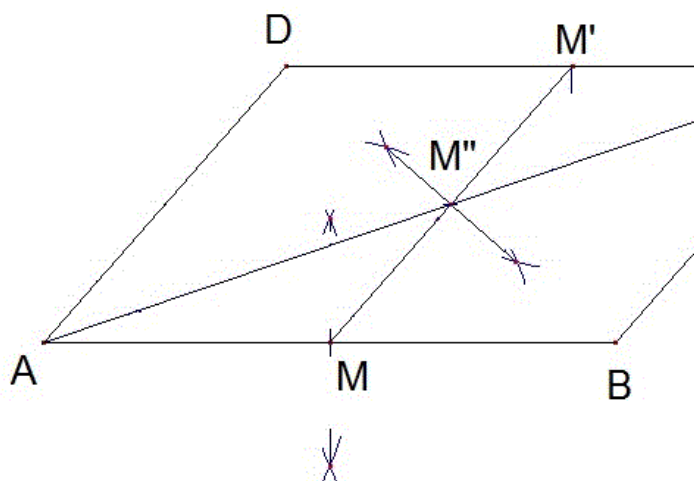


Fonte: Arquivo da autora.

θ 1: Como não foi permitido prolongar os lados do paralelogramo o qual determinaria a extremidade da diagonal AC, foi preciso se utilizar da propriedade das diagonais do paralelogramo, pois se interceptam em seus respectivos pontos médios. Sendo assim, encontrando o ponto médio M da diagonal BD, determinamos onde se apoia a diagonal AC, nos pontos A e M.

τ 2: Achar o ponto médio M de AB. Com abertura igual a AM, ponta seca em D, transferir essa medida para DC determinando o ponto M'. Traçar o segmento MM'. Achar o ponto médio M'' do segmento MM'. Com régua apoiada em A e M'', traçar a diagonal AC.

Figura 46: Tarefa T8 técnica τ 2 em régua e compasso.



Fonte: Arquivo da autora.

θ 2: Se também encontrássemos o ponto médio M''' de AD e transferíssemos sua medida para o segmento MM' , com a ponta seca centrada em M ou M' , também encontraríamos o ponto M'' . Caso traçássemos um segmento apoiado em M''' e M'' , esse segmento também interceptaria BC em seu ponto médio. Ou seja, os segmentos que passam pelos pontos médios dos lados opostos também se interceptam em seus respectivos pontos médios, assim como as diagonais, porém, paralelos aos lados que não possuem pontos em comum.

Θ : As propriedades das figuras não dependem de seu tamanho. (Postulado de Wallis).

6.2 Construções em Origami

No caso das dobraduras em papel, há uma desvantagem pelo fato de o papel ter uma espessura, por este motivo, para que as construções tenham o mínimo de erros, deve-se fazer uma dobra de cada vez, ou seja, não se deve acumular dobras como se enrolasse um rocambole ou se dobrasse um guardanapo.

Estão a seguir exemplos de técnicas com uma quantidade de dobras que permitem maior precisão.

T1: Construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P.

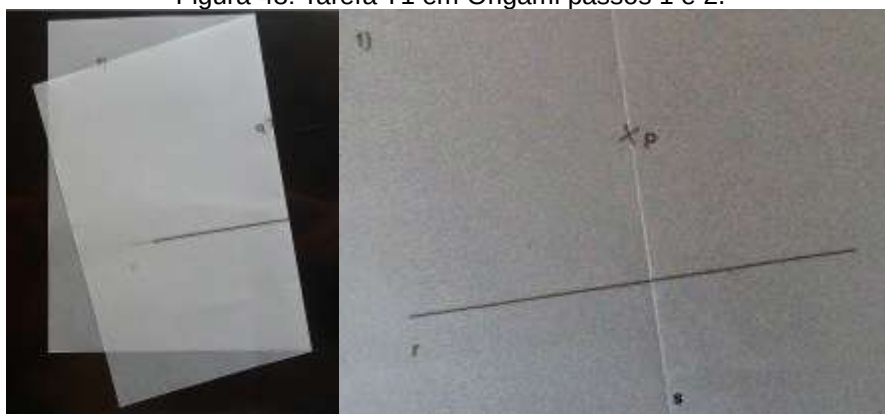
Figura 47: Tarefa T1 em Origami.



Fonte: Arquivo da autora.

τ : Dobrar o papel alinhando a reta r até que esta dobra atinja o ponto P.

Figura 48: Tarefa T1 em Origami passos 1 e 2.



Fonte: Arquivo da autora.

θ : Alinhando ou rebatendo uma reta em si mesma, a dobra ou vinco resultante sempre terá 90° graus em relação a essa reta.

Θ : Axioma 4 de Huzita-Hatori: Dados um ponto P_1 e uma linha l_1 , nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l_1 , passando através do ponto P_1 .

T2: Construir a reta paralela s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P .

Figura 49: Tarefa T2 em Origami.



Fonte: Arquivo da Autora.

τ 1: Criar com uma dobra a perpendicular t em relação a r , passando por P . Alinhar t em si mesma até chegar em P vincando uma perpendicular s em t . A reta s perpendicular à reta t é paralela à reta r dada, passando pelo ponto P .

Figura 50: Tarefa T2 técnica $\tau 1$ em Origami passos 2, 3 e 4.



Fonte: Arquivo da autora.

θ : Se temos duas retas concorrentes ortogonais, r e s , e traçamos uma reta paralela p em relação à reta s , essa reta p também é ortogonal a reta r .

Θ : Axioma 4 de Huzita-Hatori: Dados um ponto $P1$ e uma linha $l1$, nós podemos fazer uma dobra perpendicular à $l1$, passando através do ponto $P1$.

$\tau 2$: Fazer uma dobra que passe por P e intercepte r em um ângulo qualquer menor que 90° , gerando um ponto Q . Fazer a mediatriz entre P e Q , que irá interceptar a reta r em um ponto R .

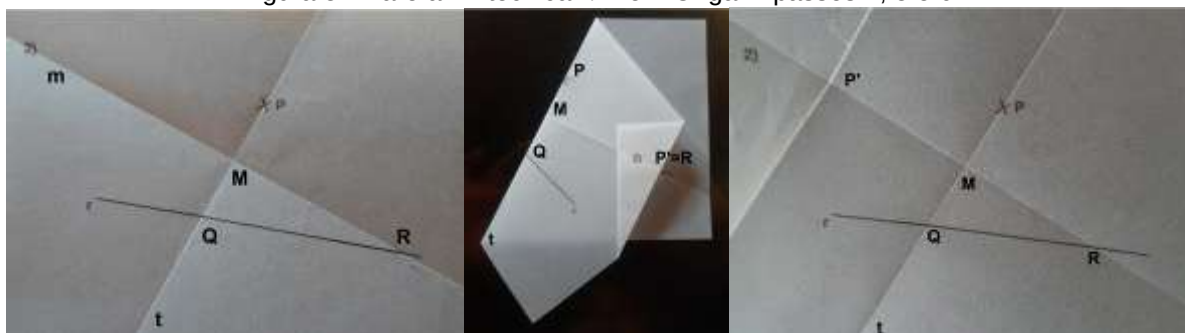
Figura 51: Tarefa T2 técnica $\tau 2$ em Origami passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivo da autora.

Considerando a reta t , que contém o segmento PQ como um eixo de simetria, transportar a distância MR para o lado oposto de MR criando o ponto P' .

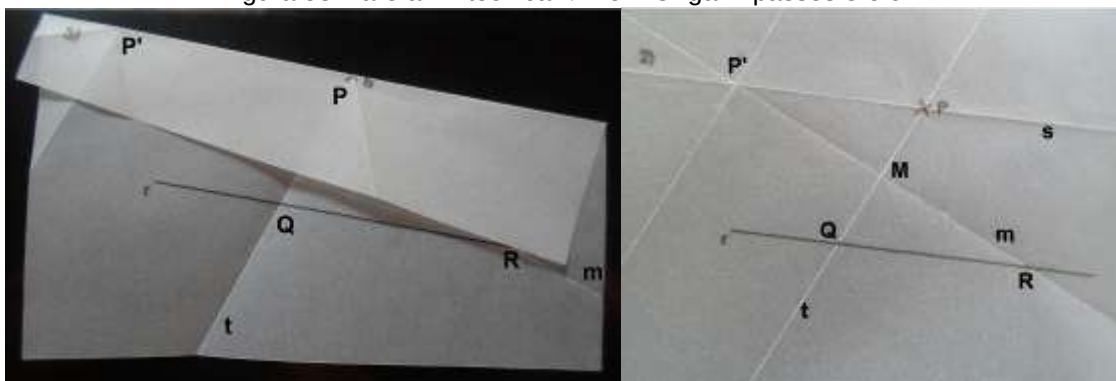
Figura 52: Tarefa T2 técnica $\tau 2$ em Origami passos 4, 5 e 6.



Fonte: Arquivo da autora.

Ligando P e P' encontraremos a reta paralela s pedida.

Figura 53: Tarefa T2 técnica τ 2 em Origami passos 8 e 9.



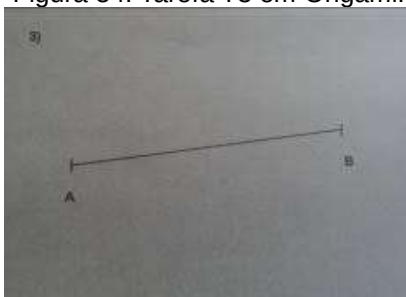
Fonte: Arquivo da autora.

θ : Quando criamos uma dobra que passa por P e tem um ângulo menor que 90° graus em relação à reta r, estamos determinando a diagonal PQ de um losango. Quando coincidimos P com Q, estamos dobrando a mediatriz de PQ, que garante que as diagonais do losango se interceptam em seus respectivos pontos médios (M), e essa mediatriz também será a reta de apoio da segunda diagonal do losango. A mediatriz de PQ intercepta a reta r no ponto R. A distância MR é a metade da segunda diagonal do losango. Alinhando a mediatriz m em si mesma, passando por P, podemos transferir o tamanho do segmento MR para o lado oposto de R, criando o ponto P' e que sua distância em relação a M seja igual à distância entre R e M. Ligando com uma dobra os pontos P e P', obteremos a reta s paralela à reta r dada, passando pelo ponto P dado. Podemos observar também os vértices do losango P'PRQ.

Θ : Axiomas 1 e 2 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar uma linha conectando-os; dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar P1 para P2.

T3: Construir a mediatriz do segmento AB dado.

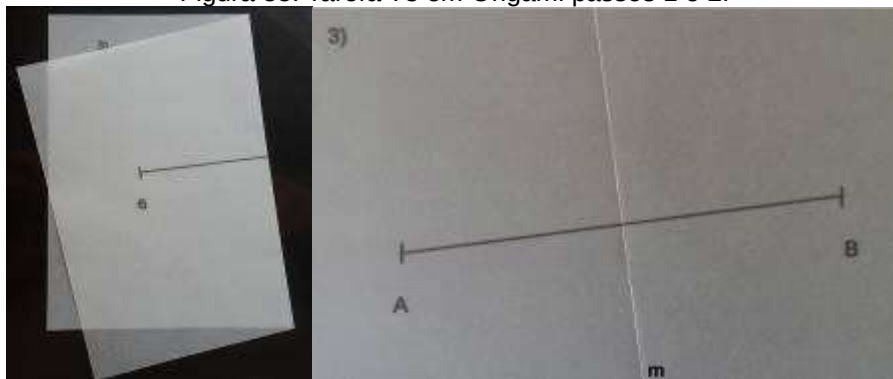
Figura 54: Tarefa T3 em Origami.



Fonte: Arquivo da autora.

τ : Fazer uma dobra no papel sobrepondo os pontos A e B.

Figura 55: Tarefa T3 em Origami passos 1 e 2.



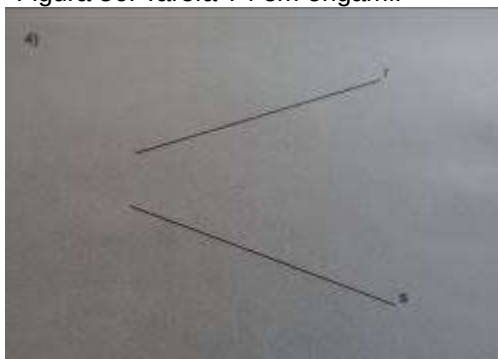
Fonte: Arquivo da autora.

θ : Se coincidirmos dois pontos, o vinco formado sempre será perpendicular ao seguimento formado por estes dois pontos e passará pelo ponto médio desse segmento.

Θ : Axioma 2 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar P1 para P2.

T4: Construir a bissetriz do ângulo dado.

Figura 56: Tarefa T4 em origami.



Fonte: Arquivo da Autora.

τ 1: Prolongar com um dobra as retas r e s, criando o vértice V do ângulo. Depois, rebater, alinhar ou coincidir r e s, formando um vinco que parte de V e divide o ângulo formado por r e s em dois ângulos iguais.

Figura 57: Tarefa T4 técnica τ 1 em origami passos 3 e 4.



Fonte: Arquivo da autora.

τ 2: Sobrepor as duas retas dadas. O vinco formado é a bissetriz do ângulo.

Figura 58: Tarefa T4 em Origami passos 1 e 2.



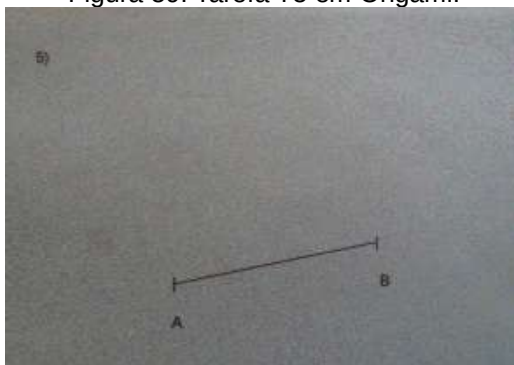
Fonte: Arquivo da autora.

θ : Ao sobrepormos duas retas r e s concorrentes ou paralelas, a dobra resultante será uma reta b equidistante a r e s .

Θ : Axioma 3 de Huzita-Hatori: Dadas duas linhas, l_1 e l_2 , podemos dobrar linha l_1 para linha l_2 .

T5: Construir o triângulo equilátero ABC a partir do segmento dado.

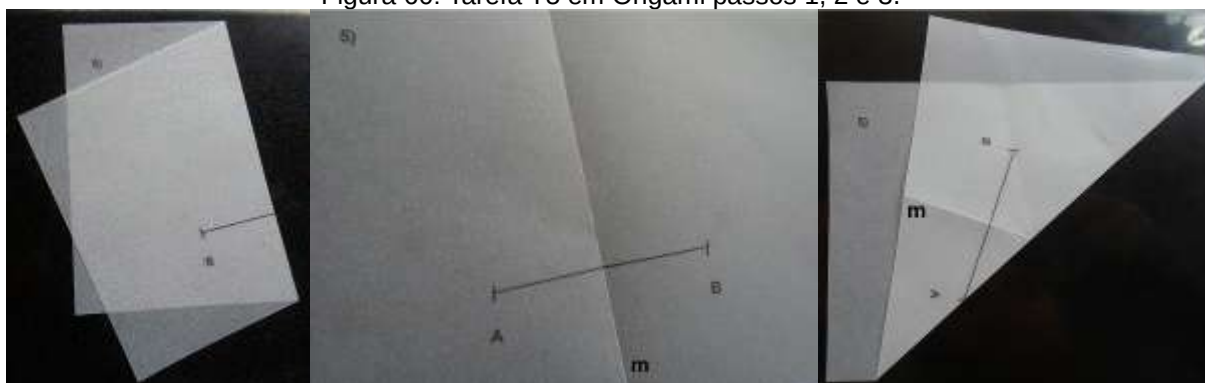
Figura 59: Tarefa T5 em Origami.



Fonte: Arquivo da Autora.

τ : Dobrar a mediatriz do segmento AB. Criar uma dobra que parta do ponto A sendo que o ponto B toque nessa mediatriz de AB.

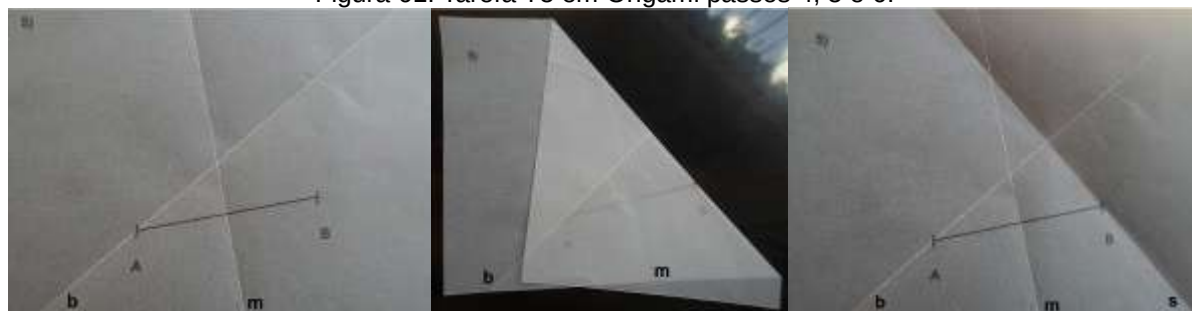
Figura 60: Tarefa T5 em Origami passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivo da Autora.

A essa reta chamaremos de b . Alinhando b nela mesma, faremos uma dobra passando pelo ponto B . A essa reta chamaremos s .

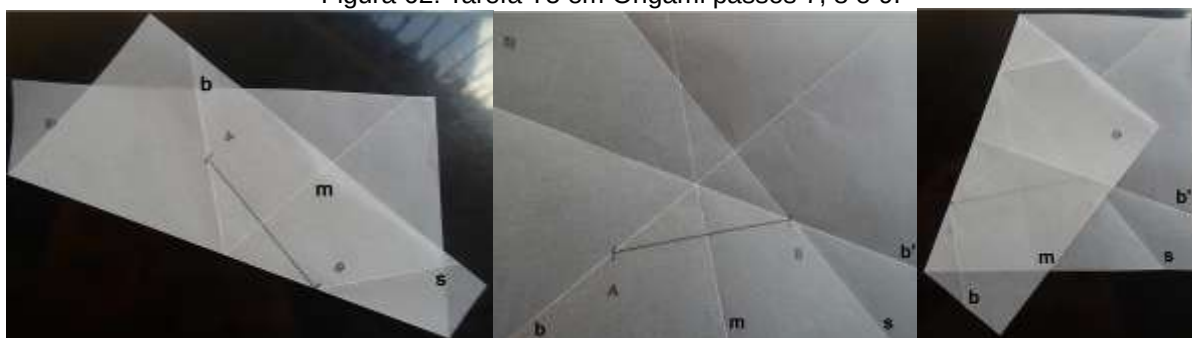
Figura 61: Tarefa T5 em Origami passos 4, 5 e 6.



Fonte: Arquivo da Autora.

Criando uma dobra que parta do ponto B , e que o ponto A toque a mediatriz m .

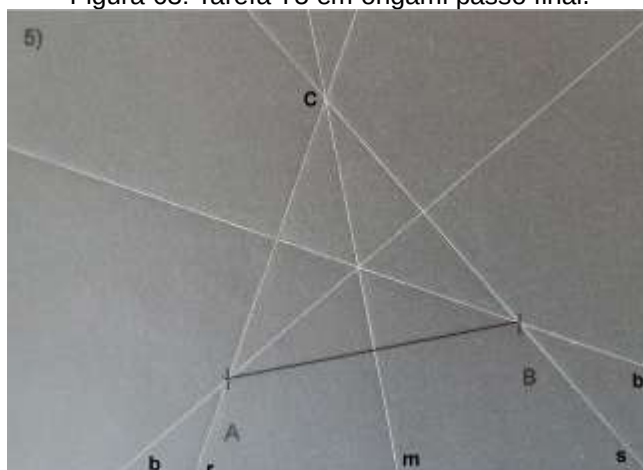
Figura 62: Tarefa T5 em Origami passos 7, 8 e 9.



Fonte: Arquivo da Autora.

A essa dobra chamaremos de b' . Alinhando b' nela mesma, faremos uma dobra que passe pelo ponto A . A reta s intercepta a mediatriz m no ponto C , vértice do triângulo ABC procurado.

Figura 63: Tarefa T5 em origami passo final.



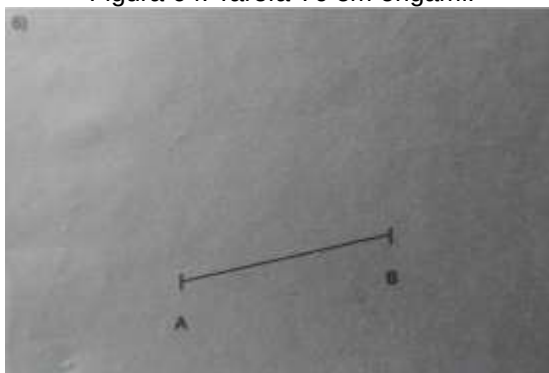
Fonte: Arquivo da autora.

θ : Na mediatriz do segmento AB se encontra a altura do triângulo ABC. Levando o segmento AB para a mediatriz, encontraremos a altura do triângulo que é o vértice de apoio de seus outros lados.

Θ : Axiomas 1, 2 e 3 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar uma linha conectando-os; dados dois pontos P1 e P2, podemos dobrar P1 para P2; dadas duas linhas l1 e l2, podemos dobrar linha l1 para linha l2.

T6: Construir o quadrado ABCD a partir do segmento dado.

Figura 64: Tarefa T6 em origami.



Fonte: Arquivo da autora.

τ : Prolongar o segmento AB com uma dobra em cima dele mesmo, criando a reta r. Alinhar r até vincar uma perpendicular p que passe pelo ponto B e outra p' passando pelo ponto A.

Figura 65: Tarefa T6 em origami passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivo da autora.

Alinhar r até vincar uma perpendicular p' passando pelo ponto A .

Figura 66: Tarefa T6 em origami passos 4, 5 e 6.



Fonte: Arquivo da autora.

Alinhando a perpendicular p com a reta r , vincar a dobra da diagonal d com origem no ponto B . A diagonal d intercepta p' no ponto D . Alinhar p' com r criando a diagonal d' com origem em A .

Figura 67: Tarefa T6 em origami passos 7, 8 e 9.



Fonte: Arquivo da autora.

A diagonal d' intercepta p no ponto C . Criando uma dobra apoiada em D e C fecharemos o quadrado pedido.

Figura 68: Tarefa T6 em origami passos 10, 11 e 12.



Fonte: Arquivo da autora.

θ : Quando criamos com uma dobra a reta r , suporte do segmento AB , estamos favorecendo o segundo axioma do origami para podermos levantar as retas perpendiculares p' e p , passando pelos pontos A e B onde p e p' são as retas suportes dos outros lados do quadrado. Como as diagonais do quadrado são bissetrizes de seus ângulos internos e determinam a altura de seus lados, alinhamos p em r partindo do ponto B , e criamos a diagonal d deste quadrado e onde d intercepta p' encontra-se o ponto D , vértice do quadrado $ABCD$.

Θ : Axiomas 1, 2 e 3 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos $P1$ e $P2$, podemos dobrar uma linha conectando-os; dados dois pontos $P1$ e $P2$, podemos dobrar $P1$ para $P2$; dadas duas linhas $l1$ e $l2$, podemos dobrar linha $l1$ para linha $l2$.

T7: Construa o retângulo $ABCD$ com o lado maior sendo o dobro do lado menor dado.

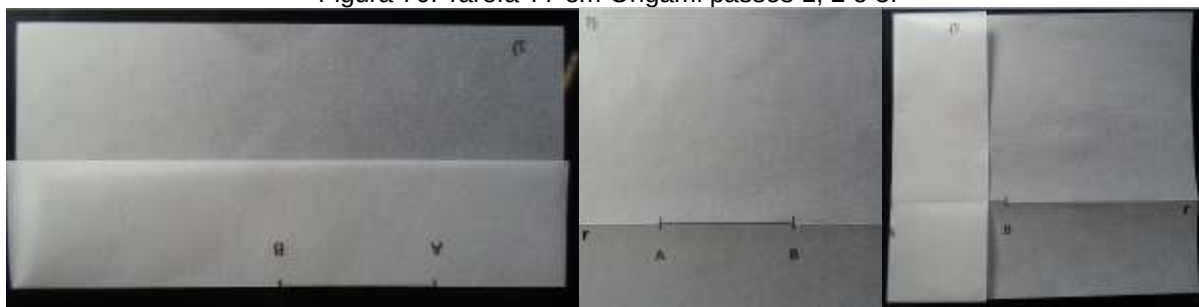
Figura 69: Tarefa T7 em Origami.



Fonte: Arquivo da autora.

τ : Prolongar o segmento AB dado com uma dobra, criando uma reta r apoiada em AB . Alinhando a reta r em si mesma, dobrar uma perpendicular p que passe pelo ponto A do segmento AB .

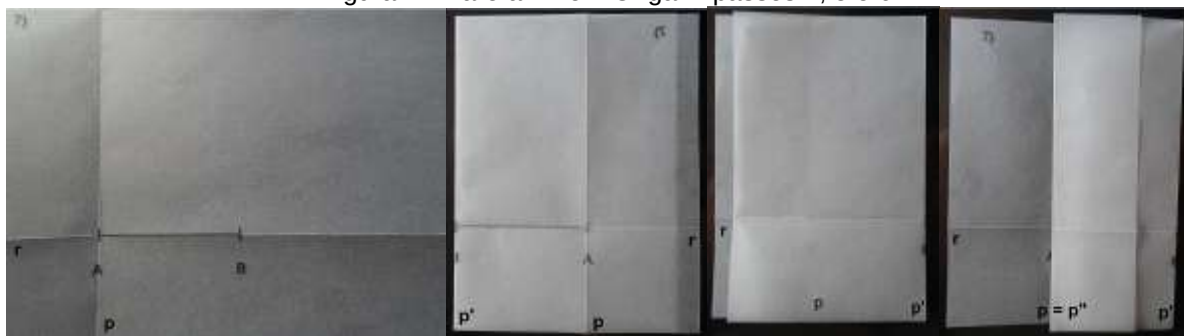
Figura 70: Tarefa T7 em Origami passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivo da autora.

Criar uma perpendicular p' com pé no ponto B. Ainda com o papel dobrado, com r alinhada nela mesma, criar outra perpendicular p'' passando por A, sendo que p coincide com p'' .

Figura 71: Tarefa T7 em Origami passos 4, 5 e 6.



Fonte: Arquivo da autora.

Alinhando r e p' , criar uma diagonal d com origem no ponto B. A diagonal d intercepta p na nova posição do ponto B.

Figura 72: Tarefa T7 em Origami passos 7, 8 e 9.



Fonte: Arquivo da autora.

Alinhando p' com r no sentido oposto de d e com origem em B, criar a diagonal d' . A diagonal d' intercepta a reta s no ponto C. Criar a reta perpendicular p'' em relação à reta r , passando pelo ponto C.

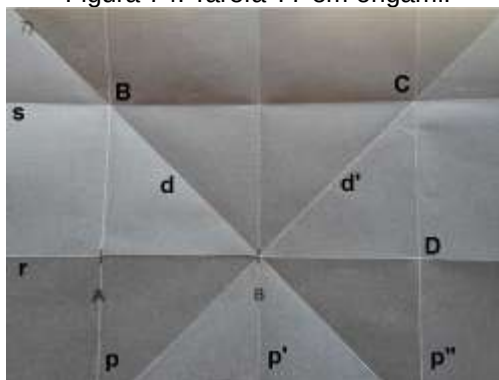
Figura 73: Tarefa T7 em Origami passos 10, 11 e 12.



Fonte: Arquivo da autora.

Alinhando as perpendiculares p , p' e p'' nelas mesmas e apoiando a dobra que liga os pontos B e C, a reta s criada apoiada nos pontos B e C fecha o polígono ABCD pedido.

Figura 74: Tarefa T7 em origami.



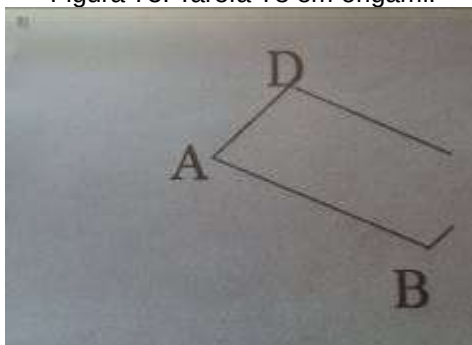
Fonte: Arquivo da autora.

θ : Como este retângulo tem o lado maior sendo o dobro do lado menor dado, este quadrilátero é a soma de dois quadrados de lado AB dado (lado menor). O procedimento é semelhante à construção do quadrado, com a diferença que dobramos dois quadrados juntos e podemos dobrar as diagonais desses quadrados paralelas ou concorrentes.

Θ : Axiomas 1, 2, 3 e 4 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar uma linha conectando-os; dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar P_1 para P_2 ; dadas duas linhas l_1 e l_2 , podemos dobrar linha l_1 para linha l_2 ; dados um ponto P_1 e uma linha l_1 , nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l_1 passando através de P_1 .

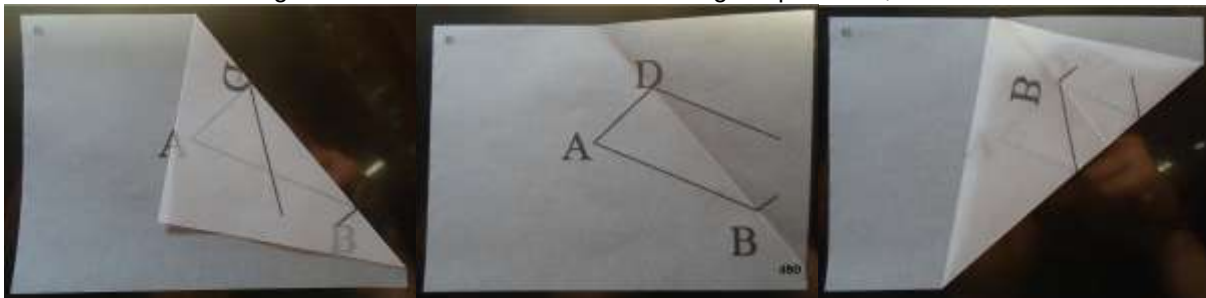
T8: Construir a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC

Figura 75: Tarefa T8 em origami.



Fonte: Arquivo da autora.

τ 1: Apoiar uma dobra nos pontos D e B, determinando a diagonal DB. Sobrepondo os pontos D e B, vincamos para encontrarmos o ponto médio M da diagonal DB.

Figura 76: Tarefa T8 técnica τ 1 em origami passos 1, 2 e 3.

Fonte: Arquivo da autora.

Criar uma dobra apoiada nos pontos A e M. Nesta dobra está apoiada a diagonal dAC solicitada.

θ 1: As diagonais do paralelogramo interceptam-se em seus respectivos pontos médios.

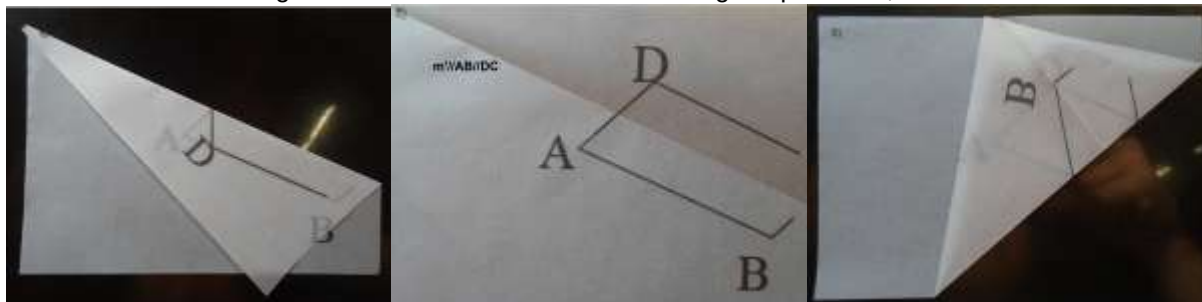
Figura 77: Tarefa T8 técnica τ 1 em origami passos 4, 5 e 6.

Fonte: Arquivo da autora.

τ 2: Alinhar os segmentos AB e DC criando uma dobra (vinco) m' , que é paralela aos segmentos AB e DC e intercepta os segmentos AD e BC em seus respectivos pontos médios. Sobrepondo AD e BC, vincamos outra dobra m, que interceptará AB e DC também em seus respectivos pontos médios. As retas m e m'

concorrem no ponto M, que é equidistante aos segmentos $AD//BC$ e $AB//CD$ respectivamente.

Figura 78: Tarefa T8 técnica $\tau 2$ em origami passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivo da autora.

Nos pontos A e M estará apoiada a diagonal d_{AC} pedida.

Figura 79: Tarefa T8 técnica $\tau 2$ em origami passos 4, 5 e 6.



Fonte: Arquivo da autora.

$\theta 2$: Os segmentos paralelos equidistantes aos lados opostos do paralelogramo bissectam-se em seus respectivos pontos médios.

Θ : Axiomas 1, 3 e 4 de Huzita-Hatori: Dados dois pontos P_1 e P_2 , podemos dobrar uma linha conectando-os; dadas duas linhas l_1 e l_2 , podemos dobrar linha l_1 para linha l_2 ; dados um ponto P_1 e uma linha l_1 , nós podemos fazer uma dobra perpendicular à l_1 , passando através de P_1 .

Essas foram as análises que fizemos nas atividades propostas no experimento sobre a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Veremos agora, quais as técnicas que os voluntários utilizaram para responder a essas mesmas questões.

6.3 Análise praxeológica das resoluções dos voluntários

Houve alguns impasses nesta etapa. Pois não conseguimos uma régua não graduada. Informamos a cada dupla que não poderiam usar outro material que não

régua e compasso como apoio nas construções (caso fossem usar um esquadro como régua apenas para traçar). Para as tarefas em régua e compasso, utilizamos folhas no formato A5 (21 cm x 14,85 cm).

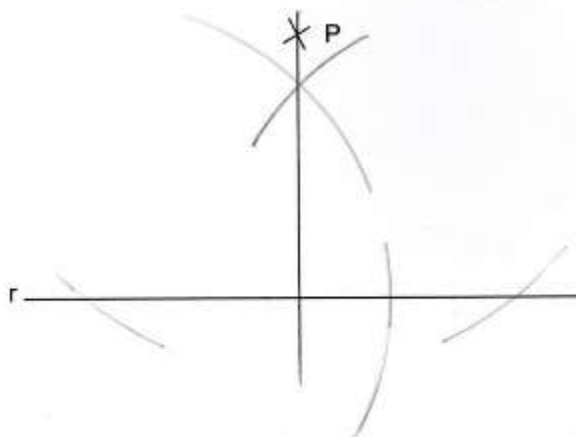
6.3.1 Tarefas em Régua e Compasso

T1: Construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada passando pelo ponto P .

A tarefa T1 é análoga à construção de um triângulo isósceles, tendo o ponto P como o vértice e a reta r como o “chão” que apoia a base desse triângulo. Com a ponta seca do compasso em P , traça-se um arco qualquer que intercepte r em dois pontos distintos, determinando os “lados” desse triângulo. Considerando o segmento da base desse triângulo, podemos traçar a mediatriz desse segmento que passará pelo ponto P e será perpendicular à reta r . A tarefa T1 admitia uma única técnica τ para ser resolvida e apenas 5 duplas responderam corretamente a essa questão.

Uma das duplas apoiou um escalímetro nas bordas do papel para traçar a perpendicular e outra se apoiou em uma régua que possuía duas escalas.

Figura 80: Tarefa T1 com única técnica correta, resposta dupla D4.



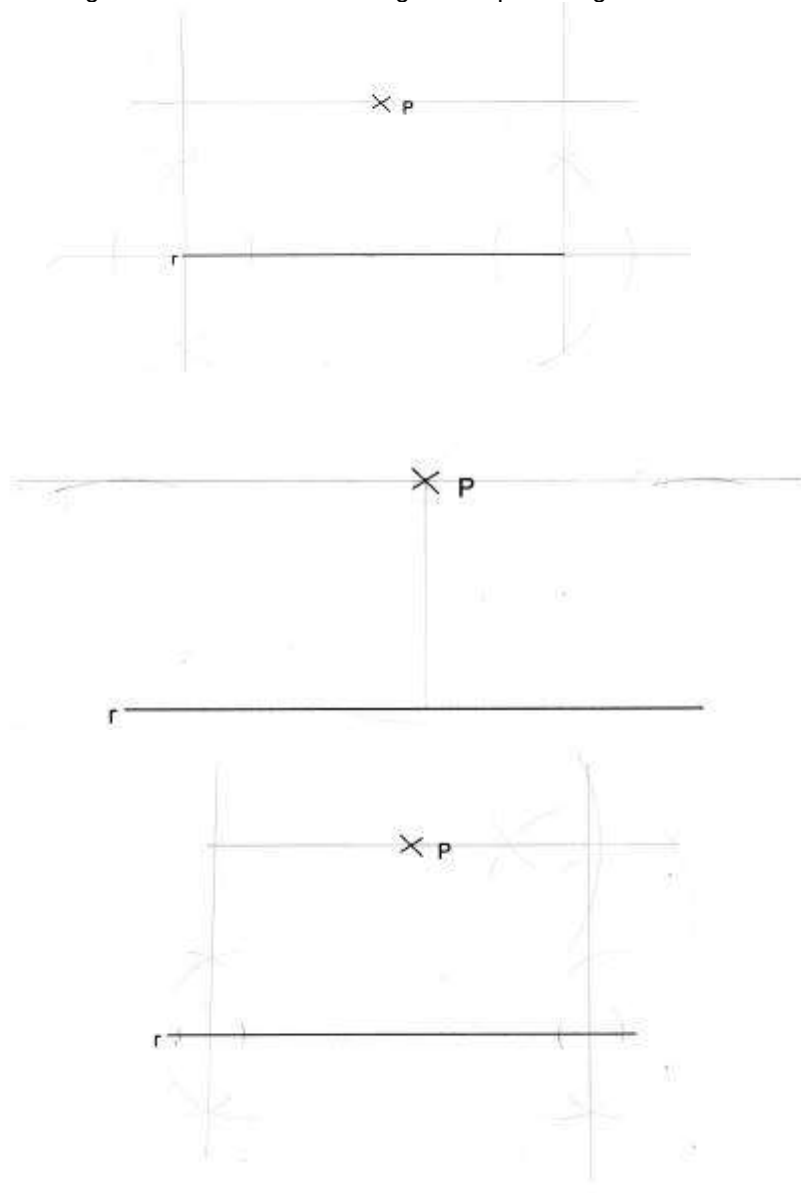
Fonte: Arquivos da Autora

T2: Construir a reta paralela s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P .

Baseados no livro de Marchesi Júnior (2009), encontramos 4 técnicas diferentes de responder a essa questão, que são as propriedades do retângulo, paralelogramo, losango e trapézio isósceles. Apenas três duplas recorreram à técnica da propriedade do retângulo, sendo que duas delas falharam na construção

que forneceria a menor distância entre P e r à transferência dessa altura para as outras perpendiculares construídas.

Figura 81: Tarefa T2 tecnologia θ do paralelogramo.

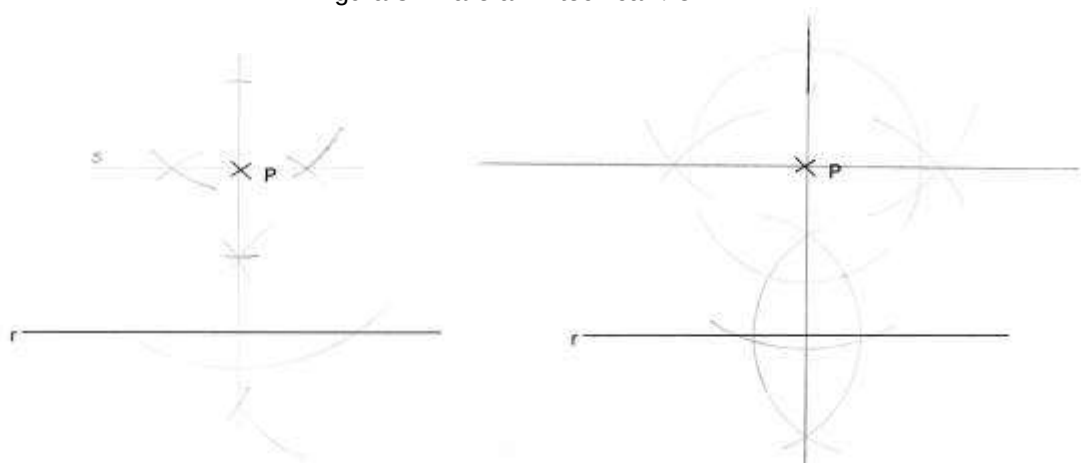


Fonte: Arquivos da Autora.

As outras três duplas recorreram a uma técnica distinta das demais, traçando uma reta perpendicular a r , passando por P e depois traçando outra reta perpendicular a essa perpendicular, também passando por P . A essa técnica denominamos de $\tau 5$. Essa técnica consistiu em uma réplica da técnica da tarefa T1, na qual o compasso foi centrado em P para determinar um segmento na reta r , traçando a mediatriz desse segmento, que é a reta perpendicular p a r , passando por

P. Centrando o compasso em P e com um raio qualquer, criar pontos equidistantes a P pertencentes à reta p, e depois traçando a mediatriz s desse novo paralelismo à reta r dada.

Figura 82: Tarefa T2 técnica τ 5.

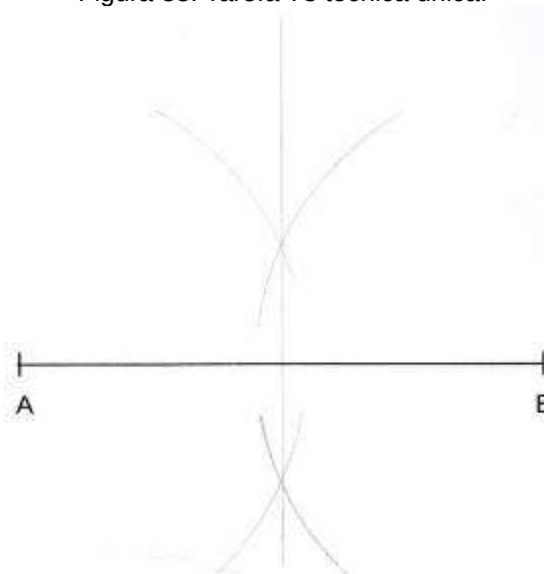


Fonte: Arquivos da Autora.

T3: Construir a mediatriz do segmento AB dado.

A tarefa T3, que foi encontrar a mediatriz do segmento AB dado, teve uma única técnica τ utilizada por 100% das duplas. A técnica consistia na intercessão de duas circunferências de raio AB, e os centros destas circunferências os respectivos pontos A e B colineares.

Figura 83: Tarefa T3 técnica única.



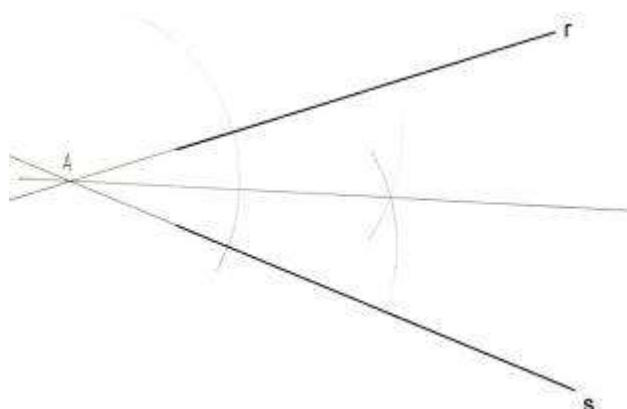
Fonte: Arquivos da Autora.

T4: Construir a bissetriz do ângulo dado.

A tarefa T4 teria quatro tipos de técnicas para sua resolução, sendo que a menos complexa é uma analogia à construção da mediatriz. Prolongando-se as retas r e s até se interceptarem, encontramos o vértice que origina a abertura angular; com uma abertura qualquer do compasso, traçamos um raio que secciona r e s a uma mesma distância, originando dois pontos equidistantes do vértice. Estes pontos são extremidades de um segmento no qual pode-se extrair sua mediatriz que é a bissetriz da abertura angular de r e s .

Deixamos essa questão em aberto na intenção de ver a qual das técnicas conhecidas os alunos iriam recorrer. Todas as duplas buscaram a solução menos complexa.

Figura 84: Tarefa T4 técnica τ 1.

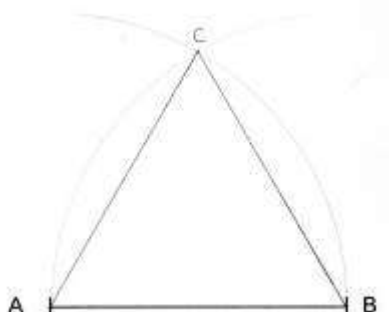


Fonte: Arquivos da Autora.

T5: Construir o triângulo equilátero ABC a partir do segmento dado.

A tarefa T5 teve uma única técnica correta, que é a intercessão entre duas circunferências c_1 e c_2 de raio AB , tendo c_1 o ponto A como centro e c_2 tendo B como centro. Essa técnica foi realizada por 100% das duplas.

Figura 85: Tarefa T5 técnica τ única.

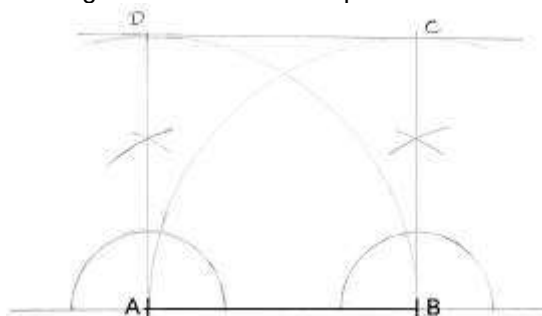


Fonte: Arquivos da Autora.

T6: Construir o quadrado ABCD a partir do segmento dado.

A tarefa T6 teve também uma única técnica correta de resolução (descrita no item 6.1) e 6 duplas fizeram corretamente.

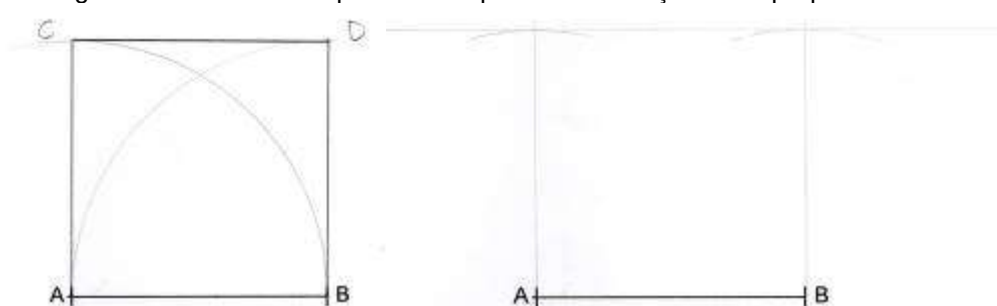
Figura 86: Tarefa T6 resposta correta.



Fonte: Arquivos da Autora.

O único equívoco das outras duas duplas no traçado do quadrado foi o fato de não construírem o apoio das perpendiculares, para assim poderem transferir a altura do quadrado. Para conseguir as perpendiculares, eles usaram de apoio o formato dos instrumentos que estavam usando (régua, par de esquadros).

Figura 87: Tarefa T6 respostas sem precisão no traçado das perpendiculares.

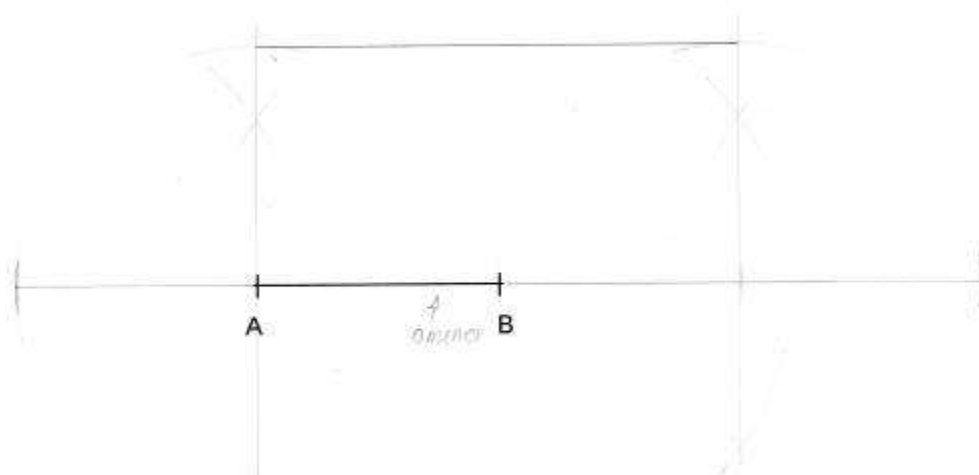


Fonte: Arquivos da Autora.

T7: Construir o retângulo ABCD com o lado maior sendo o dobro do lado menor dado.

A questão T7 teve um erro de concepção do enunciado, foi dado o lado menor do retângulo e não o tamanho desse lado menor. Então a questão só admitia uma resposta, que era o lado menor AB ser a base desse retângulo ABCD. Em régua e compasso foi possível fazer, porém em origami a resposta seria impossível por conta do tamanho do papel, a não ser que se rotacionasse o retângulo para que o lado AD fosse a base do retângulo.

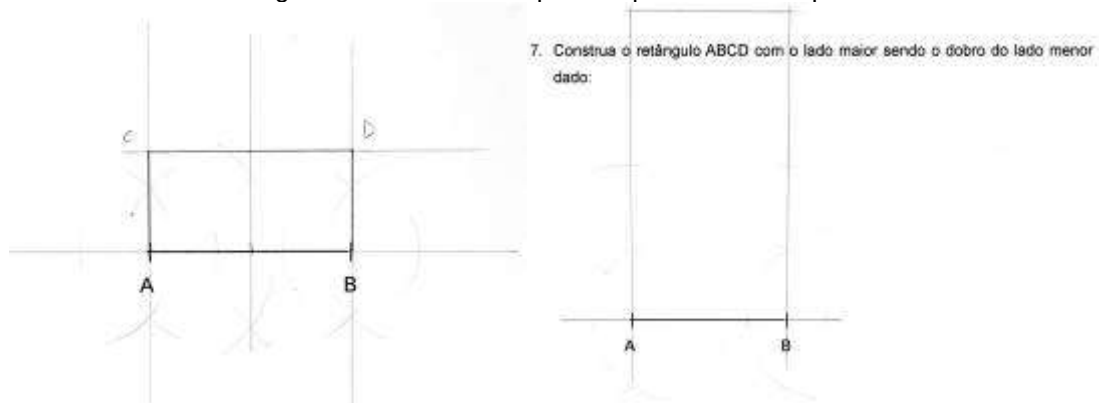
Figura 88: Tarefa T6 com a figura rotacionada.



Fonte: Arquivos da Autora

Aproveitando este equívoco, as duplas D5 e D8 apresentaram a resposta correta, enquanto que as duplas D1, D2 e D7 transferiram o segmento AB, que estava no sentido horizontal para o sentido vertical, tornando o lado AD a base do retângulo e as duplas D3 e D4 consideraram o lado AB como o lado maior do retângulo.

Figura 89: Tarefa T7 resposta equivocada e resposta correta.



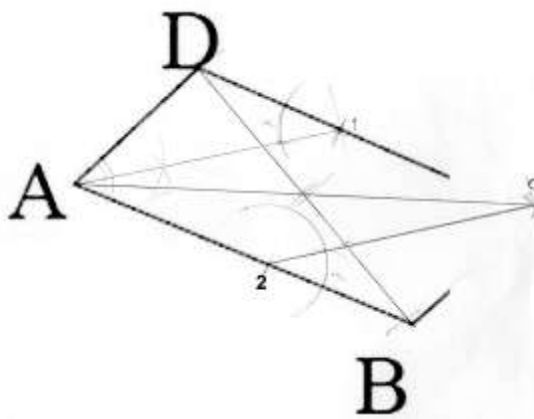
Fonte: Arquivos da Autora

T8: Construir a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC.

A tarefa T8 poderia ser respondida com duas técnicas diferentes. Apenas 2 duplas utilizaram uma das técnicas válidas. Poderíamos citar as dificuldades dos alunos nessa tarefa pelo fato de eles não terem visto o assunto quadriláteros e suas propriedades, assunto este que ainda seria abordado na disciplina de GGB.

Os alunos responderam ou deram tentativas de resposta com o que possuíam de conhecimentos prévios sobre o conteúdo. A dupla D1 fez uma construção interessante usando semelhança entre triângulos. Eles criaram a bissetriz do ângulo $\widehat{DAB}$, onde essa bissetriz interceptou o lado DC do paralelogramo, eles denominaram de ponto 1, criando um triângulo escaleno AD1. Com a abertura do compasso igual à distância do segmento D1, com a ponta seca no vértice B, transferiram essa medida para o segmento AB, criando o ponto 2. Transferiram a abertura angular de $\widehat{D1A}$ (ângulo α) para o segmento AB com origem no ponto 2. Transferindo a medida de AD com a ponta seca em B para a semirreta com origem em 2 paralela a A1 encontraram o ponto C, que fica apoiado na diagonal AC. Porém, como a regra da questão era não prolongar os lados DC e AC do paralelogramo, ou seja, o vértice C não poderia ser determinado, a construção, apesar de correta, não pode ser considerada como uma resposta válida. Mesmo se eles transferissem a medida de A1 para sua paralela com origem em 2, estariam determinando o vértice C.

Figura 90: Tarefa T8 com técnica diferente τ d.



Fonte: Arquivos da Autora.

A tabela abaixo mostra os erros e acertos de cada dupla e as técnicas que utilizaram para responder às tarefas. As respostas incorretas estão representadas pela letra X, e as corretas pela nomenclatura das técnicas que foram utilizadas pelas duplas. A sigla RCCE significa que as duplas tiveram um raciocínio correto (RC) para a construção pedida porém, fizeram uma construção equivocada (CE).

Tabela 2: Análise praxeológica das respostas em régua e compasso.

DUPLAS	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
D1	X	X	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	T	RCCE
D2	T	$\tau 5$	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	T	$\tau 1$
D3	T	X	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	RCCE	X
D4	T	$\tau 5$	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	RCCE	X
D5	X	X	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	X	X	X
D6	T	$\tau 5$	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	X	$\tau 1$
D7	X	X	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	X	X	X
D8	T	$\tau 5$	τ	$\tau 1$	$\tau 1$	$\tau 1$	τd	X

Fonte: Arquivos da Autora.

6.3.2 Tarefas em Origami

Para esta etapa, utilizamos papel vegetal no tamanho A6 (10,5 cmx14,85 cm). Além da transparência do papel ajudar na visualização e transferências dos pontos nas construções, os vincos formados nesse tipo de papel também ficavam bem marcados.

T1: Construir uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P .

Figura 91: Tarefa T1 técnicas $\tau 1$ e $\tau 2$.

Fonte: Arquivos da Autora.

Na tarefa T1, encontramos um tipo de técnica τ , utilizada pelos alunos, que foi alinhar a reta r em si mesma até passar por P e vincar, assim, achando a reta s perpendicular em relação a r . A dupla D2 prolongou r e a partir desta dobra fez outra

sobreposta como mostra o Axioma 4 de Huzita. As outras duplas apenas alinharam r até a dobra chegar em P .

Figura 92: Tarefa T1, técnica τ d passos 1, 2 e 3.



Fonte: Arquivos da Autora.

T2: Construir a reta paralela s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P .

A tarefa T2 foi uma das mais desafiadoras em origami. Houve muitas técnicas diferentes do caminho mais simples e preciso que pesquisamos. A dupla D2 fez uma reta perpendicular a r passando por P . Eles pularam essa questão e após fazerem a Tarefa 5 retornaram para a T2, pois perceberam que só poderiam responder a T6 se conseguissem levantar uma paralela. Fizeram um ponto qualquer acima de P , sendo esse ponto colinear à reta perpendicular, passando por P . Alinharam esse ponto na perpendicular até P ficar entre esse novo ponto e sua imagem. A dupla se valeu da propriedade de equidistância.

A dupla D3 também fez a perpendicular passando por P , porém criou paralelas a essa perpendicular e depois alinhou essas retas até passar por P .

Figura 93: Tarefa T2 com técnicas diferentes.



Fonte: Arquivos da Autora.

A dupla D4 usou dobras sobrepostas. Fez a perpendicular passando por P e, sem abrir o papel, levou P até r , criando uma dobra que passa entre r e P . Ainda com

o papel fechado, fez outra dobra sobreposta, agora passando por P e r. Gerando, assim, a paralela s pedida.

A dupla D5 usou outra técnica. Também fez a perpendicular passando por P, depois levou P até o pé dessa perpendicular passando por r, criando uma dobra mediana à reta r e ao ponto P. Depois alinhou a perpendicular de r até vincar em P. Ou seja, a criação da mediana não seria necessária.

Figura 94: Tarefa T2.



Fonte: Arquivos da Autora.

A dupla D7 não conseguiu resolver a T2 de imediato e pularam para as outras tarefas, deixando a T2 por último. Também fizeram a perpendicular à reta r passando por P e depois alinhou P em r no pé da perpendicular em r, usou a reta r como suporte para fazer a reta s, com duas dobras em vale e montanha (zigue e zague).

Figura 95: Tarefa T2 técnica τd .



Fonte: Arquivos da Autora.

T3: Construir a mediatriz do segmento AB dado.

A tarefa T3 teve uma única técnica utilizada por 100% das duplas, que foi rebater ou coincidir os pontos A e B do segmento AB dado, formando um vinco ou dobra que passa exatamente no ponto médio M de AB e esse vinco é perpendicular a esse segmento e equidistante de seus pontos.

Figura 96: Tarefa T3.



Fonte: Arquivos da Autora.

T4: Construir a bissetriz do ângulo dado.

A tarefa T4 teve dois tipos de técnicas utilizada pelos alunos. Metades das duplas alinharam diretamente as retas r e s , enquanto que a outra metade prolongou r e s para após isso rebatê-las, criando o vinco que representa a bissetriz do ângulo formado por essas retas.

Figura 97: Tarefa T4 técnicas $\tau 1$ e $\tau 2$.

Fonte: Arquivos da Autora.

T5: Construir o triângulo equilátero ABC a partir do segmento dado.

A tarefa T5 tem uma técnica única que contém cinco etapas (1. criar mediatriz de AB; 2. tocar a mediatriz em A e vincar; 3. tocar a mediatriz em B e vincar; 4. fechar o lado AC do triângulo; 5. fechar o lado BC do triângulo) para que a construção fique a mais precisa possível. Porém, para quem não conhece essa característica das construções euclidianas no origami, bastam apenas três etapas para fechar o triângulo equilátero. Apesar de ser uma construção mais complexa no origami do que na régua e compasso, cinco duplas conseguiram responder.

Figura 98: Tarefa T5.



Fonte: Arquivos da Autora.

T6: Construir o quadrado ABCD a partir do segmento dado.

A tarefa T6 foi realizada com sucesso por 50% das duplas, mas metade das duplas resolveram com técnicas diferentes da esperada. A Dupla D2 criou a mediatriz de AB, com a folha dobrada, fez outra dobra sobreposta, criando duas diagonais opostas com origem no ponto médio de AB. Porém, a dupla marcou um ponto M na mediatriz de AB com uma dobra sobreposta à dobra da diagonal até uma das extremidades. Sabendo que M tinha a metade de AB, a dupla transferiu essa mesma medida e determinou o ponto H, que é a altura do quadrado e fez uma reta paralela s a AB, passando por H. Alinhando a reta s até a dobra passar pelos pontos A e B, eles dobraram as retas p e p' , que são perpendiculares ao segmento AB e fecham o quadrado ABCD pedido.

A dupla D3 fez também a mediatriz de AB, sem abrir o papel após a dobra, dobrou de modo a coincidir os pontos A, M e B. Alinhou a metade de AB em sua mediatriz e vincou uma dobra, que criou uma diagonal com origem em M. Com o papel ainda dobrado fez uma dobra sobreposta de MB alinhado na mediatriz, sem abrir o papel, fez uma dobra sobreposta paralela alinhada com AM (em zigue e zague).

Figura 99: Tarefa T6 com duas técnicas diferentes.



Fonte: Arquivos da Autora.

T7: Construir o retângulo ABCD com o lado maior sendo o dobro do lado menor dado.

A tarefa T7 em origami, por erro de concepção do enunciado, seria uma questão sem resposta, pois a folha de papel dada não era grande o suficiente para fechar o retângulo. Com exceção das duplas que tomaram AB como o lado maior do retângulo, as outras duplas mudaram a base AB para a base AD para o retângulo caber no papel. A tarefa T7 foi a única que o segmento estava paralelo, a olho nu, com a borda do papel; duas duplas se apoiaram nesse fato para levantar as perpendiculares do retângulo alinhando as bordas do papel.

Figura 100: Tarefa T7.



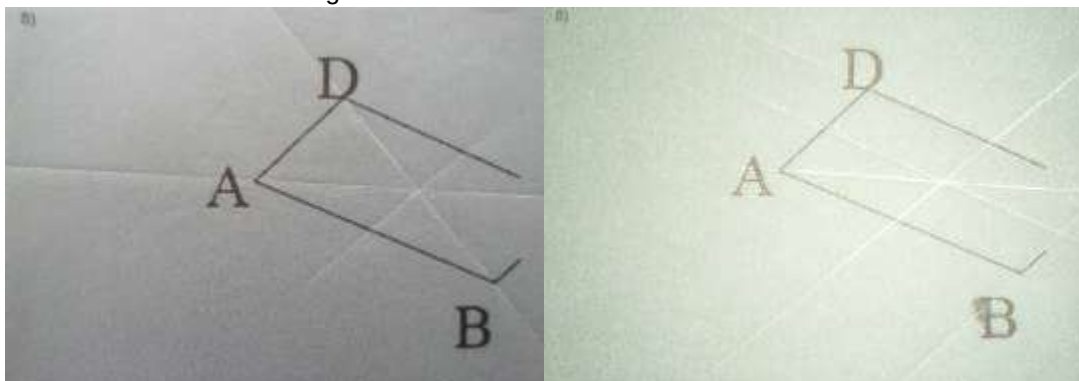
Fonte: Arquivos da Autora.

T8: Construir a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC.

A tarefa T8 teve dois tipos de técnicas apresentadas. Uma já prevista pelos pesquisadores, e outra que ainda não havia sido analisada foi apresentada por uma das duplas, que foi a técnica $\tau 2$. Foi uma das questões em que os alunos sentiram mais dificuldade em responder, tanto em régua e compasso, mas, mais ainda em

origami. Porém, algumas duplas, que não conseguiram observar ou recordar da propriedade das diagonais dos quadriláteros regulares e semirregulares na construção a régua e compasso, conseguiram verbalizar isso quando tentavam responder a T8.

Figura 101: Tarefa T8 técnicas $\tau 1$ e $\tau 2$.



Fonte: Arquivos da Autora.

Podemos observar, na tabela abaixo, que apesar de dispenderem mais tempo e terem mais dificuldades, os voluntários acertaram três questões a mais no quadro geral, e das nove atividades que as duplas não conseguiram responder em régua e compasso, conseguiram responder em origami, contra quatro que responderam corretamente em régua e compasso, mas que não obtiveram sucesso ao responder com as dobras. A simbologia τd significa que os voluntários utilizaram uma técnica diferente das pesquisadas anteriormente. O mais interessante é constatar que esta técnica foi executada criativamente pelas duplas no momento de resolução da tarefa proposta.

Tabela 3: Análise praxeológica das respostas em origami.

DUPLAS	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
D1	X	X	τ	$\tau 1$	τ	τ	X	X
D2	τ	$\tau 1$	τ	$\tau 2$	τ	τd	τ	$\tau 1$
D3	τ	$\tau 1$	τ	$\tau 2$	X	τd	RCIE	X
D4	τ	$\tau 1$	τ	$\tau 2$	X	τd	RCIE	$\tau 1$
D5	τ	X	τ	$\tau 1$	τ	τd	τ	$\tau 2$
D6	τ	$\tau 1$	τ	$\tau 2$	τ	X	τ	$\tau 1$
D7	X	τd	τ	$\tau 1$	τ	X	τd	X
D8	τ	$\tau 1$	τ	$\tau 1$	X	X	τ	X

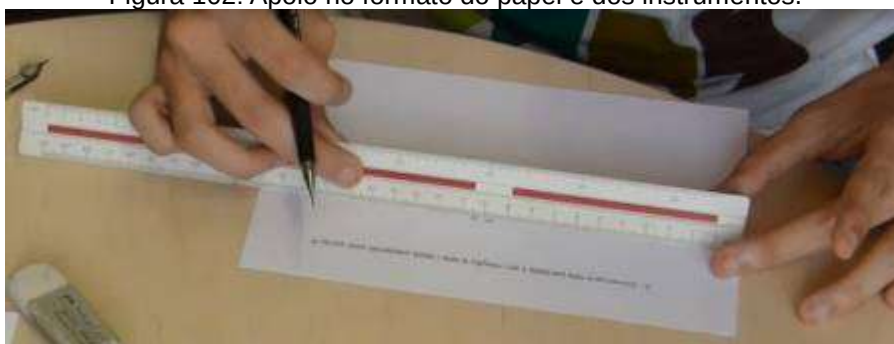
Fonte: Arquivos da Autora.

6.3.3 Dupla 1

Os voluntários da primeira dupla complementar formada eram do primeiro período, ambos vieram do ensino privado, tiveram aula de Geometria como conteúdo da disciplina de Matemática e um dos componentes da dupla fez cursinho específico de Geometria Gráfica pré-vestibular, e um deles também já havia feito algum tipo de dobradura.

Essa dupla, em especial, na primeira e segunda etapas do experimento, tiveram um diferencial, pois a impressão das retas nas folhas parecia, a olho nu, que estavam paralelas à borda do papel. A dupla usou desta característica para apoiar algumas dobras e também para apoiar um escalímetro na borda do papel para traçar a reta paralela na primeira etapa. Também se utilizaram das bordas do papel nas tarefas em origami.

Figura 102: Apoio no formato do papel e dos instrumentos.



Fonte: Arquivos da Autora.

Este fato comprova a criatividade do aluno em encontrar uma solução lógica para a tarefa T2, porém, em se tratando de propriedades geométricas das construções euclidianas a régua e compasso, observa-se claramente a falta de domínio, por parte dos alunos, buscando suporte na forma dos instrumentos.

Figura 103: Apoio no formato dos instrumentos.



Fonte: Arquivos da Autora.

Inquiridos sobre qual das atividades tinha sido a mais difícil de se fazer, um dos componentes respondeu que dependia da construção, enquanto o outro respondeu que estava mais familiarizado com o desenho, que a dobradura, por mais que parecesse simples, exigia pensar antes de fazer.

Uma das desvantagens do origami apontada pela dupla foi que no desenho eles tinham a possibilidade de apagar e recomeçar a construção, enquanto que, no origami, qualquer dobra errada ficaria marcada e poderia atrapalhar a visualização, necessitando de outra folha de papel para recomeçar. O interessante desta dupla foi eles alegarem: *“senti muita falta dos esquadros”* e que sentiram mais dificuldade na questão do triângulo equilátero, pois, na dobradura, o transporte das medidas era mais trabalhoso.

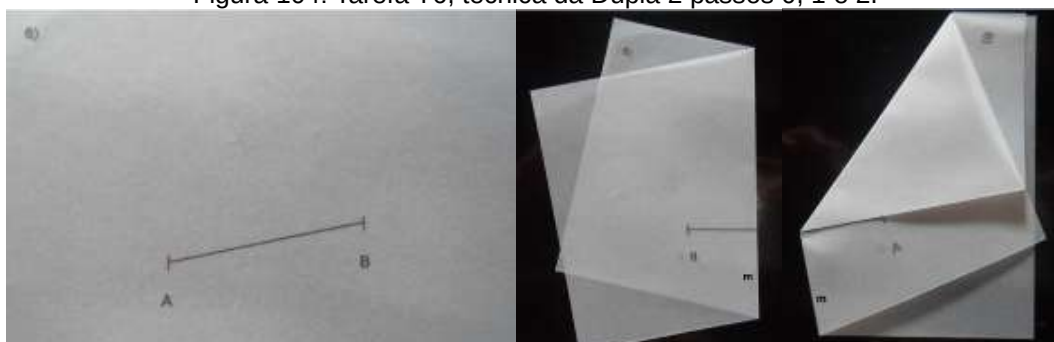
6.3.4 Dupla 2

A dupla 2, com voluntários do primeiro período, também foi oriunda de ensino privado, ambos tiveram aulas de Geometria, tanto como disciplina isolada e como conteúdo em Matemática. Um dos componentes já havia feito algum tipo de dobradura. Nenhum dos voluntários fez curso específico pré-vestibular.

A dupla em questão foi uma das que mais interagiu na resolução das tarefas propostas. Na tarefa T6, utilizaram uma técnica diferente da pesquisa dos autores. Uma técnica inédita, feita por pessoas inexperientes no mundo das dobraduras, para resolução de exercícios geométricos. Um caminho mais longo, porém, com o raciocínio altamente coerente.

A dupla criou a mediatriz do segmento AB dado, e sem desdobrar o papel, levou a mediatriz para ficar coincidente com o segmento AB, partindo de seu ponto médio.

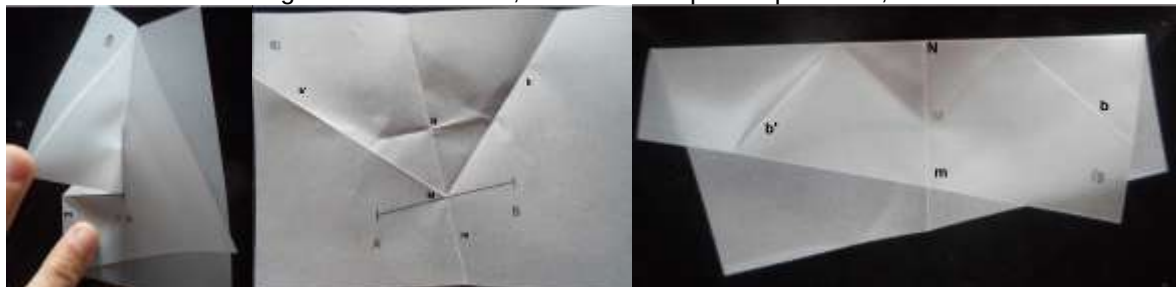
Figura 104: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 0, 1 e 2.



Fonte: Arquivos da Autora.

Ainda sem desdobrar o papel, fez-se uma dobra tangente ao ponto A. Abrindo o papel, apareceram duas bissetrizes (b e b'). Alinhando m nela mesma, fizeram uma dobra que passasse por N .

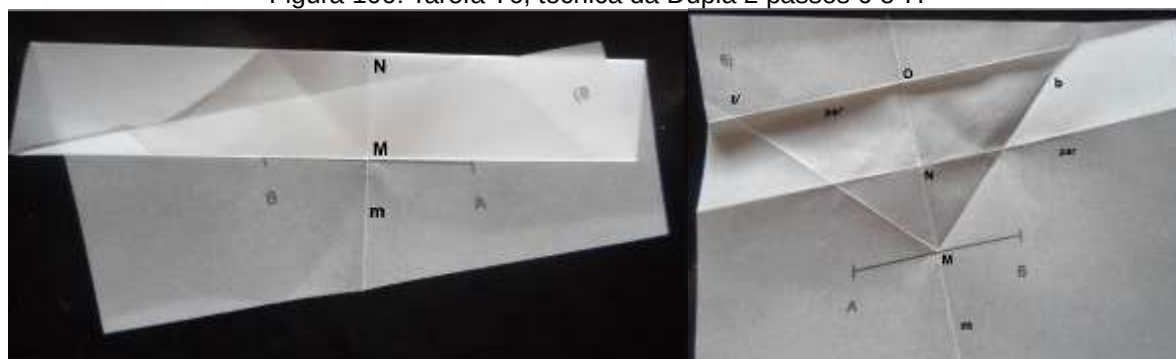
Figura 105: Tarefa T6, técnica da Dupla D2 passos 3, 4 e 5.



Fonte: Arquivos da Autora.

Sem abrir o papel, ainda alinhando m nela mesma, fizeram uma dobra de vale passando pelo ponto M . Abrindo o papel, tinham determinado duas paralelas ao segmento AB e o ponto O .

Figura 106: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 6 e 7.



Fonte: Arquivos da Autora

Alinhando as paralelas (par e par') nelas mesmas, passando pelo ponto A e depois pelo ponto B , levantaram duas perpendiculares a AB , uma com o pé em A (per) e a outra com o pé em B (per') e assim fecharam o quadrado $ABCD$ pedido.

Figura 107: Tarefa T6, técnica da Dupla 2 passos 8, 9 e 10.



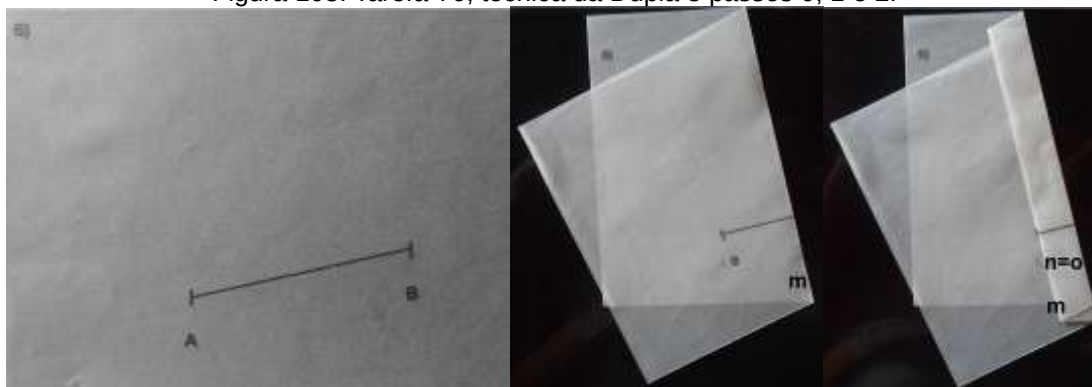
Fonte: Arquivos da Autora.

Quando inquiridos sobre em qual das atividades houve mais dificuldades, eles alegaram que realizar as atividades com *“régua e compasso é difícil de se fazer a partir do momento que a gente não sabe como fazer, mas depois que a gente sabe se torna fácil. E a gente sabendo como fazer com a régua e o compasso, a gente acaba sabendo como fazer dobrando”*. Quando inquiridos sobre o origami ajudar nas aulas de Geometria, a dupla afirmou que o ideal seria juntar as atividades, pois *“ambas têm a mesma dificuldade, se a gente pudesse juntar, talvez até entendesse mais fácil. Na verdade, eu acho que eles se complementam.”*. O outro componente da dupla fez uma declaração interessante: *“É como se a gente pegasse o plano e começasse a dobrar.”*.

6.3.5 Dupla 3

Os componentes da dupla 3, um do 1º e o outro do 3º período, vieram do ensino público e do privado, respectivamente. Também tiveram aula de Geometria como disciplina isolada e conteúdo de Matemática. A dupla não fez cursinho pré-vestibular. Um dos componentes já havia feito um origami. A dupla reclamou o fato de as representações geométricas impressas não estarem paralelas à borda do papel, pois isso facilitaria a construção com as dobras. O que chamou a atenção, nessa dupla, foi a resolução da tarefa T6, que apesar de alegarem, no momento da construção, que estavam em “tentativa e erro”, as técnicas utilizadas foram complexas para quem não era familiarizado com origami, principalmente em construções euclidianas.

Figura 108: Tarefa T6, técnica da Dupla 3 passos 0, 1 e 2.



Fonte: Arquivos da Autora.

A dupla D3 criou a mediatriz m do segmento AB , e com uma dobra sobreposta criou duas paralelas n e o à mediatriz m . A mediatriz m intercepta o segmento AB em seu ponto médio.

Figura 109: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 3 e 4.



Fonte: Arquivos da Autora.

Sobrepondo AB em sua mediatriz, criaram uma bissetriz b do ângulo formado entre m e AB , passando por seu ponto médio. Voltando a posição da dobra da bissetriz, criaram uma perpendicular em relação à AB , alinhando m nela mesma, sendo que esta perpendicular tinha o pé em B .

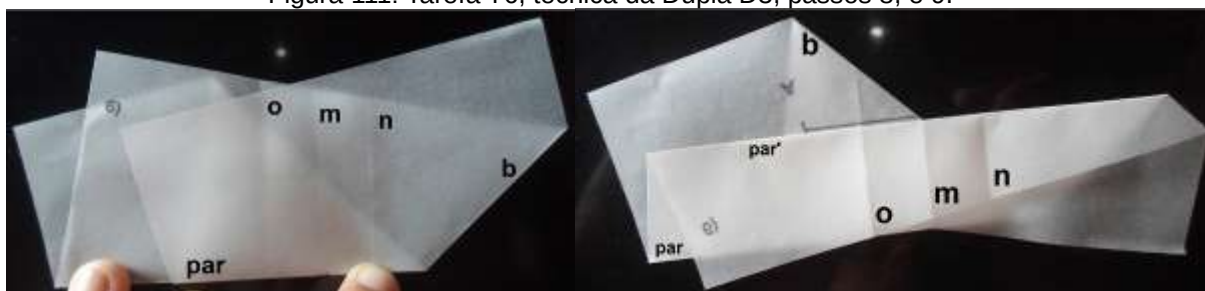
Figura 110: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 5, 6 e 7.



Fonte: Arquivos da Autora.

Ainda sem desdobrar, girando a folha, vemos que a dobra é uma paralela ao segmento formado pelo ponto médio de AB com o ponto B . Com a folha nessa posição, fizeram uma dobra alinhando as paralelas o , m e n nelas mesmas, criando uma paralela ao segmento formado pelo ponto A e ponto médio de AB .

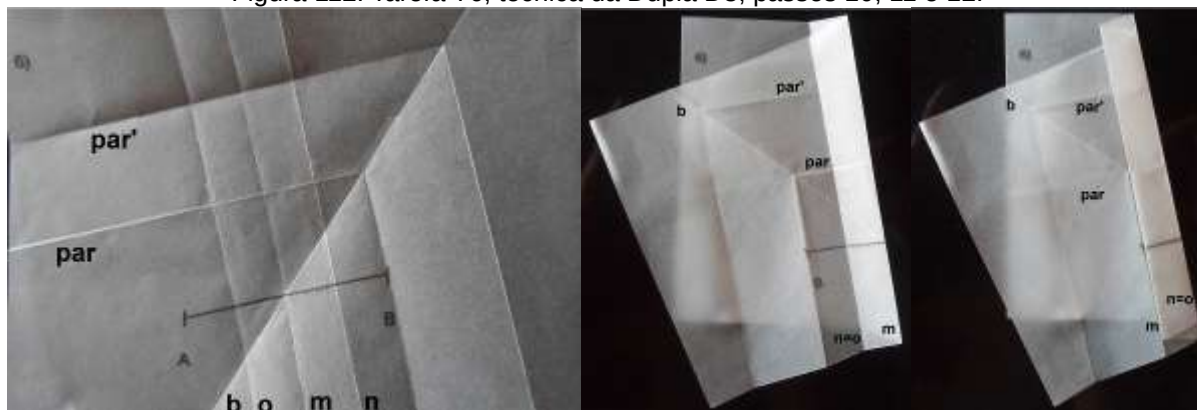
Figura 111: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 8, e 9.



Fonte: Arquivos da Autora.

Depois do passo 9, desdobraram o papel retornando ao formato A6. Podemos ver, então, um par de paralelas em relação a AB (par e par'). Sobrepondo as paralelas n e o, fez-se uma dobra levando m até tangenciar B.

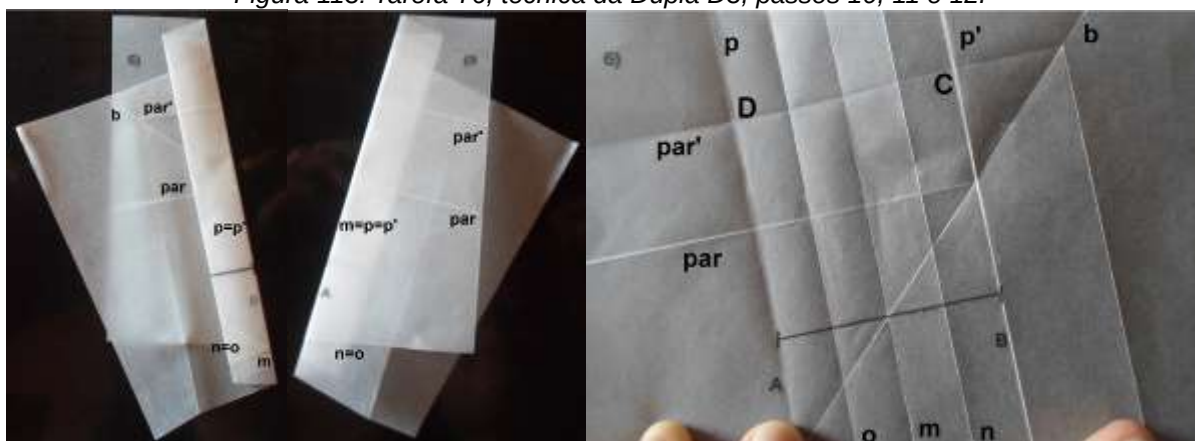
Figura 112: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 10, 11 e 12.



Fonte: Arquivos da Autora.

A dupla fez dobras cumulativas fazendo uma perpendicular com o pé em B levando n e o, que estavam coincidentes, para o lado oposto de m, criando mais duas perpendiculares simultaneamente (p com o pé em A e p' com o pé em B). Observando o verso desta etapa, podemos ver que as retas m, p e p' ficaram coincidentes e paralelas à "n" e "o" também coincidentes. Abrindo o papel para o formato original (A6), vemos o quadrado ABCD pedido.

Figura 113: Tarefa T6, técnica da Dupla D3, passos 10, 11 e 12.



Fonte: Arquivos da Autora.

6.3.6 Dupla 4

Os alunos da dupla 4, ambos do 1º período, são originários do ensino público e privado. Apenas um dos componentes teve aula de Geometria como conteúdo em Matemática, não tinham feito nenhum tipo de origami. Um dos componentes já tinha uma formação técnica relacionada à Geometria Gráfica.

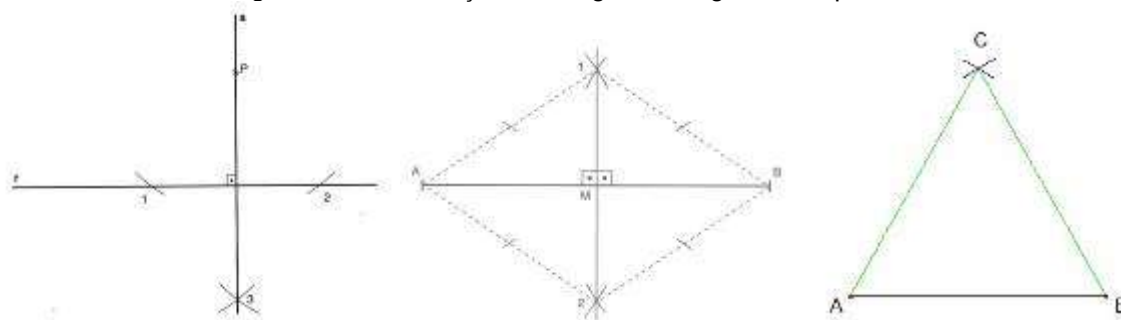
O diferencial da dupla foram eles terem percebido uma pequena imprecisão na tarefa T8 em régua e compasso devido a um erro de impressão. Foi uma das duplas que houve boa interação entre os componentes para resolução das tarefas.

6.3.7 Dupla 5

A Dupla 5 foi formada por alunos do 1º período, um componente veio do ensino público e o outro do ensino privado. Ambos tiveram aula de Geometria no ensino básico, na modalidade de disciplina isolada e como conteúdo da disciplina de Matemática. Um dos componentes fez curso pré-vestibular específico, e fizeram algum tipo de dobradura.

O interessante desta dupla foi a dificuldade em reconhecer construções análogas nas tarefas a régua e compasso e utilizar suas propriedades para responder às outras atividades. Eles esqueceram que a construção da mediatriz é análoga à construção da reta perpendicular em relação a uma reta dada, passando por um ponto P dado não pertencente à reta, mostrando que, quando não há o domínio dos conceitos geométricos, fazer a relação do mesmo conceito em uma situação nova implica em impedimentos ao aluno em avançar na aprendizagem.

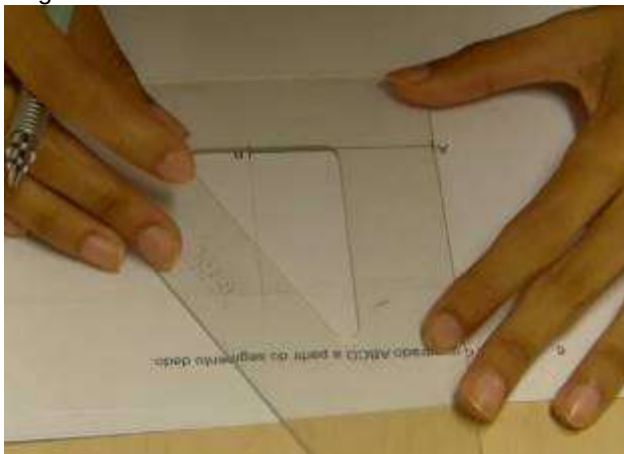
Figura 114: Construções análogas em régua e compasso.



Fontes: MARCHESI JUNIOR, 2009; Arquivos da autora.

O erro da tarefa T1 persistiu nas outras tarefas em que se necessitava construir uma reta perpendicular. Como no dia desse experimento não havia uma régua, foi utilizado o esquadro, porém a dupla estava ciente que a utilização deste material deveria ser apenas para traçar, o que não ocorreu de fato.

Figura 115: Uso indevido dos instrumentos.



Fonte: Arquivos da Autora.

O que nos chamou atenção foi o fato de todas as duplas terem tido contato com estes conteúdos nas aulas introdutórias da disciplina Geometria Bidimensional. É provável que o fato de trabalharem mais com os esquadros, no decorrer da disciplina, pode ter acarretado nessa falta de domínio nas construções a régua e compasso.

6.3.8 Dupla 6

Os componentes da dupla 6 vieram de ensino público e privado, ambos do primeiro período do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica. O estudante do ensino privado estudou nesse tipo de rede somente a partir da sexta série (quinto ano na nomenclatura atual). Tiveram aula de Geometria como conteúdo de Matemática e como disciplina isolada. Não fizeram cursinho vestibular. Foi uma das duplas que mais interagiram entre si e obtiveram o maior número de acertos, tanto nas atividades a régua e compasso, quanto em origami.

6.3.9 Dupla 7

Os voluntários da dupla 7 são alunos do primeiro período do curso de LEG, vieram ambos de escola privada, tiveram aulas de Geometria na disciplina de Matemática, e não fizeram curso pré-vestibular. Ambos já tinham algum contato com origami nível básico.

A dupla em questão teve dificuldade em responder às questões a régua e compasso, principalmente as construções primitivas como levantar uma reta perpendicular. Com a falta de instrumentos ideais (régua não graduada), os alunos se apoiaram novamente nos recursos que tinham à mão. Para garantir o ângulo reto, se apoiaram na dupla escala da régua.

Figura 116: Apoio na dupla escala da régua.



Fonte: Arquivos da Autora.

Podemos ver, na figura abaixo, que as construções a régua e compasso influenciaram, de certo modo, as técnicas utilizadas pelos alunos para traçar novas estratégias diante de novos desafios.

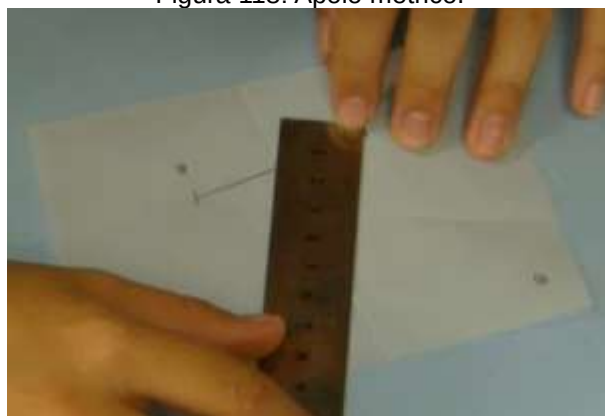
Figura 117: Evocação de conhecimentos prévios.



Fonte: Arquivos da Autora.

Um fato interessante foi a necessidade de comprovação métrica com escala para ter certeza: *“Posso medir antes de vincar? Pra ver se está certo?”* É uma atitude importante, porém mostra também uma certa insegurança, por parte dos alunos, no entendimento de certas propriedades geométricas.

Figura 118: Apoio métrico.



Fonte: Arquivos da Autora.

6.3.10 Dupla 8

A dupla 8 é oriunda do ensino privado. Um componente do 1º e o outro do 3º período. Apenas um deles sabia fazer origami. Tiveram aula de Geometria como conteúdo em Matemática, e um dos componentes fez curso pré-vestibular específico em Geometria Gráfica.

A dupla em específico questionou a questão T7 em origami, pois não haveria uma solução, mas mesmo assim, rotacionou a figura para que coubesse no papel.

A questão T8, em construção a régua e compasso, foi a que os voluntários dispenderam mais tempo e tentativas para resolver, tentativas geralmente relacionadas à semelhança de triângulos e à congruência de ângulos alternos internos. Algumas duplas exprimiam oralmente alguma propriedade dos quadriláteros, que davam a ideia de que eles conseguiriam responder, mas não relacionavam essa propriedade e acabavam desistindo da questão.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os dados expostos, podemos constatar que apesar de a maioria dos estudantes que ingressam nas universidades serem oriundos de escolas privadas, que em tese teriam um ensino melhor que as instituições públicas, eles ainda apresentam deficiências em relação aos conteúdos referentes à Geometria Gráfica, em específico nas construções euclidianas a régua e compasso, fato este que corrobora positivamente a hipótese levantada.

De acordo com a resposta dos voluntários aos questionários, essas deficiências são causadas não apenas pela negligência do ensino de Geometria em algumas instituições, mas também pelo modo como a Geometria é abordada, na maioria das vezes, desconectada com a realidade e aplicabilidade prática.

Uma prova contundente da orientação ainda tecnicista, tanto por parte dos professores como pelos alunos que se prendem às técnicas, foi o fato de os alunos já terem tido contato com essas construções no início da disciplina de Geometria Bidimensional, antes de fazer o experimento e, mesmo assim, apresentavam dificuldades em responder, geralmente à tarefa T1 (levantar uma reta perpendicular a uma reta r dada passando pelo ponto P dado) e T8 (criar a diagonal AC do paralelogramo $ABCD$ dado).

Nossas principais dificuldades foram o agendamento com as duplas formadas e o uso de materiais mais adequados para a etapa do experimento apenas com régua e compasso.

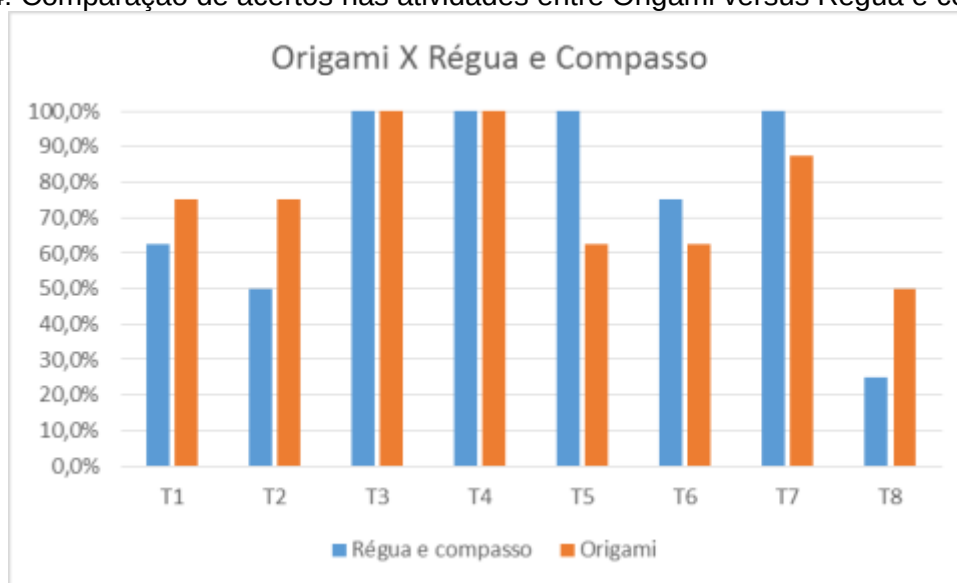
Os voluntários foram divididos em duas colunas que formavam as duplas complementares. Uma coluna formada por sujeitos que tiveram maior desempenho no questionário 1 e a outra coluna pelos que não tiveram um desempenho satisfatório. Por residirem longe, possuírem outros cursos e trabalharem em paralelo à LEG, ocorreram remontagem das duplas. Muitas vezes, as duplas pré-selecionadas, pela análise do primeiro questionário de conhecimentos geométricos, tiveram incompatibilidade de horários. Quando um dos voluntários da dupla pré-selecionada não podia comparecer no mesmo dia para o experimento, remontava-se novas duplas sem serem componentes da mesma coluna.

Na primeira etapa do experimento, resolver as questões com régua e compasso, não possuíamos uma régua não graduada. Por este motivo foram

liberados os materiais das próprias duplas (régua graduada, escalímetro, par de esquadros), desde que fossem utilizados apenas para o traçado, o que não ocorreu de fato, comprovando a falta de apreensão dos conteúdos.

Os voluntários foram inquiridos sobre o origami auxiliar nas aulas de Geometria, contribuindo para uma melhor compreensão dos conteúdos e a resposta foi unânime: O origami pode sim ser um facilitador na compreensão de conteúdos simples aos mais complexos da Geometria euclidiana. Porém, como é pouca a popularidade na prática das dobraduras para fins educacionais relacionados à Matemática, em comparação com outros métodos, e poucas são as pesquisas nesse campo, outros trabalhos no futuro poderão fornecer dados mais precisos desse hipotético auxílio das dobraduras (como podemos observar no gráfico abaixo) nas aulas de Geometria Gráfica.

Gráfico 4: Comparação de acertos nas atividades entre Origami versus Régua e compasso.



Fonte: Arquivo da Autora.

Apesar de os resultados serem satisfatórios, algumas perguntas poderiam ter sido feitas no processo, como:

- E se o experimento tivesse começado pelas atividades em Origami, quais seriam os resultados?
- Será que o experimento, começado com as atividades a régua e compasso, influenciou as respostas dos alunos nas atividades em origami?
- Se os alunos fossem convidados a responder novamente às construções, apenas nas dobraduras, as que possuem mais de uma

técnica, principalmente, eles reproduziriam suas respostas ou recorreriam a novas estratégias?

Vemos que, para evoluirmos, precisaremos ir muito mais além. Melhorar em vários aspectos, tanto em relação aos alunos, quanto aos professores. Principalmente quem ainda almeja galgar esse árduo, mas frutífero caminho da educação.

REFERÊNCIAS

ABE, Keiko. **Aprenda a Fazer Origami Passo a Passo**. São Paulo: Editora JBC, 2004.

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos. **A Geometria do Origami**: um estudo da geometria das dobraduras (origami) com foco no relacionamento entre formas e 'fórmulas' matemáticas. Dissertação (Mestrado). Recife: A Autora, 2000. 162 p.: il.

ALPERIN, Roger C; LANG, Robert. **One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms**. 2006. Disponível em: <<http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf>>. Acesso em: 07 Fv. 2013.

ANTUNES, Celso. **As Inteligências Múltiplas e Seus Estímulos**. Campinas, SP: Papirus, 1998.

_____. **Inteligências Múltiplas e Seus Jogos**: Inteligência Espacial. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LINS, Abigail Fregni. **Teoria Antropológica do Didático**: Uma Análise sobre Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos. In: X Encontro Nacional de Educação matemática, 2010, Salvador. Anais do X ENEM, 2010. v. 1. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC35.pdf>. Acesso em: 01 de Ago. 2014.

BARDER, Louise. **Glossophilia**. Disponível em: <<http://www.glossophilia.org/?cat=1588&paged=2>>. Acesso em: 17 de Fev. 2016.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos**: Euclides. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BITTAR, Marilena. **A Abordagem Instrumental para o Estudo da Integração da Tecnologia na Prática Pedagógica do Professor de matemática**. In: Educar em Revista, janeiro, 2011. Pág. 157-171. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/11.pdf>>. Acesso em: 14 Abr. 2015.

BELL, Susan. **Know How to Fold 'Em**: How origami changed Science, from heart stents to airbags. Disponível em: <<http://www.laweekly.com/arts/know-how-to-fold-em-how-origami-changed-science-from-heart-stents-to-airbags-2372322>>. Acesso em: 10 de Jan. 2015.

BLOG DA TECHNE. **No Brasil, 33 Mil Alunos Farão Provas Para o Ranking Mundial de Educação**. Disponível em: <<https://blogtechne.techne.com.br/index.php/no-brasil-33-mil-alunos-farao-provas-para-o-ranking-mundial-de-educacao/>>. Acesso em: 17 Fev. 2016.
BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de; LIMA, Paulo Figueiredo. **Geometria**. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (Coord). Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

CASA E JARDIM ONLINE. **Casa Origami é Abrigo Temporário Para Vítimas de Terremoto**. Disponível em: <<http://revistacasaejardim.globo.com/Revista/Common/0,,ERT210981-16802,00.html>>. Acesso em: 12 de Jan. 2016.

CASA VOGUE ONLINE. **Vasos que Crescem Junto com as Plantas**. Julho de 2015. Disponível em: <<http://casavogue.globo.com/Design/Objetos/noticia/2015/07/vasos-que-crescem-junto-com-plantas.html>>. Acesso em: 12 de Jan. 2016.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Disponível em: <<http://www.docfoc.com/download/documents/explorando-geometria-com-origami-eduardo-cavacami-yolanda-kioko-saito-furuya>>. Acesso em: 14 de Nov. 2015.

CHEVALLARD, Yves. **Conceitos Fundamentais da Didática**: As perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean (org). Didáctica das Matemáticas. Instituto Piaget: Lisboa, 1996.

_____. **Introdução à Teoria Antropológica do Didático**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sao_Paulo_-_4-13_mai_2011.pdf>. Acesso em: 28 Set. 2014.

_____. **Wikipédia**: A Enciclopédia Livre. Disponível em: <http://fr.wikipedia.org/wiki/Yves_Chevallard>. Acesso em: 06 de Ago. 2014.

COMMISSION de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. **Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement**. Disponível em: <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/Rapport_geometrie.pdf>. Acesso em: 06 de Ago. 2014.

CORAZON DE WASHI. **Origami**: Qué es el origami? Disponível em: <<https://corazondewashi.wordpress.com/origami/>>. Acesso em: 19 de Dez. 2015.

COSTA, Eliane Moreira da. **Matemática e Origami**: Trabalhando frações. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

DEURSEN, Felipe Van. **Oráculo**: Inteligência artificial. In: Revista Super Interessante, janeiro, 2012. Pag. 35.

EUCLIDES. **Os Elementos**. In: BICUDO, Irineu. São Paulo: Editora UNESP, 2009. FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. Curitiba: Editora Positivo, 2009.

FRANÇA, E. M. **O Conhecimento Geométrico na Arte das Dobraduras**. Monografia (Graduação). Recife: A Autora, 2013. 96 p.: il.

FUSE, Tomoko. **Rasen o Orou**. Japan: Chikuma Shobo, 1992.

_____. **Unit Origami: Multidimensional Transformations**. Tokyo – New York, Japan Publications, 1990.

G1. **Prédio ‘derrete’ Jaguar com reflexo do sol na Inglaterra**. São Paulo, Setembro de 2013. Disponível em: <<http://g1.globo.com/planeta-bizarro/noticia/2013/09/predio-derrete-jaguar-com-reflexo-do-sol-na-inglaterra.html>>. Acesso em: 16 de Fev. 2016.

G. S. Bustamante. **Hidden Senbazuru Orikata**. Colômbia, abril de 2012. Disponível em: <<http://zenorig.blogspot.com.br/search?q=hidden+senbazuru+orikata>>. Acesso em: 17 de Dez. 2015.

GALVÃO, Thyana et al; **Geometria Gráfica no Exame Nacional do Ensino Médio Brasileiro**. XII Congreso Nacional de Profesores de Expresión Gráfica en Ingeniería, Arquitectura y Áreas Afines. Egrafia 2015. Río Cuarto, Córdoba, Argentina. 8 y 9 de octubre de 2015.

GARDNER, Howard. **Estruturas da Mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

_____. **Inteligências Múltiplas ao Redor do Mundo**. Porto Alegre: Artmed, 2010.
GÊNOVA, Carlos. **Origami: A milenar arte das dobraduras**. São Paulo: Escrituras Editora, 2001.

GUIMARÃES, Camila. **O Cérebro foi para a Escola**. In: Revista Época, julho, 2013. Pág. 84 – 86.

HATORI, Koshiro. **History of Origami**. In: Fractional Library. Disponível em: <<http://origami.ousaan.com/library/historye.html>>. Acesso em: 26 Fev. 2013.

HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. **Pequena História Sobre Origami**. Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em: 16 de Dez. 2015.

HELP-ME. PP. UA. **Como Fazer Balão de Origami**. Disponível em: <<http://help-me.pp.ua/11274-yak-zrobiti-povtryanu-kulku-orgam.html>>. Acesso em: 11 de Jan. 2016.

HINDERS, Dana. **A Brief History of Origami: The evolution of paper folding as an art form**. Disponível em: <<http://origami.about.com/od/History-Of-Origami/a/A-Brief-History-Of-Origami.htm>>. Acesso em: 08 de Fev. 2015.

HOFFMANN, Anelise. **Desenho Geométrico**. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/napead/repositorio/objetos/desenho-geometrico/index.php?p=bis&n=4&i=1>. Acesso em: 10 de Out. 2015.

HONDA, Isao. **The world of origami**. Tokyo – San Francisco: Japan Publications Trading Company, 1973.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva Ltda., 2009. 1. Ed.

HULL, Thomas. **Project Origami: Activities for exploring Mathematics**. Wellesley, Massachusetts: AK Peters, 2006.

IMENES, Luiz Marcio. **Geometria das Dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1996.

JÚNIOR, Dulcídio Braz. **É Tudo uma Questão de Foco**. São Paulo, Setembro de 2013. Disponível em: <http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2013-09-01_2013-09-07.html>. Acesso em: 17 de Fev. 2016.

KAHANE, Jean-Pierre. et al. **L'enseignement des sciences mathématiques: Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques**. San Diego, Londres: Odile Jacob, 2002. ISBN: 2-7381-1138-6. Disponível em: https://books.google.fr/books?id=JHDbzsX_LDcC&printsec=frontcover&hl=ptBR#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 05 Dez. 2014.

KANEGAE, Mari. **Kamiarte: Simbologia do tsuru (grou)**. Disponível em: <<http://kamiarte.com.br/>>. Acesso em: 05 Mar. 2015.

KAWAMURA, Miyuki. **Polyhedron Origami for Beginners**. Japan: Nihonvoguesha, 2001.

KAZUO, Kobayashi. **Fold and Gives: Boxes and Pouches**. Japan: Ikedashoten, 2010.

LANDAU, Elizabeth. **Solar Power, Origami–Style**. Califórnia, agosto de 2014. Disponível em: <<http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2014-277>>. Acesso em: 13 de Jan. 2016.

LANG, Robert J. **Origami and Geometric Constructions**. Disponível em: <http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf>. Acesso em: 26 Fev. 2013.

_____. **Bull Moose, opus 413**. Disponível em: <<http://www.langorigami.com/artwork/bull-moose-opus-413-0>>. Acesso em: 04 Mar. 2015.

_____. **TreeMaker**. Disponível em: <<http://www.langorigami.com/article/treemaker>>. Acesso em: 26 Fev. 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <<http://wwwp.fc.unesp.br/~lizanata/LDB%204024-61.pdf>>. Acesso em: 15 de Jan. 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5692.htm>. Acesso em: 15 de Jan. 2016.

LDB: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: <<https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf>> Acesso em: 15 de Jan. 2016.

MARCHESI JÚNIOR, Isaias. **Desenho Geométrico**. São Paulo: Ática, 2009.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de (orgs.). **O Concreto – Abstrato na Educação em Física e em Matemática**. Recife: UFRPE, Imprensa Universitária, 2001. 144p.: il.

MITCHELL, David. **Origami Matemáticos**: Dobragens de papel para fazer figuras geométricas. Lisboa: Replicação, 2008.

MONTEIRO, Liliana. **Fundamentos Matemáticos do Origami**. Lisboa: Associação Ludus, 2009.

MONTENEGRO, Gildo A. **Inteligência Visual e 3D**: Compreendendo conceitos básicos da Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. **Origami**: Matemática e Sentimento. 2004. Disponível em: <<http://www.nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>>. Acesso em: 15 de Nov. 2015.

ORIGAMI – MAKE. ORG. **The way of Making Origami**: How to make a Verdi's origami vase. Disponível em: <<http://www.origami-make.org/origami-vase-verdi/page-21.php>>. Acesso em: 18 de Dez. 2015.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria**: uma visão histórica. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 1989.

_____. **O Abandono do ensino da geometria no Brasil**: causas e consequências. In: Revista Zetetiké, março, 2005. Pag. 07-17. Disponível em: <<http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611/2353>>. Acessado em: 20 Fev. 2013.

PIAZZI, Pierluigi. **Ensinando Inteligência**. São Paulo: Aleph, 2014.

RABELLO, Paulo Sérgio Brunner. **Ensino de Geometria Descritiva no Brasil**. In: Revista Ciência Hoje, novembro, 2005. Pag. 49-51. Disponível em: <<http://www.users.rdc.puc-rio.br/dg2/artigo20%descritiva.pdf>>. Acessado em: 20 Fev. 2013.

RAFAEL, Ilda. **Origami**. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf>. Acesso em: 05 Mar. 2015.

RANCAN, Grazielle. **Origami e Tecnologia**: Investigando Possibilidades para Ensinar Geometria no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011.

SANTI, Alexandre de. **Memória e Felicidade**. In: Revista Super Interessante, janeiro, 2012. Pag. 38-45.

SCRIBBLE. (2011, abril, 06) **How To Do Origami With Lazy Susan's Box**. [Arquivo de vídeo.] Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=12Wb3H5rfeE>>. Acesso em: 18 de Dez. 2015.

TED. (2008, julho, 31) **Robert Lang**: The math and magico of origami. [Arquivo de vídeo]. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=NYKcOFQCeno>>. Acesso em: 01 de Fev. 2016.

TOLDBOD, Ida. **Pequenas Células Cinzentas Grandes Pensamentos**: Um Caderno Temático Sobre o Cérebro. Lisboa: Experimentarium, fevereiro de 1997. Disponível em: <http://www.pavconhecimento.pt/media/media/762_cerebro.pdf>. Acesso em: 30 Mai. 2014. ISBN: 972-98251-2-2.

TORRES, Luis López. **23**: modular origami. Disponível em: <<http://www.23hq.com/luislt/photo/1683317>>. Acesso em: 29 Dez. 2012.

UENO, Thaís Regina. **Do Origami Tradicional ao Origami Arquitetônico**: Uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Arquitetura Artes e Educação. Bauru, 2003.

WIKIPÉDIA. **Sistema Yoshizawa-Randlett**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_Yoshizawa-Randlett>. Acesso em: 04 Mar. 2015.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da Régua e do Compasso**: As construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação e Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG, 2001.

APÊNDICE A – Questionários 1 e 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLOGICA

Este questionário será utilizado exclusivamente como coleta de dados da pesquisa do PPG EDUMATEC da aluna Emanuella Martins de França, não haverá exposição nominal das pessoas. Leia com atenção e siga as instruções solicitadas.

QUESTIONÁRIO 1**IDENTIFICAÇÃO:**

Nome: _____

Email: _____

Idade: _____ Gênero: F ☐ M ☐Aluno do ____ Período ☐ Curso de _____ ☐

1. Você sabe o que é Origami? Sabe fazer algum? Se sim, Quais?

2. Você teve aulas de Geometria na Educação Básica?

Sim ☐ Não ☐

3. Se sim como foi executada?

Disciplina Isolada ☐ Conteúdo trabalhado em Matemática ☐

4. Você fez algum cursinho para ingressar no curso de EG?

Sim ☐ Não ☐

5. Se SIM, qual foi a duração deste curso?

6. Você sempre estudou em escola pública?

Sim ☐ Não ☐

Outro: _____

7. Você domina bem os instrumentos de desenho (par de esquadros, compasso)?
Sim ☐ Não ☐ Mais ou menos ☐
8. Você sente dificuldades nos conteúdos de Geometria Bidimensional?
Sim ☐ Não ☐
9. Se sim, a que você atribui essas dificuldades?

QUESTIONÁRIO 2

1. Você conseguiria definir o que é um AXIOMA?

2. Você é capaz de definir PONTO, RETA e PLANO?

3. Defina MEDIATRIZ:

4. Defina BISSETRIZ:

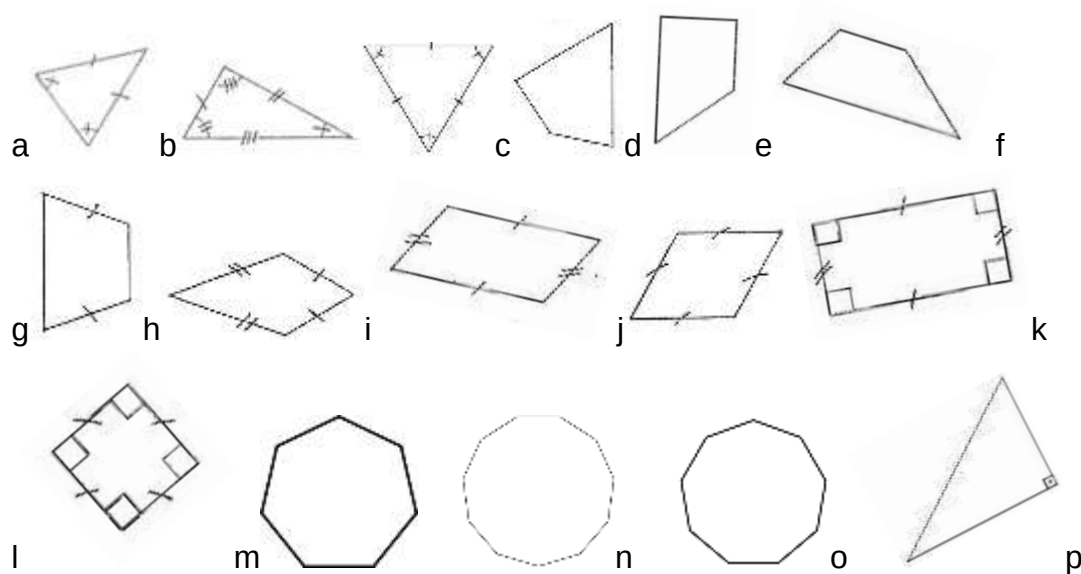
5. Conceitue reta perpendicular:

6. Conceitue retas paralelas:

7. O que é ÂNGULO?

8. O que são polígonos? Dê exemplos:

9. Nomeie os polígonos:



k) _____

l) _____

m) _____

n) _____

o) _____

p) _____

q) _____

r) _____

s) _____

t) _____

u) _____

v) _____

w) _____

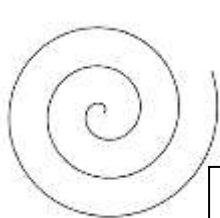
x) _____

y) _____

z) _____

10. Qual a diferença entre círculo e circunferência?

11. Identifique a nomenclatura das seguintes curvas:


☐

☐

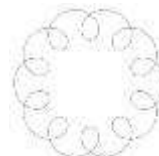
☐

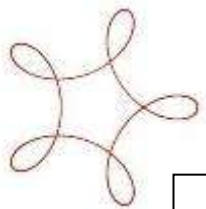
☐

- a) Voluta
- b) Conchóide
- c) Cissóide
- d) Espiral

12. Identifique a nomenclatura das seguintes curvas cíclicas:


☐

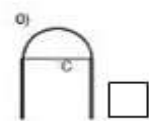
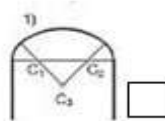
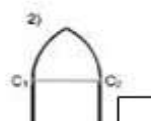
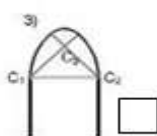
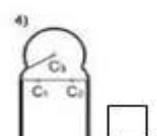
☐

☐

☐

☐

☐

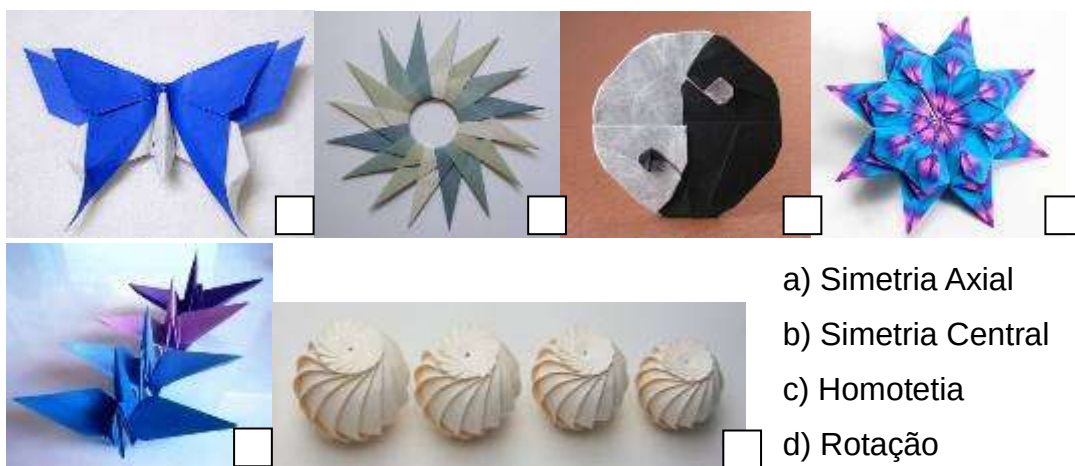
- a) Hipociclóide normal
- b) Ciclóide encurtado
- c) Epiciclóide normal
- d) Ciclóide normal
- e) Hipociclóide alongado
- f) Epiciclóide alongado

13. Identifique com um X os arcos em que há concordância entre todas as suas partes.


☐

☐

☐

☐

☐

14. O que você entende por Lugar Geométrico?

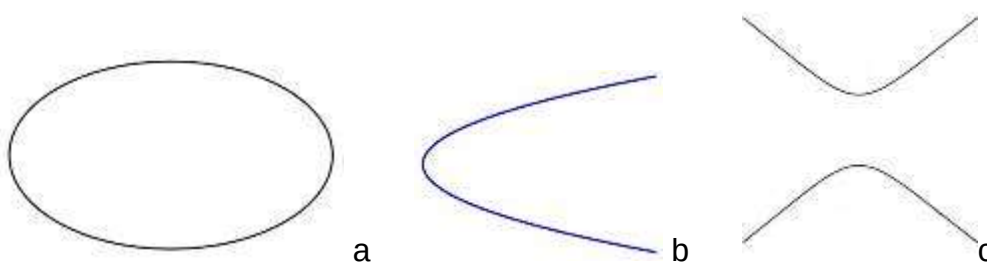
15. Identifique a nomenclatura das seguintes Transformações Geométricas:



- a) Simetria Axial
- b) Simetria Central
- c) Homotetia
- d) Rotação
- e) Translação

16. O que são CURVAS CÔNICAS?

17. Nomeie as curvas cônicas:



a) _____ b) _____ c) _____

DOUMO ARIGATOU GOZAIMASU.

(Muitíssimo Obrigada)

APÊNDICE B – Atividades do Experimento

1. Construa uma reta perpendicular s em relação à reta r dada, passando pelo ponto P :

$\times$ P

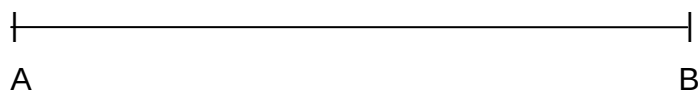
r _____

2. Construa a reta paralela s em relação à reta r dada passando pelo ponto P :

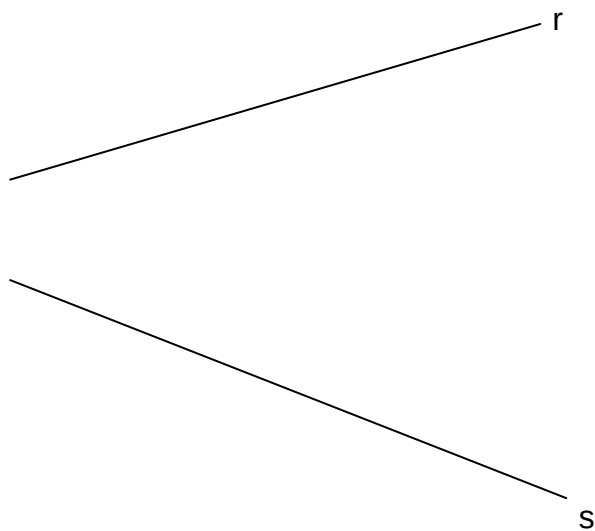
$\times$ P

r _____

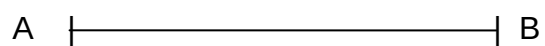
3. Construa a mediatriz do segmento AB dado:



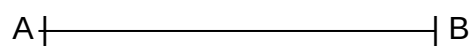
4. Construa a bissetriz do ângulo dado:



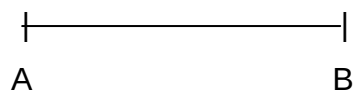
5. Construa o triângulo equilátero ABC a partir do segmento dado:



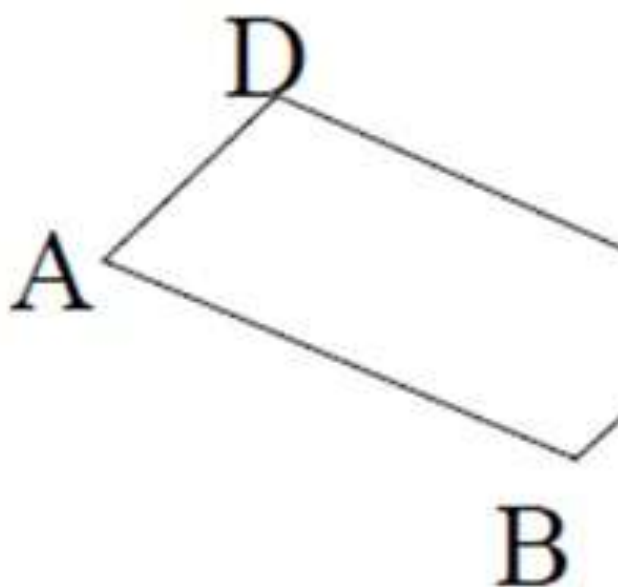
6. Construa o quadrado ABCD a partir do segmento dado:



7. Construa o retângulo ABCD, com o lado maior sendo o dobro do lado menor dado:



8. Construa a diagonal AC do paralelogramo ABCD dado sem prolongar os lados DC e BC:



ANEXO A – Termos de Consentimento e Assentimento de Livre e Esclarecido.

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS - Resolução 466/12)

Convidamos o(a) Sr.(a) para participar como voluntário(a) da pesquisa ORIGAMI EUCLIDIANO. Esta pesquisa é da responsabilidade do(a) pesquisador(a) EMANUELLA MARTINS DE FRANÇA, residente na Rua João Moenda, nº16, bairro de Alto Dois Irmãos, Paudalho, PE, CEP: 55825-000/ 081 99320.3960/ emanuellafranca83@gmail.com, e está sob a orientação de: Franck Gilbert René Bellemain, Telefone: 081 34532459, e-mail: f.bellemain@gmail.com.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo, pedimos que rubriche as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde, não haverá penalização, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

☐ Descrição da pesquisa: iremos investigar a resolução de problemas de construções geométricas euclidianas por alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica em dois ambientes: Origami e Régua e compasso; necessitaremos de registro áudio visual das mãos dos voluntários para análise das estratégias tomadas para a resolução dos problemas propostos.

☐ O voluntário será convidado a responder a um questionário com perguntas referentes a seus conhecimentos prévios sobre os conteúdos das atividades que serão propostas. O questionário será aplicado em horário de aula cedido pelo professor da disciplina, com duração de uma hora, em sua respectiva sala. A segunda etapa da pesquisa, o experimento, será agendada pelas duplas formadas após análise do questionário e ocorrerá na sala da Coordenação do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica localizada no Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco. O experimento terá o limite de duas horas para ser realizado.

☐ **RISCOS diretos** para os responsáveis e para os voluntários: os riscos são mínimos, porém como os instrumentos régua e compasso possuem partes pontiagudas, o mau manuseio ou uso apoiado em superfície derrapante (mesa de fórmica) pode acarretar algum acidente ocasionando lesão perfurante; o voluntário pode sentir-se constrangido em responder ao questionário e sentir dificuldades em responder as atividades propostas do experimento com a régua e o compasso e ou com o origami. O voluntário pode ter o constrangimento de obter falta em outras disciplinas para participar do experimento. Para amenizar estes riscos, será posto na mesa da coordenação um calço antiderrapante e um agendamento prévio com os

voluntários de acordo com sua disponibilidade para não serem prejudicados em outras disciplinas.

□ **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários: Experiência com outro método de aprendizagem das construções euclidianas com régua e compasso, o origami, uma tecnologia analógica lúdica, utilizada em outros ramos do conhecimento como artes e terapias ocupacionais. Além de contribuir para a evolução científica.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa através de questionário e filmagem do experimento, ficarão armazenados em pastas de arquivo e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador e Orientador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

(assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo Origami Euclidiano, como voluntário(a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento).

Local e data _____

Assinatura do participante: _____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar. (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica

**TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)**

OBS: Este Termo de Assentimento para o menor de 12 a 18 anos não elimina a necessidade da elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Convidamos você _____, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: ORIGAMI EUCLIDIANO. Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) EMANUELLA MARTINS DE FRANÇA, residente na Rua João Moenda, nº16, bairro de Alto Dois Irmãos, Paudalho, PE, CEP: 55825-000/ 081 99320.3960/ emanuellafranca83@gmail.com, e está sob a orientação de: Franck Gilbert René Bellemain, Telefone: 081 34532459, e-mail: f.bellemain@gmail.com.

Caso este Termo de Assentimento contenha informação que não lhe seja compreensível, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados e concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guardá-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você será esclarecido(a) sobre qualquer dúvida e estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá problema algum, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

☐ Descrição da pesquisa: iremos investigar a resolução de problemas de construções geométricas euclidianas por alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica em dois ambientes: Origami e Régua e compasso; necessitaremos de registro áudio visual das mãos dos voluntários para análise das estratégias tomadas para a resolução dos problemas propostos.

☐ O voluntário será convidado a responder a um questionário com perguntas referentes a seus conhecimentos prévios sobre os conteúdos das atividades que serão propostas. O questionário será aplicado em horário de aula cedido pelo professor da disciplina, com duração de uma hora, em sua respectiva sala. A segunda etapa da pesquisa, o experimento, será agendada pelas duplas formadas após análise do questionário e ocorrerá na sala da Coordenação do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica localizada no Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco. O experimento terá o limite de duas horas para ser realizado.

☐ **RISCOS diretos** para os responsáveis e para os voluntários: Os riscos são mínimos, porém como os instrumentos régua e compasso possuem partes pontiagudas, o mau manuseio ou uso apoiado em superfície derrapante (mesa de fórmica) pode acarretar algum acidente ocasionando lesão perfurante; o aluno pode sentir-se constrangido em responder ao

questionário, e sentir dificuldades em responder as atividades propostas do experimento com a régua e o compasso e ou com o origami. O aluno pode ter o constrangimento de obter falta em outras disciplinas para participar do experimento. Para amenizar estes riscos, será posto na mesa um calço antiderrapante na mesa da coordenação e um agendamento prévio com os alunos de acordo com sua disponibilidade para não serem prejudicados em outras disciplinas.

□ **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários: experiência com outro método de aprendizagem das construções euclidianas com régua e compasso, o origami, uma tecnologia analógica lúdica, utilizada em outros ramos do conhecimento como artes e terapias ocupacionais. Além de contribuir para a evolução científica.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa, através de questionário e filmagem do experimento, ficarão armazenados em pastas de arquivo e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador e Orientador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos.

Nem você e nem seus pais pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE que está no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO (DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo ORIGAMI EUCLIDIANO, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data _____

Assinatura do (da) menor: _____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica

(PARA RESPONSÁVEL LEGAL PELO MENOR DE 18 ANOS - Resolução 466/12)

Solicitamos a sua autorização para convidar o(a) seu/sua filho(a) _____

{ou menor que está sob sua responsabilidade} para participar, como voluntário(a), da pesquisa ORIGAMI EUCLIDIANO. Esta pesquisa é da responsabilidade do(a) pesquisador(a) EMANUELLA MARTINS DE FRANÇA, residente na Rua João Moenda, nº16, bairro de Alto Dois Irmãos, Paudalho, PE, CEP: 55825-000/ 081 99320.3960/ emanuellafranca83@gmail.com, e está sob a orientação de: Franck Gilbert René Bellemain, Telefone: 081 34532459, e-mail: f.bellemain@gmail.com.

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde que o(a) menor faça parte do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Caso não concorde, não haverá penalização nem para o(a) Sr.(a) nem para o(a) voluntário(a) que está sob sua responsabilidade, bem como será possível ao(à) Sr.(a) retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

☐ **Descrição da pesquisa:** iremos investigar a resolução de problemas de construções geométricas euclidianas por alunos do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica em dois ambientes: Origami e Régua e compasso; necessitaremos de registro áudio visual das mãos dos sujeitos para análise das estratégias tomadas para a resolução dos problemas propostos.

☐ O voluntário será convidado a responder a um questionário com perguntas referentes a seus conhecimentos prévios sobre os conteúdos das atividades que serão propostas. O questionário será aplicado em horário de aula, cedido pelo professor da disciplina, com duração de uma hora, em sua respectiva sala. A segunda etapa da pesquisa, o experimento, será agendada pelas duplas formadas após análise do questionário e ocorrerá na sala da Coordenação do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica localizada no Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco. O experimento terá o limite de duas horas para ser realizado.

☐ **RISCOS diretos** para os responsáveis e para os voluntários: Os riscos são mínimos, porém como os instrumentos régua e compasso possuem partes pontiagudas, o mau manuseio ou uso apoiado em superfície derrapante (mesa de fórmica) pode acarretar algum acidente ocasionando lesão perfurante; o aluno pode sentir-se constrangido em responder ao questionário, e sentir dificuldades em responder às atividades propostas do experimento com a régua e o compasso e/ou com o origami. O voluntário pode ter o constrangimento de obter falta em outras disciplinas para participar do experimento. Para amenizar estes riscos, será posto na mesa um calço antiderrapante na mesa da coordenação e um agendamento prévio com os alunos, de acordo com sua disponibilidade, para não serem prejudicados em outras disciplinas.

□ **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários: experiência com outro método de aprendizagem das construções euclidianas com régua e compasso, o origami, uma tecnologia analógica lúdica, utilizada em outros ramos do conhecimento como artes e terapias ocupacionais. Além de contribuir para a evolução científica.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa, através de questionário e filmagem do experimento, ficarão armazenados em pastas de arquivo e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador e Orientador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos.

O(a) senhor(a) não pagará nada e nem receberá nenhum pagamento para ele(a) participar desta pesquisa, pois deve ser de forma voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação dele(a) na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial. Se houver necessidade, as despesas para a participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento com transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

Assinatura do pesquisador(a)

CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO(A) VOLUNTÁRIO(A)

Eu, _____, CPF _____, abaixo assinado, responsável por _____, autorizo a sua participação no estudo Origami Euclidiano, como voluntário(a). Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação dele(a). Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de seu acompanhamento/assistência/tratamento) para mim ou para o(a) menor em questão.

Local e data _____

Assinatura do(a) responsável: _____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: