



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**GUILHERME JOSÉ BANDEIRA JOVINO MARQUES**

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO UTILIZANDO O MÉTODO DAS MICRO TRELIÇAS**

Recife

2017

**GUILHERME JOSÉ BANDEIRA JOVINO MARQUES**

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO UTILIZANDO O MÉTODO DAS MICRO TRELIÇAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, área de Estruturas, como requisito para obtenção do diploma de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Linha de Pesquisa: Análise Não Linear Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

**Coorientador:** Prof. Dr. Renato de Sirqueira Motta.

RECIFE

2017

Catálogo na fonte

Biblioteca Margareth Malta, CRB-4 / 1198

M357a Marques, Guilherme José Bandeira Jovino.  
Análise não linear física de estruturas de concreto armado utilizando o método das micro treliças / Guilherme José Bandeira Jovino Marques. - 2017.  
78 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Coorientador: Prof. Dr. Renato de Sirqueira Motta.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.

Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia civil. 2. Elementos estruturais em concreto armado. 3. Não linearidade física. 4. Computacional. 5. Micro treliças. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira. (Orientador). II. Motta, Renato de Sirqueira. (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-377

GUILHERME JOSÉ BANDEIRA JOVINO MARQUES

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO  
UTILIZANDO O MÉTODO DAS MICRO TRELIÇAS.**

Dissertação submetida ao curso de pós graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

**Aprovado em: 22/02/2017**

---

Profº. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Orientador acadêmico)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Renato de Sirqueira Motta (Coorientador acadêmico)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires de Oliveira (Examinador Interno)

Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. José Jéferson do Rêgo Silva (Examinador Externo)

Universidade Federal de Pernambuco

## RESUMO

Análises estruturais usuais são realizadas com a hipótese de linearidade física do material componente dos elementos estruturais. Uma visão mais abrangente do problema considera as relações constitutivas definidas por funções arbitrárias. O presente trabalho tem como finalidade a apresentação de um código desenvolvido em MATLAB (2016) para a análise estática de estruturas constituídas por concreto armado considerando a não linearidade física do material em questão utilizando o método das micro treliças. O pré-processamento das micro treliças para níveis progressivos de complexidade foi realizado com o auxílio do software GiD (2016) e posteriormente exportado ao programa principal, que resolve um sistema de equações não-lineares por meio do método aproximado de Newton-Raphson utilizando-se de incrementos de cargas progressivos. O programa apresenta de forma clara os efeitos da não linearidade física do material em elementos estruturais de concreto armado. Os resultados foram posteriormente comparados aos obtidos com códigos comerciais em elementos finitos e confirmam a validade das rotinas propostas.

**Palavras-chave:** Elementos estruturais em concreto armado. Não linearidade física. Computacional. Micro treliças.

## **ABSTRACT**

Usual structural analyzes are performed with the hypothesis of physical linearity of the material component of the structural elements. A more comprehensive view of the problem arises with the consideration of constitutive relations defined by arbitrary functions. The present work has the purpose of presenting a code developed in MATLAB (2016) for the static analysis of structures constituted by reinforced concrete considering the physical non-linearity of the material in question. The pre-processing of the micro truss for progressive levels of complexity was performed via the GiD (2016) software and then exported to the main program, which solves a system of nonlinear equations using the Newton-Raphson method using increments of Progressive loads. The program clearly presents and didactically the effects of physical nonlinearity of the material on structural elements of reinforced concrete. The results were later compared to those obtained with commercial codes based on the finite method and validates the proposed methodology of the proposed routines.

**Keywords:** Structural elements in reinforced concrete. Physical non-linearity. Computational. Micro truss.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. Modelo de elemento estrutural composto por micro treliças. Fonte: (SALEM, 2003)           | 12 |
| Figura 2. Modelo constitutivo de Hognestad (1951). Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007).....                | 15 |
| Figura 3. Modelo constitutivo adotado pelo CEB-FIP. Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)..                  | 15 |
| Figura 4. Modelo constitutivo adotado pela NBR-6118. Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)                   | 16 |
| Figura 5. Modelo de Mander (1988). Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007) .....                               | 17 |
| Figura 6. Modelo constitutivo proposto por Okamura e Maekawa (1991). Fonte: (SALEM, 2003).....      | 18 |
| Figura 7. Modelo constitutivo de Pillai e Menon (1998).Fonte: (NAGARAJAN, 2009) .....               | 19 |
| Figura 8. Comparativo entre os modelos constitutivos citados. ....                                  | 20 |
| Figura 9. Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento. Fonte: (ARAÚJO, 2010) .....  | 20 |
| Figura 10. Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar de escoamento. Fonte: (ARAÚJO, 2010) ..... | 21 |
| Figura 11. Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento. Fonte: (SALEM, 2003).....   | 22 |
| Figura 12. Diagrama tensão-deformação do aço. Fonte: (NAGARAJAN, 2009).....                         | 22 |
| Figura 13. Exemplo simulado por Salem (2003). Fonte: (SALEM, 2003) .....                            | 23 |
| Figura 14. Diagrama Carga x Deslocamento. Fonte: (SALEM, 2003) .....                                | 23 |
| Figura 15. Exemplo utilizado por Nagarajan (2009). Fonte: (NAGARAJAN, 2009).....                    | 24 |
| Figura 16. Elementos irregulares. Fonte: (VIEIRA, 2013) .....                                       | 25 |
| Figura 17. Composição dos elementos treliçados de Hrennikoff (1941). Fonte: (NAGARAJAN, 2009).....  | 26 |
| Figura 18. Analogia utilizada por Kiouisis (2010). Fonte: (SALEM, 2003).....                        | 26 |
| Figura 19. Esquema da treliça composta por suas conectividades e nós.....                           | 30 |
| Figura 20. Esquema das barras isoladas com suas respectivas forças.....                             | 31 |

|                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 21. Eixo global e local representando seus respectivos vetores.....                        | 33 |
| Figura 22. Esquema de interação do método de Newton-Raphson. Fonte: (IVANČO, 2011) .              | 37 |
| Figura 23. Elemento estrutural desenhado no software Autocad (2013). ....                         | 41 |
| Figura 24. Elemento estrutural processado pelo software Gid (2016). ....                          | 42 |
| Figura 25. Lista de arquivos de entrada do programa ANLEMT.....                                   | 42 |
| Figura 26. Elemento estrutural plotado pelo ANLEMT.....                                           | 43 |
| Figura 27. Janela principal do ANLEMT.....                                                        | 43 |
| Figura 28. Janela secundária do ANLEMT. ....                                                      | 43 |
| Figura 29. Janela referente ao carregamento nodal no ANLEMT. ....                                 | 44 |
| Figura 30. Janela referente às restrições nodais no ANLEMT.....                                   | 44 |
| Figura 31. Janela referente à inserção de armadura no ANLEMT.....                                 | 44 |
| Figura 32. Elemento estrutural .....                                                              | 45 |
| Figura 33. Fluxograma de programação do código computacional. ....                                | 47 |
| Figura 34. Cubo de concreto validado. Fonte: (VIEIRA, 2013) .....                                 | 48 |
| Figura 35. Viga esquemática ensaiada por Slowik (2014). ....                                      | 50 |
| Figura 36. Fissuração do ensaio E3, apresentada por Slowik (2014). Fonte: (SLOWIK, 2014)<br>..... | 51 |
| Figura 37. Fissuração do ensaio E3 segundo o ANLEMT. ....                                         | 51 |
| Figura 38. Fissuração do ensaio E3 segundo o MIDAS.....                                           | 51 |
| Figura 39. Fissuração do ensaio E5, apresentada por Slowik (2014). Fonte: (SLOWIK, 2014)<br>..... | 51 |
| Figura 40. Fissuração do ensaio E5 segundo o ANLEMT. ....                                         | 51 |
| Figura 41. Fissuração do ensaio E5 segundo o MIDAS.....                                           | 52 |
| Figura 42. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o<br>ensaio E1. ....  | 52 |
| Figura 43. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o<br>ensaio E2. ....  | 53 |

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 44. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E3. .... | 54 |
| Figura 45. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E4. .... | 54 |
| Figura 46. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E5. .... | 55 |
| Figura 47. Diagrama Carga-Erro. ....                                                          | 55 |
| Figura 48. Gráfico comparativo Carga x Deslocamento. ....                                     | 56 |
| Figura 47. Fissuras resultantes do processamento. Fonte: (SALEM, 2003) .....                  | 57 |
| Figura 50. Fissuras resultantes do processamento do código computacional. ....                | 57 |
| Figura 51. Esforços de tração. Fonte: (SALEM, 2003).....                                      | 58 |
| Figura 52. Esforços de tração processados. ....                                               | 58 |
| Figura 53. Esforços de compressão. Fonte: (SALEM, 2003).....                                  | 58 |
| Figura 54. Esforços de compressão processados.....                                            | 58 |
| Figura 55. Diagrama carga-deslocamento para o regime linear e não linear. ....                | 59 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1. Tabela resumo criada por Nagarajan (2009). Fonte: (NAGARAJAN, 2009) ..... | 24 |
| Tabela 2. Deformações longitudinal e transversal.....                               | 49 |
| Tabela 3. Valores ensaiados por Slowik (2014).....                                  | 50 |
| Tabela 4. Comparativo viga S1 .....                                                 | 66 |
| Tabela 5. Comparativo viga S2 .....                                                 | 69 |
| Tabela 6. Comparativo viga S3 .....                                                 | 73 |
| Tabela 7. Comparativo viga S4 .....                                                 | 75 |
| Tabela 8. Comparativo viga S5 .....                                                 | 78 |

## SUMÁRIO

|            |                                                               |           |
|------------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                                             | <b>11</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Objetivo</b>                                               | <b>13</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Estrutura do texto</b>                                     | <b>13</b> |
| <b>2</b>   | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>                                  | <b>14</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Modelos constitutivo</b>                                   | <b>14</b> |
| 2.1.1      | Concreto                                                      | 14        |
| 2.1.2      | Aço                                                           | 20        |
| <b>2.2</b> | <b>Método das micro treliças</b>                              | <b>22</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Áreas transversais dos elementos treliçados</b>            | <b>25</b> |
| <b>3</b>   | <b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>                                  | <b>30</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Teoria das treliças planas</b>                             | <b>30</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Não-linearidade física</b>                                 | <b>35</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Método de newton-Raphson</b>                               | <b>36</b> |
| <b>4</b>   | <b>DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL</b>                | <b>40</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Considerações</b>                                          | <b>40</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Estrutura do código computacional</b>                      | <b>41</b> |
| <b>5</b>   | <b>RESULTADOS – VALIDAÇÃO DO ANLEMT</b>                       | <b>48</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Coeficiente de Poisson</b>                                 | <b>48</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Não linearidade física – Midas (2009)/ANLEMT</b>           | <b>49</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Não linearidade física – Resultado experimental/ANLEMT</b> | <b>56</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Comparativo linearidade e não linearidade do concreto</b>  | <b>59</b> |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÕES</b>                                             | <b>60</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS</b>                                            | <b>61</b> |
|            | <b>APÊNDICE A - RESULTADOS SLOWIK</b>                         | <b>63</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é o material mais utilizado, na construção de estruturas (edifícios, casas, estádios), principalmente no Brasil (Stramandinoli, 2007). Os elementos estruturais são dimensionados para resistirem a todas as ações solicitantes impostas, não devendo apresentar deformações excessivas nem fissurações aparentes, que diminuam o rendimento da estrutura (condições de serviço e durabilidade).

Na área do dimensionamento estrutural, algumas hipóteses básicas são normalmente utilizadas para facilitar os cálculos necessários garantindo a estabilidade do sistema, dentre elas está a lei de Hooke, que determina a linearidade do comportamento dos materiais. A utilização da lei de Hooke, apesar de manter certa segurança aos cálculos, não demonstra o real comportamento do elemento estrutural, podendo mascarar deslocamentos expressivos e aumentar os esforços solicitantes, impondo aos elementos seções transversais maiores que as necessárias.

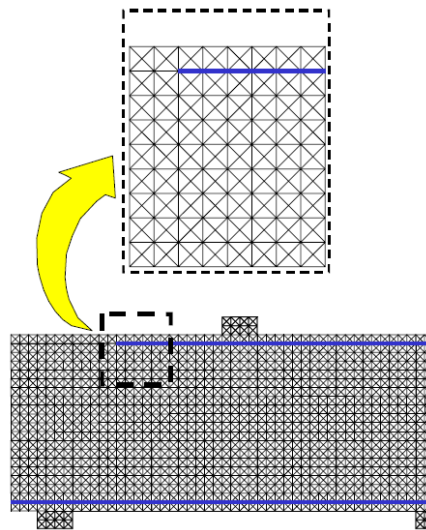
Para um elemento de concreto armado submetido a quaisquer esforços, fissuras irão aparecer espaçadas entre si (Martins, 2008). O alongamento máximo das barras de aço, que reforçam o concreto, é dado na localização das fissuras. Logo, a melhor maneira de se modelar um elemento de concreto armado é considerando o comportamento não linear físico dos materiais e as fissuras resultantes dos esforços solicitados.

O comportamento não linear físico dos materiais já é empregado no processamento de esforços, utilizando-se de métodos numéricos para obter resultados com baixo índice de erros quando se comparado com os resultados reais. A utilização de métodos numéricos na área da engenharia estrutural também é utilizada, na análise estrutural do concreto armado. Porém, tais métodos requerem uma grande quantidade de operações matemáticas e apresentam matrizes compostas por centenas de elementos, dependendo do quão discretizado é o sistema estrutural, necessitando o usuário utilizar meios computacionais para conseguir resultados plausíveis em tempo hábil.

Atualmente, existem diversos softwares de análise estrutural que trabalham com o comportamento não linear físico do material. Para o processamento da análise dos esforços, a maioria desses softwares utiliza o método dos elementos finitos (MEF), que exige conhecimentos mais aprofundados sobre o cálculo de métodos aproximados, tornando-o complexo para alguns usuários.

O modelo das bielas e tirantes (MBT) se originou do método dos elementos finitos,

como uma otimização analítica no dimensionamento de estruturas de concreto armado (Vieira, 2013), dando origem ao modelo das micro treliças (MMT). O modelo das micro treliças, aplicado ao concreto armado, consiste em representar as fibras do concreto e do aço utilizando micro treliças reticuladas (Figura 1).



**Figura 1. Modelo de elemento estrutural composto por micro treliças. Fonte: (SALEM, 2003)**

Este trabalho apresenta uma maneira mais simplificada e com resultados consistentes para a análise não linear física de elementos estruturais, utilizando o método das micro treliças, apresentado esquematicamente pela Figura 1, garantindo precisão e tempo hábil na análise de esforços. A não linearidade física será tratada como uma analogia a lei de Hooke, considerando o módulo de elasticidade função dos deslocamentos a serem calculados. Diversos modelos constitutivos serão apresentados com a finalidade de representar o comportamento do concreto armado. Será proposto o método das micro treliças no qual as áreas dos elementos são calculadas segundo parâmetros da discretização. Será apresentada a estrutura do código computacional que visa solucionar a análise proposta com precisão nos resultados e tempo de processamento hábil. As validações serão feitas comparando resultados obtidos de processamento de softwares comerciais e ensaios experimentais.

## **1.1 Objetivo**

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa computacional para analisar elementos estruturais (vigas, pilares), considerando o comportamento não linear físico do concreto armado, pelo método das micro treliças.

## **1.2 Estrutura do texto**

- Capítulo 2 – Neste capítulo será resumida a bibliografia utilizada para dar embasamento ao trabalho. Serão descritos, resumidamente, os principais pontos retirados dos artigos estudados, visando estruturar o objetivo principal e as validações presentes neste trabalho.
- Capítulo 3 – Neste capítulo serão descritos todos os cálculos e operações matemáticas que envolvem os métodos analíticos e numéricos utilizados.
- Capítulo 4 – Serão apresentados as considerações e o desenvolvimento do programa computacional, explicando cada rotina e suas respectivas funções. Também será apresentado um fluxograma resumindo o código.
- Capítulo 5 – Serão apresentadas todas as validações realizadas.
- Capítulo 6 – Serão apresentadas as conclusões do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Modelos constitutivo

#### 2.1.1 Concreto

Atualmente, as análises estruturais consideram a linearidade física do material que compõe o elemento estrutural estudado, porém, sob essa hipótese, ou seja, o regime de deformações linear de um material, os resultados obtidos se distanciam da realidade. Uma visão mais abrangente do problema considera as relações constitutivas não lineares definidas por funções arbitrárias, em que, a tensão é uma função não linear da deformação.

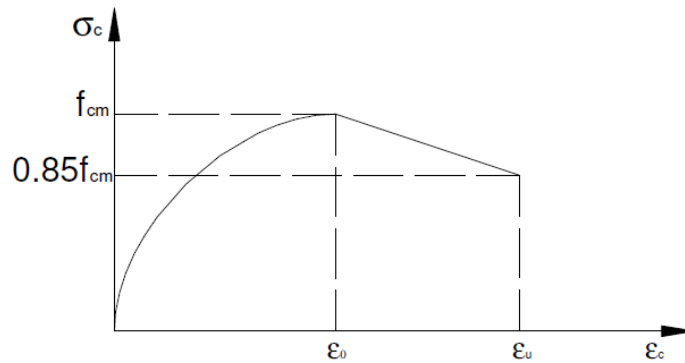
Com a evolução dos estudos sobre o comportamento dos materiais, diversos modelos constitutivos foram propostos e são utilizados atualmente (Stramandinoli, 2007; Salem, 2003; Araújo, 2010; Nagarajan, 2009). Stramandinoli (2007) citou quatro modelos constitutivos para representar o comportamento à compressão do concreto: o de Hognestad (1951), o utilizado pelo CEB-FIP (1990), o modelo adotado pela NBR-6118 (2003) e o modelo de Mander et al. (1988) apud Paz (1995). Para o comportamento do concreto no regime de tração, Stramandinoli (2007) considerou um regime linear até a fissuração ou ruptura do elemento.

O modelo constitutivo do concreto proposto por Hognestad (1951) descreve a relação entre a tensão no concreto ( $\sigma_c$ ) e a deformação específica ( $\epsilon_c$ ) (Figura 2) pelas seguintes equações:

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right], \text{ para } 0 < \epsilon_c \leq \epsilon_0. \quad 2.2.1.1$$

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot \left[ 1 - 0.15 \cdot \left( \frac{\epsilon_c - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) \right], \text{ para } \epsilon_c \geq \epsilon_0. \quad 2.2.1.2$$

sendo  $f_{cm}$  a resistência à compressão média do material,  $\epsilon_0$  a deformação específica correspondente a tensão máxima e ( $\epsilon_u$ ) a deformação específica última.

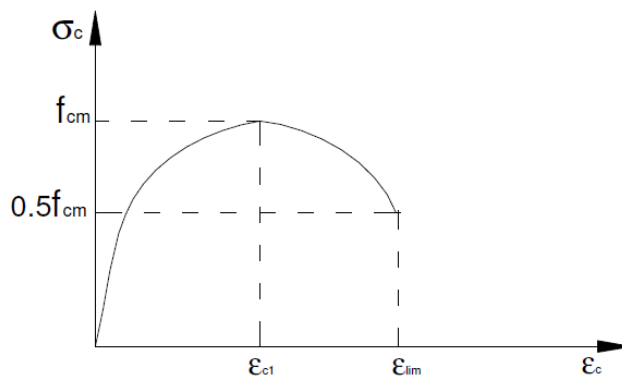


**Figura 2. Modelo constitutivo de Hognestad (1951). Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)**

O modelo constitutivo proposto por CEB-FIP (1990) considera o regime não linear após a carga de ruptura (Figura 3):

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \cdot f_{cm} \quad 2.2.1.3$$

sendo  $E_{ci}$  o módulo de deformação longitudinal inicial,  $E_{c1}$  o módulo de deformação secante referente à deformação correspondente à tensão máxima ( $\varepsilon_{c1}$ ) e  $\varepsilon_{lim}$  a deformação limite a ser considerada, correspondente a metade da resistência média à compressão do concreto, no ramo descendente da curva.



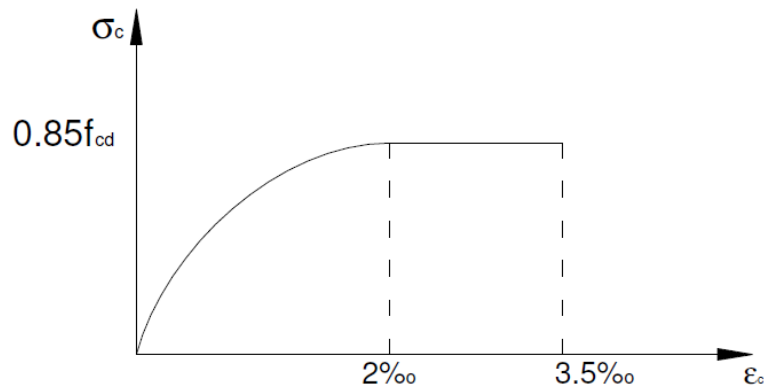
**Figura 3. Modelo constitutivo adotado pelo CEB-FIP. Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)**

A norma brasileira NBR-6118 (2003) adota um modelo utilizando a resistência à compressão de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ), dando origem ao conhecido diagrama Parábola-Retângulo (Figura 4), descrito por:

$$\sigma_c = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right) \right], \text{ para } \varepsilon_c < 0,2\% \quad 2.2.1.4$$

$$\sigma_c = 0.85 \cdot f_{cd}, \text{ para } 0,2\% < \varepsilon_c < 0,35\% \quad 2.2.1.5$$

Após a carga de ruptura, considerando a deformação específica do concreto ( $\varepsilon_c$ ) entre 0,2% e 0,35%, o diagrama passa a apresentar um regime constante para representar o escoamento da estrutura (Figura 4).



**Figura 4. Modelo constitutivo adotado pela NBR-6118. Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)**

O modelo constitutivo de Mander (1988), considera o confinamento do concreto provocado pelos estribos, resultando no aumento da resistência a compressão do concreto, é descrito por:

$$\sigma_c = \frac{f_{cc} \cdot r}{r - 1 + x^r} \quad 2.2.1.6$$

com

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \quad 2.2.1.7$$

$$r = \frac{E_c}{(E_c - E_{sec})} \quad 2.2.1.8$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \cdot \left[ 1 + 5 \cdot \left( \frac{f_{cc}}{f_{co}} - 1 \right) \right] \quad 2.2.1.9$$

$$E_{sec} = \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \quad 2.2.1.10$$

$$E_c = 5000 \cdot \sqrt{f_{co}} \quad 2.2.1.11$$

sendo  $f_{cc}$  e  $f_{co}$  a tensão máxima do concreto confinado e não confinado, respectivamente,  $\varepsilon_{cc}$  e  $\varepsilon_{co}$  a sua deformação específica correspondente; e  $E_c$  e  $E_{sec}$  o módulos de elasticidade tangente e secante, respectivamente.

Esse modelo constitutivo é apresentado na Figura 5.

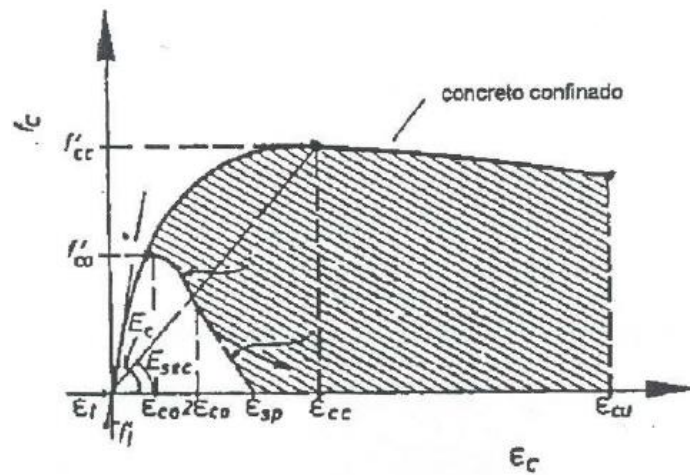


Figura 5. Modelo de Mander (1988). Fonte: (STRAMANDINOLI, 2007)

No modelo constitutivo proposto por Maekawa e Okamura (1991), utilizado por Salem (2003), as tensões de tração seguem um regime linear até atingir a deformação crítica do material ( $\varepsilon_{cr}$ ); após essa deformação, as tensões no elemento pós-fissurado são descritas por:

$$\sigma_c = f_t \cdot \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_c} \right)^C \quad 2.2.1.12$$

sendo  $f_t$  a resistência à tração do concreto e  $C$  coeficiente que depende da energia de fratura do concreto.

Para o regime à compressão do concreto, o modelo constitutivo proposto por Maekawa e Okamura (1991), utilizado por Salem (2003), é descrito por:

$$\sigma_c = K_0 \cdot E_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_p) \quad (2.2.1.13)$$

com,

$$K_0 = e^{-0.73 \cdot x} (1 - e^{-1.25 \cdot x}) \quad (2.2.1.14)$$

$$E_0 = \frac{2 \cdot f_c}{\varepsilon_{pico}} \quad (2.2.1.15)$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pico} \cdot \left[ x - \frac{20}{7} \cdot (1 - e^{-0.35 \cdot x}) \right] \quad (2.2.1.16)$$

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{pico}} \quad (2.2.1.17)$$

sendo  $f_c$  a resistência à compressão do concreto e  $\varepsilon_{pico}$  a sua deformação específica relacionada, e  $E_0$  o módulo de elasticidade inicial

O comportamento do modelo constitutivo proposto por Maekawa e Okamura (1991) é apresentado na Figura 6.

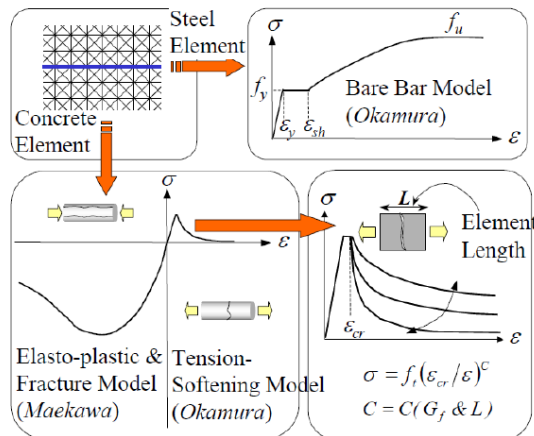


Figura 6. Modelo constitutivo proposto por Okamura e Maekawa (1991). Fonte: (SALEM, 2003)

Salem (2003) considerou, simultaneamente, as não linearidades física e geométrica na análise do comportamento estrutural. Nessa análise, os elementos das micro treliças têm seus comprimentos e ângulos atualizados a medida que a estrutura se deforma.

Para a compressão do concreto, Nagarajan (2009) utilizou o modelo constitutivo proposto por Hognestad (1951) e para a tração do concreto, o autor considera uma tensão de ruptura relativa à uma deformação específica igual a 0,015% e o módulo de elasticidade considerado foi o do início do regime de compressão (PILLAI e MENON, 1998). Esse comportamento, considerado por Nagarajan (2009) é apresentado na Figura 7.

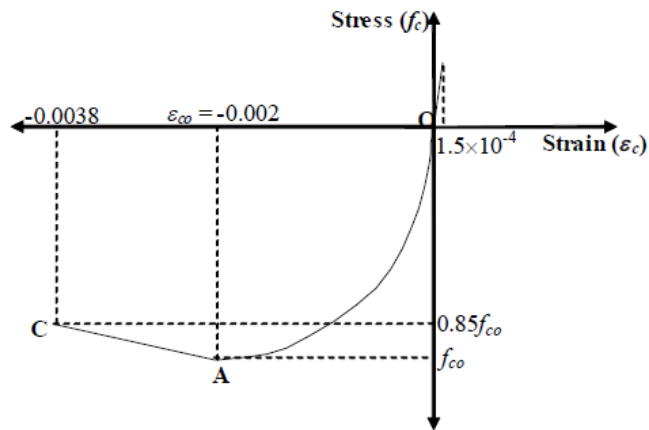


Figura 7. Modelo constitutivo de Pillai e Menon (1998).Fonte: (NAGARAJAN, 2009)

O modelo constitutivo proposto por Desayi e Krishnan (1964) é descrito por:

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot \frac{2 \cdot \eta}{1 + \eta^2} \quad (2.2.1.18)$$

sendo o parâmetro  $\eta$  a razão entre a deformação específica do concreto ( $\epsilon_c$ ) e a deformação específica de ruptura ( $\epsilon_0$ ).

Comparou-se o comportamento dos modelos constitutivos do concreto, propostos por Okamura e Maekawa (1991), Dayse e Krishnan (1964) e pelo CEB-FIP (1990) e o adotado pela NBR 6118 (2003), utilizados por Salem (2003), Stramandinoli (2007) e Nagarajan (2009) por meio do diagrama tensão-deformação considerando um concreto com resistência média a compressão de 20 MPa e resistência média a tração de 2,0 MPa Figura 8. Observa-se que o comportamento das fibras anterior à carga de ruptura, seja ela por compressão ou tração, é aproximadamente igual, mostrando a similaridade existente entre eles.

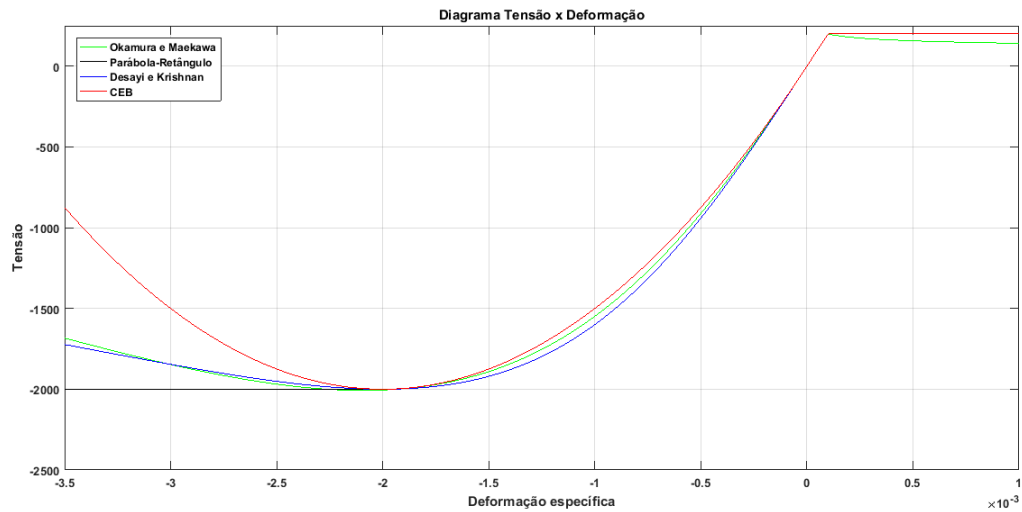


Figura 8. Comparativo entre os modelos constitutivos citados.

### 2.1.2 Aço

Segundo Araújo (2010), a forma do diagrama tensão-deformação de aços, obtido em ensaio de tração simples, é influenciada pelo processo de fabricação. Dois tipos de diagramas são apresentados: o diagrama tensão-deformação com patamar de escoamento (Figura 9) e sem o patamar de escoamento (Figura 10). As barras que são produzidas exclusivamente por laminação a quente apresentam o patamar de escoamento. As barras laminadas são as mais utilizadas para o reforço existente no concreto armado. O diagrama tensão-deformação que não apresenta o patamar de escoamento é característico dos fios obtidos por trefilação.

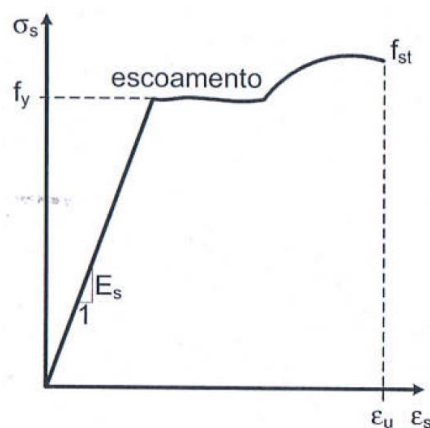
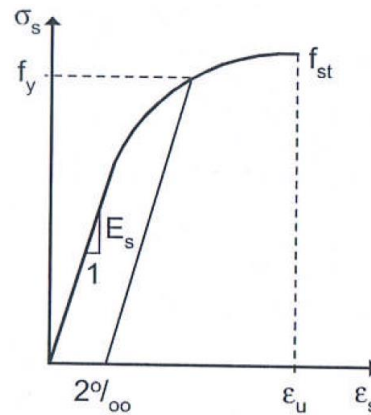


Figura 9. Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento. Fonte: (ARAÚJO, 2010)



**Figura 10. Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar de escoamento. Fonte: (ARAÚJO, 2010)**

O modelo constitutivo do aço, utilizado por Salem (2003), proposto por Okamura e Maekawa (1991), apresenta o patamar de escoamento (Figura 11), é descrito pelas expressões a seguir:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon, \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_y \quad (2.2.2.1)$$

$$\sigma_s = f_y, \text{ para } \varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_{sh} \quad (2.2.2.2)$$

$$\sigma_s = f_y + \left[ 1 - e^{-\frac{(\varepsilon_{sh}-\varepsilon)}{k}} \right] \cdot (1.01 \cdot f_u - f_y), \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_{sh} \quad (2.2.2.3)$$

com,

$$k = 0.047 \cdot \left( \frac{4000}{f_y} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.2.2.4)$$

sendo  $\sigma_s$  a tensão do aço,  $\varepsilon$  a deformação específica,  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço,  $f_y$  a tensão de escoamento do aço,  $f_u$  a tensão última,  $\varepsilon_y$  as deformações específicas e  $\varepsilon_{sh}$  as deformações específicas pós escoamento.

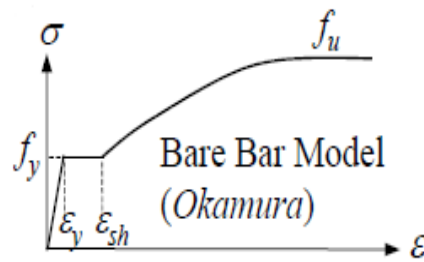


Figura 11. Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento. Fonte: (SALEM, 2003).

Nagarajan (2009) utilizou um modelo constitutivo para o aço considerando o material perfeitamente plástico, contendo apenas a reta ascendente e o patamar de escoamento, não considerando o regime pós-escoamento em suas validações (Figura 12).

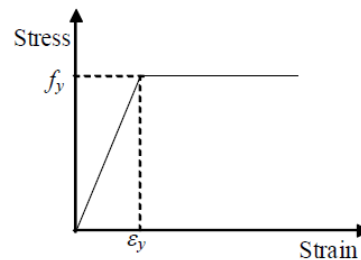


Figura 12. Diagrama tensão-deformação do aço. Fonte: (NAGARAJAN, 2009).

## 2.2 Método das micro treliças

As micro treliças é um método de análise estrutural pouco utilizado se comparado com o método dos elementos finitos (MEF). Considerando apenas os esforços de tração e compressão, o método das micro treliças, torna-se mais simples e robusto do que o MEF.

Salem (2003) se baseou no método das bielas e tirantes (MBT) para estudar o método das micro treliças. O MBT se resume em considerar todos os esforços de tração e compressão em elementos que sofrem tensões axiais e são ligados entre si por nós.

Salem (2003) considerou o elemento treliçado como sendo o conjunto duas barras horizontais, duas barras verticais e duas barras diagonais (Figura 1). Os elementos horizontais e verticais são responsáveis por suportar os esforços normais em suas respectivas direções enquanto os elementos diagonais são responsáveis por transferir os esforços de cisalhamento por meio de um mecanismo que comprime um elemento e traciona o outro.

Para a validação do modelo, Salem (2003) modelou uma viga bi apoiada com 2,4 metros de comprimento e seção transversal de 20x60 cm, discretizada em elementos treliçados

quadrados com 30 mm e reforçado com uma barra de aço com 19 mm de diâmetro (Figura 13). O carregamento foi composto por duas cargas pontuais simetricamente aplicadas, distanciando-se 30 cm do meio do vão.

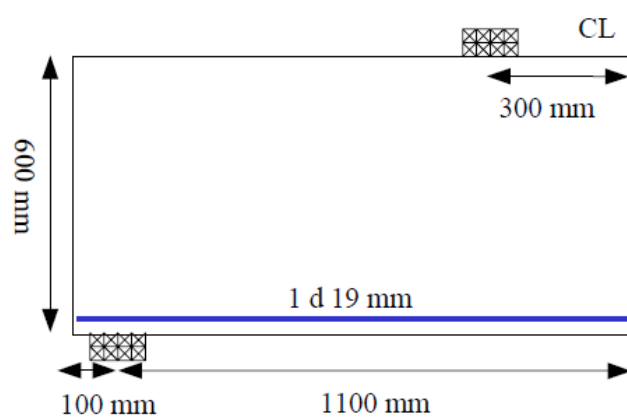


Figura 13. Exemplo simulado por Salem (2003). Fonte: (SALEM, 2003)

Os resultados da relação carga versus deslocamento simulados foram comparados com os resultados experimentais obtidos por Shin (1988), apresentando boa concordância (Figura 14).

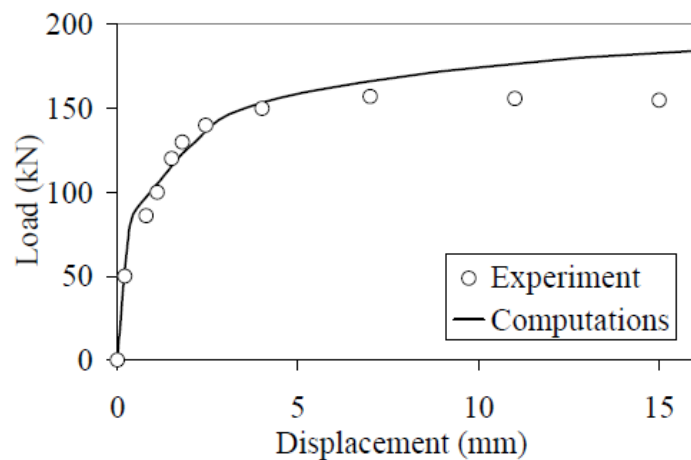
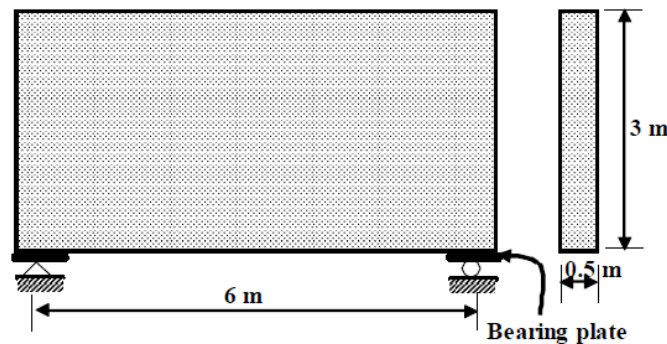


Figura 14. Diagrama Carga x Deslocamento. Fonte: (SALEM, 2003)

Nagarajan (2009) também relacionou os métodos das bielas e tirantes com o das micro treliças. Para a validação dos resultados, Nagarajan (2009) dimensionou uma viga parede, pelo método das bielas e tirantes, com 6,0 metros de comprimento e uma seção transversal de 3,0 x 0,50 metros (Figura 15), calculando a armadura necessária para suportar uma carga de 1500 kN. Foram analisadas três condições para a validação: carga pontual no meio do vão, duas cargas pontuais simetricamente espaçadas e carga distribuída ao longo de todo o comprimento da viga.



**Figura 15. Exemplo utilizado por Nagarajan (2009). Fonte: (NAGARAJAN, 2009)**

Posteriormente, foi processado o mesmo exemplo utilizando o método das micro treliças, considerando o reforço de armadura calculado anteriormente. A carga de ruptura resultante foi comparada com a carga de dimensionamento da viga (1500 kN). Foi montado um quadro resumo (Tabela 1) apresentando os valores referentes a carga de ruptura e a área de aço utilizada no processamento. Os resultados obtidos por Nagarajan (2009) foram conclusivos, estando todas as cargas de ruptura próximas a carga de dimensionamento da viga.

Table 1. Summary of design for deep beams

| Load type          | Height of truss (m) | $A_s$ (mm <sup>2</sup> ) |
|--------------------|---------------------|--------------------------|
| Central point load | 2.87                | 2093.28                  |
| Two point load     | 2.91                | 1427.67                  |
| UDL                | 2.93                | 1062.54                  |

Table 2. Ultimate load of the beams

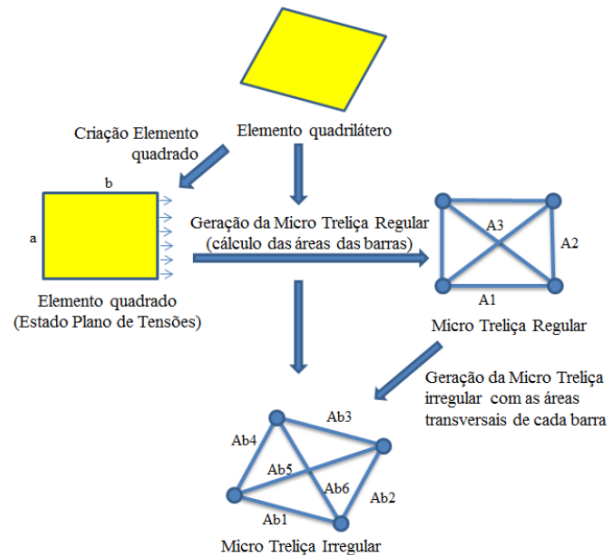
| Load type          | Ultimate load (kN) |
|--------------------|--------------------|
|                    | Analysis           |
| Central point load | 1540               |
| Two point load     | 1580               |
| UDL                | 1560               |

**Tabela 1. Tabela resumo criada por Nagarajan (2009). Fonte: (NAGARAJAN, 2009)**

Vieira (2013) realizou simulações numéricas utilizando o método das micro treliças. Nessas simulações não são consideradas a aderência entre o concreto e o aço, somente o acoplamento entre os nós dos elementos da treliça plana que representam o concreto e o aço.

Vieira (2013) determinou o caminho das fissuras e a carga última utilizando a carga de ruptura (tração ou compressão) dos elementos treliçados. Com as respostas dos esforços axiais de cada barra constituinte da micro treliça, foi possível otimizar o melhor posicionamento do

reforço de aço para aproveitar melhor as características dos materiais que compõe o concreto armado. Os elementos quadriláteros treliçados utilizados por Vieira (2013) não necessitam serem formados por ângulos retos(Figura 16).



**Figura 16. Elementos irregulares. Fonte: (VIEIRA, 2013)**

As validações realizadas por Vieira (2013) foram com o software Micro-Truss Analyser (MTA). Para essas validações, as informações dos modelos constitutivos foram obtidas com o software comercial Abaqus.

### 2.3 Áreas transversais dos elementos treliçados

Nagarajan (2009), para o cálculo das áreas transversais dos elementos componentes da micro treliza, se baseou em Hrennikoff (1941) que considera a seção dependente das dimensões do elemento treliçado constituído por quatro nós, formando um quadrilátero, e 6 barras, duas verticais, duas horizontais e duas diagonais. As seções transversais dos elementos, também, dependem da altura do elemento ( $a$ ), da relação entre a altura e a largura do elemento ( $k$ ) e da espessura da peça estrutural real. O elemento treliçado usado por Nagarajan (2009) é apresentado na Figura 17.

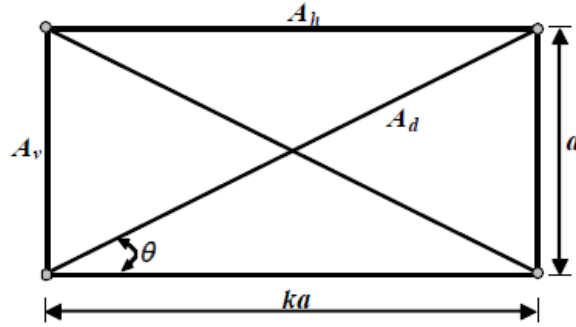


Figura 17. Composição dos elementos treliçados de Hrennikoff (1941). Fonte: (NAGARAJAN, 2009)

Nagarajan (2009) relacionou as áreas  $A_v$ ,  $A_h$  e  $A_d$ , áreas transversais dos elementos treliçados verticais, horizontais e diagonais, respectivamente, da seguinte forma:

$$A_h = \frac{3}{8} \cdot (3 - k^2) \cdot a \cdot t \quad (2.4.1)$$

$$A_v = \frac{3}{8} \cdot \frac{(3 \cdot k^2 - 1)}{k} \cdot a \cdot t \quad (2.4.2)$$

$$A_d = \frac{3}{8} \cdot \frac{(1 + k^2)^2}{k} \cdot a \cdot t \quad (2.4.3)$$

sendo, “k” o coeficiente que relaciona a altura e largura da micro treliça e “t” a espessura do elemento estrutural que está sendo analisado.

Outro método para o cálculo das áreas transversais de cada elemento componente da micro treliça foi estudado por Kioussis (2010). Nesse estudo foi comparada a rigidez de um elemento no estado plano de tensões com um elemento componente da micro treliça constituídos por quatro nós e seis barras (Figura 18).

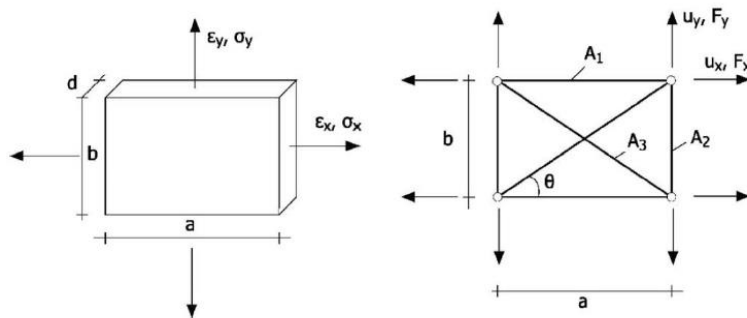


Figura 18. Analogia utilizada por Kioussis (2010). Fonte: (SALEM, 2003)

Kiousis (2010) considerou que os elementos treliçados que constituem o concreto armado são modelados com base em equações que levam em conta o endurecimento dependente do confinamento do concreto e seu posterior amolecimento. O autor discute a possibilidade do aumento da resistência e da ductilidade, dos pilares de concreto sujeitos a ações de compressão, com o aumento da área transversal dos estribos e diminuição de seu espaçamento, mesmo que esse aumento seja limitado. Nesse estudo, também, foi avaliada a influência do reforço transversal sobre o tipo de fissura na peça estrutural após sua falha.

Kiousis (2010) descreveu a relação do estado plano de tensões relacionando as tensões ( $\sigma$ ) presentes no elemento bem como suas deformações específicas ( $\varepsilon$ ) nas direções x e y e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

As deformações específicas do elemento ( $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ ), considerando suas dimensões (a e b), podem ser descritas por:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

A relação entre as forças (F) as tensões nodais, considerando a espessura do elemento discretizado (d), é dada por:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

Substituindo as equações 2.4.3 e 2.4.4 na equação 2.4.6, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \left[ \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right] \quad (2.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{E \cdot d}{1 - v^2} \cdot \begin{pmatrix} b & b \cdot v \\ a \cdot v & a \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right] \quad (2.4.8)$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{E \cdot d}{1 - v^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & v \\ v & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

Kiousis (2010), utilizando o método da rigidez direta, propôs a seguinte relação nodal entre a força e o deslocamento:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = 2 \cdot E \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_1}{a} + A_3 \cdot \frac{\cos^3}{a} & A_3 \cdot \frac{\sin \cdot \cos^2}{a} \\ A_3 \cdot \frac{\sin^2 \cdot \cos}{b} & \frac{A_2}{b} + A_3 \cdot \frac{\sin^3}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

Na qual, A1, A2 e A3 são as áreas transversais dos elementos horizontais, verticais e diagonais, respectivamente.

Igualando as equações 2.4.9 e 2.4.10, pode-se relacionar a rigidez do elemento no estado plano de tensões com o sistema de treliças planas. Isolando os elementos obtém-se (Kiousis, 2010):

$$\frac{E \cdot d}{1 - v^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & v \\ v & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 2 \cdot E \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_1}{a} + A_3 \cdot \frac{\cos^3}{a} & A_3 \cdot \frac{\sin \cdot \cos^2}{a} \\ A_3 \cdot \frac{\sin^2 \cdot \cos}{b} & \frac{A_2}{b} + A_3 \cdot \frac{\sin^3}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d \cdot b}{1 - v^2} - \frac{v}{1 - v^2} \cdot \frac{l \cdot d \cdot \cos^2}{\sin^2} \right) \quad (2.4.12)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{d \cdot a}{1 - v^2} - \frac{v}{1 - v^2} \cdot \frac{l \cdot d \cdot \sin^2}{\cos^2} \right) \quad (2.4.13)$$

$$A_3 = \frac{v}{1 - v^2} \cdot \frac{l \cdot d}{\sin(2 \cdot \theta)} \quad (2.4.14)$$

Sendo l o comprimento da diagonal.

As equações 2.4.12, 2.4.13 e 2.4.14 representam as áreas transversais dos elementos horizontais, verticais e diagonais, respectivamente.

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

#### 3.1 Teoria das treliças planas

Antes de iniciar a análise não linear das micro treliças planas, faz necessária uma revisão teórica sucinta referente à análise matricial de treliças planas.

Inicialmente, é feito uma compatibilidade das barras que irão compor a estrutura treliçada e as coordenadas cartesianas dos nós existentes. Considere a treliça plana, composta por três barras ligadas entre si por três nós (Figura 19). O nó  $N1$  é restrito na direção  $X$  e  $Y$  do eixo cartesiano, o nó  $N3$  é restrito apenas na direção  $X$  do eixo cartesiano e o nó  $N2$  é livre de restrições em todas as direções. A barra  $B1$  é ligada aos nós  $N1$  e  $N2$ , a barra  $B2$  é formada pelos nós  $N2$  e  $N3$  e pôr fim a barra  $B3$  é ligada aos nós  $N1$  e  $N3$ . As rotações presentes nos cálculos são consideradas livres de restrições para que a estrutura seja caracterizada como uma treliça plana reticulada.

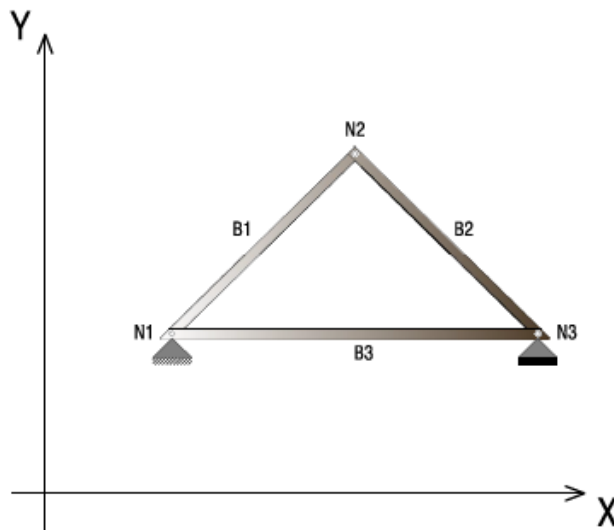
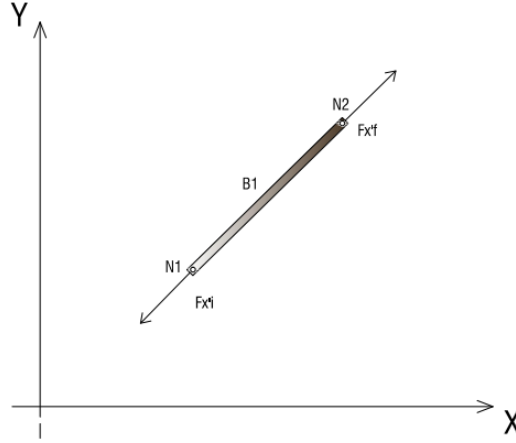


Figura 19. Esquema da treliça composta por suas conectividades e nós.

Isolando a barra  $B1$  composta por suas conectividades  $N1$  e  $N2$ , representa-se o conjunto de forças, em coordenadas locais, atuantes nessa barra como  $F_{xi}^L$  e  $F_{xj}^L$ . O par de forças tem a finalidade de manter o equilíbrio com a ausência das demais barras que compõe a estrutura reticulada plana. As forças  $F_{xi}^L$  e  $F_{xf}^L$  atuam nas coordenadas locais e são aplicadas no início e fim da barra em questão, respectivamente.

Segundo Vaz (2011), cálculo matricial considera o sistema local e global de coordenadas, ou seja, o esquema apresentado é composto da barra “B1”, suas conectividades,

“N1” e “N2”, bem como os esforços atuantes nos nós inicial e final da barra estudada, tais esforços seguindo a direção do eixo local do elemento (Figura 20).



**Figura 20. Esquema das barras isoladas com suas respectivas forças.**

Para o cálculo da matriz de rigidez resultante em cada barra, levando em consideração a nomenclatura apresentada para os pares de forças atuantes na barra B1 (Figura 20), pode-se resumir o alongamento da barra ( $\Delta L$ ) como sendo o resultado da subtração entre o deslocamento nodal final e o deslocamento nodal inicial,  $D_{xi}^L$  e  $D_{xf}^L$  respectivamente, ambos direcionados nas coordenadas locais da barra.

Fazendo-se uso da equação que relaciona a razão entre o produto da força axial ( $F$ ) e o comprimento da barra ( $L$ ) pelo produto do módulo de elasticidade do material ( $E$ ) e a área transversal da barra ( $A$ ), define-se o alongamento da barra em questão ( $\Delta L$ ). Isolando-se a força axial ( $F$ ) e substituindo-se a mesma pelo conjunto de forças axiais atuantes nos extremos da barra ( $F_{xi}^L$  e  $F_{xf}^L$ ), obtém-se as seguintes expressões:

$$\Delta L = \left( D_x^L \right)_j - \left( D_x^L \right)_i \quad (3.1.1)$$

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \leftarrow F = \frac{\Delta L \cdot E \cdot A}{L} \leftarrow \left( F_{x,x}^L \right)_i = \frac{-E \cdot A \cdot \Delta L}{L} \quad (3.1.2)$$

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \leftarrow F = \frac{\Delta L \cdot E \cdot A}{L} \leftarrow \left( F_x^L \right)_f = \frac{E \cdot A \cdot \Delta L}{L} \quad (3.1.3)$$

Substituindo a equação 3.1.1 nas equações 3.1.2 e 3.1.3, resulta na relação entre o conjunto de forças axiais atuantes nos extremos das barras ( $F_{xi}^L$  e  $F_{xf}^L$ ) e seus respectivos deslocamentos nodais ( $D_{xi}^L$  e  $D_{xf}^L$ ). Cada barra que compõe a estrutura plana reticulada terá

sua equação correspondente.

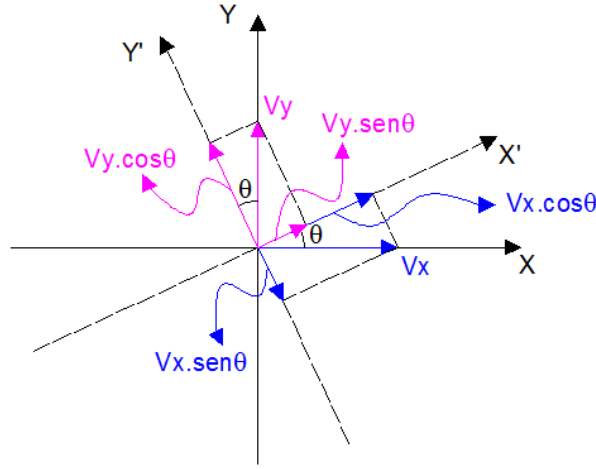
$$\begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_i = \frac{-E \cdot A \cdot \Delta L}{L} \leftarrow \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_i = \frac{-E \cdot A \cdot \left[ \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_j - \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_i \right]}{L} \leftarrow \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_i = \frac{-E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_j}{L} + \frac{E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_i}{L} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_j = \frac{E \cdot A \cdot \Delta L}{L} \leftarrow \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_j = \frac{E \cdot A \cdot \left[ \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_j - \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_i \right]}{L} \leftarrow \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_j = \frac{E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_j}{L} - \frac{E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_i}{L} \quad (3.1.5)$$

Considerando que os pares de forças no sentido transversal da barra ( $F_{yi}^L$  e  $F_{yf}^L$ ) e seus respectivos deslocamentos ( $D_{yi}^L$  e  $D_{yf}^L$ ) são nulos e colocando as expressões em notação matricial, a matriz de rigidez local de cada elemento constituinte da estrutura plana reticulada é estabelecida (Eq. 3.1.6). Denominando  $F^L$  o vetor de forças nodais atuantes nos extremos de cada barra, sendo  $F_x$  a força axial e  $F_y$  a força transversal,  $K^L$  a matriz de rigidez local do elemento e  $D^L$  o vetor de deslocamentos nodais dos nós iniciais e finais da barra, analogamente ao conjunto de forças, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_i \\ \begin{pmatrix} F_y^L \end{pmatrix}_i \\ \begin{pmatrix} F_x^L \end{pmatrix}_j \\ \begin{pmatrix} F_y^L \end{pmatrix}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_i \\ \begin{pmatrix} D_y^L \end{pmatrix}_i \\ \begin{pmatrix} D_x^L \end{pmatrix}_j \\ \begin{pmatrix} D_y^L \end{pmatrix}_j \end{bmatrix} \leftarrow F^L = K^L \cdot D^L \quad (3.1.6)$$

Para simplificar os cálculos se estabelece que todas as variáveis da equação matricial (3.1.6) devem seguir os eixos globais (cartesianos). Para isso, devem-se transformar os vetores  $\{F^L\}$  e  $\{D^L\}$  de coordenadas locais para coordenadas globais. De acordo com a Figura 21, os vetores localizados no eixo global são resultados da soma vetorial de vetores localizados no eixo local.



**Figura 21. Eixo global e local representando seus respectivos vetores.**

Projetando os vetores  $V_y$  e  $V_x$ , situados no eixo global, em subvetores locais, seguindo o ângulo  $\theta$  formado pela rotação entre eixos, podemos definir os vetores locais,  $V_x^L$  e  $V_y^L$ , dado por:

$$V_x^L = V_x \cdot \cos \theta + V_y \cdot \sin \theta \quad (3.1.7)$$

$$V_y^L = -V_x \cdot \sin \theta + V_y \cdot \cos \theta \quad (3.1.8)$$

Analogamente aos vetores representados, pode-se utilizar a rotação para os deslocamentos nodais:

$$D_x^L = D_x \cdot \cos \theta + D_y \cdot \sin \theta \quad (3.1.9)$$

$$D_y^L = -D_x \cdot \sin \theta + D_y \cdot \cos \theta \quad (3.1.10)$$

Isolando-se os vetores nas coordenadas locais ( $D^L$ ) e subdividindo os deslocamentos nodais em inicial e final, podemos reescrever a transformação de eixos para o deslocamento nodal ( $D$ ) em linguagem matricial por:

$$D_x^L = D_{xi} \cdot \cos(\theta) + D_{yi} \cdot \sin(\theta) \quad (3.1.11)$$

$$D_y^L = -D_{xi} \cdot \sin(\theta) + D_{yi} \cdot \cos(\theta) \quad (3.1.12)$$

$$D_x^L = D_{xf} \cdot \cos(\theta) + D_{yf} \cdot \sin(\theta) \quad (3.1.13)$$

$$D_y^L = -D_{xf} \cdot \sin(\theta) + D_{yf} \cdot \cos(\theta) \quad (3.1.14)$$

Ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (D_x^L)_i \\ (D_y^L)_i \\ (D_x^L)_f \\ (D_y^L)_f \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (D_x)_i \\ (D_y)_i \\ (D_x)_f \\ (D_y)_f \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

Logo:

$$\{D^L\} = [R] \cdot \{D\} \quad (3.1.17)$$

sendo  $[R]$  a matriz de rotação.

Essa equação pode ser utilizada para qualquer coordenada vetorial locada em um eixo qualquer transformando a mesma em coordenada vetoriais locadas no eixo global.

Pode-se reescrever a equação 3.1.6 em coordenadas globais multiplicando os vetores força e deslocamento, locais, pela matriz de rotação (Eq. 3.1.18 e Eq. 3.1.19), sendo  $\{F\}$  e  $\{D\}$  os respectivos vetores em coordenadas globais, resultando na equação 3.1.20.

$$\{D^L\} = [R] \cdot \{D\} \quad (3.1.18)$$

$$\{F^L\} = [R] \cdot \{F\} \quad (3.1.19)$$

$$[R] \cdot \{F\} = [K^L] \cdot [R] \cdot \{D\} \quad (3.1.20)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação 3.1.20 pela inversa da matriz de rotação e isolando os vetores força e deslocamento, obtém-se:

$$[R]^{-1} \cdot [R] \cdot \{F\} = [R]^{-1} \cdot [K^L] \cdot [R] \cdot \{D\} \quad (3.1.21)$$

$$\{F\} = \{R\}^{-1} \cdot [K^L] \cdot [R] \cdot \{D\} \quad (3.1.22)$$

$$[K] = [R]^{-1} \cdot [K^L] \cdot [R] \quad (3.1.23)$$

$$\{F\} = [K] \cdot \{D\} \quad (3.1.24)$$

Sendo  $[K]$  a matriz de rigidez global das barras.

Pra definir a contribuição que cada barra terá na matriz de rigidez da estrutura deve-se obedecer a duas condições: a condição de equilíbrio e a de compatibilidade

A condição de equilíbrio, para cada nó da estrutura, estabelece que as cargas externas aplicadas nos nós devem ser iguais a soma das solicitações nos extremos das barras que concorrem no nó. De acordo com a Figura 19 em que é apresentado o exemplo de uma treliça com seus nós e compatibilidades, têm-se:

$$\begin{aligned} F_{x1} &= F_{x1}^1 + F_{x1}^3 & F_{y1} &= F_{y1}^1 + F_{y1}^3 \\ F_{x2} &= F_{x2}^1 + F_{x2}^2 & F_{y2} &= F_{y2}^1 + F_{y2}^2 \\ F_{x3} &= F_{x3}^2 + F_{x3}^3 & F_{y3} &= F_{y3}^2 + F_{y3}^3 \end{aligned}$$

As condições de compatibilidade estabelecem que as barras que pertencem ao mesmo nó têm seus deslocamentos nodais iguais.

$$\begin{aligned} D_{x1}^1 &= D_{x1}^3 & D_{y1}^1 &= D_{y1}^3 \\ D_{x2}^1 &= D_{x2}^2 & D_{y2}^1 &= D_{y2}^2 \\ D_{x3}^2 &= D_{x3}^3 & D_{y3}^2 &= D_{y3}^3 \end{aligned}$$

Com as duas condições satisfeitas, pode-se estabelecer a matriz de rigidez da estrutura com participações de todas as barras que compõe a treliça.

Na análise linear de treliças planas utilizando o método da rigidez, o sistema final de equações é um sistema linear simples, com  $n$  incógnitas (em que  $n$  é duas vezes o número de nós por se trabalhar apenas com translação no eixo  $x$  e  $y$ ) e  $n$  equações, sendo resolvido analiticamente.

### 3.2 Não-linearidade física

Na análise linear estrutural, leva-se em consideração a lei de Hooke em que o módulo de elasticidade das peças estruturais é uma constante, segundo uma equação linear relacionando a tensão e a deformação da estrutura. Considerando a não linearidade física do material, o módulo de elasticidade passa a ser função da deformação efetiva da estrutura. O comportamento elasto-plástico dos materiais é simplificado para o caso de treliças, pois o espaço das tensões é unidimensional. Para o módulo de elasticidade secante, foi proposta neste trabalho, uma analogia a lei de Hooke (Eq. 3.2.1).

$$\delta = \frac{F \cdot L}{E(\varepsilon) \cdot A} \quad (3.2.1)$$

Considerando que os esforços axiais em cada elemento treliçado são iguais ao produto entre da tensão ( $\sigma_c$ ) pela área transversal ( $A$ ) e que a deformação específica é a razão do deslocamento ( $\delta$ ) pelo comprimento da barra ( $L$ ), pode-se chegar à equação que define o módulo de elasticidade não linear.

$$\sigma(\varepsilon) \cdot A = F \quad (3.2.2)$$

$$F = \frac{\delta \cdot E(\varepsilon) \cdot A}{L} \quad (3.2.3)$$

Substituindo-se as equações 3.2.2 na equação 3.2.3, tem-se:

$$\sigma(\varepsilon) \cdot A = \frac{\delta \cdot E(\varepsilon) \cdot A}{L} \quad (3.2.4)$$

$$E(\varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (3.2.5)$$

Considerando os conceitos apresentados no Item 3.1 e utilizando o módulo de elasticidade não linear (Eq. 3.2.5), a análise das estruturas resultará em um sistema de equações não linear, apenas sendo resolvido com o auxílio de métodos numéricos, no presente trabalho foi considerado o método de Newton-Raphson.

### 3.3 Método de newton-raphson

O método de Newton-Raphson é um procedimento utilizado para obter soluções de sistema de equações não lineares. Inicialmente calcula-se a reta tangente ao gráfico no ponto inicial (Eq. 3.3.1). O cálculo do deslocamento inicial é a razão entre a carga aplicada e a reta tangente no ponto inicial (Eq. 3.3.2). O resíduo será a diferença entre a força aplicada e a força resultante relativa ao deslocamento do elemento (Eq. 3.3.3). O incremento de deslocamento é igual à razão entre o resíduo e a tangente ( $K$ ) (Eq. 3.3.4). Posteriormente atualiza-se o deslocamento (Eq. 3.3.5) e repetem-se os cálculos até o critério de convergência for atendido, obedecendo à tolerância imposta. O processo do método de Newton-Raphson é representado pelas expressões a seguir:

$$K(\delta) = \frac{d}{d\delta} F(\delta) \quad (3.3.1)$$

$$\delta_0 = \frac{F_{total}}{K_0} \quad (3.3.2)$$

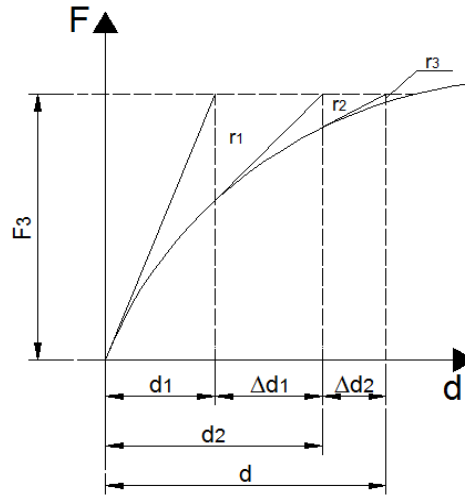
$$R_i = F_{total} - F(\delta_i) \quad (3.3.3)$$

$$\Delta\delta_i = \frac{R_i}{K(\delta_i)} \quad (3.3.4)$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta\delta_i \quad (3.3.5)$$

sendo  $K(\delta)$  a reta tangente relativa ao deslocamento;  $\delta$  o deslocamento nodal;  $\delta_0$  o deslocamento inicial;  $K_0$  a reta tangente relativa ao deslocamento inicial;  $\Delta\delta$  o incremento de deslocamento;  $R$  o resíduo;  $F_{total}$  a força total aplicada à estrutura;  $F(\delta)$  a força nodal referente ao deslocamento ( $\delta$ );  $i$  a iteração.

O método de Newton-Raphson é representado esquematicamente na Figura 22.



**Figura 22. Esquema de interação do método de Newton-Raphson. Fonte: (IVANČO, 2011)**

Como visto anteriormente, sabemos que o método de Newton-Raphson depende da reta tangente à curva em cada iteração. No caso de sistemas de equações não lineares o método é semelhante, porém ao invés de calcularmos a reta tangente à curva, calcularemos o hiperplano tangente ao politopo que o sistema linear determina, denominado Matriz Jacobiana, no caso de estruturas, matriz de rigidez.

Tomando como exemplo, seja  $\{F_n\}$  o vetor composto pelas equações não lineares de um sistema de seis incógnitas, temos:

$$F_n = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ F_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ F_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ F_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ F_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

A matriz Jacobiana [J] será composta pelas derivadas parciais de cada equação componente do vetor  $\{F_n\}$  segundo cada incógnita do sistema. Ou seja, para o exemplo a seguir, temos:

Sendo  $i=1...6$  e  $j=1...6$  o número de equações e incógnitas, respectivamente, do sistema não linear, o Jacobiano será:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1}F_1 & \frac{d}{dx_2}F_1 & \frac{d}{dx_3}F_1 & \frac{d}{dx_4}F_1 & \frac{d}{dx_5}F_1 & \frac{d}{dx_6}F_1 \\ \frac{d}{dx_1}F_2 & \frac{d}{dx_2}F_2 & \frac{d}{dx_3}F_2 & \frac{d}{dx_4}F_2 & \frac{d}{dx_5}F_2 & \frac{d}{dx_6}F_2 \\ \frac{d}{dx_1}F_3 & \frac{d}{dx_2}F_3 & \frac{d}{dx_3}F_3 & \frac{d}{dx_4}F_3 & \frac{d}{dx_5}F_3 & \frac{d}{dx_6}F_3 \\ \frac{d}{dx_1}F_4 & \frac{d}{dx_2}F_4 & \frac{d}{dx_3}F_4 & \frac{d}{dx_4}F_4 & \frac{d}{dx_5}F_4 & \frac{d}{dx_6}F_4 \\ \frac{d}{dx_1}F_5 & \frac{d}{dx_2}F_5 & \frac{d}{dx_3}F_5 & \frac{d}{dx_4}F_5 & \frac{d}{dx_5}F_5 & \frac{d}{dx_6}F_5 \\ \frac{d}{dx_1}F_6 & \frac{d}{dx_2}F_6 & \frac{d}{dx_3}F_6 & \frac{d}{dx_4}F_6 & \frac{d}{dx_5}F_6 & \frac{d}{dx_6}F_6 \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

O processo de iteração é análogo ao método empregado para as equações. Sendo  $\delta_0$  o vetor composto pelos valores iniciais de deformações. O processo de cálculo do sistema de equações não lineares é descrito pelas expressões a seguir:

$$J(\delta) = \frac{d}{d\delta} F_n(\delta) \quad (3.3.8)$$

$$R_i = F_n - F(\delta_i) \quad (3.3.9)$$

$$\Delta\delta_i = -J(\delta)^{-1} \cdot R_i \quad (3.3.10)$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta\delta_i \quad (3.3.11)$$

Sendo  $\delta$  o deslocamento nodal;  $\Delta\delta$  o incremento de deslocamento;  $R$  o resíduo;  $F(\delta)$  a força nodal referente ao deslocamento ( $\delta$ ); e  $i$  a iteração.

Critério de parada: a interação irá terminar quando todos os incrementos de deformação atingirem a tolerância imposta inicialmente.

## 4 DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

### 4.1 Considerações

Algumas considerações feitas para o desenvolvimento do código computacional são apresentadas a seguir:

- **Elemento treliçado:** o elemento treliçado deverá ser composto por quadriláteros regulares que possuem as mesmas dimensões.
- **Módulo de elasticidade:** como no programa computacional será adotado o método iterativo incremental e as deformações são próximas suficientes, em cada incremento, será usado o módulo de elasticidade secante que faz com que os resultados convirjam com apenas uma ou duas iterações. A escolha do módulo de elasticidade secante, também, se deve a simplicidade, pois sua formulação e cálculo são mais diretos e compreensíveis.
- **Método numérico:** o método numérico usado no programa será o de Newton-Raphson. Esse método converge para resultados satisfatórios com menos iterações do que o método de Newton-Raphson modificado.
- **Modelo Constitutivo:** no programa será adotado o modelo constitutivo do concreto proposto por Okamura e Maekawa (1991). A escolha desse modelo foi devido à manutenção do comportamento do material utilizado em vários exemplos validados, como em Salem (2003). O modelo constitutivo adotado para o aço foi considerado linear até a carga de ruptura e contém o patamar de escoamento no regime pós-fissuração (Araújo, 2010).
- **Área dos elementos treliçados:** Nesse trabalho foi considerado o método de cálculo de áreas proposto por Kiouisis (2010), já que o mesmo relaciona a rigidez do elemento no estado plano de tensões com o sistema de treliças planas e leva em consideração o coeficiente de Poisson que relaciona a deformação horizontal com a deformação vertical da estrutura.
- **Fissuração:** no regime após a carga de ruptura, o programa computacional adotará a seguinte condição: uma vez que a resistência de tração ou compressão for ultrapassada, o módulo de elasticidade daquele elemento será reduzido à zero, resultando na retirada do elemento do processamento uma vez que sua resistência a esforços axiais foi ultrapassada.

#### 4.2 Estrutura do código computacional

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional denominado “ANLEMT”, em MATLAB (2016), para análise de elementos estruturais de concreto armado, considerando a não linearidade física, com o método das micro treliças. Os resultados fornecidos pelo programa ANLEMT são: deslocamentos nodais, esforços axiais (compressão e tração) e o comportamento de fissuração da peça analisada.

O MATLAB (2016) é um software de programação matemática que se baseia em matrizes e vetores para processar as operações matemáticas. Além da programação matricial o MATLAB (2016) possibilita a interação entre outros softwares. Os dados de entrada para o programa ANLEMT são gerados pelo software Gid (2016).

Para aplicação do ANLEM, é necessário fazer um pré-processamento, utilizando o software Autocad (2013) e Gid (2016), descrito a seguir:

1. Definido o elemento a ser analisado (pilar, viga), com o software Autocad (2013) deve ser desenhada a estrutura treliçada, obedecendo as considerações feitas, ou seja, o elemento treliçado composto por seis barras, sendo duas barras horizontais, duas barras verticais e duas barras diagonais (Figura 23). Finalizado o desenho, gera-se um arquivo *dxf*, que será usado pelo software Gid (2016);

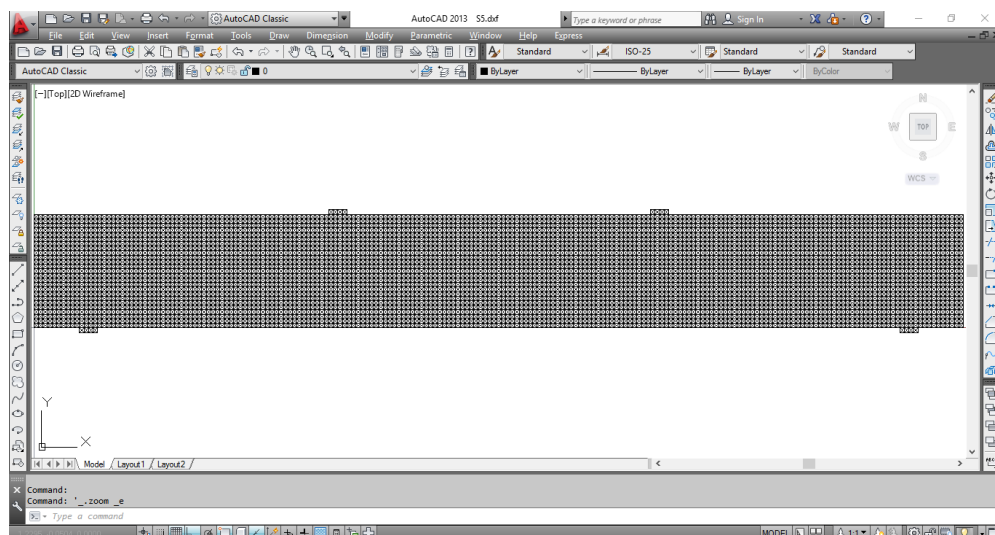


Figura 23. Estrutura de microtreliça desenhado no software Autocad (2013).

2. O usuário deverá importar o arquivo *dxf* com o software Gid (2016), que irá processar as interações entre os elementos, os nós e as barras (Figura 24), gerando um arquivo de texto contendo as informações necessárias para o processamento no ANLEMT (coordenadas e conectividades);

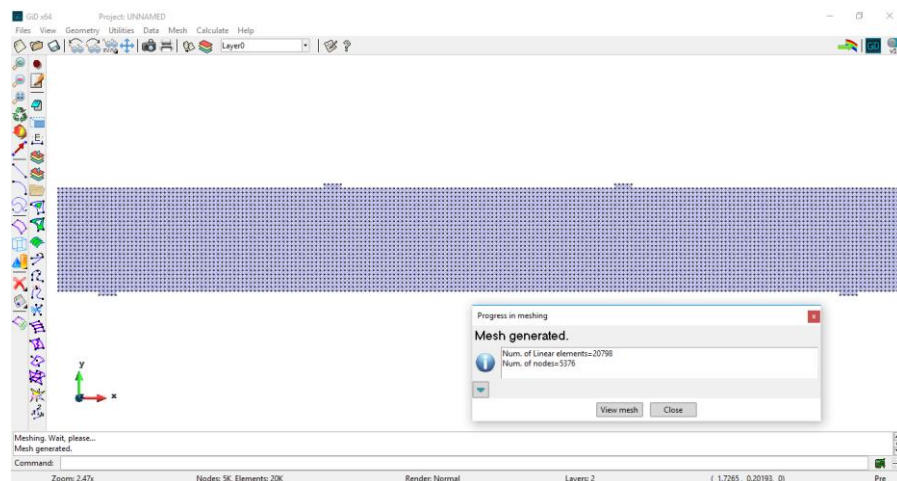


Figura 24. Elemento estrutural processado pelo software Gid (2016).

3. Dando início ao ANLEMT, o arquivo de texto será listado (Figura 25), devendo o usuário escolher o arquivo contendo as informações da estrutura que deseja trabalhar. O ANLEMT processará o arquivo, calculando as principais características de cada barra (área transversal dos elementos treliçados, comprimento da barra e os ângulos relacionados com o eixo horizontal).

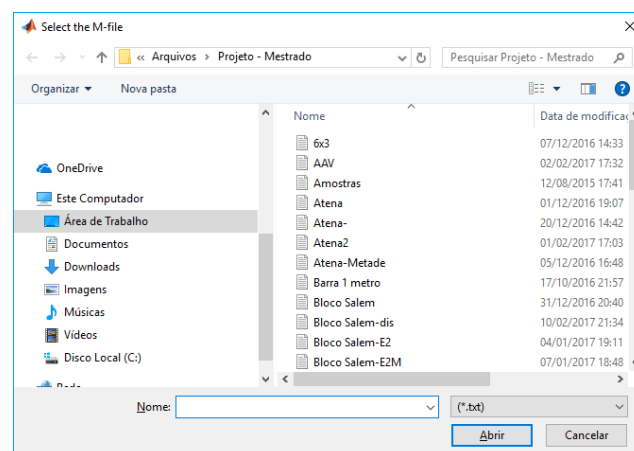
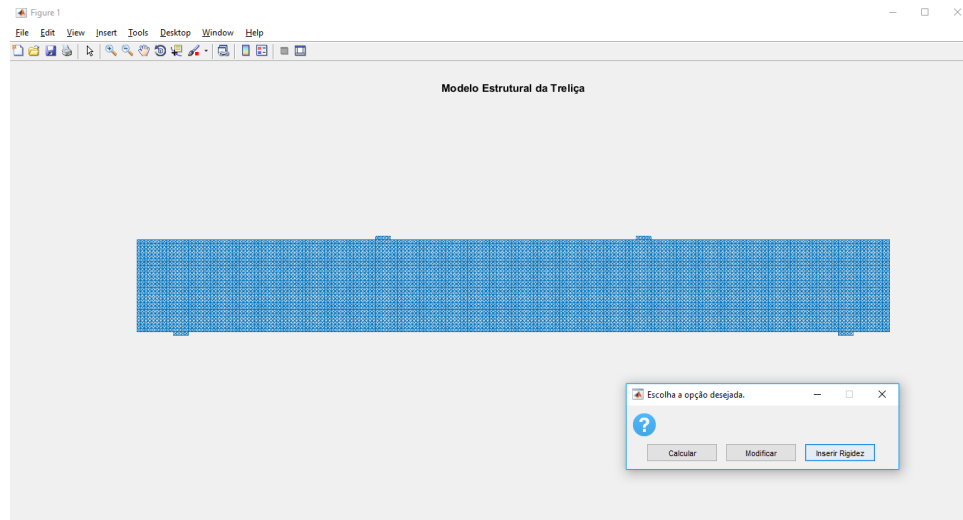


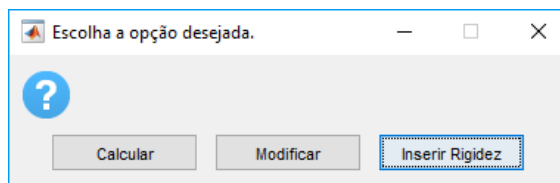
Figura 25. Lista de arquivos de entrada do programa ANLEMT.

4. Posteriormente o programa irá plotar uma figura com o elemento estrutural a ser analisado (Figura 26) composto por micro treliças, apresentando seus nós e suas barras.



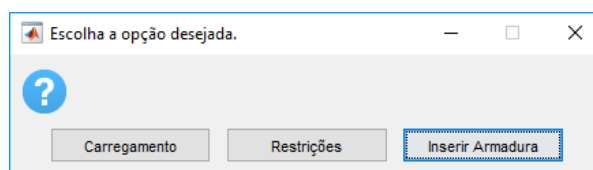
**Figura 26. Elemento estrutural plotado pelo ANLEMT.**

5. Plotado o elemento, utilizando a janela principal (Figura 27), o usuário poderá escolher entre calcular os resultados, dando início ao processamento, modificar as características dos elementos (apoios, cargas e inserção de armadura) ou inserir um elemento rígido.



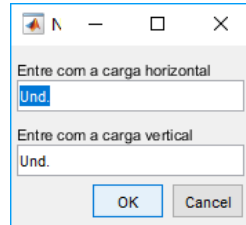
**Figura 27. Janela principal do ANLEMT.**

6. Escolhendo a opção “Modificar”, utilizando a janela secundária (Figura 28), o ANLEMT permitirá ao usuário carregar a estrutura, acrescentar restrições de apoio ou inserir uma armadura de reforço no elemento analisado.



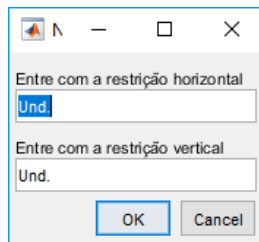
**Figura 28. Janela secundária do ANLEMT.**

7. Para o carregamento, o usuário deverá definir as cargas horizontais e verticais que atuarão no nó selecionado (Figura 29).



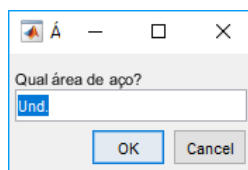
**Figura 29. Janela referente ao carregamento nodal no ANLEMT.**

8. As restrições (verticais e horizontais) dos nós é feita atribuindo o valor 0 para deslocamentos restritos e o valor 1 para deslocamentos livres (Figura 30).



**Figura 30. Janela referente às restrições nodais no ANLEMT.**

9. A inserção da armadura de reforço também é feita selecionando dois nós alinhados ortogonalmente (na direção vertical ou horizontal), definindo a área de aço existente nos elementos compreendidos entre os nós selecionados (Figura 31).



**Figura 31. Janela referente à inserção de armadura no ANLEMT.**

Feitas todas as modificações necessárias no elemento em análise (Figura 32) e escolhendo a opção “Calcular” na janela principal (Figura 27), o ANLEMT processará o elemento estrutural, seguindo:

- Cálculo do módulo de elasticidade de cada barra;
- Geração da matriz de rigidez global da estrutura;
- Geração do vetor de carregamento aplicado à estrutura;
- Solução do sistema de equações não lineares.

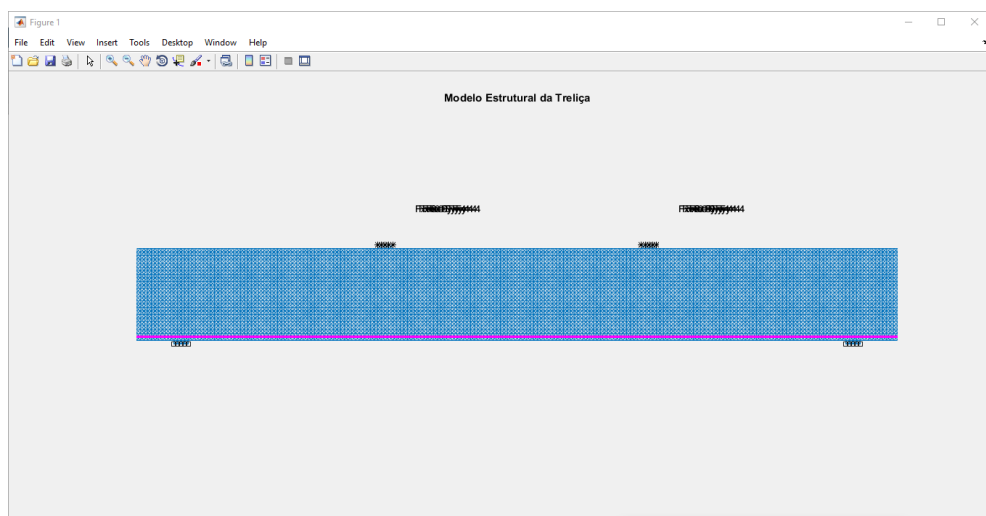


Figura 32. Elemento estrutural

- **Cálculo do módulo de elasticidade de cada barra:** O módulo de elasticidade é calculado utilizando equação que relaciona a tensão e a deformação específica, previamente inserida no código.
- **Geração da matriz de rigidez global da estrutura:** A matriz de rigidez global da estrutura é obtida, respeitando a condição de equilíbrio e a de compatibilidade, com a contribuição da rigidez de cada barra componente da estrutura.
- **Geração do vetor de carregamento aplicado à estrutura:** O vetor de carregamento será composto por todas as cargas inseridas pelo usuário no pré-processamento.
- **Solução do sistema de equações não lineares:** Por último, o sistema não linear resultante é solucionado.

A análise do elemento estrutural considera a iteração incremental, ou seja, para cada incremento de carga aplicado, o sistema de equações não lineares é resolvido com a quantidade de iterações necessárias. Ao término de cada processamento incremental, o ANLEMT faz uma análise comportamental de cada barra, eliminando as barras que não suportaram as tensões solicitantes (tração ou compressão). Os deslocamentos iniciais, para cada incremento de carga, são os deslocamentos resultantes do incremento anterior.

Ao final do processamento de todos os incrementos, o usuário poderá escolher qualquer nó da estrutura para obter seus deslocamentos (vertical e horizontal), plotar os esforços resultantes (tração e compressão) e/ou plotar as fissuras do elemento analisado. Com a ferramenta de captura desenvolvida, o ANLEMT irá garantir a precisão da escolha dos nós, fazendo com que as características modificadas sejam aplicadas apenas ao nó mais próximo do clique do usuário.

O fluxograma do programa computacional ANLEMT é apresentado na (Figura 33).

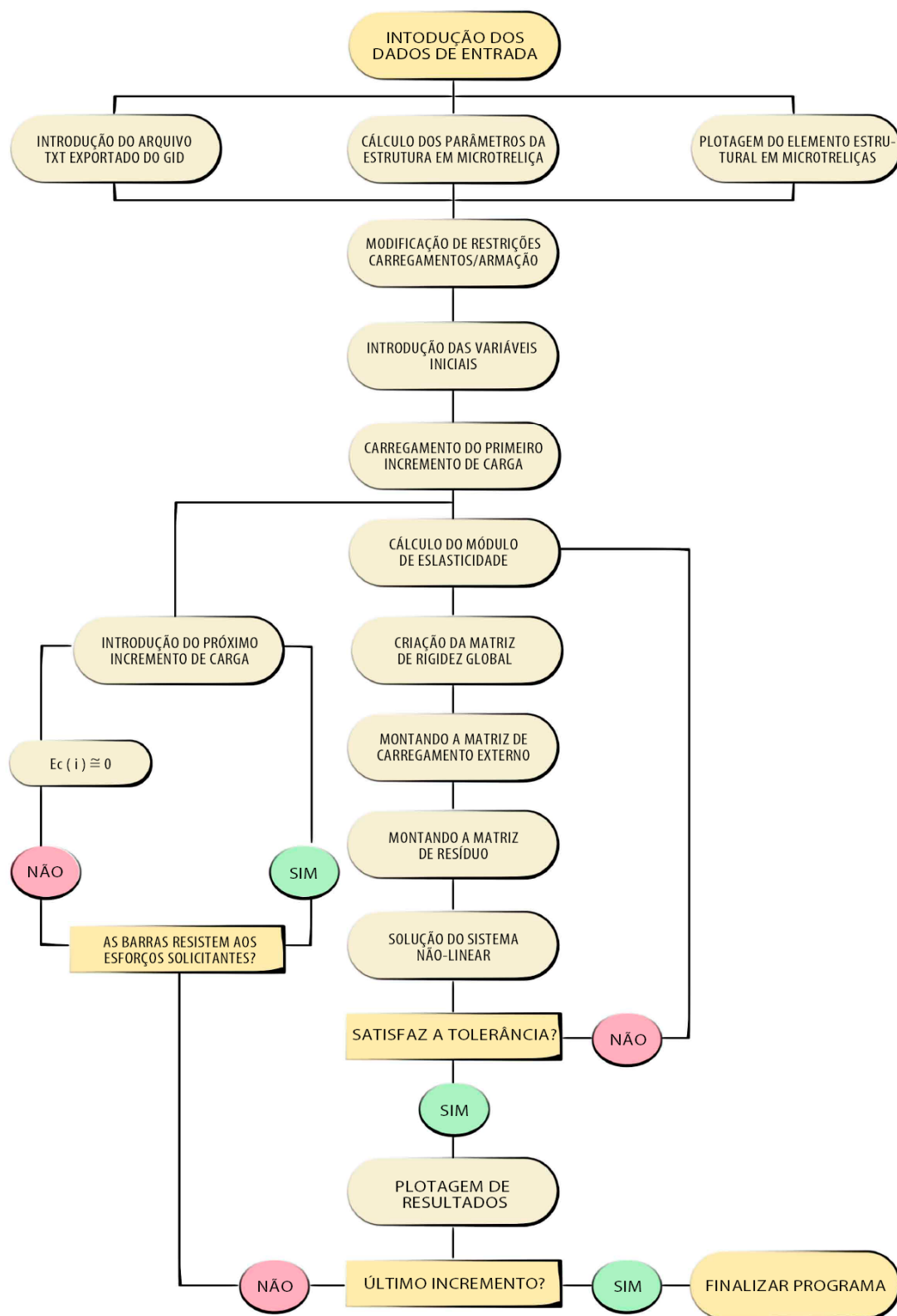


Figura 33. Fluxograma de programação do código computacional.

## 5 RESULTADOS – VALIDAÇÃO DO ANLEMT

Para a validação do programa ANLEMT foram utilizados os trabalhos de Vieira (2013), Slowik (2014) e Salem (2003) que contém validações de experimentos com softwares comerciais (MIDAS, 2009; Micro-Truss Analyser).

Primeiramente, a validação do ANLEMT foi em relação ao conceito do coeficiente de Poisson.

### 5.1 Coeficiente de Poisson

Quando aplicado um esforço axial de compressão ou tração em um determinado material, o mesmo sofre deformações na direção e sentido do esforço aplicado proporcional ao módulo de Young em regime elástico, porém, qualquer material que se deforme longitudinalmente irá, simultaneamente, sofrer deformações transversais. A razão entre as deformações longitudinais e as transversais é denominada “Coeficiente de Poisson”. Para validar o ANLEMT, em relação ao Coeficiente de Poisson, foi utilizado o exemplo de validação realizado por Vieira (2013). Ele considerou um cubo de concreto, com o módulo de elasticidade igual a 25,043 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,2, de lados unitários cuja face esquerda foi restringida a deformação horizontal da estrutura e a face inferior foi restrita a deformação vertical. Na face lateral oposta à restrição, aplicou-se um carregamento de 100 kN/m (Figura 34). O resultado da validação do ANLEMT em relação ao Coeficiente de Poisson está apresentados na tabela 2.

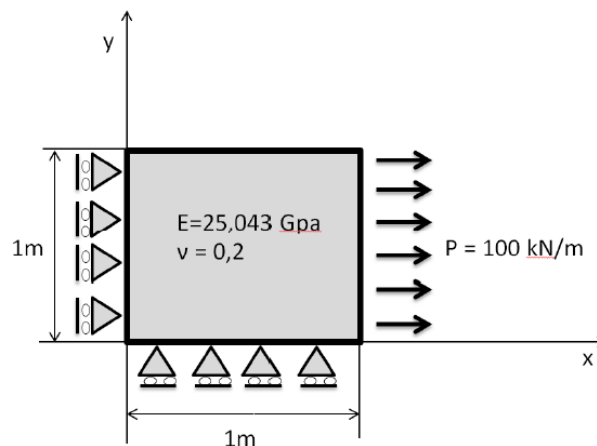


Figura 34. Cubo de concreto validado. Fonte: (VIEIRA, 2013)

| Carga | Discretização | Deformações   |               | Coeficiente de Poisson |
|-------|---------------|---------------|---------------|------------------------|
|       |               | Horizontal    | Vertical      |                        |
| 1%    | 0,03          | 0,00000038356 | 0,00000007671 | 0,20                   |
| 10%   | 0,03          | 0,00000315259 | 0,00000063055 | 0,20                   |
| 20%   | 0,03          | 0,00000630520 | 0,00000126116 | 0,20                   |
| 30%   | 0,03          | 0,00000945781 | 0,00000189183 | 0,20                   |
| 40%   | 0,03          | 0,00001261044 | 0,00000252258 | 0,20                   |
| 50%   | 0,03          | 0,00001576309 | 0,00000315338 | 0,20                   |
| 60%   | 0,03          | 0,00001891574 | 0,00000378426 | 0,20                   |
| 70%   | 0,03          | 0,00002206841 | 0,00000441520 | 0,20                   |
| 80%   | 0,03          | 0,00002522110 | 0,00000504621 | 0,20                   |
| 90%   | 0,03          | 0,00002837379 | 0,00000567728 | 0,20                   |
| 100%  | 0,03          | 0,00003152650 | 0,00000630843 | 0,20                   |

**Tabela 2. Deformações longitudinal e transversal.**

Na Tabela 2, observa-se que os valores dos coeficientes de Poisson, em todos os incrementos processados, obtidos com as deformações calculadas pelo ANLEMT, foram iguais a 0,2, o mesmo valor fornecido ao ANLEMT para o cálculo das áreas transversais (Item 2.4).

## 5.2 Não linearidade física – Midas (2009)/ANLEMT

Para validar o ANLEMT, em relação a não linearidade física, foi utilizado o estudo experimental realizado por Slowik (2014). Slowik (2014) realizou vários ensaios com uma viga de concreto armado submetida a duas cargas pontuais (Figura 35); em cada ensaio, a única variável foi a distância (a) entre o apoio da viga e a carga aplicada próxima a esse apoio. Slowik (2014) analisou o comportamento das fissuras nas vigas quando a mesma é submetida a cargas aplicadas em diferentes pontos. A validação do ANLEMT foi realizada de duas maneiras denominadas direta e indireta. Direta pela comparação entre as fissuras simuladas pelo ANLEMT e as fissuras determinadas experimentalmente. Indireta pela comparação entre os valores simulados pelos modelos ANLEMT e MIDAS (2009). As informações referentes aos cinco ensaios realizados por Slowik (2014) são apresentadas na Tabela 3.

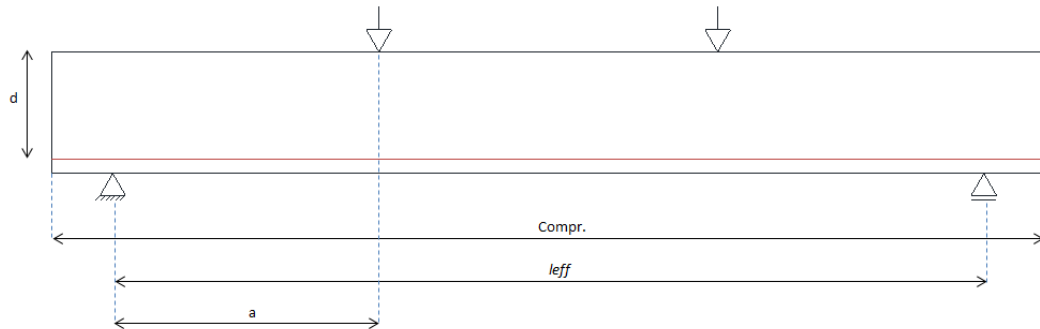


Figura 35. Viga esquemática ensaiada por Slowik (2014).

| Ensaio | $leff$ (m) | $a$ (m) | $d$ (m) | $a/d$ | $leff/d$ | $V_{cr}$ (tf) | $V_{ult}$ (tf) | $V_{ult}/V_{cr}$ |
|--------|------------|---------|---------|-------|----------|---------------|----------------|------------------|
| E1     | 1,800      | 0,90    | 0,220   | 4,100 | 8,182    | 3,750         | 4,350          | 1,160            |
| E2     | 1,800      | 0,75    | 0,220   | 3,400 | 8,182    | 3,750         | 4,200          | 1,120            |
| E3     | 1,800      | 0,59    | 0,220   | 2,700 | 8,182    | 3,300         | 4,200          | 1,273            |
| E4     | 1,800      | 0,51    | 0,220   | 2,300 | 8,182    | 4,200         | 8,250          | 1,964            |
| E5     | 1,800      | 0,55    | 0,220   | 2,500 | 8,182    | 4,050         | 4,050          | 1,000            |

Tabela 3. Valores ensaiados por Slowik (2014).

A viga ensaiada, por Slowik (2014), tem dimensões constantes, apenas variando o local de aplicação da carga. A seção transversal da viga é de 12 x 25 cm e o comprimento de 2,05 metros. O concreto tem as resistências à compressão e à tração de respectivamente de 35 MPa e 3,5 MPa. O reforço estrutural do concreto armado utilizado foram duas barras de aço de 18 mm de diâmetro com resistência à tração de 453 MPa. Os módulos de elasticidade do concreto e do aço foram 41400 MPa e 210000 Mpa, respectivamente.

Para a validação direta, com a finalidade de mostrar a diferença do comportamento das fissuras quando o carregamento se aproxima dos apoios, foram comparados os resultados dos ensaios experimentais E3 e E5 de Slowik (2014) (Figura 36 e Figura 39) com os resultados obtidos com o ANLEMT (Figura 37 e Figura 40).

- E3:

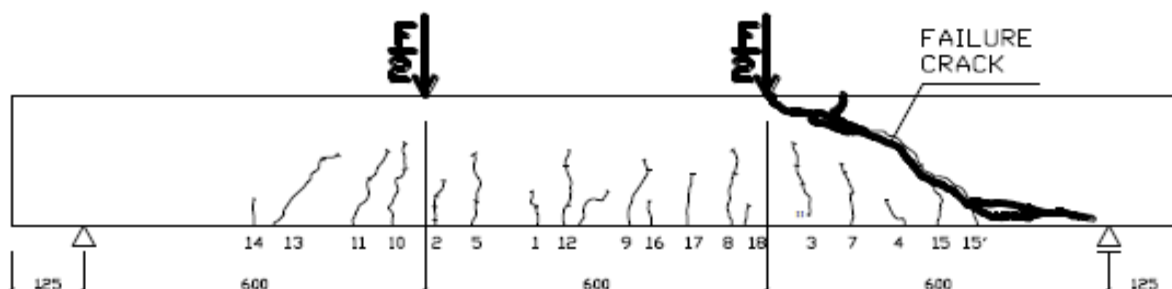


Figura 36. Fissuração do ensaio E3, apresentada por Slowik (2014). Fonte: (SLOWIK, 2014)

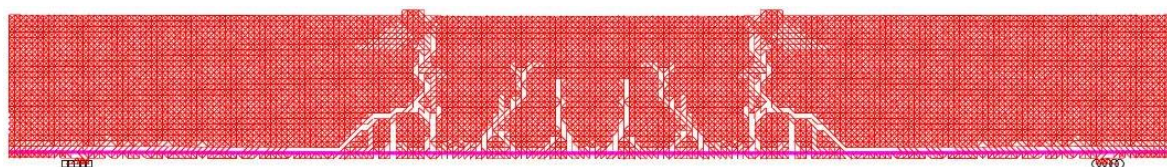


Figura 37. Fissuração do ensaio E3 segundo o ANLEMT.

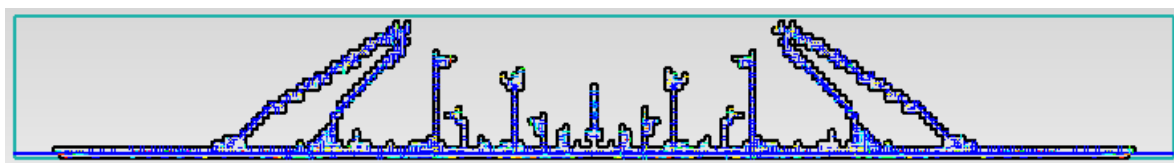


Figura 38. Fissuração do ensaio E3 segundo o MIDAS.

- E5:

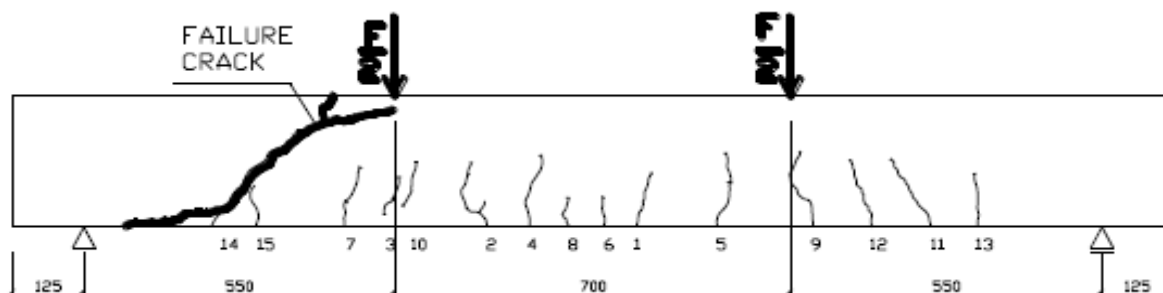


Figura 39. Fissuração do ensaio E5, apresentada por Slowik (2014). Fonte: (SLOWIK, 2014)

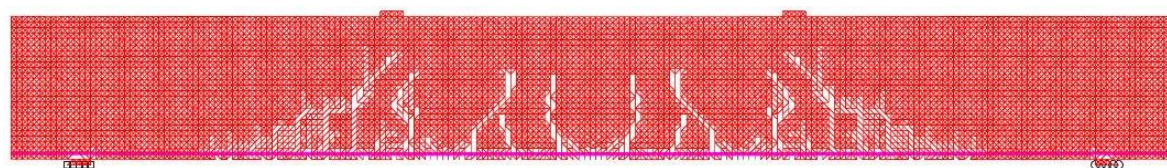


Figura 40. Fissuração do ensaio E5 segundo o ANLEMT.

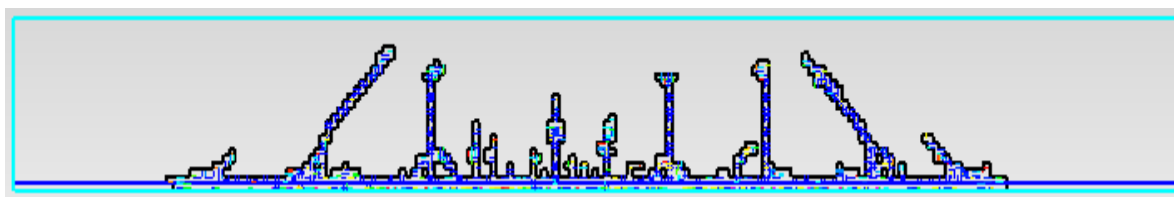


Figura 41. Fissuração do ensaio E5 segundo o MIDAS.

Para a validação indireta, os resultados, obtidos com o MIDAS (2009) e com o ANLEMT, foram comparados por meio do diagrama carga-deformação (Figura 42, Figura 43, Figura 44, Figura 45, e Figura 46), sendo os erros percentuais calculados e apresentados na Figura 47.

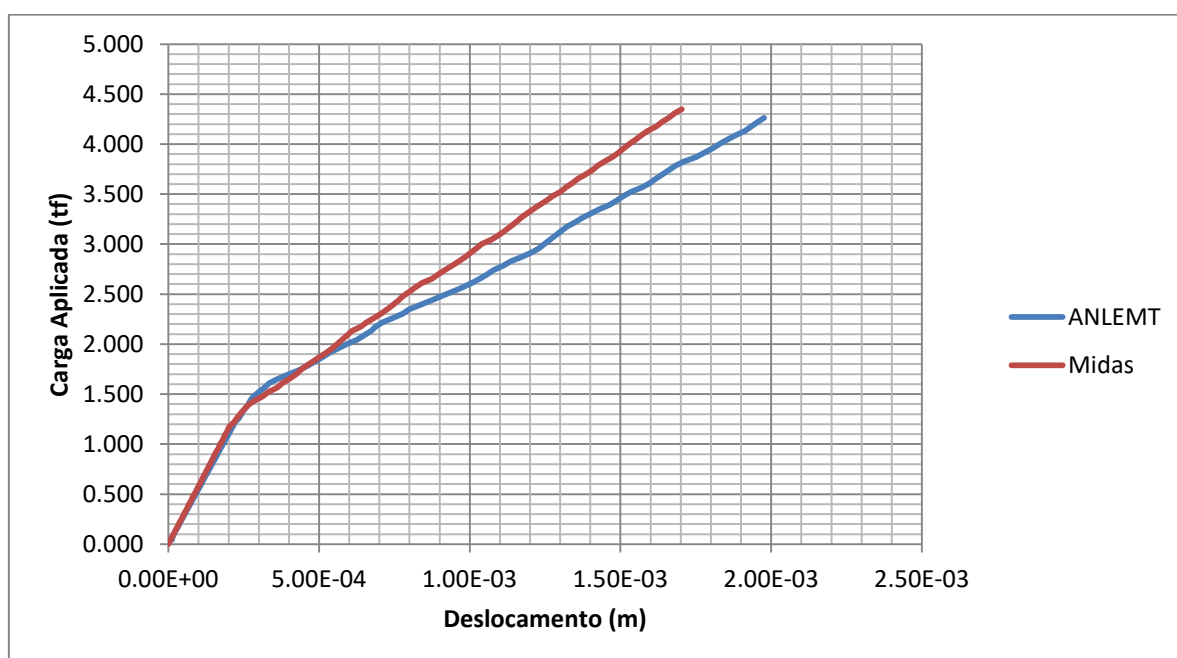


Figura 42. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E1.

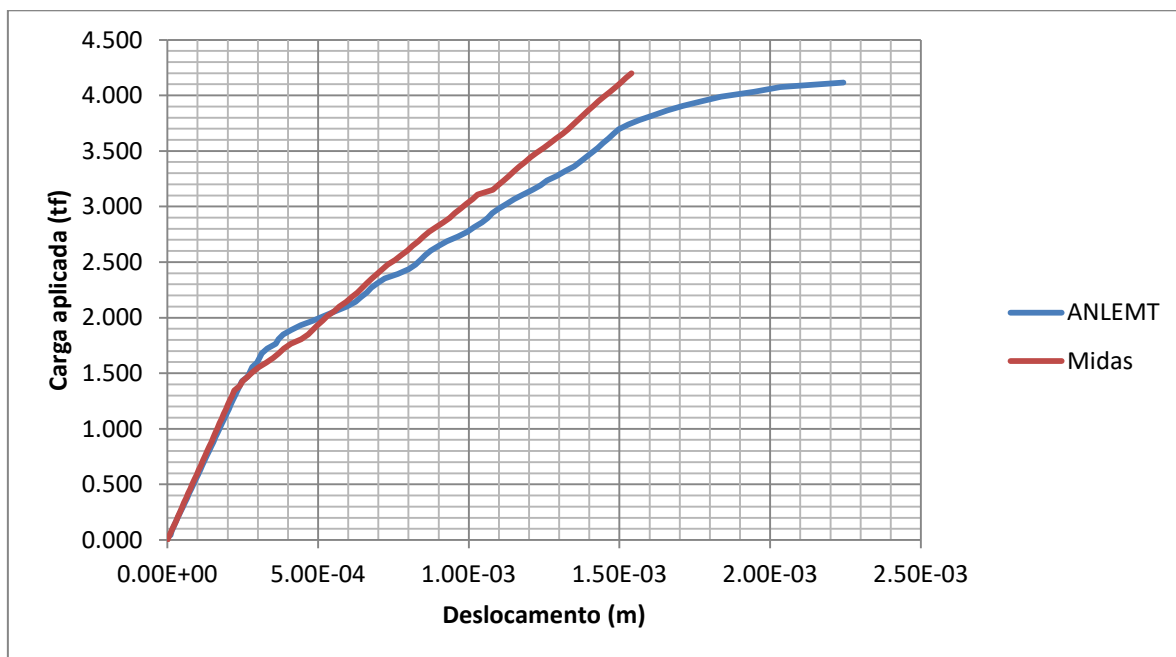


Figura 43. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E2.

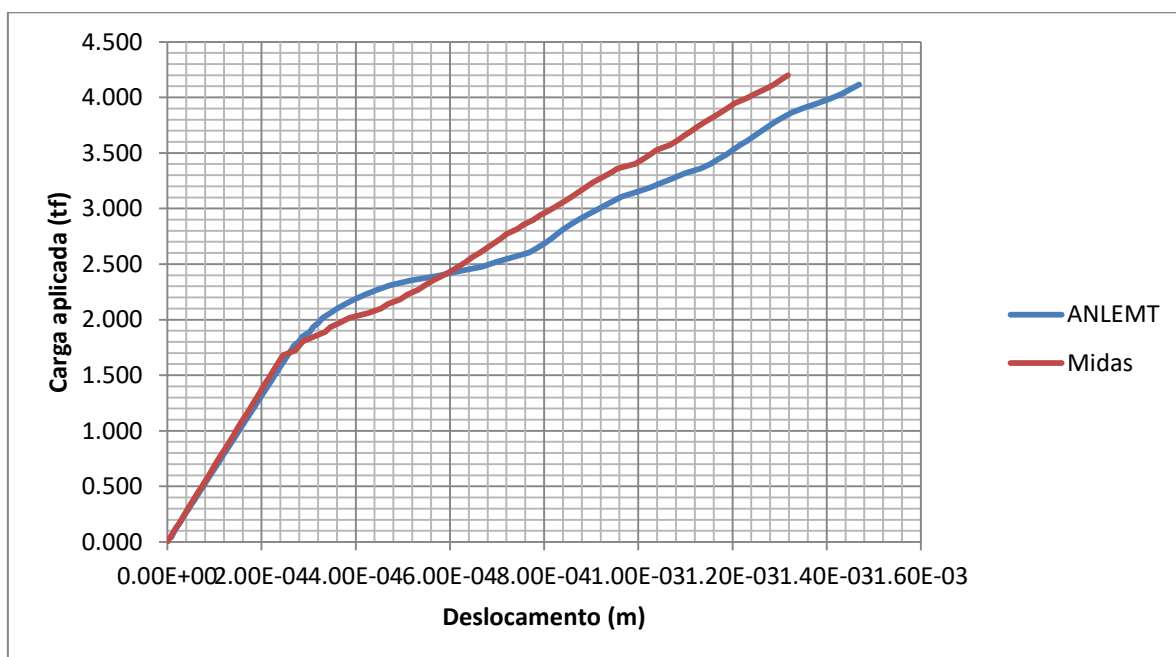


Figura 44. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E3.

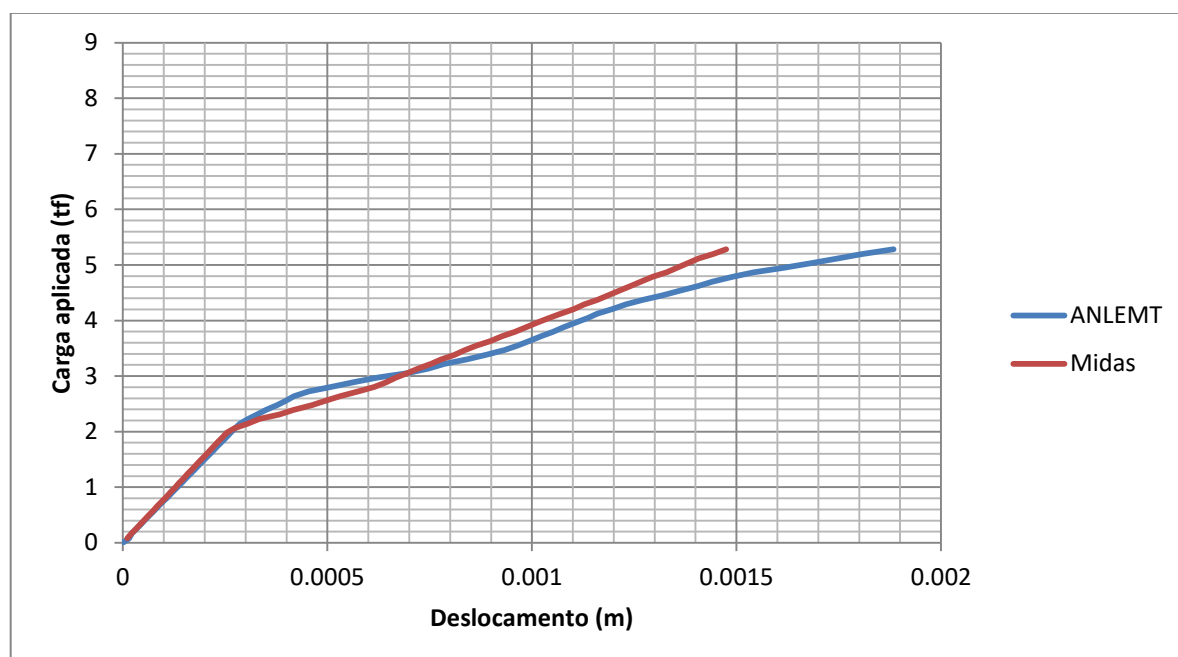
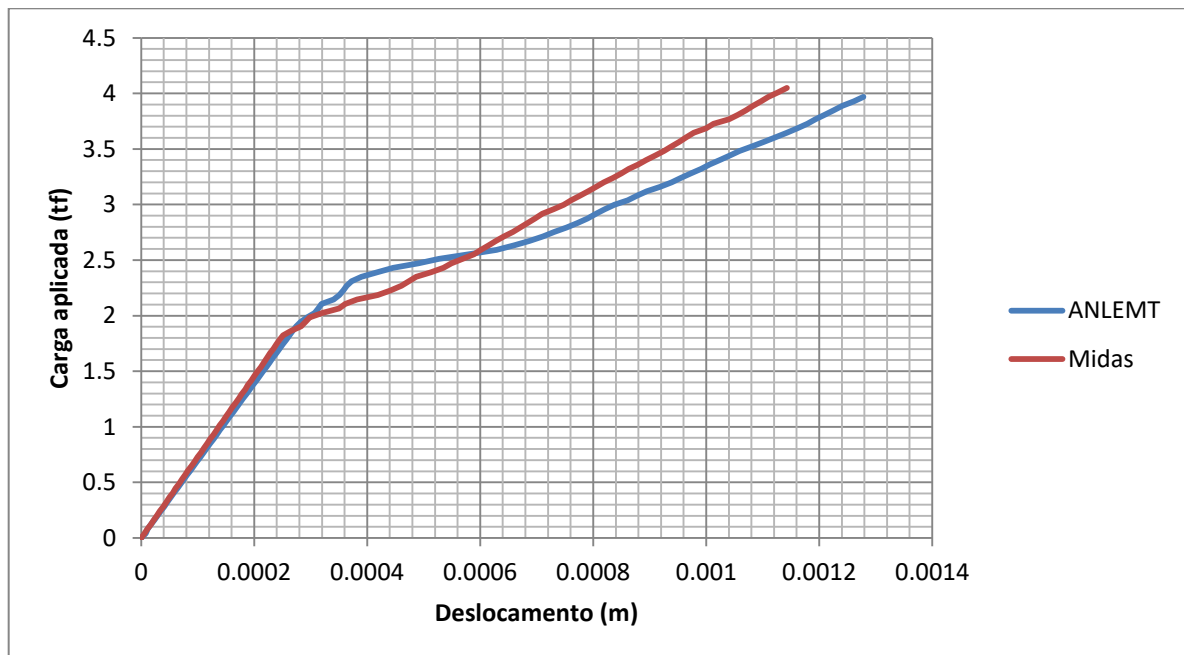
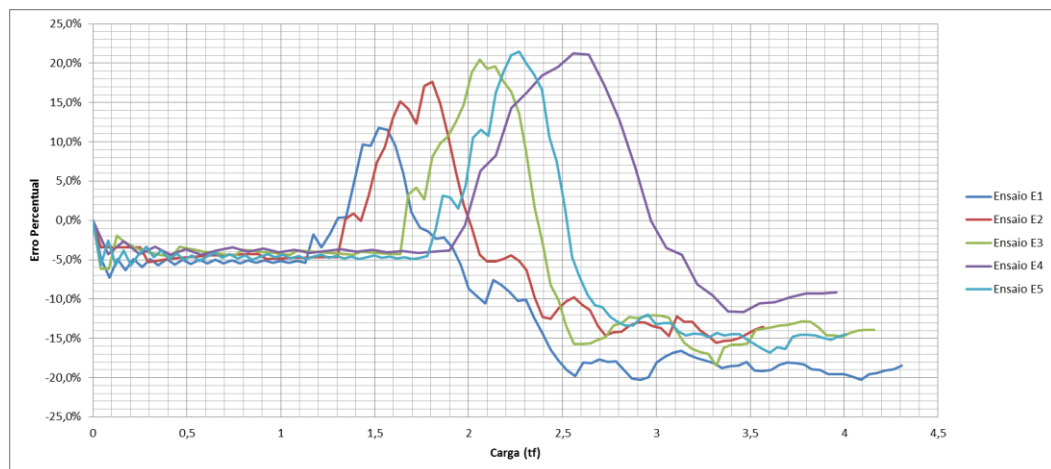


Figura 45. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E4.



**Figura 46. Diagrama carga-deformação, comparação ANLEMT – MIDAS (2009) para o ensaio E5.**

O diagrama carga-erro é apresentado na Figura 47.



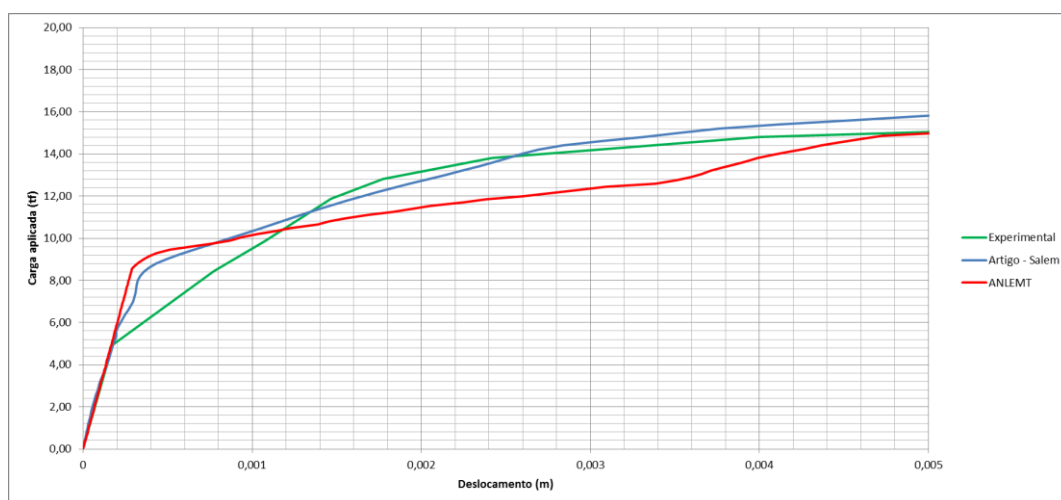
**Figura 47. Diagrama no regime elástico após a plastificação.**

Os resultados apresentados se mostraram satisfatórios. Para a validação direta, a análise das fissuras apresentou uma boa concordância com os resultados experimentais. Quanto mais a carga se aproxima dos apoios, mais as fissuras são distribuídas ao longo do vão livre. Para a validação indireta, mesmo com as restrições impostas na programação do ANLEMT (Item 4.1), o comportamento dos erros foi satisfatório. Os resultados mantiveram um erro percentual baixo, aproximadamente 7%, no início da fase elástica, crescendo à medida que as fissuras aparecem, chegando a valores máximos de, aproximadamente, 20%.

### 5.3 Não linearidade física – Resultado experimental/ANLEMT

Salem (2003) considerou a não linearidade física e geométrica do material para processar os exemplos ensaiados por Shin (1988), considerando uma viga com seção transversal de 20x60 cm e um comprimento de 2,4 m (Figura 13). A resistência à compressão do concreto adotada foi igual a 30 MPa e à tração igual a 2,5 MPa. Os módulos de elasticidade do concreto e do aço foram, respectivamente, 24000 MPa e 210000 MPa. O reforço foi feito com uma barra de aço de 19 mm de diâmetro e com resistência a tração de 350 MPa. Salem (2003) utilizou uma discretização com elementos quadrados de 30 mm de lado, sendo suficiente para representar as fissuras resultantes.

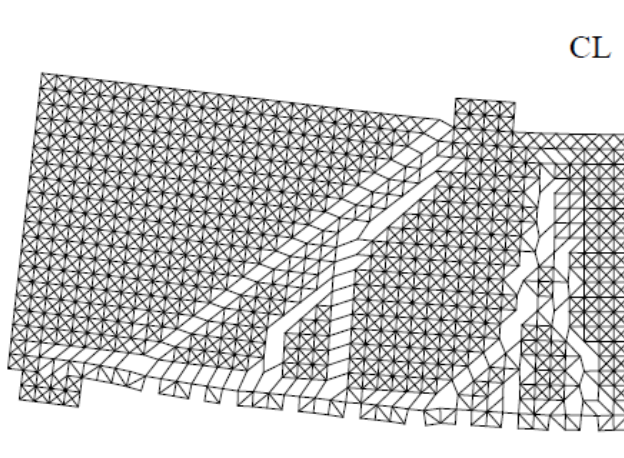
A validação foi realizada pela comparação dos resultados calculados pelo ANLEMT, os obtidos experimentalmente por Shin (1988) e os calculados por Salem (2003) por meio do diagrama carga-deslocamento (Figura 48).



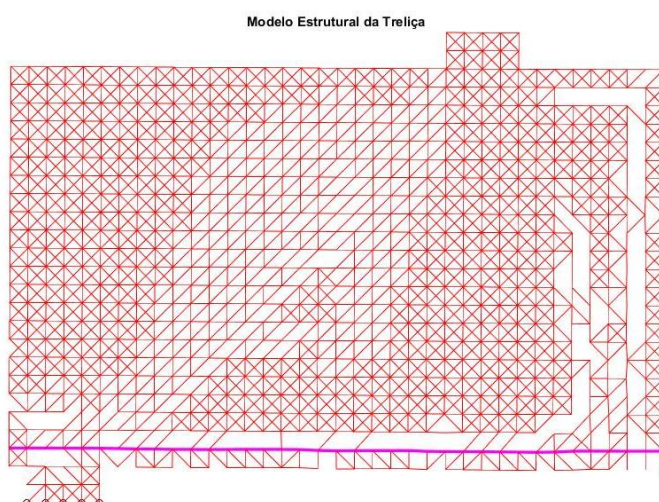
**Figura 48. Gráfico comparativo Carga x Deslocamento.**

A análise do gráfico apresentado (Figura 48) foi satisfatória, considerando que os diagramas apresentaram comportamentos similares, mesmo levando em consideração as restrições impostas no ANLEMT. A diferença apresentada entre as curvas pode ser resultado da utilização da análise não linear geométrica e/ou pelo uso do regime pós-fissuração considerado por Salem (2003).

As fissuras (Figura 49) e as tensões de tração e compressão (Figura 51 e Figura 53), descritas por Salem (2003), foram comparadas com os resultados obtidos no ANLEMT, sendo as fissuras apresentadas na Figura 50 e as tensões na Figura 52 e Figura 54.



**Figura 49. Fissuras resultantes do processamento. Fonte: (SALEM, 2003)**



**Figura 50. Fissuras resultantes do processamento do código computacional.**

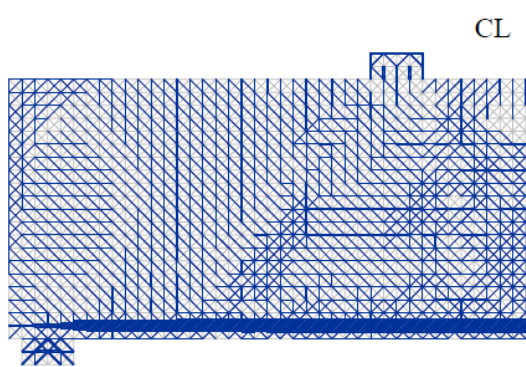


Figura 51. Esforços de tração. Fonte: (SALEM, 2003)

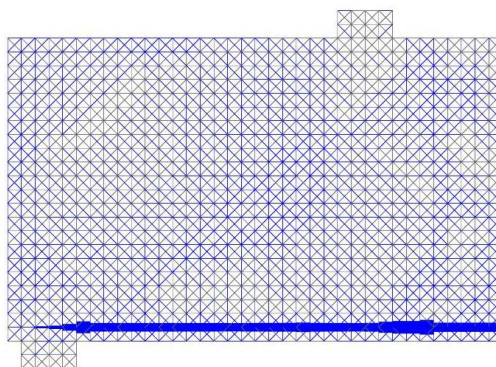


Figura 52. Esforços de tração processados.

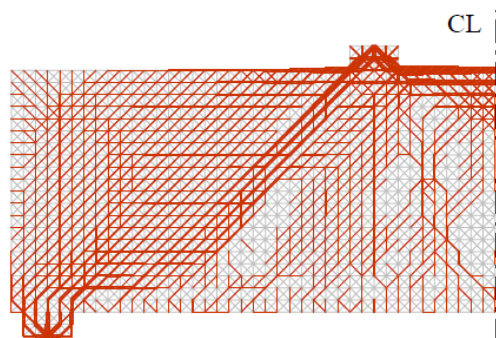


Figura 53. Esforços de compressão. Fonte: (SALEM, 2003)

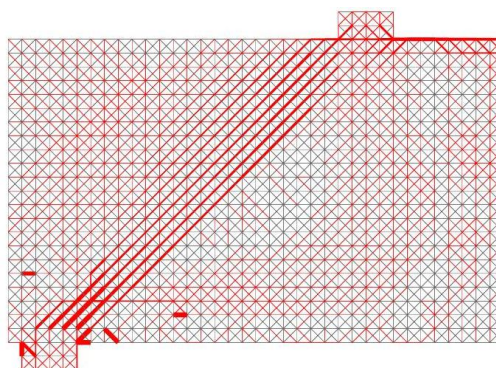


Figura 54. Esforços de compressão processados

#### 5.4 Comparativo linearidade e não linearidade do concreto

No presente trabalho, com o ANLEMT foi analisada uma viga de concreto em balanço, com comprimento de 2,5 m e seção transversal de 20x60 cm, submetida a uma carga pontual em sua extremidade, considerando o comportamento linear e não linear do concreto. O módulo de elasticidade foi considerado igual a 24000 MPa e a resistência à compressão e à tração igual a 30 MPa e 2,5 Mpa, respectivamente. O modelo constitutivo do concreto usado foi o proposto por Okamura e Maekawa (1991). A comparação do comportamento da viga para as análises linear e não linear foi realizada por meio do diagrama carga-deslocamento (Figura 55).

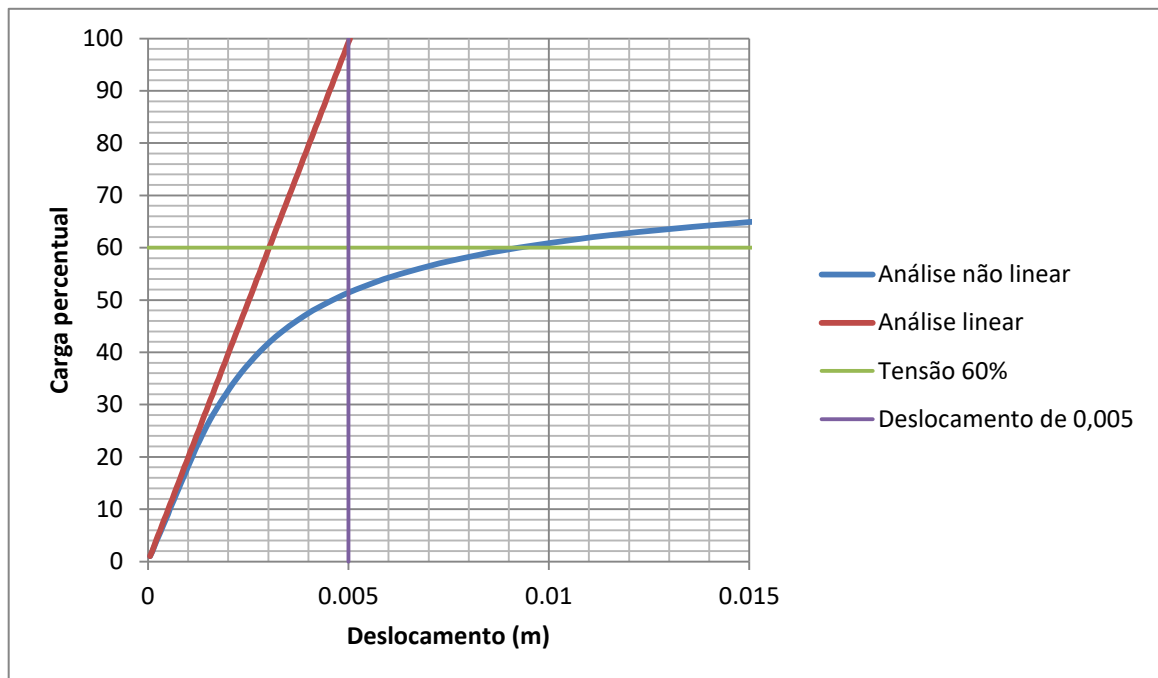


Figura 55. Diagrama carga-deslocamento para o regime linear e não linear.

Na Figura 55, observa-se que para um mesmo carregamento, a análise linear resulta em deslocamentos menores que os obtidos com a análise não linear. Da mesma maneira, para um deslocamento aplicado, a análise linear responde com tensões maiores às obtidas com a não linearidade do material. Essas diferenças acabam por não representar corretamente o comportamento da estrutura analisada, resultando em deslocamentos abaixo do real e esforços além dos necessários.

## 6 CONCLUSÕES

O programa computacional ANLEMT desenvolvido, em Matlab (2016), apresentou um bom desempenho e foi validado satisfatoriamente utilizando os trabalhos de Vieira (2013), Slowik (2014) e Salem (2003) que contém resultados de experimentais e numéricos obtidos com softwares comerciais (MIDAS (2009), Micro-Truss Analyser).

As análises dos elementos estruturais foram processadas com o programa computacional ANLEMT em tempo hábil, mesmo solucionando sistemas de equações não lineares com centenas de incógnitas.

A interface gráfica desenvolvida facilita a utilização do ANLEMT. O usuário não necessitará de conhecimento aprofundado no assunto para utilizar do ANLEMT.

A utilização do método das micro treliças permitiu uma análise simplificada das estruturas de concreto armado analisadas por considerar apenas com esforços axiais, representando o comportamento presente nas fibras do concreto e nas barras de aço, possibilitando o entendimento da distribuição dos esforços dentro do elemento analisado, aperfeiçoando o detalhamento da estrutura e otimizando resultados.

A análise não linear física utilizando o método das micro treliças se mostrou bastante satisfatória. A falta da análise não linear geométrica e o comportamento pós-fissuração do concreto, ausentes neste trabalho, foram perceptíveis. O diagrama tensão-deformação apresenta caminhos diferentes, apesar de convergir para a mesma carga de ruptura, podendo mascarar resultados de cargas intermediárias.

O método das micro treliças, utilizando a análise não linear do material, é uma alternativa viável para se estudar com mais precisão um elemento estrutural, podendo analisar melhor os deslocamentos e esforços resultantes, otimizando a seção transversal e armações, necessárias.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 3ª. ed. Rio Grande: Dunas, v. Volume 1, 2010.
- ASHOUR, A. Experimental behaviour of reinforced concrete continuous deep beams. **WIT Transactions on The Built Environment**, Bradford, v. 17, 1970.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR-6118: Projetos de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro. 2003.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Londres. 1993.
- DESAYI, P.; KRISHNAN, S. Equation for the stress-strain curve of concrete. **Journal Proceedings**, p. 345-350, 1964.
- HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **MATLAB 6**. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. **ENGINEERING EXPERIMENT STATION**, Illinois, v. 49, 1951. ISSN 399.
- HRENNIKOFF, A. Solution of problems of elasticity by the framework method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, p. 169-175, 1941.
- IVANÇO, V. **Nonlinear finite element analysis**. HS Wismar. 2011.
- KIOUSIS, P. D. **Truss modeling of concrete columns in compression**. [S.l.]. 2010.
- LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. Natal. 2014.
- MARTINS, C. H. Consideração da não-linearidade física para as vigas de concreto armado, pelo procedimento refinado da NB1., Maringá, v. 30, p. 15-18, 2008.
- NAGARAJAN, P. **Application of micro truss and strut and tie model for analysis and design of reinforced concrete structural elements**. Calicut. 2009.
- OKAMURA, H.; MAEKAWA, K. **nonlinear analysis and constitutive models of reinforced concrete**. Gihodo. 1991.
- PAZ, C. N. M. **Modelo computacional para análise não-linear de vigas e pilares de concreto armado com confinamento na zona plástica**. Niterói. 1995.
- PILLAI, U.; MENON, D. **Reinforced concrete design**. New Delhi. 1998.

SALEM, H. M. **The micro truss model: An innovative rational design approach for reinforced concrete.** [S.l.]. 2003.

SHIN, H. **finite element analysis of reinforced concrete members subjected to reversed cyclic in-plane loading.** Tóquio. 1988.

SLOWIK, M. **Shear failure mechanism in concrete beams.** Lublin. 2014.

STRAMANDINOLI, R. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado.** Florianópolis. 2007.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** [S.l.]. 2011.

VIEIRA, A. A. **Modelo de microtreliça para dimensionamento de estruturas de concreto armado.** Brasília. 2013.

MATLAB, Version 10.1.0.441655 (R2016b), 2016, *MathWorks*.

AUTOCAD, Version G.55.0.0, 2013, *Autodesk*.

GID, Version 13.0.1, 2016, *International Center for Numerical Methods in Engineering (CINME)*.

MIDAS, Version 2.9.6, 2009, *MIDAS Information Technology*.

## APÊNDICE A – RESULTADOS SLOWIK

As tabelas a seguir são os valores referentes aos deslocamentos verticais máximos encontrados no processamento das vigas ensaiadas por Slowik (2014).

- S1:

| Vigas | Incremento | Deformações |          | Percentual da<br>Carga máxima | Midas    | Erro   |
|-------|------------|-------------|----------|-------------------------------|----------|--------|
|       |            | Horizontal  | Vertical |                               |          |        |
| S1    | 0          | 0           | 0        | 0%                            | 0        |        |
|       | 1          | 1,87E-06    | 1,10E-05 | 1%                            | 7,00E-06 | -57,7% |
|       | 2          | 2,75E-06    | 1,57E-05 | 2%                            | 1,50E-05 | -4,9%  |
|       | 3          | 4,13E-06    | 2,36E-05 | 3%                            | 2,20E-05 | -7,3%  |
|       | 4          | 5,51E-06    | 3,15E-05 | 4%                            | 3,00E-05 | -4,9%  |
|       | 5          | 6,89E-06    | 3,93E-05 | 5%                            | 3,70E-05 | -6,3%  |
|       | 6          | 8,26E-06    | 4,72E-05 | 6%                            | 4,50E-05 | -4,9%  |
|       | 7          | 9,64E-06    | 5,51E-05 | 7%                            | 5,20E-05 | -5,9%  |
|       | 8          | 1,10E-05    | 6,30E-05 | 8%                            | 6,00E-05 | -4,9%  |
|       | 9          | 1,24E-05    | 7,08E-05 | 9%                            | 6,70E-05 | -5,7%  |
|       | 10         | 1,38E-05    | 7,87E-05 | 10%                           | 7,50E-05 | -5,0%  |
|       | 11         | 1,52E-05    | 8,66E-05 | 11%                           | 8,20E-05 | -5,6%  |
|       | 12         | 1,65E-05    | 9,45E-05 | 12%                           | 9,00E-05 | -5,0%  |
|       | 13         | 1,79E-05    | 1,02E-04 | 13%                           | 9,70E-05 | -5,5%  |
|       | 14         | 1,93E-05    | 1,10E-04 | 14%                           | 1,05E-04 | -5,0%  |
|       | 15         | 2,07E-05    | 1,18E-04 | 15%                           | 1,12E-04 | -5,5%  |
|       | 16         | 2,20E-05    | 1,26E-04 | 16%                           | 1,20E-04 | -5,0%  |
|       | 17         | 2,34E-05    | 1,34E-04 | 17%                           | 1,27E-04 | -5,4%  |
|       | 18         | 2,48E-05    | 1,42E-04 | 18%                           | 1,35E-04 | -5,0%  |
|       | 19         | 2,62E-05    | 1,50E-04 | 19%                           | 1,42E-04 | -5,4%  |
|       | 20         | 2,76E-05    | 1,58E-04 | 20%                           | 1,50E-04 | -5,1%  |
|       | 21         | 2,89E-05    | 1,65E-04 | 21%                           | 1,57E-04 | -5,4%  |
|       | 22         | 3,03E-05    | 1,73E-04 | 22%                           | 1,65E-04 | -5,1%  |
|       | 23         | 3,17E-05    | 1,81E-04 | 23%                           | 1,72E-04 | -5,4%  |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 24 | 3,31E-05 | 1,89E-04 | 24% | 1,80E-04 | -5,1%  |
| 25 | 3,45E-05 | 1,97E-04 | 25% | 1,87E-04 | -5,4%  |
| 26 | 3,58E-05 | 2,05E-04 | 26% | 1,95E-04 | -5,1%  |
| 27 | 3,72E-05 | 2,13E-04 | 27% | 2,02E-04 | -5,4%  |
| 28 | 3,86E-05 | 2,21E-04 | 28% | 2,17E-04 | -1,8%  |
| 29 | 4,10E-05 | 2,35E-04 | 29% | 2,27E-04 | -3,4%  |
| 30 | 4,24E-05 | 2,43E-04 | 30% | 2,39E-04 | -1,7%  |
| 31 | 4,39E-05 | 2,51E-04 | 31% | 2,52E-04 | 0,4%   |
| 32 | 4,63E-05 | 2,64E-04 | 32% | 2,65E-04 | 0,4%   |
| 33 | 4,77E-05 | 2,72E-04 | 33% | 2,87E-04 | 5,2%   |
| 34 | 4,97E-05 | 2,83E-04 | 34% | 3,13E-04 | 9,7%   |
| 35 | 5,31E-05 | 3,00E-04 | 35% | 3,32E-04 | 9,5%   |
| 36 | 5,69E-05 | 3,19E-04 | 36% | 3,61E-04 | 11,8%  |
| 37 | 6,00E-05 | 3,34E-04 | 37% | 3,78E-04 | 11,6%  |
| 38 | 6,66E-05 | 3,64E-04 | 38% | 4,02E-04 | 9,5%   |
| 39 | 7,29E-05 | 3,97E-04 | 39% | 4,22E-04 | 6,0%   |
| 40 | 8,17E-05 | 4,33E-04 | 40% | 4,38E-04 | 1,0%   |
| 41 | 8,76E-05 | 4,61E-04 | 41% | 4,57E-04 | -0,9%  |
| 42 | 9,32E-05 | 4,87E-04 | 42% | 4,80E-04 | -1,4%  |
| 43 | 9,93E-05 | 5,13E-04 | 43% | 5,01E-04 | -2,3%  |
| 44 | 1,04E-04 | 5,35E-04 | 44% | 5,23E-04 | -2,2%  |
| 45 | 1,10E-04 | 5,63E-04 | 45% | 5,44E-04 | -3,5%  |
| 46 | 1,17E-04 | 5,92E-04 | 46% | 5,60E-04 | -5,6%  |
| 47 | 1,25E-04 | 6,27E-04 | 47% | 5,77E-04 | -8,6%  |
| 48 | 1,31E-04 | 6,50E-04 | 48% | 5,93E-04 | -9,6%  |
| 49 | 1,36E-04 | 6,72E-04 | 49% | 6,08E-04 | -10,5% |
| 50 | 1,39E-04 | 6,88E-04 | 50% | 6,39E-04 | -7,6%  |
| 51 | 1,44E-04 | 7,11E-04 | 51% | 6,57E-04 | -8,2%  |
| 52 | 1,53E-04 | 7,45E-04 | 52% | 6,83E-04 | -9,1%  |
| 53 | 1,60E-04 | 7,77E-04 | 53% | 7,05E-04 | -10,2% |
| 54 | 1,65E-04 | 7,99E-04 | 54% | 7,26E-04 | -10,1% |
| 55 | 1,74E-04 | 8,37E-04 | 55% | 7,45E-04 | -12,3% |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 56 | 1,82E-04 | 8,71E-04 | 56% | 7,62E-04 | -14,3% |
| 57 | 1,91E-04 | 9,06E-04 | 57% | 7,78E-04 | -16,4% |
| 58 | 2,00E-04 | 9,40E-04 | 58% | 7,98E-04 | -17,8% |
| 59 | 2,09E-04 | 9,75E-04 | 59% | 8,19E-04 | -19,0% |
| 60 | 2,18E-04 | 1,01E-03 | 60% | 8,41E-04 | -19,8% |
| 61 | 2,24E-04 | 1,03E-03 | 61% | 8,74E-04 | -18,1% |
| 62 | 2,31E-04 | 1,06E-03 | 62% | 8,95E-04 | -18,1% |
| 63 | 2,35E-04 | 1,08E-03 | 63% | 9,16E-04 | -17,7% |
| 64 | 2,45E-04 | 1,11E-03 | 64% | 9,41E-04 | -18,0% |
| 65 | 2,51E-04 | 1,14E-03 | 65% | 9,64E-04 | -17,9% |
| 66 | 2,62E-04 | 1,17E-03 | 66% | 9,84E-04 | -19,0% |
| 67 | 2,71E-04 | 1,20E-03 | 67% | 1,00E-03 | -20,1% |
| 68 | 2,77E-04 | 1,23E-03 | 68% | 1,02E-03 | -20,3% |
| 69 | 2,81E-04 | 1,25E-03 | 69% | 1,04E-03 | -20,0% |
| 70 | 2,86E-04 | 1,27E-03 | 70% | 1,07E-03 | -18,1% |
| 71 | 2,90E-04 | 1,29E-03 | 71% | 1,10E-03 | -17,4% |
| 72 | 2,94E-04 | 1,30E-03 | 72% | 1,12E-03 | -16,8% |
| 73 | 2,98E-04 | 1,32E-03 | 73% | 1,13E-03 | -16,6% |
| 74 | 3,07E-04 | 1,35E-03 | 74% | 1,15E-03 | -17,1% |
| 75 | 3,13E-04 | 1,37E-03 | 75% | 1,17E-03 | -17,5% |
| 76 | 3,20E-04 | 1,40E-03 | 76% | 1,19E-03 | -17,9% |
| 77 | 3,27E-04 | 1,43E-03 | 77% | 1,21E-03 | -18,1% |
| 78 | 3,37E-04 | 1,46E-03 | 78% | 1,23E-03 | -18,8% |
| 79 | 3,43E-04 | 1,49E-03 | 79% | 1,26E-03 | -18,6% |
| 80 | 3,48E-04 | 1,51E-03 | 80% | 1,28E-03 | -18,5% |
| 81 | 3,55E-04 | 1,54E-03 | 81% | 1,30E-03 | -18,0% |
| 82 | 3,64E-04 | 1,57E-03 | 82% | 1,32E-03 | -19,1% |
| 83 | 3,70E-04 | 1,60E-03 | 83% | 1,34E-03 | -19,2% |
| 84 | 3,75E-04 | 1,62E-03 | 84% | 1,36E-03 | -19,1% |
| 85 | 3,80E-04 | 1,64E-03 | 85% | 1,38E-03 | -18,4% |
| 86 | 3,85E-04 | 1,66E-03 | 86% | 1,41E-03 | -18,0% |
| 87 | 3,91E-04 | 1,68E-03 | 87% | 1,43E-03 | -18,2% |

|     |          |          |      |          |        |
|-----|----------|----------|------|----------|--------|
| 88  | 4,00E-04 | 1,71E-03 | 88%  | 1,45E-03 | -18,3% |
| 89  | 4,12E-04 | 1,75E-03 | 89%  | 1,47E-03 | -18,9% |
| 90  | 4,18E-04 | 1,78E-03 | 90%  | 1,49E-03 | -19,0% |
| 91  | 4,25E-04 | 1,81E-03 | 91%  | 1,51E-03 | -19,6% |
| 92  | 4,30E-04 | 1,83E-03 | 92%  | 1,53E-03 | -19,6% |
| 93  | 4,36E-04 | 1,85E-03 | 93%  | 1,55E-03 | -19,6% |
| 94  | 4,43E-04 | 1,88E-03 | 94%  | 1,57E-03 | -19,9% |
| 95  | 4,51E-04 | 1,91E-03 | 95%  | 1,59E-03 | -20,3% |
| 96  | 4,56E-04 | 1,93E-03 | 96%  | 1,62E-03 | -19,6% |
| 97  | 4,61E-04 | 1,96E-03 | 97%  | 1,64E-03 | -19,4% |
| 98  | 4,66E-04 | 1,98E-03 | 98%  | 1,66E-03 | -19,1% |
| 99  | 4,71E-04 | 2,00E-03 | 99%  | 1,68E-03 | -18,9% |
| 100 | 4,75E-04 | 2,02E-03 | 100% | 1,70E-03 | -18,5% |

Tabela 4. Comparativo viga S1

- S2:

| Vigas | Incremento | Deformações |          | Percentual da<br>Carga máxima | Midas    | Erro   |
|-------|------------|-------------|----------|-------------------------------|----------|--------|
|       |            | Horizontal  | Vertical |                               |          |        |
| S2    | 0          | 0           | 0        | 0%                            | 0        |        |
|       | 1          | 1,75E-06    | 1,02E-05 | 1%                            | 7,00E-06 | -45,1% |
|       | 2          | 2,59E-06    | 1,45E-05 | 2%                            | 1,40E-05 | -3,4%  |
|       | 3          | 3,88E-06    | 2,17E-05 | 3%                            | 2,10E-05 | -3,4%  |
|       | 4          | 5,17E-06    | 2,90E-05 | 4%                            | 2,80E-05 | -3,4%  |
|       | 5          | 6,47E-06    | 3,62E-05 | 5%                            | 3,50E-05 | -3,4%  |
|       | 6          | 7,76E-06    | 4,34E-05 | 6%                            | 4,20E-05 | -3,4%  |
|       | 7          | 9,05E-06    | 5,07E-05 | 7%                            | 4,90E-05 | -3,4%  |
|       | 8          | 1,03E-05    | 5,79E-05 | 8%                            | 5,50E-05 | -5,3%  |
|       | 9          | 1,16E-05    | 6,52E-05 | 9%                            | 6,20E-05 | -5,1%  |
|       | 10         | 1,29E-05    | 7,24E-05 | 10%                           | 6,90E-05 | -5,0%  |
|       | 11         | 1,42E-05    | 7,97E-05 | 11%                           | 7,60E-05 | -4,8%  |
|       | 12         | 1,55E-05    | 8,69E-05 | 12%                           | 8,30E-05 | -4,7%  |
|       | 13         | 1,68E-05    | 9,42E-05 | 13%                           | 9,00E-05 | -4,7%  |

|    |          |          |     |          |       |
|----|----------|----------|-----|----------|-------|
| 14 | 1,81E-05 | 1,01E-04 | 14% | 9,70E-05 | -4,6% |
| 15 | 1,94E-05 | 1,09E-04 | 15% | 1,04E-04 | -4,5% |
| 16 | 2,07E-05 | 1,16E-04 | 16% | 1,11E-04 | -4,5% |
| 17 | 2,20E-05 | 1,23E-04 | 17% | 1,18E-04 | -4,4% |
| 18 | 2,33E-05 | 1,30E-04 | 18% | 1,25E-04 | -4,4% |
| 19 | 2,46E-05 | 1,38E-04 | 19% | 1,32E-04 | -4,3% |
| 20 | 2,59E-05 | 1,45E-04 | 20% | 1,39E-04 | -4,3% |
| 21 | 2,72E-05 | 1,52E-04 | 21% | 1,46E-04 | -4,3% |
| 22 | 2,85E-05 | 1,60E-04 | 22% | 1,53E-04 | -4,3% |
| 23 | 2,98E-05 | 1,67E-04 | 23% | 1,59E-04 | -4,9% |
| 24 | 3,11E-05 | 1,74E-04 | 24% | 1,66E-04 | -4,9% |
| 25 | 3,24E-05 | 1,81E-04 | 25% | 1,73E-04 | -4,8% |
| 26 | 3,37E-05 | 1,89E-04 | 26% | 1,80E-04 | -4,8% |
| 27 | 3,49E-05 | 1,96E-04 | 27% | 1,87E-04 | -4,8% |
| 28 | 3,62E-05 | 2,03E-04 | 28% | 1,94E-04 | -4,7% |
| 29 | 3,75E-05 | 2,10E-04 | 29% | 2,01E-04 | -4,7% |
| 30 | 3,88E-05 | 2,18E-04 | 30% | 2,08E-04 | -4,7% |
| 31 | 4,01E-05 | 2,25E-04 | 31% | 2,15E-04 | -4,7% |
| 32 | 4,14E-05 | 2,32E-04 | 32% | 2,22E-04 | -4,6% |
| 33 | 4,27E-05 | 2,40E-04 | 33% | 2,40E-04 | 0,2%  |
| 34 | 4,40E-05 | 2,47E-04 | 34% | 2,49E-04 | 0,9%  |
| 35 | 4,77E-05 | 2,66E-04 | 35% | 2,66E-04 | 0,0%  |
| 36 | 4,91E-05 | 2,74E-04 | 36% | 2,83E-04 | 3,3%  |
| 37 | 5,04E-05 | 2,81E-04 | 37% | 3,04E-04 | 7,4%  |
| 38 | 5,36E-05 | 2,97E-04 | 38% | 3,28E-04 | 9,3%  |
| 39 | 5,51E-05 | 3,05E-04 | 39% | 3,51E-04 | 13,0% |
| 40 | 5,65E-05 | 3,13E-04 | 40% | 3,69E-04 | 15,1% |
| 41 | 6,00E-05 | 3,31E-04 | 41% | 3,86E-04 | 14,2% |
| 42 | 6,63E-05 | 3,59E-04 | 42% | 4,10E-04 | 12,3% |
| 43 | 6,79E-05 | 3,68E-04 | 43% | 4,44E-04 | 17,1% |
| 44 | 7,13E-05 | 3,84E-04 | 44% | 4,67E-04 | 17,7% |
| 45 | 7,72E-05 | 4,10E-04 | 45% | 4,82E-04 | 14,8% |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 46 | 8,47E-05 | 4,43E-04 | 46% | 4,98E-04 | 11,0%  |
| 47 | 9,50E-05 | 4,83E-04 | 47% | 5,15E-04 | 6,3%   |
| 48 | 1,04E-04 | 5,20E-04 | 48% | 5,31E-04 | 2,0%   |
| 49 | 1,15E-04 | 5,59E-04 | 49% | 5,54E-04 | -0,9%  |
| 50 | 1,24E-04 | 5,95E-04 | 50% | 5,70E-04 | -4,4%  |
| 51 | 1,31E-04 | 6,24E-04 | 51% | 5,93E-04 | -5,2%  |
| 52 | 1,35E-04 | 6,42E-04 | 52% | 6,10E-04 | -5,2%  |
| 53 | 1,40E-04 | 6,62E-04 | 53% | 6,31E-04 | -4,9%  |
| 54 | 1,43E-04 | 6,76E-04 | 54% | 6,47E-04 | -4,5%  |
| 55 | 1,48E-04 | 6,96E-04 | 55% | 6,62E-04 | -5,2%  |
| 56 | 1,54E-04 | 7,21E-04 | 56% | 6,78E-04 | -6,3%  |
| 57 | 1,68E-04 | 7,64E-04 | 57% | 6,96E-04 | -9,8%  |
| 58 | 1,78E-04 | 8,00E-04 | 58% | 7,13E-04 | -12,3% |
| 59 | 1,83E-04 | 8,23E-04 | 59% | 7,31E-04 | -12,5% |
| 60 | 1,88E-04 | 8,40E-04 | 60% | 7,56E-04 | -11,2% |
| 61 | 1,91E-04 | 8,56E-04 | 61% | 7,76E-04 | -10,3% |
| 62 | 1,96E-04 | 8,74E-04 | 62% | 7,96E-04 | -9,8%  |
| 63 | 2,03E-04 | 9,00E-04 | 63% | 8,13E-04 | -10,7% |
| 64 | 2,10E-04 | 9,27E-04 | 64% | 8,32E-04 | -11,4% |
| 65 | 2,21E-04 | 9,64E-04 | 65% | 8,50E-04 | -13,4% |
| 66 | 2,30E-04 | 9,96E-04 | 66% | 8,69E-04 | -14,7% |
| 67 | 2,35E-04 | 1,02E-03 | 67% | 8,91E-04 | -14,2% |
| 68 | 2,42E-04 | 1,04E-03 | 68% | 9,15E-04 | -14,1% |
| 69 | 2,46E-04 | 1,06E-03 | 69% | 9,37E-04 | -13,4% |
| 70 | 2,49E-04 | 1,08E-03 | 70% | 9,54E-04 | -13,0% |
| 71 | 2,55E-04 | 1,10E-03 | 71% | 9,73E-04 | -13,0% |
| 72 | 2,63E-04 | 1,13E-03 | 72% | 9,92E-04 | -13,5% |
| 73 | 2,70E-04 | 1,15E-03 | 73% | 1,01E-03 | -13,7% |
| 74 | 2,79E-04 | 1,18E-03 | 74% | 1,03E-03 | -14,7% |
| 75 | 2,89E-04 | 1,21E-03 | 75% | 1,08E-03 | -12,2% |
| 76 | 2,96E-04 | 1,24E-03 | 76% | 1,10E-03 | -12,9% |
| 77 | 3,02E-04 | 1,26E-03 | 77% | 1,12E-03 | -12,9% |

|     |          |          |      |          |        |
|-----|----------|----------|------|----------|--------|
| 78  | 3,11E-04 | 1,29E-03 | 78%  | 1,13E-03 | -14,0% |
| 79  | 3,20E-04 | 1,32E-03 | 79%  | 1,15E-03 | -14,7% |
| 80  | 3,29E-04 | 1,35E-03 | 80%  | 1,17E-03 | -15,6% |
| 81  | 3,34E-04 | 1,37E-03 | 81%  | 1,19E-03 | -15,3% |
| 82  | 3,39E-04 | 1,39E-03 | 82%  | 1,21E-03 | -15,3% |
| 83  | 3,43E-04 | 1,41E-03 | 83%  | 1,23E-03 | -14,9% |
| 84  | 3,49E-04 | 1,43E-03 | 84%  | 1,25E-03 | -14,4% |
| 85  | 3,53E-04 | 1,45E-03 | 85%  | 1,27E-03 | -13,8% |
| 86  | 3,57E-04 | 1,46E-03 | 86%  | 1,29E-03 | -13,5% |
| 87  | 3,62E-04 | 1,48E-03 | 87%  | 1,31E-03 | -12,9% |
| 88  | 3,66E-04 | 1,50E-03 | 88%  | 1,33E-03 | -12,6% |
| 89  | 3,74E-04 | 1,53E-03 | 89%  | 1,35E-03 | -13,5% |
| 90  | 3,84E-04 | 1,57E-03 | 90%  | 1,36E-03 | -14,9% |
| 91  | 4,00E-04 | 1,61E-03 | 91%  | 1,38E-03 | -16,9% |
| 92  | 4,13E-04 | 1,66E-03 | 92%  | 1,40E-03 | -18,7% |
| 93  | 4,29E-04 | 1,71E-03 | 93%  | 1,41E-03 | -21,0% |
| 94  | 4,46E-04 | 1,77E-03 | 94%  | 1,43E-03 | -24,1% |
| 95  | 4,61E-04 | 1,84E-03 | 95%  | 1,45E-03 | -26,8% |
| 96  | 4,89E-04 | 1,95E-03 | 96%  | 1,47E-03 | -32,4% |
| 97  | 5,05E-04 | 2,03E-03 | 97%  | 1,49E-03 | -36,6% |
| 98  | 5,54E-04 | 2,24E-03 | 98%  | 1,51E-03 | -49,1% |
| 99  | 5,94E-04 | 2,47E-03 | 99%  | 1,52E-03 | -62,1% |
| 100 | 6,46E-04 | 2,85E-03 | 100% | 1,54E-03 | -84,8% |

Tabela 5. Comparativo viga S2

- S3:

| Vigas | Incremento | Deformações |          | Percentual da<br>Carga máxima | Midas    | Erro   |
|-------|------------|-------------|----------|-------------------------------|----------|--------|
|       |            | Horizontal  | Vertical |                               |          |        |
| S3    | 0          | 0           | 0        | 0%                            | 0        |        |
|       | 1          | 1,60E-06    | 8,93E-06 | 1%                            | 6,00E-06 | -48,8% |
|       | 2          | 2,37E-06    | 1,27E-05 | 2%                            | 1,20E-05 | -6,1%  |
|       | 3          | 3,55E-06    | 1,91E-05 | 3%                            | 1,80E-05 | -6,1%  |
|       | 4          | 4,73E-06    | 2,55E-05 | 4%                            | 2,50E-05 | -1,9%  |

|    |          |          |     |          |       |
|----|----------|----------|-----|----------|-------|
| 5  | 5,92E-06 | 3,18E-05 | 5%  | 3,10E-05 | -2,7% |
| 6  | 7,10E-06 | 3,82E-05 | 6%  | 3,70E-05 | -3,3% |
| 7  | 8,28E-06 | 4,46E-05 | 7%  | 4,30E-05 | -3,7% |
| 8  | 9,47E-06 | 5,10E-05 | 8%  | 4,90E-05 | -4,0% |
| 9  | 1,06E-05 | 5,73E-05 | 9%  | 5,50E-05 | -4,3% |
| 10 | 1,18E-05 | 6,37E-05 | 10% | 6,10E-05 | -4,5% |
| 11 | 1,30E-05 | 7,01E-05 | 11% | 6,70E-05 | -4,6% |
| 12 | 1,42E-05 | 7,65E-05 | 12% | 7,40E-05 | -3,4% |
| 13 | 1,54E-05 | 8,29E-05 | 13% | 8,00E-05 | -3,6% |
| 14 | 1,66E-05 | 8,92E-05 | 14% | 8,60E-05 | -3,8% |
| 15 | 1,78E-05 | 9,56E-05 | 15% | 9,20E-05 | -3,9% |
| 16 | 1,89E-05 | 1,02E-04 | 16% | 9,80E-05 | -4,1% |
| 17 | 2,01E-05 | 1,08E-04 | 17% | 1,04E-04 | -4,2% |
| 18 | 2,13E-05 | 1,15E-04 | 18% | 1,10E-04 | -4,3% |
| 19 | 2,25E-05 | 1,21E-04 | 19% | 1,16E-04 | -4,5% |
| 20 | 2,37E-05 | 1,28E-04 | 20% | 1,23E-04 | -3,7% |
| 21 | 2,49E-05 | 1,34E-04 | 21% | 1,29E-04 | -3,8% |
| 22 | 2,60E-05 | 1,40E-04 | 22% | 1,35E-04 | -3,9% |
| 23 | 2,72E-05 | 1,47E-04 | 23% | 1,41E-04 | -4,1% |
| 24 | 2,84E-05 | 1,53E-04 | 24% | 1,47E-04 | -4,2% |
| 25 | 2,96E-05 | 1,60E-04 | 25% | 1,53E-04 | -4,3% |
| 26 | 3,08E-05 | 1,66E-04 | 26% | 1,59E-04 | -4,3% |
| 27 | 3,20E-05 | 1,72E-04 | 27% | 1,66E-04 | -3,8% |
| 28 | 3,32E-05 | 1,79E-04 | 28% | 1,72E-04 | -3,9% |
| 29 | 3,43E-05 | 1,85E-04 | 29% | 1,78E-04 | -4,0% |
| 30 | 3,55E-05 | 1,92E-04 | 30% | 1,84E-04 | -4,1% |
| 31 | 3,67E-05 | 1,98E-04 | 31% | 1,90E-04 | -4,2% |
| 32 | 3,79E-05 | 2,04E-04 | 32% | 1,96E-04 | -4,2% |
| 33 | 3,91E-05 | 2,11E-04 | 33% | 2,02E-04 | -4,3% |
| 34 | 4,03E-05 | 2,17E-04 | 34% | 2,08E-04 | -4,4% |
| 35 | 4,15E-05 | 2,24E-04 | 35% | 2,15E-04 | -4,0% |
| 36 | 4,26E-05 | 2,30E-04 | 36% | 2,21E-04 | -4,0% |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 37 | 4,38E-05 | 2,36E-04 | 37% | 2,27E-04 | -4,1%  |
| 38 | 4,50E-05 | 2,43E-04 | 38% | 2,33E-04 | -4,2%  |
| 39 | 4,62E-05 | 2,49E-04 | 39% | 2,39E-04 | -4,3%  |
| 40 | 4,74E-05 | 2,56E-04 | 40% | 2,45E-04 | -4,3%  |
| 41 | 4,86E-05 | 2,62E-04 | 41% | 2,71E-04 | 3,3%   |
| 42 | 4,98E-05 | 2,68E-04 | 42% | 2,80E-04 | 4,1%   |
| 43 | 5,23E-05 | 2,80E-04 | 43% | 2,88E-04 | 2,7%   |
| 44 | 5,35E-05 | 2,87E-04 | 44% | 3,12E-04 | 8,1%   |
| 45 | 5,64E-05 | 3,02E-04 | 45% | 3,35E-04 | 9,8%   |
| 46 | 5,77E-05 | 3,09E-04 | 46% | 3,46E-04 | 10,7%  |
| 47 | 5,99E-05 | 3,20E-04 | 47% | 3,66E-04 | 12,5%  |
| 48 | 6,18E-05 | 3,29E-04 | 48% | 3,86E-04 | 14,7%  |
| 49 | 6,57E-05 | 3,46E-04 | 49% | 4,26E-04 | 18,8%  |
| 50 | 6,89E-05 | 3,60E-04 | 50% | 4,53E-04 | 20,5%  |
| 51 | 7,32E-05 | 3,78E-04 | 51% | 4,69E-04 | 19,3%  |
| 52 | 7,76E-05 | 3,98E-04 | 52% | 4,95E-04 | 19,6%  |
| 53 | 8,34E-05 | 4,20E-04 | 53% | 5,10E-04 | 17,7%  |
| 54 | 8,95E-05 | 4,46E-04 | 54% | 5,33E-04 | 16,4%  |
| 55 | 9,61E-05 | 4,73E-04 | 55% | 5,47E-04 | 13,5%  |
| 56 | 1,08E-04 | 5,16E-04 | 56% | 5,64E-04 | 8,4%   |
| 57 | 1,23E-04 | 5,73E-04 | 57% | 5,83E-04 | 1,7%   |
| 58 | 1,36E-04 | 6,19E-04 | 58% | 6,02E-04 | -2,9%  |
| 59 | 1,48E-04 | 6,69E-04 | 59% | 6,18E-04 | -8,2%  |
| 60 | 1,57E-04 | 6,98E-04 | 60% | 6,34E-04 | -10,2% |
| 61 | 1,66E-04 | 7,35E-04 | 61% | 6,48E-04 | -13,4% |
| 62 | 1,75E-04 | 7,68E-04 | 62% | 6,64E-04 | -15,7% |
| 63 | 1,80E-04 | 7,86E-04 | 63% | 6,79E-04 | -15,7% |
| 64 | 1,83E-04 | 8,01E-04 | 64% | 6,93E-04 | -15,7% |
| 65 | 1,86E-04 | 8,16E-04 | 65% | 7,08E-04 | -15,2% |
| 66 | 1,89E-04 | 8,28E-04 | 66% | 7,21E-04 | -14,9% |
| 67 | 1,92E-04 | 8,41E-04 | 67% | 7,42E-04 | -13,3% |
| 68 | 1,96E-04 | 8,56E-04 | 68% | 7,57E-04 | -13,1% |

|     |          |          |      |          |        |
|-----|----------|----------|------|----------|--------|
| 69  | 2,00E-04 | 8,72E-04 | 69%  | 7,77E-04 | -12,2% |
| 70  | 2,06E-04 | 8,91E-04 | 70%  | 7,92E-04 | -12,5% |
| 71  | 2,11E-04 | 9,09E-04 | 71%  | 8,10E-04 | -12,2% |
| 72  | 2,16E-04 | 9,27E-04 | 72%  | 8,27E-04 | -12,1% |
| 73  | 2,22E-04 | 9,46E-04 | 73%  | 8,44E-04 | -12,1% |
| 74  | 2,27E-04 | 9,65E-04 | 74%  | 8,59E-04 | -12,3% |
| 75  | 2,37E-04 | 9,98E-04 | 75%  | 8,74E-04 | -14,2% |
| 76  | 2,46E-04 | 1,03E-03 | 76%  | 8,88E-04 | -15,6% |
| 77  | 2,53E-04 | 1,05E-03 | 77%  | 9,03E-04 | -16,4% |
| 78  | 2,61E-04 | 1,08E-03 | 78%  | 9,21E-04 | -16,8% |
| 79  | 2,67E-04 | 1,10E-03 | 79%  | 9,40E-04 | -16,9% |
| 80  | 2,80E-04 | 1,13E-03 | 80%  | 9,56E-04 | -18,5% |
| 81  | 2,86E-04 | 1,15E-03 | 81%  | 9,93E-04 | -16,2% |
| 82  | 2,90E-04 | 1,17E-03 | 82%  | 1,01E-03 | -15,8% |
| 83  | 2,94E-04 | 1,19E-03 | 83%  | 1,03E-03 | -15,8% |
| 84  | 2,98E-04 | 1,20E-03 | 84%  | 1,04E-03 | -15,6% |
| 85  | 3,01E-04 | 1,22E-03 | 85%  | 1,07E-03 | -13,9% |
| 86  | 3,06E-04 | 1,23E-03 | 86%  | 1,08E-03 | -13,8% |
| 87  | 3,09E-04 | 1,25E-03 | 87%  | 1,10E-03 | -13,6% |
| 88  | 3,13E-04 | 1,26E-03 | 88%  | 1,11E-03 | -13,4% |
| 89  | 3,17E-04 | 1,28E-03 | 89%  | 1,13E-03 | -13,3% |
| 90  | 3,20E-04 | 1,29E-03 | 90%  | 1,14E-03 | -13,1% |
| 91  | 3,25E-04 | 1,31E-03 | 91%  | 1,16E-03 | -12,8% |
| 92  | 3,31E-04 | 1,33E-03 | 92%  | 1,18E-03 | -12,9% |
| 93  | 3,38E-04 | 1,35E-03 | 93%  | 1,19E-03 | -13,6% |
| 94  | 3,49E-04 | 1,38E-03 | 94%  | 1,21E-03 | -14,7% |
| 95  | 3,58E-04 | 1,41E-03 | 95%  | 1,23E-03 | -14,6% |
| 96  | 3,66E-04 | 1,43E-03 | 96%  | 1,25E-03 | -14,8% |
| 97  | 3,71E-04 | 1,45E-03 | 97%  | 1,27E-03 | -14,3% |
| 98  | 3,75E-04 | 1,47E-03 | 98%  | 1,29E-03 | -14,0% |
| 99  | 3,79E-04 | 1,48E-03 | 99%  | 1,30E-03 | -13,9% |
| 100 | 3,84E-04 | 1,50E-03 | 100% | 1,32E-03 | -13,9% |

Tabela 6. Comparativo viga S3

- S4:

| Vigas | Incremento | Deformações |          | Percentual da<br>Carga máxima | Midas    | Erro   |
|-------|------------|-------------|----------|-------------------------------|----------|--------|
|       |            | Horizontal  | Vertical |                               |          |        |
| S4    | 0          | 0           | 0        | 0                             | 0        |        |
|       | 1          | 2,85E-06    | 1,54E-05 | 1%                            | 1,10E-05 | -39,6% |
|       | 2          | 4,20E-06    | 2,19E-05 | 2%                            | 2,10E-05 | -4,3%  |
|       | 3          | 6,30E-06    | 3,29E-05 | 3%                            | 3,20E-05 | -2,7%  |
|       | 4          | 8,40E-06    | 4,38E-05 | 4%                            | 4,20E-05 | -4,3%  |
|       | 5          | 1,05E-05    | 5,48E-05 | 5%                            | 5,30E-05 | -3,3%  |
|       | 6          | 1,26E-05    | 6,57E-05 | 6%                            | 6,30E-05 | -4,3%  |
|       | 7          | 1,47E-05    | 7,67E-05 | 7%                            | 7,40E-05 | -3,6%  |
|       | 8          | 1,68E-05    | 8,77E-05 | 8%                            | 8,40E-05 | -4,4%  |
|       | 9          | 1,89E-05    | 9,86E-05 | 9%                            | 9,50E-05 | -3,8%  |
|       | 10         | 2,10E-05    | 1,10E-04 | 10%                           | 1,06E-04 | -3,4%  |
|       | 11         | 2,31E-05    | 1,21E-04 | 11%                           | 1,16E-04 | -4,0%  |
|       | 12         | 2,52E-05    | 1,32E-04 | 12%                           | 1,27E-04 | -3,6%  |
|       | 13         | 2,73E-05    | 1,43E-04 | 13%                           | 1,37E-04 | -4,1%  |
|       | 14         | 2,94E-05    | 1,54E-04 | 14%                           | 1,48E-04 | -3,8%  |
|       | 15         | 3,15E-05    | 1,65E-04 | 15%                           | 1,58E-04 | -4,1%  |
|       | 16         | 3,36E-05    | 1,76E-04 | 16%                           | 1,69E-04 | -3,9%  |
|       | 17         | 3,57E-05    | 1,87E-04 | 17%                           | 1,80E-04 | -3,6%  |
|       | 18         | 3,78E-05    | 1,98E-04 | 18%                           | 1,90E-04 | -4,0%  |
|       | 19         | 3,99E-05    | 2,09E-04 | 19%                           | 2,01E-04 | -3,8%  |
|       | 20         | 4,20E-05    | 2,20E-04 | 20%                           | 2,11E-04 | -4,1%  |
|       | 21         | 4,42E-05    | 2,31E-04 | 21%                           | 2,22E-04 | -3,9%  |
|       | 22         | 4,63E-05    | 2,42E-04 | 22%                           | 2,32E-04 | -4,1%  |
|       | 23         | 4,84E-05    | 2,53E-04 | 23%                           | 2,43E-04 | -4,0%  |
|       | 24         | 5,05E-05    | 2,64E-04 | 24%                           | 2,54E-04 | -3,8%  |
|       | 25         | 5,26E-05    | 2,75E-04 | 25%                           | 2,73E-04 | -0,6%  |
|       | 26         | 5,47E-05    | 2,86E-04 | 26%                           | 3,05E-04 | 6,3%   |
|       | 27         | 5,96E-05    | 3,06E-04 | 27%                           | 3,34E-04 | 8,3%   |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 28 | 6,38E-05 | 3,28E-04 | 28% | 3,83E-04 | 14,3%  |
| 29 | 6,88E-05 | 3,49E-04 | 29% | 4,17E-04 | 16,3%  |
| 30 | 7,45E-05 | 3,77E-04 | 30% | 4,62E-04 | 18,4%  |
| 31 | 7,92E-05 | 3,99E-04 | 31% | 4,96E-04 | 19,6%  |
| 32 | 8,33E-05 | 4,18E-04 | 32% | 5,31E-04 | 21,2%  |
| 33 | 9,30E-05 | 4,55E-04 | 33% | 5,76E-04 | 21,1%  |
| 34 | 1,06E-04 | 5,09E-04 | 34% | 6,15E-04 | 17,3%  |
| 35 | 1,20E-04 | 5,61E-04 | 35% | 6,43E-04 | 12,7%  |
| 36 | 1,36E-04 | 6,21E-04 | 36% | 6,67E-04 | 6,8%   |
| 37 | 1,58E-04 | 6,96E-04 | 37% | 6,95E-04 | -0,1%  |
| 38 | 1,72E-04 | 7,46E-04 | 38% | 7,21E-04 | -3,5%  |
| 39 | 1,83E-04 | 7,86E-04 | 39% | 7,53E-04 | -4,4%  |
| 40 | 2,01E-04 | 8,41E-04 | 40% | 7,78E-04 | -8,1%  |
| 41 | 2,16E-04 | 8,87E-04 | 41% | 8,10E-04 | -9,5%  |
| 42 | 2,29E-04 | 9,33E-04 | 42% | 8,36E-04 | -11,5% |
| 43 | 2,38E-04 | 9,65E-04 | 43% | 8,64E-04 | -11,6% |
| 44 | 2,46E-04 | 9,92E-04 | 44% | 8,98E-04 | -10,5% |
| 45 | 2,55E-04 | 1,02E-03 | 45% | 9,26E-04 | -10,4% |
| 46 | 2,63E-04 | 1,05E-03 | 46% | 9,58E-04 | -9,7%  |
| 47 | 2,69E-04 | 1,08E-03 | 47% | 9,85E-04 | -9,3%  |
| 48 | 2,77E-04 | 1,11E-03 | 48% | 1,01E-03 | -9,3%  |
| 49 | 2,86E-04 | 1,14E-03 | 49% | 1,04E-03 | -9,1%  |
| 50 | 2,97E-04 | 1,16E-03 | 50% | 1,07E-03 | -8,4%  |
| 51 | 3,07E-04 | 1,20E-03 | 51% | 1,10E-03 | -8,6%  |
| 52 | 3,18E-04 | 1,23E-03 | 52% | 1,13E-03 | -9,0%  |
| 53 | 3,32E-04 | 1,27E-03 | 53% | 1,16E-03 | -9,6%  |
| 54 | 3,43E-04 | 1,32E-03 | 54% | 1,19E-03 | -11,2% |
| 55 | 3,57E-04 | 1,36E-03 | 55% | 1,21E-03 | -12,3% |
| 56 | 3,70E-04 | 1,41E-03 | 56% | 1,24E-03 | -13,3% |
| 57 | 3,80E-04 | 1,44E-03 | 57% | 1,27E-03 | -13,8% |
| 58 | 3,94E-04 | 1,49E-03 | 58% | 1,30E-03 | -15,1% |
| 59 | 4,10E-04 | 1,54E-03 | 59% | 1,33E-03 | -16,0% |

|    |          |          |     |          |         |
|----|----------|----------|-----|----------|---------|
| 60 | 4,33E-04 | 1,62E-03 | 60% | 1,35E-03 | -19,3%  |
| 61 | 4,61E-04 | 1,68E-03 | 61% | 1,38E-03 | -21,9%  |
| 62 | 4,81E-04 | 1,75E-03 | 62% | 1,41E-03 | -24,1%  |
| 63 | 4,99E-04 | 1,81E-03 | 63% | 1,44E-03 | -25,2%  |
| 64 | 5,23E-04 | 1,88E-03 | 64% | 1,48E-03 | -27,7%  |
| 65 | 5,45E-04 | 1,97E-03 | 65% | 1,50E-03 | -31,1%  |
| 66 | 5,79E-04 | 2,10E-03 | 66% | 1,53E-03 | -37,4%  |
| 67 | 6,05E-04 | 2,22E-03 | 67% | 1,55E-03 | -43,3%  |
| 68 | 6,32E-04 | 2,33E-03 | 68% | 1,59E-03 | -46,2%  |
| 69 | 6,65E-04 | 2,46E-03 | 69% | 1,62E-03 | -52,1%  |
| 70 | 6,83E-04 | 2,52E-03 | 70% | 1,65E-03 | -53,5%  |
| 71 | 6,88E-04 | 2,57E-03 | 71% | 1,67E-03 | -53,9%  |
| 72 | 7,16E-04 | 2,75E-03 | 72% | 1,70E-03 | -62,2%  |
| 73 | 8,40E-04 | 5,03E-03 | 73% | 1,73E-03 | -191,2% |

Tabela 7. Comparativo viga S4

- S5:

| Vigas | Incremento | Deformações |          | Percentual da<br>Carga máxima | Midas    | Erro   |
|-------|------------|-------------|----------|-------------------------------|----------|--------|
|       |            | Horizontal  | Vertical |                               |          |        |
| S5    | 0          | 0           | 0        | 0%                            | 0        |        |
|       | 1          | 1,48E-06    | 8,15E-06 | 1%                            | 6,00E-06 | -35,8% |
|       | 2          | 2,19E-06    | 1,16E-05 | 2%                            | 1,10E-05 | -5,7%  |
|       | 3          | 3,28E-06    | 1,74E-05 | 3%                            | 1,70E-05 | -2,6%  |
|       | 4          | 4,38E-06    | 2,33E-05 | 4%                            | 2,20E-05 | -5,7%  |
|       | 5          | 5,47E-06    | 2,91E-05 | 5%                            | 2,80E-05 | -3,8%  |
|       | 6          | 6,57E-06    | 3,49E-05 | 6%                            | 3,30E-05 | -5,7%  |
|       | 7          | 7,66E-06    | 4,07E-05 | 7%                            | 3,90E-05 | -4,4%  |
|       | 8          | 8,76E-06    | 4,65E-05 | 8%                            | 4,50E-05 | -3,4%  |
|       | 9          | 9,85E-06    | 5,23E-05 | 9%                            | 5,00E-05 | -4,7%  |
|       | 10         | 1,09E-05    | 5,82E-05 | 10%                           | 5,60E-05 | -3,8%  |
|       | 11         | 1,20E-05    | 6,40E-05 | 11%                           | 6,10E-05 | -4,9%  |

|    |          |          |     |          |       |
|----|----------|----------|-----|----------|-------|
| 12 | 1,31E-05 | 6,98E-05 | 12% | 6,70E-05 | -4,2% |
| 13 | 1,42E-05 | 7,56E-05 | 13% | 7,20E-05 | -5,0% |
| 14 | 1,53E-05 | 8,14E-05 | 14% | 7,80E-05 | -4,4% |
| 15 | 1,64E-05 | 8,73E-05 | 15% | 8,30E-05 | -5,1% |
| 16 | 1,75E-05 | 9,31E-05 | 16% | 8,90E-05 | -4,6% |
| 17 | 1,86E-05 | 9,89E-05 | 17% | 9,50E-05 | -4,1% |
| 18 | 1,97E-05 | 1,05E-04 | 18% | 1,00E-04 | -4,7% |
| 19 | 2,08E-05 | 1,11E-04 | 19% | 1,06E-04 | -4,3% |
| 20 | 2,19E-05 | 1,16E-04 | 20% | 1,11E-04 | -4,9% |
| 21 | 2,30E-05 | 1,22E-04 | 21% | 1,17E-04 | -4,5% |
| 22 | 2,41E-05 | 1,28E-04 | 22% | 1,22E-04 | -5,0% |
| 23 | 2,52E-05 | 1,34E-04 | 23% | 1,28E-04 | -4,6% |
| 24 | 2,63E-05 | 1,40E-04 | 24% | 1,34E-04 | -4,3% |
| 25 | 2,74E-05 | 1,46E-04 | 25% | 1,39E-04 | -4,7% |
| 26 | 2,85E-05 | 1,51E-04 | 26% | 1,45E-04 | -4,4% |
| 27 | 2,96E-05 | 1,57E-04 | 27% | 1,50E-04 | -4,8% |
| 28 | 3,07E-05 | 1,63E-04 | 28% | 1,56E-04 | -4,5% |
| 29 | 3,18E-05 | 1,69E-04 | 29% | 1,61E-04 | -4,9% |
| 30 | 3,29E-05 | 1,75E-04 | 30% | 1,67E-04 | -4,6% |
| 31 | 3,40E-05 | 1,81E-04 | 31% | 1,73E-04 | -4,4% |
| 32 | 3,51E-05 | 1,86E-04 | 32% | 1,78E-04 | -4,7% |
| 33 | 3,62E-05 | 1,92E-04 | 33% | 1,84E-04 | -4,5% |
| 34 | 3,73E-05 | 1,98E-04 | 34% | 1,89E-04 | -4,8% |
| 35 | 3,84E-05 | 2,04E-04 | 35% | 1,95E-04 | -4,6% |
| 36 | 3,95E-05 | 2,10E-04 | 36% | 2,00E-04 | -4,9% |
| 37 | 4,05E-05 | 2,16E-04 | 37% | 2,06E-04 | -4,7% |
| 38 | 4,16E-05 | 2,21E-04 | 38% | 2,12E-04 | -4,5% |
| 39 | 4,27E-05 | 2,27E-04 | 39% | 2,17E-04 | -4,8% |
| 40 | 4,38E-05 | 2,33E-04 | 40% | 2,23E-04 | -4,6% |
| 41 | 4,49E-05 | 2,39E-04 | 41% | 2,28E-04 | -4,8% |
| 42 | 4,60E-05 | 2,45E-04 | 42% | 2,34E-04 | -4,6% |
| 43 | 4,71E-05 | 2,51E-04 | 43% | 2,39E-04 | -4,9% |

|    |          |          |     |          |        |
|----|----------|----------|-----|----------|--------|
| 44 | 4,82E-05 | 2,57E-04 | 44% | 2,45E-04 | -4,7%  |
| 45 | 4,93E-05 | 2,62E-04 | 45% | 2,51E-04 | -4,6%  |
| 46 | 5,04E-05 | 2,68E-04 | 46% | 2,65E-04 | -1,2%  |
| 47 | 5,15E-05 | 2,74E-04 | 47% | 2,83E-04 | 3,1%   |
| 48 | 5,26E-05 | 2,82E-04 | 48% | 2,91E-04 | 2,9%   |
| 49 | 5,64E-05 | 2,94E-04 | 49% | 2,98E-04 | 1,5%   |
| 50 | 5,81E-05 | 3,07E-04 | 50% | 3,21E-04 | 4,4%   |
| 51 | 5,93E-05 | 3,13E-04 | 51% | 3,50E-04 | 10,5%  |
| 52 | 6,05E-05 | 3,19E-04 | 52% | 3,61E-04 | 11,5%  |
| 53 | 6,52E-05 | 3,41E-04 | 53% | 3,82E-04 | 10,8%  |
| 54 | 6,64E-05 | 3,51E-04 | 54% | 4,19E-04 | 16,3%  |
| 55 | 6,77E-05 | 3,57E-04 | 55% | 4,41E-04 | 19,0%  |
| 56 | 6,89E-05 | 3,64E-04 | 56% | 4,61E-04 | 21,1%  |
| 57 | 7,01E-05 | 3,72E-04 | 57% | 4,74E-04 | 21,5%  |
| 58 | 7,30E-05 | 3,90E-04 | 58% | 4,87E-04 | 19,9%  |
| 59 | 8,24E-05 | 4,18E-04 | 59% | 5,13E-04 | 18,6%  |
| 60 | 8,79E-05 | 4,46E-04 | 60% | 5,35E-04 | 16,6%  |
| 61 | 1,00E-04 | 4,91E-04 | 61% | 5,49E-04 | 10,6%  |
| 62 | 1,08E-04 | 5,27E-04 | 62% | 5,69E-04 | 7,4%   |
| 63 | 1,22E-04 | 5,79E-04 | 63% | 5,89E-04 | 1,8%   |
| 64 | 1,27E-04 | 6,29E-04 | 64% | 6,01E-04 | -4,7%  |
| 65 | 1,36E-04 | 6,59E-04 | 65% | 6,15E-04 | -7,2%  |
| 66 | 1,42E-04 | 6,87E-04 | 66% | 6,28E-04 | -9,5%  |
| 67 | 1,48E-04 | 7,11E-04 | 67% | 6,42E-04 | -10,8% |
| 68 | 1,53E-04 | 7,31E-04 | 68% | 6,58E-04 | -11,0% |
| 69 | 1,61E-04 | 7,53E-04 | 69% | 6,71E-04 | -12,2% |
| 70 | 1,68E-04 | 7,72E-04 | 70% | 6,84E-04 | -12,9% |
| 71 | 1,71E-04 | 7,90E-04 | 71% | 6,97E-04 | -13,3% |
| 72 | 1,73E-04 | 8,05E-04 | 72% | 7,10E-04 | -13,4% |
| 73 | 1,76E-04 | 8,21E-04 | 73% | 7,30E-04 | -12,4% |
| 74 | 1,81E-04 | 8,38E-04 | 74% | 7,48E-04 | -12,0% |
| 75 | 1,90E-04 | 8,62E-04 | 75% | 7,61E-04 | -13,2% |

|     |          |          |      |          |        |
|-----|----------|----------|------|----------|--------|
| 76  | 1,95E-04 | 8,77E-04 | 76%  | 7,76E-04 | -13,1% |
| 77  | 2,00E-04 | 8,94E-04 | 77%  | 7,91E-04 | -13,1% |
| 78  | 2,08E-04 | 9,19E-04 | 78%  | 8,05E-04 | -14,1% |
| 79  | 2,11E-04 | 9,39E-04 | 79%  | 8,19E-04 | -14,7% |
| 80  | 2,14E-04 | 9,55E-04 | 80%  | 8,35E-04 | -14,4% |
| 81  | 2,17E-04 | 9,73E-04 | 81%  | 8,50E-04 | -14,5% |
| 82  | 2,23E-04 | 9,91E-04 | 82%  | 8,63E-04 | -14,8% |
| 83  | 2,27E-04 | 1,01E-03 | 83%  | 8,80E-04 | -14,3% |
| 84  | 2,35E-04 | 1,02E-03 | 84%  | 8,94E-04 | -14,6% |
| 85  | 2,39E-04 | 1,04E-03 | 85%  | 9,10E-04 | -14,5% |
| 86  | 2,44E-04 | 1,06E-03 | 86%  | 9,25E-04 | -14,5% |
| 87  | 2,49E-04 | 1,08E-03 | 87%  | 9,38E-04 | -15,2% |
| 88  | 2,56E-04 | 1,10E-03 | 88%  | 9,52E-04 | -15,7% |
| 89  | 2,66E-04 | 1,12E-03 | 89%  | 9,65E-04 | -16,4% |
| 90  | 2,75E-04 | 1,14E-03 | 90%  | 9,78E-04 | -16,8% |
| 91  | 2,80E-04 | 1,16E-03 | 91%  | 1,00E-03 | -16,1% |
| 92  | 2,84E-04 | 1,18E-03 | 92%  | 1,01E-03 | -16,4% |
| 93  | 2,88E-04 | 1,19E-03 | 93%  | 1,04E-03 | -14,7% |
| 94  | 2,92E-04 | 1,21E-03 | 94%  | 1,06E-03 | -14,5% |
| 95  | 2,95E-04 | 1,23E-03 | 95%  | 1,07E-03 | -14,5% |
| 96  | 2,98E-04 | 1,24E-03 | 96%  | 1,08E-03 | -14,6% |
| 97  | 3,04E-04 | 1,26E-03 | 97%  | 1,10E-03 | -15,0% |
| 98  | 3,08E-04 | 1,28E-03 | 98%  | 1,11E-03 | -15,1% |
| 99  | 3,12E-04 | 1,29E-03 | 99%  | 1,13E-03 | -14,8% |
| 100 | 3,15E-04 | 1,31E-03 | 100% | 1,14E-03 | -14,5% |

Tabela 8. Comparativo viga S5