UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

Núbia dos Santos de Sousa

Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica

Recife
2016

Núbia dos Santos de Sousa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

Recife
2016

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S729c Souza, Núbia dos Santos de.
Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica / Núbia dos Santos de Souza. – Recife, 2016.
127 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Frank Gilbert René Bellemain.
Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.
Inclui Referências, Apêndices e Anexos.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria gráfica. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Frank Gilbert René. II. Título.

Núbia dos Santos de Sousa

Curvas Cônicas: Do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica

Comissão Examinadora

1º Examinador/ Presidente
Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain –
Universidade Federal de Pernambuco
(Orientador)

2º Examinador
Prof. Dr. – Paulo Figueiredo Lima
Universidade Federal de Pernambuco

3º Examinador
Prof. Dra. – Cibelle de Fátima Castro de Assis
Universidade Federal da Paraíba

Recife, 29 de abril de 2016.

A você que lerá mais que as palavras aqui escritas, por compreender o que não se pode ver e a pessoa que me ensinou a desenhar a vida, com o imenso amor à

Dona Esmerina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de todo o universo pela sua compaixão e amor presentes no processo e nas pessoas aqui mencionadas.

À minha família, alicerce de tudo e em especial a minha mãe querida.

Ao meu amor e companheiro de vida pela paciência e gentileza, Rodrigo Bruno.

A todos os mestres que tive na vida, aos mestres amigos e aos amigos mestres que me ensinaram e contribuíram na minha construção como pessoa e profissional, pelo apoio e ajuda em vários momentos como Ana Magda e Lêda.

Alguns em especial pela paciência, ouvidos e disposição em acolher, ajudar e se doar como Auta, Bruno, Claudinha, Lilian e Thy.

Outros por compartilhar as angústias e incertezas do processo de amadurecimento acadêmico como Manu e Ricardo, assim como os recentes que se fizeram presentes em atitudes, exemplo e incentivo como Ademilson e Tarcísio.

Em especial ao professor doutor Franck Bellemain, meu orientador e professor, pelo acolhimento as sementes iniciais desta pesquisa, pela sua condução e realização.

Aos queridos professores Cibelle de Assis e Paulo Figueiredo ao privilégio de tê-los presentes na banca de defesa e qualificação e pelo contributo significativo de suas considerações.

Ao grupo de pesquisa LEMATEC e os amigos que fizeram suscitar as primeiras ideias e onde me senti acolhida e motivada a continuar.

Aos alunos LEG que se dispuseram a colaborar com a pesquisa.

A coordenação LEG, nas pessoas de Betânia e Cláudia, pela generosidade de suas ações.

A todos que contribuíram de algum modo com o desenvolvimento deste trabalho dedico os meus sinceros agradecimentos.

Com efeito, mesmo que a realidade não fosse inesgotável, bastaria a necessidade que tem cada geração – e mesmo cada um de nós – de resolver, por si só, cada problema, em nossa própria linguagem, para tornar o conhecimento aquilo que ele é por natureza – a tentativa, incessantemente renovada, de explicar o homem e o mundo. Talvez seja mais exato dizer, aliás, que o importante é tornar a linguagem comum em carne, e sangue, e ossos, para cada pessoa em particular; e esta é a tarefa que cada pensamento particular, cada geração, cada pessoa, têm de realizar, ao serem chamados a repensar o mundo.

ARIANO SUASSUNA

RESUMO

Esta pesquisa se propõe a investigar como ocorre o processo de articulação entre as diferentes abordagens das Cônicas presentes no ensino. Visamos, assim, entender esta articulação mediante uma simulação virtual, por alunos de Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), uma vez que a Geometria Gráfica é cerne de todo seu aprendizado. Desse modo, acreditamos que o uso de uma ferramenta computacional, que permita ao aluno a visualização de diferentes caracterizações das cônicas por meio de representações gráficas e algébricas, tem muito a contribuir com esse processo. O nosso estudo se apoia na Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS. Nosso interesse deve-se a observação do fenômeno epistemológico da matemática, mais precisamente, o estudo das definições das cônicas e a influência das representações semióticas na sua compreensão. A partir da utilização da TRRS, assumimos que o nosso objetivo é observar como os alunos operam as situações problemas, considerando os aspectos cognitivo, epistemológico e didático, que subdividem a nossa pesquisa. Para tanto, propomos uma atividade didática composta por um questionário e uma simulação virtual que representa as situações planas e espaciais das cônicas, mais frequentes e presentes na história do ensino. Este experimento nos revelou lacunas no ensino e na aprendizagem das cônicas, como as dificuldades em articular alguns conceitos prévios, a fragilidade na formação de outros e a ausência de sentido no acesso de algumas representações, características que confirmam a ideia central da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Palavras-chave: Representações. Cônicas. Definições Cônicas. TRRS.

ABSTRACT

This research aims to investigate how the process of articulation between the different approaches of Conics present in education happen. We intend, therefore, to understand how this articulation occurs through a virtual simulation, by undergraduate students of the 2nd term of the Degree in Graphic Expression of the Federal University of Pernambuco (UFPE), since Graphic Geometry is the heart of all its learning. Thus, we believe that the use of a computational tool that allows the student to view different characterizations of conics through graphic and algebraic representations has much to contribute to this process. Our study is based on the Theory of Semiotics Representation Registers - TSRR. Our interest is due to the observation of the epistemological phenomenon of mathematics, more precisely, the study of the conics definitions and the influence of semiotic representations in their understanding. From the use of TSRR, we assume that our goal is to observe how students operate problem situations, considering the cognitive, epistemological and didactic aspects, which subdivide our research. In order to do so, we proposed a didactic activity composed by a questionnaire and a virtual simulation that represents the flat and spatial situations of conics more frequent and present in the history of education. This experiment revealed us gaps in teaching and learning the conics, as the difficulties in articulating some previous concepts, Fragility in the formation of others and the lack of sense in the access of some representations, characteristics that confirm the central idea of the Theory of Semiotics Representation Registers

Keywords: Representations, Conics, conic definitions, TRRS.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

ANEXOS 2 – Programa da Disciplina Sistemas de Representação do Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE para o segundo semestre de 2015

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema

Originalmente, ligada ao concreto, a Matemática passou por infindos processos de abstração e reformulação quando enfim, traduz suas ideias em símbolos que satisfazem a uma necessidade do mundo real. São por estes símbolos que a matemática se torna compreensível e peculiar, visto que se trata de analogias ideais e não reais, diferentemente de outras disciplinas do currículo escolar (VIEIRA e MORETTI, 2013). Esta característica por si já define a sua aprendizagem como complexa.

Outro fator importante no processo de aprendizagem matemática são as reformulações sofridas internamente pelo aluno, que para apreender, decodifica a mensagem por meio de outra abstração e a interioriza. E é por meio desta representação abstrata que compreendemos e nos relacionamos com o mundo. Percebe-se, portanto, neste processo de compreensão, a exigência de vários sentidos e ações relevantes para a interiorização de um conceito matemático.

Desse modo, podemos perceber no conteúdo das Cônicas uma multiplicidade de representações semióticas, podendo ser empregadas para expressar diferentes abordagens. Para conhecimento, esta característica multifacetada das cônicas apresenta-se em diferentes níveis de ensino: do fundamental ao superior, sendo vista especialmente na abordagem de sólidos, truncamentos, noções de perspectiva, equações e coordenadas. Constituindo assim, um importante e fértil elemento capaz de articular questões do plano ao espaço e uma importante ferramenta capaz de articular a geometria e a álgebra.

Ao considerar a importância da Representação no contexto da Educação Matemática, percebemos a crescente utilização de imagens (sejam dinâmicas ou estáticas) no âmbito escolar. A exemplo, podemos citar o material didático virtual, seja ele para exibição em projetor de imagens/slides, os gifs, as animações com construções de figuras e as diversas hipermídias, assim como os diferentes softwares desenvolvidos com propósitos educacionais. Vale salientar, que estas ferramentas assumem um papel importante como suportes do pensamento matemático, tanto do professor, quanto do aluno. Porém, o campo das representações não se limita apenas ao uso de imagens, mas também incluem gestos, palavras e movimentos. E sendo a Geometria um campo carente de tais esforços para a compreensão de seus elementos, este trabalho busca na tecnologia a possibilidade de simular o que não podemos ver e nem tocar, promovendo uma interação entre o sujeito e a abstração. Esses suportes em contextos determinados constroem a representação de uma ideia e desse modo, torna-se indispensável tal entendimento.

Nossa pesquisa se apoia na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a compreensão das definições sobre as Curvas Cônicas, as suas representações gráficas bi e tridimensionais e as articulações entre essas representações. Utilizaremos uma simulação no software Cabri Géomètre II Plus como mediador no processo cognitivo. Desse modo esperamos implementar uma ferramenta computacional que possibilite a integração dos elementos comuns às representações espaciais e planas das cônicas.

Logo, nosso interesse de pesquisa gira em torno da compreensão das dificuldades apresentadas por estudantes de licenciatura, no processo de articulação entre representações de cônicas oriundas de diferentes *Registros de Representações Semióticas*. Esta questão será especificada mais adiante.

1.2 Expondo os propósitos da pesquisa

O interesse por esta pesquisa emergiu durante o contato com outros alunos da pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, para a realização da atividade final na disciplina *Engenharia de Softwares Educativos*. A atividade propunha a especificação e eventual elaboração de um protótipo computacional voltado para Educação Matemática. Optamos em trabalhar o conteúdo de Curvas Cônicas, considerando o contexto da Geometria Analítica.

Nesta ocasião, justificamos a nossa escolha pela Geometria Analítica por se tratar de um campo da Matemática, que articula dois sistemas de representação semiótica extremamente importantes: o algébrico e geométrico. Essa escolha, também se deve a área de conhecimento dos integrantes da nossa equipe composta por professores licenciados em Matemática e em Expressão Gráfica, que por serem de formação distinta poderiam contribuir, tendenciosamente, para a álgebra e para a geometria, numa compreensão plana e espacial das Cônicas.

Contudo, durante as reuniões de grupo e, principalmente, nas discussões sobre o tema, encontramos algumas dificuldades na compreensão dos conceitos ou definições sobre o conteúdo. Logo, compreendemos que as diferentes concepções acerca das definições usuais das cônicas, foram compreendidas de modo diferente, por cada integrante, conforme a sua formação inicial. Assim, Duval (2009) fundamenta a nossa reflexão:

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para os sujeitos que as utiliza. (DUVAL, 2009, p. 32).

Sendo assim, o reconhecimento das diferentes imagens mentais geradas por pessoas com formações distintas, enriqueceram e fundamentaram o desfecho do protótipo, para a disciplina citada. Entendemos, a partir dessa experiência a importância de se trabalhar com definições distintas, diferentes representações semióticas, e sobretudo, articular essas definições das cônicas, particularmente, na perspectiva da utilização das cônicas na resolução de problemas. E desse modo, a identificação das dificuldades na aprendizagem pode contribuir com a ampliação de novas perspectivas no campo do Ensino da Matemática.

Por seu potencial multifacetado, as cônicas, possuem uma infinidade de abordagens no campo matemático, e mais especificamente na Geometria. Pesquisas como a de Borbalho (2011), Neto (2008) e Pereira e Costa (2010) apontam para dificuldade por parte do aluno, na interpretação e administração de tantas informações diferentes e abordadas de modo desconexo, oferecidas por anos de ensino na escola básica. Consequentemente, a carência desse domínio pode comprometer a aprendizagem deste conteúdo no Ensino Superior, conforme Sousa (2014).

Devido a sua amplitude e a vasta publicação a respeito do tema, optamos por focar nas representações expressas nas definições das cônicas, conforme suas caracterizações planas e espaciais. Assim, pretendemos trabalhá-las no contexto da geometria gráfica, pois:

> O ensino da matemática não deve se limitar a ensinar linguagens e algoritmos, o importante é a constituição e o sentido da racionalidade matemática: intuição, abstração, modelização; e nesse processo, a geometria gráfica tem contribuições importantes, pois, enquanto linguagem e sistema de representação, permite uma compreensão

> nova de situações do ponto de vista da racionalidade e da intuição. (GALVÃO E BELLEMAIN, 2013).

Assim, além de considerar a formação inicial da autora, licenciada em Expressão Gráfica, curso que traz a Geometria Gráfica como essência de todo seu aprendizado, justificamos ainda a nossa proposta, pela valorização de uma abordagem diferenciada das cônicas, como comentado acima.

1.3 Questão de pesquisa

A questão que nos norteará durante a pesquisa será:

A investigação das dificuldades dos alunos em articular as diferentes definições e representações planas e espaciais das Cônicas presentes no ensino.

1.4 Objetivo

A partir da problemática apontada, elaboramos o seguinte objetivo geral da nossa pesquisa:

1.4.1 Objetivo Geral

- Analisar como ocorre a articulação entre as definições das cônicas e suas diferentes representações planas e espaciais por alunos de Licenciatura e com suporte computacional.

Desse modo, apresentamos os objetivos específicos que direcionam o nosso estudo:

1.4.2 Objetivos Específicos

- Compreender o estudo das representações planas e espaciais das cônicas nas perspectivas epistemológica, cognitiva e didática;

- Identificar as principais dificuldades na articulação das representações planas e espaciais presentes nas definições das cônicas;
- Analisar as implicações do uso de uma ferramenta computacional que simule as propriedades implícitas nas definições das cônicas e a sua sistematização no plano e no espaço por meio das representações gráficas e algébricas.

1.5 Pressuposto da pesquisa

Pressupomos que a articulação entre as definições das cônicas em suas diferentes representações planas e espaciais, por alunos de Licenciatura ocorre de modo superficial e isolado. Sendo assim, acreditamos que o uso de um software de GD[1] que apresente e articule de modo dinâmico e continuo diferentes representações (espacial, plana e algébrica) das cônicas, contribuirá com a elucidação das dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão das propriedades contidas nas definições das cônicas.

1.6 Como abordaremos esta questão de pesquisa?

1.6.1 Estrutura do trabalho

Esta pesquisa se divide em três eixos principais: epistemológico, didático cognitivo. O primeiro eixo refere-se ao entendimento histórico da origem e da evolução das cônicas e suas definições. Para tanto, faremos um passeio sobre as colaborações científicas a respeito do tema Cônicas, afim de entender sob diferentes perspectivas suas definições e conceitos. Apontaremos as contribuições de Apolônio de Perga, Philippe de La Hire e algumas relações métricas, a análise por Descartes e Fermat e os Teoremas de Dandelin-Quetelet, que une os elementos conhecidos do plano numa compreensão espacial e Pascal e Brianchon, numa perspectiva projetiva. Em seguida, direcionaremos a leitura ao entendimento do nosso objeto, enquanto conceitos implícitos em tais definições por suas diferentes representações.

Munidos de tais compreensões, no segundo eixo, buscaremos entender como se apresenta o ensino das cônicas numa breve análise histórica da perspectiva

---

[1] GD: Geometria Dinâmica

escolar. Em seguida, buscaremos no estudo de Duval qual a importância das representações semióticas na aprendizagem matemática. E sobretudo, como ocorre a aquisição de um novo conhecimento neste campo do saber tão dependente de representações. Apontaremos, ainda, as principais dificuldades encontradas neste estudo segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

Assim, sob uma perspectiva tecnológica, apresentaremos uma análise de cinco softwares que permitem, por recursos dinâmicos, a visualização plana e/ou espacial das cônicas. E desse modo, elegemos o que mais se aproximou das nossas intenções de pesquisa, isto é, uma ferramenta tecnológica, que propicie a articulação entre registros semióticos no plano e no espaço.

Por fim, já conhecido o nosso objeto matemático, alicerçados pela TRRS e com o auxílio de uma ferramenta tecnológica, o nosso estudo consiste em apresentarmos as perspectivas metodológicas de um experimento. Buscamos analisar as implicações do uso de uma ferramenta computacional que simule as propriedades implícitas nas definições das cônicas e a sua sistematização no plano e no espaço por meio das representações gráficas e algébricas. Para tanto, confrontaremos os dados coletados do nosso experimento com a teoria que nos fundamenta.

O nosso experimento ocorreu com sujeitos dispostos em duplas, uma por vez, que foram expostas a uma simulação virtual previamente definida. Assim, utilizamos como instrumentos para este experimento:

- Um questionário semiestruturado - com dados apenas em língua natural, não contendo imagens ou gráficos, e questões abertas, podendo ser discutidas entre a dupla;
- A visualização das representações virtuais de registros figurais bi e tri dimensionais, assim como, os algébricos interligados entre si;
- A filmagem das ações dos sujeitos obtidas por câmeras filmadoras que capturam os movimentos na tela e as ações gestuais dos sujeitos;
- E os registros escritos por eles: questionário respondido e rascunhos.

Desse modo pudemos reunir um importante material, onde analisamos e organizamos por questões, como cada dupla as resolveu.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Nesta seção pretendemos apontar as principais linhas teóricas que fundamentam nossa pesquisa. Assim, propomos um passeio histórico sobre a origem das cônicas e suas definições e de que modo, mais atualmente, ela se apresenta no ensino. Por fim, apresentaremos uma visão filosófica, pautada na compreensão da relação entre a representação e o objeto; e cognitiva, à guisa da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

2.1 Cônicas: Uma breve história

“A reta é uma curva que não sonha”.
Manoel de Barros

O pensamento do poeta Manoel de Barros (1916-2014) nos traduz o encantamento pelo estudo das curvas cônicas ao longo dos séculos e apresenta o objeto matemático deste trabalho. Interpretamos a referida frase como sendo uma busca pelo saber, o eterno sonho matemático de desvendar as propriedades existentes nas formas das curvas emblemáticas, que por vários momentos da história, receberam novos olhares e contribuições. Consequentemente, é muito improvável que tal estudo apresente algo novo em suas propriedades, pois acreditamos que, estas, já foram esgotadas em suas possibilidades. Porém, quanto ao caminho no campo da compreensão ainda há muito o que se explorar.

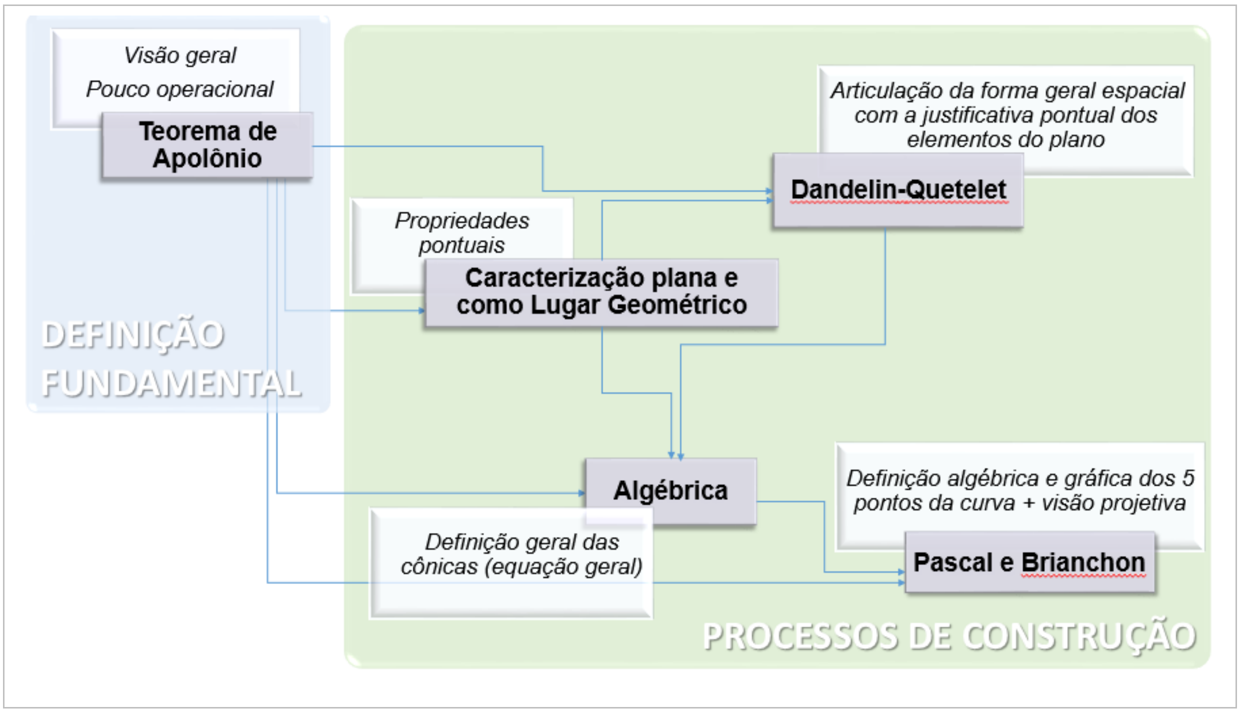
Não há exatidão sobre a origem das cônicas, não se sabe ao certo quando e por quem foram ‘descobertas’. O que pressupomos por meio de indícios e com base nos materiais consultados é que o interesse pelas mesmas se deve, provavelmente, a sua aplicação como tentativa de solucionar problemas geométricos, desde a antiguidade. Grandes geômetras e matemáticos contribuíram com a elucidação de suas propriedades (decodificação dos seus padrões) ao longo do tempo. E desse modo, quase despretensioso, as cônicas se apresentam na história revelando e se moldando a cada nova exigência. Essa capacidade de adequação e aplicação às necessidades despertaram um interesse mais específico por suas características e propriedades, sendo assim estudadas em diversas áreas da Geometria (euclidiana, afim, projetiva, analítica, métrica, etc), conforme a evolução dos olhares sobre a mesma.

Nesta pesquisa, nos dedicaremos sobre as questões que envolvem a compreensão sobre o objeto cônicas. E ao consultarmos pesquisas e livros-textos sobre o histórico das cônicas percebemos uma sequência de contribuições importantes as quais foram sistematizadas e incorporadas ao ensino, entendemos que algumas dessas definições foram suprimidas, o que acarreta em várias dúvidas sobre o formato do seu ensino atual.

Segundo Hermam Hankel (1839-1873), é comum observar em culturas diferentes a sobreposição dos seus interesses em detrimento ao de outrem, ou seja, uma cultura desaparece para que outra predomine, na Matemática esta relação ocorre de modo diferente. As concepções anteriores acumulam-se e servem de alicerce para que se estabeleça um novo conhecimento ou relação (VENTURI, 1949). Muitas foram as contribuições acerca das Cônicas ao longo dos séculos, entretanto, nesta pesquisa, apresentaremos os teoremas e definições mais frequentemente encontrados no ensino: *Apolônio; caracterizações planas e como Lugar Geométrico; Dandelin-Quetelet; Algébrica; Pascal e Brianchon*. Esta sequência apresenta, respectivamente, o seguinte raciocínio: uma visão global e inicial das cônicas; a exploração das propriedades planas e pontuais (conjunto de pontos com características isoladas); a junção da forma geral espacial com a justificativa pontual dos elementos do plano; a generalização da definição, considerando uma propriedade em comum entre as cônicas; a junção da equação das cônicas considerando 5 dos seus pontos e o seu traçado, numa visão projetiva.

Acreditamos que esta ordem se faz necessária para uma melhor compreensão das intenções do nosso experimento, onde consultaremos alguns estudantes sobre o domínio das cônicas e das suas definições, com foco na articulação entre as representações. A seguir, exporemos um quadro com o esquema desta sequência.

Quadro 1 – Sequência adotada na pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora.

Para que possamos melhor visualizar os elementos desta sequência, utilizaremos algumas definições[2] iniciais, representações gráficas e esquemas como suportes para o nosso pensamento.

2.1.1 Origem das cônicas segundo o Teorema de Apolônio

O interesse pelo estudo das curvas cônicas ocorre desde a antiguidade clássica e “As cônicas de Apolônio de Perga” (262 a.C. — 194 a.C) estão dentre os escritos mais conhecidos. Presume-se que “As cônicas” eram compostas por oito volumes, com mais de 480 proposições rigorosamente demonstradas e, destas, apenas 7 chegaram aos dias atuais, conforme Garbi (2006).

Considerado o “pai das cônicas”, Apolônio foi quem sistematizou o estudo das seções de um cone, as quais chamou de *sintomas*. Deve-se a Apolônio, a descrição das cônicas como sendo a interseção de um plano qualquer em um único cone, considerando a inclinação variável do plano sobre seu eixo para a obtenção de

[2] Para um estudo mais detalhado sobre a geração de curvas e superfícies ver Álvaro Rodrigues.

diferentes seções. Dedicou-se também, ao estudo das tangentes e normais da curva, além de denominá-las tal como a conhecemos hoje: elipse, parábola e hipérbole. Embora a circunferência seja conseguida por meio das considerações do contexto apresentado por Apolônio, este ente já era conhecido antes de tais designações, como um dos Lugares Geométricos Euclidianos.

As conjecturas de Apolônio seguiram os moldes da geometria sintética[3], e assim, seu trabalho superou os anteriores. Conforme Boyer:

> [...] assim como *Os Elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As Cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os Elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos. (BOYER, 1996, p.106-107).

Ressaltamos que tal feito só foi possível com o contributo de seus antecessores Menecmo (380 a.C. - 320 a.C.) e Euclides (325 a.C. – 270 a.C.), entre outros, na tentativa de resolver os três problemas clássicos da Geometria: *quadratura do círculo, duplicação do cubo e trisseção do ângulo*. Assim como os Elementos de Euclides, os estudos sobre as cônicas de Apolônio tornaram-se referência, contribuindo com vários trabalhos posteriores: Galileu, Descartes, Fermat, Dandelin, Quetelet são alguns deles.

Como vimos, Apolônio foi o primeiro a considerar as curvas[4] ou seções cônicas[5] oriundas de uma mesma "família", ou seja, procedentes de um mesmo cone. Não há como precisar algumas de suas concepções como, por exemplo, o conhecimento sobre as degenerações cônicas e a dimensão da concepção de infinito, que emergem no nosso estudo. No entanto, apontaremos, como efeito de esclarecimento, as nossas concepções para a compreensão e sequência deste teorema. Pois, ao considerar que Apolônio admitiu a ideia de o cone possuir duas folhas para a concepção da hipérbole, entendemos o cone como sendo a superfície geométrica composta por uma reta *d*, chamada diretriz, uma reta *g*, a qual chamamos geratriz da superfície cônica e uma

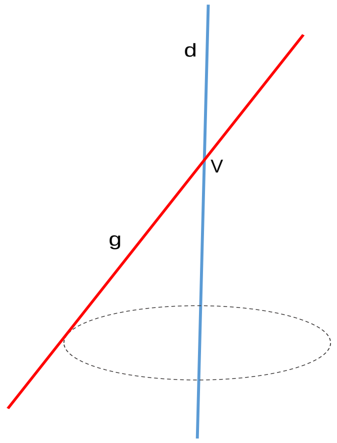
---

[3] A Geometria Sintética compreende o estudo das formas de modo gráfico, com o auxílio de instrumentos tradicionais de desenho, sem o auxílio do uso de coordenadas e álgebra.
[4] Consideramos curvas a extremidade formada por pontos que limitam a região interior e exterior ao cone.
[5] Formada por um corte de um plano secante sobre o cone, a seção é a região interna a superfície cônica.

lei de geração que determina que a geratriz reta (g) se apoie na diretriz reta (d) e gire em torno dela até voltar a posição inicial (CORREIA, 2011).

Assim, a geratriz se movimenta em uma rotação constante apoiada no ponto V, sob a diretriz que permanece fixa no espaço R^3, dando apenas a direção da superfície. Este movimento de rotação, também é característico da física, recebendo o nome de revolução. Logo, a superfície gerada por um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, recebe o nome se superfície de revolução. Neste caso, trataremos por cone de revolução.

Figura 1. Geratriz, diretriz e lei de geração da superfície cônica



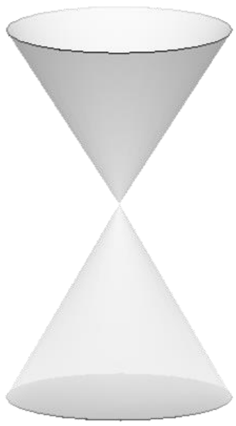
Fonte: Elaborada pela autora.

Há de se convir a existência de outras definições[6] para a geração de uma superfície cônica de revolução diferentes da que se apresenta neste estudo, contudo, esta é a que mais se adéqua ao nosso entendimento por se aproximar dos teoremas tratados neste capítulo.

---

[6] Por exemplo a rotação de um triângulo retângulo apoiado sobre um eixo, resultando em apenas uma das folhas do cone. Para o nosso entendimento tal afirmação estaria incompleta, como também limitaria a constituição de um cone de revolução oblíquo.

Figura 2. Cone de revolução



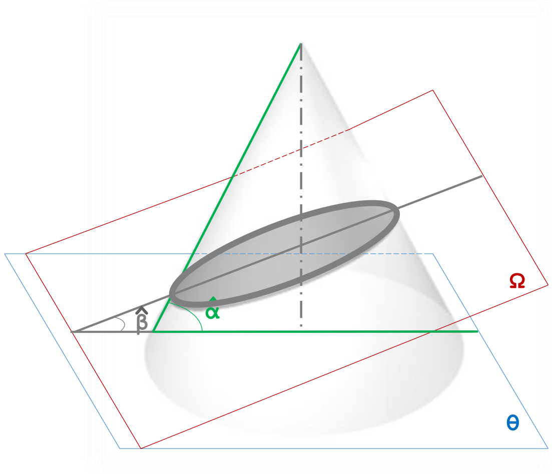
Fonte: Elaborada pela autora.

Apolônio demonstra a obtenção de uma seção cônica por meio da interseção de um plano α secante a uma superfície cônica de revolução. Para isso, é necessário considerar as proposições a seguir conforme Correia (2011), em estudo comparativo das cônicas[7]:

- A **elipse** é uma curva plana fechada, resultante da seção de uma superfície cônica de revolução, por um plano Ω, tal que Ω seja oblíquo à diretriz do cone (eixo), de modo que o ângulo β formado por Ω e pela seção perpendicular à diretriz, formada pelo plano θ, seja menor que o ângulo formado por θ e a geratriz do cone. Logo, conforme a figura 3, a condição de existência de uma elipse será: $\hat{\beta} < \hat{\alpha}$.

[7] O nosso estudo baseia-se nas definições de Correia (2011), logo foi necessário realizar algumas mudanças na nomenclatura de planos e ângulos para melhor sintonia com as imagens.

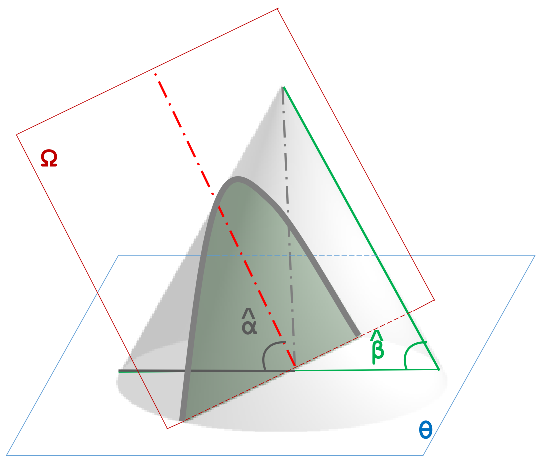
Figura 3. Formação de uma elipse



Fonte: Elaborado pela autora.

- A **parábola**, também é uma curva plana fechada[8], resultante da seção de uma superfície cônica de revolução, por um plano Ω, tal que Ω é paralelo a uma das posições de sua geratriz reta. Assim, a condição de existência de uma parábola será $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, como visto na figura 4.

Figura 4. Formação de uma parábola



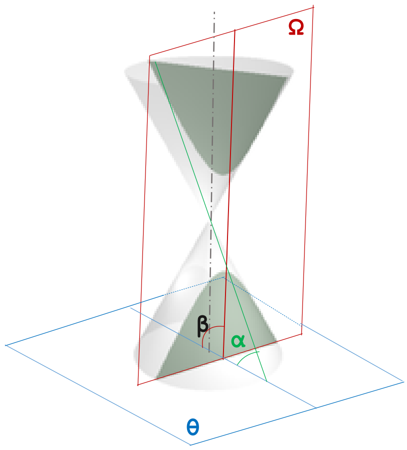
Fonte: Elaborada pela autora.

- A **hipérbole** é uma curva plana fechada, resultante da seção de uma superfície cônica de revolução, por um plano alfa Ω, tal que Ω forme com θ (plano

[8] Esta definição considera o entendimento sobre ponto impróprio, na geometria projetiva. Para um melhor aprofundamento sobre o tema ver em COSTA, Mario Duarte, COSTA, Alcy P. de A. V. Geometria gráfica tridimensional. v3. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1996.

perpendicular à diretriz) um ângulo β. De modo que β seja maior que o ângulo formado por θ e a geratriz do cone. Logo, conforme a figura 5, a condição de existência de uma elipse será: $\hat{\beta} > \hat{\alpha}$.

Figura 5. Formação de uma hipérbole



Fonte: Elaborada pela autora.

2.2 Definições métricas das cônicas no plano

A partir do que foi mostrado, observamos que Apolônio definiu as cônicas analisando a sua relação com o espaço tridimensional, considerando como condição de existência – o movimento do plano secante ao cone. Esta definição apesar de ser fundamental e importantíssima, em relação a sua aplicação é na prática difícil de operacionalizar num processo de construção. Logo, as demais ‘definições’ expostas nesta seção tratam-se de processos de construção distintos que operacionalizam o teorema inicial, sobretudo, permitindo a construção de cônicas sem precisar considerar a situação espacial. Não se trata aqui de afirmar que a motivação da busca de definições e procedimentos no plano provêm da necessidade de “simplificar” os processos de construção das cônicas. É muito mais provável que as caracterizações das cônicas no plano sejam consequências do reconhecimento do lugar geométrico, representado por nelas.

2.2.1 Definição das cônicas por equidistância bifocal

Uma perspectiva bastante conhecida, principalmente nos livros didáticos atuais, é o estudo das cônicas por meio da propriedade bifocal, utilizando a Divisão Harmônica, conforme temos nas contribuições do matemático francês Philippe de La Hire (1640 – 1718). A ferramenta utilizada por ele para a apreciação do fenômeno foi a Geometria Euclidiana Sintética, sem a influência da álgebra. Os aperfeiçoamentos dos seus trabalhos contribuíram com a visão das cônicas de modo isolado, sem a relação direta com o espaço tridimensional como na visão de Apolônio, pois, acreditava que assim seria melhor compreendido, visto que seu trabalho anterior não foi muito bem aceito pela complexidade obtida na aplicação da Geometria Projetiva neste contexto (NETO, 2013, p.18).

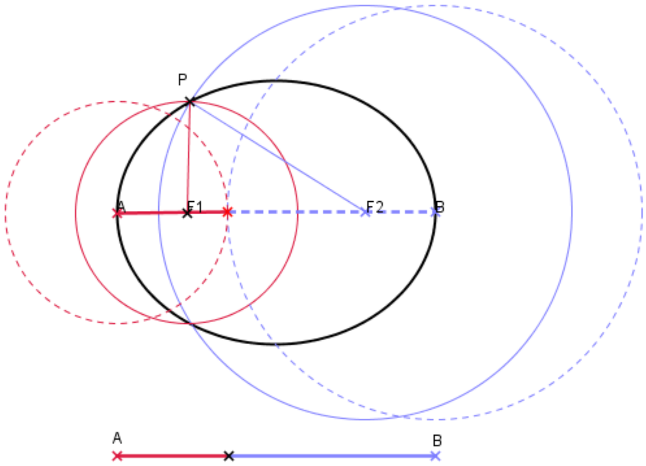
Segundo Neto (2008, 2011), a definição bifocal foi sistematizada por Philippe de La Hire em estudos publicados nos anos de 1673, 1679 e 1685. Sua primeira obra, também escrita conforme a Geometria sintética tratou as cônicas numa perspectiva tridimensional e considerou a relação harmônica projetiva em sua definição. As demais obras vieram como resposta à rejeição da primeira, que para ser compreendida dependia de uma boa percepção espacial. Este fato gerou a necessidade de buscar outros mecanismos didáticos que pudessem facilitar o entendimento de terceiros. Assim, posteriormente, La Hire trabalhou as cônicas de modo sistemático e individual, considerando a propriedade bifocal, ainda sem utilizar argumentos analíticos, que para a época eram pouco conhecidos.

Segundo Neto (2013), esta propriedade já era explorada desde Apolônio, mas o modo de caracterização das cônicas por meio deste domínio foi algo inovador e, ao mesmo tempo, sua obra possui singularidade pelo grande número de proposições utilizando tal propriedade. Trata-se de uma correspondência entre os focos e um ponto qualquer da curva. Logo, podemos perceber o contexto como um lugar geométrico. Talvez seja esta a mais popular dentre as definições aqui trazidas. Vejamos, agora, caso a caso segundo a análise feita por Neto (2008 e 2013) sobre a caracterização original de La Hire:

> Para a elipse, utiliza como caracterização a soma das distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) constante e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja soma dos raios vale um segmento dado. (NETO, 2013, p.35).

O segmento referido é o eixo maior, conforme apresentaremos na figura 6.

Figura 6. Definição da elipse por distância bifocal

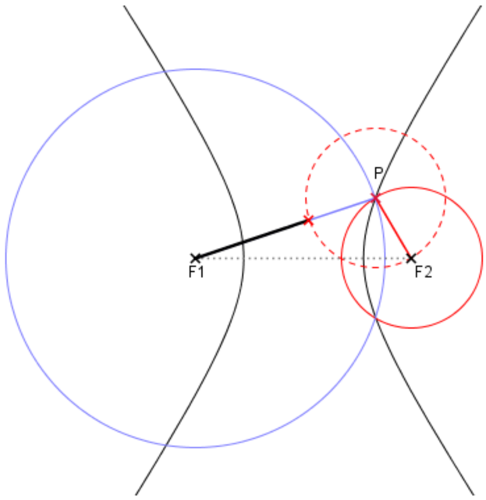


Fonte: Elaborada pela autora.

Do mesmo modo, citamos o caso da hipérbole, ainda conforme Neto (2013) e o esquema apresentado por ele para exemplificação do caso. Sendo a hipérbole,

> a diferença constante entre as distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja diferença dos raios vale um segmento dado. (NETO, 2013, p.35).

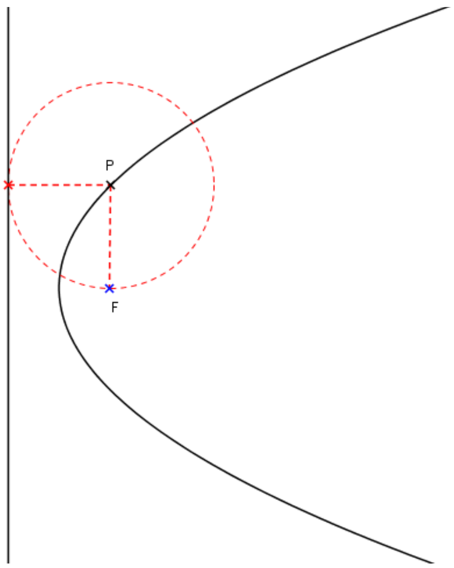
Figura 7. Definição da hipérbole por distância bifocal



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, a “parábola, utiliza a distância de um ponto qualquer P da curva até um ponto dado (foco) igual à distância de P até uma reta dada” (NETO, 2013, p.35). Podemos visualizar esta propriedade no esquema da figura 8.

Figura 8. Definição da parábola por distância bifocal



Fonte: Elaborada pela autora.

2.2.2 Definição das cônicas por equidistância entre a circunferência diretora e um dos focos

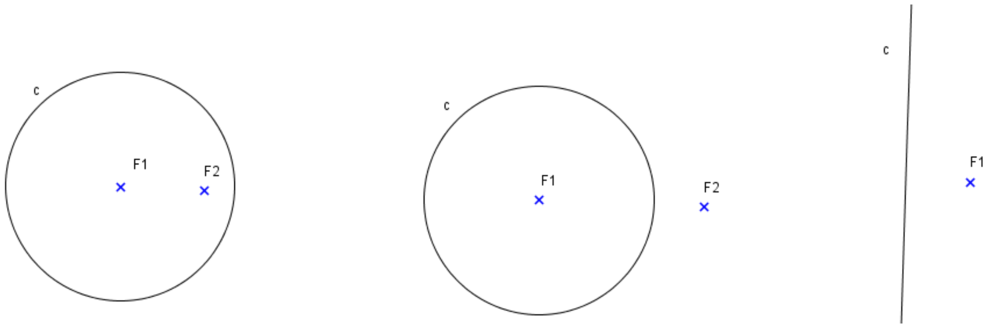
2.2.2.1 Circunferência diretora e um dos focos

Esta definição considera uma propriedade das cônicas em que:

> Os pontos de uma cônica são equidistantes de um ponto e de uma circunferência do seu plano. Este ponto é um foco e a circunferência define o círculo diretor do outro foco, que é o centro desse círculo (COSTA, 1978, p.4).

Ou seja, é o lugar geométrico (L.G.) de equidistância entre uma circunferência e um ponto fixo no plano. Sendo este ponto interno a circunferência no caso da elipse, externo no caso da hipérbole e parábola, sendo esta última obtida por meio de uma circunferência degenerada em uma reta. A seguir, na figura 9, apontaremos os esquemas referentes às situações citadas.

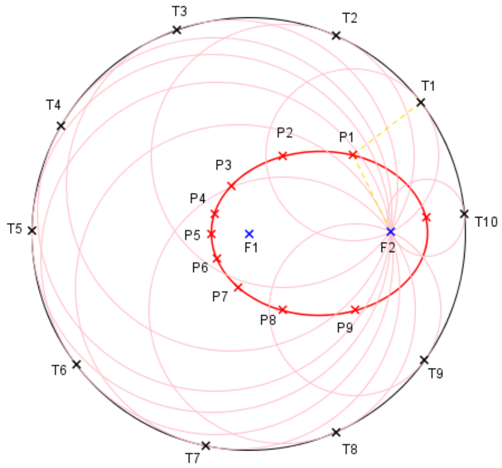
Figura 9. Situações de obtenção da elipse, hipérbole e parábola



Fonte: Elaborada pela autora.

A figura 10 demostra a situação de obtenção da elipse, como exemplo, conforme a propriedade de Lugar Geométrico de Equidistância. Assim, verifica-se a equidistância entre um de seus focos e pontos da circunferência.

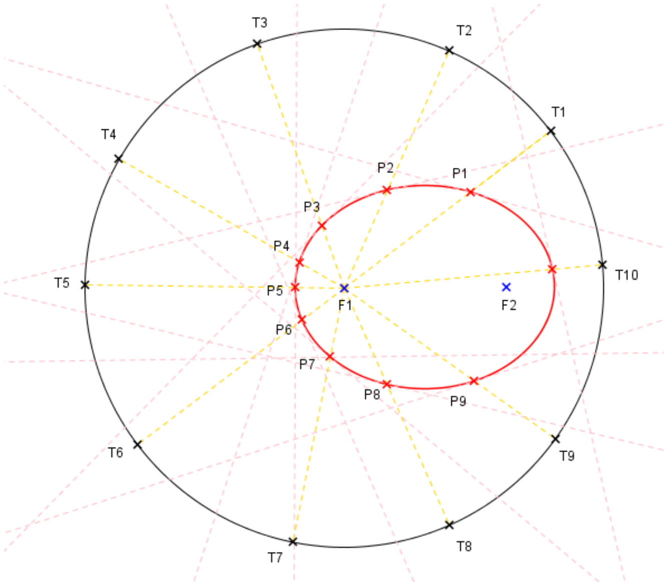
Figura 10. Exemplo com curva genérica – equidistância entre foco e circunferência diretora



Fonte: Elaborada pela autora.

Por consequência, outra propriedade geral a ser observada é a determinação das tangentes à curva (em amarelo), sua normal (em rosa) e seu ponto de tangência (marcados em vermelho), conforme destacamos a seguir, na figura 11.

Figura 11. Exemplo com curva genérica – equidistância entre foco e circunferência diretora.



Fonte: Elaborada pela autora.

Esta propriedade indica que a tangente à curva é também mediatriz do segmento formado por um foco (F_2) e um ponto (T_1) qualquer da circunferência diretora. Assim, o ponto de tangência será a interseção de um segmento F_1T_1 com a referida tangente. Pretendemos ainda exemplificar os demais casos posteriormente, por ora, optamos por ilustrar de modo genérico o que se trata de uma propriedade geral das curvas.

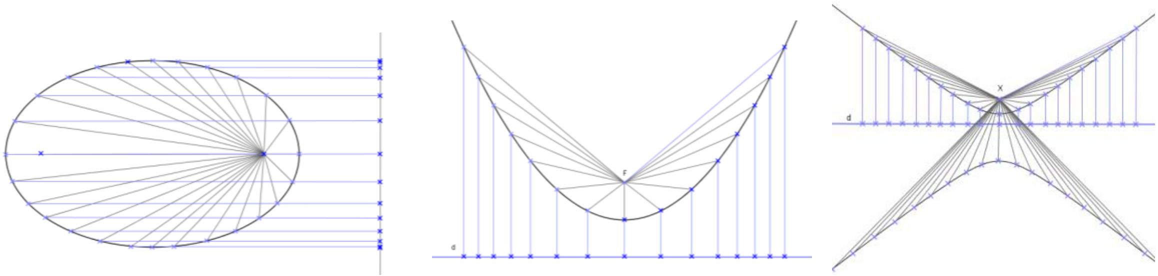
2.2.3 Definição das cônicas por excentricidade

Outra definição bastante utilizada tanto na forma analítica como na sintética é a excentricidade. Segundo Costa (1978),

> As distâncias de um ponto qualquer de uma curva cônica a um ponto e a uma reta de seu plano estão numa razão constante, denominada excentricidade da cônica. Este ponto e esta reta são, respectivamente, FOCO e DIRETRIZ da curva (COSTA, 1978, p.4).

Sendo assim, conforme tratamos acima sem denominar a característica como tal, é o valor da excentricidade que determina o tipo da curva e o seu formato. A figura 12 apresenta graficamente as três situações: elipse, parábola e hipérbole, respectivamente, e a propriedade relacionada a distância entre um dos focos e a curva, assim como, da curva e a reta diretriz. Vejamos:

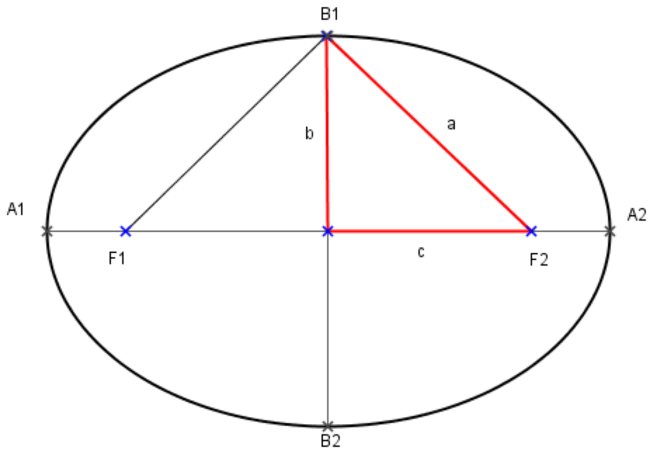
Figura 12. Excentricidade 3 casos – esquema conforme Costa (1978)



Fonte: Reelaborada pela autora.

A excentricidade de uma curva, pode ainda ser entendida como a relação entre a semidistância focal e o semieixo maior, que é dada geralmente na forma $e = \frac{c}{a}$ e conforme representamos graficamente, na figura 13, a imagem apresenta os elementos que definem a excentricidade:

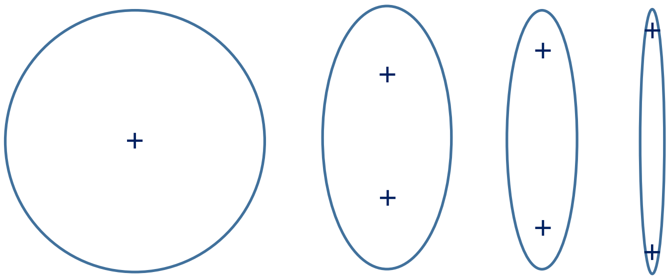
Figura 13. Elementos da excentricidade



Fonte: Elaborada pela autora.

A figura 14 apresenta, como exemplo, a elipse nas diferentes situações entre aproximação e distanciamento focal.

Figura 14. Elipse e variação da excentricidade



Fonte: Elaborada pela autora.

Esta relação determina o formato da curva, ou seja, quando a excentricidade for igual a 0, a curva se trata de uma circunferência, entendendo-se a circunferência como um caso particular de uma elipse, cujos focos coincidem. Do mesmo modo, compreendemos que quando a relação for $e<1$, teremos uma elipse. Assim uma elipse mais alongada, possuirá seus focos mais afastados e a sua excentricidade estará mais próxima de 1. Do mesmo modo, esta relação sendo $e>1$ temos uma hipérbole e, igualmente, quando temos $e=1$ obteremos uma parábola, visto que as distâncias entre ponto-reta e ponto-foco são iguais.

Por consequência, analiticamente, esta propriedade gerou a equação aplicada a qualquer cônica, mantendo o mesmo princípio das demais aqui citadas, sendo esta $d(P,F)=e.d(P,r)$ (CONDE, 2004).

2.3 Teorema de Dandelin-Quetelet: articulação entre o espaço e o plano

Depois de Apolônio, uma grande contribuição no estudo das cônicas ocorreu em 1822, quando o matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) simplificou a visão das cônicas e justificou a importância de alguns dos elementos comuns às mesmas. Dedicou-se ao estudo da localização geométrica dos focos e diretrizes e as propriedades focais (antes tratadas bidimensionalmente), articulando-as à concepção espacial de Apolônio. Tais elementos, hoje conhecidos como focos e diretrizes, não se sabe ao certo se foram explorados por Apolônio, segundo Boyer (1996) o motivo da ausência também pode estar relacionado ao fato do desaparecimento de uma de suas obras. Os focos e as diretrizes estão cercados de propriedades, logo, percebe-se o quão importante é o reconhecimento desse teorema e das suas contribuições no campo matemático, como as novas definições das cônicas.

Para a elaboração desse estudo, Dandelin recebeu colaborações do também belga e matemático Adolphe Quetelet, daí a origem do nome do teorema. Desse modo, a partir da inserção de esferas no cone, Dandelin observa as relações entre elas e o plano secante ao cone, gerador da curva, assim como o plano formado pelo conjunto dos pontos tangentes a esfera e a superfície do cone. As esferas foram o caminho mais curto para provar, tridimensionalmente, que a soma dos raios vetores é constante. Logo, conforme Monteiro (2014):

> O trabalho de Dandelin foi mostrar que dado um plano que secciona um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone. Estas esferas são as esferas de Dandelin. Trabalhando com a propriedade das retas tangentes a uma esfera que dado um ponto externo a uma esfera é possível traçar duas retas que a tangenciam em pontos distintos, cujas distâncias ao ponto dado são iguais, Dandelin consegue encontrar os focos e verificar a propriedade focal de uma só vez. (MONTEIRO, 2014, p.11)

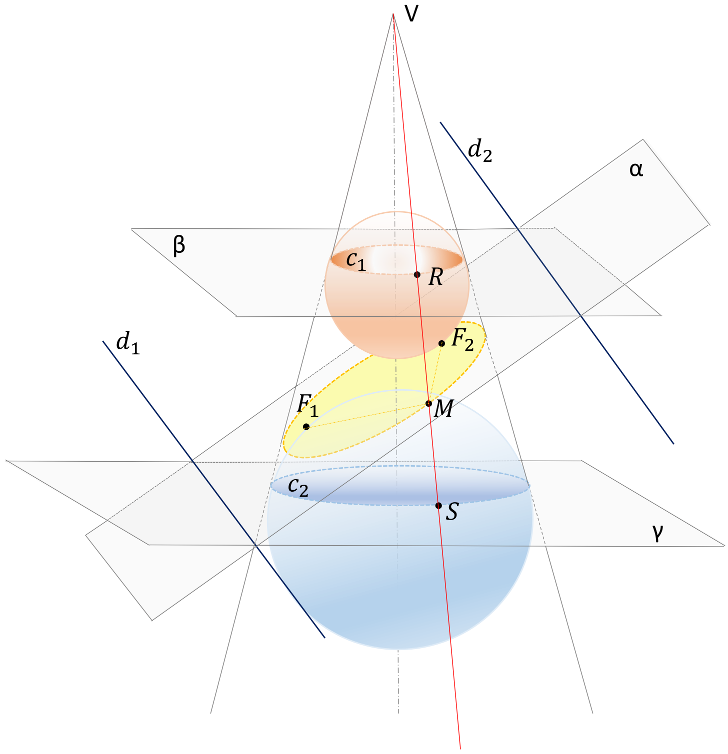
Assim, veremos a seguir as proposições e esquemas que ilustram o teorema, conforme estudos de Carvalho (1967), Monteiro (2014) e Correia (2013) sobre o tema.

1º caso: Dado um cone de revolução, seccionado por um plano α, secante e oblíquo a diretriz desse cone, obteremos uma elipse (figura 15). Duas esferas são geradas de modo que seus contornos tangenciem, simultaneamente, a superfície interna do cone e o plano α, logo, os pontos de tangência localizados sobre o plano α são F_1 e F_2, focos da elipse.

O ponto M, pertence a elipse, como também a uma reta tangente as esferas nos pontos R e S, consequentemente, por M também passam duas retas tangentes as esferas nos pontos F_1 e F_2. Logo, *MR + MS* é uma quantidade constante. Ora, se MF_1 é uma tangente a uma das esferas, visto que o plano secante é tangente em F_1 a esfera, MS é outra tangente. Assim, tem-se que MF_1 = MS. Do mesmo modo, ocorre com MF_2 e MR. Por conseguinte: $MF_1 + MF_2 = MS + MR = RS$.

Observemos, que a circunferência c_1 está contida no plano β, e que o plano γ contém a circunferência c_2. Nota-se, portanto, que ambos os planos interceptarão o plano α, gerando as retas d_1 e d_2, ambas diretrizes da elipse.

Figura 15. Dandelin-Quetelet – Elipse



Fonte: Elaborada pela autora.

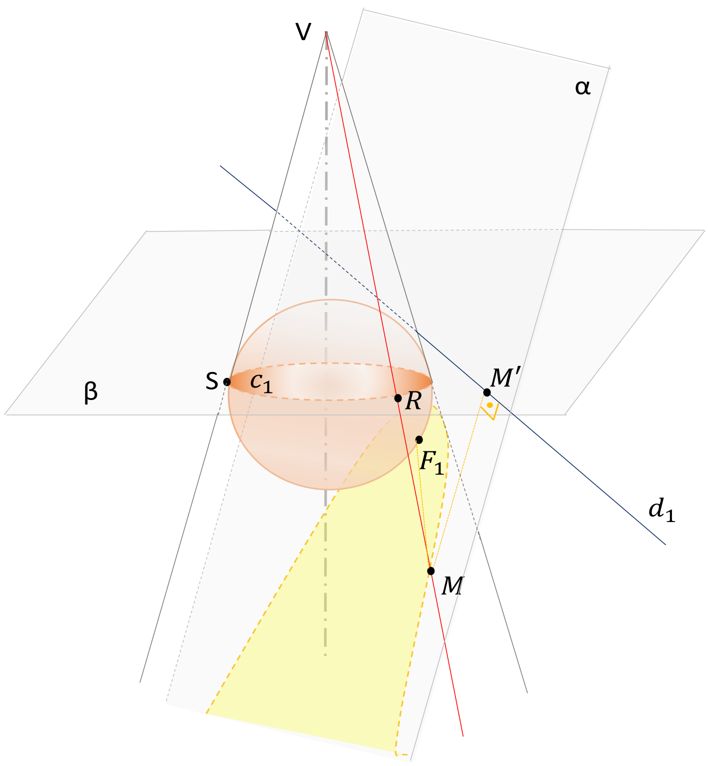
2º caso: Dado um cone de revolução, seccionado por um plano α, paralelo a uma posição da geratriz do cone, obteremos uma parábola (figura 16). Uma esfera é gerada de modo que seu contorno tangencie a superfície interna do cone e o plano α, logo, o ponto de tangência localizado sobre o plano α será F_1, foco da parábola. Assim, consideramos a existência de outro foco, sendo este infinitamente afastado. Chamemos de β o plano perpendicular a diretriz do cone, que contém a circunferência c_1. Nota-se que β intercepta α numa reta d_1, logo d_1 será a diretriz da curva.

Como no primeiro caso, *M* é um ponto qualquer da curva e *MF*$_1$e *MR* são tangentes à esfera e, portanto, são congruentes. Nota-se que α é paralelo à geratriz que contém o ponto *S*, também pertencente a c_1. Do mesmo modo, o ponto *R* pertence a c_1, e a geratriz que contém M. Portanto, *VS* = *VR,* assim como, *MF*$_1$ = *MR.* Seja ainda, *M'*a projeção ortogonal de *M* sobre d_1, tem-se que o segmento de reta *MM'* pertence a α, logo é paralelo a geratriz que contém *VR*. Desse modo, podemos observar a existência de dois triângulos isósceles semelhantes, o triângulo *VSR* e o *RMM'*. Sendo assim, já vimos que *RM* = *MF*$_1$, então *RM* = *MM'*, logo *MF*$_1$=*MM'*.

Concluímos, portanto, que a distância do ponto M ao foco é igual à distância do ponto M a diretriz da curva d_1.

Essa demonstração sobre a propriedade focal da parábola, segundo Monteiro (2014), deve-se ao estudo de Pierce Morton que, em 1929, com base nas esferas de Dandelin, localizou geometricamente o foco e a diretriz, visto que o autor das relações nas demais curvas não chegou a demonstrar este caso.

Figura 16. Dandelin-Quetelet – Parábola

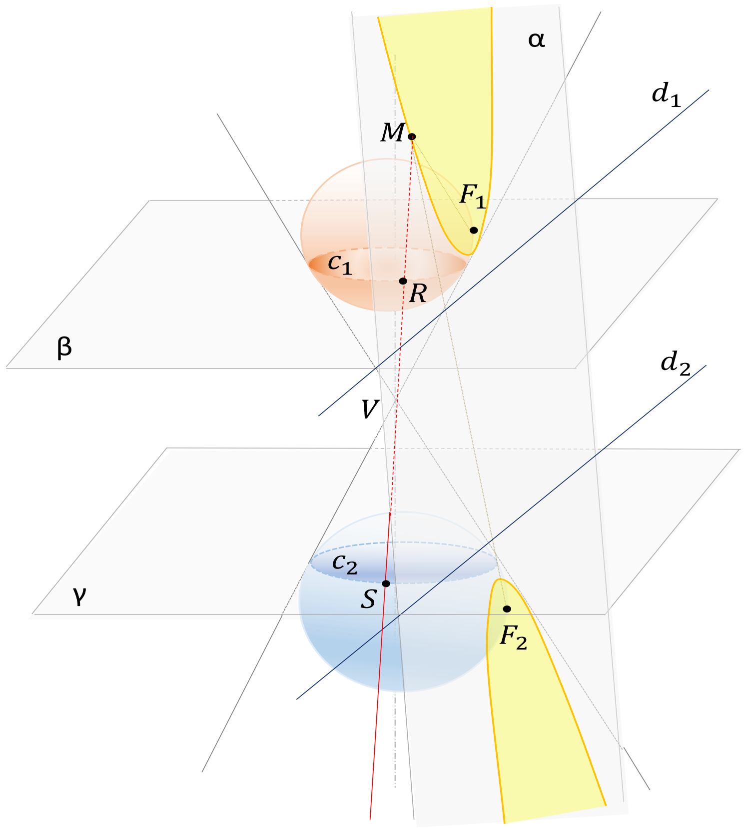


Fonte: Elaborada pela autora.

3º caso: Seja um cone de revolução, seccionado por um plano α, oblíquo ou paralelo a diretriz desse cone, de modo que sua interseção ocorra, apenas, em um lado do eixo de simetria desse cone, obteremos uma hipérbole (figura 17). Assim como na demonstração da elipse, duas esferas são geradas de modo que seus contornos tangenciem, simultaneamente, a superfície interna do cone e o plano α, dessa maneira, os pontos de tangência localizados sobre o plano α são F_1 e F_2, focos da parábola.

Assim, M é um ponto qualquer da parábola, por consequência, pertence a uma geratriz do cone. Essa geratriz tangencia as esferas em dois pontos R e S, também contidos nos planos gerados pelas circunferências de contato com o cone c_1 e c_2, respectivamente. Ao contrário do caso da elipse, M não se localiza entre o segmento *RS*, mas podemos extrair a relação *MS* - *MR* = RS, considerando a propriedade das tangentes às esferas tem-se MR=MF_1 assim como, MF_2=MS. Logo, concluímos que: $|MF_1 - MF_2|$ = $|MR - MS|$ = RS, sendo assim uma diferença constante.

Figura 17. Dandelin-Quetelet – Hipérbole



Fonte: Elaborada pela autora.

2.4 Definição analítica das cônicas

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) foram responsáveis por apresentarem, a partir de uma perspectiva 'transdisciplinar', a associação da Geometria com a Álgebra. Isto é, tanto a Álgebra fora usada para solucionar problemas de Geometria como o contrário também foi possível. Tal feito contribuiu, consequentemente, com a ampliação das possibilidades de soluções para problemas no plano que envolvem as cônicas. Descartes e Fermat foram dois pensadores, que mesmo trabalhando de modo independente, porém simultâneo, contribuíram para sistematização de um novo saber, instituindo assim os princípios da geometria analítica. Esse método fundamenta-se na descrição com números e equações de um ente geométrico, tomando como referência um sistema de eixos coordenados cartesianos e apresenta-se em uma forma simbólica e objetiva (SIQUEIRA, 2009).

Esta objetividade, erroneamente confundida com simplicidade, refere-se à representação simbólica formal em oposição à representação gráfica mais subjetiva. Consideramos a ‘simplicidade’ como um termo bastante relativo e finalmente inadequado para caracterizar as representações algébricas dos entes geométricos, pois há um pulo conceitual significativo para passar da representação gráfica à essas representações simbólicas, além da complexidade da articulação entre diversas representações de um mesmo objeto. Mesmo que os cálculos com as representações simbólicas dos objetos geométricos sejam ‘simples’ e eficientes, dando ao mesmo um destaque importante no ensino da Matemática, relegando à Geometria a ter um papel de segundo plano nesse ensino, contudo, a sua interpretação é algo muito mais complexa.

Se o desenvolvimento da geometria analítica é sempre associado a Descartes e Fermat, ela foi construída ao longo dos séculos, começando na Grécia Antiga. Os trabalhos realizados por ambos traziam em comum o interesse por curvas e o uso da álgebra em problemas geométricos. Descartes aplicou em seus estudos o sistema de coordenadas cartesianas, fundamental na resolução e interpretação de gráficos. O estudo das curvas deixou de ser especulativo e passou a atribuir significado técnico ou físico ligados à óptica, como por exemplo, o formato de lentes ou a prática de lançamento de projéteis. Fermat também utilizou um sistema de eixos na resolução de problemas e dedicou-se a tradução e ao estudo dos Lugares Geométricos segundo Apolônio, mas de modo analítico. Não cabe, nesta pesquisa, discutirmos sobre o nível de suas contribuições, mas observar o que se fez e desfez com o tempo entre a representação gráfica e a equação.

A definição das cônicas com equação pela Geometria Analítica, embora seja um método de tratamento que considera, unicamente, a Geometria e a álgebra, pode ser variável conforme suas propriedades:

> Descartes afirma que para investigar as várias propriedades geométricas de uma curva é necessário que se conheça uma delas

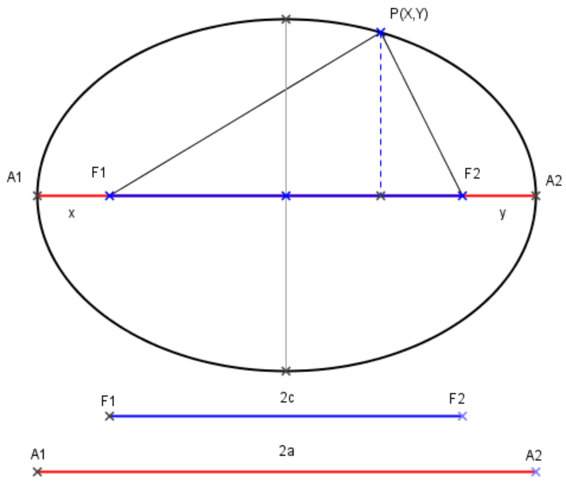
> que será usada como definição e exprimir por meio de uma equação as coordenadas de um ponto qualquer dessa curva (NETO, 2008).

Destacamos, no fragmento acima, que tal relação só é possível ao observar as propriedades métricas comuns na definição das cônicas, ou seja, a condição de lugar geométrico dos pontos da mesma. Assim, podemos extrair por meio da localização desses pontos as equações particulares e geral das cônicas.

Buscamos na literatura que versa sobre o tema, a saber, Conde (2004), Boulos e Camargo (2005), Iezzi (2013) e Venturi (2003), que tipo de definição respaldaria a equação das cônicas. Constatamos que a definição frequentemente utilizada é a Bifocal, também conhecida por Lugar Geométrico cuja soma ou diferença dos raios vetores resulta numa constante, como foi explicitado anteriormente. Desse modo, não nos cabe aqui demonstrar a dedução completa de sua equação, mas apenas ilustrar em poucas linhas como ocorre a variação de representações utilizadas para confirmar uma relação que pelo direcionamento de nossa leitura já nos é conhecida.

De modo geral, a *elipse* é apresentada como sendo o lugar geométrico do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos), resulta em uma distância constante e igual a 2a. Esta distância precisa ser maior que a distância entre os focos $(2a > 2c)$. Sendo assim, esta relação se apresenta na seguinte forma: $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$. Onde $2a$, corresponde ao eixo maior e $2c$, a distância focal, como se mostra na figura 6.

Figura 18. Elipse – esquema para tratamentos geométrico analítico



Fonte: Elaborada pela autora.

A localização geométrica dos pontos é feita a partir da relação com os eixos cartesianos x e y e com base no triângulo retângulo formado pela semidistância focal e semieixo menor, assim, por meio do teorema de Pitágoras deduz-se as tais distâncias. Por consequência, os termos quando substituídos na relação $\overline{F_1P}+\overline{F_2\,P}=2a$ e desenvolvidos, dão origem a equação da elipse: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ (CONDE, 2004). Observa-se nesta relação, que quando a se apresenta com valor numérico maior que b a elipse exibe forma alongada no sentido do eixo X, e o inverso ocorre quando for $b>a$.

O mesmo tratamento recebe a *hipérbole*, tendo como definição o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que a diferença entre as distâncias a dois pontos fixos seja constante e igual a 2a. Neste caso, a referida distância corresponde ao eixo real da hipérbole não devendo esta ser menor que 0. Assim, temos a relação escrita de modo algébrico: $\overline{F_1P}-\overline{F_2\,P}=2a$. Esta equação tem seus termos substituídos a partir da localização geométrica dos pontos, segundo um par de eixos de coordenadas x e y, o que deduz sua equação: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ (CONDE, 2004). Neste sentido, observamos que as mesmas características, comentadas na elipse, são encontradas ao comparar o valor numérico de a com b.

No caso da *parábola* a relação de distância é feita tomando como referência uma reta e um ponto, além de também considerar a relação entre os eixos x e y para a localização dos pontos e distâncias. Desse modo, entende-se por parábola o lugar geométrico de equidistância plano entre uma reta e a um ponto fixo, sendo este externo a reta. Esta relação se apresenta de modo algébrico assim: $\overline{PF}=\overline{Pr}$. De modo análogo às demais curvas citadas, a substituição dos termos desta equação por sua localização em um plano cartesiano dá origem a equação da parábola na forma: $y = \frac{1}{4p}\ x^2$(CONDE, 2004), sendo $2p$ o parâmetro da curva.

Contudo, a álgebra também nos permite traduzir sob o ponto de vista de uma única equação as propriedades gerais das cônicas por lugar geométrico, conforme a seguinte equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Logo, qualquer cônica é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas (X,Y) satisfazem a uma equação quadrática. Observamos que a partir das coordenadas de 5 pontos distintos, podemos determinar, no caso geral, os coeficientes de uma equação quadrática. Essa asserção permite afirmar que dados 5 pontos (ou 5 retas) distintos, podemos determinar uma cônica passando por esses pontos (ou tangente a essas 5 retas). As propriedades duais de Pascal e Brianchon fornecem uma versão de geometria gráfica dessa caracterização de cônica com 5 pontos ou 5 retas.

2.5 Teorema de Pascal e Teorema de Brianchon

Uma grande contribuição foi o teorema de Blaise Pascal (1623-1662). Influenciado pelas propriedades da Geometria Projetiva, Pascal desenvolveu um importante teorema sobre as cônicas, este nos diz que a partir de um hexágono qualquer inscrito numa cônica, seus lados opostos quando prolongados se interceptam em três pontos colineares. Tais pontos determinam uma reta, conhecida como reta de Pascal. A reciproca deste teorema fundamenta a construção de uma cônica como lugar geométrico conhecendo 5 dos seus pontos, como veremos mais adiante. Ao considerar o enunciado dual do teorema de Pascal: o teorema de Brianchon, e de forma mais geral, a dualidade reta-ponto no plano, podemos estender a construção de uma cônica a partir de 5 dos seus pontos à construção de uma cônica a partir de 5 retas tangentes.

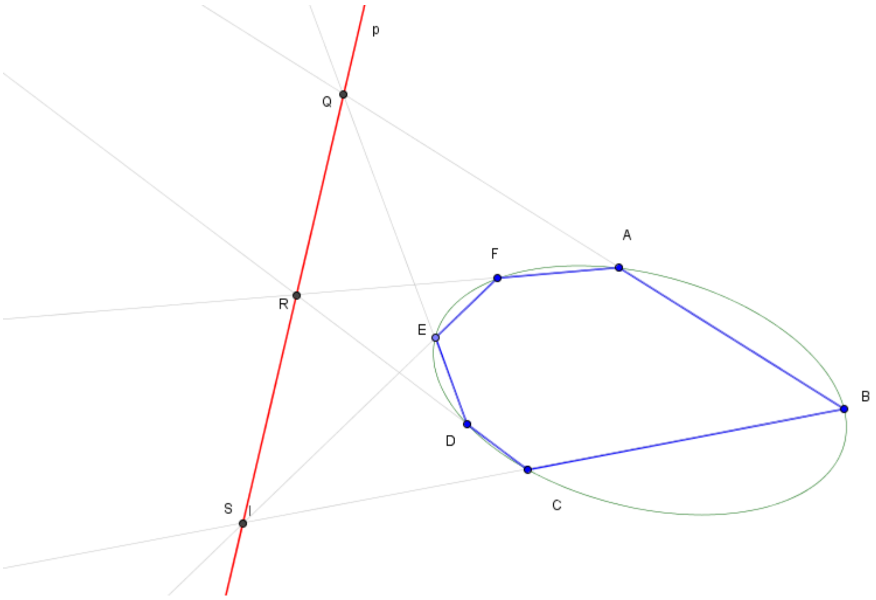
Para entendermos melhor esta seção é importante compreender os princípios da Geometria Projetiva. De modo breve, podemos dizer que a Geometria Projetiva se preocupa com a maneira como as formas são vistas considerando as deformações provenientes de um sistema de projeção, cujas propriedades não variam. Consolidou-se por volta do século XIX após os estudos de Poncelet (1788- 1867), que se voltou para o entendimento matemático do uso, antes intuitivo, da perspectiva presente em desenhos e pinturas. Vale lembrar que este estudo não "surgiu" de modo inesperado, mas outras importantes contribuições foram feitas para que se chegasse a este conhecimento. Kepler (1571-1630), dentre outros, já esboçavam um entendimento sobre uma relação geométrica que os estudos de Euclides não supriam, atribuindo o termo infinito a um dos focos da elipse quando a mesma se transforma em parábola (HEFEZ, 1989, p.37).

Contudo, esta nova visão da Geometria possui alguns axiomas que admitem a interseção entre retas e entre planos paralelos, assim como a compreensão de espaço infinito, com seus pontos e retas impróprias e o princípio da continuidade. Ainda segundo Hefez, o teorema de Desargues (1591-1661) foi o "primeiro teorema novo" desta Geometria, visto que a mesma não despreza os axiomas euclidianos, mas interpreta-os considerando uma nova ótica. Algumas contribuições foram realizadas pelo caminho que resultou na "descoberta" de Poncelet, dentre os quais citamos nesta pesquisa Pascal (1623-1662) e Brianchon (1783 -1864).

Pascal desenvolveu seu teorema sobre as cônicas por volta de 1639, aos 16 anos. Entusiasmado pelos ensaios sobre a Geometria, interessou-se desde muito jovem pelos problemas da Geometria Euclidiana e, posteriormente, pelos estudos de projetividade conforme Desargues. O ensaio de Desargues sobre a Geometria Projetiva não foi bem aceito na ocasião, por julgarem com estranheza os fundamentos. Mas posteriormente, quando ainda muito jovem Pascal teve acesso a um de seus teoremas que afirma: "se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de retas correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção de pares de lados correspondentes são colineares, e reciprocamente" (BOYER, 1996). Pascal publicou em seu *Essai pour les coniques* o seu importante teorema, mas segundo Boyer, não apresentou o enunciado pelos os caminhos projetivos, ou seja, utilizou a linguagem mais próxima do teorema de Desargues e não mencionou as retas como projetivas, oriundas de um mesmo feixe.

O Teorema de Pascal teve como dual, em 1806, o teorema de Brianchon (1783 -1864). Sendo assim, em conformidade com Correia (2011), acreditamos que esta seja uma das grandes características da Geometria Projetiva: a dualidade. Vejamos, abaixo, a representação gráfica do teorema de Pascal e em seguida o seu dual:

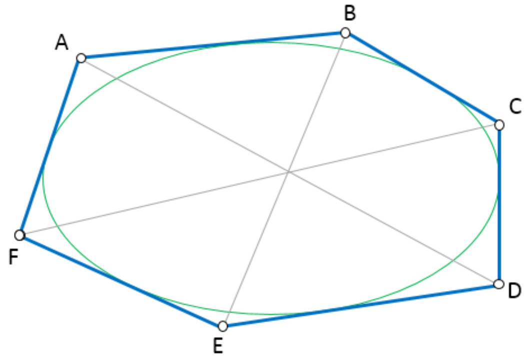
Figura 19. Teorema de Pascal



Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme observa-se na figura acima, no Teorema de Pascal que o prolongamento dos lados opostos de um hexágono qualquer, inscrito numa cônica, se interceptam em uma reta, conhecida como reta de Pascal. Sendo aqui representados como lados opostos os segmentos AB e ED, BC e EF, CD e AF. Assim, a interseção das retas que contém os lados opostos serão os pontos colineares Q, R e S, que determinam a reta p. Este teorema é também conhecido como Teorema do Hexágono Místico. Ao considerarmos o princípio da continuidade projetiva podemos dizer que esta propriedade se aplica em outras situações, onde por exemplo, o hexágono tenha lados paralelos; neste caso as retas se interceptariam num ponto impróprio.

Figura 20. Teorema de Brianchon



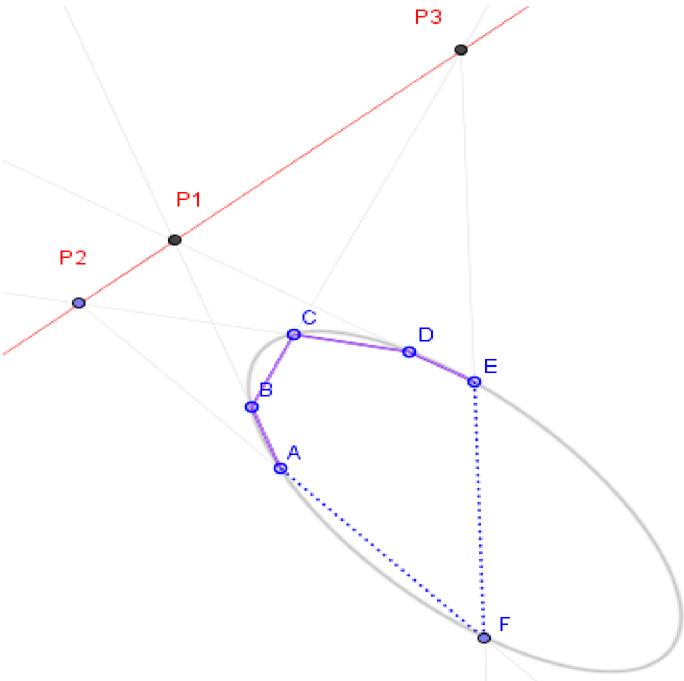
Fonte: Elaborada pela autora.

Para efeito de conhecimento, conforme a figura 8, podemos observar o teorema de Brianchon, considerado como dual do Teorema de Pascal. Este teorema afirma que um hexágono qualquer que circunscreve uma cônica, possui um ponto comum entre todas as diagonais deste hexágono.

2.5.1 Definição da curva por cinco pontos

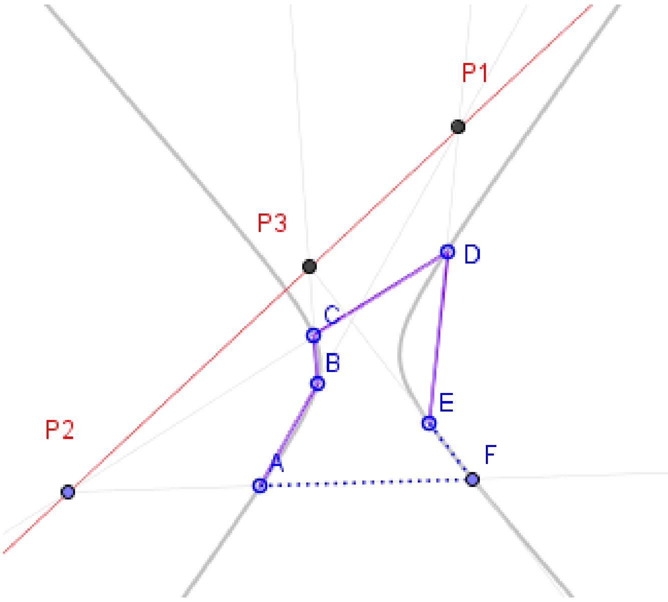
A partir do Teorema de Pascal podemos construir uma cônica conhecendo apenas cinco pontos determinados sobre o plano, desde que quaisquer de seus três pontos não sejam colineares. Tem-se, portanto, os pontos A, B, C, D e E, (figuras 9, 10 e 11), e queremos por meio deles localizar o sexto ponto da curva, conforme o teorema visto na subseção anterior. Assim, temos que os pares de pontos serão os lados do hexágono. Logo, ao considerarmos o prolongamento dos pares de lados opostos AB e DE, teremos o ponto P1. Sabemos que por este ponto passa a reta de Pascal. Assim, estendamos os segmentos CD e BC, de modo que se interceptem com a reta de Pascal, gerando os pontos P2 e P1. Estes pontos quando relacionados com os pontos E e A, dão origem ao sexto ponto procurado F.

Figura 21. Definição da Elipse por 5 pontos: elipse



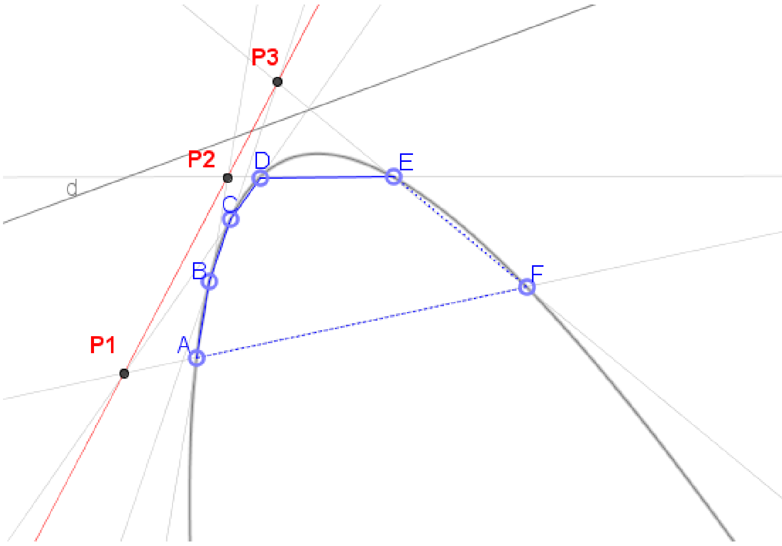
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 22. Definição da Elipse por 5 pontos: hipérbole



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 23. Definição da Elipse por 5 pontos: parábola



Fonte: Elaborada pela autora.

As definições e representações apresentadas no texto cumprem a função de ilustrar[9] a sua diversidade por um pequeno recorte nas contribuições históricas.

[9] As imagens utilizadas neste capítulo foram elaboradas com o auxílio de dois softwares: o *Geogebra* e o *PowerPoint*. Sendo o primeiro destinado a construção das imagens bidimensionais - por promover precisão no reconhecimento dos dados métricos fornecidos e propriedades utilizadas nesta etapa de ilustração do texto. E por ser um programa de Geometria Dinâmica favorece a transformação de uma situação em outra conforme o movimento dos elementos em questão. O segundo foi utilizado na

Apesar da utilização e propriedades presentes em todas as situações das cônicas até aqui apresentadas, durante a fase do experimento nesta pesquisa, contaremos apenas com as mais utilizadas em livros didáticos, visto serem as mais usualmente conhecidas e trabalhadas no âmbito escolar. A seguir conheceremos um pouco sobre a ocorrência do ensino das cônicas neste contexto e quais as definições trabalharemos.

organização das imagens tridimensionais por promover acabamento com opções de textura e matizes. Sabemos da existência de outros softwares também indicados para esta atividade, conforme veremos mais adiante, mas por questões de acesso e habilidade acreditamos que os mesmos tenham cumprido o seu papel.

3 DEFINIÇÕES, REPRESENTAÇÕES E SEUS MEIOS NO CONTEXTO ESCOLAR

Intuímos que para a compreensão das definições apresentadas nesta pesquisa são exigidos vários domínios como abstração, interpretação e visualização. Consequentemente, observa-se o uso de importantes artefatos que compõem um esquema de comunicação: as ilustrações[10], os textos, as simbologias algébricas. Além disso, a utilização de uma ferramenta computacional que nos possibilitou apresentar de modo mais simples e contínuo, tais imagens.

Todos os mecanismos citados complementam as ideias a serem transmitidas e, sem eles pouco faria sentido. Contudo, houve um grande esforço cognitivo para articulação das informações expostas em diferentes representações. O mesmo ocorre no ensino da Matemática, sobretudo na Geometria, campo do saber dependente de suportes variados para a compreensão de seus elementos. Infelizmente, tal esforço, em muitos casos, não é considerado, levando a uma ideia equivocada de que as articulações ocorrem de modo natural no âmbito escolar. Na sequência apontaremos a visão escolar sobre o ensino das cônicas.

3.1 Ensino das cônicas no Brasil

Em um processo investigativo dessa natureza muitas questões decisivas surgem para o entendimento e direcionamento do problema de pesquisa. Desse modo, achamos conveniente compreender como as cônicas têm sido ensinadas nas instituições brasileiras de ensino. Assim, contamos com a colaboração da pesquisa prévia de Bordallo, realizada em 2011, e a utilizamos para nos guiar sobre o período e o modo de ensino das Cônicas no Brasil.

O quadro 2 é uma versão simplificada sobre o histórico do ensino das cônicas no Brasil, extraída da pesquisa de Bordallo (2011). Este resultado foi obtido por meio da análise de documentos oficiais referentes à matriz escolar do Colégio Pedro II, correspondente ao período de 1892 a 1930, e de ajustes e reformas políticas educacionais, conforme visto no quadro 2. Em nossa pesquisa, procuramos enfatizar apenas os períodos em que as cônicas foram ensinadas como parte do programa de

---

[10] As ilustrações desse trabalho não obedecem às normas técnicas de um sistema de representação específico, visto que para o seu entendimento seria necessário que o leitor estivesse familiarizado com as simbologias de cada sistema utilizado. Logo, na tentativa de sermos mais abrangentes, optamos por ilustrar de modo “a sentimento”, pressupondo a leitura intuitiva do leitor.

ensino e/ou como conteúdo presente em livros base. Embora saibamos da importância do contexto político e social para a educação, por motivos de restrição de pesquisa, não foi nossa escolha enveredar por este caminho.

Quadro 2 - Histórico do Ensino da Cônicas

PERÍODO	ANOS	FORMA COMO AS CÔNICAS ERAM ENSINADAS
1892 a 1930	1892	Geometricamente unificada
	1893 e 1894	Geometricamente fragmentada
	1895 à 1898	Geometricamente unificada e Analíticamente fragmentada
	1899 à 1914	Geometricamente unificada
	1915 à 1918	Geometricamente fragmentada
	1919 à1928	Não há cônicas
	1929	Geometricamente unificada
	1930	Não há cônicas
Reforma Campos	1931 à 1941	Geometricamente unificada e Analíticamente fragmentada
Reforma Capanema	1942 à 1950	Geometricamente unificada e Analíticamente fragmentada
Ajuste de 51	1951 à 1960	Geometricamente unificada
M.M.M.	1961 à 1979	Analiticamente unificada

Fonte: Bordallo, 2011, pág. 11

Contudo, apresentamos dados de mais de um século de ensino das cônicas no Brasil. E podemos concluir que este ocorreu de modo alternado e irregular, ou seja, variando entre a *unificação* e a *fragmentação* do modo de se ensinar a temática, assim como, considerando a ênfase nos aspectos geométricos e algébricos da mesma. Vale lembrar que consideramos o termo unificação como o ensino que apresente a ligação entre as diferentes curvas (elipse, hipérbole e parábola), pertencendo a uma mesma origem[11], e o termo fragmentação, foi entendido como o ensino que apresente ausência da relação de origem das curvas, ou seja, o tratamento isolado das mesmas. Segundo Bordallo (2011, p. 11), de modo geral, esta variação ocorria de acordo com a condição sintética ou analítica de trabalhar as cônicas, sendo unificada quando vista sinteticamente e fragmentada, quando analiticamente.

É inegável a importância do livro didático como um dos principais suportes no direcionamento do ensino, na prática brasileira. Sabemos também, que uma busca e

[11] Consideramos a origem das cônicas segundo o Teorema de Apolônio.

análise de todas as publicações existentes em mais de um século de educação formal seria inviável, pelo fator tempo e direcionamento de pesquisa. Além do que, muitos dos livros utilizados no início da formação da educação brasileira, tinham origem estrangeira como Portugal, Espanha e França, o que tornaria cada vez remoto o nosso estudo. As cônicas aparecem nesse contexto, aplicadas nas Academias Militares de artilharia e fortificações. Somente, no século XIX, este conhecimento é herdado pelos cursos do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, que ficou conhecido como marco e referência na educação nacional, conforme destaca Bordallo (2011). Desse modo, traremos aqui dados de pesquisas já realizadas como pressupostos para darmos continuidade a nossa. Sendo assim, Sebastiani Ferreira e Paques (2011), assim como Bordallo (2011), fazem uma análise sobre os livros mais influentes e utilizados no Brasil, contendo o assunto. Destacamos, a seguir, alguns livros e os modos de apresentação das cônicas.

Quadro 3 - Definições usuais das cônicas

ÉPOCA	PERÍODO	ANO	LIVRO	APRESENTAÇÃO DAS CÔNICAS	DEFINIÇÃO UTILIZADA
1892 à 1930	1895 à 1898	1965	SONNET, H. e FRONTERA,G. – Geometria Analítica	Analiticamente unificada	Definição focal; Estudo por Lugar Geométrico; Equação (estudo algébrico das cônicas); Teorema de Dandelin e a recíproca do Teorema.
REFORMA CAMPOS	1931 à 1941	1938	MELLO E SOUZA, J. C. – Geometria Analítica – V.1	Analiticamente fragmentada	Definição focal; Definição foco, diretriz e excentricidade; Equação (estudo algébrico das cônicas);
			PEIXOTO, R. – Elementos da Geometria Analítica	Analiticamente unificada	
REFORMA CAPANEMA	1942 à 1950	1844 1948	CARVALHO, T. M.- Matemática para Clássico Científico	Geometricamente unificada e Analiticamente Fragmentada	Definição focal; Excentricidade; Círculos diretores e principal; Teorema de Dandelin e a recíproca do Teorema; Definição pela diretriz.
			MAEDER, A. M.- Curso de Matemática		
AJUSTE DE 1951	1951 à 1960	1953	ROXO; PEIXOTO; CUNHA; DACORSO NETTO – Matemática 2º Ciclo	Geometricamente unificada	Definição focal; Excentricidade; Círculos diretores e principal;

			MAEDER, A. M.- Curso de Matemática		Teorema de Dandelin.
			CARVALHO, T. M.- Matemática para Clássico Científico		
M.M.M.	1961 e 1979	1964	SMSG. – Matemática Curso Colegial	Analiticamente unificada	Definição focal com abordagem analítica - equação reduzida.
		1976	CASTRUCCI, B.; ROSA NETO, E,; MENDONÇA, E. R.; SMITH, M.L. – Matemática 2º grau	Analiticamente fragmentada	
		1979	BOULOS, P.;WATAN – ABE,R. – Matemática 2º Grau		
ATUAL	1980 à 1989	1985	IEZZI E OUTROS, Fundamentos da Matemática Elementar	Analiticamente fragmentada	Definição focal; Equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos.
	1990 à 1998	1996	BIANCHINI, E. e PACCOLA, H. - Matemática		Definição focal; Equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; Corte do cone que gera a cônica.
	1999 a 2015	1999	DANTE, L. R. – Matemática Contexto de Aplicações		As seções são estudadas separadamente: Corte do cone que gera a cônica; Definição bifocal; Equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos.
		2001	GIOVANNI, J.R. e BONJORNO, J.R. – Matemática Uma Nova Abordagem		
		2005	SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. – Matemática Ensino Médio		
		2006	IEZZI, G. – Matemática: Ciência e Aplicações		
		2008	DANTE, L. R. – Matemática		
			PAIVA, M.- Matemática		
			GOULART, M. C. – Matemática no Ensino Médio		
		2009	YOUSSEF, A. N.; SOARES, E. e FERNANDES, V. P. – Matemática		

		2011	RIBEIRO, J. – Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia 3 volumes		
		2013	IEZZI, G. – Matemática: Ciência e Aplicações		Apolônio é citado e, em seguida, apresenta-se o corte do cone; Definição Bifocal Excentricidade; Equação com eixos na origem e fora da origem.
		2013	LEONARDO, F. M. – Conexões com a Matemática		Apolônio é citado e, em seguida, apresenta-se o corte do cone; Definição Bifocal; Excentricidade; Equação com eixos na origem
		2013	PAIVA, M.- Matemática		Apolônio é citado e, em seguida, apresenta-se o corte do cone; Definição Bifocal; Excentricidade; Equação com eixos na origem e fora da origem.
		2013	SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. – Matemática Ensino Médio		Apolônio é citado e, em seguida, apresenta-se o corte do cone; Definição Bifocal; Excentricidade; Equação com eixos na origem
		2013	SOUZA, J.R. Novo olhar Matemática		Apolônio é citado e, em seguida, apresenta-se o corte do cone; Definição Bifocal; Equação com eixos na origem e fora da origem.
		2014	DANTE, L. R. – Matemática Contexto de Aplicações		Corte do cone; Definição Bifocal; Excentricidade; Equação com eixos na origem e fora da origem.

Fonte: Baseado em Bordallo (2011).

O quadro 2 é uma adaptação dos resultados obtidos em Bordallo (2011), onde destacamos as informações que, julgamos ser para o nosso estudo, as mais relevantes. Desse modo, expomos as definições mais frequentes segundo o modo de apresentação das cônicas e o seu contexto educacional. Conforme Bordallo (2011), a análise dos livros por período ocorreu do seguinte modo:

> [...] como escolher os livros para analisar nesse capítulo? Pensando nesse problema resolvemos buscar a solução nas produções do Grupo de História do Ensino de Matemática (GHEMAT), por ser um grupo que pesquisa sobre a história do ensino de matemática, o mesmo que estamos pesquisando. Este grupo produziu um DVD com livros didáticos de 1930 à 1980, o DVD A MATEMÁTICA DO COLÉGIO: LIVROS DIDÁTICOS PARA A HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA. Após 1980, nossas referências de livros didáticos são os Programas Nacionais do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) de 2006, 2009 e 2012, então no período de 1981 à 2006 pesquisamos livros didáticos de autores já mencionados até 1980 e dos autores presentes nos PNLEM. (BORDALLO, 2011, p. 12.)

A ideia de Bordallo (2011) foi bastante interessante, contudo sua pesquisa foi realizada há 4 anos, sendo necessária sua complementação em o nosso trabalho. Seguindo a mesma intenção, buscamos, nas várias edições do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), referências aprovadas para o Ensino Médio que tratassem do objeto matemático tema da presente investigação, ou seja, as Cônicas.

Desse modo, após a análise complementar, percebemos uma frequência na utilização de algumas definições: podemos destacar a definição focal, como a mais utilizada, sendo esta apresentada tanto de modo sintético como analítico, entretanto, percebemos que o modo analítico é o mais frequente para a representação da definição focal. Podemos ainda destacar a definição por excentricidade e o Teorema de Dandelin como conceitos importantes na constituição da ideia de unificação das cônicas e presentes nos livros citados. A presença de ilustrações que mostram as seções do cone e obtenção da curva, rememorando o teorema de Apolônio são outros aspectos que merecem destaque.

A partir dos estudos de Bordallo (2011) e Sebastiani Ferreira e Paques (2011), concluímos que o ensino atual das cônicas, quando visto, ocorre de maneira fragmentada, apesar de todo valor histórico e oscilações no modo de apresentação. Em nosso trabalho, bem como nas demais referências citadas, apresentamos um pequeno histórico onde, inicialmente, as cônicas eram apresentadas separadamente, após Apolônio esta apresentação passou a ser unificada, assim como, no período introdutório do estudo analítico, que vigorou com a mesma ótica e, posteriormente, com os escritos de La Hire, fragmenta-se mais uma vez a sua abordagem. Por fim, a partir do teorema de Dandelin, temos o modo de apresentação das cônicas unificado novamente.

Todas as obras analisadas por Bordallo (2011) trazem a definição focal como a principal, embora que, em alguns casos, durante a leitura se perceba o complemento de mais alguma outra definição. Bordallo (2011) complementa a ideia trazida por Lebesgue, no livro *“Les Coniques*”, em que o mesmo afirma não fazer sentido uma visão fragmentada das cônicas pela definição focal, em que temos casos separados como soma e a subtração entre os pontos da curva e o foco e, por fim, sem maiores explicações, é considerada a igualdade das distâncias entre o foco, a curva e uma reta.

> Para ele, seria melhor dar a definição em termos de diretriz, foco e excentricidade. Nesta definição se vê que as curvas pertencem a uma mesma família, pois a curva obtida depende da excentricidade se positiva, menor, igual ou maior do que 1. (BORDALLO,2011, p.28.)

Percebemos que, com o passar das fases e contextos históricos e sociais na educação, detalhes importantes sobre o estudo das cônicas foram se perdendo, e de modo geral podemos concluir que isso tenha corroborado para o ensino cada vez mais superficial das mesmas.

Bordallo (2011), ao citar as grandes perdas no ensino das cônicas, ainda aponta o prejuízo após a ênfase da algebrização da geometria, proposta pelo Movimento Matemática Moderna. Este movimento indicou o modo analítico como linguagem mais apropriada e, por consequência, exterminou a abordagem do teorema de Dandelin, de suma importância na compreensão unificada das cônicas e, de fácil entendimento, em sua abordagem sintética, conforme exposto anteriormente.

Contudo, o teorema de Dandelin foi frequentemente encontrado nos livros em que se fazia alguma relação entre as cônicas. Acredita-se que a exclusão desta abordagem nas obras atuais se deve a maior complexidade no seu entendimento analítico do que no sintético. Podemos entender que, conforme Bordallo (2011), as abordagens frequentes se davam do seguinte modo:

Quadro 4- Conclusão das abordagens das cônicas

Abordagem Unificada	
Tratamento Sintético	Teorema Dandelin
Tratamento Analítico	Diretriz, foco e excentricidade
Abordagem Fragmentada	
Tratamento Analítico	Distância Focal
Tratamento Analítico	Estudo analítico para obtenção da equação reduzida das cônicas.

Fonte: Baseado em Bordallo (2011).

Assim, percebemos a importância da representação gráfica no contexto sintético e o seu papel na compreensão de modo unificado das cônicas. E dessa maneira, justificamos a escolha de considerarmos em nosso trabalho, as definições que se utilizam da distância focal, equidistância entre a circunferência e foco, a representação analítica da definição por distância focal, a excentricidade da curva e, como não poderíamos ignorar, no contexto tecnológico do nosso trabalho, a definição por cinco pontos, extremamente presente na linguagem virtual da geometria dinâmica. Portanto, as consideramos como as mais usuais no ensino formal brasileiro.

Ainda na conclusão do seu trabalho, Bordallo (2011) aponta uma possibilidade de sequência de ensino, até então não experimentada. A sua sugestão segue uma abordagem analítica, unificada e de fácil entendimento, porém nosso interesse investigativo segue o caminho da Geometria Gráfica, pois conforme vimos, nos livros citados, o tratamento sintético nos permite e promove uma compreensão unificada das cônicas e a interação com outras definições e representações.

Esta análise foi de grande importância para compreendermos como as cônicas têm sido ensinadas nas escolas brasileiras, contudo, nos questionamos acerca do que foi realmente aprendido da temática pelos estudantes que chegam à universidade. Como vimos, o ensino está cada vez mais fragmentado e superficial, o que não permite ao alunado um avanço de tais conceitos de imediato, principalmente, quando ingressados ao ensino superior. Ou seja, a adaptação aos “novos conceitos” demora e exige tempo e preparação também do professor. Sendo assim, buscaremos na compreensão sobre o uso de diferentes representações semióticas contribuições para atenuar ou entender como ocorrem essas barreiras.

3.2 A escola e as múltiplas representações: o ensino que afugenta o elo

A Matemática passou por várias reformulações, entre contestações e corroborações, ao longo de sua história e, com isso, símbolos e significados foram atribuídos as suas releituras. A Matemática e, sobretudo, a Geometria se pauta nessas abstrações simbólicas, como um veículo de ligação entre o plano material e o ideal. E, desse modo, atendem a uma necessidade prática ou teórica, contudo, isso pode também se constituir em dificuldade para a sua compreensão. Na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRSS), Raymond Duval (2011) aponta para o fato de que a ausência do reconhecimento das diferentes formas representativas contribui para o insucesso na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Logo, segundo ele:

> A matemática é o domínio do conhecimento no qual existe quase sempre, se não sempre, prioridade das representações sobre os objetos do conhecimento. E o ensino da matemática lembra brutalmente aos professores que a distinção entre os objetos matemáticos e suas múltiplas representações constitui uma das principais dificuldades de compreensão na aprendizagem. (DUVAL, 2011, p. 34)

Na escola nos deparamos com algumas dificuldades na passagem da escrita algébrica para a gráfica ou o inverso. Outro fator de dificuldade é a representação mental de elementos a partir da sua forma verbal que requer um processo de abstração e interpretação própria, com a exigência universal do ente matemático. Entre outros aspectos abordados no ensino curricular da matemática, esse conhecimento torna-se bastante frequente no ensino da Geometria.

Duval, apud Siqueira (2009) afirma em seu artigo "*Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres"* (Gráficos e equações: a articulação entre dois registros) que é muito mais frequente a solicitação da passagem da equação algébrica para o gráfico, que o inverso; no entanto, os maiores os obstáculos são encontrados no caminho reverso.

Siqueira (2009) afirma que uma causa provável para as dificuldades encontradas nesta articulação ocorre pela escolha de um único tipo de "passagem do algébrico para o gráfico" presente em livros didáticos e replicada pelo professor. Do mesmo modo, nota-se também a frequência das representações em fórmulas algébricas no estudo das formas e figuras geométricas, desprezando assim, as suas propriedades matemáticas. Tal realidade pode ser conferida nas palavras de Schwertl, quando afirma:

> Geralmente, quando se ensina Geometria Analítica, alguns lugares geométricos são lembrados muito superficialmente; o professor os cita e mostra um esboço gráfico que auxilia nas investigações analíticas. Feita a demonstração de uma fórmula ou uma propriedade, professor e alunos abandonam o desenho ou a representação gráfica e estudar Geometria Analítica acaba resumindo-se em apenas decorar fórmulas (SCHWERTL, 2012, p.3).

Neste sentido, Neto (2008) endossa a ideia, ao considerar que apesar de todo o interesse histórico pelo conteúdo das Cônicas, hoje, pouco se estuda sobre elas no ensino básico e médio. Em sua maioria, os livros apontam para uma abordagem voltada para o modo analítico e as formas, quando vistas, se faz de modo isolado. Segundo esses autores, a parábola é vista com mais frequência, devido a sua aplicação no conteúdo de funções de segundo grau ou quadráticas, porém, sua abordagem não é relacionada ao aspecto tridimensional de sua origem, nem tão pouco vinculadas as demais cônicas. Ou seja, a visão das cônicas é oferecida de modo fragmentado, podendo muitas vezes acarretar em uma aprendizagem distorcida. Outro fator importante é que, comumente, ao se ensinar sobre as cônicas, este é feito de modo superficial e ligeiro, seguindo uma sequência pouco inusitada.

Tal fato, também decorre das reformulações históricas no currículo escolar, principalmente, no ensino da Geometria (GALVÃO e BELLEMAIN, 2013). Por consequência, presume-se que muitos alunos chegam ao nível superior sem o domínio das representações necessárias para uma boa fluência em disciplinas que necessitem de tais conhecimentos. Contudo, é de nosso interesse investigar tais dificuldades, nos campos didático, cognitivo e epistemológico, e para isso, consideraremos a importância da representação semiótica nesse processo. Sendo assim, nas próximas linhas, conduziremos uma breve discussão sobre a representação e seu papel mediador na compreensão do mundo.

3.3 Representação: veículo de acesso ao mundo

Etimologicamente, ‘representação’ provém da forma latina ‘repraesentare’ – ‘fazer presente’ ou ‘apresentar de novo’. É fazer presente alguém ou alguma coisa ausente, mesmo uma ideia, por intermédio da presença de um objeto (FALCON, 2000 apud REIS; BELLINI, 2011). Desse modo, podemos citar como exemplo a utilização de um material concreto manipulável, para nos referir a uma forma geométrica, visto que um pertence ao mundo físico e outro ao mundo das ideias. Sendo assim, segundo Japiassu e Marcondes (2001) representação é uma:

> Operação pela qual a mente tem presente em si mesma uma imagem mental, uma ideia ou um conceito correspondendo a um objeto externo. A função de representação é exatamente a de tornar presente à consciência a realidade externa, tornando-a um objeto da consciência, e estabelecendo assim a relação entre a consciência e o real. (JAPIASSU E MARCONDES, 2001, p.166).

Para Piaget a representação possui um papel especial na *construção do conhecimento* - razão da sua Teoria da Equilibração. Este estudo indica que a formação do conhecimento é dada por processos de equilibração e desequilibração recorrentes, resultando na construção ou ampliação de esquemas mentais, que podem ser de *ação* ou de *representação*. Os esquemas de representação são modelos mentais que traduzem objetos reais, e estão relacionados ao conceito.

Para Piaget, a Representação é a capacidade de pensar um objeto através do outro. Segundo esta teoria, a construção de um novo conceito sobre um objeto se faz pelo conhecimento de suas características principais e não em sua totalidade, pelo indivíduo. Segundo Japiassu e Marcondes (2001), “a principal dificuldade parece ser o pressuposto de que a consciência seria incapaz de apreender diretamente o objeto externo”. Logo, podemos dizer que a representação decorre de um processo de abstração[12].

3.3.1 A representação e a semiótica

Conforme o exposto, podemos intuir como são inesgotáveis as pesquisas que destinam seu interesse a algum tipo de Representação, seja simbólica, mental, social

---

[12] O termo abstração deriva da forma latina Abstrahere e significa “destacar, afastar de, puxar fora”, com a noção de “afastamento”. O que indica que a representação é um afastamento de uma realidade para buscar em outra a presença de algo.

ou relacional. Do mesmo modo, também percebemos que o seu uso precede desde a mais antiga manifestação humana registrada em cavernas por nossos ancestrais, assim como em cerimônias e ritos, sistemas de escrita, numeração, arquitetura e em diversas modalidades artísticas.

Assim, a comunicação de ideias por meio de signos nos sugere um capítulo especial na história das representações. Muitos dos estudiosos do século XIX e XX, entre eles Ferdinand de Saussure (1857-1913), Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) e Charles Sanders Peirce (1839-1914), desenvolveram modelos que influenciam ainda hoje os pesquisadores e teóricos sobre este contexto. Cada um dos citados interessou-se por uma área distinta da semiologia: a linguagem, a matemática e a relação entre representação e seu significado, respectivamente. Sendo assim, para entendermos a Representação como manifestação simbólica, recorreremos a sua base fundamental, a Semiologia ou Semiótica. Para tanto, seguiremos com a Semiótica Peirciana, sendo esta a que mais se aproxima do nosso estudo.

Para uma melhor compreensão desta teoria se faz necessária a elucidação de alguns conceitos. Segundo Santaella (2007, p. 13):

> A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido.

A Semiótica preocupa-se com as *relações* dos signos e a sua lógica, sendo esta, uma relação de significação entre o signo e seus objetos. Assim, entendamos signo, como sendo alguma coisa[13] que representa algo para alguém (PEIRCE, 2005, p. 46); e representação como "estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro, que, para certos propósitos, seja considerado por uma mente como se fosse esse outro". (Idem, p. 61)

Para fundamentar sua teoria, Peirce considerou todo o processo de formação do pensamento e distinguiu o pensamento espontâneo (livre e imediato) do racional (dotado de interpretações e lógica). Chegou à conclusão de que a natureza de todo o pensamento espontâneo divide-se em apenas três categorias: *Primeiridade*, que nos

---

[13] A palavra "coisa", neste contexto, convém para designar algo isento de matéria física ou forma simbólica constituída de significado.

remete ideia de acaso, sentimento, originalidade, imediaticidade e de espontaneidade – antes denominada Qualidade; *Secundidade*, que refere-se à ação-reação dos fatos concretos e reais, conflito, esforço e resistência – antes conhecida como Reação; Terceiridade, reserva-se à generalidade, mediação e representação, onde os signos aparecem – a qual chamou anteriormente de Representação.

A Semiótica Peirciana constitui-se de três elementos fundamentais, formando uma tríade: *objeto – signo – interpretante*. Basicamente, um ciclo que se retroalimenta em função da nossa relação com o mundo. Assim, o objeto é algo composto de forma física, ou não, e possui significado passível de interpretação, como um fenômeno; o signo é um pensamento mediador entre nós e o fenômeno, podendo ser uma representação mental, ação ou experiência; e o interpretante é o processo mental do intérprete que promove as relações entre o objeto e o signo. Para este autor, é pelo processo de uma representação por meio de outra, que interpretamos e reconhecemos o mundo.

Ressaltamos a importância de esclarecer, brevemente, outros conceitos bastante propensos a falsas interpretações, ou seja, passíveis de serem confundidos pela semelhança de sua terminologia, como: *signo – significado – significante*. O signo representa algo; significado é conceito sobre alguma coisa; o significante é a parte material do signo. Por analogia, podemos citar o exemplo da cadeira. Logo, a cadeira é a *coisa* (significante); a *imagem* que vemos da cadeira seja ela concreta, foto ou desenho é a *representâmen*[14]; e o significado que atribuímos a cadeira é outro signo, outro juízo. Desse modo, podemos dizer que um signo pode possuir naturezas e significados diferentes. Em resumo, a Semiótica estuda as linguagens em suas diferentes naturezas; e a linguagem acima de tudo é comunicação de ideias. Logo, somos seres de linguagens e vivemos num mundo em que cada vez mais explora seus códigos.

[14] Termo criado por Peirce para designar aquilo que representa, sendo assim, diferente de representação que é o ato de representar.

3.3.2 A representação na Matemática: Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Na matemática, é frequente o uso de representações para mediar a compreensão dos elementos e conceitos abstratos. Os objetos matemáticos são inacessíveis diretamente, ou seja, só podemos percebê-la por meio de símbolos. Igualmente ocorre com as figuras geométricas, pois ambas pertencem ao mundo das ideias ou das essências, como pudemos compreender no capítulo anterior ao estudar as definições por suas diferentes representações.

Embora receba influência de outros teóricos, a Semiótica Peirciana é a que mais se aproxima e contribui com o estudo sobre do conhecimento matemático do filósofo francês, Raymond Duval. Duval se propôs a explicar em sua teoria qual a influência dessas representações no processo de aquisição de um novo conhecimento. Para tanto, precisou entender o que é o conhecimento matemático e o que ele pode ter de diferente em relação a outros conhecimentos. Assim, desenvolveu o que chamou de Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS (2009).

Para Duval (2013, p. 10), "As dificuldades de compreensão na aprendizagem não estão relacionadas ao conceito, mas à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso "confuso" que fazem delas". Como já vimos, existem sempre representações possíveis para um mesmo objeto, permitindo diferentes e precipitadas interpretações. Sendo assim, as dificuldades foram classificadas em dois tipos por Duval: *Dificuldades locais* **–** de curto prazo ou relacionada a um novo conhecimento e; *Dificuldades globais e recorrentes* – de longo prazo ou apresenta-se com o fechamento de um ciclo, currículo. Porém, há casos em que ambas podem ser confundidas, pois emergem na realização de atividades.

No entanto, conforme a teoria, a Representação jamais deve ser confundida com o seu signo. Entendemos neste contexto, representação como sendo frases, figuras geométricas, esquemas; e signo, como unidades elementares de sentido, coisas pelas quais é preciso dar sentido, como pontos, letras e traços. A relação entre ambas deve ser apenas de referência, e não de substituição. Sendo assim, Duval afirma que o conhecimento começa com a sensibilização desta questão (DUVAL, 2011, p.16 e 17). Assim, o mesmo autor, classifica os registros em dois tipos -

registros multifuncionais e *registros monofuncionais,* sendo o primeiro não algoritmizável e o segundo, principalmente tratado por algoritmo; e para cada um dos registros, o autor, sugere os dois tipos de representação: *discursiva* e *não discursiva*; onde a primeira é passível de argumentação em linguagem natural ou algébrica e a segunda, linguagem gráfica e gráfico-analítica, conforme o tipo de registro. Vejamos o detalhamento das informações no quadro 4.

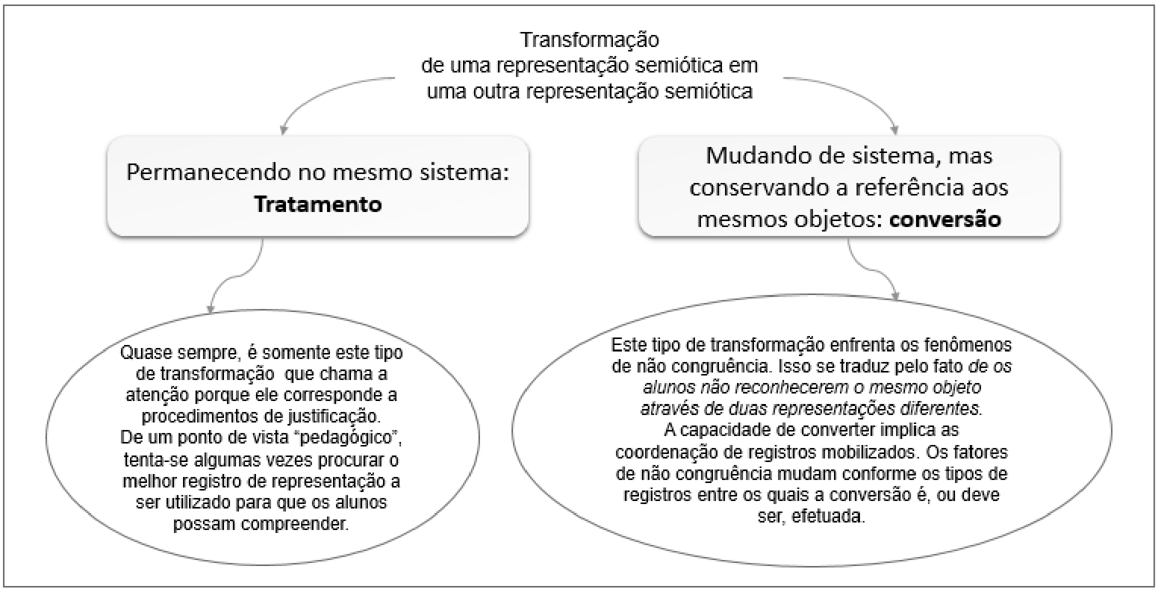
Quadro 5 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3) • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudança de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2013, p.14.

Consequentemente, a TRRS defende um ensino que favoreça a alternância entre os diferentes registros de representação, de modo que o sujeito possa se relacionar mais amplamente com os conceitos, e não o seu enclausuramento. Uma das grandes contribuições desta teoria é o fato de reconhecer que o conhecimento matemático não pode ser adquirido como nas demais disciplinas do currículo, pois seus fenômenos não podem ser percebidos diretamente, mas somente por meio da formação de uma sensibilidade matemática. Desse modo, o conhecimento só pode estabelecer-se sobre determinado conteúdo se o sujeito for capaz de articular entre ao menos duas representações, por meio de duas *transformações*: o *tratamento e a conversão* dos registros.

Quadro 6 - A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas



Fonte: DUVAL, 2013, p.15.

Assim, assume-se como *tratamento* – a transformação em que não se faz necessário sair do sistema, como o exemplo: a utilização das propriedades de simetria para completar uma figura, ou seja, trabalhamos com o mesmo tipo de registro nas soluções e justificativas; enquanto que a *conversão* é a transformação em que há a mudança de sistema, porém o objeto matemático é conservado, como por exemplo, o gráfico de uma função e a sua representação algébrica. Para tanto, percebemos um grande esforço cognitivo no ato de converter. Matematicamente, a conversão nada mais é que uma operação que recai sobre um tratamento, ou seja, convertemos para tratar determinada situação, apenas como uma decodificação. Por outro lado, a conversão, se vista pelo olhar da cognição, é uma operação fundamental e, segundo Duval (2013, p. 16) é "aquela que conduz aos mecanismos subjacente à compreensão".

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em

> consideração, em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL, 2013, p. 17)

O mesmo autor afirma que a diferenciação dessas transformações pouco é considerada na análise da produção dos alunos. Este fato se deve a não compreensão da face oculta da matemática, pois, não é evidente como uma demonstração ou justificativa, mas sim nebulosa e individual, como os *gestos intelectuais*.

Duval (2013) afirma que para qualquer tipo de conversão é possível percebermos dois fenômenos: as variações de congruência e de não congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Ocorre a congruência, quando “a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação”; a não congruência ocorre quando “ela não transparece absolutamente”. Desse modo, as relações de não congruência tornam as dificuldades na compreensão da matemática mais fortes.

A complexidade de uma conversão se deve ao fato de que o registro de representação exerce um papel mais importante, na compreensão, do que o próprio objeto representado. Ou seja, compreender o objeto em sua totalidade, sem um suporte que nos aproxime das suas propriedades, é imensamente difícil, pois o único veículo de acesso a este objeto são os registros de representação que fazemos dele. Porque, segundo Duval (2013),

> passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. [...] É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro. (DUVAL, 2013, p.22)

É nesse sentido, que pensamos o uso da tecnologia computacional em nossa pesquisa, o que nos possibilitará unir várias representações de um mesmo objeto matemático, dotado de vários conceitos, privilegiados parcialmente por cada registro, de modo que o sujeito possa articular suas compreensões entre eles.

3.3.3 As representações em meio digital: escolha de um software

É fato que a tecnologia ocupa cada vez mais espaço na vida humana, trazendo seus benefícios a diferentes áreas de conhecimento. Suas aplicabilidades têm motivado o interesse por diversas pesquisas, o que não é diferente na educação. Sendo assim, o uso investigativo de situações que envolvem ambientes virtuais é comumente estudado em trabalhos no mundo todo.

Os benefícios são muitos para o ensino da Matemática, principalmente, ao que se reserva a Geometria que se utiliza frequentemente de representações e simulações do que é por princípio abstrato. Sendo assim, o uso de um software de geometria dinâmica, em uma simulação planejada, resgata e valoriza o sentido puro e primitivo da Geometria em detrimento ao tão questionado "passo a passo", de modo que seus conceitos sobressaiam, levando o usuário à reflexão. Assim, conforme Siqueira (2009):

> [...] os estudos evidenciaram que o uso de uma ferramenta computacional favoreceu tanto os professores - na observação e análise dos fenômenos ocorridos na pesquisa - quanto os alunos, por exemplo, na percepção de fenômenos através da visualização e experimentação por meio das variações realizadas no gráfico e na equação simultaneamente proporcionada pelo tratamento dinâmico dos objetos matemáticos, favorecendo desse modo a constatação de regularidades e a construção de conceitos. SIQUEIRA (2009, p. 61)

Desse modo, temos nesses ambientes a possibilidade de simular situações que levariam tempo e habilidade para serem construídas com os instrumentos clássicos de desenho e/ou demandariam um esforço cognitivo maior na representação mental da situação. Ou seja, também facilita em termos de tempo, precisão de traçado e elaboração de estratégias firmes, de modo a ser validada ou não a construção da situação proposta.

Como vimos anteriormente, encontrar um único registro de representação que contemple todos os aspectos conceituais de um mesmo objeto matemático é praticamente impossível, principalmente, quando este objeto foi demasiadamente estudado ao longo de toda a história da matemática, como é o caso das cônicas. Para tanto, contamos com a tecnologia e suas possibilidades de simular situações. Assim, a criação de uma simulação que favoreça a reflexão cognitiva do sujeito acerca das propriedades matemáticas tornou-se um desafio.

Alguns aspectos nos direcionaram nessa busca:

- Precisávamos encontrar uma ferramenta que possibilitasse as representações gráficas e algébricas, simultaneamente — tendo em vista que o aluno pudesse apreciar e confrontar as concepções e propriedades presentes em cada caracterização distinta, de modo a formar suas conjecturas a partir do que nelas "fossem alteradas", considerando que uma grande dificuldade, segundo a TRSS, está na articulação entre estes dois registros;
- As representações gráficas contempladas deveriam mostrar caracterizações planas e espaciais, ou seja, a projeção ortogonal da situação matemática e o gráfico da curva em perspectiva cilíndrica — estas duas caracterizações embora façam parte de um mesmo tipo de registro segundo a TRRS, são distintos e dotados de uma linguagem própria e complexa. Apesar de não ser destacada na TRRS, percebemos a necessidade de investigar o quão difícil é passagem entre o mesmo tipo de registro com dimensões diferentes (2d e 3d), pois o número de operações mentais necessárias para tal articulação torna bastante complexa a compreensão de seus elementos.
- Todos os registros representados deveriam estar interligados, para que o sujeito apreciasse suas propriedades contempladas em cada uma das representações — objetivamos com isso provocar no sujeito a interação entre as caracterizações. Fazendo com que o mesmo perceba que apesar de diferentes, elas se complementam, assim como fazem parte de uma mesma concepção matemática e, o que é alterado em uma caracterização, se modifica a outra. Espera-se que o sujeito perceba quais são os pontos de vistas isolados, mas que se complementam nas observações dos seus elementos e propriedades.
- O software deveria permitir a manipulação virtual dos registros — Com base nas observações sobre os livros didáticos que apresentam o conteúdo, em sua maioria, de modo fragmentado e estático. Assim, propusemos uma simulação que possibilita, antes de tudo, a interação do sujeito com a forma abstrata. Esta abstração é representada por caracterizações diferentes, que pressupomos

facilitar, em princípio, a visualização de determinadas propriedades implícitas através da sua representação.

Desse modo, buscamos uma ferramenta que nos atendesse diante das necessidades já descritas. Primeiramente, pensamos em softwares que propusessem a articulação entre representações distintas, e em seguida, precisaríamos de informações matemáticas precisas, ou seja, pautadas em fundamentos geométricos, que apresentasse uma interface simples. Assim, alguns softwares, com tais características, foram considerados em nosso estudo: o *Cabri Géomètre II* - Plus bidimensional e a sua versão tridimensional, o *GeoGebra*, também nas versões bi e tridimensional, e o *SketchUp*.

Sendo assim, o quadro 7 apresenta os destaques de algumas características observadas dos softwares elencados:

Quadro 7 - Análise dos softwares

SOFTWARES	QUALIDADES	LIMITAÇÕES
Cabri Géomètre II Plus	Permite a interação do usuário com o objeto, por meio da manipulação das representações, validadas por fundamentação geométrica; Admite a construção de animações; Favorece a verificação de propriedades por meio de situações matemáticas pré-definidas; Permite a visualização da equação do elemento representado; Assim como, a obtenção de um eixo de coordenadas cartesianas; Permite a subdivisão da tela principal e, consequentemente, a amostragem de situações interligadas; Permite a visualização de elementos tridimensionais, apenas se construídos conforme as características do sistema de representação utilizado, ou seja, bidimensionalmente, dando-nos a	Não é gratuito; A complexidade em se criar uma representação tridimensional, principalmente em articulá-las à demais representações; Requer conhecimento prévio de suas ferramentas, não sendo intuitivo. Não permite a manipulação dos dados algébricos e gráficos ao mesmo tempo; Em algumas situações o software não permite a amostra da equação referente a situação cônica (degenerada); Igualmente ocorre na representação do gráfico cartesiano, na perspectiva e na representação ortogonal, onde a curva (degenerada) não aparece na área de trabalho;

	impressão de ser tridimensional. Para tanto, é necessário que o usuário conheça seus fundamentos, assim como as ferramentas do programa.	Não permite, no cenário complexo, a utilização da ferramenta de “aproximação” ou “distanciamento”, conhecida como zoom; Não permite grandes ajustes quanto ao acabamento (renderização) das representações tridimensionais.
Cabri Géomètre 3D	Considera a manipulação da representação do ente geométrico no espaço; Possui características semelhantes a versão bidimensional, ou seja, se pauta sobre a noção geométrica de lei de geração das figuras espaciais; Permite criar animações, com possibilidade de manipulação; Apresenta bem os aspectos tridimensionais como acabamentos de cor, textura e transparência, conhecidos como renderização.	Não é gratuito; Não permite a elaboração de situações bidimensionais articuladas à com três dimensões; Não apresenta a possibilidade de subdivisão de janelas na área de trabalho, que comporte as várias representações trabalhadas, apresenta as equações e a forma geométrica.
GeoGebra 2D	Gratuito; Próprio para construções bidimensionais; Permite o uso de representações gráficas considerando os eixos cartesianos e representações algébricas, simultaneamente; Tais eixos podem ser ocultados; Permite a manipulação do elemento gráfico; Permite a manipulação dos coeficientes algébricos.	Não permite a criação de situações complexas em que se articule as representações gráficas bi e tridimensionais e algébricas de casos limites das cônicas. Ou seja, o mesmo não suporta e interpreta as representações da parábola e demais degenerações, como limites.
GeoGebra 3D	Gratuito; Próprio para criação de formas tridimensionais; Permite acabamentos das imagens;	Não permite o destaque de elementos bidimensionais articulados a três dimensões;

	Permite criar animações, com possibilidade de manipulação; Apresenta comandos de ajustes e localização dos pontos, num sistema de coordenadas espaciais; Possibilita a subdivisão da tela apresentando a localização numérica dos pontos, assim como, a visão ortogonal do sólido, apresenta a visão em perspectiva.	Não apresenta a possibilidade de visualização do gráfico da curva nos eixos coordenados; Assim como, a equação da curva.
SketchUp	Gratuito; Fácil manuseio; Próprio para representações tridimensionais; Permite a exibição do objeto em várias posições e perspectivas cilíndricas e cônicas, incluindo a localização do ponto de vista; Apresenta um ótimo acabamento das imagens, com uma grande oferta de cores, texturas e intensidade de luz.	Não apresenta equações do ente ou sólido geométrico representado; Não articula as imagens de representações bi e tridimensionais; Não permite o destaque de elementos bidimensionais em conjunto com os tridimensionais; Não permite a criação de “subjanelas” para destaque de outros aspectos da representação inicial.

Após a observação dos dados levantados, percebemos que apesar das qualidades destacadas, não há um software que atenda de modo pleno as necessidades pensadas inicialmente para o nosso trabalho. Logo, dentre as opções destacadas buscamos aquele que apresenta melhor desempenho para suportar os casos limites das cônicas, sem apresentar falhas na leitura e interpretação do comando; que nos atenda quanto a agilidade na interação entre o usuário e a simulação (na concepção e uso); que tenhamos familiaridade e segurança com a ferramenta para a implementação da nossa estratégia. Contudo, o software que mais se aproximou da nossa intenção de pesquisa e que propicia um tratamento das cônicas mais robusto foi o Cabri Géomètre II Plus. Assim, utilizaremos suas limitações como variáveis da nossa análise.

3.3.3.1 A Geometria Dinâmica: a união de dois mundos

É sabido que para o aprendizado em Geometria se faz necessário a compreensão de dois universos distintos constituídos pelo que chamamos de concreto e de abstrato. Destacamos que ambos são reais, sendo esta uma característica relativa a quem esgota as possibilidades de contestações. Tornar abstrato algo concreto demanda um arsenal de conhecimentos cercados de regras e conjecturas, não obstante ocorre com as aplicações de conceitos abstratos às relações do mundo concreto. Como vimos em discussões anteriores, as concepções dessas ideias podem constituir-se de vários entraves e a importância de se trabalhar sob diferentes olhares se faz cada dia mais necessária. A busca por aproximar esses dois mundos gerou frutos, dos quais um deles é a Geometria Dinâmica.

A Geometria Dinâmica (GD) não se trata de uma nova ciência, nem de um novo olhar sobre a Geometria. A GD é um suporte tecnológico que possui por característica promover a interação entre o sujeito, a forma e as propriedades dos objetos matemáticos, proporcionada pela simulação de movimento das representações figurais, antes estáticas. Essas características contribuem para uma nova perspectiva no ensino e na aprendizagem de Geometria. Este veículo nos permite a ampliação de possibilidades de reflexões sobre as situações abstratas, favorecendo os aspectos conceituais e valorizando o pensamento geométrico. Assim, a sua dinamicidade permite, segundo Bellemain (2001), “considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar as suas posições”.

Neste trabalho, a abordagem computacional que se faz é voltada para a exploração e entendimento integrado das propriedades das cônicas expressas em duas e três dimensões, sendo gráficas e algébricas. Encontramos na GD um campo fértil para experimentações desta natureza, pois permite que o sujeito da pesquisa possa por meio da manipulação das representações simular e compreender as mudanças que ocorreriam em um espaço abstrato. Sobre as contribuições da simulação na GD, Neto et al (2013) nos diz que:

> As simulações destas construções no ambiente computacional ensinam o aluno a usar os objetos traçados na tela como ferramenta no estabelecimento de conjecturas e justificativas. E esta é uma parte

> considerável do trabalho de ensinar geometria, para a qual a Geometria Dinâmica pode contribuir efetivamente.

Assim, entendemos que esta pesquisa ocorre principalmente pela possibilidade de agregar a TRSS às situações visuais e conceituais favorecidas por um espaço tecnológico da GD.

3.3.4 A TRRS e a nossa pesquisa

Como vimos, a matemática requer domínios diferenciados do conhecimento, seus processos de apreensão são complexos e o entendimento do que leva a compreensão de seus conteúdos, por um processo cognitivo, são questões que mobilizam a Teoria dos Registros de Representações Semiótica. Deste modo, tomando como referência essas preocupações, retomamos ao nosso questionamento inicial:

Quais as dificuldades em articular as diferentes representações planas e espaciais das Cônicas presentes no ensino?

Para responder a esta questão é necessário compreender melhor os processos presentes nas produções dos alunos. A princípio, é preciso ter em mente que a verificação da compreensão nas atividades matemáticas não se limita a respostas assertivas ou errôneas, mas, a todo um conjunto de ideias relacionadas, que levam aos procedimentos adotados pelos alunos. Estes merecem ser considerados e descritos, ou seja, como afirma Duval (2013): “colocar em evidência os mecanismos próprios da compreensão em matemática” é essencial (DUVAL, 2013, p. 24).

Do mesmo modo, entendemos que esta questão decorre da necessidade de se conhecer bem a distinção entre os processos cognitivos *tratamento* e *conversão* e o que deles se destaca, sendo que ambos exigem esforços cognitivos diferentes: a elaboração e análise dos dados coletados. Embora que, no ensino, há certa valorização das transformações por tratamentos, enquanto a conversão, geralmente, é pouco observada e isso se deve a visão equivocada de que a conversão é um tratamento de modo indireto, ou seja, tratamos uma situação e depois a tratamos de novo.

Conforme Duval (2011, p. 124), “a análise do funcionamento cognitivo próprio de cada registro se faz em referência a um segundo registro. Isso implica evidentemente que a distância cognitiva entre os dois registros não seja muito grande”. Assim, entendemos que todo o nosso esforço de compreensão do mundo se deve a uma representação auxiliar, transitória. Mas, na matemática, com suas múltiplas representações, nem sempre essa passagem é feita de modo correspondente e regular, ou seja, congruente ou não congruente. Sendo assim, ao citar a importância de se considerar todos os processos, o mesmo autor orienta que: “Ora, se se quer analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos” (DUVAL, 2013, p. 30).

Tendo em vista atender as orientações da teoria em harmonia com o nosso questionamento de pesquisa, focaremos nos processos de *conversão* - uma vez que trabalharemos com registros de naturezas diferentes, que demandam modificações consideráveis no processo entre a sua partida e a chegada.

E, em equivalência, não podemos desprezar as transformações por tratamento, pois tal teoria considera que os registros bi e tridimensionais, embora diferentes, possuem a mesma *natureza multifuncional* de *representação não discursiva*, conforme o quadro 4, e assim serão analisadas. Neste caso, as transformações por *tratamento* mobilizam várias outras ações que julgamos serem tão complexas quanto às *conversões*. Ou seja, as dificuldades podem ser maiores ou menores de acordo com os tipos e os números de operações necessárias à solução de cada tarefa.

Em conformidade com o exposto, na construção de nossas questões consideramos três tipos de registros e a articulação entre eles: o registro em língua natural, o gráfico e o algébrico.

Desse modo, propomos uma simulação virtual que expusesse mais de um tipo de representação e que, intencionalmente, suscitassem o reconhecimento de algumas definições das cônicas. Lembramos que para Duval (2011, p.91), a figura geométrica “é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade”. Logo, optamos por expor diferentes representações e todas interligadas virtualmente.

Cuidamos de modo especial, da formulação das questões para contemplar todas as figuras[15] expostas, e deixamos o participante “livre” para acessar e manipular as representações que mais lhe conviesse, no contexto solicitado.

Para tanto, os alunos deviam observar e articular nos dois sentidos, ou seja, os registros gráficos (2D e 3D) e os algébricos, justificados por relatos em língua natural. Esperávamos, com isso, que os alunos visualizassem as propriedades implícitas nas definições das cônicas por meio da experimentação em uma simulação virtual. Esta parte da pesquisa se fundamenta em todo o nosso processo investigativo prévio, considerando o histórico, o ensino e o uso das representações, também em meio digital.

Na sequência, apresentaremos com mais detalhes como desenvolvemos as questões para o nosso experimento, em seguida conheceremos a nossa metodologia, os participantes, a nossa simulação e a atividade.

[15] O termo figura corresponde ao contexto geométrico, ou seja, “as propriedades do objeto representado pelo desenho, ou a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto”. (DUVAL, 2011, p.91)

4 ANÁLISE A PRIORI DO EXPERIMENTO

Realizada as análises prévias, etapa desta pesquisa onde apresentamos uma perspectiva epistemológica do objeto cônicas — na qual apreciamos a sua origem e desenvolvimento e, também o seu contexto didático — com suas caracterizações e processos que privilegiam alguns formatos e propriedades específicas, trataremos nesta seção da análise a priori para a concepção da nossa proposta de atividade e experimento.

Como observamos nos capítulos anteriores o ensino das cônicas é visto sob moldes diferentes ao longo dos anos e, conforme a TRRS - o desconhecimento das múltiplas representações de um objeto matemático pode culminar em dificuldade no entendimento de suas propriedades gerais. Assim, concebemos como proposta de atividade o confronto dessas diferentes caracterizações cônicas, conforme as mais frequentemente vistas no ensino, como justificado no capítulo III desta pesquisa. Para termos a dimensão do que, de fato, se apreende sobre cônicas, tendo como modelo o ensino atual, foi necessário a elaboração de questões que atendessem aos nossos questionamentos e hipóteses levantadas anteriormente. E para melhor evidenciar estas questões formulamos o quadro 8:

Quadro 8 – Análise dos requisitos para a formulação da atividade

PROBLEMAS	HIPÓTESES	ALTERNATIVA
Ideia equivocada de que as articulações entre as representações ocorrem de modo natural no âmbito escolar.	Após as inúmeras reformulações no ensino, o modo como as cônicas têm sido ensinadas propicia ao aluno o conhecimento e articulação de suas propriedades.	Propor uma atividade com caracterizações variadas (frequentemente utilizadas no ensino*) do mesmo objeto matemático e sugerir a articulação entre elas, promovendo a identificação de seus elementos e propriedades. **conforme capítulo III - Quadro 3.*
	Os livros didáticos são usados como guias em sala de aula. As caracterizações neles presentes são suficientes para a compreensão do conteúdo.	
	A presença de ilustrações que mostram as seções do cone e obtenção da curva, rememorando o teorema de Apolônio, assim como a abordagem sobre a excentricidade das curvas, são aspectos destacados nos livros didáticos atuais e contribuem substancialmente para a compreensão do objeto.	
Predomínio da álgebra no ensino das cônicas.	A caracterização algébrica das cônicas, possuem destaque no ensino. Elas foram desenvolvidas a partir das observações das propriedades presentes nas relações métricas das	Articular os elementos da álgebra às representações gráficas bi e tridimensionais para verificar se o modo como é ensinado é

<table>
<tr><td></td><td>formas. Considerando esta análise, o aluno ao observar as variantes de uma equação deve identificar a forma descrita por ela, assim como deve ser capaz de fazer a operação inversa.</td><td>suficiente para a compreensão das cônicas e suas propriedades.</td></tr>
<tr><td>A fragmentação do ensino das cônicas.</td><td>A divisão em etapas da abordagem escolar sobre as cônicas permite o estudo de seus elementos de modo aprofundado e específico.</td><td rowspan="3">Uma proposta de atividade que promova a “unificação” na observação das propriedades cônicas interligadas pelas diferentes caracterizações.</td></tr>
<tr><td>A supressão de situações que articulam o tridimensional ao plano.</td><td>Podemos destacar a definição por excentricidade e o Teorema de Dandelin como conceitos importantes na constituição da ideia de unificação das cônicas.</td></tr>
<tr><td>A representação mental de elementos matemáticos e a compreensão das suas relações — que requer um processo de abstração e interpretação individual — com a exigência universal do ente matemático.</td><td>O uso de diferentes representações semióticas pode contribuir para atenuar ou entender como ocorrem essas barreiras.</td></tr>
</table>

O quadro 8 aponta algumas situações importantes, mas que na prática pouco são revistas e questionadas, como:

- A automatização do conhecimento como um processo contínuo e sem interferências — enquanto sabemos que isto se deve à várias etapas;
- O predomínio de abordagens no ensino, que privilegiam apenas a um formato — ao passo que a diversificação amplia e contribui com o processo, promovendo discussões, novas situações e pontos de vistas;
- Algumas reformulações no ensino, influenciaram a composição de livros e adaptações do conteúdo — onde percebemos duas variáveis: as supressões de conteúdo e as adaptações das representações de entes geométricos às estruturas bidimensionais propostas pelos livros tradicionais.

Nesse sentido, pensamos como o uso da tecnologia computacional pode contribuir com nossa pesquisa: nos possibilitando unir várias representações de um mesmo objeto matemático, dotado de vários conceitos, privilegiados parcialmente por cada registro, de modo que o sujeito possa articular suas compreensões entre eles.

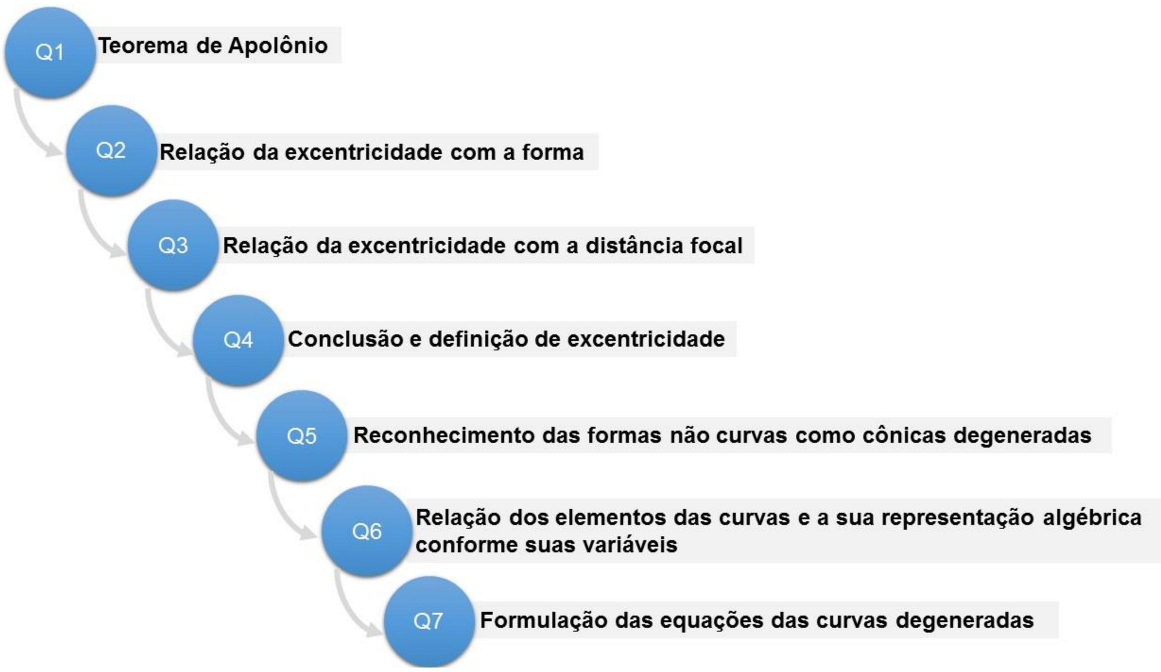
Para obter as informações sobre o que o sujeito conhece sobre as cônicas optamos por questões variadas que envolvem características e informações gerais, tais como:

- O reconhecimento da forma;

- A relação da curva com a excentricidade – principalmente para verificarmos se os sujeitos reconhecem as situações limites e suas implicações;
- A relação entre a distância focal e a excentricidade;
- O reconhecimento e interpretação das variáveis analíticas nas formas curvas e degeneradas das cônicas.

Desse modo, optamos por uma sequência de raciocínio (figura 24) no sentido de que as questões começam envolvendo a condição básica e fundamental das cônicas, ou seja, pelo teorema de Apolônio; depois o reconhecimento da relação da excentricidade com a forma; a relação da excentricidade com a distância focal e a sua definição – visto que é uma definição predominante encontrada nos livros didáticos analisados; a observação e reconhecimento das formas não curvas, obtidas por situações limites na interseção do cone; a interpretação dos elementos das curvas e a sua representação algébrica conforme suas variáveis; por fim, verificar se o sujeito é capaz de conjecturar formular e interpretar condições para as equações das curvas degeneradas, atípicas no ensino.

Figura 24 – Sequência de raciocínio das questões



A seguir, antes de expormos as questões, apresentaremos um quadro com o resumo dos conteúdos a serem explorados conforme cada uma delas, assim como as ações esperadas dos sujeitos.

Quadro 9 – Análise dos conteúdos e ações por questão

QUESTÃO	CONHECIMENTOS ENVOLVIDOS	AÇÕES ESPERADAS	
		CERTAS	ERRADAS
Q1	**Teorema de Apolônio** Relação entre a obtenção das curvas por meio da posição do plano secante e as suas designações.	Após a articulação do plano secante que define a seção e a observação da forma, o aluno deve visualizar e destacar a qual situação se refere determinado posicionamento do plano. Esta questão deve ser livre de predefinições para que o aluno tenha o máximo de liberdade para conjecturar. Sabemos que há situações específicas como a parábola, a circunferência e as degenerações, desse modo esperamos que os sujeitos buscar informações na observação de outras caracterizações, como o valor da excentricidade, por exemplo.	A observação apenas das caracterizações gráficas, pois a mesma não garante a condição de existência dos casos limites.
Q2	**A excentricidade das curvas e o teorema de Apolônio** Articulação entre situação resultante da posição do plano secante, sua designação e a variação do valor da sua excentricidade.	Após a visualização das situações obtidas na questão 1, espera-se que os sujeitos percebam a relação destas com os intervalos a excentricidade de cada conjuntura. Espera-se que os sujeitos reconheçam a condição de existência dos casos limites.	A não percepção das situações limites (parábola, circunferência e degenerações); a não explicitação do valor da excentricidade, pois compromete a resposta -
Q3	**Excentricidade, o formato da curva e a Distancia focal** Articulação entre eles	A partir da manipulação do plano secante a um cone, os sujeitos devem observar o formato (arredondado ou achatado) das curvas, percebendo a relação da distância entre os focos e, por consequência, articular a situação à excentricidade da curva.	A articulação, apenas, do plano secante; não observação de outros elementos da curva.
Q4	**Conclusões e definição sobre a excentricidade**	Após observar as relações entre a curva, o formato e as variações da distância entre os focos o sujeito deve concluir a ligação entre eles.	Os sujeitos podem entender/expressar apenas o deslocamento do plano secante como suficiente para a compreensão da excentricidade, ignorando assim a sua propriedade relativa a distância focal e o eixo maior.

Q5	**Degenerações das curvas cônicas**	Os sujeitos devem articular as seções formadas a partir da movimentação do plano secante, verificando as posições possíveis como: a tangência do plano a uma de suas geratrizes (1 reta), a intercessão no vértice (ponto) e a intercessão contendo duas de suas geratrizes (2 retas concorrentes).	Não movimentar o plano secante de modo adequado a visualizar os casos limites, e compreender apenas as curvas como sessões, não verificando as seções possíveis.
Q6	**Termos variantes das equações das cônicas**	Os sujeitos devem articular as curvas e a modificação do seu formato de acordo com a mudança dos termos das equações. As observações esperadas se referem a sinalização das equações – que refletem o entendimento das curvas por lugar geométrico, variações nos valores - que modifica o posicionamento da curva.	Confusão na interpretação dos termos; não identificar as equações das curvas, confundindo a parábola (condição específica) com as demais curvas.
Q7	**Equações das curvas degeneradas**	A partir do reconhecimento e compreensão dos casos limites das cônicas, esperamos como resposta a equações da reta, de duas retas concorrentes e a localização do ponto.	A não identificação das situações limites; a identificação das situações, mas não saber ou associá-las as equações.

Nesta análise não foram consideradas o reflexo das limitações referentes a situação proposta com o uso do software sobre as ações esperadas dos sujeitos. O experimento, a atividade e as ações dos sujeitos serão melhor detalhados no capítulo seguinte, como procedimentos metodológicos e, na sequência, apresentaremos a nossa avaliação sobre o experimento.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Um experimento para o nosso estudo

Para analisar como ocorre a articulação entre as definições das cônicas em suas diferentes representações planas e espaciais, por alunos de Licenciatura, tornou-se imprescindível adotarmos uma abordagem qualitativa e experimental. Buscamos, com ela, analisar as implicações do uso de uma ferramenta computacional que permita a compreensão das propriedades implícitas nas definições das cônicas e a sua sistematização no plano e no espaço, por meio das representações gráficas e algébricas.

Para tanto, enquadramos os dados coletados do nosso experimento com a teoria que nos fundamenta, embora haja uma lacuna no que se refere a passagem do registro gráfico bidimensional para o tridimensional.

Assim, utilizamos como instrumentos para este experimento: um questionário - com dados apenas em língua natural, porém complementado com as informações do ambiente virtual; o *Cabri Géomètre II Plus* – para a visualização virtual de registros figurais bi e tri dimensionais, assim como, os algébricos; o *aTube Catcher* - aplicativo complementar para registrar a interação dos sujeitos com a atividade. Este aplicativo nos permitiu a gravação do som e da tela do computador de cada dupla, quando instalado no mesmo. Assim, foi possível refazer as suas estratégias e ações durante a atividade; a filmagem das ações dos sujeitos por meio de uma câmera filmadora externa; e os registros escritos por eles.

5.2 Caracterização dos sujeitos da pesquisa

O experimento foi realizado numa turma de Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG), do 2º período, na Universidade Federal de Pernambuco. O critério de escolha se deu por alguns motivos que acreditamos serem relevantes, tais como:

- Esta licenciatura volta-se para questões do ensino de Geometria Gráfica e Desenho aplicado, sendo este um curso de formação de professores dessa área específica, no Brasil. Embora saibamos da existência de outras graduações com disciplinas correlatas, como Design, Engenharias, Arquitetura e Matemática, é no curso de LEG que tais conteúdos são abordados de modo mais aprofundado, considerando a Geometria Gráfica como base fundamental de toda a representação gráfica por eles estudada;

- Esta graduação atende aos aspectos exigidos em nossa pesquisa quanto a compreensão de uma visão gráfica, seja ela, bi ou tridimensional das cônicas - fator de interesse escasso em outras licenciaturas, cujo foco normalmente é algébrico e a representação gráfica é pouco explorada;
- Os alunos do curso dessa Licenciatura, tem em sua formação a necessidade de habilidades visuais significativas e apuradas para o exercício futuro de seu ofício, além desses alunos já terem cursado duas disciplinas que dão suporte ao nosso experimento como: Geometria Gráfica Bidimensional (GGB) e Sistemas de Representação, os mesmos deveriam ter tido acesso ao conteúdo de Cônicas no Ensino Médio. O primeiro componente curricular citado reserva-se as questões de solução plana da Geometria sintética e o segundo as questões tridimensionais, trabalhando os diferentes tipos de sistemas de representação de um elemento tridimensional em um plano. Ambas as disciplinas são itens obrigatórios no currículo LEG.

Sendo assim, o número total dos sujeitos foi de 08 alunos. Estes foram dispostos em duplas, conforme a disponibilidade dos sujeitos em participar e características complementares, segundo o nível de desempenho nas disciplinas cursadas, fornecida pela professora das disciplinas. Nossa opção por duplas ocorre por acreditarmos que a articulação entre os sujeitos contribuirá com a realização das atividades, no sentido de um suscitar no outro, conhecimentos adormecidos ou colaborar com a ampliação de seus esquemas e estratégias de resolução, além do que a interação exigida pelo trabalho em dupla favorece a verbalização dos raciocínios, argumentos e outras reflexões.

Destacamos que o critério para inclusão ou exclusão do participante nesta pesquisa ocorre em concordância com as motivações já descritas acima, e principalmente, com o desejo e disponibilidade do participante em voluntariar-se para tal proposta. Desse modo, os alunos repetentes não foram excluídos.

Salientamos ainda a que cada participante assinou um termo de livre consentimento (apêndice A), estando cientes do processo, assim como, em concordância com o exercício da atividade. Neste documento, nos comprometemos a preservar suas identidades em sigilo. Por este motivo, cada um dos participantes foi identificado por um código (S1, S2...). Do mesmo modo, nos comprometemos em divulgar os dados do experimento apenas para a realização desse trabalho e artigos para fins acadêmicos.

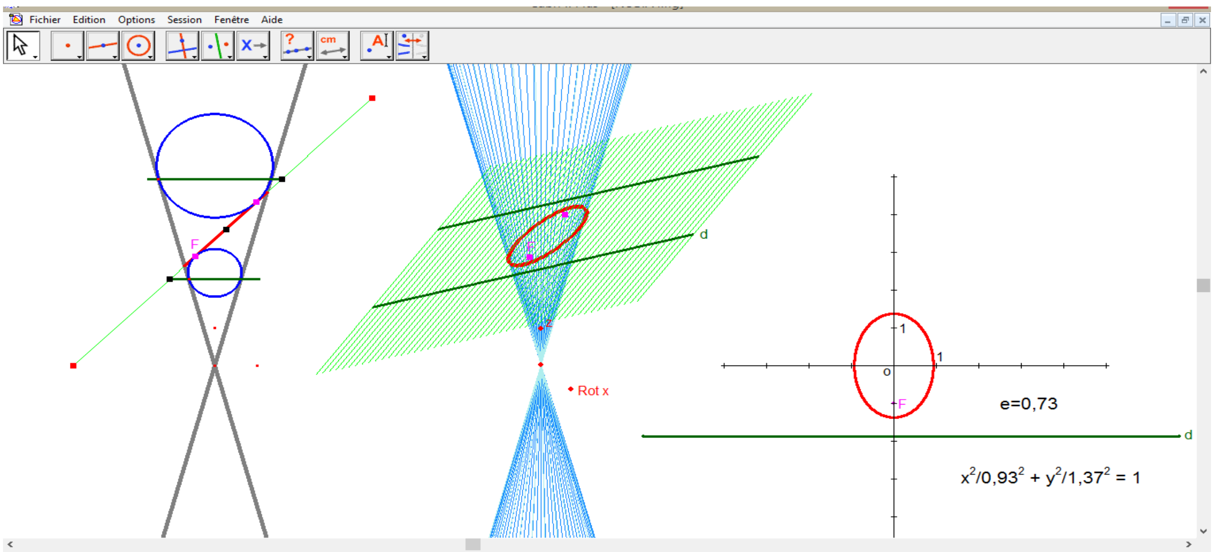
5.3 Desenvolvimento do nosso experimento

5.3.1 A simulação

Nossa simulação foi composta por cinco situações, com registros de representação distintos das cônicas: uma projeção ortogonal, uma perspectiva, um gráfico e duas equações. Pois envolvem as principais definições das cônicas, tratadas na primeira etapa deste trabalho. Vale salientar que o objetivo desta simulação é expor, em uma mesma tela, diferentes caracterizações que envolvem as principais definições das cônicas, de modo interligado, para que o aluno explore as suas propriedades e observe as mudanças ocorridas por meio da manipulação do software.

Para a escolha das situações representadas, consideramos o critério de usualidade das cônicas, conforme foi definido no segundo capítulo desta pesquisa. Nossa intenção é simular a geração da curva cônica a partir do deslocamento do plano secante e para isso, contamos com o auxílio da geometria dinâmica (GD) presente no software Cabri Géométre II Plus. A figura 25, a seguir, apresenta as situações conforme a tela principal do software.

Figura 25. Visão geral da simulação no Cabri

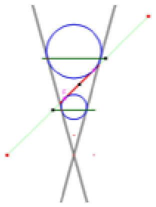
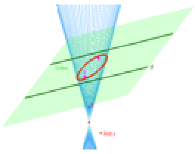
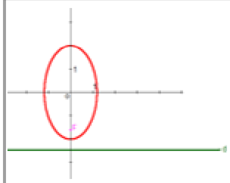


Abaixo, segue um resumo do que se vê na simulação:

- Uma *projeção ortogonal* – contendo as linhas de contorno aparente (geratrizes do cone), duas circunferências referentes ao contorno das esferas, as linhas representativas da tangência das esferas com a superfície cônica, o plano secante em vista básica, a curva reduzida em vista básica, os focos contidos sobre a linha representativa do plano secante. Essa representação nos remete ao teorema de Dandelin;
- Uma *perspectiva cavaleira* – contendo o cone e suas geratrizes retas, o plano secante, a curva e suas diretrizes. A situação é apresentada considerando os aspectos tridimensionais, conforme a perspectiva escolhida, e assim nos remete ao Teorema de Apolônio;
- Um *gráfico da curva em plano cartesiano* – par de eixos cartesianos graduados, a curva e uma diretriz. Esta representação remete a definição gráfico-analítica da curva e complementa o entendimento da equação e por consequência da excentricidade;
- *Representações analíticas* da equação das curvas, em linguagem algébrica;
- *Representação da excentricidade* em escrita algébrica.

Para um melhor entendimento, apresentaremos um quadro resumo com a análise individual das representações expostas na simulação e alguns elementos da TRRS. Em seguida, esclareceremos brevemente os elementos destacados no quadro 10.

Quadro 10 - Análise dos elementos presentes nas representações das definições cônicas visualizadas na simulação

REGISTROS FIGURAIS	DEFINIÇÃO CÔNICA	UNIDADES DE SENTIDO	TIPO DE REPRESENTAÇÃO	VARIÁVEIS
	Teorema de Dandelin-Quetelet	Linhas representativas das geratrizes de limite do cone; Linha representativa do plano secante em vista básica; Circunferência representativa do contorno da esfera; Pontos referentes as diretrizes em vista baixa e os focos.	2D/2D Projeção ortogonal	A posição do plano secante; A posição e o diâmetro das esferas; Ponto de tangência das esferas e o pano secante.
	Teorema de Apolônio	Retas representativas das geratrizes do cone; Retas referentes as diretrizes; Paralelogramo achurado representativo o plano secante; A curva; Pontos referentes aos focos.	3D/2D Perspectiva cavaleira	Posição do plano secante e tipo da curva.
	Cartesiana	Retas formando um par de eixos cartesianos graduados; a curva Uma reta representando uma das diretrizes	Gráfico-analítica	Tipo e formato da curva.
$x^2/0,93^2 + y^2/1,37^2 = 1$	Analítica	Letras representativas dos coeficientes da equação ao qual não se conhece e valores numéricos referentes ao posicionamento dos focos e da curva.	Algébrica	Termos e sinais da equação
e=0,73	Excentricidade	Letra representativa da relação de excentricidade e valor numérico correspondente a esta relação.	Algébrica	Valor numérico

Para a elaboração deste quadro consideramos os seguintes elementos:

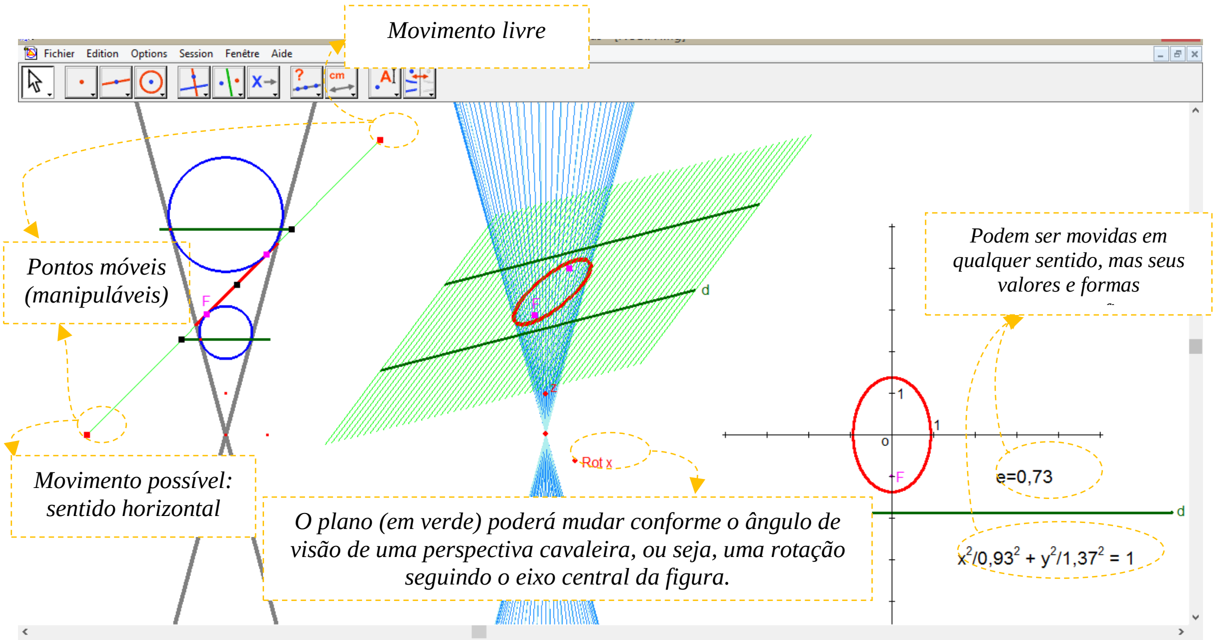
- *Registros figurais* – são as imagens como vistas no software;
- *Definição das cônicas* – se refere ao modo como as cônicas são apresentadas, conforme a situação e propriedade destacada;
- *Unidades de sentido* – são os elementos geométricos mínimos, carregados de significado, que no contexto apresentado regem o sentido da figura como um todo;
- *Tipo de* representação – são os meios visuais utilizados para representar as situações em conformidade com a definição em destaque;
- *Variáveis* – consideramos os elementos que variam nas representações de acordo com a manipulação do sujeito. Nem todos os elementos variáveis são

manipuláveis nesta simulação, mas todos sofrem alteração quando há manipulação.

5.3.2 Funcionamento da simulação

A simulação elaborada contou com cinco representações diferentes de definições usuais das cônicas. Todas as representações gráficas e algébricas estavam interligadas, de modo que todas se modificavam, simultaneamente, após a manipulação dos elementos móveis. Ou seja, cada representação exposta na simulação pode se modificar de acordo com a situação que promove o tipo da curva ou o seu formato. A situação promotora da curva foi a representação ortogonal e os elementos móveis são o plano secante (representado em vista básica) e os seus pontos de limite.

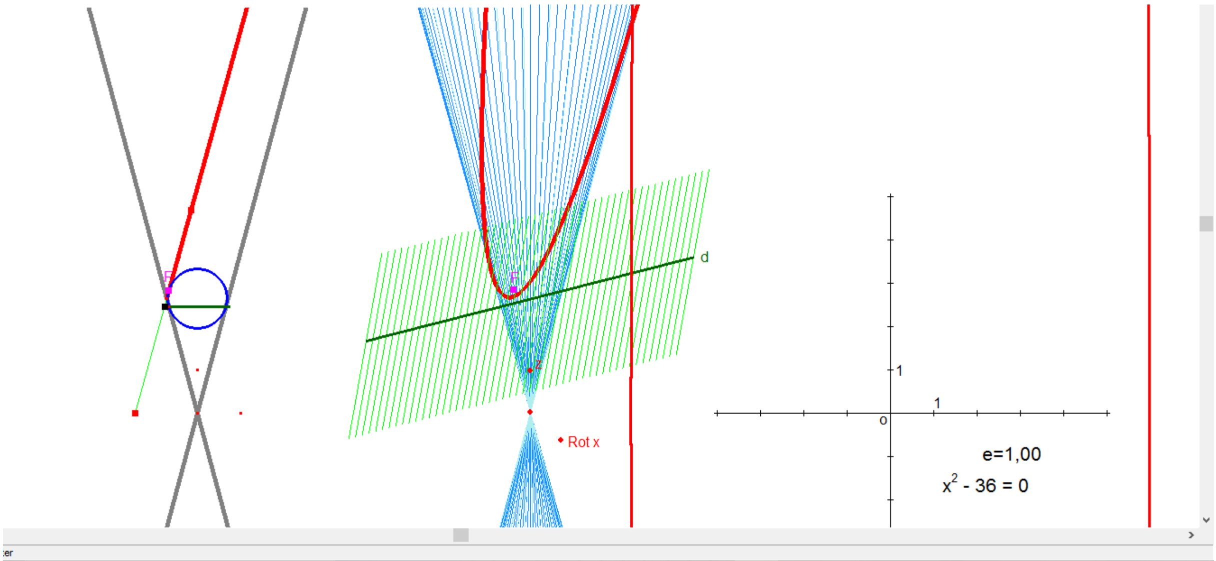
Figura 26. Elementos manipuláveis da simulação no Cabri



Logo, percebemos que não são todas as representações que são manipuláveis, o que nos presume a necessidade de realmente transitar entre as outras representações para formar o argumento desejado para a resolução da atividade. Como vimos, a única representação capaz de mover o plano secante e, consequentemente, modificar a curva é a projeção ortogonal, sendo assim, as demais se modificam de acordo com esta primeira. Na representação em perspectiva apenas podemos modificar o seu ângulo de visão por meio da manipulação, mas não com precisão como em um valor numérico. Nas representações algébricas nos é permitido apenas mover o seu posicionamento na tela, deslocando-as na área de trabalho, enquanto que a gráfico-analítica possui posição fixa.

Sendo assim, para elucidar as informações acima, citaremos como exemplo a obtenção de uma parábola, como demonstrado na figura 27.

Figura 27. Simulação da situação parábola



Neste caso o ajuste do plano secante na projeção ortogonal não nos é suficiente. Pois não garantimos que o mesmo esteja paralelo a uma das geratrizes do cone, condição de existência de uma parábola. Contudo, ocorre a necessidade de buscar outros elementos que garantam não só visualmente, mas matematicamente a existência dessa relação. Assim, buscamos na representação da excentricidade a confirmação desejada. Ou seja, a excentricidade da parábola é igual a 1. Desse modo, é necessário que haja uma observação da representação móvel e dos valores referentes a outro tipo de representação.

Para realizar esta tarefa o aluno deve mobilizar-se intuitivamente, assim como dispor de conhecimentos matemáticos. Vejamos, a seguir, quais os conhecimentos exigidos em cada questão da nossa atividade.

5.3.3 Atividade proposta

A nossa atividade foi subdividida em sete questões. Cada questão envolve um conjunto de representações das cônicas. E conforme o exposto, as questões necessitavam de um complemento visual e experimental disponível na simulação. Sendo assim, apresentaremos de modo geral as intenções da atividade por questão conforme o quadro 11 e, em seguida, um resumo dos conhecimentos envolvidos no quadro 12.

Quadro 11 – Questões da atividade

<table>
<tr><th colspan="2">Atividade para identificação e percepção do sujeito sobre o experimento no ambiente virtual Cabri</th></tr>
<tr><td>Q1</td><td>Ao mover o plano secante ao cone obtemos diferentes situações, identifique-as considerando as demais representações da simulação:
<table><tr><th>Posição do plano</th><th>Situação</th></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Q2</td><td>Sabendo-se que a excentricidade determina a curva e o seu formato, o que podemos compreender ao manipular o plano secante ao cone, nas diferentes situações identificadas?
<table><tr><th>Situação</th><th>Excentricidade</th></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Q3</td><td>Observa-se que em certas situações as curvas se modificam quanto ao seu formato, ficando mais achatadas ou arredondadas. Por que isso acontece?</td></tr>
<tr><td>Q4</td><td>Após as observações acima, o que podemos concluir como excentricidade da curva?</td></tr>
<tr><td>Q5</td><td>Após a manipulação dos planos, você observou alguma(s) situação(s) diferentes das formas curvas? Se sim, descreva o que observou e explique o que levou à(s) novas formas.</td></tr>
<tr><td>Q6</td><td>Sabendo-se que cada curva possui um modo de representação analítico, o que muda na sua equação conforme as situações obtidas? Se possível identifique os termos da equação conforme a convenção analítica.</td></tr>
<tr><td>Q7</td><td>Em certas situações as equações não aparecem na simulação, como podemos interpretar essas situações? Escreva as equações que correspondam a essas situações?</td></tr>
</table>

Quadro 12 - Análise dos conhecimentos envolvidos em cada questão da atividade

Questões	**Representação de partida**	**Representações transitórias**	**Mobilização de conhecimentos e ações**	**Registro de chegada**
Q1	Projeção Ortogonal	Todas	Posição do plano secante; formato da curva; relação algébrica; variação da excentricidade.	Língua natural e/ou gráfica
Q2	Projeção Ortogonal e Excentricidade	Todas	Posição do plano secante; formato da curva; relação algébrica; variação da excentricidade.	Língua natural e algébrico
Q3	Projeção Ortogonal e Excentricidade	Todas	Posição do plano secante; aproximação ou afastamento dos focos; formato da curva; variação da excentricidade.	Língua natural e/ou algébrico
Q4	Projeção Ortogonal e Excentricidade	Todas	Posição do plano secante; aproximação ou afastamento dos focos; formato da curva; variação da excentricidade.	Língua natural e/ou algébrico e/ou gráfico
Q5	Projeção Ortogonal	Todas	Posição do plano secante; degeneração das curvas em um ponto, uma reta e duas retas concorrentes.	Língua natural e/ou gráfica
Q6	analítica	Ortogonal; gráfico-analítico; analítica	Posição do plano secante; formato da curva; relação algébrica; variação da excentricidade.	Língua natural e algébrico
Q7	Ausência da representação analítica	Ortogonal e perspectiva cavaleira	Posição do plano secante; degeneração das curvas em um ponto, uma reta e duas retas concorrentes.	Língua natural e algébrico

6 ANÁLISE E RELATO DAS INTERAÇÕES ENTRE OS SUJEITOS, A ATIVIDADE E A SIMULAÇÃO

As ações dos sujeitos com a simulação ocorreram da seguinte maneira:

Explicamos, às duplas, sobre o funcionamento da simulação: que tipos de representação tínhamos, como e quais as representações que poderiam ser manipuladas e a interferência que havia com as demais representações. Salientamos que a média de tempo para essa atividade foi de aproximadamente uma hora para cada dupla. Desse modo, as duplas tiveram acesso a simulação e a atividade proposta em uma sala reservada.

Cada questão envolve um conjunto de procedimentos para a sua compreensão e resolução. Além do questionário com as atividades, foi disponibilizado aos sujeitos os seguintes materiais: par de esquadros, compasso, papel A4, caneta esferográfica, lápis e borracha, como recursos em caso de produção de rascunho.

Não eram permitidas consultas em dispositivos eletrônicos e nem em formato bibliográfico. A proposta da atividade é reflexiva e a interação deveria ocorrer apenas entre as duplas e a simulação.

A observação do fenômeno acontece pela examinadora que permaneceu todo o tempo na sala, com o auxílio de duas câmeras filmadoras, para captura do som e imagem, assim como, do aplicativo *aTube Catcher*, para captura da tela no momento da interação dos sujeitos com a simulação.

Agora, descreveremos, por ordem de questão (Q1,Q2,...Q7), como cada dupla procedeu diante da proposta da atividade. E, para preservar suas identidades conforme já foi exposto, tratamos cada dupla como S1S2, S3S4, S5S6 e S7S8.

Q1.

A questão 1 (quadro 11), buscava o entendimento preliminar e geral sobre a origem das cônicas partindo das compreensões sobre o Teorema de Apolônio. O seu objetivo era a exploração a obtenção de todas as cônicas, por meio de todas as representações disponíveis na tela do software, conforme a figura 25. Esperávamos, com isso, que as duplas compreendessem a obtenção das curvas por meio da posição do plano secante em relação a algum referencial escolhido por elas e os relacionassem as suas designações. Para não influenciar no resultado, optamos por propor um quadro para preenchimento das informações sem a disposição de linhas, conforme o detalhe apresentado, abaixo.

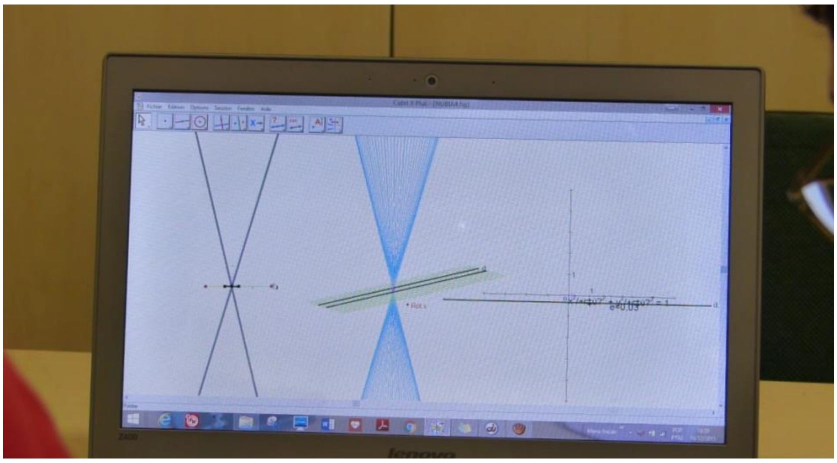
Quadro 13 – Detalhe questão1

Posição do plano	Situação

S1 e S2

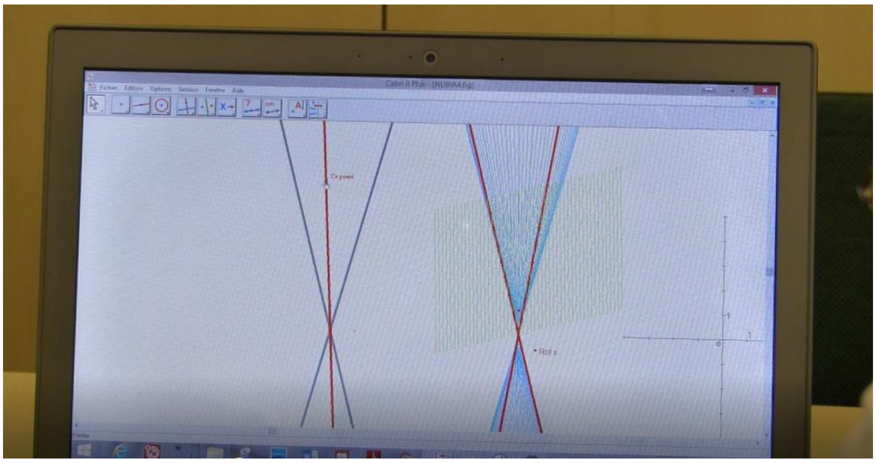
Nesta questão as representações utilizadas pela dupla foram: a ortogonal, a cavaleira e o plano cartesiano. A dupla relacionou de modo satisfatório o posicionamento do plano e as situações em que o mesmo desencadeava, reconhecendo, ainda, a existência de uma situação inusitada: o ponto, como uma possibilidade de seção diferente das curvas conhecidas. A circunferência apesar de não ser obtida na simulação virtual, por limitações da ferramenta, foi identificada. A dupla posicionou o plano de modo perpendicular ao eixo e passando pelo vértice, que gerou um ponto, como podemos ver na figura 28. Desse modo, o sujeito S2 concluiu que se o mantivesse a mesma posição, mas se o deslocasse no sentido vertical poderia gerar uma circunferência.

Figura 28. Plano secante perpendicular ao eixo do cone



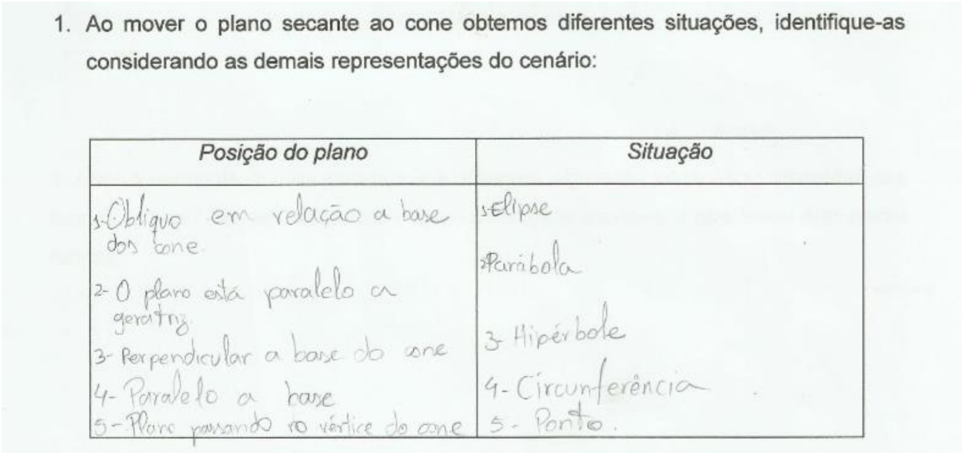
A dupla também percebeu a existência de outras possibilidades de seções como a situação de uma reta coincidente com uma geratriz e as duas retas concorrentes, embora tenham confundido a primeira com a própria geratriz do cone e a última com uma hipérbole. Apesar de visualizarem, não interpretarem como seções diferenciadas (figura 29).

Figura 29. Curva degenerada - Retas concorrentes



Na sua análise, percebemos a influência do posicionamento prototípico presentes em algumas situações. Assim, a dupla se referiu a hipérbole como sendo a situação em que o plano se encontra "perpendicular a base do cone"; e igualmente, o fez ao apresentar a elipse como sendo a situação em que o plano está "oblíquo a base do cone". Desse modo, compreendemos as suas observações como válidas, porém percebemos as limitações na compreensão em que o posicionamento oblíquo do plano também poderia resultar em uma hipérbole. Acreditamos que a associação com a diretriz do cone seria a mais adequada e incorreria em menos interpretações imprecisas.

Figura 30. S1S2: Registro da questão 1



1. Ao mover o plano secante ao cone obtemos diferentes situações, identifique-as considerando as demais representações do cenário:

Posição do plano	Situação
1- Oblíquo em relação a base dos cone.	1- Elipse
2- O plano está paralelo a geratriz.	2- Parábola
3- Perpendicular a base do cone	3- Hipérbole
4- Paralelo a base	4- Circunferência
5- Plano passando no vértice do cone	5- Ponto.

S3 e S4

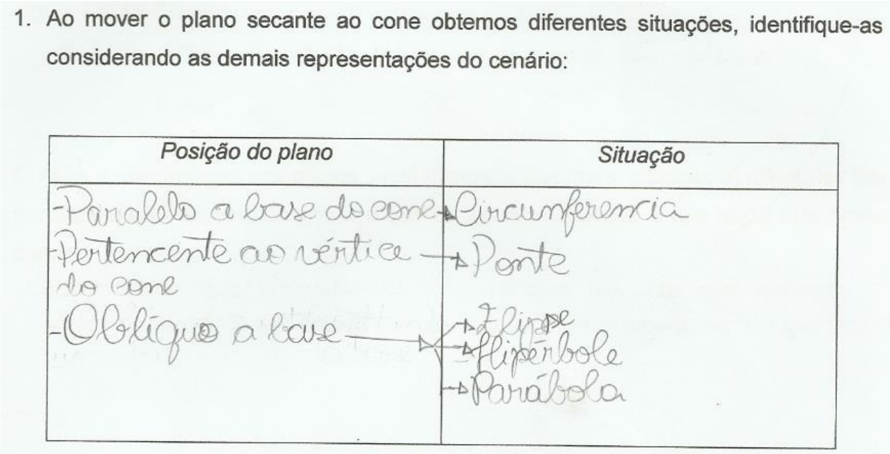
Esta dupla compreendeu de modo mais geral, não especificando o posicionamento efetivo do plano para cada situação. Observaram as representações ortogonal, cavaleira e o gráfico para tecer seus comentários.

Assim como a dupla S1S2, também compreendeu o ponto como uma situação possível passando pelo vértice e a circunferência como sendo paralela a base. Isto ficou evidente no comentário S2: “paralelo à base, pode ser uma circunferência ou um ponto”, complementou com gestos indicando o sentido do plano.

Figura 31. Gesticulação de S3 ao se referir a posição do plano secante.

A dupla associou a elipse, parábola e hipérbole a situação em que o plano está oblíquo a base, não explicitando o que o diferencia para a obtenção da curva.

Figura 32. S3S4: Registro da questão 1



1. Ao mover o plano secante ao cone obtemos diferentes situações, identifique-as considerando as demais representações do cenário:

Posição do plano	Situação
-Paralelo a base do cone	Circunferencia
-Pertencente ao vértice do cone	Ponte
-Obliquo a base	Elipse Hipérbole Parábola

S5 e S6

Esta dupla explorou bastante as possibilidades do ambiente, para compreender as situações pedidas na questão 1. Observou todas as representações dispostas na simulação.

O sujeito S5 não compreendeu de imediato que a segunda imagem dinâmica correspondia a perspectiva do cone, quando a percebeu comentou: “Ah! O cone está aqui... o cone é esse aqui”. Ao refletirmos sobre o comentário e a reação, percebemos que o sujeito S5 passou a compreender a simulação de acordo com a proposta multirrepresentativa do mesmo. Porém, interpretamos que ao concluir que o cone está em apenas uma das representações, exclui a existência do cone na representação ortogonal. Cremos que isso ocorra pelo fato de que na representação ortogonal, o cone aparece limitado apenas por duas retas. Entendemos que o sujeito S5 não estava familiarizado com este tipo de representação gráfica, diferentemente, dos demais sujeitos do mesmo período. Neste sentido, interpretamos como uma dificuldade local, estando relacionada a um novo conhecimento em que o ciclo ainda não foi finalizado.

Ao descrever as posições relativas ao plano secante a dupla usou os termos diagonal, horizontal e vertical como referência as situações elipse, ponto e parábola, respectivamente. Esta dupla apresentou problemas no entendimento sobre parábola e hipérbole (que não foi nominalmente citada), ou seja, confundiu as duas. Assim, observamos uma falsa interpretação, da dupla, ao mencionar que o posicionamento do cone no sentido vertical resultaria em "uma parábola em cada cone". Este fato pode ser reflexo da interpretação de duplicidade do cone, percebidos no comentário do S5: " ... uma parábola em cada cone... que é um em cima e outro em baixo... uma parábola só".

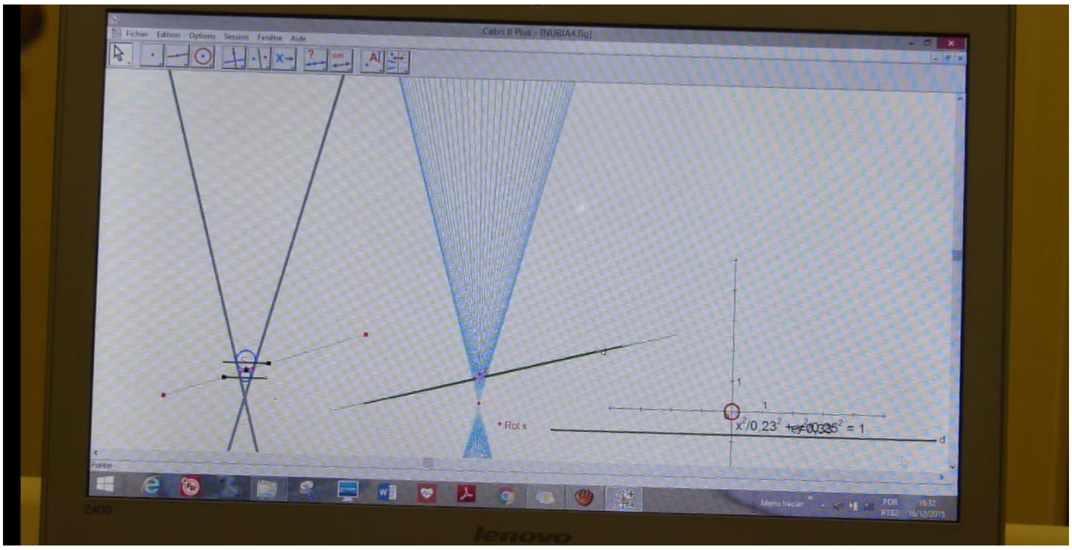
Ao se referir a circunferência, citaram o termo "linha do horizonte" associando-o a posição horizontal do plano – "quanto mais o corte tende a linha do horizonte mais a elipse se assemelha a uma circunferência". Entendemos a observação da dupla como pertinente para a próxima questão que envolve a excentricidade das curvas.

S7 e S8

A dupla discutiu sobre a questão observando a projeção ortogonal, a perspectiva e o plano cartesiano. Dentre as suas ações e comentários percebemos que, como o plano secante aparece limitado a um paralelogramo, a dupla S7S8 confundiu as diretrizes da curva com os limites do plano. O que nos indica um desconhecimento em relação as diretrizes da curva, visto que em outras representações a mesma aparecia, com a mesma cor, indicando que se tratava do mesmo elemento, ou uma interpretação equivocada das unidades de sentido por limitação da nossa ferramenta. Os alunos mencionaram em alguns momentos a dificuldade de verbalizar suas compreensões. Na execução dessa primeira questão o S7 operava a simulação enquanto o S8 documentava as conclusões chegadas, porém todas tiveram a participação dos dois em mesma intensidade.

Assim como as demais, a dupla também percebeu a existência de um ponto como possibilidade de seção cônica. A dupla observou na perspectiva cavaleira a redução do plano a uma linha e o associou à obtenção da circunferência na representação gráfico-analítica, o que indica que não consideraram a angulação do plano secante (na projeção ortogonal) em relação aos elementos do cone, mas sim, a aparência do plano segundo a deformidade da perspectiva cavaleira (figura 33). Desse modo, percebemos um problema de compreensão, relativo a interpretação da perspectiva. Quanto às interpretações da elipse quando o plano se apresenta oblíquo ao cone, e a hipérbole quando o mesmo é "colocado na vertical", refletem a mesma visão da dupla S1S2, que embora corretas em seus argumentos, não levantaram outras possibilidades, limitando-se as representações prototípicas.

Figura 33. Elipse próxima de circunferência



Q2.

A questão 2 (quadro 8) envolve conhecimentos referentes a excentricidade das curvas. Assim, buscava do aluno a relação entre a curva e a sua excentricidade. Esperávamos que as duplas ao manipular o plano observassem as diferentes situações e a variação de sua excentricidade conforme as representações expostas.

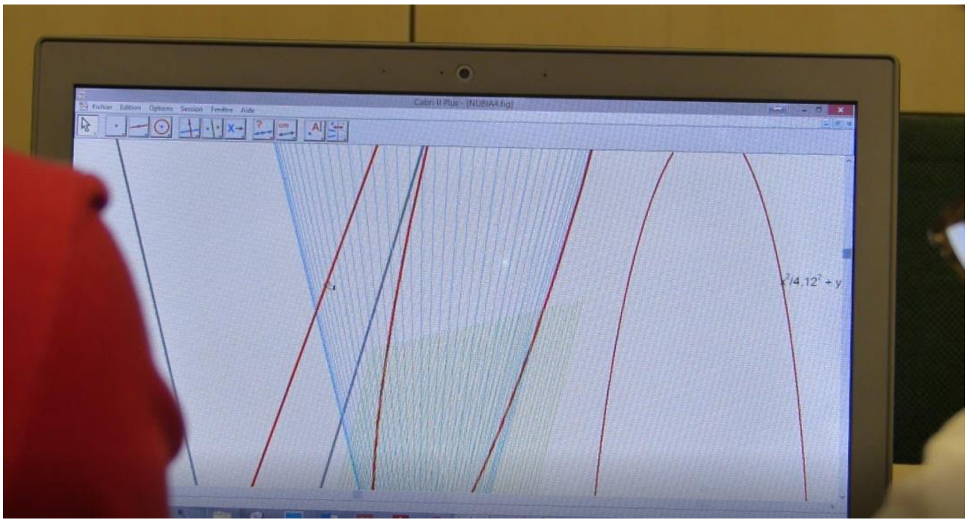
S1S2

Para resolver a questão, a dupla utilizou as seguintes representações: ortogonal, perspectiva e excentricidade.

Após movimentar bastante o plano secante, a dupla percebeu que o valor da excentricidade variava conforme as curvas. Logo, levantaram a hipótese de um intervalo de variação para a excentricidade das cônicas e com isso concluíram que a elipse possui excentricidade “a partir de 0 até 1”, embora que oralmente se referiam como “maior que 0 e menor que 1” – destacamos o uso de sinais matemáticos na fala e a dificuldade em escrevê-los.

A parábola, descreveram como sendo “a partir de 1 (com a influência da posição do plano) ”, a dupla chegou a esta conclusão focando na aparência paralela do plano na representação ortogonal e não no valor da excentricidade. Mas, a dupla, justificou oralmente que para ser uma parábola o plano deveria estar paralelo a geratriz. Também observaram, ao mover o plano e a barra de rolagem, que “a elipse fica tão grande que acaba virando uma parábola, simplesmente” (figura 34).

Figura 34. Observação de parte da elipse



Neste caso percebemos que a representação ortogonal confundiu os alunos e, com isso, revelam dificuldades na compreensão do conceito de excentricidade, pois apesar de estabelecer a relação visual com o posicionamento do plano secante não o associaram ao seu valor inteiro.

Apesar de não terem escrito, após a visualização de uma hipérbole o sujeito S2 falou que a excentricidade era maior que 1.

Consideraram a excentricidade da circunferência e do ponto igual a 0.

S3S4

Após a exploração da simulação para a solução da questão anterior, a dupla interagiu pouco entre si e com a ferramenta para solucionar esta questão, dedicando-se mais a escrita do que a comentários orais. Assim, consideraram o valor da excentricidade da parábola e hipérbole iguais: “e > 1”, a elipse “0 > e > 1” e ponto e circunferência “e=0”, confirmados após a gesticulação do sujeito S2 ao referir ao plano “paralelo a base” como foi mencionado anteriormente. Desse modo, percebemos que a dupla compreendeu o ponto como uma circunferência mínima.

S5S6

Após a identificação da representação da excentricidade. O sujeito S5 afirma: “Quanto maior a excentricidade maior a deformação”. Quando questionado pelo S6 sobre o que é a excentricidade, o sujeito S5 afirma não recordar...

Mesmo observando as representações do gráfico e a perspectiva, os sujeitos não conseguem identificar a reta diretriz da curva.

A dupla percebeu e comentou, que quando o plano secante ao cone está paralelo à diretriz, a excentricidade é igual a 1, embora não tenha especificado a curva. Para as demais conclusões, a dupla observou que, conforme o plano se movimentava em 360°, a excentricidade variava e retornava a posição inicial. Assim, concluíram que a elipse possui uma maior deformação conforme aumenta o valor da sua excentricidade; que o plano secante em diagonal possui excentricidade menor ou maior que 1; e o plano na posição horizontal possui uma excentricidade igual a zero.

S7S8

As ações dos sujeitos envolveram as seguintes representações: vista ortogonal e algébrica da excentricidade. O sujeito S7 foi o responsável por manipular as representações, enquanto o S8 documentava as conclusões.

Embora tenham manipulado e encontrado as situações das curvas na questão anterior, a dupla documentou de modo genérico a sua resposta. Assim, concluíram: “a excentricidade aumenta conforme a inclinação do plano horizontal até o vertical”.

Tal afirmação é verdadeira e apesar de não a documentarem, ao especificar a curva/situação e a sua excentricidade, o sujeito S7 percebeu e verbalizou com sua dupla os nomes das curvas enquanto movia o plano secante e via a excentricidade numérica variar.

O sujeito S8 perguntou a sua dupla: “qual é a excentricidade zero?”... Após manipular o plano até a obtenção de um ponto e observar que a excentricidade se apresentou como inexistente, o S7 concluiu que a inexistência da excentricidade incorreria de ser igual a zero. Desse modo, percebemos uma falsa interpretação e uma falha na compreensão do conceito de excentricidade.

Q3.

Nesta questão (ver quadro 8) buscamos a compreensão dos sujeitos quanto ao formato das curvas. Esperávamos que os alunos relacionassem o formato alongado ou arredondado das curvas com a excentricidade.

S1S2

A dupla associou o valor da excentricidade a influência do plano secante, pois ao manipular o plano, o S2 percebeu que quanto mais próximo ao vértice este plano estivesse, mais alongada seria a curva, depois o S1 observou que quanto mais inclinado o plano estivesse, mais alongada a curva seria. Por fim, no relato escrito concluíram que: “A configuração do plano nas seções determina a forma delas: quanto menor for a excentricidade, menos deformada será a projeção; e quanto maior for, será mais “deformada” a circunferência”. Todas as representações foram observadas nesta etapa, com exceção da equação.

S3S4

Nesta etapa da atividade, interpretamos que os sujeitos tiveram um pouco mais de dificuldade no primeiro momento, pois houve uma troca de funções e de olhares ao lerem a questão. Posteriormente, o sujeito S4 move o plano e observa a variação do formato da elipse, parece conjecturar mentalmente e depois comenta com sua dupla: “Quanto mais os focos se afastam do centro, mais ela (elipse) fica achatada” e, ainda complementa a sua afirmação, trazendo a equação da excentricidade: “a excentricidade não é ‘n’ sobre ‘a’?”. O sujeito S3 afirma não recordar e, acha que está associada à inclinação do plano, apontando, gestualmente, para o posicionamento de onde o plano deveria estar para diminuir a excentricidade.

Após o diálogo da dupla, o relato escrito foi feito pelo sujeito S3, onde descreveu as situações possíveis de obtenção das curvas, considerando a inclinação do plano em relação aos elementos do cone. Desse modo, interpretamos como sendo o reflexo do teorema de Apolônio.

S5S6

Após a leitura da questão, S5 respondeu de imediato que o formato das curvas se modificava devido a sua excentricidade. Assim, a dupla reforçou como na questão anterior que: “quanto mais o corte está na diagonal, mais ficam deformadas (achatadas) por causa da excentricidade”.

S7S8

As ações dos sujeitos envolveram as seguintes representações: vista ortogonal e algébrica da excentricidade. Após a manipulação e observação da simulação, a dupla chega a conclusão oral: “ a excentricidade é o que determina a curva”. Do mesmo modo, acrescentaram na sua resposta escrita que “a excentricidade é quem define o tamanho e a curva”.

Q4.

A quarta questão (quadro 8) solicitava do aluno uma conclusão geral sobre a excentricidade.

S1S2

O sujeito S2 lê a questão, enquanto o S1 manipula o ambiente. O sujeito S2 comenta: “A excentricidade determina a posição do plano em relação a base do cone”. Mas a “base do cone” não é vista no ambiente, o que nos indica a referência a imagem mental. Desse modo, a dupla conclui por escrito que: “a excentricidade é a angulação formada pelo plano secante em relação a base do cone”. Compreendemos que a dupla associou a excentricidade ao posicionamento do plano de seção à mudança de formato da curva, porém não mencionou a relação entre a distância focal.

S3S4

A dupla concluiu que: “a excentricidade aumenta ou diminui de acordo com o grau de inclinação do plano”.

S5S6

A dupla não conseguiu chegar a uma definição, apenas concluiu que: “Quanto maior a excentricidade, maior a deformação”. Após movimentar o plano, a dupla observou que a proximidade de 1, na excentricidade, fazia com que a elipse se tornasse mais alongada. Do mesmo modo, que a excentricidade igual a 1 formaria uma parábola e, quando maior que 1 a parábola ficaria mais arredondada. Após a fala, os sujeitos escreveram como exemplo as seguintes situações: “elipse: excentricidade entre 0 e 0,99 (E= -1) e parábola maior que 1 (E≥1). O último exemplo, nos confirma a dificuldade em relação a geração das curvas parábola e hipérbole.

Apesar, de que oralmente a dupla citou a hipérbole, como sendo um valor para excentricidade: “depois de 1... quando viram duas parábolas”. S5, ao visualizar o valor na tela de e = 1,49, não sabia se este valor variava.

S7S8

As ações dos sujeitos envolveram as seguintes representações: vista ortogonal, algébrica da excentricidade e a equação das curvas. Assim, levantaram alguns questionamentos sobre a possibilidade da excentricidade está ligada a proximidade do plano secante em relação ao vértice. O que não procede. Mas, ao observarmos as ações dos sujeitos, concluímos que esta interpretação decorreu da posição do plano e como o mesmo se movimenta, ou seja, quando os alunos o manipulavam perceberam que mudando a sua inclinação se obtinha valores diferentes para a excentricidade.

A dupla ao manipular o plano secante e observar a equação das curvas geradas, percebeu uma variação nos temos x e y, assim como no sinal positivo ou negativo, que variava de acordo com a curva, mas não chegou a escrever ou sistematizar oralmente uma resposta.

Porém, tendo em vista a resposta da dupla na questão anterior, concluímos que a dupla compreende a excentricidade como fator de alteração da curva e do seu formato, porém não chegaram a relacionar, diretamente, os elementos que a determina, como por exemplo, a aproximação dos focos.

Q5.

A questão 5 (ver quadro 8) propõe uma observação das curvas degeneradas. A dupla deveria movimentar o plano secante e visualizar na simulação ou mentalmente que algumas possibilidades de seções não corresponderiam as formas curvas usuais como: o ponto, duas retas concorrentes e uma reta.

S1S2

A dupla observou apenas o ponto como sendo uma seção diferenciada, apesar de mover o plano e visualizá-lo passando pelo vértice em vários momentos. A dupla não soube justificar a sua resposta, apenas a associaram a inexistência da excentricidade. Acreditamos que as limitações no acabamento visual do recurso interferiram nas dificuldades de identificação das situações pelos participantes e, que os mesmos, não compreende as situações com retas como possibilidade.

Figura 35. Curva degenerada: ponto

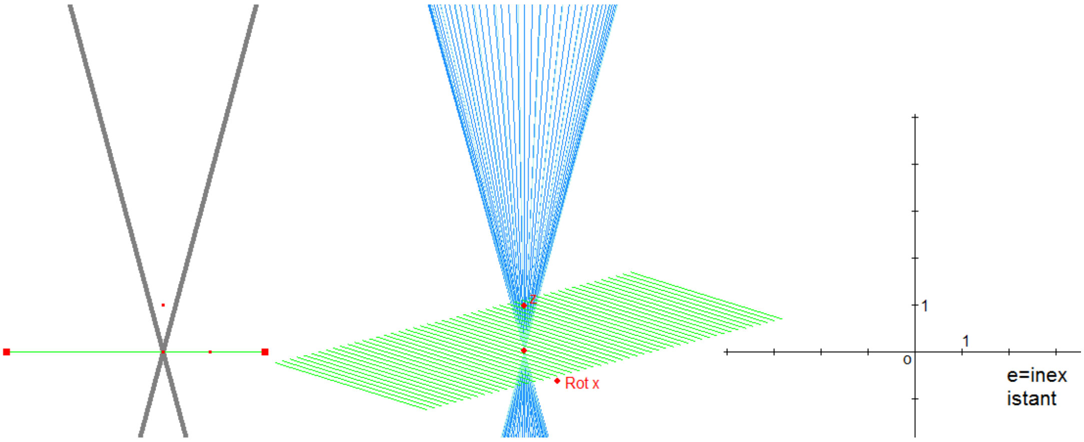


Figura 36. Curva degenerada: uma reta

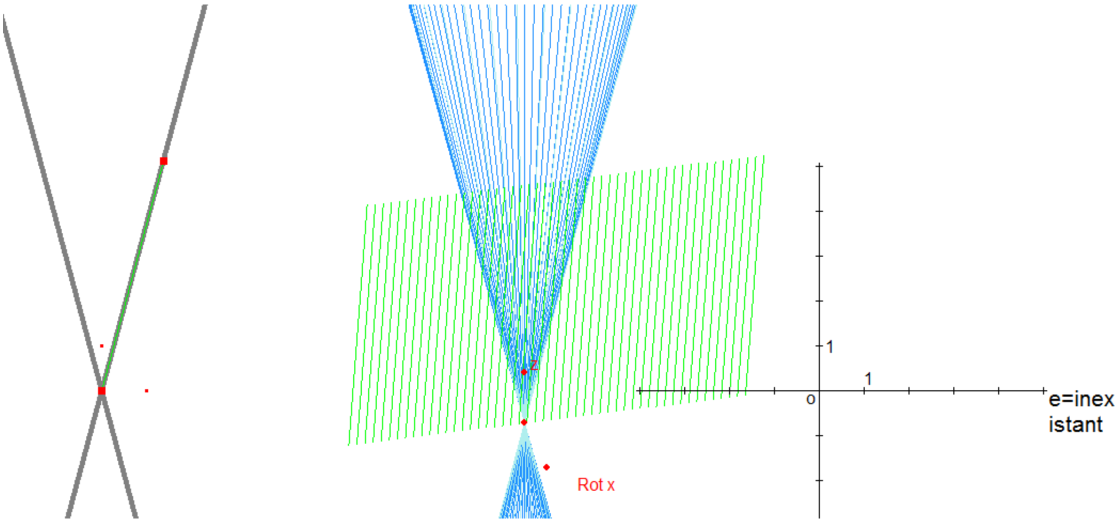
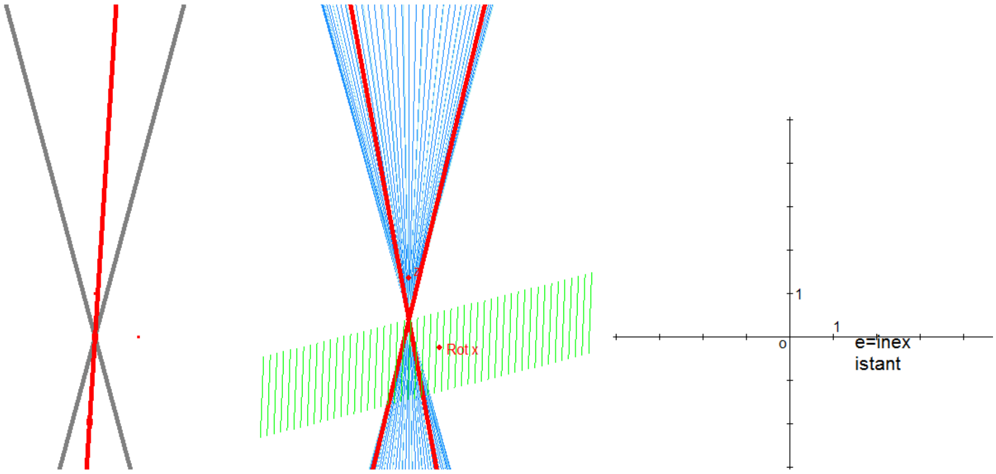


Figura 37. Curva degenerada: duas retas



S3S4

Apesar de terem descrito o ponto, anteriormente, como uma situação possível, a dupla relatou apenas as curvas usuais e o seu modo de obtenção sem mencioná-lo.

S5S6

A dupla identificou apenas o ponto como situação diferente, e explicou que ocorre “quando colocamos o plano de corte na horizontal e passando pelo vértice comum aos dois cones”. Embora, tenham visto outras situações, não a descrevem nem comentaram.

S7S8

Ao ler a questão, o S7 rapidamente disse: “o ponto”, embora que não tenha escrito na atividade. A dupla descreveu as curvas convencionais e as associou a excentricidade, porém não justificou a sua resposta.

Q6.

A questão 6 (quadro 8) exigia do aluno um conhecimento sobre os termos analíticos da equação e as relações que geram ou modificam as cônicas, conforme a mesma convenção. Esperávamos que ao manipular o plano secante e ver a equação se modificar, os sujeitos percebessem a relação entre os valores dos termos da equação com a curva.

S1S2

No primeiro momento, o sujeito S1 apresentou um desconforto com a questão, afirmando não saber responder. Depois, o mesmo, visualizou que os termos a e b se modificavam, embora não tenham escrito, sendo este relato oral. Contudo, a dupla associou a modificação dos termos da equação à excentricidade das curvas, assim como, considerou a relação do sinal positivo e negativo ao seccionamento de uma folha do cone e de duas folhas, respectivamente. Analisaram também a posição dos vértices da elipse no eixo cartesiano, mas disseram não haver relação com o foco.

S3S4

A dupla responde: “Os termos a e b (e os sinais) mudam de acordo com as formas curvas e a excentricidade de cada uma”. O sujeito S4 confunde-se na identificação dos temos a e b, e resolve usar o papel de rascunho como de suporte na explicação e acesso a memória visual e, assim, consegue associá-los corretamente. Por fim, acrescentam as equações das curvas circunferência, elipse, hipérbole e parábola (as duas como sendo uma única equação) para apresentar os termos.

Observamos que a dupla não conseguiu, no primeiro momento, localizar a equação da parábola no ambiente, pois a mesma se move na tela, juntamente, com o crescimento da curva. Apesar de, posteriormente, localizar a equação da parábola e perceber que a sua excentricidade é 1, a dupla não documentou nem voltou a questão em que se cabia a resposta. Essa dificuldade em escrever a equação nos indica que a as relações de definição não foram consideradas para a identificação dos termos da equação.

S5S6

A dupla concluiu que nas equações os sinais se modificavam conforme a excentricidade. Assim, expuseram: “e<1 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$” e concluíram, enfim, que “quanto maior a excentricidade, maior o valor de a e b”. E do mesmo modo, “quanto menor a excentricidade, menor será os valores de a e b”.

S7S8

A dupla comenta que a equação resultante da elipse será igual a um e vai ser sempre positiva, enquanto que na hipérbole e parábola será negativa. Porém não associaram ao sentido da curva e nem a relação entre soma ou diferença dos raios vetores, como um Lugar Geométrico.

Q7.

Ainda explorando a representação analítica das cônicas, buscamos com a questão 7 (ver quadro 8) explorar as limitações do software, visto que em algumas situações as equações das curvas não eram visualizadas. Logo, solicitamos as duplas que escrevessem essas equações. Esperávamos que os alunos ao identificar as curvas degeneradas pudessem escrever a sua equação.

S1S2

Embora não tenham considerado a situação em que se resulta uma reta e duas retas concorrentes como seções possíveis, como se perguntava na questão 5, nesta questão 7, consideraram a sua possibilidade ao visualizarem na simulação. Embora, só tenham relatado o caso onde "o plano coincide com a geratriz formando uma reta. ax+bx+c=0"; ou seja, quando o plano está tangente a geratriz do cone.

Os sujeitos chegaram a esta conclusão visualizando, na simulação, duas retas concorrentes. Houve uma interpretação equivocada ao observarem a representação ortogonal e a perspectiva, pois na primeira aparecia o plano reduzido a uma reta, enquanto que na segunda apareciam duas retas. Questionado pelo gesto do sujeito S2, ao sinalizar as duas retas, o S1 disse: "mas a geratriz é uma reta só " "aparentemente são duas retas, mas eu deduzi que é uma reta só".

Acreditamos, assim, que a convicção do sujeito S1, reflete a compreensão interiorizada do movimento de geração da superfície cônica, que foi suscitado pelo questionamento do colega, este confirmou o entendimento do S1 e fez um gesto representando o movimento de rotação da geratriz apoiada na diretriz.

S3S4

A dupla, após observar o plano secante interceptando o vértice do cone, citou apenas a ocorrência do ponto como situação de equação inexistente.

S5S6

Nesta questão, a dupla não conseguiu visualizar as situações obtidas por seções no cone em que não foi possível demonstrar a sua equação.

S7S8

As representações observadas para solucionar esta questão foram a ortogonal, o plano cartesiano e a analítica.

A dupla apenas identificou o ponto como uma situação em que a equação não aparece. A justificativa limitou-se a posição de x e y, observada no plano cartesiano, onde o ponto se encontrava na origem. Logo, concluíram não ter equação. Apesar de ter movido por várias vezes o plano secante, a dupla não conseguiu identificar outra situação.

Questão complementar

Quando perguntados informalmente qual das representações visualizadas na simulação foi mais significativa para a compreensão das situações propostas, as duplas responderam:

S1S2

"A perspectiva, pois nela é mais fácil visualizar o que está acontecendo na seção do corte".

S3S4

O sujeito S4 afirma que a representação mais significativa o gráfico, enquanto o sujeito S3 a perspectiva.

S5S6

" A representação mais significativa mais foi a forma em perspectiva".

S7S8

"Na representação cavaleira é possível visualizar mais aspectos das cônicas".

6.1 Observações e conclusões sobre o experimento

Como vimos, em nossa análise de livros didáticos, a definição por distância focal é a mais frequentemente encontrada, contudo, percebemos que dentre os 08 participantes, apenas 01 associou a excentricidade à relação de distância entre os focos, e mesmo assim, não relatou. Do mesmo modo, nenhum dos participantes considerou a distância entre o foco e a geratriz nas suas conclusões. A excentricidade foi associada, frequentemente, a inclinação do plano secante. Tal fato nos sinaliza para uma lacuna no processo de aquisição deste conhecimento. Não nos cabe identificar a sua origem, mais registrar que algo não foi trabalhado de modo efetivo e significativo para estes sujeitos.

Os participantes, de um modo geral, não reconhecem outra possibilidade de seção diferente das formas curvas e além do ponto. Cremos que o ponto só foi identificado, pois o plano secante passava pelo vértice sempre quando manipulado, logo a situação era intuída pelos sujeitos.

Outra questão importante que envolve a excentricidade foi a identificação da parábola e a sua condição de existência, os alunos embora soubessem a situação em que o plano secante deveria estar, não conseguem associá-lo a condição da excentricidade igual a 1, exclusivamente.

Pudemos observar, ainda, que as dificuldades em perceber os termos da equação que se modificam em cada curva, deve-se a ausência de articulação entre os dados posicionais das equações e a definição cônica. Isso ficou claro, na dupla S3S4, quando embora tenham identificado os termos, com o apoio da representação cartesiana e o rascunho de modo correto, não as associaram às definições mais, frequentemente, encontradas das cônicas.

Contudo, em todas as duplas observadas, as representações gráficas parecem ser primordiais para o reconhecimento da curva. Sendo assim, percebemos que a representação em três dimensões foi a mais citada pelos participantes quando perguntados sobre a sua compreensão geral das situações. Apenas um sujeito citou o gráfico. Ambas as representações são frequentemente vistas nos livros pesquisados.

Notamos que um grave erro conceitual se apresentou mais uma vez. Também citado por Neto (2013), a confusão que se faz entre a parábola e a hipérbole é frequente. Muitas vezes, a hipérbole é falsamente interpretada como dupla parábola. Podemos crer, que quando isso ocorre, seja um reflexo de uma lacuna no processo de aprendizagem. Logo, segundo o nosso referencial teórico, essa situação corresponde a uma dificuldade global e recorrente do sujeito, ou seja, ele não compreendeu a geração das curvas como seção de um cone. Sendo assim, nos inclinamos ainda mais a reforçar a importância de tal representação.

Nosso experimento também detectou algumas fragilidades, no entendimento de alguns sujeitos, em relação a situações em que o plano aparece como secante ou tangente. Neste sentido, houve uma troca entre os termos mencionada pela dupla S5S6.

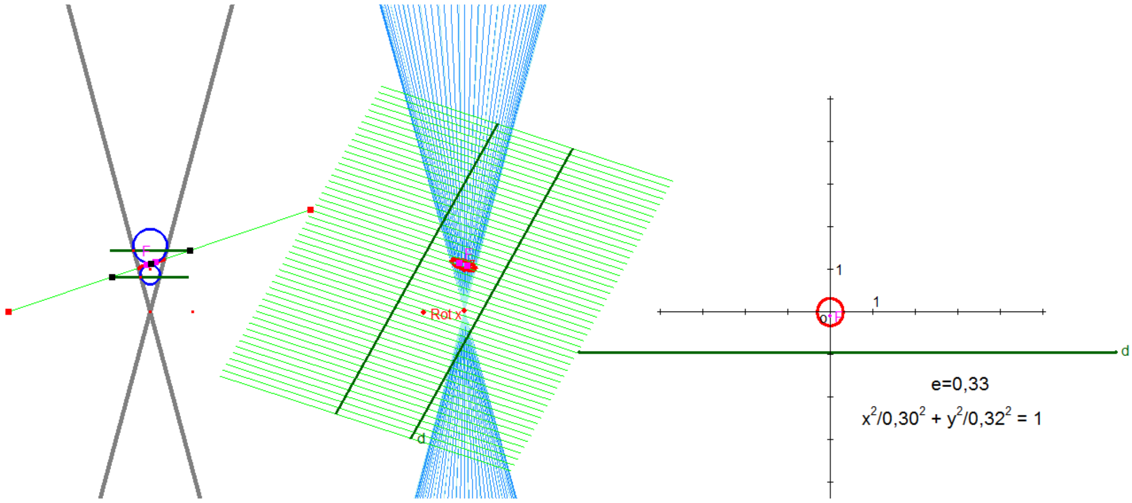
Um outro momento importante que ocorreu com a dupla S5S6, foi a discussão sobre a relação de horizontalidade e ponto de vista do plano. Questionado pelo S6 o S5 procurou apoios para sua afirmação e citou a posição da tela do computador e a linha do horizonte como referências. Esta observação, nos retoma a importância de se trabalhar a forma, seus elementos e propriedades desvinculados de um posicionamento único, ou do contrário tende-se a reforçar uma ideia errônea – de que a forma deixa de ser a mesma. Tal pensamento perpassa a ideia de que as formas geométricas possuem uma posição fixa no espaço e se alteradas mudam-se as suas propriedades. Vale lembrar, que as propriedades de uma forma em Geometria independem de posição espacial, mas sim da relação em que seus elementos possuem entre si.

6.2 Considerações sobre a simulação e o Software

Nesta seção traremos algumas considerações sobre o uso da simulação e do software, que podem ter contribuído como as ações e o desempenho das duplas.

Percebemos que o problema de interpretação, relatado na Q1 com a dupla S7S8, poderia ser facilmente dirimido caso a nossa ferramenta permitisse a manipulação da perspectiva sem a alteração do posicionamento dos demais elementos deste conjunto, como mostra a figura 38. Desse modo, acreditamos que seria mais um auxílio a percepção do aluno na identificação das curvas.

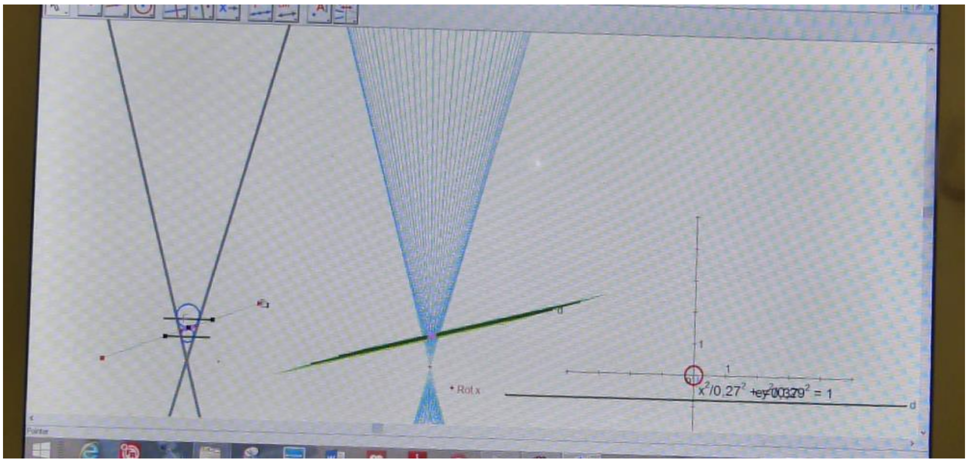
Figura 38. Elipse se aproximando de circunferência



Verificamos, ainda, que a representação ortogonal teve papel primordial na configuração da nossa simulação, acreditamos que isso decorra da sua função manipulativa e do teorema exposto que proporciona a visibilidade dos elementos principais como: foco, vértice, plano.

Na Q4, a dupla S7S8 interpretou de modo inconsistente a excentricidade, tudo indica que uma limitação da simulação possa ter contribuído para tal. Como a representação manipulável é a ortogonal e o plano secante se apresenta reduzido a um segmento, nas suas extremidades existem pontos de manipulação. Tais pontos movem-se em sentidos diferentes: na extremidade direita em todos os sentidos, enquanto na esquerda apenas no sentido horizontal. O que acarreta na impossibilidade de deixá-lo na horizontal, em outra posição, sem passar pelo vértice. O mesmo aconteceu com a dupla S1S2, embora tenham conseguido visualizar mentalmente a circunferência.

Figura 39. Aproximação de circunferência por S7S8



A dupla composta por S3S4 apresentou dificuldades na manipulação dos pontos móveis do plano secante, na representação ortogonal na simulação. Pois havia momentos em que o ponto se sobrepunha a outros, como o foco ou o vértice. Tendo em vista que para captura-lo novamente, o software dava-lhe opções de seleção na ordem de sobreposição, tornou-se um pouco confuso para os sujeitos entender de qual ponto se tratava. As demais duplas conseguiram superar, com mais facilidade, essa limitação da nossa ferramenta.

Outra limitação encontrada pelos participantes foi a ausência da ferramenta “voltar” ou do funcionamento do seu atalho (CTROL+Z), para agilizar o retorno da ação. A ausência de uma ferramenta de ampliação também foi mencionada entre os participantes como sendo um entrave.

Quanto a nossa ponderação sobre a simulação, percebemos que o mesmo contribuiu para suscitar questionamentos importantes entre os integrantes das duplas, atuando como um simulador de situações possíveis de obtenção de seções cônicas usuais e degeneradas.

Percebemos que um ponto bastante positivo foi o uso de representações diferentes e interligadas dividindo a mesma tela, que despertaram a curiosidade dos participantes em entender o porquê das modificações ocorridas em cada representação. A dinamicidade da ferramenta foi fundamental para este experimento, não seria possível tecer tantas considerações em tão pouco tempo sem esta ferramenta.

Desse modo, foi possível perceber algumas dificuldades e lacunas na aprendizagem dos sujeitos em relação ao tema Cônicas, seus elementos e relações.

Sendo assim, acreditamos que esta simulação possa inspirar outras pesquisas e educadores a utilizarem mecanismos similares a fim de diagnosticar os pontos em que precisam melhorar e reforçar no ensino das mesmas.

Esperamos, que a partir de nossas observações e considerações, possamos contribuir com pesquisas futuras que abordem o mesmo tema - Curvas cônicas, assim como a dinamicidade dos programas educativos de Geometria dinâmica.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao considerarmos o histórico das Cônicas e as suas contribuições em termos de representação na Matemática, percebemos o quão nos distanciamos de suas origens. Como vimos, cada definição presente neste texto nos demandou um conjunto de operações e visualizações mentais e imagéticas dotadas de um vasto conjunto de signos e símbolos que nos foram agregados ao longo de mais de vinte quatro séculos de história. Tal multiplicidade tornou o processo de aprendizagem complexo e contribuiu para o surgimento de pequenas "ilhas de conhecimento".

Cremos que é papel da escola acolher e garantir a oferta de conteúdos importantes para a sociedade. Mas, a sua função vai mais além, quando ao invés de somente ensinar, ajuda a refletir, relacionar e questionar. Neste sentido, percebemos no conteúdo das cônicas um amplo potencial interdisciplinar, capaz de fomentar habilidades visuais, algébricas e geométricas fundamentais na relação do homem com mundo.

Constatamos, que nem sempre as curvas cônicas são vistas em sua totalidade, e nem poderiam, pois não se caberia trabalhar todas as motivações que levaram a cada definição, aqui citada. Contudo, esperamos ter destacado a importância do seu estudo, considerando um conjunto de representações que torne o seu ensino mais atrativo, significativo e integrado. De modo que possibilite, ao aluno, refletir sobre outros moldes.

Os motivos aos quais nos levaram a esta pesquisa foram além das limitações e interesse pessoal, a busca por entender o que gerou a multiplicidade representativa das cônicas e a ausência de articulação entre as mesmas no ensino. Para tanto, buscamos na origem destas representações e na história do ensino das curvas cônicas, entender em que momento houve uma ruptura entre o gráfico e o algébrico, o plano e o espacial — como constatamos o seu reflexo na análise dos dados do nosso experimento.

Pudemos perceber essa ausência de sentido e relação entre as diferentes representações em alguns momentos durante o experimento:

- Quando o aluno não percebe na distância focal relação com a excentricidade;
- Quando o não relaciona o movimento do plano com deslocamento dos focos, como consequência – mais especificamente na obtenção de uma circunferência;
- Quando se limita nas conclusões, apesar da liberdade de movimentos propiciada pela Geometria Dinâmica – no erro da compreensão de que hipérbole são duas parábolas;
- Percebemos que há uma grave dificuldade na observação dos dados algébricos como parte de uma localização espacial de elementos, que pode ser compreendida por esquemas gráficos;
- E do contrário, quando não se estabelece uma relação graficamente dos dados posicionais algébricos;
- Quando os elementos não são relacionados ao contorno da forma, de modo que é esquecida a relação constituída pela posição dos focos e pontos da curva;
- A ausência de relação com as diretrizes, vistas sem a devida importância e sentido, com foi percebido na maioria dos dados analisados onde não eram nem reconhecidas ou mencionadas;
- Quando não se percebe que apesar de serem representações diferentes de um mesmo objeto matemático as suas propriedades permanecem intactas e invariantes, podendo ser expressas sob representações e pontos de vistas diferentes.

Podemos considerar que alguns fatos corroboram para este desfecho lacunoso, pois ao analisar o ensino, refletido nos livros didáticos atuais, vemos que apesar de um histórico rico em contribuições e aplicações, ele aparece reduzido a “ilhas”, ou seja, limitado a uma visão isolada sem relação com outras situações. Assim, outros “caminhos” são esquecidos, acarretando na anulação de propriedades e elementos fundamentais para dar sentido ao objeto matemático.

Assim, entendemos que as cônicas ficam restritas, apenas a compreensão superficial de sua formação tridimensional, como a uma história ou fábula, enquanto suas propriedades e relações métricas, quando ensinadas e não aplicadas, ficam sem significado e por consequência do desuso, são esquecidas.

Nas publicações mais recentes verificamos que Apolônio pouco é mencionado, apesar da origem das cônicas ser apresentada graficamente na maioria dos livros, na forma de uma perspectiva. Nestes casos, ao grafismo da forma, reserva-se apenas a função ilustrativa e não a geração de conhecimento e formação de conjecturas. As seções são vistas de modo isolado, fragmentando a ideia de procedência em comum. E, logo são substituídas por uma linguagem ainda mais abstrata: as equações.

Entendemos que um aspecto marcante, presente em todas as definições operacionais das cônicas é a compreensão por Lugar Geométrico dos seus elementos. Por consequência, se não houver domínio sobre as relações métricas entre as cônicas, provavelmente não haverá articulação entre as representações de modo pleno. Tal consideração merece ser estudada com mais profundidade em uma perspectiva futura, assim como a relação entre os seus enunciados.

Percebemos que a principal razão para o ensino das cônicas ser revisto e destacado no âmbito escolar é, além das suas aplicações que são inúmeras (nos fenômenos e no campo de tecnologia e ciência), a gama de propriedades matemáticas enredadas no seu desenvolvimento (estudo da álgebra, volume e forma, relações métricas). É um conteúdo que pode e deve ser destacado em várias etapas escolares, sob pontos de vistas adequados para cada nível. Esta pesquisa aponta apenas uma sugestão inicial sobre as implicações do seu estudo atual, sabemos que ela não se esgota em si mesma. É evidente que várias propostas podem surgir com visões semelhantes ou dispares, mas a intenção neste estudo é provocar inquietações e verificar como anda o ensino e, sendo assim, consideramos que cumprimos este objetivo.

Cada definição e representação possui suas peculiaridades e potencialidades. Sabemos que os vários movimentos educacionais, contribuíram para a ênfase de algumas abordagens, em detrimento a outras; e como resultado deste processo percebemos mais perdas, do que ganhos. Neste sentido, acreditamos que uma das maiores perdas se dá na ausência ou desconhecimento do teorema de Dandelin-Quetelet, que se demonstra como um importante elo entre a Geometria e a Álgebra, passível de tratamento analítico e sintético, e contribui com o teorema de Apolônio, numa versão operacional. Não é nosso objetivo criticar as abordagens, mas fica evidente, diante de tudo que foi exposto, a importância do estudo e conhecimento da forma, assim como de uma abordagem multirrepresentacional e unificada.

Após conhecermos a importância das representações no ensino, por meio da TRRS, percebemos lacunas potenciais no ensino da Matemática, causadas pela ausência de articulação entre registros diferentes. Neste sentido, propomos e experimentamos uma abordagem múltipla das cônicas, para isso, contamos com as vantagens da simulação virtual e da Geometria Dinâmica, que nos possibilitou unir todos esses pensamentos num mesmo ambiente.

O experimento nos trouxe uma riqueza de contribuições e sinalizações significativas. Conseguimos perceber as dificuldades dos alunos em articular alguns conceitos prévios, a fragilidade na formação de outros e a ausência de sentido no acesso de algumas representações, características que confirmam a ideia central da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Notamos que, por mais que uma definição seja frequentemente utilizada no ensino, ainda assim, sua aquisição não estará garantida, podendo existir lacunas expressivas no processo cognitivo.

No decorrer do texto foram descritos mais questionamentos do que soluções, indício de que ainda há muito o que se caminhar enquanto pesquisa sobre o ensino das cônicas e, ainda, tecer propostas que possibilitem o aprimoramento desse estudo. Somos cientes de que o nosso papel enquanto pesquisador é desenhar o que achamos ser o ideal, mas na prática nem sempre conseguimos. O nosso caminho é dotado de experimentos e questionamentos e estas são características importantes da pesquisa.

Nessa perspectiva, esperamos ter contribuído, ao especificar requisitos, para ferramentas que ajudem a dirimir tais lacunas. Acreditamos que um artefato ad hoc desenvolvido a partir das necessidades apontadas nesta pesquisa contribuirá com a compreensão da simulação apresentada no Cabri mais efetivamente, tendo em vista a função para o qual ele poderá ser desenvolvido. Cremos que o conjunto das informações levantadas juntamente com a aplicação de uma interface que favoreça a compreensão das articulações entre as diversas representações das cônicas e entre as suas definições/caracterizações seja um caminho a seguir em pesquisas posteriores.

Outra possibilidade é promover, a partir de pesquisas que visem o estudo e aprofundamento das questões que envolvem as dificuldades dos alunos na compreensão das cônicas, o desenvolvimento de material didático para este ensino.

Logo, acreditamos ter atingido os objetivos propostos para este estudo e esperamos que as nossas reflexões possam contribuir, de algum modo, com ações que visem um ensino das cônicas mais integrado e não fragmentado como usualmente é feito. Do mesmo modo, esperamos despertar o interesse para que outros experimentos sejam realizados na tentativa de identificar lacunas, trabalhá-las e tornar o conteúdo mais significativo.

8 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 3. 6, p. 62-77, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-322.2008v3n1p62/12137. Acesso em: 20 maio 2014.

ARTIGUE, M. Ingèniere didactique. **RDM**, v. 9. 3, p. 231-308, 1988.

BELLEMAIN, F. Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In **Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico & International Conference on Graphics Engineering for Arts an Design**, 2001. pp. 1314–1329.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BORDALLO, M. **As Cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro.** 2011.Dissertação (Mestrado em ensino da Matemática). Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica: Um tratamento vetorial**. São Paulo: MAKRON Books do Brasil, 2005

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetike,** Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf. Acesso em: 09 set. 2014.

CONDE, A. **Geometria Analítica**. São Paulo: Atlas, 2004.

CORREIA, A. M. A. **Representação Bidimensional**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, EAD. 2011,v.1

CORREIA, M. C. L. F. **Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em Matemática. Porto, 2013.

COSTA, M. D.; COSTA, A. P. A. V. **Geometria gráfica tridimensional**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1996, v.3.

COSTA, M. D.; COSTA, A. P. A. V. **Curvas Cônicas** - apostila. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1978.

DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, C. L. O. Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática- CIAEM, nº, 2011, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife: EDUMATEC-UFPE, 2011.

DUVAL, R.; FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, p. 10-34, 2013.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma.** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. ed. São Paulo: PROEM. 2011.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano registros semióticos e aprendizagens intelectuais** - Tradutores - Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo. Livraria da Física, 2009.

GALVAO, T. F.; BELLEMAIN, F. **Nova licenciatura em expressão gráfica: parcerias para um futuro promissor.** In: GRAPHICA 2013 - X international Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, 2013, Florianópolis. **Anais do Graphica 2013**. Florianópolis: CCE - UFSC, 2013. v. 1. p. 1-13.

GARBI, G. G**. A Rainha das Ciências** - Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

HEFEZ, A. **Introdução à Geometria Projetiva.** Monografias de Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. p. 93

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Geometria Analítica**.** 6 ed. São Paulo: Atual, 2013, v.7.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário *Básico de* filosofia**. 3 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

MONTEIRO, R. M. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. UFES, Vitória, 2014.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra "novos elementos das seções cônicas" (philippe de la hire - 1679) e sua relevância para o ensino de matemática.** 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra "novos elementos das seções cônicas" (Philippe de La Hire – 1679) e sua relevância para o ensino da matemática.** Natal: IFRN, 2013. p. 287.

PEREIRA, C. S.; COSTA, D. S. **Uma Análise Metodológica do Ensino das Cônicas no Ensino Básico.** In: X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010, Salvador: Caderno de resumos, 2010.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. de José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 (Coleção estudos).

PESAVENTO, S. J. **Representações**. Revista Brasileira de História. São Paulo: ANPUH/ Contexto, vol.15, nº 29, 1995.

PIAGET. Disponível em: http://www.construirnoticias.com.br/asp/materia.asp?id=141. Acesso em: 25 dez. 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2007.

SCHWERTL, S. L. **Construções Geométricas e Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA, 2012. p. 168.

SEBASTIANI FERREIRA, E.; PAQUES, O. **Um olhar histórico do ensino das cônicas no Brasil através dos livros didáticos**. 1 º Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. História da Educação Matemática escolar indígena no Brasil. 2011.

SOUSA, N. S. **Do Espaço ao Plano, da Abstração ao Registro Visual: as cônicas no contexto da aprendizagem colaborativa.** In: XVIII EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2014, Recife. Caderno de Resumos, 2014.

SUASSUNA, A. **Iniciação à estética**. 6. ed. Rio de janeiro: José Olympio, 2004.

SIQUEIRA, J. E. M. **Equações Quadráticas: Articulando suas formas algébricas e Geométrica via um aplicativo ad hoc.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências.) Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, UFRPE, Recife, 2009.

VENTURI, J. J. **Cônicas e Quadráticas**. 5 ed. Curitiba, 1949. p. 243.

VIEIRA, S. M. S.; MORETTI, M. T. **Caracterização dos registros semióticos presentes na aprendizagem da porcentagem.** In: VII CIBEM, 2013, Montivideu. Anais VII CIBEM. Montivideu: Editora dos CIBEM, 2013. v. 1. p. 1064-1064.

APÊNDICE A – Termo de Livre Consentimento

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS - Resolução 466/12)

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa CURVAS CÔNICAS: DO ESPAÇO AO PLANO DA ABSTRAÇÃO AO REGISTRO VISUAL. Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) NÚBIA DOS SANTOS DE SOUSA, residente na Rua xxxxxxxxxxx, nº xx, xx, PE, CEP: xxxxxxxx/ xxx, e está sob a orientação de: Franck Gilbert René Bellemain, Telefone: xxxxxxx, e-mail: xxxxxx
Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensíveis, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde com a realização do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.
Caso não concorde, não haverá penalização, bem como será possível retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- Descrição da pesquisa: Pretendemos investigar como ocorre o processo de articulação entre as diferentes abordagens das Cônicas presentes no ensino. Visamos, assim, entender esta articulação mediante um cenário virtual, por alunos de licenciatura. Desse modo, acreditamos que o uso de uma ferramenta computacional, que permita ao aluno a visualização de diferentes caracterizações das cônicas por meio de representações gráficas e algébricas, tem muito a contribuir com esse processo.
- O sujeito será convidado a participar de uma sequência didática composta por um questionário com 7 questões sobre o conteúdo de cônicas, e um cenário virtual, complementar às questões. O questionário será aplicado em duplas conforme agendamento prévio. Sua realização ocorrerá na sala da Coordenação do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica localizada no Centro de Artes e Comunicação da Universidade Federal de Pernambuco. O experimento terá o limite de uma hora para ser realizado.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa através de questionário e filmagem do experimento, ficarão armazenados em pastas de arquivo e computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador e Orientador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação).
Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).**

____

(assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, ______________________________________, CPF _________________, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro virtual, como voluntário (a). Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento).

Local e data __________________

Assinatura do participante: __________________________

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar. (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE B – Atividade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

Nome:.. Período:............

Nome:.. Período:............

Atividade para identificação e percepção do sujeito sobre o experimento no ambiente virtual Cabri

1. Ao mover o plano secante ao cone obtemos diferentes situações, identifique-as considerando as demais representações da simulação:

Posição do plano	*Situação*

2. Sabendo-se que a excentricidade determina a curva e o seu formato, o que podemos compreender ao manipular o plano secante ao cone, nas diferentes situações identificadas?

Situação	Excentricidade

3. Observa-se que em certas situações as curvas se modificam quanto ao seu formato, ficando mais achatadas ou arredondadas. Por que isso acontece?

4. Após as observações acima, o que podemos concluir como excentricidade da curva?

5. Após a manipulação dos planos, você observou alguma(s) situação(s) diferentes das formas curvas? Se sim, descreva o que observou e explique o que levou à(s) novas formas.

6. Sabendo-se que cada curva possui um modo de representação analítico, o que muda na sua equação conforme as situações obtidas? Se possível identifique os termos da equação conforme a convenção analítica.

7. Em certas situações as equações não aparecem na simulação, como podemos interpretar essas situações? Escreva as equações que correspondam a essas situações?

ANEXOS 1 – Programa da Disciplina Geometria Gráfica Bidimensional do Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE para o primeiro semestre de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Prática de Ensino
[ ] Módulo
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO [ ] ELETIVO [ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
EG	GEOMETRIA GRÁFICA BIDIMENSIONAL	30	60	4	90	1º

Pré-requisitos		Co-Requisitos		Requisitos C.H.	0

EMENTA

Normas gerais do desenho técnico - Fundamentos da Geometria Euclidiana - Estudo das figuras geométricas: linhas retas, polígonos, cônicas, espirais, curvas cíclicas - Propriedades métricas e posicionais dos polígonos convexos em geral e particularmente dos triângulos e quadriláteros. Propriedades decorrentes da regularidade dos polígonos. Verificação gráfica de propriedades. Problemas gráficos de construção de polígonos, com soluções discutidas. As curvas planas. Concepção geométrica e construção de lugares geométricos planos. Estudo de tangência e sua aplicação na construção de linhas concordantes.

OBJETIVO (S) DO COMPONENTE

- Conhecer os elementos geométricos;
- Distinguir as principais formas geométricas;
- Desenvolver no aluno as seguintes habilidades: concentração, interesse pela geometria gráfica, entendimento das figuras geométricas (linhas retas, polígonos, cônicas, espirais, curvas cíclicas), capacitar o aluno na utilização dos instrumentos de desenho;
- Demonstrar os processos de construção das formas planas com uso dos instrumentos;
- Aumentar a capacidade de abstração e visualização espacial.

METODOLOGIA

Aulas expositivas com a utilização de quadro, marcador de quadro branco, slides e modelos didáticos (concretos e simulados por computadores).

AVALIAÇÃO

Será realizado com base nos seguintes critérios:

a) Nas unidades: média ponderada dos exercícios + avaliação da unidade

b) Média geral: média aritmética das 3 unidades

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Fundamentos da geometria euclidiana: Geometria pré-euclidiana; Princípios dos Elementos de Euclides; etapas do raciocínio Euclidiano.

2. Estudo das figuras geométricas: Linhas Retas: propriedade de posição (perpendiculares, oblíquas, paralelas), distância, linhas proporcionais; Triângulos, quadriláteros, polígonos em geral; Casos de congruência e semelhança, retas particulares, relações numéricas.Razão áurea.
3. Dados métricos e posicionais, explícitos ou implícitos, simples ou compostos, necessários para a determinação gráfica de polígonos de n lados. Dados independentes e dados inter-relacionados. Limites de variação de cada dado em função dos demais.Compatibilização (nº de soluções). Circunferência e demais curvas cônicas: arco e corda, medida dos ângulos, ângulo inscrito, medida de uma circunferência, cálculo de pi, eixo radical, traçado da elipse, parábola e hipérbole, Propriedades comuns e particulares do círculo, da elipse, da parábola e da hipérbole que permitem sem traçado quando conhecidos seus elementos métricos e posicionais. Traçado de tangentes e normais às cônicas e aplicação de arcos concordantes dessas curvas, entre si e com segmentos de reta, na composição de curvas gráficas usadas na tecnologia e nas artes visuais. Potência de um ponto em relação com uma circunferência. Espirais, volutas, conchóides e cissóides, Curvas cíclicas: ciclóide, epiciclóide e hipociclóide . Casos degenerados.
4. Resolução de problemas de construção de figuras geométricas: Lugares geométricos: definição e conceito, propriedades lineares e angulares, lugares geométricos na construção de figuras, as figuras geométricas como lugares geométricos na resolução de problemas; por igualdade e semelhança: construção de figuras por simetria, rotação, translação Transformação e homotetia. As transformações geométricas na resolução de problemas.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

1. Carral M. **Geometria**. Paris: Editions Ellipse, 1995.
2. CARVALHO, Benjamin de A . **Desenho Geométrico.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1974.
3. F.G.M. **Exercices de géométrie**. 6° edition. Paris: Gabay, 1991.
4. CHAPUT. Frère Ignace. **Elementos de geometria descritiva com numerosos exercícios**. RJ: F. Briguiet & Cia., 1960.
5. LEBESGUES, H. ***Leçons sur les constructions géométriques***. Paris: Gabay, 1987.
6. ROUCHE, E.; COMBEROUSSE, C. Traité de géométrie. 7° edition. Paris: Gabay, 1997.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE	HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO
Departamento de Expressão Gráfica	Licenciatura em Expressão Gráfica

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO

ANEXOS 2 – Programa da Disciplina Sistemas de Representação do Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da UFPE para o segundo semestre de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA PARA ASSUNTOS ACADÊMICOS
DIRETORIA DE DESENVOLVIMENTO DO ENSINO

PROGRAMA DE COMPONENTE CURRICULAR

TIPO DE COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] Disciplina
[ ] Atividade complementar
[ ] Monografia
[ ] Prática de Ensino
[ ] Módulo
[ ] Trabalho de Graduação

STATUS DO COMPONENTE (Marque um X na opção)

[X] OBRIGATÓRIO [ ] ELETIVO [ ] OPTATIVO

DADOS DO COMPONENTE

Código	Nome	Carga Horária Semanal		Nº. de Créditos	C. H. Global	Período
		Teórica	Prática			
EG	SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO	30	45	4	75	2º

Pré-requisitos	• GEOMETRIA GRÁFICA BIDIMENSIONAL	Co-Requisitos		Requisitos C.H.	0

EMENTA

Representação Gráfica e gráfico-analítica, com caracterização dos Sistemas quanto aos tipos de projeção, quanto ao número de planos de projeção e quanto à posição do Sistema de Referência relativamente ao plano do desenho.

OBJETIVO (S) DO COMPONENTE

- Iniciar os alunos na visualização espacial capacitando-os para operar nos principais sistemas de representação.
- Conhecer os meios básicos de expressão gráfica do objeto;
- Familiarização com os instrumentos e materiais utilizados para expressão e representação gráfica;
- Conhecer normas e convenções do desenho técnico;
- Desenvolver o raciocínio espacial, tendo como referência os códigos e tipologias estabelecidas;
- Conhecer as tipologias de representação e sua relação com as escalas;
- Desenvolver trabalhos de acordo com as Normas Técnicas Brasileiras – ABNT.

METODOLOGIA

Aulas expositivas com a utilização de quadro, marcador de quadro branco, slides e modelos didáticos (concretos e simulados por computadores).

AVALIAÇÃO

1. Unidade
   - Exercícios de classe (40%)
   - Exercício escolar ou projeto (60%)
2. Unidade
   - Exercícios de classe (40%)
   - Exercício escolar ou projeto (60%)

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Sistemas que utilizam apenas projeções ortogonais. Sistemas de projeção cotada,Sistema mongeano e axonometrias ortogonais. Figuras morfométricas mais apropriadas à representação nesses Sistemas.

2. Sistemas orto-oblíquos e bi-oblíquos. Combinação de vista ortogonal com perspectiva cavaleira, de vista ortogonal com sombra solar, e de perspectiva cavaleira com sombra solar. Condições para uma perspectiva cavaleira isolada representar um sólido morfométrico.

3. Sistemas orto-cônicos, oblíquos-cônicos e bicônicos. Combinação de vista ortogonal com perspectiva cônica, de vista ortogonal com sombra de fonte pontual, de cavaleira com sombra de fonte pontual, de perspectiva cônica com sombra solar, e outras combinações de vistas com sombras. Anaglifos e outras experiências bicônicas para visão estereoscópica. Representação de sólidos morfométricos em cavaleira cônica, em axonometria cônica de duas fugas e de três fugas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

ADERVAN Machado. **Perspectiva Cônica Cavaleira Axonometrica**.São Paulo: Pini, n/d.

GIESECKE, Frederick E. et al. **Comunicação gráfica moderna**. Rio Grande do Sul: ARTMED, 2002.

COSTA, Mario D.; COSTA, Alcy Paes de Andrade V. **Geometria Gráfica Tridimensional**. v.2. Recife: Editora Universitária/UFPE, 1986.

DEPARTAMENTO A QUE PERTENCE O COMPONENTE: Departamento de Expressão Gráfica

HOMOLOGADO PELO COLEGIADO DE CURSO: Licenciatura em Expressão Gráfica

ASSINATURA DO CHEFE DO DEPARTAMENTO

ASSINATURA DO COORDENADOR DO CURSO