



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Engenharia Biomédica

Graduação em Engenharia Biomédica

**Estudo comparativo da reconstrução de imagens de
Tomografia por Impedância Elétrica utilizando Evolução
Diferencial e Busca por Cardumes de Peixes**

Rafaela Covello de Freitas

Trabalho de Graduação

Recife, 30 de Junho de 2016

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Engenharia Biomédica

Rafaela Covello de Freitas

**Estudo comparativo da reconstrução de imagens de
Tomografia por Impedância Elétrica utilizando Evolução
Diferencial e Busca por Cardumes de Peixes**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Biomédica do Departamento de Engenharia Biomédica da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Biomédica.

Orientador: *Wellington Pinheiro dos Santos*

Recife, 30 de Junho de 2016

Agradecimentos

A Deus.

A Cristiane, minha mãe, por todo o apoio, carinho e dedicação, meu suporte e esteio. Muito obrigada por todas as noites de sono perdidas, por todos os longos dias de conselhos e lições, que são os maiores responsáveis por quem sou hoje.

Ao meu pai, Edinaldo, por ter me proporcionado o conforto e as condições para que eu pudesse dar prosseguimento e realização a todos os meus objetivos alcançados, até então.

A minha avó, Maria do Carmo, por ter me dado amor e candura incondicionais, me mostrando, ainda assim, a fortaleza que devemos ser para enfrentarmos a vida e à minha avó, Nadir, pelo exemplo de força e mulher.

A meu avô, Giovanni (*in memoriam*), que em seus últimos anos, me lembrou a alegria de ser criança e a importância de se viver com simplicidade e alegria.

A meu namorado, meu grande amigo, minha dupla, Filipe, que esteve ao meu lado durante a realização de todo este trabalho, me dando suporte incondicional.

A meus irmãos, em especial, Ana Beatriz, pelo companheirismo, conversas e compreensão.

A Valter Feitosa, pela paciência e compreensão nas inúmeros momentos de conversa e explicações, sem as quais não teria sido capaz de desenvolver este trabalho.

A Victor Luiz, Rodrigo Ogava, pelas conversas descontraídas e iluminadoras, que tanto enriqueceram meu conhecimento.

A meu professor e orientador, Wellington Pinheiro, por ter acreditado em minha capacidade e me guiado com tanta destreza no desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

A tomografia por impedância elétrica consiste-se de um método que busca obter imagens do interior de um corpo de forma não invasiva, utilizando radiação não-ionizante para tal. Utiliza, então, corrente elétrica de baixa amplitude e alta frequência que são injetadas por eletrodos que permeiam a borda da região de interesse, e, a partir dos potenciais de borda medidos e utilizando as equações de Poisson, em teoria torna-se capaz de reconstruir a imagem de objetivo. No entanto, as equações matemáticas que constituem o problema caracterizam-se por mal postas e com múltiplas soluções, sendo analiticamente difíceis de resolver. Para tal, algoritmos de busca são utilizados, em especial os algoritmos evolucionários, que se baseiam na soluções que a natureza encontra para a resolução de diversos problemas. Este trabalho, portanto, busca avaliar o desempenho quantitativos e qualitativo de duas técnicas, sendo a Evolução Diferencial (ED) e a Busca por Cardumes de Peixes (FSS), objetivando contribuir para a evolução da TIE como técnica de imageamento.

Palavras-chave:

Tomografia por Impedância Elétrica - Evolução Diferencial - Fish School Search - Radiação não-ionizante - Imageamento - Algoritmo Evolucionário

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Justificativas	2
1.3	Objetivos	3
1.4	Objetivos Específicos	3
1.5	Organização do Trabalho	4
2	Tomografia por Impedância Elétrica	5
2.1	Histórico	6
2.2	Fundamentos Teóricos	7
2.3	Modelagem do problema da TIE	7
2.3.1	Problema Direto	8
2.3.2	Problema Inverso	9
2.3.3	Função Objetivo	10
2.4	EIDORS	11
3	Métodos de Reconstrução: Otimização por Algoritmos Naturais	14
3.1	Computação Evolucionária	14
3.1.1	Evolução Diferencial	14
3.1.1.1	Inicialização	15
3.1.1.2	Mutação	15
3.1.1.3	Cruzamento	16
3.1.1.4	Seleção	17
3.1.1.5	Critério de Parada e Seleção dos parâmetros de controle	18

3.1.2	Busca por Cardume de Peixes	18
3.1.2.1	Princípios computacionais da Busca por Cardume de Peixes	18
3.1.2.2	Operadores	19
4	Resultados	24
4.1	Evolução Diferencial	24
4.2	Busca por Cardumes de Peixes - FSS	32
4.3	Comparativos entre Evolução Diferencial e Busca Por Cardume de Peixes	40
5	Conclusões	45
	Referências Bibliográficas	47

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

O imageamento do interior de um corpo sem a necessidade de serem realizados procedimentos invasivos consiste-se de uma conquista para diversas áreas da ciência, visto que evita danos ao mesmo, permitindo, simultaneamente, um estudo aprofundado de seu interior. Atualmente, diversas técnicas são utilizadas para alcançarem este objetivo, e aplicam-se em várias áreas, como industrial, e, principalmente, a área médica.

Possuindo como objetivo principal a visualização do interior do corpo do paciente sem a necessidade de procedimentos intervencionistas, diversas tecnologias de imageamento são bastante difundidas e utilizadas, principalmente no que diz respeito ao apoio ao diagnóstico de doenças. Como exemplo, é possível citar a ressonância magnética, tomografia computadorizada, PET-Scan, ultrassonografia, raios-X plana, as quais utilizam diferentes propriedades físicas da matéria para a obtenção da imagem.

No entanto, estas tecnologias proporcionam grandes obstáculos no que se diz respeito a estrutura que requerem para seu completo funcionamento e alto custo financeiro. Além disto, representam também risco a seus operadores e pacientes, dada a sua estrutura, e, principalmente, dada a tecnologia que utilizam para realizarem o imageamento, como é o caso dos aparelhos que utilizam raios-x ou pósitrons para a obtenção da imagem.

Desta forma, como possível solução a grande parte destes problemas, a Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) passou a ser estudada para aplicações em áreas médicas, visto que utiliza como princípio o comportamento dos tecidos quando submetidos à correntes elétricas de baixa intensidade e alta frequência por meio de eletrodos que circundam ou se dispõem sobre a região de interesse, e na medição dos potenciais elétricos resultantes sobre os mesmos. [Tehrani

et al., 2010]

A partir da medição destes potenciais, esta técnica de imageamento se propõe a reconstruir a imagem do interior da seção utilizando o cálculo estimado da resistividade/condutividade elétrica da mesma, e, para isto, conta com a solução do problema direto e inverso que caracterizam a TIE.

No entanto, a resolução destes problemas constitui-se do grande obstáculo da TIE. O problema direto, sendo o menor obstáculo à resolução da imagem, não possui resolução analítica para qualquer domínio, e como uma das formas de resolução, utiliza-se o Método dos Elementos Finitos. O problema inverso, no entanto, é dito mal posto e não linear [Kumar et al., 2010], além de apresentar grande sensibilidade a erros numéricos e ruídos experimentais, não possuindo resolução analítica ou método de reconstrução bem estabelecido à sua resolução. Estes fatores, portanto, fazem as técnicas de reconstrução apresentarem baixo desempenho computacional e proporcionarem imagens com pouca resolução anatômica.

Apesar de suas deficiências, uma das formas de aplicação da TIE na medicina, já bem estabelecida, é a monitorização da ventilação pulmonar mecânica em pacientes, sendo possível citar também sua utilização na detecção de tumores e de acidentes vasculares cerebrais. O melhor desempenho desta técnica nas situações relatadas anteriormente se dá pela diferença drástica de condutividade que estes tecidos possuem entre si, de modo que é possível observar grande contraste na distribuição de corrente elétrica pela região de interesse.

A baixa velocidade de construção e baixa qualidade anatômica tem sido obstáculos para o desenvolvimento da TIE. Então, dados os benefícios que esta técnica possui potenciais chances de proporcionar, caso bem desenvolvida, diversos grupos de pesquisa tem se empenhado na descoberta de algoritmos de reconstrução cada vez mais eficientes, proporcionando baixo custo computacional e grande qualidade anatômica.

1.2 Justificativas

A TIE, apesar de se encontrar em seus estágios iniciais de desenvolvimento, possui grande potencial como técnica de imageamento, visto que é não invasiva e não faz uso de radiação ionizante. Deste modo, seu desenvolvimento caminha em direção ao uso de técnicas de reconstrução cada vez mais rebuscadas e eficientes, capazes de proporcionar os resultados anatômicos desejados, ao mesmo tempo em que oferecem baixo custo computacional. Visto que a TIE não possui solução única para solucionar o problema inverso, a reconstrução da imagem se dá por algoritmos metaheurísticos, muitas vezes baseados no comportamento da natureza, como Busca por Cardume de Peixes [Lins et al., 2012], Evolução Diferencial [Price et al., 2006], Algoritmos Genéticos, busca por enxame de partículas, dentre outros.

Deste modo, considerou-se importante o desenvolvimento de um trabalho que compilhasse a atual situação de duas técnicas da TIE amplamente abordadas neste grupo de pesquisa: a Evolução Diferencial e a Busca por Cardumes de Peixes, descrevendo, desta forma, cada método utilizado, resultados obtidos para diferentes quantidades de elementos finitos utilizados na reconstrução da malha/região de interesse, dificuldades encontradas e fatos observados, de acordo com os experimentos.

1.3 Objetivos

Comparar duas técnicas de reconstrução de imagens utilizadas por este grupo de pesquisa, sendo estas a Evolução Diferencial e a Busca por Cardumes de Peixes, com aplicação em TIE, e extrair seus dados de desempenho, de modo a classificá-las de acordo com seus resultados qualitativos e quantitativos.

1.4 Objetivos Específicos

Comparar, os resultados qualitativos e quantitativos de duas técnicas de reconstrução de imagens para Tomografia por Impedância Elétrica, sendo estas a Evolução Diferencial e Busca por Cardumes de peixes, utilizando, para tal, três configurações de imagem ouro (região circular com o objeto de interesse no centro, entre o centro e a borda, e na borda desta mesma região) e quatro diferentes quantidades de elementos finitos da malha, a fim de analisar e comparar os resultados qualitativos e quantitativos obtidos durante os experimentos.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho se organiza em introdução, em que um breve histórico, justificativas e objetivos são expostos.

Em seguida, no capítulo da Tomografia por Impedância Elétrica são apresentados os fundamentos teóricos da TIE, em que são explicadas as equações que regem o problema, a importância dos algoritmos de busca na reconstrução da imagem bem como a utilização do software auxiliar desenhado para auxiliar na questão da reconstrução da imagem, o EIDORS.

Após explicação da TIE e seus principais regimentos, segue-se, no capítulo Algoritmos Evolucionários, explicação dos métodos Evolução Diferencial e Busca por Cardumes de Peixes para a reconstrução da imagem em TIE.

Em Resultados e Discussões, são mostrados e debatidos os resultados obtidos para a simulação dos dois métodos, aplicadas para quatro diferentes quantidades de elementos na malha e três diferentes posicionamentos do objeto a ser identificado, na região de interesse.

Por fim, em Conclusões, são apresentadas as conclusões gerais sobre os resultados obtidos no trabalho, bem como as possíveis soluções para alguns dos problemas encontrados e perspectivas para as técnicas em questão.

Tomografia por Impedância Elétrica

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) consiste em um método para a aquisição de imagens de um corpo de forma não invasiva, baseado na diferença de condutividade e permissividade que diferentes materiais apresentam. Para tal, utiliza eletrodos ao redor da seção de interesse, e aplica sobre um deles uma corrente de baixa amplitude e alta frequência. Esta corrente deverá percorrer o interior da região a ser imageada, realizando múltiplos caminhos e os outros eletrodos que circundam esta mesma região, deverão capturar os potenciais elétricos resultantes da corrente elétrica aplicada [Baker, 1989].

Dada a simples tecnologia, o uso de radiação não ionizante e a grande capacidade de portabilidade a TIE tem se tornado alvo de aplicações na área médica, em substituição a outras tecnologias, como tomografia computadorizada, ultrassonografia e ressonância magnética. Como faz uso dos padrões de condutividade para o imageamento, é necessário o conhecimento prévio da resposta dos tecidos do corpo a este tipo de corrente elétrica utilizada, de modo a adaptar a técnica para aplicações em saúde. Na tabela 2.1 a seguir, há alguns valores de condutividades para órgãos e tecidos do corpo humano.

Valores de condutividade elétrica, típicos para alguns tecidos. [Baker, 1989]

Tecido	Condutividade (mS/cm)
Sangue	6,79
Fígado	2,80
Músculo-longitudinal	8,00
Músculo-transversal	0,60
Músculo cardíaco-longitudinal	6,30
Músculo cardíaco-transversal	2,30
Tecido neural	1,70
Pulmão-expiração	1,00
Pulmão-inspiração	0,40
Gordura	0,36
Osso	0,06

Tabela 2.1 Valores de condutividade elétrica para diversos tecidos e órgãos do corpo humano

2.1 Histórico

A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) tem sido estudada desde 1980, como alternativa a exames de imageamento como tomografia computadorizada, ressonância magnética, ultrassom, dentre outros. O primeiro relato de construção de um tomógrafo de impedância elétrica se deu pelo trabalho de Henderson e Webster [Henderson e Webster, 1978], denominado *câmara de impedância*, em que uma diferença de potencial elétrico era aplicada em um eletrodo localizado no peito do paciente, enquanto outros eletrodos posicionados nas costas do mesmo eram responsáveis pela medição da corrente elétrica resultante.

2.2 Fundamentos Teóricos

Como mencionado em itens anteriores, a TIE consiste na aplicação de uma corrente elétrica alternada, de baixa amplitude e alta frequência, na região do corpo a ser imageada [Tehrani et al., 2010]. Existem, como padrão, duas formas de aplicar estas correntes: diametral e adjacente. No padrão de injeção diametral, a corrente elétrica é inserida em um dos eletrodos e o eletrodo diametralmente oposto é tomado como referência para as medições. Para o padrão de injeção adjacente, o eletrodo tomado como referência é o que se encontra ao lado do eletrodo de injeção da corrente. Para ambas as formas de injeção, o par de eletrodos é alternado de modo a se obter um conjunto de medições linearmente independentes, determinada pela quantidade de eletrodos distribuídos ao redor da região de interesse [Borcea, 2002].

Uma vez adquiridos os potenciais pelos eletrodos (hardware), a partir de algoritmos de reconstrução, inicia-se a parte cabível ao software do equipamento. Nele, ocorrerá a tentativa de solução do problema inverso da TIE, que se traduz em encontrar a melhor imagem que represente a região de interesse.

2.3 Modelagem do problema da TIE

O problema da Tomografia por Impedância elétrica pode ser caracterizado pela busca de valores de impedância elétrica que a região de interesse apresentará, em resposta à corrente elétrica aplicada, e, inicialmente define-se como:

$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \quad (2.1)$$

em que Z corresponde à impedância elétrica, dada em Ohms (Ω), V_{ef} corresponde à tensão efetiva aplicada no circuito e I_{ef} corresponde à corrente efetiva que circula sobre o circuito.

Na TIE, a impedância do circuito é estimada pela equação de Poisson, em que:

$$\nabla \cdot [\sigma(\vec{u}) \nabla \phi(\vec{u})] = 0, \quad \forall \vec{u} \in \partial\Omega \quad (2.2)$$

e, para as condições de contorno

$$\phi_{ext}(\vec{u}) = \phi(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \partial\Omega \quad (2.3)$$

$$I(\vec{u}) = -\sigma(\vec{u})\nabla\phi(\vec{u}) \cdot \hat{n}(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \partial\Omega \quad (2.4)$$

onde $\vec{u} = (x, y, z)$ é a posição de um objeto no circuito, $\phi(\vec{u})$ é a distribuição geral dos potenciais, $\phi_{ext}(\vec{u})$ corresponde a distribuição de potenciais elétricos nos eletrodos da superfície, $I(\vec{u})$ é a corrente elétrica aplicada pelo eletrodo de injeção, $-\sigma(\vec{u})$ é a distribuição de condutividades elétricas, correspondendo ao vetor que formará a imagem de interesse, Ω corresponde ao volume do domínio, enquanto $\partial\Omega$ corresponde à fronteira do domínio e $\hat{n}(\vec{u})$ é o vetor normal à borda [Ribeiro et al., 2014].

Os algoritmos de reconstrução baseiam-se nesta modelagem do problema para a formação da imagem. Visando solucioná-lo, o mesmo é dividido em duas duas classes, constituindo o problema direto e o problema inverso da TIE.

2.3.1 Problema Direto

O problema direto da TIE resume-se em estimar o potencial elétrico encontrado nos eletrodos de borda da região de interesse, a partir da distribuição interna de condutividade em um corpo não homogêneo.

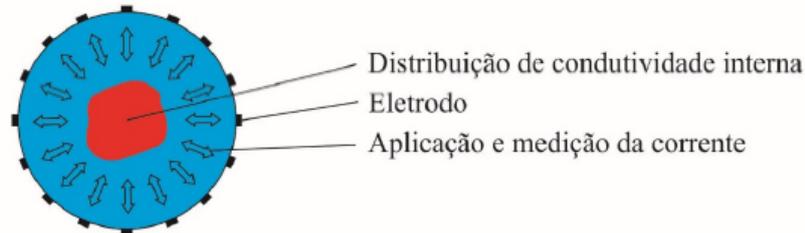


Figura 2.1 Representação do Problema Direto

Como descrito na seção 2.3, os potenciais de borda podem ser estimados pela equação de poisson 2.2, aplicada na região com as seguintes condições de borda (descritas em mais

detalhes em 2.4 e simplificada na equação a 2.5 a seguir):

$$J = \sigma \frac{\partial \phi}{\partial (\vec{n})} \quad (2.5)$$

em que J corresponde a corrente aplicada, em que utilizam-se apenas valores positivos, $\frac{\partial \phi}{\partial (\vec{n})}$ corresponde aos potenciais de borda do volume de interesse, e σ equivale a distribuição de condutividade interna deste mesmo volume em questão (Martins et al, 2012).

Visto que as equações 2.4 e 2.5 não possuem solução analítica para domínios arbitrários, uma solução aproximada pode ser obtida utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), transformando este sistema não linear em uma aproximação linear, passível de resolução analítica.

2.3.2 Problema Inverso

O problema inverso consiste em, dada a distribuição de potenciais de borda ϕ e da corrente aplicada J , encontrar a distribuição de condutividade interna para um dado domínio Ω .

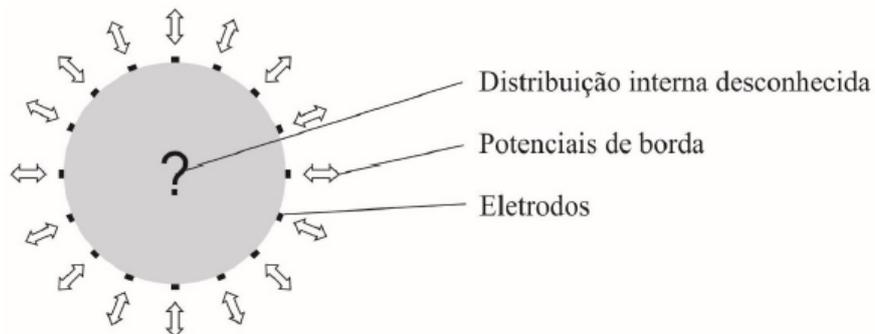


Figura 2.2 Representação do Problema Inverso

Este problema, como dito anteriormente, é não linear, dado que a função que representa o potencial obtido no contorno do corpo depende de forma não linear da corrente elétrica, e mal posto, visto que a solução para a distribuição de condutividades e permissividades pode não ser

única, além de apresentar instabilidade e sensibilidade a erros numéricos e ruídos experimentais (Kumar et al, 2010)

Deste modo, a solução é bastante dependente dos algoritmos de reconstrução e regularização, e pode ser obtida através de métodos iterativos (métodos lineares em que o problema direto é chamado constantemente), não iterativos (métodos não lineares para resolução do problema) ou híbridos. O estado da arte, atualmente, caminha para o uso de técnicas de Inteligência Computacional, como Computação Evolucionária. Nesta, incluem-se algoritmos como Evolução Diferencial [Adler e Lionheart, 2006] [Liu e Sun, 2011] e Busca por Cardume de Peixes [Bastos Filho et al., 2008], temas de estudo deste trabalho.

2.3.3 Função Objetivo

A função objetivo, é uma função que mapeia valores ou eventos de uma dada situação em valores reais, possuindo como principal objetivo quantificar o custo associado ao evento estudado, podendo se restringir a determinar quão perto um candidato a solução está dos objetivos determinados. É comumente utilizada em otimização matemática, teoria da decisão, estatística e aprendizado de máquina, para a solução de problemas que não possuem resposta analítica conhecida.

Sua aplicação no ramo da Tomografia por Impedância Elétrica consiste no âmbito da reconstrução da imagem. Como a definição matemática da TIE não possui resposta analítica, algoritmos de busca tem sido utilizados na reconstrução das imagens obtidas a partir dos potenciais de borda adquiridos, e, como parâmetro de direção, estes utilizam a função objetivo.

De forma detalhada, a distribuição de condutividade interna a partir dos potenciais de borda pode se caracterizar como um problema de otimização, que define-se como aquele em que busca-se determinar valores extremos de uma função (máximo global ou mínimo global). Para tal, cria-se uma função objetivo como um dos critérios de aptidão dos algoritmos de reconstrução, cujo maior valor (problema de maximização) ou menor valor (problema de minimização), quando comparado a um critério de aceitação, definem a interrupção ou não do algoritmo em questão, bem como a qualidade da solução encontrada. O fazem avaliando os

candidatos a solução e classificando-os de acordo com o valor definido para a função objetivo.

O problema de otimização da TIE constitui-se como um problema minimização de uma função objetivo, definido pela equação 2.6:

$$f_0(x) = \epsilon(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_p} (U_i(x) - V_i)^2}{\sum_{i=1}^{n_p} V_i^2} \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

em que n_p é o número de eletrodos no contorno da região, $U_i(x)$ são os potenciais de borda candidatos a solução e V_i representa os potenciais de borda do objeto de estudo. Então, quando a diferença entre os potenciais de borda candidatos a solução e os potenciais de borda medidos a partir do objeto de estudo se aproxima de zero, tem-se que menor será o erro relativo e a imagem formada pelo vetor de condutividades será mais próxima da real.

Visto que este trabalho lida apenas com simulações, em que nenhuma medição do potencial de borda realmente foi realizada, a malha de elementos finitos foi criada pelo usuário e utilizada como base para o cálculo do problema direto. A imagem a seguir esquematiza esta correlação.

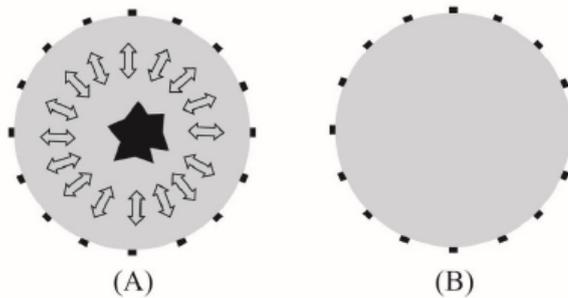


Figura 2.3 Domínio com a malha criada pelo usuário (A) e Domínio criado inicialmente pelo método de otimização (B).

Deste modo, em (A) tem-se a distribuição de condutividades criada pelo usuário a partir MEF, em que são criados os potenciais de borda através da resolução do problema direto. Esta malha é utilizada como padrão ouro (em que V_i é calculado) para a reconstrução da imagem gerada pelo algoritmo de otimização, inicialmente com valores de condutividade aleatórios,

como mostrado em (B). Então, a cada iteração, o valor da função objetivo, gerado pelos valores de potenciais de borda U_i calculados a partir do padrão de condutividade criado pelo algoritmo é comparado com os do objeto (A), conhecido como padrão ouro ou objeto de estudo.

2.4 EIDORS

O EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) é um *software* livre, desenvolvido para as plataformas Matlab e Octave, utilizado para reconstrução de imagens obtidas através de Tomografia por Impedância Elétrica e Tomografia por Difusão Ótica (TDO). Possui como principal objetivo a modelagem e reconstrução do problema direto, tendo como justificativa a capacidade de proporcionar avanços mais significativos nos métodos de reconstrução de imagens da TIE e da TDO, visto que se torna mais cômodo e eficiente o aprimoramento de uma técnica já existente do que a criação de uma nova, como inicialmente ocorria a cada vez que um grupo de pesquisas desejava iniciar trabalhos neste campo [Lionheart et al., 1999].

Para a solução do problema direto, o EIDORS divide a região de interesse em vários triângulos (elementos finitos), utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para tal. Cada triângulo possui um valor de condutividade, fornecido pelo vetor solução da imagem, que é representado por um tom de cor, no esquema gráfico construído pelo software da região de interesse.

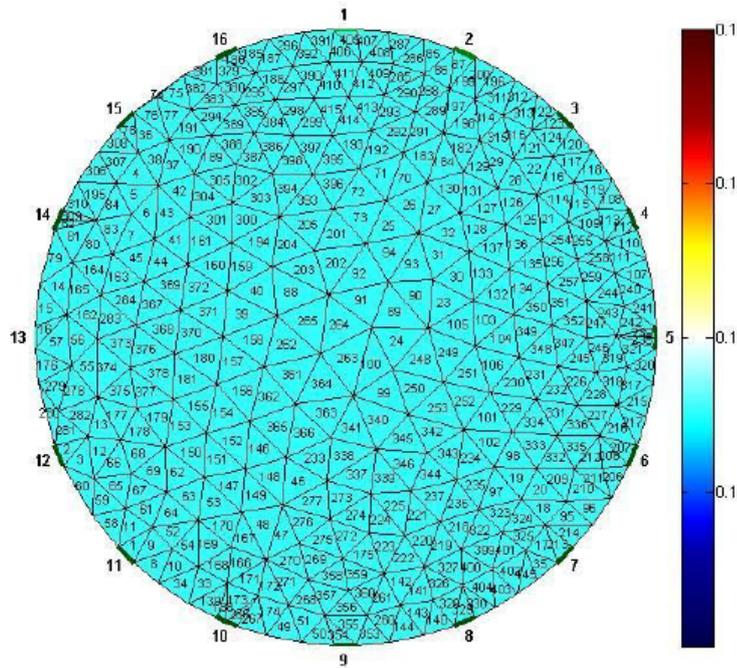


Figura 2.4 Malha triangular de uma região circular, montada pelo EIDORS

É possível notar que, no interior de cada triângulo da malha representada na figura 2.4 em questão, há uma numeração. Esta corresponde à posição, no vetor solução, do valor de condutividade, representado pela cor do triângulo.

A escala de cores da figura 2.4 acima, inicialmente, foi utilizada nos trabalhos deste grupo de pesquisa como padrão, bem como a quantidade de 415 elementos finitos na malha triangular da região de interesse e, para este trabalho, também foram realizados os experimentos para 1259, 3212 e 4398 elementos. Nesta malha de cores, o maior valor de condutividade é definido como $5S/m$ e representado pela cor marrom, enquanto que para o menor valor de condutividade ($0S/m$) a cor utilizada é a branca.

Métodos de Reconstrução: Otimização por Algoritmos Naturais

3.1 Computação Evolucionária

A computação evolucionária consiste em uma classe pertencente ao grupo dos Algoritmos Naturais que utiliza os princípios da evolução de *Darwin* e a Genética de Mendel como inspiração para a criação de programas capazes de solucionar problemas complexos, que não possuem resposta analítica conhecida [Bäck et al., 1991]. Dentre os diversos métodos utilizados, este trabalho destaca a Evolução Diferencial e a Busca por Cardumes de Peixes, cujos fundamentos teóricos são explicados nas seções a seguir.

3.1.1 Evolução Diferencial

A Evolução Diferencial (ED) é uma metaheurística cujos algoritmos que inspira aplicam, essencialmente, os princípios da mutação e cruzamento (Teoria de Mendel), bem como a seleção natural (Darwinismo) para a criação de novos vetores parametrização. É considerada uma técnica simples e eficiente, quando se trata da otimização de uma função no espaço contínuo [Sauer, 2007].

A ED utiliza uma população com quantidade constante de indivíduos, possuindo NP vetores $X_{i,j,G}$ com valores reais e D dimensões, em que $i = 1, 2, 3, \dots, NP$, $j = 1, 2, 3, \dots, D$ e G corresponde ao número que representa a geração do vetor em questão.

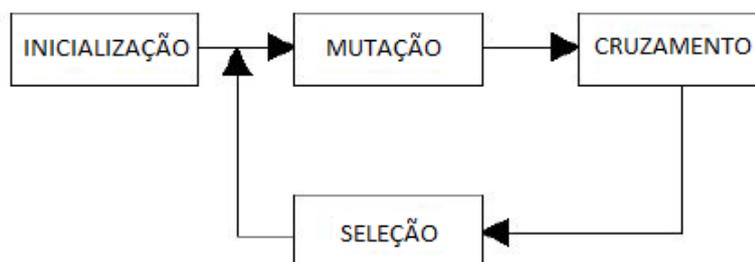


Figura 3.1 Diagrama de blocos da Evolução Diferencial

O diagrama de blocos, representado na figura 3.1, corresponde à lógica básica utilizada nos algoritmos que envolvem ED para a criação do vetor solução. Nas subseções a seguir, cada bloco da referida figura será explicado em maiores detalhes.

3.1.1.1 Inicialização

Como primeiro passo, a inicialização consiste na criação de uma população inicial de vetores com valores randômicos, uniformemente distribuídos e respeitando os limites do espaço de busca, que, por sua vez, é representado por dois valores, sendo um superior $X_j^{(U)}$ e outro inferior $X_j^{(L)}$, de forma que:

$$X_j^{(L)} > X_j > X_j^{(U)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, D \quad (3.1)$$

e

$$X_{i,j,G} = X_j^{(L)} + rand_j[0, 1](X_j^{(U)} - X_j^{(L)}) \quad (3.2)$$

em que $rand_j[0, 1]$ corresponde a um número randômico entre 0 e 1, atualizado sempre que j muda de valor.

3.1.1.2 Mutação

A mutação possui como principal objetivo a criação de novos vetores, de forma a evitar que o algoritmo seja preso por máximos ou mínimos locais, fornecendo um resultado errôneo. As equações a seguir na tabela 3.1 são utilizadas para atingir este objetivo e foram testadas por [Storn e Price, 1997], combinadas também com mutação exponencial ou binomial.

Equações de Mutação

Expressão	Notação	
$V_{i,j,G} = X_{\alpha,G} + F_i(X_{\beta,G} - X_{\gamma,G})$	ED/rand/1/bin	(a)
$V_{i,j,G} = X_{\alpha,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/rand/2/bin	(b)
$V_{i,j,G} = X_{melhor,G} + F_i(X_{\beta,G} - X_{\gamma,G})$	ED/best/1/bin	(c)
$V_{i,j,G} = X_{best,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/best/2/bin	(d)
$V_{i,j,G} = X_{i,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/rand-to-best/2/bin	(e)
$V_{i,j,G} = X_{\alpha,G} + F_i(X_{\beta,G} - X_{\gamma,G})$	ED/rand/1/exp	(f)
$V_{i,j,G} = X_{\alpha,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/rand/2/exp	(g)
$V_{i,j,G} = X_{melhor,G} + F_i(X_{\beta,G} - X_{\gamma,G})$	ED/best/1/exp	(h)
$V_{i,j,G} = X_{best,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/best/2/exp	(i)
$V_{i,j,G} = X_{i,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G})$	ED/rand-to-best/2/exp	(j)

Tabela 3.1 Expressões matemáticas para mutação do vetor solução

em que α , β , γ , δ e ρ são inteiros escolhidos entre 1 e NP , diferentes de i , selecionados aleatoriamente para cada vetor. O vetor r de amplificação F_i constitui-se de parâmetros positivos, que aumentam o valor da diferença entre os vetores que multiplica, tornando grande a diversidade de candidatos a solução do problema. O vetor X_{best} é o vetor da geração atual que apresentou o melhor valor da função objetivo.

Outra equação de mutação foi proposta por Ribeiro et al, baseada na equação (e) da tabela 3.1 acima, consistiu na substituição do termo $(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G})$ pelo termo $(X_{i,G} - X_{best,G})$, resultando em

$$V_{i,j,G} = X_{i,G} + F_i(X_{\rho,G} - X_{\gamma,G}) + F_i(X_{\gamma,G} - X_{\delta,G}) \quad (3.3)$$

fazendo o algoritmo convergir mais rapidamente, quando comparado com a equação original.

3.1.1.3 Cruzamento

Os parâmetros do vetor solução $V_{i,j,G}$ são misturados com os valores de um vetor pré-determinado, denominado vetor julgamento. Este cruzamento pode ser realizado de duas ma-

neiras, podendo ser binomial ou exponencial. Em caso de cruzamento binomial, o vetor julgamento é criado como $W_{i,j,G+1} = (W_{i,1,G+1}, W_{i,2,G+1}, \dots, W_{i,D,G+1})$, em que:

$$W_{i,j,G+1} = \begin{cases} V_{i,j,G}, & \text{se } rand(z) \leq P_{CR} \text{ ou } z = rnbr(i) \\ X_{i,j,G}, & \text{se } rand(z) > P_{CR} \text{ ou } z = rnbr(i). \end{cases} \quad (3.4)$$

Na equação 3.6, $rand(z)$ é um número randômico entre $[0,1]$, $rnbr(i)$ corresponde a um número entre $[1,D]$, garantindo que $W_{i,1,G+1}$ possuirá, no mínimo, um parâmetro advindo de $V_{i,1,G}$. Por fim, $P_{CR} \in [0,1]$ é o parâmetro de entrada que influencia o número de elementos a ser mudado por cruzamento, que, para o caso de mutações do tipo binomiais, a probabilidade de mutação e P_{CR} é linear.

Para o caso de cruzamento do tipo exponencial, tem-se que:

$$W_{i,j,G+1} = \begin{cases} V_{i,j,G}, & \text{para } (j = \langle n \rangle_D \cdot \langle n+1 \rangle_D \cdots \langle n+L-1 \rangle_D) \\ X_{i,j,G}, & \text{para todos os outros } j \in [1,D]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Nesta situação, a posição inicial é escolhida entre $1, \dots, D$, e L elementos consecutivos são escolhidos do vetor mutação $V_{i,j,G}$, de modo que estes são mudados de acordo com uma variação exponencial. É importante ressaltar que a relação entre a probabilidade de mutação e P_{CR} é não-linear e o desvio da linearidade se torna maior, quão maior a dimensão do problema. O valor de L é mudado a medida que:

$$L = \begin{cases} L+1, & \text{enquanto } (rand(z) \leq P_{CR}) \text{ e } (L \leq D) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1.1.4 Seleção

Nesta situação, para o caso de um problema de minimização, se o valor da função objetivo resultante do vetor $W_{i,j,G+1}$ é menor que o valor da função objetivo produzida pelo vetor $X_{i,j,G}$, $W_{i,j,G+1}$ substitui $X_{i,j,G}$ na geração em questão, e, caso contrário, $X_{i,j,G}$ é mantido. Para problemas de maximização, só ocorrerá alguma substituição se o valor da função objetivo de $W_{i,j,G+1}$ for maior que o valor da função objetivo em $X_{i,j,G}$.

3.1.1.5 Critério de Parada e Seleção dos parâmetros de controle

O critério de parada pode ser definido de várias formas, dentre as quais tem-se um número pré-definido de iterações ou um número mínimo/máximo da função objetivo, considerado ideal, levando-se em conta a qualidade da imagem reconstruída e o tempo de execução do algoritmo.

Usualmente, o valor da população é escolhido entre 5D e 10D, e F_i e P_{CR} são determinados pelo método da tentativa e erro, já que seus valores mudam, dependendo da aplicação.

3.1.2 Busca por Cardume de Peixes

Problemas que não possuem solução analítica definida constituem-se difíceis de computar, principalmente devido a alta dimensionalidade que grande parte dos espaços de busca possuem, apresentando alto custo computacional e um longo tempo de simulação. Como mencionado anteriormente, algoritmos de busca que se baseiam no comportamento da natureza e se inspiram em seus métodos para solução de problemas, tem sido utilizados em diversas ocasiões. Estes, portanto, destacam-se na resolução dos problemas direto e inverso da TIE, proporcionando resultados anatomicamente e computacionalmente coerentes.

Pertencendo a este grupo de algoritmos, Busca por Cardumes de Peixes (BCP) se sobressai. Cardumes de peixes se caracterizam por viverem em conjunto, visando proteção mútua (perseguição por predadores) e sinergia em tarefas coletivas, como busca por alimentos [Bastos Filho et al., 2008]. Levando em consideração estas qualidades, esta metaheurística (método heurístico para resolver problemas cujo algoritmo eficiente para sua solução ainda não é conhecido) baseia-se no comportamento dos cardumes de peixes na resolução de problemas de busca cujo espaço de procura se caracterize como não definido e de grande dimensão.

3.1.2.1 Princípios computacionais da Busca por Cardume de Peixes

O algoritmo de busca por cardumes de peixes (Fish School Search) consiste em uma metaheurística baseada no comportamento de peixes em um cardume, em busca de alimento.

Os peixes constituem indivíduos com memória limitada e cada um representa um ponto no domínio da função objetivo, cuja locomoção no espaço é guiada pelo sucesso dos membros que se sobressaem na busca. Os peixes possuem uma memória inata de seu sucesso, traduzida pelo peso que adquirem/perdem durante a busca [Lins et al., 2012]. Esta característica elimina a necessidade de armazenamento das melhores posições atingidas por todos os indivíduos, como ocorre, por exemplo, no método de Otimização por Enxame de Partículas. Além disto, a evolução dos indivíduos ocorre pela combinação de informações dos pais (cruzamento), em conjunto com informações obtidas do nado coletivo, de modo que decide instantaneamente pela forma de operação (exploração global ou local), a cada geração [Bastos Filho et al., 2008].

De acordo com as informações mencionadas acima, é importante definir alguns conceitos para melhor compreensão da metaheurística. Por comida, caracteriza-se a função utilizada no processo de otimização, por vezes denominada "função objetivo". Como a busca pela solução consiste em um problema de otimização, este pode ser de maximização ou minimização. Deste modo, a quantidade de comida, na primeira situação, é diretamente proporcional ao valor da função objetivo, enquanto que na segunda situação se apresenta de forma inversamente proporcional. O aquário, por sua vez, consiste na região/espaco de busca em que a procura pelo alimento (pelo melhor resultado da função objetivo) se dá.

Além destes, definem-se os operadores, em que [Bastos Filho et al., 2008]:

1. Alimentação: metáfora que indica a região no aquário (espaco de busca) que são bons locais para o processo de busca.
2. Natação: coleção de operadores que são responsáveis por guiar o processo de busca para locais do aquário que são mais propensos a possuírem alimento.
3. Reprodução: último operador, criado para realizar a transição automática da exploração global para a exploração local ou refinada (exploração).

3.1.2.2 Operadores

1. Operador alimentação.

A classe alimentação consiste no aumento ou redução do peso de cada peixe, a medida que estes se aproximam do alimento, de modo que o operador desta classe quantifica o quão bem sucedido o peixe é, em função da variação da função objetivo. O operador alimentação, originalmente, é dado pela função:

$$W_i(t+1) = W_i(t) + \frac{(f[\vec{x}_i](t+1)] - f[\vec{x}_i](t))}{\forall i, \max\{|f[\vec{x}_i](t+1)] - f[\vec{x}_i](t)|\}} \quad (3.7)$$

Em que determina o peso do peixe em função do valor de sua função objetivo. Na equação 3.7 acima, $W_i(t)$ representa o peso do peixe, $\vec{x}_i(t)$ corresponde a posição do peixe de índice i e $f[\vec{x}_i](t)$ corresponde a função objetivo na posição $\vec{x}_i(t)$.

Para que a convergência ocorra de forma mais acelerada, tem-se que:

- (a) A variação do peso do peixe é calculada a cada iteração;
- (b) A criação do parâmetro W_{scale} fez-se necessária, para delimitar os valores de peso que os indivíduos podem assumir. Este pode variar de "1" a W_{scale} . Além disto, este parâmetro é utilizado para definir o peso inicial de todos os indivíduos, que geralmente corresponde a $\frac{W_{scale}}{2}$.

2. Operador natação.

Este, por sua vez, é responsável pela movimentação do peixe na busca por alimentos e classifica-se em três movimentações básicas: movimento individual, movimento coletivo-instintivo e movimento coletivo-volitivo.

- (a) Movimento individual.

O movimento individual é aplicado para todos os peixes no aquário a cada iteração do BCP e só ocorre caso as condições do problema (minimização ou maximização) sejam atendidas e caso haja espaço suficiente para o movimento. O mesmo é dado pela equação 3.8 a seguir:

$$\Delta \vec{x}_{ind_i}(t+1) = step_{ind} \cdot rand[-1, 1] \quad (3.8)$$

Em que $\Delta \vec{x}_{ind_i}(t+1)$ representa o movimento do indivíduo após percorrido uma iteração, $step_{ind}$ é um parâmetro determinado pelo operador e determina a capacidade de exploração do peixe no movimento individual, cuja influencia no movimento é determinada por um valor de aleatório entre -1 e 1, representado pelo termo $rand[-1, 1]$.

(b) Movimento coletivo-instintivo.

Após o cálculo do movimento individual de todos os peixes, o próximo passo é realizar o movimento coletivo do cardume. Neste, a média do movimento individual de todos os indivíduos é realizada e os que se movimentaram de forma mais eficiente (se aproximaram do alvo), possuirão também, maior influência no resultado do movimento coletivo, atraindo para si os outros peixes do cardume. A equação 3.9 que descreve o movimento encontra-se a seguir:

$$\vec{I}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta \vec{x}_{ind_i} \{f[\vec{x}_i(t+1)] - f[\vec{x}_i(t)]\}}{\sum_{i=1}^N \Delta \vec{x}_{ind_i} \{f[\vec{x}_i(t+1)] - f[\vec{x}_i(t)]\}} \quad (3.9)$$

e, o valor $\vec{I}(t)$ obtido é somado ao movimento individual de todos os peixes pela equação 3.10:

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{I}(t) \quad (3.10)$$

(c) Movimento Coletivo-Volitivo.

Por fim, o movimento Coletivo-Volitivo baseia-se no movimento global do cardume e proporciona ao algoritmo a capacidade de ajustar o raio de busca dos peixes. Caso o peso global do cardume aumente (buscas mais bem sucedidas), o raio reduz, convergindo mais rapidamente. Caso contrário, este raio aumenta, aumentando também o espaço de busca. É dado pela equação 3.11:

$$\overrightarrow{Bari}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \overrightarrow{x}_i(t) W_i(t)}{\sum_{i=1}^N W_i(t)} \quad (3.11)$$

em que $\overrightarrow{Bari}(t)$ corresponde à distância que todos os peixes irão percorrer, se afastando ou se aproximando do baricentro do cardume.

Dadas as equações 3.8, 3.9 e 3.11, o movimento do peixe, a cada iteração, pode ser descrito pela equação 3.12

$$\overrightarrow{x}_i(t+1) = \overrightarrow{x}_i(t) - step_{vol} \cdot rand[0, 1] \cdot [\overrightarrow{x}_i(t) - \overrightarrow{Bari}(t)] \quad (3.12)$$

Implementada para o caso em que o peso do cardume aumenta. Deste modo, nota-se que o movimento total para cada indivíduo é reduzido, aproximando-os do baricentro do cardume, aumentando a exploração e reduzindo a exploração. No entanto, caso o peso diminua, a equação 3.13 é utilizada.

$$\overrightarrow{x}_i(t+1) = \overrightarrow{x}_i(t) + step_{vol} \cdot rand[0, 1] \cdot [\overrightarrow{x}_i(t) - \overrightarrow{Bari}(t)] \quad (3.13)$$

Nesta situação, a distância percorrida com relação ao baricentro é aumentada, aumentando assim os movimentos de exploração e reduzindo os de exploração.

3. Operador Reprodução.

O operador reprodução, foi inicialmente criado com o intuito de refinar a busca, em que cada par gera um "filho" por vez, e, o tamanho do novo peixe k é a média aritmética dos tamanho de seus genitores i e j , de acordo com a equação 3.14 a seguir.

$$\overrightarrow{W}_k(t+1) = \frac{\overrightarrow{W}_i(t) + \overrightarrow{W}_j(t)}{2} \quad (3.14)$$

Alem disto, sua posição se define como o ponto médio entre os pais, como demonstra a equação 3.15.

$$\vec{x}_k(t+1) = \frac{\vec{x}_i(t) + \vec{x}_j(t)}{2} \quad (3.15)$$

Para manter a quantidade de peixes constante, a cada indivíduo criado, o menor peixe é removido, mimetizando a seleção natural em que apenas os mais "aptos"(nesse caso, os que apresentam o melhor resultado de acordo com a função objetivo) sobrevivem.

No entanto, é importante ressaltar que o operador reprodução não foi utilizado neste trabalho, sendo excluído do algoritmo original também por outros autores. Tal fato pode se justificar pela ineficiência e alto custo computacional que este operador traz ao método, de modo que pouco acrescenta aos resultados qualitativos e quantitativos. Desta forma, o pseudocódigo utilizado o exclui da rotina, mantendo apenas os operadores alimentação e natação.

CAPÍTULO 4

Resultados

4.1 Evolução Diferencial

Como dito anteriormente, este grupo de pesquisa utiliza a ED para reconstrução de imagens de TIE, aplicando-a como um problema de minimização e utilizando mutação binomial ao invés de exponencial. A seguir, há o pseudocódigo utilizado para a implementação da técnica.

1. Gerar e população de n agentes, em que cada um consiste de um vetor $X_{i,j,G}$, em que $i = 1, 2, \dots, n$;
2. Repetir até que o número máximo de iterações seja alcançado
 - (a) Para $i = 1, 2, \dots, n$, faça:
 - i. Escolha um número randômico $r \in [0, 1]$
 - ii. Se $r \leq P_{CR}$, então:
 - A. Gere o vetor cruzamento-mutação $V_{i,j,G}$;
 - B. Se $f_0(V_{i,j,G}) < f_0(X_{i,j,G})$, então $X_{i,j,G} \leftarrow V_{i,j,G}$ (minimização).

Como mencionado na subseção Mutação, existem dez tipos diferentes de métodos utilizados para cruzar os vetores de modo a criar novas soluções. Uma vez que a ED aplicada nesta pesquisa utiliza distribuição binomial, a equação (e) da tabela 3.1 foi testada de forma a verificar sua eficiência, no se que refere a reconstrução de imagens para TIE. Os parâmetros iniciais foram escolhidos como $NP = 100$ e $P_{CR} = 0,90$. É importante mencionar também que o algoritmo foi testado para 50, 300 e 500 iterações, e testado para 4 quantidades diferentes de elementos finitos na malha, sendo estas 415, 1259, 3212 e 4398 elementos.

A primeira condição testada correspondeu a malha com 415 elementos, e a situações que compreendem o objeto na borda (a), entre o centro e a borda (b), e no centro (c), conforme figura 4.1.

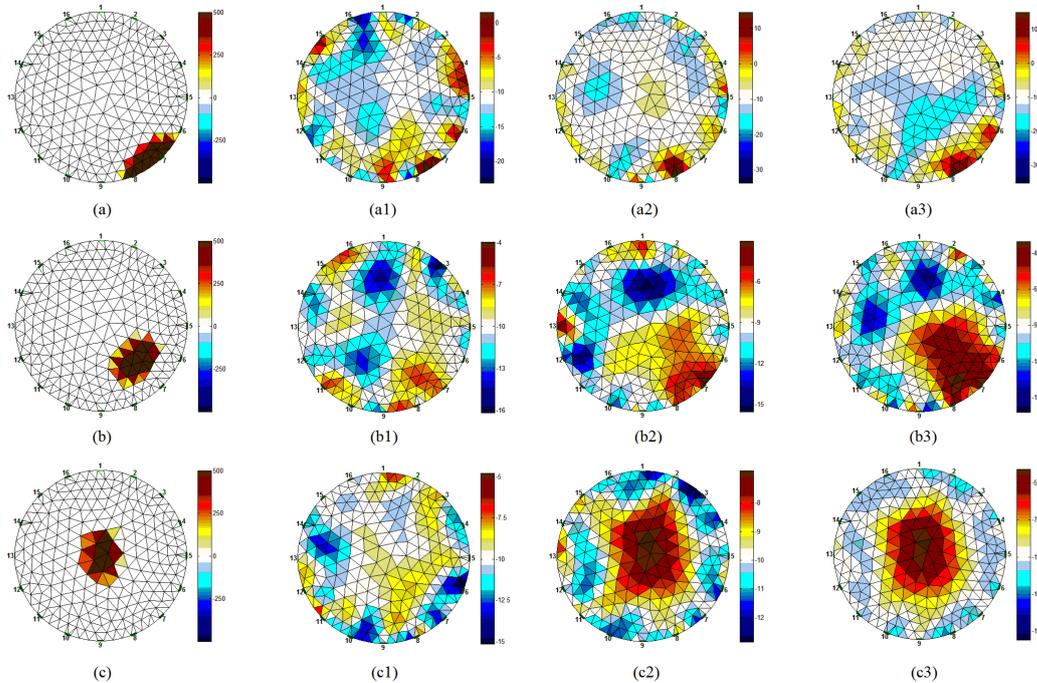


Figura 4.1 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 415 elementos, utilizando a ED.

De acordo com os resultados em 4.1, a primeira versão do algoritmo de mutação da ED para uma malha com 415 elementos (configuração B) exibiu resultados pouco consistentes para as três configurações (borda, centro e centro e borda). Qualitativamente, comparando com seus respectivos padrões ouro, é possível notar razoável semelhança para as imagens obtidas com o objeto no centro (a) e entre o centro e a borda (b). Para a borda, no entanto, o resultado anatômico foi aquém do satisfatório, visto que a imagem ouro e o resultado obtido não apresentam grande semelhança, ao contrário das configurações citadas anteriormente.

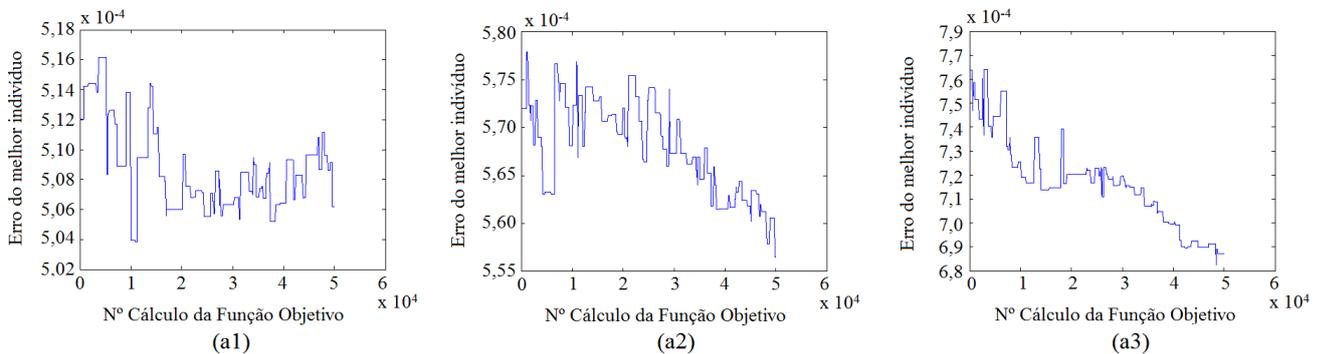


Figura 4.2 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 415 elementos, utilizando a ED.

Analisando os resultados quantitativos obtidos em 4.2, é possível notar que o erro obtido para as três situações possui ordem pequena, o que inicialmente indicaria uma imagem com boa qualidade. No entanto, pode-se inferir que o erro de baixa ordem indica apenas que a soma quadrática da distribuição de condutividade dos vetores se aproxima do valor obtido para a imagem ouro, excluindo, no entanto, a importância do sequenciamento destas distribuições, sendo este um fator contundente na qualidade da imagem formada.

Em 4.2 é possível notar, como observado nos resultados qualitativos, exibidos em 4.1, que o comportamento do algoritmo para a reconstrução da imagem com o objeto localizado na borda da região de interesse (a) foi o menos satisfatório, visto que não apresentou padrão de decaimento e sim uma oscilação quase que constante ao longo das iterações. Ao contrário deste, as figuras (b) e (c), referentes ao objeto entre o centro e a borda e ao centro, respectivamente, mostram um padrão de decaimento, no mínimo, linear, indicando que o algoritmo, apesar das bruscas oscilações, realiza uma busca mais bem sucedida, reduzindo o erro médio ao longo das iterações.

Nota-se também, a partir de 4.2, que (a), (b) e (c) apresentam longos períodos de estagnação na busca, representados pelos momentos de constância no gráfico. Estas situações podem ser interpretadas como momentos em que o algoritmo encontra-se preso em algum máximo ou mínimo local da função objetivo. Observa-se também que estes momentos são prolongados, podendo-se inferir que o método permanece "preso", por algumas gerações, nestes pontos. É

importante ressaltar que a simulação do método de Evolução Diferencial para uma malha com 415 elementos obteve o menor tempo de execução, conforme tabela ??.

Para os testes realizados com 1259 elementos, conforme figura 4.3, é possível notar uma melhora nos resultados anatômicos, observando-se maior semelhança entre a imagem ouro e a imagem reconstruída ao final das 500 iterações.

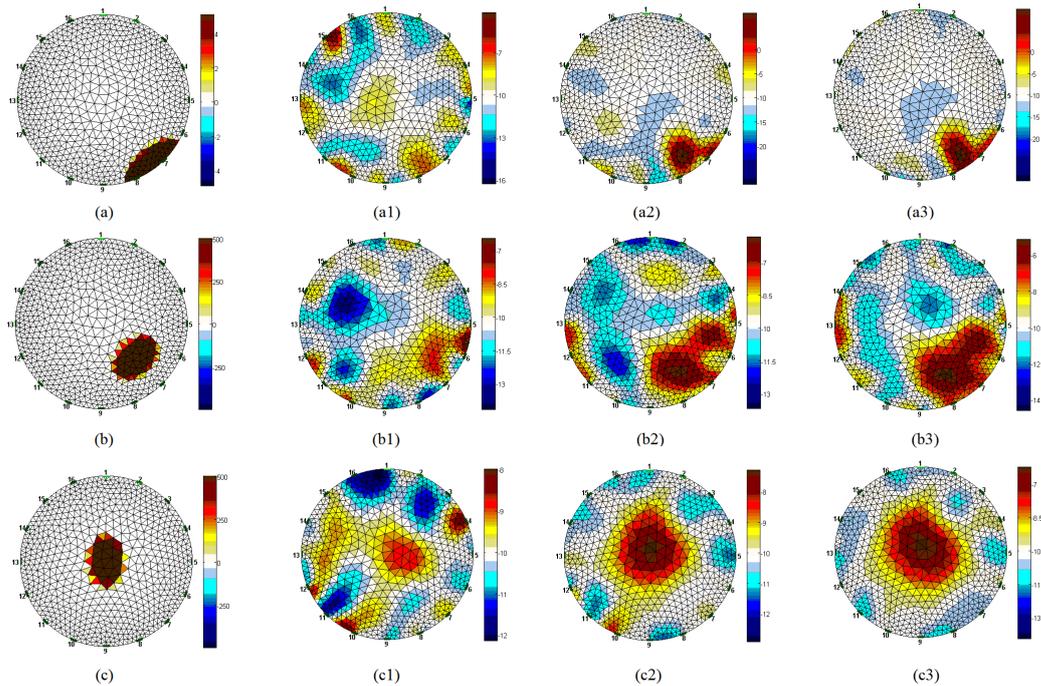


Figura 4.3 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 1259 elementos, utilizando a ED.

Conforme 4.3, nota-se que, ao contrário das imagens para 415 elementos, a reconstrução realizada para o objeto na borda da região de interesse apresentou resultado anatômico satisfatório, quando comparado com a imagem ouro. Nota-se que grande parte da imagem reconstruída apresenta valor de condutividade igual a zero (coloração branca, conforme escala de cores) condizente com (a), e a região em que se localiza o objeto de estudo está bem posicionada, apesar de não apresentar geometria condizente com a imagem original.

O caso da reconstrução obtida para o objeto localizado entre o centro e a borda ((b),

(b1), (b2) e (b3)) caracterizou-se como o pior desempenho para a quantidade de elementos finitos utilizada, apresentando pouca similaridade anatômica, apesar de ter posicionado o objeto de forma razoável. Por fim, para a reconstrução do objeto localizado no centro da região de interesse, assim como para o objeto localizado na borda, o resultado anatômico obtido foi bastante semelhante ao da imagem ouro, em que grande parte dos valores de condutividade são correspondentes. Nota-se, apenas, que, mais uma vez, a geometria do objeto da imagem reconstruída ainda não condiz com a do objeto, representado na imagem original.

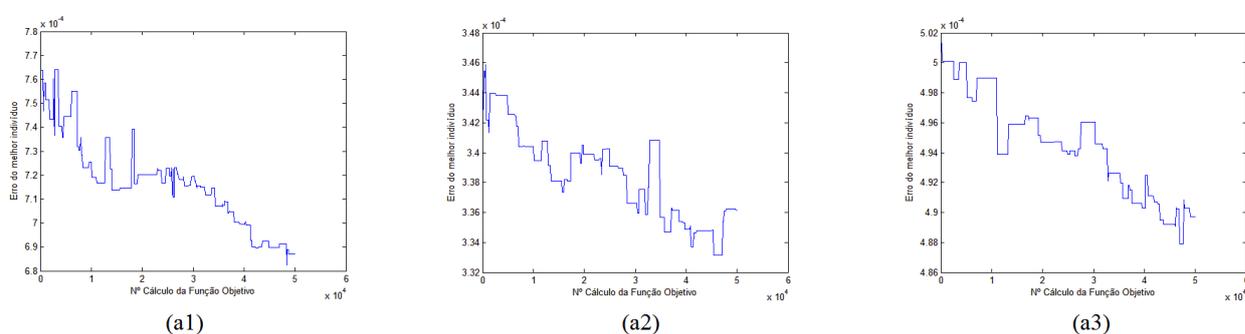


Figura 4.4 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 1259 elementos, utilizando a ED.

Conforme gráficos em 4.4, é possível notar que os erros obtidos para cada simulação foram pequenos, e, apesar das discrepâncias geométricas obtidas, todos apresentaram bom desempenho ao escaparem relativamente bem de máximos e mínimos locais que encontraram durante a simulação. Este fato pode ser observado a partir da redução da média dos erros ao longo das iterações. No entanto, ainda observam-se alguns pontos com erro constante, derivados dos momentos em que o algoritmo não consegue escapar dos máximos/mínimos locais.

Para a simulação com 3212 elementos, não foram observadas mudanças anatômicas significativas, quando comparadas com os resultados obtidos para 1259 elementos, como mostra a figura 4.5.

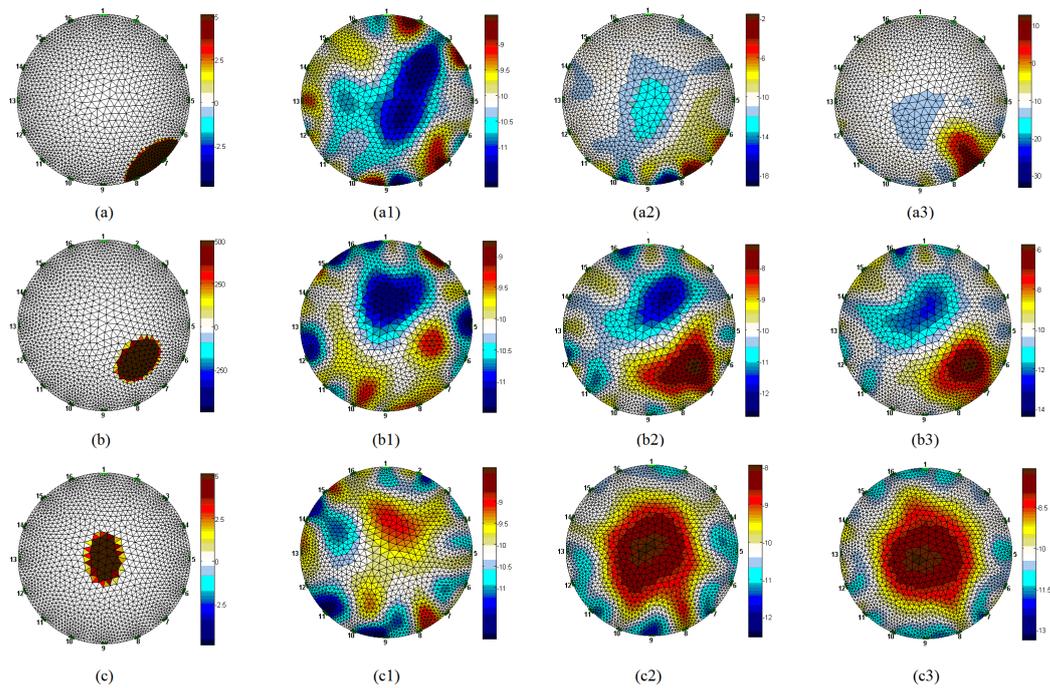


Figura 4.5 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 3212 elementos, utilizando a ED.

Observa-se, no entanto, um melhor desempenho para a imagem entre o centro e a borda, em que o objeto foi melhor identificado e apresentou geometria menos disforme, quando comparado com a imagem original. Para as imagens na borda observou-se maior acurácia na distribuição de condutividade da imagem final, enquanto para a imagem no centro, o objeto ocupou uma região bem maior que a ocupada pelo mesmo objeto na imagem ouro, embora seu posicionamento tenha sido satisfatório.

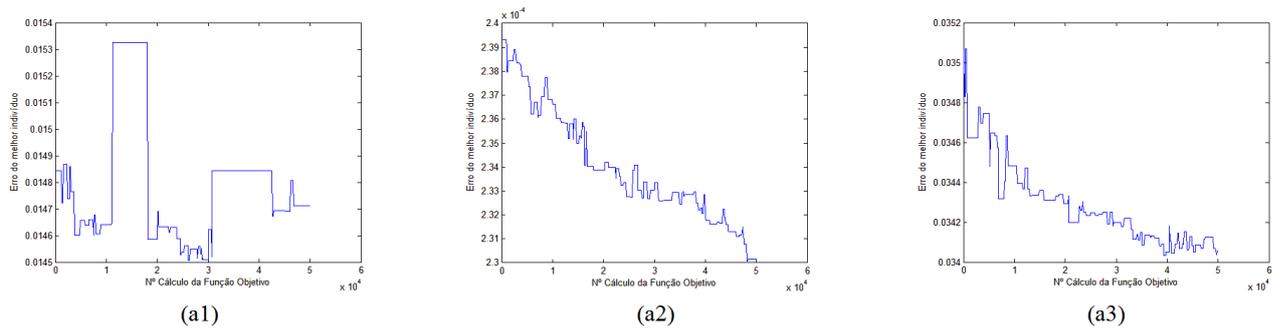


Figura 4.6 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 3212 elementos, utilizando a ED.

De acordo com a figura 4.6, no entanto, observa-se, para o gráfico (a), que a reconstrução da imagem em que o objeto encontra-se na borda não apresentou resultados quantitativos satisfatórios, no que se diz respeito à redução do erro médio durante as iterações. Em verdade, o que se nota é uma oscilação bastante acentuada em torno de uma constante, e platôs bastante prolongados, o que sugere a ineficiência deste mesmo algoritmo em escapar destas regiões de máximo local.

Ao contrário da 4.6(a), os gráficos (b) e (c) apresentaram melhor desempenho, em que o erro decaiu a cada iteração, apesar das oscilações que apresenta. É interessante notar que o gráfico (b) correspondente ao erro da reconstrução da imagem com o objeto entre o centro e a borda apresentou o menor erro entre os gráficos, e, no entanto, não apresentou o melhor resultado anatômico, situação que se repete nas simulações anteriores.

Para esta simulação, o tempo de execução para cada configuração consistiu de, aproximadamente, 70 minutos conforme tabela X.

Por fim, as últimas simulações realizadas para este método corresponderam a uma malha com 4398 elementos.

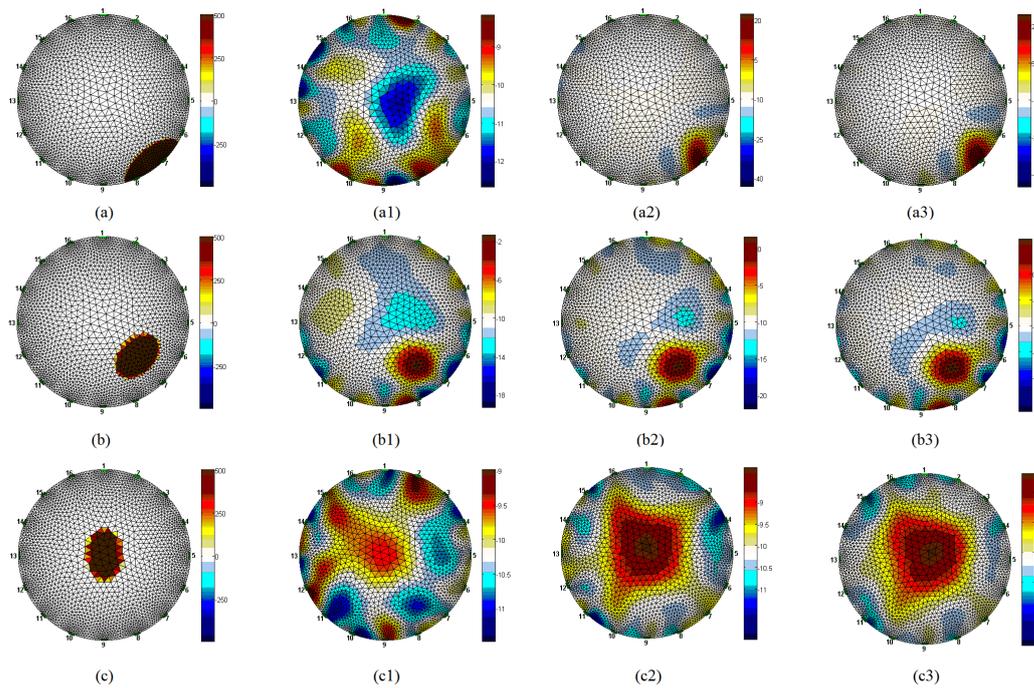


Figura 4.7 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 4398 elementos, utilizando a ED.

Como mostra a figura 4.7, os resultados anatômicos para borda, centro e borda e centro foram os melhores, até então. Apresentaram boa correspondência, em que os valores de condutividade mostrados nas imagens, principalmente da borda e entre o centro e a borda, foram bastante condizentes com os apresentados em suas respectivas imagens ouro. O tempo de execução para este algoritmo, no entanto, contemplou aproximadamente 100 minutos, conforme tabela X.

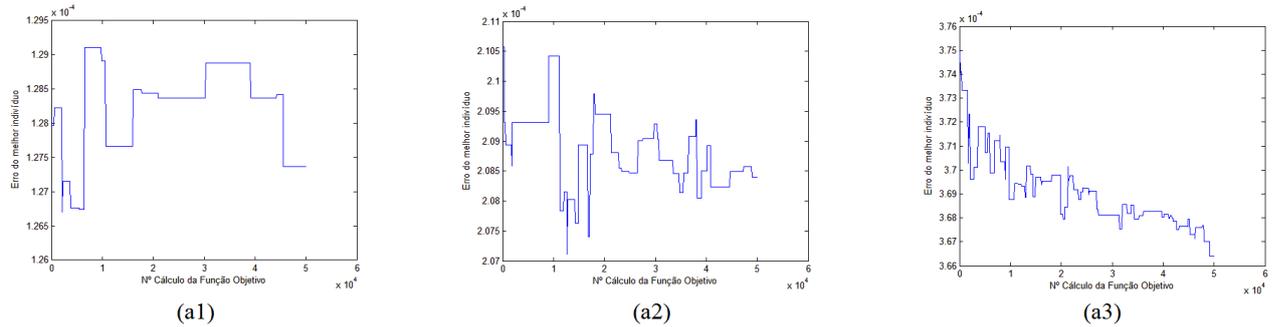


Figura 4.8 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 4398 elementos, utilizando a ED.

Os resultados quantitativos mostram erros relativos pequenos para as três configurações, especialmente para as imagens (a1) e (a2). Nestas condições, nota-se também que o algoritmo apresentou pouca habilidade em escapar dos máximos e mínimos locais, não reduzindo também o erro médio ao longo das iterações. Apenas em (a3) notou-se comportamento satisfatório quanto a este quesito, em que, apesar de se observarem máximos e mínimos locais, os mesmos possuem curta duração e rapidamente são superados, ao longo das iterações.

A simulação para esta configuração de malha apresentou o maior tempo de execução, conforme tabela X.

4.2 Busca por Cardumes de Peixes - FSS

Por fim, utilizando os operadores descritos anteriormente, obtem-se o pseudocódigo, utilizado neste trabalho para a implementação do algoritmo de busca por cardume de peixes.

1. Inicialize aleatoriamente todos os peixes
2. Repita até que o máximo de iteração seja atingido:
 - (a) Para cada peixe, faça:
 - i. Execute o movimento individual;
 - ii. Avalie a função fitness;

- iii. Execute o operador de alimentação
- (b) Calcule o vetor direção resultante
- (c) Para cada peixe, faça:
- (d) Execute o movimento instintivo;
- (e) Calcule o baricentro
- (f) Para cada peixe, faça:
- (g) Execute o movimento volitivo;
- (h) Atualize os valores do passo individual e do passo coletivo-volitivo

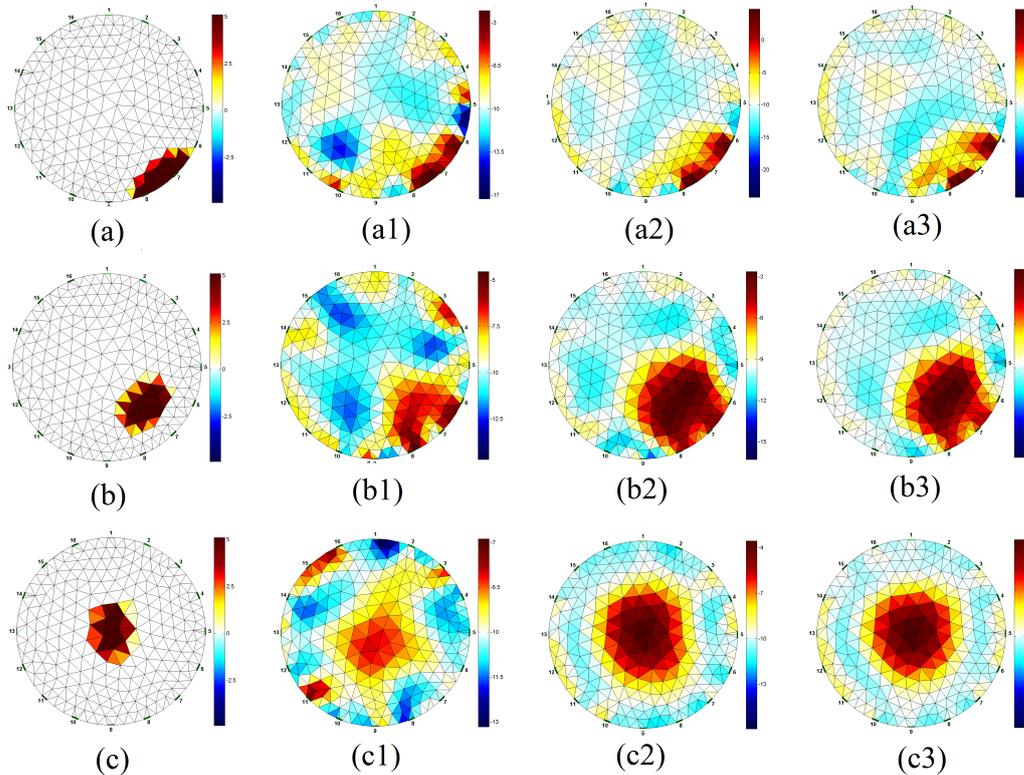


Figura 4.9 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 415 elementos, utilizando a FSS, em que (a), (b), (c) correspondem aos padrões ouro, (a1), (b1) e (c1) correspondem à imagem reconstruída ao final de 50 iterações, (a2), (b2) e (c2) à imagem reconstruída ao final de 300 iterações e (a3), (b3) e (c3) à imagem reconstruída ao final de 500 iterações

Qualitativamente, de acordo com a figura 4.9 é possível notar que, apesar da baixa resolução da malha, as imagens reconstruídas para o centro e a borda e para o centro apresentaram resultados satisfatórios, visto que, em ambas, o centro do objeto foi bem posicionado, embora a geometria do mesmo tenha sido distorcida. Para a borda, todavia, a comparação anatômica mostra pouca semelhança, situação em que a reconstrução mais deixou a desejar.

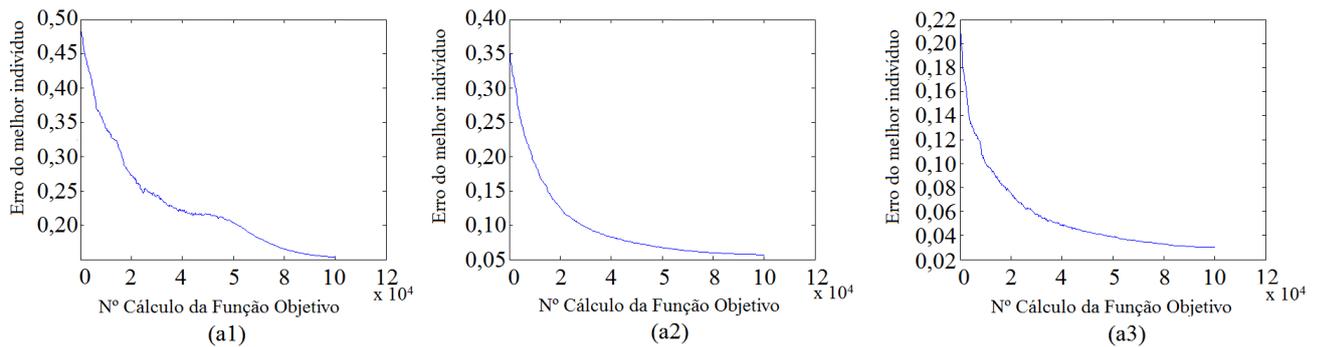


Figura 4.10 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 415 elementos, utilizando a FSS.

Quantitativamente, de acordo com 4.10, é possível notar que o erro do gráfico (a1), correspondente à execução do algoritmo para o objeto na borda apresentou maior valor mínimo, quando comparado com (a2) e (a3), além de mostrar uma curva com algumas distorções. Os gráficos para o centro e a borda e para o centro, por sua vez, se mostraram bastante satisfatório, visto que é possível observar um erro mínimo bastante pequeno, (especialmente para (a3)) e uma curva com decaimento suave e aproximadamente exponencial. Esta característica mostra a grande habilidade do algoritmo de escapar de máximos ou mínimos locais com bastante eficiência, além de sempre reduzir o erro dos candidatos a solução a cada iteração.

Para 1259 elementos, o resultado obtido da reconstrução foi o exposto a seguir.

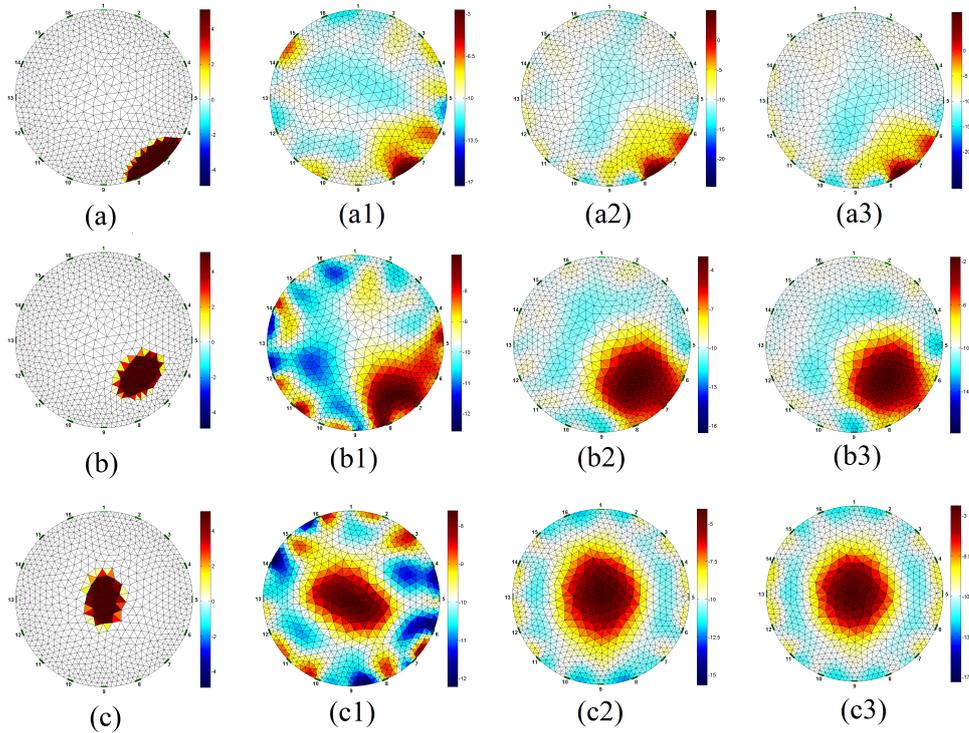


Figura 4.11 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 1259 elementos, utilizando a FSS, em que (a), (b), (c) correspondem aos padrões ouro, (a1), (b1) e (c1) correspondem à imagem reconstruída ao final de 50 iterações, (a2), (b2) e (c2) à imagem reconstruída ao final de 300 iterações e (a3), (b3) e (c3) à imagem reconstruída ao final de 500 iterações.

Na figura 4.11, é possível notar que, apesar do aumento da quantidade de elementos na malha, as imagens continuam bastante semelhantes às obtidas em 4.9, em que continuam se destacando a acurácia no cálculo das condutividades, quando comparadas com as imagens ouro a que correspondem. Observa-se também que a borda continua sendo um problema para este método, visto que, anatomicamente, possui pouca semelhança com sua imagem ouro correspondente.

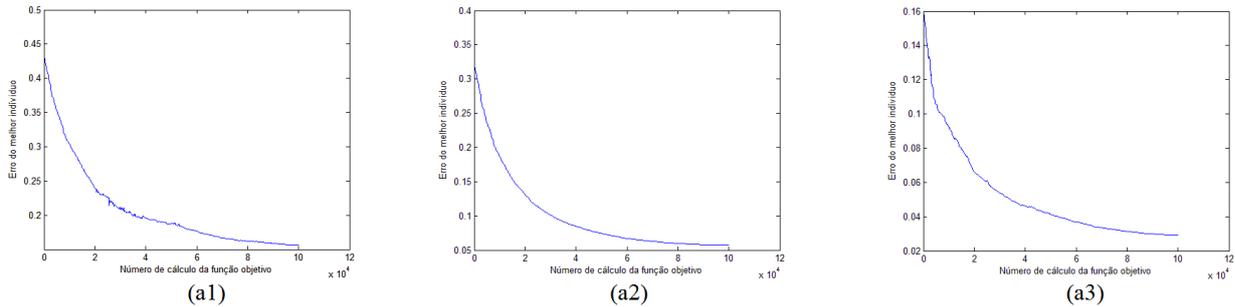


Figura 4.12 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 415 elementos, utilizando a FSS.

Conforme gráficos correspondentes a 4.11, em 4.12 nota-se, do mesmo modo, uma curva mais atribulada para a imagem correspondente à borda e um erro de uma ordem maior que aos gráficos que correspondem as imagens para o centro e a borda e para a borda, (a2) e (a3), respectivamente, dando boa correspondência aos resultados qualitativos obtidos para a reconstrução desta configuração.

Para os gráficos correspondentes à configuração da borda e do centro e borda, é possível observar curvas mais suaves e erros menores, de ordem 10^{-2} , corroborando um melhor resultado qualitativo.

Para imagens com 3212 elementos, conforme 4.13, nota-se que os resultados qualitativos são muito semelhantes para as quantidades de elementos finitos utilizados anteriormente, em que a configuração do objeto posicionado na borda da região de interesse apresenta pior desempenho anatômico em comparação as configurações do objeto no centro e entre o centro e a borda.

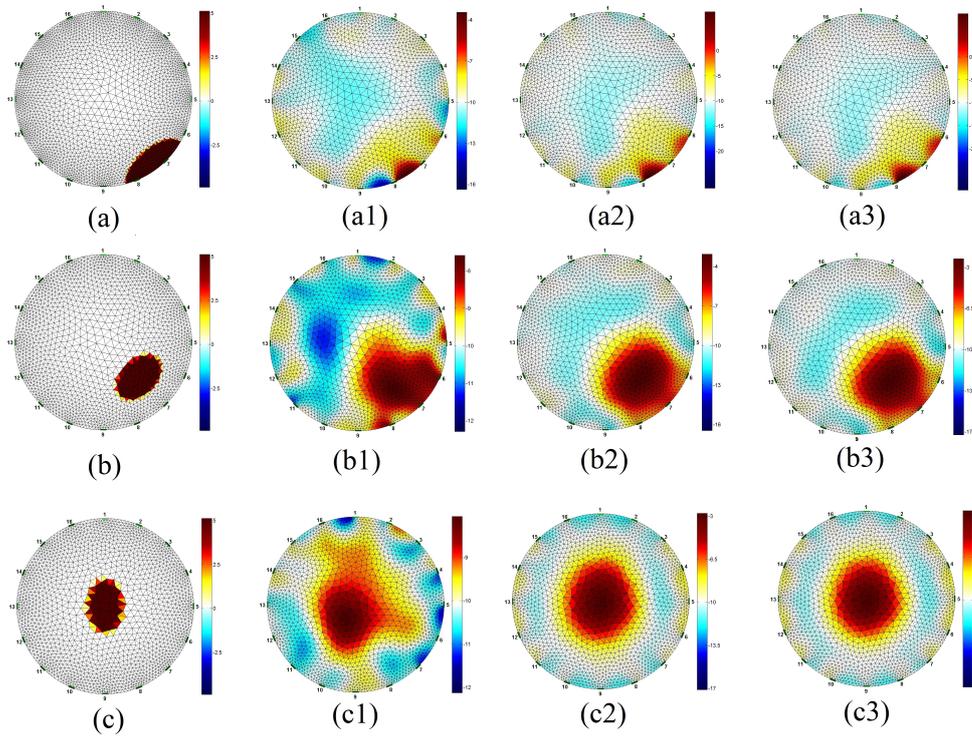


Figura 4.13 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 3212 elementos, utilizando a FSS, em que (a), (b), (c) correspondem aos padrões ouro, (a1), (b1) e (c1) correspondem à imagem reconstruída ao final de 50 iterações, (a2), (b2) e (c2) à imagem reconstruída ao final de 300 iterações e (a3), (b3) e (c3) à imagem reconstruída ao final de 500 iterações.

De forma semelhante aos gráficos das configurações anteriores, a configuração para o posicionamento do objeto na borda continua apresentando o maior erro e pior curva, quando comparada com as outras configurações em questão, como mostra o item (a1) da figura 4.14. Da mesma forma, os gráficos (a2) e (a3) apresentaram melhor comportamento, conforme resultado qualitativo.

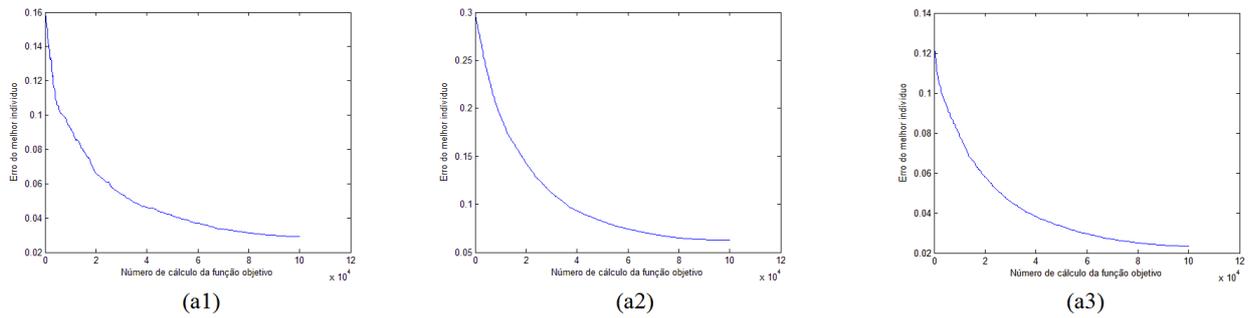


Figura 4.14 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 415 elementos, utilizando a FSS.

Por fim, a configuração para 4398 elementos apresentou resultados qualitativos igualmente semelhantes, em que a configuração do objeto posicionado na borda continua possuindo pouca semelhança com a imagem ouro a qual corresponde, enquanto as imagens para o centro e centro e borda possuem semelhança satisfatória com seus respectivos padrão ouro, conforme figura 4.15.

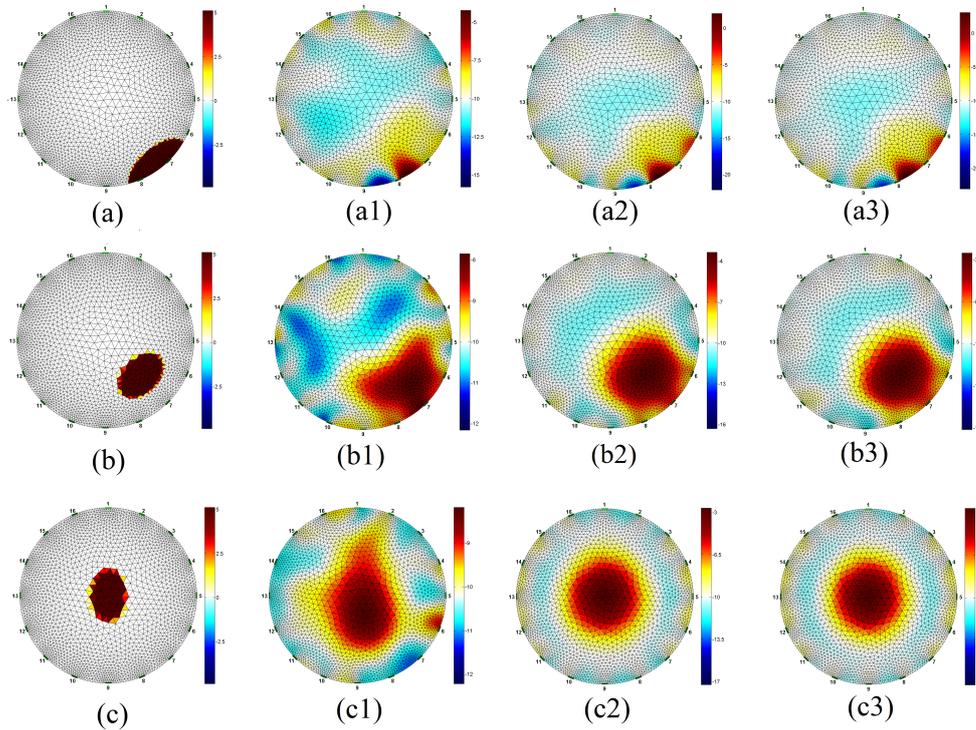


Figura 4.15 Resultados qualitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda ((a), (a1), (a2) e (a3)), entre o centro e a borda ((b), (b1), (b2) e (b3)), e no centro ((c), (c1), (c2) e (c3)) para 4398 elementos, utilizando a FSS, em que (a), (b), (c) correspondem aos padrões ouro, (a1), (b1) e (c1) correspondem à imagem reconstruída ao final de 50 iterações, (a2), (b2) e (c2) à imagem reconstruída ao final de 300 iterações e (a3), (b3) e (c3) à imagem reconstruída ao final de 500 iterações

Do mesmo modo que as configurações com menos quantidade de elementos finitos, os resultados quantitativos constituem-se do gráfico com maior erro e curva mais atribulada para a configuração com o objeto na borda, enquanto que para os outros gráficos, os erros são de ordem 10^{-2} , e as curvas mais suaves.

Nota-se, por fim, que a configuração quantitativamente mais bem sucedida, para todos os diferentes valores de elementos finitos utilizados foi a que o objeto se localiza no centro da região de interesse. A esta, segue-se a situação em que o objeto localiza-se entre o centro e a borda e, com piores resultados para todas as simulações realizadas, a borda constitui-se da fraqueza do algoritmo, demonstrando que mais estudos são necessários neste âmbito.

4.3 COMPARATIVOS ENTRE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E BUSCA POR CARDUME DE PEIXES 40

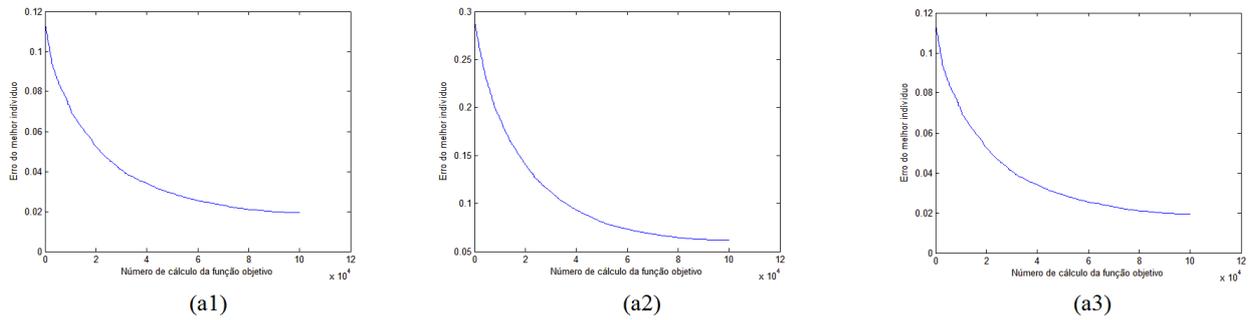


Figura 4.16 Resultados quantitativos da reconstrução para um objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2), e no centro (a3) para 4398 elementos, utilizando a FSS.

4.3 Comparativos entre Evolução Diferencial e Busca Por Cardume de Peixes

Quantitativamente, conforme os gráficos da função objetivo, apresentados nas figuras das seções anteriores, é possível notar que a Busca por Cardumes de Peixes apresentou maior homogeneidade ao longo das iterações, quando comparada com a Evolução Diferencial. Este fato pode ser observado quando se comparam as curvas de ambos os gráficos, conforme exemplo em 4.17.

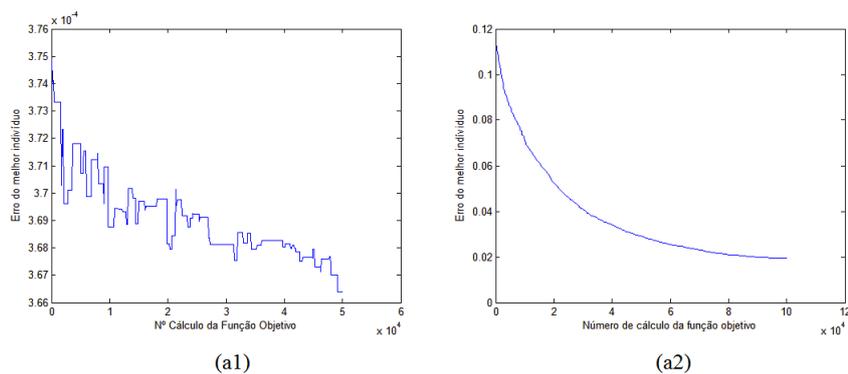


Figura 4.17 Resultados quantitativos da reconstrução para o posicionamento do objeto no centro da região de interesse para a ED (a1) e FSS (a2), utilizando uma malha com 4398 elementos.

4.3 COMPARATIVOS ENTRE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E BUSCA POR CARDUME DE PEIXES 41

Conforme 4.17, o gráfico correspondente aos valores da função objetivo obtidos através da Evolução Diferencial apresentam maior oscilação, embora, em alguns casos, reduzam o erro médio a cada iteração. Para estes gráficos, nota-se também o grande quantitativo de momentos em que o mesmo permanece estagnado em máximos ou mínimos locais, de forma que o método ainda mostra-se ineficiente para escapar destas condições.

Ao contrário da ED, a Busca por Cardume de Peixes, representada no gráfico (a2) da figura 4.17, apresenta decaimento quase que exponencial e não se percebem dificuldades em escapar dos máximos e mínimos locais da função objetivo, de modo que em todas as iterações observa-se uma redução do valor da função objetivo. No entanto, para a Evolução Diferencial, notaram-se valores menores da função objetivo na grande maioria dos gráficos quantitativos, mostrados nas seções anteriores, de modo que a ED ainda é mais bem sucedida em encontrar distribuições de condutividades que sejam bastante próximas das que formam as imagens ouro.

É importante atentar também para o fato de que o método de reconstrução das imagens regido pela Evolução Diferencial apresentou melhor desempenho para borda e entre o centro e a borda, quando comparado com a Busca por Cardume de Peixes. Conforme imagem 4.18, para 4398 elementos, esta vantagem pode ser percebida.

4.3 COMPARATIVOS ENTRE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E BUSCA POR CARDUME DE PEIXES 42

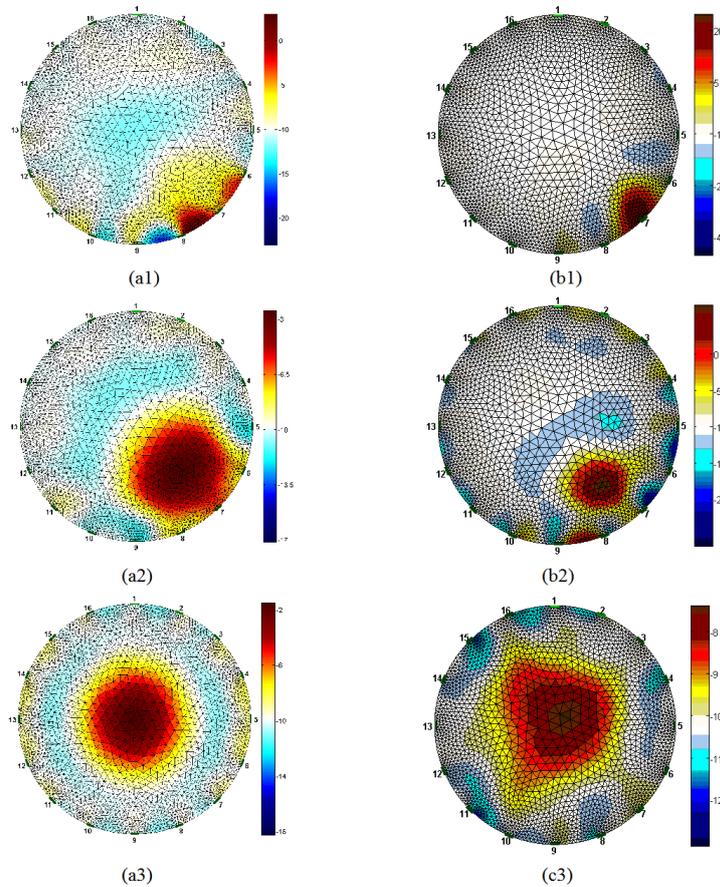


Figura 4.18 Resultados comparativos qualitativos para uma malha com 4398 reconstruída por FSS, com objeto posicionado na borda (a1), entre o centro e a borda (a2) e o centro (a3) e para a mesma malha, reconstruída por ED, com objeto posicionado na borda (b1), entre o centro e a borda (b2) e o centro (b3).

Por fim, conforme tabela 4.2, notou-se que o tempo de execução para Evolução Diferencial, para todas as configurações, apresentou valores menores que o obtido para a Busca por Cardume de Peixes. Este fato pode ser explicado pela menor quantidade de operadores que ED possui, realizando menos operações por iterações.

Nota-se a habilidade da ED em identificar o objeto na borda, e entre o centro e a borda, com grande semelhança entre as condutividades da imagem reconstruída e a imagem ouro, sendo esta uma vantagem sobre o método do cardume de peixes. Além disto, notou-se desempenho qualitativo quase que semelhante para imagens reconstruídas com objeto localizado no centro da região de interesse.

4.3 COMPARATIVOS ENTRE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E BUSCA POR CARDUME DE PEIXES 43

Tempo de execução para as configurações de padrão-ouro na borda, entre o centro e a borda e no centro para 415, 1259, 3212 e 4398 elementos utilizando a Evolução Diferencial (min).

		415 elementos	1259 elementos	3212 elementos	4398 elementos
ED	Borda	53,03	54,31	70,30	100,08
	Centro e Borda	57,51	51,90	69,31	95,00
	Centro	57,90	51,65	69,63	99,22
FSS	Borda	138,02	98,25	109,34	138,02
	Centro e Borda	102,58	95,23	115,06	343,20
	Centro	103,09	95,22	114,40	145,27

Tabela 4.1 Tempo em minutos para a execução dos algoritmos para borda, centro e borda e centro, contendo 415, 1259, 3212 e 4398 elementos

De acordo com a tabela 4.2, é possível notar que o algoritmo da Evolução Diferencial consumiu, de forma bastante significativa, menos tempo, quando comparado com a FSS. Este ocorrido pode ser explicado por uma menor quantidade de operadores utilizados na ED, reduzindo assim, a quantidade de operações realizada por iteração.

Valores da função objetivo para as configurações de padrão-ouro na borda, entre o centro e a borda e no centro para 415, 1259, 3212 e 4398 elementos utilizando a Evolução Diferencial (min).

		415 elementos	1259 elementos	3212 elementos	4398 elementos
ED	Borda	$5,06 \times 10^{-4}$	$2,59 \times 10^{-2}$	$1,51 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-4}$
	Centro e Borda	$5,57 \times 10^4$	$3,36 \times 10^{-4}$	$2,30 \times 10^{-4}$	$2,08 \times 10^{-4}$
	Centro	$6,87 \times 10^{-4}$	$4,90 \times 10^{-4}$	$3,41 \times 10^{-4}$	$3,66 \times 10^{-4}$
FSS	Borda	$2,43 \times 10^{-1}$	$1,56 \times 10^{-1}$	$1,92 \times 10^{-1}$	$2,43 \times 10^{-1}$
	Centro e Borda	$5,70 \times 10^{-2}$	$5,73 \times 10^{-2}$	$6,26 \times 10^{-2}$	$6,18 \times 10^{-2}$
	Centro	$3,00 \times 10^{-2}$	$5,73 \times 10^{-2}$	$2,34 \times 10^{-2}$	$1,95 \times 10^{-2}$

Tabela 4.2 Valores finais da função objetivo em S/cm para a execução dos algoritmos para borda, centro e borda e centro, contendo 415, 1259, 3212 e 4398 elementos

4.3 COMPARATIVOS ENTRE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E BUSCA POR CARDUME DE PEIXES 44

Por fim, é possível notar, a partir da tabela comparativa em ?? que todos os valores que a função objetivo atingiu para a execução do algoritmo de Evolução Diferencial assumiu um valor aproximadamente mil vezes menor para os quais esta mesma função gerou para a execução da Busca por Cardume de Peixes. No entanto, como discutido anteriormente, as imagens geradas a partir da condutividade ainda apresentam grande discrepância anatômica, sugerindo que a função objetivo não é suficiente para classificar qualitativamente a qualidade da imagem formada pelo algoritmo.

CAPÍTULO 5

Conclusões

De acordo com os resultados obtidos, é possível concluir que o desempenho do algoritmo de Busca por Cardumes de Peixes constitui-se o melhor em termos de estabilidade e reconstrução da imagem. Estável pois, em todas as simulações realizadas, o gráfico do valor da função objetivo ao longo das iterações mostrou decaimento aproximadamente exponencial, apresentando este mesmo comportamento. No quesito reconstrução da imagem, encontrou, com características anatômicas razoáveis, o posicionamento do objeto, à exceção de sua localização na borda.

A Evolução diferencial, por sua vez, mostrou-se bastante instável, com certa ineficiência em escapar de máximos ou mínimos locais, demonstrada por passar muitas iterações estagnada em um único ponto. No entanto, apresentou muitos resultados satisfatórios com relação às semelhanças anatômicas entre as imagens, especialmente para o posicionamento do objeto na borda e entre o centro e a borda, bem como forneceu tempos de execução e valores da função objetivo bastante pequenos, quando comparados com a ED.

Portanto, nota-se grande potencial nas duas técnicas. A busca por cardumes de peixe encontra-se em um estágio mais avançado de pesquisas do que o presente algoritmo utilizado para reconstrução da imagem por Evolução Diferencial, apresentando resultados mais consistentes e comportamento estável e previsível. A evolução diferencial, por outro lado, mostra-se instável e ineficiente para sair de máximos e mínimos locais, mas demonstrou grande habilidade em reconstruir imagens com o objeto posicionado na borda e entre o centro e a borda.

Algumas dificuldades encontradas neste trabalho consistiram nas modificações necessárias ao algoritmo de Evolução Diferencial para que seus resultados pudessem se comparar aos gerados pela Busca por Cardume de Peixes, e na completa compreensão descrição matemática do problema.

Como futuros projetos, sugere-se a adição de um parâmetro que permita a saída do al-

goritmo de evolução diferencial destes máximos e mínimos locais, de forma que este possua um decaimento do erro mais homogêneo. Para a Busca por Cardumes de Peixes sugere-se a hibridização com outros métodos, a exemplo, a ED, de forma que esta técnica continue evoluindo e apresente melhores resultados, especialmente para o posicionamento do objeto na borda da região de interesse.

Referências Bibliográficas

- [Adler e Lionheart, 2006] Adler, A. e Lionheart, W. R. (2006). Uses and abuses of eiders: an extensible software base for eit. *Physiological measurement*, 27(5):S25.
- [Baker, 1989] Baker, L. E. (1989). Applications of the impedance technique to the respiratory system. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 8(1):50–52.
- [Bastos Filho et al., 2008] Bastos Filho, C. J., de Lima Neto, F. B., Lins, A. J., Nascimento, A. I., e Lima, M. P. (2008). A novel search algorithm based on fish school behavior. Em *Systems, Man and Cybernetics, 2008. SMC 2008. IEEE International Conference on*, pgs. 2646–2651. IEEE, InTech.
- [Borcea, 2002] Borcea, L. (2002). Electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 18(6):R99.
- [Bäck et al., 1991] Bäck, T., Hoffmeister, F., e Schwefel, H.-P. (1991). A survey of evolution strategies. Em *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, pgs. 2–9. Morgan Kaufmann.
- [Henderson e Webster, 1978] Henderson, R. P. e Webster, J. G. (1978). An impedance camera for spatially specific measurements of the thorax. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, BME-25(3):250–254.
- [Kumar et al., 2010] Kumar, S. P., Sriraam, N., Benakop, P. G., e Jinaga, B. C. (2010). Reconstruction of brain electrical impedance tomography images using particle swarm optimization. Em *2010 5th International Conference on Industrial and Information Systems*, pgs. 339–342.

- [Lins et al., 2012] Lins, A., Bastos-Filho, C. J., Nascimento, D. N., Junior, M. A. O., e de Lima-Neto, F. B. (2012). Analysis of the performance of the fish school search algorithm running in graphic processing units. *Theory and New Applications of Swarm Intelligence*, pgs. 17–32.
- [Lionheart et al., 1999] Lionheart, W., Arridge, S., Schweiger, M., Vauhkonen, M., e Kaipio, J. (1999). Electrical impedance and diffuse optical tomography reconstruction software. Em *Proceedings of 1st World Congress on Industrial Process Tomography*, pgs. 474–477.
- [Liu e Sun, 2011] Liu, Y. e Sun, F. (2011). A fast differential evolution algorithm using k-nearest neighbour predictor. *Expert Systems with Applications*, 38(4):4254–4258.
- [Price et al., 2006] Price, K., Storn, R. M., e Lampinen, J. A. (2006). *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Springer Science & Business Media.
- [Ribeiro et al., 2014] Ribeiro, R. R., Feitosa, A. R. S., de Souza, R. E., e dos Santos, W. P. (2014). A modified differential evolution algorithm for the reconstruction of electrical impedance tomography images. Em *5th ISSNIP-IEEE Biosignals and Biorobotics Conference (2014): Biosignals and Robotics for Better and Safer Living (BRC)*, pgs. 1–6.
- [Sauer, 2007] Sauer, J. G. (2007). Em *Abordagem de evolução diferencial híbrida com busca local aplicada ao problema do caixeiro viajante*.
- [Storn e Price, 1997] Storn, R. e Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359.
- [Tehrani et al., 2010] Tehrani, J. N., Jin, C., McEwan, A., e van Schaik, A. (2010). A comparison between compressed sensing algorithms in electrical impedance tomography. Em *2010 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology*, pgs. 3109–3112. IEEE.