



Pós-Graduação em Ciência da Computação

RUAN VASCONCELOS BEZERRA CARVALHO

**CÁLCULOS DE MÚLTIPLA CONCLUSÃO
PARA A LÓGICA INTUICIONISTA SOB
UMA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA**



Universidade Federal de Pernambuco
posgraduacao@cin.ufpe.br
www.cin.ufpe.br/~posgraduacao

RECIFE
2017

Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho

Cálculos de múltipla conclusão para a lógica intuicionista sob uma perspectiva geométrica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação.

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Programa de Pós-Graduação

Orientadora: Profa. Dra. Anjolina Grisi de Oliveira

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno CRB 4-1758

C331c Carvalho, Ruan Vasconcelos Bezerra.
Cálculos de múltipla conclusão para a lógica intuicionista sob uma perspectiva geométrica / Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho. – 2017.
134f.: fig., tab.

Orientadora: Anjolina Grisi de Oliveira.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn. Ciência da Computação, Recife, 2017.
Inclui referências e apêndice.

1. Teoria da computação. 2. Teoria da prova. 3. Lógica intuicionista. I. Oliveira, Anjolina Grisi de. (Orientadora). II. Título.

005.131

CDD (22. ed.)

UFPE-MEI 2017-266

Ruan Vasconcelos Bezerra Carvalho

Cálculos de múltipla conclusão para a lógica intuicionista sob uma perspectiva geométrica

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciência da Computação

Aprovado em: 03/11/2017.

Orientadora: Profa. Dra. Anjolina Grisi de Oliveira

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Luiz Gonçalves de Freitas
Centro de Informática / UFPE

Prof. Dr. Edward Hermann Haeusler
Departamento de Informática/PUC-Rio

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Departamento de Filosofia/PUC-Rio

Prof. Dr. Gleifer Vaz Alves
Departamento de Informática/ UTFPR

Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal
Departamento de Informática e Matemática Aplicada/UFRN

Porque muitas vezes não parei para tentar retribuir o amor que recebi dela por estar ocupado ou preocupado com o doutorado, dedico este trabalho à minha mãe, Iêda.

Agradecimentos

À minha mãe pelo suporte constante e incondicional. Pela educação que me deu, sempre ressaltando a importância de estudar desde a infância. Pelo tanto que abdicou para que eu e meu irmão sempre pudéssemos nos preocupar apenas em estudar. Porque ela nos amou primeiro.

Aos colegas de doutorado do CIn e da UFRPE pelo cotidiano alegre e boas conversas, pois isso reduz drasticamente o fardo da caminhada do doutorado. Esse convívio nos fornece uma função logaritmo que é aplicada ao peso que carregamos com a pressão por resultados, tornando nossa jornada mais leve. Em especial sou grato a Paulo Henrique e Pedro Antonino, amigos do CIn desde a graduação.

Aos membros da banca pela participação e comentários neste trabalho, principalmente aos professores Fred Freitas e Luiz Carlos, os quais participaram também da minha dissertação.

À minha amiga Laís, parceira na vida e nos N-Grafos. Aprendemos e compartilhamos muito juntos.

A Anjolina pelo acompanhamento e orientação desde o mestrado e carinho desde os tempos de monitoria na graduação. Professora, aprendi bastante com a senhora. Peço desculpas por ter perdido as forças por um momento no doutorado. Foram muitos desafios nesses quase seis anos de mestrado e doutorado. Saiba que quando conto a alguém um pouco de como foi meu ingresso na docência na UFRPE, falo com muito orgulho do imensurável suporte que recebi da senhora durante o concurso. Muito obrigado mesmo.

Resumo

Como verificar se uma prova clássica também é intuicionista? Em dedução natural basta não haver ocorrência da lei do terceiro excluído ou da eliminação da dupla negação, conforme proposto por Gentzen. No seu cálculo de seqüentes o mesmo resultado é alcançado restringindo o número de fórmulas no lado direito a no máximo um. Assim não há múltipla-conclusão, embora esta seja importante para a simetria. Hoje já existem abordagens que levam isso em conta e propõem cálculos de seqüentes para lógica intuicionista com várias fórmulas no conseqüente. Mas ainda que elas nos forneçam compreensões do que diferencia a lógica intuicionista da clássica, há o problema da burocracia inerente ao formalismo de Gentzen. Aqui separamos a lógica intuicionista da clássica em derivações não-sequenciais adotando uma abordagem geométrica. Propomos uma versão intuicionista para dois sistemas de múltipla conclusão inicialmente definidos apenas para a lógica clássica proposicional: os N-Grafos, apresentados por de Oliveira (2001) e baseado em dedução natural; e as *proof-nets* de Robinson (2003), inspiradas no cálculo de seqüentes.

Palavras-chave: Lógica intuicionista. Grafos de prova. Múltipla conclusão. Teoria da prova. *Proof-nets*.

Abstract

How to verify if a classical proof is also intuitionistic? Gentzen's natural deduction only requires no occurrence of the law of the excluded middle or the elimination of double negation rule in an intuitionistic derivation. His sequent calculus achieves the same result by restricting the number of formulas on the right-hand side to at most one, which removes its multiple-conclusion feature that is important for the calculus' symmetry. There are approaches today that take this into account and present solutions for multiple-conclusion sequent calculi for intuitionistic logic, but while giving us some useful insights on what constitutes an intuitionistic system, they inherit the bureaucracy from Gentzen's formalism. Here we separate intuitionistic logic from classical in non-sequential derivations by adopting a geometric perspective in our approach. We propose an intuitionistic version for two multiple-conclusion systems initially defined for propositional classical logic: N-Graphs, which was presented by de Oliveira (2001) as a symmetric natural deduction; and Robinson's proof-nets (2003), that were inspired in sequent calculus.

Keywords: Intuitionistic logic. Proof graphs. Multiple-conclusion. Proof theory. Proof-nets.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Links para IMLL (MURAWSKI; ONG, 2006).	33
Figura 2 – <i>Essential net</i> para $\vdash f \otimes ((c \multimap c \otimes f) \multimap e \otimes d) \multimap (b \multimap b \otimes e) \otimes (a \multimap a \otimes d)$ (MURAWSKI; ONG, 2006).	34
Figura 3 – Tipos de links.	37
Figura 4 – Links simples	38
Figura 5 – Links conjuntivos convergentes.	38
Figura 6 – Links disjuntivos divergentes.	38
Figura 7 – Links de contração e expansão.	38
Figura 8 – Grafos de prova com ciclos.	40
Figura 9 – Meta-aresta: um uso inválido para $\vdash A \vee B$ e outro correto em $\vdash (A \vee B) \rightarrow A, B$	41
Figura 10 – Sub-N-Grafo e suas portas.	43
Figura 11 – Intersecção.	43
Figura 12 – Como S^\wedge e S^\vee enxergam um link $\rightarrow -I$	44
Figura 13 – $S_1^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ e $S_2^\wedge(N, A \wedge B_{10})$	45
Figura 14 – N-Grafo com meta-arestas.	45
Figura 15 – Meta-chaveamento.	46
Figura 16 – $S^\wedge(N, A \rightarrow \perp)$	47
Figura 17 – $S^\vee(N, A \rightarrow \perp)$	48
Figura 18 – Se escolhermos a aresta (X_{p_1}, X_c) , obtemos um ciclo.	50
Figura 19 – N-Grafos para $(\neg A \wedge Z) \vee B, A \vee C \vdash B, \perp, C \wedge Z$ e $\vdash A \wedge B, (\neg A \vee \neg B) \wedge D, \neg D$	51
Figura 20 – Meta-chaveamento principal para o império do sul de $A \rightarrow \perp$	52
Figura 21 – Impérios totais limitados pela expansão.	55
Figura 22 – Impérios totais limitados pelos links de expansão e $\rightarrow -I$	55
Figura 23 – Exemplo de como cortar uma prova usando nó maximal.	59
Figura 24 – Link antigo para $\neg -I$ e o novo.	61
Figura 25 – Grafo de prova inválido, mas aceito pelo antigo critério de corretude (ANDRADE, 2015).	62
Figura 26 – Prova de completude para $\wedge R$ (OLIVEIRA, 2001).	62
Figura 27 – Um contra-exemplo para a prova de completude.	63
Figura 28 – N-Grafo para $A \vee B, C \vdash A, B \wedge C$	64
Figura 29 – N-Grafo para $\neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$	65
Figura 30 – N-Grafo clássico para $\vdash B \rightarrow A, A \rightarrow B$	66
Figura 31 – N_1 e N_2 são N-Grafos intuicionistas e N também deveria ser.	67
Figura 32 – Prova de completude para $\vee L$ (OLIVEIRA, 2001).	67

Figura 33 – Início da computação do território do link de contração.	69
Figura 34 – Computação do território do link de contração.	69
Figura 35 – Território do link de contração.	70
Figura 36 – Territórios dos links de expansão: tA_4 à esquerda e $tA \wedge (B \vee C)_1$ à direita.	72
Figura 37 – Fórmulas e caminho usados na prova do Lema 18.	73
Figura 38 – O território de $B \rightarrow A$ apresenta duas conclusões.	75
Figura 39 – N-Grafo para a lei de Peirce é rejeitado pela meta-condição.	75
Figura 40 – Prova de completude para $\wedge L_1$ (OLIVEIRA, 2001).	78
Figura 41 – Prova de completude para $\vee R_1$ (OLIVEIRA, 2001).	78
Figura 42 – Prova de completude para $\rightarrow R$	79
Figura 43 – Prova de completude para $\rightarrow L$ (OLIVEIRA, 2001).	80
Figura 44 – Prova de completude para enfraquecimento à esquerda (OLIVEIRA, 2001).	81
Figura 45 – Prova de completude para enfraquecimento à esquerda sem premissas.	81
Figura 46 – Prova de completude para enfraquecimento à direita (OLIVEIRA, 2001).	82
Figura 47 – Prova de completude para contração à esquerda.	82
Figura 48 – Prova de completude para contração à direita.	83
Figura 49 – Links da proposta de N-Grafos baseados em FIL (QUISPE-CRUZ, 2009).	85
Figura 50 – Substituição do link de enfraquecimento divergente.	86
Figura 51 – N-Grafo da Figura 30 rotulado.	88
Figura 52 – Os rótulos deixam claro que as implicações da Figura 31 foram feitas corretamente.	89
Figura 53 – N-Grafo para lei de Peirce rotulado.	89
Figura 54 – Links lógicos.	96
Figura 55 – Links estruturais e identidade.	97
Figura 56 – Estrutura de prova para $A \vee B \vdash A \wedge B$ (ROBINSON, 2003).	98
Figura 57 – <i>Proof-net</i> para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	100
Figura 58 – <i>Proof-net</i> com um link $\neg L$ final.	102
Figura 59 – <i>Proof-net</i> com um link $\neg R$ final.	103
Figura 60 – <i>Proof-net</i> com um link WL final, cuja premissa é uma fórmula do lado esquerdo.	103
Figura 61 – <i>Proof-net</i> com um link $\rightarrow R$ final.	104
Figura 62 – Nó de regra maximal N (ROBINSON, 2003).	105
Figura 63 – Novo link $\perp L$	105
Figura 64 – <i>Proof-net</i> correspondente ao N-Grafo da Figura 29.	106
Figura 65 – <i>Proof-net</i> correspondente ao N-Grafo da Figura 31.	107
Figura 66 – <i>Proof-net</i> correspondente ao N-Grafo da Figura 30.	108
Figura 67 – <i>Proof-net</i> correspondente ao N-Grafo da Figura 39.	109

Figura 68 – Prova de completude para a regra $\wedge L_1$	111
Figura 69 – Prova de completude para a regra $\wedge R$	112
Figura 70 – Prova de completude para a regra $\vee R_1$	113
Figura 71 – Prova de completude para a regra $\vee L$	113
Figura 72 – Prova de completude para a regra $\rightarrow R$	114
Figura 73 – Prova de completude para a regra $\rightarrow L$	114
Figura 74 – Prova de completude para a regra WR	115
Figura 75 – Prova de completude para a regra CL	116
Figura 76 – Prova de completude para a regra CR	116
Figura 77 – Links lógicos com dependências.	118
Figura 78 – Links estruturais e identidade com dependências.	119
Figura 79 – <i>Proof-net</i> da Figura 64 com dependências.	120
Figura 80 – <i>Proof-net</i> da Figura 65 com dependências.	121
Figura 81 – <i>Proof-net</i> da Figura 66 com dependências.	122
Figura 82 – <i>Proof-net</i> da Figura 67 com dependências.	123
Figura 83 – <i>Proof-net</i> intuicionista rotulada com um link WL final, cuja premissa é uma fórmula do lado direito.	125
Figura 84 – Links com dependências.	135

Lista de tabelas

Tabela 1	– Regras de introdução e eliminação.	20
Tabela 2	– Regras lógicas.	23
Tabela 3	– Regras estruturais, axioma e corte.	24
Tabela 4	– Regras de FIL.	31
Tabela 5	– Regras lógicas para IMLL.	33
Tabela 6	– Impérios do norte e do sul. Em alguns casos usamos apenas o índice da fórmula.	70
Tabela 7	– Regras multiplicativas.	95
Tabela 8	– $\vee - I_1 = (A/S, A \vee B/S)$ e $\wedge - E_1 = (A \wedge B/S, A/S)$	136
Tabela 9	– $\vee - I_2 = (B/S, A \vee B/S)$ e $\wedge - E_2 = (A \wedge B/S, B/S)$	136
Tabela 10	– $\perp - \text{enfrac.simples} = (\perp/S, A/S)$ e $\top - \text{enfrac.simples} = (A/S, \top/S)$	136
Tabela 11	– $\wedge - I = \{(A/S, A \wedge B/S \cup S'), (B/S', A \wedge B/S \cup S')\}$ e $\vee - E = \{(A \vee B/S, A/S), (A \vee B/S, B/S)\}$	136
Tabela 12	– $\top - \text{enfrac.convergente} = \{(\top/S, A/S \cup S'), (A/S', A/S \cup S')\}$ e $\perp - \text{enfrac.divergente} = \{(A/S, A/S), (A/S, \perp/S)\}$	136
Tabela 13	– $\rightarrow - E = \{(A/S, B/S \cup S'), (A \rightarrow B/S', B/S \cup S')\}$	136

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivo e principais contribuições	17
1.2	Estrutura	17
2	INTUICIONISMO	18
2.1	Introdução	18
2.2	Lógica intuicionista e provas construtivas	18
2.3	Formalismos de Gentzen	19
2.3.1	Dedução natural	19
2.3.2	Cálculo de seqüentes	22
2.4	c-LD	26
2.4.1	Regras de inferência	27
2.5	FIL	29
2.6	Lógica linear intuicionista	32
2.7	Conclusão	35
3	N-GRAFOS E SUB-N-GRAFOS	36
3.1	Introdução	36
3.2	Grafos de prova	36
3.2.1	Crítério de corretude	40
3.3	Sub-N-Grafos	41
3.4	Impérios do norte e do sul	42
3.4.1	Lemas de aninhamento	51
3.5	Império total	53
3.6	Sequentização	56
3.7	Conclusão	58
4	N-GRAFOS INTUICIONISTAS	60
4.1	Introdução	60
4.2	Primeira versão	60
4.3	Sub-N-Grafos e a versão intuicionista	63
4.3.1	Império e prova de completude	64
4.3.2	Território e suas propriedades	68
4.3.3	Completude e sequentização	76
4.4	N-Grafos com dependências	84
4.4.1	N-Grafos baseados em FIL	85

4.4.2	Nova proposta	86
4.5	Conclusão	92
5	<i>PROOF-NETS</i> INTUICIONISTAS	94
5.1	Introdução	94
5.2	Sistema clássico	94
5.2.1	Estruturas de prova	95
5.2.2	Critério de corretude	98
5.2.3	<i>Subnets</i>	99
5.3	Critério de corretude intuicionista	105
5.4	Completeness	107
5.5	Corretude	116
5.6	Conclusão	127
6	CONCLUSÃO	129
	REFERÊNCIAS	131
	APÊNDICES	134
	APÊNDICE A – MAPEAMENTO DE N-GRAFOS COM UM ÚNICO LINK PARA O CÁLCULO DE SEQUENTES . . .	135

1 INTRODUÇÃO

Uma questão relevante em teoria da prova é se duas provas do mesmo teorema apresentam a mesma justificativa. Por exemplo, considere as seguintes provas em dedução natural (DN), sendo apenas a segunda aceita pela lógica intuicionista:

$$\frac{A \vee \neg A}{(A \vee \neg A) \vee (A \rightarrow A)} \vee I_1 \quad \frac{\frac{[A]_1}{A \rightarrow A} \rightarrow I_{(1)}}{(A \vee \neg A) \vee (A \rightarrow A)} \vee I_2$$

Gentzen propôs duas formas em DN de diferenciar o cálculo clássico (NK) do intuicionista (NJ): adicionar todas as fórmulas do tipo $A \vee \neg A$ como axiomas, ou a regra da eliminação da dupla negação (GENTZEN, 1935); enquanto Prawitz adota uma regra especial para a redução ao absurdo (PRAWITZ, 1965).

Derivações em DN podem ter uma ou várias hipóteses, mas apenas uma conclusão: a estrutura segue o formato de uma árvore. Embora haja uma ligação muito próxima entre o lambda cálculo tipado e NJ, a falta de simetria do formalismo de Gentzen é um obstáculo para o estudo de suas derivações. A regra $\vee - E$ impõe um momento de reunificação e sua conclusão não é necessariamente uma subfórmula da sua premissa (GIRARD; TAYLOR; LAFONT, 1989). A alternativa óbvia é pensar num formalismo com múltipla conclusão.

Quando Gentzen propôs o cálculo de sequentes, ele definiu um critério simples para distinguir a versão clássica (LK) da intuicionista (LJ): apenas o primeiro permite múltipla conclusão. Todavia, até mesmo LK não se mostra adequado para o estudo de identidade de provas. A natureza sequencial da aplicação das regras distingue provas com a mesma justificativa, mas que diferem somente pela permutação de regras independentes:

$$\frac{\frac{\Pi}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma, A \wedge C \vdash B} \wedge L_1 \quad \frac{\frac{\Pi}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma, A \wedge C \vdash B \vee D} \vee R_1$$

Se o mesmo exemplo for representado em dedução natural, a adição das regras de conjunção e disjunção refletiriam numa única derivação:

$$\frac{[A]_i}{\Sigma} \quad B \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{\frac{[A \wedge C]_i}{A} \wedge E_1}{\Sigma}}{B \vee D} \vee I_1$$

As duas derivações em sequentes acima são em essência a mesma, porém o sistema nos força a escolher uma ordem para a aplicação das regras, embora elas sejam independentes. Isso fica evidente quando vemos o mesmo exemplo refletido numa única dedução natural. Essa restrição desnecessária imposta pelo formalismo é comumente chamada de *burocracia*. Não existe uma noção formal para esse termo, mas há um consenso em teoria de prova de que quando duas derivações são “moralmente” equivalentes, mas diferem em detalhes sintáticos não essenciais, isto é devido à burocracia (STRASSBURGER, 2006).

Uma solução para eliminar essa burocracia é estudar os objetos de prova sob uma perspectiva geométrica, a qual permite extrair propriedades estruturais de uma prova usando intuições geométricas. As *proof-nets* de Girard para a lógica linear multiplicativa sem constantes (MLL^-) (GIRARD, 1987) foram um trabalho pioneiro e têm inspirado representações por meio de grafos, como os N-Grafos para a lógica clássica (OLIVEIRA, 2001) e o sistema de Robinson (ROBINSON, 2003).

Nesses sistemas as deduções apresentam o formato de um grafo. São definidas operações para obter novos grafos e a partir de características geométricas, como conectividade e os tipos de ciclos presentes, determina-se se a dedução é correta (critério Danos-Regnier (DANOS; REGNIER, 1989)). O critério de corretude geométrico também é fundamental nas provas de completude e corretude. Além dessas estruturas atacarem a burocracia, elas também expressam provas com múltipla conclusão, favorecendo uma representação mais simétrica.

Uma vez que NJ e LJ permitem uma única conclusão, pode-se pensar que somente a lógica clássica pode ser representada com múltipla conclusão e que não há forma de estudar a intuicionista sob um sistema mais simétrico e menos burocrático que LJ. Pelo menos do ponto de vista da simetria, isso não é verdade.

Se adotarmos $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$ e considerarmos apenas o fragmento proposicional, então é possível considerar a restrição de cardinalidade no lado direito apenas à regra $\rightarrow R^1$, como é feito no cálculo de sequentes LJ' de Maehara (TAKEUTI, 1975). Na verdade já existem propostas com múltipla conclusão até mesmo para essa regra se for adotada uma relação de dependência entre premissas e conclusões (KASHIMA, 1991; PAIVA; PEREIRA, 2005).

A restrição de cardinalidade de LJ', quando mapeada para um sistema de múltipla conclusão baseado em grafos de prova, traria um ônus sobre a natureza não sequencial de uma derivação em formato de grafos, como acontece com as caixas do conectivo & (conjunção aditiva) em lógica linear (GIRARD, 1987). Por outro lado, se a ideia de mapear dependências numa derivação em grafo de prova for adotada, seria necessário um mecanismo de indexação capaz de guardar as dependências entre premissas e conclusões

¹ A regra $\forall R$ em LJ' também deve ter uma única conclusão. Porém, nesta tese consideramos apenas o fragmento proposicional em todos os formalismos utilizados.

no grafo de prova.

1.1 Objetivo e principais contribuições

Nesta tese propomos uma versão intuicionista para dois sistemas de múltipla conclusão inicialmente definidos apenas para a lógica clássica proposicional: os N-Grafos, os quais são baseados em dedução natural, e as *proof-nets* de Robinson, inspiradas no cálculo de seqüentes.

Ambos originalmente utilizam o critério de Danos-Regnier (DANOS; REGNIER, 1989) e estudaremos como verificar se uma derivação clássica com múltipla conclusão também é intuicionista sob uma perspectiva geométrica. Nosso critério de corretude global usa o conceito de subderivações válidas para reconhecer se uma introdução do conectivo “ \rightarrow ” é aceito pela lógica intuicionista.

Como resultado nós investigamos as diferenças entre as lógicas clássica e intuicionista sem sacrificar a simetria (não restringimos a cardinalidade). Nós fazemos isso por meio de um critério de corretude geométrico global, o qual não acrescenta burocracia sintática nas versões clássicas já existentes dos N-Grafos e das *proof-nets* para a lógica clássica.

Esse critério de corretude já captura a relação de dependência entre premissas e conclusões, a qual geralmente é expressa por rótulos ou índices em cálculos de seqüentes de múltipla conclusão para lógica intuicionista. Assim mostramos como é possível derivar teoremas na lógica intuicionista proposicional num sistema com múltipla conclusão, de maneira não sequencial e sem rótulos ou índices.

1.2 Estrutura

O Capítulo 3 contém as definições originais dos N-Grafos e apresenta o conceito de sub-N-Grafos, os quais são fundamentais para a prova de corretude, tanto do sistema clássico, quanto da versão intuicionista proposta. Mas antes, no Capítulo 2, são discutidos alguns cálculos intuicionistas: desde os apresentados por Gentzen (GENTZEN, 1935), até os que permitem múltipla conclusão, como FIL (PAIVA; PEREIRA, 2005) e c -LD (KASHIMA, 1991), sendo este último utilizado no mapeamento de corretude dos sistemas intuicionistas propostos aqui: os N-Grafos (Capítulo 4) e as *proof-nets* (Capítulo 5). No Capítulo 6 é discutida a conclusão desta tese e os trabalhos futuros.

2 INTUICIONISMO

2.1 Introdução

Dedução natural e cálculo de seqüentes são formalismos criados por Gentzen no seu famoso artigo (GENTZEN, 1935). Um dos méritos do primeiro é tornar o raciocínio do matemático mais próximo do objeto da prova quando comparado com outros sistemas de dedução da lógica criados por Russell (WHITEHEAD; RUSSELL, 1913) e Hilbert (HILBERT; ACKERMANN, 1928), porém a posição especial da lei do terceiro excluído dificulta a normalização e para isso Gentzen também apresentou o cálculo de seqüentes.

Neste capítulo discutimos sobre eles e a diferença entre suas versões clássica e intuicionista. Embora um cálculo de múltipla conclusão inicialmente tenha sido necessário para a prova do *Hauptsatz* para a lógica clássica¹, veremos que também há cálculos com mais de uma conclusão para a lógica intuicionista, como c-LD e FIL. Também abordaremos brevemente a versão intuicionista para as *proof-nets* para lógica linear.

2.2 Lógica intuicionista e provas construtivas

As lógicas clássica e intuicionista definem de forma distinta uma sentença válida. De acordo com a primeira, a fórmula A é aceita se for sempre verdadeira, enquanto a segunda exige a existência de uma prova construtiva de A . Os conectivos também são interpretados de maneira diferente na lógica intuicionista (DALEN, 1986):

- uma prova de $A \wedge B$ é formada por uma prova de A e uma de B ;
- uma prova de $A \vee B$ consiste numa prova de A ou uma de B ;
- uma prova de $\neg A$ é uma prova de que A jamais será provado;
- uma prova de $A \rightarrow B$ é uma construção que transforma qualquer prova de A numa prova de B .

Por exemplo, suponha que A represente a sentença “ $P = NP$ ”. Assim $\neg A$ é a proposição “ $P \neq NP$ ”. Então a lógica clássica aceita a fórmula $A \vee \neg A$, pois é uma instância de lei do terceiro excluído, entretanto isso muda quando olhamos para a proposição $A \vee \neg A$ sob um ponto de vista intuicionista.

¹ Mais tarde Prawitz desenvolveu a normalização para DN (PRAWITZ, 1965).

A questão P versus NP é um dos problemas mais famosos em aberto na ciência da computação. Conforme o significado intuicionista da disjunção visto acima, uma prova de $A \vee \neg A$ seria uma prova de que $P = NP$ ou uma prova de que $P \neq NP$, mas hoje ainda não temos nenhuma das duas. Logo, a proposição $P = NP \vee P \neq NP$ hoje não é válida na lógica intuicionista. De maneira geral, como nem sempre temos uma prova de uma proposição ou da negação dela, a lei do terceiro excluído é rejeitada aqui.

Na lógica intuicionista também não é possível definir um conectivo binário por meio dos outros: considere agora $A =$ “existem vinte ocorrências consecutivas do dígito 7 na expansão decimal de π ” e $B =$ “existem dezenove ocorrências consecutivas do dígito 7 na expansão decimal de π ”. Assim $\neg A \vee B$ não é válido construtivamente (pois não temos uma prova de $\neg A$ nem uma de B), ainda que $A \rightarrow B$ seja (DALEN, 1986). Todavia, sabemos que na lógica clássica temos $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

2.3 Formalismos de Gentzen

2.3.1 Dedução natural

Dedução natural foi proposta por Gerhard Gentzen² como uma tentativa de “definir um formalismo que reflita com a maior precisão possível o verdadeiro raciocínio lógico envolvido em provas matemáticas” (GENTZEN, 1935). Diferente dos de Hilbert, seu cálculo não apresenta axiomas, possui mais regras de inferência e permite o descarte de hipóteses.

Há regras para introdução e eliminação de cada conectivo lógico (Tabela 1). As derivações seguem a estrutura de uma árvore (todas as regras de inferência apresentam apenas uma conclusão) e começam com hipóteses, as quais podem ser descartadas (fechadas) por algumas regras ($\vee E$, $\rightarrow I$ e $\neg I$). Se uma fórmula B ocorre abaixo de uma hipótese A , mas nenhuma regra acima de B descarta A , então dizemos que B depende de A .

As regras da Tabela 1 correspondem à versão para lógica minimal (NM). O cálculo intuicionista de dedução natural (NJ) é obtido com a adição da regra do absurdo:

$$\frac{\perp}{A} \perp_i$$

A seguir iremos ilustrar alguns exemplos de provas em DN. Mostramos uma derivação da regra da contrapositiva: a partir de $A \rightarrow B$ concluímos $\neg B \rightarrow \neg A$. Note que $A \rightarrow B$ é uma hipótese aberta.

² Há também outros sistemas de dedução natural, como o proposto por Jakowski (JAŚKOWSKI, 1934), mas aqui trabalharemos apenas com o sistema de Gentzen.

Introdução	Eliminação
$\frac{A \quad B}{A \wedge B}^{\wedge I}$	$\frac{A \wedge B}{A}^{\wedge E_1} \quad \frac{A \wedge B}{B}^{\wedge E_2}$
$\frac{A}{A \vee B}^{\vee I_1} \quad \frac{B}{A \vee B}^{\vee I_2}$	$\frac{[A]_i \quad [B]_j}{C}^{\vee E_{(i,j)}}$
$\frac{[A]_i}{A \rightarrow B}^{\rightarrow I_{(i)}}$	$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}^{\rightarrow E}$
$\frac{\perp}{\neg A}^{\neg I_{(i)}}$	$\frac{A \quad \neg A}{\perp}^{\neg E}$

Tabela 1 – Regras de introdução e eliminação.

$$\frac{\frac{[A]_1 \quad A \rightarrow B}{B}^{\rightarrow E}}{[\neg B]_2}^{\neg E} \quad \frac{\perp}{\neg A}^{\rightarrow I_{(1)}}}{\neg B \rightarrow \neg A}^{\rightarrow I_{(2)}}$$

Vejamos outro exemplo: se $\neg B \rightarrow \neg A$ for válido, nós também temos $\neg(A \wedge \neg B)$. Primeiro suponha que $A \wedge \neg B$ é válido. Então ambos A e $\neg B$ seguem. De $\neg B$ e nossa hipótese $\neg B \rightarrow \neg A$, obtemos $\neg A$, que contradiz com A . Agora temos uma contradição a partir da hipótese de que $A \wedge \neg B$ é válido, portanto na verdade podemos concluir $\neg(A \wedge \neg B)$. A derivação a seguir reflete nosso raciocínio:

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge \neg B]_1}{\neg B}^{\wedge E_2} \quad \neg B \rightarrow \neg A}{\neg A}^{\rightarrow E} \quad \frac{[A \wedge \neg B]_1}{A}^{\wedge E_1}}{\perp}^{\neg E}}{\neg(A \wedge \neg B)}^{\neg I_{(1)}}$$

Agora já temos:

- uma prova de $\neg B \rightarrow \neg A$ a partir de $A \rightarrow B$, chamemos de Σ_1 ;
- uma prova de $\neg(A \wedge \neg B)$ a partir de $\neg B \rightarrow \neg A$, chamemos de Σ_2 .

Portanto podemos usar essas duas derivações a fim de chegarmos a uma de $\neg(A \wedge \neg B)$ a partir de $A \rightarrow B$: apenas precisamos copiar Σ_1 no lugar da ocorrência da hipótese aberta $\neg B \rightarrow \neg A$ em Σ_2 .

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A]_1 \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow I(1)}{\frac{[\neg B]_2}{\neg A} \rightarrow I(2)} \rightarrow E \quad \frac{[A \wedge \neg B]_3}{A} \wedge E_1}{\frac{\frac{[A \wedge \neg B]_3}{\neg B} \wedge E_2}{\neg A} \rightarrow E} \rightarrow E} \rightarrow E \quad \frac{[A \wedge \neg B]_3}{A} \wedge E_1}{\perp} \rightarrow I(3) \\
 \hline
 \neg(A \wedge \neg B)
 \end{array}$$

Aqui a fórmula $\neg B \rightarrow \neg A$ é introduzida e depois eliminada. Isso representa um *detour* (desvio) na nossa derivação: para introduzir a implicação precisamos de uma derivação de $\neg A$ a partir da hipótese $\neg B$, entretanto já temos uma derivação de $\neg B$: na outra premissa da eliminação da implicação. Portanto nada é ganho quando deduzimos $\neg B \rightarrow \neg A$ com a introdução da implicação e logo depois aplicamos a regra de eliminação a este conectivo, logo podemos remover essa ocorrência de fórmula: apenas precisamos substituir a hipótese $[\neg B]_2$ pela derivação de $\neg B$ usada na premissa da regra *rightarrowE*:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A \wedge \neg B]_2}{\neg B} \wedge E_2 \quad \frac{[A]_1 \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow I(1)}{\frac{[A \wedge \neg B]_2}{A} \wedge E_1}{\frac{\frac{[A \wedge \neg B]_2}{\neg B} \wedge E_2}{\neg A} \rightarrow I(1)}{\perp} \rightarrow I(2)} \rightarrow E \\
 \hline
 \neg(A \wedge \neg B)
 \end{array}$$

Definição 1 (premissa menor, premissa maior (PRAWITZ, 1965)). *Considere uma regra de eliminação de algum conectivo. Então a premissa desta regra que possui o conectivo eliminado é chamada premissa maior. A outra premissa, se houver, é chamada premissa menor.*

Definição 2 (fórmula máxima (PRAWITZ, 1965)). *Uma ocorrência de fórmula numa derivação é uma fórmula máxima quando é simultaneamente conclusão de uma regra de introdução e premissa maior de uma regra de eliminação do mesmo conectivo.*

O que fizemos no exemplo anterior foi remover a fórmula máxima $\neg B \rightarrow \neg A$. Prawitz então definiu o *princípio da inversão*:

“Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition for deriving the major premise of α , when combined with deductions of the minor premise of α (if any), already ‘contain’ a deduction of B ; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α ” (PRAWITZ, 1965).

Portanto uma fórmula máxima representa uma complicação em uma dedução e pode ser removida. Ela também fere a *propriedade da subfórmula*: note que toda ocorrência de fórmula nas nossas duas primeiras derivações (Σ_1 e Σ_2) é uma subfórmula da conclusão ou de alguma hipótese aberta da derivação, todavia isso não acontece com $\neg B \rightarrow \neg A$ quando juntamos as duas derivações. Essa complicação pode ser resolvida pois o princípio da inversão garante que fórmulas máximas podem ser removidas. Mas dado que Gentzen já havia notado essa propriedade específica do cálculo de dedução natural, por que ele precisou propor o cálculo de seqüentes a fim de obter uma prova de que toda derivação pode ser transformada numa sem desvios?

O cálculo de dedução natural para a lógica clássica (NK) foi definido a partir do cálculo NJ de duas maneiras:

- permitindo suposições de todas as fórmulas da forma $[A \vee \neg A]$;
- ou permitindo uma nova regra para a negação $(\frac{\neg\neg A}{A})$.

Essa adição quebra o princípio da inversão e também viola a propriedade da subfórmula conforme mostra o próximo exemplo: a outra parte da lei da contrapositiva $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$, a qual não é aceita pela lógica intuicionista.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg B]_1 \quad [\neg B \rightarrow \neg A]_2 \rightarrow E}{\neg A} \quad [A]_3 \quad \neg E}{\perp} \quad \neg I(1)}{\neg\neg B} \quad \rightarrow I(3)}{A \rightarrow B} \quad \rightarrow I(2)}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)}$$

A fórmula $\neg\neg B$ acima é conclusão de uma regra de introdução e premissa da dupla eliminação da negação. Ela não é subfórmula de qualquer outra fórmula da derivação, mas também não pode ser removida. Por isso Gentzen observou que a princípio apenas a dedução natural intuicionista apresentava as propriedades essenciais para a prova do seu teorema principal, o *Hauptsatz*, o qual é válido para ambas as lógicas clássica e intuicionista³.

2.3.2 Cálculo de seqüentes

Um seqüente é uma expressão do tipo $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m$ e é interpretado como a fórmula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)$. A seqüência finita A_1, A_2, \dots, A_n é chamada de *antecedente* e B_1, B_2, \dots, B_m de *sucedente*. Ambas as seqüências podem ser vazias:

³ Von Plato depois provou a normalização para o sistema clássico no formato original proposto por Gentzen (PLATO, 1998).

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'} \wedge R \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'} \vee L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R_2 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'} \rightarrow L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow R \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg R
\end{array}$$

Tabela 2 – Regras lógicas.

- se apenas $n = 0$, então o sequente é interpretado como $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$;
- se apenas $m = 0$, então significa a negação de $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, i.e. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \perp$;
- se ambos são vazios, então representa a contradição (\perp).

A dedução natural de uma fórmula B a partir das hipóteses A_1, A_2, \dots, A_n pode ser representada pelo sequente $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ e uma prova de B (sem hipótese aberta) por $\vdash B$. Para cada regra de introdução e eliminação em dedução natural existem uma regra lógica para o lado direito e uma para o esquerdo, respectivamente, no cálculo de sequentes (Tabela 2). No cálculo de sequentes há também regras estruturais (Tabela 3). Letras gregas representam seqüências (possivelmente vazias) de fórmulas separadas por vírgulas.

Derivações são construídas na forma de árvores a partir de sequentes chamados de axiomas ($A \vdash A$), que são as folhas. O sequente final, a conclusão a ser provada, é a raiz da árvore de derivação, onde cada nó é rotulado por um sequente. As regras das Tabelas 2 e 3 representam o cálculo para lógica clássica (LK). O cálculo de sequentes para a lógica intuicionista (LJ) é obtido pela adição da restrição de no máximo uma fórmula no sucedente e pela substituição da regra $\vee L$ pela seguinte:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta} \vee L$$

Axioma	$A \vdash A$	
Enfraquecimento	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}^{WL}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}^{WR}$
Contração	$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}^{CL}$	$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}^{CR}$
Permutação	$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}^{IL}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}^{IR}$
Corte	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}^{CUT}$	

Tabela 3 – Regras estruturais, axioma e corte.

Vejamos algumas derivações em seqüentes para as deduções naturais Σ_1 e Σ_2 da seção anterior.

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \rightarrow L \\
 \frac{A \rightarrow B, A \vdash B}{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash} \neg L \\
 \frac{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash}{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash} IL \\
 \frac{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash}{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A} \neg R \\
 \frac{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A}{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \rightarrow R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{B \vdash B}{\vdash \neg \mathbf{B}, \mathbf{B}} \neg R \quad \frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L \\
 \frac{\vdash \neg \mathbf{B}, \mathbf{B} \quad A, \neg A \vdash}{A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash B} \rightarrow L \\
 \frac{A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash B}{\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B} IL \\
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash B} \wedge L_1 \\
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash} \neg L \\
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash} \wedge L_2 \\
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg B)} \neg R
 \end{array}$$

Se compararmos essas derivações em seqüentes com as correspondentes em dedução natural, notaremos algumas propriedades interessantes como a conexão entre regras lógicas no lado direito e regras de introdução, assim como regras lógicas no lado esquerdo e regras de eliminação. Em Σ_2 descartamos duas ocorrências da hipótese $[A \wedge \neg B]$ de uma só vez e isso reflete numa contração à esquerda. Outra observação é que a regra de permutação não corresponde a nada em dedução natural: ela apenas manipula a estrutura do seqüente com

a finalidade de as outras regras atuarem apenas em fórmulas adjacente ao símbolo “ \vdash ”.

Há um problema em nossa derivação para $\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg B)$: temos uma derivação em dedução natural intuicionista para $\neg(A \wedge \neg B)$ a partir de $\neg B \rightarrow \neg A$, mas num momento utilizamos duas fórmulas no lado direito do sequente na derivação correspondente em cálculo de sequentes ($\vdash \neg \mathbf{B}, \mathbf{B}$), logo ela não é uma derivação em LJ, porém é possível encontrarmos uma em LJ para a dedução em NJ:

$$\begin{array}{c}
\frac{B \vdash B}{B, \neg B \vdash} \neg L \\
\frac{\neg B, B \vdash}{\neg B \vdash \neg B} IL \\
\frac{\neg B \vdash \neg B}{\neg B, A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash} \neg R \\
\frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L \\
\frac{\neg B, A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash}{\neg B, \neg B \rightarrow \neg A, A \vdash} \rightarrow L \\
\frac{\neg B, \neg B \rightarrow \neg A, A \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, \neg B, A \vdash} IL \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, \neg B, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, \neg B \vdash} \wedge L_1 \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash} IL \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash} \wedge L_2 \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg B)} CL \neg R
\end{array}$$

Se não levarmos em conta as aplicações de permutação, esta última derivação usa exatamente as mesmas regras da anterior, assim ambas refletem Σ_2 . Elas diferem apenas pela ordem de aplicação de regras independentes. De fato é possível definir um mapeamento de várias derivações em sequentes para uma única em dedução natural: uma prova no primeiro pode ser vista como uma instrução para construir uma dedução natural (PRAWITZ, 1965).

Procedemos agora como fizemos com Σ_1 e Σ_2 na seção anterior: temos derivações em sequentes para $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ e uma em LJ para $\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg B)$, então aplicamos a regra do corte entre elas:

$$\begin{array}{c}
\frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \rightarrow L \\
\frac{A \rightarrow B, A \vdash B}{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash} \neg L \\
\frac{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash}{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash} IL \\
\frac{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash}{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A} \neg R \\
\frac{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A}{A \rightarrow B \vdash \neg \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A}} \rightarrow R \\
\frac{B \vdash B}{B, \neg B \vdash} \neg L \\
\frac{\neg B, B \vdash}{\neg B \vdash \neg B} IL \\
\frac{\neg B \vdash \neg B}{\neg B, A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash} \neg R \\
\frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L \\
\frac{\neg B, A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash}{\neg B, \neg B \rightarrow \neg A, A \vdash} \rightarrow L \\
\frac{\neg B, \neg B \rightarrow \neg A, A \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, \neg B, A \vdash} IL \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, \neg B, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, \neg B, A \wedge \neg B \vdash} \wedge L_1 \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, \neg B \vdash} IL \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B, A \wedge \neg B \vdash} \wedge L_2 \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash}{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash} CL \\
\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \wedge \neg B \vdash}{\neg \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A} \vdash \neg(A \wedge \neg B)} \neg R \\
\frac{A \rightarrow B \vdash \neg \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A} \quad \neg \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A} \vdash \neg(A \wedge \neg B)}{A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)} CUT
\end{array}$$

Dizemos que $\neg B \rightarrow \neg A$ é a *fórmula do corte* e, como a fórmula máxima no nosso exemplo anterior, ela viola a propriedade da subfórmula: é a única da derivação que não é subfórmula de nenhuma fórmula do sequente final $\neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg B)$. No sequente esquerdo a fórmula do corte ocorre no sucedente, portanto seu conectivo principal (neste caso, “ \rightarrow ”) representa uma introdução em dedução natural. Já no sequente direito a fórmula do corte ocorre no lado esquerdo, representando uma eliminação em dedução natural. Portanto a fórmula do corte é, em certo sentido, uma fórmula máxima (ZUCKER, 1974). A exceção a esse fato ocorre quando a fórmula do corte do sequente esquerdo (direito) provém de um axioma. Neste caso ela não teria origem numa eliminação (introdução).

Todavia vimos que a lei do terceiro excluído ocupa uma posição especial no cálculo NK e isso complica a normalização. No cálculo de sequentes essa peculiaridade é removida e Gentzen provou o *Hauptsatz*: toda derivação em cálculo de sequentes em LJ e LK pode ser transformada em uma com o mesmo sequente final, mas sem o uso da regra do corte.

A seguir, mostramos uma derivação em sequentes para o teorema clássico $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$. Um detalhe é a necessidade de haver mais de uma fórmula no lado direito do sequente.

$$\frac{\frac{\frac{B \vdash B}{\vdash \neg \mathbf{B}, \mathbf{B}} \neg R \quad \frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L}{\frac{A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash B}{\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B} \rightarrow L} \quad IL}{\frac{\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B}{\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B} \rightarrow R} \rightarrow R$$

2.4 c-LD

Lógica de domínios constantes (CD) é uma lógica mais poderosa que a intuicionista, entretanto menos que a clássica. CD pode ser obtida pela lógica intuicionista por meio da adição do axioma $\forall x(A(x) \vee B) \rightarrow (\forall x A(x) \vee B)$, com x não ocorrendo livre em B . Existe uma formulação em cálculo de sequentes para CD (LD), a qual utiliza as mesmas regras de inferência de LK, com a exceção de $\rightarrow R$ e $\neg R$, em que são adotadas as versões de LJ.

Por exemplo, podemos derivar o axioma acima em LD (KASHIMA, 1991):

$$\frac{\frac{\frac{A(a) \vdash A(a) \quad B \vdash B}{A(a) \vee B \vdash A(a), B} \vee L}{\forall x(A(x) \vee B) \vdash A(a), B} \forall L}{\forall x(A(x) \vee B) \vdash \forall x A(x), B} \forall R}{\forall x(A(x) \vee B) \vdash \forall x A(x) \vee B, B} \forall R_1}{\forall x(A(x) \vee B) \vdash \forall x A(x) \vee B, \forall x A(x) \vee B} \forall R_2}{\forall x(A(x) \vee B) \vdash \forall x A(x) \vee B} CR}{\vdash \forall x(A(x) \vee B) \rightarrow (\forall x A(x) \vee B)} \rightarrow R$$

Se substituirmos a regra $\forall R$ por

$$\frac{\Gamma \vdash A(a)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}^{\forall RLJ}$$

tal que a não ocorre em Γ , então obtemos um cálculo equivalente a LJ (o resultado é conhecido por LJ', o qual será abordado na definição dos N-Grafos intuicionistas).

Um problema conhecido é que a eliminação do corte não funciona para LD (LOPEZ-ESCOBAR, 1981; NAGASHIMA, 1973). Isso motivou a definição de uma nova versão de cálculo de seqüentes para CD. Essa nova abordagem utiliza a noção de “conexão” para poder expressar a dependência que algumas fórmulas do conseqüente podem ter de algumas do antecedente (KASHIMA, 1991).

Uma vez que CD se diferencia da lógica intuicionista pela adição de uma regra envolvendo o quantificador universal, o fragmento proposicional de c-LD é uma forma alternativa de definir a lógica intuicionista proposicional (PAIVA; PEREIRA, 2005). Em c-LD escrevemos $A^i \sim B^j$ para indicarmos que a ocorrência de fórmula B^j do conseqüente depende da ocorrência A^i do antecedente. Os axiomas de c-LD são:

- $A^i \vdash A^j$, onde $A^i \sim A^j$;
- $\perp \vdash A^j$, onde $\perp \sim A^j$.

2.4.1 Regras de inferência

Para cada regra em LD há uma correspondente em c-LD (KASHIMA, 1991):

- WL : $\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A^1 \vdash \Delta}^{WL}$ onde as conexões entre Γ e Δ no seqüente inferior são herdadas do superior, logo

$$\gamma \sim \delta \text{ no seqüente inferior} \Leftrightarrow \gamma \sim \delta \text{ no seqüente superior}$$

para quaisquer fórmulas $\gamma \in \Gamma$ e $\delta \in \Delta$. A^1 pode ou não conectar-se a alguma fórmula $\delta \in \Delta$.

- WR : é simétrico a WL .
- CL : $\frac{\Gamma, A^1, A^2 \vdash \Delta}{\Gamma, A^3 \vdash \Delta}^{CL}$ onde as conexões entre Γ e Δ são herdadas e

$$A^3 \sim \delta \Leftrightarrow A^1 \sim \delta \text{ ou } A^2 \sim \delta \text{ no seqüente superior}$$

para qualquer $\delta \in \Delta$.

- CR : é simétrico a CL .

- IL : $\frac{\Gamma, A^1, B^2, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, B^2, A^1, \Pi \vdash \Delta}$ IL onde todas as conexões do sequente no sequente inferior são herdadas do superior.

- IR : é simétrico a IL .

- CUT : $\frac{\Gamma \vdash A^1, \Delta \quad \Pi, A^2 \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$ CUT

– as conexões de Γ e Δ são herdadas e também de Π e Σ ;

– não existem conexões entre Π e Δ no sequente inferior;

– para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $\sigma \in \Sigma$:

$$\gamma \sim \sigma \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow (\gamma \sim A^1 \text{ e } A^2 \sim \sigma \text{ nos sequentes superiores.})$$

- $\wedge L_1$: $\frac{\Gamma, A^1 \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B^2 \vdash \Delta}$ $\wedge L_1$ onde as conexões de Γ e Δ são herdadas e para cada $\delta \in \Delta$

$$A \wedge B^2 \sim \delta \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow A^1 \sim \delta \text{ no sequente superior}$$

- $\wedge L_2$: é análogo a $\wedge L_1$.

- $\wedge R$: $\frac{\Gamma \vdash A^1, \Delta \quad \Pi \vdash B^2, \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash A \wedge B^3, \Delta, \Sigma}$ $\wedge R$ onde:

– as conexões de Γ e Δ são herdadas (o mesmo acontece com Π e Σ);

– não há conexões entre Γ e Σ no sequente inferior (similarmente para Π e Δ);

– para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $\pi \in \Pi$:

$$\gamma \sim A \wedge B^3 \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow \gamma \sim A^1 \text{ no sequente superior}$$

$$\pi \sim A \wedge B^3 \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow \pi \sim B^2 \text{ no sequente superior}$$

- $\vee L$: simétrico a $\wedge R$;

- $\vee R_1$: simétrico a $\wedge L_1$;

- $\vee R_2$: simétrico a $\wedge L_2$;

- $\rightarrow L$: $\frac{\Gamma \vdash A^1, \Delta \quad \Pi, B^2 \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \rightarrow B^3 \vdash \Delta, \Sigma}$ $\rightarrow L$ onde:

– as conexões de Γ e Δ são herdadas (o mesmo acontece com Π e Σ);

– não há conexões entre Γ e Σ no sequente inferior (Π e Δ idem);

– para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $\sigma \in \Sigma$:

$$A \rightarrow B^3 \sim \sigma \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow B^2 \sim \sigma \text{ no sequente superior}$$

$$\gamma \sim \sigma \text{ no sequente inferior} \Leftrightarrow (\gamma \sim A^1 \text{ e } B^2 \sim \sigma \text{ nos sequentes superiores})$$

- $\rightarrow R+$: $\frac{\Gamma, A^1 \vdash B^2, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B^3, \Delta} \rightarrow R+$ onde para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $\delta \in \Delta$:
 - as conexões de Γ e Δ são herdadas;
 - $A^1 \approx \delta$ no sequente superior;
 - $\gamma \sim A \rightarrow B^3$ no sequente inferior $\Leftrightarrow \gamma \sim B^2$ no sequente superior

Apesar de todas as regras manipularem conexões, apenas $\rightarrow R+$ as utiliza de fato. Dessa forma, se eliminarmos os quantificadores e considerarmos $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$, podemos usar as regras de LK (múltipla conclusão) e verificar as dependências na hora de descartar uma hipótese (regra $\rightarrow R+$) a fim de obtermos um cálculo intuicionista.

Além de provar o teorema da eliminação do corte para c-LD, Kashima também mostrou que c-LD é equivalente a LD: é possível substituir todas as ocorrências da regra $\rightarrow R+$ pela versão intuicionista de $\rightarrow R$ (KASHIMA, 1991; KASHIMA; SHIMURA, 1994). A próxima seção apresenta outro cálculo de múltipla conclusão que também modela a lógica intuicionista proposicional utilizando dependências, como c-LD.

2.5 FIL

Embora ambos os cálculos propostos por Gentzen para lógica intuicionista (NJ e LJ) sejam de uma única conclusão, já vimos com c-LD que isso não é obrigatório. Se em LK nós podemos num sequente $\Gamma \vdash \Delta$ descartar qualquer hipótese aplicando a regra $\rightarrow R$ a qualquer conclusão, na lógica intuicionista é necessário um controle adicional. O sistema FIL propõe realizar este controle por meio de uma indexação das fórmulas (PAIVA; PEREIRA, 2005).

Definição 3 (sequente decorado). *Um sequente decorado é uma expressão no formato*

$$A_1(n_1), \dots, A_k(n_k) \vdash B_1/S_1, \dots, B_m/S_m$$

onde:

- A_i para $(1 \leq i \leq k)$ e B_j para $(1 \leq j \leq m)$ são fórmulas;
- n_i para $(1 \leq i \leq k)$ é um número natural e chamado de índice de A_i . Os índices de cada ocorrência de fórmula do antecedente devem ser distintos;
- S_j para $(1 \leq j \leq m)$ é um conjunto de índices e representa o conjunto de dependência de B_j .

Cada fórmula do antecedente apresenta um índice distinto, enquanto cada uma do conseqüente guarda no seu conjunto de dependência os índices de todas fórmulas do

anterior de que dependem. Esse mecanismo tem papel semelhante à relação de conexão em c-LD: sempre que uma hipótese é descartada por uma aplicação da regra $\rightarrow R$, é verificado se alguma outra fórmula no conseqüente depende da hipótese descartada.

Mas, antes de vermos as regras de inferência de FIL, é preciso definir algumas notações. Suponha que Δ representa um conjunto de fórmulas indexadas com seus respectivos conjuntos de dependência $B_1/S_1, \dots, B_m/S_m$, então:

- se S é um conjunto de números naturais, $\Delta[k|S]$ representa a troca de cada S_j em Δ tal que $k \in S_j$ por $(S_j - \{k\}) \cup S$;
- $\Delta \setminus \{n\}$ é a mudança de cada S em Δ tal que $n \in S$ por $S - \{n\}$;
- $\Delta[k, S']$ é a substituição de cada S em Δ tal que $k \in S$ por $S \cup S'$.

Algumas observações referentes à Tabela 4:

- na regra WL o n é um novo índice e Δ^* é obtido a partir de Δ pela adição de n a pelo menos um dos conjuntos de dependências S de Δ ;
- k representa um novo índice em $\forall L$;
- em $\rightarrow R$ temos $n \in S$ e para cada S' em Δ , $n \notin S'$. Em outras palavras, exige-se que B seja a única ocorrência de fórmula dependente de A .

Apresentadas as regras do cálculo, vejamos como fica a primeira derivação em cálculo de seqüentes feita na Seção 2.3.2 para $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ (em FIL a negação é definida por meio da implicação no formato $\neg X \equiv X \rightarrow \perp$):

$$\frac{\frac{\frac{A(1) \vdash A/\{1} \quad B(2) \vdash B/\{2}}{A(1), A \rightarrow B(2) \vdash B/\{1, 2}} \rightarrow L}{A \rightarrow B(2), A(1) \vdash B/\{1, 2}} IL \quad \perp(3) \vdash \perp/\{3}}{A \rightarrow B(2), A(1), B \rightarrow \perp(3) \vdash \perp/\{1, 2, 3}} \rightarrow L}{A \rightarrow B(2), B \rightarrow \perp(3), A(1) \vdash \perp/\{1, 2, 3}} IL}{A \rightarrow B(2), B \rightarrow \perp(3) \vdash A \rightarrow \perp/\{2, 3}} \rightarrow R}{A \rightarrow B(2) \vdash (B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp)/\{2}} \rightarrow R$$

No exemplo anterior em momento algum há mais de uma fórmula no lado direito do seqüente, logo a restrição da regra $\rightarrow R$ não é de fato usada. Vejamos um caso em que ela valida uma aplicação com mais de uma conclusão (as aplicações de permutação não são exibidas):

$$\overline{A(n) \vdash A/\{n\}}^{Ax}$$

$$\overline{\perp(n) \vdash A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}}^{\perp_L}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A/S, \Delta \quad \Gamma', A(n) \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'[n/S]}^{CUT}$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \vdash \Delta}^{IL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B/S', A/S, \Delta'}^{IR}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A(n) \vdash \Delta^*}^{WL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A/\{ \}, \Delta}^{WR}$$

$$\frac{\Gamma, A(n), A(m) \vdash \Delta}{\Gamma, A(\min(n, m)) \vdash \Delta[\max(n, m)|\{\min(n, m)\}]}^{CL} \qquad \frac{\Gamma \vdash A/S, A/S', \Delta}{\Gamma \vdash A/S \cup S', \Delta}^{CR}$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m) \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B(\min(n, m)) \vdash \Delta[\max(n, m)|\{\min(n, m)\}]}^{\wedge L} \qquad \frac{\Gamma \vdash A/S, \Delta \quad \Gamma' \vdash B/S', \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B/S \cup S', \Delta, \Delta'}^{\wedge R}$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \vdash \Delta \quad \Gamma', B(m) \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B(k) \vdash \Delta[n|\{k\}], \Delta'[m|\{k\}]}^{\vee L} \qquad \frac{\Gamma \vdash A/S, B/S', \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B/S \cup S', \Delta}^{\vee R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A/S, \Delta \quad \Gamma', B(n) \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \rightarrow B(n) \vdash \Delta, \Delta'[n, S]}^{\rightarrow L} \qquad \frac{\Gamma, A(n) \vdash B/S, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B/S - \{n\}, \Delta}^{\rightarrow R}$$

Tabela 4 – Regras de FIL.

$$\begin{array}{c}
\frac{A(1) \vdash A/\{1\}}{C(2), A(1) \vdash A/\{1,2\}} \text{WL} \quad \frac{B(3) \vdash B/\{3\} \quad \perp(4) \vdash D/\{4\}}{B(3), B \rightarrow \perp(4) \vdash D/\{3,4\}} \rightarrow L \\
\frac{\quad}{A \vee (B \rightarrow \perp)(5), C(2), B(3) \vdash A/\{2,5\}, D/\{3,5\}} \vee L \\
\frac{\quad}{A \vee (B \rightarrow \perp)(5), C(2) \vdash A/\{2,5\}, B \rightarrow D/\{5\}} \rightarrow R \\
\frac{\quad}{A \vee (B \rightarrow \perp)(5) \vdash C \rightarrow A/\{5\}, B \rightarrow D/\{5\}} \rightarrow R \\
\frac{\quad}{A \vee (B \rightarrow \perp)(5) \vdash (C \rightarrow A) \vee (B \rightarrow D)/\{5\}} \vee R
\end{array}$$

Note que ambas as aplicações da regra $\rightarrow R$ foram feitas quando havia mais de uma fórmula do lado direito, mas elas respeitam a condição de FIL, logo o sequente final é válido na lógica intuicionista. Num sistema com uma única conclusão seria preciso permutar essas duas aplicações para cima da inferência $\vee L$, conforme vemos abaixo na derivação do mesmo sequente em LJ:

$$\begin{array}{c}
\frac{A \vdash A}{A, C \vdash A} \text{WL} \quad \frac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash} \neg L \\
\frac{\quad}{A \vdash C \rightarrow A} \rightarrow R \quad \frac{\quad}{\neg B, B \vdash D} \text{WR} \\
\frac{\quad}{A \vdash (C \rightarrow A) \vee (B \rightarrow D)} \vee R_1 \quad \frac{\quad}{\neg B \vdash B \rightarrow D} \rightarrow R \\
\frac{\quad}{A \vee \neg B \vdash (C \rightarrow A) \vee (B \rightarrow D)} \vee L
\end{array}$$

Tanto c-LD quanto FIL são cálculos de múltipla conclusão e impõem restrições para o descarte de hipótese quando uma implicação é introduzida no lado direito do sequente. Sem as devidas restrições, volta-se à lógica clássica. Num dos exemplos de FIL passamos por um sequente $A \vee (B \rightarrow \perp)(5), C(2), B(3) \vdash A/\{2,5\}, D/\{3,5\}$ e nele poderíamos descartar a hipótese $C(2)$ ligando a $A/\{2,5\}$ ou $B(3)$ ligando a $D/\{3,5\}$, entretanto $A \vee (B \rightarrow \perp)(5)$ não pode ser descartada. Esta condição é o que diferencia a lógica proposicional clássica da intuicionista: na primeira toda hipótese é global, enquanto na segunda algumas podem ser apenas locais (PAIVA; PEREIRA, 2005).

2.6 Lógica linear intuicionista

Assim como o cálculo LJ é obtido ao restringir a cardinalidade do consequente em LK, o mesmo acontece com a lógica linear intuicionista. A princípio, uma consequência é a ausência do conectivo \wp . As regras dos conectivos para o fragmento multiplicativo (IMLL) são exibidas na Tabela 5.

Há também uma forma de apresentação com fórmulas apenas no lado direito do sequente, as quais foram adotadas por Lamarche quando este definiu *essential nets*, as *proof-nets* da lógica linear intuicionista (LAMARCHE, 2008). Para isso usam-se polaridades a fim de distinguir as “entradas” (fórmulas negativas, originalmente lado esquerdo) das “saídas” (positivas, lado direito). O procedimento recursivo descrito a seguir, onde a

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \otimes^L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \otimes B} \otimes^R \\
\\
\frac{\Gamma, \vdash A \quad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash C} \multimap^L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \multimap^R
\end{array}$$

Tabela 5 – Regras lógicas para IMLL.

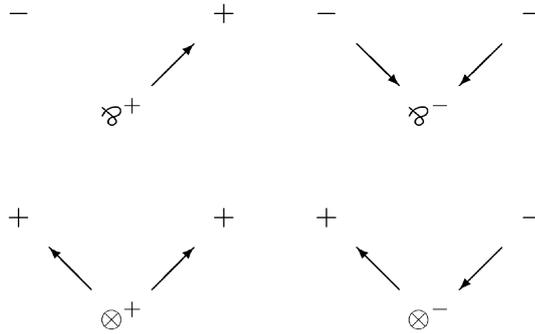


Figura 1 – Links para IMLL (MURAWSKI; ONG, 2006).

representa um átomo, é utilizado para representar sequentes com fórmulas apenas no lado direito (MURAWSKI; ONG, 2006):

$$\begin{aligned}
\lceil a \rceil &= a^+ \\
\lfloor a \rfloor &= a^- \\
\lceil A \otimes B \rceil &= \lceil A \rceil \otimes^+ \lceil B \rceil \\
\lfloor A \otimes B \rfloor &= \lfloor A \rfloor \otimes^- \lfloor B \rfloor \\
\lceil A \multimap B \rceil &= \lfloor A \rfloor \multimap^+ \lceil B \rceil \\
\lfloor A \multimap B \rfloor &= \lceil A \rceil \multimap^- \lfloor B \rfloor
\end{aligned}$$

Definição 4 (sequente balanceado). *Um sequente é dito balanceado se cada átomo ocorre exatamente duas vezes, sendo uma vez com polaridade positiva e outra negativa.*

Considere $X_1, \dots, X_n \vdash Y$ um sequente balanceado em IMLL. Então sua *essential net* é um grafo direcionado resultado da união disjunta das árvores sintáticas das fórmulas $\lfloor X_1 \rfloor, \dots, \lfloor X_n \rfloor, \lceil Y \rceil$, cujas arestas são orientadas de acordo com os links da Figura 1. Os links de axioma são responsáveis por conectar as árvores: para cada átomo a há uma aresta de a^+ para a^- (MURAWSKI; ONG, 2006).

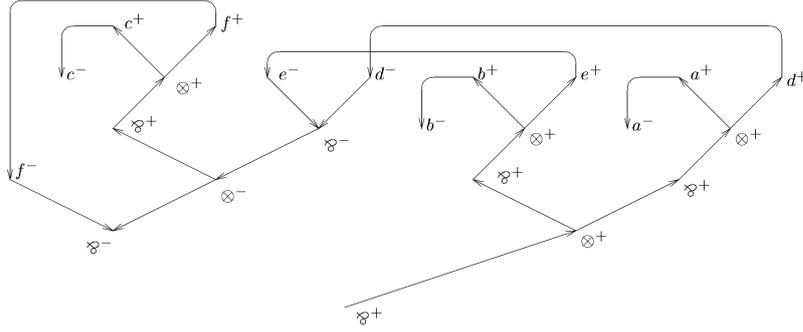


Figura 2 – *Essential net* para $\vdash f \otimes ((c \multimap c \otimes f) \multimap e \otimes d) \multimap (b \multimap b \otimes e) \otimes (a \multimap a \otimes d)$ (MURAWSKI; ONG, 2006).

Proposição 1 ((LAMARCHE, 2008)). *Um sequente $\vdash \perp X_1 \multimap, \dots, \perp X_n \multimap, \lceil Y \rceil$ de um único lado é provável se e somente se o sequente de dois lados $X_1, \dots, X_n \vdash Y$ também for.*

Definição 5 (Critério de corretude (LAMARCHE, 2008)). *Uma essential net é correta quando é acíclica e para cada link \wp^+ , qualquer caminho partindo da raiz que alcança a premissa negativa do link deve passar pela premissa positiva.*

Por exemplo, considere o sequente $\vdash f \otimes ((c \multimap c \otimes f) \multimap e \otimes d) \multimap (b \multimap b \otimes e) \otimes (a \multimap a \otimes d)$. Para sabermos se ele é aceito em IMLL, aplicamos as polaridades a fim de obtermos a correspondente *essential net* (Figura 2). Como esta atende ao critério de corretude, o sequente é válido. Abaixo podemos ver uma derivação para o mesmo:

$$\begin{array}{c}
 \frac{f \vdash f \quad c \vdash c}{f, c \vdash c \otimes f} \otimes R \quad \frac{e \vdash e \quad b \vdash b}{e, b \vdash b \otimes e} \otimes R \quad \frac{d \vdash d \quad a \vdash a}{d, a \vdash a \otimes d} \otimes R \\
 \frac{f \vdash c \multimap (c \otimes f)}{f, c \vdash c \otimes f} \multimap R \quad \frac{e \vdash b \multimap (b \otimes e) \quad d \vdash a \multimap (a \otimes d)}{e, d \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))} \multimap R \\
 \frac{f \vdash c \multimap (c \otimes f) \quad e, d \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))}{f, (c \multimap (c \otimes f)) \multimap (e \otimes d) \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))} \otimes L \\
 \frac{f, (c \multimap (c \otimes f)) \multimap (e \otimes d) \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))}{f \otimes ((c \multimap (c \otimes f)) \multimap (e \otimes d)) \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))} \multimap L \\
 \frac{f \otimes ((c \multimap (c \otimes f)) \multimap (e \otimes d)) \vdash (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))}{\vdash f \otimes ((c \multimap (c \otimes f)) \multimap (e \otimes d)) \multimap (b \multimap (b \otimes e)) \otimes (a \multimap (a \otimes d))} \multimap R
 \end{array}$$

Em c-LD e FIL vimos cálculos de sequentes com relações de dependência para validar introduções da implicação no lado direito de acordo com a lógica intuicionista. A princípio todas as regras de IMLL são de no máximo uma conclusão (Tabela 5), mas *essential nets*, que é um sistema de *proof-nets*, adota polaridades para simular sequentes com fórmulas apenas de um lado.

Além da aciclicidade, uma *essential net* também deve atender a uma condição especial para cada link \wp^+ , os quais surgem justamente na tradução de fórmulas com a implicação no lado direito: $\lceil A \multimap B \rceil = \perp A \multimap \wp^+ \lceil B \rceil$. No Capítulo 4 veremos como verificar se uma prova clássica também é intuicionista num sistema com grafos de prova.

2.7 Conclusão

Neste capítulo estudamos os sistemas de Gentzen para a lógica proposicional. Derivações em dedução natural têm a vantagem de serem mais próxima do pensamento humano do que os sistemas de Hilbert. Entretanto, por causa da posição especial da lei do terceiro excluído em NK, Gentzen também propôs o cálculo de seqüentes e com ele provou o *Hauptsatz* para ambas as lógicas clássica e intuicionista. Uma diferença importante de LK para os outros três sistemas (NJ, NK e LJ) é que ele é o único com múltipla conclusão.

Em seguida vimos alternativas para lógica intuicionista com múltipla conclusão: c-LD e FIL. Ambos usam um mecanismo adicional (conexões e índices, respectivamente) para validar a introdução de uma implicação. No caso da lógica linear, Lamarche adotou polaridades para representar fórmulas apenas do lado direito do seqüente. Como os N-Grafos, os quais serão apresentados no próximo capítulo, permitem múltiplas premissas e múltiplas conclusões, seguiremos a estratégia de c-LD e FIL para definirmos uma versão intuicionista no Capítulo 4.

3 N-GRAFOS E SUB-N-GRAFOS

3.1 Introdução

Proposto por de Oliveira, N-Grafos é um cálculo de dedução natural simétrico com a presença de regras estruturais, semelhante ao cálculo de sequentes. É um sistema de provas de múltipla conclusão para lógica clássica onde as provas são construídas no formato de grafos dirigidos (*dígrafos*) (OLIVEIRA, 2001).

Devido a essas características, o sistema se assemelha a outros de múltipla conclusão para a lógica clássica, que da forma como foram criados, apresentam uma solução para o problema da falta de simetria do sistema de dedução natural. Citamos, por exemplo, as tabelas de desenvolvimento de Kneale (KNEALE, 1958), o refinamento dessa proposta feita por Shoesmith & Smiley (SHOESMITH; SMILEY, 1978) e o cálculo proposto por Ungar (UNGAR, 1992).

Os N-Grafos são definidos de maneira semelhante a *proof-nets*, adotam o critério de Danos & Regnier para identificar derivações válidas (DANOS; REGNIER, 1989). A próxima seção apresenta a definição do sistema e em seguida o conceito de sub-N-Grafo é trabalhado (CARVALHO et al., 2014), mas com a versão estendida para também contemplar a implicação e obter a sequentização completa (CARVALHO et al., 2017).

A letra “N” em N-Grafos é uma alusão ao termo “natural” de dedução natural. A proposta do sistema é ser um cálculo de múltipla conclusão simétrico para o formalismo de uma única conclusão proposto por Gentzen. Então no Capítulo 4 apresentamos nossa proposta de um cálculo de múltipla conclusão para a lógica intuicionista.

3.2 Grafos de prova

É adotada a linguagem usual da lógica proposicional, na qual as fórmulas são construídas a partir de um alfabeto que inclui os símbolos para os conectivos “ \wedge ” (conjunção), “ \vee ” (disjunção), “ \neg ” (negação) e “ \rightarrow ” (implicação); os símbolos de constantes “ \perp ” (falso) e “ \top ” (verdadeiro); os parênteses; e um conjunto enumerável de variáveis: A, B, C etc.

As provas são dígrafos (grafos direcionados). Seus vértices são rotulados por ocorrências de fórmulas e as arestas, as quais simbolizam os passos atômicos da derivação, são reproduzidas pelos links. Em seguida definimos alguns conceitos dos N-Grafos (OLIVEIRA; QUEIROZ, 2003) inspirados no trabalho de Carbone (CARBONE, 1997).

Definição 6 (ponto de ramificação). *Um ponto de ramificação em um dígrafo é um vértice*

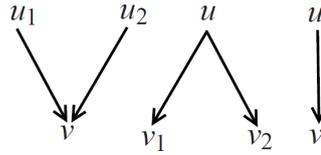


Figura 3 – Tipos de links.

com pelo menos três arestas incidentes a ele.

Definição 7 (ponto de ramificação convergente). *Um ponto de ramificação convergente em um dígrafo é um vértice com duas arestas orientadas para ele.*

Definição 8 (ponto de ramificação divergente). *Um ponto de ramificação divergente em um dígrafo é um vértice com duas arestas orientadas saindo dele.*

Há três tipos de links:

Definição 9 (link convergente). *Um link convergente é um conjunto $\{(u_1, v), (u_2, v)\}$ em um dígrafo em que v é um ponto de ramificação convergente (grafo mais à esquerda da Figura 3). Os vértices u_1 e u_2 são as premissas do link, enquanto v é a conclusão.*

Definição 10 (link divergente). *Um link divergente é um conjunto $\{(u, v_1), (u, v_2)\}$ em um dígrafo em que u é um ponto de ramificação divergente (grafo do meio da Figura 3). O vértice u é a premissa do link, enquanto v_1 e v_2 são as conclusões.*

Definição 11 (link simples). *Um link simples é uma aresta (u, v) em um dígrafo a qual não pertence a um link convergente nem a um divergente (grafo mais à direita da Figura 3). O vértice u é a premissa do link e v é conclusão.*

Definição 12 (grafo de prova). *Um grafo de prova é um grafo conexo orientado o qual atende às seguintes condições:*

- cada vértice é rotulado com uma ocorrência de fórmula;
- as arestas são de dois tipos (“meta” e “sólida”) e as meta-arestas são rotuladas por um “ m ” $((u, v)^m)$;
- há três tipos de links (convergentes, divergentes e simples), os quais podem ser vistos nas Figuras 4, 5, 6 e 7;
- todo vértice é conclusão de no máximo um link e premissa de no máximo um link.

Nós também podemos adotar para os links a classificação usada nas regras do cálculo de sequentes, dividindo-os entre links lógicos e estruturais.

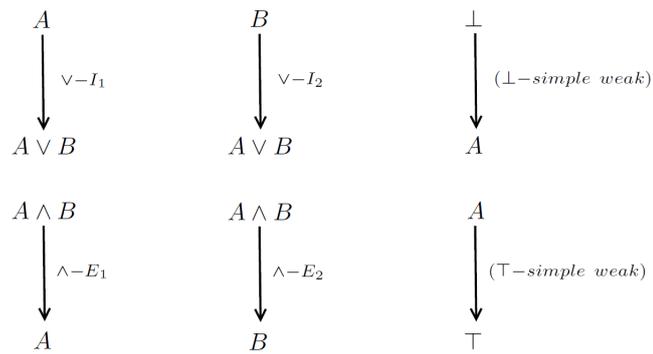


Figura 4 – Links simples

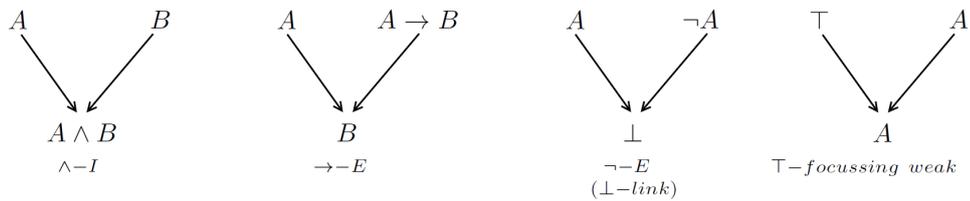


Figura 5 – Links conjuntivos convergentes.

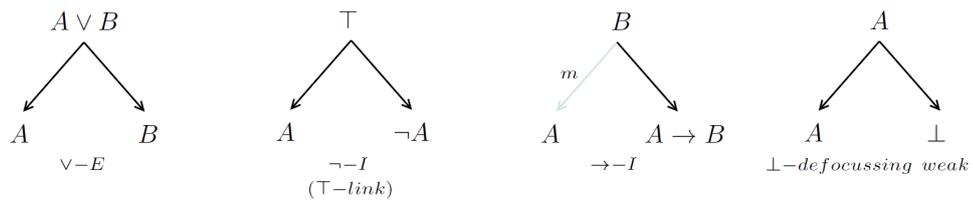


Figura 6 – Links disjuntivos divergentes.

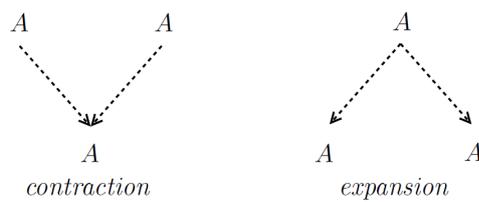


Figura 7 – Links de contração e expansão.

Definição 13 (link lógico). *Os links $\wedge - I$, $\wedge - E_1$, $\wedge - E_2$, $\vee - I_1$, $\vee - I_2$, $\vee - E$, $\neg - I$, $\neg - E$, $\rightarrow - I$, $\rightarrow - E$ são ditos lógicos.*

Definição 14 (link estrutural). *Os links $\perp - \text{simple weak}$, $\top - \text{simple weak}$, $\top - \text{focussing weak}$, $\perp - \text{defocussing weak}$, contração e expansão são chamados estruturais.*

Os links lógicos são usados para reproduzir os passos dedutivos num grafo que represente uma derivação válida. Esses passos dedutivos se assemelham aos passos de uma derivação em DN. Observe que o $\top - \text{link}$ age como a lei do terceiro excluído. Um link estrutural expressa a aplicação de uma regra estrutural do cálculo de seqüentes: permite enfraquecer a prova ($\top - \text{focussing weak}$, $\perp - \text{defocussing weak}$, $\top - \text{simple weak}$ e $\perp - \text{simple weak}$), duplicar premissas (expansão) e agrupar conclusões em classes de equivalência (contração).

Não há link para simular uma permutação uma vez que em um grafo de prova a ordem das premissas não importa para a aplicação das regras de derivação. Os axiomas são representados por grafos de prova com apenas um vértice (sem arestas): um simples nó rotulado por A é uma derivação válida e reproduz um axioma $A \vdash A$ no cálculo de seqüentes.

Definição 15 (grau de entrada sólido). *O grau de entrada sólido de um vértice v num grafo de prova é o número de arestas sólidas orientadas para ele.*

Definição 16 (grau de saída sólido). *O grau de saída sólido de um vértice v num grafo de prova é o número de arestas sólidas orientadas saindo dele.*

Os graus de entrada e saída meta são definidos analogamente. O conjunto de vértices com graus de entrada sólido e meta iguais a zero num grafo de prova G são as premissas e é representado por $PREMIS(G)$. Já o conjunto dos nós com grau de entrada sólido igual a zero e grau de entrada meta igual a um são as hipóteses canceladas de G e representado é por $HYPOTH(G)$. Por outro lado, os vértices com grau de saída sólido igual a zero são as conclusões e esse conjunto é simbolizado por $CONC(G)$. Um grafo de prova denota uma tentativa de dedução do seqüente $PREMIS(G) \vdash CONC(G)$.

Na Figura 8 há três grafos de prova que ilustram a necessidade de distinguirmos os ciclos¹ válidos dos não válidos. O primeiro (mais à esquerda) representa uma “prova” inválida para $A \vee B \vdash A \wedge B$. Os outros reproduzem derivações corretas para $A \vee A \vdash A$ e $A \vdash A \wedge A$. Portanto torna-se necessário identificar os ciclos válidos em um grafo de prova e aqui os links de contração e expansão têm um papel fundamental.

Outro aspecto muito importante na validação de um grafo de prova é a identificação do uso correto do link $\rightarrow - I$. No cálculo de Kneale não há regra para descartar premissas,

¹ A direção das arestas não será considerada quando analisarmos se um grafo de prova é conexo ou se possui ciclos.

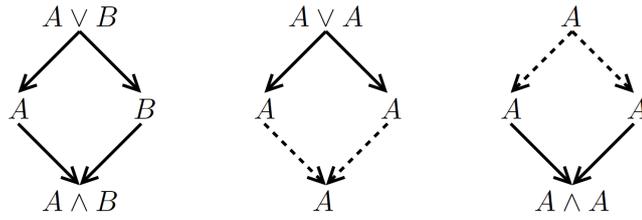


Figura 8 – Grafos de prova com ciclos.

enquanto nos de Ungar e Gentzen quando uma implicação é introduzida, ela pode eliminar um número arbitrário de premissas (inclusive zero). Nos N-Grafos esse descarte é feito de maneira mais controlada, o que também dificulta a tarefa de identificar grafos de prova inválidos.

3.2.1 Critério de corretude

Similar ao critério de Danos & Regnier (DANOS; REGNIER, 1989), definimos os seguintes subgrafos associados a um grafo de prova.

Definição 17 (chaveamento). *Dado um grafo de prova G , um grafo de chaveamento $S(G)$ associado a G é um subgrafo gerador² de G em que as seguintes arestas são removidas: uma de cada link de expansão e uma de cada link de contração.*

Definição 18 (meta-chaveamento, aresta virtual). *Dado um grafo de prova G , um grafo de meta-chaveamento $S(G)$ associado a G é um grafo de chaveamento de G no qual cada link com meta-aresta $\{(u, w), (u, v)^m\}$ é substituído por uma das seguintes arestas: uma de u para w , ou uma de v para w , que é chamada aresta virtual.*

Definição 19 (N-Grafo). *Um grafo de prova G é um N-Grafo quando todo grafo de meta-chaveamento associado a G é acíclico e conexo.*

Conforme visto nas definições acima, contração e expansão são especiais. Eles são chaveáveis (uma aresta é removida em todo meta-chaveamento) e a geometria deles contradiz com a semântica. Embora convergente, a contração tem uma semântica disjuntiva, enquanto a expansão é divergente, mas é conjuntiva. Isso significa que as fórmulas conectadas por esses links em um grafo de prova devem estar já conectadas de alguma outra maneira a fim de que a derivação seja válida. Isso explica o porquê do segundo e terceiro grafos de prova da Figura 8 serem N-Grafos e o primeiro não.

O link $\rightarrow -I$ também é fundamental no critério de corretude. Sua premissa (B) e a hipótese cancelada (A) precisam estar previamente conectadas de algum modo na derivação para o grafo de prova ser correto. Por isso o meta-chaveamento deve escolher conectar $A \rightarrow B$ a A ou a B . No primeiro grafo de prova da Figura 9 a conclusão do link

² Um subgrafo gerador é um subgrafo G_1 de G com todos os vértices de G .

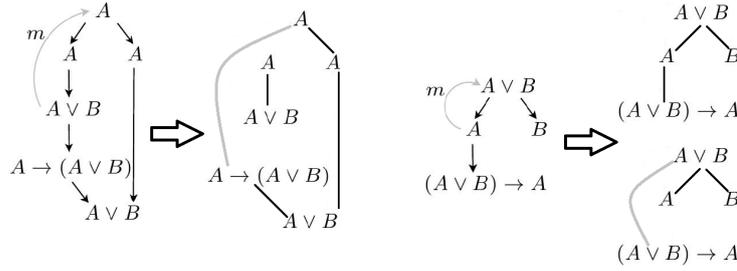


Figura 9 – Meta-aresta: um uso inválido para $\vdash A \vee B$ e outro correto em $\vdash (A \vee B) \rightarrow A, B$.

$\rightarrow -I$ é $A \rightarrow (A \vee B)$ (nó w), logo esta fórmula já carrega uma dependência de A (nó v) e a meta-aresta remove-a do conjunto de premissas.

O problema neste caso é a outra ocorrência de A , a qual é usada pelo link $\rightarrow -E$ para chegar a uma “prova” de $\vdash A \vee B$. O critério de corretude captura isso quando o meta-chaveamento escolhe a aresta virtual, que liga $A \rightarrow (A \vee B)$ a A (liga v e w), e o resultado não é uma árvore (grafo acíclico e conexo). Essa situação não acontece no outro grafo de prova da Figura 9: todos os meta-chaveamentos são acíclicos e conexos.

Corretude e completude foram provados pela primeira vez por meio de um mapeamento entre N-Grafos e LK (OLIVEIRA, 2001), porém, diferente da sequentização de *proof-nets*, a prova original não contempla o conceito de subderivação. Inicialmente a definição de sub-N-Grafos para a prova de corretude não incluía a implicação (CARVALHO et al., 2014), mas na seção a seguir estendemos para o sistema completo (CARVALHO et al., 2017).

3.3 Sub-N-Grafos

Desde que *proof-nets* para MLL^- foram introduzidas por Girard (GIRARD, 1987), vários estudos foram realizados na prova de corretude desse sistema. O primeiro critério foi *no shorttrip condition*: Girard usou a noção de *trips* para definir impérios e provou que se todas as fórmulas terminais numa *proof-net* R forem conclusões de links *times* ou de axiomas, então pelo menos um link terminal \otimes (*tensor*) divide R em duas partes (a conclusão deste link é chamada de “nó *split*”³). Após o trabalho de Danos & Regnier (DANOS; REGNIER, 1989), tornou-se possível definir impérios usando grafos DR e, com esta nova noção de impérios, Girard provou a sequentização para a primeira ordem (GIRARD, 1991).

Outro avanço na prova de corretude de *proof-nets* foi obtido pela introdução de um novo tipo de *subnets*. Para uma ocorrência de fórmula A numa *proof-net* R , nós sempre podemos construir a maior e a menor *subnet* de R que possuem A como suas conclusões

³ Um link terminal $\frac{A \ B}{A \otimes B}$ é *split* quando a sua remoção, juntamente com a conclusão $A \otimes B$, produz duas *proof-nets* disjuntas.

(o império e reino de A , respectivamente). Uma vez que a noção de reinos foi introduzida, Bellin & van de Wiele produziram uma elegante prova do teorema de sequentização utilizando propriedades simples das *subnets*. Uma delas é a ordem estrita gerada pelos reinos (BELLIN; WIELE, 1995).

Uma bela generalização desta prova foi feita por Robinson (ROBINSON, 2003). Ele notou que a técnica de Danos & Regnier depende apenas do formato das regras (ou seja, independe da lógica envolvida). Nesta seção, além de mostrarmos uma nova prova de corretude para os N-Grafos, nós definimos um método generalizado de fazer cortes precisos em provas para lógica clássica. Isso acontece porque a presença num N-Grafo do nó *split*, o qual é capaz de separar a derivação em duas subderivações válidas e disjuntas, ocorre no meio da prova, diferente de *proof-nets*, em que o nó *split* é sempre uma fórmula terminal.

Definição 20 (subgrafo de prova, sub-N-Grafo, porta superior, porta inferior). *Dizemos que H é um subgrafo de prova de um grafo de prova G se H é um subgrafo de G e também um grafo de prova. Se um vértice v rotulado por uma ocorrência de fórmula A é tal que $v \in PREMIS(H)$ ($v \in CONC(H)$), então A é uma porta superior (inferior) de H . Se H também for um N-Grafo, então ele é um sub-N-Grafo.*

Na Figura 10 temos um N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ e um sub-N-Grafo seu N_1 , que é uma derivação para $A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge B, A \wedge C$. As portas superiores e inferiores são destacadas.

Considere N_1 e N_2 sub-N-Grafos de um N-Grafo N . Então nós temos:

Lema 1 (União (CARVALHO et al., 2014)). *$N_1 \cup N_2$ é um N-Grafo sse $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$.*

Lema 2 (Intersecção (CARVALHO et al., 2014)). *Se $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, então $N_1 \cap N_2$ é um N-Grafo.*

O sub-N-Grafo N_2 na Figura 11 tem duas portas superiores (A e $B \vee C$) e sua porta inferior é $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Dada que a intersecção entre N_1 e N_2 não é vazia, o resultado também é um sub-N-Grafo.

3.4 Impérios do norte e do sul

Definição 21 (Impérios do norte, do sul e total). *Seja A uma ocorrência de fórmula num N-Grafo N . O império do norte (sul), representado por eA^\wedge (eA^\vee), é o maior sub-N-Grafo de N que possui A como uma porta inferior (superior). O império total de A (wA) é a união de eA^\wedge e eA^\vee .*

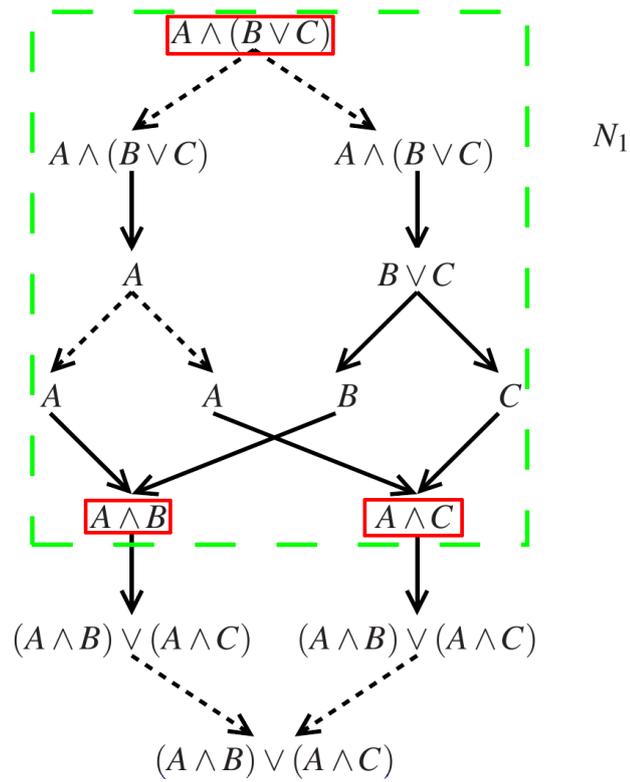


Figura 10 – Sub-N-Grafo e suas portas.

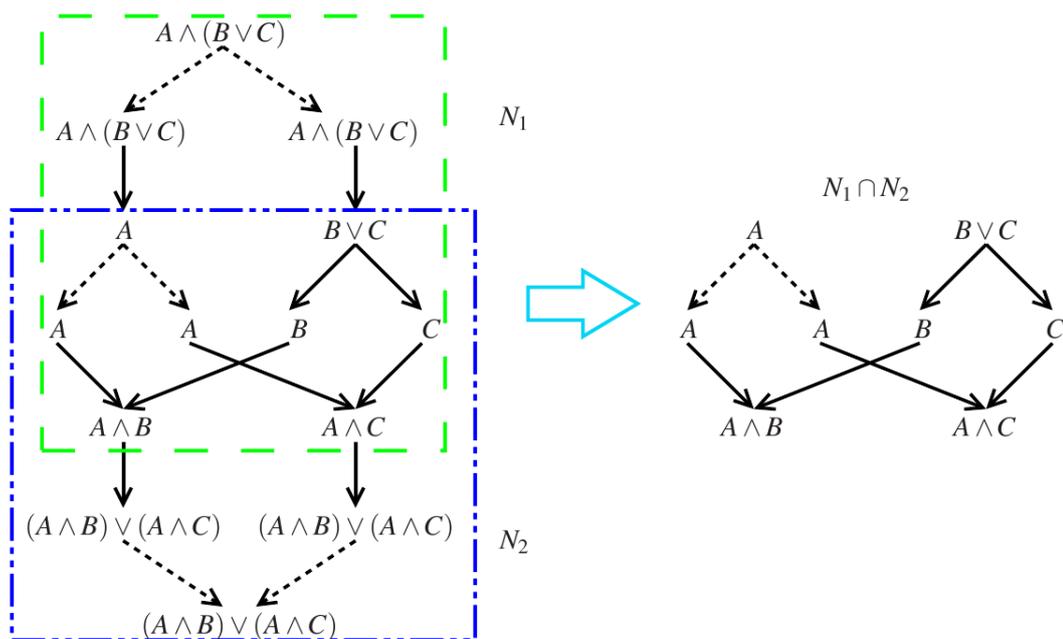
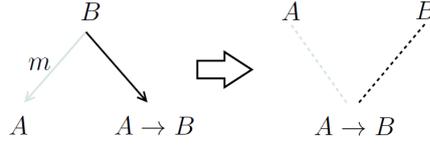


Figura 11 – Intersecção.


 Figura 12 – Como S^\wedge e S_\vee enxergam um link $\rightarrow -I$.

Se provarmos que eA^\wedge e eA_\vee existem, então é imediata a existência de wA pelo Lema 1. Apresentamos duas construções equivalentes dos impérios e provamos algumas propriedades.

Definição 22 ($S^\wedge(N, A)$ (componente do norte) e $S_\vee(N, A)$ (componente do sul)). *Considere A uma ocorrência de fórmula num N-Grafo N e S um meta-chaveamento associado. Se A é uma premissa de um link com conclusão A' e a aresta (A, A') pertence a $S(N)$, então remova e $S^\wedge(N, A)$ será a componente que contém A e $\overline{S^\wedge(N, A)}$ será a outra (se A é premissa de um link disjuntivo divergente diferente de $\rightarrow -I$, então $\overline{S^\wedge(N, A)}$ apresenta duas componentes). Se A não é premissa de algum link em $S(N)$, então $S^\wedge(N, A)$ é $S(N)$ ($\overline{S^\wedge(N, A)}$ é vazio). $S_\vee(N, A)$ é definido de maneira análoga: se A é conclusão de um link com premissa A'' e a aresta (A'', A) está em $S(N)$, então ela é removida e $S_\vee(N, A)$ é o componente com A e $\overline{S_\vee(N, A)}$ é o outro (se A é conclusão de um link conjuntivo convergente, então $\overline{S_\vee(N, A)}$ possui duas componentes). Se A não é conclusão de algum link $S(N)$, então $S_\vee(N, A)$ é $S(N)$ ($\overline{S_\vee(N, A)}$ é vazio).*

Como a aresta virtual adicionada em alguns meta-chaveamentos conecta duas conclusões do link $\rightarrow -I$ link, consideramos $(A \rightarrow B)$ como a principal conclusão do link e também como a conclusão da aresta virtual para o propósito de decidir se nós devemos removê-la para construir $S^\wedge(N, A)$ ou $S_\vee(N, A)$ (Figura 12). Meta-aresta e aresta virtual são representados em cinza.

Figura 13 ilustra duas componentes do norte. Na primeira o meta-chaveamento S_1 escolhe sempre a aresta da direita nos links de expansão e contração, enquanto na segunda a aresta da esquerda da contração é selecionada (meta-chaveamento S_2). Índices foram adicionados para diferenciar as ocorrências de fórmulas e em ambas as componentes a fórmula em questão é $A \wedge B_{10}$.

Na Figura 14 exibimos um N-Grafo com meta-arestas. É uma derivação intuicionista para uma lei de De Morgan: $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, onde usamos $\neg X \equiv X \rightarrow \perp$. No Capítulo 4 a versão intuicionista do sistema será estudada em detalhes. Agora considere um meta-chaveamento S que escolhe a aresta da direita da expansão e a aresta virtual no link $\rightarrow -I$ cuja conclusão é $A \rightarrow \perp$, mas não nos outros links $\rightarrow -I$ links (Figura 15).

Escolha a ocorrência de fórmula $A \rightarrow \perp$ nesse meta-chaveamento. É simples computar a componente do norte em S : apenas remova todas as arestas que partem de

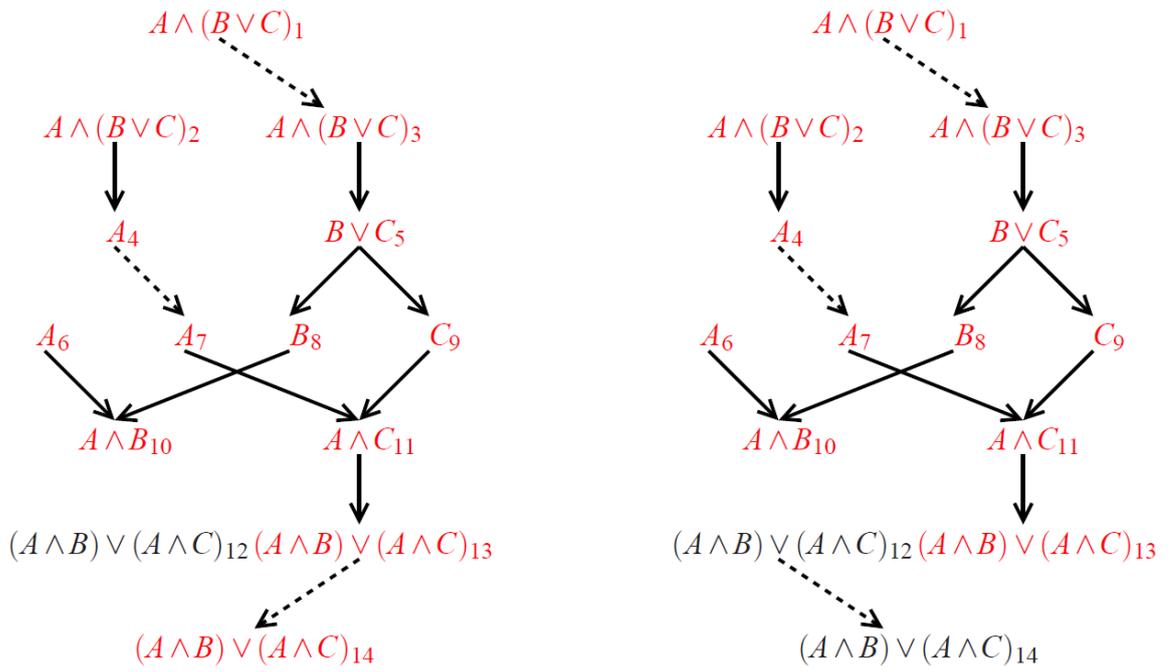


Figura 13 – $S_1^\wedge(N, A \wedge B_{10})$ e $S_2^\wedge(N, A \wedge B_{10})$.

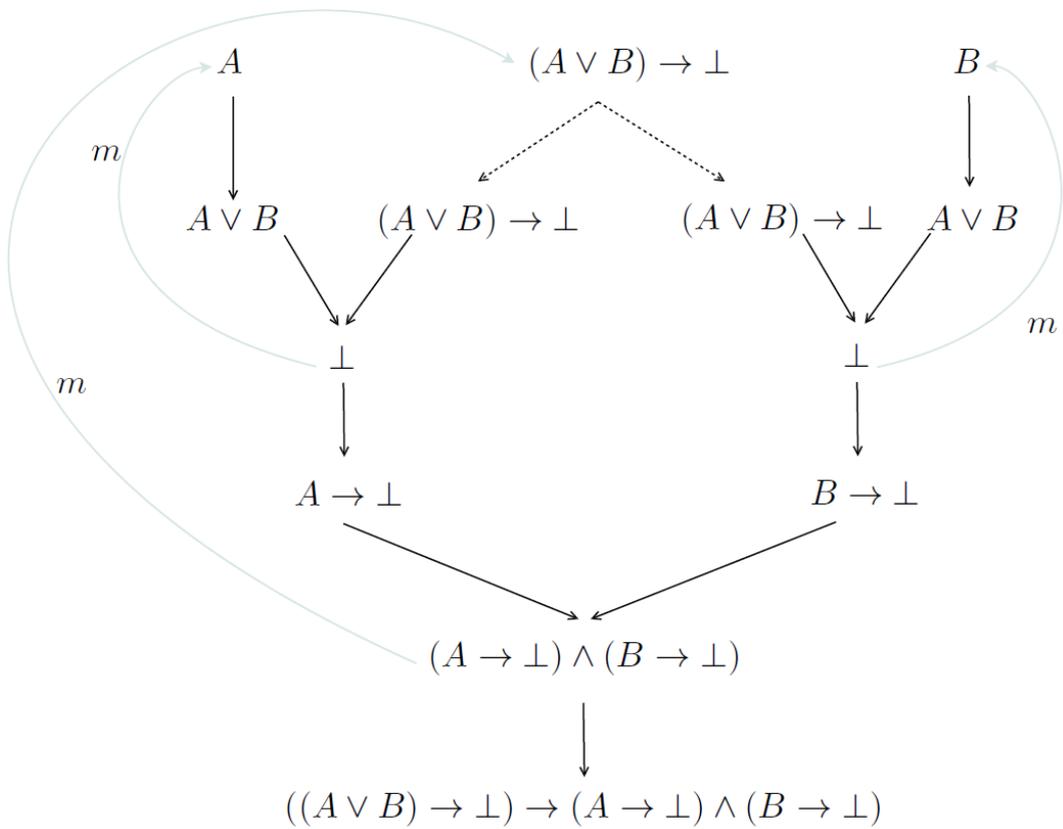


Figura 14 – N-Grafo com meta-arestas.

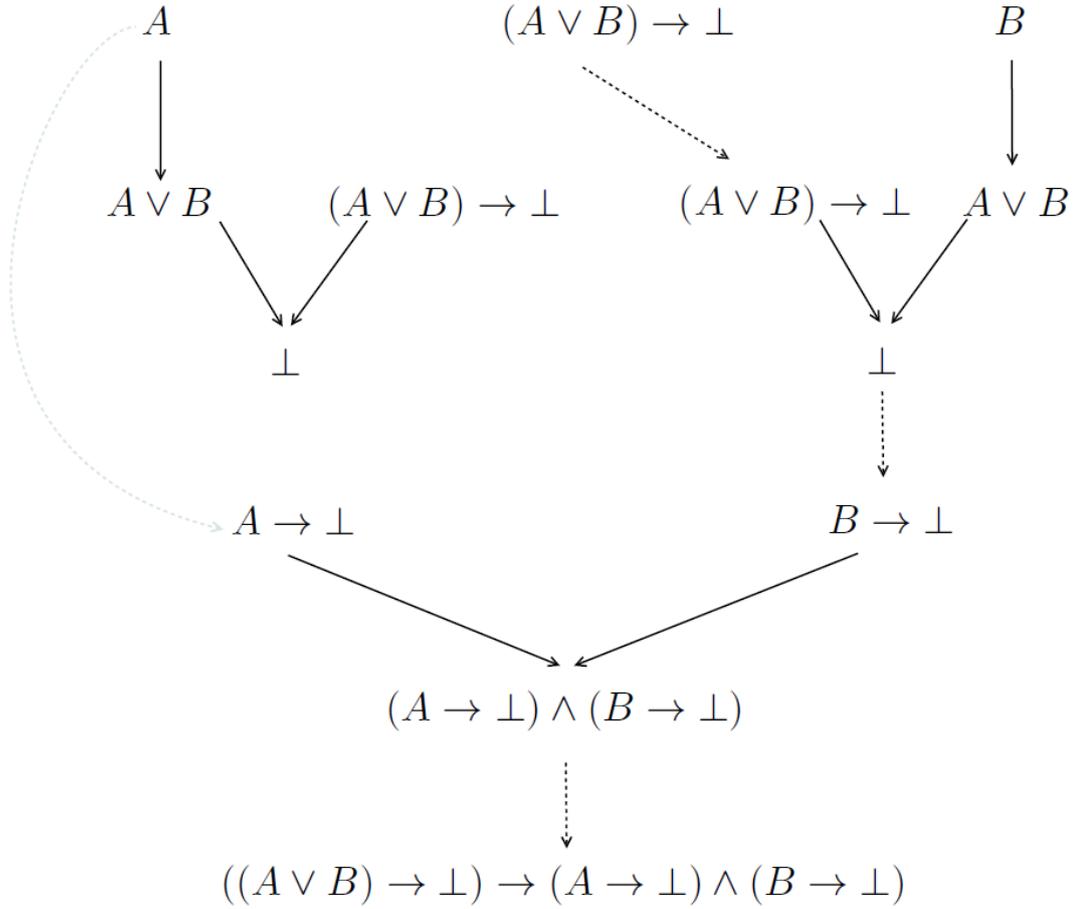


Figura 15 – Meta-chaveamento.

$A \rightarrow \perp$ em S (neste caso há apenas uma, que é para $(A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$). O resultado são todas as fórmulas conectadas a $A \rightarrow \perp$ (Figura 16).

Para a componente do sul é preciso remover todas as arestas que chegam em $A \rightarrow \perp$, com atenção para a aresta virtual (em cinza). Como antes, ficamos com a componente que possui $A \rightarrow \perp$ (Figura 17).

Para computarmos eA^\wedge e eA_\vee , estamos interessados nas fórmulas presentes em $S^\wedge(N, A)$ e $S_\vee(N, A)$, respectivamente, independente das arestas escolhidas por S . Embora a quantidade meta-chaveamentos é exponencial no número de contrações, expansões e links $\rightarrow -I$, é possível computá-los de maneira eficiente.

Definição 23 (Meta-chaveamento principal (GIRARD, 1987; GIRARD, 1991)). *Seja A uma ocorrência de fórmula. Dizemos que um meta-chaveamento S_p^\wedge (S_p^\vee) é principal para eA^\wedge (eA_\vee) quando escolhe as arestas satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\frac{A_{p_1} A_{p_2}}{A_c}$ é um link de contração e uma das premissas A_{p_i} é a ocorrência de fórmula A ($\frac{A_p}{A_{c_1} A_{c_2}}$ é uma expansão e uma das conclusões A_{c_i} é a ocorrência de fórmula A): o meta-chaveamento mantém a aresta com A .

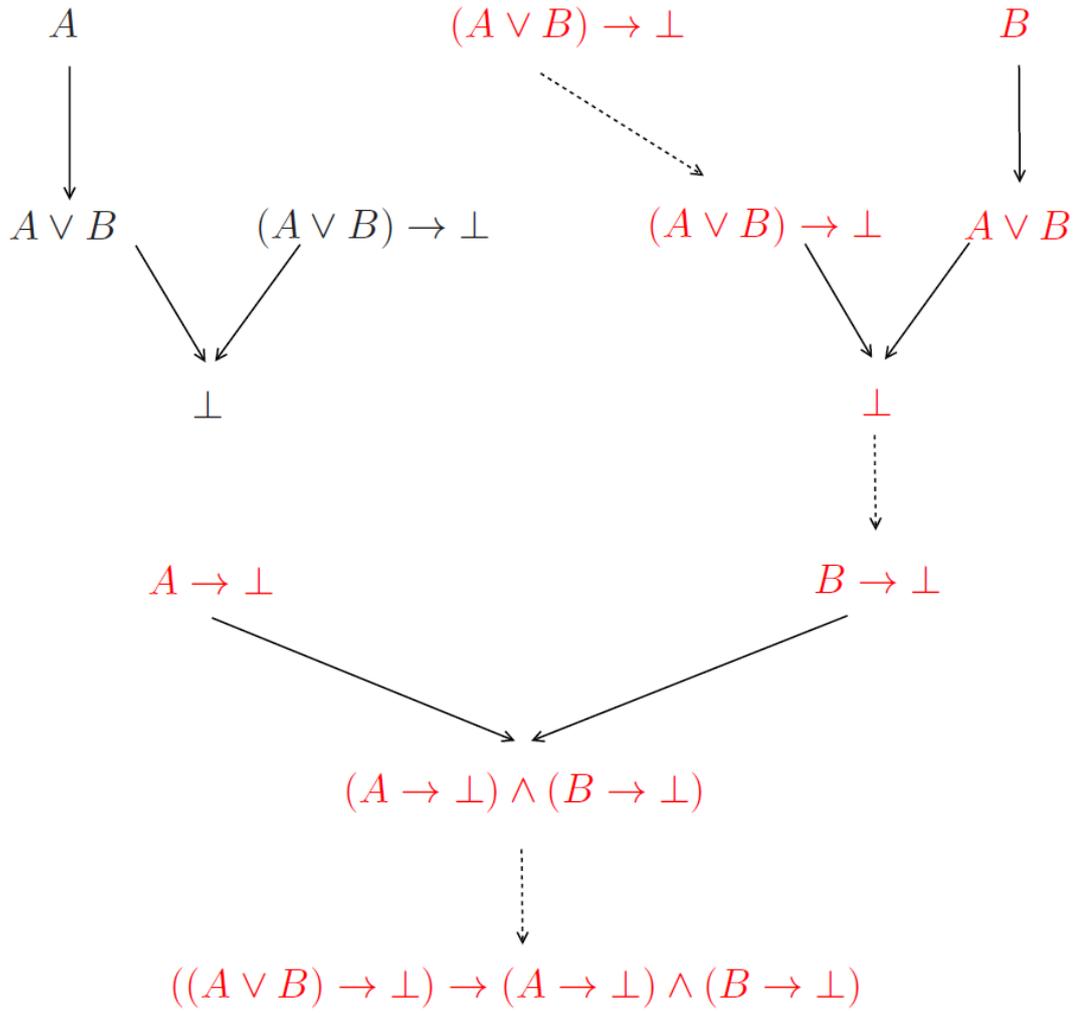


Figura 17 – $S_{\vee}(N, A \rightarrow \perp)$.

- a) $A \in eA^{\wedge}$ ($A \in eA_{\vee}$);
- b) se $\frac{X}{Y}$ é um link simples e $Y \in eA^{\wedge}$, então $X \in eA^{\wedge}$ (se $Y \neq A$ e $Y \in eA_{\vee}$, então $X \in eA_{\vee}$);
- c) se $\frac{X \ Y}{Z}$ é um link conjuntivo convergente e $Z \in eA^{\wedge}$, então $X, Y \in eA^{\wedge}$ (se $Z \neq A$ e $Z \in eA_{\vee}$, então $X, Y \in eA_{\vee}$);
- d) se $\frac{X}{Y \ Z}$ é um link disjuntivo divergente diferente de $\rightarrow -I$ e $Y \in eA^{\wedge}$ ou $Z \in eA^{\wedge}$, então $X \in eA^{\wedge}$ (se $Y \neq A \neq Z$ e $Y \in eA_{\vee}$ ou $Z \in eA_{\vee}$, então $X \in eA_{\vee}$);
- e) se $\frac{X_p}{X_{c_1} \ X_{c_2}}$ é uma expansão e $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^{\wedge}$, então $X_p \in eA^{\wedge}$ (se $X_{c_1} \neq A \neq X_{c_2}$ e $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA_{\vee}$, então $X_p \in eA_{\vee}$);
- f) se $\frac{X_{p_1} \ X_{p_2}}{X_c}$ é uma contração e $X_c \in eA^{\wedge}$, então $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^{\wedge}$ (se $X_c \neq A$ e $X_c \in eA_{\vee}$, então $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA_{\vee}$);
- g) se $\frac{Y}{X \ X \rightarrow Y}$ é um link $\rightarrow -I$ e $X \rightarrow Y \in eA^{\wedge}$, então $Y, X \in eA^{\wedge}$ (se $X \rightarrow Y \neq A$ e $X \rightarrow Y \in eA_{\vee}$, então $Y, X \in eA_{\vee}$);

- h) se $\frac{X}{Y}$ é um link simples, $X \neq A$ e $X \in eA^\wedge$, então $Y \in eA^\wedge$ (se $X \in eA_\vee$, então $Y \in eA_\vee$);
- i) se $\frac{X Y}{Z}$ é um link conjuntivo convergente, $X \neq A \neq Y$ e $X \in eA^\wedge$ ou $Y \in eA^\wedge$, então $Z \in eA^\wedge$ (se $X \in eA_\vee$ ou $Y \in eA_\vee$, então $Z \in eA_\vee$);
- j) se $\frac{X}{Y Z}$ é um link disjuntivo divergente diferente de $\rightarrow -I$, $X \neq A$ e $X \in eA^\wedge$, então $Y, Z \in eA^\wedge$ (se $X \in eA_\vee$, então $Y, Z \in eA_\vee$);
- k) se $\frac{X_p}{X_{c_1} X_{c_2}}$ é uma expansão, $X_p \neq A$ e $X_p \in eA^\wedge$, então $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA^\wedge$ (se $X_p \in eA_\vee$, então $X_{c_1}, X_{c_2} \in eA_\vee$);
- l) se $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ é uma contração, $X_{p_1} \neq A \neq X_{p_2}$ e $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA^\wedge$, então $X_c \in eA^\wedge$ (se $X_{p_1}, X_{p_2} \in eA_\vee$, então $X_c \in eA_\vee$);
- m) se $\frac{Y}{X X \rightarrow Y}$ é um link $\rightarrow -I$, $Y \neq A \neq X$ e $X, Y \in eA^\wedge$, então $X \rightarrow Y \in eA^\wedge$ (se $X, Y \in eA_\vee$, então $X \rightarrow Y \in eA_\vee$).

Demonstração. Provaremos o caso para eA^\wedge de acordo com (BELLIN; WIELE, 1995) (eA_\vee é similar)

I $2 \subseteq 1$: mostraremos que 1 é fechado sob as condições que definem 2. É imediato que $A \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$ ($S^\wedge(N, A)$ contém A para qualquer meta-chaveamento S). Se $B_1 \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$ e em todos os meta-chaveamentos existe uma aresta (B_1, B_2) , concluímos que $B_2 \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$ ((GIRARD, 1991)). Dessa maneira a construção é fechada sob as condições 2b, 2c, 2d, 2h, 2i e 2j. Condições 2e, 2l e 2m também são simples. Agora suponha que 1 não satisfaz 2f. Então há um link de contração $\frac{X_{p_1} X_{p_2}}{X_c}$ tal que $X_c \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$, mas $X_{p_i} \notin \bigcap_S S^\wedge(N, A)$, para $i = 1$ ou $i = 2$. Sem perda de generalidade, considere a primeira opção: $X_{p_1} \notin S^\wedge(N, A)$ para algum S . Desde que $X_c \in S^\wedge(N, A)$, então $(X_{p_2}, X_p) \in S(N, A)$ e assim $X_{p_2} \in S^\wedge(N, A)$. Uma vez que $\overline{S^\wedge(N, A)}$ não é vazio, A deve ser premissa de um link cuja alguma conclusão é A' e $A' \in \overline{S^\wedge(N, A)}$. Seja π o caminho entre X_{p_1} e A' em $\overline{S^\wedge(N, A)}$. Como $(X_{p_1}, X_c) \notin S(N)$, essa aresta não pertence a π (Figura 18). Considere agora um meta-chaveamento S' semelhante a S , mas com $(X_{p_1}, X_c) \in S'(N)$. Note que π está em $S'(N)$ também e $X_c \in S'^\wedge(N, A)$ (porque $X_c \in \bigcap_S S^\wedge(N, A)$). Então podemos estender π e obtermos um caminho entre A' e A sem passar pela aresta (A, A') em $S'(N)$: nós temos um ciclo em $S'(N)$. Logo 1 é fechado sob 2f. Com argumento similar concluímos também que 1 é fechado sob 2k e 2g também.

II $1 \subseteq 2$: considere S_p^\wedge um meta-chaveamento principal para eA^\wedge . Provaremos que $S_p^\wedge(N, A) \subseteq 2$. $S_p^\wedge(N, A) \cap 2 \neq \emptyset$, porque ambos contêm A , mas a definição 23 garante que é impossível sair de eA^\wedge uma vez que estamos em $S_p^\wedge(N, A)$. Como $\bigcap_S S^\wedge(N, A) \subseteq S_p^\wedge(N, A)$, concluímos que $\bigcap_S S^\wedge(N, A) \subseteq eA^\wedge$.

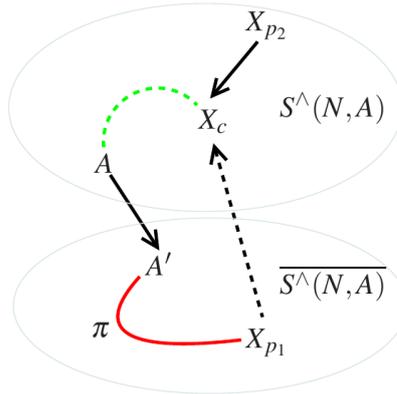


Figura 18 – Se escolhermos a aresta (X_{p_1}, X_c) , obtemos um ciclo.

A prova de que eA^\wedge é o maior sub-N-Grafo que contém A como porta inferior usa o mesmo argumento apresentado em (BELLIN; WIELE, 1995) (Proposição 2).

□

Corolário 1. $S_p^\wedge(N, A) = eA^\wedge$ e $S_V^p(N, A) = eA_V$.

Corolário 2. *Seja A uma premissa de N^4 e B uma conclusão de N . Então $eA_V = eB^\wedge = N$.*

Figura 19 ilustra alguns conceitos sobre impérios. Por exemplo, no N-Grafo da esquerda nós temos $eA^\wedge = \{A, A \vee C, C, C \wedge Z, Z, \neg A \wedge Z\}$ (dentro de uma forma circular) e $eA_V = \{A, \perp, \neg A, \neg A \wedge Z\}$ (inseridas num retângulo). A ocorrência de fórmula em questão pertence a ambos os impérios. Podemos ver que não existe sub-N-Grafo que contém A como conclusão (premissa) e que é maior do que eA^\wedge (eA_V) e também que ambas as conclusões de uma expansão são necessárias para adicionar a premissa do link (condição 2e). Para o segundo N-Grafo adotamos o mesmo conceito de formas geométricas para A e aqui não é possível adicionar a conclusão da contração porque ambas as premissas são necessárias (condição 2l).

Considere agora o N-Grafo da Figura 14 e o império do norte de $A \rightarrow \perp$. Ambas conclusões $(A \vee B) \rightarrow \perp$ são necessárias para adicionar a premissa da expansão, mas se começarmos em $A \rightarrow \perp$ e removermos sua aresta para $(A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$, poderemos alcançar apenas uma conclusão da expansão. Dessa forma a premissa não pertence ao império do norte de $A \rightarrow \perp$, portanto o meta-chaveamento na Figura 15 é principal para seu império do norte, cujo resultado corresponde às fórmulas em vermelho (Figura 16).

Ainda no mesmo N-Grafo analisemos o império do sul de $A \rightarrow \perp$. Como essa fórmula é a principal conclusão de um link $\rightarrow -I$, a componente do sul remove as arestas que partem de A e de \perp (Figura 12), logo a conclusão da “esquerda” da expansão nunca é

⁴ Note que A não é uma hipótese cancelada.

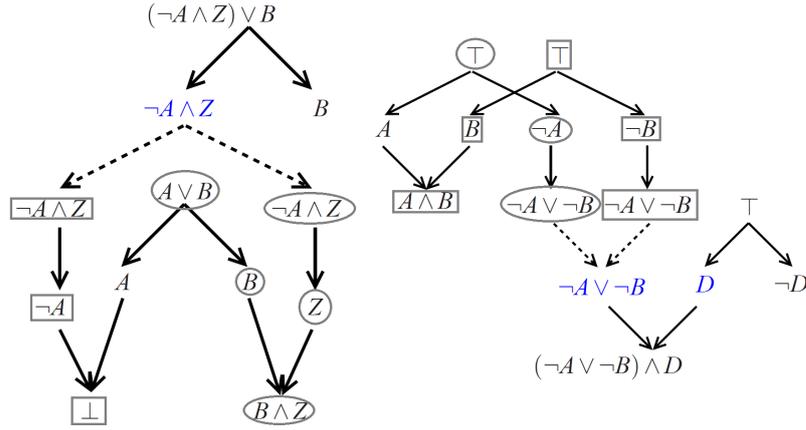


Figura 19 – N-Grafos para $(\neg A \wedge Z) \vee B$, $A \vee C \vdash B$, \perp , $C \wedge Z$ e $\vdash A \wedge B$, $(\neg A \vee \neg B) \wedge D$, $\neg D$.

alcançada. Considere agora o link $\rightarrow -I$ que cancela a hipótese $(A \vee B) \rightarrow \perp$: precisamos de $(A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$ e da hipótese cancelada $(A \vee B) \rightarrow \perp$ no império do sul para adicionar $((A \vee B) \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$ (condição 2m).

Porém já vimos que a conclusão da “esquerda” da expansão não pertence ao império do sul, portanto a premissa da expansão também não pertencerá e assim a conclusão do N-Grafo não está no império do sul de $A \rightarrow \perp$. Um meta-chaveamento principal que representa o império do sul de $A \rightarrow \perp$ é exibido na Figura 20. Observe que a componente do sul é obtida quando removemos a aresta $(A, A \rightarrow \perp)$ e ficamos com a componente que possui $A \rightarrow \perp$.

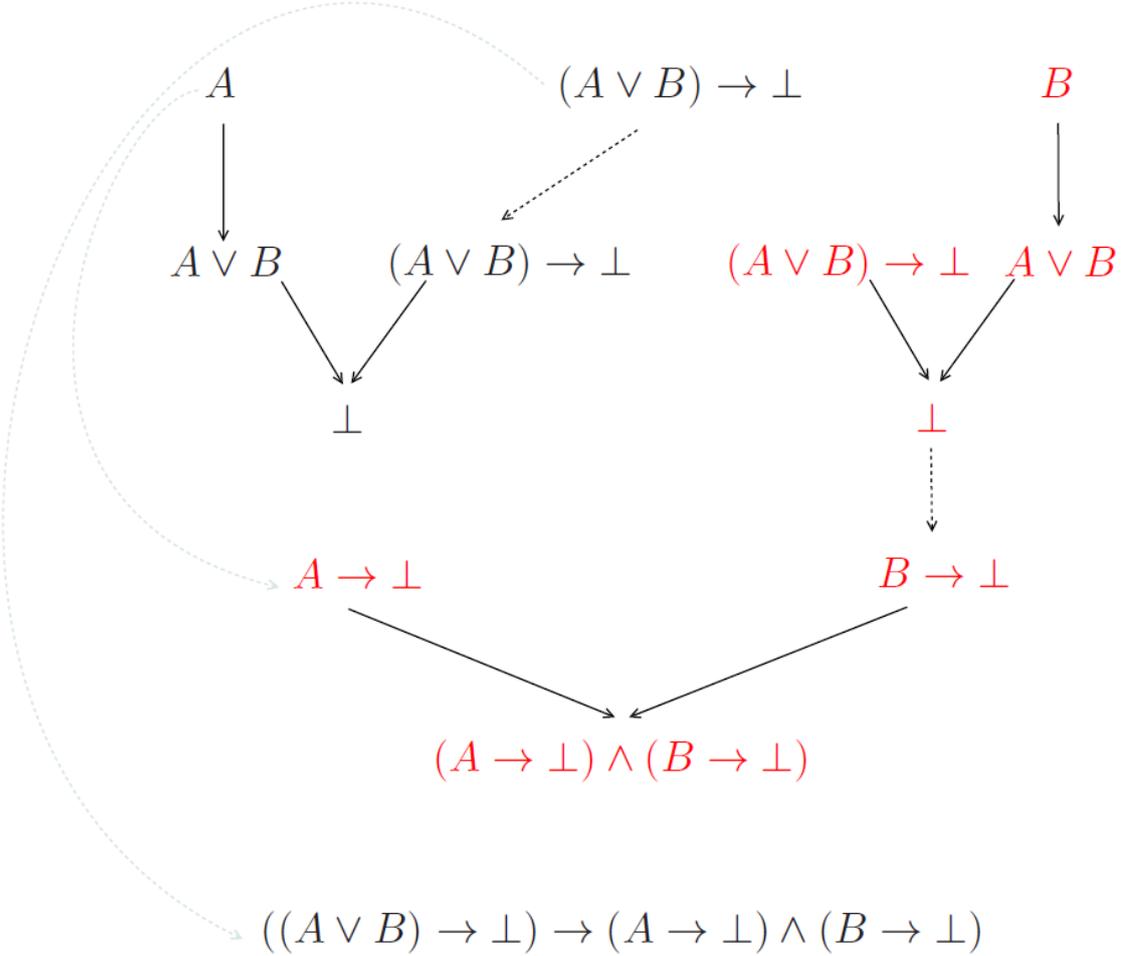
3.4.1 Lemas de aninhamento

Lema 4 (Aninhamento de impérios I (GIRARD, 1991)). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \in eB^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$.*

Lema 5 (Aninhamento de impérios II (GIRARD, 1991)). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \notin eB^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \cap eB^\wedge = \emptyset$.*

Lemas 4 e 5. Construa um meta-chaveamento S_p^\wedge principal para eB^\wedge com alguns detalhes adicionais:

- I *link de contração cuja conclusão pertence a eB^\wedge : se a conclusão não está em eA^\wedge , então proceda como faria para um meta-chaveamento principal para eA^\wedge (se apenas uma premissa está em eA^\wedge , escolha a outra);*
- II *expansão cuja premissa pertence a eB^\wedge : se a premissa está fora de eA^\wedge , então proceda conforme meta-chaveamento principal para eA^\wedge (se apenas uma conclusão está em eA^\wedge , escolha a outra);*


 Figura 20 – Meta-chaveamento principal para o império do sul de $A \rightarrow \perp$.

III *link* $\rightarrow -I$ cuja principal conclusão pertence a eB^\wedge : se a conclusão principal não está em eA^\wedge , proceda segundo um meta-chaveamento principal para eA^\wedge (se apenas a premissa do link ou apenas a hipótese cancelada está em eA^\wedge , escolha a fórmula fora de eA^\wedge);

IV se A é uma premissa de um link cuja conclusão A' pertence a eB^\wedge : escolha a aresta (A, A') .

Primeiro suponha $A \in eB^\wedge$. Tentemos ir de A para B sem passar por (A, A') . Desde que S_p^\wedge é principal para eB^\wedge e $A \in eB^\wedge$, todas as fórmulas neste caminho pertencem a eB^\wedge . Como $B \notin eA^\wedge$, em algum momento deixamos eA^\wedge . Pela construção 2 do Lema 3, existem apenas três maneiras de sair de eA^\wedge sem passar por (A, A') : atravessando uma contração na qual apenas uma premissa pertence a eA^\wedge , ou uma expansão em que apenas uma conclusão ocorre em eA^\wedge , ou cruzando um link $\rightarrow -I$ onde apenas a premissa ou a hipótese cancelada faz parte de eA^\wedge ; todavia os passos I, II e III evitam esses casos, respectivamente.

Ou seja, é impossível sair de eA^\wedge em $S_p^\wedge(N, B)$, ao menos que $(A, A') \in S_p^\wedge(N, B)$. Isso implica em $S_p^\wedge(N, A) \subsetneq S_p^\wedge(N, B)$. Dado que $eA^\wedge \subset S_p^\wedge(N, A)$ e $eB^\wedge = S_p^\wedge(N, B)$, concluímos $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$.

Agora suponha $A \notin eB^\wedge$. I, II e III garantem que não há arestas entre eA^\wedge e $\overline{eA^\wedge}^5$ em eB^\wedge , exceto talvez por (A, A') . Mas agora $A \notin eB^\wedge$, logo $A \notin S_p^\wedge(N, B)$. Então $(A, A') \notin S_p^\wedge(N, B)$. Uma vez que $eB^\wedge = S_p^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, nenhuma fórmula de eA^\wedge pertence a eB^\wedge e assim $eA^\wedge \cap eB^\wedge = \emptyset$.

□

Pelos dois lemas anteriores, facilmente obtemos Lema 6 e Lema 7 para império do sul (as provas são similares a anterior) e a partir desses quatro lemas, é simples provar aninhamentos entre norte e sul (Lema 8, Lema 9 e Lema 10).

Lema 6 (Aninhamento de impérios III (GIRARD, 1991)). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \in eB_V$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \subsetneq eB_V$.*

Lema 7 (Aninhamento de impérios IV (GIRARD, 1991)). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \notin eB_V$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \cap eB_V = \emptyset$.*

Lema 8 (Aninhamento de impérios V). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \in eB^\wedge$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \subsetneq eB^\wedge$.*

Lema 9 (Aninhamento de impérios VI). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \in eB_V$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \subsetneq eB_V$.*

Lema 10 (Aninhamento de impérios VII). *Sejam A e B (ocorrências de) fórmulas distintas num N-Grafo. Se $A \notin eB^\wedge$ e $B \notin eA_V$, então $eA_V \cap eB^\wedge = \emptyset$.*

3.5 Império total

Definimos o *império total* de A (wA) como a união dos impérios do norte e do sul de A . Agora usaremos as propriedades de eA^\wedge e eA_V para encontrarmos novas para wA .

Lema 11. *wA é um sub-N-Grafo.*

Demonstração. Como já provamos que eA^\wedge e eA_V são N-Grafos (Lema ??) e $eA^\wedge \cap eA_V = \{A\}$, temos que $wA = eA^\wedge \cup eA_V$ é um sub-N-Grafo pelo Lema 1. □

Corolário 3. *Considere A uma premissa e B uma conclusão. Então $wA = wB = N$ (pelo Corolário 2).*

⁵ $\overline{eA^\wedge}$ representa o conjunto de todas as ocorrências de fórmulas que não estão em eA^\wedge

Lema 12 (Aninhamento de impérios totais I (CARVALHO et al., 2014)). *Sejam A e B ocorrências de fórmulas distintas. Se $A \notin wB$ e $B \notin wA$, então $wA \cap wB = \emptyset$.*

Demonstração. Desde que $A \notin wB$ e $B \notin wA$, obtemos: $A \notin eB^\wedge$, $A \notin eB_\vee$, $B \notin eA^\wedge$ e $B \notin eA_\vee$. Aplicamos lemas de aninhamentos da seção anterior:

1. se $B \notin eA^\wedge$ e $A \notin eB^\wedge$, então $eA^\wedge \cap eB^\wedge = \emptyset$ (por Lema 5);
2. se $B \notin eA_\vee$ e $A \notin eB^\wedge$, então $eA_\vee \cap eB^\wedge = \emptyset$ (por Lema 10);
3. unindo 1 e 2 e aplicando a distributiva: $eB^\wedge \cap (eA^\wedge \cup eA_\vee) = \emptyset$;
4. se $B \notin eA^\wedge$ e $A \notin eB_\vee$, então $eA^\wedge \cap eB_\vee = \emptyset$ (por Lema 10);
5. se $B \notin eA_\vee$ e $A \notin eB_\vee$, então $eA_\vee \cap eB_\vee = \emptyset$ (por Lema 7);
6. unindo 4 e 5 e mais uma vez a distributiva: $eB_\vee \cap (eA^\wedge \cup eA_\vee) = \emptyset$;
7. unindo 3 e 6, com a distributiva: $(eA^\wedge \cup eA_\vee) \cap (eB^\wedge \cup eB_\vee) = \emptyset$.

□

Lema 13 (Aninhamento de impérios totais II (CARVALHO et al., 2014)). *Considere A e B ocorrências de fórmulas distintas. Se $A \in wB$ e $B \notin wA$, então $wA \subsetneq wB$.*

Demonstração. Desde que $B \notin wA$, temos $B \notin eA^\wedge$ e $B \notin eA_\vee$. Para $A \in wB$ obtemos $A \in eB^\wedge$ ou $A \in eB_\vee$. Provaremos o lema para $A \in eB^\wedge$ (o caso do sul é análogo):

1. se $A \in eB^\wedge$ e $B \notin eA^\wedge$, então $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$ (pelo Lema 4);
2. se $A \in eB^\wedge$ e $B \notin eA_\vee$, então $eA_\vee \subsetneq eB^\wedge$ (pelo Lema 8);
3. se $eA^\wedge \subsetneq eB^\wedge$ e $eA_\vee \subsetneq eB^\wedge$, então $eA^\wedge \cup eA_\vee \subsetneq eB^\wedge$;
4. se $eA^\wedge \cup eA_\vee \subsetneq eB^\wedge$, então $eA^\wedge \cup eA_\vee \subsetneq eB^\wedge \cup eB_\vee$.

□

Definição 24 (\ll). *Considere A e B ocorrências de fórmula de N . Dizemos que $A \ll B$ sse $wA \subsetneq wB$.*

É imediato que \ll é uma ordem estrita das ocorrências de fórmula de N que não são premissa ou conclusão, pois para qualquer conjunto X e qualquer subconjunto Q de $\wp(X)$ ⁶, (\subseteq, Q) é um *poset*. Fórmulas maximais em \ll terão a propriedade *split*. Dado que

⁶ $\wp(X)$ é o conjunto das partes de X

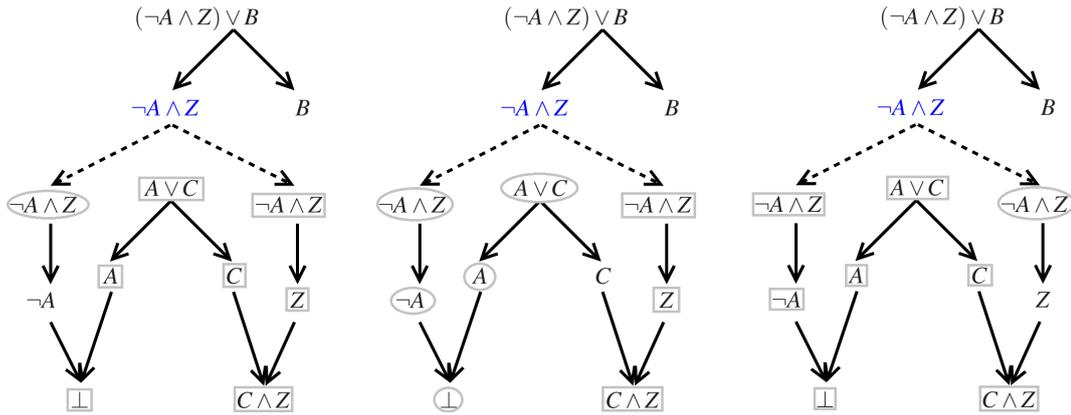


Figura 21 – Impérios totais limitados pela expansão.

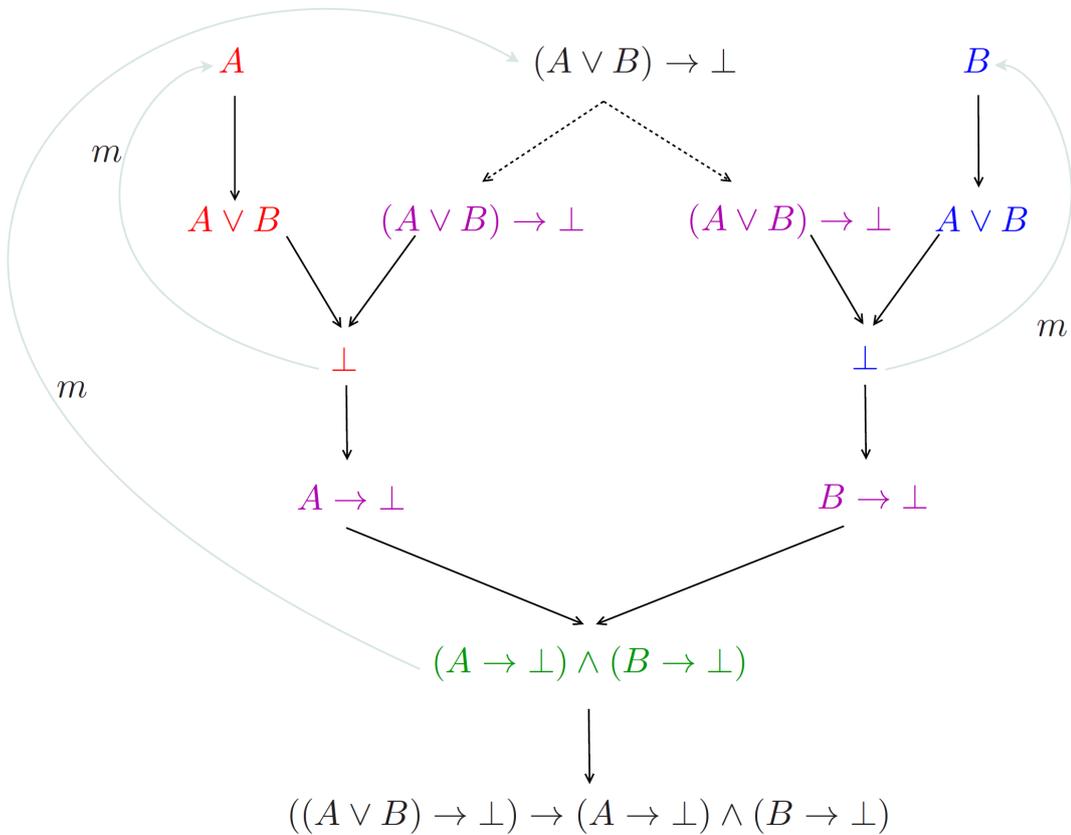


Figura 22 – Impérios totais limitados pelos links de expansão e $\rightarrow -I$.

o império total de uma premissa e o de uma conclusão são sempre iguais a N (Corolário 3), não estamos interessados nessas fórmulas: elas não fazem parte do domínio de \ll .

É simples notar que se não houver contração, expansão, nem link $\rightarrow -I$ em N , para qualquer A teremos $wA = N$ e assim A seria maximal. Na Figura 21 vemos os impérios totais das fórmulas $\neg A$, C e Z : eles são todos iguais a wA no primeiro N-Grafo da Figura 19. Um exemplo com o link $\rightarrow -I$ é mostrado na Figura 22: ocorrências de fórmula com a mesma cor têm o mesmo império total, vermelho e azul estão contidos em roxo (Corolário 2). Os próximos três lemas mostram como esses links atuam em \ll .

Lema 14 ((CARVALHO et al., 2014)). *Seja $l = \frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ um link diferente de $\rightarrow -I$ tal que há uma ocorrência de fórmula A com $X \in wA$ e $Y \notin wA$. Então $A \ll Y$.*

Demonstração. Uma vez que $X \in eA^\wedge \cup eA_\vee$, temos dois casos. Se $X \in eA^\wedge$, então como $Y \notin eA^\wedge$, l deve ser uma contração e sua outra premissa não pertence a eA^\wedge (construção 2 em Lema 3), logo Y é uma conclusão de um link de contração e com isso obtemos $X \in eY^\wedge$ (por 2f em Lema 3), portanto $eA^\wedge \cap eY^\wedge \neq \emptyset$. Caso $A \notin eY^\wedge$, então teremos $eA^\wedge \cap eY^\wedge = \emptyset$ (pelo Lema 5): contradição. Assim $A \in eY^\wedge$ e, pelo Lema 13, concluímos $wA \subsetneq wY$. O caso para $X \in eA_\vee$ é análogo. \square

Próximo lema é semelhante, porém para o link de expansão:

Lema 15 ((CARVALHO et al., 2014)). *Considere $l = \frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ um link diferente de $\rightarrow -I$ tal que existe uma ocorrência de fórmula A com $X \notin wA$ e $Y \in wA$. Então $A \ll X$.*

O próximo é o correspondente para o link $\rightarrow -I$ e usa as mesmas ideias acima.

Lema 16. *Seja $l = \frac{Y}{X \rightarrow Y}$ um link $\rightarrow -I$ de forma que existe uma ocorrência de fórmula A tal que $Y \in wA$ ou $X \in wA$, mas $(X \rightarrow Y) \notin wA$. Então $A \ll (X \rightarrow Y)$.*

Demonstração. Assuma sem perda de generalidade que $X \in eA^\wedge \cup eA_\vee$. Novamente há duas possibilidades. Se $X \in eA^\wedge$, então desde que $X \rightarrow Y \notin eA^\wedge$, $Y \notin eA^\wedge$ (construção 2m no Lema 3). Assim $X \in eX \rightarrow Y^\wedge$ (por 2g em Lema 3), portanto $eA^\wedge \cap eX \rightarrow Y^\wedge \neq \emptyset$. Se $A \notin eX \rightarrow Y^\wedge$, teremos $eA^\wedge \cap eX \rightarrow Y^\wedge = \emptyset$ (pelo Lema 5): contração. Assim $A \in eX \rightarrow Y^\wedge$ e, pelo alinhamento dos impérios totais, concluímos $wA \subsetneq wX \rightarrow Y$. O caso para $X \in eA_\vee$ é análogo, assim como também $Y \in eA^\wedge \cup eA_\vee$. \square

3.6 Sequentização

Vimos nas Seções 3.4 e 3.5 como definir impérios para grafos de prova com links chaveáveis divergentes (expansão) e cancelamento de hipótese e provamos algumas propriedades. Agora exibiremos uma nova prova de sequentização para esses grafos de prova. Sem perda de generalidade assumimos \top como $A \vee \neg A$ e \perp como $A \wedge \neg A$, onde A pertence à premissa ou à conclusão do link.

Teorema 1 (Sequentização). *Dado um N-Grafo N , há uma derivação $SC(N)$ em LK de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ cujas ocorrências de fórmulas A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m estão em correspondência um-para-um com os elementos dos multi-sets $PREMIS(N)$ e $CONC(N)$, respectivamente.*

Demonstração. Procedemos por indução no número de links de N .

1. N não tem link algum (tem apenas um vértice v rotulado por A): este caso é imediato. $SC(N)$ é $A \vdash A$.

2. N apresenta um link apenas: como N é um N-Grafo, seu link não pode ser uma contração, expansão nem $\rightarrow -I$. A sequentização é simples uma vez que existe um mapeamento simples entre os links e as regras de LK que torna a construção de $SC(N)$ imediata (prova de completude (OLIVEIRA, 2001)). Por exemplo, no caso de $\wedge - I$:

$$\frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge -R$$

3. N apresenta um link inicial de expansão (a premissa do link é uma premissa de N): a hipótese de indução nos fornece uma derivação Π terminando com $\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$. Então $SC(N)$ é obtido por uma contração à esquerda:

$$\frac{\Pi}{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m} \frac{\mathbf{A}, \mathbf{A}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{\mathbf{A}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m} LC$$

4. N possui um link de contração final (a conclusão do link é uma conclusão de N): aqui da hipótese de indução temos uma derivação Π terminando com $A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m$. Portanto $SC(N)$ é alcançado por uma contração à direita:

$$\frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m} \frac{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \dots, B_m} RC$$

5. Há um link $\rightarrow -I$ final em N (a conclusão principal do link é uma conclusão de N): a hipótese de indução nos fornece uma derivação Π para $A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_1, \dots, B_m$. Para chegarmos a $SC(N)$ aplicamos $\rightarrow -R$:

$$\frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_1, \dots, B_m} \frac{A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_1, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, B_1, \dots, B_m} \rightarrow -R$$

6. N possui mais de um link, mas não há expansão inicial, nem contração final, nem $\rightarrow -I$ final: esse cenário é o mais difícil e similar ao de *proof-nets* para MLL^- em que todos os links terminais são \otimes . Aqui ainda há um desafio adicional: o nó *split* fica no meio do grafo. Escolhemos uma ocorrência de fórmula A maximal em \llcorner . Alegamos que $wA = eA^\wedge \cup eA_\vee = N$, ou seja, A rotula o nó *split*.

Suponha que não. Então considere Z uma ocorrência de fórmula tal que $Z \in N - (eA^\wedge \cup eA_\vee)$ e S_p^\wedge um meta-chaveamento principal para eA^\wedge . Dado que $Z \notin eA^\wedge$, o caminho ρ de A até Z em $S_p^\wedge(N)$ passa por uma conclusão A' de A . Considere A_\vee a última fórmula que pertence a eA_\vee em ρ e W o próximo em ρ (i.e. $W \notin eA_\vee$). Existem três casos para a aresta incidente a A_\vee e W :

- a) (A_\vee, W) pertence a um link de contração cuja outra premissa não está em eA_\vee : de acordo com o Lema 14 temos $A \ll W$, contradizendo a maximalidade de A em \ll .
- b) (W, A_\vee) pertence a um link de expansão cuja outra conclusão está fora de eA_\vee : aplicamos o Lema 15 e concluímos que $A \ll W$, contradizendo novamente nossa escolha.
- c) (A_\vee, W) é de um link $\rightarrow -I$ tal que W é a principal conclusão do link e a outra fórmula do link não pertence a eA_\vee : usamos Lema 16 e mais uma vez obtemos $A \ll W$.

Assim $wA = N$. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ conjuntos de ocorrências de fórmula tais que: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \{B_1, \dots, B_m\}$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Dado que eA^\wedge é um N-Grafo e A sua porta inferior, da hipótese de indução temos $SC(eA^\wedge)$ para $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$. Uma vez que eA_\vee é um N-Grafo e A sua porta superior, a hipótese de indução nos fornece $SC(eA_\vee)$ para $A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$. Então $SC(N)$ é obtido pela aplicação da regra do corte:

$$\frac{\frac{SC(eA^\wedge) \quad SC(eA_\vee)}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{CUT}$$

□

3.7 Conclusão

Nos N-Grafos os links estruturais são baseados no cálculo de seqüentes, enquanto os lógicos simulam as regras de DN. Cálculo de seqüentes (clássico e linear) têm apenas regras de introdução de conectivos. Por outro lado, dedução natural e N-Grafos apresentam regras de eliminação, portanto precisamos adaptar a noção de impérios de *proof-nets* para comportar DN com múltipla conclusão. Isso foi feito com a introdução do conceito de império do sul.

Outra característica de DN e N-Grafos é a presença de regras impróprias. A regra de introdução da implicação apresenta um critério de corretude que não se aplica apenas a fórmulas locais, mas para toda a dedução. Neste capítulo mostramos o sistema N-Grafos e estendemos a prova de seqüentização de (CARVALHO et al., 2014) para também incluir o link $\rightarrow -I$. Definidos os impérios para o sistema completo (CARVALHO et al., 2017), estamos prontos para propor um novo tipo de sub-N-Grafo (o território) para estudarmos uma versão intuicionista do sistema a seguir.

Nos N-Grafos os nós *split*, maximais com respeito à ordem induzida pela união dos impérios, localizam-se no meio da prova e não como um nó terminal (conclusão) ou inicial

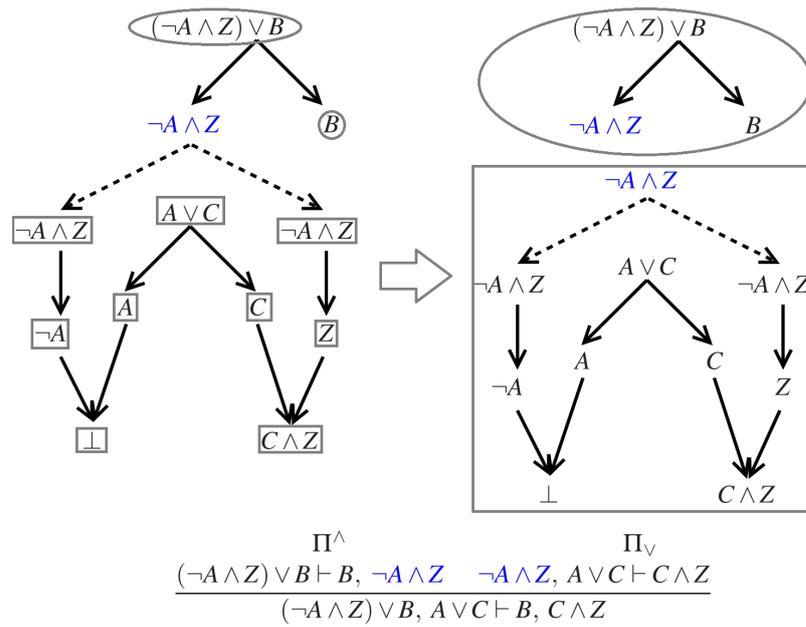


Figura 23 – Exemplo de como cortar uma prova usando nó maximal.

(premissa). O Teorema 1 nos mostra como executar um corte cirúrgico em uma prova (Figura 23). O mesmo procedimento pode também ser aplicado a qualquer nó maximal (marcado em azul) no N-Grafo da direita da Figura 19.

4 N-GRAFOS INTUICIONISTAS

4.1 Introdução

N-Grafos foram apresentados no Capítulo 3 e suas provas de corretude e completude são obtidas por meio de mapeamentos com LK. Neste capítulo mostramos uma versão intuicionista já existente (QUISPE-CRUZ et al., 2014) e alguns problemas que a mesma apresenta. Em seguida são estudadas alternativas utilizando a noção de sub-N-Grafos a fim de chegar a uma versão final (CARVALHO et al., 2017).

Uma vez que LJ é definido aplicando uma restrição na cardinalidade em LK no lado direito do sequente e os N-Grafos são um cálculo de múltipla conclusão, foi adotado um cálculo diferente de LJ para se fazer a prova de sequentização na primeira versão: o cálculo LJ', proposto por Maehara e descrito no livro de Takeuti (TAKEUTI, 1975). Ele é definido como o cálculo LK e impõe restrições em apenas duas regras: $\rightarrow R$ e $\neg R$. A primeira requer apenas uma fórmula no lado direito, enquanto a segunda nenhuma:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow R \quad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A} \neg R$$

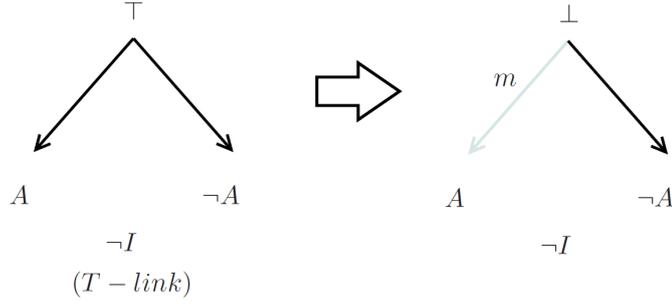
Como na lógica intuicionista podemos definir $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$, podemos apenas remover $\neg R$ de LK e substituímos $\rightarrow R$ conforme acima, resultando na seguinte regra para $\neg R$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A \rightarrow \perp} \rightarrow R$$

4.2 Primeira versão

Escolhido o cálculo de sequentes apropriado, também é necessário alterar os N-Grafos: desde que a lei do terceiro excluído não é mais válida, o \top - *link* é removido e um novo é adotado para a introdução da negação (Figura 24). Se antes era possível assumir que $A \vee \neg A$ era verdadeiro para qualquer fórmula A (de acordo com a abordagem de Gentzen), agora se a partir da suposição de A chegarmos a uma contradição (\perp), então A deve ser falso e nós descartamos a hipótese, conforme a regra de introdução da negação ($\neg I$) em NJ (Tabela 1).

O conceito de grafo de prova permanece o mesmo, entretanto é utilizado outro critério de corretude, o qual é baseado na primeira definição dos N-Grafos (OLIVEIRA, 2001) e usa o chaveamento de expansão.

Figura 24 – Link antigo para $\neg\neg I$ e o novo.

Definição 25 (chaveamento de expansão (OLIVEIRA, 2001)). *Dado um grafo de prova G , um chaveamento de expansão $S_e(G)$ associado a G é um subgrafo gerador de G no qual uma das duas arestas de cada link de expansão e todas as meta-arestas são removidas.*

Definição 26 (meta-condição intuicionista (QUISPE-CRUZ et al., 2014)). *Considere um grafo de prova G . Dizemos que a meta-condição intuicionista é válida para ele se e somente se para cada meta-aresta $(u, v)^m$ de um link divergente $\{(u, v)^m, (u, w)\}$ em G :*

1. *há um caminho ou semi-caminho de v a u que pertence a todo chaveamento de expansão associado a G e este caminho não passa pela aresta (u, w) ;*
2. *o grau de entrada sólido de v em G é zero;*
3. *no grafo resultante S da remoção de todas as meta-arestas de G , cada caminho que começa em qualquer vértice em $PREMIS(S)$ e vai até qualquer vértice em $CONC(S)$ deve passar por (u, w) .*

Definição 27 (N-Grafo intuicionista (QUISPE-CRUZ et al., 2014)). *Um grafo de prova G é um N-Grafo intuicionista se e somente se a meta-condição intuicionista é respeitada por G e todo grafo de chaveamento associado a ele for acíclico e conexo.*

A definição acima apresenta um problema. A meta-condição original, que foi adotada na primeira definição dos N-Grafos e serve de base para a Definição 27, usa o conceito de chaveamento de expansão e não valida corretamente todos os grafos de prova.

Definição 28 (meta-condição (OLIVEIRA, 2001)). *Seja G um grafo de prova. Dizemos que a meta-condição é válida para ele se e somente se para cada meta-aresta $(u, v)^m$ de um link divergente $\rightarrow \neg I \{(u, w), (u, v)^m\}$ em G , há um caminho ou semi-caminho de v a u sem passar pela aresta (u, w) em todo chaveamento de expansão e o grau sólido de v é igual a zero.*

Definição 29 (N-Grafo (definição original) (OLIVEIRA, 2001)). *Um grafo de prova G é um N-Grafo se e somente se a meta-condição for válida para G e todo grafo de chaveamento associado a ele for acíclico e conexo.*

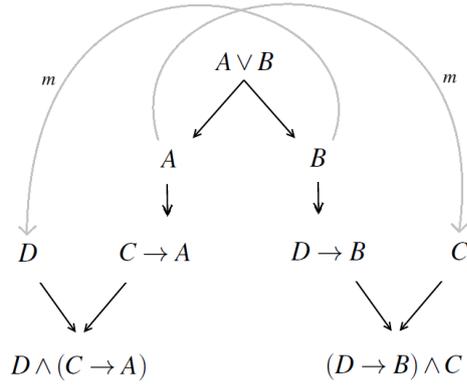


Figura 25 – Grafo de prova inválido, mas aceito pelo antigo critério de corretude (ANDRADE, 2015).

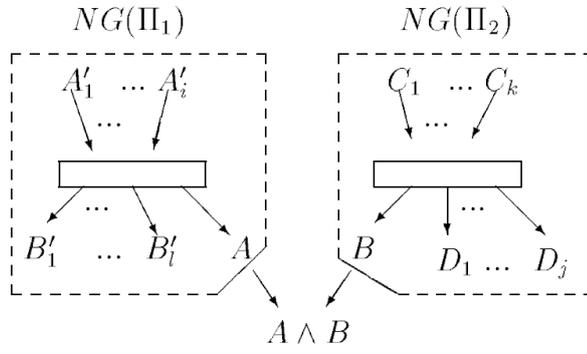


Figura 26 – Prova de completude para $\wedge R$ (OLIVEIRA, 2001).

Na Figura 25 temos um grafo de prova que é validado pela antiga definição, mas que não possui uma derivação em sequentes. Podemos ver que o sequente $A \vee B \vdash D \wedge (C \rightarrow A)$, $(D \rightarrow B) \wedge C$ não é válido na lógica clássica: se C e D forem ambos falsos, então o lado direito do sequente será falso, independente do lado esquerdo (ANDRADE, 2015).

Além de usar o problemático chaveamento de expansão, há também um erro na prova de completude dos N-Grafos intuicionistas. Considere Π uma derivação em LJ' cuja última regra seja $\wedge R$:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{A'_1, \dots, A'_i \vdash \mathbf{A}, B'_1, \dots, B'_l} \quad \frac{\Pi_2}{C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{B}, D_1, \dots, D_j}}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \wedge R$$

De acordo com (QUISPE-CRUZ et al., 2014), pela hipótese de indução nós temos dois N-Grafos intuicionistas $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$, os quais são usados para formar $NG(\Pi)$ (Figura 26).

Não temos garantia alguma que $NG(\Pi)$ é um N-Grafo intuicionista: suponha um link $\{(u, v)^m, (u, w)\}$ em $NG(\Pi_1)$, então todo caminho a partir de alguma premissa de $NG(\Pi_1)$ (A'_1, \dots, A'_i) para alguma de suas conclusões (A, B'_1, \dots, B'_l) deve passar por

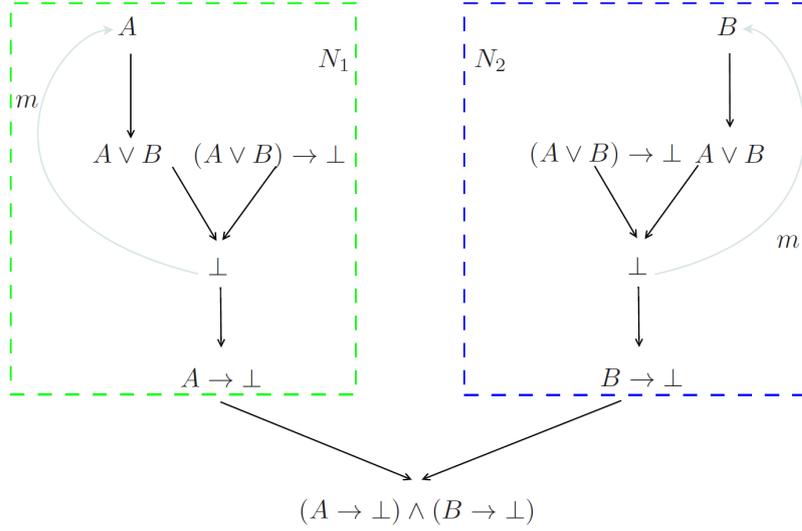


Figura 27 – Um contra-exemplo para a prova de completude.

(u, w) para satisfazer a meta-condição intuicionista, contudo agora em $NG(\Pi)$ qualquer caminho de uma premissa de $NG(\Pi_2)$ (C_1, \dots, C_k) a $A \wedge B$ não passa por (u, w) e assim $NG(\Pi)$ pode não ser um N-Grafo intuicionista.

Essa situação é exemplificada na Figura 27, que é um sub-N-Grafo da Figura 14. N_1 é um N-Grafo intuicionista para $(A \vee B) \rightarrow \perp \vdash A \rightarrow \perp$ e N_2 para $(A \vee B) \rightarrow \perp \vdash B \rightarrow \perp$. Usamos o link $\wedge - I$ em N_1 e N_2 e o resultado deveria ser um N-Grafo intuicionista N para $(A \vee B) \rightarrow \perp, (A \vee B) \rightarrow \perp \vdash (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$. Entretanto N não é porque a meta-condição intuicionista não é satisfeita: existe um caminho da premissa $(A \vee B) \rightarrow \perp$ de N_1 para a conclusão $(A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)$ que não passa pela aresta $(\perp, B \rightarrow \perp)$.

4.3 Sub-N-Grafos e a versão intuicionista

A partir deste ponto do capítulo discutiremos uma das propostas desta tese: uma nova definição dos N-Grafos intuicionistas. Permanecemos com o cálculo de seqüentes de Maehara e com os mesmos links de (QUISPE-CRUZ et al., 2014). Nosso desafio é a busca por um critério de corretude o qual capture uma correta introdução do conectivo “ \rightarrow ”.

Uma das características dos N-Grafos e outras *proof-nets* é a tentativa de unificar diferentes derivações de um mesmo seqüente em que essas derivações diferem apenas na ordem de aplicação de regras de inferência independentes. Considere o seguinte exemplo, que omite aplicações das regras de permutação (ou seja, é permitido operar fórmulas que não estão adjacentes ao símbolo “ \vdash ”):

$$\frac{\frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \vee B \vdash A, B}^{\vee L} \quad C \vdash C}{A \vee B, C \vdash A, B \wedge C}^{\wedge R} \qquad \frac{A \vdash A \quad \frac{B \vdash B \quad C \vdash C}{B, C \vdash B \wedge C}^{\wedge R}}{A \vee B, C \vdash A, B \wedge C}^{\vee L}$$

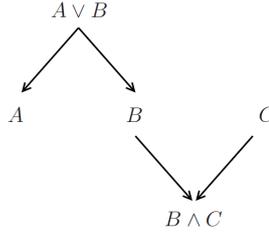


Figura 28 – N-Grafo para $A \vee B, C \vdash A, B \wedge C$.

Elas são ambas representadas pelo mesmo N-Grafo (Figura 28), todavia esse atributo dos N-Grafos e *proof-nets* agora dificulta a definição de um critério de corretude para os N-Grafos intuicionistas. Em LJ' a regra $\rightarrow R$ pode ser aplicada somente quando existe apenas uma fórmula no lado direito. No exemplo anterior quando a regra $\wedge R$ é aplicada na primeira derivação, o resultado são duas fórmulas no lado direito do sequente, mas na segunda derivação há apenas $B \wedge C$.

Este N-Grafo não é crítico para o critério de corretude porque ela aplica apenas regras para os conectivos “ \wedge ” e “ \vee ”. Vejamos o que ocorre com uma fórmula mais peculiar para a lógica intuicionista:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \neg R \\
 \frac{\vdash A, \neg A}{\vdash \neg \neg A, \neg A} \neg L \\
 \frac{\vdash \neg \neg A, \neg A}{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A} \neg L \\
 \frac{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A}{\vdash \neg \neg \neg A \rightarrow \neg A} \rightarrow R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L \\
 \frac{A, \neg A \vdash}{\vdash \neg \neg A, \neg A} \neg R \\
 \frac{\vdash \neg \neg A, \neg A}{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A} \neg L \\
 \frac{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A}{\vdash \neg \neg \neg A \rightarrow \neg A} \rightarrow R
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L \\
 \frac{A, \neg A \vdash}{A \vdash \neg \neg A} \neg R \\
 \frac{A \vdash \neg \neg A}{\neg \neg \neg A, A \vdash} \neg L \\
 \frac{\neg \neg \neg A, A \vdash}{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A} \neg R \\
 \frac{\vdash \neg \neg \neg A \vdash \neg A}{\vdash \neg \neg \neg A \rightarrow \neg A} \rightarrow R
 \end{array}$$

Exibimos três derivações em sequente para $\neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$, o qual é um teorema na lógica intuicionista, porém apenas a última é aceita por LJ' porque a regra $\neg R$ só pode ser aplicada quando nenhuma fórmula existe no lado direito (aplicações inválidas dessa regra estão em vermelho). Para o cálculo LK essas três derivações diferem apenas pela permutação de “regras independentes” (como no exemplo anterior para $A \vee B, C \vdash A, B \wedge C$), logo, como na prova da sequentização dos N-Grafos original foi usado o cálculo LK, todas as três derivações são mapeadas para o mesmo N-Grafo (Figura 29).

4.3.1 Império e prova de completude

É preciso propor um critério de corretude para os N-Grafos intuicionistas que aceite o grafo de prova da Figura 29 porque embora ele represente derivações inválidas em LJ' , ele também representa *pelo menos uma válida em LJ'* . Na verdade este caso não é o mais difícil: aqui todo sub-N-Grafo tem apenas uma conclusão, portanto podemos concluir que para cada link com descarte de hipótese $\{(u, w), (u, v)^m\}$, u é a única conclusão quando a

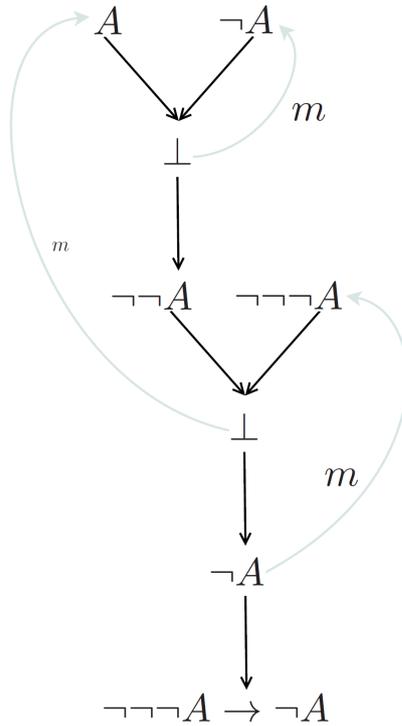


Figura 29 – N-Grafo para $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$.

hipótese v é cancelada. Isso também ocorre com nosso exemplo intuicionista do Capítulo 3 (Figura 14).

Um empecilho maior surge quando o N-Grafo apresenta mais de uma conclusão ou algum sub-N-Grafo com mais de uma conclusão. Considere o sequente $\vdash B \rightarrow A, A \rightarrow B$. Não há derivação em LJ' para ele porque é impossível respeitar a restrição de cardinalidade para ambas as introduções do conectivo “ \rightarrow ”:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A \vdash A, B}^{WR} \\
 \frac{B, A \vdash A, B}{B \vdash A, A \rightarrow B}^{WL} \\
 \frac{B \vdash A, A \rightarrow B}{\vdash B \rightarrow A, A \rightarrow B}^{\rightarrow R}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A}{A, B \vdash A}^{WL} \\
 \frac{A \vdash B \rightarrow A}{A \vdash B \rightarrow A, B}^{\rightarrow R} \\
 \frac{A \vdash B \rightarrow A, B}{\vdash B \rightarrow A, A \rightarrow B}^{WR}
 \end{array}$$

Ainda que permutemos as regras na derivação mais à esquerda, ao menos uma aplicação de $\rightarrow R$ será inválida. Na Figura 30 é ilustrado o N-Grafo para essas derivações. O critério de corretude deveria classificá-lo como inválido para a lógica intuicionista¹. Então de que forma o critério poderia separar os N-Grafos intuicionistas, como o da Figura 14 e o da Figura 29, dos que são aceitos apenas pela lógica clássica, como o da Figura 30? A primeira tentativa foi usar o império do norte da conclusão dos links $\neg -I$ e $\rightarrow -I$.

¹ Poderíamos também ter aplicado enfraquecimentos em A e o axioma da derivação seria $B \vdash B$, entretanto o resultado ainda assim não seria válido

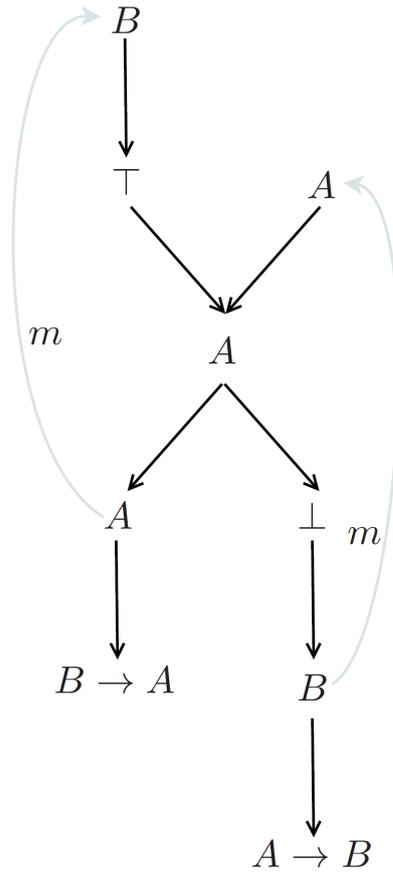


Figura 30 – N-Grafo clássico para $\vdash B \rightarrow A, A \rightarrow B$.

Definição 30 (meta-condição intuicionista com império). *Seja N um N-Grafo sem o link \top – link (é adotada a versão mais à direita do link \neg –I na Figura 24). Então a meta-condição intuicionista com império é válida para ele se para cada link com meta-aresta $\{(u, v)^m, (u, w)\}$, o império do norte da ocorrência de fórmula A que rotula w tem apenas uma porta inferior (o próprio A).*

Essa meta-condição valida corretamente todos os N-Grafos vistos até agora: ela aceita os da Figura 14 e Figura 29, e rejeita o da Figura 30. Este último N-Grafo tem duas conclusões e ambas são conclusões de links com meta-aresta, logo de acordo com o Corolário 2, $eB \rightarrow A^\wedge = eA \rightarrow B^\wedge = N$. Então seus impérios do norte apresentam mais de uma conclusão. Porém essa meta-condição foi abandonada: ela também falha na prova de completude.

Se A é válido, então para qualquer C temos que $C \rightarrow A$. Se B é falso, então $B \rightarrow D$ para qualquer D . Na Figura 31 temos os correspondentes N-Grafos intuicionistas N_1 e N_2 . Vemos que $eC \rightarrow A^\wedge$ e $eB \rightarrow D^\wedge$ apresentam apenas uma porta inferior em N_1 e N_2 , respectivamente, mas quando juntamos N_1 e N_2 por meio de um link \vee – E , o resultado não é mais um N-Grafo intuicionista: os impérios do norte de $C \rightarrow A$ e $B \rightarrow D$ possuem um ao outro como porta inferior.

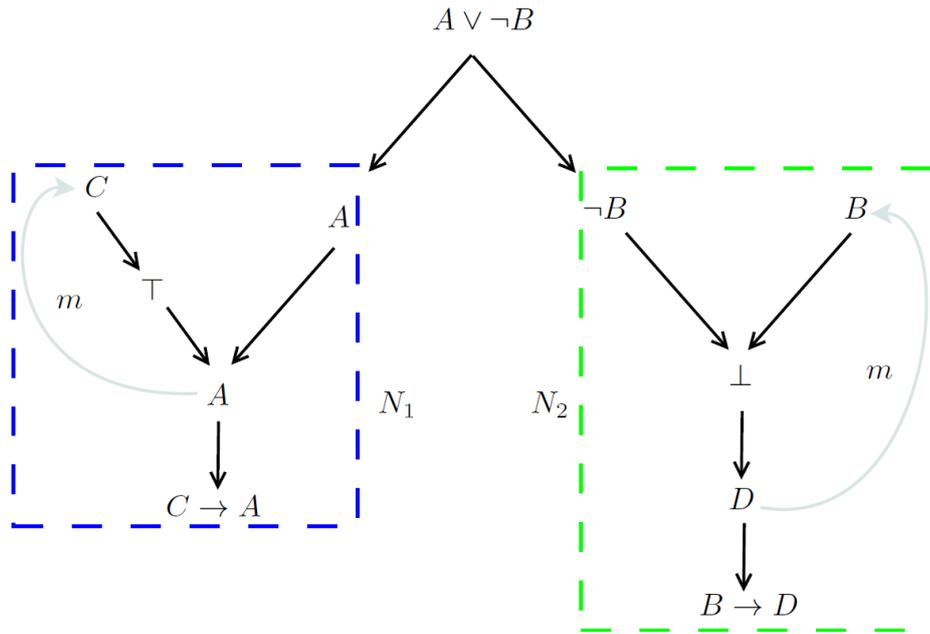


Figura 31 – N_1 e N_2 são N-Grafos intuicionistas e N também deveria ser.

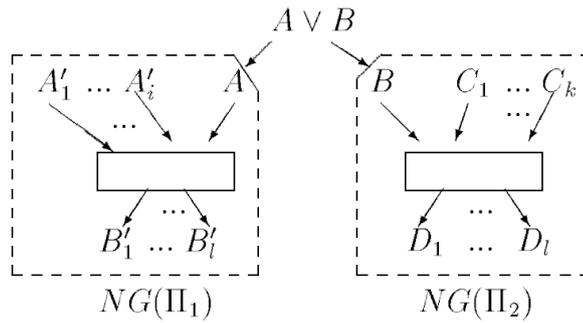


Figura 32 – Prova de completude para $\vee L$ (OLIVEIRA, 2001).

O caso geral deste problema ocorre na prova de completude quando há uma derivação Π em LJ' cuja última regra é $\vee L$:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{A'_1, \dots, A'_i, \mathbf{A} \vdash B'_1, \dots, B'_i} \quad \frac{\Pi_2}{C_1, \dots, C_k, \mathbf{B} \vdash D_1, \dots, D_l}}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash B'_1, \dots, B'_i, D_1, \dots, D_l}_{\vee L}$$

Pela hipótese de indução há dois N-Grafos intuicionistas $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$, os quais são usados para formar $NG(\Pi)$ (Figura 32).

Agora suponha que em $NG(\Pi_1)$ temos um link $\rightarrow -I$ que descarta alguma hipótese X e tem $X \rightarrow Y^\wedge$ como conclusão principal. Dado que $NG(\Pi_1)$ é um N-Grafo intuicionista, $eX \rightarrow Y^\wedge$ possui apenas a si próprio como porta inferior. O problema acontece se $A \in eX \rightarrow Y^\wedge$: então $eX \rightarrow Y^\wedge$ cresce em $NG(\Pi)$ e alcança todas as fórmulas de $NG(\Pi_2)$ (inclusive as conclusões). Isso quebra a meta-condição intuicionista com império e $NG(\Pi)$

não é um N-Grafo intuicionista como N_1 e N_2 na Figura 31.

Portanto a Definição 30 não funciona. A ideia era usar impérios dado que já temos todas as propriedades provadas no Capítulo 3, entretanto mesmo a completude, que costuma ser um teorema simples de provar, não foi satisfeita pela nossa primeira definição.

4.3.2 Território e suas propriedades

Como um N-Grafo pode representar várias derivações em LK e LJ' impõe uma restrição na cardinalidade da regra $\rightarrow R$, estamos procurando por um critério de corretude o qual capture se um N-Grafo clássico pode também representar ao menos uma derivação em LJ'. Nossa primeira tentativa foi utilizar impérios, todavia vimos que o império do norte de uma fórmula $A \rightarrow B$ num link $\rightarrow -I$ “cresce mais do que o necessário” (Figura 31).

Então precisamos encontrar um sub-N-Grafo que contenha $A \rightarrow B$ como porta inferior, porém menor que seu império do norte, mas que ainda assim também alcance a hipótese cancelada A . Em *proof-nets*, além de império, há também outro tipo de *subnet*: o reino de uma ocorrência de fórmula A é a menor *subnet* que contém A como conclusão, entretanto já foi visto no Capítulo 3 que os reinos não se aplicam aos N-Grafos.

Uma vez que o link $\rightarrow -I$ envolve três fórmulas e o critério de corretude precisa identificar se o N-Grafo representa pelo menos uma derivação em LJ', adotaremos o conceito de *território de um link*, o qual é uma mistura dos conceitos de reino e território (BELLIN; WIELE, 1995). Voltemos ao nosso N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ e observemos seu link de contração (Figura 33). É imediato notar que apenas as três fórmulas da contração não formam um sub-N-Grafo, entretanto podemos provar que em todo meta-chaveamento haverá um caminho entre as premissas sem passar pela conclusão do link.

Lema 17. *Considere $\frac{A_1 A_2}{A}$ um link de contração em N . Então $A_2 \in eA_1^\wedge$ e $A_1 \in eA_2^\wedge$.*

Demonstração. Seja S_R um meta-chaveamento que mantém a aresta (A_2, A) . Uma vez que $(A_1, A) \notin S_R(N)$, temos $S_R^\wedge(N, A_1) = N$ e assim $A_2 \in S_R^\wedge(N, A_1)$. Agora considere um meta-chaveamento S_L o qual mantém a aresta (A_1, A) . De acordo com a condição 2f do Lema 3, temos que $A_2 \in eA^\wedge$, portanto há um caminho de A até A_2 em $S_L(N)$ sem passar por qualquer conclusão de A . Dado que subimos por A e alcançamos A_2 , existe um caminho de A_1 para A_2 o qual não utiliza a aresta (A_1, A) , logo $A_2 \in S_L^\wedge(N, A_1)$. Isso nos permite concluir que $A_2 \in eA_1^\wedge$. A prova de que $A_1 \in eA_2^\wedge$ é análoga. \square

Então procuremos por um sub-N-Grafo com as três fórmulas da contração, mas que seja o menor possível. O primeiro passo é subirmos de $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$ e $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$ para $A \wedge B_{10}$ e $A \wedge C_{11}$, respectivamente (Figura 33 no lado direito). Ainda estamos longe

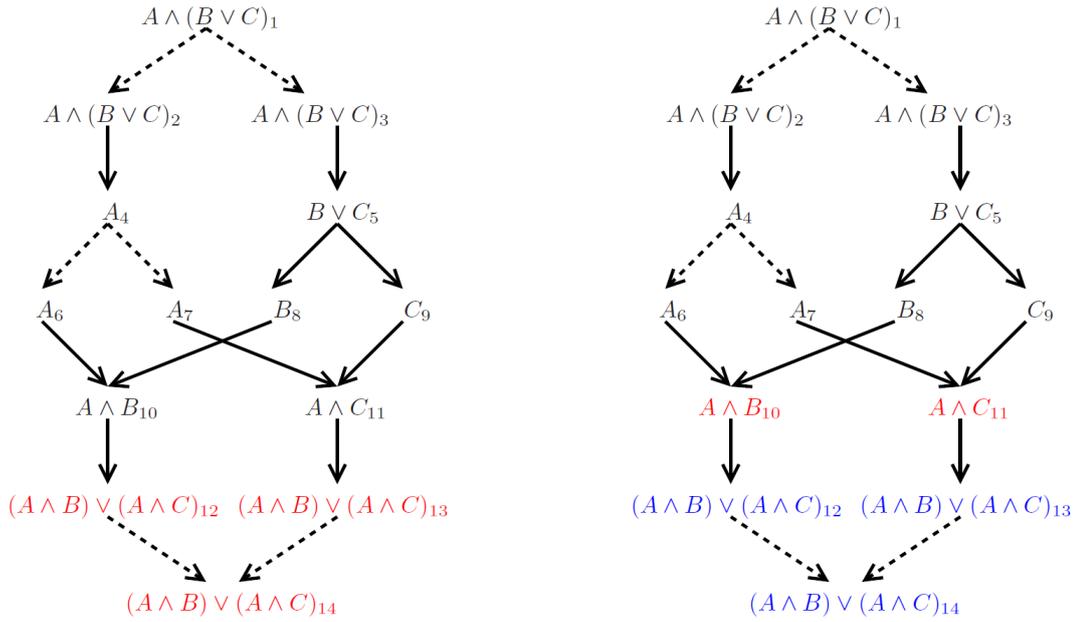


Figura 33 – Início da computação do território do link de contração.

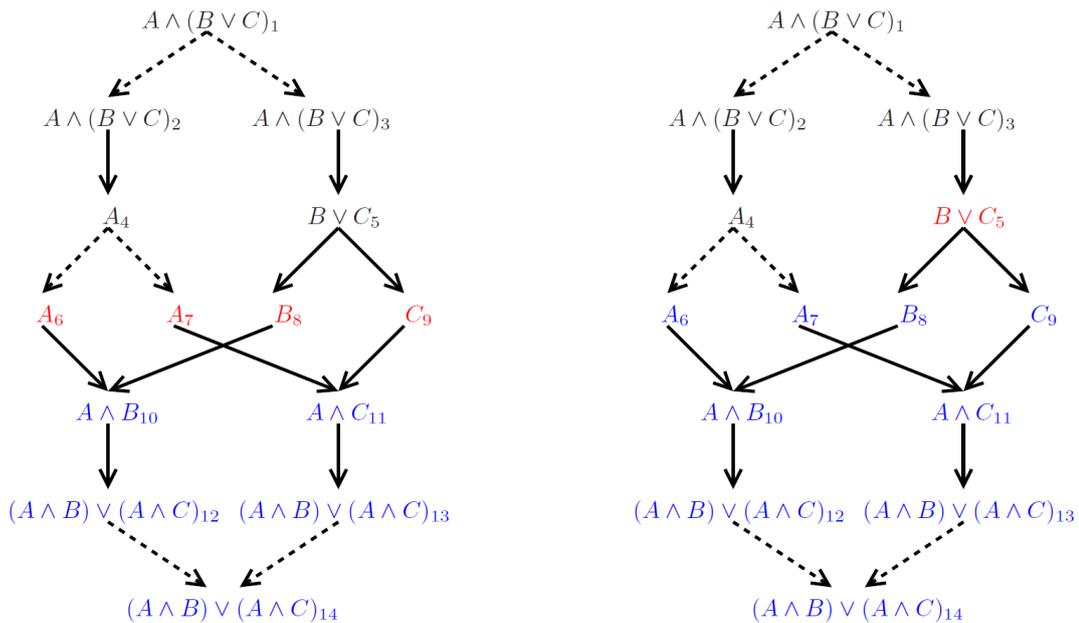


Figura 34 – Computação do território do link de contração.

de fazermos as premissas da contração se encontrarem em todo meta-chaveamento: de $A \wedge B_{10}$ adicionamos suas premissas (A_6 e B_8) e o mesmo para $A \wedge C_{11}$ (Figura 34).

Agora observamos que A_6 e A_7 já têm todas as fórmulas do link de contração em seus impérios do sul (Tabela 6), então se quisermos o menor sub-N-Grafo possível, não devemos adicionar A_4 . Isso não acontece com B_8 e C_9 : seus impérios não contêm a contração, portanto precisamos adicionar $B \vee C_5$ (Figura 34).

Finalmente temos um sub-N-Grafo com o link de contração (Figura 35). Há apenas uma porta inferior (a conclusão da contração) e três portas superiores. Estas possuem a

Fórmula	Império do norte	Império do sul
$A \wedge (B \vee C)_1$	$\{A \wedge (B \vee C)_1\}$	N
$A \wedge (B \vee C)_2$	$\{A \wedge (B \vee C)_2\}$	$N - \{1\}$
$A \wedge (B \vee C)_3$	$\{A \wedge (B \vee C)_3\}$	$N - \{1\}$
A_4	$\{A_4, A \wedge (B \vee C)_2\}$	$N - \{1, 2\}$
$B \vee C_5$	$\{B \vee C_5, A \wedge (B \vee C)_3\}$	$N - \{1, 3\}$
A_6	$\{A_6\}$	$N - \{1, 2, 4\}$
A_7	$\{A_7\}$	$eA_{6\vee}$
B_8	$\{8, 5, 3, 9, 11, 7, 13\}$	$\{8, 10, 6, 12\}$
C_9	$\{9, 5, 3, 8, 10, 6\}$	$\{9, 11, 13, 7\}$
$A \wedge B_{10}$	$N - \{12, 14\}$	$\{10, 12\}$
$A \wedge C_{11}$	$N - \{13, 14\}$	$\{11, 13\}$
$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$	$N - \{14\}$	$\{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}\}$
$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$	$N - \{14\}$	$\{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}\}$
$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}$	N	$\{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{14}\}$

Tabela 6 – Impérios do norte e do sul. Em alguns casos usamos apenas o índice da fórmula.

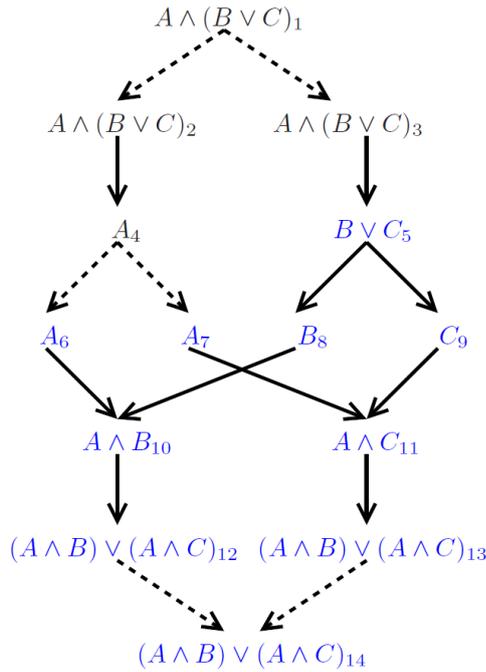


Figura 35 – Território do link de contração.

conclusão da contração em seus impérios do sul (Tabela 6), portanto não é preciso adicionar suas premissas. Embora A_6 não pertence a nenhum caminho entre $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$ e $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$ em qualquer meta-chaveamento, A_6 é necessário se quisermos um sub-N-Grafo porque as fórmulas $A \wedge B_{10}$ e B_8 são fundamentais para conectar $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{12}$ e $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)_{13}$. Dizemos que o sub-N-Grafo da Figura 35 é o território do referido link de contração.

Definição 31 (fórmula principal em um link chaveável). *Seja l um link chaveável num*

N-Grafo N . Então:

- se $l = \frac{A_1 A_2}{A}$ é um link de contração, a fórmula principal é a conclusão A ;
- se $l = \frac{A}{A_1 A_2}$ é um link de expansão, a fórmula principal é a premissa A ;
- se $l = \frac{B}{A \rightarrow B}$ é um link $\rightarrow -I$, a fórmula principal é a conclusão $A \rightarrow B$.

Definição 32 (território de um link chaveável). *Considere* N um *N-Grafo* com um link chaveável l cuja fórmula principal é A . O território de A , representado por tA , é o menor conjunto de ocorrências de fórmulas de N fechado sob as condições:

1. base: todas as fórmulas de l pertencem a tA ;
2. cima: se $\frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ é um link tal que $Y \in tA$ e $A \notin eY_{\vee}$, então $X \in tA$;
3. baixo: se $\frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ é um link tal que $X \in tA$ e $A \notin eX^{\wedge}$, então $Y \in tA$.

A Definição 32 segue a caracterização de Girard na definição de reinos (veja Proposição 3 em (BELLIN; WIELE, 1995)). O território de um link l tenta construir o menor sub-*N-Grafo* com as fórmulas de l . Se l não é chaveável, então seu território é trivial: apenas as fórmulas do próprio link. Por exemplo, considere $l = \frac{A_6 B_8}{A \wedge B_{10}}$ (Figura 35). Então o menor sub-*N-Grafo* com essas três fórmulas é o próprio l porque, desde que o link não é chaveável, todas elas já estão conectadas entre si em l em qualquer meta-chaveamento de N .

Por outro lado, se l é chaveável, então computamos de acordo com a Definição 32. O primeiro passo é óbvio: todas as fórmulas de l devem estar em tA (caso *base*). Agora considere $\frac{\dots X \dots}{\dots Y \dots}$ um link tal que $Y \in tA$, então Y está presente no menor sub-*N-Grafo* que contém l . Se $A \notin eY_{\vee}$, então em algum meta-chaveamento S o caminho de Y para A passa por meio de alguma premissa de Y , portanto precisamos adicionar todas as premissas de Y , caso contrário o subgrafo de prova terá um meta-chaveamento desconexo².

Se $A \in eY_{\vee}$, então já temos um caminho entre A e Y sem passar por qualquer premissa de Y em todo meta-chaveamento, logo, desde que estamos interessados no menor sub-*N-Grafo* que conecta todas as fórmulas de l e as premissas de Y não são necessárias para essa conectividade, não as adicionamos. Isso explica o caso *cima*. O caso *baixo* é análogo.

Como o território é definido a partir de um *N-Grafo* e sempre adiciona todas as fórmulas de um link em cada passo de sua computação, concluímos:

² Às vezes apenas uma premissa de Y é necessária para a conectividade, como quando adicionamos A_6 e B_8 a partir de $A \wedge B_{10}$. Caso tivéssemos adicionado apenas B_8 , o resultado não seria sequer um subgrafo de prova uma vez que haveria apenas duas fórmulas do link $\wedge - I$ (Definição 12).

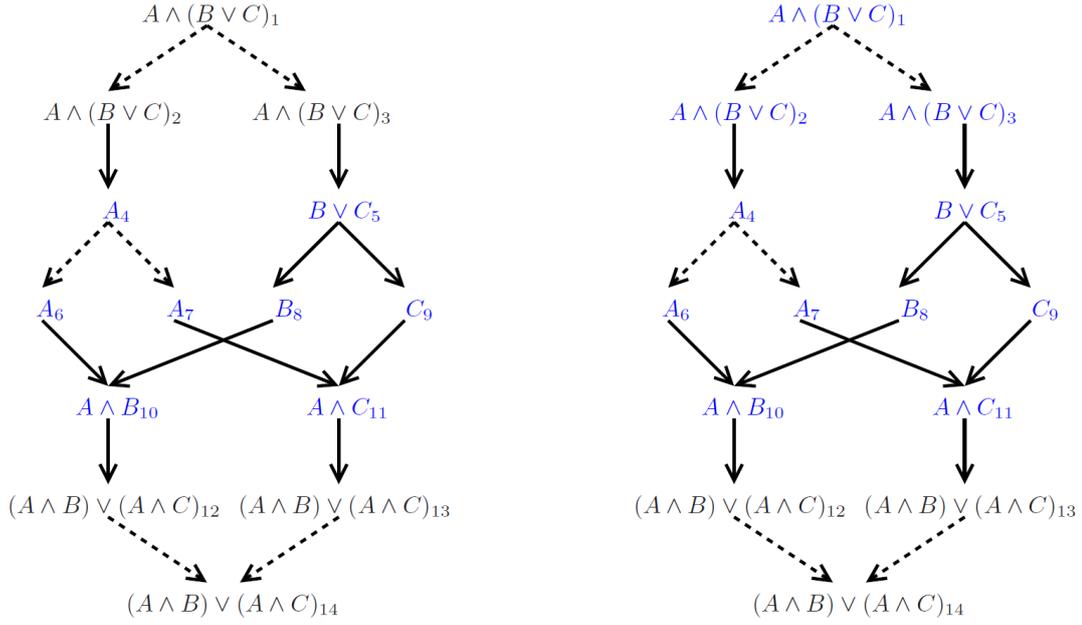


Figura 36 – Territórios dos links de expansão: tA_4 à esquerda e $tA \wedge (B \vee C)_1$ à direita.

Corolário 4. *O território é um subgrafo de prova.*

Ilustramos o território dos links de expansão do nosso N-Grafo para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ na Figura 36 e procedemos para a prova de que o território de um link chaveável é o menor sub-N-Grafo que apresenta o link.

Lema 18. *Considere N um N-Grafo e tA o território de um link cuja fórmula principal é A , então tA é um sub-N-Grafo.*

Demonstração. Uma vez que N é um N-Grafo, seus meta-chaveamentos não contêm ciclos, logo qualquer subgrafo de prova de N não possui meta-chaveamento cíclico. É preciso apenas provar que todo meta-chaveamento associado a tA é conexo.

Suponha que há um meta-chaveamento S de N tal que o caminho de uma fórmula $B \in tA$ e A passa por uma fórmula fora de tA . Seja C'' a primeira fórmula no caminho de B para A que não pertence a tA e C a fórmula anterior (i.e. $C \in tA$). Considere D'' a última fórmula fora de tA no caminho de B para A e D a próxima (em outras palavras, $D \in tA$). Todas as fórmulas e o caminho estão representados na Figura 37.

Assuma sem perda de generalidade que C'' é uma premissa de C . Dado que $C \in tA$ e $C'' \notin tA$, obtemos $A \in eC_{\vee}$ (caso *cima* na Definição 32), portanto em $S(N)$ há um caminho θ de C para A sem passar pela aresta (C, C'') (Figura 37) e isso gera um ciclo em $S(N)$: contradição. \square

Lema 19. *Seja N um N-Grafo e tA o território de um link chaveável cuja principal fórmula é A , então tA é o menor sub-N-Grafo de N que possui todas as três fórmulas do link.*

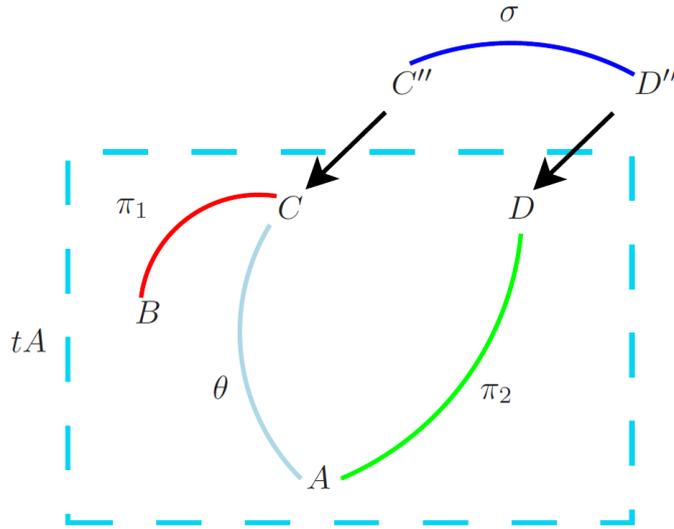


Figura 37 – Fórmulas e caminho usados na prova do Lema 18.

Demonstração. Suponha que N' é um sub-N-Grafo N que possui o referido link, porém $tA \not\subseteq N'$. Deve existir uma ocorrência de fórmula B tal que $B \in tA - N'$. Como $B \in tA$, é possível partir de A e, seguindo os casos *cima* e *baixo* da Definição 32, alcançar B . Uma vez que as fórmulas do link também pertencem a N' e $B \notin N'$, em algum momento passamos de uma fórmula $C \in tA \cap N'$ para uma $C'' \in tA - N'$. Há duas possibilidades para a aresta entre C e C'' :

1. C'' é uma premissa de C : então $A \notin eC_\vee$ (caso *cima* da Definição 32), logo em algum meta-chaveamento S o caminho de C até A em $S(N)$ passa por C'' . Como $C'' \notin N'$, concluímos que N' apresenta um meta-chaveamento desconexo: contradição.
2. C'' é uma conclusão de C : aplicamos o caso *baixo* e procedemos de maneira similar ao anterior.

Assim todo sub-N-Grafo de N que possui o link chaveável cuja principal fórmulas é A também deve conter tA . □

Com esse novo tipo de sub-N-Grafo definiremos um critério de corretude para os N-Grafos intuicionistas. Vimos que um N-Grafo pode representar várias derivações em LK e precisamos saber se pelo menos uma delas é aceita por LJ'. Considere um link $\rightarrow -I$ cuja fórmula principal é $A \rightarrow B$, então como $tA \rightarrow B$ é um sub-N-Grafo, representa uma derivação em LK.

Todavia LJ' exige que B seja a única conclusão quando a regra $\rightarrow R$ for aplicada e $eA \rightarrow B^\wedge$ não é apropriado para verificar isso porque o império cresce o máximo possível. Vimos que esse “crescimento é desnecessário” dado que pode acabar adicionando outra porta inferior a um sub-N-Grafo que já possua $A \rightarrow B$ como conclusão (Figura 31 e Figura

32). Aqui entra $tA \rightarrow B$: pelo Lema 19 o território computa o menor sub-N-Grafo com as fórmulas do link $\rightarrow -I$ como uma tentativa de não adicionar “fórmulas desnecessárias”, as quais podem tornar-se portas inferiores e desrespeitar o requisito de LJ’.

Definição 33 (meta-condição intuicionista com território). *Seja N um N-Grafo sem o \top – link (Figura 24). A meta-condição intuicionista com território é válida para ele se para cada link com meta-aresta $\{(u, v)^m, (u, w)\}$, o território da ocorrência de fórmula A que rotula w tem apenas uma porta inferior (o próprio A).*

Essa meta-condição valida corretamente todos os N-Grafos vistos até o momento: na Figura 14 e Figura 29 todos os sub-N-Grafos apresentam apenas uma conclusão, portanto a Definição 33 é trivialmente satisfeita. O mesmo acontece com a Figura 27, a qual é um contra-exemplo para a primeira meta-condição (QUISPE-CRUZ et al., 2014), entretanto aceita pela nova (N_1 e N_2 são os territórios dos links $\rightarrow -I$).

A Figura 30 ilustra um exemplo corretamente rejeitado pela meta-condição com império e na Figura 38 vemos que a nova também não falha: $tB \rightarrow A$ é destacado em azul e há duas conclusões³, logo este N-Grafo deve ser rejeitado pela lógica intuicionista. A principal diferença entre usar império e território para a meta-condição pode ser vista na Figura 31: a Definição 30 rejeita porque $eC \rightarrow A^\wedge$ e $eB \rightarrow D^\wedge$ são ambos iguais a N , ambos têm, pois, mais de uma conclusão.

Agora a Definição 33 age corretamente e aceita este N-Grafo uma vez que, embora seus impérios do norte tenham duas conclusões cada, seus territórios, os quais estão ilustrados por N_1 (em azul) e N_2 (em verde), possuem apenas uma conclusão! Com isso superamos o caso da regra $\vee L$ na prova de completude (Figura 32) por meio da nova meta-condição e estamos quase prontos para provarmos todos os outros casos.

Uma fórmula interessante válida apenas na lógica clássica é a lei de Peirce:

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{A \vdash B, A}^{WR}}{\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{A}}^{\rightarrow R}}{\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A, A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A}^{\rightarrow L}}^{\rightarrow R}$$

A aplicação inválida de $\rightarrow R$ para LJ’ é destacada em vermelho e isso reflete no correspondente N-Grafo com o território do respectivo link $\rightarrow -I$ com duas conclusões (Figura 39).

Qual o custo de verificar se um N-Grafo clássico satisfaz a Definição 33? Primeiro é preciso estimar o custo da computação dos impérios de uma ocorrência de fórmula.

³ Note que embora \perp possa não aparecer explicitamente numa derivação em sequentes, ele sempre conta como uma porta num N-Grafo como qualquer outra fórmula. O mesmo se aplica a \top .

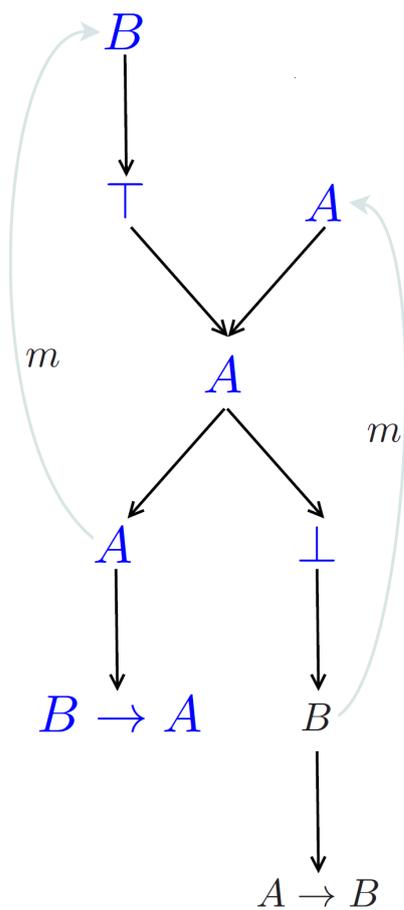


Figura 38 – O território de $B \rightarrow A$ apresenta duas conclusões.

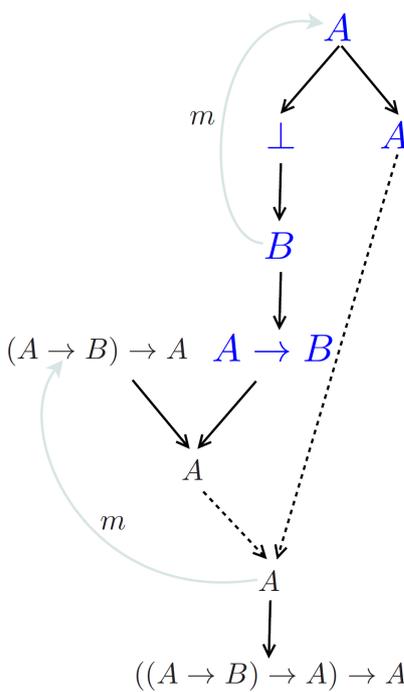


Figura 39 – N-Grafo para a lei de Peirce é rejeitado pela meta-condição.

O Teorema *Trip* em MLL^- mostra como computar o império de uma fórmula na *proof-net* por meio de *trips* (GIRARD, 1987). Com a correspondência entre *trips* e os grafos de chaveamentos (DANOS; REGNIER, 1989), é possível computar em tempo linear construindo um meta-chaveamento principal dinamicamente (BELLIN; WIELE, 1995):

1. parta de uma ocorrência de fórmula A e proceda para cima;
2. ao encontrar um link de contração (expansão) a partir da conclusão (premissa) do link, o meta-chaveamento escolhe arbitrariamente uma das arestas para remover;
3. ao chegar a um link de contração (expansão) a partir de uma premissa (conclusão) do link, o meta-chaveamento remove a aresta do link que liga a conclusão (premissa) a esta fórmula;
4. ao visitar um link $\frac{Y}{X \rightarrow Y}$ por $X \rightarrow Y$, o meta-chaveamento remove qualquer uma das arestas deste link;
5. ao passar por um link $\frac{Y}{X \rightarrow Y}$ por $X (Y)$, o meta-chaveamento remove a aresta que liga esta fórmula a $X \rightarrow Y$.

Esse procedimento computa eA^\wedge . Para obtermos eA_\vee , basta iniciar descendo por A . Então o custo para computar os impérios do norte e do sul de todas as fórmulas é $O(n^2)$, onde n é o número de ocorrências de fórmulas do N-Grafo. Com os impérios do norte e do sul em mãos, podemos computar o território de um link $\rightarrow -I$ de acordo com a Definição 32: o caso base é $O(1)$, enquanto os passos *cima* e *baixo* precisam consultar se A pertence a um determinado império.

Se para cada ocorrência de fórmula for usada uma lista para guardar seus elementos do império do norte e outra para o império do sul, então uma consulta é feita em $O(n)$. Uma vez que o território pode crescer e incluir todas as fórmulas do N-Grafo, os passos *cima* e *baixo* podem executar um total de até n vezes. Então o território de um link pode ser calculado em $O(n^2)$. Uma vez que a Definição 33 verifica todos os links $\rightarrow -I$, concluímos que essa validação pode ser feita em $O(n^3)$.

4.3.3 Completude e sequentização

Antes de procedermos com a prova de completude, vejamos um lema importante para a mesma:

Lema 20. *Seja N um N-Grafo com apenas uma conclusão A , então qualquer sub-N-Grafo que possua A deve ter apenas uma porta inferior (o próprio A).*

Demonstração. Seja N_1 um sub-N-Grafo de N que possui A e também outra porta inferior B . Como B é uma conclusão de N_1 , temos $A \in eB^\wedge$ (em ambos N e N_1). Dado que B não é uma conclusão de N , deve ser a premissa de alguma fórmula B' , onde $B' \in N$ e $B' \notin N_1$ (pois B é uma porta inferior de N_1). Uma vez que A é a única conclusão de N , podemos descer de B para B' , de B' para uma conclusão de B'' e assim sucessivamente, seguindo a direção das arestas, até eventualmente chegarmos a A . Nesse caminho a direção das arestas é respeitada, por conseguinte ele existe em algum meta-chaveamento S .

Desde que $A \in eB^\wedge$ e em $S(N)$ também temos um caminho de B até A sem passar por B' , obtemos um ciclo em $S(N)$: contradição, portanto a hipótese de que N_1 possui outra porta inferior deve ser falsa. \square

Teorema 2 (Completeness). *Dada uma derivação Π de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ em LJ' , é possível construir um N-Grafo intuicionista $NG(\Pi)$ cujos elementos $PREMIS(NG(\Pi))$ e $CONC(NG(\Pi))$ estão em correspondência um-para-um com as ocorrências de fórmula A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m , respectivamente.*

Demonstração. Procedemos por indução na estrutura de Π conforme a prova de completez do sistema original (OLIVEIRA, 2001), porém aqui adotamos $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$.

1. Π consiste de um axioma da forma $A \vdash A$: então $NG(\Pi)$ é o vértice A .
2. Π é obtido de Π_1 por $\wedge L_1$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_2, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash B_1, \dots, B_m}{A_2, \dots, A_n, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_m} \wedge L_1$$

Pela hipótese de indução temos $NG(\Pi_1)$. $NG(\Pi)$ é construído adicionando um link $\wedge - E_1$ a $NG(\Pi_1)$ de acordo com Figura 40. Se $NG(\Pi_1)$ é um N-Grafo intuicionista, então é imediato que $NG(\Pi)$ também satisfaz a meta-condição.

3. Π é obtido de Π_1 por $\wedge L_2$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_2, \dots, A_n, \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_m}{A_2, \dots, A_n, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_m} \wedge L_2$$

Este caso segue do 2. Apenas substituímos o link $\wedge - E_1$ pelo $\wedge - E_2$.

4. Π é obtido de Π_1 e Π_2 por $\wedge R$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A'_1, \dots, A'_i \vdash \mathbf{A}, B'_1, \dots, B'_l \quad \Pi_2 \quad C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{B}, D_1, \dots, D_j}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \wedge R$$

Esse caso já foi visto como um contraexemplo para a primeira meta-condição intuicionista (QUISPE-CRUZ et al., 2014). Novamente pela hipótese de indução

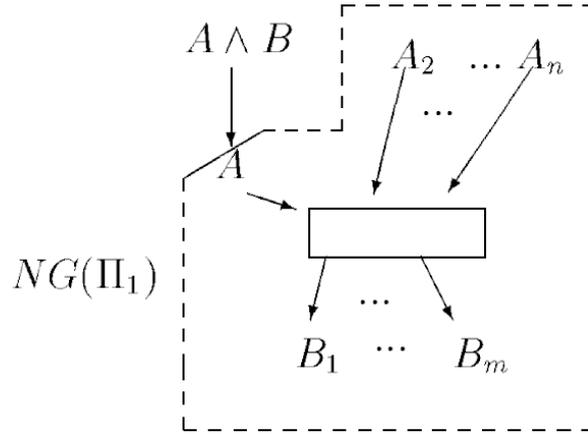


Figura 40 – Prova de completude para $\wedge L_1$ (OLIVEIRA, 2001).

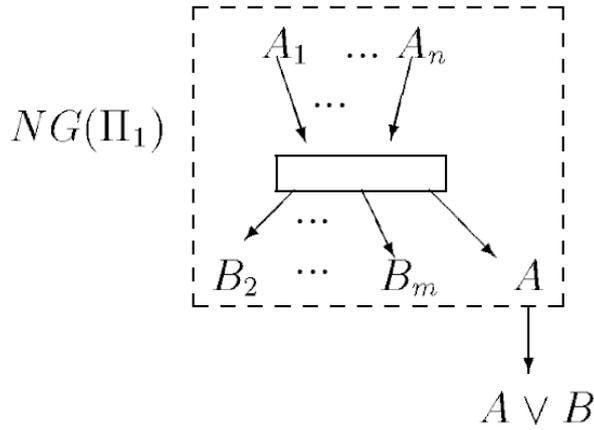


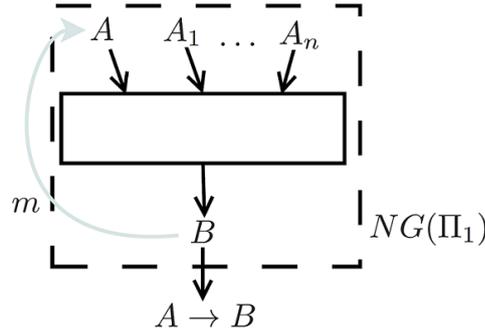
Figura 41 – Prova de completude para $\vee R_1$ (OLIVEIRA, 2001).

temos dois N-Grafos intuicionistas $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$, os quais são usados para formar $NG(\Pi)$ (Figura 26). Como o território cresce o mínimo possível, nenhum território de link $\rightarrow -I$ em $NG(\Pi_1)$ ou $NG(\Pi_2)$ será modificado quando os dois N-Grafos forem reunidos para construir $NG(\Pi)$ pelo link $\wedge -I$, ou seja, se $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$ são N-Grafos que atendem a Definição 33, então $NG(\Pi)$ também será um N-Grafo intuicionista.

5. Π é obtido de Π_1 por $\vee R_1$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A}, B_2, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m} \vee R_1$$

Pela hipótese de indução chegamos a $NG(\Pi_1)$ e para $NG(\Pi)$ adicionamos um link $\vee -I_1$ de acordo com a Figura 41. Se $NG(\Pi_1)$ é um N-Grafo intuicionista, então é simples verificar que $NG(\Pi)$ também é.


 Figura 42 – Prova de completude para $\rightarrow R$.

6. Π é obtido de Π_1 por $\vee R_2$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m} \vee R_2$$

Similar ao caso 5. Apenas troca-se o link $\vee - I_1$ pelo $\vee - I_2$.

7. Π é obtido de Π_1 e Π_2 por $\vee L$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A'_1, \dots, A'_i, \mathbf{A} \vdash B'_1, \dots, B'_l \quad \Pi_2 \quad C_1, \dots, C_k, \mathbf{B} \vdash D_1, \dots, D_j}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \vee L$$

Esse caso já foi discutido como contraexemplo da Definição 30 e serviu como motivação para a definição de território. Conforme feito antes, construímos $NG(\Pi)$ ligando $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$ por meio de um link $\vee - E$ (Figura 32).

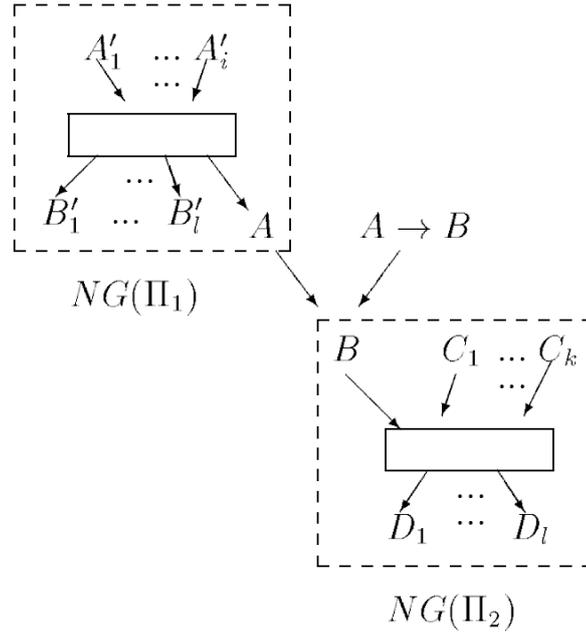
8. Π obtido de Π_1 por $\rightarrow R$:

$$\frac{\Pi_1 \quad \mathbf{A}, A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow R$$

Diferentemente do que acontece no cálculo LK, aqui Π_1 deve possuir apenas uma conclusão. Pela hipótese de indução temos um N-Grafo intuicionista $NG(\Pi_1)$, ao qual adicionamos um link $\rightarrow - I$ segundo a Figura 42 a fim de chegarmos a $NG(\Pi)$. É preciso provar que $NG(\Pi)$ também é um N-Grafo intuicionista. Dado que ele apresenta apenas uma conclusão ($A \rightarrow B$), aplicamos o Lema 20 para concluirmos que $tA \rightarrow B$ também possui apenas uma conclusão, portanto $NG(\Pi)$ satisfaz a meta-condição intuicionista.

9. Π é obtido de Π_1 e Π_2 por $\rightarrow L$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A'_1, \dots, A'_i \vdash \mathbf{A}, B'_1, \dots, B'_l \quad \Pi_2 \quad C_1, \dots, C_k, \mathbf{B} \vdash D_1, \dots, D_j}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \rightarrow L$$


 Figura 43 – Prova de completude para $\rightarrow L$ (OLIVEIRA, 2001).

A hipótese de indução nos fornece $NG(\Pi_1)$ e $NG(\Pi_2)$. Reunimos os dois com um link $\rightarrow -E$ (Figura 43) para formarmos $NG(\Pi)$. Mais uma vez podemos concluir que $NG(\Pi)$ é um N-Grafo intuicionista apenas por causa da meta-condição com território. Note que se para algum link $\rightarrow -I$ para cuja fórmula principal $X \rightarrow Y$ em $NG(\Pi_2)$ tivermos $B \in tX \rightarrow Y$, então em $NG(\Pi)$ $tX \rightarrow Y$ permanecerá o mesmo (não crescerá por A e $A \rightarrow B$).

Porém se tivéssemos usado a meta-condição com império, então pela condição 2c do Lema 3, se $B \in eX \rightarrow Y^\wedge$, teríamos $A \in eX \rightarrow Y^\wedge$ e a partir da ocorrência de fórmula A o império do norte de $X \rightarrow Y$ cresceria e adicionaria todas as conclusões de $NG(\Pi_1)$. Isso quebraria a meta-condição com território. Este caso também é um contraexemplo para a Definição 26 uma vez que pode haver um caminho de A'_i para B'_j (os quais estão em $NG(\Pi_1)$) sem passar pelo link $\rightarrow -I$ de $X \rightarrow Y$ (em $NG(\Pi_2)$).

10. Π é obtido de Π_1 por WL:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m}{\mathbf{A}, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m} WL$$

Da hipótese de indução temos $NG(\Pi_1)$. Aqui há dois cenários simples:

- $\{A_2, \dots, A_n\}$ tem pelo menos um elemento: escolhemos algum A_i e adicionamos um \top – *simple weak* e um \top – *focussing weak* conforme mostramos na Figura 44 para chegarmos a $NG(\Pi)$.

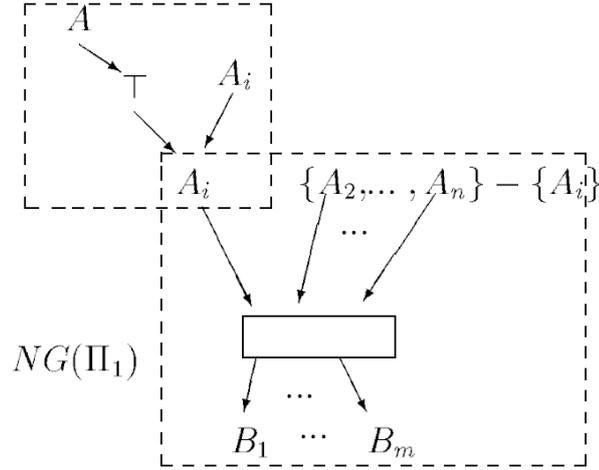


Figura 44 – Prova de completude para enfraquecimento à esquerda (OLIVEIRA, 2001).

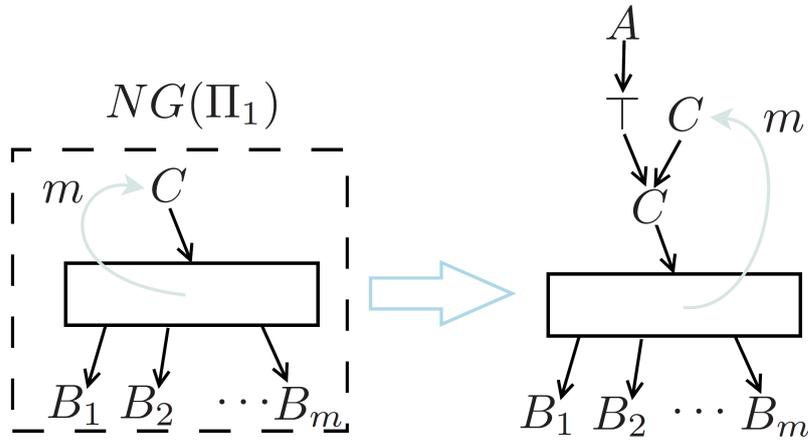


Figura 45 – Prova de completude para enfraquecimento à esquerda sem premissas.

- $\{A_2, \dots, A_n\}$ é vazio: $NG(\Pi_1)$ deve ter pelo menos uma ocorrência de \top em $PREMIS(NG(\Pi_1))$ ou pelo menos uma hipótese descartada C . Para o primeiro apenas adicionamos uma aresta (A, \top) a alguma ocorrência \top , enquanto para o segundo procedemos conforme ilustramos na Figura 45.

É imediato verificar que o resultado é sempre um N-Grafo intuicionista.

11. Π é obtido de Π_1 por WR:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_n \vdash B_2, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A}, B_2, \dots, B_m} WR$$

Este caso é similar ao anterior. A hipótese de indução nos fornece $NG(\Pi_1)$. Se $\{B_2, \dots, B_m\}$ é vazio, então adicionamos um link \perp – *simple weak* a alguma ocorrência \perp em $CONC(NG(\Pi_1))$; senão, escolhemos algum B_i , anexamos a ele um \perp – *defocussing weak* e em seguida um \perp – *simple weak* (Figura 46).

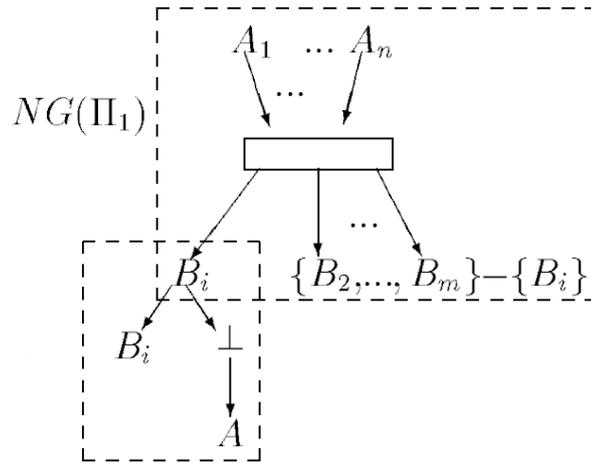


Figura 46 – Prova de completez para enfraquecimento à direita (OLIVEIRA, 2001).

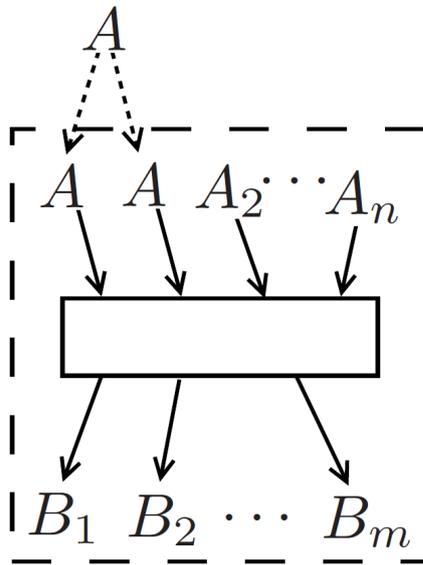


Figura 47 – Prova de completez para contração à esquerda.

12. Π é obtido Π_1 por CL:

$$\frac{\Pi_1 \quad \mathbf{A}, \mathbf{A}, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m}{\mathbf{A}, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_m} CL$$

Pela hipótese de indução temos $NG(\Pi_1)$. Chegamos a $NG(\Pi)$ adicionando um novo vértice A e uma expansão a partir dele (Figura 47). Como todo meta-chaveamento associado a $NG(\Pi_1)$ é uma árvore, $NG(\Pi)$ também será um N-Grafo. Esse link de expansão não afeta a meta-condição intuicionista.

13. Π é obtido de Π_1 por CR:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m} CR$$

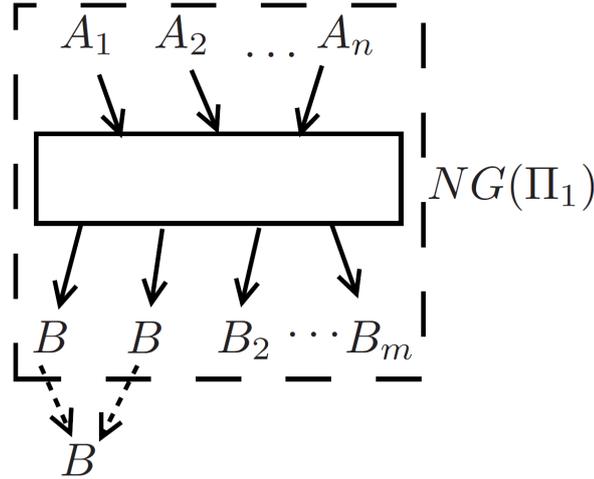


Figura 48 – Prova de completude para contração à direita.

Este caso é análogo ao anterior: aqui adicionamos um novo vértice B e anexamos a ele uma contração a partir das duas ocorrências de fórmula já existentes (Figura 48).

□

Agora enunciamos o teorema da sequentização e exibimos a tentativa de prová-lo aplicando a estratégia aplicada no Teorema 1. Como veremos, há um empecilho quando tentamos sequentizar um N-Grafo intuicionista diretamente para uma derivação em LJ' . Então na seção seguinte veremos como superar isso.

Teorema 3 (Sequentização). *Dado um N-Grafo intuicionista N , existe uma derivação $SC(N)$ em LJ' de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ cujas ocorrências de fórmula A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m estão em correspondência um-para-um com os elementos de $PREMIS(N)$ e $CONC(N)$, respectivamente.*

Demonstração. (Incompleta) Procedemos por indução no número de links de N , conforme o Teorema 1.

1. N não apresenta link algum (há apenas um vértice v rotulado com A): é imediato. $SC(N)$ é $A \vdash A$.
2. N tem apenas um link: como N é um N-Grafo intuicionista, esse link não é uma contração, expansão, nem $\rightarrow -I$. Esse caso é similar ao clássico. A única diferença aqui é a ausência do link \top - link.
3. N possui um link inicial de expansão (a premissa do link é uma premissa de N): aplicamos o mesmo procedimento do caso 3 no Teorema 1, pois uma expansão aplicada a uma premissa de N não afeta a meta-condição intuicionista.

4. N tem um link de contração final (a conclusão do link é uma conclusão de N): é análogo à expansão e aplicamos uma contração à esquerda. Novamente a meta-condição intuicionista não é afetada.
5. N apresenta um link $\rightarrow -I$ final (a principal conclusão do link é uma conclusão de N): se a principal conclusão do link for a única conclusão de N (como Figura 42), então aplicamos a hipótese de indução para construir uma derivação Π terminando com $A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$. $SC(N)$ é obtido por $\rightarrow -R$:

$$\frac{\Pi \quad A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow -R$$

O problema ocorre quando N possui mais de uma conclusão, pois LJ' restringe a aplicação da regra $\rightarrow -R$, o que proíbe a remoção do link $\rightarrow -I$ para invocar a hipótese de indução. Por exemplo, no N-Grafo da Figura 31 há dois links finais $\rightarrow -I$ e não podemos remover nenhum deles. Se fizermos isso, conseguimos apenas uma derivação *clássica* no cálculo de seqüentes para N . O movimento correto neste exemplo seria remover o link $\vee -E$ inicial, aplicar a hipótese de indução a N_1 e N_2 e juntá-los com a regra do corte, mas não temos um procedimento geral para este caso.

6. N possui mais de um link, porém nenhuma expansão inicial, nenhuma contração final e nenhum link $\rightarrow -I$ final: esse caso deveria ser o mais difícil, entretanto segue diretamente do caso clássico. Note que todo N-Grafo intuicionista também é um N-Grafo “clássico”. Conforme provado no caso 6 do Teorema 1, N deve ter uma ocorrência de fórmula maximal A tal que $eA^\wedge \cup eA_\vee = N$. Os impérios do norte e do sul de A são N-Grafos “clássicos”, todavia eles também seriam intuicionistas?

Eles não seriam caso não respeitassem a meta-condição intuicionista, entretanto se eA^\wedge ou eA_\vee não respeitarem, então N também não seria um N-Grafo intuicionista: contradição. Então ambos são N-Grafos intuicionistas e nós podemos aplicar a hipótese de indução a eles e, como no caso clássico, $SC(N)$ é obtido pela regra do corte:

$$\frac{SC(eA^\wedge) \quad SC(eA_\vee)}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2} \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$$

4.4 N-Grafos com dependências

Na seção anterior não foi possível sequentizar os N-Grafos intuicionistas para LJ'. A dificuldade surge quando N possui mais de uma conclusão e uma delas vem de um link

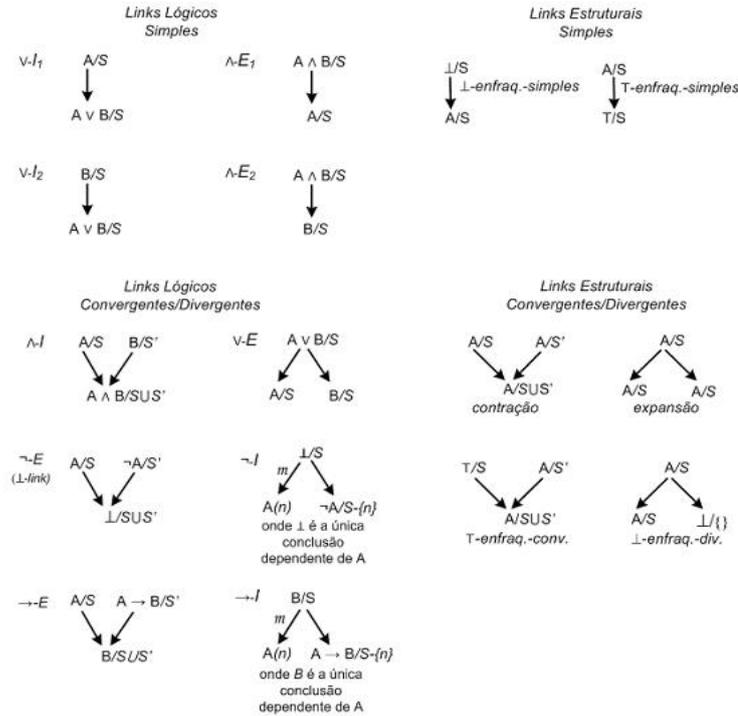


Figura 49 – Links da proposta de N-Grafos baseados em FIL (QUISPE-CRUZ, 2009).

$\rightarrow -I$. Uma vez que LJ' exige apenas uma fórmula no lado direito do sequente para poder aplicar a regra $\rightarrow R$, o link final chaveável da implicação não pode ser removido para invocar a hipótese de indução.

Por esse motivo, a estratégia adotada para sequentizar a versão clássica para LK não funcionou com a intuicionista para LJ' . Com o conceito de território apenas foi provada a completude do sistema por meio de um mapeamento para o cálculo de Maehara. Para superar o caso do N-Grafo com mais de uma conclusão e um link $\rightarrow -I$ final, proporemos rótulos nas fórmulas, os quais representarão a ideia de dependência entre hipóteses e conclusões conforme vistos em c-LD e FIL.

4.4.1 N-Grafos baseados em FIL

Marcela Quispe Cruz propôs em seu mestrado a ideia de um sistema com os N-Grafos para a lógica intuicionista baseado em FIL (QUISPE-CRUZ, 2009). São utilizados o mesmo conceito de grafo de prova e o conjunto de links da versão intuicionista (sem o link do terceiro excluído), entretanto há também um mecanismo de rotulagem: cada premissa possui um índice distinto e os outros vértices guardam um conjunto de índices, o qual registra as premissas de que dependem (Figura 49).

As derivações seriam construídas na maneira habitual e depois adicionados os rótulos, os quais participam apenas do critério de corretude para verificar se uma derivação clássica também é intuicionista. Isso seria feito examinando se todo descarte de hipótese

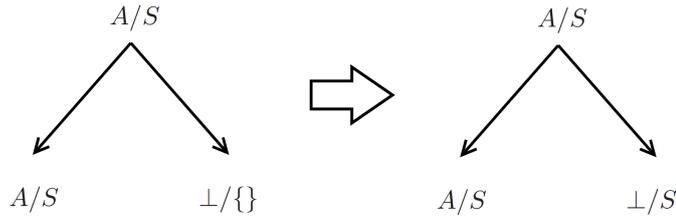


Figura 50 – Substituição do link de enfraquecimento divergente.

respeita a condição da regra $\rightarrow R$ de FIL.

Definição 34 (Critério de corretude (QUISPE-CRUZ, 2009)). *Uma derivação no sistema é válida se:*

- *atende ao critério original dos N-Grafos (Definição 29);*
- *toda premissa e hipótese cancelada são rotuladas por um natural distinto n e todos os demais vértices por um conjunto de números naturais conforme ilustramos na Figura 49.*

Após a atribuição dos índices e dependências, para cada link com meta aresta $\{(u, v)^m, (u, w)\}$, o vértice u deve ser a única conclusão dependente de v quando o link foi aplicado no N-Grafo em construção. Na Seção 4.2 já vimos que há problemas com o conceito de chaveamento de expansão.

4.4.2 Nova proposta

Discutiremos agora como usar as dependências e validá-las corretamente. No Capítulo 2 anterior vimos dois mecanismos semelhantes para examinar se uma introdução da implicação no lado direito do sequente era intuicionisticamente válida: conexões em c-LD e índices e dependências em FIL. A primeira mudança na proposta de Marcela Quispe Cruz é relativa ao enfraquecimento.

Conforme apresentado na Seção 2.4, Kashima nos deixa livres para conectarmos ou não uma fórmula de enfraquecimento no antecedente (consequente) com outras no consequente (antecedente), enquanto no sistema FIL é exigido que uma premissa enfraquecida se conecte a pelo menos uma conclusão e que uma conclusão enfraquecida não dependa de nenhuma premissa (regras WL e WR na Tabela 4).

Na nossa solução vamos propagar as conexões/dependências pelas fórmulas enfraquecidas, logo o link \perp – *enfraquecimento* – *divergente* da Figura 49 precisa ser alterado, além disso adotaremos o formato da Figura 50. Outro detalhe (apenas de notação) será a utilização do conjunto de dependências também para as premissas: uma premissa A com índice n será representada como $A(n)/\{n\}$, ou seja, seu conjunto de dependência é $\{n\}$

Definição 35 (meta-condição intuicionista com dependência). *Um N-Grafo N sem o link do terceiro excluído atende à meta-condição intuicionista com dependência quando, após a aplicação dos rótulos conforme exibimos na Figura 49 (no caso do link de enfraquecimento divergente, Figura 50) com um índice distinto para cada premissa e hipótese cancelada, para cada link com meta-aresta $\{(u/S, v(n)/\{n\})^m, (u/S, w/S - \{n\})\}$:*

- apenas as fórmulas do território de w possuem n no seu conjunto de dependência;
- o território de w apresenta só uma conclusão (o próprio w).

Em outras palavras, considere uma ocorrência de fórmula B/S_B . Então o descarte da hipótese $A(n)/\{n\}$ em B/S_B será aceito pela Definição 35 se todas as fórmulas que apresentarem n nos seus conjuntos de dependência estiverem no território de $A \rightarrow B/S_B - \{n\}$. Para ilustrar melhor, exibiremos alguns dos N-Grafos da Seção 4.3 rotulados.

O N-Grafo da Figura 30 não era aceito pela meta-condição intuicionista com território. Na Figura 51 ele aparece rotulado e observamos por que o descarte das duas hipóteses é inadequado na lógica intuicionista: quando descartamos $B(1)/\{1\}$ em $A/\{1, 2\}$, existem fórmulas fora do território de $B \rightarrow A/\{2\}$ (em azul) que ainda dependem de $B(1)/\{1\}$. Por motivo semelhante o cancelamento de $A(2)/\{2\}$ também é inadequado.

O correspondente do contra-exemplo da meta-condição intuicionista com império (Figura 31) é exibido na Figura 52. Nenhuma fórmula fora do território de $C \rightarrow A/\{2\}$ (representado pelo sub-N-Grafo N_1 , em azul) depende da hipótese cancelada $C/\{1\}$, logo a meta-condição da Definição 35 valida esse descarte.

O mesmo também acontece com o descarte de $B(3)/\{3\}$: no território de $B \rightarrow D/\{2\}$ (representado por N_2 , em verde) há apenas uma conclusão e todas as fórmulas com o índice 3 no conjunto de dependência estão em N_2 .

Os rótulos também deixam claro o porquê da lei de Perice não ser aceita pela lógica intuicionista (Figura 53): ao descartar a hipótese $A(2)/\{2\}$ em $B/\{2\}$, há outra conclusão ($A/\{2\}$) do território de $A \rightarrow B/\{\}$ (destacado em azul) ainda dependente. Como esta fórmula é usada para uma contração, a conclusão da prova $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A/\{2\}$ ainda “depende” de $A(2)/\{2\}$.

Nos exemplos vistos de N-Grafos rotulados a meta-condição intuicionista com território (Definição 33) classificou da mesma maneira que a meta-condição com dependência (Definição 35) fez com os respectivos N-Grafos rotulados. Vamos provar que de fato há uma relação entre as definições.

Lema 21. *Seja N um N-Grafo intuicionista, então o resultado da aplicação dos rótulos a N satisfaz a Definição 35.*

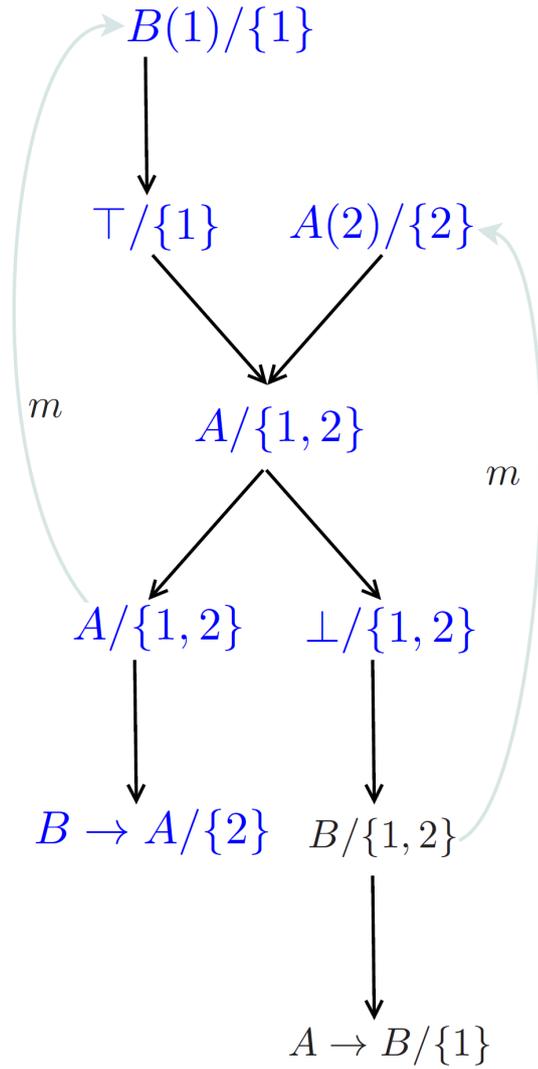


Figura 51 – N-Grafo da Figura 30 rotulado.

Demonstração. Suponha que N não satisfaz a meta-condição da dependência. Como N satisfaz a Definição 33, deve haver um link de meta-aresta cancelando uma hipótese $A(n)/\{n\}$ numa ocorrência B/S_B tal que existe uma fórmula X/S_X fora do território de $A \rightarrow B/S_B - \{n\}$ e $n \in S_X$.

Ao olharmos para todos os tipos de links dos N-Grafos com dependência (Figura 49 e Figura 50), percebemos que as dependências se propagam das premissas seguindo a direção das arestas (diferente, por exemplo, dos impérios, os quais não respeitam isso).

Pelo caso base da definição de território temos $A(n)/\{n\} \in tA \rightarrow B$. Tentemos partir de $A(n)/\{n\}$ e verificar se é possível sair de $tA \rightarrow B$ e n manter-se no conjunto de dependências: considere $\frac{\dots C/S_C \dots}{\dots D/S_D \dots}$ um link tal que $C \in tA \rightarrow B$, $n \in S_C$ e $D \notin tA \rightarrow B$. Uma vez que as dependências seguem a direção das arestas, $n \in S_D$ porque a única forma de remover n é cancelando a hipótese $A(n)$. Dado que $D \notin tA \rightarrow B$, C é uma conclusão de $tA \rightarrow B$ e $n \in S_D$.

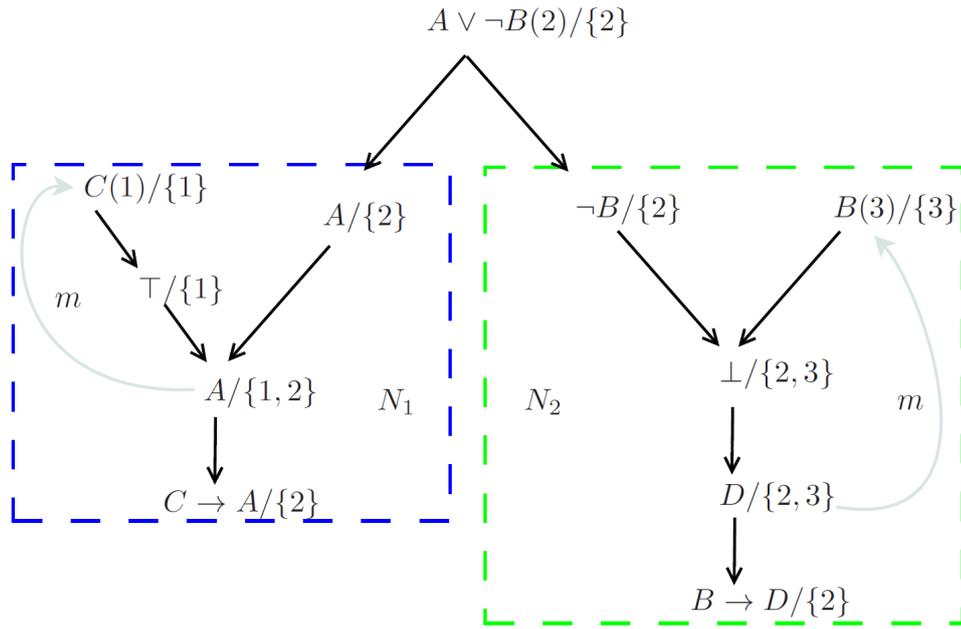


Figura 52 – Os rótulos deixam claro que as implicações da Figura 31 foram feitas corretamente.

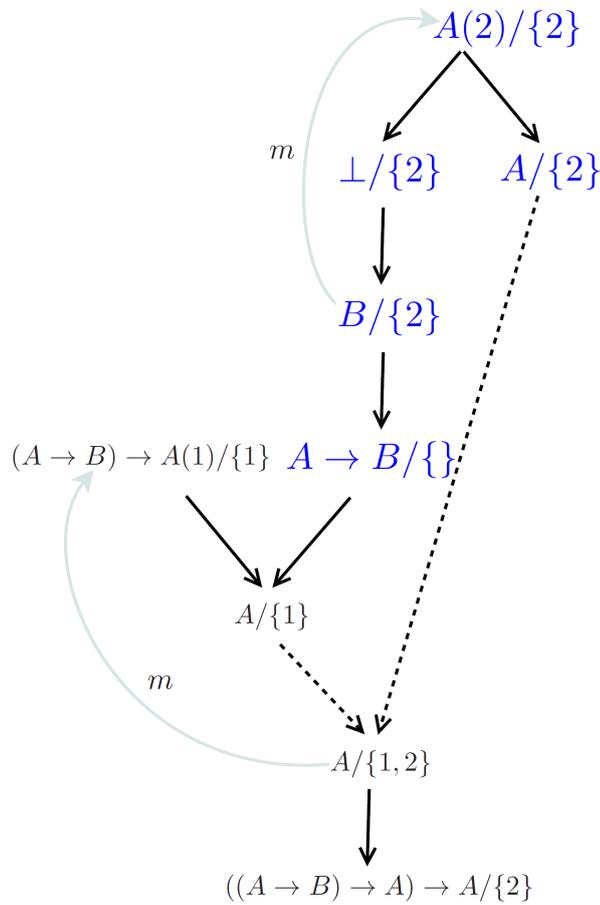


Figura 53 – N-Grafo para lei de Peirce rotulado.

Isso quebra a meta-condição intuicionista, pois $tA \rightarrow B$ só pode ter uma conclusão (o próprio $A \rightarrow B$) e sabemos que $n \notin S_B - \{n\} = S_{A \rightarrow B}$, logo N também satisfaz a meta-condição intuicionista da dependência. \square

Teorema 4 (Sequentização). *Dado um N-Grafo intuicionista com dependência N , há uma derivação em cálculo de sequentes $SC(N)$ de $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$ em c-LD cujas ocorrências de fórmulas A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_m estão em correspondência um para um com os elementos de $PREMIS(N)$ e $CONC(N)$, respectivamente, e $A_i \sim B_j$ se e somente se o índice da premissa A_i pertence ao conjunto de dependência de B_j .*

Demonstração. A prova é por indução no número de links de N e agora a estratégia adotada no Teorema 1 funciona.

1. N não possui link algum (há apenas um vértice v , representando uma fórmula $A(n)/\{n\}$): é imediato. $SC(N)$ é $A \vdash A$, onde $A \sim A$.
2. N tem apenas um link: como N é um N-Grafo intuicionista com dependência, este link não pode ser uma contração, expansão, nem $\rightarrow -I$. Todos os outros links podem ser transformados em uma derivação em c-LD. Se comparamos a Figura 49 e a Figura 50 com as regra da Seção 2.4.1, notamos que os links refletem as regras de c-LD. No Apêndice A mostramos como transformar todo N-Grafo intuicionista com dependência com um único link num sequente em c-LD.
3. N apresenta um link de expansão inicial (a premissa do link é uma premissa de N): seja $l = \{(A_p/\{p\}, A^{c1}/\{p\}), (A_p/\{p\}, A^{c2}/\{p\})\}$ o referido link. Se removermos l (o vértice $A_p/\{p\}$ e as duas arestas que partem dele), então A^{c1} e A^{c2} passarão a ser premissas do grafo-de-prova resultante G' (mesma estrutura da Figura 47). Todo meta-chaveamento de G' será uma árvore, mas é preciso atribuir índices distintos para A^{c1} e A^{c2} (essas fórmulas são premissas de G') e assim aplicar novos rótulos ao grafo-de-prova. Seja N' o resultado deste processo.

Como $A_p/\{p\}$ não era uma hipótese cancelada, N' não apresenta problemas quanto à meta-condição intuicionista com dependência. Pela hipótese de indução há uma derivação Π em c-LD para N' terminando em $\mathbf{A}^{c1}, \mathbf{A}^{c2}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$. Chegamos a $SC(N)$ com uma contração à esquerda:

$$\frac{\mathbf{A}^{c1}, \mathbf{A}^{c2}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m}{\mathbf{A}, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m} \begin{array}{c} \Pi \\ CL \end{array}$$

Uma vez que o link de expansão atribui o mesmo conjunto de dependência da premissa para as conclusões (Figura 49), então em $SC(N)$ de fato temos $A \sim B_j \leftrightarrow A^{c1} \sim B_j$ ou $A^{c2} \sim B_j$ para qualquer $B_j \in CONC(N)$.

4. Há um link de contração final em N (a conclusão do link é uma conclusão de N): este caso é mais simples que a expansão. Considere $l = \{(B^{p1}/S_1, B/S_1 \cup S_2), (B^{p2}/S_2, B/S_1 \cup S_2)\}$ a contração final. Chamemos de N' o resultado da remoção de l juntamente com a conclusão da contração (semelhante à Figura 48). Todo meta-chaveamento de N' é uma árvore e esse link não altera a meta-condição intuicionista com dependência (nenhum território de um link $\rightarrow -I$ adicionaria a conclusão da contração porque ela é uma conclusão de N e assim o território teria mais de uma conclusão), logo da hipótese de indução temos uma derivação Π terminando em $A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}^{p1}, \mathbf{B}^{p2}, \dots, B_m$. Chegamos a $SC(N)$ com uma contração à direita:

$$\frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}^{p1}, \mathbf{B}^{p2}, \dots, B_m} \xrightarrow{CR} \frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{B}, \dots, B_m}$$

O link de contração atribui $S_1 \cup S_2$ ao conjunto de dependência de B . Isso está de acordo com a regra de contração de c-LD, a qual exige que $A_i \sim B \leftrightarrow A_i \sim B^{p1}$ ou $A_i \sim B^{p2}$ para todo $A_i \in PREMIS(N)$.

5. Existe um link $\rightarrow -I$ final em N (a conclusão principal do link é uma conclusão de N): este caso foi o obstáculo encontrado na tentativa de provar o Teorema 3, mas agora mostramos como usar as dependências, território e c-LD para superá-lo. Seja $l = \{(B/S_B, A(k)/\{k\})^m, (B/S_B, A \rightarrow B/S_B - \{k\})\}$ o link $\rightarrow -I$ final e N' o resultado da sua remoção (juntamente com o vértice de $A \rightarrow B$) de N .

Então N' é um N-Grafo intuicionista com dependência e pela hipótese de indução obtemos uma derivação Π para $A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m$. Como N atende à Definição 35, $tA \rightarrow B$ possui apenas uma conclusão e todas as fórmulas as quais possuem k no conjunto de dependência estão em $tA \rightarrow B$, portanto a única conclusão de N' onde k pode ocorrer é B . Dessa forma em Π temos que $A \not\sim B_j$ para $2 \leq j \leq m$ e isso nos permite usar a regra $\rightarrow R+$ para chegarmos a $SC(N)$:

$$\frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m} \xrightarrow{\rightarrow R+} \frac{\Pi}{A_1, \dots, A_n \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, B_2, \dots, B_m}$$

6. Embora haja mais de um link em N , nenhum deles é expansão inicial, nem contração e nem $\rightarrow -I$ finais: conforme já visto na tentativa de prova do Teorema 3, existe uma ocorrência de fórmula A tal que $wA = N$. O único detalhe a acrescentar seria, ao separar os dois N-Grafos dos impérios de A , aplicar um índice (inteiro) a A no império do sul porque esta fórmula é uma premissa de eA_\vee e computar novamente as dependências. Feito isso, usamos a regra do corte:

$$\frac{SC(eA^\wedge) \quad SC(eA_\vee)}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2} \text{CUT} \\ \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$$

Note que as exigências da regra do corte de c-LD são atendidas:

- as conexões no sequente inferior entre Γ_1 (Γ_2) e Δ_1 (Δ_2) são herdadas;
- não há conexões entre Γ_2 e Δ_1 , pois A é uma premissa de eA_\vee , sabemos que $eA^\wedge \cap eA_\vee = \{A\}$ e as dependências seguem a direção das arestas;
- para quaisquer fórmulas $\gamma_1 \in \Gamma_1$ e $\delta_2 \in \Delta_2$ temos $\gamma_1 \sim \delta_2 \Leftrightarrow (\gamma_1 \sim A$ no império do norte e $A \sim \delta_2$ no do sul.

□

Considere um N-Grafo intuicionista sem as dependências. Pelo Lema 21 podemos aplicar as dependências e o resultado irá atender à Definição 35. Com o Teorema 4 é possível obter uma derivação em c-LD no fragmento proposicional. Uma vez que esse fragmento é equivalente à lógica intuicionista proposicional (KASHIMA, 1991; PAIVA; PEREIRA, 2005), temos o corolário a seguir:

Corolário 5. *A proposição do Teorema 3 é verdadeira.*

4.5 Conclusão

Neste capítulo estudamos como obter uma versão intuicionista para os N-Grafos. Já havia uma, a qual se baseava em LJ' (QUISPE-CRUZ et al., 2014), mas descobrimos alguns problemas, como na prova de completude. Iniciamos uma busca por um novo critério de corretude adequado. O desafio era verificar se, num cálculo de múltipla conclusão em que a derivação é não-sequencial e a mesma representa várias derivações em cálculo de sequentes, toda vez que um conectivo “ \rightarrow ” é introduzido, o grafo de prova representa ao menos uma derivação no cálculo de sequentes com apenas uma fórmula no sucedente.

Tentamos usar o império do norte para validar a cardinalidade no momento de descarte das hipóteses (Definição 30). Essa estratégia mostrou-se falha e motivou a definição de um novo tipo de sub-N-Grafo inspirado nas *subnets* de MLL^- : o território de um link chaveável.

No Capítulo 2 vimos outras duas alternativas de cálculos de múltipla conclusão para a lógica intuicionista proposicional: c-LD e FIL. No lugar de restringir a cardinalidade do conseqüente no descarte de hipóteses, ambos usam o conceito de dependência entre fórmulas. Mais uma vez partimos da dissertação de mestrado de Marcela Quispe Cruz (QUISPE-CRUZ, 2009), onde havia a ideia de um sistema para N-Grafos baseados em FIL.

Juntamos os conceitos de dependência e território e chegamos a um critério de corretude (Definição 35) para N-Grafos com dependência.

Provamos como transformar qualquer derivação neste novo sistema numa equivalente em c-LD (Teorema 4). Uma vez que toda derivação nos N-Grafos intuicionistas pode ser traduzida em uma correspondente nos N-Grafos com dependência (Lema 21), concluímos pelo Corolário 5 que na verdade os conjuntos de dependência não são indispensáveis para validar a derivação porque a meta-condição intuicionista com território já é suficiente.

5 PROOF-NETS INTUICIONISTAS

5.1 Introdução

Conforme comentado brevemente na Seção 3.3, Robinson definiu um sistema de *proof-nets* para a lógica clássica proposicional ao adaptar os conceitos da abordagem de Girard para o fragmento MLL^- com o critério de Danos & Regnier. A surpresa principal do seu trabalho, como ele mesmo afirma, é que não há novidade alguma: as propriedades e provas definidas no sistema para a lógica linear são “traduzidas” para o seu sistema praticamente sem alterações (ROBINSON, 2003).

Uma diferença importante para os N-Grafos é que nas *proof-nets* para a lógica clássica as regras são inspiradas no cálculo de seqüentes, enquanto no Capítulo 3 vimos que nos N-Grafos as regras lógicas seguem o formato da dedução natural. Ainda assim mostraremos que a ideia utilizada para obter uma versão intuicionista no Capítulo 4 também se aplica às *proof-nets* de Robinson.

Isso comprova que a mesma é abstrata e versátil o suficiente e que os N-Grafos (assim como o sistema estudado neste capítulo) são vistos nesta tese apenas como uma ferramenta para o estudo das diferenças entre a lógica intuicionista e clássica sob uma perspectiva geométrica: considere o descarte da hipótese A em B para obtermos $A \rightarrow B$ numa derivação clássica não seqüencial com múltipla conclusão. Então nosso critério de corretude, a partir de propriedades geométricas, aceita a prova como intuicionista se na menor subderivação há apenas uma conclusão ($A \rightarrow B$).

Iniciamos com a versão original do cálculo (clássica). Em seguida utilizamos a mesma abordagem anterior: apresentamos o critério de corretude intuicionista e provamos a completude com um mapeamento para LJ' . Para a prova de corretude aplicamos rótulos, os quais são um recurso para a tradução para c-LD, e mostramos a correspondência entre eles e o critério de corretude intuicionista.

5.2 Sistema clássico

Os melhores resultados de *proof-nets* em lógica linear ocorrem com o fragmento multiplicativo. A conjunção aditiva (conectivo $\&$), por exemplo, requer a adoção de “caixas”: marcas de sincronização na *proof-net*, ou seja, momentos em que é restaurada a estrutura seqüencial da derivação (GIRARD, 1987). Como na lógica clássica não há restrição para as regras de contração e enfraquecimento, não existe distinção entre conectivos multiplicativos e aditivos.

$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge L$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'} \wedge R$
$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'} \vee L$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee R$
$\frac{}{\perp \vdash} \perp L$	$\frac{}{\vdash \top} \top R$

Tabela 7 – Regras multiplicativas.

Então Robinson adota a versão multiplicativa do cálculo de seqüentes como padrão para o seu sistema. A Tabela 7 apresenta algumas regras multiplicativas. As regras para os conectivos da implicação e negação permanecem como na Tabela 2, enquanto as demais (axioma, corte e estruturais) permanecem inalteradas (Tabela 3).

Uma diferença importante é que Girard usa fórmulas apenas no lado direito do seqüente. Assim a negação e a implicação não são tratados como conectivos primitivos, mas definidos indutivamente por meio dos demais (utilizando conjunção, disjunção e as leis de De Morgan). Robinson usa fórmulas dos dois lados do seqüente e isso será importante mais tarde ao definirmos uma versão para a lógica intuicionista, visto que esta não permite que um conectivo binário seja definido por meio de outros (nem todas as leis de De Morgan são aceitas por ela).

As ocorrências de fórmula estão inseridas em círculos, e marcadas com as letras L e R para indicarem que pertencem ao lado esquerdo ou direito do seqüente, respectivamente. Há uma regra no sistema para cada uma do cálculo de seqüentes, com a exceção das de permutação, para as quais não há nenhuma. Cada ocorrência de uma regra é representada por uma caixa. Há um direcionamento das arestas entre ocorrências de fórmulas e regras. As arestas partem das fórmulas que são premissas para a respectiva regra, da qual partem as arestas para as fórmulas que são conclusões.

5.2.1 Estruturas de prova

As definições formais são herdadas da lógica linear.

Definição 36 (estrutura de prova (ROBINSON, 2003)). *Uma estrutura de prova é um grafo finito direcionado bipartido cujas famílias de vértices são rotuladas como segue:*

- por uma regra do cálculo de seqüentes;

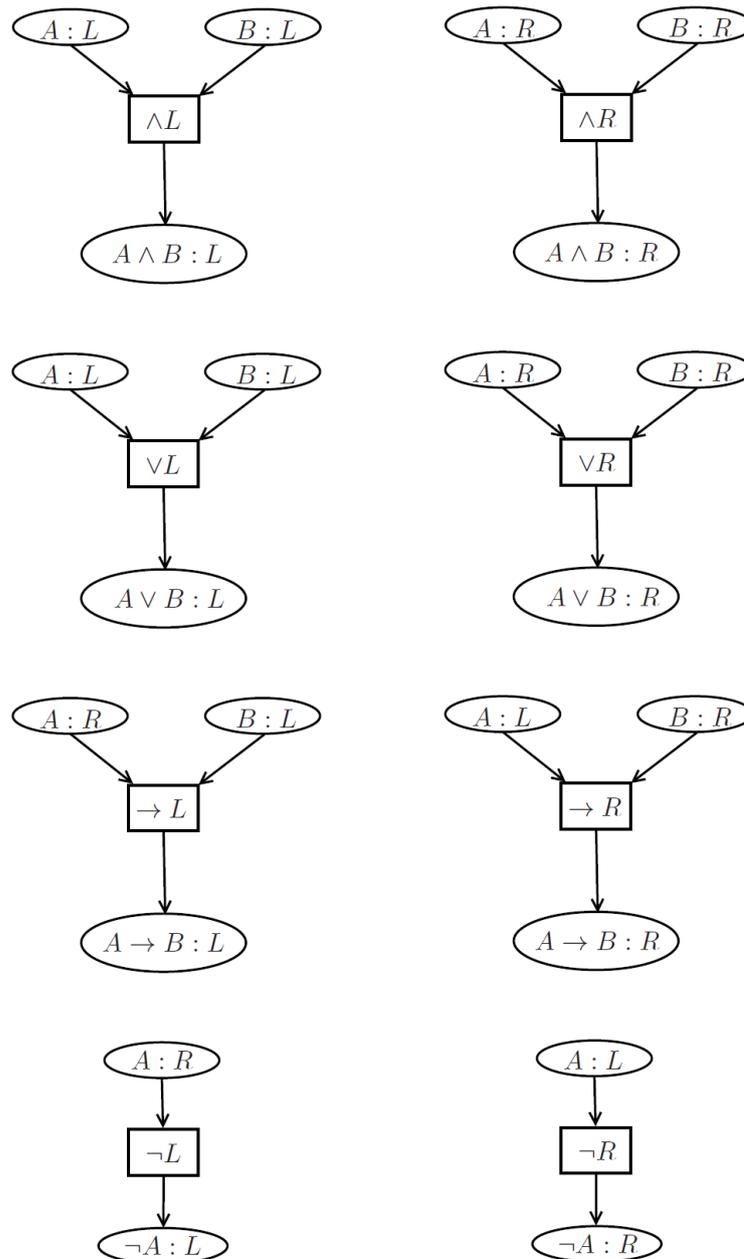


Figura 54 – Links lógicos.

- ou por uma fórmula proposicional, juntamente com a marca L ou R.

O grafo também deve atender às seguintes restrições:

1. os vértices adjacentes a cada vértice de regra devem formar grafos como os ilustrados na Figura 54 ou Figura 55;
2. cada nó com fórmula possui grau de entrada igual a um e grau de saída no máximo um.

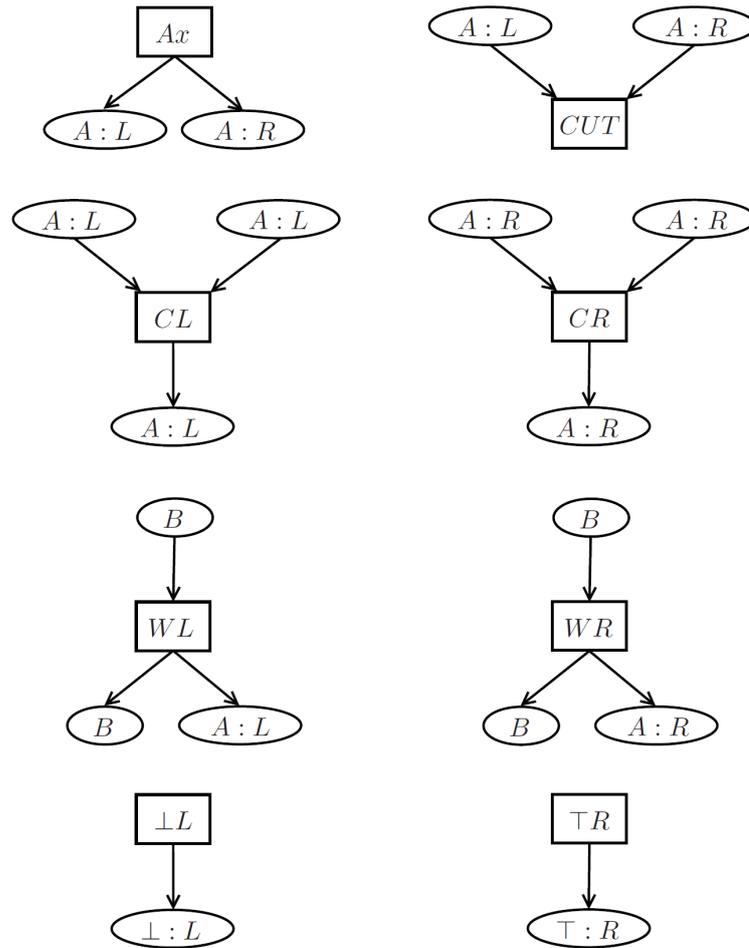


Figura 55 – Links estruturais e identidade.

Nos links de enfraquecimento exibidos na Figura 55, a fórmula B pode ser marcada por L ou R .

Definição 37 (premissa¹ e conclusão). *Um vértice de uma ocorrência de fórmula é uma premissa (conclusão) de uma proof-net quando possui grau de saída zero e é marcada por L (R).*

Definição 38 (subestrutura (ROBINSON, 2003)). *Uma subestrutura de uma estrutura de prova é um subgrafo desta que também é uma estrutura de prova.*

Definição 39 (porta (ROBINSON, 2003)). *Uma porta de uma subestrutura de prova é um vértice de uma ocorrência de fórmula na fronteira da subestrutura, ou seja, com grau de entrada igual a um e de saída igual a zero. Em outras palavras, uma porta é uma premissa ou conclusão da subnet.*

Considere uma ocorrência de fórmula A numa estrutura de prova. Para obtermos uma subestrutura com A , a condição 2 da Definição 36 exige que este vértice apresente

¹ A rigor uma *proof-net* possui apenas conclusões. Porém, aqui vamos chamar de premissa as conclusões que apresentam a marca L .

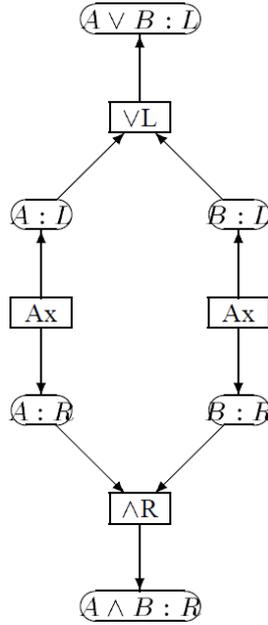


Figura 56 – Estrutura de prova para $A \vee B \vdash A \wedge B$ (ROBINSON, 2003).

grau de entrada um, o que nos obriga a subirmos e adicionarmos o nó da regra que possui A como conclusão. Então a condição 1 exige incluir as premissas desta regra (caso possua alguma). Aplicando a condição 2 a essas premissas, subimos também para as regras que as geram como conclusões e assim por diante. Como o link de axioma é o único sem premissa, esse processo só termina nele. Por isso todas as subestruturas são fechadas sob premissas hereditárias.

As estruturas de prova nem sempre representam derivações válidas (Figura 56). O critério de corretude classifica-as como válidas ou inválidas logicamente.

5.2.2 Critério de corretude

Definição 40 (chaveamento, nó chaveável (ROBINSON, 2003)). *Um chaveamento (Danos-Regnier) σ é a escolha da aresta de uma das premissas de cada um dos nós das regras $\wedge L$, $\vee R$, $\rightarrow R$, CL , CR . Dizemos que esses nós são chaveáveis.*

Definição 41 (grafo de chaveamento (ROBINSON, 2003)). *Considere R uma estrutura de prova e σ um chaveamento associado. Então o grafo (Danos-Regnier) de σ , $DR(R, \sigma)$, corresponde ao seguinte grafo não direcionado:*

- seus vértices são os vértices de fórmulas proposicionais de R ;
- suas arestas ligam conclusões dos nós de regras de R a hipóteses da seguinte maneira:
 - se a regra não for chaveável, então a conclusão é ligada às premissas;

- se a regra for chaveável, então a conclusão é ligada apenas à premissa escolhida por σ .

As exceções são os nós de axioma e corte, os quais unem as duas fórmulas proposicionais do link.

Definição 42 (*proof-net* (ROBINSON, 2003)). Uma estrutura de prova R é uma *proof-net* quando para todo chaveamento σ associado, $DR(R, \sigma)$ é acíclico e conexo (como um grafo não direcionado).

Definição 43 (*subnet* (ROBINSON, 2003)). Uma *subnet* de uma *proof-net* é uma subestrutura de prova que também é uma *proof-net*.

O que determina se um link deve ser chaveável? Robinson observa que a técnica de Danos & Regnier não depende da lógica envolvida: embora definida inicialmente para a lógica linear, também pode ser aplicada a outras lógicas, como as suas *proof-nets* e os N-Grafos, os quais foram inicialmente definidos para a lógica clássica. Considere, por exemplo, as regras da conjunção na Tabela 7 e os respectivos links na Figura 54.

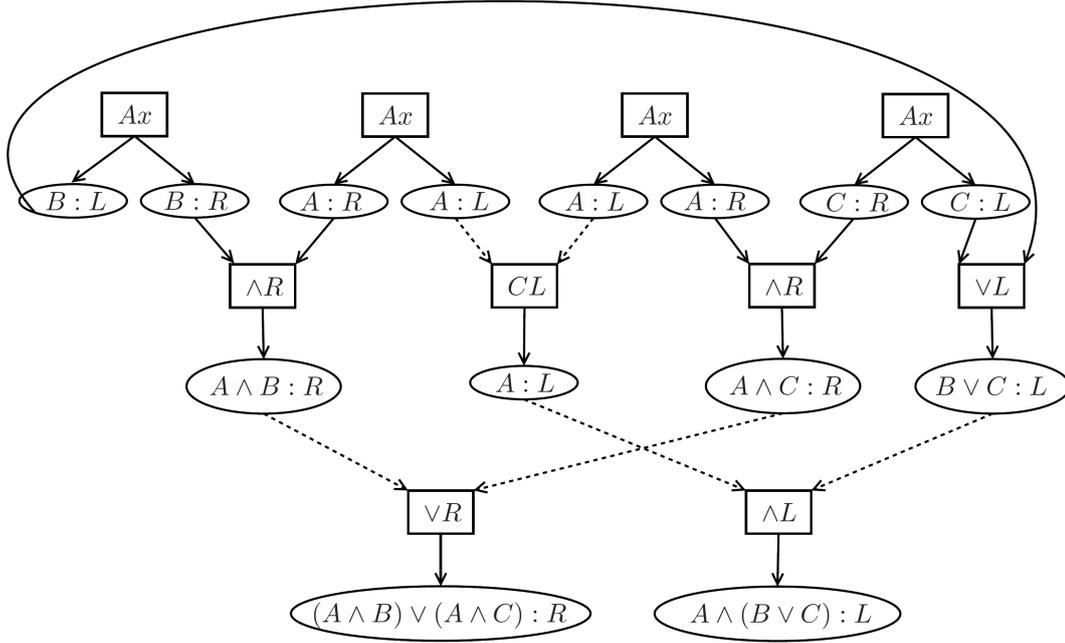
No cálculo de sequentes, as duas premissas (A e B) da regra $\wedge L$ provêm do mesmo sequente. Então numa derivação em *proof-nets*, ambas já devem estar previamente conectadas em todos os chaveamentos. Logo o link $\wedge L$ só pode ligar a conclusão a uma das premissas num chaveamento, caso contrário um ciclo seria formado. Portanto esse link deve ser chaveável.

Na regra $\wedge R$ o cenário é diferente. Note que as premissas A e B pertencem a sequentes distintos. Assim um link $\wedge R$ é aplicado para conectar duas derivações disjuntas. Se um chaveamento ligar $A \wedge B$ a apenas uma das premissas, não haverá um caminho da conclusão do link até a outra premissa. Por isso o link não deve ser chaveável.

Na Figura 57 exibimos uma *proof-net* correspondente ao N-Grafo da Figura 10. Assim como temos destacado as contrações e expansões nos N-Grafos, também exibimos as arestas dos links chaveáveis pontilhadas. Um ponto interessante são as ocorrências diferentes de expansões e contrações no N-Grafo em relação às contrações na *proof-net*, visto que Robinson adota regras multiplicativas para todos os conectivos. Para facilitar a visualização do critério de corretude e os ciclos válidos, todas as arestas dos links chaveáveis são desenhadas com pontilhados.

5.2.3 Subnets

Aqui apresentamos alguns conceitos e propriedades de *subnets*. Como muitas provas são análogas às de MLL^- (BELLIN; WIELE, 1995) e já foram adaptadas no Capítulo 3 aos N-Grafos, não as exibiremos.


 Figura 57 – Proof-net para $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Considere R_1 e R_2 subnet de uma proof-net R .

Lema 22 (União (ROBINSON, 2003)). $R_1 \cup R_2$ é uma subnet sse $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.

Lema 23 (Intersecção (ROBINSON, 2003)). Se $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, então $R_1 \cap R_2$ é uma subnet.

Definição 44 (império, reino (ROBINSON, 2003)). Seja A uma ocorrência de fórmula em R . O império (reino) de A , representado por $e(A)$ ($k(A)$), é a maior (menor) subnet de R que possui A como porta.

Definição 45 (território (ROBINSON, 2003)). Seja Σ um conjunto de ocorrências de fórmula em R . O território de Σ ($t(\Sigma)$) é a menor subnet de R contendo todas as fórmulas de Σ (não necessariamente como portas).

O Lema 23 garante que $t(\Sigma)$ sempre existe. Quanto ao império, há duas maneiras equivalentes de construí-lo, conforme foi feito nos N-Grafos.

Definição 46 ($\sigma(R, A)$ (ROBINSON, 2003)). Considere A uma ocorrência de fórmula numa proof-net R com um chaveamento associado σ . $\sigma(R, A)$ é o subgrafo de $DR(\sigma, R)$ definido como:

- se A é premissa de algum link, então remova todas as arestas que passam de A para alguma conclusão deste link (se A for premissa de um corte, remova a aresta de A para a outra fórmula do link) e pegue como resultado a componente que possui A ;
- se A não é premissa de regra alguma, tome $DR(\sigma, R)$.

Lema 24. *O império de A existe e é dado pelas seguintes construções equivalentes:*

1. $\bigcap_{\sigma} \sigma(R, A)$, onde σ varia sob todos os chaveamentos de R ;
2. o menor subconjunto de ocorrências de fórmulas de R fechado sob as condições abaixo:
 - a) $A \in e(A)$;
 - b) $e(A)$ é fechado sob premissas hereditárias;
 - c) se X_0 e X_1 são conclusões de um axioma e $X_i \in e(A)$, então $X_{1-i} \in e(A)$;
 - d) se V é um vértice de regra não chaveável com premissas X_1, \dots, X_m , conclusões Y_1, \dots, Y_n , $X_i \in e(A)$, e para algum i , $X_i \neq A$ e $X_i \in e(A)$, então para todo j , $Y_j \in e(A)$;
 - e) se V é como o passo anterior, porém chaveável e para todo i , $X_i \neq A$ e $X_i \in e(A)$, então para todo j , $Y_j \in e(A)$;
 - f) se X_0 e X_1 são premissas de um corte, $X_i \neq A$ e $X_i \in e(A)$, então $X_{1-i} \in e(A)$.

Lema 25 (aninhamento de impérios). *Sejam A e B ocorrências de fórmulas distintas numa proof-net. Se $A \in e(B)$ e $B \notin e(A)$, então $e(A) \subsetneq e(B)$.*

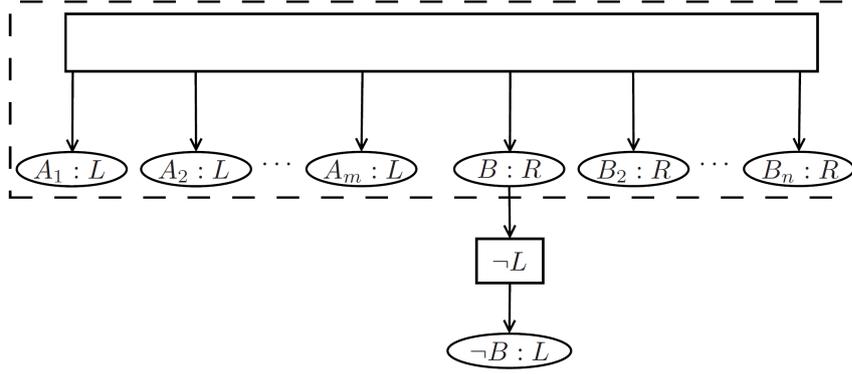
Demonstração. A prova segue o argumento de (GIRARD, 1991), que foi adaptado para os N-Grafos no Lema 4. □

Como o império de A sempre existe, há pelo menos uma *subnet* com A como porta. Pelo Lema 23, concluímos que $k(A)$ também existe. Os reinos são importantes pois definem uma ordem parcial entre as fórmulas as quais são conclusões de regras que possuem apenas uma conclusão (ou seja, não são conclusões de axioma ou enfraquecimento) (ROBINSON, 2003).

Definição 47 (ordem parcial (ROBINSON, 2003)). *Sejam A e B ocorrências de fórmulas. Então $A \ll B$ sse $A \in k(B)$. Se M e N são nós de regras (com a exceção da regra do corte), então $M \ll N$ sse $X \ll Y$, onde X e Y são conclusões de M e N , respectivamente.*

Lema 26 ((ROBINSON, 2003)). *Sejam V_1 e V_2 vértices de regras numa proof-net R tais que V_1 possui A como uma de suas premissas e C como uma de suas conclusões, enquanto V_2 apresenta B como uma premissa e D como uma conclusão. Considere que $A \neq B$ e $B \in e(A)$. Então $D \in e(A)$ sse $C \notin k(D)$.*

Demonstração. (Ida) Suponha que $D \in e(A)$. Então $e(A)$ é uma *subnet* que contém D e assim $k(D) \subseteq e(A)$. Uma vez que A é uma porta de $e(A)$, temos $C \notin e(A)$. Como $k(D) \subseteq e(A)$, obtemos $C \notin k(D)$.

Figura 58 – *Proof-net* com um link $\neg L$ final.

(Volta) Agora suponha que $C \notin k(D)$. Como $e(A) \cap k(D) \neq \emptyset$ (pois ambos possuem B), $e(A) \cup k(D)$ é uma *subnet* (Lema 22). Dado que $C \notin k(D)$, então $k(D)$ não possui o vértice de regra V_1 , o qual conecta A e C . Portanto A ainda é uma porta de $e(A) \cup k(D)$. Isso implica que $e(A) \cup k(D) = e(A)$ e assim $k(D) \subseteq e(A)$. Como $D \in k(D)$, também temos $D \in e(A)$. \square

Com essas propriedades, estamos aptos para a prova de corretude da versão clássica.

Teorema 5 (Sequentização (ROBINSON, 2003)). *Considere R uma proof-net. Então é possível obter uma derivação equivalente em cálculo de sequentes.*

Demonstração. A prova é por indução no número de nós de regras de R .

1. R possui apenas um nó de regra: esse nó deve ser um axioma com conclusões $A : L$ e $A : R$, ou um $\perp L$, ou um $\top R$. A derivação correspondente é $A \vdash A$, ou $\perp \vdash$, ou $\vdash \top$, respectivamente.
2. R possui algum nó de regra final com apenas uma premissa: esse nó deve ser $\neg L$, ou $\neg R$, ou WL , ou WR . Considere R' o resultado da remoção de R deste nó de regra, juntamente com as suas conclusões.
 - $\neg L$: então R é como na Figura 58. Qualquer chaveamento cíclico ou desconexo em R' , implicaria num chaveamento cíclico ou desconexo em R , respectivamente. Então R' é uma *proof-net* menor que R . Pela hipótese de indução, temos uma derivação Π em cálculo de sequentes para R' terminando em $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B, B_2, \dots, B_n$. A derivação correspondente para R é obtida aplicando a regra $\neg L$:

$$\frac{\Pi}{A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B, B_2, \dots, B_n} \neg L$$

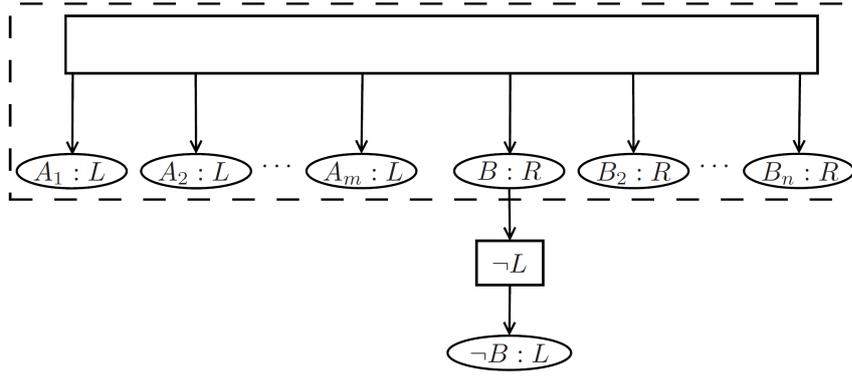


Figura 59 – *Proof-net* com um link $\neg R$ final.

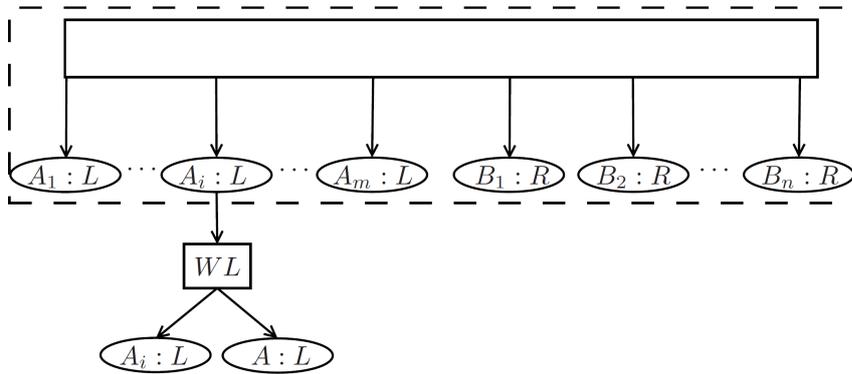


Figura 60 – *Proof-net* com um link WL final, cuja premissa é uma fórmula do lado esquerdo.

- $\neg R$: aqui R é como na Figura 59. Semelhante ao caso anterior, R' também será uma *proof-net*. Assim a hipótese de indução nos fornece uma derivação Π para $A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash B, B_2, \dots, B_n$

$$\frac{\Pi \quad A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash B, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \neg \mathbf{A}, B, B_2, \dots, B_n} \neg R$$

- WL : aqui o link pode ter como premissa uma fórmula do lado esquerdo (Figura 60) ou do lado direito. Vamos supor sem perda de generalidade que temos o primeiro cenário. A hipótese de indução nos garante uma derivação Π para R' : $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n$. A sequentização de R é obtida aplicando a regra WL :

$$\frac{\Pi \quad A_1, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash B_1, B_2, \dots, B_n} WL$$

- WR : é análogo ao caso WL .

3. R apresenta um link chaveável no final: esse nó de regra deve ser $\wedge L, \vee R, \rightarrow R, CL$ ou CR . Uma vez que um chaveamento escolhe apenas uma das premissas de um

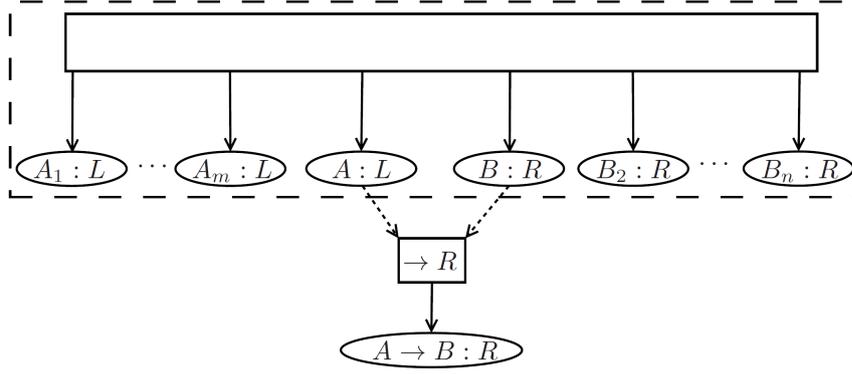


Figura 61 – *Proof-net* com um link $\rightarrow R$ final.

link chaveável, como R é uma *proof-net*, ao removermos um link chaveável no final, não alteramos a conectividade nem a aciclicidade dos chaveamentos da estrutura de prova resultante. Portanto, a remoção de um link chaveável final de uma *proof-net* resulta numa *proof-net* menor.

Considere o caso em que o nó de regra final seja $\rightarrow R$ (Figura 72). A hipótese de indução gera uma derivação Π para $A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n$. Para sequentizar R , basta aplicar a regra $\rightarrow R$:

$$\frac{\Pi \quad A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} \rightarrow R$$

Os casos dos outros links chaveáveis são semelhantes: após a hipótese de indução, basta aplicar a regra do cálculo de sequentes com o mesmo nome do respectivo link.

4. *Todos os nós de regras finais de R possuem mais de uma premissa e não são chaveáveis*: escolha um nó maximal em relação a \ll , digamos que seja N (Figura 62). Como N não é chaveável e $e(A)$ e $e(B)$ são *subnets*, elas devem ser disjuntas. Afirmamos que $R = e(A) \cup e(B) \cup \{C\}$. Suponha que não: deve haver um link com premissa D e conclusão E tal que $D \in e(A)$, mas $E \notin e(A)$. Pelo Lema 26, temos que $C \in k(E)$. Partindo de E e seguindo a direção das arestas, considere M qualquer nó de regra final abaixo de E . Então $C \in k(M)$, o que nos permite concluir que $N \ll M$, contradizendo nossa escolha de que N era maximal.

Portanto de fato temos $R = e(A) \cup e(B) \cup \{C\}$. Pela hipótese de indução há sequentização para $e(A)$ e outra para $e(B)$. Obtemos uma derivação para R juntando essas duas pela regra correspondente ao nó N no cálculo de sequentes.

□

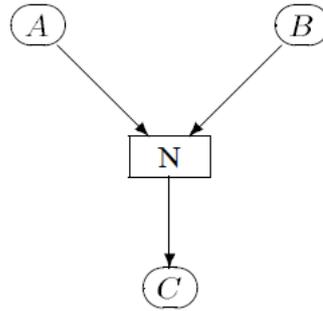


Figura 62 – Nó de regra maximal N (ROBINSON, 2003).

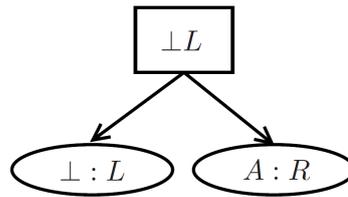


Figura 63 – Novo link $\perp L$.

5.3 Critério de corretude intuicionista

A partir desta seção e até o fim deste capítulo, aplicaremos as ideias vistas no Capítulo 4 às *proof-nets* de Robinson a fim de definirmos uma versão intuicionista para elas. O primeiro passo é a definição de um novo conjunto de links tendo em vista os cálculos LJ' e c-LD, os quais serão usados para as provas de completude e corretude, respectivamente.

Esses dois cálculos não adotam regras específicas para a constante \top , portanto não será mais utilizado o link $\top R$. Uma vez que c-LD, conforme visto na Seção 2.4, apresenta um axioma $\perp \vdash A$ (onde $\perp \sim A$), o link $\perp L$ da Figura 55 será substituído pelo da Figura 63. Também serão removidos os links da negação ($\neg L$ e $\neg R$): o conectivo será definido por meio da implicação: $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$.

Definição 48 (*proof-net* intuicionista). *Seja R uma proof-net sem os links $\neg L$, $\neg R$, $\top R$ e com os eventuais $\perp L$ conforme consta na Figura 63. Dizemos que R é intuicionista se para cada link $\rightarrow R$ com conclusão $A \rightarrow B : R$, $k(A \rightarrow B)$ tem apenas uma conclusão (a própria fórmula $A \rightarrow B : R$).*

Usamos os mesmos exemplos dos N-Grafos mostrados no Capítulo 4 para apresentar aqui derivações no sistema de Robinson. Com isso, ilustramos de que forma o critério de corretude separa as *proof-nets* intuicionistas das clássicas. A Figura 64 contém *proof-net* para $\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ e não fere a Definição 48, logo é intuicionista.

Na Figura 65 temos a *proof-net* intuicionista correspondente ao N-Grafo exibido como contra-exemplo para a meta-condição intuicionista com território (Figura 31). O reino de $C \rightarrow A : R$ é formado pelas suas premissas hereditárias (todos os nós de que

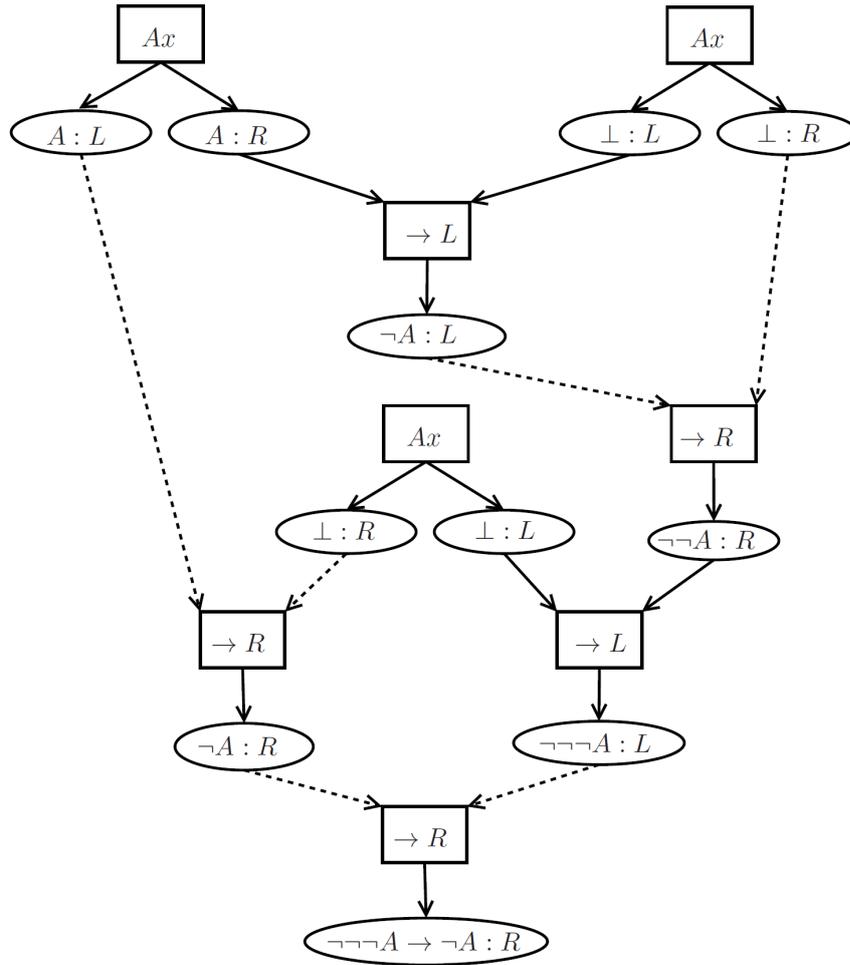


Figura 64 – *Proof-net* correspondente ao N-Grafo da Figura 29.

podemos partir, seguir a direção das arestas e chegar em $C \rightarrow A : R$), juntamente com a ocorrência $A : L$ conclusão do link WL . Esse conjunto de ocorrência de fórmulas está destacado em azul. Portanto $k(C \rightarrow A)$ possui apenas uma conclusão (a própria fórmula). Já as ocorrências de fórmulas de $k(B \rightarrow D)$ estão destacadas em verde e esse reino também possui apenas uma conclusão.

O critério intuicionista também detecta corretamente as derivações clássicas rejeitadas pelo intuicionismo. Na Figura 66 temos uma *proof-net* para $\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A$. Esse sequente já foi estudado no capítulo anterior. Foi visto um N-Grafo para ele (Figura 30) e a meta-condição com território encontrou uma ocorrência B como outra conclusão do território de $B \rightarrow A$. Agora esse comportamento se repete: B também é uma conclusão de $k(B \rightarrow A)$. As fórmulas dessa *subnet* estão destacadas em azul.

Uma tentativa de derivar a lei de Peirce nas *proof-nets* de Robinson (Figura 67) é rejeitada aqui pela mesma razão por que a Definição 33 rejeitou o N-Grafo da Figura 39: $k(A \rightarrow B)$ apresenta A como conclusão.

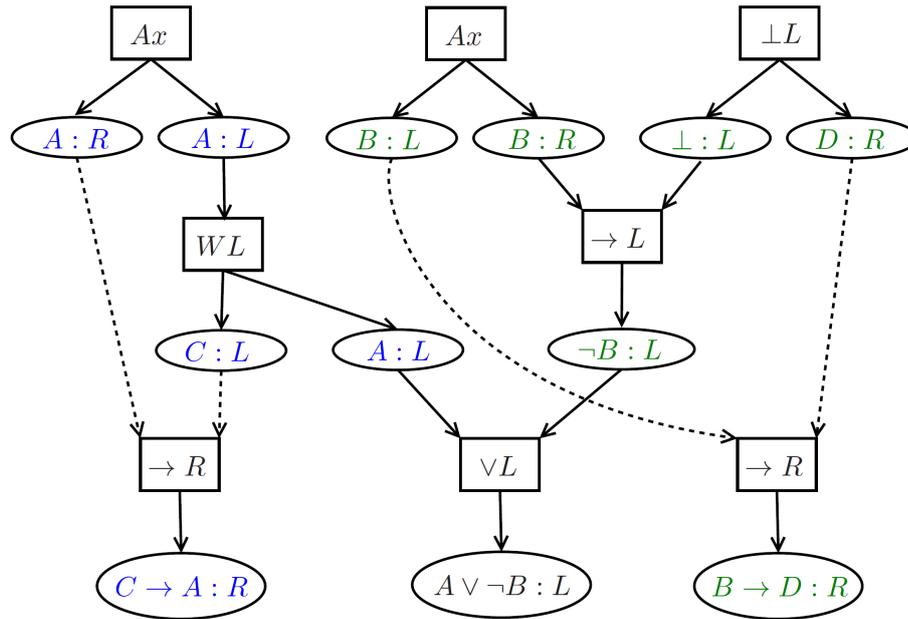


Figura 65 – *Proof-net* correspondente ao N-Grafo da Figura 31.

5.4 Completude

A Definição 48 tem como um dos objetivos eliminar as derivações rejeitadas pelo intuicionismo. Será que ela também suprime algumas derivações intuicionistas? Nesta seção provaremos a completude, confirmando que nenhuma *proof-net* intuicionista é rejeitada pelo novo critério. Antes da prova deste teorema, apresentamos dois lemas auxiliares.

Lema 27. *Toda proof-net intuicionista R possui ao menos uma conclusão.*

Demonstração. Na verdade provaremos que na construção de qualquer *proof-net* com o novo conjunto de links, sempre haverá ao menos uma conclusão.

1. R apresenta apenas um link: então este deve ser um axioma ou um $\perp L$ (Figura 63). Em ambos os casos há uma conclusão.
2. R é formada pela adição de um link chaveável l à fronteira de uma *proof-net* R' :
 - l é $\wedge L$ ou CL : pela hipótese de indução R' já tem ao menos uma conclusão. Como l não possui fórmulas do lado direito como premissa, as conclusões de R são exatamente as mesmas de R' .
 - l é $\vee R$, ou $\rightarrow R$, ou CR : como a conclusão desses links já é uma fórmula do lado direito, R certamente terá ao menos uma conclusão.
3. R é formada pela junção de duas *proof-nets* R_1 e R_2 por um link l não chaveável:

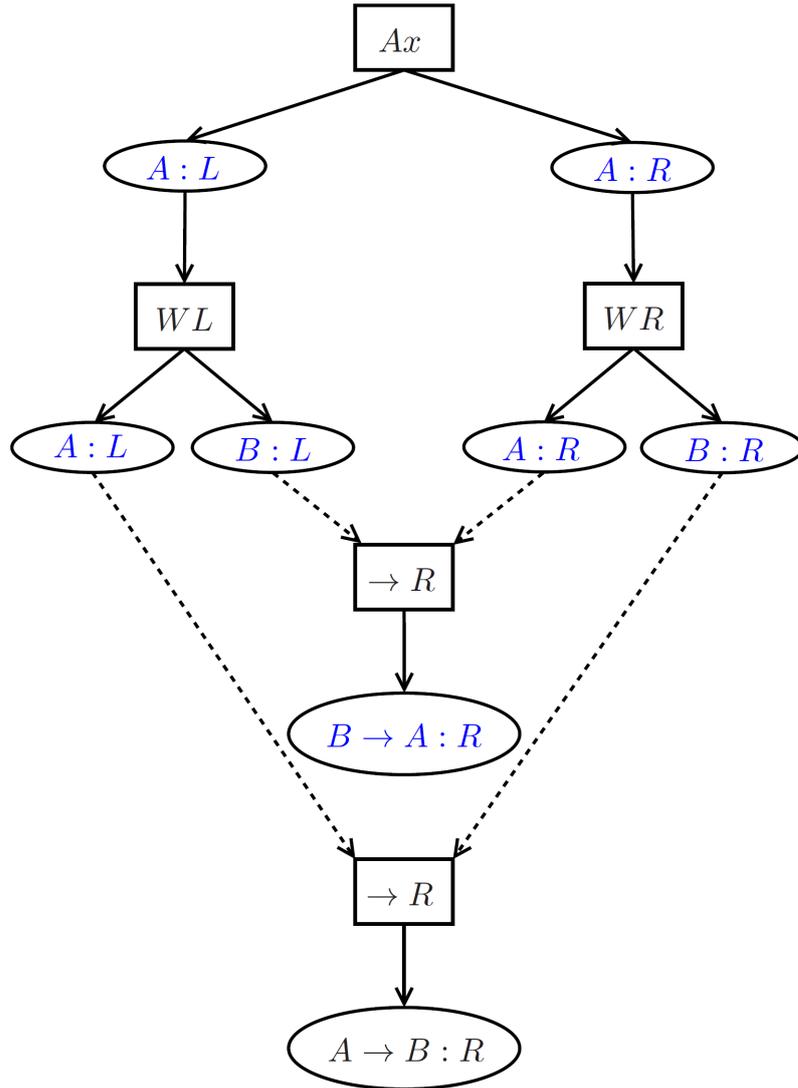


Figura 66 – *Proof-net* correspondente ao N-Grafo da Figura 30.

- l é $\wedge R$: como a conclusão deste link já é uma fórmula no lado direito, haverá ao menos uma conclusão em R .
 - l é $\vee L$: como as conclusões de R são exatamente as conclusões de R_1 e as de R_2 , a hipótese de indução garante que R também satisfaz a propriedade.
 - l é $\rightarrow L$ ou CUT : em ambos os casos l possui uma premissa com fórmula do lado esquerdo e outra do lado direito. Seja R_1 a *proof-net* que fornece a fórmula do lado esquerdo. Então R_1 apresenta ao menos uma conclusão (hipótese de indução) e esta é também uma conclusão de R , pois l não utiliza nenhuma conclusão de R_1 .
4. R é formada pela adição de um link de enfraquecimento a uma *proof-net* R' : a hipótese de indução nos garante que R' tem ao menos uma conclusão. Uma vez que os links WL e WR , embora usem uma fórmula B como premissa, também possuem essa mesma fórmula como conclusão, existirá pelo menos uma conclusão em R .

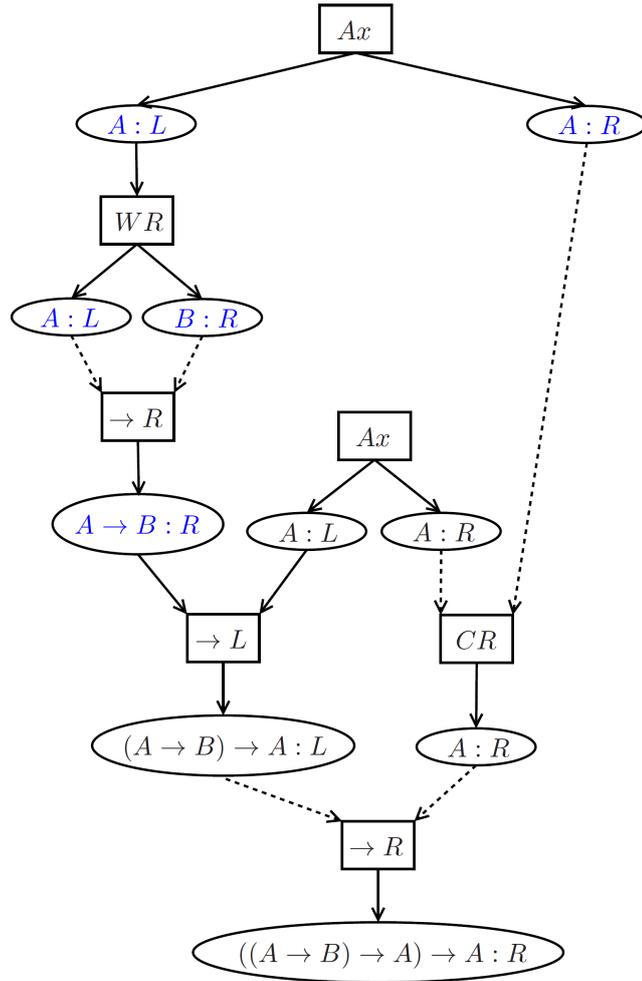


Figura 67 – *Proof-net* correspondente ao N-Grafo da Figura 39.

□

Lema 28. *Considere uma proof-net intuicionista com premissas A, A_2, \dots, A_n , mas com apenas uma conclusão B . Então se unirmos as ocorrências $A : L$ e $B : R$ por um link $\rightarrow R$, o resultado R também será uma proof-net intuicionista.*

Demonstração. Como R provém da adição de um link chaveável à uma *proof-net*, também será uma *proof-net*. Resta mostrar que R é intuicionista. Dado que originalmente tínhamos uma *proof-net* intuicionista, R só não será intuicionista se $k(A \rightarrow B)$ possuir mais de uma conclusão. Suponha que $k(A \rightarrow B)$ apresente alguma outra porta $C : R$.

$k(A \rightarrow B)$ é uma *subnet* que apresenta a fórmula C como porta, logo $A \rightarrow B \in e(C)$. Uma vez que $C : R$ não é uma conclusão de R , esta fórmula deve ser premissa de algum link l_1^1 . Os únicos links os quais recebem uma fórmula do lado direito como premissa e não geram fórmula do lado direito como conclusão são $\rightarrow L$ e CUT . Partindo de l_1^1 e seguindo a direção das arestas, seja $l_1^1, l_2^1, \dots, l_{k_1}^1$ uma sequência de links tal que $l_{k_1}^1$ é o primeiro que não tem como conclusão uma fórmula do lado direito.

Seja $C_{k_1} : R$ a premissa de $l_{k_1}^1$ que tem $C : R$ como premissa hereditária (ou seja, há um caminho direcionado de $C : R$ para $C_{k_1} : R$) e $D_1 : L$ a outra premissa de $l_{k_1}^1$. Então $e(C) \subsetneq e(C_{k_1})$. Dado que $l_{k_1}^1$ não é chaveável (ele é $\rightarrow L$ ou CUT), $e(C_{k_1}) \cap e(D_1) = \emptyset$.

O império $e(D_1)$ é uma *subnet* intuicionista: caso contrário, a *proof-net* original não seria intuicionista. Assim em $e(D_1)$ há pelo menos uma conclusão $C_2 : R$ (Lema 27), a qual não é uma conclusão de R porque R possui apenas $A \rightarrow B : R$ como conclusão. Note que $C_2 : R$ e $A \rightarrow B : R$ são de fato ocorrências de fórmulas distintas, pois $A \rightarrow B \in e(C)$, $e(C) \subsetneq e(C_{k_1})$, $C_2 \in e(D_1)$ e $e(C_{k_1}) \cap e(D_1) = \emptyset$.

O império $e(D_1)$ também é uma *subnet* que possui $C_2 : R$ como porta, portanto $e(D_1) \subseteq e(C_2)$. Como o link $l_{k_1}^1$ não é chaveável e $D_1 \in e(C_2)$, $C_{k_1} \in e(C_2)$ (construção 2 do Lema 24). Uma vez que C é uma premissa hereditária de C_{k_1} e já temos $C_{k_1} \in e(C_2)$, obtemos $C \in e(C_2)$ e $C_2 \notin e(C)$. Pelo Lema 25 inferimos $e(C) \subsetneq e(C_2)$.

Isso significa que todas as ocorrências de fórmulas visitadas até aqui pertencem ao império $e(C_2)$. Mas como $C_2 : R$ não é uma conclusão de R , esta fórmula deve ser premissa de algum link l_1^2 . Conforme anteriormente, considere a sequência de links $l_1^2, l_2^2, \dots, l_{k_2}^2$ tal que $l_{k_2}^2$ é o primeiro que não tem como conclusão uma fórmula do lado direito. Seja $C_{k_2} : R$ a premissa de $l_{k_2}^2$ que tem $C_2 : R$ como premissa hereditária. Como $C_{k_2} \notin e(C_2)$, a fórmula C_{k_2} ainda não foi visitada.

Logo podemos repetir o procedimento e sempre encontrar fórmulas novas do lado direito que não são conclusões de R . Mas a *proof-net* tem apenas um número finito de nós e em algum momento a fórmula nova do lado direito deve ser uma outra conclusão de R : contradição porque R tem apenas $A \rightarrow B$ como conclusão. Portanto a suposição de que $k(A \rightarrow B)$ tem outra porta do lado direito deve ser falsa e R é intuicionista. \square

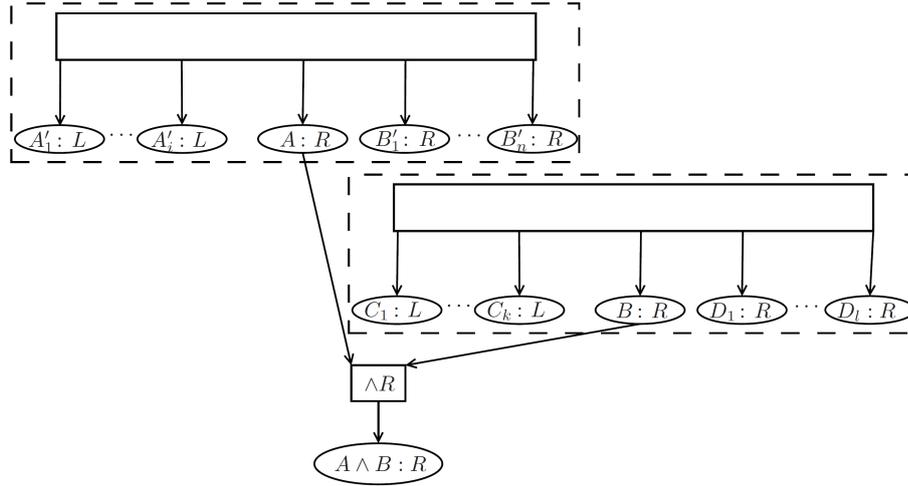
Teorema 6 (Completude). *Dada uma derivação Π de $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ em LJ' , é possível construir uma *proof-net* intuicionista R cujas premissas e conclusões estão em correspondência um-para-um com as ocorrências de fórmula A_1, \dots, A_m e B_1, \dots, B_n , respectivamente.*

Demonstração. Procedemos por indução na estrutura de Π .

1. Π consiste de um axioma da forma $A \vdash A$: então R é simplesmente um link de axioma (Figura 55).
2. Π é obtido de Π_1 por $\wedge L_1$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_2, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash B_1, \dots, B_n}{A_2, \dots, A_m, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_n} \wedge L_1$$

Pela hipótese de indução temos uma *proof-net* intuicionista R_1 para Π_1 . Como Robinson adota uma versão multiplicativa do cálculo de seqüentes e para LJ' temos


 Figura 69 – Prova de completude para a regra $\wedge R$.

porque $k(X \rightarrow Y)$ deve possuir apenas uma conclusão. Aplicamos o mesmo raciocínio a R_2 e concluímos que R é intuicionista.

5. Π é obtido de Π_1 por $\vee R_1$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A}, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} \vee R_1$$

A hipótese de indução garante a existência de uma *proof-net* intuicionista R_1 para Π_1 . Aqui também é aplicado um link de enfraquecimento antes do lógico (Figura 70), semelhante ao caso da regra $\wedge L_1$. A adição dos links WR e $\vee R$ a partir da ocorrência de fórmula $A : R$ não afeta o reino de nenhuma fórmula de algum link $\rightarrow R$ pelo mesmo motivo do caso da regra $\wedge R$. Concluímos que o resultado é uma *proof-net* intuicionista.

6. Π é obtido de Π_1 por $\vee R_2$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} \vee R_2$$

Mesmo procedimento utilizado no caso da regra $\vee R_1$.

7. Π é obtido de Π_1 e Π_2 por $\vee L$:

$$\frac{\Pi_1 \quad A'_1, \dots, A'_i, \mathbf{A} \vdash B'_1, \dots, B'_l \quad \Pi_2 \quad C_1, \dots, C_k, \mathbf{B} \vdash D_1, \dots, D_j}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \vee L$$

Considere as *proof-nets* intuicionistas R_1 e R_2 para Π_1 e Π_2 , respectivamente, oriundas da hipótese de indução. Chegamos a R por meio de um link $\vee L$ de acordo com a

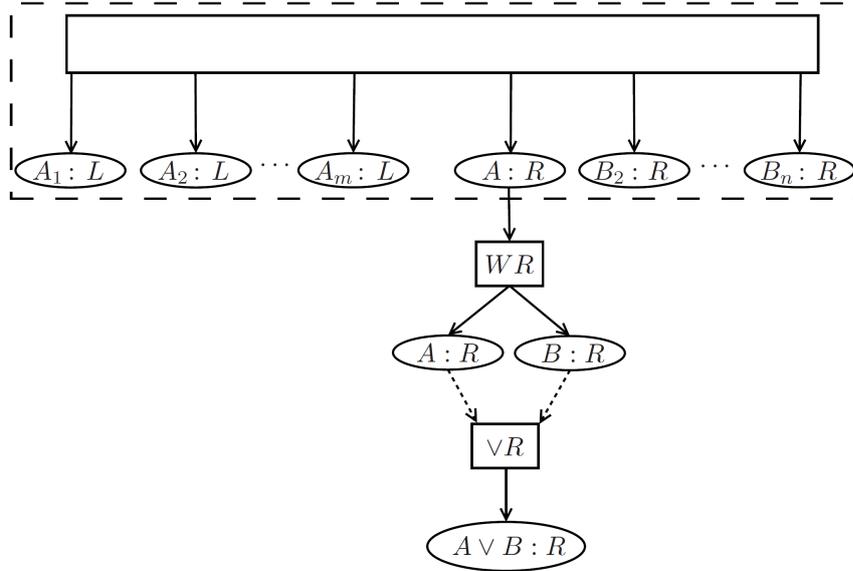


Figura 70 – Prova de completude para a regra $\forall R_1$.

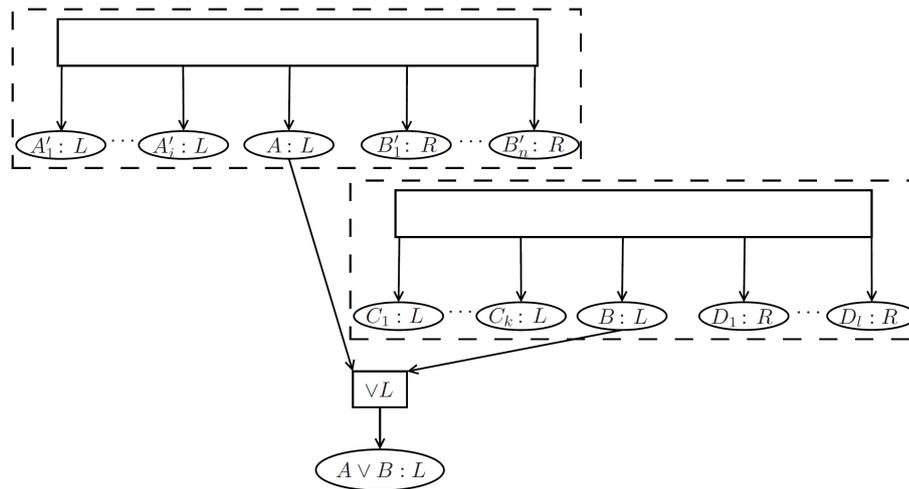


Figura 71 – Prova de completude para a regra $\forall L$.

Figura 71. Como este link não é chaveável, R será uma *proof-net* (semelhante ao caso $\wedge R$).

Seja $X \rightarrow Y : R$ a conclusão de um link $\rightarrow R$ em R_1 tal que $A \in k(X \rightarrow Y)$. Então $A : L$ é uma porta da menor *subnet* que apresenta $X \rightarrow Y : R$ como porta. Logo o reino de $X \rightarrow Y : R$ não descerá ao novo link $\forall L$ por $A : L$ porque o reino já computa a *menor subnet*. Note que o contrário ocorre caso a Definição 48 adotasse império no lugar de reino: se $A \in e(X \rightarrow Y)$, então o império desceria de $A : L$ para o link $\forall L$ adicionando todas as fórmulas de R_2 , que pode possuir outras conclusões.

8. Π obtido de Π_1 por $\rightarrow R$:

$$\frac{\Pi_1 \quad \mathbf{A}, A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{B}}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow R$$

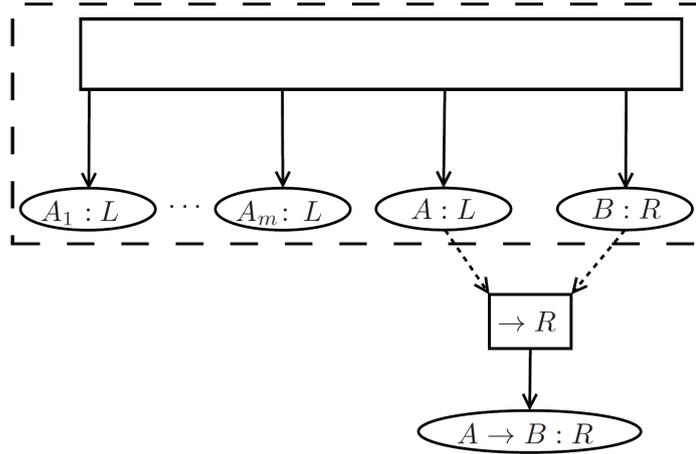


Figura 72 – Prova de completude para a regra $\rightarrow R$.

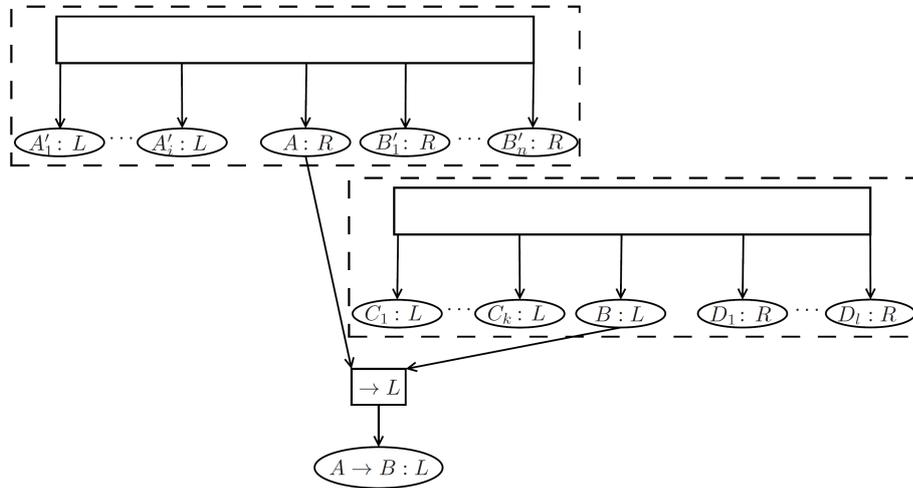


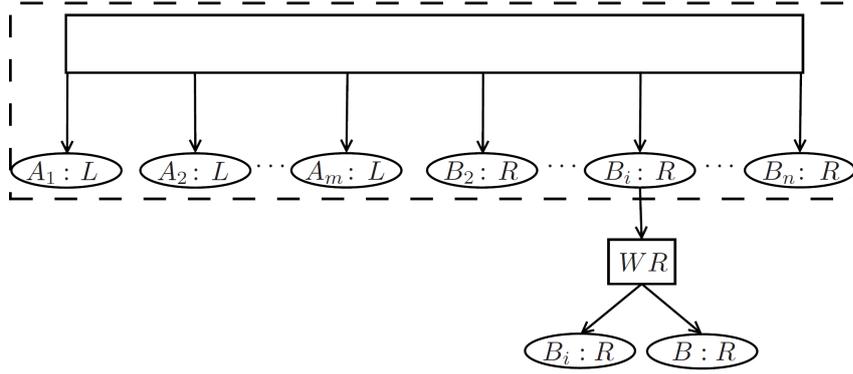
Figura 73 – Prova de completude para a regra $\rightarrow L$.

Atentemos para a exigência de LJ' para haver apenas uma fórmula no consequente antes aplicação da regra. Da hipótese de indução temos uma *proof-net* intuicionista R_1 para Π_1 e adicionamos um link $\rightarrow R$ conforme a Figura 72. Este cenário é o mais complexo da prova de completude: é preciso provar que o resultado é uma *proof-net* intuicionista, mas já o fizemos no Lema 28.

9. Π é obtido de Π_1 e Π_2 por $\rightarrow L$:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{A'_1, \dots, A'_i \vdash \mathbf{A}, B'_1, \dots, B'_l} \quad \frac{\Pi_2}{C_1, \dots, C_k, \mathbf{B} \vdash D_1, \dots, D_j}}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \rightarrow L$$

Pela hipótese de indução temos duas *proof-nets* intuicionistas R_1 e R_2 para Π_1 e Π_2 , respectivamente. Obtemos R conectando R_1 e R_2 com um link $\rightarrow L$ (Figura 73). A justificativa de que R é uma *proof-net* intuicionista segue dos casos $\vee L$ e $\wedge R$.


 Figura 74 – Prova de completude para a regra WR .

10. Π é obtido de Π_1 por WL :

$$\frac{\Pi_1 \quad A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}{\mathbf{A}, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n} WL$$

Da hipótese de indução temos uma *proof-net* intuicionista R_1 correspondente a Π_1 . Basta adicionarmos um link WL a qualquer premissa ou conclusão de R_1 para chegarmos a R (Figura 60). A adição do link WL não altera a conectividade nem a aciclicidade da *proof-net*, tampouco influencia o reino de algum link $\rightarrow R$.

11. Π é obtido de Π_1 por WR :

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_m \vdash B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} WR$$

Este cenário é similar a WL e está ilustrado na Figura 74. A justificativa de que o resultado é uma *proof-net* intuicionista segue dos casos já analisados.

12. Π é obtido Π_1 por CL :

$$\frac{\Pi_1 \quad \mathbf{A}, \mathbf{A}, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}{\mathbf{A}, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n} CL$$

A hipótese de indução nos fornece uma *proof-net* intuicionista R_1 para Π_1 . Simplesmente acrescentamos um link CL a R_1 de acordo com a Figura 75. O resultado também é uma *proof-net* intuicionista (pela mesma justificativa utilizada na regra $\wedge L_1$).

13. Π é obtido de Π_1 por CR :

$$\frac{\Pi_1 \quad A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{B}, \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} CR$$

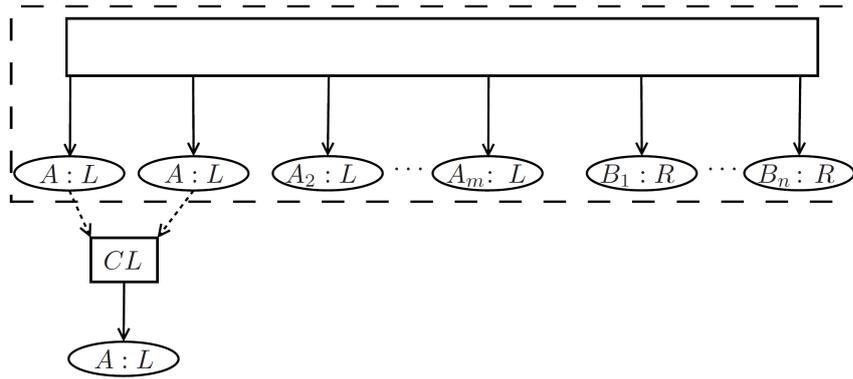


Figura 75 – Prova de completude para a regra CL .

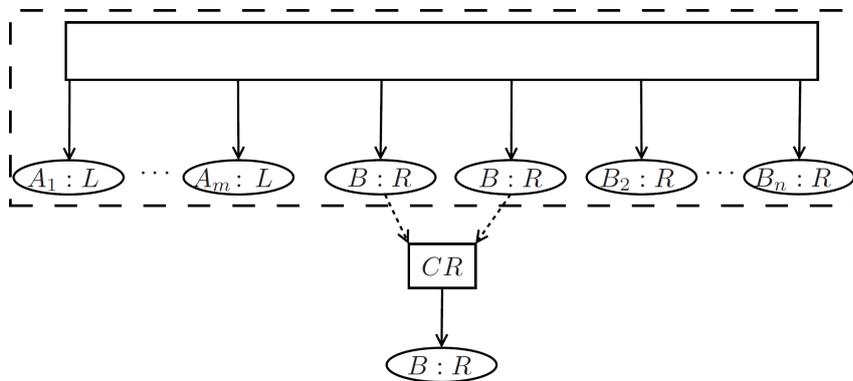


Figura 76 – Prova de completude para a regra CR .

Considere R_1 a *proof-net* intuicionista para Π_1 a partir da hipótese de indução. Ao adicionarmos um link CR , temos R (Figura 76). Concluimos que R é uma *proof-net* intuicionista a partir das justificativas apresentadas no caso da regra $\forall R_1$.

□

5.5 Corretude

Seguindo a estratégia aplicada aos N-Grafos, definimos uma versão rotulada das *proof-nets* intuicionistas. Cada ocorrência de fórmula vai guardar, além da informação do lado do sequente a que pertence (L ou R), um conjunto de índices, a fim de computar as premissas de que a mesma depende. Entretanto a forma como as dependências fluem aqui é um pouco diferente do capítulo anterior.

Nos N-Grafos, assim como na dedução natural, as premissas ficam na parte superior da derivação, enquanto as conclusões na inferior. Então as dependências partem de cima (das premissas) para baixo (conclusões). Nas *proof-nets* de Robinson, tanto as premissas quanto as conclusões, ficam na parte de baixo (ambas possuem grau de saída zero).

Ao partirmos de uma premissa A num N-Grafo, basta seguirmos a direção das arestas dos links para computarmos a sua “influência” nas demais ocorrências de fórmula. Mas ao iniciarmos numa premissa $A : L$ numa *proof-net*, precisamos subir para computarmos as fórmulas que dependem dela (essa é a única alternativa, pois a premissa de uma *proof-net* possui grau de saída zero). Já para uma conclusão $B : R$, a informação das premissas das quais ela provém deve vir de cima.

A regra geral para computarmos os rótulos das fórmulas é:

- as dependências *sobem* pelas fórmulas do lado esquerdo;
- e *descem* pelas fórmulas do lado direito.

Por exemplo: considere $X : R/S_X$ e $Y : R/S_Y$ conclusões de duas *proof-nets*. Os conjuntos S_X e S_Y carregam todas as premissas necessárias para as deduções de X e Y , respectivamente. Se aplicarmos um link $\wedge R$ a elas para chegarmos a $X \wedge Y : R$, então esta fórmula vai carregar as dependências de X e de Y : seu conjunto deve ser $S_X \cup S_Y$. Note que o fluxo foi de cima (as premissas $X : R/S_X$ e $Y : R/S_Y$ do link $\wedge R$) para baixo (a conclusão do referido link).

Por outro lado, se houver um link $\vee L$ com conclusão $A \vee B : L$ ligando duas *proof-nets* R_A e R_B com premissas $A : L$ e $B : L$, respectivamente. Então todas as ocorrências de fórmula que dependiam de $A : L$ em R_A , passarão a depender de $A \vee B : L$. O mesmo vale para $B : L$ em R_B . Portanto a dependência foi de baixo (conclusão do link) para cima (as premissas de $\vee L$).

A Figura 77 e a Figura 78 exibem o funcionamento das dependências nos links. As setas que não pertencem aos links representam a intuição descrita acima: a subida pelas fórmulas do lado esquerdo e descida pelas do lado direito. Alguns links merecem atenção adicional, como o $\rightarrow R$, o qual é o único que descarta hipótese e quem de fato utiliza as dependências.

Assim a conclusão deste link remove o índice n da hipótese cancelada $A : L$ do conjunto S da outra premissa $B : R$. Semelhante aos N-Grafos, aqui também é atribuído um índice distinto para cada premissa da *proof-net*. Outro especial é o da regra do corte, onde foi adotada a notação de FIL (PAIVA; PEREIRA, 2005) para representar o seu funcionamento.

Como o link *CUT* não é chaveável, ele conecta duas *proof-nets* disjuntas. Considere R_1 a que fornece a premissa $A : L/\{n\}$ para o link e R_2 a de $A : R/S$. Então potencialmente em R_1 há ocorrências de fórmulas que dependem de $A : L/\{n\}$ (ou seja, possuem n em seu conjunto). Por outro lado R_2 é uma derivação para A (potencialmente há outras conclusões em R_2 também), mas esta fórmula traz consigo um conjunto de dependência S . Portanto ao ligarmos as duas *proof-nets* com o link *CUT*, toda fórmula que dependia de $A : L/\{n\}$

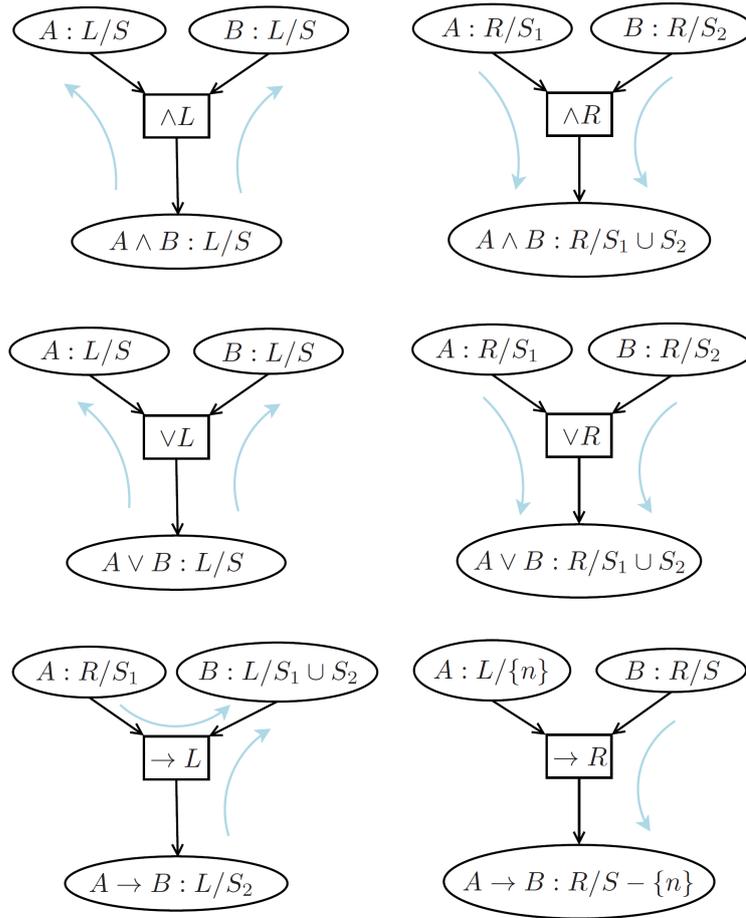


Figura 77 – Links lógicos com dependências.

em R_1 , terá essa dependência removida e será adicionada todas as fórmulas de que $A : R$ provém (S). Esse é o significado da notação $[n|S]$ do sistema FIL.

Também ressaltamos os links de enfraquecimento. Até o presente momento (versão clássica e intuicionista sem rótulos), não havia distinção quanto ao lado (L ou R) da premissa de um link de enfraquecimento (fórmulas B da Figura 55 nos links WL e WR). Como o lado da fórmula influencia no fluxo dos índices das premissas na *proof-net*, para cada regra de enfraquecimento do cálculo de seqüentes, exibimos dois links na Figura 78 (um caso para a premissa ser do lado esquerdo, e outro para a mesma ser do lado direito).

Definição 49 (estrutura de prova rotulada). *Uma estrutura de prova rotulada é uma estrutura de prova que:*

- adota os links da Figura 77 e Figura 78;
- para cada ocorrência fórmula $A : L$ a qual é premissa da estrutura de prova ou de um link $\rightarrow R$ é atribuído $\{n\}$ como conjunto de dependência, onde n é um natural distinto para cada uma dessas ocorrências de fórmula.

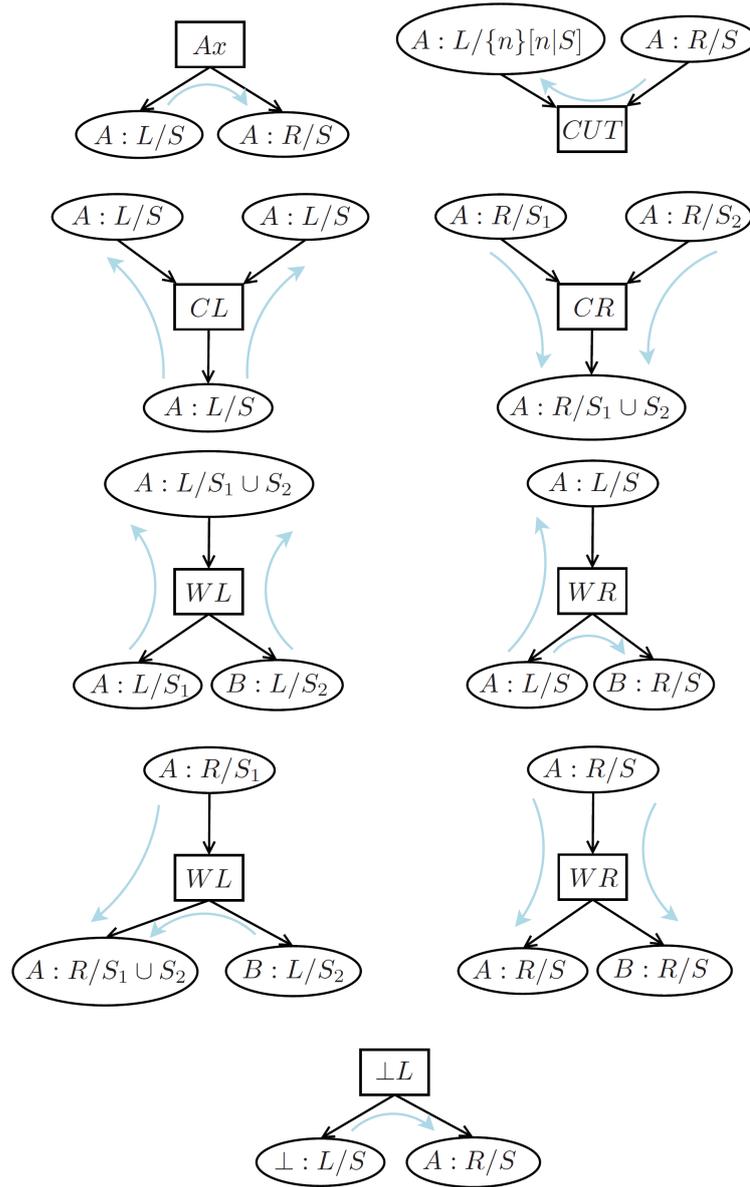


Figura 78 – Links estruturais e identidade com dependências.

Definição 50 (*proof-net intuicionista rotulada*). Uma estrutura de prova rotulada R é uma *proof-net intuicionista rotulada* quando:

- para todo chaveamento σ associado, $DR(R, \sigma)$ é acíclico e conexo (como um grafo não direcionado);
- para cada link $\rightarrow R$ com conclusão $A \rightarrow B : R/S - \{n\}$, $k(A \rightarrow B)$ tem apenas uma conclusão (a própria fórmula $A \rightarrow B : R$) e apenas as fórmulas de $k(A \rightarrow B)$ possuem n no seus conjuntos de dependência.

Para rotular uma *proof-net* intuicionista, basta atribuir para cada premissa dela e de links $\rightarrow R$ um índice $\{n\}$ distinto e em seguida computar os rótulos conforme os links

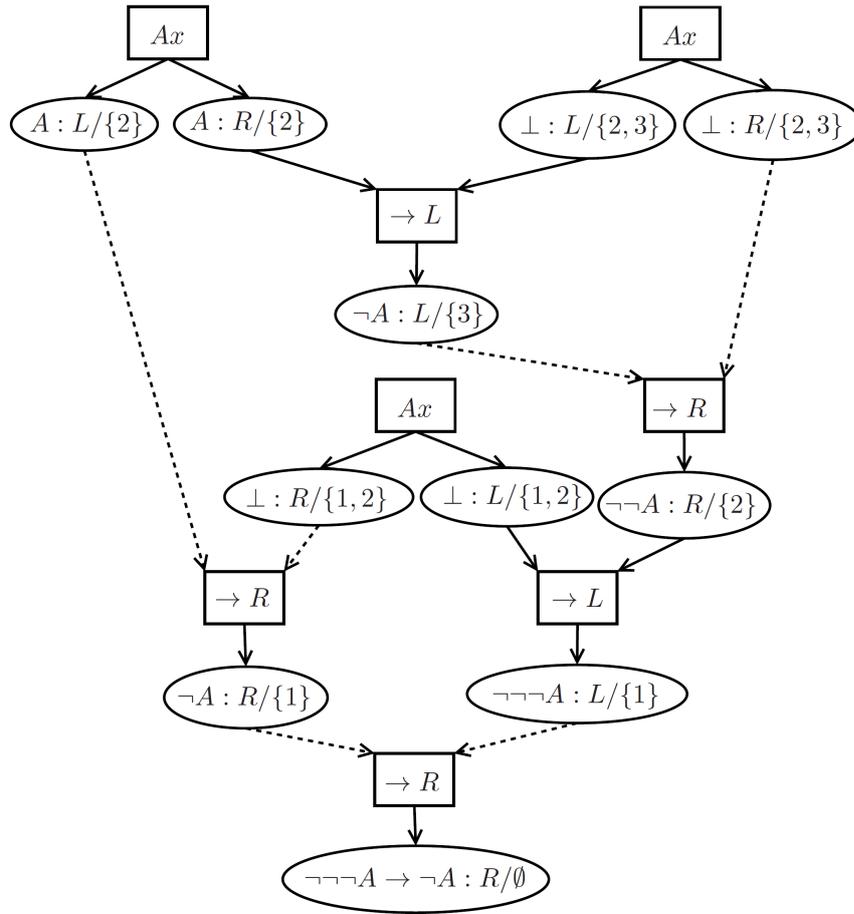


Figura 79 – *Proof-net* da Figura 64 com dependências.

da Figura 77 e Figura 78. Figura 79 exibe a *proof-net* intuicionista da Figura 64 após esse procedimento. Nela há três links $\rightarrow R$. Analisemos os reinos da conclusão de cada um deles:

- $\neg\neg A : R/\{2\}$: aqui a hipótese $\neg A : L/\{3\}$ é cancelada. $k(\neg\neg A)$ é formado pelas fórmulas que possuem o índice 3 no conjunto, além das ocorrências $A : L/\{2\}$ e $A : R/\{2\}$ (conclusões de um link de axioma). Essa *subnet* possui apenas uma conclusão (o próprio $\neg\neg A : R/\{2\}$) e nenhuma fórmula fora dela depende da hipótese cancelada $\neg A : L/\{3\}$. Portanto o critério é atendido.
- $\neg A : R/\{1\}$: descarta-se a hipótese $A : L/\{2\}$. $k(\neg A)$ é toda a *proof-net*, com a exceção do vértice da ocorrência de fórmula $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A : R/\emptyset$ e o seu respectivo vértice da regra $\rightarrow R$. Logo essa *subnet* apresenta somente uma conclusão e todas as fórmulas que dependeriam de $A : L/\{2\}$ estão contidas nela.
- $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A : R/\emptyset$: a ocorrência de fórmula $\neg A : R/\{1\}$ deixa de ser premissa da derivação. $k(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)$ é toda a *proof-net*, a qual exibe apenas uma conclusão, satisfazendo o critério.

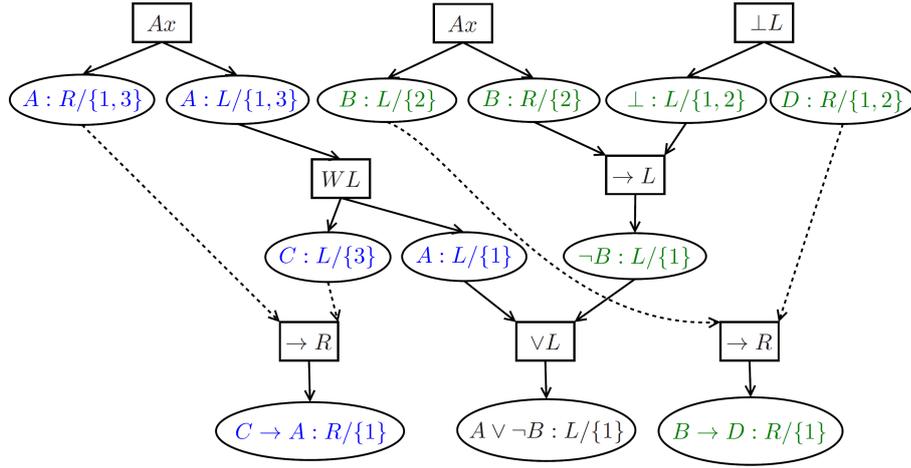


Figura 80 – *Proof-net* da Figura 65 com dependências.

Também rotulamos a *proof-net* intuicionista da Figura 65 e adotamos o mesmo esquema de cores: as fórmulas em azul representam $k(C \rightarrow A)$, enquanto as verdes são $k(B \rightarrow D)$ (Figura 80). Observamos que todas as fórmulas que dependem da hipótese cancelada $C : L/\{3\}$ estão em azul e todas que possuem o índice 2 estão em verde, a Definição 50 é atendida.

Além de validar os exemplos intuicionistas, o critério também filtra as derivações pertencentes apenas à lógica clássica. Figura 81 é a versão com dependências do sequente $\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A$. A tentativa de cancelar a hipótese $B : L/\{1\}$ na ocorrência $A : R/\{1,2\}$ para chegar a $B \rightarrow A : R/\{2\}$ é rejeitada pelo intuicionismo, pois $k(B \rightarrow A)$, representado em azul, possui outra conclusão e há também a ocorrência $A \rightarrow B : R/\{1\}$, a qual está fora do reino, mas mesmo assim ainda carrega uma dependência de $B : L/\{1\}$.

Outra derivação rejeitada pela lógica intuicionista que temos discutido neste trabalho é a lei de Peirce. A *proof-net* correspondente com rótulos é ilustrada na Figura 82, onde mais uma vez é destacado $k(A \rightarrow B)$. Além da conclusão extra dessa *subnet*, há fórmulas fora dela que ainda dependem da hipótese cancelada $A : L/\{1\}$.

Nos quatro exemplos que temos utilizado para compreensão, a Definição 48 e a Definição 50 se comportaram da mesma maneira. O lema a seguir trata dessas duas definições e em seguida mostramos como transformar uma *proof-net* intuicionista rotulada numa derivação equivalente em c-LD.

Lema 29. *Seja R uma proof-net intuicionista (Definição 48). Então o resultado da aplicação dos rótulos a R satisfaz a Definição 50.*

Demonstração. Seja R' o resultado da aplicação dos rótulos a R . Suponha que R' não respeita a Definição 50. Então existe ao menos um link $\rightarrow R$ com premissas $A : L/\{n\}$ e $B : R/S$ e conclusão $A \rightarrow B : R/S - \{n\}$ tal que:

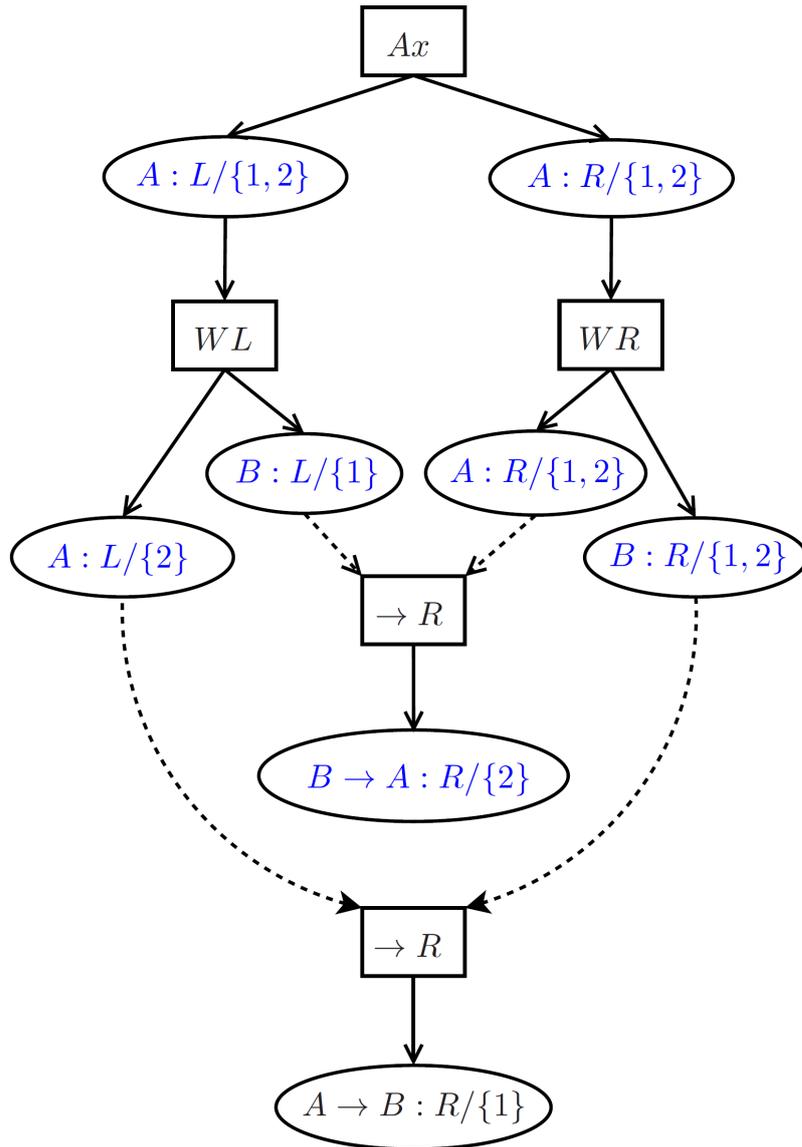


Figura 81 – *Proof-net* da Figura 66 com dependências.

- em $k(A \rightarrow B)$ há mais de uma conclusão;
- ou alguma ocorrência de fórmula C com conjunto de dependência S_C é tal que $C \notin k(A \rightarrow B)$, mas $n \in S_C$.

Se o primeiro cenário ocorre em R' , então $k(A \rightarrow B)$ também possui mais de uma conclusão em R , o que não é permitido (pois R é uma *proof-net* intuicionista). Logo o segundo caso deve ocorrer. Portanto é possível partir de $A : L/\{n\}$ e seguir o fluxo das dependências dos links de forma que n chegue até a ocorrência de fórmula C .

Uma vez que $A \in k(A \rightarrow B)$ e $C \notin k(A \rightarrow B)$, em algum momento o índice n passa de uma fórmula do reino para outra fora dele. As possibilidades para sairmos do reino num link l são:

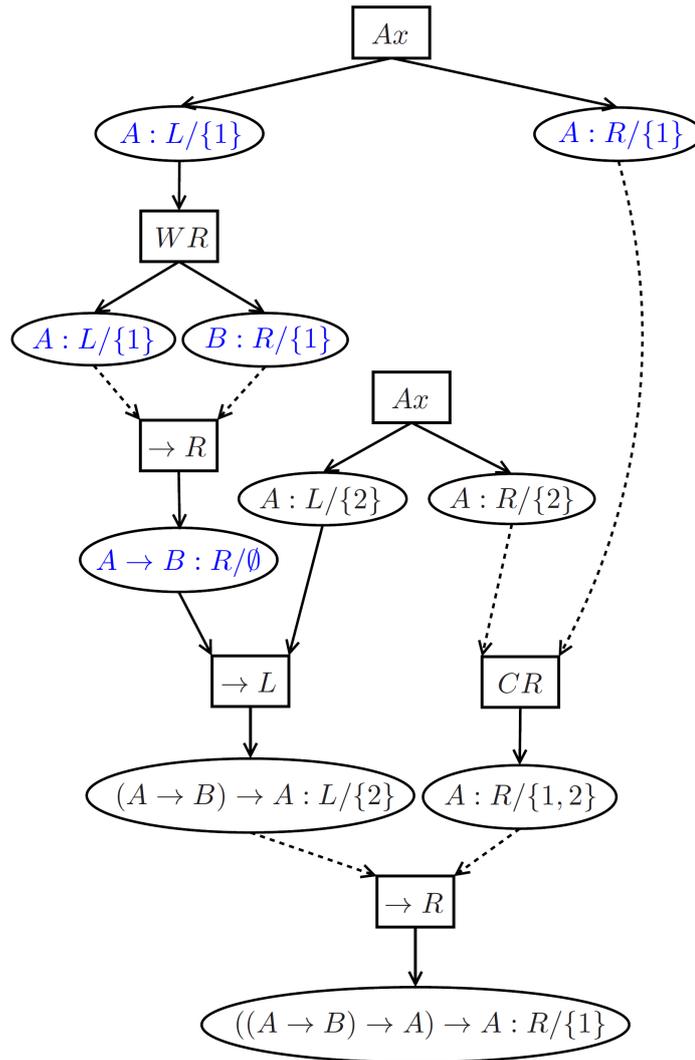


Figura 82 – Proof-net da Figura 67 com dependências.

- *passando de uma conclusão de l para uma premissa de l* : como toda *subnet* é fechada sob premissas hereditárias, se a conclusão do link pertence a $k(A \rightarrow B)$, a premissa também pertencerá. Assim este cenário não ocorre.
- *passando de uma conclusão de l para outra conclusão de l* : os links que possuem mais de uma conclusão e permitem o fluxo da dependência entre elas são o de axioma, $\perp L$, WL quando a premissa é do lado direito e WR quando a premissa é do lado esquerdo (Figura 78). Aqui a conclusão do lado esquerdo pertenceria a $k(A \rightarrow B)$, enquanto a direita não. Todavia, se isso acontecer, $k(A \rightarrow B)$ sequer seria uma subestrutura de prova.
- *passando de uma premissa de l para outra premissa de l* : os links com mais de uma premissa e em que a dependência flui de uma para outra são $\rightarrow L$ (Figura 77) e CUT (Figura 78). Em ambos a dependência vai de uma ocorrência de fórmula do lado direito (a qual pertenceria a $k(A \rightarrow B)$) para outra do lado esquerdo (a qual

estaria fora de $k(A \rightarrow B)$). Isso implicaria que a premissa do lado direito de l seria uma porta (conclusão) de $k(A \rightarrow B)$, mas sabemos que $k(A \rightarrow B)$ tem apenas uma conclusão, invalidando este cenário.

- *passando de uma premissa de l para uma conclusão de l* : os links em que a dependência parte de uma premissa para uma conclusão são $\wedge R, \vee R, \rightarrow R$ (Figura 77), CR, WL quando a premissa é do lado direito e WR também quando a premissa é do lado direito (Figura 78). Em todos eles a dependência fluiria de uma fórmula do lado direito (que seria de $k(A \rightarrow B)$) para outra fórmula fora de $k(A \rightarrow B)$. Portanto a premissa do link seria uma porta (conclusão) de $k(A \rightarrow B)$: contradição como no caso anterior.

Portanto, se R é uma *proof-net* intuicionista, então é impossível o índice n sair de $k(A \rightarrow B)$ em R' . Logo R' será de fato uma *proof-net* intuicionista rotulada. □

Teorema 7 (Sequentização). *Dada uma proof-net intuicionista rotulada R , há uma derivação em cálculo de sequentes $SC(R)$ de $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ em $c-LD$ cujas ocorrências de fórmulas A_1, \dots, A_m e B_1, \dots, B_n estão em correspondência um para um com as premissas e conclusões de R , respectivamente, e $A_i \sim B_j$ se e somente se o índice da premissa A_i pertence ao conjunto de dependência de B_j .*

Demonstração. A prova é por indução no número de nós de regras de R , conforme na prova do Teorema 5.

1. *R possui apenas um nó de regra:* esse nó deve ser um axioma com conclusões $A : L/\{n\}$ e $A : R/\{n\}$, ou um $\perp L$ com conclusões $\perp : L/\{n\}$ e $A : R/\{n\}$. A derivação correspondente é $A \vdash A$ com $A \sim A$, ou $\perp \vdash A$ com $\perp \sim A$, respectivamente.
2. *R possui algum nó de regra final com apenas uma premissa:* esse nó deve ser WL , ou WR (diferente da prova do Teorema 5, não temos mais os links da negação pois aqui $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$).
 - *WL onde a premissa é uma fórmula do lado direito $B_i : R/S_i$:* seja $A : L/\{k\}$ a fórmula adicionada pelo link. Então a outra conclusão do link é $B_i : R/S_i \cup \{k\}$ (Figura 83). Pela hipótese de indução temos uma derivação Π para $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_i, \dots, B_n$. Então $SC(R)$ é obtida aplicando a regra WL e escolhendo conectar a nova premissa A à premissa do link (ou seja, $A \sim B_i$):

□

$$\frac{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m, A \vdash B_1, B_2, \dots, B_n} WL$$

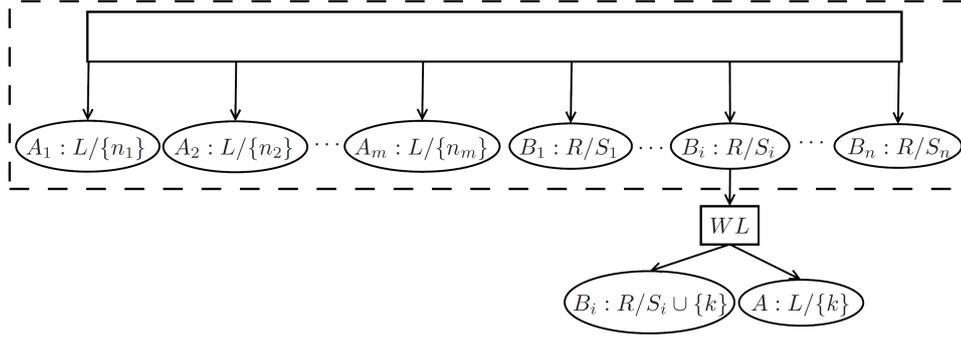


Figura 83 – *Proof-net* intuicionista rotulada com um link WL final, cuja premissa é uma fórmula do lado direito.

- WL onde a premissa é uma fórmula do lado esquerdo: seja $A : L/\{k\}$ a nova fórmula adicionada pelo link e $A_i : L/\{n_i\}$ a outra conclusão. Então a premissa do link é a ocorrência $A_i : L/\{n_i, k\}$ (Figura 78). Então em R toda ocorrência de fórmula (inclusive as conclusões de R) que dependia de $A_i : L/\{n_i\}$ também dependia de $A : L/\{k\}$. Considere R' o resultado da remoção deste link WL juntamente com suas conclusões de R e a remoção de k de todos os conjuntos de dependência. Da hipótese de indução chegamos a uma derivação Π em c-LD para R' : $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n$. Como c-LD só permite conectar a fórmula principal do enfraquecimento a uma única conclusão e em R pode haver um número arbitrário x de conclusões que dependem da fórmula do enfraquecimento, é preciso realizar x enfraquecimentos à esquerda em Π (sempre adicionando a mesma fórmula A) e em cada um deles conectar a nova fórmula a uma conclusão B_i que dependia de $A : L/\{k\}$ em R . Em seguida contraímos todas as premissas x adicionadas (aplicamos $x - 1$ contrações à esquerda) até chegarmos a uma única ocorrência de fórmula.

$$\frac{\frac{\frac{\Pi}{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_2, \dots, B_n}}{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A} \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}^{WL}}{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}^{CL}}$$

- WR : os dois casos decorrentes das duas versões deste link são mais simples que os anteriores.

3. R apresenta um link chaveável no final: esse nó de regra deve ser $\rightarrow R$, CL , CR , $\wedge L$, ou $\vee R$.

- o link final é $\rightarrow R$: sejam $A : L/\{n\}$ e $B : R/S$ as premissas do link e $A \rightarrow B : R/S - \{n\}$ sua conclusão. Seja R' o resultado da remoção deste link de R . Da hipótese de indução temos uma derivação Π para R' terminando em $A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n$. Uma vez que R é uma *proof-net* intuicionista

rotulada, $k(A \rightarrow B)$ apresenta apenas uma conclusão e a única conclusão de R' em que n pode ocorrer é no conjunto de B . Portanto em Π temos $A \not\sim B_i$, para todo $i \geq 2$ e assim podemos aplicar a regra $\rightarrow R+$ de c-LD a Π para chegarmos a uma derivação para R :

$$\frac{\Pi}{\frac{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, B_2, \dots, B_n} \rightarrow R+}$$

- *o link final é CL*: sejam $A^1 : L/\{n\}$ e $A^2 : L/\{n\}$ as premissas do link e $A : L/\{n\}$ sua conclusão. Se removermos este link para obtermos, $A^1 : L$ e $A^2 : L$ passam a ser premissas. Atribuímos índices distintos e computamos os novos rótulos para obtermos uma *proof-net* intuicionista rotulada menor R' . Pela hipótese de indução temos uma derivação Π para $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n$. Então chegamos a $SC(R)$ com uma contração à esquerda:

$$\frac{\Pi}{\frac{\mathbf{A}, \mathbf{A}, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}{\mathbf{A}, A_2, \dots, A_m \vdash B_1, B_2, \dots, B_n} CL}$$

Em c-LD é exigido que $A \sim B_i \Leftrightarrow A^1 \sim B_i$ ou $A^2 \sim B_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como R adota um único índice para as fórmulas do link CL , o resultado está de acordo com as regras de c-LD.

- *o link final é CR*: este caso mais simples que o do link CL , pois não é preciso processar novos índices ao remover o link final.
- *o link final é $\wedge L$* : sejam $A : L/S$ e $B : L/S$ as premissas deste link e $A \wedge B : L/S$ sua conclusão. Conforme feito no caso CL , removemos este link e, uma vez que $A : L/S$ e $B : L/S$ tornam-se premissas, atribuímos índices distintos para cada um deles e os rótulos das demais ocorrências de fórmulas são calculados. Considere R' essa nova *proof-net* intuicionista rotulada menor. Da hipótese de indução temos uma derivação Π em c-LD para $A_1, \dots, A_m, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_n$. Como Robinson usa regras multiplicativas e Kashima aditivas, são necessários duas aplicações da regra da conjunção e uma contração à esquerda:

$$\frac{\Pi}{\frac{\frac{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_n} \wedge L_1}{A_1, \dots, A_m, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash B_1, \dots, B_n} \wedge L_2} CL}$$

Dado que CL unifica as conexões, temos $A \wedge B \sim B_i \Leftrightarrow A \sim B_i$ ou $B \sim B_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

- *o link final é $\vee R$* : é semelhante ao caso anterior.

4. *Todos os nós de regras finais de R possuem mais de uma premissa e não são chaveáveis*: toda *proof-net* intuicionista rotulada (Definição 50) também é uma *proof-net* (Definição 42) se abstrairmos os rótulos e o novo link $\perp L$, então aqui qualquer link l final maximal em relação a \ll possui a propriedade *split* (ao ser removido juntamente com a sua conclusão, o resultado são duas *proof-nets* disjuntas). Então a sequentização é obtida a partir da regra de c-LD correspondente a l , que pode ser $\wedge R$, $\vee L$, $\rightarrow L$ ou *CUT*. Por exemplo: suponha que l é do tipo $\wedge R$, suas premissas são $A : R/S_A$ e $B : R/S_B$ e sua conclusão é $A \wedge B : R/S_A \cup S_B$. Pela hipótese de indução temos duas derivações Π_1 e Π_2 para $e(A)$ e $e(B)$, respectivamente. Então $SC(R)$ é obtida aplicando a regra $\wedge R$ de c-LD (Figura 69, mas com os rótulos):

$$\frac{\begin{array}{c} \Pi_1 \\ A'_1, \dots, A'_i \vdash \mathbf{A}, B'_1, \dots, B'_l \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi_2 \\ C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{B}, D_1, \dots, D_j \end{array}}{A'_1, \dots, A'_i, C_1, \dots, C_k \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, B'_1, \dots, B'_l, D_1, \dots, D_j} \wedge R$$

Como o link \wedge atribui $S_A \cup S_B$ como conjunto de $A \wedge$, o formato da regra $\wedge R$ de c-LD é respeitado: $A'_a \sim A \wedge B \Leftrightarrow A'_a \sim A$ e $C_c \sim A \wedge B \Leftrightarrow C_c \sim B$ para $1 \leq a \leq i$ e $1 \leq c \leq k$.

□

Corolário 6. *Seja R uma proof-net intuicionista. Então, pelo Lema 29 e Teorema 7, podemos concluir que R representa uma derivação aceita pela lógica intuicionista.*

5.6 Conclusão

No Capítulo 3 já foram discutidas algumas diversidades entre N-Grafos e as *proof-nets* (tanto as de Girard, quanto as de Robinson). Na Seção 5.2 foi exibida a prova de sequentização do sistema clássico, a qual usa *subnets* para encontrar o nó *split* terminal essencial para o Teorema 5, enquanto a sequentização para os N-Grafos via sub-N-Grafos busca um *split* no meio da prova (Teorema 1) e usa os conceitos de império do sul e total, que são generalizações das *subnets*.

Apesar disso, a estratégia utilizada no Capítulo 4 para obtermos a versão intuicionista para os N-Grafos pôde ser aplicada praticamente da mesma maneira para o sistema de Robinson. Como aqui já existe o conceito de menor subderivação válida para qualquer ocorrência de fórmula (reino), não foi preciso desenvolver um novo tipo de *subnet* para definirmos o critério de corretude intuicionista.

Assim com a Definição 48 provamos que há uma *proof-net* intuicionista para qualquer derivação em LJ' (Teorema 6). Para provarmos que toda *proof-net* intuicionista de fato representa um teorema da lógica intuicionista, aplicamos o conceito de dependências

e mostramos que sempre é possível chegar a uma derivação equivalente no fragmento proposicional de c-LD (Teorema 7), o que nos permitiu chegarmos ao Corolário 6, concluindo que a abordagem para a versão intuicionista dos N-Grafos também se aplica aqui.

6 CONCLUSÃO

Os N-Grafos foram originalmente propostos como um sistema de múltipla conclusão para a lógica clássica proposicional e suas regras são inspiradas em dedução natural. Além de apresentá-los no Capítulo 3, também mostramos como estender o critério Danos-Regnier para contemplar o conectivo da implicação e sequentizamos o sistema completo (Teorema 1) importando a noção de *subnets* de *proof-nets*. Isso nos forneceu as ferramentas para trabalharmos com subgrafos especiais, os sub-N-Grafos, os quais nos possibilitaram criar o conceito de território para o nosso sistema.

Com a meta-condição baseada em território (Definição 33), chegamos a uma nova definição para os N-Grafos intuicionistas e provamos a completude com um mapeamento a partir do cálculo de sequentes de Maehara (Teorema 2). A outra direção deste mapeamento é mais difícil: podemos ter um N-Grafo com um link $\rightarrow -I$ final e mais de uma conclusão, entretanto a regra $\rightarrow -R$ de LJ' requer apenas uma conclusão.

Então adicionamos rótulos aos N-Grafos para expressar a dependência entre premissas e conclusões, uma abordagem similar à aplicada pelos cálculos FIL e c-LD. Assim pudemos provar a corretude dos N-Grafos com dependências mostrando como construir uma derivação equivalente em c-LD. Os índices nas premissas e os conjuntos nas demais fórmulas apenas tornam explícitas as dependências existentes, mas não são de fato necessários para o sistema, conforme provado no Lema 21, o qual garante que todo N-Grafo intuicionista pode ser transformado num equivalente com rótulos.

A diferença entre a lógica proposicional clássica e a intuicionista se apresenta em LJ' com uma restrição na cardinalidade da regra da implicação. Os cálculos FIL e c-LD interpretam essa diferença explicitando a relação de dependência entre as fórmulas e nos mostram que num sistema intuicionista algumas hipóteses não são globais (podem ser descartadas apenas localmente) com relação às conclusões obtidas por elas.

A perspectiva geométrica inerente aos N-Grafos nos ajuda a visualizar as partes da derivação que têm essa dependência em relação às premissas descartadas, dando-nos as ferramentas para a realização de cortes cirúrgicos mesmo em provas intuicionistas (Teorema 4). Utilizando propriedades geométricas do grafo, definimos o território e um critério de corretude capaz de realizar o trabalho equivalente ao mecanismo de indexação na hora de validar uma prova clássica como intuicionista.

Ao final do Capítulo 4 nós usamos os N-Grafos como uma ferramenta para definirmos um critério de corretude global capaz de recuperar a natureza sequencial de uma derivação em sequentes num sistema de múltipla conclusão não-sequencial e também de validar a restrição de cardinalidade imposta localmente pela regra de introdução do conectivo da

implicação. Esse estudo mostrou que:

- o mecanismo índices foi utilizado na prova de corretude, mas vimos que é possível verificar se uma derivação clássica é intuicionista sem eles;
- mesmo sem a adição de rótulos, não é preciso sacrificar a simetria (impondo uma única conclusão ao cálculo);
- também não é necessário adicionar burocracia à versão clássica do sistema para obter esse resultado.

O Capítulo 5 deixou evidente que os N-Grafos foram usados apenas como uma ferramenta para obter esses resultados, pois a mesma estratégia se aplica ao sistema de Robinson: adotamos a mesma ideia para a definição do critério de corretude intuicionista e com isso provamos a completude em relação a LJ' e corretude a c -LD. Um trabalho futuro é a escrita de um artigo sobre esse sistema intuicionista e investigar se a estratégia serve para outros sistemas de múltipla conclusão criados originalmente para a lógica clássica.

Outro trabalho a ser realizado é o estudo de uma versão rotulada no estilo Curry-Howard nos N-Grafos. Já existe o sistema de dedução natural com fórmulas acompanhadas de termos do λ -cálculo. Assim uma pesquisa relacionada a essa tese seria verificar como os termos no λ -cálculo refletiriam no critério de corretude intuicionista dos N-Grafos e até mesmo numa possível normalização desta versão, a qual seria comparada à normalização já existente para a versão clássica baseada em sub-N-Grafos (ANDRADE et al., 2016).

Uma proposta que surge naturalmente é analisar os trabalhos já realizados na versão original (clássica) dos N-Grafos e verificar o comportamento na versão intuicionista, como o estudo dos ciclos do doutorado de Alves (ALVES, 2009), ou ainda uma versão dos N-Grafos para sistemas ecumênicos, os quais permitem expressar simultaneamente as lógicas clássica e intuicionista (DOWEK, 2015).

Nesta tese a complexidade da versão intuicionista foi discutida de maneira breve, pois a implementação do código sistema não faz parte do escopo deste trabalho. Assim uma possibilidade é o estudo da implementação de um provador em N-Grafos a partir de um sequente. Esse trabalho permitiria uma visualização da derivação de uma maneira menos burocrática que o formalismo de Gentzen e ainda assim manteria a múltipla conclusão (simetria), além de envolver o desafio de como um *software* desenharia um N-Grafo de maneira adequada (encontrar uma representação planar).

REFERÊNCIAS

- ALVES, G. V. *Transformations for proof-graphs with cycle treatment augmented via geometric perspective techniques*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2009. Citado na página 130.
- ANDRADE, L. et al. Normalization of n-graphs via sub-n-graphs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 323, p. 3–19, 2016. Proceedings of the Tenth Workshop on Logical and Semantic Frameworks, with Applications (LSFA 2015). Citado na página 130.
- ANDRADE, L. S. de. *A combinatorial study of soundness and normalization in N-Graphs*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, jul 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 62.
- BELLIN, G.; WIELE, J. van de. Subnets of proof-nets in mll-. *Proceedings of the Workshop on Advances in Linear Logic*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, p. 249–270, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 42, 49, 50, 68, 71, 76 e 99.
- CARBONE, A. Interpolants, cut elimination and flow graphs for the propositional calculus. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 83, n. 3, p. 249–299, fev. 1997. Citado na página 36.
- CARVALHO, R. et al. Sequentialization for n-graphs via sub-n-graphs. In: KOHLENBACH, U.; BARCELÓ, P.; QUEIROZ, R. de (Ed.). *Logic, Language, Information, and Computation - 22th International Workshop, WoLLIC 2014*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2014, (Lecture Notes in Computer Science, v. 8652). p. 94–108. ISBN 978-3-662-44144-2. Citado 6 vezes nas páginas 36, 41, 42, 54, 56 e 58.
- CARVALHO, R. et al. Propositional intuitionistic multiple-conclusion calculus via proof-graphs. Submitted to Logic Journal of the IGPL. 2017. Citado 4 vezes nas páginas 36, 41, 58 e 60.
- DALEN, D. V. Intuitionistic logic. In: *Handbook of philosophical logic*. [S.l.]: Springer, 1986. p. 225–339. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- DANOS, V.; REGNIER, L. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, Springer-Verlag, v. 28, n. 3, p. 181–203, 1989. ISSN 0933-5846. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 36, 40, 41 e 76.
- DOWEK, G. Why is this a proof? In: _____. [S.l.]: College Publications, 2015. cap. On the definition of the classical connectives and quantifiers. Citado na página 130.
- GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, p. 176–210 and 405–431, 1935. Translation to english: “Investigations into Logical Deduction” in *The Collected Works of Gerhard Getzen*, ed. M.E. Szabo, North-Holland Pub Co., 1969. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 18 e 19.
- GIRARD, J.-Y. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, p. 1–102, 1987. London Mathematical 50:1. Citado 5 vezes nas páginas 16, 41, 46, 76 e 94.

- GIRARD, J.-Y. Quantifiers in linear logic ii. *Prépublication de l'Equipe de Logique*, 1991. Université Paris VII, Nr. 19. Citado 6 vezes nas páginas 41, 46, 49, 51, 53 e 101.
- GIRARD, J.-Y.; TAYLOR, P.; LAFONT, Y. *Proofs and types*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 7). Citado na página 15.
- HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Grundzuge der theoretischen Logik*. [S.l.]: Springer, 1928. Citado na página 18.
- JASŃKOWSKI, S. *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*. 1. ed. [S.l.]: Studia Logica, 1934. Citado na página 19.
- KASHIMA, R. *Cut-Elimination Theorem for the Intermediate Logic CD*. [S.l.], 1991. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 26, 27, 29 e 92.
- KASHIMA, R.; SHIMURA, T. Cut-elimination theorem for the logic of constant domains. *Mathematical Logic Quarterly*, v. 40, p. 153–172, 1994. Citado na página 29.
- KNEALE, W. The province of logic. *Mind*, Oxford University Press, v. 66, n. 262, p. 258, 1958. Citado na página 36.
- LAMARCHE, F. *Proof nets for intuitionistic linear logic: essential nets*. [S.l.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- LOPEZ-ESCOBAR, E. G. K. On the interpolation theorem for the logic of constant domains. *Journal of Symbolic Logic*, v. 46, 1981. Citado na página 27.
- MURAWSKI, A. S.; ONG, C.-H. L. Fast verification of mll proof nets via imll. *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, v. 7, p. 473–498, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 34.
- NAGASHIMA, T. An intermediate predicate logic. *Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences*, v. 14, p. 53–58, 1973. Citado na página 27.
- OLIVEIRA, A. G. de. *Proofs from a Geometric Perspective*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, fev. 2001. Citado 15 vezes nas páginas 9, 10, 16, 36, 41, 57, 60, 61, 62, 67, 77, 78, 80, 81 e 82.
- OLIVEIRA, A. G. de; QUEIROZ, R. J. G. B. de. Geometry of deduction via graphs of proofs. In: QUEIROZ, R. de (Ed.). *Logic for Concurrency and Synchronisation*. [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, 2003, (Trends in Logic - Studia Logic Library). p. 1–87. Citado na página 36.
- PAIVA, V. de; PEREIRA, L. C. A short note on intuitionistic propositional logic with multiple conclusions. *Manuscrito*, v. 28, n. 2, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 27, 29, 32, 92 e 117.
- PLATO, J. von. *Proof theory of full classical propositional logic*. [S.l.], 1998. Citado na página 22.
- PRAWITZ, D. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. [S.l.]: Dover Publications, 1965. v. 32. 255–256 p. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 21 e 25.

- QUISPE-CRUZ, M. *Em direção aos N-Grafos intuicionistas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 10, 85, 86 e 92.
- QUISPE-CRUZ, M. et al. Intuitionistic n-graphs. *Logic Journal of the IGPL*, v. 22, n. 2, p. 274–285, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 60, 61, 62, 63, 74, 77 e 92.
- ROBINSON, E. Proof nets for classical logic. *Journal of Logic and Computation*, v. 13, p. 777–797, 2003. Citado 12 vezes nas páginas 10, 16, 42, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 101, 102 e 105.
- SHOESMITH, D. J.; SMILEY, T. J. *Multiple-Conclusion Logic*. London: Cambridge University Press, 1978. Citado na página 36.
- STRASSBURGER, L. *Proof Nets and the Identity of Proofs*. [S.l.], 2006. Citado na página 16.
- TAKEUTI, G. *Proof Theory*. [S.l.]: Amsterdam: North-Holland Publishing, 1975. v. 81. (Studies in logic and the foundations of mathematics, v. 81). Citado 2 vezes nas páginas 16 e 60.
- UNGAR, A. M. *Normalization, Cut-Elimination, and the Theory of Proofs*. [S.l.]: Center for the Study of Language and Inf, 1992. (Center for the Study of Language and Information - Lecture Notes). ISBN 0937073822. Citado na página 36.
- WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1913. Citado na página 18.
- ZUCKER, J. The correspondence between cut-elimination and normalization. *Annals of Mathematical Logic*, v. 7, n. 1, p. 1 – 112, 1974. ISSN 0003-4843. Citado na página 26.

APÊNDICES

APÊNDICE A – MAPEAMENTO DE N-GRAFOS COM UM ÚNICO LINK PARA O CÁLCULO DE SEQUENTES

Exibimos aqui como os N-Grafos intuicionistas formados por um único link podem ser derivados em c-LD. Esse procedimento faz parte da prova do Teorema 4. As regras de c-LD são apresentadas na Seção 2.4 e os links dos N-Grafos intuicionistas que por si só já representam derivações válidas são exibidos na Figura 84 (os links chaveáveis não são N-Grafos).

Para representar a relação de conexão em c-LD, adotaremos índices de maneira semelhante ao sistema FIL. Cada ocorrência de fórmula do antecedente terá um índice distinto e cada uma do conseqüente um conjunto de índices. Então a relação $A \sim B$ será representada como o índice de A pertencendo ao conjunto de índices de B . Observe também que em c-LD há também o axioma $\perp \vdash A$, onde $\perp \sim A$. Por fim, a constante \top , presente nos links dos N-Grafos, será representada por $\perp \rightarrow \perp$.

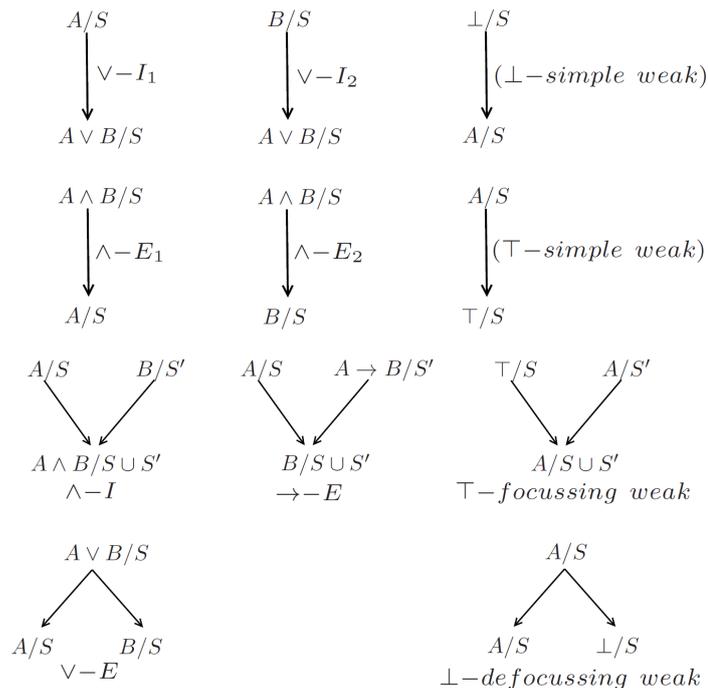


Figura 84 – Links com dependências.

$$\frac{A(1) \vdash A/\{1\}}{A(1) \vdash A \vee B/\{1\}} \vee R_1 \quad \frac{A(1) \vdash A/\{1\}}{A \wedge B(1) \vdash A/\{1\}} \wedge L_1$$

Tabela 8 – $\vee - I_1 = (A/S, A \vee B/S)$ e $\wedge - E_1 = (A \wedge B/S, A/S)$.

$$\frac{B(2) \vdash B/\{2\}}{B(2) \vdash A \vee B/\{2\}} \vee R_2 \quad \frac{B(2) \vdash B/\{2\}}{A \wedge B(2) \vdash B/\{2\}} \wedge L_2$$

Tabela 9 – $\vee - I_2 = (B/S, A \vee B/S)$ e $\wedge - E_2 = (A \wedge B/S, B/S)$.

$$\perp(1) \vdash A/\{1\} \quad \frac{\perp(1) \vdash \perp/\{1\}}{A(2), \perp(1) \vdash \perp/\{1,2\}} \text{WL} \quad \frac{}{A(2) \vdash \perp \rightarrow \perp/\{2\}} \rightarrow R_+$$

Tabela 10 – $\perp - \text{enfraq.simples} = (\perp/S, A/S)$ e $\top - \text{enfraq.simples} = (A/S, \top/S)$.

$$\frac{A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\}}{A(1), B(2) \vdash A \wedge B/\{1,2\}} \wedge R \quad \frac{A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\}}{A \vee B(3) \vdash A/\{3\}, B/\{3\}} \vee L$$

Tabela 11 – $\wedge - I = \{(A/S, A \wedge B/S \cup S'), (B/S', A \wedge B/S \cup S')\}$ e $\vee - E = \{(A \vee B/S, A/S), (A \vee B/S, B/S)\}$.

$$\frac{A(1) \vdash A/\{1\}}{A(1), \perp \rightarrow \perp(2) \vdash A/\{1,2\}} \text{WL} \quad \frac{A(1) \vdash A/\{1\}}{A(1) \vdash A/\{1\}, \perp/\{1\}} \text{WR}$$

Tabela 12 – $\top - \text{enfraq.convergente} = \{(\top/S, A/S \cup S'), (A/S', A/S \cup S')\}$ e $\perp - \text{enfraq.divergente} = \{(A/S, A/S), (A/S, \perp/S)\}$.

$$\frac{A(1) \vdash A/\{1\} \quad B(2) \vdash B/\{2\}}{A(1), A \rightarrow B(3) \vdash B/\{1,3\}} \rightarrow L$$

Tabela 13 – $\rightarrow - E = \{(A/S, B/S \cup S'), (A \rightarrow B/S', B/S \cup S')\}$.