



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós Graduação em Matemática

Milena Monique de Santana Gomes

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS

Recife

2016

Milena Monique de Santana Gomes

CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Airton Gonçalves de Castro

Recife

2016

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

G633c Gomes, Milena Monique de Santana
Contribuições ao estudo de equações diferenciais impulsivas / Milena
Monique de Santana Gomes. – 2016.
68 f.

Orientador: Airton Gonçalves de Castro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Metamática, Recife, 2016.
Inclui referências.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais impulsivas. I. Castro, Airton
Gonçalves de (orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

UFPE- MEI 2017-225

MILENA MONIQUE DE SANTANA GOMES

**CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
IMPULSIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 29/07/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Airton Temístocles de Castro (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Goiás

Resumo

Estudamos propriedades oscilatórias das soluções de uma equação parabólica com impulso, investigando via o método de desigualdades diferenciais, o que nos encaminhou a estudar, principalmente Equações Diferenciais com Impulso a fim de entendermos melhor o comportamento das soluções de tais equações quando em determinados instantes estão sujeitas a perturbações. Apresentamos os processos evolutivos que estão sob influência das ações impulsivas, discutindo resultados preliminares por meios de exemplos, de modo a deixar claro o que caracteriza um processo de evolução sujeito a efeitos impulsivos e a alguns fenômenos vindos de sistemas autônomos. Trataremos sobre a existência e continuidade locais de soluções, visto que pode ocorrer da equação diferencial impulsiva não ter solução, deixamos claro quais condições impor a fim de que garanta a existência local e continuidade. Além disso, as soluções de sistemas diferenciais impulsivos podem encontrar determinadas superfícies um número finito ou infinito de vezes, experimentando assim “batidas rítmicas”, as que nos trazem dificuldades no estudo das propriedades, que trataremos com muita atenção. Fazemos uma visita a algumas desigualdades diferenciais impulsivas básicas, para por fim tratamos de oscilações das soluções de uma Equação Parabólica com Impulsos, tratando das condições suficientes para a oscilação das soluções de dois problemas principais, fazendo entender qualitativamente o comportamento oscilatório das soluções de uma equação parabólica impulsiva. Deixamos assim, uma contribuição ao analisar vários problemas, dados também como exemplos e desenvolvemos uma demonstração própria para um dos principais teoremas desse trabalho, dando assim uma visão reformulada para problemas de equações diferenciais com impulso.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Impulsivas. Oscilações. Regularidades. Desigualdades Diferenciais.

Abstract

We studied oscillatory properties of the solutions of a impulsive parabolic differential equation, investigating via the differential inequality method, which led us to study mainly differential equations with Impulse in order to better understand the behavior of solutions of such equations when at certain moments they are subject to perturbations. We present evolutionary processes that are under the influence of impulsive actions, discussing preliminary results by means of examples, in order to make clear what characterizes a process of evolution subject to impulsive effects and some phenomena coming from autonomous systems. We will deal with the local existence and continuity of solutions, since it may occur that the impulsive differential equation has no solution, we make clear which conditions to impose in order to guarantee local existence and continuity. Moreover, solutions of impulsive differential systems can find certain surfaces a finite or infinite number of times, thus experiencing "rhythmic beats", which bring us difficulties in the study of properties, which we will treat very carefully. We make a visitation to some basic impulsive differential inequalities, for finally we deal with oscillations of the solutions of a Parabolic Equation with Impulses, treating the sufficient conditions for the oscillation of the solutions of two main problems, making qualitatively understand the oscillatory behavior of the solutions of an equation parabolic impulsive. We thus leave a contribution by analyzing various problems, also given as examples and developing a proper demonstration for one of the main theorems of this work, thus giving a reformulated view to problems of differential equations with momentum.

Keywords: Impulsive parabolic equations. Oscillation. Regularity. Impulsive differential Inequalities.

Sumário

1	Introdução.....	7
2	Equação Diferencial Impulsiva	8
2.1	Descrição dos Sistemas com Impulso.....	8
2.1.1	Sistemas com Impulsos em Tempos fixados	10
2.1.2	Sistemas com Impulsos em Tempos Variáveis.....	15
2.1.3	Sistemas Autônomos com Impulsos	17
3	Um Sistema Autônomo com Impulsos	20
4	Existência e Continuidade	35
5	Desigualdade Diferencial Impulsiva	47
6	Oscilações das Soluções de um Equação Parabólica com Impulsos	51
6.1	Condições Preliminares.....	51
6.2	Condições Suficientes para a Oscilações das Soluções para o Problema (1) – (3)	54
6.3	Condições Suficientes para a Oscilações das Soluções para o Problema (1), (2), (3).....	60
	Referências.....	68

1 Introdução

Este trabalho teve como foco inicial o estudo do artigo (BAINOV; MINCHEV, 1996), *Oscillation of the solutions of impulsive parabolic equations*, no decorrer, porém, notamos a necessidade de serem desenvolvidas duas linhas de raciocínios que se complementam no artigo: Equações Parciais Parabólicas e Equações Diferenciais Impulsivas (ver (LAKSHMIKANTHAM; BAINOV; SIMEONOV, 1989)) que davam resultados principalmente nas desigualdades muito utilizadas no mesmo.

Então, diante desse fato optamos seguir pelo estudo das Equações Diferenciais Impulsivas que se apresentou bastante atraente com o seu processo de evolução, onde em determinado instantes experimentavam mudança de estado, mostrando naturalidade para futuras aplicações na biologia, na dinâmica populacional entre outros (ver (BAINOV; SIMEONOV, 1993)).

Assim, iniciamos descrevendo um problema de evolução impulsivo, dando tratamento a três tipos principais de problemas: os de tempos fixados, os de tempos variáveis e por último, os processos autônomos. Na sequência a existência local de solução e a continuidade local que requerem condições específicas para serem garantidas, e neste momento iremos impor certas condições, onde pontuamos quais casos problemáticos devemos excluir.

Finalmente, no capítulo 4 fazemos algumas estimativas por desigualdades diferenciais impulsivas. Com tudo isso adentramos no último capítulo onde lá estamos preocupados em entender qualitativamente o comportamento oscilatórios das soluções de uma equação parabólica impulsiva.

No decorrer do trabalho contribuímos ao analisar vários problemas, dados como exemplos, e desenvolvemos uma demonstração própria para um dos principais teoremas desse trabalho: teorema 4.1.3 encontrado no capítulo 3, onde, em princípio, foi somente uma observação do texto (LAKSHMIKANTHAM; BAINOV; SIMEONOV, 1989) demos uma demonstração própria, para podermos ver os problemas de impulso por uma visão reformulada.

2 Equação Diferencial Impulsiva

Nesse capítulo vamos apresentar os processos evolutivos que estão sob influência das ações impulsivas e discutiremos alguns resultados preliminares por meio de exemplos, de modo a esclarecer o que caracterizam um processo de evolução sujeito a efeitos impulsivos, basicamente veremos três tipos de sistemas diferenciais impulsivos, e nos capítulos subsequentes discutiremos alguns resultados importantes da teoria de Equações Diferenciais Impulsivas.

2.1 Descrição dos Sistemas com Impulso

Consideremos um processo de evolução descrito por:

- (i) Seja $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e

$$x' = f(t, x); \quad (2.1.1)$$

- (ii) os conjuntos $M(t), N(t) \subset \Omega$ para $t \in \mathbb{R}_+$;

- (iii) o operador $A(t) : M(t) \longrightarrow N(t)$ para $t \in \mathbb{R}_+$.

As informações sobre os conjuntos $M(t)$ e $N(t)$ ficarão mais precisas nos exemplos que virão, mas antecipamos que a solução experimentará de impulso no instante que intersectar o conjunto $M(t)$ sendo instantaneamente transferida para o conjunto $N(t)$ de onde prosseguirá a solução.

Seja $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ uma solução do sistema (2.1.1) a partir de (t_0, x_0) . O processo de evolução se comporta da seguinte maneira: O ponto $P_t = (t, x(t))$ começa o seu movimento a partir do ponto inicial $P_{t_0} = (t_0, x(t_0))$ e move-se ao longo da curva $\{(t, x) : t \geq t_0, x = x(t)\}$ até o tempo, que chamaremos de t_1 , $t_1 > t_0$ em que o ponto P_t encontra o conjunto $M(t)$. Em $t = t_1$ o operador $A(t)$ transfere o ponto P_{t_1} para o ponto $P_{t_1}^+ = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$ onde $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. Em seguida o ponto P_t continua se movendo ao longo da curva com $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ como a solução de (2.1.1) a partir de $P_{t_1}^+ = (t_1, x_1^+)$ até atingir o conjunto $M(t)$ num outro instante $t_2 > t_1$ e assim como antes o ponto P_{t_2} é transferido para o ponto $P_{t_2}^+ = (t_2, x_2^+) \in N(t_2)$ onde $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. E assim enquanto existir solução de (2.1.1) o processo de evolução continua.

Vamos chamar a relação (i), (ii) e (iii) acima de **Sistema Diferencial Impulsivo (SDI)**, a curva descrita pelo ponto P_t de **Curva Integral** e a função que define a Curva Integral de **Solução** do SDI.

Uma solução de um SDI pode ser:

- a) uma função contínua, se a curva integral não intersecta o conjunto $M(t)$ ou intersecta no ponto fixo do operador $A(t)$, no instante t ;
- b) uma função contínua por partes tendo um número finito de pontos de descontinuidade de primeira espécie, se a curva integral encontra $M(t)$ em um número finito de pontos que não são os pontos fixos do operador $A(t)$ (observe a figura 1);
- c) uma função contínua por partes tendo um número enumerável de descontinuidade de primeira espécie, se a curva integral encontra o conjunto $M(t)$ em um número enumerável de pontos que não são pontos fixos de $A(t)$.

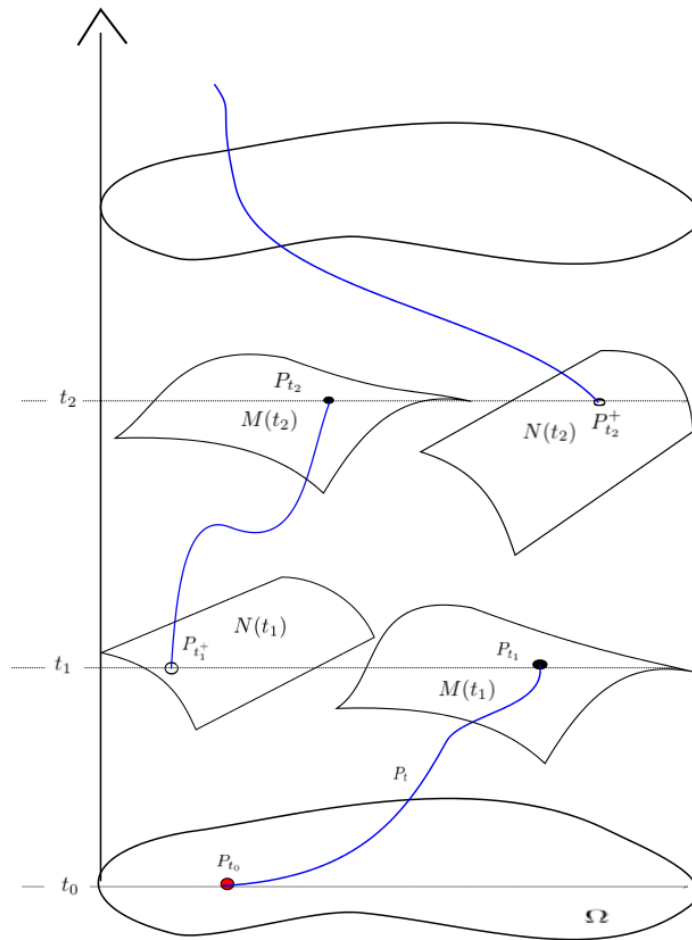


Figura 1: Processo de evolução

Os momentos t_k em que o ponto P_{t_k} atinge o conjunto $M(t_k)$ são chamados **momentos de efeito impulsivos** e tais pontos são "instantaneamente" lançados para

o conjunto $N(t_k)$ sendo chamados $P_{t_k}^+$. Vamos supor que as soluções $x(t)$ do sistema diferencial impulsivo são contínuas a esquerda de t_k (em alguns sistemas mais adiante poderemos supor, analogamente, que as soluções são contínuas a direita), $k = 1, 2, \dots$, isto é,

$$x(t_k^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_k \\ t < t_k}} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = x(t_k).$$

A liberdade que temos na escolha do conjunto de relações (i), (ii) e (iii) que descreve um SDI dá origem a vários tipos de sistemas. Discutiremos a seguir os mais típicos.

2.1.1 Sistemas com Impulsos em Tempos Fixados

Seja o conjunto $M(t)$ que representa a sequência das superfícies $t = t_k$, onde $\{t_k\}$ é a sequência dos tempos tal que $t_k \rightarrow \infty$ com $k \rightarrow \infty$. Defina o operador $A(t)$ para $t = t_k$, de modo que a sequência $\{A(k)\}$ seja da seguinte forma

$$\begin{aligned} A(k): \Omega &\longrightarrow \Omega \\ x &\longmapsto A(k)x = x + I_k(x), \end{aligned}$$

onde $I_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como resultado, o conjunto $N(t)$ também é definido para $t = t_k$ fazendo $N(k) = A(k)M(k)$. Com essa escolha de $M(k)$, $N(k)$ e $A(k)$, um sistema diferencial impulsivo simples no qual em tempos fixos pode ser descrito por

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq t_k \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1.2)$$

onde $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-)$ e $x(t^+) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s > t}} x(s)$. Lembre que estamos supondo $x(t)$ contínua a esquerda de $t = t_k$, logo $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$. Assim, se uma função $x(t)$ é solução de (2.1.2), então

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in (t_k, t_{k+1}] \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

O comportamento das soluções é influenciado pelo efeito impulsivo. Os seguintes exemplos, mostram que a continuidade das soluções é afetada pela natureza da ação impulsiva.

Exemplo 2.1.1. *Considere a Sistema Diferencial Impulsivo*

$$\begin{cases} x' = 0, & t \neq k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = \frac{1}{x-1}, & t = k \end{cases},$$

cuja solução $x(t)$ está no intervalo aberto $(0, 1)$ (isto é $\Omega = (0, 1)$). Note que a solução está definida apenas para $0 \leq t \leq 1$, pois no momento de impulso $t = 1$, a solução sai do

intervalo $(0, 1)$. Isto é, $0 < x_0 < 1$ e $x(1^+) - x(1^-) = \frac{1}{x_0 - 1} \Rightarrow x(1^+) = x_0 + \frac{1}{x_0 - 1} < 0$, pois $-1 < x_0 - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0 - 1} < -1 \Rightarrow x_0 + \frac{1}{x_0 - 1} < 0$. Portanto $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ não é mais solução do sistema acima pois $x(t_1, t_1, x_1^+) \notin (0, 1)$.

Observação 2.1.1. O impulso $I_k: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ não pode ser aleatório se queremos que o sistema continue tendo solução, teremos que garantir $x + I_k(x) \in \Omega$, por exemplo, basta que $\forall x \in \Omega$ se $|I_k(x)| < r_x$, onde $r_x = \sup\{r \in \mathbb{R} : B_r(x) \subset \Omega\}$.

Exemplo 2.1.2. Considere o Sistema Diferencial Impulsivo, com $\Omega = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, & t \neq \frac{k\pi}{4} = t_k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = -1, & t_k = \frac{k\pi}{4}. \end{cases}$$

Desconsiderando o impulso a solução da EDO $x' = 1 + x^2$ é, $\tan(t - \lambda)$, definida em $\lambda - \frac{\pi}{2} < t < \lambda + \frac{\pi}{2}$, com dado inicial $x(t_0) = x_0$ e $\lambda = t_0 - \text{Arctan}(x_0)$.

Para simplificar a análise, vamos estudar as soluções do sistema com impulso com o tempo inicial $t_0 = 0$.

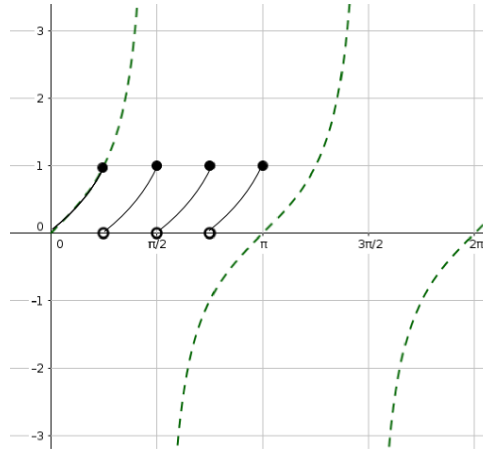


Figura 2: visualização

Um caso simples de analisar é $x_0 = 0$ (ver figura 2); a solução inicialmente é $x(t) = \tan(t)$, desconsiderando o impulso está definida no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, no tempo $t_1 = \frac{\pi}{4}$ sofre o impulso (o primeiro), $x_1 = x(t_1) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $x_1^+ = 1 + \Delta x = 1 - 1 = 0$. A solução continua:

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x\left(\frac{\pi}{4}^+\right) = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $x(t) = \tan(t - \frac{\pi}{4})$ definida para $t > \frac{\pi}{4}$, até sofrer o próximo impulso em $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Em geral a solução é $x(t) = \tan(t - k\frac{\pi}{4})$ para $t \in (\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4})$, que é periódica ($t > 0$) de período $\frac{\pi}{4}$.

O caso geral, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 = -\text{Arctan}(x_0)$. A solução inicialmente é $x(t) = \tan(t - \lambda_0)$ que permanece com esta expressão enquanto $0 \leq t < \frac{\pi}{2} - \lambda_0$ e $t \leq \frac{\pi}{4}$. Temos duas situações distintas

$$\frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2} + \lambda_0) \text{ ou } \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2} + \lambda_0.$$

No primeiro caso, $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x_0)$; $\text{Arctan}(x_0) < \frac{\pi}{4} \implies x_0 < 1$. No segundo caso, $x_0 \geq 1$.

Caso 1: $x_0 \geq 1$. O tempo $t_1 = \frac{\pi}{4}$ não está no domínio da solução, temos

$$x(t) = \tan(t + \text{Arctan}(x_0)) = \frac{x_0 + \tan(t)}{1 + x_0 \tan(t)},$$

para $0 \leq t < \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x_0) = \frac{\pi}{2} + \lambda_0$.

Caso 2: $x_0 < 1$. A solução está definida no tempo $t_1 = \frac{\pi}{4}$ quando sofre o primeiro impulso $x_1 = x(t_1) = x(\frac{\pi}{4}) = \frac{1+x_0}{1-x_0}$, $x_1^+ = x_1 + \Delta x = \frac{1+x_0}{1-x_0} - 1 = \frac{2x_0}{1-x_0}$. O novo trecho da solução é $x(t) = \tan(t - \lambda_1)$, onde $\lambda_1 = t_1 - \text{Arctan}(x_1^+) = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(x_1^+)$. A solução fica com esta expressão enquanto $\frac{\pi}{4} < t < \lambda_1 + \frac{\pi}{2}$ e $t \leq \frac{\pi}{2} = t_2$. temos que saber se $t_2 < \lambda_1 + \frac{\pi}{2}$, que é equivalente $x_1^+ < 1$, ou seja $x_0 < \frac{1}{3}$.

Se $\frac{1}{3} \leq x_0 < 1$, a solução não sofre o segundo impulso ($x_1^+ \geq 1$).

$$x(t) = \begin{cases} \tan(t - \lambda_0), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \tan(t - \lambda_1), & \frac{\pi}{4} < t < \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(x_1^+)$$

$$t - \lambda_1 = (t - \frac{\pi}{4}) + \text{Arctan}(x_1^+), \quad \frac{\pi}{4} < t < \lambda_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \frac{\tan(t - \frac{\pi}{4}) + x_1^+}{1 - x_1^+ \tan(t - \frac{\pi}{4})}.$$

Caso 3: $x_0 < \frac{1}{3}$, ($x_1^+ < 1$). $t_2 = \frac{\pi}{2}$ está no intervalo do domínio de $\tan(t - \lambda_1)$

que contém $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x(t_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + x_1^+}{1 - x_1^+ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 + x_1^+}{1 - x_1^+}. \\ x_2^+ &= x_2 - 1 = \frac{2x_1^+}{1 - x_1^+}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}x_2^+ \end{aligned}$$

A solução fica com a seguinte expressão

$$\begin{cases} \tan(t - \lambda_0), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ \tan(t - \lambda_1), & \frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \tan(t - \lambda_2), & \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} + \eta \end{cases},$$

com certo valor de η e sofrerá ou não o próximo impulso ($\mathcal{I}^o$) depende se $x_2^+ < 1$ ou $x_2^+ \leq 1$.

Somos levados a estudar a seguinte sequência recursiva:

$$x_0^+ = x_0, \quad x_{n+1}^+ = \frac{2x_n^+}{1 - x_n^+}, \quad \text{se } x_n^+ \neq 1;$$

Note que se $x_0 = x_0^+ \neq 0$ temos, $x_n^+ \neq 0$ enquanto a sequência estiver definida. Para $a_n = \frac{1}{x_n^+}$, daí $a_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}^+} = \frac{1 - x_n^+}{2x_n^+} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n^+} - 1\right)$, portanto $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - 1)$, enquanto $a_n \neq 0$, $a_0 = \frac{1}{x_0}$. $a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2} + 1 \therefore a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(a_n + 1)$. Assim $a_n + 1$ é uma PG de razão $\frac{1}{2}$. Logo $a_n = (1 + a_0)2^{-n} - 1$, que fica bem definida enquanto $a_n \neq 0$, $(1 + a_0)2^n \neq 1 \therefore a_0 \neq 2^n - 1$.

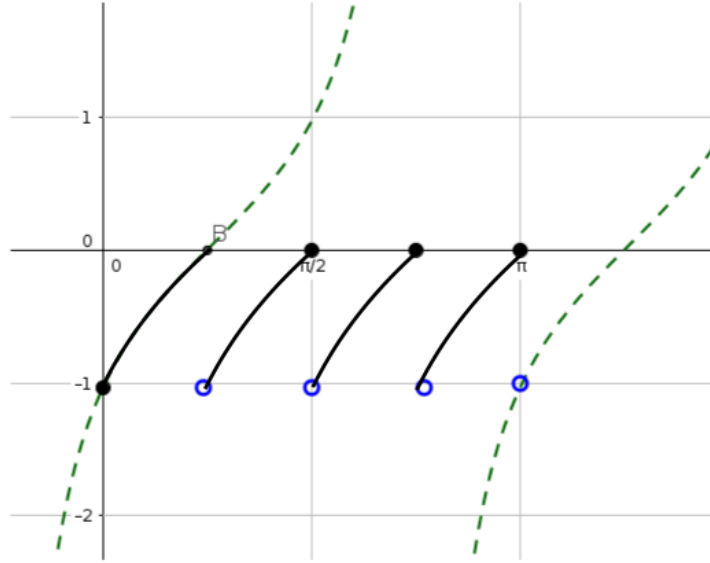
Nossa sequência a_n esta definida $\forall n$ se $a_0 \notin \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Voltando para sequência x_n^+ . Então $x_n^+ = \frac{1}{a_n} = \frac{x_0 2^n}{1 - x_0^+(2^n - 1)}$, se $x_0 \notin \{\frac{1}{2^n - 1} : n \in \mathbb{N}\}$ então x_n^+ existe para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos determinar os pontos fixos da transformação $x \mapsto \frac{2x}{1 - x}$, $x \neq 1$. Assim $\frac{2x}{1 - x} = x \iff 2x = x - x^2 \therefore x^2 + x = 0$, $x = 0$ ou $x = -1$. Desta forma $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, $x_n = 0$ ou $x_n = 1$. Assim se $x_0 = 0$ temos $x_n = 0 \forall n$, e se $x_0 = 1$ temos $x_n = 1 \forall n$. A situação $x_0 = 1$ é similar ao caso já estudado $x_0 = 0$. A solução de

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, & t \neq k\frac{\pi}{4} \\ \Delta x = -1, & t = k\frac{\pi}{4} \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

é

$$x(t) = \begin{cases} \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ \tan\left(t - \frac{(k+1)\pi}{4}\right), & \frac{k\pi}{4} < t \leq \frac{(k+1)\pi}{4} \end{cases}$$

Figura 3: caso $x_0 = -1$

Para $t > 0$ é periódica de período $\frac{\pi}{4}$.

Outro fato fácil de verificar é que $\lim x_n^+ = -1$, se $x_0 \notin \left\{ \frac{1}{2^n - 1} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$.

Vamos enunciar um lema que será muito útil para caracterizar todas as soluções.

Lema 2.1.1. Dado $n \geq 1$, são equivalentes:

(a) $x_0 < \frac{1}{2^n - 1}$;

(b) x_j^+ está bem definida se $1 \leq j \leq n$, e $x_j^+ < 1$, se $0 \leq j \leq n - 1$.

Demonstração. ((a) $\Rightarrow$ (b)) Como 2^j é crescente temos $x_0 < \frac{1}{2^j - 1}$ para todo $0 \leq j \leq n$, em particular $(2^j - 1)x_0 \neq 1$, assim

$$x_j^+ = \frac{x_0 2^j}{1 - x_0(2^j - 1)}$$

está bem definido para $0 \leq j \leq n$. Continuando,

$$x_j^+ - 1 = \frac{x_0 2^j - 1 + x_0(2^j - 1)}{1 - x_0(2^j - 1)} = \frac{x_0(2^{j+1} - 1) - 1}{1 - x_0(2^j - 1)} = -\frac{1 - x_0(2^{j+1})}{1 - x_0(2^j - 1)}$$

. Verificar se $x_j^+ < 1$ é verificar se $\frac{1 - x_0(2^{j+1})}{1 - x_0(2^j - 1)} > 0$. Como

$$1 - x_0(2^j - 1) > 0, \forall j \leq n,$$

temos

$$x_j^+ < 1, j \leq n - 1.$$

((b) $\Rightarrow$ (a)) Como $x_j^+ = \frac{x_0 2^j}{1 - x_0(2^j - 1)}$, se x_j^+ está bem definido então $x_0 \neq \frac{1}{2^j - 1}$. No caso (x_j^+) existe se $j \leq n$ e garantimos $x_0 \neq \frac{1}{2^j - 1}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Já verificamos que $x_j^+ < 1$ é equivalente $\frac{1 - x_0(2^{j+1})}{1 - x_0(2^j - 1)} > 0$, multiplicando todos, $0 \leq j \leq n - 1$,

$$\left(\frac{1 - x_0(2^n - 1)}{1 - x_0(2^{n-1} - 1)} \right) \left(\frac{1 - x_0(2^{n-1} - 1)}{1 - x_0(2^{n-2} - 1)} \right) \cdots \left(\frac{1 - x_0(2^2 - 1)}{1 - x_0(2 - 1)} \right) \left(\frac{1 - x_0(2 - 1)}{1 - x_0(1 - 1)} \right) > 0,$$

simplificando temos $1 - x_0(2^n - 1) > 0$, ou seja, $x_0 < \frac{1}{2^n - 1}$. $\square$

Estamos em condições de escrever as soluções para todos os valores de x_0 .

Se $x_0 \leq 0$ a solução do problema é

$$x(t) = \begin{cases} \tan(t - \lambda_0) = \frac{x_0 + \tan(t)}{1 - x_0 \tan(t)}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} = t_4 \\ \tan(t - \lambda_n) = \frac{x_n^+ + \tan(t - t_n)}{1 - x_n^+ \tan(t - \lambda_n)}, & t_n < t \leq t_{n+1} \end{cases}$$

que experimenta todos os impulsos, pois $x_0 < \frac{1}{2^n - 1}$, $\forall n \geq 1$, será periódica apenas nos casos em que $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$. ($\lambda_n = t_n - \arctan(x_n^+)$).

O caso $x_0 \geq 0$ já foi estudado e $x(t) = \tan(t - \lambda_0) = \frac{x_0 + \tan(t)}{1 - x_0 \tan(t)}$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2} + \lambda_0$.

Para os outros casos $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2^{n+1} - 1}, \frac{1}{2^n - 1})$. Se $x_0 \in [\frac{1}{2^{n+1} - 1}, \frac{1}{2^n - 1})$, a solução sofre exatamente n impulsos,

$$x(t) = \begin{cases} \tan(t - \lambda_0) = \frac{x_0 + \tan(t)}{1 - x_0 \tan(t)}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \tan(t - \lambda_j) = \frac{x_j^+ + \tan(t - t_j)}{1 - x_j^+ \tan(t - t_j)}, & t_j < t \leq t_{j+1}, 1 \leq j < n \\ \tan(t - \lambda_n) = \frac{x_n^+ + \tan(t - t_n)}{1 - x_n^+ \tan(t - t_n)}, & t_n < t < \lambda_n + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Estamos usando $\frac{1}{2^{n+1} - 1} \leq x_0 < \frac{1}{2^n - 1}$, o lema (2.1.1) garante $x_j^+ < 1$, $1 \leq j \leq n - 1$; $x_n^+ \geq 1$.

2.1.2 Sistemas com Impulsos em Tempos Variáveis

Seja $\{S_k\}$ uma sequência de superfícies dadas por $S_k: t = \Gamma_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \Omega$, com $\Gamma_k(x) < \Gamma_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k(x) = \infty$. Então temos o seguinte Sistema Diferencial Impulsivo:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \neq \Gamma_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), & t = \Gamma_k(x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Sistemas com tempos variáveis de efeito impulsivos como (2.1.3) oferecem problemas mais difíceis comparados com sistemas de tempos fixos de efeito impulsivo. Por exemplo, note que os momentos do efeito para o sistema (2.1.3) depende das soluções, i.e., $t_k = \Gamma_k(x(t_k))$ para cada k . Assim, soluções a partir de diferentes pontos terão diferentes pontos de descontinuidades. Também, uma solução pode atingir a mesma superfície S_k várias vezes e chamaremos tal comportamento de **fenômeno de batimentos**. Além disso, diferentes soluções podem coincidir-se depois de algum tempo e comportam-se, a partir daí, como uma única solução, este fenômeno é chamado **confluência**, comumente temos perda de unicidade. Após a definição seguinte, trataremos de um exemplo que ilustra estas situações.

Definição 2.1.1. *Espaço de fases é a coleção das soluções de um sistema. Cada curva representa uma solução para uma condição inicial diferente.*

Definição 2.1.2. *Para a função sinal adotamos:*

$$\text{sinal } x = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 2.1.3. *Considere a SDI.*

$$\begin{cases} x' = 0, & t \neq \Gamma_k(x), t \geq 0 \\ \Delta x = x^2(\text{sinal}(x)) - x, & t = \Gamma_k(x), k = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

onde $\Gamma_k(x) = x + 6k$ para $|x| < 3$.

Temos como solução da EDO clássica $x(t) = \text{cte}$, porém essas soluções deixam de ser contínuas quando intersectam alguma superfície S_k , onde sofre o efeito impulsivo nos dando uma nova solução no espaço de fases, isto é $x(t_k^+) - x(t_k^-) = x^2(\text{sinal}(x)) - x(t_k)$, como $x(t_k^-) = x(t_k)$, temos $x(t_k^+) = x^2(\text{sinal}(x))$. Vejamos os casos seguintes:

1. As soluções $x(t)$ com condição inicial $x(0) = x_0$ com $|x_0| \geq 3$ são livres de efeitos impulsivos uma vez que não tem intersecção com as superfícies S_k (ver figura 4);
2. As soluções $x(t)$ que começam nos pontos $(0, x_0)$, $1 < x_0 < 3$, sofre efeito impulsivo um número finito de vezes. Por exemplo, considere a solução $x(t)$ com $x(0) = 2^{\frac{1}{4}}$ atinge a superfície S_0 três vezes e não encontra qualquer superfície S_k depois do tempo $t_3 = 2$. Visto que $x(t_1^+) = (2^{\frac{1}{4}})^2(\text{sinal}(+)) = (2^{\frac{1}{2}})$, analogamente $x(t_2^+) = 2$ e $x(t_3^+) = 4$, onde $t_1 = 2^{\frac{1}{4}}$, $t_2 = 2^{\frac{1}{2}}$ e $t_3 = 2$. Observe que, as soluções que começam em $(0, 2^{\frac{1}{4}})$ e $(0, 4)$ unem-se para $t \geq 2$ e portanto, exibem o fenômeno de confluência. (ver figura 5);
3. Se o ponto inicial x_0 é tal que $0 < x_0 < 1$, então a solução $x(t)$ atinge as superfícies S_k em um número infinito de instantes t_k tal que $\lim t_k = \infty$, assim como $\lim x(t_k) = 0$

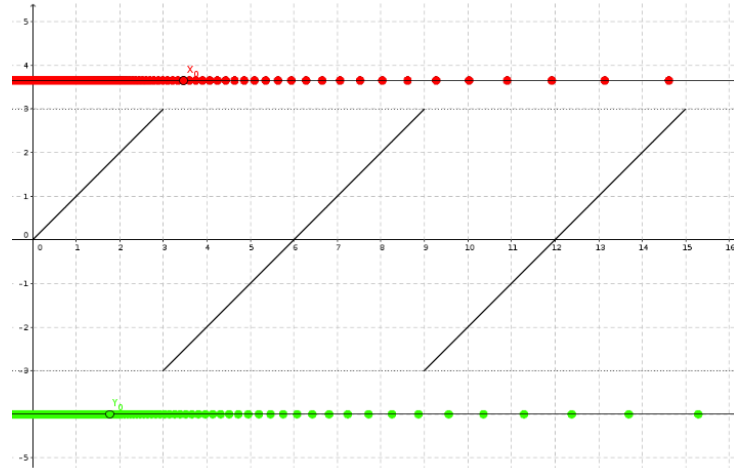


Figura 4: Soluções livre de efeitos impulsivos

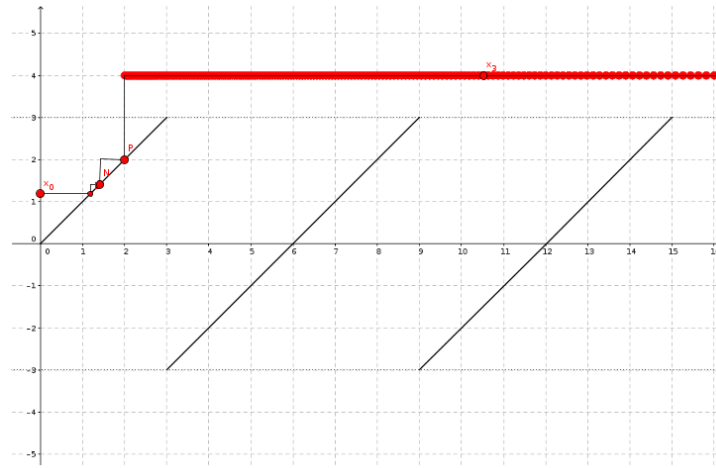


Figura 5: Soluções entre 1 e 3 sofre efeito impulsivo um número finito de vezes

basta notar que $0 < x_0 < 1$, então $\forall k, x(t_{k+1}) < x(t_k)$. Por exemplo $x_0 = x(0) = \frac{1}{2}$, então $x(t_1^+) = \frac{1}{2^2}$ e em seguida $x(t_2^+) = \frac{1}{2^4}$. (ver figura 6);

4. Por outro lado, a solução $x(t)$ com $-1 < x_0 < 0$ encontra S_k um número infinito de instantes t_k , mas nesse caso $\lim_{t \rightarrow \infty} t_k = 6$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = 0$. (ver figura 7);
5. As soluções que iniciam nos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ atingem as superfícies S_k nos tempos t_k que são os pontos fixos do $A(t) = x^2 \sin(x)$, por esta razão não há efeito impulsivo. (ver figura 8).

2.1.3 Sistemas Autônomos com Impulsos

Sejam os conjuntos $M(t) \equiv M$, $N(t) \equiv N$, e o operador $A(t) \equiv A$ independentes de t e tome $A: M \rightarrow N$ definido por $Ax = x + I(x)$, onde $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere o sistema

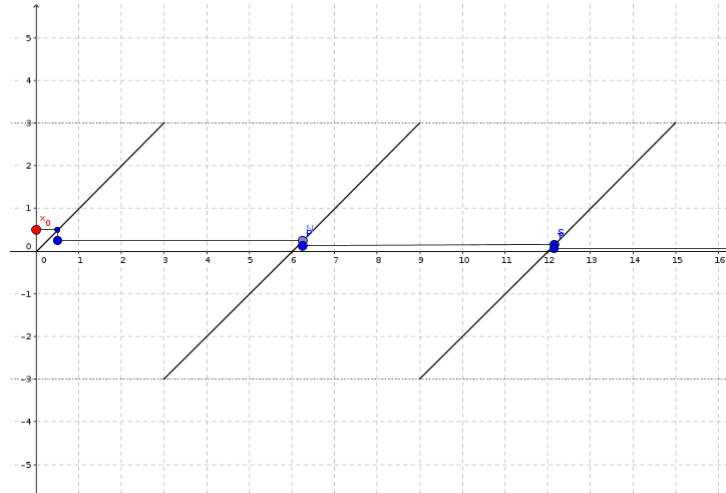


Figura 6: Soluções que iniciam entre 0 e 1 sofrem infinitos impulsos, em superfícies S_k distintas

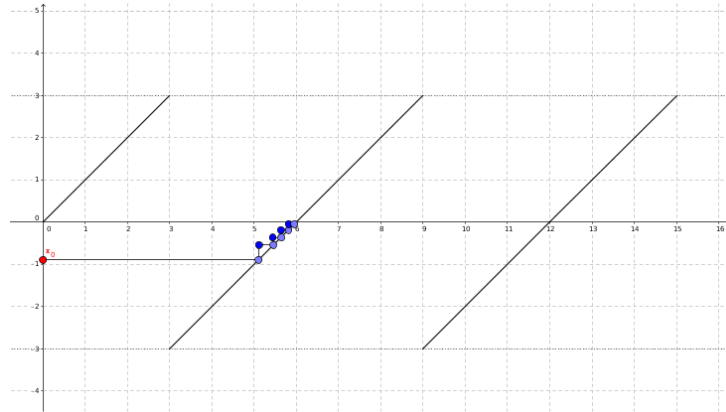


Figura 7: Nesse caso temos exibido o fenômeno de batimentos

diferencial impulsivo

$$\begin{cases} x' = f(x), & x \notin M \\ \Delta x = I(x), & x \in M \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Quando qualquer solução $x(t) = x(t, 0, x_0)$ atingir o conjunto M em algum momento t , o operador A transfere instantaneamente o ponto $x(t) \in M$ para o ponto $y(t) = x(t) + I(x(t)) \in N$. O exemplo que daremos para este tipo de sistema será tratado no capítulo seguinte, pois queremos trabalhar detalhadamente alguns fenômenos interessantes que ele nos propõe.

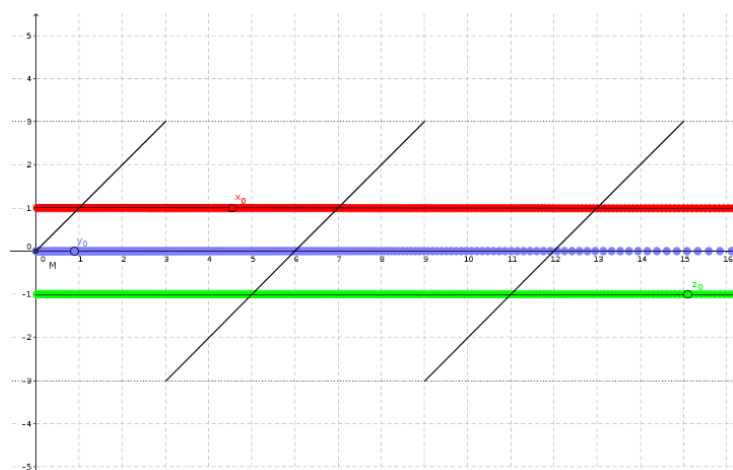


Figura 8: Nesse caso não temos impulsos pois as soluções passam pelos pontos fixos de $A(t)$

3 Um Sistema Autônomo com Impulsos

Aqui trataremos um exemplo de um sistema autônomo impulsivo, observando várias possibilidades interessantes de fenômenos que podemos encontrar.

Consideremos então o Sistema Diferencial Impulsivo em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1, x'_2 = -\alpha x_2, & \alpha > 0, x \notin M \\ A : M \rightarrow N, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

onde os conjuntos $M, N \subset \mathbb{R}^2$ são definidos por $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1^2 + x_2^2 = 8\}$, $N = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ e A atribui a cada ponto $x \in M$ a um ponto $y \in N$ de forma radial, $A = \frac{2x}{|x|}$.

Claramente, conjuntos M e N , tratam-se de um elipse com eixo maior vertical ($a = 2\sqrt{2}$) e eixo menor horizontal ($b = \frac{2\sqrt{10}}{5}$) e uma circunferência de raio 2, respectivamente. (ver figura ??)

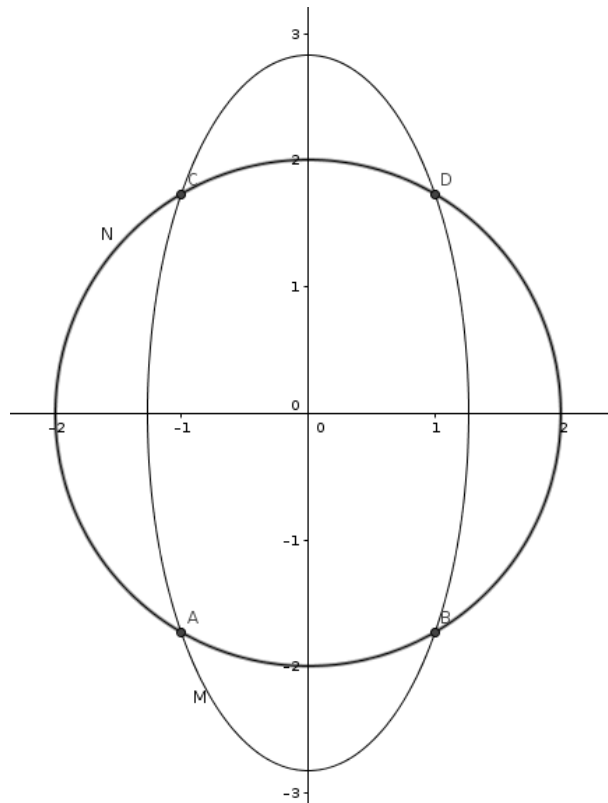


Figura 9: Os conjuntos M e N

É fácil ver que $M \cap N = \{(1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})\}$ e que formam também o conjunto dos pontos fixos do operador A . Vendo o sistema (3.0.1) como uma

EDO clássica, ou seja, vamos desconsiderar, temporariamente, o efeito impulsivo e resolver:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1, x_2' = -\alpha x_2, & \alpha > 0 \\ x_1(0) = x_{1,0}, x_2(0) = x_{2,0} \end{cases} \quad (3.0.2)$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1,0} \exp(-t), \\ x_2(t) = x_{2,0} \exp(-\alpha t) \end{cases} \quad (3.0.3)$$

logo, se $x_{1,0} \neq 0$ podemos escrever

$$x_2 = \frac{x_{2,0}}{|x_{1,0}|^\alpha} |x_1|^\alpha$$

chamemos $c = \frac{x_{2,0}}{|x_{1,0}|^\alpha}$, assim

$$x_2 = c|x_1|^\alpha$$

Observação 3.0.1. *As órbitas (sem impulsos) convergem para a origem se $\alpha > 0$, isto é, a origem é equilíbrio estável nesse caso. Basta notar que quando $t \rightarrow \infty$, o ponto $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$.*

Vejamos o esboço de algumas fases para os seguintes caso:

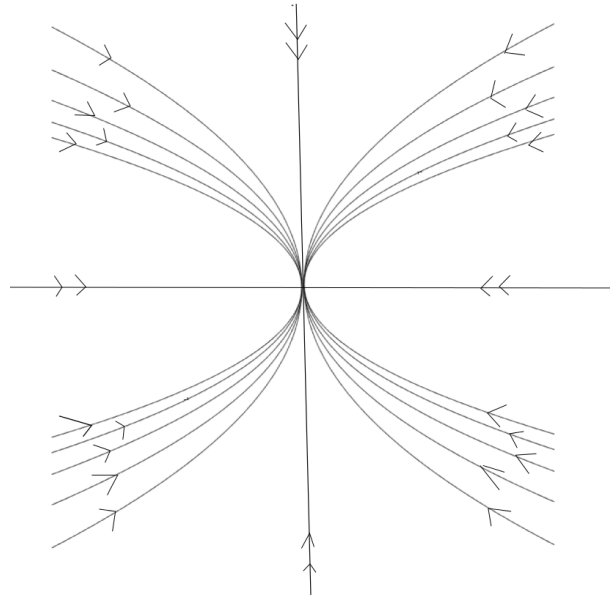
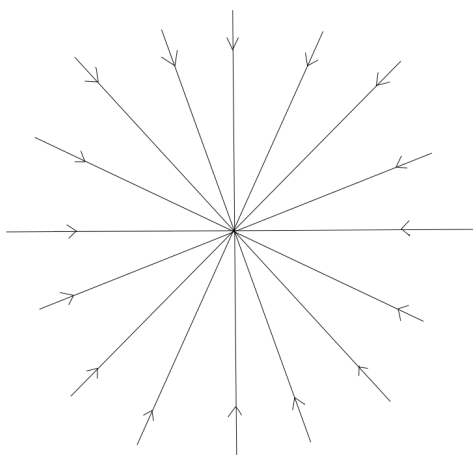
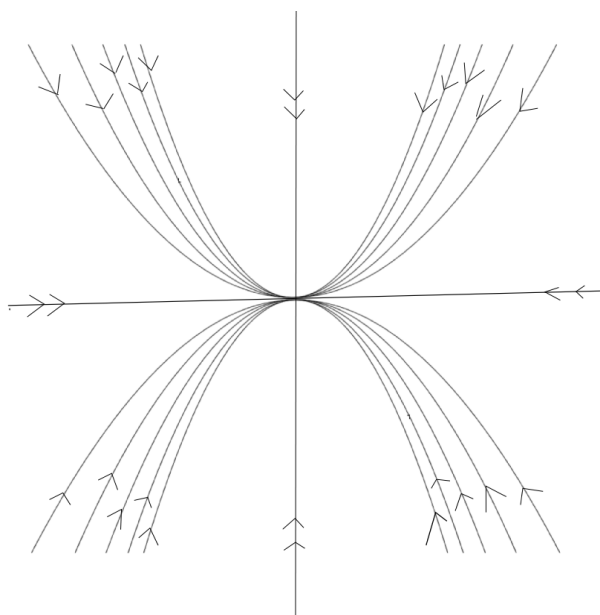


Figura 10: Caso $0 < \alpha < 1$

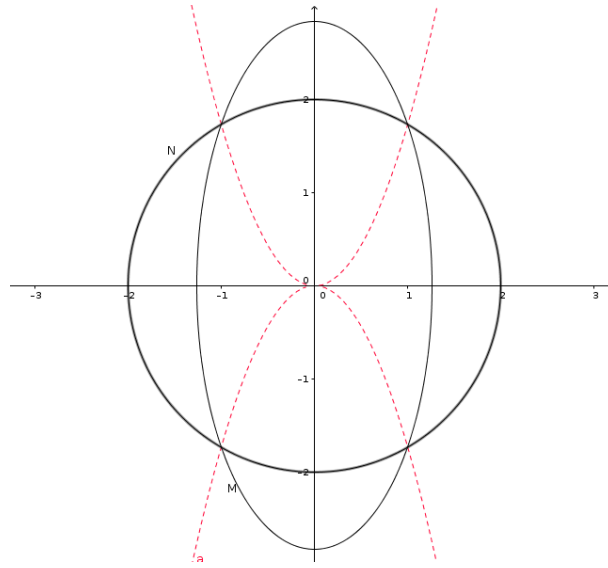
Definição 3.0.1. *Chamaremos separatrizes as órbitas que passam pelos pontos fixos do operador A . (ver figura 13)*

Note que as órbitas que passam pelos pontos fixos são contínuas, ou seja, ali as soluções não sofrem efeitos impulsivos.

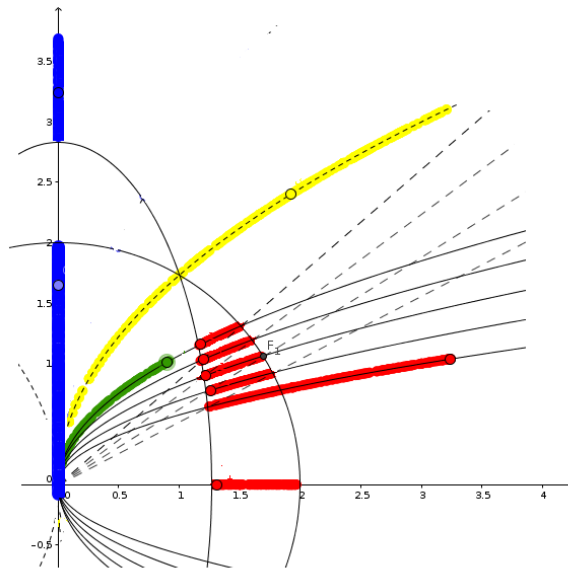
Figura 11: Caso $\alpha = 1$ Figura 12: Caso $\alpha > 1$

Observação 3.0.2. Para facilitar chamaremos as órbitas que passam pelos pontos fixos de A por γ_1 , γ_2 , γ_3 e γ_4 referentes ao primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes, respectivamente.

Por questão de simetria, analisaremos o comportamento das soluções do (3.0.1) no primeiro quadrante, para todos os casos.

Figura 13: Separatrizes para o caso $\alpha > 1$

1. $0 < \alpha < 1$ (ver figura 14)

Figura 14: caso $0 < \alpha < 1$

- a) Cada solução com valor inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$ dentro da região delimitada pela elipse tende para origem e é livre de efeitos impulsivos;
- b) soluções que iniciam em $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertencentes a γ_1 convergem para origem livres de impulsos, visto que tal órbita é contínua ao passar pelo ponto fixo $(1, \sqrt{3})$;
- c) soluções iniciadas acima de γ_1 , tocam M apenas uma vez. Por exemplo, se $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertence ao eixo vertical, com $x_{2,0} > 2\sqrt{2}$, a solução de (3.0.1) é dada

por uma órbita descontínua formada por dois arcos, que para este caso são dois segmentos.

d) Para soluções iniciadas abaixo da separatriz γ_1 temos que considerar duas situações:

- i) Ponto inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$ tal que, $0 < x_{2,0} < x_{1,0}^\alpha \sqrt{3}$, $5x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 > 8$. Intersecta M um número infinito de vezes, convergindo para o segmento $B_1A = [\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2] \times \{0\}$.
- ii) Ponto inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertencente ao eixo horizontal exterior a elipse, ou seja, $x_{1,0} > \frac{2\sqrt{10}}{5}$ e $x_{2,0} = 0$, desenvolve uma solução periódica depois que toca pela primeira vez no ponto $(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 0)$ e é instantaneamente lançada para o ponto $(2, 0)$.

Para este último caso, vamos determinar a órbita (solução) explicitamente e o período.

Temos

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1,0} \exp(-t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ x_2(t) \equiv 0 \end{cases} \quad (3.0.4)$$

sabendo que t_1 é o tempo onde a solução intersecta pela primeira vez a elipse, assim $x_1(t_1) = \sqrt{\frac{8}{5}}$, temos então

$$\begin{aligned} x_{1,0} \exp(-t_1) &= \sqrt{\frac{8}{5}} \\ \exp(-t_1) &= \frac{\sqrt{8}}{x_{1,0} \sqrt{5}} \\ \exp(t_1) &= \frac{x_{1,0} \sqrt{5}}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

Note $t_1 > 0$ pois $x_{1,0} > \sqrt{\frac{8}{5}}$, assim

$$t_1 = \ln x_{1,0} + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 8)$$

Neste momento a solução é transferida para o ponto $(0, 2)$, isto é

$$x_1(t_1) = 2$$

de onde inicia-se uma nova órbita

$$x_1(t) = 2 \exp(-(t - t_1)), \quad t_1 < t \leq t_2$$

onde t_2 é o tempo onde $x_1(t)$ toca pela segunda vez a elipse,

$$x_1(t_2) = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Seja $T = t_2 - t_1$, assim

$$\begin{aligned} 2 \exp(-T) &= \frac{2\sqrt{10}}{5} \\ \exp(T) &= \frac{5}{\sqrt{10}} \\ \exp(T) &= \sqrt{\frac{5}{10}} \\ T &= \ln \sqrt{\frac{5}{2}} \\ T &= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) > 0 \end{aligned}$$

assim

$$t_2 = t_1 + T$$

e a órbita segue periódica

$$t_n = t_1 + (n - 1)T$$

quando

$$x_2 \equiv 0, \forall t$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{1,0} \exp(-t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2 \exp(-(t - t_n)), & t_n < t \leq t_{n+1} \end{cases}$$

Portanto $x_1(t)$ é periódica para $t \geq t_1$ de período

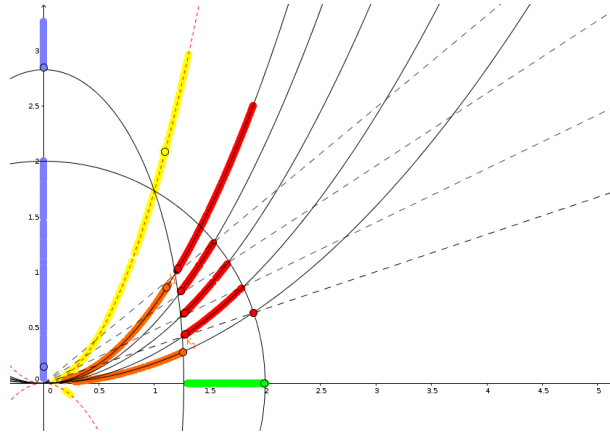
$$T = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2},$$

$$x_1(t + T) = x_1(t), \forall t \geq t_1.$$

2. $\alpha = 1$ (ver figura 15)

- a) Cada solução com valor inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$ tal que $5x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 < 8$, com $x_{1,0} > 0$ e $x_{2,0} > 0$ convergem para origem livre de efeitos impulsivos;
- b) Soluções que iniciam em $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertencentes a γ_1 , convergem para origem livres de impulsos, uma vez que as órbitas permanecem contínuas quando passa pelos pontos fixos;
- c) Soluções iniciadas acima de γ_1 , tocam M apenas uma vez, e são formadas por órbitas descontínuas dadas por dois segmentos;
- d) Soluções iniciadas abaixo de γ_1 são órbitas periódicas após a primeira interseção com M . Com efeito, seja $A_1 = (x_1(t_1), x_2(t_1))$ o ponto onde a solução toca pela primeira vez a elipse e seja $A_2 = (x_1(t_1^+), x_2(t_1^+)) = \left(\frac{2x_1(t_1)}{|x(t_1)|}, \frac{2x_2(t_1)}{|x(t_1)|} \right)$, o ponto em

- c) soluções iniciadas acima de γ_1 , tocam M apenas uma vez. Por exemplo, se $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertence ao eixo vertical, com $x_{2,0} > 2\sqrt{2}$, a solução de (3.0.1) é dada por uma órbita descontínua formada por dois arcos, que para este caso são dois segmentos.
- d) Soluções com ponto inicial abaixo da separatriz γ_1 , intersecta o conjunto M um número infinito de vezes, se $x_2 > 0$
- e) Ponto inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$ pertencente ao eixo horizontal exterior a elipse, ou seja, $x_{1,0} > \frac{2\sqrt{10}}{5}$ e $x_{2,0} = 0$, desenvolve uma solução periódica depois que toca pela primeira vez no ponto $(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 0)$, com período $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$, como feito anteriormente.

Figura 16: caso $\alpha > 1$

Neste momento vamos mudar o problema (3.0.1), consideraremos $\alpha = 0$. Assim o sistema novo é:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1, x'_2 = 0, & x \notin M \\ A : M \rightarrow N \end{cases} \quad (3.0.5)$$

com M , N e A como antes.

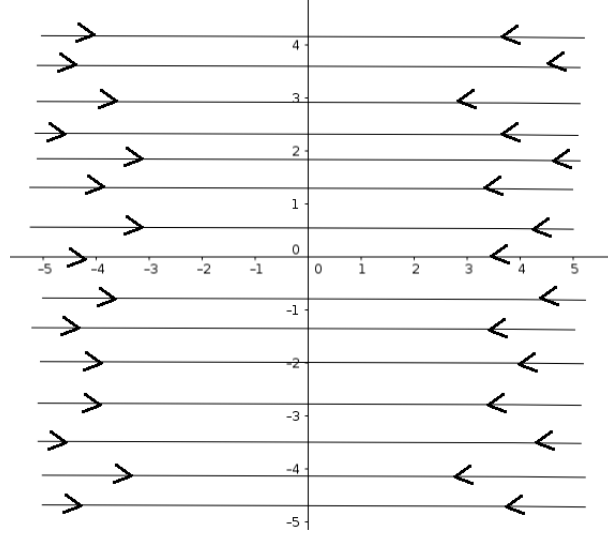
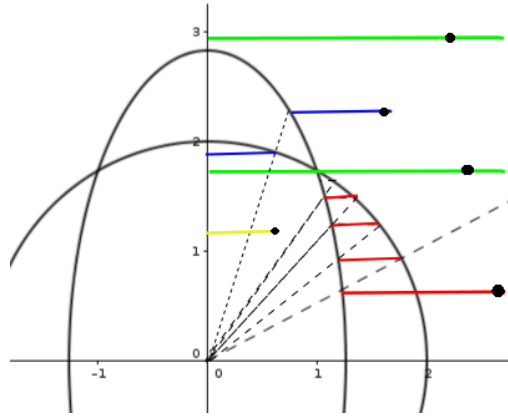
Desconsiderando o impulso o problema pode ser visto como uma EDO clássica de solução e espaço de algumas fases como na figura 17.

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1, x'_2 = 0, \\ x_1(0) = x_{1,0}, x_2(0) = x_{2,0} \end{cases} \quad (3.0.6)$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1,0} \exp(-t), \\ x_2(t) = x_{2,0} \end{cases} \quad (3.0.7)$$

Novamente, nos restringiremos, ao primeiro quadrante. Então temos os seguintes comportamento das soluções (ver figura 18):

Figura 17: caso $\alpha = 1$ Figura 18: comportamento solução caso $\alpha = 0$

- Soluções que iniciam em $(x_{1,0}, x_{2,0})$ com $x_{2,0} > \frac{2\sqrt{10}}{5}$, são livres de efeitos impulsivos e convergem para o ponto $(0, x_{2,0})$;
- Soluções que iniciam dentro da região delimitada pela elipse, são livres de efeitos impulsivos e convergem para $(0, x_{2,0})$;
- Soluções que iniciam em $(x_{1,0}, x_{2,0})$ com $\sqrt{3} < x_{2,0} \leq \frac{2\sqrt{10}}{2}$ toca M apenas uma vez, que é uma solução descontínua composta por duas órbitas;
- Soluções que iniciam no eixo horizontal com $x_{2,0} > 2\sqrt{2}$ se tornarão periódicas quando tocarem em M pela primeira vez, os cálculos seguem como antes para $\alpha > 0$;
- Se as soluções iniciam em $(x_{1,0}, x_{2,0})$ com $x_{2,0} = \sqrt{3}$ são contínuas, pois se trata de pontos pertencentes a separatriz;
- Finalmente, as soluções que iniciam nos pontos $(x_{1,0}, x_{2,0})$, tais que $5x_{1,0}^2 + x_{2,0}^2 > 8$ e $0 < x_{2,0} < \sqrt{3}$, tocam em M um número infinito de vezes e além disso a série dada

por $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta t$ é convergente e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (1, \sqrt{3})$ que nos permite prolongar a solução depois de um certo tempo no ponto $(1, \sqrt{3})$, e neste momento ainda teremos o fenômeno de confluência com soluções que se movem na separatriz. Note que a solução a partir de $(x_{1,0}, x_{2,0})$, com $x_{1,0} > \sqrt{\frac{8-x_{2,0}^2}{5}}$ e $0 < x_{2,0} < \sqrt{3}$, no tempo $t = t_1$, $x(t_1)$ toca pela primeira vez M . Isto é

$$x(t_1) = \left(\sqrt{\frac{8-x_{2,0}^2}{5}}, x_{2,0} \right)$$

e sendo transferida, instantaneamente, pelo operador A para um ponto em N , ou seja

$$x(t_1^+) = \sqrt{\frac{5}{2+x_{2,0}^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{8-x_{2,0}^2}{5}}, x_{2,0} \right) = (x_{1,1}, x_{2,1})$$

A partir daí a nova condição inicial é

$$(x_{1,1}, x_{2,1}) = \left(\sqrt{\frac{8-x_{2,0}^2}{2+x_{2,0}^2}}, \sqrt{\frac{5}{2+x_{2,0}^2}} x_{2,0} \right)$$

note que

$$\sqrt{\frac{5}{2+x_{2,0}^2}} \cdot x_{2,0} > x_{2,0}$$

com solução

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1,1} \exp(-(t - t_1)), & t_1 < t \leq t_2 \\ x_2(t) = x_{2,1} \end{cases} \quad (3.0.8)$$

assim novamente, quando $t = t_2$, $x(t_2) \in M$,

$$x(t_2) = \left(\sqrt{\frac{8-x_{2,1}^2}{5}}, x_{2,1} \right)$$

que será transferido instantaneamente para um ponto $x(t_2^+)$ em N . Isto é

$$x(t_2^+) = (x_{1,2}, x_{2,2}) = \left(\sqrt{\frac{8-x_{2,1}^2}{2+x_{2,1}^2}}, \sqrt{\frac{5}{2+x_{2,1}^2}} x_{2,1} \right)$$

e assim sucessivamente para cada t_k , com $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ chame $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, logo $\forall t$, tal que $t_n < t \leq t_{n+1}$, $x_1(t) = x_{1,n} \exp(-(t - t_n))$ e $x_2(t) = x_{2,n}$. Portanto,

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = \sqrt{\frac{8-x_{2,n}^2}{2+x_{2,n}^2}} \\ x_{2,n+1} = \sqrt{\frac{5}{2+x_{2,n}^2}} \cdot x_{2,n} \end{cases}$$

e

$$x(t_n^+) = (x_{1,n}, x_{2,n}) \in N$$

e

$$x(t_n) = \left(\sqrt{\frac{8 - x_{2,n-1}^2}{5}}, x_{2,n-1} \right) \in M$$

perceba que $0 < x_{2,n} < x_{2,n+1} < \sqrt{3}$ e $1 < x_{1,n+1} < x_{1,n}$, logo $(x_{1,n})$ e $(x_{2,n})$ são convergentes, olhando para a relação de recorrência concluimos que $(x_{2,n}) \rightarrow \sqrt{3}$, quando $n \rightarrow \infty$ para em seguida concluir que $(x_{1,n}) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, assim, $(x_{1,n}, x_{2,n}) \rightarrow (1, \sqrt{3})$, ponto onde passa a separatriz do 1º quadrante.

Sabe-se que $\Delta t_n \rightarrow 0$. Mas nos cabe a pergunta $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n$ converge?

Afirmção 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n$ converge se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n$ converge, onde ΔS_n é o comprimento de curva $x(t)$, $t_n < t \leq t_{n+1}$, isto é, $\Delta S_n = x_1(t_n^+) - x_1(t_{n+1}) = x_{1,n} - x_{1,n} \exp(-\Delta t_n)$.

Demonstração. Sejam $t_n < t \leq t_{n+1}$ e $x_1(t)$. Note que $x_1(t)$, é decrescente neste intervalo, então garantimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n$ são de termos positivos, perceba que o termo $x - 2(t)$ é constante. Tomemos $\Delta S_n = x_{1,n} - x_{1,n} \exp(-\Delta t_n)$ e dividindo em ambos os termos por Δt_n , obtemos

$$\frac{\Delta S_n}{\Delta t_n} = x_{1,n} \left(\frac{1 - \exp(-\Delta t_n)}{\Delta t_n} \right),$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta t_n} = 1$$

usando o seguinte resultado (LIMA, 2004).

Teorema 3.0.1. (*Comparação no infinito*) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ então $\sum a_n$ se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

□

Portanto, se mostramos que $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n$ é convergente, teremos a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n$$

Afirmção 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n < +\infty$,

Demonstração. Com efeito

$$\begin{aligned}
\Delta S_n &= \left(x_{1,n} - \sqrt{\frac{8 - x_{2,n}^2}{5}} \right) \left(\frac{x_{1,n} + \sqrt{\frac{8 - x_{2,n}^2}{5}}}{x_{1,n} + \sqrt{\frac{8 - x_{2,n}^2}{5}}} \right) \\
&= \frac{x_{1,n}^2 - \frac{8 - x_{2,n}^2}{5}}{x_{1,n} + \sqrt{\frac{8 - x_{2,n}^2}{5}}} \\
&= \frac{5x_{1,n}^2 + x_{2,n}^2 - 8}{5 \left(x_{1,n} + \sqrt{\frac{8 - x_{2,n}^2}{5}} \right)} \\
&= \frac{5x_{1,n}^2 + x_{2,n}^2 - 8}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}}
\end{aligned}$$

Note que $(x_{1,n}, x_{2,n}) \in \mathbb{N}$, disto temos

$$x_{1,n}^2 + x_{2,n}^2 = 4$$

logo, $x_{1,n}^2 = 4 - x_{2,n}^2$, daí

$$\begin{aligned}
\Delta S_n &= \frac{5(4 - x_{2,n}^2) + x_{2,n}^2 - 8}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}} \\
&= \frac{20 - 5x_{2,n}^2 + x_{2,n}^2 - 8}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}} \\
&= \frac{12 - 4x_{2,n}^2}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}} \\
&= \frac{4(3 - x_{2,n}^2)}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}} \\
&= \frac{4}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}} (3 - x_{2,n}^2)
\end{aligned}$$

Seja $\alpha_n = \frac{4}{5x_{1,n} + \sqrt{40 - 5x_{2,n}^2}}$. Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{(3 - x_{2,n}^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{2}{5}$$

Então podemos usar novamente o teorema (3.0.1) e determinar se $\sum_{n=1}^{\infty} (3 - x_{2,n}^2)$ é ou não convergente, para saber sobre a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n$. Façamos, $z_n = x_{2,n}^2$, que implica $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$, como $x_{2,n+1} = \sqrt{\frac{5}{2+x_{2,n}^2}} x_{2,n}$ então

$$\begin{cases} z_{n+1} = \frac{5z_n}{2 + z_n} \\ z_0 = x_{2,0}^2 \end{cases}$$

chamamos $a_n = 3 - z_n$. Vamos estudar a convergência de a_n , usando o teste da razão, (LIMA, 2004):

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3 - z_{n+1}}{3 - z_n} \\
 &= \frac{3 - \frac{5z_n}{2+z_n}}{3 - z_n} \\
 &= \frac{6 + 3z_n - 5z_n}{2 + z_n} \cdot \frac{1}{3 - z_n} \\
 &= \frac{2(3 - z_n)}{2 + z_n} \cdot \frac{1}{3 - z_n} \\
 &= \frac{2}{2 + z_n}
 \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} < 1$$

assim $\sum a_n$ converge, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta S$ converge. □

Sabemos que

$$\begin{cases} z_{n+1} = \frac{5z_n}{2 + z_n} \\ z_0 = x_{2,0}^2 = \lambda \end{cases}$$

Vamos tentar achar a expressão explícita para z_n .

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{5\lambda}{2 + \lambda}, & 2 + z_1 &= \frac{2^2 + 7\lambda}{2 + \lambda} \\
 z_2 &= \frac{5\lambda}{2 + \lambda} \cdot \frac{2 + \lambda}{2^2 + 7\lambda} = \frac{5^2\lambda}{2^2 + 7\lambda} \\
 z_3 &= \frac{5^3\lambda}{2^3 + 39\lambda} \\
 z_n &= \frac{5^n}{2^n + b_n\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

Afirmção 3: $z_n = \frac{5^n}{2^n + b_n\lambda}$, onde $b_{n+1} = 5^n + 2b_n$, para $n \geq 2$ e $b_1 = 1$.

Demonstração. Basta fazer,

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= \frac{5z_n}{2 + z_n}, \quad z_0 = \lambda \\
 &= \frac{5 \left(\frac{5^n}{2^n + b_n \lambda} \right)}{2 + \left(\frac{5^n}{2^n + b_n \lambda} \right)} \\
 &= \frac{\frac{5^{n+1} \lambda}{2^n + b_n \lambda}}{\frac{2^{n+1} + 2b_n \lambda + 5^n \lambda}{2^n + b_n \lambda}} \\
 &= \frac{5^{n+1} \lambda}{2^{n+1} + (2b_n + 5^n) \lambda} \\
 &= \frac{5^{n+1} \lambda}{2^{n+1} + b_{n+1} \lambda}
 \end{aligned}$$

□

Afirmção 4: $b_n = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j \in \mathbb{N}}} 2^i 5^j.$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1 \\
 b_2 &= 2 + 5 \\
 b_3 &= 2(2 + 5) + 5^2 = 2^2 + 2 \cdot 5 + 5^2 \\
 b_4 &= 2(2^2 + 2 \cdot 5 + 5^2) + 5^3 = 2^3 + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 5^3
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar por indução que b_n é da forma $b_n = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j \in \mathbb{N}}} 2^i 5^j$. De fato,

$$b_{n+1} = 2b_n + 5^n,$$

por hipótese de indução

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= 2 \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j \in \mathbb{N}}} 2^i 5^j + 5^n \\
 &= 2 \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \in \mathbb{N}}} 2^i 5^j
 \end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos escrever explicitamente $x_{1,n}$ e $x_{2,n}$.

$$z_n = \frac{5^n \lambda}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j}$$

$$x_{2,n} = \sqrt{\frac{5^n \lambda}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j}}$$

$$x_{1,n}^2 + x_{2,n}^2 = 4; \quad x_{1,n}^2 = 4 - x_{2,n}^2; \quad x_{1,n} = \sqrt{4 - z_n}$$

$$x_{1,n}^2 = 4 - \frac{5^n \lambda}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j} = \frac{2^{n+2} + \lambda \sum_{i+j=n-1} (2^{i+2} 5^j) + 5^n \lambda}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j}$$

$$x_{1,n} = \sqrt{\frac{2^{n+2} + \lambda \left(5^n + \sum_{i+j=n-1} (2^{i+2} 5^j) \right)}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j}}$$

$$x_{1,n} = \sqrt{\frac{2^{n+2} + \lambda \left(5^n + 4 \sum_{i+j=n-1} (2^i 5^j) \right)}{2^n + \lambda \sum_{i+j=n-1} 2^i 5^j}}$$

Onde termina os estudos do problema (3.0.5).

4 Existência e Continuidade

Neste capítulo trataremos sobre a existência e continuidade locais de soluções. Uma vez que uma equação diferencial impulsiva pode não ter solução, temos que impor condições que garantam a existência local e continuidade local.

Além disso, as soluções de sistemas diferenciais impulsivos podem encontrar determinadas superfícies um número finito ou infinito de vezes, veja exemplos anteriores, experimentando assim “batidas rítmicas”, as que nos traz dificuldades no estudo das propriedades qualitativas das soluções.

4.1 Existência Local e Continuidade Local

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Vamos supor, para cada $k = 1, 2, \dots$, que $\tau_k \in C[\Omega, (0, \infty)]$, $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$ para cada $x \in \Omega$. Por conveniência de notação, introduziremos $\tau_0 \equiv 0$ e suponha também que $S_k: t = \tau_k(x)$ são superfícies dadas pelos gráficos das funções τ_k que estão em D .

Antes de continuarmos é importante observarmos que:

Observação 4.1.1. *O conjunto dos pontos que determinam S_k é fechado em D .*

Demonstração. De fato, basta observar que $S_k = \alpha_k^{-1}(0)$, onde $\alpha_k: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha_k(t, x) = t - \tau_k(x)$. $\square$

Observação 4.1.2. *O conjunto $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$ é fechado em D .*

Antes de demonstrar a observação (4.1.2) vamos apresentar uma definição e um lema:

Definição 4.1.1. *Um ponto (t, x) é chamado ponto regular se $t \neq \tau_k(x)$, $\forall k \geq 1$, caso contrário é chamado ponto irregular; note que S é o conjunto dos pontos irregulares.*

Lema 4.1.1. *Dado $(t, x) \in D$, existe um único $k \geq 1$ tal que $\tau_{k-1}(x) \leq t < \tau_k(x)$.*

Demonstração. Se $t = 0$, então $k = 1$ realiza o desejado. Desta forma falta provar apenas o caso $t > 0$; seja $J = J(t, x) = \{k \in \mathbb{N} \mid t < \tau_k(x)\}$, este conjunto está bem definido e é diferente do vazio uma vez que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$ para cada $x \in \Omega$. Pelo princípio da boa ordem (ver (HALMOS, 2001)), existe um único menor elemento de J , chamaremos esse número natural de $k_0 = k_0(t, x)$. Note $0 \notin J$ desde que $t > 0$ e $\tau_0 \equiv 0$, assim $k_0 \geq 1$ e $k_0 - 1 \notin J$. Portanto $\tau_{k_0-1}(x) \leq t < \tau_{k_0}(x)$.

□

Agora vamos provar a observação (4.1.2).

Demonstração. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos regulares, que é o complementar de S em D , é aberto. Seja $(t, x) \in A = D - S$.

Caso 1: $t > 0$. Pelo lema acima existe um único $k_0 > 1$ tal que $\tau_{k_0-1}(x) \leq t < \tau_{k_0}(x)$, como o ponto é regular, a primeira desigualdade é estrita

$$\tau_{k_0-1}(x) < t < \tau_{k_0}(x)$$

Agora seja $\varepsilon > 0$ tal que $\tau_{k_0-1}(x) < t - 2\varepsilon < t < t + 2\varepsilon < \tau_{k_0}(x)$. Então existe $\delta > 0$ tal que

- $B_\delta(x) \subset \Omega$, pois Ω é aberto;
- $y \in B_\delta(x) \implies |\tau_{k_0-1}(y) - \tau_{k_0-1}(x)| < \varepsilon$ e $|\tau_{k_0}(y) - \tau_{k_0}(x)| < \varepsilon$, usando a continuidade das funções envolvidas.

Assim se $t' \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ e $y \in B_\delta(x)$ vale que

$$\tau_{k_0}(y) > \tau_{k_0}(x) - \varepsilon$$

subtraindo t' nesta expressão e usando o fato que $t' < t + \varepsilon$

$$\tau_{k_0}(y) - t' > \tau_{k_0}(x) - (t' + \varepsilon) > 0$$

fazendo, analogamente para

$$\tau_{k_0}(y) < \tau_{k_0}(x) + \varepsilon$$

resulta que

$$\tau_{k_0-1}(y) < t' < \tau_{k_0}(y)$$

usando que $\tau_k(y)$ é crescente, concluímos $t' \neq \tau_k(y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Portanto $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times B_\delta(x) \subset A$.

Caso 2: Se $t = 0$, o ponto $(0, x)$ sempre é ponto regular. Daí o conjunto

$$A_1 = \{(t, x) \in D | t < \tau_1(x)\} = \alpha_1^{-1}((-\infty, 0))$$

é uma vizinhança para $(0, x)$ em D formado apenas por pontos regulares. Logo A é aberto relativo a D . □

Agora iremos trabalhar com o seguinte Sistema Diferencial Impulsivo de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) & , t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x) & , t = \tau_k(x) \\ x(t_0^+) = x_0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $I_k: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Primeiro definimos solução deste sistema.

Definição 4.1.2. A função $x: (t_0, t_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$, é chamada solução do (4.1.1) se

- i) $x(t_0^+) = x_0$ e $(t, x(t)) \in D$ para $t \in [t_0, t_0 + a)$;
- ii) $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz $x'(t) = f(t, x(t))$ para $t \in [t_0, t_0 + a)$ e $t \neq \tau_k(x(t))$,
- iii) se $t \in [t_0, t_0 + a)$ e $t = \tau_k(x(t))$, então $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$, vamos impor que $x(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} x(s)$ e que existe $\delta > 0$ tal que $s \neq \tau_j(x(s))$, $\forall j$, $t < s < t + \delta$.

Observação 4.1.3. A condição (iii) da definição acima garante que se $(t^*, x^*) = (t^*, x(t^*))$ é um ponto irregular da solução ($t_0 < t^* < t_0 + a$) ou $(t, x(t))$ é regular $\forall t$, $t^* < t < t_0 + a$ ou existe o primeiro ponto irregular depois de $(t^*, x(t^*))$, mais precisamente, existe t_1^* pertencente ao intervalo $(t^*, t_0 + a)$ tal que $(t_1^*, x(t_1^*))$ é ponto irregular e $\forall t$ com $t^* < t < t_1^*$, $(t, x(t))$ é ponto regular. A demonstração segue do fato que, se existe um ponto irregular depois de t^* podemos fazer $t^* = \inf\{t \in (t^*, t_0 + a) | (t, x(t)) \text{ é irregular}\}$ e verificar que $(t_1^*, x(t_1^*))$ é o primeiro ponto irregular depois de t^*

Note que, ao invés da habitual condição inicial $x(t_0) = x_0$, estamos impondo a condição de limite $x(t_0^+) = x_0$ que, em geral, é natural para sistemas da forma (4.1.1), desde que o par (t_0, x_0) possa ser tal que $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum k . Sempre que $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ para todo k , nós devemos entender a condição inicial $x(t_0^+) = x_0$ sendo $x(t_0) = x_0$. É bom observar também, que mesmo f sendo contínua (ou continuamente diferenciável) o sistema (4.1.1) pode não ter solução, pois $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, pode está totalmente sobre alguma superfície S_k , para algum k . Por exemplo, podemos considerar $x' = 1$, $t \neq \tau_k(x)$ e o restante das condições como no exemplo (2.1.3) do capítulo 1. Percebe-se que não existe solução através do ponto $(1, 1)$, pois nesse caso a solução está contida na superfície S_0 . Por causa de casos como esses precisamos impor algumas condições sobre τ_k ou $f(t, x)$ além da continuidade, a fim de estabelecermos uma teoria geral de existência para (4.1.1). Tendo em mente estas observações, vejamos o seguinte teorema.

Teorema 4.1.1. Assuma que

i) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;

ii) $\tau_k: \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ são diferenciáveis;

iii) se $t_1 = \tau_k(x_1)$ para algum $(t_1, x_1) \in D$ e $k \geq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 1$$

para $(t, x) \in D$ tal que $0 < t - t_1 < \delta$ e $|x - x_1| < \delta$.

Então, para todo $(t_0, x_0) \in D$, existe uma solução $x: [t_0, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema (1.2.1) para algum $a > 0$.

Demonstração. Claramente, se (t_0, x_0) é ponto regular, então $x(t)$ é uma solução da EDO (ou seja do SDI desconsiderando o impulso) ,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

usando que o conjunto dos pontos regulares é aberto, existe $a > 0$ tal que $(t, x(t))$ continua regular com $t_0 < t < t_0 + a$, logo $x(t)$ é uma solução de (4.1.1).

Caso (t_0, x_0) seja ponto irregular, $t_0 = \tau_k(x_0)$ para algum $k \geq 1$ e $x(t)$ solução da EDO (ver (SOTOMAYOR, 1979)), $t_0 < t < t_0 + a$; defina

$$\gamma'_k(t) = t - \tau_k(x(t)),$$

então $\gamma_k(t_0) = 0$ e derivando $\gamma_k(t)$ (regra da cadeia) e com a condição (iii)

$$\gamma'_k(t) = 1 - \frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x(t)) \neq 0$$

se $t_0 < t < t_0 + a$.

Portanto, $\gamma_k(t)$ ou é estritamente crescente ou decrescente nesta vizinhança, assim $t \neq \tau_k(x(t))$ para $0 < t - t_0 < \delta$ para $0 < \delta < a$. Para mostrar que $(t, x(t)) \notin S_j$ para todo j . Defina

$$\Gamma_j(t) = t - \tau_j(x(t))$$

temos

$$\Gamma_{k+1}(t) < \Gamma_k(t) < \Gamma_{k-1}(t)$$

em particular

$$\Gamma_{k+1}(t_0) < \Gamma_k(t_0) = 0 < \Gamma_{k-1}(t_0)$$

como as funções Γ_{k+1} , Γ_{k-1} são contínuas

$$\Gamma_{k+1}(t_0) < 0 < \Gamma_{k-1}(t_0)$$

quando $t_0 \leq t < t_0 + \delta$, diminuindo o valor de δ se necessário. Concluimos que $(t, x(t))$ é regular $\forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Assim $x(t)$ é uma solução local do problema (4.1.1). $\square$

Observação 4.1.4. Olhando com atenção a demonstração do teorema (4.1.1), constatamos que é essencial que S_k não contenha um pedaço da solução da EDO correspondente, que foi garantido pela hipótese (iii), então notamos que esta hipótese pode ser trocada por

iii*)

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x) \neq 1, \forall (t, x) \in S_k \text{ e } k \in \mathbb{N} \quad (4.1.3)$$

Observação 4.1.5. Ainda sobre a demonstração do teorema. A hipótese de que $\tau_k(x) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ é usada apenas para provar que $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ é fechado.

Pensando desta maneira vamos reformular o problema (4.1.1), para o problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & \text{se } h(t, x) \neq 0 \\ \Delta x = I(t, x), & \text{se } h(t, x) = 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

onde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x + I(x) \in \Omega$, $\forall x \in \Omega$.

E nesta nova abordagem

$$S = h^{-1}(0)$$

é fechado, pois h é contínua e a imagem inversa de um fechado por uma função contínua é fechada.

A nova versão do teorema (4.1.1) tem a seguinte formulação:

Teorema 4.1.2. : Assume que

- (i) $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua;
- (ii) $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável;
- (iii) $\nabla h(t, x) \cdot (1, f(t, x)) \neq 0, \forall (t, x) \in S$.

Então $\forall (t_0, x_0) \in D$ existe uma solução $x: [t_0, t_0 + a) \rightarrow \Omega$ do sistema (4.1.4)

Demonstração. Caso 1: (t_0, x_0) é regular $h(t_0, x_0) \neq 0$. Pelo teorema de Peano (SOTOMAYOR, 1979) o PVI, $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tem solução $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. Seja $\gamma(t) = h(t, x(t))$, temos $\gamma(t_0) \neq 0$, por continuidade, existe $0 < a \leq \delta$ tal que $t_0 \leq t < t_0 + a$ e $\gamma(t) \neq 0$ se $(t, x(t)) \notin S$, $x(t)$ é solução de 4.1.4.

Caso 2: (t_0, x_0) é ponto irregular. $h(t_0, x_0) = 0$. Mais uma vez considere a solução do PVI $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida para $t_0 \leq t < t_0 + \delta$. Seja $\gamma(t) = h(t, x(t))$, daí $\gamma'(t) = \nabla h(t, x(t)) \cdot (1, x'(t)) \neq 0$. Existe $0 < a < \delta$ tal que

- Se $\gamma'(t_0) > 0 \implies \gamma(t) > \gamma(t_0), t_0 < t < t_0 + \delta$.

- Se $\gamma'(t_0) < 0 \implies \gamma(t) < \gamma(t_0)$, $t_0 < t < t_0 + \delta$.

Em ambas as situações $\gamma(t) = h(t, x(t)) \neq 0$, $t_0 < t < t_0 + a$, mostrando que $x(t)$ é solução de 4.1.4. $\square$

Vamos verificar que esta nova formulação inclui o caso anterior, que o sistema (4.1.1) é um caso particular (4.1.4), antes necessitaremos de alguns resultados preliminares.

Definição 4.1.3. *Uma cobertura aberta $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ de $A \subset \mathbb{R}^n$ é localmente finita se $\forall (t, x) \in D$ existe $r > 0$ tal que $\{n \geq 0: B_r(x) \cap U_n \neq \emptyset\}$ é finito.*

Lema 4.1.2. *(Partição da Unidade) Dada uma cobertura aberta localmente finita de A , existe $\varphi_n: A \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1$ tal que $\text{supp}(\varphi_n) \subset U_n$ e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1.$$

Demonstração pode ser vista no (LIMA, 2000)

Teorema 4.1.3. *Dados $\tau_k \in C(\Omega, (0, +\infty))$ tais que $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = +\infty$. Seja $S_k = \{(\tau_k(x), x): x \in \Omega\}$. Então existe $h: D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que*

$$h^{-1}(0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_n.$$

Se adicionalmente τ_k é diferenciável e

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x}(x) \cdot f(t, x) \neq 1, \forall (t, x) \in S_k,$$

podemos escolher h tal que h é diferenciável e

$$\nabla h(t, x) \cdot (1, f(t, x)) \neq 0,$$

$$\forall (t, x) \in S.$$

Demonstração. A primeira parte do teorema tem uma demonstração trivial, basta definir

$$h(t, x) = d((t, x), S).$$

Esta construção dificulta a demonstração da segunda parte, por isto optaremos por outro caminho

Defina

$$U_k = \{(t, x) \in D: \tau_{k-1}(x) < t < \tau_{k+1}(x)\}, k \geq 1$$

e

$$U_0 = \{(t, x) \in D: t < \tau_1(x)\}.$$

O lema 3.1.1 garante que $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k = D$. Observe que $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ se, e somente se, $|k - j| \leq 1$. Assim $\{U_k\}$ é uma cobertura localmente finita. Logo existe uma partição da unidade relativa a esta cobertura. Defina

$$h(t, x) = \varphi_0(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \varphi_k(t, x)(t - \tau_k(x))$$

.

Vamos verificar que h tem as propriedades desejadas.

$$\bullet \quad h^{-1}(0) = S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Note que $S_j \cap U_k = \emptyset$, $\forall j \neq k$, $(t, x) \in S_j$; $\varphi_k(t, x) = 0$, $\forall j \neq k$, pois $\text{supp} \varphi_k \subset U_k$, com isso $h(t, x) = (-1)^j \varphi_j(t, x)(t - \tau_j(x))$, logo $h(t, x) = 0$ mostrando que $S_j \subset h^{-1}(0)$. Portanto $S \subset h^{-1}(0)$.

Suponha por absurdo que $h^{-1}(0) \not\subset S$, isto é, existe $(t, x) \in D$ tal que $h(t, x) = 0$ e $(t, x) \notin S$. Pelo lema (4.1.1), existe $j \geq 0$ tal que $\tau_j(x) \leq t < \tau_{j+1}(x)$. Se $j \geq 1$, como $(t, x) \notin S$, então $\tau_j(x) < t < \tau_{j+1}(x)$, logo $(t, x) \in U_k$ se e somente se $k = j$ ou $k = j + 1$ e $\varphi_k(t, x) = 0$, se $k \neq j, j + 1$. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t, x) = \varphi_j(t, x) + \varphi_{j+1}(t, x) = 1$,

$$h(t, x) = (-1)^j \varphi_j(t, x)(t - \tau_j(x)) + (-1)^{j+1} \varphi_{j+1}(t, x)(t - \tau_{j+1}(x))$$

$h(t, x) = (-1)^j [\varphi_j(t, x)(t - \tau_j(x)) + \varphi_{j+1}(t, x)(\tau_{j+1}(x) - t)]$. Observe que $t - \tau_j(x)$ e $\tau_{j+1}(x) - t$ é sempre positivo. Seja $\lambda = \min\{t - \tau_j(x), \tau_{j+1}(x) - t\} > 0$. Assim

$$\varphi_j(t, x)(t - \tau_j(x)) + \varphi_{j+1}(t, x)(\tau_{j+1}(x) - t) \geq \lambda(\varphi_j(t, x) + \varphi_{j+1}(t, x)) = \lambda > 0.$$

Logo $h(t, x) \neq 0$. Absurdo! Pois contraria o fato de $h(x, t) = 0$.

Se $j = 0$ e $0 \leq t < \tau_1(x)$, $h(t, x) = \varphi_0(t, x) - (t - \tau_1(x))\varphi_1(t, x)$. Seja $\lambda = \min\{1, \tau_1(x) - t\} > 0$, $h(t, x) > \lambda > 0$. Novamente absurdo, pois contraria o fato de $h(x, t) = 0$, logo $h^{-1}(0) \subset S$ o que finaliza a demonstração $h(0) = S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$.

Note que h tem a mesma regularidade dos τ_k , $k \geq 1$ desta forma, quando os τ_k são diferenciáveis h será diferenciável.

Na vizinhança $V_k = U_k \cap (\text{supp} \varphi_{k-1})^C \cap (\text{supp} \varphi_{k+1})^C$ de S_k , temos

$$h(t, x) = (-1)^k \varphi_k(t, x)(t - \tau_k(x)),$$

como

$$\varphi_i|_{V_k} \equiv 0, \forall j \neq k,$$

$\forall (t, x) \in V_k$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t, x) = \varphi_k(t, x) \equiv 1.$$

Temos

$$h(t, x) = (-1)^k \varphi_k(t, x)(t - \tau_k(x))$$

$$h(t, x) = (-1)^k(t - \tau_k(x))$$

$$\nabla h(t, x) = (-1)^k(1, -\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x})$$

Portanto

$$\nabla h(t, x) \cdot (t, f(t, x)) = (-1)^k(1 - \frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t, x)) \neq 0$$

se $(t, x) \in S_k$. □

Agora depois de convencidos que essa é uma forma mais geral do que o teorema (4.1.1), vamos definir uma solução do problema (4.1.4)

Definição 4.1.4. A função $x: (t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$, é chamada solução do (4.1.4) se

- i) $x(t_0^+) = x_0$ e $(t, x(t)) \in D$ para $t \in [t_0, t_0 + a)$;
- ii) $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz $x'(t) = f(t, x(t))$ se $h(t, x) \neq 0$;
- iii) se $h(t, x(t)) = 0$, então $x(t^+) = x(t) + I(t, x(t))$, vamos impor que $x(t) = x(t^-) = \lim_{s \rightarrow t^-} x(s)$ e que exista $\delta > 0$ tal que

$$h(s, x(s)) \neq 0, \forall t < s < t + \delta.$$

Note que a observação (4.1.3) continua válida para esta nova formulação.

Seguiremos agora para um outro resultado.

Definição 4.1.5. Uma solução $x(t)$, $t_0 \leq t < b$ é dita maximal se não existe $z: (t_0, b + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ outra solução do sistema tal que

$$z|_{(t_0, b)} = x$$

Precisaremos de um lema clássico de EDO.

Lema 4.1.3. Se $f: [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $x_0 \in \Omega$, $t > 0$, $r > 0$, com $B_r(x_0) \subset \Omega$, então existe $\delta > 0$ tal que: Se $y: [t_1, t_1 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \leq \delta$, é solução da EDO

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_1) = x_1 \end{cases}$$

com $t_1 \in [0, T]$, $|x_0 - x_1| < \delta$, então $y(t) \in B_r(x_0)$, $\forall t \in [t_1, t_1 + a)$.

Para demonstração ver (SOTOMAYOR, 1979).

Teorema 4.1.4. (Comportamento da solução maximal)

- (i) $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua;

(ii) $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua;

(iii) $I: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua tal que $x + I(t, x) \in \Omega$, $\forall (t, x) \in S = h^{-1}(0)$.

Então para toda solução maximal do sistema (4.1.4) com intervalo de definição limitado $[t_0, b)$, $b < +\infty$, então

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \partial\Omega,$$

desde que tenhamos uma das condições;

(a) $h(t, x) = 0 \implies h(t, x + I(t, x)) \neq 0$;

(b) $h \in C^1(D, \mathbb{R})$ e se $h(t, x) = 0$ então $h(t, x + I(t, x)) = 0$ e

$$\nabla h(t, x + I(t, x)) \cdot (1, f(t, x + I(t, x))) \neq 0$$

Demonstração. Supor por absurdo que

$$x(t) \not\xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \partial\Omega,$$

isto é, existe um compacto K tal que existe $(t_n)_{n=1}^\infty$ satisfazendo

$$t_0 < t_n < t_{n+1}, \quad t_n \nearrow b, \quad x(t_n) \in K.$$

Extraindo uma subsequência se necessário, podemos supor $x(t_n) \rightarrow x^* \in K \subset \Omega$. Vamos analisar o ponto $(b, x^*) \in D$.

Nosso objetivo é provar que $x(t) \rightarrow x^*$, quando $t \rightarrow b^-$.

Caso 1: (b, x^*) é ponto regular.

Como o conjunto dos pontos regulares é aberto, existe $r > 0$ tal que $|t - b| < r$, $|x - x^*| < 2r$ tem-se que $h(t, x) \neq 0$. Existe n_0 tal que $b - r < t_n < b + r$ e $|x(t_n) - x^*| < r$, $\forall n \geq n_0$. Aplicando o lema (4.1.3) com $x_0 = x^*$, $t_0 = t_{n_0}$, $T = b + r$ encontraremos um $\delta > 0$. Como $x(t_n) \rightarrow x^*$, $\exists n_1$ tal que $|x(t_{n_1}) - x^*| < \delta$ e $b - t_{n_1} < \delta$. Vamos mostrar que $x(t) \in B_r(x^*)$ se $t_{n_1} \leq t < b$, em particular o ponto $(t, x(t))$ é regular. Suponha que existe $s_1 \in (t_{n_1}, b)$ tal que $(s_1, x(s_1))$ é o primeiro ponto irregular depois de t_{n_1} . Assim $x(t)$ para $t \in (t_{n_1}, s_1)$ é solução da EDO (sem impulso), usando o lema (4.1.3) como $s_1 - t_{n_1} < b - t_{n_1} < \delta$ temos $x(t) \in B_r(x^*)$, $\forall t_{n_1} \leq t < s_1$. Assim $\lim_{t \rightarrow s_1^-} x(t) = x(s_1) \in \overline{B_r(x^*)} \subset B_{2r}(x^*)$. Portanto $(s_1, x(s_1))$ é ponto regular. Absurdo!

Concluimos que $h(t, x(t)) \neq 0$, $\forall t_{n_1} \leq t < b$.

Seja $M = \max_{\substack{0 \leq t \leq b, \\ |x - x^*| \leq r}} (f(t, x))$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$b - t_{m_0} < \frac{\varepsilon}{2(M + 1)}$$

e

$$|x(t_{m_0}) - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $t_{m_0} \leq t < b$,

$$|x(t) - x^*| \leq |x(t) - x(t_{m_0})| + |x(t_{m_0}) - x^*|.$$

Como $x(t) - x(t_{m_0}) = \int_{t_{m_0}}^t f(s, x(s))ds$, temos que

$$|x(t) - x(t_{m_0})| \leq M(t - t_{m_0}) < M \frac{\varepsilon}{2(M+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ se $t_{m_0} \leq t < b$. Resumindo, finalmente provam que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x^*.$$

Seja y a solução da EDO

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(b) = x^* \end{cases}$$

Pelo teorema de existência, y está definida para $b \leq t < b + \varepsilon$. Diminuindo o valor de ε , se necessário, podemos supor que $h(t, y(t)) \neq 0$. Defina

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t_0 < t < b \\ y(t), & b \leq t < b + \varepsilon \end{cases}$$

É fácil ver que z é solução do sistema que estende a solução maximal. Contradição!

Caso 2: (b, x^*) é ponto irregular. Como antecipamos, nosso objetivo é provar que $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow b^-$. Suponha por absurdo que não, logo existe $r_0 > 0$ e $b_n \rightarrow b^-$, $t_0 < b_n < b_{n+1} < b$ tal que $|x(b_n) - x^*| > r_0$.

Defina $y^* = x^* + I(b, x^*) \in \Omega$. Fixe r , $0 < r < r_0$, tal que $B_{2r}(x^*) \subset \Omega$. Seja $\delta > 0$ do lema (4.1.3), $\delta < r$. Podemos escolher $n_1 \geq 1$, $b - \delta < t_{n_1} < b$ com $|x(t_{n_1}) - x^*| < \delta$, em seguida escolha $m_1 \geq 1$ de forma que $t_{n_1} < b_{m_1} < b$. Caso $(t_{n_1}, x(t_{n_1}))$ seja um ponto irregular, faça $a_1 = t_{n_1}$. Caso $(t_{n_1}, x(t_{n_1}))$ seja regular, a solução $x(t)$, $t_{n_1} \leq t < b$ começa dentro de $B_\delta(x^*) \subset B_r(x^*)$ mas não permanece todo tempo dentro de $B_r(x^*)$, logo sofre, pelo menos, um impulso, faça a_1 o primeiro momento de impulso depois de t_{n_1} , isto é,

$$(t, x(t)) \in B_r(x^*) \setminus S \text{ se } t_{n_1} \leq t < a_1 < b_{m_1}$$

$$(a_1, x(a_1)) \in S, |x(a_1) - x^*| \leq r.$$

Em qualquer uma das situações

$$t_{n_1} \leq a_1 < b_{m_1}, |x(a_1) - x^*| \leq r, (a_1, x(a_1)) \in S.$$

Repedindo o procedimento anterior, trocando r por $r_2 = \frac{r}{2}$; δ_2 do lema (4.1.3) com r_2 ($\delta_2 < r_2$), sejam $n_2 > n_1$, $m_2 > m_1$, tais que $|x(t_{n_2}) - x^*| < \delta_2$, $a_1 < t_{n_2} < b_{m_2} < b$ e $t_{n_2} < a_2 < b_{m_2}$, $h(a_2, x(a_2)) = 0$, $|x(a_2) - x^*| \leq r_2$.

De forma recursiva encontramos (a_j) , (t_{n_j}) , (b_{m_j}) , $t_{n_j} \leq a_j < b_{m_j} < b$; $(a_j, x(a_j)) \in S$, $a_j \rightarrow b^-$, $|x(a_j) - x^*| < r_j = \frac{r}{j}$, assim $x(a_j) \rightarrow x^*$. Como $I(t, x)$ é contínua, temos que

$$y_j = x(a_j^+) = x(a_j) + I(a_j, x(a_j)) \longrightarrow y^* = x^* + I(b, x^*)$$

(construímos $a_j \rightarrow b^-$, $(a_j, x(a_j))$ irregular, $x(a_j) \rightarrow x^*$, $x(a_j^+) \rightarrow y^*$). Para cada j , podemos escolher s_j , $a_j < s_j < b$, suficientemente próximo de a_j tal que $h(s_j, x(s_j)) \neq 0$ e $s_j \rightarrow b^-$, $x(s_j) \rightarrow y^*$.

Usando a hipótese (a), (b, y^*) é ponto regular e $s_j \rightarrow b^-$, $x(s_j) \rightarrow y^*$, recaiando no caso 1, logo $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} y^*$ que é uma contradição, pois $x(t_n) \rightarrow x^*$ e $|x(b_n) - x^*| > r_0$. Logo $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} x^*$.

Considere $y(t)$ uma solução da EDO

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(b) = y^* \end{cases}$$

para $b \leq t < b + \eta$. Como (b, y^*) é regular, para $\eta > 0$ suficientemente pequeno é solução do sistema (4.1.4) (com impulso). Assim

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t_0 \leq t < b \\ x^*, & t = b \\ y(t), & b < t < b + \eta \end{cases}$$

é uma extensão da solução maximal, chegando numa contradição. Logo

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \partial\Omega$$

Como (b, x^*) é irregular, concluímos que (b, y^*) também é irregular e $\nabla h(b, y^* + I(b, b^*)) \cdot (1, f(b, y^* + I(b, y^*))) \neq 0$.

Como $h \in C^1$ e f contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\nabla h(s, y) \cdot (1, f(s, y)) \neq 0$ se $|s - b| < \varepsilon$ e $|y - y^*| < \varepsilon$, sendo mais específico, podemos exigir que $\nabla h(s, y) \cdot (1, f(s, y)) \neq 0$ tenha o mesmo sinal que $\nabla h(b, y^*) \cdot (1, f(b, y^*)) \neq 0$. Vamos considerar $\nabla h(b, y^*) \cdot (1, f(b, y^*)) > 0$. Como consequência deste fato, para toda solução da EDO

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(s_0) = y_0 \end{cases}$$

definida para $s_0 \leq t < s_0 + d$, onde s_0 e $s_0 + d \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $d > 0$ pequeno, temos que $\alpha(t) = h(t, y(t))$ é crescente, pois $\alpha'(t) = \nabla h(t, y(t)) \cdot (1, f(t, y(t))) > 0$.

Usando mais um vez o lema (4.1.3), agora em torno de y^* , $r = \frac{\varepsilon}{2}$, encontramos $0 < \delta < \frac{r}{2}$. Seja j_1 tal que $b - \delta < a_{j_1} < b$, $h(a_{j_1}, x(a_{j_1})) = 0$, $y_{j_1} = x(a_{j_1})^+$, $|y_{j_1} - y^*| < \delta$. Como $y_{j_1} = x(a_{j_1}) + I(a_{j_1}, x(a_{j_1}))$, (a_{j_1}, y_{j_1}) é ponto irregular.

Seja s^* o próximo momento de impulso, então

$$x(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y^*), \quad a_{j_1} < t < s^*, \quad x(s^*) \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}}(y^*).$$

Daí $h(s^*, x(s^*)) = 0$, só que $h(a_{j_1}, x(a_{j_1}^+)) = 0$ que entra em contradição com o fato de que $h(t, x(t))$ é crescente em $a_{j_1} < t < s^*$. Logo $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} x^*$.

Para finalizar, a solução da EDO

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(b) = y^* \end{cases}$$

definida em $b \leq t < b + \eta$ para η suficientemente pequeno tal que $h(t, y(t)) > 0$, $\forall b < t < b + \eta$. Logo podemos estender a solução maximal

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & t_0 \leq t < b \\ x^*, & t = b \\ y(t), & b < t < b + \eta \end{cases}$$

Assim finalizamos a demonstração de que em qualquer dos casos

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} \partial\Omega$$

□

5 Desigualdade Diferencial Impulsiva

Vamos expor aqui duas desigualdades básicas da teoria de impulso.

Seja PC a classe das funções contínuas por parte de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$, com descontinuidades de primeira espécie em $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, bem como PC^1 , a classe das funções contínuas por partes que têm derivadas contínuas nos pontos de continuidades e as funções e derivadas só têm descontinuidades de primeira espécie.

Teorema 5.0.1. *Assuma que*

(H_0) *A sequência $\{t_k\}$ satisfaz $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$;*

(H_1) *$m \in PC^1[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}]$ e $m(t)$ é contínua a esquerda em t_k , $k = 1, 2, \dots$;*

(H_2) *para $k = 1, 2, \dots$, $t \geq t_0$*

$$m'(t) \leq p(t)m(t) + q(t), \quad t \neq t_k \quad (5.0.1)$$

$$m(t_k^+) \leq d_k m(t_k) + b_k \quad (5.0.2)$$

onde $q, p \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}]$, $d_k \geq 0$ e b_k são constantes.

Então,

$$\begin{aligned} m(t) \leq & m(t_0) \left(\prod_{t_0 < t_k < t} d_k \right) \exp \left(\int_{t_0}^t p(s) ds \right) \\ & + \sum_{t_0 < t_k < t} b_k \left(\prod_{t_k < t_j < t} d_j \right) \exp \left(\int_{t_k}^t p(s) ds \right) \\ & + \int_{t_0}^t \left(\prod_{s < t_k < t} d_k \right) \left(\exp \int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) q(s) ds, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

Demonstração: Seja $t \in [t_0, t_1]$. Na inequação

$$m'(t) \leq p(t)m(t) + q(t)$$

multiplicando por $\exp \left(-\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right)$, temos

$$m'(t) \exp \left(-\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) - p(t)m(t) \exp \left(-\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) \leq q(t) \exp \left(-\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right)$$

logo,

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) \right) \leq q(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right)$$

integrando em $s \in [t_0, t]$

$$m(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) \Big|_{s=t_0}^{s=t} \leq \int_{t_0}^t q(s) \left(\exp \left(- \int_{t_0}^s p(\sigma) d\sigma \right) \right) ds$$

$$m(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) \leq m(t_0) + \int_{t_0}^t q(s) \left(\exp \left(- \int_{t_0}^s p(\sigma) d\sigma \right) \right) ds$$

multiplicando pela $\exp \left(\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right)$

$$m(t) \leq m(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \left[\int_{t_0}^t q(s) \exp \left(\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma - \int_{t_0}^s p(\sigma) d\sigma \right) ds \right]$$

como $t_0 \leq s \leq t_1$

$$m(t) \leq m(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_0}^t q(s) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds$$

Note que se $t \in [t_0, t_1]$ então o conjunto $\{k \in \mathbb{N} : t_0 < t_k < t\} = \emptyset$ (usualmente convencionase $\prod_{j \in \emptyset} d_j = 1$ e $\sum_{j \in \emptyset} d_j = 0$). Logo (5.0.3) é verdadeira para este caso.

Assuma que (5.0.3) é válida em $t \in [t_0, t_n]$ com $n > 1$, hipótese de indução em n . Vamos então mostrar que para $t \in (t_n, t_{n+1}]$, com procedimento parecido ao anterior, isto é

$$m'(t) \leq p(t)m(t) + q(t)$$

que multiplicando dessa vez por $\exp \left(- \int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right)$ (note que, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $t \in [t_n+\varepsilon, t_{n+1}]$)

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \exp \left(- \int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right) \right) \leq q(t) \exp \left(- \int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right)$$

que integrando em $s \in [t_n + \varepsilon, t_{n+1}]$

$$m(t) \exp \left(- \int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right) \leq m(t_n + \varepsilon) + \int_{t_n+\varepsilon}^t q(s) \left(\exp \left(- \int_{t_n+\varepsilon}^s p(\sigma) d\sigma \right) \right) ds$$

multiplicando pela $\exp \left(\int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right)$

$$m(t) \leq m(t_n + \varepsilon) \exp \left(\int_{t_n+\varepsilon}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_n+\varepsilon}^t q(s) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$

$$m(t) \leq m(t_n^+) \exp \left(\int_{t_n}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_n}^t q(s) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds$$

como

$$m(t_n^+) \leq d_n m(t_n) + b_n$$

logo

$$m(t) \leq (d_n m(t_n) + b_n) \exp \left(\int_{t_n}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_n}^t q(s) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds$$

Por hipótese de indução para $t = t_n$ então substituiremos $m(t_n)$ na inequação acima por

$$\begin{aligned} m(t_n) &\leq m(t_0) \left(\prod_{t_0 < t_k < t_n} d_k \right) \exp \left(\int_{t_0}^{t_n} p(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + \sum_{t_0 < t_k < t_n} b_k \left[\left(\prod_{t_k < t_j < t_n} d_j \right) \exp \left(\int_{t_k}^{t_n} p(\sigma) d\sigma \right) \right] \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_n} \left(\prod_{s < t_k < t_n} d_k \right) \exp \left(\int_s^{t_n} p(\sigma) d\sigma \right) q(s) ds \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} m(t) &\leq m(t_0) \left(\prod_{t_0 < t_k < t_{n+1}} d_k \right) \exp \left(\int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \sum b_k \left(\prod_{t_k < t_j < t_{n+1}} d_j \right) \exp \left(\int_{t_k}^t p(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + b_n \left(\prod_{t_k < t_j < t_{n+1}} \exp \left(\int_{t_n}^t p(\sigma) d\sigma \right) \right) + \int_{t_0}^{t_n} \left(\prod_{s < t_k < t} d_k \right) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) q(s) ds \\ &\quad + \int_{t_n}^t q(s) ds \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds \end{aligned}$$

Note que,

$$\prod_{t_k < t_j < t_{n+1}} d_j = 1$$

então na terceira parcela da desigualdade na soma acima não altera a desigualdade.

E podemos rescrever a última parcela da soma da seguinte maneira

$$\int_{t_n}^t q(s) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds = \int_{t_n}^t q(s) \left(\prod_{s < t_k < t} d_k \right) \exp \left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) ds$$

pois

$$\prod_{s < t_k < t} d_k = 1.$$

Portanto, ajustando segue;

$$\begin{aligned}
 m(t) \leq & m(t_0) \left(\prod_{t_0 < t_k < t} d_k \right) \exp \left(\int_{t_0}^t p(s) ds \right) \\
 & + \sum_b^{t_0 < t_k < t} \left(\prod_k \prod_{t_k < t_j < t} \right) \exp \left(\int_{t_k}^t p(s) ds \right) \\
 & + \int_{t_k}^t \left(\prod_{s < t_k < t} d_k \right) \left(\exp \int_s^t p(\sigma) d\sigma \right) q(s) ds, \quad t \geq t_0
 \end{aligned} \tag{5.0.4}$$

□

Para a demonstração do teorema abaixo ver (LAKSHMIKANTHAM; BAINOV; SIMEONOV, 1989).

Teorema 5.0.2. *Assuma que (H_0) e (H_1) são asseguradas. Suponha ainda que*

(H_3) $p \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$, $g \in C[\mathbb{R}, (0, \infty)]$, $g(\lambda u) \mu(\lambda) g(u)$ se $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{R}$, onde $\mu(\lambda) > 0$ se $\lambda > 0$;

(H_4) se $k = 1, 2, \dots, t t_0$,

$$m'(t) \leq p(t)g(m(t)), \quad t \neq t_k, \tag{5.0.5}$$

$$m(t_k^+) \leq d_k m(t_k), \quad \text{onde } d_k > 0. \tag{5.0.6}$$

então, se $t_0 \leq t < T$, a seguinte estimativa é garantida

$$m(t) \leq G^{-1} \left(G(m(t_0)) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k + \int_{t_0}^t \prod_{s < t_k < t} \frac{d_k}{\mu(d_k)} p(s) ds \right), \tag{5.0.7}$$

onde $G(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)}$, $G^{-1}(u)$ é a inversa de $G(u)$ e

$$T = \sup \left\{ t \geq t_0 : \left[G(m(t_0)) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k + \int_{t_0}^t \prod_{s < t_k < t} \frac{d_k}{\mu(d_k)} p(s) ds \right] \in \text{dom } G^{-1} \right\}.$$

$$G(u) = \int_{\sigma}^u \frac{ds}{g(s)}, \quad \text{para } u \geq \sigma.$$

6 Oscilações das soluções de um Equação Parabólica com Impulsos

Neste capítulo, consideramos propriedades de oscilação das soluções de uma equação parabólica impulsiva, tratado em (BAINOV; MINCHEV, 1996).

6.1 Considerações Preliminares

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Suponha que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$$

são números dados tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty.$$

Definimos:

- $G = (0, +\infty) \times \Omega$
- $G^{(0)} = [0, +\infty) \times \bar{\Omega}$
- $\Gamma_k = \{(t, x) : t \in (t_k, t_{k+1}), x \in \Omega\}$
- $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$
- $\tilde{\Gamma}_k = \{(t, x) : t \in (t_k, t_{k+1}), x \in \bar{\Omega}\}$
- $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k$

Seja $C_{imp}[G^{(0)}, \mathbb{R}]$ a classe de todas as funções

$$u : G^{(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. as funções $u|_{\tilde{\Gamma}_k}$, $k = 0, 1, \dots$, são contínuas
2. para cada $k = 1, 2, \dots$ e $t = t_k$, existe

$$\lim_{\substack{(q, s) \rightarrow (t, x) \\ q < t}} u(q, s) = u(t^-, x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

3. para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ e $t = t_k$, existe

$$\lim_{\substack{(q,s) \rightarrow (t,x) \\ q > t}} u(q,s) = u(t^+, x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

4. para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$u(t_k, x) = u(t_k^+, x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Seja $C_{imp}[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ a classe de todas as funções

$$\alpha: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

1. as funções $\alpha|_{(t_k, t_{k+1})}$, $k = 0, 1, \dots$, são contínuas

2. para cada $k = 1, 2, \dots$, existe

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t_k \\ s < t_k}} \alpha(s) = \alpha(t_k^-),$$

3. para cada $k = 0, 1, \dots$, existe

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t_k \\ s > t_k}} \alpha(s) = \alpha(t_k^+),$$

4. $\alpha(t_k) = \alpha(t_k^+)$.

Nós consideraremos a **Equação Parabólica Linear**.

- (1) $u_t(t, x) = a(t)\Delta u(t, x) - p(t, x)u(t, x)$, para $(t, x) \in \Gamma$, sujeita a condições de impulso;
- (2) $u(t_k, x) = u(t_k^-, x) + g_k(t_k, x, u(t_k^-))$, para $x \in \bar{\Omega}$, $k = 1, 2, \dots$ e condições de fronteira;
- (3) $\frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) + \gamma(t, x)u(t, x) = 0$, para $t \neq t_k$, $x \in \partial\Omega$;
- (4) $u(t, x) = 0$, para $t \neq t_k$, $x \in \partial\Omega$.

As funções $a: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $p: G^{(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma: \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_k(t_k, \cdot, \cdot): \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, são dadas.

Definição 6.1.1. A função $u: G^{(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada solução do problema (1) - (3) ((1),(2),(4)) se :

(i) $u \in C_{imp}[G^{(0)}, \mathbb{R}]$, onde existem as derivadas $u_t(t, x), u_{x_i x_i}(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, para $(t, x) \in \Gamma$ e u satisfaz (1) em Γ .

(ii) u satisfaz (2) e (3) ((2) e (4)).

Definição 6.1.2. A solução não nula da equação $u_t(t, x) = a(t)\Delta u(t, x) - p(t, x)u(t, x)$, para $(t, x) \in \Gamma$, sujeita a condições de impulso é dita não-oscilante se existe um número $\mu \geq 0$ tal que $u(t, x)$ tem o sinal constante para $(t, x) \in [\mu, +\infty) \times \Omega$. Caso contrário a solução é oscilante.

Introduzimos as seguintes hipóteses:

(H₁) $a \in C_{imp}[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$;

(H₂) $p \in C_{imp}[G^{(0)}, \mathbb{R}]$;

(H₃) $g_k(t_k, \dots) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \dots$;

(H₄) $\gamma \in C_{imp}[\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \mathbb{R}_+]$

Denote:

$$v(t) = \int_{\Omega} u(t, x) dx.$$

e

$$P(t) = \min\{p(t, x), x \in \bar{\Omega}\}$$

Note que de fato existe tal $P(t) = \min\{p(t, x); x \in \bar{\Omega}\}$. Pois quando $t \notin \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, temos de imediato que $\{p(t, x); x \in \bar{\Omega}\}$ admite mínimo, visto que $p(t, x)$ é contínua num compacto. Agora para garantirmos o mínimo no caso em que $t = t_k$, basta mostrar que

$$\lim_{y \rightarrow x} p(t_k, y) = p(t_k, x).$$

Suponhamos que não ocorre o limite acima, logo $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \bar{\Omega}$ tal que

$$0 < |y - x| < \delta \quad , \quad |p(t_k, y) - p(t_k, x)| > \varepsilon.$$

Reescrevendo em termos de sequência, isto é, tomando $\delta = 1/n$, $\exists y_n \in \bar{\Omega}, 0 < |y_n - x| < 1/n$ e $|p(t_k, y_n) - p(t_k, x)| > \varepsilon$, assim

$$(p(t_k, x) - \varepsilon/2, p(t_k, x) + \varepsilon/2) \cap (p(t_k, y_n) - \varepsilon/2, p(t_k, y_n) + \varepsilon/2) = \emptyset.$$

Sabemos pela definição de $p(t, x)$ que, para cada n ,

$$\lim_{\substack{(s, z) \rightarrow (t_k, y_n) \\ s > t_k}} p(s, z) = p(t_k, y_n).$$

Como $(t_{k+1}/j, y_n) \rightarrow (t_k, y_n)$ quando $j \rightarrow \infty$, então $p(t_k + 1/j, y_n) \rightarrow p(t_k, y_n)$. Logo existe j_m tal que $j_m \geq j$ implica

$$|p(t_k + 1/j_m, y_n) - p(t_k, y_n)| < \varepsilon/2.$$

Note que podemos construir uma sequência (j_m) de forma que $j_{m+1} > j_m$ e que $j_m \rightarrow \infty$, assim

$$p(t_k + 1/j_m, y_n) \rightarrow p(t_k, y_n).$$

Em particular

$$p(t_k + 1/j_n, y_n) \rightarrow p(t_k, x)$$

quando $n \rightarrow \infty$. O que é um absurdo pela escolha da sequência (y_n) .

6.2 Condições suficientes para a oscilação das soluções para o problema (1) - (3).

Lema 6.2.1. *Assuma*

1. $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$.

2. $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ é solução positiva do problema

$$E(1) \quad u_t(t, x) = a(t)\Delta u(t, x) - p(t, x)u(t, x), \text{ para } (t, x) \in \Gamma;$$

$$E(2) \quad u(t_k, x) = u(t_k^-, x) + g_k(t_k, x, u(t_k^-)), \text{ para } x \in \bar{\Omega}, k = 1, 2, \dots \text{ e condições de fronteira};$$

$$E(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, x) + \gamma(t, x)u(t, x) = 0, \text{ para } t \neq t_k, x \in \partial\Omega.$$

em G .

3. $g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi, L_k \in \mathbb{R}_+$ são constantes.

Então a função $v(t)$ satisfaz a desigualdade diferencial impulsiva

$$\frac{dv}{dt}(t) + P(t)v(t) \leq 0, \quad t \neq t_k \quad (6.2.1)$$

$$v(t) \leq (1 + L_k)v(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.2.2)$$

Demonstração. Integremos a equação (1) com respeito a x sobre o domínio Ω .

$$u_t(t, x) = a(t)\Delta u(t, x) - p(t, x)u(t, x)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u(t, x) dx &= \int_{\Omega} a(t) \Delta u(t, x) dx - \int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx &= a(t) \int_{\Omega} \Delta u(t, x) dx - \int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx\end{aligned}$$

Façamos estimativas para a penúltima e última integrais na última equação. Pela fórmula de Green (ver (EVANS, 1998)) e pela (H_4) temos ao nosso favor a equação 3 que podemos substituir, logo

•

$$\int_{\Omega} \Delta u(t, x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \gamma(t, x) u(t, x) d\sigma \leq 0.$$

Além disso

•

$$\int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx \geq P(t) \int_{\Omega} u(t, x) dx = P(t) v(t)$$

pois $P(t) = \min\{p(t, x), x \in \bar{\Omega}\}$.

Em virtude de (2) e (3) obtemos a partir de (1) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = a(t) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma - \int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx$$

$$\frac{d}{dt} v(t, x) + \int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx = a(t) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma$$

.

$$\frac{d}{dt} v(t, x) + P(t) v(t, x) \leq \frac{d}{dt} v(t, x) + \int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) dx = a(t) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \leq 0$$

$\therefore \frac{d}{dt} v(t, x) + P(t) v(t, x) \leq 0$, $t \neq t_k$. Para $t = t_k$ temos que, de (6.2.2)

$$\begin{aligned}u(t_k, x) &= u(t_k^-, x) + g_k(t_k, x, u(t_k^-, x)) \\ u(t_k, x) - u(t_k^-, x) &= g_k(t_k, x, u(t_k^-, x))\end{aligned}$$

Integrando com respeito a x no domínio Ω

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u(t_k, x) dx - \int_{\Omega} u(t_k^-, x) dx &= \int_{\Omega} g_k(t_k, x, u(t_k^-, x)) dx \\ v(t_k) - v(t_k^-) &= \int_{\Omega} g_k(t_k, x, u(t_k^-, x)) dx \leq L_k u(t_k^-, x)\end{aligned}$$

Então

$$v(t_k) \leq (1 + L_k) v(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

□

Definição 6.2.1. A solução $v \in C_{imp}[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}] \cap C^1(\bigcup_{k=0}^{\infty}(t_k, t_{k+1}), \mathbb{R})$ da desigualdade diferencial

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{dv}{dt}(t) + P(t)v(t) \leq 0, \quad t \neq t_k \\ & \bullet \quad v(t_k) \leq (1 + L_k)v(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

é chamada eventualmente positiva (negativa) se existe $t^* \geq 0$ tal que $v(t) > 0$ ($v(t) < 0$) para $t \geq t^*$.

Teorema 6.2.1. Sejam as seguintes condições satisfeitas,

1. $(H_1) - (H_4)$
2. $g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $L_k \geq 0$ são constantes e $g_k(t_k, x, \xi) = g_k(t_k, x, -\xi)$.
3. Toda solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.2.1) e (6.2.2) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Então toda solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1) - (3) ou oscila no domínio G ou a seguinte igualdade é válida:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(t, x) dx = 0$$

Demonstração. Suponha que a conclusão do teorema não é verdadeira, isto é, $u(t, x)$ é solução não nula do problema (1)-(3) é de classe $C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ e tem sinal constante no domínio $G_\mu = [\mu, +\infty) \times \Omega$, $\mu \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) dx \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $u(t, x) > 0$ para $(t, x) \in G_\mu$. Em seguida pelo lema 3.1 segue que a função $v(t)$ é solução positiva da desigualdade diferencial (6.2.1), (6.2.2) para $t \geq \mu$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$, que contradiz a condição (3) do teorema. Analogamente se consideramos $u(t, x) < 0$ em $[\mu, +\infty) \times \Omega$. Seja $w(t, x) = -u(t, x)$, $w_t = -u_t$, $\Delta w = -\Delta u$, assim $w_t = a(t)\Delta w(t, x) - p(t, x)w(t, x)$ e $w(t_k, x) = w(t_k^-, x) + g_k(t_k, x, w(t_k, x))$ usando (2) do teorema, logo reduzimos o problema a uma solução positiva e assim segue análogo o resultado. $\square$

Teorema 6.2.2. Considere as seguintes condições:

- (1) $\int_0^{+\infty} P(s) ds = +\infty$;
- (2) $\sum_{k=1}^{+\infty} L_k < +\infty$, $L_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Então cada solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.2.1) , (6.2.2) tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Seja $v(t)$ solução eventualmente positiva de

$$* \quad \frac{dv}{dt}(t) + p(t)v(t) \leq 0, \quad t \neq t_k$$

$$** \quad v(t_k) \leq (1 + L_k)v(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

isto é, existe ponto $(t^*) \geq 0$ tal que $v(t) > 0, \forall t > t^*$.

Antes de tudo, observamos que para $t \in (t_j, t_{j+1})$ vale

- $\frac{dv}{dt} + P(t)v(t) \leq 0$;
- $v(t_j) \leq (1 + L_j)v(t_j^-)$.

Seja $r \in (t_j, t_{j+1})$ tal que $r < t$, isto é, $t_j < r < t < t_{j+1}$, multiplicando (I) por $\exp \int_r^t P(s)ds$ temos

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)(\exp \int_r^t P(s)ds) + P(t)v(t)(\exp \int_r^t P(s)ds) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(v(t)(\exp \int_r^t P(s)ds) \right).$$

Tomando $g(t) = v(t)(\exp \int_r^t P(s)ds)$, $g(t)$ é não crescente , assim $g(t) \leq g(r)$ o que implica que

$$v(t) \exp \left(\int_r^t P(s)ds \right) \leq v(r) \exp \left(\int_r^r P(s)ds \right) \leq v(r).$$

Daí,

$$v(t) \leq v(r) \exp \left(- \int_r^t P(s)ds \right).$$

Tomando o limite na desigualdade (III), quando $r \rightarrow t_j$,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow t_j \\ r > t_j}} v(t) \leq \lim_{\substack{r \rightarrow t_j \\ r > t_j}} v(r) \exp \left(- \int_r^t P(s)ds \right).$$

Daí,

$$v(t) \leq v(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^t P(s)ds \right).$$

Agora tomando o limite da desigualdade (IV) quando $t \rightarrow t_{j+1}$, temos

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{j+1} \\ t > t_{j+1}}} v(t) \leq \lim_{\substack{t \rightarrow t_{j+1} \\ t > t_{j+1}}} v(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^t P(s) ds \right).$$

Daí,

$$v(t_{j+1}^-) \leq v(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^{t_{j+1}^-} P(s) ds \right),$$

que usando $(**)$ para $t = t_{j+1}$ temos

$$v(t_{j+1}) \leq (1 + L_{j+1}) v(t_{j+1}^-),$$

logo

$$v(t_{j+1}) \leq (1 + L_{j+1}) v(t_j) \exp \int_{t_j}^{t_{j+1}} P(s) ds.$$

Assumindo $t^* \leq t < t_{k_1}$, onde t_{k_1} é a primeira singularidade de v , analogamente aos cálculos anteriores temos

$$v(t) \leq v(t^*) \exp - \int_{t^*}^t P(s) ds$$

assim, quando $t \rightarrow t_{k_1}$, com $t < t_{k_1}$, então

$$v(t_1^-) \leq v(t^*) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} P(s) ds.$$

Como

$$v(t_{k_1}) \leq (1 + L_{k_1}) v(t_{k_1}^-),$$

obtemos

$$v(t) \leq v(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} P(s) ds.$$

Agora assumindo $t^* < t_{k_1} \leq t < t_{k_2}$, temos

$$v(t) \leq v(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} P(s) ds \exp - \int_{t_{k_1}}^t P(s) ds.$$

Portanto

$$v(t) \leq v(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^t P(s) ds.$$

Fazendo $t \rightarrow t_{k_2}$, com $t < t_{k_2}$, então

$$v(t_2^-) \leq v(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_2}} P(s) ds,$$

que usando

$$v(t_{k_2}) \leq (1 + L_{k_2}) v(t_{k_2}^-)$$

temos

$$v(t_{k_2}) \leq v(t^*) (1 + L_{k_1}) (1 + L_{k_2}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_2}} P(s) ds.$$

Logo se $t \in (t^*, t_{k_2}]$,

$$v(t) \leq v(t^*) \prod_{t^* < t_{k_j} \leq t} (1 + L_{k_j}) \exp - \int_{t^*}^t P(s) ds.$$

A este ponto já estamos convencidos de que é possível estimar $v(t)$ quando existe alguma singularidade t_{k_1} tal que $t^* < t_{k_1} \leq t < t_{k_2}$. Observando que $[t^*, +\infty) = [t^*, t_{k_1}) \cup [t_{k_2}, t_{k_3}) \cup \dots$, já temos provado que para $t \in [t^*, t_{k_1})$ vale a desigualdade acima. Assumindo que vale pra $t \in [t^*, t_{k_n})$ provemos por indução que temos o resultado para $t \in [t^*, t_{k_{n+1}})$. Ou seja, para $t \in [t^*, t_{k_n})$,

$$v(t) \leq v(t^*) \prod_{t^* < t_{k_j} \leq t} (1 + L_{k_j}) \exp - \int_{t^*}^t P(s) ds$$

, fazendo $t \rightarrow t_{k_n}$, com $t < t_{k_n}$, então

$$v(t_{k_n}^-) \leq v(t^*) \prod_{t^* < t_{k_j} \leq t} (1 + L_{k_j}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_n}} P(s) ds$$

que por (**)

$$v(t_{k_n}) \leq v(t^*) \prod_{\substack{t^* < t_i \leq t_{k_n} \\ k_1 \leq i \leq k_n}} (1 + L_i) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_n}} P(s) ds.$$

Agora sendo $t \in [t_{k_n}, t_{k_{n+1}})$,

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t_{k_n}) \exp - \int_{t_{k_n}}^t P(s) ds \\ v(t) &\leq v(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^{t_{k_n}} P(s) ds + \int_{t_{k_n}}^t P(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$v(t) \leq v(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^t P(s) ds \right].$$

Finalmente calcularemos o limite desta última desigualdade quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[v(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^t P(s) ds \right] \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) \leq 0$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp - \int_{t^*}^t P(s) ds = \exp - \int_{t^*}^{+\infty} P(s) ds = 0$$

e $\prod_{i=1}^n (1 + L_i)$ é limitado. De fato

$$e^{L_1} = 1 + L_1 + \frac{L_1^2}{2!} + \dots \Rightarrow (1 + L_1) \leq e^{L_1} \Rightarrow (1 + L_1)(1 + L_2) \dots (1 + L_n) \leq e^{L_1 + L_2 + \dots + L_n}.$$

Mas $s = \sum_{i=1}^{+\infty} L_i < +\infty$.

Logo

$$\prod_{i=1}^{+\infty} (1 + L_i) \leq e^s.$$

Por outro lado, $v(t) \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) \geq 0$ desde que v é solução eventualmente positiva. Concluimos então $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$. $\square$

Corolário 6.2.1. *Sejam as condições*

1. $(H_1) - (H_4)$
2. $g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $L_k \geq 0$ são constantes tais que $\sum_{k=1}^{\infty} L_k < +\infty$
3. $g_k(t_k, x, \xi) = g_k(t_k, x, -\xi)$, $K = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$
4. $\int_0^{\infty} P(s) ds = +\infty$.

Então a solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1) -(3) ou oscila no domínio G ou a seguinte igualdade vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) dx = 0$$

Demonstração. Dos fatos, $\sum_{k=1}^{\infty} L_k < +\infty$ e $\int_0^{\infty} P(s) ds = +\infty$ concluimos pelo teorema 2.3.2, que cada solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.2.1), (6.2.2) tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$. A partir disto, com as hipóteses (1), (2) e (3) podemos usar o teorema 2.3.1 e assim concluir, que a solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1), (3) ou oscila em G ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) dx = 0$$

$\square$

6.3 Condições suficientes para oscilação de soluções do problema (1), (2), (4)

Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + \alpha \varphi &= 0 \text{ em } \Omega \\ \varphi|_{\partial \Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

onde $\alpha = cte$. Sabe-se da referência (COURANT; HILBERT, 1965) que o menor autovalor α_0 do problema (6.3.1) é positivo correspondente a autofunção Φ_0 que satisfaz $\Phi_0(x) > 0$

para $x \in \Omega$.

Introduzimos a notação

$$w(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \varphi_0(x) dx, \quad t \geq 0 \quad (6.3.2)$$

Lema 6.3.1. *Sejam as condições:*

1. $(H_1) - (H_3)$
2. $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ é solução positiva do problema (1), (2), (4) em G
3. $g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $L_k \geq 0$ são constantes.

Então a função w satisfaz a seguinte desigualdade diferencial impulsiva:

$$\frac{dw}{dt}(t) + \alpha_0 a(t)w(t) + P(t)w(t) \leq 0 \text{ para } t \neq t_k \quad (6.3.3)$$

$$w(t_k) \leq (1 + L_k)w(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.3.4)$$

Demonstração. Tomemos a equação (1)

$$u_t(t, x) = a(t)\Delta u - p(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in \Gamma$$

multiplicando-a por $\varphi_0(x)$ autofunção

$$u_t(t, x)\varphi_0(x) = a(t)\Delta u\varphi_0(x) - p(t, x)u(t, x)\varphi_0(x), \quad t \neq t_k$$

Façamos agora a integral com respeito a x , sobre Ω ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t(t, x)\varphi_0(x)dx &= \int_{\Omega} a(t)\Delta u\varphi_0(x)dx - \int_{\Omega} p(t, x)u(t, x)\varphi_0(x)dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x)\varphi_0(x)dx &= a(t) \int_{\Omega} \Delta u\varphi_0(x)dx - \int_{\Omega} p(t, x)u(t, x)\varphi_0(x)dx \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Usando a fórmula de Green na primeira parcela do lado direito da igualdade,

$$\int_{\Omega} \Delta u(t, x)\varphi_0(x)dx = \int_{\Omega} u(t, x)\Delta\varphi_0(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(t, x)\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}(x)dx - \int_{\partial\Omega} \varphi_0(x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(t, x)dx$$

Observe que em nosso problema $u(t, x) = 0$ em $\partial\Omega$ assim como $\varphi_0|_{\partial\Omega} = 0$. E em Ω , $\Delta\varphi = -\alpha_0\varphi$. Logo, por (6.3.1)

$$-\alpha_0 \int_{\Omega} u(t, x)\varphi_0(x)dx = -\alpha_0 w(t) \quad (6.3.6)$$

Onde $\alpha_0 > 0$ menor autovalor do problema (6.3.1). Além disso

$$\int_{\Omega} p(t, x) u(t, x) \varphi_0(x) dx \geq P(t) w(t). \quad (6.3.7)$$

Fazendo uso de (6.3.6) e (6.3.7), obtemos por (6.3.5) que

$$\frac{dw}{dt}(t) + \alpha_0 a(t) w(t) + P(t) w(t) \leq 0, \quad t \neq t_k$$

Para $t = t_k$ temos que

$$w(t_k) - w(t_k^-) \leq L_k \int_{\Omega} u(t_k^-, x) \varphi_0(x) dx = L_k w(t_k^-),$$

isso é

$$w(t_k) \leq (1 + L_k) w(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

□

Analogamente ao teorema (6.2.1) podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 6.3.1. *Sejam as condições:*

1. $(H_1) - (H_3)$
2. $g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, $L_k \geq 0$ são constantes e $g_k(t_k, x, \xi) = g_k(t_k, x, -\xi)$.
3. Toda solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.3.3) e (6.3.4) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Então toda solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1), (2), (4) ou oscila no domínio G ou a seguinte igualdade é válida:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) \varphi_0(x) dx = 0$$

Demonstração. Vamos supor que a conclusão do teorema é falsa, isto é, a solução do problema (1), (2), (4) não nula, $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ e tem sinal constante no domínio $G_\mu = [\mu, +\infty) \times \Omega$, $\mu \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) dx \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $u(t, x) > 0$ (já que é não nula) para $(t, x) \in G_\mu$. Em seguida pelo lema (2.3.1) segue que a função $w(t)$ é solução positiva da desigualdade diferencial (6.3.3) e (6.3.4) e que a função $w(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \varphi_0(x) dx$ para $t \geq \mu$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \neq 0$, que contradiz a condição (3) do teorema. Analogamente se consideramos $u(t, x) < 0$ em $[\mu, +\infty) \times \Omega$. Seja $r(t, x) = -u(t, x)$, $r_t = -u_t$, $\Delta r = -\Delta u$, assim $r_t = a(t) \Delta r(t, x) - p(t, x) w(t, x)$ e $r(t_k, x) = w(t_k^-, x) + g_k(t_k, x, r(t_k, x))$ usando (2) do teorema, logo reduzimos o problema a uma solução positiva e assim segue análogo o resultado. □

Teorema 6.3.2. *sejam as seguintes condições*

1. (H_1)
2. $\int^{+\infty} P(s)ds = +\infty$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} L_k \leq +\infty$, $L_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Então toda solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.3.3), (6.3.4) tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$

Demonstração. Seja $w(t)$ solução eventualmente positiva de

$$* \quad \frac{dw}{dt}(t) + \alpha_0 a(t)w(t) + p(t)w(t) \leq 0, \quad t \neq t_k$$

$$** \quad w(t_k) \leq (1 + L_k)w(t_k^-), \quad k = 1, 2, \dots$$

isto é, existe ponto $(t^*) \geq 0$ tal que $w(t) > 0$, $\forall t > t^*$.

Antes de tudo, observamos que para $t \in (t_j, t_{j+1})$ vale

- $\frac{dw}{dt} + \alpha_0 a(t)w(t) + P(t)w(t) \leq 0$;
- $w(t_j) \leq (1 + L_j)w(t_j^-)$.

Seja $r \in (t_j, t_{j+1})$ tal que $r < t$, isto é, $t_j < r < t < t_{j+1}$, multiplicando (I) por $\exp \int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s)ds$ temos

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)(\exp \int_r^t \alpha_0 a(t)w(t) + P(s)ds) + [\alpha_0 a(t) + P(t)]w(t)(\exp \int_r^t \alpha_0 a(t)P(s)ds) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(w(t)(\exp \int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s)ds) \right) \leq 0.$$

Tomando $g(t) = w(t)(\exp \int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s)ds)$, $g(t)$ é não crescente, assim $g(t) \leq g(r)$ o que implica que

$$w(t) \exp \left(\int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s)ds \right) \leq w(r) \exp \left(\int_r^r \alpha_0 a(s) + P(s)ds \right) \leq w(r).$$

Daí,

$$w(t) \leq w(r) \exp \left(- \int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s)ds \right).$$

Tomando o limite na desigualdade (III), quando $r \rightarrow t_j$,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow t_j \\ r > t_j}} w(t) \leq \lim_{\substack{r \rightarrow t_j \\ r > t_j}} w(r) \exp \left(- \int_r^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right).$$

Daí,

$$w(t) \leq w(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right).$$

Agora tomando o limite da desigualdade (IV) quando $t \rightarrow t_{j+1}$, temos

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{j+1} \\ t > t_{j+1}}} w(t) \leq \lim_{\substack{t \rightarrow t_{j+1} \\ t > t_{j+1}}} w(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right).$$

Daí,

$$w(t_{j+1}^-) \leq w(t_j) \exp \left(- \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right),$$

que usando (**) para $t = t_{j+1}$ temos

$$w(t_{j+1}) \leq (1 + L_{j+1}) w(t_{j+1}^-),$$

logo

$$w(t_{j+1}) \leq (1 + L_{j+1}) w(t_j) \exp - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Assumindo $t^* \leq t < t_{k_1}$, onde t_{k_1} é a primeira singularidade de w , analogamente aos cálculos anteriores temos

$$w(t) \leq w(t^*) \exp - \int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds$$

assim, quando $t \rightarrow t_{k_1}$, com $t < t_{k_1}$, então

$$w(t_1^-) \leq w(t^*) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Como

$$w(t_{k_1}) \leq (1 + L_{k_1}) w(t_{k_1}^-),$$

obtemos

$$w(t_{k_1}) \leq w(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Agora assumindo $t^* < t_{k_1} \leq t < t_{k_2}$, temos

$$w(t) \leq w(t_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Portanto

$$w(t) \leq w(t^*) (1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_1}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds \exp - \int_{t_{k_1}}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Portanto

$$w(t) \leq w(t^*)(1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Fazendo $t \rightarrow t_{k_2}$, com $t < t_{k_2}$, então

$$w(t_2^-) \leq w(t^*)(1 + L_{k_1}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_2}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds,$$

que usando

$$w(t_{k_2}) \leq (1 + L_{k_2}) w(t_2^-)$$

temos

$$w(t_{k_2}) \leq w(t^*)(1 + L_{k_1})(1 + L_{k_2}) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_2}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Logo se $t \in (t^*, t_{k_2}]$,

$$w(t) \leq w(t^*) \prod_{t^* < t_{k_j} \leq t} (1 + L_{k_j}) \exp - \int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

A este ponto já estamos convencidos de que é possível estimar $w(t)$ quando existe alguma singularidade t_{k_1} tal que $t^* < t_{k_1} \leq t < t_{k_2}$. Observando que $[t^*, +\infty) = [t^*, t_{k_1}) \cup [t_{k_2}, t_{k_3}) \cup \dots$, já temos provado que para $t \in [t^*, t_{k_1})$ vale a desigualdade acima. Assumindo que vale pra $t \in [t^*, t_{k_n})$ provemos por indução que temos o resultado para $t \in [t^*, t_{k_{n+1}})$. Ou seja, para $t \in [t^*, t_{k_n})$,

$$w(t) \leq w(t^*) \prod_{t^* < t_i < t} (1 + L_i) \exp - \int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds,$$

fazendo $t \rightarrow t_{k_n}$, com $t < t_{k_n}$, então

$$w(t_{k_n}^-) \leq w(t^*) \prod_{t^* < t_i < t_{k_n}} (1 + L_i) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_n}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds$$

que por (**)

$$w(t_{k_n}) \leq w(t^*) \prod_{\substack{t^* < t_i \leq t_{k_n} \\ k_1 \leq i \leq k_n}} (1 + L_i) \exp - \int_{t^*}^{t_{k_n}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds.$$

Agora sendo $t \in [t_{k_n}, t_{k_{n+1}})$,

$$w(t) \leq w(t_{k_n}) \exp - \int_{t_{k_n}}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds$$

$$w(t) \leq w(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^{t_{k_n}} \alpha_0 a(s) + P(s) ds + \int_{t_{k_n}}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right].$$

Portanto

$$w(t) \leq w(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right].$$

Finalmente calcularemos o limite desta última desigualdade quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[w(t^*) \prod_{t^* < t_i \leq t} (1 + L_i) \exp - \left[\int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds \right] \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq 0, \text{ pois}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp - \left[\int_{t^*}^t \alpha_0 a(s) + P(s) ds + \int_{t^*}^t P(s) ds \right] = 0$$

e $\prod_{i=1}^n (1 + L_i)$ é limitado. De fato

$$e^{L_1} = 1 + L_1 + \frac{L_1^2}{2!} + \dots \Rightarrow (1 + L_1) \leq e^{L_1} \Rightarrow (1 + L_1)(1 + L_2) \dots (1 + L_n) \leq e^{L_1 + L_2 + \dots + L_n}.$$

Mas $s = \sum_{i=1}^{+\infty} L_i < +\infty$. Logo

$$\prod_{i=1}^{+\infty} (1 + L_i) \leq e^s.$$

Por outro lado, $w(t) \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \geq 0$ desde que w é solução eventualmente positiva. Concluimos então $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$.

□

Observação 6.3.1. *Necessitamos no decorrer da demonstração acima que*

$$(*) \int_{t^*}^{\infty} \alpha_0 a(s) + P(s) ds = +\infty$$

o que nos dá a possibilidade de impor hipóteses novas, tanto na função $a(s): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, quanto na função $P(s)$:

$$(I) \int_{t^*}^{\infty} a(s) ds < +\infty, \text{ então } (*) \iff \int_0^{\infty} P(s) ds = +\infty.$$

$$(II) \int_{t^*}^{\infty} a(s) ds = +\infty \text{ e } \left| \int_0^L P(s) ds \right| < r, \forall L \implies (*).$$

□

Corolário 6.3.1. *Sejam as condições*

$$1. (H_1) - (H_3)$$

$$2. g_k(t_k, x, \xi) \leq L_k \xi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}_+, \quad L_k \geq 0 \text{ são constantes tais que } \sum_{k=1}^{\infty} L_k < +\infty$$

$$3. g_k(t_k, x, \xi) = g_k(t_k, x, -\xi), \quad K = 1, 2, \dots, \quad x \in \bar{\Omega}$$

$$4. \int_0^{\infty} P(s) ds = +\infty.$$

Então toda solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1), (2), (4) ou oscila no domínio G ou a seguinte igualdade é válida:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(t, x) \varphi_0(x) dx = 0$$

Demonstração. Dos fatos, $\sum_{k=1}^{\infty} L_k < +\infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} P(s) ds = +\infty$ concluímos pelo (6.3.2), que toda solução eventualmente positiva da desigualdade diferencial (6.3.3), teorema (6.3.4) tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$.

Com mais esta hipótese juntamente com as hipóteses (1), (2) e (3) podemos usar o teorema (6.3.1) daí concluímos que a solução não nula $u \in C^2(\Gamma) \cap C^1(\tilde{\Gamma})$ do problema (1), (2), (4) ou oscila em G ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, x) \varphi(x) dx = 0$$

□

Referências

- BAINOV, D.; MINCHEV, E. Oscillation of the solutions of impulsive parabolic equations. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 69, n. 2, p. 207–214, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 51.
- BAINOV, D.; SIMEONOV, P. *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*. [S.l.]: CRC Press, 1993. Citado na página 7.
- COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of mathematical physics*. [S.l.]: CUP Archive, 1965. Citado na página 60.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 55.
- HALMOS, P. R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. [S.l.]: Editora Ciencia Moderna, 2001. Citado na página 35.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D. D.; SIMEONOV, P. S. *Theory of impulsive differential equations*. [S.l.]: World scientific, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 50.
- LIMA, E. L. Curso de análise, vol. 2.(6a edição). *Projeto Euclides*, IMPA, 2000. Citado na página 40.
- LIMA, E. L. Curso de análise, volume 1 (decima primeira edicao). *Projeto Euclides*. IMPA, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- SOTOMAYOR, J. *Li, cões de equa, cões diferenciais ordinárias*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 42.