



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rúbia Esterfânia de Araújo Ramos

**Abordagem Geométrica da Dinâmica
hamiltoniana: Aspectos Gerais e Aplicações à
Modelos de Spin Clássicos.**

Recife
2015

Rúbia Esterfânia de Araújo Ramos

**Abordagem Geométrica da Dinâmica hamiltoniana:
Aspectos Gerais e Aplicações à Modelos de Spin
Clássicos.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega Santos
Coorientador: Prof. Dr. Maurício Domingues Coutinho Filho

Recife
2015

Catálogo na fonte
Bibliotecária Elaine Cristina de Freitas, CRB4-1790

R175a Ramos, Rúbia Esterfânia de Araújo
Abordagem geométrica da dinâmica hamiltoniana: aspectos gerais e aplicações à modelos de spin clássicos / Rúbia Esterfânia de Araújo Ramos. – 2015.
117 f.

Orientador: Fernando Antônio Nóbrega Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referências e apêndice.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais 2. Sistemas hamiltonianos I. Santos, Fernando Antônio Nóbrega (orientador) II. Título.

515.39 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-203

RÚBIA ESTERFÂNIA DE ARAÚJO RAMOS

**ABORDAGEM GEOMÉTRICA DA DINÂMICA HAMILTONIANA:
ASPECTOS GERAIS E APLICAÇÕES A MODELOS DE SPIN CLÁSSICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 26/02/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Antônio Nóbrega Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Maurício Domingues Coutinho (Co-orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Hidelberto Eulálio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

À minha avó Socorro pelo amor, compreensão e por tudo que faz por mim.

Agradecimentos

À Deus por tudo que Ele tem me permitido alcançar através da fé. Em cada minuto da minha existência posso senti-lo muito perto de mim. À cada dificuldade, cada lágrima e a cada conquista vejo o seu cuidado e o seu amor incondicional.

À minha mãe por todos os esforços e renúncias que precisou fazer para que hoje eu pudesse estar aqui. Gostaria apenas de dizer que se hoje sou o que sou devo tudo a ela.

À minha avó Socorro, pelos conselhos de fé, pelo cuidado e carinho.

À toda minha família por estarem comigo em todos os momentos. O que faria sem vocês?

Sempre penso que Deus coloca pessoas especiais em nosso caminho, alguém que acredita em nós, alguém pra dizer: "Continue a nadar". Sem sombra de dúvidas durante todo o mestrado, nos futuros 4 anos de doutorado e por toda minha vida científica, uma dessas pessoas é o meu amigo, professor, e Orientador Fernando Nóbrega. Sem suas sugestões, correções e ideias nada ou quase nada desse trabalho teria sido realizado. Sabe aquela estória que orientadores somem do nada, ou que você dirige o carrinho de madeira e o orientador grita: "taca-lhe o pau"? Isso de fato não existe, pelo menos não com o Prof. Fernando. Quando cheguei no mestrado o Prof. Fernando era apenas meu orientador acadêmico e física-matemática não era a minha área de interesse. Mas, a pessoa integra, a responsabilidade, a seriedade e ao mesmo tempo a simplicidade com que ele lida com ciência são de fato contagiante e em cada conversa que tínhamos aquilo tudo que ele falava por horas parecia tão interessante, apesar das minhas muitíssimas preocupações com o longo caminho à enfrentar. Então já viu né... fiquei na área de física-matemática e o fato do Prof. Fernando sugerir essa pesquisa que une caos, geometria, mecânica estatística e etc etc e etc está sendo um máximo. Verdadeiramente amo a minha pesquisa e tudo isso porque ele quis começar do zero comigo. O Prof. Fernando é a pessoa mais paciente e inteligente que já conheci em todo universo. Acreditem, me orientar não é uma tarefa fácil e por muitas vezes ele também foi meu psicólogo. Como sempre falo, não importa o quanto eu esteja triste, preocupada ou desesperada, ao conversar com o Prof. Fernando recebo uma certa dose quase que exagerada de motivação. Eu sei... eu sei... o Prof. Fernando como Orientador é existência e unicidade e um exemplo como pessoa e cientista. À ele meus sinceros agradecimentos por tudo o quanto fez para que hoje concluísse esse trabalho. Obrigada por acreditar em mim.

Ao meu Co-orientador Prof. Maurício Coutinho por todas nossas conversas e discussões sempre muito ricas. Suas sugestões foram primordiais para finalização desse trabalho. Ao Senhor Prof. Maurício minha eterna gratidão e admiração.

Aos meus professores do Ensino Fundamental e Médio, em especial: Niedja Borba, Arcelina Bartolomeu e Maria de Fátima. Elas tiveram grandes contribuições na minha escolha pela matemática.

Aos meus professores da graduação e do mestrado: À Esdras Jafet que sempre nos dava forças para continuar a carreira acadêmica. À Renata Limeira pelas cursos de análise e pelo hospitalidade em sua casa durante os meses do curso verão que foi decisivo para dizer: Isso é o que eu gosto e eu vou chegar lá. À Ramon Mendoza que não mediu esforços para ir à Nazaré da Mata nos ensinar uma “pré” álgebra linear e nos dá carta para o verão. À Tony Souza pela sua paciência comigo no primeiro curso do mestrado e nos que se seguiram. Seu jeito tranquilo e sempre disposto a ajudar me permitiu continuar a jornada do mestrado. À Henrique Araújo pelo maravilhoso curso de análise no \mathbb{R}^n . À Airton Castro pelo curso de Medida e Integração. À Fernando pelo curso de equações diferenciais ordinárias e todos os outros cursos extras. Enfim, a todos que contribuíram para minha formação.

Aos meu amigos. Faço minhas as palavras de Vinícius de Moraes: “Eu poderia suportar, embora não sem dor, que tivessem morrido todos os meus amores, mas enlouqueceria se morressem todos os meus amigos.”

Começarei a interminável lista e aqueles a quem não citar peço sinceras desculpas. Aos amigos da minha terrinha amada Macaparana: Rodrigo Moura, Yara, Iolanda, Eliza, Elizama, Ivânia, Talita, Elizama Martins e Rafael. Aos amigos que mesmos distantes são pra sempre meus amigos: Sócrates Farias, Josias, Cida Silva, Leonardo, Juliete, Josemar, Josealdo, Manoel, Wellington, Camilinha, Cleice, Cláudia e Wagner. Aos amigos na fé: Pastor Luiz Antônio, Felipe Diogo, Rafaela, Tatiane, Willamis, Nena, Livânia, Jô, Valkíria, Rubens, Ingrid e Gaby. Aos que estão tão tão tão pertinho: Thamíres (pequena Thamy) minha amiguinha de apartamento, Dorghislany e também Dona Lia. Aos amigos do Dmat: Thiago Fiel, Juscelino, Omar, Marlon, Serginei, Claudinha, Luiz, Deibson, Felipe, Gilson, Clarinha, Michele, Bob, Marcelo Carielo, Lorena, Edgar, Tanaka e em especial aos doidinhos e irmãos da sala 217 com quem compartilho e posso contar em todos os momentos: Josué - o cara mais chato mas, sempre está disposto à ajudar. Imagino que sem Josué não teria graça aquela sala, ele é o próprio Dr. House. Marcelinho - possui o maior coração que já vi. Tudo que eu preciso no universo eu grito: Marcelo podes fazer isso pra mim?. Leandro - nossas conversas são tão produtivas e fazem tão bem ao espírito. Joelma - minha amiga de confissões e de fé. Acredito que Deus é tão bom comigo que me deu os melhores amigos que alguém poderia ter.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“- Isto é impossível.
- Só se você acreditar que é.”
(Lewis Carroll)*

Resumo

Neste trabalho, descreveremos através de uma abordagem geométrica a dinâmica e o comportamento caótico em Sistemas Hamiltonianos. Para tal fim, discutiremos as hipóteses necessárias para realizarmos a geometrização da dinâmica, que nos possibilita relacionarmos as trajetórias de um sistema hamiltoniano com as geodésicas de sua variedade equipotencial, munida de uma métrica adequada. Inicialmente analisaremos o caso em que a variedade é isotrópica, onde encontraremos, após estudar a equação de Jacobi associada, que o sistema apresentará caos sempre que sua curvatura seccional for negativa. Para o caso não isotrópico, em baixa dimensão, veremos que o mecanismo de instabilidade paramétrica caracteriza a ocorrência do caos. Assumindo algumas hipóteses geométricas e estatísticas, no limite termodinâmico, ao relacionarmos a média e a flutuação da curvatura de Ricci, obteremos uma expressão analítica para o maior expoente de Lyapunov que dará suporte ao mecanismo de instabilidade paramétrica. Finalmente, faremos uma aplicação original da teoria desenvolvida para o modelo XY na presença do Campo. Os resultados encontrados estão em acórdância com a termodinâmica do modelo e contribuem para um melhor entendimento dos aspectos geométricos associados da dinâmica do mesmo.

Palavras-chave: Geometrização da Dinâmica Hamiltoniana. Caos. Expoente de Lyapunov. Modelo XY com Alcance Infinito.

Abstract

In this work, we will describe through a geometric approach the dynamic and chaotic behavior in Hamiltonian systems. For this purpose, we discuss the hypothesis necessary to accomplish the geometrization of dynamics, which enables us to relate the trajectories of a Hamiltonian system with the geodesics of its equipotential manifold, provided with a suitable metric. First we will analyze the case of isotropic manifold, which we will find, after studying its Jacobi equation associated, that the system will present chaos whenever its sectional curvature is negative. For non-isotropic case, in low dimension, we will see that the parametric instability mechanism characterizes the occurrence of chaos. Assuming some geometric and statistics hypothesis, in the thermodynamic limit, which relate the mean and the fluctuation of Ricci curvature, we will obtain an analytical expression for the Lyapunov exponent which will support the parametric stability mechanism. Finally, we will make an original application of the theory developed for the XY model in the presence of the Field. The results found are in accordance with the thermodynamics of the model and contribute to a better understanding of the geometric aspects of their it dynamics.

Keywords: Geometrization of the Hamiltonian Dynamic. Chaos. Lyapunov Exponent. XY model with infinite range.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	DINÂMICA HAMILTONIANA	14
2.1	Sistemas hamiltonianos	14
2.2	Dinâmica Caótica	20
2.2.1	<i>Expoente de Lyapunov</i>	20
2.3	Caos em Sistemas hamiltonianos	21
2.3.1	<i>Sistemas Integráveis</i>	21
2.3.2	<i>Perturbação de Sistemas Integráveis</i>	24
3	GEOMETRIZAÇÃO DA DINÂMICA HAMILTONIANA	31
3.1	Formulação Geométrica da Mecânica	31
3.2	Trajetórias e Geodésicas	32
3.2.1	<i>Métrica de Jacobi</i>	33
3.2.2	<i>Métrica de Eisenhart</i>	36
3.3	Curvatura e Estabilidade	38
3.4	Curvatura de (M_E, g_E)	41
3.5	Curvatura de $(M \times \mathbb{R}, G_E)$	46
3.6	Equação da Evolução da Geodésica via Métrica de Jacobi.	47
3.7	Equação da Evolução da Geodésica via Métrica de Eisenhart.	49
4	GEOMETRIA E CAOS	51
4.1	O Caso Mais Simples: Variedades Isotrópicas.	52
4.2	Um Segundo Caso: Instabilidade Paramétrica.	54
4.3	Hipóteses de uma possível teoria geométrica para o caos hamiltoniano	57
4.3.1	<i>Hipóteses Geométricas e Estatísticas</i>	57
4.4	Fórmula Geométrica para o Expoente de Lyapunov	66
5	APLICAÇÃO	70
5.1	Ensembles Termodinâmicos: Microcanônico e Canônico	71
5.2	Elementos Geométricos	75
5.3	Estimativa Analítica para o Expoente de Lyapunov	77
5.4	Modelo XY de Alcance Infinito com $\hbar \neq 0$	80
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	95

REFERÊNCIAS	97
APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA	100
Métrica Riemanniana	100
Diferenciação Covariante	101
Geodésicas	103
Curvatura	104
APÊNDICE B – MEDIDA E INTEGRAÇÃO	107
Espaços Mensuráveis	107
Espaços de Medida	108
Funções Mensuráveis	109
Integração	110
APÊNDICE C – TEORIA ERGÓDICA	111
Medidas Invariantes	111
Ergodicidade	111
Resultados Clássicos	112
APÊNDICE D – MÉTODO DO PONTO DE SELA	116

1 INTRODUÇÃO

Previsão exata. Esse era o termo o qual muitos meteorologistas estavam em busca em suas simulações numéricas na década de 50 e 60. Prever o tempo seria de fato uma descoberta revolucionária e implicaria posteriormente no poder de modificá-lo e controlá-lo. Von Newman e outras inúmeras pessoas acreditavam nesse fato. Entretanto, as simulações do matemático e meteorologista Edward Lorenz mostraram que dada certas interferências essa previsão que todos almejavam era impossível e iniciara então uma espécie de arte-ciência denominada Caos.

Lorenz observou que, partindo de condições iniciais semelhantes, as simulações produziam padrões que se distanciavam cada vez mais até que tal semelhança desaparecia por completo, mas não padrões aleatórios, e sim um tipo de desordem ordenada. Essa era a continuidade de uma ciência que por volta de 1883 surgiu através dos trabalhos de Henri Poincaré.

Poincaré demonstrou que partículas simples sujeitas a condições iniciais distintas movendo-se em uma superfície bidimensional poderiam apresentar movimentos complexos e instáveis e essa instabilidade implicaria na impossibilidade da previsibilidade ao longo prazo. A sensibilidade as condições iniciais e a imprevisibilidade do comportamento das soluções do sistema caracteriza o que chamamos de Caos determinístico.

O Caos nos permite ver ordem e padrão onde antes só havia a aleatoriedade, a imprevisibilidade e a irregularidade (1). É bem mais que um campo teórico, é uma ciência do cotidiano. Podemos encontrá-lo na beleza dos flocos de neve, nas colunas aleatórias de fumaça, num avião em voo, nos cristais de gelo, nas interligações dos vasos sanguíneos, nas cotações da bolsa de valores, num simples jogo de bilhar ou até mesmo nos nossos planos para o futuro.

O Caos apresenta uma longa escala de aplicabilidades em diversas áreas da ciência e o interesse dessas áreas está voltado, nos últimos 40 anos, para a questão do comportamento caótico das soluções de sistemas dinâmicos que modelam problemas que anteriormente não tinham relevância científica.

Quando trabalhamos com sistemas caóticos algumas questões são naturais: Como medir (ou quantificar) o caos? Como determinar quais regiões apresentará comportamento caótico? Um texto introdutório para responder esses questionamentos de modo simples e bastante didático pode ser visto em (2) e (3). Neste trabalho responderemos essas questões, mas nos limitaremos aqui ao estudo de sistemas hamiltonianos, em particular, apresentando uma abordagem geométrica.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura: No capítulo 2, apresentaremos os fundamentos básicos da dinâmica Hamiltoniana, em particular como emerge o comportamento caótico em sistemas hamiltonianos não integráveis.

No capítulo 3, realizaremos a geometrização da Dinâmica onde é possível relacionarmos as trajetórias dos sistemas com as geodésicas da variedade equipotencial munida de uma métrica adequada, a saber a métrica de Jacobi e Eisenhart. Ainda neste capítulo, estabeleceremos também a relação entre curvatura e estabilidade que pode ser descrita pela equação de Jacobi, que constitui uma ferramenta fundamental para análise do comportamento caótico.

No capítulo 4, iniciaremos pelo caso de simples caracterização de Caos, a variedade isotrópica. Para o caso de variedades não isotrópicas veremos que o caos está assegurado pelo mecanismo de instabilidade paramétrica que será plenamente justificável no limite termodinâmico, uma vez que obteremos uma expressão analítica para o expoente de Lyapunov supondo algumas hipóteses geométricas e estatísticas.

No capítulo 5, aplicaremos a teoria descrita nos capítulos anteriores para o modelo XY com alcance infinito, que no limite termodinâmico pode ser descrito pela teoria do campo médio. Nas seções iniciais, objetivando validar a teoria anteriormente descrita, reproduziremos o caso para o campo $h = 0$ em acórdância com as referências (4) e (5) e na seção 5.4 apresentaremos nossa contribuição original que consiste na generalização do modelo para o campo $h \neq 0$. Finalmente, apresentaremos conclusões e perspectiva futuras.

2 DINÂMICA HAMILTONIANA

2.1 Sistemas hamiltonianos

Seja Ω um espaço de fase $2N$ -dimensional e $x = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \in \Omega$.

Definição 1. Um sistema hamiltoniano é um conjunto com $2N$ equações diferenciais, denominadas equações de movimento canônicas, definido por:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.2)$$

com $i = 1, \dots, N$ e $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ é a função Hamiltoniana.

As coordenadas $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$, correspondem ao momento e a posição, respectivamente, e determinam o estado do sistema com N graus de liberdade.

Note que, no caso em que o hamiltoniano não possui dependência temporal explícita, $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é uma quantidade conservada, isto é, $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

De fato, pelo teorema de Schwarz:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Uma propriedade relevante dos sistemas hamiltonianos é que a estrutura dos mesmos são preservadas por transformações de coordenadas simpléticas, como veremos a seguir:

Definição 2. Um *espaço linear simplético*, ou *espaço simplético*, é um par (\mathbb{V}, ω) , onde \mathbb{V} é um espaço vetorial $2N$ -dimensional sobre o corpo dos reais ou complexos e $\omega : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, não degenerada e alternada.

A forma ω é chamada *forma simplética*.

Exemplo 1. Considere $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2N}$ com base canônica $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$. Então, $\omega(u, v) = -u^t S v$ define uma forma simplética, onde $S = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}$ e u^t é o vetor u transportado.

Definição 3. Seja (\mathbb{V}, ω) um espaço simplético. Uma *base simplética* de \mathbb{V} é uma base $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n}\}$ tal que:

$$\omega(v_i, v_j) = S_{ij},$$

onde S_{ij} é a i, j -ésima entrada da matriz S definida no exemplo acima.

Definição 4. Dada uma forma simplética ω e uma aplicação diferenciável $H : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir o campo hamiltoniano, \mathbf{X}_H , em \mathbb{R}^{2N} de modo que

$$\omega(\mathbf{X}_H(x), y) = -D_y H(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Note que, sendo:

$$\langle S\mathbf{X}_H(x), y \rangle = \omega(\mathbf{X}_H(x), y) = -D_y H(x) = -\langle \nabla_x H, y \rangle,$$

então,

$$S\mathbf{X}_H(x) = -\nabla_x H.$$

Como $S^{-1} = -S$, o campo hamiltoniano é dado por:

$$\dot{x} = \mathbf{X}_H(x) = S \cdot \nabla_x H, \quad (2.3)$$

onde $\nabla_x H = \nabla H(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial H}{\partial x_{2N}} \end{pmatrix}.$

Definição 5. Uma matriz $A \in \mathbb{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$ é dita μ -simplética se satisfaz

$$A^t S A = \mu S.$$

Quando $\mu = 1$ então A é dita simplética. Denotaremos o conjunto de todas as matrizes simpléticas em $\mathbb{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$ por $S_P(2N, \mathbb{R})$.

As matrizes simpléticas possuem propriedades relevantes. Se B é μ -simplética então B é não singular e satisfaz

$$B^{-1} = -\mu S B^t S.$$

Se A, B são μ -simpléticas então A^t, B^t e $A \cdot B$ são μ -simpléticas. Disto, resulta que $S_P(2N, \mathbb{R})$ é um grupo. Além disso, se λ é autovalor de B , λ^{-1} também é autovalor de B , e sendo $\det B$ o produto dos autovalores, segue-se que $\det B = 1$ (6).

Definição 6. Seja $E : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, com $U \subset \mathbb{R}^{2N}$, $I \subset \mathbb{R}$ e $\tau \in I$ fixo, uma aplicação diferenciável. E é dita uma transformação simplética se a jacobiana de E com relação a x , $(J_x E) = \frac{\partial E}{\partial x}$ é uma matriz simplética, isto é ,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^t S \frac{\partial E}{\partial x} = S, \quad (2.4)$$

para todo $(x, \tau) \in U \times I$.

Exemplo 2. Seja

$$\zeta : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - U$$

com

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y = 0\},$$

definida por:

$$\zeta(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Claramente ζ é um difeomorfismo. Entretanto,

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x) \right)^t S \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x) = rS, \quad x = (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi).$$

Conseqüentemente, ζ não é uma transformação simplética.

Teorema 1. *A transformação de coordenadas simpléticas $E(x) = \varphi$, independente de t , transforma o sistema hamiltoniano (2.3) em um novo sistema hamiltoniano definido por:*

$$\dot{\varphi} = S \nabla_{\varphi} \mathcal{H}, \quad (2.5)$$

onde o novo hamiltoniano \mathcal{H} é definido por: $\mathcal{H}(\varphi, t) = H(\xi(\varphi, t), t)$, sendo ξ a inversa da aplicação E .

Demonstração. Inicialmente observemos que além da existência da aplicação ξ , podemos garantir que a mesma é diferenciável.

De fato, uma vez que $D_x E = J_x E$ é simplética, então, $D_x E$ é isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, E é um difeomorfismo.

Note que :

$$x = \xi(E(x), t) = \xi(\varphi, t). \quad (2.6)$$

Logo,

$$\mathcal{H}(\varphi, t) = H(x, t).$$

Portanto, segue-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial t}(x, t) \\ &= \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot \nabla_x H \\ &= \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \right)^t \\ &= \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \right)^t \\ &= \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \right)^t \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}(\varphi, t) \right)^t \\ &= S \cdot \nabla_{\varphi} \mathcal{H} \end{aligned}$$

□

Para o caso em que o hamiltoniano depende de t temos o seguinte resultado:

Teorema 2. *Considere a aplicação simplética E conforme a definição (1.6), e suponha que, para cada t fixo, o conjunto*

$$\mathcal{V}_t = \{\varphi \in \mathbb{R}^{2N}; (\varphi, t) \in \mathcal{V} \times I\}$$

é um aberto em \mathbb{R}^{2N} e $\mathcal{V} = E(U \times I)$. Então E transforma o sistema hamiltoniano (1.3) em um novo sistema hamiltoniano, cuja função hamiltoniana é definida por:

$$\mathcal{H}(\varphi, t) + \mathcal{R}(\varphi, t),$$

onde $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x, t) = \nabla_{\varphi} \mathcal{R}.$$

Demonstração. Utilizaremos os seguintes resultados (6):

Teorema 3. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função diferenciável. Então, uma condição necessária e suficiente para que $F = \nabla f$, sendo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, é que a jacobiana seja simétrica.*

Defina:

$$F := S \cdot \frac{\partial E}{\partial t}(x, t).$$

Disto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) &= S \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t}(x, t) \right) \\ &= S \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t}(\xi, t) \right) \\ &= S \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x}(\xi, t) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}(\varphi, t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde, na equação acima foi utilizada a equação (2.6).

Demonstremos que a expressão anterior é simétrica.

Derivando (2.4) com relação a t obtemos :

$$\frac{\partial^2 E^t}{\partial t \partial x}(x, t) \cdot S \cdot \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial E}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x}(x, t) = 0. \tag{2.8}$$

Aplicando

$$\frac{\partial^2 (E^T)^{-1}}{\partial t \partial x}(x, t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 E^{-1}}{\partial t \partial x}(x, t), \quad (2.9)$$

respectivamente, e substituindo $x = \xi(\varphi, t)$ em (2.8):

$$\frac{\partial (E^T)^{-1}}{\partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) \cdot \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) \cdot S + S \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) \cdot \frac{\partial E^{-1}}{\partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) = 0.$$

Uma vez que:

$$\frac{\partial E^{-1}}{\partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}(\varphi, t)$$

e

$$\frac{\partial (E^T)^{-1}}{\partial \xi}(\xi(\varphi, t), t) = \frac{\partial (E^{-1})^T}{\partial \xi}(\xi(\varphi, t), t),$$

então,

$$-\frac{\partial F^T}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Como (2.7) é simétrica segue-se pelo teorema (1.3) citado que:

$$F := S \cdot \frac{\partial E}{\partial t}(x, t) = \nabla f,$$

onde f é uma função real.

Definindo $f = \mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ concluímos a demonstração. \square

Uma segunda propriedade para sistema hamiltoniano, consiste no fato que o volume de qualquer região do espaço de fase é invariante sob transformações simpléticas.

De fato:

Considere \mathcal{S} uma região no espaço de fase, que é mapeada por uma transformação simplética numa região \mathcal{S}' .

Definição 7. O volume Ω da região \mathcal{S} é dado por:

$$\Omega = \int_{\mathcal{S}} dq_1 \cdot \dots \cdot dq_N \cdot dp_1 \cdot \dots \cdot dp_N = \int_{\mathcal{S}} d^{2N} z$$

onde, z é um vetor $2N$ -dimensional, $z = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$.

Da definição acima temos que:

$$\Omega = \int_{\mathcal{S}} d^{2N} z$$

$$\Omega' = \int_{\mathcal{S}'} d^{2N} \zeta$$

onde, ζ é um vetor $2N$ -dimensional, cujas coordenadas são dadas pelas transformação simplética,

$$z = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema da *Mudança de Variáveis* temos que:

$$\Omega' = \int_{\mathcal{S}'} d^{2N} \zeta = \int_{\mathcal{S}} |\det M| d^{2N} z$$

onde, M é a matriz jacobiana da transformação simplética.

Como M satisfaz a condição simplética, então, $\det M = 1$, disto:

$$\Omega' = \int_{\mathcal{S}'} d^{2N} \zeta = \int_{\mathcal{S}} d^{2N} z = \Omega.$$

Consideremos \mathcal{S}' uma região no espaço de fase com volume Ω^0 no instante t_0 e \mathcal{S}^t uma região com volume Ω^t , obtida pela evolução temporal. Uma vez que, a evolução temporal gerada pelo hamiltoniano é uma transformação simplética, segue-se que:

$$\Omega^0 = \Omega^t$$

Este resultado é conhecido como *Teorema de Liouville*.

Portanto, sistemas hamiltonianos conservam volume e conseqüentemente não possuem atratores, ou seja, podem admitir apenas pontos fixos instáveis, trajetórias heteroclínicas e/ou homoclínicas e regiões caóticas, como veremos na próxima seção. Além disso, se o espaço de fase for limitado, as trajetórias retornarão sobre si infinitas vezes, conforme o seguinte teorema (7):

Teorema 4. (*Recorrência de Poincaré*)

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja M uma medida finita invariante por f . Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E .

A discussão sobre o tempo de retorno dos pontos e a apresentação da versão topológica desse teorema podem ser vistos no Apêndice D.

2.2 Dinâmica Caótica

2.2.1 *Expoente de Lyapunov*

Considere um sistema dinâmico. *Esse sistema apresenta comportamento caótico?* Em caso afirmativo, *dadas trajetórias com condições iniciais suficientemente próximas, quão rápido elas se distanciam no espaço de fase?*

Com base nesses questionamentos, Lyapunov desenvolveu um mecanismo denominado expoente de Lyapunov λ , onde é possível medir a taxa de divergência das trajetórias. Uma análise do maior expoente nos permitirá dizer se o sistema terá comportamento caótico.

Apresentaremos apenas uma ideia intuitiva do expoente de Lyapunov. A definição precisa decorre da Teoria Ergódica, que pode ser encontrada em (8).

Seja M um espaço de fase n -dimensional. Considere um sistema dinâmico cujas trajetórias satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= X_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ uma trajetória arbitrária com condição inicial $x(0) = x_0$ e $y(t)$ uma trajetória cuja condição inicial é suficientemente próxima de $x(0)$.

O comportamento de $x(t)$ e $y(t)$ é descrito pela evolução temporal do vetor,

$$\xi(t) = y(t) - x(t), \quad (2.11)$$

que satisfaz as *equações da dinâmica tangente* dada por:

$$\ddot{\xi}_i = - \left(\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q_i \partial q_j} \right) \xi_j. \quad (2.12)$$

A norma de ξ ,

$$|\xi(t)| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

mede a distância entre as trajetórias $x(t)$ e $y(t)$.

No caso em que $x(t)$ é instável a perturbação $\xi(t)$ cresce exponencialmente de modo que:

$$|\xi(t)| \propto |\xi(0)| \exp(\lambda t). \quad (2.13)$$

O *Expoente de Lyapunov* λ , é definido como a taxa de crescimento exponencial de ξ ,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{|\xi(t)|}{|\xi(0)|}, \quad (2.14)$$

que mede a instabilidade das trajetórias.

Portanto, um comportamento caótico é caracterizado pelos valores nos quais $\lambda > 0$.

2.3 Caos em Sistemas hamiltonianos

2.3.1 *Sistemas Integráveis*

Definição 8. Uma função $f(\mathbf{p}(\mathbf{t}), \mathbf{q}(\mathbf{t}))$ é dita uma constante de movimento para um sistema dinâmico, se $f(\mathbf{p}(\mathbf{t}), \mathbf{q}(\mathbf{t})) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

É fácil ver que, se o hamiltoniano H é independente de tempo, H é uma constante de movimento.

Considerando f uma constante de movimento e H o hamiltoniano independente de t , então :

$$0 = \frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \equiv [H, f] \quad (2.15)$$

onde $[,]$ corresponde ao colchete de Poisson.

Definição 9. O *parêntese de Poisson* é uma aplicação que a quaisquer duas funções do espaço de fase G_1, G_2 associa uma terceira função, $[G_1, G_2]$, dada por:

$$[G_1, G_2] = \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

As propriedades da aplicação, $[G_1, G_2]$, assim como detalhes adicionais podem ser vistas em (6).

Se $[f_i, f_j] = 0$ para todas as constantes de movimento f_i, f_j com $i, j = 1, \dots, N$, dizemos que f_k com $k = 1, \dots, N$ são constantes de movimentos involutivas.

Definição 10. Um sistema hamiltoniano independente do tempo com N graus de liberdade é dito integrável se tem N constantes de movimentos independentes $f_i(\mathbf{p}(\mathbf{t}), \mathbf{q}(\mathbf{t}))$, $i = 1, \dots, N$, e as mesmas são involutivas.

A hipótese de um sistema hamiltoniano integrável possuir N constantes de movimentos independentes restringem as trajetórias no espaço de fase para um espaço N -dimensional.

Além disso, o fato dessas constantes serem involutivas restringem essas trajetórias a um subespaço invariante que é isomorfo a um N -toro (9).

Um questionamento natural seria o seguinte:

Considerando um sistema integrável, é possível obtermos uma mudança de variáveis $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (p_0, q_0)$ de modo que o novo hamiltoniano H_0 dependa unicamente de p_0 ?

Não apenas é possível como há inúmeras possibilidades. No contexto topológico do N -toro, a mudança de variáveis adequada será a mudança *ação-ângulo*,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (I, \theta),$$

onde $I = (I_1, \dots, I_N)$,

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (2.17)$$

e γ_i corresponde a um caminho irredutível no N -toro.

O teorema de *Poincaré-Cartan* (10), nos garantirá que a deformação dos caminhos γ_i no N -toro não altera o valor de (2.17).

O conjunto de variáveis ângulo $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ define o conjunto de frequências $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ do sistema. A razão entre duas frequências

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = a, \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

é chamado de *números de rotação*.

Se $a \in \mathbb{Q}$ então o toro o qual a trajetória se encontra será denominado de *toro racional* e o movimento dessas trajetórias será *periódico*. Caso contrário, tem-se o *toro irracional* e o movimento é dito *quase periódico* (11).

Definimos $S(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}, t)$ a função geradora de uma transformação canônica em função da “velha posição” \mathbf{p} , e do “novo momento” \mathbf{q}_0 , onde é possível realizarmos a mudança de variáveis descrita anteriormente.

Em termos de $S(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}, t)$ com $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = (I, \theta)$, a mudança de variáveis é especificada por:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial S(I, \mathbf{q})}{\partial I}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial S(I, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \end{aligned}$$

e o novo hamiltoniano em termos das novas variáveis é dado por:

$$H_0(I) = H \left(\frac{\partial S(I, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q} \right). \quad (2.18)$$

Uma vez que o novo hamiltoniano é independente de θ , as equações de Hamilton correspondem a:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -\frac{\partial H_0(I)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H_0(I)}{\partial I},\end{aligned}$$

que integradas fornecem a solução do sistema:

$$\begin{aligned}I(t) &= k, \quad k \in \mathbb{R} \\ \theta(t) &= \omega t + \delta.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Esse resultado nos é dado precisamente pelo seguinte teorema (7):

Teorema 5. (Liouville-Arnold) *Considere um sistema hamiltoniano integrável com N graus de liberdade. Então:*

(a) *Existem variáveis canônicas $(\nu_1, \dots, \nu_N, J_1, \dots, J_N)$ tais que $H = H(J_1, \dots, J_N)$, de modo que a solução das equações de movimento nas novas variáveis é:*

$$\begin{aligned}J_i &= k, \quad k \in \mathbb{R} \\ \nu_i &= \omega_i t + \nu_i, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{2.20}$$

onde, $\omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$.

(b) *As equações de Hamilton nas variáveis originais (\mathbf{p}, \mathbf{q}) podem ser resolvidas por quadraturas.*

(c) *Se o conjunto das hipersuperfícies de nível das constantes de movimento em involução f_j definido por:*

$$\mathcal{M}_C = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = C_i, \quad i = 1, \dots, N\}\tag{2.21}$$

é compacto e conexo, as variáveis canônicas (J, ν) são variáveis ação-ângulo e o movimento é multiperódico com frequência $\omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$.

Uma vez que:

$$J_i = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

então, determinadas variações nas condições iniciais crescem linearmente com o tempo, logo, o movimento do sistema integrável é dito *regular*. No caso de sistemas não-integráveis, em determinadas regiões no espaço de fase, os mesmos podem ter dependência sensível as condições iniciais, ou seja, pequenas variações nas condições iniciais tornam impossível prever o comportamento do sistema. Neste caso o movimento é dito *irregular ou caótico*.

Deste modo, se um sistema dinâmico é integrável então o mesmo não pode ser caótico.

2.3.2 Perturbação de Sistemas Integráveis

Dado um sistema integrável, o que podemos afirmar sobre a integrabilidade do mesmo após uma perturbação?

Inicialmente, acreditava-se que a menor perturbação destruiria completamente a integrabilidade do sistema. Entretanto, o que acontece de fato, sob certas condições, é que se a perturbação é suficientemente pequena, alguns dos toros cujas trajetórias são quasi-periódicas “sobrevivem” a perturbação e são apenas deformados.

Os toros “destruídos” são distribuídos entre os que são preservados de uma maneira irregular. Este resultado nos é dado por Kolmogorov, Arnold e Moser, conhecido como teorema KAM.

Resta-nos saber: *O que acontece nas regiões onde os toros são destruídos?*

O teorema de Poincaré-Birkhoff (12), nos dá a solução para esse questionamento e nos mostra a origem do *Caos hamiltoniano*.

Considere uma perturbação do hamiltoniano integrável $H_0(I)$ em termos das variáveis ação-ângulo

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta), \quad (2.22)$$

sendo $H_1(I, \theta)$ o termo perturbativo.

Buscaremos determinar novas variáveis ação-ângulo $(\tilde{I}, \tilde{\theta})$ através da função geradora S , para encontrarmos uma solução aproximada do sistema, de modo que, o hamiltoniano perturbado satisfaça

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right) = \tilde{H}(\tilde{I}), \quad (2.23)$$

onde, em termos da função geradora, $I = \frac{\partial S(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta}$ e $\tilde{\theta} = \frac{\partial S(\tilde{I}, \theta)}{\partial \tilde{I}}$.

Considere a nova função S como:

$$S(\tilde{I}, \theta) = \theta \tilde{I} + \epsilon S_1(\tilde{I}, \theta). \quad (2.24)$$

Note que:

$$\frac{\partial S(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} = \tilde{I} + \epsilon \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta}. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.22):

$$\tilde{H}(\tilde{I}) = H_0\left(\tilde{I} + \epsilon \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta}\right) + \epsilon H_1\left(\tilde{I} + \epsilon \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta}, \theta\right) \quad (2.26)$$

Expandindo (2.26) até primeira ordem, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(\tilde{I}) &= H_0(\tilde{I}) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} + \epsilon \left(H_1(\tilde{I}, \theta) + dH_1(\tilde{I}, \theta) \left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}, 0 \right) \right) + O(\epsilon^2) \\
&= H_0(\tilde{I}) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} + \epsilon \left(H_1(\tilde{I}, \theta) + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} dH_1(\tilde{I}, \theta)(1, 0) \right) + O(\epsilon^2) \\
&= H_0(\tilde{I}) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} + \epsilon \left(H_1(\tilde{I}, \theta) + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{I}} \right) + O(\epsilon^2) \\
&= H_0(\tilde{I}) + \epsilon \frac{\partial H_0}{\partial I} \cdot \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} + \epsilon H_1(\tilde{I}, \theta) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Para que, o lado direito de (2.27) não dependa de θ , devemos ter:

$$\omega(I) \cdot \frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} = -H_1(\tilde{I}, \theta) \tag{2.28}$$

onde $\omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$ é a frequência do sistema perturbado.

Suponhamos H_1 e S_1 periódicas, integrável e absolutamente integrável em termos de θ .

Disto podemos expressar H_1 e S_1 como séries de Fourier (13):

$$S_1(\tilde{I}, \theta) = \sum_{k \neq 0} S_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta} \tag{2.29}$$

$$H_1(\tilde{I}, \theta) = \sum_{k \neq 0} H_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta} \tag{2.30}$$

com $k = (m_1, \dots, m_n), \forall m_i \in \mathbb{Z}$.

Sendo

$$\frac{\partial S_1(\tilde{I}, \theta)}{\partial \theta} = ik \sum_{k \neq 0} S_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta} = ik S_1(\tilde{I}, \theta), \tag{2.31}$$

e substituindo (2.30) e (2.31) em (2.28):

$$\omega(I) ik \cdot S_1(\tilde{I}, \theta) = - \sum_{k \neq 0} H_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta} \tag{2.32}$$

$$S_1(\tilde{I}, \theta) = i \sum_{k \neq 0} \frac{H_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta}}{\omega(I) \cdot k} \tag{2.33}$$

Logo, por (2.24):

$$S(\tilde{I}, \theta) = \theta \tilde{I} + i\epsilon \sum_{k \neq 0} \frac{H_{1,k}(\tilde{I}) e^{ik\theta}}{\omega(I) \cdot k}. \tag{2.34}$$

Omitiremos aqui a discussão sobre a convergência da série em (2.32). Detalhes em (10) e (13).

Note que (2.34) não está definida para valores de I para os quais,

$$\omega(I) \cdot k = 0 \quad (2.35)$$

Definiremos como *toros ressonantes* do sistema perturbável, os toros para os quais I satisfaz (2.35). Esses toros são destruídos pela perturbação.

Os toros não ressonantes correspondem a relação $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ irracional. Esses toros são ligeiramente deformados, conforme o teorema KAM:

Teorema 6. (*Kolmogorov - Arnold - Moser*) *Consideremos um sistema hamiltoniano perturbado,*

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta),$$

com ϵ suficiente pequeno. Então, a maioria dos toros associados com H_0 são deformados sob a ação da perturbação mas, são ainda invariantes para o fluxo do Hamiltoniano H . Esses toros correspondem aos toros com frequências irracionais que satisfazem a condição Diofantina

$$|k \cdot \omega| \geq \gamma(\epsilon) \|k\|^{-N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^N - \{0\}$$

onde $\gamma(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Analisaremos agora, de modo sucinto, o que acontece nas regiões onde os toros são destruídos. Consideremos o caso $N = 2$.

Suponha que:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta),$$

com $I = (I_1, I_2)$ e $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, é conservativo.

Consideremos a seção de Poincaré $\Sigma = \{(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2); I_1 = 0, H = \text{const.}\}$ e definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} M(r_n, \theta_n) &= (r_{n+1}, \theta_{n+1}), \\ r_{n+1} &= r_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(r_n) \end{aligned} \quad (2.36)$$

ou analogamente:

$$M \begin{pmatrix} r_n \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix},$$

correspondente ao mapa de Poincaré para o hamiltoniano integrável, através da mudança de variáveis para coordenadas polares, onde,

$$\alpha(r) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

é o número de rotação.

Com esta mudança de variáveis, deformamos as curvas concêntricas fechadas em círculos e o ângulo de rotação depende unicamente de r .

Definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} M_\epsilon(r_n, \theta_n) &= (r_{n+1}, \theta_{n+1}), \\ r_{n+1} &= r_n + \epsilon f(r_n, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(r_n) + \epsilon g(r_n, \theta_n). \end{aligned} \quad (2.37)$$

ou equivalentemente:

$$M_\epsilon \begin{pmatrix} r_n \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

correspondente ao mapa de Poincaré para o hamiltoniano perturbado, onde, f e g dependem de H_1 .

Seja \tilde{r} o raio de um círculo C , de modo que:

$$\alpha(\tilde{r}) = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Realizando n interações, temos que:

$$M^n \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \theta + 2\pi\alpha\tilde{r}n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \theta + 2\pi m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Disto, todos os pontos $p \in C$ são pontos fixos do mapa M^n .

Considere dois círculos, \overline{C} , $\overline{\overline{C}}$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{r}) &< \frac{m}{n} \\ \alpha(\tilde{r}) &> \frac{m}{n}, \end{aligned}$$

respetivamente, e o sentido da aplicação é dado por:

$$M^n(p) = \begin{cases} \text{horário, se } p \in \overline{C}; \\ \text{antihorário, se } p \in \overline{\overline{C}}. \end{cases} \quad (2.40)$$

conforme a figura (1.1) - (a).

Ao aplicarmos M_ϵ com ϵ suficientemente pequeno o sentido da aplicação é preservado.

Seja θ_0 um ângulo fixo. Como em \overline{C} e $\overline{\overline{C}}$ os sentidos das rotações são opostos, então, por continuidade, existe um ponto \bar{p} próximo a C de modo que não há rotação e sua trajetória é apenas radial sob a aplicação M_ϵ , como ilustrado na figura 1.1 - (b).

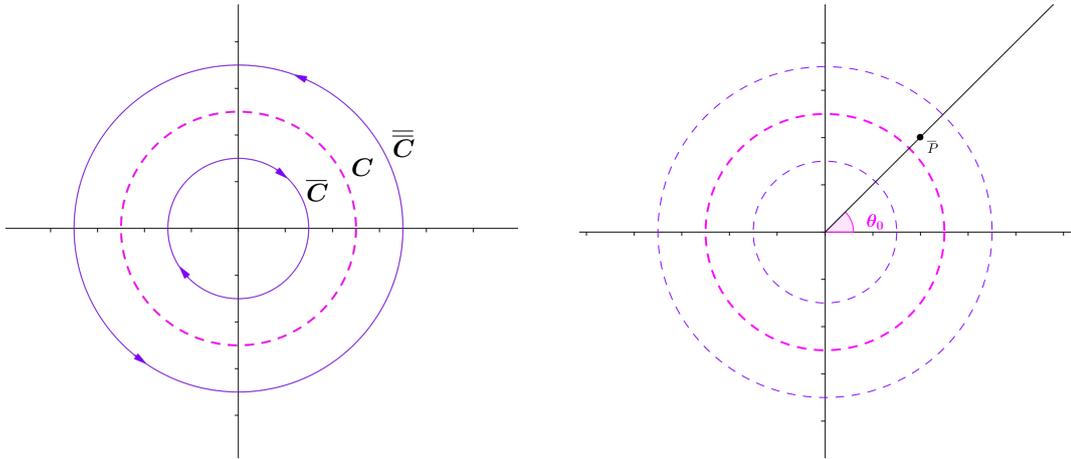


Figura 1 – (a) Círculos \bar{C} , C e $\bar{\bar{C}}$ com $\alpha(\tilde{r}) < \frac{m}{n}$, $\alpha(\tilde{r}) = \frac{m}{n}$ e $\alpha(\tilde{r}) > \frac{m}{n}$ respectivamente. (b) Ângulo fixo θ_0 e ponto \bar{p} , que sob a ação de M_ϵ pode ter apenas movimento radial.

Considerando um ponto \bar{p} próximo a C , para cada ângulo θ_j , obteremos uma curva R_ϵ , que tende a C quando $\epsilon \rightarrow 0$ (figura 1.2 - (a)). Ao aplicarmos M_ϵ sobre a curva R_ϵ geraremos uma nova curva, conforme figura 1.2 - (b), uma vez que, R_ϵ não é invariante pelo mapa M_ϵ . Observe que, R_ϵ e $M_\epsilon(R_\epsilon)$ possuem a mesma área, decorrente da característica de preservar área do mapa de Poincaré.

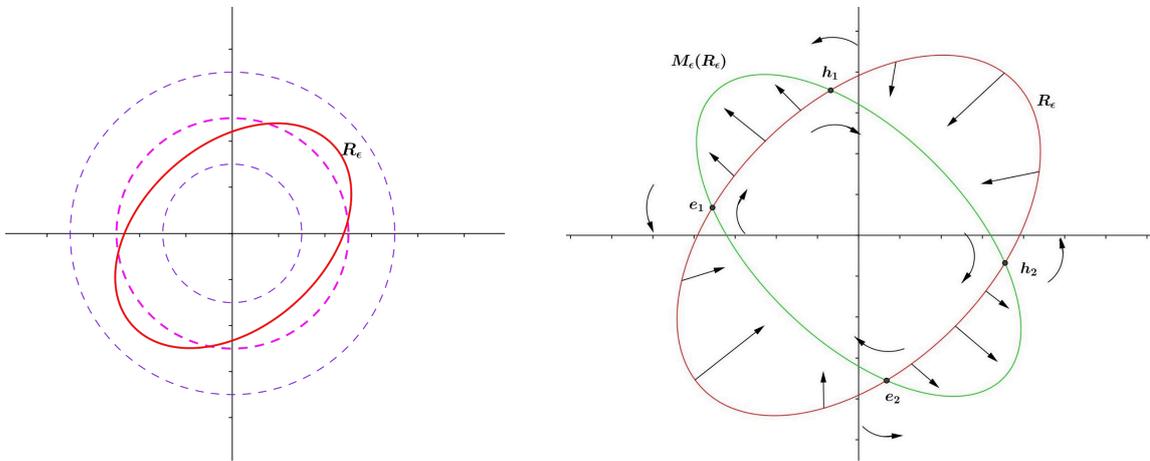


Figura 2 – (a) Curva R_ϵ contendo todos os pontos que não rodam sob a ação de M_ϵ . (b) Curvas R_ϵ e M_ϵ . Os pontos h_1 , h_2 , e_1 e e_2 são pontos fixos de M_ϵ , sendo h_1 e h_2 pontos instáveis e e_1 e e_2 pontos estáveis.

Os pontos $p \in (R_\epsilon \cap M_\epsilon(R_\epsilon))$ são pontos fixos de M_ϵ . Classificaremos esses pontos fixos.

Consideremos a aplicação linearizada M_ϵ em torno do ponto fixo:

$$\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix},$$

onde, A é a matriz Jacobiana no ponto fixo.

A classificação dos pontos fixos é dada através dos autovalores da matriz A . Sabe-se que $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ e como $\det M_\epsilon = 1$, segue-se que:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}. \quad (2.41)$$

Portanto, os autovalores são números reais (pontos fixos hiperbólicos) e números complexos (pontos fixos elípticos) para os quais se verifica (2.41).

Conforme o teorema de *Poincaré-Birkhoff*, os pontos fixos elípticos e hiperbólicos são aqueles que restam após a perturbação.

Quanto à estabilidade desses pontos, note que, conforme figura 1.3, os fluxos próximos aos pontos e_1 e e_2 circulam em torno dos mesmos. Disto, os pontos e_1 e e_2 são estáveis. Por outro lado, os pontos h_1 e h_2 são instáveis.

Cada ponto fixo elíptico está envolvido por curvas fechadas que correspondem a novos toros formados pela decomposição do anterior. Em alguns desses toros podemos aplicar o Teorema KAM e os demais se decompõe de acordo com o teorema de Poincaré-Birkhoff, formando uma estrutura similar a toros encaixados (14).

A origem do caos hamiltoniano, se dá através dos pontos fixos hiperbólicos.

Definição 11. A Variedade Estável W_s de um ponto de equilíbrio instável x_0 é o conjunto invariante de pontos x do espaço de fases tal que a trajetória de x tende assintoticamente a esse ponto, isto é,

$$x \in W_s \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} M_\epsilon^n x = x_0.$$

Definição 12. A Variedade Instável W_u de um ponto de equilíbrio instável x_0 é o conjunto invariante de pontos x do espaço de fases tal que a trajetória de x , quando propagada para trás no tempo, tende assintoticamente a esse ponto, isto é,

$$x \in W_u \text{ se } \lim_{n \rightarrow -\infty} M_\epsilon^n x = x_0$$

Como ilustrado na figura (1.3), para cada ponto hiperbólico teremos duas variedades invariantes $W_u(x_0)$ e $W_s(x_0)$, instável e estável respectivamente, que não se auto-interceptam mas interceptam uma a outra. Um ponto $p \in W_u \cap W_s$ é dito homoclínico a x_0 .

Uma vez que as variedades W_s e W_u são invariantes, dados $p_1 \in W_s$ e $p_2 \in W_u$, temos que $M_\epsilon(p_1) \in W_s$ e $M_\epsilon(p_2) \in W_u$.

Sendo $p \in W_s \cap W_u$ então $p \in W_s$ e $p \in W_u$. Portanto, a existência de um ponto homoclínico a x_0 leva a existência de infinitos outros pontos homoclínicos a x_0 pela órbita de p a qual é chamada de *órbita homoclínica*.

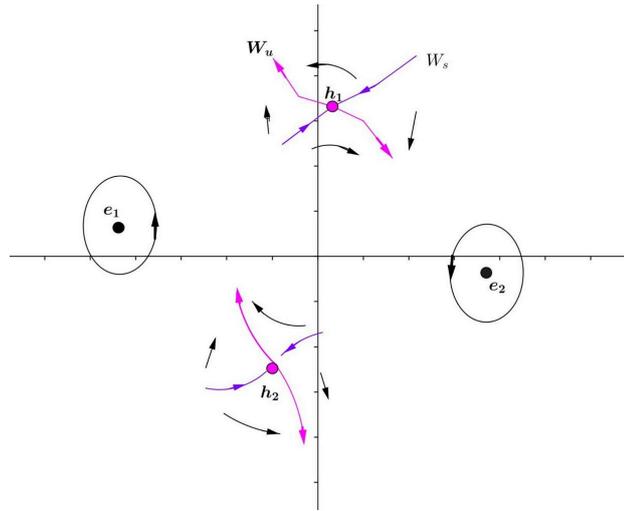


Figura 3 – Curvas fechadas nos pontos elípticos e_1 e e_2 e variedades estáveis W_s e instáveis W_u nos pontos hiperbólicos h_1 e h_2

Como mapas de Poincaré preservam área e as variedades W_s e W_u não se auto-interceptam então em dada regiões as mesmas ficaram mais longas e retorcidas causando o que denominamos de *emaranhado homoclínico*, que por sua vez está associado ao movimento caótico.

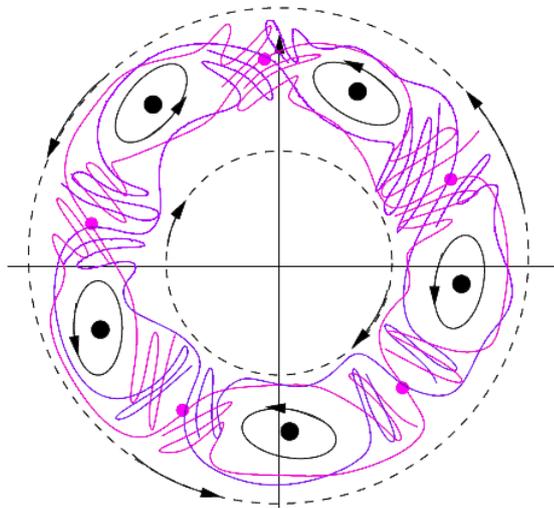


Figura 4 – Ilustração do emaranhado homoclínico, um mecanismo responsável pelo Caos.

3 GEOMETRIZAÇÃO DA DINÂMICA HAMILTONIANA

Neste capítulo apresentaremos uma abordagem geométrica que nos permite uma correspondência entre o fluxo hamiltoniano e o fluxo geodésico.

É importante ressaltarmos que a formulação geométrica não é única, uma vez que existem muitas possibilidades para escolha do espaço ambiente e da métrica. Consideraremos aqui, a métrica de Jacobi e a métrica de Eisenhart.

3.1 Formulação Geométrica da Mecânica

Considere (M, g) uma variedade Riemanniana e $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em M .

Um sistema mecânico é definido pela tripla (M, g, V) . A variedade M é chamada de espaço de configurações. O fibrado tangente $\mathcal{T}M$ é chamado espaço de fase. Um ponto $p \in \mathcal{T}M$ é o estado do sistema mecânico.

A **energia cinética** T do sistema é uma função

$$T : \mathcal{T}M \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por:

$$T(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle,$$

onde o produto escalar $\langle v, v \rangle$, para todos os vetores tangentes v , provém da métrica Riemanniana.

A função diferenciável V é a **função de energia potencial** do sistema.

A **energia total**,

$$E : \mathcal{T}M \rightarrow \mathbb{R},$$

é dada por:

$$E(v) = T(v) + V(\pi v) \quad v \in \mathcal{T}M,$$

onde $\pi : \mathcal{T}M \rightarrow M$ é a função projeção.

A **trajetória** do sistema (M, g, V) é um caminho diferenciável γ em (M, g) que satisfaz as equações do movimento de Newton, isto é,

$$\frac{D}{dt} \gamma'(t) = -grad V,$$

onde $\frac{D}{dt}$ é a derivada covariante com relação a conexão Riemanniana de (M, g) .

Em coordenadas,

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} = -g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel.

Note que se $V = 0$, então:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} = 0, \quad (3.1)$$

ou seja, a trajetória é a geodésica de (M, g) .

Proposição 7. (*Conservação de Energia*) A energia total $E : \mathcal{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante ao longo da trajetória $\gamma(t)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E(\gamma(t), \gamma'(t)) &= T(\gamma'(t)) + V(\gamma(t)) \\ \frac{d}{dt}(E(\gamma(t), \gamma'(t))) &= \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \right) + \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle + \langle \text{grad } V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle -\text{grad } V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \text{grad } V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Uma vez que a energia total, $E = T + V$, é constante e $T \geq 0$, as trajetórias de energia total E estão no subespaço $\overline{M}_E \subseteq M$, definido por:

$$\overline{M}_E = \partial M_E \cup M_E$$

onde, $M_E = \{x \in M : V(x) < E\}$ e $\partial M_E = \{x \in M : V(x) = E\}$ (9).

3.2 Trajetórias e Geodésicas

Nesta seção apresentaremos dois resultados que nos permitem descrever uma relação entre as trajetórias do sistema dinâmico com as geodésicas da variedade Riemanniana (M, g) munida de uma métrica apropriada, a saber : Teorema de Jacobi e Teorema de Eisenhart.

3.2.1 Métrica de Jacobi

Consideremos um sistema dinâmico autônomo, cujo Lagrangiano $\mathcal{L} : \mathcal{TM} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por:

$$\mathcal{L}(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - V(\pi v). \quad (3.2)$$

Em coordenadas locais,

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q). \quad (3.3)$$

onde g_{ij} é o tensor da métrica associada e a energia cinética, $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, corresponde a uma função homogênea quadrática da velocidade generalizada.

O hamiltoniano do sistema é dado por:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} g_{ij} p_i p_j + V(q). \quad (3.4)$$

O movimento das trajetórias desse sistema no espaço de fase satisfaz o **princípio de Hamilton** ou **princípio da mínima ação**:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma'(t)) dt = 0. \quad (3.5)$$

Sendo o hamiltoniano, $H = T + V = E$, uma quantidade conservada ao longo da trajetória $\gamma(t)$ e a energia cinética uma função homogênea, pelo teorema de Euler, podemos escrever o princípio de Hamilton como o princípio de Maupertuis' do seguinte modo:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T(\gamma'(t)) dt = 0.$$

Disto,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} 2T dt &= \int_{t_0}^{t_1} (2T)^{\frac{1}{2}} (2T)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (2(E - V))^{\frac{1}{2}} (2T)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (2(E - V) \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Portanto, as trajetórias satisfazem:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (2(E - V) \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt = 0,$$

que corresponde a uma geodésica em (M_E, g_E) , onde, $g_E := 2(E - V)g$.

Demonstraremos este resultado formalmente.

Definição 13. A métrica de Jacobi, g_E , de um sistema dinâmico é dada por:

$$g_E(x) = 2(E - V)g(x).$$

Para demonstrarmos o resultado mais importante dessa seção, consideremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser vista em (15):

Lema 1. Seja ∇ a conexão da variedade Riemanniana (M, g) e $\tilde{\nabla}$ a conexão de (M, \tilde{g}) , onde \tilde{g} é a transformação da métrica $g(x)$ definida por:

$$\tilde{g} = \exp^{2\rho} g(x),$$

e $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada por:

$$\rho(x) = \frac{\log(2(E - V))}{2}.$$

Então, para todo campo vetorial X, Y temos que:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A_X Y,$$

onde $A_X Y = d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - g(X, Y)\text{grad}\rho$.

Teorema 8. (Jacobi) As trajetórias de (M, g, V) de energia total E são as geodésicas da variedade Riemanniana (M_E, g_E) .

Demonstração. Sendo $\rho(x) = \frac{\log(2(E - V))}{2}$, aplicando a exponencial temos que:

$$\exp^{2\rho(x)} = 2(E - V). \quad (3.6)$$

Como E é uma constante, então:

$$\exp^{2\rho(x)} d\rho = -dV. \quad (3.7)$$

Assim,

$$2(E - V)\text{grad}\rho = -\text{grad}V. \quad (3.8)$$

Seja $\gamma(t)$ uma trajetória de energia E , ou seja,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = -\text{grad}V \quad (3.9)$$

e

$$2T(\gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2(E - V(\gamma(t))). \quad (3.10)$$

Pelo lema anterior, temos que:

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'} \gamma'(t) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) + A_{\gamma'} \gamma',$$

Por (3.9):

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma'(t) = -\text{grad } V + A_{\gamma'}\gamma', \quad (3.11)$$

Determinaremos $A_{\gamma'}\gamma'$.

$$\begin{aligned} A_{\gamma'}\gamma' &= d\rho(\gamma')\gamma' + d\rho(\gamma')\gamma' - g(\gamma', \gamma')\text{grad } \rho \\ &= 2d\rho(\gamma')\gamma' - \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \text{grad } \rho \\ &= 2d\rho(\gamma')\gamma' - 2(E - V(\gamma(t)))\text{grad } \rho \\ &= 2d\rho(\gamma')\gamma' + \text{grad } V \end{aligned}$$

Portanto (3.11) é dado por:

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma'(t) = 2d\rho(\gamma')\gamma' \quad (3.12)$$

Consideremos uma reparametrização do tempo $t = t(s)$ de modo que $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{e^{2\rho}}$.

Disto:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(t(s)) \\ \frac{d}{ds}\gamma(t) &= \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) \\ &= \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{e^{2\rho}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \frac{d\gamma}{ds} &= \tilde{\nabla} \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{e^{2\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{e^{2\rho}} \tilde{\nabla} \frac{d\gamma}{ds} \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{e^{2\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{e^{2\rho}} \left(-\frac{1}{e^{2\rho}} 2d\rho(\gamma')(\gamma') + \frac{1}{e^{2\rho}} \tilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma' \right) \\ &= \frac{1}{e^{4\rho}} \left(\tilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma' - 2d\rho(\gamma')\gamma' \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) em (3.13) temos que:

$$\tilde{\nabla} \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

Portanto, as trajetórias do sistemas com energia total E são geodésicas de (M_E, g_E) , conforme queríamos demonstrar. \square

3.2.2 Métrica de Eisenhart

Na seção anterior, obtivemos um resultado de suma relevância, o *Teorema de Jacobi*, para as trajetórias do sistema confinadas em M_E com a métrica g_E . Entretanto, é possível claramente notar que, na fronteira de M_E a métrica de Jacobi é degenerada e singular.

Como uma abordagem alternativa para a geometrização da dinâmica, apresentaremos o *Teorema de Eisenhart*, que determina que, as trajetórias do sistema são projeções das geodésicas em um espaço de configuração $N + 1$ -dimensional, denominado de *espaço-tempo*, com métrica G_E não-degenerada e não singular.

De acordo com Szydlowski, (16), a abordagem de Eisenhart nos proporciona algumas vantagens:

- A dinâmica é aplicada sobre o fluxo geodésico em uma variedade diferenciável sem fronteira;
- A identificação das trajetórias do sistema com geodésicas no espaço de configurações é bijetiva, o que não ocorre na métrica de Jacobi, uma vez que nem todas as geodésicas sobre o espaço de Jacobi correspondem a uma trajetória do sistema.

Consideremos um sistema dinâmico com N graus de liberdade, cujo lagrangiano é dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q). \quad (3.14)$$

Seja $M \times \mathbb{R}^2$ o espaço de configurações $(N + 2)$ -dimensional com coordenadas q_i , $i = 0, \dots, N$ e $t = q_{N+1}$ uma coordenada real, munido de uma métrica, G_E , pseudo-riemanniana e não degenerada, no qual as geodésicas em $(M \times \mathbb{R}^2, G_E)$ possuem elemento de comprimento de arco dado por:

$$ds^2 = (G_E)_{\alpha\beta}dq_\alpha dq_\beta = g_{ij}d\dot{q}_i d\dot{q}_j - 2V(q)(dq_0)^2 + 2dq_0 dq_{N+1} \quad (3.15)$$

onde $\alpha, \beta = 0, \dots, N + 1$ e $i, j = 1, \dots, N$.

A métrica G_E é chamada métrica de Eisenhart (17).

A representação matricial de G_E é dada por:

$$G_E = \begin{pmatrix} -2V(q) & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & \cdots & g_{iN} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & g_{Nj} & \cdots & g_{NN} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

com (g_{ij}) a matriz da energia cinética, que de acordo em (2.2.2) é a matriz identidade. Sua matriz inversa corresponde a:

$$G_E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2V \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

A relação entre as geodésicas e as trajetórias do sistema é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 9. (Eisenhart). *As trajetórias de um sistema dinâmico Hamiltoniano são obtidas com a projeção canônica das geodésicas de $(M \times \mathbb{R}^2, G_E)$ no espaço-tempo, $\pi : M \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M \times \mathbb{R}$. Entre o conjunto de geodésicas, somente aquelas cujo elemento de comprimento de arco é positivo definido e dado por:*

$$ds^2 = c_1^2 dt^2 \quad (3.18)$$

onde $c \in \mathbb{R}$, correspondem as trajetórias do sistema.

A demonstração pode ser encontrada em (17).

Em seguida, determinaremos uma condição para as coordenadas q_0 e q_{N+1} (9), (17).

Consideremos que em (3.14), a matriz da energia cinética do sistema é diagonal, isto é,

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} corresponde ao delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.19)$$

Neste caso, um cálculo direto nos mostra que, os símbolos de Christoffel (Veja apêndice A.2) não nulos são dados por:

$$\Gamma_{00}^i = -\Gamma_{0i}^{N+1} = \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.20)$$

Deste modo, as equações da geodésica, (3.1), correspondem a:

$$\frac{d^2 q_0}{ds^2} = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 q_i}{ds^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dq_0}{ds} \frac{dq_0}{ds} = 0; \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2_{N+1}q_0}{ds^2} + \Gamma_{0i}^{N+1} \frac{dq_0}{ds} \frac{dq_i}{ds} = 0. \quad (3.23)$$

Tomando $c_1^2 = 1$, temos por (3.18) que $ds = dt$. Portanto, pela equação (3.21):

$$\frac{d^2q_0}{dt^2} = 0. \quad (3.24)$$

Da equação acima:

$$\frac{dq_0}{dt} = k, \quad (3.25)$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Tomando $k = 1$, segue-se pela equação (3.22):

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (3.26)$$

o que nos dá:

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{dL}{dt}. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.25) e (3.27) em (3.23), obtemos:

$$\frac{d^2q_{N+1}}{dt^2} = -\frac{dL}{dt}. \quad (3.28)$$

Finalmente, da equação (3.24):

$$q_0 = t,$$

as N primeiras equações de (3.26) correspondem as equações de Newton e da equação (3.28):

$$q_{N+1} = c_1 t + c_2 - \int_0^t L d\tau, \quad (3.29)$$

que corresponde a relação entre a coordenada q_{N+1} e a ação.

3.3 Curvatura e Estabilidade

Como visto na seção (1.2.1), a estabilidade/instabilidade das trajetórias dos sistemas dinâmicos podem ser definidas através do critério de Lyapunov que, em linhas gerais, consiste em analisar a evolução temporal de uma pequena perturbação na trajetória dada.

Seja

$$\tilde{q}_i = q_i + \xi_i,$$

a trajetória perturbada.

As trajetórias \tilde{q}_i e q_i satisfazem as equações do movimento de Newton e a perturbação ξ_i obedece a *equação da dinâmica tangente*, (2.12), que no caso do sistema hamiltoniano corresponde a [2]:

$$\ddot{\xi}_i = - \left(\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q_i \partial q_j} \right) \xi_j. \quad (3.30)$$

Se $|\xi|$ não cresce exponencialmente então a trajetória é estável, caso contrário a trajetória é instável e o movimento é caótico.

Com a geometrização da dinâmica a estabilidade/instabilidade das trajetórias podem ser analisadas através da estabilidade/instabilidade das geodésicas.

Considere \tilde{q}_i e q_i geodésicas suficientemente próximas. O *vetor separação* dado por:

$$J_i = \tilde{q}_i - q_i,$$

satisfaz a equação de Jacobi:

$$\frac{D^2 J}{ds^2} + R(J(s), \gamma'(s))\gamma'(s) = 0, \quad (3.31)$$

que em coordenadas:

$$\frac{D^2 J_i}{ds^2} + R^i_{jkl} \left(\frac{dq_j}{ds} \frac{dq_l}{ds} \right) J_k = 0, \quad (3.32)$$

onde $\frac{D}{ds}$ é a derivada covariante sobre a geodésica $q(s)$ e R^i_{jkl} são as componentes do tensor curvatura de Riemman.

De fato, seja $p \in M$ e \mathcal{I} uma vizinhança de p , onde a partir de \mathcal{I} , definimos uma família de geodésicas:

$$\mathcal{D}_\tau = \{ \gamma_\tau(s) = \gamma(s, \tau) / \tau \in \mathbb{R} \}.$$

Fixemos $\gamma(s, \tau_0)$. Denotemos por $\dot{\gamma}(s)$ o campo tangente de $\gamma(s, \tau_0)$ em s , ou seja, o campo vetorial cujas componentes é dado por:

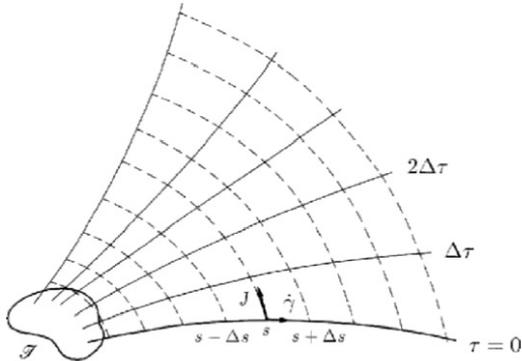
$$\dot{\gamma}_i = \frac{dx_i}{ds} \quad (3.33)$$

e por $J(s)$ o campo vetorial de $\gamma_\tau(s)$ em τ_0 para s fixo:

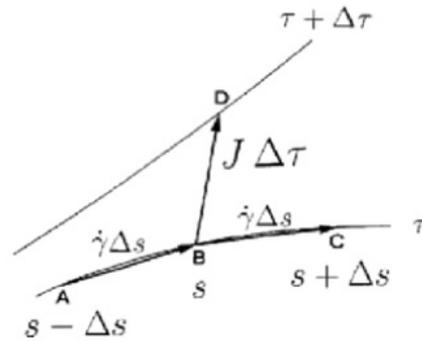
$$J_i = \frac{dx_i}{d\tau}. \quad (3.34)$$

O campo J é denominado *campo de separação das geodésicas* e mede a distância entre geodésicas, conforme a figura abaixo.

[Família de Geodésicas $\gamma(s, \tau)$ distribuídas na vizinhança \mathcal{I} .]



[Campo vetorial de separação $J(s)$ definido



por: $J(s) = \left(\frac{\partial \gamma(s, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} .]$

Figura 5 – Representação da família de geodésicas e do campo de separação J (9).

Mostremos que J é um campo de Jacobi. Inicialmente note que:

$$[\dot{\gamma}, J] = 0,$$

onde, $[,]$ é o comutador, definido por:

$$[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)). \quad (3.35)$$

Em coordenadas locais,

$$[V, W]_j = V_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - W_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i}, \quad (3.36)$$

com V, W campos vetoriais.

De fato, por (3.36), (3.34) e (3.33) temos:

$$[\dot{\gamma}, J]_i = \dot{\gamma}_i \frac{\partial J_i}{\partial x_j} - J_j \frac{\partial \dot{\gamma}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial J_i}{\partial x_j} - \frac{\partial x_j}{\partial \tau} \frac{\partial \dot{\gamma}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial J_i}{\partial s} - \frac{\partial \dot{\gamma}_i}{\partial \tau}.$$

Sendo

$$\frac{\partial J_i}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x_i}{\partial s} \right) = \frac{\partial \dot{\gamma}_i}{\partial \tau},$$

concluí-se que:

$$[\dot{\gamma}, J] = 0. \quad (3.37)$$

Calculemos a segunda derivada covariante do campo J , $\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J$.

Uma vez que a conexão de Levi-Civita é simétrica (Apêndice A):

$$[\dot{\gamma}, J] = \nabla_{\dot{\gamma}} J - \nabla_J \dot{\gamma}. \quad (3.38)$$

Por (3.37):

$$\nabla_{\dot{\gamma}} J = \nabla_J \dot{\gamma},$$

e como γ é uma geodésica,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Disto,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J = \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}} J) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_J \dot{\gamma}) = [\nabla_{\dot{\gamma}}, \nabla_J] \dot{\gamma}. \quad (3.39)$$

Pela definição do tensor curvatura (Apêndice A) e por (3.37) obtemos:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 J = R(\dot{\gamma}', J) \dot{\gamma}', \quad (3.40)$$

correspondente a equação (3.31), pois, $R(\dot{\gamma}', J) \dot{\gamma}' = -R(J, \dot{\gamma}') \dot{\gamma}'$.

De modo análogo a $|\xi|$, o crescimento (ou não crescimento) exponencial de $|J|$ determina a estabilidade/instabilidade da geodésica e, uma vez que a equação de Jacobi depende do tensor curvatura, a evolução de J é determinada pela curvatura da variedade que obviamente dependerá da métrica.

Portanto, determinaremos explicitamente as expressões para a curvatura, dada a métrica de Jacobi e a métrica de Eisenhart.

3.4 Curvatura de (M_E, g_E)

Considere ∇ a conexão Riemanniana da variedade (M, g) e $\tilde{\nabla}$ a conexão de (M, g_E) , onde g_E é a métrica de Jacobi introduzida na definição (3.6).

A relação entre ∇ e $\tilde{\nabla}$ é dada por:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A_X Y,$$

conforme o Lema (2.1).

Seja

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

a curvatura de (M, g) . (Veja apêndice A.4)

Podemos expressar, em coordenadas locais, o tensor curvatura R_{jkl}^i em termos dos coeficientes Γ_{jk}^i da conexão Riemanniana ∇ :

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{js}^i \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{ks}^i \Gamma_{jl}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{kl}^i - \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{jl}^i. \quad (3.41)$$

Em termos da conexão $\tilde{\nabla}$ temos que (15):

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + A_{jk}^i,$$

com $A_{jk}^i = p_j \delta_k^i + p_k \delta_j^i + g_{ij} p^i$, onde, $p_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $p^i = g^{is} p_s$.

Disto,

$$\tilde{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + S_{jkl}^i, \quad (3.42)$$

com

$$S_{jkl}^i = -\rho_{jk} \delta_l^i + \rho_{jl} \delta_k^i - g_{jk} \rho_j^l + g_{jl} \rho_k^l - \langle d\rho, d\rho \rangle (g_{ij} \delta_l^i - g_{jl} \delta_k^i),$$

onde, $\rho_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} d\rho \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \rho_j \rho_k$ e $\rho_l^i = g^{is} \rho_{sl}$.

Definiremos um 2-tensor simétrico C em (M, g_E) por:

$$C(X, Y) = -(n-2)[Hess \rho(X, Y) - d\rho(X)d\rho(Y) + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle \langle X, Y \rangle], \quad (3.43)$$

cujas componentes são dadas por:

$$C_{jk} = -(n-2)[\rho_{jk} + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle g_{jk}]. \quad (3.44)$$

Seja

$$C_l^i = -(n-2)[\rho_l^i + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle \delta_l^i] = g^{is} C_{sl}. \quad (3.45)$$

Então, por (3.44):

$$\frac{1}{n-2} C_{jk} + \frac{1}{2} \langle d\rho, d\rho \rangle g_{jk} = -\rho_{jk}.$$

Por (3.45):

$$\frac{1}{n-2}C_l^i + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle\delta_l^i = \rho_l^i$$

Logo:

$$\begin{aligned} S_{jkl}^i &= \left(\frac{1}{n-2}C_{jk} + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle g_{jk} \right) \delta_l^i - \left(\frac{1}{n-2}C_{jl} + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle g_{jl} \right) \delta_k^i + \\ &+ g_{jk} \left(\frac{1}{n-2}C_l^i + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle \delta_l^i \delta_l^i \right) - g_{jl} \left(\frac{1}{n-2}C_k^i + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle \delta_k^i \delta_l^i \right) \\ &= \frac{1}{n-2} \left(C_{jk} \delta_l^i - C_{jl} \delta_k^i + g_{jk} C_l^i - g_{jl} C_k^i \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto, podemos expressar (3.42) da seguinte forma:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{n-2} [C(Y, Z)X - C(X, Z)Y + g(Y, Z)\tilde{C}X - g(X, Y)\tilde{C}Y]. \quad (3.47)$$

onde \tilde{C} é um 1-tensor dado por:

$$g(\tilde{C}X, Y) = C(X, Y).$$

O tensor de Ricci é definido por:

$$\tilde{R}(X, Y) = R(X, Y) - (n-2)[Hess \rho(X, Y) - d\rho(X)d\rho(Y)] - [(n-2)\langle d\rho, d\rho\rangle + \Delta\rho]\langle X, Y\rangle, \quad (3.48)$$

onde $\Delta\rho$ é o Laplaciano de ρ .

Em coordenadas locais:

$$R_{jk} = -(n-2)\rho_{jk} - [(n-2)\langle d\rho, d\rho\rangle + \Delta\rho]\langle X, Y\rangle, \quad (3.49)$$

obtido, contraindo (3.42) com relação a (i, l) .

Realizando outra contração, temos a curvatura escalar dada por:

$$e^{2\rho}\mathcal{R} = \mathcal{R} - 2(n-1) \left[\Delta\rho + \frac{n-2}{2}\langle d\rho, d\rho\rangle \right]. \quad (3.50)$$

Determinaremos esses conceitos em termos da energia Potencial V .

Sendo,

$$Hess \rho(X, Y) = (\nabla_X d\rho)Y, \quad (3.51)$$

por (3.7) temos que:

$$\begin{aligned}
Hess \rho(X, Y) &= -\frac{1}{e^{2\rho}}(\nabla_X dV)Y + \left(X \left(\frac{-1}{e^{2\rho}} \right) dV \right) Y \\
&= -\frac{1}{e^{2\rho}}(\nabla_X dV)Y + \left(\left(\frac{2d\rho(X)e^{2\rho}}{e^{4\rho}} \right) dV \right) Y \\
&= -\frac{1}{e^{2\rho}}Hess V(X, Y) - \frac{2}{e^{4\rho}}dV(X)dV(Y). \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Denotemos:

$$\langle dV, dV \rangle = |\nabla V|^2.$$

Substituindo (3.52) em (3.43):

$$\begin{aligned}
C(X, Y) &= -(n-2) \left[Hess \rho(X, Y) - d\rho(X)d\rho(Y) + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle \langle X, Y \rangle \right] \\
&= -(n-2) \left[-\frac{2}{e^{4\rho}}dV(X)dV(Y) - \frac{1}{e^{2\rho}}Hess V(X, Y) - d\rho(X)d\rho(Y) + \frac{1}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle \langle X, Y \rangle \right] \\
&= \frac{(n-2)}{e^{4\rho}} \left[e^{2\rho}Hess V(X, Y) + e^{4\rho}d\rho(X)d\rho(Y) - \frac{e^{4\rho}}{2}\langle d\rho, d\rho \rangle \langle X, Y \rangle \right]. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Note que:

$$\langle dV, dV \rangle = e^{4\rho}\langle d\rho, d\rho \rangle,$$

e uma vez que, $e^{2\rho} = 2(E - V)$, obtemos:

$$C(X, Y) = \frac{n-2}{4(E-V)^2} \left[2(E-V)Hess V(X, Y) + dV(X)dV(Y) - \frac{|\nabla V|^2}{2}\langle X, Y \rangle \right]. \tag{3.54}$$

Em coordenadas locais,

$$C_{jk} = \frac{n-2}{4(E-V)^2} \left[2(E-V)\partial_j\partial_k + 3\partial V_j\partial V_k - \frac{1}{2}|\nabla V|^2 g_{jk} \right]. \tag{3.55}$$

Considerando um sistema mecânico simples (M, g, V) , o 2-tensor simétrico C é denominado *dois-tensor mecânico* de (M, g, V) .

A curvatura de (M_E, g_E) é expressa em termos do 2-tensor mecânico C .

Sendo:

$$\Delta\rho = tr Hess \rho.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \text{tr}\left(-\frac{2}{e^{4\rho}}dV \otimes dV - \frac{1}{e^{2\rho}}\text{Hess}V\right) \\ &= -\frac{2}{e^{4\rho}}|\nabla V|^2 - \frac{1}{e^{2\rho}}\Delta V.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Substituindo (3.56) em (3.48), obtemos a expressão correspondente a curvatura de Ricci:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_R(X, Y) &= K_R(X, Y) - (n-2)\left(-\frac{2}{e^{4\rho}}dV(X)dV(Y) - \frac{1}{e^{2\rho}}\text{Hess}V(X, Y)\right) \\ &+ (n-2)d\rho(X)d\rho(Y) - (n-2)\langle d\rho, d\rho \rangle - \Delta\rho\langle X, Y \rangle \\ &= \text{Ric}(X, Y) - (n-2)\left(-\frac{2}{e^{4\rho}}dV(X)dV(Y) - \frac{1}{e^{2\rho}}\text{Hess}V(X, Y)\right) \\ &+ (n-2)\frac{1}{e^{4\rho}}dV(X)dV(Y) - (n-2)\frac{1}{e^{4\rho}}\langle dV, dV \rangle\langle X, Y \rangle \\ &- \left(-\frac{2}{e^{4\rho}}|\nabla V|^2 - \frac{1}{e^{2\rho}}\Delta V\right)\langle X, Y \rangle \\ &= \text{Ric}(X, Y) - (n-2)\frac{1}{e^{4\rho}}\left(3dV(X)dV(Y) + e^{2\rho}\text{Hess}V(X, Y)\right) \\ &+ \frac{1}{e^{4\rho}}\left(- (n-2)|\nabla V|^2\langle X, Y \rangle + 2|\nabla V|^2\langle X, Y \rangle + e^{4\rho}\Delta V\langle X, Y \rangle\right) \\ &= \text{Ric}(X, Y) - \frac{(n-2)}{e^{4\rho}}\left(3dV(X)dV(Y) + e^{2\rho}\text{Hess}V(X, Y)\right) \\ &+ \frac{1}{e^{4\rho}}(-(n-4)|\nabla V|^2\langle X, Y \rangle + 2e^{2\rho}\Delta V\langle X, Y \rangle) \\ &= \text{Ric}(X, Y) + \frac{1}{4(E-V)^2}[2(E-V)\{(n-2)\text{Hess}V(X, Y) + \Delta\langle X, Y \rangle\} \\ &+ 3dV(X)dV(Y) - (n-4)|\nabla V|^2\langle X, Y \rangle].\end{aligned}\quad (3.57)$$

Em coordenadas locais:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{jk} &= R_{jk} + \frac{1}{4(E-V)^2}[2(E-V)\{(n-2)\partial_j\partial_k + \Delta V g_{jk}\} \\ &+ 3(n-2)\partial_j V\partial_k V - (n-4)|\nabla V|^2 g_{jk}].\end{aligned}\quad (3.58)$$

Substituindo (3.56) em (3.50) temos que a curvatura escalar é dada por:

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \frac{(n-1)}{4(E-V)^2}[-(n-6)|\nabla V|^2 + 2(E-V)\Delta V].\quad (3.59)$$

3.5 Curvatura de $(M \times \mathbb{R}, G_E)$

Com a métrica de Eisenhart, os conceitos de curvatura apresentados na seção anterior tornam-se mais simples, o que do ponto de vista operacional é sem dúvidas uma grande vantagem.

Sabe-se, por (2.2.2), que os símbolos de Christoffel não-nulos correspondem a:

$$\Gamma_{00}^i = \partial_i V. \quad (3.60)$$

Portanto, o tensor curvatura não-nulo é dado por:

$$R_{0i0j} = \partial_i \partial_j V \quad (3.61)$$

Contraindo (i, j) , obtêm-se o tensor de Ricci:

$$R_{00} = \Delta V. \quad (3.62)$$

Logo, a curvatura de Ricci (Veja apêndice), é dada por:

$$K_R = \Delta V \quad (3.63)$$

Com mais uma contração e de acordo com (3.17), temos a curvatura escalar:

$$R = g^{00} R_{00} = 0. \quad (3.64)$$

Observe que, no caso da métrica de Eisenhart as expressões acima são relativamente simples e claramente temos uma relação entre elementos da dinâmica e da geometria. De fato, o tensor métrico G_E contém apenas a energia potencial V . Os símbolos de Christoffel são iguais a força ∂V . Os componentes do tensor curvatura de Riemann contém unicamente a segunda derivada da energia potencial $\partial_j \partial_i V$.

Em caso geral, independente da escolha da métrica é possível estabelecermos essa relação dada por:

Dinâmica		Geometria
(tempo) t	\longleftrightarrow	s (comprimento de arco)
(energia potencial) V	\longleftrightarrow	g (métrica)
(força) ∂V	\longleftrightarrow	Γ (símbolos de Christoffel)
("curvatura" do potencial) $\partial^2 V, (\partial V)^2$	\longleftrightarrow	R (curvatura da variedade)

Tabela 1 – Relação entre elementos da dinâmica e geometria (9).

3.6 Equação da Evolução da Geodésica via Métrica de Jacobi.

Nas seções anteriores vimos que, ao considerarmos uma perturbação da geodésica,

$$\tilde{q}_i = q_i + J_i,$$

a evolução do campo J é descrita pela equação de Jacobi:

$$\frac{D^2 J_i}{ds^2} + R_{jkl}^i \left(\frac{dq_j}{ds} \frac{dq_l}{ds} \right) J_k, \quad (3.65)$$

onde,

$$\frac{D J_i}{ds} = \frac{d J_i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \left(\frac{dq_j}{ds} \right) J_k, \quad (3.66)$$

é a derivada covariante (veja apêndice A.2).

Nosso objetivo, é expandir a equação (3.65) e obter uma expressão explícita para a mesma, utilizando a métrica de Jacobi.

Pela definição (3.66):

$$\begin{aligned} \frac{D^2 J_i}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d J_i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{ds} J_k \right) + \Gamma_{ls}^i \frac{dq_l}{ds} \left(\frac{d J_s}{ds} + \Gamma_{jk}^s \frac{dq_j}{ds} J_k \right) \\ &= \frac{d^2 J_i}{ds^2} + \frac{d \Gamma_{jk}^i}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k + \Gamma_{jk}^i \frac{d^2 q_j}{ds^2} J_k + \Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{ds} \frac{d J_k}{ds} + \Gamma_{ls}^i \frac{dq_l}{ds} \frac{d J_s}{ds} + \\ &+ \Gamma_{jk}^s \Gamma_{ls}^i \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Sabemos que:

$$\frac{d^2 q_j}{ds^2} + \Gamma_{kl}^j \frac{dq_k}{ds} \frac{dq_l}{ds} = 0, \quad (3.68)$$

e

$$\frac{d \Gamma_{jk}^i}{ds} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial q_l} \frac{dq_l}{ds}. \quad (3.69)$$

Portanto:

$$\frac{D^2 J_i}{ds^2} = \frac{d^2 J_i}{ds^2} + 2 \Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{ds} \frac{d J_k}{ds} + \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial q_l} + \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{sk}^i \Gamma_{lj}^s \right) \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k. \quad (3.70)$$

De acordo com a seção 2.4, as componentes do tensor curvatura R_{jkl}^i podem ser expressas em termos de Γ_{jk}^i :

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{js}^i \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s + \frac{\partial}{\partial q_k} \Gamma_{sj}^i - \frac{\partial}{\partial q_l} \Gamma_{kj}^i. \quad (3.71)$$

Substituindo (3.70) e (3.71) em (3.65), obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 J_i}{ds^2} + 2\Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{ds} \frac{dJ_k}{ds} + \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial q_l} + \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{sk}^i \Gamma_{lj}^s \right) \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k + \\
&+ \frac{\partial}{\partial q_k} \Gamma_{sj}^i \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k + \left(\Gamma_{js}^i \Gamma_{kl}^s - \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial q_l} \Gamma_{kj}^i \right) \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k \\
&= \frac{d^2 J_i}{ds^2} + 2\Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{ds} \frac{dJ_k}{ds} + \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \Gamma_{sj}^i \right) \frac{dq_l}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

que é independente da métrica da variedade.

A métrica de Jacobi é uma métrica conforme da métrica da energia cinética, ou seja,

$$(g_e)_{ij} = e^{-2f} a_{ij}.$$

Uma vez que estamos considerando $a_{ij} = \delta_{ij}$, então :

$$(g_e)_{ij} = e^{-2f} \delta_{ij}. \tag{3.73}$$

Os coeficientes de Christoffel para esta métrica são dados por (18):

$$\Gamma_{jk}^i = -\delta_j^i f_{,j} - \delta_j^i f_{,k} + \delta_{jk} f_{,i}, \tag{3.74}$$

onde

$$f_{,i} = \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}. \tag{3.75}$$

Multiplicando (3.72) por $\frac{1}{e^{2f}}$, temos que:

$$\frac{d^2 J_i}{e^{2f} ds} + 2\Gamma_{jk}^i \frac{dq_j}{e^f ds} \frac{dJ_k}{e^f ds} + \left(\frac{\partial \Gamma_{sj}^i}{\partial q_k} \right) \frac{dq_s}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k = 0. \tag{3.76}$$

Sendo

$$\Gamma_{sj}^i = -\delta_{ji} f_{,s} - \delta_{is} f_{,j} + \delta_{sj} f_{,i}, \tag{3.77}$$

então:

$$\frac{\partial \Gamma_{sj}^i}{\partial q_k} = -\delta_{ji} f_{,sk} - \delta_{is} f_{,jk} + \delta_{sj} f_{,ki} \tag{3.78}$$

com $f_{,sk} = \partial_{sk}^2 f$.

Usando a relação $ds^2 = dt^2$ e pelas relações acima:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 J_i}{dt^2} + 2 \left(-\delta_{ki} f_{,j} - \delta_{ij} f_{,k} + \delta_{jk} f_{,i} \right) \frac{dq_j}{dt} \frac{dJ_k}{dt} + \left(-\delta_{ji} f_{,sk} - \delta_{is} f_{,jk} + \delta_{sj} f_{,ki} \right) \frac{dq_s}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k \\
&= \frac{d^2 J_i}{dt^2} + 2 \left(f_{,i} \delta_{jk} \frac{dq_j}{dt} - f_{,k} \frac{dq_i}{dt} \right) \frac{dJ_k}{dt} + \delta_{sj} f_{,ki} \frac{dq_s}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k - \delta_{ji} f_{,sk} \frac{dq_s}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k - \delta_{is} f_{,jk} \frac{dq_s}{ds} \frac{dq_j}{ds} J_k \\
&= \frac{d^2 J_i}{dt^2} + 2 \left(f_{,i} \delta_{jk} \frac{dq_j}{dt} - f_{,k} \frac{dq_i}{dt} \right) \frac{dJ_k}{dt} + \left(f_{,ki} e^{-2f} - \delta_{ii} f_{,jk} \frac{dq_j}{ds} \frac{dq_i}{ds} - \delta_{ii} f_{,jk} \frac{dq_i}{ds} \frac{dq_j}{ds} \right) J_k \\
&= \frac{d^2 J_i}{dt^2} + 2 \left(f_{,i} \delta_{jk} \frac{dq_j}{dt} - f_{,k} \frac{dq_i}{dt} \right) \frac{dJ_k}{dt} + \left(f_{,ki} e^{-2f} - 2f_{,kj} \frac{dq_j}{ds} \frac{dq_i}{ds} \right) J_k.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Finalmente, considerando:

$$f = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{2} (E - V) \right], \quad (3.80)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f_{,ii} &= \frac{\partial_i V}{\partial(E - V)}; \\ f_{,ik} &= \frac{\partial_{ik}^2 V}{\partial(E - V)} + \frac{(\partial_i V)(\partial_j V)}{\partial(E - V)^2}; \\ e^{-2f} &= 2(E - V). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Substituindo estas relações em (3.79), temos que a equação de jacobi é da forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 J_i}{dt^2} + \frac{1}{E - V} \left(\partial_i V \delta_{jk} \frac{dq_j}{dt} - \partial_k V \frac{dq_i}{dt} \right) \frac{dJ_i}{dt} + (\partial_{ki} V) J_k \\ &+ \frac{1}{E - V} \left[(\partial_k V)(\partial_i V) - \left(\partial_{kj}^2 V + \frac{(\partial_k V)(\partial_j V)}{E - V} \right) \frac{dq_j}{ds} \frac{dq_i}{ds} \right] J_k. \end{aligned} \quad (3.82)$$

3.7 Equação da Evolução da Geodésica via Métrica de Eisenhart.

Considerando agora, a métrica de Eisenhart, daremos uma expressão explícita para a equação (3.72).

Com esta métrica, os únicos símbolos de Christoffel não nulos, conforme (3.20), são dados por:

$$\Gamma_{00}^i = \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \text{ e } \Gamma_{0i}^{N+1} = \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i} \right). \quad (3.83)$$

Escrevendo a equação (3.40) para $0, i = 1, \dots, N$ e $N + 1$ separadamente, temos que:

$$0 = \frac{D^2 J_0}{ds^2} + R_{j0i}^0 \left(\frac{dq_j}{ds} \frac{dq_i}{ds} \right) J_0 + R_{0ij}^0 \frac{dq_0}{ds} J_i \frac{dq_j}{ds}. \quad (3.84)$$

$$0 = \frac{D^2 J_i}{ds^2} + R_{0j0}^i \left(\frac{dq_0}{ds} \right)^2 J_j + R_{00j}^i \frac{dq_0}{ds} J_0 \frac{dq_j}{ds} + R_{j00}^i \frac{dq_j}{ds} J_0 \frac{dq_0}{ds}. \quad (3.85)$$

$$0 = \frac{D^2 J_{N+1}}{ds^2} + R_{i0j}^{N+1} \frac{dq_i}{ds} J_0 \frac{dq_j}{ds} + R_{ij0}^{N+1} \frac{dq_i}{ds} J_j \frac{dq_0}{ds}. \quad (3.86)$$

Pela definição (3.66):

$$\frac{DJ_0}{ds} = \frac{dJ_0}{ds} + \Gamma_{jk}^0 \left(\frac{dq_j}{ds} \right) J_k, \quad (3.87)$$

e como $\Gamma_{jk}^0 = 0$:

$$\frac{DJ_0}{ds} = \frac{dJ_0}{ds}. \quad (3.88)$$

Por (3.61):

$$R_{jkl}^0 = 0. \quad (3.89)$$

Segue-se que (3.84):

$$\frac{D^2 J_0}{ds^2} = \frac{d^2 J_0}{ds^2} = 0. \quad (3.90)$$

Logo, J_0 possui aceleração nula.

Sem perda de generalidade, definimos:

$$\left. \frac{dJ_0}{ds} \right|_{s=0} = J_0(0) = 0. \quad (3.91)$$

Novamente pela definição (3.40):

$$\frac{DJ_i}{ds} = \frac{dJ_i}{ds} + \Gamma_{0k}^i \frac{dq_0}{ds} J_k. \quad (3.92)$$

Sendo, $\frac{dq_0}{ds} = 0$, temos que:

$$\frac{D^2 J_i}{ds^2} = \frac{d^2 J_i}{ds^2}. \quad (3.93)$$

Deste modo a equação (3.85) é dada por:

$$\frac{d^2 J_i}{ds^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \left(\frac{dq_0}{ds} \right) J_k = 0 \quad (3.94)$$

Pelo teorema de Eisenhart, ao longo de uma geodésica:

$$ds^2 = (dq_0)^2 = dt^2, \quad (3.95)$$

e assim a equação (3.94), correspondente a:

$$\frac{d^2 J_i}{dt^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} J_k = 0 \quad (3.96)$$

é equivalente a equação da dinâmica tangente (3.30), fazendo $J = \xi$.

Esta relação nos permite estabelecer uma ligação entre o expoente de Lyapunov e a formulação geométrica, conforme veremos no próximo capítulo.

4 GEOMETRIA E CAOS

Neste capítulo descreveremos o caos hamiltoniano através de uma abordagem geométrica, utilizando como ferramenta a equação de Jacobi. No decorrer do mesmo, apresentaremos alguns casos com o intuito de obter informações para responder o seguinte questionamento:

Qual é a principal característica da curvatura para que o sistema apresente comportamento caótico?

O expoente de Lyapunov, (veja seção (1.2.1)), é um mecanismo que mede o grau de instabilidade das trajetórias, e, sendo o mesmo positivo, o sistema apresenta comportamento caótico. Entretanto, para muitos sistemas de interesse físico, em poucos casos é possível calcular os expoentes de Lyapunov analiticamente. Além disso, através do expoente não é possível obter nenhuma informações a respeito da origem do Caos.

Para explicar a origem do Caos, o matemático americano Smale, criou em 1960, um mecanismo denominado Ferradura de Smale, uma transformação que associa dilatação, contração e dobradura, transformando um quadrado unitário definido no espaço de fase em uma ferradura.

Smale também demonstrou que o comportamento recorrente da transformação ferradura é estruturalmente estável, ou seja, mesmo após deformações a dinâmica do sistema continua invariante. No entanto, apesar de explicar a origem do caos, a Ferradura de Smale não nos fornece nenhuma ferramenta quantitativa para medi-lo, como também é um mecanismo complexo para aplicação prática em sistemas com muitos graus de liberdade.

A abordagem geométrica que apresentaremos, nos permite, em alguns casos, unificar o mecanismo para medida do caos com a compreensão de sua origem, além de possibilitar uma estimativa para o cálculo analítico do Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico.

É válido ressaltar que essa abordagem não constitui uma teoria geral, uma vez que, apenas para o caso de variedades compactas com curvatura negativa em todo ponto essa abordagem é rigorosamente válida e na maioria dos modelos físicos com muitos graus de liberdade nem sempre temos curvatura negativa.

Deste modo, não temos uma resposta definitiva para o questionamento do início do capítulo, mas, veremos que mesmo quando a curvatura é completamente positiva, (ou positiva apenas em alguns pontos da variedade), é possível haver caos através de um mecanismo denominado de *instabilidade paramétrica* que ocorre em variedades não isotrópicas.

No caso de variedades isotrópicas, a equação de Jacobi é relativamente simples e obteremos informações a respeito de variedades com curvatura positiva, como veremos a seguir.

4.1 O Caso Mais Simples: Variedades Isotrópicas.

Conforme vimos na (seção 2.3), a instabilidade do fluxo geodésico é determinado pela evolução do campo de Jacobi J , que por sua vez, depende unicamente da curvatura. No entanto, o número de componentes independentes do tensor curvatura em uma variedade N -dimensional, por exemplo, corresponde a $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ (19). Isto torna bastante complicado obter uma solução explícita para (3.40) em sistemas com muitas graus de liberdade.

Um caso bastante simples para esta equação pode ser visto se considerarmos a variedade isotrópica.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana) isotrópica N -dimensional, $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada em M e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ , com condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = \omega(0)$, onde $\omega(s)$ é um campo paralelo normalizado e normal ao longo de γ . Então a equação de Jacobi, (3.31), é da forma:

$$\frac{D^2 J}{ds^2} + KJ = 0. \quad (4.1)$$

De fato, por hipótese, $|\gamma'| = 1$ e de acordo com o seguinte lema:

Lema 2. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por:

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual K_0 se e somente se

$$R = K_0 R', \quad (4.2)$$

onde R é a curvatura de M .

temos que:

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = K \left\{ \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle \right\} = K \langle J, T \rangle. \quad (4.3)$$

Note que, nessas condições, a equação (4.1) é uma E.D.O de segunda ordem. Com o intuito de analisarmos o comportamento das soluções, determinaremos as mesmas explicitamente.

Sendo a equação (4.1) homogênea e com coeficientes constantes, buscaremos encontrar soluções da forma:

$$J(s) = e^{\lambda s} \quad (4.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} J'(s) &= \lambda e^{\lambda s}; \\ J''(s) &= \lambda^2 e^{\lambda s}. \end{aligned}$$

Para que (4.4) seja solução de (4.1) devemos ter $(\lambda^2 + K)e^{\lambda s} = 0$, ou seja podemos associar (4.1) a equação característica

$$\lambda^2 + a_0 = 0, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

onde o expoente λ em (4.4) é equivalente as raízes de (4.5).

- 1º Caso: $K > 0$.

Sendo $K > 0$ a equação (4.1) é da forma:

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + KJ = 0,$$

cuja equação característica correspondente a $\lambda^2 + K = 0$ possui raízes $\lambda_1 = \sqrt{K}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{K}i$.

Utilizando a relação de Euler, $\exp^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx)$, a solução é dada por:

$$J(s) = c_1 \sqrt{K} \cos(\sqrt{K}s) + c_2 \sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tomando a condição inicial $J(0) = 0$ e $J'(0) = \omega(0)$ temos que:

$$J(s) = \frac{\sin(\sqrt{K}s)}{\sqrt{K}} \omega(s).$$

- 2º Caso: $K = 0$.

Neste caso, a equação (4.1) é da forma:

$$\frac{d^2 J}{ds^2} = 0,$$

cuja solução é dada por:

$$J(s) = c_1 + c_2 s.$$

Tomando a condição inicial $J(0) = 0$ e $J'(0) = \omega(0)$, temos que:

$$J(s) = s\omega(s).$$

- 3º Caso: $K < 0$.

Em caso análogo aos anteriores, temos que a equação (4.1) é da forma:

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + KJ = 0,$$

cuja equação característica $\lambda^2 + K = 0$ possui raízes $\lambda_1 = \sqrt{-K}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{-K}$.

A solução é dada por:

$$J(s) = c_1\sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K}s) + c_2\sqrt{-K} \sin(\sqrt{-K}s), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tomando a condição inicial $J(0) = 0$ e $J'(0) = \omega(0)$ temos que:

$$J(s) = \frac{\sinh(\sqrt{-K}s)}{\sqrt{-K}}\omega(s).$$

Logo as soluções de (4.1) são dadas por:

$$J(s) = \begin{cases} s\omega(s), & \text{se } K = 0, \\ \frac{\omega(s)}{\sqrt{K}s} \sin(\sqrt{K}s), & \text{se } K > 0, \\ \frac{\omega(s)}{\sqrt{-K}s} \sinh(\sqrt{-K}s), & \text{se } K < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Note que, para $K < 0$ as soluções são exponencialmente instáveis. O expoente de instabilidade dado por $(-\max_M(K))^{\frac{1}{2}}$ equivale neste caso a $\sqrt{-K}$ (20).

Um fato importante que devemos também observar é que, ao considerarmos a variedade isotrópica, a curvatura positiva não é um mecanismo para gerar caos, pois, tomando a norma do campo J em (4.6) com $K > 0$, e sabendo que $\omega(s)$ é limitado, então, J não cresce exponencialmente.

Disto, podemos enunciar uma primeira caracterização para curvatura positiva:

A fim de obtermos um comportamento caótico e sendo a curvatura positiva, não devemos considerar a variedade isotrópica.

4.2 Um Segundo Caso: Instabilidade Paramétrica.

Consideremos agora (M, g) uma variedade Riemanniana, com $\dim M = 2$. Neste caso, o tensor curvatura é dado por:

$$R(\gamma', J)\gamma' = K(\langle J, \gamma' \rangle \gamma' - \langle \gamma', \gamma' \rangle J),$$

onde K é a curvatura gaussiana, que é equivalente a curvatura seccional (18).

Uma vez que estamos considerando campos de Jacobi que são normais a γ' ,

$$\langle J, \gamma' \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Além disso, como γ' é normalizada, segue-se que:

$$R(\gamma', J)\gamma' = -K(s)J.$$

Disto, a equação (3.31) é da forma:

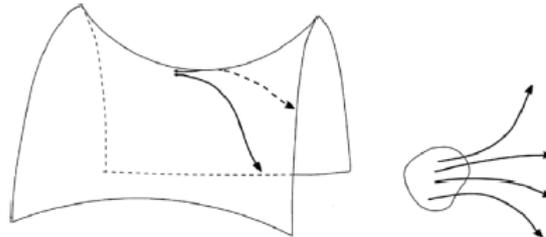
$$\frac{D^2 J}{ds^2} + K(s)J = 0, \quad (4.8)$$

com $K(s) = \frac{1}{2}\mathcal{R}(s)$ e $\mathcal{R}(s)$ a curvatura escalar no ponto $p \in \gamma(s)$.

As soluções de (4.8) podem induzir crescimento exponencial em dois casos:

- (1) A curvatura $K(s)$ possui valores negativos (veja ilustração na figura 3.1 - (a));
- (2) A curvatura $K(s)$, ainda que positiva em todos os pontos da variedade ou exclusivamente positiva em alguns pontos, varia de modo a produz um mecanismo denominado *instabilidade paramétrica*, ilustrado na figura 3.1 - (b) e que será abordado nessa seção.

[Ilustração de variedade de curvatura constante, no qual as geodésicas são



exponencialmente instáveis.]

de duas geodésicas γ_1 e γ_2 partindo de pontos suficientemente próximos, no quais as flutuações da curvatura induz a instabilidade paramétrica.]

[Ilustração

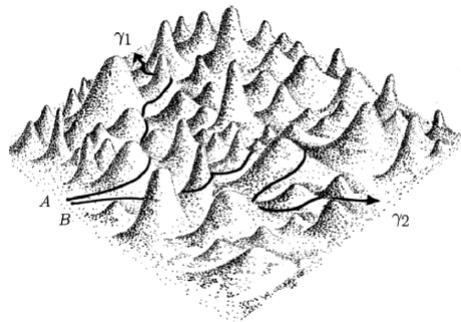


Figura 6 – Ilustração de como os valores da curvatura induz o caos (9).

O mecanismo de *instabilidade paramétrica* é comum em sistemas com algum parâmetro variando com o tempo, chamados de *sistemas paramétricos*. Podemos citar como simples exemplos de sistemas paramétricos, um pêndulo cujo comprimento do fio varia com o tempo e uma criança em um balanço sem ser empurrada por ninguém.

No caso em que os parâmetro oscilam com o tempo, temos uma *oscilação paramétrica*.

O comportamento dos sistemas paramétricos com pequenas oscilações pode ser descrito pela equação:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(1 + h \cos(\omega t - \phi_0))x(t) = 0, \quad (4.9)$$

onde ω_0 é frequência natural de oscilação do sistema, ω é a frequência do parâmetro, h é a amplitude de variação da frequência natural e ϕ_0 uma constante.

A equação (4.9) é chamada *equação de Mathieu*.

Quando $\omega \sim \frac{2\omega_0}{n}$ com $n \in \mathbb{Z}$, a amplitude das oscilações aumenta rapidamente (*ressonância paramétrica*) e o sistema encontra-se em *instabilidade paramétrica* (21).

A equação (4.9) é um caso especial da *equação de Hill*,

$$\frac{d}{dt}[p(t)\dot{x}(t)] + q(t)x(t) = 0, \quad (4.10)$$

com $p(t)$, $q(t)$ periódicas e $p(t) \in C^0$ não-nula.

De fato:

Seja $t \rightarrow \tau$ uma mudança de variável de modo que:

$$d\tau = \frac{dt}{p(t)}.$$

Aplicando a regra do produto ao primeiro termo de (4.10) temos que:

$$\dot{p}(t)\dot{x}(t) + p(t)\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0. \quad (4.11)$$

Note que:

$$\frac{dx(t)}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \dot{x}(\tau) \cdot p(t). \quad (4.12)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{d\tau^2} &= \frac{d}{dt}[\dot{x}(\tau) \cdot p(t)] \frac{dt}{d\tau} \\ &= [\ddot{x}(\tau) \cdot p(t) + \dot{x}(\tau) \cdot \dot{p}(t)]p(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pela mudança de variáveis acima, multiplicando (4.11) por $p(t)$ e substituindo (4.13) em (4.11), obtemos:

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} + p(\tau)q(\tau)x(\tau) = 0. \quad (4.14)$$

Definindo:

$$\varphi^2(\tau) = p(\tau)q(\tau),$$

e por simplicidade fazendo $\tau \rightarrow t$, a equação (4.14) é equivalente a:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varphi^2(t)x(t) = 0. \quad (4.15)$$

No caso em que:

$$\varphi^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos(\omega(t))),$$

temos a equação (4.9).

A equação (4.8) pode ser vista como a equação (4.15) tomando $s = t$ e $\varphi(t) = \sqrt{K(s)}$ como a frequência.

Sendo $K(s)$ periódica e integrável, podemos expressá-la em série de Fourier:

$$K(s) = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega s) + b_n \sin(n\omega s)], \quad (4.16)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{l}$ e l é o comprimento da geodésica.

Observe que quando $a_1 \neq 0$ e os demais coeficientes de (4.16) são nulos, então a equação (4.8) corresponde a equação de Mathieu, no qual é possível expressarmos analiticamente a solução e determinarmos as regiões estáveis e instáveis no plano de fase através do expoente de instabilidade (22).

Por outro lado, nem sempre é possível obter resultados analíticos para um $K(s)$ qualquer. Desta forma, ainda não há demonstração rigorosa que o mecanismo de instabilidade induza caos. Este fato ainda é uma conjectura.

No entanto, para sistemas com muitos graus de liberdade é possível relacionarmos a variação da curvatura e o maior expoente de Lyapunov, permitindo-nos determinar a instabilidade/estabilidade das geodésicas como veremos nas próximas seções.

4.3 Hipóteses de uma possível teoria geométrica para o caos hamiltoniano

Consideremos uma variedade Riemanniana (M, g) cuja dimensão é suficientemente grande, ou seja, estamos considerando um sistema com muitos graus de liberdade. No que se segue, assumiremos algumas hipóteses geométricas e estatísticas com o intuito de tornarmos a equação de Jacobi, (3.31), independente da dinâmica, ou seja, da evolução da geodésica, mas somente da flutuação e da média da curvatura de Ricci da variedade.

4.3.1 Hipóteses Geométricas e Estatísticas

Hipóteses Geométricas

1. Suponhamos que a variedade é quasi-isotrópica, ou seja, o tensor curvatura e o tensor de Ricci, respectivamente, são aproximados por:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &\approx K(s)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}); \\ R_{ij} &\approx K(s)g_{ik}. \end{aligned}$$

Com esta aproximação, a equação de Jacobi é da forma:

$$\frac{d^2 J_j}{ds^2} + k_R(s)J_j + \delta K(s)J_j = 0,$$

onde $\delta K(s) = K(s) - \overline{K}$ corresponde ao desvio do valor médio da curvatura seccional \overline{K} .

2. A variação local da curvatura de Ricci mede a variação local da curvatura seccional, isto é,

$$\delta K(s) = \delta K_R(s).$$

Deste modo, obtemos a equação efetiva da instabilidade dinâmica:

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + k_R(s)J + \frac{K_R(s) - \langle K_R \rangle}{\sqrt{N-1}} = 0,$$

com $\langle K_R \rangle$ a média da curvatura de Ricci da variedade.

Hipóteses Estatísticas

3. $\delta K(s)$ é um processo estocástico Gaussiano.

Disto, juntamente com as hipóteses anteriores, obtemos uma aproximação para $\delta K(s)$:

$$\delta K(s) \approx \frac{1}{\sqrt{N-1}} \langle \delta^2 K_R \rangle_s^{\frac{1}{2}} \eta(s),$$

onde $\eta(s)$ é o processo Gaussiano com medida zero e variância unitária e $\langle \cdot \rangle_s$ é a média temporal ao longo da geodésica.

4. Suponhamos a ergodicidade.

Consequentemente, substituímos $\langle \cdot \rangle_s$ por $\langle \cdot \rangle_\mu$, com μ uma medida invariante, a saber, a medida microcanônica.

Portanto, a equação da hipótese (1) é do tipo oscilador estocástico dada por:

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} + \Omega(s)\psi = 0,$$

com $\Omega(s) = \langle k_R \rangle_\mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \delta^2 K_R \rangle_\mu^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(s)$ e ψ representa alguma componente de J .

5. Defina a função de correlação, Γ_Ω , de $\Omega(s)$ e posteriormente de $\Omega(t)$.

Suponhamos $\Omega(t)$ um processo estacionário e δ -correlacionado. Assim,

$$\Gamma_\Omega(t_1, t_2) = \tau \sigma_\Omega^2 \delta(t),$$

onde τ é a correlação da escala de tempo característico do processo estocástico.

Para discutirmos as hipóteses acima, em particular as três últimas, faz-se necessário um conhecimento básico em Teoria da Probabilidade, Mecânica Estatística e teoria Ergódica. Assumimos que o leitor já está familiarizado com a teoria Ergódica, uma vez que, a mesma foi apresentada na seção (1.2.1) e no apêndice (A.6). Quanto a mecânica estatística, visando uma melhor compreensão no decorrer do texto, nos limitaremos a apresentar os conceitos básicos utilizados nas hipóteses. Maiores detalhes podem ser vistos em (23), (24), (25) e (26).

Inicialmente, introduziremos o tensor projetivo de Weyl que mede o desvio de isotropia da variedade (27).

Definição 14. O tensor projetivo de Weyl, W , em uma variedade N -dimensional ($N \geq 2$) é um $\binom{1}{3}$ -tensor cujas componentes são dadas por:

$$W_{jkl}^i = R_{jkl}^i - \frac{1}{N-1}(R_{jl}\delta_k^i - R_{jk}\delta_l^i). \quad (4.17)$$

De maneira óbvia, quando a variedade é isotrópica, o tensor de Weyl é nulo.

De (4.17) temos que:

$$R_{jkl}^i = W_{jkl}^i + \frac{1}{N-1}(R_{jl}\delta_k^i - R_{jk}\delta_l^i). \quad (4.18)$$

Consideremos o tensor de Weyl na forma compacta:

$$W(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s) = R(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s) - \frac{1}{N-1} [\text{Ricc}(\gamma'(s), \gamma'(s))J(s) - \text{Ricc}(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s)]. \quad (4.19)$$

onde, $\text{Ricc}(s)$ corresponde ao tensor de Ricci.

Logo, a equação (3.40) é da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 J(s)}{ds^2} + \frac{1}{N-1} [\text{Ricc}(\gamma'(s), \gamma'(s))J(s) - \text{Ricc}(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s)] \\ + W(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Observe que no caso em que a variedade é isotrópica o terceiro termo,

$$-\frac{1}{N-1}\text{Ricc}(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s) = 0.$$

De fato, de acordo com o lema (3.1):

$$R = K_0 R', \quad (4.21)$$

e conseqüentemente,

$$\text{Ricc}(s) = K(s)g. \quad (4.22)$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}); \quad (4.23)$$

$$R_{ij} = K g_{ij}. \quad (4.24)$$

Logo,

$$\text{Ricc}(\gamma'(s), J(s)) = K_0 \cdot g(\gamma'(s), J(s)) = K_0 \langle \gamma'(s), J(s) \rangle = 0,$$

conforme (4.7).

Considere a seguinte decomposição do campo de Jacobi J :

$$J(s) = \sum_i J_i(s) e_i(s), \quad (4.25)$$

com $\{e_1(s), \dots, e_N(s)\}$ uma base ortonormal de transporte paralelo de vetores.

Então:

$$\frac{\nabla^2 J}{ds^2} = \sum_i \frac{d^2 J_i}{ds^2} e_i(s). \quad (4.26)$$

Por questão de simplicidade e até mesmo para não sobrecarregar o texto, a partir de agora utilizaremos: $\gamma'(s) = \gamma'$, $J_j(s) = J_j$ e $e_j(s) = e_j$.

Note que:

$$\begin{aligned} W(\gamma', J)\gamma' &= \sum_j \langle W(\gamma', J)\gamma', e_j \rangle e_j \\ &= \sum_j \langle W(\gamma', \sum_i J_i e_i)\gamma', e_j \rangle e_j \\ &= \sum_{i,j} \langle W(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle J_i e_j. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De maneira análoga,

$$\text{Ricc}(\gamma', J)\gamma' = \sum_{i,j} \langle \text{Ricc}(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle J_i e_j. \quad (4.28)$$

Então, podemos reescrever (4.20) como:

$$\frac{d^2 J_j}{ds^2} + k_R J_j + \sum_{i,j} (w_{ij} + r_{ij}) J_i = 0. \quad (4.29)$$

$$k_R = \frac{K_R}{N-1}; \quad (4.30)$$

$$w_{ij} = \langle W(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle; \quad (4.31)$$

$$r_{ij} = \frac{\langle \text{Ricc}(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle}{N-1}. \quad (4.32)$$

Observe que k_R é independente do sistema de coordenadas. No entanto, w_{ij} e r_{ij} ainda dependem da dinâmica e de $e_N(s)$.

A hipótese da variedade ser quasi-isotrópica é definida como uma aproximação de (4.21) e (4.22), isto é,

$$R \approx K(s)R'; \quad (4.33)$$

$$\text{Ricc} \approx K(s)g, \quad (4.34)$$

com $K(s)$ não mais constante.

Substituindo (4.34) em (4.32) e fazendo o produto por J_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} r_{ij}(s)J_i &= \sum_{i,j} \left(\frac{\langle K(s)\langle \gamma', e_i \rangle \gamma', e_j \rangle J_i}{N-1} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{K(s)\langle \gamma', e_i \rangle \langle \gamma', e_j \rangle J_i}{N-1} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{K(s)\langle \gamma', \sum_i J_i e_i \rangle \langle \gamma', e_j \rangle}{N-1} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{K(s)\langle \gamma', \sum_i J_i e_i \rangle \langle \gamma', e_j \rangle}{N-1} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{K(s)\langle \gamma', J \rangle \langle \gamma', e_j \rangle}{N-1} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde, na quarta igualdade, usamos a decomposição (4.25).

Pelo resultado de (4.35), a equação (4.29) é da forma:

$$\frac{d^2 J_j}{ds^2} + k_R J_j + \sum_{i,j} w_{ij} J_i = 0. \quad (4.36)$$

Daremos agora uma aproximação para (4.31).

Pela definição do tensor de Weyl (4.19) :

$$\begin{aligned}
w_{ij} &= \langle W(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle \\
&= \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle - \frac{1}{N-1}\langle \text{Ricc}(\gamma', \gamma')e_i, e_j \rangle + \frac{1}{N-1}\langle \text{Ricc}(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle \\
&\approx \langle K(s)R'(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle - \frac{1}{N-1}\langle K(s)g(\gamma', \gamma')e_i, e_j \rangle + \\
&+ \frac{1}{N-1}\langle K(s)g(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle \\
&\approx K(s)(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle) - \frac{1}{N-1}K(s)\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle e_i, e_j \rangle + \\
&+ \frac{1}{N-1}K(s)\langle \gamma', e_i \rangle \langle \gamma', e_j \rangle \\
&\approx \delta K(s)(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

onde, $\delta K(s) = K(s) - \bar{K}$ corresponde ao desvio da curvatura seccional a partir de seu valor médio K , ou seja, $\delta K(s)$ mede a flutuação da curvatura seccional devido ao desvio local de isotropia (27).

Disto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} w_{ij} J_i &\approx \delta K(s) \sum_{i,j} (\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle) J_i \\
\sum_i w_{ij} J_j &\approx \delta K(s) \sum_j (\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle e_j, e_j \rangle - \langle e_j, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle) J_j \\
&\approx \delta K(s) (J_j - \langle \sum_j J_j e_j, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle) \\
&\approx \delta K(s) (J_j - \langle J, \gamma' \rangle \langle \gamma', e_j \rangle) \\
&\approx \delta K(s) J_j. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.36) é dada por:

$$\frac{d^2 J_j}{ds^2} + k_R J_j + \delta K(s) J_j = 0. \tag{4.39}$$

Observe que a segunda hipótese é bastante plausível com a primeira, uma vez que, para uma variedade isotrópica:

$$K = \frac{K_R}{N-1},$$

e ao considerarmos a variedade quasi-isotrópica, tomando o fato que a curvatura de Ricci mede o grau de perda local de isotropia (28), uma boa aproximação para a variação da curvatura seccional é determinada pela variação da curvatura de Ricci:

$$\delta K(s) \approx \delta K_R.$$

Assim, a equação (4.39) é da forma:

$$\frac{d^2 J}{ds^2} + \frac{K_R(s)}{N-1} J + \frac{K_R(s) - \langle K_R \rangle}{\sqrt{N-1}} = 0. \tag{4.40}$$

com $\langle K_R \rangle$ a média da curvatura de Ricci.

De modo geral, $K(s)$ é obtida pela soma de um grande número de componentes independentes (27). Considerando N suficientemente grande e pelo teorema do limite central (25):

Teorema 10. *Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com medida μ e variância σ^2 . Então a distribuição de*

$$\frac{X_1 + \dots + X_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}$$

tende a uma distribuição gaussiana quando $n \rightarrow \infty$,

temos que $\delta K(s)$ deverá ser um processo estocástico Gaussiano.

Pela segunda hipótese:

$$P(\delta K) \approx P(\delta K_R), \quad (4.41)$$

com P a distribuição de probabilidade.

Como $\delta K(s)$ e $\delta K_R(s)$ possuem medida zero, então o primeiro cumulante é nulo.

De acordo com (4.41), a relação do segundo cumulante, que no processo Gaussiano corresponde a variância, é dada por:

$$\langle (K(s) - \bar{K})^2 \rangle_s \approx \frac{1}{N-1} \langle (K_R(s) - \langle K_R \rangle_s)^2 \rangle_s, \quad (4.42)$$

onde $\langle \cdot \rangle_s$ é a média temporal ao longo da geodésica.

Então, uma aproximação para o processo estocástico $\delta K(s)$ é dada por:

$$\delta K(s) \approx \frac{1}{\sqrt{N-1}} \langle \delta^2 K_R \rangle_s^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(s), \quad (4.43)$$

com $\eta(s)$ um processo Gaussiano com média zero e variância unitária.

Antes de prosseguirmos com a discussão das hipóteses, definiremos alguns conceitos de mecânica estatística.

Em linhas gerais, a *Mecânica Estatística* é uma teoria probabilística que estabelece a conexão entre o mundo macroscópico (termodinâmica) e o microscópico (mecânica).

Seu objetivo é modelar a estrutura microscópica da matéria através de um tratamento dinâmico e estatístico capaz de fazer previsões fenomenológicas consistentes, em particular para o comportamento das grandezas termodinâmicas de um sistema macroscópico (sistemas de muitas partículas) em equilíbrio (29).

Um *estado microscópico* ou *microestado* é definido pelo valores de todas as variáveis dinâmicas associadas ao sistema de N partículas. Na mecânica Estatística clássica, este estado é bem definido pelos valores do momento e posição da partícula.

Uma característica da Mecânica Estatística consiste no formalismo de *ensemble*, uma vez que estamos tomando valores médios de uma grande quantidade de elementos ou observações.

Considere um sistema hamiltoniano autônomo, isto é, $H(p, q) = E$, conforme visto no primeiro capítulo.

Seja $\rho(p, q, t)$ a função densidade de probabilidade que caracteriza o número de pontos na região do espaço de fase no tempo t .

O conjunto de pontos (p, q) cuja probabilidade no tempo t é $\rho(p, q, t)dp \cdot dq$ formam um *ensemble estatístico*.

Partindo do pressuposto que sistemas físicos reais não são perfeitamente isolados, ou seja, interagem com outros sistemas, tomemos a energia com valores entre E e $E + \delta E$.

O postulado fundamental da Mecânica Estatística, estabelece que:

Em sistemas em equilíbrio com energia entre E e $E + \delta E$, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis.

Formalmente:

$$\rho(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(E)}, & \text{se } E \leq H(p, q) \leq E + \delta E, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.44)$$

onde

$$\Gamma(E) = \int_{E \leq H(p, q) \leq E + \delta E} dp \cdot dq,$$

é o volume do espaço de fase ocupado pelo sistema.

Os pontos nesse volume definem o *ensemble microcanônico*.

As justificativas para este postulado são baseadas na *hipótese Ergódica* (veja Apêndice C).

Definição 15. A média temporal de uma função $f(p, q)$ ao longo de uma trajetória no intervalo de tempo $(t_0, t_0 + T)$ é definida como:

$$\langle f \rangle_s = \frac{1}{T} \int f(p(t), q(t)) dt.$$

Definição 16. A média de ensemble do mesmo observável é definida como:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_e &= \int f(p, q) \rho(p, q) dp \cdot dq \\ &= \frac{1}{\Gamma(E)} \int_{E \leq H(p, q) \leq E + \delta E} f(p, q) dp \cdot dq \end{aligned} \quad (4.45)$$

Se o sistema é Ergódico então:

$$\langle f \rangle_s = \langle f \rangle_e.$$

Exemplo 3. Suponhamos que realizaremos uma simulação computacional de um líquido clássico e estamos interessados em calcular o valor quadrático médio da velocidade das partículas. Ao utilizarmos a média temporal tomaremos a média da velocidade instantânea medida em intervalos quasi-regulares, tornando a simulação muito longa.

No entanto, podemos realizar simulações idênticas em paralelo e calcular a mesma média tomando valores das velocidades nos diferentes sistemas, tornando a simulação mais curta. Neste caso, utilizamos a média no ensemble. Se o sistema for ergódico, ambas as médias coincidem.

Retomemos a discussão das hipóteses.

Com o intuito de obtermos uma equação de estabilidade independente da dinâmica suponhamos a ergodicidade.

Como definido anteriormente, a hipótese ergódica nos permite substituímos a média temporal por uma média no ensemble estatístico, calculada com uma medida invariante adequada. Uma vez que estamos considerando a variedade mecânica, a escolha natural é a medida microcanônica.

Deste modo, a equação (4.43) é da forma:

$$\delta K(s) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \delta^2 K_R \rangle_\mu^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(s). \quad (4.46)$$

Portanto, a equação de instabilidade é dada por:

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} + \left(\langle k_R \rangle_\mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \delta^2 K_R \rangle_\mu^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(s) \right) \psi = 0, \quad (4.47)$$

onde ψ representa alguma componente de J .

Note que k_R é substituído por $\langle k_R \rangle_\mu$, pois, com N suficientemente grande a variedade é quasi-isotrópica e a variação de k_R tende a zero. Observe também que como estamos considerando sistemas com N suficientemente grande e tomando o limite termodinâmico, então substituímos $N - 1$ por N na equação (4.46).

A equação (4.47) é uma equação independente da dinâmica que mede o grau de instabilidade da mesma. Além disso, como $\langle k_R \rangle_\mu$ e $\langle \delta^2 K_R \rangle_\mu$ são medidas microcanônicas, as mesmas são funções da energia do sistema ou da energia por grau de liberdade $\epsilon = \frac{E}{N}$.

Denotando, $\Omega(s) = \langle k_R \rangle_\mu + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \delta^2 K_R \rangle_\mu^{\frac{1}{2}} \cdot \eta(s)$, a equação (4.47) é do tipo oscilador estocástico:

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} + \Omega(s) \psi = 0, \quad (4.48)$$

onde $\Omega(s)$, o quadrado da frequência, é um processo estocástico Gaussiano.

Para que o processo $\Omega(t)$ seja completamente definido, precisaremos determinar sua função de correlação:

$$\Gamma_{\Omega}(t_1, t_2) = \langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle - \langle \Omega(t_1) \rangle \langle \Omega(t_2) \rangle.$$

Sendo $\Omega(t)$ um processo estacionário e δ -correlacionado então:

$$\Gamma_{\Omega}(t_1, t_2) = \Gamma_{\Omega}(|t_2 - t_1|) = \Gamma_{\Omega}(t) = \tau\sigma_{\Omega}^2\delta(t),$$

onde τ é a escala característica de tempo dada por:

$$\tau = \frac{\pi\sqrt{k_0}}{2\sqrt{k_0}\sqrt{k_0 + \sigma_k}} + \pi k_0, \quad (4.49)$$

obtida como a combinação das escalas de tempo τ_1 e τ_2 , no qual, τ_1 é associada ao tempo necessário para percorrer a distância média entre dois pontos conjugados ao longo da geodésica e τ_2 é relacionada com a flutuação local da curvatura.

De posse dessas hipóteses, buscaremos determinar uma fórmula analítica para o expoente de Lyapunov.

4.4 Fórmula Geométrica para o Expoente de Lyapunov

Considere a equação do oscilador estocástico:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \Omega(s)\psi = 0. \quad (4.50)$$

Nosso objetivo é medimos o grau de instabilidade das soluções.

Conforme apresentado nas seções anteriores, a métrica de Eisenhart nos permite relacionarmos o comprimento do arco s ao longo da geodésica com o tempo t , e esta relação é relativamente simples:

$$(dq_0)^2 = dt^2 = ds^2.$$

Disto, a equação (4.50) pode ser escrita da forma:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \Omega(t)\psi = 0. \quad (4.51)$$

Sendo de interesse de nosso estudo sistemas Hamiltonianos da forma (3.4), o expoente de Lyapunov para tais sistemas é dado por (9):

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{\xi_1^2(t) + \dots + \xi_N^2(t) + \dot{\xi}_1^2(t) + \dots + \dot{\xi}_N^2(t)}{\xi_1^2(0) + \dots + \xi_N^2(0) + \dot{\xi}_1^2(0) + \dots + \dot{\xi}_N^2(0)}, \quad (4.52)$$

onde ξ_i , $i = 1, \dots, N$ são componentes do vetor $\xi(t)$ que descreve a evolução temporal das trajetórias.

Com a geometrização, cada componente de $\xi(t)$ pode ser identificada com as componentes de J . Como ψ por definição, corresponde a alguma componente de J então a equação (4.52) é da forma:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \frac{\psi^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}{\psi^2(0) + \dot{\psi}^2(0)}, \quad (4.53)$$

com $\psi(t)$ solução de (4.50).

Do mesmo modo que a equação diferencial estocástica, as soluções de (4.50) estão definidas sobre uma média. Disto, reescrevendo (4.53) temos que:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \frac{\langle \psi^2(t) \rangle + \langle \dot{\psi}^2(t) \rangle}{\langle \psi^2(0) \rangle + \langle \dot{\psi}^2(0) \rangle}. \quad (4.54)$$

Utilizando o algoritmo desenvolvido por Kampen em (30) para a equação do oscilador estocástico, temos que a evolução do vetor do segundo momento ($\langle \psi^2 \rangle$, $\langle \dot{\psi}^2 \rangle$, $\langle \psi \dot{\psi} \rangle$), obedece a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle \psi^2 \rangle \\ \langle \dot{\psi}^2 \rangle \\ \langle \psi \dot{\psi} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \sigma_\Omega^2 & 0 & -2\Omega_0 \\ -\Omega_0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle \psi^2 \rangle \\ \langle \dot{\psi}^2 \rangle \\ \langle \psi \dot{\psi} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

onde Ω_0 e σ_Ω é a média e a variância de $\Omega(t)$.

Podemos determinar Ω_0 e σ_Ω^2 explicitamente. Com a métrica de Eisenhart temos que:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &\equiv \langle k_R \rangle_\mu = \frac{1}{N} \langle \langle (\Delta V) \rangle_\mu \rangle; \\ \sigma_\Omega^2 &\equiv \langle \delta^2 k_R \rangle_\mu = \frac{1}{N} \langle \langle (\Delta V)^2 \rangle_\mu - \langle \Delta V \rangle_\mu^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A solução de (4.55) é dada através da diagonalização da matriz,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \sigma_\Omega^2 & 0 & -2\Omega_0 \\ -\Omega_0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação característica $\lambda^3 + 4\Omega_0\lambda - 2\sigma_\Omega^2\tau$, nos fornece dois autovalores complexos

conjugados, a saber,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & -\frac{1}{6}(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}) + \frac{2\Omega_0}{\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \\ & + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}) + \frac{4\Omega_0}{\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & -\frac{1}{6}(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}) + \frac{2\Omega_0}{\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \\ & - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}) + \frac{4\Omega_0}{\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

e um autovalor real:

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}) - \frac{4\Omega_0}{\left(27\sigma_\Omega^2\tau + 3\sqrt{192\Omega_0^3 + 81\sigma_\Omega^4\tau^2}\right)^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.59)$$

no qual relacionamos com a evolução de $\langle\psi^2\rangle + \langle\dot{\psi}^2\rangle$:

$$\langle\psi^2(t)\rangle + \langle\dot{\psi}^2(t)\rangle = (\langle\psi^2(0)\rangle + \langle\dot{\psi}^2(0)\rangle) \cdot e^{\alpha t}. \quad (4.60)$$

Substituindo (4.60) em (4.54), o expoente de Lyapunov é dado por:

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Logo, substituindo (4.59) na equação acima:

$$\lambda(\Omega_0, \sigma_\Omega, \tau) = \frac{1}{2}\left(\Lambda - \frac{4\Omega_0}{3\Lambda}\right) \quad (4.61)$$

onde,

$$\Lambda = \left(2\sigma_\Omega^2\tau + \sqrt{\left(\frac{4\Omega_0}{3}\right)^3 + (2\sigma_\Omega^2\tau)^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.62)$$

A equação (4.61) nos fornece uma fórmula analítica para calcular o expoente de Lyapunov e conseqüentemente determinarmos o grau de instabilidade.

5 APLICAÇÃO

Neste capítulo aplicaremos a teoria geométrica descrita anteriormente para o modelo XY de campo médio.

O modelo XY de alcance infinito é definido pelo seguinte hamiltoniano:

$$H(p, \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i, \quad (5.1)$$

onde $\theta_i \in [0, 2\pi]$ representa a posição da i -ésima partícula, p_i o respectivo momento, N o número de partículas e h um campo externo na direção x do referencial escolhido.

Para os vetores de spin $\mathbf{m}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ para cada i , interagindo com mesma força, o modelo XY descreve o sistema planar de Heisenberg.

Quanto a constante $c > 0$, as partículas tendem ao alinhamento paralelo de spins (caso ferromagnético). Para $c < 0$, as partículas tendem ao alinhamento anti-paralelo de spins (caso anti-ferromagnético).

Consideremos o caso ferromagnético, em que o modelo é caracterizado por uma transição de fase de segunda ordem com parâmetro de ordem, a magnetização, definido por:

$$\mathbf{M}(\theta) = (\mathbf{m}_x(\theta), \mathbf{m}_y(\theta)) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \theta_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \theta_i \right). \quad (5.2)$$

Dinamicamente, o sistema evolui conforme a equação:

$$\ddot{\theta}_i = -c \|\mathbf{M}\| \sin(\theta_i - \phi_i). \quad (5.3)$$

No limite termodinâmico, a mecânica estatística de equilíbrio desse modelo é descrita pela teoria do campo médio (5). No caso em que $h = 0$ a equação (5.1) é da forma:

$$H(p, \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) = K + V(\theta), \quad (5.4)$$

cuja solução pode ser determinada em termos da função de partição conforme veremos a seguir.

5.1 Ensembles Termodinâmicos: Microcanônico e Canônico

Considerando o ensemble microcanônico, a solução é obtida através da função de partição dada por:

$$Z(\beta, N) = \int_0^\infty dE \exp(-\beta E) \Omega(E, N), \quad (5.5)$$

com $\Omega(E, N)$ o volume no espaço de fase definido por:

$$\Omega(E, N) = \int d^N p_i d^N \theta_i \delta(H(p, \theta) - E). \quad (5.6)$$

Uma vez que, $U = \frac{E}{N}$, podemos reescrever (5.5) como:

$$Z(\beta, N) = N \int_0^\infty dU \exp \left[N \left(-\beta U + \frac{1}{N} \log \Omega(E, N) \right) \right]. \quad (5.7)$$

Calculando a integral acima pelo método do ponto de sela (apêndice D), temos que:

$$-\beta F(\beta) = \max_U (-\beta U + S(U)), \quad (5.8)$$

onde $S(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Omega(E, N)$ e $\beta = \frac{\partial S}{\partial U}$.

A solução para o ensemble microcanônico pode ser encontrada em (31). Uma vez que no limite termodinâmico os ensembles canônicos e microcanônicos são equivalentes, será mais instrutivo detalhar a solução canônica deste modelo neste trabalho.

A solução canônica para o modelo (5.4) é obtida calculando a função de partição:

$$Z(\beta, N) = \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp(-\beta H), \quad (5.9)$$

onde $\beta = \frac{1}{k_B T}$, com $k_B = 1$ a constante de Boltzmann e T a temperatura.

Inicialmente observe que para o sistema (5.4) temos que:

$$\begin{aligned} Z(\beta, N) &= \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp(-\beta H) \\ &= \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp \left(-\beta \left[\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + V(\theta) \right] \right) \\ &= \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp \left(-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} \right) \cdot \exp(-\beta V(\theta)) \\ &= \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \left(\prod_{i=1}^N \exp \left(-\frac{\beta}{2} p_i^2 \right) \right) \cdot \exp(-\beta V(\theta)) \\ &= \left(\prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} dp_i \exp \left(-\frac{\beta}{2} p_i^2 \right) \right) \cdot \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp(-\beta V(\theta)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sendo

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

então:

$$Z(\beta, N) = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot Z_c(\beta, N), \quad (5.11)$$

com

$$Z_c(\beta, N) = \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp(-\beta V(\theta)). \quad (5.12)$$

Calculando a norma ao quadrado de \mathbf{M} e utilizando a identidade trigonométrica $2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$ e $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$, obtemos que:

$$V(q) = \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) = \frac{cN}{2} (1 - \|\mathbf{M}\|^2). \quad (5.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned} Z_c(\beta, N) &= \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp(-\beta V(\theta)) \\ &= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int_{\Pi^N} \exp\left(\beta \frac{cN}{2} \|\mathbf{M}\|^2\right) d^N \theta. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Utilizando a transformação de Hubbard-Stratonovich:

$$\exp\left(\frac{Av^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + \sqrt{2A}u \cdot v\right), \quad (5.15)$$

com u, v vetores bidimensionais e $A > 0$, temos que:

$$\exp\left(\frac{\beta cN}{2} \mathbf{M}^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + 2\sqrt{\frac{\beta cN}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right). \quad (5.16)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Z_c(\beta, N) &= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int_{\Pi^N} \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + 2\sqrt{\frac{\beta cN}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right) \right] d^N \theta \\ &= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int_{\Pi^N} \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta cN}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right) \right] d^N \theta. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pela definição (5.2) a equação acima tem a forma:

$$\begin{aligned}
Z_c(\beta, N) &= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int_{\prod^N \pi} \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c N}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N^2}} \sum_{i=1}^N (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2)\right) \right] d^N \theta \\
&= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int_{\prod^N \pi} \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \prod_{i=1}^N \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} \cdot (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2)\right) \right] d^N \theta \\
&= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \prod_{i=1}^N \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2)\right) \right] d^N \theta \\
&= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \frac{(2\pi)^N}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \times \left[2\pi I_0\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} u\right) \right]^N du,
\end{aligned}$$

onde $I_0(z)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero definida por:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2). \quad (5.18)$$

Realizando uma mudança de variáveis $u \rightarrow z\sqrt{\frac{N}{2\beta c}}$, obtemos:

$$Z_c(\beta, N) = (2\pi)^N \frac{N}{\beta c} \int_0^\infty \exp\left(-N \left(\frac{z^2}{2\beta c} - \log[I_0(z)] + \frac{\beta c}{2}\right)\right) dz. \quad (5.19)$$

Deste modo, a função de partição é da forma:

$$Z(\beta, N) = (2\pi)^N \frac{N}{\beta c} \int_0^\infty \exp(-N\psi(z, \beta)) dz, \quad (5.20)$$

onde,

$$\psi(z, \beta) = \frac{z^2}{2\beta c} - \log(I_0(z)) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) + \frac{\beta c}{2}. \quad (5.21)$$

Calculando a integral acima é possível determinarmos a energia livre de Helmholtz.

De fato, a energia livre de Helmholtz é definida por:

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} - \left(\frac{1}{\beta N}\right) \cdot \log Z(\beta, N). \quad (5.22)$$

Calculando a integral em (5.20) pelo método do ponto de sela (veja apêndice D) obtemos:

$$-\beta F = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) - \frac{\beta c}{2} + \max_z \left(\frac{z^2}{2\beta c} - \log(2\pi I_0(z)) \right), \quad (5.23)$$

com z satisfazendo a equação auto-consistente:

$$\partial_z \psi(Z, \beta) = 0,$$

ou seja,

$$\partial_z \psi(Z, \beta) = \frac{z}{\beta c} - \frac{I_1(z)}{I_0(z)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{\beta c} = \frac{I_1(z)}{I_0(z)} = \mathbf{M}(z, \beta), \quad (5.24)$$

onde utilizamos $\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x)$, a função ψ é definida em (5.21) e \mathbf{M} corresponde a magnetização.

Para $\beta c < 2$, a equação (5.24) admite a solução $z = 0$ correspondente a magnetização nula. Para $\beta c > 2$ temos uma solução não-nula $z = z(\beta)$. Em $\beta c = 2$, isto é, $T_c = \frac{c}{2}$ e $\varepsilon_c = \frac{3c}{4}$, temos duas soluções simétricas através de uma bifurcação forquilha e uma descontinuidade em $\partial_\beta^2 F$ indicando uma transição de fase de segunda ordem (32).

Este resultado pode ser analisado através do parâmetro de ordem \mathbf{M} conforme a ilustração (5.1), que está em total acordância com a ilustração apresentada em (31) e (5).

A energia interna do sistema por partícula U é definida por:

$$\varepsilon = U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{c}(1 - \|\mathbf{M}\|^2). \quad (5.25)$$

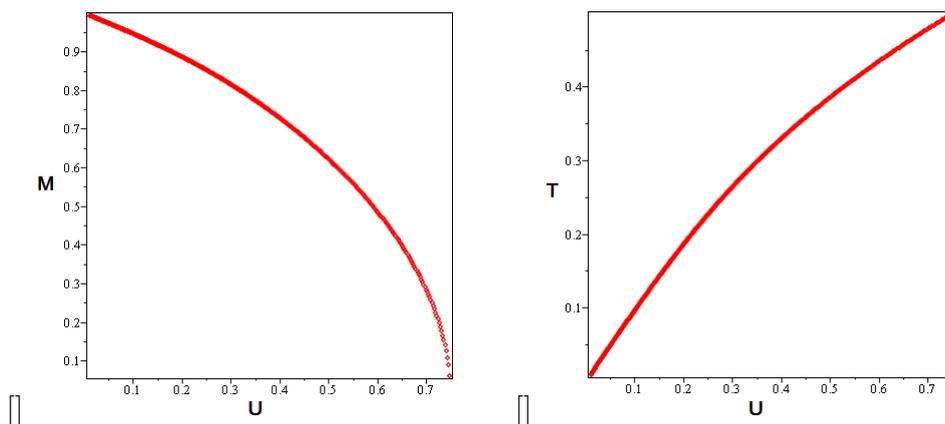


Figura 7 – Modelo XY de Alcance Infinito a campo nulo. (a) Magnetização M com função da Energia por partícula do sistema U . (b) Temperatura T como função da Energia por partícula U .

Nosso objetivo agora é determinarmos a média microcanônica da curvatura e da flutuação da média de Ricci e, consequentemente, obtermos uma estimativa para o expoente de Lyapunov, $\lambda_1(\varepsilon)$, para posterior análise nas vizinhanças da energia crítica do modelo.

5.2 Elementos Geométricos

Utilizando a métrica de Eisenhart, determinaremos a média microcanônica da flutuação e da curvatura de Ricci, que no limite termodinâmico pode ser calculada via o ensemble canônico.

A média canônica $\langle f \rangle_c$ de um observável $f(q)$ pode ser calculada como:

$$\langle f \rangle_c = [Z(\beta)]^{-1} \int dq f(q) e^{-\beta V(q)}, \quad (5.26)$$

onde $dq = \prod_{i=1}^N dq_i$ e $Z(\beta) = \int dq e^{-\beta V(q)}$ corresponde a função de partição.

No limite termodinâmico a média microcanônica, $\langle f \rangle_\mu(\varepsilon)$, coincide com a média canônica, isto é:

$$\left. \begin{aligned} \langle f \rangle_\mu(\varepsilon) &= \langle f \rangle_c(\beta) \\ \varepsilon(\beta) &= \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{N} \partial_\beta [\log Z_c(\beta)] \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Observe que, para N finito, a equação acima não é válida, assim como para a flutuação $\langle \delta^2 f \rangle \equiv \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle$.

A relação entre a flutuação da média canônica e da média microcanônica é dada pela fórmula de Lebowitz-Percus-Verlet (33):

$$\langle \delta^2 f \rangle_\mu(\varepsilon) = \langle \delta^2 f \rangle_c(\beta) - \frac{\beta^2}{c_V} \left[\frac{\partial \langle f \rangle_c(\beta)}{\partial \beta} \right]^2, \quad (5.28)$$

onde $c_V = -\frac{\beta^2}{N} \frac{\partial \langle H \rangle_c}{\partial \beta}$ é o calor específico a volume constante.

Sendo $H = E$ e $\varepsilon = \frac{E}{N}$, a energia por grau de liberdade, (5.28) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} \langle \delta^2 f \rangle_\mu(\varepsilon) &= \langle \delta^2 f \rangle_c(\beta) - \frac{\beta^2}{c_V} \left[\frac{\partial \langle f \rangle_c(\beta)}{\partial \beta} \right]^2 \\ &= \langle \delta^2 f \rangle_c(\beta) + \beta^2 \frac{N}{\beta^2} \left(N \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_c}{\partial \beta} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \langle f \rangle_c(\beta)}{\partial \beta} \right]^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$= \langle \delta^2 f \rangle_c(\beta) + \left(\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_c}{\partial \beta} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \langle f \rangle_c(\beta)}{\partial \beta} \right]^2. \quad (5.30)$$

Com a métrica de Eisenhart, a curvatura de Ricci é dada por:

$$K_R(q) = \Delta V,$$

enquanto a curvatura média definida como $k_R = \frac{K_R}{N-1}$ corresponde a:

$$k_R = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta_l^2}. \quad (5.31)$$

Sendo:

$$V(\theta) = \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) = \frac{c}{2N} (N^2 - \cos(\theta_i - \theta_j)),$$

então:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_l} = \frac{c}{2N} \left(\sum_{l,j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) - \sum_{i,l=1}^N \sin(\theta_i - \theta_l) \right), \quad (5.32)$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_l^2} = \frac{c}{2N} \left(\sum_{l,j=1}^N \cos(\theta_l - \theta_j) + \sum_{i,l=1}^N \cos(\theta_i - \theta_l) \right). \quad (5.33)$$

Fazendo $i = j$ e considerando a paridade da função cosseno, temos que:

$$\Delta V = \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_l^2} = \frac{c}{N} \sum_{l,i=1}^N \cos(\theta_l - \theta_i). \quad (5.34)$$

Portanto, como estamos no limite termodinâmico:

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{1}{N} \frac{c}{N} \sum_{l,i=1}^N \cos(\theta_l - \theta_i) = c - \frac{N^2 c}{N^2} + \sum_{l,i=1}^N \cos(\theta_l - \theta_i) \\ &= c - \frac{2c}{2N^2} (N^2 - \sum_{j=1}^N \cos(\theta_l - \theta_i)) \\ &= c - \frac{2}{N-1} \left(\frac{c}{2N} \left(\sum_{l,i=1}^N (1 - \cos(\theta_l - \theta_i)) \right) \right) \\ &= c - \frac{2}{N-1} V(\theta). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Pela definição (5.13), podemos escrever a curvatura média em termos do parâmetro de ordem:

$$k_R = c - \frac{2}{N-1} V(\theta) = c \|\mathbf{M}\|^2. \quad (5.36)$$

Definindo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle V(\theta) \rangle_c &= -\partial_\beta \log(Z) \\ \langle (V(\theta) - \langle V(\theta) \rangle_c)^2 \rangle_c &= \partial_\beta^2 \log(Z) \end{aligned} \quad (5.37)$$

obtemos,

$$\langle k_R \rangle_c = c + \frac{2}{N} \partial_\beta \log(Z) \quad (5.38)$$

$$\langle \delta^2 K_R \rangle_c = \frac{4}{N} \partial_\beta^2 \log(Z). \quad (5.39)$$

5.3 Estimativa Analítica para o Expoente de Lyapunov

Para estimarmos o expoente de Lyapunov, consideremos os dois casos a seguir:

- 1º Caso: $\varepsilon < \varepsilon_c$.

Neste caso, o método de ponto de sela (apêndice D) nos fornece a seguinte estimativa para a função $Z(\beta, N)$:

$$Z_c(\beta, N) \approx (2\pi)^N \frac{N\bar{z}}{\beta c} \exp(-N\psi(\bar{z}, \beta)) \sqrt{2\pi} \left(N\partial_{\beta}^2(\psi(\bar{z}, \beta)) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.40)$$

que no limite termodinâmico resulta em:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(Z) = \frac{1}{N} (N\psi(\bar{z})) - \frac{1}{2N} \log \frac{\rho N}{2\pi} + \frac{1}{N} \log \exp(i\phi) \approx \psi(\bar{z}). \quad (5.41)$$

Disto:

$$\frac{1}{N} \partial_{\beta} \log(Z) \approx -\partial_{\beta}(\psi(\bar{z}(\beta), \beta)). \quad (5.42)$$

Portanto, pela aproximação acima:

$$\langle k_R \rangle_c = c + \frac{2}{N} \partial_{\beta} \log(Z) \approx c - 2\partial_{\beta}(\psi(\bar{z}(\beta), \beta)). \quad (5.43)$$

Observe também que:

$$\partial_{\beta}(\psi(\bar{z}(\beta), \beta)) = \frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} + \partial_{\beta} \psi|_{\bar{z}}. \quad (5.44)$$

Logo,

$$\langle k_R \rangle_c \approx c - 2\partial_{\beta}(\psi(\bar{z}(\beta), \beta)) = c - 2\frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} - 2\partial_{\beta} \psi|_{\bar{z}}. \quad (5.45)$$

Calculando explicitamente as derivadas do lado direito da equação acima:

$$\frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\beta c} \frac{d\bar{z}}{d\beta} - \frac{d}{d\bar{z}}(\log I_0(\bar{z})) \frac{d\bar{z}}{d\beta} \quad (5.46)$$

e

$$\partial_{\beta} \psi|_{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\beta c} \frac{d\bar{z}}{d\beta} - \frac{\bar{z}^2}{2c\beta^2} - \frac{d}{d\bar{z}}(\log I_0(\bar{z})) \frac{d\bar{z}}{d\beta} + \frac{c}{2} + \frac{1}{2\beta}, \quad (5.47)$$

obtemos:

$$\langle k_R \rangle_c \approx c - 2\frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} - 2\partial_{\beta} \psi|_{\bar{z}} = c - 2 \left(\frac{c}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2c\beta^2} + \frac{1}{2\beta} \right). \quad (5.48)$$

Usando a equivalência entre os ensembles canônico e microcanônico no limite termodinâmico:

$$\langle k_R \rangle_{\mu} \approx \frac{\bar{z}^2}{c\beta^2} = \frac{\mathbf{M}^2}{c} - \frac{1}{\beta} \quad (5.49)$$

A flutuação de k_R será determinada de acordo com (5.30), ou seja:

$$\langle \delta^2 k_R \rangle_\mu(\varepsilon) = \langle \delta^2 k_R \rangle_c(\beta) + \left(\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_c}{\partial \beta} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \langle k_R \rangle_c(\beta)}{\partial \beta} \right]^2. \quad (5.50)$$

Calculando $\partial_\beta \langle \varepsilon \rangle_c$:

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle_c}{\partial \beta} = \frac{-2 - \beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c}{4\beta^2}. \quad (5.51)$$

e uma vez que $\partial_\beta \langle k_R \rangle_c = \frac{1}{2} \langle \delta^2 K_R \rangle_c$:

$$\begin{aligned} \langle \delta^2 k_R \rangle_\mu &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c + \frac{4\beta^2}{-2 - \beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c} \cdot \frac{1}{4} (\langle \delta^2 K_R \rangle_c)^2 \\ &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c \left(1 + \frac{\beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c}{-2 - \beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c} \right) \\ &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c \left(1 + \frac{\beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c}{2} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde

$$\langle \delta^2 K_R \rangle_c = \frac{4}{N} \partial_\beta^2 \log Z_c \approx \frac{4\bar{z}}{\beta^2 c} \left(\partial_\beta \bar{z} - \frac{\bar{z}}{\beta} \right) + \frac{4}{\beta^2}. \quad (5.53)$$

Substituindo (5.49) e (5.53) na expressão (4.61) obtemos o maior expoente de Lyapunov.

Quando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$ temos que, a seguinte lei de escala, nos fornece (5), (34):

$$\lambda_1 \propto (\varepsilon - \varepsilon_c)^{\frac{1}{6}}. \quad (5.54)$$

A dependência das quantidades geométricas expressas em (5.49) e (5.53) em relação a U estão de acordo com os resultados obtidos em (5) e são representadas na seguinte ilustração.

- 2º Caso: $\varepsilon > \varepsilon_c$.

Neste caso, uma aproximação $Z(\beta, N)$ é dada por (5):

$$Z(\beta, N) \approx (2\pi)^N \exp\left(\frac{-N\beta c}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta c^{-1}}{2}\right). \quad (5.55)$$

Sendo $\varepsilon > \varepsilon_c$, $\|\mathbf{M}\|^2$ é de ordem $O(N^{-1})$, disto, usando:

$$k_R = c\|\mathbf{M}\|^2 - \frac{c}{2} + O(N^{-2}), \quad (5.56)$$

obtemos:

$$\langle k_R \rangle_\mu = c + \frac{2}{N} \partial_\beta \log(Z) - \frac{c}{N} + O(N^{-2}). \quad (5.57)$$

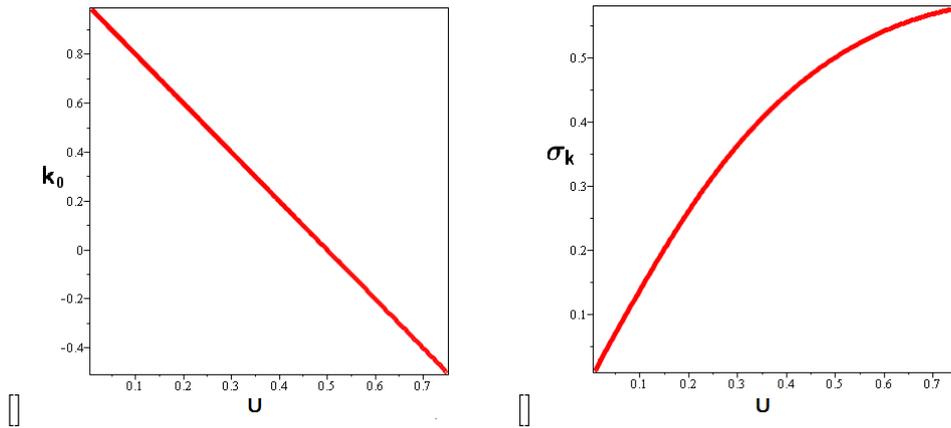


Figura 8 – Modelo XY de Alcance Infinito: (a) média da curvatura de Ricci e (b) flutuação da curvatura de Ricci como função da Energia U abaixo da transição de fase em $\epsilon_c = \frac{3}{4}$.

Por (5.55):

$$\log(Z) = N \log(2\pi) - \frac{N\beta c}{2} - \log\left(1 - \frac{\beta c}{2}\right). \quad (5.58)$$

e conseqüentemente:

$$\partial_\beta \log(Z) = -\frac{Nc}{2} + \frac{c}{(2 - \beta c)} \Rightarrow \frac{2}{N} \partial_\beta \log(Z_c) = -c + \frac{2c}{N(2 - \beta c)}. \quad (5.59)$$

Logo, (5.57) é da forma:

$$\langle k_R \rangle_\mu = \frac{\beta c^2}{N(2 - \beta c)} + O(N^{-2}). \quad (5.60)$$

Note que no limite termodinâmico, temos que $\langle k_R \rangle_\mu = 0$.

Conforme (5.59):

$$\partial_\beta^2 \log(Z) = c^2(2 - \beta c)^{-2} \quad (5.61)$$

Conseqüentemente:

$$\langle \delta^2 k_R \rangle_c = \frac{4}{N} \partial_\beta^2 \log(Z) = \frac{4c^2}{N} (2 - \beta c)^{-2} = O(N^{-1}), \quad (5.62)$$

e em caso análogo ao anterior, no limite termodinâmico $\langle \delta^2 k_R \rangle_c = 0$.

Uma vez que, $\epsilon(\beta) \approx \frac{1}{2\beta} + \frac{c}{2}$, o termo de correção para determinarmos a média microcanônica da flutuação da curvatura é $O(N^{-2})$ podendo ser assim negligenciado. Desta forma:

$$\langle \delta^2 k_R \rangle_\mu \approx \langle \delta^2 K_R \rangle_c + O(N^{-2}) = O(N^{-1}), \quad (5.63)$$

que similarmente aos casos anteriores, no limite termodinâmico, $\langle \delta^2 k_R \rangle_\mu = 0$.

Substituindo os termos de maior ordem em (4.61):

$$\lambda_1 \approx \frac{4^{\frac{1}{3}} c \sqrt{\beta c}}{(2 - \beta c)^{\frac{3}{2}}} N^{-\frac{1}{3}}. \quad (5.64)$$

Nesta região $\varepsilon > \varepsilon_c$, temos que (34), (35):

$$\lambda_1 \propto N^{-\frac{1}{3}}, \quad (5.65)$$

ou seja, $\lambda_1 \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

Conforme ilustração abaixo, é possível observar que neste modelo, no limite termodinâmico, o expoente sofre mudanças drásticas devido a transição de fase. Para $\varepsilon < \varepsilon_c$ o expoente é positivo, ou seja, esta região o sistema apresenta uma sensibilidade as condições iniciais. Na energia crítica e para $\varepsilon > \varepsilon_c$, uma vez que, a média e a flutuação da curvatura de Ricci são zero, o valor do expoente cai para zero e permanece no mesmo respectivamente, nesta região o sistema é integrável (9).

É importante lembrarmos que a fórmula analítica (4.61) para obtermos o expoente de Lyapunov, considera apenas pequenas flutuações na curvatura, o que de fato, pode não ocorrer em sistema com transição de fase. Portanto, de modo geral, na vizinhança de transição de fase, pode não haver uma boa aproximação entre os resultados de λ_1 obtidos por simulação numérica e os resultados analíticos em (4.61).

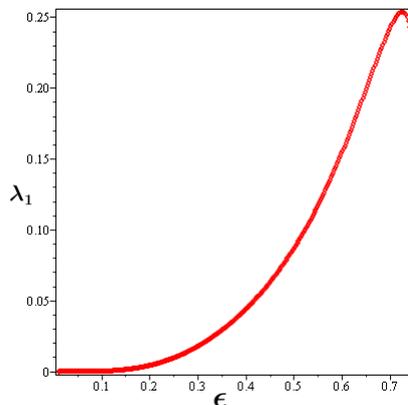


Figura 9 – Ilustração do máximo Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico como função da energia abaixo da transição de fase em $\varepsilon_c = \frac{3}{4}$.

5.4 Modelo XY de Alcance Infinito com $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$

Uma vez que reproduzimos de maneira exata os resultados para o modelo XY à campo nulo, podemos dar um passo adiante e analisar um problema original, a saber, o modelo

XY de alcance infinito para um campo arbitrário na direção x do referencial escolhido. Neste caso, o modelo é definido pelo seguinte hamiltoniano:

$$H(p, \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i. \quad (5.66)$$

Este modelo já foi discutido em (36) e (37) e possui propriedades termodinâmicas relevantes, por exemplos, metaestabilidade e loops de Van der Walls para $0 < h \leq 1$.

Nosso objetivo é determinarmos a solução, as quantidades geométricas e conseqüentemente obtermos uma estimativa para o expoente de Lyapunov e comparar as quantidades encontradas com a termodinâmica do modelo.

Em caso análogo ao caso $h = 0$, a solução canônica para (5.66) é obtida calculando a função de partição:

$$Z(\beta, N) = \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp(-\beta H), \quad (5.67)$$

ou equivalentemente:

$$Z(\beta, N) = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}} \cdot Z_c(\beta, N), \quad (5.68)$$

onde

$$Z_c(\beta, N) = \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp(-\beta V(\theta)), \quad (5.69)$$

e

$$V(\theta) = \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i = \frac{cN}{2} (1 - \|\mathbf{M}\|^2) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i. \quad (5.70)$$

Substituindo (5.70) em (5.69) temos que:

$$\begin{aligned} Z_c(\beta, N) &= \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp(-\beta V(\theta)) \\ &= \exp\left(-\beta \frac{cN}{2}\right) \cdot \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \left(\beta \frac{cN}{2} \|\mathbf{M}\|^2\right) \cdot \exp\left(\beta h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Utilizando a transformação de Hubbard-Stratonovich:

$$\exp\left(\frac{Av^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + \sqrt{2A}u \cdot v\right), \quad (5.72)$$

com u, v vetores bidimensionais e $A > 0$, temos que:

$$\exp\left(\frac{\beta cN}{2} \mathbf{M}^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + 2\sqrt{\frac{\beta cN}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right). \quad (5.73)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
Z_c(\beta, N) &= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) \cdot \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\left(-u^2 + 2\sqrt{\frac{\beta c N}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp\left(\beta h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right) \right] \\
&= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) \cdot \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \frac{1}{\pi} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c N}{2}} u \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp\left(\beta h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right) \right]. \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Pela definição (5.2) a equação acima tem a forma:

$$\begin{aligned}
Z_c(\beta, N) &= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c N}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N^2}} \sum_{i=1}^N (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2) \right) \right] \cdot \exp\left(\beta h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right) \\
&= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int \prod_{i=1}^N d\theta_i \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{i=1}^N \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} \cdot (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2) \right) \right] \cdot \exp\left(\beta h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i\right) \\
&= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^N \exp(\beta h \cos \theta_i) d\theta_i \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp(-u^2) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{i=1}^N \exp\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} (u_1 \cos \theta_1 + u_2 \cos \theta_2) \right) \right] \\
&= \exp\left(-\beta\frac{cN}{2}\right) (2\pi I_0(\beta h))^N \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \times \left[2\pi I_0\left(2\sqrt{\frac{\beta c}{2N}} u\right) \right]^N du,
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $\int_0^{2\pi} \exp(\beta h \cos \theta) d\theta = I_0(\beta h)$ com $I_0(\beta h)$ a função de Bessel modificada de ordem zero.

Realizando uma mudança de variáveis $u \rightarrow z\sqrt{\frac{N}{2\beta c}}$, obtemos:

$$Z_c(\beta, N) = (2\pi I_0(\beta h))^N \frac{N}{\beta c} \int_0^\infty \exp\left[-N\left(\frac{z^2}{2\beta c} - \log(I_0(z)) + \frac{\beta c}{2}\right)\right] dz, \tag{5.75}$$

Uma vez que:

$$(2\pi I_0(\beta h))^N = \exp(N \log(2\pi I_0(\beta h)))$$

e

$$I_n(x+y) = \sum_k I_k(x) I_{n-k}(y)$$

Então:

$$Z_c(\beta, N) = \frac{N}{\beta c} \int_0^\infty \exp \left[-N \left(\frac{z^2}{2\beta c} - \log(2\pi I_0(z + \beta h)) + \frac{\beta c}{2} \right) \right] dz. \quad (5.76)$$

Deste modo:

$$Z(\beta, N) = \frac{N}{\beta c} \int_0^\infty \exp [-N\beta\psi(z, \beta, h)] dz. \quad (5.77)$$

com

$$\psi(z, \beta, h) = \frac{z^2}{2\beta^2 c} - \frac{1}{\beta} \log(2\pi I_0(z + \beta h)) - \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) + \frac{c}{2}.$$

Calculando a integral pelo método ponto de sela em (5.77), a energia livre de Helmholtz definida em (5.22) corresponde a:

$$F = \frac{c}{2} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{|z|^2}{2\beta c} - \log 2\pi I_0(z + \beta h) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) \right] \quad (5.78)$$

com z satisfazendo a equação auto-consistente:

$$\partial_z \psi(z, \beta, h) = 0,$$

ou seja,

$$\partial_z \psi(z, \beta, h) = \frac{z}{\beta c} - \frac{I_1(z + \beta h)}{I_0(z + \beta h)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{\beta c} = \frac{I_1(z + \beta h)}{I_0(z + \beta h)} = \mathbf{M}(z, \beta, h). \quad (5.79)$$

Conforme (37) e (36) para $0 \leq h < 1$ a equação auto-consistente (5.79) apresenta três conjuntos soluções, cujo diagrama de M em função da temperatura T , da energia potencial por spin $E(\theta; h)$ e da energia por partícula $E = U$ podem ser visto nas figuras 10 – (a), 10 – (b) e 10 – (c) respectivamente.

O primeiro conjunto solução com M paralelo a h para $T > 0$ e antiparalelo para $T < 0$ corresponde as soluções estáveis, representado em 10–(b) pelas linhas contínuas e tracejadas respectivamente. Essas soluções estáveis são caracterizadas por $\frac{\partial M}{\partial T} < 0$ para $h > 0$ e $\frac{\partial M}{\partial T} > 0$ para $h < 0$.

O segundo conjunto com M paralelo a h para $T \geq 0$ corresponde a soluções metaestáveis, tais que $\frac{\partial M}{\partial T} > 0$ para $h > 0$ e $\frac{\partial M}{\partial T} < 0$ ilustradas para $h = \pm 0.25$ e $h = \pm 0.5$, que iniciam em $T = 0$ com $M = \pm 1$ e existem apenas até uma temperatura máxima $T_{\max}(h)$, definida por uma singularidade em $\frac{\partial M}{\partial T}|_{T=T_{\max}(h)} = \infty$.

O terceiro conjunto solução correspondente as soluções instáveis, com M anti-paralelo a h e $T \geq 0$, são caracterizados por $\frac{\partial M}{\partial T} < 0$ para $h > 0$ e $\frac{\partial M}{\partial T} > 0$ para $h < 0$, representadas pelas linhas tracejadas que iniciam em $T = 0$ com $M = -h$ e satisfazem as soluções metaestáveis até $T_{\max}(h)$.

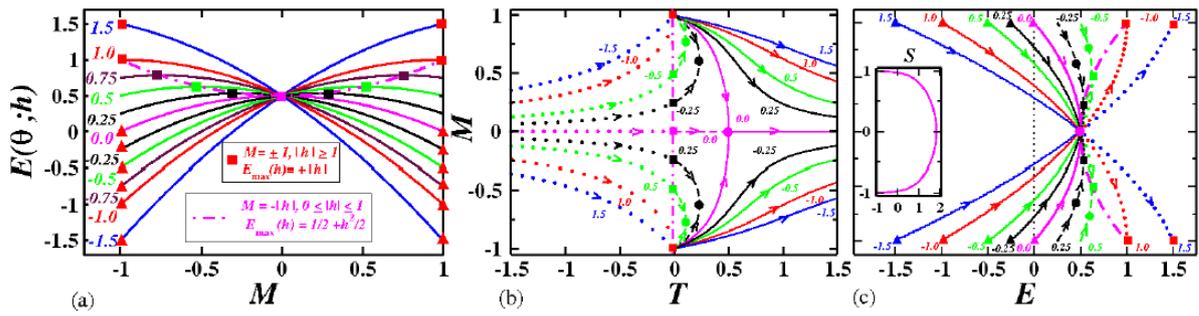


Figura 10 – Modelo XY de Alcance Infinito para $h \neq 0$: (a) magnetização M como função da energia potencial por spin $E(\theta; h)$. (b) Magnetização M como função da temperatura T . (c) magnetização M como função da energia por partículas $E = U$. As linhas contínuas e pontilhadas correspondem respectivamente a $T > 0$ e $T < 0$ (37).

Em $h = 1$, $T_{\max}(h) = 0$ e para $|h| > 1$ todas as soluções são estáveis.

A energia interna do sistema por partícula é dada por:

$$U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = \frac{c}{2}(1 - \mathbf{M}^2) + \frac{1}{2\beta} - h\mathbf{M}. \quad (5.80)$$

Determinaremos agora as quantidades de nosso interesse, a saber, A média e flutuação da curvatura de Ricci e o expoente de Lyapunov.

De maneira análoga as seções anteriores, uma vez que:

$$V(\theta) = \frac{c}{2N} \sum_{i,j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i = \frac{c}{2N} (N^2 - \sum_{i,j=1}^N \cos(\theta_i - \theta_j)) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i,$$

então:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_l} = \frac{c}{2N} \left(\sum_{l,j=1}^N \sin(\theta_l - \theta_j) - \sum_{i,l=1}^N \sin(\theta_i - \theta_l) \right) + h \sum_{i=1}^N \sin \theta_i. \quad (5.81)$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_l^2} = \frac{c}{2N} \left(\sum_{l,j=1}^N \cos(\theta_l - \theta_j) + \sum_{i,l=1}^N \cos(\theta_i - \theta_l) \right) + h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i. \quad (5.82)$$

Fazendo $i = j$ e tomando o fato que a função cosseno é uma função par, temos que:

$$\Delta V = \sum_{l=1}^N \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_l^2} = \frac{c}{N} \sum_{l,i=1}^N \cos(\theta_l - \theta_i) + h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i. \quad (5.83)$$

Por (5.35) temos que:

$$\begin{aligned}
k_R &= c - \frac{2}{N-1} \frac{c}{2N} \sum_{l,i=1}^N (1 - \cos(\theta_l - \theta_i)) - \frac{2}{N-1} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i + \frac{2}{N-1} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \\
&+ \frac{1}{N} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \\
&= c - \frac{2}{N-1} V(\theta) + \frac{3}{N} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Utilizando (5.2):

$$k_R = c - \frac{2}{N-1} V(\theta) + 3h\mathbf{m}_x. \tag{5.85}$$

e conseqüentemente:

$$\langle k_R \rangle_c = c - \frac{2}{N-1} \langle V(\theta) \rangle_c + 3h \langle \mathbf{m}_x \rangle_c. \tag{5.86}$$

Pelas relações definidas em (5.37) obtemos:

$$\langle k_R \rangle_c = c + \frac{2}{N} \partial_\beta \log(Z) + 3h \langle \mathbf{m}_x \rangle_c \tag{5.87}$$

$$\langle \delta^2 K_R \rangle_c = \frac{4}{N} \partial_\beta^2 \log(Z). \tag{5.88}$$

Finalmente, obteremos uma estimativa para o maior expoente de Lyapunov.

Sendo Z_c definida em (5.69), no limite termodinâmico, utilizando o método do ponto de sela temos a seguinte aproximação:

$$\frac{1}{N} \log(Z_c) \approx -\beta \psi(\bar{z}, \beta, h). \tag{5.89}$$

Disto:

$$\frac{1}{N} \partial_\beta \log(Z_c) \approx -\partial_\beta (\beta \psi(\bar{z}, \beta, h)). \tag{5.90}$$

Pela equação (5.87)

$$\langle k_R \rangle_c = c + \frac{2}{N} \partial_\beta \log(Z_c) + 3h\mathbf{m}_x \approx c - 2\partial_\beta (\beta \psi(\bar{z}, \beta, h)) + 3h\mathbf{m}_x. \tag{5.91}$$

Sendo

$$\partial_\beta (\psi(\bar{z}(\beta), \beta)) = \frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z (\beta \psi)|_{\bar{z}} + \partial_\beta (\beta \psi)|_{\bar{z}}, \tag{5.92}$$

então:

$$\langle k_R \rangle_c \approx c - 2\partial_\beta (\psi(\bar{z}(\beta), \beta)) = c - 2 \frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z (\beta \psi)|_{\bar{z}} - 2\partial_\beta (\beta \psi)|_{\bar{z}} + 3h\mathbf{m}_x. \tag{5.93}$$

Calculando explicitamente as derivadas do lado direito da equação acima:

$$\frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\beta c} \frac{d\bar{z}}{d\beta} - \frac{d}{d\bar{z}} (\log 2\pi I_0(\bar{z} + \beta h)) \frac{d\bar{z}}{d\beta} \tag{5.94}$$

e

$$\partial_\beta \psi|_{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\beta c} \frac{d\bar{z}}{d\beta} - \frac{\bar{z}^2}{2c\beta^2} - \frac{d}{d\bar{z}}(\log 2\pi I_0(\bar{z} + \beta h)) \left(\frac{d\bar{z}}{d\beta} + h \right) + \frac{c}{2} + \frac{1}{2\beta}, \quad (5.95)$$

temos que:

$$\langle k_R \rangle_c \approx c - 2 \frac{d\bar{z}}{d\beta} \partial_z \psi|_{\bar{z}} - 2 \partial_\beta \psi|_{\bar{z}} = c - 2 \left(\frac{c}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2c\beta^2} + \frac{1}{2\beta} - \mathbf{M}h \right) + 3h\mathbf{m}_x. \quad (5.96)$$

onde, $\frac{d}{d\bar{z}}(\log 2\pi I_0(\bar{z} + \beta h))h = \mathbf{M}h$.

Portanto,

$$\langle k_R \rangle_\mu \approx \frac{\bar{z}^2}{c\beta^2} - \frac{1}{\beta} + 2\mathbf{M}h + 3h\mathbf{m}_x. \quad (5.97)$$

Pela equação (5.79):

$$\langle k_R \rangle_\mu \approx \frac{1}{c} \mathbf{M}^2 - \frac{1}{\beta} + 2\mathbf{M}h + 3h\mathbf{m}_x \quad (5.98)$$

Determinemos agora a flutuação de k_R conforme a definição (5.30).

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial(\beta F)}{\partial\beta} = \frac{1}{2\beta} + \frac{c}{2}(1 - \mathbf{M}^2) - h\mathbf{M} \\ &= \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{N} \left(\frac{cN}{2}(1 - \mathbf{M}^2) \right) - \frac{1}{N} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i + \frac{1}{N} h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i - \mathbf{M}h \\ &= \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{N} \left(\frac{cN}{2}(1 - \mathbf{M}^2) - h \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \right) - \mathbf{M}h + h\mathbf{m}_x \\ &= \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{N} V(\theta) - \mathbf{M}h + h\mathbf{m}_x. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Consequentemente:

$$\langle \varepsilon \rangle_c = \frac{1}{N} \langle V(\theta) \rangle_c - \mathbf{M}h + h \langle \mathbf{m}_x \rangle_c, \quad (5.100)$$

e

$$\partial_\beta \langle \varepsilon \rangle_c = \frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{N} \partial_\beta \langle V(\theta) \rangle_c - h \partial_\beta(\mathbf{M}). \quad (5.101)$$

Por (5.37) e (5.39):

$$\partial_\beta \langle \varepsilon \rangle_c = \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{4} \langle \delta^2 K_R \rangle - h \partial_\beta(\mathbf{M}). \quad (5.102)$$

Deste modo, a flutuação da curvatura de Ricci é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \delta^2 k_R \rangle_\mu &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c + \frac{4\beta^2}{-4\beta^2 h \partial_\beta - 2 - \beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c} \cdot \frac{1}{4} (\langle \delta^2 K_R \rangle)^2 \\ &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c \left(1 + \frac{\beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c}{-4\beta^2 h \partial_\beta - 2 - \beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c} \right) \\ &= \langle \delta^2 K_R \rangle_c \left(1 + \frac{\beta^2 \langle \delta^2 K_R \rangle_c}{2 + 4\beta^2 h \partial_\beta(\mathbf{M})} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

com

$$\langle \delta^2 K_R \rangle_c = \frac{4}{N} \partial_\beta^2 \log Z \approx \frac{4\bar{z}}{\beta^2 c} \left(\partial_\beta \bar{z} - \frac{\bar{z}}{\beta} \right) + \frac{4}{\beta^2} - 4Mh. \quad (5.104)$$

Substituindo as quantidades geométricas:

$$\Omega_0 \equiv \langle k_R \rangle_\mu \quad \text{e} \quad \sigma_\Omega^2 \equiv \langle \delta^2 k_R \rangle_\mu,$$

na expressão (4.61) obtemos o maior expoente de Lyapunov.

A dependência das quantidades geométricas expressas em (5.98) e (5.103) em relação a energia potencial por partícula E e em relação a energia por partícula U tomando $c = 1$, são representadas nas ilustrações 11, 13, 16 e 17 para os campos $h = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ e 1.5 . As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25, 0.5$ e 0.75 e as linhas em azul e preto correspondem as soluções para $T > 0$ e $T < 0$ respectivamente. Observe que, para energia por partícula U não temos a existência da temperatura negativa devido ao termo cinético que é um termo quadrático. O intuito de plotarmos também com a energia potencial é que a mesma nos fornece uma análise mais clara, uma vez que, é limitada.

Os resultados geométricos que obtemos estão em boa sintonia com os resultados analíticos e com a dinâmica para este modelo. Inicialmente note que tomando $h = 0$ nas expressões geométricas, retomamos ao modelo apresentado por (5) tanto para a média e flutuação da curvatura de Ricci quanto para o expoente de Lyapunov. Observe também que a energia potencial U de fato possui mínimo em $U_{\min} = -|h|$ e máximo em $U_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2}$ para $0 < h \leq 1$ e $U_{\max} = h$ para $h \geq 1$.

Em caso análogo à termodinâmica, o ponto $h = 1$ altera toda a dinâmica do modelo. Neste ponto a média da curvatura de Ricci ilustrada na figura 11 passa a ser negativa. Note que tanto em 14 quanto em 20 existe uma divergência para $E_c = 0.5$ correspondente a temperatura infinita e esta divergência foi suprimida para $h > 1$. O mesmo ocorre em 17 e 20, entretanto, como agora temos a energia por partícula e a mesma não é limitada então essa divergência não ocorre necessariamente na energia crítica U_c .

Como pode ser visto nas ilustrações 18 e 19 o expoente de Lyapunov tende a zero nas soluções metaestáveis o que era de esperar, uma vez que, termodinamicamente as soluções metaestáveis tendem a solução estável na presença de uma perturbação.

Quanto ao comportamento do sistema é possível observar na figura 20 e 21 que para $0 < h \leq 1$ o expoente de Lyapunov é positivo o que nos prediz que o sistema é sensível as condições iniciais nesse intervalo. Entretanto, para o caso $h > 1$ o expoente tende a zero, isto indica, supondo a validade da teoria existente, que na região $h > 1$ o sistema é integrável e na região $0 < h \leq 1$ o sistema é não integrável. Portanto, a integrabilidade pode está associada a metaestabilidade.

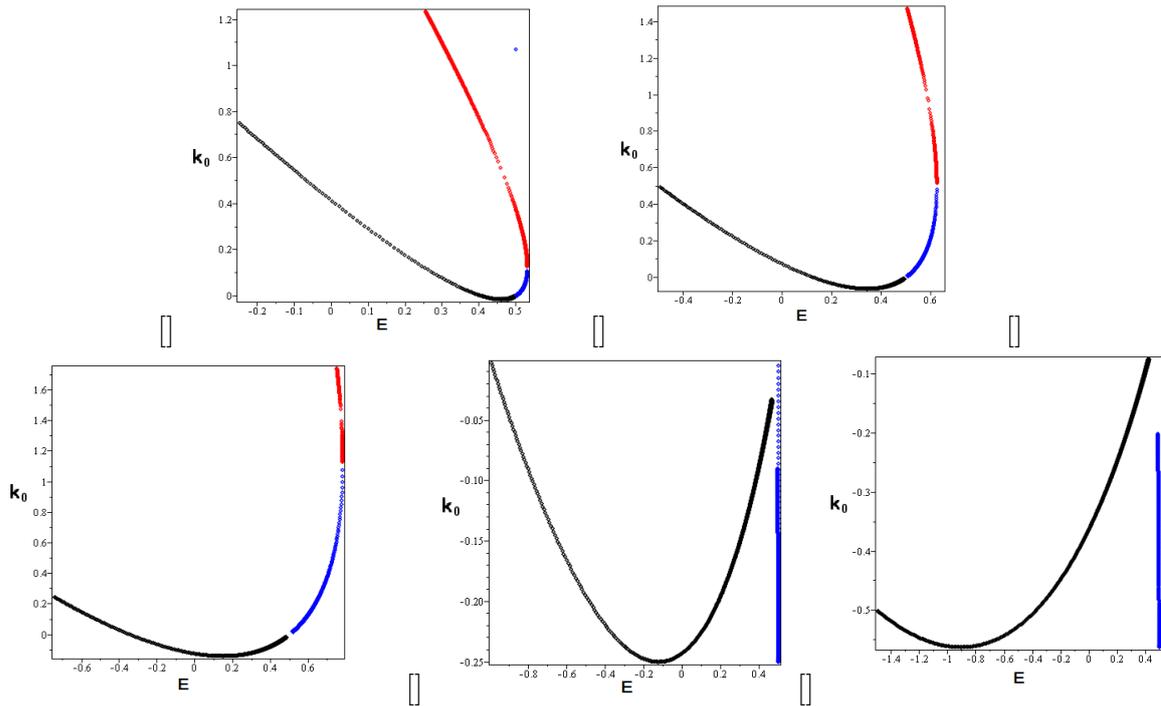


Figura 11 – Média da curvatura de Ricci como função da Energia E , no modelo XY de alcance infinito, para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25, 0.5$ e 0.75 ; as linhas em azul e preto correspondem as soluções estáveis para $T > 0$ e $T < 0$ respectivamente.

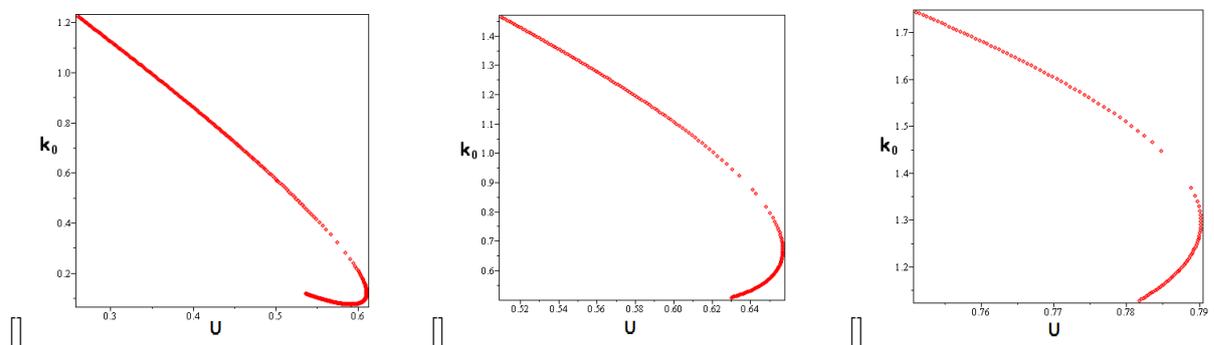


Figura 12 – Modelo XY de Alcance Infinito: média da curvatura de Ricci para as soluções metaestáveis como função da Energia U nos campos (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$ e (c) $h = 0.75$.

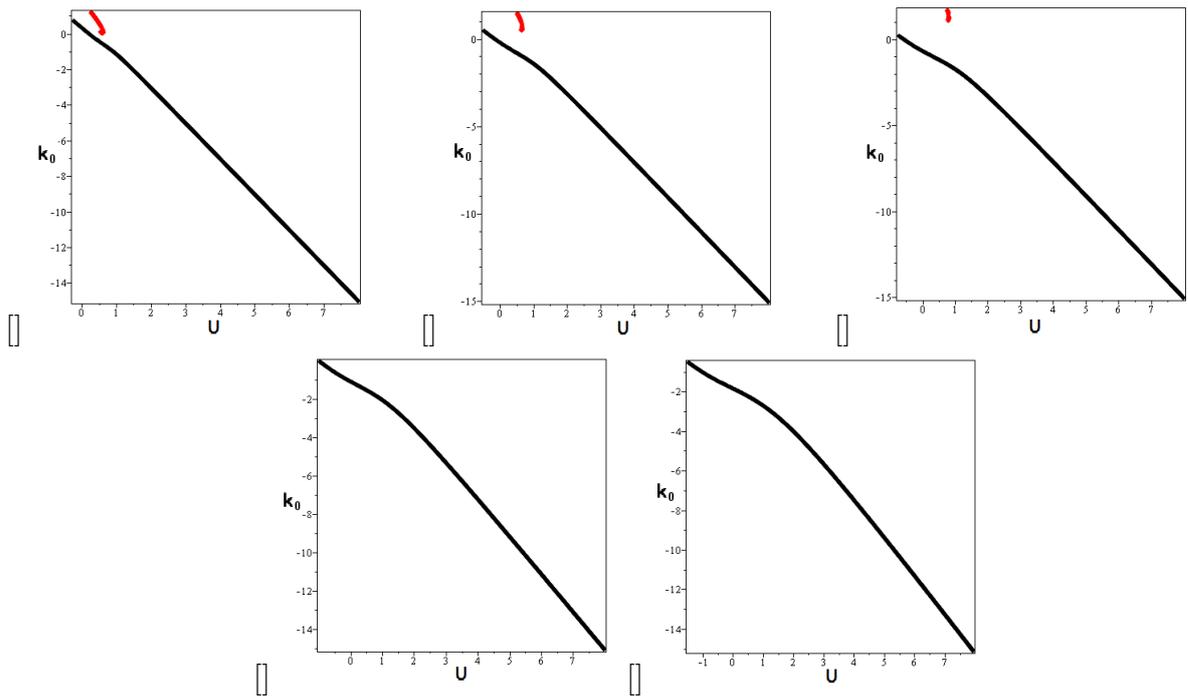


Figura 13 – Média da curvatura de Ricci como função da Energia U , no modelo XY de alcance infinito, para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25$, 0.5 e 0.75 e as linhas preto correspondem as soluções estáveis para $T > 0$.

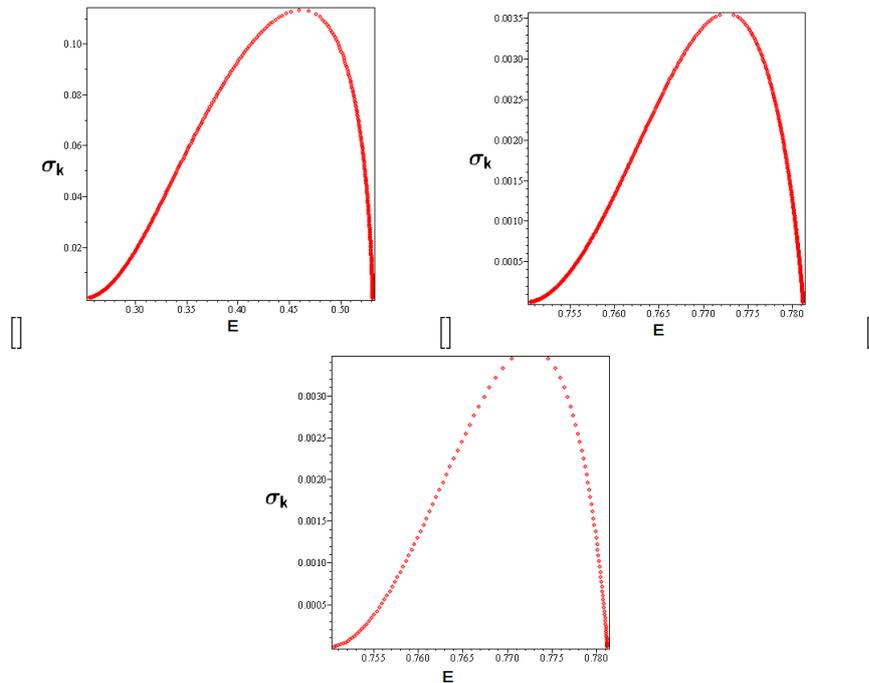


Figura 14 – Modelo XY de Alcance Infinito: flutuação da curvatura de Ricci para as soluções metaestáveis como função da Energia E nos campos (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$ e (c) $h = 0.75$.

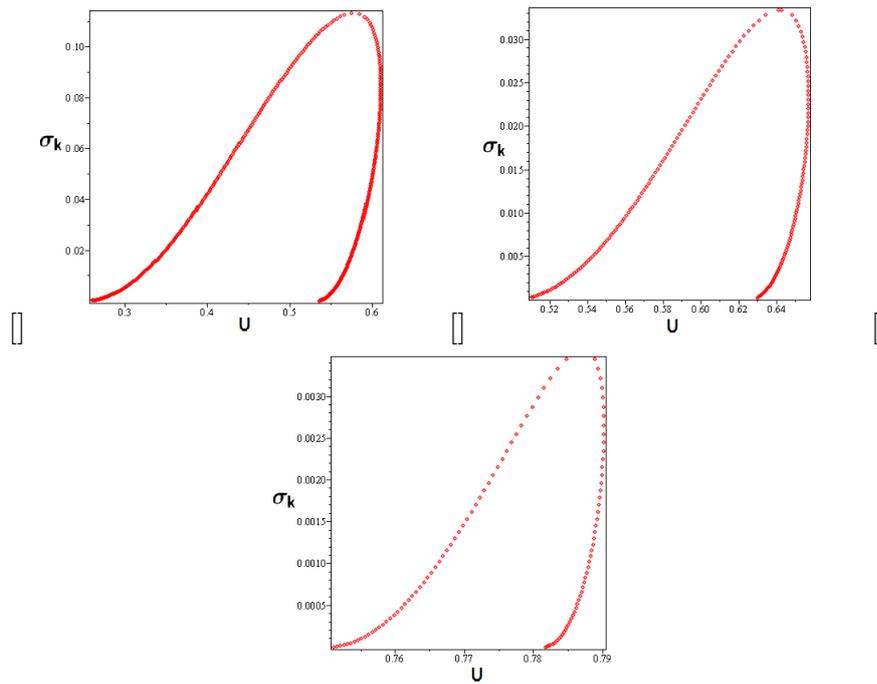


Figura 15 – Modelo XY de Alcance Infinito: flutuação da curvatura de Ricci para as soluções metaestáveis como função da Energia U nos campos (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$ e (c) $h = 0.75$.

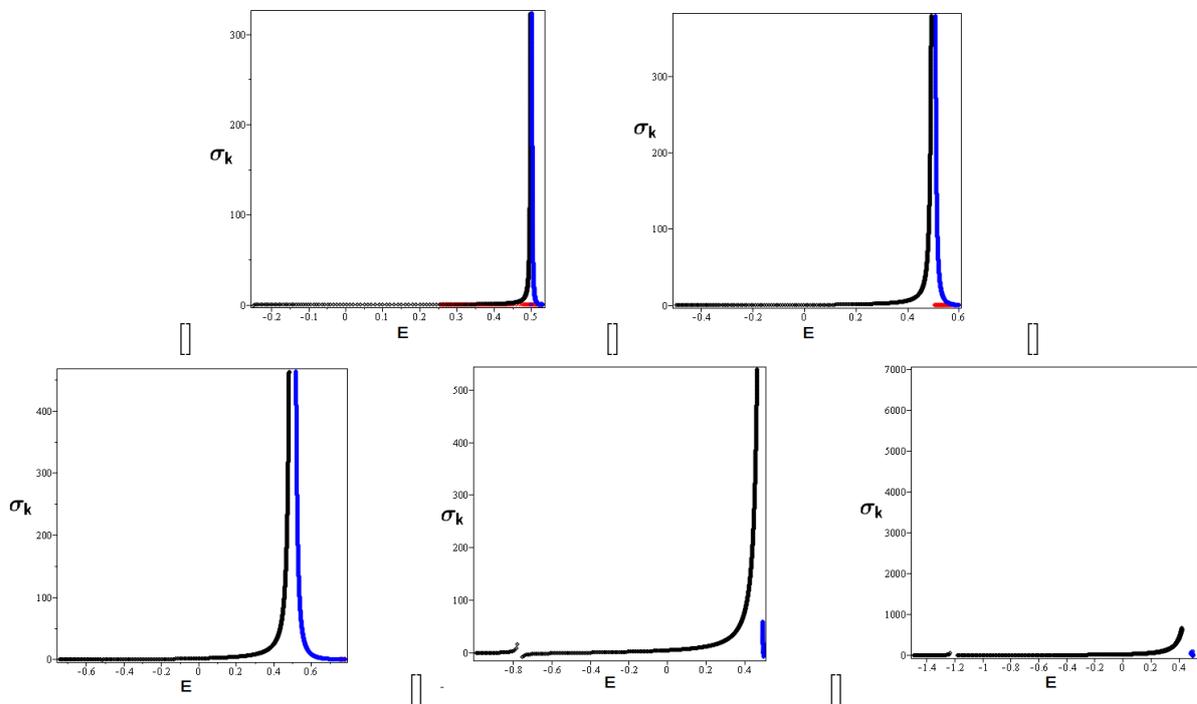


Figura 16 – Flutuação da Média da curvatura de Ricci como função da Energia E , no modelo XY de alcance infinito, para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25$, 0.5 e 0.75 , as linhas em azul e preto correspondem as soluções estáveis para $T > 0$ e $T < 0$ respectivamente.

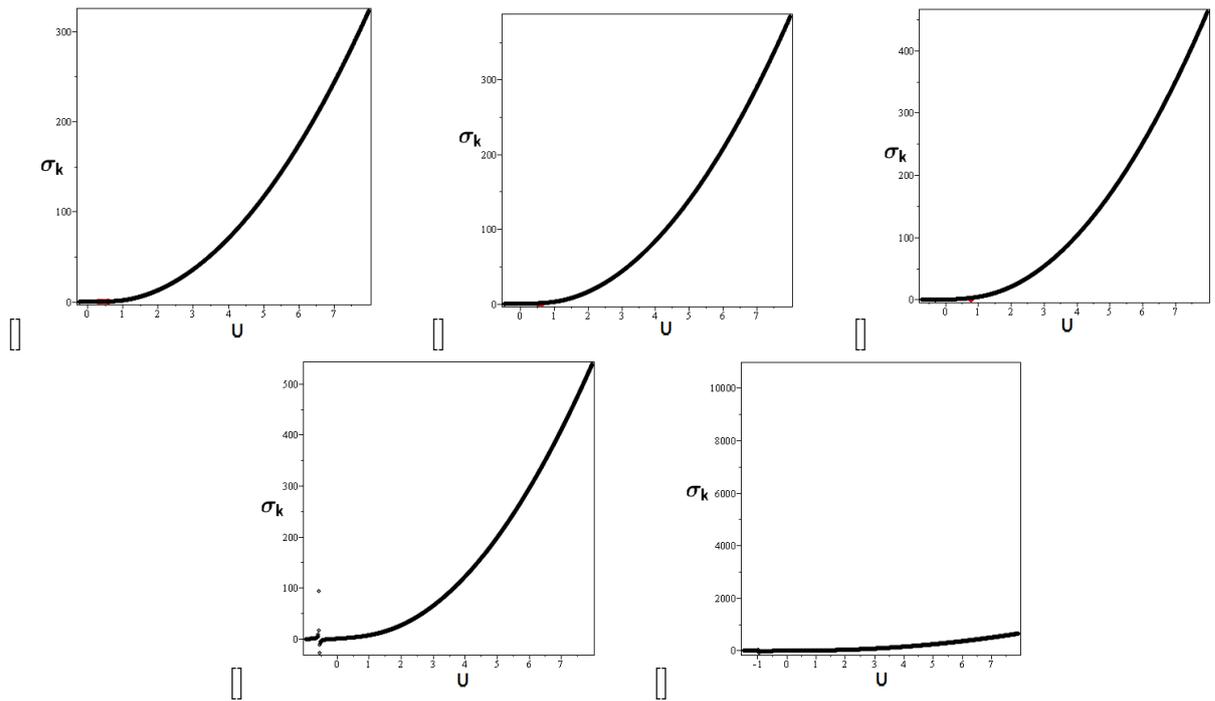


Figura 17 – Flutuação da Média da curvatura de Ricci como função da Energia U , no modelo XY de alcance infinito, para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25, 0.5$ e 0.75 e as linhas em preto correspondem as soluções estáveis para $T > 0$.

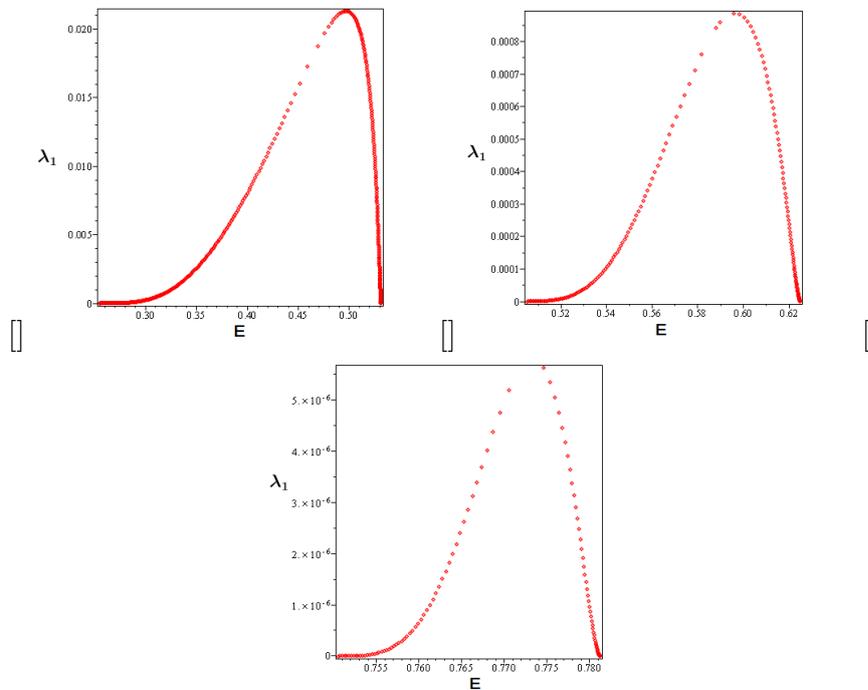


Figura 18 – Ilustração do máximo Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico como função da energia E para as soluções metaestáveis nos campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$ e (c) $h = 0.75$.

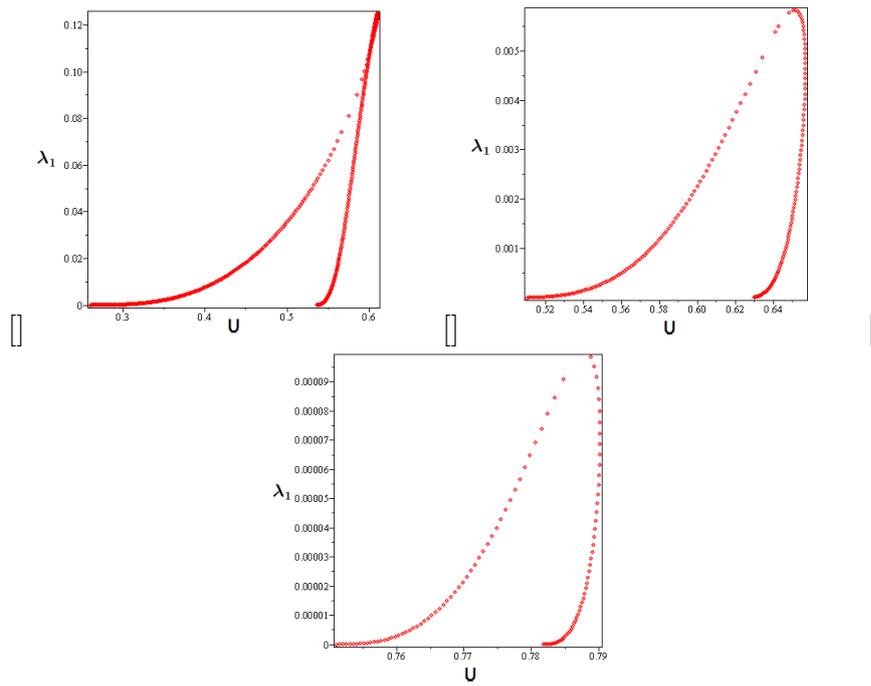


Figura 19 – Ilustração do máximo Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico como função da energia U para as soluções metaestáveis nos campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$ e (c) $h = 0.75$.

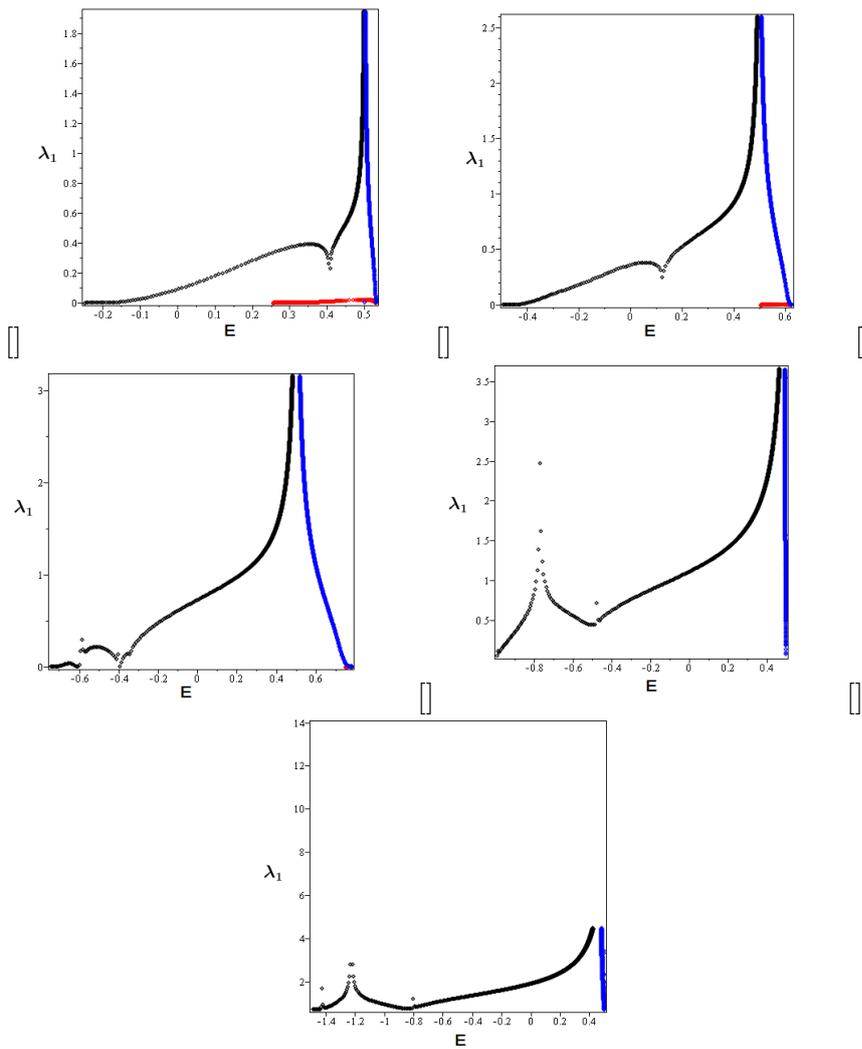


Figura 20 – Ilustração do máximo Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico como função da energia E para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25, 0.5$ e 0.75 , as linhas em azul e preto correspondem as soluções estáveis para $T > 0$ e $T < 0$ respectivamente.

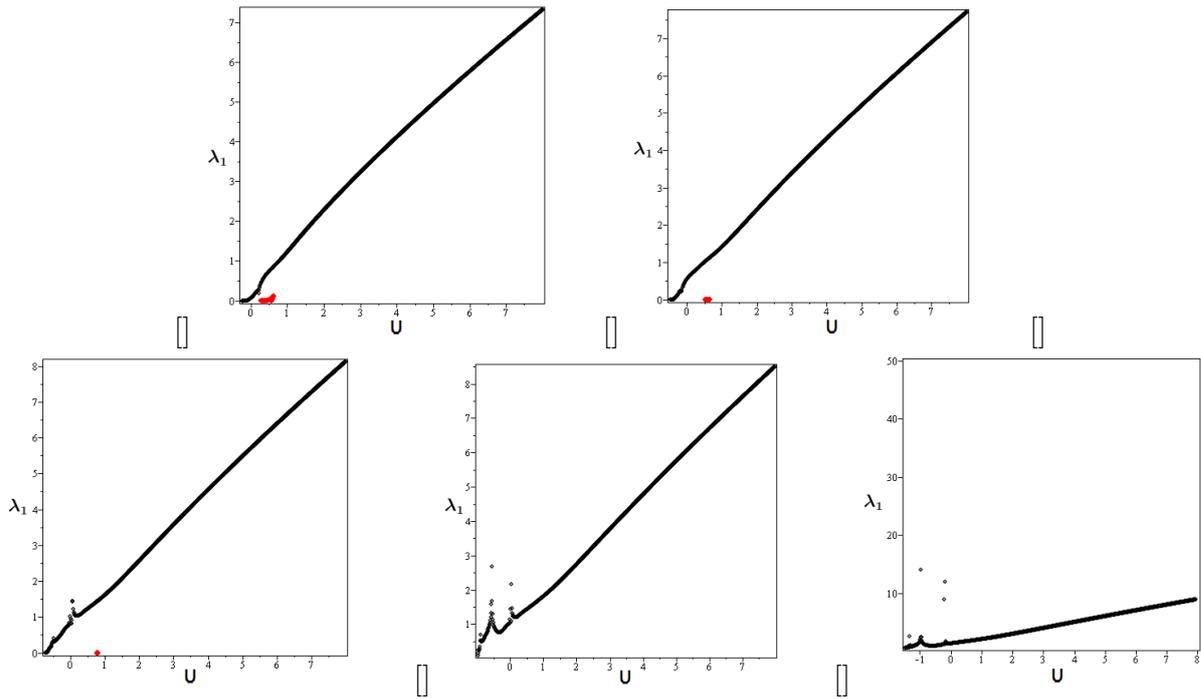


Figura 21 – Ilustração do máximo Expoente de Lyapunov no limite termodinâmico como função da energia U para os campos: (a) $h = 0.25$, (b) $h = 0.5$, (c) $h = 0.75$, (d) $h = 1.0$ e (e) $h = 1.5$. As linhas em vermelho correspondem as soluções metaestáveis que são apresentadas nos campos $h = 0.25$, 0.5 e 0.75 e as linhas em azul correspondem as soluções estáveis para $T > 0$.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, estudamos a dinâmica hamiltoniana e discutimos a existência de soluções com comportamento caótico através de uma abordagem geométrica. No capítulo 1 apresentamos de forma geral o formalismo hamiltoniano e o expoente de Lyapunov que consiste em um mecanismo para medir a sensibilidade às condições iniciais de um sistema dinâmico.

No capítulo 2, realizamos a geometrização da dinâmica e obtivemos uma relação entre a equação de Jacobi e a estabilidade/instabilidade do sistema.

No capítulo 3 supondo algumas hipóteses geométricas e estatísticas obtemos uma forma analítica para o expoente de Lyapunov em função da combinação linear das escalas características de tempo, da média e da flutuação da curvatura de Ricci.

No capítulo 4 aplicamos a teoria descrita nos capítulos iniciais para o modelo XY de alcance infinito. Nas seções iniciais consideramos o caso $h = 0$, que nos permitiu validar a abordagem geométrica utilizada. Na última seção apresentamos a nossa contribuição original para esta pesquisa que consiste na extensão da teoria proposta para o modelo XY de campo médio para um campo arbitrário h na direção x do referencial escolhido, o que nos possibilita uma melhor compreensão para a dinâmica do respectivo modelo.

Como perspectivas futuras, do ponto vista formal, será interessante inicialmente investigarmos a expressão (3.19) correspondente ao tensor de Weyl, que mede a perda local de isotropia, com o intuito de um melhor entendimento da validade desta hipótese. A investigação desse tensor é impulsada pelo fato que, a teoria geométrica aqui descrita ainda não é uma teoria geral, e os resultados obtidos nem sempre possui uma boa aproximação para cada modelo. Além disso, resultados recentes indicam que esta hipótese apresenta uma boa funcionalidade apenas em variedades de topologias triviais (28).

Uma vez que observamos que o expoente de Lyapunov tende a zero para $h > 1$, indicando que na região onde este fato ocorre o sistema pode ser não integrável, faz-se necessário investigarmos também, de modo mais minucioso, se existe uma possível relação entre integrabilidade e metaestabilidade.

É importante ressaltarmos que a abordagem geométrica não constitui o único meio para calcular o expoente de Lyapunov. A escolha da mesma é devido ao fato que através dessa abordagem é possível obtermos uma estimativa para o expoente de Lyapunov e conseqüentemente compreendermos de maneira mais clara a origem do caos. De fato, introduzindo a métrica adequada, que no nosso caso foi a métrica de Eisenhart, obtemos

uma estimativa analítica razoavelmente simples para o expoente de Lyapunov. Apesar da geometria de Eisenhart nos fornecer expressões relativamente simples, a mesma apresenta uma estrutura matemática com poucas propriedades.

Por esse motivo, será importante investigarmos a estimativa para o expoente de Lyapunov introduzindo outras métricas e outras medidas, como por exemplo a métrica Finsleriana que além de apresentar uma boa estrutura geométrica com propriedades "ricas" matematicamente para trabalharmos com sistemas dinâmicos envolvendo interações eletromagnéticas é possível generalizarmos o teorema de Schur para variedades Riemannianas de curvatura constante.

Quanto à aplicação, dada a potencialidade dessa ferramenta, à inúmeras perspectivas de analisarmos o comportamento caótico de sistemas hamiltonianos que modelem os mais diversificados problemas.

Os resultados obtidos nessa dissertação contribuíram para um melhor entendimento das propriedades geométricas e dinâmicas associadas a termodinâmica do modelo XY de alcance infinito na presença do campo, em particular, a relação entre integrabilidade do sistema e a presença de soluções termodinâmicas metaestável.

A validade desses resultados devem ser objetivos de investigações futuras com uma fundamentação mais rigorosa.

REFERÊNCIAS

- 1 GLEICK, J. *Caos a criação de uma nova ciência*. 16. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1990. Citado na página 12.
- 2 AGUIAR, M. A. M. de. Caos em sistemas conservativos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SBF, v. 16, n. 1-4, p. 3–20, 1994. Citado na página 12.
- 3 MOREIRA, I. de C. Sistemas caóticos em física-uma introdução. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SBF, v. 15, n. 1-4, p. 163–181, 1993. Citado na página 12.
- 4 CASETTI, L.; PETTINI, M.; COHEN, E. G. D. Geometry and topology in hamiltonian dynamics and statistical mechanics. *Physics Reports 337*, p. 237–341, 2000. Citado na página 13.
- 5 FIRPO, M.-C. Analytic estimation of the lyapunov exponent in a mean-field model undergoing a phase transition. *Physical Review E*, APS, v. 57, n. 6, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 13, 70, 74, 78 e 87.
- 6 MEYER GLEN R. HALL, D. O. K. R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. New York: Springer, 1992. (Applied Mathematical Sciences 90). Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 21.
- 7 LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- 8 ECKMANN, J.-P.; RUELE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of modern physics*, APS, v. 57, n. 3, p. 617, 1985. Citado na página 20.
- 9 PETTINI, M. *Geometry and Topology in Hamiltonian Dynamics and Statistical Mechanics*. New York: Springer, 1993. (Interdisciplinary Applied Mathematics 33). Citado 9 vezes nas páginas 22, 32, 37, 40, 46, 55, 66, 80 e 100.
- 10 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. New York: Cambridge University Press, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.
- 11 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 3a. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. Citado na página 22.
- 12 OLIVEIRA, K.; VIANA, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 111.
- 13 SOLÉ, R. V.; MANRUBIA, S. C. *Orden y caos en sistemas complejos*. Barcelona: Univ. Politèc. de Catalunya, 2001. v. 2. (Politext Series 93, v. 2). Citado na página 25.
- 14 ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Berlim: Springer, 1989. v. 60. Citado na página 29.
- 15 PIN, O. C. Curvature and mechanics. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 269–311, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 42.

- 16 SZYDŁOWSKI, M. The general relativity dynamics in the eisenhart geometry. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 685–695, 2000. Citado na página 36.
- 17 EISENHART, L. P. Dynamical trajectories and geodesics. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 591–606, 1928. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 18 CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2011. (Projeto Euclides). Citado 3 vezes nas páginas 48, 54 e 100.
- 19 DODSON, C. T. J.; POSTON, T. *Tensor geometry: the geometric viewpoint and its uses*. 2. ed. New York: Springer, 1991. v. 130. Citado na página 52.
- 20 SINAI, Y. G. Dynamical systems ii. ergodic theory with applications to dynamical systems and statistical mechanics. *Encyclopaedia of mathematical sciences*, Springer, New York, 1989. Citado na página 54.
- 21 RULLI, C. C.; RINO, J. P. Oscilações paramétrica: uma simulação numérica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SBF, Brasil, v. 29, n. 1, p. 71–78, 2007. Citado na página 56.
- 22 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. et al. *Handbook of mathematical functions*. 10. ed. New York: NBS, 1972. (Applied Mathematics 55). Citado na página 57.
- 23 TOLMAN, R. C. *The principles of statistical mechanics*. New York: Dover Publications, 1979. Citado na página 59.
- 24 REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. 1. ed. USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1965. (McGraw-Hill Series in Fundamentals of Physics). Citado na página 59.
- 25 ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 63.
- 26 SALINAS, S. R. *Introdução a Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 1997. v. 9. Citado na página 59.
- 27 IVANCEVIC, T. T.; IVANCEVIC, V. G. *Complex nonlinearity: chaos, phase transitions, topology change, and path integrals*. Berlin: Springer, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 59, 62 e 63.
- 28 CERRUTI-SOLA, M. et al. Riemannian geometry of hamiltonian chaos: Hints for a general theory. *Physics Review E* 78, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 95.
- 29 COUTINHO-FILHO, M. D. *Notas de Aula de Mecânica Estatística*. Recife: Departamento de Física - UFPE, 2012. Citado na página 63.
- 30 KAMPEN, N. V. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3rd ed. ed. [S.l.]: Elsevier, 2007. (North-Holland personal library). Citado na página 67.
- 31 ANTONI, M.; RUFFO, S. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 52, n. 3, p. 2361, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 74.

- 32 DAUXOIS, T. et al. The hamiltonian mean field model: from dynamics to statistical mechanics and back. In: *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 458–487. Citado na página 74.
- 33 LEBOWITZ, J. L.; PERCUS, J. K.; VERLET, L. Ensemble dependence of fluctuations with application to machine computations. *Physical Review E*, APS, v. 153, n. 1, 1967. Citado na página 75.
- 34 ANTENEODO, C.; VALLEJOS, R. O. Scaling laws for the largest lyapunov exponent in long-range systems: A random matrix approach. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 1, p. 016210, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 80.
- 35 YAMAGUCHI, Y. Y. Slow relaxation at critical point of second order phase transition in a highly chaotic hamiltonian system. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 95, n. 4, p. 717–731, 1996. Citado na página 80.
- 36 SANTOS, F. A. N.; COUTINHO-FILHO, M. Topology, symmetry, phase transitions, and noncollinear spin structures. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 3, p. 031123, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 83.
- 37 SANTOS, F. A. N.; SILVA, L. C. B.; COUTINHO-FILHO, M. Topological approach to microcanonical thermodynamics and phase transition of interacting classical spins (submetido para publicação). Citado 3 vezes nas páginas 81, 83 e 84.
- 38 FRANKEL, T. *The geometry of physics: an introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado na página 100.
- 39 ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Citado na página 107.

APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

Apresentaremos os conceitos básicos e alguns dos resultados principais da Geometria Riemanniana, visando facilitar a leitura do trabalho desenvolvido. As demonstrações e maiores detalhes são aqui omitidas, podendo ser encontradas em (9), (18) e (38).

A.1 Métrica Riemanniana

Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$.

Definição 17. Um $(0, 2)$ -tensor g_p é dito tensor métrico Riemanniano se é simétrico, ou seja,

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X),$$

e não-degenerado, isto é,

$$g_p(X, Y) = 0, X \in \mathcal{T}_p M \Leftrightarrow Y = 0.$$

Definição 18. Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em M é uma aplicação:

$$g_p : \mathcal{T}_p M \times \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathbb{R} \tag{A.1}$$

que associa a cada ponto $p \in M$, um produto interno $g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p$ de forma diferenciável.

Se (A.1) é positiva definida então, (M, g) é uma Variedade Riemanniana. Caso contrário, (M, g) é uma variedade pseudo-Riemanniana e a métrica g é dita métrica pseudo-Riemanniana.

Exemplo 4. O par (\mathbb{R}^n, g) , onde g é o produto interno usual de \mathbb{R}^n é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 5. (A métrica Riemanniana produto) Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e consideremos o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Definimos em $M_1 \times M_2$ a seguinte métrica Riemanniana:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v \rangle_p + \langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v \rangle_q, \forall (p, q) \in M_1 \times M_2 \text{ e } u, v \in \mathcal{T}_{(p,q)} M_1 \times M_2.$$

Então $M_1 \times M_2, g$ é uma variedade Riemanniana. Um caso particular é dado pelo toro definido por :

$$T^n = S_1 \times \dots \times S_1$$

Exemplo 6. O par $(M \times \mathbb{R}^2, G_E)$, onde G_E é a métrica de Eisenhart definida na seção (2.2.2), é uma variedade pseudo-Riemanniana.

Na maioria das vezes, na literatura física, o elemento de comprimento de arco (quadrático) definido como:

$$ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j.$$

é denotarmos como métrica.

É possível obtermos uma relação entre duas métricas em uma variedade diferenciável, conforme definição abaixo.

Definição 19. Duas métricas \langle, \rangle e $\langle\langle, \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são *conformes* se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$ se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = f(p)\langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

A.2 Diferenciação Covariante

Definição 20. Seja M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ . Uma conexão afim em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

definida por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e funções $f, g \in C^\infty(M)$, tal que:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (iii) $\nabla_X(f \cdot Y) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

onde $X(f)$ é a derivada de f na direção de X .

Proposição 11. (*Derivada covariante*) Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇ . Então, existe uma única aplicação $V \mapsto \frac{DV}{dt}$ ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ denominada derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}$$

$$(c) \text{ Se } V(t) = Y(c(t)), \text{ isto é, se } V \text{ é induzido por um campo de vetores, então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y, \text{ onde } Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Note que dados $p \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a conexão afim $\nabla_X Y$ depende apenas do valor do campo X no ponto p e dos valores do campo Y ao longo de uma curva diferenciável α .

De fato,

Considere um sistema de coordenadas

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \cap M$$

definido numa vizinhança V de p e $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$.

onde, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Disto,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n x_i X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i \left(X_i(y_j) X_j + y_j \nabla_{X_i} X_j \right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Denotando $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ temos que

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^n x_i \left(X_i(y_j) X_j + y_j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i(y_k) + \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(X(y_k) + \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k \end{aligned}$$

Proposição 12. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em (M, g) é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W campo de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se:*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Corolário 13. Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana (M, g) é compátivel com a métrica se e somente se:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Definição 21. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

onde $[X, Y]$ é o Colchete de Lie.

A condição $\nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$ implica que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema 14. (Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ em (M, g) satisfazendo:

- (a) ∇ é simétrica;
- (b) ∇ é compátivel com a métrica Riemanniana.

A conexão ∇ é denominada **conexão de Levi-Civita** ou **Riemanniana**.

As funções diferenciáveis Γ_{ij}^k são os componentes da conexão ∇ ou os **símbolos de Christoffel** da conexão, definidos por:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante é definida por:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx^i}{dt} \right\} X_k \quad (\text{A.3})$$

A.3 Geodésicas

Definição 22. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica em $t_0 \in I$** se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma **geodésica**.

Como a norma do vetor tangente γ' é constante, o comprimento de arco s de uma geodésica é proporcional ao parâmetro.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0)$$

Quando o parâmetro é o comprimento de arco $c = 1$ então dizemos que a geodésica está normalizada.

Considerando um sistema de coordenadas e de acordo com a equação (A.3), γ será uma geodésica se e somente se :

$$0 = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

O sistema de equações

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0,$$

são denominadas **equações das geodésicas**.

A.4 Curvatura

Definição 23. A curvatura de R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Sendo $M = R^n$ então $R(X, Y)Z = 0$. De maneira intuitiva, a curvatura R mede o quanto a variedade M deixa de ser euclidiana.

Considerando um sistema de coordenadas, podemos escrever as componentes do tensor curvatura como:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{kl}^r \Gamma_{jr}^i. \quad (\text{A.4})$$

Definição 24. Uma variedade (M, g) é chamada *flat* quando o tensor curvatura é nulo.

Proposição 15. A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

(i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

com $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned} \tag{A.6}$$

com $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 16. (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \tag{A.7}$$

Relacionado com a curvatura encontramos a curvatura seccional que definiremos a seguir:

Proposição 17. Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então:

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} \tag{A.8}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 25. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde x, y é uma base de σ , é chamado *curvatura seccional* de σ em p .

Se $\dim M = 2$ então a curvatura seccional K coincide com a curvatura da superfície, ou seja, K é o produto das curvatura principais.

Definição 26. Seja $\dim M = n$ e seja (e_1, \dots, e_n) uma base ortonormal em $T_p M$. Seja $x = e_n$ e (e_1, \dots, e_{n-1}) uma base do hiperplano em $T_p M$ ortogonal a x . A quantidade:

$$K_R = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle \tag{A.9}$$

é chamada *curvatura de Ricci* em p na direção x .

Podemos também determinar a curvatura de Ricci através de um $(0, 2)$ -tensor chamado *tensor curvatura de Ricci* cujo componentes é dado por:

$$R_{ik} = R_{ijk}^j.$$

Desde modo, a curvatura de Ricci é dada por:

$$K_R = R_{ik}x_i x_j.$$

Contraindo o tensor de Ricci obtemos:

$$\mathcal{R} = g^{ik} R_{ik},$$

que corresponde a *curvatura escalar*.

Um caso bastante interessante que desempenha um papel fundamental na Geometria Riemanniana são as variedades Riemannianas de curvaturas constantes que trataremos a seguir.

Definição 27. Uma variedade é *isotrópica* se K não depende da escolha do plano σ e nem da do ponto p , ou seja, K é constante.

Lema 3. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por:

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual K_0 se e somente se

$$R = K_0 R', \quad (\text{A.10})$$

onde R é a curvatura de M .

Corolário 18. Sejam M uma variedade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_1, \dots, e_N\}$, $n = \dim M$, uma base ortonormal de $T_p M$. Escreva $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Então $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_p M$, se e somente se

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

com δ_{il} o símbolo de Kronecker.

Portanto, pelo corolário acima os componentes do tensor de Ricci são:

$$R_{ij} = K g_{ij},$$

e temos a seguinte relação:

$$K = \frac{1}{N-1} K_R = \frac{1}{N(N-1)} \mathcal{R}.$$

APÊNDICE B – MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Nesse apêndice apresentaremos as definições e alguns resultados da Teoria da Medida e Integração. De modo análogo ao apêndice anterior não faremos uma exposição exaustiva. Resultados e comentários podem ser vistos em (39).

B.1 Espaços Mensuráveis

Seja Ω um conjunto arbitrário.

Definição 28. Uma coleção \mathcal{S} de subconjuntos de Ω é um *semi-anel* em Ω quando:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- (ii) se S_1 e $S_2 \in \mathcal{S}$ então $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$;
- (iii) se $S_0 \subseteq S$ estão em \mathcal{S} então existem $S_j \in \mathcal{S}$ disjuntos tais que $S - S_0 = \sum_{j=1}^m S_j$, $m < +\infty$.

Como um exemplo básico de um semi-anel podemos citar a coleção de todos os intervalos limitados em \mathbb{R} .

Definição 29. Um *anel de conjuntos* é qualquer coleção \mathcal{A} de subconjuntos de Ω tal que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) se A_1 e $A_2 \in \mathcal{A}$ então $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}$, com $A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$.

Definição 30. Uma σ -álgebra em Ω é uma coleção \mathcal{A} de subconjuntos de Ω tal que:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) Dados $A_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_n^c \in \mathcal{A}$.

Observe que também é válido $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ uma vez que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$ e $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{A}$. É claramente notável que as σ -álgebras são anéis.

Exemplo 7. Os conjuntos $\{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{P}(\Omega)$, com $\mathcal{P}(\Omega)$ as partes de Ω , são σ -álgebras de Ω e são respectivamente a menor e a maior σ -álgebra contidas em Ω .

Definição 31. Dada uma família \mathcal{C} de subconjuntos de Ω , definimos a σ -álgebra gerada por \mathcal{C} como a intersecção não-vazia de todas as σ -álgebras que contém \mathcal{C} em Ω .

Sendo \mathcal{A} uma σ -álgebra de Ω , dizemos que o par (Ω, \mathcal{A}) é um *espaço mensurável*, e todo $A \in \mathcal{A}$ é denominado *conjuntos mensuráveis*.

B.2 Espaços de Medida

Definição 32. Uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ diz-se uma *medida*, se:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ com $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$.

Exemplo 8. Seja Ω um conjunto arbitrário e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Fixado $p \in \Omega$, a função $\delta_p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in A; \\ 0 & \text{se } p \notin A. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

é uma medida denominada *medida de Dirac* em p .

Existem alguns tipos de medidas que desempenham um papel importante na teoria:

Definição 33. Uma medida μ é *finitamente aditiva* se $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$ com $m < +\infty$. Quando $\mu(\Omega) = 1$ então dizemos que μ é a *medida de probabilidade*.

Definição 34. Uma medida μ é *regular* se para todo $S \in \mathcal{S}$ seja válido:

$$\mu(S) = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ aberto, } G \supseteq S, G \in \mathcal{S}\}.$$

Teorema 19. Toda medida finitamente aditiva e regular $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ é σ -aditiva.

As medidas de um modo geral, satisfazem as seguintes propriedades:

Proposição 20. Sejam $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Então:

1. Se $A_i \subset A_j$, então $\mu(A_i) \leq \mu(A_j)$;
2. Se A_1, \dots, A_n são dois a dois disjuntos então $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$;
3. $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$;
4. Se $A_j \subset A_{j+1}$, então $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$;
4. Se $A_j \supset A_{j+1}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Sendo $X \subseteq \Omega$, dizemos que uma propriedade vale q.t.p em X , ou seja, em *quase toda parte* em X , quando existe um conjunto de medida nula $A \subseteq X$ tal que a propriedade vale para todo $x \in X - A$.

Definição 35. Um *espaço de medida* é $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, onde Ω é um conjunto, \mathcal{A} é uma σ -álgebra e $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma medida σ -aditiva.

Definição 36. A σ -álgebra \mathcal{A} é *completa* relativamente à medida $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ quando dado qualquer $A \in \mathcal{A}$ tal que $\nu(A) = 0$, então para todo $E \subseteq A$ vale $E \in \mathcal{A}$. Neste caso diz-se que $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ é um *espaço de medida completa*.

B.3 Funções Mensuráveis

Definição 37. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $[-\infty, +\infty]$ é \mathcal{A} -mensurável quando para todo $r \in \mathbb{R}$ vale $[f > r] \in \mathcal{A}$, com

$$[f > r] = \{x \in \Omega \mid f(x) > r\} = f^{-1}((r, +\infty)).$$

Proposição 21. Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é \mathcal{A} -mensurável;
- (ii) Para todo aberto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ vale $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$;
- (iii) Para toda função contínua $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função composta $\psi \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{A} -mensurável.

Exemplo 9. Dado um conjunto $B \subset X$, a função característica de B definida por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B; \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

é mensurável se e somente se B for mensurável.

As funções mensuráveis possuem algumas propriedades de suma importância no qual enunciaremos a seguir:

Proposição 22. Sejam $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ funções \mathcal{A} -mensuráveis. Então:

- (i) A função $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$ é \mathcal{A} -mensurável;
- (ii) A função $f \cdot g : x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$ é \mathcal{A} -mensurável; Além disso, se $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é uma sequência finita ou enumerável de funções \mathcal{A} -mensuráveis, segue-se que:
- (iii) A função $\sup_n f_n : x \rightarrow \sup_n f_n(x)$ é \mathcal{A} -mensurável;
- (iv) A função $\inf_n f_n : x \rightarrow \inf_n f_n(x)$ é \mathcal{A} -mensurável.

B.4 Integração

Consideramos a *função característica* 1_A de um conjunto $A \subseteq \Omega$ e \mathcal{S} um semi-anel de subconjuntos de Ω . As funções \mathcal{S} -simples são as funções do tipo

$$h = \sum_{j=1}^m r_j 1_{S_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

onde os S_j são os conjuntos disjuntos, $S_j \in \mathcal{S}$, $r_j \in \mathbb{R}$ e m é finito.

Definição 38. A *integral* de h relativamente a uma medida $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty)$ é definida por:

$$I(h) = \sum_{j=1}^m r_j \mu(S_j).$$

Ao lidarmos com função mensurável $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$, definimos as funções não-negativas e mensuráveis f^+ e f^- por:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Neste caso a integral de f corresponde a:

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-).$$

Definição 39. Se uma função Λ -mensurável $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é tal que $I(f^+)$ ou $I(f^-)$ finito, então dizemos que f é *semi-integrável*. Se ambas são finitos então f é *integrável*.

Definimos o conjunto $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é integrável}\}$.

Proposição 23. O conjunto $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real e $I : \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um operador linear. Isso significa que dados f e $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$, então:

(i) $f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ e $I(f + g) = I(f) + I(g)$.

(ii) Para todo $r \in \mathbb{R}$ vale $rf \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ e $I(rf) = rI(f)$.

APÊNDICE C – TEORIA ERGÓDICA

Nosso objetivo no presente apêndice é fornecer algumas noções elementares de Teoria Ergódica. Para demonstrações e resultados complementares veja (12).

C.1 Medidas Invariantes

De modo geral a Teoria Ergódica estuda sistemas dinâmicos que possuem medidas invariantes sob a ação da dinâmica. Iniciaremos com algumas definições e resultados de medidas invariantes.

Definição 40. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação que mensurável. Dizemos que a medida μ é *invariante* por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \quad \forall \quad E \subset \Omega \text{ mensurável.} \quad (\text{C.1})$$

Neste caso podemos dizer que f *preserva* μ . Esta definição pode ser estendida para funções que não sejam necessariamente transformações.

Definição 41. Seja $f : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável e μ uma medida em Ω . Então f preserva μ se, e somente se,

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu \quad (\text{C.2})$$

para toda função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrável.

C.2 Ergodicidade

A *hipótese ergódica* é uma hipótese formulada pelo físico Boltzman com o intuito de obter o formalismo matemático para sua teoria que consiste em descrever o comportamento dos gases.

A mesma afirma que: *Considerando fluxos hamiltonianos, o tempo médio de visita a qualquer conjunto mensurável E existe e é igual a medida de E para quase todo x .*

Formalmente:

Proposição 24. *Seja μ uma medida de probabilidade e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável. Se em um sistema é válido a hipótese, então:*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu. \quad (\text{C.3})$$

Veremos agora algumas equivalências para o sistema ergódico.

Definição 42. Uma transformação mensurável $f : \Omega \rightarrow \Omega$ diz-se *ergódica* para uma medida de probabilidade invariante μ , se, para todo conjunto f -invariante A , é válido $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Proposição 25. Seja μ uma probabilidade invariante de uma transformação mensurável $f : \Omega \rightarrow \Omega$. As seguintes condições são equivalentes:

(i) O sistema (f, μ) é ergódico;

(ii) Para qualquer par de conjuntos mensuráveis A e B vale:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^j(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B);$$

(iii) Para quaisquer funções $\varphi \in L^p(\mu)$ e $\psi \in L^q(\mu)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (U_f^j \varphi) \psi d\mu = \int \varphi d\mu \int \psi d\mu.$$

O resultado a seguir constitui um importante resultado para uma classe ampla de transformação.

Teorema 26. Seja $f : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em Ω que é invariante por f .

Observe que sendo μ_1 e μ_2 medidas de probabilidades invariantes pela transformação mensurável $f : \Omega \rightarrow \Omega$, então, $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ também é uma medida de probabilidade invariante para $t \in (0,1)$ arbitrário. Portanto, o espaço das probabilidades $\mathcal{M}_1(f)$ é *convexo*.

A proposição a seguir afirma que as medidas ergódicas são extremas deste convexo.

Proposição 27. Uma medida de probabilidade invariante μ é ergódica se e somente se, não é possível escrevê-la na forma $\mu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2$ com $t \in (0,1)$ e μ_1, μ_2 probabilidades invariantes distintas.

C.3 Resultados Clássicos

O início do estudo da Teoria Ergódica foi marcada por alguns resultados clássicos, no qual faz-se necessário enunciá-los aqui.

Teorema 28. (*Recorrência de Poincaré - Versão Mensurável*)

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f . Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E .

Teorema 29. (*Teorema de Kac*)

Seja $f : M \rightarrow M$, μ uma medida invariante finita e E um subconjunto com medida positiva. Então a função ρ_E é integrável e

$$\int_E \rho_E d\mu = \mu(M) - \mu(E_0^*),$$

onde

$$\rho_E(x) = \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in E\} \quad (\text{C.4})$$

$$E_0^* = \{x \in M : f^n(x) \notin E \forall n \geq 0.\} \quad (\text{C.5})$$

Observe que quando o sistema (f, μ) é ergódico o conjunto E_0^* tem medida nula e consequentemente o teorema de Kac nos fornece:

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \rho_E d\mu = \frac{\mu(M)}{\mu(E)}, \quad (\text{C.6})$$

ou seja, o tempo médio de retorno, (equação do lado esquerdo), é inversamente proporcional a medida de E .

É importante ressaltarmos que o tempo de recorrência pode ser drasticamente grande conforme veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 10. Consideremos duas urnas. A primeira contém 100 bolas enumeradas de 1 à 100 e a segunda está vazia. Consideremos também um saco contendo 100 folhas de papel numeradas de 1 à 100 que será o nosso gerador de números aleatórios.

À cada segundo um pedaço de papel é retirado da bolsa, o número é observado e a tira com o papel é devolvido ao saco. Desse modo a urna onde se encontra a bola cuja papel com o número foi retirado passará a outra urna.

É altamente improvável que o sistema retorne ao seu estado inicial, ou seja, as 100 bolas na primeira urna, mas, o teorema da Recorrência de Poincaré diz que esta situação ocorrerá quase que certamente embora tenha-se que esperar um tempo suficientemente grande para que isso ocorra. Calculemos explicitamente esse tempo de retorno.

Seja $x_j = \{0, \dots, 100\}$ o número de bolas na primeira urna depois de j segundos. Então a sequência $(x_j)_{j=0}^\infty$ corresponde ao número de bolas na primeira urna em cada tempo.

Observe que a cada segundo o número de bolas na primeira urna aumenta ou diminui 1. Deste modo a sequência é dada por:

$$\Sigma = \{(x_j)_{j=0}^\infty \mid x_j \in \{0, \dots, 100\}, |x_j - x_{j+1}| = 1 \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Σ corresponderá a uma matriz de transição $A = (a_{ij})$ onde $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ para $i = 0, \dots, 100$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário.

Seja p_i a probabilidade de termos i -ésimas bolas nas primeiras n -ésimas:

$$p_i = \frac{1}{2^{100}} \binom{100}{i}.$$

Tendo i bolas na primeiras urnas então no próximo estágio teremos $i - 1$ ou $i + 1$ na primeira urna. O número de bolas será $i - 1$ se o número aleatório retirado for equivalente ao número de uma bola na primeira urna. Como existem i bolas então a probabilidade para que isto ocorra é $\frac{i}{100}$. Logo, a probabilidade condicional $P_{i,i-1}$ que existe $i - 1$ bolas na primeira urna é $\frac{i}{100}$.

Similarmente, a probabilidade condicional $P_{i,i+1}$ que exista $i + 1$ bolas na primeira urna é $\frac{100 - i}{100}$.

Definindo a matriz estocástica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{100} & 0 & \frac{99}{100} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{100} & 0 & \frac{98}{100} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3}{100} & 0 & \frac{97}{100} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Note que $P_{ij} \neq 0$ se e somente se $A_{ij} = 1$, logo, P e A são compatíveis. É fácil verificar que $pP = p$, ou seja, temos uma medida de Probabilidade definida em Σ e além disso μ_P é ergódica.

Consideremos o cilindro $A = [100]$ de comprimento 1 que representa a existência de 100 bolas na primeira urna. Pelo teorema de Poincaré se iniciamos em A retornamos para A infinitamente depois e pelo teorema de Kac temos que:

$$\frac{1}{\mu_P} = 2^{100} \text{ segundos,}$$

equivalente a 4×10^{22} anos. Um tempo drasticamente grande.

Agora apresentaremos a versão Topológica de alguns resultados.

Um ponto $x \in M$ é *recorrente* para uma transformação $f : M \rightarrow M$ se existe uma sequência $n_j \rightarrow \infty$ em \mathbb{N} tal que $f^{n_j}(x) \rightarrow (x)$.

Teorema 30. (*Recorrência de Poincaré - Versão Topológica*)

Suponhamos que M admite uma base de abertos. Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação

mensurável e seja μ uma medida finita em M invariante por f . Então, μ -quase todo ponto $x \in M$ é recorrente para f .

Teorema 31. *(Recorrência de Birkhoff)*

Se $f : M \rightarrow M$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto M , então existe algum ponto recorrente $x \in M$ que é recorrente para f .

APÊNDICE D – MÉTODO DO PONTO DE SELA

Em linhas gerais, o método do ponto de sela consiste em obter a forma assintótica para integrais do tipo :

$$I(N) = \int_C e^{(Nf(z))} dz, \quad (\text{D.1})$$

com N suficientemente grande, $f(z)$ uma função analítica e C o contorno no plano complexo.

A ideia do método é deformar o contorno com o intuito de passar pelo ponto estacionário numa direção adequada.

Seja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (\text{D.2})$$

As condições de Cauchy-Riemann nos permite mostrar que dado z_0 um extremo arbitrário da superfície $u(x, y)$, o mesmo é um ponto de sela e além disso z_0 também é um extremo de $v(x, y)$, ou seja,

$$f'(z_0) = 0,$$

com z_0 um ponto de sela.

Consideremos a expansão de Taylor em torno de z_0 :

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Denotando:

$$f''(z_0) = \rho e^{i\theta} \quad (\text{D.4})$$

$$(z - z_0) = se^{i\phi}, \quad (\text{D.5})$$

obtemos:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 e^{i(\theta+2\phi)}. \quad (\text{D.6})$$

Sendo f da forma (D.2) e pela fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ temos que:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \cos(\theta + 2\phi) \\ v(x, y) &\approx v(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho s^2 \sin(\theta + 2\phi). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Com o intuito de passarmos por um ponto de sela na direção da parte real, tomemos $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ correspondente a $\sin(\theta + 2\phi) = 0$, isto é,

$$v(x, y) \approx v(x_0, y_0).$$

Deste modo, (D.1) possui a seguinte forma assintótica:

$$I(N) \approx e^{(Nf(z_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{N}{2}\rho s^2)} e^{i\phi} ds \quad (\text{D.8})$$

$$= e^{(Nf(z_0))} \left(\frac{2\pi}{\rho N} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}, \quad (\text{D.9})$$

onde $\rho = |f''(z_0)|$ e $\phi = -\frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ é a inclinação do contorno cujo sinal depende do sentido do percurso do caminho deformado.

Para $N \gg 1$, temos que:

$$\frac{1}{N} \log I(N) = \frac{1}{N} (Nf(z_0)) - \frac{1}{2N} \log \frac{\rho N}{2\pi} + \frac{1}{N} \log \exp(i\phi) \approx f(z_0) \quad (\text{D.10})$$