



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

GUILLERMO FRANCISCO PALACIOS ROQUE

**CONSTRUÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E ESTABILIZAÇÃO
DE UM PENTE DE FREQUÊNCIAS ÓPTICAS**

Recife
2017

GUILLERMO FRANCISCO PALACIOS ROQUE

**CONSTRUÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E ESTABILIZAÇÃO
DE UM PENTE DE FREQUÊNCIAS ÓPTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Heraclito Gonçalves de Miranda. Universidade Federal de Pernambuco

Recife
2017

Catálogo na fonte
Bibliotecário Jefferson Luiz Alves Nazareno CRB 4-1758

P153c Palacios Roque, Guillermo Francisco.
Construção, caracterização e estabilização de um pente de frequências ópticas /
Guillermo Francisco Palacios Roque – 2017.
67 f.: fig., tab.

Orientador: Márcio Heraclito Gonçalves de Miranda.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, Recife,
2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Óptica 2. Pente de frequências ópticas. I. Miranda, Márcio Heraclito Gonçalves de
(Orientador). II. Título.

535.2 CDD (22. ed.) UFPE-FQ 2017-42

GUILLERMO FRANCISCO PALACIOS ROQUE

**CONSTRUÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E ESTABILIZAÇÃO
DE UM PENTE DE FREQUÊNCIAS ÓPTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 24/07/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Márcio Heraclito Gonçalves de Miranda
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Edilson Lucena Falcão Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Lázaro Aurélio Padilha Júnior
Examinador Externo
Universidade Estadual de Campinas

A Estela e Guillermo

RESUMO

Neste trabalho, construímos um pente de frequências ópticas usando, como meio de ganho, um cristal de titânio safira (Ti:S) em uma cavidade com geometria em anel, no qual caracterizamos a estabilidade da taxa de repetição. No regime de modos travados, o laser opera em 815 nm com uma largura de banda de aproximadamente 29 nm e uma taxa de repetição de 830 MHz. Com a estabilização eletrônica, baseada num esquema de *Phase Lock Loop*, conseguimos uma estabilidade do desvio de fracionário da frequência de repetição de 10^{-11} para tempos de até 1 s e 10^{-12} para tempos de até 500 s. Também foi construído um interferômetro f-2f onde medimos a frequência de offset, com o objetivo de sua posterior estabilização. As medições desta última mostraram um valor de 73 MHz. Isso encerra a primeira etapa de um trabalho mais extenso, que contempla a completa estabilização do laser, com aplicações em espectroscopia atômica.

Palavras-chave: Pente de frequências ópticas. Estabilização eletrônica. Frequência de repetição. Frequência de offset.

ABSTRACT

In this work, we constructed an optical frequency comb using as a means of gain, a titanium sapphire crystal (Ti:S) in a cavity with ring geometry, in which we characterized the repetition rate stability. In the mode-locked mode, the laser operates at 815 nm, with a bandwidth of approximately 29 nm and a repetition rate of 830 MHz. With electronic stabilization, based on a Phase Lock Loop scheme, we achieve a stability of the deviation of fractional frequency of repetition rate of 10^{-11} for times of 1 s and 10^{-12} for times of 500 s. We also mounted an f-2f interferometer where we measured the offset frequency, with the objective of its subsequent stabilization. The measurements of this, showed a value of 73 MHz. This ends the first stage of a more extensive work, which contemplates the complete stabilization of the laser, with applications in atomic spectroscopy.

Keywords: Optical frequency comb. Electronic stabilization. Repetition frequency. Offset frequency.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	CONCEITOS BÁSICOS	12
2.1	LASER DE MODOS TRAVADOS	12
2.1.1	Métodos de travamentos de modos	14
2.1.2	Mecanismos físicos não lineares para o travamento de modos.	17
2.1.2.1	Travamento de modos por efeito de lente Kerr.	18
2.1.2.2	Auto-modulação temporal de fase	21
2.2	DESENHO DA CAVIDADE	23
2.2.1	Estabilidade da cavidade	23
2.2.1.1	Cintura do feixe	24
2.2.1.2	Astigmatismo	27
2.2.1.3	Controle da dispersão	27
2.3	GERAÇÃO DE SEGUNDO HARMÔNICO	31
2.4	GERAÇÃO DE SUPERCONTÍNUO.	32
2.5	ESTABILIDADE DA FREQUÊNCIA	36
2.5.1	Estabilização eletrônica. PLL	37
2.5.2	Desvio de Allan clássico	40
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	44
3.1	CAVIDADE ÓPTICA	44
3.1.1	Dispersão de velocidade de grupo	44
3.1.2	Alinhamento da cavidade	45
3.1.3	Espectros, óptico e de radio frequências	49
3.2	ESTABILIZAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA TAXA DE REPETIÇÃO	50
3.2.1	Medidas de estabilidade	50
3.2.2.1	Estabilidade da fonte de referência	51
3.2.2.2	Estabilidade da frequência de repetição	52
3.3	MEDIDA DA FREQUÊNCIA DE OFFSET	56
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	59
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICES	64

1 INTRODUÇÃO

Lasers de modos travados geram uma sequência de pulsos com uma largura de banda de alguns nanômetros, diferente do que ocorre no funcionamento de um laser contínuo (*Continuous Wave*, CW), onde se tem uma onda contínua de luz quase monocromática. O funcionamento desses lasers baseia-se no controle dos modos de oscilação da cavidade ressonante com o uso de um meio de ganho com banda de emissão larga que irá sustentar mais de 100.000 modos longitudinais. Quantos e quais desses modos irão oscilar depende do tipo de cavidade, dos eventuais elementos de eliminação dos modos e da largura de banda do meio de ganho utilizado.

No domínio da frequência, os lasers de modos travados podem ser descritos como a superposição de modos longitudinais, oscilando com uma relação de fase fixa. O conjunto de picos que compõem este espectro é chamado de pente de frequências ópticas (PFO). O PFO baseado em lasers de modos travados com pulso ultracurtos (largura do pulso na ordem de femtossegundos, 10^{-15} s) é uma ferramenta muito útil em muitas áreas da física, em particular para a metrologia óptica [1], [2]. Em tal caso, se o espectro de um laser de modos travados for suficientemente largo, cobrindo uma oitava óptica, ou seja, desde uma determinada frequência f_m até f_{2m} , é possível medir diretamente as duas frequências na faixa de radio frequências (RF) que o descrevem, ou seja, a frequência de repetição, f_{rep} , e a frequência de offset, f_0 [3], [4]. A medida precisa desses dois parâmetros faz com que cada linha do espectro do laser de modos travados seja bem determinada, permitindo que este seja usado como uma régua de frequências para medir frequências ópticas.

Esta capacidade de poder efetuar a medição de frequências ópticas em regiões espectrais tanto visíveis como no infravermelho próximo, contribui para os estudos na área de espectroscopia molecular de precisão [5]. O entendimento da estrutura molecular, muitas vezes envolve uma análise espectral detalhada numa ampla gama de comprimentos de onda. Utilizando o PFO esta tarefa pode ser executada com precisão em janelas espectrais relevantes. Por exemplo, na referência [6] foi construído um PFO baseado em fibra óptica dopada com érbio, operando na faixa de 1,45-1,65 μm , permitindo fazer medições dos espectros ro-vibracionais do CO, NH₃ e C₂H₂ com uma sensibilidade de absorção de $2 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$ por canal de detecção. É possível

achar aplicações na medicina, por exemplo, um PFO na faixa de 1,5 - 1,7 μm com resolução de 800 MHz é aplicado no estudo da respiração humana, fazendo medições de taxa de isótopos estáveis de CO_2 e concentrações de CO e NH_3 , detectando como mínimo, absorções de $8 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}$ [7]. No caso específico do PFO baseado em cristal de titânio-safira (Ti:S), este pode operar na faixa de 0,4 - 1,2 μm , com aplicações no estudo de: transições desde o estado fundamental de gases nobres, átomos alcalino-terrosos e alcalinos, transições entre estados atômicos ou moleculares excitados e harmônicos das transições ro-vibracionais moleculares [8].

Outro exemplo é o do astro-pente, que é um tipo de PFO que aumenta a resolução de espectrógrafos astronômicos em quase cem vezes. Isto permite a detecção de deslocamentos para o vermelho, causados por exoplanetas menores, com maior resolução do que é detectado com calibradores tradicionais, neste sentido podemos destacar trabalhos como [9] e [10]. Mais recentemente existem trabalhos como [11] onde um PFO de Ti:S de 16 GHz centrado em 570 nm com uma largura de banda de 80 nm é usado para calibrar o espectrógrafo astrofísico HARPS-N para medições de precisão de velocidade radial com uma estabilidade de aproximadamente 1 cm/s.

Mais um exemplo é o estado de fótons com emaranhamento, compartilhados entre vários modos. Estes estudos são fundamentais para melhorar nossa compreensão de aspectos fundamentais da mecânica quântica e possuem aplicações para processamento de dados quânticos, microscopia, etc. Neste sentido, investigações atuais baseadas em PFOs construídos em micro cavidades ópticas com um fator de alta qualidade, depositadas em chips eletrônicos, são usadas para gerar vários qubits emaranhados numa ampla gama de frequências, incluindo o espectro tradicional de telecomunicações, com aplicações diretas para comunicação e computação quântica [12], [13].

Se apenas conhecer f_{rep} e f_0 é suficiente para algumas aplicações, estes parâmetros estão sujeitos a instabilidades provocadas por ruído térmico, acústico, mecânico, etc. Portanto, para fazer medidas de alta precisão é necessário que estas frequências sejam estabilizadas. O processo de estabilização pode ser baseado no travamento do laser a cavidades externas e transições atômicas, proporcionando uma excelente estabilidade que pode chegar a uma parte em 10^9 [14], [15]. Em tal sentido, sabendo que f_{rep} e f_0 são acessíveis na faixa de RF, é possível o uso da eletrônica de Laço de Travamento de Fase (*Phase Locked Loop*, PLL) como ferramenta fundamental na estabilização [16]. A

incrível melhora sobre a estabilidade do laser fornecida por este sistema é devida a um laço de retroalimentação negativa que inicia com a comparação da fase do sinal que tem a frequência do laser a ser estabilizada, com um oscilador de referência muito estável. O sinal de erro obtido na comparação é injetado em um sistema de filtragem-amplificação (*Loop Filter*, LP) e finalmente a um atuador no próprio laser que pode: (i) modificar comprimento da cavidade para o caso da estabilização de f_{rep} , (ii) modular a intensidade do laser de bombeamento para o caso da estabilização de f_0 . Depois de várias iterações, as entradas do comparador de fase são quase iguais e por tanto o sinal de erro é reduzido à zero, conseguindo uma estabilidade no laser proporcional à do oscilador de referência.

Tendo em conta todas as vantagens que tem o uso de um PFO e como resposta as necessidades do grupo de Metrologia Óptica de nosso departamento, o objetivo central deste trabalho é a construção e estabilização de um pente de frequência usando como meio de ganho um cristal de Ti:S baseado em uma cavidade com formato de anel. Assim sendo, a estabilização será feita em duas etapas: na primeira parte será estabilizada a frequência de repetição do laser mediante o controle ativo do comprimento da cavidade baseado num sistema PLL e na segunda etapa do trabalho, será feita a estabilização da frequência de offset mediante a modulação da intensidade do laser de bombeamento da cavidade sendo usado um modulador acusto-óptico. Nesta dissertação apenas a estabilização de f_{rep} foi feita. Uma vez conseguido isto, uma primeira aplicação é o estudo espectroscópico em células de vapor de Rb.

Nesta dissertação, são abordados no capítulo 2, os conceitos básicos para entender o funcionamento do laser de Ti:S em regime de modos travados, os diferentes efeitos não lineares que participam no processo de travamento de modos, assim como o desenho da cavidade óptica e a eventuais condições de estabilidade que permitem o funcionamento do laser nos regimes CW e de modos travados. São discutidos também os elementos físicos que intervêm na geração de supercontínuo e de segundo harmônico, como ferramentas para fazer a medida da frequência de offset com o objetivo de sua posterior estabilização. Para terminar o capítulo, são discutidos os elementos que permitem caracterizar a estabilidade da frequência de repetição do laser. No capítulo 3, são apresentados e discutidos os principais resultados do trabalho. Primeiramente é feita uma caracterização da cavidade óptica construída, discutindo os principais elementos

que garantem a sua estabilidade e o processo de alinhamento. São apresentadas as medidas de espectro RF e espectro óptico como prova do funcionamento do laser no regime de modos travados. A seguir, é realizado um estudo da estabilidade da taxa de repetição. No final são apresentadas medidas preliminares da frequência de offset. Para terminar, no capítulo 4, temos a conclusão do trabalho assim como as perspectivas.

1. CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos para entender o funcionamento do laser de Ti:S em regime de modos travados, assim como os diferentes efeitos não lineares que participam no processo de travamento de modos. São discutidos também a geração de supercontínuo e de segundo harmônico, como ferramentas para fazer a medida da frequência de offset com o objetivo de sua posterior estabilização. Para terminar o capítulo, são discutidos os elementos que permitem caracterizar a estabilidade da frequência de repetição do laser.

2.1 LASER DE MODOS TRAVADOS

A luz confinada em uma cavidade óptica é refletida várias vezes nos espelhos, levando a formação de um padrão estacionário devido aos efeitos de interferência construtiva e destrutiva. Essas ondas estacionárias formam um conjunto discreto de frequências, conhecido como os modos longitudinais da cavidade. No comprimento total da cavidade só cabe certa quantidade de vezes o comprimento de onda central da radiação confinada [17]. O campo na saída da cavidade laser é dado então pela soma dos campos existentes em cada uma das frequências f_m permitidas:

$$E(t) = \sum_{m=0}^{N-1} E_m(t) e^{i[2\pi f_m t + \theta_m(t)]}, \quad (2.1)$$

onde $f_m = m f_{rep}$, sendo f_{rep} a separação entre cada modo ou simplesmente taxa de repetição, sendo igual a $\frac{c}{2L}$ para cavidades lineares e $\frac{c}{L}$ para cavidades em anel, c é a velocidade da luz e m é um número inteiro. Quando não há nenhum tipo de controle sobre os modos do laser, tanto a amplitude $E_m(t)$, como a fase $\theta_m(t)$ de cada um dos modos pode variar aleatoriamente no tempo devido às perturbações externas.

Num laser de modos travados é estabelecida uma situação de acoplamento de modos onde as fases e as amplitudes dos vários modos oscilantes são mantidas constantes no tempo. Dessa forma, o acoplamento de N modos longitudinais no espaço do tempo leva a formação de um trem de pulsos com separação dada pelo tempo de circulação do pulso na cavidade, τ_0 , definido como o inverso de f_{rep} (**Figura 2.1**).

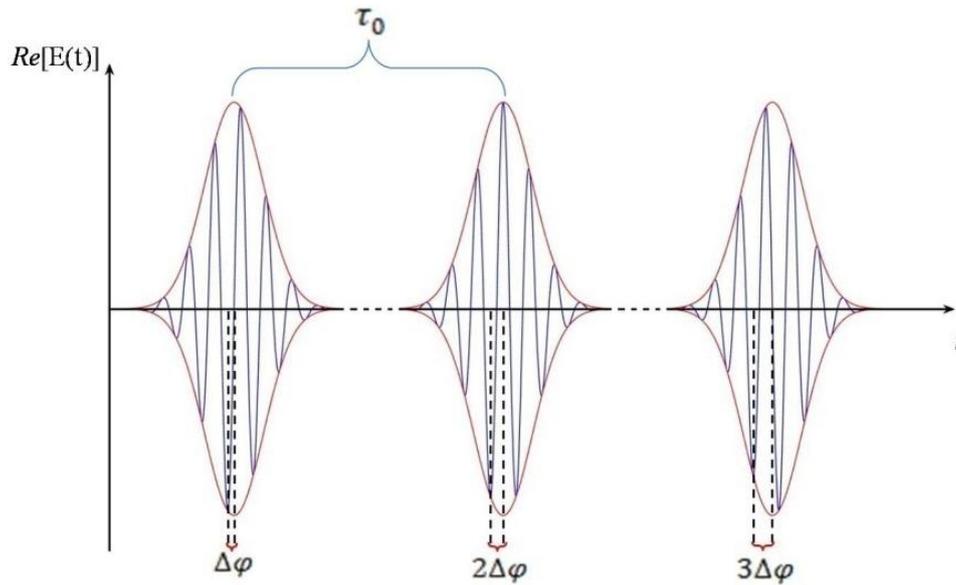


Figura 2.1. Formação de um trem de pulsos.

A fase do m -ésimo modo nessa situação é dada por:

$$\phi_m = 2\pi f_m t + \theta_m(t) = 2\pi f_m \tau_0 + \Delta\varphi = 2\pi m + \Delta\varphi, \quad (2.2)$$

onde $\Delta\varphi$ é a diferença de fase de um pulso para outro devido a mecanismos de dispersão dentro da cavidade. Este pode ser entendido como uma diferença de fase entre as oscilações rápidas do campo no interior do pulso, chamada de portadora (curva azul na **Figura 2.1**) e a envoltória de variação lenta definindo a forma temporal do pulso (curva vermelha na **Figura 2.1**). Ou seja, a variação $\Delta\varphi$ de um pulso para outro se reflete no espectro de frequência pelo deslocamento desse espectro num fator f_0 com respeito aos modos naturais da cavidade, que é definido como frequência de “offset” (ver **Figura 2.2**):

$$f_0 = \frac{f_{rep}}{2\pi} \Delta\varphi. \quad (2.3)$$

De modo que o m -ésimo modo passa a ser escrito por:

$$f_m = m f_{rep} + f_0. \quad (2.4)$$

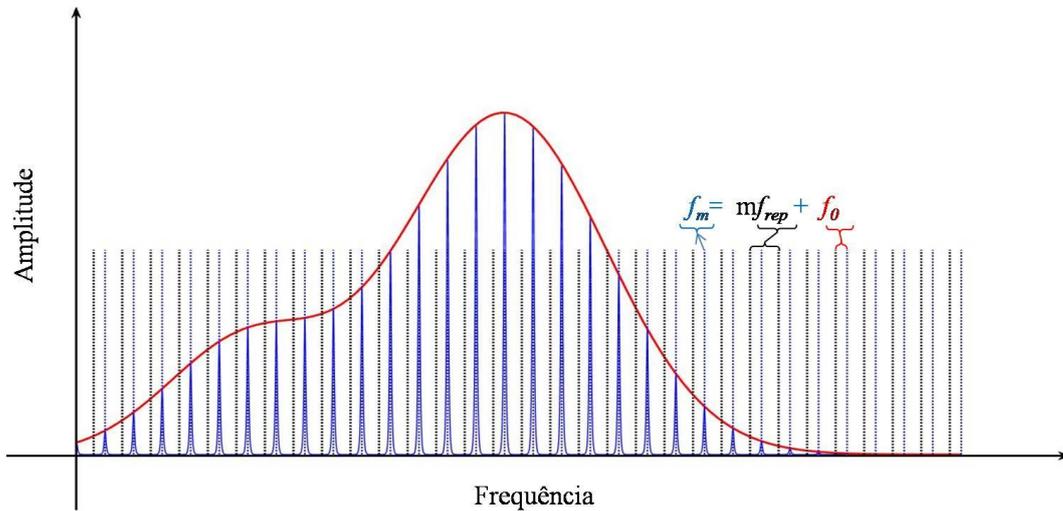


Figura 2.2. Pente de frequências ópticas.

A superposição dos modos dados por (2.4) com a curva de ganho do amplificador dentro da cavidade, conforma um espectro composto por uma série de linhas igualmente espaçadas com uma largura de banda associada, chamado de pente de frequências ópticas.

2.1.1 Métodos de travamentos de modos

As principais características dos pulsos no regime de modos travados são: alta potência concentrada em um breve intervalo de tempo (a duração do pulso), uma largura de banda grande relacionada com o inverso da duração do pulso e uma frequência de repetição dada por o inverso do tempo total de trânsito na cavidade. Estas são as propriedades que distinguem o regime de modos travados do regime CW, de maneira que, para produzir um laser de modos travados é necessário favorecer estas diferenças. Os métodos para criar a situação de acoplamento de modos na cavidade podem ser classificados em ativos e passivos [18].

No primeiro caso são utilizados sistemas de modulação periódica de algum parâmetro do laser por meio de um oscilador externo sintonizado na frequência natural dos pulsos. Esta modulação pode ser de amplitude (AM), usando um modulador acusto-óptico onde é aplicado um sinal RF. O efeito é criar uma grade de difração que introduz uma perda muito grande no laser num pequeno intervalo de tempo em que o sinal RF se anula. O efeito resultante é similar à ação de um diafragma extremamente rápido.

Esta modulação pode ser também de fase (FM), baseada num modulador electro-óptico sintonizado na frequência natural dos pulsos. Este produz uma modulação do

índice de refração de um cristal colocado dentro da cavidade, mudando o caminho óptico do feixe intracavidade e implicando uma mudança do comprimento da cavidade. Isto é equivalente a modular a posição do espelho de saída da cavidade. Qualquer sinal óptico que seja refletido no espelho em outro instante que não seja um dos pontos de retorno dessa oscilação sofrerá um deslocamento Doppler de frequência. Depois de sucessivas voltas na cavidade estes deslocamentos literalmente puxam o espectro do sinal deslocado fora da largura de banda de amplificação do meio de ganho, conseguindo uma co-existência só dos modos com uma relação de fase bem definida.

Os métodos de travamento de modos passivos têm como base o aproveitamento da alta potência de pico dos pulsos, usando efeitos não lineares específicos para gerar perdas dependentes da potência. Se os parâmetros do sistema forem escolhidos de forma inteligente, estas perdas não lineares podem ser maiores para sinais de baixa potência (CW) que para sinais de alta potência (modos travados). Basicamente o travamento de modos passivo é similar em todos os sistemas: o pulso modula a si mesmo mais rápido do que seria possível com qualquer modulação ativa. Por outro lado, os tipos de elementos para produzir esta auto-modulação podem ser muito diferentes entre eles. Por uma tradição histórica, estes moduladores passivos são chamados de absorvedores saturáveis. Pode-se fazer uma divisão e classificá-los como absorvedores saturáveis lentos e rápidos.

Absorvedores saturáveis lentos

São aqueles elementos que se tornam mais transparente com o aumento da intensidade da onda luminosa que incide neles, mas não podem recuperar sua absorção nas escalas de tempo menores que a dos pulsos ultracurtos, ou seja, tempos muito menores que o próprio tempo de relaxação do material, geralmente na ordem de pico segundos. Antes da chegada do pulso, as perdas são maiores que o ganho. Se o pulso for suficientemente intenso, a dinâmica de absorção-ganho pode criar uma seção efetiva do ganho maior que a seção efetiva de absorção e o pulso será amplificado, **Figura 2.3 (b)**.

Absorvedores saturáveis rápidos

Este tipo de elemento responde de maneira essencialmente instantânea as mudanças na intensidade da luz. Isso significa que pode recuperar seu nível de absorção inicial num tempo curto comparado com a duração do pulso óptico. Com este tipo de elemento

pode-se produzir pulsos no laser sem ajuda da dinâmica de saturação do ganho. O absorvedor conforma o pulso tanto na frente como no fim, e discrimina a radiação CW entre pulsos. O ganho é aproximadamente constante durante o pulso e igual ao seu valor de saturação determinado pela potência média do estado estacionário. Isto pode ser considerado para meios com pequenas seções eficazes de ganho e grande tempo de vida do estado superior para a inversão de população. A **Figura 2.3 (a)** mostra o processo no estado estacionário

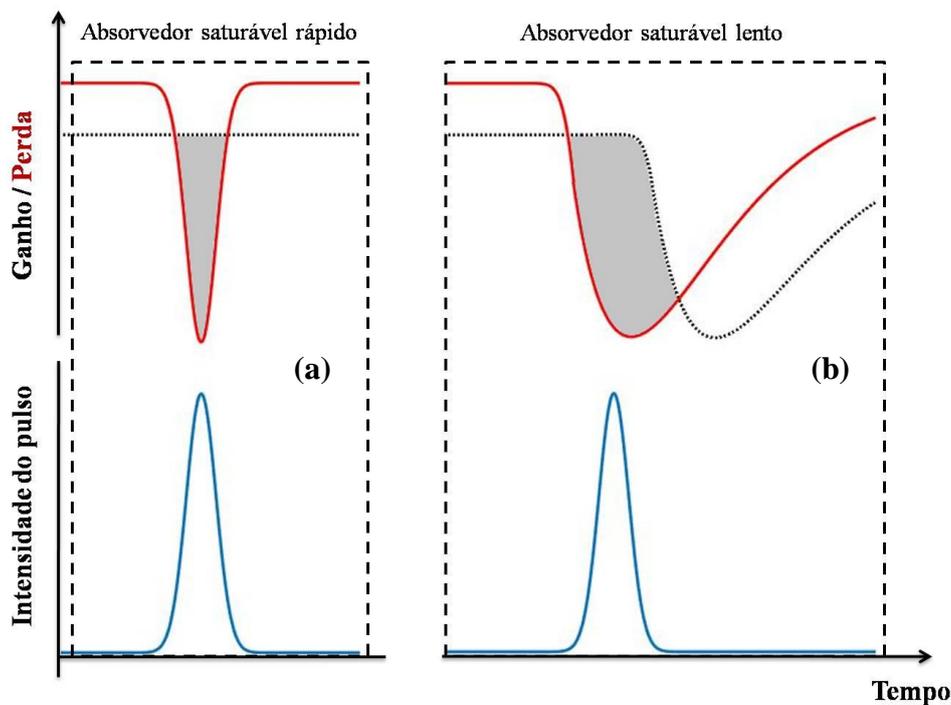


Figura 2.3. Dinâmica da formação do pulso.

Um inconveniente comum em todos os sistemas de travamento de modos passivos, é o fato de que a modulação, sendo não linear, só é efetiva quando os pulsos já têm grandes intensidades. Isto faz com que o feixe, inicialmente funcionando de forma contínua, não consiga prover modulação de amplitude suficiente para começar a gerar pulsos. Mas, em teoria, um pulso curto pode-se formar a partir de alguma flutuação inicial. Na prática, isso nem sempre acontece, já que há uma série de fatores que inibem o desenvolvimento do pulso a partir do ruído como, por exemplo, a saturação dinâmica do ganho, ou processos competitivos de dispersão, fazendo com que o pulso não fique curto suficiente durante o tempo de coerência da cavidade, sofrendo um alargamento temporal.

2.1.2 Mecanismos físicos não lineares para o travamento de modos.

A interação da radiação com a matéria pode ocorrer de diferentes maneiras dependendo da intensidade da onda e do tipo do material onde a onda eletromagnética se propaga. No caso de um cristal, os elétrons estão presos ao núcleo de cada átomo por uma força similar a de uma mola. Quando uma onda eletromagnética de baixa intensidade incide nesse cristal, o comportamento dos elétrons é linear, ou seja, os elétrons de valência são linearmente deslocados de suas órbitas normais em resposta ao campo elétrico da onda. Essas perturbações criam dipolos elétricos, cujo efeito macroscópico é a polarização linear do material. Entretanto, se a intensidade da onda incidente for uma fração comparável com a magnitude do campo elétrico que segura os elétrons ao núcleo (da ordem de 10^9 V/cm), a resposta ao campo elétrico não é mais linear, induzindo uma polarização não linear dentro do material. Em tal caso, a polarização total pode ser expandida em serie de potências do campo elétrico na forma:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi^{(1)}\mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(3)}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \dots, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{P} é a polarização induzida no material, \mathbf{E} é o campo elétrico incidente, $\chi^{(i)}$ são as suscetibilidades de ordem i e ϵ_0 é a permissividade dielétrica do vácuo.

O cristal de Ti:S pode ser considerado um meio isotrópico, e por questões de simetria o $\chi^{(2)}$ é nulo. Nessas condições o primeiro termo não linear da serie distinto de zero é o de terceira ordem. Podemos expressar o vetor deslocamento como sendo:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(1)}\mathbf{E} + \epsilon_0\chi^{(3)}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} = \epsilon_t\mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Encontrando que a permissividade elétrica total pode-se expressar como:

$$\epsilon_t = \epsilon_0 + \epsilon_0\chi^{(1)} + \epsilon_0\chi^{(3)}|\mathbf{E}|^2 = \epsilon + \epsilon_2|\mathbf{E}|^2. \quad (2.7)$$

Como o índice de refração é dado pela raiz quadrada da permissividade dielétrica, é fácil encontrar que:

$$n_T = (\epsilon + \epsilon_2|\mathbf{E}|^2)^{1/2} \approx n_0 + n_2I, \quad (2.8)$$

onde I a intensidade do campo incidente no material e n_2 é o índice de refração não linear cuja parte real pode ser expressada como:

$$n_2 = \frac{6\chi^{(3)}}{8\epsilon_0cn_0}. \quad (2.9)$$

O ente matemático que descreve a propagação do feixe dentro do material é a equação não linear de Schrödinger (*Non Linear Schrödinger Equation*, NSE) e pode ser escrita na aproximação paraxial como [19]:

$$\frac{\partial E(r, z)}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \nabla_r^2 E(r, z) + i \frac{k_0}{n_0} n_2 I(r, z) E(r, z), \quad (2.10)$$

onde $E = E(r, z)$ é chamada envoltória complexa, que varia suavemente com as coordenadas, especialmente com z . Esta equação pode ser entendida como uma competição entre os efeitos de difração (representado pelo termo $\frac{i}{2k_0} \nabla_r^2 E(r, z)$) e não linearidade.

2.1.2.1 Travamento de modos por efeito de lente Kerr.

A não linearidade provocada pelo efeito Kerr tem a propriedade de focalizar ($n_2 > 0$) ou desfocalizar ($n_2 < 0$) o feixe, diferente da difração que sempre tem um caráter desfocalizador. Isto supõe um estreitamento ou alargamento do perfil de intensidade no plano transversal ao eixo de propagação, fortemente ligada à intensidade inicial do feixe. Supondo $n_2 > 0$, para distâncias de propagação do campo dentro do material, onde o efeito da difração ainda não é importante, ou seja, $z \ll L_R$, onde $L_R = \frac{k_0 \omega_0^2}{2}$ é chamado de comprimento de Rayleigh e ω_0 é a cintura do feixe [19], a equação (2.10) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial E(r, z)}{\partial z} = i \frac{k_0}{n_0} n_2 |E(r, z)|^2 E(r, z), \quad (2.11)$$

Como não é conhecida a dependência explícita de intensidade ($|E(r, z)|^2$) com a direção z , este problema não tem solução exata. Mas fazendo uso de aproximações numéricas é possível obter algumas conclusões sobre a evolução do feixe dentro do cristal. Usando a aproximação de Euler [30] a equação (2.11) pode ser representada como sendo:

$$E(r, z + \Delta z) = \left[1 + i \frac{k_0 n_2 \Delta z}{n_0} I(r, z) \right] E(r, z). \quad (2.12)$$

Usando a notação exponencial para o número complexo entre colchetes e representando o campo no plano z na sua forma de fasor ($E(r, z) = |E(r, z)| e^{i\Phi(r, z)}$) em (2.12), o campo no plano $z + \Delta z$ pode ser expressado como:

$$E(r, z + \Delta z) = \left[I(r, z) + \left(\frac{k_0 n_2 \Delta z}{n_0} \right)^2 I^3(r, z) \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\left\{ \Phi(r, z) + \text{tg}^{-1} \left[\frac{k_0 n_2 \Delta z}{n_0} I(r, z) \right] \right\}}. \quad (2.13)$$

Da equação (2.13) é observado que a intensidade evolui na forma recorrente:

$$I(r, z + \Delta z) = I(r, z) + \left(\frac{k_0 n_2 \Delta z}{n_0} \right)^2 I^3(r, z). \quad (2.14)$$

Supondo que nos planos z e $z + \Delta z$, o perfil de intensidade seja descrito por gaussianas com larguras δ e δ' e intensidades pico I_0^z e $I_0^{z+\Delta z}$ respectivamente, chegamos a que:

$$I_0^{z+\Delta z} e^{-\left(\frac{r}{\delta'}\right)^2} = I_0^z e^{-\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} + I_0^z \alpha e^{-3\left(\frac{r}{\delta}\right)^2} \quad (2.15)$$

onde $\alpha = \left(\frac{k_0 n_2 \Delta z}{n_0} \right)^2$. As exponenciais em (2.15) podem ser expandidas até primeira ordem de forma que:

$$\frac{I_0^{z+\Delta z}}{I_0^z} - \frac{I_0^{z+\Delta z}}{I_0^z} \frac{1}{\delta'^2} r^2 = (1 + \alpha) - \frac{1 + 3\alpha}{\delta^2} r^2. \quad (2.16)$$

Comparando os termos com igual expoente é possível chegar a uma relação entre as larguras nos planos consecutivos z e $z + \Delta z$:

$$\frac{I_0^{z+\Delta z}}{I_0^z} = (1 + \alpha) \Rightarrow \frac{(1 + \alpha)}{\delta'^2} = \frac{1 + 3\alpha}{\delta^2} \Rightarrow \delta' = \delta \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 + 3\alpha}} < \delta. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) mostra que a largura da gaussiana no plano $z + \Delta z$ é menor do que a do plano z . O efeito acumulativo desta automodulação durante a iteração, leva a uma autofocalização do feixe. Este efeito provocará que um feixe com maior intensidade (pulsado), tenha uma cintura ligeiramente menor que um feixe com intensidade mais baixa (CW) depois do cristal. O efeito da difração será então de amplificar esta divergência em distâncias maiores. O efeito de absorvedor saturável rápido produzido pela auto-focalização pode ser completado de duas maneiras. A primeira é colocando uma fenda dentro da cavidade (*hard-aperture KLM*) (Figura 2.4), desta forma são reduzidas as perdas provocadas pela radiação CW de baixa intensidade em cada volta na cavidade, prevalecendo só a componente pulsada do feixe, de altas intensidades.

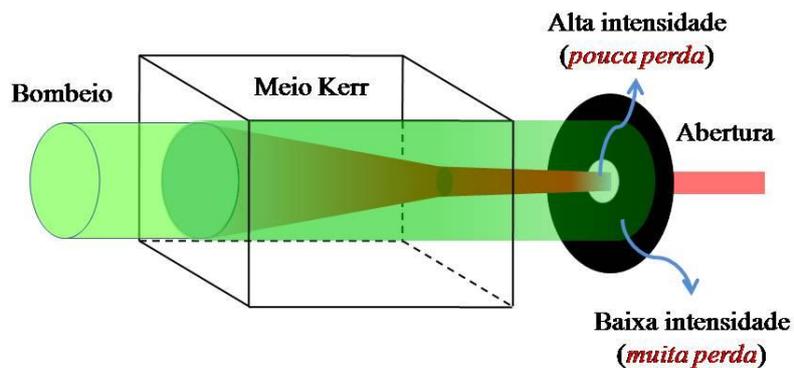


Figura 2.4. Fenda dentro da cavidade como filtro de ganho.

O uso da fenda pode ser substituído ao aproveitar o perfil espacial do ganho no cristal criado por um bombeamento Gaussiano (*soft-aperture KLM*) [20], [21]. Isto implica em conseguir, com um alinhamento correto, que a componente de alta intensidade do feixe intracavidade (componente pulsada) fique no centro do feixe de bombeamento. Como feixes com alta intensidade experimentarão ganhos maiores e por tanto cinturas menores devido ao efeito de lente Kerr, na saída do cristal os feixes CW e pulsado tem cinturas diferentes (**Figura 2.5**). Como será discutido mais adiante, a cavidade pode ser construída de tal forma que só uma cintura específica seja estável. O processo de filtragem do feixe CW é completado fazendo com que a cavidade seja instável para a propagação deste último. Após várias voltas na cavidade, esta configuração favorece cada vez mais a componente pulsada fazendo mais eficiente o efeito de lente Kerr até chegar ao regime pulsado estável.

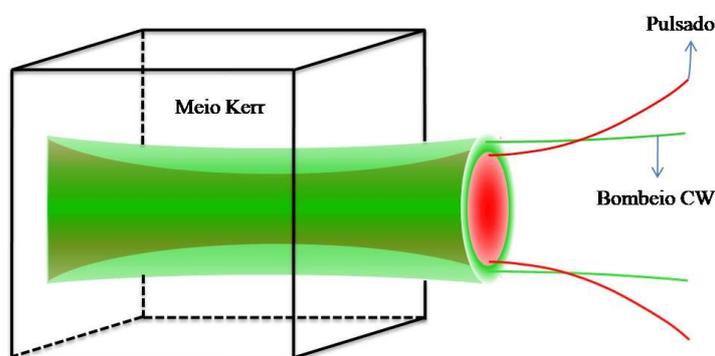


Figura 2.5. Diferença de cintura entre os feixes CW e pulsado.

Em ambos os casos, o efeito combinado é o de um absorvedor saturável muito rápido, já que o efeito Kerr é produzido pela polarização eletrônica não linear do cristal que tem tempos de resposta da ordem de alguns femtossegundos.

2.1.1.2 Auto-modulação temporal de fase

De maneira semelhante ao que acontece com o efeito de lente Kerr, para altas intensidades, o índice de refração do material apresenta também uma dependência temporal devido ao formato da envoltória do pulso. Quando a velocidade de grupo é próxima ou igual a zero, ou quando o impacto é muito menor do que a não linearidade, pode ser considerada a NSE na forma [23]:

$$\frac{\partial E(t, z)}{\partial z} = i \frac{k_0}{n_0} n_2 |E(t, z)|^2 E(t, z). \quad (2.18)$$

Por outro lado, é sabido que nas condições discutidas acima o formato do perfil de intensidade temporal do pulso não depende da distância de propagação. Neste caso, a solução formal da equação (2.18) é:

$$E(t, z) = E(t, 0) e^{-i\alpha I(t)z}, \quad (2.19)$$

onde $\alpha = \frac{k_0}{n_0} n_2$. O argumento imaginário puro na função exponencial, mostra que durante a propagação do pulso, a oscilação rápida do campo elétrico adquire uma automodulação de fase (*Self-Phase Modulation*, SPM) dependente da intensidade. Como é esperado, o perfil de intensidade do pulso no domínio do tempo é inalterado, existindo só uma mudança no domínio da frequência que provoca um alargamento do espectro. Se for considerado em $z = 0$ um pulso Gaussiano na forma:

$$E(t, 0) = \sqrt{I_0} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^2} e^{i\omega_0 t}, \quad (2.20)$$

a frequência instantânea pode ser escrita como a derivada da fase:

$$\Delta\omega_{SPM} = \omega(t) - \omega_0 = \frac{\partial}{\partial t} [\omega_0 t - \alpha I(t, z)z] - \omega_0 = \frac{2\alpha I_0}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^2} zt. \quad (2.21)$$

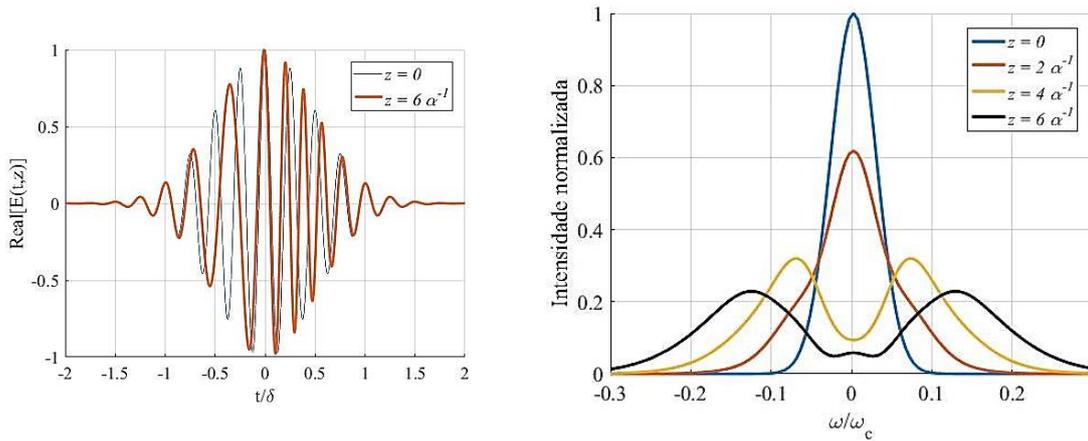


Figura 2.6. Efeito da SPM para um pulso de 100 fs centrado em 800 nm num meio com: $n_2=345\text{ nm}^2/\text{W}$, $n_0=1.7$. (a) espaço do tempo, (b) espaço da frequência.

Na **Figura 2.6 (a)** pode-se observar como o efeito da SPM provoca que a portadora do campo não tenha uma frequência constante (equação (2.21)), neste caso se diz que o pulso adquiriu varredura de frequência (*chirp*). No espaço de Fourier (**Figura 2.6 (b)**) vemos como durante a sua propagação, o espectro do pulso se alargou em torno da sua frequência central como consequência da equação (2.21). A **Figura 2.7.**, mostra o gráfico de $\Delta\omega_{SPM}$ e $\Delta\lambda_{SPM}$ para o caso do pulso Gaussiano (2.20), propagado uma distância arbitrária z .

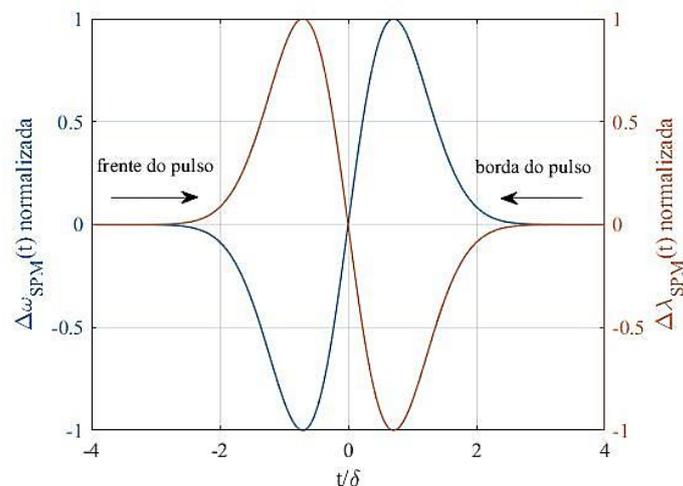


Figura 2.7. Geração de novas frequências devido a o efeito SPM.

O traçado $\Delta\omega_{SPM}(t)$ (curva azul) mostra a mudança de frequência de cada parte do pulso. Na frente, muda para frequências mais baixas (comprimentos de onda longos, curva vermelha), na borda muda para frequências mais altas (comprimentos de onda mais curtos) entanto que o próprio pulso não é deslocado nem alargado temporalmente,

tal e como foi discutido. Este efeito, combinado com os mecanismos de dispersão são os responsáveis da grande largura de banda dos lasers de modos travados.

2.2 DESENHO DA CAVIDADE

Boa parte dos lasers com cristais de Ti:S como meio de ganho, são encontrados em cavidades com geometrias linear ou anel. As cavidades lineares, ou de ondas estacionárias (**Figura 2.8 (a)**) são feitas de tal modo que a luz percorre nas duas direções o espaço entre dois espelhos nas extremidades da cavidade. No processo visto de maneira contínua, há sempre ondas contra-propagantes que se interferem para formar um padrão de ondas estacionárias. Para cavidades em anel (**Figura 2.8 (b)**), a luz pode circular em duas direções diferentes sem espelhos nos extremos.

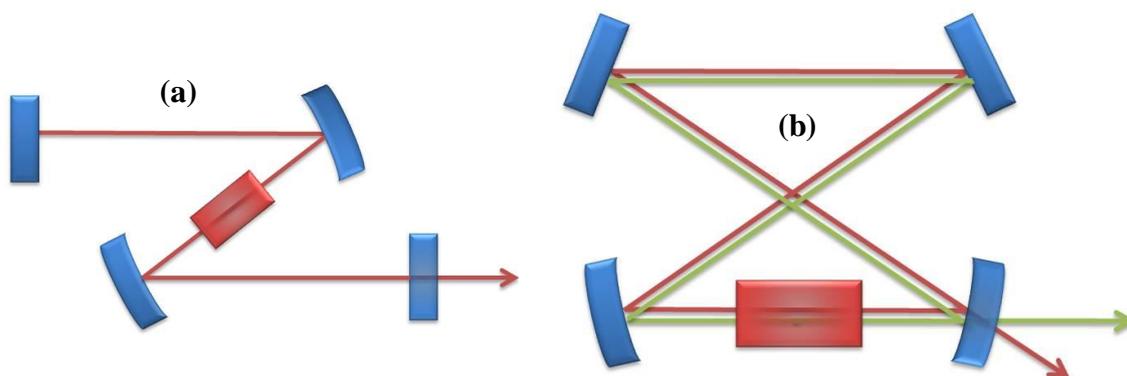


Figura 2.8. Tipos de cavidades ópticas. (a) cavidade linear, (b) cavidade em anel.

A pesar de que a cavidade linear é muito mais simples de se construir em termos de alinhamento, também é verdade que a taxa de repetição conseguida é muito menor comparando com uma cavidade com geometria de anel. É comum lasers construídos com cavidade linear chegar em 100 MHz, entretanto cavidades em anel podem chegar até 10 GHz [31]. Em resposta às necessidades do laboratório de possuir um laser com alta taxa de repetição o tipo de cavidade escolhida foi a geometria em anel.

1.2.1 Estabilidade da cavidade

Para a construção de um laser de modos travados é preciso o controle de três elementos fundamentais que garantem a existência do modo de operação contínuo e modos travados, sendo estes: a estabilidade da cintura do feixe intracavidade, o astigmatismo e a dispersão da velocidade de grupo.

1.2.1.1 Cintura do feixe

Esta condição de estabilidade garante a não divergência da cintura do feixe dentro da cavidade. A solução da parte linear da NSE (2.10) é o feixe Gaussiano que tem a forma:

$$E(r, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{r^2}{\omega^2(z)}} e^{i\left[kz - \eta(z) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right]}, \quad (2.22)$$

onde $\eta(z) = tg^{-1}(z/z_0)$ conhecida como fase de Gouy, $\omega_0^2 = 2z_0/k$ nos dá o valor da cintura do feixe, ou seja a radio do feixe em $z = 0$. Além disso, a propagação do feixe gaussiano numa cavidade óptica é descrita pela lei ABCD, que nos permite encontrar como $\omega(z)$ varia conforme a onda se propaga [32]. Neste formalismo, o raio do feixe em um plano z dentro da cavidade pode ser escrito como:

$$\omega^2(z) = \frac{\lambda_0 B}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}, \quad (2.23)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda central de feixe e A , B e D são os elementos matriciais correspondentes á matriz ABCD da cavidade. Para evitar divergência do raio do feixe é necessário então que:

$$-2 < A + D < 2, \quad (2.24)$$

Para calcular a matriz ABCD de nossa cavidade, foi usada a equivalência com guias de ondas por lentes. Neste esquema, a cavidade construída neste trabalho pode ser representada como mostrado na **Figura 2.9 (b)**

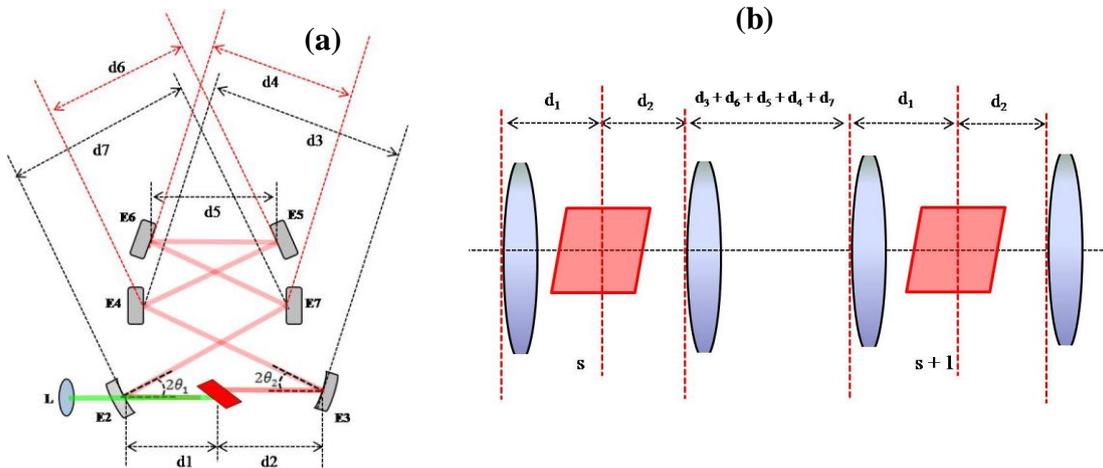


Figura 2.9. Desenho da cavidade óptica. a) Dimensiones da cavidade, b) Equivalência com o sistema de ondas guiadas por lentes.

As matrizes ABCD correspondentes à transição do feixe do plano s ao plano $s + 1$ para os dois planos ortogonais a direção de propagação do feixe (sagital e tangencial) são [33]:

$$T_{sag} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\cos \theta_2}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\cos \theta_1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$T_{tang} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_c^2 & 0 \\ 0 & 1/n_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f \cos \theta_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f \cos \theta_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n_c^2 & 0 \\ 0 & n_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

onde l e n_c são o comprimento e índice de refração do cristal Ti:S respectivamente, $D = d_3 + d_6 + d_5 + d_4 + d_7 = L - d$, L o comprimento total da cavidade, $d = d_1 + d_2$ distância entre os espelhos curvos, $f = \frac{R}{2}$ é a distância focal dos espelhos curvos e θ_1 , θ_2 os ângulos dos espelhos curvos. Depois de alguma álgebra, pode-se mostrar que a condição de estabilidade para os dois planos tem a forma,

$$-2 < ad^2 + bd + c < 2. \quad (2.27)$$

A curva apresentada na desigualdade (2.27) indica que, em função dos parâmetros da cavidade, no caso mais geral podem existir dois intervalos de valores de d que satisfaçam a condição, estes são: $d_{01} < d < d_{02}$ e $d_{03} < d < d_{04}$ como mostrado na Figura 2.10 (a).

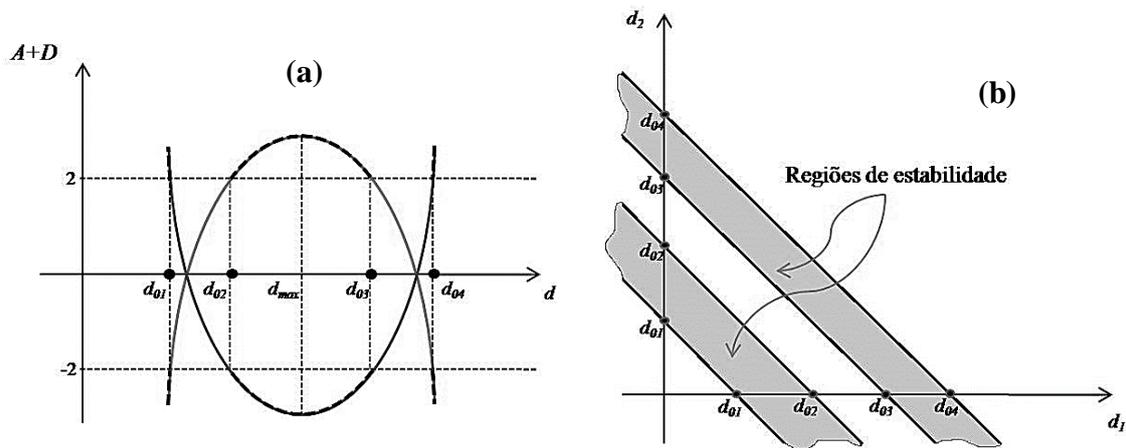


Figura 2.10. Regiões de estabilidade. a) intervalos de estabilidade para d b) intervalos de estabilidade para d_1 e d_2 .

onde d_{max} é o valor de d que maximiza ou minimiza a função, sendo um ponto de simetria entre os intervalos. Os valores de d onde a curva intercepta as retas $y = +2$ e $y = -2$, podem ser calculados levando em conta a concavidade da parábola (o sinal de

a em (2.27)). Se agora fixamos um dos comprimentos (por exemplo, d_1) então a condição de estabilidade é:

$$d_{01} - d_1 < d_2 < d_{02} - d_1 \text{ ou } d_{03} - d_1 < d_2 < d_{03} - d_1, \quad (2.28)$$

As desigualdades (2.28) definem duas regiões de estabilidade para a correlação entre d_1 e d_2 como é mostrado na **Figura 2.10 (b)**. A análise anterior é válida para garantir o modo de operação CW.

O mecanismo da geração do pulso ultracurto é o efeito de lente Kerr, discutido na seção 2.2.1.1. Esse efeito faz com que o cristal de Ti:S atue como uma lente convergente cujo foco depende da potência pico na entrada do cristal e pode ser escrito como [34]:

$$f_{Kerr} = \frac{\pi\omega^4}{4n_2Pt}, \quad (2.29)$$

onde ω é a cintura do feixe na entrada do cristal, n_2 é o índice de refração não linear ($\sim 3,45 \times 10^{-14} \text{ mm}^2/\text{W}$), P é a potência pico e t é o comprimento do cristal.

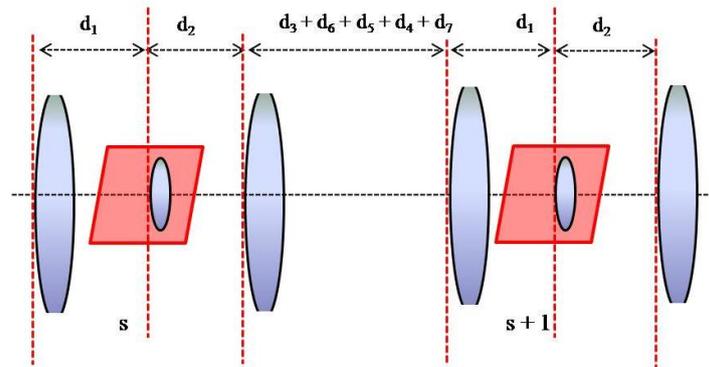


Figura 2.11. Equivalência com o sistema de ondas guiadas por lentes considerando o efeito de lente Kerr.

No formalismo da matriz ABCD este efeito é equivalente a considerar a seguinte matriz para a cavidade, (ver **Figura 2.11**):

$$T_{Kerr} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{Kerr}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \frac{B}{f_{Kerr}} & B \\ C - \frac{D}{f_{Kerr}} & D \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde A , B , C e D são os elementos matriciais de T , sendo T a matriz ABCD sem considerar o efeito Kerr (equações (2.25) e (2.26)). Se pode mostrar que a nova condição de estabilidade tem a forma:

$$-2 < \zeta d^3 + (a + \eta)d^2 + (b + \nu)d + (c + \xi) < 2, \quad (2.31)$$

onde a , b e c são os coeficientes de (2.27). O fato do polinômio da desigualdade (2.31) ser de grau três, indica que pode existir o caso onde a interseção com as retas $y = +2$ e $y = -2$ definiria três regiões de estabilidade para d chegando a desigualdades similares que as de (2.28).

1.2.1.2 Astigmatismo

Para nossa cavidade, as duas fontes de astigmatismo são os espelhos curvos [35] e o próprio cristal de Ti:S [36], uma vez que este é colocado na cavidade no ângulo de Brewster. Para um laser de Ti:S de modos travados, a não compensação do astigmatismo além de modificar o formato do feixe, pode inibir o início da operação pulsada. Também pode provocar um regime de modos travados instável por gerar regiões de estabilidade distintas para cada um dos dois planos ortogonais ao eixo de propagação. Para uma cavidade composta apenas pelos espelhos e pelo meio de ganho, conforme a **Figura 2.9 (a)**, podemos compensar o astigmatismo introduzido pelo cristal ajustando o ângulo dos espelhos curvos (θ_1 e θ_2). Para compensar o astigmatismo estes ângulos não precisam ser iguais, mas devem ser tal que a diferença do caminho óptico de cada plano ortogonal ao eixo de propagação gerada pelo cristal seja igual à diferença da distância focal dos dois espelhos em cada plano. Considerando a cavidade da **Figura 2.9 (a)**, onde os dois espelhos curvos (E2 e E3) possuem distância focal igual a f , temos [37]:

$$l \frac{\sqrt{1 + n_c^2}}{n_c^4} (n_c^2 - 1) = f \left(\frac{\sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} + \frac{\sin^2 \theta_2}{\cos \theta_2} \right), \quad (2.32)$$

onde n_c é l são o índice de refração e o comprimento do cristal

1.2.1.3 Controle da dispersão

Num meio dispersivo puro (sem não linearidade e sem perdas) a NSE no espaço de Fourier, tem a forma:

$$\frac{\partial E(\omega, z)}{\partial z} = i\beta(\omega)E(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0)^n}{n!} \beta_n E(\omega, z). \quad (2.33)$$

Onde a constante de propagação $\beta(\omega) \equiv \frac{\omega}{c} n(\omega)$ é expandida em serie de potências da frequência em torno da frequência central do pulso. Os termos β_n da serie podem ser identificados como:

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0}{v_\phi} \equiv \frac{\omega_0}{\text{velocidade de fase}}, \quad (2.34)$$

$$\beta_1 \equiv \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g} \equiv \frac{1}{\text{velocidade de grupo}}, \quad (2.35)$$

$$\beta_2 \equiv \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{v_g} \right] \equiv \text{dispersão de velocidade de grupo (GVD)}. \quad (2.36)$$

Significando que: a envoltória do pulso viaja com uma velocidade de grupo v_g , entretanto a fase das oscilações do campo dentro do pulso irão se mover a uma velocidade de fase v_ϕ . Veja que se $\beta(\omega)$ depende linearmente de ω , v_g e v_ϕ são iguais, fazendo com as diferentes frequências que compõem o pulso viajam com a mesma velocidade. O fato de existir uma GVD no meio onde se propaga o pulso, faz com que as diferentes frequências que compõem o pulso viajem com diferentes velocidades. Como consequência a forma temporal e espectral do pulso mudará durante sua propagação.

Para que uma cavidade óptica sustente um pulso, as larguras temporal e espectral devem permanecer estáveis à medida que circula pela cavidade. Uma vez que o cristal Ti:S e outros elementos ópticos na cavidade são dispersivos, o pulso é deformado na medida que passa por eles. Assim, a compensação de dispersão é imperativa para sustentar pulsos curtos. A dinâmica da compensação pode ser entendida do seguinte jeito. Suponha que inicialmente temos um pulso Gaussiano na forma,

$$E(z = 0, t) = e^{-\frac{(1+iC_0)(t/T_0)^2}{2}}. \quad (2.37)$$

É conhecido que as larguras temporal T_0 e espectral C_0 do pulso mudam depois da propagação num material dispersivo, seguindo as seguintes relações [24]:

$$T = \left[\left(1 + \frac{C_0}{T_0^2} \delta \right)^2 + \frac{\delta^2}{T_0^4} \right]^{1/2} T_0, \quad (2.38)$$

$$C = C_0 + \frac{(1 + C_0^2)}{T_0^2} \delta,$$

onde $\delta = z\beta_2$ é definido como parâmetro de dispersão e T_0 , C_0 , T e C são as larguras temporal e espectral, inicial e final do pulso. Chegados neste ponto, podemos imaginar uma cavidade, composta por dois elementos dispersivos, a qual se comporta como é mostrado no seguinte laço,

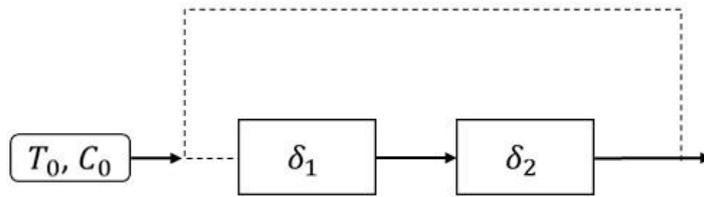


Figura 2.12. Diagrama em blocos que representa a evolução das larguras temporal e espectral de um pulso, circulando numa cavidade com dois elementos dispersivos.

Ou seja, o pulso inicialmente com larguras temporal e espectral T_0 e C_0 respectivamente, passa pelo primeiro elemento depois pelo segundo e a saída do segundo é a saída da cavidade e a entrada para a próxima volta. É possível mostrar que este laço responde ao seguinte sistema de equações recursivo:

$$T_{n+1} = \left\{ \left[1 + \frac{C_n}{T_n^2} (\delta_1 + \delta_2) \right]^2 + \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{T_n^4} \right\}^{1/2} T_n, \quad (2.39)$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{(1 + C_n^2)}{T_n^2} (\delta_1 + \delta_2).$$

É simples encontrar que a única solução univocamente estável do sistema (2.39) (ou seja $T_{n+1} = T_n$ e $C_{n+1} = C_n$) é para $\delta_1 + \delta_2 = 0$. Por indução pode-se generalizar este resultado para o caso onde existam N elementos dispersivos na cavidade, encontrando que a solução que estabiliza o sistema é $\Delta = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0$. A conclusão desta análise é que para garantir a estabilidade do pulso é preciso garantir que a soma das dispersões de todos os elementos ópticos intracavidade seja nula. Em nosso caso, o cristal de Ti:S tem uma dispersão positiva (ou normal) o que implica $\beta_2 > 0$, então a

estratégia para compensar a GVD é baseada zerar a dispersão total da cavidade agregando elementos com dispersão negativa (ou anômala), $\beta_2 < 0$.

Na literatura podem ser encontradas três técnicas para compensar GVD normal dentro da cavidade [38]. Todos estes métodos são baseados em gerar atrasos de tempo distintos para os diferentes comprimentos de onda que compõem o pulso, conseguindo assim que na saída do dispositivo os diferentes comprimento de onda fiquem em fase.

A primeira é baseada no uso de dois prismas [39]. Embora a dispersão do material dos prismas cause que os diferentes comprimentos de onda viajem ao longo de caminhos ópticos diferentes, o aparato é construído de tal forma que todos os comprimentos de onda deixem o dispositivo em momentos diferentes, mas na mesma direção (**Figura 2.13 (a)**). Se os diferentes comprimentos de onda do pulso já estavam separados no tempo, controlando a distância entre os prismas, este dispositivo pode fazê-los se sobreporem uns aos outros, resultando num pulso mais curto.

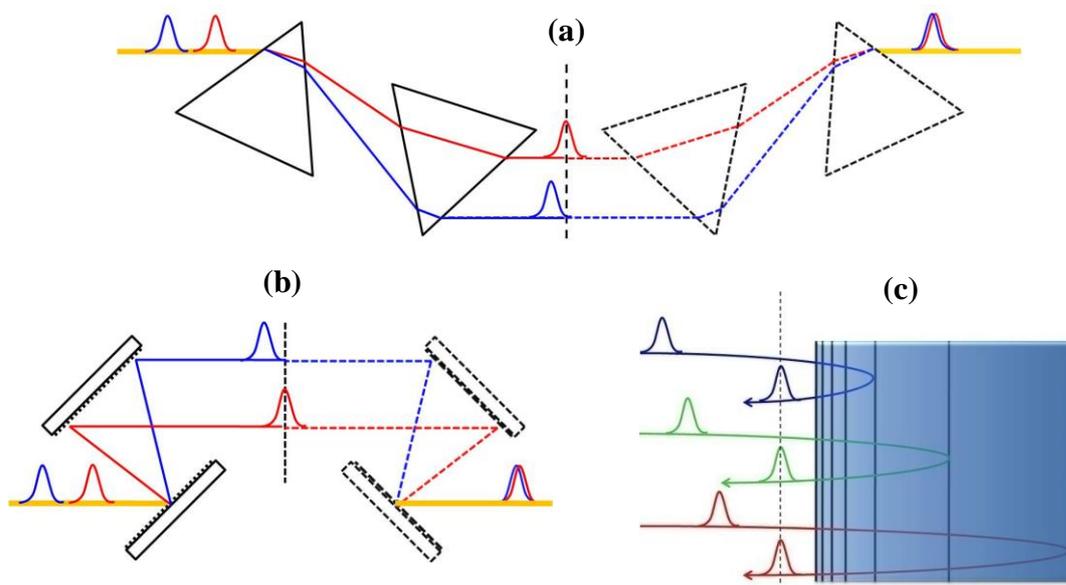


Figura 2.13. Técnicas de compensação da GVD.

Para a compressão de pulsos outro dispositivo comum é o baseado em grades de difração [40], que podem facilmente criar uma dispersão anômala muito maior do que um dispositivo baseado em prismas (**Figura 2.13 (b)**). No entanto, este tipo de dispositivo tem perdas de pelo menos 30% devido às difrações de ordem superior e perdas de absorção no revestimento metálico das grades.

Outra técnica de compressão de pulso consiste em usar espelhos dielétricos de varredura (*chirped mirrors*) [41], [42]. Este tipo de espelho também conhecido como espelhos de Bragg, são compostos de múltiplas camadas finas de material dielétrico, tipicamente depositado sobre um substrato de vidro ou algum outro material óptico (**Figura 2.13 (c)**). Por escolha cuidadosa do tipo e espessura das camadas dielétricas, pode-se conceber um revestimento óptico com reflexibilidade especificada em diferentes comprimentos de onda. Com este tipo de espelho é possível obter uma reflexão ultra-alta com valores de até 99,999 % ou maior em uma faixa estreita de comprimentos de onda. Alternativamente, eles podem ser feitos para refletir um amplo espectro de luz, como toda a faixa visível ou o espectro específico do laser Ti:S de modos travados. Embora sejam difíceis de fabricar e que a quantidade de GVD anômala que criam é muito menor do que os outros dispositivos, estes permitem que a cavidade seja mais compacta e reduzem ao mínimo as perdas do feixe intracavidade, conseguindo maiores potências de saída.

2.3 GERAÇÃO DE SEGUNDO HARMÔNICO

Uma simples descrição da geração do segundo harmônico (*Second Harmonic Generation*, SHG) é mostrada na **Figura 2.14**:

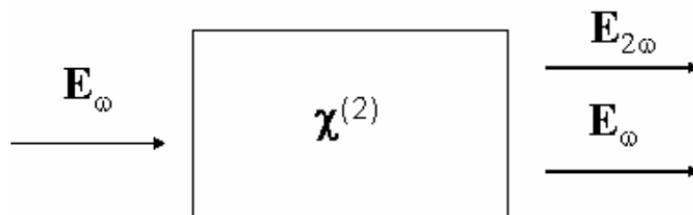


Figura 2.14. Feixe fundamental entrando em um material não-linear. Na saída do material são obtidos um feixe fundamental e seu segundo harmônico.

Um campo elétrico \mathbf{E}_ω oscilando na frequência fundamental ω , que se propaga com uma velocidade de fase $v_f(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}$, incide sobre um material não-linear e não centro-simétrico, que tem uma susceptibilidade não-linear de segunda ordem $\chi^{(2)}$ não nula. O campo fundamental induz uma resposta de polarização não-linear $\mathbf{P}^{(2)}$ dada pelo segundo termo na equação (2.7) na frequência 2ω no material. Os dipolos polarizados irradiam em uma frequência 2ω , gerando um campo elétrico $\mathbf{E}_{2\omega}$ que propaga-se com velocidade de fase $v_f(2\omega) = \frac{c}{n(2\omega)}$. Se ambas as ondas se propagam com velocidade de

fase igual, ou seja, $n(2\omega) = n(\omega)$ ao longo do comprimento do material, a energia será transferida da onda fundamental para à onda do segundo harmônico (SH), ocorrendo casamento de fase (*Phase Matching*, PM) entre as ondas fundamental e SH.

Isto em princípio não é possível, pois num material com dispersão normal, o índice de refração cresce proporcionalmente com a frequência. Assim sendo, podemos fazer uso da birrefringência em cristais [27], ou seja, da dependência do índice de refração com a direção de propagação e/ou polarização do feixe fundamental, para que $n(\omega)$ seja igual a $n(2\omega)$. Em tal caso, a onda de SH é polarizada sempre na direção que tem um índice de refração menor, assim a birrefringência do material compensa a dispersão. Na prática, o controle do ângulo do cristal com respeito à direção de propagação do feixe incidente permite um ajuste fino do PM. No caso de um cristal uniaxial negativo como o *Beta-Barium Borate* (BBO), a luz polarizada perpendicularmente ao plano que contém o vetor de propagação e o eixo óptico do cristal, experimenta um índice de refração ordinário n_0 . Já a luz polarizada no mesmo plano do vetor de propagação e ao eixo óptico do cristal, experimenta um índice de refração extraordinário n_e , que depende do ângulo entre o eixo óptico e o vetor de propagação. Ajustando este ângulo, é possível obter a condição de PM.

2.4 GERAÇÃO DE SUPERCONTÍNUO.

A geração de supercontínuo (SC) é um fenômeno físico que se refere ao alargamento espectral de um pulso laser ao propagar-se através de um meio não linear. O dispositivo mais comum para a geração de SC são as fibras de cristal fotônico (*Photonic Cristal Fiber*, PCFs) [28]. Este tipo de fibra conta com um revestimento formado por um arranjo periódico de buracos de ar que se estendem ao longo do comprimento da fibra (ver **Figura 2.15 (a)**). Os buracos de ar em torno do núcleo servem para diminuir o índice de refração efetivo do revestimento, o que implica que a luz é guiada no núcleo da fibra por o princípio de reflexão total interna.

Os efeitos não lineares em fibras são quantificados por parâmetro de não linearidade:

$$\gamma = \frac{k_0 n_2}{n_0 A_{ef}}, \quad (2.40)$$

onde A_{ef} é a área efetiva do modo de propagação. Para o caso da PCF a luz é guiada no núcleo que tem uma área muito pequena comparada com a de uma fibra convencional, dotando a PCF de uma não linearidade muito grande.

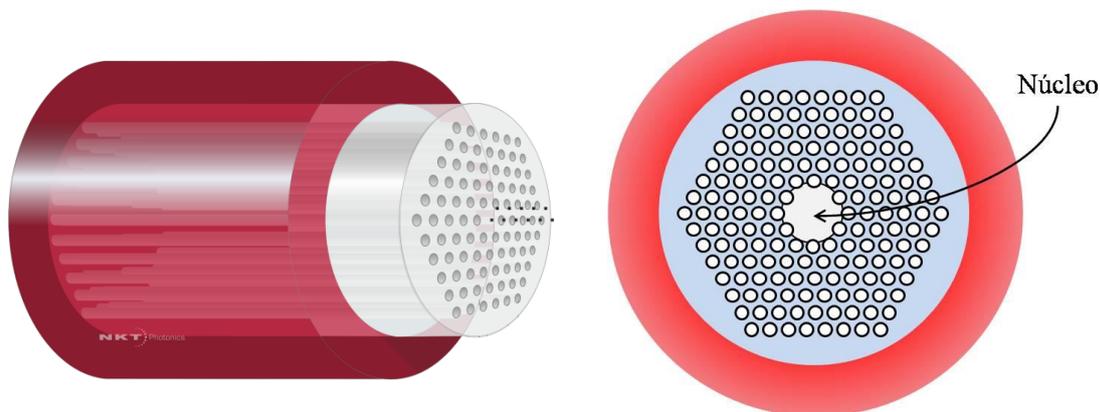


Figura 2.15. Geometria de uma PCF.

O balanço entre o parâmetro γ e o comprimento de onda de zero GVD (λ_D) com respeito ao comprimento de onda central do feixe de bombeio (λ_{pump}) determinará os efeitos não lineares que participam na formação do SC. Estes efeitos são: SPM, modulação de fase cruzada (*Cross Phase Modulation*, XPM), mistura de quatro ondas, (*Four Wave Mixing*, FWM), espalhamento Raman estimulado (*Stimulated Raman Scattering*, SRS) entre outros.

A **Figura 2.16** mostra três situações onde pode ser observado o efeito dos parâmetros para a geração de SC sobre o espectro de saída numa PCF [29]. A **Figura 2.16 (a)** mostra o que acontece no caso de bombeamento na região de dispersão normal ($\lambda_{pump} < \lambda_D$). Aqui a SPM e SRS dominam o alargamento do espectro no range de comprimentos de onda grandes. Neste caso, uns 12.5 cm de PCF com $\lambda_D = 875$ nm, são bombeados com pulsos de 25 fs, com potência média de acoplamento de 53 mW e $\lambda_{pump} = 800$ nm. O espectro de SC de saída é estável. O resultado muda drasticamente quando bombea-se com um comprimento de onda perto do λ_D , onde outros efeitos não lineares participam. A **Figura 2.16 (b)** mostra o espectro de SC para quatro comprimentos de onda de bombeio diferentes, mantendo uma potência média de 50 mW. A PCF é altamente não linear com um núcleo de 2.5 μm de diâmetro, GVD de -59 ps/km nm para 800 nm, com $\lambda_D = 900$ nm. Neste caso a fibra é bombeada por um laser de Ti:S de modos travados, com pulsos de 100 fs e taxa de repetição de 76 MHz. A **Figura 2.16 (c)** mostra o que acontece se for mantido o λ_{pump} constante, em 875 nm,

para quatro valores de potência média. Neste caso é gerado um espectro de SC mais largo.

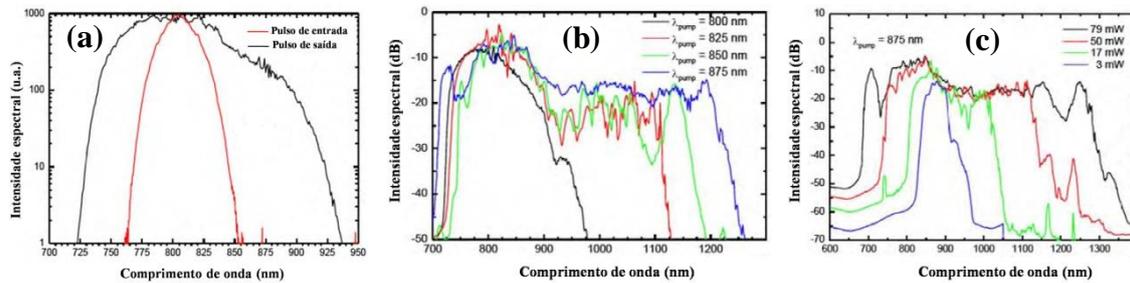


Figura 2.16. (a) Espectro de entrada e saída numa PCF com bombeamento na região de dispersão normal. Espectros SC para pulsos de 100 fs com taxa de repetição de 76 MHz (b) mantendo constante a potência média (50 mW) e variando o comprimento de onda de bombeio. (c) mantendo constante o comprimento de onda (875 nm) e variando a potência média de bombeio para $\lambda_D = 900$ nm. [29]

Neste trabalho o uso da PCF justifica-se porque é preciso gerar um espectro largo que cubra uma oitava óptica inteira para a medida da frequência de offset do laser construído. Para isso considera-se um esquema óptico como mostrado na **Figura 2.17**, conhecido como *interferômetro f-2f*. No batimento dos feixes no fotodetector, é feita uma comparação entre o segundo harmônico do campo centrado na frequência f_n ou seja, $2f_n = 2nf_{rep} + 2f_0$, e o campo centrado na frequência f_{2n} .

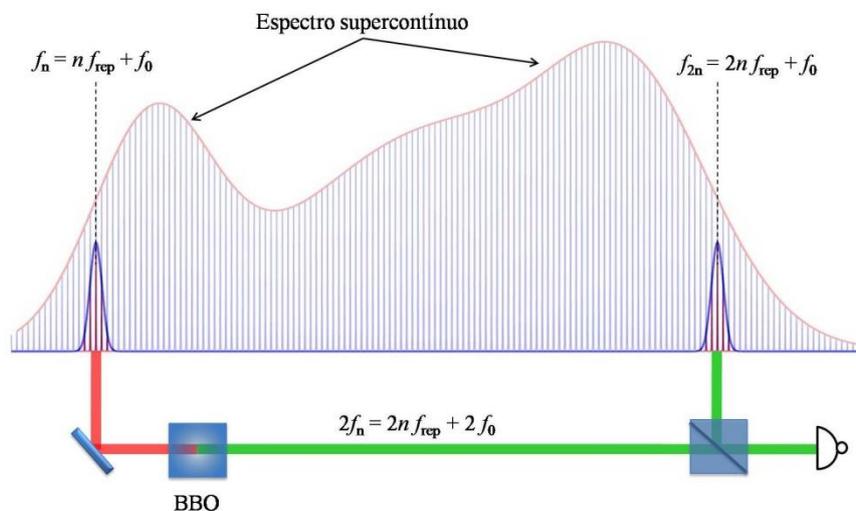


Figura 2.17. Medida da frequência de offset via um interferômetro f-2f.

Se for considerada a equação (2.1), a qual descreve o trem de pulsos na saída da cavidade, podemos achar batimento no fotodetector à saída do interferômetro f-2f como sendo:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i t(2n f_{rep} + 2f_0)} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i t(2n f_{rep} + f_0)} \\
 &= (e^{4\pi i f_0 t} - e^{2\pi i f_0 t}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (2n) f_{rep} t},
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde assumimos que existe uma simetria entre a quantidade de modos que interferem no batimento. Sabendo que a soma total de uma serie pode ser representada como a soma dos termos com índice par mais a soma dos termos com índice ímpar, a equação (2.41) pode ser rescrita como:

$$E(t) = \left[(e^{4\pi i f_0 t} - e^{2\pi i f_0 t}) \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n f_{rep} t} \right] + \left[-(e^{4\pi i f_0 t} - e^{2\pi i f_0 t}) e^{2\pi i f_{rep} t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i 2n f_{rep} t} \right]. \tag{2.42}$$

Os somatórios em (2.42) são progressões geométricas na forma $\sum_{n=0}^{N-1} z^n$ onde $z \in \mathbb{C}$, cuja soma converge a $S_{N-1} = \frac{z^N - 1}{z - 1}$ sempre que $|z| < 1$. A intensidade normalizada que é registrada no fotodetector é dada por:

$$I(t) = |A(t) + B(t)|^2 = \frac{\alpha |A(t)|^2}{N^2} + \frac{\beta |B(t)|^2}{N^2} + \frac{\gamma [A(t)B^*(t) + A^*(t)B(t)]}{2N^2}. \tag{2.43}$$

Resultando os seguintes termos:

$$|A|^2 = \sin^2\left(\frac{f_0}{2}t\right) \frac{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}, \tag{2.44}$$

$$|B|^2 = \sin^2\left(\frac{f_0}{2}t\right) \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}, \tag{2.45}$$

$$AB^* + A^*B = 2 \sin^2\left(\frac{f_0}{2}t\right) \frac{[\sin(y) - 2 \sin\left(\frac{y}{2}\right)][\sin(x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)] - 4 \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \sin^4\left(\frac{y}{2}\right) + [\sin(y) - 2 \sin\left(\frac{y}{2}\right)]^2}, \tag{2.46}$$

onde $x = 4\pi N f_{rep} t$, $y = 4\pi f_{rep} t$, e $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ simulam constantes de acoplamento do instrumento de medição (analisador de espectro RF). O cálculo numérico da transformada de Fourier da intensidade dada na equação (2.20) mostra que o espectro de

radio frequências do batimento tem a forma mostrada na **Figura 2.18**. Onde é possível identificar cada pico e o seu significado.

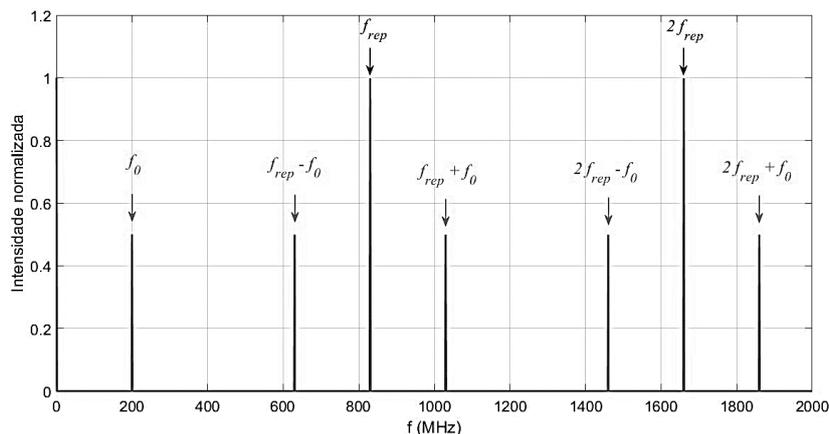


Figura 2.18. Simulação do espectro de batimento no fotodetector na saída do interferômetro $f-2f$, supondo uma taxa de repetição de 830 MHz e uma frequência de offset de 100 MHz.

2.5 ESTABILIDADE DA FREQUÊNCIA

A estabilidade da frequência do oscilador é afetada por processos de ruído aleatórios e sistemáticos. A sensibilidade da fonte a variações de temperatura, umidade, pressão, campos magnéticos, radiação, etc. tem um papel fundamental na existência de este último tipo de ruído [43], [44]. Geralmente analisa-se a estabilidade da frequência em três etapas: a curto, médio e longo prazo.

Estabilidade a curto prazo

Esta refere-se à flutuações aleatórias, não sistemáticas, comparadas com a relação sinal ruído do dispositivo de medida. Geralmente estas flutuações aparecem quando o tempo entre medidas de frequências (janela de amostragem) é menor do que um segundo, embora que para padrões atômicos, estas flutuações podem dominar a instabilidade em tempos de alguns minutos. Este tipo de ruído é conhecido como ruído branco (*White Noise*, WN).

Estabilidade a médio e longo prazo

Para janelas de amostragens da ordem de um segundo para frente, além dos processos sistemáticos, estão presentes: o ruído “*flicker*” (*Flicker Noise*, FN) e ruído Browniano (*Random Walk Noise*, RWN). São observadas também mudanças

determinísticas quando a janela de amostragem é muito grande, permitindo a detecção da fonte desta variação. No longo prazo, a flutuação sistemática da frequência se conhece também como deriva da frequência (*frequency drift*). O tempo de amostragem característico para esta região é também uma função do tipo de oscilador, mas no caso de pentes de frequências esta região coincide com janelas de amostragens maiores que um segundo.

2.5.1 Estabilização eletrônica. PLL

O efeito dos ruídos externos sobre o sistema laser é modificar o comprimento da cavidade e por conseguinte a taxa de repetição. Com o objetivo de minimizar estes efeitos foi usado no trabalho o sistema PLL. O esquema deste sistema é mostrado na **Figura 2.18**.

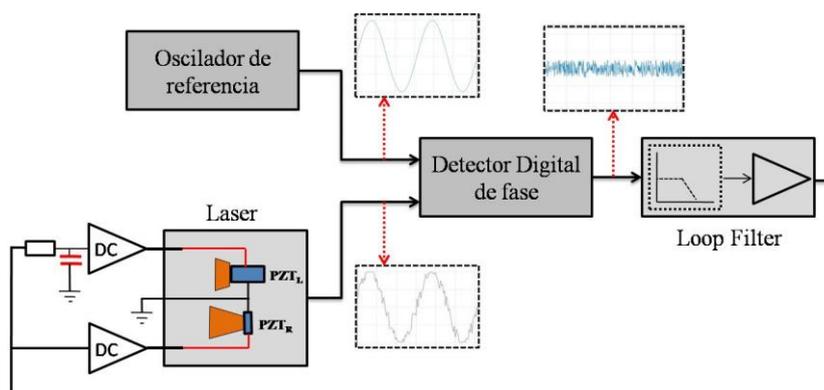


Figura 2.19. Esquema do sistema de travamento por PLL.

A melhora sobre a estabilidade do laser fornecida por este sistema, é devida a um laço de retroalimentação negativa que inicia com a comparação no detector digital de fase do sinal que tem a frequência de repetição do laser com respeito a um oscilador de referência. Este sinal de erro é injetado em um sistema de filtragem-amplificação (*Loop Filter*, LF) e finalmente a um atuador no próprio laser (PZT) que modifica o comprimento da cavidade, corrigindo possíveis variações na taxa de repetição. Depois de várias iterações, as entradas do detector digital de fase são quase iguais o que implica que o sinal de erro é reduzido à zero.

Uma explicação simples do funcionamento do PLL será dada a seguir. Suponha que a amplitude do sinal do oscilador de referência (SR) seja descrito pela função $\text{sen}(\theta_1(t))$. O sinal da taxa de repetição do laser na saída do fotodetector (SL) é dado

por $\sin(\theta_2(t))$, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são as fases dos sinais. A saída do detector digital de fase pode ser representada como:

$$\varphi(t) = K_D \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)), \quad (2.47)$$

onde K_D é um fator de ganho. Como foi descrito na **seção 2.1**, a frequência de repetição do laser esta relacionada com o comprimento total da cavidade, sendo esta controlada por o comprimento do PZT. Assim sendo, podemos expressar a frequência instantânea do SL como: [45]

$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{2\pi c}{(L_0 - l(t))} \approx \frac{2\pi c}{L_0^2} (L_0 - l(t)) = \omega_{rep} + g(t), \quad (2.48)$$

onde L_0 é o comprimento nominal da cavidade, $l(t)$ são os pequenos deslocamento introduzidos pelo comprimento do PZT, $\frac{\omega_{rep}}{2\pi}$ é a frequência de repetição nominal e a função $g(t)$ é o sinal de erro depois da filtragem com o LF. Considerando o LF como sendo um circuito passa baixa simples, como é mostrado na **figura 2.19**, a tensão de saída $x(t)$ pode ser descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC} x(t) + \frac{1}{RC} \varphi(t), \quad (2.49)$$

onde R e C são os valores de capacitância e resistência do filtro.

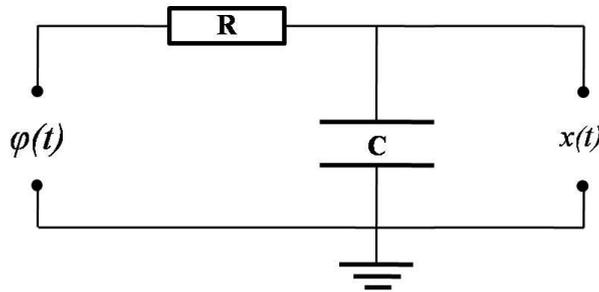


Figura 2.20. Circuito RC como modelo simplificado de LF

O laço fecha-se ao considerar que o sinal $g(t)$ definido na equação (2.37) é proporcional à saída do LF e a constante de proporcionalidade é simplesmente um fator de amplificação. Juntando as equações (2.37) e (2.38), e supondo que a diferença de fase entre os sinais comparados é pequena, encontramos o sistema de equações diferenciais acopladas que descrevem o laço de retroalimentação.

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x + \frac{K_D}{RC}[\theta_1(t) - \theta_2(t)], \quad (2.50)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_{rep} + K_{LF}x(t) + t_0 + \alpha S_n(t) + \beta F_n(t),$$

onde o fator t_0 é uma fase que simula o retardamento introduzido pelo tempo de resposta do sistema, K_{LF} é um fator que controla a sensibilidade dos PZT para mudar a frequência de repetição com unidades de $\frac{Hz}{V}$. $S_n(t)$ e $F_n(t)$ são termos fenomenologicamente introduzidos para modelar componentes de ruído lentos e rápido respectivamente, causados por fatores externos. Soluções do sistema (2.39) no regime transiente podem ser observadas na **figura 2.20**.

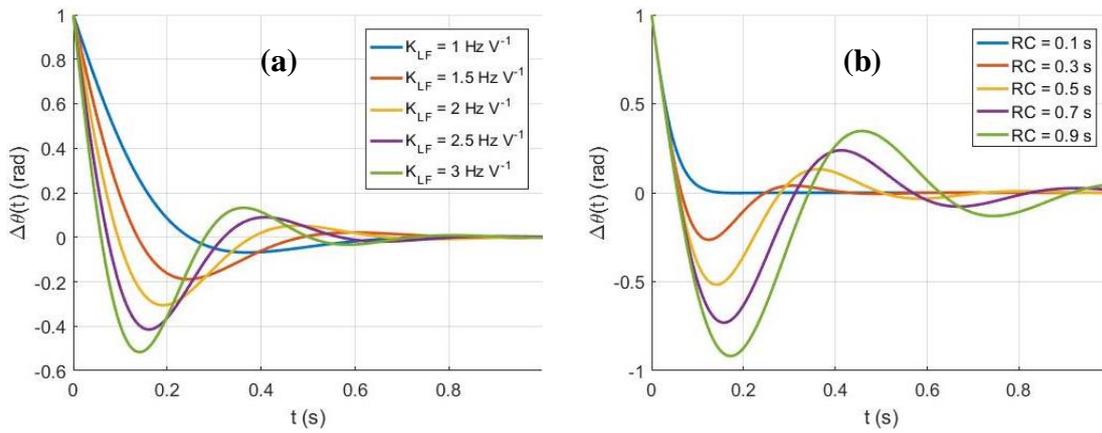


Figura 2.21. Soluções numéricas do laço de retroalimentação no regime transiente para: (a) $RC = 0,1$ s e variando K_{LF} no intervalo 1-3 com passo 0,5 (b) $K_{LF} = 3 \frac{Hz}{V}$ e variando RC no intervalo 0,1-0,9 com passo 0,2.

Na **figura 2.20**, $\Delta\theta(t)$ e a diferença de fase entre os sinais SR e SL, normalizada com respeito à diferença de fase inicial. Vemos que após da saída do regime transiente, as fases dos sinais são iguais. Isto implica que os sinais SR e SL oscilam com a mesma frequência para t suficientemente grande.

Para o análise anterior foi considerado que α e β são iguais a zero, ou seja não existe influencia dos ruídos $S_n(t)$ e $F_n(t)$. Modelando $F_n(t)$ como um ruído aleatório com valores entre 0 e 1, e $S_n(t)$ como uma onda senoidal de frequência igual a 0,005 Hz, obtemos os resultados mostrados na **figura 2.21**. Como se pode observar na **figura 2.21** (a), os ruídos fazem com que o sinal de erro, depois da saída do regime transiente, oscile entorno do zero. Uma solução aparente pode ser aumentar o nível de

amplificação. Tal e como é mostrado na **figura 2.21** (a) com o aumento de K_{LF} , o sinal de erro oscila com uma amplitude mais baixa. Entretanto, um excessivo aumento do nível de amplificação faz com que o PZT entre em ressonância. Assim como é mostrado na **figura 2.21** (b), para um valor de $K_{LF} = 10 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$ a diferença de fase entre os sinais SR e SL começa a oscilar rapidamente e a amplitude desta oscilação diverge.

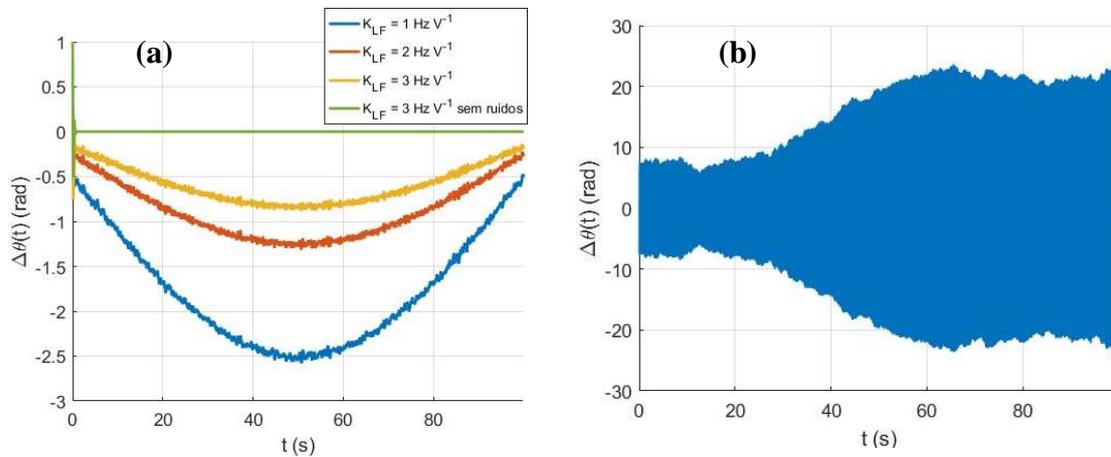


Figura 2.22. Efeito das componentes de ruído $S_n(t)$ e $F_n(t)$. (a) comparação do sinal de erro para três valores de K_{LF} (curva azul $K_{LF} = 1 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$, curva azul $K_{LF} = 2 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$, curva amarela $K_{LF} = 3 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$) com respeito ao sinal de erro sem considerar os ruídos (curva verde $K_{LF} = 3 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$). (b) sinal de erro para $K_{LF} = 10 \frac{\text{Hz}}{\text{V}}$

Em nosso trabalho são usados dois PZTs (ver **figura 2.18**). O PZT rápido (PZT_R) é usado para eliminar as componentes de ruído rápido (tipo $F_n(t)$) conectado diretamente à saída do LF. Já o PZT lento (PZT_L) é destinado a eliminar componentes de ruído de períodos muito longos e é conectado em serie com um filtro passa baixo com uma frequência de corte ($1/RC$) muito baixa.

2.5.2 Desvio de Allan clássico

A análise estatística da estabilidade de um oscilador, pode ser feita em ambos domínios, temporal ou de frequências. O objetivo final desta análise é determinar os tipos de ruído presentes na medida com o estudo da estabilidade do oscilador a curto médio e longo prazo. Neste trabalho só é feito uma análise no domínio temporal já que os resultados em ambos os domínios são equivalentes [46]. Em tal sentido, sabemos que o sinal de um oscilador, registrado com um sinal de tensão pode ser representado como:

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)]\text{sen}(2\pi\nu_0 t + \phi(t)), \quad (2.51)$$

onde $\varepsilon(t)$ representa pequenas flutuações de amplitude (desvio de amplitude com respeito à amplitude nominal V_0) e $\phi(t)$ representa flutuações na fase (desvio de fase com respeito a fase nominal $2\pi\nu_0 t$). É importante mencionar que estas flutuações englobam instabilidades do próprio oscilador e do sistema de medida.

Pode-se definir a frequência instantânea do sinal na equação (2.51) como:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (\text{fase}) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi(t)]. \quad (2.52)$$

Como flutuações na frequência, definimos o desvio da frequência instantânea com respeito à frequência nominal, $\nu(t) - \nu_0$. Definiremos também as flutuações de frequência fracionaria no caso de uma medida direta como:

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d}{dt} [\phi(t)], \quad (2.53)$$

ou,

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \overline{\nu(t)}}{F_p - \overline{\nu(t)}}, \quad (2.54)$$

se a medida é feita indiretamente, mediante o batimento do sinal da fonte em estudo com um padrão de referência. Na equação (2.54), $\nu(t)$ é o valor de frequência medido, $\overline{\nu(t)}$ o valor médio da $\nu(t)$ e F_p a frequência da fonte padrão.

Considerando uma sequência temporal de medições de uma magnitude flutuante a partir de uma serie de N leituras discretas y_i , e que as flutuações são o resultado de um processo estatístico estacionário, onde o valor médio e o desvio padrão são independentes do tempo. A forma usual de caracterizar este conjunto de dados é usando a média estatística e o desvio padrão:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (2.55)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2. \quad (2.56)$$

O desvio padrão médio é,

$$\langle S_y^2 \rangle = \frac{S_y^2}{\sqrt{N}}. \quad (2.57)$$

Mas quando existe uma correlação, introduzida por ruídos não aleatórios, entre as quantidades medidas, o uso do desvio padrão como quantificador de dispersão pode introduzir ambiguidades na leitura da estabilidade, devido a sua dependência com o número de medições. Nesse caso, o desvio de Allan, que será deduzido a seguir, tem sido generalizado internacionalmente como medida da estabilidade de osciladores [47] já que converge para a maioria de ruídos não brancos presentes em medidas de tempo e frequência. Tendo uma serie de N medidas de duração τ , e tempo T entre medidas consecutivas, com $(T - \tau)$ o *tempo morto* entre medidas como mostrado na **Figura 2.23**,

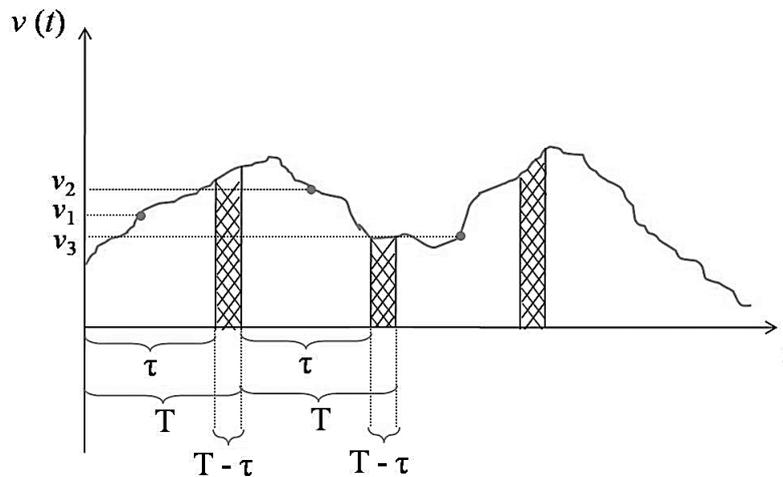


Figura 2.23. Dinâmica do processo de medida de frequência.

podemos definir então a variância de N amostras como:

$$\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(y_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \right)^2. \quad (2.58)$$

Agora, como proposto por Allan [48], para $N = 2$, com $T = \tau$, temos a chamada variância de Allan:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2(\tau) = \langle \sigma^2(2, \tau) \rangle &\equiv \left\langle \sum_{i=1}^2 \left[y(t_i, \tau) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 y(t_j, \tau) \right]^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ y(t_1, \tau) - \frac{1}{2} [y(t_1, \tau) + y(t_2, \tau)] \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ y(t_2, \tau) - \frac{1}{2} [y(t_1, \tau) + y(t_2, \tau)] \right\}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{[y(t_2, \tau) - y(t_1, \tau)]^2}{2} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

A raiz quadrada usualmente denomina-se desvio de Allan, como sendo a diferença entre dois valores consecutivos de frequências, em vez da diferença entre os valores de frequências com respeito ao valor médio.

Na prática, para N medidas de frequência, a variância de Allan σ_y^2 pode ser calculada como:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)^2, \tag{2.60}$$

onde y_i é a média dos desvios fracionários de frequência no intervalo $\tau = 2^m \tau_0$ onde τ_0 é a janela de amostragem e 2^m representa a quantidade de desvios fracionários de frequência no intervalo. [49]

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os principais resultados do trabalho. Primeiramente é feita uma caracterização da cavidade óptica construída, discutindo os principais elementos que garantem a sua estabilidade e o processo de alinhamento. São apresentadas as medidas dos espectros RF e óptico como prova do funcionamento do laser no regime de modos travados. A seguir é realizado um estudo da estabilidade da taxa de repetição. No final, são apresentadas medidas preliminares da frequência de offset.

3.1 CAVIDADE ÓPTICA

Os elementos usados para a construção da cavidade são (ver **Figura 3.1 (a)**):

- **E1**: Espelho de material dielétrico plano.
- **P**: Polarizador.
- **L**: Lente com 30 mm de distância focal. Com camada antirefletora para 532nm
- **E2**: Espelho de entrada, plano-concavo, raio de 30 mm
- **E3**: Espelho plano-concavo, raio de 30 mm
- **E4-E6**: Espelhos planos, dielétricos com chirp negativo.
- **E7** : Espelho plano, dielétricos com chirp positivo.
- **PZT_R**: Piezelétrico TA0505D024W, Percurso 2,4 μm .
- **PZT_L**: Piezelétrico AE0505D16F, Percurso 17.4 μm .
- **C**: Cristal de Ti:S, 2,9 mm de espessura.

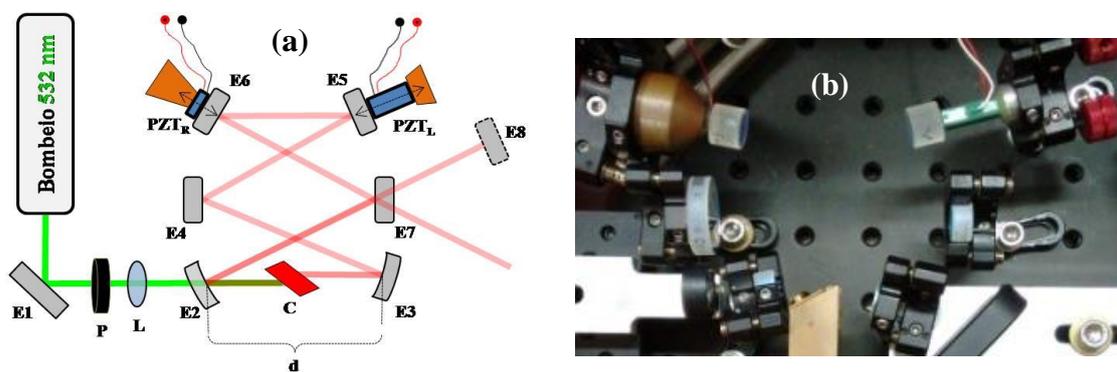


Figura 3.1. Cavidade óptica. (a) Componentes ópticos. (b) Imagem da cavidade montada no laboratório.

3.1.1 Dispersão de velocidade de grupo

Na cavidade a fonte fundamental de dispersão é o próprio meio de ganho que adiciona 60 fs^2/mm (180 fs^2 no total) de dispersão normal. No final, a dispersão total

(normal mais anômala) deve ser um pouco negativa para compensar simultaneamente os efeitos de dispersão e automodulação de fase. Para o caso de nossa cavidade os valores de dispersão de cada componente são mostrados na seguinte tabela:

E2	E3	E4	E5	E6	E7	Cristal	Total
$-60 fs^2$	$-60 fs^2$	$-55 fs^2$	$-45 fs^2$	$-45 fs^2$	$20 fs^2$	$180 fs^2$	$-65 fs^2$

Tabela 3.1. Valores da GVD dos componentes ópticos na cavidade.

3.1.2 Alinhamento da cavidade

A cavidade tem 18 graus de liberdade, explicados a seguir. Cada espelho tem ajuste nos planos tangencial (xz) e sagital (yz) no caso dos espelhos curvos pode ser ajustada a posição com respeito ao cristal (d_1 e d_2) além do controle de posicionamento no plano xz do próprio cristal. Conhecendo as condições de estabilidade discutidas anteriormente neste capítulo, achamos um espaço de parâmetros que garantem os modos de operação do laser. Os resultados a seguir são para os parâmetros $f = 15mm$, $l = 2,9mm$, $n_c = 1,7$ e $L = 361.3 mm$ fixos.

No caso dos ângulos dos espelhos curvos foi encontrada a faixa de variação mostrada na **Figura 3.2** (ver APÊNDICE A). Como foi discutido na seção **1.2.1.2**, os ângulos não precisam ser iguais sempre que a correspondência entre eles fique acima da curva azul.

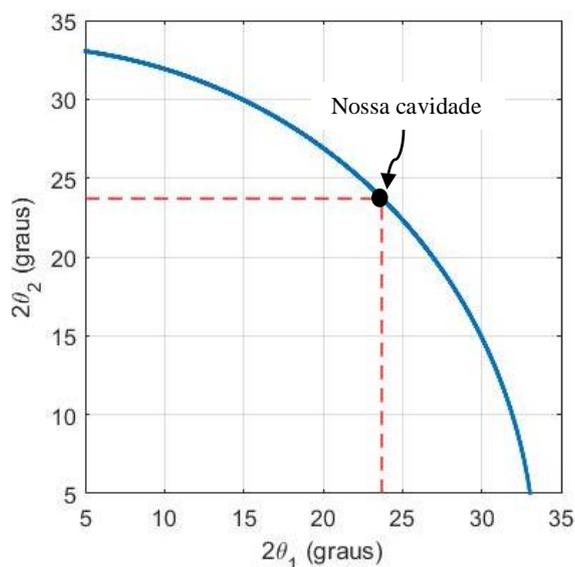


Figura 3.2. Curva de correspondência entre os ângulos dos espelhos curvos da cavidade.

Na **Tabela 3.2** mostra-se um conjunto de valores para os quais $2\theta_1$ e $2\theta_2$ satisfazem a equação (2.32).

$2\theta_1$ (°)	28,3	26,4	24,9	23,7	23,1	22,1	20,2
$2\theta_2$ (°)	18,0	20,7	22,9	23,7	24,3	25,3	26,8

Tabela 3.2. Alguns valores de $2\theta_1$ e $2\theta_2$ que satisfazem a equação (2.32).

Na **Figura 3.3** são mostradas as regiões de estabilidade para d , d_1 e d_2 calculadas usando as condições (2.28) (ver APÊNDICE B). Como foi previsto na seção 1.2.1.1, a curva na desigualdade (2.27), apresentada na **Figura 3.3 (a)**, intersecta as retas $y = +2$ e $y = -2$ em quatro pontos (ver valores na **tabela 3.3**) definindo dois intervalos de valores de d que satisfazem a condição de estabilidade. Estes valores garantem o funcionamento de regime CW.

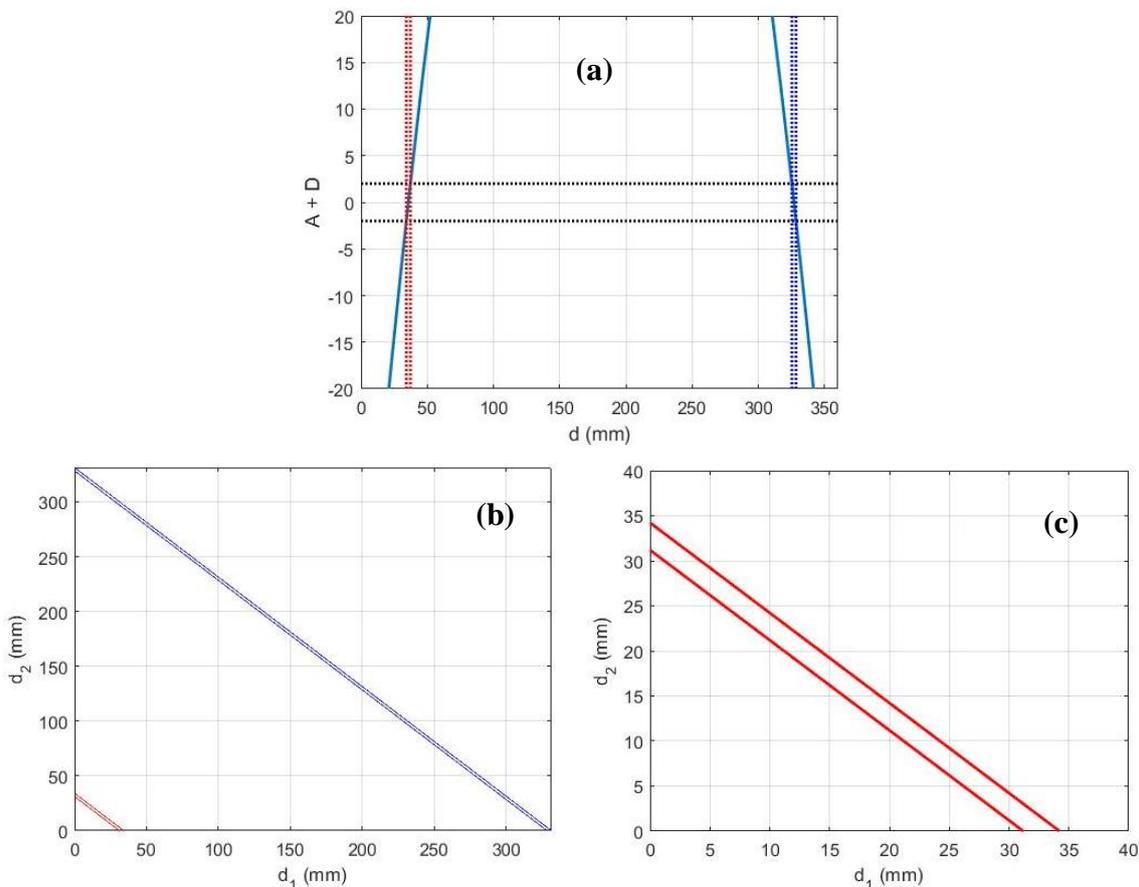


Figura 3.3. Regiões de estabilidade no regime CW. (a) a curva azul e o gráfico da parábola na desigualdade (2.27), as linhas com traço são as interseções com os extremos do intervalo de estabilidade, (b) regiões de estabilidade para a correspondência entre d_1 e d_2 , (c) primeira região de estabilidade para a correspondência entre d_1 e d_2 .

É importante discutir que o segundo intervalo, $d \in [328,3; 331,3]mm$, no caso específico de nossa cavidade, não têm aplicação prática já para manter o comprimento total da cavidade (L) fixo, o aumento de d implicaria reduzir os comprimentos d_3 ao d_7 , provocando possíveis bloqueios do feixe intracavidade pelas montagens dos espelhos. É por isso que a faixa escolhida foi $d \in [31,2; 34,2] mm$. O valor de Δd , mostrado na **Tabela 3.3**, diz quanto é possível mexer nas distâncias dos espelhos curvos com respeito ao cristal sem perder o modo de operação CW.

d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}
31,2 mm	34,2 mm	328,3 mm	331,3 mm
$\Delta d = 3mm$		$\Delta d = 3mm$	

Tabela 3.3 Extremos dos intervalos de estabilidade no regime CW.

No caso do regime de modos travados, as curvas de estabilidade dependem muito da potência pico do pulso que circula na cavidade. Na **Figura 3.4** são mostrados os resultados para quatro potências diferentes (1kW curva preta, 10kW curva azul, 50kW curva vermelha e 150kW curva verde).

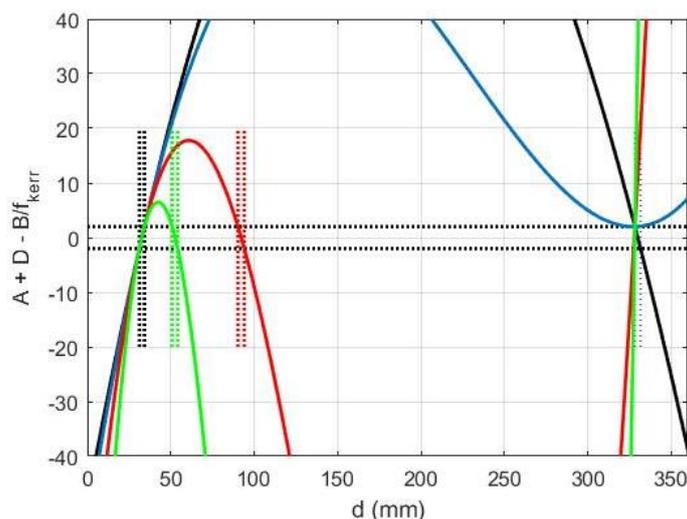


Figura 3.4. Regiões de estabilidade para d no regime de modos travados.

Como prevê a equação (2.31), existem três regiões de estabilidade onde o laser pode funcionar no regime de modos travados. Com a terceira região (328,30 - 328,31 mm) acontece a mesma coisa que com a segunda no caso do modo de operação CW. Mas agora surge uma nova faixa relativamente próxima ao extremo da região de estabilidade para o caso do modo de operação CW (**Figura 3.5 (a)**).

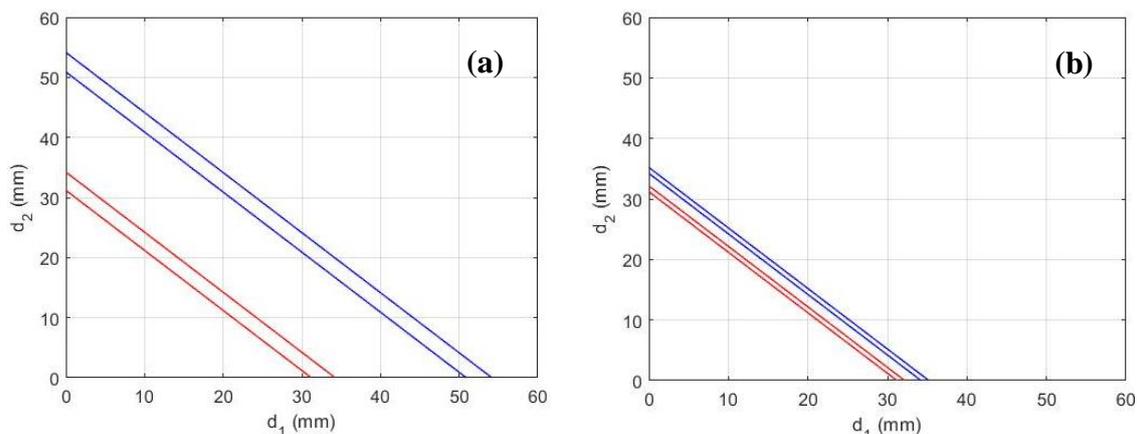


Figura 3.5. Regiões de estabilidade para d_1 e d_2 no regime de modos travados.

O problema torna-se interessante quando a potência pico aumenta muito. Nesse caso, o comprimento das regiões começa a ficar cada vez menor (**Figura 3.5**). Supondo que a frequência de repetição dos pulsos fique entorno de 1 GHz (10^9 pulsos por segundo) e que a duração do pulso seja da ordem de centenas de femtossegundos, a potência pico de cada pulso é da ordem de um milhão vezes a potência média. No caso de uma potência média típica de 1 W teremos pulsos com potência pico perto de 10^6 W. Os correspondentes valores dos extremos dos intervalos de estabilidade, para o caso de uma potência pico de 10^6 W são mostrados na **Tabela 3.4**.

d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	d_{06}
31,2mm	32,2mm	34,2mm	35,2mm	328,30mm	328,31mm
$\Delta d = 1mm$		$\Delta d = 1mm$		$\Delta d = 0,01mm$	

Tabela 3.4. Extremos dos intervalos de estabilidade no regime de modos travados.

Como é mostrado por o valor de Δd em cada região de estabilidade, o regime de modos travados é muito mais instável que o regime CW. Esta instabilidade é tal que pequenas flutuações mecânicas podem fazer o laser parar de pulsar. O objetivo final na construção de um laser de modos travados é obter a maior potência de saída, mas o comportamento previsto pela condição (2.31) é de uma relação inversa entre a potência de saída e a largura da região de estabilidade. Esta relação de compromisso deve ser otimizada no processo de alinhamento. Uma vez conhecidos os intervalos onde os parâmetros da cavidade permitem os modos de operação do laser, se inicia o processo de alinhamento. Inicialmente são fixados os ângulos dos espelhos E2 e E3 com valores entorno de 23,7 graus. Depois o espelho E3 é colocado tal que d tenha um valor

próximo ao limite superior do primeiro intervalo mostrado na **Tabela 3.2**. Com uma primeira otimização dos ângulos dos espelhos E4-E7, pode ser alcançada uma potência CW de saída de 1.2 W para um bombeamento de 5W. O processo continua variando d_2 tal que a potência de saída obtida inicialmente se reduza a metade, seguido de outra etapa de otimização dos graus de liberdade para obter novamente a maior potência CW de saída. Este processo é repetido até que seja observado que o modo transversal do feixe de saída tem um perfil tipo TEM_{20} .

3.1.3 Espectros, óptico e de radio frequências

A primeira prova de que foi alcançado o regime de modos travados é o efeito sobre o espectro de radio frequências (RF) medido na saída do fotodetector (o fotodiodo da Fermionics *FD150W*, com largura de banda de 1 GHz) com o analisador RF *Agilent N9340B* mostrado na **Figura 3.6**.

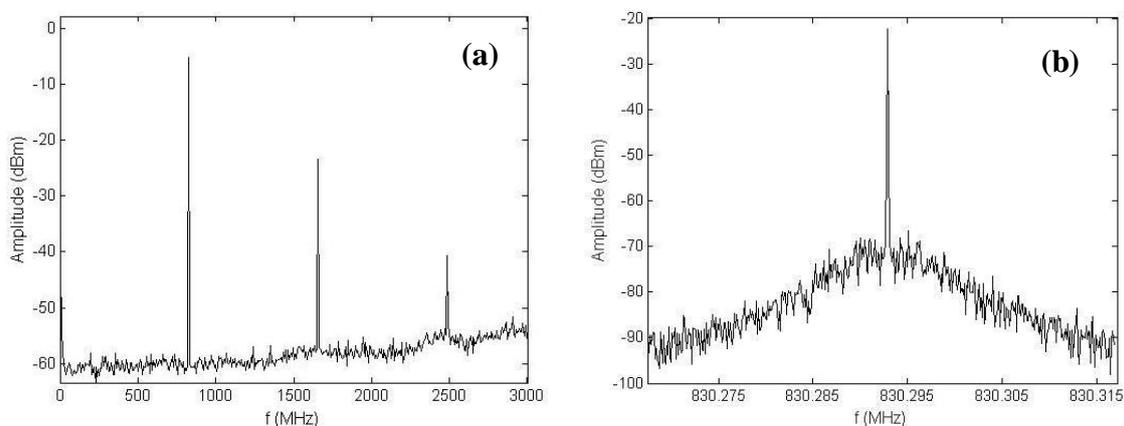


Figura 3.6. Espectro RF na saída da cavidade. a) Spam 3 GHz, RBW 30 Hz. b) Spam 50 kHz, RBW 30 Hz centrado na $f_{rep}=830.292924$ MHz.

Na **Figura 3.6 (a)** é possível observar os três primeiros modos correspondentes a f_{rep} , $2f_{rep}$ e $3f_{rep}$. Na **Figura 3.6 (b)** é mostrado um intervalo de ± 25 kHz centrado em 830.292924 MHz com uma resolução de largura de banda de 30Hz.

Uma consequência direta da cooperação dos modos longitudinais da cavidade é o surgimento de um espectro óptico mais largo que num laser CW. De fato, os modos permitidos são a interseção dos modos da cavidade com a curva de potência do meio de ganho. O espectro do laser pode ser visto na **Figura 3.7**. A largura à meia altura medida foi de aproximadamente 29 nm.

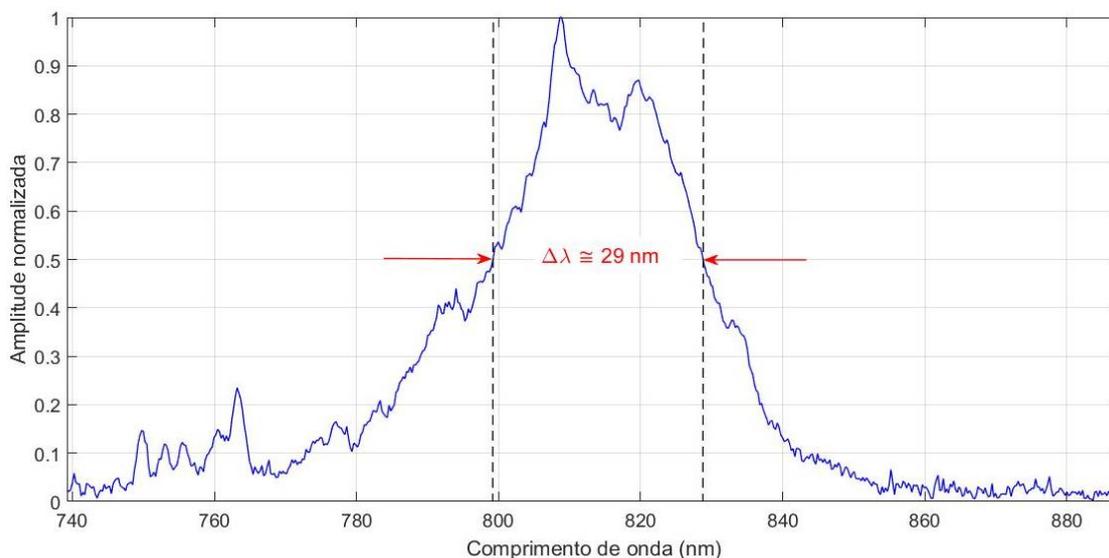


Figura 3.7. Espectro óptico do feixe na saída da cavidade, medido com um espectrômetro *OceanOptics HR4000*.

3.2 ESTABILIZAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA TAXA DE REPETIÇÃO

3.2.1 Medidas de estabilidade

Na **Figura 3.8** é mostrado o esquema instrumental para a medida da frequência de repetição do laser.

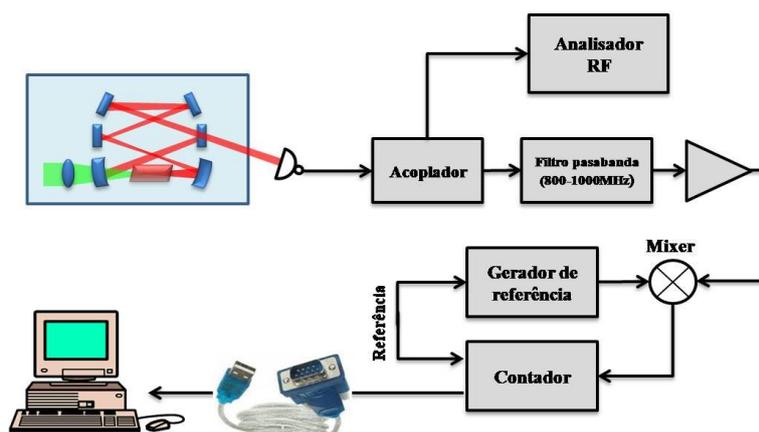


Figura 3.8. Montagem experimental para a medida de f_{rep} .

A primeira parte do esquema de medida consiste em uma etapa de filtragem do sinal adquirido por o fotodetector (o fotodiodo da Fermionics *FD150W*, com largura de banda de 1 GHz), na banda de 800 até 1000 MHz com o objetivo de eliminar componentes de frequência não desejadas, seguido de uma amplificação do sinal. Como o contador (*Agilent 53132A*) só permite a contagem de frequências abaixo de 220 MHz e a frequência de repetição é aproximadamente 830 MHz (ver **Figura 3.6 (b)**), é preciso

reduzir a frequência do sinal de entrada para o contador realizando o batimento eletrônico do sinal proveniente do fotodetector com um sinal de frequência bem próxima. Aproveitando que o contador tem incluso um filtro passa baixa com uma frequência de corte de 100 kHz, a frequência colocada no gerador de referência (*Agilent N9310A*) é tal que o sinal resultante do batimento tenha uma frequência próxima a 50 kHz. A aquisição dos dados é realizada mediante uma conexão RS232-USB do contador para o PC. Com o uso do programa *StabLab.m* (APENDICE C), construído por nosso grupo, é possível realizar a automatização da aquisição e o processamento dos dados.

3.2.1.1 Estabilidade da fonte de referência

Em nosso trabalho foi usado como referência o gerador *Agilent N9310A*. A primeira caracterização feita foi observar o efeito da temperatura sobre as medidas de frequência.

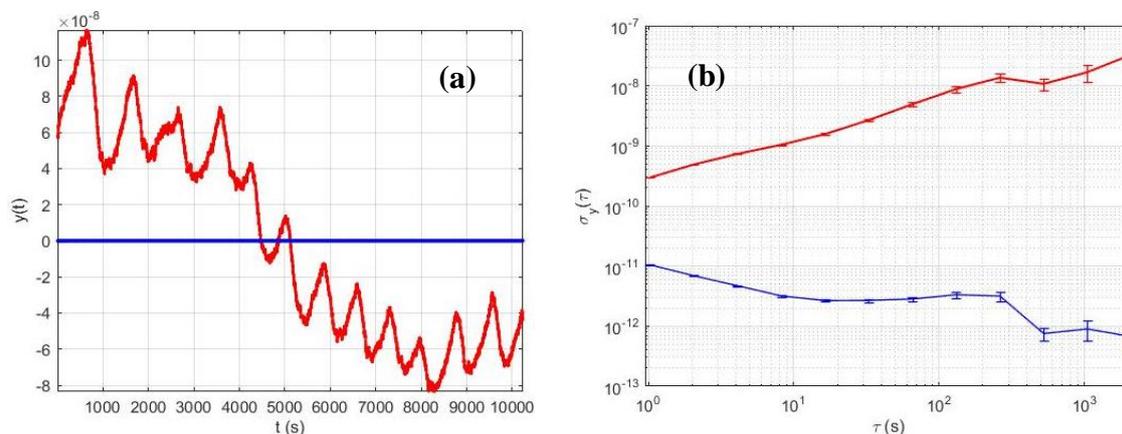


Figura 3.9. Medidas de estabilidade da frequências da fonte de referência.

Como pode ser observado na **Figura 3.9 (a)**, a curvas representam a frequência fracionaria versus o tempo. A curva vermelha contém um ruído oscilatório com um período de aproximadamente 1000 s. Esse período foi achado também na temperatura do laboratório devido ao ciclo de resfriamento do condicionador de ar. Foi feita uma segunda medida com o ar desligado (**Figura 3.9 (a)** curva azul). O desvio de Allan (na **Figura 3.9 (b)**) mostra como o efeito dessa oscilação aumenta a instabilidade do oscilador em longo prazo (curva vermelha). Quando o ar é desligado é observada uma convergência do desvio de Allan sinalizando que a deriva de temperatura desaparece completamente (curva azul). Os valores do desvio de Allan junto com os intervalos de τ e o número de pontos para cada intervalo são mostrados na **tabela 3.5**.

Com deriva de temperatura			Sem deriva de temperatura		
Pontos	τ	$\sigma_y^2(\tau)$	Pontos	τ	$\sigma_y^2(\tau)$
2	1.083	2.9284e-10	2	1.084	1.0478e-11
4	2.167	4.8059e-10	4	2.167	6.9060e-12
8	4.334	7.1588e-10	8	4.335	4.7051e-12
16	8.668	1.0042e-09	16	8.669	3.1935e-12
32	17.336	1.4936e-09	32	17.339	2.6664e-12
64	34.671	2.5392e-09	64	34.678	2.6843e-12
128	69.343	4.6507e-09	128	69.356	2.8331e-12
256	138.685	8.2088e-09	256	138.712	3.3395e-12
512	277.371	1.2420e-08	512	277.424	3.1724e-12
1024	554.741	1.0514e-08	1024	554.848	7.5383e-13
2048	1109.482	1.7763e-08	2048	1109.696	8.9921e-13
4096	2218.965	3.8231e-08	4096	2219.392	6.6996e-13

Tabela 3.5. Caracterização de Allan da estabilidade do gerador de referência.

É possível observar na **Tabela 3.5** que os valores correspondentes de τ nas duas medidas de estabilidade do gerador são diferentes. Outra questão importante é o estudo da estabilidade no curto prazo. Como é mostrado na **Figura 3.10**, o tempo morto tem um valor médio de 24 ms. Isto é, o tempo que o sistema de medida leva para adquirir a próxima medição. Então, podemos dizer que tempos entre medições com valores próximos a 24 ms não obedecem ao critério suposto por Allan para que $\sigma_y^2(\tau)$ seja uma medida da estabilidade do oscilador [47].

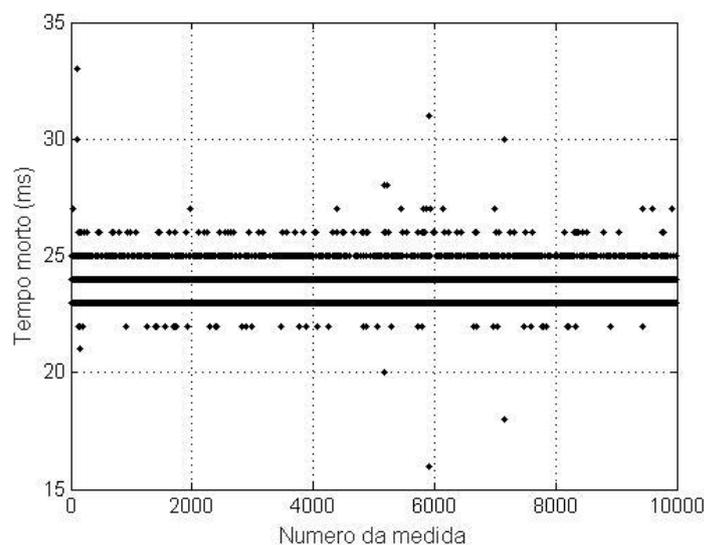


Figura 3.10. Tempo morto na medição.

3.2.1.2 Estabilidade da frequência de repetição

A primeira medida de estabilidade da frequência de repetição do laser foi feita sem ativar o travamento por PLL. A **Figura 3.11 (a)** mostra os valores de frequência fracionária no tempo onde é observada a falta de estabilidade no longo prazo.

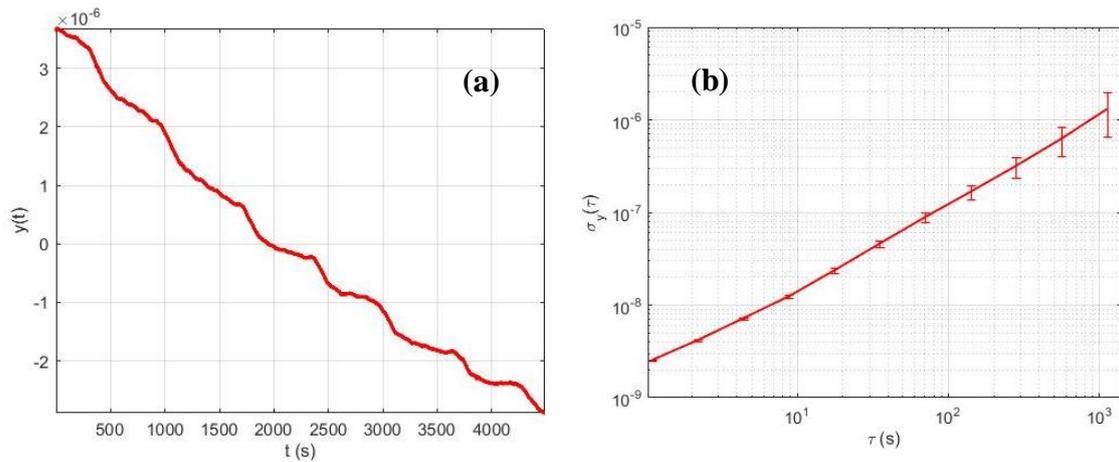


Figura 3.11. Medida de frequência de repetição sem o sistema de estabilização. (a) Desvio da frequência fracionaria no tempo, (b) Desvio de Allan.

Basicamente podem ser observadas duas variações que afetam ao sistema. Primeiramente, uma oscilação com período de aproximadamente 500s, onde especula-se que seja o efeito sistema de resfriamento do cristal (o *chiller*). O outro deslocamento faz com que o valor de desvio fracionário de frequência (medida indireta) diminua. Este comportamento é característico da falta de estabilização do comprimento da cavidade. O desvio de Allan reafirma a falta de estabilidade em longo prazo já que a curva diverge para valores grandes de τ .

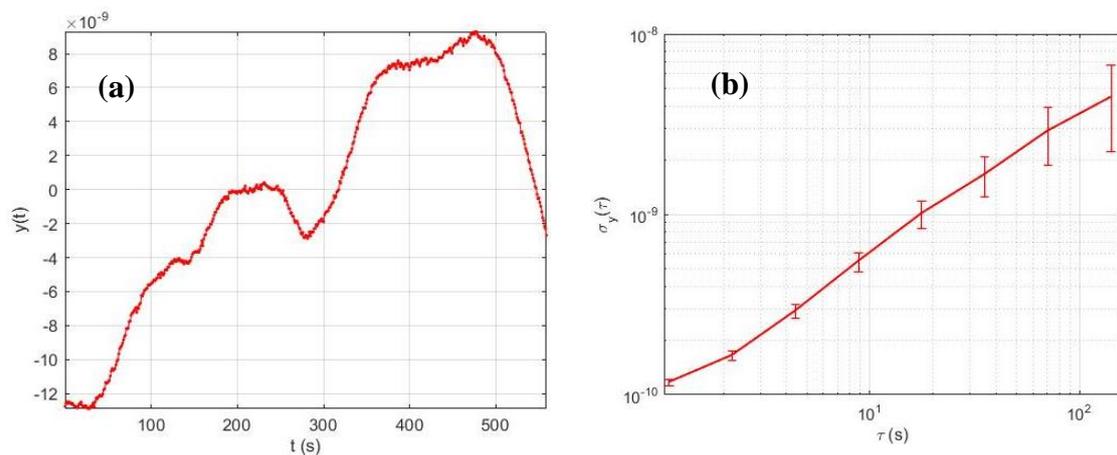


Figura 3.12. Travamento rápido da frequência de repetição. a) Desvio de frequência fracionaria no tempo, b) Desvio de Allan.

Ao ligar o sistema de estabilização, mas apenas o PZT rápido (**PZTR**), observa-se que o efeito das perturbações rápidas decresce ao diminuir o desvio de Allan para tempos curtos (**Figura 3.11 (b)**). Mas ainda observar-se a existência de uma lenta variação que se manifesta na não convergência do desvio de Allan para tempos longos.

Juntamente com o PZT_R, o travamento do sistema é concluído ao ativar o PZT lento (PZT_L). Com o uso de um filtro passa baixa na saída do *Loop Filter*, é possível eliminar componentes do sinal de erro que variam muito rapidamente, garantindo que o PZT_L apenas reduza variações lentas no comprimento da cavidade. A primeira evidência da correção dos deslocamentos lentos é o efeito sobre o sinal de erro, mostrado na **Figura 3.13**.

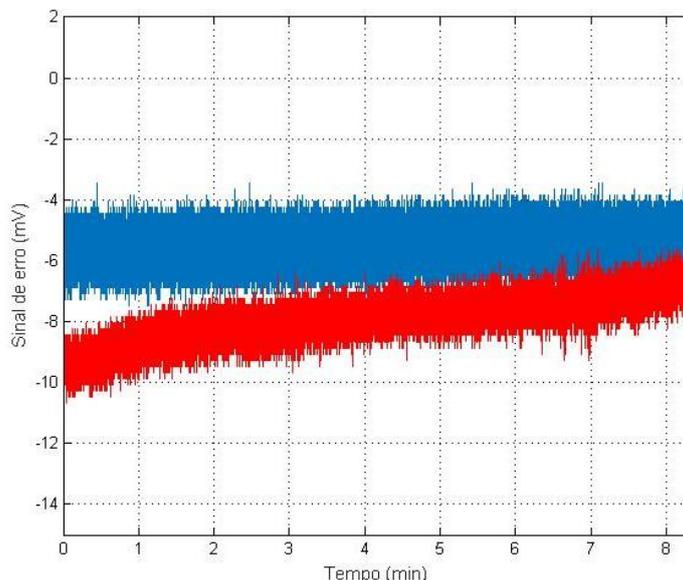


Figura 3.13. Efeito do travamento lento sobre o sinal de erro. Curva vermelha, sem travamento lento, curva azul com travamento lento.

O gráfico da **Figura 3.13** mostra a captura de aproximadamente 8 minutos do sinal de erro na saída do detector digital de fase. A curva vermelha (sinal de erro sem travamento lento) apresenta um comportamento monotônico crescente, ou seja, o travamento rápido por se só não é capaz de compensar a variação lenta da frequência de repetição. Uma vez ligado o PZT_L no sistema PLL, com a filtragem discutida anteriormente, é observado que o sistema é capaz de manter-se estável por mais tempo.

Este efeito de correção lenta é também observado no valor da frequência de repetição (**Figura 3.14**).

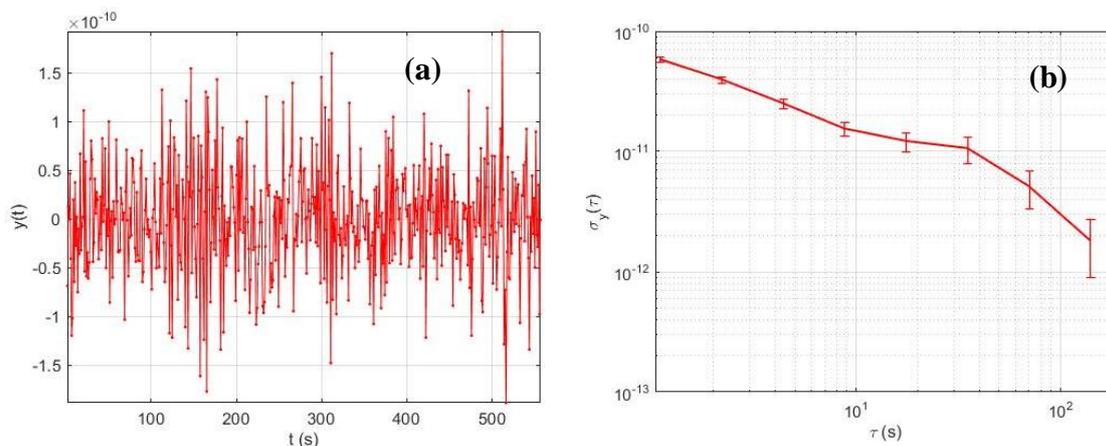


Figura 3.14. Travamento total da frequência de repetição. a) Desvio de frequência fracionaria no tempo, b) Desvio de Allan.

A **Figura 3.14 (a)** mostra como a variação do desvio fracionário de frequência diminui em uma ordem de grandeza com respeito à mesma medida no caso onde apenas está ativado o travamento rápido (**Figura 3.12 (a)**). O desvio de Allan apresentado na **Figura 3.14 (b)** mostra que a frequência de repetição foi estabilizada ao apresentar um comportamento convergente para tempos longos e um valor com duas ordens de grandeza menor que no caso do sistema funcionando sem travamento nenhum (**Figura 3.11 (b)**). Uma comparação dos desvios de Allan para as diferentes etapas do travamento é apresentada na **Figura 3.15**.

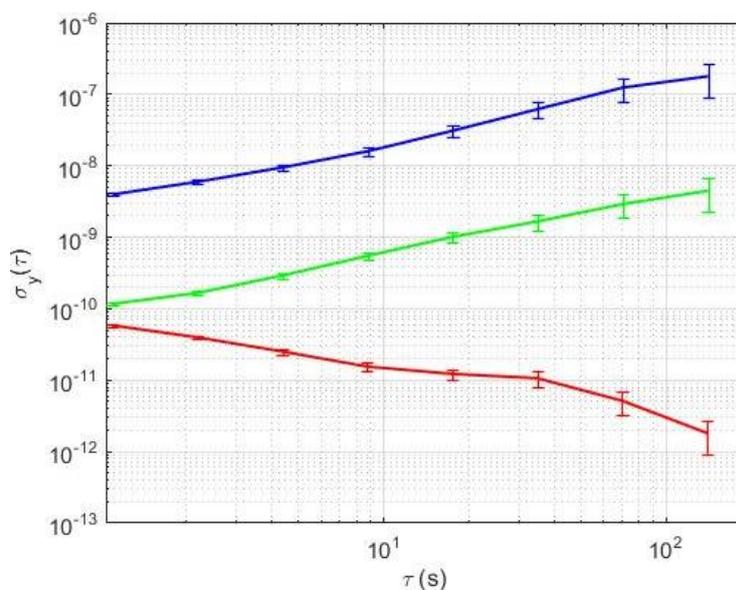


Figura 3.15. Comparação dos desvios de Allan da frequência de repetição nas distintas fases do travamento. A curva azul sem travamento, curva verde só travamento rápido, curva vermelha: travamento rápido e lento.

3.3 MEDIDA DA FREQUÊNCIA DE OFFSET

O esquema experimental usado para a medida de f_0 é mostrado na **Figura 3.16**

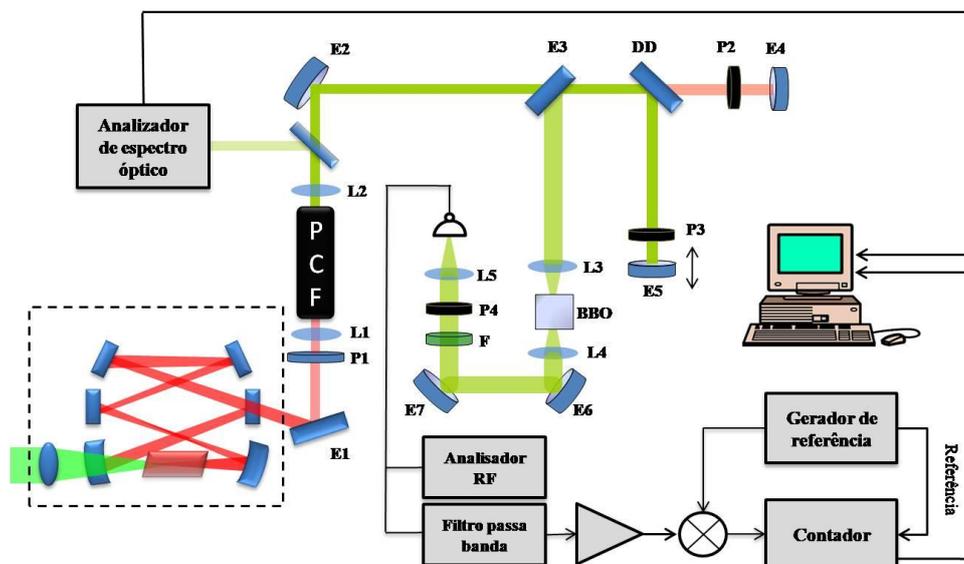


Figura 3.16. Aparato experimental para a medida de f_0 .

A primeira etapa do esquema é passar o feixe de saída da cavidade por uma PCF, onde usamos a *NKT Photonics FW800-086*. A curva de dispersão da PCF é mostrada na **Figura 3.17**. Neste caso observamos que o comprimento de onda de zero GVD é de 750 nm. A PCF é bombeada com o laser centrado em 815 nm (ver **Figura 3.18** curva vermelha).

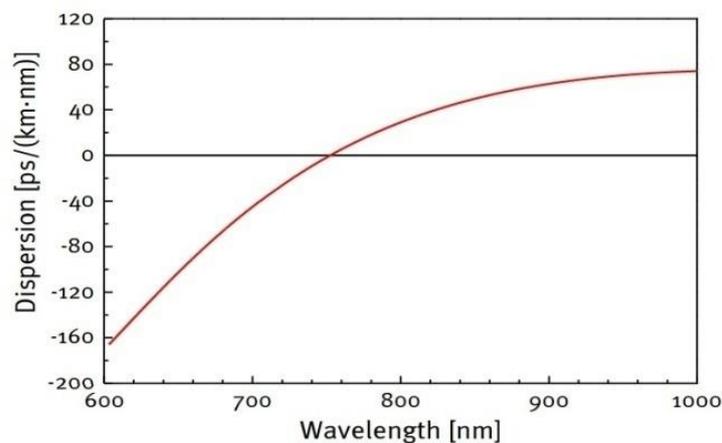


Figura 3.17. Curva de dispersão da PCF *NKT Photonics FW800-086*. [50]

Como foi discutido na seção 2.4, usando os efeitos não lineares que ocorrem no interior da fibra é possível gerar um espectro largo. Isto permite cobrir uma oitava inteira, ou seja, de uma dada frequência f_n até seu dobro f_{2n} .

O espectro óptico obtido na saída da fibra é mostrado na **Figura 3.18** (curva verde).

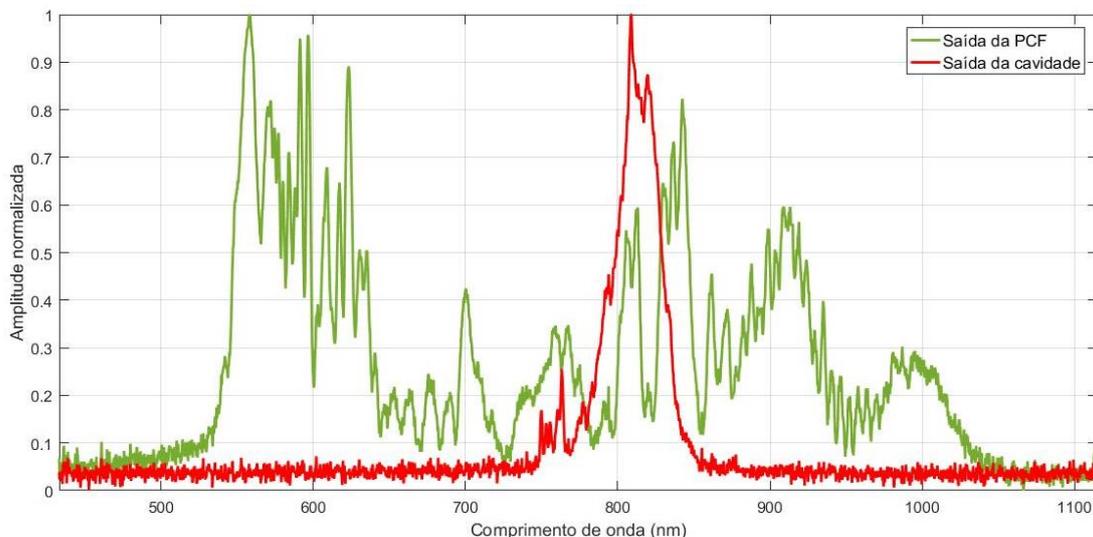


Figura 3.18. Espectro óptico na geração de supercontínuo.

Com o espectro alargado, o feixe resultante é dividido em dois usando o divisor dicróico **DD**. Este transmite na direção de propagação do feixe comprimentos de onda maiores que 900 nm e reflete os menores.

O interferômetro de Michelson formado pelos espelhos **E4** e **E5** permite compensar qualquer diferença de caminho óptico gerada na divisão. Na volta os dois feixes são refletidos pelo espelho **E3** e passam pela lente **L3** que focaliza os feixes no cristal de **BBO** (BaB_2O_4) que permite dobrar a frequência mediante o processo de geração de segundo harmônico discutido no **seção 2.3**. No caso do feixe com comprimento de onda de 1064 nm é dobrado a 532 nm (28 THz para 56 THz). A lente **L4** completa junto com **L3** o telescópio para recompor os feixes. Esta configuração óptica é conhecida como interferômetro f-2f.

O espectro RF mostrado na **Figura 3.19** contempla o surgimento de dois novos picos com respeito a medida feita na seção 3.1.1, ou seja, além do pico correspondente à taxa de repetição, os dois novos modos representam as frequências de batimento entre os feixes. Pode-se mostrar que estes modos correspondem a f_0 e $f_{rep} - f_0$ respectivamente.

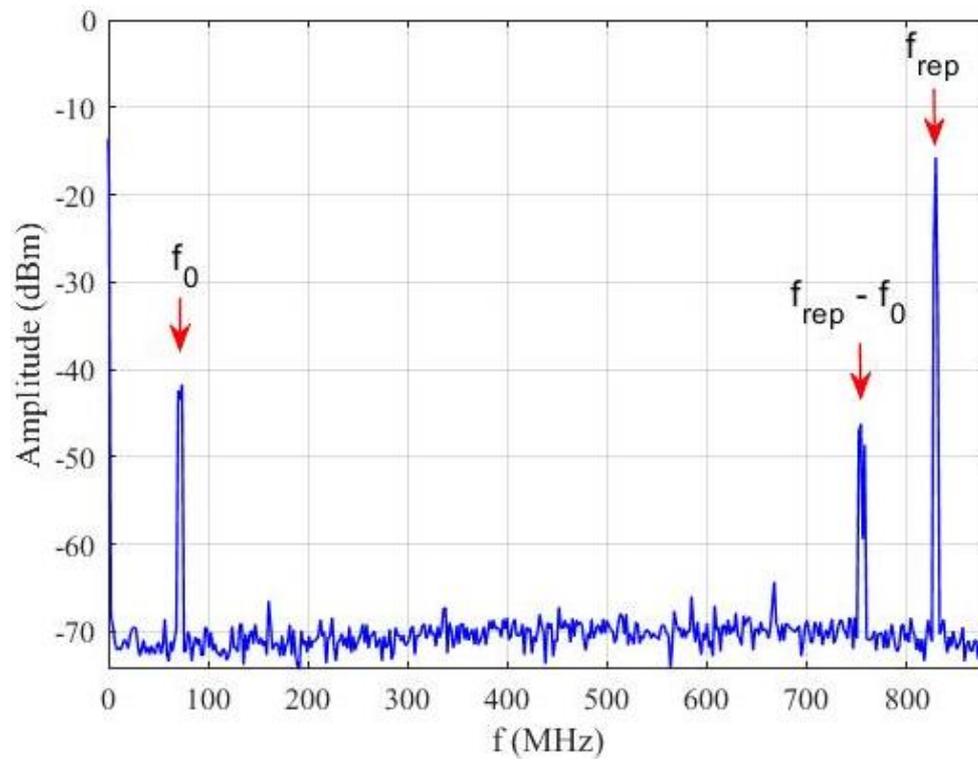


Figura 3.19. Espectro de radio frequência com resultado do batimento no fotodetector.

Uma medida preliminar da frequência de offset reporta um valor de aproximadamente 72 MHz, onde a taxa de sinal ruído corresponde a aproximadamente 30 dBm.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação, construímos um pente de frequências ópticas usando como meio de ganho um cristal de titânio safira (Ti:S) em uma cavidade com geometria em anel. Conseguimos o regime de modos travados com uma largura de banda de 29 nm, centrado em 815 nm. A taxa de repetição foi de 830 MHz. Com a estabilização eletrônica, baseada num esquema de PLL, conseguimos uma estabilidade do desvio de fracionário da frequência de repetição de 10^{-11} para tempos de 1 s e 10^{-12} para tempos de 500 s. Com a construção de um interferômetro f-2f, foi feita a medida preliminar da frequência de offset do laser e obteve-se um valor de 73 MHz.

Esta dissertação encerra a primeira parte de um trabalho mais extenso, que contempla a completa estabilização do laser construído. Para a próxima etapa será estabilizada a frequência de offset usando um modulador acusto-óptico com o objetivo de modular a intensidade do feixe de bombeamento da cavidade, sendo usado um sistema PLL similar ao que foi usado para o travamento da taxa de repetição. Depois de uma completa caracterização do laser travado totalmente, serão realizadas algumas medidas de espectroscopia atômica em células de vapor de Rb, assim como eventuais aplicações em espectroscopia direta com pentes de frequências em átomos frios.

REFERÊNCIAS

- [1] “*Frequency comb metrology with a near-infrared optical parametric oscillator*”. K. Balskus, S. Schilt, V.J. Wittwer. **CLEO: Science and Innovations**, (2016).
- [2] “*Optical frequency metrology*”. Th. Udem, R. Holzwarth & T. W. Hänsch, **Nature**, **416**: 233-237 (2002).
- [3] “*Colloquium: Femtosecond optical frequency combs*”. Steven T., Cundiand Jun Ye. **Mod. Phys.**, **75(1)**: 325-342, (2003).
- [4] “*Optical frequency synthesis based on mode-locked lasers*”. Steven T. Cundi, Jun Ye and John L. Hall. **Rev. Sci. Inst.**, **72(10)**: 3749-3771, (2001).
- [5] “*Continuous probing of cold complex molecules with infrared frequency comb spectroscopy*”. Ben Spaun, P. Bryan Changala, David Patterson, Bryce J. Bjork, Oliver H. Heckl, John M. Doyle and Jun Ye, **Nature** **533**: 517-520 (2016).
- [6] “*Cavity-ringdown molecular spectroscopy based on an optical frequency comb at 1.45–1.65 μm* ”. Michael J. Thorpe, Darren D. Hudson, Kevin D. Moll, Jacob Lasri, and Jun Ye. **Opt. Lett.**, **32(3)**: 307-309, (2007).
- [7] “*Cavity-enhanced optical frequency comb spectroscopy: application to human breath analysis*”. Michael J. Thorpe, David Balslev-Clausen, Matthew S. Kirchner, and Jun Ye. **Opt. Exp.** **16 (4)**: 2387-2397, (2008).
- [8] “*Cavity-enhanced direct frequency comb spectroscopy*”. M. J. Thorpe and J. Ye, **Appl. Phys. B91**: 397-414 (2008).
- [9] “*A spectrograph for exoplanet observations calibrated at the centimetre-per-second level*”. Tobias Wilken, Gaspare Lo Curto, Rafael A. Probst, Tilo Steinmetz, Antonio Manescau, Luca Pasquini, Jonay I. González Hernández, Rafael Rebolo, Theodor W. Hänsch , Thomas Udem and Ronald Holzwarth. **Nature** **485**: 611-614 (2012).
- [10] “*A green astro-comb for Earth-like exoplanet searches*”. Chih-Hao Li, Alexander G. Glenday, Guoqing Chang, Li-Jin Chen, Gabor Furesz, Nicholas Langellier, Alexander Zibrov, Franz Kaertner, David F. Phillips, Dimitar Sasselov, Andrew Szentgyorgyi, and Ronald L. Walsworth. **OSA: Frontiers in Optics** (2014).
- [11] “*Astro-comb calibrator using a turn-key laser frequency comb*”. Aakash Ravi, David F. Phillips, Matthias Beck, Leopoldo L. Martin, Massimo Cecconi, Adriano Ghedina, Emilio Molinari, Albrecht Bartels, Dimitar Sasselov, Andrew Szentgyorgyi and Ronald L. Walsworth. **ARXIV** (2017).

- [12] “*Generation of multiphoton entangled quantum states by means of integrated frequency combs*”. Christian Reimer, Michael Kues, Piotr Roztock, Benjamin Wetzel, Fabio Grazioso, Brent E. Little, Sai T. Chu, Tudor Johnston, Yaron Bromberg, Lucia Caspani, David J. Moss and Roberto Morandotti. **Science**, **351**: **1176-1180** (2016).
- [13] “*Integrated quantum frequency comb source of entangled qubits*” Christian Reimer, Michael Kues, Piotr Roztock, Benjamin Wetzel, Yaron Bromberg, Brent E. Little, Sai T. Chu, David J. Moss, Lucia Caspani and Roberto Morandotti. **OSA, CLEO: QELS Fundamental Science** (2016).
- [14] “*Accurate measurement of large optical frequency differences with a mode-locked laser*”. T. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth and T. W. Hänsch. **Opt. Lett.** **24(13)**: **881- 883** (1999).
- [15] “*Optical Frequency Synthesis and Comparison with Uncertainty at the 10^{-19} Level*”. Long-Sheng Ma, Zhiyi Bi, Albrecht Bartels, Lennart Robertsson, Massimo Zucco. Robert S. Windeler. Guido Wilpers, Chris Oates, Leo Hollberg and Scott A. Diddams. **Science** **303**: **1843-1845** (2004).
- [16] “*Frequency stability characterization of a quantum cascade laser frequency comb*”. Francesco Cappelli, Giulio Campo, Iacopo Galli, Giovanni Giusfredi, Saverio Bartalini, Davide Mazzotti, Pablo Cancio, Simone Borri, Borislav Hinkov, Jérôme Faist and Paolo De Natale. **Rev. Laser Phot.** **10(4)**: **1-8** (2016).
- [17] “*Fenômenos ultrarápidos: Geração de pulsos laser ultracurtos e suas aplicações*”. Carlos Henrique de Brito Cruz and Hugo Luis Fragnito. Technical report, Nex Fot, Núcleo de Excelência em Fotônica, Instituto de Física, Unicamp, (2000).
- [18] “*Simultaneous q-switching and mode-locking in the CW Nd:yag laser*”. D. J. Kuizenga and A.E. Siegman, **Opt. Comm.** **9(3)**: **221-226** (1973).
- [19] “*Dinámica no lineal de haces ópticos de Airy y Bessel en medios Kerr con absorción no lineal*”. Tese doutoral, Carlos Ruiz Jiménez, Universidad Politecnica de Madrid. (2016).
- [20] “*Resonators for kerr-lens mode-locked femtosecond ti:sapphire lasers*”. G. Cerullo, S. De Silvestri, V. Magni, and L. Pallaro. **Opt. Lett.**, **19(11)**: **807-809** (1994).
- [21] “*Theory of kerr-lens mode locking: role of self-focusing and radially varying gain*”. Joachim Herrmann. **Opt. Soc. Am. B**, **11(3)**: **498-512** (1994).

- [22] “*Solid-State Laser Engineering*”. Walter Koechner. **Springer, Berlin, 5o. ed. (1999).**
- [23] “*Nonlinear Optics Principles and Applications*” Karsten Rottwitt, Peter Tidemand-Lichtenberg, **CRC Press (2015).**
- [24] “*Nonlinear Fiber Optics*”. Govind P. Agrawal. 4th ed., Elsevier, **(2007).**
- [25] “*Pulse distortion in single-mode fibers: Chirped pulses*”. D. Marcuse, **Appl. Opt. 20(20): 3573-3579 (1981).**
- [26] “*Caracterización de Pulsos de Luz Láser Ultracortos*”. Dissertação de mestrado. Eduardo Pérez González, Universitat Politècnica de Catalunya, **(2013).**
- [27] E. Hecht, Optics. **Addison – Wesley Pub. Co., 3rd ed., chap. 8 (1997).**
- [28] “*Generación de supercontinuo en fibra de cristal fotónico utilizando pulsos cortos (femtosegundos)*”. Dissertação de mestrado, Yadira Márquez Barrios, CIO, **(2010).**
- [29] “*Supercontinuum generation in Photonic Crystal Fibers*”. John M. Dudley, Goëry Genty, Stéphane Coen. **Rev. Mod. Phys., 78: 1135-1184 (2006).**
- [30] “*Advanced Calculus*”. Wilfred Kaplan. **1st. ed., chap. 6.**
- [31] “*10-GHz Self-Referenced Optical Frequency Comb*”. Albrecht Bartels, Dirk Heinecke and Scott A. Diddams, **Science, 326: 681 (2009).**
- [32] “*Laser Eletronics*”. Joseph Thomas Verdeyen. **2nd. ed. (1981).**
- [33] “*Construção e caracterização de um laser contínuo de Titânio-Safira*”. Dissertação de mestrado, Flávio Campopiano Dias de Moraes, Universidade de São Paulo, Instituto de Física **(2013).**
- [34] “*Analysis of cavities for self-starting kerr-lens modelocked lasers*”. Jinan Xia and Min Hee Lee. **App. Opt., 41(3): 453-458 (2002).**
- [35] “*Astigmatically compensated cavities for CW dye lasers*”. Herwig W. Kogelnik, Erich P. Ippen, Andrew Dienes, and Charles V. Shank. **J. Quant. Elect., 8(3): 373-379 (1972).**
- [36] “*Astigmatic gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities*”. David C. Hanna. **J. Quant. Elect., 5(10): 483-488 (1969).**
- [37] “*Desenvolvimento de pentes de frequências ópticas para metrologia e espectroscopia de precisão*”. Tese doutoral, Giovana Trevisan Nogueira, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física **(2007).**
- [38] “*A Review of Cavity Design for Kerr Lens Mode-Locked Solid-State Lasers*”. Shai Yefet and Avi Pe’er. **Appl. Sci., 3: 694-724 (2013).**

- [39] “*Negative dispersion using pairs of prisms*”. Fork, R.L.; Martinez, E. and Gordon, J.P. **Opt. Lett.**, **9(5): 150-152 (1984)**.
- [40] “*Laser de modos travados em fibra de itérbio: Construção e estudos sobre a dinâmica não-linear*”. Disertação de Mestrado, Lucas Bezerra De Almeida Mélo, Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Física, (2017).
- [41] “*Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers*”. Szipocs, R.; Ferencz, K.; Spielmann, C. and Krausz, F. **Opt. Lett.**, **19(3), 201-203 (1994)**.
- [42] “*Femtosecond dispersion compensation with multilayer coatings : Toward the optical octave*”. Steinmeyer, G. **Appl. Opt.**, **45(7): 1484-1490 (2006)**.
- [43] “*The influence of pressure and humidity on the médium and long-term frequency stability of quartz oscillators*”. F. L. Walls, Proc. 42nd Annu. Symp. Freq. Control, Baltimore, **IEEE Catalog No. 88 CH2588-2: 279-283 (1988)**.
- [44] “Sensitivity of quartz oscillators to the environment: Characterization methods and pitfalls”. J. J. Gagnepain, **IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control**, **37(5): 347-354 (1990)**.
- [45] “*Modeling Analysis for Phase-Locking of Mode-Locked Laser*”. Dong Hou, Bo Ning, Peng Li, Zhigang Zhang, and Jianye Zhao. **IEEE J. Quant. Elect.**, **47(7): 891-898 (2011)**.
- [46] “*Frequency Standards, Characterization*”, Eva S. Ferre-Pika and Fred. Walls, **NIST (1999)**.
- [47] “*Handbook of Frequency Stability Analysis*”, W.J. Riley. **NIST Special Publication 1065 (2008)**.
- [48] “*Statistics of Atomic Frequency Standards*”. Allan D. **Proceedings of IEEE**, **54(2): 221-230 (1966)**.
- [49] “*The use of the Allan deviation for the measurement of the noise and drift performance of microwave radiometers*”. D. V. Land, A. P. Levick and J. W. Hand. **Meas. Sci. Technol.** **18:1917-1928 (2007)**.
- [50] <http://www.nktpotonics.com/wp-content/uploads/2015/03/femtoWHITE-800.pdf>
Acesso: 2017-6-18

APÊNDICE A. Solução numérica da equação transcendente (2.32)

```

clear all
nc = 1.7;
l = 2.9; % mm
f = 15; % mm
MI = (l*sqrt(1 + nc^2)/(nc^4))*((nc^2) - 1)/f;
C1yC21 = fzero(@(c1) 2*(sin(c1/2)^2)/cos(c1/2) - MI,30*pi/180)*180/pi;
C2 = 0:.0001:pi;
for c2 = C2
    C1(find(C2==c2)) = fzero(@(c1) (sin(c1)^2)/cos(c1) +
sin(c2)^2/cos(c2) - MI,c2);
end
C1 = C1*2*180/pi; C2 = C2*2*180/pi;
figure, plot(C2,C1,'.')
axis([5 35 5 35])
axis square
xlabel('2\theta_1 (graus)')
ylabel('2\theta_2 (graus)')
set(gca,'FontSize',12)
grid

```

APÊNDICE B. Curvas de estabilidade nos regimes de operação do laser

```

syms L d l nc f fkerr c1 c2
NC = ... ;%1.7;
F = ... ;%15; % mm
LL = ... ;%(3e8/828.24e6)*1000; % mm
ll = ... ;%2.9; % mm
C1 = .5*(ang. em gra)*pi/180;%23.7*pi/180;
C2 = .5*(ang. em gra)*pi/180;%23.7*pi/180;
w = ... ;%20e-6*1e3; %mm
P = ... ;%1500000; %W
n2 = ... ;%345e-16; % mm^2/W
Fker = pi*w^4/(4*n2*P*ll);
dd = 0:.6:360;
MI = (ll*sqrt(1+NC^2)/(NC^4))*(NC^2-1)/F;
ClyC2 = fzero(@(c1) 2*(sin(c1)^2)/cos(c1) - MI,30*pi/180)*2*180/pi;
C1 = .5*ClyC2*pi/180;%23.7*pi/180;
C2 = .5*ClyC2*pi/180;%23.7*pi/180;
% PLANO SAGITAL
Asag = [1 1/2;0 1]*[0 0 1/nc]*[1 (d-1)/2;0 1]*[1 0;-cos(c2)/f 1]*[1 L-d;0 1]*[1 0;-cos(c1)/f 1]*[1 (d-1)/2;0 1]*[1 0;0 nc]*[1 1/2;0 1];
% PLANO TANGENCIAL
Atan = [1 1/2;0 1]*[nc 0;0 1/nc^2]*[1 (d-1)/2;0 1]*[1 0;-1/(f*cos(c2)) 1]*[1 L-d;0 1]*[1 0;-1/(f*cos(c1)) 1]*[1 (d-1)/2;0 1]*[1/nc 0;0 nc^2]*[1 1/2;0 1];

% SIN EFECTO KERR -----
yysag = Asag(1,1) + Asag(2,2);
YYsag = yysag;
INT2sag = solve(yysag==2,d);
INT2sag = subs(INT2sag,'nc',NC);
INT2sag = subs(INT2sag,'f',F);
INT2sag = subs(INT2sag,'L',LL);
INT2sag = subs(INT2sag,'c1',C1);
INT2sag = subs(INT2sag,'c2',C2);
INT2sag = (double(subs(INT2sag,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
INTm2sag = solve(yysag==2,d);
INTm2sag = subs(INTm2sag,'nc',NC);
INTm2sag = subs(INTm2sag,'f',F);
INTm2sag = subs(INTm2sag,'L',LL);
INTm2sag = subs(INTm2sag,'c1',C1);
INTm2sag = subs(INTm2sag,'c2',C2);
INTm2sag = (double(subs(INTm2sag,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
D0sag = sort([INTm2sag',INT2sag']);
D01sag = D0sag(1);
D02sag = D0sag(2);
D03sag = D0sag(3);
D04sag = D0sag(4);
yysag = subs(yysag,'nc',NC);
yysag = subs(yysag,'f',F);
yysag = subs(yysag,'L',LL);
yysag = subs(yysag,'c1',C1);
yysag = subs(yysag,'c2',C2);
yysag = simplify(subs(yysag,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC));
yysag = double(subs(yysag,'d',dd));
% SIN EFECTO KERR -----

% CON EFECTO KERR -----
yysagK = Asag(1,1) + Asag(2,2) - Asag(1,2)/fkerr;
INT2sagK = solve(yysagK==2,d);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'nc',NC);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'f',F);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'L',LL);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'c1',C1);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'c2',C2);
INT2sagK = subs(INT2sagK,'fkerr',Fker);
INT2sagK = (double(subs(INT2sagK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
INTm2sagK = solve(yysagK==2,d);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'nc',NC);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'f',F);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'L',LL);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'c1',C1);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'c2',C2);
INTm2sagK = subs(INTm2sagK,'fkerr',Fker);
INTm2sagK = (double(subs(INTm2sagK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
D0sagK = sort([INTm2sagK',INT2sagK']);
D01sagK = D0sagK(1);
D02sagK = D0sagK(2);
D03sagK = D0sagK(3);
D04sagK = D0sagK(4);
D05sagK = D0sagK(5);
D06sagK = D0sagK(6);
yysagK = subs(yysagK,'nc',NC);
yysagK = subs(yysagK,'f',F);
yysagK = subs(yysagK,'L',LL);
yysagK = subs(yysagK,'c1',C1);
yysagK = subs(yysagK,'c2',C2);
yysagK = subs(yysagK,'fkerr',Fker);
yysagK = simplify(subs(yysagK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC));
yysagK = double(subs(yysagK,'d',dd));
yytan = Atan(1,1) + Atan(2,2);
YYtan = yytan;
INT2tan = solve(yytan==2,d);
INT2tan = subs(INT2tan,'nc',NC);
INT2tan = subs(INT2tan,'f',F);
INT2tan = subs(INT2tan,'L',LL);
INT2tan = subs(INT2tan,'c1',C1);
INT2tan = subs(INT2tan,'c2',C2);
INT2tan = (double(subs(INT2tan,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
INTm2tan = solve(yytan==2,d);
INTm2tan = subs(INTm2tan,'nc',NC);
INTm2tan = subs(INTm2tan,'f',F);
INTm2tan = subs(INTm2tan,'L',LL);
INTm2tan = subs(INTm2tan,'c1',C1);
INTm2tan = subs(INTm2tan,'c2',C2);
INTm2tan = (double(subs(INTm2tan,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
D0tan = sort([INTm2tan',INT2tan']);
D01tan = D0tan(1);
D02tan = D0tan(2);
D03tan = D0tan(3);
D04tan = D0tan(4);
yytan = subs(yytan,'nc',NC);
yytan = subs(yytan,'f',F);
yytan = subs(yytan,'L',LL);
yytan = subs(yytan,'c1',C1);
yytan = subs(yytan,'c2',C2);
yytan = simplify(subs(yytan,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC));
yytan = double(subs(yytan,'d',dd));

yytanK = Atan(1,1) + Atan(2,2) - Atan(1,2)/fkerr;
INT2tanK = solve(yytanK==2,d);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'nc',NC);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'f',F);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'L',LL);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'c1',C1);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'c2',C2);
INT2tanK = subs(INT2tanK,'fkerr',Fker);
INT2tanK = (double(subs(INT2tanK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
INTm2tanK = solve(yytanK==2,d);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'nc',NC);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'f',F);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'L',LL);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'c1',C1);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'c2',C2);
INTm2tanK = subs(INTm2tanK,'fkerr',Fker);
INTm2tanK = (double(subs(INTm2tanK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC)));
D0tanK = sort([INTm2tanK',INT2tanK']);
D01tanK = D0tanK(1);
D02tanK = D0tanK(2);
D03tanK = D0tanK(3);
D04tanK = D0tanK(4);
D05tanK = D0tanK(5);
D06tanK = D0tanK(6);
yytanK = subs(yytanK,'nc',NC);
yytanK = subs(yytanK,'f',F);
yytanK = subs(yytanK,'L',LL);
yytanK = subs(yytanK,'c1',C1);
yytanK = subs(yytanK,'c2',C2);
yytanK = subs(yytanK,'fkerr',Fker);
yytanK = simplify(subs(yytanK,'l',ll*sqrt(NC^2 + 1)/NC));
yytanK = double(subs(yytanK,'d',dd));

```

APÊNDICE C. Software para a captura é processamento de medições de frequência.

1. Captura de valores de frequência para um contador conectado pela porta RS232-USB e sensor de temperatura via Arduino.

```

function SAMPLE_save = fast_measure_serial1temp(N_samples, gate_time, time_bet_samp, HPIB_address, chanel, NF,
boo_save,COMENTARIOS)

Port = serial('COM5','baudrate',9600);Porttemp = serial('COM7','baudrate',9600); fopen(Port);fopen(Porttemp)
try
    if time_bet_samp == 0
        tic
        for i = 1:N_samples
            SAMPLES{i} = {toc (fscanf(Port))}; SAMPLEStemp{i} = {toc (fscanf(Porttemp))};
        end
    else
        tic
        for i = 1:N_samples
            pause(time_bet_samp),SAMPLES{i} = {toc (fscanf(Port))};
        end
    end
end
catch
    fclose(Port), delete(Port), fclose(Porttemp), delete(Porttemp)
    clear Port Porttemp
    return
end
fclose(Port), delete(Port), fclose(Porttemp), delete(Porttemp)
clear Port Porttemp

global PORZIA PORSIATEMP
PORZIA = SAMPLES;PORSIATEMP = SAMPLEStemp;
contkk = 0; SAMPLE_save = [0 0];
for kk = 1:length(SAMPLES)
    SS(1,:) = [SAMPLES{kk}]; A = cell2mat(SS(1)); B = cell2mat(SS(2));if isempty(B) | isempty(A), continue, end
    Mag = B(end-4:end); cont = 0;
    for tt = 1:length(B)-2
        if strcmp(B(tt),' ') | strcmp(B(tt),'.') | strcmp(B(tt),'M') | strcmp(B(tt),'K') | strcmp(B(tt),'H') |
strcmp(B(tt),'z')
            continue
        else cont = cont + 1; BB(cont) = B(tt); end;
    end
    % -----
    if strcmp(Mag(1:3),'MHz')
        val = str2num(BB)*1000000;
    elseif strcmp(Mag(1:3),'kHz')
        val = str2num(BB)*1000;
    else
        val = str2num(BB);
    end
    contkk = contkk + 1;
    SAMPLE_save(contkk,:) = [A val];
end
contkk = 0;
SAMPLE_savetemp = [0 0];
for kk = 1:length(SAMPLES)
    SS(1,:) = [SAMPLEStemp{kk}];A = cell2mat(SS(1)); B = str2num(cell2mat(SS(2)));
    if isempty(B) | isempty(A), continue, end
    contkk = contkk + 1; SAMPLE_savetemp(contkk,:) = [A B];
end
% -----
SAMPLE_save = SAMPLE_save';
if boo_save, a = round(clock);
    for ii = 1:length(a)
        if length(num2str(a(ii))) == 1, b{ii} = ['0' num2str(a(ii))];
        else b{ii} = num2str(a(ii)); end
    end
    DATE_TEMP_char = [b{1} '-' b{2} '-' b{3} '-' b{4} '-' b{5} '-' b{6} ' ' num2str(NF) ' ' num2str(gate_time) ' '
num2str(N_samples) ' (' COMENTARIOS ') ' '.txt'];
    ID = fopen(DATE_TEMP_char,'w');
    fprintf(ID,'%6s\r\n',['Date: ' date ' ' num2str(a(4)) ':' num2str(a(5)) ':' num2str((a(6))]);
    fprintf(ID,'%6s\r\n',['Nominal frequency: ' num2str(NF)]);
    fprintf(ID,'%6s\r\n',['Number of samples: ' num2str(N_samples)]);
    fprintf(ID,'%6s\r\n',['Gate time: ' num2str(gate_time)]);
    fprintf(ID,'%6s\r\n',['Delay time: ' num2str(time_bet_samp)]);
    fprintf(ID,'%6s %12s\r\n','Time (s)', 'Frequency (Hz)');
    fprintf(ID,'%6.3f %12.8f\r\n',SAMPLE_save);
    fclose(ID)
end
SAMPLE_savetemp = SAMPLE_savetemp';
if boo_save, a = round(clock);
    for ii = 1:length(a), if length(num2str(a(ii))) == 1, b{ii} = ['0' num2str(a(ii))];else b{ii} = num2str(a(ii));
end
end
DATE_TEMP_char = [b{1} '-' b{2} '-' b{3} '-' b{4} '-' b{5} '-' b{6} ' ' num2str(NF) ' ' num2str(gate_time) ' '
num2str(N_samples) ' (' COMENTARIOS ') ' '_temp.txt'];
ID = fopen(DATE_TEMP_char,'w');
fprintf(ID,'%6s\r\n',['Date: ' date ' ' num2str(a(4)) ':' num2str(a(5)) ':' num2str((a(6))]);
fprintf(ID,'%6s\r\n',['Nominal frequency: ' num2str(NF)]);
fprintf(ID,'%6s\r\n',['Number of samples: ' num2str(N_samples)]);
fprintf(ID,'%6s\r\n',['Gate time: ' num2str(gate_time)]);
fprintf(ID,'%6s\r\n',['Delay time: ' num2str(time_bet_samp)]);
fprintf(ID,'%6s %12s\r\n','Time (s)', 'Frequency (Hz)');
fprintf(ID,'%6.3f %12.8f\r\n',SAMPLE_savetemp);
fclose(ID), end

```

APENDICE F. Calculo do Desvio de Allan.

```

function [VAR, error, tau] = ALLAN_VARIANCE1(y,tau0,TYPE)
h = waitbar(0,['Performing ' TYPE ' Allan variance
...'],'CreateCancelBtn','setappdata(gcf,'canceling',1)');
setappdata(h,'canceling',0)

n = length(y);
jj = floor( log((n-1)/3)/log(2) );
for j=0:jj
    m = 2^j;
    tau(j+1) = m*tau0;
    D = zeros(1,n-m+1);
    for i=1:n-m+1
        D(i) = sum(y(i:i+m-1))/m;
    end
    switch TYPE
        case 'Estandar'
            VAR(j+1) = std(D(1:m:n-m+1)); error(j+1) = VAR(j+1)/sqrt(n/m);
        case 'Simple'
            VAR(j+1) = sqrt(0.5*mean(diff(D(1:m:n-m+1)).^2)); error(j+1) = VAR(j+1)/sqrt(n/m);
        case 'Overlap'
            z1 = D(m+1:n+1-m); z2 = D(1:n+1-2*m); u = sum((z1-z2).^2); VAR(j+1) = sqrt(u/(n+1-2*m)/2);
            error(j+1) = VAR(j+1)/sqrt(n-m);
        case 'Modified'
            u = zeros(1,n+2-3*m);
            for L = 0:n+1-3*m
                z1 = D(1+L:m+L); z2 = D(1+m+L:2*m+L); u(L+1) = (sum(z2-z1))^2;
            end
            uu = mean(u); VAR(j+1) = sqrt(uu/2)/m; error(j+1) = VAR(j+1)/sqrt(n-m);
        case 'R'
            u = zeros(1,n+2-3*m);
            for L = 0:n+1-3*m
                z1 = D(1+L:m+L); z2 = D(1+m+L:2*m+L); u(L+1) = (sum(z2-z1))^2;
            end
            uu = mean(u);
            VAR(j+1) = (sqrt(0.5*mean(diff(D(1:m:n-m+1)).^2)))/(sqrt(uu/2)/m);
            error(j+1) = VAR(j+1)/sqrt(n-m);
        case 'Time_deviation'
            %TVAR
            VAR(j+1) = tau(j+1)*msig(j+1)/sqrt(3);
    end
    if getappdata(h,'canceling'), delete(h);return;end
    waitbar(j/jj,h,['Performing ' TYPE ' Allan variance ...']);
end
waitbar(1.0,h,'Finished');delete(h);

```