

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUIZ JOSÉ GONÇALVES FONTES

**VERIFICAÇÃO AO CISALHAMENTO EM LAJES NERVURADAS**

Recife  
2017

LUIZ JOSÉ GONÇALVES FONTES

## **VERIFICAÇÃO AO CISALHAMENTO EM LAJES NERVURADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil

Área de Concentração: Engenharia Estrutural

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Bernardo Horowitz

Recife  
2017

Catálogo na fonte

Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

F683v Fontes, Luiz José Gonçalves.

Verificação ao cisalhamento em lajes nervuradas / Luiz José Gonçalves Fontes. - 2017.

133 folhas, il., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.

Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Lajes nervuradas. 3. Concreto armado. 4. Resistência ao cisalhamento. I. Horowitz, Bernardo (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-220

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

## **VERIFICAÇÃO AO CISALHAMENTO EM LAJES NERVURADAS**

defendida por

Luiz José Gonçalves Fontes

Considera o candidato APROVADO

Recife, 23 de Fevereiro de 2017

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Bernardo Horowitz - UFPE  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Ézio da Rocha Araújo - UFPE  
(Examinador Externo)

---

Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires de Oliveira -UFPE  
(Examinador Interno)

Dedico esse trabalho aos amigos engenheiros consultores que me ensinaram a fazer a diferença na engenharia, tanto na técnica, quanto no estudo e na honestidade.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter me dado condições de estudar e finalizar mais essa etapa em minha vida.

Ao Professor Bernardo Horowitz, pela orientação, paciência, interesse e conselhos valiosos para o desenvolvimento desse trabalho e na prática da engenharia estrutural.

Aos professores e secretárias do programa de pós-graduação em engenharia civil da UFPE pelos ensinamentos e compreensão das dificuldades ao longo do desenvolvimento desse trabalho e apoio quando solicitados.

Enfim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

*Iolanda, Iolanda,  
Eternamente, Iolanda*  
**C. Buarque, 1984**

## RESUMO

O uso de lajes nervuradas tem sido uma prática constante nas obras de construção civil. Esse tipo de laje, constituída de nervuras (em uma ou mais direções) ligadas entre si por uma mesa, proporciona uma economia maior de concreto em relação a uma laje maciça, uma vez que é eliminado o concreto que fica, normalmente, na região tracionada entre as nervuras. Um dos inconvenientes desse tipo de laje, devido ao formato das nervuras (geralmente com seções trapezoidais para facilitar a desforma) e a presença das armaduras de flexão, é a montagem dos estribos, quando há necessidade de armadura para combater o cisalhamento, principalmente no Brasil, onde não são comercialmente fabricadas armaduras padronizadas que se adequem ao formato das nervuras. Sendo assim, a dispensa da armadura de cisalhamento, quando possível, deve ser adotada de forma a melhorar o processo de montagem do sistema. No presente trabalho são apresentadas as prescrições da normas Canadense, Americana e Brasileira, que usam parâmetros distintos para as verificações do cisalhamento em nervuras e elementos de seções em formato trapezoidais, e apresentados resultados de ensaios descritos na literatura de nervuras contínuas de concreto armado, com e sem armadura de cisalhamento. Em seguida esses resultados são comparados com os calculados segundo as normas citadas e apresentadas conclusões e recomendações para verificação, detalhamento e dispensa de armadura de cisalhamento em nervuras sendo sugerido a adoção de um coeficiente de minoração para a equação da Norma Brasileira que limita a resistência máxima ao cortante para dispensa de armadura de cisalhamento nesses elementos.

**Palavras-chave:** Lajes nervuradas. Concreto armado. Resistência ao cisalhamento. Cortante.

## ABSTRACT

The use of joist slabs has been a constant practice in civil construction. This type of slab consists of ribs connected to each other by a table, provides a greater saving of concrete in relation to a solid slab, since the concrete that is usually in the region is eliminated Between the ribs. One of the drawbacks of this type of slab, due to the shape of the ribs (generally tapered webs to facilitate the withdrawal of forms) and the presence of flexural reinforcement, is the placement of the stirrups when there is a need for reinforcement to resist shearing, mainly in Brazil, where they are not commercially manufactured standardized steel that conforms to the shape of the ribs. Thus, the dispensing of the shear reinforcement, when possible, must be adopted in order to improve the system assembly process. The present work presents the prescriptions of the canadian, cmerican and brazilian standards, which use different parameters for shear checks on ribs and trapezoidal shape elements, and present results of tests already performed on continuous ribs of reinforced concrete, with and without shear reinforcement. Then, these results are compared with those calculated according to the norms cited and presented conclusions and recommendations for verification, detailing and dispensing of shear reinforcement in ribs and suggested to adopt a reduction coefficient for the Brazilian Standard equation that limits the maximum strength to shear for dispensing shear reinforcement in these elements.

**Keywords:** Joist system slabs. Reinforced concrete. Shear strength. Shear.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Viga pré-moldada de seção variável .....	16
Figura 1.2 - Nervuras pré-moldadas .....	18
Figura 1.3 - Molde de polipropileno para laje ortotrópica.....	18
Figura 1.4 - Adaptação do molde de polipropileno para ser usado em laje unidirecional.....	18
Figura 1.5 - Sistema de escoramento para os moldes plásticos.....	19
Figura 1.6 - Laje nervurada bidirecional apoiada sobre vigas de concreto .....	20
Figura 1.7 - Laje nervurada unidirecional apoiada sobre faixas protendidas. ....	20
Figura 1.8 - Laje nervurada apoiada sobre vigas e pilares pré-moldados. ....	21
Figura 1.9 - Laje nervurada apoiada sobre vigas e pilares metálicos. ....	21
Figura 2.1 - Forças internas em um segmento $dx$ ao longo de uma viga .....	25
Figura 2.2 - (a) Tensões de flexão e cisalhamento atuando ao longo da seção transversal e (b) distribuição da tensão de cisalhamento .....	26
Figura 2.3 - (a) Trajetórias de tensão em vigas não fissuradas e (b) foto de uma viga sem armadura transversal, fissurada.....	27
Figura 2.4 - Fissuração em uma alma de viga protendida de concreto .....	28
Figura 2.5 - Determinação da distribuição da tensão de cisalhamento em viga de concreto com fissuras de flexão .....	30
Figura 2.6 - Trecho inferior de uma viga .....	31
Figura 2.7 - Exemplo de Regiões B e D .....	32
Figura 2.8 - Comportamento de arco em uma viga .....	32
Figura 2.9 - Ruptura em vigas sem armadura de cisalhamento .....	33
Figura 2.10 - Cortante de fissuração e ruptura .....	35
Figura 2.11 - Forças internas em vigas sem estribos .....	36
Figura 2.12 - Campos de tensões resistindo cortante (a) antes e (b) depois da fissuração..	38
Figura 2.13 - Forças internas em vigas com estribos .....	39
Figura 2.14 - Distribuição das resistências ao cisalhamento em vigas com estribos.....	40
Figura 2.15 - Modelo de treliça para uma viga de concreto armado.....	41
Figura 2.16 - Aspecto de uma viga fissurada .....	41

Figura 2.17 - Equilíbrio do modelo de treliça a 45° .....	43
Figura 2.18 - Concepção para dimensionamento ao cisalhamento .....	45
Figura 2.19 - Limitação de espaçamento para estribos a 90° .....	46
Figura 2.20 - Fissuras interceptando a zona de compressão .....	46
Figura 2.21 - Modos de falha .....	48
Figura 2.22 - a) Deformações médias em elementos fissurados e b) círculo de Mohr .....	49
Figura 2.23 - Influência de $\Theta$ na deformação da armadura .....	50
Figura 2.24 - Diagramas tensão-deformação (cilindro de concreto e concreto fissurado) ....	51
Figura 2.25 - Campos de tensões em almas de vigas de concreto armado .....	52
Figura 2.26 - Tensões principais na alma de uma viga de concreto armado fissurada.....	53
Figura 2.27 - Tensões médias no concreto - Círculo de Mohr .....	53
Figura 2.28 - tração na armadura transversal .....	53
Figura 2.29 - Transmissão de forças pelas fissuras .....	55
Figura 2.30 - Forças resistente na alma da viga .....	58
Figura 3.2 - Dimensões mínimas para nervuras de lajes nervuradas (CSA) .....	63
Figura 3.1 - Dimensões mínimas para vigas T (CSA) .....	63
Figura 3.3 - Dimensões mínimas de vigas T (ACI).....	68
Figura 3.4 - Dimensões mínimas para nervuras e lajes nervuradas (ACI).....	68
Figura 4.1 - Características das nervuras simples (dimensões em centímetro).....	79
Figura 4.2 - Características das nervuras múltiplas (dimensões em centímetro).....	80
Figura 4.3 - Detalhe típico dos pinos, rolos e pedestais de apoio as nervuras ensaiadas ....	81
Figura 4.4 - Esquema da disposição de armadura e cobrimentos nas nervuras K e L .....	83
Figura 4.5 - Esquema da disposição de armadura e cobrimentos nas nervuras M .....	83
Figura 4.6 - Regiões ensaiadas e esquema das armaduras na seção longitudinal das nervuras K e L .....	84
Figura 4.7 - Estribos externos .....	84
Figura 4.8 - Esquema de fissuração nas nervuras K1, K2 e K3 .....	85
Figura 4.9 - Esquema de fissuração nas nervuras L1, L2 e L3 .....	85
Figura 4.10 - Esquema de fissuração das nervuras M1 .....	86

Figura 4.11 - Esquema de fissuração das nervuras M2 .....	86
Figura 4.12 - Gráfico Carga aplicada X deformação da nervura K1 .....	88
Figura 5.1 - Esquema de cargas nas nervuras.....	94
Figura 5.2 - Esquema da viga sobre apoios indelocáveis.....	95
Figura 5.3 - Esquema do prédio analisado.....	110
Figura 5.4 - Detalhe da laje central a ser analisada .....	111
Figura 5.5 - Seção transversal da laje nervurada.....	111
Figura 5.6 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 1.....	112
Figura 5.7 - Diagrama de momentos fletores (tfm) - simulação 1 .....	113
Figura 5.8 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 1.....	114
Figura 5.9 - Diagrama de esforços cortantes (tf) - simulação 1 .....	114
Figura 5.10 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 2.....	116
Figura 5.11 - Diagramas de momentos fletores (tfm) - simulação 2 .....	117
Figura 5.12 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 2.....	118
Figura 5.13 - Diagramas de esforços cortantes (tf) - simulação 2 .....	118
Figura 5.14 - Trechos de momentos negativos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 2.....	119
Figura 5.15 - Trechos de momentos positivos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 2 .....	121
Figura 5.16 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 3.....	122
Figura 5.17 - Diagramas de momentos fletores (tfm) - simulação 3 .....	123
Figura 5.18 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 3.....	124
Figura 5.19 - Diagramas de esforços cortantes (tf) - simulação 3 .....	124
Figura 5.20 - Trechos de momentos negativos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 3.....	125
Figura 5.21 - Trechos de momentos positivos que necessita de armadura de cisalhamento - simulação 3.....	127

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Características das nervuras K e L .....	82
Tabela 4.2 - Características das nervuras M.....	83
Tabela 4.3 - Resultado dos ensaios para as nervuras K e L .....	87
Tabela 4.4 - Resultados dos ensaios para as nervuras M .....	87
Tabela 4.5 - Resultados dos ensaios para as nervuras K e L .....	89
Tabela 4.6 - Resultados dos ensaios para as nervuras K e L .....	90
Tabela 5.1-Cargas aplicadas, resultados experimentais e esforços solicitantes teóricos calculados conforme esquema da Figura 5.1.....	94
Tabela 5.2 - Esforços solicitantes de vigas sobre apoios indeslocáveis calculadas conforme esquema da Figura 5.2 .....	95
Tabela 5.3 - Resultados teóricos para nervuras K e L (CSA) .....	100
Tabela 5.4 - Análise dos ensaios baseado no CSA.....	100
Tabela 5.5 - Resultados teóricos para nervuras K e L (ACI 318.14) .....	103
Tabela 5.6 - Análise dos ensaios baseado no ACI 318.14 .....	104
Tabela 5.7 - Resultados teóricos para vigas K e L (NBR 6118-2014).....	107
Tabela 5.8 - Amostras que apresentaram coeficiente de segurança abaixo de 1 nas 3 normas.....	107
Tabela 5.9 - Análise dos ensaios baseado na NBR 6118-14 .....	108
Tabela 5.10 - Valores de $V_r$ minorados pelo coeficiente proposto .....	109

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
1.1	OBJETIVOS.....	23
1.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	23
<b>2</b>	<b>MODELOS TEÓRICOS PARA CISALHAMENTO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO</b> .....	25
2.1	INTRODUÇÃO.....	25
2.2	CONCEITOS BÁSICOS.....	25
2.2.1	Tensões em vigas não fissuradas.....	25
2.2.2	Tensão média de cisalhamento entre fissuras.....	27
2.2.3	Comportamento de Viga (Beam Action) e Comportamento de Arco (Arch Action).....	30
2.3	RUPTURA POR CISALHAMENTO.....	32
2.3.1	Comportamento de vigas sem armadura de cisalhamento.....	32
2.3.2	Fatores que influenciam na resistência ao cisalhamento em elementos sem armadura transversal .....	34
2.3.3	Mecanismo resistente de vigas sem estribos .....	36
2.3.4	Mecanismo resistente de vigas com estribos .....	37
2.4	O MODELO DE TRELIÇA .....	40
2.4.1	Modelo de Treliza Clássica (45°).....	42
2.4.2	Modelo de Treliza com ângulo variável.....	43
2.4.3	Modos de Ruptura .....	46
2.5	TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO (CFT) .....	48
2.5	TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO (MCFT) .....	52
2.6	ESTUDOS COMPLEMENTARES AO MCFT.....	57
<b>3</b>	<b>VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO SEGUNDO CSA A23-04, ACI-318.14, NBR-6118-2014.</b> .....	59
3.1	NORMA CANDENSE (CSA A23-04) .....	59
3.1.1	Armadura mínima de cisalhamento .....	60
3.1.2	Dimensões dos elementos.....	60
3.1.3	Resistência ao cisalhamento .....	61

3.1.3.1	<b>Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - <math>V_c</math></b> .....	62
3.1.3.2	<b>Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - <math>V_s</math></b> .....	62
3.1.4	Determinação do $\beta$ e do $\theta$ .....	62
3.1.4.1	<b>Método Simplificado</b> .....	64
3.1.4.2	<b>Método Geral</b> .....	64
3.1.5	Espaçamento máximo da armadura transversal.....	66
3.2	NORMA AMERICANA (ACI-318.14).....	66
3.2.1	Armadura de cisalhamento mínima.....	66
3.2.2	Dimensões dos elementos.....	68
3.2.3	Resistência ao cisalhamento.....	68
3.2.3.1	<b>Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - <math>V_c</math></b> .....	69
3.2.3.2	<b>Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - <math>V_s</math></b> .....	70
3.3	NORMA BRASILEIRA (NBR 6118-2014).....	71
3.3.1	Armadura de cisalhamento mínima.....	71
3.3.2	Dimensões dos elementos.....	73
3.3.3	Resistência ao cisalhamento.....	73
3.3.4	Espaçamento máximo da armadura transversal.....	77
3.3.3.1	<b>Modelo I</b> .....	74
3.3.3.1.1	<i>Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - <math>V_{sw}</math></i> .....	75
3.3.3.1.2	<i>Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - <math>V_c</math></i> .....	75
3.3.3.2	<b>Modelo II</b> .....	76
3.3.3.2.1	<i>Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - <math>V_{sw}</math></i> .....	76
3.3.3.2.2	<i>Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - <math>V_c</math></i> .....	76
4	<b>OBTENÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS EXPERIMENTAIS</b> .....	78
4.1	CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS ENSAIADOS.....	78
4.2	PROCEDIMENTO DO ENSAIO.....	82
4.3	RESULTADOS DOS ENSAIOS.....	87
4.4	CONCLUSÕES DOS ENSAIOS REALIZADOS RELEVANTES PARA O PRESENTE ESTUDO.....	90
5	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COMPARAÇÃO COM OS DADOS TEÓRICOS CALCULADOS</b> .....	92
5.1	ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS.....	92
5.1.1	Nervuras K e L.....	92

5.1.2	Nervuras M .....	96
5.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS UTILIZANDO O CSA A23.3-04, ACI-318-14 E NBR6118-2014 .....	96
5.2.1	Análise dos resultados utilizando o CSA A23.3-04 .....	97
5.2.2	Análise dos resultados utilizando o ACI-318.14 .....	101
5.2.3	Análise dos resultados utilizando a NBR-6118-2014 .....	104
5.3	RECOMENDAÇÃO DE COEFICIENTE PARA A NBR-6118-2014 .....	109
5.4	APLICAÇÃO DO COEFICIENTE SUGERIDO NA VERIFICAÇÃO DE DISPENSA DE ARMADURA .....	110
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> .....	<b>129</b>
6.1	CONCLUSÕES .....	129
6.2	SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS .....	130
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>131</b>

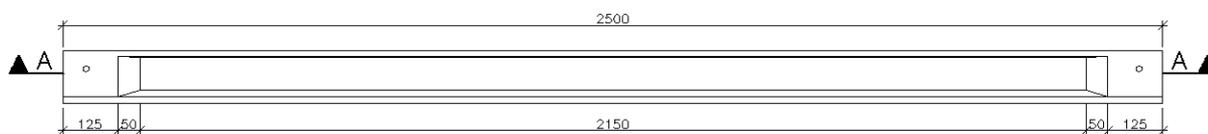
# 1 INTRODUÇÃO

Na construção civil, elementos de concreto armado são constantemente projetados de forma a que se apresentem com seções funcionais, econômicas e seguras.

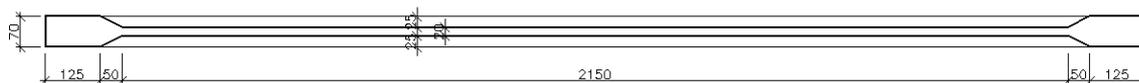
Devido à alta densidade do concreto armado, muitas vezes a necessidade de aumento das dimensões de um elemento pode provocar um acréscimo considerável no carregamento permanente, submetendo o elemento já, a priori, a um estado de tensões elevado.

Em elementos pré-moldados, uma vez que são fabricados de maneira repetitiva seguindo um padrão previamente definido, produzidos no canteiro e depois montados na obra, existe maior facilidade de moldar as seções de um elemento de concreto armado de forma que ao longo do comprimento da peça as seções possam ter variações de acordo com a intensidade do esforço a que será submetida, como é o caso da viga de uma ponte, apresentado na Figura1.1.

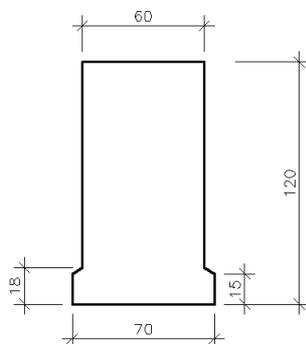
## VIGA PRÉ-MOLDADA - ELEVÇÃO



## CORTE A-A



## SEÇÃO DOS EXTREMOS



## SEÇÃO DO MEIO DO VÃO

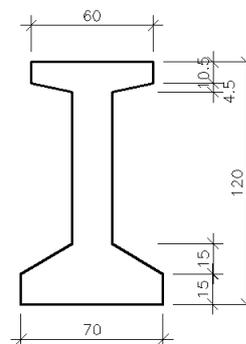


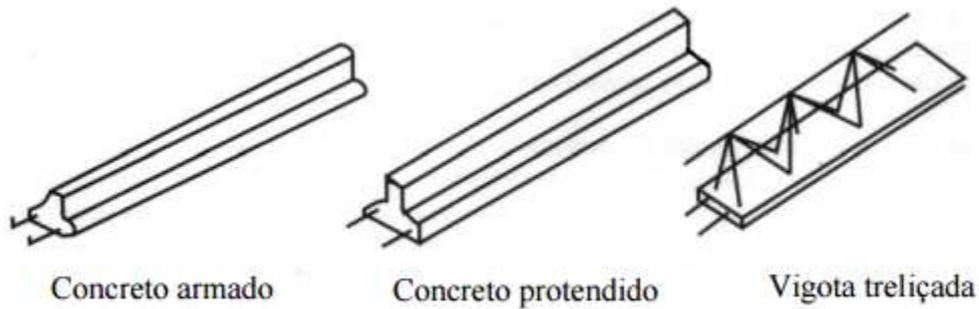
Figura1.1 - Viga pré-moldada de seção variável

No caso de lajes maciças de concreto armado, principalmente em obras residenciais, onde o espaçamento entre os apoios muitas vezes é aumentado pela necessidade de vagas de garagem nos pavimentos mais baixos, ou em obras comerciais onde há necessidade de alterações constantes para que o usuário possa ampliar seus recintos quando houver necessidade, essa demanda por vãos maiores resulta em maiores espessuras de lajes e alturas da seção transversal, aumentando consideravelmente o volume de concreto uma vez que esses elementos geralmente ocupam toda área do pavimento.

A maneira que se tem resolvido esse problema é adotando um sistema constituído de vigas ou nervuras dispostas em uma direção ou duas direções perpendiculares entre sí (em forma de uma grelha), que suportam os esforços de flexão e cisalhamento decorrentes dos carregamentos, ligadas entre sí por uma mesa de compressão. Dessa forma obteve-se um sistema mais rígido e com uso menor concreto, uma vez que a volume entre as nervuras poderia ser preenchido por um material inerte ou até mesmo dispensado por se tratar de uma região tracionada entre elas (apesar de prejudicar a capacidade de resistência ao momento negativo). Esse sistema construtivo foi denominado de laje nervurada.

Historicamente, essa técnica já teria sido usada pelos Gregos, Romanos Bizantinos e Otomanos, nos tetos de suas edificações, ainda hoje preservadas, evidenciados após escavações realizadas em sítios históricos. O próprio Leonardo da Vinci registra em seu quadro, *A Última Ceia* (1498), o teto de um recinto, com o uso de uma laje nervurada. Entretanto o emprego desse tipo de estrutura acelerou-se no século XX, após publicações mais técnicas que orientavam o dimensionamento e detalhamento dessa laje.

Existem várias maneiras de substituir o concreto entre as nervuras. Em nervuras pré-moldadas (com ou sem protensão) ou vigotas treliçadas, geralmente são usados blocos cerâmicos ou de concreto simples vazados, ou blocos de poliestireno expansível (EPS), sendo estes mais utilizados junto com as vigotas treliçadas. No sistema com vigotas treliçadas, durante a concretagem o conjunto formado por nervuras e capeamento é preenchido integralmente, proporcionando a garantia de um sistema homogêneo, mais eficaz do que usar as nervuras pré-moldadas, onde a concretagem é realizada em dois momentos distintos.

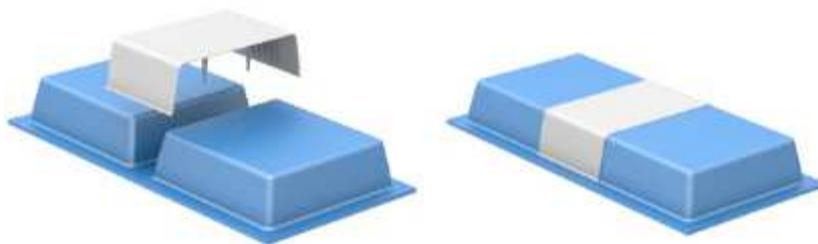


**Figura1.2 - Nervuras pré-moldadas**

Ainda como forma de garantir a economia desse sistema, o ideal seria não haver nenhum material entre as nervuras. Daí surgiu a ideia da utilização de caixotes reaproveitáveis, que permitissem sua retirada após a concretagem sem danificar o conjunto (nervuras e mesa) moldado no local. Dessa forma surgiram os moldes em polipropileno, em forma de caixotes prismáticos retangulares, facilitando assim a retirada e reutilização.

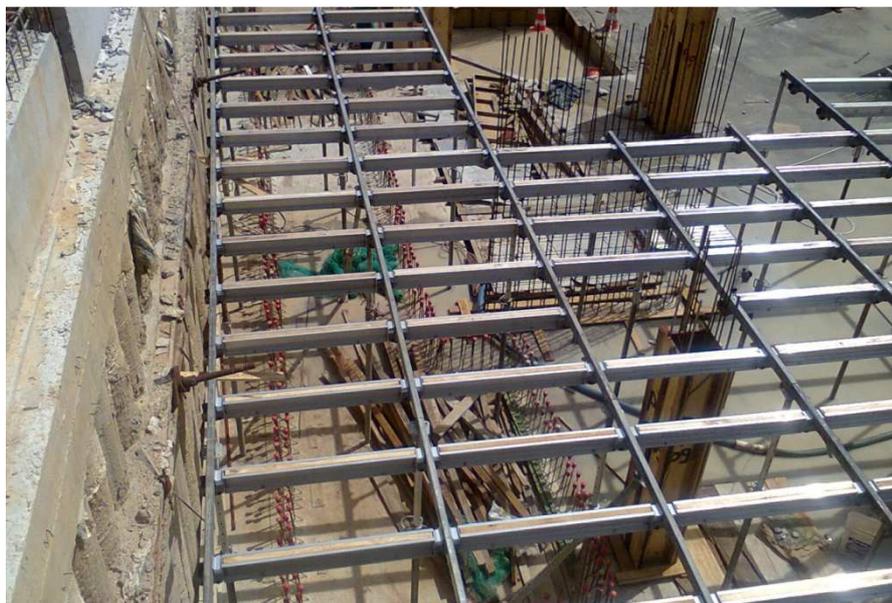


**Figura 1.3 - Molde de polipropileno para laje ortotrópica.**



**Figura 1.4 - Adaptação do molde de polipropileno para ser usado em laje unidirecional.**

Além da economia de concreto que o sistema proporciona, técnicas e equipamentos foram desenvolvidos de forma a reduzir a mão de obra necessária e o sistema de escoramento, não sendo necessário assoalhar completamente a superfície abaixo dos moldes, permitindo a sua retirada sem a necessidade de reescoramento do conjunto até que seja atingida toda a capacidade resistente da laje.



**Figura 1.5 - Sistema de escoramento para os moldes plásticos**

Outro aspecto proporcionado pelo sistema é o uso desse tipo de laje com outros sistemas construtivos. O sistema mais tradicional constitui-se de lajes apoiadas em vigas de concreto armado moldadas no local (Figura 1.6). Em locais onde o pé-direito é limitado pela altura da laje, soluções em laje cogumelo com capitéis sobre os pilares ou faixas com ou sem protensão também são muito utilizadas (Figura 1.7), inclusive com nervuras protendidas. Outra solução que também pode ser adotada é o apoio sobre elementos pré-moldados (Figura 1.8) ou elementos metálicos (Figura 1.9), nesses casos, a laje também pode contribuir de forma mais eficaz para o enrijecimento do conjunto estrutural.

Dessa forma, devido a economia, segurança e funcionalidade que o sistema proporciona, a construção civil tem adotado esse sistema de maneira constante como alternativa ao uso da laje maciça.



**Figura 1.6 - Laje nervurada bidirecional apoiada sobre vigas de concreto**



**Figura 1.7 - Laje nervurada unidirecional apoiada sobre faixas protendidas.**



**Figura 1.8 - Laje nervurada apoiada sobre vigas e pilares pré-moldados.**



**Figura 1.9 - Laje nervurada apoiada sobre vigas e pilares metálicos.**

As nervuras são os elementos resistentes, responsáveis pela estabilidade da laje. Após a obtenção dos esforços solicitantes, calculados pelo método de analogia de grelhas ou método de elementos finitos ou até mesmo de forma simplificada (a NBR6118-2014 permite, repetida as dimensões prescritas, o cálculo dos esforços como uma laje), as nervuras devem ser dimensionadas à flexão, cisalhamento. Geralmente a armadura de flexão é primeiramente dimensionada para que se possa dimensionar as demais. Devido à densidade da armadura calculada, principalmente na face superior das nervuras, próximos aos apoios em lajes nervuradas contínuas, a armadura de cisalhamento, quando possível, é geralmente evitada, de forma que a capacidade resistente do elemento fique dependente apenas da resistência do concreto quando solicitado ao esforço cortante.

A Norma Brasileira (NBR-6118-2014) permite a dispensa de armadura ao esforço cortante nas nervuras de lajes nervuradas quando não superada a resistência do concreto ao esforço cortante da laje, se atendidas certas prescrições sobre a geometria da seção. Por não possuírem seção retangular, a largura efetiva ( $b_w$ ) das nervuras para esse limite deve ser tomada como a menor largura ao longo da altura útil do elemento ( $d$ ), diferente das normas Canadense (CSA-A23-04) e Americana (ACI-318.14) que prescrevem limites diferente de resistência, geometria da seção e largura efetiva a ser considerada (discutidas no Capítulo 3)

O único resultado de ensaios de lajes com nervuras se seção trapezoidal encontrado na literatura foi o realizado por RAVIKUMAR, et al.(1994) onde foram ensaiadas nervuras contínuas de concreto armado com dois vãos, com e sem armadura de cisalhamento, com ênfase no momento negativo das nervuras. A descrição e resultados encontrados por esse estudo estão no Capítulo 4.

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre o cisalhamento em nervuras contínuas de concreto armado, baseados no ensaio mencionado, comparando os resultados experimentais com os resultados obtidos pelas Normas Canadense (CSA A23.3-04), Americana (ACI-318-14) e Brasileira (NBR-6118), sendo proposto para essa última as adequações julgadas necessárias.

## 1.1 OBJETIVOS

Baseado no exposto o objetivo global do presente trabalho é estabelecer critérios seguros para dispensa de armadura em nervuras de lajes nervuradas com alma trapezoidal, de acordo com as prescrições da NBR-6118-2014.

Como objetivos específicos temos:

- Estudar as prescrições das normas Canadense (CSA-A23.3-04), Americana (ACI-318-14) e Brasileira (NBR-61180-2014) quanto à dispensa e dimensionamento de armaduras ao cisalhamento em nervuras de lajes nervuradas;
- Estudar o comportamento das nervuras de lajes nervuradas ao cisalhamento, com e sem armaduras transversais, quando submetidas a ação de momentos negativos e positivos.
- Comparar os resultados experimentais disponíveis na literatura com os resultados analíticos prescritos pelas normas citadas;

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Além desse capítulo de introdução, esta dissertação apresenta mais cinco capítulos.

No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica dos modelos existentes para dimensionamento de vigas ao cisalhamento, usados como base para as prescrições normativas discutidas no Capítulo 3.

No Capítulo 3 são descritas as prescrições das normas Canadense (CSA-A23.3-04), Americana (ACI-318-14) e Brasileira (NBR-61180-2014) pertinentes ao dimensionamento de lajes nervuradas ao cisalhamento.

A metodologia e resultados dos ensaios realizados por RAVIKUMAR, et al.(1994) em nervuras de concreto armado, em que se baseou este estudo, são apresentados de maneira resumida no Capítulo 4.

O Capítulo 5 foi destinado a analisar dos resultados do ensaio experimental e compará-los com os resultados teóricos analíticos propostos por cada Norma descrita no Capítulo 3.

Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais a cerca dos resultados obtidos e recomendações para trabalhos futuros.

## 2 MODELOS TEÓRICOS PARA CISALHAMENTO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

### 2.1 INTRODUÇÃO

A resistência às cargas aplicadas em uma viga dá-se através de momentos e cortantes internos. O dimensionamento dos elementos, geralmente é feito primeiramente pela análise da resistência à flexão, definindo-se as dimensões do elemento e armadura longitudinal necessária para depois se fazer a análise do cisalhamento, tomando-se todo o cuidado necessário, pois no caso de ocorrência de ruptura por cisalhamento, a mesma ocorrerá de maneira repentina e frágil, diferente da falha por flexão que ocorreria de maneira gradual.

### 2.2 CONCEITOS BÁSICOS

#### 2.2.1 Tensões em vigas não fissuradas

Analisando um segmento  $dx$  de uma viga (Figura 2.1), pode se notar que  $dM/dx=V$ . Essa força cortante e conseqüentemente a tensão de cisalhamento, irão ocorrer em todas as partes da viga, onde o momento muda de seção para seção.

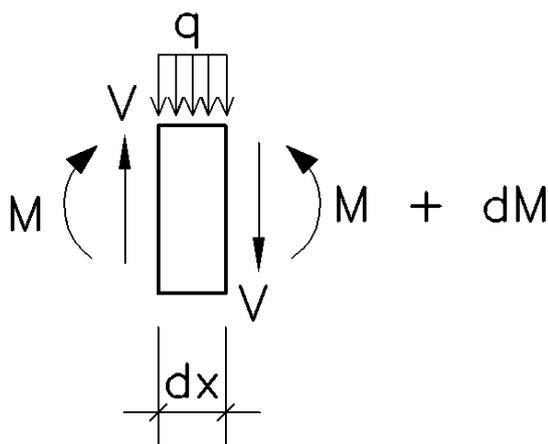


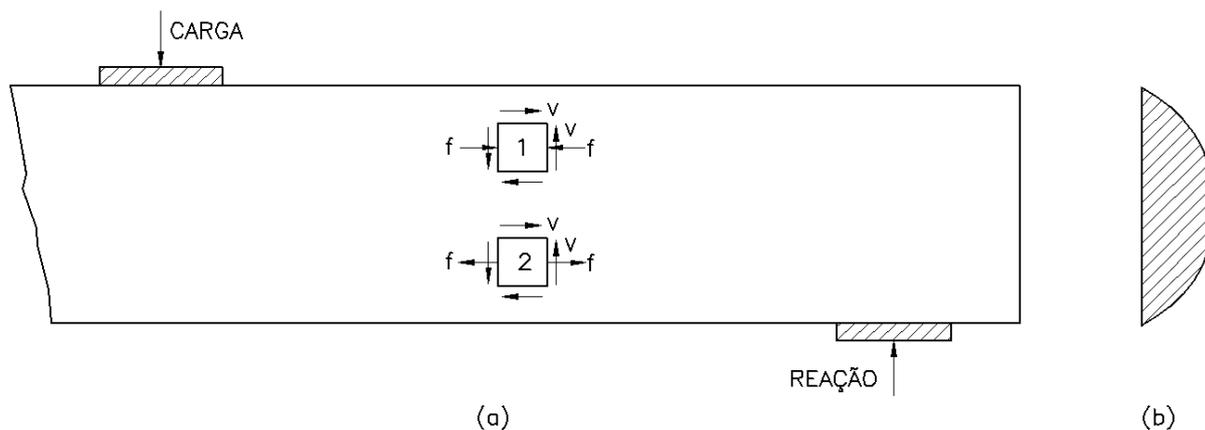
Figura 2.1 - Forças internas em um segmento  $dx$  ao longo de uma viga

Pela teoria de resistência dos materiais para vigas elásticas de seções retangulares, não-fissuradas e homogêneas, a tensão de cisalhamento pode ser calculada da seguinte forma:

$$v = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} \quad (2.1)$$

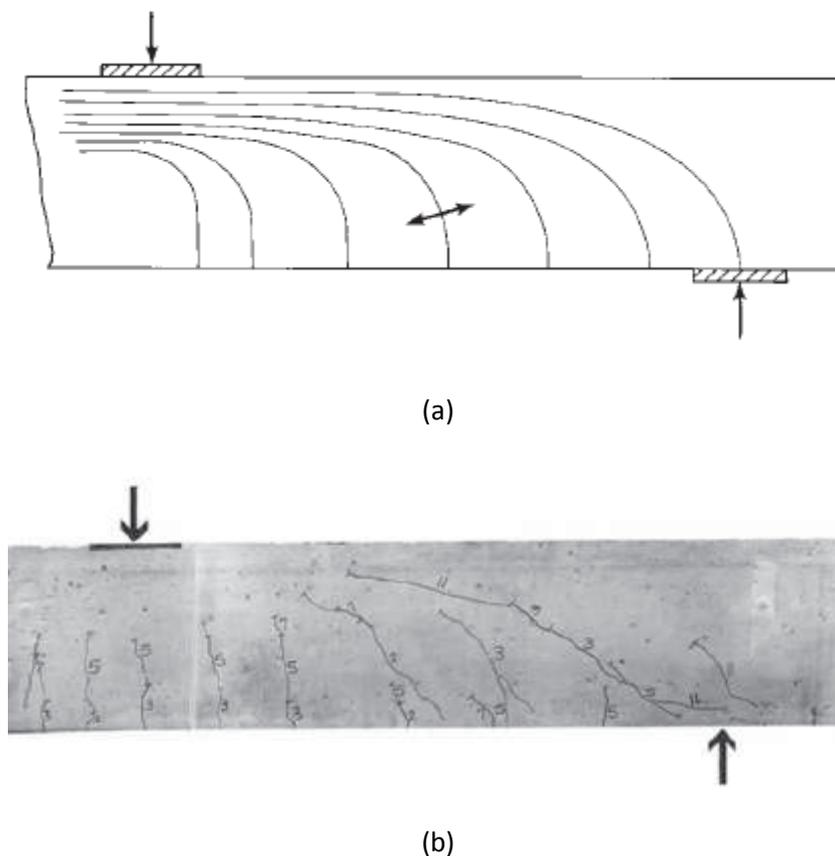
Onde  $V$  é a força cortante atuante na seção,  $I$  é o momento de inércia da seção,  $Q$  é o momento estático em relação a linha neutra da área localizada acima ou abaixo do ponto onde a tensão de cisalhamento será calculada e  $b$  é a espessura da seção.

Tensões iguais ocorrem nos planos horizontal e vertical, conforme apresentando na Figura 2.2, que apresenta também a distribuição da tensão de cisalhamento vertical calculada pela equação 2.1.



**Figura 2.2 - (a) Tensões de flexão e cisalhamento atuando ao longo da seção transversal e (b) distribuição da tensão de cisalhamento (adaptada de WIGHT, 2016)**

Os elementos infinitesimais 1 e 2 estão sujeitos a tensões normais devido a atuação de flexão e cisalhamento. Em vigas não fissuradas, as trajetórias de tensões apresentam elevadas inclinações próximas a borda de tração e inclinações próximas de zero próximo ao bordo comprimido, como pode ser visto na Figura 2.3.



**Figura 2.3 - (a) Trajetórias de tensão em vigas não fissuradas e (b) foto de uma viga sem armadura transversal, fissurada (reproduzida de WIGHT, 2012)**

O padrão de fissuração segue as trajetórias de tensões. As fissuras que ocorrem primeiro são as verticais, devido as tensões de flexão. As fissuras inclinadas, de cisalhamento, ocorrem em seguida, devido ao efeito da combinação das tensões de flexão e cisalhamento nas extremidades da viga. Em alguns casos, essa fissura estende-se até o apoio ao longo da armadura de flexão, necessitando-se de uma ancoragem da armadura longitudinal.

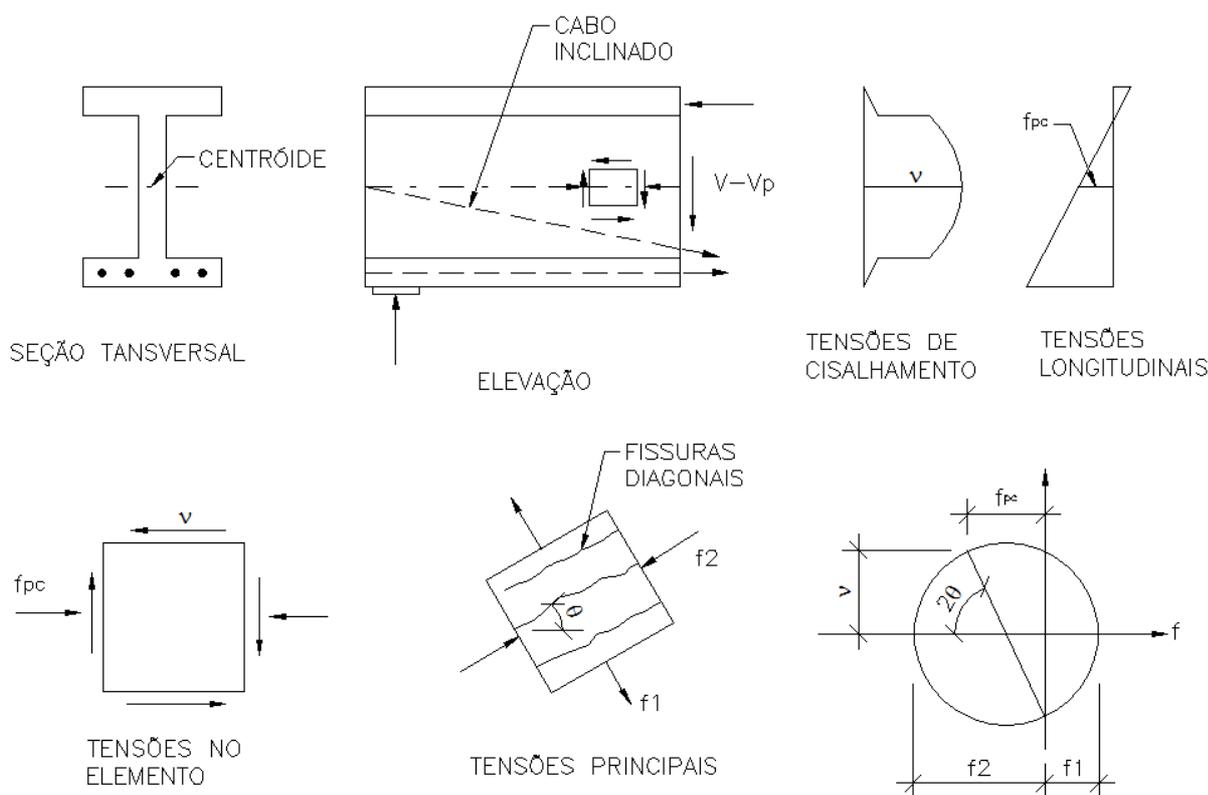
### 2.2.2 Tensão média de cisalhamento entre fissuras

Quando a tensão principal de tração atinge a resistência do concreto à fissuração haverá a formação da primeira fissura na direção normal a direção da tensão de tração principal. Dessa forma, se uma viga fosse submetida apenas a flexão pura ou tração axial, as tensões de tração principais seriam paralelas ao eixo longitudinal da viga e as fissuras seriam perpendiculares ao eixo. Quando essa viga

é submetida a uma tensão de cisalhamento, as tensões passam a ser inclinadas em relação ao eixo longitudinal e a fissura será inclinada em relação ao eixo da peça.

Em uma seção típica de concreto protendido, segundo COLLINS e MITCHELL (1990), a força cortante resistida será o valor do esforço cortante atuante subtraído da componente vertical oriunda da força da tração inclinada devido a protensão ( $V_p$ ). A viga estará submetida a uma tensão de cisalhamento e uma tensão de compressão longitudinal devido a protensão ( $v$  e  $f_{pc}$ ). Pelo círculo de Mohr, a tensão de tração resultante pode ser determinada como:

$$f_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{f_{pc}}{2}\right)^2} - \frac{f_{pc}}{2} \quad (2.2)$$



**Figura 2.4 - Fissuração em uma alma de viga protendida de concreto (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

A partir do instante que ocorre a fissuração,  $f_1 = f_{cr}$  e  $v = v_{cr}$ , que será a tensão de fissuração. Então a Equação 2.2 pode ser reescrita como:

$$v_{cr} = f_{cr} \sqrt{1 + \frac{f_{pc}}{f_{cr}}} \quad (2.3)$$

Como as fissuras inclinadas se formam paralelas à direção de compressão principal (COLLINS e MITCHELL, 1990) essas inclinações podem ser obtidas pelo círculo de Mohr:

$$\tan 2\theta = \frac{2v}{f_{pc}} \quad (2.4)$$

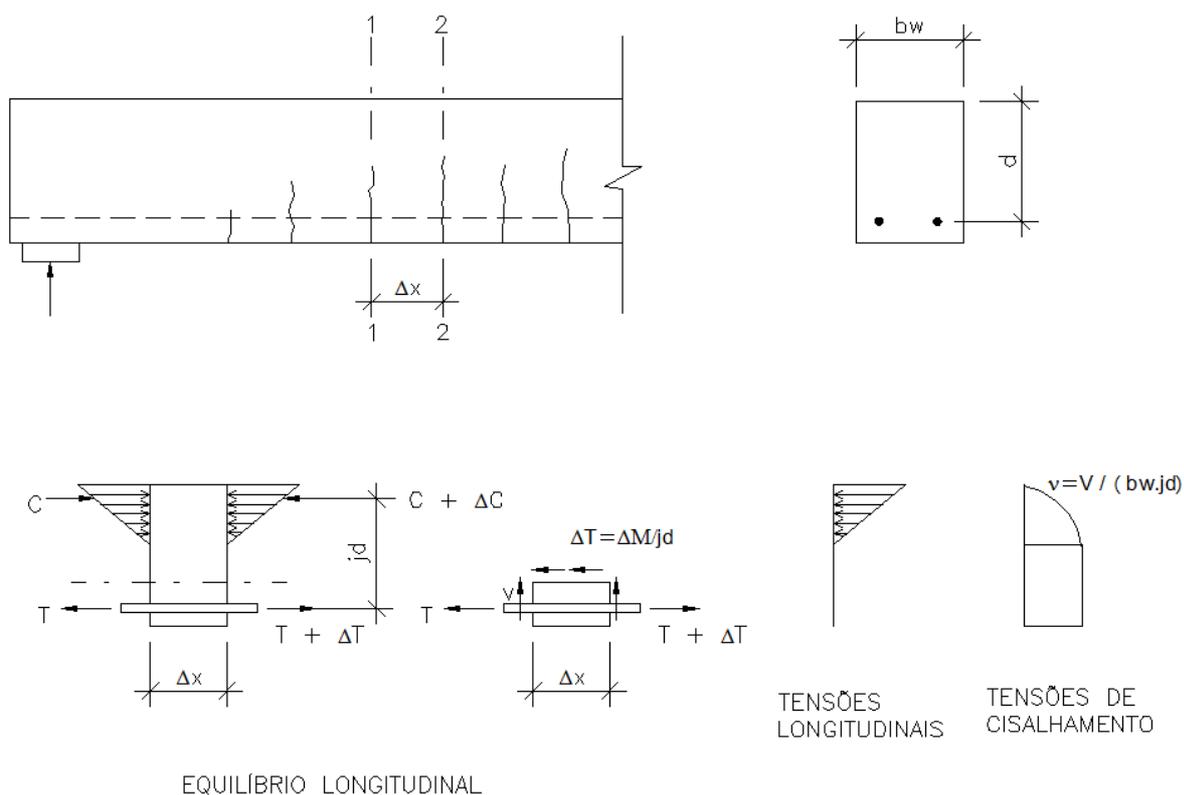
Pelas equações 2.3 e 2.4, percebe-se que quanto mais a tensão de compressão axial aumenta, a tensão de cisalhamento também aumenta (que causa a fissuração) mas o ângulo de inclinação da fissura diminui.

Se as tensões de flexão são conhecidas ao longo de uma viga, as tensões de cisalhamento podem ser conhecidas pelo equilíbrio do elemento. Em 1902, MÖRSCH usou tais aproximações para determinar a distribuição da tensão de cisalhamento em uma viga de concreto armado com fissuras de flexão. Segundo ele a tensão máxima de cisalhamento seria atingida no eixo formado pela linha neutra e permaneceria constante até a armadura de flexão do bordo inferior (Figura 2.5). Sendo assim, a tensão nominal de cisalhamento será dada por:

$$v = \frac{V}{b_w \cdot j \cdot d} \quad (2.5)$$

onde  $b_w$  é a largura efetiva da seção

MÖRSCH (1902) previu que distribuição da tensão de cisalhamento implica que elevadas tensões de cisalhamento eram transmitidas ao longo das fissuras de flexão. Na realidade, para percentuais de armadura longitudinal comuns, essa distribuição foi assumida por MÖRSCH (1902) como somente cerca de 30% do cortante total sendo transmitido pela zona de compressão não fissurada.



**Figura 2.5 - Determinação da distribuição da tensão de cisalhamento em viga de concreto com fissuras de flexão (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

### 2.2.3 Comportamento de Viga (Beam Action) e Comportamento de Arco (Arch Action)

Derivando a equação 2.5 e admitindo uma viga com seção prismática e braço de alavanca  $jd$  constante e admitindo que  $\Delta M = V \cdot \Delta x$ , temos que:

$$V = \frac{d}{dx} (Tjd) = \frac{d(T)}{dx} jd + \frac{d(jd)}{dx} T \quad (2.6)$$

onde  $T$  é a tração longitudinal e  $jd$  é o braço de alavanca da seção.

Quando  $jd$  permanece constante, a segunda parcela da equação 2.6 é zero e a viga se comporta conforme a teoria de viga elástica:

$$V = \frac{d(T)}{dx} jd \quad (2.7)$$

Onde  $d(T)/dx$  é o fluxo do cortante ao longo de qualquer plano horizontal entre a armadura e a zona de compressão (ver Figura 2.6). Para haja o comportamento de viga, esse fluxo precisa existir. Esse comportamento ocorre em regiões em que o vão de cisalhamento ( $a/d$ ) é aproximadamente maior que 2,5, conhecidas como regiões B, onde o B significa "beam" (viga em inglês) ou Bernoulli.

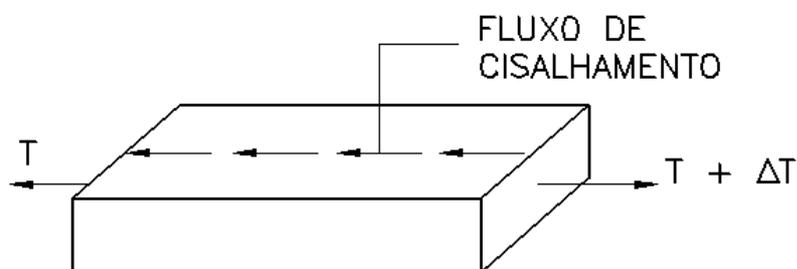


Figura 2.6 - Trecho inferior de uma viga

Quando, por outro lado, o fluxo de cisalhamento não pode ser transmitido, devido a falta de aderência da armadura longitudinal ou devido a uma fissura inclinada que se estende da carga aplicada até a reação, temos:

$$V = T \frac{d(jd)}{dx} \quad \text{ou} \quad V = C \frac{d(jd)}{dx} T \quad (2.7)$$

Nesses casos, o cortante é transmitido pelo efeito de arco e essas regiões são conhecidas como regiões D (que significa descontinuidade ou distúrbio), estendendo-se geralmente a uma altura  $d$ , para ambos os lados a partir da carga, reação ou mudanças na direção ou da seção.

Segundo MACGREGOR e WIGHT (2012), em geral, regiões do tipo B onde atuam o comportamento de viga, tendem a ter resistências menores que regiões D, onde prevalece o efeito de arco.

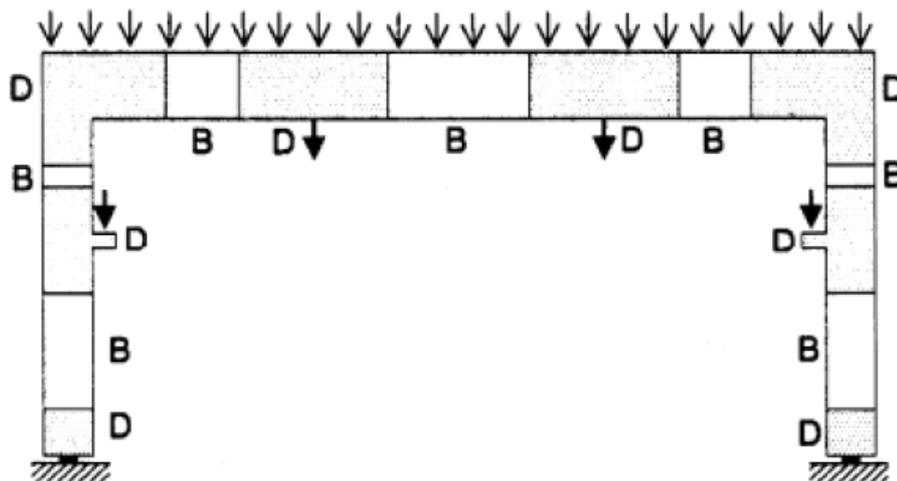


Figura 2.7 - Exemplo de Regiões B e D

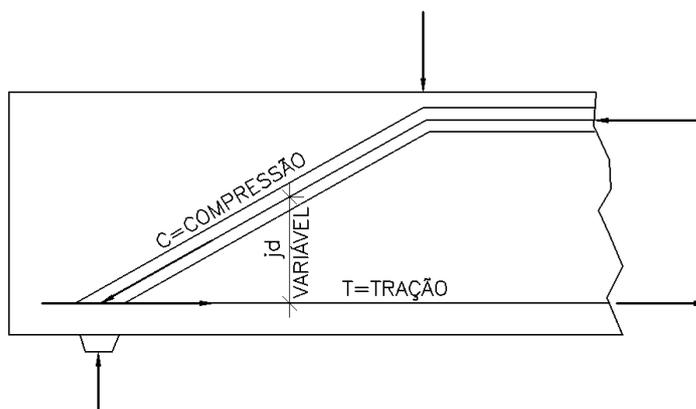


Figura 2.8 - Comportamento de arco em uma viga (adaptada de WIGHT, 2016)

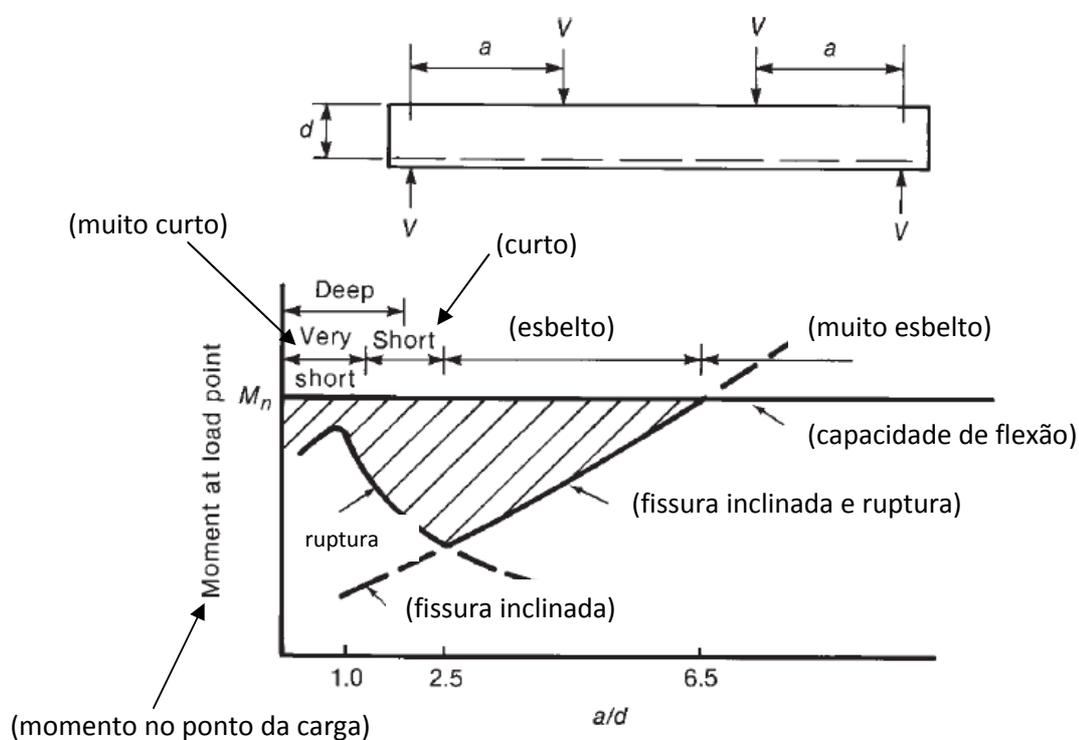
## 2.3 RUPTURA POR CISALHAMENTO

### 2.3.1 Comportamento de vigas sem armadura de cisalhamento

O comportamento de vigas na ruptura por cisalhamento, depende da contribuição dos efeitos do comportamento de viga ou arco, e da quantidade de armadura transversal.

Segundo MACGREGOR e WIGHT (2012), em vãos de cisalhamento muito curtos, com  $a/d$  entre 0 e 1, as fissuras inclinadas se desenvolvem do carregamento até o apoio. Nessas vigas, prepondera o comportamento de arco, e o fluxo de cisalhamento é interrompido, e a armadura longitudinal serve como um tirante com

tensão uniforme (efeito esse muitas vezes negligenciado por projetistas favorecendo a ruptura na ancoragem da armadura longitudinal). Vãos de cisalhamento curtos ( $a/d$  entre 1 e 1,25) as fissuras inclinadas se desenvolvem e após a redistribuição de tensões são capazes de suportar um carregamento adicional em parte pelo comportamento de arco e, como a fissura se prolonga em uma altura maior do que a fissura de flexão, a viga rompe por cisalhamento antes de atingir sua capacidade de resistência ao momento fletor. Em vigas esbeltas ( $a/d$  entre 2,5 e 6,5) as fissuras perturbam o equilíbrio de tal maneira que a viga rompe já no carregamento que provoca a fissuração inclinada. Nas vigas muito esbeltas, a falha ocorre por flexão antes da formação das fissuras inclinadas



**Figura 2.9 - Ruptura em vigas sem armadura de cisalhamento (adaptada de WIGHT, 2012)**

Esse comportamento pode ser visto no gráfico da Figura 2.9 que apresenta os momentos, fissuração inclinada e ruptura em função da razão entre o vão de cisalhamento  $a$  e a altura útil  $d$  de vigas sem armadura de cisalhamento. A área riscada no gráfico representa a redução da resistência da viga sem armadura transversal devido ao cisalhamento, impedindo que a viga desenvolva toda sua capacidade de resistência a flexão. Daí vem a necessidade do uso da armadura

transversal para que seja garantida a plenitude da capacidade de flexão do elemento.

### 2.3.2 Fatores que influenciam na resistência ao cisalhamento em elementos sem armadura transversal

A ruptura por cisalhamento em uma viga esbelta sem estribos é repentina e ocorre quando ocorrer a fissuração inclinada ou logo depois. Sendo assim, a resistência ao cisalhamento desses elementos é igual ao esforço cortante que provoca essa fissuração que, segundo MACGREGOR e WIGHT (2012), pode ser influenciado por os fatores comentados a seguir:

**Resistência a tração do concreto:** Na alma de uma viga há tensões de compressão e tração. A fissura de flexão ocorre antes da fissura de cisalhamento (inclinada) desestabilizando o campo de tensões elásticas de forma que a fissura de cisalhamento ocorre com uma tensão de tração principal que é aproximadamente a metade da tensão de tração de um elemento não fissurado.

**Taxa de armadura longitudinal:** Quando essa taxa é pequena as fissuras de flexão se prolongam mais dentro da viga e resultam em aberturas maiores. O aumento dessa abertura diminui os valores das componentes verticais devido ao efeito de pino e engrenamento dos agregados ( $V_d$  e  $V_{ay}$ , comentados adiante no item 2.3.3). Dessa forma a resistência da fissura cai abaixo da necessária para resistir aos carregamentos e a viga rompe repentinamente por cisalhamento.

**Relação  $a/d$  ( $M/V_d$ ):** No gráfico da capacidade de flexão da Figura 2.10, obtida pela divisão entre o momento da Figura 2.9 e o vão de cisalhamento ( $M_r/a$ ) é notória a afirmação que vigas com  $a/d$  (ou  $M/V_d$ ) menor que 2,5 (vãos curtos) afetam o cortante de fissuração e o cortante último. Para vãos maiores, onde o comportamento é de regiões tipo B, a influência de  $a/d$  é muito pequena sobre  $V_c$ , podendo ser negligenciada.

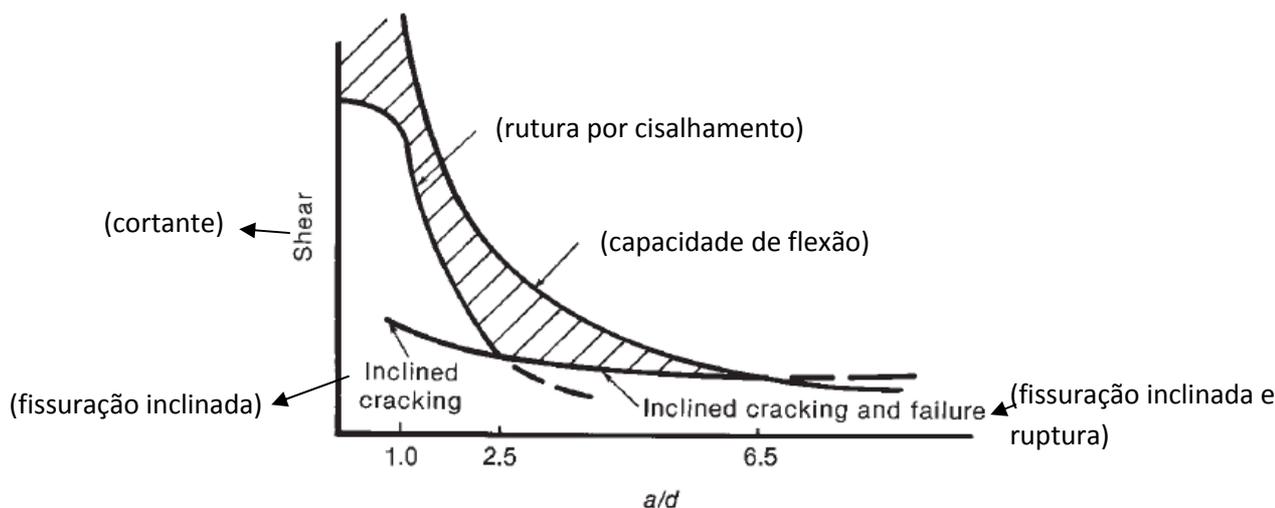


Figura 2.10 - Cortante de fissuração e ruptura (adaptada de WIGHT, 2016)

**Altura da viga:** Para uma peça com resistência a compressão, taxa de armadura e vão de cisalhamento ( $a/d$ ) constantes, com o aumento da altura da viga, a largura e espaçamento das fissuras tende a aumentar. Com isso, há redução na tensão de cisalhamento máxima transferida pelo engrenamento dos agregados. Quando a tensão transmitida pela fissura excede a resistência de cisalhamento máxima, as faces da fissura deslizam uma em relação a outra, provocando uma situação instável. Quando a viga possui armadura mínima de cisalhamento necessária, esse comportamento não é observado, uma vez que a armadura mantém as faces das fissuras juntas.

**Esforços Normais:** Quando o esforço normal aumenta, a fissuração de flexão é retardada e a fissura de flexão penetra menos internamente na viga, o que aumenta o carregamento de fissuração inclinada. Com o aumento da tensão de tração, há o aumento da deformação da armadura longitudinal aumentando a largura da fissura inclinada, reduzindo a tensão de cisalhamento máxima transmitida através das fissuras e o carregamento de falha ao cisalhamento.

**Dimensão do agregado graúdo:** Com o aumento do diâmetro do agregado há também o aumento da rugosidade da superfície das fissuras permitindo que uma tensão de cisalhamento maior seja transferida pelas fissuras. Mas para concretos de alta resistência, as fissuras estão mais propensas a penetrar no agregado, do que

contorná-lo, resultando em uma superfície de fissura mais suavizada, diminuindo o cisalhamento transferido pelo engrenamento dos agregados.

### 2.3.3 Mecanismo resistente de vigas sem estribos

A Figura 2.11 apresenta o mecanismo de uma viga fissurada desprovida de estribos sujeita a um carregamento. O esforço cortante é transmitido pela superfície ABC, composto pelo cortante ( $V_{cy}$ ) atuante na zona comprimida, pela componente vertical transmitida pelo engrenamento dos agregados que ocorrem nas duas faces da fissura ( $V_{ay}$ ) e pelo efeito de pino da armadura longitudinal ( $V_d$ ) que impede que a parte inferior da fissura não se desprenda da viga. Quanto maior a largura da fissura, menor a contribuição de  $V_a$  e maior a parcela resistida por  $V_d$  e  $V_{cy}$ .

Um aumento de  $V_d$  provoca uma divisão da fissura no concreto ao longo da armadura de flexão.

Quando  $V_a$  e  $V_d$  desaparecem,  $V'_{cy}$  e  $C'_1$  se tornam nulos, sendo todo esforço cortante e de compressão transmitidos através da altura AB acima da fissura que é insuficiente para resistir às forças de compressão necessárias ao equilíbrio, ocasionando o esmagamento.

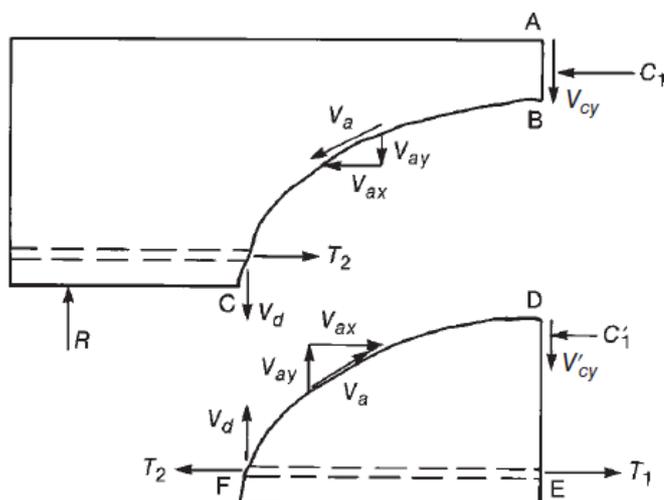


Figura 2.11 - Forças internas em vigas sem estribos (reproduzida de WIGHT, 2016)

Se  $C_1$  for igual a zero,  $T_2$  se igualará com  $T_1$  resultando em  $T_2$  igual a  $C_1$ . Em outras palavras a fissura inclinada tornou a força de tração em C uma função do

momento em ABDE. Esse deslocamento da força de tração precisa ser considerado ao se detalhar os limites das ancoragens das barras longitudinais.

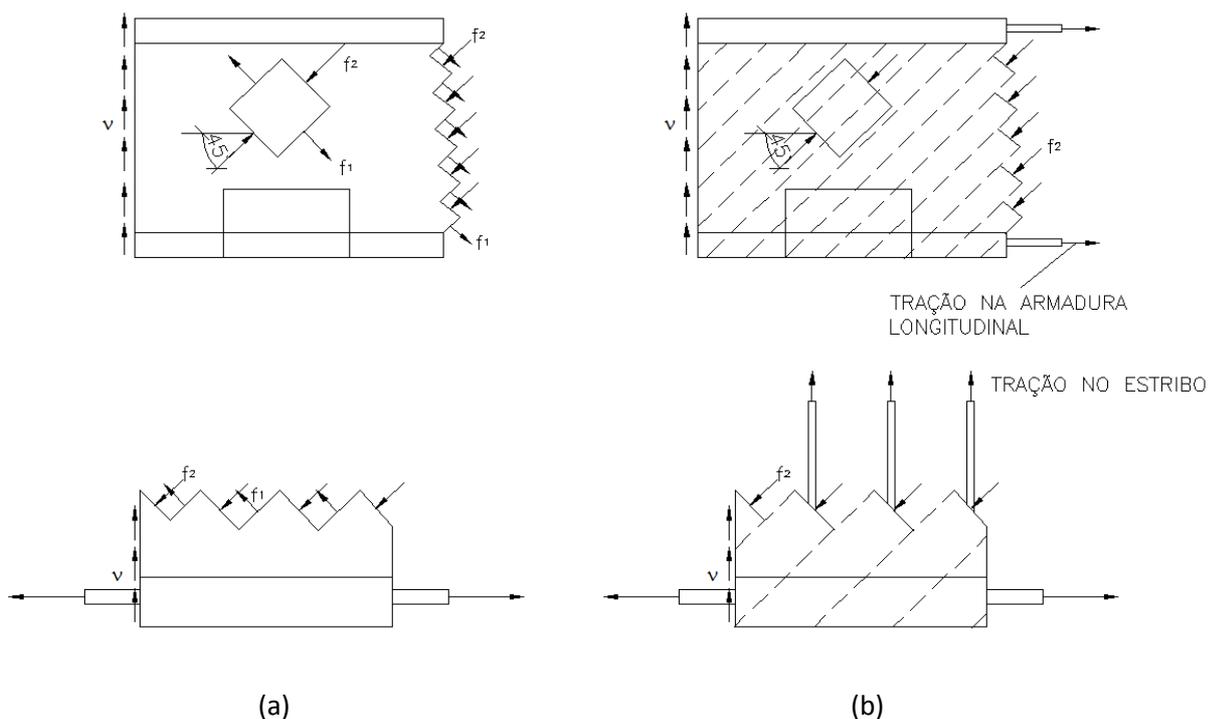
A resistência ao cortante das peças sem armaduras de cisalhamento ( $V_c$ ) podem ser determinados por diversos modelos, sendo várias opiniões divergentes entre autores para a determinação de cada mecanismo resistente, levando sempre a um modelo empírico para sua determinação.

Da mesma forma, as normas geralmente negligenciam o efeito dos mecanismos alternativos que influenciam na resistência ao cortante sem armadura transversal. A teoria do Campo de Compressão Modificada e a Norma Canadense, por exemplo, não consideram o efeito de pino e assumem que a resistência ao cisalhamento na região comprimida é maior que na região fissurada. Assim quem controla a resistência para peças sem estribos é a capacidade da fissura a resistir as tensões de cisalhamento.

#### 2.3.4 Mecanismo resistente de vigas com estribos

Fissuras inclinadas devido ao cisalhamento tendem a diminuir a capacidade de flexão da viga, como pode ser visto na Figura 2.10. O propósito do uso de uma armadura de cisalhamento é de que o elemento possa desenvolver a sua capacidade plena de flexão. Entretanto, os estribos não evitam a formação de fissuras inclinadas. Estes começam a ser solicitados após a formação das fissuras.

Antes da fissuração, o cisalhamento é transmitido por um conjunto de tensões de compressão em uma direção e por um conjunto de tensões de tração perpendiculares as de compressão. Quando as fissuras diagonais se formam a capacidade do concreto de transmitir a tração é interrompida, até que falhe, se não houver estribos. Com estribos, após a fissuração, um novo sistema de tensões aparece, permitindo ao elemento suportar o esforço cortante.



**Figura 2.12 - Campos de tensões resistindo cortante (a) antes e (b) depois da fissuração (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

Na Figura 2.12, em um elemento submetido a corte puro, pode-se perceber que (a) antes de fissurar as tensões de compressão e tração ( $f_2$  e  $f_1$ ) são iguais e resistem ao cisalhamento  $v$ . Depois da fissuração (b),  $f_1$  desaparece, sendo que  $f_2$  que permanece inclinada a  $45^\circ$ , tem que dobrar seu valor para transmitir esse cisalhamento  $v$ , e dessa forma  $f_2=2v$ . Como  $f_1$  é zero, a tração da armadura longitudinal precisa equilibrar a componente horizontal de  $f_2$  e a tração no estribo precisa equilibrar a componente vertical de  $f_2$ .

A Figura 2.13, representa o mecanismo de transferência de cisalhamento uma viga armada transversalmente. O mecanismo é semelhante ao da Figura 2.11, entretanto, após a fissura crítica, o cisalhamento é transferido pela tensão no estribo,  $V_s$ , que não desaparece quando a largura da fissura aumenta, garantindo que sempre haverá a força de compressão  $C'_1$  e o cortante  $V'_{cv}$  agindo na parte de baixo da fissura. Dessa forma  $T_2$  será menor que  $T_1$ , mas será maior que a tensão de flexão  $M/jd$  no ponto C.

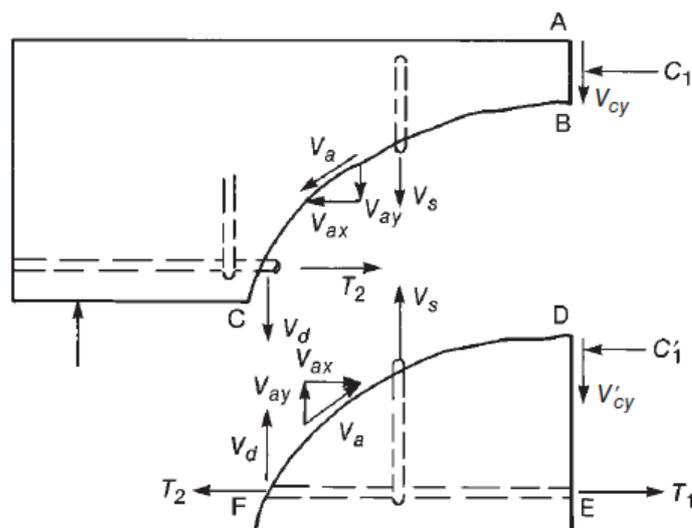
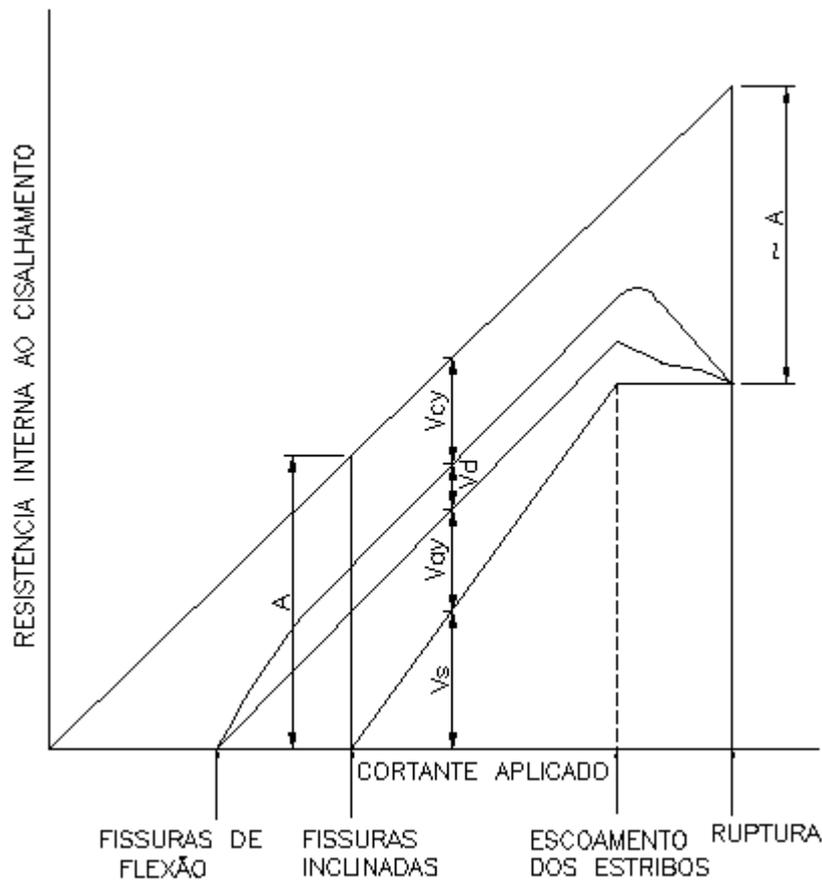


Figura 2.13 - Forças internas em vigas com estribos (reproduzida de WIGHT, 2016)

A Figura 2.14 apresenta a distribuição interna de cortante em uma viga com armadura de cisalhamento. Antes da ocorrência das fissuras, todo esforço cortante é transmitido pelo concreto não fissurado,  $V_{cy}$ . A partir da fissuração de flexão até a fissuração por cisalhamento, o cortante é resistido por  $V_{cy}$ ,  $V_{ay}$  e  $V_d$ . Quando ocorre a fissura de cisalhamento os estribos começam a resistir ( $V_s$ ) até o momento em que eles escoam, permanecendo constante quando o cortante é aumentado. Após o escoamento dos estribos as fissuras inclinadas aumentam rapidamente, provocando uma diminuição de  $V_{ay}$  e um aumento brusco de  $V_d$  e  $V_{cy}$  até que haja a ruptura por flexão na armadura de tração como também o esmagamento da zona de compressão ou o esmagamento da alma.

Como já comentando anteriormente, para vários autores, excluindo-se  $V_s$ , a quantificação da contribuição dos demais componentes internos ( $V_{cy}$ ,  $V_{ay}$ ,  $V_d$ ) é muito difícil de mensurar. Em projetos, esses componentes são agregados como  $V_c$ , denominados como a contribuição do concreto.



**Figura 2.14 - Distribuição das resistências ao cisalhamento em vigas com estribos (adaptada de WIGHT, 2016)**

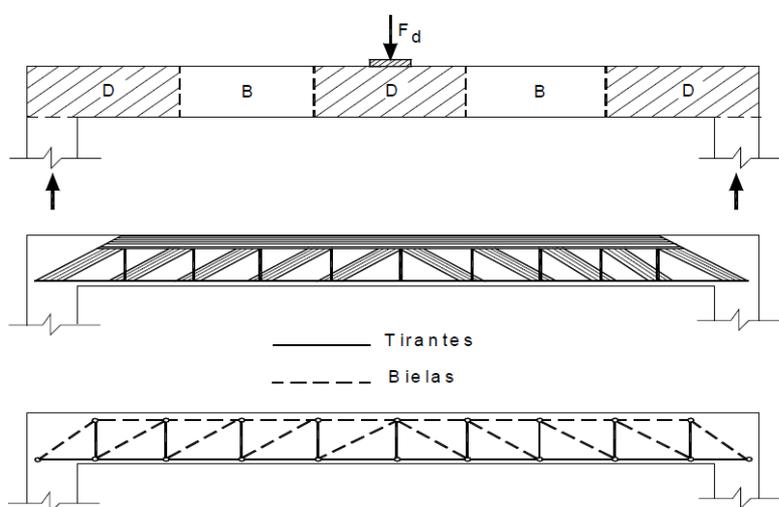
Observando a Figura 2.14, pode-se perceber que a resistência da viga às fissuras inclinadas (indicado como o segmento A), tem valor próximo da resistência da viga à ruptura, para elementos sem estribos (desconsiderando  $V_s$ ). Esse esforço que provoca a primeira fissura inclinada será chamado doravante nesse estudo de cortante de fissuração.

## 2.4 O MODELO DE TRELIÇA

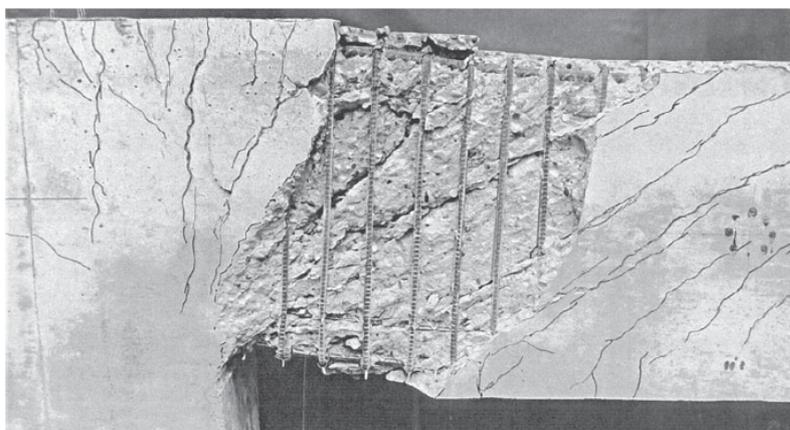
O modelo teórico associado a uma viga de concreto armado é o modelo de treliça de banzos paralelos sendo um comprimido (em concreto) e outro tracionado (constituído pelas barras de aço) necessários para equilibrar o momento fletor.

Também o modelo é constituído de uma barra diagonal comprimida (concreto) e uma barra vertical, pendural tracionado (barras transversais). Esse modelo foi criado por Ritter e Mörsch nos primeiros anos do século XX, observando uma viga de concreto armado na iminência de ruptura.

A Figura 2.15 apresenta o mecanismo de treliça descrito no parágrafo anterior e a Figura 2.16 apresenta uma fotografia de uma viga fissurada onde é possível visualizar as diagonais de compressão representadas pelas fissuras inclinadas e os pendurais, representados pelos estribos tracionados.



**Figura 2.15 - Modelo de treliça para uma viga de concreto armado (reproduzida de GIONGO, 2011)**



**Figura 2.16 - Aspecto de uma viga fissurada (reproduzida de MACCREGOR e WIGHT, 2012)**

Segundo o Professor Lobo Carneiro, em texto escrito em 1994: "*A chamada treliça clássica de Ritter-Mörsh foi uma das concepções mais fecundas na história do concreto armado. Há mais de meio século tem sido à base do dimensionamento das armaduras transversais - estribos e barras inclinadas - das vigas de concreto armado, e está muito longe de ser abandonada ou superada. As pesquisas sugerem apenas modificações ou complementações na teoria, mantendo, no entanto, o seu aspecto fundamental: Analogia entre a viga de concreto armado, depois de fissurada, e a treliça*".

#### 2.4.1 Modelo de Treliça Clássica (45°)

Em 1899, RITTER explicou o fluxo das forças no concreto fissurado em termos do modelo de treliça e em 1902, MÖRSCH o explicou com mais detalhes. Em ambos os textos foram desprezadas as tensões de tração no concreto fissurado. MÖRSCH concluiu em 1902 que seria matematicamente impossível determinar a inclinação da biela, sendo conservador admitir que a tensão de compressão na diagonal permaneceria com a inclinação de 45°.

Na Figura 2.17 são apresentadas as componentes que proporcionam as condições de equilíbrio ao modelo de treliça de RITTER (1899) e MÖRSCH (1902). Admitindo que a tensão de cisalhamento está uniformemente distribuída sobre a área efetiva de cisalhamento ( $b_w \cdot jd$ ) e que o ângulo de inclinação das bielas comprimidas ( $\Theta$ ) é de 45°, determina-se a tensão de compressão principal  $f_2$  e as componentes horizontal e vertical das forças resultantes da tensão principal:

$$f_2 \cdot b_w \cdot jd \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}V : f_2 = \frac{2V}{(b_w \cdot jd)} \quad (2.8)$$

A componente longitudinal da força de compressão da diagonal será igual a  $V \cdot \cot 45^\circ$ . Essa força precisa ser equilibrada pela força de tração na armadura longitudinal:

$$N_v = V \quad (2.9)$$

Observando ilustração inferior na Figura 2.17, pode ser visto que a força de compressão diagonal,  $f_2 \cdot b_w \cdot s \cdot \sin 45^\circ$ , tem uma componente vertical

$f_2 \cdot b_w \cdot s \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$  que precisa ser equilibrada com a força de tração do estribo,  $A_v \cdot F_v$ . Então a equação 2.8 pode ser reescrita como:

$$\frac{A_v f_v}{s} = \frac{V}{jd} \quad (2.10)$$

Sendo  $f_2$  a tensão principal,  $N_v$  a componente horizontal da força resultante de  $f_2$  e  $A_v \cdot f_v$  a sua componente vertical.

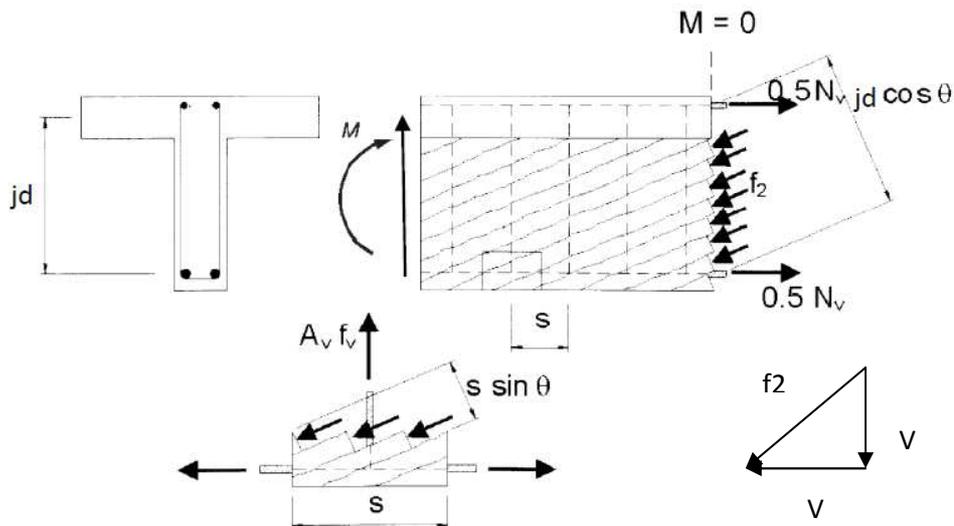


Figura 2.17 - Equilíbrio do modelo de treliça a 45°

## 2.4.2 Modelo de Treliça com ângulo variável

Experiências com a analogia de treliça a 45 demonstravam que a teoria produz resultados muito conservadores. Dessa forma, a contribuição do concreto foi introduzida em diversas normas, denominada pela parcela  $V_c$ .

O modelo de treliça com ângulo variável foi introduzida pelo CEB FIP em 1978. Nesse modelo o projetista poderia escolher o ângulo de inclinação  $\theta$  variando entre  $31^\circ$  e  $59^\circ$ . A Norma Brasileira limita esse valor entre  $35^\circ$  e  $45^\circ$  como será comentado no Capítulo 3 desse estudo.

Observando a Figura 2.17, percebe-se que a resultante vertical de  $f_2$  deve-se igualar a  $V$ , de forma a manter o sistema em equilíbrio:

$$f_2 \cdot b_w \cdot jd \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta = V \quad : \quad f_2 = \frac{V}{b_w \cdot jd} (\tan\theta + \cot\theta) \quad (2.11)$$

A componente longitudinal da força de compressão da diagonal será igual a  $V \cdot \cot \theta$ . Essa força precisa ser equilibrada pela força de tração na armadura longitudinal:

$$N_v = V \cdot \cot \theta \quad (2.12)$$

Observando ilustração inferior na Figura 2.17, pode ser visto que a força de compressão diagonal,  $f_2 \cdot b_w \cdot s \cdot \text{sen}\theta$ , tem uma componente vertical  $f_2 \cdot b_w \cdot s \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta$  que precisa ser equilibrada com a força de tração do estribo,  $A_v \cdot F_v$ . Então a equação 2.8 pode ser reescrita como:

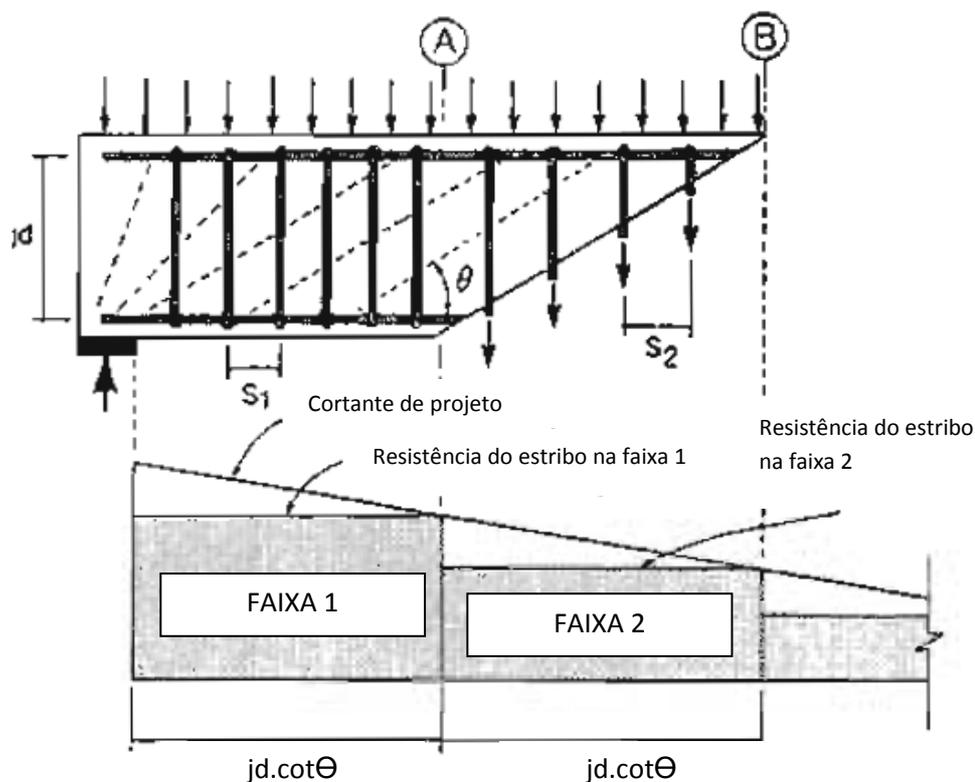
$$\frac{A_v f_v}{s} = \frac{V}{jd} \tan \theta \quad (2.13)$$

Dessa forma, existem 3 equações de equilíbrio (equações 2.11, 2.12 e 2.13), mas 4 incógnitas a serem determinadas ( $f_2$ ,  $N_v$ ,  $F_v$  e  $\theta$ ) que não são suficientes para encontrar as tensões oriundas do esforço cortante.

O modelo tradicional de treliça é determinado pelo equilíbrio da equação 2.13, assumido na ruptura por escoamento dos estribos ( $f_v=f_y$ ) e ângulo  $\theta$  de  $45^\circ$ . Em vez de assumir o ângulo outra solução para o problema seria admitir a tensão de compressão  $f_2$  no momento da ruptura e depois encontrar  $V$  e  $\theta$ . De outra forma, pode-se admitir que na ruptura a armadura longitudinal e os estribos escoam, e utilizar as equações 2.11 e 2.12 para determinar  $V$  e  $\theta$ . Essas aproximações, por considerarem o mecanismo da falha, são chamados de Métodos Plásticos (VECHIO COLLINS e MITCHELL, 1991).

Entretanto, no desenvolvimento das equações de treliça, considerou-se que o cortante permanecia constante em um comprimento de viga, o que não ocorre usualmente no dimensionamento de vigas, sendo necessário algumas considerações. Segundo COLLINS e MITCHELL (1991) um sistema determinado mais simples pode ser desenvolvido, considerando que a força em cada estribo

provoque o seu escoamento e que a componente vertical represente um grupo de estribos no comprimento  $jd \cdot \cot \theta$ . Da mesma forma, cada componente diagonal da treliça representa uma zona de compressão diagonal (ver Figura 2.18)



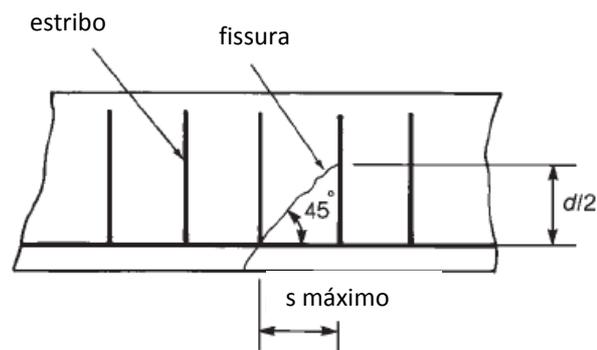
**Figura 2.18 - Concepção para dimensionamento ao cisalhamento**

Dessa forma, a força dos estribos em uma determinada localização não está relacionada ao cortante em tal seção, sendo estes projetados para resistir ao menor esforço cortante compreendido ao longo do comprimento  $jd \cdot \cot \theta$ .

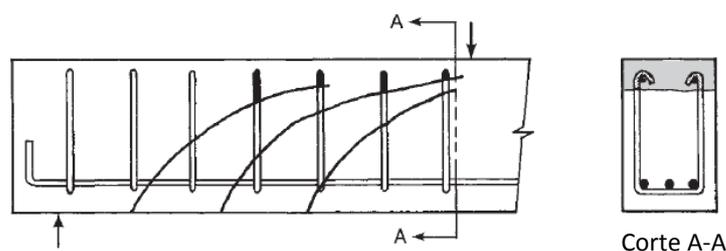
O modelo de treliça assume que a tensão de cisalhamento no apoio é uniformemente distribuída ao longo da altura da viga. Se a armadura longitudinal superior começar a escoar a distribuição de tensão de cisalhamento irá mudar fazendo com que mais cortante seja absorvido pela zona de flexão comprimida na viga. Esta interação é muito importante, principalmente em regiões onde os momentos negativos são baixos, próximos aos apoios, onde a necessidade da armadura de flexão é reduzida, porém a solicitação por cortante requer uma ancoragem especial.

### 2.4.3 Modos de Ruptura

A ausência de armadura, como visto no item 2.3.1, deixa o elemento com sua capacidade resistente dependente apenas da resistência a tração do concreto, de suas características e de outros mecanismos complementares associados a estrutura interna da peça. Da mesma forma, uma armadura mal dimensionada não apresentará condições para que a fissura transmita o cortante entre a face superior e inferior da mesma (ver Figura 2.13), permitindo o comportamento do elemento como se ela não existisse. As armaduras podem se tornar ineficazes quando excedem o espaçamento necessário para que interceptem a fissura inclinada (esse espaçamento deve ser limitado a  $d/2$ , admitindo  $\Theta = 45^\circ$ ), ou não apresentem ancoragem suficiente na zona de compressão na face da viga, onde geralmente terminam as fissuras inclinadas. Nesses casos, a peça fica sujeita a uma ruptura frágil que ocorre durante a fissuração ou logo depois, de maneira repentina.



**Figura 2.19 - Limitação de espaçamento para estribos a 90° (reproduzida de WIGHT, 2016)**



**Figura 2.20 - Fissuras interceptando a zona de compressão (reproduzida de WIGHT, 2016)**

Da mesma forma, fissuras com aberturas muito grande podem expor as armaduras a agentes agressivos, permitindo a entrada de água e provocando corrosão de armadura. Dessa forma, opta-se pelo uso de estribos com diâmetros pequenos, com espaçamentos menores.

Sendo assim, em vigas com armadura transversal, a falha pode ocorrer, quando o elemento está sujeito a ação do momento fletor e do esforço cortante, das seguintes formas (FUSCO, 1984):

- a) Ruptura por força cortante e compressão: Típica de peças superarmadas transversalmente nas quais ocorre uma ruptura do concreto das bielas antes que a armadura transversal entre em escoamento. Como pôde ser visto anteriormente, o esforço cortante provoca a tensão de compressão  $f_2$  na alma do elemento, podendo esmagá-la.
- b) Ruptura por força cortante e tração: Típica de peças subarmadas transversalmente, onde essas atingem o escoamento, sendo superada a resistência do aço, ocasionando a falha da diagonal tracionada.
- c) Ruptura por força cortante e flexão: Devido a combinação do momento fletor e esforço cortante, nas regiões próximas a cargas concentradas, as fissuras inclinadas cortam parte do banzo comprimido da peça. A diminuição da espessura desse banzo pode provocar a ruptura da peça.
- d) Ruptura por flexão da armadura longitudinal: Devido a deficiências da armadura longitudinal de tração, o mecanismo para o funcionamento como treliça é impedido, uma vez que a componente longitudinal das tensões diagonais de compressão deve ser contraposta por esse força de tração da armadura longitudinal. Esse incremento de tração pode provocar plastificações resultando no colapso da viga quando as tensões de flexão muito elevadas são transmitidas para essas armaduras. Também pode ser causado pela falta de ancoragem dos estribos ou deficiências na ancoragem.

A Figura 2.21 apresenta os modos de ruptura descritos nesse item.

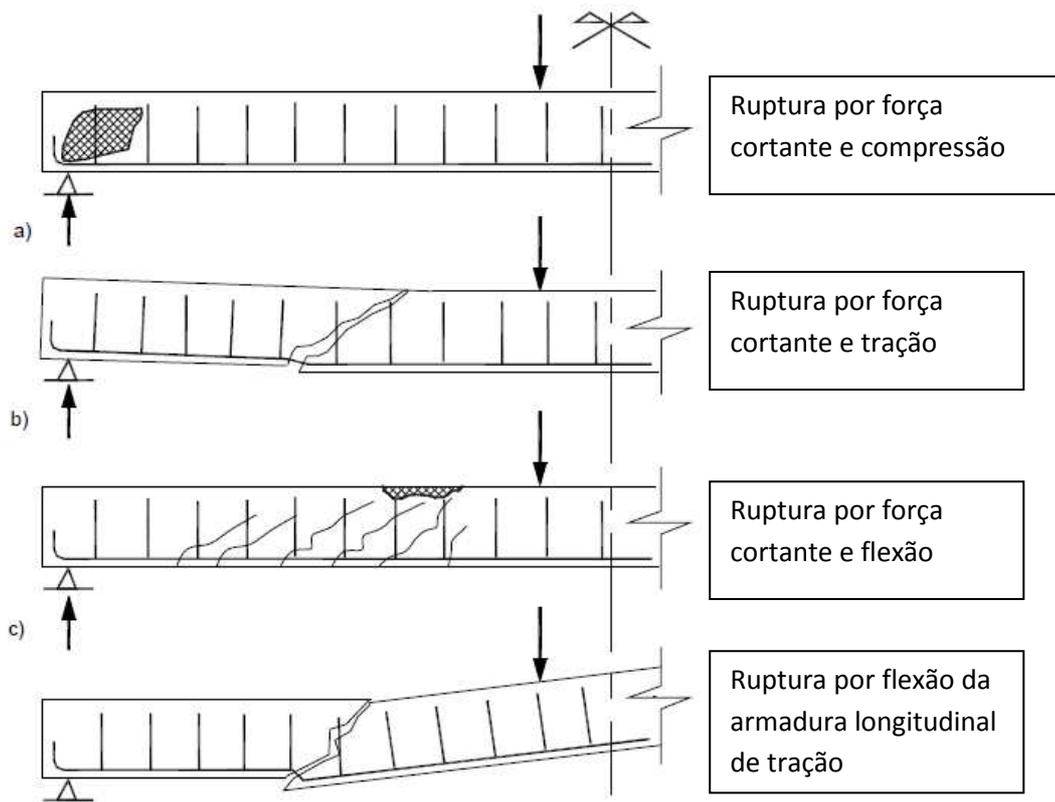


Figura 2.21 - Modos de falha (adaptada de GIONGO, 2011)

## 2.5 TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO (CFT)

As três equações de equilíbrio do modelo de treliça com ângulo variável (2.11 a 2.13) não são suficientes para determinar as quatro incógnitas ( $f_2$ ,  $N_v$ ,  $F_v$  e  $\Theta$ ). Sendo assim, existe a necessidade de determinar o ângulo de inclinação das bielas comprimidas.

Em 1992, WAGNER, analisando a resistência ao cisalhamento de almas de vigas metálicas após flambagem, notou que depois que a alma flamba, deixa de resistir a compressão e o cisalhamento era transmitido por um campo diagonal de tração, assumindo que o ângulo de inclinação da tensão da diagonal coincidiria com o ângulo da deformação principal. Essa aproximação foi chamada de Teoria do campo de tração.

Aplicando essa aproximação de WAGNER no concreto armado e admitindo que esse não transmite tração depois de fissurado e que o cortante é transmitido por um campo diagonal de compressão, a partir do círculo de Mohr (Figura 2.22) temos:

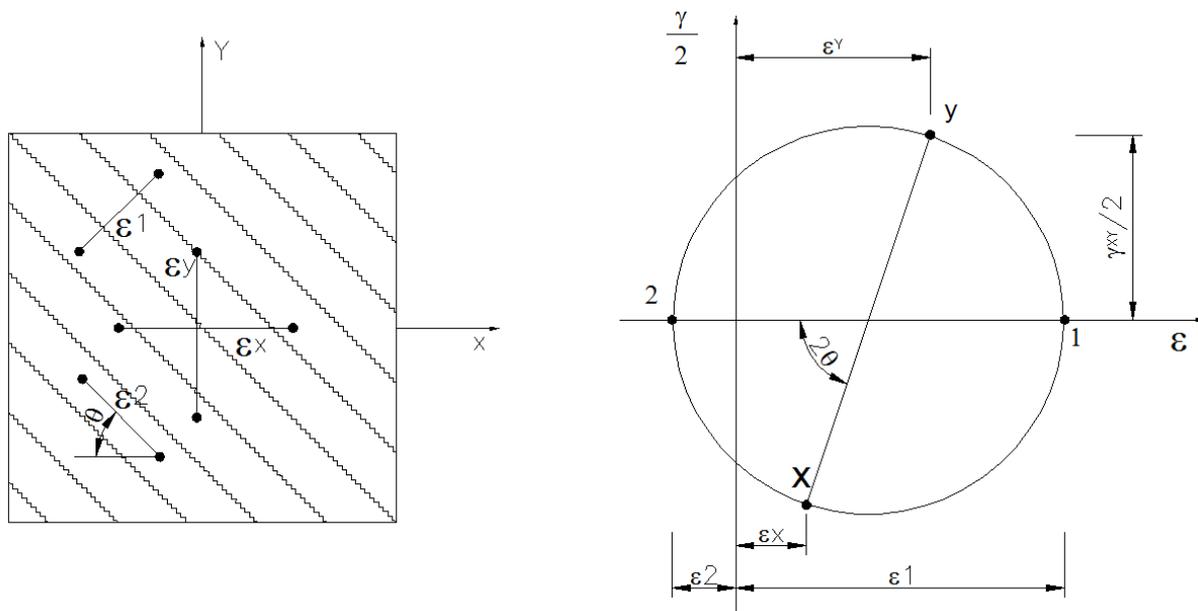


Figura 2.22 - a) Deformações médias em elementos fissurados e b) círculo de Mohr

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} \quad (2.14)$$

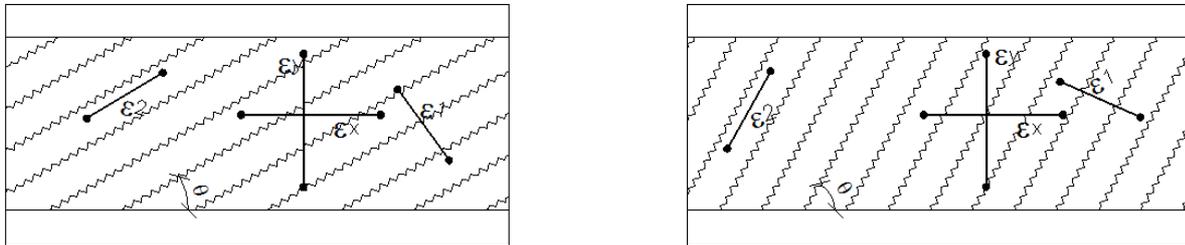
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_y - \varepsilon_2) \cot \theta \quad (2.16)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo da diagonal de compressão,  $\varepsilon_1$  a deformação principal de tração e  $\gamma_{xy}$  a distorção de cisalhamento.  $\varepsilon_x$  é a deformação longitudinal da alma (tração é positiva),  $\varepsilon_y$  a deformação transversal da alma (tração é positiva) e  $\varepsilon_2$  é a deformação de compressão principal (negativa).

Para um dado valor de  $\theta$  a equação 2.14 pode ser considerada como uma equação de compatibilidade, correlacionando as três deformações citadas. Para o concreto fissurado, as relações são expressas em termos de deformação média, medidas em um comprimento que existem várias fissuras. No caso de uma viga de concreto armada com estribos, após fissurada, considera-se que não há deslizamento entre o concreto e a armadura, sendo essas deformações iguais.

Observando as equações 2.14 a 2.16 e a Figura 2.23, percebe-se que para pequenas inclinações das fissuras, a armadura transversal se deformará muito e para grandes inclinações da fissura a armadura longitudinal que se deformará muito.



**Figura 2.23 - Influência de  $\Theta$  na deformação da armadura**

Se considerarmos uma viga de concreto simetricamente armada, protendida longitudinalmente, sob ação de um cortante, pode-se perceber que para um dado cortante  $V$ , temos um total de cinco incógnitas: Tensão na armadura longitudinal  $f_x$ , tensão na armadura longitudinal protendida  $f_p$ , tensão nos estribos  $f_y$ , tensão da diagonal de compressão do concreto  $f_2$ , e a inclinação  $\Theta$  dessa diagonal. Para achar essas cinco incógnitas, temos três equações de equilíbrio, duas de compatibilidade e a relação tensão-deformação dos materiais. Essa aproximação foi chamada da Teoria do Campo de Compressão. As equações de equilíbrio foram apresentadas no modelo de treliça (Equação 2.11 a 2.13) porém as relações de tensão-deformação dos materiais são determinadas através de ensaios.

A relação tensão-deformação do concreto é definida através de um ensaio em um cilindro de concreto padronizado que geralmente produz uma parábola, ou por uma expressão mais complexa. COLLINS e MITCHELL (1990) afirmam que quando se formular as relações tensão-deformação para alma de vigas de concreto fissurada sujeito a um cortante, deve-se considerar que as deformações são diferentes das do cilindro de concreto. No cilindro o concreto fica exposto a pequenas deformações de tração devido ao efeito de Poisson. Na alma fissurada de uma viga o concreto fica exposto a grandes deformações de tração. Sendo assim o concreto da alma da viga é menos resistente e menos rígido.

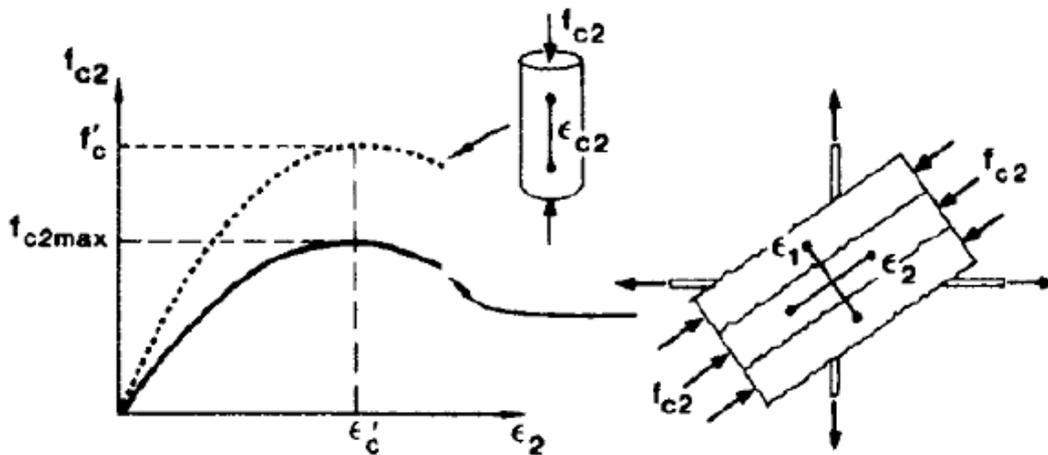


Figura 2.24 - Diagramas tensão-deformação (cilindro de concreto e concreto fissurado)

VECHIO e COLLINS (1982) investigaram as características do concreto fissurado diagonalmente, ensaiando elementos de concreto armado ao cisalhamento puro. Baseado nesses testes, eles acharam que a tensão de compressão principal no concreto ( $f_2$ ) não é função somente da deformação de compressão principal  $\epsilon_2$ , mas também da existência da deformação principal de tração  $\epsilon_1$ , podendo ser expressa por (sendo  $f_{2,máx}$  a resistência ao esmagamento do concreto):

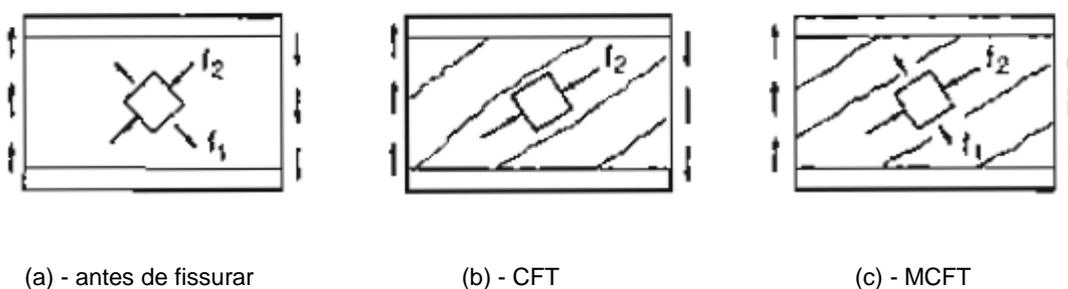
$$f_2 = f_{2,máx} \left[ 2 \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} \right) - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

$$f_{2,máx} = \left( \frac{f'_c}{0,8+170\epsilon_1} \right) \leq 1 \quad (2.18)$$

Sendo assim, com esse conjunto de equações, é possível prever o comportamento em termos de resistência e deformação para vigas submetidas ao esforço cortante. Entretanto, como a Teoria do Campo de Compressão desconsidera a contribuição das tensões de tração no concreto fissurado, a deformação é superestimada, produzindo resistências conservadoras e cargas de fissuração não confiáveis.

## 2.5 TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO (MCFT)

A Figura 2.25 apresenta o campo de tensões de uma viga antes e depois de fissurar. Antes da fissuração, o cortante é transmitido pelas tensões diagonais de compressão e tração que atuam em um ângulo de  $45^\circ$  ( $f_2$  e  $f_1$ ). Quando se formam as fissuras as tensões de tração são quase que totalmente reduzidas. Na Teoria do Campo de Compressão (CFT) considera-se que  $f_1$  seja igual a zero depois da fissuração. A Teoria do Campo de Compressão Modificado considera a contribuição das tensões de tração entre as fissuras ocasionando deformações menores e resistências ao cisalhamento menos conservadoras do que o CFT.



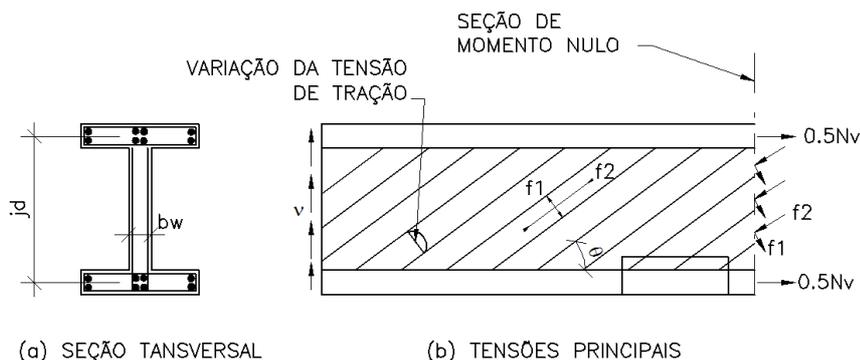
**Figura 2.25 - Campos de tensões em almas de vigas de concreto armado (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

Como agora a tração é considerada ( $f_1$ ) as condições de equilíbrio são diferentes das apresentadas no CFT e no modelo de treliça com ângulo variável.

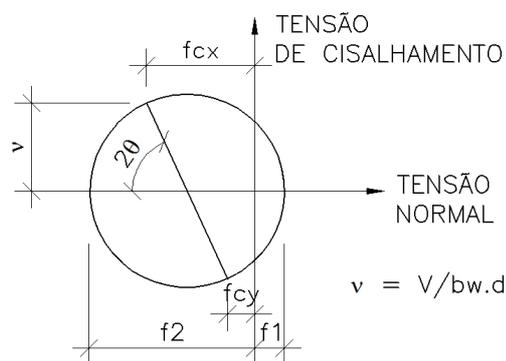
Em uma viga de seção transversal simétrica, o cisalhamento será resistido após fissurar, pela tensão de compressão  $f_2$  e a de tração  $f_1$ , que varia de zero até o valor máximo entre as fissuras, conforme visto na Figura 2.26. Ao se formular as equações de equilíbrio, usam-se as tensões médias de tração, uma vez que essas equações são obtidas integrando-se as tensões sobre as seções verticais. Pelo círculo de Mohr apresentado na Figura 2.27, é possível chegar a um valor literal para a tensão de compressão principal máxima  $f_2$ :

$$f_2 = (\tan \theta + \cot \theta) \cdot v - f_1 \quad (2.19)$$

$$\text{onde } v = \frac{V}{b_w j d}$$



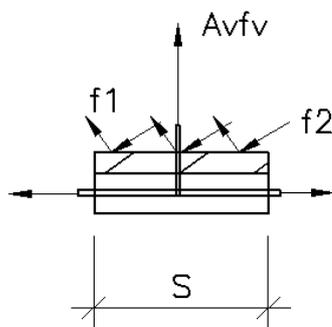
**Figura 2.26 - Tensões principais na alma de uma viga de concreto armado fissurada (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**



**Figura 2.27 - Tensões médias no concreto - Círculo de Mohr (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

A tensão de compressão diagonal tende a separar as mesas da viga enquanto a tensão de tração tende a juntá-las. Sendo assim, é necessário que a componente vertical seja equilibrada pela tensão de tração na armadura transversal (Figura 2.28):

$$A_v \cdot f_v = (f_2 \cdot \text{sen}^2 \theta - f_1 \cdot \text{cos}^2 \theta) \cdot b_w s \quad (2.20)$$



**Figura 2.28 - tração na armadura transversal (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)**

Substituindo  $f_2$  da equação (2.19) na equação (2.20), temos que:

$$V = f_1 \cdot b_w \cdot jd \cdot \cot \theta + \frac{f_v \cdot A_v}{s} \cdot jd \cdot \cot \theta \quad (2.21)$$

Dessa forma, percebe-se que a resistência é constituída pela contribuição do concreto (primeira parcela, em função da tração) e a contribuição da armadura (segunda parcela).

Longitudinalmente, as componentes da tensão diagonal devem ser equilibradas pelas tensões na armadura passiva e ativa:

$$A_{sx} \cdot f_1 + A_{px} \cdot f_p = (f_2 \cdot \cos^2 \theta - f_1 \cdot \sin^2 \theta) \cdot b_w jd \quad (2.22)$$

Substituindo  $f_2$  da equação (2.19) na equação (2.22), temos:

$$A_{sx} \cdot f_1 + A_{px} \cdot f_p = V \cdot \cot \theta - f_1 \cdot b_w jd \quad (2.23)$$

Segundo VECHIO e COLLINS (1988), as relações de tensão de tração média recomendadas são:

$$f_{c1} = \frac{f_{cr}}{(1 + \sqrt{200 \cdot \epsilon_1})} \quad (2.24)$$

$$f_{cr} = 4 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (2.25)$$

Onde  $f_{cr}$  é a tensão de fissuração do concreto e  $\lambda$  é um fator referente a densidade do concreto.

Dessa forma o MCFT foi tratado em termos de tensões médias, sem considerar as variações locais que, segundo COLLINS e MITCHELL (1990), diferem dos valores médios calculados. Na fissura a tensão de tração se aproxima de zero quando a tensão na armadura aumenta, sendo a resistência do elemento limitado a capacidade do dele em transmitir as forças através da fissura.

Para pequenos valores de cortante a tensão é transmitida através da fissura pelo aumento local na tensão dos estribos. Em um certo valor de cortante a tensão nos estribos vai atingir a tensão de escoamento do aço na região das fissuras. Com

o aumento do esforço cortante, a transmissão da tração adicional pela fissura só será realizada pela tensão  $V_{ci}$  na superfície da fissura, conforme apresentado na Figura 2.29.

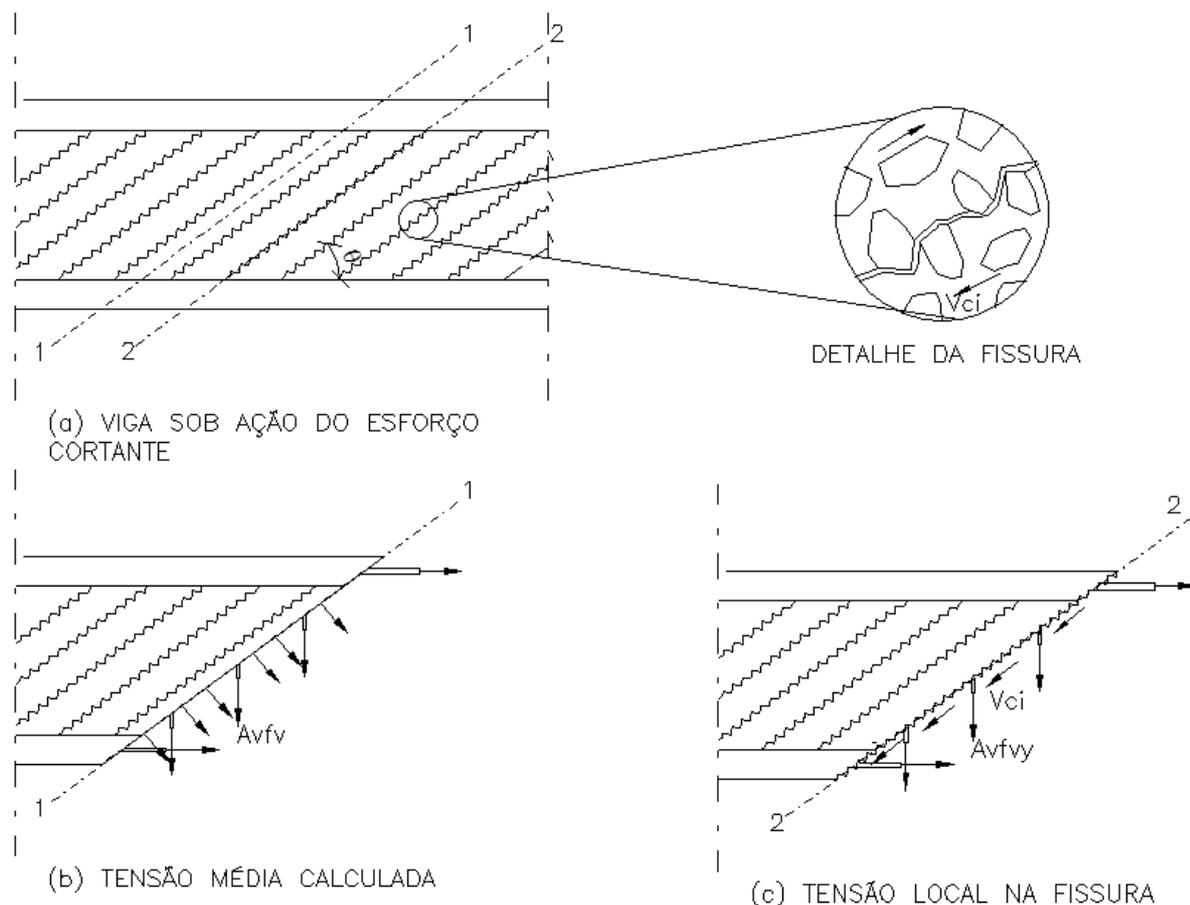


Figura 2.29 - Transmissão de forças pelas fissuras (adaptada de COLLINS e MITCHELL, 1990)

A capacidade da fissura de transmitir a tensão de cisalhamento dependerá da largura da fissura,  $w$ . WALRAVEN (1981) recomenda que o valor de  $v_{ci}$  seja limitado a:

$$v_{ci} = \frac{0,18\sqrt{f'_c}}{\left(0,3 + \frac{24w}{a+16}\right)} = \beta\sqrt{f'_c} \quad (2.26)$$

Onde a abertura média de fissura  $w$ , pode ser tomado como o produto da deformação de tração principal ( $\epsilon_1$ ) pelo espaçamento médio das fissuras diagonais ( $S_{m\theta}$ ):

$$w = \epsilon_1 \cdot S_{m\theta} \quad (2.27)$$

O espaçamento médio das fissuras inclinadas irá depender do controle da abertura de fissuras pelas características das armaduras longitudinal e transversal. COLLINS e MITCHELL (1990) sugere que esse espaçamento seja tomado como:

$$S_{m\theta} = \frac{1}{\left(\frac{\text{sen } \theta}{s_{mx}} + \frac{\text{cos } \theta}{s_{mv}}\right)} \quad (2.28)$$

Onde  $S_{mx}$  e  $S_{mv}$  são os espaçamentos das fissuras calculadas pelas características das armaduras longitudinal e transversal.

Na equação (2.26) os efeitos benéficos da tensão local de compressão na fissura foram ignorados.

Embora diferentes, as tensões apresentadas na Figura 2.29 c) e d) ( $F_v$  e  $F_{vy}$ ) devem ser estaticamente equivalentes, produzindo a mesma força vertical (COLLINS E MITCHELL, 1990). Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} A_v \cdot f_v \left(\frac{jd}{s \cdot \tan \theta}\right) + f_1 \cdot \cos \theta \left(\frac{b_w jd}{\text{sen } \theta}\right) &= \\ = A_v \cdot f_{vy} \left(\frac{jd}{s \cdot \tan \theta}\right) + v_{ci} \cdot \text{sen } \theta \left(\frac{b_w jd}{\text{sen } \theta}\right) & \end{aligned} \quad (2.29)$$

Resumindo-se a:

$$f_1 = v_{ci} \cdot \tan \theta + (f_v - f_{vy}) \left(\frac{A_v}{s \cdot b_w}\right) \quad (2.30)$$

Dessa forma, com as equações da Teoria do Campo de Compressão Modificado, através de uma rotina ou um programa apropriado, era possível prever a resposta de uma seção de uma peça de concreto armado submetida a flexão, esforço normal e cortante e dimensioná-la ao cisalhamento.

## 2.6 ESTUDOS COMPLEMENTARES AO MCFT

As equações da Teoria do Campo de Compressão Modificado foram usadas pela Norma Canadense desde 1994 (CSA). Naquela edição da norma foram tabelados os valores de  $\beta$  e  $\theta$ , baseados no MCFT. BENTZ e COLLINS (2006) provaram possível derivar expressões simplificadas para o  $\beta$  e  $\theta$ , apresentadas a seguir.

A equação 2.31 advém de uma da equação 2.26 na qual a largura da fissura  $w$  e a deformação longitudinal se torna linear sendo incluindo a correção do efeito de escala:

$$\beta = \frac{0,40}{1+1500\epsilon x} \cdot \frac{1300}{(1000+s_{ze})} \quad (2.31)$$

Como  $V_{ci}$  é diretamente proporcional ao valor de  $\beta$ , quanto maior a abertura da fissura, menor a tensão de cisalhamento que pode ser transmitida pelo concreto. Esse fator leva em consideração a capacidade do concreto transmitir a tensão de cisalhamento através da fissura por ação do engrenamento dos agregados. Por isso que a equação para  $\beta$  consiste em um fator de deformação multiplicado por um fator de espaçamento. Quando a deformação na peça vai aumentando,  $\beta$  se torna menor, efeito esse chamado de "efeito de escala".

Da mesma forma, BENTZ e COLLINS (2006), após realização de ensaios, desenvolveram a seguinte expressão para o  $\theta$ , aplicável para peças com ou sem armadura transversal:

$$\theta = 29 + 7000\epsilon x \quad (2.32)$$

Ainda segundo BENTZ e COLLINS (2006), a resistência de um elemento de concreto é influenciado pelos efeitos geométricos do carregamento. De forma a capturar esses efeitos em um único parâmetro, foi utilizada a deformação média na direção longitudinal na altura média da seção transversal. Quanto maior fosse a deformação, maior seria a abertura de fissuras e menor o efeito do engrenamento dos agregados ( $V_{ci}$ ). Como a deformação na zona comprimida ( $\epsilon_c$ ) tende a ser menor

devido a rigidez a compressão do concreto, a deformação no meio da seção é aproximada, a favor da segurança, sendo a metade da deformação na armadura de tração ( $\epsilon_t$ ). A deformação no meio da seção seria dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\frac{M_f}{d_v} + V_f - V_p + 0,5N_f - A_p f_{p0}}{2(E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p)} \quad (2.33)$$

O esquema de forças resistentes da alma do elemento é apresentado na Figura 2.30.

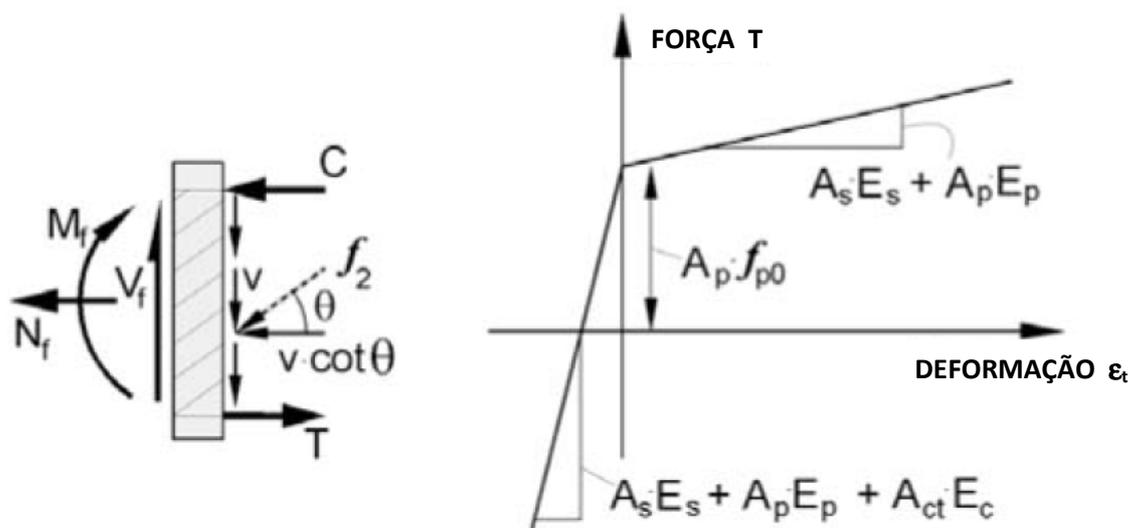


Figura 2.30 - Forças resistentes na alma da viga (reproduzida de BENTZ e COLLINS, 2006)

Depois que ocorre a fissuração da alma, a força cortante aplicada será primeiramente transmitida por tensões de compressão diagonais da alma do concreto. Essas tensões de compressão resultarão em uma força de compressão longitudinal na alma do concreto  $V_f \cdot \cot \theta$ . Para haver equilíbrio essa força de compressão precisa ser equilibrada por forças de tração nas duas mesas, cada uma com 50% ( $0,5 \cdot V_f \cdot \cot \theta$ ). De forma a evitar um processo de tentativa e erro, adota-se de maneira conservadora a força cortante na mesa devido ao cortante como  $V_f$ .

Apesar de conservador a deformação longitudinal  $\epsilon_x$  a meia altura ser tomada como  $\epsilon_t/2$  (já que  $\epsilon_c$  será geralmente uma pequena quantidade negativa), se os esforços solicitantes são grandes e provocam fissuras na zona de compressão, essa técnica não será mais tão conservadora.

### **3 VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO SEGUNDO CSA A23-04, ACI-318.14, NBR-6118-2014.**

Como já mencionado no capítulo inicial, um dos objetivos deste trabalho é a comparação de resultados dos ensaios realizados em nervuras trapezoidais de concreto armado com as resistências limites prescritas nas normas usuais.

Sendo assim, nesse capítulo serão apresentadas as prescrições relevantes ao dimensionamento dos elementos ao esforço cortante recomendados pelas normas canadense, americana e brasileira, que servirão como base para a obtenção das resistências teóricas que serão usadas na comparação com os dados experimentais apresentados nos capítulos seguintes.

#### **3.1 NORMA CANDENSE (CSA A23-04)**

Em elementos em que é razoável assumir que seções planas permanecem planas, o capítulo 11 da norma canadense especifica as verificações necessárias ao dimensionamento de elementos ao cisalhamento e à torção. Neste capítulo são especificados dois diferentes métodos: o método seccional, apropriado para regiões flexionadas (regiões B) e o método de bielas e tirantes para regiões que apresentam descontinuidades (Regiões D).

O método seccional é baseado no MCFT que usa as condições de equilíbrio e compatibilidade combinados com determinação experimental da relação tensão e deformação no concreto fissurado para prever o comportamento da deformação em elementos de concreto armado.

A seguir apresentaremos os principais itens dessa norma relevantes para as verificações necessárias a esse estudo.

As unidades apresentadas são  $m^2$ , mm, N, M.mm e MPa, para áreas, dimensões, forças, momentos e tensões, respectivamente, exceto quando indicado de outra forma.

### 3.1.1 Armadura mínima de cisalhamento

A armadura mínima é responsável pelo controle da abertura de fissuras antes que ocorra a ruptura da peça. Com a armadura mínima, a abertura pode ser controlada, permitindo que outras fissuras sejam formadas antes da ruptura, o que não ocorre sem a adoção dessa armadura, permitindo que a ruptura ocorra logo na formação da primeira fissura. Sendo assim, a norma recomenda a área mínima para essa armadura de acordo com a seguinte equação (CSA-11.2.8.2):

$$A_v = 0,06\sqrt{f'_c} \cdot b_w \frac{s}{f_y} \quad (3.1)$$

Onde:

$f'_c$  é a resistência a compressão característica do concreto

$f_y$  é a resistência a tração característica da armadura transversal

$s$  é o espaçamento da armadura transversal

$b_w$  é a largura efetiva da alma

Essa armadura deverá ser usada:

- a) Em regiões de elementos flexionados onde o esforço cortante de projeto ( $V_f$ ) não exceda a resistência do concreto ( $V_c$ ) somada a resistência oriunda da protensão ( $V_p$ );
- b) Em regiões de vigas com altura média maior que 750mm;

Pela equação 3.1, quanto maior for a resistência do concreto a compressão ( $f'_c$ ), uma quantidade maior de armadura mínima é necessária.

### 3.1.2 Dimensões dos elementos

A altura útil da peça ( $d$ ) deve ser tomada como a distância da fibra de compressão extrema ao centróide da armadura longitudinal de tração.

A largura efetiva da alma ( $b_w$ ) deve ser tomada como a largura mínima do concreto ao longo da altura útil ( $d$ ) (CSA-11.2.10.1). Entretanto, para elementos que possuem seção trapezoidal (a exemplo das nervuras),  $b_w$  pode ser tomado como a média das larguras ao longo da altura do elemento, incluindo a menor largura existente, mas não incluindo regiões da seção onde as faces laterais do elemento estejam contidas a mais que  $20^\circ$  na direção do cortante aplicado (CSA-12.10.4).

### 3.1.3 Resistência ao cisalhamento

Os elementos devem ser dimensionados de forma que o esforço cortante solicitante de projeto ( $V_f$ ) seja igual ou menor que a resistência de projeto ( $V_r$ ) (CSA-11.3.1).

Em seções localizadas em até  $d_v$  da face do apoio podem ser projetadas para o esforço cortante atuante nessa região, desde que (CSA-11.3.2):

- 1) A reação, na direção do apoio aplicado, gere compressão no elemento;
- 2) Em uma distância  $d_v$  da face do apoio não haja ocorrência de carga concentrada que cause uma força maior que  $0,3 \cdot \lambda \cdot \phi_c (f'_c)^{1/2}$ .

Sendo  $d_v$  a altura de cisalhamento efetiva, calculada como o maior valor entre  $0,9d$  ou  $0,72h$ , e  $\lambda$  é o fator que exprime a baixa densidade do concreto.

A resistência ao esforço cortante é composta de três componentes. A componente  $V_c$  que representa a contribuição do concreto e depende da tração transmitida através das fissuras pelo engrenamento dos agregados; A componente  $V_s$  que representa a contribuição da armadura transversal e depende da tensão dessa armadura; e a componente  $V_p$  que depende da componente vertical da força de protensão efetiva do projeto (CSA-11.3.3).

$$V_r = V_c + V_s + V_p \quad (3.2)$$

Entretanto,  $V_r$  deve ser limitado de forma a garantir que a armadura transversal escoe antes do esmagamento da diagonal da alma da seção de concreto, determinado como:

$$V_{r,máx} = 0,25 \cdot \lambda \cdot \phi_c \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d_v + V_p \quad (3.3)$$

### 3.1.3.1 Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - $V_c$

(CSA-11.3.4)

$$V_c = \lambda \cdot \phi_c \cdot \beta \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d_v \quad (3.4)$$

Onde  $\sqrt{f'_c}$  não deve ser maior que 8 MPa e  $\beta$  é um fator que considera a resistência do concreto ao esforço cortante do concreto fissurado (seção 3.1.4). Essa limitação para  $\sqrt{f'_c}$  visa considerar que, em concretos de alta resistência, o engrenamento dos agregados é menos efetivo que nos concretos de resistência menor.

### 3.1.3.2 Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - $V_s$

Para vigas com armadura transversal a  $90^\circ$  (CSA-11.3.5.1):

$$V_s = (\phi_s \cdot A_v \cdot f_y \cdot d_v \cdot \cot\theta) / s \quad (3.5)$$

Para elementos com armadura transversal inclinada à um ângulo  $\alpha$  do eixo longitudinal (CSA-11.3.5.2):

$$V_s = (\phi_s \cdot A_v \cdot f_y \cdot d_v \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \text{sen } \alpha) / s \quad (3.6)$$

Onde  $s$  é o espaçamento do estribos e  $\theta$  é o ângulo da biela de compressão.

### 3.1.4 Determinação do $\beta$ e do $\theta$

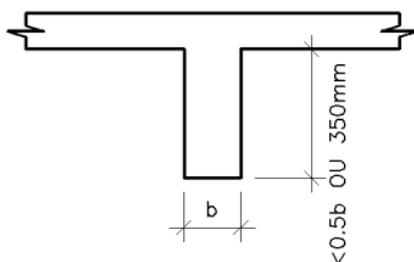
Esses parâmetros, podem ser calculados através do método simplificado ou pelo método geral. A norma também estabelece valores para casos de peças especiais. Apresentaremos a seguir os casos relevantes para os elementos em estudo.

É permitido adotar os valores de  $\beta = 0,21$  e  $\theta = 42^\circ$ , se o elemento apresentar as seguintes características (casos especiais) (CSA-11.3.6.2):

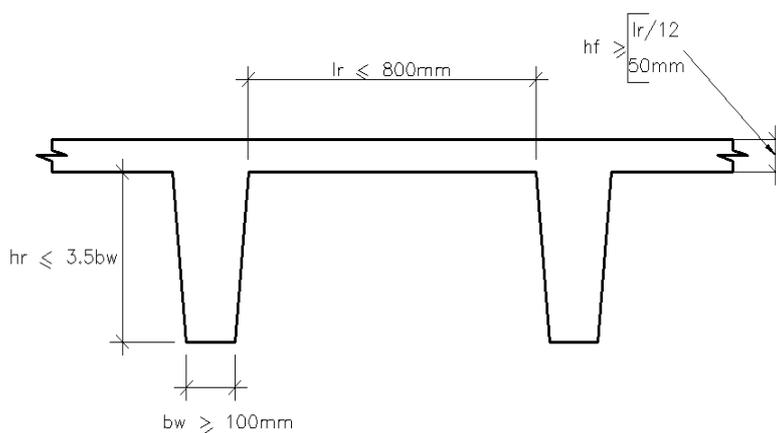
- a) Vigas com altura até 250mm;
- b) Nervuras de concreto;
- c) Vigas "T" onde a altura da viga (sem considerar a espessura da laje) não exceda a metade da largura dessa viga ou 350mm (ver Figura 3.1).

Para efeito dessa norma, são consideradas nervuras de concreto, elementos que atendam todas as seguintes características (ver Figura 3.2) (CSA-10.4.1):

- a) Largura mínima da nervura ( $b_{w\text{mín}}$ ): 100mm;
- b) Altura máxima da nervura ( $h_r$ ): 3,5 x Largura mínima da nervura;
- c) Distância máxima entre as nervuras ( $l_r$ ): 800mm;
- d) Espessura mínima da laje ( $h_f$ ) = 1/12 x Distância entre nervuras ou 50mm;



**Figura 3.1 - Dimensões mínimas para vigas T (CSA)**



**Figura 3.2 - Dimensões mínimas para nervuras de lajes nervuradas (CSA)**

### 3.1.4.1 Método Simplificado

Desde que a tensão de escoamento da armadura longitudinal não exceda 400 MPa e o valor da resistência do concreto não exceda 60 MPa, o método simplificado poderá determinar os parâmetros, dispensando os cálculos mais precisos especificados pelo Método Geral (CSA-11.3.6.3).

Sendo assim,  $\theta$  é adotado  $35^\circ$  e  $\beta$  deverá ser determinado da seguinte forma:

- Se a seção está armada com, pelo menos, a armadura transversal mínima recomendada (equação 3.1) :  $\beta = 0,18$ .
- Se a seção não contém armadura transversal e o tamanho máximo do agregado especificado não é menor que 20cm:

$$\beta = \frac{230}{(1000 + d_v)} \quad (3.7)$$

- Alternativamente, o valor de  $\beta$  em seções sem armadura transversal pode ser determinado pelo tamanho de todos os agregados constituintes do concreto, substituindo o valor de  $d_v$  na equação 3.7 pelo parâmetro de espaçamento da fissura equivalente  $s_{ze}$ , que deve ter o valor mínimo de  $0.85s_z$ :

$$s_{ze} = \frac{35s_z}{(15 + a_g)} \quad (3.8)$$

O parâmetro de espaçamento da fissura,  $S_z$  pode ser tomado como o menor valor entre  $d_v$  ou máxima distância entre as camadas da armadura longitudinal.

Os valores obtidos pelo Método Simplificado, quando permitido seu uso, podem ser aplicados nas demais cláusulas do CSA-A23.04. Entretanto esse método não pode ser usado em elementos sujeitos a tração significativa, e a armadura longitudinal deve estar ancorada adequadamente.

### 3.1.4.2 Método Geral

O valor de  $\beta$  deve ser determinado segundo a seguinte equação (CSA-11.3.6.4):

$$\beta = \frac{0,40}{1+1500\varepsilon x} \cdot \frac{1300}{(1000+s_{ze})} \quad (3.9)$$

Se a seção está armada com, pelo menos, a armadura transversal mínima recomendada (equação 3.1) o parâmetro de espaçamento da fissura equivalente ( $s_{ze}$ ) pode assumir o valor de 300mm. De outra forma,  $s_{ze}$  poderá ser calculado de acordo com a equação 3.8. Se  $f'_c$  é maior que 70MPa,  $a_g$  terá valor nulo na Equação 3.8. Se  $f'_c$  variar de 60 à 70MPa, o valor de  $a_g$  será calculado por uma redução linear até 0.

O valor de  $\theta$  será calculado pela seguinte equação:

$$\theta = 29 + 7000\varepsilon x \quad (3.10)$$

A deformação longitudinal no ponto médio da seção transversal,  $\varepsilon_x$ , deve ser calculada como:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{M_f}{d_v} + V_f - V_p + 0,5N_f - A_p f_{po}}{2(E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p)} \quad (3.11)$$

Para o uso da Equação 3.11, as seguintes condições devem ser seguidas:

- $V_f$  e  $M_f$  devem ter valor positivo e  $M_f$  não pode ser tomado com valor menor que  $(V_f - V_p) \cdot d_v$ ;
- No cálculo de  $A_s$ , a área das barras longitudinais que não estão na seção ao longo de todo seu comprimento deverão ser reduzidas proporcionalmente;
- Se o valor de  $\varepsilon_x$  for negativo deverá ser adotado como zero ou recalculado substituindo o denominador da Equação 3.11 por  $2(E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p + E_c \cdot A_{ct})$ . Entretanto, valor de  $\varepsilon_x$  não deverá ser tomado como menor que  $-0,20 \times 10^{-3}$ ;
- Para seções distantes de até  $d_v$  da face do apoio, o valor de  $\varepsilon_x$  pode ser calculado na seção de distância  $d_v$  do apoio para a obtenção de  $\beta$  e  $\theta$ ;

- e) Se a tração axial é alta o suficiente para fissurar a zona de compressão da seção, um aumento em  $\epsilon_x$  deve ser considerado, sendo o valor da Equação 3.11 ser duplicado.
- f) O valor de  $\epsilon_x$  calculado não deverá ser maior que  $3,0 \times 10^{-3}$ .

### 3.1.5 Espaçamento máximo da armadura transversal

Segundo norma canadense o espaçamento da armadura transversal,  $s$ , não deverá exceder  $0,7d_v$  ou  $600\text{mm}$ . Se  $V_f$  for maior que  $0,125 \cdot \phi_c \cdot \lambda \cdot b_w \cdot d_v + V_p$ , o espaçamento máximo citado deverá ser reduzido pela metade (CSA-11.3.8.1).

## 3.2 NORMA AMERICANA (ACI-318.14)

A norma americana é baseada no modelo de treliça plástica, com o ângulo da biela comprimida  $\theta = 45^\circ$ . Os mecanismos alternativos que contribuem para a resistência ao cisalhamento do elemento, apesar desconsiderados no modelo de treliça, são considerados nessa norma na contribuição da resistência de cisalhamento máxima, somadas a resistência de contribuição do aço, quando o elemento possuir armadura transversal.

As unidades métricas estão no Sistema Internacional (SI) e as tensões em MPa, exceto quando indicado de outra forma.

### 3.2.1 Armadura de cisalhamento mínima

Como a ruptura por cisalhamento em vigas sem armadura transversal é repentina e frágil o ACI exige o uso de uma armadura mínima de forma a prevenir que a força cortante aplicada,  $V_u$ , exceda metade da resistência de projeto devido aos mecanismos alternativos do concreto,  $\phi(0,5 \cdot V_c)$ , exceto em (ACI-9.6.3):

- a) Nervuras de lajes nervuradas em **1 direção** definidos pelo ACI na seção 9.8, citados mais adiante;

- b) Vigas independentes com altura (h) máxima de 10 in (254mm);
- c) Vigas "T" com altura (h) máxima de 24 in (610mm) mas não maior do que 2,5 vezes a espessura da mesa ou 0.5 vezes a largura da alma (ver Figura 3.3);

Nesses casos, esse limite se restringe a  $\phi V_c$ .

Para efeitos dessa norma, são consideradas nervuras os elementos que apresentarem as seguintes características (Figura 3.4) (ACI-8.8 e 9.8):

- a) Largura mínima do elemento ( $b_{wmin}$ ): 4 in (~100mm);
- b) Altura máxima do elemento (H): 3,5 x Largura mínima do elemento;
- c) Distância máxima entre as nervuras (L): 30 in (762mm);
- d) Espessura mínima da laje (t) = 1/12 x Distância entre nervuras ou 1,5 in (38mm).

Para as nervuras a norma americana permite que  $V_c$  seja majorado em 10% devido ao potencial de redistribuição do carregamento local para outras nervuras adjacentes e pelo desempenho satisfatório das lajes nervuradas projetadas com alta resistência ao cisalhamento calculadas por normas anteriores quando comparadas com as tensões de cisalhamento (ACI-8.8.1.5 e 9.8.1.5).

Sendo assim, a armadura mínima recomendada será (ACI-9.6.3.3):

$$A_{v,min} \geq 0,062 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad (3.12)$$

Mas nunca menor que:

$$A_{v,min} \geq 0,35 \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad (3.13)$$

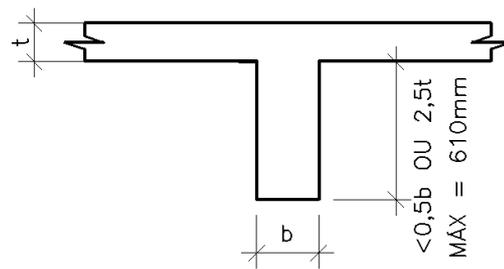
Onde:

$f'_c$  é a resistência a compressão característica do concreto

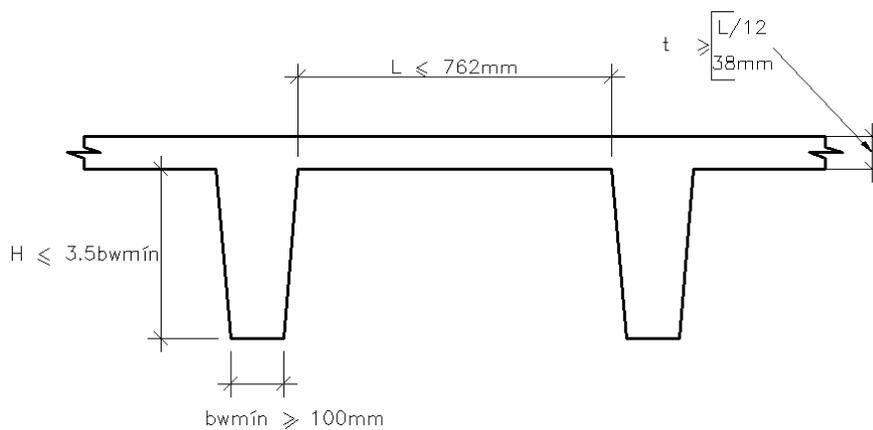
$f_{yt}$  é a resistência a tração característica da armadura transversal

$b_w$  é a largura efetiva da alma

s é o espaçamento da armadura transversal



**Figura 3.3 - Dimensões mínimas de vigas T (ACI)**



**Figura 3.4 - Dimensões mínimas para nervuras e lajes nervuradas (ACI)**

### 3.2.2 Dimensões dos elementos

No ACI,  $b_w$  é adotado como largura da alma do elemento e  $d$ , como nas demais normas, definida como a distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração. A prática constante em nervuras é usar o  $b_w$  como a média das larguras ao longo da altura da nervura, como exemplificado em CRSI DESIGN HANDBOOK (2008), tenth edition, Concrete reinforcing steel institute, 2008, baseado na norma do ACI.

### 3.2.3 Resistência ao cisalhamento

A equação básica de projeto para aferir a resistência ao cisalhamento de uma viga de concreto armado é (ACI-9.5.5.1):

$$\phi V_n \geq V_u \quad (3.14)$$

Onde:

$V_u$  é a força cortante devido aos carregamentos majorados;

$\phi$  é um fator de redução da resistência ao cisalhamento = 0,75;

Entretanto  $V_u$  não deve exceder a resistência máxima, que pode causar o esmagamento da biela de compressão do concreto, sendo limitado a (ACI-25.5.1.2):

$$V_{u,máx} = V_c + 0,66\lambda\sqrt{f'_c}b_wd \quad (3.15)$$

A resistência nominal ao cortante,  $V_n$ , é calculada como (ACI-11.5.4.4):

$$V_n = V_c + V_s \quad (3.16)$$

Onde:

$V_c$  é a parcela da força cortante absorvida pelo concreto;

$V_s$  é a parcela da força cortante absorvida pela armadura transversal;

Para seções entre a face do apoio e a seção crítica localizada a uma distancia  $d$  da face do apoio, para vigas não protendidas, é permitido utilizar  $V_u$  da seção crítica. Entretanto, somente será permitido somente se:

- a) A reação do apoio, na direção do cortante suportado, introduzir compressão nas regiões finais do elemento;
- b) Os carregamentos forem aplicados no topo ou perto do topo das vigas;
- c) Não haver a ocorrência de cargas concentradas em uma distância  $d$  da face do apoio;

### 3.2.3.1 Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - $V_c$

Vigas sem armadura transversal podem romper quando as fissuras inclinadas ocorrem ou, rapidamente, após essa ocorrência. Sendo assim, a norma americana apresenta uma equação que permite calcular o limite ao cortante na ocorrência dessas fissuras inclinadas (ACI-22.5.5.1):

$$V_c = 0,17\lambda\sqrt{f'_c}b_wd \quad (3.17)$$

Para um cálculo mais preciso, o ACI recomenda a adoção do menor dos valores das equações seguintes:

$$V_c = \left(0,16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \quad (3.18)$$

$$V_c = (0,16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w) b_w d \quad (3.19)$$

$$V_c = 0,29\lambda\sqrt{f'_c} b_w d \quad (3.20)$$

Onde,

$\lambda$  é um fator de modificação relativo às características do concreto.

$\rho_w$  é a taxa geométrica da armadura longitudinal de flexão.

$M_u$  é o momento solicitante de cálculo atuante simultaneamente com  $V_u$ .

### 3.2.3.2 Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - $V_s$

Para vigas com armadura transversal, o ACI admite que o ângulo  $\theta$  assume o valor de  $45^\circ$ . Sendo assim, para estribos perpendiculares ao eixo longitudinal,  $V_s$  deve ser calculado como (ACI-11.5.4.8):

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s} \quad (3.21)$$

Quando os estribos possuem inclinação  $\alpha$  com ângulo diferente de  $45^\circ$ ,  $V_s$  deve ser calculado como:

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} (\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha) d}{s} \quad (3.22)$$

Onde  $s$  é o espaçamento dos estribos e  $f_{yt}$  tensão de escoamento da armadura transversal.

### 3.2.5 Espaçamento máximo da armadura transversal

Segundo o ACI o espaçamento da armadura transversal,  $s$ , quando a armadura estiver na vertical, não deverá exceder  $d/2$  ou 24in (~610mm), se  $V_s \leq 4f'_c{}^{1/2} b_w d$ . Caso contrário esses limites devem ser reduzidos pela metade (ACI-9.7.6.2.2).

### 3.3 NORMA BRASILEIRA (NBR 6118-2014)

A norma brasileira, baseada na analogia de treliça de banzos paralelos e considerando os mecanismos complementares que contribuem na resistência ao cortante, propõe a adoção de dois modelos. O Modelo I, considera o ângulo de inclinação  $\Theta$  igual à  $45^\circ$  enquanto o Modelo II permite a livre escolha desse ângulo entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . Em ambos os modelos é permitido a variação do ângulo de inclinação da armadura transversal entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

#### 3.3.1 Armadura de cisalhamento mínima

A norma brasileira estabelece que todos elementos lineares submetidos a força cortante devem ser providos de uma armadura mínima, de forma a prevenir a falha repentina e frágil da peça desprovida de armadura transversal. Essa armadura é calculada da seguinte forma (NBR-17.4.1.1):

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (3.23)$$

Sendo:

$A_{sw}$  = área da seção transversal do estribos;

$s$  = espaçamento dos estribos;

$f_{ywk}$  = resistência característica do escoamento do aço da armadura transversal;

$f_{ctm}$  é a resistência média a tração do concreto, adotado como  $0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ ;

$f_{ck}$  é a resistência característica a compressão do concreto.

$b_w$  é a largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção. Entretanto, quando se tratar de lajes nervuradas,  $b_w$  pode ser tomado como a soma das larguras das nervuras no trecho considerado.

A norma brasileira permite a dispensa de armadura de cisalhamento para lajes maciças ou nervuradas, desde que a força cortante de cálculo ( $V_{sd}$ ), a uma distância  $d$  da face do apoio, não ultrapasse a resistência  $V_{rd1}$ , calculada conforme a equação 3.25 (NBR-13.2.4.2):

$$V_{sd} \leq V_{Rd1} \quad (3.24)$$

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40\rho_1) + 0,15\sigma_{cp}] b_w \cdot d \quad (3.25)$$

Sendo:

$$\tau_{Rd} = 0,25 f_{ctd}$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ctm}$$

$$\rho_1 = A_{s1} / b_w \cdot d, \text{ não maior que } 0,02$$

$$\sigma_{cp} = N_{sd} / A_c$$

$k$  é um coeficiente que assume os seguintes valores:

- a) Para elementos onde 50% da armadura inferior não chega ao apoio:  $k=1$ ;
- b) Para demais casos:  $k=1,6 - d$ , não menor que 1 ( $d$  em metros);

$\tau_{Rd}$  é a tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento;

$A_{s1}$  é a área da armadura de tração que se estende até não menos de  $(d + l_{b,nec})$  além da seção considerada;

$b_w$  é a largura mínima da seção ao longo da altura útil  $d$ ;

$N_{sd}$  é a força longitudinal na seção devida a protensão ou carregamento (se compressão, usa-se o sinal positivo);

Entretanto, para que a laje seja considerada como nervurada, a norma brasileira exige que o conjunto nervuras e mesa, apresente as seguintes características (NBR-13.2.4.2):

- a) A espessura da mesa deve ser maior que 1/15 da distância entre a face das nervuras, e não menor que 4cm quando não existirem tubulações embutidas;
- b) O valor mínimo quando houverem tubulações embutidas com diâmetro até 10mm deverá ser 5cm. Havendo tubulações de diâmetro maior a espessura deverá ser 4cm + diâmetro, ou 4cm + 2 x diâmetro, quando houverem cruzamentos da tubulação;
- c) A espessura mínima das nervuras é de 5cm; Se menor que 8cm não podem conter armaduras de compressão;

A dispensa da armadura de cisalhamento, se atendido as condições das equações 3.24 e 3.25 só é permitida quando:

- a) O espaçamento entre o eixo de nervuras é no máximo de 65cm, permitindo-se também a dispensa a verificação de flexão na mesa;
- b) O espaçamento entre o eixo de nervuras for de até 90cm e a largura média das nervuras for maior que 12cm;

### 3.3.2 Dimensões dos elementos

Na norma brasileira, exceto para o cálculo da armadura mínima de cisalhamento,  $b_w$  é adotado como a menor largura da seção compreendida ao longo da altura útil  $d$ . Sendo  $d$ , como nas demais normas, definida como a distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração.

### 3.3.3 Resistência ao cisalhamento

Segundo a norma brasileira, a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ) deve ser resistida por  $V_{rd}$  que é a força cortante resistente de cálculo sendo, pelo menos igual a esta. Entretanto são avaliadas duas forças cortantes resistentes, que devem atender simultaneamente as equações abaixo (NBR-17.4.2.1):

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (3.26)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3.27)$$

Sendo:

$V_{Rd2}$  a força cortante resistente de cálculo devido a ruína das diagonais comprimidas do concreto.

$V_{Rd3}$  a força cortante resistente de cálculo devido a ruína por tração diagonal;

$V_c$  é a força cortante absorvida pelos mecanismos complementares;

$V_{sw}$  é a força cortante resistida pela armadura transversal;

Para regiões próximas ao apoio, desde que a reação na direção do esforço cortante aplicado não introduza compressão no elemento, a NBR prescreve que (para considerar o efeito de arco):

- a) Para solicitações devido a carga distribuída, em regiões situadas até  $d/2$  da face do apoio, pode-se utilizar o esforço cortante em  $d/2$  da face do apoio;
- b) Para solicitações devido a carga concentrada a uma distância menor ou igual a  $2d$  do eixo teórico do apoio, pode-se utilizar o esforço cortante na seção a ser calculado pelo fator de redução  $a/2d$ ;

Excetua-se dessas condições o caso de apoios indiretos, como por exemplo o apoio de vigas sobre vigas.

### 3.3.3.1 Modelo I

O Modelo I (NBR 17.4.2.2) considera a diagonal comprimida com inclinação  $\Theta = 45^\circ$ .

Para estribos perpendiculares ao eixo longitudinal ( $\alpha = 90^\circ$ ),  $V_{rd2}$  é calculado por:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (3.28)$$

Essa equação foi deduzida do modelo clássico de treliça, apresentado no Capítulo 2. Dessa forma, garante-se que a força cortante solicitante não ultrapasse o valor da tensão teórica que pode provocar a ruptura do concreto ( $F_{cdr} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd}$ ).

$\alpha_{v2}$  é um fator de redução da resistência de cálculo do concreto, devido ao fato que as tensões não serem uniformes no concreto, assumindo o valor de  $1 - (f_{ck}/250)$ .

### 3.3.3.1.1 Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - $V_{sw}$

A área da armadura transversal necessária, deduzida das condições de equilíbrio do modelo clássico de treliça (ver capítulo 2), é calculada da seguinte forma:

$$V_{sw} = (A_{sw,1\text{estribo}} / s) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} (\sin\alpha + \cos\alpha) \quad (3.29)$$

Sendo  $f_{ywd}$  a tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor de  $f_{yd}$  no caso de estribos e a 70% desse valor no caso de barras dobradas, nunca superior a 435 MPa.

### 3.3.3.1.2 Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - $V_c$

O modelo de treliça de 45° negligencia a contribuição de diversos fatores gerando armaduras excessivas. A fim de prever a contribuição desses fatores a norma brasileira diminui a tensão de cisalhamento através do fator  $\tau_c$  ( $V_c/b_w \cdot d$ ) aumentando dessa forma a resistência ao cisalhamento.

Para elementos submetidos a flexão simples e flexo-tração, com linha neutra cortando a seção:

$$V_c = V_{co} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (3.30)$$

Sendo,

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ctm}$$

Para elementos submetidos a flexo-compressão:

$$V_c = V_{co} \cdot (1 + M_0/M_{sd,max}) \leq 2 \cdot V_{co} \quad (3.31)$$

$M_o$  é o valor do momento fletor máximo que anula a tensão normal de compressão na borda da seção tracionada por  $M_{d,max}$  provocada pelas forças normais concomitantes com  $V_{sd}$ .

### 3.3.3.2 Modelo II

O Modelo II (NBR-17.4.2.3) permite a escolha do ângulo da diagonal comprimida com inclinação variante  $\Theta$  entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . A contribuição de  $V_c$  sofre redução com o aumento de  $V_{sd}$ .

A força cortante resistente de cálculo, relativa a ruína das diagonais comprimidas do concreto foi deduzida da mesma forma da equação 3.28 (modelo I), sendo esta apresentada em função de  $\theta$  e  $\alpha$ :

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (3.32)$$

#### 3.3.3.2.1 Resistência ao cisalhamento devido a armadura transversal - $V_{sw}$

A área da armadura transversal necessária é deduzida das condições de equilíbrio do modelo clássico de treliça semelhante ao Modelo I, sendo que a equação para o Modelo II é em função do ângulo  $\theta$  e  $\alpha$ :

$$V_{sw} = (A_{sw,1\text{estribo}} / s) \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot 0,9 \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen} \alpha \quad (3.33)$$

#### 3.3.3.2.2 Resistência ao cisalhamento devido ao concreto - $V_c$

A NBR recomenda que  $V_c$  assuma os seguintes valores:

- 0, em elementos tracionados em que a linha neutra se situe fora da seção;
- Conforme a equação 3.30 para elementos sujeitos a flexão simples ou flexo-tração com a linha neutra cortando a seção desde que  $V_{sd}$  seja menor ou igual a  $V_{co}$ , assumindo o valor zero para  $V_{sd}$  igual a  $V_{rd2}$ .

Permite-se interpolar o valor de  $V_c$  no caso de valores intermediários de  $V_{sd}$  entre  $V_{co}$  e  $V_{rd2}$ ;

- c) Conforme a equação 3.31 para elementos submetidos a flexo-compressão, desde que  $V_{sd}$  seja menor ou igual a  $V_{co}$ , ou zero para  $V_{sd}$  igual a  $V_{rd2}$ . Permite-se interpolar o valor de  $V_c$  no caso de valores intermediários de  $V_{sd}$  entre  $V_{co}$  e  $V_{rd2}$ ;

### 3.3.4 Espaçamento máximo da armadura transversal

Para elementos com  $V_d \leq 0,67 V_{Rd2}$ , o espaçamento máximo entre os estribos deverá ser o menor valor entre  $0,6d$  e  $300\text{mm}$  (NBR-18.3.3.2);

Para elementos com  $V_d > 0,67 V_{Rd2}$ , o espaçamento máximo entre os estribos deverá ser o menor valor entre  $0,3d$  e  $200\text{mm}$ ;

## 4 OBTENÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Como esse estudo não realizou nenhum ensaio para obtenção de dados experimentais, foi necessária uma busca da literatura existente para encontrar dados que apresentassem valores de resistências ao cisalhamento obtidas em lajes nervuradas de concreto armado.

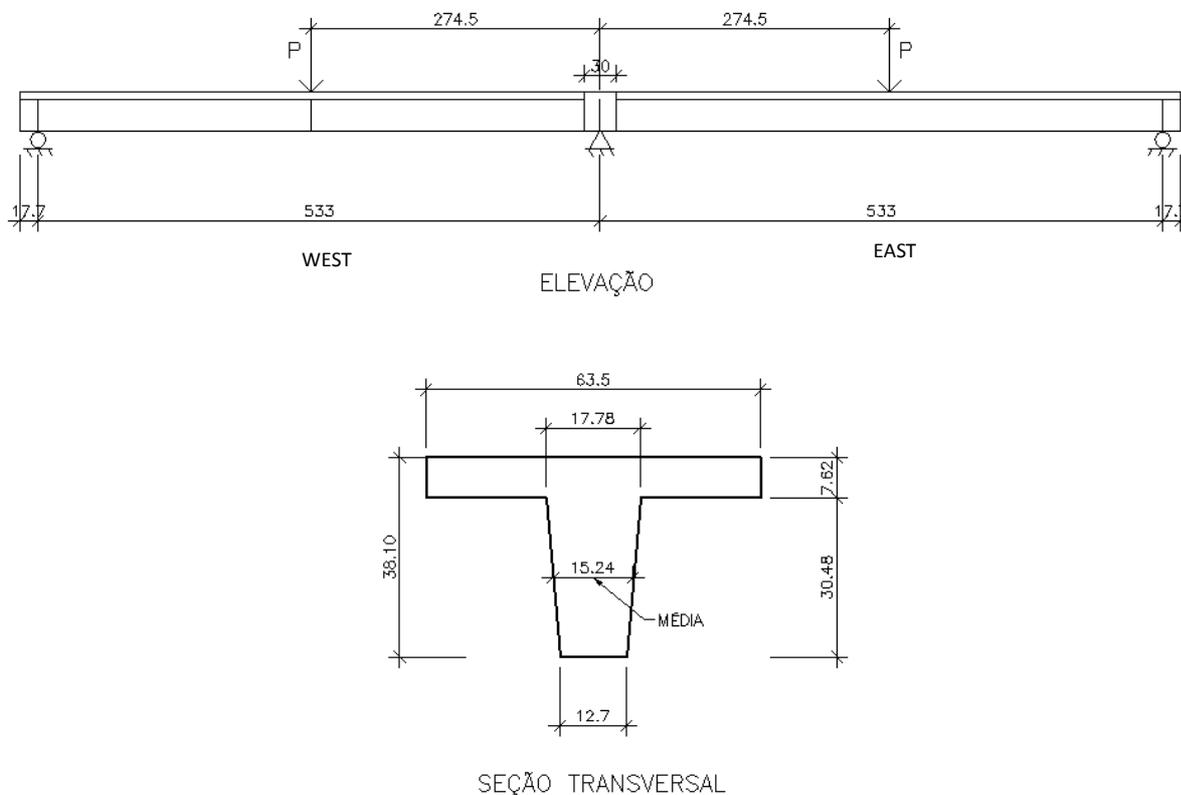
Segundo RAVIKUMAR, et al.(1994), ensaios nesse tipo de elemento e em nervuras trapezoidais de concreto armado são muitos escassos, o que os motivou a realizar um experimento usado nesse trabalho como fonte dos dados experimentais. No estudo desenvolvido por RAVIKUMAR, et al. (1994) foram ensaiadas nervuras contínuas de concreto armado (2 vãos e 3 apoios), com e sem armadura de cisalhamento, com ênfase na região de momento negativo. Esses ensaios simularam uma situação real, onde a ocorrência de nervuras contínuas é uma realidade constante nos projetos correntes de engenharia.

Nesse Capítulo apresentaremos uma descrição sucinta sobre a metodologia do ensaio e os dados obtidos, que serão comparados com os dados teóricos apresentados no Capítulo 5.

### 4.1 CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS ENSAIADOS

Foram construídas e ensaiadas seis amostras de nervuras simples com mesa e três amostras com nervuras triplas (múltiplas) ligadas entre si por uma mesa. As nervuras simples eram apoiadas em rolos livres nas suas extremidades (apoiados sobre pedestais de concreto) e por uma viga transversal em seu apoio central. As nervuras múltiplas eram apoiadas em vigas transversais tanto nas extremidades quanto no apoio central. As vigas transversais do apoio central apoiavam-se sobre pinos de aço em suas extremidades e estes eram suportados por células de carga sobre pedestais de concreto. As vigas transversais extremas não possuíam células de carga. Os pinos e os rolos foram posicionados de forma a permitir a rotação na direção longitudinal. Os vãos entre os apoios extremos e apoio central eram de 17,5 ft (5,33m) e os pontos de aplicação de carga concentrada situadas a 9 ft (2,74m) do apoio central, em cada vão. As regiões de teste foram as compreendidas entre a região de momento positivo máximo (ponto de aplicação da carga

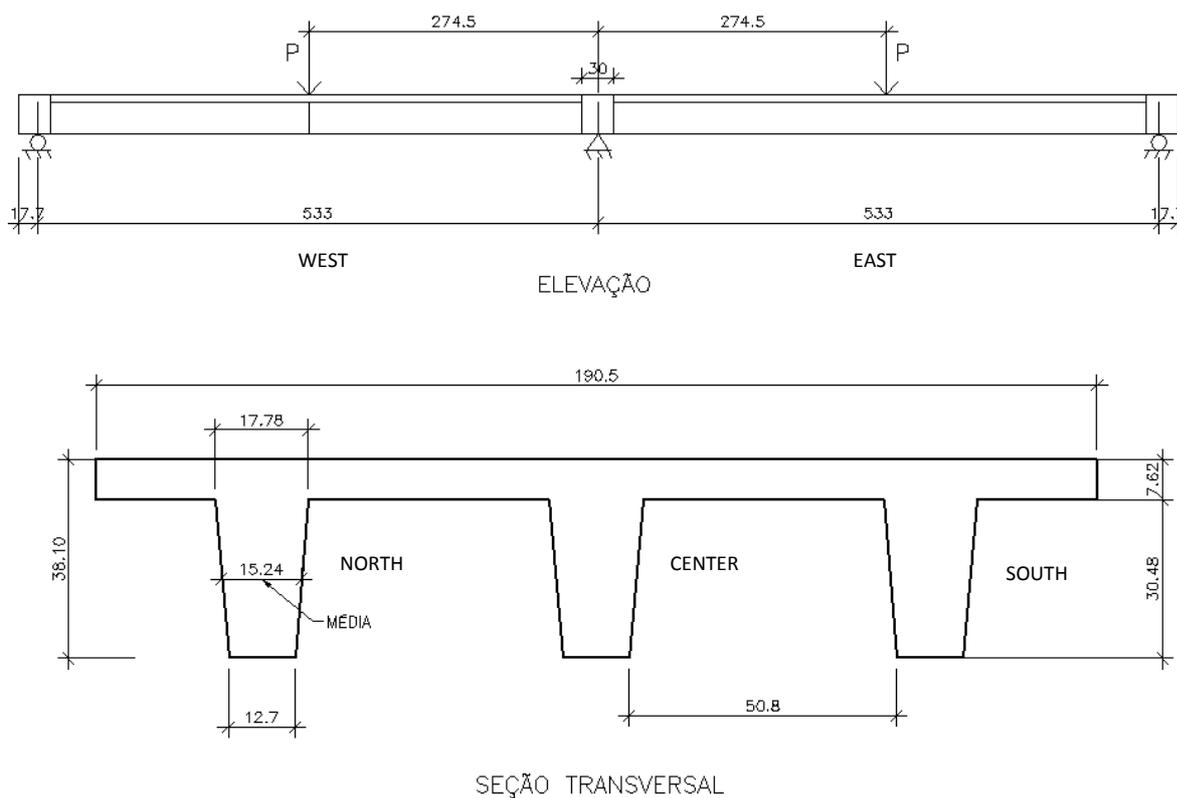
concentrada) até a face da viga transversal do apoio central). As figuras 4.1 a 4.3 apresentam as características dos elementos descritos nesse parágrafo.



**Figura 4.1 - Características das nervuras simples (dimensões em centímetro)**

As nervuras simples, denominadas K e L, possuíam taxa de armadura negativa de 0.8% e 1% respectivamente. As nervuras múltiplas, denominadas M, possuíam taxa de armadura negativa de 1%. Nas nervuras simples, os vãos foram identificados como East (E) e West (W). Nas nervuras múltiplas os vãos foram denominados como Center-east, Center-west, North-east, North-west, South-east e South-west, devido a existência de 6 vãos por experimento. Nessas nervuras, as cargas foram aplicadas na nervura central (Center) para M1 e na nervura extrema (South) para M2.

Para evitar a formação de um mecanismo antes da ruptura por cisalhamento, o a armadura inferior foi projetada para assegurar que as vigas não falhassem por flexão na região positiva.

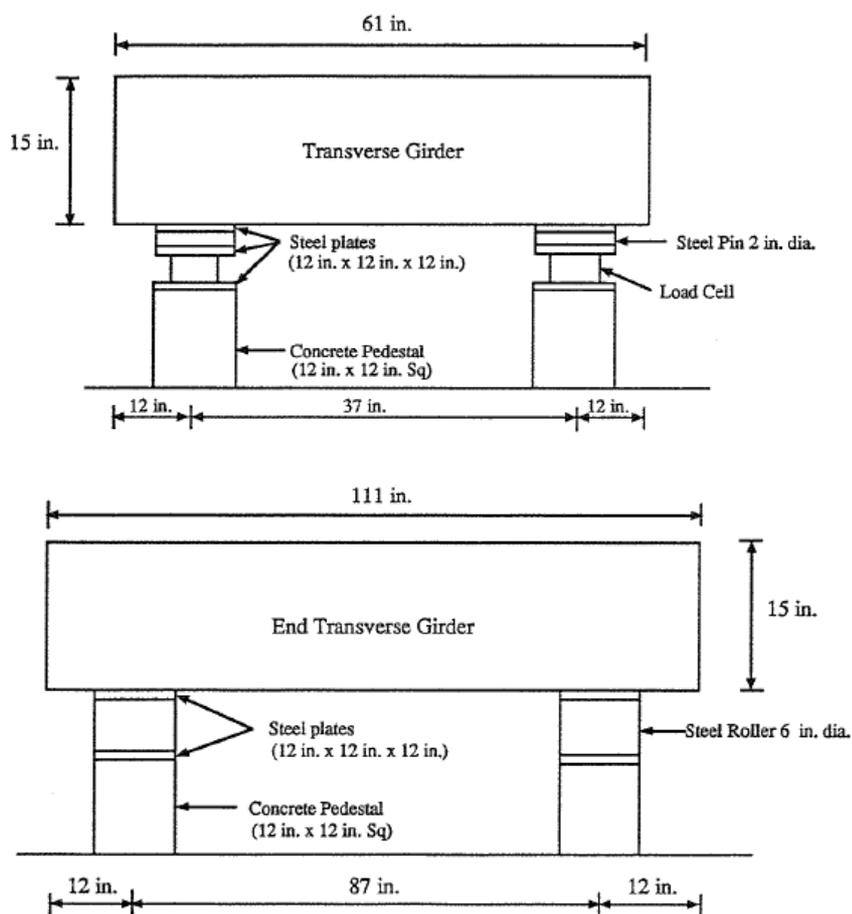


**Figura 4.2 - Características das nervuras múltiplas (dimensões em centímetro)**

As regiões das nervuras K e L foram ensaiadas com e sem estribos. As nervuras múltiplas (M) foram ensaiadas somente sem estribos. Os cobrimentos utilizados nas peças foram os constantes do ACI 318-89, norma americana vigente na época.

O concreto utilizado na composição dos elementos foi ensaiado a compressão, com resultados variantes entre 28 e 33 MPa. O tamanho máximo do agregado utilizado na mistura foi de 3/4 in (19mm). As armaduras longitudinais e transversais foram também submetidas a ensaios prévios para aferir suas propriedades. As características dos materiais e dados relevantes a esse estudo são apresentados na Tabela 4.1 e Tabela 4.2. As regiões ensaiadas referem-se sempre a localização do vão (East ou West), seguido da região de momento negativo (N) ou positivo (P) do ensaio. Nas nervuras múltiplas (M), as letras C e S, referem-se a nervura central e a localizada a direita da central (S).  $d$  é altura útil da nervura,  $F_{ck}$  a resistência à compressão do concreto,  $F_{yk}$  a tensão de escoamento da armadura longitudinal,  $F_{ywk}$  a tensão de escoamento da armadura transversal,  $A_{sl}$  é a área da

armadura longitudinal contida na região ensaiada,  $\rho_l$  a taxa de armadura longitudinal,  $A_{st}$  é a área da armadura transversal (estribos),  $esp$  é o espaçamento entre os estribos e  $\rho_t$  a taxa da armadura transversal. Os dados em branco indicam que não foram dispostos estribos na região ensaiada. Nos trechos dos vãos não ensaiados (entre apoios extremos até o ponto da carga aplicada) foram armados estribos n° 3 a cada 6 in., de forma que a prever que a nervura não falhasse por cisalhamento fora das regiões ensaiadas (ver Figura 4.6). Quando as armaduras de flexão excediam 2 barras, as demais eram colocadas em 2ª camada, conseqüentemente diminuindo a altura útil  $d$ . Na mesa entre as nervuras múltiplas, foi disposta uma armação composta de barras N°3. O módulo de elasticidade do aço foi tomado como 210000 MPa.



**Figura 4.3 - Detalhe típico dos pinos, rolos e pedestais de apoio as nervuras ensaiadas (reproduzida de RAVIKUMAR et al., 1994)**

## 4.2 PROCEDIMENTO DO ENSAIO

Após montagem de todo sistema e aferição dos equipamentos, as nervuras eram carregadas inicialmente com 30% do valor calculado da carga de fissuração (aproximadamente 6 Kips ~2,7 tf). O incremento na carga aplicada era sempre de 2 Kips (0,89 tf), sendo em cada etapa lidos o carregamento, resistência e deformação enquanto a carga estava constante. As fissuras eram marcadas antes da aplicação do novo incremento de carga.

Após a nervura ter sofrido a ruptura, ela era descarregada e estribos externos eram colocados para "grampear" a região rompida, conforme apresentado na Figura 4.7. Esses estribos ajudariam a aumentar a capacidade de resistência de falha na região, permitindo que o ensaio continuasse para determinar a capacidade de cisalhamento em outras regiões. Após a colocação desses estribos a nervura era novamente carregada até o valor que a seção falhara, sempre com o incremento de carga de 2 kips (0,89tf). O processo era sempre repetido até que a nervura falhava em todas as regiões ou tinha alcançado a máxima capacidade de carga.

O esquema de fissuração observada nas nervuras K e L é apresentado nas Figuras 4.8 e 4.9 e, nas nervuras M, nas figuras 4.10 e 4.11.

**Tabela 4.1 - Características das nervuras K e L**

NERVURAS ENSAIADAS										
NERVURA	REGIÃO ENSAIADA	d(cm)	Fck(MPa)	Fyk(MPa)	Fyw(k(Mpa)	Asl(cm2)	pl	Ast(cm2)	esp(cm)	pt
K1	E-N	33,48	28,95	449,55	-	4,00	0,0078	-	-	-
K1	W-N	33,48	28,95	449,55	250,97	4,00	0,0078	0,16	15,24	0,0007
K1	E-P	32,54	28,95	449,55	-	4,00	0,0081	-	-	-
K1	W-P	32,54	28,95	449,55	250,97	4,00	0,0081	0,16	15,24	0,0007
K2	E-N	34,11	28,61	449,55	250,97	4,00	0,0077	0,16	15,24	0,0007
K2	W-N	34,11	28,61	449,55	255,80	4,00	0,0077	0,28	15,24	0,0012
K2	E-P	31,11	28,61	481,61	250,97	9,68	0,0204	0,16	15,24	0,0007
K2	W-P	31,11	28,61	481,61	255,80	9,68	0,0204	0,28	15,24	0,0012
K3	E-N	33,48	28,47	449,55	-	4,00	0,0078	-	-	-
K3	W-N	33,48	28,47	449,55	250,97	4,00	0,0078	0,16	15,24	0,0007
K3	E-P	31,90	28,47	449,55	-	8,00	0,0165	-	-	-
K3	W-P	31,90	28,47	449,55	250,97	8,00	0,0165	0,16	15,24	0,0007
L1	E-N	31,75	27,44	458,52	-	4,96	0,0103	-	-	-
L1	W-N	31,75	27,44	458,52	250,97	4,96	0,0103	0,16	15,24	0,0007
L1	E-P	33,02	27,44	513,68	-	5,68	0,0113	-	-	-
L1	W-P	33,02	27,44	513,68	250,97	5,68	0,0113	0,16	15,24	0,0007
L2	E-N	31,75	28,47	458,52	255,80	4,96	0,0103	0,28	15,24	0,0012
L2	W-N	31,75	28,47	458,52	249,60	4,96	0,0103	0,44	15,24	0,0019
L2	E-P	30,78	28,47	513,68	255,80	11,36	0,0242	0,28	15,24	0,0012
L2	W-P	30,78	28,47	513,68	249,60	11,36	0,0242	0,44	15,24	0,0019
L3	E-N	33,65	30,45	458,52	-	4,96	0,0097	-	-	-
L3	W-N	33,65	30,45	458,52	250,97	4,96	0,0097	0,16	15,24	0,0007
L3	E-P	33,22	30,45	513,88	-	5,68	0,0112	-	-	-
L3	W-P	33,22	30,45	513,88	250,97	5,68	0,0112	0,16	15,24	0,0007

Tabela 4.2 - Características das nervuras M

NERVURAS ENSAIADAS						
NERVURA	REGIÃO ENSAIADA	d(cm)	Fck(MPa)	Fyk(MPa)	Asl(cm <sup>2</sup> )	$\rho_l$
M1	E-N	33,32	33,85	458,52	4,96	0,0098
M1	W-N	33,32	33,85	458,52	4,96	0,0098
M1	E-P	34,44	33,85	513,88	5,68	0,0108
M1	W-P	34,44	33,85	513,88	5,68	0,0108
M2	E-N	33,32	30,12	458,52	4,96	0,0098
M2	W-N	33,32	30,12	458,52	4,96	0,0098
M2	E-P	33,17	30,12	513,88	5,68	0,0112
M2	W-P	33,17	30,12	513,88	5,68	0,0112

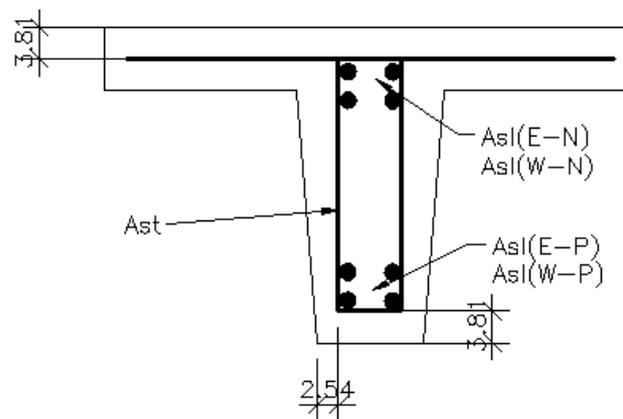


Figura 4.4 - Esquema da disposição de armadura e cobrimentos nas nervuras K e L  
(dimensões em centímetro)

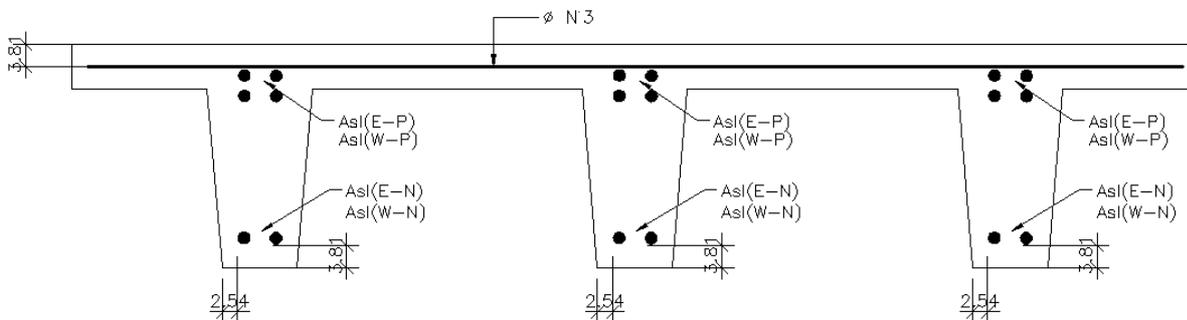


Figura 4.5 - Esquema da disposição de armadura e cobrimentos nas nervuras M (dimensões em centímetro)

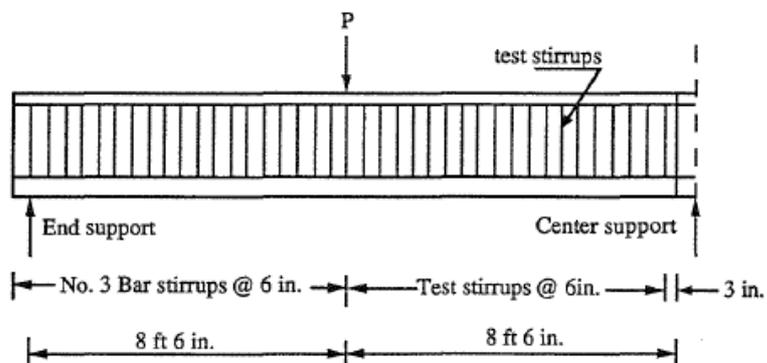
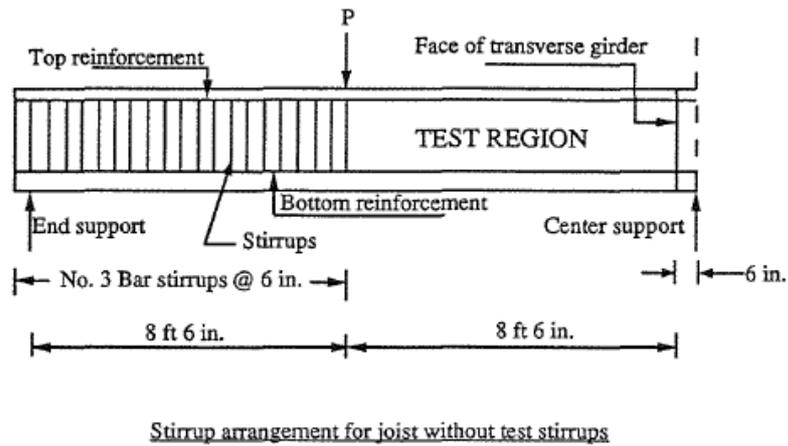


Figura 4.6 - Regiões ensaiadas e esquema das armaduras na seção longitudinal das nervuras K e L (reproduzida de RAVIKUMAR et al., 1994)

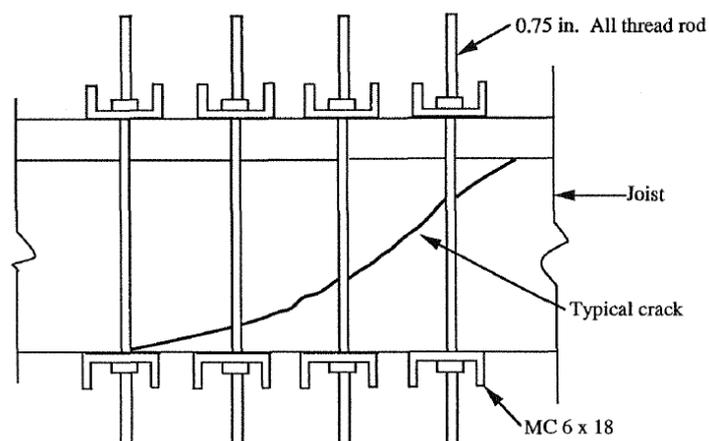


Figura 4.7 - Estribos externos (reproduzido de RAVIKUMAR, et al., 1994)

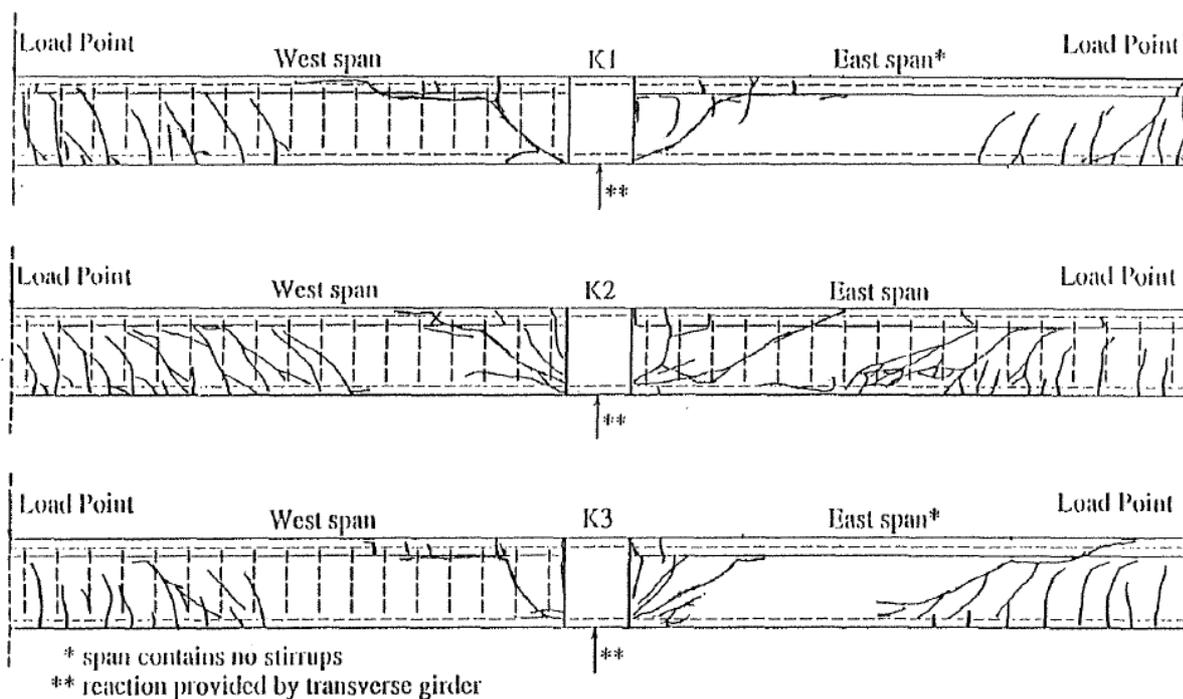


Figura 4.8 - Esquema de fissuração nas nervuras K1, K2 e K3 (reproduzido de RAVIKUMAR, et al.,1994)

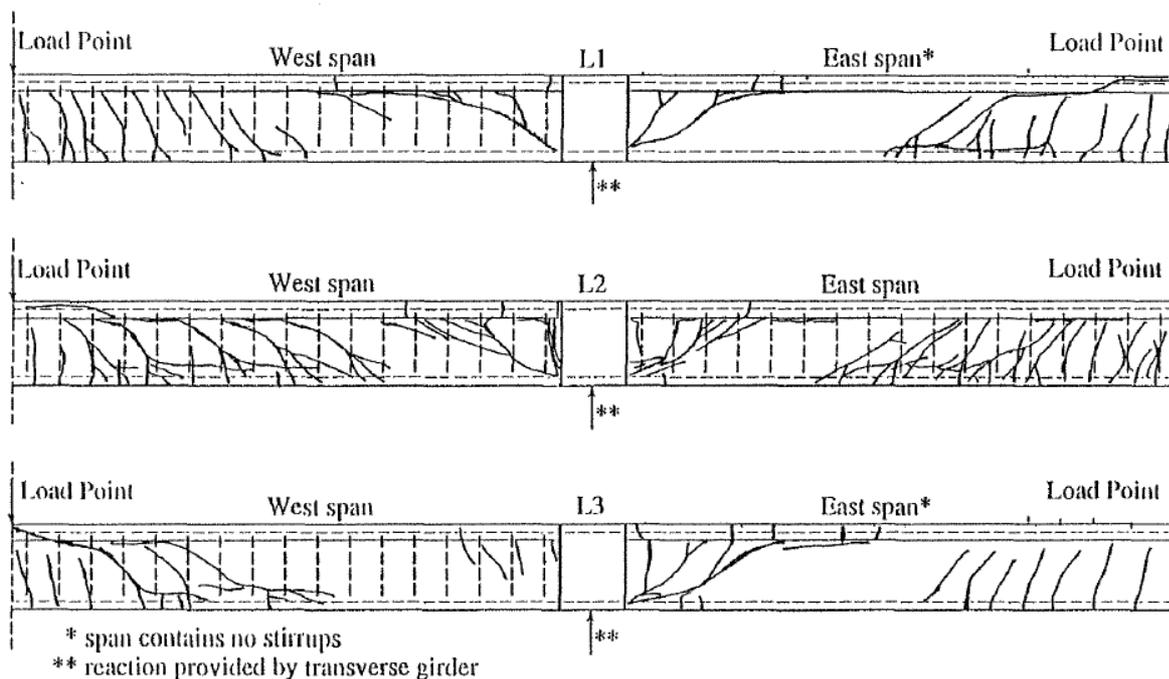


Figura 4.9 - Esquema de fissuração nas nervuras L1, L2 e L3 (reproduzido de RAVIKUMAR, et al., 1994)

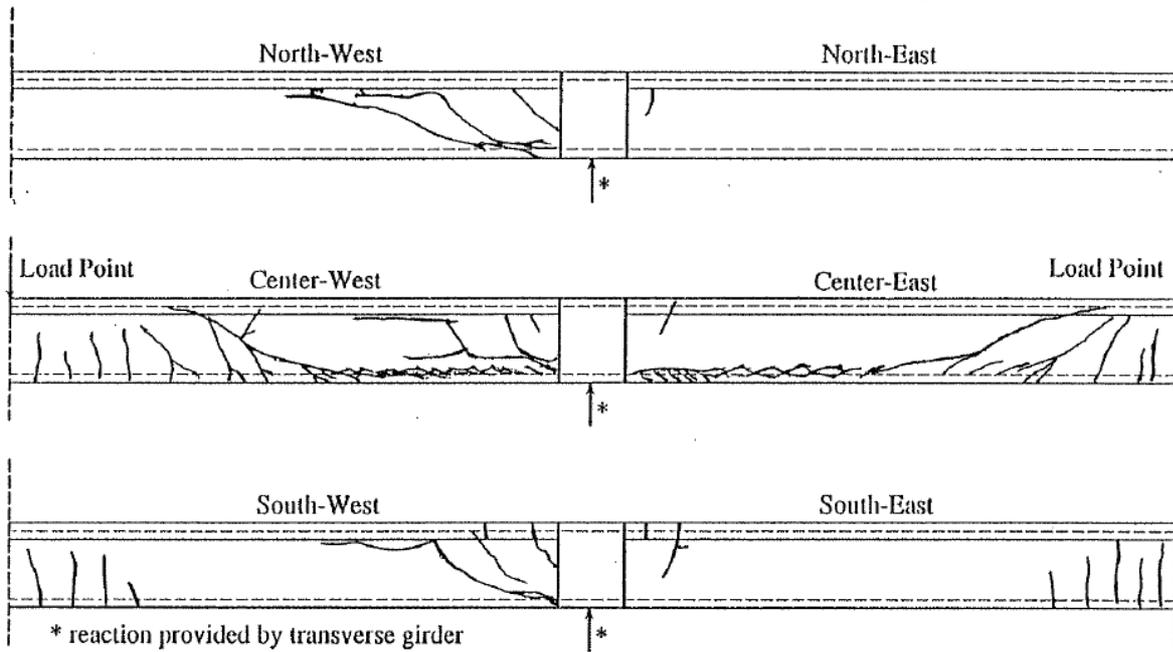


Figura 4.10 - Esquema de fissuração das nervuras M1 (reproduzido de RAVIKUMAR, et al., 1994)

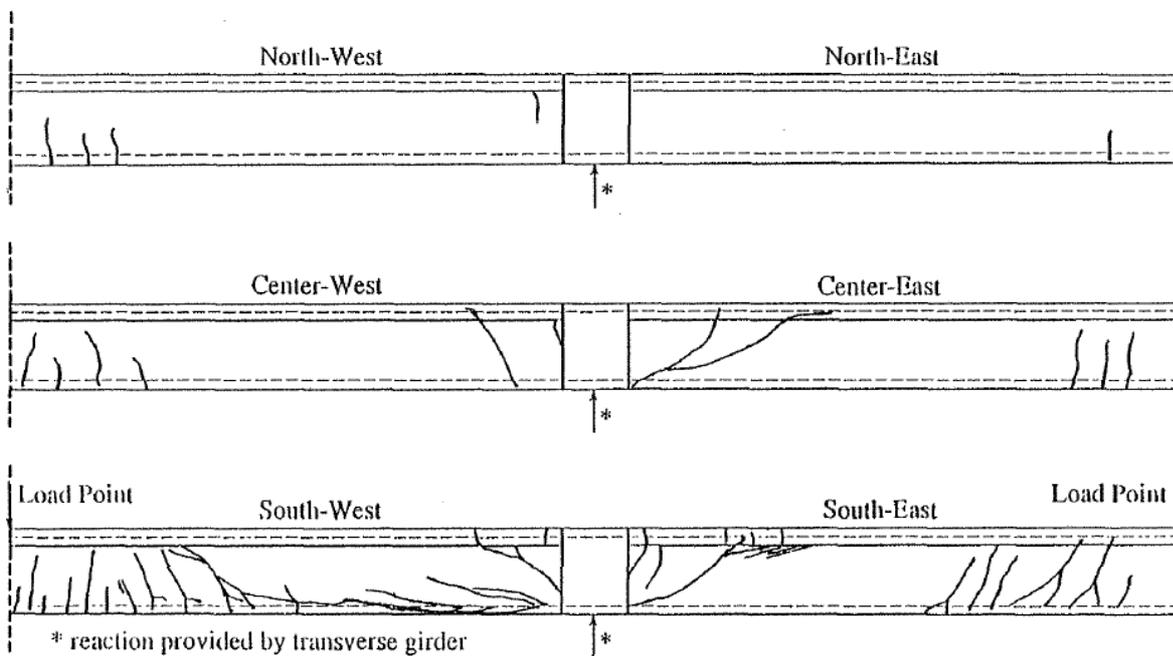


Figura 4.11 - Esquema de fissuração das nervuras M2 (reproduzido de RAVIKUMAR, et al., 1994)

### 4.3 RESULTADOS DOS ENSAIOS

As cargas máximas  $P$  aplicadas nas regiões West ( $P_w$ ) e East ( $P_e$ ) e as reações do apoio central ( $R_{central}$ ), quando da ocorrência da ruptura por cisalhamento, são apresentadas na Tabela 4.3 e Tabela 4.4. Nessas tabelas também é apresentado o esforço cortante medido na ocorrência da ruptura, que pode ser tomado como a resistência máxima ao esforço cortante ( $V_n$ ). Nas nervuras M o ensaio apresentou as tensões de cisalhamento ( $v_n$ ). Nas regiões não listadas nas tabelas, o ensaio detectou o escoamento da armadura longitudinal de flexão (positiva ou negativa) antes da ruptura por cisalhamento, não sendo informado pelos autores os dados referentes à essas regiões.

**Tabela 4.3 - Resultado dos ensaios para as nervuras K e L (adaptado de RAVIKUMAR, et al.,1994)**

NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$P_w$ (kips)	$P_w$ (tf)	$P_e$ (kips)	$P_e$ (tf)	$R_{central}$ (kips)	$R_{central}$ (tf)	$V_n$ (kips)	$V_n$ (tf)
K1	E-N	12,74	5,67	11,74	5,22	16,51	7,35	9,71	4,32
K2	E-P	22,64	10,07	21,44	9,54	24,73	11,00	12,54	5,58
K2	E-N	24,68	10,98	23,69	10,54	25,15	11,19	14,04	6,25
K2	W-N	25,64	11,41	24,61	10,95	26,65	11,86	15,28	6,80
K2	W-P	29,13	12,96	28,05	12,48	29,93	13,32	15,69	6,98
K3	E-N	17,19	7,65	16,81	7,48	20,04	8,92	11,63	5,18
K3	W-N	19,39	8,63	18,90	8,41	21,86	9,73	12,76	5,68
k3	E-P	19,39	8,63	18,90	8,41	21,86	9,73	11,27	5,02
L1	E-N	14,55	6,47	13,84	6,16	16,06	7,15	9,56	4,25
L1	W-N	14,57	6,48	14,26	6,35	16,28	7,24	9,92	4,41
L1	E-P	18,64	8,29	18,95	8,43	21,57	9,60	11,32	5,04
L2	E-N	26,50	11,79	25,48	11,34	27,52	12,25	15,21	6,77
L2	W-P	31,69	14,10	31,12	13,85	31,76	14,13	16,48	7,33
L3	E-N	17,71	7,88	17,69	20,60	9,17	4,08	12,00	5,34
L3	W-P	18,24	8,12	18,76	8,35	21,76	9,68	11,22	4,99

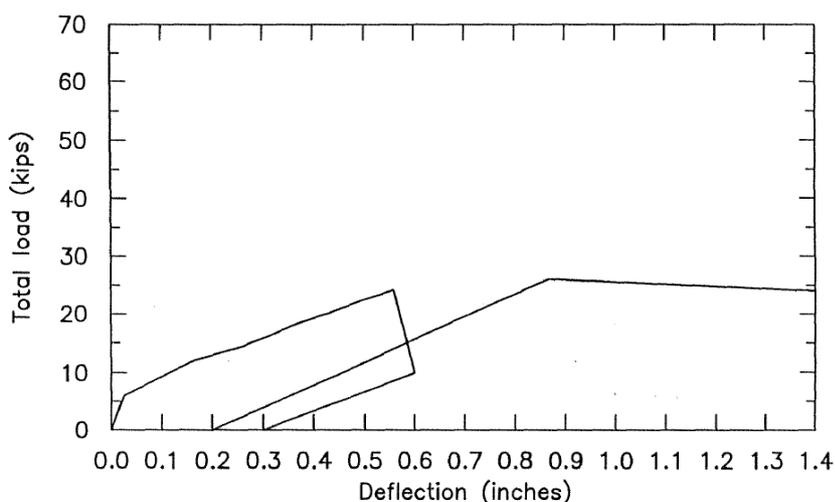
**Tabela 4.4 - Resultados dos ensaios para as nervuras M (adaptado de RAVIKUMAR, et al.,1994)**

NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$P_w$ (kips)	$P_w$ (tf)	$P_e$ (kips)	$P_e$ (tf)	$R_{central}$ (kips)	$R_{central}$ (tf)	$v_n$ (psi)	$v_n$ (MPa)	$V_n$ CALCULADA (tf)
M1	C-E-P	29,14	12,97	29,65	13,19	37,44	16,66	256	1,78	9,34
M1	C-W-P	29,14	12,97	29,65	13,19	37,44	16,66	252	1,75	9,19
M1	C-E-N	30,78	13,70	31,49	14,01	39,15	17,42	261	1,81	9,21
M1	C-W-N	30,78	13,70	31,49	14,01	39,15	17,42	260	1,81	9,18
M2	S-E-N	25,93	11,54	26,13	11,63	31,83	14,16	227	1,58	8,01
M2	S-W-N	25,93	11,54	26,13	11,63	31,83	14,16	224	1,56	7,91
M2	S-E-P	26,12	11,62	26,20	11,66	31,69	14,10	207	1,44	7,27
M2	S-W-P	26,12	11,62	26,20	11,66	31,69	14,10	207	1,44	7,27

Outro resultado produzido pelo ensaio foi o esforço cortante máximo suportado pelo concreto na região fissurada, ou seja, a resistência absorvida pelos mecanismos complementares, já explanados nos capítulos anteriores desse trabalho ( $V_c$ ). Para isso dois métodos foram usados para a aferição de  $V_c$  : a análise do padrão das fissuras e a análise da deformação dos estribos (quando haviam).

Na primeira análise,  $V_c$  foi medido quando se observou a primeira ocorrência do cortante de fissuração, definida por RODRIGUES & DARWIN (1984, 1987) para vigas contínuas, nas nervuras. RODRIGUES & DARWIN (1984, 1987) define que o cortante de fissuração é a força na qual a fissura de tração diagonal forma um ângulo de  $45^\circ$  ou menos, em ou acima da linha neutra na região de momento positiva e, em ou abaixo da linha neutra em regiões de momentos negativos.

A segunda análise foi baseada na deformação dos estribos (nas regiões armadas transversalmente) lidas nas células instaladas nos mesmos. Um gradual aumento na deformação dos estribos indicava que a fissura de flexão tinha interceptado o estribo. Um aumento acentuado nessa deformação indicava que a fissura de cisalhamento teria interceptado o estribo. Esse aumento acentuado era devido a fissura de cisalhamento porque transferia mais força para o estribo do que a fissura de flexão devido ao ângulo de inclinação da fissura de cisalhamento. A partir daí a força que provocasse essa deformação acentuada nos estribos foi tomada como o  $V_c$ . A Figura 4.12 apresenta um exemplo de um dos gráficos das nervuras com a relação entre a carga aplicada e a deformação.



**Figura 4.12 - Gráfico Carga aplicada X deformação da nervura K1 (reproduzido de RAVIKUMAR, et al., 1994)**

Os valores das resistências  $V_c$ , oriundas da análise baseada no padrão das fissuras e na deformação dos estribos está listada na Tabela 4.5.

Também foi apresentada a relação  $M/V_c$  de ambas as análises, sendo  $M$  o valor do momento na face do apoio nas regiões negativas, e no pico do momento positivo nas regiões positivas, quando da ocorrência de  $V_c$ . Devido a grande variabilidade de  $V_c$  obtido pela análise de deformação dos estribos quando comparadas com equações empíricas da época a análise desses dados não foram realizadas pelos autores dos ensaios.

**Tabela 4.5 - Resultados dos ensaios para as nervuras K e L (adaptado de RAVIKUMAR, et al.,1994)**

NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$V_c$ -padrão de fissuras (kips)	$V_c$ -padrão de fissuras (tf)	$V_c$ - def. dos estribos (kips)	$V_c$ - def. dos estribos (tf)	$M/V_c$ (padrão de fissuras) (in)	$M/V_c$ (padrão de fissuras) (m)	$M$ (calculado) (tfm)
K1	E-N	7,66	3,41	NÃO TEM	NÃO TEM	50,84	1,29	4,40
K1	W-N	6,83	3,04	5,99	2,67	51,22	1,30	3,95
K1	E-P	-	-	NÃO TEM	NÃO TEM	-	-	-
K1	W-P	-	-	8,23	3,66	-	-	-
K2	E-N	7,20	3,20	5,51	2,45	39,46	1,00	3,21
K2	W-N	9,01	4,01	7,40	3,29	34,90	0,89	3,55
K2	E-P	11,23	5,00	7,58	3,37	74,50	1,89	9,46
K2	W-P	11,21	4,99	5,51	2,45	75,14	1,91	9,52
K3	E-N	9,37	4,17	NÃO TEM	NÃO TEM	34,11	0,87	3,61
K3	W-N	8,88	3,95	7,15	3,18	33,26	0,84	3,34
K3	E-P	9,31	4,14	NÃO TEM	NÃO TEM	70,38	1,79	7,41
K3	W-P	8,85	3,94	5,91	2,63	72,18	1,83	7,22
L1	E-N	7,89	3,51	NÃO TEM	NÃO TEM	31,22	0,79	2,78
L1	W-N	7,12	3,17	8,32	3,70	28,24	0,72	2,27
L1	E-P	8,27	3,68	NÃO TEM	NÃO TEM	76,20	1,94	7,12
L1	W-P	7,40	3,29	8,72	3,88	62,75	1,59	5,25
L2	E-N	8,41	3,74	7,32	3,26	28,55	0,73	2,71
L2	W-N	9,26	4,12	10,97	4,88	26,29	0,67	2,75
L2	E-P	12,60	5,61	10,54	4,69	80,03	2,03	11,40
L2	W-P	12,03	5,35	12,03	5,35	78,57	2,00	10,68
L3	E-N	9,07	4,04	NÃO TEM	NÃO TEM	38,33	0,97	3,93
L3	W-N	10,17	4,53	6,04	2,69	35,41	0,90	4,07
L3	E-P	10,01	4,45	NÃO TEM	NÃO TEM	71,21	1,81	8,06
L3	W-P	9,95	4,43	6,50	2,89	71,01	1,80	7,99

Outro dado produzido para as nervuras K e L, foi a diferença entre a tensão de cisalhamento na falha e a tensão de cisalhamento na fissuração ( $v_n - v_c$ ) podendo dessa forma ser aferida a resistência dos estribos nas regiões com armadura transversal ( $V_s$ ). Também foi aferido o numero de estribos que interceptavam a projeção horizontal da fissura critica na falha por cisalhamento, permitindo o cálculo da tensão nos estribos ( $V_{si} = n^\circ \text{ de estribos} \cdot A_t \cdot F_{yt} / b_w \cdot d$ ). Esses resultados seguem listados na Tabela 4.6.

**Tabela 4.6 - Resultados dos ensaios para as nervuras K e L (adaptado de RAVIKUMAR, et al.,1994)**

NERVURA	REGIÃO ENSAIADA	vn-vc (psi)	vn-vc (MPa)	Vs (Vn-Vc) (tf)	Nº de estribos interceptados	vsi (psi)	vsi (MPa)	Vsi (tf)
K2	E-N	84,76	0,58	3,04	5,00	54,37	0,37	1,95
K2	W-N	103,17	0,71	3,70	4,00	81,90	0,56	2,94
K2	E-P	17,72	0,12	0,58	4,00	47,69	0,33	1,56
K2	W-P	60,96	0,42	1,99	3,00	67,34	0,46	2,20
K3	W-N	48,91	0,34	1,72	3,00	31,65	0,22	1,11
L1	W-N	37,29	0,26	1,24	4,00	46,93	0,32	1,57
L2	E-N	90,31	0,62	3,01	4,00	86,82	0,60	2,90
L2	W-P	61,08	0,42	1,98	4,00	139,73	0,96	4,52
L3	W-P	16,07	0,11	0,56	3,00	31,78	0,22	1,11

#### 4.4 CONCLUSÕES DOS ENSAIOS REALIZADOS RELEVANTES PARA O PRESENTE ESTUDO

Segundo RAVIKUMAR, et al., baseado nos resultados experimentais obtidos quando comparados às prescrições da norma americana em vigor na época (ACI 318-89), em relação ao dimensionamento ao cortante em nervuras de lajes nervuradas em uma direção:

1. Para regiões de momento negativo, o cortante de fissuração ocorre em valores menores do que os prescritos no ACI para a contribuição do concreto,  $V_c$ . Da mesma forma, a resistência ao cisalhamento também ocorre com valores menores aos prescritos para  $V_n$ .

2. Para regiões de momento positivo, o cortante de fissuração ocorre com valores menores aos prescritos no ACI para a contribuição do concreto,  $V_c$ . Entretanto, a resistência ao cisalhamento prescrito no ACI apresentava valores conservadores para  $V_n$ .
3. A tensão provocada pelo cortante de fissuração, com ou sem estribos, para taxas de armadura longitudinal menores que 1%, apresentavam valores menores que a tensão proveniente da contribuição do concreto ( $v_c$ ), quando calculada pelo ACI.
4. A contribuição dos estribos na resistência ao cisalhamento foi igual ou excedia os valores prescritos pelo ACI.
5. Nas nervuras das lajes múltiplas, somente a sobrecarga foi partilhada entre nervuras adjacentes;
6. A diminuição do cortante previsto pelo ACI nas nervuras de lajes múltiplas era justificado apenas na segurança extra contra a ruptura das sobrecargas locais.
7. O aumento de 10% na capacidade de resistência ao cisalhamento prevista para nervuras de concreto não poderia ser usado em qualquer tipo de nervura.

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COMPARAÇÃO COM OS DADOS TEÓRICOS CALCULADOS

No presente Capítulo iremos apresentar algumas considerações sobre os resultados experimentais obtidos por RAVIKUMAR, et al. (1994), listados no Capítulo 4. Em seguida serão apresentados os valores das resistências teóricas ao cisalhamento, calculadas de acordo com as prescrições normativas descritas no Capítulo 3. Por fim, serão comparados os dados experimentais obtidos com o valor das resistências calculadas, procedidas das análises e considerações pertinentes a cada caso e apresentado exemplo de aplicação.

### 5.1 ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS

#### 5.1.1 Nervuras K e L

Conforme apresentado na Tabela 4.3 podemos observar a reação medida no apoio central, mediante a aplicação das cargas pontuais  $P_w$  e  $P_e$ , respectivamente nos vãos west e east. Com esses valores foi possível modelar vigas com vãos semelhantes ao ensaiados, simplesmente apoiados em sua extremidade, carregadas pelas forças  $P_w$  e  $P_e$ , pela reação medida no apoio central (RB) e por um carregamento distribuído ao longo do vão de 0,237tf/m (peso próprio da nervura), conforme esquema apresentado na Figura 5.1. Dessa forma foi possível obter os valores dos esforços cortantes e momentos fletores ao longo dos vãos da nervuras, a saber:  $V_A'e$  e  $V_A'd$  (Esforço cortante respectivamente à esquerda e a direita no ponto de aplicação da força  $P_w$ ),  $V_{Be}$  e  $V_{Bd}$  (Esforço cortante respectivamente à esquerda e a direita no ponto de aplicação da reação RB),  $V_B'e$  e  $V_B'd$  (Esforço cortante respectivamente a esquerda e a direita no ponto de aplicação da força  $P_e$ ),  $M_A'$  (Momento positivo máximo no ponto de aplicação da carga  $P_w$ ),  $M_B'$  (Momento positivo máximo no ponto de aplicação da carga  $P_e$ ) e  $X_B$  (Momento negativo máximo no ponto de aplicação da reação RB). A tabela 5.1 apresenta os valores dos esforços obtidos após cálculo das vigas, quando submetidas as forças oriundo do ensaio ( $P_w$ ,  $P_e$ ) e da reação RB, e do peso próprio da nervura. Os valores ressaltados em amarelo indicam os valores do esforço cortante na região

onde as vigas falharam no ensaio e do respectivo momento fletor, ressaltados em cinza.

Esses valores do esforço cortante, foram chamados de  $V_n$  teórico, para cada viga, uma vez que foi o esforço cortante obtido no modelo quando a viga foi submetida ao carregamento que provocou no ensaio a ruptura por cortante. A relação entre o  $V_n$  experimental e o  $V_n$  teórico também é apresentado na Tabela 5.1

A relação entre o  $V_n$  experimental e o  $V_n$  teórico varia entre 1,13 e 1,23. Entretanto, nota-se uma nos valores dos momentos fletores negativos (XB) sobre os apoios centrais, conseqüentemente aumentando os valores dos momentos fletores positivos.

Utilizando os mesmos carregamentos (força  $P_w$ ,  $P_e$  e carregamento distribuído devido ao peso próprio), as vigas foram novamente analisadas, substituindo-se o valor da reação RB (medida no ensaio) por um apoio central indeslocável, conforme esquema apresentado na Figura 5.2.

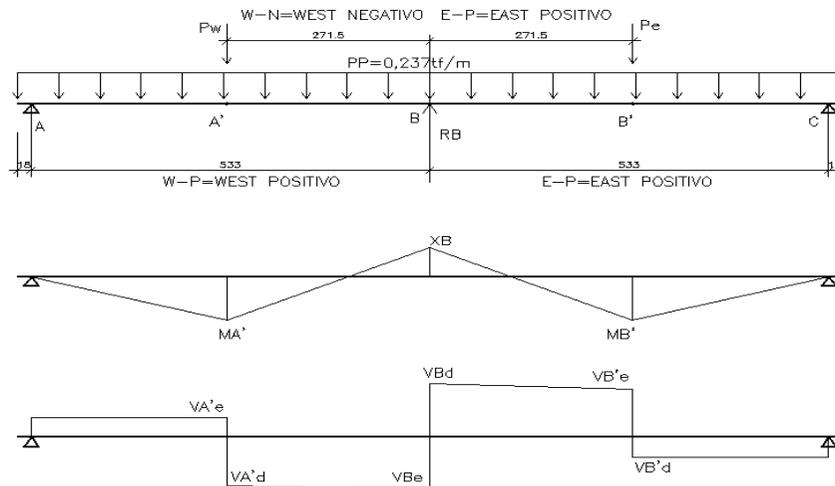
Os valores dos esforços solicitantes, medidos nos mesmos pontos já citados da Tabela 5.1, são apresentados na Tabela 5.2. O valor da reação do apoio central RB, também é apresentada nessa tabela.

Da mesma forma da Tabela 5.1, Os valores ressaltados por cores na Tabela 5.2 indicam os valores do esforço cortante na região onde as vigas romperam no ensaio e o respectivo momento fletor.

O objetivo de modelar esses dois casos foi de verificar a intensidade da redistribuição ocorrida, já previsto no ensaio, devido a plastificação no apoio central. Comparando os resultados entre esses dois modelos observa-se reduções significantes nos momentos fletores negativos, que muitas vezes assume valores positivos, como pode ser visto na 9ª coluna da Tabela 5.1 (XB), quando comparado aos valores da mesma coluna na tabela 5.2.

**Tabela 5.1-Cargas aplicadas, resultados experimentais e esforços solicitantes teóricos calculados conforme esquema da Figura 5.1.**

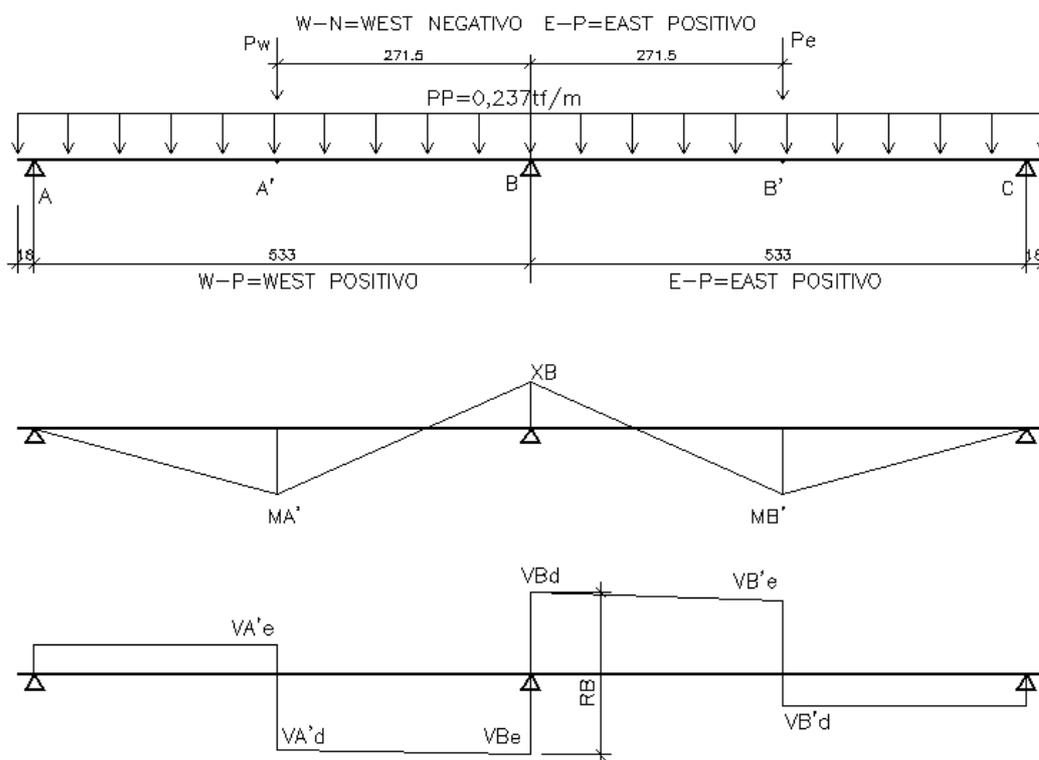
DADOS EXPERIMENTAIS				RESULTADOS EXPERIMENTAIS		ESFORÇOS TEÓRICOS									VnExp/ Vteórico
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	Pw(tf)	Pe(tf)	RB(tf)	Vn(tf)	MA'(tfm)	MB'(tfm)	XB(tfm)	VA'e(tf)	VA'd(tf)	VBd(tf)	VBe(tf)	VB'd(tf)	VB'e(tf)	
K1	E-N	5,66	5,22	7,35	4,32	7,30	6,70	-2,20	2,50	3,10	3,80	3,60	2,90	2,30	1,20
K2	E-P	10,07	9,59	11,00	5,58	14,00	13,30	-0,54	5,10	5,00	5,60	5,40	4,70	4,90	1,19
K2	E-N	10,98	10,54	11,19	6,25	16,10	15,50	1,40	5,90	5,10	5,70	5,50	4,80	5,70	1,14
K2	W-N	11,41	10,95	11,86	6,80	16,30	15,70	0,65	6,00	5,40	6,00	5,80	5,20	5,40	1,13
K2	W-P	12,96	12,49	13,31	6,98	18,50	17,80	0,79	6,80	6,10	6,80	6,50	5,90	6,60	1,14
K3	E-N	7,65	7,48	8,92	5,17	10,60	10,50	-0,85	3,80	3,90	4,50	4,40	3,80	3,70	1,18
K3	W-N	8,63	8,41	9,73	5,68	12,21	11,18	-0,54	4,40	4,30	4,90	4,80	4,20	4,20	1,16
k3	E-P	8,62	8,41	9,73	5,01	12,24	11,18	-0,54	4,40	4,30	4,90	4,80	4,20	4,20	1,19
L1	E-N	6,48	6,16	7,15	4,25	9,80	9,40	-0,64	3,50	3,00	3,70	3,50	2,80	3,30	1,21
L1	W-N	6,48	6,34	7,25	4,41	9,80	9,60	-0,61	3,50	3,00	3,70	3,60	2,90	3,40	1,19
L1	E-P	8,29	8,43	9,60	5,03	11,60	11,80	-0,61	4,20	4,10	4,80	4,80	4,20	4,20	1,20
L2	E-N	11,79	11,34	12,25	6,77	16,80	16,20	0,61	6,20	5,60	6,20	6,00	5,40	6,00	1,13
L2	W-P	14,10	13,85	14,15	7,33	20,50	20,20	1,83	7,60	6,50	7,10	7,00	6,40	7,50	1,13
L3	E-N	7,89	7,87	9,17	5,34	11,00	11,00	-0,70	4,00	3,90	4,60	4,60	3,90	3,90	1,16
L3	W-P	8,12	8,34	9,68	5,00	11,10	11,40	-1,20	4,00	4,10	4,80	4,90	4,20	4,10	1,22



**Figura 5.1 - Esquema de cargas nas nervuras**

**Tabela 5.2 - Esforços solicitantes de vigas sobre apoios indeslocáveis calculadas conforme esquema da Figura 5.2**

DADOS EXPERIMENTAIS				EXPERIMENTAL	ESFORÇOS TEÓRICOS									
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	Pw(tf)	Pe(tf)	Vn(tf)	RB(tf)	MA'(tfm)	MB'(tfm)	XB(tfm)	VA'e(tf)	VA'd(tf)	VBd(tf)	VB'e(tf)	VB'd(tf)	VB'e(tf)
K1	E-N	5,66	5,22	4,32	8,90	5,40	4,80	-6,20	1,80	3,90	4,50	4,30	3,70	2,30
K2	E-P	10,07	9,59	5,58	14,70	9,20	8,50	-10,50	3,20	6,80	7,50	7,20	6,60	3,00
K2	E-N	10,98	10,54	6,25	16,00	9,90	9,30	-11,40	3,50	7,40	8,10	7,90	7,20	3,30
K2	W-N	11,41	10,95	6,80	16,50	10,30	9,70	-11,80	3,70	7,70	8,40	8,20	7,50	3,40
K2	W-P	12,96	12,49	6,98	18,90	11,50	11,50	-13,60	4,20	8,80	9,50	9,50	8,80	4,10
K3	E-N	7,65	7,48	5,17	11,70	7,00	6,80	-8,30	2,40	5,20	5,90	5,80	5,20	2,30
K3	W-N	8,63	8,41	5,68	13,00	7,90	7,60	-9,20	2,70	5,90	6,50	6,40	5,80	2,60
k3	E-P	8,62	8,41	5,01	13,00	7,90	7,60	-9,20	2,70	5,90	6,50	6,40	5,80	2,60
L1	E-N	6,48	6,16	4,25	10,00	6,00	5,60	-7,00	2,00	4,40	5,10	4,90	4,30	1,90
L1	W-N	6,48	6,34	4,41	10,20	6,00	5,80	-7,10	2,00	4,50	5,10	5,00	4,40	1,90
L1	E-P	8,29	8,43	5,03	12,80	7,50	7,70	-9,00	2,60	5,70	6,30	6,30	5,80	2,70
L2	E-N	11,79	11,34	6,77	17,30	10,50	10,50	-12,40	3,80	8,00	8,70	8,60	8,00	3,70
L2	W-P	14,10	13,85	7,33	20,30	12,50	12,20	-14,60	4,50	9,60	10,20	10,10	9,40	4,40
L3	E-N	7,89	7,87	5,34	12,10	7,20	7,20	-8,60	2,50	5,40	6,10	6,10	5,40	2,50
L3	W-P	8,12	8,34	5,00	12,60	7,30	7,60	-8,90	2,50	5,60	6,20	6,30	5,70	2,60



**Figura 5.2 - Esquema da viga sobre apoios indeslocáveis**

Dessa forma, é possível concluir que durante a realização do ensaio ocorreu uma plastificação no apoio central que foi prevista pelos autores do ensaio adotando-se uma armadura positiva majorada para que a viga não rompesse por flexão, antes da ruptura por cisalhamento. Entretanto, o mecanismo ocorreu de maneira exagerada, onde valores de momento negativo tornaram-se positivos em alguns casos, aumentando os valores dos momentos positivos previstos no meio do

vão. Apesar da plastificação ser uma prática corrente nos projetos, permitido no item 14.6.4.3 da NBR-6118-2014, adotada por vários projetistas e softwares disponíveis no mercado, os valores se limitam entre 10% a 25% na redistribuição dos momentos negativos. Segundo MAGALHÃES (2001), analisando lajes contínuas com nervuras pré-moldadas, essa redistribuição deveria ser limitada entre 15% e 40% para que as nervuras apresentassem melhor comportamento nos estados limites último e de utilização. Entretanto, o autor tem conhecimento dessa prática exercida por alguns projetistas que adotam em projetos de lajes nervuradas apenas uma armadura de distribuição nos apoios para combater a fissuração, negligenciando a ação do momento negativo e dimensionando o momento positivo para absorver a totalidade dos momentos.

### 5.1.2 Nervuras M

Conforme apresentados na Tabela 4.4, da mesma forma como nas nervuras K e L, foram listados os valores das cargas pontuais aplicadas e a reação no apoio central. As cargas nesse ensaio são aplicadas ou na nervura central, ou na nervura extrema. Quando o carregamento é aplicado na nervura central (C), as reações em cada célula de carga, posicionadas simetricamente sob as vigas transversais, também eram simétricas, cada uma absorvendo 50% da reação central. Entretanto, quando as cargas eram aplicadas na nervura extrema (S), a reação se distribui de maneira diferente entre as duas células de carga, não sendo fornecido no ensaio o percentual da reação em cada célula. Como não foi dado os valores de  $V_c$  e  $V_n$  nas nervuras, esses ensaios não serão utilizados no presente estudo.

## 5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS UTILIZANDO O CSA A23.3-04, ACI-318-14 E NBR6118-2014

Utilizando os dados dos ensaios, apresentados no Capítulo 4, foram calculadas as resistências aos esforços cortantes para cada uma das nervuras ensaiadas utilizando o procedimento de cálculo das normas, descrito no Capítulo 4. As equações foram utilizadas **sem** a adoção dos coeficientes de segurança.

### 5.2.1 Análise dos resultados utilizando o CSA A23.3-04

Como já comentado no item 5.1.1, o efeito da plastificação excessiva no apoio central, aumentou o momento positivo nos vãos, conferindo aos mesmos deformações, talvez, não previstas no ensaio. Usualmente nos projetos as plastificações são previstas nos modelos, porém a armadura de flexão é dimensionada adequadamente para absorvê-los impedindo, dessa forma, deformações não previstas.

Devido as dimensões da nervura, respeitando as limitações dos materiais impostos por cada método para obtenção do  $\beta$  e do  $\theta$ , tanto o Método simplificado, quanto o Método geral poderiam ser utilizados no cálculo desse parâmetros. Entretanto, devido a ocorrência dessas plastificações excessivas já comentadas, o valor da deformação longitudinal, medida pelo parâmetro  $\epsilon_x$  no centro da altura da nervura gera uma fissuração exagerada, devido ao elevado grau de redistribuição do momento. Os valores calculados apresentaram coeficientes de segurança não conservadores. Dessa forma os valor de  $\epsilon_x$  calculado pelo Método Geral não é um parâmetro válido.

Sendo assim, adotaremos o Modelo Simplificado para o cálculo das resistências teóricas aqui apresentadas. Apesar desse modelo limitar a tensão de escoamento do aço a 400MPa, os resultados apresentaram valores próximos dos experimentais, usando a tensão de escoamento característica dos mesmos, como pode ser visto mais adiante.

A dispensa de armadura para nervuras sem protensão no CSA só é permitida quando o esforço solicitante de projeto ( $V_f$ ) não ultrapassa  $V_c$  (CSA-11.2.8.1). O  $b_w$  utilizado para o dimensionamento foi a largura média da alma da nervura.

#### **Nervura K1 Trecho E-N (sem estribos)**

$$V_{exp} = 4,32tf$$

Largura efetiva da alma:  $b_w = (127 + 177,8)/2 = 152,4mm$

Altura de cisalhamento efetiva:  $d_v = 0,9.d = 301,32mm$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{r,m\acute{a}x} = 0,25 \cdot 28,95 \cdot 152,4 \cdot 301,32 = 332,37\text{KN} = 33,89\text{tf}$$

Armadura de cisalhamento mínima a cada 152,4mm:

$$A_v = 0,06 \sqrt{28,95} \cdot 152,4 \cdot \frac{152,4}{250,9} = 29,88 \text{ mm}^2$$

MÉTODO SIMPLIFICADO:  $\theta = 35^\circ = 0,611\text{rad}$ .

Parâmetro equivalente de espaçamento da fissura

$$s_z = d_v = 301,32\text{mm}$$

$$s_{ze} = \frac{35 \cdot 301,32}{(15 + 19)} = 310,18\text{mm} \geq 0,85 s_z$$

Cálculo de  $\beta$  :

$$\beta = \frac{230}{(1000 + 310,18)} = 0,176$$

Parcela absorvida pelo concreto:

$$V_c = 0,176 \cdot \sqrt{28,95} \cdot 152,4 \cdot 301,32 = 43,45\text{KN} = 4,42\text{tf} > V_{nexp} \quad (\text{Armadura pode ser dispensada})$$

Resistência ao cortante:

$$V_r = V_c + V_s = 43,45 + 0 = 43,45\text{KN} = 4,42\text{tf}$$

**Nervura K2 Trecho E-P (com estribos)**

$$V_{exp} = 5,58\text{tf}$$

Largura efetiva da alma:  $b_w = (127 + 177,8)/2 = 152,4\text{mm}$

Altura de cisalhamento efetiva:  $d_v = 0,9 \cdot 311,1 = 279,99\text{mm}$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{r,m\acute{a}x} = 0,25 \cdot 28,61 \cdot 152,4 \cdot 279,9 = 305,10\text{KN} = 31,11\text{tf}$$

Armadura de cisalhamento mínima a cada 152,4mm:

$$A_v = 0,06\sqrt{28,61} \cdot 152,4 \cdot \frac{152,4}{250,97} = 29,70 \text{ mm}^2 > A_{vexist} = 16\text{mm}^2$$

MÉTODO SIMPLIFICADO:  $\theta = 35^\circ = 0,611\text{rad}$ .

Parâmetro equivalente de espaçamento da fissura

$$s_z = d_v = 279,99\text{mm}$$

$$s_{ze} = \frac{35 \cdot 279,99}{(15 + 19)} = 288,22\text{mm} \geq 0,85 s_z$$

Cálculo de  $\beta$ :

$$\beta = \frac{230}{(1000 + 288,22)} = 0,178$$

Parcela absorvida pelo concreto:

$$V_c = 0,178 \cdot \sqrt{28,61} \cdot 152,4 \cdot 279,99 = 40,63\text{KN} = 4,15\text{tf} < V_{nexp} \quad (\text{Necessária armadura})$$

Parcela absorvida pelos estribos:

$$V_s = 16 \cdot 250,97 \cdot 279,99 \cdot \cot(0,611) / 152,4 = 10,53\text{KN} = 1,07\text{tf}$$

Resistência ao cortante:

$$V_r = V_c + V_s = 40,63 + 10,53 = 51,16\text{KN} = 5,22\text{tf}$$

Dessa forma as outras nervuras foram calculadas utilizando-se uma rotina em um programa computacional, sendo os resultados apresentados na Tabela 5.3, que também apresenta como referência os resultados experimentais para comparação com os dados teóricos calculados pela Norma Canadense.

Para as nervuras K e L, a resistência ao cisalhamento teórica ( $V_r$ ) apresentou resultados satisfatórios quando comparados aos dados experimentais apresentando coeficiente de segurança médio de 1,07, com apenas 1 valor abaixo de 0,85 (L1-W-N). Para vigas sem armadura transversal, a resistência teórica, representada apenas pela contribuição do concreto, apresentou coeficiente de segurança maior que 1 em 5 dos 6 ensaios, sendo esse valor muito próximo a 1 (0,98 na nervura K1-E-N).

**Tabela 5.3 - Resultados teóricos para nervuras K e L (CSA)**

EXPERIMENTAL			TEÓRICO		
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$V_{nexp}(tf)$	$V_r(tf)$	$V_{nexp}/V_r$	OBS
K1	E-N	4,32	4,42	0,98	S/ESTRIBO
K2	E-P	5,58	5,23	1,07	
K2	E-N	6,25	5,64	1,11	
K2	W-N	6,80	6,56	1,04	
K2	W-P	6,98	6,07	1,15	
K3	E-N	5,17	4,39	1,18	S/ESTRIBO
K3	W-N	5,68	5,54	1,03	
K3	E-P	5,01	4,22	1,19	S/ESTRIBO
L1	E-N	4,25	4,13	1,03	S/ESTRIBO
L1	W-N	4,41	5,23	0,84	
L1	E-P	5,03	4,26	1,18	S/ESTRIBO
L2	E-N	6,77	6,16	1,10	
L2	W-P	7,33	7,05	1,04	
L3	E-N	5,34	4,55	1,17	S/ESTRIBO
L3	W-P	5,00	5,65	0,88	

Outro aspecto a ser observado é que na atuação do esforço cortante nas regiões de momento negativo, que é uma situação comum de projeto, quando as nervuras se apoiam em vários elementos de apoio (vigas ou pilares) ao longo de seu comprimento, apenas duas nervuras apresentaram coeficientes de segurança abaixo de 1 ( $K1-E-N=0,98$ ,  $L1-W-N=0,84$ ) e, se observarmos na Tabela 5.8, veremos que a nervura L1-W-N apresentou nas 3 normas valores de coeficiente de segurança não satisfatórios como, da mesma forma, a nervura L3-W-P.

Os resultado da análise do ensaio estão apresentados na Tabela 5.4.

**Tabela 5.4 - Análise dos ensaios baseado no CSA**

REGIÃO DA FALHA	TIPO DE ARMADURA	N° DE AMOSTRAS (TOTAL)	N° DE AMOSTRAS COM $CS>1$	N° DE AMOSTRAS COM $CS<1$	CS MÍNIMO	MÉDIA	DESVIO PADRÃO	COV (%)
NEGATIVA	SEM ESTRIBO	4	3	1	0,98	1,09	0,100	10,24
NEGATIVA	COM ESTRIBO	5	4	1	0,84	1,02	0,109	12,95
POSITIVA	SEM ESTRIBO	2	2	0	1,18	1,19	0,007	0,60
POSITIVA	COM ESTRIBO	4	3	1	0,84	1,04	0,113	13,49

Dessa forma, os resultados teóricos obtidos são conservadores para o presente estudo.

## 5.2.2 Análise dos resultados utilizando o ACI-318.14

O cálculo da resistência ao cisalhamento pela norma americana em nervuras é similar ao de uma viga, excetuando-se os limites para a dispensa de armadura, que nos casos das lajes nervuradas podem ser majoradas em 10% (ACI-8.8.1.5 e 9.8.1.5). Entretanto, para esse estudo não iremos usar esse recurso, uma vez que as nervuras estão sendo ensaiadas individualmente, não havendo elementos que possibilitem a redistribuição dos esforços. A largura efetiva de elementos trapezoidais não é comentada nessa norma. A prática constante em nervuras é usar o  $b_w$  como a média das larguras ao longo da altura da nervura, como exemplificado no CRSI DESIGN HANDBOOK (2008), tenth edition, Concrete Reinforcing Steel Institute, 2008. A seguir apresentaremos a sequência de cálculo utilizado para nervuras com e sem armadura.

A dispensa de armadura para nervuras sem protensão no ACI só é permitida quando o esforço solicitante de projeto ( $V_u$ ) não ultrapassa  $1,10V_c$ , para lajes nervuradas em 1 direção, e  $1,10(0,5V_c)$ , para lajes nervuradas em 2 direções (ACI-9.6.3.1). Entretanto, como já enfatizado, o aumento de 10% nos valores de  $V_c$  não será adotado.

### **Nervura K1 Trecho E-N (sem estribos)**

$$V_{exp} = 4,32tf$$

Largura efetiva da alma:  $b_w = (127 + 177,8)/2 = 152,4mm$

Armadura de cisalhamento mínima a cada 152,4mm:

$$A_v = 0,062 \sqrt{28,95} \cdot 152,4 \cdot \frac{152,4}{250,9} = 30,88 \text{ mm}^2 < 0,35 \cdot 152,4 \cdot \frac{152,4}{250,9} = 32,39 \text{ mm}^2$$

Parcela absorvida pelo concreto:

$$V_c = 0,17 \cdot \sqrt{28,95} \cdot 152,4 \cdot 334,8 = 46,64KN = 4,64tf > V_{nexp}$$

(dispensa armadura mínima)

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{u,m\acute{a}x} = 46,63.1000 + 0,66. \sqrt{28,95}. 152,4. 334,8 = 227,83KN = 23,93tf$$

Resistência ao cortante:

$$V_n = V_c + V_s = 46,64 + 0 = 46,64KN = 4,66tf$$

**Nervura K2 Trecho E-P (com estribos)**

$$V_{exp} = 5,58tf$$

Largura efetiva da alma:  $b_w = (127 + 177,8)/2 = 152,4mm$

Armadura de cisalhamento mínima a cada 152,4mm:

$$A_v = 0,062 \sqrt{28,61}. 152,4. \frac{152,4}{250,9} = 30,69 mm^2 < 0,35.152,4 \frac{152,4}{250,9} = 32,39mm^2$$

Parcela absorvida pelo concreto:

$$V_c = 0,17. \sqrt{28,61}. 152,4. 311,1 = 43,11KN = 4,29tf < V_{nexp}$$

(necessita armadura mínima)

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{u,m\acute{a}x} = 43,11.1000 + 0,66. \sqrt{28,61}. 152,4. 311,1 = 210,43KN = 22,10tf$$

Parcela absorvida pelos estribos:

$$V_s = 16. 250,97. 311,1 / 152,4 = 8,19KN = 0,82tf$$

Resistência ao cortante:

$$V_u = V_c + V_s = 4,29 + 0,82 = 5,11tf$$

Dessa forma as outras nervuras foram calculadas utilizando-se uma rotina em um programa computacional, sendo os resultados apresentados na Tabela 5.5, que

também apresenta como referência os resultados experimentais para comparação com os dados teóricos calculados pela Norma Americana.

**Tabela 5.5 - Resultados teóricos para nervuras K e L (ACI 318.14))**

EXPERIMENTAL			TEÓRICO		
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$V_{nexp}(tf)$	$V_n(tf)$	$V_{nexp}/V_n$	OBS
K1	E-N	4,32	4,64	0,93	S/ESTRIBO
K2	E-P	5,58	5,11	1,09	
K2	E-N	6,25	5,61	1,11	
K2	W-N	6,80	6,30	1,08	
K2	W-P	6,98	5,68	1,23	
K3	E-N	5,17	4,60	1,12	S/ESTRIBO
K3	W-N	5,68	5,49	1,03	
K3	E-P	5,01	4,30	1,17	S/ESTRIBO
L1	E-N	4,25	4,29	0,99	S/ESTRIBO
L1	W-N	4,41	5,12	0,86	
L1	E-P	5,03	4,32	1,16	S/ESTRIBO
L2	E-N	6,77	5,86	1,16	
L2	W-P	7,33	6,41	1,14	
L3	E-N	5,34	4,79	1,11	S/ESTRIBO
L3	W-P	5,00	5,45	0,92	

Como não poderia ser diferente, os resultados teóricos obtidos no cálculo da resistência ao cisalhamento reafirmam as conclusões de RAVIKUMAR, et al., se majorados por 1,10. Entretanto, admitindo que as nervuras K e L foram ensaiadas isoladas, o fator de 1,10 não pode ser usado para aferir os resultados do presente estudo.

Os resultados obtidos nas nervuras L1-W-N e L3-W-P apresentarem coeficientes de segurança não satisfatórios na comparação com as 3 normas, conforme já comentado anteriormente (ver Tabela 5.8)

Sendo assim, para nervuras K e L, o coeficiente de segurança médio foi de 1,07. Para nervuras sem armadura transversal, a resistência teórica, representada pela contribuição do concreto, apresentou coeficiente de segurança conservador em 4 dos 6 casos, com valor muito próximo a 1 em um deles (L1-E-N). Nas regiões de momentos negativos, situação constante de projetos, 2 de 8 ensaios apresentaram coeficiente de segurança abaixo de 1 (K1-E-N, L1-E-N). O resultado da análise dos ensaios é apresentado na Tabela 5.6.

**Tabela 5.6 - Análise dos ensaios baseado no ACI 318.14**

REGIÃO DA FALHA	TIPO DE ARMADURA	N° DE AMOSTRAS (TOTAL)	N° DE AMOSTRAS COM CS>1	N° DE AMOSTRAS COM CS<1	CS MÍNIMO	MÉDIA	DESVIO PADRÃO	COV (%)
NEGATIVA	SEM ESTRIBO	4	2	2	0,93	1,04	0,093	9,99
NEGATIVA	COM ESTRIBO	5	4	1	0,86	1,05	0,115	13,39
POSITIVA	SEM ESTRIBO	2	2	0	1,16	1,17	0,007	0,61
POSITIVA	COM ESTRIBO	4	3	1	0,92	1,10	0,130	14,16

Dessa forma, os resultados teóricos são conservadores para o presente estudo.

### 5.2.3 Análise dos resultados utilizando a NBR-6118-2014

Para nervuras de lajes nervuradas, desde que atendido os critérios para dimensões já apresentadas no capítulo 3 (NBR-13.2.4.2), a Norma Brasileira permite a dispensa de armadura nas nervuras quando o esforço cortante de projeto ( $V_{sd}$ ) não ultrapassa o limite de  $V_{rd1}$  (NBR-19.4.1), de forma a tratá-la como uma laje. Ultrapassado esse limite, a nervura deverá ser dimensionada como uma viga.

Para os demais elementos lineares submetidos a Força Cortante a NBR estabelece que a armadura mínima não pode ser dispensada, independente do valor de  $V_c$ . Para o cálculo da armadura mínima, a largura efetiva da peça pode ser tomada como a média das larguras ao longo da altura. Para os demais casos,  $b_w$  será tomado sempre com a largura no nível do centroide da armadura de flexão.

Seguem adiante as verificações necessárias ao dimensionamento ao cisalhamento calculadas nas nervuras ensaiadas, pelo modelo I da norma brasileira.

**Nervura K1 Trecho E-N (sem estribos)**

$$V_{\text{exp}} = 4,32\text{tf}$$

Verificação da dispensa de armadura como laje:

$$b_{\text{wméd}} = 152,4\text{mm}$$

$$b_{\text{wmin}} = 134,7\text{mm}$$

$$f_{\text{ctm}} = 0,3 \cdot 28,91^{2/3} = 2,828$$

$$f_{\text{ctkinf}} = 0,7 \cdot 2,828 = 1,98$$

$$f_{\text{ctd}} = 1,98 / 1 = 1,98$$

$$\tau_{\text{Rd}} = 0,25 \cdot 1,98 = 0,49$$

$$k = 1,6 - 0,3348 = 1,265$$

$$\rho_1 = 4 / (13,47 \cdot 33,48) = 0,00887 < 0,02$$

$$V_{\text{rd1}} = [(0,495/10) \cdot 1,265 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,00887)] \cdot 13,47 \cdot 33,48 = 43,46\text{KN} = 4,47\text{tf} >$$

$V_{\text{nexp}}$  (dispensa a armadura)

**Nervura K2 Trecho E-P (com estribos)**

$$V_{\text{exp}} = 5,58\text{tf}$$

Verificação da dispensa de armadura como laje:

$$b_{\text{wméd}} = 152,4\text{mm}$$

$$b_{\text{wmin}} = 138,6\text{mm}$$

$$f_{\text{ctm}} = 0,3 \cdot 28,61^{2/3} = 2,806$$

$$f_{\text{ctkinf}} = 0,7 \cdot 2,806 = 1,964$$

$$f_{\text{ctd}} = 1,964 / 1 = 1,964$$

$$\tau_{\text{Rd}} = 0,25 \cdot 1,964 = 0,491$$

$$k=1,6 - 0,3111 = 1,289$$

$$\rho_1 = 9,68 / (13,86 \cdot 31,11) = 0,022 > 0,02, \text{ então usar } 0,02$$

$$V_{rd1} = [(0,491/10) \cdot 1,289 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,02)] \cdot 13,86 \cdot 31,11 = 54,46 \text{KN} = 5,56 \text{tf} < V_{\text{nexp}};$$

Armadura de cisalhamento mínima a cada 152,4mm:

$$A_{sw,\text{mín}} \geq 0,2 \frac{2,806}{250,97} \cdot 152,4 \cdot 152,4 = 51,93 \text{mm}^2$$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{28,61}{250}\right) \cdot 28,61 \cdot 138,65 \cdot 311,1 = 295,06 \text{KN} = 30,69 \text{tf}$$

Parcela absorvida pelo concreto:

$$V_c = 0,6 \cdot 1,964 \cdot 138,65 \cdot 311,1 = 50,82 \text{KN} = 5,28 \text{tf}$$

Parcela absorvida pelos estribos:

$$V_{sw} = (16 \cdot 311,1 \cdot 250,97 \cdot 0,9 \cdot 1) / 152,4 = 7,37 \text{KN} = 0,752 \text{tf}$$

Resistência ao cortante:

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = 50,82 + 7,37 = 58,19 \text{KN} = 6,04 \text{tf}$$

Dessa forma as outras nervuras foram calculadas utilizando-se uma rotina em um programa matemático, como também no software TQS, sendo os resultados apresentados nas Tabelas 5.7, que também apresenta como referência os resultados experimentais para comparação com os dados teóricos calculados pela Norma Brasileira.

**Tabela 5.7 - Resultados teóricos para vigas K e L (NBR 6118-2014)**

RESULTADOS EXPERIMENTAIS			RESULTADOS TEÓRICOS (NBR)		
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$V_{nexp}(tf)$	$V_r(tf)$	$V_{nexp}/V_r$	OBS
K1	E-N	4,32	4,47	0,97	S/ESTRIBO
K2	E-P	5,58	6,04	0,92	
K2	E-N	6,25	6,41	0,98	
K2	W-N	6,80	7,06	0,96	
K2	W-P	6,98	6,63	1,05	
K3	E-N	5,17	4,42	1,17	S/ESTRIBO
K3	W-N	5,68	6,32	0,90	
K3	E-P	5,01	5,40	0,93	S/ESTRIBO
L1	E-N	4,25	4,51	0,94	S/ESTRIBO
L1	W-N	4,41	5,97	0,74	
L1	E-P	5,03	4,72	1,07	S/ESTRIBO
L2	E-N	6,77	6,70	1,01	
L2	W-P	7,33	7,27	1,01	
L3	E-N	5,34	4,89	1,09	S/ESTRIBO
L3	W-P	5,00	6,54	0,76	

Como as nervuras K e L apresentam características geométricas compatíveis com a exceção permitida pela NBR ( $b_{wméd} > 12,5$ , e distancia entre eixos das nervuras  $< 90\text{cm}$ ) (NBR-13.2.4.2-b) a resistência máxima para dispensa de armadura pode ser o limite  $V_{Rd1}$ , assemelhando-se a uma laje maciça. Sendo assim o  $V_{Rd1}$  foi comparado com o  $V_n$  experimental, somente quando a nervura não era armada por estribos. Quando existiam estribos o calculo da nervura foi realizado, considerando-a uma viga, sendo a resistência limitada por  $V_{Rd3}$  (ambos identificados como  $V_r$  na tabela 5.7).

Conforme comentado na análise pelas outras normas, as nervuras L1-W-N e L1-W-P apresentaram resultados não satisfatórios nas 3 normas. A Tabela 5.8 apresenta o resultado de todas as amostras que apresentaram coeficientes de segurança abaixo de 1 de forma comum nas 3 normas.

**Tabela 5.8 - Amostras que apresentaram coeficiente de segurança abaixo de 1 nas 3 normas**

NERVURA	REGIÃO DA FALHA	CSA	ACI	NBR	OBS
K1	E-N	0,98	0,93	0,97	S/ESTRIBO
L1	W-N	0,84	0,86	0,74	
L3	W-P	0,88	0,92	0,76	

Sendo assim, para as nervuras ensaiadas sem estribos, o coeficiente de segurança médio foi de 1,02, com 3 dos 6 valores apresentando fator de segurança menor que 1, porém muito próximos a 1 (0,97 - 0,93 - 0,94). Os valores acima de 1 foram para 2 regiões de falha no momento negativo e para 1 região de falha no momento positivo.

Para as nervuras ensaiadas com estribos, o coeficiente de segurança médio foi de 0,92, com 6 dos 9 valores apresentando relações menores que 1. Os 3 valores maiores que 1 foram 1 para regiões de falha do momento negativo e 2 para o momento positivo.

A Tabela 5.9 apresenta os resultados da análise realizada.

**Tabela 5.9 - Análise dos ensaios baseado na NBR 6118-14**

REGIÃO DA FALHA	TIPO DE ARMADURA	N° DE AMOSTRAS (TOTAL)	N° DE AMOSTRAS COM CS>1	N° DE AMOSTRAS COM CS<1	CS MÍNIMO	MÉDIA	DESVIO PADRÃO	COV (%)
NEGATIVA	SEM ESTRIBO	4	2	2	0,94	1,04	0,107	11,37
NEGATIVA	COM ESTRIBO	5	1	4	0,74	0,92	0,107	14,50
POSITIVA	SEM ESTRIBO	2	1	1	0,93	1,00	0,099	10,64
POSITIVA	COM ESTRIBO	4	2	2	0,76	0,94	0,129	16,94

A contribuição do aço, tanto na avaliação da NBR como nas demais normas, resultaram em valores teóricos médios menores que os valores experimentais, confirmando a conclusão de RAVIKUMAR, et. al. (1994) sobre a efetividade do estribo, citados no Capítulo 4. Entretanto, nas normas analisadas, as áreas dos estribos utilizados no ensaio são menores que os recomendados como armadura mínima transversal. Na Norma Brasileira essa diferença é de 50% a 70%.

Nas amostras com estribos que falharam na região negativa e apresentaram coeficiente de segurança menor que 1 (K2-E-N, K2-W-N, K3-W-N, L1-W-N), ocorreram plastificações excessivas (maiores que as permitidas na seção 14 da NBR 6118) reduzindo os valores dos momentos negativos (ver tabela 5.1 e 5.2), permitindo que a fissuração ocorresse na atuação de forças cortantes com valores menores que as resistências calculadas pela NBR, que prescreve o uso de uma armadura mínima de forma a prevenir que a falha não ocorra de forma rápida e súbita, não adotada no ensaio. Como a fissura se abre, a parcela resistida pelo engrenamento de agregados ( $V_{ay}$ ), responsável por quase 50% na contribuição do

$V_c$  (ver Figura 2.14) tende a desaparecer, como também o efeito de pino da armadura longitudinal,  $V_d$  (apesar de não tão significativo quanto  $V_{ay}$ ).

Sendo assim, os resultados teóricos das nervuras sem armação apresentaram resultados não conservadores para o presente estudo. Para as nervuras com armação os resultados teóricos em que, a armadura de flexão negativa não é dimensionada para o momento resultante do cálculo (usada apenas como um armadura de combate a fissuração) e a seção não apresenta taxa de armadura transversal mínima, apesar de não se o objetivo principal desse estudo, não apresentaram valores satisfatórios quando comparados aos resultados experimentais, devendo ser utilizados com cautela quando as nervuras forem dimensionadas nessa situação.

### 5.3 RECOMENDAÇÃO DE COEFICIENTE PARA A NBR-6118-2014

Baseados nas comparações entre os resultados experimentais e teóricos, é possível observar que a Norma Brasileira, dentre as estudadas, é que apresenta resultados menos conservadores.

Os limites para dispensa de armadura para nervuras,  $V_{Rd1}$ , apresentou fatores de segurança favoráveis em 50% dos ensaios em falhas em regiões negativas ou positivas.

A fim de aumentar o fator de segurança, propõe-se, que para a verificação de nervuras de lajes nervuradas sem armadura, o  $V_{Rd1}$  seja multiplicado por um fator = 0,90.

Sendo assim, os novos valores de  $V_{Rd1}$  para as amostras ensaiadas sem estribos, já minorados pelo coeficiente proposto, apresentariam os seguintes coeficientes de segurança conforme a Tabela 5.10

**Tabela 5.10 - Valores de  $V$ , minorados pelo coeficiente proposto**

RESULTADOS EXPERIMENTAIS			RESULTADOS TEÓRICOS MINORADOS(NBR)		
NERVURA	REGIÃO DA FALHA	$V_{exp}(tf)$	$V_r(tf)$	$V_{exp}/V_r$	OBS
K1	E-N	4,32	4,02	1,07	S/ESTRIBO
K3	E-N	5,17	3,98	1,30	S/ESTRIBO
K3	E-P	5,01	4,86	1,03	S/ESTRIBO
L1	E-N	4,25	4,06	1,05	S/ESTRIBO
L1	E-P	5,03	4,25	1,18	S/ESTRIBO
L3	E-N	5,34	4,40	1,21	S/ESTRIBO

## 5.4 APLICAÇÃO DO COEFICIENTE SUGERIDO NA VERIFICAÇÃO DE DISPENSA DE ARMADURA

A seguir, apresentaremos um caso de verificação de uma laje nervurada contínua, de um prédio constituído de 3 níveis de laje, sendo a última a de cobertura. No nível do térreo os pilares encontram-se travados por cintas, e abaixo deste engastados no nível de fundação. Os pavimentos são constituídos de 25 lajes quadradas, de 7,45m x 7,45m entre eixo de vigas de 25cm x 65cm. Os pilares possuem dimensão de 45cm x 45cm, localizado sempre na interseções dos eixos das vigas. As dimensão total da área de um pavimento é de 1387,5625m<sup>2</sup> (37,25mx37,25m). A laje analisada possui como carregamento permanente, além de seu peso próprio, 0,2tf/m<sup>2</sup>. A sobrecarga acidental aplicada é de 0,3 tf/m<sup>2</sup>. O prédio foi lançado no programa TQS e os esforços obtidos foram gerados pelo método de analogia de grelhas. A laje analisada é a laje central do conjunto. O Fck utilizado foi de 30 MPa, aço CA50e CA60 e cobrimento de 25mm para lajes.

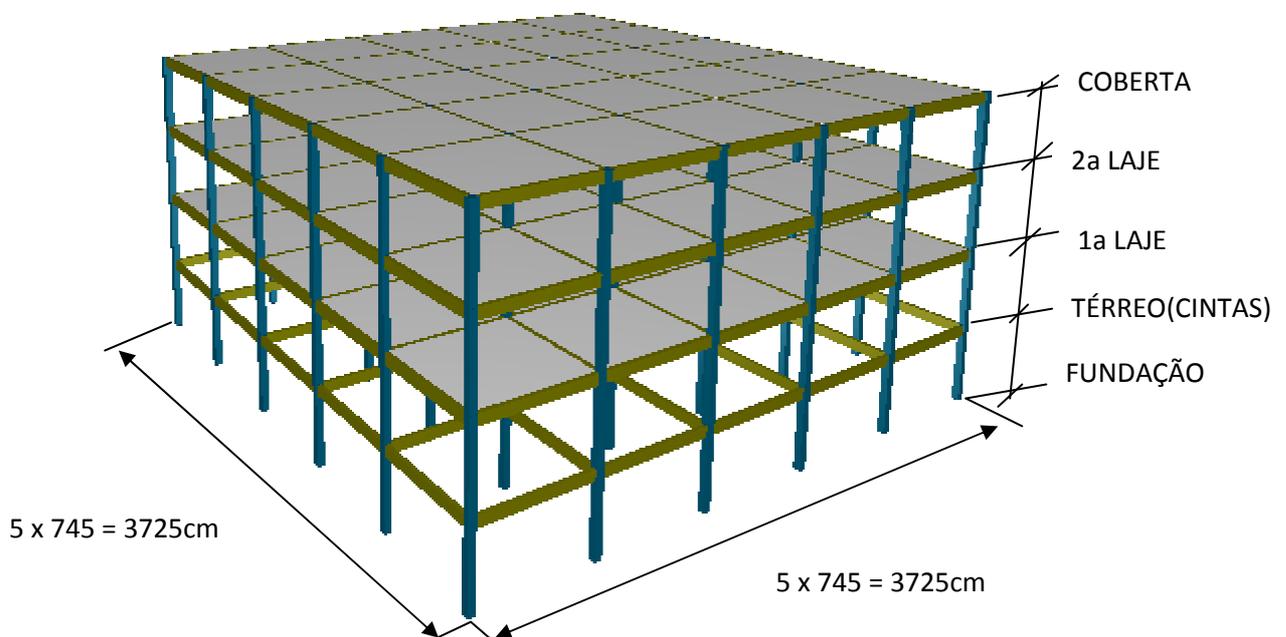


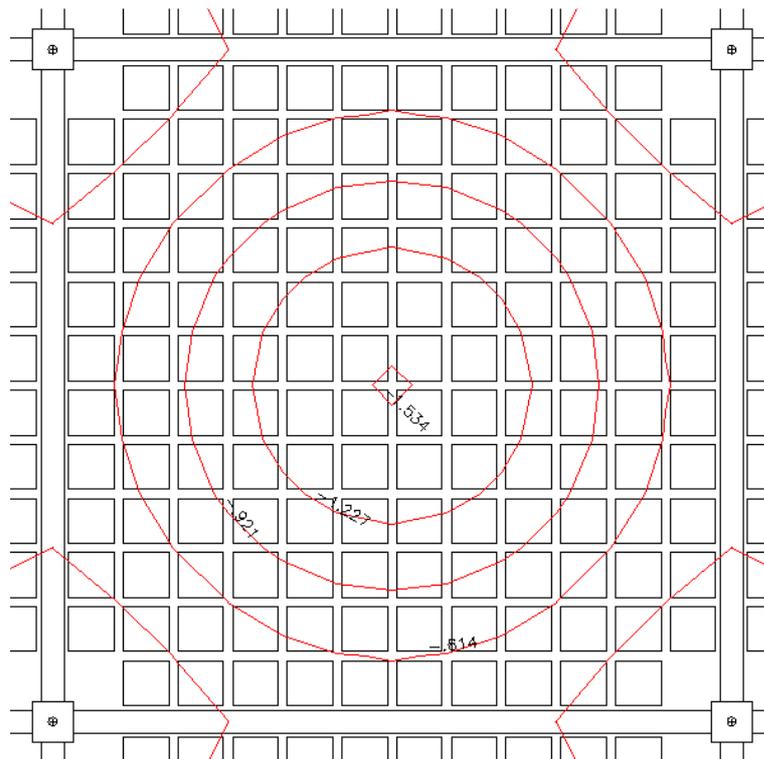
Figura 5.3 - Esquema do prédio analisado



Três modelos foram lançados no TQS a fim de simular situações constantes de projeto. A primeira, sem considerar as plastificações no apoio da laje com a viga. Na segunda foi adotado o coeficiente de 0,75, valor máximo permitido pela NBR 6118-2014. Na terceira simulação, foi adotado um coeficiente de 0,60 simulando uma prática constante de alguns projetos, com forma de diminuir a quantidade de armadura negativa. Primeiramente, foram verificadas as deformações na laje analisada, tomando-se o cuidado para que as deformações não ultrapassassem os limites prescritos na NBR-6118-2014 com o uso dos coeficientes. Também foram verificadas a capacidade de flexão das nervuras, antes de se proceder a análise e considerações sobre o cisalhamento.

### **SIMULAÇÃO 1**

A deformação total na laje, incluindo a deformação lenta simulada pelo programa como 2,5 x deformação imediata, devido a ação de cargas permanentes e acidentais foi de 1,534cm. Sob ação somente da carga acidental foi de 0,568cm. As deformações estão dentro das limitações da NBR-6118-2014.



**Figura 5.6 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 1**



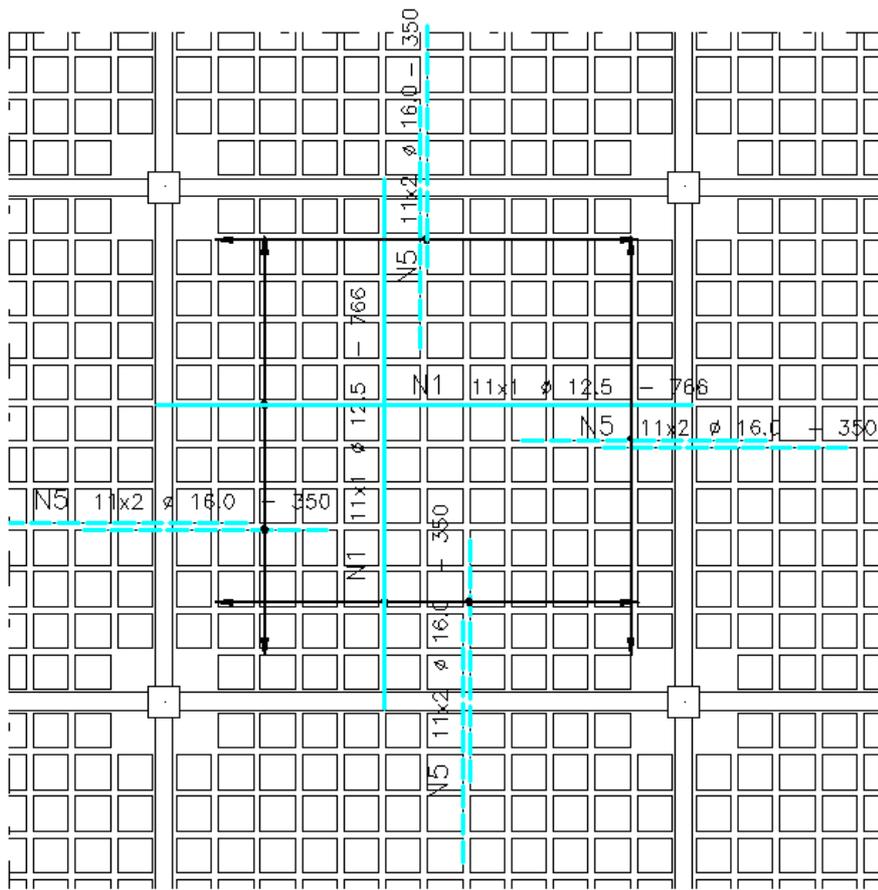


Figura 5.8 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 1

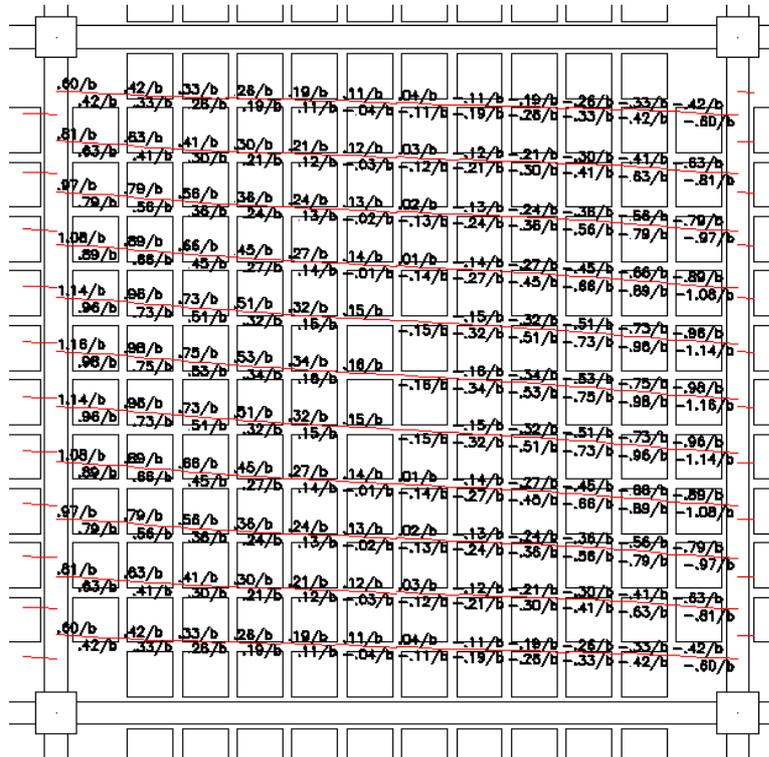


Figura 5.9 - Diagrama de esforços cortantes (tf) - simulação 1

Dessa foram, o limite para dispensa de armadura na região negativa será:

$$d = 20,2\text{cm}$$

$$b_{w\text{min}} = 8,90\text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

$$\rho_1 = 4 / (8,90 \cdot 20,2) = 0,022 > 0,02, \text{ então usar } 0,02$$

$$k = 1,6 - 0,202 = 1,398$$

$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,398 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,02)] \cdot 8,90 \cdot 20,2 \cdot 0,9 = 16,33\text{KN} = 1,67\text{tf}$$

$$V_{k\text{máx}} = 1,67\text{tf} : 1,4 = 1,19\text{tf}.$$

O limite para dispensa de armadura na região positiva será:

$$d = 20,375\text{cm}$$

$$b_{w\text{min}} = 8,90\text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

$$\rho_1 = 1,23 / (8,90 \cdot 20,375) = 0,0067$$

$$k = 1,6 - 0,20375 = 1,396$$

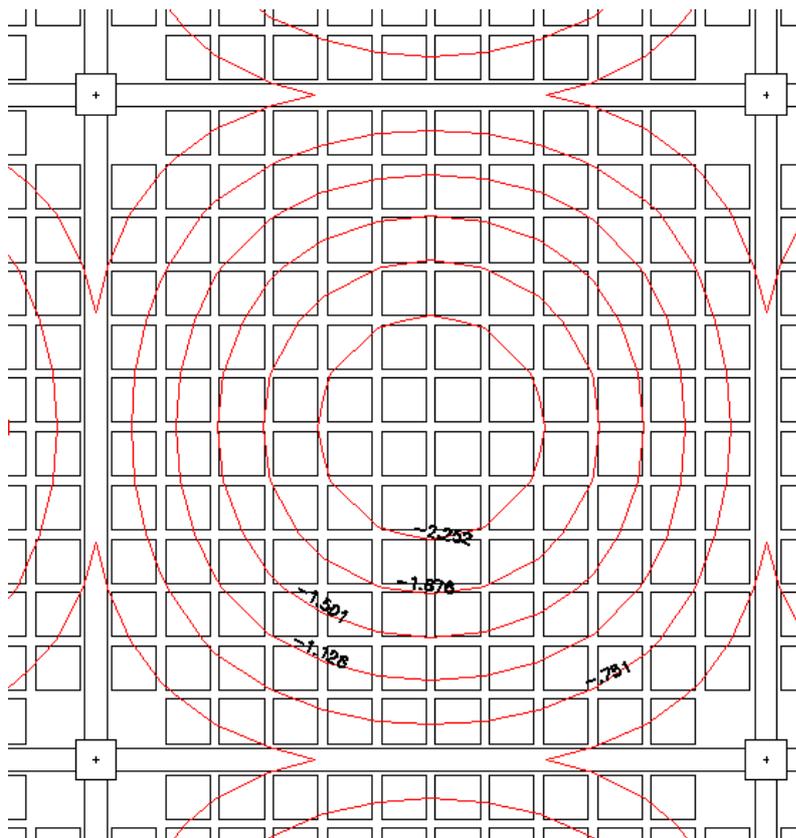
$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,396 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,0067)] \cdot 8,90 \cdot 20,375 \cdot 0,9 = 12,07\text{KN} = 1,22\text{tf}$$

$$V_{k\text{máx}} = 1,22\text{tf} : 1,4 = 0,87\text{tf}.$$

Sendo assim, na simulação 1 o uso da armadura de cisalhamento foi dispensada.

## SIMULAÇÃO 2

A deformação total na laje, incluindo a deformação lenta simulada pelo programa como 2,5 x deformação imediata, devido a ação de cargas permanentes e acidentais foi de 2,25cm. Sob ação somente da carga acidental foi de 0,838cm. As deformações estão dentro das limitações da NBR-6118-2014.



**Figura 5.10 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 2**

Os diagramas de momentos fletores são simétricos nos dois sentidos e consequentemente também as armaduras de flexão dimensionadas para as nervuras, apresentadas nas figuras 5.11 e 5.12.

Os diagramas de esforços cortantes, também simétricos nos dois sentidos são apresentados na figura 5.13. As regiões de momento negativo foram definidas, observando o diagrama de momentos, como a região entre a face da viga e a primeira nervura paralela a essa face, haja visto que o diagrama se inverte antes de chegar na segunda nervura. As demais regiões compreendidas entre esses limites foram consideradas como regiões de momento positivo.

Sendo assim o momento máximo negativo ao longo do eixo da viga foi de 1,04 tfm e o positivo máximo de uma nervura da laje de 1,04 tfm. Apesar da possibilidade de alternar a armadura em função da variabilidade dos momentos, para efeito dessas análises usaremos sempre os momentos máximos para as verificações do cortante, de forma a padronizar as armaduras.

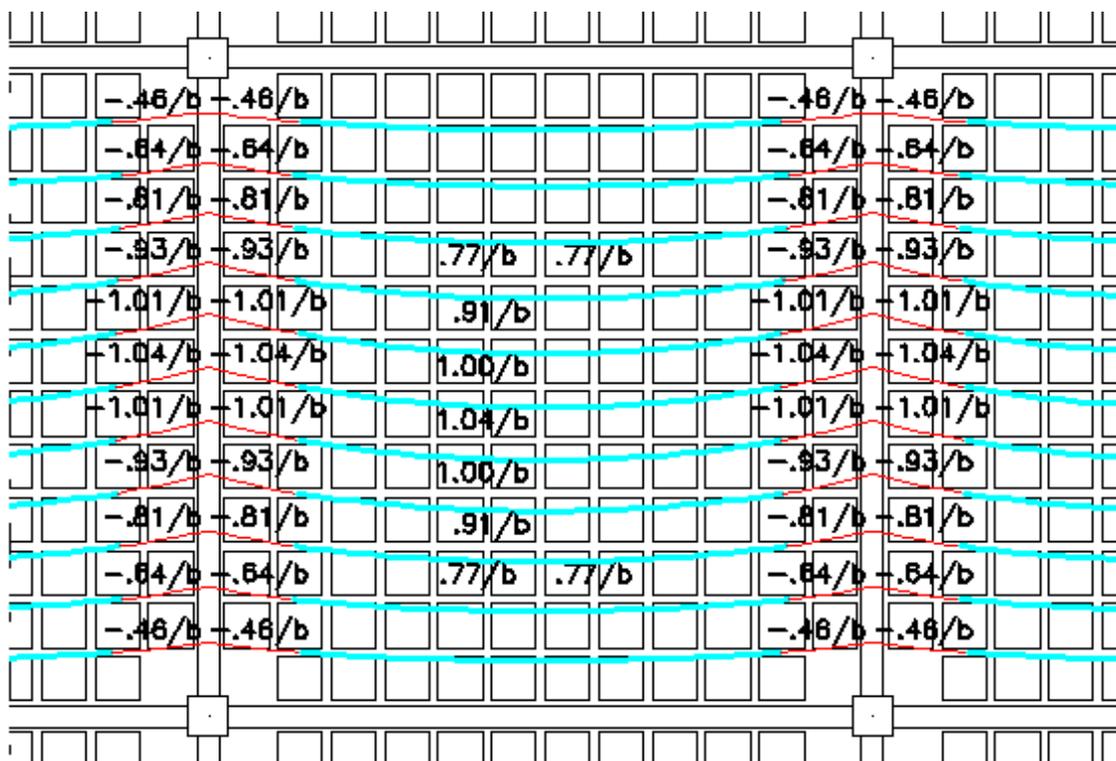


Figura 5.11 - Diagramas de momentos fletores (tfm) - simulação 2

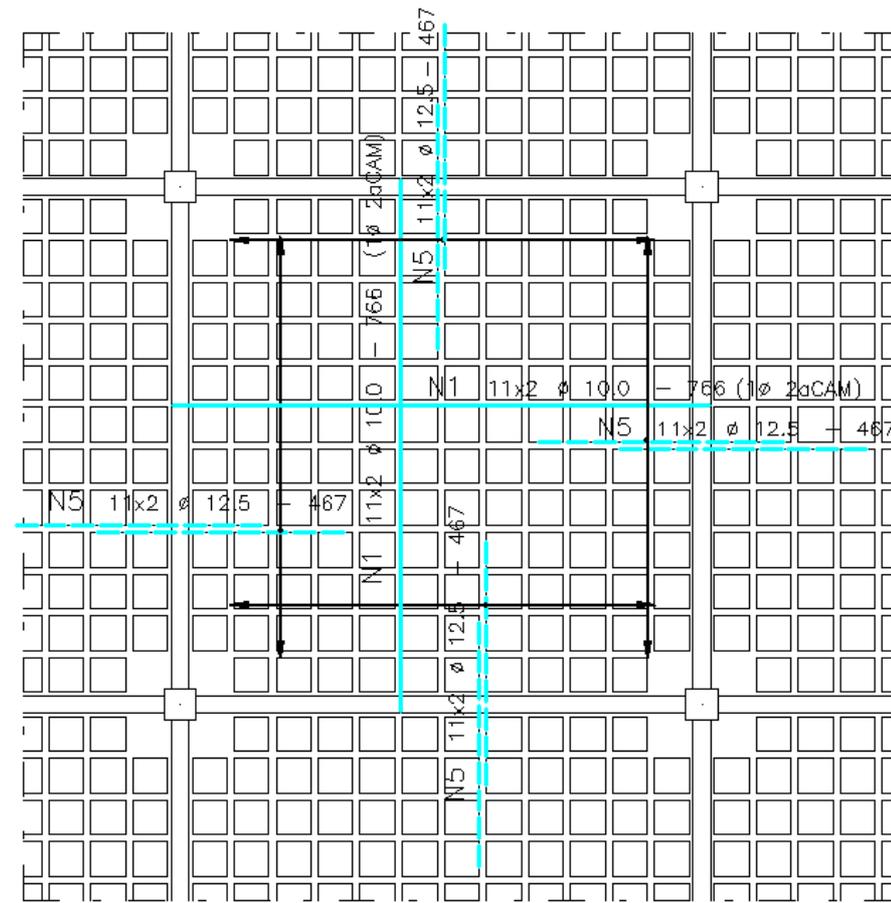


Figura 5.12 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 2

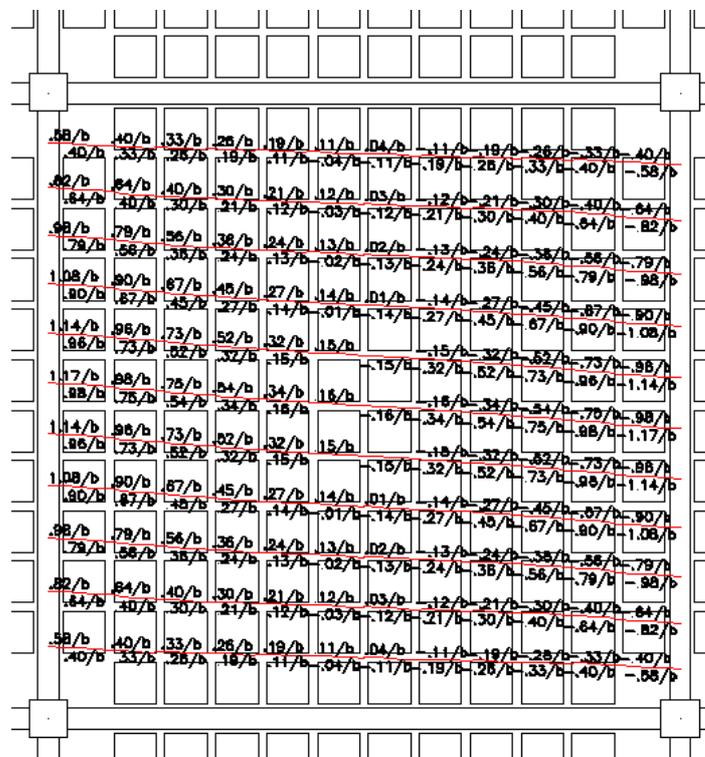


Figura 5.13 - Diagramas de esforços cortantes (tf) - simulação 2

Dessa foram, o limite para dispensa de armadura na região negativa será:

$$d = 20,375$$

$$b_{w\min} = 9,125\text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

$$\rho_1 = 2,46 / (9,125 \cdot 20,375) = 0,01323$$

$$k = 1,6 - 0,20375 = 1,396$$

$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,396 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,01323)] \cdot 9,125 \cdot 20,375 \cdot 0,9 = 14,58\text{KN} = 1,49\text{tf}$$

$$V_{k\max} = 1,49\text{tf} : 1,4 = 1,06\text{tf}.$$

Os espaçamentos entre a viga e a primeira nervura, paralela a viga, variam entre 1,08tf a 1,17tf ( Figura 5.14), e necessitam ser armadas ao cortante como vigas. Então, dessa forma temos (Modelo I):

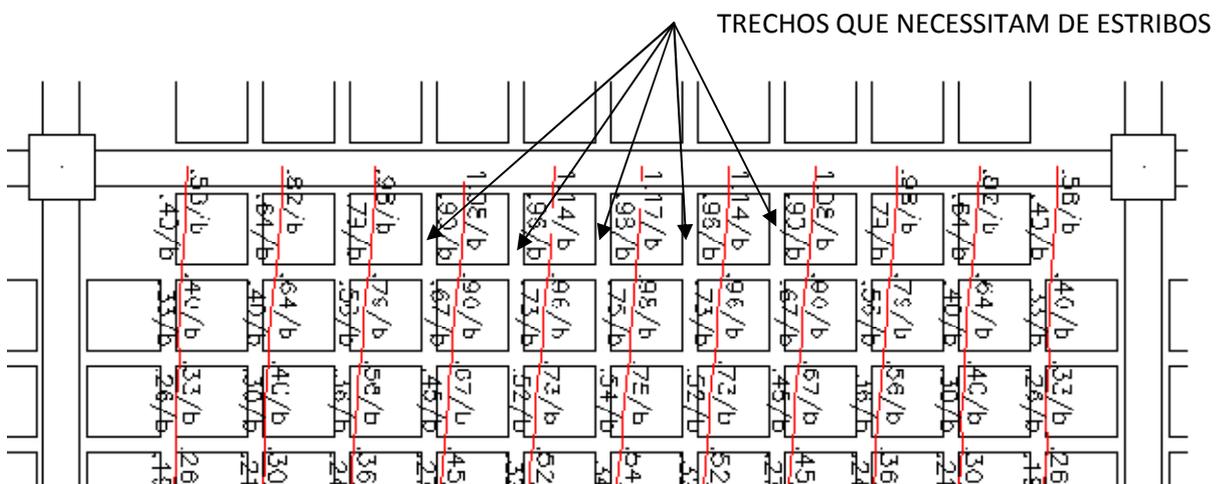


Figura 5.14 - Trechos de momentos negativos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 2

Para estribos CA-60 e espaçamento 12cm (=0,6d), temos:

$$A_{sw,min} \geq 0,2 \frac{2,896}{600} \cdot 102,5 \cdot 120 = 11,87 \text{mm}^2 = \emptyset 5.0 \text{ a cada } 12 \text{cm (1 perna)}$$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot 21,42 \cdot 91,25 \cdot 203,75 = 94,62 \text{KN} = 9,65 \text{tf}$$

Parcela absorvida pelo concreto na resistência ao cortante:

$$V_c = 0,6 \cdot 1,447 \cdot 91,25 \cdot 203,75 = 16,14 \text{KN} = 1,64 \text{tf}$$

Armadura necessária:

Como  $V_d = 1,4 \times 1,17 = 1,64 \text{tf} = V_c$ , a armadura usada deverá ser a mínima.

O limite para dispensa de armadura na região positiva será:

$$d = 19,5 \text{cm}$$

$$b_{wmin} = 9,125 \text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

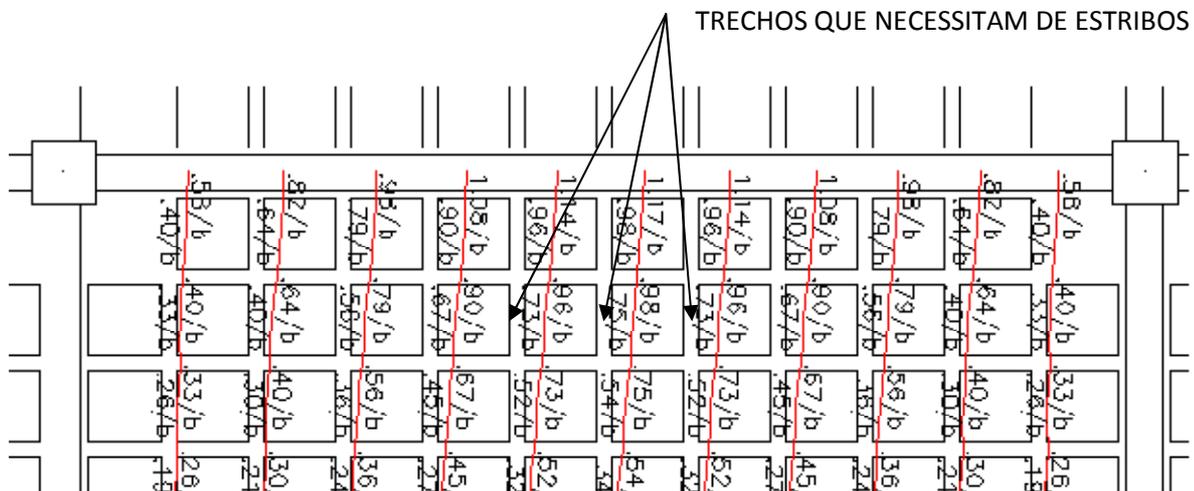
$$\rho_1 = 1,6 / (9,125 \cdot 19,5) = 0,0089$$

$$k = 1,6 - 0,195 = 1,40$$

$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,40 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,0089)] \cdot 9,125 \cdot 19,5 \cdot 0,9 = 12,59 \text{KN} = 1,28 \text{tf}$$

$$V_{km\acute{a}x} = 1,28 \text{tf} : 1,4 = 0,91 \text{tf}.$$

O espaçamento entre a primeira e a segunda nervura, paralela a viga, variam entre 0,96tf a 0,98tf ( Figura 5.15), e necessitam ser armadas ao cortante como vigas. Então, dessa forma temos (Modelo I):



**Figura 5.15 - Trechos de momentos positivos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 2**

Para estribos CA-60 e espaçamento 12cm (=0,6d), temos:

$$A_{sw,min} \geq 0,2 \frac{2,896}{600} \cdot 102,5 \cdot 120 = 11,87 \text{mm}^2 = \phi 5.0 \text{ a cada } 12 \text{cm (1 perna)}$$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot 21,42 \cdot 91,25 \cdot 195 = 90,55 \text{KN} = 9,23 \text{tf}$$

Parcela absorvida pelo concreto na resistência ao cortante:

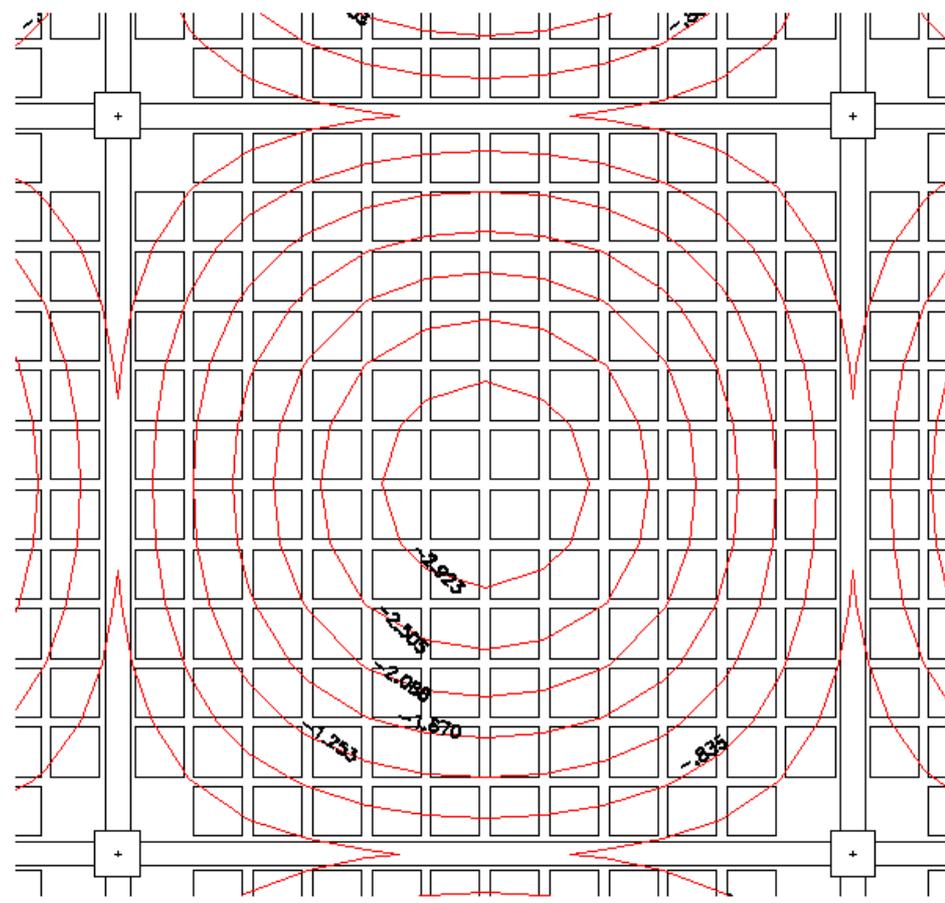
$$V_c = 0,6 \cdot 1,447 \cdot 91,25 \cdot 195 = 15,45 \text{KN} = 1,58 \text{tf}$$

Armadura necessária:

Como  $V_d = 1,4 \times 0,98 = 1,37 \text{tf} < V_c$ , a armadura usada deverá ser a mínima.

### **SIMULAÇÃO 3**

A deformação total na laje, incluindo a deformação lenta simulada pelo programa como 2,5 x deformação imediata, devido a ação de cargas permanentes e acidentais foi de 2,93cm. Sob ação somente da carga acidental foi de 1,09cm. As deformações estão dentro das limitações da NBR-6118-2014.



**Figura 5.16 - Deformação lenta (cm) sob carregamento total na simulação 3**

Os diagramas de momentos fletores são simétricos nos dois sentidos e conseqüentemente também as armaduras de flexão dimensionadas para as nervuras, apresentadas nas figuras 5.17 e 5.18.

Os diagramas de esforços cortantes, também simétricos nos dois sentidos são apresentados na figura 5.19. As regiões de momento negativo, foram definidas, observando o diagrama de momentos, entre a face da viga e a primeira nervura paralela a essa face. As demais regiões compreendidas entre esses limites foram consideradas como regiões de momento positivo.

Sendo assim o momento máximo negativo ao longo do eixo da viga foi de 0,83 tfm e o positivo máximo de uma nervura da laje de 1,25 tfm. Apesar da possibilidade de alternar a armadura em função da variabilidade dos momentos, para efeito dessas análises usaremos sempre os momentos máximos para as verificações do cortante, de forma a padronizar as armaduras.

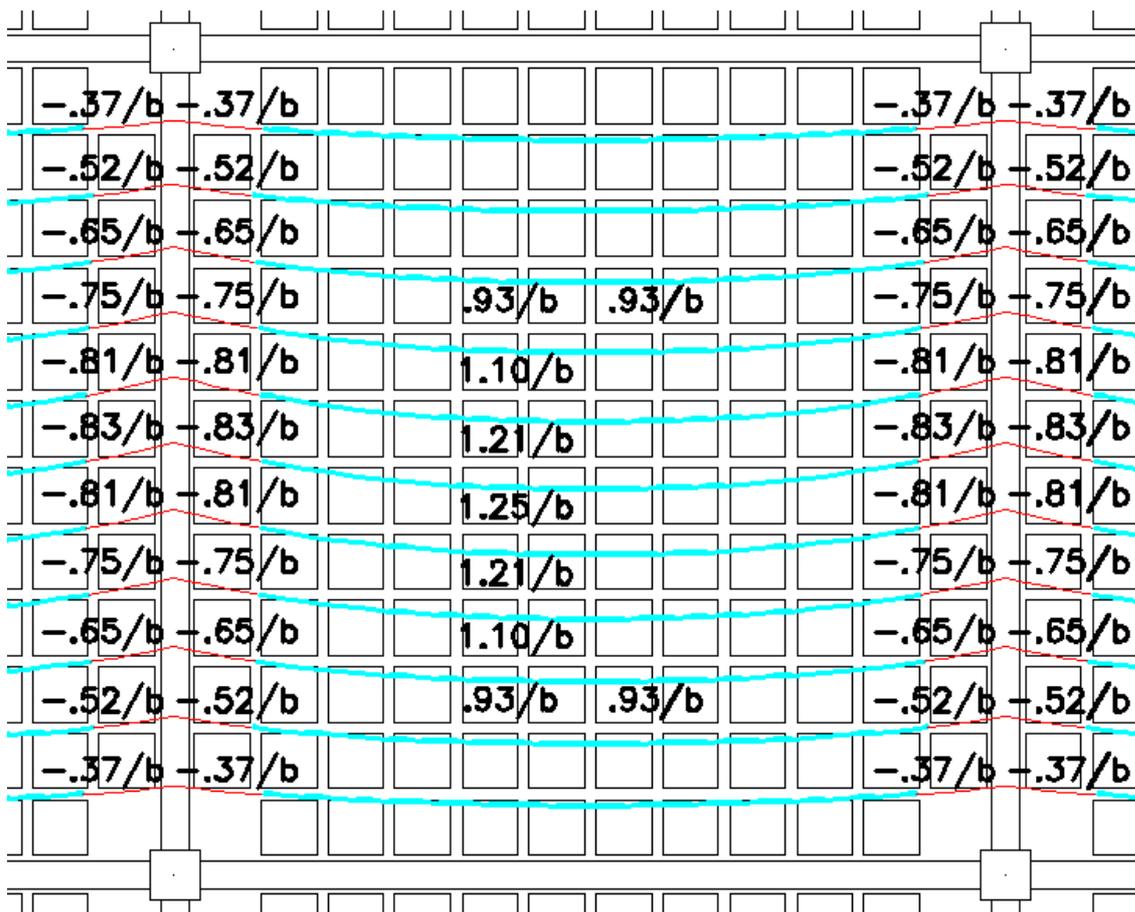


Figura 5.17 - Diagramas de momentos fletores (tfm) - simulação 3

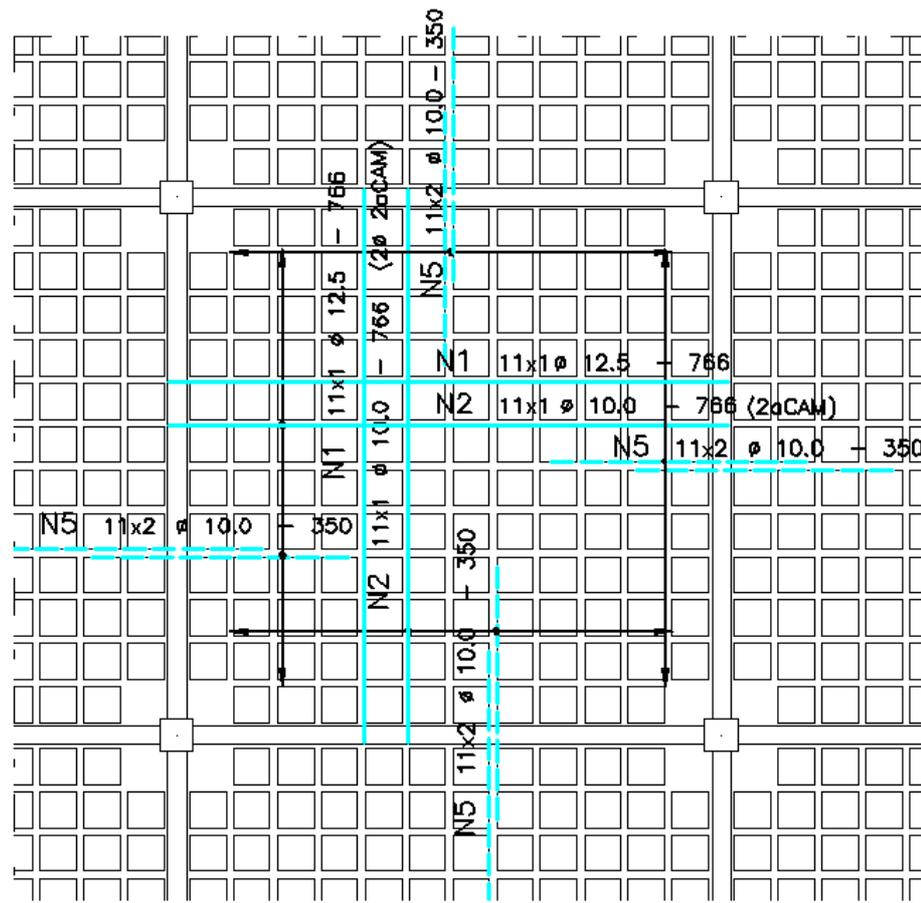


Figura 5.18 - Armadura de flexão dimensionada - simulação 3

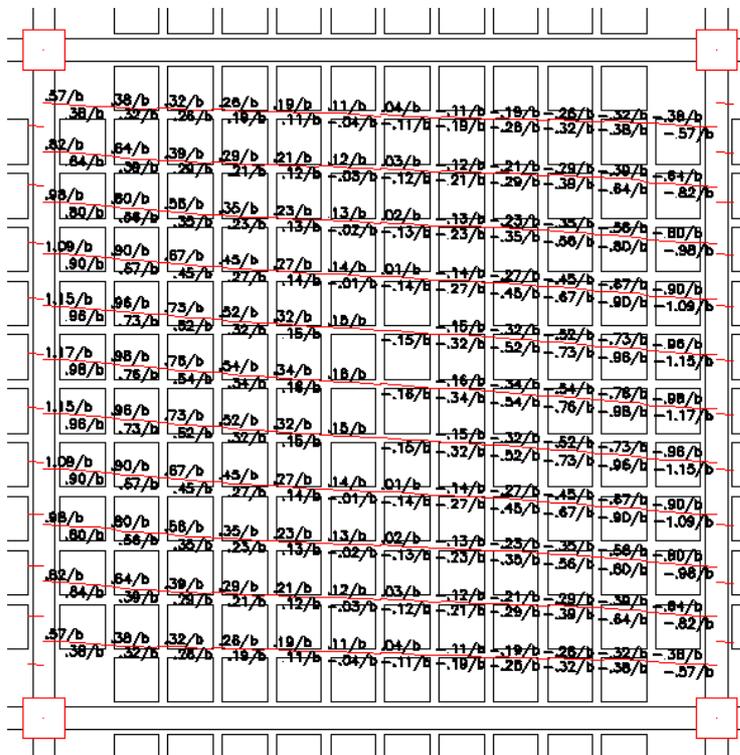


Figura 5.19 - Diagramas de esforços cortantes (tf) - simulação 3

Dessa foram, o limite para dispensa de armadura na região negativa será:

$$d = 20,5$$

$$b_{w\min} = 9,18\text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

$$\rho_1 = 1,6 / (9,18 \cdot 20,5) = 0,0085$$

$$k = 1,6 - 0,205 = 1,395$$

$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,395 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,0085)] \cdot 9,18 \cdot 20,5 \cdot 0,9 = 13,13\text{KN} = 1,34\text{tf}$$

$$V_{k\max} = 1,34\text{tf} : 1,4 = 0,95\text{tf}$$

O primeiro espaçamento entre viga e a primeira nervura, paralela as vigas, variam entre 0,98tf a 1,17tf ( Figura 5.20), e necessitam ser armadas ao cortante como vigas. Então, dessa forma temos (Modelo I):



**Figura 5.20 - Trechos de momentos negativos que necessitam de armadura de cisalhamento - simulação 3**

Para estribos CA-60 e espaçamento 12cm (=0,6d), temos:

$$A_{sw,\min} \geq 0,2 \frac{2,896}{600} \cdot 102,5 \cdot 120 = 11,87\text{mm}^2 = \emptyset 5,0 \text{ a cada } 12\text{cm} \text{ (1 perna)}$$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot 21,42 \cdot 91,8 \cdot 205 = 95,77 \text{KN} = 9,76 \text{tf}$$

Parcela absorvida pelo concreto na resistência ao cortante:

$$V_c = 0,6 \cdot 1,447 \cdot 91,8 \cdot 205 = 16,33 \text{KN} = 1,66 \text{tf}$$

Armadura necessária:

Como  $V_d = 1,4 \times 1,17 = 1,64 \text{tf} < V_c$ , a armadura usada deve ser a mínima.

O limite para dispensa de armadura na região positiva será:

$$d = 19,25 \text{cm}$$

$$b_{w\min} = 9,18 \text{cm}$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot 30^{2/3} = 2,896$$

$$f_{ctkinf} = 0,7 \cdot 2,896 = 2,027$$

$$f_{ctd} = 2,027 / 1,4 = 1,447$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot 1,447 = 0,361$$

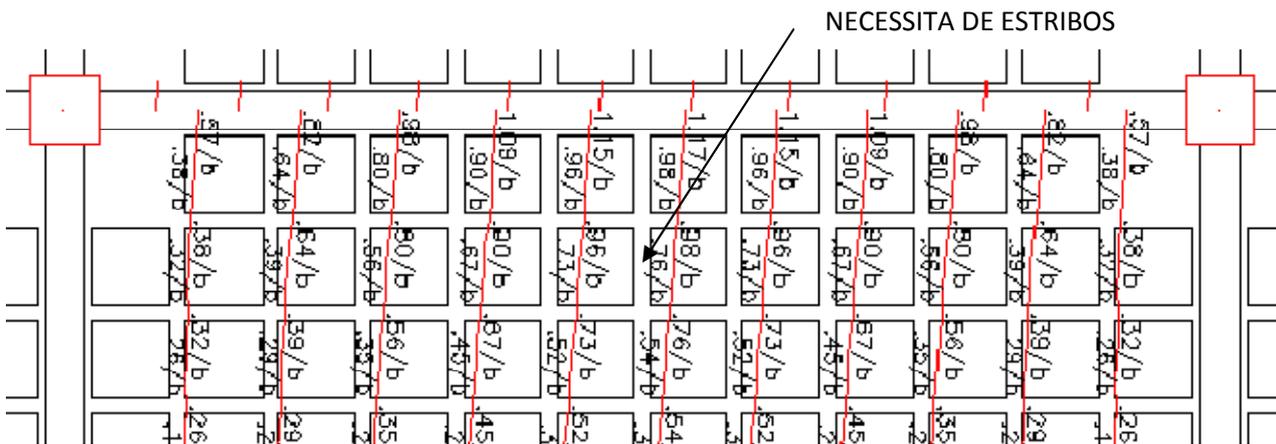
$$\rho_1 = 2,03 / (9,18 \cdot 19,25) = 0,0114$$

$$k = 1,6 - 0,1925 = 1,407$$

$$V_{rd1} = [(0,361/10) \cdot 1,407 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,0114)] \cdot 9,18 \cdot 19,25 \cdot 0,9 = 13,37 \text{KN} = 1,36 \text{tf}$$

$$V_{km\acute{a}x} = 1,36 \text{tf} : 1,4 = 0,97 \text{tf}$$

Um trecho de nervura precisará ser amado, conforme indicado na Figura 5.21.



**Figura 5.21 - Trechos de momentos positivos que necessita de armadura de cisalhamento - simulação 3**

Para estribos CA-60 e espaçamento 12cm ( $=0,6d$ ), temos:

$$A_{sw,min} \geq 0,2 \frac{2,896}{600} \cdot 102,5 \cdot 120 = 11,87 \text{ mm}^2 = \phi 5.0 \text{ a cada } 12 \text{ cm (1 perna)}$$

Resistência máxima ao cortante (verificação da compressão do concreto):

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot 21,42 \cdot 91,8 \cdot 192,5 = 89,93 \text{ KN} = 9,17 \text{ tf}$$

Parcela absorvida pelo concreto na resistência ao cortante:

$$V_c = 0,6 \cdot 1,447 \cdot 91,8 \cdot 192,5 = 15,34 \text{ KN} = 1,56 \text{ tf}$$

Armadura necessária:

Como  $V_d = 1,4 \times 0,98 = 1,37 \text{ tf} < V_c$ , a armadura usada deve ser a mínima.

Como pode ser percebido nas três simulações, sobre efeito do mesmo carregamento, as armaduras de flexão foram dimensionadas de acordo com a variação do momento que, devido aos coeficientes de plastificação, aliviaram os valores negativos e aumentaram os positivos, necessitando de uma maior área de aço na armadura longitudinal inferior. Com um aumento dos coeficientes de plastificação as deformações foram amplificadas, mas mantiveram-se dentro dos limites da NBR-6118-2014 de forma que foi analisada uma situação real de projeto, sendo limitado o coeficiente máximo para plastificação de 0,60 (simulação 3)

Os valor do cortante máximo, variou de 1,16tf na simulação 1 para 1,17tf na simulação 3. O cortante mínimo variou e de 0,60tf na simulação 1 para 0,57 na simulação 3. Os limites para dispensa de armadura em nervuras de lajes nervuradas ( $V_{rd1}$ ) calculados com o coeficiente de minoração sugerido, quando a armadura de flexão negativa estava dimensionada para momentos com plastificações permitidos pela NBR-6118-2014, dispensaram o uso da armadura de cisalhamento na simulação 1. Na simulação 2, coma a diminuição da armadura negativa em 38% foi necessário adotar estribos em 5 trechos de região negativas na nervura e, na simulação 3, com redução de 60% da armadura negativa, 6 regiões necessitaram de estribos. Apesar da necessidade de armadura mínima, ao serem dimensionados como vigas esses trechos devem ser armadas para garantir que, se a peça romper por cisalhamento, a ruptura não ocorra de forma súbita e repentina.

Por isso o efeito da plastificação, como pode ser visto nas simulações apresentadas, deve ser visto com cautela nas regiões de momentos negativos onde há uma diminuição considerável da área na armadura superior, favorecendo o aparecimento de fissuras com valores de cortante menores, diminuindo a contribuição da resistência do engrenamento dos agregados, parcela responsável pela maior parte da contribuição da resistência na contribuição do concreto ( $V_c$ ).

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1 CONCLUSÕES

Apesar do presente trabalho não ter realizado ensaios em nervuras trapezoidais de lajes nervuradas, baseando-se nos ensaios encontrados na literatura, temos que:

1. As prescrições da Norma Canadense (CSA-A.23-04) e da Norma Americana (ACI-318-14), esta última sem a utilização dos 10% como acréscimo no contribuição da resistência do concreto ao cisalhamento ( $V_c$ ), apresentam resultados conservadores para a dispensa de armadura ao cisalhamento, usando o  $b_w$  médio da nervura como a largura efetiva de cálculo; Apesar dos resultados apresentarem médias conservadoras para nervuras armadas com estribos, embora com taxas abaixo da mínima recomendada, foi observado em cada um dessas normas pelo menos uma amostra com resultado acima de 10% comparado com o experimental, alertando a necessidade da adoção das armaduras mínimas prescritas e observação da intensidade da plastificação absorvida pela estrutura ao dimensionar esses elementos.
2. As prescrições da Norma Brasileira (NBR-6118-14) apresentam resultados não conservadores para a verificação da resistência limite para dispensar armadura de cisalhamento nesses elementos ( $V_{rd1}$ ) mas apresenta valores conservadores para o dimensionamento desses elementos ao cisalhamento quando providos de estribos desde que, em nervuras contínuas, a armadura superior sobre o apoio seja dimensionada para o momento negativo de cálculo ou limitada aos coeficientes de redistribuição permitidos na seção 14 (item 14.6.4.3) da NBR-6118-14, não sendo usada apenas como uma armadura de distribuição ou para evitar a fissuração.
3. Sugere-se a adoção de um coeficiente igual a 0,90 para o cálculo de  $V_{rd1}$ , seguindo a seguinte redação para o item 19.4.1 da NBR 6118-2014:

#### *19.4.1 Lajes sem armadura para força cortante*

*As lajes maciças ou nervuradas, conforme 17.4.1.1.2-b), podem prescindir de armadura transversal para resistir as forças de tração oriundas da força*

*cortante, quando a força cortante de cálculo, a uma distância  $d$  da face do apoio, obedecer à expressão:*

$$V_{Sd} \leq \alpha_N \cdot V_{Rd1}$$

*Sendo a força cortante resistente de cálculo dada por:*

$$V_{Rd1} = [T_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] b_w \cdot d$$

*onde*

*[...]*

**$\alpha_N$  = coeficiente de redução da força cortante para nervuras de lajes nervuradas com valor igual a 0,90.**

4. Para o cálculo das resistências ao cisalhamento pela Norma Brasileira, bem como o uso do coeficiente proposto, o valor de  $b_w$  deve ser sempre usado como o menor valor da largura da seção ao longo da altura útil  $d$ , diferentemente das demais normas;
5. A prática de redistribuição do momento negativo além dos valores limites com o uso dos coeficientes indicados na seção 14 da NBR-6118-2014, em nervuras contínuas, deve ser visto com cautela devido a diminuição da resistência ao cisalhamento do elemento. A adoção de uma armadura negativa apenas para combate a fissuração provoca a falta de ductilidade, diminuindo a contribuição do concreto ( $V_c$ ) na falha por cisalhamento.

## 6.2 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

Por fim, deixamos as seguintes recomendações para estudos a serem realizados no futuro:

- Realização de ensaios para determinação da resistência ao esforço cortante em nervuras de lajes nervuradas contínuas, usando as dimensões comerciais existentes no mercado brasileiro e prescrições da NBR;
- Realização de ensaios para determinação da resistência ao esforço cortante em nervuras de lajes nervuradas protendidas contínuas, para avaliação da contribuição da pré-compressão.

## REFERÊNCIAS

AASHTO. LRFD (2012) Bridge design specifications and commentary. 4th ed. American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington D.C, 4th ed, 2012.

ACI 318-14 (2014). Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11) and commentary. American Concrete Institute (ACI).Detroit, MI, Ed. 2014.

BENTZ, E.C.; COLLINS, M.P.(2006) "Development for the 2004 CSA A23.3 Shear Provisions for Reinforced Concrete." Canadian Journal of Civil Engineering, Vol 33, pp 521-534

BENTZ, E.C.; VECCHIO F.J.; COLLINS, M.P.(2006). "Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements." ACI Struct J;103(4):614-24.

COLLINS, M.P.; MITCHELL, D. (1990). "Prestressed concrete structures". Publication, New Jersey, USA, 754 pp.

CEMENT ASSOCIATION OF CANADA, (2006). Concrete design handbook, Third Editionn. Ottawa- Ontaro,

CSA A23.3-04 (2004) Design of Concrete Structures. Standard CAN/CSA A23.3-04, Canadian Standards Association, Mississauga, Ont.

CRSI DESIGN HANDBOOK (2008), tenth edition, Concrete reinforcing steel instituite, 2008.

EUROCODE 2 (2005). European Committee for Standartization. En 1992-1-1. Design of Concrete Structures –Part 1-1: General Rules and Rules for Building. Brussels CE, 2005.

ECP (2008). European Concrete Platform ASBL. Commentary to Eurocode 2. Brussels: Editor Jean Pierre Jacobs, 2008, pp 168

FUSCO, P. B. (2008) Estruturas de concreto: solicitações tangenciais. Editora PINI, São Paulo, EPUSP, pp 328 82

GIONGO, J.S. (2011) "Concreto Armado: Dimensionamento de Elementos Estruturais Fletidos Submetidos a Forças Cortantes – SET 410 Estruturas de Concreto Armado II" Departamento de Estruturas, São Carlos – EESC-USP.

MARTI, P. (1985) "Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design" ACI journal, Vol 82, No. 1, Jan. Feb.1985, pp46-56

MICHAEL P. C.; KUCHMA D., "How Safe are our Large, Lightly Reinforced Concrete Beams, Slabs, and Footings?"ACI Structural Journal, Proceedings, Vol. 96, No. 4, July–August 1999, pp. 482–490.

MAGALHÃES, F.L. (2001) "Estudo de momentos fletores negativos nos apoios de lajes formados por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada", São Carlos, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

NBR 6118 (2014) Projeto de Estruturas de Concreto Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas Rio de Janeiro, RJ.

RAVIKUMAR, S.; DARWIN D.; McCABE S. L.; PASLEY, G. P. (1994) "Shear strength of continuous lightly reinforced concrete joist systems" The National Science Foundation Research Grant No MSM-8816158, Structural Engineering and Engineering Materials SM Reporte No 37, University of Kansas Center for Research, inc., Lawrence, Kansas, 125 pp.

TAYLOR, H. P. J. (1970) "Investigation of Forces Carried across Cracks in Reinforced Concrete Beams in Shear by Interlock of Aggregate," TRA 42.447, Cement and Concrete Association, London, 22 pp.

VECHIO, F.; COLLINS, M.P. (1988) "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subject to Shear Using Modified Compression Field Theory," ACI Structural Journal, May-June 1988, 258-268pp.

VECHIO, F.; COLLINS, M.P.(1982) " The Response of Reinforced Concrete to In plate Shear and Normal Stresses," Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Mar 1982, 322pp.

WALRAVEN, J. C.(1981) "Fundamental Analysis of Aggregate Interlock," Journal of The Structural Division. ASCE, Vol 107, No ST11, Nov 1981, pp. 2245-2270.

WIGHT, J.K. 7th ed. (2016), "Reinforced Concrete: Mechanics and Design". Ed., Pearson Education, Inc., New Jersey, 2016, 1157pp.