

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**RENAN GODOY BURGOS**

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS BIDIMENSIONAIS:  
EXEMPLOS, CÓDIGOS E APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS**

**RECIFE**

**2017**

**RENAN GODOY BURGOS**

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS BIDIMENSIONAIS:  
EXEMPLOS, CÓDIGOS E APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração: Engenharia Civil e Engenharia Estrutural**

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro**

**RECIFE**

**2017**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

B957s      Burgos, Renan Godoy.  
Solução de problemas vibroacústicos bidimensionais: exemplos,  
códigos e aplicações computacionais./ Renan Godoy Burgos - 2017.  
188folhas, Il.; Tab. e Simb.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.  
Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Civil. 2. Interação fluido-estrutura . 3. Análise modal.  
4. Elementos finitos. 5. Diferenças finitas. 6. Vibroacústica. I. Ribeiro,  
Paulo Marcelo Vieira (Orientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-222

**RENAN GODOY BURGOS**

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS BIDIMENSIONAIS:  
EXEMPLOS, CÓDIGOS E APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Aprovado em:** 09 de março de 2017

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Orientador)

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

---

Prof. Dr. Rui Manuel Menezes Carneiro de Barros (Examinador externo)

Universidade do Porto - FEUP

---

Prof. Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes (Examinador externo)

Universidade de Brasília - UnB

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, inicialmente, a minha família: aos meus pais, Nivaldo e Magdala, e aos meus irmãos, Gustavo e Júnior, que não mediram esforços para que chegasse até esta etapa da vida.

À Maria Eduarda, minha namorada, por sempre me apoiar nas minhas escolhas, por me ajudar com seus conselhos, por estar ao meu lado nos momentos de alegria e dificuldade e por me dar forças para seguir adiante. Que nós possamos continuar compartilhando esse amor que cresce a cada dia.

Aos meus amigos do curso de graduação e pós-graduação em Engenharia Civil por estarem presentes e dispostos a me ajudar e me motivar.

À Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) por me proporcionar uma formação profissional e humana.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelos recursos financeiros disponibilizados.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFPE pelos conhecimentos partilhados durante estes dois anos.

Agradecimento especial ao professor Paulo Marcelo Vieira Ribeiro, pela dedicação, paciência, convívio e incentivo como professor e orientador.

“If you can’t explain it simply, you don’t understand it well enough”.

Se você não consegue explicar algo de maneira simples, você não entendeu suficientemente bem.

(Albert Einstein)

## RESUMO

Problemas relacionados à interação fluido-estrutura (IFE) estão presentes em diversos casos práticos na engenharia. Neste sentido, barragens de reservatórios, canais de navegação e pilares de plataformas e aerogeradores *offshore* são apenas alguns exemplos. O efeito produzido pelo fluido sobre a estrutura é de fundamental importância, pois altera o seu comportamento e produz esforços adicionais, sendo assim indispensável uma análise do sistema acoplado a fim de aperfeiçoar o desenvolvimento de projetos. Atualmente, devido aos avanços na indústria de computadores, as ferramentas numérico-computacionais consistem em meios bastante eficientes para a realização destas avaliações. Dentre os métodos numéricos mais utilizados, podem ser citados o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Este trabalho apresenta uma metodologia progressiva para solução do problema vibroacústico e um código próprio para análises modais bidimensionais do sistema acoplado fluido-estrutura, o qual é inicialmente discretizado por MDF, evoluindo para um acoplamento utilizando o MDF e o MEF simultaneamente e finalmente termina apenas com o MEF para geometrias da cavidade acústica e do sólido envolvendo interfaces curvas. O domínio estrutural é governado pelas equações da elasticidade 2D, ao passo que o comportamento do fluido é descrito pela equação de Helmholtz. O código é aplicado para estudos de casos fictícios e reais. Os resultados são validados a partir da utilização de programa comercial, apresentando erros desprezíveis para malhas discretizadas com tamanho razoável e tempo de processamento viável.

**Palavras-chave:** Interação fluido-estrutura. Análise modal. Elementos finitos. Diferenças finitas. Vibroacústica.

## ABSTRACT

Problems related to fluid-structure interaction (FSI) are present in many practical cases in engineering. In this sense, dams, navigation channels and columns of offshore platforms and wind turbines are some examples. The effect generated by the fluid over the structure has a key importance, because it changes its behavior and adds other forces, and so it's indispensable an analysis of the coupled system in order to improve the development of projects. Nowadays, because of the progress in computer industry, the numerical and computational tools are fairly efficient means to perform these evaluations. Among the most used numerical methods, there are the Finite Differences Method (FDM), the Finite Element Method (FEM), the Finite Volume Method (FVM) and the Boundary Element Method (BEM). This work presents a code capable of doing modal analysis, for problems in two dimensions, of the fluid-structure coupled system, which is initially evaluated through FDM, evolving to a coupling using FDM and FEM simultaneously and it finally finishes with only the FEM for geometries of the acoustic cavity and solid containing curved interfaces. The structural domain is ruled by the 2D elasticity equations, while the fluid is ruled by Helmholtz equation. The code is applied to the study of fictional and real cases. The results are compared with those obtained by commercial software, presenting negligible errors for fair sized meshes with viable processing time.

**Keywords:** Fluid-structure interaction. Modal analysis. Finite elements. Finite differences. Vibroacoustic.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1.1</b> – Exemplos de casos práticos envolvendo interação fluido-estrutura. (a) Eclusa do Canal do Panamá (BRANDÃO, 2017), (b) Barragem da Usina Hidrelétrica de Xingó (CHESF, site), (c) Aerogeradores <i>offshore</i> (Portal-energia, site), (d) Reator nuclear (Eletronuclear, site). .....	19
<b>Figura 1.2</b> – Barragem de Koyna, na Índia. (Earthquake-report, site). .....	20
<b>Figura 1.3</b> – Instabilidades em paredes de tanques cilíndricos. (a) Instabilidade do tipo pata de elefante, (b) Instabilidade do tipo diamante. (BARROS, 2004). .....	21
<b>Figura 1.4</b> – Classes de problemas acoplados. (a) Classe I com domínios fisicamente diferentes. (b) Classe II com percolação de meios porosos. (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 1989). .....	21
<b>Figura 1.5</b> – Metodologia progressiva do desenvolvimento do trabalho. ....	27
<b>Figura 2.1</b> – Esforços atuantes em um elemento infinitesimal de viga. ....	31
<b>Figura 2.2</b> – Equilíbrio de um elemento infinitesimal. ....	33
<b>Figura 2.3</b> – Representação do elemento CST. ....	46
<b>Figura 3.1</b> – Sistema acoplado fluido-estrutura. ....	55
<b>Figura 3.2</b> – Condições de contorno para cavidade. ....	55
<b>Figura 3.3</b> – Condição de contorno da interface fluido-estrutura. ....	57
<b>Figura 3.4</b> – Viga desacoplada discretizada pelo MDF. ....	58
<b>Figura 3.5</b> – Viga desacoplada discretizada pelo MEF. ....	60
<b>Figura 3.6</b> – Cavidade desacoplada. ....	63
<b>Figura 3.7</b> – Cavidade desacoplada discretizada pelo MDF. ....	64
<b>Figura 3.8</b> – Cavidade desacoplada discretizada pelo MEF. ....	66
<b>Figura 3.9</b> – Aplicação do MDF na interface fluido-estrutura em direções distintas. ....	69
<b>Figura 3.10</b> – Modelo numérico do problema para o acoplamento MDF-MDF. ....	71
<b>Figura 3.11</b> – Modelo numérico do problema para o acoplamento MEF-MDF. ....	76
<b>Figura 3.12</b> – Elemento de acoplamento fluido-estrutura. ....	83
<b>Figura 3.13</b> – Elemento de acoplamento fluido-estrutura genérico. ....	85
<b>Figura 3.14</b> – Modelo numérico do problema para o acoplamento MEF-MEF. ....	87
<b>Figura 4.1</b> – Sistema fluido-estrutura com geometria arbitrária. ....	93
<b>Figura 4.2</b> – Fluxograma geral do código computacional desenvolvido. ....	94
<b>Figura 4.3</b> – Fluxograma da etapa 1 do código. ....	95
<b>Figura 4.4</b> – Fluxograma da etapa 2 do código. ....	97
<b>Figura 4.5</b> – Fluxograma da etapa 3 do código. ....	99
<b>Figura 5.1</b> – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 1. ....	103
<b>Figura 5.2</b> – Discretização para o acoplamento MDF-MDF do caso 1. ....	104
<b>Figura 5.3</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 1. ....	104
<b>Figura 5.4</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 1. ....	104
<b>Figura 5.5</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o estudo de caso 1. ....	105
<b>Figura 5.6</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 1. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4. ....	106

<b>Figura 5.7</b> – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MDF-MDF para o caso 1.....	108
<b>Figura 5.8</b> – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MEF-MDF para o caso 1.....	110
<b>Figura 5.9</b> – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MEF-MEF para o caso 1.....	112
<b>Figura 5.10</b> – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 2.....	113
<b>Figura 5.11</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 2.....	114
<b>Figura 5.12</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 2.....	114
<b>Figura 5.13</b> – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 2.....	115
<b>Figura 5.14</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o estudo de caso 2. .....	116
<b>Figura 5.15</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 2. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.....	116
<b>Figura 5.16</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o caso 2. (a) Modo 5, (b) Modo 6, (c) Modo 7.....	118
<b>Figura 5.17</b> – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 3.....	119
<b>Figura 5.18</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 3.....	120
<b>Figura 5.19</b> – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 3.....	120
<b>Figura 5.20</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o estudo de caso 3. .....	121
<b>Figura 5.21</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 3. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.....	122
<b>Figura 5.22</b> – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 4.....	125
<b>Figura 5.23</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 4.....	125
<b>Figura 5.24</b> – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 4.....	125
<b>Figura 5.25</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o estudo de caso 4. .....	126
<b>Figura 5.26</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 4. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.....	127
<b>Figura 5.27</b> – Cavidade acústica desacoplada para análise adicional do caso 4. ....	128
<b>Figura 5.28</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o caso da estrutura com rigidez elevada.....	129
<b>Figura 5.29</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o caso da cavidade sem fluido.....	130
<b>Figura 5.30</b> – Eclusa de Tucuruí/PA. (Geopolítica do Petróleo, site).....	131
<b>Figura 5.31</b> – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 5.....	132
<b>Figura 5.32</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 5.....	132
<b>Figura 5.33</b> – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 5.....	133
<b>Figura 5.34</b> – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 5.....	133
<b>Figura 5.35</b> – Gráfico Frequência natural <i>versus</i> Modo de vibração para o estudo de caso 5. .....	134
<b>Figura 5.36</b> – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 5. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.....	135

<b>Figura A.1</b> – Sólido isotrópico submetido a tensões normais. ....	145
<b>Figura A.2</b> – Deformações para tensão em uma direção. ....	145
<b>Figura A.3</b> – Estado Plano de Tensões. ....	148
<b>Figura A.4</b> – Variação do estado de deformação de um elemento infinitesimal. ....	149
<b>Figura A.5</b> – Superposição dos efeitos de deformação. (a) Variação apenas no volume, (b) Variação apenas na forma. ....	150
<b>Figura B.1</b> – Função $f$ qualquer e derivadas. ....	152
<b>Figura B.2</b> – “ <i>Stencil</i> ” para derivadas de segunda ordem em diferenças finitas em duas dimensões. ....	154
<b>Figura C.1</b> – Domínio discretizado em elementos finitos triangulares. ....	155
<b>Figura C.2</b> – Domínio e contorno do problema. ....	156

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1</b> – Condições de contorno usuais para vigas .....	38
<b>Tabela 3.1</b> – Resultados dos diferentes tipos de acoplamento.....	91
<b>Tabela 5.1</b> – Síntese das aplicações computacionais.....	102
<b>Tabela 5.2</b> – Parâmetros para os casos 1 e 2.....	103
<b>Tabela 5.3</b> – Parâmetros para os casos 3, 4 e 5.....	103
<b>Tabela 5.4</b> – Resultados do estudo de caso 1.....	105
<b>Tabela 5.5</b> – Estudo de convergência de malha do acoplamento MDF-MDF para o caso 1.	107
<b>Tabela 5.6</b> – Estudo de convergência de malha do acoplamento MEF-MDF para o caso 1.	109
<b>Tabela 5.7</b> – Estudo de convergência de malha do acoplamento MEF-MEF para o caso 1.	111
<b>Tabela 5.8</b> – Resultados do estudo de caso 2.....	115
<b>Tabela 5.9</b> – Frequências naturais para as configurações acoplada e desacoplada do sistema. .....	118
<b>Tabela 5.10</b> – Resultados do estudo de caso 3. ....	121
<b>Tabela 5.11</b> – Resultados da análise desacoplada do estudo de caso 3. ....	123
<b>Tabela 5.12</b> – Análise da robustez do código desenvolvido.....	124
<b>Tabela 5.13</b> – Resultados do estudo de caso 4. ....	126
<b>Tabela 5.14</b> – Resultados do caso 4 para a modelagem da estrutura com rigidez elevada. ..	129
<b>Tabela 5.15</b> – Resultados do caso 4 para modelagem da cavidade sem fluido. ....	130
<b>Tabela 5.16</b> – Resultados do estudo de caso 5. ....	134
<b>Tabela 5.17</b> – Resultados da análise desacoplada do estudo de caso 5. ....	136
<b>Tabela B.1</b> – Resumo dos operadores de derivadas unidimensional em diferenças finitas. .	153

## LISTA DE SÍMBOLOS

$M$	Momento fletor
$Q$	Esforço cortante
$m$	Massa
$A$	Área da seção transversal
$\rho_e$	Massa específica da estrutura
$v$	Deslocamento na direção $y$
$t$	Tempo
$x$	Direção horizontal
$y$	Direção vertical
$F_y$	Força na direção $y$
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$I$	Momento de inércia baricêntrico
$\bar{m}$	Massa por unidade de comprimento
$dx$	Dimensão infinitesimal em $x$
$dy$	Dimensão infinitesimal em $y$
$\sigma_x$	Tensão normal na direção $x$
$\sigma_y$	Tensão normal na direção $y$
$\tau_{xy}$	Tensão de cisalhamento no plano $xy$
$f_x$	Força de corpo na direção $x$
$f_y$	Força de corpo na direção $y$
$z$	Direção normal ao plano $xy$
$F_x$	Força na direção $x$
$\rho_f$	Densidade do fluido
$p$	Pressão hidrodinâmica
$\vec{V}$	Velocidade de escoamento
$c$	Velocidade de propagação do som no fluido
$\mu$	Coefficiente de atrito viscoso
$div$	Divergente

$grad$	Vetor gradiente
$\omega$	Frequência natural
$i$	Elemento imaginário
$\varphi$	Deslocamento transversal
$w$	Ponto pivô na direção x
$\Delta x$	Passo na direção x
$[K_e]$	Matriz de rigidez global da estrutura
$[M_e]$	Matriz de massa global da estrutura
$P$	Pressão hidrodinâmica independente do tempo
$j$	Ponto pivô na direção y
$\Delta y$	Passo na direção y
$[K_f]$	Matriz de rigidez global do fluido
$[M_f]$	Matriz de massa global do fluido
$u$	Deslocamento na direção x
$N$	Função de forma
$T$	Quantidade de nós do elemento finito
$[N_e]$	Matriz das funções de forma da estrutura
$\Omega$	Domínio do problema
$\Gamma$	Contorno do problema
$\epsilon_x$	Deformação normal na direção x
$\epsilon_y$	Deformação normal na direção y
$\gamma_{xy}$	Deformação por cisalhamento no plano xy
$[D]$	Matriz constitutiva do material
$[B]$	Matriz de derivadas das funções de forma da estrutura
$d$	Deslocamento da estrutura
$[k_e]$	Matriz de rigidez do elemento finito para a estrutura
$\ddot{u}$	Segunda derivada do deslocamento na direção x em relação ao tempo
$\ddot{v}$	Segunda derivada do deslocamento na direção y em relação ao tempo
$\ddot{d}$	Segunda derivada do deslocamento da estrutura em relação ao tempo

$[m_e]$	Matriz de massa do elemento finito para a estrutura
$\bar{c}$	Coefficiente das funções de deslocamento para o elemento CST
$A_e$	Área do elemento triangular
$e$	Espessura do elemento finito
$[N_f]$	Matriz das funções de forma do fluido
$[B_f]$	Matriz de derivadas das funções de forma do fluido
$[k_f]$	Matriz de rigidez do elemento finito para o fluido
$\ddot{p}$	Segunda derivada da pressão em relação ao tempo
$[m_f]$	Matriz de massa do elemento finito para o fluido
$k$	Ponto pivô sobre o contorno
$q$	Vazão
$\vec{n}$	Direção normal ao contorno
$h$	Passo na direção normal ao contorno
$\ddot{\phi}$	Segunda derivada do deslocamento transversal em relação ao tempo
$g$	Ponto pivô genérico
$F_{fluido}$	Força devido à pressão do fluido
$w'$	Ponto na cavidade onde a pressão ali aplicada gera força resultante no ponto pivô da estrutura
$[FS_e]$	Matriz da interação fluido-estrutura originada da estrutura
$k'$	Ponto na estrutura que recebe a força devido a pressão do fluido do ponto pivô
$[FS_f]$	Matriz da interação fluido-estrutura originada do fluido
$[fs]$	Matriz da interação fluido-estrutura do elemento de acoplamento
$[FS]$	Matriz da interação fluido-estrutura global do acoplamento
$L$	Distância entre os nós do elemento de acoplamento
$\alpha$	Ângulo entre o eixo x e a direção axial do elemento de acoplamento medido no sentido anti-horário
$\sigma_z$	Tensão normal na direção z
$\epsilon_z$	Deformação normal na direção z

$\varrho$	Coeficiente de Poisson
$\tau_{xz}$	Tensão de cisalhamento no plano xz
$\tau_{yz}$	Tensão de cisalhamento no plano yz
$\gamma_{xz}$	Deformação por cisalhamento no plano xz
$\gamma_{yz}$	Deformação por cisalhamento no plano yz
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$\beta$	Função desconhecida
$\mathcal{L}$	Operador diferencial linear
$\mathfrak{M}$	Operador diferencial linear
$r$	Função independente de $\beta$
$s$	Função independente de $\beta$
$a$	Parâmetro desconhecido do Método dos Elementos Finitos
$\hat{\beta}$	Função desconhecida aproximada
$R_{\Omega}$	Valor residual no domínio
$R_{\Gamma}$	Valor residual no contorno
$W$	Função de ponderação
$\bar{W}$	Função de ponderação
$C$	Operador com derivada de menor ordem

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	Apresentação, justificativa e motivação	18
1.2	Revisão da literatura	22
1.3	Objetivos	24
1.4	Metodologia	25
1.5	Abrangências e limitações	28
1.6	Organização da dissertação	28
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES GOVERNANTES E ESQUEMAS NUMÉRICOS</b>	<b>30</b>
2.1	Equações governantes para a estrutura	30
2.1.1	<i>Equação de movimento para estruturas reticuladas (vigas de flexão)</i>	30
2.1.2	<i>Equações de equilíbrio da Elasticidade 2D</i>	32
2.2	Equações governantes para o fluido acústico	34
2.3	Solução numérica com o Método das Diferenças Finitas	37
2.3.1	<i>MDF para estruturas reticuladas</i>	37
2.3.2	<i>MDF para o fluido acústico</i>	39
2.4	Solução numérica com o Método dos Elementos Finitos	41
2.4.1	<i>MEF para a estrutura</i>	41
2.4.2	<i>MEF para o fluido acústico</i>	49
<b>3</b>	<b>EXEMPLOS E TÉCNICAS DE ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA</b>	<b>54</b>
3.1	Condições de contorno para a cavidade acústica	55
3.2	Análise modal da estrutura desacoplada	58
3.2.1	<i>Solução pelo MDF</i>	58
3.2.2	<i>Solução pelo MEF</i>	59
3.3	Análise modal da cavidade desacoplada	63
3.3.1	<i>Solução pelo MDF</i>	63
3.3.2	<i>Solução pelo MEF</i>	66
3.4	Acoplamento MDF-MDF	68

<b>3.5</b>	<b>Acoplamento MEF-MDF .....</b>	<b>75</b>
<b>3.6</b>	<b>Acoplamento MEF-MEF .....</b>	<b>82</b>
<b>3.7</b>	<b>Síntese das aplicações .....</b>	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>CÓDIGO COMPUTACIONAL .....</b>	<b>93</b>
<b>4.1</b>	<b>Etapa 1 .....</b>	<b>95</b>
<b>4.2</b>	<b>Etapa 2 .....</b>	<b>97</b>
<b>4.3</b>	<b>Etapa 3 .....</b>	<b>99</b>
<b>4.4</b>	<b>Etapa 4 .....</b>	<b>100</b>
<b>4.5</b>	<b>Etapa 5 .....</b>	<b>100</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS.....</b>	<b>102</b>
<b>5.1</b>	<b>Caso 1.....</b>	<b>103</b>
<i>5.1.1</i>	<i>Análise adicional para o caso 1 .....</i>	<i>106</i>
<b>5.2</b>	<b>Caso 2.....</b>	<b>113</b>
<i>5.2.1</i>	<i>Análise adicional para o caso 2 .....</i>	<i>117</i>
<b>5.3</b>	<b>Caso 3.....</b>	<b>119</b>
<i>5.3.1</i>	<i>Análise adicional para o caso 3 .....</i>	<i>123</i>
<b>5.4</b>	<b>Caso 4.....</b>	<b>124</b>
<i>5.4.1</i>	<i>Análise adicional para o caso 4 .....</i>	<i>128</i>
<b>5.5</b>	<b>Caso 5.....</b>	<b>131</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>137</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>139</b>
	<b>APÊNDICE A – ELASTICIDADE 2D.....</b>	<b>145</b>
	<b>APÊNDICE B – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....</b>	<b>152</b>
	<b>APÊNDICE C – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>155</b>
	<b>APÊNDICE D – CÓDIGO PARA ACOPLAMENTO MDF-MDF ...</b>	<b>159</b>
	<b>APÊNDICE E – CÓDIGO PARA ACOPLAMENTO MEF-MDF....</b>	<b>167</b>
	<b>APÊNDICE F – CÓDIGO PARA ACOPLAMENTO MEF-MEF ....</b>	<b>177</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Apresentação, justificativa e motivação

Diversos sistemas físicos na engenharia são formados por um sólido atuando em conjunto com um fluido. Tal circunstância gera problemáticas complexas. A solução de problemas desta natureza não está relacionada apenas à análise de cada meio separadamente. Para se ter o comportamento real destes sistemas, deve-se modelar o fenômeno de maneira acoplada. Isto posto, vem a importância do estudo da interação fluido-estrutura (IFE).

Segundo Sigrist (2015), interação fluido-estrutura está relacionado à dinâmica acoplada de estruturas em contato com um fluido. Sousa Jr. (2006) aponta que, dentre os vários casos práticos relacionados a este assunto, pode-se destacar a interação dinâmica de uma barragem com o seu reservatório, em que, durante a ação de um sismo, o fluido pode gerar esforços devido às pressões hidrodinâmicas no paramento da barragem, gerando uma nova configuração de tensões e estabilidade na estrutura. A interação entre uma eclusa e o fluido envolvido por ela também pode ser incluída neste problema, em que se forma uma cavidade acústica confinada por muros de concreto.

Fahy (2001) cita outros casos na engenharia, como reatores nucleares resfriados a água, tanques propulsores de foguetes, plataformas “offshore” e domos de sonar submersos. Embora os sistemas reais apresentem uma geometria mais complexa, o estudo de formas mais simples fornece uma base para o entendimento qualitativo e o desenvolvimento de soluções alternativas.

A Figura 1.1 a seguir ilustra alguns exemplos de casos práticos na engenharia envolvendo interação fluido-estrutura.

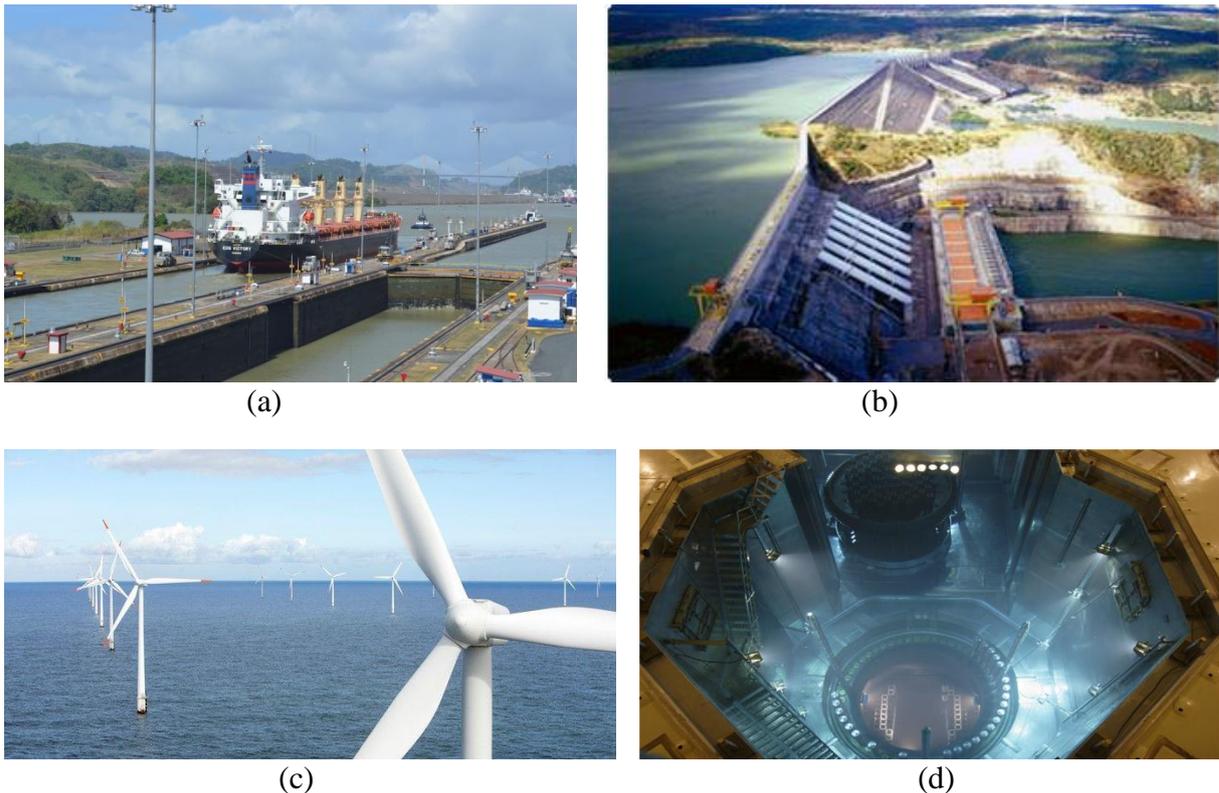


Figura 1.1 – Exemplos de casos práticos envolvendo interação fluido-estrutura. (a) Eclusa do Canal do Panamá (BRANDÃO, 2017), (b) Barragem da Usina Hidrelétrica de Xingó (CHESF, site), (c) Aerogeradores *offshore* (Portal-energia, site), (d) Reator nuclear (Eletronuclear, site).

Souza (2007) aponta que o avanço tecnológico serviu para impulsionar o desenvolvimento do setor energético e, devido à influência do elevado investimento neste mercado, pesquisas na área de interação fluido-estrutura na análise de barragens cresceram gradativamente. Além disso, o ramo nuclear foi um dos que mais se beneficiaram com estes estudos.

Ocorreu um grande aumento também em pesquisas relacionadas à aerodinâmica e à modelagem estrutural de aerogeradores *offshore*. Segundo Hsu e Basilevz (2012), a maioria das simulações aerodinâmicas na engenharia são baseados em métodos de baixa fidelidade. Porém, em ambientes *offshore*, os aerogeradores são submetidos a condições ambientais mais severas, com ventos mais fortes (motivo de atração para instalação de turbinas nestes locais), além do contato das torres com a água, o que recentemente levou ao estudo da estrutura por completo, envolvendo uma metodologia com acoplamento para a interação fluido-estrutura.

Obras que envolvem casos relacionados à interação fluido-estrutura são, em sua maioria, de grande porte, e acidentes gerados por elas podem resultar em enormes tragédias, como ocorreu em Koyna, na Índia. Em dezembro de 1967, ocorreu um terremoto na região

devido à barragem construída no local, em que a enorme pressão de água no reservatório induziu o acontecimento de tremores. A área onde a barragem foi construída era considerada estável e praticamente sem riscos de ocorrência de sismos. Os abalos sísmicos atingiram 6,3 na escala Richter e foram sentidos a 230 km de distância do epicentro, matando cerca de 180 pessoas e deixando várias famílias desabrigadas, além de ter causado danos na própria barragem.



Figura 1.2 – Barragem de Koyna, na Índia. (Earthquake-report, site).

Barros (2004) cita ainda danos causados em tanques cilíndricos durante sismos. O autor destaca duas instabilidades nas paredes da estrutura. Uma delas é a encurvadura do tipo pata de elefante (*elephant-foot bulge*), que está indicada na Figura 1.3a, uma instabilidade elasto-plástica por plastificação das paredes do tanque devido a tensões de compressão e tensões de membrana, estas associadas às pressões estáticas e hidrodinâmicas. A outra é a encurvadura do tipo diamante (*diamond buckling by shell-crippling*), exposta na Figura 1.3b, que é uma instabilidade elástica causada principalmente por tensões axiais de compressão das paredes.

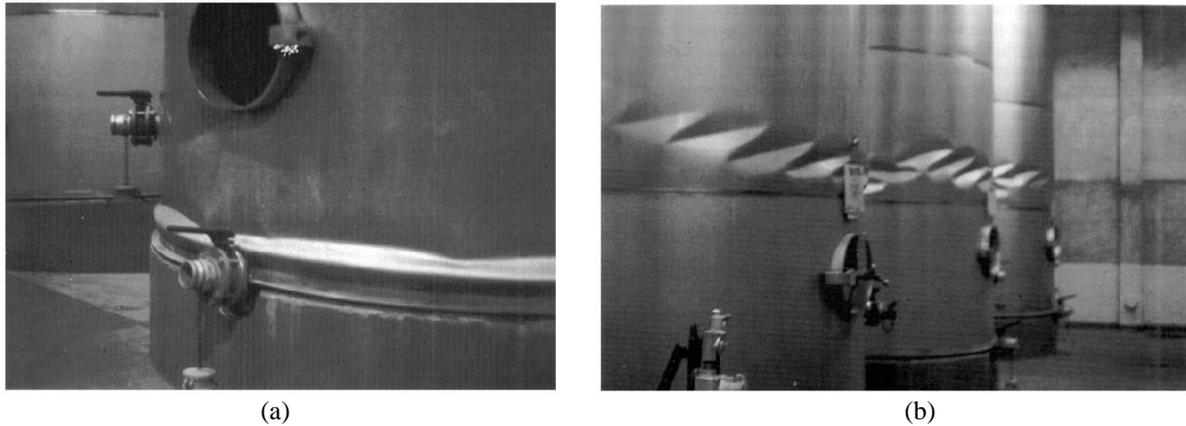


Figura 1.3 – Instabilidades em paredes de tanques cilíndricos. (a) Instabilidade do tipo pata de elefante, (b) Instabilidade do tipo diamante. (BARROS, 2004).

Zienkiewicz e Taylor (1989) apresentam duas classes de problemas acoplados. Na classe I estão inseridos os casos em que o acoplamento entre diferentes domínios ocorre na região de interface por uma imposição da condição de contorno, como no caso de problemas de interação fluido-estrutura e de interação estrutura-estrutura. Já os problemas da classe II se caracterizam pela superposição dos domínios de maneira parcial ou total, com o acoplamento ocorrendo nas equações diferenciais que governam os diferentes fenômenos físicos, como no caso da percolação em meios porosos. A Figura 1.4 a seguir ilustra essas duas classes.

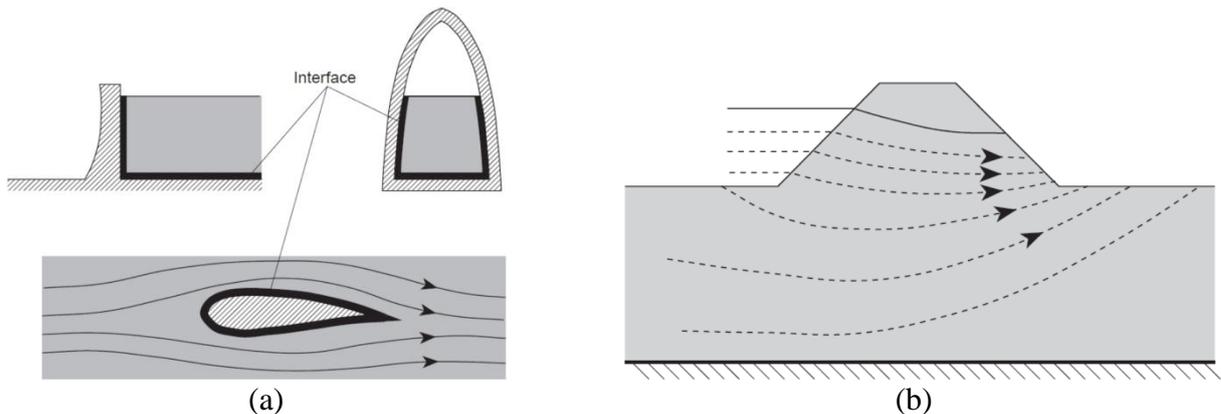


Figura 1.4 – Classes de problemas acoplados. (a) Classe I com domínios fisicamente diferentes. (b) Classe II com percolação de meios porosos. (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 1989).

Fatos como estes contribuem para o desenvolvimento de uma metodologia progressiva de solução do problema de interação fluido-estrutura. O foco do trabalho é problemas da classe I com análises modais de sistemas vibroacústicos bidimensionais.

## 1.2 Revisão da literatura

O estudo da interação entre uma estrutura e um fluido pode ser encontrado em diversos trabalhos de vários autores diferentes. Ribeiro (2010) destaca que este campo de pesquisa pode ser dividido em duas categorias: vibroacústica e interação fluido-estrutura. Na primeira, há o contato entre o sólido e um fluido acústico, em que se analisam problemas como radiação e transmissão de som e conforto acústico em cabines. Já na segunda categoria são estudados, por exemplo, casos de reservatórios e vasos de reatores nucleares.

Sobre a vibroacústica, é indispensável falar sobre o clássico trabalho “The Theory of Sound” de Rayleigh (1945) composto de dois volumes em que ele reuniu as mais valiosas contribuições da ciência sobre o assunto, as quais só poderiam ser encontradas espalhadas em periódicos e em várias línguas diferentes, sendo assim praticamente inacessíveis para grande parte do público. Este texto cobre desde a vibração de sistemas em geral até considerações mais detalhadas de sistemas especiais, como cordas esticadas, barras, membranas e placas.

Pretlove (1965) estudou cavidades acústicas rígidas contendo um painel flexível, cujas frequências e modos de vibração serviram para verificar os efeitos do acoplamento, e obteve soluções analíticas com a utilização de modos acústicos aproximados. Gerges e Fahy (1977) estudaram a resposta de cascas cilíndricas esbeltas quando são submetidas a excitações internas de natureza acústica. Já Dowell et al. (1977) solucionou o problema acoplado baseado na técnica de expansão do campo acústico e dos deslocamentos estruturais em termos dos seus modos de vibração desacoplados. Segundo Gerges (2000), devido ao avanço tecnológico e a invenção de computadores mais potentes, a solução de problemas acústicos mais complexos tornou-se possível a partir da implementação de métodos numéricos nas análises.

A categoria de interação fluido-estrutura é de maior importância para esta dissertação. Problemas desta natureza foram inicialmente abordados de forma analítica e muitas vezes associados a resultados experimentais. Trabalhos clássicos como os de Westergaard (1933), Lamb (1945) e Abramson (1967) podem ser citados. O conceito de Massa Adicional e Matriz de Transferência pode ser destacado por permitir uma análise rápida e simplificada de vários problemas dessa categoria. O texto de Westergaard (1933) também merece destaque, pois foi o primeiro a falar da interação dinâmica existente entre uma barragem de concreto e o seu

reservatório com a proposta de uma solução analítica para o campo de pressões hidrodinâmicas produzido pelo movimento do sólido em direção ao fluido.

Há duas maneiras clássicas para abordar o problema de interação fluido-estrutura, que são através das formulações Lagrangeanas e Eulerianas. Na primeira, tanto para a estrutura quanto para o fluido, a variável utilizada é o deslocamento. O fluido, no caso, é modelado como um sólido elástico sem resistência ao cisalhamento (SOUSA JR., 2006). Autores como Zienkiewicz e Bettles (1978) e Barbosa (1998) trabalharam com esta concepção, porém ela não se tornou um foco para os pesquisadores.

A principal vantagem da formulação Lagrangeana é que as matrizes do sistema acoplado são simétricas, facilitando sua implementação em códigos computacionais, além de que códigos feitos para estrutura são facilmente adaptados. Ademais, a condição do acoplamento é imposta pela igualdade de deslocamentos dos dois meios na interface fluido-estrutura. Um ponto negativo deste método é a grande quantidade de graus de liberdade e de falsos resultados de modos de vibração, estes que podem ser eliminados através da implementação de um parâmetro de penalidade, como foi feito por Hamdi, Ousset e Verchery (1978).

Já na formulação Euleriana são utilizadas variáveis escalares para o fluido, como pressão, potencial de velocidades e potencial de deslocamentos. Sua principal vantagem em relação ao método anterior é a menor quantidade de graus de liberdade gerada para o fluido. Porém, esta concepção resulta em matrizes assimétricas, o que dificulta a solução do problema pois não se pode aplicar algoritmos padrões de sistemas simétricos.

Um dos primeiros trabalhos que utilizaram a abordagem Euleriana foi o de Zienkiewicz e Newton (1969), os quais adotaram o deslocamento  $u$  como variável para a estrutura e a pressão hidrodinâmica  $p$  como variável para o fluido, sendo assim chamada de formulação U-P. Este método foi a base para o desenvolvimento desta dissertação, em que todos os resultados do código em Elementos Finitos criado foram obtidos a partir desta formulação.

Alguns autores propuseram formas para eliminar a não-simetria das matrizes. Zienkiewicz e Newton (1969) sugeriram a simetrização do problema por meio de algebrismo no sistema de equações. Já Everstine (1981) optou por uma mudança de variável do fluido, trocando a pressão hidrodinâmica pelo potencial de velocidades, o que resultou na formulação

U- $\phi$ . Porém, esta alteração impedia a solução de problemas estáticos. Olson e Bathe (1985) resolveram esta questão acrescentando a variável de pressão estática  $P_0$ , e assim surgiu a formulação simétrica U- $\phi$ - $P_0$ .

Barros (2004) detalhou metodologias aplicadas a análises de tanques apoiados em sua base sobre a ação de sismos, predominantemente horizontais. O autor desenvolveu sua pesquisa baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) a partir de duas abordagens. Em uma delas, utilizou o método de Ritz juntamente com o MEF aplicados a uma solução analítica do sistema tanque-fluido. Na outra, implementou o MEF para todo o sistema, em que o fluido foi modelado como um sólido degenerado. Para as duas formulações foi possível determinar a resposta sísmica.

Trabalhos mais recentes, envolvendo uma abordagem analítica e com métodos numéricos, foram de maior interesse para esta dissertação. Morais (2000) utilizou uma variável para a elevação do nível de superfície livre em seus estudos (formulação U-II-P- $\eta$ ). Silva e Pedroso (2006) apresentam desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas para problemas unidimensionais, em que o acoplamento entre o sólido e a cavidade é feito a partir do MEF ou do Método das Diferenças Finitas (MDF), utilizando cada um deles separadamente. Sousa Jr. (2006) também resolve com os mesmos métodos de forma separada, porém evoluindo para problemas bidimensionais. Já Ribeiro (2010) cria o método “pseudo-acoplado” para resolver analiticamente cavidades acústicas bidimensionais e aplica seus conceitos para solução e validação de problemas de interação barragem-reservatório. Mendes (2013), através de uma metodologia progressiva, estudou casos que contemplam aspectos de interação fluido-estrutura aplicados a barragens em arco, a partir do uso de *software* comercial para desenvolver as análises.

### 1.3 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é o desenvolvimento de um código computacional próprio em elementos finitos capaz de solucionar problemas de interação fluido-estrutura em duas dimensões, fazendo análises modais do sistema acoplado ou desacoplado, para quaisquer geometrias da estrutura e cavidade acústica. Deseja-se também sistematizar os conceitos

existentes para resolver situações utilizando acoplamento MDF-MDF, MEF-MDF e finalmente MEF-MEF. Além disso, é igualmente importante fazer aplicação em estudos de casos reais e fictícios, comparando os resultados com aqueles de programas comerciais, para mostrar a viabilidade do código desenvolvido.

Os objetivos específicos da dissertação são indicados abaixo:

- Desenvolver uma técnica para a realização do acoplamento MDF-MDF para estruturas reticuladas e cavidade retangular;
- Desenvolver uma técnica para a realização do acoplamento MEF-MDF para estruturas bidimensionais e cavidade retangular;
- Desenvolver uma técnica para a realização do acoplamento MEF-MEF para estrutura e cavidade com geometrias arbitrárias, envolvendo interfaces curvas;
- Realizar a análise modal do sistema fluido-estrutura acoplado para os três tipos de acoplamento abordados como também de cada meio de forma desacoplada;
- Aplicar o código computacional desenvolvido para casos reais e fictícios e validar os resultados a partir de *software* comercial;
- Realizar análises adicionais para medir a capacidade do código, aprimorar a interpretação dos resultados e aperfeiçoar o entendimento sobre o fenômeno.

## 1.4 Metodologia

Para este trabalho, é realizada uma pesquisa do tipo exploratória a nível de objetivos, uma vez que os estudos de caso e resultados estimulam a compreensão do fenômeno em estudo e a construção de hipóteses. A nível de procedimentos, esta é uma pesquisa experimental com estudos de caso, onde, segundo Gil (1991), consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo e definir as formas de controle e de observação dos efeitos que as variáveis produzem no objeto.

O desenvolvimento do código computacional ocorreu gradativamente, solucionando problemas inicialmente mais simples e evoluindo para contemplar casos mais complexos, sempre em duas dimensões, com a ajuda do *software* MATLAB. É implementada a formulação Euleriana U-P de Zienkiewicz e Newton (1969). Esta é uma abordagem simples,

amplamente testada e apresenta bons resultados, sendo semelhante à formulação usada em programas comerciais (SOUSA JR., 2006).

Primeiramente, foi utilizado o Método das Diferenças Finitas (MDF) para modelar o sistema composto por uma estrutura reticulada acoplada a uma cavidade retangular, sendo aplicado na solução de problemas de interação viga-cavidade.

Após essa etapa, o código evoluiu para incorporar estruturas 2D em contato com o fluido. Para isto, foi necessário utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF) para modelar o sólido, o qual é acoplado a uma cavidade retangular modelada, ainda, pelo MDF. Assim, foi feito o acoplamento de uma forma inusitada e não muito comum na literatura, que é a utilização de dois métodos numéricos diferentes simultaneamente. Nesta fase, o código consegue resolver problemas mais complexos, como o caso de uma barragem ou eclusa, porém ainda com a interface fluido-estrutura reta.

Finalmente, houve a evolução para problemas em duas dimensões para quaisquer geometrias da estrutura e cavidade acústica. Para isto, tanto o fluido quanto a estrutura foram modelados pelo MEF, capaz de solucionar casos com a interface fluido-estrutura curva. O código final faz análises modais tanto do sistema acoplado quanto de cada meio de forma isolada, ou seja, estrutura ou cavidade descacoplados.

É utilizado o *software* comercial GiD versão 12.0.7 para realização do pré-processamento, ou seja, geração da malha em elementos finitos tanto da estrutura quanto da cavidade acústica, e seus dados são inseridos no código desenvolvido. Também se conta com a ajuda do programa ANSYS versão 14.5 para validação dos resultados encontrados.

A Figura 1.5 a seguir ilustra a metodologia progressiva do desenvolvimento do trabalho.

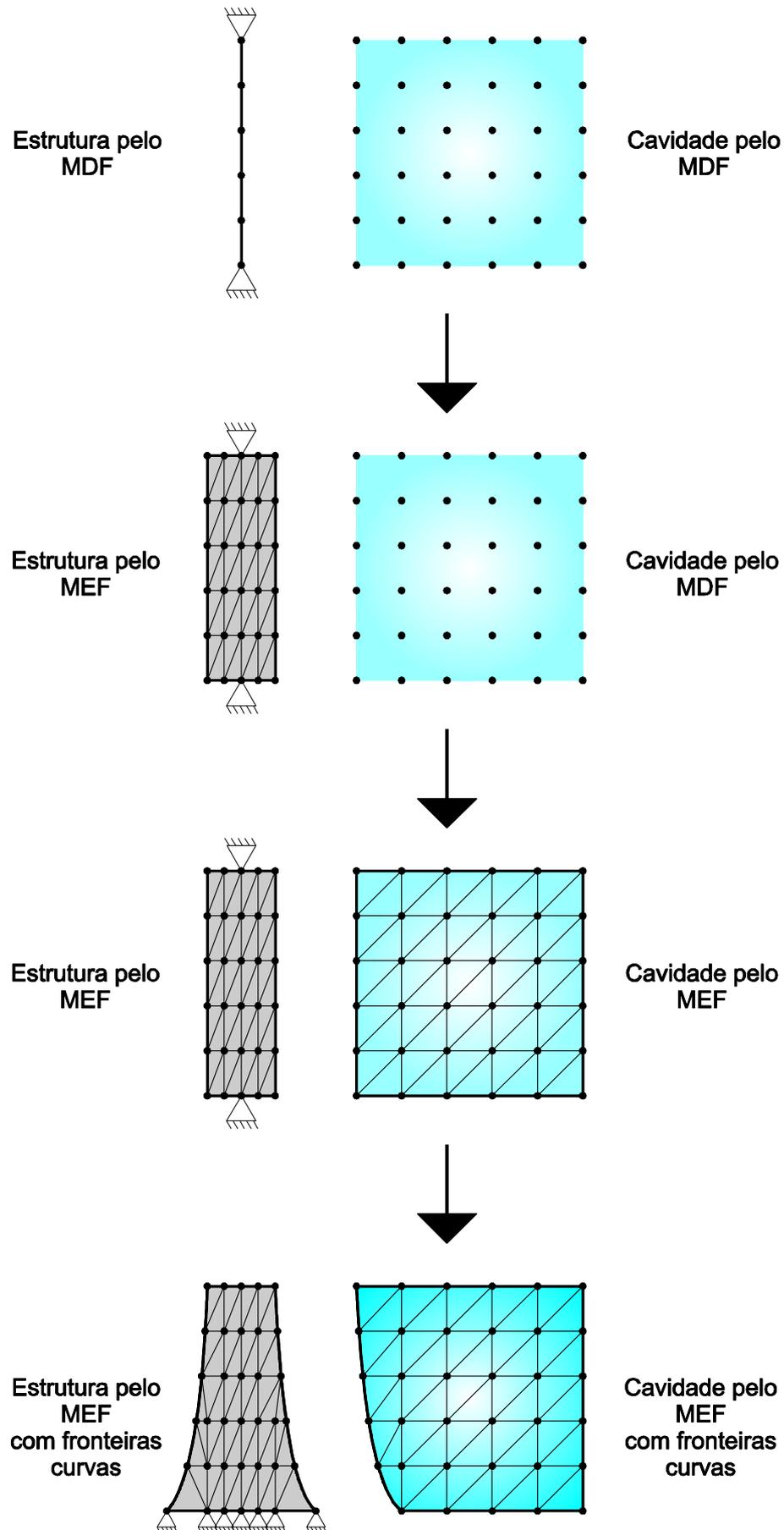


Figura 1.5 – Metodologia progressiva do desenvolvimento do trabalho.

## 1.5 Abrangências e limitações

Tanto a estrutura quanto o fluido possuem seus comportamentos governados por hipóteses simplificadoras. Não são feitas análises não-lineares e supõe-se sistema sem dissipação de energia. Apenas interação bidimensional entre os meios é analisada.

O sólido é considerado flexível com desempenho linear-elástico e regime de pequenos deslocamentos em torno da sua posição de equilíbrio. Estruturas reticuladas têm seu comportamento de acordo com a equação de movimento de uma viga, enquanto estruturas em duas dimensões são governadas pelas equações da elasticidade 2D. Na modelagem pelo Método dos Elementos Finitos, são utilizados elementos do tipo *Constant Strain Triangle* (CST).

O fluido é tido como homogêneo, invíscido, linearmente compressível, sem escoamento (meio acústico), com movimento irrotacional e com deslocamentos e suas derivadas espaciais pequenos. Seu comportamento é governado pela equação da onda bidimensional. As fronteiras consideradas para a cavidade são apenas de parede rígida e pressão nula, sem considerar o efeito de superfície livre, além da interface em contato com a estrutura. Na modelagem pelo MEF, usam-se elementos triangulares de 3 nós.

As malhas para a realização das análises pelo MEF são produzidas por um software comercial.

Para processamento, foi utilizado um computador doméstico com as seguintes configurações: processador Intel(R) Core(TM) i7-3612QM 2.10 GHz com 8 núcleos de processamento, memória RAM de 8 GB, sistema operacional de 64-bit, HD de 1 TB.

## 1.6 Organização da dissertação

Este trabalho é composto de 6 capítulos e está estruturado da maneira apresentada a seguir.

O primeiro capítulo mostra uma pequena introdução sobre o assunto tratado, em que fala de generalidades sobre interação fluido-estrutura, expõe uma breve revisão da literatura, explica a metodologia utilizada, aponta os objetivos da dissertação e faz considerações a respeito das abrangências e limitações do trabalho desenvolvido.

No segundo capítulo é feito o desenvolvimento teórico. São apresentadas as equações governantes da estrutura e do fluido, mostrando a origem de cada uma delas. Além disso, o mesmo é feito para os métodos numéricos utilizados (Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos), terminando com implementação deles nas equações que determinam cada meio.

O terceiro capítulo aborda sobre a questão do acoplamento fluido-estrutura. É explicado de forma detalhada como resolver o problema utilizando 3 formas diferentes: acoplamento MDF-MDF, acoplamento MEF-MDF e acoplamento MEF-MEF. São apresentadas as equações matriciais e as matrizes características de cada método.

O capítulo quatro fala sobre a estrutura do código computacional, em que são expostas as principais etapas para montagem do código.

O quinto capítulo é dedicado aos estudos de casos. Aqui o código é posto em prática, sendo aplicado em problemas já estudados, encontrados na literatura, como também em situações reais.

No último capítulo são feitas as considerações finais a respeito da dissertação desenvolvida, apresentando as conclusões obtidas com a pesquisa e perspectivas futuras.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E ESQUEMAS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para o comportamento da estrutura e do fluido acústico. Além disso, é feita a aplicação do MDF e do MEF para estes subdomínios, resultando em expressões a serem implementadas no código computacional.

### 2.1 Equações governantes para a estrutura

Surgem abaixo os conceitos relacionados às leis que determinam o movimento de sólidos reticulados e bidimensionais com comportamento elástico-linear.

#### 2.1.1 Equação de movimento para estruturas reticuladas (*vigas de flexão*)

Estruturas reticuladas são compostas por elementos lineares em que uma de suas dimensões é predominante em relação às demais, isto é, tem-se que uma das dimensões é significativamente maior do que as outras.

A equação de movimento para elementos deste tipo é fundamentada na teoria de flexão de vigas, em que seções transversais inicialmente planas permanecem planas após a flexão, com deformações decorrentes do cisalhamento sendo desprezíveis. Ela pode ser obtida, de forma simplificada, a partir do equilíbrio de forças verticais e de momentos num elemento infinitesimal da estrutura, de acordo com a Figura 2.1 a seguir. Para o corpo em vibração livre, não se considera a existência de um carregamento externo.

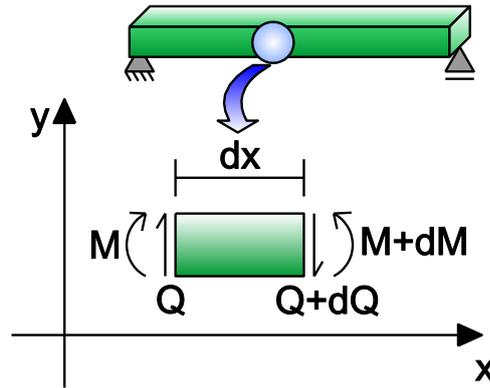


Figura 2.1 – Esforços atuantes em um elemento infinitesimal de viga.

Pelo equilíbrio de momentos na face direita, tem-se:

$$\sum M = -M + (M + dM) - Q \cdot dx = 0 \quad (2.1)$$

onde  $M$  é o momento fletor e  $Q$  é o esforço cortante.

A Eq. (2.1) pode ser reduzida para a seguinte relação:

$$dM - Q \cdot dx = 0 \therefore \frac{dM}{dx} = Q \quad (2.2)$$

Derivando os dois lados da Eq. (2.2) em relação a  $x$ , fica:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \quad (2.3)$$

Pelo equilíbrio de forças verticais, tem-se:

$$\sum F_y = m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \therefore Q - (Q + dQ) = \rho_e \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

onde  $m$  é a massa do elemento,  $A$  é a área da seção transversal,  $\rho_e$  é a massa específica do material da estrutura e  $v$  é o deslocamento transversal, que varia no tempo  $t$  e no espaço  $x$ .

Simplificando a Eq. (2.4), chega-se em:

$$\frac{dQ}{dx} = -\rho_e \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

A relação clássica momento-curvatura é expressa como:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \cdot E \cdot I = M \quad (2.6)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $I$  é o momento de inércia baricêntrico da seção transversal.

Introduzindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.3), resulta em:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \cdot E \cdot I \right) \quad (2.7)$$

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.5), obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho_e \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

Considerando a rigidez à flexão da viga  $E \cdot I$  constante e substituindo  $\rho_e \cdot A$  por  $\bar{m}$ , que é a massa por unidade de comprimento, chega-se na expressão da viga em vibração livre:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

A Eq. (2.9) representa a equação governante de movimento de estruturas reticuladas considerada neste trabalho. É possível solucionar esta equação analiticamente, considerando o deslocamento como uma função harmônica no tempo e aplicando o método da separação de variáveis e, assim, obter os autovalores da viga em vibração livre. Porém, neste trabalho se busca apresentar soluções numéricas. Assim, a partir da Eq. (2.9), pode-se fazer a aplicação do MDF, o que será explicado mais adiante neste capítulo.

### ***2.1.2 Equações de equilíbrio da Elasticidade 2D***

Para obtenção das equações básicas de equilíbrio da Teoria da Elasticidade 2D, deve-se fazer o equilíbrio estático de um elemento infinitesimal de dimensões  $dx$  e  $dy$ , como é demonstrado por Kwon e Bang (2000), Logan (2012) e vários outros autores. O elemento e as ações atuantes nele estão ilustrados na Figura 2.2 a seguir.

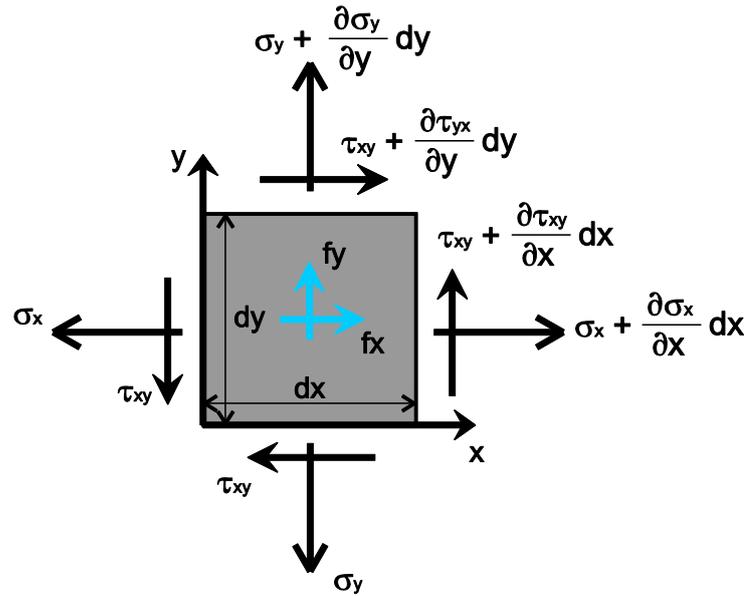


Figura 2.2 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal.

Da Figura 2.2, podem ser observadas as ações atuantes no elemento infinitesimal, em que se tem as tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  (as quais estão em unidade de força por unidade de área) e as forças de corpo  $f_x$  e  $f_y$  (que estão em unidade de força por unidade de volume). As tensões são consideradas constantes à medida que agem sobre a largura de cada face, porém variam em faces opostas.

Fazendo o equilíbrio translacional nas direções  $x$  e  $y$  do elemento de espessura unitária em  $z$ , tem-se:

$$\Sigma F_x = \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx + f_x dx dy = 0 \quad (2.10)$$

$$\Sigma F_y = \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy + f_y dx dy = 0 \quad (2.11)$$

Simplificando as duas equações acima, chega-se nas seguintes relações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (2.13)$$

As Eqs. (2.12) e (2.13) representam as equações diferenciais de equilíbrio de um problema de elasticidade bidimensional. Como elas precisam ser satisfeitas simultaneamente, forma-se então um sistema de equações. Este sistema pode ser solucionado de forma analítica para domínios mais simples, como, por exemplo, uma placa retangular em que há apenas a atuação do peso próprio como força de corpo constante (pode-se considerar o peso próprio na direção  $y$ , por exemplo). Timoshenko e Goodier (1951) mostram outros casos que podem ser solucionados analiticamente. Para casos mais complexos, o sistema pode ser resolvido de forma numérica com a aplicação do MEF, o que será explicado em outro tópico ainda neste capítulo.

Detalhes adicionais sobre a Teoria da Elasticidade 2D são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

## 2.2 Equações governantes para o fluido acústico

O que é apresentado neste tópico é baseado no que foi exposto por Silva e Pedroso (2006).

Para este trabalho, são adotadas algumas hipóteses simplificadoras para o fluido: homogêneo, invíscido, linearmente compressível, sem escoamento (meio acústico), com movimento irrotacional e com deslocamentos e suas derivadas espaciais pequenos. O problema geral de mecânica dos fluidos envolve a determinação de três variáveis: a densidade ( $\rho_f$ ), a pressão hidrodinâmica ( $p$ ) e a velocidade de escoamento ( $\vec{V}$ ). Para sua solução, precisa-se resolver três equações fundamentais:

- Equação da continuidade (conervação de massa)

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \cdot \vec{V}) = 0 \quad (2.14)$$

- Equação da quantidade de movimento de Navier-Stokes (equilíbrio de forças por unidade de volume)

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho_f \cdot \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{V}) + \text{grad}(p) - \mu \left\{ \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \text{grad}[\text{div}(\vec{V})] \right\} = 0 \quad (2.15)$$

➤ Equação de estado linearizada (relação constitutiva  $p$  X  $\rho_f$ )

$$p = \rho_f \cdot c^2 \quad (2.16)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação do som no fluido,  $\mu$  é o coeficiente de atrito viscoso,

$\text{div}(\vec{V})$  é o divergente da velocidade dado por  $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$  e  $\text{grad}(p)$  é o

gradiente da pressão dado por  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$ .

Supondo que a densidade, pressão e velocidade são funções harmônicas no tempo e que a vibração seja unidimensional (na direção  $x$ ), tem-se:

$$\rho_f(t) = \rho_0 \cdot e^{i\omega t} \therefore \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot \rho_0 \cdot e^{i\omega t} = i \cdot \omega \cdot \rho_f(t) \therefore \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot \rho_f \quad (2.17)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural e  $i$  é o elemento imaginário.

Analogamente para a velocidade, fica:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot \vec{V} \quad (2.18)$$

Como a vibração é unidimensional, a Eq. (2.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. (2.17) na Eq. (2.19), resulta em:

$$i \cdot \omega \cdot \rho_f + \rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

Da Eq. (2.16), pode-se escrever:

$$\rho_f = \frac{p}{c^2} \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq. (2.21) apenas no primeiro termo da densidade da Eq. (2.20), fica:

$$i \cdot \omega \cdot \frac{p}{c^2} + \rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Considerando  $\mu = 0$  e  $\vec{V}$  muito pequeno na Eq. (2.15), tem-se:

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad}(p) = 0 \quad (2.23)$$

Lembrando que a vibração é unidimensional (e, assim, pode-se operar de forma escalar) e substituindo a Eq. (2.18) na Eq. (2.23), resulta em:

$$\rho_f \cdot i \cdot \omega \cdot \vec{V} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \therefore \vec{V} = -\frac{1}{\rho_f \cdot i \cdot \omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.24)$$

Derivando os dois lados da Eq. (2.24) em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f \cdot i \cdot \omega} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq. (2.25) na Eq. (2.22), fica:

$$i \cdot \omega \cdot \frac{p}{c^2} - \frac{\rho_f}{\rho_f \cdot i \cdot \omega} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.26)$$

Simplificando e reorganizando a Eq. (2.26), resulta em:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot p = 0 \quad (2.27)$$

A Eq. (2.27) é a equação de Helmholtz para vibração de ondas em uma dimensão. Generalizando esta equação para duas dimensões e reescrevendo para a pressão no domínio do tempo, tem-se:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.28)$$

Ou de forma mais compacta:

$$\nabla^2 p - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29)$$

A Eq. (2.29) representa a equação da onda bidimensional. A partir dela, com a consideração de oscilações harmônicas no tempo (e assim transformando a expressão na equação de Helmholtz para o caso bidimensional), é possível fazer a implementação do MDF ou do MEF para solução numérica do problema. Isto será explicado mais adiante neste capítulo. Além disso, para esta mesma equação, são aplicáveis as condições de contorno do problema.

### 2.3 Solução numérica com o Método das Diferenças Finitas

Neste tópico é apresentada a discretização de estruturas reticuladas e meio acústico utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Mais detalhes sobre este método se encontra na literatura. No Apêndice B, resume-se os principais passos sobre o MDF.

#### 2.3.1 MDF para estruturas reticuladas

O movimento de uma viga em vibração livre é determinado pela Eq. (2.9). Considerando oscilações harmônicas no tempo, esta equação passa a ter a seguinte forma:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi = 0 \quad (2.30)$$

onde  $\varphi$  é o deslocamento transversal à estrutura.

Aplicando o operador de diferenças finitas para derivadas de quarta ordem, a Eq. (2.30) fica discretizada da seguinte maneira:

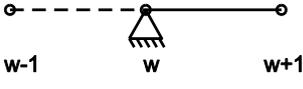
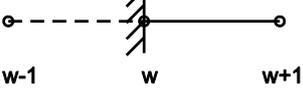
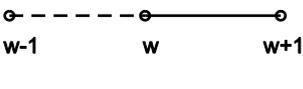
$$E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_{w-2} - 4 \cdot \varphi_{w-1} + 6 \cdot \varphi_w - 4 \cdot \varphi_{w+1} + \varphi_{w+2})}{(\Delta x)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_w = 0 \quad (2.31)$$

onde  $w$  indica a posição do ponto na malha e  $\Delta x$  é o passo de discretização espacial.

Para todos os pontos da malha, deve-se aplicar a regra de recorrência da Eq. (2.31). Cada vez que ela é utilizada, uma nova equação é gerada para montagem do sistema de equações algébricas. Porém, quando se está sobre algum ponto adjacente ao contorno da estrutura (ou, no caso de contorno livre, o ponto sobre ele também), a aplicação da Eq. (2.31) irá envolver “pontos virtuais”, isto é, pontos que estão fora da malha real da viga. Estes pontos deverão ser escritos em função dos outros pontos reais, fato obtido a partir das características de cada tipo de contorno.

Neste trabalho são utilizadas três condições de contorno usuais para vigas. A Tabela 2.1 a seguir apresenta um resumo das relações resultantes para cada vinculação. Os operadores de diferenças finitas são aplicados para o pivô  $w$  sobre o vínculo.

Tabela 2.1 – Condições de contorno usuais para vigas

<p><b>Apoio rotulado</b></p> 	$\varphi_w = 0$ $M = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \therefore \frac{\varphi_{w-1} - 2 \cdot \varphi_w + \varphi_{w+1}}{\Delta x^2} = 0 \therefore \varphi_{w-1} = -\varphi_{w+1}$
<p><b>Engaste</b></p> 	$\varphi_w = 0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \therefore \frac{\varphi_{w+1} - \varphi_{w-1}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \therefore \varphi_{w-1} = \varphi_{w+1}$
<p><b>Livre</b></p> 	$M = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \therefore \frac{\varphi_{w-1} - 2 \cdot \varphi_w + \varphi_{w+1}}{\Delta x^2} = 0 \therefore \varphi_{w-1} = 2 \cdot \varphi_w - \varphi_{w+1}$ $V = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 \therefore \frac{-\varphi_{w-2} + 2 \cdot \varphi_{w-1} - 2 \cdot \varphi_{w+1} + \varphi_{w+2}}{2 \cdot \Delta x^3} = 0 \therefore$ $\therefore \varphi_{w-2} = 4 \cdot \varphi_w - 4 \cdot \varphi_{w+1} + \varphi_{w+2}$

Com sucessivas aplicações da regra de recorrência da Eq. (2.31) para todos os pontos da malha da viga, e utilizando as condições de contorno quando necessário, gera-se um sistema de equações em termos dos deslocamentos transversais. Organizando os termos deste sistema em dois grupos, um que está multiplicando a frequência ao quadrado (matriz de massa  $[M_e]$ ) e outro que não está (matriz rigidez  $[K_e]$ ), forma-se a seguinte equação matricial:

$$[K_e]\{\varphi\} - \omega^2 \cdot [M_e]\{\varphi\} = 0 \therefore ([K_e] - \omega^2 \cdot [M_e])\{\varphi\} = 0 \quad (2.32)$$

onde  $\{\varphi\} = \{\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \dots \quad \varphi_n\}^T$  é o vetor contendo os deslocamentos transversais, que são as variáveis do sistema de equação formado, com  $n$  sendo o número total de pontos na malha da estrutura.

A Eq. (2.32) está na forma de um problema generalizado de autovalores e autovetores que, quando solucionado, fornece as frequências naturais (solução do polinômio característico resultante do determinante de  $[[K_e] - \omega^2 \cdot [M_e]]$  igual a zero) e os modos de vibração, respectivamente.

### 2.3.2 MDF para o fluido acústico

O movimento do fluido na cavidade é governado pela equação da onda bidimensional já demonstrado anteriormente, dada pela Eq. (2.29). Considerando oscilações harmônicas no tempo, esta equação passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P = 0 \quad (2.33)$$

onde  $P$  agora é a pressão hidrodinâmica independente do tempo, variando apenas no espaço ( $x$  e  $y$ ).

A partir da Eq. (2.33), é possível aplicar o operador de diferenças finitas bidimensional para derivadas de segunda ordem, sendo discretizada da seguinte maneira (equação está multiplicada por -1 para compatibilizar o formato da equação matricial final do fluido com o da estrutura):

$$\frac{-P_{w-1,j} + 2 \cdot P_{w,j} - P_{w+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_{w,j-1} + 2 \cdot P_{w,j} - P_{w,j+1}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_{w,j} = 0 \quad (2.34)$$

onde  $w$  e  $j$  indicam as posições na malha nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os passos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Assim,  $P_{w,j}$  representa a pressão no ponto da malha referente à posição  $w$  em  $x$  e  $j$  em  $y$ .

Da mesma forma que foi feito para a estrutura, deve-se aplicar a regra de recorrência (agora para o caso do fluido), referente à Eq. (2.34), para todos os pontos  $(w, j)$  da malha. E, assim como ocorreu no caso anterior, também haverá “pontos virtuais” quando estiver nos pontos sobre o contorno da cavidade. A aplicação das equações de contorno resolve este problema.

Para facilitar o entendimento e desenvolvimento do problema, os pontos na malha devem ter apenas um único índice, ou seja, cada ponto com pressão  $P_{w,j}$  deve ser substituído por  $P_1, P_2, P_3, (\dots), P_m$ , com  $m$  sendo o número total de pontos da malha da cavidade.

Mais uma vez, com várias aplicações da regra de recorrência da Eq. (2.34), passando por todos os pontos da malha, e a devida utilização das condições de contorno, forma-se um sistema de equações, agora em termos das pressões hidrodinâmicas. Novamente, organizando os termos deste sistema em dois grupos, igual foi feito para o caso da estrutura, resulta na seguinte equação matricial:

$$\left[ K_f \right] \{ P \} - \omega^2 \cdot \left[ M_f \right] \{ P \} = 0 \therefore \left( \left[ K_f \right] - \omega^2 \cdot \left[ M_f \right] \right) \{ P \} = 0 \quad (2.35)$$

onde  $\left[ K_f \right]$  é a matriz de rigidez do fluido,  $\left[ M_f \right]$  é a matriz de massa do fluido e  $\{ P \} = \{ P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_m \}^T$  é o vetor contendo as pressões hidrodinâmicas, que são as variáveis para este caso.

A Eq. (2.35) está no formato de um problema de autovalores e autovetores, que pode ser solucionada para obter as frequências naturais e os modos de vibração.

## 2.4 Solução numérica com o Método dos Elementos Finitos

No Apêndice C está presente um pouco sobre a teoria do Método dos Elementos Finitos (MEF), cuja formulação é baseada no Método dos Resíduos Ponderados (MRP). Neste tópico é apenas feita a implementação do MEF nas equações governantes da estrutura e do fluido acústico para obtenção das expressões a serem utilizadas no código computacional.

### 2.4.1 MEF para a estrutura

Baseando-se na forma da equação matricial obtida para a estrutura pelo MDF, o que se deseja obter neste item são as matrizes de rigidez  $[K_e]$  e massa  $[M_e]$  globais para o caso do MEF. Para isto, deve-se inicialmente obter as matrizes de rigidez e massa locais, ou seja, para um único elemento finito.

Inicialmente, deve-se lembrar que, para a estrutura, as variáveis desconhecidas são os deslocamentos. Como se está estudando um caso bidimensional, os deslocamentos são horizontais ( $u$ ) e verticais ( $v$ ). Assim, para um elemento finito, podemos escrevê-los da seguinte forma aproximada:

$$u = \sum_{t=1}^T N_t \cdot u_t \quad (2.36)$$

$$v = \sum_{t=1}^T N_t \cdot v_t \quad (2.37)$$

onde  $N_t$  indica a função de forma e  $T$  é a quantidade de nós do elemento finito.

Por conveniência, para as duas equações, são utilizadas as mesmas funções de forma  $N_t$ . Escrevendo as Eqs. (2.36) e (2.37) em uma única equação matricial, fica:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_T & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_T \\ v_T \end{Bmatrix} = [N_e] \{d\} \quad (2.38)$$

De posse das Eqs. (2.12) e (2.13), que são as equações de equilíbrio para um problema de elasticidade 2D, pode-se aplicar o MRP juntamente com o método de Galerkin e montar o seguinte sistema de equações:

$$\int_{\Omega} \left[ N_l^a \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} (N_l^a \cdot f_x) d\Omega = 0 \quad (2.39a)$$

$$\int_{\Omega} \left[ N_l^b \cdot \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} (N_l^b \cdot f_y) d\Omega = 0 \quad (2.39b)$$

onde  $N_l^a$  e  $N_l^b$  são as funções de forma (que representam as funções de ponderação no método de Galerkin) para cada equação e  $\Omega$  representa o domínio do problema, com  $l$  variando de 1 até a quantidade de nós do elemento finito ( $T$ ).

Da primeira parcela do lado esquerdo do conjunto das Eqs. (2.39) resultará a matriz de rigidez, e da segunda parcela, a matriz de massa.

Aplicando integração por partes (forma fraca do MEF) na primeira parcela, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[ N_l^a \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l^a}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial N_l^a}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ N_l^a \cdot (\sigma_x + \tau_{xy}) \right] d\Gamma \quad (2.40a)$$

$$\int_{\Omega} \left[ N_l^b \cdot \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l^b}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial N_l^b}{\partial x} \tau_{xy} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ N_l^b \cdot (\sigma_y + \tau_{xy}) \right] d\Gamma \quad (2.40b)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno do problema.

A segunda parcela do lado direito do conjunto das Eqs. (2.40) representa uma condição de contorno que é satisfeita naturalmente. Desse modo, ela não precisa ser levada em consideração. Com isso, o conjunto das Eqs. (2.39) pode ser reduzido para a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l^a}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial N_l^a}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (N_l^a \cdot f_x) d\Omega \quad (2.41a)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_l^b}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial N_l^b}{\partial x} \tau_{xy} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (N_l^b \cdot f_y) d\Omega \quad (2.41b)$$

Reescrevendo o conjunto das Eqs. (2.41) em uma única equação matricial, e lembrando que as funções de forma são iguais para os dois casos, resulta em:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_l & 0 \\ 0 & N_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Omega \quad (2.42)$$

É feita agora uma análise das parcelas da Eq. (2.42) separadamente. Para a expressão do lado esquerdo, deve-se aplicar a relação constitutiva do material, que relaciona tensões com deformações, e assim:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (2.43)$$

onde  $\epsilon_x$  é a deformação normal na direção  $x$ ,  $\epsilon_y$  é a deformação normal na direção  $y$ ,  $\gamma_{xy}$  é a deformação por cisalhamento no plano  $xy$  e  $[D]$  representa a matriz constitutiva do material, que pode ser para o Estado Plano de Tensões ou Deformações, como pode ser visto nas Eqs. (A.11) e (A.14) do Apêndice A, respectivamente.

Na Eq. (2.43), podem ser implementadas as relações cinemáticas de um problema bidimensional, dadas pelas Eqs. (A.15), (A.16) e (A.19) presentes no Apêndice A. Logo:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} d\Omega \quad (2.44)$$

Introduzindo no vetor com as relações cinemáticas da Eq. (2.44) as expressões para os deslocamentos aproximados de  $u$  e  $v$  dados pelas Eqs. (2.36) e (2.37) resulta na seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Percebe-se que a primeira matriz do lado direito da Eq. (2.44) é igual a transposta da primeira matriz do lado direito da Eq. (2.45). Expandindo esta matriz para englobar todos os nós do elemento finito, a última equação se transforma em:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_T}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_T}{\partial y} & \frac{\partial N_T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_T \\ v_T \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Ou, de forma compacta:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (2.47)$$

Substituindo a Eq. (2.47) na Eq. (2.44), tem-se, finalmente, a seguinte expressão para a parcela do lado esquerdo da Eq. (2.42):

$$\left( \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \right) \{d\} = [k_e] \{d\} \quad (2.48)$$

onde  $[k_e]$  representa a matriz de rigidez local (para um elemento finito).

Agora, para a parcela do lado direito da Eq.(2.42), deve-se fazer uso do princípio fundamental da dinâmica para obter a relação das forças de corpo, que fica:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\rho_e \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{Bmatrix} = -\rho_e \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

onde  $\ddot{u}$  e  $\ddot{v}$  indicam a segunda derivada dos deslocamentos horizontal e vertical em relação ao tempo, respectivamente, e  $\rho_e$  é a densidade da estrutura.

Substituindo a Eq. (2.38) na Eq. (2.49), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\rho_e \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_T & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d} \end{Bmatrix} = -\rho_e [N_e] \begin{Bmatrix} \ddot{d} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

É possível perceber que a primeira matriz da expressão do lado direito da Eq. (2.42) é igual a transposta da matriz que contém as funções de forma, ou seja,  $[N_e]^T$ . Assim:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_l & 0 \\ 0 & N_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Omega = -\int_{\Omega} (\rho_e [N_e]^T [N_e] d\Omega) \begin{Bmatrix} \ddot{d} \end{Bmatrix} = -[m_e] \begin{Bmatrix} \ddot{d} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

onde  $[m_e]$  representa a matriz de massa consistente local (para um elemento finito).

Logo, com a implementação das Eqs. (2.48) e (2.51) na Eq. (2.42), chega-se na expressão final para o elemento (equação local):

$$[k_e] \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} + [m_e] \begin{Bmatrix} \ddot{d} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.52)$$

Os deslocamentos na equação local estão escritos como variáveis globais. Fazendo uso da Eq. (2.52) para todos os elementos do domínio e considerando oscilações harmônicas no tempo, chega-se na expressão global para a estrutura:

$$[K_e] \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} - \omega^2 \cdot [M_e] \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} = 0 \therefore ([K_e] - \omega^2 \cdot [M_e]) \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

Novamente, tem-se um problema de autovalores e autovetores que pode ser solucionado para encontrar as frequências e os modos de vibração.

A Eq. (2.53) está num formato geral, que serve para qualquer número de graus de liberdade. Existe uma grande variedade de elementos finitos que podem ser aplicados para resolver o caso. Neste trabalho, é utilizado apenas um tipo de elemento para a estrutura, que é o elemento CST. As matrizes de rigidez e massa locais para este elemento são apresentadas a seguir.

A maneira mais simples de se dividir um sólido plano é a partir de formas triangulares. E o elemento finito mais simples da elasticidade bidimensional é o triângulo de deformação constante, ou seja, *Constant Strain Triangle* (CST). A Figura 2.3 ilustra a ideia básica para este tipo.

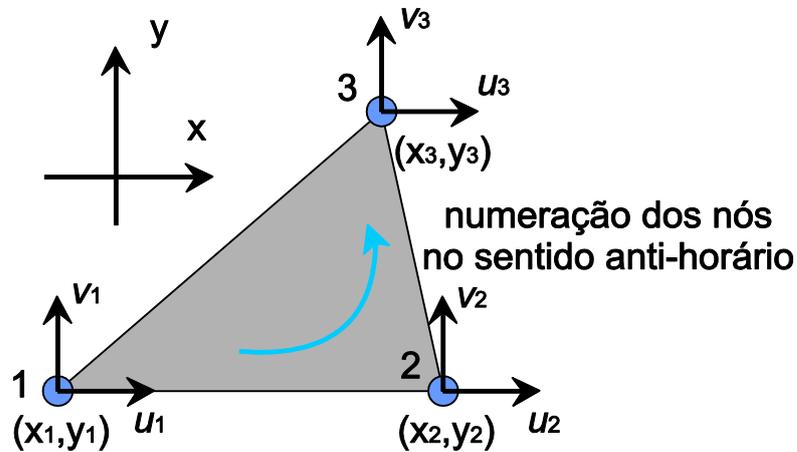


Figura 2.3 – Representação do elemento CST.

Como esse elemento possui 3 nós, tem-se  $T = 3$  e, assim, as matrizes  $[B]$  e  $[N_e]$  ficam com a forma abaixo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$[N_e] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Para interpolação ao longo dos campos de deslocamentos  $u$  e  $v$ , são adotadas as seguintes funções lineares em  $x$  e  $y$ :

$$u(x, y) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \cdot x + \bar{c}_3 \cdot y \quad (2.56a)$$

$$v(x, y) = \bar{c}_4 + \bar{c}_5 \cdot x + \bar{c}_6 \cdot y \quad (2.56b)$$

onde  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5$  e  $\bar{c}_6$  são coeficientes.

Em notação matricial para a Eq. (2.56a), tem-se:

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Os valores de deslocamentos nodais na direção  $x$  ( $u_1, u_2$  e  $u_3$ ) indicam três condições para obtenção dos coeficientes  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  e  $\bar{c}_3$ . Assim, o problema pode ser reformulado com a particularização da Eq. (2.57) para os valores nodais, como segue:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Se os três pontos não estiverem alinhados, pode-se então afirmar que a matriz que multiplica os coeficientes na Eq. (2.58) possui inversa. Dessa forma, é possível determinar os coeficientes desconhecidos da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A_e} \begin{bmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

onde  $A_e$  é a área do elemento triangular, dada pelo determinante abaixo:

$$A_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.60)$$

Substituindo a Eq. (2.59) na Eq. (2.57), fica:

$$u(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A_e} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Após a multiplicação das matrizes, resulta:

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

onde as funções de forma  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são dadas por:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A_e} \cdot \left[ (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y \right] \quad (2.63a)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A_e} \cdot \left[ (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y \right] \quad (2.63b)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A_e} \cdot \left[ (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y \right] \quad (2.63c)$$

Substituindo as funções de forma do conjunto das Eqs. (2.63) na Eq. (2.54), obtém-se a seguinte matriz  $[B]$  para o elemento CST:

$$[B] = \frac{1}{2 \cdot A_e} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Como a matriz  $[B]$  para o CST é constante, e definindo a espessura do elemento como  $e$ , a matriz de rigidez local  $[k_e]$  é a seguinte:

$$[k_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = [B]^T [D] [B] \int_{\Omega} d\Omega \therefore [k_e] = [B]^T [D] [B] (A_e \cdot e) \quad (2.65)$$

A expressão da matriz de rigidez do elemento, dada pela Eq. (2.65), está escrita de forma explícita, sendo necessário apenas resolver as multiplicações entre matrizes (cálculo realizado a baixo custo computacional).

Para a matriz de massa local, tem-se a seguinte expressão:

$$[m_e] = \int_{\Omega} \rho_e [N_e]^T [N_e] d\Omega = \rho_e \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad (2.66)$$

Substituindo as mesmas funções de forma do conjunto das Eqs. (2.63) e resolvendo a integral (para facilitar o cálculo, pode ser usado uma mudança de coordenadas para coordenadas naturais em termos de área e realizar integração de Gauss), obtém-se a matriz de massa consistente do elemento CST (também de forma explícita):

$$[m_e] = \frac{\rho_e \cdot A_e \cdot e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

#### 2.4.2 MEF para o fluido acústico

A demonstração apresentada nesta seção foi totalmente desenvolvida pelo autor.

Baseando-se na forma da equação matricial obtida para o fluido pelo MDF, neste item se deseja encontrar as matrizes de rigidez  $[K_f]$  e massa  $[M_f]$  globais para o caso do MEF. Assim como para a estrutura, deve-se inicialmente obter as matrizes de rigidez e massa locais.

Para o fluido, as variáveis desconhecidas são as pressões hidrodinâmicas. Para um elemento finito, podemos escrevê-las da seguinte forma aproximada:

$$p = \sum_{i=1}^T N_i \cdot p_i = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_T] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_T \end{Bmatrix} = [N_f] \{p\} \quad (2.68)$$

A partir da Eq. (2.29), que representa a equação diferencial governante para o comportamento do fluido, pode-se implementar a solução aproximada dada pela Eq. (2.68) para obter o resíduo e, assim, aplicar o MRP juntamente com o método de Galerkin, resultando na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \left[ N_i \cdot \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ N_i \cdot \left( \frac{1}{c} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] d\Omega = 0 \quad (2.69)$$

Da primeira integral da Eq. (2.69) resulta a matriz de rigidez e da segunda a matriz de massa. Aplicando integração por partes (forma fraca do MEF) na primeira parcela, fica:

$$\int_{\Omega} \left( N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left( N_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + N_i \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (2.70)$$

A segunda integral do lado direito da Eq. (2.70) é avaliada no contorno da cavidade acústica. As condições de contorno estudadas neste trabalho são de contorno rígido, que implica em gradiente da pressão nulo, de pressão nula e de interface fluido-estrutura (a qual será detalhada no próximo capítulo). Assim, essa parcela pode ser desconsiderada. Substituindo na Eq. (2.70) a forma aproximada da pressão dada pela Eq. (2.68), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_l}{\partial x} \cdot p + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_l}{\partial y} \cdot p \right) d\Omega \quad (2.71)$$

Ou ainda, em forma matricial:

$$\int_{\Omega} \left( N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + N_i \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} \\ \frac{\partial N_l}{\partial y} \end{bmatrix} p d\Omega \quad (2.72)$$

Lembrando que  $l$  varia de 1 a  $T$ , a Eq. (2.72) fica expandida da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \left( N_l \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + N_l \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_T}{\partial x} & \frac{\partial N_T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_T}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_T}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_T \end{Bmatrix} d\Omega \quad (2.73)$$

Ou, de forma compacta:

$$\int_{\Omega} \left( N_l \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + N_l \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \left( \int_{\Omega} [B_f]^T [B_f] d\Omega \right) \{p\} = - [k_f] \{p\} \quad (2.74)$$

onde  $[k_f]$  representa a matriz de rigidez local do fluido.

Agora, para a segunda integral da Eq. (2.69), pode-se implementar a forma aproximada da pressão dada pela Eq. (2.68), resultando em:

$$\int_{\Omega} \left[ N_l \cdot \left( \frac{1}{c} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left( N_l \cdot \frac{1}{c^2} \cdot N_l \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{c^2} \cdot N_l \cdot N_l \cdot \ddot{p} \right) d\Omega \quad (2.75)$$

onde  $\ddot{p}$  é a segunda derivada da pressão em relação ao tempo.

Expandindo a Eq. (2.75) para todos os valores de  $l$ , fica a seguinte forma matricial:

$$\int_{\Omega} \left[ N_l \cdot \left( \frac{1}{c} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{c^2} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_T \end{bmatrix} \{ \ddot{p} \} \right) d\Omega \quad (2.76)$$

A Eq. (2.76) pode ser compactada, como segue:

$$\int_{\Omega} \left[ N_l \cdot \left( \frac{1}{c} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{c^2} \cdot [N_f]^T [N_f] d\Omega \right) \{ \ddot{p} \} = [m_f] \{ \ddot{p} \} \quad (2.77)$$

onde  $[m_f]$  é a matriz de massa consistente local do fluido.

Logo, com a substituição das Eqs. (2.74) e (2.77) na Eq. (2.69), tem-se a expressão para o elemento finito na cavidade acústica:

$$\left[ k_f \right] \{ p \} + \left[ m_f \right] \{ \ddot{p} \} = 0 \quad (2.78)$$

Utilizando a Eq. (2.78) para todos os elementos do domínio e considerando oscilações harmônicas no tempo, chega-se na expressão global para o fluido:

$$\left[ K_f \right] \{ p \} - \omega^2 \cdot \left[ M_f \right] \{ p \} = 0 \therefore \left( \left[ K_f \right] - \omega^2 \cdot \left[ M_f \right] \right) \{ p \} = 0 \quad (2.79)$$

Mais uma vez, tem-se um problema de autovalores e autovetores, e assim, é possível encontrar as frequências e modos de vibração.

A Eq. (2.79) pode ser usada para qualquer número de graus de liberdade do fluido. Neste trabalho, será utilizado na cavidade o elemento mais simples, que é o triângulo com 3 nós que possui função de interpolação linear, semelhante ao CST, porém com apenas um grau de liberdade (incógnita) por nó. Elemento com 3 nós significa que  $T = 3$  e, assim, as matrizes  $\left[ B_f \right]$  e  $\left[ N_f \right]$  ficam com o seguinte formato:

$$\left[ B_f \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\left[ N_f \right] = \left[ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \right] \quad (2.81)$$

Como a função de interpolação é linear, cai no mesmo caso do CST, com as mesmas funções de forma dadas pelo conjunto das Eqs. (2.63), o qual pode ser substituído na Eq. (2.80) e, assim, resulta na seguinte matriz  $\left[ B_f \right]$  para o elemento triangular:

$$\left[ B_f \right] = \frac{1}{2 \cdot A_e} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Logo, a matriz de rigidez local  $\left[ k_f \right]$ , obtida da Eq. (2.74), fica a expressão a seguir:

$$[k_f] = \int_{\Omega} [B_f]^T [B_f] d\Omega = \left( \frac{1}{2 \cdot A_e} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot A_e} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \int_{\Omega} d\Omega \quad (2.83)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3 & a_2 &= y_3 - y_1 & a_3 &= y_1 - y_2 \\ b_1 &= x_3 - x_2 & b_2 &= x_1 - x_3 & b_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Simplificando a Eq. (2.83), chega-se à forma final abaixo (em forma explícita):

$$[k_f] = \frac{1}{4 \cdot A_e} \cdot \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Para a matriz de massa local, obtida da Eq. (2.77), pode-se escrever:

$$[m_f] = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \cdot [N_f]^T [N_f] d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] d\Omega \quad (2.86)$$

Substituindo as mesmas funções de forma utilizadas para obter a matriz de rigidez local do fluido e resolvendo a integral (novamente, com uma mudança de coordenadas para coordenadas naturais para facilitar os cálculos), obtém-se a matriz de massa consistente do fluido para o elemento triangular (também de forma explícita):

$$[m_f] = \frac{A_e}{12 \cdot c^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

### 3 EXEMPLOS E TÉCNICAS DE ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

O capítulo anterior apresentou as equações governantes da estrutura e do fluido, além de esquemas numéricos para análise modal de cada meio separadamente. Este capítulo apresenta a solução do problema de forma acoplada, ou seja, frequências naturais e modos de vibração do sistema composto pelo sólido e meio acústico atuando em conjunto. Para isso, é feito o acoplamento de três maneiras diferentes: primeiramente, utilizando o MDF para os dois meios (acoplamento MDF-MDF), depois se aplica o MEF para a estrutura e o MDF para o fluido (acoplamento MEF-MDF) e, por fim, o MEF para todo o sistema (acoplamento MEF-MEF). Ademais, também é mostrada a solução para cada meio de forma desacoplada.

A estratégia para solução do problema acoplado é resolver as equações tanto da estrutura quanto do fluido simultaneamente. Isso acarretará, na equação da estrutura, o aparecimento da variável do fluido (pressão hidrodinâmica) devido ao acréscimo das forças geradas pela pressão deste meio sobre o sólido. Por outro lado, para a equação do fluido, haverá a condição de contorno adicional de interface fluido-estrutura, da qual aparecerá a variável da estrutura (deslocamento).

Para os três tipos de acoplamento estudados, é resolvido um exemplo simples, no qual será apresentado de forma mais detalhada a construção das matrizes do sistema global. O sistema fluido-estrutura é composto por uma viga biapoiada, com 10 metros de comprimento e 1 metro de espessura, acoplada a uma cavidade acústica quadrada com 10 metros de lado, como mostrado na Figura 3.1 a seguir (condições de contorno especificadas na figura). A viga tem densidade de  $7800 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade de 210 GPa. O coeficiente de Poisson é 0,3. O fluido é a água com densidade de  $1000 \text{ kg/m}^3$  e a velocidade do som no meio acústico vale 1500 m/s. Adota-se comprimento unitário na direção normal ao plano da figura.

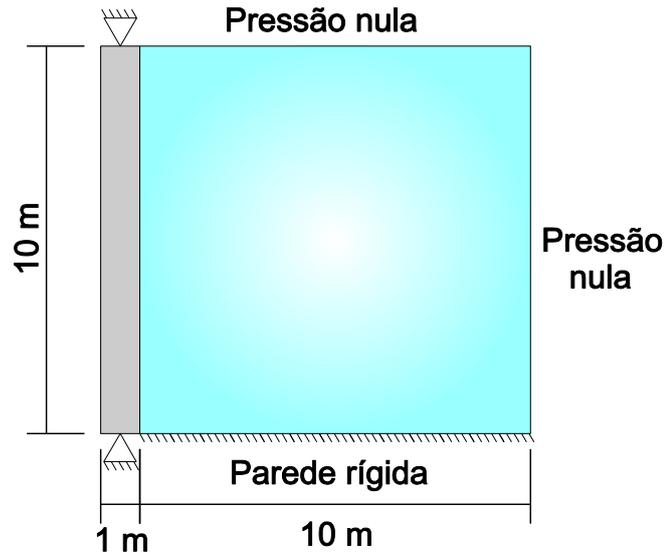


Figura 3.1 – Sistema acoplado fluido-estrutura.

### 3.1 Condições de contorno para a cavidade acústica

Neste trabalho, são consideradas apenas as condições de contorno de pressão nula, parede rígida e interface fluido-estrutura. A Figura 3.2 ilustra estas condições.

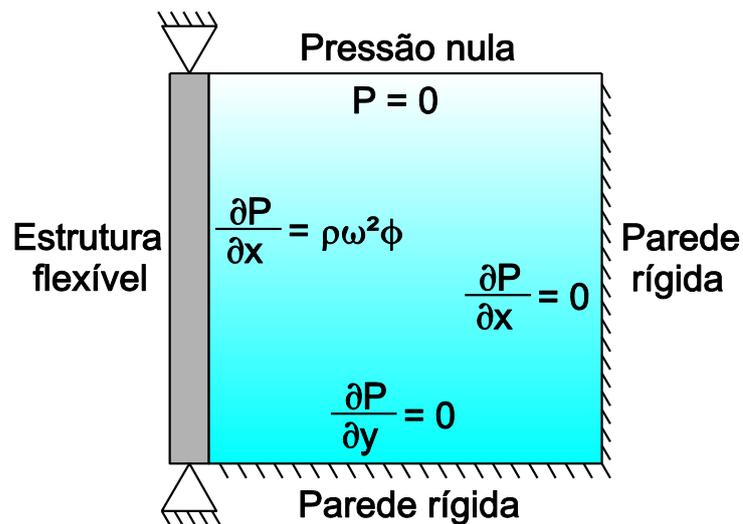


Figura 3.2 – Condições de contorno para cavidade.

A primeira condição de contorno é modelada estabelecendo pressão nula na região, ou seja:

$$p = 0 \quad (3.1)$$

Para o MDF, esta condição deve ser aplicada diretamente no ponto sobre o contorno, ou seja:

$$P_k = 0 \quad (3.2)$$

onde  $k$  representa o ponto em análise (pivô) sobre o contorno.

Já a condição de contorno de parede rígida implica em vazão nula na região (Silva e Pedroso, 2006). Isto significa que:

$$q = A \cdot \frac{dp}{d\vec{n}} = 0 \therefore \frac{dp}{d\vec{n}} = 0 \quad (3.3)$$

onde  $q$  indica a vazão e  $\vec{n}$  é a direção normal ao contorno.

Para o MDF, deve-se utilizar a Eq. (3.3) e aplicar o operador de diferenças finitas de primeira ordem em um ponto  $k$  do contorno, obtendo-se a seguinte relação:

$$\frac{dP}{d\vec{n}} = 0 \therefore \frac{P_{k+1} + P_{k-1}}{2 \cdot h} = 0 \therefore P_{k+1} = P_{k-1} \quad (3.4)$$

onde  $h$  é o passo da malha na direção perpendicular ao contorno e  $k-1$  e  $k+1$  são pontos adjacentes ao ponto  $k$  na direção normal ao contorno.

Como mostrado por Sousa Jr. (2006), a condição de contorno de interface fluido-estrutura pode ser obtida de maneira simples analisando uma cavidade acústica unidimensional, com pressão constante ao longo de uma seção transversal, acoplada a um pistão que se move apenas na direção horizontal, como apresenta a Figura 3.3 abaixo.

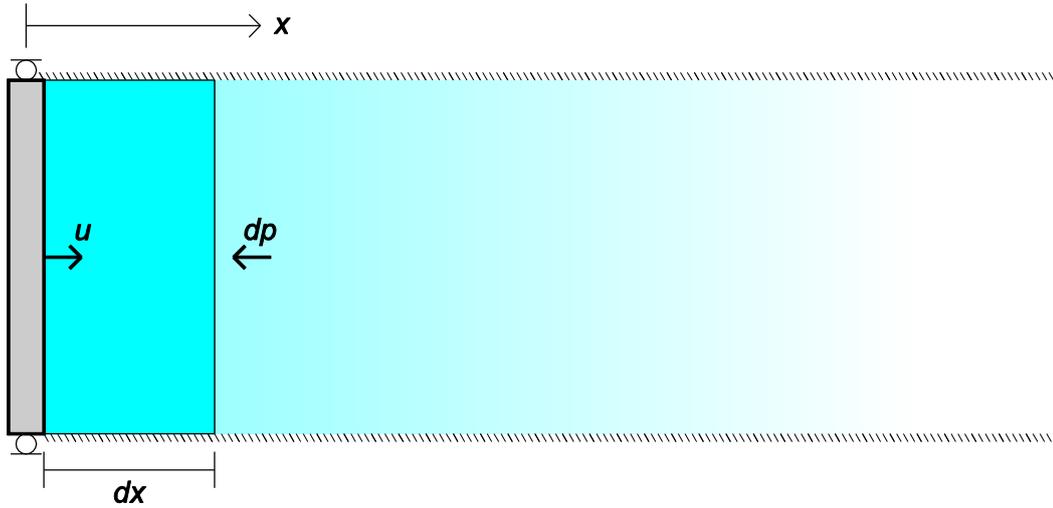


Figura 3.3 – Condição de contorno da interface fluido-estrutura.

Assim, é possível fazer o equilíbrio dinâmico do pistão, que recebe influência das forças geradas pelo elemento infinitesimal do fluido próximo a ele, resultando em:

$$\Sigma F_x = m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} \therefore dp \cdot A = -\rho_f \cdot A \cdot dx \cdot \ddot{u} \therefore \frac{dp}{dx} = -\rho_f \cdot \ddot{u} \quad (3.5)$$

A Eq. (3.5) pode ser generalizada para uma direção normal qualquer do contorno, com uma aceleração  $\ddot{\varphi}$  nesta mesma direção:

$$\frac{dp}{d\vec{n}} = -\rho_f \cdot \ddot{\varphi} \quad (3.6)$$

A Eq. (3.6) representa a condição de contorno de interface fluido-estrutura. Pode-se observar que a condição de parede rígida também pode ser encontrada considerando aceleração nula nessa equação, resultando na mesma expressão deduzida anteriormente, dada pela Eq. (3.3).

## 3.2 Análise modal da estrutura desacoplada

### 3.2.1 Solução pelo MDF

Para solucionar a viga de forma desacoplada pelo MDF, deve-se aplicar a regra de recorrência dada pela Eq. (2.31) e montar a equação matricial da forma da Eq. (2.32), além de implementar as condições de contorno do problema (neste caso, há dois apoios rotulados nas extremidades da estrutura). A discretização utilizada é exibida na Figura 3.4 a seguir.

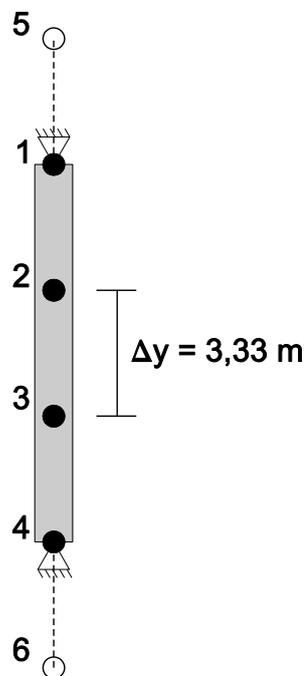


Figura 3.4 – Viga desacoplada discretizada pelo MDF.

Os pontos 1 e 4 estão sobre um apoio, o que resulta em deslocamento nulo. Os pontos 2 e 3 não estão sobre o contorno, logo será aplicada a regra de recorrência para estes nós. Os pontos 5 e 6 são pontos virtuais.

Logo, considerando  $g$  como sendo o pivô e aplicando a Eq. (2.31), fica:

$$g = 2: E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_5 - 4 \cdot \varphi_1 + 6 \cdot \varphi_2 - 4 \cdot \varphi_3 + \varphi_4)}{(\Delta y)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_2 = 0 \quad (3.7a)$$

$$g = 3: E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_1 - 4 \cdot \varphi_2 + 6 \cdot \varphi_3 - 4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5)}{(\Delta y)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_3 = 0 \quad (3.7b)$$

Aplicando as relações de apoio rotulado dado pela Tabela 2.1, tem-se:

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 0 \quad (3.8a)$$

$$\varphi_5 = -\varphi_2 \quad (3.8b)$$

$$\varphi_6 = -\varphi_3 \quad (3.8c)$$

Para o momento de inércia  $I$  e a massa por unidade de comprimento  $\bar{m}$ :

$$I = \frac{1 \cdot 1^3}{12} = 0,0833 m^4 \quad (3.9a)$$

$$\bar{m} = \rho_e \cdot A = 7800 \cdot (1 \cdot 1) = 7800 kg / m \quad (3.9b)$$

Assim, substituindo as relações encontradas nas Eqs. (3.8) e (3.9) no conjunto das Eqs. (3.7), como também os valores de  $\Delta y = 3,33m$  e  $E = 210GPa$ , e organizando os termos, resulta na seguinte equação matricial da forma da Eq. (2.32):

$$\left( 10^8 \cdot \begin{bmatrix} 7,11 & -5,69 \\ -5,69 & 7,11 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 7800 & 0 \\ 0 & 7800 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

Logo, é possível resolver o problema de autovalores e autovetores e encontrar as frequências naturais. Como para a discretização utilizada o número de graus de liberdade é 2, é possível obter apenas duas frequências, que são:

$$\omega_1 = 134,93 \frac{rad}{s}; \omega_2 = 405,1 \frac{rad}{s} \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Solução pelo MEF

Para resolver a viga de forma desacoplada pelo MEF, deve-se montar as matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  de acordo com a equação matricial dada pela Eq. (2.53). Essas matrizes são

obtidas a partir das matrizes do elemento finito, que neste trabalho é o CST. A malha utilizada é apresentada na Figura 3.5 a seguir.

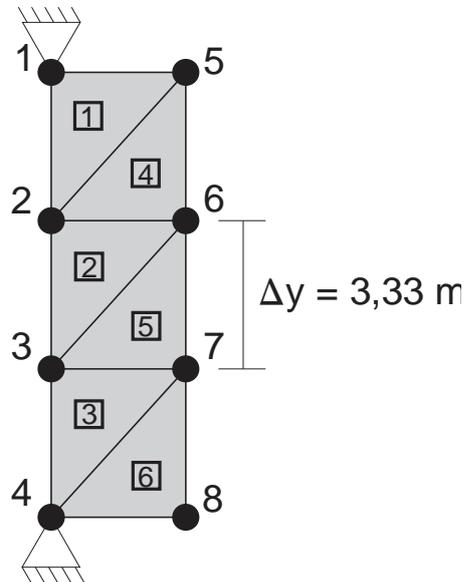


Figura 3.5 – Viga desacoplada discretizada pelo MEF.

A viga está discretizada com 6 elementos do tipo CST. Os nós 1 e 4 estão sobre apoio, o que implica em deslocamentos horizontais e verticais nulos nestes pontos. Os demais nós não possuem restrição. Como todos os elementos são triângulos de mesmas dimensões, tem-se que a área de cada elemento vale:

$$A_e = 1,67 \text{ m}^2 \quad (3.12)$$

Para a matriz constitutiva do material  $D$ , é adotado o Estado Plano de Deformações, que, pela Eq. (A.14) do Apêndice A, resulta em:

$$[D] = 4,04 \cdot 10^{11} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para cada elemento da viga, deve-se montar a matriz  $[B]$ , dada pela Eq. (2.64), e, em seguida, a matriz de rigidez do elemento  $[k_e]$ , dada pela Eq. (2.65). A espessura de cada elemento é considerada unitária. Logo, para o elemento 4, por exemplo, obedecendo a ordem no sentido anti-horário dos nós, como o ponto 5 sendo o nó 1, o ponto 2 sendo o nó 2 e o ponto 6 sendo o nó 3, obtém-se as seguintes expressões (para os outros elementos, deve-se repetir o mesmo procedimento, o que não será detalhado aqui):

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & -0,3 \\ 0,3 & 0 & 0 & -1 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} &= [B]^T [D][B](A_e \cdot e) \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \\ &= 10^{11} \begin{bmatrix} 0,12 & 0 & 0 & -0,41 & -0,12 & 0,41 \\ 0 & 0,43 & -0,61 & 0 & 0,61 & -0,43 \\ 0 & -0,61 & 4,72 & 0 & -4,72 & 0,61 \\ -0,41 & 0 & 0 & 1,35 & 0,41 & -1,35 \\ -0,12 & 0,61 & -4,72 & 0,41 & 4,84 & -1,01 \\ 0,41 & -0,43 & 0,61 & -1,35 & -1,01 & 1,77 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

A matriz de massa local  $[m_e]$  de cada elemento será a mesma, pois todos os elementos possuem a mesma área. Assim, pela Eq. (2.67), fica:

$$[m_e] = 1085,5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Aplicando o procedimento para todos os elementos, fazendo a soma das matrizes de rigidez e massa locais de forma adequada, para os correspondentes graus de liberdade, reorganizando os termos e eliminando as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade com restrição (ou seja, eliminar linhas e colunas referentes a  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_4$  e  $v_4$ ), resulta nas matrizes de rigidez e massa globais da estrutura, como segue:

$$[K_e] = 10^{11} \begin{bmatrix} 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 0 & -1,01 & -9,43 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 3,54 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 0,4 & 9,66 & -1,01 & 0 & 0 & 0 & -1,01 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 \\ 0,61 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0 & 0 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & -1,01 & 0 & 0 & 4,84 & 0 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,77 & 0,61 & -0,42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9,43 & 1,01 & 0 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,01 & -2,7 & -1,01 & 0 & 0,4 & -0,42 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 9,66 & -1,01 & -0,12 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 4,83 & -1,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 1,77 \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 \\ 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

O vetor dos deslocamentos incógnitos é:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Assim, é possível calcular as frequências naturais para a viga biapoada em vibração livre. As três primeiras são:

$$\omega_1 = 605,29 \frac{rad}{s}; \omega_2 = 1613,61 \frac{rad}{s}; \omega_3 = 2159,26 \frac{rad}{s} \quad (3.19)$$

### 3.3 Análise modal da cavidade desacoplada

Para a análise da cavidade desacoplada, considera-se que a interface em contato com a estrutura seja um contorno rígido, e assim, a cavidade fica como mostra a Figura 3.6 a seguir.

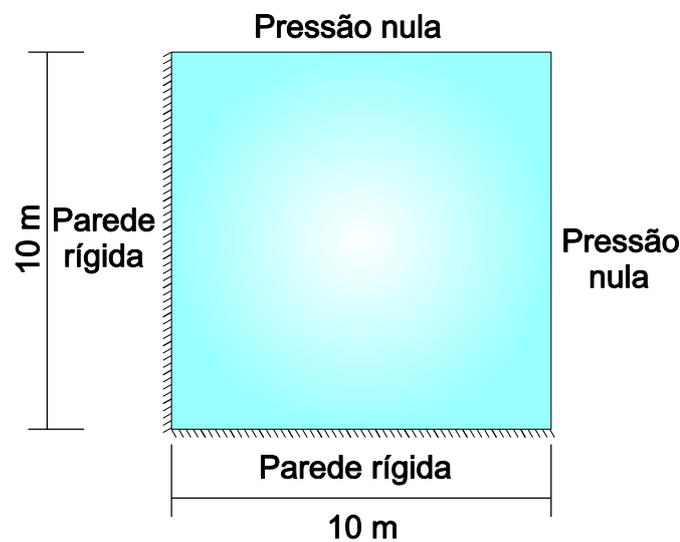


Figura 3.6 – Cavidade desacoplada.

#### 3.3.1 Solução pelo MDF

Para solucionar a cavidade de forma desacoplada pelo MDF, deve-se aplicar a regra de recorrência dada pela Eq. (2.34) e montar a equação matricial da forma da Eq. (2.35), além de implementar as condições de contorno de parede rígida e pressão nula. A discretização utilizada é exibida na Figura 3.7 a seguir.

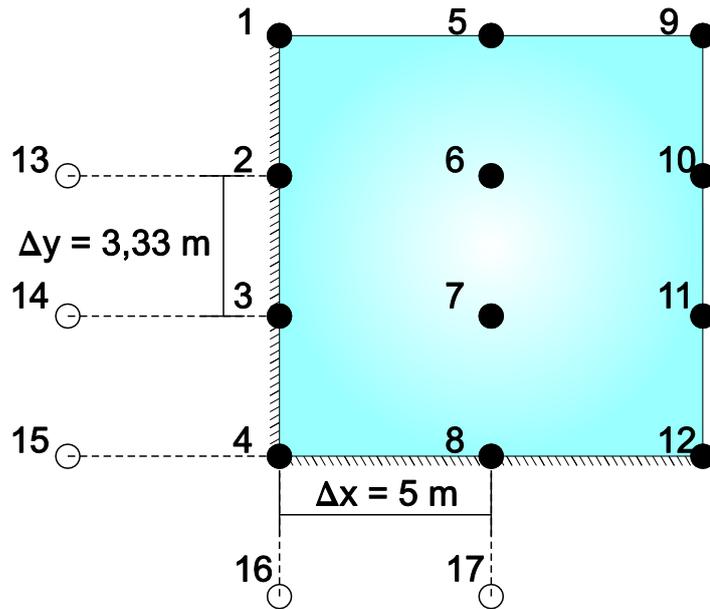


Figura 3.7 – Cavidade desacoplada discretizada pelo MDF.

Os pontos 6 e 7 estão no interior da cavidade, os pontos 1, 2, 3, 4, 8 e 12 estão sobre um contorno rígido e os pontos 1, 5, 9, 10, 11 e 12 possuem pressão nula (não sendo necessário aplicar a regra de recorrência nesses nós). Os pontos 13, 14, 15, 16 e 17 são pontos virtuais.

Logo, considerando  $g$  como sendo o pivô e aplicando a Eq. (2.34), fica:

$$g = 2: \frac{-P_{13} + 2 \cdot P_2 - P_6}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_2 = 0 \quad (3.20a)$$

$$g = 3: \frac{-P_{14} + 2 \cdot P_3 - P_7}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_2 + 2 \cdot P_3 - P_4}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_3 = 0 \quad (3.20b)$$

$$g = 4: \frac{-P_{15} + 2 \cdot P_4 - P_8}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_3 + 2 \cdot P_4 - P_{16}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_4 = 0 \quad (3.20c)$$

$$g = 6: \frac{-P_2 + 2 \cdot P_6 - P_{10}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_5 + 2 \cdot P_6 - P_7}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_6 = 0 \quad (3.20d)$$

$$g = 7: \frac{-P_3 + 2 \cdot P_7 - P_{11}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_6 + 2 \cdot P_7 - P_8}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_7 = 0 \quad (3.20e)$$

$$g = 8: \frac{-P_4 + 2 \cdot P_8 - P_{12}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_7 + 2 \cdot P_8 - P_{17}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_8 = 0 \quad (3.20f)$$

Para a condição de pressão nula:

$$P_1 = P_5 = P_9 = P_{10} = P_{11} = P_{12} = 0 \quad (3.21)$$

Para a condição de parede rígida:

$$P_{13} = P_6 \quad (3.22a)$$

$$P_{14} = P_7 \quad (3.22b)$$

$$P_{15} = P_8 \quad (3.22c)$$

$$P_{16} = P_3 \quad (3.22d)$$

$$P_{17} = P_7 \quad (3.22e)$$

Assim, substituindo as relações encontradas nas Eqs. (3.21) e (3.22) no conjunto das Eqs. (3.20), como também os valores de  $\Delta x = 5m$ ,  $\Delta y = 3,33m$  e  $c = 1500m/s$ , e organizando os termos, resulta na seguinte equação matricial da forma da Eq. (2.35):

$$\begin{pmatrix} 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 & 0 \\ -0,09 & 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 \\ 0 & -0,18 & 0,26 & 0 & 0 & -0,08 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,26 & -0,09 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0 & -0,09 & 0,26 & -0,09 \\ 0 & 0 & -0,04 & 0 & -0,18 & 0,26 \end{pmatrix} \cdot \omega^2 \cdot 10^{-7} \cdot \begin{pmatrix} 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

Logo, pela Eq. (3.23), é possível solucioná-la para encontrar as frequências naturais. As três primeiras são:

$$\omega_1 = 327,08 \frac{rad}{s}; \omega_2 = 601,28 \frac{rad}{s}; \omega_3 = 676,56 \frac{rad}{s} \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Solução pelo MEF

Para resolver a cavidade de forma desacoplada pelo MEF, deve-se montar as matrizes  $[K_f]$  e  $[M_f]$  de acordo com a equação matricial dada pela Eq. (2.79). Essas matrizes são obtidas a partir das matrizes do elemento finito. A malha utilizada é apresentada na Figura 3.8 a seguir.

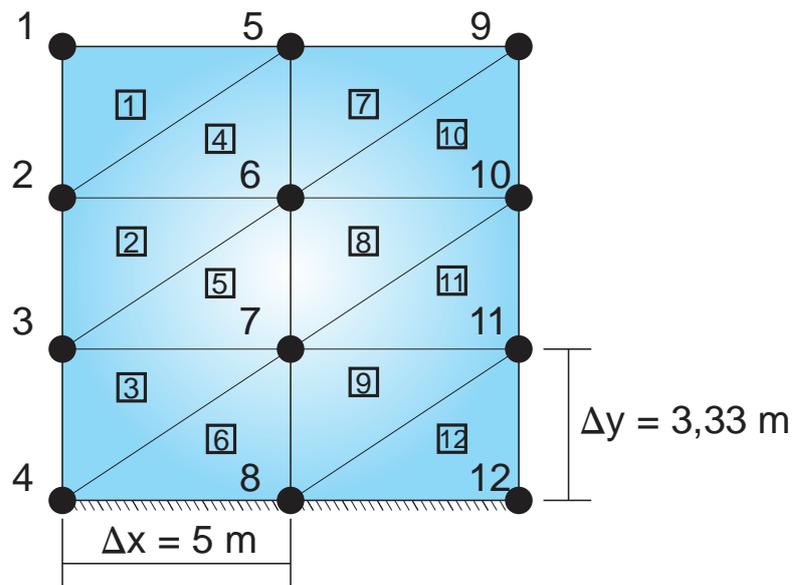


Figura 3.8 – Cavidade desacoplada discretizada pelo MEF.

A cavidade está discretizada com 12 elementos triangulares de 3 nós, com um grau de liberdade por nó. Os nós 1, 2, 3, 4, 8 e 12 estão sobre um contorno rígido e os nós 1, 5, 9, 10, 11 e 12 possuem pressão nula. Apenas os nós 6 e 7 estão no interior da cavidade. Como todos os elementos são triângulos de mesmas dimensões, tem-se que a área de cada elemento vale:

$$A_e = 8,33m^2 \quad (3.25)$$

Para cada elemento da cavidade, deve-se montar a matriz  $[B_f]$ , dada pela Eq. (2.82), e, em seguida, a matriz de rigidez local  $[k_f]$ , dada pela Eq. (2.85). A espessura de cada elemento é considerada unitária. Logo, para o elemento 2, por exemplo, obedecendo a ordem no sentido anti-horário dos nós, como o ponto 2 sendo o nó 1, o ponto 3 sendo o nó 2 e o ponto 6 sendo o nó 3, obtém-se as seguintes expressões (para os outros elementos, deve-se repetir o mesmo procedimento, o que não será detalhado aqui):

$$[B_f] = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$[k_f] \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,08 & -0,75 & -0,33 \\ -0,75 & 0,75 & 0 \\ -0,33 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

A matriz de massa local  $[m_f]$  de cada elemento será a mesma, pois todos os elementos possuem a mesma área. Assim, pela Eq. (2.87), fica:

$$[m_f] = 3,09 \cdot 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Aplicando o procedimento para todos os elementos, fazendo a soma das matrizes de rigidez e massa locais de forma adequada, para os correspondentes graus de liberdade, reorganizando os termos e eliminando as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade com pressão nula (ou seja, eliminar linhas e colunas referentes a  $p_1, p_5, p_9, p_{10}, p_{11}$  e  $p_{12}$ ), resulta nas matrizes de rigidez e massa globais da cavidade, e, conseqüentemente, na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2,17 & -0,75 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ -0,75 & 2,17 & -0,75 & 0 & -0,67 & 0 \\ 0 & -0,75 & 1,08 & 0 & 0 & -0,33 \\ -0,67 & 0 & 0 & 4,33 & -1,5 & 0 \\ 0 & -0,67 & 0 & -1,5 & 4,34 & -1,5 \\ 0 & 0 & -0,33 & 0 & -1,5 & 2,17 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1,85 & 0,31 & 0 & 0,62 & 0 & 0 \\ 0,31 & 1,85 & 0,31 & 0,62 & 0,62 & 0 \\ 0 & 0,31 & 1,23 & 0 & 0,62 & 0,31 \\ 0,62 & 0,62 & 0 & 3,71 & 0,62 & 0 \\ 0 & 0,62 & 0,62 & 0,62 & 3,7 & 0,62 \\ 0 & 0 & 0,31 & 0 & 0,62 & 1,85 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

Assim, é possível calcular as frequências naturais para a cavidade desacoplada. As três primeiras são:

$$\omega_1 = 345,77 \frac{rad}{s}; \omega_2 = 824,81 \frac{rad}{s}; \omega_3 = 907,27 \frac{rad}{s} \quad (3.30)$$

### 3.4 Acoplamento MDF-MDF

Para fazer o acoplamento utilizando o MDF, algumas mudanças irão ocorrer nas equações que fazem parte do comportamento dos meios envolvidos. Para este método, a cavidade acústica deve ser retangular.

Primeiramente, na equação governante de estruturas reticuladas, dada pela Eq. (2.9), deve-se incorporar uma parcela de carregamento referente à pressão do fluido sobre o sólido (observando a Figura 3.3, nota-se que esta pressão é oposta à movimentação da estrutura). Considerando a viga com eixo longitudinal na direção  $x$  (o mesmo pode ser feito para o eixo na direção  $y$ ), tem-se:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p = 0 \quad (3.31)$$

A partir da Eq. (3.31), pode ser implementado o MDF, aplicando o operador de diferenças finitas unidimensional para derivadas de quarta ordem. Além disso, consideram-se oscilações harmônicas no tempo e o carregamento se torna uma pressão no ponto, isto é, vale a pressão hidrodinâmica relativa ao ponto em análise da viga (pivô). Assim, fazendo a aplicação na Eq. (3.31), fica:

$$E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_{w-2} - 4 \cdot \varphi_{w-1} + 6 \cdot \varphi_w - 4 \cdot \varphi_{w+1} + \varphi_{w+2})}{(\Delta x)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_w - P_{w'} = 0 \quad (3.32)$$

onde  $w'$  representa o ponto na cavidade acústica onde a pressão ali aplicada gera a força resultante no pivô  $w$  em análise na viga.

É importante destacar o fato que a quantidade de pontos escolhida para a viga deve ser compatível com aquela determinada para o contorno da cavidade acústica que contém a estrutura, para que a Eq. (3.32) seja aplicada de maneira correta. Ou seja, a interface fluido-estrutura deve ter o mesmo número de pontos na viga e no contorno da cavidade.

Então, com sucessivas aplicações da regra de recorrência da Eq. (3.32), é possível montar a seguinte equação matricial:

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} [K_e] & [FS_e] \end{array} \right] - \omega^2 \cdot \left[ \begin{array}{cc} [M_e] & [0] \end{array} \right] \right) \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

onde a matriz  $[FS_e]$  representa a matriz com as parcelas da interação fluido-estrutura originadas da equação de movimento da estrutura. Essa matriz é composta por valores unitários negativos em suas posições correspondentes aos pontos de pressão da interface fluido-estrutura, obtidos da última parcela da Eq. (3.32), com o restante dos termos sendo nulos. As matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  são as mesmas que foram encontradas na Eq. (2.32).

Já para a cavidade acústica, a novidade vem da condição de contorno de interface fluido-estrutura já apresentada no começo deste capítulo. Deve-se, então, aplicar o MDF na Eq. (3.6), resultando na seguinte expressão (considerando oscilações harmônicas no tempo):

$$\frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2 \cdot h} = -\rho_f \cdot (-\omega^2 \cdot \varphi) = \rho_f \cdot \omega^2 \cdot \varphi \quad (3.34)$$

Como o sentido da força devido a pressão vai de encontro à estrutura, como mostra a Figura 3.3, tem-se que o ponto virtual que se deseja contornar é o  $P_{k+1}$ , para qualquer que seja a direção normal ao contorno. A Figura 3.9 a seguir ilustra este fato.

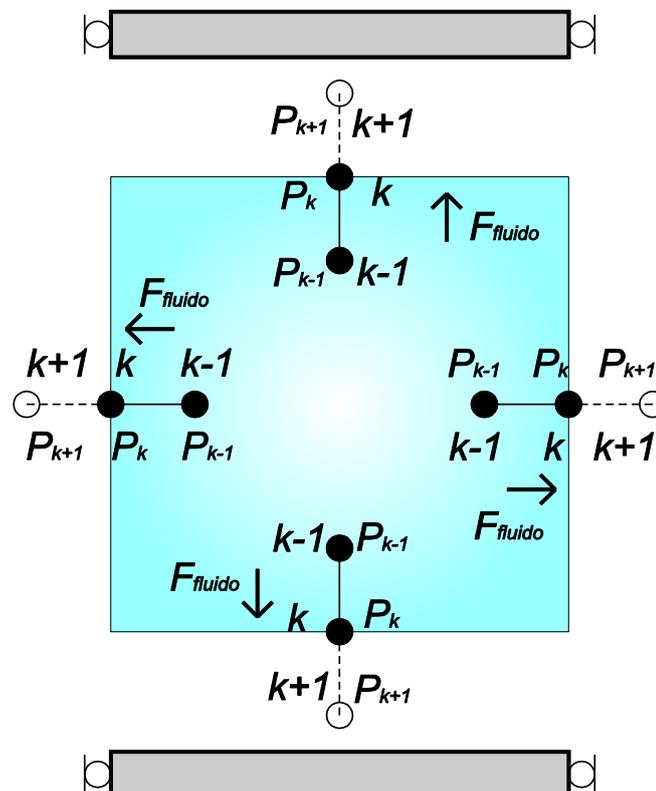


Figura 3.9 – Aplicação do MDF na interface fluido-estrutura em direções distintas.

Desse modo, isolando  $P_{k+1}$  na Eq. (3.34), resulta em:

$$P_{k+1} = P_{k-1} + 2 \cdot h \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot \varphi_{k'} \quad (3.35)$$

onde  $k'$  é o ponto na viga que recebe a força devido a pressão do fluido do ponto analisado (pivô).

A Eq. (3.35) pode ser substituída na equação que rege o comportamento do fluido, dada pela Eq. (2.34), sempre que o pivô estiver sobre o contorno da interface fluido-estrutura. Assim, aplicando a regra de recorrência da Eq. (2.34) para todos os pontos da cavidade, pode-se organizar os termos envolvidos e chegar na seguinte equação matricial:

$$\left( \begin{bmatrix} [0] & [K_f] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [FS_f] & [M_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

onde  $[FS_f]$  é a matriz com as parcelas da interação fluido-estrutura originadas da equação do fluido. Os termos não nulos dessa matriz são obtidos com a substituição de  $P_{k+1}$  da Eq. (3.35) na Eq. (2.34), resultando no valor positivo  $2 \cdot \rho_f / h$ . As matrizes  $[K_f]$  e  $[M_f]$  são as mesmas que foram encontradas na Eq. (2.35).

É importante destacar do que foi explicado acima que os termos não-nulos das matrizes de interação fluido-estrutura  $[FS_e]$  e  $[FS_f]$  possuem sinais contrários (na primeira, os valores são negativos, enquanto na segunda são positivos), mantendo assim a consistência no fenômeno.

As Eqs. (3.33) e (3.36) podem ser organizadas em uma única equação matricial, sendo dispostos nas primeiras linhas os termos originados da equação da estrutura e, imediatamente a seguir, aqueles resultantes da equação do fluido, transformando-se na expressão abaixo:

$$\left( \begin{bmatrix} [K_e] & [FS_e] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [FS_f] & [M_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) está na forma de um problema de autovalores e autovetores, a qual pode ser solucionada para encontrar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema

acoplado. O formato dessa equação se mantém para todos os tipos de acoplamento estudados neste trabalho, modificando apenas os termos envolvidos em cada submatriz.

Com isso, é possível resolver o exemplo apresentado no começo deste capítulo. Como se deseja mostrar de forma detalhada como montar a equação matricial do sistema acoplado, a malha em diferenças finitas utilizada é simples, como exibida na Figura 3.10 abaixo.

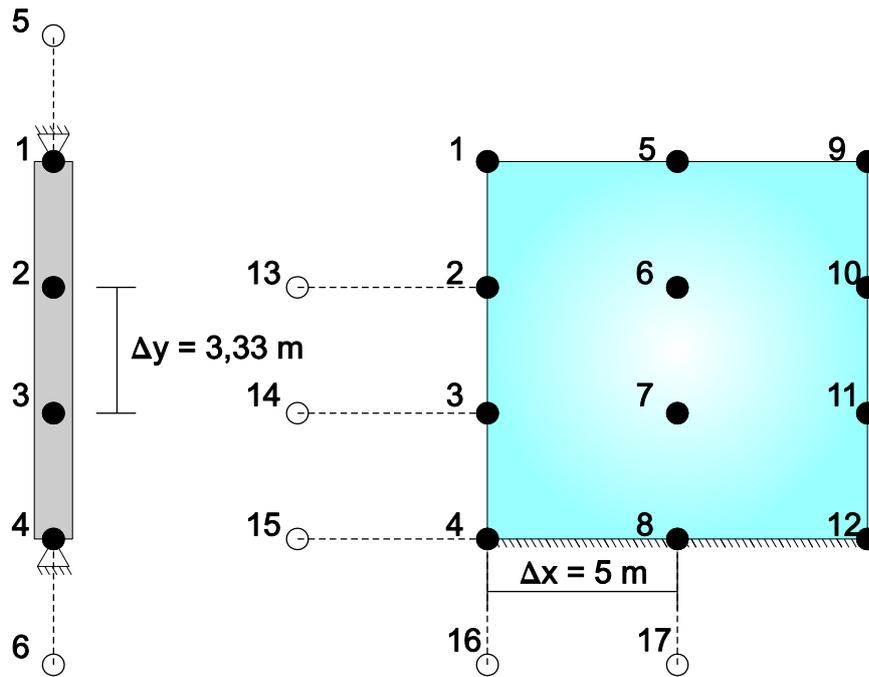


Figura 3.10 – Modelo numérico do problema para o acoplamento MDF-MDF.

Na estrutura, os pontos 2 e 3 não estão sobre o contorno, enquanto os pontos 1 e 4 estão sobre um apoio, o que implica deslocamento nulo. Assim, apenas nos pontos 2 e 3 será aplicada a regra de recorrência da Eq. (3.32). Já na cavidade, os pontos 6 e 7 não estão sobre algum contorno, os pontos 1, 2, 3 e 4 estão no contorno da interface fluido-estrutura, os pontos 4, 8 e 12 estão sobre um contorno rígido e os pontos 1, 5, 9, 10, 11 e 12 possuem pressão nula, o que implica que não será necessário aplicar a regra de recorrência da Eq. (2.34) nesses nós. Os nós 5 e 6 da viga e 13, 14, 15, 16 e 17 da cavidade são pontos virtuais.

Logo, considerando  $g$  como sendo o pivô e aplicando a Eq. (3.32) para a viga, tem-se:

$$g = 2: E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_5 - 4 \cdot \varphi_1 + 6 \cdot \varphi_2 - 4 \cdot \varphi_3 + \varphi_4)}{(\Delta y)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_2 - P_2 = 0 \quad (3.38a)$$

$$g = 3: E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_1 - 4 \cdot \varphi_2 + 6 \cdot \varphi_3 - 4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5)}{(\Delta y)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_3 - P_3 = 0 \quad (3.38b)$$

Já para a cavidade, aplica-se a Eq. (2.34), resultando nas seguintes expressões:

$$g = 2: \frac{-P_{13} + 2 \cdot P_2 - P_6}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_2 = 0 \quad (3.39a)$$

$$g = 3: \frac{-P_{14} + 2 \cdot P_3 - P_7}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_2 + 2 \cdot P_3 - P_4}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_3 = 0 \quad (3.39b)$$

$$g = 4: \frac{-P_{15} + 2 \cdot P_4 - P_8}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_3 + 2 \cdot P_4 - P_{16}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_4 = 0 \quad (3.39c)$$

$$g = 6: \frac{-P_2 + 2 \cdot P_6 - P_{10}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_5 + 2 \cdot P_6 - P_7}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_6 = 0 \quad (3.39d)$$

$$g = 7: \frac{-P_3 + 2 \cdot P_7 - P_{11}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_6 + 2 \cdot P_7 - P_8}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_7 = 0 \quad (3.39e)$$

$$g = 8: \frac{-P_4 + 2 \cdot P_8 - P_{12}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_7 + 2 \cdot P_8 - P_{17}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_8 = 0 \quad (3.39f)$$

Para contornar os pontos virtuais, utiliza-se as equações dos contornos dos meios. Para a viga, aplica-se as relações de apoio rotulado da Tabela 2.1, na qual fica:

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 0 \quad (3.40a)$$

$$\varphi_5 = -\varphi_2 \quad (3.40b)$$

$$\varphi_6 = -\varphi_3 \quad (3.40c)$$

Para a cavidade, há contornos de pressão nula, parede rígida e interface fluido-estrutura. Para a primeira condição, já especificada anteriormente, tem-se:

$$P_1 = P_5 = P_9 = P_{10} = P_{11} = P_{12} = 0 \quad (3.41)$$

No contorno rígido, pela Eq. (3.4), resulta:

$$P_{16} = P_3 \quad (3.42a)$$

$$P_{17} = P_7 \quad (3.42b)$$

Na interface fluido-estrutura, pela Eq. (3.35), pode-se escrever:

$$P_{13} = P_6 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot \varphi_2 \quad (3.43a)$$

$$P_{14} = P_7 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot \varphi_3 \quad (3.43b)$$

$$P_{15} = P_8 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot \varphi_4 = P_8 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot 0 \therefore P_{15} = P_8 \quad (3.43c)$$

Dois parâmetros da estrutura ainda precisam ser determinados, que são o momento de inércia  $I$  e a massa por unidade de comprimento  $\bar{m}$ . Como se está fazendo um estudo bidimensional do fenômeno, a dimensão transversal ao plano tem valor unitário. Com isso, tem-se:

$$I = \frac{1 \cdot 1^3}{12} = 0,0833 m^4 \quad (3.44a)$$

$$\bar{m} = \rho_e \cdot A = 7800 \cdot (1 \cdot 1) = 7800 kg / m \quad (3.44b)$$

Assim, substituindo as relações encontradas das Eqs. (3.40) a (3.44) nos conjuntos das Eqs. (3.38) e (3.39), como também os valores de  $\Delta x = 5 m$ ,  $\Delta y = 3,33 m$ ,  $E = 210 GPa$ ,  $\rho_f = 1000 kg / m^3$  e  $c = 1500 m / s$ , e organizando os termos, é possível montar uma equação matricial da forma da Eq. (3.37), resultando na seguinte expressão:

$$\left( \begin{array}{c} 10^8 \begin{bmatrix} 7,11 & -5,69 \\ -5,69 & 7,11 \end{bmatrix} \\ [0] \\ -\omega^2 \cdot \begin{bmatrix} 7800 & 0 \\ 0 & 7800 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 & 0 \\ -0,09 & 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 \\ 0 & -0,18 & 0,26 & 0 & 0 & -0,08 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,26 & -0,09 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0 & -0,09 & 0,26 & -0,09 \\ 0 & 0 & -0,04 & 0 & -0,18 & 0,26 \end{bmatrix} \\ [0] \\ \begin{bmatrix} 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 \end{bmatrix} \end{array} \right) + \left. \begin{array}{c} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{array} \right\} = 0 \quad (3.45)$$

Da Eq. (3.45), podem ser observadas as submatrizes da Eq. (3.37), como segue:

$$[K_e] = 10^8 \begin{bmatrix} 7,11 & -5,69 \\ -5,69 & 7,11 \end{bmatrix} \quad (3.46a)$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 & 0 \\ -0,09 & 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 \\ 0 & -0,18 & 0,26 & 0 & 0 & -0,08 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,26 & -0,09 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0 & -0,09 & 0,26 & -0,09 \\ 0 & 0 & -0,04 & 0 & -0,18 & 0,26 \end{bmatrix} \quad (3.46b)$$

$$[FS_e] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46c)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} 7800 & 0 \\ 0 & 7800 \end{bmatrix} \quad (3.46d)$$

$$[M_f] = 10^{-7} \begin{bmatrix} 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 \end{bmatrix} \quad (3.46e)$$

$$[FS_f] = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46f)$$

Logo, os autovalores da Eq. (3.45) e, conseqüentemente, as frequências naturais do sistema acoplado podem ser determinadas. As três primeiras frequências são:

$$\omega_1 = 108,17 \frac{rad}{s}; \omega_2 = 348,2 \frac{rad}{s}; \omega_3 = 396,15 \frac{rad}{s} \quad (3.47)$$

### 3.5 Acoplamento MEF-MDF

Para este caso, é feito o acoplamento utilizando métodos numéricos diferentes para os meios envolvidos, em que a estrutura é discretizada pelo MEF, enquanto que para o fluido continua sendo aplicado o MDF.

Dessa forma, as submatrizes da Eq. (3.37) originadas do fluido  $[K_f]$ ,  $[M_f]$  e  $[FS_f]$  continuam sendo as mesmas do acoplamento MDF-MDF (bastando apenas compatibilizar os graus de liberdade desta última matriz). Porém, aquelas vindas da estrutura irão mudar. As matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  são as que foram obtidas na Eq. (2.53), montadas de acordo com as matrizes locais do elemento finito escolhido na discretização. Além disso, como o MEF é um método contínuo, os termos não nulos da matriz  $[FS_e]$  são as áreas de influência da força em cada nó da interface fluido-estrutura devido a pressão do fluido (com

sinal negativo para manter a consistência no fenômeno). Assim, se a interface for horizontal, os valores são  $\Delta x$  (pontos no interior do contorno) e  $\Delta x/2$  (pontos na extremidade do contorno), enquanto que para interfaces verticais ficam  $\Delta y$  e  $\Delta y/2$ . É importante notar que, agora, a estrutura possui duas variáveis de deslocamento por nó ( $u$  e  $v$ ).

Logo, pode-se reescrever a Eq. (3.37) com as novas submatrizes, resultando na seguinte expressão:

$$\left( \begin{bmatrix} [K_e] & [FS_e] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [FS_f] & [M_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

Com a Eq. (3.48), é possível resolver o exemplo do começo do capítulo utilizando acoplamento MEF-MDF. A malha do sistema acoplado escolhida está exposta na Figura 3.11 a seguir.

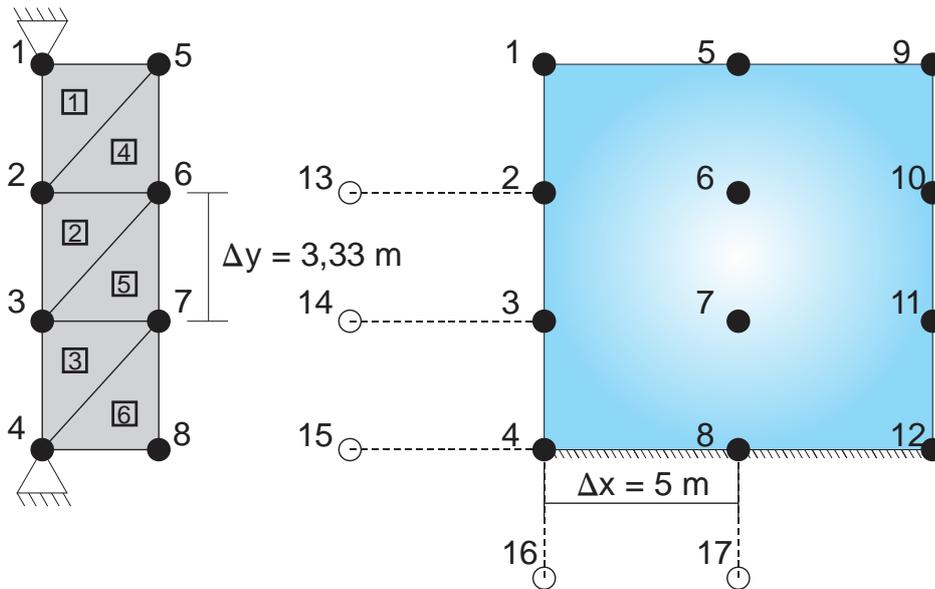


Figura 3.11 – Modelo numérico do problema para o acoplamento MEF-MDF.

A viga está discretizada com 6 elementos CST. Apenas os pontos 1 e 4 estão sobre o apoio (implicando em deslocamentos horizontal e vertical nulos nestes nós), enquanto o restante dos nós estão livres. Já na cavidade, somente os pontos 6 e 7 não estão sobre algum contorno, os pontos 1, 2, 3 e 4 estão no contorno da interface fluido-estrutura, os pontos 4, 8 e 12 estão sobre um contorno rígido e os pontos 1, 5, 9, 10, 11 e 12 possuem pressão nula, o que implica que não será necessário aplicar a regra de recorrência da Eq. (2.34) nesses nós. Os nós 13, 14, 15, 16 e 17 da cavidade são pontos virtuais.

Como todos os elementos da estrutura são triângulos de mesmas dimensões, a área de cada elemento é:

$$A_e = 1,67 m^2 \quad (3.49)$$

Para a matriz constitutiva do material  $[D]$ , é utilizado o Estado Plano de Deformações. Assim, pela Eq. (A.14) do Apêndice A, resulta a seguinte expressão:

$$[D] = 4,04 \cdot 10^{11} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Para cada elemento da viga, deve-se montar a matriz  $[B]$ , dada pela Eq. (2.64), e, em seguida, a matriz de rigidez local  $[k_e]$ , dada pela Eq. (2.65). A espessura de cada elemento é considerada unitária. Logo, para o elemento 4, por exemplo, obedecendo a ordem no sentido anti-horário dos nós, como o ponto 5 sendo o nó 1, o ponto 2 sendo o nó 2 e o ponto 6 sendo o nó 3, obtém-se as seguintes expressões (para os outros elementos, deve-se repetir o mesmo procedimento, o que não será detalhado aqui):

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & -0,3 \\ 0,3 & 0 & 0 & -1 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$[k_e] \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = [B]^T [D] [B] (A_e \cdot e) \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \quad (3.52)$$

$$= 10^{11} \begin{bmatrix} 0,12 & 0 & 0 & -0,41 & -0,12 & 0,41 \\ 0 & 0,43 & -0,61 & 0 & 0,61 & -0,43 \\ 0 & -0,61 & 4,72 & 0 & -4,72 & 0,61 \\ -0,41 & 0 & 0 & 1,35 & 0,41 & -1,35 \\ -0,12 & 0,61 & -4,72 & 0,41 & 4,84 & -1,01 \\ 0,41 & -0,43 & 0,61 & -1,35 & -1,01 & 1,77 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

A matriz de massa local  $[m_e]$  de cada elemento será a mesma, pois todos os elementos possuem a mesma área. Assim, pela Eq. (2.67), fica:

$$[m_e] = 1085,5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Aplicando o procedimento para todos os elementos, fazendo a soma das matrizes de rigidez e massa locais de forma adequada, para os correspondentes graus de liberdade, e reorganizando os termos, resulta nas matrizes de rigidez e massa globais da estrutura, que são duas das submatrizes da Eq. (3.48).

Para a matriz  $[FS_e]$ , deve-se avaliar a área de influência de cada nó da viga em contato com o fluido. Neste exemplo, temos os pontos 5, 6, 7 e 8 da viga que recebem uma força devido a pressão dos nós 1, 2, 3 e 4 da cavidade. Como a pressão em 1 é nula, deve-se contabilizar apenas as áreas de influência dos pontos 6, 7 e 8, que são  $-\Delta y$  (nós 6 e 7 no interior do contorno) e  $-\Delta y/2$  (nó 8 na extremidade do contorno).

Já para o fluido, deve-se aplicar a regra de recorrência da Eq. (2.34) nos pontos em que a pressão não é nula, ou seja, pontos 2, 3, 4, 6, 7 e 8, resultando nas expressões a seguir:

$$g = 2: \frac{-P_{13} + 2 \cdot P_2 - P_6}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_2 = 0 \quad (3.54a)$$

$$g = 3: \frac{-P_{14} + 2 \cdot P_3 - P_7}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_2 + 2 \cdot P_3 - P_4}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_3 = 0 \quad (3.54b)$$

$$g = 4: \frac{-P_{15} + 2 \cdot P_4 - P_8}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_3 + 2 \cdot P_4 - P_{16}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_4 = 0 \quad (3.54c)$$

$$g = 6: \frac{-P_2 + 2 \cdot P_6 - P_{10}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_5 + 2 \cdot P_6 - P_7}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_6 = 0 \quad (3.54d)$$

$$g = 7: \frac{-P_3 + 2 \cdot P_7 - P_{11}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_6 + 2 \cdot P_7 - P_8}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_7 = 0 \quad (3.54e)$$

$$g = 8: \frac{-P_4 + 2 \cdot P_8 - P_{12}}{(\Delta x)^2} + \frac{-P_7 + 2 \cdot P_8 - P_{17}}{(\Delta y)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_8 = 0 \quad (3.54f)$$

Nos contornos de pressão nula:

$$P_1 = P_5 = P_9 = P_{10} = P_{11} = P_{12} = 0 \quad (3.55)$$

No contorno rígido:

$$P_{16} = P_3 \quad (3.56a)$$

$$P_{17} = P_7 \quad (3.56b)$$

Na interface fluido-estrutura:

$$P_{13} = P_6 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot u_6 \quad (3.57a)$$

$$P_{14} = P_7 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot u_7 \quad (3.57b)$$

$$P_{15} = P_8 + 2 \cdot \Delta x \cdot \rho_f \cdot \omega^2 \cdot u_8 \quad (3.57c)$$

Substituindo as relações das Eqs. (3.55), (3.56) e (3.57) no conjunto das Eqs. (3.54), além dos valores  $\Delta x = 5m$ ,  $\Delta y = 3,33m$ ,  $\rho_f = 1000kg/m^3$  e  $c = 1500m/s$ , e organizando os termos, obtém-se as submatrizes da Eq. (3.48) originadas do fluido. Combinando estas com aquelas resultantes da estrutura, e eliminando as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade de deslocamento nulo da viga (como os nós 1 e 4 estão sobre um apoio, deve-se eliminar as linhas e colunas referentes a  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_4$  e  $v_4$ ), chega-se na forma final da Eq. (3.48) para este exemplo, em que se tem as seguintes submatrizes:

$$[K_e] = 10^{11} \begin{bmatrix} 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 0 & -1,01 & -9,43 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 3,54 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 0,4 & 9,66 & -1,01 & 0 & 0 & 0 & -1,01 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 \\ 0,61 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0 & 0 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & -1,01 & 0 & 0 & 4,84 & 0 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,77 & 0,61 & -0,42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9,43 & 1,01 & 0 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,01 & -2,7 & -1,01 & 0 & 0,4 & -0,42 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 9,66 & -1,01 & -0,12 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 4,83 & -1,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 1,77 \end{bmatrix} \quad (3.58a)$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 & 0 \\ -0,09 & 0,26 & -0,09 & 0 & -0,08 & 0 \\ 0 & -0,18 & 0,26 & 0 & 0 & -0,08 \\ -0,04 & 0 & 0 & 0,26 & -0,09 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0 & -0,09 & 0,26 & -0,09 \\ 0 & 0 & -0,04 & 0 & -0,18 & 0,26 \end{bmatrix} \quad (3.58b)$$

$$[FS_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,665 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58c)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 \\ 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 \end{bmatrix} \quad (3.58d)$$

$$[M_f] = 10^{-7} \begin{bmatrix} 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,44 \end{bmatrix} \quad (3.58e)$$

$$[FS_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58f)$$

Os vetor das variáveis é composto pelos seguintes subvetores:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} ; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Assim, é possível calcular as frequências naturais do sistema acoplado fluido-estrutura. As três primeiras são:

$$\omega_1 = 303,1 \frac{rad}{s} ; \omega_2 = 517,71 \frac{rad}{s} ; \omega_3 = 644,08 \frac{rad}{s} \quad (3.60)$$

### 3.6 Acoplamento MEF-MEF

O último tipo de acoplamento utiliza o MEF para discretização tanto da estrutura quanto do fluido. Neste caso, é possível resolver uma maior quantidade de problemas, englobando agora superfícies curvas, inclusive na interface fluido-estrutura.

Como é utilizado o MEF para os dois meios, as submatrizes da equação matricial do sistema acoplado originadas da estrutura,  $[K_e]$  e  $[M_e]$ , são as mesmas da Eq. (2.53), assim como aquelas vindas do fluido,  $[K_f]$  e  $[M_f]$ , são as que foram encontradas na Eq. (2.79). A maior mudança, quando comparado aos outros tipos de acoplamento, ocorre nas matrizes  $[FS_e]$  e  $[FS_f]$ , que podem ser obtidas da segunda parcela da direita da Eq. (2.70), mostrada a seguir:

$$\int_{\Gamma} (N_l \cdot \nabla p) d\Gamma \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) é avaliada para um elemento do contorno da cavidade acústica. No caso, deseja-se analisar o contorno da interface fluido-estrutura. A equação deste contorno está descrita na Eq. (3.6) como uma relação do gradiente da pressão. Assim, substituindo a Eq. (3.6) na Eq. (3.61), fica:

$$\int_{\Gamma} (N_l \cdot \nabla p) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( N_l \cdot \frac{dp}{dn} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left[ N_l \cdot (-\rho_f \cdot \ddot{\phi}) \right] d\Gamma = - \int_{\Gamma} (N_l \cdot \rho_f \cdot \ddot{\phi}) d\Gamma \quad (3.62)$$

Considerando oscilações harmônicas no tempo:

$$\int_{\Gamma} (N_l \cdot \nabla p) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \left[ N_l \cdot \rho_f \cdot (-\omega^2 \cdot \phi) \right] d\Gamma = \omega^2 \cdot \rho_f \int_{\Gamma} (N_l \cdot \phi) d\Gamma \quad (3.63)$$

O deslocamento na direção normal à interface fluido-estrutura pode ser escrito da seguinte forma aproximada:

$$\varphi = \sum_{i=1}^T N_i \cdot \varphi_i = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_T] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_T \end{Bmatrix} = [N] \{\varphi\} \quad (3.64)$$

Logo, substituindo a Eq. (3.64) na Eq. (3.63) e lembrando que  $l$  varia de 1 a  $T$ , resulta na relação a seguir:

$$\int_{\Gamma} (N_l \cdot \nabla p) d\Gamma = \omega^2 \cdot \rho_f \left( \int_{\Gamma} [N]^T [N] d\Gamma \right) \{\varphi\} = \omega^2 \cdot \rho_f \cdot [fs] \{\varphi\} \quad (3.65)$$

onde a matriz  $[fs]$  é calculada para elementos finitos da estrutura ou do fluido que estejam no contorno da interface fluido-estrutura. Essa matriz  $[fs]$  pode ser interpretada como aquela resultante de um elemento de acoplamento, o qual contém em cada nó os graus de liberdade dos dois meios envolvidos no sistema. Ou seja, como neste trabalho se estuda apenas problemas bidimensionais, o elemento de acoplamento é linear de dois nós, onde cada nó possui os graus de liberdade correspondentes dos elementos da estrutura (deslocamentos) e do fluido (pressão) contidos na interface. A Figura 3.12 ilustra esse elemento.

### Elementos de acoplamento fluido-estrutura

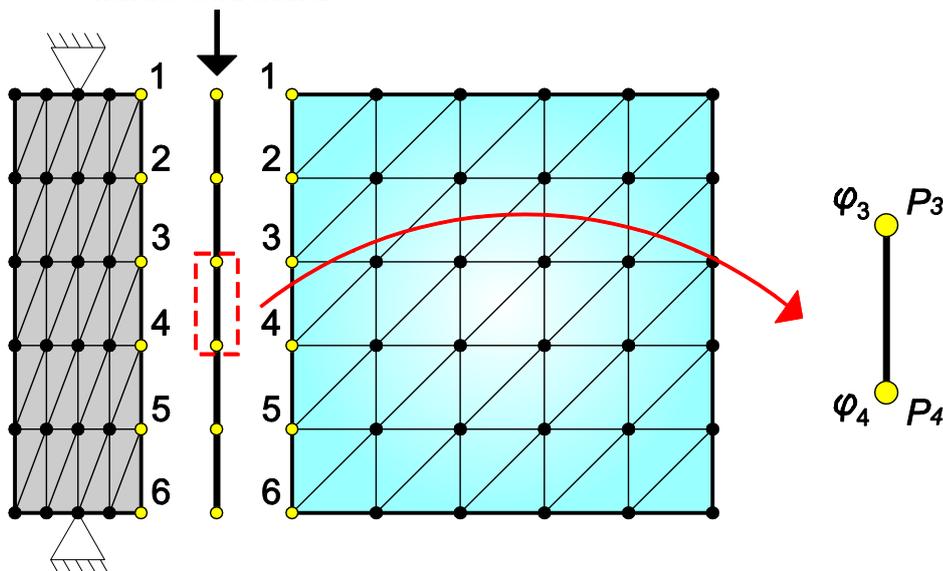


Figura 3.12 – Elemento de acoplamento fluido-estrutura.

Aplicando a Eq. (3.65) para todos os elementos da cavidade acústica que estão no contorno da interface fluido-estrutura, somando adequadamente os termos para os

correspondentes graus de liberdade e fazendo uma mudança de variável, a partir de uma matriz de rotação, para envolver os deslocamentos horizontais e verticais (e não apenas deslocamentos normais a estrutura), chega-se na expressão global para a matriz dos elementos de acoplamento:

$$\omega^2 \cdot \rho_f \cdot [FS] \{d\} \quad (3.66)$$

Incluindo a Eq. (3.66) na Eq. (2.79), que tem as matrizes globais de rigidez e massa do fluido, obtém-se a equação matricial global para a cavidade acústica. É importante destacar a compatibilidade dos sinais na equação, que pode ser observada pelas Eqs. (2.69) e (2.70), resultando na expressão a seguir:

$$\begin{aligned} [K_f] \{p\} - \omega^2 \cdot [M_f] \{p\} - \omega^2 \cdot \rho_f \cdot [FS] \{d\} &= 0 \therefore \\ \therefore \left( \begin{bmatrix} 0 & [K_f] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} \rho_f \cdot [FS] & [M_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Logo, pode-se perceber que a submatriz  $[FS_f]$  é:

$$[FS_f] = \rho_f \cdot [FS] \quad (3.68)$$

A submatriz  $[FS_e]$  pode ser obtida fazendo procedimento semelhante a partir da parcela da direita do conjunto das Eqs. (2.41), porém considerando apenas uma força normal a interface fluido-estrutura, que é a força devido a pressão do fluido. Desse modo, resulta na seguinte relação:

$$[FS_e] = -[FS]^T \quad (3.69)$$

Com isso, tem-se que tanto a submatriz  $[FS_f]$  quanto a  $[FS_e]$  são formadas por uma matriz comum, a  $[FS]$ . Esta pode ser determinada a partir da sua matriz local  $[fs]$ , a qual pode ser escrita de maneira explícita. Para isso, considere a Figura 3.13 a seguir, que apresenta um elemento de acoplamento genérico.

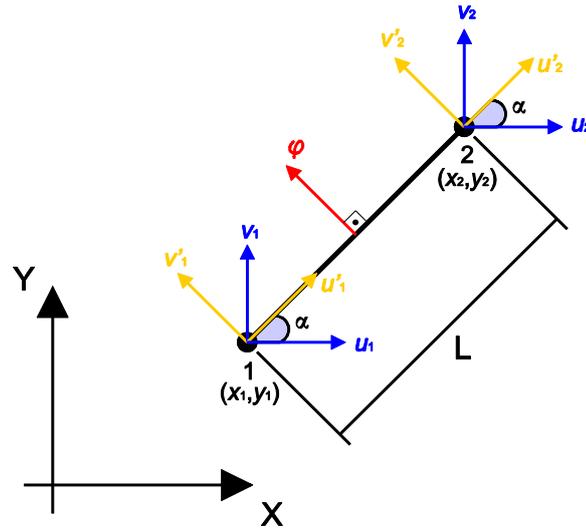


Figura 3.13 – Elemento de acoplamento fluido-estrutura genérico.

Como o deslocamento na interface fluido-estrutura é normal a esse contorno, pode-se verificar que, para os nós 1 e 2, os deslocamentos normais valem  $v_1'$  e  $v_2'$ , respectivamente. Logo, a partir da Eq. (3.65), tem-se o que segue:

$$\begin{aligned}
 [fs]\{\varphi\} &= \left( \int_{\Gamma} [N]^T [N] d\Gamma \right) \{\varphi\} = \left( \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} d\Gamma \right) \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \\
 &= \left( \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 \cdot N_1 & N_1 \cdot N_2 \\ N_2 \cdot N_1 & N_2 \cdot N_2 \end{bmatrix} d\Gamma \right) \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Mais uma vez, a avaliação da integral da Eq. (3.70) pode ser feita de maneira mais simples utilizando coordenadas naturais e integração de Gauss, resultando na seguinte expressão:

$$[fs]\{\varphi\} = \frac{L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} \tag{3.71}$$

onde  $L$  é a distância entre os nós 1 e 2 do elemento de acoplamento, ou seja, o tamanho do elemento.

A relação da Eq. (3.71) pode ser expandida para envolver também os deslocamentos nodais axiais do elemento, ficando:

$$[fs]\{d'\} = \frac{L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Os deslocamentos locais podem ser escritos em termos dos deslocamentos globais da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre o eixo  $x$  e a direção axial do elemento de acoplamento, medido sempre no sentido horário e em apenas um dos nós do elemento (considerado como sendo o nó inicial).

Substituindo a Eq. (3.73) na Eq. (3.72), tem-se:

$$\begin{aligned} [fs]\{d\} &= \frac{L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{L}{6} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot \text{sen}(\alpha) & 2 \cdot \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & -2 \cdot \text{sen}(\alpha) & 2 \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

A expressão para  $[fs]$  dada na Eq. (3.74) pode ser aplicada para todos os elementos da interface fluido-estrutura, tornando-se possível obter a matriz global  $[FS]$  e, consequentemente, as submatrizes  $[FS_f]$  e  $[FS_e]$ . Assim, a equação matricial final para o acoplamento MEF-MEF é:

$$\left( \begin{bmatrix} [K_e] & [FS_e] \\ [0] & [K_f] \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [M_e] & [0] \\ [FS_f] & [M_f] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.75)$$

De posse da Eq. (3.75), é possível resolver o problema exposto no início deste capítulo utilizando acoplamento MEF-MEF. A malha do sistema acoplado escolhida é apresentada na Figura 3.14 a seguir.

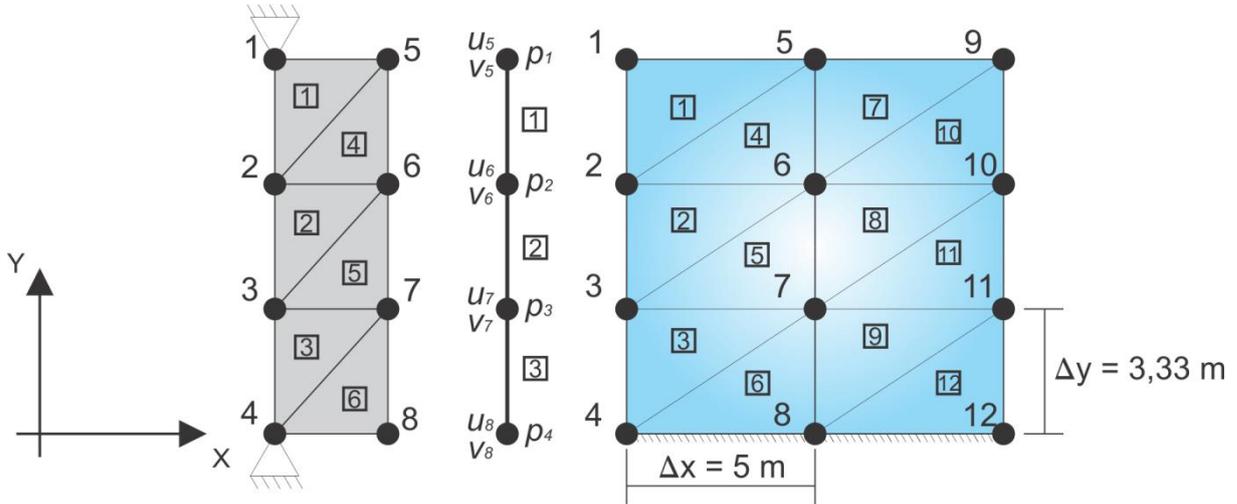


Figura 3.14 – Modelo numérico do problema para o acoplamento MEF-MEF.

A viga está discretizada com 6 elementos CST. Apenas os pontos 1 e 4 estão sobre o apoio (implicando em deslocamentos horizontal e vertical nulos nestes nós), enquanto o restante dos nós estão livres. Já a cavidade foi dividida em 12 elementos triangulares de 3 nós. Os nós 1, 2, 3 e 4 estão no contorno da interface fluido-estrutura, os nós 4, 8 e 12 estão sobre um contorno rígido e os nós 1, 5, 9, 10, 11 e 12 possuem pressão nula. Para a discretização utilizada, há três elementos de acoplamento fluido-estrutura.

Pode-se perceber que as matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  são as mesmas que foram obtidas para o caso do acoplamento MEF-MDF, dadas pelas Eqs. (3.58a) e (3.58d), respectivamente, pois a viga está discretizada exatamente da mesma forma que o caso anterior.

Já o fluido possui todos os elementos de mesmas dimensões, resultando que a área de cada elemento é:

$$A_e = 8,33m^2 \quad (3.76)$$

Para cada elemento da cavidade, deve-se montar a matriz  $[B_f]$ , dada pela Eq. (2.82), e, em seguida, a matriz de rigidez local  $[k_f]$ , dada pela Eq. (2.85). A espessura de cada elemento é considerada unitária. Logo, para o elemento 2, por exemplo, obedecendo a ordem

no sentido anti-horário dos nós, como o ponto 2 sendo o nó 1, o ponto 3 sendo o nó 2 e o ponto 6 sendo o nó 3, obtém-se as seguintes expressões (para os outros elementos, deve-se repetir o mesmo procedimento, o que não será detalhado aqui):

$$[B_f] = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & -0,3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$[k_f] \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,08 & -0,75 & -0,33 \\ -0,75 & 0,75 & 0 \\ -0,33 & 0 & 0,33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_6 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

A matriz de massa local  $[m_f]$  de cada elemento será a mesma, pois todos os elementos possuem a mesma área. Assim, pela Eq. (2.87), fica:

$$[m_f] = 3,09 \cdot 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Aplicando o procedimento para todos os elementos, fazendo a soma das matrizes de rigidez e massa locais de forma adequada, para os correspondentes graus de liberdade, e reorganizando os termos, resulta nas matrizes de rigidez e massa globais do fluido, que são duas das submatrizes da Eq. (3.75).

Para cada elemento de acoplamento, deve-se montar a matriz local  $[fs]$ . O ângulo  $\alpha$  para os dois elementos é o mesmo e vale  $90^\circ$  (considerando o nó inferior de cada elemento como sendo o nó inicial), resultando em  $\text{sen}(\alpha) = 1$  e  $\text{cos}(\alpha) = 0$ . Além disso, a distância  $L$  entre os nós também é a mesma para os elementos, de valor  $3,33m$ . Assim, a matriz de acoplamento para os três elementos será a mesma, dada pela expressão a seguir:

$$[fs] = \frac{3,33}{6} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Combinando as matrizes de acoplamento locais adequadamente para cada grau de liberdade, obtém-se a matriz de acoplamento global  $[FS]$ . Com esta matriz, é possível encontrar as submatrizes  $[FS_e]$  e  $[FS_f]$ . Assim, combinando as matrizes originadas da estrutura e do fluido, organizando os termos e eliminando as linhas e colunas referentes aos

graus de liberdade de deslocamento nulo na viga ( $u_1, v_1, u_4$  e  $v_4$ ) e pressão nula na cavidade ( $p_1, p_5, p_9, p_{10}, p_{11}$  e  $p_{12}$ ), todas as submatrizes da Eq. (3.75) do sistema acoplado MEF-MEF podem ser determinadas, dadas pelas relações a seguir:

$$[K_e] = 10^{11} \begin{bmatrix} 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 0 & -1,01 & -9,43 & 1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 3,54 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 0,4 & 9,66 & -1,01 & 0 & 0 & 0 & -1,01 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 \\ 0,61 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0 & 0 & -1,01 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 \\ 0 & -1,01 & 0 & 0 & 4,84 & 0 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,77 & 0,61 & -0,42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9,43 & 1,01 & 0 & -1,01 & -0,12 & 0,61 & 9,67 & -1,01 & -0,12 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,01 & -2,7 & -1,01 & 0 & 0,4 & -0,42 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,42 & 1,01 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 9,66 & -1,01 & -0,12 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1,01 & -2,69 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 3,54 & 0,61 & -0,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,12 & 0,61 & 4,83 & -1,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & -0,43 & -1,01 & 1,77 \end{bmatrix} \quad (3.81a)$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 2,17 & -0,75 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ -0,75 & 2,17 & -0,75 & 0 & -0,67 & 0 \\ 0 & -0,75 & 1,08 & 0 & 0 & -0,33 \\ -0,67 & 0 & 0 & 4,33 & -1,5 & 0 \\ 0 & -0,67 & 0 & -1,5 & 4,34 & -1,5 \\ 0 & 0 & -0,33 & 0 & -1,5 & 2,17 \end{bmatrix} \quad (3.81b)$$

$$[FS_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,22 & 0,55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,55 & 2,22 & 0,55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,55 & 1,11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.81c)$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6506,5 & 0 & 1082,25 & 0 & 2171 & 0 & 2167,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 \\ 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2171 & 0 & 0 & 0 & 4342 & 0 & 1085,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2167,75 & 0 & 2164,5 & 0 & 1085,5 & 0 & 6500 & 0 & 1082,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2164,5 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 6493,5 & 0 & 1082,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1082,25 & 0 & 2164,5 \end{bmatrix} \quad (3.81d)$$

$$[M_f] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1,85 & 0,31 & 0 & 0,62 & 0 & 0 \\ 0,31 & 1,85 & 0,31 & 0,62 & 0,62 & 0 \\ 0 & 0,31 & 1,23 & 0 & 0,62 & 0,31 \\ 0,62 & 0,62 & 0 & 3,71 & 0,62 & 0 \\ 0 & 0,62 & 0,62 & 0,62 & 3,7 & 0,62 \\ 0 & 0 & 0,31 & 0 & 0,62 & 1,85 \end{bmatrix} \quad (3.81e)$$

$$[FS_f] = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0,55 & 0 & -2,22 & 0 & -0,55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,55 & 0 & -2,22 & 0 & -0,55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,55 & 0 & -1,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.81f)$$

Os vetor das variáveis é composto pelos seguintes subvetores:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} ; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

Assim, é possível calcular as frequências naturais do sistema acoplado fluido-estrutura para o acoplamento MEF-MEF. As três primeiras são:

$$\omega_1 = 319,66 \frac{rad}{s} ; \omega_2 = 584,22 \frac{rad}{s} ; \omega_3 = 857,18 \frac{rad}{s} \quad (3.83)$$

### 3.7 Síntese das aplicações

Neste tópico é apresentado um resumo das aplicações desenvolvidas, com alguns pontos importantes a serem destacados. A Tabela 3.1 a seguir apresenta os resultados dos casos com acoplamento fluido-estrutura.

Tabela 3.1 – Resultados dos diferentes tipos de acoplamento.

		Tipo de acoplamento		
		MDF-MDF	MEF-MDF	MEF-MEF
Frequência natural (rad/s)	$\omega_1$	108,17	303,1	319,66
	$\omega_2$	348,2	517,71	584,22
	$\omega_3$	396,15	644,08	857,18

Observando a Tabela 3.1, percebe-se que os valores das frequências de cada modo para os diferentes tipos de acoplamento não são próximos uns dos outros. Isto se deve ao fato de que a discretização utilizada foi muito pobre, com poucos nós e elementos, e assim não sendo adequado fazer uma comparação de convergência de valores. É exatamente por esta situação que não houve preocupação em obter um valor de referência, pois os resultados encontrados estariam distantes daqueles que se desejaria obter. A comparação com valores de referência será realizada no capítulo 5.

O objetivo principal de se escolher malhas pouco refinadas para as aplicações neste capítulo, como também de um exemplo com geometria simples, foi de poder explicar com mais detalhes e de uma maneira mais didática como realizar a análise modal do sistema fluido-estrutura para os diferentes tipos de acoplamento para que se tenha um melhor entendimento das etapas necessárias e, assim, ser possível prosseguir para casos mais complexos com mais facilidade.

A utilização do MDF foi importante pois se trata de um método numérico cuja compreensão e implementação é relativamente simples, o que ajuda na assimilação do assunto e facilita o desenvolvimento de códigos computacionais. Além disso, o acoplamento fluido-estrutura realizado por diferentes métodos numéricos tem sua relevância por causa da metodologia progressiva do trabalho, em que se foi possível, gradativamente, evoluir para métodos mais sofisticados, capazes de solucionar problemas de maior complexidade.

## 4 CÓDIGO COMPUTACIONAL

Este capítulo trata sobre o código computacional desenvolvido para resolver problemas de interação fluido-estrutura bidimensionais. A sua estrutura foi criada em linguagem MATLAB desde sua primeira versão abordando acoplamento MDF-MDF até a sua configuração final em acoplamento MEF-MEF. Apenas esta última etapa é detalhada aqui, pois podem ser solucionados casos mais complexos, que englobam geometrias do sólido e da cavidade acústica com contornos arbitrários, como exemplifica a Figura 4.1. Nos Apêndices D, E e F são apresentadas as linhas de comando dos códigos desenvolvidos para os acoplamentos MDF-MDF, MEF-MDF e MEF-MEF, respectivamente.

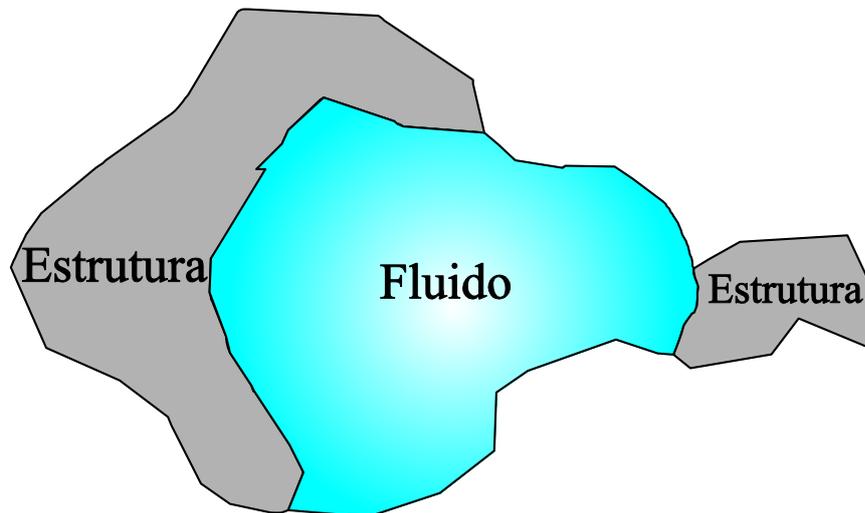


Figura 4.1 – Sistema fluido-estrutura com geometria arbitrária.

O código foi escrito de forma que seja possível fazer a análise modal tanto de forma acoplada quanto de forma desacoplada (apenas a estrutura ou apenas o fluido). Esta é uma etapa inicial para o desenvolvimento de análises no domínio do tempo. A montagem do código foi realizada de acordo com o fluxograma geral da Figura 4.2 a seguir.

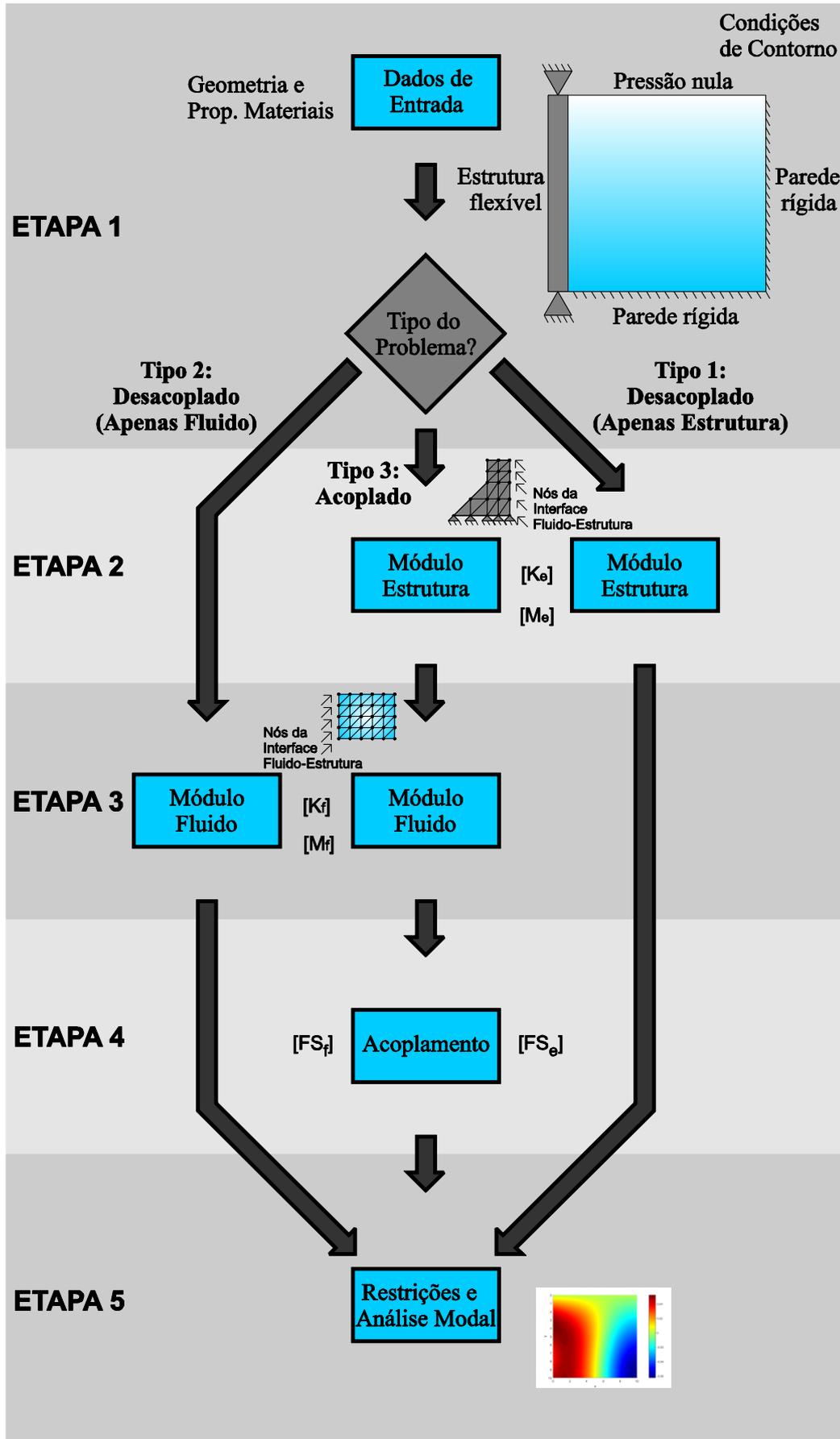


Figura 4.2 – Fluxograma geral do código computacional desenvolvido.

## 4.1 Etapa 1

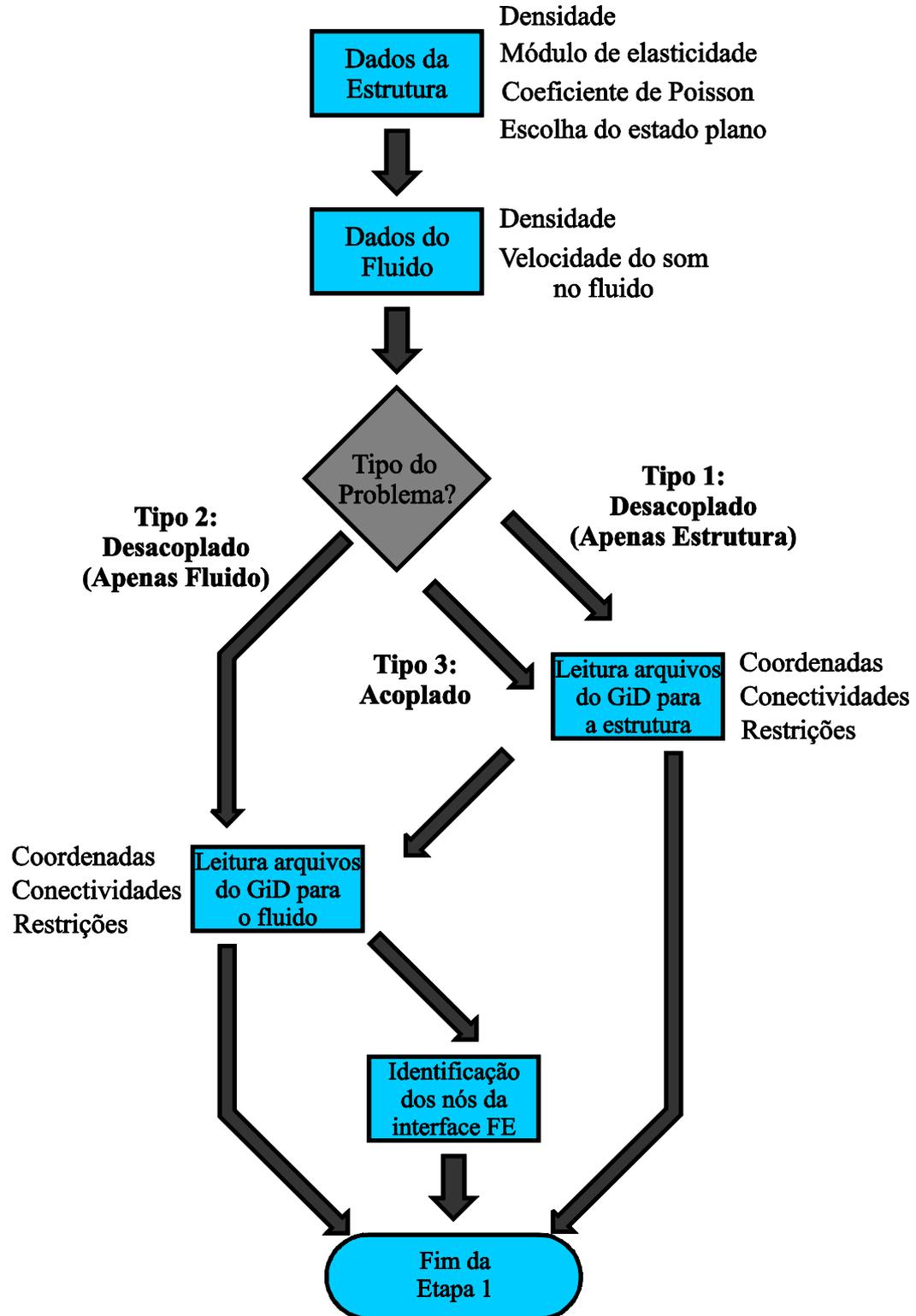


Figura 4.3 – Fluxograma da etapa 1 do código.

O código inicia com a inserção dos dados de entrada referentes às propriedades da estrutura e do fluido, com todas as unidades no Sistema Internacional. Para o primeiro meio, o usuário deve informar a densidade do material, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, além de escolher se será utilizado o Estado Plano de Tensões ou Deformações. Para o fluido, o usuário deve indicar sua densidade e a velocidade do som no meio.

Em seguida, o código pergunta ao usuário qual será o tipo de problema a ser resolvido, que pode ser de 3 formas diferentes: tipo 1, desacoplado, apenas estrutura; tipo 2, desacoplado, apenas cavidade acústica; ou tipo 3, sistema fluido-estrutura acoplado.

Baseado no tipo do problema a ser solucionado, o código irá fazer a leitura dos dados das geometrias do sólido e da cavidade acústica através da leitura de arquivos de texto que contenham as coordenadas de cada meio. Além disso, ainda é feita a captura das conectividades dos elementos finitos, também a partir da leitura de arquivos de texto. Estes arquivos são obtidos por um pré-processamento realizado previamente com o auxílio de um programa próprio para o caso. Neste trabalho foi utilizado o GiD para desenvolver essa tarefa, ou seja, para geração da malha. Dessa forma, foi criada uma rotina dentro do código específica para fazer a leitura dos arquivos resultantes desse *software*, capturando apenas os dados numéricos. Assim, caso o problema seja tipos 1 ou 3, o código realiza a decodificação dos dados referentes à estrutura, onde também deve ser especificado os nós com restrição de deslocamentos. Caso seja tipos 2 ou 3, o mesmo é feito para o fluido, onde também devem ser informados os pontos restritos (pressão nula).

A primeira etapa finaliza com uma rotina para relacionar os graus de liberdade da estrutura com os respectivos graus de liberdade do fluido na interface fluido-estrutura, ou seja, é feita a identificação dos nós que fazem parte da interface. Basicamente, é feita uma interseção dos vetores que contêm os nós da estrutura e do fluido e, caso haja algum ponto em comum, significa que ele está contido na interface, sendo assim guardado em um novo vetor que comporta todos os nós da interface. Para verificar se dois pontos desse vetor fazem parte de um mesmo elemento de acoplamento, deve-se apenas investigar se eles fazem parte de um mesmo elemento finito da estrutura (ou do fluido), realizando uma nova interseção de vetores (interseção do vetor criado com todos os nós da interface com um vetor auxiliar contendo as conectividades dos elementos da estrutura ou do fluido).

## 4.2 Etapa 2

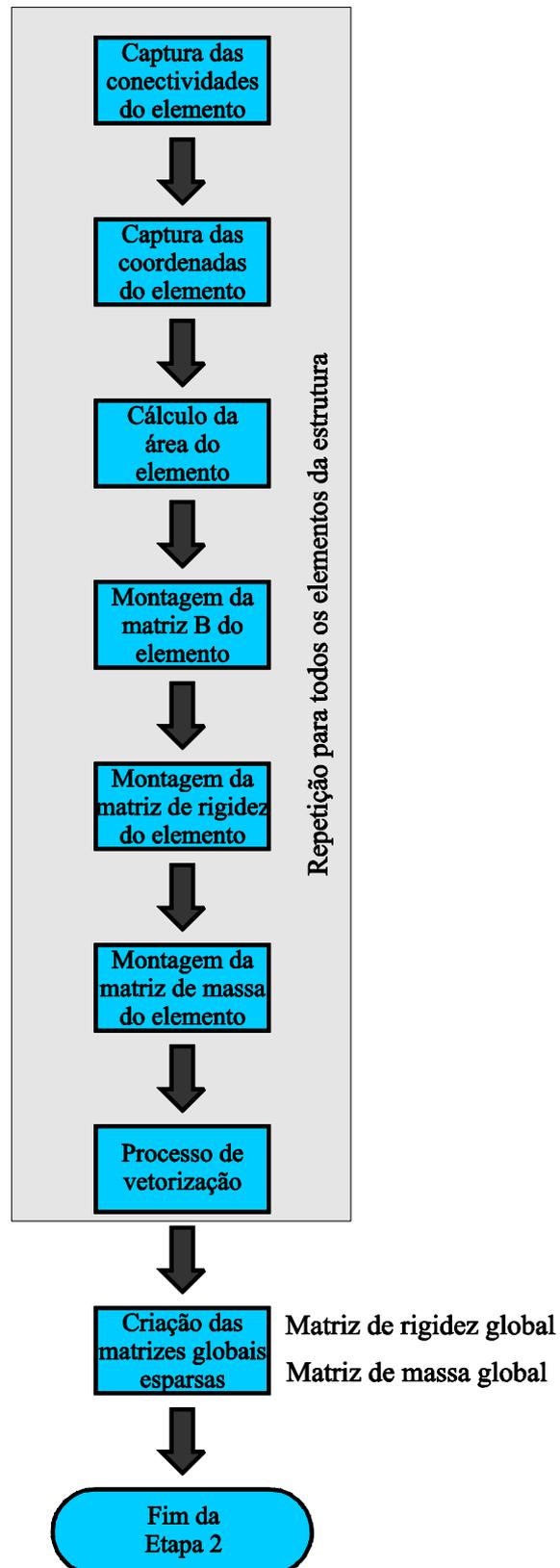


Figura 4.4 – Fluxograma da etapa 2 do código.

Esta parte é dedicada completamente à estrutura. Caso o problema a ser resolvido seja do tipo 1 (desacoplado, apenas estrutura) ou 3 (acoplado), o código irá executar esta etapa.

Aqui é feita a montagem das matrizes de rigidez  $[K_e]$  e massa  $[M_e]$  globais da estrutura a partir de um *loop* com a atualização dos valores da rigidez e massa de cada elemento, obtidos pelas matrizes dos elementos dadas pelas Eqs. (2.65) e (2.67). Dentro do *loop* devem estar inclusas as coordenadas e conectividades de cada elemento, como também o valor de sua área e sua matriz  $[B]$ , necessários para as matrizes de massa e rigidez locais, respectivamente.

Duas estratégias foram implementadas para melhorar o desempenho do código. Uma delas foi a vetorização das matrizes de rigidez e massa locais e globais, em que essas matrizes são transformadas em vetores, sendo os termos locais incorporados diretamente nas suas respectivas posições globais. Este procedimento evita alocação termo a termo nas matrizes globais, reduzindo drasticamente o tempo de processamento. A outra tática foi a utilização de matrizes esparsas, que armazenam apenas valores não nulos em sua composição, resultando numa grande redução do consumo da memória da máquina, o que representa uma enorme vantagem na solução de problemas com uma elevada quantidade de graus de liberdade. Após terminado o *loop* com a criação dos vetores de rigidez e massa globais, estes são transformados em matrizes esparsas para posterior solução do problema de autovalores e autovetores.

Para o problema acoplado (tipo 3), as matrizes  $[K_e]$  e  $[M_e]$  estarão incluídas em matrizes com mais linhas e colunas para englobar os graus de liberdade do fluido (essas matrizes são submatrizes da equação do sistema acoplado).

## 4.3 Etapa 3

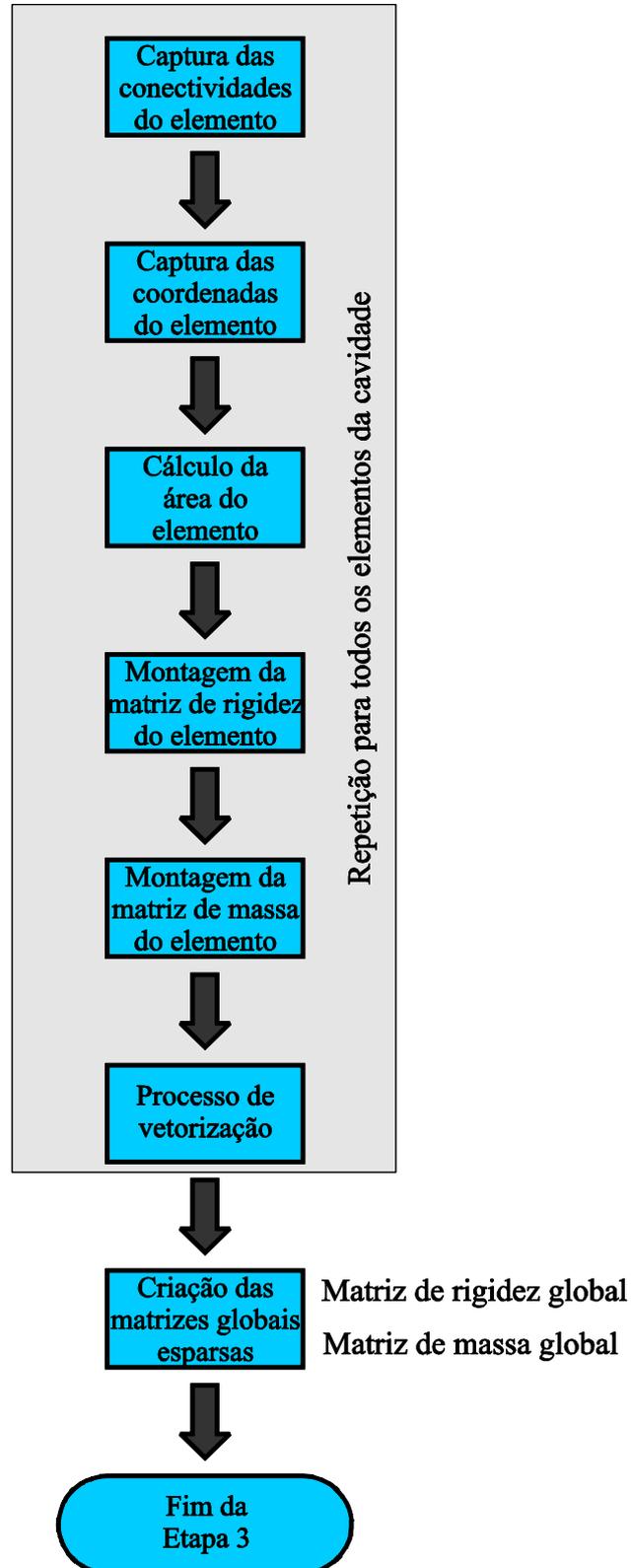


Figura 4.5 – Fluxograma da etapa 3 do código.

Esta parte é dedicada completamente ao fluido. Caso o problema a ser resolvido seja do tipo 2 (desacoplado, apenas cavidade acústica) ou 3 (acoplado), o código irá executar esta etapa.

O procedimento utilizado aqui é idêntico ao que foi feito na etapa 2 para a estrutura, porém as matrizes de rigidez e massa globais que se deseja montar agora são as  $[K_f]$  e  $[M_f]$  do fluido, sendo inseridas no *loop* as respectivas matrizes locais dadas pelas Eqs. (2.85) e (2.87). Novamente, a estratégia de vetorização e do uso de matrizes esparsas são implementadas para melhorar o rendimento do código.

Para o problema com acoplamento (tipo 3), as matrizes  $[K_f]$  e  $[M_f]$  são submatrizes da equação do sistema acoplado, que também contém as submatrizes originadas da estrutura.

#### 4.4 Etapa 4

Esta etapa é dedicada ao acoplamento fluido-estrutura. Ela é executada apenas se o tipo do problema for o 3. Aqui são montadas as matrizes  $[FS_e]$  e  $[FS_f]$  a partir de um *loop* que engloba todos os elementos de acoplamento que foram determinados no final da etapa 1. Para cada elemento, é utilizada a expressão da matriz de acoplamento local  $[FS^{loc}]$  dada pela Eq. (3.74), com seus termos já sendo incorporados nas respectivas posições globais e, assim, dentro do próprio *loop* já são criadas as matrizes  $[FS_e]$ , dada pela Eq. (3.69), e  $[FS_f]$ , dada pela Eq. (3.68), as quais são submatrizes da equação do sistema acoplado.

#### 4.5 Etapa 5

A última etapa é dividida em duas partes principais.

A primeira delas é a implementação das restrições de deslocamentos e pressões devido às condições de contorno da estrutura e cavidade acústica, respectivamente. A ideia aqui é identificar as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade restritos (o que foi especificado na etapa 1) e eliminá-las da equação matricial global. Para isso, é criado um vetor que contém os graus de liberdade restringidos da estrutura e outro com aqueles da cavidade para então juntá-los em um único vetor e aplicar na equação matricial global do sistema acoplado de forma a eliminar as linhas e colunas. Caso o problema seja desacoplado, utiliza-se apenas um dos vetores para fazer a eliminação, a depender se está analisando apenas o sólido (usa o vetor com restrição da estrutura) ou apenas o fluido (usa o vetor com restrição da cavidade acústica).

Feito o procedimento descrito acima, a equação matricial global está em sua forma final, pronta para ser solucionada. Para o problema acoplado (tipo 3), tem-se a expressão da Eq. (3.75). Caso seja desacoplado, para o tipo 1 (apenas estrutura), resulta a Eq. (2.53) ou, para o tipo 2 (apenas fluido), a Eq. (2.81).

Na segunda parte, resolve-se o problema de autovalores e autovetores. Na solução, são geradas duas matrizes, em que em uma delas são guardadas as frequências naturais (autovalores) e na outra os modos de vibração (autovetores) associados a cada frequência. Como essa tarefa exige elevado custo computacional (praticamente todo o tempo de processamento do código é devido a esta fase) e as frequências mais baixas são as que mais importam na prática, foi utilizado o comando *eigs* do MATLAB para realizar este passo. Esse comando permite introduzir opções para, além de calcular os autovalores e autovetores, escolher quantos destes parâmetros se deseja obter, sendo possível também retornar os autovalores de menor magnitude (opção adicional *sm*). Assim, foi escolhido obter apenas os 8 primeiros autovalores e autovetores, melhorando o rendimento do código. O programa exibe automaticamente as 8 primeiras frequências naturais.

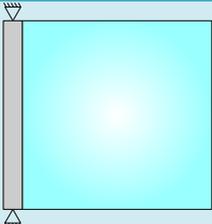
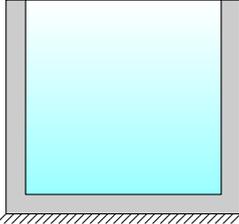
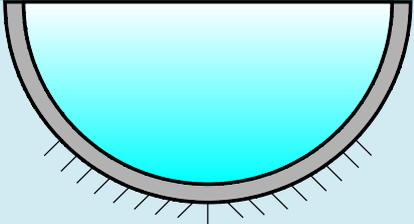
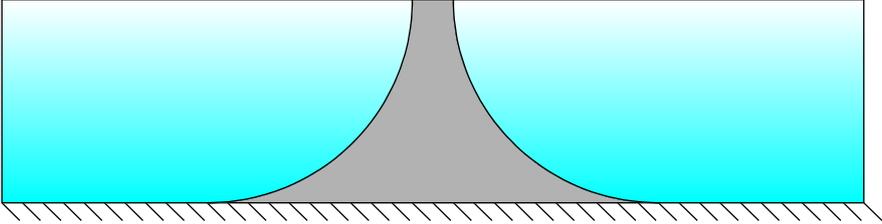
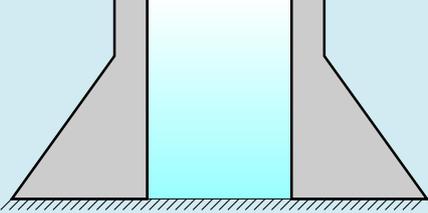
Concluída esta etapa, o código é finalizado.

## 5 APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, são estudados alguns casos com o intuito de aplicar o código desenvolvido e validá-lo. Os resultados da aplicação são comparados com valores obtidos pela modelagem no programa ANSYS v.14.5 (com exceção do caso 1, cujos resultados de referência foram obtidos por solução analítica). Além disso, análises adicionais são feitas em alguns dos tópicos abordados.

A Tabela 5.1 a seguir apresenta um esquema dos casos analisados.

Tabela 5.1 – Síntese das aplicações computacionais.

Caso	Geometria	Tipos de acoplamento
1		MDF-MDF MEF-MDF MEF-MEF
2		MEF-MDF MEF-MEF
3		MEF-MEF
4		MEF-MEF
5		MEF-MDF MEF-MEF

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 são apresentados os parâmetros dos problemas estudados.

Tabela 5.2 – Parâmetros para os casos 1 e 2.

Estrutura	
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	7800
Módulo de elasticidade (GPa)	210
Coefficiente de Poisson	0.3
Estado Plano	Tensões

Fluido	
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	1000
Velocidade do som no fluido (m/s)	1500

Tabela 5.3 – Parâmetros para os casos 3, 4 e 5.

Estrutura	
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	2500
Módulo de elasticidade (GPa)	25
Coefficiente de Poisson	0.2
Estado Plano	Deformações

Fluido	
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	1000
Velocidade do som no fluido (m/s)	1500

## 5.1 Caso 1

Inicialmente é estudado o caso de uma cavidade acústica acoplada a uma viga biapoiada. Esta tem  $10\text{m}$  de comprimento e  $1\text{m}$  de espessura. A cavidade é quadrada com dimensões de  $10\text{m} \times 10\text{m}$ . A cavidade possui a viga em seu contorno esquerdo e pressão nula nos demais.

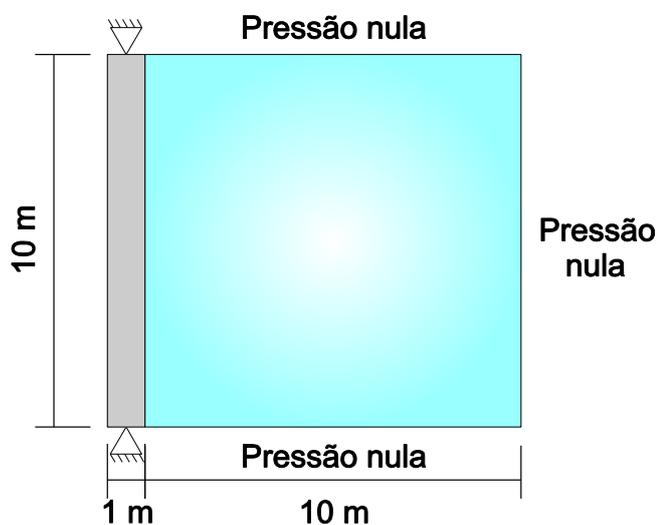


Figura 5.1 – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 1.

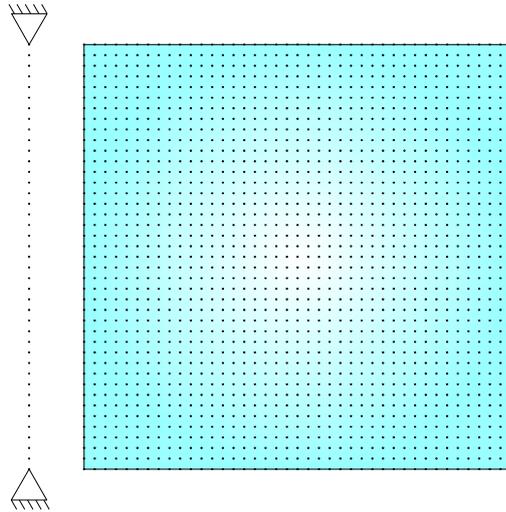


Figura 5.2 – Discretização para o acoplamento MDF-MDF do caso 1.

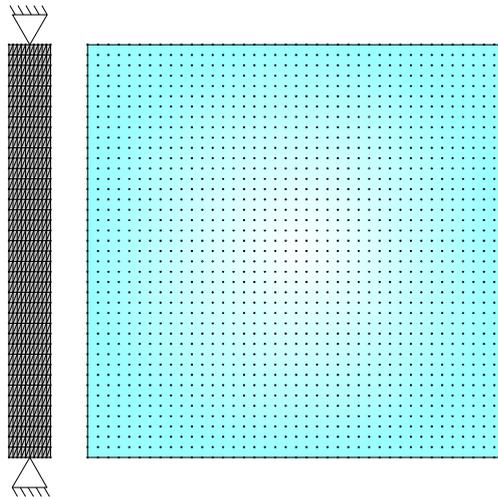


Figura 5.3 – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 1.

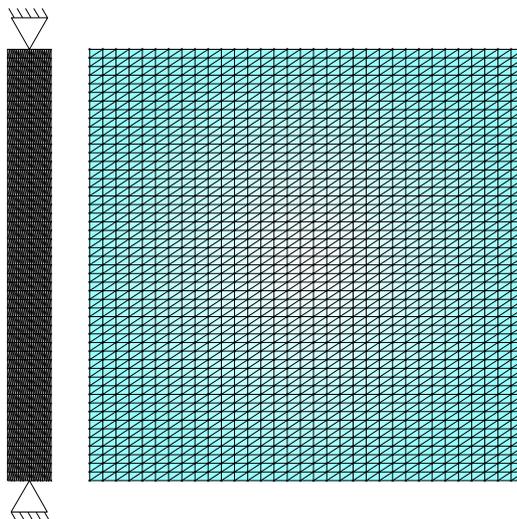


Figura 5.4 – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 1.

A Tabela 5.4 a seguir apresenta os resultados obtidos pelo código para os 7 primeiros modos de vibração e compara os valores com aqueles encontrados por Ribeiro (2010), o qual resolveu o problema analiticamente.

Tabela 5.4 – Resultados do estudo de caso 1.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)						
	Solução analítica	MDF-MDF	Erro (%)	MEF-MDF	Erro (%)	MEF-MEF	Erro (%)
1	122.52	123.96	1.18	125.87	2.73	126.34	3.12
2	527.79	528.6	0.15	515.02	2.42	512.25	2.94
3	570.2	570.19	0.00	569.81	0.07	569.77	0.08
4	881.22	881.78	0.06	881.32	0.01	882.49	0.14
5	1003.74	1001.77	0.20	1000.44	0.33	1001.25	0.25
6	1187.52	1184.29	0.27	1098.9	7.46	1094.97	7.79
7	1206.37	1206.78	0.03	1205.17	0.10	1207.41	0.09
Discretização da malha	Nós na viga	41		663		1071	
	Elementos na viga	-		1200		2000	
	Nós na cavidade	1681		2601		1734	
	Elementos na cavidade	-		-		3300	

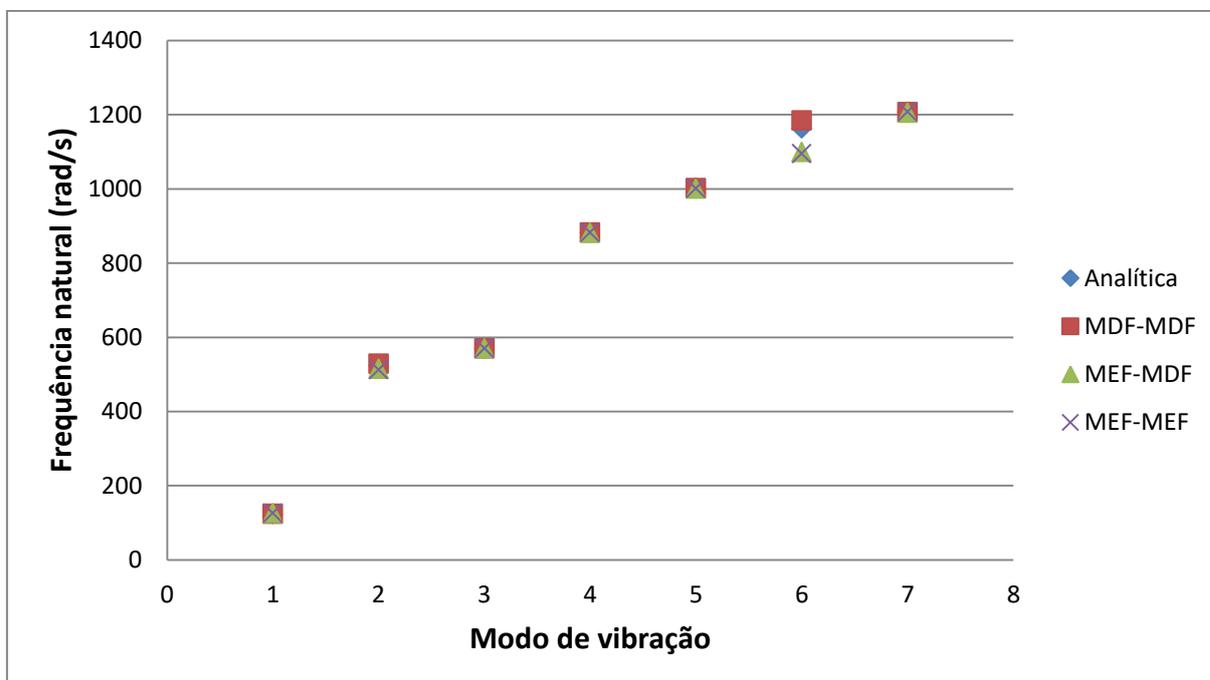


Figura 5.5 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o estudo de caso 1.

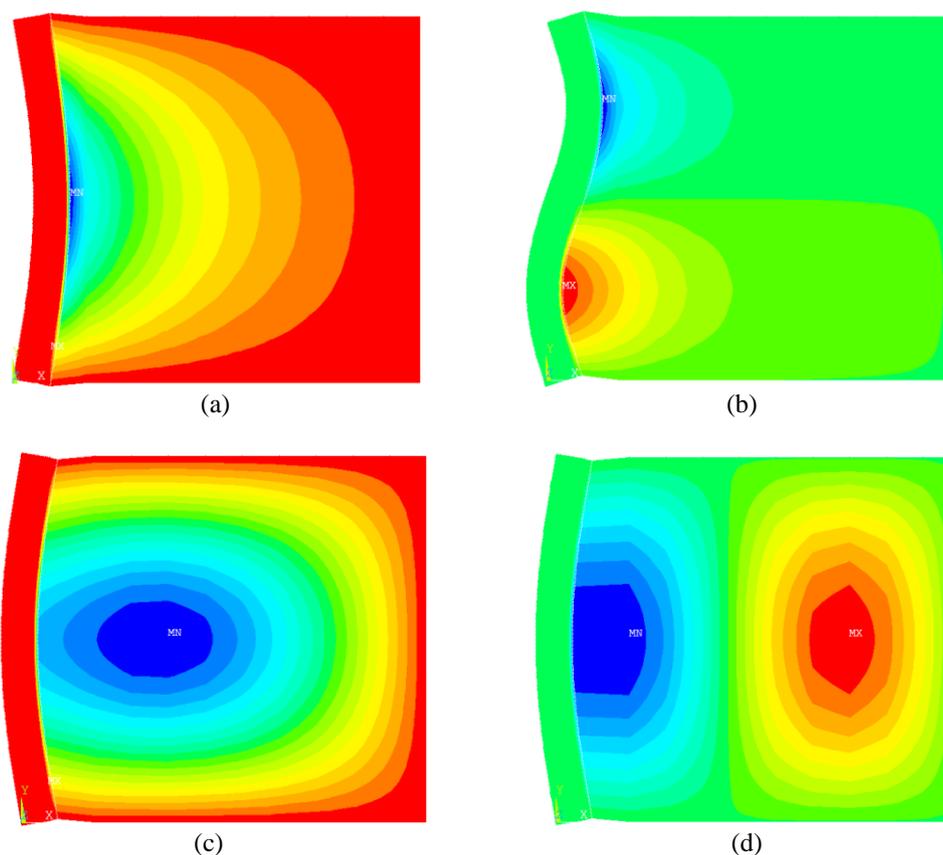


Figura 5.6 – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 1. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.

Analisando a tabela e o gráfico acima, percebe-se que o código desenvolvido foi bastante eficaz, pois obteve resultados muito próximos dos de referência, com erros em sua maioria desprezíveis. Vale notar que, para os acoplamentos MEF-MDF e MEF-MEF, os modos de vibração 1, 2 e 6 apresentam erros pouco mais elevados que os demais, fato devido a estas frequências estarem relacionadas a modos da estrutura, para qual é utilizado o elemento CST para modelagem, o qual é um elemento finito simples. Desta forma, a discretização da viga precisou ser consideravelmente mais refinada para se conseguir erros pequenos.

### 5.1.1 Análise adicional para o caso 1

Para o estudo de caso 1 ainda é feita uma análise adicional, em que se deseja averiguar a convergência de malha. Assim, este caso foi rodado no programa várias vezes, começando

com uma discretização pobre até uma malha mais refinada. A discretização é indicada pelo número de graus de liberdade (NGL) do sistema. Primeiramente, são apresentados os resultados para o acoplamento MDF-MDF, dados na Tabela 5.5 e na Figura 5.7 a seguir.

Tabela 5.5 – Estudo de convergência de malha do acoplamento MDF-MDF para o caso 1.

ACOPLAMENTO MDF-MDF									
NGL (sem restrição)			Frequências naturais (rad/s)						
Estrutura	Cavidade	Total	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
5	25	30	118.48	433.04	559.61	478.71	843.59	912.16	1109.35
8	64	72	122.22	497	566.78	869.4	972.38	1032.06	1174.92
11	121	132	123.14	513.52	568.57	875.89	987.76	1110.75	1191.6
15	225	240	123.57	521.38	569.42	878.96	995.06	1148.88	1199.51
21	441	462	123.79	525.57	569.87	880.6	998.95	1169.4	1203.74
31	961	992	123.91	527.82	570.11	881.47	1001.04	1180.42	1205.99
41	1681	1722	123.96	528.6	570.19	881.78	1001.77	1184.29	1206.78

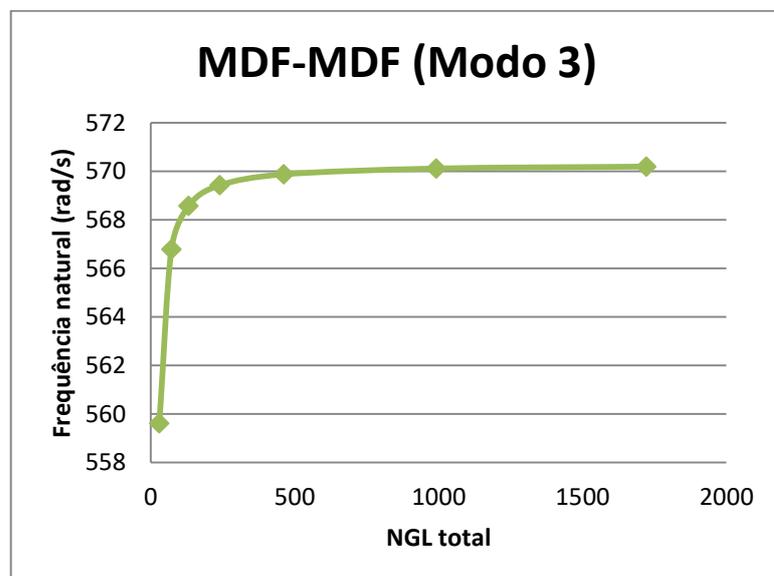
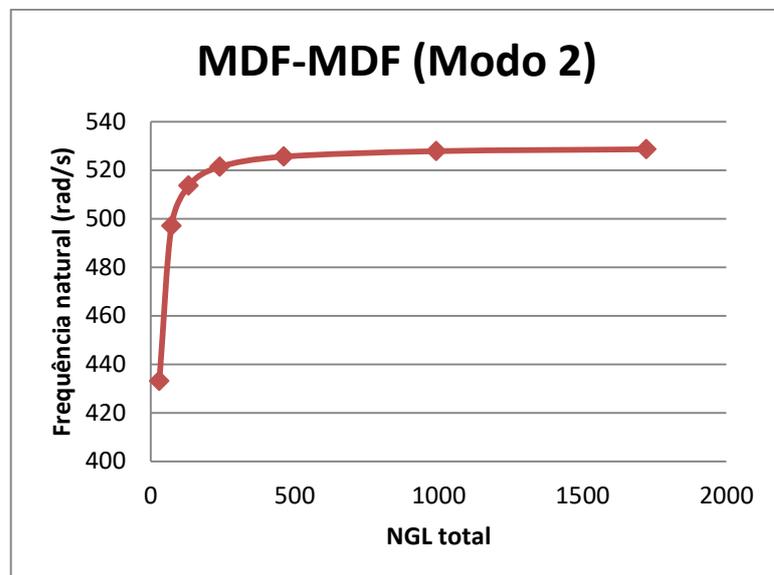
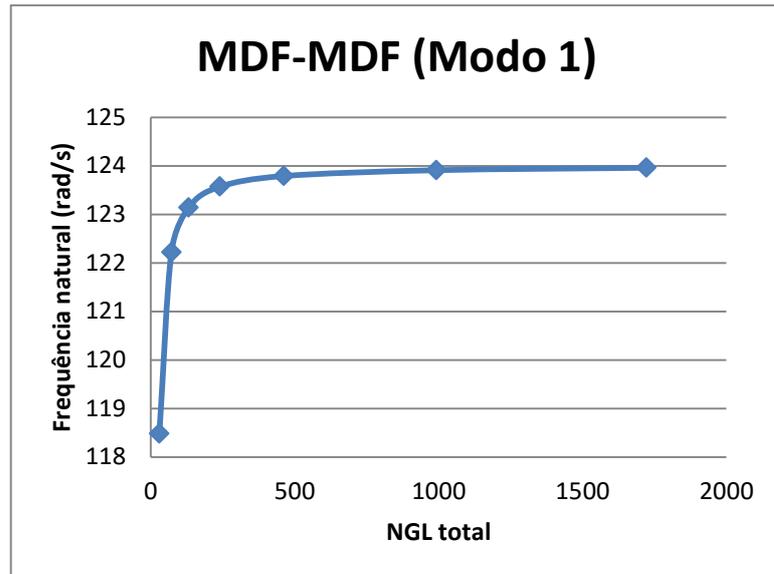


Figura 5.7 – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MDF-MDF para o caso 1.

Para o acoplamento MEF-MDF, tem-se os resultados mostrados na Tabela 5.6 e na Figura 5.8 abaixo.

Tabela 5.6 – Estudo de convergência de malha do acoplamento MEF-MDF para o caso 1.

<b>ACOPLAMENTO MEF-MDF</b>									
<b>NGL (sem restrição)</b>			<b>Frequências naturais (rad/s)</b>						
Estrutura	Cavidade	Total	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
30	25	55	335.71	587.52	855.64	858.43	1051.25	1124.8	1129.95
64	64	128	234.4	574.6	836.08	872.58	1027.83	1214.51	1235.63
110	121	231	183.66	571.6	729.24	876.9	1006.09	1204.9	1263.27
294	441	735	141.84	570.22	578.25	880.36	1000.73	1204.5	1215.57
558	961	1519	131.73	538.6	569.95	881	1000.52	1145.19	1204.94
902	1681	2583	127.8	522.87	569.86	881.22	1000.47	1114.69	1205.1
1326	2601	3927	125.87	515.02	569.81	881.32	1000.44	1098.9	1205.17

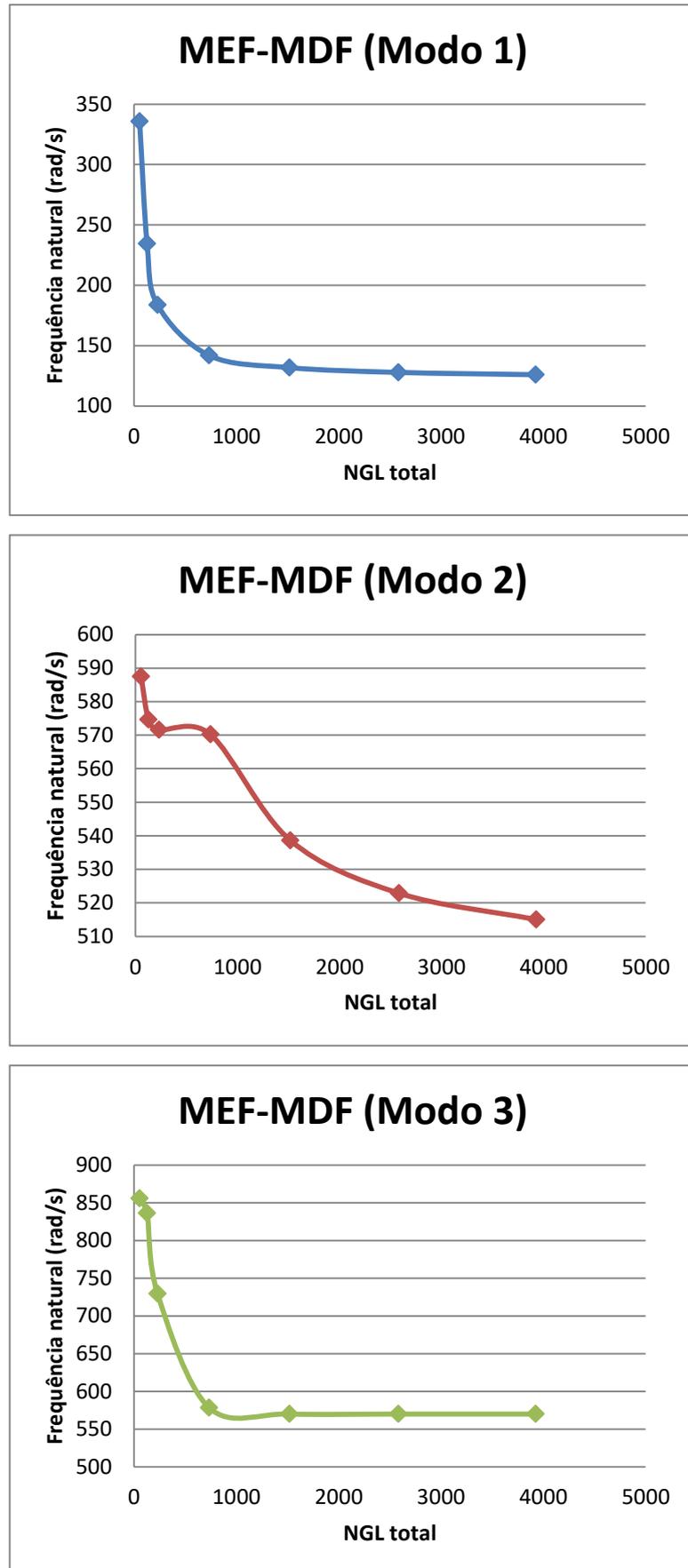


Figura 5.8 – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MEF-MDF para o caso 1.

Por último, observa-se na Tabela 5.7 e na Figura 5.9 a análise da convergência de malha para o acoplamento MEF-MEF.

Tabela 5.7 – Estudo de convergência de malha do acoplamento MEF-MEF para o caso 1.

<b>ACOPLAMENTO MEF-MEF</b>									
<b>NGL (sem restrição)</b>			<b>Frequências naturais (rad/s)</b>						
Estrutura	Cavidade	Total	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
30	25	55	350.45	616.75	984.4	1071.66	1362.13	1558.26	1641.04
64	64	128	237.09	584.6	885.28	917.91	1090.45	1307.81	1396.65
110	121	231	184.62	576.56	744.09	899.27	1037.28	1258.14	1340.94
294	441	735	142.01	571.46	580.46	886.01	1008.76	1218.77	1228.97
558	961	1519	131.81	539.46	570.51	883.51	1004.1	1149.86	1211.36
902	1681	2583	127.84	523.33	570.17	882.64	1002.48	1117.08	1208.72
1326	2601	3927	126.34	512.25	569.77	882.49	1001.25	1094.97	1207.41

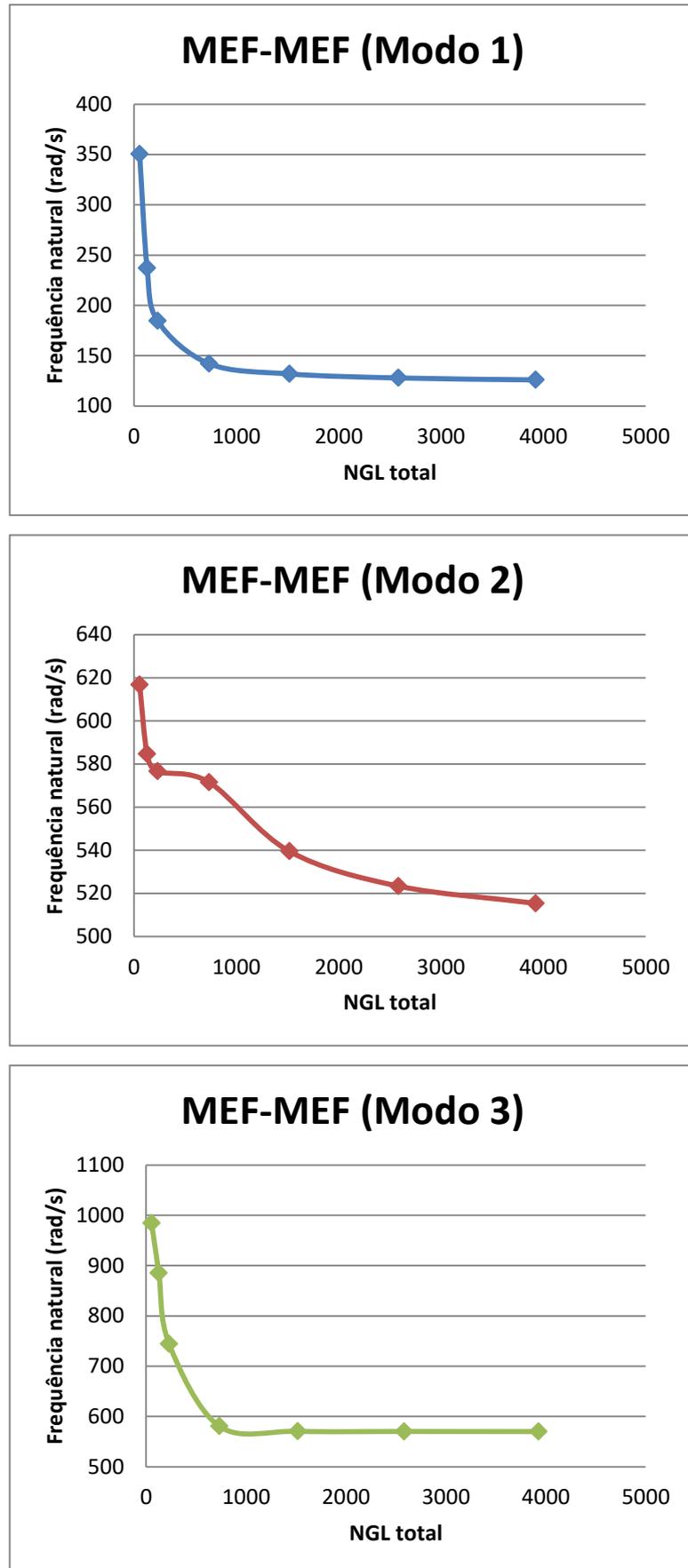


Figura 5.9 – Gráficos Frequência natural versus NGL total do acoplamento MEF-MEF para o caso 1.

Logo, percebe-se que há uma tendência dos valores das frequências naturais se estabilizarem com o aumento da quantidade de graus de liberdade do sistema para todos os tipos de acoplamento estudados, ou seja, no código desenvolvido, os resultados para cada modo de vibração convergem para um mesmo valor com uma maior discretização da malha.

## 5.2 Caso 2

Agora é estudado um sistema que tem a forma semelhante à eclusa do Canal do Panamá. A estrutura possui geometria parecida com um “U” contornando a cavidade, a qual tem apenas o seu contorno superior com pressão nula, com o restante em contato com o sólido. Toda a base da estrutura é considerada engastada e o topo e laterais (sem contato com o fluido) livres. As dimensões estão explicitadas na Figura 5.10 a seguir.

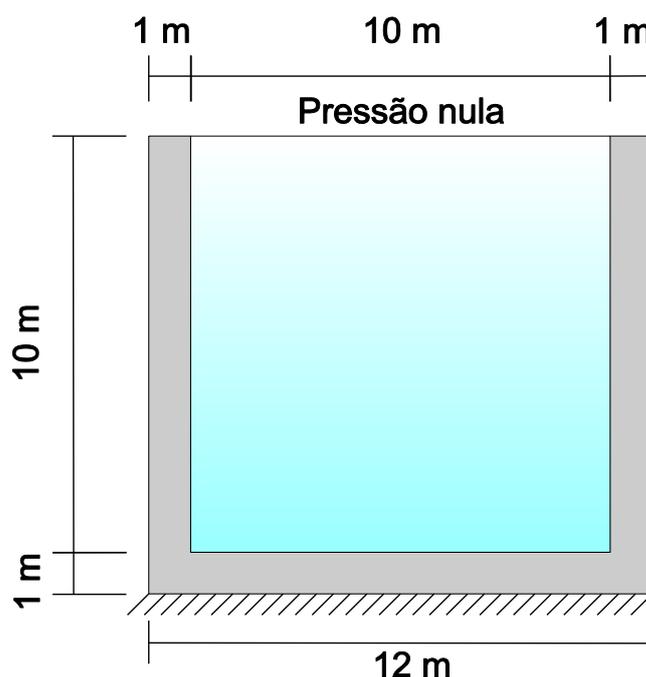


Figura 5.10 – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 2.

O sistema é analisado para o acoplamento MEF-MDF e acoplamento MEF-MEF. A discretização para cada tipo é apresentada nas Figuras 5.11 e 5.12.

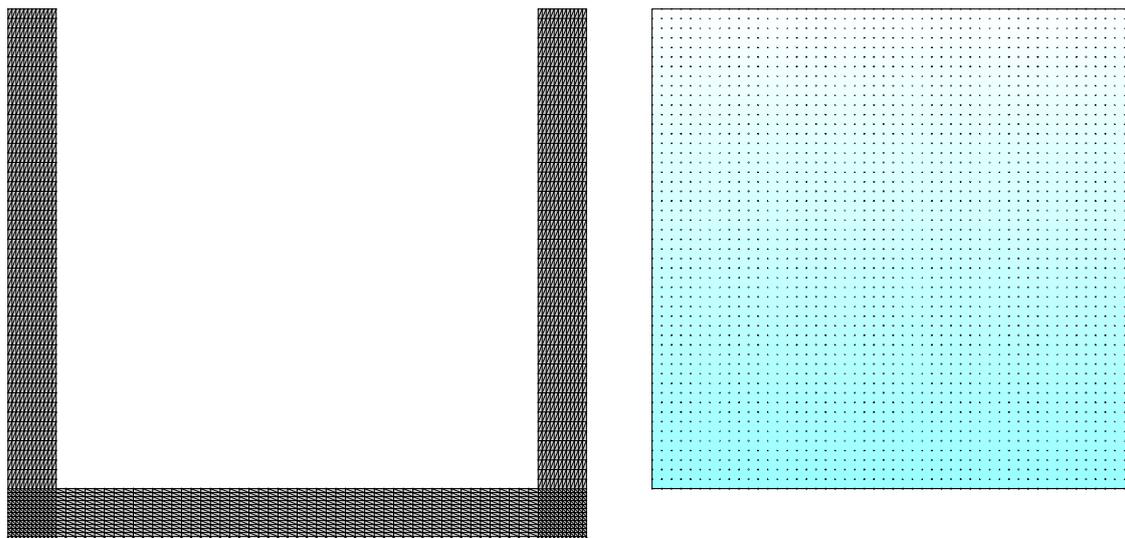


Figura 5.11 – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 2.

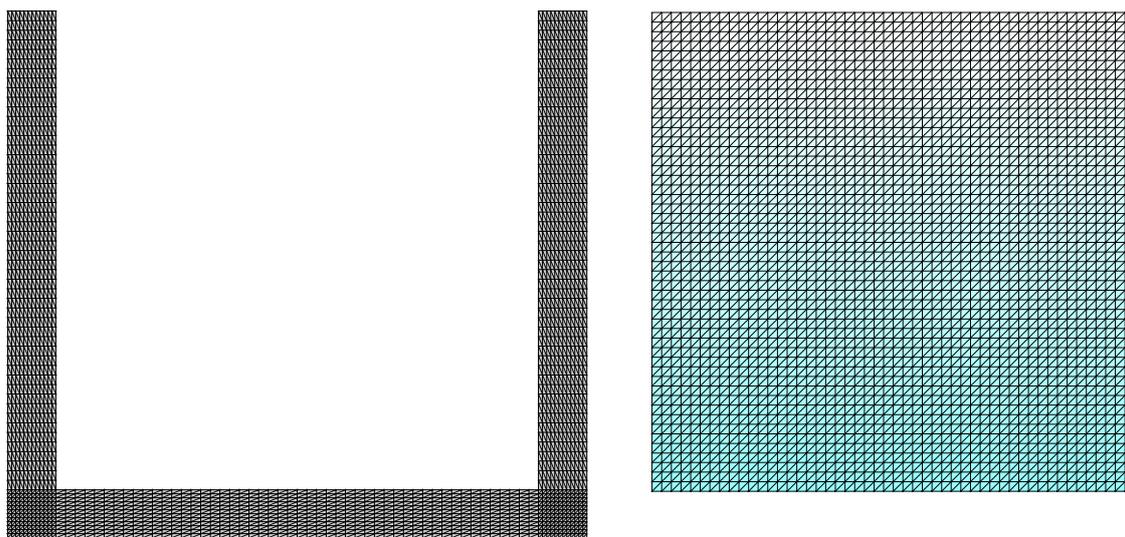


Figura 5.12 – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 2.

Os resultados obtidos pelo código foram comparados com aqueles encontrados na modelagem pelo *software* ANSYS, em que a estrutura foi discretizada com elemento quadrilateral plano de 4 nós (Plane 182) e o fluido com elemento acústico Fluid 29 com pressão nula em sua superfície. A malha gerada pelo ANSYS está exposta na Figura 5.13.

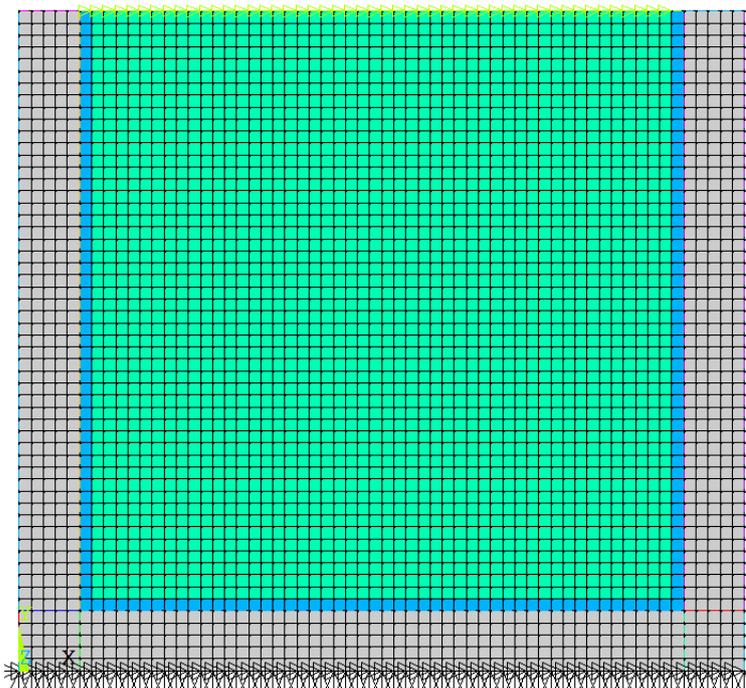


Figura 5.13 – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 2.

Na Tabela 5.8 a seguir são apresentados os valores obtidos na análise feita pelo código. Esses resultados são comparados com os que foram encontrados pelo ANSYS, considerados como referência.

Tabela 5.8 – Resultados do estudo de caso 2.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)				
	ANSYS (referência)	MEF-MDF	Erro (%)	MEF-MEF	Erro (%)
1	39.78	41.34	3.92	41.04	3.17
2	42.31	43.93	3.83	43.65	3.17
3	197.98	203.93	3.01	201.15	1.60
4	248.2	260.11	4.80	254.99	2.74
5	341.74	347.13	1.58	346.43	1.37
6	565.13	570.3	0.91	568.94	0.67
7	654.21	669.83	2.39	662.18	1.22
Discretização da malha	Nós na estrutura	2275		2275	
	Elementos na estrutura	4176		4176	
	Nós na cavidade	2601		2601	
	Elementos na cavidade	-		5000	
Tempo de processamento (s)		1975.14		31.5	

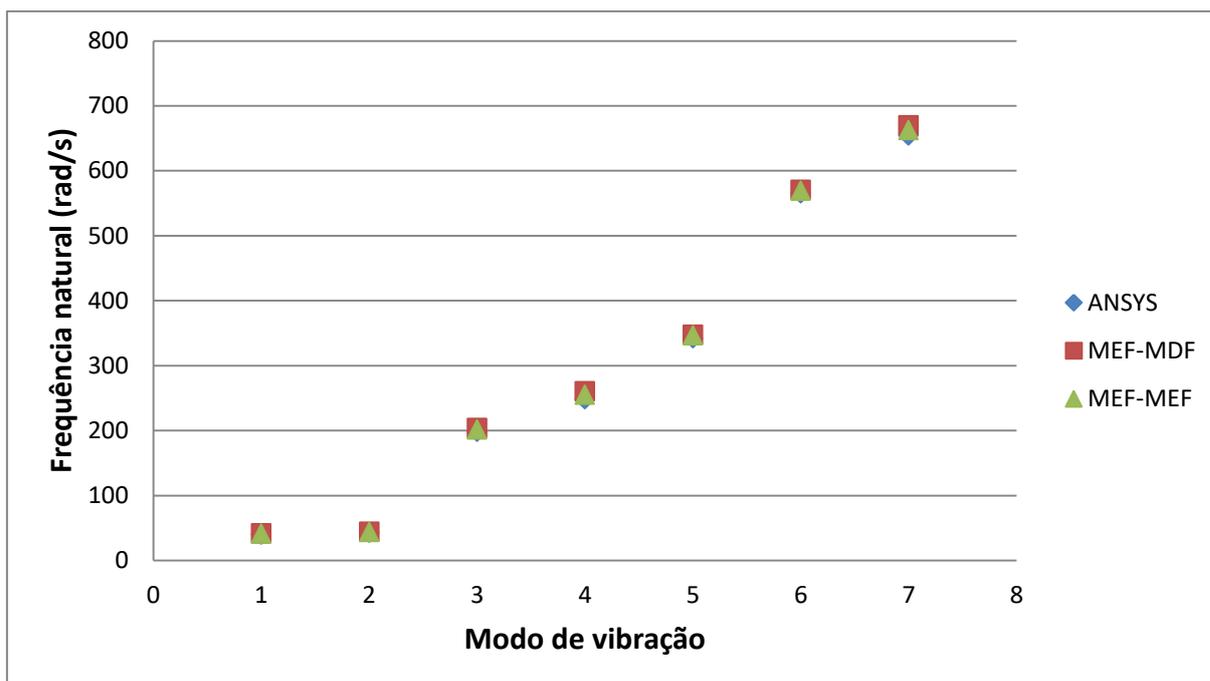


Figura 5.14 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o estudo de caso 2.

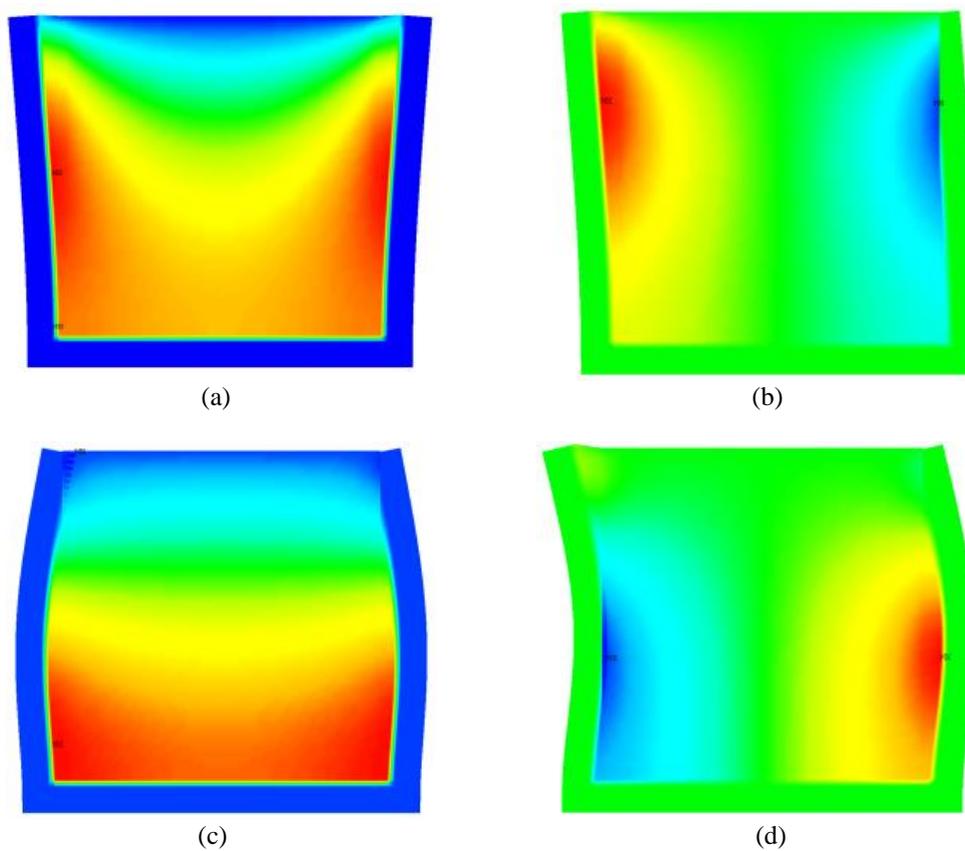


Figura 5.15 – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 2. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.

Mais uma vez, o código conseguiu simular o caso com bastante precisão, obtendo erros menores que 5%, como se pode observar na tabela e no gráfico acima. Um ponto importante a ser notado é a melhoria do rendimento na evolução do código da fase do acoplamento MEF-MDF para o acoplamento MEF-MEF, em que o tempo de processamento foi reduzido drasticamente (mais de 98%), mantendo uma discretização da malha semelhante nas duas análises (o número de graus de liberdade é o mesmo). Este fato se deve à implementação do procedimento de vetorização e à utilização de matrizes esparsas.

### ***5.2.1 Análise adicional para o caso 2***

Os modos de vibração do sistema acoplado fluido-estrutura apresentam uma configuração cuja interpretação não é tão clara. Existem modos em que suas características são governadas pelo sólido, o que significa que a cavidade se ajusta à forma deformada da estrutura. Por outro lado, outros modos são dominados pela cavidade acústica, o que leva ao sólido a se adequar ao campo de pressões do fluido. Assim, para a análise adicional do caso 2 se deseja saber, de uma maneira simples, se o modo acoplado é derivado da estrutura ou da cavidade.

Para realizar esta identificação, deve-se analisar os meios de forma desacoplada (para a cavidade, considera-se contorno rígido no contato com a estrutura) e comparar os resultados com aqueles obtidos pelo sistema acoplado. Normalmente, as frequências para o modo acoplado tendem a ter valores próximos da situação desacoplada, com algumas diferenças. Para modos dominantes da estrutura, as frequências são menores que a forma desacoplada, como se o fluido gerasse uma massa adicional no sólido. Já quando a cavidade governa, as frequências são maiores que na configuração desacoplada, comportando-se como se o fluido adquirisse uma rigidez adicional provocada pela estrutura.

Assim, foram obtidas as frequências pelo código para os casos desacoplados da estrutura e da cavidade, e comparados com os valores do sistema acoplado, resumidos na Tabela 5.9 abaixo.

Tabela 5.9 – Frequências naturais para as configurações acoplada e desacoplada do sistema.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		
	Acoplado	Desacoplado	
		Estrutura	Cavidade
1	39.78	48.99	235.62
2	42.31	49.05	527
3	197.98	295.36	707.12
4	248.2	295.61	850.18
5	341.74	741.86	972.24
6	565.13	742.45	1179.31
7	654.21	792.01	1179.86

Analisando a Tabela 5.9, pode-se verificar que os modos de vibração 1, 2, 3 e 4 do sistema acoplado possuem valores menores que aqueles dos respectivos modos da estrutura desacoplada, indicando que eles são governados pelo sólido. Os modos 5 e 6 apresentam valores maiores que as frequências dos modos 1 e 2 da cavidade desacoplada, mostrando que o fluido domina estas configurações. Para o modo 7, novamente o sólido é quem comanda, pois o valor da frequência acoplada é menor que aquele do modo 5 da estrutura desacoplada.

O aspecto dos modos de vibração 1, 2, 3 e 4 pode ser visto na Figura 5.15. Para os modos 6, 7 e 8, a Figura 5.16 a seguir mostra a configuração do comportamento do sistema acoplado.

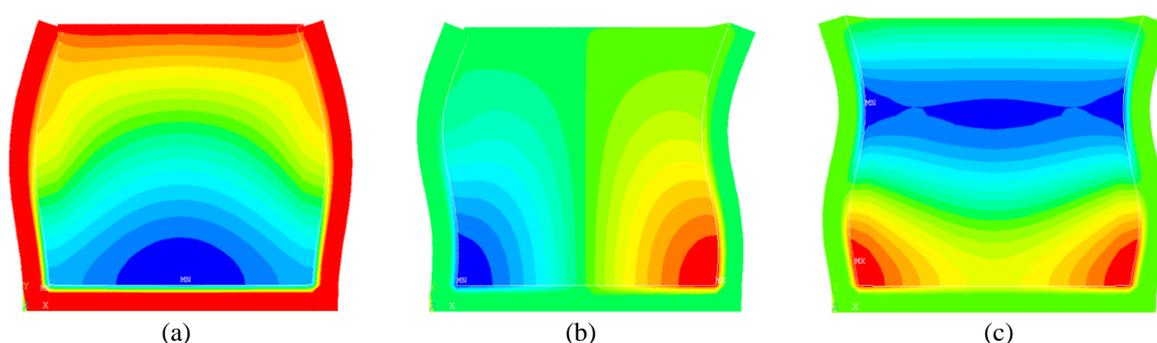


Figura 5.16 – Modos de vibração do sistema acoplado para o caso 2. (a) Modo 5, (b) Modo 6, (c) Modo 7.

Observando as Figuras 5.15 e 5.16, é possível perceber, para os modos 1, 2, 3, 4 e 7, que a estrutura força a cavidade a ter a configuração de pressões indicada, apontando que estes modos são governados pelo sólido. Da mesma forma, para os modos 5 e 6, a estrutura se deforma para se adaptar ao campo de pressões do fluido, o que mostra que esses modos são dominados pela cavidade.

Souza (2007) explica de maneira mais detalhada como fazer a interpretação dos modos de vibração do sistema acoplado, com a divisão em modos da estrutura, do fluido e mistos.

### 5.3 Caso 3

No terceiro estudo de caso tem-se um sistema fluido-estrutura com geometria semi-circular, em que o sólido contorna a cavidade, a qual possui sua parte superior com pressão nula. O diâmetro da cavidade é de  $1\text{ m}$ . Já o sólido tem espessura de  $0,1\text{ m}$  e parte do seu contorno inferior é considerado engastado (a restrição ocorre de forma contínua nas direções  $x$  e  $y$ ), conforme mostra a Figura 5.17.

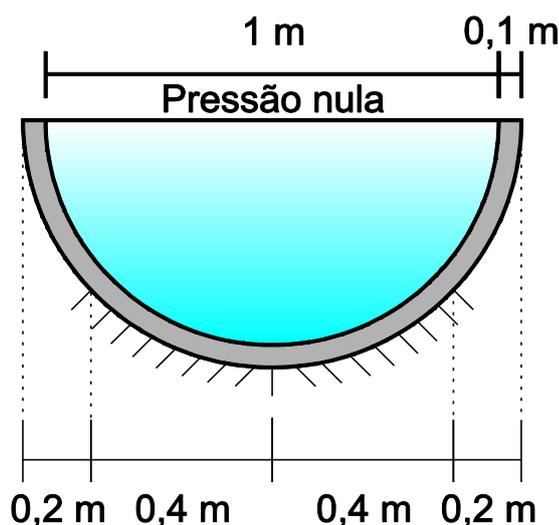


Figura 5.17 – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 3.

Observa-se que nesta situação a interface fluido-estrutura é curva. Por isso, a modelagem é feita apenas para o acoplamento MEF-MEF. A malha utilizada é apresentada na Figura 5.18 a seguir.

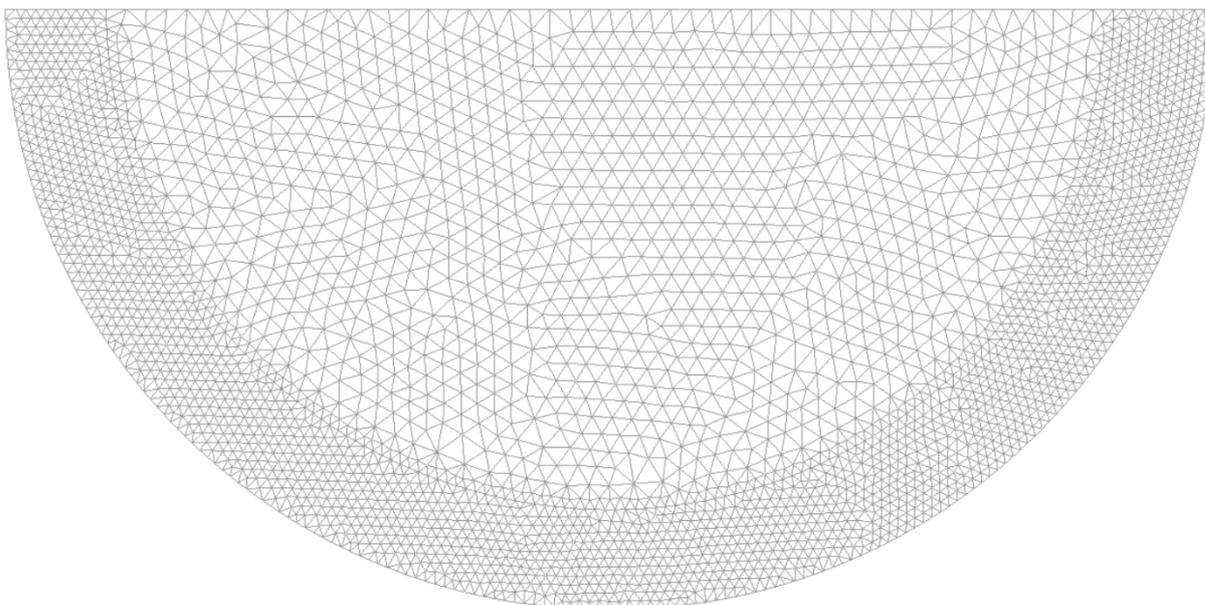


Figura 5.18 – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 3.

Para obtenção dos resultados de referência, a modelagem no ANSYS é realizada com os mesmos tipos de elementos utilizados para o caso 2 (Plane 182 para a estrutura e Fluid 29 para o fluido). A malha gerada pelo programa é mostrada na Figura 5.19.

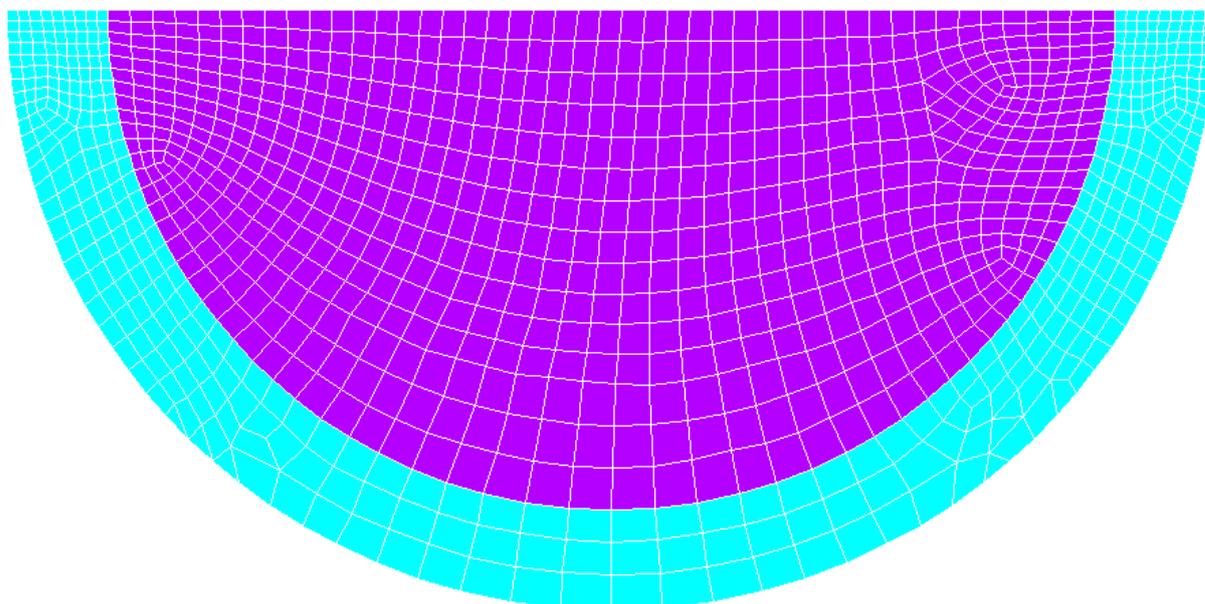
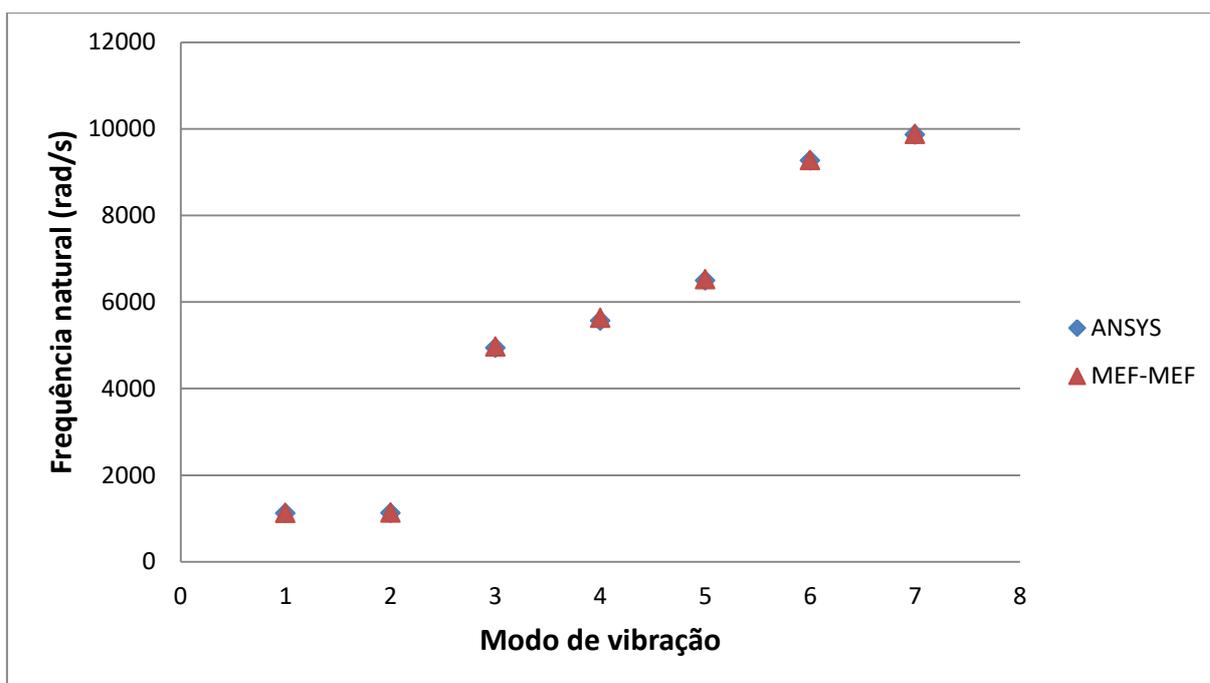


Figura 5.19 – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 3.

A Tabela 5.10 a seguir resume os resultados obtidos na análise do estudo de caso 3.

Tabela 5.10 – Resultados do estudo de caso 3.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		
	ANSYS (referência)	MEF-MEF	Erro (%)
1	1117.21	1123.77	0.59
2	1127.14	1134.53	0.66
3	4934.06	4964.94	0.63
4	5566.53	5632.28	1.18
5	6494.30	6523.1	0.44
6	9262.04	9269.12	0.08
7	9859.57	9878.93	0.20
Discretização da malha	Nós na estrutura	2140	
	Elementos na estrutura	3914	
	Nós na cavidade	1360	
	Elementos na cavidade	2511	

Figura 5.20 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o estudo de caso 3.

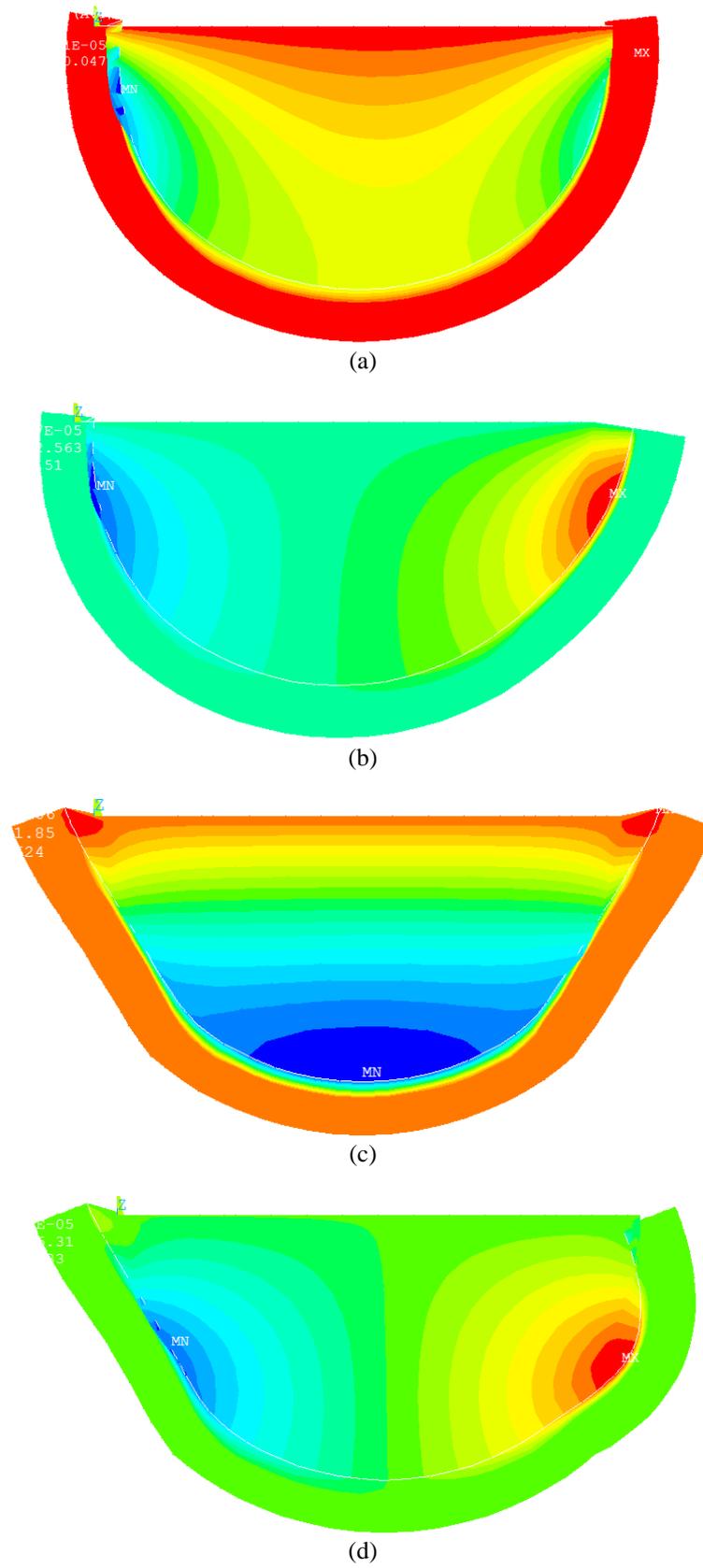


Figura 5.21 – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 3. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.

Tabela 5.11 – Resultados da análise desacoplada do estudo de caso 3.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)	
	Desacoplado	
	Estrutura	Cavidade
1	1309.14	5524.4
2	1315.01	9166.74
3	6622.18	12614.41
4	6653.04	15975.31
5	10264.86	16019.48
6	10271.39	19286.59
7	16805.95	20169.69

Observando os resultados, constata-se novamente que o código foi satisfatório na análise modal do caso 3, com interface fluido-estrutura curva, obtendo erros desprezíveis (máximo de 1,18 %) quando comparado com os valores do ANSYS.

### 5.3.1 Análise adicional para o caso 3

No estudo de caso 3, ainda se tem interesse em uma análise extra para testar a robustez do código desenvolvido na montagem das matrizes de rigidez e massa da estrutura e do fluido. Deseja-se aumentar o refinamento da malha, com a utilização do *software* GiD, e encontrar uma relação entre o número de graus de liberdade total e o tempo de processamento para geração destas matrizes, com o objetivo de mostrar a capacidade do procedimento de vetorização e da utilização de matrizes esparsas em melhorar o rendimento do código.

Além da malha utilizada na análise principal deste caso, foram criadas outras 4, ainda mais refinadas, para realizar a avaliação. A Tabela 5.12 a seguir mostra a quantidade de elementos, o número de graus de liberdade e o tempo de processamento para montagem das matrizes para as 5 malhas.

Tabela 5.12 – Análise da robustez do código desenvolvido.

<b>Malha</b>		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Número de elementos</b>	Estrutura	3914	15847	394888	618040	1582400
	Cavidade	2511	9548	42587	106469	909096
	Total	6425	25395	437475	724509	2491496
<b>NGL</b>	Estrutura	4280	16578	398542	622608	1589706
	Cavidade	1360	4982	22179	54383	456618
	Total	5640	21560	420721	676991	2046324
<b>Tempo de processamento (s)</b>	Matrizes da estrutura	0.29	0.75	19.23	31.91	80.22
	Matrizes da cavidade	0.09	0.32	1.42	3.45	31.48
	Total	0.38	1.06	20.65	35.36	111.7

Assim, observa-se que a utilização de matrizes esparsas e, principalmente, o processo de vetorização se mostraram bastante potentes, em que se foi possível fazer a montagem das matrizes para um número de graus de liberdade de mais de 2 milhões em menos de dois minutos de processamento em um computador doméstico.

#### 5.4 Caso 4

Para o penúltimo caso, é analisado um sistema composto por uma estrutura submersa no fluido. O sólido, cuja base é considerada engastada e sua parte superior livre, tem dois contornos curvos, cada um formado por um quarto de circunferência com  $10m$  de raio, e estão em contato com o meio acústico, cujo contorno inferior é rígido e os demais (que não fazem parte da interface fluido-estrutura) possuem pressão nula. A geometria do sistema, com todas as dimensões, está apresentada na Figura 5.22 a seguir.

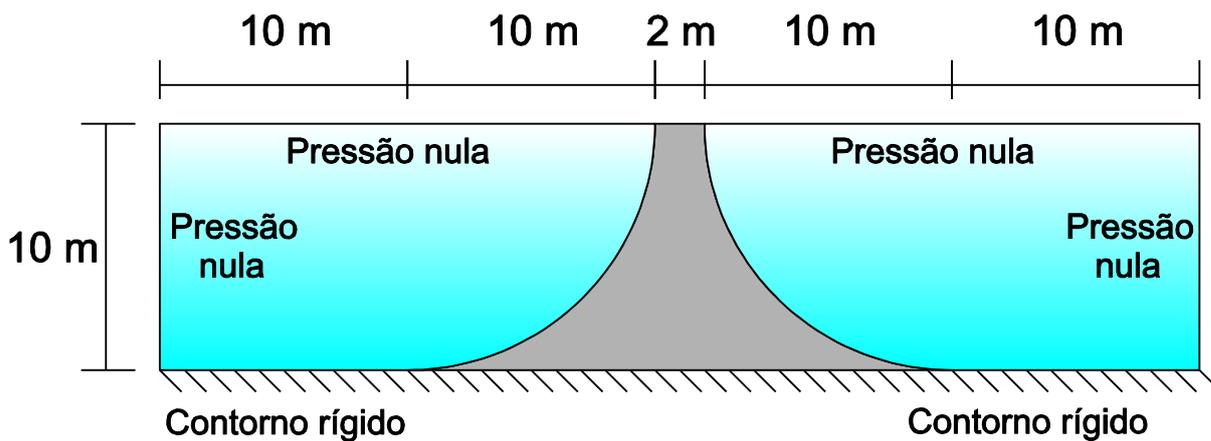


Figura 5.22 – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 4.

A análise é realizada apenas para o acoplamento MEF-MEF, cuja discretização é mostrada na Figura 5.23 abaixo.

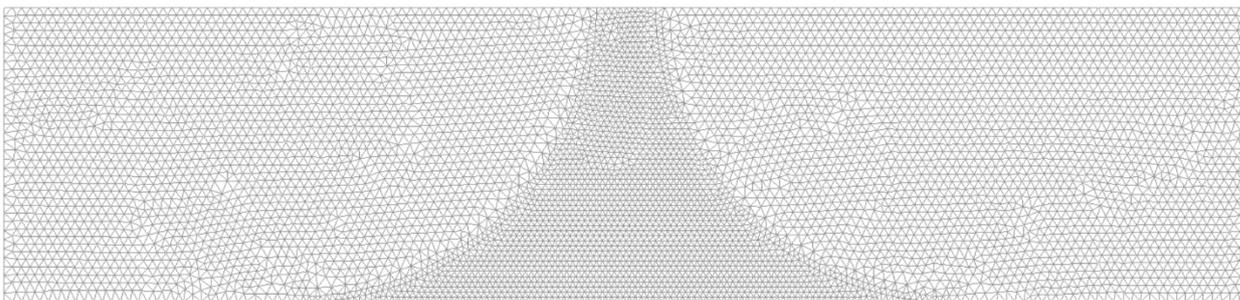


Figura 5.23 – Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 4.

A modelagem no ANSYS é feita de maneira semelhante aos casos anteriores, com o elemento Plane 182 para o sólido e Fluid 29 para o meio acústico. A malha para esta situação é exibida na Figura 5.24.

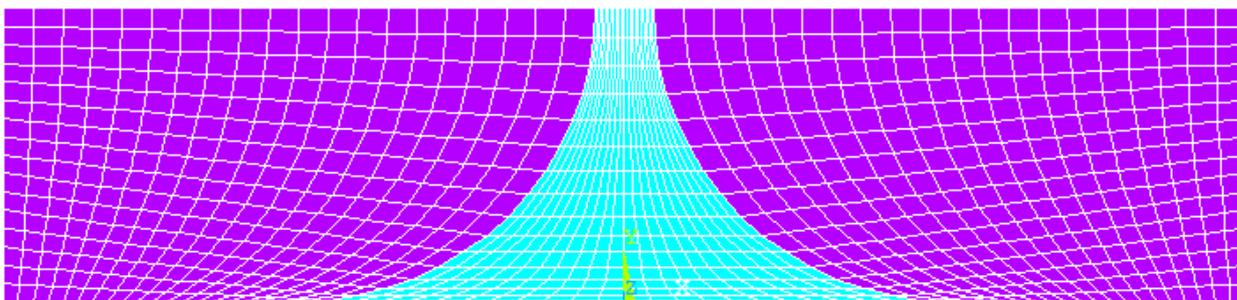
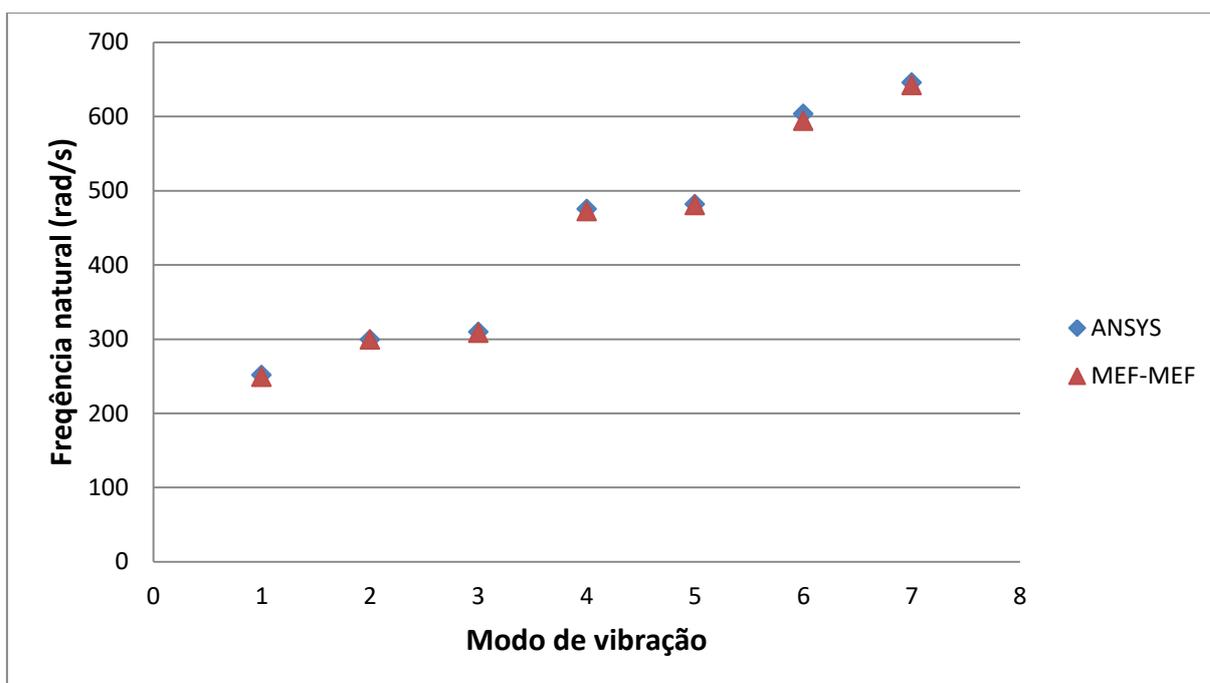


Figura 5.24 – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 4.

Os resultados da análise estão presentes na Tabela 5.13 a seguir.

Tabela 5.13 – Resultados do estudo de caso 4.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		
	ANSYS (referência)	MEF-MEF	Erro (%)
1	251.44	248.85	1.03
2	299.26	299.32	0.02
3	309.34	308.34	0.32
4	475.10	471.86	0.68
5	481.39	480.37	0.21
6	603.40	593.94	1.57
7	645.22	641.79	0.53
Discretização da malha	Nós na estrutura	1925	
	Elementos na estrutura	3572	
	Nós na cavidade	4807	
	Elementos na cavidade	9188	

Figura 5.25 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o estudo de caso 4.

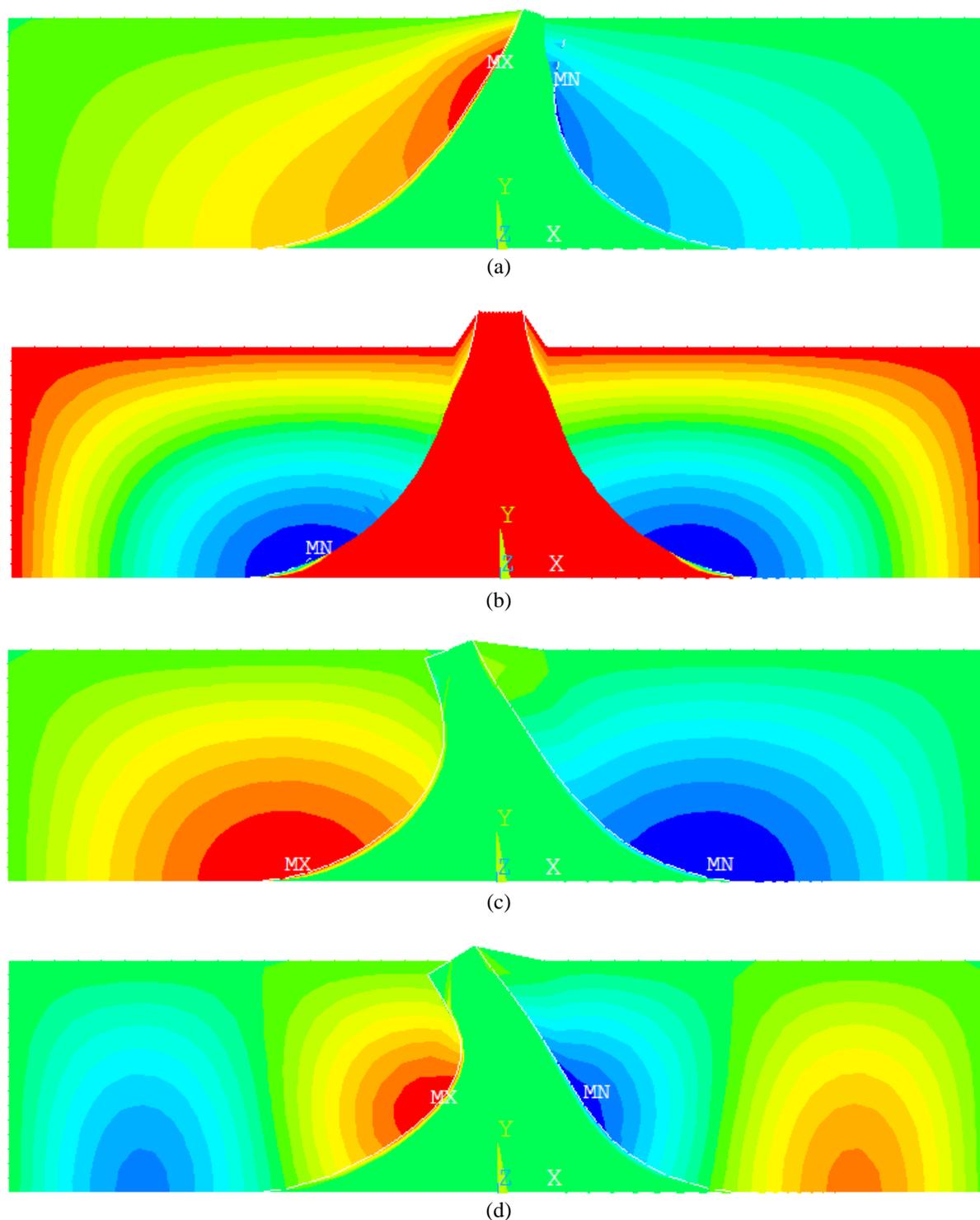


Figura 5.26 – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 4. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.

Outra vez, o código produziu resultados bastante próximos dos de referência, com erros muito pequenos (abaixo de 2 %), mostrando mais uma vez que ele é capaz de solucionar problemas com geometria curva. Um fato importante a se observar também é que este caso se diferencia dos demais por solucionar um problema em que não é mais a estrutura que engloba

a cavidade, e sim o contrário, onde o sólido está imerso no meio acústico, o que mostra a versatilidade de problemas que podem ser analisados pelo código.

#### 5.4.1 Análise adicional para o caso 4

Para o estudo de caso 4 são feitas duas análises adicionais. Primeiramente, é estudado o fenômeno com os mesmos parâmetros, porém considerando a rigidez da estrutura elevada. Desta forma, o sólido tende a assumir um comportamento rígido e, assim, a interface fluido-estrutura na cavidade fica semelhante a um contorno rígido. Com isso, o sistema acoplado reage de maneira aproximada ao caso desacoplado de uma cavidade acústica com contorno rígido no contato com a estrutura, mantendo pressão nula e parede rígida onde já era estabelecido, como mostra a Figura 5.27.

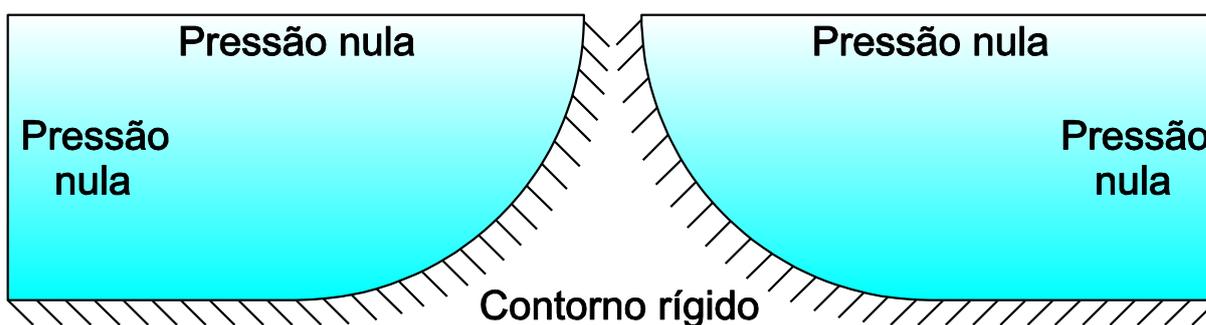
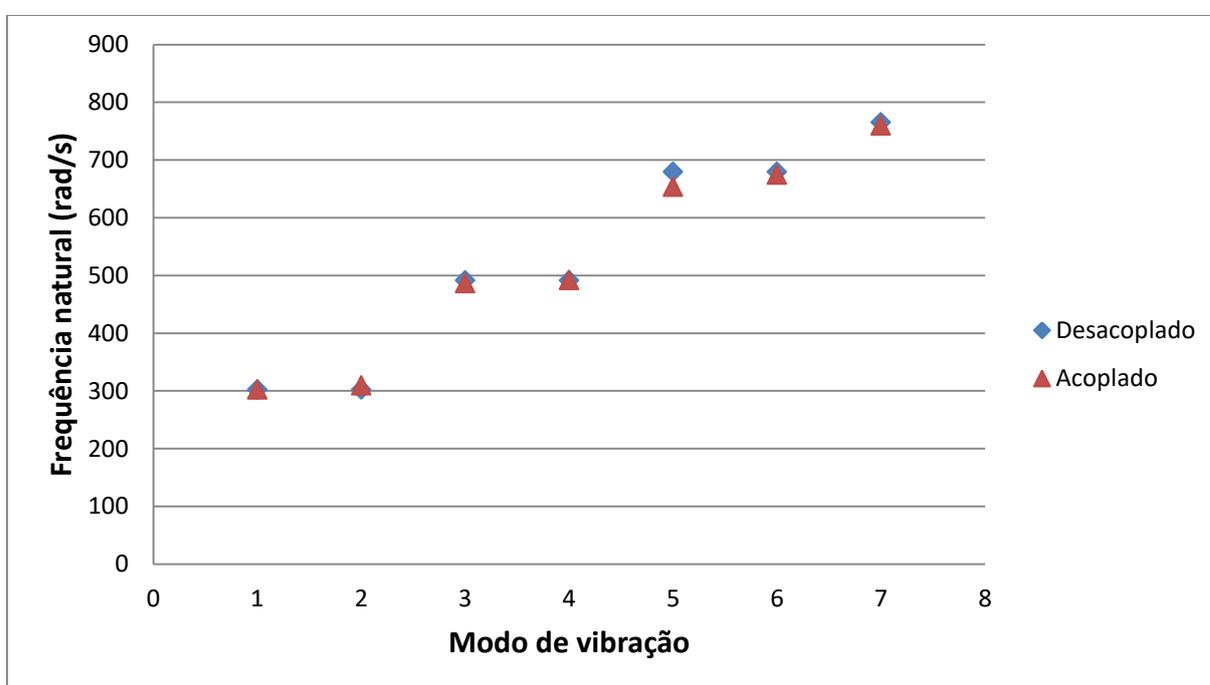


Figura 5.27 – Cavidade acústica desacoplada para análise adicional do caso 4.

Logo, o código foi processado de maneira acoplada considerando o módulo de elasticidade 10 vezes maior, igual a  $2,5 \cdot 10^{11} Pa$ , e os resultados foram comparados com aqueles encontrados para o caso da cavidade acústica desacoplada, dados na Tabela 5.14 a seguir. A discretização utilizada é a mesma da análise principal do caso 4.

Tabela 5.14 – Resultados do caso 4 para a modelagem da estrutura com rigidez elevada.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		
	Desacoplado	Acoplado	Erro (%)
1	302.24	302.01	0.08
2	302.24	309.5	2.40
3	491.25	486.59	0.95
4	491.25	491.99	0.15
5	679.6	653.46	3.85
6	679.61	674.66	0.73
7	764.88	759.7	0.68

Figura 5.28 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o caso da estrutura com rigidez elevada.

Com isso, os resultados confirmam o esperado, em que os modos de vibração governantes do problema acoplado tendem a ser aqueles da cavidade desacoplada. Nota-se que os erros obtidos em relação à análise feita apenas da cavidade acústica são pequenos, não alcançando 4%. Verifica-se, ainda, que as frequências naturais no caso desacoplado se repetem sempre de 2 em 2 modos, pois, devido à geometria do problema, é como se estivesse analisando duas cavidade semelhantes, com mesmas dimensões.

O segundo estudo adicional é realizado considerando agora o fluido com densidade muito baixa e velocidade do som no fluido elevada. Esta condição leva o sistema acoplado a se comportar como se o meio acústico não existisse e, assim, o conjunto tende a reagir de

maneira semelhante ao caso da estrutura desacoplada. Para comprovar este fato, o código foi processado de maneira acoplada supondo densidade do fluido igual a  $1 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$  e velocidade do som no fluido com o valor  $1,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . Os resultados, dados na Tabela 5.15, foram comparados ao caso da estrutura desacoplada.

Tabela 5.15 – Resultados do caso 4 para modelagem da cavidade sem fluido.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		
	Desacoplado	Acoplado	Erro (%)
1	308.7	308.7	0.00
2	657.71	657.71	0.00
3	687.57	687.57	0.00
4	1105.89	1105.89	0.00
5	1486.74	1486.74	0.00
6	1618.71	1618.71	0.00
7	1647.23	1647.23	0.00

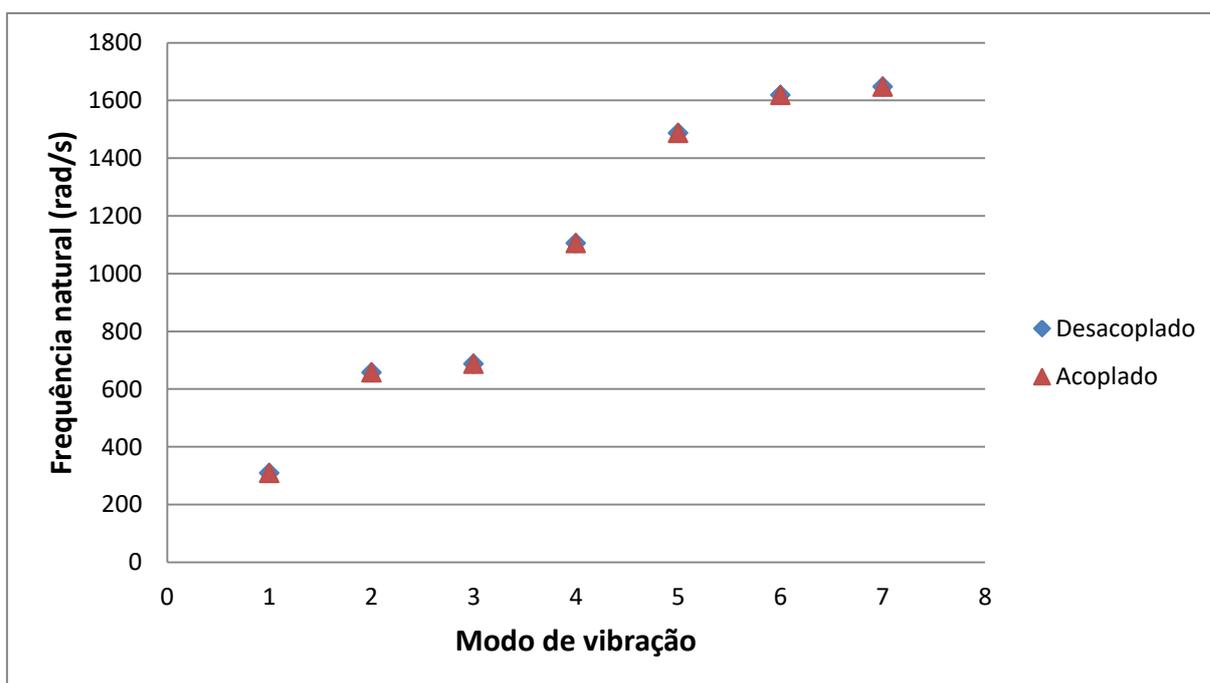


Figura 5.29 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o caso da cavidade sem fluido.

Observa-se, então, que o resultado está conforme o esperado, em que os modos de vibração da estrutura desacoplada governam o comportamento do sistema. Como os resultados para o caso desacoplado foram obtidos pelo próprio código (porém, na etapa 1, escolhe-se problema do tipo 2, o qual analisa apenas a cavidade acústica) e os valores da

densidade foi muito baixo e da velocidade do som no fluido muito elevado, o erro cometido foi nulo, confirmando assim o que se desejava.

## 5.5 Caso 5

Por fim, é estudado um fenômeno em que se tem uma estrutura real, a eclusa 1 de Tucuruí, município localizado no estado do Pará, região Norte do Brasil. A Figura 5.30 abaixo mostra esta eclusa.



Figura 5.30 – Eclusa de Tucuruí/PA. (Geopolítica do Petróleo, site).

As dimensões e o perfil desta eclusa, como também da cavidade acústica, são apresentados na Figura 5.31 a seguir. Nas estruturas, a base é considerada engastada e, na cavidade, a parte inferior é suposta rígida, a parte superior possui pressão nula e as laterais estão em contato com os sólidos.

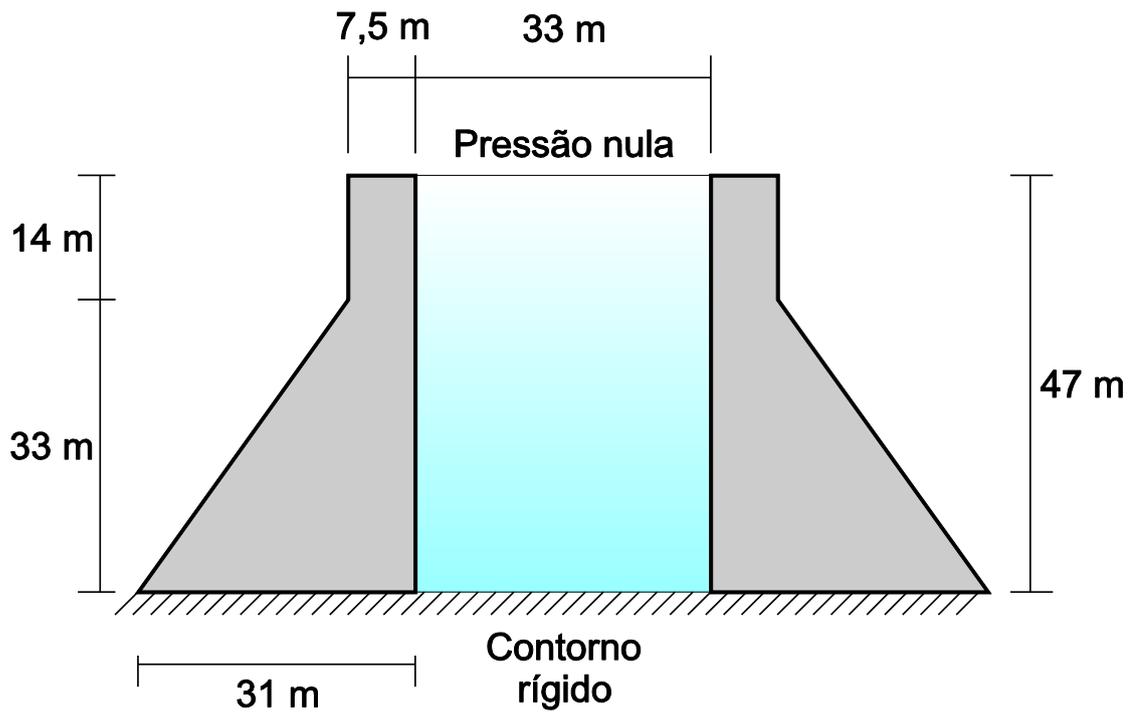


Figura 5.31 – Geometria do sistema fluido-estrutura para o estudo de caso 5.

A análise é feita no código para o acoplamento MEF-MDF e para o acoplamento MEF-MEF. A malha para cada tipo é apresentada nas Figuras 5.32 e 5.33 abaixo.

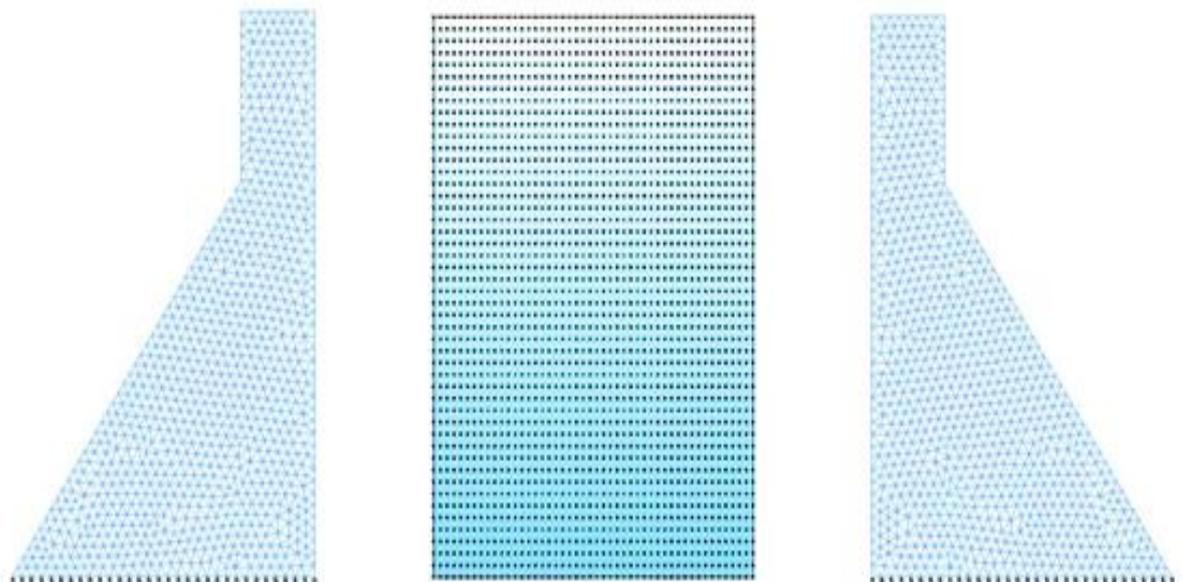


Figura 5.32 – Discretização para o acoplamento MEF-MDF do caso 5.

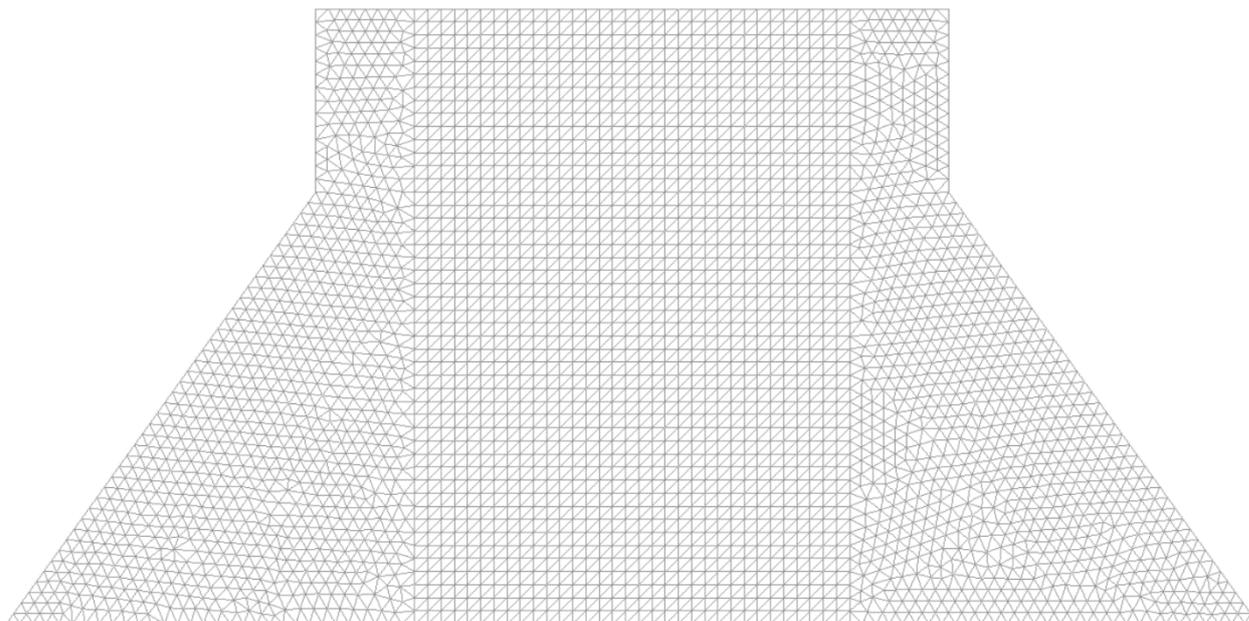


Figura 5.33– Discretização para o acoplamento MEF-MEF do caso 5.

Na modelagem pelo ANSYS, os mesmos elementos foram utilizados para a malha do sistema, com o elemento Plane 182 para a estrutura e o Fluid 29 para o fluido. A Figura 5.34 mostra a discretização utilizada no *software*.

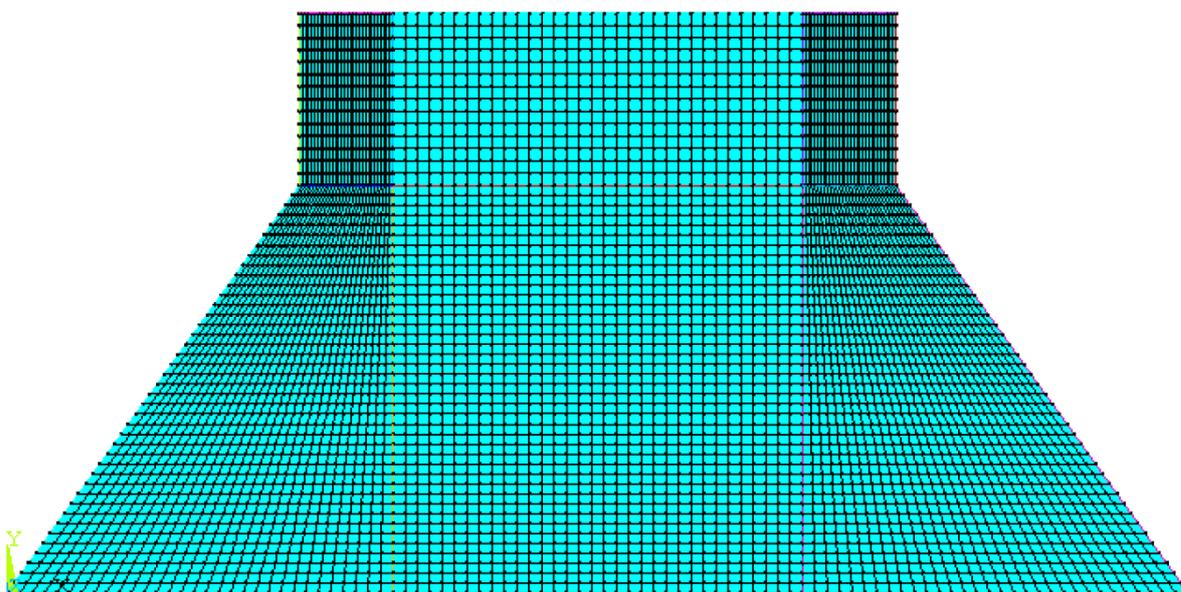
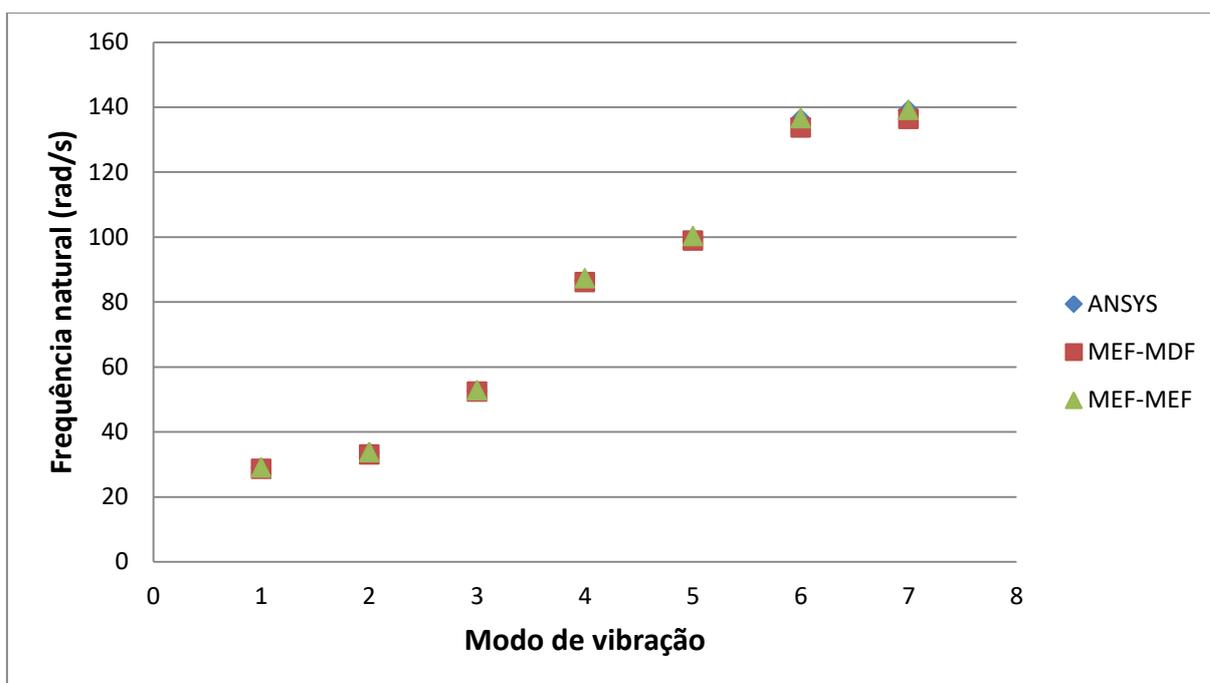


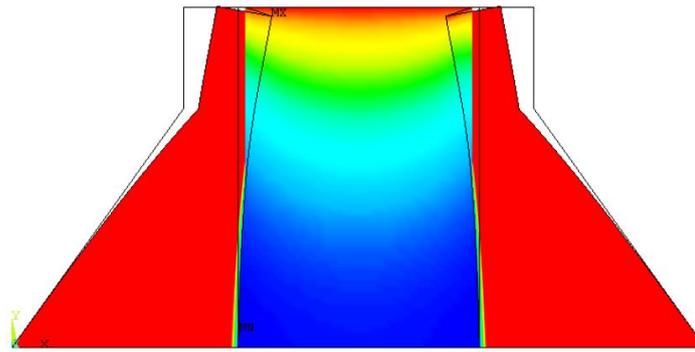
Figura 5.34 – Malha do sistema fluido-estrutura gerada pelo ANSYS para o caso 5.

A Tabela 5.16 apresenta os resultados obtidos pelo código e os compara com os valores encontrados pelo ANSYS.

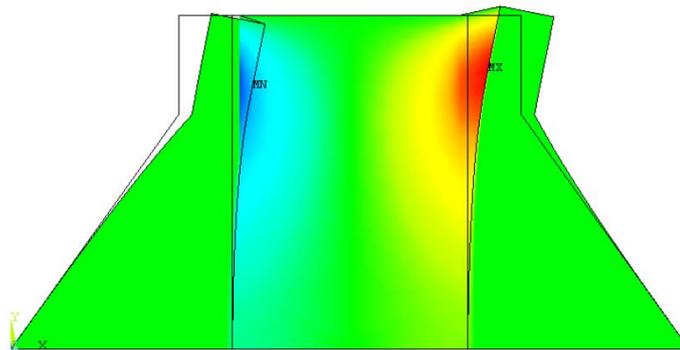
Tabela 5.16 – Resultados do estudo de caso 5.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)				
	ANSYS (referência)	MEF-MDF	Erro (%)	MEF-MEF	Erro (%)
1	28.85	28.51	1.19	28.95	0.33
2	33.49	33.02	1.42	33.66	0.49
3	52.58	52.35	0.44	52.77	0.36
4	86.60	86.03	0.66	87.26	0.76
5	99.56	98.81	0.76	100.22	0.66
6	136.35	133.64	1.98	136.53	0.14
7	138.97	136.3	1.92	139.04	0.05
Discretização da malha	Nós na estrutura	904		1816	
	Elementos na estrutura	1665		3346	
	Nós na cavidade	2304		1632	
	Elementos na cavidade	-		3102	

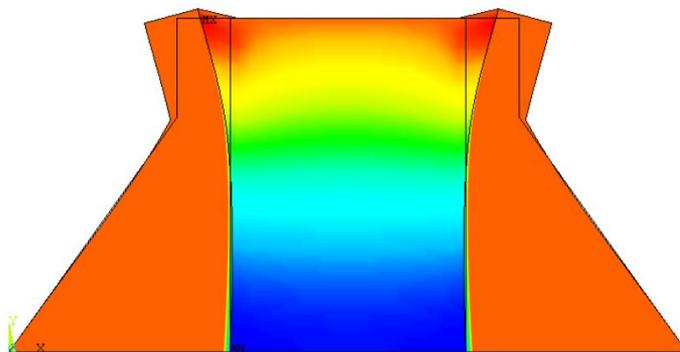
Figura 5.35 – Gráfico Frequência natural *versus* Modo de vibração para o estudo de caso 5.



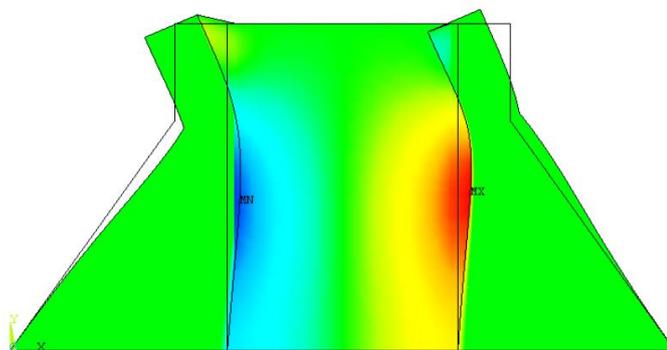
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.36 – Modos de vibração do sistema acoplado para o estudo de caso 5. (a) Modo 1, (b) Modo 2, (c) Modo 3, (d) Modo 4.

Tabela 5.17 – Resultados da análise desacoplada do estudo de caso 5.

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)	
	Desacoplado	
	Estrutura	Cavidade
1	38.77	50.13
2	38.77	150.46
3	99.88	151.42
4	99.89	207.64
5	139.98	250.95
6	139.98	289.09
7	199.09	290.44

Os resultados da Tabela 5.16 apresentam erros baixos quando comparados com os valores do ANSYS, não atingindo 2%, confirmando assim a eficácia do código desenvolvido para simular um problema em escala real.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A interação fluido-estrutura vem alcançando grande visibilidade nos últimos anos, pois está presente em inúmeros casos na engenharia. Esta, por sua vez, está em constante modificação, buscando sempre otimizar os projetos e imprimir-lhes maior segurança. Neste sentido, a simulação de problemas caminha cada vez mais para o ramo multifísico, o qual engloba os diversos meios existentes na situação.

A modelagem da interação fluido-estrutura normalmente considera o sólido e o fluido como partes de um sistema acoplado, o qual possui seu comportamento dado por um conjunto de equações diferenciais parciais associadas a condições de contorno específicas. A solução de forma analítica é bastante complexa na maioria dos casos, o que leva ao uso de ferramentas computacionais para resolver o problema através da utilização de métodos numéricos.

Diante desse cenário, este trabalho contribui para o avanço nas pesquisas e estudos relacionados ao tema através do desenvolvimento de um código computacional próprio capaz de realizar análises modais de um sistema acoplado fluido-estrutura bidimensional envolvendo interfaces curvas com a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

A dissertação apresenta de maneira detalhada a resolução de um problema simples com o intuito de facilitar o entendimento do assunto, servindo como um exemplo acessível à reprodução. São obtidas as submatrizes da equação matricial final do sistema fluido-estrutura e indicadas as três primeiras frequências naturais para os três tipos de acoplamento abordados: acoplamento MDF-MDF, acoplamento MEF-MDF e acoplamento MEF-MEF.

O código desenvolvido foi dividido em 5 etapas principais, iniciando com a entrada dos parâmetros do problema (dados da estrutura e do fluido) e a leitura dos arquivos contendo as coordenadas e conectividades dos elementos (como também as restrições), seguindo para montagem das matrizes da estrutura e do fluido, realizando o acoplamento e, por fim, sendo capaz de executar a análise modal. Há, ainda, a opção de resolução com os meios de forma desacoplada (apenas a estrutura ou apenas o fluido). A implementação do procedimento de vetorização e a utilização de matrizes esparsas melhoram consideravelmente a eficiência do código, reduzindo drasticamente o tempo de processamento e permitindo a solução de problemas com milhões de graus de liberdade.

Em relação aos casos estudados, foram obtidos resultados satisfatórios, os quais foram validados a partir daqueles encontrados com a ajuda do *software* ANSYS, apresentando erros mínimos, e, quando comparados com diferentes métodos para acoplamento, os valores convergem entre si. O código se mostrou bastante eficaz na simulação de problemas em escala real e na solução de situações envolvendo interface fluido-estrutura curva. Ademais, as análises adicionais serviram para comprovar a eficiência do código e melhorar a compreensão quanto ao tema.

Assim, é notável a importância de representar o modelo considerando o acoplamento do sólido com o fluido, e não apenas estudar cada um separadamente, pois a interação entre eles implica em mudanças consideráveis nos resultados, sendo assim possível simular com maior precisão o que ocorre com o fenômeno na realidade. Este trabalho demonstrou que, com o auxílio de ferramentas computacionais, é possível representar satisfatoriamente, de maneira rápida e simples, casos que abrangem a interação fluido-estrutura.

Para dar continuidade à pesquisa, são propostos os seguintes tópicos para contribuição em trabalhos futuros:

- Obtenção de respostas dinâmicas aleatórias;
- Utilização de outros tipos de elementos finitos (de alta ordem, a fim de melhorar a precisão dos resultados sem a necessidade de malhas muito refinadas);
- Evolução para uma análise tridimensional da estrutura e cavidade pelo MEF;
- Emprego de outros métodos numéricos (por exemplo, Método dos Volumes Finitos, Método dos Elementos de Contorno e Método sem Malha);
- Aplicação de outras condições de contorno para a cavidade, como condição de contorno de Sommerfeld (radiação no infinito) e superfície livre com o efeito de ondas de gravidade;
- Implementação em linguagem *Python* (para criação de programas executáveis);
- Realização de análises não-lineares;
- Análise com fluidos viscosos.

## REFERÊNCIAS

ABRAMSON, H. N. Hydroelasticity some problems and some solutions. In: **Proceedings fluid-solid interaction Symposium**, Pennsylvania, ASME, p. 189-192, 210- 212, nov. 1967.

AMARAL, L. **Interação fluido-estrutura: o que é?**. Disponível em: <<http://www.esss.com.br/blog/2016/04/interacao-fluido-estrutura-o-que-e/>>. Acesso em: 30 jan. 2017.

ANSYS versão 14.5. [S.l.]: **SAS IP**, inc, 2012.

BARBOSA, A. N. **Uma formulação potencial simétrica para o cálculo estático e dinâmico de problemas de interação fluido-estrutura**. 2006. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2006.

BARROS, R. C. Determination of seismic design envelopes of bottom supported tanks by distinct F.E.M. analyses. In: CONGRESSO NACIONAL DE SISMOLOGIA E ENGENHARIA SÍSMICA, 6., abr. 2004, Guimarães. **Artigo**. p. 853-862.

BARROS, R. C. **Resposta sísmica de tanques de armazenamento de líquidos**. Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Palestra. Porto. 2000.

BARROS, W. M. de. **Matrizes explícitas em elementos finitos de alta ordem aplicadas a problemas de elasticidade 2D e 3D**. 2016. 150 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Estrutural) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2016.

BHATIA, S. The danger of reservoir-induced seismicity. **The Hindu Journal of Economics**, India, 20 nov. 2010. Disponível em: <<http://www.thehindu.com/todays-paper/tp-features/tp-openpage/The-danger-of-reservoir-induced-seismicity/article15698270.ece>>. Acesso em: 08 fev. 2017.

BRANDÃO, P. A. D. M. **Eclusa do canal do Panamá**. jan. 2017. Fotografia. Visão panorâmica da eclusa do canal do Panamá.

CASTRO, J. Região das barragens em Minas Gerais registrou quatro tremores: USP detectou abalos sísmicos que aconteceram antes do acidente em Mariana. **Jornal O Globo**, São Paulo, 06 nov. 2016. Disponível em: <<http://oglobo.globo.com/brasil/regiao-das-barragens-em-mg-registrou-quatro-tremores-17981373>>. Acesso em: 01 nov. 2016.

CHESF. **Descrição do Aproveitamento de Xingó**. Recife, PE: 2016. Disponível em: <<http://www.chesf.gov.br/SistemaChesf/Pages/SistemaGeracao/Xingo.aspx>>. Acesso em: 31 out. 2016.

CHOPRA, A. K.; CHAKRABARTI, P. The Koyna earthquake and the damage to Koyna dam. **Bulletin of the Seismological Society of America**, vol. 63, n. 2, p. 381-397. abr. 1973

DOWELL, E.H.; GORMAN III, G.F.; SMITH, D.A. Acoustoelasticity: General theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation including comparisons with experiment. In: **Journal of Sound and Vibrations**, 52 (4), p. 519 -542, 1977.

ELETRONUCLEAR. **Segurança e monitoração**. Disponível em: <<http://www.eletronuclear.gov.br/?tabid=352&Gallery=43>>. Acesso em: 20 mar. 2017.

EVERSTINE, C.G. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. In: **Journal of sound and vibration**, letter to the editor, vol. 79, p. 157-160, 1981.

FAHY, F. **Foundation of Engineering acoustics**. 1. ed. Academia Press, 2001.

GEOPOLÍTICA DO PETRÓLEO. **Pequenas hidrelétricas ameaçam a construção de hidrovias**. Out. 2010. Disponível em: <<https://geopoliticaopetroleo.wordpress.com/2010/10/13/pequenas-hidreletricas-ameacam-a-construcao-de-hidrovias/>>. Acesso em: 27 jul. 2016.

GERGES, S. N. Y. **Estado da arte para solução de problemas vibroacústicos por métodos de elementos numéricos**. TecniAcústica, Madri, 2000.

GERGES, S. N. Y.; FAHY, F. Distorted cylindrical shell response to internal acoustic excitation below the cut-off frequency. In: **Journal of Sound and Vibrations**, vol. 52, n. 3, p. 441-452, 1977.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**, 3. Ed. São Paulo: Atlas, 1991.

GUEDES, F. R.; BURGOS, R.G. 2014. 112 p. **Análise estrutural de laje de fundação tipo radier em concreto armado**. TCC (Graduação) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2014.

HAMDI, M. A.; OUSSET, Y.; VERCHERY, G. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. In: **International Journal Methods in Engineering**, v. 13, p. 139-150, 1978.

HOROWITZ, B. **Métodos aproximados**. Recife, PE, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – Centro de Tecnologia e Geociências. Notas de aula. Recife, 2015.

HSU, M. C.; BAZILEVS, Y. Fluid-structure interaction modeling of wind turbines: Simulating the full machine. **Computational Mechanics manuscript**. 06 jul. 2012.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The Finite Element Method using MATLAB**, 2a ed., CRC Mechanical Engineering Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. 2000.

LAMB, H. **Hidrodynamic**s. 6. ed, Dover, New York, 1945.

LOGAN, D. L. **A first course in the Finite Element Method**, 1a ed., Cengage Learning, Boston, MA. 2012.

MATLAB versão R2015a [S.l.]: **The Mathworks**, 2015.

MENDES, N. B. (2013). **Estudo comparativo analítico-numérico de aspectos da interação fluido-estrutura em cascas com aplicações a barragens em arco**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-12A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 318 p.

MORAIS, M. V. G. de. **Modelagens numéricas pelo Método dos Elementos Finitos em problemas de interação fluido-estrutura**. 2000. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2000.

OLSON, L.G.; BATHE, K.J. Analysis of fluid-structure interaction. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potencial. In: **Computers & Structures**, vol. 21, n. 1/2, 21-32, 1985.

PORTAL BRASIL. **Meio Ambiente**: Entenda o acidente de Mariana e suas consequências para o meio ambiente. Dez. 2016. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2015/12/entenda-o-acidente-de-mariana-e-suas-consequencias-para-o-meio-ambiente>>. Acesso em: 01 nov. 2016.

PORTAL ENERGIA. Energias renováveis. **ABB recebeu encomenda de 140 milhões de dólares para projetos de energia eólica offshore na Europa**. mar. 2016. Disponível em: <<http://www.portal-energia.com/abb-recebeu-encomenda-projetos-energia-eolica-offshore-europa/>>. Acesso em: 31 out. 2016.

PRETLOVE, A. J. Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. In: **Journal of Sound and Vibrations**, vol. 2, p. 197-209, 1965.

RAYLEIGH, J.W.S. **The theory of sound**, vol.1, 2. ed (1. Ed 1877), Dover, New York, 1945.

RIBEIRO, P. M. V. **Elementos finitos 1**. Recife, PE, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – Centro de Tecnologia e Geociências. Notas de aula. Recife, 2015.

RIBEIRO, P. M. V. **Soluções analíticas para cavidades acústicas bidimensionais com aplicação ao estado de problemas de interação dinâmica barragem-reservatório**. 2010. 306 p. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2010.

SIGRIST, J. F. **Fluid-structure interaction: an introduction to finite element coupling**. França: John Wiley & Sons Ltd, 2015.

SILVA, S. F.; PEDROSO, L. J. **Elementos de acústica de cavidades**. Brasília: Universidade de Brasília- Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Out. 2006. 27 p. (Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS9-10/2006).

SORIANO, H. L. **Elementos finitos**: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2009.

SOUSA Jr, L. C. de. **Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura**. 2006. 197 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2006.

SOUZA, S. M. **Contribuição para uma metodologia de análise acoplada fluido-estrutura em cavidades acústicas com paredes flexíveis**. 2007. 177p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2007.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1951.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

VERVAECK, A. Deadly earthquakes of December 10 – India, Peru, Ecuador and Iran. **Earthquake-Report.com**, Mechelen, Bélgica, 10 dez. 2010. Disponível em: <<http://earthquake-report.com/2010/12/10/deadly-earthquakes-of-december-10-india-peru-ecuador-and-iran/>>. Acesso em: 08 fev. 2017.

WESTERGAARD, H. M. Water pressures on dams during earthquakes. In: **Transactions of the american society of civil engineers**, v. 98, p. 418-433, 1933.

ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTES, P. Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. In: **International Journal Methods in Engineering**, v. 13, 1-16, 1978.

ZIENKIEWICZ, O.C.; NEWTON, R. E. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. **Symposium on Finite Element Techniques**, Stuttgart, 1969.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 4 ed. McGraw-Hill Pub. Co. Ltd. UK, vol. 2, 1989.

**APÊNDICES**

## APÊNDICE A – ELASTICIDADE 2D

O que é apresentado neste tópico é baseado no que foi exposto por Ribeiro (2015).

Considere a Figura A.1 abaixo, que representa um sólido submetido a 3 componentes de tensões normais ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ ):

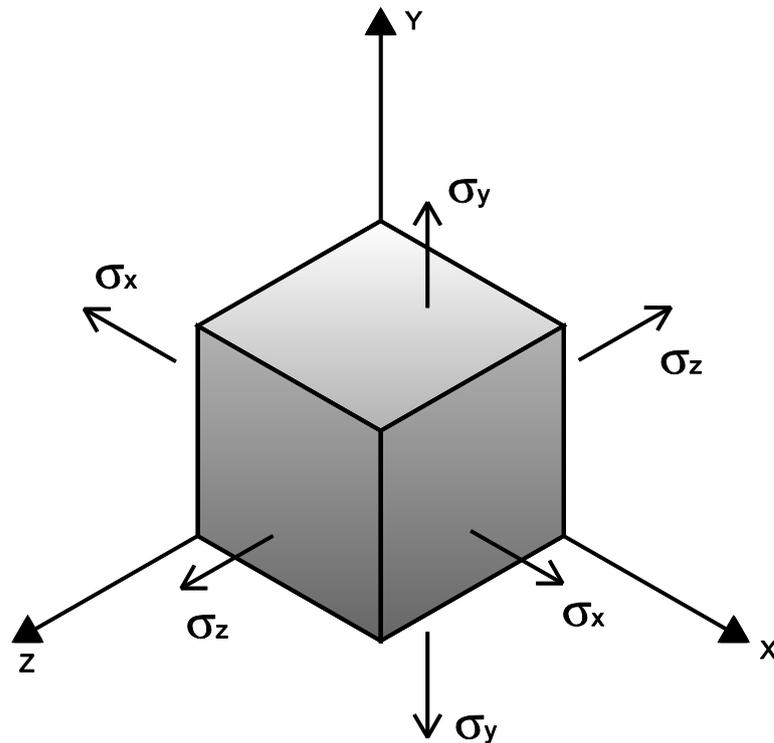


Figura A.1 – Sólido isotrópico submetido a tensões normais.

Sabe-se da Resistência dos Materiais que a deformação em uma direção sofre influência das componentes ortogonais de tensão, provocada pelo efeito Poisson.

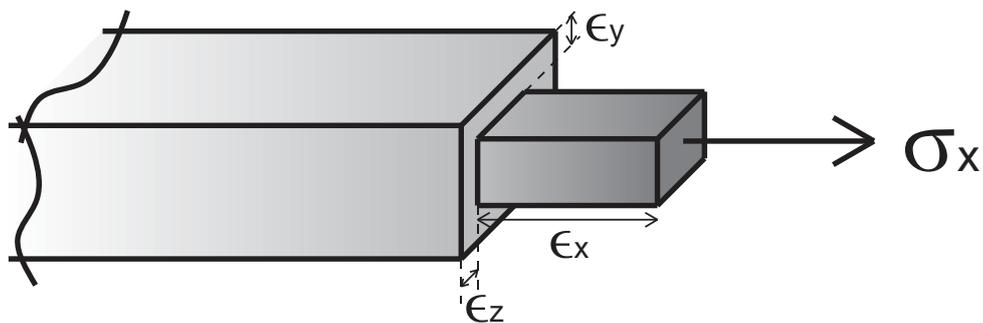


Figura A.2 – Deformações para tensão em uma direção.

Para atuação isolada da tensão normal na direção  $x$  ( $\sigma_x$ ), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = \frac{-\vartheta \cdot \sigma_x}{E} \\ \epsilon_z = \frac{-\vartheta \cdot \sigma_x}{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.1a)} \\ \text{(A.1b)} \\ \text{(A.1c)} \end{array}$$

onde  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$  são as deformações normais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\vartheta$  é o coeficiente de Poisson.

Então, para superposição de todas as tensões, fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_y}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\vartheta \cdot \sigma_y}{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.2a)} \\ \text{(A.2b)} \\ \text{(A.2c)} \end{array}$$

Reescrevendo o conjunto das Eqs. (A.2) em notação matricial, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -\vartheta & -\vartheta \\ -\vartheta & 1 & -\vartheta \\ -\vartheta & -\vartheta & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{array} \right\} \quad \text{(A.3)}$$

Além disso, existem as deformações devido às tensões de cisalhamento nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.4a)} \\ \text{(A.4b)} \\ \text{(A.4c)} \end{array}$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal, dado pela seguinte relação:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \vartheta)} \quad (\text{A.5})$$

Reescrevendo o conjunto das Eqs. (A.4) em notação matricial, fica:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1 + \vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot (1 + \vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \vartheta) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Combinando a Eq. (A.3) com a Eq. (A.6), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\vartheta & -\vartheta & & & \\ -\vartheta & 1 & -\vartheta & & & \\ -\vartheta & -\vartheta & 1 & & & \\ & & & 2 \cdot (1 + \vartheta) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 \cdot (1 + \vartheta) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \vartheta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo a Eq. (A.7) para as tensões, chega-se na seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \vartheta)(1 - 2\vartheta)} \begin{bmatrix} 1 - \vartheta & \vartheta & \vartheta & & & \\ \vartheta & 1 - \vartheta & \vartheta & & & \\ \vartheta & \vartheta & 1 - \vartheta & & & \\ & & & (1 - 2\vartheta)/2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & (1 - 2\vartheta)/2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1 - 2\vartheta)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A Eq. (A.8) se relaciona a um problema em 3 dimensões. Este problema pode ser simplificado para o caso bidimensional. Com base nas restrições impostas na direção da espessura (normalmente a direção  $z$ ), dá-se origem a dois casos particulares.

Quando a dimensão da espessura é muito menor do que as dimensões do comprimento e da largura de um sólido, tem-se o Estado Plano de Tensões. Este caso está ilustrado na Figura A.3 a seguir.

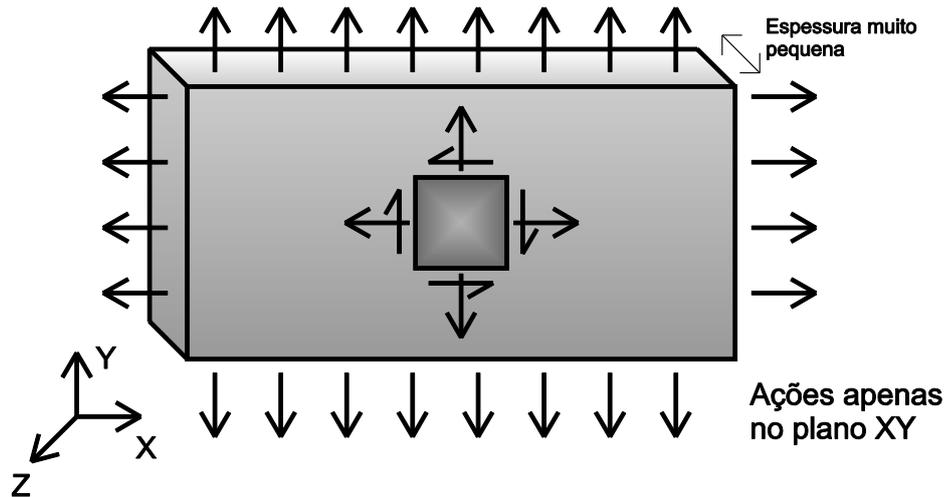


Figura A.3 – Estado Plano de Tensões.

No Estado Plano de Tensões, admite-se que as tensões serão nulas na direção da espessura (no caso, na direção  $z$ ) ao longo de todo o corpo. Com isso:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Com a substituição da relação da Eq. (A.9) na Eq. (A.7), fica:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Resolvendo a Eq. (A.10) para as tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

ou de forma compacta:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad (\text{A.12})$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva do material para o Estado Plano de Tensões.

O outro caso particular ocorre quando a dimensão da espessura é muito maior do que as outras duas dimensões. Assim, tem-se o chamado Estado Plano de Deformações. Aqui, admite-se que as deformações na direção da espessura (direção  $z$ ) são nulas. Logo:

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Na prática, este caso se dá em situações com sólidos que possuem grande comprimento na direção  $z$ , e há cargas aplicadas apenas no plano  $xy$  e restrições capazes de impedir qualquer deformação ao longo de uma componente fora desse plano.

Substituindo a relação da Eq. (A.13) na Eq. (A.8), resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Observa-se que a matriz constitutiva do material  $[D]$  para o Estado Plano de Deformações é diferente daquela para o Estado Plano de Tensões.

Considere agora o elemento diferencial indicado na Figura A.4, em que o estado indeformado é representado pelo elemento 1 o estado deformado pelo elemento 2.

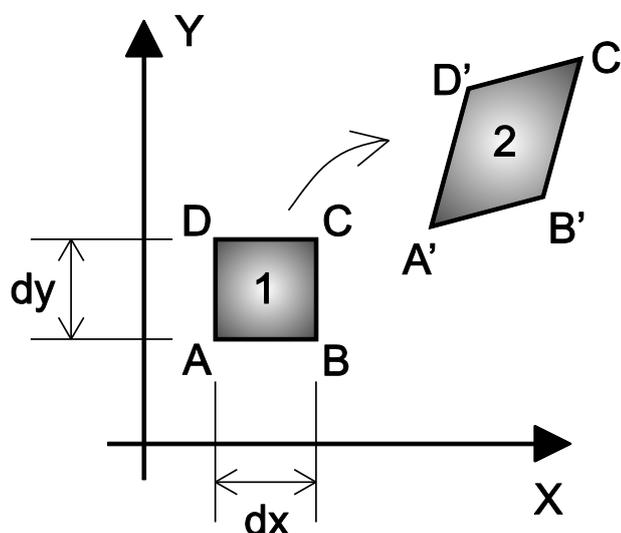


Figura A.4 – Variação do estado de deformação de um elemento infinitesimal.

Na variação do estado 1 para o estado 2 há tanto mudança de volume quanto mudança na forma. Este problema deve ser interpretado como a superposição de dois efeitos isolados. Assim:

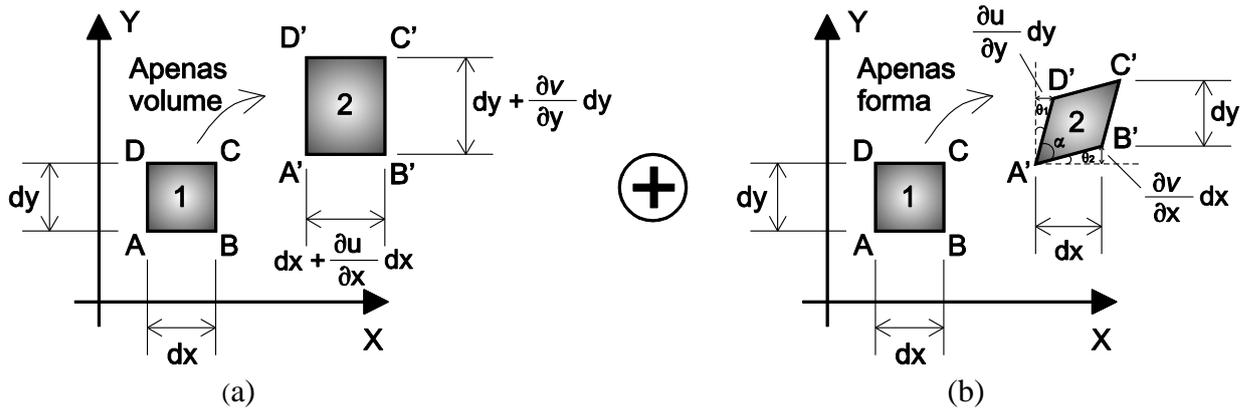


Figura A.5 – Superposição dos efeitos de deformação. (a) Variação apenas no volume, (b) Variação apenas na forma.

Da Figura A.5a acima resulta nas seguintes relações:

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.15})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\left( dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.16})$$

Já da Figura A.5b tem-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{A.17})$$

No regime de pequenos deslocamentos, tem-se que  $Tg(\theta) \approx \theta$  e assim:

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.18a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.18b})$$

Substituindo o conjunto das Eqs. (A.18) na Eq. (A.17), resulta em:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.19})$$

As Eqs. (A.15), (A.16) e (A.19) são definidas como relações cinemáticas de um problema bidimensional. Na prática, elas permitem associar translações em  $u$  e  $v$  com deformações no plano.

## APÊNDICE B – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O que é apresentado neste tópico é baseado no que foi exposto por Horowitz (2015).

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico que consiste em aproximar derivadas a partir do uso de Expansões em Séries de Taylor e pode ser utilizado para resolver equações diferenciais em pontos discretos do domínio (nuvem de pontos), transformando o problema contínuo em um sistema de equações algébricas.

Considere uma função  $f$  qualquer e observe a Figura B.1.

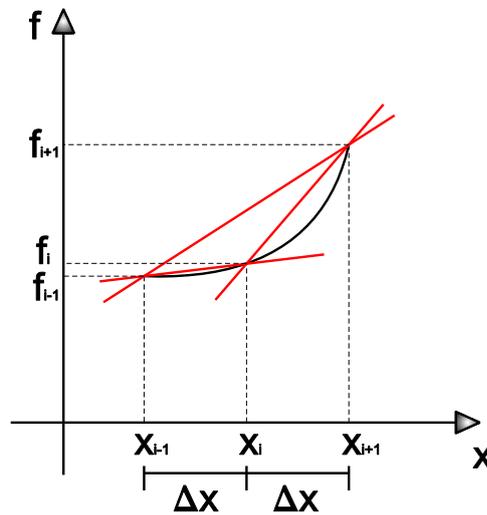


Figura B.1 – Função  $f$  qualquer e derivadas.

Utilizando Expansão em Séries de Taylor e acrescentando um termo referente à aproximação (última parcela da direita da equação a seguir), tem-se a seguinte expressão:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i + (\dots) + \frac{\Delta x^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_i + \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left. \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} \right|_{i+\theta} \quad (\text{B.1})$$

com  $0 \leq \theta \leq 1$ .

A partir da Eq. (B.1) é possível obter os estimadores de derivadas unidimensionais. Para aproximação central de derivadas de primeira ordem, faz-se  $n$  igual a 2 e subtrai-se a expressão para  $f_{i+1}$  daquela para  $f_{i-1}$ , como segue:

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + \Delta x \cdot \frac{df}{dx}\Big|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i+\theta_1} \\ f_{i-1} = f_i - \Delta x \cdot \frac{df}{dx}\Big|_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i-\theta_2} \end{cases}$$


---


$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{df}{dx}\Big|_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \cdot \left( \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i+\theta_1} + \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i-\theta_2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Isolando o termo referente à primeira derivada na Eq. (B.2), obtém-se:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \left( \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i+\theta_1} + \frac{d^3 f}{dx^3}\Big|_{i-\theta_2} \right) \quad (\text{B.3})$$

A segunda parcela da direita da Eq. (B.3) se refere ao erro da aproximação. Como este é da ordem do passo ao quadrado ( $\Delta x^2$ ), implica em uma boa aproximação. Assim, o operador para aproximação central de derivadas de primeira ordem unidimensional, com pivô em  $i$ , é:

$$\frac{df}{dx}\Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (\text{B.4})$$

Para o estimador de derivadas de segunda ordem unidimensional, deve-se seguir procedimento semelhante considerando  $n$  igual a 3. Como resultado, obtém-se erro da mesma ordem do caso anterior ( $\Delta x^2$ ) e operador a seguir:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{B.5})$$

Os operadores de derivadas unidimensional de primeira a quarta ordens podem ser obtidos a partir do esquema da Tabela B.1 a seguir.

Tabela B.1 – Resumo dos operadores de derivadas unidimensional em diferenças finitas.

Operador	$f_{i-2}$	$f_{i-1}$	$f_i$	$f_{i+1}$	$f_{i+2}$	Fator
$f$	-	-1	-	1	-	$1/(2\Delta x)$
$f''$	-	1	-2	1	-	$1/(\Delta x^2)$
$f'''$	-1	2	-	-2	1	$1/(2\Delta x^3)$
$f''''$	1	-4	6	-4	1	$1/(\Delta x^4)$

Para derivadas num domínio bidimensional, deve-se, basicamente, utilizar o operador da derivada desejado em cada uma das duas dimensões. Um esquema para derivadas de segunda ordem bidimensional pode ser observado na Figura B.2.

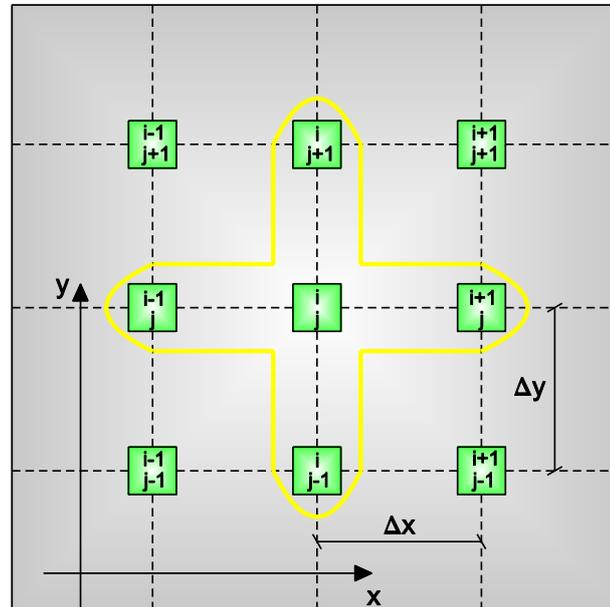


Figura B.2 – “Stencil” para derivadas de segunda ordem em diferenças finitas em duas dimensões.

## APÊNDICE C – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais utilizados atualmente para solução de problemas descritos por equações diferenciais. Sua aplicação abrange uma vasta área do conhecimento, capaz de resolver casos de análise de estruturas, mecânica dos fluidos, transferência de calor, reologia, eletromagnetismo e muitos outros. A ideia básica consiste em substituir um domínio complexo por um somatório de subdomínios correspondentes a elementos de geometrias mais simples (elementos finitos), como triângulos, quadriláteros, tetraedros, entre outros. A partir destes elementos menores, são empregadas funções de aproximação que satisfazem condições descritas por declarações integrais no domínio do problema.

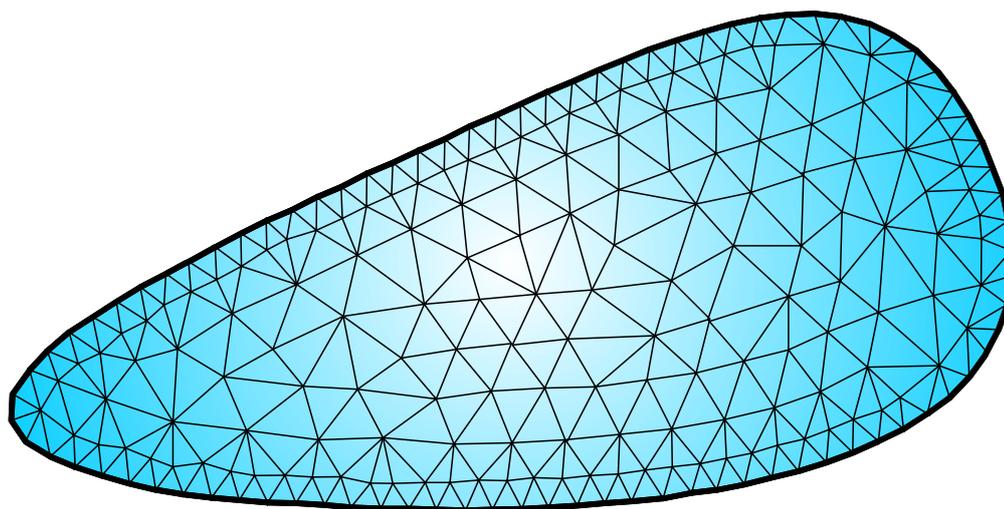


Figura C.1 – Domínio discretizado em elementos finitos triangulares.

A base da formulação do MEF vem do chamado Método dos Resíduos Ponderados (MRP), com a utilização do método de Galerkin e aplicação da forma fraca das equações.

Escrevendo o problema a ser resolvido de forma mais geral, deseja-se encontrar uma função desconhecida  $\beta$  (no caso deste trabalho, esta função representa os deslocamentos para a estrutura e as pressões para o fluido) que satisfaça ao seguinte conjunto de equações diferenciais lineares (são consideradas lineares para efeito de demonstração):

$$\mathcal{L}(\beta) + r = 0, \text{ em } \Omega \tag{C.1}$$

$$\mathfrak{M}(\beta) + s = 0, \text{ em } \Gamma \quad (\text{C.2})$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema,  $\Gamma$  é o contorno do problema,  $\mathcal{L}$  e  $\mathfrak{M}$  são operadores diferenciais lineares e  $r$  e  $s$  são funções independentes de  $\beta$ . A Figura C.2 ilustra esse caso.

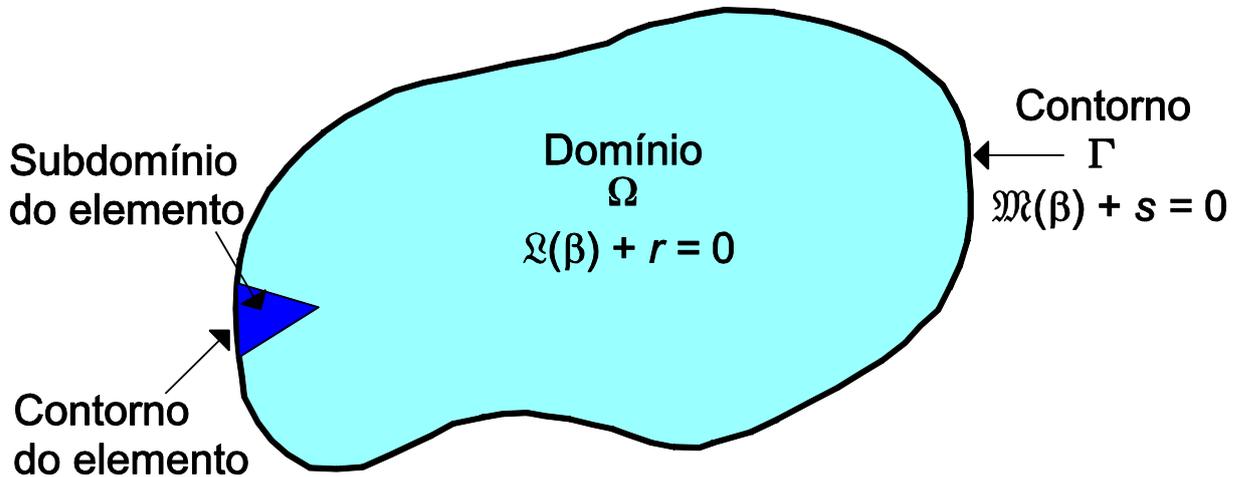


Figura C.2 – Domínio e contorno do problema.

O MEF, por ser um tipo de método aproximado, procura uma solução da seguinte forma:

$$\beta \approx \hat{\beta} = \sum_{t=1}^T N_t \cdot a_t \quad (\text{C.3})$$

onde  $N_t$  são as funções de forma prescritas em termos de variáveis independentes (por exemplo, as coordenadas  $x$  e  $y$ ) e  $a_t$  são parâmetros, em sua maioria ou totalidade, desconhecidos (para este trabalho, estes parâmetros representam deslocamentos, no caso da estrutura, e pressões, no caso do fluido, em pontos específicos, ou nós, do elemento finito), com  $T$  sendo um número natural que, quanto maior o seu valor, maior será o grau de sofisticação do elemento finito.

A Eq. (C.3) deve obedecer a certas condições. Uma delas é a de independência, que diz que  $\sum_{t=1}^T N_t \cdot a_t = 0$ , se e somente se,  $a_1 = a_2 = (\dots) = a_T = 0$ . Uma outra é que, quanto maior for o valor de  $T$ , menor será o erro cometido, ou seja, melhor será a aproximação, o que significa dizer que elementos finitos mais sofisticados produzem melhores resultados. Por

fim, a última condição é que, no contorno, os valores da função aproximada devem ser iguais aos valores da função real, isto é,  $\hat{\beta} = \beta$  em  $\Gamma$ ,  $\forall a_i$ .

Assim, substituindo o valor da função aproximada  $\hat{\beta}$  no conjunto das Eqs. (C.1) e (C.2) iniciais, temos que elas não serão mais nulas, e sim, iguais a um valor residual, ou resíduo, tanto para o domínio ( $R_\Omega$ ) quanto para o contorno ( $R_\Gamma$ ). Dessa forma, podemos reescrevê-las da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(\hat{\beta}) + r = R_\Omega, \text{ em } \Omega \quad (\text{C.4})$$

$$\mathfrak{M}(\hat{\beta}) + s = R_\Gamma, \text{ em } \Gamma \quad (\text{C.5})$$

O MRP diz que a soma dos resíduos ponderados ao longo do domínio (ou do contorno) é igual a zero. Assim, para uma aproximação simultânea do domínio e do contorno, fica:

$$\int_{\Omega} (W_l \cdot R_\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{W}_l \cdot R_\Gamma) d\Gamma = 0 \quad (\text{C.6})$$

onde  $W_l$  e  $\bar{W}_l$  são funções de ponderação independentes, com  $l$  variando de 1 a  $T$ .

Existem várias formas de avaliar a função de ponderação. A que é utilizada neste trabalho, e uma das mais aplicadas na literatura, é a de Bubnov-Galerkin, ou apenas Galerkin, em que as próprias funções de formas são usadas como o fator de peso. Este método é semelhante ao Princípio dos Trabalhos Virtuais. Logo, a Eq. (C.6) pode ser escrita como segue:

$$\int_{\Omega} (N_l \cdot R_\Omega) d\Omega + \int_{\Gamma} (\bar{N}_l \cdot R_\Gamma) d\Gamma = 0 \quad (\text{C.7})$$

Da Eq. (C.7) se tem a base para o MEF, e é ela que deve ser aplicada juntamente com as equações governantes dos fenômenos estudados para se poder solucionar o problema. Porém, há casos em que estas integrais podem não ser capazes de serem avaliadas, como, por exemplo, a função  $\beta$  gerar integrais tendendo ao infinito. Nestas situações, a inclinação dessa função é descontínua. Para contornar este empecilho, deve-se utilizar integração por partes na Eq. (C.7) e reduzi-la a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} [C_1(N_l) \cdot C_2(R_{\Omega})] d\Omega + \int_{\Gamma} [C_3(\bar{N}_l) \cdot C_4(R_{\Gamma})] d\Gamma = 0 \quad (\text{C.8})$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são operadores que possuem derivadas de menor ordem do que as que existiam nos resíduos por conta das equações governantes do problema.

A Eq. (C.8) é chamada de forma fraca da equação que é a base para o MEF e deve ser aplicada para driblar problemas com descontinuidade de derivadas. Segundo Zienkiewicz e Taylor (1989), é de certa maneira surpreendente o fato de que frequentemente a forma fraca é fisicamente mais realista do que a equação diferencial original, a qual implica numa suavização excessiva da solução real.



```

Lcav=10; % Comprimento horizontal (m)
hcav=Lest; % Comprimento vertical (m)

% Dados gerais

g=9.81; % Gravidade (m/s2)

% Discretização da malha

Ly=hcav; % Comprimento em Y
Lx=Lcav; % Comprimento em X
n=41 % Pontos na vertical
m=41 % Pontos na horizontal
Dy=Ly/(n-1)
Dx=Lx/(m-1)
S=1; % Termo para incorporar nas matrizes o coeficiente da pressão no ponto
de análise
NGLest=n-2; % Número de graus de liberdade da estrutura
NGLfluido=m*n; % Número de graus de liberdade do fluido
NGL=NGLest+NGLfluido;

disp('Condição de contorno do problema');
disp('1 - Parede Rígida');
disp('2 - Ondas de Gravidade');
disp('3 - Pressão nula');
disp(' ');
CCsup=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
superior da cavidade: ');
disp(' ');
CCinf=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
inferior da cavidade: ');
disp(' ');
CCdir=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
direita da cavidade: ');
disp(' ');
%OBS: Parte esquerda da cavidade está em contato com a estrutura (viga
biapoiada)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PROCESSAMENTO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic
% [A]+w^2[B]=0
% Montagem das matrizes [A] e [B]

A=zeros(NGL);
B=zeros(NGL);

% PARTE 1 - ESTRUTURA

% Caso particular 1 - n=3

if n==3
    A(1,1)=4*E*I/Dy^4;
    B(1,1)=-M;
    A(1,3)=-S;
end

% Caso particular 2 - n=4

```

```

if n==4
    % i=1
    A(1,1)=5*E*I/Dy^4;
    A(1,2)=-4*E*I/Dy^4;
    B(1,1)=-M;
    A(1,4)=-S;
    % i=2
    A(2,1)=A(1,2);
    A(2,2)=A(1,1);
    B(2,2)=-M;
    A(2,5)=-S;
end

% Caso particular 3 - n=5

if n==5
    % i=1
    A(1,1)=5*E*I/Dy^4;
    A(1,2)=-4*E*I/Dy^4;
    A(1,3)=E*I/Dy^4;
    B(1,1)=-M;
    A(1,5)=-S;
    % i=2
    A(2,1)=-4*E*I/Dy^4;
    A(2,2)=6*E*I/Dy^4;
    A(2,3)=-4*E*I/Dy^4;
    B(2,2)=-M;
    A(2,6)=-S;
    % i=3
    A(3,1)=E*I/Dy^4;
    A(3,2)=-4*E*I/Dy^4;
    A(3,3)=5*E*I/Dy^4;
    B(3,3)=-M;
    A(3,7)=-S;
end

% Caso particular 4 - n=6

if n==6
    % i=1
    A(1,1)=5*E*I/Dy^4;
    A(1,2)=-4*E*I/Dy^4;
    A(1,3)=E*I/Dy^4;
    B(1,1)=-M;
    A(1,6)=-S;
    % i=2
    A(2,1)=-4*E*I/Dy^4;
    A(2,2)=6*E*I/Dy^4;
    A(2,3)=-4*E*I/Dy^4;
    A(2,4)=E*I/Dy^4;
    B(2,2)=-M;
    A(2,7)=-S;
    % i=3
    A(3,1)=E*I/Dy^4;
    A(3,2)=-4*E*I/Dy^4;
    A(3,3)=6*E*I/Dy^4;
    A(3,4)=-4*E*I/Dy^4;
    B(3,3)=-M;
    A(3,8)=-S;
end

```

```

% i=4
A(4,2)=E*I/Dy^4;
A(4,3)=-4*E*I/Dy^4;
A(4,4)=5*E*I/Dy^4;
B(4,4)=-M;
A(4,9)=-S;
end

% Caso Geral - n>6

if n>6
    for i=3:n-4
        A(i,i-2)=E*I/Dy^4;
        A(i,i-1)=-4*E*I/Dy^4;
        A(i,i)=6*E*I/Dy^4;
        A(i,i+1)=-4*E*I/Dy^4;
        A(i,i+2)=E*I/Dy^4;
        B(i,i)=-M;
        A(i,i+n-1)=-S;
    end
    %i=1
    A(1,1)=5*E*I/Dy^4;
    A(1,2)=-4*E*I/Dy^4;
    A(1,3)=E*I/Dy^4;
    B(1,1)=-M;
    A(1,n)=-S;
    %i=2
    A(2,1)=-4*E*I/Dy^4;
    A(2,2)=6*E*I/Dy^4;
    A(2,3)=-4*E*I/Dy^4;
    A(2,4)=E*I/Dy^4;
    B(2,2)=-M;
    A(2,n+1)=-S;
    %i=n-3
    A(n-3,n-5)=E*I/Dy^4;
    A(n-3,n-4)=-4*E*I/Dy^4;
    A(n-3,n-3)=6*E*I/Dy^4;
    A(n-3,n-2)=-4*E*I/Dy^4;
    B(n-3,n-3)=-M;
    A(n-3,2*n-4)=-S;
    %i=n-2
    A(n-2,n-4)=E*I/Dy^4;
    A(n-2,n-3)=-4*E*I/Dy^4;
    A(n-2,n-2)=5*E*I/Dy^4;
    B(n-2,n-2)=-M;
    A(n-2,2*n-3)=-S;
end

% PARTE 2 - FLUIDO

% Pontos nas "quinas" da cavidade (4 pontos)

%k=1 (Ponto superior esquerdo)
i=1+NGLest;
A(i,i+1)=2/Dy^2;
A(i,i+n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCsup==2 % Ondas de Gravidade
    B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
end

```

```

end

%k=n (Ponto inferior esquerdo)
i=n+NGLest;
A(i,i-1)=2/Dy^2;
A(i,i+n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCinf==2 % Ondas de Gravidade
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
end

%k=(m-1)*n+1 (Ponto superior direito)
i=(m-1)*n+1+NGLest;
A(i,i+1)=2/Dy^2;
A(i,i-n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCsup==2
    B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
end
if CCdir==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
end

%k=m*n (Ponto inferior direito)
i=m*n+NGLest;
A(i,i-1)=2/Dy^2;
A(i,i-n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCinf==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
end
if CCdir==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
end

% Pontos das extremidades da cavidade, excluindo as "quinas"

% Extremidade esquerda
for k=2:n-1
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=1/Dy^2;
    A(i,i+1)=1/Dy^2;
    A(i,i+n)=2/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    B(i,k-1)=2*rhof/Dx;
end

% Extremidade direita
for k=(m-1)*n+2:m*n-1
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=1/Dy^2;
    A(i,i+1)=1/Dy^2;
    A(i,i-n)=2/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCdir==2

```

```

        B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
    end
end

% Extremidade superior
for k=n+1:n:(m-2)*n+1
    i=k+NGLest;
    A(i,i+1)=2/Dy^2;
    A(i,i-n)=1/Dx^2;
    A(i,i+n)=1/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCsup==2
        B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
    end
end

% Extremidade inferior
for k=2*n:n:(m-1)*n
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=2/Dy^2;
    A(i,i-n)=1/Dx^2;
    A(i,i+n)=1/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCinf==2
        B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
    end
end

% Pontos no interior da cavidade

aux=1;

for j=n+2:n:(m-2)*n+2
    aux=aux+1;
    for k=j:aux*n-1
        i=k+NGLest;
        A(i,i-1)=1/Dy^2;
        A(i,i+1)=1/Dy^2;
        A(i,i-n)=1/Dx^2;
        A(i,i+n)=1/Dx^2;
        A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
        B(i,i)=1/c^2;
    end
end

% Eliminação das linhas e colunas para os casos de pressão nula

if CCsup==3
    elimsup=zeros(1,m);
    aux=1;
    for k=1:n:(m-1)*n+1
        i=k+NGLest;
        elimsup(1,aux)=i;
        aux=aux+1;
    end
end

if CCinf==3

```

```

    eliminf=zeros(1,m);
    aux=1;
    for k=n:n:m*n
        i=k+NGLest;
        eliminf(1,aux)=i;
        aux=aux+1;
    end
end

if CCdir==3
    if CCsup==3 & CCinf==3
        elimdir=zeros(1,n-2);
        aux=1;
        for k=(m-1)*n+2:m*n-1
            i=k+NGLest;
            elimdir(1,aux)=i;
            aux=aux+1;
        end
    else
        if CCsup==3
            elimdir=zeros(1,n-1);
            aux=1;
            for k=(m-1)*n+2:m*n
                i=k+NGLest;
                elimdir(1,aux)=i;
                aux=aux+1;
            end
        else
            if CCinf==3
                elimdir=zeros(1,n-1);
                aux=1;
                for k=(m-1)*n+1:m*n-1
                    i=k+NGLest;
                    elimdir(1,aux)=i;
                    aux=aux+1;
                end
            else
                elimdir=zeros(1,n);
                aux=1;
                for k=(m-1)*n+1:m*n
                    i=k+NGLest;
                    elimdir(1,aux)=i;
                    aux=aux+1;
                end
            end
        end
    end
end

if CCsup==3 & CCinf==3 & CCdir==3
    elim=[elimsup eliminf elimdir];
else
    if CCsup==3 & CCinf==3
        elim=[elimsup eliminf];
    else
        if CCsup==3 & CCdir==3
            elim=[elimsup elimdir];
        else
            if CCinf==3 & CCdir==3
                elim=[eliminf elimdir];
            else

```



## APÊNDICE E – CÓDIGO PARA ACOPLAMENTO MEF-MDF

```

% UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
% PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - ESTRUTURAS
%
% ALUNO: RENAN GODOY BURGOS
%
% ANÁLISE MODAL EM PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS 2D
% Viga em CST + Cavidade em MDF

clear all
clc
format long

disp('-----');
disp('ANÁLISE MODAL EM PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS 2D - ACOPLAMENTO MEF-MDF');
disp('-----');
disp(' ');

%          contorno superior
%      ∇ *****
%      ||                                     *
%      ||                                     *
%  V  ||                                     *
%  I  ||                                     * contorno
%  G  ||          CAVIDADE                   *
%  A  ||                                     * direita
%      ||                                     *
%      ||                                     *
%      ||                                     *
%      /\ *****
%          contorno inferior

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          PARÂMETROS DO PROBLEMA          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('>>>> PARAMETROS DO PROBLEMA <<<<');
disp(' ');

% Dados da Estrutura

rhoest=7800; % Densidade (kg/m3)
E=2.1*10^11; % Módulo de Elasticidade (N/m2)
Lest=10; % Comprimento da viga (m)
test=1; % Altura da viga (m)
v=0.3; % Coeficiente de Poisson
D=(E/(1-v^2))*[1 v 0; v 1 0; 0 0 (1-v)/2]; % Estado Plano de Tensões
%D=(E/((1+v)*(1-2*v)))*[(1-v) v 0; v (1-v) 0; 0 0 ((1-2*v)/2)]; % Estado
Plano de Deformações

% Dados do Fluido

```

```

c=1500; % Velocidade do som no fluido (m/s)
rhof=1000; % Densidade (kg/m3)
Lcav=10; % Comprimento horizontal (m)
hcav=Lest; % Comprimento vertical (m)

% Dados gerais

g=9.81; % Gravidade (m/s2)

% Discretização da malha

Ly=hcav; % Comprimento em Y
Lx=Lcav; % Comprimento em X
n=41 % Pontos na vertical (para viga e cavidade)
m=41 % Pontos na horizontal (para cavidade)
maux=9; % Pontos na horizontal (para viga)
Dy=Ly/(n-1); % Passo na vertical para viga e cavidade
Dx=Lx/(m-1); % Passo na horizontal para cavidade
Dxaux=test/(maux-1); % Passo na horizontal para viga
S=Dy*1; % Termo para incorporar nas matrizes o coeficiente da pressão no
ponto de análise, referente à área
Nel=2*(n-1)*(maux-1); % Número de elementos na estrutura
NGLestsemrest=2*maux*n; % Número de graus de liberdade da estrutura sem as
restrições
%NGLest=NGLestsemrest-2*2*maux; % NGL da estrutura com as restrições de
engaste
NGLest=NGLestsemrest-4; % NGL da estrutura com as restrições de apoio.
Mudar linhas 284 a 287 para elim2
NGLfluido=m*n; % Número de graus de liberdade do fluido
NGLsemrest=NGLestsemrest+NGLfluido; % Número de graus de liberdade da
estrutura e fluido sem restrições
NGL=NGLest+NGLfluido; % Número de graus de liberdade da estrutura com
restrições e fluido sem restrições

% Coordenadas dos nós dos elementos da estrutura

aux=0;
X=zeros(maux*n,1);
Y=zeros(maux*n,1);

for j=1:n:(maux-1)*n+1
    for i=0:n-1
       iaux=j+i;
        Y(iaux)=i*Dy;
    end
end

for j=1:n:(maux-1)*n+1
    xi=aux*Dxaux;
    aux=aux+1;
    for i=0:n-1
       iaux=j+i;
        X(iaux)=xi;
    end
end

% Condições de contorno do problema

disp('Condição de contorno do problema');

```

```

disp('1 - Parede Rígida');
disp('2 - Ondas de Gravidade');
disp('3 - Pressão nula');
disp(' ');
CCsup=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
superior da cavidade: ');
disp(' ');
CCinf=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
inferior da cavidade: ');
disp(' ');
CCdir=input('Digite o número referente à condição de contorno da parte
direita da cavidade: ');
disp(' ');
% OBS: Parte esquerda da cavidade está em contato com a estrutura

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PROCESSAMENTO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic
% [A]+w^2[B]=0
% Montagem das matrizes [A] e [B]

A=zeros(NGLsemrest);
B=zeros(NGLsemrest);

%%%%%%%% PARTE 1 - ESTRUTURA %%%%%%%%%

for i=1:Nel

    K=zeros(NGLsemrest); % Matriz de rigidez expandida, auxiliar
    (inicialmente com zeros)
    Maux=zeros(NGLsemrest); % Matriz de massa expandida, auxiliar
    (inicialmente com zeros)

    % Rotina para relacionar as conectividades dos nós dos elementos

    Q=fix(i/(n-1)); % Quociente da divisão
    R=rem(i,(n-1)); % Resto da divisão

    if R==0 % Elementos na parte inferior da viga
        if rem(Q,2)==0 % Lado esquerdo do "quadrado"
            z=i/(n-1)-(1+i/(2*(n-1)));
            PI=i+1-z*(n-2);
            no1=PI;
            no2=PI+1;
            no3=PI-n;
        else % Lado direito do "quadrado"
            z=i/(n-1)-(1+(i-(n-1))/(2*(n-1)));
            PI=i-z*(n-2);
            no1=PI;
            no2=PI+n+1;
            no3=PI+1;
        end
    else % Restante dos elementos
        if rem(Q,2)==0 % Lado direito do "quadrado"
           iaux=i+(n-1-R);
            z=iaux/(n-1)-(1+(iaux-(n-1))/(2*(n-1)));

```

```

        PI=i-z*(n-2);
        no1=PI;
        no2=PI+n+1;
        no3=PI+1;
    else % Lado esquerdo do "quadrado"
       iaux=i+(n-1-R);
        z=iaux/(n-1)-(1+iaux/(2*(n-1)));
        PI=i+1-z*(n-2);
        no1=PI;
        no2=PI+1;
        no3=PI-n;
    end
end

% Coordenadas dos nós do elemento

x1=X(no1);
y1=Y(no1);
x2=X(no2);
y2=Y(no2);
x3=X(no3);
y3=Y(no3);

% Área do elemento

Ae=(1/2)*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);

% Matriz B do elemento

Be=(1/(2*Ae))*[y2-y3 0 y3-y1 0 y1-y2 0; 0 x3-x2 0 x1-x3 0 x2-x1; x3-x2
y2-y3 x1-x3 y3-y1 x2-x1 y1-y2];

% Matriz de rigidez do elemento

Bet=Be';
Ke=Bet*D*Be*(Ae*1);

% Matriz de massa do elemento

Me=-rhoest*Ae/12*[2 0 1 0 1 0; 0 2 0 1 0 1; 1 0 2 0 1 0; 0 1 0 2 0 1; 1
0 1 0 2 0; 0 1 0 1 0 2];

% Transforma a posição local (no elemento) para a posição
correspondente na matriz global

pos(1)=2*no1-1; %nó 1
pos(2)=2*no1;

pos(3)=2*no2-1; %nó 2
pos(4)=2*no2;

pos(5)=2*no3-1; %nó 3
pos(6)=2*no3;

% Matriz de rigidez e massa do elemento expandida em índices globais

for j=1:6
    for k=1:6

```

```

        K(pos(j),pos(k))=Ke(j,k);
        Maux(pos(j),pos(k))=Me(j,k);
    end
end

A=A+K; % Guarda a matriz expandida (K) na matriz de rigidez global (A)
B=B+Maux; % Guarda a matriz expandida (Maux) na matriz de massa global
(B)

end

% Para os termos referentes à área que multiplica a pressão no ponto

for i=1:n
    if i==1
        A(2*i-1,NGLestsemrest+i)=-S/2;
    else
        if i==n
            A(2*i-1,NGLestsemrest+i)=-S/2;
        else
            A(2*i-1,NGLestsemrest+i)=-S;
        end
    end
end

% Eliminação dos graus de liberdade restritos na estrutura

% Eliminação para o caso de engaste
elimsup=zeros(1,2*maux);
eliminf=zeros(1,2*maux);

aux=1;
for i=1:n:(maux-1)*n+1 % Elimina graus de liberdade do apoio superior
    elimsup(1,aux)=2*i-1;
    elimsup(1,aux+1)=2*i;
    aux=aux+2;
end

aux=1;
for i=n:n:maux*n % Elimina graus de liberdade do apoio inferior
    eliminf(1,aux)=2*i-1;
    eliminf(1,aux+1)=2*i;
    aux=aux+2;
end

elim1=[elimsup eliminf];
elim1=sort(elim1);

% Eliminação para o caso biapoiado
elim2=zeros(1,4);
if rem(maux,2)==0
    aux=maux*n/2;
    aux2=aux-n+1;;
    elim2(1,1)=2*aux2-1;
    elim2(1,2)=2*aux2;
    elim2(1,3)=2*aux-1;
    elim2(1,4)=2*aux;
else

```

```

    aux=(fix(maux/2)+1)*n;
    aux2=aux-n+1;
    elim2(1,1)=2*aux2-1;
    elim2(1,2)=2*aux2;
    elim2(1,3)=2*aux-1;
    elim2(1,4)=2*aux;
end

Aantes=A;
Bantes=B;

% Eliminação das linhas e colunas com restrição
A(:,elim2)=[];
A(elim2,:)=[];
B(:,elim2)=[];
B(elim2,:)=[];

%%%%%%%%% PARTE 2 - FLUIDO %%%%%%%%%%

% Pontos nas "quinas" da cavidade (4 pontos)

%k=1 (Ponto superior esquerdo)
i=1+NGLest;
A(i,i+1)=2/Dy^2;
A(i,i+n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
B(i,2*1-1)=2*rhof/Dx;
if CCsup==2 % Ondas de Gravidade
    B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
end

%k=n (Ponto inferior esquerdo)
i=n+NGLest;
A(i,i-1)=2/Dy^2;
A(i,i+n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
B(i,2*n-1)=2*rhof/Dx;
if CCinf==2 % Ondas de Gravidade
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
end

%k=(m-1)*n+1 (Ponto superior direito)
i=(m-1)*n+1+NGLest;
A(i,i+1)=2/Dy^2;
A(i,i-n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCsup==2
    B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
end
if CCdir==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
end

%k=m*n (Ponto inferior direito)
i=m*n+NGLest;
A(i,i-1)=2/Dy^2;

```

```

A(i,i-n)=2/Dx^2;
A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
B(i,i)=1/c^2;
if CCinf==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
end
if CCdir==2
    B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
end

% Pontos das extremidades da cavidade, excluindo as "quinas"

% Extremidade esquerda
for k=2:n-1
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=1/Dy^2;
    A(i,i+1)=1/Dy^2;
    A(i,i+n)=2/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    B(i,2*k-1)=2*rhof/Dx;
end

% Extremidade direita
for k=(m-1)*n+2:m*n-1
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=1/Dy^2;
    A(i,i+1)=1/Dy^2;
    A(i,i-n)=2/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCdir==2
        B(i,i)=B(i,i)+2/(Dx*g);
    end
end

% Extremidade superior
for k=n+1:n:(m-2)*n+1
    i=k+NGLest;
    A(i,i+1)=2/Dy^2;
    A(i,i-n)=1/Dx^2;
    A(i,i+n)=1/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCsup==2
        B(i,i)=B(i,i)-2/(Dy*g);
    end
end

% Extremidade inferior
for k=2*n:n:(m-1)*n
    i=k+NGLest;
    A(i,i-1)=2/Dy^2;
    A(i,i-n)=1/Dx^2;
    A(i,i+n)=1/Dx^2;
    A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
    B(i,i)=1/c^2;
    if CCinf==2
        B(i,i)=B(i,i)+2/(Dy*g);
    end
end

```

```

end

% Pontos no interior da cavidade

aux=1;

for j=n+2:n:(m-2)*n+2
    aux=aux+1;
    for k=j:aux*n-1
        i=k+NGLest;
        A(i,i-1)=1/Dy^2;
        A(i,i+1)=1/Dy^2;
        A(i,i-n)=1/Dx^2;
        A(i,i+n)=1/Dx^2;
        A(i,i)=-2/Dy^2-2/Dx^2;
        B(i,i)=1/c^2;
    end
end

% Eliminação das linhas e colunas para os casos de pressão nula

if CCsup==3
    elimsup=zeros(1,m);
    aux=1;
    for k=1:n:(m-1)*n+1
        i=k+NGLest;
        elimsup(1,aux)=i;
        aux=aux+1;
    end
end

if CCinf==3
    elimininf=zeros(1,m);
    aux=1;
    for k=n:n:m*n
        i=k+NGLest;
        elimininf(1,aux)=i;
        aux=aux+1;
    end
end

if CCdir==3
    if CCsup==3 & CCinf==3
        elimdir=zeros(1,n-2);
        aux=1;
        for k=(m-1)*n+2:m*n-1
            i=k+NGLest;
            elimdir(1,aux)=i;
            aux=aux+1;
        end
    else
        if CCsup==3
            elimdir=zeros(1,n-1);
            aux=1;
            for k=(m-1)*n+2:m*n
                i=k+NGLest;
                elimdir(1,aux)=i;
                aux=aux+1;
            end
        else

```

```

        if CCinf==3
            elimdir=zeros(1,n-1);
            aux=1;
            for k=(m-1)*n+1:m*n-1
                i=k+NGLest;
                elimdir(1,aux)=i;
                aux=aux+1;
            end
        else
            elimdir=zeros(1,n);
            aux=1;
            for k=(m-1)*n+1:m*n
                i=k+NGLest;
                elimdir(1,aux)=i;
                aux=aux+1;
            end
        end
    end
end
end

if CCsup==3 & CCinf==3 & CCdir==3
    elim=[elimsup elimininf elimdir];
else
    if CCsup==3 & CCinf==3
        elim=[elimsup elimininf];
    else
        if CCsup==3 & CCdir==3
            elim=[elimsup elimdir];
        else
            if CCinf==3 & CCdir==3
                elim=[elimininf elimdir];
            else
                if CCsup==3
                    elim=elimsup;
                else
                    if CCinf==3
                        elim=elimininf;
                    else
                        if CCdir==3
                            elim=elimdir;
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end

NGLaux=NGL;

if CCsup==3 | CCinf==3 | CCdir==3
    elim=sort(elim);
    Afull=A;
    Bfull=B;
    A(:,elim)=[];
    A(elim,:)=[];
    B(:,elim)=[];
    B(elim,:)=[];
    NGLaux=NGL-numel(elim);
end

```

```
% OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

disp('>>>> FREQUENCIAS NATURAIS <<<<');
disp(' ');

[AA,BB]=eig(inv(-B)*A); % Resolve o problema de autovalores e autovetores

w=real(sqrt(BB));

aux=0;

waux=zeros(NGLaux,1);

for i=1:NGLaux
    waux(i)=w(i,i);
    if waux(i)<0
        aux=aux+1;
    end
end
waux=sort(waux);
aux2=1;
for i=aux+1:aux+8
    disp(['w' num2str(aux2) ' = ' num2str(waux(i)) ' rad/s']);
    aux2=aux2+1;
end
disp(' ');
toc
```



```

disp('1 - Problema Desacoplado: Apenas Estrutura');
disp('2 - Problema Desacoplado: Apenas Cavidade Acústica');
disp('3 - Problema Acoplado: Estrutura + Cavidade Acústica');
disp(' ');
tipo=input('Digite o número referente ao tipo do problema: ');
while (tipo~=1 && tipo~=2 && tipo~=3)
    disp('Tipo do problema incorreto!');
    tipo=input('Digite o número referente ao tipo do problema: ');
end
disp(' ');

% Leitura dos dados da estrutura obtidos pelo GiD

Nelest=0; % Número de elementos total de todas as estruturas, inicialmente
nulo
NGLest=0; % NGL total de todas as estruturas, inicialmente nulo
nnest=0; % Número de nós total de todas as estruturas, inicialmente nulo
nr=0; % Número de nós restritos de todas as estruturas, inicialmente nulo

if (tipo==1 || tipo==3)

    % Rotira para ler as coordenadas da estrutura do arquivo do GiD
    m = 1;
    d = fopen('Estrutura.msh'); %arquivo de entrada (Salvar arquivo do GiD
    exatamente com esse nome!)

    startString = 'Coordinates'; %texto de início
    endString = 'End Coordinates'; %texto final

    % Descarta linhas até a startString
    while 1
        tline = fgetl(d); % descarta linhas

        % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
        if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
            break
        end
    end

    % Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
    while ischar(tline)
        tline = fgetl(d);

        % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
        if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
            break
        end

        % Leitura individual da linhas em cada loop
        A(m).data= tline;
        coordest(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %*f %*f %*f'); % coluna 1
        coordest(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
        coordest(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
        coordest(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

        m = m+1;
    end
end

```

```

fclose(d);

aux1=coordest;
aux1(:,[2 3 4])=[];
coordest(:,[1 4])=[];

% Rotira para ler as conectividades da estrutura do arquivo do GiD

m = 1;
d = fopen('Estrutura.msh'); %arquivo de entrada (Salvar arquivo do GiD
exatamente com esse nome!)

startString = 'Elements'; %texto de início
endString = 'End Elements'; %texto final

% Descarta linhas até a startString
while 1
    tline = fgetl(d); % descarta linhas

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
        break
    end
end

% Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
while ischar(tline)
    tline = fgetl(d);

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
        break
    end

    % Leitura individual da linhas em cada loop
    A(m).data= tline;
    conecest(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %*f %*f %*f'); % coluna 1
    conecest(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
    conecest(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
    conecest(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

    m = m+1;

end

fclose(d);

aux2=conecest;
aux2(:,[2 3 4])=[];
conecest(:,1)=[];
conecestantigo=conecest;
for i=1: numel(aux2)
    for j=1:3
        conecest(i,j)=find(aux1==conecest(i,j));
    end
end

% Rotina para ler as coordenadas da estrutura onde há restrição de
% deslocamento

```

```

m = 1;
d = fopen('rest_estrutura.msh'); %arquivo de entrada (Salvar
arquivo do GiD exatamente com esse nome!)

startString = 'Coordinates'; %texto de início
endString = 'End Coordinates'; %texto final

% Descarta linhas até a startString
while 1
    tline = fgetl(d); % descarta linhas

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
        break
    end
end

% Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
while ischar(tline)
    tline = fgetl(d);

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
        break
    end

    % Leitura individual da linhas em cada loop
    A(m).data= tline;
    restest(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %*f %*f %*f'); % coluna 1
    restest(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
    restest(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
    restest(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

    m = m+1;

end

fclose(d);

restest(:, [2 3 4])=[];
nr=numel(restest);
for i=1:nr
    restest(i)=find(aux1==restest(i));
end

NGLest=2*numel(aux1);
Nelest=numel(aux2);
nnest=numel(aux1);

end

% Leitura dos dados da cavidade obtidos pelo GiD

Nelf=0; % Número de elementos total da cavidade, inicialmente nulo
NGLf=0; % NGL totoal da cavidade, inicialmente nulo
nnf=0; % Número de nós total da cavidade, inicialmente nulo

```

```

if (tipo==2 || tipo==3)

    % Rotira para ler as coordenadas do fluido do arquivo do GiD
    m = 1;
    d = fopen('Fluido.msh'); %arquivo de entrada (Salvar arquivo do GiD
exatamente com esse nome!)

    startString = 'Coordinates'; %texto de início
    endString = 'End Coordinates'; %texto final

    % Descarta linhas até a startString
    while 1
        tline = fgetl(d); % descarta linhas

        % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
        if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
            break
        end
    end

    % Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
    while ischar(tline)
        tline = fgetl(d);

        % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
        if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
            break
        end

        % Leitura individual da linhas em cada loop
        A(m).data= tline;
        coordf(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %*f %*f %*f'); % coluna 1
        coordf(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
        coordf(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
        coordf(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

        m = m+1;

    end

    fclose(d);

    aux3=coordf;
    aux3(:, [2 3 4])=[];
    coordf(:, [1 4])=[];

    % Rotira para ler as conectividades do fluido do arquivo do GiD
    m = 1;
    d = fopen('Fluido.msh'); %arquivo de entrada (Salvar arquivo do GiD
exatamente com esse nome!)

    startString = 'Elements'; %texto de início
    endString = 'End Elements'; %texto final

    % Descarta linhas até a startString
    while 1
        tline = fgetl(d); % descarta linhas

```

```

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
        break
    end
end

% Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
while ischar(tline)
    tline = fgetl(d);

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
        break
    end

    % Leitura individual da linhas em cada loop
    A(m).data= tline;
    conecf(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %*f %*f %*f'); % coluna 1
    conecf(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
    conecf(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
    conecf(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

    m = m+1;

end

fclose(d);

aux4=conecf;
aux4(:, [2 3 4])=[];
conecf(:,1)=[];
for i=1:numel(aux4)
    for j=1:3
        conecf(i,j)=find(aux3==conecf(i,j));
    end
end

pnula=input('Há pontos com pressão nula no fluido? Digite 1 para SIM,
ou 2 para NÃO: ');
disp(' ');
if pnula==1

    % Rotira para ler as coordenadas do fluido com pressão nula do
arquivo do GiD
    m = 1;
    d = fopen('Pnula.msh'); %arquivo de entrada (Salvar arquivo do GiD
exatamente com esse nome!)

    startString = 'Coordinates'; %texto de início
    endString = 'End Coordinates'; %texto final

    % Descarta linhas até a startString
    while 1
        tline = fgetl(d); % descarta linhas

        % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a startString
        if ~ischar(tline) || strcmp(tline, startString)
            break
        end
    end
end

```

```

end

% Inicia o armazenamento desejado a partir da startString
while ischar(tline)
    tline = fgetl(d);

    % Interrompe se encontrar o final do arquivo ou a endString
    if ~ischar(tline) || strcmp(tline, endString)
        break
    end

    % Leitura individual da linhas em cada loop
    A(m).data= tline;
    restf(m,1)=sscanf(A(m).data, '%f %f %f %f'); % coluna 1
    restf(m,2)=sscanf(A(m).data, '%*f %f %*f %*f'); % coluna 2
    restf(m,3)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %f %*f'); % coluna 3
    restf(m,4)=sscanf(A(m).data, '%*f %*f %*f %f'); % coluna 4

    m = m+1;

end

fclose(d);

restf(:, [2 3 4])=[];
elimf=zeros(1,numel(restf));
for i=1:numel(restf)
    elimf(i)=find(aux3==restf(i))+NGLest;
end
end

NGLf=numel(aux3);
Nelf=numel(aux4);
nnf=NGLf;

end

NGL=NGLest+NGLf; % Número de graus de liberdade das estruturas + fluido,
sem restrições

% Rotina para relacionar os graus de liberdade da estrutura com os
% respectivos graus de liberdade do fluido na interface fluido-estrutura

if tipo==3
    IFE=intersect(aux1,aux3);
    cont=0;
    for i=1:Nelest
        vetaux=[conecestantigo(i,1) conecestantigo(i,2)
conecestantigo(i,3)];
        aux=intersect(vetaux,IFE);
        if numel(aux)>1
            cont=cont+1;
            GLxA(cont)=2*find(aux1==aux(1))-1;
            GLyA(cont)=2*find(aux1==aux(1));
            GLxB(cont)=2*find(aux1==aux(2))-1;
            GLyB(cont)=2*find(aux1==aux(2));
            NoA(cont)=find(aux3==aux(1))+NGLest;
            NoB(cont)=find(aux3==aux(2))+NGLest;
            xA(cont)=coorddest(find(aux1==aux(1)),1);

```

```

        yA(cont)=coorddest(find(aux1==aux(1)),2);
        xB(cont)=coorddest(find(aux1==aux(2)),1);
        yB(cont)=coorddest(find(aux1==aux(2)),2);
        L(cont)=sqrt((xB(cont)-xA(cont))^2+(yB(cont)-yA(cont))^2);
        cosseno(cont)=(xB(cont)-xA(cont))/L(cont);
        seno(cont)=(yB(cont)-yA(cont))/L(cont);
    end
end
end

disp('Finalizado ETAPA 1 - PRÉ-PROCESSAMENTO')
toc
disp(' ');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                    PROCESSAMENTO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('>>>>> PROCESSAMENTO <<<<<');
disp(' ');

% [A]+w^2[B]=0
% Montagem das matrizes [A] e [B]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                    ETAPA 2 - ESTRUTURA
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if (tipo==1 || tipo==3)
    tic
    % Vetores auxiliares da vetorização
    II=zeros(1,36*Nelest);
    JJ=zeros(1,36*Nelest);
    KK=zeros(1,36*Nelest);
    MM=zeros(1,36*Nelest);

    for i=1:Nelest

        no1=concect(i,1);
        no2=concect(i,2);
        no3=concect(i,3);

        % Índice para a vetorização

        ind=[2*no1-1 2*no1 2*no2-1 2*no2 2*no3-1 2*no3];

        % Coordenadas dos nós do elemento

        x1=coorddest(no1,1);
        y1=coorddest(no1,2);
        x2=coorddest(no2,1);
        y2=coorddest(no2,2);
        x3=coorddest(no3,1);
        y3=coorddest(no3,2);

        % Área do elemento

```

```

Ae=(1/2)*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);

% Matriz B do elemento

Be=(1/(2*Ae))*[y2-y3 0 y3-y1 0 y1-y2 0; 0 x3-x2 0 x1-x3 0 x2-x1;
x3-x2 y2-y3 x1-x3 y3-y1 x2-x1 y1-y2];

% Matriz de rigidez do elemento

Bet=Be';
Ke=Bet*D*Be*(Ae*1);

% Matriz de massa do elemento

Me=-rhoest*Ae/12*[2 0 1 0 1 0; 0 2 0 1 0 1; 1 0 2 0 1 0; 0 1 0 2 0
1; 1 0 1 0 2 0; 0 1 0 1 0 2];

% II, JJ, KK, MM (Vetorização)

ii=[ind(1)*ones(1,6) ind(2)*ones(1,6) ind(3)*ones(1,6)
ind(4)*ones(1,6) ind(5)*ones(1,6) ind(6)*ones(1,6)];
jj=[ind ind ind ind ind];
kk=reshape(Ke',1,36);
mm=reshape(Me',1,36);

II(1,1+(i-1)*36:i*36)=ii;
JJ(1,1+(i-1)*36:i*36)=jj;
KK(1,1+(i-1)*36:i*36)=kk;
MM(1,1+(i-1)*36:i*36)=mm;

end

% Cria matriz esparsa
Aest=sparse(II, JJ, KK, NGL, NGL);
Best=sparse(II, JJ, MM, NGL, NGL);

disp('Finalizado ETAPA 2 - ESTRUTURA')
toc
disp(' ');
end

%%%%%%%% ETAPA 3 - FLUIDO %%%%%%%%%

if (tipo==2 || tipo==3)
tic
% Vetores auxiliares da vetorização
II=zeros(1,9*Nelf);
JJ=zeros(1,9*Nelf);
KK=zeros(1,9*Nelf);
MM=zeros(1,9*Nelf);

for i=1:Nelf

```

```

no1=conecf(i,1);
no2=conecf(i,2);
no3=conecf(i,3);

% Índice para a vetorização

ind=[no1+NGLest no2+NGLest no3+NGLest];

% Coordenadas dos nós do elemento

x1=coordf(no1,1);
y1=coordf(no1,2);
x2=coordf(no2,1);
y2=coordf(no2,2);
x3=coordf(no3,1);
y3=coordf(no3,2);

% Área do elemento

Ae=(1/2)*det([1 x1 y1; 1 x2 y2; 1 x3 y3]);

% Matriz de rigidez do fluido do elemento

b1=y2-y3;
b2=y3-y1;
b3=y1-y2;
c1=x3-x2;
c2=x1-x3;
c3=x2-x1;

Ke=(1/(4*Ae))*[b1^2+c1^2 b1*b2+c1*c2 b1*b3+c1*c3; b1*b2+c1*c2 b2^2+c2^2
b2*b3+c2*c3; b1*b3+c1*c3 b2*b3+c2*c3 b3^2+c3^2];

% Matriz de massa do fluido do elemento

Me=(-Ae/(12*c^2))*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];

% II, JJ, KK, MM (Vetorização)

ii=[ind(1)*ones(1,3) ind(2)*ones(1,3) ind(3)*ones(1,3)];
jj=[ind ind ind];
kk=reshape(Ke',1,9);
mm=reshape(Me',1,9);

II(1,1+(i-1)*9:i*9)=ii;
JJ(1,1+(i-1)*9:i*9)=jj;
KK(1,1+(i-1)*9:i*9)=kk;
MM(1,1+(i-1)*9:i*9)=mm;

end

% Cria matriz esparsa
Af=sparse(II, JJ, KK, NGL, NGL);
Bf=sparse(II, JJ, MM, NGL, NGL);

disp('Finalizado ETAPA 3 - FLUIDO');

```

```

toc
disp(' ');

end

%%%%%%%%% PARTE INTERMEDIÁRIA %%%%%%%%%

% Montagem das matrizes A e B globais, sem acoplamento

if tipo==1
    A=Aest;
    B=Best;
end

if tipo==2
    A=Af;
    B=Bf;
end

if tipo==3
    A=Aest+Af;
    B=Best+Bf;
end

%%%%%%%%% ETAPA 4 - ACOPLAMENTO %%%%%%%%%

% Matriz da interação fluido-estrutura

if tipo==3
    tic
    for i=1:cont
        A(GLxA(i),NoA(i))=A(GLxA(i),NoA(i))+L(i)/6*2*seno(i);
        A(GLxA(i),NoB(i))=A(GLxA(i),NoB(i))+L(i)/6*1*seno(i);
        A(GLyA(i),NoA(i))=A(GLyA(i),NoA(i))-L(i)/6*2*cosseno(i);
        A(GLyA(i),NoB(i))=A(GLyA(i),NoB(i))-L(i)/6*1*cosseno(i);
        A(GLxB(i),NoA(i))=A(GLxB(i),NoA(i))+L(i)/6*1*seno(i);
        A(GLxB(i),NoB(i))=A(GLxB(i),NoB(i))+L(i)/6*2*seno(i);
        A(GLyB(i),NoA(i))=A(GLyB(i),NoA(i))-L(i)/6*1*cosseno(i);
        A(GLyB(i),NoB(i))=A(GLyB(i),NoB(i))-L(i)/6*2*cosseno(i);

        B(NoA(i),GLxA(i))=B(NoA(i),GLxA(i))+rhof*L(i)/6*2*seno(i);
        B(NoA(i),GLyA(i))=B(NoA(i),GLyA(i))-rhof*L(i)/6*2*cosseno(i);
        B(NoA(i),GLxB(i))=B(NoA(i),GLxB(i))+rhof*L(i)/6*1*seno(i);
        B(NoA(i),GLyB(i))=B(NoA(i),GLyB(i))-rhof*L(i)/6*1*cosseno(i);
        B(NoB(i),GLxA(i))=B(NoB(i),GLxA(i))+rhof*L(i)/6*1*seno(i);
        B(NoB(i),GLyA(i))=B(NoB(i),GLyA(i))-rhof*L(i)/6*1*cosseno(i);
        B(NoB(i),GLxB(i))=B(NoB(i),GLxB(i))+rhof*L(i)/6*2*seno(i);
        B(NoB(i),GLyB(i))=B(NoB(i),GLyB(i))-rhof*L(i)/6*2*cosseno(i);
    end

    disp('Finalizado ETAPA 4 - ACOPLAMENTO');
    toc
    disp(' ');
end

%%%%%%%%% ETAPA 5 - RESTRIÇÕES E ANÁLISE MODAL %%%%%%%%%

```

```

cont=0; % Contador, termo auxiliar

% Restrições na estrutura

if (tipo==1 || tipo==3)
    cont=cont+1;
    elimest=zeros(1,2*nr);
    for i=1:nr
        elimest(1,2*i)=2*retest(i);
        elimest(1,2*i-1)=2*retest(i)-1;
    end
end

% Restrições na cavidade
% Eliminação das linhas e colunas para os casos de pressão nula

if (tipo==2 || tipo==3)
    if pnula==1
        cont=cont+2;
    end
end

% Vetor eliminação global

if cont==1
    elim=elimest;
else
    if cont==2
        elim=elimf;
    else
        if cont==3
            elim=[elimest elimf];
        end
    end
end

if cont>0 % Faz a eliminação
    elim=sort(elim);
    Afull=A;
    Bfull=B;
    A(:,elim)=[];
    A(elim,:)=[];
    B(:,elim)=[];
    B(elim,:)=[];
    NGLaux=NGL-numel(elim);
end

% OBTENÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

disp('>>>> FREQUÊNCIAS NATURAIS <<<<<');
disp(' ');

tic
[AA,BB]=eigs(inv(-B)*A,8,'sm'); % Resolve o problema de autovalor e
autovetor
BB=real(sqrt(diag(BB))); % Guarda apenas os autovalores

```

```
[omega, ind]=sort((BB),'ascend'); % Organiza autovalores em ordem crescente
AA=AA(:,ind); % Reorganiza AA de acordo com a ordem de autovalores do passo
anterior

% A primeira coluna guarda o número da frequência
% A segunda coluna guarda o valor da frequência

omega_real=zeros(size(omega,1),2);
for j=1:size(omega,1)
    if imag(omega(j))==0
        omega_real(j,1)=j; omega_real(j,2)=omega(j);
    end
end

% Imprime as frequências

for j=1:8
    disp(['w' num2str(j) ' = ' num2str(omega_real(j,2)) ' rad/s']);
end
disp(' ');

disp('Finalizado ETAPA 5 - ANÁLISE MODAL');
toc
```