

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LORENA MONTEIRO CAVALCANTI BARBOSA

FORMULAÇÕES MULTIESCALA LOCALMENTE CONSERVATIVAS PARA A SIMU-
LAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS E ANISO-
TRÓPICOS

Recife

2017

LORENA MONTEIRO CAVALCANTI BARBOSA

FORMULAÇÕES MULTIESCALA LOCALMENTE CONSERVATIVAS PARA A SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Energia

Orientador: Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra

Orientador: Dr. Alessandro Romario Echevarria Antunes

Coorientador: Darlan Karlo Elisiario de Cavarlho

Recife

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

B238f	Barbosa, Lorena Monteiro Cavalcanti. Formulações multiescala localmente conservativas para a simulação de reservatórios de petróleo muito heterogêneos e anisotrópicos / Lorena Monteiro Cavalcanti Barbosa - 2017. 163folhas, Il.; Tabs.; Abr.; Sigl. e Simb. Orientadores: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra. e Prof.Dr. Alessandro Romario Echevarria Antunes. Coorientador: Darlan Karlo Elisiario de Carvalho. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017. Inclui Referências. 1. Engenharia Mecânica. 2. Métodos multiescala para volumes finitos. 3.Reservatórios heterogêneos e anisotrópicos. 4. Escoamento bifásico em meios porosos. 5. Simulação de reservatórios. I. Lyra, Paulo Roberto Maciel e Antunes, Alessandro Romario Echevarria (Orientadores). II. Carvalho. Darlan Karlo Elisiario de(Coorientador). III. Títulos. UFPE 621 CDD (22. ed.) BCTG/2017-219
-------	--

23 de fevereiro de 2017.

“FORMULAÇÕES MULTIESCALA LOCALMENTE CONSERVATIVAS PARA A SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO MUITO HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS”

LORENA MONTEIRO CAVALCANTI BARBOSA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENERGIA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA/CTG/EEP/UFPE

Prof. Dr. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA
ORIENTADOR/PRESIDENTE

Prof. Dr. ALESSANDRO ROMARIO ECHEVARRIA ANTUNES
ORIENTADOR

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO
COORIENTADOR

Prof. Dr. CEZAR HENRIQUE GONZALEZ
COORDENADOR DO PROGRAMA

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. PAULO ROBERTO MACIEL LYRA (UFPE)

Prof. Dr. DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO (UFPE)

Prof. Dr. JORGE RECARTE HENRIQUEZ GUERRERO (UFPE)

Prof. Dr. RAMIRO BRITO WILLMERSDORF (UFPE)

Prof. Dr. MÁRCIO RODRIGO DE ARAÚJO SOUZA (UFPB)

Prof. Dr. IGOR FERNANDES GOMES (UFPE)

A Deus, a minha mãe, Fátima Cristina, e meu pai, José Aroldo, e a toda família, pelos ensinamentos, pelo amor e apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo amor, pela saúde, pela coragem e oportunidades que me foram dadas.

A minha mãe , Fátima Cristina Cavalcanti dos Santos, e meu Pai José Aroldo Barbosa da Silva, pelo amor e carinho, e todo apoio emocional e financeiro.

Aos meus orientadores, Paulo Roberto Maciel Lyra ,Darlan Karlo Elisiário de Carvalho e Alessandro Romário Echevarria Antunes. Agradeço pela brilhante orientação, por todas as oportunidades dadas e principalmente pela enorme paciência que tiveram comigo nesses cinco anos de pesquisa, graças a isso finalizo mais uma fase importante da minha vida.

A todos os meus amigos do LABCOM e PADMEC que estiveram ao meu lado nessa longa caminhada.

À FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco) pelo projeto Investigação de Formulações Numéricas Localmente Conservativas Para a Simulação de Reservatórios de Petróleo Muito Heterogêneos (processo IBPG-1045-3.05/11), ao projeto Modelagem de Fraturas e Simulação Numérica de Fenômenos Acoplados em Reservatório Análogo Naturalmente Fraturado da Bacia do Araripe (GODEL) pelo financiamento desta pesquisa. Agradeço ao Professor Igor Gomes que permitiu que eu participasse do projeto GODEL.

Agradeço a UFPE, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade de desenvolver esse projeto nessa instituição.

RESUMO

Os métodos multiescala são capazes de fornecer soluções numéricas acuradas para as equações de fluxos em reservatórios de petróleo altamente heterogêneos, com custos computacionais consideravelmente baixos quando comparados ao custo da simulação diretamente na escala mais fina. Um desafio as metodologias multiescala, em particular ao Método de Volumes Finitos Multiescala (MsFVM), consiste na simulação do escoamento em meios muito anisotrópicos, ou em meios que apresentem regiões com elevados gradientes de permeabilidade (exemplo: meios fraturados e com barreiras), isto acontece devido à necessidade do desacoplamento nas fronteiras dos sub-domínios, ou seja, o uso das condições de contorno reduzidas para calcular os operadores multiescalas. Essas condições de contorno configuram-se no núcleo das metodologias multiescala, pois desacoplam os subproblemas, possibilitando a obtenção de soluções na escala mais fina, porém, por não considerarem os fluxos normais às fronteiras, geram problemas de conservação nestas regiões. No presente trabalho, apresentamos uma variante do método multiescala, denominado Método Iterativo Multiescala Modificado para Volume de Controle (I-MMVCM). O I-MMVCM elimina a necessidade de uso dos volumes fantasmas, melhorando a acurácia dos operadores multiescala, e consequentemente aumenta a eficiência do método. A pressão é calculada em cada volume da malha grossa primal, utilizando as pressões anteriormente calculadas pelo MsFVM como condições de contorno de Dirichlet. Para garantir conservação em todo o domínio utilizamos dois métodos de correção, que visam corrigir o fluxo na malha grossa primal. Adicionalmente, comparamos os resultados obtidos por dois Métodos de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA), o MPFA-O ou MPFA-TPS (Triangle Pressure Support) e o MPFA-FPS (Full Pressure Support). Para a solução do problema de saturação utilizamos o Método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (*First Order Upwind Method - FOUM*), método dos volumes finitos de alta ordem (*Higher Order Finite Volume - HOFV*) e um método de linhas de fluxos (*Streamlines*). Finalmente, o sistema de equações governantes é resolvido seguindo a estratégia IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation).

Palavras-chave: Métodos multiescala para volumes finitos. Reservatórios heterogêneos e anisotrópicos. Escoamento bifásico em meios porosos.

ABSTRACT

The multiscale methods are cable to provide accurate numerical solutions for the flow equations in highly heterogeneous petroleum reservoirs, with considerably lower computational costs when compared to the computational cost of simulating directly on the fine scale. A challenge for multiscale methods, in particular for the Multiscale Finite Volume Method (MSFVM), consist in modeling flow in highly anisotropic oil reservoir, or in medium with high permeability gradients (eg fractured media and barriers), it happens due to necessity of the decoupling at the frontier of the sub-domains, thais is, the use of reduced boundary conditions for calculate the multiscale operator. These boundary conditions are the core of all multiscale methodologies, they uncouple the problem into smaller subproblems, making it possible to obtain solutions on the fine scale, but since they do not consider the flows normal to the boundaries, they break the mass conservation law in these regions. In the present work, we present a variant of the multiscale method called the Iterative Modified Multiscale Control Volume Method (I-MMVCM). The I-MMVCM eliminates the need to use ghost volumes, improving the accuracy of multiscale operators, therefore increasing the efficiency of the method. The pressure is calculated on each volume of the primal coarse mesh, using the pressures previously calculated by the MsFVM as Dirichlet boundary conditions. In order to reimpose conservation in the domain we use two correction methods, which are designed to correct the upscaling flow of the primal coarse mesh. In addition, we compared the results obtained by two Finite Volume Methods with Multi-Point Flow Approximation (MPFA), the MPFA-O or MPFA-TPS (Triangle Pressure Support) and MPFA-FPS (Full Pressure Support). To solve the transport problem we use the First Order Upwind Method (FOUM), high order finite volume method (HOFV) and the method of the streamlines. Finally, the system of governing equations is solved using the Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES) strategy.

Keywords: Multiscale finite volume method. Reservoir heterogeneous and anisotropic. Two-phase flow in porous media.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Representação esquemática do domínio Ω , dos contornos de Dirichlet Γ_D e Neumann Γ_N e de poços injetor e produtor num reservatório bidimensional genérico.	39
Figura 2. Estratégia IMPES.	40
Figura 3. Domínio Ω discretizado.	43
Figura 4. Representação esquemática do uso dos “volumes de controle fantasmas” (<i>ghost volumes</i>) para um domínio unidimensional.	44
Figura 5. Esquema do método MPFA-O: a) Região de iteração associada ao vértice O; b) Área de suporte da função linear onde a pressão é calculada.	48
Figura 6. Esquema do método MPFA-FPS: a) Região de iteração associada ao vértice O; b) Sub-Região de Interação espaço físico; c) Espaço mapeado.	52
Figura 7. a) Volume de controle auxiliar no método MPFA-FPS; b) Indicação dos fluxos através das superfícies de controle no volume de controle auxiliar avaliado.	55
Figura 8. Linha de corrente traçada	63
Figura 9. Exemplo representativo do processo de regularização da linha de corrente.	64
Figura 10. Domínio Ω , elementos malha fina (Ω^f) - linhas finas e pretas; malha grossa primal Ω_p^c - linhas vermelhas; e malha grossa dual Ω_d^c - linhas tracejadas azuis, e onde os pontos de colocação da malha grossa primal $\mathbf{x}^p$ são representados círculos amarelos.	69
Figura 11. Volume de controle da malha grossa dual Ω_d^c : As linhas tracejadas azuis representam a fronteira do domínio $\partial\Omega_d^c$, os pontos amarelos ($\mathbf{x}^p$) são os vértices desse volume (ou pontos de correção do volume pertencente a malha grossa dual), e os pontos pretos $\mathbf{x}_i$, são dos volumes da malha final contido neste volume de controle.	71
Figura 12. Funções de base em um volume de controle da malha grossa dual para: (a) meio homogêneo; (b) meio heterogêneo.	72
Figura 13. Esquema indicando a atuação dos operadores multiescala de Restrição (R_{or}) e de prolongamento (P_{op}) sobre as soluções nas malhas fina e grossa.	77
Figura 14. Método Multiescala modificado proposto por Faroughi et al. (2013).	81
Figura 15. (a) Mapa de cores do campo de permeabilidades para o reservatório muito heterogêneo com zona de baixa permeabilidade (b) Configuração das malhas grossas primal e dual.	83

Figura 16. Campo de pressão para o escoamento monofásico de um reservatório muito heterogêneo com zona de baixa permeabilidade: (a) Solução de Referência (b) Solução MsFVM	83
Figura 17. Dificuldade do método multiescala em simular meios com alta razão de anisotropia - (a) Volume Grosso Primal E_i avaliado, (b) Fluxo nas superfícies de controle do volume da malha grossa primal (<i>upscaling</i>), (c) Fluxo nas superfícies de controle de cada volume fino pertencente a malha grossa primal.....	84
Figura 18. Campo de Pressão – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.	85
Figura 19. Contornos de Saturação: a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.....	86
Figura 20. Curvas de Contorno - a) Solução de referência-Preta ; b) Solução Multiescala-Vermelha	86
Figura 21. Campo de Saturação (PVI=0.11) – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.	87
Figura 22. (a) Malha Grossa dual clássica do MSFVM, (b) Malha Fina, (C) Método Multiescala com realocação das funções de bases.	89
Figura 23. Campo de permeabilidades heterogêneo.....	89
Figura 24. Campo de pressões para o escoamento monofásico em canal num reservatório muito heterogêneo, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) MMVCM; d) Curvas de contorno de pressão	91
Figura 25. Campo de pressões para o escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório muito heterogêneo, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) MMVCM; d) Curvas de contorno de pressão.	92
Figura 26. Esboço do método I-MMVCM usando as condições de Dirichlet como condição de contorno	94
Figura 27. Campo de pressões para o escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório heterogêneo com barreiras, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) I-MMVCM	95
Figura 28. Composição do fluxo/vazão f^c e f^p que atravessa as superfícies de controle de um volume de controle pertencente a malha grossa primal.....	98
Figura 29. Correção do fluxo <i>upscaling</i> por face	100
Figura 30. (a) Malha 9x9, com razão de engrossamento 9; (b) Vazão/Fluxo que atravessa as superfícies de controle do volume da malha grossa “A”.....	101

Figura 31. Comportamento da vazão nos volumes de controle finos para os métodos utilizados.....	102
Figura 32. Correção de Fluxo F^{Pp} através do balanço de massa em de V_A	106
Figura 33. Componentes da vazão do volume de controle B	107
Figura 34. Campo de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico.....	113
Figura 35. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM para um $Cr=100$; (c) Solução MsFVM para um $Cr=25$	114
Figura 36. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução I-MMCVM para um $Cr=100$; (b) Solução I-MMCVM para um $Cr=25$	115
Figura 37. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM para um $Cr=100$; (c) Solução MsFVM para um $Cr=25$	116
Figura 38. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução I-MMCVM para um $Cr=100$; (b) Solução I-MMCVM para um $Cr=25$	116
Figura 39. (a) Domínio Físico – (b) Mapa de cores do Campo de permeabilidade SPE 22th - 30	119
Figura 40. Campo de pressão Camada 30, SPE-10 – VPI 0.05.....	119
Figura 41. Campo de saturações em $t= 0,03$ VPI para o problema do escoamento bifásico em meio muito heterogêneo com campo de permeabilidades aleatório: (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF ; VPI=0,02	120
Figura 42. Campo de saturações em $t= 0,04$ VPI para o problema do escoamento bifásico em meio muito heterogêneo com campo de permeabilidades aleatório: (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; VPI=0,03	121
Figura 43. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE:	121
Figura 44. Mapa de cores do campo de Permeabilidade da Camada 45	122
Figura 45. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água	123
Figura 46. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 45 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Solução de Referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF – VPI: 0,02	124

Figura 47. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 45 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Solução de Referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF – VPI: 0,03	124
Figura 48. Escoamento bifásico de água e óleo na Camada 59 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE, Mapa de cores para permeabilidade.....	126
Figura 49. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Solução de Referência para ; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; (d) Solução I-MMCVM-CV, VPI=0,02;...	126
Figura 50. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Solução de Referência para ; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; (d) Solução I-MMCVM-CV, VPI=0,03;....	127
Figura 51. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do <i>10th Comparative Solution Project</i> da SPE: (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água	128
Figura 52. (a) Campo de permeabilidade de um Reservatório heterogêneo fraturado; malha grossa primal (linha amarela) e dual (linha branca) para um fator de engrossamento: (b) 100; (c) 25.....	130
Figura 53. Escoamento bifásico num meio fraturado Solução de referência	131
Figura 54. Campo de pressões da solução MsFVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de ¼ de quatro poços para os seguintes fatores de engrossamento: (a) 100; (b) 56.25 ; (c) 36 e (d) 25	131
Figura 55. Campo de pressões da solução MsFVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de ¼ de quatro poços para os seguintes fatores de engrossamento: (a) 100; (b) 56.25 ; (c) 36 e (d) 25	132
Figura 56. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo fraturado, para uma configuração de ¼ de quatro poços para instantes de tempo (VPI) 0.03: a) solução de referência; b) MsFVM Cr= 100; c) I-MMCVM-CF Cr= 100; d) MsFVM Cr= 25; I-MMCVM-CF Cr=25;.....	133
Figura 57. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo meio fraturado e heterogêneos, para a solução de referência, MsFVM e I-MMCVM para diferentes fatores de engrossamento: (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água	134

Figura 58. Linhas de corrente para o escoamento bifásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório homogêneo com razão de anisotropia 100 a) Solução de referência obtida diretamente na malha fina (FPS); b) Solução obtida com o MsFVM; c) Solução I-MMCVM	136
Figura 59. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório homogêneo anisotrópico, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI) : Solução de referência (a;b;c – VPI's: 0.026;0.18;0.49), Solução I-MsFVM (d;e;f– VPI's: 0.026;0.18;0.49).....	137
Figura 60. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo meio homogêneo e anisotrópico com razão de anisotropia 100:1, para a solução de referência, MsFVM e I-MMCVM (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água	138
Figura 61. Campo de pressão para o escoamento bifásico heterogêneo e anisotrópico, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI): solução de referência MPFA-MPFAO: (a) VPI=0; (b) VPI =0,226	140
Figura 62. Campo de pressão para o escoamento bifásico heterogêneo e anisotrópico, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI): solução de referência I-MMCVM-CV MPFAO: (a) VPI=0; (b) VPI =0,226.....	140
Figura 63. Campo de pressão do escoamento bifásico solução de referência MPFA-FPS: (a) VPI=0; (b) VPI=0,2281	141
Figura 64. Campo de pressão do escoamento bifásico Solução I-MMCVM-CV - MPFA-FPS : (a) VPI=0; (b) VPI=0,2281.....	141
Figura 65. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-O , para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,03 (a ,c) e 0,096 (b,d).....	142
Figura 66. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-O, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,165 (a ,c) e 0,235(b,d).....	143
Figura 67. Gráficos obtidos para formulações MPFA-O para Solução de Referência e I-MMCVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório anisotrópico e heterogêneo para uma configuração de ¼ de quatro poços considerando diferentes fatores de	

engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado	143
Figura 68. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-FPS, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,064 (a ,c) e 0,14 (b,d).....	144
Figura 69. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-FPS, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,187 (a ,c) e 0,23 (b,d).....	144
Figura 70. Gráficos de óleos obtidos para formulações MPFA-FPS para Solução de Referência e I-MMCVM-VC para o problema do escoamento bifásico num reservatório anisotrópico e heterogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado.....	145
Figura 71. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, usando formulações TPFA's, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- (a) Solução de referência-FOUM; (b) Solução de Referência com Streamlines; (c) Solução I-MMCVM-CF com Streamlines.....	146
Figura 72. Gráficos de óleos obtidos para formulações TPFA's, método FOUM e Streamlines para Solução de Referência e I-MMCVM-CF para o problema do escoamento bifásico num reservatório isotrópico e homogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado	147
Figura 73. Campo de permeabilidade.....	147
Figura 74. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência , VPI's : (a)0,08 ; (b) 0,19; (c) 0,44	148
Figura 75. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução I-MMCVM-CF, VPI's : (a)0,08 ; (b) 0,19; (c) 0,44.....	148
Figura 76. Gráficos de óleos obtidos para formulações TPFA's, método IMPES para a Solução de Referência e I-MMCVM-CF para o problema do escoamento bifásico num	

reservatório isotrópico e homogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado	149
Figura 77. Campo de Permeabilidade.	150
Figura 78. Campo de Saturação no tempo = 0.0403s usando: (a) Solução de Referência com Método FOU, (b) Solução de Referência com Método HOFV, (c) Solução I-MMCVM-CF/FOU, (d) Solução I-MMCVM-CF/HOFV.	151
Figura 79. Campo de Saturação no tempo=0.0703s usando: (a) Solução de Referência com Método FOU, (b) Solução de Referência com Método HOFV, (c) Solução I-MMCVM-CF/FOU, (d) Solução I-MMCVM-CF/HOFV.	152
Figura 80. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento versus o erro percentual da solução multiescala - com a pressão corrigida.	154
Figura 81. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento versus erro percentual da solução multiescala - com a pressão corrigida. (a) considerando todos os casos analisados, (b) destaque para os casos com os melhores resultados.	156

LISTA DE TABELA

Tabela 1. Escoamento monofásico em canal num reservatório muito heterogêneo: Influência do fator de engrossamento na solução MsFVM e MMVCM	90
Tabela 2. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de ¼ de cinco poços: Influência do fator de engrossamento na solução MsFVM e MMVCM. Erro usando a norma do infinito	93
Tabela 3. Erro do campo do pressão usando a norma infinito, de Reservatório Muito Heterogêneo com Zona de Baixa Permeabilidade.....	95
Tabela 4. Vazão <i>Upscaling</i> nas faces do volume de controle grosso primal A.	102
Tabela 5. Vazão <i>Upscaling</i> nas faces do volume de controle da malha grossa primal B.....	107
Tabela 6. Vazão dos volumes de controle da malha fina na face $F_{B,3}^c$	108
Tabela 7. Comparação do erro da pressão na solução MsFVM clássica, dos métodos iterativos I-MMVCM, Jacobi e SOR (Suavizadores) para uma única iteração.	110
Tabela 8. Comparação do erro da pressão usando a combinação Jacob e I-MMVCM, SOR e I-MMVCM, para 30 iterações dos suavizadores.....	110
Tabela 9. Escoamento monofásico num reservatório homogêneo para uma configuração de ¼ de cinco poços: Razão de engrossamento e erro na norma infinito da solução MsFVM-MPFAO e I-MMCVM-MPFAO do campo de pressão	115
Tabela 10. Escoamento monofásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de ¼ de cinco poços: razão de engrossamento e erro norma infinito, da solução MsFVM-MPFA-FPS e I-MMCVM-MPFA-FPS para o campo de pressão	117
Tabela 11. Erro usando a norma infinito para o Campo de Pressão, considerando diferentes fatores de engrossamentos da malha grosseira primal.....	132
Tabela 12. Erro usando a norma infinito para o Campo de Saturação, considerando diferentes fatores de engrossamentos da malha grosseira primal.....	132
Tabela 13. Erro do Campo de Velocidade do Método Multiescala, usando a norma L_2 , $VPI = 0,277$	137
Tabela 14. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de ¼ de cinco poços: Razão de engrossamento e média aritmética do erro da solução multiescala considerando apenas a solução conservativa, ou seja, com a pressão corrigida. .	153

Tabela 15. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de ¼ de cinco poços: Tempo de cálculo da pressão pelo método multiescala com pressão corrigida.....	155
--	-----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	Courant-Friedrichs-Levy
FPS	<i>Full Pressure Support</i>
FVM	<i>Finite Volume Method</i>
IMPES	<i>Implicit Pressure-Explicit Saturation</i>
MPFA	<i>Multi-Point Flux Approximation</i>
MUSCL	<i>Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws</i>
TPFA	<i>Two-Point Flux Approximation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$\tilde{A}$	Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos de colocação dos fluxos à esquerda
$\tilde{B}$	Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos auxiliares dos fluxos à esquerda
$\tilde{C}$	Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos de colocação dos fluxos à direita
C	Número de Courant
Cr	Razão de Engrossamento da malha
$\tilde{D}$	Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos auxiliares dos fluxos à direita
$\tilde{D}^f$	Matriz diagonal
$\bar{E}$	Média dos erros
E_{rel}	Erro relativo
E_{abs}	Erro absoluto
f_{Ri}	Fluxo fracional da água
f^{cor}	Fluxo corrigido
$\tilde{f}^c$	Fluxo <i>upscaling</i> calculado a partir de $\tilde{P}^D$
$\tilde{f}^P$	Fluxo <i>upscaling</i> calculado a partir de P^P
$f_n^{P^D}$	Vazão nas faces dos volumes de controle da malha fina calculado a partir de P^D
$f_n^{P^P}$	Vazão nas faces dos volumes de controle da malha fina calculado a partir de P^P
f^{P-cor}	Fluxo iterativo calculado a partir de P^P corrigido
$F_N^{P^D}$	Vazão <i>upscaling</i> que atravessa uma das faces do volume de controle da malha grossa primal calculado a partir de P^D
$F_N^{P^P}$	Vazão <i>upscaling</i> que atravessa uma das faces do volume de controle da malha grossa primal calculado a partir de P^P
F_N^c	Vazão <i>upscaling</i> corrigida
F_N^{Pcor}	Fluxo Iterativo obtido de P^P Corrigido e conservativo
$\vec{F}_{IJ}$	Fluxo numérico
$\vec{F}_{IJ}^{\hat{L}}$	Fluxos à esquerda ($\hat{L}$)
$\vec{F}_{IJ}^{\hat{R}}$	Fluxos à direita ($\hat{R}$)

g_D é a pressão prescrita

h_x Comprimento de um volume de controle

h_y Altura de um volume de controle

i Fase i = óleo (o) ou água (w)

IL Aresta formada pelo nó I e J

k_{ri} Permeabilidade da fase i

$\tilde{K}$ Tensor de permeabilidade absoluta da rocha

K_{eq} Permeabilidade equivalente

$\hat{L}$ Esquerda

L_x Comprimento

L_y Altura

$\tilde{L}^f$ Matriz triangular inferior

$\vec{n}$ Vetor área normal

n_x Volumes de controles na direção x

n_y Volumes de controles na direção y

$\mathcal{N}_{VC}$ Número de volumes de controles avaliados

$\vec{N}_{IJ}$ Vetor normal a uma superfície IJ

p_i Pressão

$\bar{p}_{prod}$ Pressão prescrita no poço de produção

$\tilde{P}^c$ Campo de pressão definido no domínio Ω^c

P^d Campo de pressão obtido pelos operadores multiescala na malha grossa dual

P^p Campo de pressão obtido iterativamente

$\tilde{P}$ Vetor Coluna das incógnitas de pressão em cada volume de controle

$\tilde{P}_{op}$ Operador de Prolongamento

$\tilde{P}^{ms}$ Campo de pressões fornecido pelo método multiescala

$\hat{R}$ Direita

$\tilde{R}^f$ Matriz diferença entre $\tilde{T}^f$ e $\tilde{D}^f$

S_i Saturação da fase i

S_{Rw}^{sl}	Saturação na linha traçada
$\tilde{S}_w^-$	Saturação de água reconstruídos à esquerda
$\tilde{S}_w^+$	Saturação de água reconstruídos à direita
$S_{w_{IJ}}$	Saturação de água na superfície de controle avaliada
S_{ol}	Solução de Referência
S_{ol}^*	Solução Multiescala
$\tilde{R}_{or}$	Operador de Restrição
q_i	Termos de fonte (ou sumidouro)
$\bar{Q}_{inj}$	Vazão prescrita no poço de injeção
Q	Termo de fonte ou sumidouro específico vazão
$\bar{Q}$	Termo de fonte ou sumidouro específico integrado sobre o volume de controle genérico
$\tilde{Q}$	Vetor Coluna com as informações de termos fontes/sumidouro e/ou quantidades
$\tilde{T}^f$	Matriz de transmissibilidade da malha fina
$\tilde{T}^c$	Matriz de transmissibilidade associada à malha grossa
$\tilde{T}$	Matriz pentadiagonal com os termos de transmissibilidade
t	Tempo
$\tilde{U}^f$	Matriz triangular superior.
$\vec{v}_{IJ}$	Vetor normal a uma superfície IJ
$\vec{v}_i$	Velocidade de Darcy da fase i
$\hat{V}$	Volume genérico
α_{IJ}	Velocidade da onda, α_{IJ}
Γ	Contorno do domínio
Γ_D	Contorno de Dirichlet
Γ_N	Contorno de Neumann
Γ_I	Contorno associado a um poço injetor;
Γ_P	Contorno associado a um poço produtor;

Γ_W	Contorno na direção oeste
Γ_E	Contorno na direção leste
Γ_N	Contorno na direção norte
Γ_S	Contorno na direção sul
ς_n	Fator de ponderação
ξ	Coordenada no espaço de referência
ρ_i	Densidade da fase i
ε	Resíduo da solução iterativa multiescala
ε_{FN}	Diferença entre os dois fluxos <i>upscaling</i> na face avaliada
ε_F^N	Resíduo a ser subtraído de cada fluxo $F_N^{p^p}$ avaliado
ϕ_p	Porosidade da rocha
ϕ	Função de Base
φ	Função de Correção
δ_{fn}	Fator de ponderação
μ_i	Viscosidade
λ	Mobilidade
μ_i	Viscosidade da fase i ,
λ_i	Mobilidade da fase i ,
λ_T	Mobilidade total
ω	Fator de relaxamento
$ \Delta \vec{x} $	Módulo do vetor posição entre os centroides de dois volumes de controles
Ω	Domínio computacional
Ω_f	Domínio computacional referente à malha fina
Ω^c	Domínio computacional referente à malha grossa
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente
τ	Ponto de quadratura no volume de controle auxiliar no esquema numérico MPFA-FPS
$\mathbf{u}$	Velocidade superficial
ψ_i^*	Função Limitadora

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	25
1.1	MOTIVAÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS	25
1.2	OBJETIVOS	33
1.3	CONTRIBUIÇÕES DA TESE	34
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	35
2	MODELO MATEMÁTICO	36
2.1	ESCOAMENTO BIFÁSICO E IMISCÍVEL EM MEIOS POROSOS.....	36
2.1.1	Equação de Pressão	37
2.1.2	Equação de Saturação	37
2.1.3	Condições Iniciais e de Contorno	38
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	40
3.1	ESTRATÉGIA IMPES	40
3.2	EQUAÇÃO DE PRESSÃO NA FORMA DISCRETA	41
3.2.1	Método de Volumes Finitos com Aproximação do Fluxo por Dois Pontos	42
3.2.2	Formulações com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos	47
3.2.3	Suporte Triangular para a Pressão: MPFA-O	47
3.2.4	Suporte Completo para a Pressão: MPFA-FPS.....	51
3.3	EQUAÇÃO HIPERBÓLICA DA SATURAÇÃO NA SUA FORMA DISCRETA....	55
3.3.1	Aproximações de Alta Ordem com uma Estratégia do tipo MUSCL.....	58
3.4	LINHAS DE CORRENTE (<i>STREAMLINES</i>)	61
3.4.1	Construção das linhas de corrente	61
3.4.2	Regularização das linhas de corrente	64
3.4.3	Solução da equação de transporte sobre as linhas de corrente	65
3.4.4	Cálculo da vazão na linha de corrente e mapeamento da vazão para a malha de simulação	65
4	CONCEITOS BÁSICOS DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS MULTIESCALA (MSFVM).....	67
4.1	APROXIMAÇÃO MULTIESCALA	67

4.2	ALGORITMO GERAL PARA UMA ESTRATÉGIA DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA (MSFVM)	67
4.3	DEFINIÇÕES DAS MALHAS PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA	69
4.4	FUNÇÕES DE BASE.....	70
4.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO REDUZIDAS	72
4.6	FUNÇÕES DE CORREÇÃO	73
4.7	CÁLCULO DO ERRO DA SOLUÇÃO MULTIESCALA	74
5	FORMULAÇÃO ALGÉBRICA DO MSFVM	76
5.1	PROBLEMA GERAL	76
5.2	OPERADOR DE PROLONGAMENTO	78
5.3	OPERADOR DE RESTRIÇÃO	79
5.4	CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES	80
5.5	CORREÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO REDUZIDAS EM REGIÕES COM BRUSCAS VARIAÇÕES DO CAMPO DE PERMEABILIDADE.....	80
5.6	LIMITAÇÕES DO OBMM.....	82
5.6.1	Problemas do MsFVM com zonas com contraste de heterogeneidade.....	82
5.6.2	Problemas de Oscilações do Campo de velocidade.....	84
6	MÉTODO ITERATIVO MULTIESCALA MODIFICADO PARA VOLUME DE CONTROLE (I-MMVCM).....	88
6.1	REALOCAÇÃO DOS VÉRTICES DOS VOLUMES DA MALHA DUAL	88
6.1.1	Escoamento em Canal (<i>Flow Channel</i>).....	89
6.1.2	Escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços para um reservatório muito heterogêneo.....	91
6.1.3	Correção do Campo de pressão usando condições de contorno de Dirichlet.....	93
6.2	FUNÇÕES DE CORREÇÃO DO I-MMVCM	96
6.2.1	Correção do Fluxo Iterativo por Face (CF)	97
6.2.2	Correção do Fluxo Iterativo por Volume (CV).....	103
6.3	SUAVIZADORES MULTIESCALA (<i>ITERATIVE SMOOTHER</i>)	108
7	APLICAÇÕES	112

7.1	SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO NUM RESERVATÓRIO MUITO HETEROGÊNEO E ANISOTRÓPICO NUMA CONFIGURAÇÃO DE ¼ DE CINCO POÇOS.....	112
7.2	CORREÇÃO DOS FLUXOS <i>UPSCALLING</i>	117
7.2.1	Correção dos Fluxos <i>Upscaling</i> por Face (CF)	118
7.2.2	Correção dos Fluxos <i>Upscaling</i> por Volume (CV)	125
7.3	ESCOAMENTO BIFÁSICO NUMA CONFIGURAÇÃO DE ¼ DE CINCO POÇOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE LINHAS DE FLUXOS.....	145
7.4	ESCOAMENTO BIFÁSICO M MEIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO NUMA CONFIGURAÇÃO DE ¼ DE CINCO POÇOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE ALTA ORDEM	149
7.5	EFEITO DA RAZÃO DE ENGROSSAMENTO DA MALHA PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA	152
7.6	EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL	154
8	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	157
8.1	CONCLUSÃO.....	157
8.2	TRABALHOS FUTUROS	158
	REFERÊNCIAS	159

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E CONSIDERAÇÕES GERAIS

Com a descoberta de novas reservas de petróleo, muitas delas não convencionais, é importante realizar simulações que utilizem a maior quantidade possível de dados na representação de um modelo real. Observe que mesmo com o desenvolvimento dos modernos supercomputadores, pode-se facilmente identificar, ainda nos dias de hoje, vários tipos de problemas, e em particular na área de simulação de reservatórios de petróleo, que não podem ser solucionados ou são proibitivos em função do grande volume de dados que eles utilizam e/ou tempo de processamento requerido. Portanto, o uso de métodos de transferências de escalas é fundamental.

Problemas envolvendo múltiplas escalas aparecem em diversas áreas da ciência e engenharia, tais como: materiais compósitos, meios porosos, escoamentos turbulentos, ciências atmosféricas e oceânicas, dentre outras (Zhou, 2010). Esses problemas caracterizam-se por apresentarem fenômenos em diferentes escalas espaciais e temporais o que os torna difíceis de serem analisados.

Em muitos casos, a simulação direta de problemas de multiescala é extremamente difícil de ser realizada, pois resolver as escalas mais finas requer uma quantidade absurda de capacidade de processamento e memória computacional, o que torna o processo proibitivo atualmente. Por outro lado, aproximações do tipo monoescala são ineficientes, mesmo nos *clusters* de computadores atuais, pois não consideram corretamente os principais efeitos das escalas mais finas.

Um exemplo atual, e de grande significado para a indústria, é a simulação de reservatórios de petróleo, pois um reservatório apresenta grande heterogeneidade, principalmente devido aos complexos processos deposicionais, deformações estruturais, ao longo de eras geológicas, resultando em propriedades hidrogeológicas que apresentam naturalmente grande variabilidade espacial, tais como a permeabilidade que pode diferir em ordens de magnitude, e a formação de canais e barreiras impermeáveis. Somado a isso, os reservatórios apresentam, ainda, contornos complexos e descontinuidades. A permeabilidade de uma rocha pode variar de 1 md até 1000 md. De forma geral a simulação de todas as escalas envolvidas envolve milhões de graus de liberdade, o que facilmente excede os limites computacionais atuais.

Modelos geológicos modernos apresentam de 10 (dez) a 100 (cem) milhões de células, enquanto que os modelos práticos de engenharia de reservatório conseguem tratar no máximo

1 (um) milhão de células (Zhou, 2010). A partir desta dificuldade, os métodos multiescala tornam-se atrativos, pois, em muitas aplicações é suficiente capturar corretamente os efeitos macroscópicos para obter, por exemplo, a taxa de produção de óleo de um reservatório, e desta forma, usando metodologias multiescala é possível resolver o problema em uma escala com um número razoável de graus de liberdade e mantendo a acurácia desejada.

Inicialmente, as tentativas de resolver problemas envolvendo múltiplas escalas foram baseadas em algum tipo de homogeneização, utilizando métodos chamados *upscaling*, que se utilizam de médias dos parâmetros em escalas mais finas para prover informações nas escalas maiores. Dessa forma reduz-se o custo computacional, porém tornando o procedimento menos robusto e sujeito a erros, tal como a incapacidade de capturar o correto transporte de massa em todas as escalas do problema. Muitos autores tentaram contornar esse problema utilizando hipóteses empíricas ou simulações estocásticas (Dagan, 1989; Cushman, 1995; Rubin et al., 1999; Cortis et al., 2004).

Alternativamente aos métodos *upscaling* tradicionais, Efendiev et al. (2000), e Efendiev e Durlofsky (2002), desenvolveram um modelo que incorporou efeitos *subgrid*, seguindo as mesmas ideias utilizadas nos problemas de escoamentos fluidos com desenvolvimento de vórtices em múltiplas escalas, onde as grandes escalas são simuladas e as pequenas escalas são modeladas, resultando, por exemplo, na adição de termos de difusão extras, e modificações dos termos de advecção nas equações governantes para capturar os efeitos *subgrid*. Diferentemente, os métodos denominados multiescala, se utilizam das informações das escalas mais finas durante o processo de solução, tornando estes métodos atraentes em problemas de escoamentos em meios porosos, por tratarem-se de meios altamente heterogêneos e anisotrópicos. Dessa forma, o objetivo dos métodos multiescala é obter de forma eficiente, resultados acurados para os fluxos nas escalas mais grossas, capturando os efeitos das variações nas escalas mais finas. Muitos métodos foram desenvolvidos para este fim, focando sua atenção na obtenção de um campo de velocidades acurado, pois, isto é imprescindível para o correto tratamento do problema de transporte em meio poroso.

Primeiramente, os métodos multiescala foram propostos com o objetivo de capturar o deslocamento relativo das fases, o que implica na necessidade de definição de funções de fluxo. Com este objetivo, Cotas et al. (1971), introduziu as pseudo-funções multifásicas para permitir a passagem de uma escala mais refinada para outra menos refinada. Isso foi possível substituindo as curvas de permeabilidade relativas e pressão capilar originais, por curvas aproximadas obtidas através de procedimentos algébricos. Gautier et al. (1999), apresentaram

uma formulação que possibilitava a simulação rápida para os problemas de fluxo e transporte em meios heterogêneos. Eles empregaram *nested grids* para construir o campo de fluxo na escala fina, e integraram a equação de saturação ao longo das linhas de corrente, obtendo resultados acurados e com grande ganho computacional. Atualmente, o núcleo de todos os métodos de multiescala é a definição das chamadas funções de base, que tem por objetivo realizar a transferência de informações entre as diferentes escalas. Hou e Wu (1997), propuseram o *Multiscale Finite Element Method* (MsFEM) para resolver o problema elíptico, definindo as funções de base em cada elemento, considerando condições de contorno especiais, do tipo oscilatórias para evitar erros de ressonância entre os elementos. Porém, mesmo com o problema elíptico sendo satisfatoriamente resolvido, ainda assim o campo de velocidades obtido não era conservativo. Isso ocorre porque as funções de base apenas podem garantir conservação nos elementos e não nas interfaces entre os elementos. Chen e Hou (2003) mostraram que um campo de velocidades conservativo é primordial para a obtenção de uma solução acurada para o problema de transporte, e utilizando um *Mixed Finite-Element Multiscale Method* conseguiram obter um campo de velocidades conservativo na escala fina. Logo depois outros *Mixed Finite-Element Multiscale Method* foram desenvolvidos para simular problemas de fluxo bifásico em meios porosos (Arbogast, 2002; Arbogast e Bryant, 2002).

Jenny et al. (2003) desenvolveram o Método dos Volumes Finitos Multiescala (MsFVM) para domínios bidimensionais e malhas estruturadas. Semelhante ao MsFEM, a ideia básica do MsFVM é: capturar os efeitos da transmissibilidade da malha fina usando as funções de bases. Para garantir que o problema seja globalmente conservativo, ou seja, conservativo na malha grossa primal, eles criaram uma nova malha, denominada malha grossa dual, formada a partir da malha grossa primal. Para garantir um campo de velocidade na malha fina conservativo, Jenny e coautores resolveram um novo conjunto de funções de base na malha grossa primal. Em 2004, Jenny et al. (2004), estenderam o método para problemas em domínios tridimensionais, ainda considerando fluidos incompressíveis, e concluíram que embora a metodologia IMPES (*Implicit Pressure, Explicit Saturation*) aplicada em MsFVM fornecesse ótimos resultados, a parte explícita (equação de transporte) impõe diversas restrições no tamanho do passo de tempo, e isso implica em muito esforço computacional para solução em meios extremamente heterogêneos em domínios tridimensionais, além da necessidade de se recalcularem as funções de base a cada passo de tempo deixando o método computacionalmente bastante caro. Para diminuir o custo computacional foi desenvolvida uma relação em função da mobilidade, que determina a necessidade de se recalcularem as funções de base ou

não, em um novo passo de tempo. Com isso, obtiveram grande redução no custo computacional, visto que além de não precisar recalcular as funções de base a cada passo de tempo, utilizaram este controle da variação da mobilidade para definir em quais volumes de controle da malha grossa dual as funções de base precisam ser recalculadas.

Lunati e Jenny (2006) apresentaram o algoritmo *Sequential Fully Implicit* (SFI) MsFVM para problemas em 3D, visando contornar as limitações impostas pelo tratamento explícito do problema de transporte. Neste caso, trataram os problemas de transporte e fluxo de forma segregada, dessa forma tendo a flexibilidade de utilizar os métodos mais adequados para resolver cada diferente campo físico. Nesse artigo, Lunati e Jenny mostraram que a quantidade de vezes que se recalculam as funções de bases num SFI-MsFVM é menor do que um MsFVM baseado em IMPES, raramente ultrapassando 20% do tempo total de simulação. Ainda em 2006, Lunati e Jenny (2006), apresentaram o método MsFVM para fluidos compressíveis, onde os efeitos da compressibilidade são levados em conta no cálculo da pressão na malha grossa. Observe que o método multiescala proposto por Jenny et al. (2003) tem um custo computacional extra, ao se recalculam um novo conjunto de funções de base, para garantir conservação local. Assim em 2006, Lunati e coautores propuseram três métodos diferentes para reconstruir as vazões na malha fina, e mostraram que em regiões de grande queda de pressão são necessários modelos mais sofisticados que levem em consideração os efeitos da compressibilidade ao se reconstruir a vazão na malha fina.

Outro problema do método proposto por Jenny et al. (2003) é o aumento do erro devido à criação de problemas locais que se utilizam de condições de contorno reduzidas que desacoplam o problema na malha grossa dual e a incapacidade das funções de base em capturar os efeitos de fluxos complexos oriundos de poços. Para problemas muito heterogêneos, essa condição reduzida de fluxo nulo nas fronteiras acarreta uma perda de consistência nas fronteiras destes volumes (Lunati et al., 2011; Møyner, 2012). Para contornar essa situação Hajibeygi et al. (2008), propuseram o uso das funções de correção para reduzir esse erro na solução, onde uma parte relativamente pequena do campo de pressões não capturado pelas funções de base, pode ser calculado, e, explicitamente adicionado à solução. A ideia desta técnica é calcular as funções (i.e. pressões) de correção iterativamente por meio de um método do tipo Jacobi ou Seidel, e, com uso em geral de poucas iterações até que se atinja a convergência no campo de pressões dentro de uma tolerância aceitável. Desta forma, a pressão será corrigida ao longo das faces dos elementos da malha grossa dual.

Hajibeygi et al. (2008) apresentaram trabalhos sobre métodos iterativos MsFVM (i-MsFVM). Lunati e Lee (2009) apresentaram uma formulação com um operador multiescala que contém as funções de correção incorporadas na sua definição. Com o objetivo de resolver a equação elíptica de pressão de forma mais eficiente, eles desenvolveram matrizes de permutação que permitem organizar os volumes das malhas grossas, primal e dual, de forma que todos os nós computacionais são organizados por um esquema de partição adequada. Ermakov (2010) apresentou algumas das dificuldades dos métodos clássicos de i-MsFVM, incluindo situações que podem causar divergência do método. Lunati et al. (2011) publicaram o chamado método iterativo multiescala que converge para a solução exata da equação discreta. Neste artigo, Lunati et al. (2011) usam métodos iterativos baseados em subespaços de Krylov para solução de sistemas de equações lineares, melhorando a qualidade da solução na fronteira da malha dual, e portanto, melhorando a solução da pressão no MsFVM. Cortinovis e Jenny (2014) desenvolveram um novo método iterativo chamando *New Iterative Galerkin Enriched Multiscale Finite-Volume* (i-Ge-MsFV), onde resolvem a equação de pressão na malha grossa através de uma formulação híbrida de volume finitos e Galerkin. Para todas as simulações apresentadas, o método se mostrou mais acurado do que as formulações clássicas MsFVM, mas também se mostrou muito mais caro computacionalmente, e com alguns problemas em termos de convergência.

Zhou e Tchelepi (2008) e Zhou (2010) modificaram o MsFVM, realizando todas as operações do método de maneira algébrica definindo claramente os operadores de transferência de escala matricialmente. Estes operadores são denominados de: Operador de Prolongamento (*Prolongation Operator*) e Operador de Restrição (*Restriction Operator*), definindo uma formulação algébrica geral para problema multiescala denominada *Operator Based Multiscale Method* (OBMM).

No OBMM a compressibilidade é adicionada ao modelo naturalmente, além do conceito dos operadores poder ser utilizado tanto para malhas estruturadas quanto para malhas não-estruturadas. Zhou (2010) redefiniu o seu OBMM para casos de escoamentos em reservatórios muito heterogêneos e anisotrópicos, desenvolvendo um *Two-stage Algebraic Multiscale Solver* (TAMS), novamente puramente matricial (algébrico) e com convergência para a solução numérica da escala fina. A ideia foi utilizar uma estratégia de pré-condicionamento para o problema elíptico em meios altamente heterogêneos.

Møyner (2012) apresentou o método multiescala para malhas não estruturadas usando o software “MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST)” desenvolvido em ambiente

MATLAB. O MRST consiste num conjunto de programas para simulações de fluxo em reservatórios, que usa diferentes métodos para calcular as equações de fluxo e transporte, incluindo o método dos elementos finitos mistos multiescala (MsMFEM) e o método dos volumes finitos multiescala (MsFVM). Møyner (2012), descreve como o MsFVM foi implementado no software MRST com a flexibilidade de utilizar um banco de dados para malhas não-estruturadas além de se efetuarem comparações entre as soluções obtidas pelo MsFVM e um método clássico aplicado diretamente na malha fina. Nesta comparação, tanto as soluções obtidas diretamente nas malhas finas, quanto os resultados obtidos pelo MsFVM (que resolve uma coleção de problemas locais), foram obtidos pelo método de diferenças finitas com aproximação de fluxo por dois pontos (*Two Point Flux Approximation* – TPFA). Neste caso, ficou clara a influência da seleção da malha grossa primal na acurácia do MsFVM.

Todas as variantes dos métodos MsFVM mencionados, usam a mesma organização de malhas proposta por Jenny et al. (2003), uma malha fina, uma grossa primal e uma grossa dual, o uso da malha grossa dual, implica no uso de condições de contorno reduzidas que desacoplam os subproblemas de pressão no domínio. Como consequência ocorre um erro na solução do campo de pressão, nas regiões próximas dos contornos dos volumes da malha grossa dual, ocasionando uma perda de acurácia na solução nas interfaces dos volumes duais (Lunati et al., 2011; Møyner, 2012, Cortinovis e Jenny, 2014). Segundo Cortinovis e Jenny (2014) quando zonas de baixa permeabilidade atravessam as arestas dos volumes duais, o cálculo das funções de base nessa área é prejudicado, acarretando em erros significativos na solução global. Faroughi et al. (2013) tentaram corrigir esse erro, e propuseram uma correção nas condições de contorno reduzidas. Quando existirem regiões com acentuado gradiente de permeabilidade e estas atravessarem as faces dos volumes da malha dual, calcula-se uma permeabilidade efetiva nestes volumes, suavizando o gradiente de permeabilidade e melhorando a solução do campo de pressão nestas regiões. Cortinovis e Jenny (2014) também realizaram correções nas funções de bases através de interpolantes, aumentando a taxa de convergência quando se utilizam métodos iterativos multiescala. Dehkordi e Mazari (2013) perceberam que o uso de volumes fantasmas duais (*ghost volumes*) para calcular as funções de base que estão localizadas nas fronteiras do domínio discretizado pela malha mais fina, diminuem a precisão do método, visto que não existe, nessa região, um domínio físico real, nem informações sobre a permeabilidade dos volumes, dificultando o cálculo das funções de base e de correção. Dehkordi e Mazari (2013) propuseram uma reorganização na estrutura de malha utilizada por Jenny, forçando as arestas dos volumes duais a sempre coincidirem com as fron-

teiras do domínio físico, invertendo assim a posição das malhas grossa dual e primal, criando o chamado Método de Volumes Finitos Multiescala com Malha Grossa Alterada (*Altered Coarse Grid Multiscale Finite Volume (ACGMsFV)*). Dehkordi e Mazari (2013), perceberam que a solução do campo de velocidades ficou mais acurada usando essa metodologia. Ainda em 2013, Dehkordi e Mazari propuseram o Método de Volume Finitos Multiescala com Multi-Resolução (*Multi-resolution Multiscale Finite Volume Method – MrMsFM*). Este método diminui a quantidade de volumes duais construídos, elimina a malha grossa primal e cria a chamada “*Malha Grossa Quad*”, esta malha auxilia o cálculo do campo de pressão na malha grossa dual. Nesse método a transmissibilidade é calculada pelos métodos MPFA (*Multi-point Flux Approximation*). Este método se mostrou bem acurado, porém, computacionalmente mais caro que os métodos multiescala clássicos. Møyner et al. (2013) também tentou inovar o MsFVM ao criar uma variante do método (*Multiscale Two-Point Flux-Approximation Method*) que elimina a necessidade da construção da malha dual, calculando as funções de base diretamente na malha grossa primal. O método se mostrou mais caro e menos acurado que o MsFVM, visto que para garantir conservação é preciso realizar várias iterações nas interfaces dos volumes primais. Contudo, este método tem como principal inovação a capacidade de utilizado em domínios discretizados por malhas computacionais não-estruturadas.

Em se tratando de reservatórios de petróleo fraturados, o método multiescala mostrou ser capaz de obter soluções acuradas. Reservatório podem ser fraturados e estas fraturas podem representar caminhos preferenciais para os fluidos, ou podem atuar como barreiras geológicas. As fraturas podem ter: geometrias complexas, grandes contrastes das propriedades físicas entre elas e o meio poroso. Além do que a escala da fratura pode ser ordens de grandeza menor do que a do reservatório (Hajibeygi, 2011). De forma geral, a representação dessas fraturas explicitamente na malha de simulação requer um grande número de células, o que torna inviável, em termos práticos, a simulação de casos reais. Hajibeygi (2011) mostrou em sua tese que nos reservatórios com fraturas de pequena abertura o uso do modelo de dupla porosidade leva a resultados eficientes, com acurácia razoável, mas quando essas fraturas são extensas o método falha. Para resolver isso, utiliza-se o Modelo de Fraturas Discretas, onde há uma representação explícita das fraturas isoladas e redes de fraturas. Mas esse método requer uma capacidade computacional alta para simular redes complexas, além de ter grandes dificuldades para extrapolar parâmetros de pequenas escalas para escalas maiores. Pensando nisso Hajibeygi (2011) propõe implementar no seu I-MsFVM o método “*Hierarchical Fracture Modeling Approach*” desenvolvido por Lee et al. (2001), onde as fraturas de pequena abertura

recebem algum tratamento de homogeneização e as fraturas de aberturas extensas são tratadas de forma discreta. Segundo Hajibeygi (2011) é interessante o uso dos métodos multiescala em meios fraturados, visto que a natureza do MsFVM é capturar todos os efeitos da transmissibilidade do meio. Lunati et al. (2011) também utilizou os I-MsFVM em reservatórios fraturados, conseguindo soluções acuradas onde o método clássico MsFVM falha. Møyner (2012) mostrou que nem sempre é preciso usar métodos iterativos para obter uma solução acurada em meios fraturados, bastando construir uma malha grossa primal “inteligente”. Ele criou malhas grossas adaptativas, que evitam que as arestas dos volumes duais toquem as fraturas e falhas, de forma que estas sempre ficassem dentro dos volumes duais. Dessa forma ele conseguiu resultados muito acurados, nos problemas avaliados em sua sua dissertação.

A simulação de meios anisotrópicos, ainda se mostra um grande desafio dos métodos multiescala, Kippe et al. (2008) mostrou que para altas razões de anisotropia, as condições de contornos reduzidas geram campos de velocidades com recirculações, consequentemente obtemos soluções não-físicas no campo de saturação. Lunati e Jenny (2006) tentaram evitar as recirculações através de um termo de correção, recalculando a velocidade de forma que a vazão na interface do volume grosso primal permaneça a mesma, mas a velocidade em cada volume fino é corrigida.

Hesse et al. (2008) provaram que os operadores multiescala podem ser análogos aos métodos MPFA (*Multipoint Flux Approximation*) e que para problemas isotrópicos homogêneos o operador MsFVM é idêntico ao MPFA-O. Eles desenvolveram o C-MsFVM (*Compact-MSFV*), cuja ideia é retirar as componentes da matriz de transmissibilidade grossa que geram a não monotonicidade, de forma a transformar o estêncil multiescala de 9 para 7 pontos, visando garantir assim monotonicidade. Esse método se mostra eficiente para malhas alinhadas, anisotrópicas, mas o método é ineficaz em meios altamente heterogêneos visto que esse método não consegue garantir monotonicidade. Wang et al. (2015) desenvolveram o M-MsFVM (*Monotone Multiscale Finite Volume Method*) para problemas isotrópicos e heterogêneos, utilizando duas condições de contorno diferentes: as clássicas e as lineares. As condições lineares não conseguem garantir monotonicidade, mas diminuem o grau de não-monotonicidade e as clássicas sempre são monótonas. Wang e coautores não conseguiram provar qual das duas condições de contorno é melhor, visto que a depender do problema, uma solução se mostra mais eficiente que a outra. É importante ressaltar que em alguns casos a solução clássica multiescala é mais eficiente e acurada que a M-MsFVM. Portanto Wang e coautores sugerem para trabalhos futuros unir as duas condições de contorno, utilizando a

priori a condição de contorno linear e quando está falhar utilizar as condições de contorno clássicas.

Lunati et al. (2011) propõem o uso de métodos iterativos para resolver problemas anisotrópicos, de forma que eles estimam o valor do fluxo transversal na interface dual, e de forma iterativa recalculam as condições de contornos reduzidas. Lunati e coautores mostram que para qualquer método iterativo usado, conforme a razão de anisotropia aumenta o número de iterações cresce bastante, e altas razões de anisotropia inviabilizam o método, aumentando demais os custos computacionais.

Hajibeygi (2011) também utilizou métodos iterativos para tratar com meios anisotrópicos, conseguindo resultados acurados em meios heterogêneos e anisotrópicos. As iterações são realizadas nas funções de bases, como mostrado em Lunati et al. (2011), diminuindo os erros acarretados pelas condições de contornos reduzidas, garantindo assim conservação na malha grossa primal.

Møyner e Lie, (2016) propuseram o “*Multiscale Restricted-Smoothed Basis (MsRSB)*”. Neste trabalho, os autores apresentaram um novo método multiescala, com o objetivo de ser aplicável a malhas não-estruturadas sobre domínios quaisquer. A ideia principal do MsRSB é a incorporação do cálculo das funções de base através de operações diretamente na estrutura algébrica matricial do operador, ou seja, diretamente nos volumes da malha fina. Sendo assim, o operador de prolongamento é construído iterativamente mantendo consistência com as propriedades locais dos operadores diferenciais. A principal vantagem do MsRSB consiste no fato do operador de prolongamento não apresentar dependência direta dos volumes da malha grossa, possibilitando, em princípio, o uso de malhas quaisquer.

Tene et al. (2015) melhoraram a formulação algébrica multiescala (AMS – *Algebraic Multiscale Solver*) proposta por Zhou (2011), criando o C-AMS (*Algebraic Multiscale Solver for Compressible Flow*). Dessa forma, eles utilizam diferentes funções de bases, que dependem do nível de compressibilidade do fluido. Por fim, realizam iterações no operador de prolongamento, melhorando a qualidade da solução multiescala.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo investigar e desenvolver uma série de ferramentas computacionais que auxiliem a modelagem e simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo altamente heterogêneos e anisotrópicos usando metodologias multiescala. Como ob-

jetivos específicos, podemos citar: implementação de formulações capazes de simular o escoamento do fluido em meios anisotrópicos e heterogêneos, investigar a acurácia do método multiescala quando se utiliza formulações MPFA, observar o comportamento do campo de velocidade quando utilizamos diferentes formulações para tratar a saturação (métodos de primeira e segunda ordem e *streamlines*) e por fim desenvolver melhorias no método multiescala para volumes finitos (MsFVM).

Diante do exposto, para atingir estes objetivos é necessário: estudar as formulações matemáticas e os métodos de resolução numérica capazes de resolver o problema do escoamento bifásico, obter conhecimento em *softwares* iterativos voltados ao cálculo numérico, a partir daí pesquisar as vantagens e limitações das técnicas multiescalas, para que possamos propor melhorias ao método.

1.3 CONTRIBUIÇÕES DA TESE

O Método de Volumes Finitos Multiescala (MsFVM) têm várias limitações, entre elas a dificuldade em simular meios anisotrópicos e reservatórios com bruscas variações do campo de permeabilidade (altamente heterogêneos, com fraturas, barreiras), etc. Assim, desenvolvemos um novo método multiescala denominado Método Iterativo Multiescala Modificado para Volume de Controle (I-MMVCM). Este método contém num conjunto de melhorias significativas nas técnicas multiescala que podem ser facilmente implementadas. Através de uma simples realocação dos pontos de colocação, conseguimos melhorar sensivelmente a acurácia do operador de prolongamento por não utilizarmos volumes fantasmas (*ghost volumes*). Através do processo iterativo, desenvolvido nesse trabalho, temos uma melhoria acentuada na acurácia do campo de pressão, é importante frisar que essa técnica iterativa pode ser utilizada em métodos de programação paralela de forma que resolvemos um conjunto de problemas locais e independentes.

Para resolver problemas anisotrópicos, implementamos no método I-MMVCM formulações MPFA (*multipoint flux approximation*) do tipo MPFA-O e a *MPFA Full Pressure Support* (MPFA-FPS). É importante ressaltar que formulações MPFA-FPS nunca foram implementadas aos métodos multiescala, esse método é capaz de simular meios onde o tensor de permeabilidade apresenta elevada razão de anisotropia, aumentando a robustez do I-MMVCM.

Assim, o método I-MMVCM consegue simular o escoamento bifásico em meios heterogêneos e anisotrópicos, algo impossível para o método MsFVM e, o mais importante, consegue garantir conservação cada passo de tempo, para todos os casos simulados o I-MMVCM consegue uma boa acurácia.

O método de correção de fluxos por face, desenvolvido nessa pesquisa é um importante avanço a técnica de correção de fluxo desenvolvida pelo Lunati e Jenny (2006), onde eliminamos as oscilações do campo de velocidade através de uma ponderação de fluxos. Lunati e Jenny (2006) utilizaram uma média aritmética que se mostrou de baixa acurácia ao simular meios heterogêneos e isotrópicos, diferentemente do nosso método que conseguiu soluções qualitativamente de boa acurácia para esse tipo de problema. Esse conjunto de melhorias significam uma contribuição importante às técnicas MsFVM.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Além do presente capítulo introdutório, o presente texto consiste em mais sete capítulos. No Capítulo 2, o modelo matemático adotado para representar o fenômeno aqui estudado é apresentado, precedido de suas hipóteses simplificadoras. No Capítulo 3, as técnicas numéricas empregadas na solução das equações governantes introduzidas no Capítulo 2, são descritas em detalhes. Apresentamos a estratégia IMPES, logo depois as técnicas numéricas usadas para resolver os problemas elíptico e hiperbólico. No Capítulo 4, apresentamos os conceitos básicos para se compreender o método multiescala para volumes finitos (MsFVM), logo depois no Capítulo 5, apresentamos o método multiescala em seu formato algébrico (OBMM) e abordaremos suas vantagens e limitações. No Capítulo 6, apresentamos uma variante do método MsFVM denominada de Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM), este método nada mais é do que um conjunto de estratégias que visa melhorar a acurácia do campo de pressão. No Capítulo 7 mostramos os resultados obtido pelo I-MMVCM para os escoamentos monofásico e bifásico (água e óleo), onde comparamos a solução I-MMVCM com a MsFVM e a solução chamada de referência, ou seja, aquela obtida quando resolvemos a equação de pressão diretamente na malha fina. Por fim, conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 8.

2 MODELO MATEMÁTICO

2.1 ESCOAMENTO BIFÁSICO E IMISCÍVEL EM MEIOS POROSOS

Assumiremos, sem perda de generalidade, que os fluidos (óleo-água) e rocha são incompressíveis e que o escoamento é isotérmico, em um meio totalmente saturado. Utilizaremos uma formulação segregada, em que as equações básicas de movimento são obtidas a partir da Lei de Conservação da Massa e da Lei de Darcy e na qual o escoamento é descrito por uma equação elíptica de pressões e uma equação hiperbólica de saturações, acopladas (fracamente) através do campo de velocidades. Para a solução das equações que descrevem o escoamento bifásico no interior dos reservatórios de petróleo, utilizamos a metodologia IMPES, a qual é bastante popular na indústria de petróleo (Ewing, 1983).

Inicialmente, podemos escrever a conservação da massa para uma fase i ($i=o$ (óleo), w (água)), como:

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i \quad (1)$$

onde $\vec{v}_i$ e ρ_i , representam, respectivamente, a velocidade de Darcy e a densidade da fase i , e ϕ e q_i são a porosidade, i.e. a fração da rocha que pode ser ocupada por fluidos, e os termos de fonte (ou sumidouro), que representam poços de injeção ou produção. S_i é a saturação da fase i , ou seja, a fração do volume poroso ocupado pela fase. Dessa última definição, segue a relação de restrição das saturações:

$$S_o + S_w = 1 \quad (2)$$

Adicionalmente, desprezando os efeitos capilares e gravitacionais, podemos escrever a velocidade de Darcy, como:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} \vec{\nabla} p_i \quad (3)$$

onde p_i , k_{ri} e μ_i representam, respectivamente, a pressão, a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase i , e $\underline{K}$ é o tensor de permeabilidade absoluta da rocha, que, em duas dimensões, é representado por uma matriz 2x2, cujas componentes satisfazem a condição de elipticidade, i.e., $K_{xx}K_{yy} \geq K_{xy}^2$.

2.1.1 Equação de Pressão

Substituindo a velocidade de Darcy, apresentada na Eq. (3), na Lei de Conservação da massa, Eq. (1) e após alguma manipulação algébrica, escrevemos a Equação de Pressão, como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \quad \text{com} \quad \vec{v} = -\lambda_T \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (4)$$

onde $\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w$ e $Q = Q_w + Q_o$ são, respectivamente, a mobilidade total e a vazão específica total e $\lambda_i = (k_{ri}/\mu_i)$, $Q_i = (q_i/\rho_i)$ são a mobilidade e a vazão específica da fase $i = o, w$.

2.1.2 Equação de Saturação

Novamente, fazendo uso das leis de conservação da massa, Eq. (1), e de Darcy Eq. (3), utilizando ainda a equação de restrição das saturações, Eq. (2), e as hipóteses assumidas, e após alguma manipulação algébrica, podemos escrever a equação de saturação da água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (f_{Rw} \vec{v}) + Q_w \quad (5)$$

onde $f_{Rw} = f_{Rw}(S_w) = \lambda_w/\lambda_T$ é a função fluxo fracional da água, que é uma função não linear da saturação da fase água e $Q_w = q_w/\rho_w$ é a vazão específica da mesma. A Equação (5) é não linear e de natureza hiperbólica (Ewing, 1983; Carvalho, 2005).

2.1.3 Condições Iniciais e de Contorno

Para que o problema descrito pelas equações de pressão e saturação seja completamente determinado, é necessário que utilizemos um conjunto apropriado de condições iniciais e de contorno, que dependem das características geológicas das vizinhanças e da existência de poços de injeção ou poços de produção.. Considerando que, em 2-D, o reservatório possa ser representado por um domínio poligonal Ω , onde o contorno é denotado por Γ que é dado pela união disjunta dos diferentes contornos, como mostrado na Fig. (1) e identificado na Eq. (6), a seguir:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_I \cup \Gamma_P \quad (6)$$

onde, Γ_D , Γ_N , Γ_I e Γ_P representam a fronteira de Dirichlet (pressão prescrita), Neumann (fluxo prescrito), poços injetores e poços produtores, respectivamente.

As condições de contorno podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_I \quad \text{ou} \quad p(x, t) = p_I \quad \text{sobre } \Gamma_I \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= Q_P \quad \text{ou} \quad p(x, t) = p_P \quad \text{sobre } \Gamma_P \times [0, t] \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, \quad \text{em } \Gamma_N \times [0, t] \\ p &= g_D, \quad \text{em } \Gamma_D \times [0, t] \\ S_w(\vec{x}, t) &= \bar{S}_w, \quad \text{em } \Gamma_I \times [0, t] \end{aligned} \quad (7)$$

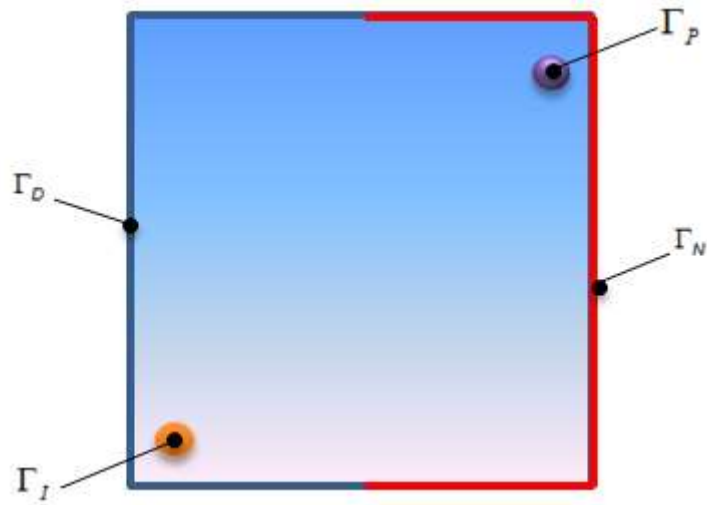
onde, $\vec{n}$ é o vetor área normal, Q_I e Q_P são as vazões volumétricas dos poços injetores e produtores, respectivamente, g_N é o fluxo normal prescrito em Γ_N , g_D é a pressão prescrita em Γ_D , e, finalmente, $\bar{S}_w$ representa a saturação prescrita num conjunto de poços injetores.

As condições iniciais podem ser escritas, como:

$$S_w(\vec{x}, 0) = \bar{S}_w^0 \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

Na Eq. (8), $\bar{S}_w^0$ é a distribuição inicial da saturação de água no reservatório de petróleo.

Figura 1. Representação esquemática do domínio Ω , dos contornos de Dirichlet Γ_D e Neumann Γ_N e de poços injetor e produtor num reservatório bidimensional genérico.



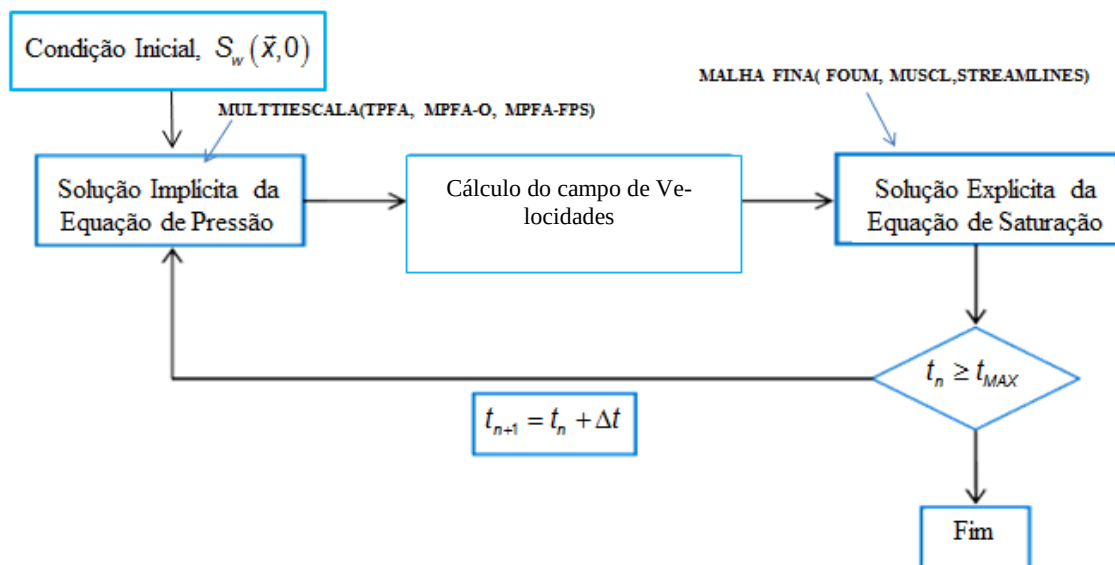
3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo serão abordadas as estratégias numéricas utilizadas para a solução do modelo matemático descrito no capítulo anterior. Apresentamos as formulações numéricas para calcular a equação discreta da pressão (*Two-point flux approximation* (TPFA) e *multi-point flux approximation* (MPFA)) e a da saturação.

3.1 ESTRATÉGIA IMPES

Nas seções que seguem, serão desenvolvidas as formas discretas das equações de pressão e saturação, através do Método dos Volumes Finitos. O tratamento do acoplamento entre as equações que definem o modelo matemático será feito com a estratégia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Esse procedimento consiste na solução sequencial das equações de fluxo e transporte de modo que, inicialmente, a partir de um campo inicial de saturação das fases, a mobilidade total λ_T é calculada, e a equação elíptica de pressão é resolvida implicitamente, em seguida o campo de velocidades, que utilizamos para calcular o campo de saturações. Neste trabalho calcularemos explicitamente a velocidade utilizando-se a Lei de Darcy. O processo é repetido até o instante de tempo desejado, conforme apresentado esquematicamente na Fig. (2).

Figura 2. Estratégia IMPES.



Fonte: Souza, 2015

3.2 EQUAÇÃO DE PRESSÃO NA FORMA DISCRETA

A solução aproximada da equação de pressão, segundo o Método de Volumes Finitos, é obtida integrando-se a equação de pressão, Eq. (4), ao longo de todo o domínio Ω , como ilustrado na Fig. (1). Assim, temos:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (9)$$

Considerando apenas um único volume de controle (VC) genérico, representado neste trabalho como “ $\hat{V}$ ”, e usando o teorema da divergência de Gauss, a Eq. (9) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_{\hat{V}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_{\hat{V}} = \int_{\Gamma_{\hat{V}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{V}} = \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega_{\hat{V}} \quad (10)$$

As duas últimas integrais da Eq. (10) podem ser aproximadas utilizando o Teorema do Valor Médio, resultando em:

$$\int_{\Gamma_{\hat{V}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma \cong \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad \text{E} \quad \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega_{\hat{V}} \cong \bar{Q}_{\hat{V}} \Omega_{\hat{V}} \quad (11)$$

onde, $\vec{v}_{IJ}$ é a velocidade aproximada na superfície de controle (SC), formada pelos nós I e J , e $\vec{N}_{IJ}$ é o vetor área, definido na aresta/face IJ , e com o somatório do lado direito realizado sobre todas as faces que compõem o volume de controle, e $\bar{Q}_{\hat{V}}$ sendo o valor do termo de injeção/produção específica no volume de controle “ $\hat{V}$ ”.

Considerando uma superfície arbitrária, e as aproximações dadas na Eq. (11), pode-se escrever a Eq. (9), como:

$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{V}} \Omega_{\hat{V}} \quad (12)$$

3.2.1 Método de Volumes Finitos com Aproximação do Fluxo por Dois Pontos

Nesta seção usa-se o método dos volumes finitos clássico com estêncil de cinco pontos e cuja aproximação dos fluxos é feita por dois pontos (TPFA), para discretizar a Eq. (12). Sendo assim, considere uma malha discreta estruturada quadrilateral, ω_f , alinhada com um sistema de coordenadas cartesianas, (x,y) . Essa malha estruturada consiste de n_x volumes de controles na direção x , e n_y volumes de controles na direção y , de tamanho $L_x \times L_y$, onde cada elemento possui uma área dada por, $\Omega = L_x / n_x \times L_y / n_y$. A formulação é centrada na célula, conforme mostra a Figura 3.

A malha estruturada, Ω_f , possui partições definidas como:

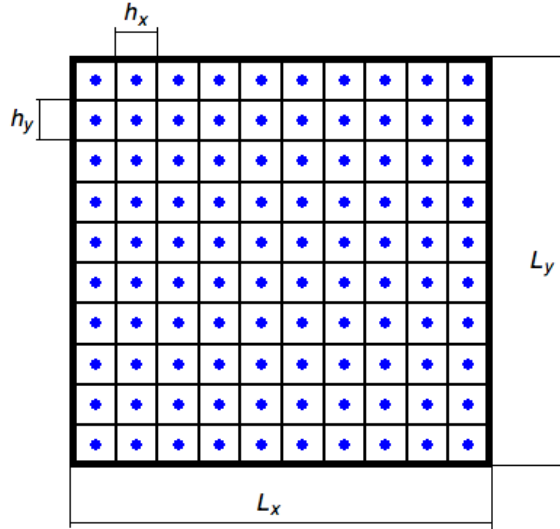
$$\Omega_f = \left\{ (x_I, y_J) \mid x_0 = 0, x_1 = h_x / 2, \dots, x_I = h_x / 2 + (I-1) \cdot h_x, \dots, x_{n_x+1} = L_x \right. \\ \left. y_0 = 0, y_1 = h_y / 2, \dots, y_J = h_y / 2 + (J-1) \cdot h_y, \dots, y_{n_y+1} = L_y, I = 1, \dots, n_x, J = 1, \dots, n_y \right\} \quad (13)$$

Resolvendo-se a Eq. (4) num volume de controle da malha ω_f , conforme mostra a Fig. (3), e, considerando a superfície do volume de controle definida por $\partial\Omega = \Gamma_w + \Gamma_E + \Gamma_N + \Gamma_S$ resulta:

$$\lambda_{I+1/2,J} \vec{\nabla} p_{I+1/2,J} h_y - \lambda_{I-1/2,J} \vec{\nabla} p_{I-1/2,J} h_y + \dots \\ + \lambda_{I,J+1/2} \vec{\nabla} p_{I,J+1/2} h_x - \lambda_{I,J-1/2} \vec{\nabla} p_{I,J-1/2} h_x = Q_{I,J} h_x h_y \quad (14)$$

Aproximando os valores do gradiente de pressão $\vec{\nabla} p$, na Eq. (14), por diferenças centradas, no interior da malha ($2 < I < n_x$ e $2 < J < n_y$), tem-se:

$$\lambda_{I+1/2,J} \frac{(p_{I+1,J} - p_{I,J})}{h_x} h_y - \lambda_{I-1/2,J} \frac{(p_{I,J} - p_{I-1,J})}{h_x} h_y + \lambda_{I,J+1/2} \frac{(p_{I,J} - p_{I,J+1})}{h_y} h_x - \\ - \lambda_{I,J-1/2} \frac{(p_{I,J} - p_{I,J-1})}{h_y} h_x = -Q_{I,J} h_x h_y \quad (15)$$

Figura 3. Domínio Ω discretizado.

Para cada volume de controle I, podemos definir as transmissibilidades nas superfícies de controle, como:

$$\begin{aligned} T_{I+1/2,J} &= h_y \frac{\lambda_{I+1/2,J}}{h_x} & T_{I-1/2,J} &= h_y \frac{\lambda_{I-1/2,J}}{h_x} \\ T_{I,J+1/2} &= h_x \frac{\lambda_{I,J+1/2}}{h_y} & T_{I,J-1/2} &= h_x \frac{\lambda_{I,J-1/2}}{h_y} \end{aligned} \quad (16)$$

Com as definições dadas na Eq. (15), a Eq. (16) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} &-T_{I+1/2,J} (p_{I+1,J} - p_{I,J}) + T_{I-1/2,J} (p_{I,J} - p_{I-1,J}) - T_{I,J+1/2} (p_{I,J} - p_{I,J+1}) + \dots \\ &+ T_{I,J-1/2} (p_{I,J} - p_{I,J-1}) = Q_{I,J} h_x h_y \end{aligned} \quad (17)$$

Para a definição das condições de contorno, classicamente utiliza-se o conceito de volumes de controle fantasmas. Nesses volumes fantasmas, podem ser aplicadas condições de contorno do tipo Dirichlet, ou condições de contorno do tipo Neumann. Na simulação de reservatórios, essa última condição expressa uma taxa ou fluxo em um contorno.

Observe que precisamos realizar uma discretização especial nas fronteiras do domínio, devido às condições de contorno impostas em cada problema. Isto será incorporado ao sistema linear resultante da Eq. (17).

Na fronteira do domínio, à esquerda, quando $I=1$ e $2 < J < n_y$, tem-se:

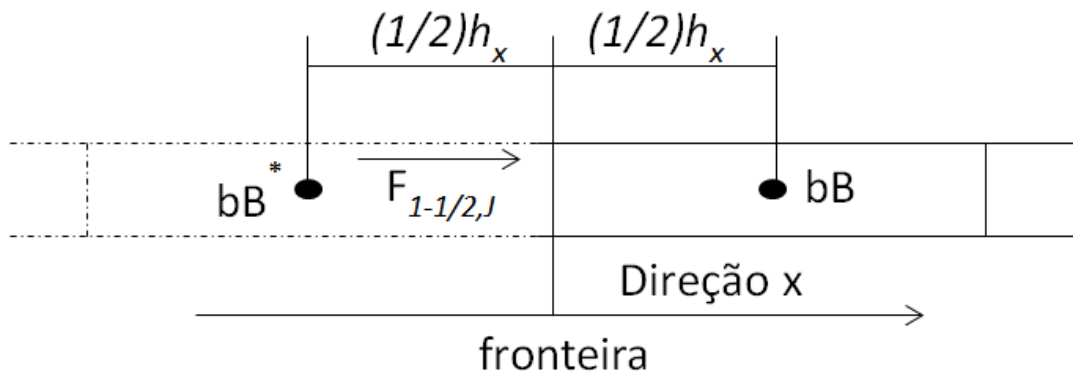
$$\begin{aligned}
& -T_{1+1/2,J} (p_{1+1,J} - p_{1,J}) + T_{1-1/2,J} (p_{1,J} - p_{0,J}) - T_{1,J+1/2} (p_{1,J} - p_{1,J+1}) + \dots \\
& + T_{1,J-1/2} (p_{1,J} - p_{1,J-1}) = Q_{1,J} h_x h_y
\end{aligned} \tag{18}$$

Observa-se que um fluxo fictício é expresso na Eq. (18), dado por $F_{1-1/2,J} = T_{1-1/2,J} (p_{1,J} - p_{0,J})$. Portanto usando os volumes fantasmas, calculamos o valor do fluxo que atravessa a fronteira esquerda ($F_{1-1/2,J}$) do domínio Ω na direção x . Temos que:

$$T_{1-1/2,J} = h_y \frac{\lambda_{1-1/2,J}}{h_x} = h_y \frac{\lambda_{1,J}}{(1/2)h_x} = 2T_{bw,J} \tag{19}$$

Para este problema consideremos que os volumes fantasmas têm as mesmas propriedades (porosidade, permeabilidade, etc.) que seus volumes vizinhos, ou seja, para o caso em questão $K_{0,J} = K_{1,J}$, onde $K_{0,J}$ é o tensor de permeabilidade do “volume de controle fantasma”, que é idêntico ao do elemento com o qual ele faz fronteira, portanto temos que $\lambda_{1-1/2,J} = \lambda_{1,J}$.

Figura 4. Representação esquemática do uso dos “volumes de controle fantasmas” (*ghost volumes*) para um domínio unidimensional.



Como $p_{0,J}$ é uma pressão fictícia esta terá que ser extrapolada de alguma forma. A maneira mais simples, e que será utilizada nesse trabalho, é considerar que $p_{0,J} = p_{bw}$, onde p_{bw} é o valor da pressão prescrita na fronteira leste do domínio.

Assim a equação Eq. (18) resulta:

$$\begin{aligned}
& -T_{1+1/2,J} (p_{2,J} - p_{1,J}) + 2T_{bw,J} (p_{1,J} - p_{bw,J}) - T_{1,J+1/2} (p_{1,J} - p_{1,J+1}) + \dots \\
& + T_{1,J-1/2} (p_{1,J} - p_{1,J-1}) = Q_{1,J} h_x h_y
\end{aligned} \tag{20}$$

À direita do domínio, em sua fronteira, quando $I = n_x$ e $2 < J < n_y$, onde b_o é a fronteira oeste do domínio Ω , tem-se:

$$\begin{aligned}
& -2T_{nx,J} (p_{bo,J} - p_{nx,J}) + T_{x-1/2,J} (p_{nx,J} - p_{nx-1,J}) - T_{1,J+1/2} (p_{nx,J} - p_{nx,J+1}) + \dots \\
& + T_{1,J-1/2} (p_{nx,J} - p_{nx,J-1}) = Q_{x,J} h_x h_y
\end{aligned} \tag{21}$$

De maneira similar, é discretizada a equação quando temos as fronteiras norte (b_n) para $J=1$, e sul (b_s) para $J = n_y$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
& -T_{I+1/2,1} (p_{I+1,1} - p_{I,1}) + T_{I-1/2,J} (p_{I,1} - p_{I-1,1}) - T_{I,1+1/2} (p_{I,1} - p_{I,2}) + \dots \\
& + 2T_{I,bn} (p_{I,1} - p_{I,bn}) = Q_{I,1} h_x h_y
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
& -T_{I+1/2,ny} (p_{I+1,ny} - p_{I,ny}) + T_{I-1/2,ny} (p_{I,ny} - p_{I-1,ny}) - 2T_{I,bs} (p_{I,bs} - p_{I,ny+1}) + \dots \\
& + T_{I,ny-1/2} (p_{I,ny} - p_{I,ny-1}) = Q_{I,ny} h_x h_y
\end{aligned} \tag{23}$$

Quando as condições de contorno forem do tipo Dirichlet, $p_{bw,J}, p_{bo,J}, p_{I,bn}, p_{I,bs}$ possuem valores prescritos conforme a natureza do problema. Quando as condições de contorno forem do tipo Neumann, observando a Eq. (18) teremos que:

$$F_{1-1/2,J} = T_{1-1/2,J} (p_{1,J} - p_{0,J}) = g_{prescrito} \tag{24}$$

onde $g_{prescrito}$ é uma taxa, ou fluxo no contorno, portanto quando $I=1$ e $2 < J < n_y$, a Eq. (18) resulta em:

$$\begin{aligned}
& -T_{1+1/2,J} (p_{1+1,J} - p_{1,J}) + g_{prescrito} - T_{1,J+1/2} (p_{1,J} - p_{1,J+1}) + \dots \\
& + T_{1,J-1/2} (p_{1,J} - p_{1,J-1}) = Q_{1,J} h_x h_y
\end{aligned} \tag{25}$$

De forma similar, será aplicado em todas as outras fronteiras esse modelo, quando as condições forem de fluxo prescrito.

Um caso particular que pode ser citado é quando o volume de controle estiver na quina do domínio, por exemplo, quando $I=1$ e $J=1$. Para esses casos utilizaremos a mesma ideia, já apresentada, portanto a Eq. (14) terá a forma:

$$\begin{aligned}
& -T_{1+1/2,1} (p_{2,1} - p_{1,1}) + 2T_{bw,1} (p_{1,1} - p_{bw,1}) - T_{1,1+1/2} (p_{1,1} - p_{1,2}) + \dots \\
& + 2T_{1,bn} (p_{1,1} - p_{1,bn}) = Q_{1,1} h_x h_y
\end{aligned} \tag{26}$$

Se a condição de contorno for do tipo pressão prescrita, substituiremos o valor da mesma em $p_{bw,1}$ e $p_{1,bn}$, e se a condição de contorno for fluxo prescrito basta substituir o valor do fluxo ($g_{prescrito}$) em $2T_{bw,1} (p_{1,1} - p_{bw,1})$ e $2T_{1,bn} (p_{1,1} - p_{1,bn})$. De forma geral, a Eq. (26) gerará um sistema de equações que pode ser representado na seguinte notação matricial:

$$\underset{\sim}{T} \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q} \tag{27}$$

onde:

$\underset{\sim}{T}$ = Matriz pentadiagonal com os termos de transmissibilidade.

$\underset{\sim}{P}$ = Vetor Coluna das incógnitas de pressão em cada volume de controle (ou nó computacional).

$\underset{\sim}{Q}$ = Vetor Coluna com as informações de termos fontes/sumidouro e/ou quantidades conhecidas oriundas das condições de contorno.

O sistema linear resultante é resolvido de forma a obter-se o campo de pressões. Os resultados numéricos obtidos utilizando-se esta discretização serão mostrados nas seções seguintes, onde serão discutidos em conjunto com as aplicações utilizando-se a formulação multiescala.

3.2.2 Formulações com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos

O método TPFA só garante boa acurácia em campos de permeabilidade que possuem tensores diagonais, em malhas cartesianas, etc. Diante dessas limitações, formulações com aproximação do fluxo por múltiplos pontos (*Multi-Point Flux Approximation* -MPFA) foram desenvolvidas (Souza, 2015). Neste trabalho foram utilizadas duas formulações MPFA, a mais tradicional denominada de MPFA-O que calcula o campo de pressão através de uma aproximação linear (suporte triangular) e o *MPFA Full Pressure Support* (MPFA-FPS) que usa uma aproximação bilinear para calcular a pressão (suporte completo). Para maiores informações sobre o método pode-se consultar os trabalhos de Aavatsmark et al. (1998), Edwards et al. (1998) e Souza (2015).

3.2.3 Suporte Triangular para a Pressão: MPFA-O

Considere um fragmento de malha apresentado na Figura 5 apresentado na definimos pontos de colação, como os centroides dos volumes de controle; pontos auxiliares como os pontos criados numa determinada face ligada a um determinado vértice e região de interação aquela formada a partir da união entre os pontos de colocação e auxiliares. A ideia do método MPFA-O é aproximar o campo de pressão através de um conjunto de funções lineares (Souza, 2015). Onde as vazões são calculadas em cada meia aresta da face pertencente a uma região de interação.

Considere a região de interação pertencente ao fragmento de malha apresentado na Figura 5. Nesta região calcula-se os fluxos que atravessam cada meia aresta ($O\hat{e}, O\hat{f}, O\hat{g}$ e $O\hat{h}$) associada ao vértice “o”. Escolhendo a meia aresta $O\hat{e}$, temos que a vazão a esquerda que atravessa essa face é dada por (Aavatsmark et al, 1998):

$$\vec{v}_{O\hat{e}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} = -\lambda_{O\hat{e}} K_{\tilde{A}} \vec{\nabla} p_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} \quad (28)$$

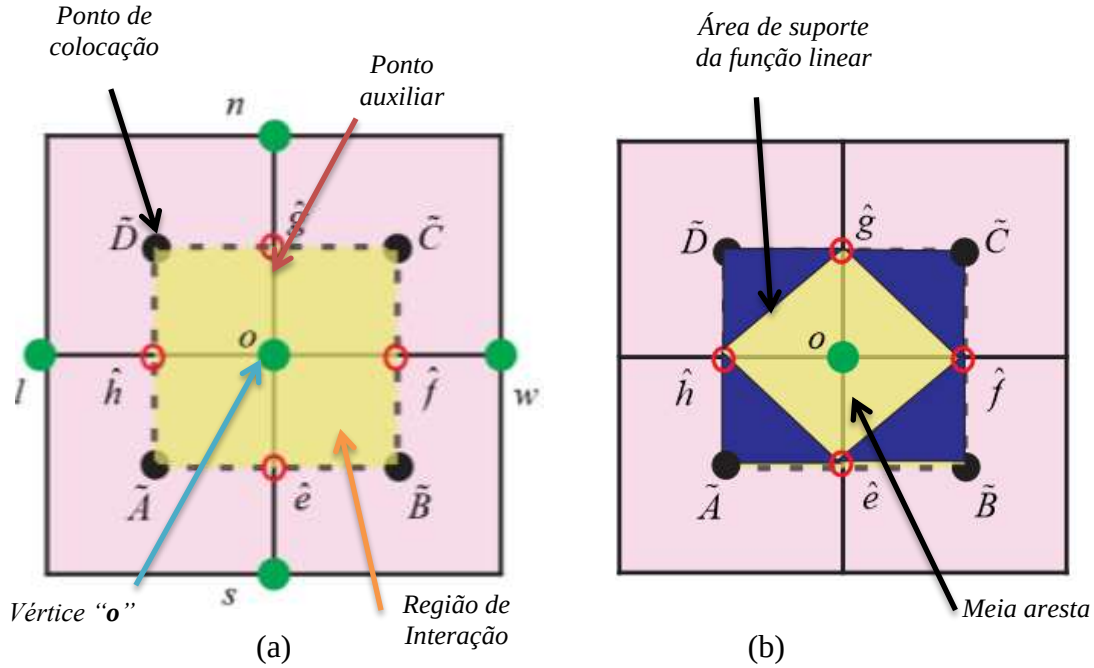
onde $\vec{v}_{O\hat{e}}$, $\lambda_{O\hat{e}}$, $\vec{N}_{O\hat{e}}$ são, respectivamente, a velocidade total, mobilidade total e o vetor normal associados à meia aresta avaliada $O\hat{e}$. $K_{\tilde{A}}$ é o tensor de permeabilidade absoluta associado ao volume de controle $\tilde{A}$, e $\vec{\nabla} p_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}}$ é o gradiente de pressão associado ao volume de controle $\tilde{A}$ que pode ser escrito como:

$$\vec{\nabla} p_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}} = -\frac{1}{2\Omega_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}}} \left(p_{\tilde{A}} \vec{N}_{\hat{e}\hat{h}} + p_{\hat{e}} \vec{N}_{\tilde{A}\hat{h}} + p_{\hat{h}} \vec{N}_{\tilde{A}\hat{e}} \right) \quad (29)$$

onde o parâmetro $\Omega_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}}$ representa a área do triângulo $\triangle \tilde{A}\hat{e}\hat{h}$. Assim, podemos escrever a contribuição do volume de controle $\tilde{A}$ para a meia aresta $O\hat{e}$ como:

$$\vec{v}_{O\hat{e}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} = -\lambda_{O\hat{e}} K_{\tilde{A}} \vec{\nabla} p_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} = \vec{\nabla} p_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}} = \frac{\lambda_{\tilde{A}} K_{\tilde{A}}}{2\Omega_{\tilde{A}\hat{e}\hat{h}}} \left(p_{\tilde{A}} \vec{N}_{\hat{e}\hat{h}} + p_{\hat{e}} \vec{N}_{\tilde{A}\hat{h}} + p_{\hat{h}} \vec{N}_{\tilde{A}\hat{e}} \right) \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} \quad (30)$$

Figura 5. Esquema do método MPFA-O: a) Região de interação associada ao vértice O; b) Área de suporte da função linear onde a pressão é calculada.



De forma análoga, calculam-se os fluxos $\vec{v}_{O\hat{f}}, \vec{v}_{O\hat{g}}, \vec{v}_{O\hat{h}}$. A partir daí, podemos generalizar e escrever o fluxo para todas as meias arestas da região de interação pertencente ao vértice “o” de forma compacta, da seguinte forma:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esquerda}} = \mathcal{A} \{ \tilde{p} \} + \mathcal{B} \{ \hat{p} \} \quad (31)$$

onde $\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{\text{Esquerda}}$ é um vetor com as vazões, calculadas nas meias-arestas $O\hat{e}, O\hat{f}, O\hat{g}$ e $O\hat{h}$, que considera a contribuição dos volumes de controle à esquerda. $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são matrizes constituída de parâmetros físicos e geométricos. Os vetores $\{\hat{p}\}$ e $\{\bar{p}\}$ são, respectivamente, as pressões nos pontos de colocação e nos pontos auxiliares.

Depois de calcularmos as vazões que atravessam as faces esquerdas da região de interação, associada ao vértice “o”, iremos determinar as vazões à direita. Novamente escolhendo a meia aresta $O\hat{e}$, a vazão $\vec{v}_{\hat{e}O}$ que é influenciada pelo do volume de controle à direita $\tilde{B}$ é dada por:

$$\vec{v}_{\hat{e}O} \cdot \vec{N}_{\hat{e}O} = -\lambda_T \underline{K}_{\tilde{B}} \vec{\nabla} p_{\tilde{B}\hat{e}\hat{f}} \cdot \vec{N}_{I\tilde{E}} = \frac{\lambda_T \underline{K}_{\tilde{B}}}{2\Omega_{\tilde{B}\hat{e}\hat{f}}} \left(p_{\tilde{B}} \vec{N}_{\hat{e}O} + p_{\hat{e}} \vec{N}_{\hat{f}O} + p_{\hat{f}} \vec{N}_{\tilde{B}O} \right) \cdot \vec{N}_{\hat{e}O} \quad (32)$$

Portanto, a vazão que atravessa a aresta “ON” é o somatório de $\vec{v}_{\hat{e}O} \cdot \vec{N}_{\hat{e}O} + \vec{v}_{O\hat{e}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} = \vec{v}_{ON} \cdot \vec{N}_{ON}$. O método garante conservação local visto que $\vec{v}_{ON} \cdot \vec{N}_{ON} + \vec{v}_{NO} \cdot \vec{N}_{NO} = 0$.

Calculamos a vazão nas meias arestas $\hat{f}O, \hat{g}O$ e $\hat{h}O$, e novamente reescrevemos as vazões que atravessam as faces à direita na região de interação associada ao vértice “o” como:

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{\text{Direita}} = \underline{C}\{\hat{p}\} + \underline{D}\{\bar{p}\} \quad (33)$$

onde, o vetor $\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{\text{Direita}}$ contempla as vazões calculadas nas meias-arestas $\hat{e}O, \hat{f}O, \hat{g}O$ e $\hat{h}O$. As matrizes $\underline{C}$ e $\underline{D}$ são análogas as matrizes $\underline{A}$ e $\underline{B}$, ou seja, armazenam parâmetros físicos e geométricos dos volumes de controle à direita de cada meia aresta avaliada.

Impondo a continuidade dos fluxos em todas as meias arestas da região de interação “o”, temos:

$$\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{\text{Esquerda}} = -\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{\text{Direita}} \quad (34)$$

ou seja:

$$\underline{\mathbf{A}}\{\tilde{p}\} + \underline{\mathbf{B}}\{\hat{p}\} = -(\underline{\mathbf{C}}\{\tilde{p}\} + \underline{\mathbf{D}}\{\hat{p}\}) \quad (35)$$

Após algumas manipulações algébricas separamos os termos associados aos pontos de colocação daqueles associados aos pontos auxiliares, assim:

$$(\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{D}})\{\hat{p}\} = -(\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{C}})\{\tilde{p}\} \quad (36)$$

Denominando $\underline{\mathbf{G}} = (\underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{D}})$ e $\underline{\mathbf{H}} = -(\underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{C}})$, chega-se ao seguinte sistema matricial, onde a pressão localizada no ponto auxiliar é escrita em função das pressões localizadas no ponto de colocação ($\tilde{p}$):

$$\{\hat{p}\} = \underline{\mathbf{G}}^{-1} \underline{\mathbf{H}}\{\tilde{p}\} \quad (37)$$

Substituindo a Eq. (37) nas equações. (31) e (34), temos:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esquerda}} = \underline{\mathbf{A}}\{\tilde{p}\} + \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{G}}^{-1}\underline{\mathbf{H}}\{\tilde{p}\} \quad (38)$$

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Direita}} = \underline{\mathbf{C}}\{\tilde{p}\} + \underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{G}}^{-1}\underline{\mathbf{H}}\{\tilde{p}\} \quad (39)$$

Podemos, então, reescrever as Eqs. (38) e (39), como:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esquerda}} = \underline{\mathbf{T}}_{\text{Esquerda}} \{\hat{p}\} \quad (40)$$

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Direita}} = \underline{\mathbf{T}}_{\text{Direita}} \{\hat{p}\} \quad (41)$$

onde $\underline{\mathbf{T}}_{\text{Esquerda}} = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{G}}^{-1}\underline{\mathbf{H}}$ e $\underline{\mathbf{T}}_{\text{Direita}} = \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{G}}^{-1}\underline{\mathbf{H}}$, são as “*matrizes de transmissibilidade*”. Assim, podemos escrever um sistema algébrico global, onde a pressão está apenas em função do ponto de colocação, como:

$$\underset{\sim}{T} \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q} \quad (42)$$

onde, $\underset{\sim}{T}$ representa a matriz de transmissibilidade global, $\underset{\sim}{P}$ o campo de pressões nos pontos de colocação dos volumes de controle e $\underset{\sim}{Q}$ representa o termo fonte/sumidouro e/ou as condições de contorno.

3.2.4 Suporte Completo para a Pressão: MPFA-FPS

No método MPFA-O a pressão é calculada através de um conjunto de funções lineares definidas em elementos triangulares, ou seja, existem regiões onde a pressão é extrapolada, em problemas onde o tensor de permeabilidade apresenta elevada razão de anisotropia, ou, quando a malha possui elevada razão de aspecto, o campo de pressão pode apresentar soluções não físicas (Chen et al., 2008). Nesta seção será apresentado o método MPFA-FPS (*full suporte pressure*), este método aproxima o campo de pressão por um conjunto de funções bilineares que oferece um suporte completo a região de interação (Souza, 2015).

Considere uma região de interação associada a um vértice “**o**”, formada a partir dos pontos de colocação $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ e pelos pontos auxiliares $\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ (Figura 6a). Novamente iremos calcular a vazão que atravessa a meia aresta $O\hat{e}$. O primeiro passo é construir um espaço mapeado em coordenadas generalizadas ξ, η onde calcula-se a pressão “p” e o vetor posição $\vec{d} = (x, y)$ no subdomínio $\square_{1234}$ (Figura 6c), assim temos:

$$p(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) p_1 + \xi(1 - \eta) p_2 + (\xi\eta) p_3 + \eta(1 - \xi) p_4 \quad (43)$$

$$\vec{d}(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) \vec{d}_1 + \xi(1 - \eta) \vec{d}_2 + (\xi\eta) \vec{d}_3 + \eta(1 - \xi) \vec{d}_4 \quad (44)$$

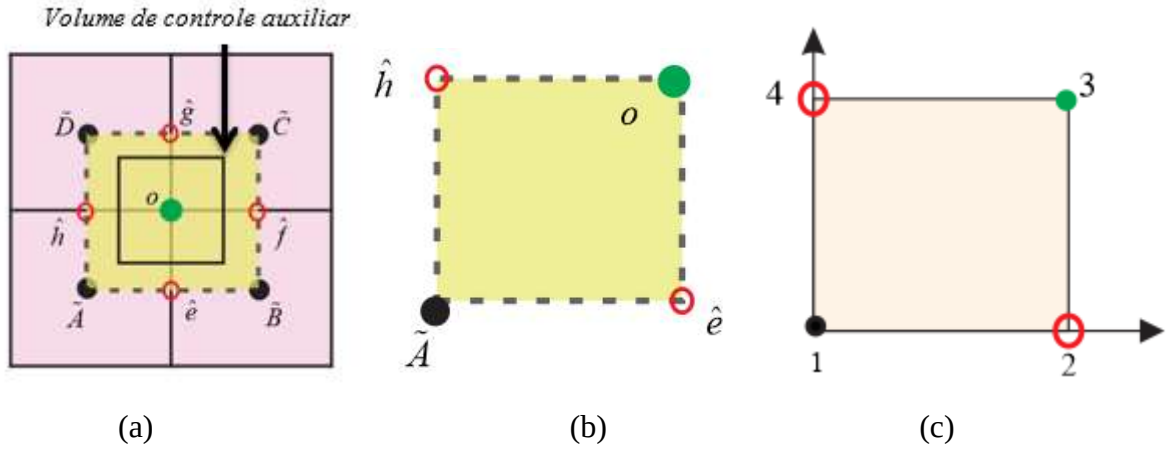
Derivando a pressão e vetor posição na direção x e y com relação a ξ, η a equação (43) e 44, transforma-se em:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = (1 - \eta)(p_2 - p_1) + \eta(p_3 - p_4); \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = (1 - \xi)(p_4 - p_1) + \xi(p_3 - p_2) \quad (45)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (1-\eta)(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_4); \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = (1-\xi)(x_4 - x_1) + \xi(x_3 - x_2) \quad (46)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = (1-\eta)(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_4); \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = (1-\xi)(y_4 - y_1) + \xi(y_3 - y_2) \quad (47)$$

Figura 6. Esquema do método MPFA-FPS: a) Região de iteração associada ao vértice O; b) Sub-Região de Interação espaço físico; c) Espaço mapeado.



Por definição (Edward et al. 2008), podemos escrever o gradiente de pressão na sub-região $\square \hat{A}\hat{e}o\hat{h}$, em coordenadas generalizadas, como:

$$\vec{\nabla} p(x, y) = J_{\square \hat{A}\hat{e}o\hat{h}}^{-1} \vec{\nabla} p(\xi, \eta) \quad (48)$$

onde a inversa da matriz Jacobiana dada por:

$$J_{\square \hat{A}\hat{e}o\hat{h}}^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \dots \quad (49)$$

$$= \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} (1-\xi)(y_4 - y_1) + \xi(y_3 - y_2) & (1-\eta)(y_1 - y_2) + \eta(y_4 - y_3) \\ (1-\xi)(x_1 - x_4) + \xi(x_2 - x_3) & (1-\eta)(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_4) \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que as coordenadas ξ e η são escritas em função do ponto de quadratura (δ) onde cada fluxo é calculado. Temos que δ é um parâmetro normalizado, que pode variar ao longo da meia aresta ($0 < \delta \leq 1$). Para maiores informações ler Edward et al. (2008) e Souza (2015).

Assim o fluxo na meia aresta $O\hat{e}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{O\hat{e}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} &= -\lambda_T K_{\hat{A}} \vec{\nabla} p_{\hat{A}\hat{e}o\hat{h}} \cdot \vec{N}_{O\hat{e}} = T_1^{O\hat{e}}(\delta) \frac{\partial p}{\partial \xi} + T_2^{O\hat{e}}(\delta) \frac{\partial p}{\partial \eta} = \\ T_1^{O\hat{e}} &\left(\delta (p_{\hat{e}} - p_{\hat{A}}) + (1 - \delta) (p_O - p_{\hat{e}}) \right) + T_2^{O\hat{e}} (p_O - p_{\hat{h}}) \end{aligned} \quad (50)$$

onde, $T_1^{O\hat{e}}$ e $T_2^{O\hat{e}}$ são os componentes do tensor de Piola, para maiores detalhes ver os trabalhos do Edwards e Zheng (2008) e de Souza (2015). Assim temos:

$$T_i^{O\hat{e}} = \frac{1}{\det(J_{\hat{A}\hat{e}o\hat{h}})} \left[\begin{aligned} &k_{11}^{\hat{A}} \frac{\partial y}{\partial m}(\delta) \vec{N}_{O\hat{e}_x} - k_{12}^{\hat{A}} \left(\frac{\partial x}{\partial m}(\delta) \vec{N}_{O\hat{e}_x} - \frac{\partial y}{\partial m}(\delta) \vec{N}_{O\hat{e}_y} \right) - \dots \\ &- k_{22}^{\hat{A}} \frac{\partial x}{\partial m}(\delta) \vec{N}_{O\hat{e}_y} \end{aligned} \right] \quad (51)$$

onde $\vec{N}_{O\hat{e}_x}$ e $\vec{N}_{O\hat{e}_y}$ são as componentes cartesianas do vetor normal $\vec{N}_{O\hat{e}}$, m é a coordenada generalizada ξ ou η para $T_i^{O\hat{e}}$, onde $i=1,2$.

Obtido o fluxo $\vec{v}_{O\hat{e}}$ calculam-se os fluxos $\vec{v}_{O\hat{f}}, \vec{v}_{O\hat{g}}, \vec{v}_{O\hat{h}}$. Assim, novamente podemos generalizar a vazão a esquerda que atravessa as meias arestas da região de interação avaliada como:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esquerda}} = \mathbb{A} \{ \tilde{p} \} + \mathbb{B} \{ \hat{p} \} \quad (52)$$

onde matriz $\mathbb{A}$ é uma matriz de transmissibilidade e o número de linhas é equivalente ao número de meias-arestas, o número de colunas é equivalente ao número de volumes de controle presentes na região de interação avaliada. A matriz $\mathbb{B}$ é uma matriz de transmissibilidade, onde o número de colunas é equivalente ao número de meias-arestas mais um. Assim, a matriz $\mathbb{B}$ não é quadrada como ocorre no MPFA-O.

De forma análoga calculamos o fluxo à direita que representa as vazões nas meias-arestas $\hat{e}O$, $\hat{f}O$, $\hat{g}O$ e $\hat{h}O$. Este pode ser escrito de forma matricial, como:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Direita}} = \mathcal{C} \{ \tilde{p} \} + \mathcal{D} \{ \hat{p} \} \quad (53)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para o MPFA-O, reescrevemos um sistema matricial onde a pressão auxiliar está em função da pressão de colocação:

$$\mathcal{G}_{FPS} \{ \tilde{p} \} = \mathcal{H}_{FPS} \{ \hat{p} \} \quad (54)$$

No entanto, a matriz $\mathcal{G}_{FPS}$ não é quadrada, visto que ganhamos um grau de liberdade ao considerar o vértice “o” como uma incógnita. Para que o sistema tenha solvabilidade, necessitamos de uma nova equação.

Assim, cria-se uma região de interação auxiliar associada ao vértice “o” e calcularemos o fluxo na meia aresta $\hat{l}\hat{r}$ garantido a solvabilidade do sistema de equações. Os parâmetros ξ e η são escritos em função de coordenadas paramétricas, de forma que:

$$\xi = 1 - \tau; \quad \eta = 1 - \tau(1 - \gamma) \quad (55)$$

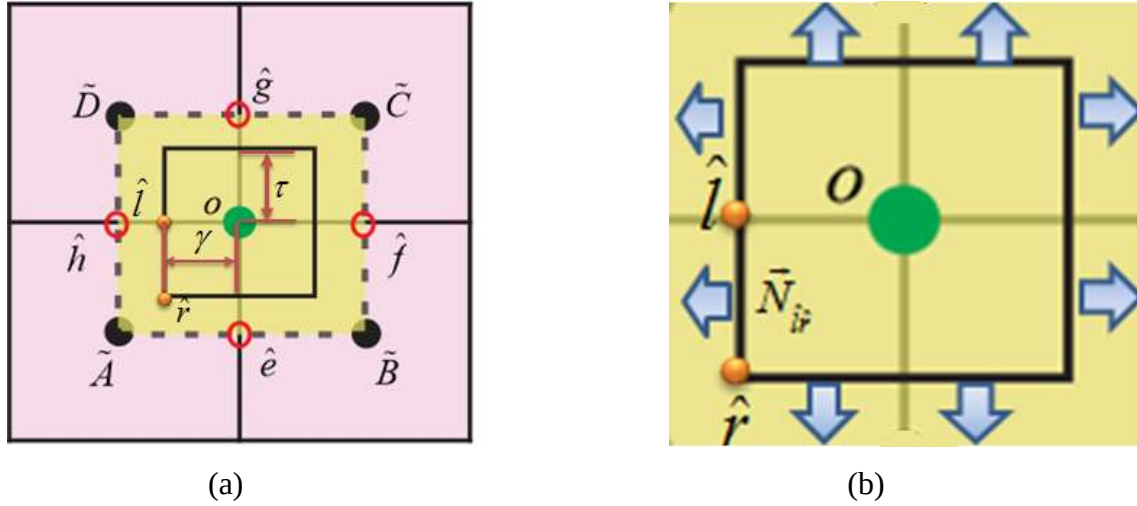
onde τ representa o tamanho do volume de controle auxiliar que varia entre $(0,1]$, e γ é o ponto na quadratura definido ao longo da aresta avaliada que varia entre 0 e 1. Assim, a vazão na aresta auxiliar $\hat{l}\hat{r}$ (Figura 7b) pode ser reescrita como segue:

$$\vec{v}_{\hat{l}\hat{r}} \cdot \vec{N}_{\hat{l}\hat{r}} = -\lambda_{\hat{l}\hat{r}} \tau \left[T_{11}^{\hat{A}} \left(\tau(1-\gamma)(p_{\hat{b}} - p_{\hat{a}}) + (1-\tau(1-\gamma))(p_{\hat{a}} - p_{\hat{h}}) \right) + T_{12}^{\hat{A}} \left(\tau(p_{\hat{h}} - p_o) + (1-\tau)(p_o - p_{\hat{b}}) \right) \right] \quad (56)$$

Assim, apresentamos diferentes formas para discretizar o problema de fluxo associado à equação elíptica de pressão. Usaremos as formulações TPFA (*Two Point Flux Approximation*) para calcular o campo de pressão em meios heterogêneos e isotrópicos e utilizaremos as formulações o MPFA-O e o MPFA-FPS (*Full Pressure Support*) para a simulação de reserva-

tórios heterogêneos e anisotrópicos. Todos os resultados numéricos obtidos utilizando as formulações multiescala serão mostrados na seção de resultados.

Figura 7. a) Volume de controle auxiliar no método MPFA-FPS; b) Indicação dos fluxos através das superfícies de controle no volume de controle auxiliar avaliado.



3.3 EQUAÇÃO HIPERBÓLICA DA SATURAÇÃO NA SUA FORMA DISCRETA

Nesta seção apresentamos a formulação numérica da equação hiperbólica de saturação. Integrando a Equação de Saturação, Eq. (5), no intervalo de tempo entre t e t_0 no domínio Ω avaliado, temos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (f_{Rw} \vec{v}) \partial \Omega \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} Q_w \partial \Omega \partial t \quad (57)$$

A Equação (57) pode ser reescrita como:

$$\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \vec{\nabla} \cdot (f_{Rw} \vec{v}) \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}_i} \partial t \quad (58)$$

onde $\mathcal{N}_{VC}$ é o número de volumes de controle avaliados. Utilizando o Teorema da Divergência de Gauss no primeiro termo do lado direito da Eq. (58), para um volume de controle $\hat{V}$ avaliado, temos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\hat{V}}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}} \partial t = -\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_{\hat{V}}} (f_{Rw} \vec{v}) \cdot \vec{n} \partial \Gamma_{\hat{V}} \partial t + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}} \partial t \quad (59)$$

Integrando a Eq. (59) no intervalo de tempo determinado usando o Teorema do Valor Médio e a aproximação de Euler Avançada na derivada temporal, temos que:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\hat{V}}} \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{V}} \partial t = (S_{w_{\hat{V}}}^{n+1} - S_{w_{\hat{V}}}^n) \Omega_{\hat{V}} \quad (60)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_{\hat{V}}} (f_{Rw} \vec{v}) \cdot \vec{n} \partial \Gamma_{\hat{V}} \partial t = \frac{\Delta t}{\phi} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} f_{Rw}(S_{w_{IJ}}^n) \vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (61)$$

$$\frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q_w \partial \Omega_{\hat{V}} \partial t = \frac{\bar{Q}_w \Delta t}{\phi} \quad (62)$$

onde $S_{w_{\hat{V}}}^{n+1}$ e $S_{w_{\hat{V}}}^n$ são os valores da saturação de água no volume de controle avaliado nos instantes de tempo n e $n+1$, $\Omega_{\hat{V}}$ é a área (volume em domínios 3D), $\bar{Q}_w$ o valor médio do termo de fonte ou sumidouro e $\Delta t = t - t_0$, representa o intervalo de tempo considerado.

Assim, substituindo as Eqs. (60), (61) e (62) na Eq. (59), podemos escrever a Equação de Saturação na forma discreta, como:

$$S_{w_{\hat{V}}}^{n+1} = S_{w_{\hat{V}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi \Omega_{\hat{V}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} \left[f_{Rw}(S_{w_{IJ}}^n) \vec{v} \cdot \vec{N}_{IJ} \right] + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi \Omega_{\hat{V}}} \quad (63)$$

ou:

$$S_{w_{\hat{V}}}^{n+1} = S_{w_{\hat{V}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi \Omega_{\hat{V}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{V}}} \left[\vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right] + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi \Omega_{\hat{V}}} \quad (64)$$

onde $\vec{F}_{IJ} = f_{Rw}(S_{w_{IJ}}^n) \vec{v}$ é os fluxos numéricos, calculados em cada aresta IJ do volume de controle avaliado (Souza, 2015). É importante ressaltar que o passo de tempo deve atender a

uma condição de estabilidade adequada. Neste trabalho utilizamos a condição de estabilidade linear de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), assim o intervalo de tempo é obtido por:

$$\Delta t_i \leq C \frac{|\Delta \vec{x}|}{|\vec{v}| \left(\Delta f_{Rw}(S_w^n) / \Delta S_w^n \right)} \quad (65)$$

onde C é o número de Courant, $|\Delta \vec{x}|$ é o módulo do vetor posição entre os centroides de dois volumes de controles que compartilham a aresta IJ avaliada, $|\vec{v}|$ é a norma do vetor velocidade.

Uma forma de discretizar o termo advectivo da equação de transporte é utilizando o método de Ponderação à Montante (*upwind*), onde a discretização é feita seguindo a orientação da malha, sendo direcionada de acordo com o sinal da velocidade de propagação da perturbação. Assim os fluxos numéricos são definidos nas interfaces dos volumes de controle (onde ocorre a descontinuidade da variável) e dois estados são avaliados como na Eq. (66), onde o valor da variável à esquerda da aresta recebe o índice “-”, e à direita, atribuímos o índice “+”. No método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (FOUM), a saturação de água na superfície de controle avaliada (aresta IJ), $S_{w_{IJ}}$, é definida a partir das saturações de água nos volumes de controle à esquerda, S_w^- , ou à direita, S_w^+ , como:

$$S_{w_{IJ}} = \begin{cases} S_w^{\hat{L}} \text{ ou } S_w^-, & \text{se } \left(\frac{\partial f_{Rw}(S_w)}{\partial S_w} \Big|_{IJ} \right) \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} > 0 \\ S_w^{\hat{R}} \text{ ou } S_w^+, & \text{se } \left(\frac{\partial f_{Rw}(S_w)}{\partial S_w} \Big|_{IJ} \right) \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} < 0 \end{cases} \quad (66)$$

onde $\tilde{S}_w^-$ e $\tilde{S}_w^+$ representam, respectivamente, os valores de saturação de água reconstruídos à esquerda e à direita da face IJ avaliada.

No método de Ponderação de Segunda Ordem com a aproximação tipo MUSCL, a saturação de água na superfície de controle avaliada, $S_{w_{IJ}}$, é obtida, por:

$$S_{w_{IJ}} = \begin{cases} \bar{S}_w^-, & \text{se } \left| \frac{df_{Rw}(S_w)}{dS_w} \right|_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} > 0 \\ \bar{S}_w^+, & \text{se } \left| \frac{df_{Rw}(S_w)}{dS_w} \right|_{IJ} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} < 0 \end{cases}, \text{ com } \left. \frac{df_{Rw}(S_w)}{dS_w} \right|_{IJ} = \frac{f_{Rw}(\bar{S}_w^+) - f_{Rw}(\bar{S}_w^-)}{\bar{S}_w^+ - \bar{S}_w^-} \quad (67)$$

onde $\bar{S}_w^-$ e $\bar{S}_w^+$ representam, respectivamente, os valores de saturação de água reconstruídos à esquerda e à direita da face IJ avaliada. Detalhes sobre as estratégias de reconstrução linear (segunda ordem) são apresentados nas próximas seções.

3.3.1 Aproximações de Alta Ordem com uma Estratégia do tipo MUSCL

A forma mais comum de discretizar o termo advectivo da equação hiperbólica da saturação é usando os métodos clássicos de *upwind* de primeira ordem essas técnicas são capazes de eliminar oscilações espúrias e produzir soluções monótonas, no entanto, produzem quantidades consideráveis de difusão numérica (Edwards e Zheng, 2008). Por outro lado, esquemas estritamente de alta ordem podem produzir soluções não físicas em regiões com brusca variação do campo de saturação (Carvalho, 2005; Souza, 2015). Portanto, é fundamental desenvolver métodos de alta ordem monótonos. Nesta seção, apresentaremos de forma sucinta, uma variação do método de alta ordem para volumes finitos (*Higher Order Finite Volume -HOFV*) do tipo MUSCL (*Monotone Upstream Centered Scheme for Conservation Laws*) proposto por van Leer (1979), que é baseado na reconstrução do gradiente obtido pelos mínimos quadrados e a monotonicidade é garantida através do limitador apropriado. Para maiores detalhes de MUSCL ver Blazek (2001).

Podemos definir uma aproximação de primeira ordem para o fluxo hiperbólico como:

$$\int_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot \vec{n} d\Gamma_k \cong \sum_{IJ \in \Gamma_k} \vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \sum_{IJ \in \Gamma_k} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\vec{F}_{IJ}^{\hat{L}}(S_{w,\hat{L}}) + \vec{F}_{IJ}^{\hat{R}}(S_{w,\hat{R}}) \right) \cdot \vec{N}_{IJ} - \alpha_{IJ} (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) \right) \right) \quad (68)$$

onde $S_{w,\hat{L}}$ e $S_{w,\hat{R}}$ representam os valores da saturação de água nos volumes de controle adjacentes à superfície de controle $\vec{IJ}$, $\vec{F}_{IJ}^{\hat{L}}$ e $\vec{F}_{IJ}^{\hat{R}}$ são os fluxos à esquerda ($\hat{L}$) e à direita ($\hat{R}$) de

$\vec{IJ}$, o termo $\alpha_{IJ} (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})$ corresponde à dissipação artificial necessária para estabilizar o método, onde a velocidade da onda, α_{IJ} , na superfície de controle é aproximada por:

$$\alpha_{IJ} = \begin{cases} \left| \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right| \left(\frac{f_{Rw}^{\hat{R}}(S_{w,\hat{R}}) - f_{Rw}^{\hat{L}}(S_{w,\hat{L}})}{S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}} \right), & S_{w,\hat{R}} \neq S_{w,\hat{L}} \\ 0, & S_{w,\hat{R}} = S_{w,\hat{L}} \end{cases} \quad (69)$$

Através de uma reconstrução linear das saturações nas faces e manipulações matemáticas, ver tese de Blazek (2001), chegamos a equação (70), que é uma aproximação do fluxo hiperbólico de ordem superior, assim:

$$\sum_{IJ \in \Gamma_k} \vec{F}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \sum_{IJ \in \Gamma_k} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\vec{F}_{IJ}^{\hat{L}+}(S_{w,\hat{L}}^+) + \vec{F}_{IJ}^{\hat{R}-}(S_{w,\hat{R}}^-) \right) \cdot \vec{N}_{IJ} - \alpha_{IJ}^+ (S_{w,\hat{R}}^- - S_{w,\hat{L}}^+) \right) \right) \quad (70)$$

Para evitar oscilações espúrias nas regiões com grandes variações do campo de saturação, utilizamos limitadores de modo que o método de alta ordem mude automaticamente para um método de primeira ordem, mas esse método pode produzir soluções não monótonas especialmente em malhas muito distorcidas ou em meios altamente anisotrópicos (Carvalho et al., 2006). A fim de evitar tal problema, foi utilizado uma combinação de dois tipos de limitadores (Woodfield et al., 2004), de modo que o limitador passa a ter a seguinte forma:

$$\psi_i^* = \psi_i \psi_{IJ}^{\hat{i}} \quad (71)$$

Na equação (71), ψ_i^* é uma função que pode ser ativada entre 1 (método de alta ordem) e 0 (método de baixa ordem). $\psi_{IJ}^{\hat{i}}$ garante que o valor extrapolado da saturação na superfície de controle permaneça entre $S_{w,\hat{L}}$ e $S_{w,\hat{R}}$. A função ψ_i (Eq. (72)) é responsável por ativar o método de primeira ordem sempre que é necessário para garantir a monotonicidade, assim temos:

$$\psi_{\hat{i}} = \begin{cases} 1 & \text{if } (S_{w,\max} - S_{w,\min}) \leq \varepsilon_1 \\ 0 & \text{if } \gamma_{\hat{i}} \geq 1 \text{ or } \gamma_{\hat{i}} \leq 0 \\ 1 & \text{if } \delta \leq \gamma_{\hat{i}} \leq (1-\delta) \\ \gamma_{\hat{i}}/\delta & \text{if } 0 < \gamma_{\hat{i}} < \delta \\ (1-\gamma_{\hat{i}})/\delta & \text{if } (1-\delta) < \gamma_{\hat{i}} < 1 \end{cases} \quad (72)$$

O parâmetro $\gamma_{\hat{i}}$ é definido como:

$$\gamma_{\hat{i}} = \frac{S_{w,\hat{i}} - S_{w,\min}}{S_{w,\max} - S_{w,\min}} \quad (73)$$

onde o denominador $S_{w,\max} - S_{w,\min}$ expressa a diferença máxima entre as saturações dos volumes de controle vizinhos a $\hat{i}$, em cada passo de tempo e $S_{w,\max}$, $S_{w,\min}$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo da saturação.

$$0 \leq \gamma_{\hat{i}} \leq 1 \quad (74)$$

Neste trabalho foi utilizado $\delta = 0.2$, com base no trabalho de Woodfield et al. (2004). Por fim, para garantir soluções limitadas, utilizamos uma variação do limitador de face de Van Albada (Carvalho, 2006; Lönher, 2001).

$$\psi_{IJ}^{\hat{L}} = \max \left(0, \frac{2\Delta_{\hat{L}}^- (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) + \varepsilon_2}{\Delta_{\hat{L}}^{-2} + (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})^2 + \varepsilon_2} \right) \quad (75)$$

$$\psi_{IJ}^{\hat{R}} = \max \left(0, \frac{2\Delta_{\hat{R}}^+ (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}}) + \varepsilon_2}{\Delta_{\hat{R}}^{+2} + (S_{w,\hat{R}} - S_{w,\hat{L}})^2 + \varepsilon_2} \right) \quad (76)$$

onde ε_2 é um parâmetro muito pequeno usado somente para evitar a divisão por zero em regiões suaves do escoamento.

3.4 LINHAS DE CORRENTE (*STREAMLINES*)

Em cada passo de tempo, resolver a equação elíptica da pressão implicitamente requer um maior custo computacional do que as equações de transporte explicitamente. No entanto resolver as equações de transporte utilizando técnicas rápidas pode ter um papel crucial para diminuir o tempo total de simulação do escoamento do fluido (Kippe et al., 2008). As técnicas de linhas de corrente (*Streamlines*) foram desenvolvidas para resolver a equação de transporte de maneira eficiente e acurada. O baixo custo computacional do método das linhas de correntes deve-se ao desacoplamento da equação de transporte em múltiplas equações 1d, além de remover a restrição de estabilidade CFL da malha fina. Atualmente vários pesquisadores uniram o método multiescala ao *streamlines*, Kippe et al., (2008) mostraram que o uso das técnicas multiescala na pressão aliados ao método de *streamlines* na saturação tem o mesmo custo computacional que os métodos *upscaling* quando utilizamos métodos de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (FOUM) na saturação. Assim, com o objetivo de resolvermos a equação de fluxo e transporte de forma eficiente e acurada, implementamos as técnicas *Streamlines* para calcular a equação hiperbólica da saturação.

As linhas de corrente (*Streamlines*) podem ser definidas como linhas tangentes aos vetores de velocidade num determinado instante de tempo. Assim, nessa seção apresentaremos uma forma de resolver a equação de transporte utilizando as linhas de corrente.

3.4.1 Construção das linhas de corrente

Como usaremos malhas estruturadas em nossas simulações, utilizaremos o método de Pollack (Bernado, 2008; Teixeira, 2015). A velocidade intersticial do fluido ($\vec{v}$) é definida por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\phi_p} \quad (77)$$

onde $\vec{u}$ é a componente da velocidade numa direção x ou y, e ϕ_p a porosidade. Em cada face do volume de controle temos uma componente do vetor velocidade (Figura 8a):

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{n}_i \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4 \quad (78)$$

sendo $\vec{n}_i$ a normal na direção i .

Para descobrir a trajetória da linha calculamos os gradientes de velocidade dentro do volume de controle avaliado (Teixeira, 2015):

$$m_x = \frac{(v_3 - v_1)}{\Delta x} \quad (79)$$

$$m_y = \frac{(v_4 - v_2)}{\Delta y} \quad (80)$$

sendo o Δx e Δy os comprimentos das faces x e y avaliadas.

Desejamos determinar o tempo de voo no interior do volume de controle avaliado, ou seja, o tempo que a partícula se desloca de uma posição “a” para outra “b”. A velocidade pode ser definida como:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dt}{\phi_p}; \quad e \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dt}{\phi_p} \quad (81)$$

onde dt é a variação do tempo de voo no interior do volume de controle avaliado.

Integrando a equação (81) o “tempo de voo” de cada face pode ser obtido por:

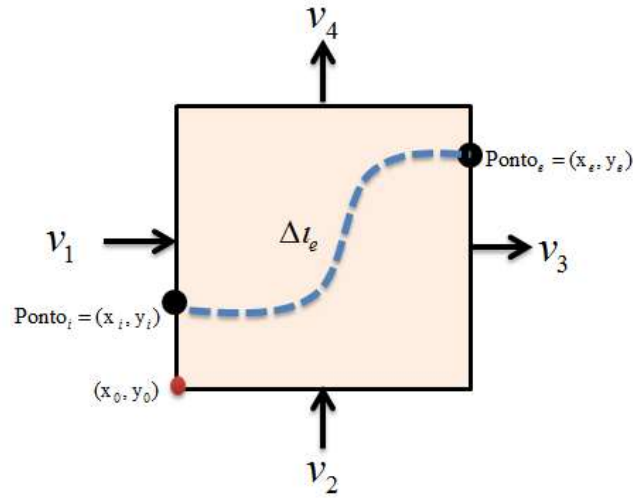
$$\frac{\Delta t_{e,x}}{\phi_p} = \int_{x_i}^{x_e} \frac{dx}{v_1 + m_x(x - x_o)} = \frac{1}{m_x} \left[\frac{v_1 + m_x(x_e - x_o)}{v_1 + m_x(x_i - x_o)} \right] \quad (82)$$

$$\frac{\Delta t_{e,y}}{\phi_p} = \int_{y_i}^{y_e} \frac{dy}{v_2 + m_y(y - y_o)} = \frac{1}{m_y} \left[\frac{v_2 + m_y(y_e - y_o)}{v_2 + m_y(y_i - y_o)} \right] \quad (83)$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas de entrada e (x_e, y_e) são as coordenadas de saída. O fluido sairá na face que apresentar menor tempo de voo:

$$\Delta t_e = \text{MinPositivo}(\Delta t_{1,x}, \Delta t_{2,x}, \Delta t_{1,y}, \Delta t_{2,y}) \quad (84)$$

Figura 8. Linha de corrente traçada



Determinado o menor tempo de voo (Δt_e), a coordenada de saída da linha de fluxo é determinada por:

$$x_e = x_0 + \frac{1}{m_x} \left(v_x(x_e) e^{m_x \Delta t_e / \phi} - v_x(x_0) \right) \quad (85)$$

$$y_e = y_0 + \frac{1}{m_y} \left(v_y(y_e) e^{m_y \Delta t_e / \phi} - v_y(y_0) \right) \quad (86)$$

No caso em que o gradiente em alguma direção ser nulo, a equação. (82) se transforma em:

$$\frac{\Delta t_{e,x}}{\phi_p} = \int_{x_i}^{x_e} \frac{dx}{v_1} = \frac{(x_e - x_i)}{v_1} \quad (87)$$

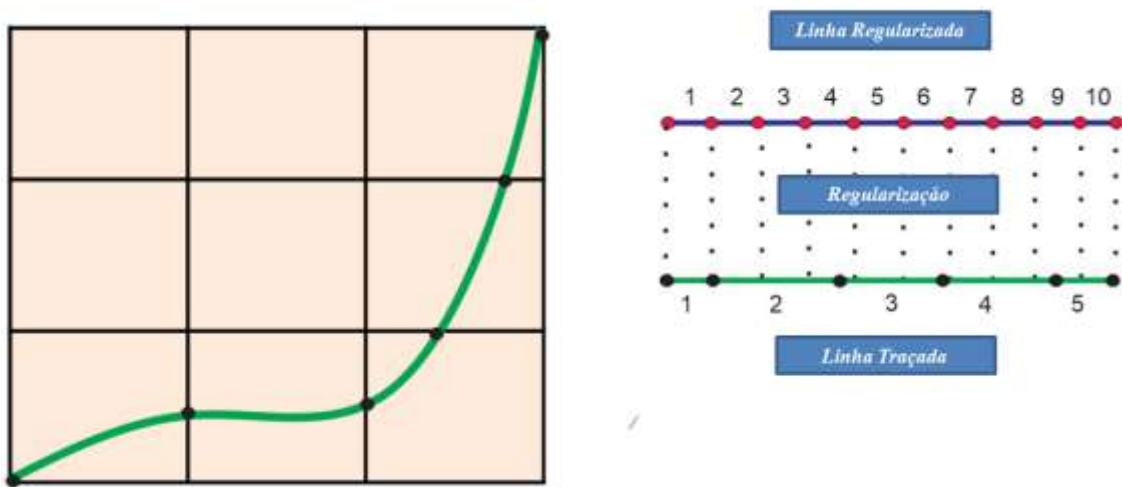
logo, a posição nesta direção será definida por:

$$x_e = x_0 + v_1 \Delta t_e / \phi_p \quad (88)$$

3.4.2 Regularização das linhas de corrente

Depois de traçar a linha de corrente, o próximo passo é calcular a saturação em cada linha. Para garantir que o problema seja conservativo, é preciso regularizar a linha traçada em intervalos de tempos de voos constantes/regulares. Esta nova linha é denominada de “Linha Regularizada”, ela é composta por um múltiplo de nós da linha traçada (Beraldo, 2008). Para problemas incompressíveis este múltiplo é dois (Beraldo, 2008; Teixeira, 2015).

Figura 9. Exemplo representativo do processo de regularização da linha de corrente



Podemos observar na Figura 9 o processo de regularização da linha, temos uma linha traçada com seis pontos e cinco trechos e uma linha regularização com dez trechos e nove pontos. Quando um trecho da linha regularizada está contido num trecho da linha traçada, a saturação da linha regularizada é copiada da linha traçada. Quando a linha regularizada contém vários trechos da linha traçada a saturação é dada por:

$$s_w^{sl} = \frac{\sum_j S_w(t_j - t_{j-1})}{\Delta t} \quad (89)$$

onde s_w^{sl} é a saturação de água da linha de corrente, t é o tempo de voo regularizado da linha de fluxo, e j é o trechos regularizados avaliado.

3.4.3 Solução da equação de transporte sobre as linhas de corrente

Depois de regularizarmos a linha de corrente e termos calculado s_w^{sl} , a saturação no tempo $n+1$ dada por:

$$(s_w^{sl})_i^{(n+1)} = (s_w^{sl})_i^{(n)} + \frac{\Delta t_{sl}}{\Delta t} [(f_{Rw}^{sl})_i^n - (f_{Rw}^{sl})_{i-1}^n] \quad (90)$$

onde f_{Rw}^{sl} e $(f_{Rw}^{sl})_{i-1}^n$ são os fluxos fracionais da água à montante e à jusante do segmento da linha regularizada e Δt_{sl} é o passo de tempo dado por:

$$\Delta t_{sl} = \frac{C \Delta t}{v_{\max}^w} \quad (91)$$

onde $v_{\max}^w$ é a velocidade de choque máxima expressa por:

$$v_{\max}^w = \left[\frac{(f_{Rw}^{sl})_i^n - (f_{Rw}^{sl})_{i-1}^n}{(s_{Rw}^{sl})_i^{(n+1)} - (s_{Rw}^{sl})_i^{(n)}} \right]_{\max} \quad (92)$$

3.4.4 Cálculo da vazão na linha de corrente e mapeamento da vazão para a malha de simulação

Após obtermos a saturação na linha de corrente regularizada, o próximo passo é calcular a saturação na linha traçada. Ou seja, calcularemos a saturação em cada trecho linha traçada, com base nos valores da saturação da linha regularizada, assim obteremos o valor da saturação na linha traçada, usando a Equação (90).

Com a saturação obtida em cada linha traçada, calcularemos a vazão em cada linha de corrente (q_{sl}) num volume de controle, que é dado por:

$$q_{sl} = \frac{f_{scv}}{n_{scv}^{sl}} \quad (93)$$

onde f_{scv} é o fluxo de saída de um segmento do volume de controle e n_{scv}^{sl} o número de segmentos da linha lançada.

Assim, a saturação em cada volume de controle é dada por:

$$(s_w^{el}) = \frac{\sum_i^{n^{sl}} \Delta t q_i^{sl} s_{wi}^{sl}}{\sum_i^{n^{sl}} \Delta t q_i^{sl}} \quad (94)$$

4 CONCEITOS BÁSICOS DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS MULTIESCALA (MSFVM)

4.1 APROXIMAÇÃO MULTIESCALA

Nesta seção, apresentamos, em detalhes, a variante do MsFVM proposta originalmente por Jenny et al. (2006), mas com as modificações propostas por Zhou (2010). Inicialmente, decidimos pelo estudo e implementação desta variante do MsFVM, pois a mesma:

- Garante conservação local da massa nas diferentes escalas;
- Utiliza operadores de prolongamento e restrição que transmitem as informações entre as diferentes escalas (fina e grossa) por meio de operações algébricas matriciais, relativamente simples e elegantes;
- Permite a extensão para escoamentos compressíveis de maneira bastante direta, sem a necessidade de tratamento especial para o termo de compressibilidade como em outros MsFVM;
- Pode ser estendido de maneira mais natural para malhas não-estruturadas além de, na teoria, poder ser adaptado mais facilmente para os simuladores de reservatório já existentes no mercado, do que outras formulações do MsFVM, tendo em vista que no OBMM é desenvolvido um arcabouço algébrico geral para a obtenção de soluções multiescala (matricialmente);
- Pode ser utilizado como uma ferramenta de *Upscaling* (i.e., de transferência de escala) geral e poderosa além de poder ser utilizado como um modelo substituto bastante acurado e, potencialmente, competitivo, e complementar a outras técnicas, como, por exemplo, as “*Streamlines*” (Linhas de Fluxo).

Para a compreensão do MsFVM, na sua versão OBMM, conceitos básicos como: tipos de malhas (primal fina, primal grossa e dual grossa), funções de base, funções de correção, etc., serão apresentados a seguir.

4.2 ALGORITMO GERAL PARA UMA ESTRATÉGIA DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA (MSFVM)

Assumindo que a estratégia multiescala está restrita apenas à solução do problema de pressão, com o problema de transporte (i.e., saturação) sendo resolvido diretamente na malha

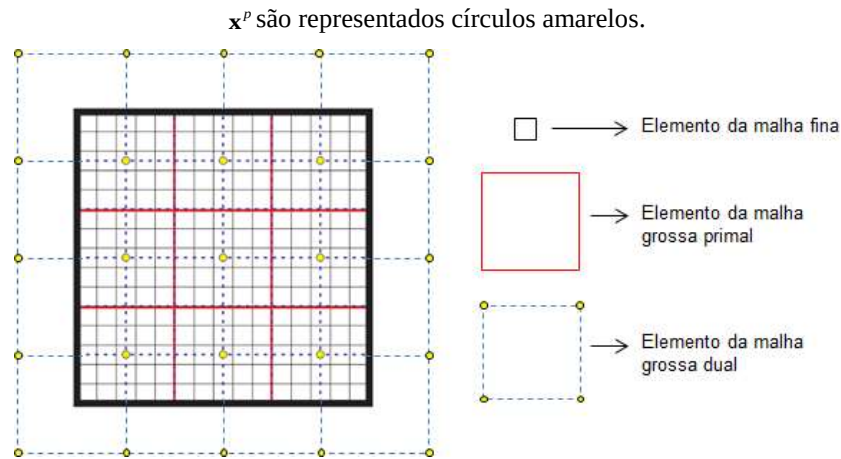
fina, o MsFVM pode ser descrito de maneira sintética através dos seguintes passos (Jenny et al., 2006, e Møyner, 2012):

1. Dado um domínio Ω , discretizado através de uma malha denominada fina, com n_f volumes de controle, constrói-se uma malha grossa primal com n_c volumes de controle;
2. A partir da malha grossa primal uma malha grossa dual é construída;
3. Para cada volume da malha grossa primal, um conjunto de funções, ϕ_i^l , denominadas funções de base, é construído e associado a um problema de pressão local;
4. Através das funções de base, constrói-se um operador de prolongamento (matricial), que transferirá dados da malha grossa para a malha fina;
5. Constrói-se também um operador de restrição que transmitirá informações da malha fina para a malha grossa (matricial);
6. Monta-se a matriz de transmissibilidades da malha fina;
7. Calcula-se a transmissibilidade da malha grossa, através dos operadores de prolongamento, restrição e da matriz de transmissibilidade da malha fina;
8. Calcula-se o campo de pressão na malha grossa;
9. A pressão na malha fina é reconstruída através da aplicação do operador de prolongamento no campo de pressões da malha grossa;
10. Para garantir a conservação local da massa em todos os volumes de controle, em todas as escalas, recalcula-se a pressão nos volumes da malha grossa primal, usando os valores da pressão conhecidos para definir condições de contorno de Neumann nas interfaces dos volumes da malha grossa primal (Problema de Neumann);
11. Com o campo de velocidade conservativo (passo 10), calcula-se a velocidade na malha fina. Essa velocidade é utilizada para calcular as equações de transporte (saturação ou concentração) na malha fina;
12. Calcula-se a saturação ou a concentração na malha fina (avanço no passo de tempo);
13. Com a mudança da mobilidade em cada passo de tempo, verifica-se a necessidade de se recalcular ou não as funções de base, caso seja preciso, as funções de base são recalculadas apenas nos volumes da malha grossa dual que apresentarem variações de mobilidade acima de uma tolerância previamente determinada, e volta-se ao passo 3.

4.3 DEFINIÇÕES DAS MALHAS PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA

No MsFVM, estudado no presente trabalho, existem diferentes tipos de malhas que precisam ser definidas para que o método seja corretamente implementado, conforme mostrado na Figura 10.

Figura 10. Domínio Ω , elementos malha fina (Ω^f) - linhas finas e pretas; malha grossa primal Ω_p^c - linhas vermelhas; e malha grossa dual Ω_d^c - linhas tracejadas azuis, e onde os pontos de colocação da malha grossa primal $\mathbf{x}^p$ são representados círculos amarelos.



Fonte

Malha Fina Primal (Ω): Considere um domínio Ω , discretizado espacialmente através de uma malha denominada de malha refinada ou simplesmente malha fina. Esta malha é mostrada na Figura 10 e, que neste exemplo ilustrativo, possui 15x15 volumes de controle quadriláterais definidos pelas linhas finas contínuas e pretas.

Malha Grossa Primal (Ω_p^c): É a malha criada a partir da malha fina primal, onde seus volumes são construídos aglomerando-se uma quantidade de elementos da malha fina original. Cada volume de controle da malha grossa primal contará com um ponto de colocação ($\mathbf{x}^p$) que estará localizado, em princípio, em seu centroide (esta escolha é “natural”, mas não é mandatória). Na Figura 10 a malha grossa primal possui (3x3) volumes de controle, sendo caracterizada pelas linhas contínuas vermelhas.

Malha Grossa Dual (Ω_d^c): É a malha criada a partir da malha grossa primal. Como dito anteriormente, cada volume da malha grossa primal tem um ponto de colocação ($\mathbf{x}^p$) localizado em seu centroide. Os volumes da malha grossa dual, Ω_d^c , são definidos de tal forma que seus vértices coincidam com os pontos de colocação dos volumes da malha grossa primal, desta forma, os pontos de colocação são também os vértices dos volumes da malha grossa dual. Na Figura 10 apresenta-se uma malha com 16 volumes de controle representados pelas linhas tracejadas azuis. Note que houve a necessidade de definição de volumes denominados “ghosts”, pois partes destes volumes são definidos fora do domínio Ω . Neste trabalho, é utilizada uma estratégia para o tratamento destes volumes, deslocando-se os pontos de colocação para as fronteiras do domínio Ω , eliminando a necessidade de definição de volumes de controle fantasmas. Este assunto será detalhado mais adiante.

Neste ponto é importante ressaltar que na utilização dos métodos multiescala, define-se uma relação entre o número de volumes das malhas fina, e grossa primal, denominada *Coarsening Ratio*, ou Razão de Engrossamento da malha, Cr , que é também chamado de “taxa de *upscaling*”, e que é dada por

$$Cr = n_f / n_c \quad (95)$$

onde, n_f é o número de volumes de controle na malha fina e n_c é o número de volumes na malha grossa primal.

4.4 FUNÇÕES DE BASE

Em geral, os métodos multiescala utilizam funções de base para representar problemas locais simplificados. As funções de base, ϕ_i^I , são definidas como soluções de problemas elípticos homogêneos em cada volume da malha grossa dual, definidos como a seguir:

$$-\nabla \cdot (\lambda \underline{K} \cdot \nabla \phi_i^I) = 0 \text{ em } \Omega_d^c \quad (96)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\lambda K \frac{\partial \phi_i^I}{\partial \tau} \right) = 0 \text{ em } \partial \Omega_d^c \quad (97)$$

$$\phi_i^I(x^p) = \delta_{ip} \quad (98)$$

onde o índice “ i ” representa o volume de controle da malha fina contido nos volumes da malha grossa dual, “ I ” é o índice que indica em qual volume de controle da malha grossa primal, a função está sendo definida, e τ indica a componente tangencial do fluxo na fronteira do volume grosseiro dual.

A Figura 11 apresenta um volume de controle de uma malha grossa dual (linha tracejada azul), sendo as funções de base definidas para cada vértice (círculos amarelos). Já a Figura 12 apresenta o comportamento das funções de base, nos volumes da malha grossa dual (4x4), num meio homogêneo, Figura 12 a, e num meio muito heterogêneo, Figura 12b.. Note que as funções de base capturam os efeitos da variação da permeabilidade, inclusive nos contornos, devido à imposição de condições de contorno oscilatórias.

Figura 11. Volume de controle da malha grossa dual Ω_d^c : As linhas tracejadas azuis representam a fronteira do domínio $\partial \Omega_d^c$, os pontos amarelos (x^p) são os vértices desse volume (ou pontos de correção do volume pertencente a malha grossa dual), e os pontos pretos x_i , são dos volumes da malha final contido neste volume de controle.

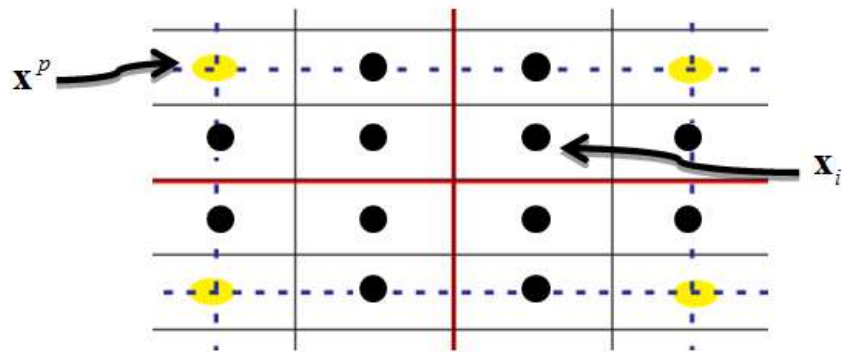
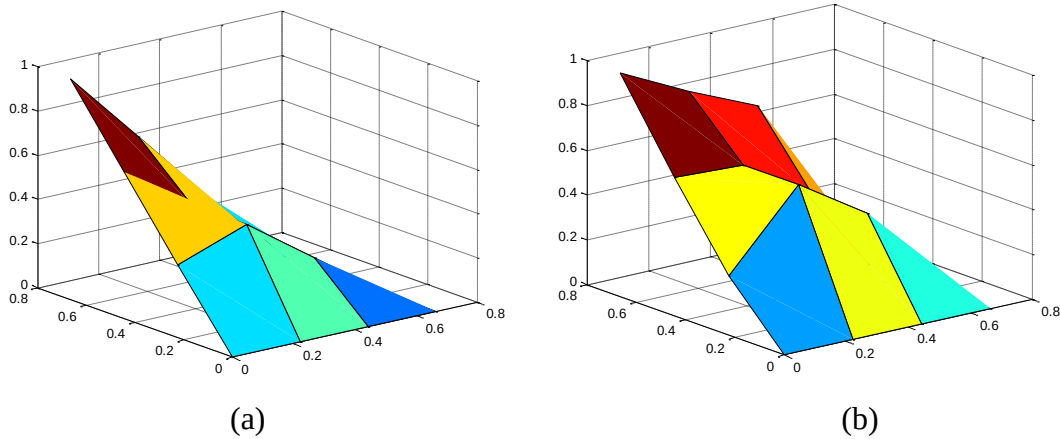


Figura 12. Funções de base em um volume de controle da malha grossa dual para: (a) meio homogêneo; (b) meio heterogêneo.



4.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO REDUZIDAS

Para resolver os problemas homogêneos (i.e., sistemas de equações locais com termos de fonte nulos) nos volumes de controle da malha dual, condições de contorno adequadas são necessárias. As condições de contorno utilizadas pelo MsFVM e MsFEM foram propostas originalmente por Hou e Wu (1997). Essas condições estão descritas na Eq. (97), onde são desconsideradas as componentes normais ao contorno, e apenas as componentes tangenciais são resolvidas nas arestas dos volumes da malha grossa dual. Hou e Wu (1997) mostraram que este tipo de condição de contorno oscilatória é mais eficiente do que as tradicionais condições de contorno lineares, principalmente em meios altamente heterogêneos (com propriedades variando de volume para volume). Essas condições auxiliam também na redução de erros de “ressonância”, que ocorrem quando o comprimento característico da malha grossa tem dimensão semelhante à escala do comprimento característico do problema, ou seja, quando os comprimentos das oscilações capturadas na menor escala da malha fina e o tamanho dos volumes da malha grossa estão próximos. Uma forma alternativa de diminuir os efeitos de ressonância é a utilização de “*Oversampling Methods*” (Hou e Wu, 1997), que permitem a utilização de condições de contorno lineares, definindo os volumes da malha grossa com dimensão maior do que a necessária para cobrir os elementos da malha fina, e assumindo que os erros nos contornos não se propagam muito além dos contornos dos volumes da malha grossa. Ao final, os erros são descartados e somente as soluções nos elementos da malha fina de interesse são utilizadas. Uma grande dificuldade da utilização destes métodos, além da estrutura de dados necessária, é a definição do tamanho dos elementos da malha grossa de forma que

haja a garantia de que os erros fiquem concentrados nas regiões próximas aos contornos destes volumes.

A utilização das condições de contorno reduzidas é uma forma de desacoplar os sub-problemas de pressão no domínio. Como consequência deste desacoplamento, em princípio, não se pode garantir que a massa seja conservada nessas interfaces, visto que as componentes normais do fluxo são desprezadas. Portanto, existe um grande erro na solução do campo de pressões nessa região, ocasionando uma perda da consistência na solução nas interfaces dos volumes de controle duais. Para resolver esse problema, Jenny et al. (2003) propôs a criação de um novo conjunto de funções de base nos volumes grossos primais, para garantir a conservação em todo o domínio de estudo. Contudo, a grande desvantagem desse método é o custo computacional extra, requerido para recalcular um novo conjunto de funções de base. Para diminuir esse custo computacional adicional, Zhou (2010) e Møyner (2012) resolveram esse problema recalculando a pressão em cada volume da malha grossa primal, utilizando as pressões já conhecidas nos contornos como condições de contorno prescritas, e evitando a necessidade de definir novas funções de base. Esta estratégia, que é fundamental para a garantia de conservação da massa em todos os volumes da malha fina, que estão nos contornos da malha grossa dual, será utilizada nesse trabalho.

Outra desvantagem da utilização de condições de contorno reduzidas é que as Eqs.(96) - (98) são homogêneas, isto implica que os únicos fluxos nas interfaces são devidos ao próprio campo de pressão, e portanto, as funções de base não são capazes de capturar os efeitos no campo de pressão associados à existência de termos de fonte e sumidouros, tais como poços de injeção ou produção, ou quando são considerados os efeitos de capilaridade e gravidade, por exemplo, quando estes estão localizados nas arestas de algum volume da malha dual. Uma forma de resolver esse problema é o uso das “funções de correção”, que será descrito na Seção (4.6). Para se corrigir os problemas associados à modelagem de poços deve-se evitar que estes estejam localizados nas arestas dos volumes de controle da malha grossa dual.

4.6 FUNÇÕES DE CORREÇÃO

Na definição das funções de base, assumimos que não existe fluxo ao longo das arestas dos volumes da malha grossa dual, induzidos por quaisquer termos fonte ou sumidouro. Para corrigir possíveis erros devido a esta hipótese, é possível resolver a equação elíptica para as funções de base novamente, Eq. (96), porém, considerando o problema não-homogêneo

associado, ou seja, incluindo o termo fonte/sumidouro, tanto na Eq. (99) quanto na condição de contorno, Eq. (100), definindo-se uma função, chamada de função de correção ϕ , dada através da solução do seguinte problema:

$$-\nabla \cdot (\lambda \tilde{K} \cdot \nabla \phi_i^I) = q \text{ em } \Omega_d^c \quad (99)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \lambda \tilde{K} \frac{\partial \phi_i^I}{\partial \tau} = q \text{ em } \partial \Omega_d^c \quad (100)$$

$$\phi_i^I(x^p) = 0 \quad (101)$$

O comportamento das funções de correção é definido considerando que nos vértices da malha grossa dual, a função de correção ϕ é nula, Eq. (101), justamente para não influenciar os valores prescritos das funções de bases ϕ , e, desta forma, não violarmos os valores da pressão normalizados, obtidos pelas funções de base ϕ . Tendo definido as funções de base e as funções de correção adequadamente, a pressão na malha fina em todo o domínio p^f pode ser aproximada por:

$$p^f(x) \approx \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^M \phi_j^I(x) p_i^c + \phi_i^I(x) \right) \quad (102)$$

4.7 CÁLCULO DO ERRO DA SOLUÇÃO MULTIESCALA

Para avaliarmos a acurácia do procedimento descrito nesse trabalho, avaliamos o erro da solução multiescala, através do cálculo do erro relativo e do erro absoluto do campo de pressão e saturação, a cada passo de tempo, sempre compararemos a solução obtida diretamente na malha fina, chamada de solução de referência, com a solução obtida pelo método multiescala. Os erros relativo e absoluto, E_{rel} e E_{abs} , são definidos, respectivamente, por:

$$E_{rel} = \frac{\|S_{ol} - S_{ol}^*\|}{\|S_{ol}\|} \quad (103)$$

$$E_{abs} = \|S_{ol} - S_{ol}^*\| \quad (104)$$

onde S_{ol} e S_{ol}^* são as soluções de referência e multiescala, respectivamente, quando aplicadas ao campo de pressão e de saturação. Também utilizamos o erro médio definido como a média aritmética do erro relativo, definida por:

$$\bar{E} = \frac{1}{\mathcal{N}_{VC}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_{VC}} E_{rel_i} \quad (105)$$

onde $\mathcal{N}_{VC}$ é a quantidade de volumes de controle da malha fina avaliados. Nesse caso são selecionados os volumes da malha fina onde se deseja avaliar o erro médio.

Por fim, nos cálculos dos erros foi utilizada a norma do máximo (ou infinito), dada por:

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \max_{i=1:\mathcal{N}_{VC}} \{|S_{oli}|\} \quad (106)$$

onde S_{ol} é um vetor de dimensão $N \times 1$.

5 FORMULAÇÃO ALGÉBRICA DO MSFVM

Nesta seção apresentamos a formulação algébrica matricial do método multiescala para a solução do problema elíptico da pressão com a definição adequada dos operadores de restrição e prolongamento utilizados no OBMM. Ressaltamos que o problema de transporte também pode ser resolvido utilizando-se uma metodologia multiescala (Zhou, 2010), porém não será abordado no presente trabalho.

5.1 PROBLEMA GERAL

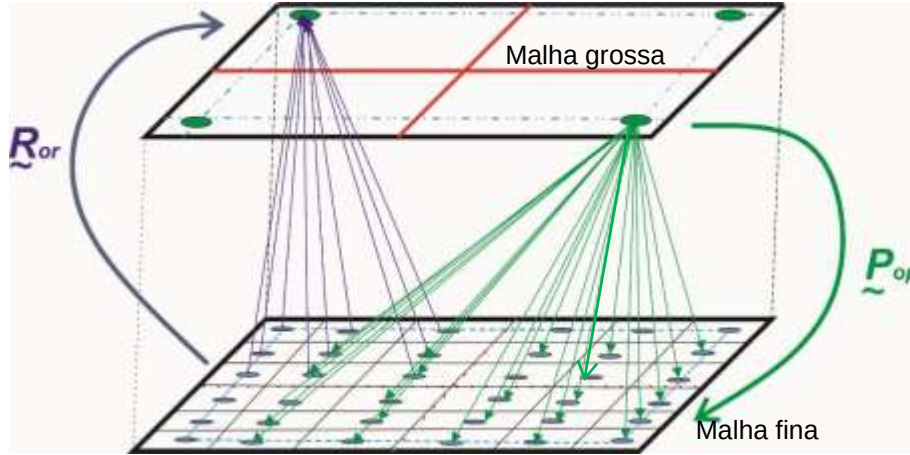
Consideremos um domínio contínuo, que se encontra discretizado por uma malha, denominada malha fina, representada por Ω^f . Podemos escrever a equação discreta da pressão, de forma matricial, para esta discretização, como:

$$\underline{T}^f \underline{P}^f = \underline{Q}^f, \forall \underline{P}^f \in \Omega^f \quad (107)$$

onde, na Eq. (107), $\underline{P}^f$ é o vetor que contém as variáveis de pressão no domínio Ω^f , cuja dimensão é n_f (número de volumes da malha fina), $\underline{T}^f$ é a matriz de transmissibilidade associada à malha fina e com dimensão $n_f \times n_f$ e $\underline{Q}^f$ é o vetor que contém as informações de termos referentes aos poços de injeção e produção e às condições de contorno associada à malha fina e de dimensão n_f .

Dependendo do número de elementos (i.e., volumes ou blocos) da malha, resolver o sistema definido pela Eq. (107) além de requerer muita memória computacional, é computacionalmente custoso, e até impraticável em muitas situações, mesmo nos modernos computadores com arquitetura paralela. Sendo assim, é possível utilizarmos métodos multiescala para obter-se uma aproximação da solução $\underline{P}^f$, sem a necessidade de resolvermos o problema diretamente na malha fina. Com este objetivo, utilizaremos dois operadores que transferem informações da malha fina para a grossa e vice-versa. Estes operadores são conhecidos como “Operador de Restrição” e o “Operador de Prolongamento”, e que são esquematicamente ilustrados na Figura 13.

Figura 13. Esquema indicando a atuação dos operadores multiescala de Restrição ($\tilde{R}_{or}$) e de prolongamento ($\tilde{P}_{op}$) sobre as soluções nas malhas fina e grossa.



Na Figura 13, podemos observar que o Operador de Prolongamento ($\tilde{P}_{op}$) define a interpolação do espaço que contém os volumes de controle da escala grossa (Ω^c) para o espaço que contém os volumes de controle da escala fina (Ω^f), de tal forma, que:

$$\tilde{P}^f = \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c \quad (108)$$

onde $\tilde{P}_{op}$ tem dimensão $n_f \times n_c$, sendo n_c é o número de elementos da malha grossa primal.

Por outro lado, o Operador de Restrição ($\tilde{R}_{or}$) permite construir o sistema de equações da malha grossa, a partir das equações discretizadas na malha fina, e funciona como uma “chave” que identifica as regiões da malha fina onde o operador de prolongamento deve atuar.

Desta forma, à semelhança da equação matricial que descreve o problema na malha fina, é possível obter uma equação matricial que descreve o problema na malha grossa, e que é dada, por:

$$\tilde{T}^c \tilde{P}^c = Q^c, \quad \forall \tilde{P}^c \in \Omega^c \quad (109)$$

e, portanto, existe um vetor solução $\tilde{P}^c$ para o campo de pressão definido no domínio Ω^c .

Ao substituímos a Eq. (108) na Eq. (110), e pré-multiplicamos a equação resultante pelo operador de restrição chegamos a:

$$\underline{R}_{or} \underline{T}^f \underline{P}_{op} \underline{P}^c = \underline{R}_{or} \underline{Q}^f \quad (111)$$

Quando comparamos a Eq. (111) com a Eq. (109), verificamos que:

$$\begin{cases} \underline{T}^c = \underline{R}_{or} \underline{T}^f \underline{P}_{op} \\ \underline{Q}^c = \underline{R}_{or} \underline{Q}^f \end{cases} \quad (112)$$

e resolvendo a Eq. (111) para $\underline{P}^c$, temos:

$$\underline{P}^c = (\underline{T}^c)^{-1} \underline{Q}^c \quad (113)$$

Portanto, o campo de pressões aproximado para a malha fina e fornecido pelo método multiescala, $\underline{P}^{ms}$, pode ser obtido, utilizando-se as Eq.(111), (112) e (113), a partir dos Operadores de Prolongamento e de Restrição, como:

$$\underline{P}^{ms} = \underline{P}_{op} (\underline{T}^c)^{-1} \underline{Q}^c \equiv \underline{P}_{op} [\underline{R}_{or} \underline{T}^f \underline{P}_{op}]^{-1} \underline{R}_{or} \underline{Q}^f \quad (114)$$

Note que a solução da Eq. (114) é obtida matricialmente usando dois operadores, o de restrição e o de prolongamento, e que a “qualidade” da solução multiescala dependerá da definição destes dois operadores.

5.2 OPERADOR DE PROLONGAMENTO

O Operador de Prolongamento, $\underline{P}_{op}$, funciona como um mapeamento do campo de pressões da malha grossa para a malha fina. Este operador, como já dito anteriormente, possui dimensão $n_f \times n_c$ e é construído a partir do cálculo das funções de base. Por definição:

$$\tilde{P}^f = \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c \quad (115)$$

onde $\tilde{P}^c$ é a pressão num volume da malha grossa primal. E ainda:

$$\tilde{P}_{op_{i,I}} = \phi_i^I(x_i) \quad (116)$$

onde “ i ” e “ I ” são, respectivamente, os índices que definem elementos das malhas fina e grossa. Note que, como as funções de base são obtidas resolvendo-se o problema elíptico em subdomínios da escala fina, as informações físicas relevantes do escoamento no reservatório (i.e., porosidade, permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa) são, naturalmente, incorporadas ao operador de prolongamento, garantindo a qualidade da solução multiescala e fazendo uma distinção clara entre o mesmo e outros métodos de transferência de escala.

5.3 OPERADOR DE RESTRIÇÃO

O Operador de Restrição ($\tilde{R}_{or}$) estabelece como é realizado o mapeamento da malha fina para a malha grossa, sendo definido considerando-se a conservação da massa. Seja então o operador discreto da conservação da massa para cada volume de controle da malha fina, definido como (na ausência de poços de produção e de injeção):

$$\tilde{E}_i = 0 \quad \text{em } \Omega_i^f, i = 1, \dots, n_f \quad (117)$$

Portanto, a equação de conservação da massa num volume da malha grosseira primal pode ser escrita, como:

$$\sum_{\Omega_i^f \in \Omega_{p,I}^c} \tilde{E}_i = 0 \quad \text{em } \Omega_{p,I}^c, I = 1, \dots, n_c \quad (118)$$

Consequentemente, o operador de restrição é construído a partir da Eq.(117), juntamente com a Eq. (118), ao considerarmos o balanço de massa em todos os volumes da malha fina contidos num dado volume da malha grossa primal. Este operador satisfaz a seguinte condição:

$$R_{or(I,i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega_i^f \subset \Omega_{p,I}^c \\ 0 & \text{se } \Omega_i^f \not\subset \Omega_{p,I}^c \end{cases} \quad (I = 1, \dots, n_c; i = 1, \dots, n_f) \quad (119)$$

Note, que a Eq. (119) identifica a região de influência, na malha fina, na qual o operador de prolongamento projeta informações da malha grossa, como pode ser verificado no esquema apresentado na Figura 13.

5.4 CÁLCULO DO CAMPO DE VELOCIDADES

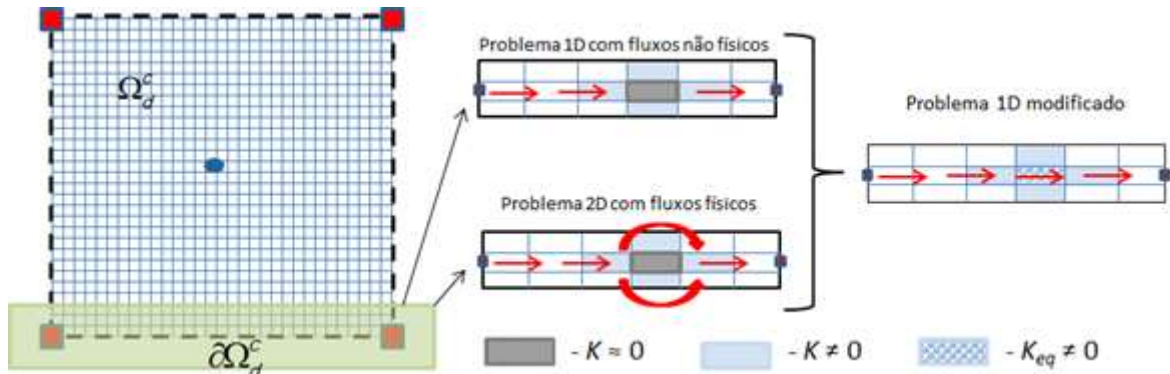
As condições de contorno reduzidas e o consequente desacoplamento entre os problemas locais nos levam a um campo de velocidade descontínuo nas interfaces das arestas dos volumes de controle da malha grossa primal, portanto é impossível obter um campo de velocidade conservativo na malha fina, através da pressão calculada pela Eq.(114). Para contornar esse problema, resolve-se um problema de Neumann, resultando em um campo de pressões conservativo. Com o valor do campo de pressões calculado, basta obter o campo de velocidades (i.e. fluxos), que será localmente conservativo em todo o domínio de estudo.

5.5 CORREÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO REDUZIDAS EM REGIÕES COM BRUSCAS VARIAÇÕES DO CAMPO DE PERMEABILIDADE

Note que os métodos multiescala são altamente dependentes dos operadores de transferência de escala, ou seja, apenas é obtida a solução exata do problema elíptico, se o operador de prolongamento for exato, o que não ocorre devido ao desacoplamento dos problemas locais. Um dos maiores desafios dos métodos multiescala, de forma geral, é a melhoria da acurácia do cálculo das funções de base, ou seja, diminuir os erros existentes nas interfaces dos volumes da malha dual, acarretados pelo uso das condições de contorno reduzidas. A principal hipótese utilizada nestas condições é que não existe fluxo ortogonal às interfaces dos volumes de controle da malha dual (condição de localização). Entretanto, existem casos, onde regiões de elevado gradiente de permeabilidade estão localizadas nas interfaces dos volumes duais, nessas regiões, as condições de contorno reduzidas geram grandes erros no campo de pressão, pois existem contribuições importantes perpendiculares do fluxo que não estão sendo contabilizadas. Para corrigir isso, Faroughi et al. (2013) propuseram uma melhoria no cálculo das funções de base, onde eles tentam introduzir a física do problema 2D, dentro do problema

1D, por meio de um *upscaling* local da permeabilidade nestas regiões. Este *upscaling* é feito através do cálculo de uma permeabilidade equivalente (K_{eq}) local descrita pela Eq.(120). Esta permeabilidade é uma média das permeabilidades dos volumes vizinhos ao volume considerado, onde h_l é a espessura da camada avaliada, N_l é o número total de camadas de volumes avaliados para determinar K_{eq} . Este número de camadas é determinado em função das permeabilidades dos volumes da malha fina ao redor do volume onde será determinada a permeabilidade equivalente, ou seja, o número de camadas é aumentado até que seja encontrada uma camada de volumes da malha fina que possua gradiente de permeabilidades considerável em comparação com o volume da malha fina.

Figura 14. Método Multiescala modificado proposto por Faroughi et al. (2013).



Fonte

$$K_{eq} = \sum_{l=1}^{N_l} K_l h_l / \sum_{l=1}^{N_l} h_l \quad (120)$$

Faroughi et al. (2013), mostraram que este procedimento extremamente simples é capaz de diminuir os erros de fase na frente de saturação de água, ocasionados pelas condições de contorno reduzidas, principalmente em problemas multifásicos, onde o campo de pressões deve ser obtido a cada passo de tempo, e os erros tornam-se acumulativos ao longo da simulação. Em geral, de 2 a 5 camadas de volumes são suficientes para obter-se resultados satisfatoriamente acurados (Faroughi et al., 2013), portanto neste trabalho o número de camadas foi fixado em 3, de forma a obter-se resultados preliminares da eficiência da determinação desta permeabilidade equivalente.

5.6 LIMITAÇÕES DO OBMM

O método multiescala em sua versão OBMM pode ser facilmente implementado, além de nos fornecer soluções acuradas para meios heterogênicos e isotrópicos. Entretanto o MsFVM-OBMM tem grandes dificuldades em simular meios com bruscas variações de permeabilidade (fraturas e barreiras) e meios anisotrópicos. Essas duas limitações são ocasionadas pelo uso das condições de contorno reduzidas. Nesta seção iremos analisar as falhas do MsFVM-OBMM.

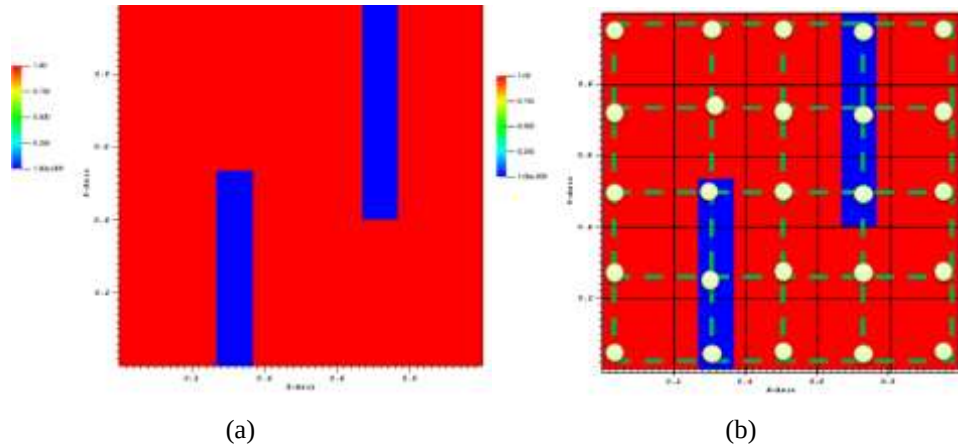
5.6.1 Problemas do MsFVM com zonas com contraste de heterogeneidade

Conforme relatado neste capítulo o MsFVM pode gerar soluções não-físicas quando as arestas dos volumes grossos duais atravessarem regiões com bruscas variações de permeabilidade, visto que, as condições de contorno reduzidas não contabilizam as contribuições perpendiculares do fluxo, gerando grandes erros no campo de pressão. Para evitar esse erro, mudamos o fator de engrossamento do método MsFVM. Observe que essa técnica nem sempre é útil, visto que existem meios altamente fraturados, ou, cheios de barreiras que, independentemente do fator de engrossamento, as arestas dos volumes duais tocarão as zonas com brusca variação de permeabilidade.

Para demonstrar que a formulação MsFVM tem dificuldade nesse tipo de problema, analisaremos o escoamento de um reservatório com duas barreiras (Figura 15a), numa malha fina com 30x30 volumes de controle, a dimensão da malha grossa primal é de 5x5 (Figura 15b). Observe que várias arestas do volume de controle da malha grossa dual atravessam as regiões de barreiras (Figura 15b).

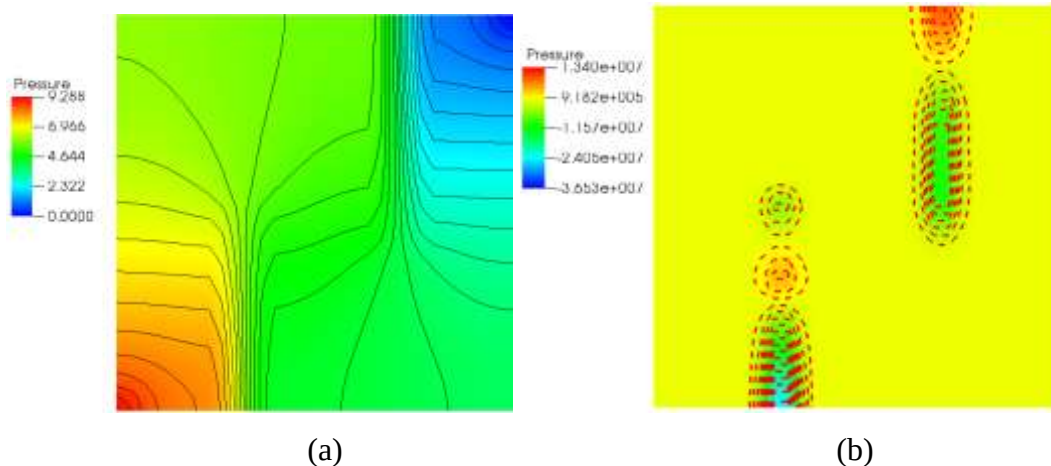
Assim, simularemos um problema clássico de um escoamento monofásico para um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços (Carvalho, 2005), onde as condições de contorno são de fluxo nulo ao longo de todas as fronteiras do reservatório, e pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_{PROD} = 0$), localizada no volume de controle do canto superior direito da malha fina primal e vazão prescrita no poço de injeção ($\bar{Q}_{INJ} = 1$), volume de controle do canto inferior esquerdo.

Figura 15. (a) Mapa de cores do campo de permeabilidades para o reservatório muito heterogêneo com zona de baixa permeabilidade (b) Configuração das malhas grossas primal e dual.



Chamando de “*Solução de Referência*” aquela solução obtida resolvendo a equação de pressão diretamente na malha fina (Equação (107)) (Jenny et al.(2003); Lunati et al. (2006); Zhou (2010); Møyner (2012)) e comparando a solução de referência (Figura 16(a)) com a multiescala (Figura 16 (b)) com a MsFVM, percebe-se que o método MsFVM (Figura 16-b) apresenta uma solução não-física, onde os maiores erros no campo de pressão ocorrem justamente na região da barreira, onde a aresta dos volumes de controle da malha grossa dual coincidem com a zona de baixa permeabilidade. No momento, que aplicamos as condições de contorno reduzidas, geramos uma grande inconsistência física, visto que, forçamos um fluxo tangencial nas barreiras, destruindo a física do problema. Para amenizar esse erro sugerimos um novo fator de engrossamento, onde as arestas da malha grossa dual não atravessem a barreira.

Figura 16. Campo de pressão para o escoamento monofásico de um reservatório muito heterogêneo com zona de baixa permeabilidade: (a) Solução de Referência (b) Solução MsFVM



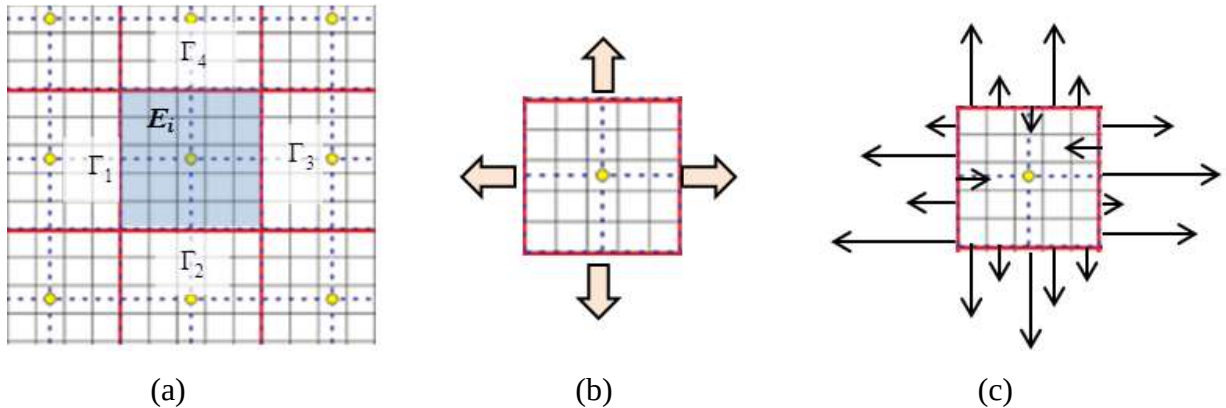
5.6.2 Problemas de Oscilações do Campo de velocidade

O método multiescala apenas garante monotonicidade para meios isotrópicos e homogêneos, quando o meio se torna anisotrópico temos um campo de velocidade cheio de recirculações. Para entender esse problema, considere um reservatório homogêneo com razão de anisotropia 100:1 ($K_{yy} / K_{xx} = 100$). No momento em que aplicarmos as condições de contorno reduzidas na direção X, desconsiderando o fluxo na direção de Y, geramos um desbalanceamento de massa, visto que a influência no fluxo na direção Y é muito superior na direção em X.

Na equação (121) observamos os efeitos do desacoplamento num meio anisotrópico. Observe que a magnitude do fluxo que atravessa uma superfície de controle de um volume da malha fina qualquer que pertence a um volume da malha grossa primal (E_i), (Figura 17), pode ser muito maior do que o somatório de todos os fluxos que atravessam a face do volume grosso primal, ou seja, a vazão *upscaling*, esse tipo de problema, sempre ocorre em meios anisotrópicos com alta razão de anisotropia. Ou seja, temos um problema na solução multiescala na escala fina, não na grossa. Segundo Kippe et al. (2008) a solução *Upscaling* -MsFVM consegue reproduzir os efeitos da anisotropia de forma razoável, enquanto a solução fina multiescala, gera soluções inconsistentes fisicamente no campo de saturação.

$$\int_{\Gamma^E} |K \nabla p \cdot n| ds \gg \left| \int_{\Gamma^E} K \nabla p \cdot n ds \right| \quad (121)$$

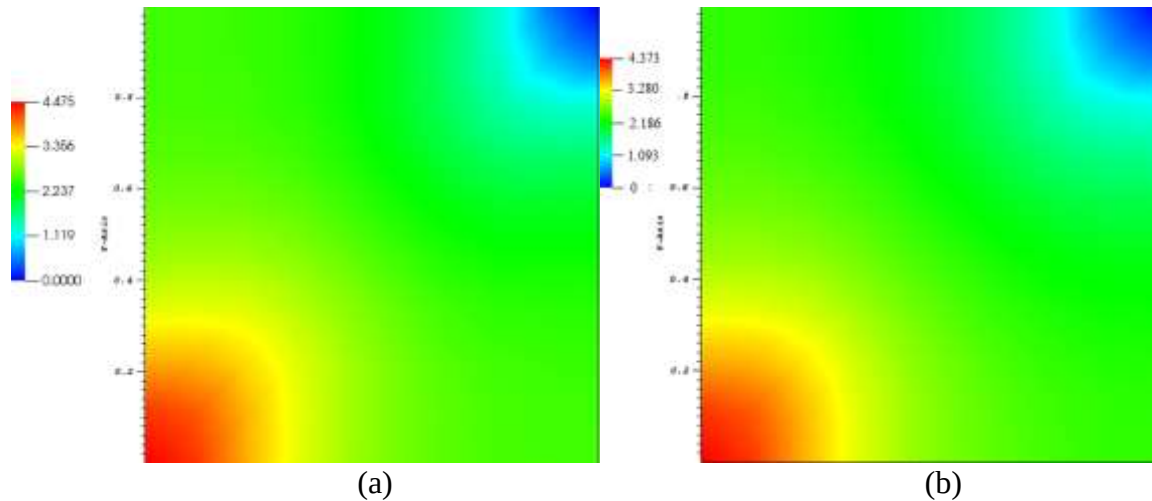
Figura 17. Dificuldade do método multiescala em simular meios com alta razão de anisotropia - (a) Volume Grosso Primal E_i avaliado, (b) Fluxo nas superfícies de controle do volume da malha grossa primal (*upscaling*), (c) Fluxo nas superfícies de controle de cada volume fino pertencente a malha grossa primal



Para exemplificar as limitações da técnica MsFVM em meios anisotrópicos, faremos dois exemplos. No primeiro mostraremos que o método multiescala pode obter soluções acuradas para meios levemente anisotrópicos, no segundo exemplo simularemos um meio com razão de anisotropia (10:1). Considerou-se uma malha fina com 30x30 volumes, onde simulou-se apenas um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, onde as condições de contorno “externas” são de fluxo nulo ao longo de todas as fronteiras do reservatório e as condições de internas ao reservatório são: pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_p = 0$), saturação da água $S_w = 1.0$, vazão prescrita no poço de injeção ($\bar{Q}_{inj} = 1$), as saturações residuais do óleo e da água no reservatório são $S_{or} = S_{wr} = 0.0$, a razão entre as viscosidades das fases é $\mu_o / \mu_w = 4$.

Considerou-se um meio levemente anisotrópico, ou seja, $K_{yy} = K_{xx} = 2$ e $K_{yx} = K_{xy} = 1$. Utilizou-se apenas formulações de volumes finitos do tipo MPFA-O, para calcular a pressão tanto na malha fina, quanto no método multiescala. Na Figura 18 percebemos que, qualitativamente, para meios levemente anisotrópicos a solução multiescala ($C_r=10$) é acurada. O erro usando a norma infinito no campo de pressão é de 2,78%.

Figura 18. Campo de Pressão – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.



A Figura 19 mostra os campos de saturação para um PVI (volume poroso injetado) igual a 0,15. Observa-se que o campo de saturação obtido pela solução multiescala é mais difusivo, quando comparado com a solução de referência. O erro relativo do campo de saturação não chega a $E_{rel} = 1.81\%$. Na Figura 20 têm-se os contornos de saturação, onde é possí-

vel comparar a frente de saturação, para ambos os métodos, e perceber que são bastante similares, confirmando a boa acurácia da solução.

Figura 19. Contornos de Saturação: a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.

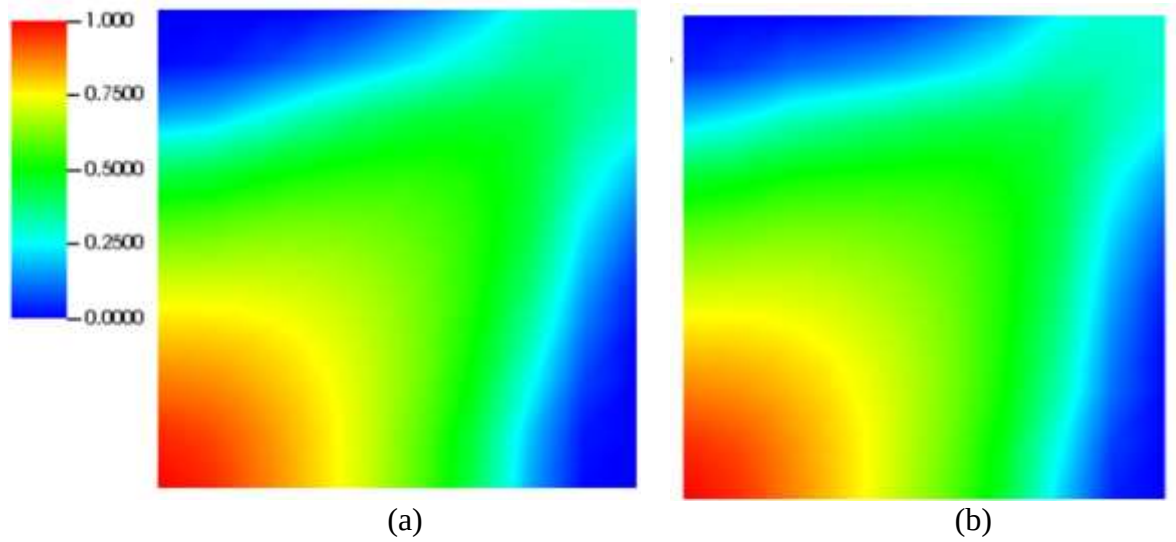
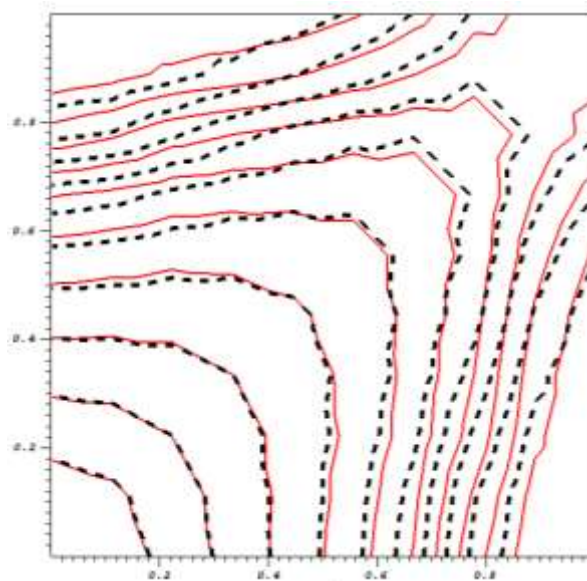


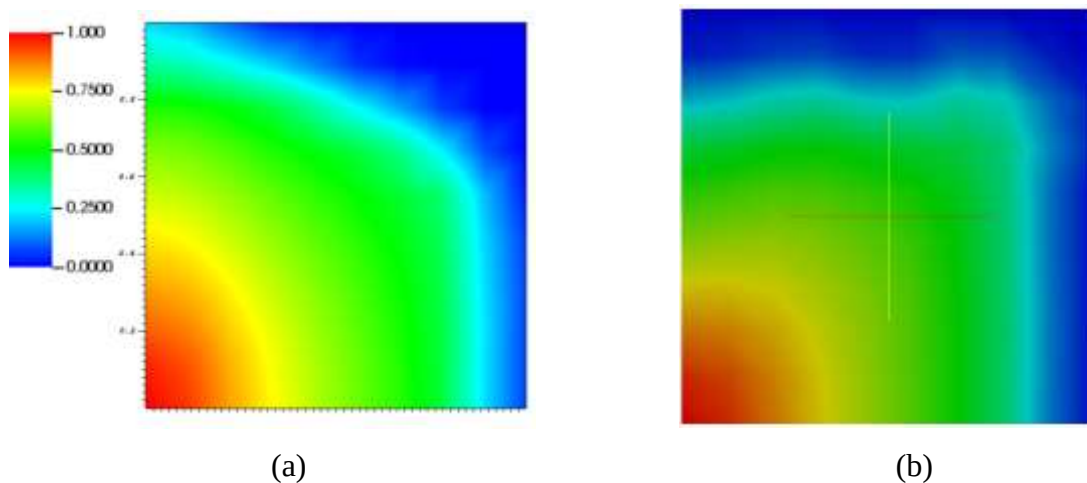
Figura 20. Curvas de Contorno - a) Solução de referência-Preta ; b) Solução Multiescala-Vermelha



Considerando o mesmo problema descrito no problema anterior, porém agora considerando um tensor de permeabilidade com razão de anisotropia, definido por $K_{yy} = 10K_{xx}$ e $K_{yx} = K_{xy} = 0$.

Na Figura 21 percebe-se que os campos de saturações são bastante diferentes. O erro no campo de pressão usando a norma do infinito chegou a 60%, e 104% no campo de velocidade. Portanto, como descrito na literatura (Kippe et al., 2008), a solução multiescala perde a acurácia em meio anisotrópicos.

Figura 21. Campo de Saturação (PVI=0.11) – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.



6 MÉTODO ITERATIVO MULTIESCALA MODIFICADO PARA VOLUME DE CONTROLE (I-MMVCM)

Os métodos multiescalas podem produzir soluções muito ruins em meios anisotrópicos e fraturados. O uso das condições de contorno reduzidas podem produzir oscilações no campo de velocidade principalmente se esse meio for anisotrópico. O uso de volumes fantasmas (*ghost volumes*) também contribui para a perda de acurácia das funções de bases, visto que atribuímos propriedades a elementos inexistentes para calcular o operador de prolongamento, nas bordas do domínio físico. Nesse capítulo apresentamos o Método Iterativo Multiescala Modificado para Volume de Controle (I-MMVCM) que visa melhorar a acurácia das funções de bases ao realocar os pontos de colocação do operador de prolongamento, não sendo necessário o uso dos volumes fantasmas, e de forma iterativa melhorar a acurácia da pressão, diminuindo assim as oscilações do campo de velocidade.

6.1 REALOCAÇÃO DOS VÉRTICES DOS VOLUMES DA MALHA DUAL

O uso de *ghost volumes* diminui a acurácia das funções de base, visto que é necessário atribuir propriedades físicas a um meio que não existe fisicamente. Nesse trabalho, propomos uma solução simples, para evitar a necessidade da criação dos elementos fantasmas. Na região vizinha aos contornos, deslocamos os pontos de colocação do centroide do volume da malha grossa primal para as quinas do domínio físico, no restante do domínio os pontos de colocação continuam no centroide do volume como mostra a Figura 22. Assim, para uma malha 9x9 (Figura 22), com engrossamento 3x3, em vez de construir 16 volumes da malha grossa dual, apenas usaremos quatro volumes.

Essa simples modificação aumenta a acurácia das funções de base, visto que usamos apenas informações do domínio físico real, sem a necessidade de elementos fantasmas. Foram realizados vários exemplos, comparando a técnica clássica do método MsFVM com o MMVCM, e para todas as simulações realizadas, percebemos uma maior acurácia no campo de pressão.

Para verificar a influência da realocação dos pontos de colocação, analisamos dois exemplos. Primeiro calculamos o campo de pressão de um reservatório monofásico e heterogêneo, para uma configuração denominada *Flow Channel*, ou seja, o escoamento de um fluido através de um canal. Depois simulamos um quarto de um reservatório com cinco poços. Para

ambos os casos foi considerado um domínio $\Omega = [1,0] \times [0,1]$, onde a malha fina contém 100x100 volumes de controle. O tensor de permeabilidade é isotrópico e heterogêneo, varia aleatoriamente e descontinuamente (volume a volume) ao longo de todo o domínio. Esse é definido usando a relação de Carman-Kozeny (Møyner, 2012). Neste caso, a permeabilidade varia entre 2,195 e 0,30, como mostrado no mapa de cores da Figura 23.

Figura 22. (a) Malha Grossa dual clássica do MSFVM, (b) Malha Fina, (C) Método Multiescala com realocação das funções de bases.

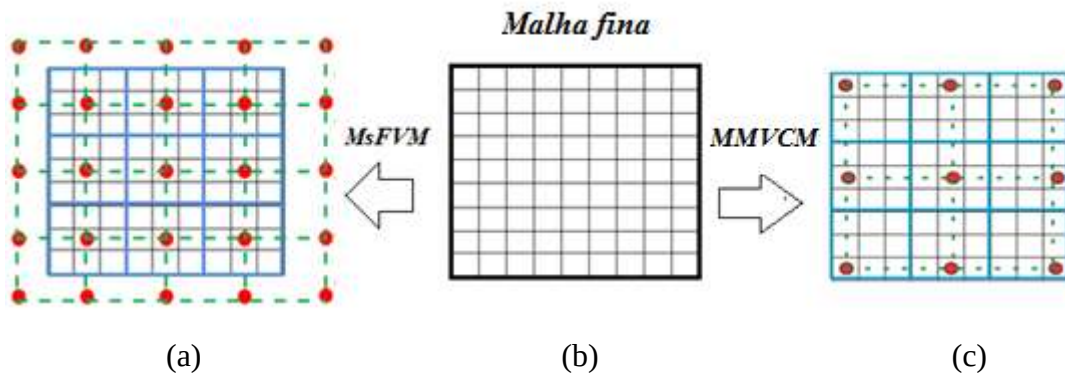
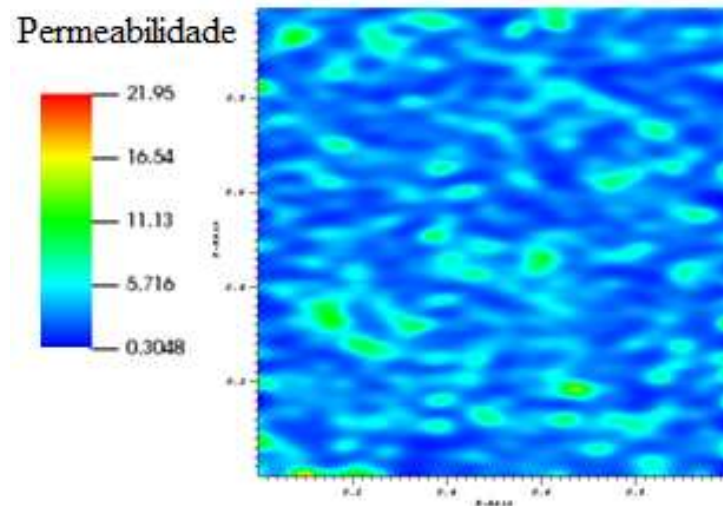


Figura 23. Campo de permeabilidades heterogêneo.



6.1.1 Escoamento em Canal (*Flow Channel*)

Neste exemplo, simulamos um caso do tipo “escoamento em canal”, ou seja, um reservatório que apresenta pressão prescrita (condição de Dirichlet) na face esquerda ($P_{\text{esquer-}}$

$d_a=1$) e na face direita ($P_{direta}=0$) do domínio, com condição de fluxo nulo nas faces superior e inferior do reservatório (Condição de Neumann).

Para testar a acurácia do método foram realizadas várias simulações com diferentes razões de engrossamento. Na Tabela 1 observa-se a influência do fator de engrossamento na acurácia das soluções do MsFVM e do MMVCM com respeito à solução de referência obtida diretamente na malha fina (TPFA), a medida que diminui-se o fator de engrossamento, o erro cai. Observe que para qualquer fator de engrossamento a solução MMVCM é mais acurada do que a solução MsFVM. Note também que para um fator de engrossamento 44,44 a solução MMVCM é aproxima bastante da solução calculada na malha fina, visto que o erro, usando a norma L_2 , é de cerca de 1%, já para a solução do MsFVM clássico o erro é um pouco maior que 5%.

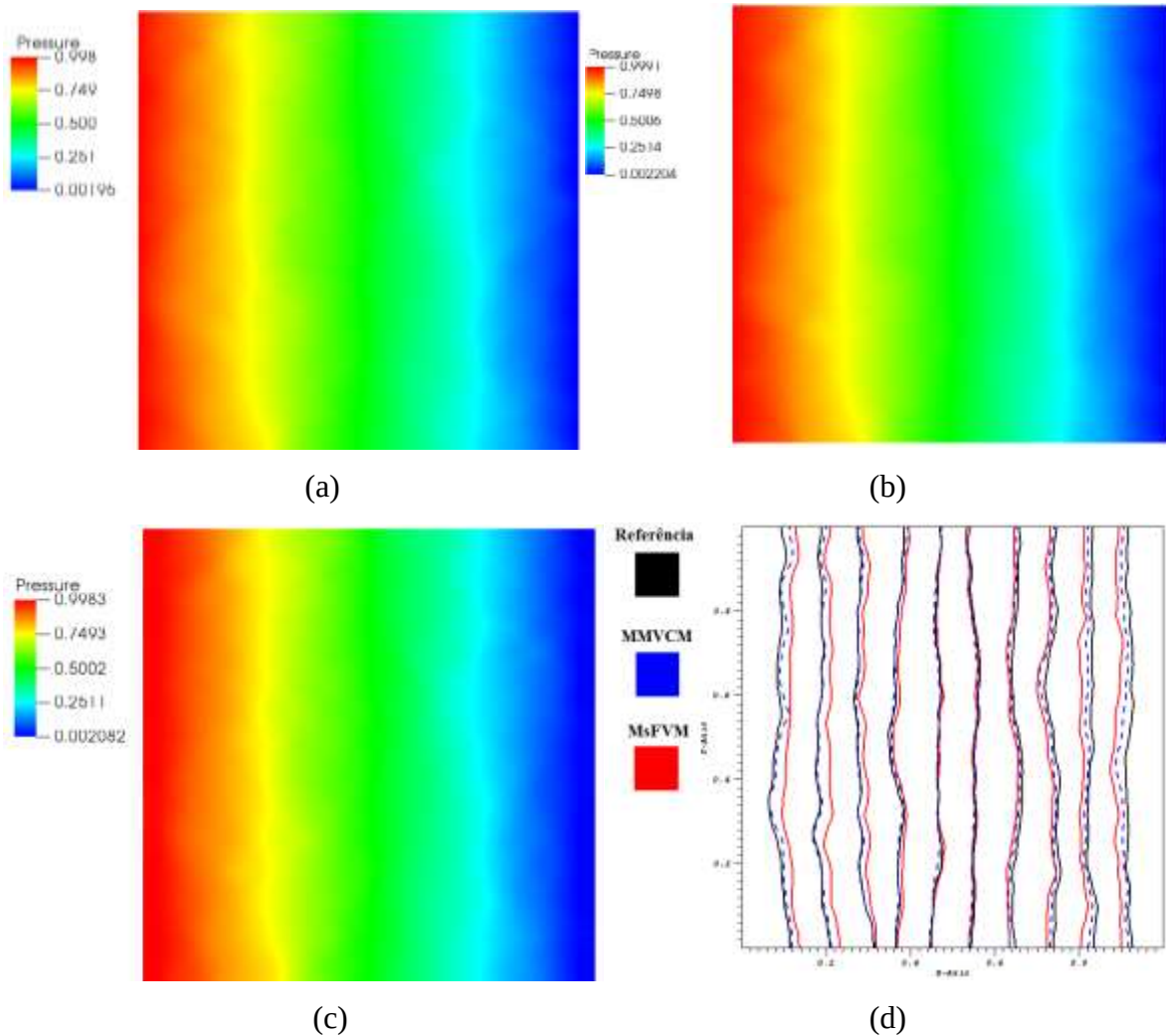
Tabela 1. Escoamento monofásico em canal num reservatório muito heterogêneo: Influência do fator de engrossamento na solução MsFVM e MMVCM

Cr	E_MsFV	E_ MMVCM
1111,111	18,6%	13,8%
400	12,7%	7,9%
156,25	8,58%	3,18%
100	7,04%	2,08%
44,44444	5,40%	1,02%

É importante ressaltar que existe um limite de engrossamento, visto que para uma razão de engrossamento muito baixa, podem ocorrer erros de ressonância, ou seja, perda da acurácia e até a obtenção de solução não física, já que a quantidade de volumes da malha grossa primal tenderia à quantidade de volumes da malha fina, destruindo a solução multiescala (Zhou, 2010; Møyner, 2012).

Na Figura 24 observam-se as soluções de referência, MsFVM e MMVCM, considerando um fator de engrossamento 44,44, mostrando, de forma qualitativa, que ambos os métodos conseguiram uma solução acurada do campo de pressão.

Figura 24. Campo de pressões para o escoamento monofásico em canal num reservatório muito heterogêneo, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) MMVCM; d) Curvas de contorno de pressão



6.1.2 Escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços para um reservatório muito heterogêneo

Para este problema, as condições de contorno são de fluxo nulo ao longo de todas as fronteiras do reservatório, pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_{prod} = 0$), localizado no volume de controle do canto superior direito da malha fina primal, e vazão prescrita no poço de injeção ($\bar{Q}_{inj} = 1$), localizado no canto inferior esquerdo. Novamente, utiliza-se uma malha fina primal com 100x100 volumes.

Na Tabela 2 observa-se a influência do fator de engrossamento nas soluções MsFVM e MMVCM. Novamente destacamos que para qualquer C_R a solução MMVCM é mais acura-

da que a solução MsFVM, conforme diminui-se o fator de engrossamento mais acuradas as soluções multiescalas resultam.

Na Figura 25, observam-se as soluções de referência, MsFVM e MMVCM, para um fator de engrossamento 44,44, novamente ambos os métodos conseguiram uma solução acurada do campo de pressão. Observe que a solução MsFVM apresenta um erro, usando a norma do infinito, muito maior do que a solução MMVCM, onde o erro, usando a norma L_2 , é de 11,69% e na solução MMVCM é de 5,31%.

Figura 25. Campo de pressões para o escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório muito heterogêneo, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) MMVCM; d) Curvas de contorno de pressão.

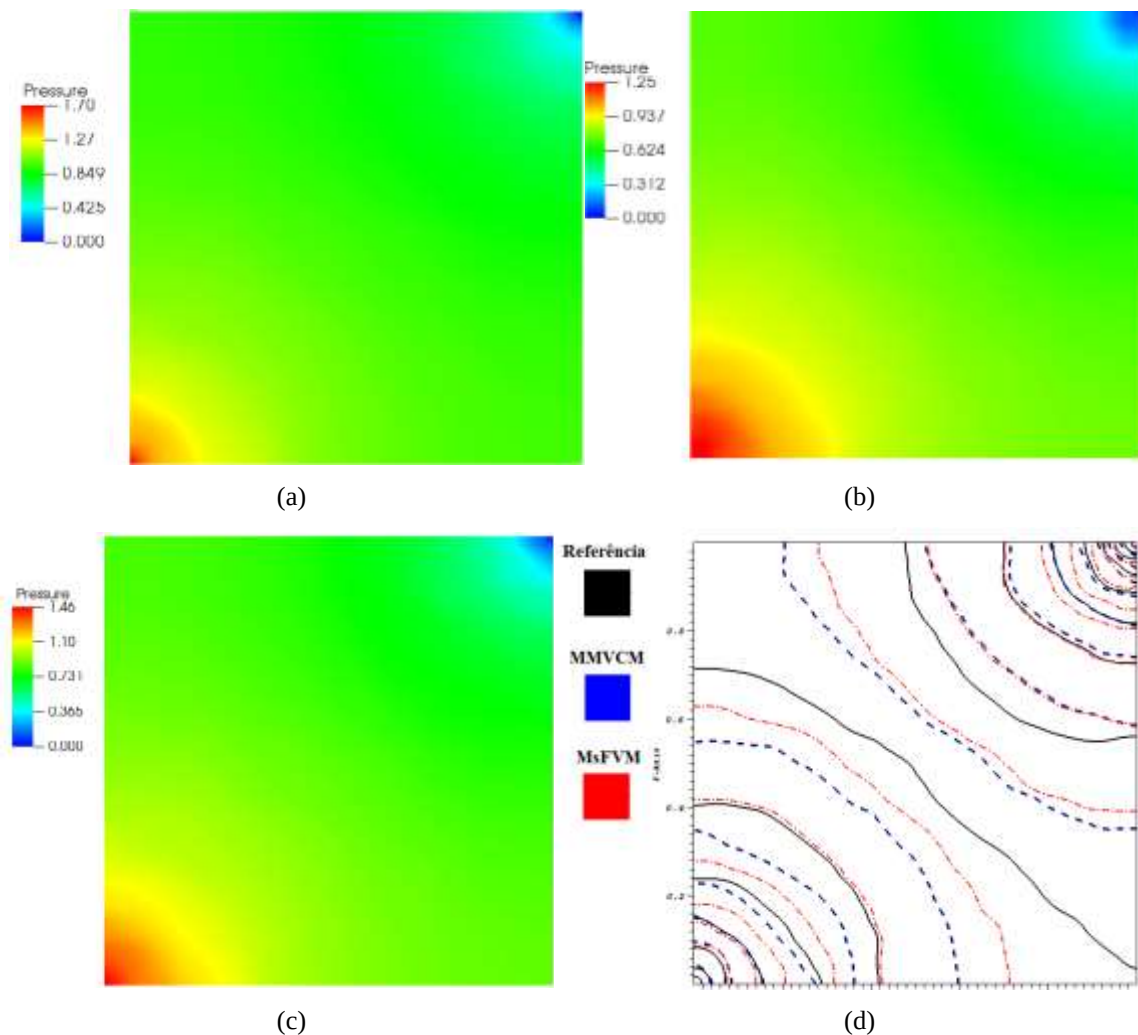


Tabela 2. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Influência do fator de engrossamento na solução MsFVM e MMVCM. Erro usando a norma do infinito

Cr	MsFV	MMVCM
1111,111	35,16%	34,44%
400	26,42%	23,52%
156,25	20,77%	14,83%
100	19,00%	12,87%
44,44444	11,69%	5,31%

6.1.3 Correção do Campo de pressão usando condições de contorno de Dirichlet

O uso das condições de contorno reduzidas geram algumas limitações às formulações multiescala para volumes finitos (Kippe et al., 2008), entre elas, a dificuldade em simular meios fraturados, com barreiras, anisotrópicos, etc. Atualmente, a melhor forma de minimizar estas limitações é utilizando-se algum procedimento iterativo.

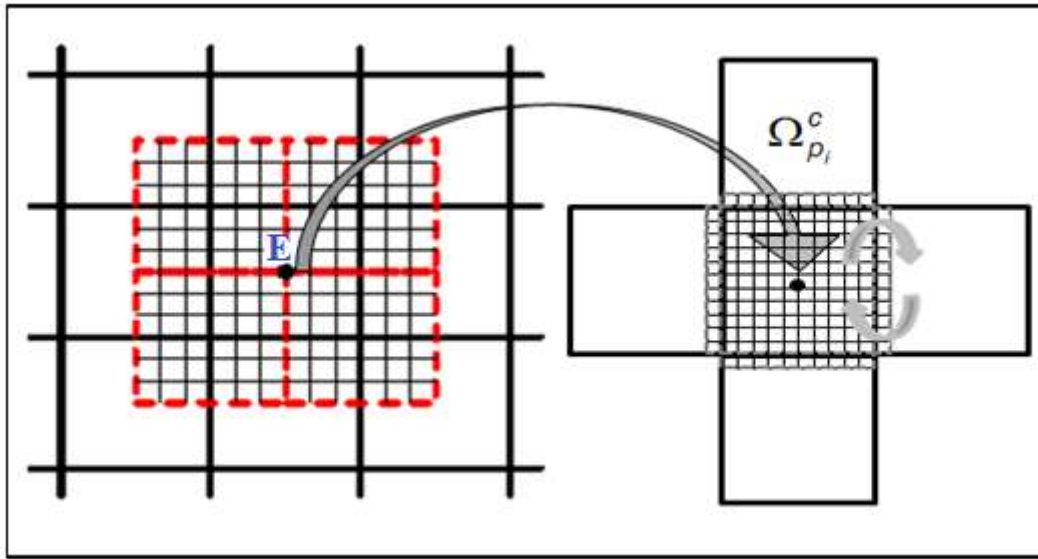
Observe que Hajibeygi (2011) propôs o método iterativo multiescala para volumes finitos (I-MsFVM) onde as funções de bases eram iteradas a fim de melhorar a acurácia do operador de prolongamento e consequentemente a solução multiescala final. O problema deste método é que para problemas reais o I-MsFVM é inviável devido ao alto custo computacional (Cortinovis e Jenny, 2014). A ideia do Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMCVM) é recalcularmos a pressão em cada volume de controle da malha grossa primal, utilizando as pressões anteriormente calculadas pelo MsFVM como condições de contorno de Dirichlet, e com poucas iterações melhoramos a solução do campo de pressão a cada passo iterativo.

Na Figura 26 observamos um fragmento de uma malha estruturada quadrangular, com nove volumes de controle de uma malha grossa primal, nesta figura observamos um volume de controle denominado “E”, neste volume recalculamos a pressão. Conforme mostra a equação (122), no primeiro passo de iteração, usaremos a pressão P^d , que nada mais é que a pressão obtida através dos operadores multiescalas oriundos da equação (114), e logo depois recalcularemos a pressão em todos os volumes de controle pertencentes a malha grossa primal. Observe que esse processo pode ser independentemente visto que os problemas são independentes entre si. Finalizado o primeiro passo de iteração temos um novo campo de pressão denominado P^p , que é a pressão recalculada em cada volume de controle da malha grossa

primal de forma iterativa. De forma geral, repetimos o processo usando agora P^p , como condição de contorno e repetimos novamente o mesmo processo anterior. A ideia do método é com poucas iterações, geralmente usamos três, melhoramos a acurácia do campo de pressão.

Teoricamente, qualquer método iterativo, tal como Jacobi ou Gauss-Seidel, pode ser utilizado para recalcular a pressão nas malhas primais, embora a taxa de convergência para a solução exata da equação discreta seja dependente do método utilizado. Neste trabalho estamos utilizando, o método de Jacobi.

Figura 26. Esboço do método I-MMCVM usando as condições de Dirichlet como condição de contorno



$$\begin{aligned}
 P^0 &= P^d \\
 \begin{cases} -\nabla \cdot (K \nabla P^{n+1}) = f & \text{over } \Omega_{p_i}^c \\ P^{n+1} = P^n = P^P & \text{over } \partial \Omega_{p_i}^c \end{cases}
 \end{aligned} \tag{122}$$

Para mostrar o potencial do método I-MMCVM em obter uma solução acurada, quando o método MsFVM falha, utilizamos o exemplo da seção 5.6.1, onde simulamos o escoamento monofásico de um reservatório heterogêneo com zona de baixa permeabilidade. Para o mesmo problema, utilizamos o método I-MMCVM.

Na Figura 27 apresentamos novamente o campo de pressão para a solução de referência (Figura 27 a), a solução MsFVM (Figura 27 b) e a solução I-MMCVM (Figura 27 c). Conforme já relatado, o método MsFVM gera uma solução não-física na região onde a barreira atravessa as arestas do volume de controle da malha grossa dual.

Figura 27. Campo de pressões para o escoamento monofásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório heterogêneo com barreiras, solução: a) De referência (TPFA); b) MsFVM; c) I-MMVCM

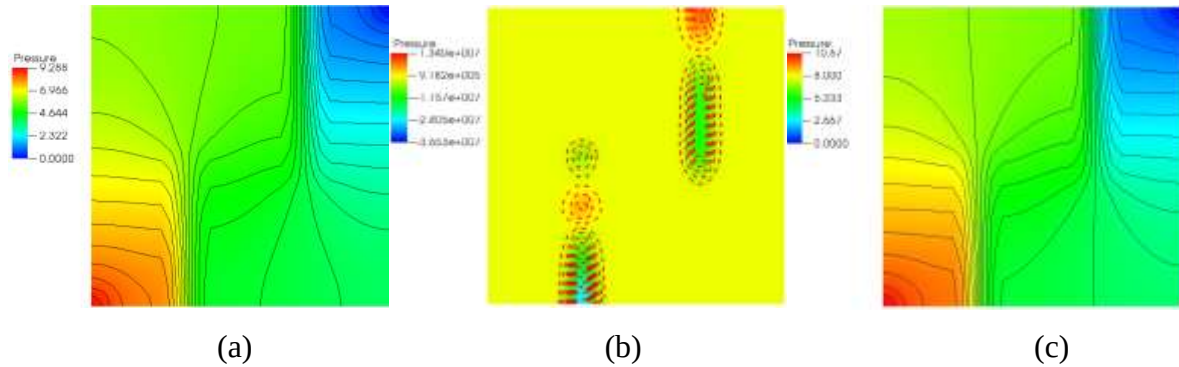


Tabela 3. Erro do campo do pressão usando a norma infinito, de Reservatório Muito Heterogêneo com Zona de Baixa Permeabilidade

$\ P\ _{\infty}$	Número de Iterações
59.288.033,6	0
7.823.656,0	1
2.989.872,2	2
167.099,7	5
1.369,26	10
20,6	15
18,4	20
18,1	30
17,5	50
16,5	100

Na Tabela 3 observa-se o erro em percentuais usando a norma do infinito, onde consideramos a iteração “zero” a solução clássica MsFVM, isto é a solução da pressão obtida diretamente dos operadores multiescala. Observe que usando o I-MMCVM com 15 iterações o erro cai para 20,6%, e este vai a 16,5% em 100 iterações. Portanto, podemos dizer que o método I-MMCVM é capaz de corrigir a solução não física do método MsFV com poucas itera-

ções, de forma acurada. O campo de pressão da solução I-MMCVM pode ser observado na Figura 27c. Percebe-se que o método I-MMCVM reproduzir uma solução qualitativamente com boa acurácia.

6.2 FUNÇÕES DE CORREÇÃO DO I-MMVCM

O uso do método iterativo, usando as condições de contorno de Dirichlet, elimina as oscilações do campo de velocidade, e com poucas iterações, é possível obter soluções acuradas na pressão, mas, no momento do desacoplamento do problema de pressão, perde-se a conservação existente nas interfaces dos volumes da malha grossa primal.

Sabe-se que o somatório dos fluxos f_{ik} nas n_{Faces} de cada elemento discreto satisfaz a Eq. (123).

$$\sum_{ik=1}^{n_{Faces}} f_{ik} = \sum_{ik=1}^{n_{Faces}} -\frac{\lambda K}{\mu} \vec{\nabla} p \cdot \vec{N} = \bar{Q} \quad (123)$$

Se um problema não é conservativo a Eq. (123) se transforma em:

$$\sum_{ik=1}^{n_{Faces}} f_{ik} - \bar{Q} = \varepsilon \quad (124)$$

onde ε é o resíduo da solução iterativa multiescala, que impede que o somatório dos fluxos seja conservativo. De forma que, quando a solução iterativa multiescala convergissem para a fina, $\varepsilon = 0$.

Nessa seção, apresentamos duas formas de eliminar o resíduo da solução iterativa, de forma que a solução na malha grossa primal volte a ser conservativa, a partir daí calcula-se um novo campo de pressão usando as condições de contorno de Neumann, desta vez localmente conservativo. Além de implementarmos um suavizador iterativo para aumentar a eficiência, diminuindo os custos do método I-MMVCM.

6.2.1 Correção do Fluxo Iterativo por Face (CF)

Considere que existe um fluxo *upscaling* que atravessa a superfície de controle de um volume de controle da malha grossa primal, denominado de $\tilde{f}^c$, calculado a partir do campo de pressão P^D , Equação (114), por definição temos que:

$$\tilde{f}^c = F_1^{P^D} + F_2^{P^D} + F_3^{P^D} + F_4^{P^D} + \bar{Q} \quad (125)$$

e,

$$F_N^{P^D} = f_1^{P^D} + f_2^{P^D} + \dots + f_n^{P^D} \quad (126)$$

onde $F_N^{P^D}$ é a vazão *upscaling* que atravessa uma das faces do volume de controle da malha grossa primal, que varia de 1 a 4, visto que estamos usando polígonos de quatro faces e $f_n^{P^D}$ é a vazão nas faces dos volumes de controle da malha fina, calculados a partir de P^D , que compõem a face grossa F avaliada e n representa a superfície fina avaliada. Lembrando que por definição $\tilde{f}^c$ é conservativo na malha grossa primal.

Ao iterarmos P^D utilizando as condições de contorno de Dirichlet obtemos um campo de pressão acurado denominado P^p , através desse método iterativo melhoramos a acurácia do campo de pressão, diminuímos as oscilações locais e geramos um fluxo *upscaling* denominado de $\tilde{f}^p$, onde:

$$\tilde{f}^p = F_1^{P^p} + F_2^{P^p} + F_3^{P^p} + F_4^{P^p} + \bar{Q} \quad (127)$$

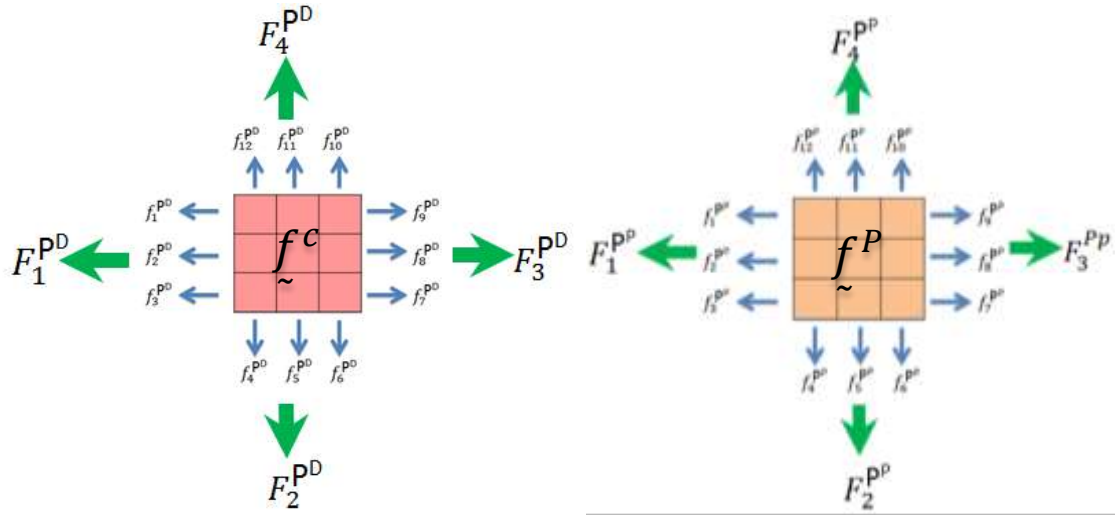
e,

$$F_N^{P^p} = f_1^{P^p} + f_2^{P^p} + \dots + f_n^{P^p} \quad (128)$$

onde, F_N^{Pp} é a vazão *upscaling* que atravessa uma das faces do volume de controle da malha grossa primal, que varia de 1 a 4 onde f_n^{Pp} é a vazão nas faces dos volumes de controle finos, calculados a partir de $\tilde{f}^P$, que compõem a face grossa F avaliada e n representa a superfície fina avaliada.

Devido ao desacoplamento temos que $\tilde{f}^P$ não é conservativo na malha grossa primal ($\sum_{i=1}^{n_{Faces}} f^P - \bar{Q} = \varepsilon$), a menos que convirja para a solução de referência. Para garantir conservação em $\tilde{f}^P$ usaremos $\tilde{f}^c$, que segundo a literatura (Kippe et al., 2008; Lunati e Jenny, 2006) possui uma boa acurácia, e sofre menos problemas de oscilação do que $f_n^{P^D}$. Na Figura 28 mostramos a composição dos fluxos $\tilde{f}^c$ e $\tilde{f}^P$, para um volume de controle pertencente à malha dual.

Figura 28. Composição do fluxo/vazão $\tilde{f}^c$ e $\tilde{f}^P$ que atravessa as superfícies de controle de um volume de controle pertencente a malha grossa primal.



Para garantir conservação fazemos que:

$$F_N^{Pd} - F_N^{Pp} = \varepsilon_{FN} \quad (129)$$

assim,

$$F_N^{Pd} = F_N^{Pp} + \varepsilon_{FN} \quad (130)$$

onde ε_{FN} é a diferença entre os dois fluxos *upscaling* na face avaliada e N varia de 1 a 4. Avaliando a face 1, temos:

$$F_1^{Pd} = f_1^{Pp} + f_2^{Pp} + \dots f_n^{Pp} + \varepsilon_{F1} \quad (131)$$

Precisamos assim distribuir a diferença de vazão entre todos os volumes de controle da malha fina de maneira que o somatório dos fluxos volte a ser conservativo. Para isso, é necessário redistribuir essa diferença de maneira proporcional. Portanto, precisamos escolher um fator de ponderação δ_{fn} que respeite as propriedades físicas do meio. Uma escolha natural para o cálculo destes pesos é normalizá-los a partir da vazão. Esse processo é descrito na equação abaixo:

$$\delta_{fn} = \frac{|f_n|}{\sum_i^n |f_n|} \quad (132)$$

onde f_n vazão nas faces dos volumes de controle da malha fina. É importante ressaltar que essa ponderação respeita a física do problema, visto que se, por acaso, f_n é nulo, o fluxo corrigido continuará nulo, assim:

$$\varepsilon_{F1} = \delta_1^1 \varepsilon_{F1} + \delta_2^1 \varepsilon_{F2} + \dots + \delta_n^1 \varepsilon_{F1} \quad (133)$$

$$F_1^{Pd} = (f_1^{Pp} + \delta_1^1 \varepsilon_{F1}) + (f_2^{Pp} + \delta_2^1 \varepsilon_{F1}) + \dots (f_n^{Pp} + \delta_n^1 \varepsilon_{F1}) \quad (134)$$

Chamando $f_1^{cor} = f_1^{Pp} + \delta_1^1 \varepsilon_{F1}$, portanto f_n^{cor} é o novo fluxo que atravessa a face n do volume de controle da malha fina corrigido e conservativo. É importante ressaltar que f_n^{cor} é diferente de f_n^{Pd} , conforme será observado nos exemplos, esse novo fluxo carrega a acurácia existente de f_n^{Pp} e a conservação vinda de f_n^{Pd} . Assim, diminuimos as oscilações no campo

de velocidade do método MsFVM e garantimos conservação em qualquer volume a cada passo de tempo. Por fim, calculamos um problema de Neumann, usando a vazão f_n^{cor} , de forma que garantimos conservação em toda a malha. Na Figura 29 podemos observar detalhadamente a correção do fluxo por face.

Para exemplificar esta metodologia, simulamos novamente um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, com as mesmas condições de contorno apresentadas na seção anterior, num meio isotrópico e homogêneo. Para uma malha fina com 9x9 volumes de controles e uma malha grossa com 3x3 volumes de controle (Figura 30a). Avaliando a vazão do volume da malha grossa primal “A”, que é composta pelas faces 1, 12, 13 e 19, o fluxo *upscaling* que atravessa a aresta grossa 12 é dado por $\tilde{f}_{12}^c = f_{34}^{Pms} + f_{35}^{Pms} + f_{36}^{Pms}$, conforme mostra a Figura 30 b.

Figura 29. Correção do fluxo *upscaling* por face

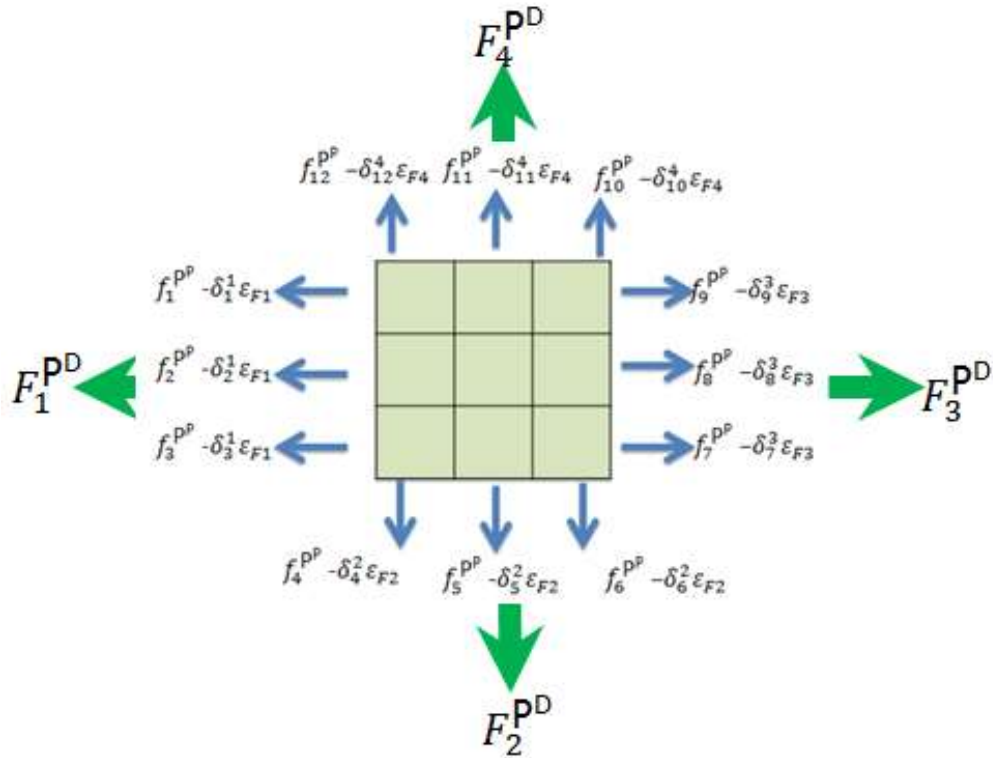
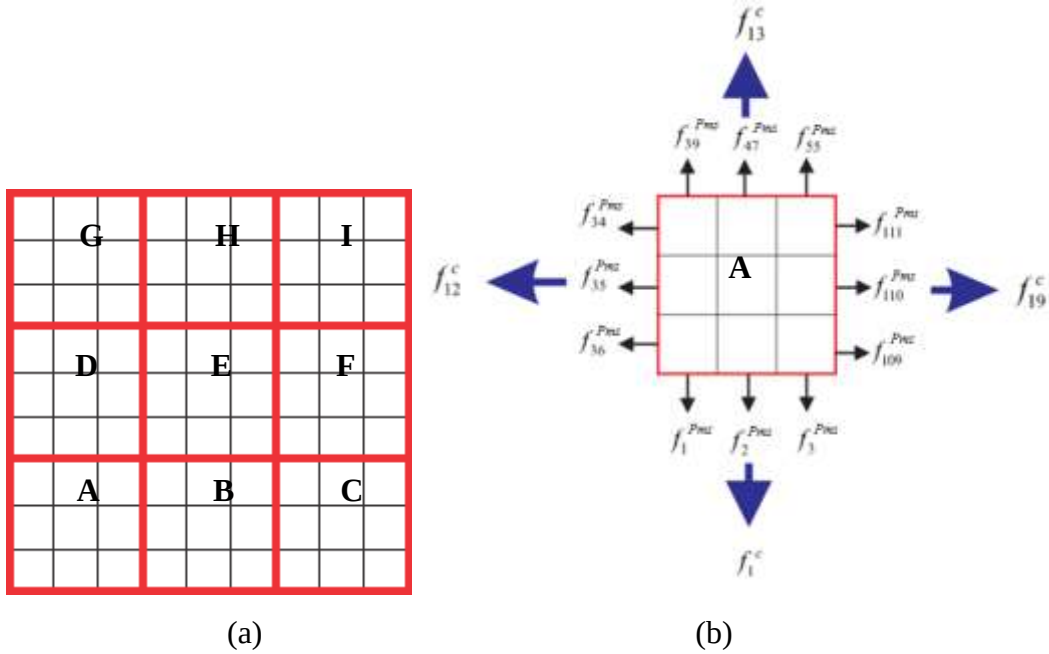


Figura 30. (a) Malha 9x9, com razão de engrossamento 9; (b) Vazão/Fluxo que atravessa as superfícies de controle do volume da malha grossa “A”.

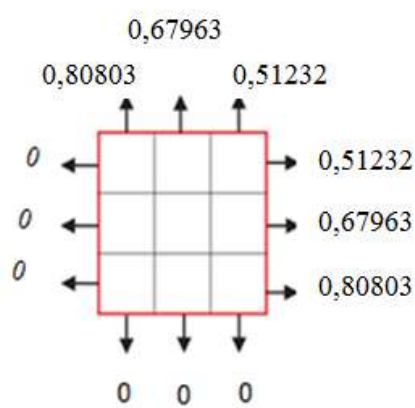


Na Figura 31 observamos o comportamento da vazão em cada volume de controle da malha fina pertencente ao Volume da malha grossa “A”, para a solução de referência, MsFVM, I-MMCVM sem correção e I-MMCVM-CF . O erro da vazão, usando a norma do infinito, da solução multiescala é de 12,55%. Com apenas 1 iteração esse erro cai para 6,6%, mas não podemos usar essa solução porque não é conservativa. Dessa forma corrigimos $\tilde{P}^p$, com o procedimento descrito nessa seção, e obtemos um novo fluxo conservativo e acurado, $\tilde{f}^{cor}$, o erro relativo cai para 1,33%, ou seja a solução $\tilde{f}^{cor}$ quase converge para a solução da fina, com apenas 1 iteração e correção.

A Tabela 4 mostra a acurácia da solução *upscaling* multiescala clássica, para o problema isotrópico e homogêneo apresentado. Percebemos que os valores das vazões nas faces 13 e 19 são equivalentes à solução de referência, mas, conforme os resultados apresentados na Figura 31, a solução multiescala projetada na malha fina, não carrega a mesma acurácia da solução *upscaling*.

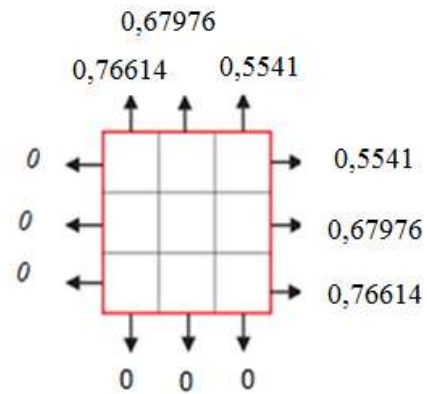
O método I-MMVCM de forma geral melhora a acurácia do campo de velocidade, o erro usando a norma L_2 na solução iterativa com correção é de 0,73%, enquanto na solução iterativa sem correção é de 5,33%. Observe que os fluxos na face 1 e 12 são nulos devido as condições de contorno de fluxo nulo do problema em análise.

Figura 31. Comportamento da vazão nos volumes de controle finos para os métodos utilizados.



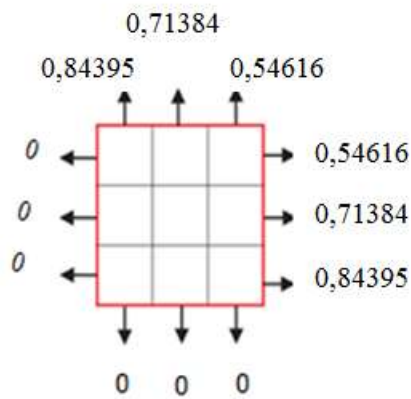
Solução de Referência

(a)



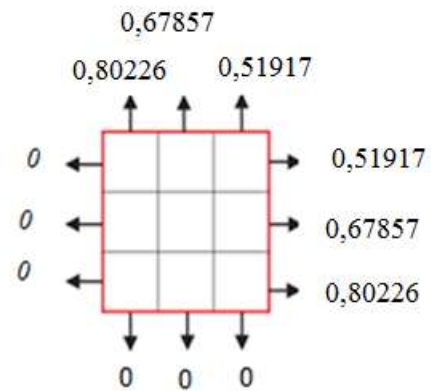
Solução Multiescala Clássica

(b)



Solução Iterativa – Sem Correção

(c)



Solução Iterativa – Com Correção

(d)

Tabela 4. Vazão *Upscaling* nas faces do volume de controle grosso primal A.

Vazão <i>Upscaling</i> na Face N avaliada	Solução de Referência	Solução Multiescala Clássica	Solução Iterativa sem correção	Solução Iterativa com correção
f_{11}^c	0	0	0	0
f_{12}^c	0	0	0	0
f_{13}^c	2	2	2,104	2
f_{19}^c	2	2	2,104	2

6.2.2 Correção do Fluxo Iterativo por Volume (CV)

Na seção anterior corrigimos o fluxo $\tilde{f}^P$ através de $\tilde{f}^c$, de forma a garantir conservação na malha grossa primal e diminuir os problemas de oscilação nas vazões, observe que esse método é muito dependente da acurácia de $\tilde{f}^c$. Embora essa técnica consiga obter boas soluções, quando $\tilde{f}^c$ perde a acurácia, $\tilde{f}^{cor}$ perde também.

De forma geral, o fluxo $\tilde{f}^P$ é acurado, visto que o uso das condições de contorno de Dirichlet melhora a acurácia do campo de pressão, mas por definição $\tilde{f}^P$ não garante conservação na malha grossa primal, como já relatado. Nesta seção iremos descrever uma estratégia para corrigir $\tilde{f}^P$ de forma que continuaremos a garantir a acurácia do fluxo e conservação na malha grossa primal.

Conforme descrito na equação (124) existe um erro de balanço ε que impede que o somatório dos fluxos seja conservativo, de forma que:

$$\tilde{f}^P = F_1^{P^P} + F_2^{P^P} + F_3^{P^P} + F_4^{P^P} + \bar{Q} + \varepsilon \quad (135)$$

Deseja-se que ε seja nulo para que o problema seja conservativo, portanto subtrai-se proporcionalmente o valor desse resíduo em cada fluxo $F_N^{P^P}$ (Figura 32 (a)). Desta forma, usaremos novamente uma ponderação para que o resíduo seja proporcionalmente retirado de cada $F_N^{P^P}$, de forma que:

$$\varepsilon = \varsigma_1 \varepsilon + \varsigma_2 \varepsilon + \varsigma_3 \varepsilon + \varsigma_4 \varepsilon = \varepsilon_F^1 + \varepsilon_F^2 + \varepsilon_F^3 + \varepsilon_F^4 \quad (136)$$

onde ε_F^N é o resíduo a ser subtraído de cada fluxo $F_N^{P^P}$ avaliado. Novamente usamos a vazão, como fator de ponderação, assim:

$$\varsigma_n = \frac{|F_N^c|}{\sum_{i=1}^{N=4} |F_N^c|} \quad (137)$$

Observe que quanto mais iteramos menor será o valor de ε a ser corrigido. Assim, teremos um novo fluxo, f^{P-cor} (ver Figura 32(a)), onde :

$$f^{P-cor} = (F_1^{P^p} - \varsigma_1 \varepsilon) + (F_2^{P^p} - \varsigma_2 \varepsilon) + (F_3^{P^p} - \varsigma_3 \varepsilon) + (F_4^{P^p} - \varsigma_4 \varepsilon) + \bar{Q} \quad (138)$$

ou ainda:

$$f^{P-cor} = (F_1^{Pcor}) + (F_2^{Pcor}) + (F_3^{Pcor}) + (F_4^{Pcor}) + \bar{Q} \quad (139)$$

onde F_N^{Pcor} é o novo fluxo conservativo que atravessa a face do volume de controle da malha grossa avaliado.

De forma análoga, voltamos ao mesmo problema existente na seção 6.3.1, onde temos conservação no volume de controle da malha grossa primal avaliada, mas não garantimos conservação nos fluxos dos volumes de controle da malha fina que compõem a face avaliada. Assim, faremos uma nova correção, desta vez por face (ver Figura 32(b)) :

Novamente, avaliando a face 1, temos:

$$F_1^{Cor} = (f_1^{P^p} + \delta_1^1 \varepsilon_F^1) + (f_2^{P^p} + \delta_2^1 \varepsilon_F^1) + \dots (f_n^{P^p} + \delta_n^1 \varepsilon_F^1) \quad (140)$$

onde

$$F_1^{Cor} = f_1^{P^p-cor} + f_2^{P^p-cor} + \dots + f_n^{P^p-cor} \quad (141)$$

Temos que δ_n é o fator de ponderação do resíduo, calculado a partir da vazão:

$$\delta_n = \frac{|f_n^{Pcor}|}{\sum_i^n |F_n^{Pcor}|} \quad (142)$$

e f^{Pcor} é o fluxo iterativo conservativo. Este processo pode ser observado na Figura 32.

Depois de corrigirmos o balanço de massa no volume avaliado, corrigiremos o próximo, usando a malha 9x9 da Figura 30, como exemplo, depois de garantir que o volume de controle V_A da seja conservativo, faremos o mesmo para V_B .

Observe que a aresta *upscaling* 19 que contém o fluxo $\tilde{f}_{19}^c$ (Figura 30b) pertence tanto ao volume V_A e V_B , como temos um novo fluxo conservativo $\tilde{f}_{19}^{P-cor}$ não precisaremos recalcular esse fluxo visto que $\tilde{f}_{A,19}^{P-cor} = -\tilde{f}_{B,19}^{P-cor}$, logo, chamando de $F_1^{Pcor} = \tilde{f}_{19}^{P-cor}$, teremos a seguinte equação:

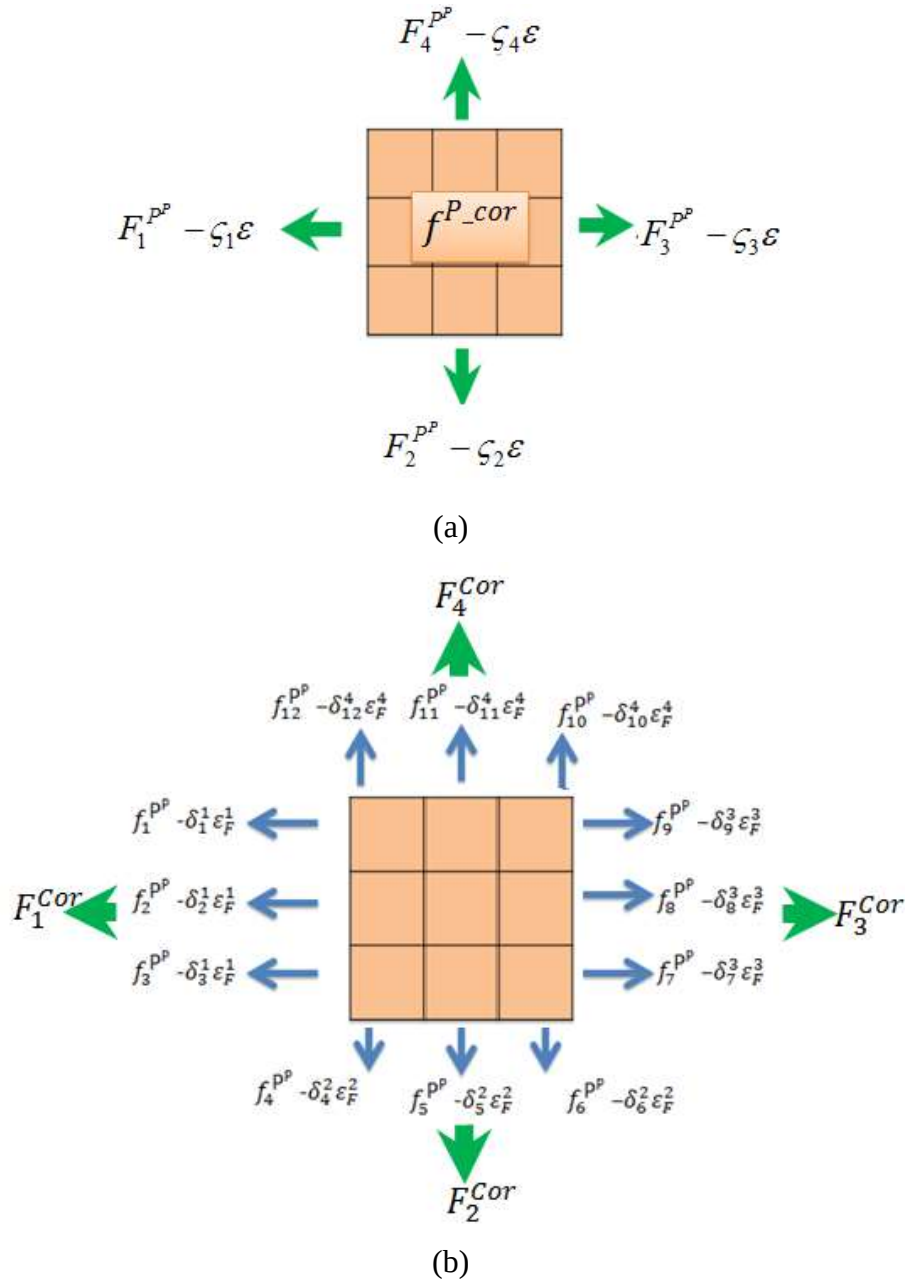
$$\tilde{f}_B^c = F_1^{Pcor} + F_2^{Pd} + F_3^{Pd} + F_4^{Pd} \quad (143)$$

Observe que a correção deve ser feita, em todos os volumes de controle da malha grossa dual. Todos os novos fluxos F_n^{Pcor} serão guardados e quanto mais iteramos mais acurada fica a solução. No entanto, o uso de muitas iterações destrói a eficiência do método IMMCM-CV, tornando o método mais caro que resolver o problema diretamente na malha fina. Por isso, na próxima secção iremos propor o uso de suavizadores iterativos (*Iterative Smoother*). Esses suavizadores são uma família de métodos iterativos de baixíssimo custo computacional onde a iteração é realizada diretamente na solução multiescala calculada. Desta forma, só usaremos uma ou duas iterações usando as condições de contorno de Dirichlet, aumentando a eficiência do nosso método.

Para exemplificar nossa metodologia, refaremos o exemplo da seção 6.3.1 (Figura 31), avaliando agora a vazão do volume “**B**” da malha primal (Figura 33), para uma razão de anisotropia 1/10, realizando apenas 2 iterações. Escolhemos o volume “**B**”, pois, nele temos o maior erro dos fluxos *upscaling*. Chamando os fluxos *upscaling* de $F_{B,n}^c$, o erro na norma L_2 de balanço foi de $\varepsilon = 0,0154$.

Na Tabela 5 comparamos as soluções: de referência, multiescala clássica, iterativa sem correção e com correção na malha grossa primal. Observe que o erro da solução multiescala, usando a norma do infinito, na face $F_{B,3}^c$ é de 104%. Este erro relativo com apenas três iterações cai para 1,2% e 2% na solução iterativa sem correção e com correção. De forma geral, a média do erro da solução multiescala nas quatro faces é de 39,01%, e o uso dos métodos iterativos diminuem esse erro para 1,5%.

Figura 32. Correção de Fluxo F^{Pp} através do balanço de massa em de V_A .



Na Tabela 6 observamos o comportamento da vazão nos volumes da malha fina que compõem $F_{B,3}^c$. Observe que a solução $f_{B,1}^f$ multiescala (0,08) é praticamente da mesma magnitude que o fluxo *upscaling* multiescala $F_{B,3}^c$ (0,102) (Tabela 5) e 1,6 vezes maior que o fluxo *upscaling* da solução de referência (0,05) (Tabela 5), isso nos leva a um erro relativo de 272% na solução clássica multiescala. O método clássico multiescala pode também mudar o sentido do fluxo, por exemplo, $f_{B,2}^f$ é positivo, enquanto na solução de referência é negativo. Isso é comum em problemas altamente heterogêneos.

É importante ressaltar que o I-MMVCM além de melhorar a acurácia, já que o erro relativo na face $f_{B,1}^f$ cai de 272% para aproximadamente 25%, corrigi o sentido o correto do fluxo, isto é, $f_{B,2}^f$, que passa a ser negativo.

Conforme a literatura, o método multiescala clássico pode prover boas soluções no campo de pressão. O erro usando a norma do infinito é de apenas 8,27%, e na norma L_2 chega a 5,52%, mas no campo de velocidade as soluções são muito ruins. O erro nas faces *upscaling* usando a norma do infinito é de 104%, e usando a norma L_2 é de 47,7%. Apenas com duas iterações esse erro cai para 12,5%. Observe que, se aumentarmos o numero de iterações para 10, por exemplo, esse erro na velocidade cai para 7,43% e na pressão para 4,33%.

Figura 33. Componentes da vazão do volume de controle B

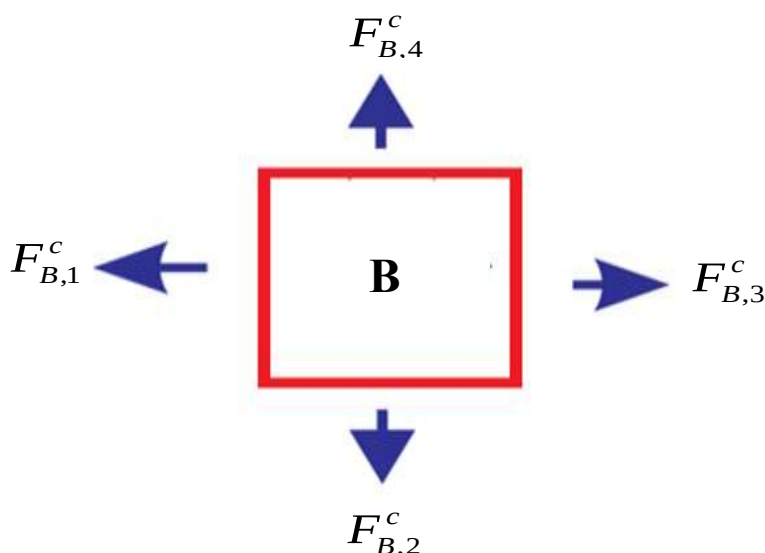


Tabela 5. Vazão *Upscaling* nas faces do volume de controle da malha grossa primal B.

Vazão <i>Upscaling</i> na Face N avaliada	Solução de Referência	Solução Multiescala Clássica	Solução Iterativa sem correção	Solução Iterativa com correção
$F_{B,1}^c$	0,362	0,393	0,376	0,368
$F_{B,2}^c$	0	0	0	0
$F_{B,3}^c$	-0,05	-0,102	-0,0506	-0,051
$F_{B,4}^c$	0,312	0,298	0,31	0,317

Tabela 6. Vazão dos volumes de controle da malha fina na face $F_{B,3}^c$.

Vazão <i>Upscaling</i> na Face N avaliada	Solução de Referência	Solução Multiescala Clássica	Solução Iterativa sem correção	Solução Iterativa com correção
$f_{B,1}^f$	-0,0215	-0,08	-0,0272	-0,0283
$f_{B,2}^f$	-0,0115	0,0063	-0,0056	-0,0053
$f_{B,3}^f$	-0,0017	-0,0283	-0,0178	-0,0182

6.3 SUAVIZADORES MULTIESCALA (*ITERATIVE SMOOTHER*)

Os suavizadores iterativos são uma família de métodos iterativos de baixíssimo custo computacional onde a iteração é realizada diretamente na solução multiescala calculada, $\tilde{P}^D$. Esses processos são amplamente utilizados na literatura (Møyner, 2012; Møyner, 2013; Møyner, 2016), principalmente para melhorar a acurácia da solução, muitos pesquisadores utilizam técnicas sofisticadas de iteração para forçar que a solução multiescala convirja para a fina (Møyner, 2012; 2013; 2016). A ideia deste trabalho é utilizar algumas vezes esses suavizadores, para melhorar a acurácia do campo de pressão, e posteriormente aplicamos o IMMVC.

Conforme mostrado na Eq. (107) a pressão na malha fina em sua forma matricial é dada, por $\tilde{T}^f \tilde{P}^f = \tilde{Q}^f$. Como $\tilde{T}^f$ é uma matriz quadrada, ela pode ser decomposta numa componente diagonal $\tilde{D}^f$ e no resto $\tilde{R}^f$, de forma que:

$$\tilde{T}^f = \tilde{D}^f + \tilde{R}^f \quad (144)$$

O sistema de equações lineares pode ser reescrito como:

$$\tilde{D}^f \tilde{P}^f = \tilde{Q}^f - \tilde{R}^f \tilde{P}^f \quad (145)$$

Usando o método iterativo de Jacobi resolvemos esta equação da seguinte forma:

$$\tilde{P}^{(n+1)} = \tilde{D}^{-1}(\tilde{Q}^f - \tilde{R}^f \tilde{P}^{(n)}) \quad (146)$$

onde

$$\tilde{P}^0 = \tilde{P}_{op} [\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op}]^{-1} \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (147)$$

Outro método que é utilizado nesse trabalho é o “*Successive over-relaxation*” (SOR), onde :

$$\tilde{T}^f = \tilde{D}^f + \tilde{L}^f + \tilde{U}^f \quad (148)$$

onde $\tilde{D}^f$ é a componente da diagonal decomposta a partir de $\tilde{T}^f$, $\tilde{L}^f$ é a matriz triangular inferior e $\tilde{U}^f$ é a matriz triangular superior. Inserindo-se um escalar ω , denominado de fator de relaxação, tal desmembramento pode ser escrito algebricamente da seguinte maneira:

$$\tilde{T}^f = \frac{\tilde{D}^f + \omega \tilde{L}^f}{\omega} + \frac{(\omega \tilde{U}^f + (\omega - 1) \tilde{D}^f)}{\omega} \quad (149)$$

Desse modo a solução do vetor $\tilde{P}$ é dada por:

$$\tilde{P}^{(n+1)} = (\tilde{D} + \omega \tilde{L})^{-1} (\omega \tilde{Q} - [\omega \tilde{U} + (\omega - 1) \tilde{D}] \tilde{P}^{(n)}) \quad (150)$$

onde $\tilde{P}^0 = \tilde{P}^D$.

Como todos os parâmetros necessários para a aplicação dos suavizadores são calculados durante o método multiescala, o custo de aplicação é de apenas algumas poucas operações de ponto flutuante, ou seja, custo baixíssimo. É importante ressaltar que o ideal é que se utilize poucas iterações, para não tornar esse método caro. Em média utilizamos 30 iterações, no mínimo 10 e no máximo 50 iterações. Em contrapartida, esse método não é conservativo, fazendo-se necessário o uso do método I-MMVCM, para garantirmos conservação na malha grossa primal através do uso das condições de contorno de Neumann.

Para mostrar a eficácia da combinação dos suavizadores com o método I-MMVCM, refazemos o exemplo proposto na seção 6.3.2, para uma razão de anisotropia 1/10.

Na Tabela 7 comparamos a acurácia dos métodos iterativos Jacobi e SOR, com apenas uma iteração no problema de Dirichlet. Observamos que o erro cai mais rapidamente quando usamos o método I-MMVCM, e a norma do infinito do erro se reduz praticamente à metade.

Já usando os suavizadores, este erro diminui apenas 20%, em relação ao compararmos o erro da solução multiescala clássica.

Tabela 7. Comparação do erro da pressão na solução MsFVM clássica, dos métodos iterativos I-MMVCM, Jacobi e SOR (Suavizadores) para uma única iteração.

Erro (%)	I-MMVCM	Jacobi	SOR	MsFVM
Norma do Infinito	4,66	6,57	6,61	8,27
Norma L2	4,82	5,31	5,33	5,52

Na Tabela 8 mostramos em si o objetivo dessa seção, ou seja, a utilização conjunta dos suavizadores com o método I-MMVCM. Observe que o erro da solução multiescala cai drasticamente, este era de 8,27% usando a norma do infinito e cai para 2,91 usando 30 iterações de Jacobi e apenas uma de Dirichlet. Vale observar que se utilizarmos apenas 1 iteração de Jacobi seguida do I-MMVCM com uma iteração de Dirichlet, obtemos um erro de 4,4% na norma L_∞ .

Em termos de fluxo, o erro usando a norma do infinito na combinação Jacobi/I-MMVCM cai para 7,49% e usando a norma L_2 esse cai para 11%.

É importante ressaltar que em termos de acurácia, o método I-MMVCM é mais robusto e fornece melhores resultados, entretanto o custo computacional é maior. Portanto, o suavizador pode ser utilizado de maneira a melhorar e diminuir a quantidade de iterações necessárias do I-MMVCM.

Tabela 8. Comparação do erro da pressão usando a combinação Jacob e I-MMVCM, SOR e I-MMVCM, para 30 iterações dos suavizadores.

Erro (%)	Jacobi + I-MMVCM	SOR+ I-MMVCM
Norma do Infinito	2,91	2,94
Norma L2	4,56	4,59

Por fim, para finalizar essa seção mostraremos o algoritmo final I-MMCVM:

Calcule o operador de restrição ;

Enquanto tempo < tempo máximo. Faça

Calcule o operador de prolongamento (funções de base), se necessário;

Calcule a transmissibilidade na malha fina;

Calcule a transmissibilidade na malha grossa primal;

Calcule a pressão na malha grossa primal;

Reconstrua a pressão multiescala na malha fina;

Enquanto pressão não convergida. Faça

Calcule a Pressão Utilizando Suavizadores

Calcule a pressão em cada volume de controle da malha grossa primal (Problema de Dirichlet);

Corrija o Fluxo *Upscaling* (Escolha a correção)

Correção do Fluxo por Face (Maioria dos problemas)

Correção do Fluxo por Volume (Meio Anisotrópico ou com Barreiras/Fraturas)

Calcule a pressão em cada volume da malha grossa primal (Problema de Neumann);

Atualize a pressão multiescala na malha fina (dual + primal);

Calcule a velocidade total;

Calcule a saturação.

7 APLICAÇÕES

No presente capítulo, mostraremos os resultados obtidos utilizando as técnicas numéricas apresentadas nesse trabalho, dessa forma as características particulares da formulação avaliada podem ser melhores exploradas. As soluções de referência foram obtidas resolvendo-se a equação da pressão e saturação diretamente na malha fina, e as soluções via metodologia multiescala foram obtidas considerando-se diferentes razões de engrossamento. Na primeira seção analisaremos problemas que representam o escoamento monofásico em reservatórios de petróleo, heterogêneos e anisotrópicos, avaliaremos a acurácia do método I-MMCVM quando utilizamos formulações do tipo MPFA-O e MPFA-FPS. Logo depois, mostraremos o potencial dos métodos de correções do fluxo *upscaling* multiescala desenvolvidos, para diversos exemplos heterogêneos, isotrópicos ou anisotrópicos. Mostraremos ainda as formulações I-MMCVM conjuntamente com o métodos streamline, onde conseguimos soluções computacionalmente eficientes e acuradas. Por fim, mostraremos que o I-MMCVM pode ser aplicado conjuntamente com formulações de alta ordem para a equação de saturação. Para finalizar o capítulo faremos um estudo sobre a influência do fator de engrossamento e a eficiência do método.

7.1 SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO NUM RESERVATÓRIO MUITO HETEROGÊNEO E ANISOTRÓPICO NUMA CONFIGURAÇÃO DE ¼ DE CINCO POÇOS

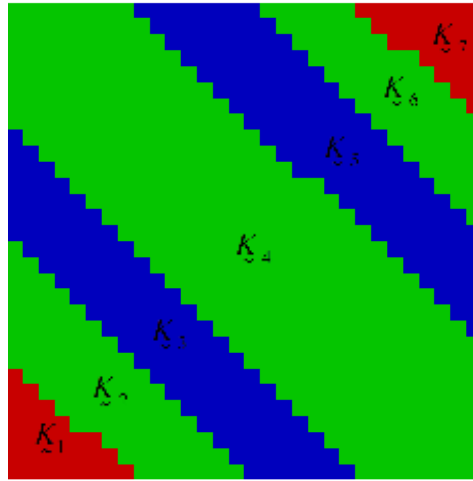
Conforme relatado nesse trabalho, os métodos multiescalas denominados clássicos produzem soluções não acuradas, muitas vezes não físicas em meios anisotrópicos, heterogêneos e com alta razão de anisotropia. Para verificar a acurácia do I-MMVCM, resolveremos a equação da pressão (Capítulo 2) num meio fortemente anisotrópico e heterogêneo incorporando as formulações de volumes finitos do tipo MPFA-O e MPFA-FPS ao método multiescala.

Novamente consideramos um domínio $\Omega = [0,1] \times [1,0]$, onde a malha fina contém 30×30 volumes de controle, representando apenas um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, onde as condições de contorno “externas” são de fluxo nulo ao longo de todas as fronteiras do reservatório, e as condições de internas ao reservatório são: pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_{prod} = 0$), localizado no volume de controle do canto superior direito da malha fina, e vazão prescrita no poço de produção ($\bar{Q}_{inj} = 1$). O tensor de perme-

abilidade absoluta é uma adaptação do trabalho de Li e Riviere (2015). Esse campo pode ser observado na Figura 34, onde tensor tem sete diferentes camadas onde:

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_7 = \begin{bmatrix} 50,5 & 49,5 \\ 49,5 & 50,5 \end{bmatrix}; \underline{K}_3 = \underline{K}_5 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}; \underline{K}_2 = \underline{K}_4 = \underline{K}_6 = \begin{bmatrix} 30,5 & 29,5 \\ 29,5 & 30,5 \end{bmatrix};$$

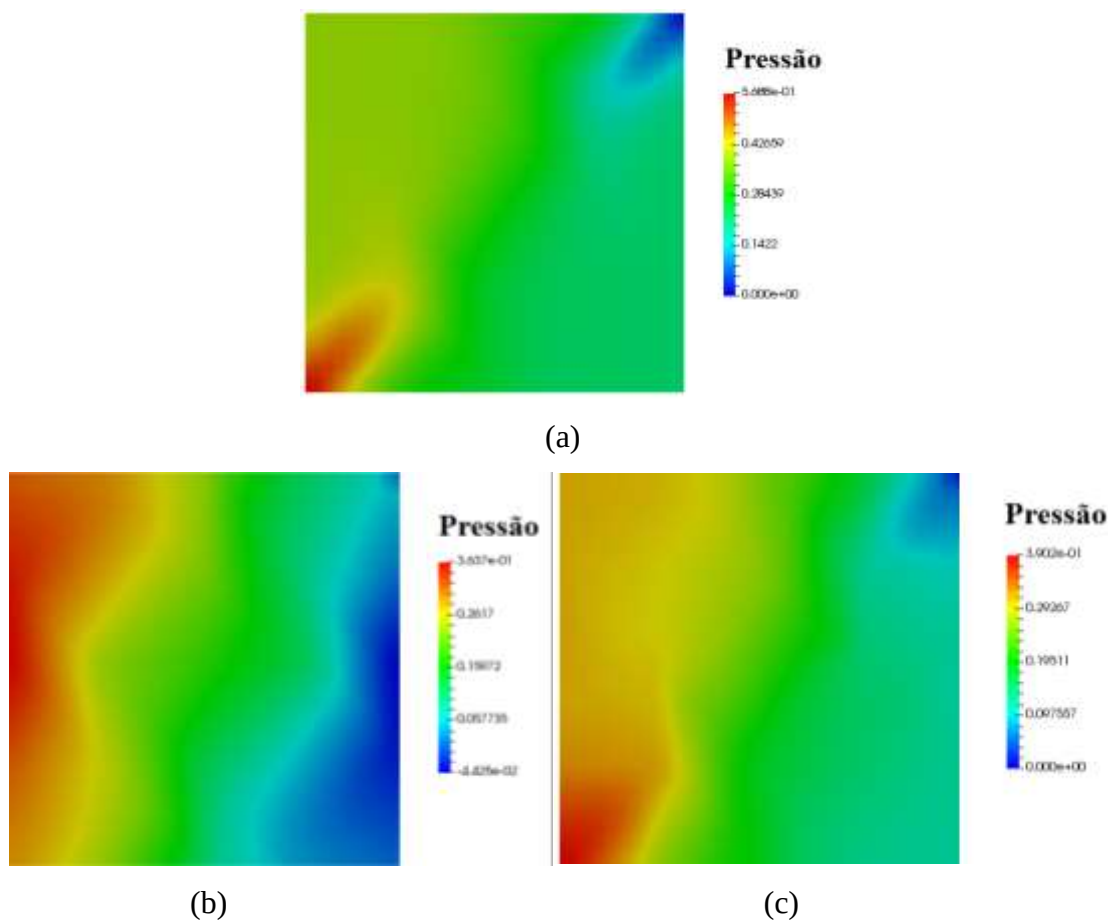
Figura 34. Campo de permeabilidade heterogêneo e anisotrópico



Esse campo de permeabilidade é desafiador ao método multiescala, pois, além de ser anisotrópico, possui diversas regiões com bruscas variações de permeabilidade representando um problema as metodologias multiescalas que utilizam as condições de contorno reduzidas para desacoplar os subproblemas. Conforme será mostrado nos exemplos a seguir, os métodos multiescala não conseguem aproximar corretamente o campo de pressão.

Na Figura 35 observa-se o comportamento do campo de pressão, nas soluções de: referência e MsFVM-MPFAO, para um fator de engrossamento 100 e 25. Percebe-se que o MsFVM-MPFAO não reproduz uma solução acurada independente do fator de engrossamento, apresentando um campo de pressão totalmente oscilatório, (Figura 35b e Figura 35c). Para qualquer Cr, as arestas dos volumes de controle da malha grossa dual atravessam regiões com bruscas variações de permeabilidade e com isso temos uma solução na pressão inconsistente. Conforme apresentado na Tabela 9, o erro usando a norma infinito cai quando diminuimos o fator de engrossamento sendo que para um Cr=100 temos um erro de 62,49% e para um Cr=25 temos um erro de 49,49%.

Figura 35. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM para um $Cr=100$; (c) Solução MsFVM para um $Cr=25$



Na Figura 36 apresentamos o campo de pressão da solução I-MMCVM-MPFAO, considerando três iterações, utilizando um suavizador com limite de 30 iterações. Observamos na Tabela 9 que o campo de pressão do método I-MMCVM é mais acurado do que a solução MsFVM, para qualquer fator de engrossamento. Percebe-se na Figura 36b, que ainda existem oscilações no campo de pressão da solução I-MMVCM. Isso acontece porque o campo de pressão MsFVM possuía inicialmente uma solução muito oscilatória, e a quantidade de iterações não foi suficiente para eliminar essa oscilação. Já com um fator de engrossamento 25, Figura 35c, temos uma solução, qualitativamente muito similar à obtida diretamente na malha fina, apresentando um erro de 24%. De forma geral, os resultados para este campo de pressão usando as técnicas I-MMCVM foram satisfatórios.

Figura 36. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução I-MMCVM para um $Cr=100$; (b) Solução I-MMCVM para um $Cr=25$

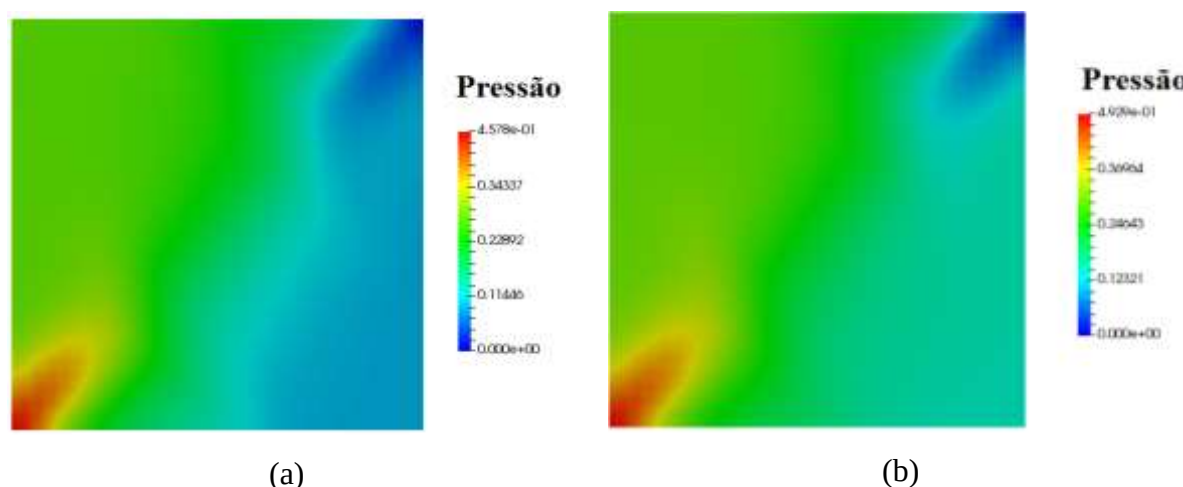


Tabela 9. Escoamento monofásico num reservatório homogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento e erro na norma infinito da solução MsFVM-MPFAO e I-MMCVM-MPFAO do campo de pressão

Razão de engrossamento	MsFVM	I-MMCVM
100	62,49%	29,39%
56,25	58,56%	27,95%
36	55,42%	29,35%
25	49,49%	24,86%

Para observar o comportamento da solução multiescala com diferentes MPFA's implementamos a formulação MPFA do tipo FPS, novamente compararemos as soluções obtidas diretamente na malha fina considerando MsFVM e o I-MMVCM.

É importante destacar que independente da formulação MPFA, a solução MsFVM falha em reproduzir um campo de pressão acurado. Novamente temos uma solução oscilatória (Figura 37-b e Figura 37-c) para todas as dimensões da malha grossa primal. Embora o erro usando a norma infinito seja menor variando ente 31%-48%, mas a solução de forma geral não é acurada.

Novamente o método I-MMVCM é capaz de obter soluções com boa acurácia. Na Tabela 10 observamos que o erro varia entre 14%-22%. A solução para um $Cr=100$, ainda apresenta oscilações, porque a quantidade de iterações foi insuficiente para eliminar esse erro.

Figura 37. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM para um $Cr=100$; (c) Solução MsFVM para um $Cr=25$

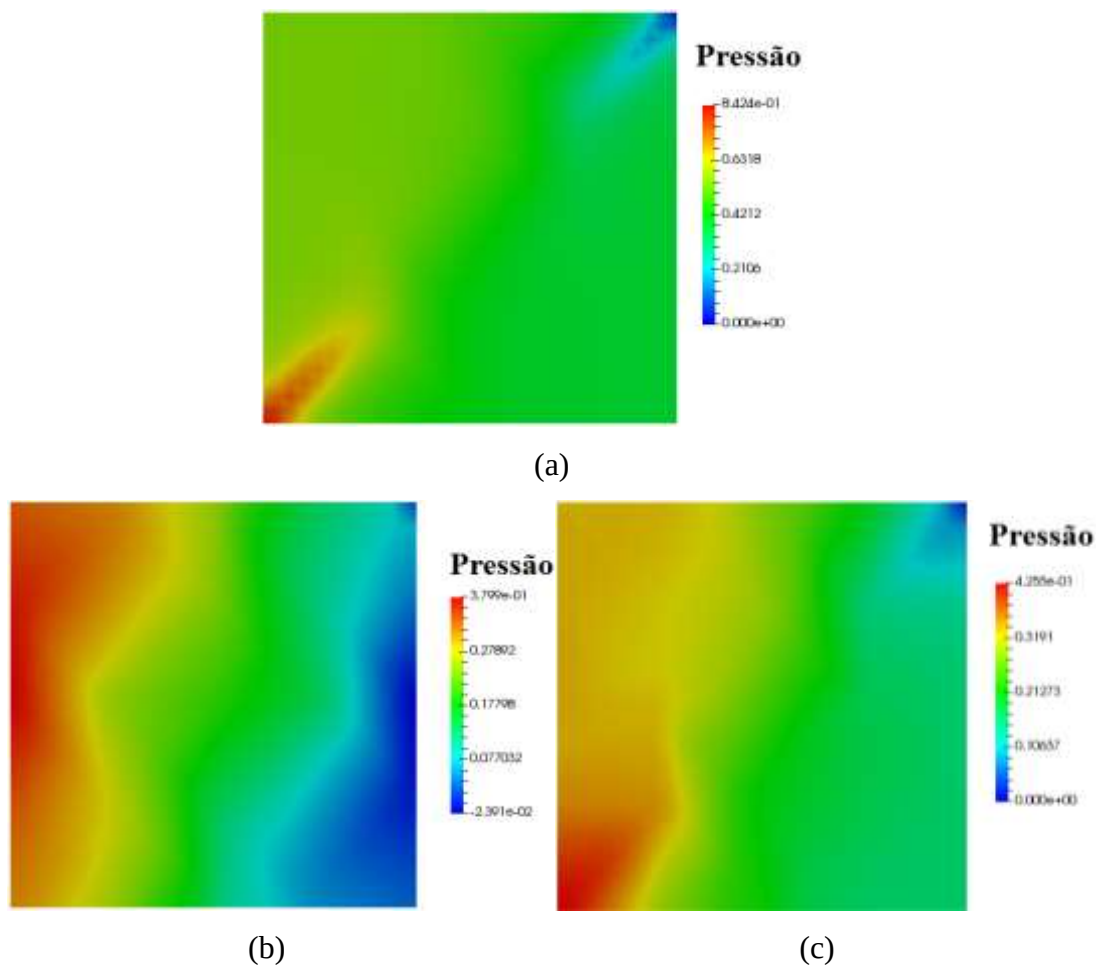


Figura 38. Campo de pressão do escoamento monofásico : (a) Solução I-MMCVM para um $Cr=100$; (b) Solução I-MMCVM para um $Cr=25$

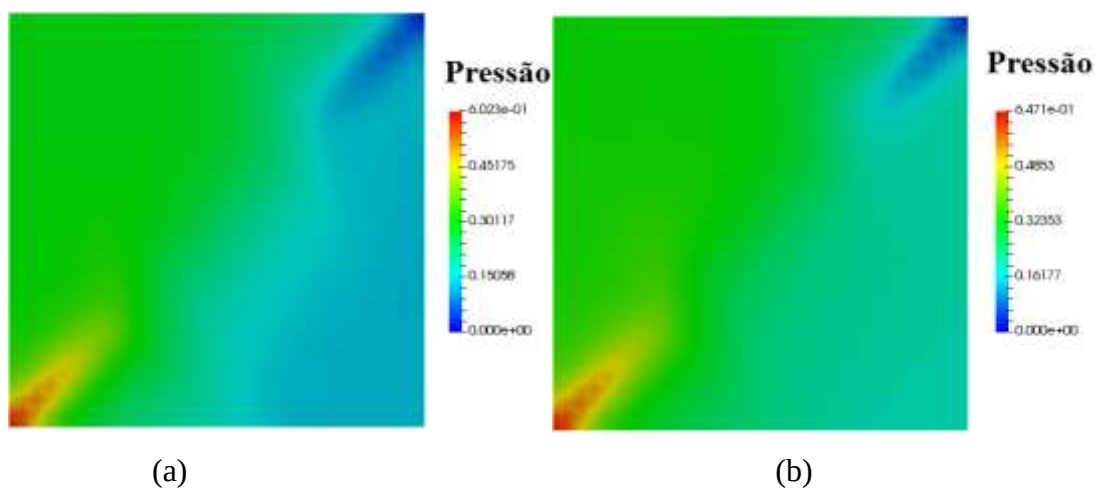


Tabela 10. Escoamento monofásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de ¼ de cinco poços: razão de engrossamento e erro norma infinito, da solução MsFVM-MPFA-FPS e I-MMCVM-MPFA-FPS para o campo de pressão

Razão de engrossamento	MsFVM	I-MMCVM
100	48,42%	22,48%
56,25	42,82%	20,04%
36	38,25	17,87%
25	31,39%	14,46%

É importante destacar que para os casos estudados, o método I-MMCVM é capaz de fornecer uma solução acurada. E o mais importante, a solução converge para a formulação MPFA implementada.

7.2 CORREÇÃO DOS FLUXOS *UPSCALLING*

Conforme relatado no Capítulo 6, o método I-MMCVM não garante uma solução conservativa, visto que no momento que desacoplamos os volumes de controle da malha grossa primal, e iteramos cada volume de controle dessa malha a fim de obter uma solução acurada, perdemos a conservação *upscaling*. Portanto, desenvolvemos duas maneiras diferentes para garantir que o fluxo *upscaling* seja conservativo. A primeira denominamos correção do Fluxo por face, utilizamos a acurácia do fluxo *upscaling* obtido na solução MsFVM, através da pressão P^D (pressão obtida através do operadores multiescala), para corrigir o fluxo P^P (pressão obtida através da malha grossa primal, iterativamente). Essa técnica é válida para situações onde o fluxo *upscaling* é acurado, porém quando esse fluxo perde acurácia, essa técnica tende a falhar. A segunda correção, denominada correção por volume, o fluxo P^P será corrigido volume a volume de forma a forçar conservação, através da eliminação do resíduo que impede que a solução seja conservativa. Essa técnica é mais ampla, pois permite simulação de meios anisotrópicos e heterogêneos, inclusive problemas com regiões que apresentam bruscos gradientes de permeabilidade, como meios fraturados e com barreiras.

7.2.1 Correção dos Fluxos *Upscaling* por Face (CF)

Nesta seção mostraremos as vantagens e limitações do método I-MMVCM-CF quando corrigimos o Fluxo *Upscaling* por faces (I-MMVC-CF). Para isso testamos o nosso método num problema realmente desafiador, utilizamos o campo de permeabilidades do Modelo 2 (formação Upper Ness) do *10th Comparative Solution Project* da SPE, que é disponibilizado (Christie et al., 2001).

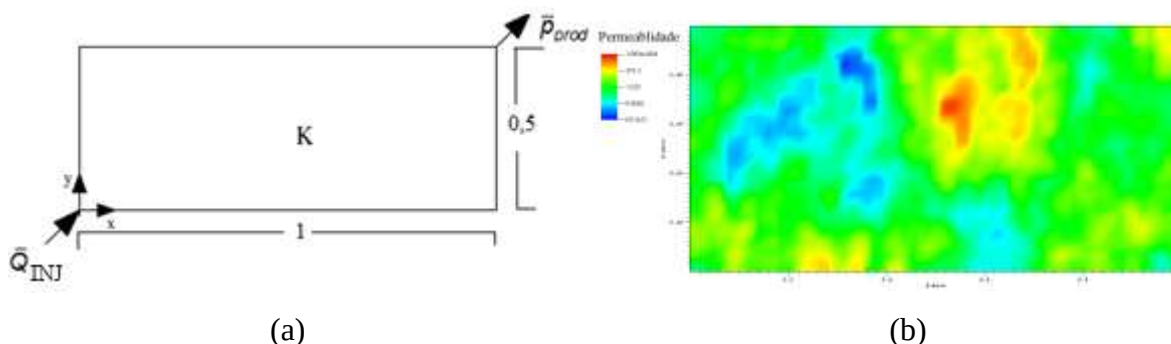
É importante ressaltar que o MsFVM não é capaz de fornecer soluções acuradas a todas as camadas do SPE-10th. O método tem sérias dificuldades em simular meios altamente heterogêneos, com bruscos gradientes de permeabilidade, muitas vezes gerando soluções não condizentes com a natureza física do problema. Algumas vezes mudar a razão de engrossamento, de forma que as arestas dos volumes de controle da malha grossa dual não atravessem essas regiões, ameniza o problema (Møyner, 2012). Outras vezes, independente do Cr, os volumes de controle da malha grossa dual atravessarão essas regiões, como em meios fraturados, logo possivelmente teremos uma solução multiescala com baixa acurácia. De forma geral, o fluxo *upscaling* oriundo de P^D tem boa acurácia (Kippe et al., 2008; Lunati e Jenny 2006). Desta forma, escolhemos algumas camadas onde o MsFVM falha, ou tem baixa acurácia e tentaremos reproduzi-las através do I-MMVCM. Para todos os problemas dessa seção usamos as formulações TPFA (*Two Point Flux Approximation* - TPFA).

7.2.1.1 Escoamento bifásico em um reservatório muito heterogêneo numa configuração de ¼ de cinco poços

Considere um reservatório que é representado por um domínio computacional retangular definido por: $\Omega = [0,1] \times [0.5,1]$ (Figura 39a), onde a malha fina contém 64x30 volumes de controle, onde simulou-se apenas um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços. Temos uma pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_{prod} = 0$), localizada no volume de controle do canto superior direito da malha fina, saturação da água $S_w = 1.0$, vazão prescrita no poço de injeção ($\bar{Q}_{inj} = 1$) localizada no canto inferior esquerdo do reservatório, as saturações residuais do óleo e da água no reservatório são $S_{or} = S_{wr} = 0.0$, a razão entre as viscosidades das fases é $\mu_o / \mu_w = 4$. Para todos os problemas o fator de engrossamento utilizado foi $Cr = 113,8$ (6x3 volumes de controle na malha grossa primal).

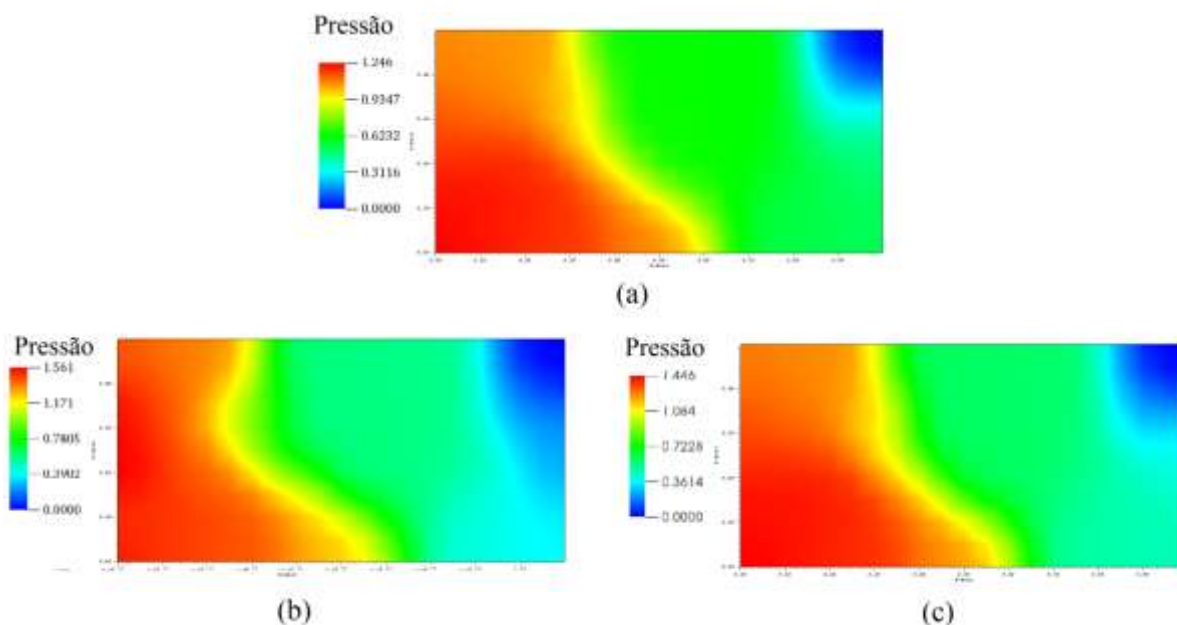
No primeiro problema proposto, usamos a camada 30 (Figura 39b.), que representa um exemplo clássico onde o campo de permeabilidade é heterogêneo e tem regiões com elevados gradientes de permeabilidade.

Figura 39. (a) Domínio Físico – (b) Mapa de cores do Campo de permeabilidade SPE 22th - 30



Na Figura 40 apresentamos o campo de pressão da solução de referência, MsFVM e I-MMCVM-CF. Na Figura 40b percebe-se claramente que o método multiescala não consegue reproduzir todas as características do campo de pressão e o erro na pressão usando a norma infinito do método MsFVM é de 47,55%. Com três iterações, sem o uso do suavizador, o I-MMCVM obtém uma solução com boa acurácia reduzindo o erro para 12,79%.

Figura 40. Campo de pressão Camada 30, SPE-10 – VPI 0.05



Nas Figuras 41 e 42 comparamos o campo de saturação para a solução de referência, MsFVM e a I-MMCVM-CF, para diferentes VPI's. Observe que o MsFVM não consegue capturar todos os efeitos da variação do campo de permeabilidades (Figura 41b e 42b). Isso

acontece porque as arestas dos volumes de controle da malha grossa dual atravessam regiões com grandes variações de permeabilidade, resultando um erro usando a norma do L_2 de 36,8%. Embora a solução MsFVM tenha baixa acurácia, o I-MMCVM-CF através de iterações e utilizando o fluxo *upscaling* P^D consegue uma solução com boa acurácia, reduzindo o erro para 22,98%. Isso mostra que o fluxo *upscaling* tem boa acurácia.

Na Figura 43 apresentamos as curvas de óleo acumulado, óleo recuperado e corte de água para solução de referência, solução MsFVM e I-MMCVM-FU. Observe que, mesmo com os problemas no campo de saturação, o método MsFVM reproduz corretamente o *break-through* no poço produtor avaliado e que o I-MMCVM-FU não destrói a solução MsFVM, visto que a solução do fluxo *upscaling* é idêntica para ambos, e os dois métodos reproduzem corretamente o fenômeno.

Figura 41. Campo de saturações em $t = 0,03$ VPI para o problema do escoamento bifásico em meio muito heterogêneo com campo de permeabilidades aleatório: (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF ; VPI=0,02

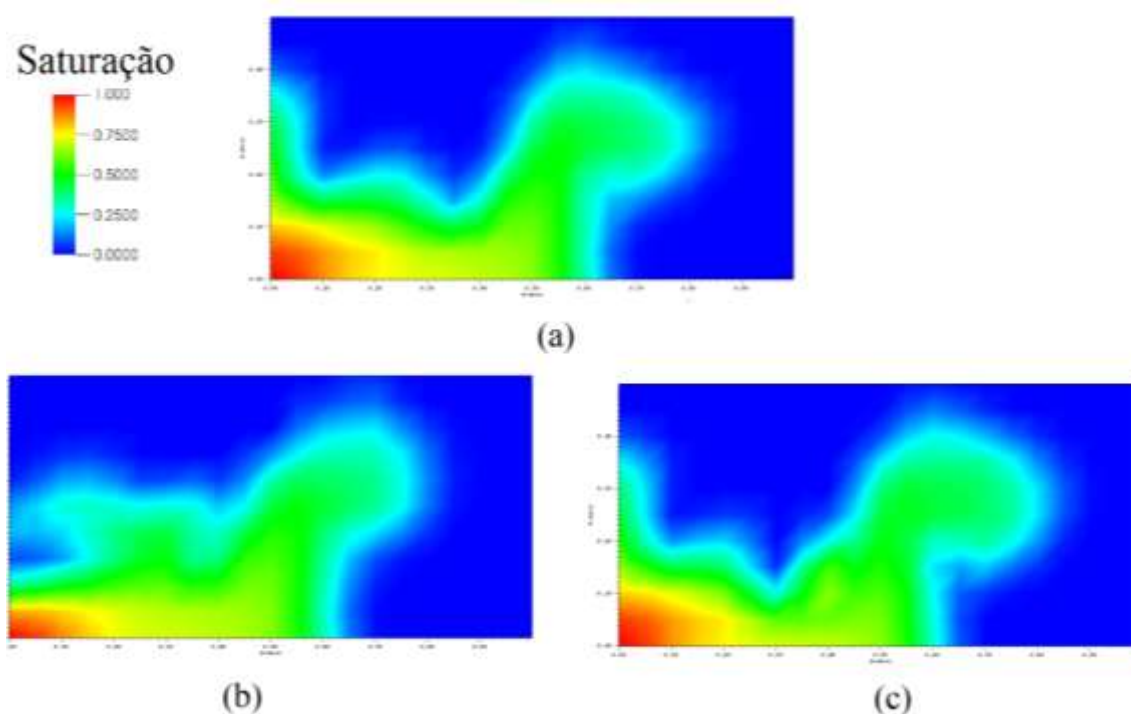


Figura 42. Campo de saturações em $t = 0,04$ VPI para o problema do escoamento bifásico em meio muito heterogêneo com campo de permeabilidades aleatório: (a) Solução de referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; VPI=0,03

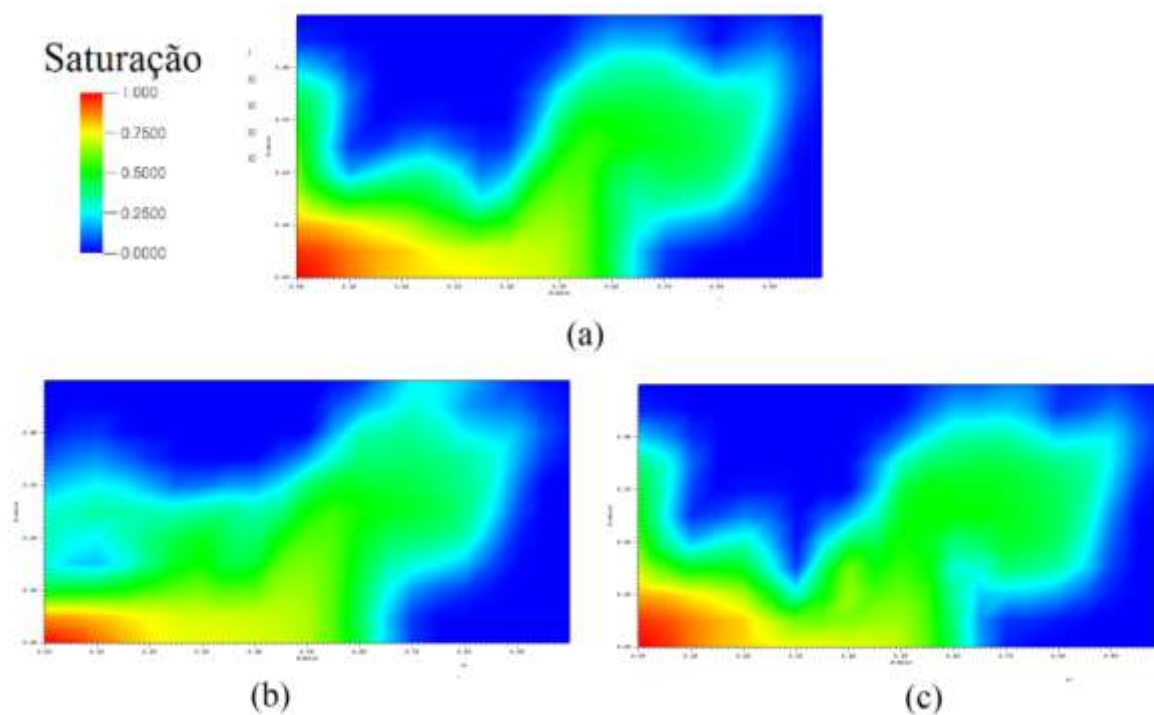
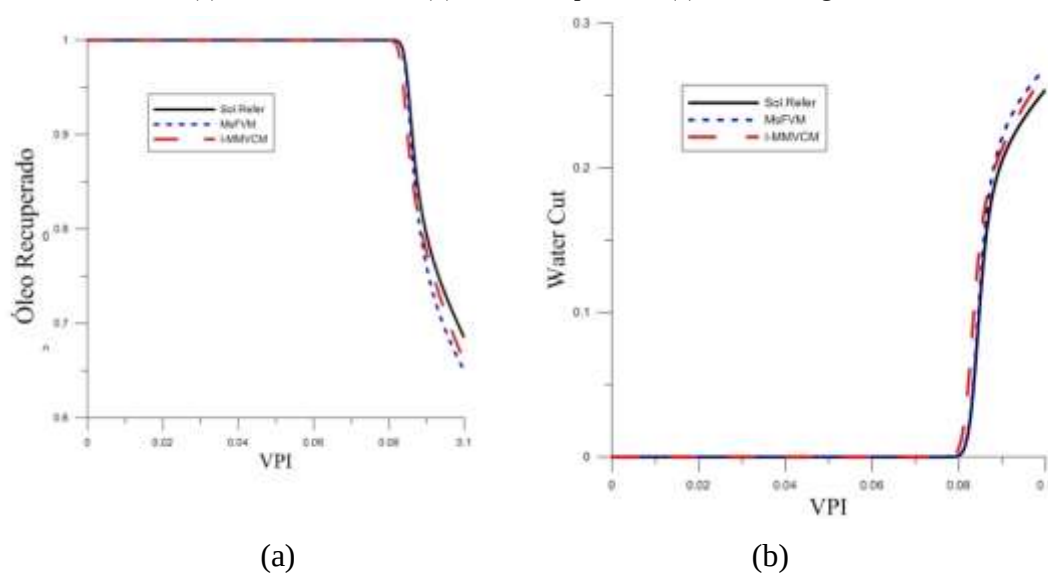
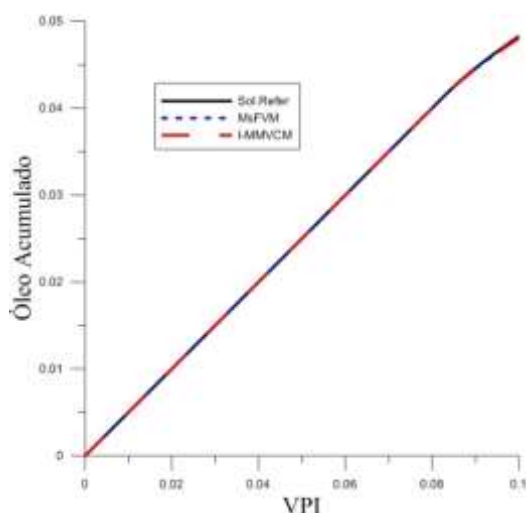


Figura 43. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do 10th Comparative Solution Project da SPE:

(a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água

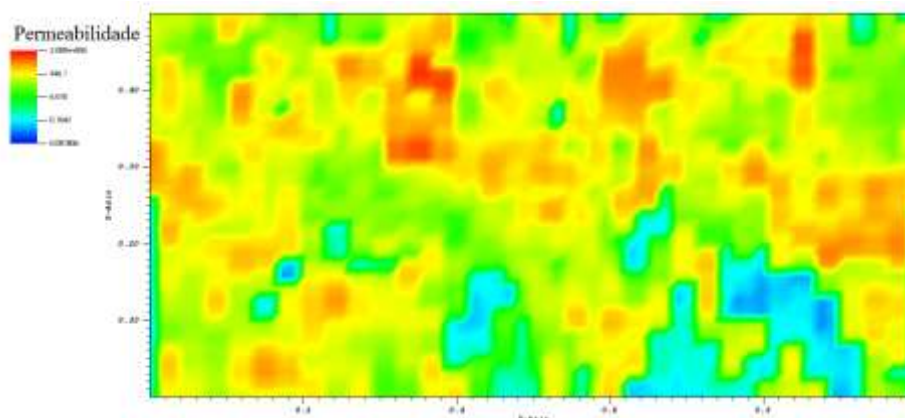




(c)

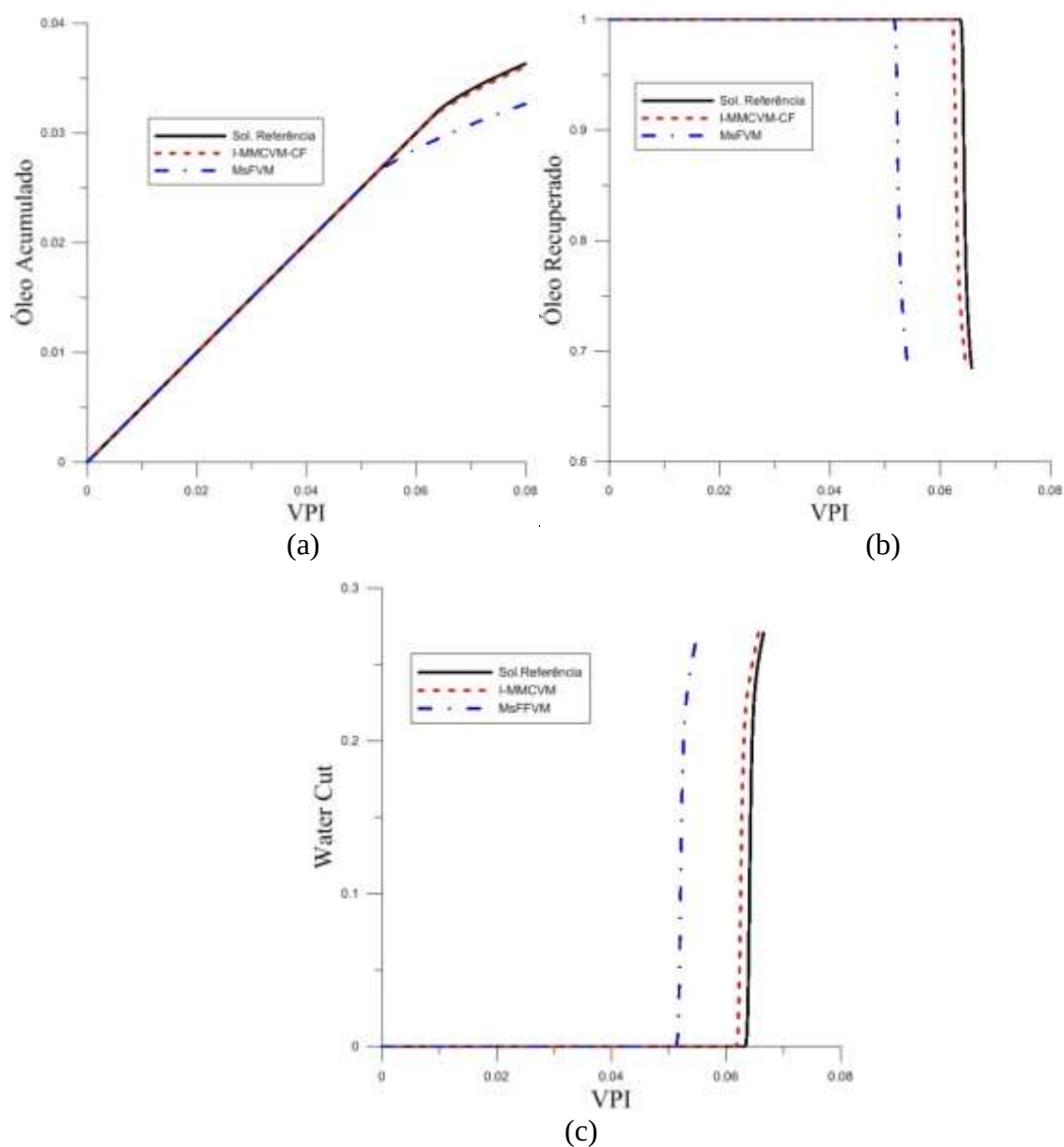
Para o mesmo reservatório apresentado nessa seção, usamos agora a camada 45, apresentada na Figura 44, para um fator de engrossamento 100.

Figura 44. Mapa de cores do campo de Permeabilidade da Camada 45



Na Figura 45 apresentamos o volume de óleo acumulado, recuperado e o corte de água para as formulações investigadas no instante 0,04 VPI. Podemos verificar que o método MsFVM antecipa significativamente o *breakthrough*. Considerando esse fator de engrossamento, fica claro que o método apresenta dificuldades em reproduzir o comportamento desse escoamento. Observe que o método I-MMVCM-CF melhora a solução corrigindo satisfatoriamente, a antecipação do *breakthrough*.

Figura 45. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do 10th Comparative Solution Project da SPE: (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água



Na Figura 46 e Figura 47 apresentamos o campo de saturações, considerando a solução de referência, MsFVM e a I-MMCVM, observe que o método MsFVM não consegue reproduzir corretamente a frente de saturação, para todos os VPI apresentados. O *break-through* ocorre num VPI de 0,03. O erro do campo de saturação, usando a norma L_2 , é de 58,8%, esse erro cai para 28,1% quando usamos o método I-MMCVM.

Figura 46. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 45 do Modelo 2 do 10th Comparative Solution Project da SPE: (a) Solução de Referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF – VPI: 0,02

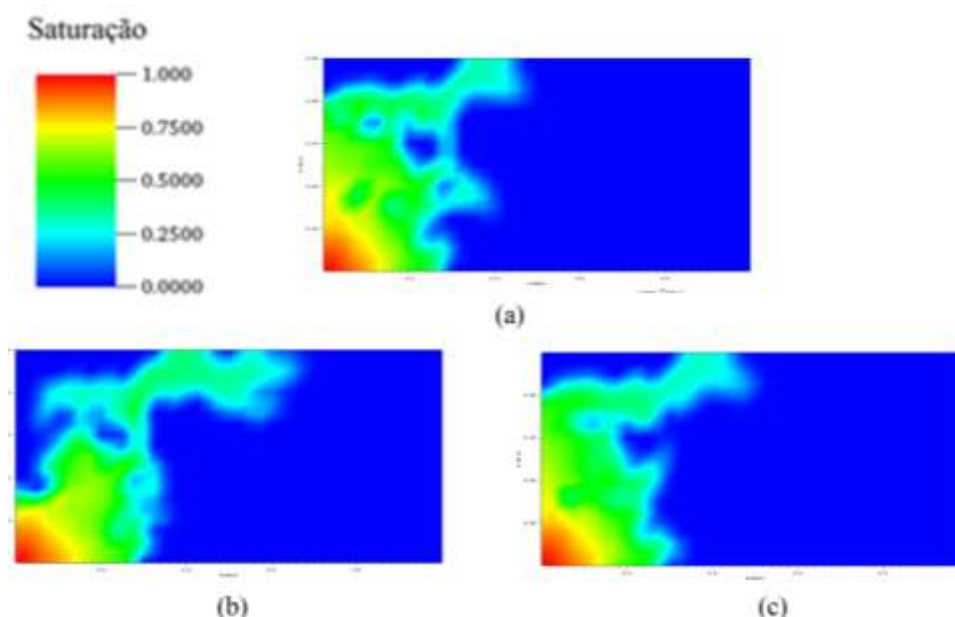
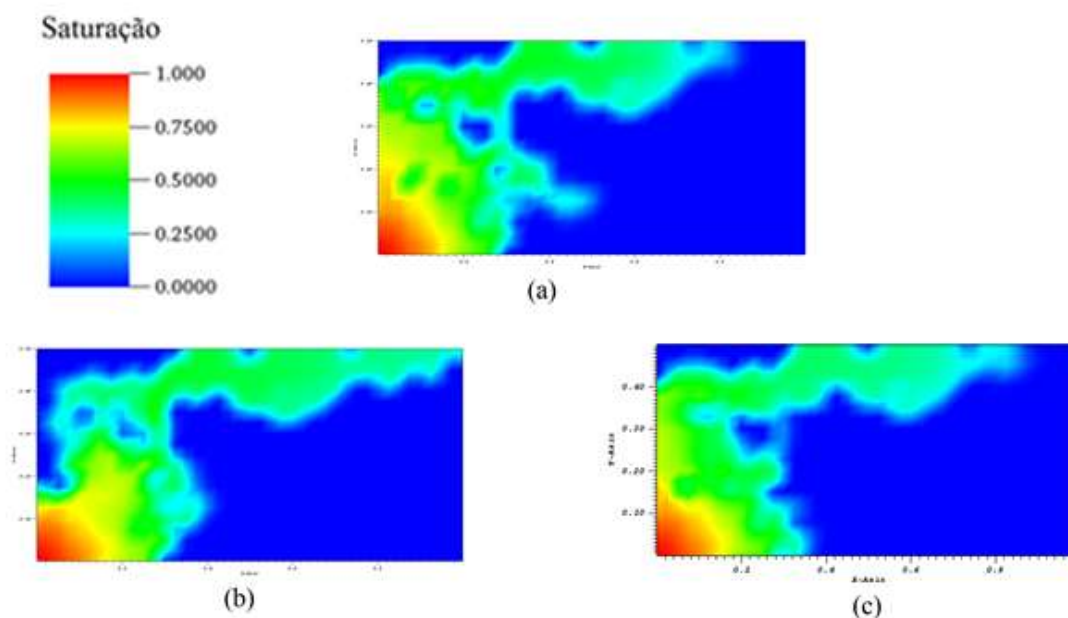


Figura 47. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 45 do Modelo 2 do 10th Comparative Solution Project da SPE: (a) Solução de Referência; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF – VPI: 0,03



É importante destacar que o I-MMVCM-CF é um importante aprimoramento da técnica apresentada por Jenny e Lunatti (2006), visto que, esses autores corrigiam as oscilações do campo de velocidade, através do fluxo *upscaling*, aplicando uma média aritmética, ou seja,

uma homogeneização das velocidades que atravessam a face do volume de controle da malha grossa primal. Porém essa homogeneização, para todos os problemas heterogêneos e isotrópicos se mostrava uma solução inferior ao método MsFVM, ao contrário do nosso método I-MMVCM-CF. O I-MMVCM-FU melhora a acurácia do campo de pressão, visto que utiliza um campo de velocidade iterado, com condições de contorno de Dirichlet, além de fazer uma correção utilizando um fluxo ponderado pela própria vazão do problema. Logo, de forma geral conseguimos uma melhoria significativa nos campos de saturação e pressão.

7.2.2 Correção dos Fluxos *Upscaling* por Volume (CV)

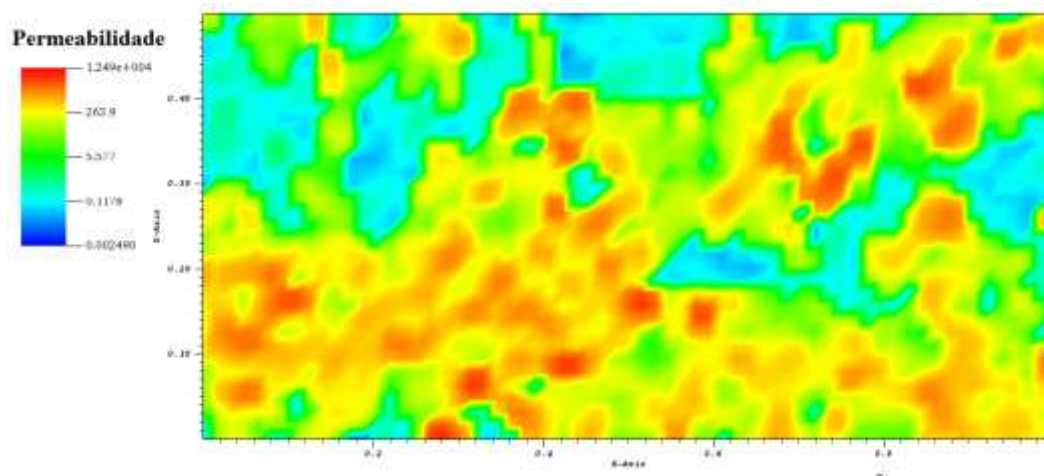
Nesta seção apresentaremos os resultados do método I-MMVCM-FU em problemas desafiadores onde o MsFVM reproduzem soluções não acuradas. Assim testamos o nosso método numa camada SPE e em meios fraturados.

7.2.2.1 Simulação do Escoamento Bifásico de Água e Óleo na Camada 59 do Modelo 2 do *10th Comparative Solution Project* da SPE (10th CSP-SPE)

Conforme relatado nesse trabalho, o método multiescala falha em obter soluções acuradas em certas camadas do *10th Comparative Solution Project* da SPE, principalmente quando estas camadas possuem regiões com grandes variações de permeabilidade. Nesta seção vamos comparar as soluções obtidas pelos métodos I-MMVCM-CF e I-MMVCM-CV em uma camada onde o método MsFVM não apresenta uma solução acurada.

Novamente, utilizamos o reservatório apresentado na seção 7.3.1.1, para um fator de engrossamento 100. Escolhemos o campo de permeabilidades da camada 59 do Modelo 2 (formação *Upper Ness*) do *10th Comparative Solution Project* da SPE. Na Figura 48 mostramos o campo de permeabilidade.

Figura 48. Escoamento bifásico de água e óleo na Camada 59 do Modelo 2 do *10th Comparative Solution Project* da SPE, Mapa de cores para permeabilidade.



Na Figura 49 e na Figura 50 observamos o campo de saturação para diferentes VPI's, considerando a solução de referência, e as soluções obtidas pelos MsFVM, I-MMCVM-CF e I-MMCVM-CV. Percebe-se que a solução multiescala é muito difusiva, e a frente de saturação avança rapidamente pelo meio poroso, contrariando a solução de referência obtida diretamente na malha fina. O erro do método MsFVM no campo de saturação, utilizando a norma L2 para um VPI de 0,02, é de 40,76% e chega a 48,38% quando o VPI=0,03. Observe que água chega ao poço produtor, de forma antecipada.

Figura 49. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do *10th Comparative Solution Project* da SPE: (a) Solução de Referência para ; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; (d) Solução I-MMCVM-CV, VPI=0,02;

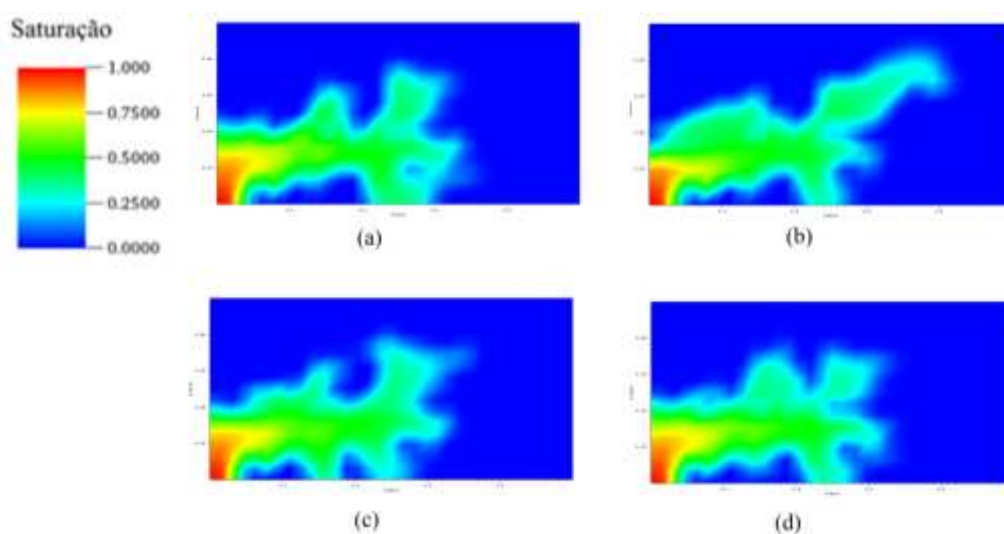
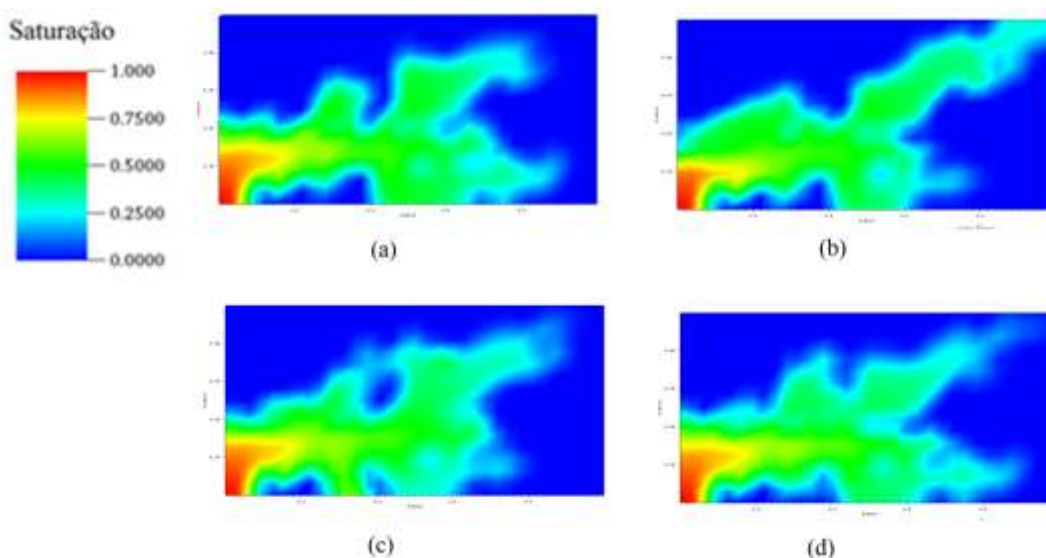


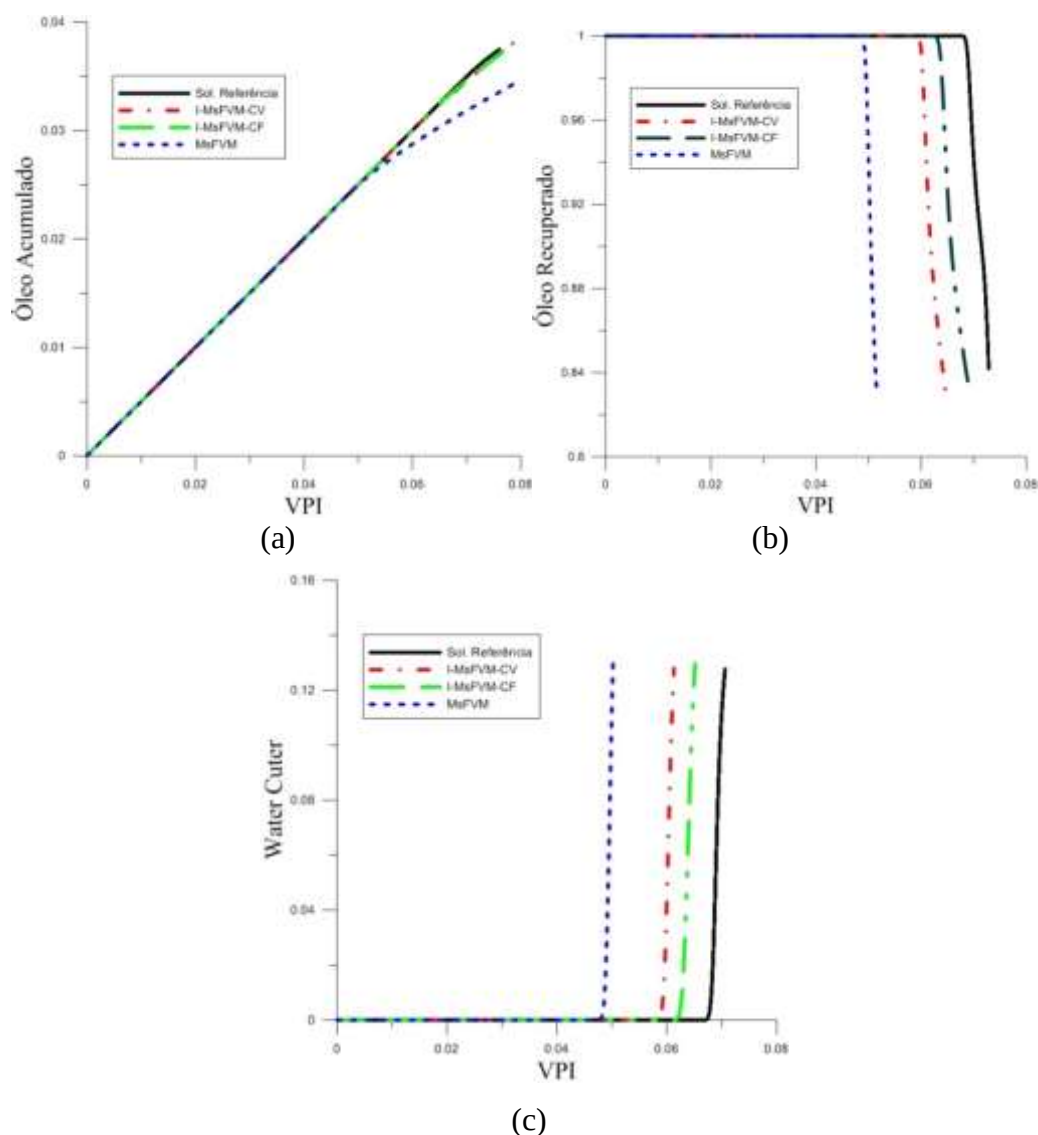
Figura 50. Campo de saturações para o escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do 10th Comparative Solution Project da SPE: (a) Solução de Referência para ; (b) Solução MsFVM; (c) Solução I-MMCVM-CF; (d) Solução I-MMCVM-CV, VPI=0,03;



As soluções I-MMCVM-CF, I-MMCVM-CV qualitativamente se mostram mais acuradas que o método MsFVM. Usando a norma L2, temos que o erro do método I-MMCVM-CF é de 31,76% para um VPI =0,02 e vai para 34,24% para o VPI de 0,03. O erro no I-MMCVM-CF é de 31,76%, já para o método I-MMCVM-CV é de 23,84% e 25,06%, respectivamente. Perceba que, de forma geral, o I-MMCVM-CV consegue capturar melhor os efeitos da transmissibilidade, e reproduzir com maior acurácia o escoamento do fluido, do que o I-MMCVM-CF. Qualitativamente podemos perceber que o método I-MMCVM consegue obter uma solução com mais acurácia, capturando os efeitos da permeabilidade do meio poroso, e para os casos rodados, o I-MMCVM-CV tem uma solução mais acurada do que o I-MMCVM-CF.

Na Figura 51 observamos as curvas de óleo, onde percebe-se que o método I-MMCVM de forma geral corrige a grande antecipação do *breakthrough* existente no método multiescala. Embora o *breakthrough* aconteça praticamente de forma simultânea nos dois métodos, o I-MMCVM-CV antecipa um pouco a saída de água do reservatório, em comparação ao I-MMCVM-CF.

Figura 51. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo na Camada 22 do Modelo 2 do *10th Comparative Solution Project* da SPE: (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água



7.2.2.2 Escoamento bifásico em um reservatório muito heterogêneo e fraturado numa configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços

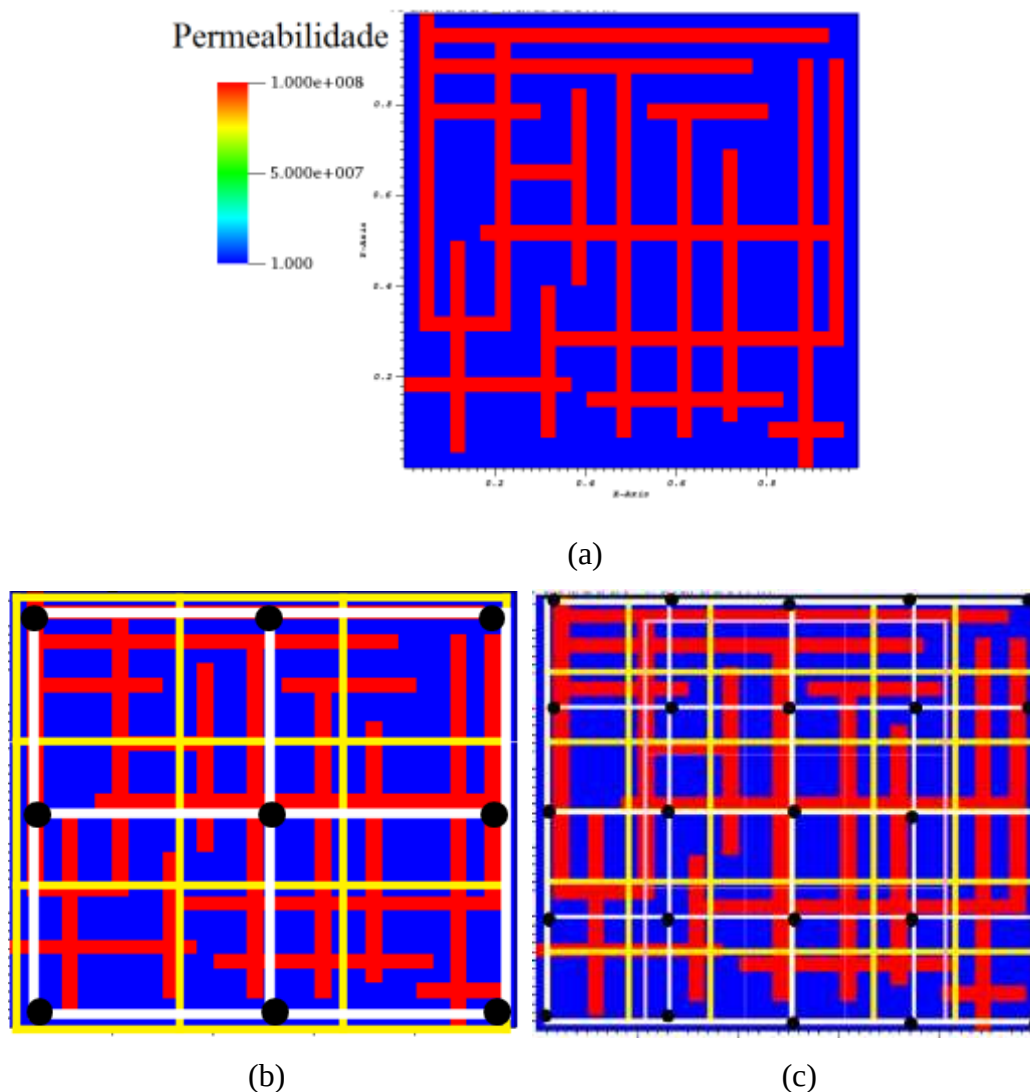
A existência de uma fratura pode significar estruturas que representam caminhos preferências para o fluxo de fluidos. O MsFVM consegue obter resultados acurados em meios fraturados quando as arestas dos volumes da malha grossa dual não atravessam as fraturas. Quando temos um meio totalmente fraturado, é comum observar nas soluções multiescala escoamentos não condizentes com a natureza física do problema, ou seja, o fluido toma caminhos preferenciais, totalmente diferentes da solução de referencia. Conforme será observado

nos exemplos a seguir, essa falha se deve ao uso das condições de contorno reduzidas, que tem dificuldade de capturar os efeitos de regiões com elevados gradientes de permeabilidade. Essas condições, muitas vezes, impõem deslocamento do fluido em regiões onde fisicamente não deveria haver escoamento, com isso temos campos de saturação distorcidos. Hoje em dia, a maioria dos pesquisadores utilizam métodos multiescalas iterativos para tratar de reservatórios altamente fraturados.

Para verificar a acurácia I-MMVCM-CV simularemos um reservatório heterogêneo fraturado (Figura 52). Perceba que neste problema as arestas dos volumes de controle da malha grossa dual atravessam as fraturas, diminuindo a acurácia da solução MsFVM. Escolhemos um domínio discretizado por uma malha fina com 30x30 volumes de controle. Novamente utilizamos um modelo do tipo $\frac{1}{4}$ de cinco poços, com as mesmas condições descritas na seção anterior.

Nas Figura 53 e 55 apresentam-se o campo de pressão para solução de referência, MsFVM e a I-MMVCM. Observe que independente do fator de engrossamento, a solução MsFVM não fornece uma solução acurada, apresentando em todos os campos soluções não físicas. Isso acontece porque os volumes de controle da malha grossa dual, atravessam as fraturas. O erro é máximo quando temos um $Cr=100$, 75% e mínimo quando o $Cr=25$, 46%, na Figura 52 podemos ver a malha grossa primal e dual para esses dois problemas. Para esse caso, específico, o erro diminui, conforme aumentamos a dimensão da malha grossa primal, porém nem sempre isso acontece, existem casos, em meios fraturados, onde diminuir o fator de engrossamento aumenta o erro, isso depende muito da localização das arestas da malha grossa dual.

Figura 52. (a) Campo de permeabilidade de um Reservatório heterogêneo fraturado; malha grossa primal (linha amarela) e dual (linha branca) para um fator de engrossamento: (b) 100; (c) 25



Para todos os casos analisados, a solução I-MMCVM é mais acurada que a do MsFVM, usando um suavizador com até 30 iterações, e mais 3 iterações de Dirichlet. Com isso conseguimos uma com boa acurácia, conforme mostra a

.Na Figura 56 comparamos os campos de saturação obtidos pelas soluções de referência, MsFVM e I-MMCVM-CV, nota-se que para todos os casos analisados, a solução MsFVM gera caminhos preferenciais não condizentes com a física do escoamento no meio poroso. Conforme será observado, o método multiescala ou antecipa ou retarda demais o *breakthrough* (Figura 57) este efeito é provocado pelas condições de contorno reduzidas. Como observado na Tabela 12 o erro no campo de saturação, usando a norma L_2 , para um $Cr=100$ é de 65,9%. Esse erro fica praticamente estável para um $Cr=25$, alcançando 68%. O método I-

MMCVM-CV consegue melhorar a acurácia do campo de saturação, gerando um erro para um $Cr=100$ de 41% e 35% para um $Cr=25\%$.

Figura 53. Escoamento bifásico num meio fraturado Solução de referência

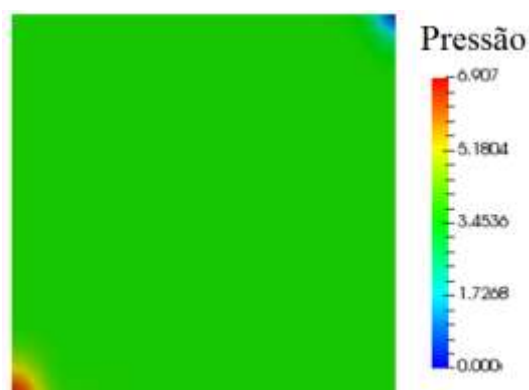


Figura 54. Campo de pressões da solução MsFVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para os seguintes fatores de engrossamento: (a) 100; (b) 56.25; (c) 36 e (d) 25

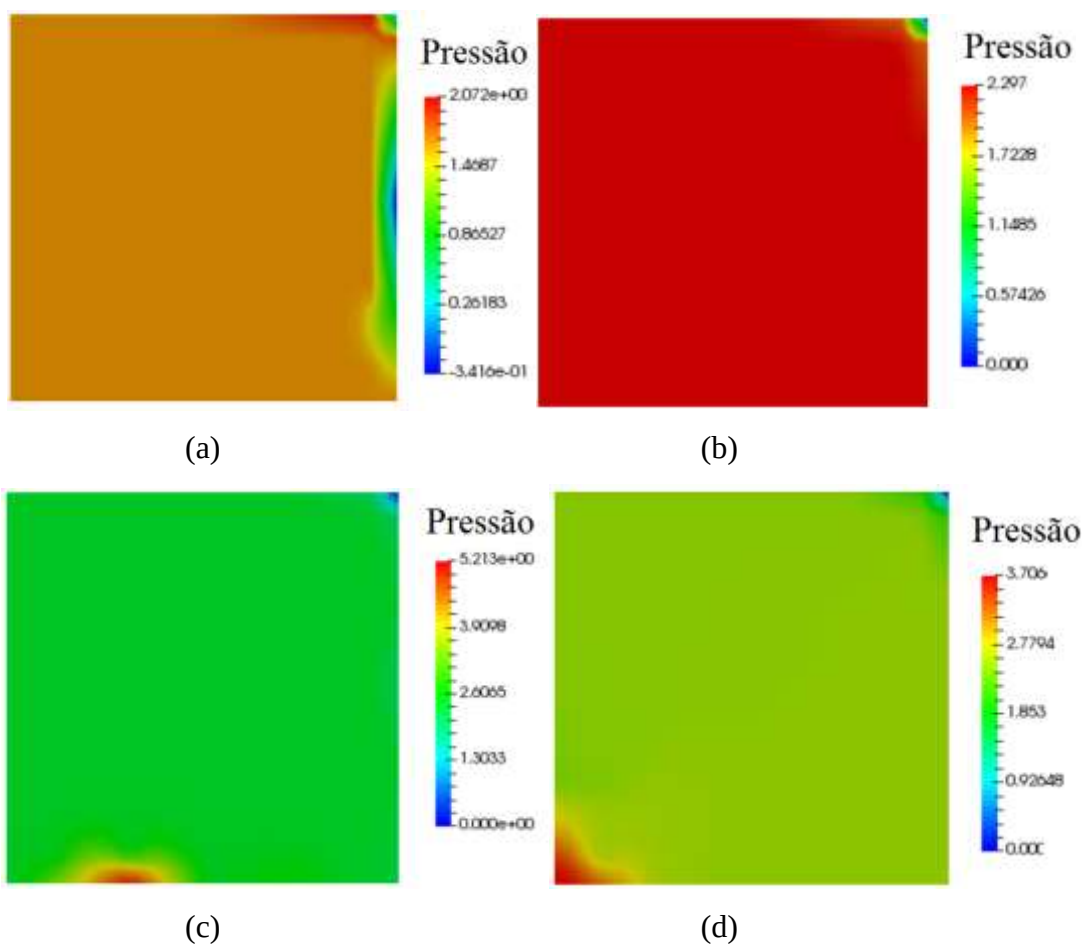


Figura 55. Campo de pressões da solução MsFVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para os seguintes fatores de engrossamento: (a) 100; (b) 56,25; (c) 36 e (d) 25

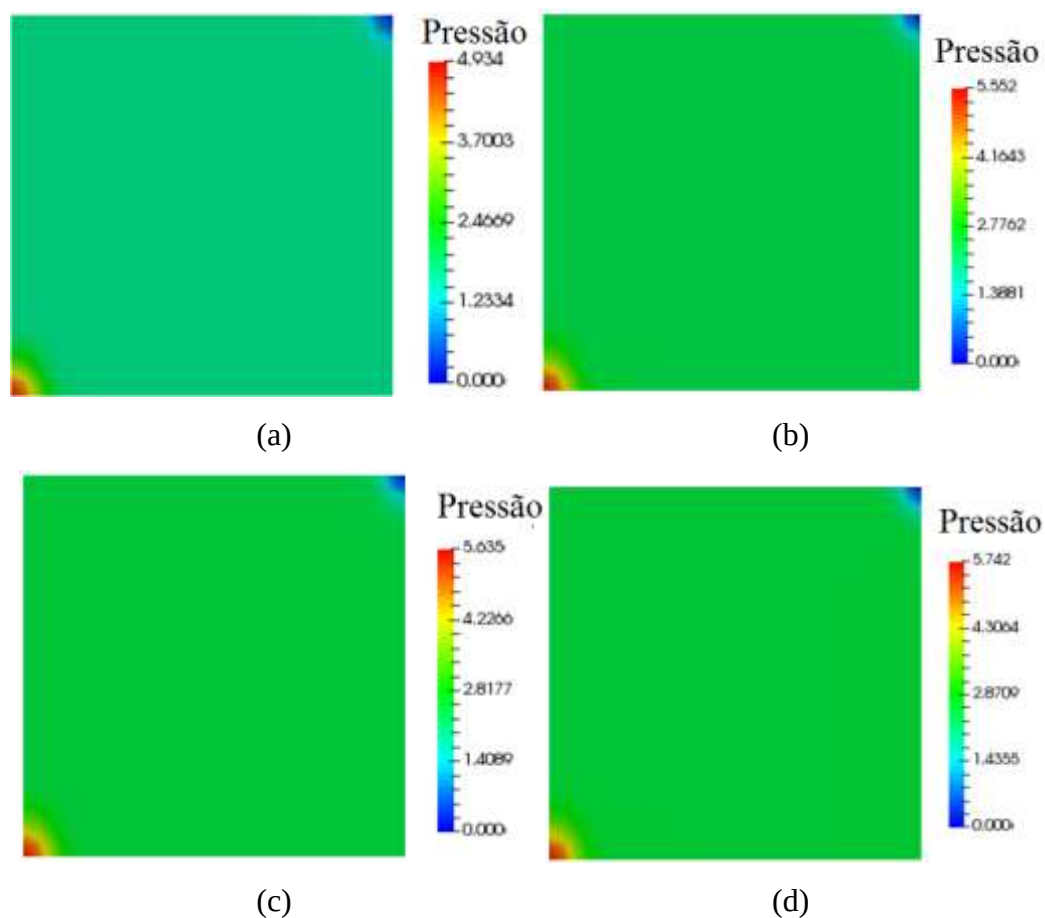


Tabela 11. Erro usando a norma infinito para o Campo de Pressão, considerando diferentes fatores de engrossamentos da malha grosseira primal

Cr	MsFVM	I-MMCVM
100.0	75,70%	28,57%
56,25	66,74%	19,61%
36	65,54%	18,41
25%	46,34%	16,96%

Tabela 12. Erro usando a norma infinito para o Campo de Saturação, considerando diferentes fatores de engrossamentos da malha grosseira primal

Cr	MsFVM	I-MMCVM
100.0	65,9%	41,3%
25%	68,16%	35,2%

Figura 56. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo fraturado, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para instantes de tempo (VPI) 0.03: a) solução de referência; b) MsFVM Cr= 100; c) I-MMCVM-CF Cr= 100; d) MsFVM Cr= 25; e) I-MMCVM-CF Cr=25;

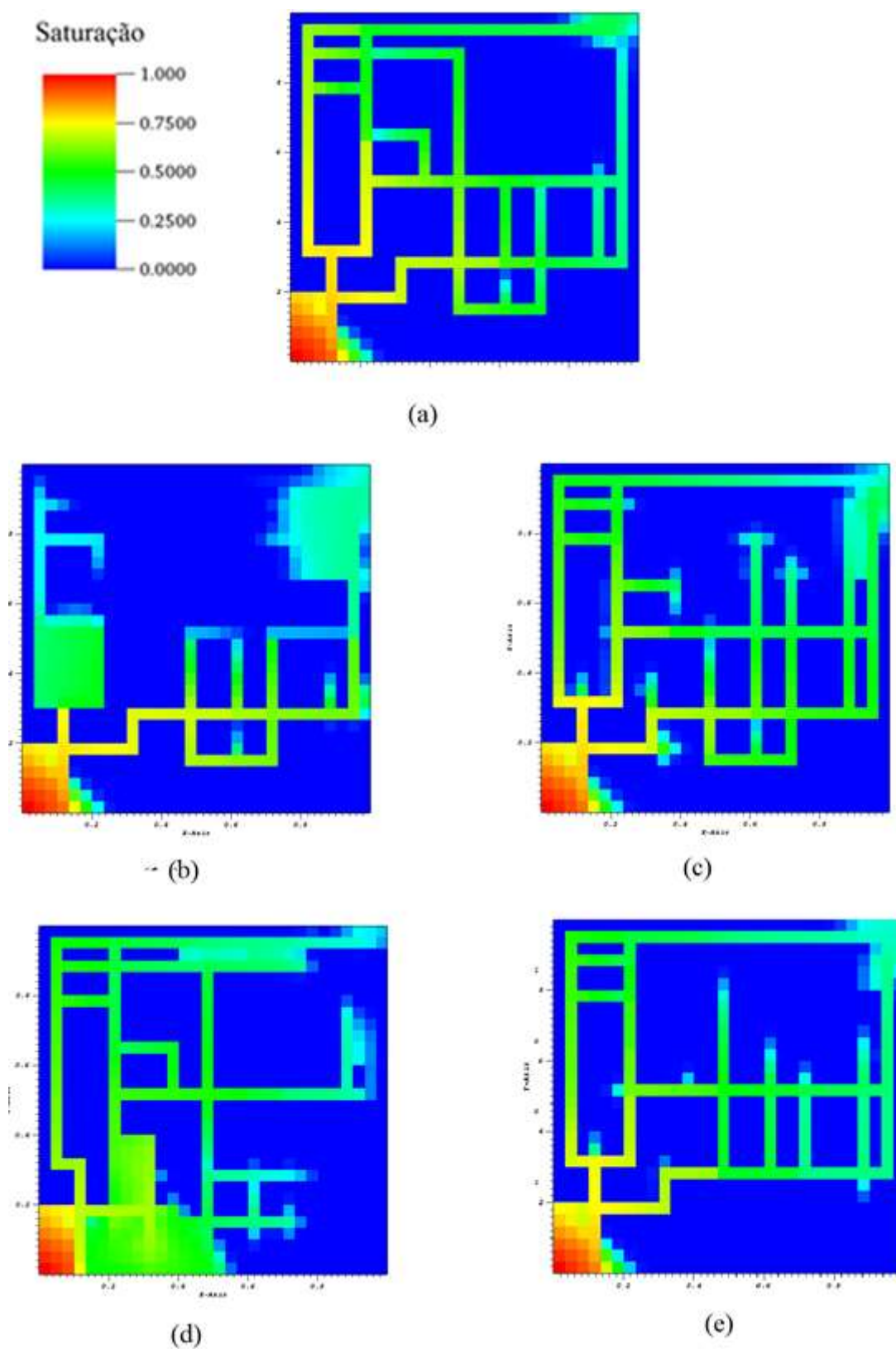
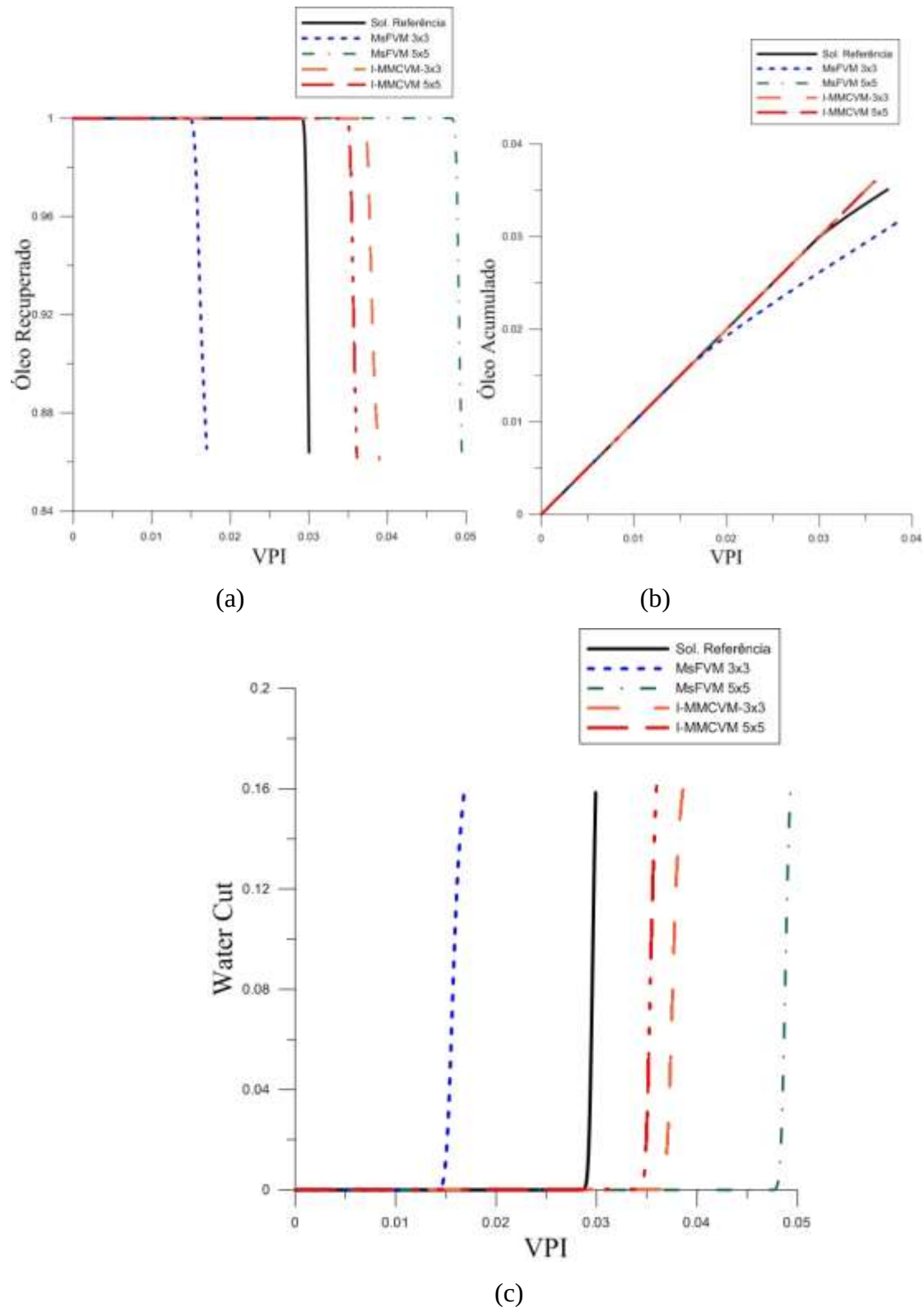


Figura 57. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo meio fraturado e heterogêneos, para a solução de referência, MsFVM e I-MMCVM para diferentes fatores de engrossamento: (a) Óleo Recuperado; (b) Óleo Acumulado; (c) Corte de Água



Conforme observamos na Figura 56 o método I-MMCVM-CV qualitativamente consegue reproduzir o escoamento satisfatoriamente ditado pela física do problema. De certa forma, isso proporciona estabilidade ao método, visto que as soluções se apresentam similares independente do fator de engrossamento.

7.2.2.3 Escoamento bifásico em meios anisotropico numa configuração de ¼ de cinco poços

Os métodos multiescala para volumes finitos têm fortes limitações de acurácia em meios anisotrópicos, principalmente quando estes apresentam também heterogeneidades. A implementação de formulações MPFA's no solver de pressão não garante uma solução multiescala acurada, visto que o uso das condições de contorno reduzidas destrói a natureza anisotrópica do problema, ao desconsiderar os fluxos perpendiculares nas arestas dos volumes de controles da malha grossa dual. Atualmente, os métodos multiescala iterativos, são os mais utilizados para tratar meios anisotrópicos, porém altas razões de anisotropia tornam os métodos iterativos demasiado caros computacionalmente, comprometendo a eficiência do método (Lunati et al., 2011; Hajibeji et al,2008). Uma das vantagens do método I-MMCVM é que são necessárias poucas iterações de Dirichlet no campo de pressão para melhorar a acurácia do campo de pressão. Nesta seção verificaremos a acurácia do I-MMCVM-CF, ao simular meios anisotrópicos.

Nesta seção, analisaremos um meio homogêneo, com diferentes razões de anisotropia e mostraremos que o I-MMCVM-CV é eficiente em obter um campo de saturação acurado, mesmo considerando altas razões de anisotropia, pois corrigi as oscilações do MsFVM.

Sendo assim, considere o mesmo domínio unitário apresentado na seção anterior discretizado por uma malha fina com 30x30 volumes de controle, com as mesmas condições de contorno e iniciais aqui já apresentadas, onde o tensor permeabilidade é dado por:

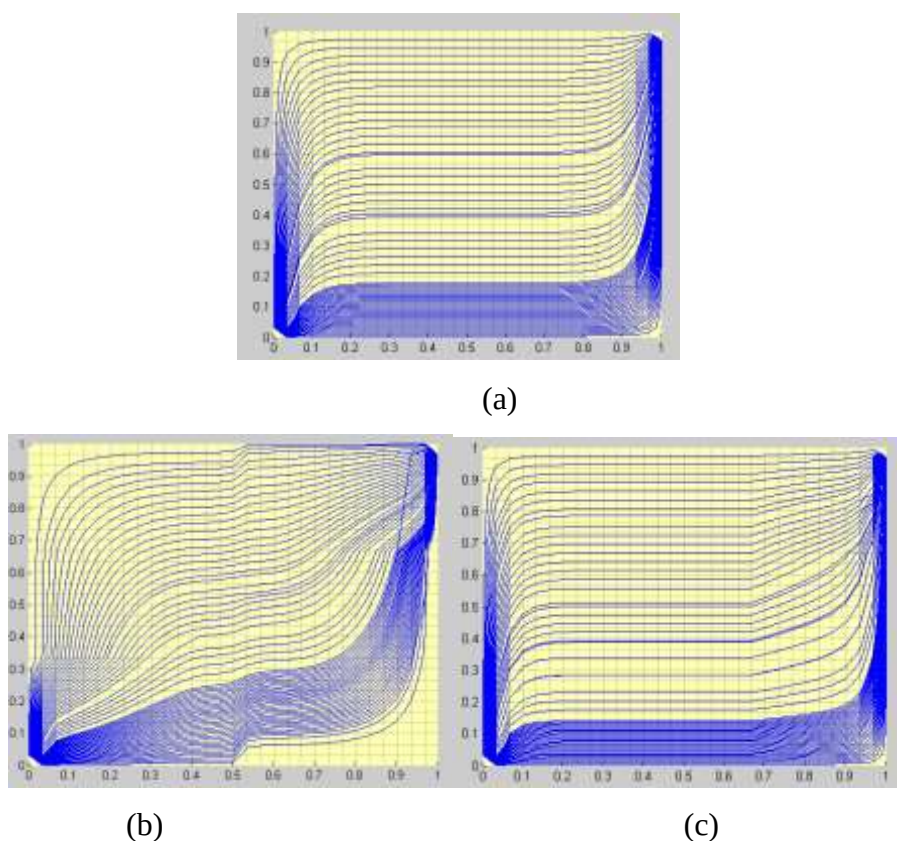
$$\tilde{K}(x, y) = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (151)$$

Neste exemplo usaremos a formulação MPFA-FPS, e um Cr=100. Conforme mostra a Tabela 13, o erro da solução MsFVM cresce conforme aumenta a razão de anisotropia, as oscilações no campo de velocidade podem ser observadas claramente na Figura 58-b, através das linhas de corrente. O método multiescala reproduz um campo de velocidade com caracte-

rísticas isotrópicas, visto que desconsideramos o fluxo perpendicular nas arestas dos volumes da malha grossa primal, destruindo a natureza anisotrópica do reservatório.

Na Figura 58c observamos que o método I-MMCVM –CV elimina as incoerências físicas do fluxo MsFVM, resgatando a natureza anisotrópica do escoamento, observe que para qualquer razão de anisotropia (Tabela 13), temos um campo de velocidade acurado e conservativo a cada passo de tempo. Neste exemplo percebemos que a correção do fluxo *upscaling* por volume se mostra eficaz, e para todos os casos analisados o erro fica abaixo dos 10%. É importante destacar que o I-MMCVM-CV pode ser usado para meios isotrópicos e homogêneos de forma a melhorar a acurácia da solução, quando necessário.

Figura 58. Linhas de corrente para o escoamento bifásico na configuração 1/4 de cinco poços num reservatório homogêneo com razão de anisotropia 100 a) Solução de referência obtida diretamente na malha fina (FPS); b) Solução obtida com o MsFVM; c) Solução I-MMCVM



Na Figura 58 apresentamos o comportamento da solução de referência, e I-MMCVM-CV para um meio homogêneo com razão de anisotropia 100:1. Percebe-se que a solução I-MMCVM-CV qualitativamente apresenta boa acurácia, capturando os efeitos da anisotropia.

Nas curvas de óleo, Figura 60, a solução obtida pelo método I-MMCVM apresenta-se, qualitativamente, bastante similar à solução de referência, que o *breakthrough* ocorre praticamente ao mesmo tempo, em ambas as simulações.

Figura 59. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório homogêneo anisotrópico, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI) : Solução de referência (a;b;c – VPI's: 0.026;0.18;0.49), Solução I-MsFVM (d;e;f– VPI's: 0.026;0.18;0.49)

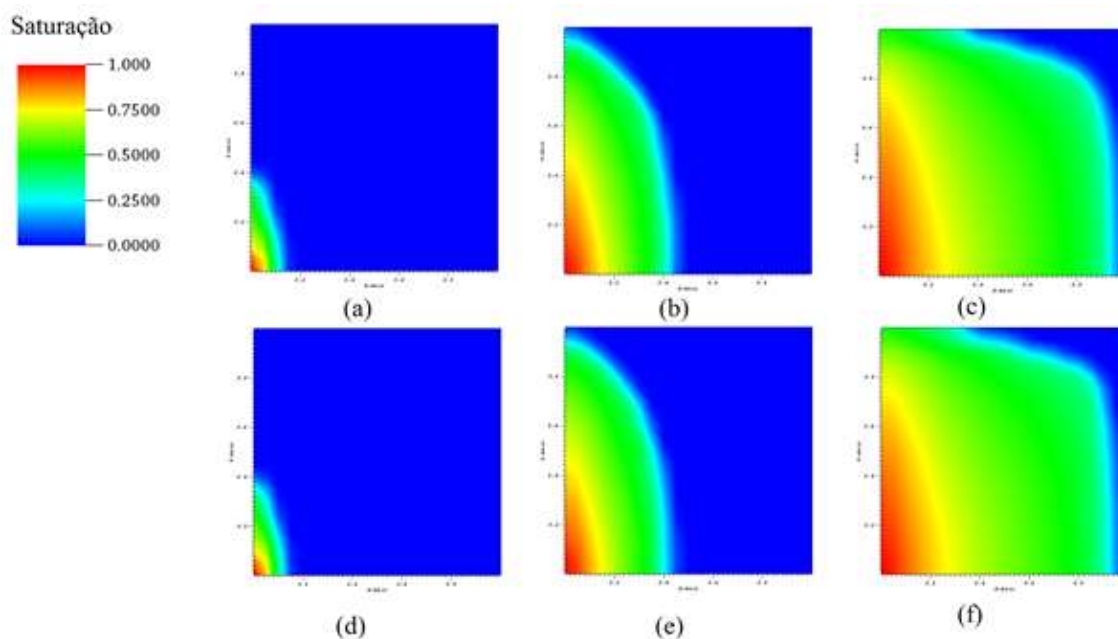
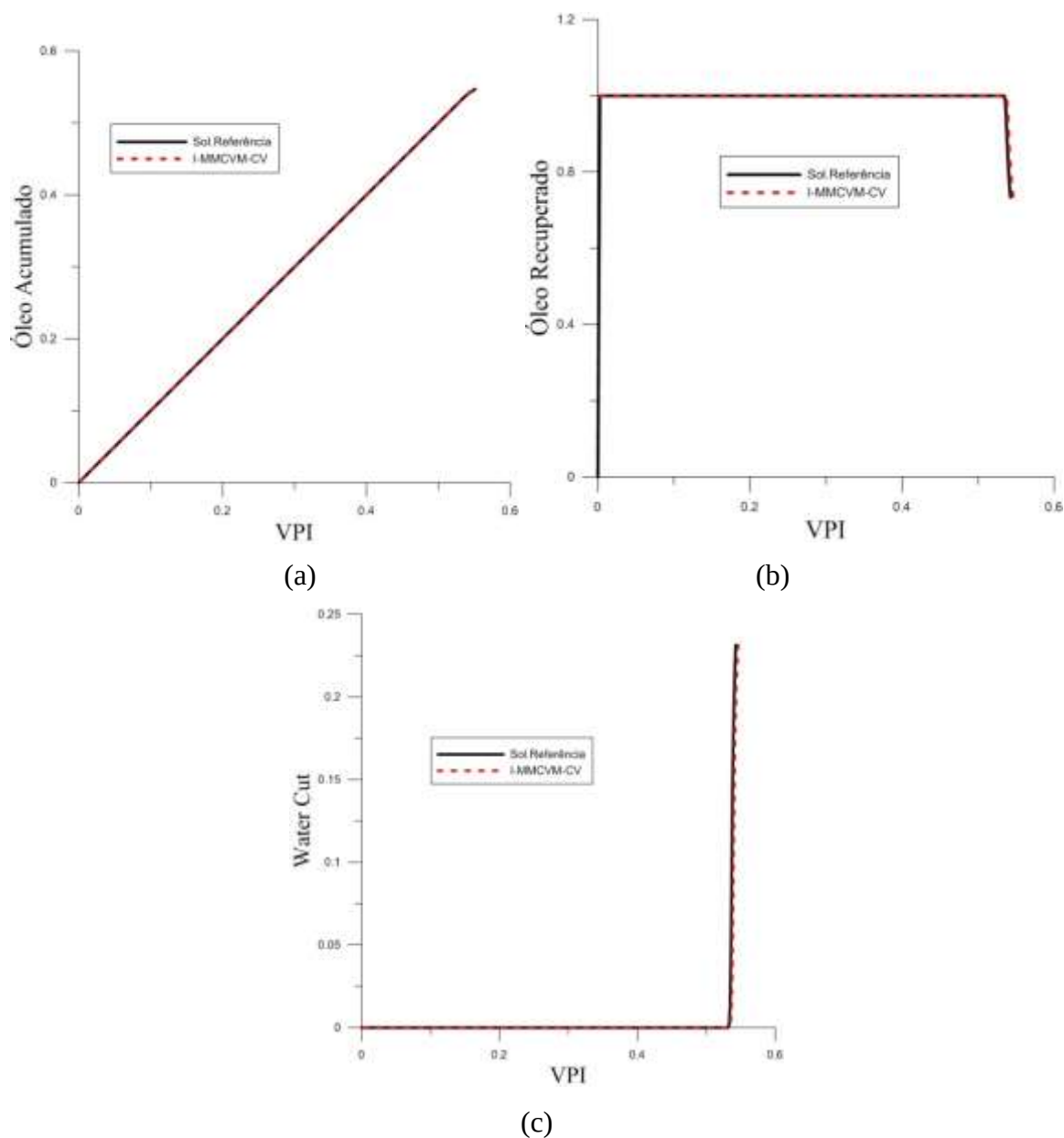


Tabela 13. Erro do Campo de Velocidade do Método Multiescala, usando a norma L_2 , VPI =0,277

Razão de Anisotropia (K_{yy}/K_{xx})	MsFVM	I-MMCVM-FU
1	1,95%	1,45%
5	13,70%	4,71%
10	21,06%	5,95%
50	40,57%	8,33%
100	49,92%	8.68%

Figura 60. Curvas de produção obtidas para o problema do escoamento bifásico de água e óleo meio homogêneo e anisotrópico com razão de anisotropia 100:1, para a solução de referência, MsFVM e I-MMCVM (a) Óleo Acumulado; (b) Óleo Recuperado; (c) Corte de Água



7.2.2.4 Escoamento bifásico em um reservatório heterogêneo e anisotrópico

A perda de acurácia do MsFVM em meios anisotrópicos aumenta drasticamente com a inclusão de heterogeneidade no meio poroso (Kippe et al., 2008; Møyner et al., 2016), visto que esta junto com a anisotropia prejudica a monotonicidade da matriz de transmissibilidade da malha grossa primal, aumentando as oscilações do campo de pressão (Hesse et al., 2008; Hajibeiji, 2011). Portanto nessa seção escolhemos um exemplo extraído do trabalho do Her-

bin e Hubert (2008), onde o campo de permeabilidade têm regiões com altas razões de anisotropia, do tipo 100:1, além de ser heterogêneo, conforme apresentado na equação (152):

$$\underline{K}(x, y) = \begin{bmatrix} y_1^2 + \theta x_1^2 & -(1-\theta)x_1 y_1 \\ -(1-\theta)x_1 y_1 & x_1^2 + \theta y_1^2 \end{bmatrix}, \text{ com } \theta=100 \quad (152)$$

Neste exemplo utilizamos as formulações do tipo MPFA-FPS e MPFA-O na solução obtida diretamente na malha fina (referência) e no método I-MMCVM-CV. Conforme demonstrado no primeiro exemplo desse capítulo a tendência é que a solução I-MMCVM sempre reproduza a solução do solver de pressão utilizado.

Na Figura 61 e na Figura 62 observamos o campo de pressão obtido através da formulação MPFA-O, considerando diferentes instantes de tempo (em VPI), para a solução de referência e I-MMCVM-CV. Observe que o método I-MMCVM-CV reproduz o campo de pressão qualitativamente com boa concordância. O erro no campo de pressão, no VPI=0,226, usando o I-MMCVM-CV é de 34,4%, e usando o MsFVM é de 58,6%. Vale ressaltar que foram utilizados 30 iterações do suavizador e apenas três iterações de Dirichlet.

Na Figura 63 e na Figura 64 novamente observamos o campo de pressão, agora com as formulações MPFA-FPS. Novamente o método I-MMCVM consegue apresentar uma aproximação coerente do campo de pressão, sendo que o erro da solução MsFVM, é de 34,25%. O uso das iterações de Dirichlet, conjuntamente com o suavizador, faz com que o erro cai diminua para 24,71%.

Na Figura 65 e na Figura 66 observamos o comportamento do campo de saturação para diferentes instantes VPI's, utilizando as formulações MPFA-O na solução de referência obtida diretamente na malha e na solução I-MMCVM-CV. Observe que a solução I-MMCVM-CV é muito mais difusiva, do que a solução de referência. Isso se deve a alta razão de anisotropia do meio, em certas regiões temos uma razão de 100:1, além da heterogeneidade do campo de permeabilidade. De forma geral, para os vários casos estudados, o método I-MMCVM-CV-MPFA-O apresenta boas soluções em meios anisotrópicos e heterogêneos para razões de anisotropia baixas (10:1) a médias (50:1).

Figura 61. Campo de pressão para o escoamento bifásico heterogêneo e anisotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI): solução de referência MPFA-MPFAO: (a) VPI=0; (b) VPI =0,226

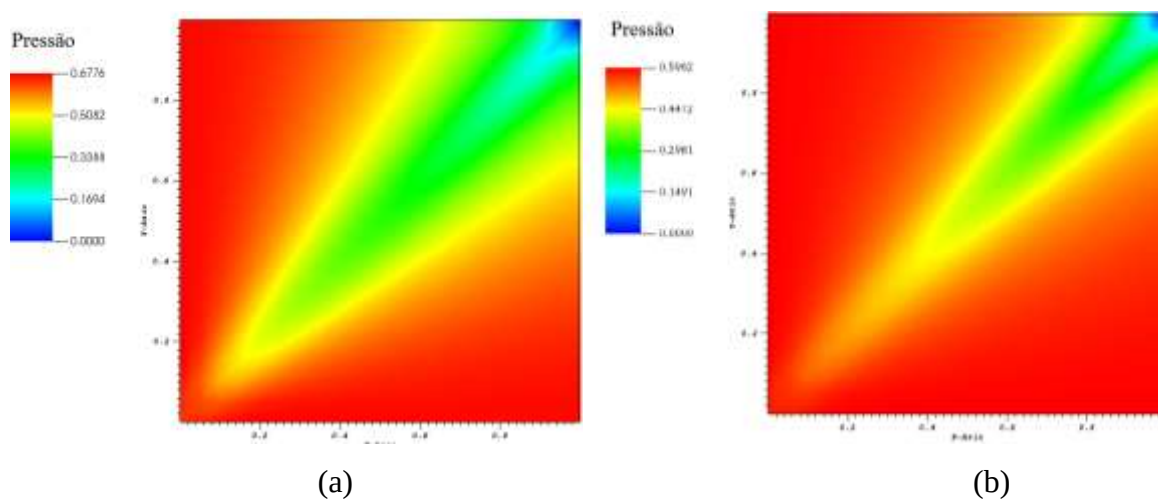


Figura 62. Campo de pressão para o escoamento bifásico heterogêneo e anisotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo (VPI): solução de referência I-MMCVM-CV MPFAO: (a) VPI=0; (b) VPI =0,226

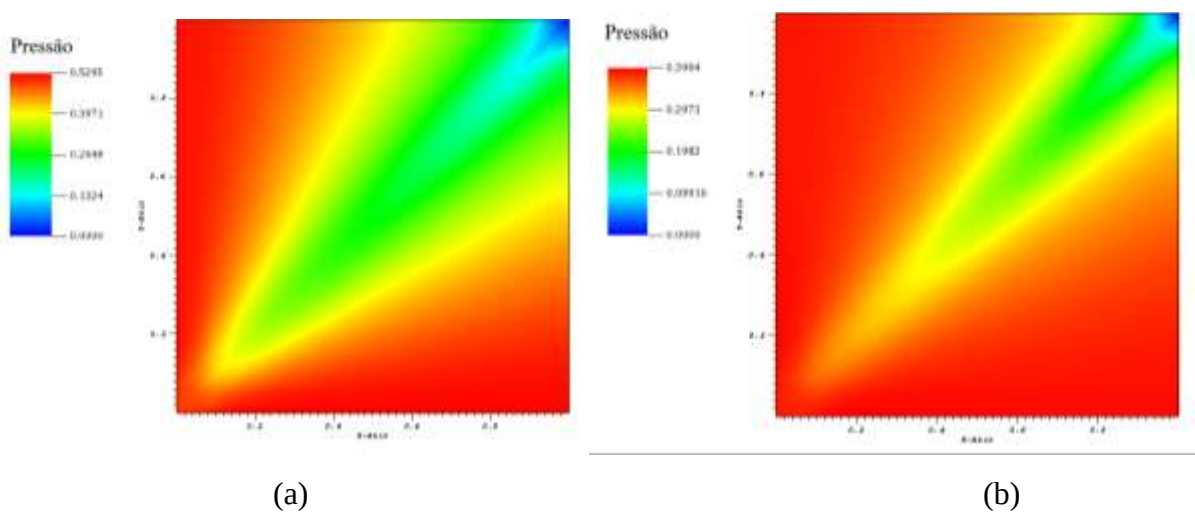


Figura 63. Campo de pressão do escoamento bifásico solução de referência MPFA-FPS: (a) $VPI=0$; (b) $VPI=0,2281$

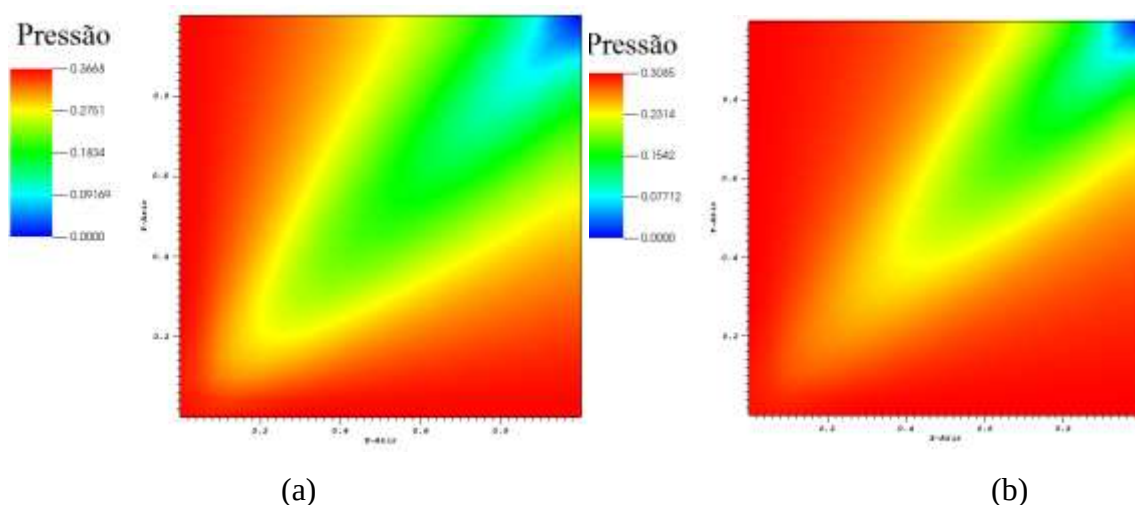
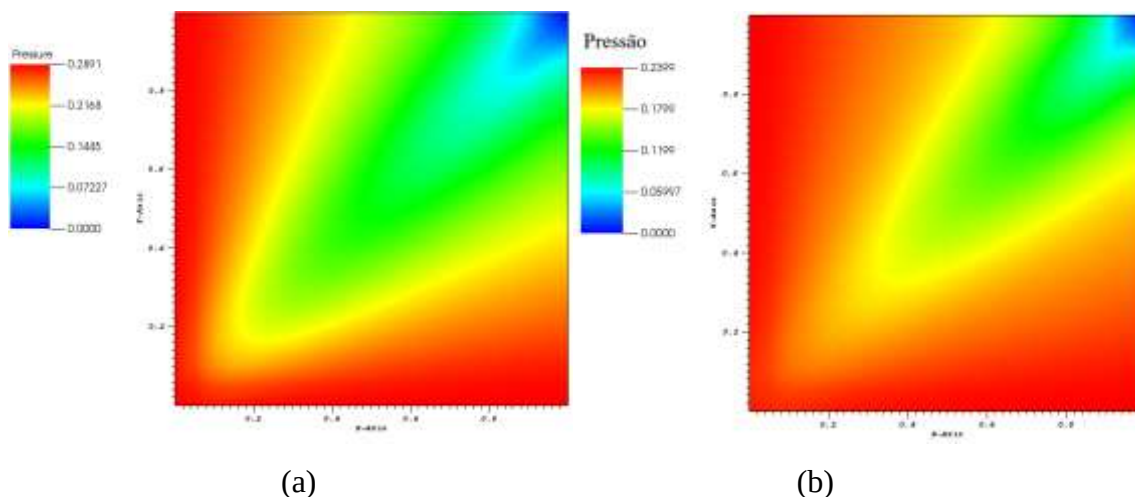


Figura 64. Campo de pressão do escoamento bifásico Solução I-MMCVM-CV - MPFA-FPS : (a) $VPI=0$; (b) $VPI=0,2281$



O método MPFA-O utiliza extrapolações para calcular o campo de pressão em cada sub-região de iteração. Essas extrapolações contribuem fortemente para soluções do campo de pressões apresentem oscilações espúrias (Chen et al., 2008). As metodologias multiescala, quando aplicadas em meios anisotrópicos apresentam oscilações espúrias no campo de pressão gerada pela perda de conservação nas arestas dos volumes de controle da malha grossa dual, aliadas a um resolvidor de pressão que não preserva monotonicidade, as soluções multi-escala para volumes finitos deteriora-se completamente. Embora, o método iterativo I-MMCVM-CV melhore a solução no campo de pressão, e a correção de fluxo permita obter uma solução conservativa a cada passo de tempo, ainda sim perdemos acurácia. O erro no

VPI= 0.235, onde o *breakthrough* já aconteceu, é de 28,7%. Na Figura 67 observamos as curvas de óleo, onde observa-se que o método I-MMCVM-MPFA-O retarda o *breakthrough*, o que é esperado pelos resultados apresentados.

Na Figura 68 e na Figura 69 observamos o comportamento do campo de saturação para diferentes VPI's para as formulações MPFA do tipo FPS. Observe que qualitativamente a solução I-MMCVM-CV-MPFA-FPS possui uma acurácia superior a solução I-MMCVM-O. Observe que a solução apresenta-se menos difusiva, e qualitativamente tem boa concordância com a solução de referência. O erro no campo de saturação para o VPI = 0,235 é de 20,2% uma diminuição considerável quando comparado com a solução I-MMCVM-CV-MPFA-O. Como as formulações MPFA-FPS possuem menos oscilações espúrias, a solução I-MMCVM-CV é mais acurada.

Na Figura 70 observamos as curvas de óleo, observe que a solução I-MMCVM ainda atrasa o *breakthrough*, quando comparado à solução de referência, porém esse atraso é muito menor do que quando comparado com a solução I-MMCVM-MPFA-O. De forma temos uma melhoria significativa no método multiescala quando usando formulações FPS nesse caso. De forma geral, quando temos meios com alta razão de anisotropia, o método I-MMCVM-CV-FPS tem soluções mais acuradas, para todos os casos até agora estudados.

Figura 65. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-O, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,03 (a ,c) e 0,096 (b,d)

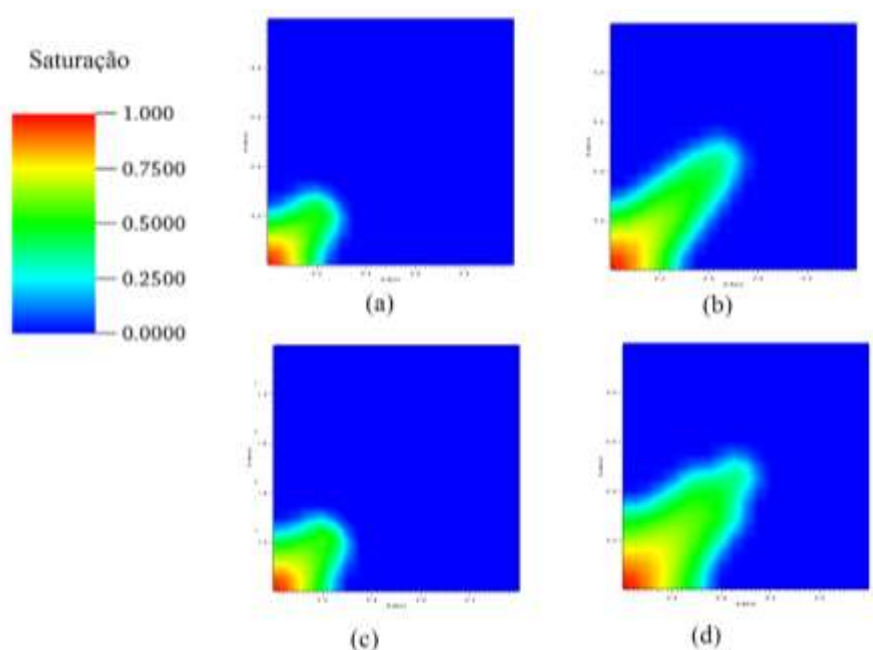


Figura 66. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-O, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,165 (a ,c) e 0,235(b,d)

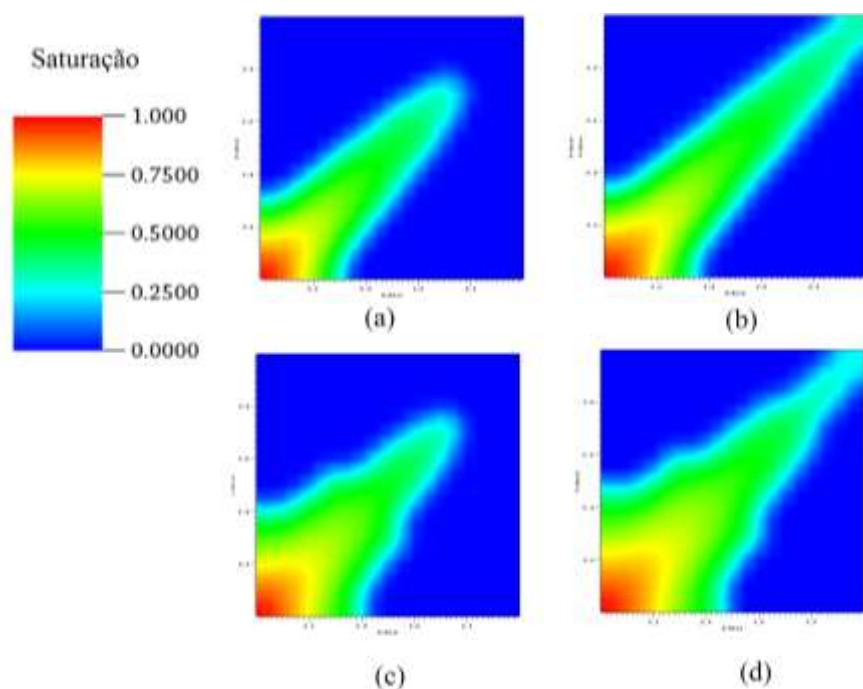


Figura 67. Gráficos obtidos para formulações MPFA-O para Solução de Referência e I-MMCVM para o problema do escoamento bifásico num reservatório anisotrópico e heterogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado

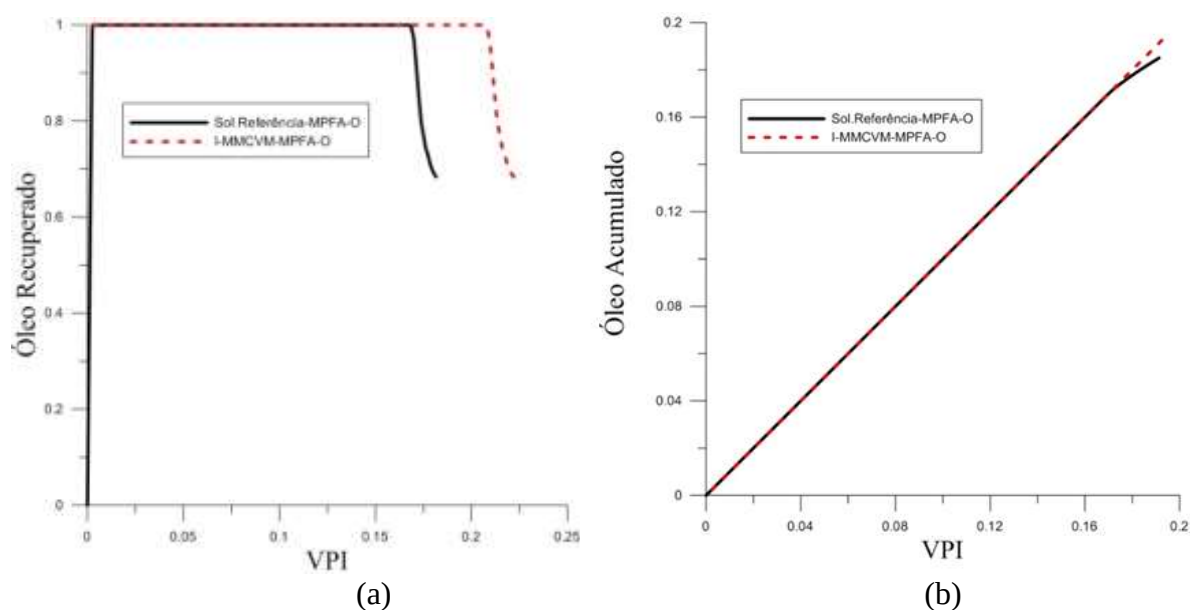


Figura 68. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-FPS, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,064 (a ,c) e 0,14 (b,d)

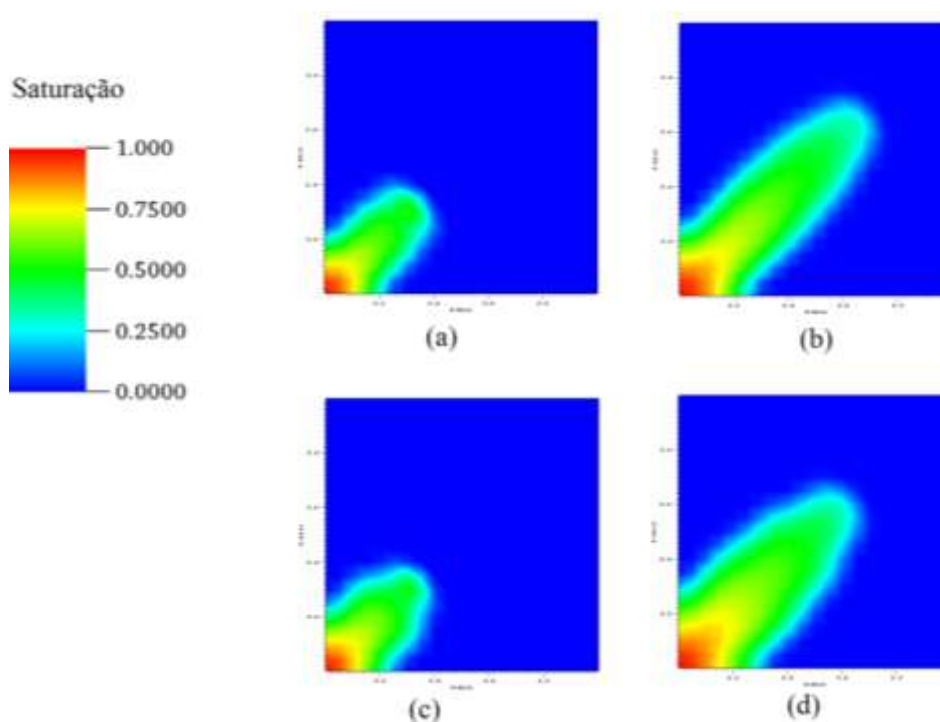


Figura 69. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e anisotrópico, usando formulações MPFA-FPS, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência (a) e (b) ; Solução I-MMCVM (c) e (d). VPI =0,187 (a ,c) e 0,23 (b,d)

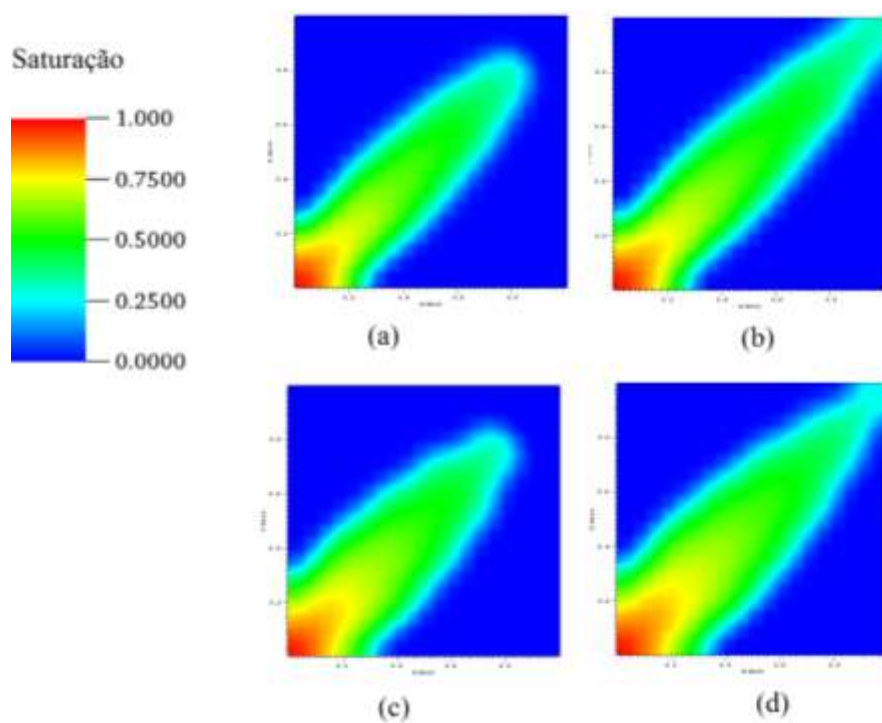
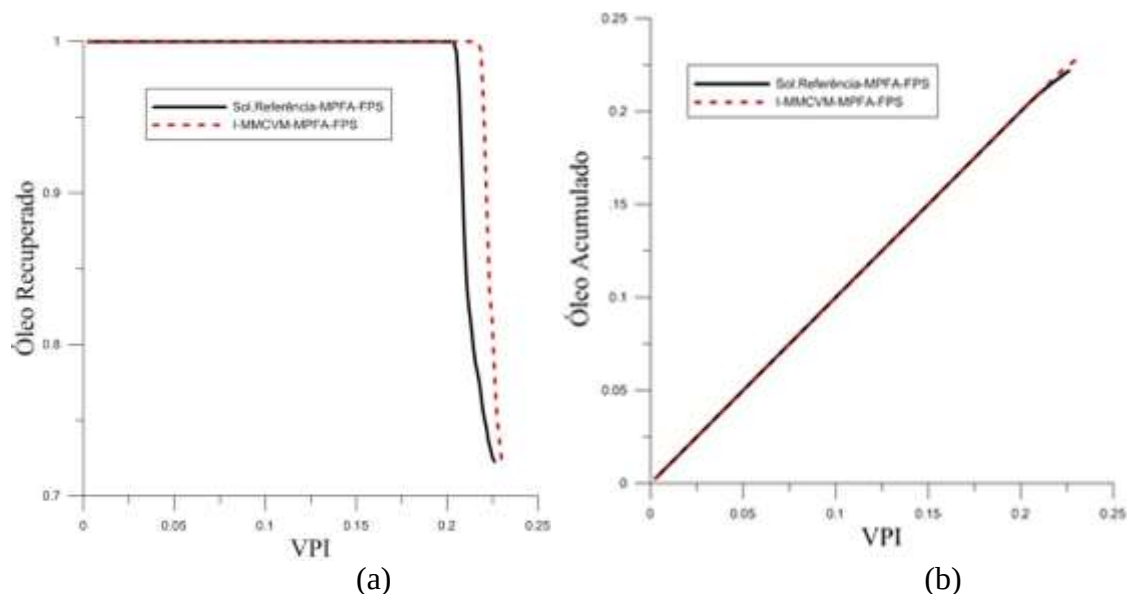


Figura 70. Gráficos de óleos obtidos para formulações MPFA-FPS para Solução de Referência e I-MMCVM-VC para o problema do escoamento bifásico num reservatório anisotrópico e heterogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado



7.3 ESCOAMENTO BIFÁSICO NUMA CONFIGURAÇÃO DE $\frac{1}{4}$ DE CINCO POÇOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE LINHAS DE FLUXOS

Nos últimos anos, a simulação numérica do campo de transporte advectivo utilizando métodos de linhas de fluxos (*streamlines*) vem se tornando popular na indústria do petróleo, podendo ser resolvida de forma eficiente e acurada (Faroughi et al., 2013). Além de exigir pouca memória computacional, o método transforma a equação de transporte multidimensional em múltiplos problemas unidimensionais, diminuindo assim drasticamente o custo computacional do solver de saturação. Kippe et al. (2008) mostrou que os métodos multiescalas aliados às técnicas *streamlines* é computacionalmente equivalente ao uso das técnicas upscaling com o Método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem. Para verificar a implementação da técnica das linhas fluxos, analisaremos novamente apenas um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, para o mesmo domínio, condições de contorno e iniciais. Nesta seção utilizaremos as formulações TPFA e o método I-MMCVM-CF, com três iterações, sem suavizador.

Na Figura 71(a) apresentamos a solução de referência, onde resolvemos o campo de pressão diretamente na malha fina e o problema de transporte utilizamos o Método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (FOUM), na Figura 71(b) apresentamos a solução de

referência desta vez resolvemos a equação hiperbólica da saturação pelo método das linhas de correntes e por fim a Figura 71(c) onde utilizamos as formulações I-MMCVM-CF para resolver a equação de pressão e o método Streamlines para resolver a equação hiperbólica da saturação.

Observe que qualitativamente as soluções de referência e I-MMCVM-CF utilizando as técnicas streamlines apresentam boa concordância quando comparada as técnicas FOUM. O erro da solução de referência quando usamos o método das linhas de corrente na saturação é de 9.68% quando comparamos a solução FOUM e de 12.78% quando utilizamos o método I-MMCVM-CF com o método streamline. Na Figura 72 observamos as curvas de óleo, onde temos que o método streamlines antecipa levemente o *breakthrough* no poço produtor avaliado, porém de forma geral o método streamlines consegue reproduzir corretamente o momento de saída de água do poço. Em termos de ganho computacional, o método multiescala com streamlines tem um ganho, em média, de 16 vezes quando comparado com a solução explícita da equação de transporte utilizando a metodologia FOUM.

Figura 71. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, usando formulações TPFA's, para uma configuração de ¼ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- (a) Solução de referência-FOUM; (b) Solução de Referência com Streamlines; (c) Solução I-MMCVM-CF com Streamlines

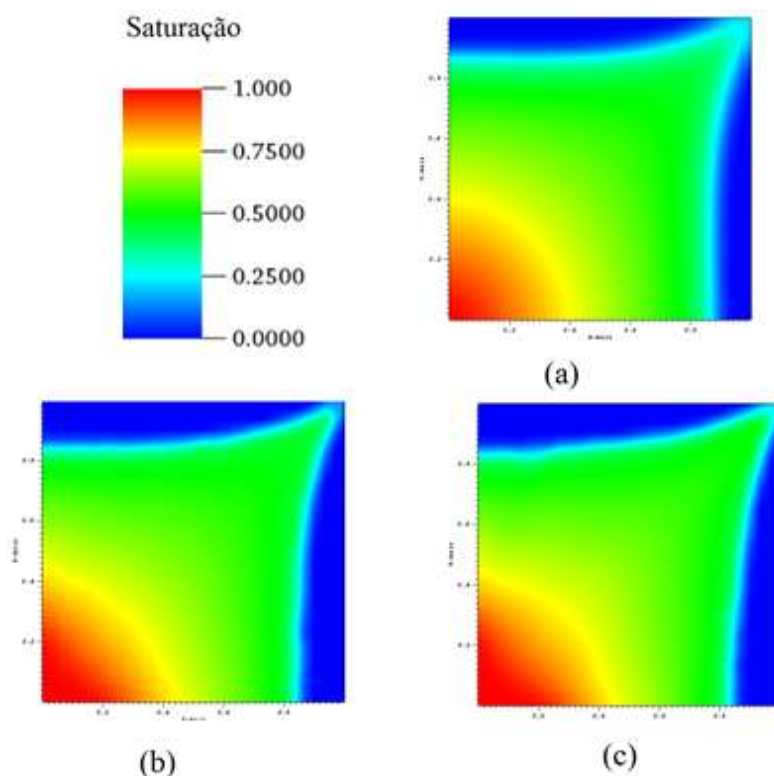
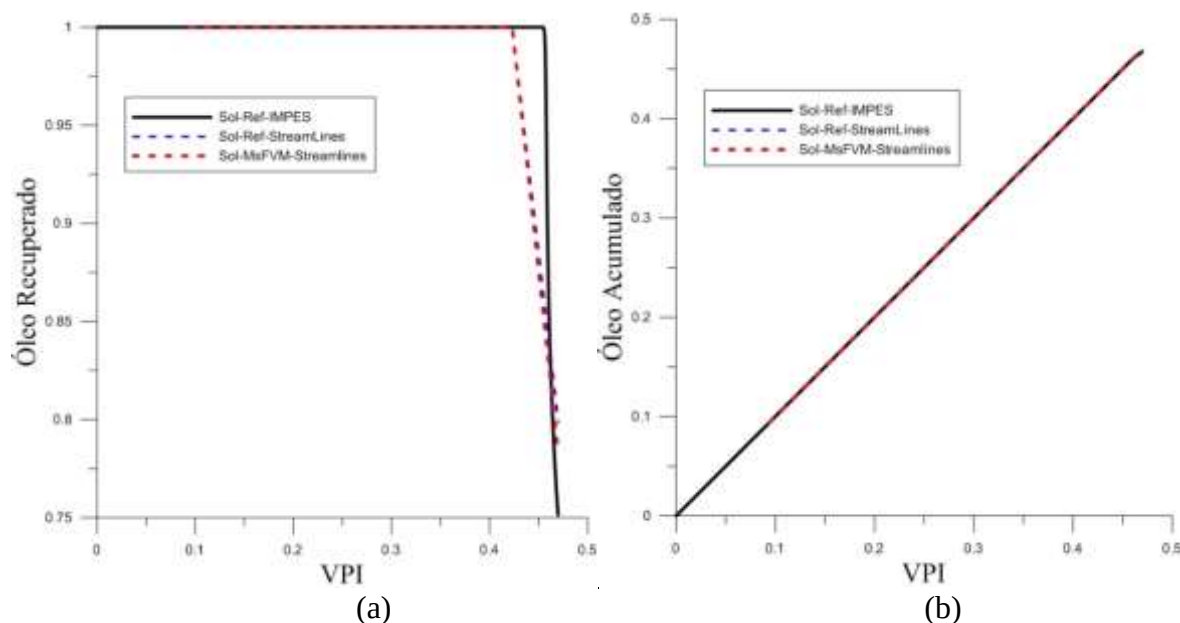
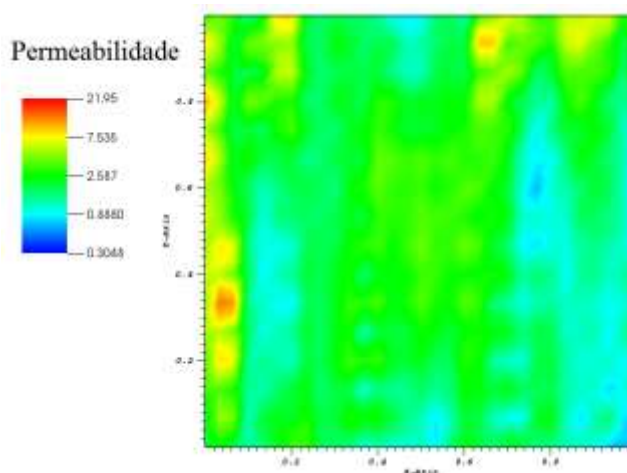


Figura 72. Gráficos de óleos obtidos para formulações TPFA's, método FOUM e Streamlines para Solução de Referência e I-MMCVM-CF para o problema do escoamento bifásico num reservatório isotrópico e homogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado



Após verificar a implementação do método streamlines, adaptamos um exemplo da tese de Møyner (2012), onde o tensor de permeabilidades é isotrópico e heterogêneo, variando aleatoriamente e descontinuamente (volume a volume) ao longo de todo o domínio, sendo definido pela relação de Carman-Kozeny. A permeabilidade varia entre 21,95 e 0.30 como mostramos no mapa de cores apresentado na Figura 73.

Figura 73. Campo de permeabilidade



Na Figura 74 observamos a solução de referência resolvendo-se a equação de transporte pelo método FOUM, e a solução I-MMCVM-CF resolvendo-se a equação de transporte pelo métodos streamlines, onde observa-se que qualitativamente elas apresentam boa concordância. Embora a solução I-MMCVM-CF-Streamline (Figura 75) não consiga capturar todos os efeitos do campo de permeabilidade do meio, usando a norma L_2 , temos um erro de 15,88%. Na Figura 76 observamos as curvas de produção, onde verifica-se que o método I-MMCVM ele antecipa levemente o *breakthrough*, porém de forma geral, o método se mostra com boa acurácia.

Figura 74. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução de referência , VPI's : (a)0,08 ; (b) 0,19; (c) 0,44

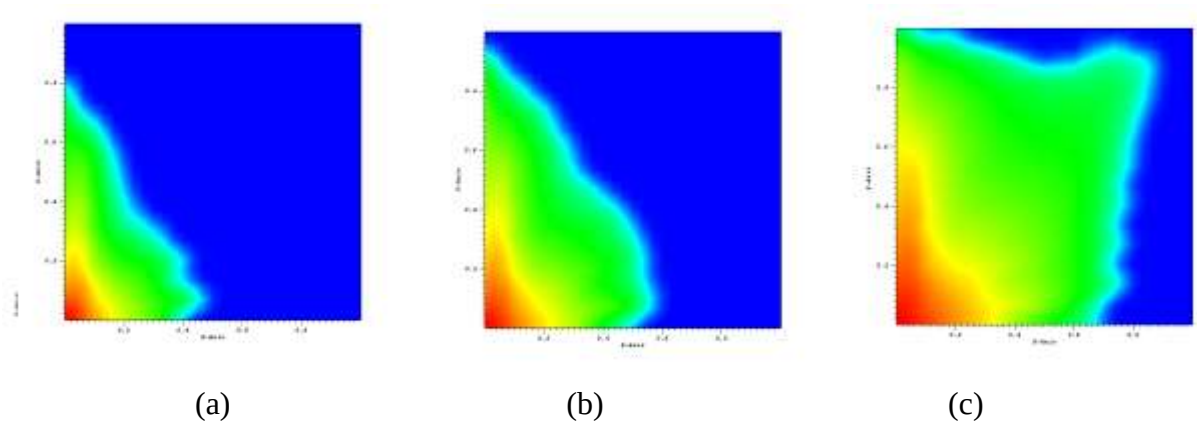


Figura 75. Campos de saturações para o problema do escoamento bifásico num reservatório heterogêneo e isotrópico, para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços para diferentes instantes de tempo- Solução I-MMCVM-CF, VPI's : (a)0,08 ; (b) 0,19; (c) 0,44

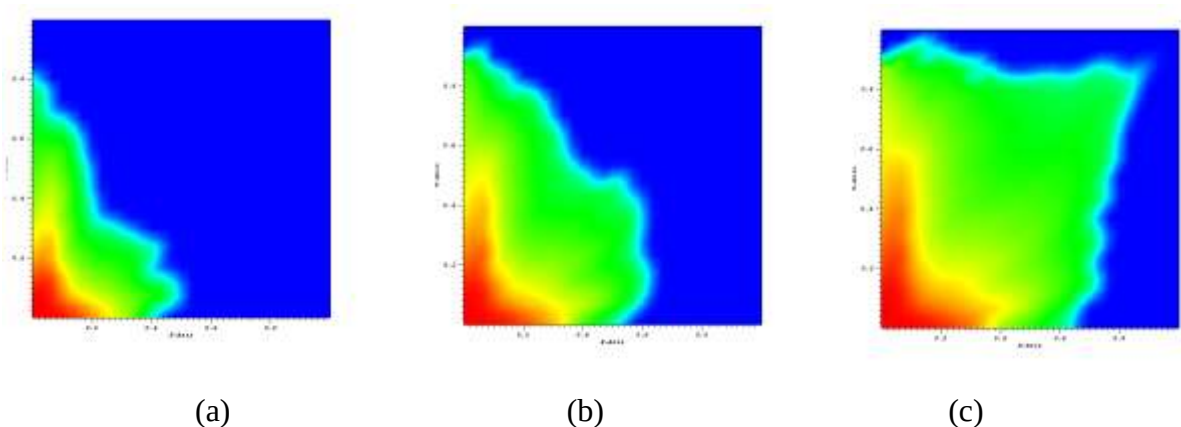
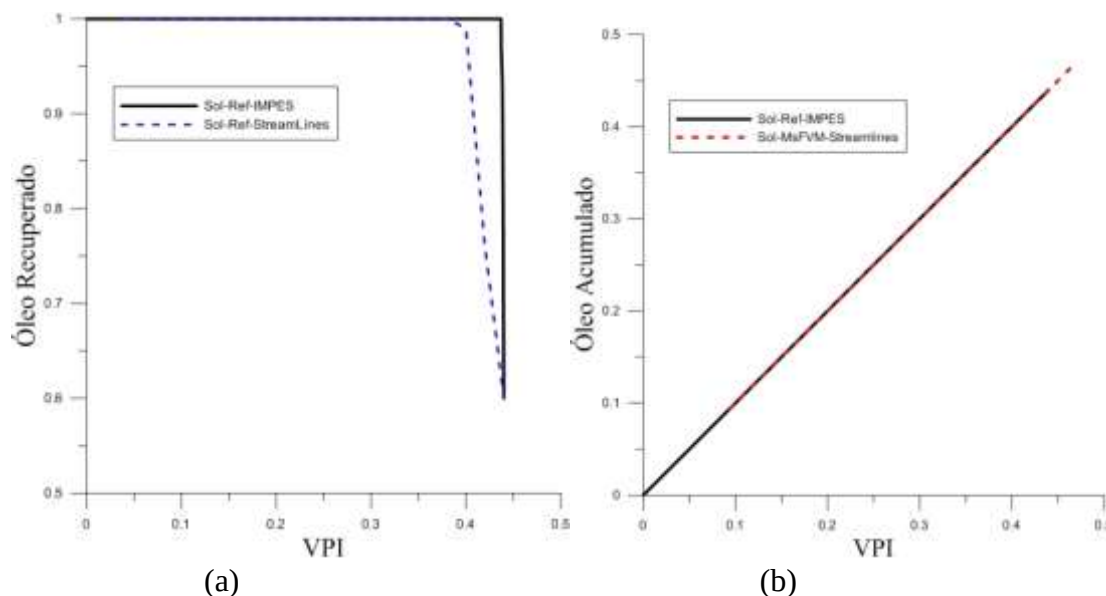


Figura 76. Gráficos de óleos obtidos para formulações TPFA's, método IMPES para a Solução de Referência e I-MMCVM-CF para o problema do escoamento bifásico num reservatório isotrópico e homogêneo para uma configuração de $\frac{1}{4}$ de quatro poços considerando diferentes fatores de engrossamentos incluindo a solução de referência: (a) Óleo Acumulado, (b) Óleo Recuperado

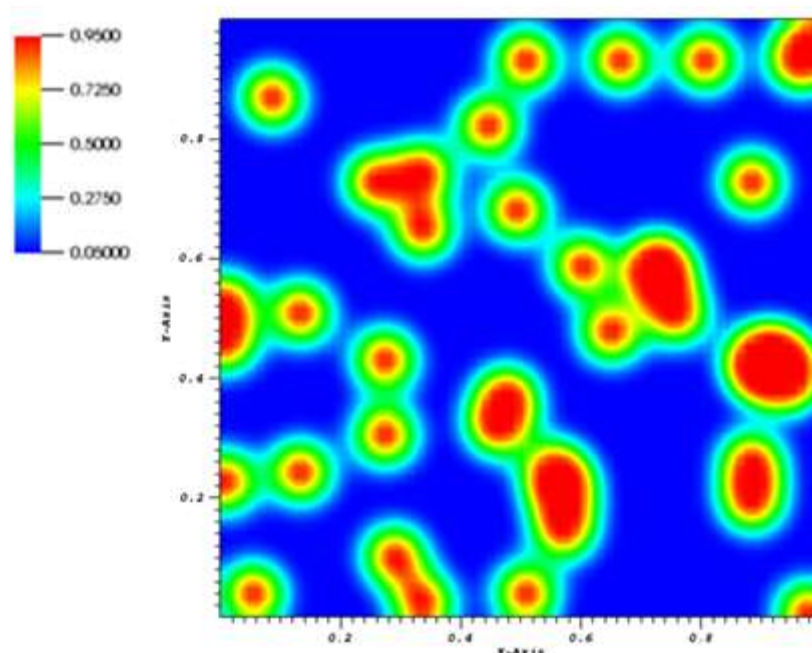


7.4 ESCOAMENTO BIFÁSICO M MEIO ALTAMENTE HETEROGÊNEO NUMA CONFIGURAÇÃO DE $\frac{1}{4}$ DE CINCO POÇOS UTILIZANDO TÉCNICAS DE ALTA ORDEM

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos considerando-se um escoamento bifásico óleo-água, num domínio 2D utilizando a metodologia IMPES. As soluções de referência foram obtidas resolvendo-se as equações da pressão e saturação diretamente na malha fina, e as soluções via método multiescala, para o campo de pressões, foram obtidas considerando-se diferentes razões de engrossamento. Em ambos os casos, utilizou-se uma formulação de volumes finitos do tipo TPFA. Para a equação da saturação usou-se uma formulação explícita do tipo Métodos dos Volumes Finitos de Alta Ordem (HOFV) e seus resultados foram comparados com a formulação *upwind* de primeira ordem (*FOUM*), visando testar a acurácia do método.

Para esse problema escolhemos um domínio unitário, discretizado por uma malha fina com 64x64 volumes de controle. Foi analisado novamente um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, com as mesmas condições de contorno e iniciais já descritas nesta seção. O campo de permeabilidade foi obtido pela relação fornecida por Chueh et al.(2010), onde a permeabilidade varia entre 0.05 a 0.95 (Figura 77).

Figura 77. Campo de Permeabilidade.



Nas Figuras 78 e na Figura 79 observamos a solução de referência obtida diretamente na malha fina pelos métodos FOUM e HOFV, e as soluções multiescala obtidas pelos mesmos métodos. A malha grossa primal tem uma dimensão de 6×6 , caracterizando um fator de engrossamento de 113,7.

Quando uma fase menos viscosa (por exemplo, água) é injetada num reservatório heterogêneo, deslocando um fluido mais viscoso (por exemplo, óleo), devido à distribuição aleatória do campo da permeabilidade, o fluido move-se mais facilmente em zonas de permeabilidade elevada formando “*fingers*” viscosos, como pode ser visto nas Figura 78 e 79. Nestas figuras, percebemos que o Método I-MMCVM-CF -CF/HOFV é capaz de capturar os “*fingers*” viscosos com mais acurácia do que o método I-MMCVM-CF /FOU, produzindo um perfil de saturação mais nítido, com menos difusão artificial, capturando as variações no campo da permeabilidade.

Comparando a solução I-MMCVM-CF com as soluções obtidas diretamente na malha fina, observamos que qualitativamente são muito próximas, embora a solução multiescala avance levemente mais rápida do que a solução de referência. A média do erro relativo do campo de saturação da solução I-MMCVM-CF /HOFV, comparado com a solução de referência, no tempo 0,0703s, é de $E_{rel} = 0,0167\%$.

Quando diminuimos a razão de engrossamento para 83,6 (7x7), o erro cai para $E_{rel} = 0,0125\%$. Já para uma razão de engrossamento de 256 (4x4) o erro aumenta para $E_{rel} = 0,0223\%$. É importante mencionar que existe um limite para a razão de engrossamento da malha, tendo em vista que, para um valor baixo desse parâmetro, aumentam os erros de ressonância, pois a dimensão da malha grossa primal aproximar-se muito da dimensão da malha fina original, destruindo os ganhos potenciais obtidos pelo método multiescala, tanto em termos de acurácia, quanto em termos de eficiência computacional.

Figura 78. Campo de Saturação no tempo = 0.0403s usando: (a) Solução de Referência com Método FOU, (b) Solução de Referência com Método HOFV, (c) Solução I-MMCVM-CF /FOU, (d) Solução I-MMCVM-CF/HOFV.

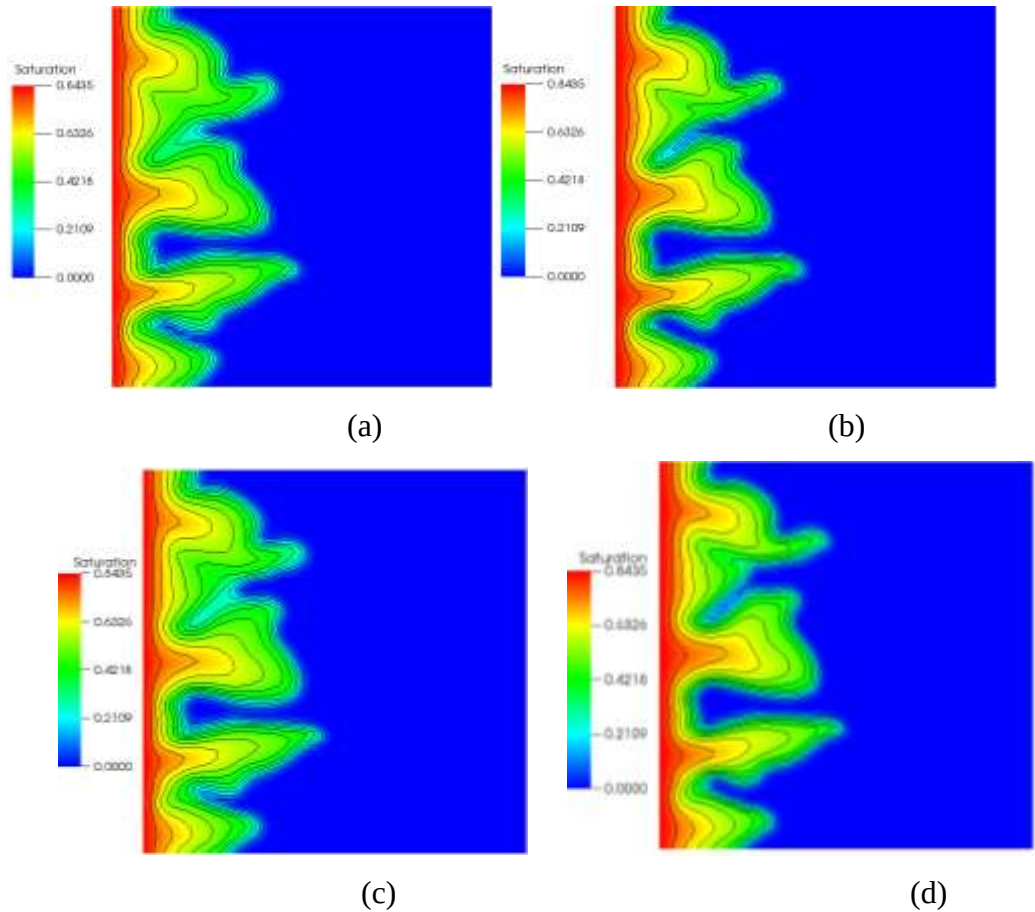
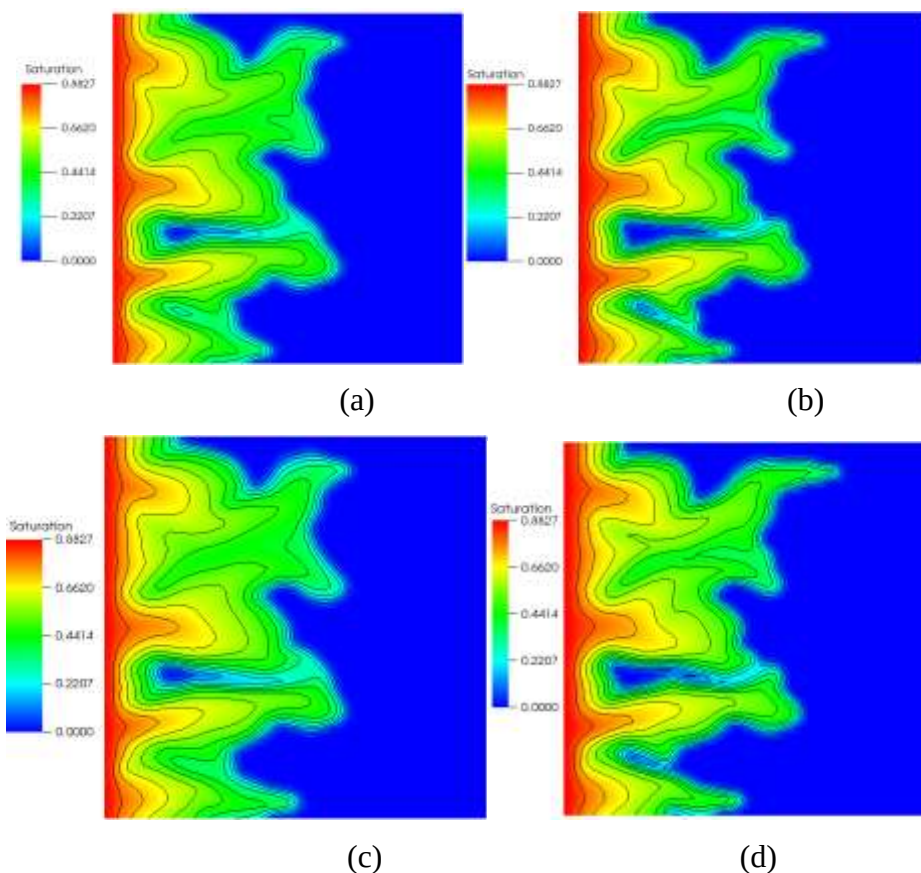


Figura 79. Campo de Saturação no tempo=0.0703s usando: (a) Solução de Referência com Método FOU, (b) Solução de Referência com Método HOFV, (c) Solução I-MMCVM-CF /FOU, (d) Solução I-MMCVM-CF/HOFV.



7.5 EFEITO DA RAZÃO DE ENGROSSAMENTO DA MALHA PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA

Nesta seção avaliamos o efeito da razão de engrossamento da malha na acurácia da solução obtida pelo MsFVM. Com este objetivo, utilizamos o mesmo domínio unitário, com as mesmas condições de contorno e iniciais, já apresentadas nesse capítulo, considerando a mesma simulação de um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, para uma malha fina com 100x100. Na Tabela 14 mostramos a influência do fator de engrossamento (Cr) na acurácia da primeira solução multiescala sem a realização de nenhuma iteração, onde apresenta-se o erro médio da solução multiescala, $\bar{E}$, com respeito à solução de referência obtida diretamente na malha fina (TPFA). Nesta tabela, observamos que o erro cai à medida que diminuimos a razão de engrossamento, como afirmado por Zhou (2010). Ao compararmos a razão de engrossamento de 1111,1 com 9 volumes de controle da malha grossa primal

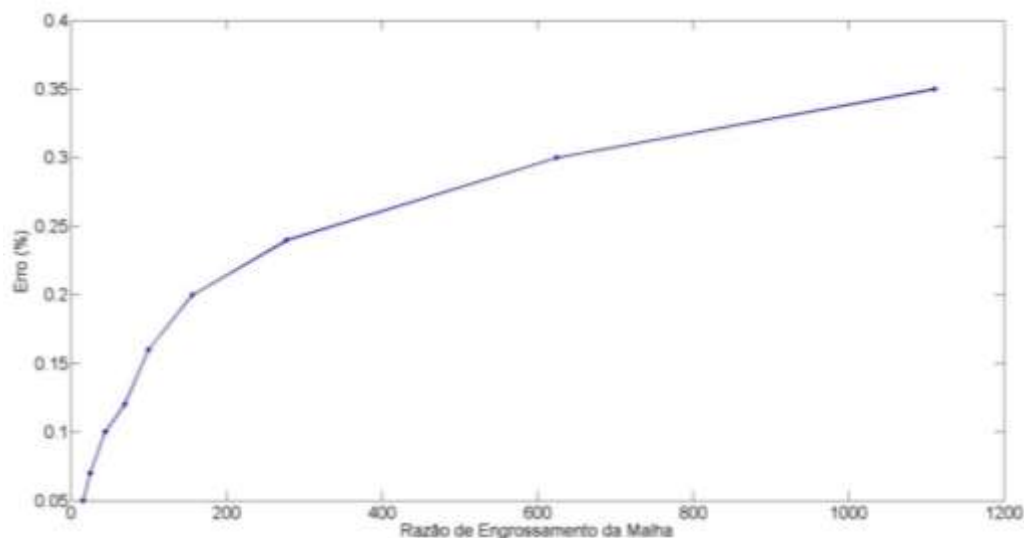
com a razão de engrossamento de 64,4 com 144 volumes de controle da malha grossa primal verificamos uma redução do erro em 65%.

Tabela 14. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento e média aritmética do erro da solução multiescala considerando apenas a solução conservativa, ou seja, com a pressão corrigida.

(Cr)	$(\bar{E}_{rel})$
1111,1 (3x3)	0,35
625,0 (4x4)	0,30
278,0 (6x6)	0,24
156,5 (8x8)	0,20
100,0 (10x10)	0,16
69,4 (12x12)	0,12
44,44(15x15)	0,10
25,0 (20x20)	0,07
16,0 (25x25)	0,05

Na Figura 80 mostramos graficamente os dados da Tabela XII de forma a facilitar o entendimento dos dados tabelados. No próximo exemplo, analisamos a influência do fator de engrossamento no tempo de simulação para um dado problema.

Figura 80. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento versus o erro percentual da solução multiescala - com a pressão corrigida.



7.6 EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL

Nesta seção fazemos um estudo inicial sobre eficiência computacional do método multiescala. Para tal, novamente utilizamos a configuração apresentada na seção 7, considerando a malha fina com 100×100 volumes para o problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços. Para efeito de comparação, normalizamos todos os tempos de simulação obtidos utilizando o MsFVM, considerando as diferentes razões de engrossamento de malha pelo tempo de simulação obtido resolvendo-se o problema de pressão diretamente na malha fina através do método dos volumes finitos TPFA, que foi de 24 segundos, quando executado num computador pessoal com 8GB de RAM e processador Intel i7-3632QM com 2.20GHz. Todos os algoritmos foram escritos na linguagem do Matlab, e sem nenhum tipo de otimização. Esse tempo foi obtido utilizando as funções do Matlab, “*tic*” e “*toc*”, que calculam o tempo de execução de uma determinada função. Apesar do código ainda não estar otimizado esta medida de tempo fornece uma ideia razoável sobre o custo computacional do MsFVM. Nesse caso, realizamos dez simulações diferentes, variando a razão de engrossamento da malha.

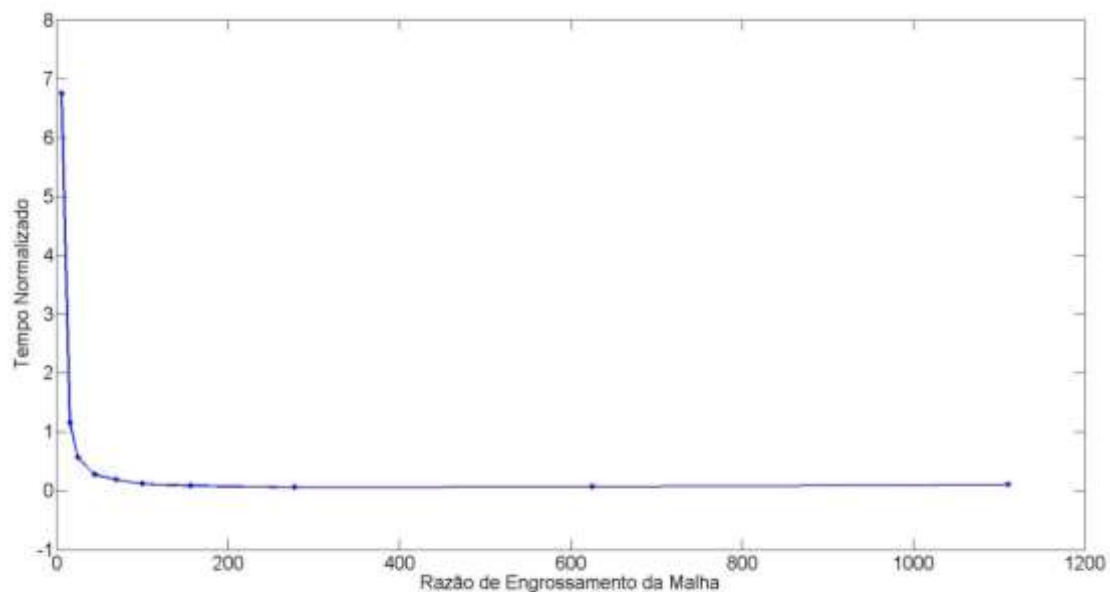
Tabela 15. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Tempo de cálculo da pressão pelo método multiescala com pressão corrigida.

Cr	Tempo (s)/Tempo Normalizado
1111,1 (3x3)	2,52/0,1050
625,0 (4x4)	1,73/0,0721
278,0 (6x6)	1,57/0,0628
156,5 (8x8)	2,11/0,0879
100,0 (10x10)	2,90/0,1208
69,4 (12x12)	4,50/0,1875
44,44 (15x15)	6,61/0,2754
25,0 (20x20)	13,55/0,5646
16,0 (25x25)	27,70/1,1542
6,25 (40x40)	162,00/6,7500

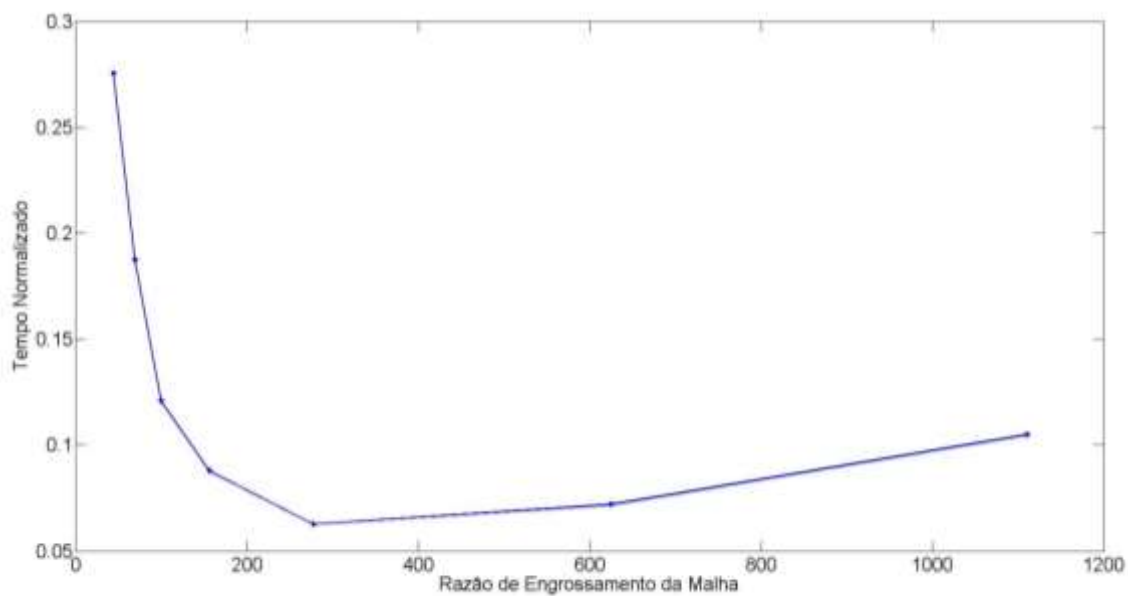
Conforme podemos observar na Tabela 15 o menor tempo normalizado de processamento foi de 0,0628, quando o fator de engrossamento foi de $Cr = 278(6 \times 6)$. Esse resultado mostra-se quase 94% mais rápido que aquele obtido por meio do TPFA diretamente na malha fina (solução de referência), mostrando a necessidade e a possibilidade de determinarmos um ponto de ótimo para a razão de engrossamento com o qual podemos obter soluções multiescala rápidas e acuradas.

Note que, depois que o ponto ótimo de processamento é atingido, o engrossamento adicional da malha acarreta um aumento do tempo de simulação, até que a solução multiescala se torne mais cara computacionalmente do que a solução obtida diretamente na malha fina. Isto ocorre devido ao fato de que, diminuindo a quantidade de volumes na malha grossa, cada volume da malha grossa primal passa a conter um número maior de volumes da malha fina e, apesar do número de subproblemas diminuir, o custo computacional para a solução de cada subproblema aumenta devido ao aumento da dimensão das matrizes locais associadas a esses subproblemas.

Figura 81. Escoamento monofásico em reservatório muito heterogêneo para a configuração de $\frac{1}{4}$ de cinco poços: Razão de engrossamento versus erro percentual da solução multiescala - com a pressão corrigida. (a) considerando todos os casos analisados, (b) destaque para os casos com os melhores resultados.



(a)



(b)

8 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

8.1 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi apresentado as técnicas multiescala para volumes finitos, o método clássico, desenvolvido por Jenny et al. (2003), o método Algébrico OBMM desenvolvido pelo Zhou (2010). Mostramos as vantagens e limitações dessa técnica para diferentes casos. Implementamos formulações de aproximações de fluxo por múltiplos pontos (MPFA-O e MPFA-FPS) para tratar meios anisotrópicos, observamos que independe do método para resolver a equação da pressão o MsFVM falha neste tipo de reservatório, também comprovamos a fragilidade do método em meios que possui regiões com alto gradiente de permeabilidade (fraturas e barreiras, por exemplo).

Neste trabalho propomos um conjunto de melhorias ao MsFVM. Entre elas: realocação dos pontos de colocação, para evitar o uso de volumes fantasmas, essa simples modificação melhora a acurácia do operador de prolongamento, conseqüentemente, do campo de pressão. Sugerimos o uso de métodos iterativos para melhorar a acurácia do campo de pressão. Diferente de outros métodos iterativos multiescala, recalculamos a pressão em cada volume de controle da malha grossa primal, usando a pressão obtida pelos operadores multiescala (P^D) como condição de contorno de Dirichlet, geralmente com poucas iterações, conseguimos obter uma solução acurada no campo de pressão onde o MsFVM falha. Mostramos que os suavizadores podem ser utilizados, para diminuir a quantidade de iterações em cada volume da malha grossa primal.

O uso de métodos iterativos no campo de pressão obtido pelo método multiescala, acarreta perda da conservação em cada volume de controle da malha grossa primal. Visto que realizamos um novo desacoplamento do campo de pressão. Para garantir que o problema na malha grossa seja novamente conservativo, desenvolvemos dois métodos de correção: por face e por volume.

O método I-MMCVM-CF corrige o fluxo calculado em P^P (fluxo obtido através do campo de pressão iterativo) por meio de P^D , obtendo assim soluções acuradas em meios altamente heterogêneos onde o método MsFVM falha. Em problemas onde o fluxo obtido por P^D tem baixa acurácia, exemplo: meios anisotrópicos e heterogêneos, essa técnica não deve ser utilizada. Portanto, desenvolvemos uma nova técnica de correção de fluxos por volume. Essa técnica é capaz de simular meios heterogêneos com tensor completo, com boa acurácia, como

foi mostrado nos exemplos apresentados nessa tese. Conseguimos diminuir o erro no campo de velocidade de 272% para 25% com duas iterações num meio homogêneo e anisotrópico.

Mostramos que o campo de velocidade obtido pelo método I-MMCVM pode ser usado em problemas de alta ordem e em técnicas *streamlines*. Por fim realizamos um estudo preliminar sobre a influência do fator de engrossamento. Embora ainda seja inclusivo, mostramos que existe uma relação entre fator de engrossamento, acurácia e eficiência.

Podemos concluir que se o método I-MMCVM é uma alternativa acurada aos métodos multiescala. Para os problemas simulados esse método conseguiu uma boa acurácia no campo de pressão e saturação, corrigindo as principais limitações do MsFVM.

8.2 TRABALHOS FUTUROS

Podemos mencionar as seguintes sugestões de trabalhos futuros:

- Melhorar a monotonicidade da matriz de transmissibilidade na malha grossa, retirando termos que acarretam oscilações;
- Pesquisar e implementar diferentes condições de contorno para melhorar a acurácia do operador de prolongamento;
- Implementar outras formulações MPFA (ex: MPFA-D, MPFA- Enriched,etc) ;
- Fazer um estudo detalhado, sobre a influência das formulações MPFA na matriz de transmissibilidade da malha grossa primal;
- Desenvolver novas formas de correção de fluxo, buscando métodos mais eficientes;
- Implementar outros suavizadores , entre eles o método Multigrid e avaliar o seu efeito na taxa de convergência.
- Implementar o I-MMCVM em malhas não estruturadas;

REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, I; BARKVE, T; Bøe Ø; MANNSETH, T.. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I. Derivation of the methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**. v. 19, p. 765–781,1998.

ARBOGAST, T., BRYANT, S. L., A two-scale numerical subgrid technique for waterflood simulations. **Soc. Petrol. Eng. J.** p. 446-457, 2002.

ARBOGAST, T., Implementation of a locally conservative numerical subgrid upscaling scheme for two phase Darcy flow. **J. Comput. Geosci.** v. 6, p. 453-481, 2002.

BERALDO, V. T. **Simulação por Linhas de Corrente com Compressibilidade e Variação Espacial e Dinâmica de Composição de Óleo**. Tese de Doutorado. Universidade estadual de Campinas, 2015.

BLAZEK, J. **Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications**. Elsevier Science. Oxford. 2001.

CARVALHO, D. K. E., **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-estruturadas com Estrutura de Dados por Arestas para a Solução de Escoamentos em Meios Porosos**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, 2005.

CARVALHO, D.K.E; WILLMERSDORF, R.B; LYRA P.R.M. A node-centered finite volume formulation for the solution of two-phase flows in non-homogeneous porous media. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. v. 53, p. 1179-1219, 2006.

CHEN, Q; WAN, J; YANG, Y; MIFFLIN, R. T. Enriched Multi-Point Flux Approximation for General Grids. **Journal of Computational Physics**. v. 227, p. 1701–1721, 2008.

CHEN, Z. M., Hou, T. Y., A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. **J. Math. Comput.** v. 72, p. 541-576, 2003.

CHRISTIE, M. A., & BLUNT, M. J. Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques. **Society of Petroleum Engineers**. v. 4, p. 308-317,2001.

CHUEH C.C., SECANELL M., BANGERTH W., & DJILALI N. Multi-level adaptive simulation of transient two-phase flow in heterogeneous porous media. **Computers & Fluids**. v. 39, p. 1585–1596, 2010.

COMPUTER MODELLING GROUP LTD. (CMG), IMEX (RESERVOIR SIMULATION SOFTWARE), <http://www.cmgl.ca/software/imex2014>.

CORTINOVIS, D., JENNY, P., Iterative Galerkin-enriched multiscale finite-volume method. **J. Comp. Phys.** v. 277, p. 248-267, 2014.

CORTIS, A., GALLO, C., SCHER, H., BERKOWITZ, B., Numerical simulation of non-Fickian transport in geological formations with multiple-scale heterogeneities. **Water Resources Research.** v. 40. doi:10.1029/2003WR002750. 2004.

COTAS, K. H., DEMPSEY, J. R., HENDERSON, J. H., The use of vertical equilibrium in two dimensional simulation of three-dimensional reservoir performance, **Society of Petroleum Engineers Journal.** v.11, p. 63-71, 1971.

CUSHMAN, J.H., Hu, B.X., e Deng, F. W., Nonlocal reactive transport with physical and chemical heterogeneity: localization erros. **J. Water Resource Resources.** v. 31, p. 2219–2237, 1995.

DAGAN, G. **Flow and transport in porous formations**, New York City, New York: Springer-Verlag. 1989.

DEHKORDI, M. M., MANZARI, M.T., Effects of using altered coarse grids on the implementation and computational cost of the multiscale finite volume method. **Adv. Water Resour.** v. 59, p. 221-237, 2013.

EDWARDS, M. G.; ZHENG, H. A quasi-positive family of continuous Darcy-flux finite- volume schemes with full pressure support. **Journal of Computational Physics**, 2008; 227:

EDWARDS, M. G; ROGERS, C. F; Finite Volume Discretization with Imposed Flux Continuity for the General Tensor Pressure Equation. **J. Computational Geoscience**, v. 2, 259–290, 1998.

EFENDIEV, Y., DURLOFSKY, L. J., LEE, S. H., Modeling of subgrid effects in coarse-scale simulations of transport in heterogeneous porous media. **Water Resources Research.** v. 36, p. 2031-2041, 2000.

EFENDIEV, Y., DURLOFSKY, L. J., Numerical modeling of subgrid heterogeneity in two phase flow simulations, **Water Resources Research.** vol. 38, 2002.

ERMAKOV K. **On the Multiscale Finite Volume Method for the flow in porous media. MSc Dissertation.** TU Kaiserslautern, 2010.

EWING, R. E. **The Mathematics of Reservoir Simulation.** Philadelphia, SIAM, 1983.

FAROUGHI, S. A., FAROUGHI, S., and MCADAMS, J., A prompt sequential method for subsurface flow modeling using the modified multi-scale finite volume and streamline methods. **Int. J. Numer. Anal. Model.** v. 4, p. 129-15, 2013.

GAUTIER, Y., BLUNT, M. J., and CHRISTIE, M. A., Nested gridding and streamline-based simulation for fast reservoir performance prediction. **J. Comput. Geosci.** v. 3, p. 295–320, 1999.

HAJIBEYGI H., BONFIGLI G., HESSE M. A., Jenny P. Iterative multiscale finite-volume method. **J. Comp. Phys.** v. 227, p.8604–8621, 2008.

HAJIBEYGI, H. **Iterative multiscale finite volume method for multiphase flow in porous media with complex physics.** Tese de Doutorado. Sharif University of Technology. Tehran.2011.

HESSE, M.A., MALLISON, B.T., TCHELEPI, H.A., Compact multiscale finite volume method for heterogeneous anisotropic elliptic equations, **SIAM Multiscale Model. Simul.** v. 7, p. 934–962, 2008.

HOU, T.,and WU, X. H., A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. **J. Comp. Phys.** v. 134, p.169-189, 1997.

JENNY, P, LEE, S. H., TCHELEPI, H. A., Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. **J. Comp. Phys.** v. 187, p. 47-67, 2003.

Jenny, P., Lee, S. H., Tchelepi, H. A., Adaptive multiscale finite volume method for multi-phase flow and transport. **Multiscale Model. Simul.** v. 3, p. 50-64, 2004.

JENNY, P., LEE, S. H., TCHELEPI, H. A., An adaptive fully implicit multi-scale finite-volume algorithm for multi-phase flow in porous media. **J. Comp. Phys.** v. 217, pp. 627-641, 2006.

KIPPE, V., AARNES, J.E., LIE, K.A. A comparison of multiscale methods for elliptic problems in porous media flow. **Comput. Geosci.** v.12, p. 377-398, 2008.

LEVEQUE, R. J. **Numerical Methods for Conservation Laws.** Berlin, Birkhauser, 1992.

LI J., RIVIERE B. High order discontinuous Galerkin method for simulating miscible flooding in porous media. **Computational Geosciences.** v. 19, p. 1251-1268, 2015.

LÖHNER, R. **In: Applied DFD Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods.** New York, Wiley & Sons, 2001.

LUNATI I., TYAGI, M., LEE, S.H., An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution. **J. Comp. Phys.** v. 230, p. 1849–1864, 2011.

LUNATI, I., e LEE, S. H. An operator formulation of the Multiscale Finite-Volume Method with correction function. **Multiscale Modeling & Simulation**. v. 8, p. 96-109, 2009.

LUNATI, I., JENNY, P. Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media. **J. Comp. Phys.** v. 216, p. 616-641, 2006.

MØYNER, O. **Multiscale Finite Volume Methods: extension to unstructured grids with applications in reservoir simulation**. Dissertação, University of Science and Technology, 2012.

MØYNER, O., LIE, K. –A. **A Multiscale Two-Point Flux-Approximation Method**. download do site da web: <http://folk.uio.no/kalie/papers/mstpfa-paper.pdf> em 10/03/2014, 2013.

MØYNER, O., LIE, K., **A Multiscale Method based on Restriction-Smoothed Basis Functions Suitable for General Grids in High Contrast Media**. SPE Reservoir Simulation Symposium, SPE-173265-MS, Houston, Texas, USA, 2016.

MØYNER, O.; Lie, K. A. A multiscale two-point flux-approximation method. **Journal of Computational Physics**, v. 275, p. 273–293, 2014.

RUBIN, Y., A.Y. SUN, R. MAXWELL, AND A. BELLIN. The concept of block-effective macrodispersivity and a unified approach for grid-scale- and plume-scale-dependent transport. **Journal of Fluid Mechanics**. v. 395. p. 161–180. 1999.

S. H. LEE, M. F. LOUGH, and C. L. JENSEN. Hierarchical modeling o flow in naturally fractured formations with multiple length scales. **Water Resources Research**. v. 37, p.443-455, 2001.

SOUZA, M. R. A. **Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

TEIXEIRA, J.C., **Simulação por linhas de Fluxos com Acoplamento Geomecânico**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

TENE, M., WANG, Y. , HAJIBEYGI, H., Adaptive algebraic multiscale solver for compressible flow in heterogeneous porous media. **Journal of Computational Physics**, v.300, p. 679–694, 2015.

van LEER B. TWOARDS. The ultimate conservative difference scheme V. A. second order sequel to Godunov's method. **Journal of Computational Physics**. vol.45, p. 15-25, 1979.

WANG, Y., HAJIBEYGI, H., TCHELEPI H.A. Monotone multiscale finite volume method. **Comput. Geosci.** v. 20, p.1-16,2015.

WOODFIELD P. L, KENJIRO S, KAZUYOSHI N. A simple strategy for constructing bounded convection schemes for unstructured grids. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 46, p. 1007-1024, 2004.

ZHOU, H. **Algebraic Multiscale Finite-Volume for Reservoir Simulation**. Tese de doutorado, Stanford University, 2010.

ZHOU, H., e TCHELEPI, H. A., Operator-based multi-scale method for compressible flow. **Soc. Petrol. Eng. J.**, vol. 13, pp. 267-273, 2008.