Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Marcelo Pirôpo da Silva

Sobre o primeiro autovalor do operador L_r de uma hipersuperfície.

Recife
2015

Marcelo Pirôpo da Silva

Sobre o primeiro autovalor do operador L_r de uma hipersuperfície

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Souza

Recife

2015

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586s Silva, Marcelo Pirôpo da
Sobre o primeiro autovalor do operador L_r de uma hipersuperfície / Marcelo Pirôpo da Silva. – 2015.
72 f.

Orientador: Antonio Fernando Pereira de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2015.
Inclui referênciase apêndices.

1. Geometria. 2. Hipersuperfícies. I. Souza, Antonio Fernando Pereira de (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-153

MARCELO PIRÔPO DA SILVA

SOBRE O PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR L_R DE UMA HIPERSUPERFÍCIE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 26/02/2015.

BANCA EXAMINADORA

___

Prof. Dr. Antonio Fernando Pereira de Sousa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

___

Prof. Dr. Fernando Antonio Nóbrega Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

___

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

"A toda minha família, em especial à minha mãe, Helena Pirôpo".

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado condições de realizar este trabalho.

A minha família pelo incentivo e apoio que sempre recebi de todos, em particular, minha mãe Helena Pirôpo, meu irmão e grande amigo Marcos Pirôpo.

A ao meu orientador, professor Dr. Antônio Fernando Pereira de Sousa, pela admirável capacidade e paciência em me orientar durante o curso, me conduzindo à concluir este trabalho.

A amiga Rúbia Esterfânia que durante esses dois anos de mestrado me ajudou muito para alcançar este sonho. A colaboração dos mestrandos Josué Veloso, Marcelo Carielo, Gilson Simões e Edgar Corrêa.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo imprescindível apoio financeiro.

" Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é alguém que acredite que ele possa ser realizado."

(Friedrich Wilhelm Nietzsche)

Resumo

Nesta dissertação, nosso objetivo principal é apresentarmos, em detalhes, as estimativas para o primeiro autovalor do operador linearizado L_r obtidas em 1993 pelos autores Hilário Alencar, Manfredo Perdigão e Harold Rosenberg. Iniciamos este texto com alguns conceitos e noções a respeito de Geometria Riemanniana. Em seguida, apresentamos as definições da r-ésima curvatura média H_r e das transformações clássicas de Newton. Logo após, definimos o operador linearizado L_r e apresentamos um resultado que trata de sua elipticidade em uma variedade compacta, conexa, sem bordo e orientada, com curvatura H_{r+1} estritamente positiva. Após mostramos uma caracterização para o primeiro autovalor do operador L_r, e apresentada a teoria, descreveremos as estimativas para o primeiro autovalor considerando o operador L_r definido em hipersuperfícies imersas no espaço euclidiano R^{m+1}, bem como, no espaço hiperbólico H^{m+1}. Finalizamos esta dissertação apresentando a aplicação obtida pelos autores referidos anteriomente, envolvendo um problema de estabilidade que preserva volume de hipersuperfície em R^{m+1}.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana. Transformações de Newton. Operador linearizado. Primeiro autovalor. Hipersuperfícies. Estabilidade.

Abstract

In this dissertation, our main objective is to present, in detail, as estimates for the first eigenvalue of the linearized operator L_r obtained in 1993 by the authors Hilário Alencar, Manfredo Perdigão and Harold Rosenberg. We begin this text with some concepts and notions about Riemannian Geometry. Next, we present the definitions of the rth mean curvature H_r and Newton's classical transformations. Afterwards, we define the linearized operator L_r and present a result that deals with its ellipticity in a compact, connected, non-edge and oriented manifold with strictly positive curvature H_{r+1}. After showing a characterization for the first eigenvalue of the operator L_r, and presented the theory, we describe the estimates for the first eigenvalue considering the operator L_r defined in hypersurfaces immersed in the Euclidean space R_{m+1}, as well as in the hyperbolic space H_{m+1}. Finish this dissertation presenting the application obtained by the authors mentioned above, involving a stability problem that preserves volume of hypersurface in R_{m+1}.

Keywords: Riemannian Geometry. Transformations of Newton. Linearized operator. First eigenvalue. Hypersurfaces. Stability.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Se denotarmos por A o operador da segunda forma fundamental, as transformações clássicas de Newton são definidas por $T_r = I$, se $r = 0$, $T_r = S_r I - AT_{r-1}$, se $r = 1, ..., m-1$, e $T_r = 0$, se $r > m$, onde S_r são aplicações simétricas elementares dadas em função das curvaturas principais $k_1, ..., k_m$ do operador A. Associado a cada transformação T_r, defini-se o principal objeto de estudo desta dissertação, o operador linearizado:

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(T_r(\mathrm{Hess}\ f)),$$

onde f é qualquer função diferenciável definida em M e Hess$f$ denota o hessiano de f.

O operador L_r é descrito na literatura por expressões distintas desta qua apresentamos acima. Em estudos de estabilidades feitos por Reilly's (1), o operador L_r surge na expressão da derivada de S_{r+1}, enquanto Cheng e Yau (2), o descrevem pela expressão $\sum_{i,j}(nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}$. O importante resultado sobre o L_r foi obtido por Rosenberg (3), quando mostrou que $L_r(f) = \mathrm{div}(T_r \nabla\ f)$, obtendo com isso vários resultados válidos para a divergência.

Nosso principal objetivo é descrever as estimativas e aplicação a respeito do primeiro autovalor do operador L_r, tal como obtido por H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosemberg (4).

Além das estimativas que descreveremos, outras foram obtidas, por exemplo, Reilly (5), com M compacta, conexa e sem bordo, imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$,

$$\frac{\lambda_1}{n} \leq \frac{1}{Vol(M)} \int_M H_1^2 \tag{1.1}$$

ocorrendo a igualdade precisamente quando M é imersa na esfera de $\mathbb{R}^{m+1}$; e se $n = m$, então a igualdade significa que M é uma esfera.

Heintze (6), obteve alguns resultados sobre o λ_1, em particular, quando M é imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{m+1}$. Entretanto, uma melhor estimativa em $\mathbb{H}^{m+1}$, foi obtida por A. El Soulfi e S. IIias (7), dada por:

$$\frac{\lambda_1}{m} + 1 \leq \frac{1}{Vol(M)} \int_M H_1^2 dM, \qquad m \leq 2 \tag{1.2}$$

ocorrendo a igualdade precisamente se M é imersa em uma esfera geodésica de raio $arcsh\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda_1}}\right)$.

Durante estudos de estabilidade, A. El Soulfi e S. IIias aplicaram este resultado, considerando imersões em espaço de curvatura média constante; assim obtiveram o teorema de Barbosa, do Carmo (8) (no espaço ambiente $\mathbb{R}^{m+1}$) e o teorema de Barbosa, do Carmo, Eschenburg (9) (no espaço ambiente S^{m+1} e $\mathbb{H}^{m+1}$):

"*As hipersuperfícies estáveis M^m de curvatura média constante, imersa no espaço $\mathbb{R}^{m+1}$, $\mathbb{S}^{m+1}$ ou $\mathbb{H}^{m+1}$, são precisamente hiperesferas geodésicas.*"

Organizamos esta dissertação em seis seções. Na seção 2, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos de Geometria Riemanniana. Logo após, na seção 3, introduziremos as Transformações de Newton T_r e o operador L_r, do qual abordamos sobre sua elipticidade. Na seção 4, descreveremos os resultados obtidos por Alencar, do Carmo e Rosenberg (4). Mostraremos inicialmente a seguinte estimativa para λ_1:

$$\lambda_1 \int_M H_r dM \leq c_0(r) \int_M H_{r+1}^2 dM,$$

onde M^m está imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$, compacta, sem bordo, orientada, com curvatura $H_{r+1} > 0$, e $c_0(r) = (m-r)\binom{m}{r}$; obtendo a igualdade precisamente quando M é uma esfera. Além disso, supondo H_{r+1} constante, mostraremos como consequência direta que:

$$\lambda_1 \leq c_0(r) H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}.$$

Ainda na seção 4, mostraremos o caso em que Ω é uma variedade imersa isometricamente em $\mathbf{R}^{m+1}$, com $M = \partial\Omega$ e $H_{r+1} > 0$ em M, obtendo a estimativa:

$$\lambda_1 \leq \frac{c_0(r)}{m+1)^2} \frac{V(M)}{V(\Omega)^2} \int_M H_r dM.$$

Finalizando essa seção, para o caso em que M é compacta, sem bordo, e imersa no espaço $\mathbb{H}^{m+1}$, com curvatura $H_{r+1} > 0$, mostraremos que:

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{1}{2} \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{\underline{H}_r^2} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}},$$

onde $\overline{H} = \sup H$, $\underline{H} = \inf H$, e $c_0(r) = (m-r)\binom{m}{r}$. Essencialmente quando H_{r+1} é constante maior do que 1, veremos que:

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq H_{r+1} + \frac{1}{2} H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - 1,$$

onde $\overline{H}_{r+1} = \sup H_{r+1}$.

Com objetivo de mostrar uma aplicação, na seção 5 abordaremos um problema de estabilidade de Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{m+1}$. Decorrente dos teoremas obtidos por H. Alencar, M. do Carmo e A.G. Colares (10) e por L. Barbosa e M. do Carmo (8), utilizaremos estimativas mostradas na seção 4 para descrever o seguinte resultado, obtido por H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosemberg (4):

"*Uma imersão de M^m em $\mathbb{R}^{m+1}$, com H_{r+1} constante, é r-estável se, e somente se, M é uma esfera.*"

2 PRELIMINARES

Consideremos como requisitos necessários conceitos sobre variedades diferenciáveis que podem ser consultados, por exemplo, nas referências (11) e (12). Nesta seção apresentaremos as definições básicas e alguns resultados de Geometria Riemanniana utilizados neste texto. Os comentários e as demonstrações apresentadas são, basicamente, as encontradas nas referências (13, 14, 15).

É sabido que as propriedades métricas do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ são determinas pelas coordenadas cartesianas canônicas e que em uma variedade diferenciável não existem tais coordenadas. Assim, para definir noções de distância, ângulos e volumes é necessário acrescentar, em particular, um campo tensorial chamado de métrica Riemanniana que definiremos a seguir.

2.1 Métrica Riemanniana

Definição 1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma aplicação $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ que associa a cada ponto $p \in M$, um produto interno denotado por $g_p(u, v) = \langle u, v\rangle_p$, de tal forma que é diferenciável no seguinte sentido: se considerarmos um sistema de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \to M$, em p, então as aplicações $g_{ij} : U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}$ definidas por $g_{ij}(x_1, ..., x_m) = \langle \frac{\partial}{x_i}(q), \frac{\partial}{x_j}(q)\rangle$ são diferenciáveis, para todo $i, j = 1, ..., m$, com $q = x(x_1, ..., x_m) \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 0, 1, 0, ...0)$.

Por exemplo, se $M = \mathbb{R}^m$ o produto interno usual dado por $\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^m} = X^t \cdot Y = \sum\limits_{i=1}^{m} X_iY_i$, com $X = (X_1, ..., X_m)$ e $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ em $\mathbb{R}^m$, define-se uma métrica Riemanniana em $\mathbb{R}^m$ dada por $g_{ij}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, onde $e_i, e_j \in \{e_k\}_{k=1}^m$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 2. Uma variedade Riemanniana é um par (M^m, g) onde M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica Riemanniana em M.

Dada uma variedade diferenciável, uma pergunta natural é se podemos definir uma métrica Riemanniana nessa variedade. A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Considere M uma variedade diferenciável, a família $\{f_\alpha : M \to \mathbb{R}\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura aberta localmente finita $\{\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)\}$, onde a aplicação $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \to M$ é um sistema de coordenadas. Logo, cada f_α é uma função diferenciável com *suporte* (f_α) contido em $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, onde $0 \leq f_\alpha \leq 1$ e $\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$ em M. Para cada α definimos,

$$\langle u, v\rangle_\alpha = \langle (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(u), (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(v)\rangle_{\mathbb{R}^m},$$

para todo $u, v \in T_pM$ e todo $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, onde $(d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}$ denota a aplicação inversa da derivada de $\mathbf{x}$. Utilizando a partição da unidade, definimos:

$$\langle u, v\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(u), (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(v)\rangle_{\mathbb{R}^m},$$

para todo $u, v \in T_pM$ e todo $p \in M$. Deste modo, temos um produto interno definido positivo , pois pela definição de f_α, existe α' tal que $f_{\alpha'}(p) > 0$. Logo, supondo $u \in T_pM$, $u \neq 0$,

$$\langle u, u\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(u), (d\mathbf{x}_\alpha)^{-1}(u)\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq f_{\alpha'}(p)\langle (d\mathbf{x}_{\alpha'})^{-1}(u), (d\mathbf{x}_{\alpha'})^{-1}(u)\rangle_{\mathbb{R}^m} > 0$$

□

Definição 3 (Imersão)**.** Sejam M^m e N^{m+k} variedades diferenciáveis. Uma imersão de M em N, é uma aplicação diferenciável $x : M \to N$, tal que $(dx)_p : T_pM \to T_{x(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.

Pelo Teorema 1, em qualquer variedade diferenciável podemos definir uma métrica Riemanniana. Agora, se N é variedade Riemanniana e $x : M \to N$ é uma imersão, a proposição a seguir, nos permite definir uma métrica Riemanniana em M.

Proposição 2. *Seja (N^{m+k}, g) uma variedade Riemanniana e $x : M^m \to N^{m+k}$ uma imersão. Então, para todos $v, w \in T_pM$, a igualdade $\langle v, w\rangle_p = g_{x(p)}((dx)_p(v), (dx)_p(w))$ define uma métrica Riemanniana em M^m.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\langle v, w\rangle_p$ é simétrica e positiva definida. Para isso, consideremos $p \in M$ e $v, w \in T_pM$. Como g é simétrica,

$$\langle v, w\rangle_p = g_{x(p)}((dx)_p(v), (dx)_p(w)) = g_{x(p)}((dx)_p(w), (dx)_p(v)) = \langle w, v\rangle_p.$$

Como g é uma métrica em N^{m+k}, tem-se que $\langle v, v\rangle_p \geq 0$, e, se $\langle v, v\rangle_p = 0$, então

$$g_{x(p)}((dx)_p(v), (dx)_p(v)) = 0.$$

Consequentemente, $(dx)_p(v) = 0$. Mas, por hipótese x é uma imersão, e portanto $(dx)_p(v)$ é injetiva. Logo, $v = 0$. □

Definição 4. Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades Riemannianas. Diz-se que um difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ é uma isometria se

$$g_1(u, v) = g_2(df_p(u), df_p(v)),$$

para todo $u, v \in T_pM_1$ e todo $p \in M_1$.

2.2 Conexões afim

Nesta subseção, introduziremos a noção de derivação, chamada de conexão afim, em uma variedade diferenciável. Em seguida, vamos atribuir as propriedades chamadas de simetria e de compatibilidade, que relaciona a conexão com a métrica Riemanniana de uma variedade. Dessa forma defini-se a conexão Riemanniana, ou de Levi-Civita.

Definição 5 (Conexão afim)**.** Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim em M é uma aplicação
$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denotada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, tal que:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(f \cdot Y) = X(f)Y + f\nabla_X Y$, (onde $X(f)$ significa, a derivada de f na direção de X)

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e funções $f, g \in C^\infty(M)$.

Proposição 3 (Derivada covariante)**.** *Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇. Então, existe uma única aplicação $V \mapsto \dfrac{DV}{dt}$ ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ denominada derivada covariante de V ao longo de c, de modo que, para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

(a) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$,

(b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$,

(c) Se $V(t) = Y(c(t))$, isto é, se V é induzido por um campo de vetores, então vale a igualdade $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$, onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e campos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Consideremos um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$. Se $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e c é uma curva diferenciável passando por p, o campo V é dado por $V(t) = \sum_{j=1}^{m} v_j X_j(c(t))$. Supondo que exista uma correspondência

$V \mapsto \frac{DV}{dt}$ satisfazendo as propriedades (a),(b) e (c), temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt}(\sum_{j=1}^{m} v_j X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{DX_j}{dt} && \text{(pelas as propriedades (a) e (b))} \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\frac{dv_j}{dt} X_j + v_j \nabla_{dc/dt} X_j) && \text{(por (c), pois } V(t) = X(c(t))) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\frac{dv_j}{dt} X_j + v_j \nabla_{(\sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j) && \text{(expressão local: } c(t) = \mathbf{x}(x_1(t), ..., x_m(t))) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j).
\end{aligned}
$$

Portanto, se $V \mapsto \dfrac{DV}{dt}$ existe satisfazendo as condições da proposição, temos que:

$$
\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} (\frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j). \tag{2.1}
$$

Logo, se existe outra aplicação que admita as três condições da proposição, esta deve ser dada pela mesma fórmula (2.1), portanto será única.

Para mostrar a existência, definimos $\dfrac{DV}{dt}$ em coordenadas $\mathbf{x}(U)$ da forma (2.1). Pela própria construção é imediato que (2.1) satisfaz as propriedades (a),(b) e (c). Se $\mathbf{y}(W)$ é outra vizinhança coordenada, com $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$, e se definimos $\dfrac{DV}{dt}$ em $\mathbf{y}(W)$ pela fórmula (2.1), as definições concordam pela unicidade de $\dfrac{DV}{dt}$, em $\mathbf{x(U)}$. Deste modo, a definição pode ser estendida para todo M. $\square$

Como pode ser visto em (14), dados $p \in M$ e $X \in T_pM$, a conexão afim $\nabla_X Y$ depende apenas do valor do campo X no ponto p e dos valores do campo Y ao longo de alguma curva diferenciável c tangente a X no ponto p. De fato, se consideramos $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ um sistema de coordenadas em p, e os campos vetoriais X, Y em $\mathfrak{X}(M)$, escrevemos

$X = \sum_{i=1}^{m} x_i X_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{m} y_j X_j$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^{m} x_i X_i} \Big(\sum_{j=1}^{m} y_j X_j \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(\nabla_{X_i} \Big(\sum_{j=1}^{m} y_j X_j \Big) \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} x_i \Big(X_i(y_j) X_j + y_i \nabla_{X_i} X_j \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} x_i \Big(X_i(y_j) X_j + y_i \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} X_k \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i X_i(y_k) + \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_i \Gamma_{ij}^{k} \Big) X_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(X(y_k) + \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_i \Gamma_{ij}^{k} \Big) X_k,
\end{aligned}$$

onde, a partir da quarta igualdade utilizamos as funções diferenciáveis $\Gamma_{ij}^{k} : V \to \mathbb{R}$, com $i, j, k = 1, ..., m$, definidas por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k} \Gamma_{ij}^{k} X_k$ chamadas de Símbolos de Christoffel.

Definição 6 (Campo Paralelo)**.** Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim. Um campo vetorial $t \mapsto V \in T_{c(t)}M$, ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ é chamado de paralelo (em respeito a ∇) quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Por (2.1), temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j\Big) &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} v_j \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} X_k\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{dx_i}{dt} v_j \Gamma_{ij}^{k}(x(t))\Big) X_k.
\end{aligned}$$

Isto significa que V é paralelo se

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k}(x(t)) \frac{dx_i}{dt} v_j = 0, \qquad \forall\, k = 1, ..., m,$$

em qualquer sistema de coordenadas. Note que, sendo este um sistema linear de primeira ordem, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Lineares, dados uma curva $c : I \to M$, um ponto $p \in M$ e um vetor $v_p \in T_pM$, existe um único campo vetorial $V : I \to TM$ paralelo ao longo de c tal que $V(0) = v_p$. Provando assim, a seguinte proposição:

Proposição 4 (Transporte Paralelo)**.** *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇, $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então, existe um único campo de vetores paralelos V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é chamado transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.*

2.3 Conexão Riemanniana

Proposição 5. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. São equivalentes:*

1. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$
2. $\dfrac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \dfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \dfrac{DW}{dt}\rangle, \qquad \forall\, V(t), W(t) \in \mathfrak{X}(M),\ t \in I.$
3. *a função $t \mapsto \langle P_1, P_2\rangle(t)$ é constante para todo par P_1 e P_2 de campos paralelos.*

onde em 2 e 3 a derivada é definida ao longo de uma curva diferenciável em M.

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (3) : Se P_1 e P_2 são paralelos, então $\dfrac{DP_1}{dt} = \dfrac{DP_2}{dt} = 0$. Por (2), temos $\dfrac{d}{dt}\langle P_1, P_2\rangle = 0$. Logo, $\langle P_1, P_2\rangle$ é constante e a condição (3) é satisfeita.
(3) $\Rightarrow$ (2) : Sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M, $t_0 \in I$ e $\{e_1, ..., e_m\}$ uma base ortonormal de $T_{c(t_0)}M$. Pela proposição 4, para cada e_i existe um único campo paralelo $P_i(t)$, tal que $P_i(t_0) = e_i$. Supondo que vale (3), tem-se que o produto é preservado e em particular, $\{P_1(t), ..., P_m(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}M$ para todo $t \in I$. Assim, se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever, ao longo de $c(t)$,

$$V = \sum_{i=1}^{m} v_i P_i \qquad \text{e} \qquad W = \sum_{j=1}^{m} w_j P_j.$$

Calculando o produto em cada coordenada tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\langle V, W\rangle &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{m} v_i(t) w_i(t)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{dv_i}{dt} w_i + v_i \frac{d}{dt} w_i\Big). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle &= \langle \frac{D}{dt}(\sum_{i=1}^{m} v_i P_i), W\rangle \\ &= \langle \sum_{i}^{m}(\frac{dv_i}{dt} P_i + v_i \cancelto{0}{\frac{DP_i}{dt}}), \sum_{j=1}^{m} w_j P_j\rangle \\ &= \langle \sum_{i}^{m} \frac{dv_i}{dt} P_i, \sum_{j=1}^{m} w_j P_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{dv_i}{dt} w_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{dv_i}{dt} w_i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De modo análogo obtemos $\langle V, \dfrac{DW}{dt}\rangle = \sum_{i=1}^{m} v_i \dfrac{dw_i}{dt}$. Somando as duas igualdade obtidas,

$$\frac{D}{dt}\langle V, W\rangle = \sum_{i=1}^{m} \frac{dv_i}{dt} w_i + \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{d}{dt} w_i = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle.$$

$(3) \Rightarrow (1)$: Supondo que o item (3) é verdadeiro. Fixado um ponto p, seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável passando por p na direção de X, isto é, $c(t_0) = p$ com $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0} = X(p)$, $t_0 \in I$. Como $X\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a derivada da função produto na direção de X. Pela proposição (3), restringindo o campo a curva c, tem-se que:

$$\begin{aligned} X(p)\langle Y, Z\rangle &= \frac{d}{dt} < Y, Z >_{c(t)} |_{t=0} \\ &= \langle \frac{DY}{dt}, Z\rangle + \langle Y, \frac{DZ}{dt}\rangle \\ &= \langle \nabla_{c'(0)} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{c'(0)} Z\rangle, \end{aligned}$$

pois, a restrição do campo a vizinhança, implica que a derivada covariante coincide com a conexão na direção da curva (prop: 3).

$(1) \Rightarrow (3)$: Sejam Y e Z campos paralelos. Supondo que vale (1) e considerando a restrição do campo X a curva c, tem-se:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \cancelto{0}{\frac{DY}{dt}}, Z\rangle + \langle Y, \cancelto{0}{\frac{DZ}{dt}}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, $t \mapsto \langle Y, Z\rangle(t)$ é constante. $\square$

Definição 7 (Compatibilidade da conexão)**.** Sejam M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇, e uma métrica Riemanniana g em M. Dizemos que ∇ é compatível com a métrica g se qualquer item da proposição (5) se verifica.

Definição 8 (Simetria)**.** Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde $[X, Y]$ é o Colchete de Lie.

Observemos que ao consideremos um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em p, e campos vetoriais X, Y em $\mathfrak{X}(M)$. Escrevemos $X = \sum_{i=1}^{m} x_i X_i$ e $Y = \sum_{j=1}^{m} y_j X_j$. Nota-se facilmente que o colchete de Lie é antissimétrico, ou seja,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{m} \Big(x_i X_i - y_j X_j \Big) = - \sum_{i=1}^{m} \Big(y_j X_j - x_i X_i \Big) = -[Y, X]. \tag{2.3}$$

Teorema 6 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana (M, g), existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana g. Tal conexão é denominada conexão Riemanniana (ou de Levi-Civita).*

Demonstração. (Unicidade) Suponhamos que existe uma conexão ∇ em (M,g) simétrica e compatível com a métrica g. Lembremos que em cada ponto o produto interno é degenerado e bilinear. Assim, para calcularmos $\nabla_X Y$ é suficiente obtermos $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$, para $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Utilizando alternadamente a propriedade 5 e a definição 8, seque que:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X + [X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle \nabla_Z Y, X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle \nabla_Y Z + [Z,Y], X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z, \nabla_X Y + [Y,X]\rangle \\
& + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle \\
& - \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle.
\end{aligned}$$

Então,

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle. \quad (2.4)$$

Logo, se existe uma conexão ∇ em M, compatível e simétrica, temos que $\nabla_X Y$ é unicamente determinada pela equação (2.4) a qual é chamada fórmula de Koszul.

(Existência) Para mostrarmos que existe uma conexão compatível e simétrica, definimos ∇ pela equação 2.4. Então,

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle = {} & 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle - 2\langle \nabla_Y X, Z\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle \\
- {} & \langle Y,[X,Z]\rangle - Y\langle X,Z\rangle + Z\langle X,Y\rangle - X\langle Z,Y\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle \\
- {} & \langle [Z,X],Y\rangle + \langle X,[Y,Z]\rangle \\
= {} & 2\langle [X,Y],Z\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Da definição (8) concluímos que ∇ é simétrica. Para mostrar que ∇ é compatível com a métrica g, utiliza-se o item (1) da proposição (5).

$$\begin{aligned}
2\Big(\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\Big) = {} & 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + 2\langle Y, \nabla_X Z\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle \\
& + \langle [Z,Y],X\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle + X\langle Z,Y\rangle - Y\langle Z,X\rangle \\
& + Z\langle Y,X\rangle - \langle Y,[Z,X]\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle \\
= {} & X\langle Y,Z\rangle + X\langle Z,Y\rangle = 2X\langle Y,Z\rangle.
\end{aligned}$$

Com isso concluímos a demonstração do teorema. $\square$

2.4 Tensores

Nesta subseção, vamos apresentar uma (breve) revisão sobre as noções de tensores. Mais detalhes podem ser encontrados na referência (15). Inicialmente, consideremos V_i, com $i = 1, ..., n$, um modulo sobre um anel K e seja $V = V_1 \times \cdots \times V_m$. A definição usual de soma e de multiplicação por elementos de K, faz de V um módulo sobre K. Denote por V^* o conjunto de todas as funções k-lineares de V sobre K, chamado dual de V.

Definição 9 (Tensor)**.** Sejam $r \geq 0$ e $s \geq 0$ inteiros não simultaneamente nulos. Uma função k-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ é dita um tensor do tipo (r, s) sobre V.

O conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K considerando as definições usuais de soma e multiplicação por elementos de K.

Observe que: se $r = 0$, então $A : V^s \to K$; quando $s = 0$, temos que $A : (V^*)^r \to K$; e quando $r = s = 0$, temos um tensor do tipo $(0, 0)$ que é simplesmente um elemento do anel K.

Seja M^m uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}^*(M)$ o dual de $\mathfrak{X}(M)$. É sabido que $\mathfrak{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando considerado como "escalares"os elementos de $C^\infty(M)$.

Definição 10. Um campo tensorial do tipo (r, s) em M é uma aplicação multilinear que atribui para cada ponto $p \in M$, um tensor

$$T : \mathfrak{X}^*(M^m)^r \times \mathfrak{X}(M^m)^s \to C^\infty(M)$$

onde $\mathfrak{X}^*(M^m)$ denota o módulo dual de $\mathfrak{X}(M^m)$.

Por exemplo, um campo vetorial é um campo tensorial do tipo $(0, 1)$, isto é, uma aplicação que para cada ponto $p \in M$, atribui um tensor $X_p \in T_pM$. Outro exemplo, é o campo tensorial df do tipo $(1, 0)$ que leva cada ponto $p \in M$ em $(df)_p$, onde $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é a derivada de f em p. Este tensor é dito a diferencial de f, e para cada $v \in T_pM$, temos a derivada direcional de f em p na direção do vetor v, denotada por $(df)_p(v) = v \cdot f$.

Definição 11. Seja $Z \in \mathfrak{X}(M)$. A derivada covariante de um tensor T do tipo $(0, s)$ ou $(1, s)$ em relação a Z, é um campo tensorial definido por:

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r), \qquad (2.5)$$

para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2.5 Operadores diferenciais

Definição 12. O gradiente de f, denotado por grad f, é o único campo vetorial definido em M que satisfaz:

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v), \qquad p \in M,\ v \in T_pM.$$

Definição 13. Sejam M^m uma variedade Riemanniana. Fixado $X \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $p \in M$, a divergência de X em p, é o campo dado por:

$$\begin{array}{rcl} \text{div} & : & \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ & & X \quad \longrightarrow (\text{div } X)_{(p)} := tr(Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \end{array}$$

onde $Y \in T_pM$.

Seja M^m uma variedade Riemanniana e $p \in M$. De acordo com (14), é possível mostrar que existem uma vizinhança U do ponto p, $U \subset M$, e campos de vetores $E_1, ..., E_m \in \mathfrak{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, $\forall\ i, j = 1, ..., m$. De fato, pode-se considerar U uma vizinhança normal do ponto p, $\{e_i\}_{i=1}^m$ base ortonormal de T_pM, e definir $\{E_i\}_{i=1}^m$ pelo transporte paralelo da base $e_{i\,i=1}^{\,m}$. Assim, E_i serão ortonormais e pela construção dos campos E_i obtém-se o resultado.

Uma tal família $\{E_i\}_{i=1}^m$ de campos de vetores é chamada um referencial (local) geodésico em p.

Proposição 7. *Seja $\{E_1, ..., E_m\}$ uma base ortonormal de T_pM. Tem-se que:*

$$(a) \quad grad\, f(p) = \sum_{i=1}^m (E_i(f))E_i(p), \ \ onde\ f \in C^\infty(M). \tag{2.6}$$

Se $E_1, ..., E_m$ é um referencial local geodésico em $p \in M$, então,

$$(b) \quad div\, X(p) = \sum_{i=1}^m E_i(f_i)(p), \ \ onde\ X = \sum_{i=1}^m f_i X_i. \tag{2.7}$$

Demonstração. (a) Por definição de gradiente de f, temos que:

$$E_j(f(p)) \ = \ \langle \text{grad } f, E_j \rangle_p.$$

Escrevendo grad $f = \displaystyle\sum_{i=1}^m \alpha_i E_i$, segue que:

$$\begin{aligned} \langle grad\ f, E_j \rangle_p &= \langle \sum_{i=1}^m \alpha_i E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j. \end{aligned}$$

Para todo, $j = 1, ..., m$. Logo, pela definição de gradiente de f temos que $E_j(f(p)) = \alpha_j$. Concluímos que,

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i E_i = \sum_{i=1}^m E_i(f(p))E_i.$$

Se $\{W\}_{j=1}^{m}$ é outro referencial geodésico local em $\mathcal{U}$, escrevemos $W_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} E_i$. Logo, $(\alpha_{ij}(q))$ é uma matriz ortogonal para todo q em $\mathcal{U}$, porque $E_1, ..., E_m$ são ortonormais. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} W_k(f(p))W_k &= \sum_{i,j,k=1}^{m} \alpha_{ij} E_i(f(p)) \alpha_{kj} E_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{m} \alpha_{ij} \alpha_{kj} E_i(f(p)) E_k \\ &= \sum_{i,k=1}^{m} \delta_{ik} E_i(f(p)) E_k \\ &= \sum_{i=1}^{m} E_i(f(p)) E_i. \end{aligned}$$

Isto é, o item 2.6 não depende do referencial local geodésico considerado. (b) Suponha que $E_1, ..., E_m$ é um referencial geodésico local definido em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $p \in M$. Como $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ é uma base de T_pM, escrevemos $X = \sum_{j=1}^{m} f_j E_j$. Por definição da divergência de X, no ponto p, tem-se que:

$$\text{div } X = tr(Y \to \nabla_Y X) = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana em M. Utilizando a compatibilidade da conexão (prop:5), no ponto p,

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} (E_i \langle X, E_i \rangle - \cancelto{0}{\langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} E_i \langle \sum_{j=1}^{m} f_j E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} E_i(f_i). \end{aligned}$$

□

Definição 14. Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ e f uma função diferenciável em M. O Laplaciano de M é o operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido por:

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)).$$

Proposição 8. *Seja $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ um referencial geodésico em $p \in M^m$. Então:*

$$\begin{aligned} (a) \qquad \Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{m} E_i(E_i(f))(p) && (2.8) \\ (b) \qquad \Delta(f \cdot g) &= f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle grad\ f, grad\ g \rangle && (2.9) \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Como $\{E_i\}_{i=1}^m$ é um referencial geodésico local em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $p \in M$, pelas equações (2.6) e (2.6) temos:

$$\text{grad } f(p) = \sum_i (E_i(f))E_i(p) \qquad \text{e} \qquad \text{div } X(p) = \sum_{i=1}^m E_i(f_i)(p).$$

Então,

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i}(\text{grad } f), E_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^m E_j(f)E_j), E_i\rangle.$$

Note que,

$$\nabla_{E_i}\Big(\sum_{j=1}^m E_j(f)E_j\Big) = \sum_{j=1}^m \left[\Big(E_i(E_j(f))\Big)E_j + E_j\nabla_{E_i}E_j\right] = \sum_{j=1}^m \Big(E_i(E_j(f))\Big)E_j.$$

Logo,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^m \langle \sum_{j=1}^m (E_iE_j(f))E_j, E_i\rangle = \sum_{i=1}^m E_i(E_i(f)).$$

(b) Agora vamos mostrar que $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle$. Pelo item (a), $\Delta f(p) = \sum_{i=1}^m E_i(E_i(f))(p)$. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g) &= \sum_{i=1}^m E_i(E_i(f \cdot g)) \\
&= \sum_{i=1}^m E_i(fE_i(g) + gE_i(f)) \\
&= \sum_{i=1}^m \Big(fE_i(E_i(g)) + E_i(g)E_i(f) + gE_i(E_i(f)) + E_i(f)E_i(g)\Big) \\
&= f\sum_{i=1}^m E_i(E_i(g)) + g\sum_{i=1}^m E_i(E_i(f)) + \sum_{i=1}^m E_i(g)E_i(f) + \sum_{i=1}^m E_i(f)E_i(g) \\
&= f\Delta g + g\Delta f + \langle \sum_{i=1}^m E_i(g)E_i, \sum_{i=1}^m E_i(f)E_i\rangle + \langle \sum_{i=1}^m E_i(f)E_i, \sum_{i=1}^m E_i(g)E_i\rangle \\
&= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g\rangle
\end{aligned}$$

□

Suponhamos, por exemplo, que $M = \mathbb{R}^m$. Sejam $p \in \mathbb{R}^m$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ uma base ortonormal para $T_p\mathbb{R}^m$. Note que neste caso, o grad f coincide com o Laplaciano usual, isto é,

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Definição 15. Sejam M uma variedade Riemanniana com conexão ∇ e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f em $p \in M$, é o operador linear definido por:

$$\begin{aligned}
\text{Hess } f : T_pM &\to T_pM \\
X &\mapsto \text{Hess}(f)_p(X) = (\nabla_X \text{grad } f)_p, \qquad \forall\, X \in T_pM.
\end{aligned}$$

2.6 Curvatura

Nesta subseção apresentaremos a definição de curvatura Riemanniana, denotada por R. Observemos que em $\mathbb{R}^m$ a curvatura R é nula, o que permite uma interpretação intuitiva a respeito de R, de modo a permitir "medir" o quanto uma variedade M deixa de ser euclidiana. Em seguida, introduziremos a definição de curvatura seccional.

Definição 16. A curvatura Riemanniana, denotada por R, de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Se $M = \mathbb{R}^m$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, consideremos a base canônica $\{e_i\}_{i=1}^m$ do $\mathbb{R}^m$. Escrevemos $X = \sum\limits_i X_i e_i$, $Y = \sum\limits_i Y_i e_i$ e $Z = \sum\limits_i Z_i e_i$. Note que e_i é constante, logo $\nabla_Y e_i = 0$. Daí,

$$\nabla_Y Z \;=\; \nabla_Y\Big(\sum_i Z_i e_i\Big) = \sum_i \cancelto{0}{Z_i \nabla_Y e_i} + \sum_i Y(Z_i) e_i = \sum_i Y(Z_i) e_i.$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X\Big(\sum_i Y(Z_i) e_i\Big) \\
&= \sum_i Y(Z_i) \nabla_X e_i + \sum_i X(Y(Z_i)) e_i \\
&= \sum_i X(Y(Z_i)) e_i.
\end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos $\nabla_Y \nabla_X Z = \sum\limits_i Y(X(Z_i)) e_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_i X(Y(Z_i)) e_i - \sum_i Y(X(Z_i)) e_i \\
&= \sum_i (X(Y(Z_i) - Y(X(Z_i)))) e_i
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \;=\; \sum_i ([X,Y] Z_i) e_i.$$

Assim,

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Portanto,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0. \tag{2.10}$$

A proposição a seguir, mostra que a curvatura R define um tensor, chamado tensor de Riemann.

Proposição 9. *Sejam* $X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, *e* $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* (M, g) *satisfaz as seguintes propriedades:*

- R *é bilinear, isto é*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1).$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, X_1).$$

- $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W.$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z.$$

A demonstração dessa proposição pode ser consultada em (14) pág. 101.

Definição 17. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão ∇. O 4-tensor curvatura R é definido por

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W).$$

Definição 18. Sejam $\Pi \subset M$ um subespaço 2-dimensional de T_pM e X_p, Y_p uma base para Π. A curvatura seccional de Π é o número real definido por:

$$K(\Pi) := K(X, Y) = \frac{g(R(X_p, Y_p)X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2\|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p\rangle}.$$

Em (15) pág. 78, encontramos a prova de que $K(X, Y)$ não depende da escolha da base $\{X, Y\}$.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser consultada em (14), permite identificar uma variedade Riemanniana completa, conexa e de curvatura seccional constante com os espaços: Hiperbólico, euclidiano e a esfera.

Teorema 10. *Seja* M^m *uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante* c. *Então, o recobrimento universal* $\tilde{M}$ *de* M, *com a métrica de recobrimento, é isométrico a:*

(a) $\mathbb{H}^m$, *se* $c = -1$,

(b) $\mathbb{R}^m$, *se* $c = 0$,

(c) $\mathbb{S}^m$, *se* $c = 1$.

Modelo de Lorenz-Minkowski

Seja g uma métrica Riemanniana. Por definição, g é definida positiva, simétrica e não degenerada. Como pode ser visto em (15), modificando estas condições pode-se obter generalizações da métrica g. Por exemplo, o caso da métrica que não é definida positiva chamada de Semi-Riemanniana.

Consideramos agora, em $\mathbb{R}^{m+2}$, a forma quadrática $Q(x) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 - x_{m+2}^2$ e associamos a Q a forma bilinear $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{m+2} \times \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}$ dada por $(u,v) = \sum_{i=1}^{m+1} u_i v_i - u_{m+2}v_{m+2}$, da qual define-se um produto interno chamado métrica de Lorentz, fazendo $(v_i, v_j)_p = 0$ se $i \neq j$; $(v_i, v_j)_p = 1$, se $i = j \neq m+2$, e $(v_i, v_j)_p = -1$ se $i = j = m+2$.

A métrica de Minkowski é definida por:

$$\begin{aligned} (,) \quad : \quad & T_p\mathbb{R}^{m+2} \times T_p\mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R} \\ & (u,v)_p \qquad \longmapsto \langle u, v\rangle, \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}^{m+2},\ \forall\, u, v \in T_p\mathbb{R}^{m+2}. \end{aligned}$$

O modelo de Lorentz-Minkowski para o espapo hiperbólico é dado por:

$$\mathbb{H}^{m+1} = \{(\tilde{X}, x) \;/\; |\tilde{X}|^2 - x^2 = -1\}, \tag{2.11}$$

onde $\tilde{X} = (x_1, ..., x_{m+1})$, $x = x_{m+2} > 0$, $|\tilde{X}|$ é a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^{m+1}$.

2.7 Imersões isométricas

Nesta subseção, estudaremos sobre variedades Riemannianas que surgem como subvariedades de outras variedades Riemannianas. Logo depois, introduziremos o conceito da segunda forma fundamental de uma imersão em uma variedade Riemanniana.

Definição 19 (Mergulho)**.** Sejam N e M variedades Riemannianas. Um mergulho é uma imersão $x : M \to N$ (definição 3) tal que $x : M \to x(M) \subset N$ é um homeomorfismo e $x(M)$ tem a topologia induzida de N. Caso $M \subset N$, e $i : M \to N$ é um mergulho, chama-se M de subvariedade de N.

Sejam M^m e $\overline{M}^{k=n+m}$ variedades Riemannianas. Consideremos uma imersão isométrica $x : M^m \to \overline{M}^k$. Então, pela forma local das imersões (toda imersão é localmente um mergulho, consultar em (12)), para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$, de p , onde x é um mergulho sobre sua imagem. Portanto, $x(V)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Note que x se comporta localmente como uma inclusão, logo, para simplificar a notação, identifica-se V com $x(V)$, e cada $v \in T_pM$ com $(dx)_p(v) \in T_{x(p)}\overline{M}$. Assim, pode-se tratar, localmente, M como um subconjunto de $\overline{M}$. Logo, para cada $p \in M$, o espaço tangente $T_p\overline{M}$ pode ser decomposto da forma:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}, \tag{2.12}$$

onde $(T_pM)^\perp$ é a componente normal de T_pM.

Portanto, cada elemento $v \in T_p\overline{M}$ pode ser escrito de modo único da forma $v = v^T + v^\perp$, onde $v^T \in T_pM$ é a componente tangencial de v e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$ é a componente normal v.

Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ tal que $\overline{g}_{x(p)}(dx_p(X), dx_p(Y)) = g_p(X,Y)$, onde $\overline{g}$ e g são as métricas de $\overline{M}$ e M, respectivamente, é dita uma imersão isométrica.

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}^k$. Tome $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é aberto, e considere $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ suas respectivas extensões locais no aberto $\overline{U}$, de modo que $U \subset \overline{U} \subset \overline{M}$. Assim, $\overline{X}\Big|_U = X$, $\overline{Y}\Big|_U = Y$ e $\overline{Z}\Big|_U = Z$. Tomando a projeção ortogonal da conexão Riemanniana em $\overline{M}$, vamos mostrar que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão Riemanniana de M relativa a métrica induzida, ou seja, a igualdade:

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T. \tag{2.13}$$

Como $\overline{\nabla}$ é compatível com a métrica Riemanniana em $\overline{M}$, então, em $p \in U$,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_X \overline{Z}\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \end{aligned}$$

Consideremos em $\overline{M}$, as extensões de X e Y ($\frac{\partial}{\partial\, x_i}$ e $\frac{\partial}{\partial\, x_i}$, resp.), descritas por $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\beta}_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}$. Utilizando a expressão do Colchete de Lie em coordenadas locais, como pode ser consultada em (13), segue da linearidade da aplicação projeção que,

$$\begin{aligned} [\overline{X}, \overline{Y}]^\top(p) &= \left(\sum_{i,j=1}^{k} \left(\overline{\alpha}_j \frac{\partial \overline{\beta}_i}{\partial y_j} - \overline{\beta}_j \frac{\partial \overline{\alpha}_i}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^\top \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} \left(\alpha_j \frac{\partial \beta_i}{\partial y_j} - \beta_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= [X, Y](p) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Daí,

$$\begin{aligned} [X, Y](p) &= [\overline{X}, \overline{Y}]^\top(p) \\ &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X})^\top \\ &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X})^\top \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto, da equação (2.15) concluímos que a igualdade (2.13) define ∇ como a conexão Riemanniana de M.

2.8 Segunda Forma Fundamental

Definição 20. (Segunda Forma Fundamental) Definimos a segunda forma fundamental de M^m em $\overline{M}^{m+n}$ pela aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, dada por:

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde ∇ e $\overline{\nabla}$ são, respectivamente, as conexões em M e $\overline{M}$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Observe que B é a componente normal da conexão riemanniana e como pode ser visto em (14), B está bem definida e não depende das extensões de X e Y.

Proposição 11. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação B é:*
(i) bilinear: $B(fX,Y) = B(X,fY) = fB(X,Y)$;
(ii) simétrica: $B(X,Y) = B(Y,X)$.

Agora, utilizando a segunda forma fundamental em M, definimos para cada $\eta_p \in (T_pM)^{\perp}$, com $p \in M$, uma aplicação bilinear e simétrica $H_{\eta_p} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por:

$$H_{\eta_p}(X_p, Y_p) = \langle B(X_p, Y_p), \eta_p \rangle, \qquad \forall\, X_p, Y_p \in T_pM.$$

Assim, fixado η_p tem-se uma forma quadrática $H_{\eta_p} : T_pM \to \mathbb{R}$, dada por

$$H_{\eta_p}(X_p) = H_{\eta_p}(X_p, X_p) = \langle B(X_p, X_p), \eta_p \rangle,$$

chamada de segunda forma fundamental de f em p na direção do vetor η_p. Note que pela proposição acima, B é um objeto tensorial que só depende dos valores de X e Y no ponto p.

A aplicação H_η está associada a um operador autoadjunto $A_{\eta_p} : T_pM \to T_pM$ que satisfaz:

$$\langle A_{\eta_p}(X_p), Y_p \rangle = H_{\eta_p}(X_p, Y_p) = \langle B(X_p, Y_p), \eta_p \rangle,$$

para todo $X_p, Y_p \in T_pM$. Fixado X, $A_{n_p}(X)$ é o único vetor tangente tal que:

$$\langle B(X,Y), \eta_p \rangle = \langle A_{\eta_p}(X), Y \rangle = \langle A_{\eta_p}(Y), X \rangle, \qquad \forall\, Y \in T_pM. \tag{2.16}$$

Proposição 12. *A aplicação $A_{\eta_p} : T_pM \to T_pM$, em termos da derivada covariante, é dada por:*

$$A_{\eta_p}(X_p) = -(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\eta)_p^T$$

onde η é uma extensão local de η_p normal a M.

Demonstração. A demonstração segue diretamente da equação (2.16) com a definição (20), lembrando que $\langle X, \eta \rangle = 0$, $\forall\, X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Definição 21. Seja $(\overline{M}^{m+1}, g)$ uma variedade Riemanniana e M^m uma subvariedade com métrica induzida pela imersão $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$. O campo vetorial curvatura média de x em $\overline{M}$ é dado por:

$$H = \frac{1}{m}\text{traço } A_\eta.$$

Quando a codimensão da imersão $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$ é igual a 1, $x(M)$ é dita uma Hipersuperfície de $\overline{M}$.

Seja $p \in V \subset M$ e η_p um vetor unitário normal a M em p. Como o operador de Segunda Forma $A_{\eta_p} : T_pM \to T_pM$ é simétrico, existe uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores $\{(E_1)_p, ..., (E_m)_p\}$, correspondentes ao conjunto de autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Se M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas, então o vetor η é unicamente determinado, e se, além disto, $\{(E_1)_p, ..., (E_m)_p\}$ for uma base e a orientação de M, e $\{(E_1)_p, ..., (E_m)_p, \eta\}$ uma base e a orientação de $\overline{M}$, o vetores $(E_i)_p$ são chamados de direções principais e os $\lambda_i = k_i$ são as curvaturas principais da imersão x, em p.

Sejam, $X, Y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ linearmente independentes, $K(X, Y)$ e $\overline{K}(X, Y)$, respectivamente, as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, no plano gerado por X e Y. Neste contexto, o teorema a seguir relaciona as curvaturas de M e $\overline{M}$ com a segunda forma fundamental.

Teorema 13 (Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e X, Y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle B(X,X), B(Y,Y)\rangle - |B(X,Y)|^2. \tag{2.17}$$

A demonstração desse teorema pode ser consultada em (14).

No caso de uma hipersuperfície $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$, a fórmula (2.17) tem uma expressão mais simples. Para ver isso, seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, como A_η é autoadjunto, tem-se uma base ortonormal $\{(E_i)_p\}_{i=1}^m$, de T_pM, que diagonaliza A_{η_p}, formada por autovetores, isto é, com valores $A_{\eta_p}(E_i) = \lambda_i E_i$, $i = 1, ..., m$. Assim,

$$\begin{aligned} H_{\eta_p}(E_i, E_i) &= \langle B(E_i, E_i), \eta_p\rangle \\ &= \langle A_\eta E_i, E_i\rangle \\ &= \langle \lambda_i E_i, E_i\rangle = \lambda_i \end{aligned}$$

se $i = 1, ..., m$, e $H_{\eta_p}(E_i, E_j) = 0$ se $i \neq j$. Como $B(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta\rangle\eta = \langle A_\eta(X_p), Y_p\rangle\eta$, temos que

$$\begin{aligned} K(E_i, E_j) - \overline{K}(E_i, E_j) &= \langle B(E_i, E_i), B(E_j, E_j)\rangle - \langle A_\eta(E_i), E_j\rangle^2 \\ &= \langle A_{\eta_p}(E_i), E_i\rangle\langle A_{\eta_p}(E_j), E_j\rangle \\ &= \langle \lambda_i E_i, E_i\rangle\langle \lambda_j E_j, E_j.\rangle \end{aligned}$$

Como a base é ortonormal, obtém-se:

$$K(E_i, E_j) - \overline{K}(E_i, E_j) = \lambda_i\lambda_j.$$

Seja $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão $x : M \to \overline{M}$ pode ser vista como um tensor, fazendo:

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} &\to C^{\infty}(M) \\ (X, Y, \eta) &\mapsto B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle. \end{aligned} \tag{2.18}$$

A derivada $\overline{\nabla}$ do tensor B é definida por:

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^{\perp} \eta). \tag{2.19}$$

A próxima proposição introduz uma das equações ditas fundamentais de uma imersão isométrica, sua demonstração da pode ser vista em (14), página 151.

Proposição 14 (Equação de Codazzi)**.** *Seja $\overline{R}$ a curvatura riemanniana em $\overline{M}$. Com a notação acima,*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) \tag{2.20}$$

Da definição (18), segue que se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então temos a igualdade $\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = 0$. Logo, a equação de Codazzi passa a ser,

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) \tag{2.21}$$

3 AS TRANSFORMAÇÕES DE NEWTON E O OPERADOR L_R

Nesta seção, introduziremos as definições e alguns resultados sobre a r-ésima curvatura média de uma imersão, as transformações de Newton, e sobre o principal objeto de estudo deste texto: o operador linear diferenciável de segunda ordem denotado por L_r.

As funções $\sigma_r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definidas pela igualdade $\sigma_r(w_1, ..., w_m) = \sum\limits_{i_1<i_2<...<i_r}^{m} w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_r}$, $(r = 0, ..., m)$ com $\sigma_0 = 1$, são chamadas funções simétricas elementares (16).

Agora, seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica, onde M^m é uma variedade Riemanniana compacta e conexa, cuja métrica é induzida da variedade Riemanniana $\overline{M}^{m+1}(c)$.

Denotemos por $p(t)$ o polinômio característico da matriz associada ao operador da segunda forma A_η. Sabemos que a segunda forma é bilinear e simétrica, assim o operador A_η é autoadjunto e portanto diagonalizável. Logo, existe uma base para a qual A_η é representado por uma matriz diagonal. Desse modo, seu polinômio característico é tal que:

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(tI - [A_\eta]) = \det \begin{pmatrix} t-k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t-k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t-k_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t-k_m \end{pmatrix} \\ &= (t-k_1)(t-k_2)\cdots(t-k_{m-1})(t-k_m). \end{aligned}$$

Segue que $p(t)$ é igual a:

$$t^m - \left(\sum k_i t^{m-1}\right) + \sum_{i<j} k_i k_j t^{m-2} + .. + (-1)^m \underbrace{\sum_{i_1<\cdots<i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r}} t^{m-r} + \cdots + (-1)^m k_1 \cdots k_m.$$

O termo em destaque na expressão anterior é uma função simétrica, da qual decorre a seguinte definição:

Definição 22. Seja $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$ uma imersão isométrica, onde M é uma variedade Riemanniana cuja métrica é obtida pela imersão x, com segunda forma fundamental B. Sejam $k_1, ..., k_m$ as curvaturas principais associadas a B. Defini-se a funções simétricas elementares S_r, associada a segunda forma B por:

$$S_0 = 1, \qquad S_r(k_1, ..., k_m) = \sum_{i_1<...<i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r} \ \ (1 \leq r \leq m), \qquad S_r = 0 \ \ (r > m). \quad (3.1)$$

Assim, considerada uma função simétrica S_r, aplicada nas curvaturas principais de uma imersão x, pode-se obter informações sobre a geometria da variedade M, em questão.

Definição 23 (r-ésima Curvatura)**.** Seja $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$ uma imersão isométrica, onde M^m é uma variedade Riemanniana, cuja métrica é induzida da variedade riemanniana $\overline{M}^{m+1}$. A r-ésima curvatura média da imersão isométrica x é definida por:

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{m}{r}}, \qquad 1 \leq r \leq m.$$

Diretamente da definição de S_r, tem-se que: $H_0 = 1$, $H_1 = \dfrac{S_1}{m}$ é a curvatura média, e H_m é a curvatura Gauss-Kronecker.

Vamos agora apresentar algumas proposições sobre a r-ésima curvatura de uma imersão x, que são essenciais para esse texto.

No entanto, para mostrarmos a primeira proposição, conhecida por Equação de Newton, faz-se necessário, enunciarmos o seguinte lema que pode ser encontrado em (17) e (18), cuja demonstração utiliza sucessivas vezes o Teorema de Rolle's, de modo que entre dois zeros de um polinômio F, existe um zero de sua derivada F' e cada zero de F com ordem r ($r \geq 2$) é um zero de F' com ordem $r-1$.

Lema 1. Se o polinômio

$$F(x, y) = c_o x^m + c_1 x^{m-1} y + ... + c_m y^m,$$

tem todas as suas raízes x/y reais, então o mesmo é verdade para todas as equações não idênticas obtidas a partir de F por diferenciações parciais em relação a x e y. Além disso, se E é qualquer destas equações, e tem uma raiz múltipla α, então α é também uma raiz, de multiplicidade superior maior que 1, da equação cujo E foi obtida por diferenciação.

No que se segue neste capítulo, H_r é a r-ésima curvatura com respeito a imersão x, como consta na definição (23).

Proposição 15 (Equação de Newton)**.** *Se as curvaturas principais* $k_1, ..., k_m$ *são positivas, então,*

$$H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1}, \qquad \forall\ r = 1, ..., m-1.$$

Demonstração. Considere a função auxiliar $f(x, y) = (x + k_1 y)(x + k_2 y) \cdots (x + k_m y)$. Note que:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x + k_1 y)(x + k_2 y) \cdots (x + k_m y) \\ &= x^m + (k_1 + ... + k_m) x^{m-1} y + \Big(\sum_{i<j} k_i k_j\Big) x^{m-2} y^2 + ... + k_1 \cdots k_m y^m \\ &= S_0 x^m + S_1 x^{m-1} y + S_2 x^{m-2} y^2 + ... + S_m y^m \\ &= H_0 x^m + \binom{m}{1} H_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} H_2 x^{m-2} y^2 + ... + H_m y^m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Supondo $k_1, k_2, ..., k_m$ não nulos, por definição, $H_m = S_m = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_m \neq 0$. Assim, $(x, y) = (0, y)$ não é raiz de f, pois do contrário, se $x = 0$ ($y \neq 0$) pela equação (3.2) tem-se que $H_m y^m = 0$, isto é, $H_m = 0$, contradição! Logo, pelo Lema (1), $x/y = 0$ não pode ser raiz múltipla de qualquer equação derivada de f.

Vamos efetuar uma série de diferenciações em f, a fim de obtermos uma equação que apresente apenas H_r,H_{r-1} e H_{r+1}, das funções H_i. Expandindo f, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= H_0x^m + \binom{m}{1}H_1x^{m-1}y + \binom{m}{2}H_2x^{m-2}y^2 + ... + \binom{m}{r-2}H_{r-2}x^{m-r+2}y^{r-2} + \\ &+\binom{m}{r-1}H_{r-1}x^{m-r+1}y^{r-1} + \binom{m}{r}H_rx^{m-r}y^r + \binom{m}{r+1}H_{r+1}x^{m-r-1}y^{r+1} + \\ &+\binom{m}{r+2}H_{r+2}x^{m-r-2}y^{r+2} + ... + H_my^m. \end{aligned}$$

Efetuamos $(m - r - 1)$ diferenciações em f com relação a variável x,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}}f(x,y) &= \frac{m!}{(r+1)!}H_0x^{r+1} + \frac{(m-1)!}{r!}\binom{m}{1}H_1x^ry + \\ &+\frac{(m-2)!}{(r-1)!}\binom{m}{2}H_2x^{r-1}y^2 + ... + \frac{(m-r+2)!}{3!}\binom{m}{r-2}H_{r-2}x^3y^{r-2} + \\ &+\frac{(m-r+1)!}{2!}\binom{m}{r-1}H_{r-1}x^2y^{r-1} \\ &+(m-r)!\binom{m}{r}H_rxy^r + (m-r-1)!\binom{m}{r+1}H_{r+1}y^{r+1}. \end{aligned}$$

Agora, efetuamos $(r - 1)$ diferenciações em (3.3) com relação a variável y, e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}}\left(\frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}}f(x,y)\right) &= \frac{(m-r+1)!}{2!}(r-1)!\binom{m}{r-1}H_{r-1}x^2 \\ &+(m-r)!r!\binom{m}{r}H_rxy \\ &+(m-r-1)!\frac{(r+1)!}{2!}\binom{m}{r+1}H_{r+1}y^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Denotando a equação (3.3) por $\tilde{f}(x,y)$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x,y) &= \frac{(m-r+1)!}{2}(r-1)!\binom{m}{r-1}H_{r-1}x^2 \\
&\quad +(m-r)!r!\binom{m}{r}H_rxy \\
&\quad +(m-r-1)!\frac{(r+1)!}{2}\binom{m}{r+1}H_{r+1}y^2 \\
&= \frac{\cancel{(m-r+1)!}\cancel{(r-1)!}}{2}\frac{m!}{\cancel{(r-1)!}\cancel{(m-r+1)!}}H_{r-1}x^2 \\
&\quad +\cancel{(m-r)!}\cancel{r!}\frac{m!}{\cancel{r!}\cancel{(m-r)!}}H_rxy \\
&\quad +\frac{\cancel{(m-r-1)!}\cancel{(r+1)!}}{2}\frac{m!}{\cancel{(r+1)!}\cancel{(m-r-1)!}}H_{r+1}y^2 \\
&= \frac{m!}{2}H_{r-1}x^2 + m!H_rxy + \frac{m!}{2}H_{r+1}y^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{m!}{2}H_{r-1}x^2 + m!H_rxy + \frac{m!}{2}H_{r+1}y^2. \tag{3.4}$$

Seque que dois consecutivos H, em particular, H_r e H_{r+1} não podem ser nulos. De fato, se $H_r = H_{r+1} = 0$,

$$\tilde{f}(x,y) = H_{r-1}x^2 + \cancel{2H_rxy} + \cancel{H_{r+1}y^2} = H_{r-1}x^2,$$

Neste caso, $\tilde{f}(0,y) = 0$, isto é, $x/y = 0$ seria raiz do polinômio $\tilde{f}$, obtido de f por uma série de diferenciações, contradizendo o Lema (1). Portanto, suponha $x/y \neq 0$ raiz de f, daí

$$f(x,y) = y^m(x/y+k_1)(x/y+k_2)\cdots(x/y+k_m) = 0,$$

Segue que $x/y = -k_i \in \mathbb{R}$, e pela equação (3.4), $\tilde{f}$ tem suas raízes x/y reais. Assim,

$$\frac{m!}{2}H_{r-1}x^2 + m!H_rxy + \frac{m!}{2}H_{r+1}y^2 = 0,$$

multiplicando por $\frac{2}{m!}$,

$$H_{r-1}x^2 + 2H_rxy + H_{r+1}y^2 = 0. \tag{3.5}$$

Segue que o discriminante de $\tilde{f}$ deve ser positivo. Logo,

$$\begin{aligned}
(2H_r)^2 - 4H_{r-1}H_{r+1} \geq 0 &\Leftrightarrow 4H_r^2 - 4H_{r-1}H_{r+1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 16. *Supondo as mesmas hipóteses da proposição anterior, tem-se que*

$$H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}. \tag{3.6}$$

Equivalentemente,

$$H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_m^{1/m} = \sqrt[m]{k_1 \cdot ... \cdot k_m} \tag{3.7}$$

Demonstração. Mostramos por indução em r. Utilizando a equação de Newton, (15), se $r = 1$ então,

$$H_1^2 \geq H_0 H_2 = H_2 \qquad (H_0 = 1)$$

Então, $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$. Assumindo por hipótese de indução que $H_{r-1} \geq H_r^{\frac{r-1}{r}}$, segue que

$$\begin{aligned} H_r^2 &\geq H_{r-1}H_{r+1} && \text{(prop 15)} \\ &\geq H_r^{\frac{r-1}{r}} H_{r+1} && \text{(hip. indução)} \\ &= H_r H_r^{-\frac{1}{r}} H_{r+1} \\ &\Rightarrow H_r \geq H_r^{-\frac{1}{r}} H_{r+1}. && (H_r > 0\ \forall r) \end{aligned}$$

Multiplicando por $H_r^{\frac{1}{r}}$, temos

$$H_r H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_r^{\frac{1}{r}} H_r^{-\frac{1}{r}} H_{r+1},$$

Ou seja,

$$H_r^{\frac{r+1}{r}} \geq H_{r+1},$$

Isto porque $H_r^{\frac{1}{r}} H_r^{-\frac{1}{r}} = H_r^0 = 1$. Por fim, elevando a $\frac{r}{r+1}$-potência,

$$(H_r^{\frac{r+1}{r}})^{\frac{r}{r+1}} \geq (H_{r+1})^{\frac{r}{r+1}},$$

Logo,

$$H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}.$$

□

Proposição 17. *Seja $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}$ uma imersão isométrica, onde M^m e $\overline{M}^{m+1}$ são variedades Riemannianas, a primeira compacta, conexa e orientável, e a segunda orientada. Se $H_{r+1} > 0$, então $H_r > 0$ em M^m.*

A demonstração dessa proposição pode ser vista em (19).

Proposição 18. *Supondo as mesmas hipóteses da proposição (15), segue que:*

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}, \qquad r \geq 0.$$

Demonstração. Mostremos por indução em r. Por definição, $H_0 = 1$. Logo, para $r = 0$ temos $H_1 H_0 = H_1.1 = H_1$. Suponhamos por hipótese de indução que a desigualdade seja verdadeira para $r - 1$, isto é, que $H_1 H_{r-1} \geq H_r$ para todo $r > 0$. Como as curvaturas principais são positivas, $H_r > 0$, daí,

$$H_1 H_{r-1} H_r \geq H_r^2.$$

Na proposição (15), vimos que $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$, então,

$$H_1 H_{r-1} H_r \geq H_{r-1} H_{r+1}.$$

Como $k_i > 0$ para todo i, $H_{r-1} > 0$, portanto,

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}$$

$\square$

3.1 Transformações de Newton

Definição 24. A r-ésima transformação de Newton é a aplicação $T_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definida por:

$$T_r = \begin{cases} I, & \text{se } r = 0, \\ \sum_{j=1}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j, & \text{se } r = 1, ..., m-1, \\ 0, & \text{se } r > m. \end{cases}$$

onde I é o operador identidade em $\mathfrak{X}(M)$, S_r é a função simétrica como definida em (3.1) e A denota o operador da segunda forma. Note que:

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j \\ &= S_r I - S_{r-1} A + S_{r-2} A^2 + ... + (-1)^r A^r \\ &= S_r I + A(S_{r-1} I + S_{r-2} A + ... + (-1)^{r-1} A^{r-1}) \\ &= S_r I - A T_{r-1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, o operador T_r pode ser definido indutivamente por:

$$T_r = \begin{cases} I, & \text{se } r = 0, \\ S_r I - A T_{r-1}, & \text{se } r = 1, ..., m-1 \\ 0, & \text{se } r > n. \end{cases}$$

Proposição 19. *O operador de Newton T_r comuta com o operador da segunda forma A.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em r que $T_r A = A T_r$. Para $r = 0$, pela definição de T, temos que $T_0 A = IA = AI = AT_0$. Supondo que $T_{r-1} A = A T_{r-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} AT_r &= A(S_r I - A T_{r-1}) \\ &= A(S_r I - T_{r-1} A) \qquad \text{(hipótese de indução)} \\ &= A S_r I - A T_{r-1} A \\ &= S_r I A - A T_{r-1} A \\ &= (S_r I - A T_{r-1}) A = T_r A. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 20. *O operador T_r é auto-adjunto:*

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, devemos mostrar que $\langle T_r X, Y\rangle = \langle X, T_r Y\rangle$. Note que se $r = 0$, por definição, $T_0 = I$, que é auto-adjunto. Supondo por hipótese de indução que $\langle T_{r-1}X, Y\rangle = \langle X, T_{r-1}Y\rangle$. Segue que

$$\begin{aligned} \langle T_r X, Y\rangle &= \langle (S_r I - AT_{r-1})X, Y\rangle \qquad (\text{ definição de } T_r) \\ &= \langle S_r IX - AT_{r-1}X, Y\rangle \\ &= \langle S_r IX, Y\rangle - \langle AT_{r-1}X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Como A é autoadjunto, temos que $\langle AT_{r-1}X, Y\rangle = \langle T_{r-1}X, AY\rangle$. Daí, usando a hipótese de indução, $\langle T_{r-1}X, AY\rangle = \langle X, T_{r-1}AY\rangle$. Além disso, vimos na proposição (19) que T_r comuta com A, logo:

$$\begin{aligned} \langle T_r X, Y\rangle &= \langle X, S_r IY\rangle - \langle X, AT_{r-1}Y\rangle \\ &= \langle X, S_r IY - AT_{r-1}Y\rangle \\ &= \langle X, (S_r I - AT_{r-1})Y\rangle \\ &= \langle X, T_r Y\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle T_r X, Y\rangle = \langle X, T_r Y\rangle$. □

Sejam $k_1, ..., k_m$ os autovalores da transformação A. Denotemos por A_i a restrição da transformação A ao subespaço gerado pelas direções E_i correspondentes aos autovalores k_i, $i = 1, ..., n$. Seja $S_r(A_i)$ a soma S_r com exceção dos termos em que aparece o autovalor k_i. Desse modo, podemos expressar S_r como a soma de duas parcelas, $k_i S_{r-1}(A_i)$ em que aparece o termo k_i, e $S_r(A_i)$ que não aparece o termo k_i. Assim,

$$S_r(A_i) = S_r - k_i S_{r-1}(A_i). \tag{3.9}$$

Proposição 21. *Seja M^m uma variedade Riemanniana ($M^m \hookrightarrow \overline{M}^{m+1}$) e $\{E_1, ..., E_m\}$ uma base ortonormal de M, formada por autovetores de A. Então, $S_r(A_i)$ são autovalores de T_r correspondentes aos autovetores $E_1, ..., E_m$, ou seja,*

$$T_r(E_i) = S_r(A_i)E_i. \tag{3.10}$$

onde

$$T_r = \sum_{j=1}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$$

Demonstração. A demostração segue por indução em r. Supondo $r = 0$, pela definição da r-ésima transformação de Newton (pág. 36) e das funções simétricas (pág. 31), temos que

$T_0 = I$ e $S_0 = 1$, logo $T_0(E_i) = I(E_i) = E_i = S_0(A_i)(E_i)$. Suponhamos por hipótese de indução que a equação (3.10) é válida para $r-1$. Da definição de T_r, segue que,

$$\begin{aligned} T_r(E_i) &= (S_r I - A_i T_{r-1})(E_i) \\ &= S_r(E_i) - A_i T_{r-1}(E_i). \end{aligned}$$

Como T_r comuta com A, e $E_1, ..., E_m$ são autovalores de A,

$$\begin{aligned} T_r(E_i) &= S_r(E_i) - T_{r-1}A_i(E_i) \\ &= S_r(E_i) - T_{r-1}k_i(E_i) \\ &= S_r(E_i) - k_i T_{r-1}(E_i), \end{aligned}$$

onde k_i (com $i = 1, ..., m$) é autovalor de A. Portanto, segue da hipótese de indução e da equação (3.9) que:

$$\begin{aligned} T_r(E_i) &= S_r(E_i) - k_i S_{r-1}(A_i)(E_i) \\ &= (S_r - k_i S_{r-1}(A_i))(E_i) \\ &= S_r(A_i)E_i. \qquad \text{(decorre de 3.9)} \end{aligned}$$

□

Proposição 22. *Seja M^m uma variedade Riemanniana ($M^m \hookrightarrow \overline{M}^{m+1}$) munida da conexão ∇. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se que:*

$$tr(T_{r-1}\nabla_X A) = \langle grad\, S_r, X\rangle.$$

onde A é o operador de segunda forma.

Demonstração. Seja $\{E_1, ..., E_m\}$ uma base ortonormal formada por autovetores de A associados aos autovalores $k_1, ..., k_m$. Pela definição de traço de um operador,

$$\mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) = \sum_{i=1}^{m} \langle T_{r-1}(\nabla_X A)E_i, E_i\rangle$$

Como T_{r-1} é autoadjunto, e $S_{r-1}(A_i)$ é autovalor de T_{r-1} associado ao autovetor E_i,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m} \langle (\nabla_X A)E_i, T_{r-1}E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle (\nabla_X A)E_i, S_{r-1}(A_i)(E_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)\langle (\nabla_X A)E_i, E_i\rangle, \end{aligned}$$

Dai,

$$\mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) = \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)\langle \nabla_X(AE_i) - A(\nabla_X E_i), E_i\rangle,$$

Como E_i é autovetor de A, $\forall\ i$, temos que $A_iE_i = k_iE_i$. Além disso, A é autoadjunto. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)\langle \nabla_X(k_iE_i) - A(\nabla_X E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)(\langle \nabla_X(k_iE_i), E_i\rangle - \langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)(\langle \nabla_X(k_iE_i), E_i\rangle - \langle \nabla_X E_i, A(E_i)\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)(\langle \nabla_X k_iE_i, E_i\rangle - \langle \nabla_X E_i, k_iE_i\rangle), \end{aligned}$$

Da compatibilidade de ∇,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)(\langle X(k_i)E_i, E_i\rangle + \cancel{k_i\langle \nabla_X E_i, E_i\rangle} - \cancel{k_i\langle \nabla_X E_i, E_i\rangle}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)(\langle X(k_i)E_i, E_i\rangle, \end{aligned}$$

Pela definição de S_r, isto é, para $S_{r-1}(A_i)$ segue que,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^{m} S_{r-1}(A_i)X(k_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m}(X(k_i) \sum_{i_1<\ldots<i_{r-1}, i_l\neq i} k_{i_1}\cdots k_{i_r}) \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_{r-1}, i_l\neq i}\ \sum_{i_e=1}^{m} k_{i_1}\cdots X(k_{i_l})\cdots k_{i_r}. \end{aligned}$$

Mas, a última igualdade significa a derivada de S_r na direção de X. Portanto, pela definição do gradiente de S_r, concluímos que $\mathrm{tr}(T_{r-1}\nabla_X A) = X(S_r) = \langle \mathrm{grad}\ S_r, X\rangle$. $\square$

Supondo $k_i > 0$ para todo i. Seja $\omega_j(k_1, ..., k_m) = \sum_{i=0}^{m} k_i^j$. Vamos mostra, por recorrência, a seguinte igualdade conhecida como identidade de Newton:

$$\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j S_j\omega_{r-j} = -(-1)^r rS_r, \qquad \text{com } r = 1, ..., n. \tag{3.11}$$

Primeiro tomamos $j = 0$. Daí, temos que $\omega_0 = \sum_{i=1}^{m} k_i^0 = \sum_{i=1}^{m} 1 = m$. Agora, se $j = 1$,

$$\sum_{i=0}^{m}(k_i) = S_1, \tag{3.12}$$

Para $j = 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} k_i^2 &= \sum_{i=0}^{m} k_i^2 + 2\sum_{i_1<i_2}^{m} k_{i_1}k_{i_2} - 2\sum_{i_1<i_2}^{m} k_{i_1}k_{i_2} \\ &= (\sum_{i=0}^{m} k_i)(\sum_{i=0}^{m} k_i) - 2\sum_{i_1<i_2}^{m} k_{i_1}k_{i_2} \\ &= S_1\sum_{i=0}^{m} k_i - 2S_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Quando $j = 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} k_i^3 &= \sum_{i=0}^{m} k^3 + \sum_{i=0}^{m} k_{i_1}k_{i_2}^2 - \sum_{i=0}^{m} k_{i_1}k_{i_2}^2 - \sum_{i_1<i_2<i_3}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3} + \sum_{i_1<i_2<i_3}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3} \\ &= (\sum_{i=0}^{m} k_i)\sum_{i=0}^{m}(k_i)^2 - \sum_{i_1<i_2}^{m} k_{i_1}k_{i_2}\sum_{i=0}^{m} k_i + 3\sum_{i_1<i_2<i_3}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}.\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{m} k_i^3 = S_1\sum_{i=0}^{m}(k_i)^2 - S_2\sum_{i=0}^{m} k_i + 3S_3. \tag{3.14}$$

Por fim, tomando $j = 4$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} k_i^4 &= \Big(\sum_{i=0}^{m} k_i^4 + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1\neq i_2}}^{m} k_{i_1}k_{i_2}^3\Big) + \Big(-\sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1\neq i_2}}^{m} k_{i_1}k_{i_2}^3 - \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1\neq i_2\neq i_3}}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}^2\Big) \\ &\quad + \Big(\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1\neq i_2\neq i_3}}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}^2 + 4\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4=1}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}k_{i_4}\Big) - 4\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4=1}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}k_{i_4}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m} k_i^4 &= \sum_{i=1}^{m} k_i\sum_{i=1}^{m} k_i^3 - \sum_{i_1<i_2=1}^{m} k_{i_1}k_{i_2}\sum_{i=1}^{m} k_i^2 + \sum_{i_1<i_2<i_3=1}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}\sum_{i=1}^{m} k_i \\ &\quad - 4\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4=1}^{m} k_{i_1}k_{i_2}k_{i_3}k_{i_4} \\ &= S_1\sum_{i=1}^{m} k_i^3 - S_2\sum_{i=1}^{m} k_i^2 + S_3\sum_{i=1}^{m} k_i - 4S_4. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, repetindo o procedimento acima r vezes, obtemos:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= m \\ \omega_1 &= S_1 \\ \omega_2 &= S_1\omega_1 - 2S_2 \\ \omega_3 &= S_1\omega_2 - S_2\omega_1 + 3S_3 \\ \omega_4 &= S_1\omega_3 - S_2\omega_2 + S_3\omega_1 - 4S_4 \\ \vdots &= \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \sum_{j=0}^{r}\omega_j &= \sum_{j=2}^{r} S_1\omega_{j-1} - \sum_{j=3}^{r} S_2\omega_{j-2} + ... + \\ &\quad + \sum_{j=r-1}^{r}(-1)^{r-1}S_{r-2}\omega_{j-r+2} + (-1)^r S_{r-1}\omega_1 - \sum_{j=1}^{r}(-1)^j jS_j + m \end{aligned} \tag{3.16}$$

Considerado as $r - 1$ somas,

$$\sum_{j=0}^{r-1}\omega_j = \sum_{j=2}^{r-1} S_1\omega_{j-1} - \sum_{j=3}^{r-1} S_2\omega_{j-2} + ... + (-1)^{r-1}S_{r-2}\omega_1 - \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j jS_j + m. \tag{3.17}$$

Subtraindo a equação (3.17) da equação (3.16),

$$\omega_r = \sum_{j=0}^{r}\omega_j - \sum_{j=0}^{r-1}\omega_j = S_1\omega_{r-1} - S_2\omega_{r-2} + ... + (-1)^{r-1}S_{r-2}\omega_2 - (-1)^r rS_r. \qquad (3.18)$$

Como $S_0 = 1$,

$$S_0\omega_r = S_1\omega_{r-1} - S_2\omega_{r-2} + ... + (-1)^{r-1}S_{r-2}\omega_2 - (-1)^r rS_r. \qquad (3.19)$$

Daí,

$$S_0\omega_r - S_1\omega_{r-1} + S_2\omega_{r-2} + S_3\omega_{r-3} + ... - (-1)^{r-1}S_{r-2}\omega_2 = -(-1)^r rS_r, \qquad (3.20)$$

Assim, obtemos a equação procurada:

$$\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j S_j\omega_{r-j} = -(-1)^r rS_r, \qquad (3.21)$$

para todo $r = 1, ..., m$.

Utilizando a igualdade de Newton, que acabamos de mostrar, podemos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 23. *Sejam M^m, $\overline{M}^{m+1}$ variedades Riemannianas, $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Considere T_r a r-ésima transformação de Newton associado ao operador da segunda forma fundamental A. Tem-se que:*

(a) $tr(T_r) = (m - r)S_r$,

(b) $tr(AT_{r-1}) = rS_r$.

Demonstração. (a) Sejam $k_1, ..., k_m$ autovalores de x e $\{E_1, ..., E_m\}$ uma base ortonormal formada por autovetores associados a segunda forma A. Assim sendo, k_i é autovalor de A e k_i^j é autovalor de A^j. Como $T_r(E_i) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}A^j E_i$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T_r) &= \sum_{i=1}^{m}\langle T_r(E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}A^j E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\langle A^j(E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\langle k_i^j E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}k_i^j
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{tr}(T_r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j} \sum_{i=1}^{m} k_i^j.$$

Substituindo $\sum_{i=1}^{m} k_i^j$ por ω_j obtemos,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T_r) &= \sum_{j=0}^{r}(-1)^j S_{r-j}\omega_j \\ &= S_r\omega_0 + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j S_{r-j}\omega_j.\end{aligned}$$

Tomando $j = r - \kappa$, lembrando que $\omega_0 = m$, e em seguida utilizando a equação (3.21),

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T_r) &= mS_r + \sum_{\kappa=0}^{r-1}(-1)^{r-\kappa} S_\kappa \omega_{r-\kappa} \\ &= mS_r + (-1)^r \sum_{\kappa=0}^{r-1}(-1)^{-k} S_\kappa \omega_{r-\kappa} \\ &= mS_r + (-1)^r \sum_{\kappa=0}^{r-1}(-1)^{k} S_\kappa \omega_{r-\kappa} \\ &= mS_r - (-1)^r(-1)^r rS_r \\ &= mS_r - (-1)^{2r} S_r \\ &= (m-r)S_r. \end{aligned} \tag{3.22}$$

□

Demonstração. (b) Como A é um operador autoadjunto,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AT_{r-1}) &= \sum_{i}^{m}\langle AT_{r-1}(E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_{i}^{m}\langle T_{r-1}(E_i), A(E_i)\rangle.\end{aligned}$$

Na proposição (21) vimos que $S_r(A_i)$ é autovalor de T_r, logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AT_{r-1}) &= \sum_{i}^{m}\langle S_{r-1}(A_i)E_i, k_iE_i\rangle \\ &= \sum_{i}^{m} k_i S_{r-1}(A_i).\end{aligned}$$

Mas, $S_r(A_i) = S_r - k_iS_{r-1}(A_i)$ (equação (3.9), pág. 37). Sendo assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AT_{r-1}) &= \sum_{i}^{m}(S_r - S_r(A_i)) \\ &= \sum_{i}^{m} S_r - \sum_{i}^{m} S_r(A_i) \\ &= mS_r - \mathrm{tr}(T_r).\end{aligned}$$

Em fim, utilizando o item (a), concluímos que:

$$\operatorname{tr}(AT_{r-1}) = mS_r - \operatorname{tr}(T_r) = mS_r - (m-r)S_r = rS_r.$$

□

Proposição 24. *Se T é um operador autoadjunto, então $(\nabla_E T)$ é autoadjunto.*

Demonstração. Sejam $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Utilizando a definição (5) e a compatibilidade da conexão,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_E T)Y, Z\rangle &= \langle \nabla_E(TY) - T\nabla_E Y, Z\rangle \\
&= \langle \nabla_E(TY), Z\rangle - \langle T\nabla_E Y, Z\rangle \\
&= E\langle TY, Z\rangle - \langle TY, \nabla_E Z\rangle - \langle T\nabla_E Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Como T é autoadjunto,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_E T)Y, Z\rangle &= E\langle Y, TZ\rangle - \langle Y, T\nabla_E Z\rangle - \langle \nabla_E Y, TZ\rangle \\
&= \cancel{\langle \nabla_E Y, TZ\rangle} + \langle Y, \nabla_E(TZ)\rangle - \langle Y, T\nabla_E Z\rangle - \cancel{\langle \nabla_E Y, TZ\rangle} \\
&= \langle Y, \nabla_E(TZ)\rangle - \langle Y, T\nabla_E Z\rangle
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_E T)Y, Z\rangle &= \langle Y, \nabla_E(TZ) - T_r\nabla_E Z\rangle \\
&= \langle Y, (\nabla_E T)Z\rangle. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

□

Teorema 25. *Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão onde $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante. O operador T_r é livre de divergência, isto é,*

$$\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} T_r)E_i = 0, \qquad \textit{onde } E_1, .., E_m \textit{ é base de } T_pM.$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução em r. Suponha $r = 0$. Pela definição de T_r, temos que $T_0 = I$, logo:

$$\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} T_0)E_i = \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} I)E_i = 0.$$

Suponhamos por hipótese de indução que $\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} T_{r-1})E_i = 0$. Como $T_r = S_r I - AT_{r-1}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} T_r)E_i &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}(S_r I - AT_{r-1}))E_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}(S_r I) - \nabla_{E_i}(AT_{r-1}))E_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}(S_r I)E_i - \sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}(AT_{r-1})E_i \\
&= \text{grad } S_r - \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i} A)(T_{r-1})E_i - \sum_{i=1}^{m} A\nabla_{E_i}(T_{r-1})E_i. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{E_i}A$ é autoadjunto,,

$$\sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_{E_i}A)(T_{r-1})E_i, X\rangle = \sum_{i=1}^{m}\langle(T_{r-1})E_i, (\nabla_{E_i}A)X\rangle. \tag{3.25}$$

Pela equação de Codazzi (prop: 14) e pelo fato de $\overline{M}$ ter curvatura seccional constante, temos que $(\nabla_{E_i}A)X = (\nabla_X A)E_i$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_{E_i}A)(T_{r-1})E_i, X\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\langle(T_{r-1})E_i, (\nabla_X A)E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_X A)(T_{r-1})E_i, E_i\rangle\\ &= \mathrm{tr}(\nabla_X A T_{r-1}).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Utilizando a proposição (22, pág. 38),

$$\sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_{E_i}A)(T_{r-1})E_i, X\rangle = \langle \text{grad } S_r, X\rangle, \tag{3.27}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Isto significa que,

$$\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}A)(T_{r-1})E_i = \text{grad } S_r. \tag{3.28}$$

Substituindo a equação (3.28) na equação (3.24),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}T_r)E_i &= \text{grad } S_r - \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}A)(T_{r-1})E_i - \sum_{i=1}^{m}A\nabla_{E_i}(T_{r-1})E_i\\ &= \cancel{\text{grad } S_r} - \cancel{\text{grad } S_r} - \sum_{i=1}^{m}A\nabla_{E_i}(T_{r-1})E_i.\end{aligned}$$

Mas, pela hipótese de indução $\sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}(T_{r-1})E_i = 0$. Logo, $\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}T_r)E_i = 0$. □

3.2 Operador L_r

Nesta subseção, apresentaremos a definição do operador L_r e algumas de suas propriedades. Em particular, apresentaremos a demonstração de que L_r é um operador elíptico se a curvatura $H_r > 0$. Assim sendo, como pode ser visto, em resumo no apêndice (A), é possível supor a existência de seu espectro permitindo obter uma estimativa para o primeiro autovalor de L_r, (4).

No que se segue nesta seção, $\overline{M}^{m+1}(c)$ representa o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{m+1}$ se $c = -1$, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m+1}$ quando $c = 0$, ou $\mathbb{S}^{m+1}$ se $c = 1$.

Definição 25. Sejam M^m e $\overline{M}^{m+1}$ variedades Riemannianas, $f : M^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Tome $r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r \leq m-1$. Defini-se o operador

$$L_r : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

por:

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(T_r(\mathrm{Hess}\ f)).$$

Quando $r = 0$, obtemos $L_0(f) = \mathrm{tr}(T_0(\mathrm{Hess}\ f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\ f) = \Delta f$. Ou seja, o operador L_r pode ser considerado uma generalização do Laplaciano.

Proposição 26. *Sejam M^m uma variedade Riemanniana, com conexão ∇, $x : M \to \overline{M}$ uma imersão onde $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante. Então,*

$$L_r(f) = tr(T_r(Hess\ f)) = div(T_r(grad\ f)), \tag{3.29}$$

para toda função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\{E_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal. Pela definição (15, pág.23), temos que $\mathrm{Hess}(f)_p(X) = (\nabla_X \mathrm{grad}\ f)_p$. Daí,

$$\mathrm{tr}(T_r(\mathrm{Hess}\ f)) = \mathrm{tr}(T_r(\nabla_X \mathrm{grad}\ f)) = \sum_{i=1}^m \langle T_r(\nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f), E_i\rangle. \tag{3.30}$$

Por outro lado, pela definição de divergente (pág.21), (isto é, $[Y \to \nabla_Y tr\ grad\ (f)]$)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(T_r(\mathrm{grad}\ f)) &= \mathrm{tr}(\nabla_Y T_r(\mathrm{grad}\ f)) \qquad (\text{ onde } Y \in T_pM) \\ &= \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} T_r(\mathrm{grad}\ f), E_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Como $(\nabla_{E_i} T_r)$ é autoadjunto (prop: 24) e T_r é livre de divergência,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} T_r(\mathrm{grad}\ f), E_i\rangle &= \sum_{i=1}^m (\langle (\nabla_{E_i} T_r)(\mathrm{grad}\ f), E_i\rangle + \langle T_r(\nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f)), E_i\rangle) \\ &= \cancelto{0}{\sum_{i=1}^m \langle (\mathrm{grad}\ f), (\nabla_{E_i} T_r) E_i\rangle} + \sum_{i=1}^m \langle T_r(\nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f)), E_i\rangle, \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} T_r(\mathrm{grad}\ f), E_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle T_r(\nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f)), E_i\rangle. \tag{3.32}$$

Utilizando as equações (3.30), (3.32) e (3.31),

$$\mathrm{tr}(T_r(\mathrm{Hess}\ f)) = \sum_{i=1}^m \langle T_r((\nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f)), E_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i} T_r(\mathrm{grad}\ f), E_i\rangle = \mathrm{div}(T_r(\mathrm{grad}\ f)).$$

Logo,

$$\mathrm{tr}(T_r(\mathrm{Hess}\ f)) = \mathrm{div}(T_r(\mathrm{grad}\ f)).$$

□

Portanto, no caso de uma imersão em um espaço com curvatura seccional constante, pode-se expressar o operador L_r pela divergência de $T_r(grad\ f)$.

Proposição 27. *Sejam M^m uma variedade Riemanniana, $x : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma imersão isométrica, e η um campo unitário normal a M em $\mathbb{R}^{m+1}$. O operador L_r tem a seguinte forma:*

$$L_r(|x|^2) = 2(m-r)S_r + 2(r+1)S_{r+1}\langle x, \eta\rangle, \qquad \forall\, r = 0, ..., m-1.$$

Demonstração. Sejam $p \in M^m$ e $\mathcal{B} = \{E_1(p), ..., E_m(p)\} \in T_pM$ uma base ortonormal que diagonaliza o operador da segunda forma A_η, em p. Denotemos por $\{E_i\}_{i=1}^m$ um referencial geodésico que estende a base $\mathcal{B}$ a uma vizinhança do ponto p, e por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M^m e $\mathbb{R}^{m+1}$, respectivamente.

Inicialmente, vamos mostrar que $\overline{\nabla}_{E_i}E_i = k_i\eta$, onde $k_1, ..., k_m$ são autovalores do operador A_η. Podemos escrever $\overline{\nabla}_{E_i}E_i = (\overline{\nabla}_{E_i}E_i)^T + (\overline{\nabla}_{E_i}E_i)^\perp$, onde o primeiro termo é a componente tangente e o segundo termo é a componente normal de $\overline{\nabla}_{E_i}E_i$. Pela equação (2.13), temos que $\nabla_{E_i}E_i = (\overline{\nabla}_{E_i}E_i)^T$, mas como $\{E_i\}_{i=1}^m$ é um referencial geodésico obtemos $\nabla_{E_i}E_i(p) = 0$. Como $\langle E_i, \eta\rangle = 0$, derivando na direção de E_i, temos $E_i\langle E_i, \eta\rangle = 0$, daí $\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i, \eta\rangle = \langle E_i, -\overline{\nabla}_{E_i}\eta\rangle$. Além disto, sendo $\langle\eta, \eta\rangle = 1$, temos que $\langle\overline{\nabla}_{E_i}\eta, \eta\rangle = 0$, daí $\overline{\nabla}_{E_i}\eta = (\overline{\nabla}_{E_i}\eta)^T$. Portanto,

$$\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i, \eta\rangle = \langle E_i, -(\overline{\nabla}_{E_i}\eta)^T\rangle. \tag{3.33}$$

Pela proposição (12), segue que

$$\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i, \eta\rangle = \langle E_i, -(\overline{\nabla}_{E_i}\eta)^T\rangle = \langle E_i, A_\eta(E_i)\rangle = \langle E_i, k_iE_i\rangle = k_i$$

Portanto,

$$\overline{\nabla}_{E_i}E_i = k_i\eta. \tag{3.34}$$

Utilizando a definição do operador L_r (Def: 25, pag: 44) e do Hessiano (15, pág. 23) obtemos:

$$\begin{aligned} L_r(|x|^2) &= \operatorname{tr}(T_r(Hess\,|x|^2)) \\ &= \sum_{i=1}^m \langle T_r(Hess\,|x|^2)E_i, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle T_r(\nabla_{E_i}\text{grad}\,|x|^2)E_i, E_i\rangle \end{aligned}$$

(Como T_r é autoadjunto e $T_r(E_i) = S_r(A_i)E_i$)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m \langle(\nabla_{E_i}\text{grad}\,|x|^2)E_i, T_r(E_i)\rangle. \\ &= \sum_{i=1}^m \langle(\nabla_{E_i}\text{grad}\,|x|^2)E_i, S_r(A_i)E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m S_r(A_i)\langle(\nabla_{E_i}\text{grad}\,|f|^2)E_i, E_i\rangle. \end{aligned}$$

Pela proposição (2.6), temos que grad $|x|^2 = \sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2))E_j$. Então,

$$
\begin{aligned}
L_r(|x|^2) &= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle(\nabla_{E_i}\sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2))E_j), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle(E_i(\sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2)))E_j(p) + \sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2)\cancelto{0}{\nabla_{E_i}E_j}), E_i\rangle. \\
&= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle(E_i(\sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2)))E_j(p), E_i\rangle.
\end{aligned}
$$

pois o referencial é geodésico. Observe que x denota o vetor posição da imersão, logo $E_i(x) = E_i$. Assim,

$$
\begin{aligned}
L_r(|x|^2) &= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle(E_i(\sum_{j=1}^{m}(E_j(|x|^2)))E_j(p), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)(E_i(E_i(|x|^2)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)(E_i(2\langle\ E_i, x\rangle) \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)(E_i(\langle\ E_i, x\rangle).
\end{aligned}
$$

Mas, $E_i(\langle E_i, x\rangle)$ é a derivada da função $\langle E_i, x\rangle$ na direção do campo E_i. Assim, da compatibilidade de ∇, $E_i(\langle E_i, x\rangle) = \langle E_i, E_i(x)\rangle + \langle x, \nabla_{E_i}E_i\rangle$. Logo,

$$
\begin{aligned}
L_r(|x|^2) &= 2\Big(\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle E_i, E_i(x)\rangle + \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle x, \overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\Big) \\
&= 2\Big(\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)|E_i|^2 + \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle x, \overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\Big) \\
&= 2\Big(\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) + \sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle x, \overline{\nabla}_{E_i}E_i\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

No início desta demonstração, vimos que $\overline{\nabla}_{E_i}E_i = k_i\eta$, (equação (3.34)). Daí,

$$
\begin{aligned}
L_r(|x|^2) &= 2\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) + 2\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)\langle x, k_i\eta\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i) + 2\sum_{i=1}^{m} S_r(A_i)k_i\langle x, \eta\rangle \\
&= 2\mathrm{tr}[T_r] + 2\mathrm{tr}[AT_r]\langle x, \eta\rangle \qquad (\text{ pela eq.3.10})
\end{aligned}
$$

Utilizando a proposição (23, pág.41), concluímos que:

$$
L_r(|x|^2) = 2(m-r)S_r + 2(r+1)S_{r+1}\langle x, \eta\rangle \tag{3.35}
$$

□

Teorema 28 (Teorema da Divergência)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, com bordo ∂M e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considere η um campo unitário normal a ∂M, então*

$$\int_M divX\ dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle\ dM. \tag{3.36}$$

Em particular, se M é compacta e sem bordo, temos que

$$\int_M divX\ dM = 0. \tag{3.37}$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (13).

Teorema 29 (Fórmula de Minkowski)**.** *Seja M^m uma variedade Riemanniana compacta, conexa, orientável e sem bordo. Considere $x : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma imersão isométrica e η um campo unitário normal sobre M^m. Então,*

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle X, \eta \rangle) = 0, \qquad \forall r = 0, ..., m-1. \tag{3.38}$$

Demonstração. Na proposição (27), obtemos a igualdade:

$$L_r(|x|^2) = 2(m-r)S_r + 2(r+1)S_{r+1}\langle x, \eta \rangle, \qquad \forall r = 0, ..., m-1. \tag{3.39}$$

Pela definição de curvatura média ((23) pág. 32), temos que:

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{m}{r}} = \frac{r!(m-r)!}{m!} S_r, \qquad 1 \leq r \leq n.$$

Portanto, multiplicando a igualdade (3.39) por $\frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} L_r(|x|^2) &= \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} 2(m-r)S_r + \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} 2(r+1)S_{r+1}\langle x, \eta \rangle \\ &= \frac{r!(m-r)!}{m!} S_r + \frac{(r+1)!(m-r-1)!}{m!} S_{r+1}\langle x, \eta \rangle \\ &= H_r + H_{r+1}\langle x, \eta \rangle, \qquad \forall r = 0, ..., m-1. \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} L_r(|x|^2) = H_r + H_{r+1}\langle x, \eta \rangle, \qquad \forall r = 0, ..., m-1.$$

Integrando sobre M^m ambos os lados desta igualdade,

$$\int_{M^m} \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} L_r(|x|^2) = \int_{M^m} H_r + H_{r+1}\langle x, \eta \rangle. \tag{3.40}$$

Utilizando proposição (26, pág: 45) e o Teorema da Divergência, temos que

$$\int_{M^m} \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} L_r(|x|^2) = \frac{1}{2}\frac{r!(m-r-1)!}{m!} \int_{M^m} div(T_r(grad\ |x|^2)) = 0.$$

Substituindo esse resultado em (3.40), obtemos a igualdade desejada,

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle X, \eta \rangle) = 0, \qquad \forall r = 0, ..., m-1.$$

□

Proposição 30. *O operador L_r é elíptico se, e somente se, T_r é positivo definido, ou seja, se os autovalores $S_r(A_i)$ de T_r são positivos.*

Demonstração. Sejam $\{E_1, ..., E_m\}$ base ortonormal de T_pM e $f \in C^\infty(M)$. Pela proposição (3.50), o grad $f = \sum\limits_{i=1}^{m}(E_i(f))E_i$. Segue da definição do Hess e da compatibilidade da conexão que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(\text{Hess } f)(E_j) &= \sum_{j=1}^{m}\nabla_{E_j}(\text{grad } f)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\nabla_{E_j}\Big(\sum_{i=1}^{m}(E_i(f))E_i\Big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f))E_i + E_i(f)\nabla_{E_j}E_i\Big).\end{aligned}$$

Usando os símbolos de Christoffel, tem-se que $\nabla_{E_j}E_i = \sum\limits_{k=1}^{m}\Gamma_{ji}^{k}E_k$, daí,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(\text{Hess } f)(E_j) &= \sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f))E_i + \sum_{k=1}^{m}E_i(f)\Gamma_{ji}^{k}E_k\Big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f))E_i\Big) + \sum_{j,k=1}^{m}\Big(E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}E_i\Big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\bigg(\Big(E_j(E_i(f)) + \sum_{k=1}^{m}E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\Big)E_i\bigg).\end{aligned}$$

Aplicando o operador T_r,

$$\begin{aligned}T_r\Big(\text{Hess }(f))E_j\Big) &= T_r\Bigg(\sum_{i,j=1}^{m}\bigg(\Big(E_j(E_i(f)) + \sum_{k=1}^{m}E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\Big)E_i\bigg)\Bigg)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f)) + \sum_{k=1}^{m}E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\Big)T_r(E_i).\end{aligned} \tag{3.41}$$

Pela definição do operador L_r,

$$\begin{aligned}L_r(f) &= \text{tr}(T_r(\text{Hess } f))\\ &= \langle\sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f)) + \sum_{k=1}^{m}E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\Big)T_r(E_i), E_j\rangle\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\Big(E_j(E_i(f)) + \sum_{k=1}^{m}E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\Big)\langle T_r(E_i), E_j\rangle,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}L_r(f) &= \sum_{j}\langle\nabla_{E_j}(T_r Hess\ f), E_j\rangle\\ &= \sum_{j}\langle T_r\nabla_{E_j}(grad\ f), E_j\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\langle T_r(E_i), E_j\rangle E_j(E_i(f)) + \sum_{i,j,k=1}^{m}\langle T_r(E_i), E_j\rangle E_k(f)\Gamma_{jk}^{i}\end{aligned}$$

Por definição de operador elíptico (ver no apêndice 29), L_r é um operador elíptico se a matriz $(\langle T_r(E_j), E_j\rangle) = S_r(A_j)\delta_{ij}$ é positiva definida. Isto significa que os autovalores $S_r(A_i)$ do operador T_r devem ser positivos. $\square$

Proposição 31. *Seja M^m uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo e orientada, e $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}(c)$ uma imersão isométrica. Se $H_{r+1} > 0$, então L_r é um operador elíptico.*

Demonstração. Pela proposição anterior devemos mostrar que $S_r(A_i) > 0$. De acordo com (20), desde que $\overline{M}^{m+1}(c)$ é conexo e M é compacto, existe um ponto $p \in M$ tal que todas as curvaturas principais de x tem o mesmo sinal. Por uma escolha adequada do campo normal, podemos assumir que todas são positivas em p, logo por continuidade, são positivas em um aberto U contendo p. Portanto, de (3.1, pág. 31) e (23), todas as funções H_i, S_i e $S_i(A_j)$ são positivas, em U.

Consideremos o conjunto:

$$G_r = \{p \in M : S_r(k_i) > 0, i = 1, ..., m\}.$$

Vamos mostrar que G_r é aberto e fechado. Pela continuidade de $S_r(k_i)$, temos que G_r é aberto. Seja $q \in \overline{G_r}$, onde $\overline{G_r}$ denota o fecho de G_r. Novamente da continuidade de $S_r(k_i)$, $S_r(k_i) \geq 0$, em q,

$$S_{r+1}(k_i) = S_{r+1} - k_i S_r(k_i).$$

Agora, supondo por contradição que $S_r(k_i) = 0$ em q, obtemos $S_{r+1} = S_{r+1}(k_i)$. Mas, por hipótese $H_{r+1} > 0$, logo pela definição (23) temos que $S_{r+1} > 0$, portanto $S_{r+1}(k_i) > 0$. Mais uma vez utilizando a definição (23), isto é, $\binom{m}{r} H_r = S_r$. Segue que,

$$0 < S_{r+1}(k_i) = \binom{m}{r+1} H_{r+1}.$$

De acordo com a proposição (16) temos $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq ... \geq H_r^{\frac{1}{r}} \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$, logo

$$0 < S_{r+1}(k_i) = \binom{m}{r+1} H_{r+1}(k_i) \leq \binom{m}{r+1} H_r(k_i)^{\frac{r+1}{r}}.$$

Usando novamente a definição (23) e a hipótese $S_r(k_i) = 0$, temos que

$$0 < S_{r+1}(k_i) = \binom{m}{r+1} H_{r+1}(k_i) \leq \binom{m}{r+1} H_r(k_i)^{\frac{r+1}{r}} \leq \binom{m}{r+1} \left(\frac{S_r(k_i)}{\binom{m}{r}}\right)^{\frac{r+1}{r}} = 0.$$

Contradição. Então, $S_r(k_i) > 0$, portanto $q \in G_j$. Como q foi tomado arbitrariamente em $\overline{G}_j$, tem-se $\overline{G}_j \subset G_j$. Portanto, G_r é aberto e fechado, e como M é conexa, temos que $G_r = M$. Logo, $S_r(A_i) > 0$ em M. Assim, concluímos que L_r é um operador elíptico. $\square$

Proposição 32. *Seja M^m uma variedade Riemanniana conexa, compacta e sem bordo. Considere $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}(c)$ imersão isométrica, onde c é a curvatura seccional de x, e η uma direção de M, então:*

$$L_r(x) = c_0(r)(H_{r+1}\eta - cH_r x), \tag{3.42}$$

onde $c_0 = (m-r)\binom{m}{r}$ e $L_r(x) = L_r(x_1, ..., x_{m+1}) := (L_r(x_1), ..., L_r(x_{m+1}))$.

Demonstração. Suponha $c = 0$.Tem-se que $\overline{M}^{m+1}(0) = \mathbb{R}^{m+1}$, e $x(M)$ é uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$. Assim, podemos expressar $\mathbb{R}^{m+1} = T_pM \oplus [\eta]$, $\forall\ p \in M$. Fixado $v \in \mathbb{R}^{m+1}$, temos que $v = v^\top + v^\perp$, onde $v^\top$ é a componente tangente de v e $v^\perp$ é a componente normal de v. Denotemos por $x = x(p)$ o vetor posição da imersão x em um ponto $p \in M$. Defina a função $\langle x, v\rangle : M \to \mathbb{R}$. Dado $X \in TM$,

$$\begin{aligned}
\langle \text{grad}\ \langle x, v\rangle, X\rangle &= X(\langle x, v\rangle) \\
&= \langle X, v\rangle + \langle x, \cancelto{0}{\overline{\nabla}_X v}\rangle \qquad\qquad (v \text{ é fixo}) \\
&= \langle v^\top + v^\perp, X\rangle \\
&= \langle v^\top, X\rangle + \cancelto{0}{\langle v^\perp, X\rangle},
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \text{grad}\ \langle x, v\rangle, X\rangle \;=\; \langle v^\top, X\rangle. \tag{3.43}$$

Logo, grad $\langle x, v\rangle = v^\top$. Escrevemos $v^\perp = g\eta$. Temos, $v = v^\top + g\eta$ com $g = \langle v, \eta\rangle$. Portanto, $v^\top = v - \langle v, \eta\rangle$. Logo, grad $\langle x, v\rangle = v^\top = v - \langle v, \eta\rangle\eta$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\ \langle x, v\rangle &= \overline{\nabla}_{e_i}(v - \langle v, \eta\rangle\eta) \\
&= \cancelto{0}{\overline{\nabla}_{e_i} v} - \overline{\nabla}_{e_i}(\langle v, \eta\rangle\eta) \\
&= -e_i(\langle v, \eta\rangle)\eta - \langle v, \eta\rangle\overline{\nabla}_{e_i}\eta. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Tomando a projeção tangente,

$$(\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\ \langle x, v\rangle)^\top = (-e_i\langle v, \eta\rangle\eta - \langle v, \eta\rangle\overline{\nabla}_{e_i}\eta)^\top = -\langle v, \eta\rangle(\overline{\nabla}_{e_i}\eta)^\top = \langle v, \eta\rangle A_\eta(e_i). \tag{3.45}$$

Utilizando a proposição (26),

$$\begin{aligned}
L_r(\langle x, v\rangle) &= \text{tr}(T_r(\text{Hess}\langle x, v\rangle)) \\
&= \text{div}(T_r\text{grad}\langle x, v\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{e_i}(T_r\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle.
\end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal geodésica em T_pM. Da compatibilidade da conexão,

$$\sum_{i=1}^{m}\langle \nabla_{e_i}(T_r\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_{e_i}T_r)\text{grad}\langle x, v\rangle, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{m}\langle T_r(\nabla_{e_i}\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle.$$

Como $\nabla_{e_i}T_r$ é autoadjunto e T_r é livre de divergência.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\langle(\nabla_{e_i}T_r)\mathrm{grad}\langle x,v\rangle,e_i\rangle &= \langle\mathrm{grad}\langle x,v\rangle,(\nabla_{e_i}T_r)e_i\rangle\\ &= \langle\mathrm{grad}\langle x,v\rangle,\sum_{i=1}^{m}\cancelto{0}{(\nabla_{e_i}T_r)e_i\rangle}\end{aligned}\tag{3.46}$$

Logo,

$$L_r(\langle x,v\rangle) = \sum_{i=1}^{m}\langle T_r(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\langle x,v\rangle),e_i\rangle.$$

Mas, $(\overline{\nabla}_{e_i}\mathrm{grad}\ \langle x,v\rangle)^{\top}=(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\ \langle x,v\rangle)$, então pela equação (3.45), obtemos a igualdade $(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\ \langle x,v\rangle)=\langle v,\eta\rangle A_\eta(e_i)$. Daí,

$$\begin{aligned}L_r(\langle x,v\rangle) &= \sum_{i=1}^{m}\langle T_r(\langle v,\eta\rangle A_\eta(e_i)),e_i\rangle.\\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle\langle v,\eta\rangle T_r(A_\eta)e_i,e_i\rangle\\ &= \langle v,\eta\rangle\mathrm{tr}(T_r(A_\eta)).\end{aligned}$$

Como T_r comuta com A_η, temos que $\mathrm{tr}(T_r(A_\eta))=\mathrm{tr}(A_\eta T_r)$. Utilizando a proposição (23, pág. 41) e a definição de H_r,

$$\begin{aligned}\langle v,\eta\rangle\mathrm{tr}(A_\eta T_r) &= \langle v,\eta\rangle(r+1)S_{r+1}\\ &= \langle v,\eta\rangle(r+1)\binom{m}{r+1}H_{r+1}\\ &= \langle v,\eta\rangle(r+1)\frac{m!}{(r+1)!(m-r-1)!}H_{r+1}\\ &= \langle v,\eta\rangle(m-r)\frac{m!}{(r)!(m-r)!}H_{r+1}\\ &= \langle v,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$L_r(\langle x,v\rangle)=\langle v,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1}.\tag{3.47}$$

Seja $\{e_1,...,e_{m+1}\}$ base canônica de $\mathbb{R}^{m+1}$ (obs.: e_i são distintos dos anteriores) . Então, o vetor posição $x=x(p)\in\sum_{i=1}^{m+1}\langle x,e_i\rangle e_i$. Segue que

$$\begin{aligned}L_r(x) &= \sum_{i=1}^{m+1}L_r(\langle x,e_i\rangle)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{m+1}\langle e_i,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1}e_i\\ &= c_0(r)H_{r+1}\sum_{i=1}^{m+1}\langle e_i,\eta\rangle e_i\\ &= c_0(r)H_{r+1}\eta.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Portanto se a curvatura seccional $c = 0$, concluímos que

$$L_r(x) = c_0(r)H_{r+1}\eta. \tag{3.49}$$

Agora, suponhamos $c \neq 0$. De acordo com o Teorema (10), temos duas possibilidades: $\overline{M}^{m+1}(-1) = \mathbb{H}^{m+1}(-1)$ ou $\overline{M}^{m+1}(1) = \mathbb{S}^{m+1}(1)$. Em ambos os casos vale a inclusão $\overline{M}^{m+1}(c) \subset \mathbb{R}^{m+2}(c)$. Assim, dado $p \in M$, podemos escrever $\mathbb{R}^{m+2} = T_pM \oplus [\eta] \oplus [x]$.

Seja $v \in \mathbb{R}^{m+2}$, fixo. Então, $v = v^\top + v^\perp$. Expressando $v^\perp = g\eta + \mu x$, onde η é ortogonal a x, em M, segue que $v = v^\top + g\eta + \mu x$. Multiplicando por η obtemos $g = \langle v, \eta\rangle$, e por x, obtemos $\mu = c\langle v, x\rangle$, com $c = 1$ ou $c = -1$. Portanto, $v = v^\top + \langle v, \eta\rangle\eta + c\langle v, x\rangle x$. Daí,

$$\text{grad}\ \langle x, v\rangle = v^\top = v - \langle v, \eta\rangle\eta - c\langle v, x\rangle x. \tag{3.50}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\ \langle x, v\rangle &= \overline{\nabla}_{e_i}(v - \langle v, \eta\rangle\eta - c\langle v, x\rangle x) \\
&= \cancelto{0}{\overline{\nabla}_{e_i}v} - \overline{\nabla}_{e_i}(\langle v, \eta\rangle\eta) - c\overline{\nabla}_{e_i}(\langle v, x\rangle x) \\
&= -e_i(\langle v, \eta\rangle)\eta - \langle v, \eta\rangle\overline{\nabla}_{e_i}\eta - ce_i(\langle v, x\rangle)x - c\langle v, x\rangle\overline{\nabla}_{e_i}x. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

onde $\{e_i\} \in T_pM$. Tomando a projeção tangente,

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\ \langle x, v\rangle)^\top &= (-e_i\langle v, \eta\rangle\eta - \langle v, \eta\rangle\overline{\nabla}_{e_i}\eta - ce_i(\langle v, x\rangle)x - c\langle v, x\rangle\overline{\nabla}_{e_i}x)^\top \\
&= -\langle v, \eta\rangle(\overline{\nabla}_{e_i}\eta)^\top - c\langle v, x\rangle(\overline{\nabla}_{e_i}x)^\top \\
&= \langle v, \eta\rangle A_\eta(e_i) - c\langle v, x\rangle e_i. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Utilizando a definição do operador L_r, a proposição (26, pág. 45) e a definição de divergência,

$$\begin{aligned}
L_r(\langle x, v\rangle) &= \text{div}(T_r\text{grad}\langle x, v\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\left(\langle\overline{\nabla}_{e_i}T_r\text{grad}\langle x, v\rangle, e_i\rangle\right) \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Pela compatibilidade da conexão,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m+1}\left(\langle\overline{\nabla}_{e_i}T_r\text{grad}\langle x, v\rangle, e_i\rangle\right) &= \sum_{i=1}^{m+1}\langle(\overline{\nabla}_{e_i}T_r)\text{grad}\langle x, v\rangle, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\langle\text{grad}\langle x, v\rangle, \cancel{(\overline{\nabla}_{e_i}T_r)e_i}\rangle + \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle,
\end{aligned}$$

Assim,

$$L_r(\langle x, v\rangle) = \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}\langle x, v\rangle), e_i\rangle, \tag{3.54}$$

Utilizando a projeção tangente, como na equação (3.52), segue que,

$$\begin{aligned}L_r(\langle x,v\rangle) &= \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(\langle v,\eta\rangle A_\eta(e_i) - c\langle v,x\rangle E_i), e_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(\langle v,\eta\rangle A_\eta(e_i), e_i\rangle - \sum_{i=1}^{m+1}\langle T_r(c\langle v,x\rangle E_i), e_i\rangle\\ &= \langle v,\eta\rangle \mathrm{tr}(T_r(A_\eta)) - c\langle v,x\rangle \mathrm{tr}(T_r).\end{aligned}$$

Vimos na demonstração para $c=0$ que $\langle v,\eta\rangle\mathrm{tr}(T_r(A_\eta)) = \langle v,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1}$. Note que,

$$\begin{aligned}c\langle v,x\rangle\mathrm{tr}(T_r) &= -c\langle v,x\rangle(m-r)S_r\\ &= -c\langle v,x\rangle(m-r)\binom{m}{r}H_r\\ &= -c\langle v,x\rangle c_0(r)H_r\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}L_r(\langle x,v\rangle) &= \langle v,\eta\rangle\mathrm{tr}(T_r(A_\eta)) - c\langle v,x\rangle\mathrm{tr}(T_r)\\ &= \langle v,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1} - c\langle v,x\rangle c_0(r)H_r \qquad (3.55)\end{aligned}$$

Agora, seja $\{e_1,...,e_{m+1},e_{m+2}\}$ base canônica de $\mathbb{R}^{m+2}$ (obs. $\{E_i\}$ distintos dos anteriores). Assim, $x = x(p) \in \sum_{i=1}^{m+2}\langle x,e_i\rangle e_i$. Segue que,

$$\begin{aligned}L_r(x) &= \sum_{i=1}^{m+2} L_r(\langle x,e_i\rangle)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{m+2}\langle e_i,\eta\rangle c_0(r)H_{r+1}e_i - \sum_{i=1}^{m+2} c\langle e_i,x\rangle c_0(r)H_r e_i\\ &= c_0(r)H_{r+1}\sum_{i=1}^{m+2}\langle e_i,\eta\rangle e_i - c_0(r)H_r\sum_{i=1}^{m+2} c\langle e_i,x\rangle e_i\\ &= c_0(r)H_{r+1}\eta - c_0(r)H_r cx\end{aligned}$$

Portanto, se $c\neq 0$,

$$L_r(x) = c(r)\Big(H_{r+1}\eta - cH_r x\Big). \qquad (3.56)$$

□

A seguir anunciamos a caracterização variacional do 1º autovalor do operador L_r, quando este é elíptico.

Proposição 33. *Seja M uma variedade diferenciável, conexa, compacta, sem bordo e orientada, imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{m+1}$ (ou $\mathbb{H}^{m+1}$). Se L_r é elíptico, então seu primeiro autovalor denotado por λ_1, tem a seguinte caracterização:*

$$\lambda_1 = -inf\left[\frac{\int_M fL_r(f)\,dM}{\int_M f^2\,dM}, \int_M f\,dM = 0\right].$$

O caso particular em que $r = 0$ pode ser visto em (21). Para o caso geral, pode ser visto em (22) e (23).

Considerando uma imersão isométrica $x : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, dado um ponto $p \in M^m$, como $x = x(p) \in \mathbb{R}^{m+1}$, temos que $x = (x_1, ..., x_{m+1})$. Assim, podemos supor que $\int_M x_j dM = 0$ para todo $j = 1, ..., m+1$, onde $x_j : M \to \mathbb{R}$, pois se $\int_M x_j \, dM = r$ com $r \neq 0$, fazemos,

$$\begin{aligned} \int_M (x_j - \frac{x_j}{vol(M)}) dM &= \int_M x_j \, dM - \int_M \frac{x_j}{vol(M)} \, dM \\ &= \int_M x_j \, dM - r \int_M \frac{1}{vol(M)} \, dM \end{aligned}$$

Então,

$$\int_M (x_j - \frac{r}{vol(M)}) dM = \int_M x_j \, dM - v = 0.$$

Portanto, utilizando a proposição anterior, temos que:

$$\lambda_1 \leq -\frac{\int_M x L_r(x) \, dM}{\int_M x^2 \, dM}. \tag{3.57}$$

4 ESTIMATIVAS DO PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR L_R

Esta é a principal seção deste trabalho. Nela, apresentaremos as estimativas para o primeiro autovalor do operador L_r, obtidas por H. Alencar, M. do Carmo e H. Rosemberg (4).

4.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{m+1}$

Teorema 34. *Seja M^m uma variedade riemanniana compacta, orientada, sem bordo, e imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{m+1}$. Considere λ_1 o primeiro autovalor do operador L_r, com $r = 0, ..., m-1$. Se $H_{r+1} > 0$ em M, então*

$$\lambda_1 \int_M H_r \, dM \leq c_0(r) \int_M H_{r+1}^2 \, dM, \qquad \text{onde } c_0(r) = (m-r)\binom{m}{r},$$

e a igualdade ocorre precisamente se M é uma esfera.

Demonstração. Seja $x : M \to \overline{M}^{m+1}(0) = \mathbb{R}^{m+1}$ uma imersão isométrica. Como M é compacta e imersa em $\mathbb{R}^{m+1}$, supomos que $\int_M x_j \, dM = 0$, para todo $j = 1, ..., m+1$, onde $x_j = M \to \mathbb{R}$. Logo, pela equação (3.57, pág. 55) temos a seguinte caracterização para o primeiro autovalor do operador L_r:

$$\lambda_1 \leq -\frac{\int_M x_j L_r(x) \, dM}{\int_M x_j^2 \, dM}, \qquad j = 1, ..., m+1.$$

Isto é,

$$\lambda_1 \int_M x_j^2 \, dM \leq -\int_M x_j L_r(x) \, dM. \tag{4.1}$$

Como o espaço ambiente é $\mathbb{R}^{m+1}$, cuja curvatura seccional é $c = 0$, pela proposição (32, pág. 51), temos que $L_r(x) = c_0(r) H_{r+1} \eta$. Assim,

$$\lambda_1 \int_M x_j^2 \, dM \leq -\int_M x_j c_0(r) H_{r+1} \eta_j \, dM,$$

onde η_j é a i-ésima coordenada de η. Somando de 1 à $m+1$,

$$\lambda_1 \int_M \|x\|^2 \, dM \leq -\int_M c_o(r) H_{r+1} \langle x, \eta \rangle \, dM,$$

Pela fórmula de Minkowski (Teorema 29, pag. 48), temos que:

$$\lambda_1 \int_M \|x\|^2 \, dM \leq \int_M c_0(r) H_r \, dM. \tag{4.2}$$

Como $H_{r+1} > 0$, multiplicando a desigualdade acima por $\int_M H_{r+1}^2\, dM$, obtemos,

$$\int_M c_0(r) H_r\, dM \int_M H_{r+1}^2\, dM \geq \lambda_1 \int_M \|X\|^2\, dM \int_M H_{r+1}^2\, dM. \tag{4.3}$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$\lambda_1 \int_M \|x\|^2\, dM \int_M H_{r+1}^2\, dM \geq \lambda_1 \Big(\int_M \|x\| H_{r+1} \Big)^2 dM, \tag{4.4}$$

e como $\|x\| \geq \langle x, \eta \rangle$,

$$\lambda_1 \Big(\int_M \|x\| H_{r+1} \Big)^2 dM \quad \geq \quad \lambda_1 \Big(\int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1} \Big)^2 dM. \tag{4.5}$$

Assim, substituindo (4.4) e (4.5) em (4.3),

$$\lambda_1 \int_M \|x\|^2 \int_M H_{r+1}^2\, dM \quad \geq \quad \lambda_1 \Big(\int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1} \Big)^2 dM. \tag{4.6}$$

Utilizando, mais uma vez, a fórmula de Minkowski, agora no lado direito da desigualdade (4.6), obtemos,

$$\lambda_1 \Big(\int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1} \Big)^2 dM = \lambda_1 \Big(\int_M H_r \Big)^2 dM. \tag{4.7}$$

Portanto,

$$\int_M c_0(r) H_r\, dM \int_M H_{r+1}^2\, dM \geq \lambda_1 \Big(\int_M H_r \Big)^2 dM.$$

Como $H_{r+1} > 0$, pela Proposição (17, pág.35), temos que $H_r > 0$. Logo, dividindo a desigualdade anterior por $\Big(\int_M H_r \Big)^2 dM$, obtemos o resultado desejado:

$$\lambda_1 \leq \frac{c_0(r) \int_M H_{r+1}^2\, dM}{\int_M H_r\, dM} \tag{4.8}$$

Se considerarmos por hipótese a igualdade:

$$\lambda_1 \int_M H_r\, dM = c_0(r) \int_M H_{r+1}^2 H_r\, dM$$

Serão da mesma forma igualdades as demais desigualdades que utilizamos para obter (4.8). Em particular, teremos uma igualdade em (4.5), portanto,

$$\Big(\int_M \|x\| H_{r+1} dM \Big)^2 = \Big(\int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1} dM \Big)^2 \tag{4.9}$$

Como $H_r > 0$ em M, pela fórmula de Minkowski (29, pág. 48),

$$\int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1}\, dM = \int_M H_r\, dM > 0 \tag{4.10}$$

Logo,

$$\int_M \|x\| H_{r+1}\, dM = \int_M \langle x, \eta \rangle H_{r+1}\, dM \tag{4.11}$$

Isto significa que $x = k\eta$ para alguma função k. Assim,

$$\nabla_{E_i}(\|x\|^2) = \nabla_{E_i}(\langle x, x \rangle) = 2\langle \nabla_{E_i} x, x \rangle = 2\langle E_i, x \rangle = 2k\cancel{\langle E_i, \eta \rangle} = 0, \tag{4.12}$$

Portanto, $\|x\|$ é constante, e M é uma esfera. $\square$

Corolário 35. *Se adicionarmos as hipóteses do Teorema 34, a hipótese H_{r+1} constante, então*

$$\lambda_1 \leq c_0(r) H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}$$

e a igualdade ocorre precisamente quando M é uma esfera.

Demonstração. Na proposição (16, pág. 34), obtemos a desigualdade $H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}$, ocorrendo a igualdade se M é uma esfera. Pelo Teorema 34, temos que:

$$\lambda_1 \leq \frac{c_0(r) \int_M H_{r+1}^2 \, dM}{\int_M H_r \, dM}. \tag{4.13}$$

Como H_{r+1} é constante,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq c_0(r) H_{r+1}^2 \frac{\int_M \, dM}{\int_M H_r \, dM} \\ &\leq c_0(r) H_{r+1}^2 \frac{\int_M \, dM}{\int_M H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \, dM} \qquad \text{(prop: 16)} \\ &= c_0(r) \frac{H_{r+1}^2}{H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}} \frac{\int_M \, dM}{\int_M \, dM} \\ &= c_0(r) H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1 \leq c_0(r) H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}. \tag{4.14}$$

Quando M é uma esfera obtém-se com procedimento análogo a igualdade desejada. □

Teorema 36. *Seja Ω uma variedade compacta de dimensão m+1 com $M = \partial\Omega$, onde M^m é uma variedade Riemanniana. Assuma que Ω é imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{m+1}$, de modo que $H_{r+1} > 0$ em M. Seja λ_1 o primeiro autovalor do operador L_r. Então,*

$$\lambda_1 \leq \frac{c_0(r)}{(m+1)^2} \frac{V(M)}{V(\Omega)^2} \int_M H_r \, dM, \tag{4.15}$$

e a igualdade ocorre precisamente quando M é uma esfera. Onde $V(M)$ e $V(\Omega)$ denotam, respectivamente, os volumes de M e de Ω, e como no Teorema anterior $c_0(r) = (m-r)\binom{m}{r}$.

Demonstração. Sejam $\{E_1, ..., E_{m+1}\}$ uma base ortonormal em T_pM e $x : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma imersão isométrica. Denotemos x o campo vetorial posição em um ponto de Ω. Da definição (13), segue que,

$$\begin{aligned} \text{div } x &= \sum_{i=1}^{m+1} \langle \nabla_{E_i} x, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \langle (E_1 x_1, ..., E_{m+1} x_{m+1}), E_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{m+1} \langle E_j, E_i \rangle \qquad (E_j(x) = E_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \langle E_i, E_i \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{div}(x) = m + 1. \tag{4.16}$$

Como $\partial\Omega = M$, pelo Teorema da Divergência (pág. 48),

$$\int_\Omega \mathrm{div} x \, d\Omega = \int_M \langle x, \eta \rangle \, dM \tag{4.17}$$

Utilizando as igualdades (4.16) e (4.17), obtemos:

$$(m+1)V(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{div}\, x \, d\Omega = \int_M \langle x, \eta \rangle \, dM \leq \int_M \|x\| \, dM, \tag{4.18}$$

Elevando ao quadrado e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$(m+1)^2 V(\Omega)^2 \leq \left(\int_M \|x\|^2 \, dM \right) V(M). \tag{4.19}$$

Logo,

$$\frac{(m+1)^2 V(\Omega)^2}{V(M)} \leq \int_M \|x\|^2 \, dM. \tag{4.20}$$

Multiplicando por λ_1 e utilizando a equação (4.2) da pág. 56,

$$\lambda_1 \frac{(m+1)^2 V(\Omega)^2}{V(M)} \leq \lambda_1 \int_M \|x\|^2 \, dM \leq \int_M c_0(r) H_r \, dM. \tag{4.21}$$

Portanto,

$$\lambda_1 \leq \frac{c_0(r)}{(m+1)^2} \frac{V(M)}{V(\Omega)^2} \int_M H_r \, dM.$$

Supondo uma igualdade na desigualdade (4.15), teremos também uma igualdade em (4.18), isto é,

$$\int_M \langle x, n \rangle dM = \int_M \|X\| dM \tag{4.22}$$

Logo, como vimos na equação (4.12), na pág. 57 , $\|x\|$ é constante e M é uma esfera. □

4.2 Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{m+1}$

Seja $M^m \subset H^{m+1}$ uma hipersuperfície fechada. Denotemos por $X = (\tilde{x}, x) \in \mathbb{R}^{m+2}$ um ponto de $\mathbb{H}^{m+1}$ no modelo de Minkowski (equação 2.11, pág.26).

Teorema 37. *Se M é uma hipersuperfície fechada imersa isometricamente em $\mathbb{H}^{m+1}$ e $H_{r+1} > 0$ em M, então,*

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{1}{2} \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{\underline{H}_r^2} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}, \tag{4.23}$$

onde $\overline{H}$ é o supremos de H, $\underline{H}$ o ínfimo de H, λ_1 é o primeiro autovalor do operador L_r e $c_0(r) = (m-r)\binom{m}{r}$.

Além disso, se H_{r+1} é constante (necessariamente $H_{r+1} > 1$), então

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq H_{r+1} + \frac{1}{2} H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - 1. \tag{4.24}$$

Demonstração. Sejam $x : M^m \to \mathbb{H}^{m+1}$ uma imersão isométrica e $(\tilde{x}, x) \in \mathbb{H}^{m+1}$. Denote por η o campo vetorial unitário normal a $f(M)$ em $\mathbb{H}^{m+1}$ com direção oposta ao vetor curvatura média. Decorre da proposição (32) que:

$$L_r(x) = -c_0(r)(H_{r+1}\eta - H_r x), \tag{4.25}$$

Como $\mathbb{H}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$, representando $m+2$ equações para as funções coordenadas de η e x, obtemos:

$$L_r(x_j) = -c_0(r)(H_{r+1}\eta_j - H_r x_j), \tag{4.26}$$

Multiplicando essa equação por $-x_j$,

$$-x_j L_r(x_j) = c_0(r)(H_{r+1}\eta_j x_j - H_r x_j^2). \tag{4.27}$$

Como estamos considerando o espaço ambiente euclidiano, podemos aplicar a estimativa (equação 3.57,pág. 55):

$$\lambda_1 \int_M x_j^2 dM \leq -\int_M x_j L_r(x_j) dM. \tag{4.28}$$

Assim sendo, substituindo a equação (4.27) em (4.28), temos que:

$$\lambda_1 \int_M x^2 dM \leq \int_M c_0(r)(H_{r+1}\eta_j x_j - H_r x_j^2) dM. \tag{4.29}$$

Considerando a soma de 0 à $m+1$, obtemos:

$$\lambda_1 \int_M |\tilde{x}|^2 dM \leq \int_M c_0(r)(H_{r+1}\langle \tilde{\eta}, \tilde{x}\rangle - H_r |\tilde{x}|^2) dM. \tag{4.30}$$

onde $\tilde{\eta}$ é a projeção de η em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Como $\mathbb{R}^{m+2} = T_pM \oplus [\eta] \oplus [x]$, tomando $e = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{m+2}$, podemos expressá-lo por $e = e^\top + \mu x - g\eta$. Para obtermos μ e g, notemos que $\langle x, \eta\rangle = 0$ e $\langle x, x\rangle = -1$. Isso implica que $-\langle e, x\rangle = \mu$ e $-\langle e, \eta\rangle = g$ (o que pode ser visto também em (9)).

Assim, com procedimento análogo ao que fizemos na página (53) para obter a equação (3.50), segue que:

$$\text{grad } \mu = e^\top = e + \langle e, x\rangle x - \langle e, \eta\rangle \eta = e - \mu x + g\eta. \tag{4.31}$$

Além disso, temos que $\langle \tilde{x}, \tilde{\eta}\rangle = \mu g$ e $|\tilde{x}|^2 = \mu^2 - 1$, onde $(\tilde{x}, x) \in \mathbb{H}^{m+1}$.

Utilizando as igualdades:

- $\langle e, e\rangle = -1$;
- $\langle e, -\mu x\rangle = \langle e, \langle e, x\rangle x\rangle = \mu^2$;
- $\langle e, g\eta\rangle = g\langle e, \eta\rangle = -g^2$;
- $\langle -\mu x, -\mu x\rangle = \mu^2\langle x, x\rangle = -\mu^2$;
- $\langle g\eta, g\eta\rangle = g^2$.

Obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\text{grad } \mu|^2 \\
&= |e - \mu x + g\eta|^2 \\
&= -1 + 2\langle e, -\mu x\rangle + 2\langle e, g\eta\rangle + \langle -\mu x, -\mu x\rangle + \cancelto{0}{\langle -\mu x, g\eta\rangle} + \langle g\eta, g\eta\rangle \\
&= -1 + 2\mu^2 - 2g^2 - \mu^2 + g^2 \\
&= -1 + \mu^2 - g^2 \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

Então,

$$g^2 \leq \mu^2 - 1. \qquad (4.33)$$

Utilizando a equação anterior e a igualdade $|\tilde{x}|^2 = \mu^2 - 1$, temos:

$$\mu g \leq \frac{\mu^2 + g^2}{2} \leq \frac{\mu^2 + \mu^2 - 1}{2} = \mu^2 - \frac{1}{2} = |\tilde{x}|^2 + \frac{1}{2}. \qquad (4.34)$$

Como $\langle \tilde{x}, \tilde{\eta}\rangle = \mu g$,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{\eta}\rangle \leq |\tilde{x}|^2 + \frac{1}{2}. \qquad (4.35)$$

Por hipótese, $H_{r+1} > 0$, assim pela proposição (16, pág. 34) $H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}$. Logo,

$$H_r \geq \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}, \qquad (4.36)$$

onde $\underline{H} = \inf H$.

Multiplicando (4.36) por $-|\tilde{x}|^2$ e integrando sobre M, obtemos:

$$-\int_M H_r |\tilde{x}|^2 dM \leq -\underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \int_M |\tilde{x}|^2 dM. \qquad (4.37)$$

Agora, considerando a integral $\int_M H_{r+1}\langle \tilde{x}, \tilde{\eta}\rangle dM$ e utilizando a equação (4.35), temos que:

$$\begin{aligned}
\int_M H_{r+1}\langle \tilde{x}, \tilde{\eta}\rangle dM &\leq \int_M H_{r+1}\Big(|\tilde{x}|^2 + \frac{1}{2}\Big) dM \\
&= \int_M H_{r+1}|\tilde{x}|^2 dM + \frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM \\
&\leq \int_M \overline{H}_{r+1}|\tilde{x}|^2 dM + \frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

onde $\overline{H} = \sup H$.

Dividindo a equação (4.30) por $c_0(r)$, obtemos,

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \int_M |\tilde{x}|^2 dM \leq \int_M (H_{r+1}\langle \tilde{\eta}, \tilde{x}\rangle - H_r |\tilde{x}|^2) dM \qquad (4.39)$$

Substituindo (4.38) e (4.37) em (4.39), temos,

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \int_M |\tilde{x}|^2 dM \leq \int_M \overline{H}_{r+1}|\tilde{x}|^2 dM + \frac{1}{2}\int_M H_{r+1} dM - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \int_M |\tilde{x}|^2 dM \qquad (4.40)$$

Dividindo essa última desigualdade por $\int_M |\tilde{x}|^2 dM$, obtém-se:

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\int_M H_{r+1} dM}{\int_M |\tilde{x}|^2 dM}}_{\tilde{I}} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \tag{4.41}$$

Vamos agora estimar a integral $\tilde{I}$. Integramos a equação (4.25):

$$\int_M L_r(x) dM = -c_0(r) \int_M (H_{r+1}\eta - H_r x) dM. \tag{4.42}$$

Como $L_r(x)$ é um operador divergente (proposição 26, pág 45), pelo Teorema de Stokes temos que $\int_M L_r(x) dM = 0$, assim,

$$\int_M H_{r+1}\eta \; dM = \int_M H_r x \; dM. \tag{4.43}$$

Mas, $|\tilde{x}|^2 = \mu^2 - 1 \geq g^2$, isto é, $|\tilde{x}|^2 \geq g^2$. Logo, integrando sobre M e multiplicando por $\int_M H_{r+1}^2 dM$, temos que:

$$\int_M |\tilde{x}|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \;\; \geq \;\; \int_M g^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM. \tag{4.44}$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$\int_M g^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \;\; \geq \;\; \left(\int_M g H_{r+1} dM\right)^2. \tag{4.45}$$

Utilizando a igualdade (4.43), e sendo $\mu \geq 1$, temos:

$$\left(\int_M g H_{r+1} dM\right)^2 = \left(\int_M \mu H_r dM\right)^2 \geq \left(\int_M H_r dM\right)^2 \tag{4.46}$$

Agora, substituímos (4.46) em (4.45), e em seguida, utilizamos o resultado desta substituição na equação (4.44), obtemos assim a desigualdade:

$$\int_M |\tilde{x}|^2 dM \int_M H_{r+1}^2 dM \;\; \geq \;\; \left(\int_M H_r dM\right)^2 \tag{4.47}$$

Dividindo por $\left(\int_M H_r dM\right)^2$, temos que:

$$\frac{1}{\int_M |\tilde{x}|^2 dM} \leq \frac{\int_M H_{r+1}^2 dM}{\left(\int_M H_r dM\right)^2}. \tag{4.48}$$

Multiplicando por $\int_M H_{r+1} dM$ e utilizando as desigualdades $H_{r+1} \leq \overline{H}_{r+1}$ e $H_r \geq \underline{H}_r$, temos que:

$$\frac{\int_M H_{r+1} dM}{\int_M |\tilde{x}|^2 dM} \;\; \leq \;\; \frac{\int_M H_{r+1} dM \int_M H_{r+1}^2 dM}{\left(\int H_r dM\right)^2}.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_M H_{r+1}dM}{\int_M |\tilde{x}|^2 dM} &\leq \frac{\int_M H_{r+1}dM \int_M H_{r+1}^2 dM}{\int_M H_r dM \int_M H_r dM} \\
&\leq \frac{\overline{H}_{r+1} \int_M dM \overline{H}_{r+1}^2 \int_M dM}{\underline{H}_r \int_M dM \underline{H}_r \int_M dM} \\
&= \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{\underline{H}_r^2}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Para concluir a demonstração da primeira parte do Teorema, basta substituir esta desigualdade acima na equação (4.41), o que resulta na estimativa desejada:

$$\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq \overline{H}_{r+1} + \frac{\overline{H}_{r+1}^3}{2\underline{H}_r^2} - \underline{H}_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}. \tag{4.50}$$

Por fim, supondo que H_{r+1} é constante (maior do que 1), temos que $\overline{H}_{r+1} = H_{r+1}$ e $\underline{H}_r = H_r$. Pela proposição (16, pág. 34), temos que $H_r \geq H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}$. Elevando esta equação ao quadrado:

$$H_r^2 \geq H_{r+1}^{\frac{2r}{r+1}} \tag{4.51}$$

Como estamos supondo H_{r+1} constante maior do que 1, temos que $\frac{1}{H_r^2} \leq \frac{1}{H_{r+1}^{\frac{2r}{r+1}}}$. Multiplicando por H_{r+1}^3,

$$\frac{H_{r+1}^3}{H_r^2} \leq \frac{H_{r+1}^3}{H_{r+1}^{\frac{2r}{r+1}}} = H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} \tag{4.52}$$

Logo, concluímos que se H_{r+1} é constante ,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1}{c_0(r)} &\leq H_{r+1} + H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}} \\
&\leq \frac{H_{r+1}}{H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}} + \frac{H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}}}{H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}} - \frac{H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}}{H_{r+1}^{\frac{r}{r+1}}} \\
&\leq H_{r+1} + H_{r+1}^{\frac{3-r}{r+1}} - 1 \\
&\leq H_{r+1} + H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - 1
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Portanto, $\frac{\lambda_1}{c_0(r)} \leq H_{r+1} + H_{r+1}^{\frac{r+3}{r+1}} - 1$. $\square$

5 APLICAÇÃO

Nesta seção, vamos abordar um problema de estabilidade referente a esfera no espaço $\mathbb{R}^{m+1}$. No entanto, nosso objetivo é apenas de aplicar uma estimativa que mostramos no capítulo 4, por isso, não vamos apresentar detalhes sobre o estudo de estabilidade, somente o necessário para compreendermos a aplicação. Mais detalhes sobre esse assunto, podem ser obtidos nas referências (9), (10) e (20).

5.1 Estabilidade de Hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{m+1}$

5.2 O Problema Variacional

O conceito de estabilidade para hipersuperfícies de variedades Riemannianas foi introduzido por Barbosa, Carmo e Eschenburg em (9).

No que se segue, M^m é uma variedade Riemanniana compacta com $\partial M = \emptyset$ cuja métrica é induzida pela imersão isométrica $x : M^m \to \overline{M}^{m+1}(c)$, onde $\overline{M}^{m+1}(c)$ é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c.

Definição 26. Uma variação da imersão x em M é uma aplicação diferenciável $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^m \to \overline{M}^{m+1}(c)$, $\epsilon > 0$, tal que:

(i) Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tem-se

$$\begin{aligned} X_t : \{t\} \times M^m \simeq \quad M^m &\longrightarrow \overline{M}^{m+1}(c) \\ t &\mapsto X_t(p) = X(t,p), \end{aligned}$$

é uma imersão.

(ii) $X_0 = x$.

O campo variacional de X é dado por $\frac{\partial X_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Supondo $f = \langle \frac{\partial X_t}{\partial t}, N_t \rangle$, onde N_t é um campo normal unitário ao longo de X_t, e considerando a projeção do campo variacional, tem-se:

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = f N_t + \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} \right)^\top.$$

Uma variação é dita normal se o campo variacional é paralelo a N_t, isto é, se $\left(\frac{\partial X_t}{\partial t} \right)^\top = 0$.

O funcional **r-área** associado à variação $X:(-\epsilon,\epsilon)\times\overline{M}\longrightarrow\overline{M}_c$ é a aplicação $A_r:(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$A_r(t)=\int_M F_r(S_1,...,S_r)dM_t, \tag{5.1}$$

onde $S_r=S_r(t)$, dM_t é a forma volume em $\overline{M}$ induzida pela imersão x_t e F_r é definido recursivamente por

$$F_r(A)=\begin{cases}1, & \text{se } r=0\\ S_1, & \text{se } r=1\\ S_r+\frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2}, & \text{se } 2\leq r\leq m-1.\end{cases}$$

Note que para $r=0$, $A_0(t)=\int_M dM_t$ é o funcional área clássico.

O **volume** $V(t)$ da variação X é dado por

$$V(t)=\int_{[0,t]\times\overline{M}}X^*d\overline{M},$$

onde $d\overline{M}$ é a forma volume de $\overline{M}$ e $X^*d\overline{M}$ é o pull-back da forma volume de $\overline{M}$ para $(-\epsilon,\epsilon)\times\overline{M}$. Dizemos que uma variação **preserva volume**, se $V(t)=V(0)$, para todo $t\in(-\epsilon;\epsilon)$.

Proposição 38. *Seja $X:(-\epsilon;\epsilon)\times M^m\longrightarrow\overline{M}$ uma variação da imersão x. Então a* ***primeira variação do volume*** *em $t=t_0$ é dada por*

$$V'(t_0)=\int_M f_{t_0}dM_{t_0},$$

onde $f_{t_0}(p)=\langle\frac{\partial X}{\partial t}(t_0,p),N_{t_0}(p)\rangle$.

Demonstração. Veja em (9). □

Assim, uma variação preserva volume se, e somente se, $\int_M f_t=0$.

Vamos considerar agora o problema de minimizar o funcional

$$\begin{array}{rccc}A_r & : & (-\epsilon,\epsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & t & \longmapsto & A_r(t)\end{array}$$

para toda variação de $x:M\to\overline{M}_c$ que preserva volume.

Definição 27. O **funcional de Jacobi** associado a este problema variacional é a aplicação $J_r:(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$J_r(t)=A_r(t)+\lambda V(t)$$

onde λ é uma constante a ser determinada pelo problema.

Note que, no caso de variações que preservam volume, os pontos críticos de J_r são os mesmos de A_r. De fato, se a variação preserva volume, $V'(t) = 0$ para todo t e

$$J_r'(t) = A_r'(t) + \lambda V_r'(t) = A_r'(t).$$

Proposição 39 (Fórmula da Primeira Variação)**.** *Seja $\overline{M}_c^{m+1}$ uma variedade Riemanniana orientada com curvatura seccional constante c e $x : M^m \longrightarrow \overline{M}_c^{m+1}$ uma hipersuperfície fechada. Se $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^m \longrightarrow \overline{M}_c^{m+1}$ é uma variação de x que preserva volume, então*

$$J_r'(t) = A_r'(t) = -b_r \int_M H_{r+1} f \, dM_t,$$

onde $b_r = (m-r)\binom{m}{r} = (r+1)\binom{m}{r+1}$.

Demonstração. Veja em (9). □

Como consequência das proposições anteriores, temos que

$$\begin{aligned} J_r'(t) &= A_r'(t) + b_r \lambda V'(t) \\ &= -b_r \int_M H_{r+1}(t) f + \lambda \int_M f \\ &= \int_M [-b_r H_{r+1}(t) + \lambda] f. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Vamos escolher a constante λ de modo que, se a curvatura H_{r+1} da imersão for constante, então $t = 0$ é um ponto crítico do funcional de Jacobi. Assim, devemos tomar $\lambda = b_r H_{r+1}(0)$.

Proposição 40. *Seja $\overline{M}_c^{m+1}$ uma variedade Riemanniana orientavel com curvatura seccional constante c e $x : M^m \longrightarrow \overline{M}_c^{m+1}$ uma hipersuperficie fechada. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *x tem curvatura H_{r+1}; constante*
2. *Para toda variação de x que preserva volume, temos que $A_r'(0) = 0$;*
3. *Para toda variação de x que preserva volume, temos que $J_r'(0) = 0$.*

Demonstração. Veja em (8) □

A proposição anterior nos diz que os problemas variacionais (ii) e (iii) são equivalentes e os pontos críticos de ambos são as imersões com $r-$ésima curvatura média constante. Para obter as imersões que são mínimos locais devemos calcular $A_r''(0)$, a segunda variação do operador $r-$Área em $t = 0$. Note que para as variações que preservam volume é suficiente calcular $J_r''(0)$.

Sabemos que $S_{r+1} = \binom{m}{r+1} H_{r+1}$, logo $\dfrac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = \binom{m}{r+1} \dfrac{\partial H_{r+1}}{\partial t}$. Utilizando a fórmula de $\dfrac{\partial S_{r+1}}{\partial t}$ obtida por Robert C. Reilly, em (1), segue da equação (5.2) a fórmula da segunda variação apresentada no próximo teorema:

Teorema 41 (Fórmula da Segunda Variação)**.** *Se $x : M^m \to \overline{M}_c^{m+1}$ tem H_{r+1} constante, então*

$$J_r''(0)(f) = \int_M -(r+1)fL_r(f) + [(r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}]f^2\,dM.$$

5.3 $r-$Estabilidade

Definição 28. Seja $\overline{M}_c^{m+1}$ uma variedade Riemanniana orientável com curvatura seccional constante c e $x : M^m \to \overline{M}_c^{m+1}$ uma hipersuperfície fechada com H_{r+1} constante. Dizemos que $x : M^m \to \overline{M}_c^{m+1}$ é r-estável se $A_r''(0) \geq 0$ para toda variação$X : M^m \times (-\epsilon;\epsilon) \longrightarrow \overline{M}_c^{m+1}$ de x que preserva volume.

Considere o conjunto

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in C^\infty | \int_M f\,dM = 0 \right\}.$$

Proposição 42. *$x : M^m \to \overline{M}_c^{m+1}$ é r-estável se, e somente se, para todo $f \in \mathcal{G}$, temos que $J_r''(0)(f) \geq 0$.*

Demonstração. Ver em (9) □

Teorema 43. *Seja M^m uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{m+1}$ com H_{r+1} constante (positiva). Então, M é estável se, e somente se, M é uma esfera.*

Demonstração. Seja f a primeira autofunção do operador L_r. Assim, $L_r(f) + \lambda_1 f = 0$. Suponhamos por hipótese que M é estável. Pela Proposição anterior, temos que $J''(0) \geq 0$. Logo, substituindo $L_r(f) = -\lambda_1 f$ na equação do Teorema (41), segue que:

$$\int_M [(r+1)\lambda_1 + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}]f_{t_0}^2 \geq 0. \tag{5.3}$$

Aplicando a desigualdade $\lambda_1 \leq c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}$ obtida no Corolário (35, pág. 58), temos:

$$\int_M [(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}]f_{t_0}^2 \geq 0. \tag{5.4}$$

Por enquanto, consideremos a expressão:

$$(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}. \tag{5.5}$$

Note que:

$$(r+1)c(r+1) = (r+1)(m-(r+1))\frac{m!}{(r+1)!(m-(r+1))!} = (m-(r+1))c(r).$$

Logo, (5.5) é reescrita por:

$$(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (m-(r+1))c(r)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}. \tag{5.6}$$

Utilizando a desigualdade $H_1H_{r+1} \geq H_{r+2}$, $(H_{r+1} > 0)$ obtida na proposição (18, pág.35) na desigualdade (5.6), obtemos:

$$\begin{aligned}(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} &+ (m-(r+1))c(r)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1} \\ &\leq (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (m-(r+1))c(r)H_1H_{r+1} - mc(r)H_1H_{r+1} \\ &= (r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} - (r+1)c(r)H_1H_{r+1} \\ &= (r+1)c(r)\Big(H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} - H_1H_{r+1}\Big) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Além disso, pela proposição (16, pág.34) temos que $H_1 \geq H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$. Como $H_{r+1} > 0$ temos $H_1H_{r+1} \geq H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}}$. Substituindo em (5.7):

$$(r+1)c(r)\Big(H_{r+1}^{\frac{r+1}{r+1}} - H_1H_{r+1}\Big) \leq 0. \tag{5.8}$$

Isto significa que:

$$(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+1}{r+1}} + (m-(r+1))c(r)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1} \leq 0. \tag{5.9}$$

Logo,

$$\int_M [(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + (r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}]f_{t_0}^2 \leq 0. \tag{5.10}$$

Utilizando esta última equação com a proposição (5.4), temos que $J''(0) = 0$, o que significa pela proposição (15, pág.32) que M é totalmente umbílica. Portanto, M é uma esfera.

Se supormos por hipótese que M é uma esfera, pela proposição (16) teremos $H_1 = H_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}$. Logo, a equação (5.7) é igual a zero, assim,

$$J''(0) = \int_M -(r+1)c(r)H_{r+1}^{\frac{r+2}{r+1}} + [(r+1)c(r+1)H_{r+2} - mc(r)H_1H_{r+1}]f_{t_0}^2 = 0. \tag{5.11}$$

Segue da proposição (42) que M é estável. $\square$

REFERÊNCIAS

1 REILLY, R. C. et al. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 8, n. 3, p. 465–477, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 66.

2 CHENG, S.-Y.; YAU, S.-T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 225, n. 3, p. 195–204, 1977. Citado na página 10.

3 ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *BULL. SCI. MATH*, v. 117, p. 239. Citado na página 10.

4 ALENCAR, H.; CARMO, M. do; ROSENBERG, H. On the first eigenvalue of the linearized operator of the r-th mean curvature of a hypersuface. Annal of Global Analysis and Geometry, p. 387 395, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 10, 11, 44 e 56.

5 REILLY, R. C. On the first eigenvalue of the laplacian for compact submanifolds of euclidean space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 52, n. 1, p. 525–533, 1977. Citado na página 10.

6 HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ 1. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 280, n. 3, p. 389–402, 1988. Citado na página 10.

7 SOUFI, A. E.; ILIAS, S. Une inégalité du type "reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 67, n. 1, p. 167–181, 1992. Citado na página 10.

8 BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. In: *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*. New York: Springer, 1984. p. 339–353. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 66.

9 BARBOSA, J. L.; CARMO, M. D.; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, Springer-Verlag, v. 197, n. 1, p. 123–138, 1988. Citado 6 vezes nas páginas 10, 60, 64, 65, 66 e 67.

10 ALENCAR, H.; CARMO, M. D.; COLARES, A. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. In: *To appear: Math. Z.* New York: Springer, 1993. p. 117–131. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 64.

11 LEE, J. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer, 2012. v. 218. Citado na página 12.

12 LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.

13 CHAVEL, I. *Riemannian geometry: a modern introduction*. New York: Cambridge university press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 12, 27 e 48.

14 CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 12, 15, 21, 25, 28, 29 e 30.

15 O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103*. San Diego, California: Academic press, 2011. v. 103. Citado 4 vezes nas páginas 12, 20, 25 e 26.

16 BARBEAU, E. J. *Polynomials*. New York: Springer, 2003. Citado na página 31.

17 G.HARDY, J. E. L.; G.POLYA. *Inequalities*. New York: Cambridge at the university press. Citado na página 32.

18 PÓLYA, G.; SZEGÖ, G. *Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry*. New York: Springer, 1976. v. 2. Citado na página 32.

19 MONTIEL, S.; ROS, A. Compact hypersurfaces: the alexandrov theorem for higher order mean curvatures. *Differential geometry*, Pitman Monographs, v. 52, p. 279–296, 1991. Citado na página 35.

20 BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Annals of Global Analysis and Geometry*, Springer, v. 15, n. 3, p. 277–297, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 64.

21 BÉRARD, P. H.; BESSON, G. *Lectures on spectral geometry*. Rio de Janeiro: Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnologico. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1985. Citado na página 55.

22 CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. New York: Academic press, 1984. v. 115. Citado na página 55.

23 STRAUSS, W. A. Partial differential equations: An introduction. *New York*, 1992. Citado na página 55.

24 EVANS, L. C. Partial differential equations. Providence, Rhode Land: American Mathematical Society, 1998. Citado na página 71.

APÊNDICE A – OPERADOR ELÍPTICO

Introduzimos esta seção com o proposito de apresentar a definição de um operador elíptico, e mostrar que dado um operador L elíptico e simétrico, definido em uma variedade M é possível supor a existência de uma sequência crescente de números reais, ditos autovalores do operador L. Desses, o menor deles é chamado de primeiro autovalor do operador L. Para mais detalhes sobre operadores Elípticos, o leitos pode consultar (24), onde é possível encontrar todas as definições e demonstrações dos teoremas apresentados neste capítulo.

É importante observar que o operador L_r apresentado na seção (3.2) nem sempre é elíptico. Assim, os resultados apresentados aqui são válidos para esse operador apenas quando a r-ésima curvatura média H_{r+1} é positiva, de acordo com proposição (31, pág. 50).

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $C_c^\infty(U)$ o conjunto das funções de classe $C^\infty(U)$ com suporte compacto. Se $u \in C^k(U)$, $k \in \mathbb{N}$, e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, ..., \partial x_m^{\alpha_m}}, \tag{A.1}$$

onde α é tal que $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_m$.

Um operador diferenciável de segunda ordem é da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} \left[a^{ij}(x)u_{x_i}\right]_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{A.2}$$

ou,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{A.3}$$

O operador L é dito está na forma divergente se é dado por (A.2), e na forma não divergente caso for dado por (A.3). Se $a^{ij} \in C^1(U)$, então as duas formas acima de expressar o operador L são equivalentes. Doravante, assumimos que $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ para todos $i, j = 1, ..., n$, isto é, que a matriz (a^{ij}) é simétrica.

Definição 29. O operador L é dito elíptico se os autovalores da matriz (a^{ij}) são não nulos e tem todos o mesmo sinal.

(Ou seja, a matriz (a^{ij}) ou é definida positiva ou é definida negativa.)

Definição 30. Se existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{ij=1}^{m} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\|\xi\|^2, \tag{A.4}$$

para quase todo $x \in U$ e todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, o operador L é dito uniformemente elíptico.

De acordo com a definição (30), para cada $x \in U$, a matriz (a^{ij}) é positiva definida, com menor autovalor maior ou igual a θ.

Teorema 44. *Existe um conjunto no máximo enumerável $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & se \quad em\ U \\ u = 0 & se \quad em\ \partial U. \end{cases} \tag{A.5}$$

possui solução única para cada $f \in L^2(U)$ se e somente se $\lambda \notin \Sigma$.
(ii) Se Σ é infinito, então $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, com $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$ e $\lambda_k \to \infty$.

Definição 31. O conjunto Σ descrito no Teorema anterior é chamado espectro do operador L.

Supondo que L seja um operador da forma divergente, isto é,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j}, \tag{A.6}$$

onde $a^{ij} \in C^{\infty}(\overline{U})$. Suponhamos ainda que L tem a condição de ser uniformemente elíptico, e que (a^{ij}) seja simétrica. Assim, o operador L está associado a uma forma bilinear B, de modo que $B[u,v] = B[v,u]$, onde $u, v \in H_0^1$.

Nessas condições vale o seguinte teorema:

Teorema 45. *(Autovalores de operadores elípticos simétricos)*
(i) Cada autovalor de L é real.
(ii) $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$, e $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$
(iii) Existe uma base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(U)$, onde $w_k \in H_0^1(U)$ é uma autofunção correspondente para λ.

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & se \quad em\ U \\ u = 0 & se \quad em\ \partial U. \end{cases} \tag{A.7}$$

Definição 32. λ_1 é dito o primeiro autovalor do operador L.