UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

RICARDO GOMES DUARTE FREIRE

ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Recife
2016

RICARDO GOMES DUARTE FREIRE

ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.
Área de concetração: Estruturas
Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

Recife

2016

Catalogação na fonte

Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

F866a Freire, Ricardo Gomes Duarte.

Análise computacional da estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua/Ricardo Gomes Duarte Freire.- 2016.

135 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador:Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.

Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2016.

Inclui Referências e anexos.

1. Engenharia Civil. 2.Pilares em concreto armado.3.Flexão composta oblíqua.

4. Estabilidade. 5. Não linearidade. 6. Análise computacional. I.Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira(Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.) BCTG/2017-177

RICARDO GOMES DUARTE FREIRE

ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovado em: 09/12/2016

Profº. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Orientador acadêmico)

Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Carlos Eduardo Luna de Melo

(Examinador científico externo)

Prof. Dr. Paulo de Araújo Regis (Examinador científico externo)

Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

A análise da estabilidade de pilares em concreto armado de forma aproximada, com uso de tabelas e ábacos, faz o uso de aproximações para descrever o comportamento do pilar, que podem levar a estruturas mais robustas e com um maior consumo de material. Por outro lado, existem procedimentos de maior precisão que aproximam os resultados da situação real, otimizando o projeto ao custo de um grande número de operações e processos iterativos, que são inviáveis sem o emprego de computadores. Este trabalho apresenta as etapas envolvidas na elaboração de um código computacional para verificação da estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. As rotinas foram desenvolvidas em Matlab, considerando as não linearidades física e geométrica, e podem ser divididas em duas grandes partes: (1) caracterizada pela análise da seção em um plano, onde é feita sua divisão em sub-regiões, e através da variação da curvatura, profundidade e inclinação da linha neutra são calculados os esforços internos resistentes; (2) uma etapa de verificação da barra, onde o pilar é segmentado e para cada seção entre os elementos a rotina avalia a curvatura no equilíbrio. A equação da deformada obtida por integração da curvatura fornece uma excentricidade adicional, que somada à inicial resulta em um novo conjunto de solicitações. O processo é repetido até que seja atingido um critério de convergência ou ruptura, e assim podem ser definidos os esforços finais da peça. A busca dos parâmetros da seção: curvatura, posição e inclinação da linha neutra é feita com o uso do método da bisseção aplicado a múltiplas variáveis associado a um processo incremental. Esta metodologia permitiu reduzir o tempo de processamento computacional. A validação dos resultados foi feita através da comparação com ensaios realizados por outros autores e modelos em elementos finitos. Ao fim do desenvolvimento foi verificado que o código desenvolvido apresenta resultados coerentes com os valores de referência utilizados, tendo um erro máximo, relativo às excentricidades de segunda ordem, da ordem de 5% quando comparado com técnicas mais sofisticadas.

Palavras-chaves: Pilares em concreto armado. Flexão composta oblíqua. Estabilidade. Não linearidade. Análise computacional.

ABSTRACT

Stability analysis of reinforced concrete columns using tables and abacuses often lacks accuracy and leads to more robust structures, with a higher consumption of material (concrete and steel rebars). On the other hand, there are more accurate procedures that derive from detailed models, optimizing the design at the cost of a large number of iterative operations and processes that are not feasible without the use of computers. This paper presents the steps involved in developing a computer code to verify the stability analysis of reinforced concrete columns subjected to axial forces and biaxial bending through computational routines. The computer codes were developed in Matlab, including physical and geometrical nonlinearities, and can be divided into two major parts: (1) characterized by cross section analysis, which is divided into sub-regions for numerical integration, and by varying curvature and neutral axis slope and depth, resistant internal forces and strains are evaluated; (2) a global stability analysis of the structure, where the column is segmented along its height and for each section between the elements a routine evaluates the curvature at equilibrium. The updated deflection is obtained by double curvature integration and provides an additional eccentricity which is added to the initial results into a new iteration. The process is repeated until a convergence criterion is reached or column failure, and thus the final internal forces are computed. The proposed routine results were validated by experimental analysis and finite element simulations with commercial codes Athena and Midas, confirming the validity and efficiency of the present proposal.

Keywords: Reinforced concrete columns. Biaxial bending, Stability. Nonlinear. Computational Analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 Exemplo de pilar esbelto em concreto armado, centro do Banco do Brasil Porto Alegre(Site: Archdaily) 13
Figura 1.2: Sequência da evolução do trabalho 16
Figura 2.1 Distribuição de momentos fletores de 1ª ordem para aplicação do método geral, Paula (1988); 21
Figura 2.2 Pilar sob flexão composta normal, ensaio realizado por Melo (2009); 22
Figura 2.3 Modelo para análise através do método do pilar padrão. 31
Figura 2.4 Diagrama para definição da rigidez secante proposto pela NBR 6118:2014. 34
Figura 2.5 Convenção de sinais para a relação de momentos. 36
Figura 2.6 Elementos de cálculo para caracterização de uma estrutura indeslocável, segundo o ACI 318 (2005); 37
Figura 3.1 Domínios de Estados Limites Últimos da seção, NBR 6118:2014. 40
Figura 3.2 Distribuição de deformações e tensões nos domínios 2a e 2b. 42
Figura 3.3 Seção de concreto armado submetida a momento fletor; (a) Seção transversal com sua armaduras ; (b) seção longitudinal com sua curvatura associada; (c) Conjunto de vetores das resultantes internas; 43
Figura 3.4 Diagrama tensão deformação genérico para aço submetido a ensaio de tração direta. 44
Figura 3.5 diagrama tensão-deformação para aço de armadura passiva. 45
Figura 3.6 Diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão (NBR 6118: 2014). 46
Figura 4.1 Estabilidade de barra comprimida axialmente, Fusco (1981). 47
Figura 4.2 Representação de barra submetida a uma flexo compressão normal. 48
Figura 4.3 Curva Carga x Deslocamento para uma peça sob flexão composta normal, obtido com a forma simplificada da curvatura, Fusco (1981). 49
Figura 4.4 Curva Carga x Deslocamento para uma peça sob flexão composta normal, obtido com a forma exata da curvatura; 50
Figura 4.5 Equilíbrio para peças sob flexo compressão, Fusco (1981). 51
Figura 4.6 Peça sob ação de compressão oblíqua, com destaque para as componentes da excentricidade segundo os eixos principais. 51
Figura 4.7 Visão esquemática da aplicação do método geral. 52
Figura 4.8 Visão esquemática do processo iterativo para verificação de estabilidade. 53
Figura 4.9 Visão esquemática da distribuição de curvaturas ao longo das seções da peça e da curva aproximada obtida pela interpolação. 54
Figura 4.10 Visão esquemática da curvatura obtida em primeira análise e das curvaturas paralelas aos eixos principais obtidas pela decomposição da inicial. 55
Figura 5.1 Seção de concreto armado submetida a flexão composta normal. 57
Figura 5.2 (a) deformação das fibras ao longo do trecho comprimido da peça; (b) distribuição de tensão ao longo da seção. 59
Figura 5.3 Deformação específica do eixo de uma faixa localizada em uma posição arbitrária da seção. 59
Figura 5.4 Distribuição de tensão normal no bloco de concreto devido a divisão da seção em faixas. 60
Figura 5.5 Distribuição de tensão normal no concreto comprimido com código desenvolvido, variando o número de faixas para discretização. 61
Figura 5.6 Sistema de forças equivalente as reações internas da seção. 62
Figura 5.7 Fluxograma para definição de profundidade da linha neutra e curvatura em seção

de concreto armado. 63
Figura 5.8 Curva da linha elástica e das excentricidades nas seções consideradas. 65
Figura 5.9 Fluxograma para verificação de estabilidade de pilares sob flexão composta normal. 66
Figura 5.10 Convenção utilizada no desenvolvimento da rotina. 67
Figura 5.11 Seção transversal, com destaque para a distribuição de tensões em um elemento submetido a tensão constate devido a deformação do eixo. 68
Figura 5.12 Deformação em elemento genérico de uma seção sob flexão oblíqua. 69
Figura 5.13 Resultante dos elemento e convenção de momentos e excentricidades relacionadas. 70
Figura 5.22 Fluxograma da verificação de estabilidade de pilares sob flexão composta oblíqua. 73
Figura 6.2 Seção utilizada para validação da rotina. 74
Figura 6.3 Características das seções transversais utilizadas para traçar o diagrama momento-curvatura. 75
Figura 6.4 Diagramas momento-curvatura obtidos com o código desenvolvido e apresentados por Fusco(1981). 76
Figura 6.5 Seção transversal dos pilares ensaiados por Melo (2009). 77
Figura 6.6 Da esquerda pra a direita, Macro elementos do modelo, Posicionamento das armaduras e Malha de elementos finitos; (Melo, 2009). 78
Figura 6.7 Característica do posicionamento da carga usado, e convenção de deslocamentos. Kim e Lee (2000). 79
Figura 6.8 Malha de elementos finitos MIDAS FEA, em azul o fuste do pilar e amarelo o bloco rígido. 80
Figura 6.9 Resultado dos testes em peças sob flexão composta normal. 81
Figura 6.10 Resultado dos testes nas peças sob flexão composta oblíqua. 82
Figura 6.11 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P1. 84
Figura 6.12 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P2. 84
Figura 6.13 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P3 84
Figura 6.14 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P4. 85
Figura 6.15 Diagrama carga x excentricidade total pilar B-P5. 85
Figura 6.16 Diagrama carga x excentricidade total pilar B-P6. 86
Figura 6.17 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P7. 86
Figura 6.18 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P8. 86
Figura 6.19 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P9. 87
Figura 6.20 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P10. 87
Figura 6.20 Teste de refinamento para divisões do elemento A-P4. 89
Figura 6.21 Teste de refinamento para divisões do elemento B-P6. 89
Figura 6.22 Teste de refinamento para divisões do elemento C-P10. 89
Figura 6.24 Teste de refinamento para divisões do elemento realizado por Melo (2009). 90
Figura 6.25 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10. 91
Figura 6.26 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10. 91
Figura 6.27 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10. 91
Figura 6.28 Teste de convergência de malha do modelo elementos finitos A-P4. 92
Figura 6.29 Teste de convergência de malha do modelo elementos finitos C-P10. 92
Figura 10.1 Gráfico genérico com destaque para raiz contida no intervalo [a;b]. 105
Figura 10.2 Sub-intevalos para aplicação do Método da Bisseção. 106
Figura 10.3 Intervalo reduzido para aplicação do Método da Bisseção. 106

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Resumo de referências 19
Tabela 2.2 Modelos de análise de pilares Segundo a NBR-6118 2014 29
Tabela 6.1 Comparação entre resultados obtidos com o código próprio e através de cálculo manual para seção sob flexão composta normal. 74
Tabela 6.2 Propriedades dos materiais empregados nos modelos submetidos a flexão composta normal. 78
Tabela 6.3 Propriedades dos materiais adotadas por Kim e Lee (2000). 79
Tabela 6.4 Características dos pilares utilizados para validação numérica. 83
Tabela 6.5 Cargas últimas 88
Tabela 6.6 Relação entre volume do modelo e dos elementos a-P4 93
Tabela 10.1 Valores obtidos para x e y com uso da bisseção aplicada a duas variáveis. 109

LISTA DE SIMBOLOS

f_c -Resistência do concreto a compressão

f_{ck} -Resistência característica do concreto a compressão

f_{cd} -Resistência de projeto do concreto a compressão

f_y -Tensão de escoamento do aço

f_u -Tensão última do aço

f_{yk} -Tensão característica de escoamento do aço

f_{yd} -Tensão de projeto de escoamento do aço

E -Módulo elástico

E_s -Módulo elástico do aço

E_c -Módulo elástico do concreto

A_c -Área de concreto

A_s -Área de aço

h -Altura da seção transversal

b -Largura da seção transversal

L -Comprimento do elemento

L_e -Comprimento efetivo do elemento

e -Excentricidade

e_x -Excentricidade medida ao longo do eixo x

e_y - Excentricidade medida ao longo do eixo y

e_1 -Excentricidade de primeira ordem

e_2 -Excentricidade de segunda ordem

c -Distância do eixo da armadura a borda da seção

h_{LN} -Posição da linha neutra em relação ao CG da seção

LN -Linha neutra

h_e -Posição do elemento em relação a linha neutra

d -Distância da armadura tracionada ou menos comprimida a borda comprimida

d' -Distância da armadura comprimida a borda comprimida

R_{cc} -Resultante do bloco de concreto comprimido

R_s -Resultante da linha de armadura tracionada

R'_s -Resultante da linha de armadura comprimida

$\frac{1}{r}$ -Curvatura da seção

$\frac{1}{r_x}$ -Componente da curvatura decomposta segundo o eixo x

$\frac{1}{r_y}$ -Componente da curvatura decomposta segundo o eixo y

$\frac{1}{r_\phi}$ -Curvatura na direção da orientação ϕ da linha neutra

ϕ -Inclinação da linha neutra

M_A -Momento fletor máximos no extremo de um pilar bi rotulado

M -Momento fletor

M_B -Momento fletor no extremo oposto a M_A de um pilar bi rotulado

M_C -Momento fletor no meio do pilar Engastado e livre

M_{sd} -Momento fletor externo

$M_{x,sd}$ -Momento fletor externo em torno do eixo x

$M_{y,sd}$ -Momento fletor externo em torno do eixo y

N_{sd} -Esforço normal externo

N -Esforço normal interno

M_x -Momento fletor interno em torno do eixo x

M_y -Momento fletor interno em torno do eixo y

F -Força Normal

λ -Índice de esbeltez

λ_1 -Índice de esbeltez de referência (NBR6118:2014)

α_b -Coeficiente de distribuição de esforços

σ -Tensão

σ_s -Tensão atuante no aço

ε -Deformação específica

ε_s -Deformação específica no aço

ε_{st} -Deformação específica na linha de armação tracionada

ε_{sc} -Deformação específica na linha de armação comprimida

ε_{yd} -Deformação específica referente ao início do escoamento da armadura

ε_{cc} -Deformação específica no concreto mais comprimido

ε_c -Deformação específica no concreto comprimido

$\varepsilon_{E,N}$ -Deformação específica no elemento N

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 OBJETIVO 14
1.1.1 Objetivo Geral 14
1.1.2 Objetivos Específico 15
1.2 METODOLOGIA 15
1.3 JUSTIFICATIVA 16
1.4 LIMITAÇÕES 17
1.5 ESTRUTURA DO TEXTO 17
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 19
2.1 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL 19
2.1.1 Araújo (1984) 19
2.1.2 Paula (1988) 20
2.1.3 Melo (2009) 21
2.1.4 Franco (2010) 22
2.2 FLEXÃO COMPOSTA OBLIQUA 23
2.2.1 Mavichak (1976) 23
2.2.2 Fusco (1981) 23
2.2.3 Wang e Hsu (1992) 24
2.2.4 Cadamuro (1997) 24
2.2.5 Borges (1999) 25
2.2.6 Kim e Lee (2000) 26
2.2.7 Watanabe (2011) 26
2.2.8 Araujo (2011) 26
2.2.9 Cardoso (2014) 27
2.3 BISSEÇÃO MULTIDIMENSIONAL 27
2.3.1 Harvey (1976) 27
2.3.2 Sikorski (1979) 28
2.3.3 Eiger (1984) 28
2.4 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS 29
2.4.1 NBR 6118 :2014 29
2.4.2 Eurocode2:2005 34
2.4.3 ACI 318: 2014 36
3 HIPÓTESES DE CÁLCULO E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS 39
3.1 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS 39
3.2 ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS 39
3.2.1 Domínios de deformação 40
3.2.2 Estados de deformações em serviço 43
3.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS 43
3.3.1 Aço para concreto armado 44
3.3.2 Concreto 45
4 ESTABILIDADE DE PEÇAS FLETIDAS 47
4.1 ESTABILIDADE DE BARRAS SUBMETIDAS À FLEXO COMPRESSÃO 48
4.2 MÉTODO GERAL PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO 51
5 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL 56
5.1 ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA NORMAL PELO MÉTODO GERAL. 56
5.1.1 Equilíbrio da seção transversal 56

5.1.2 Estabilidade e efeitos de segunda ordem *63*
5.2 ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA PELO MÉTODO GERAL 66
5.2.1 Equilíbrio da seção transversal *66*
5.2.2 Estabilidade e efeitos de 2ª ordem *72*
6 ANÁLISES E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO 74
6.1 ANÁLISE 01 – RELAÇÃO M,N,1r 74
6.2 VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES 76
6.2.1 Flexão composta normal *77*
6.2.2 Flexão composta oblíqua *78*
6.2.3 Resultados obtidos *81*
6.3 VERIFICAÇÃO DE CONVERGÊNCIA 88
7 CONCLUSÕES 94
REFERÊNCIAS 96
ANEXO A 98
ANEXO B 105
ANEXO C 110
ANEXO D 113
ANEXO E 129
ANEXO F 133

1 INTRODUÇÃO

Os efeitos de segunda ordem, em pilares esbeltos ou moderadamente esbeltos, têm importância decisiva no seu dimensionamento. A definição dos esforços finais nestas estruturas pode ser feita através de métodos aproximados, que podem levar a esforços maiores quando comparado aos métodos exatos, gerando uma estrutura mais onerosa. Quando mal utilizados, podem gerar esforços finais inferiores aos reais levando ao risco de colapso.

Os métodos ditos exatos, apresentam uma forma de aproximar os resultados do comportamento real da estrutura e são aplicáveis a qualquer tipo de peça. O que limita o uso desses modelos é o grande número de operações envolvidas, o que inviabiliza seu emprego, de forma sistemática, sem o auxílio de um computador. A complexidade do uso dos métodos exatos surge com a necessidade de uma consideração precisa da não linearidade geométrica, devido às deformações da peça, e da não linearidade física resultante do comportamento dos materiais. Além disso, atualmente, são poucos os programas computacionais disponíveis capazes de realizar este tipo de análise de forma prática, e este número se reduz ainda mais quando se trata da flexão composta oblíqua. A Figura 2.1 ilustra um conjunto de pilares de grande esbeltez onde uma análise sofisticada é indispensável, não sendo possível nenhuma simplificação.

Figura 2.1 Exemplo de pilar esbelto em concreto armado, centro do Banco do Brasil Porto Alegre(Site: Archdaily)

As normas de referência apresentam a necessidade do uso de métodos exatos em

alguns casos, porém, a maneira como deve ser feito é apresentado de forma muito superficial, deixando sob a responsabilidade do profissional a implementação e análise. Este fato conduz, em muitos casos, a alteração nas dimensões da peça de forma que, pela sua esbeltez, seja possível um cálculo simplificado. Este trabalho apresenta uma abordagem completa do estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares em concreto armado, fornecendo ao leitor um método acessível e encorajando o profissional a usar peças esbeltas com segurança.

O modelo de análise empregado é baseado no Método Geral, que calcula a curvatura em várias seções da peça e com isso permite avaliar a deformação do pilar. Cálculos da curvatura, posição e inclinação da linha neutra são feitos através do Método da Bisseção aplicado a múltiplas variáveis, que é uma abordagem nova neste tipo de problema. Alguns autores solucionaram este problema através da criação de um sistema de equações não lineares, onde através do emprego do método de Newton-Raphson os parâmetros internos que equilibram a seção são definidos. Este trabalho trouxe uma forma simples de determinar o equilíbrio da seção, onde não há a necessidade de definir equações, o que consequentemente faz com que não seja necessária a obtenção de derivadas parciais para aplicação dos métodos já consagrados. O emprego do Método da Bisseção, que pode ser considerado primitivo, se justifica pela ausência de equações. Os esforços internos são definidos através de um processo de discretização da seção que, utilizando os parâmetros de deformação, calcula os esforços resistentes.

Esta forma de solucionar o problema se mostrou eficiente, fornecendo resultados com um tempo de processamento inferior ao obtido em programas de elementos finitos. A não linearidade física é considerada através do comportamento obtido com o diagrama tensão deformação de cada material que compõe a seção. A entrada de dados envolve informações simples e permite ao usuário o entendimento de forma imediata. Este fato é vantajoso quando comparado ao uso de programas avançados de análise, onde a própria operação demanda grande dedicação do usuário. A validação dos resultados obtidos foi feita por meio de comparação entre diagramas carga x excentricidade final, obtidos em experimentos apresentados em outros trabalhos e através de modelos em elementos finitos.

1.1 OBJETIVO

Para um maior esclarecimento os objetivos foram agrupados em gerais e específicos e estão apresentados nos itens seguintes:

1.1.1 *Objetivo Geral*

Avaliação computacional da estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à

flexão composta oblíqua. Para fornecer ao leitor um meio de realizar este tipo de análise de forma segura e eficiente.

1.1.2 *Objetivos Específico*

Elaborar um programa computacional para verificação da estabilidade de pilares sob flexão composta oblíqua.

Realizar a validação através da comparação dos resultados, obtidos com o código computacional desenvolvido, com resultados fornecidos por ensaios e programas em elementos finitos.

Desenvolver uma metodologia onde não é necessário a solução de um sistema para determinar os parâmetros que equilibram uma seção transversal.

1.2 METODOLOGIA

O foco do trabalho foi a criação de um código computacional, em Matlab, capaz de avaliar a estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. para isso inicialmente foi feito um levantamento bibliográfico, para dar embasamento ao desenvolvimento. Posteriormente, iniciou-se a criação dos códigos computacionais com uso do Matlab. Foram feitas algumas rotinas auxiliares que serviram como base para validação do trabalho e criação de uma sequência racional de desenvolvimento com foco no objetivo final. Ao fim do desenvolvimento dos códigos, iniciou-se a validação dos resultados através de comparação com resultados experimentais e modelos desenvolvidos em elementos finitos. Na etapa conclusiva, foi exposta uma avaliação geral dos resultados obtidos, e diante disso, foi avaliada a viabilidade de uso do código desenvolvido. Também foi possível definir alguns limites onde o código desempenhou sua função de forma mais eficaz. O fluxograma da Figura 1.2, mostra de forma gráfica como se deu o desenvolvimento deste trabalho.

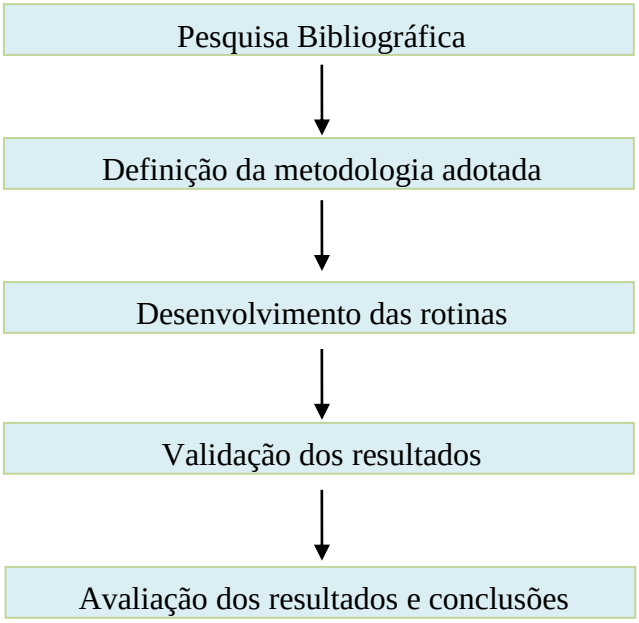


Figura 2.2: Sequência da evolução do trabalho

Dentre as rotinas auxiliares criadas, valem ser destacadas as capazes de determinar a taxa de armadura em uma seção sob flexão composta normal. As rotinas que forneciam a curvatura e posição da linha neutra para peças sob flexão composta normal e oblíqua e a rotina capaz de verificar a estabilidade de peças sob flexão composta normal.

Para a validação dos resultados obtidos com o código desenvolvido, foram feitas comparações com resultados obtidos em simulações com elementos finitos, com os programas comerciais ATENA 3D (2014) e MidasFea (2009). Resultados de ensaios realizados por Melo (2009) e por Kim e Lee (2000), também foram utilizados para atestar a eficácia do código.

1.3 JUSTIFICATIVA

Quando se faz necessário o uso do Método Geral, a norma brasileira, NBR 6118:2014, apenas indica que deve ser feita uma análise com uma discretização adequada, considerando a curvatura real em cada seção e considerando a não linearidade geométrica de forma não aproximada. Com isso surge uma lacuna de como empregar esta análise, tendo em vista que para todos os outros procedimentos são apresentadas as formulações necessárias a seu uso. Com isso o procedimento apresentado nesse trabalho é de grande importância, por permitir compreender como se desenvolve uma análise de segunda ordem, onde se deseja utilizar um método exato de cálculo e com isso realizar o correto dimensionamento e análise do elemento.

1.4 LIMITAÇÕES

Os desenvolvimentos feitos aplicam-se a peças de concreto armado submetidas à cargas de flexo-compressão normal ou oblíqua com seção transversal retangular e constante ao longo do eixo da peça. É possível que haja qualquer distribuição de armação dentro da seção. Não se aplica a pilares parede onde um dos lados da seção transversal supera cinco vezes o outro. Não existe limitação quanto à esbeltez das peças, porém os testes para validação foram feitos com valores até 140. Deve ser colocado também, que não foram feitas considerações sobre deformação lenta do concreto.

1.5 ESTRUTURA DO TEXTO

- Capítulo 2 – Neste capítulo será apresentada a revisão da literatura referente ao tema desenvolvido. Serão apresentados brevemente, buscando apontar o objeto principal do trabalho e seus pontos relevantes, os textos que deram embasamento teórico para criação do presente trabalho. Compõem também este capitulo, a apresentação das considerações feitas por normas nacionais e internacionais, a respeito da instabilidade de pilares e determinação dos efeitos de segunda ordem;
- Capítulo 3 – Neste ponto serão apresentadas as hipóteses fundamentais que norteiam o desenvolvimento dos códigos. Também será mostrado o comportamento adotado para os materiais que formam os pilares de concreto armado, este conhecimento é fundamental para compreensão da não linearidade física envolvida no problema;
- Capítulo 4 – Esta parte do texto contém as considerações a respeito da estabilidade de peças submetidas à flexão composta, apresentando condições de estabilidade e ruína. Além disso, são abordados os conceitos referentes à aplicação do Método Geral em pilares, incluindo a forma que foi utilizada neste trabalho para aplicação desta técnica;
- Capítulo 5 – Aqui são mostrados os meios usados para aplicação das técnicas vistas no capitulo anterior. Cada passo envolvido na elaboração do código está apresentado para que o leitor veja com clareza como cada etapa foi desenvolvida.
- Capítulo 6 – Após o desenvolvimento do código idealizado no início do trabalho, houve a necessidade de avaliar se os resultados produzidos estavam corretos. Nesta parte do trabalho, são apresentados os testes e validações realizados para comprovar a funcionalidade do código. Também constam aqui, os testes realizados em etapas transitórias do desenvolvimento e testes de convergência, para definir o melhor refinamento utilizado nos códigos e nos modelos de validação;

- Capítulo 7 – Nesta etapa final estão as considerações a respeito dos resultados obtidos no capítulo anterior.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção serão apresentados trabalhos desenvolvidos que tratam do assunto abordado por esta pesquisa, mostrando a evolução do tema e a sua colocação no cenário atual. Também serão apresentadas as prescrições normativas sobre o assunto, incluindo uma breve descrição dos métodos simplificados de análise apresentados pela norma brasileira. A Tabela 2.1 mostra um resumo das referências utilizadas com uma identificação simplificada do trabalho realizado

Tabela 2.1 Resumo de referências

Autor	Ano	Tipo de solicitação		Tipo de estudo		Item
		F.C.N	F.C.O	Experimental	Numérico	
Mavichak	1976	X	X	X	X	2.2.1
Fusco	1981	X	X		X	2.2.2
Araújo	1984	X		X	X	2.1.1
Paula	1988	X			X	2.1.2
Wang e Hsu	1992	X	X	X	X	2.2.3
Cadamuro	1997	X	X		X	2.2.4
Borges	1999	X	X	X	X	2.2.5
Kim e Lee	2000	X	X	X	X	2.2.6
Melo	2009	X		X	X	2.1.5
Franco	2010	X			X	2.1.6
Watanabe	2011	X	X		X	2.2.7
Araújo	2011	X	X	X	X	2.2.9
Cardoso	2014	X	X		X	2.2.10

F.C.N - Flexão composta normal

F.C.O. - Flexão composta obliqua

2.1 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

2.1.1 *Araújo (1984)*

Fez o desenvolvimento de rotinas que são capazes de realizar o dimensionamento e verificar pilares submetidos à flexão composta normal através do Método Geral. O texto também traz a apresentação dos métodos aproximados presentes na norma da época. Foram feitas comparações entre os resultados obtidos com os códigos desenvolvidos e os métodos aproximados. A validade das rotinas foi atestada através de comparação com resultados

experimentais de 17 pilares com esbeltez variando de 83 a 125.

Seus códigos apresentam como forma de determinar a curvatura da seção um processo iterativo onde se parte de um valor inicial de curvatura e com isso se calcula a posição da linha neutra. Com esses valores definidos é possível calcular o momento resistente da seção. O valor é comparado com o momento solicitante e, caso este ainda não tivesse sido atingido, o valor da curvatura é incrementado e o processo é retomado. A ruptura da seção é avaliada por meio da limitação da curvatura aos domínios de deformação que caracterizam um Estado Limite Último, neste caso, excluiu-se o domíno 1 que trata de peças tracionadas.

O procedimento para determinar os deslocamentos ao longo do pilar foi feito através da interpolação polinomial dos valores das curvaturas ao longo da peça e com isso se valeu da relação em que a curvatura é dada pela segunda derivada da linha elástica e por integração se definiu os deslocamentos transversais ao longo da peça. O autor ainda alertou para a necessidade de utilizar outros métodos em casos onde existem variações bruscas de momentos fletores ao longo do eixo da peça. Ao se tratar do dimensionamento de pilares é destacado que existe uma infinidade de soluções possíveis, mesmo para uma seção definida, que garantem o equilíbrio. Para definir a área de aço os algoritmos devem partir ao menos de uma distribuição definida da armação. Ao fim do trabalho foram apresentadas tabelas de dimensionamento que além dos dados de entrada tradicionais dependiam também da esbeltez da peça fornecendo uma ferramenta prática para dimensionamento de peças sujeitas a efeitos de segunda ordem e também verificação de estabilidade.

2.1.2 *Paula (1988)*

Apresentou a criação de diversos códigos em PASCAL para a verificação da estabilidade, determinação de carga crítica e dimensionamento de pilares. As rotinas fazem uso de métodos aproximados e exatos para análise de peças submetidas à flexão composta normal. O trabalho apresenta esclarecimentos sobre o comportamento de barras comprimidas, as hipóteses de cálculo exigidas pelos modelos apresentados e os procedimentos possíveis para análise de estabilidade.

Por fim, o autor apresenta exemplos de aplicação que serviram como validação, através da comparação com resultados presentes na literatura e os códigos desenvolvidos. Os resultados também incluíam comparação entre os métodos de verificação aproximado e exatos. Foram avaliados diagramas de iteração criados com o auxílio do Método Geral e o modelo do pilar padrão. Para aplicação do Método Geral foram admitidas duas possibilidades de distribuição de momentos de 1ª ordem ao longo da peça, como pode ser visto na Figura

2.1. Esta distribuição não influencia no cálculo aproximado, pois neste caso os efeitos de segunda ordem estão associados apenas ao momento na base do pilar que é igual nos dois casos.

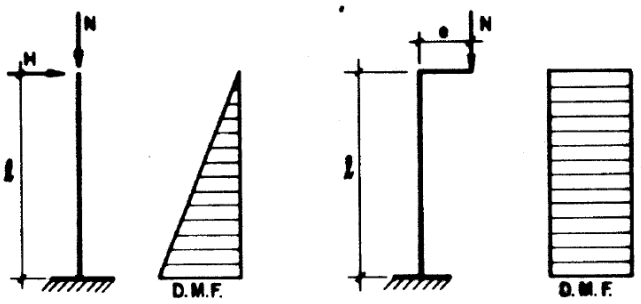


Figura 2.1 Distribuição de momentos fletores de 1ª ordem para aplicação do método geral, Paula (1988);

Esta comparação apresentou um resultado relevante, onde Método do Pilar Padrão, apresenta resultados a favor da segurança, quando comparado com o do método geral obtido através da distribuição triangular de momento fletores, e quando utilizado o diagrama retangular de momento o modelo aproximado torna-se contra a segurança. Contudo esta verificação mostrou que o uso do pilar padrão produz um resultado intermediário entre as duas situações e com isso o erro entre o método aproximado e qualquer um dos exatos é menor do que quando se comparam os dois métodos exatos.

Para avaliação da carga crítica, foi admitido um conjunto de peças onde se variava a excentricidade de 1ª ordem, a esbeltez e a taxa de armadura. Usando as rotinas que definiam as cargas críticas pelo método aproximado e exato, foram criadas tabelas com as deformações máximas obtidas e as cargas críticas.

2.1.3 *Melo (2009)*

Fez o estudo experimental e numérico de pilares em concreto armado com seção e armadura constantes, submetidos à flexão composta normal, Figura 2.2. Os parâmetros avaliados nos ensaios foram a excentricidade e a esbeltez das peças. Não foram feitas mudanças intencionais nas características dos materiais. A modelagem matemática foi feita utilizando-se códigos computacionais dentre os quais podemos destacar alguns. CACODI, elaborado em FORTRAN77 pelo professor Yosiaki Nagato (NAGATO, 1987). Esse código fornece a curvatura referente ao equilíbrio da seção a partir de um par momento fletor e esforço normal fornecido. O FLECO2C, desenvolvido pelo autor em FORTRAN90 foi utilizado para determinar os deslocamentos horizontais e as tensões no aço e no concreto,

usando como base o CACODI e o FLECO2H, que é uma variação do FLECO2C com uma alteração da relação constitutiva do concreto. Os resultados obtidos com os experimentos e os resultados computacionais apresentaram aproximação satisfatória na comparação entre deslocamento, carga de ruína, tensão no aço e no concreto. Como já foi dito os principais parâmetros analisados foram a excentricidade e comprimento da peça e foi verificado que estes guardam grande relação com a carga última dos pilares. Também fez parte do trabalho a determinação da carga de ruptura com uso do método aproximado do Pilar Padrão, segundo prescrições de algumas normas. Também deve ser destacado que o texto é composto por uma apresentação rica em detalhes de todo o trabalho desenvolvido na realização dos ensaios, servindo como orientação para outras pesquisas.

Figura 2.2 Pilar sob flexão composta normal, ensaio realizado por Melo (2009);

2.1.4 *Franco (2010)*

Fez uma análise comparativa entre os métodos aproximados propostos pela norma brasileira e as respostas exatas obtidas através do processo de Morisset. Este processo se baseia na divisão do pilar em segmentos, e através do raio de curvatura, é encontrada a deformação do topo de cada trecho, através de relações trigonométricas. Para definição do raio de curvatura foi utilizado o programa MK-UFRJ, desenvolvido pelo engenheiro Fábio

Orsini, que fornece o diagrama momento curvatura para uma seção de concreto armado. Foram feitas análises em três pilares com índices de esbeltez crescentes, onde foram aplicados os métodos aproximados e o exato. O autor constatou que os métodos simplificados que foram empregados, forneceram resultados conservadores e menos econômicos. Apenas em um dos modelos analisados, onde o uso do método aproximado levou a deslocamentos inferiores aos obtidos com o uso de um método exato, segundo o autor este resultado se deve a baixa carga axial que leva a um pequeno incremento de momento quando analisado pelo método exato.

2.2 FLEXÃO COMPOSTA OBLIQUA

2.2.1 *Mavichak (1976)*

Realizou um estudo experimental em pilares de seção retangular e parcialmente circular, as peças eram levadas até a ruptura através de um gradativo incremento na excentricidade da carga que era mantida fixa. Durante os ensaios, foram monitoradas as deflexões laterais da peça, e as deformações específicas nas faces do pilar. Seu trabalho também realizou comparações entre os deslocamentos obtidos nos ensaios e os encontrados através de modelos fornecidos pelo ACI 318-71, e com isso, foram avaliados os parâmetros que influenciavam na correlação entre os resultados. Com a realização dos experimentos se verificou que a hipótese de seções planas foi confirmada através da medida de deformações das faces da peça. O uso do valor de f_c como tensão máxima na seção levou a melhores resultados do que com o uso da tensão reduzida $0{,}85f_c$ e, além disso, o diagrama parábola retângulo, para o comportamento do concreto, foi o que apresentou melhor resultado entre a comparação dos modelos com os experimentos. Foi verificado que o ângulo de inclinação da linha neutra não é o mesmo da resultante dos momentos, e também, que o efeito da torção devido à variação do ângulo da linha neutra ao longo da altura do pilar é desprezível.

2.2.2 *Fusco (1981)*

Apresenta diversos modelos para avaliação da estabilidade de pilares em concreto armado. São explorados métodos aproximados como o Pilar Padrão com suas variações, e modelos exatos como o Método Geral. A verificação de estabilidade apresentada faz uso do processo do carregamento progressivo e excentricidade progressiva. Esses métodos permitem avaliar a carga crítica de uma peça e, mediante a comparação com as solicitações, definir se há equilíbrio. Os métodos apresentados são validos para solicitações normais e oblíquas, necessitando de alguns ajustes para cada caso particular. Em seu, texto foram apresentados

meios para determinar os parâmetros internos da seção, curvatura, posição da linha neutra e inclinação da linha neutra, baseados nos esforços solicitantes. A obtenção desses dados é fundamental para a aplicação do método do equilíbrio para verificação de uma seção. Também apresenta métodos como o da transformação de seções onde é possível transformar uma seção qualquer em uma quadrada equivalente facilitando a análise, e o processo de dimensionamento de seções “T” e quadrada, com auxílio de tabelas. Contudo, este método caiu em desuso devido ao avanço dos processos de cálculo e métodos computacionais, que permitem o cálculo sem estes artifícios. Também são apresentados alguns aspectos relacionados a métodos construtivos, pilares parede e deslocabilidade de estruturas.

2.2.3 *Wang e Hsu (1992)*

Desenvolveram um programa computacional capaz de fornecer as deformações em peças esbeltas de concreto armado, submetidas à flexão composta oblíqua. Em seu trabalho, foram consideradas duas curvas, que forneciam a relação tensão deformação do concreto. Esta consideração teve como objetivo modelar o comportamento do concreto confinado. Os resultados obtidos no programa, foram confrontados com experimentos em pilares curtos e esbeltos, para avaliar particularidades de cada caso. Seu programa fornecia a relação momento curvatura que era definida através de um modelo de incremento de cargas sucessivas. Os resultados numéricos e experimentais apresentaram boa correlação.

2.2.4 *Cadamuro (1997)*

Tratou do dimensionamento tanto de seções isoladas, no Estado Limite Último, quanto da verificação de pilares, considerando as não linearidades físicas e geométricas. Para solução das integrais que definem os esforços internos da seção, usou o processo de integração analítica, associado a divisão da peça em poligonais, nesta abordagem, o trecho comprimido da seção era dividido em trapézios onde eram feitas as integrações. A região comprimida era definida pela interseção da linha neutra com a seção original. As equações de equilíbrio eram fornecidas em função da integração das tensões ao longo da seção, para resolver estas integrais, o autor fez uso de uma solução consagrada para este tipo de problema, que consiste em aplicar o teorema de Gauss-Green para transformar as integrais de superfície em integrais de linha, que por sua vez, pode ser resolvida numericamente ou de forma analítica desde que seja definida uma função para a relação tensão deformação do concreto. Para solucionar o problema da estabilidade de pilares deve ser conhecido o estado de deformações das seções da peça, para isso o autor utiliza processos iterativos onde o estado de tensão é arbitrado e os

esforços internos são calculados e comparados com os solicitantes. Em sua abordagem ele trata separadamente cada esforço interno, buscando um estado de tensão que equilibra o esforço normal, em seguida verifica a relação com os momentos. Seu trabalho se aplica a peças poligonais com qualquer distribuição de armadura.

2.2.5 *Borges (1999)*

Fez um estudo baseado no Método Geral e do Pilar Padrão apresentado na norma vigente a época. Em seu trabalho foram comparados os resultados obtidos na análise numérica com resultados experimentais de outros trabalhos, tanto em pilares submetidos à flexão composta normal como oblíqua. Parâmetros como taxa geométrica de armadura, resistência do concreto, excentricidade e esbeltez foram monitorados e avaliados a sua influência na carga crítica das peças. Os resultados numéricos foram obtidos com o uso do conjunto de programas computacionais para análise e dimensionamento de pilares desenvolvidos por Cadamuro (1997).

Ele comenta em seu texto que os métodos de análise exatos apresentam resultados de excelente qualidade, contudo o que limita seu uso é não haver ferramentas suficientes para aplicar este método de análise. Dentre suas verificações foram feitas comparações entre as cargas últimas obtidas com o método exato, e os ensaios realizados, e foi verificado que o fator que mais gera influência sobre os resultados é a esbeltez da peça, reforçando ser este o parâmetro adotado pela norma para avaliar a suscetibilidade dos pilares a efeitos de segunda ordem. Em relação a resistência do concreto foi visto que em peças curtas há um aumento proporcional de capacidade de carga. Este efeito não é tão forte em peças esbeltas, porém o aumento da resistência do concreto em peças deste tipo leva a uma maior possibilidade de ruína por instabilidade. O emprego de concreto de alta resistência também contribuiu para o ganho de capacidade de carga em pilares com pequena excentricidade mesmo em situações onde a peça apresentava esbeltez mais elevada.

Em relação a comparação com os métodos aproximados, em um primeiro instante, foi notado que o crescimento da esbeltez, leva a um afastamento entre os resultados aproximados e exatos. Além disso, foi observado que o método do pilar padrão tem seu erro principal associado a consideração da não linearidade física de forma aproximada, não sendo identificado um grande desvio de resultados associados a consideração da linha elástica senoidal. Seu texto também destaca que durante a análise de problemas com diversos parâmetros envolvidos, como neste caso, o estudo da influência de cada um deve ser feito com a variação apenas do aspecto estudado no momento, mantendo-se os demais fixos. Por

fim o autor propõe duas equações para fazer o ajuste da carga última em peças submetidas à flexão composta normal e oblíqua. A equação relaciona a carga última de pilares com esbeltez entre 40 e 140 à carga última de uma peça compacta com mesma seção transversal.

2.2.6 *Kim e Lee (2000)*

Desenvolveram uma formulação em elementos finitos para determinar os deslocamentos em pilares de concreto armado sob flexão composta oblíqua. O código cria um modelo da seção que é discretizada em fibras, que representam o concreto e as barras de reforço. Para cada fibra é obtida a tensão através dos esforços iniciais e das relações constitutivas de cada material. Os resultados foram validados através de ensaios realizados em pilares de seção quadrada e retangular, com armadura constante, submetidos à flexão composta oblíqua. Foram comparados os valores dos deslocamentos laterais em função da carga, a direção da deformação e a carga última das peças. Os resultados numéricos apresentaram boa relação com os obtidos experimentalmente. Por outro lado o modelo numérico se mostrou muito sensível ao tamanho dos elementos utilizados, sendo necessários ajustes na tensão e no módulo de elasticidade das fibras que modelavam o concreto para adequar os resultados. As conclusões apresentadas também apontam que o fator de majoração de momentos adotado pelo ACI 318-95 estava superestimando as cargas em pilares submetidas a cargas axiais elevadas e indo contra a segurança em pilares pouco carregados. Este fato foi verificado tanto para peças sob flexão composta normal como oblíqua.

2.2.7 *Watanabe (2011)*

Elaborou um programa computacional para verificação de estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. Com uso do Método do Equilíbrio seu programa é capaz de avaliar peças com seção transversal variável ao longo da altura. O Método do Equilíbrio empregado pelo autor permite dispensar a necessidade de avaliação da carga crítica do pilar e faz o uso de um processo iterativo para determinar a curvatura, inclinação e posição da linha neutra e com isso avalia o equilíbrio da seção. A solução do sistema, que está envolvido na determinação dos parâmetros interno da seção que equilibram os esforços externos, foi feita com auxilio do método de Newton-Raphson.

2.2.8 *Araujo (2011)*

Aborda o dimensionamento e verificação da estabilidade de pilares em concreto

armado. Em uma primeira parte foi apresentado o desenvolvimento de um programa computacional capaz de verificar e realizar o dimensionamento de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. Os resultados foram validados através de comparação com resultados experimentais de diversos autores, tornando possível a comparação dos resultados do programa com mais de 120 ensaios. A formulação desenvolvida, fazia o uso de uma aplicação de elementos finitos ao pilar, que era admitido como uma barra com dois nós e as integrais que definiam o equilíbrio da seção eram resolvidas com auxílio do teorema de Green.

2.2.9 *Cardoso (2014)*

Desenvolveu um programa computacional em linguagem Java para verificação de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, utilizando técnicas numéricas para solução do problema. O programa chama-se PCalc e faz uso dos modelos apresentados pela NBR 6118:2003 para análise não linear física e geométrica de pilares. Um ponto importante no desenvolvimento do programa é o uso do modelo para consideração da não linearidade física do material, que faz uso do método apresentado pela norma, onde a rigidez equivalente é obtida através do diagrama momento curvatura da seção e considerada constante ao longo da peça, dispensando com isso a necessidade do cálculo da curvatura nas seções ao longo da peça.

2.3 BISSEÇÃO MULTIDIMENSIONAL

Esta seção apresenta trabalhos relacionados ao uso do Método da Bisseção para solução de sistemas não lineares. Esta técnica foi empregada neste trabalho para solucionar o problema da determinação dos parâmetros de deformação da seção que equilibram os esforços externos. Esta solução se apresenta como uma alternativa aos métodos que tornam necessário a criação de um sistema a partir do qual se aplica uma técnica numérica conveniente para sua solução.

2.3.1 *Harvey (1976)*

Segundo o autor, existe um grande interesse no desenvolvimento de métodos numéricos que tornem possível a solução de sistemas não lineares, sem a necessidade de derivadas parciais das equações envolvidas. Esta evolução é lenta devido a dificuldade de extensão de métodos como o da Bisseção, e da Falsa Posição para dimensões maiores. O trabalho apresenta o desenvolvimento do Método da Bisseção para a solução aproximada de

sistemas com duas dimensões.

Em uma etapa inicial é verificado se o intervalo proposto contêm uma raiz para a equação avaliada. Esta verificação é feita através de uma expansão do conceito apresentado pelo teorema de Bolzano onde o produto entre os valores da função nos extremos do intervalo é avaliado, se este valor é menor que zero, indica que o intervalo contem uma raiz. No caso da Bisseção Bidimensional é definido um polígono, onde, para cada lado, deve ser atendida a condição para uma única dimensão e com isso é definida uma região que contêm a raiz da função definida. Na sequencia do trabalho é apresentada a formulação de um algoritmo desenvolvido em Fortran para solução de sistemas não lineares com uso da técnica apresentada.

2.3.2 *Sikorski (1979)*

Desenvolveu uma expansão do Método da Bisseção para solução de sistemas não lineares com três dimensões, este trabalho constitui uma continuidade do desenvolvimento de Harvey (1976). Como em outros trabalhos, foi destacada a importância do conhecimento deste método, por não haver a necessidade do uso das derivadas parciais da equação analisada, a utilização das derivadas pode em alguns casos inviabilizar a solução do problema. O autor alerta também que em alguns casos a técnica numérica apresentada pode exigir uma grande capacidade de armazenamento do equipamento que está sendo utilizado para processar o código. No trabalho desenvolvido é apresentado o método numericamente e também de forma geométrica, trazendo mais clareza sobre o desenvolvimento do que está sendo proposto.

2.3.3 *Eiger (1984)*

Apresenta a formulação de um algoritmo para solução de sistemas de equações não lineares e contínuas. O método não necessita de derivadas da equação que se deseja obter as raízes. É necessário apenas conhecer a equação, as variáveis envolvidas na determinação do seu resultado e definir uma tolerância para localizar a raiz.

Diante destes trabalhos apresentados o código desenvolvido apresenta uma proposta inovadora onde foi utilizada uma integração numérica através da divisão da seção em quadriculas aliada a aplicação do Método da Bisseção multi dimensional para localização da solução do problema. Com isso não foi necessário desenvolver equações que relacionassem os esforços internos aos parâmetros de deformação da seção.

2.4 PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

2.4.1 *NBR 6118 :2014*

No Brasil a norma vigente que trata dos efeitos de segunda ordem em pilares é a NBR6118:2014 de projeto de estruturas de concreto armado e protendido. Nela os pilares são classificados em relação a suscetibilidade aos efeitos de segunda ordem através de sua esbeltez e a partir dai são definidos métodos e parâmetros para sua análise. No texto os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados quando a esbeltez λ da peça for inferior ao valor de λ_1 definido no item15.8.2, apresentado aqui na Equação (2.1). Para elementos que não se enquadrem nesse critério de dispensa os métodos aplicáveis são: o Método Geral ou métodos aproximados associados ao modelo do Pilar Padrão. Esses métodos serão brevemente apresentados na sequencia deste item.

A norma define o Estado Limite Último de instabilidade como a situação onde ao crescer a intensidade do carregamento e, portanto, das deformações, há elementos submetidos a flexo-compressão em que o aumento da capacidade resistente passa a ser inferior ao aumento da solicitação. A Tabela 2.2 mostra os modelos de análise propostos pela norma. É importante destacar que um método aplicável a uma dada esbeltez aplica-se sem restrição a elementos mais curtos.

Tabela 2.2 Modelos de análise de pilares Segundo a NBR-6118 2014

Esbeltez da peça	Método admitido
$\lambda < \lambda_1$	Dispensa análise local dos efeitos de segunda ordem
$\lambda_1 \leq \lambda \leq 90$	Pilar padrão com curvatura aproximada ou rigidez κ aproximada
$90 < \lambda \leq 140$	Pilar padrão com curvatura real
$140 < \lambda \leq 200$	Método geral
$\lambda > 200$	Admitido apenas para elementos pouco comprimidos com força normal inferior a $0{,}10\, f_c A_c$

O valor de λ_1 pode ser calculado pela expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12{,}5\frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad (2.1)$$

Onde:

$35 \leq \lambda_1 \leq 90$

E o valor de α_b depende da natureza da ação e as condições de contorno relacionadas como pilar.

Para pilares bi rotulado sem cargas transversais:

$$\alpha_b = 60 + 0{,}40\frac{M_B}{M_A} \geq 0{,}40 \quad (2.2)$$

Sendo:

$1{,}0 \geq \alpha_b \geq 0{,}4$

M_A e M_B são os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar. Deve ser adotado para M_A o maior valor absoluto ao longo do pilar e para M_B o sinal positivo, se tracionar a mesma face de M_A, e negativo caso contrário.

Para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0{,}80 + 0{,}20\frac{M_C}{M_A} \geq 0{,}85 \quad (2.3)$$

Sendo:

$1{,}0 \geq \alpha_b \geq 0{,}85$

M_A é o momento de 1ª ordem no engaste e M_C no meio do pilar.

Para uma melhor compreensão dos processos de análise será feita uma breve descrição dos modelos simplificada que estão na Tabela 2.2.

2.4.1.1 Pilar padrão com curvatura aproximada

O Pilar Padrão é uma peça engastada-livre com flecha proporcional a curvatura da base. Este método é válido para análise de pilares com as mesmas condições de contorno e também com outros vínculos, sendo necessário fazer com que o modelo tenha o mesmo comprimento equivalente da peça analisada. A Figura 2.3 mostra a peça considerada neste método.

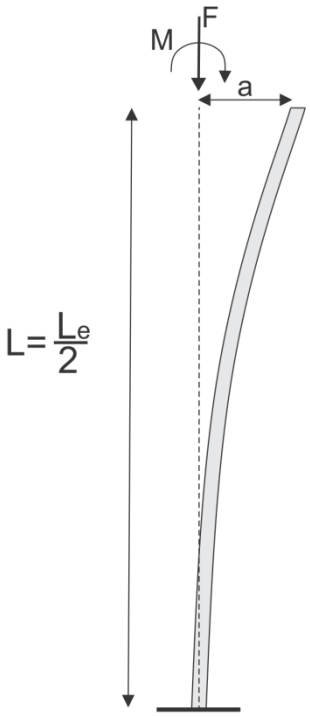


Figura 2.3 Modelo para análise através do método do pilar padrão.

É admitida, neste modelo, uma linha elástica senoidal como definido na equação seguinte:

$$y = -a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{2.4}$$

Assim a deformação no topo da peça está associada à curvatura máxima na base da peça e é fornecida pela Equação (2.5).

$$a = \frac{L_e^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{r}\right)_{base} \tag{2.5}$$

Sendo a excentricidade final dada por:

$$e_f = a + \frac{M}{F} \tag{2.6}$$

Devido às premissas de cálculo este método se aplica apenas a peças com seção transversal e armadura constante ao longo do seu comprimento e contempla de forma aproximada a linearidade física do material.

Como pode ser visto na Equação (2.5), um ponto crucial para definir a deflexão no topo da peça e conhecer qual a curvatura na seção critica. Com isso surgem as variações do Método do Pilar Padrão. Para o uso do Pilar Padrão com curvatura aproximada, a curvatura $\frac{1}{r}$

é definida através das deformações especificas na fibra de concreto mais comprimida e na barra mais tracionada como mostrado na Equação (2.7).

$$\frac{1}{r} = \frac{|\varepsilon_c| + |\varepsilon_s|}{d} \tag{2.7}$$

Em peças submetidas à flexão composta o esforço normal deve ser considerado na determinação da curvatura sendo seu valor dado pela Equação (2.8).

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{(\upsilon + 0{,}5)h} \tag{2.8}$$

Onde υ é o valor adimensional da força normal

$$\upsilon = \frac{F}{bhf_{cd}} \tag{2.9}$$

Sendo

b a largura da seção

h altura total da seção

d altura útil da seção

A proposta da curvatura aproximada admite, de forma conservadora, que a curvatura tem o maior valor possível. Com as deformações especificas no aço tracionado e fibra mais comprimida assumindo seus valores máximos.

$\varepsilon_c = 0{,}0035$ e $\varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$

Para o aço CA-50 o numerador da Equação (2.8) assume o valor de 0,00557, fornecendo o seguinte valor para a curvatura da peça:

$$\frac{1}{r} = \frac{0{,}005}{(\upsilon + 0{,}5)h} \tag{2.10}$$

Assim, aplicando na Equação (2.5), fica definida a excentricidade de segunda ordem como:

$$e_2 = \frac{L_e^2}{\pi^2}\frac{0{,}005}{(\upsilon + 0{,}5)h} \tag{2.11}$$

2.4.1.2 Pilar padrão com rigidez κ (capa) aproximada

Uma outra alternativa de processo simplificado é o Pilar Padrão com uso da curvatura κ (capa). Neste método são feitas considerações de maneira aproximada da não linearidade física e geométrica do problema. Como no modelo proposto no item anterior também admite uma linha elástica senoidal para o pilar, o valor do momento total na base da peça é dado pela

Equação (2.12).

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120\frac{\kappa}{\nu}}} \tag{2.12}$$

Sendo a rigidez adimensional κ :

$$\kappa = 32\left(1 + 5\frac{M_{d,tot}}{hN_d}\right)\nu \tag{2.13}$$

A rigidez aproximada depende do próprio valor de $M_{d,tot}$ de forma que em geral se faz uso de um processo interativo para definir seu valor, porém a experiência mostra que mesmo por tentativas o valor rapidamente converge, permitindo o uso deste método para cálculos manuais.

$M_{1d,A}$ é o valor do momento de 1º ordem no engaste;

e

$$\alpha_b = 0{,}80 + 0{,}20\frac{M_C}{M_A} \quad ; \quad 0{,}85 \leq \alpha_b \leq 1{,}00 \tag{2.14}$$

Sendo M_A o momento de primeira ordem no engaste e M_C o momento de primeira ordem no meio do pilar.

Vale destacar que neste método, diferente do anterior, já é tomado na definição da curvatura a contribuição dos esforços externos existentes, com isso é esperado obter resultados com melhor aproximação da situação real e possivelmente mais econômicos.

2.4.1.3 Pilar padrão acoplado ao diagrama $M, N, {}^{1}/_{r}$

A forma mais refinada de utilizar o modelo do Pilar Padrão é com o uso do diagrama $M, N, \frac{1}{r}$. Nesta avaliação dos efeitos de segunda ordem é mantida a formulação utilizando a rigidez κ, porém seu valor é calculado com o uso do diagrama momento curvatura proposto pela NBR 6118:2014 mostrado na Figura 2.4.

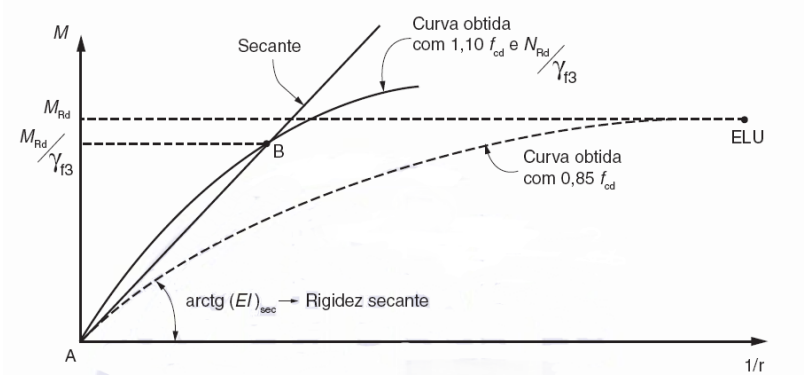


Figura 2.4 Diagrama para definição da rigidez secante proposto pela NBR 6118:2014.

A rigidez e dada pela Equação (1.15)

$$\kappa = \frac{(EI)_{sec}}{(A_c\, h^2\, f_{cd})} \tag{2.15}$$

Em relação à flexão obliqua, a norma admite que para peças com esbeltez até 90 podem ser aplicados os métodos apresentados de forma independente em cada direção para determinar os efeitos de segunda ordem. Com a composição final dos esforços devem ser verificadas ao menos três seções da peça quanto as solicitações encontradas.

2.4.1.4 Método geral

Ao mencionar o método geral a NBR 6118:2014 limita-se apenas a seguinte explicação:

> Consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada. (NBR 6118:2014, p109)

Com isso fica sob responsabilidade do engenheiro aplicar o método de forma correta.

2.4.2 *Eurocode2:2005*

Exige a análise considerando os efeitos de segunda ordem em pilares com esbeltez superior ao valor limite dado pela Equação (2.16)

$$\lambda_{lim} = \frac{20\, A\, B\, C}{\sqrt{n}} \tag{2.16}$$

Onde

$$A = \frac{1}{1 + 0{,}2\, \varphi_{ef}} \tag{2.17}$$

$$B = \sqrt{1 + 2\omega} \quad (2.18)$$

$$C = 1{,}7 - r_m \quad (2.19)$$

com

φ_{ef} -Coeficiente de fluência

ω -Taxa mecânica de armadura

n -Esforço normal reduzido

r_m -Relação entre os momentos de 1ª ordem nos extremos da peça.

O código também permite que seja desconsiderado o efeito da fluência em peças que atendam aos seguintes critérios simultaneamente:

$\varphi_{ef} \leq 2$

$\lambda \leq 75$

$\frac{M_{0ed}}{N_{ed}} \geq h$

Onde M_{0ed} é o momento de primeira ordem e h é a altura da seção na direção considerada.

Para determinação dos efeitos de segunda ordem o Eurocode2:2005 apresenta o uso de modelos simplificados baseados na determinação de uma rigidez equivalente da peça e também pelo cálculo da curvatura de uma seção crítica.

O método da rigidez equivalente é admitido para análise de peças isoladas e também pode ser aplicado a todos os membros de uma estrutura, para realização de uma análise não linear global simplificada. Para uso deste modelo se faz necessário uma correta estimativa da rigidez. Esta rigidez equivalente apresentada pela referida norma engloba os efeitos da fissuração, fluência e não linearidade do material.

Uma outra alternativa apresentada é o uso do método baseado na curvatura. Esta opção só deve ser empregada em elementos isolados com força normal constante ao longo do seu eixo e com comprimento efetivo definido. Este método de cálculo aproximado dos efeitos de segunda ordem faz uso da curvatura e do comprimento do elemento para determinar os momentos finais baseado nos deslocamentos da peça.

O Método Geral é descrito como sendo baseado em uma análise não linear onde deve ser levado em conta a não linearidade geométrica e as curvas tensão-deformação relativas ao aço e ao concreto. Os efeitos da fluência também devem ser considerados nos cálculos.

2.4.3 *ACI 318: 2014*

Traz um modelo baseado nos esforços iniciais da peça para estimar as solicitações de segunda ordem de forma aproximada. Também permite que sejam desconsiderados os esforços de segunda ordem em peças, pertencentes a estruturas de nós indeslocáveis, onde a esbeltez atende a seguinte relação:

$$\lambda \leq 34 - \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \tag{2.20}$$

Onde M_1 e M_2 são os momentos atuantes nas extremidades da peça analisada. Obtidos através de uma análise elástica que leve em conta as cargas axiais, a fissuração e a duração das ações. Para essa análise pode ser utilizado valores reduzido de inércia à flexão para levar em consideração a fissuração existente na peça.

M_1 deve ser tomado como o menor dos valores e a relação $\frac{M_1}{M_2}$ não deve ser inferior a $-0{,}5$.

O sinal da relação entre momentos é obtido em função das curvaturas da peça. Para elementos com curvatura dupla a relação tem sinal negativo e para curvatura simples o sinal é positivo, Figura 2.5.

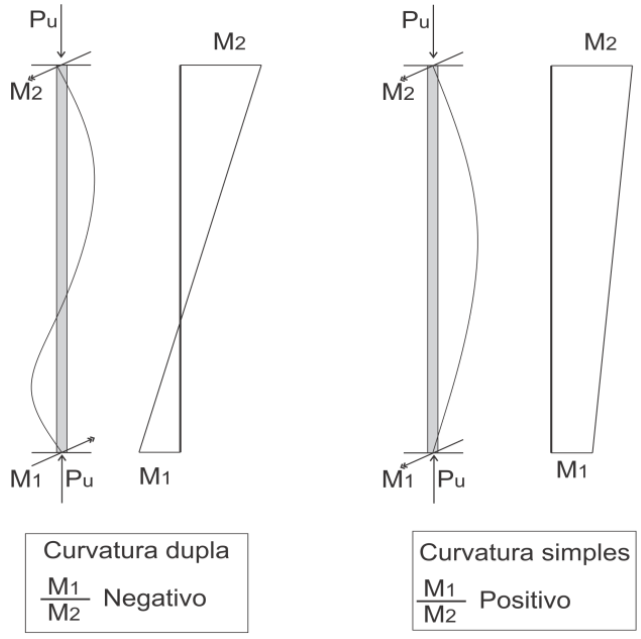


Figura 2.5 Convenção de sinais para a relação de momentos.

Para pilares com esbeltez máxima de 100, pertencentes a estruturas de nós fixos, é possível de forma aproximada definir o valor do momento máximo com:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \tag{2.21}$$

Onde

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0{,}75\ P_c}} \tag{2.22}$$

P_c é a carga crítica de Euler para a coluna analisada

$$P_c = \frac{\pi^2\ EI}{(k\ l_u)^2} \tag{2.23}$$

C_m é definido pela equação abaixo:

$$C_m = 0{,}6 + 0{,}4\frac{M_1}{M_2} \geq 0{,}4 \tag{2.24}$$

O sinal da relação de momentos segue a convenção já apresentada. Para elementos sujeitos a cargas transversais C_m deve ser tomado igual a 1.

P_u é o valor da carga normal de dimensionamento.

Segundo o ACI 318:2005 as estrutura que podem ser classificadas como indeslocáveis deve ter o valor de Q, definido na Equação (2.25), inferior a 0,05

$$Q = \frac{\sum P_u\ \Delta_0}{V_u\ l_c} \tag{2.25}$$

Onde $\sum P_u$ e V_u representam os esforços verticais e horizontais totais do pavimento respectivamente e Δ_0 é o deslocamento de primeira ordem, relativo entre a base e o topo dos níveis considerados, a Figura 2.6 apresenta graficamente os elementos definidos na Equação (2.25).

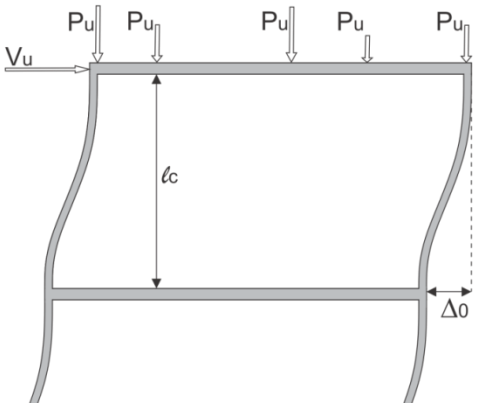


Figura 2.6 Elementos de cálculo para caracterização de uma estrutura indeslocável, segundo o ACI 318 (2005);

No caso da estrutura não ser caracterizada como indeslocável, ainda é possível desprezar efeitos de segunda ordem quando a esbeltez do elemento for inferior a 22. Caso se faça necessário o cálculo dos esforços de segunda ordem os valores dos momentos nos extremos da peça são dados pelas equações seguintes:

$$M_1 = M_{1\,ns} + \delta_s M_{1\,s} \tag{2.26}$$

$$M_2 = M_{2\,ns} + \delta_s M_{2\,s} \tag{2.27}$$

Onde M_{ns} são os momentos nos extremos do pilar obtidos em uma análise linear de primeira ordem e o valor adicional de momento é dado pela equação seguinte:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - Q} \tag{2.28}$$

Caso o valor de δ_s obtido com a Equação (2.28) exceda 1,5 é indicado fazer uma análise com a redução da rigidez a flexão dos elementos de concreto, com os valores indicados no item 10.11.1 da norma. Ou usar a equação indicada abaixo:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0{,}75 \sum P_c}} \tag{2.29}$$

Onde P_u e P_c já foram definidos.

$\delta_s M_s$ são os valores de momento devido a uma análise global elástica de segunda ordem considerando a rigidez reduzida dos elementos como forma de consideração da não linearidade física de forma aproximada.

3 HIPÓTESES DE CÁLCULO E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Neste capítulo serão apresentadas as considerações que possibilitam a realização dos cálculos que determinam a estabilidade de pilares. Estas considerações englobam as hipóteses envolvidas nas verificações, o comportamento relativo aos materiais e critérios que definem situações como a ruptura da peça. Essas premissas são de fundamental importância pois com isso é definido um padrão de comportamento sem o qual seria inviável o desenvolvimento das análises.

3.1 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

Em todo o desenvolvimento do trabalho, incluindo os modelos matemáticos e nas rotinas computacionais, são obedecidas as seguintes definições:

● Seções planas: As seções da peça de concreto permanecem planas até atingir o Estado Limite Último;

Esta premissa nos permite considerar a distribuição de deformação, paralelas as fibras do material, linear ao longo da altura da seção sendo proporcional à distância da linha neutra.

● Resistência à tração do concreto é nula, apenas a armadura resiste aos esforços de tensão que possam surgir na seção;

Mesmo existindo a resistência a tração, esta consideração é válida para os modelos de dimensionamento de peças em concreto. Levando a resultados a favor da segurança por desprezar a parcela de resistência da seção tracionada.

● Pequenos deslocamentos: os deslocamentos provocados pelos esforços nas peças são pequenos diante das dimensões preponderantes do elemento, de forma que uma ação que atua em uma determinada direção em relação ao eixo da peça pode ser considerada atuando assim durante toda a análise do problema;

● Aderência perfeita: admite-se que a ligação entre aço e concreto é perfeita e com isso a deformação específica em um determinado ponto é igual para o aço e para o concreto que o envolve.

3.2 ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS

Segundo a NBR 6118:2014 o estado-limite último é aquele relacionado ao colapso ou a qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação, no todo ou em parte da estrutura.

A ruptura de peça de concreto armado é caracterizada pelo esmagamento do concreto

ou alongamento excessivo da armadura, este segundo não gera um rompimento da peça Porém quando atingido surge uma intensa fissuração na região tracionada levando a um Estado Limite Último. Essas condições de ruína podem ocorrer de forma independente ou simultaneamente.

Com o intuito de caracterizar a ruína do elemento foram atribuídos limites de deformação para o aço e concreto, que, quando atingidos, definem o esgotamento do material. O limite para o concreto sob compressão é a deformação que esta no intervalo $2‰ \leq \varepsilon_{cc,max} \leq 3{,}5‰$. Para o aço sua capacidade é considerada esgotada com uma deformação específica superior a $\varepsilon_{s,max}=10‰$

A Figura 3.1 apresenta os domínios de deformação aos quais uma seção de concreto armado pode ser submetida. Esses domínios definem estados de deformação da seção, e através do conhecimento do domínio de deformação que a seção está enquadrada pode ser definido um conjunto de solicitações e parâmetros característicos. A ruína é caracterizada pelos critérios apresentados por Fusco (1981), onde a ruptura é atingida quando ultrapassado um dos pontos referentes a uma deformação especifica de 10‰ no aço, 3,5‰ na fibra superior do concreto ou 2‰ nas fibras do concreto localizadas a $\frac{3}{7}$h, ponto C.

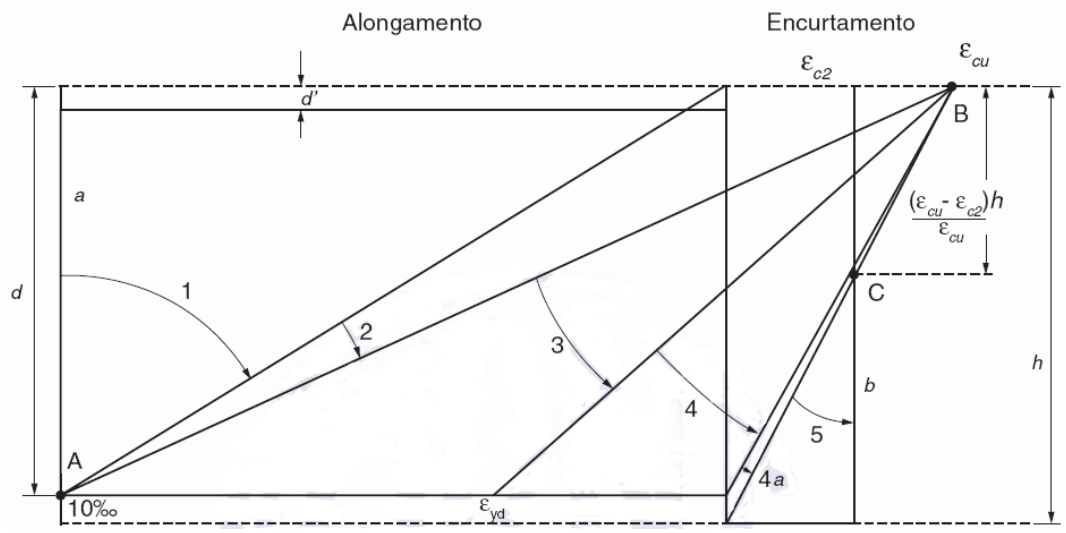


Figura 3.1 Domínios de Estados Limites Últimos da seção, NBR 6118:2014.

3.2.1 Domínios de deformação

•Domínio 1:

A seção encontra-se totalmente tracionada, e a ruptura ocorre com o alongamento de 10‰ na camada de armadura mais solicitada. Não há nenhuma resistência atribuída ao concreto que é admitido completamente fissurado sendo todo esforço externo absorvido pelo

aço que se encontra sempre tensionado. Este domínio não se aplica ao problema tratado nesse trabalho, sendo seu conhecimento aplicado a barras de concreto armado sob esforço de tração ou flexo-tração com pequena excentricidade.

•Domínio 2:

É caracterizado por um alongamento de 10‰ na armadura mais tracionada. Porém, diferente do domínio 1, a linha neutra já cruza a seção gerando um região comprimida. O domínio 2 pode ser sub dividido em 2a, onde armadura comprimida é muito pouco solicitada. E o domínio 2b onde já existe um intenso processo de pseudo escoamento do concreto devido a micro fissuras e há um aproveitamento melhor da armação comprimida. A diferenciação desses subdomínios é dada pela deformação específica no concreto mais comprimido sendo $0‰ \leq \varepsilon_{cc,max} \leq 2‰$ característico do trecho 2a e para $2‰ < \varepsilon_{cc,Max} < 3{,}5‰$ caracteriza o 2b. No segundo trecho a tensão máxima no concreto tem seu valor limite de $0{,}85f_{cd}$. A ruptura nesse domínio acontece após deformações pronunciadas, devido ao grande alongamento da armadura.

O valor limite para a profundidade da linha neutra nos dois casos pode ser obtida rapidamente por semelhança de triângulos e em função da altura útil da seção temos para o domínio 2a e 2b respectivamente:

$$x_{max,2a} = \frac{1}{6} d \tag{3.1}$$

$$x_{max,2b} = \frac{3{,}5}{13{,}5} d \tag{3.2}$$

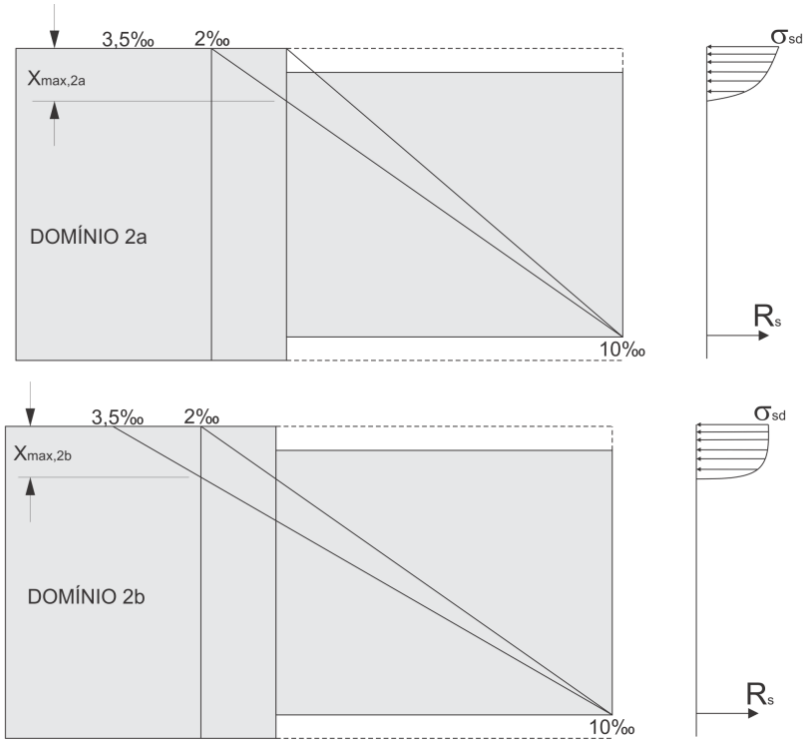


Figura 3.2 Distribuição de deformações e tensões nos domínios 2a e 2b.

Nos domínios 3, 4, 4a e 5 a linha neutra tem profundidade máxima respectivamente: $\frac{3,5}{3,5+\varepsilon_{yd}} d$; d; h e indefinida.

•Domínio 3:

Neste domínio a ruptura ocorre com o encurtamento limite do concreto de 3,5‰ em paralelo com o escoamento da armadura, sendo o domínio onde os materiais são mais bem aproveitados e há um rompimento dúctil da peça, que devido ao escoamento do aço gera deformações pronunciadas. A linha neutra também cruza a seção neste caso. Os domínios 2 e 3 são ditos subarmados e normalmente armado, respectivamente, devido ao fato de haver o escoamento da armadura antes da ruptura, esses domínios devem ser buscados quando se dimensiona peças à flexão devido ao "anúncio" da ruptura pelas deformações e formação de fissuras na peça.

•Domínio 4:

Definido também por uma deformação especifica de 3,5‰ no concreto, nesse domínio a armadura não chega à deformação de início de escoamento, gerando uma ruptura brusca devido ao esmagamento do concreto sem que surjam deformações apreciáveis. Este tipo de situação deve ser evitada em peças de concreto armado, e a seção é dita superarmada.

•Domínio 4a:

É um domínio de transição onde a linha neutra ainda cruza a seção, porém toda a

armadura encontra-se comprimida o único trecho tracionado é o cobrimento da armadura menos solicitada, que está com tensão praticamente nula. A ruptura ocorre pelo esmagamento do concreto.

•Domínio 5:

Neste domínio a seção encontra-se totalmente comprimida ocorrendo a ruptura com uma deformação que pode variar de 3,5‰ com a linha neutra em uma posição imediatamente após o domínio 4a até 2‰ no caso de compressão uniforme. Em todos os casos é notável que a deformação específica no ponto C, localizado a $\frac{3}{7}$h da fibra mais comprimida, não ultrapassa 2‰ e a linha definida pela curvatura da seção gira em torno do ponto C.

3.2.2 *Estados de deformações em serviço*

É possível que ao se analisar uma seção os esforços externos levem a uma situação de deformação que não seja o Estado Limite Último, não podendo ser caracterizada por nenhum dos domínios. Este fato é comumente observado quando se busca os parâmetros internos de uma seção que equilibre os esforços externos. Enquanto a seção não atingir um estado limite último as deformações da seção possivelmente não estarão em nenhum dos domínios pré-estabelecidos.

3.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Usualmente, para peças de concreto armado, a resistência à tração do concreto, mesmo existindo, é desprezada, sendo toda a parcela do esforço que causa tração absorvida pela armadura. A Figura 3.3 mostra o arranjo de forças típico para uma seção em concreto armado resistindo a um momento externo.

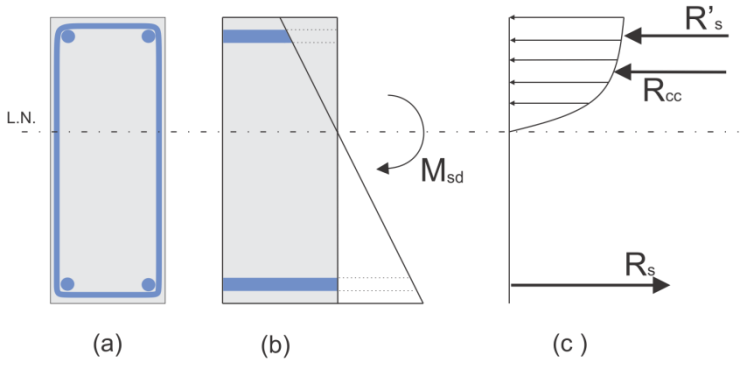


Figura 3.3 Seção de concreto armado submetida a momento fletor; (a) Seção transversal com sua armaduras ; (b) seção longitudinal com sua curvatura associada; (c) Conjunto de vetores das resultantes internas;

A parcela de reação do concreto, R_{cc}, é a resultante de um bloco com tensão que varia em função da deformação de cada fibra. Essa força atua em conjunto com as resultantes de forças referente as camadas de aço comprimido, R'_s, e tracionado, R_s, esse sistema de forças deve equilibrar as ações externas sem que haja ruptura da seção para a peça está estável. A forma com que essas reações são definidas depende do comportamento de cada material que será apresentado nas seções seguintes.

3.3.1 *Aço para concreto armado*

O aço aplicado em peças de concreto armado é considerado submetido a solicitações puras de compressão e/ou tração. Apresenta o mesmo comportamento nos dois casos, desde que excluídos os efeitos de flambagem, situação que deve ser obrigatoriamente garantida no dimensionamento. Para o aço aplicável a esse estudo o ensaio de tração simples fornece um trecho elástico até um determinado ponto onde com o aumento da carga o limite de proporcionalidade é ultrapassado, e inicia-se o processo de escoamento onde as deformações aumentam sob tensão constante. Continuando a aplicação da carga por efeito do encruamento é observado um acréscimo de resistência, que em geral é desprezada, e por fim a ruptura do elemento. Na Figura 3.4 está apresentado um diagrama típico para o comportamento do aço. Esse comportamento pode variar em função das ligas usadas no processo de produção.

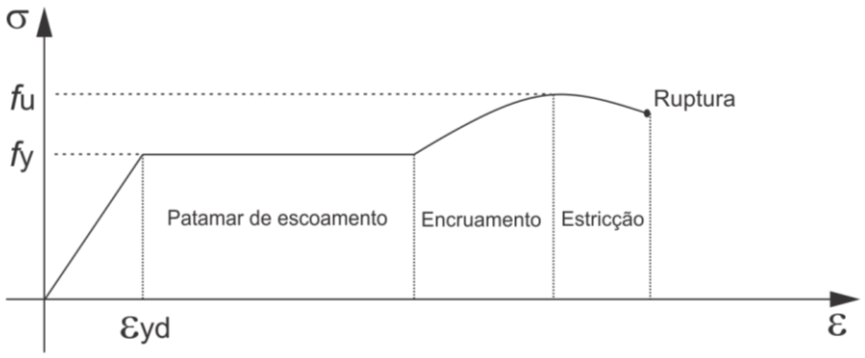


Figura 3.4 Diagrama tensão deformação genérico para aço submetido a ensaio de tração direta.

Em armadura passiva de estruturas de concreto armado, o aço tem seu comportamento, para propósito de dimensionamento, sintetizado em um diagrama bilinear. O diagrama proposto apresenta um trecho elástico até a tensão escoamento e a partir desse ponto escoa até o alongamento ultimo sem haver incremento na sua tensão. A Figura 3.5 apresenta o diagrama apresentado pela NBR 6118:2014.

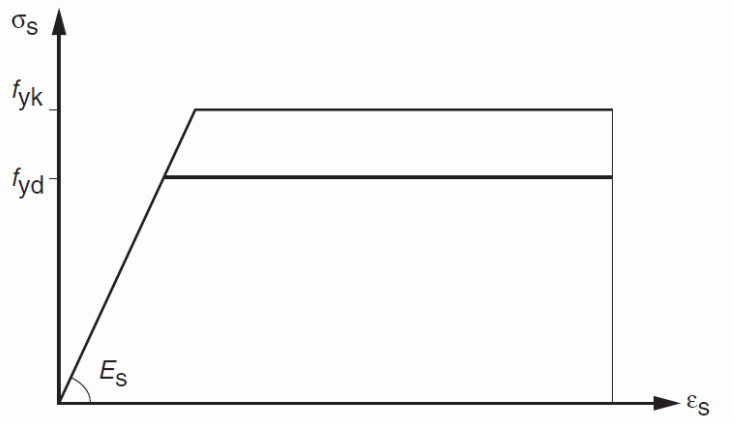


Figura 3.5 diagrama tensão-deformação para aço de armadura passiva.

Neste caso, tanto para o aço comprimido quanto para o tracionado, os valores da tensão, e força resultante na linha de armadura, são obtidos deste diagrama.

A tensão é dada por:

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s \qquad \text{Se} \qquad \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \tag{3.3}$$

$$\sigma_s = f_{yd} \qquad \text{Se} \qquad \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \tag{3.4}$$

Sendo ε_{yd} a deformação de inicio de escoamento encontrada por:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \tag{3.5}$$

A força resultante é obtida diretamente por:

$$R_s = \sigma_s A_s \tag{3.6}$$

Sendo A_s a área de aço na linha analisada.

3.3.2 *Concreto*

O concreto apresenta comportamento não linear caracterizado por um diagrama parabólico até uma deformação ε_{c2}, onde a partir da qual surge um comportamento linear, mas não proporcional, com um patamar de escoamento fictício até uma deformação ultima ε_{cu}. Este diagrama é representativo para concreto submetido à compressão, Figura 3.6.

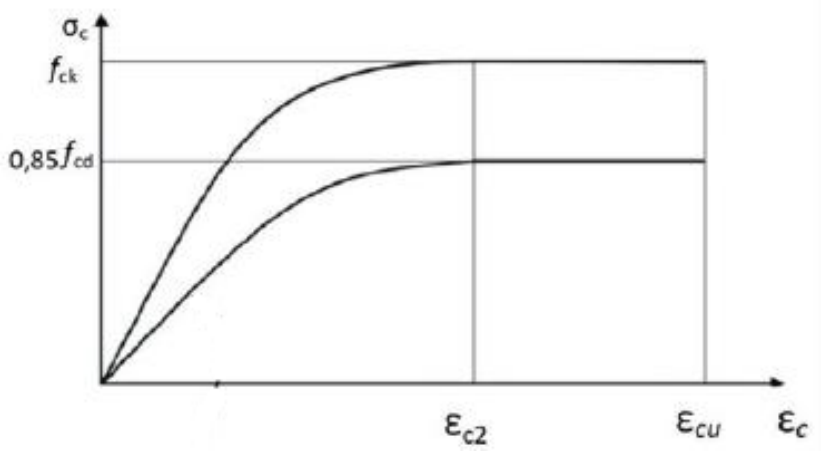


Figura 3.6 Diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão (NBR 6118: 2014).

A tensão no trecho parabólico é dada por:

$$\sigma_c = 0{,}85 f_{cd}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \quad (3.7)$$

Com

$$n = 2 \quad \text{Para} \quad f_{ck} \leq 50\text{MPa} \quad (3.8)$$

$$n = 1{,}4 + 23{,}4\left[\frac{90 - f_{ck}}{100}\right]^4 \quad \text{Para} \quad f_{ck} > 50\text{MPa} \quad (3.9)$$

Para concreto classe até C50:

$\varepsilon_{c2} = 2{,}0‰$

$\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$

Para concreto classe C55 até C90:

$\varepsilon_{c2} = 2{,}0‰ + 0{,}085‰ (f_{ck} - 50)^{0,53}$

$\varepsilon_{cu} = 2{,}6‰ + [(90 - f_{ck})/100]^4$

4 ESTABILIDADE DE PEÇAS FLETIDAS

A análise da estabilidade de peças comprimidas tem como objetivo avaliar se para uma determinada carga aplicada, a peça apresenta um configuração deformada onde todas as seções são capazes de resistir aos esforços externos, ou alguma seção rompe. Quando ha ruptura de alguma das seções se verifica que a peça não atinge o equilíbrio para o conjunto de esforços avaliados.

Quando se trata da estabilidade de peças comprimidas surge imediatamente a idéia do fenômeno da flambagem. Este processo é caracterizado pela perda de equilíbrio de uma peça sob compressão centrada. Neste caso o eixo da peça permanece retilíneo e a partir de certo valor de carga, denominado carga crítica, a forma reta da linha elástica não é mais possível. A peça não é capaz de suportar às ações externas e o equilíbrio torna-se instável. Surgem grandes deslocamentos, mesmo com um pequeno acréscimo de carga, como está mostrado na Figura 4.1.

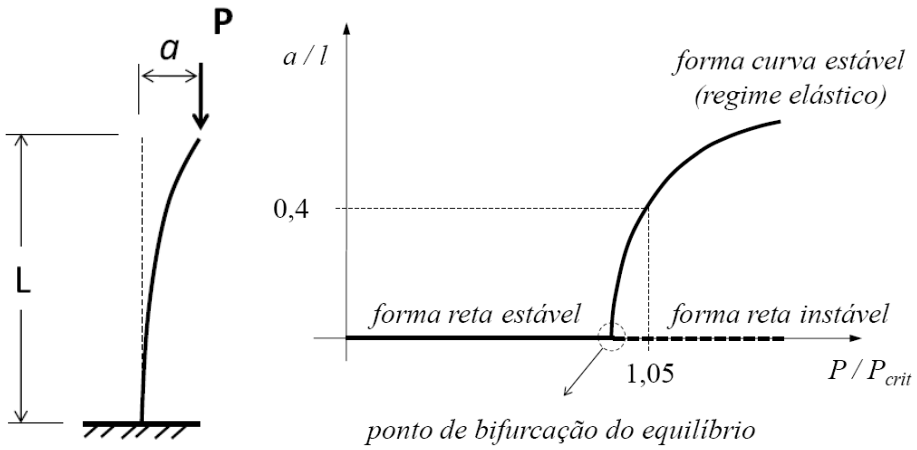


Figura 4.1 Estabilidade de barra comprimida axialmente, Fusco (1981).

Em peças submetidas a esforços de compressão e momentos combinados, para qualquer valor de esforço externo já surgem deformações ao longo da peça. Com isso a ruptura causada pela flambagem dá lugar à perda de equilíbrio devido aos efeitos de segunda ordem. A instabilidade de pilares de concreto armado é um Estado Limite Último de perda de equilíbrio proveniente de um esforço adicional gerado pela ação das cargas verticais sobre a estrutura deformada. Essas ações são chamadas de efeito de segunda ordem. Segundo Chust (2013), os efeitos de segunda ordem são aqueles que se somam aos obtidos numa análise de

primeira ordem (em que o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial), quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada.

4.1 ESTABILIDADE DE BARRAS SUBMETIDAS À FLEXO COMPRESSÃO

Em uma barra submetida a uma compressão excêntrica, a flecha existe para qualquer valor de carga, podendo seu valor ser determinado com uso da forma simplificada ou completa da equação da curvatura, dada pela Resistência dos Materiais e apresentadas nas Equações (4.1) e (4.2).

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{4.1}$$

Supondo que as estruturas analisadas neste tipo de problema apresentam deslocamentos e rotações muito pequenas é possível admitir que o quadrado da rotação seja desprezível.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0$$

Assim a Equação (4.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{4.2}$$

A Figura 4.2 ilustra uma barra com uma carga vertical aplicada a uma distância e_1 do seu eixo.

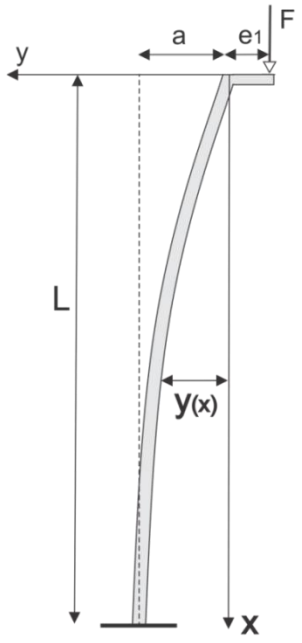


Figura 4.2 Representação de barra submetida a uma flexo compressão normal.

Nesta situação o momento externo em uma seção qualquer é dado pela equação abaixo:

$$M_{ext} = F(e_1 + y) \tag{4.3}$$

E o momento interno pode ser admitido como

$$M_{int} = EI\frac{1}{r} \tag{4.4}$$

Dividindo a Equação (4.3) pela rigidez à flexão da barra EI e usando a notação da Equação (4.4) é possível escrever:

$$\frac{1}{r} + k^2 y = -k^2 e_1 \tag{4.5}$$

Sendo k^2 já definido como:

$$k^2 = \frac{F}{EI} \tag{4.6}$$

A Equação (4.5), mesmo utilizando a notação simplificada da curvatura permite, por ter o segundo membro, o cálculo da flecha. Porém com esta simplificação sugere uma ideia errada de que a carga crítica tem influência na flexão composta normal devido a um comportamento do deslocamento pela carga, como o apresentado na Figura 4.3.

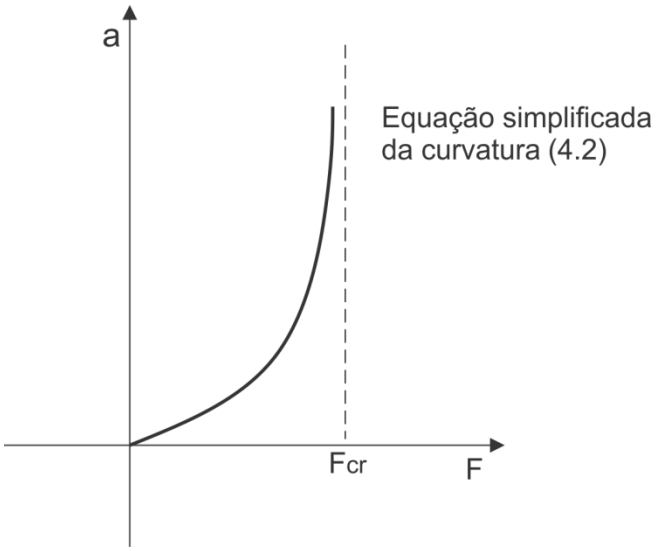


Figura 4.3 Curva Carga x Deslocamento para uma peça sob flexão composta normal, obtido com a forma simplificada da curvatura, Fusco (1981).

Se empregada a Equação (4.1) fica evidente a existência de uma configuração fletida possível além da carga crítica. Esta configuração é estável para qualquer valor de carga, até a ruptura do material, como mostrado na Figura 4.4. É possível afirmar que para o material estando dentro do regime elástico sempre vai haver uma configuração estável na flexão

composta.

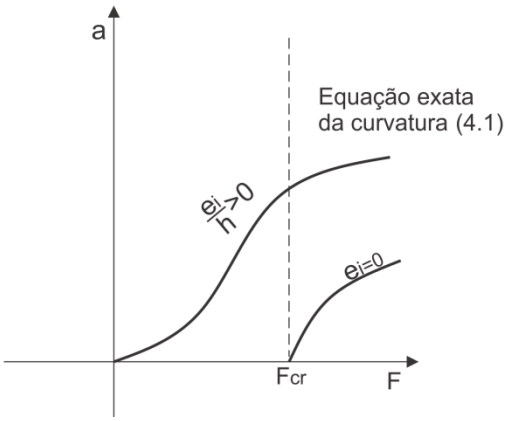


Figura 4.4 Curva Carga x Deslocamento para uma peça sob flexão composta normal, obtido com a forma exata da curvatura;

Analisando a estabilidade das barras submetidas à flexo-compressão normal, inicialmente é admitido, uma linha elástica senoidal para a peça fletida, com a forma apresentada na equação seguinte:

$$y = a\ sen\left(\frac{\pi}{L}x\right) \tag{4.7}$$

E a curvatura obtida com a equação simplificada tem a forma da Equação (4.8).

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 y \tag{4.8}$$

É admitido o uso da equação simplificada da curvatura devido ao uso do princípio dos pequenos deslocamentos, mesmo sendo uma análise de segunda ordem a natureza da aplicação das cargas não é alterada.

Isolando y na Equação (4.8) surge a forma seguinte:

$$y = \frac{1}{r}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \tag{4.9}$$

Aplicando esta forma a Equação (4.3).

$$M_{ext} = Fe_1 + F\frac{1}{r}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \tag{4.10}$$

Pode ser observado que a relação entre o momento externo e a curvatura obtida na Equação (4.10) é linear, com isso mantendo-se o limite de proporcionalidade haverá um ponto de cruzamento entre o momento interno e o externo caracterizando o equilíbrio da peça. A Figura 4.5 apresenta este fenômeno graficamente.

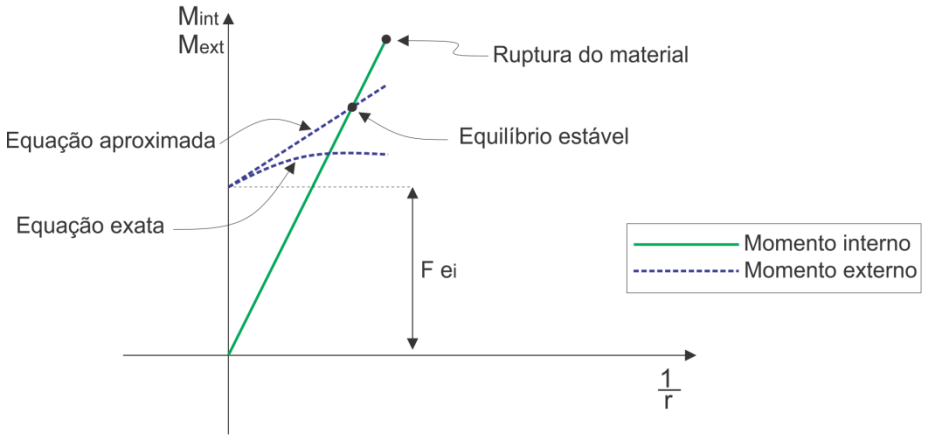


Figura 4.5 Equilíbrio para peças sob flexo compressão, Fusco (1981).

Em barras submetidas à flexão composta oblíqua o comportamento segue o modelo das barras sob flexão normal, porém o eixo deformado fica fora do plano de simetria da peça, quando este existe. Em peças de seção retangular a linha neutra apresenta-se inclinada em relação aos eixos de flexão e a deformação da linha elástica apresenta-se com componentes nos dois planos principais da peça, Figura 4.6.

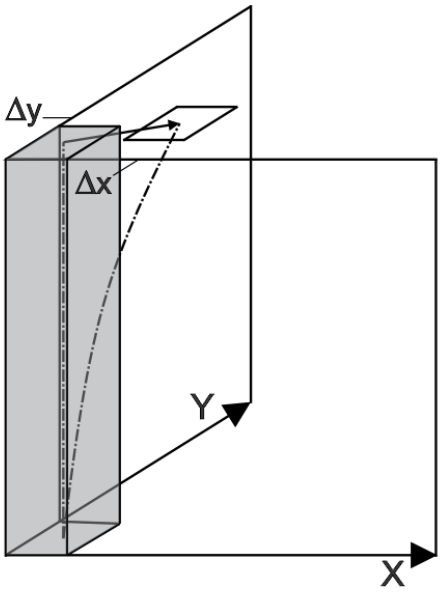


Figura 4.6 Peça sob ação de compressão oblíqua, com destaque para as componentes da excentricidade segundo os eixos principais.

4.2 MÉTODO GERAL PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO

A análise da estabilidade de peças submetidas à flexão composta normal ou oblíqua se

propõe a avaliar as deformações ao longo do eixo da peça e definir se o elemento é capaz de suportar as ações iniciais atuando sobre sua estrutura deformada.

Na seção anterior as equações admitem, de maneira geral, o comportamento linear dos materiais. Esta simplificação não é valida para o concreto armado, pois os materiais que formam a seção têm comportamento não linear, como apresentado na seção 3.3. Para tornar essa avaliação possível alguns métodos aproximados são propostos como os modelos adotados pela NBR 6118:2014. Porém para realização de uma análise mais refinada, com valores mais próximos do real, existem processos, como os desenvolvidos neste trabalho, que utilizando o Método Geral, chegam a valores equivalentes aos obtidos com técnicas mais sofisticadas e inclusive resultados experimentais.

Está técnica é útil não apenas para pilares de esbeltez mais elevada, podendo ser aplicada a qualquer tipo de peça e fornecendo resultados mais precisos sobre seu comportamento. Como foi apresentado na revisão da literatura, Paula (1988), mostrou que os métodos aproximados podem produzir resultados tanto a favor quanto contra a segurança em função da distribuição de momentos ao longo da peça.

Este método para determinação dos efeitos de segunda ordem é aplicável a todas as peças, incluindo elementos com seção variável ao longo do seu eixo e submetidos a qualquer tipo de carregamento. O desenvolvimento da análise avalia a estabilidade do sistema, considerando as não linearidades físicas e geométricas de forma exata, e através do calculo da curvatura de cada seção define a linha elástica do pilar. A Figura 4.7 apresenta simplificadamente a sequencia lógica envolvida neste processo.

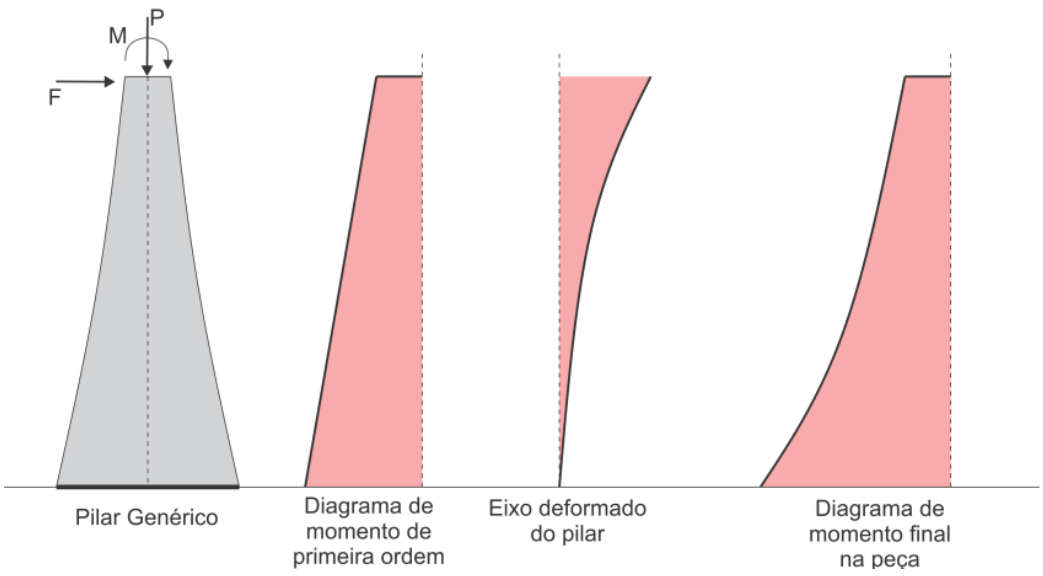


Figura 4.7 Visão esquemática da aplicação do método geral.

Para determinar os esforços finais na peça o método geral aplica os esforços de primeira ordem ao elemento e com isso define a sua forma fletida. Com o conhecimento das deformações a nova distribuição de esforços é definida, pois devido à deflexão do eixo novas excentricidades surgem levando a momentos fletores maiores. Matematicamente este acréscimo de momentos é devido ao deslocamento lateral *y* na Equação (4.3).

Como pode se perceber um ponto fundamental é definir a configuração deformada. Para isso é utilizada a relação apresentada na Equação (4.8), onde, admitindo pequenos deslocamentos, a equação simplificada da curvatura representa a segunda derivada da linha elástica. Este procedimento também foi aplicado por Araújo (1984) que através de uma dupla integração da equação da curvatura obtém a equação da linha elástica do pilar. O uso da equação simplificada também fez com que não seja necessário encontrar a solução de uma equação diferencial não-linear. Assim é aplicado ao longo da peça para pontos discretos um processo numérico para definir qual a curvatura da seção, com os valores em cada ponto é definida por interpolação uma equação que define a distribuição de curvatura. Com isso, por integração direta, define-se a linha elástica do pilar. A Figura 4.8 Mostra a expansão da sequência apresentada na Figura 4.7.

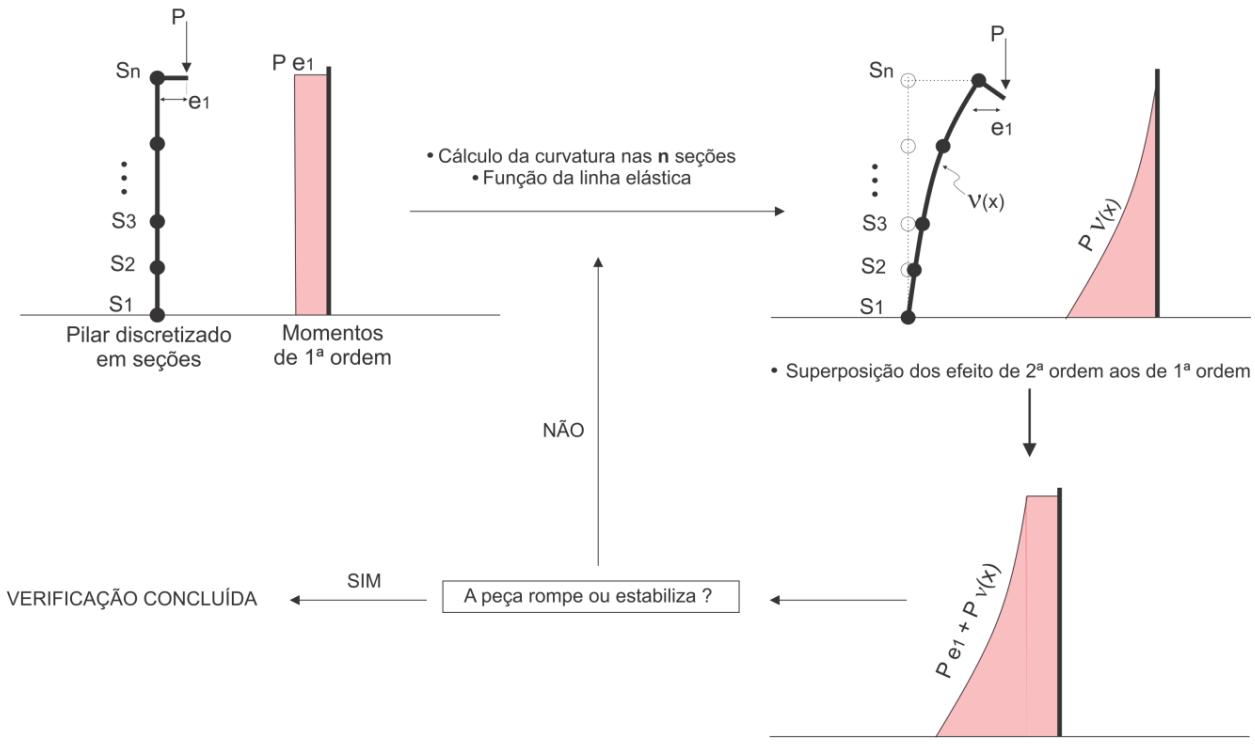


Figura 4.8 Visão esquemática do processo iterativo para verificação de estabilidade.

Na Figura 4.8 é apresentada uma visualização já mais avançada do processo de análise exato desenvolvido neste trabalho. Em uma primeira etapa o pilar e dividido ao longo do seu eixo em um determinado número de seções de análise, S_1 a S_n e são conhecidos os esforços de primeira ordem ao longo do seu eixo. Com estes dados é possível definir qual a curvatura em cada uma das seções. Neste trabalho foi desenvolvida uma rotina própria para este fim, como será apresentado adiante. Com os valores das curvaturas nestes pontos discretos é possível fazer uma interpolação de forma a se obter uma curva que define a distribuição de curvatura ao longo da seção, a Figura 4.9 mostra uma visão desta etapa do processo.

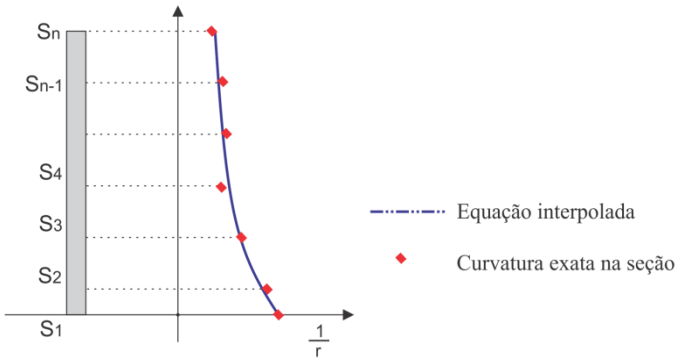


Figura 4.9 Visão esquemática da distribuição de curvaturas ao longo das seções da peça e da curva aproximada obtida pela interpolação.

Neste ponto é possível, tendo em vista a relação entre curvatura e deslocamento apresentada na Equação (4.8), encontrar uma função que define o deslocamento do eixo do pilar. Isto é feito através de uma dupla integração direta da equação interpolada da curvatura. Com isso chega-se a uma equação para a linha elástica do pilar. O esforço normal multiplicado pelo deslocamento transversal obtido fornece a distribuição de momentos de segunda ordem ao longo da peça estes se somam aos de primeira ordem, e com esta nova distribuição de esforços é verificado se alguma das seções rompe ou se a peça estabiliza levando ao fim da análise. Caso nenhum desses critérios seja verificado, utiliza-se os esforços de segunda ordem obtidos na primeira iteração para calcular as novas curvaturas em cada seção, então este processo segue até que a situação final da peça esteja definida.

Pode surgir nesta etapa um questionamento a respeito da formulação apresentada tendo em vista que são utilizados os dados de deslocamento em uma direção, levando a presumir que se trata de uma flexão composta normal. Esta constatação é real, contudo o processo não difere de forma substancial para a flexão composta oblíqua. Neste caso a curvatura obtida tem orientação perpendicular a linha neutra, que deve estar inclinada em

relação as coordenadas principais do sistema. Assim é necessário fazer o desacoplamento da curvatura obtida para o sistema de eixo que fornece a excentricidade segundo as mesmas orientações dos momentos atuantes.

O desacoplamento da curvatura nas duas direções principais é feito através do ângulo de inclinação da linha neutra e segue a formulação apresentada por Fusco (1981), de forma que as curvaturas nas duas direções são dadas por:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_\phi}\sin(\phi) \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_\phi}\cos(\phi) \tag{4.12}$$

Sendo ϕ o ângulo da linha neutra com os eixos principais.

Assim as curvaturas obtidas após a decomposição tem a orientação apresentada na Figura 4.10.

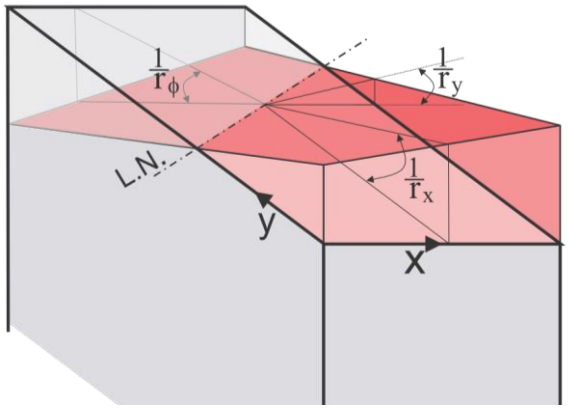


Figura 4.10 Visão esquemática da curvatura obtida em primeira análise e das curvaturas paralelas aos eixos principais obtidas pela decomposição da inicial.

Devido a este fato, a interpolação que define a equação para a curvatura é feita para cada direção separadamente, e na sequência são obtidas duas equações que descrevem a deformação da peça segundo cada direção. Esta decomposição é necessária, pois como as excentricidades iniciais são fornecidas ao longo dos eixos x e y é necessário que as deformações devido aos efeitos de segunda ordem tenham as mesmas orientações destes eixos para que a soma possa ser feita de forma coerente.

Fazendo uso destes princípios apresentados a rotina aplica o Método Geral a pilares de concreto armado e fornece as excentricidades no momento do equilíbrio.

5 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

O avanço dos computadores permitiu a criação de rotinas de cálculos e programas sofisticados que fazem análises que seriam inviáveis sem o uso de maquinas com capacidade de processamento elevada. O modelo de verificação desenvolvido aqui faz uso de processos iterativos o que conduz a um grande numero de operações para obtenção do resultado final. Além de um bom computador também tem forte influência sobre o tempo de processamento o método utilizado para obter os parâmetros, que neste caso são: a curvatura da seção transversal a posição e inclinação da linha neutra. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foram identificadas técnicas computacionais que reduziram drasticamente o tempo para verificação da estabilidade de um pilar. Todos estes itens serão apresentados a seguir.

5.1 ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA NORMAL PELO MÉTODO GERAL.

Para calcular os efeitos de segunda ordem em pilares sob flexão composta normal é necessário encontrar a configuração deformada da peça. Para isso o pilar é dividido em um determinado número de seções onde para cada uma é identificada a sua curvatura e posição da linha neutra, que são as incógnitas neste tipo de problema. Com a distribuição de curvatura ao longo do pilar é possível determinar a deformação da peça com o procedimento da seção 4.2.

5.1.1 *Equilíbrio da seção transversal*

Como pode ser percebido, uma etapa crucial do processo é a definição da curvatura de cada seção. A rotina desenvolvida para esse fim busca, através de uma varredura nos valores da curvatura e posição da linha neutra, qual o par de parâmetros que produzem esforços resistentes que equilibram os externos. Para encontrar esses parâmetros internos da seção foi empregada uma extensão de Método da Bisseção que é aplicado a um sistema de duas equações e duas incógnitas. Este processo será explicado detalhadamente na seção seguinte onde aparecerá sua forma mais geral capaz de ser aplicado em seções sob flexão composta oblíqua.

Devido ao modelo iterativo aplicado, os parâmetros de deformação da seção são conhecidos. Pois valores para a curvatura e posição da linha neutra são definidos como parte do processo, sendo necessário definir qual o esforço interno associado a estes parâmetros para que este seja comparado com o externo. A forma como o cálculo é feito, será apresentada com

o modelo genérico da Figura 5.1, dotado de duas camadas de armadura.

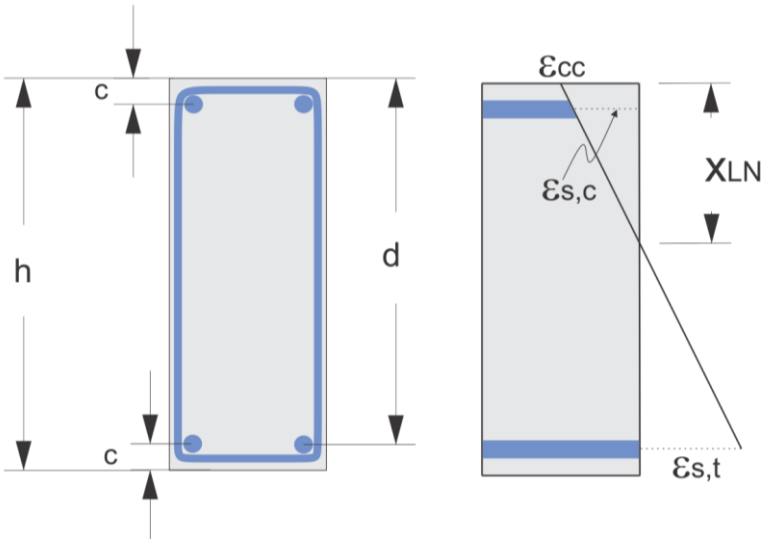


Figura 5.1 Seção de concreto armado submetida à flexão composta normal.

A curvatura define uma relação de proporção entre a distância de um ponto até a linha neutra com a deformação neste ponto. Esta relação é apresentada na Equação (5.1). Vale resaltar que o código não calcula esta grandeza, pois, como foi dito, ela já é arbitrada inicialmente como parte do processo.

$$\frac{1}{r} = \frac{|\varepsilon_{cc}| + |\varepsilon_{s,t}|}{d} \tag{5.1}$$

Como a posição da linha neutra também é conhecida torna-se trivial definir a deformação em cada linha de armação.

Para as barras comprimidas

$$\varepsilon_{s,c} = (x_{LN} - c)\frac{1}{r} \tag{5.2}$$

Para as barras tracionadas

$$\varepsilon_{s,t} = (x_{LN} - d)\frac{1}{r} \tag{5.3}$$

Deformações específicas e tensões com sinal positivo denotam compressão e os elementos tracionados apresentam deformação específica e tensão com sinal negativo.

Os cálculos realizados nas Equações (5.2) e (5.3) podem ser generalizados para quantas camadas de armadura existirem, bastando conhecer, além da curvatura, sua distância ao eixo neutro. Neste ponto é possível definir a tensão nas barras de aço usando a relação tensão deformação dada pelo módulo elástico do material. Em um primeiro momento a tensão pode ser dada por:

$$\sigma = E\ \varepsilon \tag{5.4}$$

Contudo devemos considerar agora a primeira particularização do processo. Devido ao comportamento bi-linear adotado como modelo para o aço usado em concreto armado uma condição deve ser imposta para conhecermos a real tensão de trabalho.

Caso com a Equação (5.4) seja encontrado um valor de tensão inferior a f_{yd} este deve ser mantido, pois a tensão está dentro do regime elástico e é valido aplicar a equação. Caso o valor seja superior a tensão de escoamento, deve ser mantido f_{yd} como máximo. Essa correção tem a função de definir que a partir do escoamento não ha acréscimo de tensão no material, apenas alongamento. Com isso os resultados da Equação (5.4) devem ser submetidos as seguintes condições:

$$\sigma = \begin{cases} E\ \varepsilon & se\ \sigma \leq f_{yd} \\ f_{yd} & se\ \sigma > f_{yd} \end{cases} \tag{5.5}$$

Ou ainda, em função da deformação específica:

$$\sigma = \begin{cases} E\ \varepsilon & se\ \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & se\ \varepsilon > \varepsilon_{yd} \end{cases} \tag{5.6}$$

Com o apresentado até agora ficam definidas as forças e os pontos de ação da parcela correspondente ao aço existente na seção. É necessário avaliar a parcela do concreto que participa da composição dos esforços internos da seção. A distribuição de tensão no bloco de concreto comprimido é obtida em função das deformações específicas em cada fibra. Para encontrar as deformações são válidas as relações apresentadas para as camadas de armadura, esta deformação é uma função da curvatura e cresce linearmente com o afastamento da linha neutra, assim:

$$\varepsilon_c(x) = \frac{1}{r}\ x \tag{5.7}$$

Sendo x a distância da fibra à linha neutra.

Com as deformações específicas as tensões ao longo das fibras são fornecidas pela relação constitutiva mostrada no item 3.3.2., Figura 5.2 ilustra a distribuição de deformação e tensão no trecho considerado.

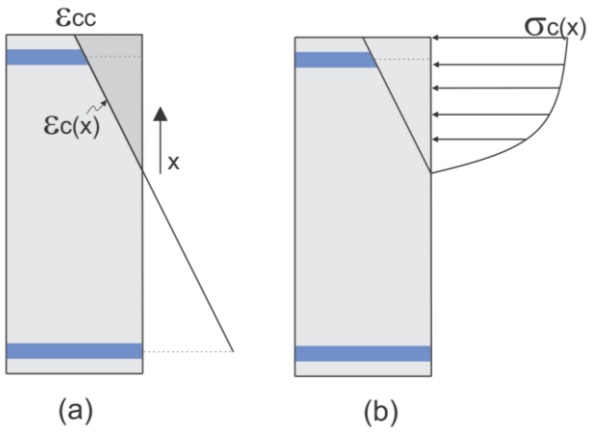


Figura 5.2 (a) deformação das fibras ao longo do trecho comprimido da peça; (b) distribuição de tensão ao longo da seção.

Com isso o esforço normal resistente do bloco de concreto é dado por:

$$N_{rd} = \int \sigma_c dA \tag{5.8}$$

Porém, a solução analítica deste problema não é trivial, com isso foi aplicado um processo de integração numérica que permite definir a contribuição da parcela comprimida do concreto. Para isto foi adotada uma divisão deste trecho em faixas e através da curvatura da peça e da posição em relação à linha neutra se encontra a deformação específica no eixo da faixa. A Figura 5.3 mostra a relação de proporcionalidade entre a deformação específica máxima da borda comprimida e de uma faixa em uma posição genérica.

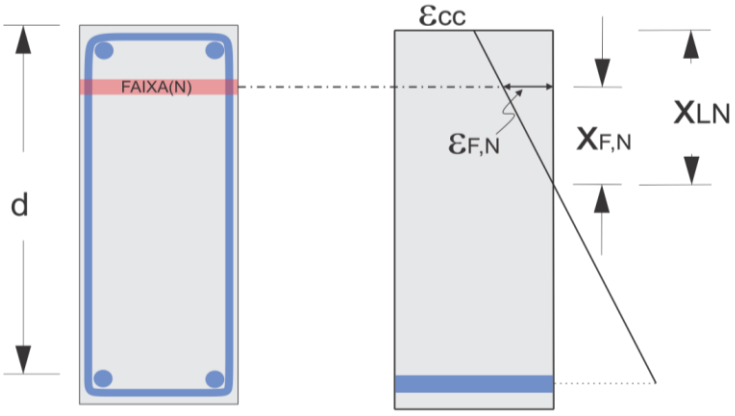


Figura 5.3 Deformação específica do eixo de uma faixa localizada em uma posição arbitrária da seção.

Da Figura 5.3 é possível ver que a deformação em uma faixa genérica pode ser definida como:

$$\varepsilon_{F,N} = \varepsilon_{cc} \frac{X_{F,N}}{X_{LN}} \tag{5.9}$$

$\varepsilon_{F,N}$ é a deformação específica da linha média da faixa considerada, e

$X_{F,N}$ é a distância do eixo da faixa a linha neutra.

As outras grandezas já foram definidas.

Diante da deformação é aplicada a relação constitutiva relativa ao concreto, seção 3.3.2. A tensão obtida com a deformação específica do plano médio da faixa é admitida constante em toda sua superfície. Com isso a generalização do processo ao longo do trecho comprimido fornece uma distribuição de tensão similar a apresentada na Figura 5.4.

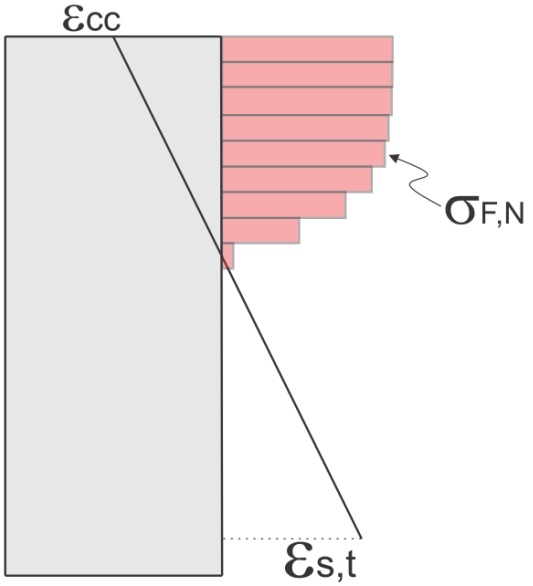


Figura 5.4 Distribuição de tensão normal no bloco de concreto devido a divisão da seção em faixas.

A força correspondente a cada faixa tem seu valor dado por:

$$F_{F,N} = \sigma_{FN}\, A_{FN} \tag{5.10}$$

$F_{F,N}$ – Força na faixa "N"

A_{FN} – Área da faixa "N"

Com isso a reação total do bloco de concreto comprimido é dada pela soma da participação individual de cada faixa.

$$R_{cc} = \sum F_{F,N} \tag{5.11}$$

O ponto de ação da resultante é definido pelo centro de carga do conjunto de todas as cargas unitárias das faixas podendo ser encontrado através da equação seguinte.

$$X_{cc} = \sum \frac{F_{F,N}\, X_{F,N}}{\sum F_{F,N}} \tag{5.12}$$

A maior aproximação com o resultado real é obtida através de uma divisão da seção

em um número maior de faixas. A Figura 5.5 mostra os resultados obtidos com o uso do código desenvolvido, o exemplo apresentado é para uma seção com os seguintes dados:

$b = 30cm$

$h = 50cm$

$\varepsilon_{cc} = 3‰$

$X_{LN} = 18cm$

$f_{cd} = 15MPa$

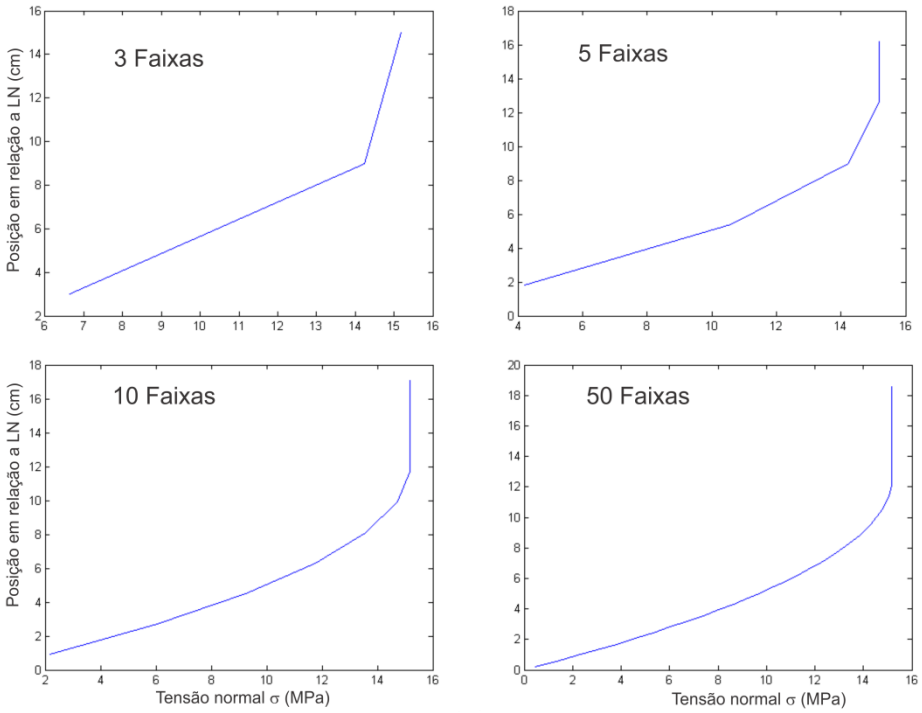


Figura 5.5 Distribuição de tensão normal no concreto comprimido com código desenvolvido, variando o número de faixas para discretização.

Diante disso ficam definidas todas as parcelas de força interna a seção que quando colocadas em seus respectivos pontos de ação levam a situação mostrada na Figura 5.6.

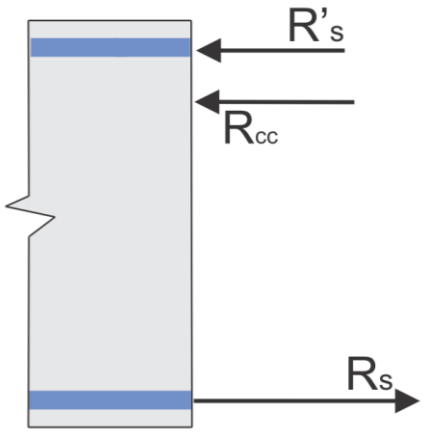


Figura 5.6 Sistema de forças equivalente as reações internas da seção.

Lembrando que estes esforços são calculados para um determinado valor de curvatura e posição da linha neutra. Os esforços internos obtidos são comparados com os externos e é verificado se há o equilíbrio, caso essa condição não tenha sido atingida novos valores para os parâmetros devem ser testados. Para se arbitrar os dados que definiam a deformação da seção foi definido um critério onde cada parâmetro está associado a um esforço interno. Estando o esforço normal associado a posição da linha neutra e o momento fletor a curvatura da seção. Isso permite que cada parâmetro seja varrido individualmente até que haja o equilíbrio. Todo o processo está no fluxograma da Figura 5.7.

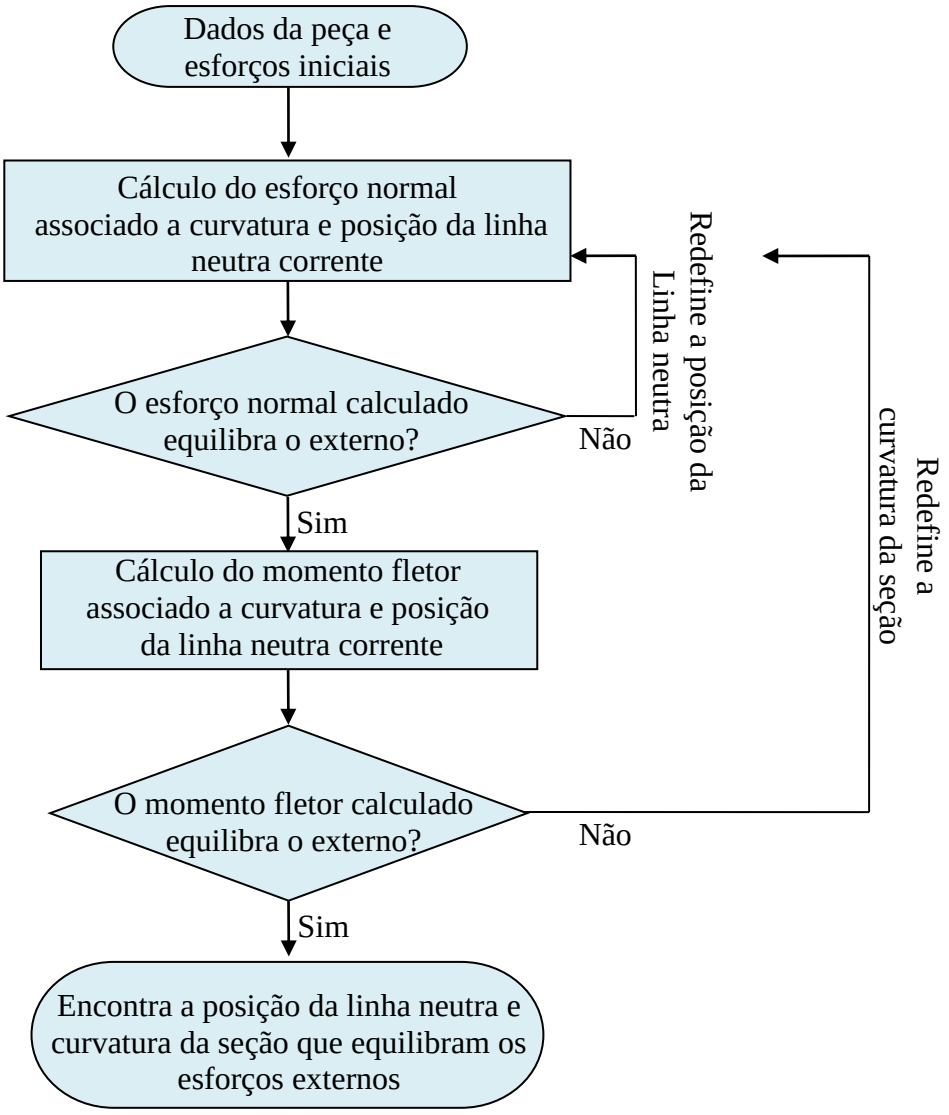


Figura 5.7 Fluxograma para definição de profundidade da linha neutra e curvatura em seção de concreto armado.

5.1.2 *Estabilidade e efeitos de segunda ordem*

Com a sequência lógica do item anterior é possível definir em uma seção qual o valor da curvatura e a posição da linha neutra que equilibram os esforços externos. Porém por si só ela não é capaz de fornecer parâmetros de estabilidade da peça, para isso é preciso avaliar a deformação de todo o pilar. Utilizada a relação da Equação (4.2), onde a curvatura é igual à segunda derivada da linha elástica. Com os valores de curvatura ao longo do eixo da peça é possível fazer uma interpolação dos pontos e obter uma função da curvatura relacionada à posição do eixo da peça. O código utiliza uma interpolação polinomial de segundo grau, para a curvatura e o processo para avaliação da linha elástica é apresentado a seguir.

O valor da curvatura ao longo da altura do pilar é obtido em pontos discretos através do seu cálculo em cada seção. A curvatura assume uma função da forma apresentada na

Equação (5.2).

$$\frac{1}{r}(x) = ax^2 + bx + c \tag{5.13}$$

Os coeficientes a, b e c ficam definidos no processo de interpolação, com o uso da função *polyfit* interna do *MATLAB*.

Por integração direta da Equação (5.13) é encontrada a função $v(x)$ que fornece o deslocamento transversal ao longo da peça, Equação (5.14):

$$v(x) = \frac{ax^4}{12} + \frac{bx^3}{6} + \frac{cx^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{5.14}$$

As condições de contorno para a situação estudada são dadas em função do engaste na base onde o deslocamento e rotação são nulos, assim:

$$v(0) = 0 \tag{5.15}$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \tag{5.16}$$

Aplicando a Equação (5.15) e (5.16) na Equação (5.14) e sua derivada primeira, respectivamente, as constantes de integração obtidas são:

$C_1 = C_2 = 0$

Agora já é possível definir o deslocamento em cada seção.

Com a distribuição dos deslocamentos a excentricidade de cada seção equivale ao uma inversão da curva $v(x)$. Percebe-se na Figura 5.8 que a excentricidade de S_1 corresponde ao deslocamento da seção S_n, e esse evento se repete de forma que a excentricidade em cada seção equivale a deformação da sua seção simétrica em relação a meia altura do pilar. No código a atribuição é feita com uma função do tipo:

$$e_{S_n} = v(n - S_n + 1) \tag{5.17}$$

Sendo:

S_n o número da seção considerada ;

n o número total de seções;

De forma a exemplificar podemos supor que temos 10 seções e deseja-se definir a excentricidade na base $e(1)$;

$e(1) = v(10 - 1 + 1)$

$e(1) = v(10)$

Exatamente como é de se esperar, a excentricidade na base corresponde à deformação do topo da peça. A Figura 5.8 mostra este efeito graficamente.

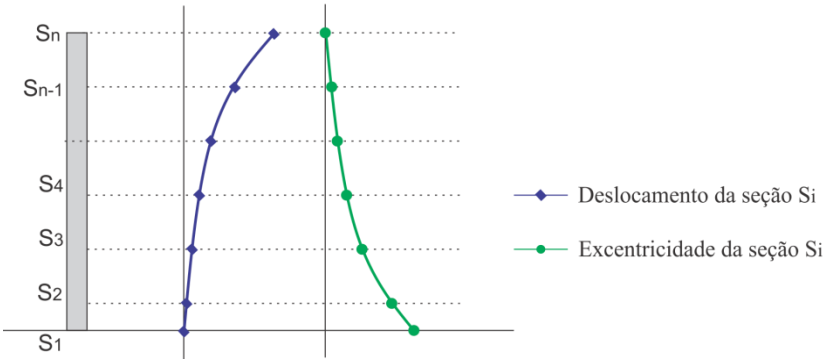


Figura 5.8 Curva da linha elástica e das excentricidades nas seções consideradas.

Com isso as excentricidades de segunda ordem são rapidamente encontradas através da soma das excentricidades iniciais com as obtidas no processo acima, e os momentos fletores de segunda ordem em cada seção são obtidos imediatamente pela multiplicação do esforço normal com as novas excentricidades. Esses valores de esforços são utilizados para realimentar o código como esforços iniciais.

Os critérios de parada foram definidos para finalizar o processamento do código e acontecem quando se verifica a ruptura de alguma das seções ou a estabilidade do elemento analisado. A ruptura é verificada pelos critérios apresentados por Fusco (1981) através das deformações limites mostradas no Capítulo 3. Para isso é avaliada em cada seção a deformação específica da borda mais comprimida, da fibra localizada a $\frac{3}{7}h$ e na camada de armadura mais solicitada e essas deformações são comparadas com os valores limites de 3,5‰; 2‰ e 10‰; respectivamente. Caso isso ocorra a rotina é interrompida e é emitido um aviso informando a ruptura da peça. A estabilidade foi convencionada por um critério próprio, através da avaliação da deformação relativa do topo da peça em iterações sucessivas. Foi adotado como atingida a estabilidade quando a deformação máxima não excede 2,5% da deformação encontrada anteriormente. Esse valor foi definido através da comparação de sucessivos resultados onde se constatou que quando esta condição ocorre os incrementos posteriores na deformação são irrelevantes.

Assim ficaram apresentados todos os passos envolvidos no desenvolvimento do código, para verificação de pilares submetidos à flexão composta normal. As informações estão condensadas em forma de fluxograma apresentado na Figura 5.9. Nesta apresentação o trecho do código que define a curvatura será definido apenas como *rotina da curvatura* e se refere ao fluxograma apresentado na Figura 5.7.

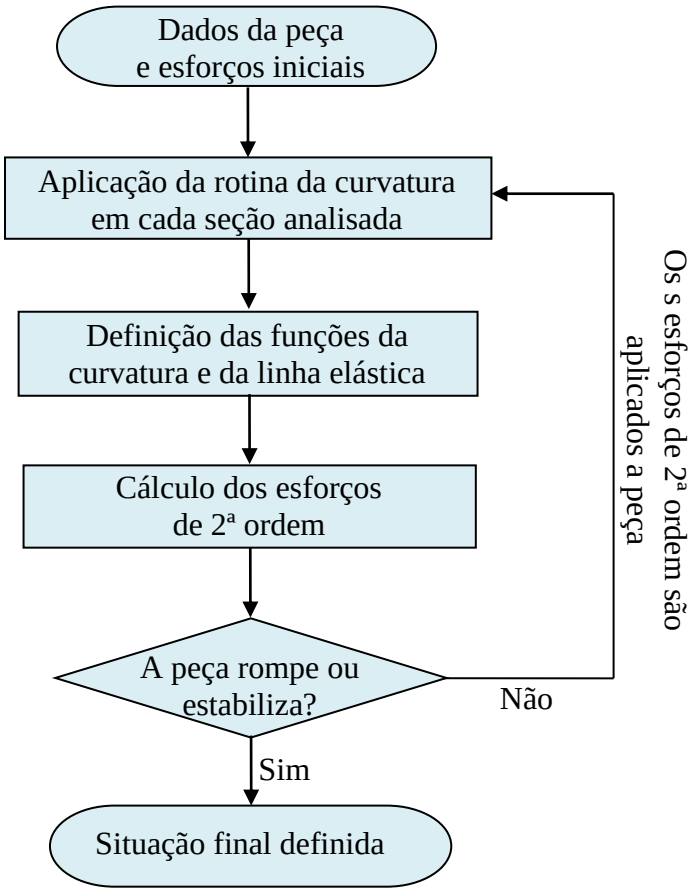


Figura 5.9 Fluxograma para verificação de estabilidade de pilares sob flexão composta normal.

5.2 ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA PELO MÉTODO GERAL.

Nesta seção será apresentada a expansão da rotina do item anterior para que seja possível verificar a estabilidade de um pilar submetido a um esforço normal excêntrico em relação aos dois eixos da peça. Neste tipo de solicitação um ponto que deve ser notado é a existência de uma inclinação da linha neutra, sendo esta mais uma incógnita a ser encontrada junto à sua posição e a curvatura da seção.

5.2.1 *Equilíbrio da seção transversal*

O novo problema para solucionar é dado por:

Conhecendo os esforços externos e os dados geométricos, encontrar qual o valor de profundidade da linha neutra, inclinação da linha neutra e curvatura que fazem a seção analisada equilibrar os três esforços externos. Este conjunto de valores leva a um sistema não

linear com três equações e três incógnitas. Alguns autores fizeram a solução deste problema com o uso do algoritmo de Newton-Raphson. A proposta deste trabalho consiste em uma abordagem baseada no Método da Bisseção aplicado a múltiplas variáveis. Essa estratégia permite um tratamento simples do problema, Sem a necessidade de determinar funções e suas derivadas, conforme será revelado a seguir. Em linhas gerais os esforços internos são obtidos pelo conjunto de equações apresentado a seguir.

$$\int_0^x \sigma_c dA + \sum A_s \sigma = N_R \tag{5.18}$$

$$\int_0^x y(\sigma_c dA) + \sum y A_s \sigma = M_{R,x} \tag{5.19}$$

$$\int_0^y x(\sigma_c dA) + \sum x A_s \sigma = M_{R,y} \tag{5.20}$$

Para elaborar a rotina de verificação, como na seção anterior, foram feitas duas sub-rotinas onde uma delas é responsável por encontrar os parâmetros da seção. E uma segunda faz uso desses dados para definir ao longo da peça a distribuição de curvatura, deformação e, diante dos esforços de segunda ordem, avaliar se a peça converge para uma situação de equilíbrio ou rompe. A etapa de análise da seção é apresentada a seguir e obedecem as convenções apresentadas na Figura 5.10.

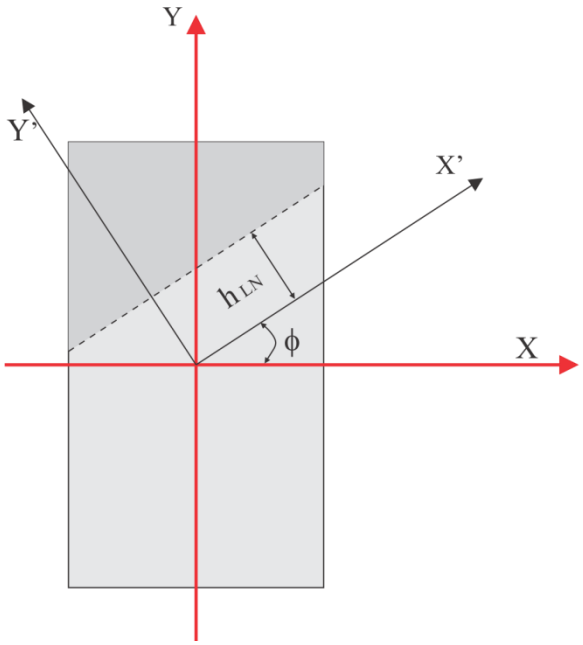


Figura 5.10 Convenção utilizada no desenvolvimento da rotina.

Para à flexão composta oblíqua a abordagem utilizada na seção anterior, para cálculo dos esforços internos, não apresenta resultados satisfatórios, pois devido à inclinação da linha

neutra surge uma variação de tensão não só ao longo da altura da seção como também no sentido paralelo a base. Para definir a resultante da região de concreto comprimida à divisão adotada passa a ser em quadrículas o que permite avaliar a variação de tensão em todas as direções. Por sua vez, como foi feito para a flexão composta normal, a deformação e tensão são admitidas constantes ao longo do elemento e calculadas em relação ao seu eixo. A Figura 5.11 apresenta um detalhe genérico de uma seção de onde é extraída uma quadrícula para exemplificar o processo.

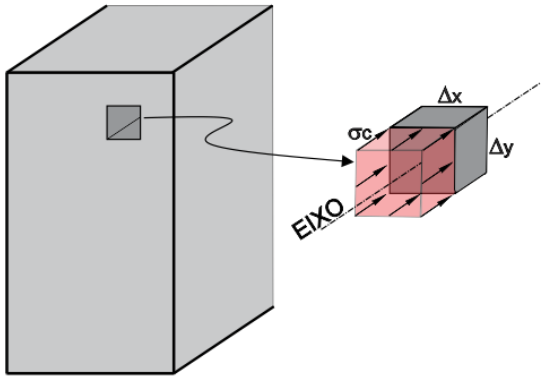


Figura 5.11 Seção transversal, com destaque para a distribuição de tensões em um elemento submetido a tensão constate devido a deformação do eixo.

A deformação em cada elemento é obtida através da curvatura da seção e de sua distância a linha neutra. Com uma relação de proporcionalidade, como foi feito na flexão composta normal, é possível definir a deformação do eixo do elemento. A Figura 5.12 mostra os dados envolvidos na definição da deformação do elemento.

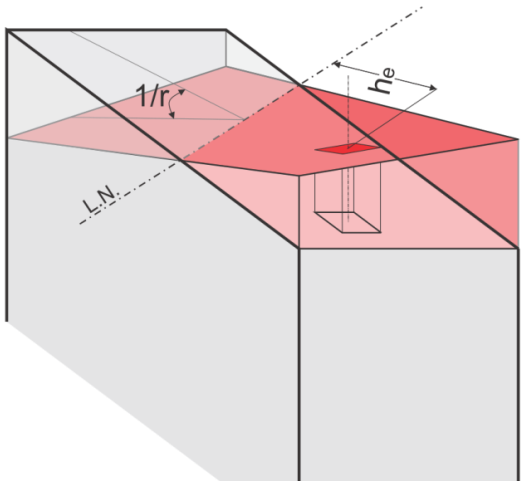


Figura 5.12 Deformação em elemento genérico de uma seção sob flexão oblíqua.

A deformação de cada elemento é dada por:

$$\varepsilon_{E,N} = h_e \frac{1}{r} \tag{5.21}$$

Onde

$\varepsilon_{E,N}$ é a deformação específica do elemento “N” e

Com essa metodologia é possível definir tanto as deformação nas armaduras quanto nos elementos que representam o bloco comprimido de concreto. Com as deformações é possível aplicar as relações constitutivas de cada material e obter a tensão correspondente. A força resultante é calculada pela multiplicação da tensão pela área da barra de aço ou da quadricula de concreto de acordo com o caso.

Os valores dos esforços internos são obtidos pelo cálculo da resultante de cada elemento em relação ao centro geométrico da seção que posteriormente são somados para obter o esforço total na seção.

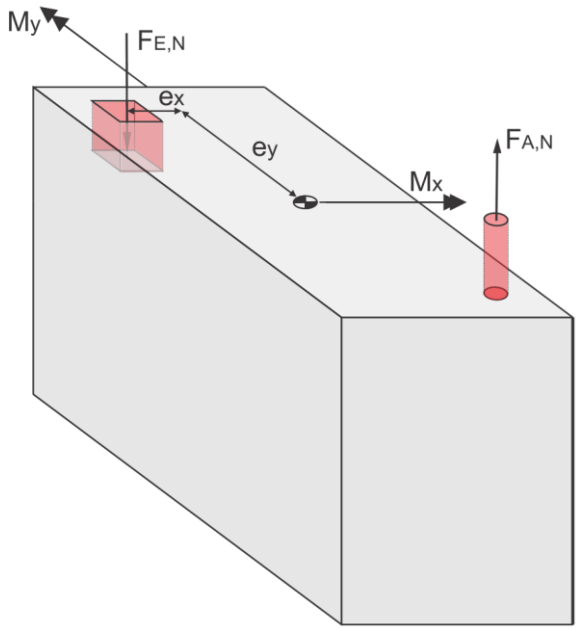


Figura 5.13 Resultante dos elemento e convenção de momentos e excentricidades relacionadas.

Da Figura 5.13 é possível observar que os momentos correspondentes ao elemento cujo resultante é $F_{E,N}$ são:

$$M_{x,N} = F_{E,N}\, e_y \tag{5.22}$$

$$M_{y,N} = F_{E,N}\, e_x \tag{5.23}$$

Onde $F_{E,N}$ é a força resultante no elemento "N";

$F_{A,N}$ Corresponde ao valor da resultante em uma barra "N" onde também são aplicadas as Equações (5.22) e (5.23). Com a soma da participação de cada elemento os esforços internos ficam definidos pelas seguintes equações:

$$M_x = \sum F_{E,N}\, e_y + \sum F_{A,N}\, e_y \tag{5.24}$$

$$M_y = \sum F_{E,N}\, e_x + \sum F_{A,N}\, e_x \tag{5.25}$$

$$N = \sum F_{E,N} + \sum F_{A,N} \tag{5.26}$$

Estas equações fornecem os resultados numéricos correspondentes às equações 5.18, 5.19 e 5.20. Uma maior aproximação com o valor real é obtida através da divisão da seção em um numero maior de elementos.

5.2.1.1 Estratégia com uso da bisseção dupla aliada a processo incremental

Para solução do problema do equilíbrio da seção foi utilizada uma metodologia baseado no Método da Bisseção para cálculo de raízes de funções. Neste caso foi feito o

emprego deste método em duas dimensões. Para um maior esclarecimento a respeito do que foi feito o Anexo B faz uma apresentação do Método da Bisseção aplicado tanto a uma com a duas variáveis, incluindo exemplo. É recomendado que o leitor antes de continuar o presente item faça uma leitura do referido texto de forma a facilitar a compreensão do que segue.

A rotina parte de um valor fixo para a inclinação da linha neutra ϕ, seu valor será definido de maneira incremental, ao fazer desta forma o Método da Bisseção passa a ser aplicado apenas em duas variáveis, este é o caso particular de um pilar submetido à flexão composta normal. Com isso é necessário definir qual o valor de curvatura e posição da linha neutra que equilibram o esforço normal e momento fletor em torno do eixo x.

Para aplicação do Método da Bisseção Bidimensional as equações são substituídas pelos processos numérico que definem os esforços internos relativos aos três parâmetros de deformações correntes. Analogamente ao apresentado no Anexo B a Equação (10.2) relativa a $f(x,y)$ equivale ao processo do item 5.2.1 que define o esforço normal interno. Nesta etapa inicial a incógnita a ser definida é a posição da linha neutra h_{LN}. De forma a relacionar com o exemplo apresentado podem ser feitas as seguintes equivalência:

$f(x,y)$ → Integração numérica do item 5.2.1 para determinar N

x → Curvatura da seção $1/r_\phi$

y → Posição da linha neutra h_{LN}

O valor da inclinação da linha neutra ϕ mesmo fazendo parte da determinação dos esforços internos não aparece como um incógnita pois seu valor está fixo.

Com isso ficam definidos os valores que compõem a segunda etapa da busca da solução. Esta segunda etapa consiste em aplicar os resultados encontrados com uso da primeira equação a Equação $g(x,y)$ que novamente neste problema equivale ao processo que define o momento interno em torno do eixo x , M_x.

Então este processo é repetido como foi feito no Anexo B até que os valores da incógnitas $1/r_\phi$ e h_{LN} atinjam a convergência definida através de uma tolerância para o resultado. Nesta etapa os valores de N e M_x equilibram os esforços externos N_{sd} e $M_{x,sd}$. Porém estes valores estão associados a uma valor para a inclinação da linha neutra ϕ que pode ainda não ser a solução do problema. Para isso é utilizado o terceiro processo onde se obtêm o momento interno em torno do eixo y, M_y. Caso o valor de M_y seja inferior ao solicitante $M_{y,sd}$ isto indica que o angulo ϕ é insuficiente e com isso é feito um acréscimo no seu valor e as etapas que buscam $1/r_\phi$ e h_{LN} são retomadas com este novo valor de ϕ.

A tolerância para definir a convergência do esforço normal e do momento fletor em

torno de x são de 1% e 5% respectivamente e os incrementos no valor de ϕ são de 0,01 rad, o Anexo C apresenta um pseudocódigo apresentando a aplicação deste processo.

Essa sequencia constitui a primeira etapa do processo de verificação, ela é aplicada a cada seção e com isso são obtidas as curvaturas nos pontos discretos ao longo do eixo da peça e além disso são armazenadas as inclinações da linha neutra que servirá para decompor a curvatura nos planos principais utilizando as equações 4.11 e 4.12.

5.2.2 *Estabilidade e efeitos de 2ª ordem*

Cada curvatura ao longo do eixo da peça é rebatida em relação aos eixos principais e para cada direção é interpolada uma função que define sua variação ao longo do pilar. A partir deste ponto cada curva é tratada isoladamente e são obtidos os valores das excentricidades de segunda ordem em cada direção. O código avança de maneira análoga ao feito na flexão composta normal atualizando os esforços e verificando se a peça rompe ou estabiliza para finalizar o processo. O fluxograma da Figura 5.22 apresenta de forma geral o processo para a verificação de estabilidade de pilares sobmetido à flexão composta oblíqua.

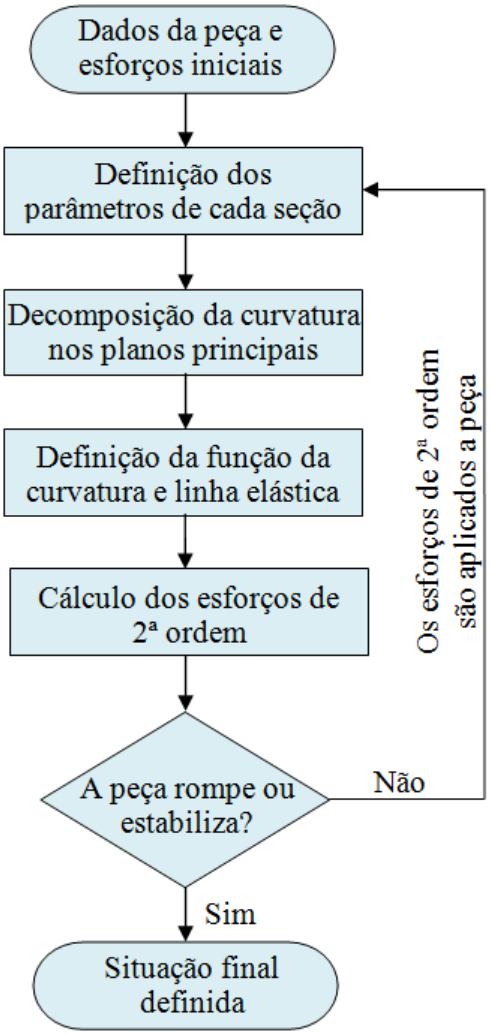


Figura 5.14 Fluxograma da verificação de estabilidade de pilares sob flexão composta oblíqua.

6 ANÁLISES E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Nesta seção, serão apresentadas as análises e validações que fundamentam a pesquisa. Os códigos foram validados através de exemplos encontrados em textos clássicos. Os resultados obtidos com as rotinas desenvolvidas para analise de estabilidade foram verificados com ensaios experimentais e com modelos em elementos finitos.

6.1 ANÁLISE 01 – RELAÇÃO M,N,$1/r$

Aqui será apresentada a validação realizada para o procedimento indicado na seção 5.1.1 que define os esforços internos de uma seção submetida à flexão composta normal.
A seguir será apresentada a forma de validação aplicada a seção da Figura 6.1.

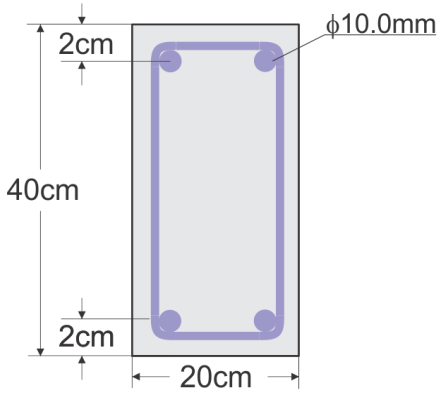


Figura 6.1 Seção utilizada para validação da rotina.

Adicionalmente são conhecidos os seguintes dados:

•Esforço normal externo – $50\ tf$

•Curvatura da seção – $0{,}00005\ cm^{-1}$

•Módulo de elasticidade do aço – $210.000\ MPa$

•Tensão de escoamento do aço – $500\ MPa$

•Resistência característica do concreto – $25\ MPa$

Utilizando as relações que forneciam as deformações nas camadas de armadura foi possível realizar os cálculos dos esforços internos. Na Tabela 6.1 estão listados os valores obtidos com o código e os resultados encontrados através de cálculo manual realizado com auxilio de uma planilha

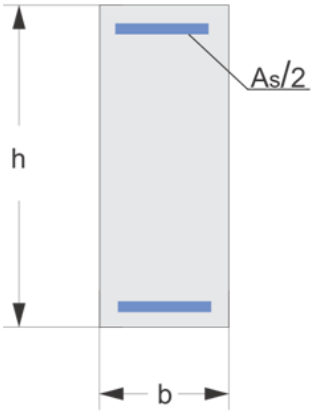
Tabela 6.1 Comparação entre resultados obtidos com o código próprio e através de cálculo manual para seção

sob flexão composta normal.

	Código	Planilha	Unidades
Deformação/tensão máxima do concreto	1,4‰/13,84	1,43‰/13,94	$-/MPa$
Deformação/tensão aço comprimido	1,3‰/279,3	1,33‰/279,3	$-/MPa$
Deformação/tensão aço tracionado	-0,5‰/-98,7	-0,47‰/-98,7	$-/MPa$
Força equivalente ao concreto	47,28	47,28	tf
Força equivalente ao aço comprimido	4,38	4,38	tf
Força equivalente ao aço tracionado	-1,55	-1,55	tf
Esforço normal resultante	50,11	50,11	tf
Momento fletor resultante	5,66	5,657	$tf\ m$

Com a validação da rotina apresentada o código foi alterado para que fosse possível definir qual a curvatura, da seção submetida à flexão composta normal, que equilibra as solicitações externas. Foi empregado o processo da Bisseção Multidimensional descrito anteriormente. O processo foi apresentado na seção 5.1.

Fazendo uso da rotina capaz de definir a curvatura foi ainda criada uma extensão capaz de traçar o diagrama momento-curvatura da seção. A pesar de não estar ligado diretamente ao modelo de verificação desenvolvido no trabalho este código representa uma ferramenta importante para avaliação da segurança de pilares diante dos esforços de segunda ordem. A validação adotada aqui foi através de comparação com os diagramas retirados de Fusco (1981), Cuja as seções tem as propriedade apresentadas na Figura 6.2. A Figura 6.3 mostra os resultados obtidos para as quatro seções analisadas.



$$\omega = \frac{As\ fyd}{Ac\ fcd}$$
$$Ac = b\ h$$
$$\nu = \frac{Nd}{Ac\ fcd}$$
$$\mu = \frac{Md}{Ac\ h\ fcd}$$

Seção 01	ω=0,60	ν=0,40
Seção 02	ω=0,50	ν=0,50
Seção 03	ω=0,20	ν=0,10
Seção 04	ω=0,80	ν=0,60

Figura 6.2 Características das seções transversais utilizadas para traçar o diagrama momento-curvatura.

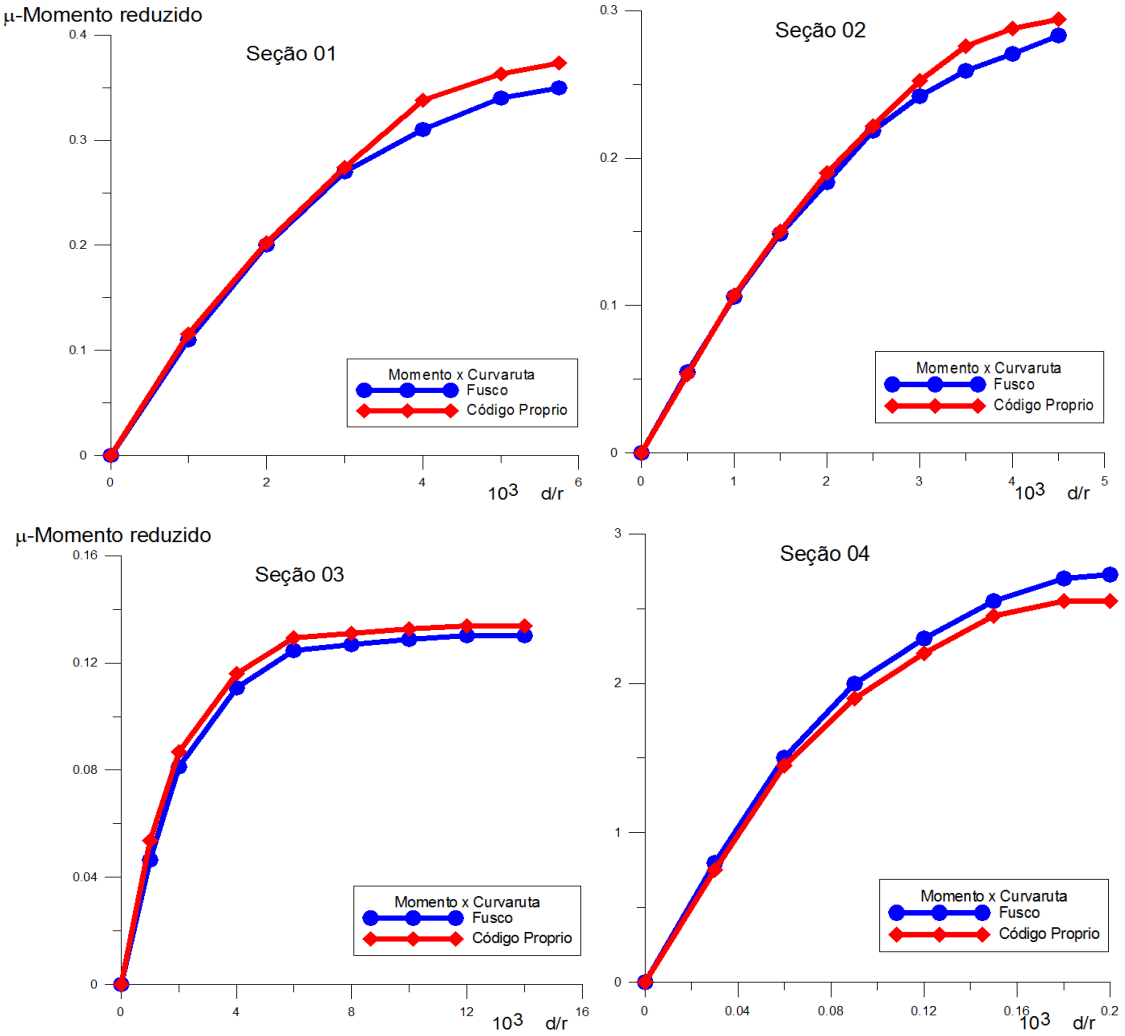


Figura 6.3 Diagramas momento-curvatura obtidos com o código desenvolvido e apresentados por Fusco(1981).

As seções são retangulares com duas camadas de armadura localizadas próximo a borda comprimida e tracionada. Os diagramas obtidos tem resultados muito próximos dos utilizados como referência. De maneira geral pode ser observado que há uma variação maior de resultados a partir do inicio de escoamento dos materiais, definido pelo trecho assintótico da curva. Ainda assim a diferença máxima observada foi inferior a 3,6%, mostrando a validade dos códigos desenvolvidos até o momento.

6.2 VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES

Neste ponto as verificações não mais podiam ser feitas de forma manual devido ao grande número de operações envolvidas, como já foi apresentado. A validação da rotina desenvolvida foi feita através da comparação dos resultados obtidos em ensaios, com modelos em elementos finitos e com código desenvolvido. Foram comparados os diagramas carga x excentricidade total obtidos nas três situações. Esse diagrama fornece a excentricidade total

do pilar para cada passo de carga, até atingir o limite da peça. Com as excentricidades fornecidas também é possível definir de forma imediata os esforços de segunda ordem que atuam na peça. As seções seguintes mostram informações dos experimentos utilizados para validação dos resultados e informações detalhadas dos modelos numéricos desenvolvidos.

6.2.1 *Flexão composta normal*

Os resultados experimentais foram retirados do trabalho de Melo (2009), que fez o estudo experimental e numérico de pilares em concreto armado com seção e armadura constante, submetidos à flexão composta normal. Foi feita a variação da excentricidade da carga e a esbeltez das peças para coleta de resultados. Os resultados utilizados para validação foram da série PFN e – 3, onde PFN foi usado para designar pilar sob flexão normal; “e” é a excentricidade em milímetros e 3 é a altura da peça em metros. A seção do pilar mede 250mm x120mm sendo à flexão em torno da menor inércia. A armadura é composta por seis barras longitudinais com diâmetro de 10 mm, taxa geométrica de 1,57%. Transversalmente foram utilizados estribos simples com barras de 5,0 mm espaçadas a cada 10 cm. A Figura 6.4 mostra a distribuição das barras na seção transversal.

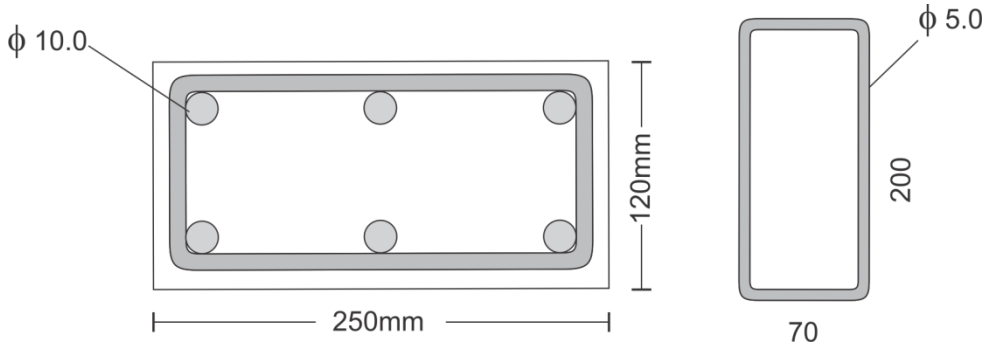


Figura 6.4 Seção transversal dos pilares ensaiados por Melo (2009).

Os modelos em elementos finitos apresentados por Melo (2010) foram feitos utilizando o *software* ATENA 3D, da Cervenka Consulting, com elementos hexaédricos para modelagem do topo e região central do pilar. Na região de apoio e capitel, com largura variável, foram aplicados os elementos TETRAHEDRAL e PYRAMID, as armaduras foram modeladas com elementos tipo TRUSS; após teste de refinamento a malha utilizada apresentava dimensões globais de 25 mm. A Figura 6.5 mostra uma visão geral dos elementos do pilar, as armaduras modeladas e uma visão geral da malha. Neste modelo foi adotada uma região rígida para aplicação das cargas, nesse caso o material utilizado foi o mesmo das armações caracterizado por um comportamento bilinear sendo linear elástico até a tensão de

escoamento e após esse ponto as deformações não geravam incrementos de tensão. O concreto foi modelado como Nonlinear Cementitious 2, adotando a relação proposta por Chen (1982 apud Atena, 2014). O modelo adotado representa metade da peça completa, sendo adotada condição de simetria na seção média.

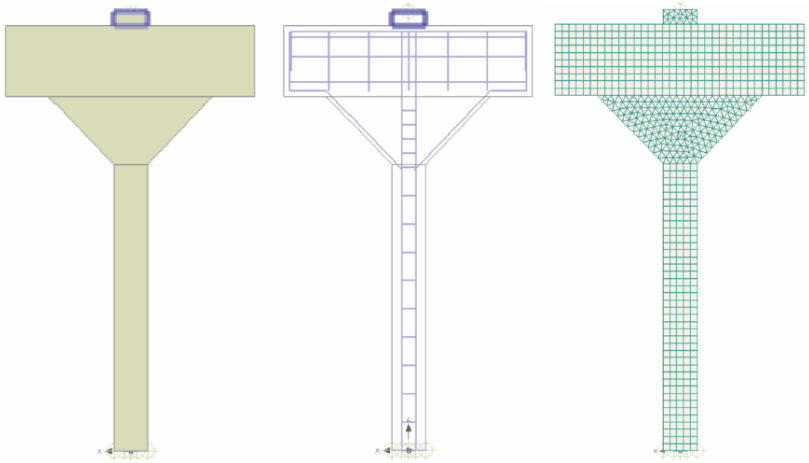


Figura 6.5 Da esquerda pra a direita, Macro elementos do modelo, Posicionamento das armaduras e Malha de elementos finitos; (Melo, 2009).

Os dados dos materiais utilizados nos modelos numéricos foram os valores obtidos em ensaios realizados em corpos de prova moldados para cada pilar e estão na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 Propriedades dos materiais empregados nos modelos submetidos à flexão composta normal.

Pilar	Excentricidade (mm)	E_c MPa	f_c MPa	E_s MPa	f_y MPa
PFN 6-3	6	32.100	39,6	190.000	595
PFN 12-3	12	32.100	39,6	190.000	595
PFN 15-3	15	28.700	35,8	190.000	595
PFN 18-3	18	30.600	39,7	190.000	595
PFN 30-3	30	31.500	33,9	190.000	595
PFN 40-3	40	31.500	33,9	190.000	595
PFN 50-3	50	31.100	37,6	190.000	595
PFN 60-3	60	31.000	37,6	190.000	595

6.2.2 *Flexão composta oblíqua*

A validação seguiu o mesmo molde da proposta para peças submetidas à flexão composta normal. O trabalho que forneceu dados experimentais foi Kim e Lee (2000), que

realizaram ensaios em 16 pilares submetidos à flexão composta oblíqua. As peças tinha seção transversal retangular e quadrada. A excentricidade era mantida fixa com valor de $40\ mm$ e para cada ensaio utilizava-se um valor para o ângulo ϑ, Identificado na Figura 6.6. Nesta figura também estão identificados os eixos que definem as deformações da peça. Foram utilizados os resultados obtidos para pilares de seção transversal quadrada com angulo ϑ igual a 30 e 45 graus.

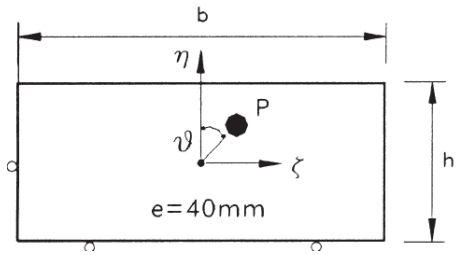


Figura 6.6 Característica do posicionamento da carga usado, e convenção de deslocamentos. Kim e Lee (2000).

As peças analisadas tinham seção de 100mm x 100mm e altura de 1200mm, armadas com quatro barras de 9,4 mm de diâmetro, a distância do eixo da barra a face da peça foi de 23 mm. As propriedades dos materiais foram generalizadas para todos os experimentos e modelos e estão na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 Propriedades dos materiais adotadas por Kim e Lee (2000).

E_c (MPa)	f_c (MPa)	f_y (MPa)
24.200	27	436

Os modelos numéricos de validação desenvolvidos para representar os ensaios de Kim e Lee (2000) foram criados utilizando o MidasFea (Versão 2.9.6, 2009) através da modelagem do pilar em elementos de sólido hexaédricos, as barras longitudinais foram modeladas utilizando o elemento Line 3D, que define o eixo da barra que posteriormente será acoplado ao sólido. Além desses elementos principais foi adicionado ao topo do pilar um bloco rígido, essa parte tem a função de receber as cargas e distribuí-las uniformemente no concreto. As condições de contorno para a peça foram engastado na base e livre no topo com comprimento equivalente que fornecia a mesma esbeltez do utilizado nos ensaios. O material definido para o concreto foi do tipo Total Stain Crack, com coeficiente de Poisson de 0,2. As relações constitutivas Brittle e Mult-lineart foram empregadas para o comportamento à tração e compressão respectivamente, estes são modelos de comportamento definidos pelo programa que podem ser ajustados pelo usuário. Para o concreto tracionado, com o intuito de reduzir ao

máximo sua participação, considerou-se f_t=0,1MPa, e com o uso da curva Mult-linear disponível no programa foi possível aplicar o diagrama parábola retângulo apresentada pela NBR6118:2014 e também utilizada no código desenvolvido, para o comportamento do concreto comprimido.

O material para o bloco rígido é linear elástico com módulo de elasticidade de 100.000 GPa. O valor elevado foi utilizado para que as cargas concentradas se tornassem uniformes em um pequeno trecho e para que as deformações desse elemento fossem irrelevantes diante das demais. Finalmente para o aço foi definido o modelo tipo Von Misses, utilizando módulo de elasticidade de 200 GPa, coeficiente de Poisson 0,3 e tensão de escoamento de 436 MPa, o módulo de elasticidade não foi apresentado no trabalho sendo adotado um valor corrente para esta grandeza.

O modelo tem um número total de 3.200 elementos no pilar e mais 100 no trecho rígido. Esses valores foram definidos através de testes de convergência da malha que está na seção 6.4. As cargas dos momentos fletores foram aplicadas através de dois binários formados por cargas concentradas nos nós da periferia do bloco rígido e a carga vertical distribuída nós do centro do bloco rígido. A análise feita foi Nonlinear Static, com consideração das não linearidades físicas e geométricas. O carregamento foi aplicado em 100 passos onde para cada passo admitia-se 100 iterações para atingir a convergência, caso não houvesse convergência nas iterações o processo era interrompido. A Figura 6.7 mostra o modelo do pilar criado no MidasFea(Versão 2.9.6, 2009).

Figura 6.7 Malha de elementos finitos MIDAS FEA, em azul o fuste do pilar e amarelo o bloco rígido.

6.2.3 *Resultados obtidos*

Com o processamento dos modelos e coleta de dados foram elaborados os diagramas carga x excentricidade total para peças submetidas à flexão composta normal apresentados a seguir na Figura 6.8.

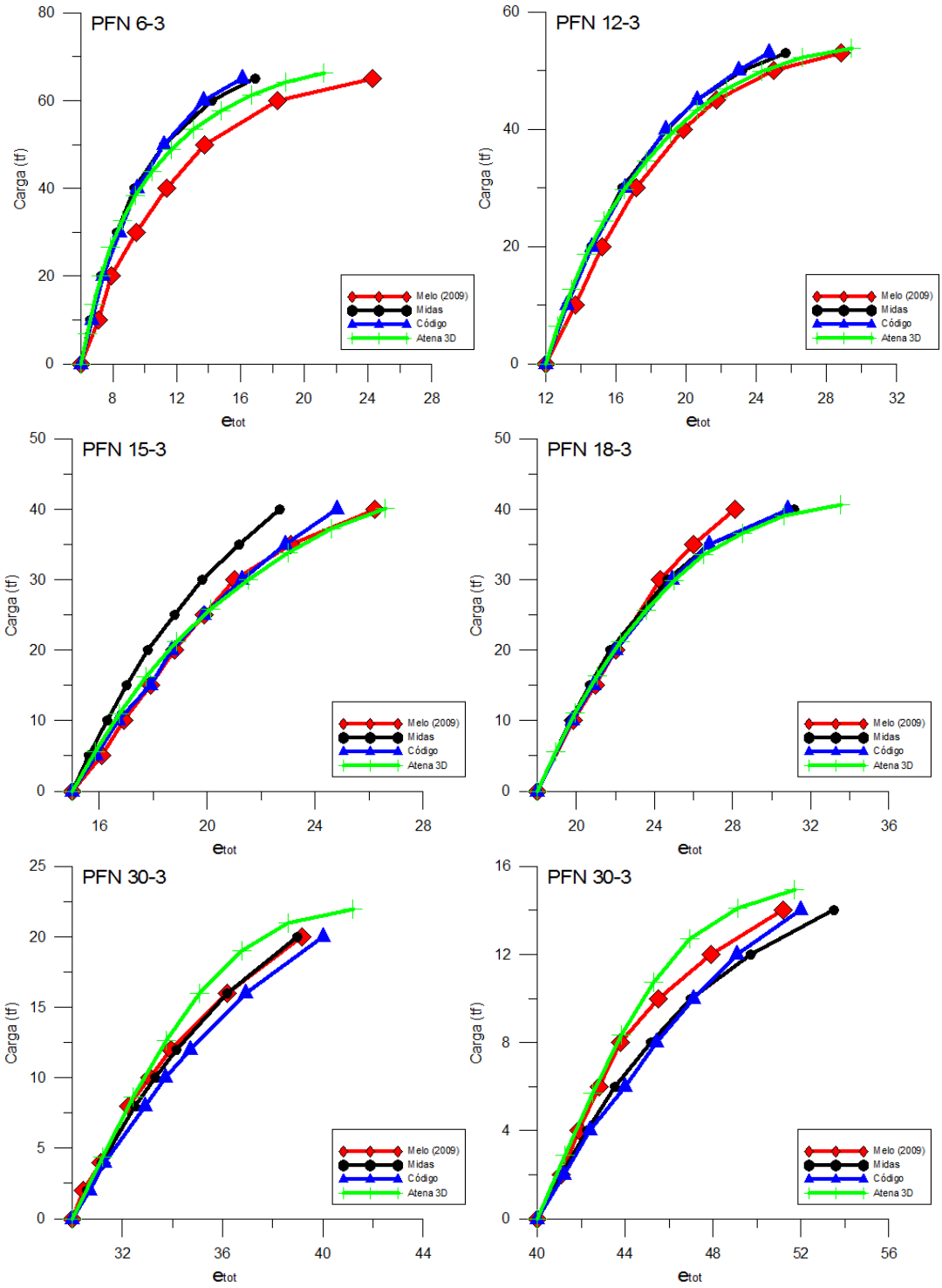


Figura 6.8 Resultado dos testes em peças sob flexão composta normal.

Os diagramas apresentado contêm nos eixos das abscissas o valor da excentricidade total, $e_1 + e_2$, referente ao equilíbrio para a carga indicada nos eixos das ordenadas, as excentricidades estão expressas em milímetros. Note que o inicio do eixo horizontal indica a excentricidade inicial da peça.

Os diagramas da Figura 6.9, representam os resultados das peças sob flexão composta oblíqua.

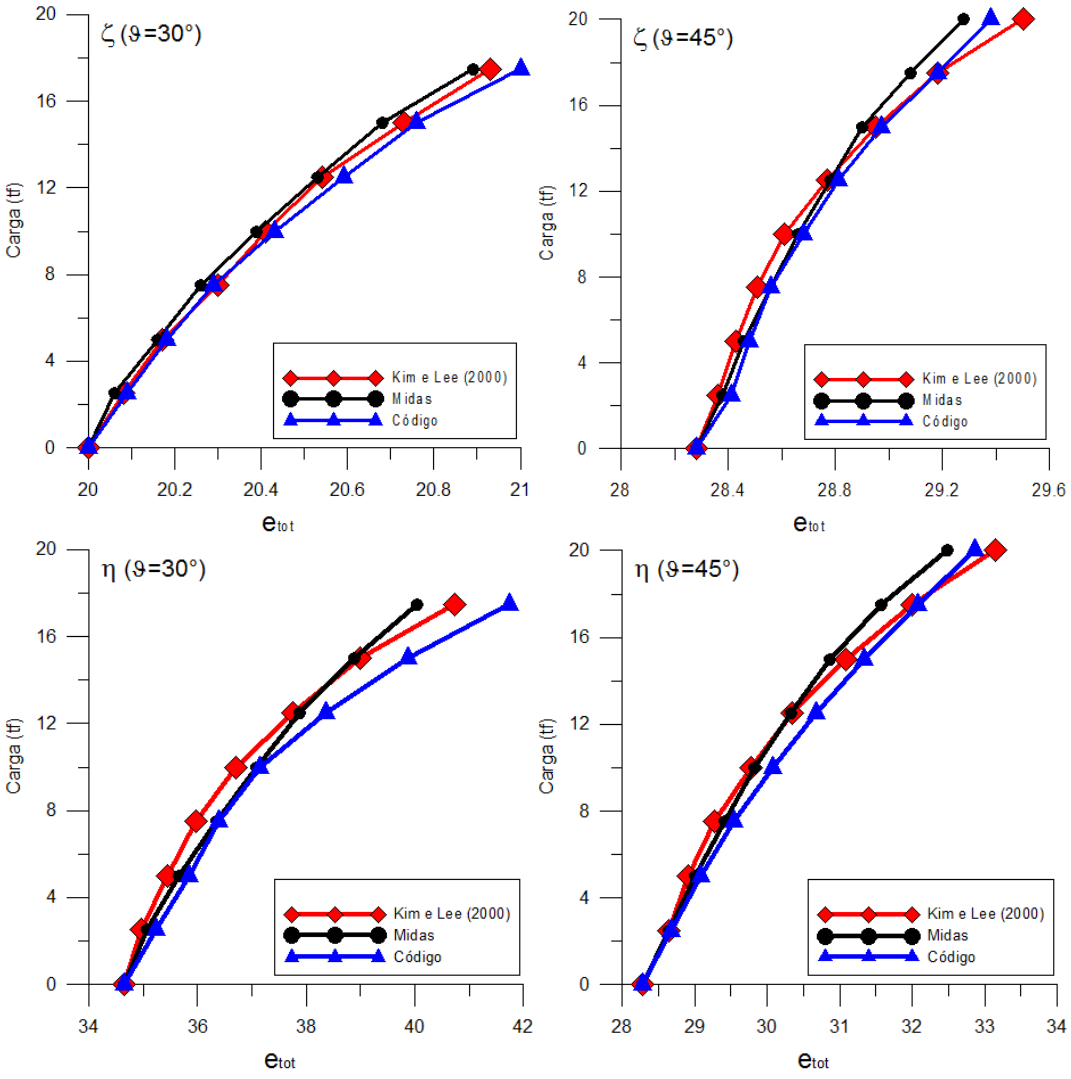


Figura 6.9 Resultado dos testes nas peças sob flexão composta oblíqua.

Os diagramas contendo os resultados das peças submetidas à flexão composta obliqua seguem as mesmas referências apresentadas na flexão composta norma. A direção das deformações, η e ζ estão apresentadas na Figura 6.6, assim como o angulo ϑ de aplicação da carga.

Até este ponto o código se mostrou válido quando comparado com os ensaios

realizados e outros modelos numéricos. Contudo as peças analisadas sob flexão composta oblíqua apresentavam esbeltez máxima de 45, com isso são elementos que apresentam um baixo incremento de cargas devido aos efeitos de segunda ordem. Assim veio a necessidade de fazer uma validação para peças com maior esbeltez, porém não haviam referências que fornecessem resultados experimentais para este tipo de situação assim, a partir deste ponto, foi abandonada a comparação com resultados experimentais. A validação foi feita através de comparação entre modelos em elementos finitos e resultados obtidos com o código desenvolvido. Essa validação mostra-se viável tendo em vista os resultados anteriores que tornaram possível concluir que os modelos em elementos finitos apresentam uma boa correlação com os resultados experimentais. Para fazer esta verificação final foram criados dez pilares agrupados em três conjuntos definidos em função da geometria e armadura, dentro de cada conjunto a esbeltez era variada. A Tabela 6.4 mostra as características de cada peça. Foram comparados os valores de excentricidade final entre o código desenvolvido e os modelos criados usando o *Softwere* MidasFea(Versão 2.9.6, 2009).

Tabela 6.4 Características dos pilares utilizados para validação numérica.

Pilar	Dados da seção Largura/Altura(cm)		Armadura Longitudinal	Altura(cm)	Esbeltez (x)	Esbeltez (y)	Excentricidade x (mm)	Excentricidade y (mm)
A-P1	30	30	4ϕ16.0 mm	390	90	90	60	20
A-P2	30	30	4ϕ16.0 mm	455	105	105	60	20
A-P3	30	30	4ϕ16.0 mm	515	120	120	60	20
A-P4	30	30	4ϕ16.0 mm	600	140	140	60	20
B-P5	25	12	6ϕ12.5mm	160	92	44	20	12
B-P6	25	12	6ϕ12.5mm	185	107	51	20	12
C-P7	40	50	6ϕ16.0mm	400	55	70	150	10
C-P8	40	50	6ϕ16.0mm	500	70	90	150	10
C-P9	40	50	6ϕ16.0mm	550	75	95	150	10
C-P10	40	50	6ϕ16.0mm	650	90	115	150	10

Os pilares do grupo A e C foram modelados admitindo f_c=30MPa, f_y=500MPa e E_s=200GPa. O grupo B utilizou a mesma seção ensaiada por Melo (2009) submetidas a gora à flexão composta oblíqua, foram utilizados os dados referentes aos materiais obtidos em ensaios, f_c=36MPa, f_y=595MPa e E_s=195GPa. Os diagramas apresentam os resultados obtidos em cada peça.

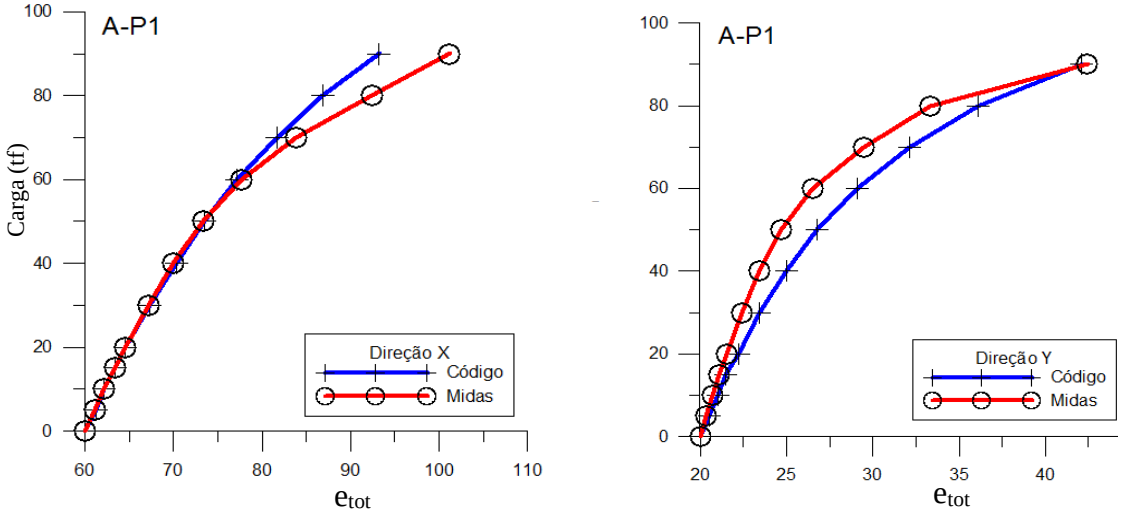


Figura 6.10 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P1.

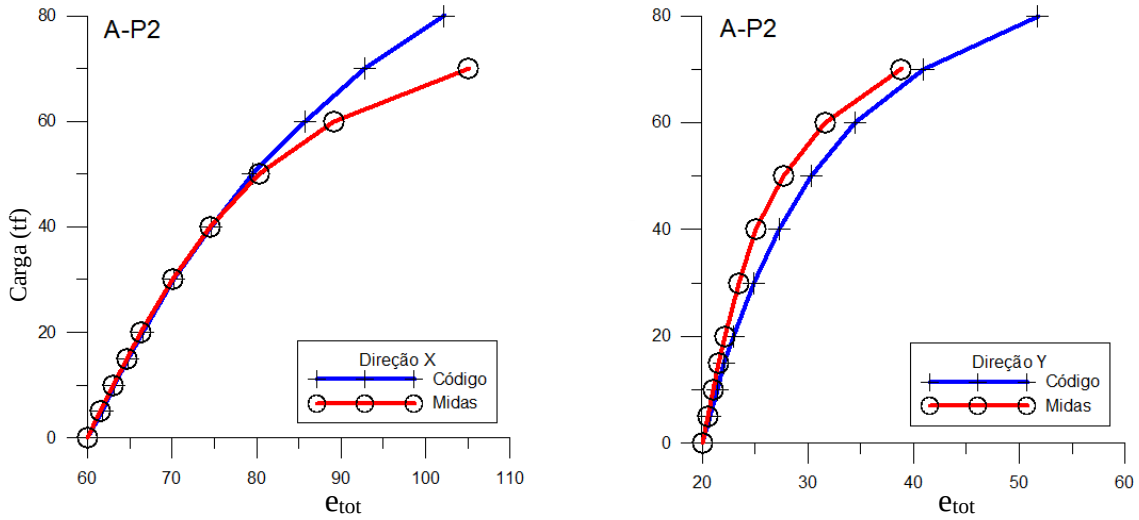


Figura 6.11 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P2.

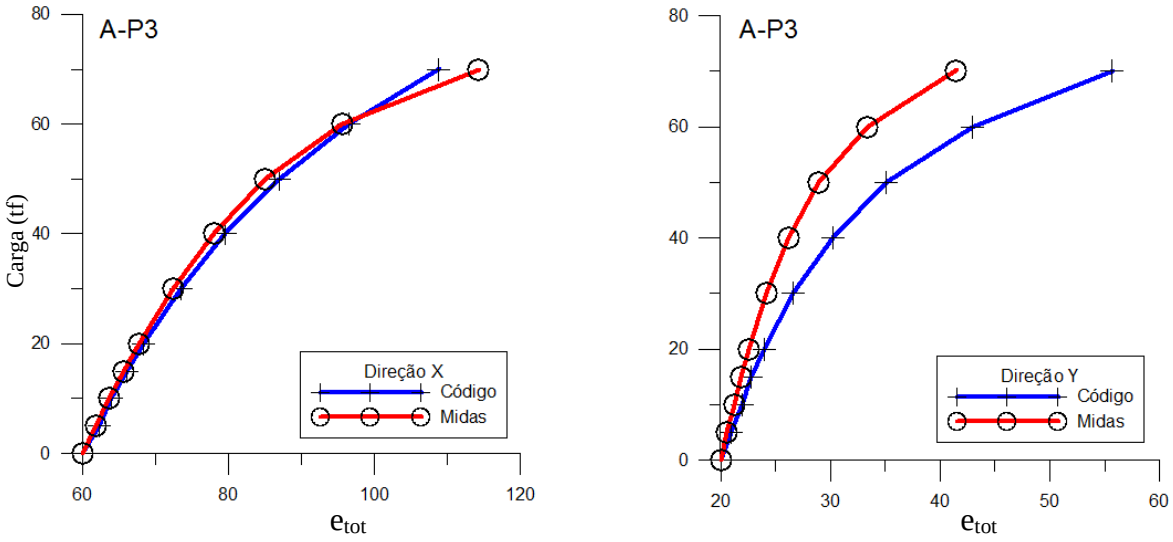


Figura 6.12 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P3

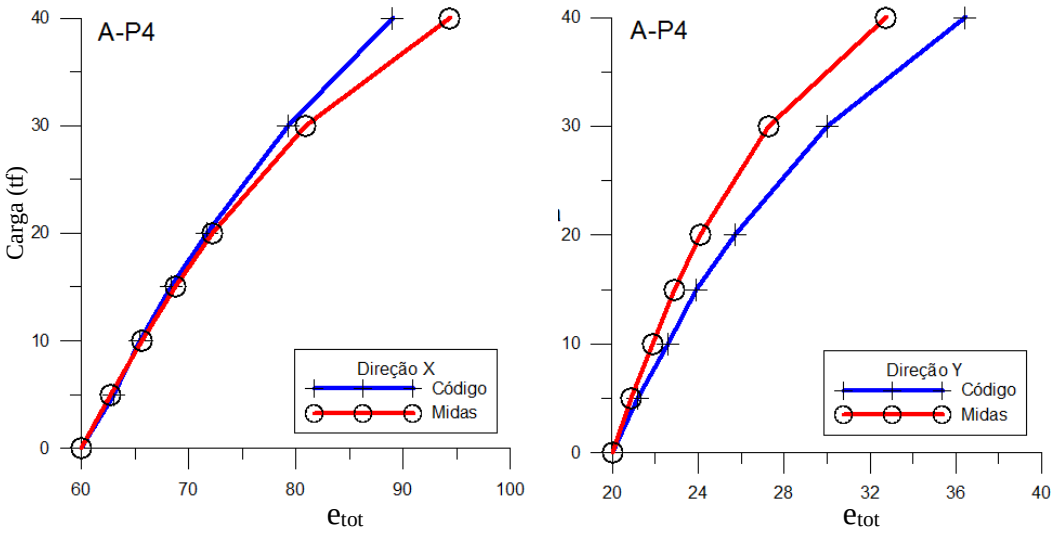


Figura 6.13 Diagrama carga x excentricidade total pilar A-P4.

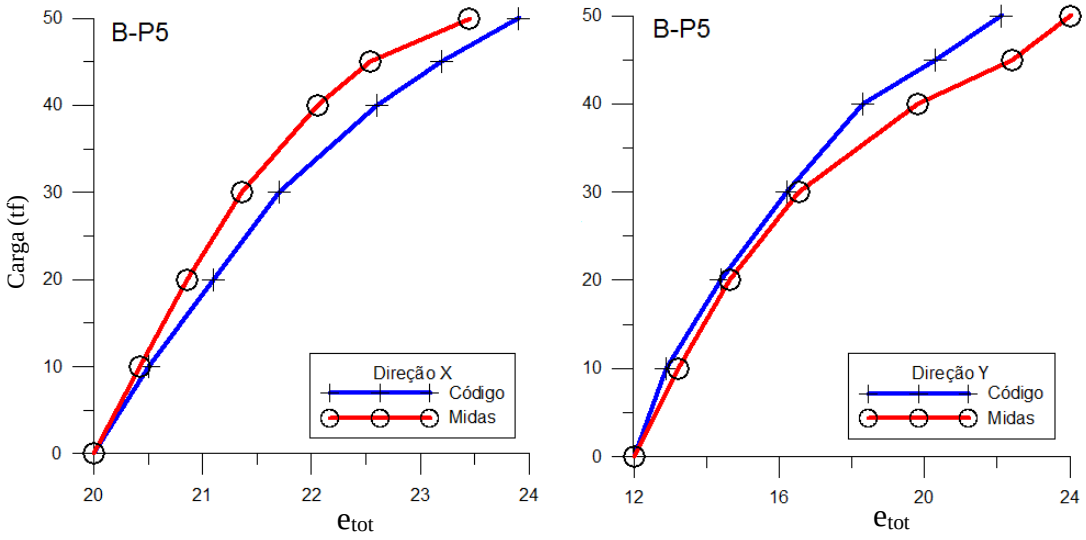


Figura 6.14 Diagrama carga x excentricidade total pilar B-P5.

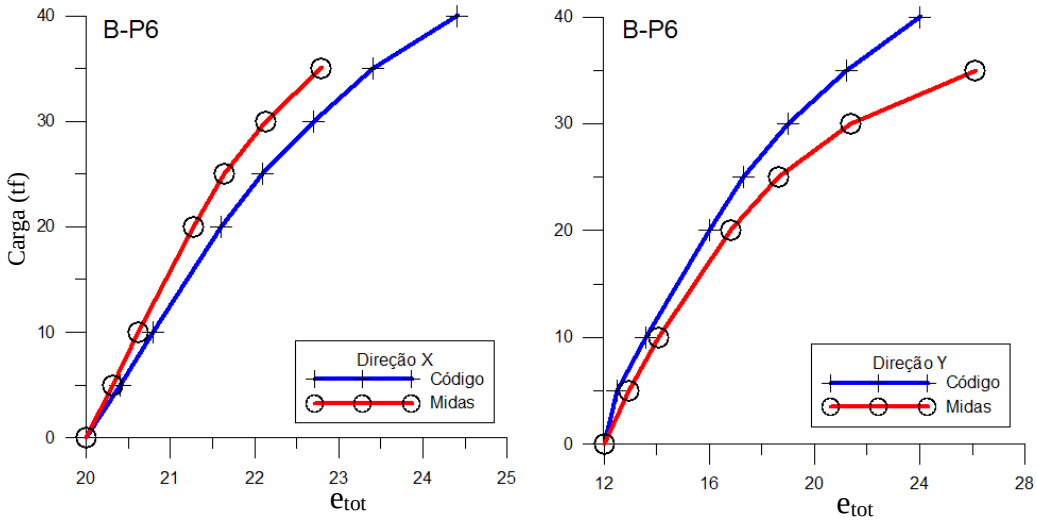


Figura 6.15 Diagrama carga x excentricidade total pilar B-P6.

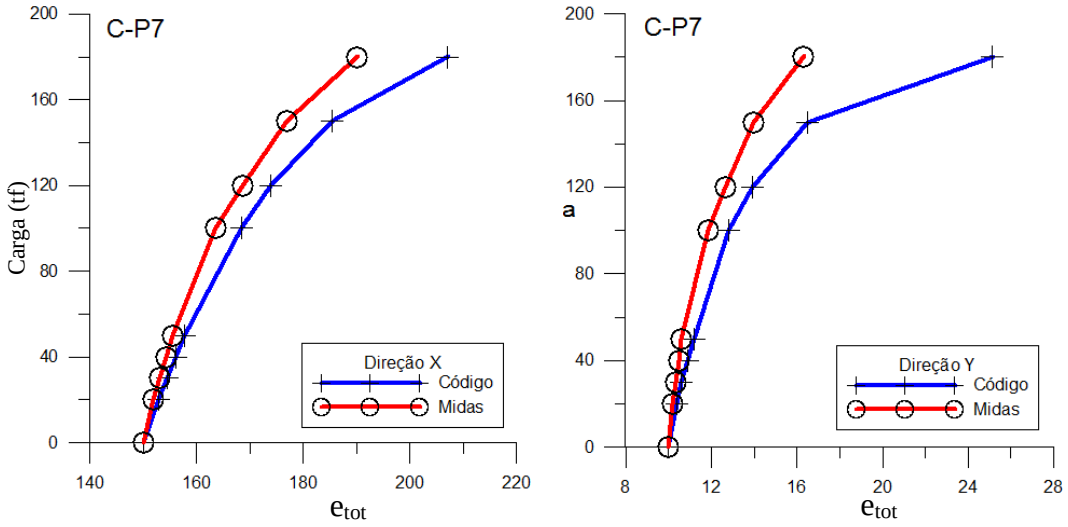


Figura 6.16 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P7.

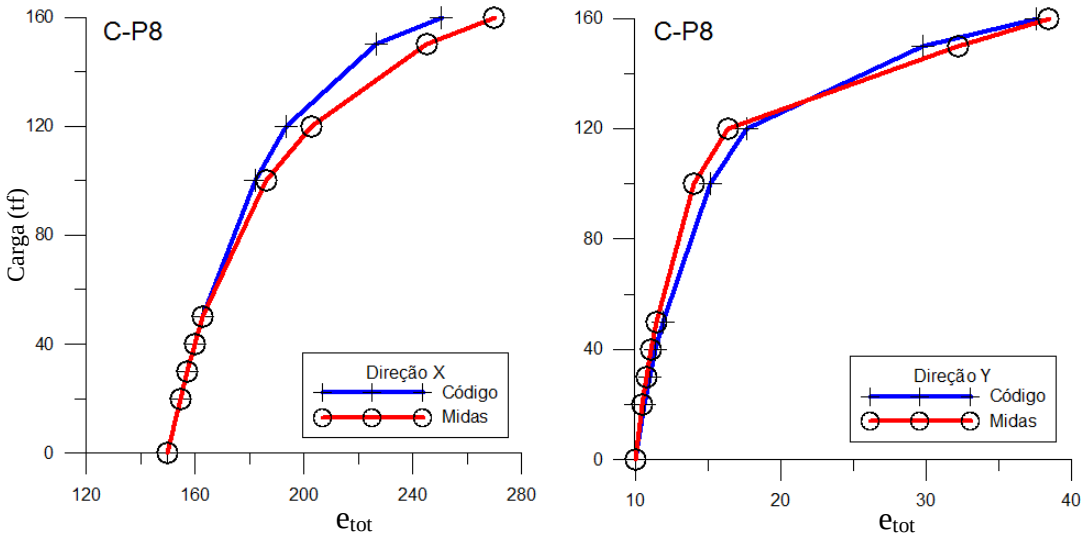


Figura 6.17 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P8.

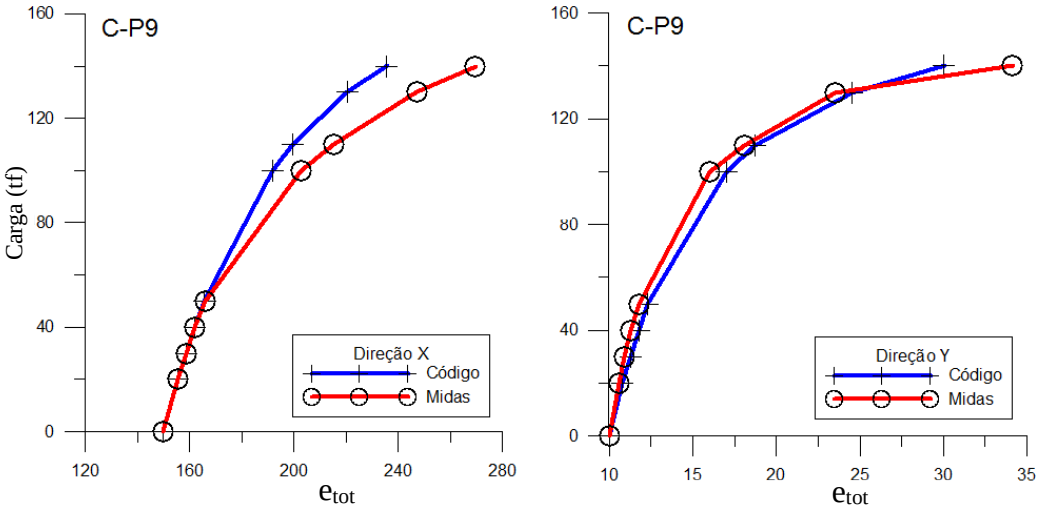


Figura 6.18 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P9.

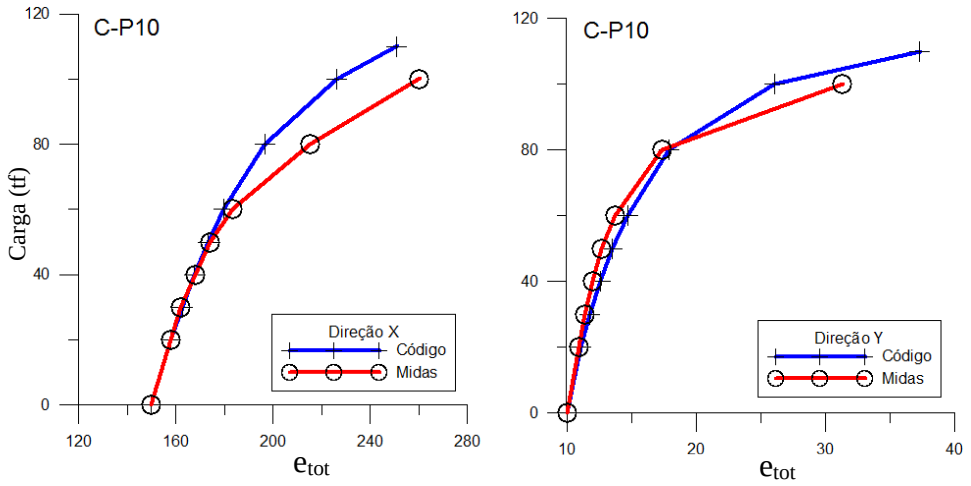


Figura 6.19 Diagrama carga x excentricidade total pilar C-P10.

Adicionalmente os resultados serão apresentados em forma de tabela no Anexo A incluindo os erros relativos entre o código e os modelos numéricos e o acréscimo percentual de excentricidade devido ao efeito de segunda ordem obtidos com o código. Também consta neste anexo a avaliação da eficiência do código através da comparação dos tempos para obtenção dos resultados.

Ao fim também foram computadas as cargas últimas obtidas com o código desenvolvido e com o modelo em elementos finitos. Os resultados estão na Tabela 6.5, onde também está a variação percentual entre os resultados obtidos.

Tabela 6.5 Cargas últimas

Pilar	Carga última		Relação de cargas $F_{código}/F_{Midas}$ (%)
	Midas	Código	
A-P1	91	95	4,2
A-P2	76	81	6,2
A-P3	72	77	6,5
A-P4	68	69	1,4
B-P5	56	52	-7,7
B-P6	47	44	-6,8
C-P7	183	188	2,7
C-P8	165	166	0,6
C-P9	141	149	5,4
C-P10	104	112	7,1

6.3 VERIFICAÇÃO DE CONVERGÊNCIA

Para avaliar a confiabilidade dos resultados obtidos foram identificados os pontos onde uma alteração no grau de refinamento poderia trazer reflexos nos resultados. Esta verificação foi feita no código desenvolvido, onde a quantidade de divisões ao longo do comprimento da barra e o número de quadriculas para discretização da seção podem ser alteradas, e nos modelos em elementos finitos onde se buscou avaliar a estabilização dos resultados em função do refinamento da malha.

A verificação quanto ao número ideal de seções de análise ao longo do pilar foi feita com os pilares A-P4, B-P6 e C-P10. submetidos a 30 tf, 35 tf e 30 tf respectivamente. O número de pontos ao longo do pilar foi variado de 2 a 15. Os resultados foram colocados em gráficos, que continha a flecha na direção mais solicitada em função do refinamento. Os dados foram analisados para definir um número que aliasse confiabilidade e otimização do processamento. As Figuras 6.20 a 6.22 mostram os resultados dos testes realizados, adicionalmente a Figura 6.23 mostra os resultados do mesmo teste realizado por Melo (2009).

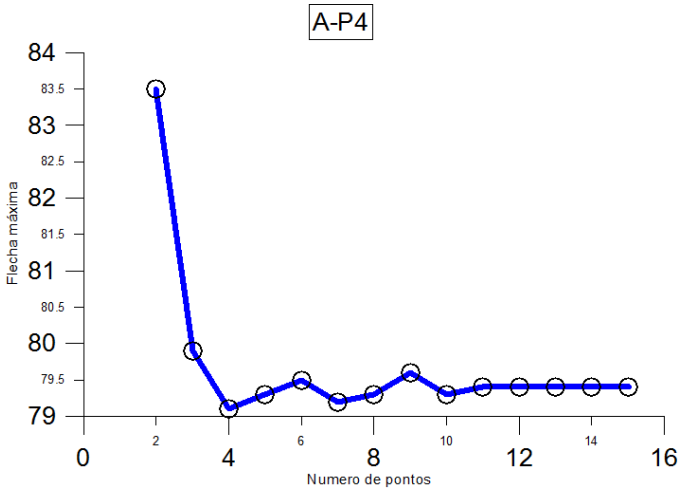


Figura 6.20 Teste de refinamento para divisões do elemento A-P4.

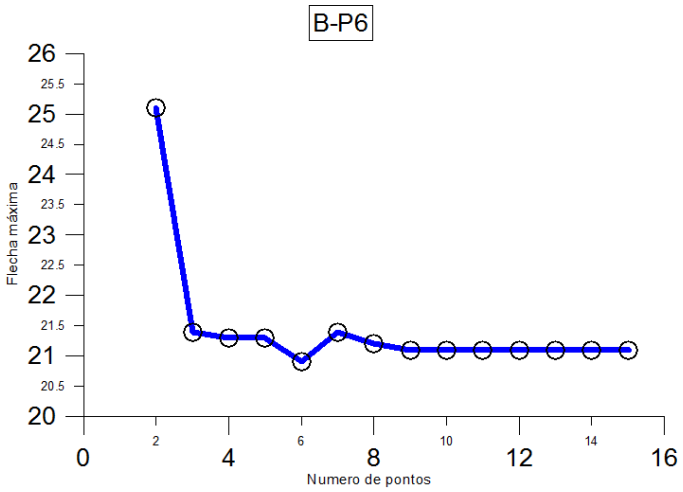


Figura 6.21 Teste de refinamento para divisões do elemento B-P6.

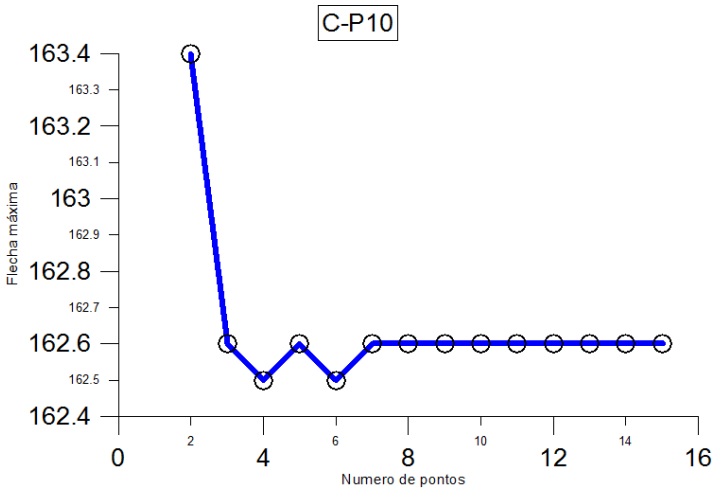


Figura 6.22 Teste de refinamento para divisões do elemento C-P10.

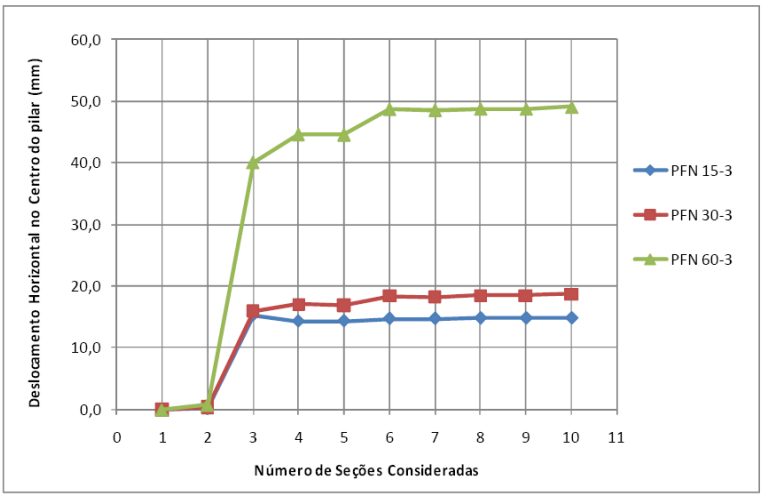


Figura 6.23 Teste de refinamento para divisões do elemento realizado por Melo (2009).

É possível verificar que a convergência ocorreu de formas distintas no presente trabalho o comportamento observado é de uma oscilação em torno de um determinado valor que posteriormente torna-se constante. Na verificação feita por Melo (2009) a convergência dos resultado ocorre de forma direta através de uma rápida aproximação do valor final. Com tudo nos dois casos é possível dizer que a partir de seis seções de cálculo o resultado fornecido já está muito próximo da convergência. Diante disso Melo (2009) adotou uma discretização com 7 seções de cálculo e o presente trabalho de forma um pouco mais conservadora discretizou o pilar em 8 seções. Vale destacar que a análise desenvolvida por Melo (2009), fazendo uso das condições de simetria do problema, discretiza metade da peça.

Outro elemento investigado foi a definição de um número ideal para a quantidade de quadriculas que servirão para discretizar a seção transversa. O teste se deu de forma semelhante, através da captura da deformação máxima dos pilares analisados e confrontando este resultado com a quantidade de elementos na seção. Os dados também foram colocados em forma de curva para possibilitar uma melhor análise.

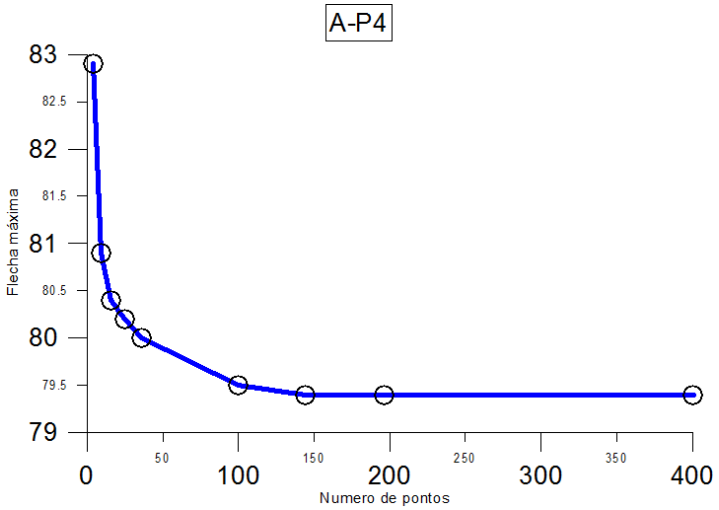


Figura 6.24 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10.

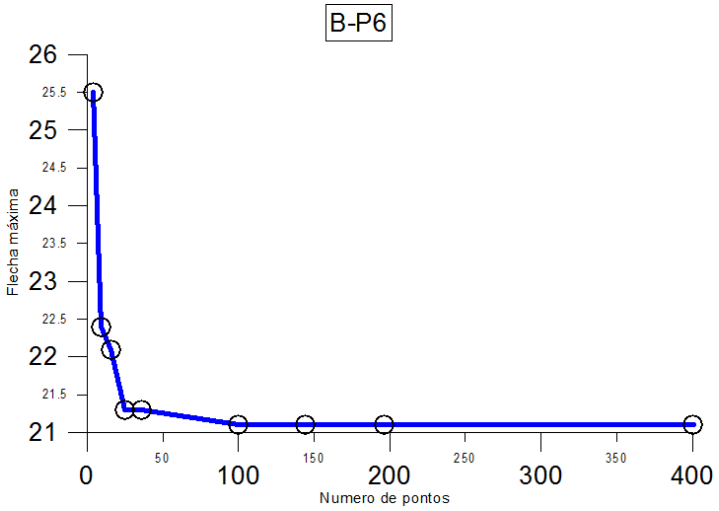


Figura 6.25 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10.

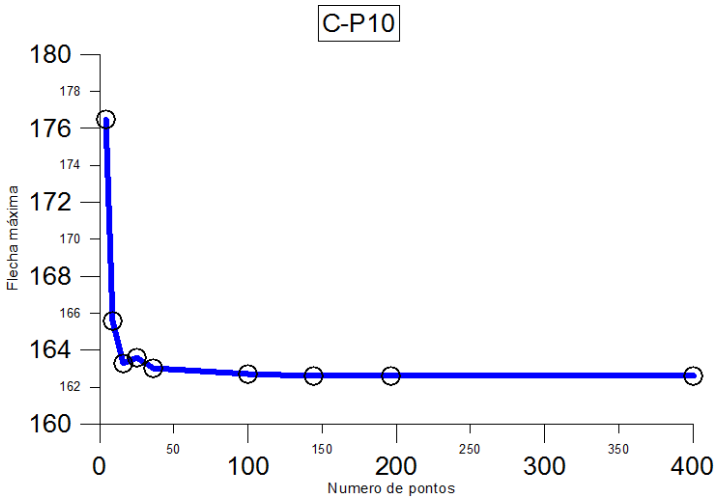


Figura 6.26 Teste de refinamento para discretização da seção C-P10.

Pode ser observado que com aproximadamente 100 quadriculas na seção transversal já é possível utilizar o resultado com uma aproximação segura. O código desenvolvido utilizou 400 quadrículas.

Por fim foram realizados os testes de convergência aplicados aos modelos numéricos, para os pilares analisados foi feito um refinamento na malha com a redução das dimensões globais dos elementos e com isso se monitorou o valor da deformação no topo da peça, até se verificar a convergência. Adicionalmente como forma de orientar a escolha da dimensão do elemento foi computada em cada caso a relação entre as dimensões cúbicas (Volume) da peça e do elemento utilizado e com isso é possível extrair uma dimensão otimizada sem que haja necessidade de realizar os testes para todas as peças.

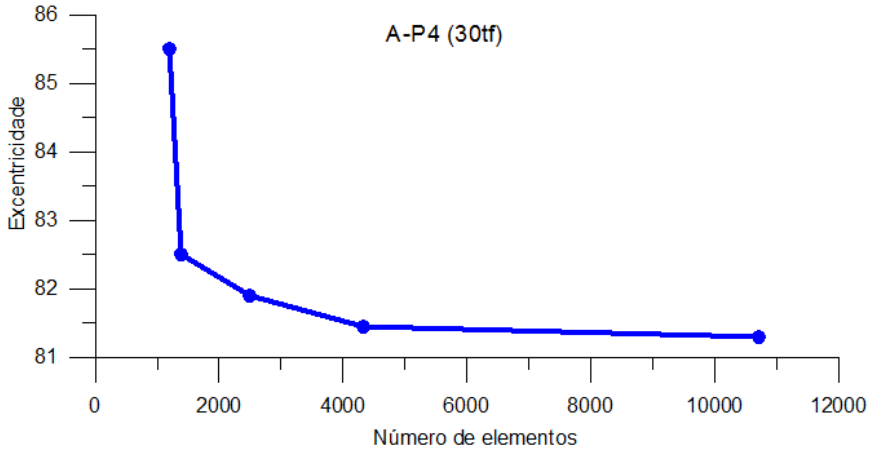


Figura 6.27 Teste de convergência de malha do modelo elementos finitos A-P4.

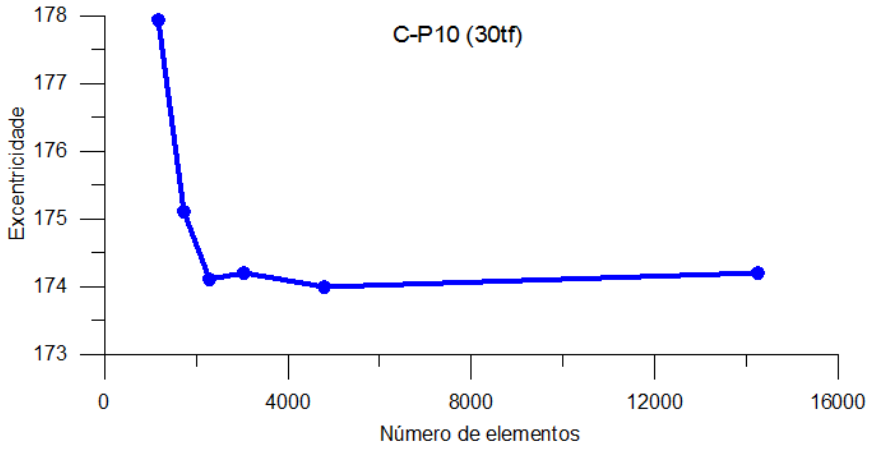


Figura 6.28 Teste de convergência de malha do modelo elementos finitos C-P10.

Tabela 6.6 Relação entre volume do modelo e dos elementos A-P4.

Quantidade	Relação $V_{pilar}/V_{element}$
540	5,40E+02
603	7,41E+02
1200	1,05E+03
1376	1,57E+03
2500	2,50E+03
4320	4,32E+03
10716	2,00E+04

7 CONCLUSÕES

O código computacional desenvolvido, usando o método apresentado nesse texto, fornece resultados satisfatórios quando comparado a técnicas sofisticadas de análise estrutural e até mesmo ensaios em pilares reais. Dos valores das deformações encontradas nas peças ensaiadas sob flexão composta normal, o erro máximo detectado foi no PFN 6-3 e é de 17,3%, quando comparado com o modelo em elementos finitos esse valor cai para 7,9%. O erro médio relativo entre o modelo do MidasFea e o código foi de 6,1% e 7,5% para a comparação com os ensaios. Na comparação das peças ensaiadas sob flexão composta oblíqua, foram obtidos resultados com um erro relativo que chegou a 16,1%, no sentido de menor inércia, no pilar com excentricidade a 45 graus. Esse valor se manteve próximo a comparação com o modelo numérico, que foi de 12,6%. O valor médio dos erros obtidos se manteve próximo aos 8%.

Ao se comparar os resultados do código exclusivamente com os modelos criados em elementos finitos, foi observado um erro de 54%. Porém, este valor está associado a um acréscimo de excentricidade de segunda ordem superior a 150%, que é uma situação improvável em estruturas correntes. Quando limitado o efeito de segunda ordem a um acréscimo de até 50% no valor da excentricidade inicial, o desvio entre os resultados fica abaixo de 10%.

O uso de uma equação polinomial para a linha elástica do pilar representou bem o comportamento da peça. A deformação ao longo do eixo do pilar foi definida por um polinômio de quarto grau, proveniente da integração da equação da curvatura. Diante dos resultados relativos as excentricidades finais dos pilares, pode ser visto que a adoção desta curva apresentou um ajuste satisfatório as deformações obtidas nos ensaios e modelos em elementos finitos.

O processo numérico utilizado pode levar a erros como os observados nos diagramas momento-curvatura apresentados na Figura 6.3. A definição dos parâmetros que definem o equilíbrio da seção necessita de uma tolerância para busca dos resultados. Isto pode refletir em uma variação dos resultados, que pode ser minimizada com o uso de um intervalo menor para definição da convergência. Este refinamento leva a um maior tempo de processamento.

O emprego da Bisseção Bidimensional para determinação dos parâmetros internos que equilibram a seção, fornece uma opção para solução do problema da estabilidade de pilares, onde não é necessária a criação de equações para montagem de um sistema. Com o uso de um processo capaz de calcular os esforços internos, que pode ou não ser através de uma função, é

possível obter a solução do problema.

O uso do processo de divisão da seção para substituir as integrais que definem os esforços interno por um somatório forneceu resultados de boa qualidade. Para definir o valor ideal para o número de elementos que representãm a seção é recomendado a realização de testes de convergência, principalmente devido ao fato de que o uso de uma quantidade excessiva de elementos implica em um maior tempo de processamento.

Para uso do processo apresentado de forma mais eficiente é recomenda a realização de testes de refinamento em todas as etapas que necessitem de uma determinada discretização, como foi apresentado no item 6.3. O processo empregado envolve muitas operações, fato que pode levar a um tempo de processamento demasiado, sem necessariamente haver um ganho na precisão dos resultados. Além disso em alguns instantes a convergência se mostrou sensível ao intervalo de busca, sendo necessário alterar a faixa de varredura dos parâmetros para que o código apresentasse resultados.

Atualmente o código se apresenta como uma ferramenta que fornece dados importantes para análise de pilares e complementa uma relativa escassez de programas que deem esses dados ao engenheiro. A rotina tem uma entrada de dados simples, quando comparados a programas mais sofisticados, e não necessita de intervenções do usuário para o processamento, eliminando com isso possíveis fontes de erros nos resultados.

Seu uso deve ser incentivado mesmo para peças de esbeltez inferior ao limite onde se exige este tipo de técnica, tendo em vista que a precisão dos resultados leva a um dimensionamento ótimo da peça. Adicionalmente em peças onde a excentricidade de segunda ordem, obtida com o código, seja até 40% do valor da inicial, reomenda-se o procedimento proposto. E em casos que excedam este valor recomenda-se que os resultados sejam confrontados com outros modelos de cálculo.

REFERÊNCIAS

A. EIGER, K. SIKORSKI e F. STENGER. 1984, *A Bissection method for systems of nonlinear equation*. 4 Dec.1984, ACM Transactions on Mathematical Software,V10, 367-377.

ARAÚJO J.M., 1984, *Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

ARAÚJO J.M., 2003, *Curso de concreto armado*, v3, Dunas.

ARAÚJO J.M., 2011, *Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 1: Um modelo para análise e dimensionamento*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.18, p.81-93.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉNICAS. NBR 6118 – *Projeto e execução de obras em concreto armado e protendido* – procedimentos. Rio de Janeiro 2014.

ATENA – ATENA 3D, Version 5.1.1.11203, *Cervenka Consulting.*

ATENA, 2014, *ATENA Program Documentation Part 1 Theory*, Cervenka Consulting.

BORGES A. C. L., 1999, *Análise de pilares esbeltos de concreto solicitados a flexo-compressão obliqua*, Dissertação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade De São Paulo, São Carlos.

CADAMURO I. W. , 1997, *Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado com seção qualquer solicitados por flexão composta obliqua,* Dissertação, Escola de engenharia de são Carlos, Universidade De São Paulo. São Carlos.

CARDOSO S. D. 2014, *Sistema Computacional para análise não linear de pilares de concreto armado*, Monografia de especialização em gestão de projetos de sistemas estruturais da Escola politécnica da Universidade De São Paulo, São Paulo.

CHARLES H. e FRANK S. 1976, *A Two Dimensional Analogue to the Method of Bisections for Solving Nonlinear Equations*. *Q Appl. Math 5*, 33 (1976), 351-368.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP,*Design Code, 2010,*Lausanne, 1993.

CLÁSSICOS DA ARQUITETURA: Centro De Mecanização Do Banco Do Brasil, Disponível em http://www.archdaily.com.br/br/01-156395/classicos-da-arquitetura-centro-de-mecanizacao-do-banco-do-brasil-slash-irmaos-roberto , Acesso em : 11 Jul, 2016.

EUROCODE 2:2005, *Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules ans Rules for Buildings*, British Standards Institution, UK.

FRANCO T. R., 2010, *Análise do efeito de segunda ordem em pilares segundo a NBR6118 e pelos métodos exatos,* Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal Do Rio De Janeiro, Rio de Janeiro.

FUSCO, P.B.,1981. *Estruturas de concreto: Solicitações normais*, LTC

JIM-KEUN KIM e SANG-SOON LEE, 2000, *The behavio of reinforced concrete columns subject to axial forces and biaxial bending*, Engineering Structures, Taejon - South Korea, Nº 23, 2000.

MATLAB, Version 7.10.0.499 (R2010a), 2010, *The Language of Technucal Computing*

MELO C. E. L., 2009, *Análise experimental e numérica de pilares birrotulados de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal*, Tese, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de tecnologia Universidade De Brasília, Brasília.

MAVICHAK V. e FURLONG R. W. ,1976, *Strength and stiffness of reinforced concrete columns under biaxial bending*, University Of Texas, Austin.

Midas Fea, Version 2.9.6, 2009, *Nonlinear and Detail FE Analysis System for Civil Structures*

PAULA J. A., 1988, *Algoritmo para o estudo de pilares esbeltos de concreto armado solicitados à flexão normal composta.* Dissertação, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ROBERTO CHUST DE CARVALHO e LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO, 2013, *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*, v.2, PINI

SIKIRSKI K., 1979, *A three-dimensional analogue to the method of bisections for solving nonlinear equations*, Mathematics of computation, V3, Nº146, April 1979, p722-738

WANG G. G. e HSU C. T., 1992, *Complete biaxial load-deformation behavior of RC columns*, J. Struct. Eng. 1992, ASCE 118(09), 2590-2609

WATANABE W. T., 2011, *Verificação da Estabilidade de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Submetidos à Flexo-compressão Oblíqua pelo Método Exato: Proposta de Programa Computacional*, trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre.

ANEXO A

Comparação entre resultados de excentricidade total obtidas com o código desenvolvido e com o programa comercial Midas FEA

A-P1

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	60,0	20,0	60,0	20,0	0,0	0,0		0,0	0,0
5	61,3	20,5	61,1	20,4	0,3	0,7		2,2	2,5
10	62,2	21,0	62,2	20,7	0,0	1,3		3,7	5,0
15	63,4	21,5	63,4	21,1	0,1	1,8		5,7	7,5
20	64,6	22,2	64,6	21,5	0,1	3,2		7,7	11,0
30	67,3	23,4	67,1	22,4	0,3	4,5		12,2	17,0
40	70,3	25,0	70,0	23,4	0,4	6,7		17,2	25,0
50	73,5	26,8	73,4	24,7	0,2	8,5		22,5	34,0
60	77,2	29,1	77,7	26,5	0,6	9,8		28,7	45,5
70	81,7	32,1	83,8	29,5	2,5	9,0		36,2	60,5
80	86,9	36,1	92,4	33,3	6,0	8,4		44,8	80,5
90	93,2	42,1	101,1	42,4	7,8	0,7		55,3	110,5

A-P2

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	60,0	20,0	60,0	20,0	0,0	0,0		0,0	0,0
5	61,8	20,7	61,5	20,5	0,5	1,0		3,0	3,5
10	63,1	21,4	63,0	21,0	0,1	1,9		5,2	7,0
15	64,8	22,1	64,7	21,5	0,2	2,6		8,0	10,5
20	66,5	23,0	66,4	22,1	0,2	4,0		10,8	15,0
30	70,2	24,9	70,1	23,4	0,1	6,3		17,0	24,5
40	74,6	27,3	74,6	25,1	0,1	8,9		24,3	36,5
50	79,6	30,3	80,3	27,7	0,8	9,4		32,7	51,5
60	85,7	34,5	89,2	31,6	3,9	9,0		42,8	72,5
70	92,8	40,9	105,0	38,8	11,6	5,4		54,7	104,5
80	102,2	51,7	-	-	-	-		70,3	158,5

A-P3

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	60,0	20,0	60,0	20,0	0,0	0,0		0,0	0,0
5	62,2	20,9	61,8	20,6	0,7	1,5		3,7	4,5

10	64,0	21,9	63,7	21,2	0,5	3,2		6,7	9,5
15	66,1	22,8	65,7	21,9	0,7	4,2		10,2	14,0
20	68,3	24,0	67,8	22,6	0,8	6,3		13,8	20,0
30	73,5	26,6	72,4	24,2	1,5	10,0		22,5	33,0
40	79,6	30,2	77,9	26,2	2,1	15,4		32,7	51,0
50	87,0	35,1	84,9	28,9	2,5	21,5		45,0	75,5
60	96,5	42,9	95,5	33,4	1,0	28,5		60,8	114,5
70	108,7	55,7	114,2	41,4	4,8	34,5		81,2	178,5

A-P4

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	60,0	20,0	60,0	20,0	0,0	0,0		0,0	0,0
5	63,0	21,2	62,7	20,9	0,5	1,5		5,0	6,0
10	65,5	22,6	65,6	21,9	0,2	3,3		9,2	13,0
15	68,4	23,9	68,8	22,9	0,5	4,3		14,0	19,5
20	71,7	25,7	72,3	24,1	0,8	6,7		19,5	28,5
30	79,3	30,0	80,9	27,3	2,0	9,9		32,2	50,0
40	89,0	36,4	94,3	32,7	5,6	11,2		48,3	82,0

B-P5

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	20,0	12,0	20,0	12,0	0,0	0,0		0,0	0,0
10	20,5	12,9	20,4	13,2	0,4	2,3		2,5	7,5
20	21,1	14,4	20,9	14,7	1,2	1,7		5,5	20,0
30	21,7	16,2	21,4	16,6	1,6	2,1		8,5	35,0
40	22,6	18,3	22,1	19,8	2,4	7,6		13,0	52,5
45	23,2	20,3	22,5	22,4	2,9	9,5		16,0	69,2
50	23,9	22,1	23,5	24,0	1,9	7,9		19,5	84,2

B-P6

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	20,0	12,0	20,0	12,0	0,0	0,0		0,0	0,0
5	20,4	12,5	20,3	13,0	0,4	3,5		2,0	4,2
10	20,8	13,6	20,6	14,1	0,9	3,3		4,0	13,3
20	21,6	16,0	21,3	16,8	1,6	4,8		8,0	33,3
25	22,1	17,3	21,6	18,6	2,1	7,1		10,5	44,2
30	22,7	19,0	22,1	21,4	2,6	11,1		13,5	58,3
35	23,4	21,2	22,8	26,1	2,7	18,7		17,0	76,7
40	24,4	24,0	-	-	-	-		22,0	100,0

C-P7

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	150,0	10,0	150,0	10,0	0,0	0,0		0,0	0,0
20	152,9	10,4	151,9	10,2	0,6	2,1		1,9	4,0
30	154,5	10,6	153,1	10,3	0,9	2,7		3,0	6,0
40	156,1	10,9	154,4	10,5	1,1	4,1		4,1	9,0
50	157,8	11,2	155,5	10,6	1,5	5,6		5,2	12,0
100	168,4	12,8	163,6	11,9	3,0	7,9		12,3	28,0
120	174,0	13,9	168,6	12,6	3,2	9,9		16,0	39,0
150	185,4	16,5	177,0	14,0	4,7	18,1		23,6	65,0
180	207,1	25,1	190,0	16,3	9,0	54,1		38,1	151,0

C-P8

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0	150	10	150	10	0,0	0,0		0,0	0,0
20	154,6	10,6	154,7	10,51	0,1	0,9		3,1	6,0
30	157,1	11	157,27	10,8	0,1	1,9		4,7	10,0
40	159,8	11,4	160	11,11	0,1	2,6		6,5	14,0
50	162,6	11,9	163	11,46	0,2	3,8		8,4	19,0
100	182	15,2	186,2	14	2,3	8,6		21,3	52,0
120	193,6	17,7	202,6	16,4	4,4	7,9		29,1	77,0
150	226,4	29,8	245,2	32,2	7,7	7,5		50,9	198,0
160	250,3	37,6	269,6	38,4	7,2	2,1		66,9	276,0

C-P9

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y
0,0	150,0	10,0	150,0	10,0	0,0	0,0		0,0	0,0
20,0	155,6	10,8	155,7	10,6	0,1	1,9		3,7	8,0
30,0	158,7	11,3	158,9	10,9	0,1	3,7		5,8	13,0
40,0	162,1	11,8	162,0	11,3	0,1	4,4		8,1	18,0
50,0	165,7	12,3	166,0	11,8	0,2	4,2		10,5	23,0
100,0	191,7	17,0	202,8	16,0	5,5	6,3		27,8	70,0
110,0	199,5	18,7	215,2	18,1	7,3	3,3		33,0	87,0
130,0	220,5	24,5	247,0	23,5	10,7	4,3		47,0	145,0
140,0	235,5	30,0	269,5	34,1	12,6	12,0		57,0	200,0

C-P10

Carga (tf)	e_{tot} Código		e_{tot} Midas		Erro (%)			Relação e_2/e_1 (%)	
	x	y	x	y	x	y		x	y

0	150,0	10,0	150,0	10,0	0,0	0,0		0,0	0,0
20	158,0	11,1	158,0	10,9	0,0	1,8		5,3	11,0
30	162,6	11,8	162,0	11,4	0,4	3,5		8,4	18,0
40	167,6	12,6	168,0	12,0	0,2	5,0		11,7	26,0
50	173,3	13,5	174,0	12,7	0,4	6,3		15,5	35,0
60	179,9	14,7	183,3	13,7	1,9	7,3		19,9	47,0
80	196,6	17,9	215,2	17,4	8,6	3,1		31,1	79,0
100	226,3	26,1	260,2	31,3	13,0	16,6		50,9	161,0
110	250,8	37,3	-	-	-	-		67,2	273,0

Comparação entre tempo de processamento com uso do código e do programa Midas FEA.

A-P1

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
5	00:17	00:52	3,1
10	00:23	01:44	4,5
15	00:31	02:36	5,0
20	00:26	03:28	8,0
30	00:26	05:27	12,6
40	00:45	06:19	8,4
50	00:39	11:28	17,6
60	00:39	13:11	20,3
70	01:02	16:02	15,5
80	01:02	17:22	16,8
90	01:30	19:56	13,3

A-P2

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
5	00:26	01:14	2,8
10	00:44	02:28	3,4
15	00:45	03:42	4,9
20	00:45	04:56	6,6
30	00:46	07:35	9,9
40	01:16	10:10	8,0
50	01:15	16:57	13,6
60	01:44	18:40	10,8
70	01:44	19:36	11,3
80	01:43	21:32	12,5

A-P3

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
5	00:39	01:38	2,5
10	00:34	03:16	5,8
15	00:35	04:54	8,4
20	00:32	06:32	12,3
30	00:48	09:49	12,3
40	00:40	13:26	20,2
50	00:41	18:58	27,8
60	01:16	21:34	17,0
70	01:16	23:34	18,6

A-P4

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
5	00:21	01:41	4,8
10	00:17	02:41	9,5
15	00:17	03:41	13,0
20	00:17	04:41	16,5
30	00:26	05:41	13,1
40	00:26	06:41	15,4

B-P5

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
10	00:22	00:56	2,5
20	00:22	01:58	5,4
30	00:22	04:01	11,0
40	00:22	06:19	17,2
45	01:36	09:03	5,7
50	01:37	13:41	8,5

B-P6

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
5	00:21	02:33	7,3
10	00:22	05:06	13,9

20	00:21	07:39	21,9
25	00:24	10:12	25,5
30	00:33	12:53	23,4
35	00:33	15:26	28,1
40	00:32	-	-

C-P7

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
10	00:31	00:53	1,7
15	00:30	01:47	3,6
20	00:31	03:10	6,1
30	01:02	04:04	3,9
40	01:01	05:24	5,3
50	01:02	07:57	7,7
100	01:45	10:14	5,8
120	01:46	16:38	9,4
150	01:45	19:13	11,0
180	02:02	21:00	10,3

C-P8

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
10	00:28	01:29	3,2
15	00:28	02:11	4,7
20	00:28	03:02	6,5
30	00:57	03:56	4,1
40	00:57	04:47	5,0
50	01:23	05:38	4,1
100	01:22	09:13	6,7
120	01:58	12:31	6,4
150	01:56	15:58	8,3
160	01:56	23:10	12,0

C-P9

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
20	00:33	04:48	8,7
30	01:01	06:00	5,9

40	01:01	06:53	6,8
50	01:01	09:28	9,3
100	01:01	12:40	12,5
110	01:40	15:07	9,1
130	01:40	18:48	11,3
140	01:40	22:12	13,3

C-P10

Carga (tf)	Tempo de processamento (min:seg)		Relação $T_{midas}/T_{código}$
	Código	Midas	
0	-	-	-
20	00:36	02:07	3,5
30	00:36	04:07	6,9
40	01:20	06:13	4,7
50	01:20	08:51	6,6
60	01:20	11:33	8,7
80	01:20	15:10	11,4
100	01:43	18:01	10,5
110	01:46	19:14	10,9

ANEXO B

O Método da Bisseção é uma técnica numérica para encontrar raízes de funções. Ela faz uso do teorema de Bolzano que diz:

Sendo $f(x)$ uma função continua no intervalo $[a, b]$, e o produto $f(a) \times f(b)$ menor que zero então existe ao menos uma raiz da função no intervalo. Graficamente é possível verificar isso na Figura 10.1.

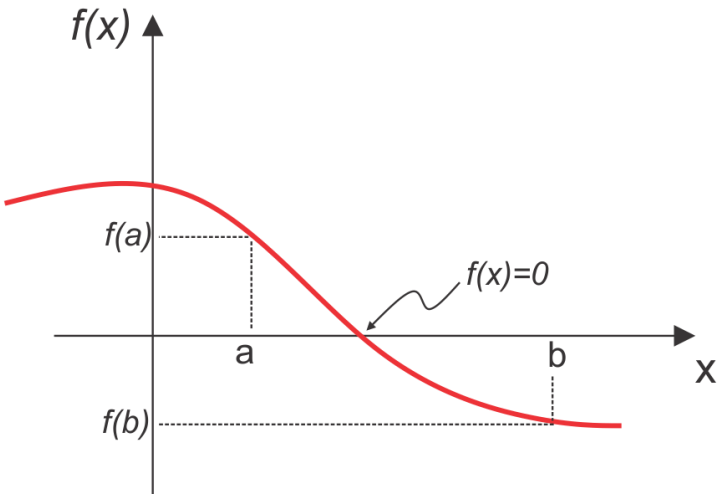


Figura 10.1 Gráfico genérico com destaque para raiz contida no intervalo [a;b].

Com isso o Método da Bisseção consiste em fazer reduções sucessivas no intervalo $[a, b]$, até que se tenha uma aproximação da raiz tão satisfatória quanto se queira. Inicialmente deve ser definido um intervalo onde se espera encontrar uma raiz e, além disso, criar um ponto adicional no centro do intervalo como está na Figura 10.2

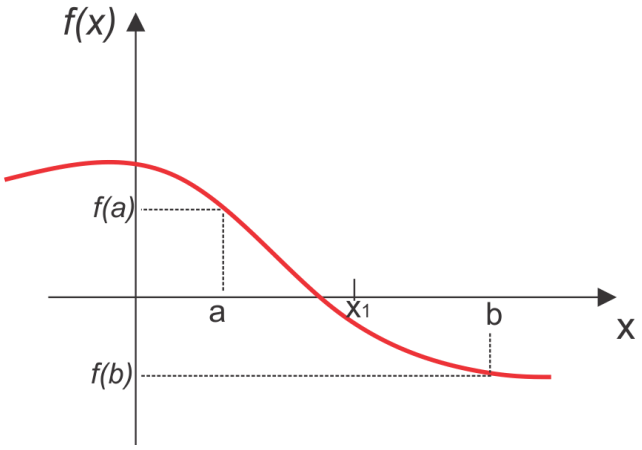


Figura 10.2 Sub-intevalos para aplicação do Método da Bisseção.

O valor de x_1 é dado por:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \tag{10.1}$$

Pelo teorema de Bolzano é possível identificar se a raiz está no intervalo $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$, no gráfico da Figura 10.2 visualmente se verifica que a raiz está entre $[a, x_1]$. Assim Os limites do intervalo são redefinidos para:

$$\begin{cases} a = a \\ b = x_1 \end{cases}$$

Chegando a nova situação vista na Figura 10.3.

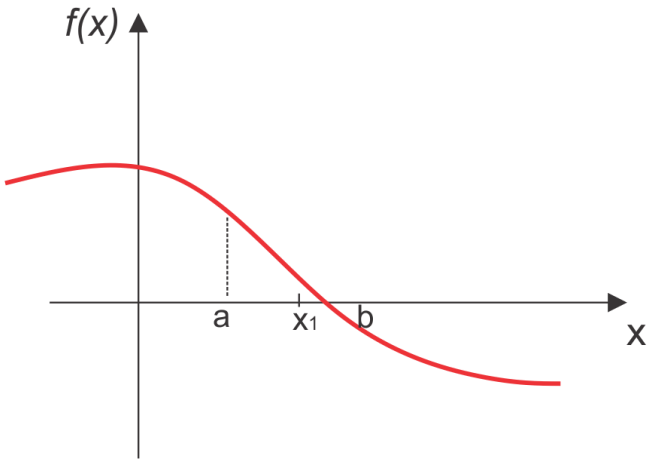


Figura 10.3 Intervalo reduzido para aplicação do Método da Bisseção.

Assim, através do teorema de Bolzano é identificado novamente onde estão os limites

da raiz. Este processo segue até que o intervalo seja satisfatoriamente pequeno e a raiz fique definida.

A metodologia apresentada se propõe a localizar a posição da raiz de uma função com uma única variável independente, porém existe a possibilidade de fazer uma aplicação deste método para um sistema formado por duas variáveis e duas equações. A aplicação do método consiste em:

a) Definir dois intervalos possíveis para as duas incógnitas, que resultarão em três pontos de cálculo, considerando o ponto central conforme foi apresentado;
b) Para cada um dos três pontos de uma variável é aplicado o processo da bisseção a outra de forma a determinar seu valor para este caso;
c) Cada caso anterior resulta em um valor para a incógnita calculada e outro para a fixa, estes valores são aplicados a segunda equação;
d) Com o resultado dos três casos obtidos na segunda equação é definido onde está a posição da segunda incógnita e com isso seu intervalo também é reduzido;
e) Enquanto a tolerância não for obtida os novos intervalos são aplicados ao item a;

Para exemplificar este processo desenvolvido será apresentada sua aplicação em um sistema genérico. Neste caso devem ser encontrados os valores de x e y satisfazem a seguinte equação:

$$f(x,y) = x + y = 5 \quad (10.2)$$

$$g(x,y) = xy^2 = 18 \quad (10.3)$$

Para a busca da solução são tomados os seguintes intervalos possíveis para as variáveis:

$$x = (0; 11) \quad (10.4)$$

$$y = (-10; 10) \quad (10.5)$$

A primeira etapa consiste em aplicar à Equação (10.2) aos valores dos pontos médios e extremos possíveis para x, e com isso encontrar o valor de y que satisfaz a primeira equação do sistema.

$x(0) \rightarrow y = 5$

$x(5{,}5) \rightarrow y = -0{,}5$

$x(11) \rightarrow y = -6$

Note que neste caso encontrar o valor de y é trivial, contudo no problema da flexão composta oblíqua esta solução é encontrada mantendo o valor de x fixo e aplicando o processo da bisseção a Equação (10.2) para encontrar y.

Nesta etapa ficam definidos os valores de x e y para cada situação, estes pares valores são aplicado à Equação (10.3) com isso são obtidos os seguintes valores:

$0 \times 5^2 = 0$ Caso 1

$5{,}5 \times -0{,}5^2 = 1{,}375$ Caso 2

$11 \times -6^2 = 396$ Caso 3

Avaliando os resultados obtidos pode se verificar que a solução da Equação (10.3) está entre os valores obtidos no Caso 2 e Caso 3, esta interpretação indica que o valor procurado para x está na faixa que define estes casos. Com isso o intervalo 10.4 é redefinido para os limites de 5,5 e 11. Com isso a etapa inicial é repetida para o novo intervalo.

$x(5{,}5) \rightarrow y = -0{,}5$

$x(8{,}25) \rightarrow y = -3{,}25$

$x(11) \rightarrow y = -6$

Aplicando estes pares novamente a Equação (10.3)

$5{,}5 \times -0{,}5^2 = 1{,}375$ Caso 1

$8{,}25 \times -3{,}25^2 = 87{,}14$ Caso 2

$11 \times -6^2 = 396$ Caso 3

Avaliando novamente os resultados a solução da Equação (10.3) está entre os casos 1 e 2 e com isso a solução para x está entre 5,5 e 8,25. Este intervalo é reaplicado na Equação (10.2).

$x(5{,}5) \rightarrow y = -0{,}5$

$x(6{,}875) \rightarrow y = -1{,}875$

$x(8{,}25) \rightarrow y = -3{,}25$

Aplicando na Equação (10.3)

$5{,}5 \times 0{,}5^2 = 1{,}375$ Caso 1

$6{,}875 \times -1{,}875^2 = 24{,}17$ Caso 2

$8{,}25 \times -3{,}25^2 = 87{,}14$ Caso 3

A solução para 9.3 está entre os Caso 1 e o Caso 2 com isso o valor de x deve está entre 5,5 e 6,875 Esta sequencia lógica deve seguir e com isso os valores de x e y vão convergindo a Tabela 10.1 mostra a continuação deste exemplo até a definição da solução.

Tabela 0.1 Valores obtidos para x e y com uso da bisseção aplicada a duas variáveis.

Iteração	$x1$	$x2$	$y1$	$y2$
1	0	11	5	-6
2	5,5	11	-0,5	-6
3	5,5	8,25	-0,5	-3,25
4	5,5	6,87	-0,5	-1,87
5	6,18	6,87	-1,18	-1,87
6	6,53	6,87	-1,53	-1,87
7	6,53	6,7	-1,53	-1,7
8	6,61	6,7	-1,61	-1,7
9	6,61	6,67	-1,61	-1,66
10	6,63	6,66	-1,63	-1,66

É notável que x e y seguem uma tendência a convergir para valores próximos a 6,64 e -1,64 respectivamente, como forma de validação é possível aplicar estes valores as Equações (10.2) e (10.3) com isso são obtidos os valores de 5 e 17,84 assim o método mostra-se viável para solucionar este tipo de problema.

ANEXO C

Formulação computacional para implementação de código para determinação dos parâmetros internos da seção.

Dados de entrada: Informações necessárias para o cálculo dos esforços internos e verificação do equilíbrio;

- Dados da seção
- Dados dos materiais
- Esforços externos

Parâmetros iniciais:

ϕ Valor inicial para a inclinação da L.N.;

$(1/r_i, 1/r_m, 1/r_f)$ Intervalo de busca da curvatura da seção;

$(h_{LN_i}, h_{LN_m}, h_{LN_f})$ Intervalo de busca altura da linha neutra;

Processamento:

(3) Enquanto M_y for menor que $M_{y,sd}$ Condição de equilíbrio (3)

(2) Enquanto o intervalo de $1/r$ for maior que a tolerância: Condição de equilíbrio (2)

As condições (1), (1') e (1") devem ser atendidas de forma independente.

(1) Enquanto o intervalo de h_{LN} for maior que a tolerância: Condição de equilíbrio (1)

---

a) Cálculo dos esforços normais para o conjunto inicial de parâmetros

a1) Cálculo do esforço normal interno N_{a1} com os parâmetros $(\phi, 1/r_i, h_{LN_i})$

a2) Cálculo do esforço normal interno N_{a2} com os parâmetros $(\phi, 1/r_i, h_{LN_m})$

a3) Cálculo do esforço normal interno N_{a3} com os parâmetros $(\phi, 1/r_i, h_{LN_f})$

Redução do intervalo de busca de h_{LN}

Se $N_{sd} > N_{a1}$ e $N_{sd} < N_{a2}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_i}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_m}$$
$$d_m = \frac{h_{LN_i} + h_{LN_m}}{2}$$

Se $N_{sd} > N_{a2}$ e $N_{sd} < N_{a3}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_m}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_f}$$
$$h_{LN_m} = \frac{h_{LN_m} + h_{LN_f}}{2}$$

Verifica (1)

Quando (1) for atendido cálcula:

$M_{x,a}$ associado a $(\phi, 1/r_i, h_{LN_m})$

(1') Enquanto o intervalo de h'_{LN} for maior que a tolerância: Condição de equilíbrio (1')

a) Cálculo dos esforços normais para o conjunto inicial de parâmetros

a1) Cálculo do esforço normal interno N'_{a1} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_i})$

a2) Cálculo do esforço normal interno N'_{a2} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_m})$

a3) Cálculo do esforço normal interno N'_{a3} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_f})$

Redução do intervalo de busca de h_{LN}

Se $N_{sd} > N_{a1}$ e $N_{sd} < N_{a2}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_i}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_m}$$
$$d_m = \frac{h_{LN_i} + h_{LN_m}}{2}$$

Se $N_{sd} > N_{a2}$ e $N_{sd} < N_{a3}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_m}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_f}$$
$$d_m = \frac{h_{LN_m} + h_{LN_f}}{2}$$

Verifica (1')

Quando (1') for atendido cálcula:

$M'_{x,a}$ associado a $(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_m})$

(1") Enquanto o intervalo de h''_{LN} for maior que a tolerância: Condição de equilíbrio (1")

a) Cálculo dos esforços normais para o conjunto inicial de parâmetros

a1) Cálculo do esforço normal interno N''_{a1} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_f}, h_{LN_i})$

a2) Cálculo do esforço normal interno N''_{a2} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_f}, h_{LN_m})$

a3) Cálculo do esforço normal interno N''_{a3} com os parâmetros $(\phi, {}^{1}/_{r_f}, h_{LN_f})$

Redução do intervalo de busca de h_{LN}

Se $N_{sd} > N_{a1}$ e $N_{sd} < N_{a2}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_i}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_m}$$
$$h_{LN_m} = \frac{h_{LN_i} + h_{LN_m}}{2}$$

Se $N_{sd} > N_{a2}$ e $N_{sd} < N_{a3}$

$$h_{LN_i} = h_{LN_m}$$
$$h_{LN_f} = h_{LN_f}$$
$$h_{LN_m} = \frac{h_{LN_m} + h_{LN_f}}{2}$$

Verifica (1")
Quando (1") for atendido cálcula:
$M''_{x,a}$ associado a $(\phi, {}^{1}/_{r_i}, h_{LN_m})$

Redução do intervalo de busca ${}^{1}/_{r}$

Se $M_{x,sd} > M_{x,a}$ e $M_{x,sd} < M'_{x,a}$

$${}^{1}/_{r_i} = {}^{1}/_{r_i}$$
$${}^{1}/_{r_f} = {}^{1}/_{r_m}$$
$${}^{1}/_{r_m} = \frac{{}^{1}/_{r_i} + {}^{1}/_{r_m}}{2}$$

Se $M_{x,sd} > M'_{x,a}$ e $M_{x,sd} < M''_{x,a}$

$${}^{1}/_{r_i} = {}^{1}/_{r_m}$$
$${}^{1}/_{r_f} = {}^{1}/_{r_f}$$
$${}^{1}/_{r_m} = \frac{{}^{1}/_{r_m} + {}^{1}/_{r_f}}{2}$$

Verifica (2)
Quando (2) for atendido cálcula:
$M_{y,a}$ associado a $(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_m})$

Verifica (3)

Se (3) não for atendido

$$\phi = \phi + \Delta\phi$$

Volta a (2)

Ao voltar a condição (2) os intervalos de busca da posição da linha neutra e curvatura da seção retornam aos valores iniciais definidos em Dados de entrada>Parâmetros iniciais

Se (3) for atendido

$$\phi = \phi + \Delta\phi$$

$(\phi, {}^{1}/_{r_m}, h_{LN_m})$ São os parâmetros que equilíbram os esforços externos

* Os subescritos i, m, f se referem aos pontos inicial, médio e final do intervalo de busca de um determinado parâmetro.

ANEXO D

```
%  Código para verificação da etabilidade de pilares
%  submetidos à flexão composta oblíqua
%  MATLAB 7.10.0 (R2010a)


clear all;
clc;
format short ;
tic

b=30;           % Base da seção (X)
h=30;           % Altura da seção (Y)
DivX=15;        % Divisão ao longo do eixo X
DivY=15;        % Divisão ao longo do eixo Y
fck=30;
N=5;
Mx=N*0.06;
My=N*0.02;
% ARMAÇÃO
Es=210000;      % Módulo elástico da armação
Nb=4;            % Numero de barras
fyk=500;        % Tensão de escoamento da armadura
fi=16;        % mm Diâmetro das barras
Ite=4
Pontos=8; %Número de pontos ao longo da seção

L=3.9; % Altura da peça em metros

Delta=L/(Pontos-1);

Contagem=0
e1x=(Mx/N);
e1y=(My/N);

for I=1:Pontos;  % Define que a excentricidade inicial (1ª ordem) de cada
    ex(I)=e1x;    % ponto é igual a excentricidade inicial do pilar supondo
    ey(I)=e1y;
end;


while Contagem<Ite;

for Z=1:Pontos

Xb(1)=3;
Xb(2)=27;
Xb(3)=3;
Xb(4)=27;
Yb(1)=3;
Yb(2)=3;
Yb(3)=27;
Yb(4)=27;


X01=Xb(1);
X02=Xb(2);
X03=Xb(3);
X04=Xb(4);
Y01=Yb(1);
Y02=Yb(1);
Y03=Yb(1);
Y04=Yb(1);


    Mx(Z)=ex(Z)*N; % Momento no ponto considerado
    My(Z)=ey(Z)*N;

% PARÂMETROS INICIAIS

Alfa=0.5;        % Inclinalção da LN (Positivo horarios)
dI=5*(((b/2)^2+(h/2)^2)^0.5);            % Altura da L.N "EM RELAÇÃO AO SISTEMA ROTACIONADO
Y'(LN)"
dF=-10*(((b)^2+(h)^2)^0.5);
CurvI=0.000001;   % Curvatura cm-1
```

```
CurvF=10*(13.5/h)/1000;


dM=(dI+dF)/2;
CurvM=(CurvI+CurvF)/2;

d0I=dI;
d0M=dM;
d0F=dF;

Curv0I=CurvI;
Curv0M=CurvM;
Curv0F=CurvF;


As=(pi*fi^2)/4;
fcd=fck/1;
fyd=fyk/1;


NumEle=DivX*DivY;  %Numero de elementos na seção

Alfa=(pi*Alfa/180);

dx=b/DivX;
dy=h/DivY;
Ae=dx*dy;

DeltaN=10;
DeltaMx=10;
MyF=0.0001;
Cont=0;
ToleranciaN=0.1; %Valor da toletância absoluta variação do esf. Normal
%Posição gemétrica dos elementos

for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEX(i,j)=(j-1)*dx+(dx/2);
CGEY(i,j)=(DivY-i)*dy+(dy/2);
    end
end
   SomaAeXcg=0;
    SomaAeYcg=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
SomaAeXcg=SomaAeXcg+(Ae*CGEX(i,j));
SomaAeYcg=SomaAeYcg+(Ae*CGEY(i,j));
    end
end
Xcg=SomaAeXcg/(Ae*NumEle);
Ycg=SomaAeYcg/(Ae*NumEle);
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEX(i,j)=((j-1)*dx+(dx/2))-Xcg;
CGEY(i,j)=((DivY-i)*dy+(dy/2))-Ycg;
    end
end
for i=1:Nb  ;
Xb(i)=Xb(i)-Xcg;
Yb(i)=Yb(i)-Ycg;
end
while abs(MyF)<My(Z)
  while DeltaMx>0.05
    while DeltaN>0.01
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
```

```
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
    end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;

XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dI;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvI;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrI=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
```

```
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;

    end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end

    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;

for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;

XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dM;
end
for i=1:Nb;

EpsS(i)=DLNb(i)*CurvI;
end
for i=1:Nb;

SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrM=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
```

```
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
    end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;

XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;

DLNb(i)=YbL(i)-dF;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvI;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrF=FrST+FrCc;
if N>NrI & N<NrM;
    dI=dI;
    dF=dM;
    DeltaN=(abs(N-NrI)+abs(N-NrM))/2;
end
if N>NrM & N<NrF;
    dI=dM;
```

```
    dF=dF;
    DeltaN=(abs(N-NrM)+abs(N-NrF))/2;
end
MxC=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     MxC=MxC+ForcaE(i,j)*(CGEY(i,j)/100);
    end
end
MxS=0;
for i=1:Nb;
MxS=MxS+(FrS(i)*(Yb(i)/100));
end
MxI=MxC+MxS;
dM=(dI+dF)/2;
dc1=dM;
end
MyC=0;
for i=1:DivY
    for j=1:DivX
     MyC=MyC+ForcaE(i,j)*(CGEX(i,j)/100);
    end
end
MyS=0;
for i=1:Nb
MyS=MyS+(FrS(i)*Xb(i)/100);
end
MyI=MyC+MyS;
MyI=abs(MyI);
dI=d0I;             % Altura da L.N "EM RELAÇÃO AO SISTEMA ROTACIONADO Y'(LN)"
dF=d0F;
dM=(dI+dF)/2;
DeltaN=10;
DeltaMx=10;
while DeltaN>0.1
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);
        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
       end
end
    end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
```

```
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dI;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvM;
end
for i=1:Nb;

SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrI=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);
        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
    end
end

    end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
```

```
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;

XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end

for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dM;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvM;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;

     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrM=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
        end
    end
    end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end

    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
```

```
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;

DLNb(i)=YbL(i)-dF;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvM;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrF=FrST+FrCc;
if N>NrI & N<NrM;
    dI=dI;
    dF=dM;
    DeltaN=(abs(N-NrI)+abs(N-NrM))/2;
end
if N>NrM & N<NrF;
    dI=dM;
    dF=dF;
    DeltaN=(abs(N-NrM)+abs(N-NrF))/2;
end
MxC=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     MxC=MxC+ForcaE(i,j)*(CGEY(i,j)/100);
    end
end
MxS=0;
for i=1:Nb;
MxS=MxS+(FrS(i)*(Yb(i)/100));
end
MxM=MxC+MxS;
dM=(dI+dF)/2;
dc2=dM;
end
MyC=0;
for i=1:DivY
    for j=1:DivX
     MyC=MyC+ForcaE(i,j)*(CGEX(i,j)/100);
    end
end
MyS=0;
for i=1:Nb
MyS=MyS+(FrS(i)*Xb(i)/100);
end
MyM=MyC+MyS;
MyRef=abs(MyM);
dI=d0I;             % Altura da L.N "EM RELAÇÃO AO SISTEMA ROTACIONADO Y'(LN)"
dF=d0F;
dM=(dI+dF)/2;
DeltaN=10;
```

```
DeltaMx=10;
ToleranciaN=1; %Valor da toletância absoluta variação do esf. Normal
while DeltaN>0.1
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dI;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);
        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;

    end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end

    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dI;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvF;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
```

```
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrI=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end

for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dM;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;

    end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dM;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvF;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
```

```
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
end
NrM=FrST+FrCc;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-dF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*CurvF;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);
        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0;
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-dF;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*CurvF;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
for i=1:Nb;
FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end
FrST=0;
for i=1:Nb;
     FrST=FrST+FrS(i);
```

```
end
NrF=FrST+FrCc;
if N>NrI & N<NrM;
    dI=dI;
    dF=dM;
    DeltaN=(abs(N-NrI)+abs(N-NrM))/2;
end
if N>NrM & N<NrF;
    dI=dM;
    dF=dF;
    DeltaN=(abs(N-NrM)+abs(N-NrF))/2;
end
MxC=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     MxC=MxC+ForcaE(i,j)*(CGEY(i,j)/100);
    end
end
MxS=0;
for i=1:Nb;
MxS=MxS+(FrS(i)*(Yb(i)/100));
end
MxF=MxC+MxS;
dM=(dI+dF)/2;
dc3=dM;
MyC=0;
for i=1:DivY
    for j=1:DivX
     MyC=MyC+ForcaE(i,j)*(CGEX(i,j)/100);
    end
end
MyS=0;
for i=1:Nb
MyS=MyS+(FrS(i)*Xb(i)/100);
end
MyF=MyC+MyS;
MyF=abs(MyF);
end
if Mx(Z)>MxI & Mx(Z)<MxM;
    CurvI=CurvI;
    CurvF=CurvM;
    DeltaMx=(abs(Mx(Z)-MxI)+abs(Mx(Z)-MxM))/2;
end
if Mx(Z)>MxM & Mx(Z)<MxF;
    CurvI=CurvM;
    CurvF=CurvF;
    DeltaMx=(abs(Mx(Z)-MxM)+abs(Mx(Z)-MxF))/2;
end
if Mx(Z)==MxI;
    CurvI=CurvI;
    CurvF=CurvI;
    DeltaMx=0;
end
if Mx(Z)==MxM;
    CurvI=CurvM;
    CurvF=CurvM;
    DeltaMx=0;
end
if Mx(Z)==MxF;
    CurvI=CurvF;
    CurvF=CurvF;
    DeltaMx=0;
end
CurvM=(CurvI+CurvF)/2;
CurvSec(Z)=CurvM;
dI=d0I;
dM=d0M;
dF=d0F;
  end

  Curv=CurvSec(Z);
  d=dc2;
  dSec(Z)=dc2;
Xb(1)=X01;
Xb(2)=X02;
Xb(3)=X03;
Xb(4)=X04;
```

```
Yb(1)=Y01;
Yb(2)=Y02;
Yb(3)=Y03;
Yb(4)=Y04;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-d;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*Curv;
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if EpsConc(i,j)<(2/1000);
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);
        else EpsConc(i,j)>(2/1000);
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;
    end
end

    end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
        if SigmaConc(i,j)<0
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
        end
    end
end
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
FrCc=0;
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end
for i=1:Nb;
Xb(i)=Xb(i)-Xcg;
Yb(i)=Yb(i)-Ycg;
end
for i=1:Nb;
XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end
for i=1:Nb;
DLNb(i)=YbL(i)-d;
end
for i=1:Nb;
EpsS(i)=DLNb(i)*Curv;
end
for i=1:Nb;
SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end
for i=1:Nb;
    if SigmaS(i)>fyd;
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd;
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end
MyC=0;
```

```
for i=1:DivY;
    for j=1:DivX;
     MyC=MyC+ForcaE(i,j)*(CGEX(i,j)/100);
    end
end
MyS=0;
for i=1:Nb;
MyS=MyS+(FrS(i)*Xb(i)/100);
end
MyF=MyC+MyS;
CurvI=Curv0I;
CurvF=Curv0F;
CurvM=(CurvI+CurvF)/2;
dI=d0I;
dM=d0M;
dF=d0F;
Alfa=Alfa+0.01;
AlfaSec(Z)=Alfa-0.01/2;
end



end


  for X=1:Pontos        % Definição da altura dos pontos em CM
             H(X)=(Delta*(X-1))*100;
            end


            for i=1:Pontos        % Definição da altura dos pontos em CM
             CurvY(i)=CurvSec(i)*sin(AlfaSec(i));
             CurvX(i)=CurvSec(i)*cos(AlfaSec(i));
            end

            % Função Conhecida => Curvatura em função da altura
        % 1/r=f(H)

        CoefX=polyfit(H,CurvX,2); % interpola a função da
                                  % Curvatura em função da altura
                                  % com um polinômio do 2° grau

          % Por integração direta do polinômio chegamos a equação
          % do desvio do ponto em função da altura. Para o caso da
          % barra engastada e livre as constantes são 0(Zero)

             for K=1:Pontos
 DesvioX(K)=((CoefX(1)*H(K)^4)/12+(CoefX(2)*H(K)^3)/6+(CoefX(3)*H(K)^2)/2)/100;
 DesvioTotalX(K)=DesvioX(K)+e1x;
             end



        CoefY=polyfit(H,CurvY,2);



             for K=1:Pontos
 DesvioY(K)=((CoefY(1)*H(K)^4)/12+(CoefY(2)*H(K)^3)/6+(CoefY(3)*H(K)^2)/2)/100;
 DesvioTotalY(K)=DesvioY(K)+e1y;
             end



             for D=1:Pontos
                 ex(D)=DesvioTotalX(Pontos-(D-1))
                 ey(D)=DesvioTotalY(Pontos-(D-1))
             end

             Contagem=Contagem+1
           beep
toc
```

```
end
```

ANEXO E

```
% Dimensionamento de Seção retangular
% submetida à flexão composta normal
% MATLAB 7.10.0 (R2010a)

b=20 % cm
h=40 % cm
C=4  % cm Cobrimento nominal
Nc=2 % Numero de camadas
n=4 % numero total de barras
Eaco=210000 % MPa Módulo de elasticidade do aço
fyk=500 % MPa
fck=20 % MPa

Gc=1.4  % Fator de redução da resistencia do concreto
Gs=1.15 % Fator de redução da resistencia do aço
Gf=1.4  % Fator de majoração dos esforços
%
%
Nk=41    % Tf Esforço normal caracteristico
Mk=10.25 % Tf-m momento caracteristico
%
%
% ## PROCESSAMENTO ##
%
% Parametros iniciais da iteração
KsiI=0.0001
KsiM=500
KsiF=1000


%
% Esf. norma reduzido
SigmaCd=0.85*fck/Gc
v=((Nk*Gf)/(b*h*SigmaCd))*100
% Momento reduzido
mi=((Mk*Gf)/(b*(h^2)*SigmaCd))*10000
%
fyd=fyk/Gs
%
CamInt=Nc-2 % Numero de Camadas internas

%Numero de Barras em cada camada
for c1=1:Nc
    NbCam(c1)=2
end
NbCam(1)=(n-2*CamInt)/2
NbCam(Nc)=(n-2*CamInt)/2   %NbCam --> Número de barras na camada

%Espaçamento entre linhas de Armação
Delta=(h-2*C)/(Nc-1)

%Altura útil da cada linha de armação
for c2=1 : Nc
    d(c2)=C+(Nc-c2)*Delta
end

for c3=1 : Nc
    Beta(c3)=(d(c3))/h
end

while abs(KsiI-KsiF)>0.001
    if KsiI<1.25         % Definição de rc pra os valores de Ksi
        rcI=0.8*KsiI
    else
        rcI=1
    end

    if KsiM<1.25
        rcM=0.8*KsiM
    else
        rcM=1
    end

    if KsiF<1.25
```

```
    rcF=0.8*KsiF
 else
    rcF=1
 end

 if KsiI<1.25         % Definição de Bc pra os valores de Ksi
    BcI=0.4*KsiI
 else
    BcI=0.5
 end

 if KsiM<1.25
    BcM=0.4*KsiM
 else
    BcM=0.5
 end

 if KsiF<1.25
    BcF=0.4*KsiF
 else
    BcF=0.5
 end

 % Alongamento da camada
%
 for c4=1:Nc
 if KsiI > 0 & KsiI <(3.5*Beta(1)/13.5) % Domínio 2
    EpsI(c4)=((KsiI-Beta(c4)/(Beta(1)-KsiI)))*(10/1000)
 elseif KsiI >= (3.5*Beta(1)/13.5) & KsiI<=1 % Domínio 3,4,4a
    EpsI(c4)=(3.5/1000)*((KsiI-Beta(c4))/KsiI)
 elseif KsiI > 1
    EpsI(c4)=((14/1000)*((KsiI-Beta(c4))/(7*KsiI-3)))
 end
 end

  for c4=1:Nc
 if KsiM > 0 & KsiM <(3.5*Beta(1)/13.5) % Domínio 2
    EpsM(c4)=((KsiM-Beta(c4)/(Beta(1)-KsiM)))*(10/1000)
 elseif KsiM >= (3.5*Beta(1)/13.5) & KsiM<=1 % Domínio 3,4,4a
    EpsM(c4)=(3.5/1000)*((KsiM-Beta(c4))/KsiM)
 elseif KsiM > 1
    EpsM(c4)=((14/1000)*((KsiM-Beta(c4))/(7*KsiM-3)))
 end
  end
   for c4=1:Nc
 if KsiF > 0 & KsiF <(3.5*Beta(1)/13.5) % Domínio 2
    EpsF(c4)=((KsiF-Beta(c4)/(Beta(1)-KsiF)))*(10/1000)
 elseif KsiF >= (3.5*Beta(1)/13.5) & KsiF<=1 % Domínio 3,4,4a
    EpsF(c4)=(3.5/1000)*((KsiF-Beta(c4))/KsiF)
 elseif KsiF > 1
    EpsF(c4)=((14/1000)*((KsiF-Beta(c4))/(7*KsiF-3)))
 end
   end

   % Tensão na camada

   for c5=1:Nc
       SigmaSdI(c5)=EpsI(c5)*Eaco
   if SigmaSdI(c5)> fyd
       SigmaSdI(c5)=fyd
   elseif SigmaSdI(c5)<-fyd
       SigmaSdI(c5)=-fyd
   end
   end

   for c5=1:Nc
       SigmaSdM(c5)=EpsM(c5)*Eaco
   if SigmaSdM(c5)> fyd
       SigmaSdM(c5)=fyd
   elseif SigmaSdM(c5)<-fyd
       SigmaSdM(c5)=-fyd
   end
   end

    for c5=1:Nc
       SigmaSdF(c5)=EpsF(c5)*Eaco
   if SigmaSdF(c5)> fyd
```

```
            SigmaSdF(c5)=fyd
        elseif SigmaSdI(c5)<-fyd
            SigmaSdF(c5)=-fyd
        end
         end

         % Somatórios envolvido da definição da L.N.

         % Somatório da Tensão na camada x Número de barras na camada

         SomaNbSigmaSdI=0
         for c6=1:Nc
             SomaNbSigmaSdI=SomaNbSigmaSdI+NbCam(c6)*SigmaSdI(c6)
         end

         SomaNbSigmaSdM=0
         for c6=1:Nc
             SomaNbSigmaSdM=SomaNbSigmaSdM+NbCam(c6)*SigmaSdM(c6)
         end

         SomaNbSigmaSdF=0
         for c6=1:Nc
             SomaNbSigmaSdF=SomaNbSigmaSdF+NbCam(c6)*SigmaSdF(c6)
         end
% Somatório da Tensão na camada x Beta x Número de barras na camada

SomaNbBetaSigmaSdI=0
for c7=1:Nc
    SomaNbBetaSigmaSdI=SomaNbBetaSigmaSdI+NbCam(c7)*Beta(c7)*SigmaSdI(c7)
end

SomaNbBetaSigmaSdM=0
for c7=1:Nc
    SomaNbBetaSigmaSdM=SomaNbBetaSigmaSdM+NbCam(c7)*Beta(c7)*SigmaSdM(c7)
end

SomaNbBetaSigmaSdF=0
for c7=1:Nc
    SomaNbBetaSigmaSdF=SomaNbBetaSigmaSdF+NbCam(c7)*Beta(c7)*SigmaSdF(c7)
end

% Definição dos valo F(Ksi) nos pontos Iniciais Médios e Finais

% F(Ksi) Inicial
FI=(mi-0.5*v+rcI*BcI)*SomaNbSigmaSdI+(v-rcI)*SomaNbBetaSigmaSdI
 % F(Ksi) Médio
FM=(mi-0.5*v+rcM*BcM)*SomaNbSigmaSdM+(v-rcM)*SomaNbBetaSigmaSdM
% F(Ksi) Final
FF=(mi-0.5*v+rcF*BcF)*SomaNbSigmaSdF+(v-rcF)*SomaNbBetaSigmaSdF
PFI=abs(FI)
PFF=abs(FF)
if FI*FM<0
    KsiI=KsiI
    KsiF=KsiM
    KsiM=(KsiI+KsiF)/2
else
    KsiI=KsiM
    KsiF=KsiF
    KsiM=(KsiI+KsiF)/2
end


end
Ksi=KsiM
% Calculo dos parametros para o Ksi calculado
% Definição de rc pra os valores de Ksi
if Ksi<1.25
        rc=0.8*Ksi
    else
        rc=1
end

% Definição de Bc pra os valores de Ksi

    if Ksi<1.25
        Bc=0.4*Ksi
    else
```

```
        Bc=0.5
    end

    % Alongamento das camadas
        for c8=1:Nc
    if Ksi > 0 & Ksi <(3.5*Beta(1)/13.5) % Domínio 2
        Eps(c8)=((Ksi-Beta(c8)/(Beta(1)-Ksi)))*(10/1000)
    elseif Ksi >= (3.5*Beta(1)/13.5) & Ksi<=1 % Domínio 3,4,4a
        Eps(c8)=(3.5/1000)*((Ksi-Beta(c8))/Ksi)
    elseif Ksi > 1
        Eps(c8)=((14/1000)*((Ksi-Beta(c8))/(7*Ksi-3)))
    end
        end
    % Tensão na camada

      for c9=1:Nc
          SigmaSd(c9)=Eaco*Eps(c9)
      if SigmaSd(c9)> fyd
          SigmaSd(c9)=fyd
      elseif SigmaSd(c9)<-fyd
          SigmaSd(c9)=-fyd
      end
      end

    % Somatório da Tensão na camada x Número de barras na camada

      SomaNbSigmaSd=0
       for c10=1:Nc
           SomaNbSigmaSd=SomaNbSigmaSd+NbCam(c10)*SigmaSd(c10)
       end

       % Somatório da Tensão na camada x Beta x Número de barras na camada

SomaNbBetaSigmaSd=0
for c11=1:Nc
    SomaNbBetaSigmaSd=SomaNbBetaSigmaSd+NbCam(c11)*Beta(c11)*SigmaSd(c11)
end
Omega1=((n*fyd)*(v-rc))/SomaNbSigmaSd
Omega2=(n*fyd*(0.5*v-mi-rc*Bc))/SomaNbBetaSigmaSd

As=Omega2*b*h*SigmaCd/fyd
```

ANEXO F

```
% Cálculo de esforços internos
% mediante conhecimento dos parâmetros
% Flexão composta oblíqua


clear all;
clc;
format long ;

b=20;            % Base da seção (X)
h=50;            % Altura da seção (Y)
DivX=40;          % Divisão ao longo do eixo X
DivY=40;          % Divisão ao longo do eixo Y
Alfa=10;         % Inclinalção da LN (Positivo horarios)
d=5;             % Altura da L.N "EM RELAÇÃO AO SISTEMA ROTACIONADO Y'(LN)"
Curv=0.00005;    % Curvatura cm-1
fck=25;

% ARMAÇÃO
Es=210000;       % Módulo elástico da armação
Nb=4;             % Numero de barras
fyk=500;         % Tensão de escoamento da armadura
fi=12.5;         % mm Diâmetro das barras

Xb(1)=3;
Xb(2)=17;
Xb(3)=3;
Xb(4)=17;
Yb(1)=47;
Yb(2)=47;
Yb(3)=3;
Yb(4)=3;


As=(pi*fi^2)/4;
fcd=fck/1.4;
fyd=fyk/1.15;



NumEle=DivX*DivY;  %Numero de elementos na seção
Alfa=(pi*Alfa/180);

dx=b/DivX;
dy=h/DivY;
Ae=dx*dy;


%Posição gemétrica dos elementos

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
CGEX(i,j)=(j-1)*dx+(dx/2);
CGEY(i,j)=(DivY-i)*dy+(dy/2);
    end
end

%Definição do centro geométrico da seção buta
    SomaAeXcg=0;
    SomaAeYcg=0;

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
SomaAeXcg=SomaAeXcg+(Ae*CGEX(i,j));
SomaAeYcg=SomaAeYcg+(Ae*CGEY(i,j));
    end
end
Xcg=SomaAeXcg/(Ae*NumEle);
Ycg=SomaAeYcg/(Ae*NumEle);

% Coordenadas dos pontos em relação ao CG

for i=1:DivY
```

```
    for j=1:DivX
CGEX(i,j)=((j-1)*dx+(dx/2))-Xcg;
CGEY(i,j)=((DivY-i)*dy+(dy/2))-Ycg;
    end
end

% Coordenadas dos pontos em relação ao CG com os eixos rotacionados

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
CGEXL(i,j)=CGEX(i,j)*cos(Alfa)+CGEY(i,j)*sin(Alfa);
CGEYL(i,j)=-CGEX(i,j)*sin(Alfa)+CGEY(i,j)*cos(Alfa);
    end
end

% Distância do ponto em relação a L.N.

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
DLN(i,j)=CGEYL(i,j)-d;
    end
end

% Deformação específica no elementos

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
EpsConc(i,j)=DLN(i,j)*Curv;
    end
end

% Tensão nos elementos de concreto

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
        if EpsConc(i,j)<(2/1000)
SigmaConc(i,j)=0.85*fcd*(1-(1-EpsConc(i,j)/(2/1000))^2);

        else EpsConc(i,j)>(2/1000)
           SigmaConc(i,j)=0.85*fcd;


    end
end

    end


% CORREÇÃO -> Atribue Zero aos elementos de concreto tracionados

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
        if SigmaConc(i,j)<0
SigmaConc(i,j)=0;
else
           SigmaConc(i,j)=SigmaConc(i,j);
           end

    end
end

% Força em Cada elemento

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
ForcaE(i,j)=(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end



% Somatorio de força resultante no concreto (Tonelada Força)

FrCc=0

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
```

```
     FrCc=FrCc+(SigmaConc(i,j)*(Ae/100));
    end
end

%           ###################################
%           #               ARMAÇÃO           #
%           ###################################


% Coordenada das barras em relação ao CG

for i=1:Nb
Xb(i)=Xb(i)-Xcg;
Yb(i)=Yb(i)-Ycg;
end


% Coordenadas dos pontos de armação em relação
% os eixos rotacionados

for i=1:Nb

XbL(i)=Xb(i)*cos(Alfa)+Yb(i)*sin(Alfa);
YbL(i)=-Xb(i)*sin(Alfa)+Yb(i)*cos(Alfa);
end


% Distância da barra  a L.N.

for i=1:Nb

DLNb(i)=YbL(i)-d;
end

% Deformação específica da barra

for i=1:Nb

EpsS(i)=DLNb(i)*Curv;
end

% Tensão nas barras de aço

for i=1:Nb

SigmaS(i)=EpsS(i)*Es;
end

% Correção da tensão

for i=1:Nb
    if SigmaS(i)>fyd
        SigmaS(i)=fyd;
    elseif SigmaS(i)<-fyd
        SigmaS(i)=-fyd;
    else
        SigmaS(i)=SigmaS(i);
    end
end


% Força atuante nas linhas de armação

for i=1:Nb

FrS(i)=(SigmaS(i)*As)/10000;
end

% Força resultante na armação

FrST=0;

for i=1:Nb

     FrST=FrST+FrS(i);
end
```

```
% FORÇA NORMAL RESISTENTE DA SEÇÃO

Nr=FrST+FrCc;


% ###########  MOMENTOS RESULTANTES  ##########

% Momento em torno de X para os elementos de concreto

MxC=0;

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
     MxC=MxC+ForcaE(i,j)*(CGEY(i,j)/100);
    end
end

% Momento em torno de X para as armações


MxS=0;

for i=1:Nb

MxS=MxS+(FrS(i)*(Yb(i)/100));
end

Mx=MxC+MxS;

% Momento em torno de Y para os elementos de concreto

MyC=0;

for i=1:DivY
    for j=1:DivX
     MyC=MyC+ForcaE(i,j)*(CGEX(i,j)/100);
    end
end

% Momento em torno de Y para as armações

% Distância ao eixo y


MyS=0

for i=1:Nb

MyS=MyS+(FrS(i)*Xb(i)/100);
end

My=MyC+MyS;


'Mx='
Mx

'My='
My

'N='

Nr
```