



Pós-Graduação em Ciência da Computação

DÉBORA V. RAMOS BARBOSA CASSIMIRO

TEORIA ENUMERATIVA DE PÓLYA



Universidade Federal de Pernambuco
posgraduacao@cin.ufpe.br
www.cin.ufpe.br/~posgraduacao

RECIFE
2017

DÉBORA V. RAMOS BARBOSA CASSIMIRO

TEORIA ENUMERATIVA DE PÓLYA

Este trabalho foi submetido à Pós-Graduação em Ciência da Computação do Departamento de Informática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Ciência da Computação.

Orientador: *Prof. Sóstenes Luiz Soares Lins*

RECIFE
2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C345t Cassimiro, Débora Virgínia Ramos Barbosa
Teoria enumerativa de Pólya / Débora Virgínia Ramos Barbosa Cassimiro.
– 2017.
87 f.: il., fig., tab.

Orientador: Sóstenes Luiz Soares Lins.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CIn,
Ciência da Computação, Recife, 2017.
Inclui referências.

1. Ciência da computação. 2. Teoria da enumeração. I. Lins, Sóstenes Luiz
Soares (orientador). II. Título.

004 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-132

Débora Virgínia Ramos Barbosa Cassimiro

Teoria Enumerativa de Pólya

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Aprovado em: 08/03/2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nivan Roberto Ferreira Júnior
Centro de Informática / UFPE

Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima
Escola Politécnica de Pernambuco/UPE

Prof. Dr. Sóstenes Luiz Soares Lins
Centro de Informática / UFPE
(Orientador)

*Esta dissertação é dedicada primeiramente à Deus, autor
da vida e do meu destino.*

*Ao meu marido, Daniel Cassimiro, pelo amor e apoio
incondicional em meu caminho.*

*À Terezinha Cabral, in memoriam, por ter me ensinado
tanto sobre a vida.*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer primeiramente à Deus por iluminar meu caminho.

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Sóstenes Luiz Soares Lins, por seus ensinamentos e disponibilidade.

Agradeço ao meu marido, Daniel Cassimiro, por seu meu melhor amigo, meu companheiro em tudo na vida e meu porto seguro.

Eu agradeço aos meus pais, Almir Barbosa e Anunciada Ramos, por todo o esforço pessoal e financeiro que fizeram pela minha educação, por todo amor e ensinamentos.

Agradeço também a todos da minha família de sangue e adquirida, em especial as minhas irmãs Danúbia e Danielly, por toda partilha de vida, aos meus sobrinhos Heitor e Ian, por toda a alegria que eles me transmitem e as minhas tias Francisca de Assis, Barbara, Marluce, Dulcinea e Maria do Carmo por serem desde sempre um apoio emocional, por me distraírem com suas histórias e ensinamentos.

Gostaria de expressar minha gratidão também aos membros da banca examinadora pela disponibilidade. Essa gratidão é estendida à todos os professores do programa de pós-graduação em Ciências da Computação.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Céptico como os cépticos, crente como os crentes. A metade que avança é crente, a metade que confirma é céptica. Mas o cientista perfeito é também jardineiro: acredita que a beleza é conhecimento.

—GONÇALO M. TAVARES (Breves notas sobre ciência, 2006)

Resumo

Nesta dissertação, estamos preocupados com o problema de contar objetos matemáticos levando-se em conta as suas simetrias. Dois teoremas importantes na Área de Análise Combinatória são o Lema de Burnside e o Teorema da Enumeração de Pólya. Ambos fornecem uma fórmula matemática que permite calcular o número de objetos matemáticos distintos levando-se em conta as simetrias. O primeiro destes utiliza o conceito de órbitas para contar o número de objetos matemáticos. Embora o Lema de Burnside seja conceitualmente mais simples, ele apresenta a desvantagem de ter um alto custo computacional. O Teorema de Pólya utiliza o conceito de índice de ciclos e não só reduz a quantidade de cálculos necessária como também permite a resolução de problemas mais complexos. Além disso, o conceito de índice de ciclos nos trás informação sobre cada padrão distinto, o que permite uma descrição mais completa do problema. A partir de definições básicas tomadas da Teoria dos Grupos, nós fornecemos uma apresentação da teoria que leva a demonstração do Teorema de Pólya. Concluimos com diversas aplicações desta teoria à diferentes tipos de problemas para ilustrar este conceito.

Palavras-chave: Índice de ciclos. Lema de Burnside. Órbitas. Simetrias. Teorema da Enumeração de Pólya.

Abstract

In this dissertation, we are concerned with the problem of counting mathematical objects with regards to symmetry. Two major theorems in Combinatorics are Burnside's Lemma and Pólya's Enumeration Theorem. Both theorems yield a formula that allows one to compute the number of distinct mathematical objects with regards to symmetry. Although Burnside's Lemma is conceptually simpler, it presents a disadvantage in that it has a high computational cost. Pólya's Enumeration Theorem uses the concept of cycle index and not only reduces the required amount of calculations but it also allows for more complex problems to be solved. Moreover, the concept of cycle index brings us information on each distinct pattern, which allows for a more complete description of the problem. Building up from basic definitions taken from Group Theory, a presentation of the theory leading up to the demonstration of Pólya's Enumeration Theorem is given. We conclude with several applications of this theory in different types of problems to illustrate these concepts.

Keywords: Burnside's Lemma. Cycle index. Orbits. Pólya's Enumeration Theorem. Symmetries.

Lista de Figuras

1.1	Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco.	14
1.2	Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco agrupados em 6 classes de equivalência.	16
1.3	Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco agrupados em 4 classes de equivalência.	17
2.1	Simetrias do triângulo e do quadrado	23
2.2	Simetrias do pentágono	24
2.3	Simetrias do triângulo e do quadrado	25
3.1	Grafo que representa a permutação β do Exemplo 3.7	36
3.2	Subgrafos que representam a permutação β do Exemplo 3.7	37
4.1	Tabuleiro de xadrez 3×3	47
4.2	Tabuleiro de xadrez 3×3 colorido.	47
4.3	Tabuleiro de xadrez 2×2	48
4.4	Tabuleiro de xadrez 2×2 colorido.	48
4.5	Eixos de simetria de um tetraedro regular.	58
6.1	Classes de grafos com 3 vértices.	77
6.2	Classes de grafos com 4 vértices.	79
6.3	Classes de grafos bipartidos da forma $B_{2,3}$	84

Lista de Tabelas

1.1	Tabuleiros ordenados segundo o número de retângulos possíveis formados a partir de duas casas adjacentes de mesma cor.	15
1.2	Tabuleiros agrupados em classes de equivalência.	17
3.1	Valores de $\phi(n)$ para $n = 1, \dots, 12$	34
3.2	Tipos cíclicos dos elementos $\alpha \in S_3$	39
3.3	Tipos cíclicos dos elementos $\alpha \in S_4$. Permutações com mesmo tipo cíclico foram agrupadas numa mesma linha.	39
3.4	Cálculo do número de permutações de cada tipo cíclico de S_5 agrupadas segundo as partições de $n = 5$	41
6.1	Comparação entre S_3 e S_3^*	77
6.2	Comparação entre S_4 e S_4^*	78
6.3	Comparação entre S_6 e S_6^*	80
6.4	Comparação entre o número de grafos rotulados e o número de grafos distintos para grafos com diferentes números de vértices.	81
6.5	Valores do mmc e do mdc para diversos pares (k, l)	83

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivação	13
1.2	Organização dos tópicos	18
2	Noções preliminares	19
2.1	Relações de equivalência	19
2.2	Simetrias	21
3	Teoria dos grupos	26
3.1	Definições e propriedades	26
3.2	Classes laterais	31
3.3	Grupos de permutação	34
3.4	Tipo cíclico e índice de ciclos	38
3.5	Exemplos de grupos de permutação	42
4	O Lema de Burnside	46
4.1	Ação de um grupo e coloração	46
4.2	Órbitas e Estabilizadores	51
5	O Teorema de Pólya	60
5.1	Pesos e inventário de padrões	60
5.2	Teorema da Enumeração de Pólya	65

6	Aplicações	68
6.1	Cubo	68
6.2	Colares	72
6.3	Grafos	74
6.4	Grafos bipartidos	81
7	Considerações finais	85
	Referências	87

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

O Teorema da Enumeração de Pólya, também conhecido como o Teorema de Redfield-Pólya, é uma generalização do Lema de Burnside que leva em consideração simetrias quando se conta objetos matemáticos. Embora o Lema de Burnside seja, por si só, uma ferramenta muito útil, o custo computacional envolvido pode se tornar rapidamente alto. O Teorema da Enumeração de Pólya reduz os cálculos necessários por meio do conceito de índice de ciclos e também faz uso de pesos que permite sua utilização em problemas mais complexos.

Apesar do teorema ter sido descoberto e publicado pelo matemático John Howard Redfield em 1927, ele não foi reconhecido devidamente pela comunidade matemática até que um matemático Húngaro de nome George Pólya o provou. Em seu artigo, Pólya também forneceu diversas aplicações, em particular, aquelas correspondentes ao problema de enumerar compostos químicos.

Com a ajuda de uma teoria elementar de grupos nós iremos apresentar e provar di-

versas proposições necessárias para a demonstração do Lema de Burnside e o Teorema da Enumeração de Pólya. Começemos, no entanto, com alguns exemplos simples para motivar o nosso estudo.

Exemplo 1.1. *Quantos tabuleiros de xadrez 2×2 , ou seja, tabuleiros com quatro casas dispostas em forma de um quadrado, podemos obter se cada casa pode ser colorida com apenas uma das cores preta ou branca?*

Solução: O problema se resume a decidir qual cor será atribuída a cada casa. A Figura 1.1 abaixo lista todas as 16 possibilidades de tabuleiros. Temos duas possibilidades para cada casa, logo pelo Princípio Multiplicativo o número de tabuleiros é $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$. ■

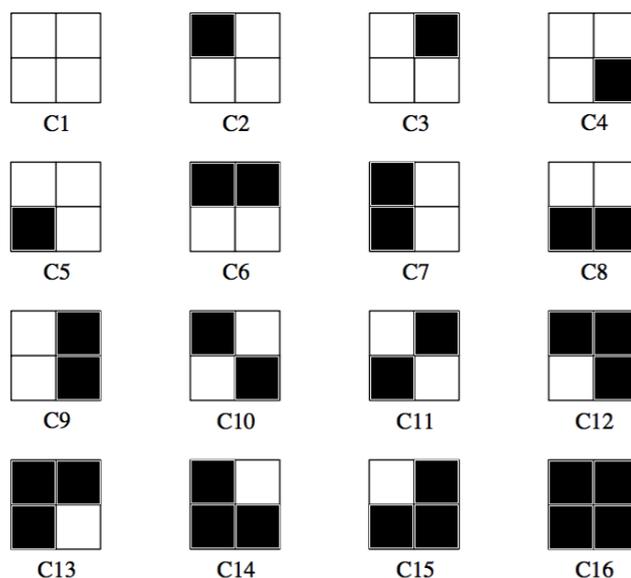


Figura 1.1 Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco.

Exemplo 1.2. *Considerando o exemplo anterior, quantos retângulos formados por duas casas adjacentes do tabuleiro coloridas com uma mesma cor podemos obter?*

Solução: Para responder a pergunta acima, temos que analisar cada uma das possibilidades. A Tabela 1.1 fornece todas as possibilidades, agrupadas em 3 casos distintos.

Como esses casos são mutuamente excludentes, temos pelo Princípio Aditivo que o número de retângulos possíveis é $0 \cdot 2 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 2 = 32$. ■

Número de retângulos	Tabuleiros
0 retângulos	C_{10}, C_{11}
2 retângulos	$C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$
4 retângulos	C_1, C_{16}

Tabela 1.1 Tabuleiros ordenados segundo o número de retângulos possíveis formados a partir de duas casas adjacentes de mesma cor.

Se no exemplo anterior considerarmos que os lados dos tabuleiros não estão marcados, então dois tabuleiros são considerados equivalentes se um deles pode ser obtido do outro por rotação. Isso define uma relação de equivalência, onde a classe de equivalência corresponde a todos os tabuleiros que são obtidos um do outro por rotação.

No problema anterior dos 16 tabuleiros iniciais, temos apenas 6 classes de equivalência, conforme é ilustrado na Figura 1.2 abaixo. Definamos, para o exemplo a seguir que as cores branca e preta são cores inversas. Assim, uma inversão de cores seria tornar todas as casas brancas em pretas e todas as casas pretas em brancas. Agora vamos considerar tabuleiros não marcados, onde importa apenas o padrão de contraste entre as cores. Neste caso, dois tabuleiros são considerados equivalentes se um deles puder ser obtido do outro a partir de uma rotação ou inversão de cores. Assim, por exemplo, o tabuleiro todo preto seria considerado equivalente ao tabuleiro todo branco. Isso define uma relação de equivalência, onde a classe de equivalência corresponde a todos os tabuleiros que são obtidos um do outro por rotação ou inversão de cores.

Exemplo 1.3. *Considere novamente o problema inicial do Exemplo 1.1, porém, suponha agora que os tabuleiros não estão marcados e apenas o padrão de contraste entre as cores importa. Quantos retângulos formados por duas casas adjacentes de mesma cor podemos obter?*

Solução: Neste caso, temos apenas 4 classes de equivalência, conforme ilustra a Fi-

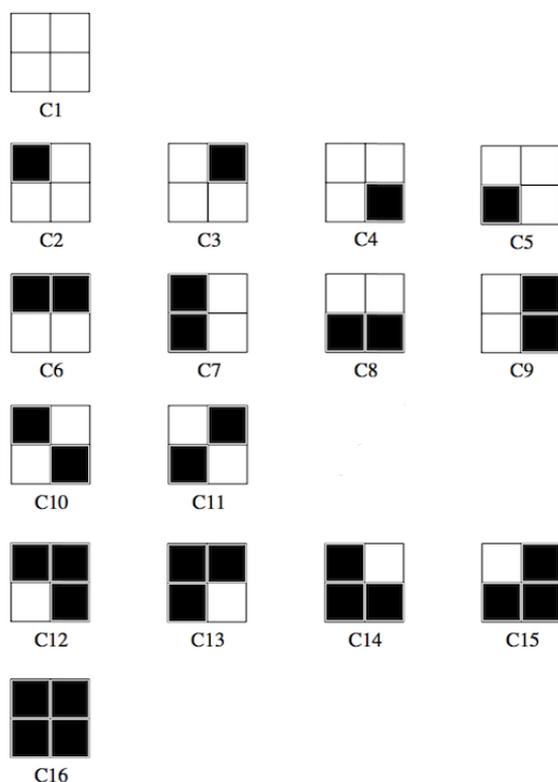


Figura 1.2 Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco agrupados em 6 classes de equivalência.

Figura 1.3. Como a posição do retângulo não importa, nem a cor, podemos constatar que o número de possibilidades de formar um retângulo é o mesmo para os elementos numa classe de equivalência disposta na Figura 1.3, logo, de posse dessa informação, poderíamos solucionar o problema escolhendo um representante de cada classe de equivalência, calculando o número de possibilidades para este representante e multiplicando pelo número de elementos da classe deste representante. A Tabela 1.2 fornece as possibilidades para os elementos de cada uma das quatro classes. Note que não é necessário fazer o estudo das possibilidades em cada elemento, visto que a equivalência entre os elementos da classe garante que as possibilidades são iguais. Como as classes de equivalências são disjuntas, pelo Princípio Aditivo, logo temos o número de

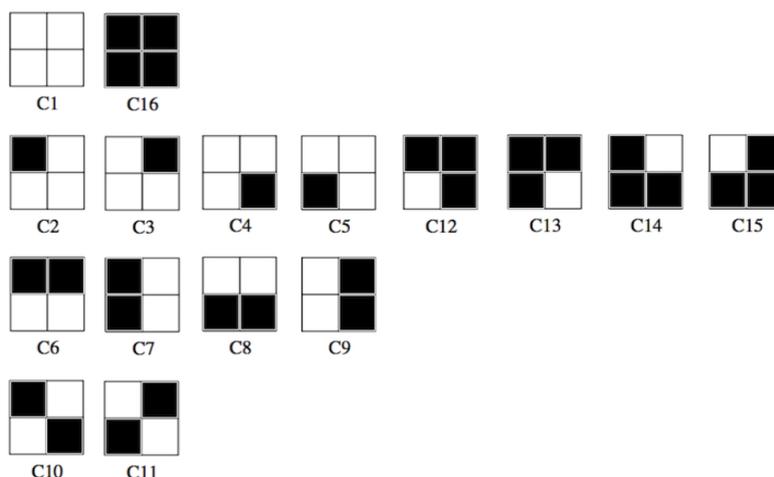


Figura 1.3 Tabuleiros de xadrez 2×2 que podem ser coloridos com as cores preto e branco agrupados em 4 classes de equivalência.

maneiras possíveis é $2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 8 + 16 + 8 + 0 = 32$. ■

Classe de equivalência	Membros	Número de retângulos
1a. classe	C_1, C_{16}	4 retângulos
2a. classe	$C_2, C_3, C_4, C_5, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$	2 retângulos
3a. classe	C_6, C_7, C_8, C_9	2 retângulos
4a. classe	C_{10}, C_{11}	0 retângulos

Tabela 1.2 Tabuleiros agrupados em classes de equivalência.

O objetivo do exemplo acima foi mostrar que a depender do que significava ser equivalente num determinado contexto poderíamos simplificar um conjunto de objetos em classes, trabalhar o nosso problema em cima dessas classes sem perder informações importantes do conjunto inicial. O Teorema de Polya fornece ferramentas para determinar o número de objetos não equivalentes, isto é, o número de classes de equivalência.

Este trabalho tem como objetivo o estudo da enumeração de grafos não rotulados usando a Teoria de Polya e outras técnicas enumerativas, além de fornecer algumas aplicações em diversas áreas. De fato, transformações inteligentes podem ser enumeradas: topologias finitas, funções booleanas, colares e isômeros químicos.

1.2 Organização dos tópicos

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. O Capítulo 2 fornece algumas definições básicas sobre relações de equivalência que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Também é feita uma exposição do conceito de simetria de uma figura plana ou espacial e alguns exemplos importantes são dados. O Capítulo 3 apresenta uma breve revisão sobre grupos, grupos de permutações e introduz os conceitos de tipo cíclico e índice de ciclos, que são peças-chaves no Teorema de Pólya.

No Capítulo 4 são estudadas as colorações e como elas se relacionam com um dado grupo através do conceito de ação de grupo. A partir destas definições, são introduzidos os conceitos de órbita, estabilizador e fixador, e vários resultados são demonstrados que culminam no celebrado Lema de Burnside.

Pesos e o inventário de padrões são discutidos no Capítulo 5 e uma versão do Lema de Burnside com pesos é demonstrada. Por fim, o Teorema da Enumeração de Pólya é enunciado e demonstrado, fazendo uso essencialmente de todos os conceitos apresentados neste trabalho.

No Capítulo 6 são dadas algumas aplicações do Teorema de Pólya à vários tipos de problemas envolvendo cubos, colares, grafos simples e bipartidos.

Algumas considerações finais são feitas no Capítulo 7.

CAPÍTULO 2

Noções preliminares

Neste capítulo serão apresentadas algumas noções básicas sobre relações de equivalência e simetrias que serão utilizadas no restante deste trabalho.

2.1 Relações de equivalência

Definição 2.1. *O produto cartesiano de dois conjuntos A e B , denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B , ou seja*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Definição 2.2. *Uma relação \sim entre os conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

Definição 2.3. *Seja A um conjunto. Uma relação binária \sim em A é uma relação de equivalência em A se, para todos $a, b, c \in A$, valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Reflexividade: $a \sim a$.*

(ii) *Simetria*: $a \sim b$ se, e somente se, $b \sim a$.

(iii) *Transitividade*: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Exemplo 2.1. Seja $m > 1$ um inteiro. Mostre que $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{m}\}$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} . (Recorde que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = m \cdot k$).

Solução: Precisamos verificar as três propriedades:

(i) *Reflexividade*: Temos que $a - a = 0$, logo tomando $k = 0$ temos $a - a = m \cdot k$, ou seja, $a \equiv a \pmod{m}$.

(ii) *Simetria*: Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = m \cdot k$. Logo, $b - a = m \cdot (-k)$, então $b \equiv a \pmod{m}$.

(iii) *Transitividade*: Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$. Então, existem $k, k' \in \mathbb{Z}$ tais que $a - b = m \cdot k$ e $b - c = m \cdot k'$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = m \cdot k + m \cdot k' = m \cdot (k + k')$. Portanto, $a \equiv c \pmod{m}$. ■

Definição 2.4. Sejam A um conjunto e \sim uma relação de equivalência em A . Então a classe de equivalência de $a \in A$ é o conjunto $\{x \in A : x \sim a\}$, que será denotado daqui para frente por $[a]$.

Proposição 2.1. Seja \sim uma relação de equivalência sobre um conjunto A . As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $a \sim b$;

(ii) $[a] = [b]$;

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii). Suponha que $a \sim b$. Provaremos que $[a] = [b]$, mostrando que $[a] \subseteq [b]$ e $[b] \subseteq [a]$. Tome $c \in [a]$. Então, $a \sim c$. Como, por hipótese, $a \sim b$, então segue da simetria de \sim que $b \sim a$. Pela transitividade, resulta que $b \sim c$. Ou seja, $c \in [b]$. A outra inclusão é inteiramente análoga e a demonstração será omitida.

(ii) \Rightarrow (iii). Suponha que $[a] = [b]$. Segue-se que $[a] \cap [b] = [a]$. Como $[a]$ é não-vazio, pois $a \in [a]$, resulta imediatamente que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (i) Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Assim, existe um elemento c tal que $c \in [a]$ e $c \in [b]$. Em outras palavras, $a \sim c$ e $b \sim c$. Por simetria, temos que $c \sim b$. Como $a \sim c$ e $c \sim b$, resulta da transitividade que $a \sim b$. ■

Definição 2.5. Uma partição de um conjunto A é uma família de conjuntos não vazios $\{A_i\}_{i \in I}$ para algum conjunto de índices I tal que

$$(i) \bigcup_{i \in I} A_i = A;$$

$$(ii) A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ se } i \neq j.$$

Proposição 2.2. Seja \sim uma relação de equivalência em um conjunto A . Então as classes de equivalência $\{A_i\}_{i \in I}$ definidas por \sim formam uma partição de A .

Demonstração: Provemos primeiramente que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$. Claramente, já que $A_i \subseteq A$ para todo $i \in I$, temos que $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$. Reciprocamente, como A é não vazio, tomemos $x \in A$. Então $x \in [x] = A_i$ para algum $i \in I$. Logo $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ e a igualdade está provada. Por fim, segue imediatamente do item (iii) da Proposição 2.1 que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$ e a demonstração está concluída. ■

2.2 Simetrias

Definição 2.6. Uma figura é qualquer subconjunto não vazio X de pontos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

Definição 2.7. *Seja M um conjunto qualquer. Uma métrica em M é uma aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz, para todos $x, y, z \in M$ as seguintes propriedades:*

- (i) *Não-negatividade: $d(x, y) \geq 0$.*
- (ii) *Identidade: $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.*
- (iii) *Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$*
- (iv) *Desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*

O par (M, d) é chamado espaço métrico. Quando não houver ambiguidades, vamos nos referir ao espaço métrico apenas pelo conjunto M .

Definição 2.8. *Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos diz-se uma isometria se $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, em que d_X e d_Y são as métricas em X e Y , respectivamente.*

Definição 2.9. *Dada uma figura X , uma simetria de X é uma aplicação $f : X \rightarrow X$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *f é uma isometria.*
- (ii) *f é sobrejetiva.*

Em outras palavras, uma simetria é uma aplicação que leva uma figura nela mesma, preservando as distâncias.

Exemplo 2.2. *Um triângulo equilátero possui 6 simetrias: 1 delas é a identidade, 2 são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, e 3 delas são reflexões através de suas medianas.*

Exemplo 2.3. *Um quadrado possui 8 simetrias: 1 delas é a identidade, 3 são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$, 2 delas são reflexões através de suas medianas, e 2 delas são reflexões através de suas diagonais.*

Na Figura 2.1 abaixo, estão listadas as 6 simetrias do triângulo, as 8 simetrias do quadrado, bem como as permutações correspondentes de seus vértices numerados. Utilizamos números para marcar os vértices das figuras, por ser o mais usual, mas também poderíamos associar a lados, faces; essa marcação permite associar as simetrias à grupos de permutações, conforme veremos adiante.

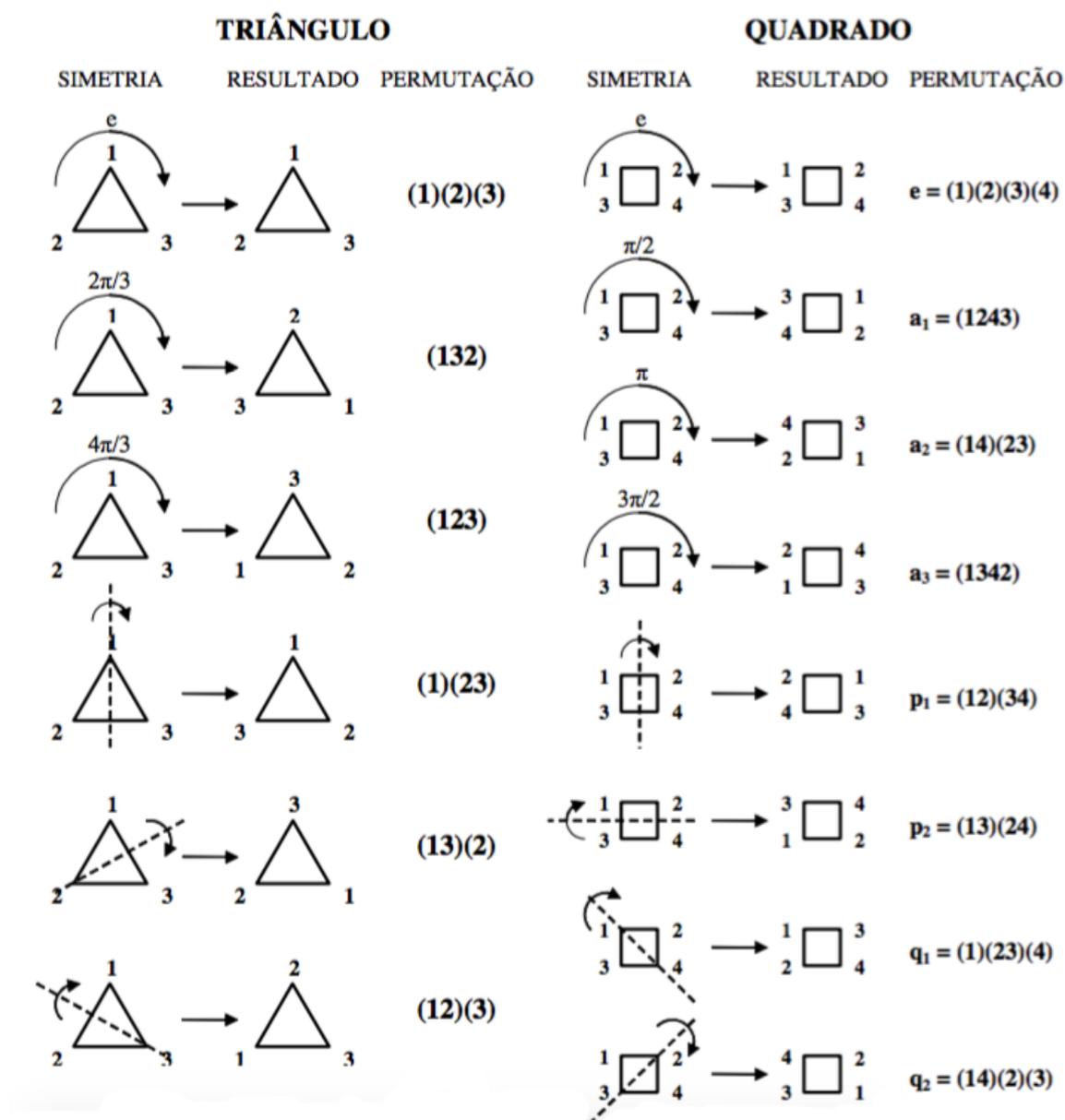


Figura 2.1 Simetrias do triângulo e do quadrado

Exemplo 2.4. Um pentágono regular possui 10 simetrias: 1 delas é a identidade, 4 são rotações horárias centradas em seu centro de gravidade de ângulos $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ e $\frac{8\pi}{5}$, e 5 delas são reflexões através de suas medianas. Na Figura 2.2 abaixo, estão listadas as 10 simetrias do pentágono, bem como as permutações correspondentes de seus vértices numerados.

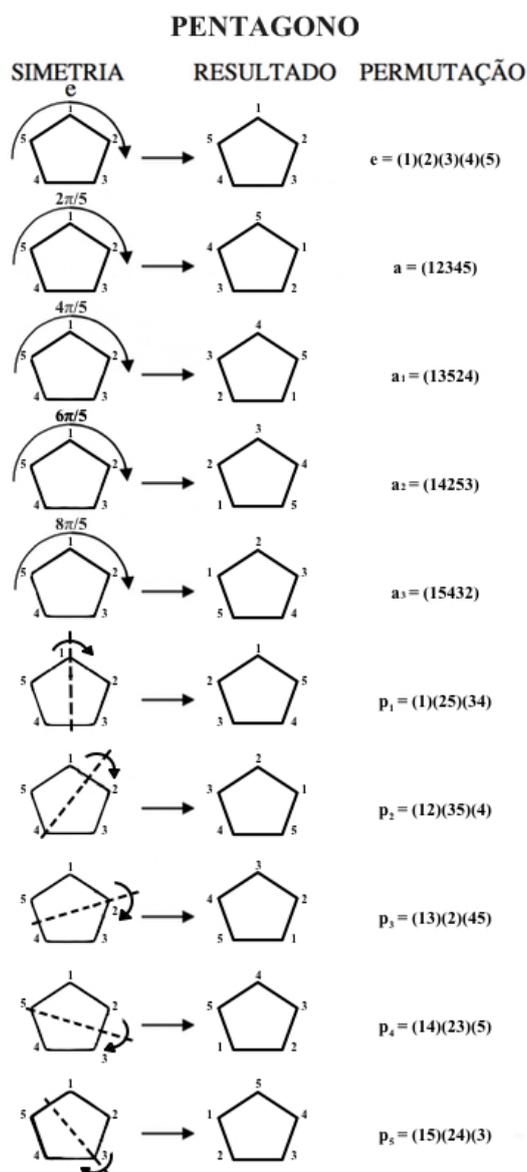


Figura 2.2 Simetrias do pentágono

Exemplo 2.5. Temos 3 diferentes tipos de eixos de rotação para um cubo, indicados na Figura 2.3, abaixo:

- (a) Rotação em torno de um eixo que passa pelos centros de faces opostas;
- (b) Rotação em torno de um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas;
- (c) Rotação em torno de um eixo que passa por vértices opostos.

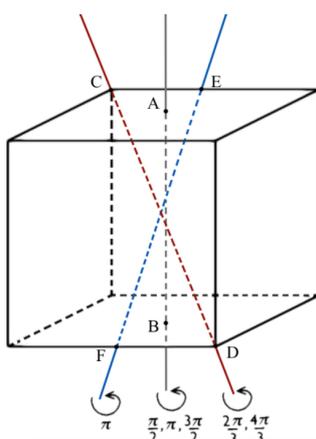


Figura 2.3 Simetrias do triângulo e do quadrado

Assim, as 25 simetrias rotacionais de um cubo são divididas em:

- (1) A identidade e ;
- (2) 3 rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ pelo tipo de eixo indicado em (a);
- (3) 3 rotações de um ângulo de π pelo tipo de eixo indicado em (a);
- (4) 3 rotações de um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ pelo tipo de eixo indicado em (a);
- (5) 6 rotações de um ângulo de π pelo tipo de eixo indicado em (b);
- (6) 4 rotações de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ pelo tipo de eixo indicado em (c);
- (7) 4 rotações de um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$ pelo tipo de eixo indicado em (c).

No próximo capítulo veremos que o fio unificador dos últimos três exemplos é o grupo diedral.

CAPÍTULO 3

Teoria dos grupos

Neste capítulo será apresentado o conceito de estruturas de Grupos, bem como subgrupos, grupos de permutações, tipo cíclico e índice de ciclos de uma permutação. Os resultados e definições apresentadas foram baseados em Garcia und Lequain [5].

3.1 Definições e propriedades

Definição 3.1. *Seja G um conjunto não vazio onde está definida uma operação entre pares de G , denotada por,*

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightsquigarrow x * y.$$

*Dizemos que o par $(G, *)$ é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:*

(i) *Associatividade: para todos $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$*

(ii) *Elemento neutro: Existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $a \in G$, $e * a = a * e = a$.*

(iii) *Elemento inverso: Para todo $a \in G$, existe um elemento $b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$, onde e é o elemento neutro.*

No item (iii) da Definição 3.1, dizemos também que a é inverso de b ou que b é inverso de a . Note que o elemento neutro e o elemento inverso são únicos. De fato, suponha que $e, e' \in G$ são elementos neutros de $(G, *)$. Então,

$$\begin{aligned} e &= e * e' && \text{pois } e' \text{ é elemento neutro,} \\ &= e' && \text{pois } e \text{ é elemento neutro.} \end{aligned}$$

Agora suponha que temos um elemento $a \in G$ com dois elementos inversos, $b, b' \in G$. Então,

$$\begin{aligned} b &= b * e && \text{pois } e \text{ é elemento neutro} \\ &= b * (a * b') && \text{pois } b' \text{ é inverso de } a \\ &= (b * a) * b' && \text{pela associatividade} \\ &= e * b' && \text{pois } b \text{ é inverso de } a \\ &= b' && \text{pois } e \text{ é elemento neutro.} \end{aligned}$$

Definição 3.2. Um grupo $(G, *)$ é abeliano (ou comutativo) se

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

Exemplo 3.1. Seja

$$S_n = \{f : I_n \rightarrow I_n : f \text{ bijetiva}\},$$

em que $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Então $(S_n, *)$, onde $*$ é a operação de composição de funções, é um grupo chamado de grupo das permutações de I_n ou grupo simétrico de grau n . O elemento neutro em S_n é a função identidade $\text{id} : I_n \rightarrow I_n$. É usual denotar um elemento de $f \in S_n$ por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Assim, por exemplo,

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De um modo geral, temos que $|S_n| = n!$.

Definição 3.3. *Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto de G . Dizemos que H é um subgrupo de G se $(H, *)$ é um grupo.*

O elemento neutro de H é necessariamente igual ao elemento neutro de G . De fato, tome $a \in H$, temos $e_H * a = a$, como $a \in G$ temos que $a = e_G * a$, logo $e_H * a = e_G * a$, multiplicando ambos os lados por a^{-1} , temos que $e_H = e_G$.

Proposição 3.1. *Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto de G . Então H é um subgrupo de G se, e somente se são satisfeitas:*

- (i) $e \in H$.
- (ii) Para todos $a, b \in H$, $a * b \in H$
- (iii) Para todo $a \in H$, $a^{-1} \in H$.

Demonstração: (\Rightarrow). Decorre diretamente da definição de subgrupo e da unicidade do elemento neutro e do elemento inverso de cada elemento de G .

(\Leftarrow). De (ii), segue que a operação de G induz uma operação em H e que esta operação herda a associatividade da operação em G de maneira natural. As outras condições de grupo decorrem imediatamente de (i) e (iii). ■

Exemplo 3.2. *Se $(G, *)$ é um grupo, então $(G, *)$ e $(\{e\}, *)$ são subgrupos de G . Dizemos que $(\{e\}, *)$ é o subgrupo trivial de G . Note que o subgrupo trivial é o menor subgrupo possível em G .*

Definição 3.4. *Sejam $(G, *)$ e (H, \bullet) dois grupos. Uma função $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo se*

$$f(a * b) = f(a) \bullet f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Quando f é bijetora então f é dito um isomorfismo. Neste caso, escrevemos também $(G, *) \simeq (H, \bullet)$ e dizemos que G e H são grupos isomorfos.

Proposição 3.2. *Sejam $(G, *)$ e (H, \bullet) dois grupos e $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo. Então,*

(i) $f(e_G) = e_H \in H$;

(ii) Para todo $g \in G$, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

(iii) $N(f) = \{g \in G : f(g) = e_H\}$ é um subgrupo de G denominado o núcleo de f .

(iv) $\text{Im } f = \{f(g) \in H : g \in G\}$ é um subgrupo de H denominado a imagem de f .

(v) f é injetiva se, e somente se, $N(f) = \{e_G\}$.

Demonstração:

(i) Temos que

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \bullet f(e_G).$$

Logo,

$$e_H = f(e_G) \bullet f(e_G)^{-1} = f(e_G) \bullet f(e_G) \bullet f(e_G)^{-1} = f(e_G).$$

Ou seja, $f(e_G) = e_H$.

(ii) Note que

$$e_H = f(e_G) = f(g * g^{-1}) = f(g) \bullet f(g^{-1}).$$

Logo, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \in H$.

(iii) Por (i), temos que $f(e_G) = e_H$, então $e_G \in N(f)$. Se $a, b \in N(f)$, então $f(a * b) = f(a) \bullet f(b) = e_H \bullet e_H = e_H$, Daí, $a * b \in N(f)$. Segue de (ii) que se $g \in N(f)$, então $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$. Logo $g^{-1} \in N(f)$. Portanto, $N(f)$ é um subgrupo de G .

(iv) Temos que $e_H = f(e_G)$ com $e_G \in G$, logo $e_H \in \text{Im } f$. Suponha que $f(a), f(b) \in \text{Im } f$, com $a, b \in G$. Como G é um grupo, temos que $a * b \in G$. Como f é homomorfismo, $f(a) \bullet f(b) = f(a * b)$ com $a * b \in G$, logo $f(a) \bullet f(b) \in \text{Im } f$. Por fim, suponha que $f(a) \in \text{Im } f$, com $a \in G$. Como G é grupo, $a^{-1} \in G$. Daí, por (ii), $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$, com $a^{-1} \in G$. Logo, $f(a)^{-1} \in \text{Im } f$. Portanto, $\text{Im } f$ é um subgrupo de H .

(v) Note que dado $a, b \in G$,

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(a * b^{-1}) = e_H \Leftrightarrow a * b^{-1} \in N(f).$$

Logo, f será injetiva se, e somente se, $N(f) = \{e_G\}$. ■

Definição 3.5. Seja $(G, *)$ um grupo. A ordem de $(G, *)$, denotada por $|(G, *)|$, é a cardinalidade do conjunto G .

Neste trabalho, todos os grupos terão ordem finita. Por simplicidade, denotaremos um $(G, *)$ simplesmente por G desde que não haja ambiguidades. Além disso, frequentemente omitiremos o símbolo $*$, que representa a operação genérica do grupo, de modo que o produto $x * y$ será denotado simplesmente por xy .

Finalizamos esta seção com um resultado útil sobre simetrias de uma figura.

Proposição 3.3. Seja F uma figura. Seja $\text{Sym}(F)$ o conjunto de de todas as simetrias de F e seja \circ a operação de composição de funções. Então, $(\text{Sym}(F), \circ)$ é um grupo.

Demonstração: Seja $d(x, y)$ a distância entre os pontos x e y e suponha que $f, g \in \text{Sym}(F)$. Temos que $f \circ g$ é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} d(f(g(x)), f(g(y))) &= d(g(x), g(y)) && \text{pois } f \text{ é uma isometria} \\ &= d(x, y) && \text{pois } g \text{ é uma isometria.} \end{aligned}$$

Ainda, como $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$, vemos que $f \circ g$ é sobrejetiva. Resulta que $f \circ g$ é uma simetria. Assim, resta verificar que $(\text{Sym}(F), \circ)$ satisfaz os axiomas de grupo.

- (i) Associatividade: segue diretamente da associatividade de composição de funções.
- (ii) Elemento neutro: A identidade $id_F : F \rightarrow F$ é obviamente uma simetria, e portanto $\text{Sym}(F)$ possui um elemento identidade.
- (iii) Elemento inverso: Toda simetria (isometria) $f : F \rightarrow F$ é injetora. De fato, dados $x, y \in F$ com $f(x) = f(y)$, então

$$\begin{aligned} 0 &= d(f(x), f(y)) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $x = y$. Segue que f possui uma inversa f^{-1} . Dados $z, w \in F$, a sobrejetividade de f nos dá

$$d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = d(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = d(z, w)$$

Logo, f^{-1} é uma simetria, portanto pertence a $\text{Sym}(F)$. ■

3.2 Classes laterais

Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Defina a seguinte relação de equivalência sobre G : dados $x, y \in G$,

$$y \underset{E}{\sim} x \Leftrightarrow \text{existe } h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

A classe de equivalência que contém o elemento x , é pela Definição 2.4, o conjunto

$$\{y \in G \mid y \underset{E}{\sim} x\} = \{xh \mid h \in H\}.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.6. *Seja G um grupo e H um subgrupo de G . A classe lateral à esquerda de H em G que contém $x \in G$ é o conjunto*

$$xH = \{xh \mid h \in H\}.$$

Analogamente, a classe lateral à direita de H em G que contém $x \in G$ é o conjunto

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

Quando não houver ambiguidades, diremos simplesmente que xH (resp. Hx) é a classe lateral de x à esquerda (resp. à direita).

Proposição 3.4. *Todas as classes laterais à esquerda (ou à direita) de H em G tem a mesma cardinalidade, que é igual à cardinalidade de H .*

Demonstração: Segue diretamente do fato que as funções $f : H \rightarrow xH$ e $g : H \rightarrow Hx$ dadas, respectivamente, por $f(h) = xh$ e $g(h) = hx$ são bijeções. ■

Definição 3.7. *Seja G um grupo e H um subgrupo de G . O índice de H em G é a cardinalidade do conjunto de classes laterais à esquerda (ou à direita) de H em G e é denotado por $(G : H)$.*

Teorema 3.1. *(Teorema de Lagrange). Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G . Então $|G| = |H|(G : H)$. Em particular, a ordem e o índice de H dividem a ordem de G .*

Demonstração: Considerando a relação de equivalência à esquerda \sim_E em G , obtemos uma partição de G em classes de equivalência. A proposição anterior mostra que em cada uma dessas classes, temos $|H|$ elementos. Como, por definição, o número de classes é $(G : H)$, temos a igualdade $|G| = |H|(G : H)$. ■

Definição 3.8. *Seja G um grupo e g um elemento de G . A ordem de g é o menor inteiro positivo n tal que $g^n = e$, onde e é o elemento neutro de G .*

Definição 3.9. Seja um grupo G e g um elemento de G de ordem n . O subgrupo $H = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}$ de G é chamado de grupo gerado por g e será denotado por $\langle g \rangle$.

Exemplo 3.3. Considere o grupo S_3 e sejam $g, h \in S_3$ dados por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

e

$$h^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id.$$

Logo, g é um elemento de ordem 3 e h é um elemento de ordem 2. Assim, os subgrupos gerados por g e h são dados, respectivamente, por:

$$\langle g \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\langle h \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Note que a ordem de um elemento $g \in G$ será sempre a mesma ordem do subgrupo $\langle g \rangle$.

Definição 3.10. Um grupo G é dito cíclico se é gerado por um único elemento, isso é, se existe $g \in G$ tal que $\langle g \rangle = G$.

Temos que, se $|G| = p$, onde p é um número primo, então G é um grupo cíclico. De fato, seja $g \in G$ com $g \neq e_G$. Então, segue do Teorema de Lagrange e da observação acima que a ordem de $\langle g \rangle$ divide a ordem de G . Como a ordem de G é um número primo e $g \neq e_G$, resulta que $|\langle g \rangle| = |G|$. Logo $\langle g \rangle = G$.

Definição 3.11. Dois números inteiros a e b são ditos coprimos ou primos entre si se $\text{mdc}(a, b) = 1$, ou seja, se o único inteiro positivo que divide ambos é o número 1.

Definição 3.12. Para cada inteiro positivo n , seja $\phi(n)$ o número de coprimos com n que são menores ou iguais a n . Isto define uma função ϕ definida nos inteiros positivos chamada de função ϕ de Euler.

Note que se n é um número primo, então $\phi(n) = n - 1$. A Tabela 3.1 apresenta os valores de $\phi(n)$ para $n = 1$ até $n = 12$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Tabela 3.1 Valores de $\phi(n)$ para $n = 1, \dots, 12$.

3.3 Grupos de permutação

Nesta seção estaremos interessados em estudar os grupos de permutações e suas propriedades. Em particular, serão de grande interesse os grupos simétricos S_n que foram introduzidos no Exemplo 3.1. Começemos com um exemplo importante.

Exemplo 3.4. Seja X um conjunto não-vazio e seja

$$S_X = \{f : X \rightarrow X : f \text{ é bijetiva}\}.$$

Então (S_X, \circ) , onde \circ é a operação de composição de funções, é um grupo denominado grupo de permutações de X . Se $X = I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, então $S_X = S_n$ é o grupo simétrico de grau n que foi introduzido no Exemplo 3.1. ■

Definição 3.13. Seja $\alpha \in S_n$. Dizemos que α é uma permutação cíclica (ciclo) de comprimento r se existir um subconjunto $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{r-1}\}$ de I_n tal que

$$\alpha(s_0) = s_1, \quad \alpha(s_1) = s_2, \dots, \quad \alpha(s_{r-1}) = s_0$$

e $\alpha(t) = t$ para todo $t \in I_n \setminus S$. Dizemos também que um ciclo de comprimento r é um r -ciclo. Se $r = 1$, dizemos que o 1-ciclo é um ponto fixo e se $r = 2$ dizemos que o 2-ciclo é uma transposição.

Pode-se mostrar (ver, por exemplo, Gonçalves [6]) que toda permutação pode ser unicamente expressa como um produto de ciclos disjuntos (a menos da ordem dos elementos).

Exemplo 3.5. Considere o grupo S_3 do Exemplo 3.1. As permutações de S_3 podem ser representadas como produtos de ciclos disjuntos da seguinte forma:

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (132), (1)(23), (123), (13)(2)\}$$

Assim, por exemplo, o elemento $(12)(3)$ pode ser visto como o produto de uma transposição por um ponto fixo. Alguns autores costumam omitir os pontos fixos na representação acima, porém não faremos isto aqui. Ainda, iremos adotar sempre a representação de um ciclo como sendo aquela cujos elementos são dispostos em ordem crescente. Assim, por exemplo, embora (12) e (21) representem a mesma transposição, faremos a escolha de representar tal transição por (12) .

Exemplo 3.6. Considere o grupo S_6 . Expresse a permutação

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

como produto de ciclos disjuntos.

Solução: Vemos que $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 1$, logo temos uma transposição (12) . Como $\alpha(3) = 3$, temos um ponto fixo (3) ; partindo agora do elemento 4, temos que $\alpha(4) = 5$, $\alpha(5) = 6$ e $\alpha(6) = 4$, o que corresponde ao 3-ciclo (456) . Logo, $\alpha = (12)(3)(456)$ é o produto de 3 ciclos disjuntos. ■

Exemplo 3.7. Considere o grupo S_8 . Expresse a permutação

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

por um grafo orientado e forneça sua representação como produto de ciclos disjuntos.

Solução: Vemos que $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 6$ e $\beta(6) = 1$, portanto temos um 3-ciclo (126) ; como $\beta(3) = 3$, temos um ponto fixo (3) ; partindo agora do elemento 4, $\beta(4) = 5$, $\beta(5) = 8$, $\beta(8) = 7$ e $\beta(7) = 4$, então o ciclo que se inicia em 4 é o 4-ciclo (4587) . Recordemos que um grafo orientado é um par ordenado (V, E) em que V é um conjunto de vértices e E é um conjunto de arestas, que são pares ordenados de elementos de V . Então β pode ser expresso por um grafo orientado, conforme ilustra a Figura 3.1. Note

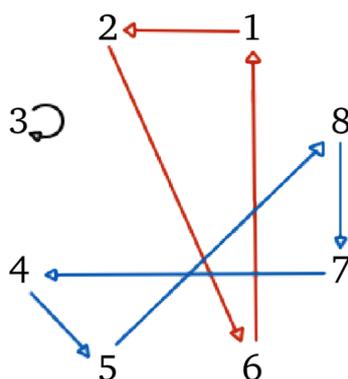


Figura 3.1 Grafo que representa a permutação β do Exemplo 3.7

que tal grafo admite laços, isso é, arestas que começam e terminam no mesmo vértice, como é o caso do elemento 3. O grafo da Figura 3.1 é composto por três subgrafos disjuntos que representam o fechamento dos ciclos iniciados em 1, 3 e 4, respectivamente. A Figura 3.2 explicita os 3 subgrafos correspondentes aos 3 ciclos da permutação β . Portanto, $\beta = (126)(3)(4587)$ é o produto de 3 ciclos disjuntos. ■

A partir de agora vamos priorizar a notação por ciclos disjuntos, pela maior simplicidade.



Figura 3.2 Subgrafos que representam a permutação β do Exemplo 3.7

Teorema 3.2. (Teorema de Cayley). *Seja G um grupo finito tal que $|G| = n$ e seja*

$$S_G = \{f : G \rightarrow G : f \text{ é bijeção}\}$$

o grupo de permutações dos elementos de G . Então, G é isomorfo a um subgrupo de S_G .

Demonstração: Dado $g \in G$, nós definimos uma aplicação $f_g : G \rightarrow G$ por $f_g(x) = gx$ para todo $x \in G$. Então f_g está bem definida. De fato, se $x = y$, então $gx = gy$, de modo que $f_g(x) = f_g(y)$. Mostraremos a seguir que f_g é injetiva. Para ver isto, suponha que $f_g(x) = f_g(y)$. Então, $gx = gy$ e pela lei do cancelamento à esquerda, $x = y$. Para ver que f_g é sobrejetiva, tome $y \in G$. Então, $g^{-1}y \in G$ e $f_g(g^{-1}y) = y$. Logo, f_g é bijetiva e portanto, $f_g \in S_G$.

Nós definimos agora a aplicação $F : G \rightarrow S_G$ pondo $F(g) = f_g$ para todo $g \in G$. Então F está bem definida, pois se $g_1 = g_2$, então $g_1x = g_2x$ para todo $x \in G$, ou seja, $f_{g_1}(x) = f_{g_2}(x)$ para todo $x \in G$ e portanto $F(g_1) = F(g_2)$. Agora dados $g_1, g_2 \in G$, temos que

$$f_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)x = g_1(g_2x) = f_{g_1}(g_2x) = f_{g_1}f_{g_2}(x), \quad \text{para todo } x \in G.$$

Portanto $F(g_1g_2) = F(g_1)F(g_2)$ e F é um homomorfismo. Por fim, F é injetiva, pois se $F(g_1) = F(g_2)$, então $f_{g_1}(x) = f_{g_2}(x)$ para todo $x \in G$. Em particular, $f_{g_1}(e) = f_{g_2}(e)$, ou seja, $g_1e = g_2e$, o que fornece $g_1 = g_2$. Assim, F é um isomorfismo de G e $\text{Im } F$ que é um subgrupo de S_G . ■

Corolário 3.1. *Seja G um grupo finito tal que $|G| = n$. Então G é isomorfo a um subgrupo de S_n .*

Demonstração: Como G tem n elementos, podemos escrever $G = \{x_1, \dots, x_n\}$. Definimos $\phi : S_n \rightarrow S_G$ pondo, para todo $\alpha \in S_n$, $\phi(\alpha)(x_i) = x_{\alpha(i)}$. Então ϕ é claramente um homomorfismo e claramente uma bijeção. Segue que S_G é isomorfo a S_n e portanto G é isomorfo a um subgrupo de S_n . ■

3.4 Tipo cíclico e índice de ciclos

Definição 3.14. *Seja G um grupo de permutações e $\alpha \in G$. Seja $k_l(\alpha)$ o número de ciclos de tamanho l , $1 \leq l \leq n$ que α possui e seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde x_l representa um ciclo de tamanho l . Definimos o tipo cíclico de α como o monômio formal nas variáveis x_1, \dots, x_n*

$$\text{tc}(\alpha) = \prod_{l=1}^n x_l^{k_l(\alpha)}.$$

Definição 3.15. *Seja G um grupo de permutações de ordem n , então o índice de ciclos de G , que é denotado por P_G , é o polinômio formal nas variáveis x_1, \dots, x_n , dado por:*

$$P_G(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} \text{tc}(\alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} \prod_{l=1}^n x_l^{k_l(\alpha)}.$$

Exemplo 3.8. *Considere o grupo S_3 já visto anteriormente:*

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (132), (1)(23), (123), (13)(2)\}$$

Determine o índice de ciclos de S_3 .

Solução: Queremos calcular o índice de ciclos de S_3 . Para isso, determinemos o tipo cíclico de cada elemento de S_3 . A Tabela 3.2 fornece os tipos cíclicos para os elementos de S_3 .

α	$\text{tc}(\alpha)$
(1)(2)(3)	x_1^3
(12)(3)	x_1x_2
(1)(23)	x_1x_2
(13)(2)	x_1x_2
(123)	x_3
(132)	x_3

Tabela 3.2 Tipos cíclicos dos elementos $\alpha \in S_3$.

Logo, temos que

$$P_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3). \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.9. Determine o índice de ciclos de S_4 .

Solução: Os tipos cíclicos para os elementos de S_4 são dados na Tabela 3.3 abaixo.

Permutações com mesmo tipo cíclico foram agrupadas numa mesma linha.

α	$\text{tc}(\alpha)$
(1)(2)(3)(4)	x_1^4
(12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (1)(23)(4), (1)(24)(3), (1)(2)(34)	$x_1^2x_2$
(12)(34), (13)(24), (14)(23)	x_2^2
(1)(234), (1)(243), (134)(2), (143)(2), (124)(3), (142)(3), (123)(4), (132)(4)	x_1x_3
(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)	x_4

Tabela 3.3 Tipos cíclicos dos elementos $\alpha \in S_4$. Permutações com mesmo tipo cíclico foram agrupadas numa mesma linha.

Assim, o índice de ciclos de S_4 é dado por

$$P_{S_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \quad \blacksquare$$

Para conjuntos de tamanhos maiores, a estratégia usada nos exemplos acima pode não ser muito eficiente, pois passa pela listagem de todos os elementos do conjunto. Por exemplo, para termos o índice de ciclos do grupo S_5 teríamos que listar seus 120 elementos. Nosso objetivo é encontrar uma estratégia mais eficiente para se determinar o índice de ciclos de S_n .

Para calcular o índice de ciclos de um grupo de permutações, temos que saber quantas permutações de cada tipo ciclo temos no grupo. Para tal, seja $\alpha \in S_n$ uma permutação e suponha que o tipo cíclico de α seja dado por

$$\text{tc}(\alpha) = x_1^{k_1(\alpha)} x_2^{k_2(\alpha)} \dots x_n^{k_n(\alpha)}.$$

Este tipo cíclico corresponde biunivocamente a seguinte partição inteira de n :

$$n = \sum_{l=1}^n l k_l(\alpha).$$

Denotaremos esta partição por $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. Seja $d(\mathbf{k})$ o número de permutações $\alpha \in S_n$ que tem a decomposição em ciclos dada por \mathbf{k} . Para obter o valor de $d(\mathbf{k})$, podemos proceder da seguinte forma: primeiro escolhemos os números que farão parte dos k_r ciclos de comprimento r . O primeiro destes ciclos pode ser escolhido de $\binom{n}{r}$ formas. E os r números podem ser rearranjados formando $(r-1)!$ ciclos distintos. Para o próximo ciclo de comprimento r sobraram $(n-r)$ números para serem escolhidos. Cada um destes ciclos pode ser tomado de $\binom{n-r}{r}$ formas e, cada um, por rearranjos, fornece $(r-1)!$ ciclos distintos, e assim por diante. A ordem em que os k_r ciclos de comprimento r é colocada é irrelevante. Logo, o número total destes ciclos é:

$$\frac{1}{k_r!} \left\{ \binom{n}{r} (r-1)! \binom{n-r}{r} (r-1)! \dots \binom{n-(k_r-1)r}{r} (r-1)! \right\} = \frac{n!}{r^{k_r} k_r! (n-k_r)!}.$$

De um modo geral, após escolhidos todos os ciclos de comprimento $1, 2, \dots, l-1$, o número de maneiras de se escolher os números que farão parte dos k_l ciclos de comprimento l é dado por

$$\frac{(n-s_{l-1})!}{l^{k_l} k_l! (n-s_l)!}$$

em que $s_r = \sum_{l=1}^r lk_l$ para $r = 1, \dots, n$ e $s_0 = 0$ (note ainda que $s_n = n$). Portanto, o número de permutações $\alpha \in S_n$ que tem a decomposição em ciclos dada por \mathbf{k} é dado por

$$d(\mathbf{k}) = \prod_{l=1}^n \frac{(n - s_{l-1})!}{l^{k_l} k_l! (n - s_l)!} = \frac{n!}{\prod_{l=1}^n l^{k_l} k_l!} \quad (3.1)$$

Note que, existem $p(n)$ diferentes tipos cíclicos distintos para as permutações de S_n , onde $p(n)$ é o número de partições do inteiro n . Assim uma nova estratégia para calcular o índice de ciclos de um grupo de permutações S_n seria listar as partições de n , correspondendo cada partição com o tipo cíclico adequado e aplicar a Equação (3.1) para ter a quantidade de permutações daquele tipo cíclico.

Exemplo 3.10. *Determine o índice de ciclos de S_5 .*

Solução: A Tabela 3.4 fornece as partições de $n = 5$, os tipos cíclicos, e o número de permutações correspondentes.

Partição de $n = 5$	Tipo cíclico	Número de permutações
5	x_5^1	$\frac{5!}{5^1 1!} = 24$
4 + 1	$x_4^1 x_1^1$	$\frac{5!}{4^1 1! 1^1 1!} = 30$
3 + 1 + 1	$x_3^1 x_1^2$	$\frac{5!}{3^1 1! 1^2 2!} = 20$
3 + 2	$x_3^1 x_2^1$	$\frac{5!}{3^1 1! 2^1 1!} = 20$
2 + 2 + 1	$x_2^2 x_1^1$	$\frac{5!}{2^2 2! 1^1 1!} = 15$
2 + 1 + 1 + 1	$x_2^1 x_1^3$	$\frac{5!}{2^1 1! 1^3 3!} = 10$
1 + 1 + 1 + 1 + 1	x_1^5	$\frac{5!}{1^5 5!} = 1$

Tabela 3.4 Cálculo do número de permutações de cada tipo cíclico de S_5 agrupadas segundo as partições de $n = 5$.

Assim, o índice de ciclos de S_5 é dado por

$$P_{S_5}(\mathbf{x}) = \frac{1}{120} (24x_5^1 + 30x_4^1 x_1^1 + 20x_3^1 x_1^2 + 20x_3^1 x_2^1 + 15x_2^2 x_1^1 + 10x_2^1 x_1^3 + x_1^5). \quad \blacksquare$$

3.5 Exemplos de grupos de permutação

Nesta seção, nós iremos apresentar alguns exemplos de grupos de permutação, bem como algumas de suas propriedades. Também daremos uma expressão para o índice de ciclos de cada um destes grupos. Estes e outros exemplos podem ser encontrados em Harary und Palmer [7].

Exemplo 3.11. (*Grupo Cíclico*). Dada uma permutação $\sigma \in S_n$ e um número natural k , defina σ^k como sendo a composição da permutação σ k vezes. Sabemos que o grupo gerado por uma permutação $\sigma \in S_n$, é chamado de grupo cíclico $\langle \sigma \rangle$. Vamos tomar agora um caso particular de grupo cíclico. O Grupo Cíclico C_n é o subgrupo de S_n gerado por $(123 \dots n)$. Temos que $|C_n| = n$. Além disso, as permutações de C_n podem ser vistas como rotações.

O índice de ciclos de C_n é dado por

$$P_{C_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{n/d}$$

onde ϕ é a função de Euler e a soma é efetuada nos divisores d de n .

Exemplo 3.12. (*Grupo Diedral*) O Grupo Diedral D_n é o grupo das permutações de um polígono regular de n lados incluindo rotações e reflexões. Temos que $C_n \subseteq D_n$ e $|D_n| = 2n$ sendo n rotações e n reflexões.

De fato, dado um polígono regular de n lados, podemos rotacionar este polígono em torno de seu centro de n maneiras diferentes até que ele retorne a sua posição inicial. Mais especificamente, podemos rotacionar ele em torno do centro de $2k\pi/n$ radianos, onde $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Isto fornece n rotações.

Para descrever as reflexões, consideremos dois casos: (i) o número de lados n é par; (ii) o número de lados n é ímpar. No caso (i), existe uma reflexão em torno da reta conectando cada vértice ao ponto médio do lado oposto. Isto nos dá n reflexões

(uma para cada vértice). Elas são distintas, pois cada uma fixa um vértice diferente. No caso (ii), existe uma reflexão em torno da reta conectando cada par de vértices opostos ($n/2$ reflexões) e em torno da reta conectando os pontos médios de dois lados opostos (outras $n/2$ reflexões). Portanto, neste caso temos também n reflexões. Note que elas são todas distintas pois elas estão associadas a tipos diferentes de pontos fixos no polígono: diferentes pares de vértices opostos ou diferentes pares de pontos médios de lados opostos.

É comum denotarmos por r a rotação no sentido anti-horário de $2\pi/n$ radianos. Para a rotação r , nós obtemos n rotações tomando as potências de r (r tem ordem n), a saber,

$$C_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\},$$

em que e é a identidade em D_n . Seja agora s a reflexão em torno de uma reta que passa por um vértice. Mostraremos agora que as n reflexões em D_n são obtidas tomando cada rotação e refletindo em torno de um eixo vertical (ou horizontal). Mais precisamente, as n reflexões são dadas pelos elementos do

$$U_n = \{s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}.$$

Note que os elementos de U_n são todos distintos pois os elementos de C_n são todos distintos e nós simplesmente multiplicamos eles todos à esquerda pelo mesmo elemento s . Ainda, nenhum $r^i s$ é uma rotação, pois se fosse $r^i s = r^j$ para algum j , então $s = r^{j-i}$, absurdo, pois s não é uma rotação. Assim, $D_n = C_n \cup U_n$ possui $2n$ elementos sendo n rotações e n reflexões, com $C_n \subset D_n$.

O índice de ciclos de D_n é dado por

$$P_{D_n} = \frac{1}{2}(P_{C_n} + R_n)$$

onde

$$R_n = \begin{cases} x_1 x_2^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{2} (x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{(n-2)/2}) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.13. Determine o índice de ciclos de C_5 .

Solução: O grupo C_5 pode ser interpretado como as rotações do pentágono regular. Sabemos que C_5 é o grupo gerado por $\alpha = (12345)$. Assim, para determinar os elementos de C_5 , basta calcular as potências de α :

$$\alpha^2 = (13524)$$

$$\alpha^3 = (14253)$$

$$\alpha^4 = (15432)$$

$$\alpha^5 = (1)(2)(3)(4)(5) = e$$

Logo,

$$C_5 = \{(1)(2)(3)(4)(5), (12345), (13524), (14253), (15432)\}.$$

e, portanto, o índice de ciclos de C_5 é dado por

$$P_{C_5} = \frac{1}{5}(\phi(5)x_5^{5/5} + \phi(1)x_1^{5/1}) = \frac{1}{5}(4x_5^1 + x_1^5). \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.14. Determine o índice de ciclos de D_5 .

Solução: O grupo D_5 foi mostrado na Figura 2.2 no Exemplo 2.4 como

$$D_5 = \{(1)(2)(3)(4)(5), (12345), (13524), (14253), (15432), (1)(25)(34), (12)(35)(4), \\ (13)(2)(45), (14)(23)(5), (15)(24)(3)\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_{D_5} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} (4x_5^1 + x_1^5) + x_1 x_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} (4x_5^1 + x_1^5) + \frac{1}{5} 5x_1 x_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{5} (4x_5^1 + 5x_1 x_2^2 + x_1^5) \\ &= \frac{1}{10} (4x_5^1 + 5x_1 x_2^2 + x_1^5). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

O Lema de Burnside

Nesse capítulo vamos enunciar um resultado importante, com aplicações em vários problemas de contagem, o Lema de Burnside. Embora o lema seja usualmente atribuído à William Burnside, ele foi provado por Frobenius [4]. Burnside [3] creditou Frobenius pelo resultado em seu livro, porém a citação não passou para a segunda edição do livro, que é mais conhecida no meio acadêmico.

Uma das aplicações do Teorema de Burnside é contar o número de padrões distintos de colorações. Para isso precisamos definir quando duas colorações pertencem ao mesmo padrão, isso é feito descrevendo uma interação entre um grupo G e um conjunto de colorações X , os padrões serão determinados pelas orbitas dessa interação.

4.1 Ação de um grupo e coloração

O conceito de coloração já foi usado informalmente no Exemplo 1.1. Nesta seção, daremos um tratamento mais formal ao assunto.

Exemplo 4.1. *Considere um tabuleiro de xadrez 3×3 como ilustrado na Figura 4.1.*

Se o nosso interesse for colorir as casas do tabuleiro com as cores branco (B), preto

γ_1	γ_2	γ_3
γ_4	γ_5	γ_6
γ_7	γ_8	γ_9

Figura 4.1 Tabuleiro de xadrez 3×3 .

(P) e cinza (C), podemos considerar a coloração como uma aplicação $f : D \rightarrow C$ do conjunto $D = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_9\}$, que representa as 9 casas do tabuleiro, no conjunto das cores $C = \{B, P, C\}$. Por exemplo, a coloração

$$f(\gamma_1) = f(\gamma_5) = f(\gamma_9) = P$$

$$f(\gamma_2) = f(\gamma_6) = f(\gamma_7) = C$$

$$f(\gamma_3) = f(\gamma_4) = f(\gamma_8) = B$$

corresponde ao seguinte tabuleiro colorido ilustrado na Figura 4.2. ■

Figura 4.2 Tabuleiro de xadrez 3×3 colorido.

γ_1	γ_2
γ_3	γ_4

Figura 4.3 Tabuleiro de xadrez 2×2 .

Exemplo 4.2. Considere novamente o tabuleiro de xadrez 2×2 do Exemplo 1.1 conforme ilustrado na Figura 4.3. Se o nosso interesse for colorir as casas do tabuleiro com as cores branco (B), preto (P), podemos considerar a coloração como uma aplicação $f : D \rightarrow C$ do conjunto $D = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$, que representa as 4 casas do tabuleiro, no conjunto das cores $C = \{B, P\}$. Por exemplo, a coloração

$$f(\gamma_1) = f(\gamma_4) = P$$

$$f(\gamma_2) = f(\gamma_3) = B$$

corresponde ao tabuleiro colorido $C10$ do Exemplo 1.1 ilustrado na Figura 4.4. ■



Figura 4.4 Tabuleiro de xadrez 2×2 colorido.

Definição 4.1. Sejam C e D dois conjuntos não-vazios. Uma coloração de D em C é qualquer aplicação $f : D \rightarrow C$. O conjunto de todas as colorações de D em C será denotado por $X(D; C)$ ou simplesmente X , quando não houver ambiguidade.

Nós estaremos interessados particularmente nos casos onde C e D são conjuntos finitos. Assim, supondo que $|C| = m$ e $|D| = n$, sabemos, pelo Princípio Multiplicativo, que o número de colorações de D em C é m^n , ou seja, $|X| = m^n$.

Exemplo 4.3. Voltando ao Exemplo 4.1 de um tabuleiro 3×3 , temos que $|D| = 9$ e $|C| = 3$, logo $|X| = 3^9 = 19.683$. Assim, existem 19.683 colorações possíveis. Po-

rém, não somos capazes ainda de determinar quais dessas aplicações pertencem à um mesmo padrão. ■

Exemplo 4.4. Voltando ao Exemplo 4.2 de um tabuleiro 2×2 , temos que $|D| = 4$ e $|C| = 2$, logo $|X| = 2^4 = 16$ que coincide com o valor encontrado no Exemplo 1.1. ■

Definição 4.2. Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Dizemos que G age em X se existir uma função de $G \times X \rightarrow X$ geralmente denotada por $(g, x) \mapsto g \cdot x$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para todo $x \in X$, $e_G \cdot x = x$, onde e_G é a identidade de G .

(ii) Para todos $g, h \in G$ e $x \in X$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Exemplo 4.5. Seja G um grupo e $X = G$. Definamos uma ação de G sobre X da seguinte forma: se $g \in G$ e $x \in X$ (ou seja, $x \in G$), nós definimos a função por $(g, x) \mapsto gx$. Ou seja, gx é o produto ordinário de g e x em G . A associatividade da multiplicação e as propriedades do elemento neutro mostram que esse produto é uma ação de G sobre X . ■

Exemplo 4.6. Seja G um grupo e $X = G$. Definamos uma ação de G sobre X da seguinte forma: se $g \in G$ e $x \in X$ (ou seja, $x \in G$), nós definimos a função por $(g, x) \mapsto (gxg^{-1})$. Esta operação é denominada de conjugação. Para ver que esta aplicação é uma ação de G sobre X , verifiquemos a definição: (i) para todo $x \in X$, $e_G x e_G^{-1} = x$, então a primeira propriedade está satisfeita; (ii) Para todos $g, h \in G$ e $x \in X$, $g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1}$ e a propriedade (ii) está satisfeita. ■

Lema 4.1. Seja G um grupo que age sobre X . Então, para todo $g \in G$ e $x, y \in X$, temos

$$g \cdot x = y \Leftrightarrow g^{-1} \cdot y = x.$$

Demonstração: (\Rightarrow). Suponha que $g \cdot x = y$. Então

$$\begin{aligned}
 g^{-1} \cdot y &= g^{-1} \cdot (g \cdot x) && \text{por hipótese} \\
 &= (g^{-1}g) \cdot x && \text{pela Definição 4.2 (ii)} \\
 &= e_G \cdot x && \text{pela Definição 3.1 (iii)} \\
 &= x && \text{pela Definição 4.2 (i).}
 \end{aligned}$$

(\Leftarrow). Suponha que $g^{-1} \cdot y = x$. Então

$$\begin{aligned}
 g \cdot x &= g \cdot (g^{-1} \cdot y) && \text{por hipótese} \\
 &= (gg^{-1}) \cdot y && \text{pela Definição 4.2 (ii)} \\
 &= e_G \cdot y && \text{pela Definição 3.1 (iii)} \\
 &= y. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Proposição 4.1. *Sejam C e D conjuntos não-vazios distintos e X o conjunto de todas as colorações de D em C . Seja G um subgrupo de S_D , o grupo das permutações de D . Defina uma aplicação de $\psi : G \times X$ em X pondo $(\alpha, f) \mapsto f \circ \alpha^{-1}$ onde \circ é a composição de funções. Então, ψ é uma ação de G sobre X .*

Demonstração: O elemento neutro em G é a aplicação identidade, $e : D \rightarrow D$. Assim, para todo $f \in X$, $e \cdot f = f \circ e^{-1} = f \circ e = f$. Agora, sejam α_1 e α_2 dois elementos de G e $f \in X$. Então,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot f) &= \alpha_1 \cdot (f \circ \alpha_2^{-1}) \\
 &= f \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} \\
 &= f \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} \\
 &= (\alpha_1 \circ \alpha_2) \cdot f. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

4.2 Órbitas e Estabilizadores

Definição 4.3. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X . Defina uma relação \sim_G em X da seguinte maneira: para todos $x, y \in X$,*

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \text{existe } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

Proposição 4.2. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X . A relação \sim_G em X é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Sejam $x, y, z \in X$.

- (i) Reflexividade: Tome $e \in G$. Então $e \cdot x = x$. Logo, $x \sim_G x$.
- (ii) Simetria: Suponha que $x \sim_G y$. Então existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Pelo Lema 4.1, $g^{-1}y = x$, com $g^{-1} \in G$. Logo, $y \sim_G x$. A recíproca segue simplesmente revertendo estas etapas.
- (iii) Transitividade: Suponha que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$. Então existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 \cdot x = y$ e $g_2 \cdot y = z$. Logo, $g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = z$. Pela Definição 4.2 (ii), $(g_2g_1) \cdot x = z$, com $g_2g_1 \in G$. Portanto, $x \sim_G z$. ■

Definição 4.4. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X . A classe de equivalência de $x \in X$ é o conjunto*

$$O_x = \{y \in X : y \sim_G x\} = \{g \cdot x : g \in G\},$$

que será chamado também órbita que contém $x \in X$.

Dados $x, y \in X$, sabemos pela Proposição 2.1 que $O_x = O_y$ se, e somente se, $x \sim_G y$. Além disso, temos apenas duas possibilidades:

$$O_x = O_y \quad \text{ou} \quad O_x \cap O_y = \emptyset.$$

Mais ainda, a Proposição 2.2 nos fala que as órbitas formam uma partição de X . Denotaremos o conjunto de todas as órbitas de X por X/G . Logo nosso problema de determinar o número de colorações de padrões distintos de um tabuleiro, tendo como D um conjunto de casas e C um conjunto de cores, pode ser interpretado em função de quantas órbitas distintas existem em X .

Definição 4.5. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X . Dado $g \in G$ e $x \in X$ com $g \cdot x = x$, dizemos que x é um ponto fixo de g e que g fixa x . O estabilizador de $x \in X$ é o conjunto dos elementos de G que fixam x :*

$$S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Observe que $e_G \in S_x$ para todo $x \in X$.

Lema 4.2. *Seja G um grupo que age num conjunto X . Para todo $x \in X$, S_x é subgrupo de G .*

Demonstração: Já observamos que $e_G \in S_x$ para todo $x \in X$. Dados $g, h \in S_x$, $g \cdot x = x$ e $h \cdot x = x$. Daí $g \cdot (h \cdot x) = x$, ou seja, $(gh) \cdot x = x$. Portanto $gh \in S_x$. Por fim, se $g \in S_x$, então $g \cdot x = x$. Pelo Lema 4.1, $g^{-1} \cdot x = x$. Logo, $g^{-1} \in S_x$. Portanto, S_x é subgrupo de G . ■

Exemplo 4.7. *Considere o Exemplo 4.2 do tabuleiro 2×2 . Neste caso, $D = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$, $C = \{B, P\}$, X é o conjunto das colorações $f : D \rightarrow C$. Considere G como o grupo das simetrias do quadrado (Exemplo 2.3)*

$$D_4 = \{(1)(2)(3)(4), (1243), (14)(23), (1342), (12)(34), (13)(24), (1)(23)(4), (14)(2)(3)\}.$$

Seja f_{10} a coloração correspondente ao elemento C10 na Figura 1.1. Então o estabilizador do elemento f_{10} é

$$S_{f_{10}} = \{(1)(2)(3)(4), (14)(23), (1)(23)(4), (14)(2)(3)\}$$

e

$$O_{f_{10}} = \{f_{10}, f_{11}\}. \quad \blacksquare$$

Note, no exemplo acima, que $|S_{C_{10}}||O_{C_{10}}| = |D_4|$. O teorema a seguir nos conta que isto não ocorre por acaso.

Teorema 4.1. (Teorema da Órbita-Estabilizador). *Seja G um grupo finito que age sobre um conjunto X . Então, para todo $x \in X$,*

$$|S_x||O_x| = |G|.$$

Demonstração: Sabemos pelo Lema 4.2 que S_x é subgrupo de G , logo pelo Teorema de Lagrange,

$$|G| = |S_x|(G : S_x).$$

Assim, basta provar que $|O_x| = (G : S_x)$. Como os elementos de O_x são da forma $g \cdot x$ e as classes laterais à esquerda de S_x são da forma gS_x , queremos demonstrar tal igualdade estabelecendo uma relação biunívoca entre os elementos de O_x e as classes laterais de S_x , de modo que para todo $g_1, g_2 \in G$:

$$g_1S_x = g_2S_x \iff g_1 \cdot x = g_2 \cdot x.$$

Sejam $g_1, g_2 \in G$, então

$$\begin{aligned} g_1S_x = g_2S_x &\iff g_1 = g_2y, y \in S_x \\ &\iff g_2^{-1}g_1 \in S_x \\ &\iff (g_2^{-1}g_1) \cdot x = x \\ &\iff g_2^{-1}(g_1 \cdot x) = x \\ &\iff g_1 \cdot x = g_2 \cdot x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.2. *Seja G um grupo finito que age sobre o conjunto X . Então o número de órbitas distintas é*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x| \quad (4.1)$$

Demonstração: Suponha que existam k órbitas distintas, ou seja, $X/G = \{O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$. Então, o Teorema da Órbita-Estabilizador aplicado à O_{x_i} , com $i = 1, \dots, k$, nos dá

$$\sum_{x \in O_{x_i}} |S_x| = \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_x|}$$

Como para todo $x \in O_{x_i}$, $O_x = O_{x_i}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_x|} &= \sum_{x \in O_{x_i}} \frac{|G|}{|O_{x_i}|} \\ &= \frac{|G|}{|O_{x_i}|} |O_{x_i}| \\ &= |G|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} |S_x| &= \sum_{i=1}^k \sum_{x \in O_{x_i}} |S_x| \\ &= \sum_{i=1}^k |G| \\ &= |X/G| |G|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Embora o Teorema 4.2 seja bastante útil em diversos casos, ele apresenta a desvantagem de que a soma no lado direito de (4.1) percorre os elementos de X . No Exemplo 1.1 do tabuleiro 2×2 , $|X| = 2^4 = 16$, a soma em (4.1) poderia ser obtida facilmente, porém no caso de um tabuleiro 6×6 , teríamos que $|X| = 2^{36} = 137.438.953.472$, o que sem dúvida torna inviável o cálculo da soma.

Definição 4.6. *Dado um grupo G agindo em X , o fixador de $g \in G$ é o conjunto dos elementos de X que são fixados pelo elemento g :*

$$F_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

Note que F_g é subconjunto de X enquanto S_x é subconjunto de G .

Definição 4.7. *Seja G um grupo de permutações que age em X e $\alpha \in G$. Dizemos que uma coloração f é constante em cada ciclo de α se para todo ciclo $(d_1 d_2 \dots d_k)$ de α , tivermos $f(d_1) = f(d_2) = \dots = f(d_k)$.*

Note que se $(d_1 d_2 \dots d_k)$ for um ciclo de α , então $\alpha(d_1) = d_2$, $\alpha(d_2) = d_3$, e assim por diante. Logo, dizer que f é constante em cada ciclo de α é equivalente a dizer que, para todo $d \in D$, $f(d) = f(\alpha(d))$.

Proposição 4.3. *Seja G um grupo de permutações que age em $X(D;C)$ e $\alpha \in G$. Então para cada $f \in X$, $f \in F_\alpha$ se, e somente se, f é constante em cada ciclo de α .*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} f \in F_\alpha &\Leftrightarrow \alpha \cdot f = f \\ &\Leftrightarrow f \circ \alpha^{-1} = f \\ &\Leftrightarrow f(\alpha^{-1}d) = f(d) \quad \text{para todo } d \in D. \end{aligned}$$

Como α é uma bijeção de D em D , $D = \{\alpha^{-1}(d) : d \in D\}$. Assim, denotando $\alpha^{-1}(d) = d'$, segue que

$$f \in F_\alpha \Leftrightarrow f(d') = f(\alpha(d')) \quad \text{para todo } d' \in D.$$

Ou seja,

$$f \in F_\alpha \Leftrightarrow f \text{ é constante em cada ciclo de } \alpha. \quad \blacksquare$$

Lema 4.3. *Dado um grupo G finito agindo em X ,*

$$\sum_{g \in G} |F_g| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

Demonstração: Seja

$$A = \{(x, g) \in X \times G : g \cdot x = x\}.$$

Podemos contar os elementos de A de duas maneiras distintas: (i) fixando a primeira coordenada e variando a segunda; (ii) fixando a segunda coordenada e variando a primeira. No primeiro caso, para cada $x \in X$ fixo, o número de elementos $g \in G$ que fixam x é a cardinalidade do conjunto $S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Portanto,

$$|A| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

No segundo caso, para cada $g \in G$ fixo, o número de elementos $x \in X$ que são fixados por g é a cardinalidade do conjunto $F_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$. Assim,

$$|A| = \sum_{g \in G} |F_g|. \quad \blacksquare$$

Lema 4.4. (*Lema de Burnside*). *Seja G um grupo finito agindo em um conjunto X . Então, o número de órbitas distintas em X é dado por*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|.$$

Demonstração: É consequência imediata do Teorema 4.2 e do Lema 4.3. ■

O Lema de Burnside apresenta uma grande vantagem em relação ao Teorema 4.2, pois frequentemente $|G|$ é pequena em relação a $|X|$.

Exemplo 4.8. *Seja D o conjunto de vértices de um pentágono regular e $C = \{B, P\}$. Quantos padrões distintos de coloração existem em um pentágono regular se cada vértice pode ser colorido com apenas uma das cores branco ou preto?*

Solução: Se X é o conjunto das colorações $f : D \rightarrow C$, então $|X| = 2^5 = 32$. Um pentágono diz-se idêntico ao outro, se um pode ser obtido através do outro por rotação ou

reflexão através de suas medianas. Vimos no Exemplo 2.4 que um pentágono regular possui 10 simetrias, logo o grupo G que irá agir sobre X será

$$D_5 = \{(1)(2)(3)(4)(5), (12345), (13524), (14253), (15432), (1)(25)(34), (12)(35)(4), \\ (13)(2)(45), (14)(23)(5), (15)(24)(3)\}.$$

Vamos calcular para cada permutação de cada item quantos elementos de X ela fixa. Note que se α é uma permutação com k ciclos x_1, x_2, \dots, x_k , então α irá fixar qualquer coloração que atribua a mesma cor a todos os elementos de um ciclo x_j . Assim, por exemplo, se $\alpha = (1)(25)(34)$, então α possui 1 ciclo de comprimento 1 e 2 ciclos de comprimento 2. Logo, como temos 2 cores possíveis e 3 ciclos, existem 2^3 colorações possíveis que são constantes nos elementos de cada um desses 3 ciclos. Procedendo desta forma, temos que

$$\begin{aligned} |F_{(1)(2)(3)(4)(5)}| &= 2^5 \\ |F_{(12345)}| &= |F_{(13524)}| = |F_{(14253)}| = |F_{(15432)}| = 2 \\ |F_{(1)(25)(34)}| &= |F_{(12)(35)(4)}| = |F_{(13)(2)(45)}| = |F_{(14)(23)(5)}| = |F_{(15)(24)(3)}| = 2^3. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Burnside, o número de padrões distintos de colorações de um pentágono regular cujos vértices podem ser coloridos com as cores preto ou branco é

$$|X/G| = \frac{1}{10}(2^5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2^3) = 32 + 8 + 40 = 8.$$

De um modo geral, se tivermos c cores possíveis para colorir os vértices do pentágono regular, então,

$$|X/G| = \frac{1}{10}(c^5 + 4c^1 + 5c^3). \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.9. *Quantos tetraedros diferentes existem se cada vértice pode ser colorido usando-se apenas uma das cores preto, branco ou cinza?*

Solução: Temos que $D = \{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto de vértices de um tetraedro regular e $C = \{P, B, C\}$ é o conjunto de cores. O número total de colorações presentes nesse caso é dado por $|X| = 3^4 = 81$. Dizemos que dois tetraedros são idênticos se um pode ser obtido através do outro por rotação através de seus eixos de simetria. Os eixos de simetria de um tetraedro regular estão ilustrados na Figura 15. Pode-se mostrar, nesse

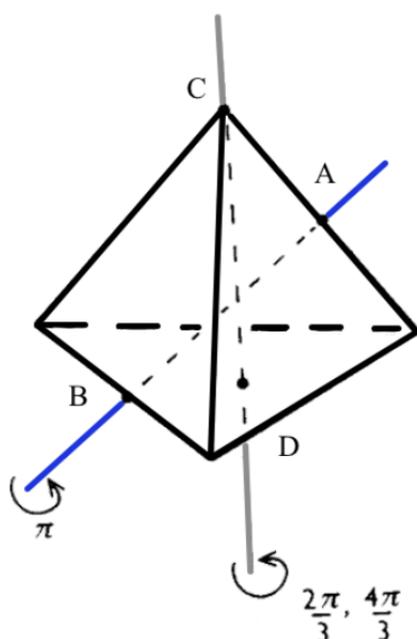


Figura 4.5 Eixos de simetria de um tetraedro regular.

caso, que G é definido por suas 12 simetrias rotacionais:

- (i) a identidade, que é composta de quatro ciclos de comprimento 1;
- (ii) as 3 simetrias de rotação pelo eixo AB de um ângulo de π , que passam pelos pontos médios de arestas opostas. Cada simetria dessa é composta de dois ciclos de comprimento 2;
- (iii) As 8 simetrias de rotação pelo eixo CD , que passam por um vértice e pelo centro da face oposta. São 4 simetrias de rotação de um ângulo $\frac{2\pi}{3}$ e 4 simetrias

de rotação de um ângulo $\frac{4\pi}{3}$. Cada rotação dessa é composta de um ciclo de comprimento 1 e um ciclo de comprimento 3.

Portanto,

$$G = \{(1)(2)(3)(4), (1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143), (3)(124), (3)(142), (4)(123), (4)(132), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Assim, procedendo como no exemplo anterior,

$$\begin{aligned} |F_{(1)(2)(3)(4)}| &= 3^4 \\ |F_{(12)(34)}| &= |F_{(13)(24)}| = |F_{(14)(23)}| = 3^2 \\ |F_{(1)(234)}| &= |F_{(1)(243)}| = |F_{(2)(134)}| = |F_{(2)(143)}| = |F_{(3)(124)}| = |F_{(3)(142)}| = |F_{(4)(123)}| \\ &= |F_{(4)(132)}| = 3^2. \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema de Burnside,

$$|X/G| = \frac{1}{12}(3^4 + 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^2) = \frac{1}{12}(81 + 99) = 15. \quad \blacksquare$$

Note que o Teorema de Burnside não nos dá informações sobre como são esses tetraedros. Por exemplo, num problema com c cores, $c \geq 3$, se queremos saber quais desses são coloridos com pelo menos duas cores, não temos como responder a partir dos nossos cálculos.

CAPÍTULO 5

O Teorema de Pólya

Neste capítulo iremos apresentar e demonstrar o Teorema da Enumeração de Pólya. Para isso, precisamos definir o conceito de peso de uma coloração e introduziremos o conceito de inventário de padrões que é um objeto matemático que irá conter todas as informações a respeito dos padrões distintos de colorações de um dado problema. Estas definições permitirão enunciar o Teorema de Pólya de uma forma elegante e precisa. Os resultados e definições apresentadas foram baseados no material de Aigner [1].

5.1 Pesos e inventário de padrões

Definição 5.1. *Seja R um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de adição e multiplicação em R e denotaremos por $+$ e \cdot . Assim,*

$$\begin{aligned} + : R \times R &\rightarrow R & \text{e} & \quad \cdot : R \times R \rightarrow R \\ (a, b) &\mapsto a + b & (a, b) &\mapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Diremos que $(R, +, \cdot)$ é um anel se as seguintes propriedades forem verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in R$.

(i) Associatividade da adição: $(a+b)+c = a+(b+c)$

(ii) Elemento neutro da adição: Existe $0 \in R$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

(iii) Comutatividade da adição: $a + b = b + a$.

(iv) Elemento inverso da adição: Para todo $x \in R$, existe um $y \in R$ denotado por $y = -x$, tal que $x + y = y + x = 0$.

(v) Associatividade da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(vi) Distributividade à esquerda e a direita: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Se $(R, +, \cdot)$ satisfaz ainda a propriedade:

(vii) Comutatividade da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$.

dizemos que $(R, +, \cdot)$ é um anel comutativo. Por simplicidade, nos referiremos ao anel $(R, +, \cdot)$ simplesmente por R , desde que não haja ambiguidade.

Definição 5.2. Uma função peso ω no conjunto C é qualquer função $\omega : C \rightarrow R$, onde R é um anel comutativo contendo os racionais.

Exemplo 5.1. Como exemplos de anéis comutativos contendo os racionais, temos o conjunto dos racionais, dos reais, dos complexos e dos números algébricos com as respectivas operações usuais de adição e multiplicação. Um exemplo menos trivial é o conjunto $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } i^2 = -1\}$ com as operações usuais é um exemplo de anel comutativo contendo os racionais. ■

Definição 5.3. *Seja X o conjunto das colorações de D em C . Dado $f \in X$, definimos o peso de f por:*

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

Ou seja, o peso de f é o produto dos pesos de todas os elementos coloridos por f .

Proposição 5.1. *Seja G um grupo que age sobre X . Se $f_1, f_2 \in X$ são duas colorações contidas em uma mesma órbita O_f , então $W(f_1) = W(f_2)$.*

Demonstração: *Se $f_1, f_2 \in O_f$, então existe alguma permutação $\alpha \in G$ tal que $f_1 = \alpha \cdot f_2$. Daí*

$$\begin{aligned} W(f_1) &= \prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(\alpha \cdot f_2(d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(f_2 \circ \alpha^{-1}(d)) \\ &= \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)) \\ &= W(f_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 5.4. *Seja X o conjunto das colorações de D em C . O peso de uma órbita O_f , denotado por $W(O_f)$ é igual ao peso de qualquer (e portanto de toda) coloração $f \in O_f$:*

$$W(O_f) = W(f).$$

Exemplo 5.2. *Considere novamente o tabuleiro 2×2 do Exemplo 1.1. Temos que $D = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ é o conjunto das casas dos tabuleiros e $C = \{B, P\}$ é o conjunto das cores. Definimos os pesos das cores preto (P) e branco B como sendo*

$$\omega(B) = b$$

$$\omega(P) = p.$$

Considere a coloração f_{10} do tabuleiro ilustrada pelo tabuleiro C10 da Figura 4.4. Temos que f_{10} é definida por

$$f(\gamma_1) = P$$

$$f(\gamma_2) = B$$

$$f(\gamma_3) = B$$

$$f(\gamma_4) = P.$$

Logo, o peso de f_{10} é dado por

$$\begin{aligned} W(f_{10}) &= \prod_{d \in D} \omega(f(d)) \\ &= \omega(f_{10}(\gamma_1))\omega(f_{10}(\gamma_2))\omega(f_{10}(\gamma_3))\omega(f_{10}(\gamma_4)) \\ &= \omega(P)\omega(B)\omega(B)\omega(P) \\ &= p^2b^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 5.5. O inventário de um conjunto $S \subset X(D;C)$ de colorações sobre a ação de grupo G , com respeito à função peso $\omega : C \rightarrow R$, onde R é um anel comutativo contendo os racionais, é definida por

$$W(S) = \sum_{f \in S} W(f).$$

Definição 5.6. O inventário de padrões do conjunto $X(D;C)$ de colorações sobre a ação de um grupo G , com respeito à função peso $w : C \rightarrow R$, onde R é um anel comutativo contendo os racionais, é definida como a soma dos pesos de todas as órbitas determinadas pela ação de G em X :

$$I_P = \sum_{O \in X/G} W(O) = \sum_{f \in S^*} W(f),$$

onde S^* é o conjunto que contém um representante de cada órbita de X/G .

Exemplo 5.3. Voltando ao Exemplo 5.2, o inventário de X é dado por

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4 = (p + b)^4.$$

O inventário de padrões de X é dado por

$$I_p = \sum_{f \in S^*} W(f) = p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4.$$

Podemos interpretar os termos de I_p da seguinte forma: cada termo do polinômio formal nas variáveis p e q acima representa o número de padrões distintos em que as cores branco e preto aparecem um determinado número de vezes. Por exemplo, o termo $2p^2b^2$ nos diz que existem 2 dois padrões distintos onde foram usadas a cor preta 2 vezes e a cor branca 2 vezes.

Lema 5.1. Seja $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ um conjunto de m cores e defina uma função peso $\omega(C) \rightarrow R$ pondo $\omega(c_i) = \omega_{c_i}$ para todo $i = 1, \dots, m$. Suponha que D seja um conjunto que é particionado como a união disjunta de conjuntos D_1, \dots, D_r . Seja X o conjunto das colorações de D em C .

Defina $S \subset X$ um subconjunto de colorações de D em C com a seguinte propriedade: para toda coloração $f \in S$, se $i, j \in D_k$ para algum k , então $f(i) = f(j)$. (Ou seja, f é constante em cada um dos D_1, \dots, D_r). Então, o inventário de S é dado por

$$W(S) = \prod_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^{|D_k|} \right). \quad (5.1)$$

Demonstração: Note que se nós escolhermos um termo em cada fator de $W(S)$ e tomarmos o produto destes termos, nós obtemos todos os termos de $W(S)$. Ora, estes termos são da forma

$$\omega_{c_{i_1}}^{|D_1|} \omega_{c_{i_2}}^{|D_2|} \dots \omega_{c_{i_r}}^{|D_r|}, \quad (5.2)$$

onde $c_{i_1}, \dots, c_{i_r} \in C$. Ora, o termo (5.2) é simplesmente o peso da coloração f que atribui a cor c_{i_1} a todos os elementos de D_1 , a cor c_{i_2} a todos os elementos de D_2 ,

e assim por diante. Reciprocamente, toda coloração $f \in S$ tem peso dado por 5.2. Portanto (5.1) fornece a soma dos pesos de todas as colorações f que são constantes em cada D_k , $1 \leq k \leq r$. Mas isto é precisamente a definição do inventário de S . ■

5.2 Teorema da Enumeração de Pólya

Antes de enunciarmos e provarmos o Teorema de Pólya, vamos precisar do seguinte resultado que é uma generalização do Lema de Burnside que leva em consideração o peso das cores.

Lema 5.2. (*Lema de Burnside com pesos*). *Dado um conjunto de elementos D , um conjunto de cores C , um conjunto X de colorações $f : D \rightarrow C$ e um subgrupo $G \subset S_n$ de permutações agindo em X . Denote por $W(F_\alpha)$ a soma dos pesos de todas as colorações f que são fixadas por α , isto é,*

$$W(F_\alpha) = \sum_{f \in F_\alpha} W(f). \quad (5.3)$$

Então, o inventário de padrões de X é dado por

$$I_P = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} W(F_\alpha). \quad (5.4)$$

Demonstração: Para cada $\alpha \in G$, o lado direito de (5.3) é a soma dos pesos de cada coloração f fixada por α . Portanto, cada termo $W(f)$ aparece na soma (5.4) $|S_f|$ vezes. Ainda, sabemos pelo Teorema Orbita-Estabilizador que

$$|S_f| = \frac{|G|}{|O_f|}.$$

Logo, substituindo em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} W(F_\alpha) &= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in X} |S_f| W(f) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_f|} W(f) \\ &= \frac{W(f_1)}{|O_{f_1}|} + \frac{W(f_2)}{|O_{f_2}|} + \dots \end{aligned}$$

Afirmamos que a soma acima é a soma de pesos das órbitas. De fato, dado uma órbita $O_{f_m} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, com $|O_{f_m}| = m$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{W(f_1)}{|O_{f_1}|} + \frac{W(f_2)}{|O_{f_2}|} + \dots + \frac{W(f_m)}{|O_{f_m}|} &= \frac{W(O_{f_m})}{m} + \frac{W(O_{f_m})}{m} + \dots + \frac{W(O_{f_m})}{m} \\ &= W(O_{f_m}). \end{aligned}$$

Portanto, a soma irá contar o peso de cada órbita distinta uma vez, e portanto é a soma dos pesos das órbitas. ■

Note que se $W(f) = 1$ para todo $f \in X$, então o Lema 5.2 se reduz ao Lema 4.4.

Teorema 5.1. (Teorema da Enumeração de Pólya). *Sejam D um conjunto com n elementos, C um conjunto com m cores, X um conjunto de aplicações $f : D \rightarrow C$ e $G \subset S_n$ um subgrupo que age em X . Seja $P_G(\mathbf{x})$ o índice de ciclos de G . Então o inventário de padrões de colorações não-equivalentes de X sobre G usando as cores de C é dado por*

$$I_P = P_G \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}, \sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^2, \dots, \sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^n \right).$$

Demonstração: Pela versão com pesos do lema de Burnside, o inventário de padrões é dado por

$$I_P = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} W(F_\alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} \left[\sum_{f \in F_\alpha} W(f) \right]. \quad (5.5)$$

Assim, precisamos mostrar que

$$\sum_{f \in F_\alpha} W(f) = x_1^{y_1(\alpha)} x_2^{y_2(\alpha)} \dots x_n^{y_n(\alpha)},$$

em que $x_l = \sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^l$ e $y_l(\alpha)$ é o número de ciclos de tamanho l na representação cíclica de α . Fixemos $\alpha \in G$. Suponhamos que α tenha exatamente r ciclos disjuntos ($r \leq n$), digamos, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Defina D_i , para $1 \leq i \leq r$, como sendo um subconjunto de D cujos elementos formam o ciclo α_i . Então D_1, \dots, D_r formam uma partição de D . Note que, dado $f \in X$, sabemos pela Proposição 4.3 que $f \in F_\alpha$ se, e somente se, f é constante em cada D_i , $i = 1, \dots, r$. Pelo Lema 5.1, isto significa que o inventário de F_α é dado

$$W(F_\alpha) = \sum_{f \in F_\alpha} W(f) = \prod_{l=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^{|D_l|} \right). \quad (5.6)$$

Suponhamos agora que a decomposição de α em ciclos disjuntos possui $y_1(\alpha)$ ciclos de comprimento 1, $y_2(\alpha)$ ciclos de comprimento 2, e assim por diante. Então, entre os números $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_r|$ o número 1 ocorre $y_1(\alpha)$ vezes, o número 2 ocorre $y_2(\alpha)$ vezes, e assim por diante. Ou seja, o termo $\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^l$ ocorre uma vez para cada ciclo de tamanho l que α contenha. Assim, podemos reescrever a Equação 5.6 como

$$\sum_{f \in F_\alpha} W(f) = \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i} \right)^{y_1(\alpha)} \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^2 \right)^{y_2(\alpha)} \cdots \left(\sum_{i=1}^m \omega_{c_i}^n \right)^{y_n(\alpha)}$$

o que prova o teorema. ■

CAPÍTULO 6

Aplicações

Nós agora iremos apresentar alguns tipos de exemplos comuns para ilustrar o Teorema da Enumeração de Pólya: cubos, colares e grafos.

6.1 Cubo

O Teorema de Enumeração de Pólya pode ser usado, para resolver problemas que envolvam sólidos geométricos, feito o cubo. De um modo geral, a escolha do grupo G que age sobre o conjunto X das colorações depende do problema a ser resolvido. Por exemplo, as colorações podem ser feitas sobre vértices, arestas, ou faces do cubo. Conforme veremos, isso terá grande influência na escolha do grupo G .

Exemplo 6.1. *Se os vértices de um cubo são coloridos usando duas cores diferentes, quantos cubos diferentes são possíveis, se cada cor deve aparecer pelo menos duas vezes?*

Solução: Seja $D = \{1, 2, \dots, 8\}$ o conjunto dos vértices do cubo e $C = \{c_1, c_2\}$ o con-

junto de cores com os seguintes pesos associados:

$$\omega(c_1) = y \quad \text{e} \quad \omega(c_2) = z.$$

Nosso objetivo inicial é determinar as simetrias rotacionais do cubo. A Figura ?? no Capítulo 2 ilustra os eixos de simetria do cubo. Assim, é possível identificar 24 simetrias rotacionais. São elas:

(i) A identidade:

$$e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$$

(ii) As permutações correspondentes à rotações no eixo AB :

$$\alpha_1 = (1234)(5678) \quad \alpha_2 = (1432)(5876) \quad \alpha_3 = (13)(24)(57)(68)$$

$$\alpha_4 = (1485)(2376) \quad \alpha_5 = (1584)(2673) \quad \alpha_6 = (18)(27)(36)(45)$$

$$\alpha_7 = (1562)(3487) \quad \alpha_8 = (1265)(3784) \quad \alpha_9 = (16)(25)(38)(47)$$

(iii) As permutações correspondentes à rotações no eixo CD :

$$\alpha_{10} = (1)(254)(368)(7) \quad \alpha_{11} = (1)(245)(386)(7)$$

$$\alpha_{12} = (163)(2)(457)(8) \quad \alpha_{13} = (136)(2)(475)(8)$$

$$\alpha_{14} = (168)(274)(3)(5) \quad \alpha_{15} = (186)(247)(3)(5)$$

$$\alpha_{16} = (183)(257)(4)(6) \quad \alpha_{17} = (138)(275)(4)(6).$$

(iv) As permutações correspondentes à rotações no eixo EF :

$$\alpha_{18} = (15)(28)(37)(46) \quad \alpha_{19} = (17)(26)(35)(48)$$

$$\alpha_{20} = (17)(23)(46)(58) \quad \alpha_{21} = (14)(28)(35)(67)$$

$$\alpha_{22} = (17)(28)(34)(56) \quad \alpha_{23} = (12)(35)(46)(78).$$

Assim,

$$G = \{e, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{23}\}.$$

Portanto, o índice de ciclos de G é dado por

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$$

Pelo Teorema de Polya, temos que o inventário de padrões de colorações distintas é dado por:

$$\begin{aligned} I_P &= P_G(y + z, y^2 + z^2, \dots, y^8 + z^8) \\ &= \frac{1}{24}((y + z)^8 + 8(y + z)^2(y^3 + z^3)^2 + 9(y^2 + z^2)^4 + 6(y^4 + z^4)^2) \\ &= y^8 + y^7z + 3y^6z^2 + 3y^5z^3 + 7y^4z^4 + 3y^3z^5 + 3y^2z^6 + yz^7 + z^8. \end{aligned}$$

Os termos destacados são os termos em que os expoentes de y e z são ambos maiores ou iguais a 2. Logo, existem 19 cubos distintos com os vértices coloridos com duas cores onde cada cor é usada pelo menos duas vezes. ■

Exemplo 6.2. *Se as faces de um cubo são coloridos usando duas cores diferentes, quantos cubos diferentes são possíveis, onde cada cor aparece pelo menos duas vezes?*

Solução: Seja $D = \{1, 2, \dots, 6\}$ o conjunto dos vértices do cubo e $C = \{c_1, c_2\}$ o conjunto de cores com os seguintes pesos associados:

$$\omega(c_1) = y \quad \text{e} \quad \omega(c_2) = z.$$

Nosso objetivo inicial é determinar as simetrias rotacionais do cubo. Fazendo uso novamente da Figura ??, vemos que o cubo possui 24 simetrias rotacionais:

(i) A identidade:

$$e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

(ii) As permutações correspondentes à rotações no eixo AB :

$$\alpha_1 = (1234)(5)(6) \quad \alpha_2 = (1432)(5)(6) \quad \alpha_3 = (13)(24)(5)(6)$$

$$\alpha_4 = (1536)(2)(4) \quad \alpha_5 = (1635)(2)(4) \quad \alpha_6 = (13)(2)(4)(56)$$

$$\alpha_7 = (1)(2546)(3) \quad \alpha_8 = (1)(2645)(3) \quad \alpha_9 = (1)(24)(3)(56)$$

(iii) As permutações correspondentes à rotações no eixo CD :

$$\alpha_{10} = (145)(263) \quad \alpha_{11} = (154)(236)$$

$$\alpha_{12} = (152)(364) \quad \alpha_{13} = (125)(346)$$

$$\alpha_{14} = (146)(253) \quad \alpha_{15} = (164)(235)$$

$$\alpha_{16} = (126)(345) \quad \alpha_{17} = (162)(354).$$

(iv) As permutações correspondentes à rotações no eixo EF :

$$\alpha_{18} = (14)(23)(56) \quad \alpha_{19} = (13)(26)(45)$$

$$\alpha_{20} = (12)(34)(56) \quad \alpha_{21} = (16)(24)(35)$$

$$\alpha_{22} = (13)(25)(46) \quad \alpha_{23} = (15)(24)(36).$$

O índice de ciclos então é dado por

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4^1 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

Pelo Teorema de Polya, temos que o inventário de padrões de colorações distintas é dado por:

$$\begin{aligned} I_P &= P_G(y + z, y^2 + z^2, \dots, y^6 + z^6) \\ &= \frac{1}{24}((y + z)^6 + 3(y + z)^2(y^2 + z^2)^2 + 6(y + z)^2(y^4 + z^4) + 6(y^2 + z^2)^3 + 8(y^3 + z^3)^2) \\ &= y^6 + y^5z + 2y^4z^2 + 2y^3z^3 + 2y^2z^4 + yz^5 + z^6. \end{aligned}$$

Examinando os termos cujos expoentes de y e z são ambos maiores ou iguais a dois, vemos que existem 6 cubos diferentes com as faces coloridas com duas cores onde cada cor é aparece pelo menos duas vezes. ■

6.2 Colares

Exemplo 6.3. *Quantos colares de 6 contas com as cores branca, preta e cinza temos com 1 conta branca, 3 contas cinzas e 2 contas pretas?*

Solução: Tome $D = \{1, 2, \dots, 6\}$ e $C = \{b, p, c\}$ com pesos dados por

$$\omega(b) = B, \omega(p) = P, \omega(c) = C.$$

Suponha que desejemos descontar as simetrias rotacionais. Então, $G = C_6$ o grupo cíclico de grau 6. O índice de ciclos de C_6 é dado por

$$\begin{aligned} P_{C_6}(x_1, x_2, \dots, x_6) &= \frac{1}{6} \sum_{d|6} \phi(d) x_d^{6/d} \\ &= \frac{1}{6} (\phi(1)x_1^{6/1} + \phi(2)x_2^{6/2} + \phi(3)x_3^{6/3} + \phi(6)x_6^{6/6}) \\ &= \frac{1}{6} (x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6) \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Polya, o inventário de padrões de colorações distintas é dado por

$$\begin{aligned} I_P &= P_{C_6}(B + P + C, B^2 + P^2 + C^2, \dots, B^6 + P^6 + C^6) \\ &= \frac{1}{6} [(B + P + C)^6 + (B^2 + P^2 + C^2)^3 + 2(B^3 + P^3 + C^3)^2 + 2(B^6 + P^6 + C^6)] \\ &= P^6 + P^5C + 3P^4C^2 + 4P^3C^3 + 3P^2C^4 + PC^5 + C^6 + P^5B + 5P^4CB + 10P^3C^2B \\ &\quad + \mathbf{10P^2C^3B} + 5PC^4B + C^5B + 3P^4B^2 + 10P^3CB^2 + 16P^2C^2B^2 + 10PC^3B^2 \\ &\quad + 3C^4B^2 + 4P^3B^3 + 10P^2CB^3 + 10PC^2B^3 + 4C^3B^3 + 3P^2B^4 + 5PCB^4 \\ &\quad + 3C^2B^4 + PB^5 + CB^5 + B^6. \end{aligned}$$

Então o número de colares de 6 contas com as cores branca, preta e cinza temos com 1 conta branca, 3 contas cinzas e 2 contas pretas, usando apenas simetrias rotacionais é o coeficiente de P^2C^3B , que é 10 como destacado acima.

No caso de querer desconsiderar as simetrias reflexivas, devemos considerar $G = D_6$ o grupo diedral de grau 6. Neste caso, o índice de ciclos de D_6 é dado por

$$\begin{aligned}
 P_{D_6}(x_1, x_2, \dots, x_6) &= \frac{1}{2}(P_{C_6} + R_6) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}(x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6) + \frac{1}{2} [x_2^{6/2} + x_1^2 x_2^{(6-2)/2}] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}(x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6) + \frac{1}{6}(3x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2) \right) \\
 &= \frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 4x_3^3 + 2x_3^3 + 2x_6).
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Polya, o inventário de padrões de colorações distintas é dado por

$$\begin{aligned}
 I_P &= P_{D_6}(B + P + C, B^2 + P^2 + C^2, \dots, B^6 + P^6 + C^6) \\
 &= \frac{1}{12} [(B + P + C)^6 + 3(B + P + C)^2(B^2 + P^2 + C^2)^2 + 4(B^2 + P^2 + C^2)^3 \\
 &\quad + 2(B^3 + P^3 + C^3)^2 + 2(B^6 + P^6 + C^6)] \\
 &= P^6 + P^5C + 3P^4C^2 + 3P^3C^3 + 3P^2C^4 + PC^5 + C^6 + P^5B + 3P^4CB \\
 &\quad + 6P^3C^2B + \mathbf{6P^2C^3B} + 3PC^4B + C^5B + 3P^4B^2 + 6P^3CB^2 + 11P^2C^2B^2 \\
 &\quad + 6PC^3B^2 + 3C^4B^2 + 3P^3B^3 + 6P^2CB^3 + 6PC^2B^3 + 3C^3B^3 + 3P^2B^4 \\
 &\quad + 3PCB^4 + 3C^2B^4 + PB^5 + CB^5 + B^6.
 \end{aligned}$$

Então, o número de colares de 6 contas com as cores branca, preta e cinza temos com 1 conta branca, 3 contas cinzas e 2 contas pretas, usando simetrias rotacionais e reflexivas é o coeficiente de P^2C^3B , que é 6 como destacado acima. Note que usando o Teorema de Pólya para calcular o índice de ciclos não resolvemos apenas o problema original, mas de todos os colares de 6 contas com 3 cores. Também se definimos todos os pesos igual a 1, então temos que o número total de colares distintos é 92, que é a soma dos coeficientes de I_P . ■

6.3 Grafos

O Teorema Fundamental de Pólya pode ser usado para contar o número de grafos simples distintos com n vértices. Para ilustrar melhor a generalização serão contados explicitamente os casos com três, quatro e seis vértices.

Definição 6.1. *Um grafo simples G é um par ordenado (V, E) que consiste de um conjunto não-vazio finito de vértices $V = V(G)$ e um conjunto de arestas $E = E(G)$, que são pares não-ordenados de elementos de V .*

Tipicamente, escreveremos $V = \{1, 2, \dots, n\}$ para representar um grafo com n vértices. Com o intuito de utilizar o Teorema de Pólya a este tipo de problema, precisamos ser capazes de representar um grafo através de uma coloração.

Definição 6.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que dois vértices $i, j \in V$ são adjacentes se $\{i, j\} \in E$.*

Definição 6.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices. O conjunto de todas as arestas possíveis de G será denotado por E_n .*

Note que

$$|E_n| = \binom{n}{2},$$

logo existem $2^{|E_n|}$ grafos possíveis.

Seja G um grafo com n vértices. Com estas definições, podemos olhar G como uma coloração $f : E_n \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$f(\{i, j\}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ estiverem ligados por uma aresta.} \\ 0 & \text{se } i \text{ e } j \text{ não estiverem ligados por uma aresta.} \end{cases}$$

Como antes, denotaremos o conjunto de todos os grafos de E_n em C por $X = X(E_n; C)$. Precisamos agora definir uma função peso ω no conjunto de cores $C = \{0, 1\}$. Fazemos

isso pondo

$$\omega(0) = 1$$

$$\omega(1) = x.$$

Note que deste modo, um grafo f com k arestas terá peso $\omega(f) = x^k$.

Definição 6.4. *Sejam G e H dois grafos simples. Um isomorfismo entre os grafos G e H é qualquer bijeção $\pi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que dois vértices u e v são adjacentes em G se, e somente se, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H . Dizemos também que os grafos G e H são isomorfos e escrevemos $G \simeq H$.*

Se $G = H$, dizemos que π é um automorfismo de G .

Voltando a representar grafos por colorações, dois grafos f_1 e f_2 em E_n serão isomorfos se para todo $\{i, j\} \in E_n$

$$f_1(\{i, j\}) = f_2(\{\pi(i), \pi(j)\}).$$

Seja G um grafo de n vértices. Precisamos agora definir um grupo agindo sobre o conjunto de grafos X . Para isso, considere o grupo S_n das permutações dos vértices do grafo G . Cada $\pi \in S_n$ induz uma aplicação $\pi^* : E_n \rightarrow E_n$ definida por

$$\pi^*(\{i, j\}) = \{\pi(i), \pi(j)\}.$$

Segue do fato de que π é uma bijeção que π^* também será uma bijeção. O conjunto de todas as aplicações π^* obtidas desta forma será denotado por S_n^* . Temos que S_n^* é um grupo e a aplicação que leva π em π^* é um isomorfismo entre S_n e S_n^* . Logo, $|S_n^*|$ tem a mesma ordem que S_n . Porém, S_n^* será um subgrupo de S_m , onde $m = |E_n|$.

Assim, dois grafos f_1 e f_2 serão isomorfos se

$$f_1(\{i, j\}) = f_2(\pi^*(\{i, j\})).$$

Ou seja, $f_1 = f_2 \circ \pi^*$, ou equivalentemente, $f_2 = f_1 \circ \pi^{*-1}$. Assim, o grupo que age sobre o conjunto dos grafos $X(E_n; C)$ será o grupo S_n^* . Portanto, grafos distintos em X serão representados por classes de equivalência distintas sobre a ação de S_n^* , o que nos permite então contar os grafos distintos.

Exemplo 6.4. *Quantos são os grafos simples distintos com 3 vértices?*

Solução: Temos que $V = \{1, 2, 3\}$ e o grupo que age sobre V é o grupo

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (132), (1)(23), (13)(2)\}.$$

Precisamos o grupo de permutações S_3^* que age em

$$E_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Por exemplo, considere a permutação $\pi = (12)(3)$. Então,

$$\pi(1) = 2$$

$$\pi(2) = 1$$

$$\pi(3) = 3.$$

A permutação induzida $\pi^* : E_3 \rightarrow E_3$ em S_3^* é dada por

$$\pi^*(\{1, 2\}) = \{\pi(1), \pi(2)\} = \{1, 2\}$$

$$\pi^*(\{1, 3\}) = \{\pi(1), \pi(3)\} = \{2, 3\}$$

$$\pi^*(\{2, 3\}) = \{\pi(2), \pi(3)\} = \{1, 3\}.$$

Expressando π^* como produto de ciclos, temos que $\pi^* = (12)(13\ 23)$. A Tabela 6.1 abaixo fornece para cada permutação $\pi \in S_3$ a permutação induzida $\pi^* \in S_3^*$ e os seus tipos cíclicos correspondentes. Assim, o índice de ciclos de S_3^* é obtido como

$$P_{S_3^*}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3).$$

π	$\text{tc}(\pi)$	π^*	$\text{tc}(\pi^*)$
(1)(2)(3)	x_1^3	(12)(13)(23)	x_1^3
(123)	x_3	(12 23 13)	x_3
(132)	x_3	(12 13 23)	x_3
(1)(23)	x_1x_2	(12 13)(23)	x_1x_2
(13)(2)	x_1x_2	(12 23)(13)	x_1x_2
(12)(3)	x_1x_2	(12)(13 23)	x_1x_2

Tabela 6.1 Comparação entre S_3 e S_3^* .

Note que $P_{S_3}(\mathbf{x}) = P_{S_3^*}(\mathbf{x})$. Portanto, pelo Teorema de Polya, o inventário de padrões de grafos distintos é dado por

$$\begin{aligned}
 I_P &= P_{S_3^*}(1+x, 1+x^2, 1+x^3) \\
 &= \frac{1}{6}((1+x)^3 + 3(1+x)(1+x^2) + 2(1+x^3)) \\
 &= x^3 + x^2 + x + 1,
 \end{aligned}$$

o que mostra que existe, a menos de simetria, um grafo com nenhuma aresta, um grafo com uma aresta, um grafo com duas arestas e um grafo com 3 arestas. Estes grafos estão representados na Figura 6.1. ■



Figura 6.1 Classes de grafos com 3 vértices.

O Exemplo acima mostra o caso especial em que S_n e S_n^* tem o mesmo índice de ciclos. Porém, na prática, isto raramente irá ocorrer. Vale a pena observar, no entanto, que se $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ são tais que $\text{tc}(\pi_1) = \text{tc}(\pi_2)$, então vale também $\text{tc}(\pi_1^*) = \text{tc}(\pi_2^*)$. Isso significa que para determinarmos o índice de ciclos de S_n^* , basta tomar um representante de cada tipo cíclico e calcular o tipo cíclico da permutação induzida correspondente.

Exemplo 6.5. Quantos são os grafos simples distintos com 4 vértices?

Temos que $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e S_4 é o grupo de simetrias que age sobre V . Precisamos determinar o índice de ciclos de S_4^* , o grupo que age sobre

$$E_4 = \{a, b, c, d, e, f\},$$

onde

$$a = \{1, 2\}, b = \{1, 3\}, c = \{1, 4\}, d = \{2, 3\}, e = \{2, 4\} \text{ e } f = \{3, 4\}.$$

Note que S_4^* será um subgrupo de S_6 . Sabemos que o índice de ciclos de S_4 é dado por

$$P_{S_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4).$$

A Tabela 6.2 fornece para cada representante $\pi \in S_4$ de um tipo cíclico, a permutação induzida $\pi^* \in S_4^*$ e os seus tipos cíclicos correspondentes. Segue que o índice de ciclos

π	$\text{tc}(\pi)$	π^*	$\text{tc}(\pi^*)$	número de permutações
(1)(2)(3)(4)	x_1^4	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	x_1^6	1
(12)(3)(4)	$x_1^2x_2$	$(a)(bd)(ce)(f)$	$x_1^2x_2^2$	6
(123)(4)	x_1x_3	$(adb)(cef)$	x_3^2	8
(13)(24)	x_2^2	$(af)(b)(cd)(e)$	$x_1^2x_2^2$	3
(1234)	x_4	$(adfc)(be)$	x_2x_4	6

Tabela 6.2 Comparação entre S_4 e S_4^* .

de S_4^* é:

$$P_{S_4^*}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^1x_4).$$

E portanto o inventário padrão é:

$$\begin{aligned}
 I_P &= P_{S_4^*}(1+x, \dots, 1+x^6) \\
 &= \frac{1}{24}((1+x)^6 + 6(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 \\
 &\quad + 6(1+x^2)(1+x^4)) \\
 &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6,
 \end{aligned}$$

o que mostra que existem 11 grafos simples distintos com 4 vértices, sendo, a menos de simetria, um grafo com 0 arestas, um grafo com 1 aresta, dois grafos com 2 arestas, três grafos com 3 arestas, dois grafos com 4 arestas, um grafo com 5 arestas e um grafo com 6 arestas. Estes estão representados na Figura 6.2. ■

n° de arestas	n° de grafos	
0	1	
1	1	
2	2	
3	3	
4	2	
5	1	
6	1	

Figura 6.2 Classes de grafos com 4 vértices.

Exemplo 6.6. *Quantos são os grafos simples distintos com 6 vértices?*

Solução: Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto de vértices sobre a ação de S_6 , o grupo de simetrias de grau 6. Precisamos determinar o índice de ciclos de S_6^* , o grupo que age sobre

$$E_6 = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}.$$

Aqui, por uma questão de simplicidade, estamos escrevendo ij no lugar da aresta $\{i, j\}$. A Tabela

$tc(\pi)$ em S_6	número de permutações	$tc(\pi^*)$
x_1^6	1	x_1^{15}
$x_1^4 x_2^1$	15	$x_1^7 x_2^4$
$x_1^3 x_3^1$	40	$x_1^3 x_3^4$
$x_1^2 x_2^2$	45	$x_1^3 x_2^6$
$x_1^2 x_4^1$	90	$x_1^1 x_2^1 x_3^3$
$x_1^1 x_2^1 x_3^1$	120	$x_1^1 x_2^1 x_3^2 x_6^1$
$x_1^1 x_5^1$	144	x_5^3
x_2^3	15	$x_1^3 x_2^6$
$x_2^1 x_4^1$	90	$x_1^1 x_2^1 x_4^3$
x_3^2	40	x_3^5
x_6^1	120	$x_6^2 x_3^1$

Tabela 6.3 Comparação entre S_6 e S_6^*

Segue que o índice de ciclos de S_6^* é:

$$P_{S_6^*}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{720}(x_1^{15} + 15x_1^7 x_2^4 + 40x_1^3 x_3^4 + 45x_1^3 x_2^6 + 90x_1 x_2 x_4^3 + 120x_1 x_2 x_3^2 x_6 + 144x_5^3 + 15x_1^3 x_2^6 + 90x_1 x_2 x_4^3 + 40x_3^5 + 120x_6^2 x_3).$$

Portanto o inventário padrão é dado por

$$\begin{aligned} I_P &= P_{S_6^*}(1+x, \dots, 1+x^6) \\ &= \frac{1}{720}((1+x)^{15} + 15(1+x)^7(1+x^2)^4 + 40(1+x)^3(1+x^3)^4 + 45(1+x)^3(1+x^2)^6 \\ &\quad + 90(1+x)(1+x^2)(1+x^4)^3 + 120(1+x)(1+x^2)(1+x^3)^2(1+x^6) \\ &\quad + 144(1+x^5)^3 + 15(1+x)^3(1+x^2)^6 + 90(1+x)(1+x^2)(1+x^4)^3 \\ &\quad + 40(1+x^3)^5 + 120(1+x^6)^2(1+x^3)) \\ &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 9x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 24x^7 + 24x^8 + 21x^9 + 15x^{10} + 9x^{11} \\ &\quad + 5x^{12} + 2x^{13} + x^{14} + x^{15}. \end{aligned}$$

Existem 156 grafos simples distintos com 6 vértices. ■

A Tabela 6.4 fornece uma comparação entre o número de grafos simples rotulados e o número de grafos simples distintos a medida em que o número de vértices aumenta.

Número de vértices	Número de grafos rotulados	Número de grafos distintos
1	1	1
2	2	2
3	8	4
4	64	11
5	1.024	34
6	32.768	156

Tabela 6.4 Comparação entre o número de grafos rotulados e o número de grafos distintos para grafos com diferentes números de vértices.

6.4 Grafos bipartidos

Nesta seção, iremos utilizar o Teorema de Pólya para contar o número de grafos bipartidos distintos.

Definição 6.5. *Um grafo bipartido B é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos M e N tais que toda aresta liga um vértice de M a um vértice de N . Escreveremos $B = (M, N, E)$ para denotar o grafo bipartido cuja partição do conjunto dos vértices tem as partes M e N e cujo conjunto das arestas é E .*

Para calcular o número de gráficos bipartidos, precisamos do conceito de produto de grupos de permutação.

Proposição 6.1. *Suponha que $(G, *)$ e (H, \bullet) sejam grupos e*

$$G \times H = \{(g, h) : g \in G \text{ e } h \in H\},$$

Vamos definir em $(G \times H)$ uma operação $\star : G \times H \rightarrow G \times H$ pondo

$$(g, h) \star (g', h') = (g * g', h \bullet h'), \quad \forall g, g' \in G, \quad \forall h, h' \in H.$$

Então $(G \times H, \star)$ é um grupo.

Demonstração: Será omitida aqui. Ver, por exemplo, Garcia und Lequain [5] para uma prova deste resultado. ■

Dado dois conjuntos disjuntos M e N com $|M| = m$, $|N| = n$ e grupos de permutação G, H agindo sobre N e M , respectivamente, definimos uma aplicação do grupo $G \times H$ em $M \times N$ pondo

$$(\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \beta \cdot y), \quad \forall (\alpha, \beta) \in G \times H, \quad \forall (x, y) \in M \times N.$$

É fácil ver que esta aplicação cumpre as propriedades (i) e (ii) da Definição 4.2 e é portanto uma ação do grupo $G \times H$ sobre $M \times N$.

Com estas definições, o índice de ciclos de $G \times H$ é dado por [2]

$$P_{G \times H}(x_1, \dots, x_{mn}) = \frac{1}{|G||H|} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n x_{mmc(k,l)}^{\text{mdc}(k,l)y_l(\alpha)y_k(\beta)}.$$

Seja agora $B = (M, N, E)$ um grafo bipartido com $|M| = m$ e $|N| = n$, $m \neq n$. Por simplicidade, escreveremos $B_{m,n}$. Suponha que S_m age em M e S_n age em N . Então $S_m \times S_n$ age em $M \times N$. Seja X o conjunto das colorações $f : M \times N \rightarrow C$, com $C = \{0, 1\}$ definidas para todo $(i, j) \in M \times N$ por

$$f(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \text{ estão conectados} \\ 0 & \text{se } (i, j) \text{ não estão conectados.} \end{cases}$$

Então, pelo Teorema de Pólya, o inventário de grafo bipartidos simples distintos da forma $B_{m,n}$, com $m \neq n$, é dado por

$$I_P = P_{G \times H}(1 + x, \dots, 1 + x^{mn}).$$

Exemplo 6.7. Quantos grafos bipartidos simples distintos da forma $B_{2,3}$ existem?

Temos que $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3\}$ sobre a ação dos grupos S_2 e S_3 , respectivamente. Primeiramente vamos calcular

$$P_{S_2 \times S_3}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{|G||H|} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{k=1}^2 \prod_{l=1}^3 x_{mmc(k,l)}^{\text{mdc}(k,l)y_l(\alpha)y_k(\beta)}.$$

(k,l)	$\text{mmc}(k,l)$	$\text{mdc}(k,l)$
(1,1)	1	1
(1,2)	2	1
(1,3)	3	1
(1,4)	4	1
(1,5)	5	1
(1,6)	6	1
(2,1)	2	1
(2,2)	2	2
(2,3)	6	1
(2,4)	4	2
(2,5)	10	1
(2,6)	6	2

Tabela 6.5 Valores do mmc e do mdc para diversos pares (k, l) .

A Tabela 6.5 fornece Logo,

$$P_{S_2 \times S_3}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{12}[x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6].$$

E o inventário de padrões de grafos bipartidos é dado por

$$\begin{aligned} I_P &= P_{S_2 \times S_3}(1+x, \dots, 1+x^6) \\ &= \frac{1}{12}[(1+x)^6 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 + 4(1+x^2)^3 + 2(1+x^3)^2 + 2(1+x^6)] \\ &= 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + x^5 + x^6. \end{aligned}$$

Os grafos bipartidos distintos da forma $B_{2,3}$ estão representados na Figura 6.3. ■

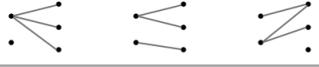
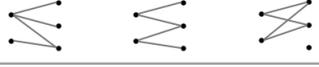
n° de arestas	n° de grafos	
0	1	
1	1	
2	3	
3	3	
4	3	
5	1	
6	1	

Figura 6.3 Classes de grafos bipartidos da forma $B_{2,3}$.

CAPÍTULO 7

Considerações finais

Esta dissertação de mestrado teve como objetivo introduzir os conceitos necessários para o entendimento e uso do Teorema da Enumeração de Polya.

Para tal, foi apresentada uma motivação para o estudo e foram dadas algumas definições básicas. Em seguida foram discutidos alguns resultados importantes sobre Teoria dos Grupos, tais com Teorema de Lagrange e o Teorema de Cayley. Tomando a definição básica de um grupo e suas propriedades da álgebra abstrata como uma fundação para a nossa teoria, definimos permutações e descrevemos suas propriedades.

Os grupos foram usados para descontar simetrias ao contar objetos matemáticos. Foram introduzidos conjuntos importantes como o fixador, estabilizador e órbita, que são fundamentais para o entendimento do Lema de Burnside e resultados relacionados.

Os conceitos de índice de ciclos de um grupo e inventário de padrões foram introduzidos para contar e obter informações sobre as classes de equivalência em um determinado problema. O Teorema de Pólya foi enunciado e demonstrado.

Para finalizar, várias aplicações foram dadas ilustrando como tais conceitos podem

ser utilizados na resolução de problemas em diversas áreas da Matemática e de Ciências da Computação.

Referências

- [1] AIGNER, Martin: *Discrete Mathematics*. American Mathematical Society, 2004
- [2] AIGNER, Martin: *A course in Enumeration*. Berlin : Springer, 2007
- [3] BURNSIDE, William: *Theory of groups of finite order*. Cambridge University Press, 1897
- [4] FROBENIUS, Ferdinand G.: Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. In: *Crelle* CI (1887), S. 288
- [5] GARCIA, Arnaldo ; LEQUAIN, Yves: *Elementos de Algebra*. Rio de Janeiro : IMPA, 2002
- [6] GONÇALVES, Adilson: *Introdução a Álgebra*. Rio de Janeiro : IMPA, 1999
- [7] HARARY, Frank ; PALMER, Edgar M.: *Graphical Enumeration*. New York : Academic Press, 1973