

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

PRISCILA FEITOSA DE SÁ FERREIRA

**ESTACAS DE SEÇÃO CIRCULAR SEMIENTERRADAS SUBMETIDAS
A CARGAS LATERAIS**

Recife

2017

PRISCILA FEITOSA DE SÁ FERREIRA

**ESTACAS DE SEÇÃO CIRCULAR SEMIENTERRADAS SUBMETIDAS
A CARGAS LATERAIS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração:
Engenharia Estrutural

Orientador:
Prof. Dr. Bernardo Horowitz

Recife
2017

PRISCILA FEITOSA DE SÁ FERREIRA

**ESTACAS DE SEÇÃO CIRCULAR SEMIENTERRADAS SUBMETIDAS
A CARGAS LATERAIS**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Aprovado em: 24/04/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bernardo Horowitz (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo de Araújo Régis (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por me proporcionar saúde e força para seguir sempre em frente e buscar meus objetivos.

Aos meus pais, Aparecido e Lúcia, pelo apoio incondicional e pelo constante incentivo durante toda a minha vida.

Ao meu orientador, prof. Bernardo Horowitz, pelo apoio e pelos conhecimentos transmitidos durante toda a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos e, em especial, meu namorado, Alexandro, pelo companheirismo e carinho em todos os momentos que precisei.

A toda a equipe de professores e funcionários da Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFPE, por me proporcionarem esta experiência acadêmica.

A todos aqueles que, de alguma forma, me incentivaram e contribuíram para que este trabalho fosse feito com dedicação e esforço.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo propor quatro modelos de análise diferentes para o dimensionamento de estacas semienterradas de seção circular submetidas a cargas laterais com a consideração da não-linearidade física do material (NLF) e da não-linearidade geométrica da estrutura (NLG). Estes modelos, chamados de Níveis de Aproximação (NdA), estão organizados em ordem crescente de precisão da análise, partindo de um nível inicial, com maiores simplificações, até um nível final, com uma modelagem mais realista. No NdA I, a estaca semienterrada é tratada como uma coluna engastada na base e livre na ponta, com base na Técnica do Engastamento Virtual. O cálculo dos esforços resistentes é feito com base no método do pilar-padrão com curvatura aproximada, proposto pela norma brasileira. No NdA II, um programa comercial de análise tridimensional de estruturas é utilizado. Neste programa, o solo é representado de maneira discreta através de uma série de molas de comportamento elástico e linear (baseadas no Modelo de Winkler). A NLF é tratada de maneira aproximada através de um coeficiente, aplicado ao momento de inércia bruto, que simula a diminuição da rigidez do concreto. A NLG é tratada internamente pelo programa através do processo iterativo P-delta. No NdA III, é utilizado um programa elaborado neste trabalho que considera as não-linearidades e a interação solo-estrutura através da equação da viga sobre base elástica, cuja solução é dada a partir do Método das Diferenças Finitas. A NLF, neste modelo, foi considerada através de diagramas momento-curvatura. A NLG e a interação solo-estrutura (Modelo de Winkler) são consideradas diretamente na formulação da equação diferencial. Por fim, o NdA IV utiliza um programa comercial de análise não-linear de estruturas de pontes através de elementos finitos. A NLF é tratada pela integração das curvas de tensão-deformação e a NLG é modelada usando momentos P-delta. A consideração da interação solo-estrutura, neste modelo, é feita através de modelos de curvas p-y. Estes quatro modelos foram aplicados a dois exemplos distintos: um considerando apenas um pilar engastado na base e livre no topo (livre da interação solo-estrutura) e outro considerando uma estaca semienterrada em solo arenoso. Os resultados obtidos pelos quatro métodos foram bastante satisfatórios e se mostraram coerentes entre si, apresentando-se dentro do esperado para cada grau de refinamento da análise.

Palavras-chave: Estacas. Seção circular. Não-linearidade física. Não-linearidade geométrica. Interação solo-estrutura. Método das Diferenças Finitas.

ABSTRACT

The present work proposes four different analysis models for the design of partly buried piles of circular section subjected to lateral loads with consideration of the physical nonlinearity of the material (PNL) and the geometric nonlinearity of the structure (GNL). These models, called Levels of Approximation (LoA), are organized in increasing order of accuracy, starting from an initial level, with greater simplifications, to a final level, which is more realistic. In LoA I, the partly buried pile is treated as a column fixed at the base and free at the top, based on the Virtual Clamping Technique. Strength computation is based on the standard column method with approximate curvature, proposed by the Brazilian Code. In LoA II, a commercial three-dimensional structure analysis program is used. In this program, the soil is represented discretely through a series of elastic and linear springs (based on the Winkler Model). The PNL is approximately treated by a factor, applied to the gross moment of inertia, which simulates the decrease of rigidity of the reinforced concrete due to cracking and nonlinear constitutive properties. The GNL is internally handled by the program through the iterative P-delta process. The third proposed LoA is a program developed in this work that considers the non-linearities and the soil-structure interaction through the equation of the beam on elastic foundation. The equation is solved numerically, with the application of the Finite Differences Method. The PNL, in this model, was considered through moment-curvature diagrams computed internally for the section under analysis, which were used to determine the stiffness of the pile as a function of the lateral displacement. The GNL and the soil-structure interaction (also by Winkler Model) are considered directly in the equation. Finally, LoA IV uses a commercial program of nonlinear analysis of bridge structures through finite elements. The PNL is treated by integrating stress-strain curves into the cross-section analyzed and the GNL is modeled using P-delta moments. Consideration of the soil-structure interaction in this model is made through p-y curves models. These four models were applied to two distinct examples: one considering only one column fixed at the base and free at the top (free of soil-structure interaction) and another one considering a partly buried pile in sand. The results obtained by the four methods were very satisfactory and were shown to be coherent with each other, in line with the expected for each degree of refinement of the analysis.

Keywords: Piles. Circular cross-section. Physical nonlinearity. Geometric nonlinearity. Soil-structure interaction. Finite Differences Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Exemplo de diagrama tensão-deformação para o aço e para o concreto (ĆURIĆ; RADIĆ; FRANETOVIĆ, 2016)	19
Figura 2.1 – Representação do solo pelo modelo contínuo (VELLOSO; LOPES, 2011)	24
Figura 2.2 – Representação do solo pelo modelo de Winkler (VELLOSO; LOPES, 2011)	25
Figura 2.3 – (a) Cargas na estaca; (b) Discretização de Winkler (KHOURI, 2001) ..	25
Figura 2.4 – Resposta dos dois modelos para uma rigidez relativa infinita (VELLOSO; LOPES, 2011)	26
Figura 2.5 – Elemento infinitesimal de uma viga sobre base elástica carregada axialmente (HETÉNYI, 1946)	29
Figura 2.6 – Discretização da estaca pelo Método das Diferenças Finitas (δ = espaçamento entre os nós)	32
Figura 2.7 – Esforço cortante no elemento infinitesimal de viga (HETÉNYI, 1946) - Adaptado	32
Figura 2.8 – (PFEIL, 1983) Tubulão ou estaca de grande comprimento, parcialmente enterrado: a) deformação transversal, com diagrama de cargas transversais q , resultante das pressões laterais do terreno; b) situação ideal para análise, considerando-se a estaca engastada na profundidade de $1,8L_0$ e abstraindo-se a contenção lateral do terreno.	35
Figura 2.9 – Esquema da discretização do solo através de molas para o SAP2000 ..	37
Figura 2.10 – Modelo de curvas p-y para uma estaca submetida a cargas laterais (REESE; VAN IMPE, 2001)	39
Figura 2.11 – Distribuição das pressões unitárias atuantes na estaca: a) antes do deslocamento; b) depois do deslocamento. (REESE; VAN IMPE, 2001 – Adaptado)	40
Figura 2.12 – Curva p-y típica (REESE; VAN IMPE, 2001 - Adaptado)	40
Figura 2.13 – Modelo de curvas p-y para areias (REESE; VAN IMPE, 2007)	42
Figura 2.14 – Valores dos coeficientes A e B (REESE; VAN IMPE, 2007) – Adaptado	44
Figura 2.15 – Modelo de curva p-y para argila mole com carregamento estático (REESE; VAN IMPE, 2007)	46
Figura 3.1 – Barra submetida à flexão (HIBBELER, 2012)	49
Figura 3.2 – Diagrama tensão-deformação para o concreto (NBR-6118/2014) – Adaptado	50

Figura 3.3 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas (NBR-6118/2014)	51
Figura 3.4 – Viga sob flexão pura	52
Figura 3.5 – Distribuição de tensões e deformações numa seção de material elástico não-linear	53
Figura 3.6 – Exemplo de diagrama de interação	54
Figura 3.7 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal (NBR-6118/2014)	55
Figura 3.8 – Variáveis da expressão da equação (3.8) (CAVALCANTI; HOROWITZ, 2008)	57
Figura 3.9 – Exemplo de curva momento-curvatura	57
Figura 3.10 – Curva momento-curvatura idealizada para uma seção de concreto armado (KWAK; KIM, 2002) – Adaptado	58
Figura 3.11 – Relação momento-curvatura (NBR-6118/2014)	59
Figura 4.1 – Fluxograma do programa auxiliar	63
Figura 4.2 – Fluxograma do programa principal	65
Figura 5.1 – Exemplo 1	67
Figura 5.2 – Entrada de dados no programa	69
Figura 5.3 – Valores inseridos no programa para o material concreto	75
Figura 5.4 – Edição da seção transversal	76
Figura 5.5 - Propriedades da seção transversal	76
Figura 5.6 - Alteração do coeficiente do momento de inércia	77
Figura 5.7 - Divisão do pilar em 4 barras	78
Figura 5.8 - Criação do carregamento q1	78
Figura 5.9 - Valores do exemplo 1 inseridos para o carregamento q1	79
Figura 5.10 - Estaca com as cargas aplicadas	79
Figura 5.11 - Definição da análise não-linear P-Delta	80
Figura 5.12 - Diagrama de momentos fletores resultante (SAP2000)	81
Figura 5.13 - Deslocamento lateral resultante (SAP2000)	81
Figura 5.14 - Entrada dos dados do problema no programa Calc_MomCurv_Circular.xmcd	84
Figura 5.15 - Organização das barras informada pelo programa	84
Figura 5.16 - Diagrama de interação resultante para o exemplo 1	85
Figura 5.17 - Diagrama momento-curvatura resultante para o exemplo 1	85

Figura 5.18 - Exportação dos dados do diagrama momento-curvatura	86
Figura 5.19 - Leitura dos dados do diagrama momento-curvatura pelo programa DeslocLat_EX01.xmcd	87
Figura 5.20 - Entrada de dados no programa principal	88
Figura 5.21 - Diagrama de momentos fletores resultante para o exemplo 1	89
Figura 5.22 - Deslocamento lateral resultante para o exemplo 1	89
Figura 5.23 - Valores resultantes para o exemplo 1	90
Figura 5.24 - Escolha do tipo do problema	91
Figura 5.25 - Janelas principais do programa	92
Figura 5.26 - Seleção dos dados da estrutura	92
Figura 5.27 - Propriedades da seção transversal (dados do exemplo padrão do programa)	93
Figura 5.28 - Dados da seção transversal inseridos no programa	94
Figura 5.29 - Mensagem de alerta	94
Figura 5.30 - Dados da seção transversal	95
Figura 5.31 - Dados dos materiais informados ao programa	96
Figura 5.32 - Valores das cargas aplicadas inseridos no programa	97
Figura 5.33 - Rigidez das molas no topo da coluna	97
Figura 5.34 - Rigidez das molas na base da coluna	98
Figura 5.35 - Visualização da estaca no programa	98
Figura 5.36 - Botão "Pile Results"	99
Figura 5.37 - Janela inicial dos resultados	99
Figura 5.38 - Resultados do exemplo 1	100
Figura 5.39 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa	100
Figura 5.40 - Diagrama dos deslocamentos laterais resultantes	101
Figura 5.41 - Escolha da análise linear no FB-MultiPier	102
Figura 6.1 - Exemplo 2 (estaca semienterrada)	103
Figura 6.2 - Entrada de dados no programa (caso com apenas uma camada de areia compacta)	105
Figura 6.3 - Estaca representada no SAP2000	109
Figura 6.4 - Deslocamento lateral resultante (SAP2000)	110
Figura 6.5 - Diagrama de momento fletor resultante (SAP2000)	111

Figura 6.6 - Entrada de dados no programa Calc_MomCurv_Circular.xmcd (exemplo 2)	113
Figura 6.7 - Disposição da armação (exemplo 2)	114
Figura 6.8 - Diagrama de interação resultante (exemplo 2)	114
Figura 6.9 - Diagrama momento-curvatura resultante (exemplo 2)	115
Figura 6.10 - Entrada de dados no programa principal (exemplo 2, caso 1)	116
Figura 6.11 - Diagrama de momentos fletores resultante para o exemplo 2 (1 camada)	117
Figura 6.12 - Deslocamento lateral resultante para o exemplo 2 (1 camada)	117
Figura 6.13 - Valores resultantes para o exemplo 2 (1 camada)	118
Figura 6.14 - Valores resultantes para o exemplo 2 (2 camadas)	118
Figura 6.15 - Escolha do tipo do problema (exemplo 2)	119
Figura 6.16 - Dados da seção transversal (exemplo 2)	120
Figura 6.17 - Dados da camada de solo (camada de areia compacta, caso 2)	121
Figura 6.18 - Visualização da estaca com as camadas de solo (exemplo 2, caso 2)	122
Figura 6.19 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa (caso com 1 camada)	123
Figura 6.20 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa (caso com 2 camadas)	123
Figura 6.21 - Diagrama dos deslocamentos laterais gerado pelo programa (caso com 1 camada)	124
Figura 6.22 - Diagrama dos deslocamentos laterais gerado pelo programa (caso com 2 camadas)	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Valores indicativos de k_h referido à largura total da estaca (PFEIL, 1983) – Adaptado	28
Tabela 2.2 - Modelos de curvas p-y apresentadas no programa FB-Multiplier (JUSTINIANO, 2017)	42
Tabela 2.3 - Valores representativos de k_{py} para areias submersas (REESE; VAN IMPE, 2007)	45
Tabela 2.4 - Valores representativos de k_{py} para areias acima do nível da água (carregamentos estáticos e cíclicos) (REESE; VAN IMPE, 2007)	45
Tabela 2.5 - Valores representativos de ϵ_{50} para argilas normalmente consolidadas (REESE; VAN IMPE, 2007)	45
Tabela 3.1 - Correspondência entre os domínios do ELU e D (CAVALCANTI; HOROWITZ, 2008)	56
Tabela 5.1 - Resultados do Exemplo 1	101
Tabela 5.2 - Comparação entre análises (exemplo 1)	102
Tabela 6.1 - Valores de coeficiente de mola	109
Tabela 6.2 - Valores de referência para solos não-coesivos (BSI, 2013)	121
Tabela 6.3 - Resultados do exemplo 2 (1 camada)	125
Tabela 6.4 - Resultados do exemplo 2 (2 camadas)	125
Tabela 6.5 - Comparação entre análises (exemplo 2, caso 1)	126
Tabela 6.6 - Comparação entre análises (exemplo 2, caso 2)	126

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras gregas:

γ, γ'	Peso específico
δ	Espaçamento entre os nós
ε	Deformação específica
ε_c	Deformação específica do concreto
ε_{c2}	Deformação de encurtamento do concreto no início do patamar elástico
ε_{cu}	Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura
ε_s	Deformação específica do aço
ε_{yd}	Deformação correspondente ao início do patamar de escoamento
ε_{50}	Deformação correspondente a 50% da resistência última
θ	Ângulo de rotação da seção transversal
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Tolerância
ρ	Raio de curvatura
σ	Tensão em uma fibra genérica
σ_c	Tensão no concreto
σ_s	Tensão no aço
φ	Ângulo de atrito interno
Φ	Curvatura
Φ_{cr}	Curvatura correspondente a M_{cr}

Letras minúsculas:

b	Diâmetro
	Largura da seção
c_u	Coesão não-drenada do solo
d	Altura útil
d'	Recobrimento
f_{cd}	Resistência de projeto do concreto
f_{ck}	Resistência característica do concreto
h	Altura da seção

h_{inf}	Altura de influência do nó
i	Índice da discretização
k_h	Coefficiente de reação horizontal
k_v	Coefficiente de reação vertical
n	Espaçamento da discretização
p	Perímetro
	Resistência do solo
p_u	Resistência última
q	Carga transversal
$\{V\}$	Vetor com as condições de contorno
y	Deslocamento lateral
y_i	Distância da fibra extrema tracionada ao centro de gravidade da peça
y_s	Distância da fibra extrema comprimida ao centro de gravidade da peça
y_{max}	Distância da armadura mais superior ao centro de gravidade da peça
y_{min}	Distância da armadura mais inferior ao centro de gravidade da peça
y_{50}	Deslocamento lateral para ϵ_{50}
y'	Altura na seção transversal em relação ao centro de gravidade
z	Profundidade

Letras maiúsculas:

A_{inf}	Área de influência
E, E_s	Módulo de elasticidade
H	Carga transversal
I	Momento de inércia
J	Parâmetro adimensional empírico
K_h	Rigidez da mola horizontal
K_v	Rigidez da mola vertical ao longo do fuste
$K_{v,ponta}$	Rigidez da mola vertical na ponta
L_o	Comprimento elástico
L_{ent}	Comprimento da parte enterrada da estaca
L_{livre}	Comprimento da parte livre da estaca
L_{total}	Comprimento total da estaca

M	Momento fletor
$[M_{coef}]$	Matriz de coeficientes
N	Carga axial
N_{SPT}	Número de golpes do amostrador padrão
Q_n	Esforço paralelo à seção transversal
Q_v	Esforço cortante

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	20
1.1.1	<i>Objetivos Gerais</i>	20
1.1.2	<i>Objetivos Específicos</i>	22
1.2	Justificativas	22
2	FUNDAMENTOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA	23
2.1	Introdução	23
2.2	Cálculo das solicitações na estaca	26
2.2.1	<i>Lei de variação da carga lateral do terreno</i>	27
2.2.2	<i>Obtenção da equação diferencial</i>	29
2.2.3	<i>Solução da equação diferencial</i>	30
2.3	Soluções alternativas	34
2.3.1	<i>Comprimento de engastamento virtual</i>	35
2.3.2	<i>Modelo de Molas no SAP2000</i>	36
2.3.3	<i>Curvas p-y</i>	38
2.3.3.1	Definições das curvas p-y	39
2.3.3.2	Aplicação das curvas p-y	41
3	FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESTRUTURAL	47
3.1	Não-linearidade Física	48
3.1.1	<i>Considerações iniciais</i>	48
3.1.2	<i>Caracterização dos materiais</i>	50
3.1.2.1	Diagrama tensão-deformação para o concreto	50
3.1.2.2	Diagrama tensão-deformação para o aço	51
3.1.3	<i>Curvatura</i>	51

3.1.4	<i>Cálculo dos esforços resistentes</i>	53
3.1.4.1	Material elástico-linear	53
3.1.4.2	Material elástico não-linear	53
3.1.4.3	Diagrama de interação	54
3.1.5	<i>Diagrama momento-curvatura</i>	57
3.1.5.1	Características do diagrama	58
3.1.5.2	Cálculo da rigidez	58
3.2	Não-linearidade geométrica	59
4	PROGRAMA COMPUTACIONAL	61
4.1	Programa Auxiliar	61
4.2	Programa Principal	63
5	MODELOS DE ANÁLISE	66
5.1	Formulação de segurança	67
5.2	NdA I – Curvatura Aproximada	68
5.3	NdA II – Utilização do Programa SAP2000	73
5.4	NdA III – Programa Desenvolvido	82
5.5	NdA IV – Utilização do Programa FB-MultiPier	90
5.6	Comparação dos resultados	101
6	ESTACAS SEMIENTERRADAS	103
6.1	NdA I – Comprimento Elástico e Curvatura Aproximada	104
6.2	NdA II – Modelo de Winkler	108
6.3	NdA III – Programa Desenvolvido	112
6.4	NdA IV – Utilização do Programa FB-MultiPier	119
6.5	Comparação dos resultados	125
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	127
7.1	Conclusões	127

7.2	Sugestões para trabalhos futuros	128
	REFERÊNCIAS	129
	APÊNDICE A – Programa Auxiliar	132
	APÊNDICE B – Programa Principal	141
	APÊNDICE C – Cálculo da Armação	155
	APÊNDICE D – Procedimento para o cálculo do coeficiente para a rigidez	159
	APÊNDICE E – Resultados do cálculo para o coeficiente da rigidez equivalente	161

1 INTRODUÇÃO

Em muitos projetos, o engenheiro se depara com situações em que tenha que projetar um pilar ou uma estaca submetida a um esforço axial combinado com um esforço lateral considerável. Estas ações horizontais podem ser de diversas origens: vento, movimentos sísmicos, empuxo de terras, frenagem de veículos, ondas do mar, variação térmica, entre outros.

Nestas situações, os esforços laterais representam um importante papel no dimensionamento da estrutura: eles contribuem para um deslocamento lateral significativo que, combinado com o esforço axial, gera esforços adicionais à estrutura (efeitos de 2ª ordem), os quais podem contribuir para a sua instabilidade. Dessa forma, é de grande importância que, nestes casos, o deslocamento e os esforços adicionais sofridos sejam levados em consideração no dimensionamento da estrutura.

Para o caso de estacas submetidas a cargas laterais, que é o caso que será estudado neste trabalho, há uma série de elementos teóricos que podem ser considerados em seu dimensionamento a fim de descrever o comportamento da estrutura de uma maneira mais realista.

Um desses elementos, que está relacionado com o comportamento do material constitutivo da estaca, é a não-linearidade física (NLF). Para o caso de estacas de concreto armado, considerado neste trabalho, tem-se a composição de dois materiais bem diferentes entre si e que respondem não-linearmente aos esforços solicitantes. A NLF pode ser observada através dos diagramas de tensão-deformação de cada material (figura (1.1)), onde o respectivo módulo de elasticidade, E , é dado pelo coeficiente angular da reta secante à curva no ponto de interesse. Ao se admitir que as deformações não são proporcionais à tensão, tem-se que o módulo de elasticidade do material passa a não mais ser constante, e sim influenciável pela intensidade da solicitação. Além do módulo de elasticidade do material, o momento de inércia, I , também varia consideravelmente ao longo da estrutura, mesmo onde as seções são constantes. Esta variação se deve, no caso do concreto, à fissuração que ocorre na seção ao se deformar, criando espaços vazios em seu interior, os quais perdem a capacidade de resistir à tensão, e contribuindo para um valor de momento de inércia efetivo inferior ao momento de inércia da seção bruta.

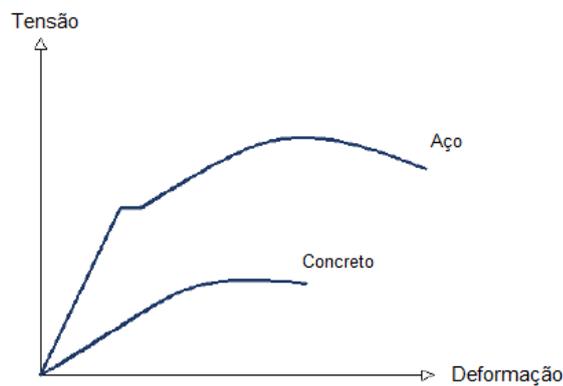


Figura 1.1 – Exemplo de diagrama tensão-deformação para o aço e para o concreto (ĆURIĆ; RADIĆ; FRANETOVIĆ, 2016)

A principal consequência da não-linearidade física está na avaliação da variação da rigidez à flexão, EI , da estrutura em função do carregamento aplicado. O método escolhido por este trabalho para avaliar esta variação trata de obter o valor da rigidez EI diretamente de um diagrama momento-curvatura. Este diagrama é elaborado com base na carga axial aplicada, nas características geométricas da seção transversal, nas características do material constituinte (curvas de tensão-deformação) e na armação adotada. Ele fornece os valores máximos de momento fletor suportados pela seção em função da curvatura da deformação sofrida por ela. O valor da rigidez é obtido pelo coeficiente angular da reta secante à curva do diagrama, no ponto de interesse.

Outro elemento que deve ser considerado na análise é a não-linearidade geométrica (NLG) da estrutura. A NLG consiste em considerar a influência da posição deformada da estrutura na composição final dos esforços atuantes. Para o caso de estruturas como estacas submetidas a cargas laterais e colunas esbeltas, a consideração da NLG é de fundamental importância, uma vez que são mais sensíveis aos acréscimos nos esforços atuantes (efeitos de 2ª ordem) devido aos deslocamentos laterais combinados com o esforço axial. Para incorporar a NLG na análise, o engenheiro pode optar por realizar cálculos iterativos ou utilizar equações de equilíbrio que já consideram a posição deformada da estrutura na composição dos esforços (utilizam a teoria da elasticidade). Neste trabalho, foi utilizada a equação da viga sobre base elástica, que já incorpora a não-linearidade geométrica.

Por último, há o elemento que trata da interação solo-estrutura. Ao se considerar um elemento de fundação, como é abordado neste trabalho, é necessário

considerar a transferência de carga que ocorre entre o elemento estrutural e o solo ao seu redor, além de modelar de maneira coerente a resposta que este vai dar à estrutura. Existem diversos modelos que caracterizam o comportamento do solo, os quais podem ser divididos em dois grupos principais: os modelos de meio contínuo e os modelos de meio discreto. Nos modelos de meio contínuo, leva-se em conta a natureza contínua do solo e podem ser admitidas leis de comportamento elastoplástico para o solo envolvente. Já nos modelos de meio discreto, utilizados neste trabalho, o solo é assimilado a uma série de molas independentes com comportamento elástico linear (modelo de Winkler) ou elástico não-linear (curvas $p-y$), no qual a reação do solo à estaca em um ponto é relacionada apenas com o deslocamento neste mesmo ponto.

A consideração desses três elementos possibilita a realização de uma análise mais refinada da estrutura e contribui para um dimensionamento mais econômico e seguro do elemento. A análise se torna mais complexa devido às equações necessárias e às condições consideradas, mas, na atualidade, os engenheiros possuem ferramentas de cálculo a seu dispor que possibilitam a realização destes cálculos e possibilitam um rápido processamento dos dados. Então, por que não tirar proveito destas valiosas ferramentas para realizar um cálculo mais elaborado da estrutura?

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo geral dispor, ao engenheiro, quatro modelos de cálculo que podem ser utilizados para o dimensionamento de uma estaca de seção circular semienterrada submetida a cargas laterais. Estes modelos foram escolhidos de forma crescente de refinamento na análise, partindo de modelos mais simples até modelos mais realistas.

O primeiro modelo trata do dimensionamento a partir de uma simplificação da estrutura, que substitui a estaca semienterrada por uma coluna engastada na base e livre no topo, sem consideração do solo, a partir da técnica do engastamento virtual. O cálculo dos esforços na coluna é feito a partir do método do pilar-padrão com curvatura aproximada proposto pela NBR-6118/2014. Neste modelo, as não-

linearidades são tratadas de maneira aproximada e a interação solo-estrutura é tratada como um engaste na coluna.

O segundo modelo utiliza um programa comercial de análise tridimensional de estruturas (SAP2000) para calcular os esforços atuantes na estrutura. Neste modelo, a não-linearidade geométrica é implementada pelo próprio programa e a não-linearidade física é considerada de maneira aproximada através da multiplicação do momento de inércia da seção por um coeficiente, que simula a diminuição da rigidez da peça ocasionada pela fissuração do concreto. Já a interação solo-estrutura é considerada a partir da substituição do solo por uma série de molas discretas ao longo de toda a profundidade enterrada da estaca, tendo como base os conceitos do Modelo de Winkler.

O terceiro modelo faz uso de um programa em Mathcad que foi elaborado neste trabalho. A não-linearidade física é considerada através do diagrama de momento curvatura, do qual são obtidos os valores de rigidez da estrutura, e a não-linearidade geométrica é considerada através das equações utilizadas. Neste modelo, o solo também é assimilado a uma série de molas de comportamento linear elástico (modelo de Winkler).

O quarto e último modelo utiliza um programa comercial, o FB-MultiPier, que analisa estruturas de pontes através de elementos finitos. Uma formulação do elemento discreto é usada para modelar o comportamento não-linear dos pilares e das estacas de uma ponte no programa. O elemento discreto é responsável tanto pelo comportamento não-linear físico quanto pelo comportamento não-linear geométrico. O comportamento do material não-linear é modelado pela integração das curvas de tensão-deformação sobre a seção transversal que é aplicável a cada elemento. O comportamento não-linear geométrico é modelado usando momentos P-delta (o produto da força axial pelos deslocamentos relativos que ocorrem através de um dado elemento). Além disso, como as estacas e pilares são discretizados em vários sub-elementos, os momentos P-y (o produto da força axial pelos deslocamentos internos ocasionados pela flexão num dado elemento) são também considerados na formulação do elemento discreto (CHUNG, 2016). A interação solo-estrutura, neste programa, é feita com base em modelos de curvas p-y.

A aplicação de cada um dos quatro modelos foi descrita a partir da solução de dois exemplos. O primeiro exemplo trata de um pilar engastado na base e livre no topo, sem consideração do terreno, com as cargas aplicadas em seu topo. A escolha

deste exemplo teve como intuito analisar o desempenho da parte estrutural isoladamente e comparar os resultados obtidos para cada método. Já o segundo exemplo considera uma estaca semienterrada com cargas aplicadas em seu topo, incorporando, portanto, a interação solo-estrutura à análise. Em ambos os exemplos, a seção transversal da estrutura é circular.

1.1.2 Objetivos Específicos

Este trabalho teve como objetivos específicos:

- Propor diferentes procedimentos para análise de estacas semienterradas com níveis crescentes de aproximação, incorporando diferentes graus de informação tanto da seção transversal quanto do terreno de fundação;
- Elaborar um programa, em Mathcad, que realiza o dimensionamento de uma estaca de seção circular semienterrada submetida a cargas laterais considerando as não-linearidades física e geométrica da estrutura e modelando o solo a partir de um coeficiente de reação do terreno (modelo de Winkler);
- Propor um valor de coeficiente que pode ser aplicado ao momento de inércia da seção bruta a fim de simular a diminuição de rigidez sofrida pela seção fissurada, para o caso específico de um pilar ou estaca submetidos a carga lateral. Incorpora-se, assim, a não-linearidade física através deste coeficiente.

1.2 Justificativas

Com a evolução dos materiais da construção civil e o advento do concreto de maiores resistências, tornou-se possível a elaboração de projetos de estruturas cada vez mais esbeltas, as quais exigem um enfoque analítico mais cuidadoso. Entretanto, com o auxílio dos computadores atuais, estas teorias e métodos (de difícil solução) tornam-se possíveis de serem solucionadas e de fácil aplicação prática.

Este trabalho se justifica, portanto, na necessidade que o engenheiro possui, na atualidade, de ter ao seu alcance diferentes ferramentas, tanto simples quanto sofisticadas, para o dimensionamento de pilares e estacas semienterradas submetidas a cargas laterais, as quais considerem as não-linearidades inerentes à estrutura.

2 FUNDAMENTOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

2.1 Introdução

Uma parte de grande importância no estudo não só de estacas, mas de qualquer tipo de fundação em geral, está na análise da interação solo-estrutura. Isso ocorre porque, uma vez que as cargas da estrutura são transferidas à fundação, estas se repassam para as camadas de solo mais profundas ou resistentes, que devem, por sua vez, possuir uma capacidade adequada de suporte, garantindo uma base rígida.

Para se projetar o mais próximo da realidade construída, entretanto, é necessário que a deformabilidade do solo nos projetos estruturais seja considerada, o que exige a integração de conhecimentos tanto da área de Estruturas quanto da área de Geotecnia.

Na prática, verifica-se que o solo, quando submetido ao carregamento da estrutura, sofre uma deformação. Esta perturbação gera uma alteração no fluxo de cargas da estrutura e, como consequência, os valores dos esforços nos elementos estruturais se modificam. Num edifício, por exemplo, essa redistribuição de esforços pode ocasionar fissurações em vigas e lajes, bem como o esmagamento de pilares. Logo, o desempenho de uma estrutura como um todo está vinculado à interação entre seus elementos e o solo.

Dessa forma, uma análise da interação solo-estrutura tem por objetivo fornecer os deslocamentos reais da fundação e seus esforços internos. Esses esforços podem ser obtidos diretamente pela análise da interação ou, indiretamente, por meio das pressões de contato, que são as pressões na interface estrutura-solo. A determinação das pressões de contato é necessária para o cálculo dos esforços internos na fundação, a partir dos quais é feito seu dimensionamento estrutural (VELLOSO; LOPES, 2011).

Para a determinação dessa transferência de carga na interação solo-estrutura, diversos modelos foram desenvolvidos para representar o comportamento do solo. Dois modelos básicos podem ser destacados:

- Modelos que consideram a modelagem no contínuo;
- Modelo discreto de Winkler.

Os demais modelos podem ser considerados variantes destes dois.

O modelo contínuo, originalmente proposto em 1971 por Poulos, baseia-se na teoria da elasticidade. Neste modelo, o solo é considerado como um meio ideal, homogêneo e isotrópico, representado por dois parâmetros: o módulo de elasticidade (E_s) e o coeficiente de Poisson (ν).

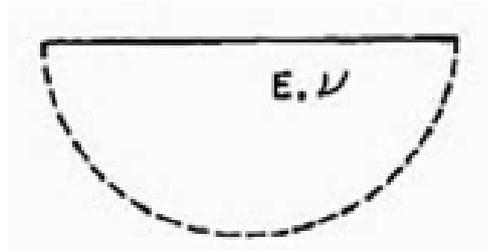


Figura 2.1 - Representação do solo pelo modelo contínuo (VELLOSO; LOPES, 2011)

Desde então, vários estudos se sucederam e o modelo foi se aprimorando e recebendo outras abordagens como meio contínuo, como a aplicação do método dos elementos de contorno e elementos finitos.

Estes modelos se apresentam bastante satisfatórios do ponto de vista teórico, pois são os que mais se aproximam do solo real, mas tornam-se bastante complexos, sendo necessário recorrer a aproximações numéricas para chegar à solução. Dessa forma, a principal limitação desse método está, além da sua complexidade, na difícil tarefa de parametrizar adequadamente o solo e na grande quantidade de dados necessários, os quais causam um grande custo de processamento.

Já o modelo discreto de Winkler, também conhecido como Hipótese de Winkler ou Modelo de Molas, foi proposto em 1867 e caracteriza a resposta do solo através de uma série de molas independentes e de comportamento elástico e linear. De acordo com este modelo, as pressões de contato são proporcionais aos deslocamentos.

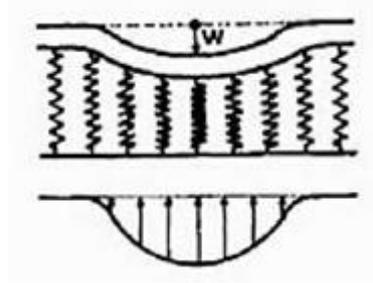


Figura 2.2 - Representação do solo pelo modelo de Winkler (VELLOSO; LOPES, 2011)

A rigidez dessas molas é caracterizada por uma constante de proporcionalidade entre a pressão aplicada e o deslocamento do solo, chamada de *coeficiente de reação*. Este coeficiente pode ser determinado tanto para carregamentos verticais como, por exemplo, para radiers, sapatas e vigas de fundação (coeficiente de reação vertical, k_v), quanto para ações horizontais, como é o caso de estacas sob forças laterais e estruturas de escoramento de escavações (coeficiente de reação horizontal, k_h).

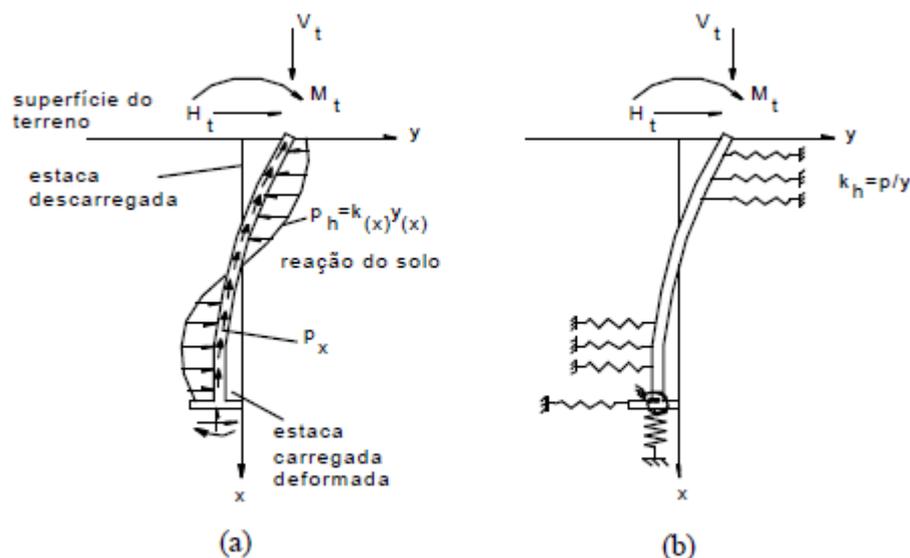


Figura 2.3 – (a) Cargas na estaca; (b) Discretização de Winkler (KHOURI, 2001)

Algumas propostas foram estabelecidas para a avaliação do coeficiente de reação com base numa variedade de ensaios, dentro dos quais se destacam: o ensaio SPT, o ensaio CPT, o ensaio pressiométrico e o ensaio de placa. No entanto, a aplicação de diferentes correlações propostas por diferentes autores conduz, frequentemente, a uma grande dispersão no valor do coeficiente de reação (SANTOS,

2008). Valores típicos tabelados para o k_n , utilizados na prática, serão apresentados adiante.

A grande crítica feita a este modelo está em se tratar de um modelo discreto, no qual a natureza contínua do solo é ignorada. Ao representar o solo por molas independentes, acaba-se por considerar que ele se deforma somente na região de aplicação da carga, sem considerar os efeitos do carregamento no entorno da estrutura.

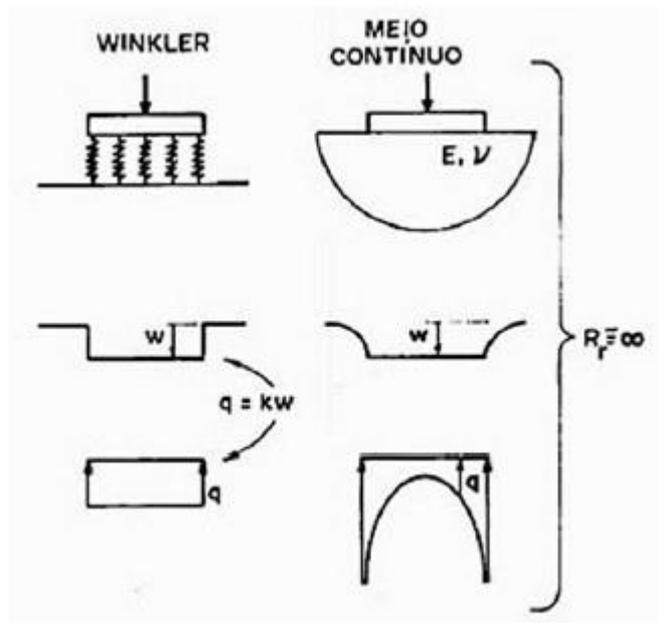


Figura 2.4 - Resposta dos dois modelos para uma rigidez relativa infinita (VELLOSO; LOPES, 2011)

A principal vantagem deste modelo, contudo, está na sua simplicidade, pois depende de apenas um único parâmetro para representação do solo: o coeficiente de reação. Por este motivo, foi o escolhido para simular a interação solo-estrutura no programa desenvolvido neste trabalho. O modelo de cálculo utilizado neste estudo será abordado com mais detalhes a seguir.

2.2 Cálculo das solicitações na estaca

As solicitações na estaca são calculadas levando-se em consideração as ligações desta com a meso e a superestrutura e ainda os efeitos da contenção lateral do terreno.

O modelo de cálculo, baseado na Hipótese de Winkler, consiste em assimilar a estaca a um elemento linear (viga) apoiada num meio elástico. A equação diferencial que rege este modelo, obtida a partir da conhecida expressão da linha elástica em Resistência dos Materiais, está descrita a seguir. A dedução desta equação será vista adiante, no item 2.2.2.

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} - N \frac{d^2 y}{dz^2} + q = 0 \quad (2.1)$$

Onde:

E = módulo de elasticidade do material da estaca

I = momento de inércia da seção transversal da estaca

N = carga axial (compressão = negativo)

q = carga transversal

A solução da equação (2.1) dependerá da lei de variação adotada para a carga lateral q do terreno.

2.2.1 Lei de variação da carga lateral do terreno

A lei de variação da carga lateral do terreno é essencialmente empírica, dependendo de diversos parâmetros, como deslocamento transversal da estaca, diâmetro, profundidade, tipo e velocidade de carregamento, número de aplicação de cargas, etc. (PFEIL, 1983).

A solução adotada neste trabalho para representar a reação do solo é a que admite que a carga lateral do terreno é proporcional ao deslocamento transversal y da estaca e à profundidade z do ponto considerado.

$$q = (k_h \cdot z) \cdot y \quad (2.2)$$

Onde:

k_h = coeficiente de reação horizontal

z = profundidade

y = deslocamento lateral

O coeficiente de reação horizontal, como visto, nada mais é do que a pressão necessária para provocar um deslocamento unitário e possui as dimensões $[FL^{-3}]$. De acordo com a solução dada pela eq.(2.2), o k_h varia linearmente com a profundidade, o que é bastante aceito para o caso de solos granulares. Para o caso de solos coesivos pré-adensados, entretanto, é recomendada por TERZAGHI (1955) apud KHOURI (2001) a utilização de um k_h constante com a profundidade, para uma representação mais realista da reação desse tipo de solo.

A obtenção do coeficiente de reação horizontal, neste trabalho, foi baseada em valores tabelados, os quais podem ser facilmente encontrados em diversas publicações. Uma tabela bastante interessante para a utilização prática, pois fornece os valores de k_h em função do N_{spt} , é a disponibilizada por PFEIL (1983).

Tabela 2.1 - Valores indicativos de k_h referido à largura total da estaca (PFEIL, 1983) - Adaptado

Tipo de solo	Nº de golpes do amostrador padrão (N_{SPT})	k_h (kN/m ³)	
		Solo seco ou úmido	Solo submerso
Areia média	5 - 10	2500	1500
Areia compacta	10 - 25	7000	5000
Areia muito compacta	> 25	20000	12500
Areia fofa, carga estática	5	-	1000
Areia fofa, carga cíclica	< 5	-	400
Argila muito mole, carga estática	< 2		500
Argila muito mole, carga cíclica	< 2		300
Silte orgânico fofo	< 3		300
Argila mole	2 - 4		1000
Argila média	4 - 10		2500

Substituindo a eq.(2.2) na eq.(2.1), obtém-se a seguinte expressão:

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} - N \frac{d^2 y}{dz^2} + k_h \cdot z \cdot y = 0 \quad (2.3)$$

A solução da eq.(2.3) pode se dar tanto por via analítica quanto por via numérica. A solução analítica, contudo, resume-se a casos específicos devido à sua complexidade de cálculo. A solução numérica, adotada neste trabalho, pode ser feita por métodos como diferenças finitas ou elementos finitos.

2.2.2 Obtenção da equação diferencial

Numa abordagem mais básica da resistência dos materiais, os esforços numa viga com a presença de cargas longitudinais juntamente com cargas transversais são calculados simplesmente pela superposição dos esforços resultantes para cada tipo de carregamento individualmente. Esse cálculo é correto quando a carga axial aplicada é pequena comparada com a carga de flambagem da estrutura. Quando a carga axial não é pequena, entretanto, é necessário levar em consideração os momentos adicionais que surgem da interação entre a carga axial e a deformação sofrida pela viga. Isto é, se a viga se deforma, a carga axial causa um momento adicional além daquele produzido pela carga transversal.

Para chegar a uma equação para uma viga sobre base elástica, submetida a carga axial, partiu-se do desenvolvimento dado por HETÉNYI (1946). Por este desenvolvimento, considera-se o equilíbrio numa seção da viga, representada na figura (2.5). É importante notar que o esforço cortante, Q_v , é definido como o esforço perpendicular ao eixo x , que é o eixo não deformado da viga. Esta consideração será importante, mais na frente, quando as condições de contorno do problema forem definidas.

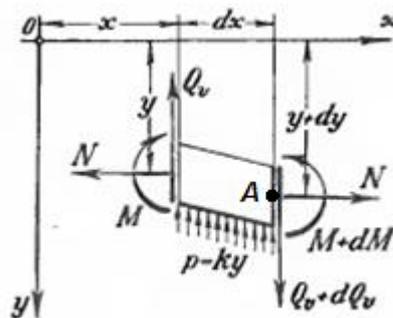


Figura 2.5 - Elemento infinitesimal de uma viga sobre base elástica carregada axialmente (HETÉNYI, 1946)
- Adaptado

Dessa forma, considerado o elemento de barra infinitesimal da figura (2.5), o equilíbrio dos momentos no ponto A é dado pela expressão:

$$(M + dM) - M + Ndy - Q_v dx = 0 \quad (2.4)$$

Reescrevendo a eq.(2.4), tem-se:

$$\frac{dM}{dx} + N \frac{dy}{dx} - Q_v = 0 \quad (2.5)$$

Para completar a eq.(2.5), é utilizada a equação diferencial aproximada da linha elástica de uma viga, que é satisfatória desde que as inclinações sejam pequenas. Neste trabalho, portanto, foram consideradas apenas estruturas com pequenas deformações.

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2.6)$$

Substituindo a eq.(2.6) na eq.(2.5) e derivando a expressão mais uma vez em x , obtém-se a equação principal para análise da estaca:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dQ_v}{dx} = 0 \quad (2.7)$$

O termo dQ_v/dx representa a variação da carga no terreno, o qual dependerá da lei adotada. A lei escolhida neste trabalho para representar o comportamento do solo foi comentada anteriormente e está representada na eq.(2.2). Dessa forma:

$$\frac{dQ_v}{dx} = k_h \cdot z \cdot y \quad (2.8)$$

Note que, se a rigidez da peça for considerada constante, assim como a carga axial, a eq.(2.7) recai na eq.(2.1), apresentada inicialmente pelo Modelo de Winkler.

Como o objetivo deste trabalho é considerar as não-linearidades física e geométrica da estrutura, a simplificação da eq.(2.1) não poderá ser adotada e a equação final para viga sobre base elástica, considerando uma carga axial constante, será:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) - N \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + k_h \cdot z \cdot (y) = 0 \quad (2.9)$$

2.2.3 Solução da equação diferencial

O método utilizado neste trabalho para solucionar a equação diferencial da viga sobre base elástica foi o Método das Diferenças Finitas (MDF). Por este método, a

equação diferencial é substituída por uma equação algébrica, a qual relaciona o valor da variável do problema em um ponto aos valores dos pontos vizinhos.

Uma importante observação a ser feita é que, para aplicar o MDF corretamente ao caso em estudo, é necessário utilizar a equação da viga sobre base elástica em sua forma original, como visto na eq.(2.9). Esta equação pode ser colocada em diferenças finitas em 2 passos. No primeiro, aplica-se o MDF aos termos entre parêntesis.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta^2} \right) - N \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta^2} \right) + k_h \cdot z \cdot y_i = 0 \quad (2.10)$$

Onde,

$\delta =$ espaçamento entre os nós

No segundo passo, aplica-se o MDF à segunda derivada do primeiro termo da eq.(2.10).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^2} \left[\left(EI_{i+1} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\delta^2} \right) - 2 \left(EI_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta^2} \right) \right. \\ \left. + \left(EI_{i-1} \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\delta^2} \right) \right] - N \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\delta^2} \right) \\ + k_h \cdot z \cdot y_i = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Simplificando-se a expressão acima, chega-se ao seguinte resultado final:

$$\begin{aligned} (EI_{i+1})y_{i+2} + (-2EI_{i+1} - 2EI_i - N\delta^2)y_{i+1} \\ + (EI_{i+1} + 4EI_i + EI_{i-1} + 2N\delta^2 + k_h z \delta^4)y_i \\ + (-2EI_i - 2EI_{i-1} - N\delta^2)y_{i-1} + (EI_{i-1})y_{i-2} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

A aplicação desta expressão, por ser uma derivada de quarto grau, leva a um sistema de N equações com $N+4$ incógnitas, sendo estas obtidas a partir das condições de contorno do problema.

A figura (2.6) traz um esquema da discretização pelo MDF para o caso em análise. O índice i representa um nó qualquer ao longo da discretização e o índice n representa o número de espaçamentos dado ao comprimento enterrado da estaca. Note que surgem quatro pontos virtuais na discretização (os dois iniciais e os dois finais), devido ao sistema resultante possuir $N+4$ incógnitas. O total de pontos na

discretização, para este caso, será igual ao número de espaçamentos mais um (que resulta no total de nós reais), mais os quatro nós virtuais (total = $n+5$).

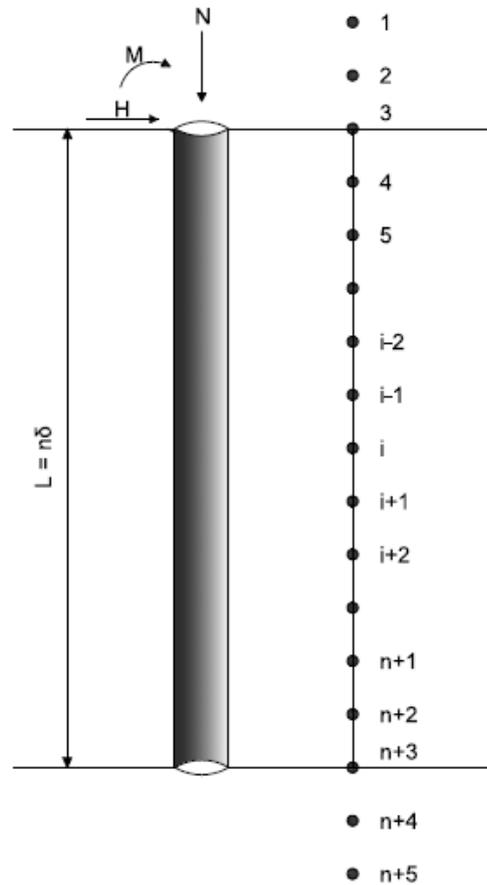


Figura 2.6 - Discretização da estaca pelo Método das Diferenças Finitas (δ =espaçamento entre os nós)

Para a estaca semienterrada aqui analisada, são aplicadas as equações do momento fletor e do esforço cortante nas pontas da estaca para obter mais quatro equações, necessárias para solucionar o problema.

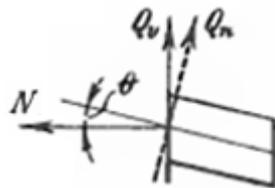


Figura 2.7 - Esforço cortante no elemento infinitesimal de viga (HETÉNYI, 1946) - Adaptado

A equação do momento fletor é a vista na eq.(2.6). Já a equação do esforço cortante deverá levar em consideração a influência do esforço axial no elemento deformado. Pela figura (2.7), tem-se que:

$$Q_n = Q_v \cos \theta - N \sin \theta \quad (2.13)$$

Como o ângulo θ geralmente é bem pequeno, é possível fazer a seguinte aproximação:

$$\cos \theta = 1 \quad \therefore \quad \sin \theta = \tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (2.14)$$

Substituindo a eq.(2.14) na eq.(2.13) e comparando com a eq.(2.5), fica:

$$Q_n = Q_v - N \frac{dy}{dx} = \frac{dM}{dx} \quad (2.15)$$

Como definido anteriormente, o esforço cortante é dado pela componente Q_v . Logo, a equação resultante para o esforço cortante na seção será:

$$Q_v = \frac{dM}{dx} + N \frac{dy}{dx} \quad (2.16)$$

Sendo $V_{d,t}$ e $M_{d,t}$, respectivamente, a carga horizontal e o momento fletor aplicados ao topo da estaca, as condições de contorno neste ponto serão:

$$Q_v = V_{d,t} \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} + N \frac{dy}{dx} = V_{d,t} \quad (2.17)$$

$$M = M_{d,t} \quad \rightarrow \quad -EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{d,t} \quad (2.18)$$

Passando as equações acima para diferenças finitas e considerando o nó do topo da estaca ($i=3$), tem-se o seguinte resultado:

$$(EI_2)y_1 + (-2EI_2 - N\delta^2)y_2 + (EI_2 - EI_4)y_3 + (2EI_4 + N\delta^2)y_4 + (-EI_4)y_5 = 2V_{d,t}\delta^3 \quad (2.19)$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = -\frac{M_{d,t}\delta^2}{EI_3} \quad (2.20)$$

Já na ponta enterrada da estaca, considerada livre de esforços atuantes, as condições de contorno serão:

$$Q_v = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} + N \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.21)$$

$$M = 0 \quad \rightarrow \quad -EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (2.22)$$

Passando as equações acima para diferenças finitas e considerando o nó da base da estaca ($i=n+3$), tem-se o seguinte resultado:

$$(EI_{n+2})y_{n+1} + (-2EI_{n+2} - N\delta^2)y_{n+2} + (EI_{n+2} - EI_{n+4})y_{n+3} + (2EI_{n+4} + N\delta^2)y_{n+4} + (-EI_{n+4})y_{n+5} = 0 \quad (2.23)$$

$$y_{n+2} - 2y_{n+3} + y_{n+4} = 0 \quad (2.24)$$

Com a equação principal (eq.(2.12)) e as quatro condições de contorno (equações (2.19), (2.20), (2.23) e (2.24)), o problema se encontra solucionado. Estas equações formarão um sistema que pode ser representado da seguinte maneira:

$$[M_{coef}]\{y\} = \{v\} \quad (2.25)$$

Onde,

$[M_{coef}] =$ matriz com os coeficiente que multiplicam y_i

$\{y\} =$ vetor com os deslocamentos laterais em cada nó

$\{v\} =$ vetor com os termos à direita da igualdade

Para realizar este cálculo, foi elaborada uma rotina de cálculo no programa Mathcad (versão 14), que será detalhada mais adiante.

2.3 Soluções alternativas

Para a consideração da interação solo-estrutura na análise de uma estaca semienterrada, foram considerados outros três métodos. Estes três métodos foram escolhidos de maneira a trazer um comparativo para a equação da viga sobre base elástica e enriquecer a análise, mostrando diferentes níveis de aproximação para o problema.

Isto tudo reflete aquilo com o que, na prática, o engenheiro se depara, pois geralmente tem à sua disposição diversas alternativas para abordar um problema. A depender do nível de sofisticação ou grau de dificuldade que o problema real envolve, ele vai escolher o método mais adequado para realizar a análise e, possivelmente, utilizar um outro método mais simples para verificar os resultados obtidos.

2.3.1 Comprimento de engastamento virtual

Neste primeiro método alternativo, utiliza-se a teoria proposta por Davisson e Robinson, os quais demonstraram, através de soluções comparativas, que um tubulão ou estaca de grande comprimento enterrado pode ser considerado como uma coluna engastada a uma certa profundidade, livre da reação horizontal do terreno, para o cálculo das solicitações em serviço e para a análise dos efeitos de segunda ordem (PFEIL, 1983).

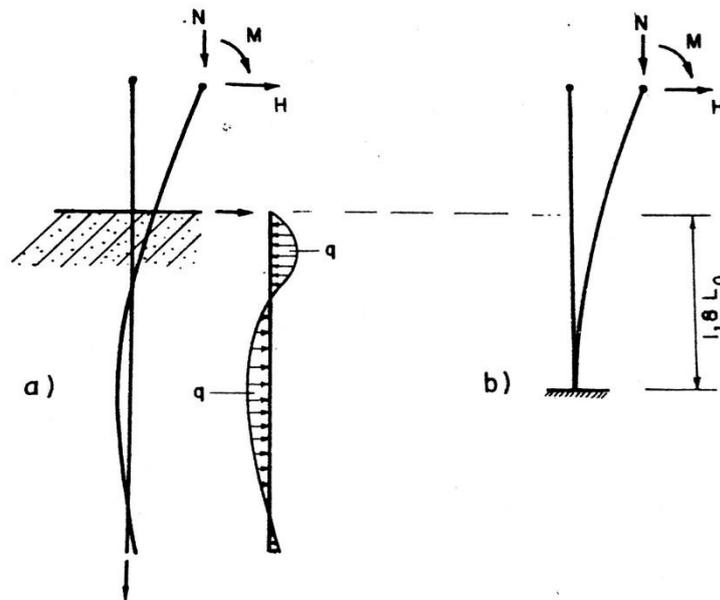


Figura 2.8 – (PFEIL, 1983) Tubulão ou estaca de grande comprimento, parcialmente enterrado:
 a) deformação transversal, com diagrama de cargas transversais q , resultante das pressões laterais do terreno;
 b) situação ideal para análise, considerando-se a estaca engastada na profundidade de $1,8L_0$ e abstraindo-se a contenção lateral do terreno.

A profundidade do engastamento é dada a partir de um comprimento elástico, L_0 , expresso pela seguinte equação:

$$L_0 = \sqrt[5]{\frac{EI}{k_h}} \quad (2.26)$$

A profundidade de engastamento da nova estaca é de $1,8L_0$ – figura (2.8b), que, somada à altura da parte livre da estaca original, resultará no comprimento total da estrutura equivalente.

$$L_{total} = L_{livre} + 1,8L_0 \quad (2.27)$$

Esta simplificação pode ser usada no caso de estacas com um comprimento enterrado, L_{ent} , suficientemente logo, obedecendo à condição:

$$L_{ent} > 4L_0 \quad (2.28)$$

Com o esquema simplificado, determinam-se as solicitações nas seções da estaca acima do terreno e na seção ao nível da superfície do solo. Para as seções abaixo do nível do solo, as solicitações são obtidas a partir de soluções particulares.

2.3.2 Modelo de Molas no SAP2000

Uma outra maneira de analisar a interação solo-estrutura é utilizando um programa comercial de análise de estruturas, no qual os conceitos do Modelo de Winkler são aplicados diretamente através da utilização de molas na discretização da estrutura.

O programa aqui escolhido foi o SAP2000 (versão 16), por ser bastante conhecido no mercado e amplamente utilizado por engenheiros. A modelagem no programa é bem simples: uma série de molas independentes e igualmente espaçadas é adotada em todo o comprimento enterrado da estaca. O espaçamento escolhido neste trabalho foi de 1 metro, adequado para o exemplo analisado.

Para os casos em que a estaca tem um grande comprimento enterrado, é possível aumentar o espaçamento das molas à medida que a profundidade aumenta, uma vez que são as camadas mais superficiais que mais influenciam no comportamento da estrutura de fundação.

Foram utilizadas, no programa, duas molas em cada nó enterrado: uma mola na direção horizontal e outra mola na direção vertical, de modo a simular o comportamento e as propriedades do solo através da rigidez dessas molas (K_h e K_v , respectivamente). Um esquema dessa representação pode ser visto na figura (2.9).

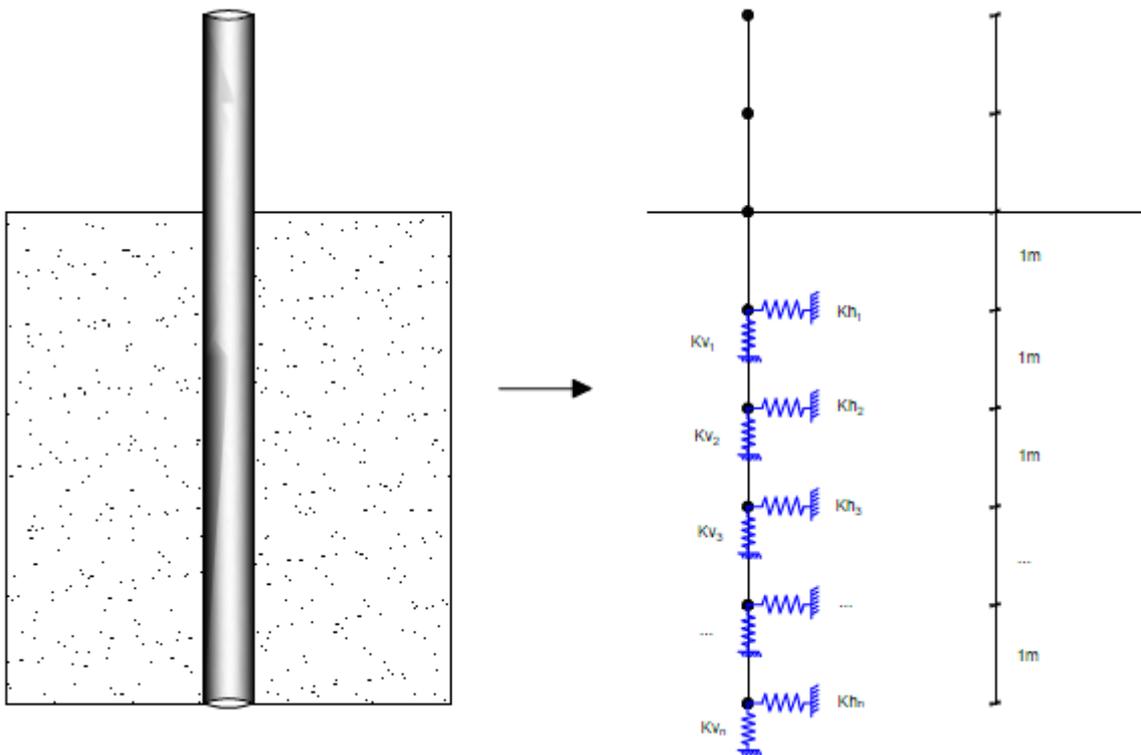


Figura 2.9 - Esquema da discretização do solo através de molas para o SAP2000

A rigidez das molas horizontais, considerando a discretização vista na figura (2.9), é calculada da seguinte forma:

$$K_h = k_h \cdot z \cdot h_{inf} \quad (2.29)$$

Onde,

k_h = coeficiente de reação horizontal

z = profundidade do nó

h_{inf} = altura de influência do nó

As molas verticais foram consideradas ao longo de todo o comprimento enterrado da estaca, com a finalidade de simular a transferência de carga axial para o terreno ao longo do fuste. A rigidez das molas verticais é calculada de maneira semelhante à eq.(2.29):

$$K_v = k_h \cdot z \cdot l_{inf} \cdot \frac{p}{b} \quad (2.30)$$

Onde,

$p = \text{perímetro da estaca}$

$b = \text{diâmetro da estaca}$

O termo p/d é introduzido com a finalidade de tornar a rigidez vertical um pouco maior do que a rigidez horizontal, admitindo que a generalidade dos solos atravessados por estacas é de origem sedimentar. Dessa forma, faz sentido que a reação vertical do solo seja superior à horizontal, a cada profundidade.

A rigidez da mola vertical considerada na ponta da estaca, por fim, é calculada da seguinte maneira:

$$K_{v,ponta} = k_h \cdot z \cdot \frac{A_{inf}}{b} \quad (2.31)$$

Onde,

$A_{inf} = \text{área de influência (área de superfície de contato na ponta da estaca)}$

Esta diferenciação da rigidez da mola vertical na ponta tem como finalidade levar em conta que, na maioria dos casos práticos, as estacas são executadas até profundidades em que o solo possui elevada resistência e reduzida deformabilidade.

Vale destacar que, neste modelo aqui descrito, a rigidez de ambas as molas, vertical e horizontal, é dada em função do coeficiente de reação horizontal do solo, k_h . Existem outros modelos que podem utilizar o coeficiente de reação vertical, k_v , para caracterizar a rigidez das molas verticais, mas estes valores são mais difíceis de se obter e dependem de diversas características. Por este motivo, optou-se por um modelo de mais fácil aplicação.

2.3.3 Curvas p - y

Neste terceiro e último método alternativo, um melhoramento do Modelo de Winkler é utilizado, no qual as molas de comportamento elástico linear são substituídas por curvas não-lineares que caracterizam o solo.

O método das curvas p - y se desenvolveu principalmente na década de 1950, impulsionado pela indústria do petróleo, ao se deparar com o dimensionamento de estacas para suas plataformas em alto mar, as quais estariam sujeitas a cargas horizontais excepcionalmente grandes devido à força das ondas e do vento.

Segundo POULOS e DAVIS (1980), o desenvolvimento do método nesta década só foi possível graças a duas inovações tecnológicas que ocorreram na época: o desenvolvimento de computadores, que facilitaram a resolução das equações diferenciais de quarta ordem da resistência dos materiais; e o desenvolvimento de aparelhos medidores de tensão com leitura remota, facilitando a obtenção de dados de campo sobre a resposta do solo ao carregamento.

2.3.3.1 Definições das curvas p-y

No método das curvas p-y, o solo ao redor da estaca é substituído por uma série de mecanismos indicando que a resistência do solo (p) é uma função não-linear do deslocamento lateral da estaca (y). Para uma dada profundidade ao longo da estaca, existe uma curva p-y que representa o comportamento do solo nessa profundidade.

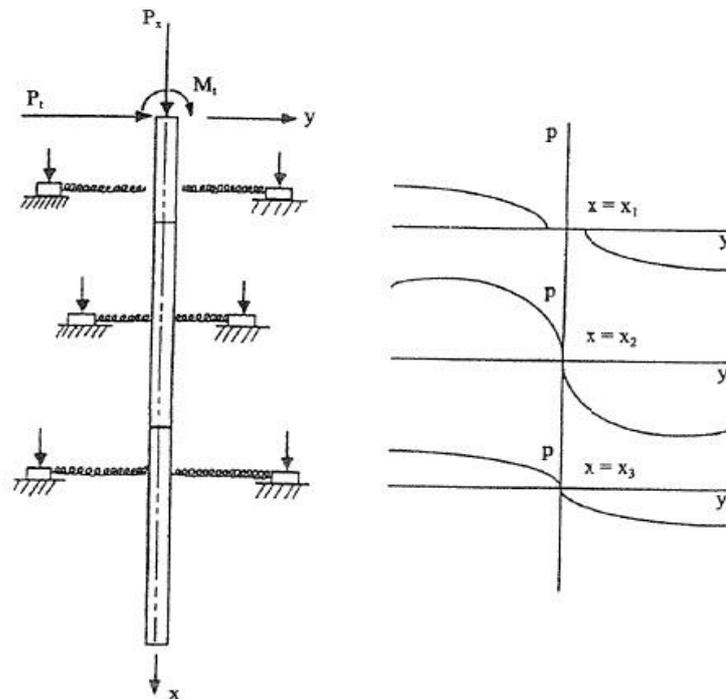


Figura 2.10 - Modelo de curvas p-y para uma estaca submetida a cargas laterais (REESE; VAN IMPE, 2001)

Neste modelo, como se vê na figura (2.10), nenhum torsor ou momento fletor fora do plano é considerado, ou seja, refere-se a duas dimensões apenas. Além disso, as curvas p-y são totalmente variáveis de acordo com a profundidade ao longo da estaca e o deslocamento lateral correspondente. A curva $x = x_1$ foi desenhada para

indicar que, próximo à superfície do terreno, a estaca pode se deslocar uma certa distância sem que haja resistência do solo.

A determinação da resistência do solo (p) é dada a partir da integração da distribuição dos esforços ao redor da estaca quando esta sofre um certo deslocamento lateral. A dimensão de p é $[FL^{-1}]$.

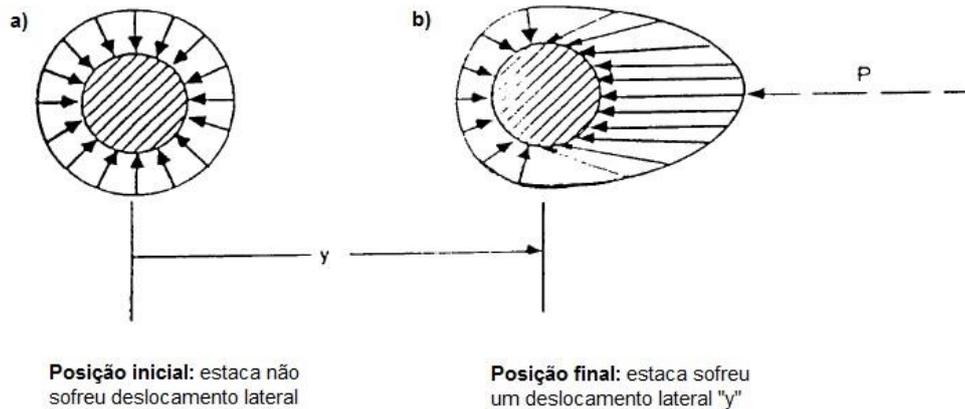


Figura 2.11 - Distribuição das pressões unitárias atuantes na estaca: a) antes do deslocamento; b) depois do deslocamento. (REESE; VAN IMPE, 2001 – Adaptado)

Ao variar os valores de deslocamento lateral, uma série de valores correspondentes de resistência do solo são calculados formando, assim, uma curva p - y . Essa curva é apenas um membro de uma família de curvas que representam a resistência do solo como uma função da profundidade (z).

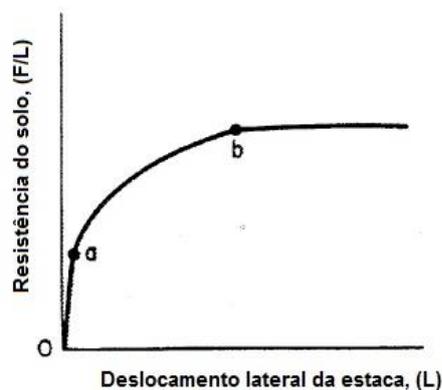


Figura 2.12 - Curva p - y típica (REESE; VAN IMPE, 2001 - Adaptado)

Uma curva p - y típica pode ser vista na figura (2.12). O primeiro trecho da curva (ramo o - a) representa o comportamento elástico do solo. O segundo trecho (ramo a - b) representa a fase de transição da curva. O ponto b , por fim, caracteriza a resistência última do solo.

Para obter as curvas p-y, vários autores vêm propondo alguns métodos com base em estudos de naturezas diversas, as quais podem ser baseados em:

- Ensaio de carga de estacas de verdadeira grandeza;
- Ensaio de carga em modelo reduzido;
- Ensaio *in situ* (ensaio pressiométrico, ensaio dilatométrico, ensaio de placa);
- Correlações empíricas com base em ensaios laboratoriais.

2.3.3.2 Aplicação das curvas p-y

Analisando a curva p-y típica, percebe-se que ela é uma representação bem mais realista do comportamento do solo, ao compará-la com o Modelo de Molas. A sua aplicação prática, contudo, é muito mais complexa e exige uma grande quantidade de informações geotécnicas que, na maioria dos casos, não está facilmente disponível para o engenheiro.

Neste trabalho, optou-se por realizar a interação solo-estrutura pelo modelo de curvas p-y através do programa FB-MultiPier (versão 5.0, acadêmica). Trata-se de um programa de análise não-linear de pontes, o qual combina a análise da estrutura por elementos finitos com a análise do sistema de fundação por modelos não-lineares estáticos para o comportamento axial, lateral e de torção do solo.

Uma formulação de elemento discreto é usada, no programa, para modelar o comportamento não-linear da estaca. O elemento discreto leva em consideração tanto a não-linearidade física (constitutiva) da estrutura quanto a sua não-linearidade geométrica (cinemática).

A não-linearidade física é modelada a partir da integração das curvas de tensão-deformação na seção transversal referente a cada elemento. A não-linearidade geométrica é caracterizada através de momentos P-Delta (o produto do esforço axial pelos deslocamentos relativos que ocorrem ao longo de um dado elemento).

Já a interação solo-estrutura, para as cargas laterais, é feita a partir de curvas p-y. O programa apresenta alguns modelos de curvas que podem ser escolhidos pelo usuário para representar o comportamento do solo. Os modelos disponíveis podem

ser vistos na tabela (2.2). Há, além desses modelos, a opção de o usuário entrar com seu próprio conjunto de curvas.

Tabela 2.2 - Modelos de curvas p-y apresentadas no programa FB-Multiplier (JUSTINIANO, 2017)

Curvas p-y			
Autor	Solo	Autor	Solo
Solos não coesivos		Solos coesivos	
O'Neil	Areia	O'Neil	Argila
Reese, Cox e Koop	Areia	Matlock	Argila mole abaixo do nível d'água
API	Areia	Reese	Argila rija abaixo do nível d'água
		Reese e Welch	Argila rija acima do nível d'água
		API	Argila

Neste trabalho, serão mostrados a seguir dois modelos para a obtenção de curvas p-y: um para areias e outro para argilas.

Curvas p-y para areias

O método aqui apresentado foi proposto por Reese et al. 1974, e se baseia em ensaios de campo de verdadeira grandeza realizados em Mustang Island, Texas, nos quais foram utilizadas duas estacas metálicas tubulares enterradas em areia e submetidas a cargas laterais. Este procedimento é indicado para carregamentos de curta duração ou cíclicos e apresenta um modelo e curva como ilustrado na figura (2.13).

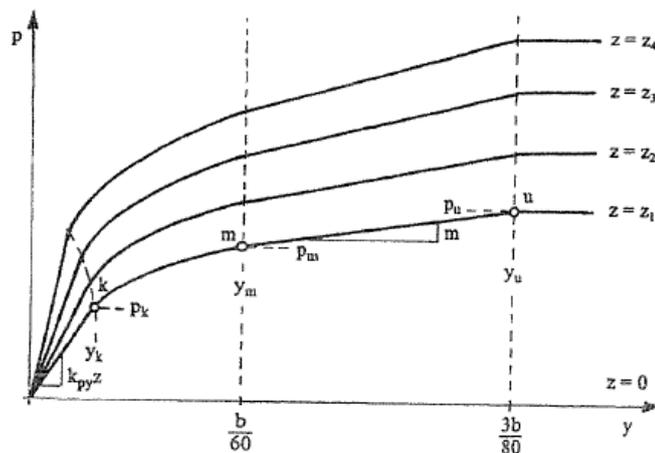


Figura 2.13 - Modelo de curvas p-y para areias (REESE; VAN IMPE, 2007)

Os parâmetros necessários para o traçado da curva p-y em areias são o ângulo de atrito interno (φ), o peso específico do solo (γ) e o diâmetro da estaca (b). A partir deles, os seguintes coeficientes preliminares são estabelecidos:

$$\alpha = \frac{\varphi}{2}; \beta = 45 + \frac{\varphi}{2}; K_0 = 0,4; K_a = \tan^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (2.32)$$

O valor da resistência última do solo por unidade de comprimento da estaca é dado pelo menor dos dois valores resultantes das expressões abaixo, onde z é a profundidade abaixo do nível do terreno:

$$p_{st} = \gamma z \left[\frac{K_0 z \cdot \tan(\varphi) \cdot \text{sen}(\beta)}{\tan(\beta - \varphi) \cdot \cos(\alpha)} + \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta - \varphi)} (b + z \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha)) + K_0 z \cdot \tan(\beta) \cdot (\tan(\varphi) \cdot \text{sen}(\beta) - \tan(\alpha)) - K_a b \right] \quad (2.33)$$

$$p_{sd} = K_a b \gamma z \cdot (\tan^8(\beta) - 1) + K_0 b \gamma z \cdot \tan(\varphi) \cdot \tan^4(\beta) \quad (2.34)$$

A partir das equações (2.33) e (2.34), deve-se encontrar a profundidade em que os valores obtidos se igualem. Para profundidades menores que este valor, utiliza-se a eq. (2.33) para determinar a resistência última. Para profundidades maiores, usa-se a eq. (2.34), de forma que o valor computado para a curva seja sempre o menor entre os dois.

$$p_s = \text{mín}(p_{st}, p_{sd}) \quad (2.35)$$

Escolhida a profundidade em que se deseja obter a curva p-y, é possível determinar os pontos m e u da curva da figura (2.13) a partir das equações abaixo, cujos coeficientes são obtidos a partir dos gráficos mostrados na figura (2.14).

$$y_u = \frac{3b}{80} \rightarrow p_u = \bar{A}_s \cdot p_s \quad \text{ou} \quad p_u = \bar{A}_c \cdot p_s \quad (2.36)$$

$$y_m = \frac{b}{60} \rightarrow p_m = B_s \cdot p_s \quad \text{ou} \quad p_m = B_c \cdot p_s \quad (2.37)$$

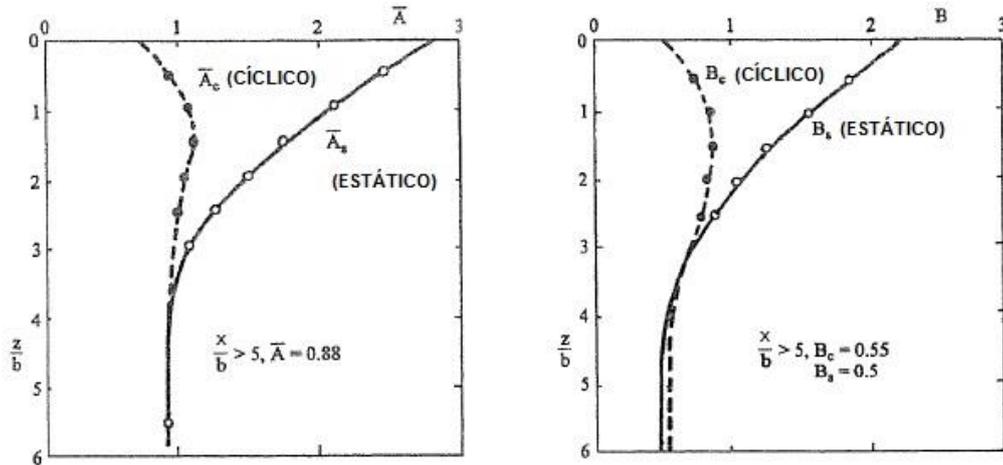


Figura 2.14 - Valores dos coeficientes A e B (REESE; VAN IMPE, 2007) - Adaptado

De y_m a y_u , a curva p - y é constituída por um trecho retilíneo de inclinação m , definida pela eq. (2.38).

$$m = \frac{p_u - p_m}{y_u - y_m} \quad (2.38)$$

O trecho entre os pontos k e m é parabólico, cuja equação encontra-se descrita a seguir:

$$p = \bar{C} \cdot y^{1/n} \quad (2.39)$$

Onde,

$$n = \frac{p_m}{m \cdot y_m} \quad (2.40)$$

$$\bar{C} = \frac{p_m}{y_m^{1/n}} \quad (2.41)$$

Na porção inicial da curva, remanescente, tem-se um trecho linear cuja expressão é dada pela eq. (2.42), que vai da origem até o ponto p_k .

$$p = (k_{py}z)y \quad (2.42)$$

O valor apropriado de k_{py} , que representa a reação horizontal do terreno, recomendado por Reese, pode ser obtido a partir das tabelas abaixo.

Tabela 2.3 - Valores representativos de k_{py} para areias submersas (REESE; VAN IMPE, 2007)

Densidade relativa	Baixa	Média	Alta
k_{py} (MN/m ³)	5,4	16,3	34

Tabela 2.4 - Valores representativos de k_{py} para areias acima do nível da água (carregamentos estáticos e cíclicos) (REESE; VAN IMPE, 2007)

Densidade relativa	Baixa	Média	Alta
k_{py} (MN/m ³)	6,8	24,4	61

Com isto, todos os pontos da curva p-y para areias encontram-se definidos.

Este procedimento que acabou de ser descrito é utilizado quando há uma interseção no ponto k entre o trecho retilíneo e o trecho parabólico. Em alguns casos, entretanto, esta interseção não ocorre. Quando isto acontecer, o trecho retilíneo inicial deve ser prolongado até intersectar outro trecho da curva p-y. Se não houver nenhum ponto de interseção, a eq. (2.42) vai representar toda a curva p-y.

Curvas p-y para argilas moles

Este método, também proposto por Reese, baseia-se em análises de resultados de ensaios de campo com estacas instrumentadas, realizadas em argilas próximas ao Lago Austin, Texas, por Matlock em 1970.

Os parâmetros necessários para o traçado da curva são a coesão não-drenada do solo (c_u), o seu peso específico (γ') e a deformação para 50% da resistência última (ϵ_{50}). Se não houver curvas tensão-deformação disponíveis para a argila em estudo, podem ser utilizados os valores de ϵ_{50} recomendados em tabelas, como a exibida na tabela (2.5).

Tabela 2.5 - Valores representativos de ϵ_{50} para argilas normalmente consolidadas (REESE; VAN IMPE, 2007)

Consistência da argila	ϵ_{50}
Mole	0,020
Média	0,010
Rija	0,005

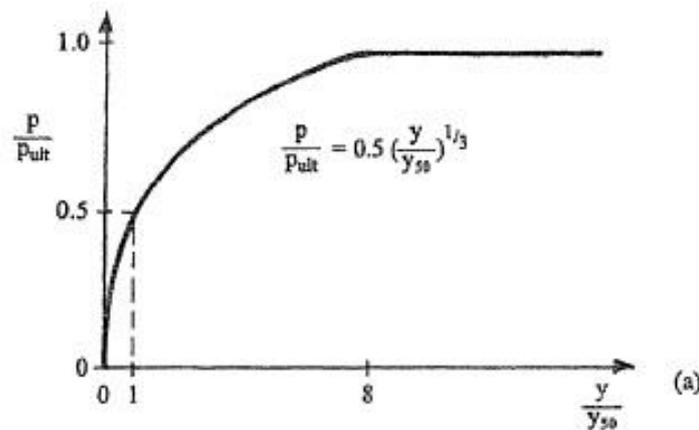


Figura 2.15 - Modelo de curva p-y para argila mole com carregamento estático (REESE; VAN IMPE, 2007)

A forma da curva p-y para argilas moles sujeitas a carga estática pode ser vista na figura (2.15). A eq. (2.43) descreve o comportamento da curva, válida até o ponto de abscissa $y = 8y_{50}$. Após este ponto, o valor de p permanece constante.

$$\frac{p}{p_u} = 0,5 \left(\frac{y}{y_{50}} \right)^{1/3} \quad (2.43)$$

Onde,

$$y_{50} = 2,5\varepsilon_{50}b \quad (2.44)$$

O valor da resistência última, p_u , é dado pelo menor dos dois valores das equações seguintes:

$$p_u = \left[3 + \frac{\gamma'}{c_u} z + \frac{J}{b} z \right] c_u b \quad (2.45)$$

$$p_u = 9c_u b \quad (2.46)$$

Onde,

J = parâmetro adimensional empírico (valor usual para argilas moles = 0,5)

b = largura da estaca

z = profundidade da superfície do terreno até a curva

3 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural tem como objetivo determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas, obtendo-se, com isso, as tensões, as deformações e os deslocamentos decorrentes dessas ações.

O processo de análise estrutural pode se dar através de diversas técnicas e modelos de cálculo. Um desses modelos, bastante significativo, é o que introduz o conceito de linearidade. De acordo com ele, uma estrutura será considerada de comportamento linear se atender aos seguintes requisitos:

- Seu material constitutivo for linear elástico;
- O equilíbrio da estrutura for satisfeito ao se considerar a estrutura não deformada (ou seja, na sua configuração original);
- Os quadrados dos deslocamentos e deformações forem desprezíveis em comparação com a unidade (ou seja, apresentar pequenas deformações).

Boa parte das estruturas de engenharia exibem um comportamento linear elástico sob cargas de serviço (GHALI, 2009), o que justifica a grande aplicação desse conceito na prática. Existem, entretanto, casos em que o material constituinte apresenta um comportamento não-linear significativo ou ainda casos em que a presença de esforços axiais combinados com a configuração deformada da estrutura geram esforços adicionais expressivos (efeitos de segunda ordem), os quais não devem ser desprezados.

Ambas as situações podem ser encontradas no estudo de estacas semienterradas, o que torna a análise não-linear uma resposta mais adequada para a representação do comportamento dessas estruturas, com o objetivo de chegar a uma previsão mais segura do conjunto.

Deve-se, portanto, lançar mão de uma análise na qual se considere a estrutura na sua configuração final de equilíbrio (chamada de *não-linearidade geométrica*, ou simplesmente NLG) e que também leve em conta a não-linearidade física (NLF) do material que a constitui (PINTO; RAMALHO, 2002).

Esses dois aspectos são de grande importância para o desenvolvimento do presente estudo, pois são a base para o desenvolvimento de diversos métodos de análise de colunas de concreto armado. Dessa forma, alguns conceitos serão abordados com mais detalhes a seguir, a fim de justificar e esclarecer os trabalhos desenvolvidos e os programas em Mathcad elaborados nesta pesquisa.

3.1 Não-linearidade Física

O comportamento de uma estrutura à flexão depende da rigidez EI , na qual E é o módulo de elasticidade do material constituinte e I é o momento de inércia da seção transversal sobre o eixo de flexão. Em algumas situações, os valores de E e I permanecem constantes para todos os níveis de esforço aos quais a estrutura se sujeita (situação de comportamento elástico linear). Mas há situações em que ambos variam devido a mudanças de esforços, seja porque o material é não-linear, seja porque o material fissurou. Em ambas as situações o concreto armado se enquadra: a sua relação tensão-deformação é não-linear e o concreto fissura à tração, tornando-se inefetivo nessas regiões (a área da seção efetiva diminui) e ocasionando uma diminuição no valor de I .

A técnica adotada neste trabalho para a consideração da não-linearidade física foi a utilização de diagramas momento-curvatura. Essa relação momento-curvatura é definida para uma seção pré-determinada, com armadura suposta conhecida e para um certo valor de força normal atuante. De posse do diagrama, a rigidez EI da estrutura é dada pela taxa de variação da curva.

Serão detalhados, a seguir, os pontos principais para a elaboração do digrama, utilizando as recomendações da NBR 6118/2014 e alguns conceitos da engenharia estrutural.

3.1.1 Considerações iniciais

O conceito base por trás da elaboração do diagrama momento-curvatura está no estudo do elemento fletido. Uma barra, quando submetida a um carregamento externo, sofre uma deformação e surgem, como consequência, tensões internas à estrutura. Com base em características geométricas e do material, é possível

estabelecer uma relação entre a curvatura da barra fletida e o momento fletor interno ocasionado pelas tensões que surgiram.

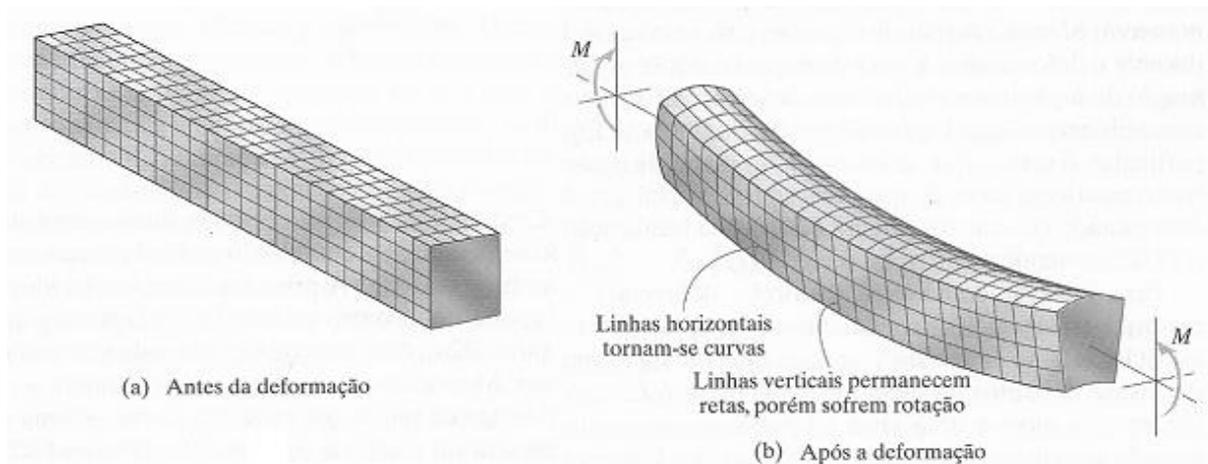


Figura 3.1 - Barra submetida à flexão (HIBBELER, 2012)

Para o estabelecimento dessas relações, que levam em conta os esforços resistentes de uma seção, algumas hipóteses básicas são consideradas, para o estado limite último:

- As seções transversais permanecem planas após as deformações do elemento (distribuição linear das deformações na seção);
- A deformação de uma fibra genérica da seção é diretamente proporcional à sua distância até a linha neutra;
- Há uma aderência perfeita entre as barras da armadura e o concreto que as envolve;
- A resistência à tração do concreto é desprezada;
- A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo proposto pela NBR 6118/2014;
- A tensão nas armaduras é obtida a partir dos diagramas tensão-deformação com os valores de cálculo definidos pela NBR 6118/2014;
- O estado-limite último (ELU) é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos pela figura (3.7), retirada da NBR 6118/2014.

3.1.2 Caracterização dos materiais

É uma tarefa difícil, em estudos analíticos, descrever efetivamente o comportamento conjunto de dois materiais tão diferentes como o concreto e o aço. Para caracterizar o comportamento deles quando submetidos a um carregamento, relaciona-se a tensão presente em uma seção transversal com a deformação correspondente sofrida por ela, formando o diagrama de tensão-deformação.

A literatura fornece vários modelos de diagramas para os dois materiais, mas como uma das propostas deste trabalho é fornecer um programa para o dimensionamento de estacas semienterradas baseado nas recomendações da norma brasileira, os modelos adotados neste trabalho, tanto para o concreto quanto para o aço, são os apresentados pela NBR-6118/2014.

3.1.2.1 Diagrama tensão-deformação para o concreto

Para análises no estado-limite último, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação idealizado mostrado na figura abaixo:

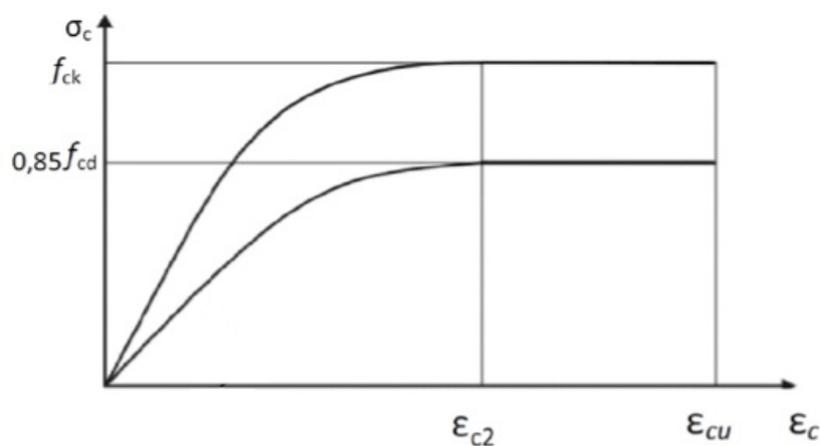


Figura 3.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto (NBR-6118/2014) - Adaptado

Os valores de tensão, para concretos de resistência até 50 MPa (consideração feita neste trabalho), são dados por:

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Os valores a serem adotados para os parâmetros ε_{c2} (deformação de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e ε_{cu} (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) para concretos de classe até C50 são:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰}$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

3.1.2.2 Diagrama tensão-deformação para o aço

O seguinte diagrama simplificado pode ser utilizado para o cálculo nos estados-limite de serviço e último, para aços com ou sem patamar de escoamento.

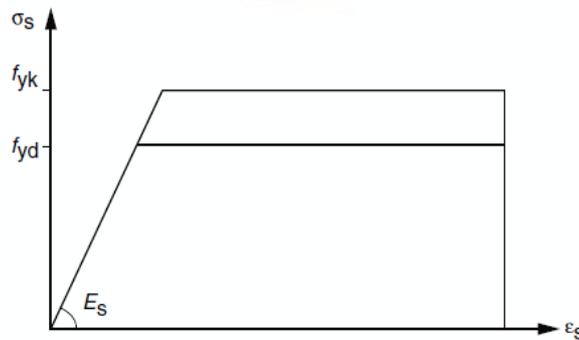


Figura 3.3 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas (NBR-6118/2014)

Os valores de tensão, para o aço, são dados por:

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \cdot \varepsilon_s & \text{Se } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{Se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.3 Curvatura

Para determinar a distribuição das tensões internas produzidas por uma flexão pura, deve-se considerar a deformação da viga.

Considerando um elemento submetido a flexão pura, como o da figura (3.4), tem-se o plano x-y de simetria, onde atuam as cargas e as deformações. As deformações decorrentes da flexão fazem com que as seções transversais mn e pq girem, uma em relação à outra, em torno de eixos normais ao plano x-y, de modo que as fibras longitudinais no lado convexo sejam alongadas (tração) e as do lado côncavo sejam encurtadas (compressão).

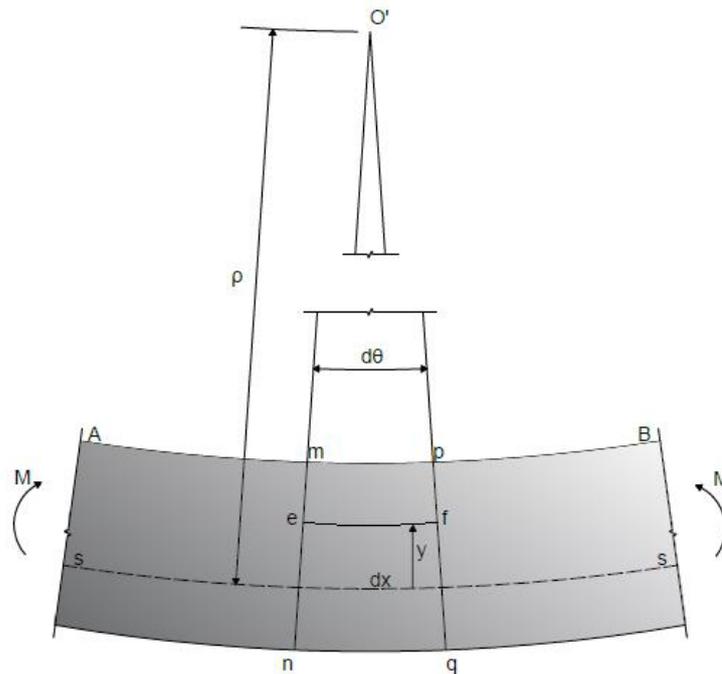


Figura 3.4 - Viga sob flexão pura

A superfície em que as fibras longitudinais não estão nem comprimidas nem tracionais é chamada de superfície neutra, e é um elemento de grande importância no dimensionamento da seção.

Da geometria da figura (3.4), obtém-se a curvatura, $1/\rho$, que será igual a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (3.3)$$

A deformação de uma fibra qualquer, ε , é dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \cdot y \quad (3.4)$$

Como pode ser visto, as deformações longitudinais, ε , são diretamente proporcionais à curvatura e à distância y da superfície neutra. A equação acima foi deduzida apenas por considerações geométricas sendo, portanto, independente das propriedades do material. Ela é válida qualquer que seja o diagrama tensão-deformação do material e serve como base para a construção do diagrama momento-curvatura.

3.1.4 Cálculo dos esforços resistentes

3.1.4.1 Material elástico-linear

Quando o material apresenta um comportamento *elástico linear*, as tensões, σ , são consideradas proporcionais às deformações, ε , relacionadas pelo módulo de elasticidade do material:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.5)$$

É possível relacionar também, a partir da teoria de vigas, a tensão com o momento aplicado. Logo, tem-se que:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} \quad (3.6)$$

A relação momento-curvatura, para este caso, é obtida a partir das equações (3.4), (3.5) e (3.6), resultando em:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3.7)$$

3.1.4.2 Material elástico não-linear

Já para os materiais de comportamento *elástico não-linear*, as tensões não são mais consideradas proporcionais à deformação. É o caso do concreto armado: a rigidez EI do concreto varia na medida em que o concreto fissura, com o aço trabalhando melhor à tração. Para esta situação, aplicam-se os diagramas de tensão-deformação tanto para o concreto, quanto para o aço.

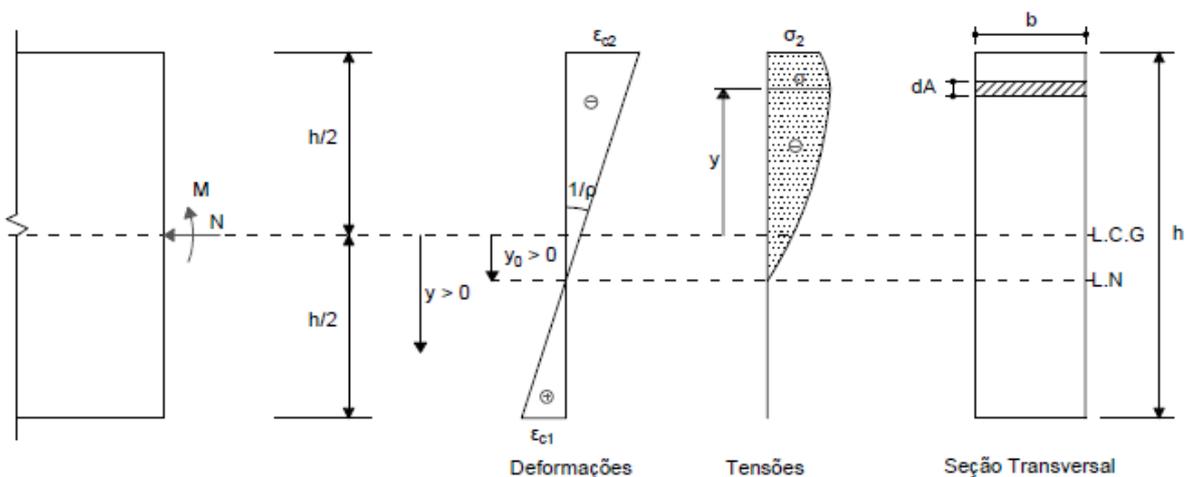


Figura 3.5 - Distribuição de tensões e deformações numa seção de material elástico não-linear

Devido à resposta não-linear dos materiais, o momento interno resistente não mais será uma função linear da curvatura, mas será dado pelo cálculo direto da resultante de tensões correspondente a momentos:

$$M_{Rd} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot y \cdot dA \quad (3.8)$$

Na equação, a curvatura estará “embutida” na determinação da tensão no integrando: de posse da curvatura, é possível obter os valores de deformação em função da distância ao eixo neutro (equação (3.4)). Com o valor de deformação, obtém-se do diagrama tensão-deformação do material o valor correspondente de tensão.

3.1.4.3 Diagrama de interação

Os esforços no concreto e no aço são determinados, como visto, a partir dos diagramas de tensão-deformação e de um estado-limite último arbitrário. A resistência final é então obtida pela integração dessas tensões.

A resistência de uma seção transversal à ação combinada de um esforço normal e um momento fletor é obtida, normalmente, a partir de um *diagrama de interação*, o qual fornece todas as combinações possíveis de momentos últimos resistentes, M_r , e esforços normais últimos resistentes, N_r .

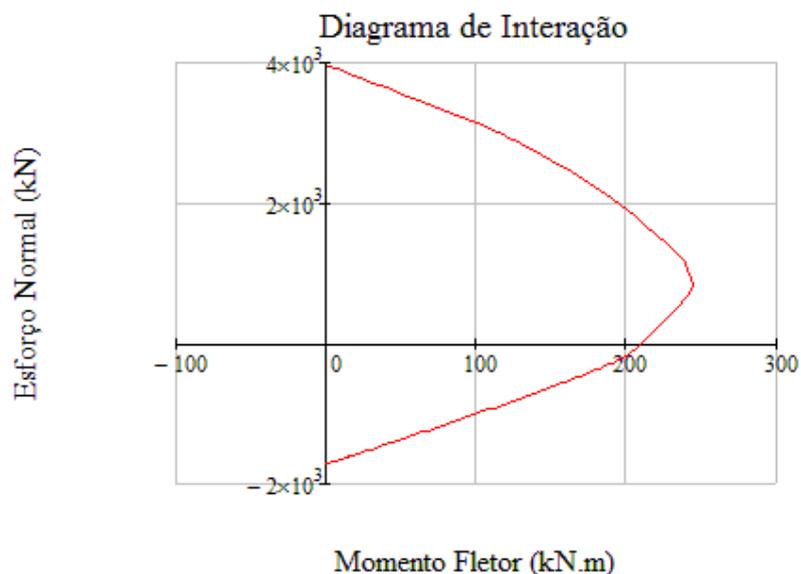


Figura 3.6 - Exemplo de diagrama de interação

- Domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$);
- Domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- Domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- Reta *b*: compressão uniforme.

As deformações das fibras extremas correspondentes ao estado limite último podem ser convenientemente expressas em função de um único parâmetro adimensional, *D* (CAVALCANTI; HOROWITZ, 2008). A deformação correspondente à fibra mais comprimida de concreto, $\varepsilon_s(D)$, e a deformação correspondente ao aço mais tracionado, $\varepsilon_i(D)$, podem ser visualizadas na tabela (3.1). Nela, é feita a correspondência entre os domínios 1 a 5 (momentos positivos) e 5' a 1' (momentos negativos) com os valores de *D*.

Tabela 3.1 - Correspondência entre os domínios do ELU e D (CAVALCANTI; HOROWITZ, 2008)

Domínio	D	y_s	$\varepsilon_s(D)\%$	y_i	$\varepsilon_i(D)\%$
1	$0 \leq D < 2$	y_{sup}	$10 - 5D$	y_{min}	10
2	$2 \leq D < 7$	y_{sup}	$1,4 - 0,7D$	y_{min}	10
3/4	$7 \leq D \leq 12$	y_{sup}	- 3,5	y_{min}	$24 - 2D$
4a	$12 < D < 13$	y_{sup}	- 3,5	y_{min}	$12\varepsilon_{4a} - \varepsilon_{4a}D$
5	$13 \leq D < 14$	y_{sup}	$- 23 + 1,5D$	y_{inf}	$26 - 2D$
5'	$14 \leq D \leq 15$	y_{sup}	$- 30 + 2D$	y_{inf}	$19 - 1,5D$
4a'	$15 < D < 16$	y_{max}	$- 16\varepsilon_{4a'} + \varepsilon_{4a'}D$	y_{inf}	- 3,5
3'/4'	$16 \leq D < 21$	y_{max}	$- 32 + 2D$	y_{inf}	- 3,5
2'	$21 \leq D < 26$	y_{max}	10	y_{inf}	$- 18,2 + 0,7D$
1'	$26 \leq D \leq 28$	y_{max}	10	y_{inf}	$- 130 + 5D$

Para a tabela (3.1), tem-se que:

y_s = distância da fibra extrema comprimida ao centro de gravidade da peça

y_i = distância da fibra extrema tracionada ao centro de gravidade da peça

Além disso, tem-se também:

$$\varepsilon_{4a} = \frac{3,5}{H} (y_{inf} - y_{min}); \quad \varepsilon_{4a'} = \frac{3,5}{H} (y_{sup} - y_{max}) \quad (3.9)$$

As variáveis da eq.(3.9) podem ser vistas na figura (3.8).

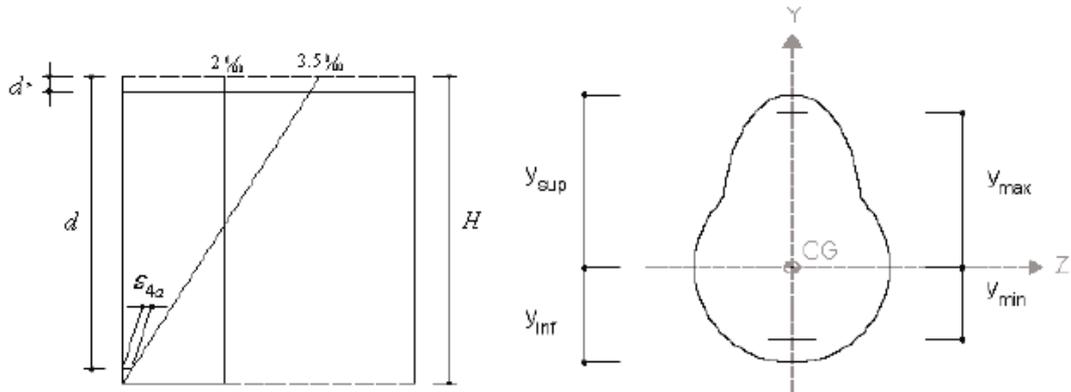


Figura 3.8 - Variáveis da expressão da equação (3.8) (CAVALCANTI; HOROWITZ, 2008)

Para a figura (3.8), tem-se que:

y_{max} = distância da armadura mais superior ao CG da peça

y_{min} = distância da armadura mais inferior ao CG da peça

3.1.5 Diagrama momento-curvatura

O diagrama momento-curvatura é obtido a partir de vários valores de curvatura e seu momento correspondente, para um determinado esforço normal. Ele é gerado, normalmente, a partir do diagrama de interação N-M (esforço normal – momento fletor).

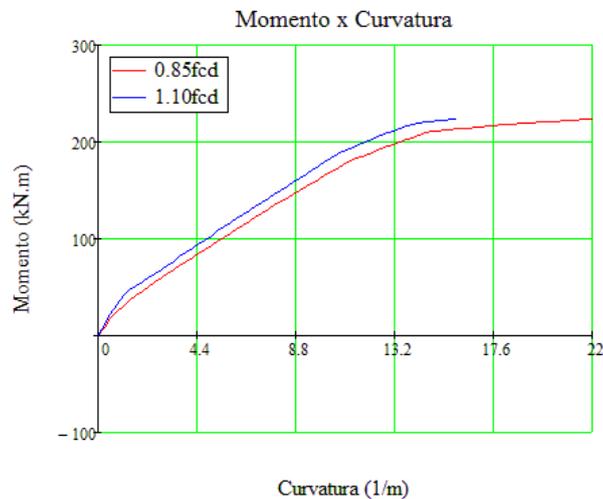


Figura 3.9 - Exemplo de curva momento-curvatura

3.1.5.1 Características do diagrama

A curva formada pelo diagrama apresenta alguns pontos característicos, que marcam a transição no comportamento do material da seção, como pode ser observado na figura abaixo.

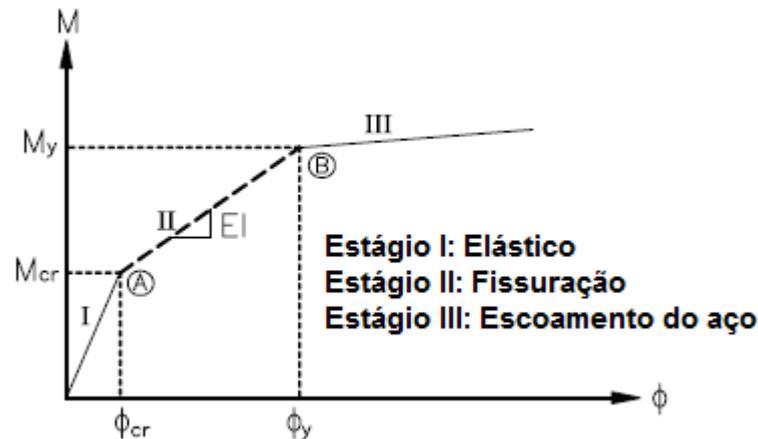


Figura 3.10 - Curva momento-curvatura idealizada para uma seção de concreto armado (KWAK; KIM, 2002) - Adaptado

Observa-se uma região linear inicial, na qual o concreto ainda não se fissurou e a relação tensão-deformação permanece linear-elástica. A partir do ponto A, o concreto começa a se fissurar e o comportamento da seção depois dele depende principalmente do comportamento do aço. Seções levemente armadas resultam em uma curva momento-curvatura praticamente linear (região II). O ponto B é o estágio em que o aço começa a escoar. A partir dele, um pequeno aumento do momento corresponde a um grande aumento de curvatura, até chegar no limite de ruptura da seção (região III).

3.1.5.2 Cálculo da rigidez

A partir do diagrama momento-curvatura, é possível obter um valor mais realista da rigidez, EI , para a seção em análise, o qual é estabelecido de acordo com as condições de carregamento-deformação da estrutura. Pelo gráfico, não é possível saber como varia isoladamente o módulo de elasticidade do material (o qual varia devido às relações não-lineares de tensão-deformação) ou o momento de inércia da

seção (o qual varia devido à fissuração), mas apenas o conjunto EI , que é o que interessa neste estudo.

Há, na norma brasileira, uma proposta de rigidez secante que pode ser obtida, a partir da relação momento-curvatura, pela reta AB , como mostra a figura (3.11).

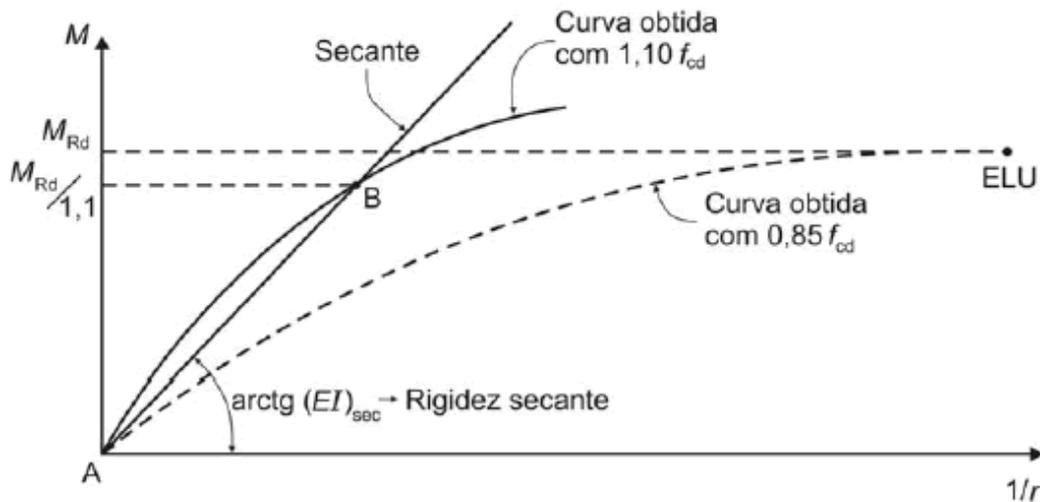


Figura 3.11 - Relação momento-curvatura (NBR-6118/2014)

No programa elaborado neste trabalho, como foi realizada uma discretização da estrutura, o valor da rigidez EI foi obtido diretamente do gráfico para o ponto em análise, não sendo necessário obter um valor de rigidez equivalente.

Note que há duas curvas presentes na figura (3.11). A curva obtida com $0,85f_{cd}$ está pontilhada para indicar que ela está presente apenas para indicar o M_{Rd} (os esforços resistentes são calculados com base nesta curva). Já a curva obtida com $1,10f_{cd}$, que utiliza a formulação de segurança, é utilizada para o cálculo das deformações. Esta é a curva efetivamente utilizada para determinar a rigidez da seção.

3.2 Não-linearidade Geométrica

A não-linearidade geométrica (NLG) ocorre quando, em uma análise estrutural, os efeitos da mudança de geometria da estrutura são considerados, fazendo com que a relação carga-deslocamento deixe de ser linear.

Para a hipótese de pequenos deslocamentos, em geral, esta não-linearidade é desconsiderada. Já para os casos em que os deslocamentos são relativamente significativos, entretanto, faz-se de grande importância considerar a não-linearidade geométrica na análise da estrutura. Isso ocorre porque, quando os deslocamentos passam a ser significativos, eles podem acentuar os problemas de instabilidade ou a interação entre o esforço axial e os momentos fletores (efeitos de segunda ordem).

Para estruturas como edifícios altos, pilares de pontes, e estacas submetidas a cargas laterais, por exemplo, a NLG tem um papel importante em seu dimensionamento, pois irá gerar resultados significativamente diferentes daqueles encontrados por uma análise linear. A consideração da NLG, portanto, irá contribuir para um dimensionamento mais seguro da estrutura.

A não-linearidade geométrica tem origem na teoria da elasticidade, onde as equações de equilíbrio são escritas utilizando-se a configuração deformada da estrutura e as relações deformações vs. deslocamento, incluindo-se nelas termos não-lineares (KHOURI, 2001).

A consideração da não-linearidade geométrica, neste trabalho, deu-se através das equações de equilíbrio utilizadas, vistas no capítulo 2, que se baseiam na teoria da elasticidade. Além disso, um cálculo iterativo também foi utilizado no programa elaborado, o qual relaciona as mudanças nos deslocamentos com mudanças na rigidez das seções.

4 PROGRAMA COMPUTACIONAL

Um dos objetivos deste trabalho foi desenvolver um programa computacional para o cálculo dos deslocamentos laterais e dos momentos fletores de uma estaca semienterrada sujeita a esforços (carga axial, carga lateral e momento aplicado) em seu topo, considerando tanto a não-linearidade física quanto a não-linearidade geométrica da estrutura.

O programa foi todo desenvolvido a partir do software Mathcad (versão 14) e a sua elaboração teve como base a teoria vista nos capítulos 2 e 3. O modelo escolhido para representar o comportamento do solo foi o Modelo de Winkler, o qual considera o solo como um meio linear elástico.

Para realizar a análise da estaca, foram desenvolvidos dois programas: um principal e um auxiliar. O programa auxiliar gera a curva de momento-curvatura para uma dada seção transversal e um dado valor de carga axial. Os dados desse diagrama são exportados pelo programa auxiliar em arquivo de texto (.txt), os quais são lidos pelo programa principal. Este, por sua vez, calcula os deslocamentos laterais e os momentos fletores sofridos pela estaca.

Um esquema simplificado do funcionamento destes dois programas será comentado a seguir. A estrutura completa dos programas pode ser vista nos Apêndices A e B.

4.1 Programa Auxiliar

Algoritmo utilizado para o traçado do diagrama momento-curvatura:

- 1) Entrada de dados (propriedades da seção transversal, do concreto e da armação, além da carga axial aplicada);
- 2) Cálculo das deformações na seção

- a. Definição da deformação específica ao longo da seção

$$\varepsilon(\varepsilon_0, \varphi, y) = \varepsilon_0 + \varphi \cdot y$$

- b. Definição dos estados-limite através do parâmetro D

$$\varepsilon_{sup}(D) = \text{deformação da fibra superior da seção}$$

$\varepsilon_{inf}(D) = \text{deformação da fibra inferior da seção}$

- c. Definição da altura comprimida (y_{sup}) ou tracionada (y_{inf})
 - d. Cálculo da deformação ao longo da altura da seção (um valor de deformação é dado em função da altura y e do estado-limite, ou seja, do parâmetro D)
- 3) Definição das tensões
 - a. Definição da tensão no concreto, σ_{cd} , a partir da figura (3.2)
 - b. Definição da tensão no aço, σ_{sd} , a partir da figura (3.3)
 - 4) Definição dos esforços resistentes na seção
 - a. Definição da largura da seção em função da altura ($b(y)$)
 - b. Cálculo do esforço normal, N_r , em função do parâmetro D
 - c. Cálculo do momento fletor, M_r , em função do parâmetro D
 - 5) Traçado do diagrama de interação (cálculo do par N_r - M_r para cada um dos estados-limite);
 - 6) Análise dos valores máximos suportados pela seção com base no diagrama de interação gerado
 - a. Carga máxima, $N_{Rd_m\acute{a}x}$
 - b. Momento fletor máximo, $M_{Rd_m\acute{a}x}$
 - c. Curvatura máxima, $\varphi_{m\acute{a}x}$
 - 7) Definição de duas curvas para a tensão no concreto

Curva 1 $\rightarrow f_{c_1} = 0,85f_{cd}$ (*despreza tração*)

Curva 2 $\rightarrow f_{c_2} = 1,10f_{cd}$ (*considera tração*)
 - 8) Definição do esforço normal resistente em função de ε_0 e φ para cada uma das duas curvas;
 - 9) Definição do momento fletor resistente em função de ε_0 e φ para cada uma das duas curvas;
 - 10) Determinação da posição da linha neutra
 - a. Variam-se os valores de φ de zero até $\varphi_{m\acute{a}x}$
 - b. Para cada valor de φ calcula-se o valor de ε_0 correspondente tal que:

$$N_{Rd} = N_{Sd} \quad (\textit{curva 1})$$

$$\frac{N_{Rd}}{1,10} = N_{Sd} \quad (\textit{curva 2})$$
 - 11) Traçado do diagrama momento-curvatura
 - a. Variam-se os valores de φ de zero até $\varphi_{m\acute{a}x}$

- b. Para cada valor de φ , com seu respectivo valor de ε_0 (calculado no item anterior), calcula-se o valor de momento resistente para a seção

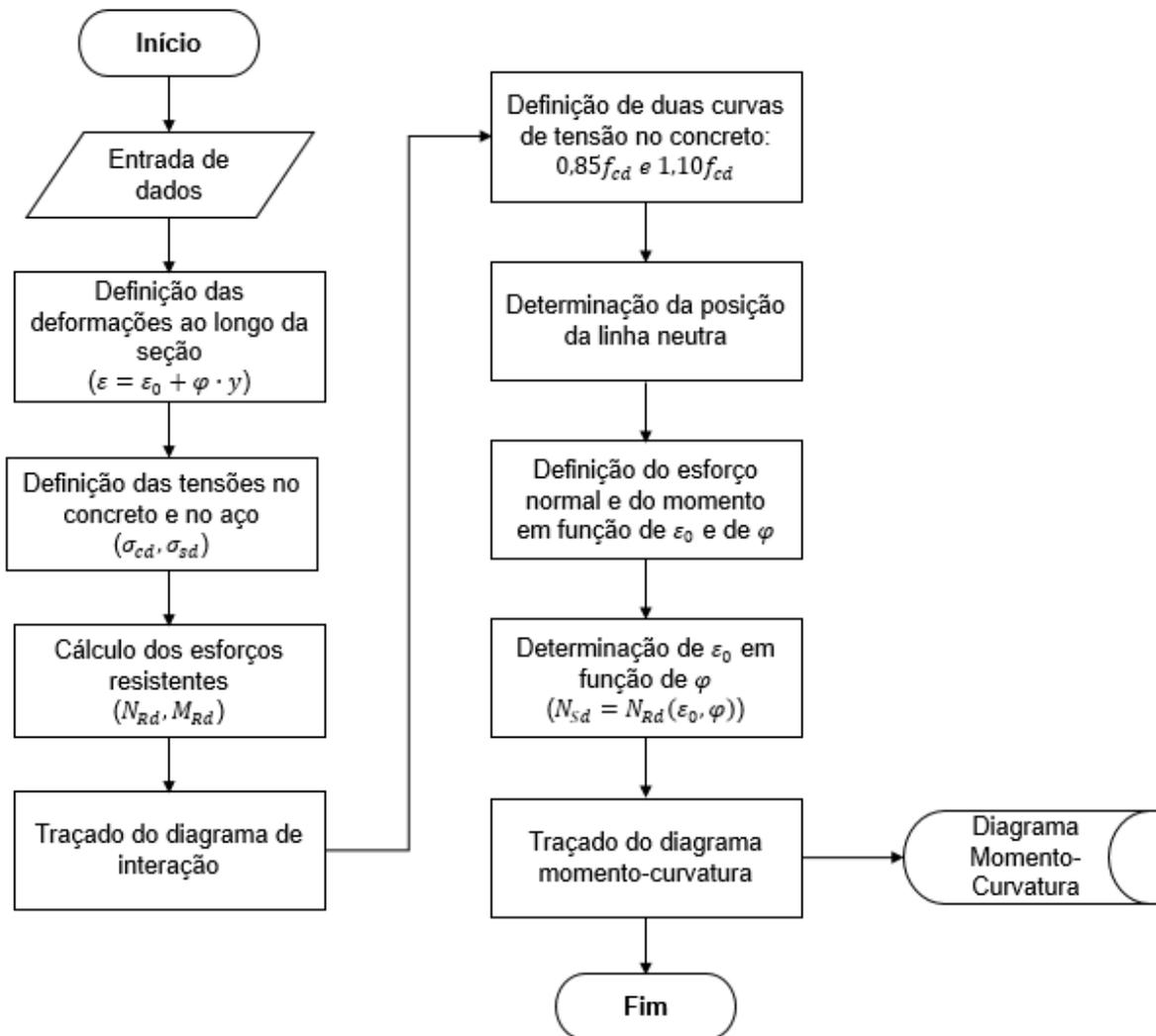


Figura 4.1 - Fluxograma do programa auxiliar

4.2 Programa Principal

Algoritmo utilizado para o cálculo dos deslocamentos de uma estaca semienterrada:

- 1) Entrada de dados (propriedades do concreto, da seção transversal e do solo, comprimento livre e enterrado da estaca e cargas aplicadas);
- 2) Discretização da estaca:

vetor z = alturas dos nós

- 3) Definição do vetor dependente das condições de contorno ($\{v\}$);
- 4) Definição da matriz dos coeficientes ($[M_{coef}]$);
- 5) Cálculo dos deslocamentos ($\{y\}$) a partir do sistema:

$$[M_{coef}]\{y\} = \{v\}$$

- 6) Cálculo dos momentos fletores, a partir de um valor constante de rigidez (estabelecido a partir dos dados iniciais):

$$MF = -EI \frac{d^2y}{dz^2}$$

- 7) Importação da curva momento-curvatura;
- 8) Determinação do momento de fissuração (M_r);
- 9) Definição da rigidez EI correspondente a cada nó
 - a. Para cada valor de momento fletor calculado na análise inicial, encontra-se a curvatura correspondente no diagrama momento-curvatura.
 - b. Calcula-se uma rigidez inicial que corresponde à situação do concreto não fissurado:

$$EI_{ini} = \frac{M_r}{\varphi_{Mr}}, \quad \varphi_{Mr} = \text{curvatura correspondente a } M_r$$

- c. Define-se o valor da rigidez em cada profundidade em função do momento neste ponto

$$\text{Se } MF_i \geq M_r \rightarrow EI_i = \frac{MF_i}{\varphi_i}$$

$$\text{Se } MF_i < M_r \rightarrow EI_i = EI_{ini}$$

- 10) Utilização de um processo iterativo para determinar novos deslocamentos com base nos valores de rigidez calculados:
 - a. Definição de uma tolerância para o erro ($Tol = 10^{-4}$)
 - b. Define-se a rigidez na estaca como a rigidez calculada no passo anterior
 - c. Zera-se a matriz M e o vetor v
 - d. Preenche-se a matriz M e o vetor v considerando os novos valores de rigidez, que variam para cada nó
 - e. Soluciona-se o sistema ($[M]\{y\} = \{v\}$)
 - f. Calculam-se novos valores de momento fletor com os deslocamentos encontrados no item anterior
 - g. A variável δ recebe o deslocamento no topo da estaca
 - h. A variável ξ recebe o erro relativo entre a iteração atual e a anterior

- i. Início do loop: enquanto $\xi > Tol$
 - i. Atualização do vetor EI a partir dos valores de momento fletor calculados na iteração anterior (mesmo procedimento do passo 9).
 - ii. Repete os itens c até h deste passo
 - j. Fim do loop: os valores finais de deslocamento e momento fletor foram calculados
- 11) Geração dos gráficos (*Momento Fletor x Profundidade e Deslocamento Lateral x Profundidade*).

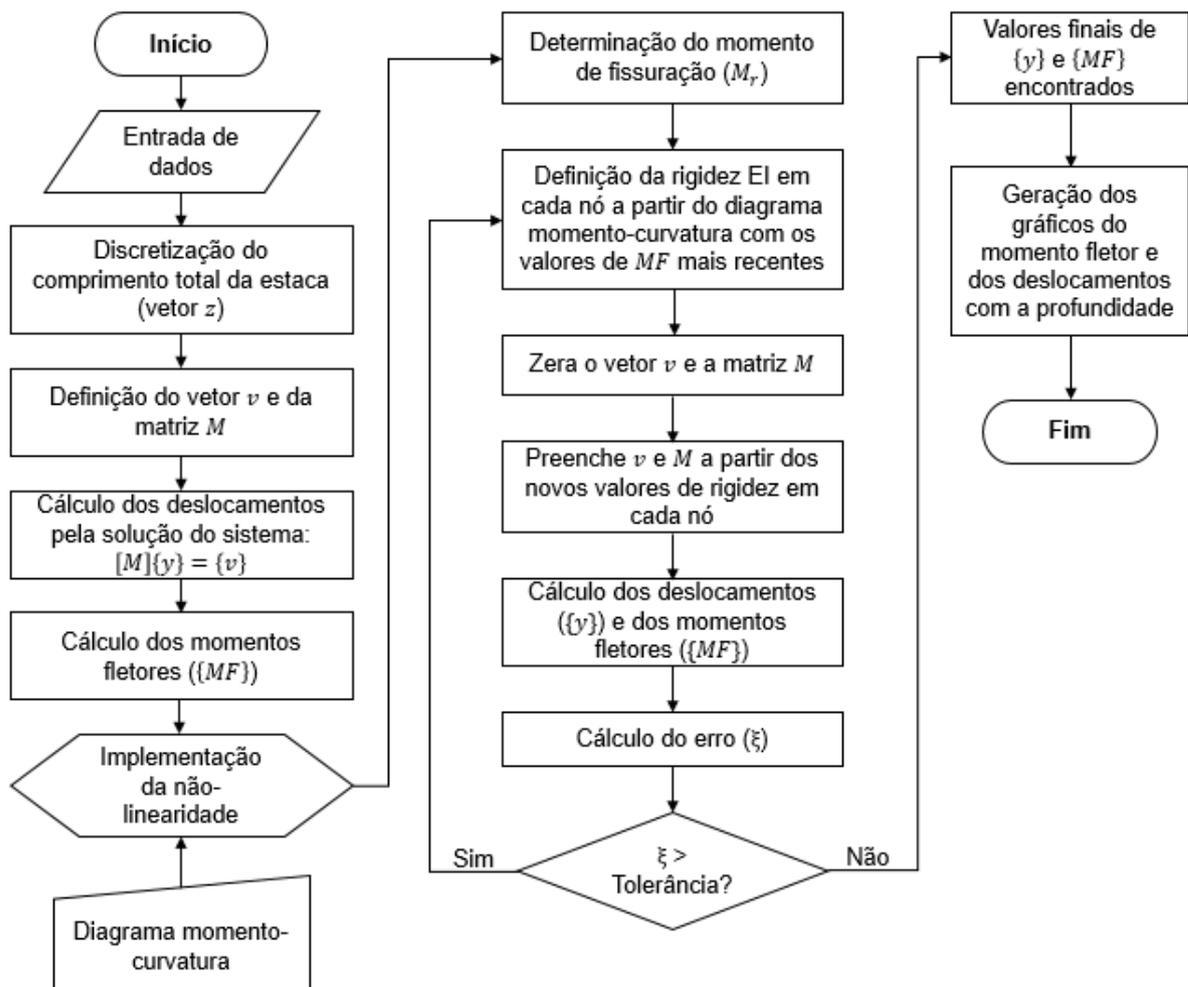


Figura 4.2 - Fluxograma do programa principal

5 MODELOS DE ANÁLISE

O objetivo deste capítulo é apresentar os quatro modelos de análise propostos neste trabalho, organizados em diferentes níveis de aproximação (NdA), partindo de um modelo inicial, com maiores simplificações, até um modelo final, com uma modelagem mais realista. Os quatro modelos estão organizados da seguinte forma:

- NdA I – Curvatura aproximada;
- NdA II – Utilização do programa SAP2000;
- NdA III – Programa desenvolvido;
- NdA IV – Utilização do programa FB-Multiplier.

Cada um destes modelos será apresentado de maneira aplicada a dois exemplos distintos. O primeiro exemplo, que será visto neste capítulo, é o de um pilar engastado na base e livre na ponta, sem considerações de terreno, com cargas aplicadas em seu topo. O intuito deste primeiro exemplo é analisar o funcionamento dos métodos do ponto de vista estrutural, considerando apenas as não-linearidades física e geométrica do pilar.

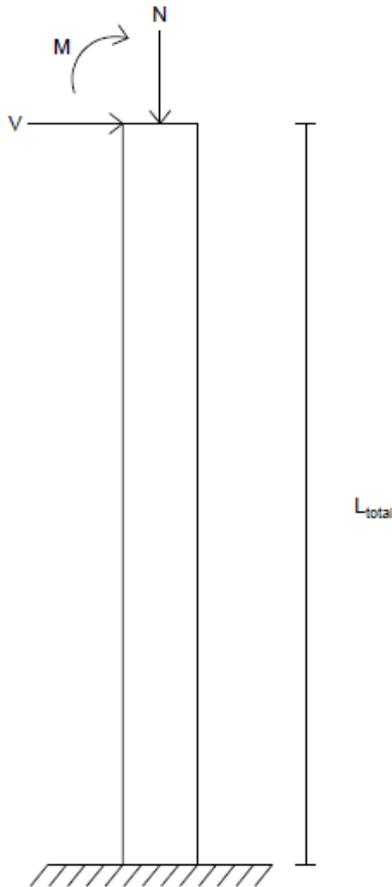
O segundo exemplo, que será visto no capítulo seguinte, é o de uma estaca semienterrada, com cargas aplicadas apenas em seu topo. Neste caso, o objetivo foi incorporar a interação solo-estrutura na análise realizada por cada modelo.

Os dados do primeiro exemplo estão descritos a seguir, juntamente com um esquema da coluna considerada (figura (5.1)).

Antes de entrar no detalhamento de cada um dos modelos de análise, é feito um comentário a respeito da formulação de segurança, indicada pela norma brasileira, que será importante na majoração das cargas para os dois níveis de aproximação finais.

Exemplo 1 – Pilar em balanço

Neste exemplo, que não considera o solo, foram utilizados os seguintes dados iniciais:



Cargas aplicadas:

$$N_k = 300kN$$

$$V_k = 30kN$$

$$M_k = 0$$

Seção transversal circular:

$$D = \text{diâmetro} = 0,40m$$

$$L_{total} = 4m$$

$$d' = \text{recobrimento} = 3,5cm$$

Propriedades do concreto:

$$f_{ck} = 30MPa$$

Propriedades do aço:

$$f_{yk} = 500MPa$$

Figura 5.1 - Exemplo 1

5.1 Formulação de Segurança

A NBR-6118/2014, em seu item 15.3.1, quando trata das relações momento-curvatura, propõe uma formulação de segurança. De acordo com essa formulação, calculam-se os efeitos de 2ª ordem das cargas majoradas de γ_f/γ_{f3} , que posteriormente são majoradas de γ_{f3} , com $\gamma_{f3} = 1,1$.

Esta formulação de segurança pode ser entendida como uma “recompensa” por utilizar uma modelagem mais precisa (diagrama momento-curvatura) para o cálculo do principal efeito da não-linearidade física. Dessa forma, como há uma diminuição das incertezas no cálculo com o modelo mais preciso, o coeficiente de segurança utilizado para majorar as cargas pode ser um pouco menor que o habitual.

Vale destacar que, caso os materiais sejam de comportamento linear elástico, os resultados com ou sem a formulação de segurança serão iguais.

Neste trabalho, portanto, o critério para utilização da formulação de segurança foi a utilização de um método mais preciso para a análise da não-linearidade física da estrutura, que é o que ocorre nos níveis de aproximação superiores.

Nos dois níveis iniciais, a não-linearidade física é considerada apenas de maneira aproximada, logo foi descartada a utilização da formulação de segurança nestes dois modelos (utilizou-se o coeficiente padrão para majorar as cargas). Já nos dois níveis superiores, como há a consideração da não-linearidade física a partir da relação momento-curvatura, mais precisa, foi utilizada a formulação de segurança.

5.2 NdA I – Curvatura Aproximada

Para a solução do exemplo 1 por este método, foi elaborado um programa em Mathcad (*Curv_Aprox.xmcd*), que realiza o dimensionamento do pilar engastado-livre utilizando o método do pilar-padrão com curvatura aproximada, conforme propõe a NBR-6118/2014, no item 15.8.3.3.2. Este método foi escolhido por ser o de mais fácil aplicação, apesar de não poder ser aplicado sempre.

O método do pilar-padrão com curvatura aproximada pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com índice de esbeltez, λ , não superior a 90, com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. Neste método, a não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação do pilar seja senoidal, e a não-linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.

Com os esforços de projeto obtidos, a armação foi calculada com base nos diagramas de interação desenvolvidos neste trabalho, disponíveis no Apêndice C.

Aplicação ao Exemplo 1 – Pilar engastado-livre (sem reação do terreno)

Passo 1.1.1 – Dados de entrada

Os dados necessários para a aplicação do método são:

- Altura do pilar (L_t)
- Diâmetro do pilar (D)
- Resistência característica do concreto (f_{ck})
- Cargas aplicadas ao pilar (N_k , V_k e M_k)

Os valores para os esforços de cálculo foram dados a partir de um coeficiente de majoração de 1,40. Além disso, considerou-se que não serão utilizadas seções com diâmetro inferior a 19 cm (item 11.7 da NBR-6118/2014).

Para o exemplo proposto, os dados informados ao programa encontram-se na figura (5.2).

1. Dados de entrada:

Altura do pilar:	$L_t := 4$	(m)	
Diâmetro do pilar:	$D := 0.40$	(m)	
Resistência do concreto:	$f_{ck} := 30$	(MPa)	
Carga vertical aplicada:	$N_k := 300$	(kN)	$N_d := 1.40 \cdot N_k = 420$ (kN)
Carga horizontal aplicada:	$V_k := 30$	(kN)	$V_d := 1.40 \cdot V_k = 42$ (kN)
Momento aplicado:	$M_k := 0$	(kN.m)	$M_d := 1.40 \cdot M_k = 0$ (kN.m)

Figura 5.2 - Entrada de dados no programa

Passo 1.1.2 – Análise do índice de esbeltez

O índice de esbeltez é dado por:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} \quad (5.1)$$

Onde,

$L_e =$ comprimento equivalente

$i =$ raio de giração

O comprimento equivalente, para o caso de um pilar engastado-livre, será dado pelo dobro do comprimento do pilar. Já o raio de giração é calculado a partir das características geométricas da seção do pilar (área da seção e momento de inércia).

$$L_e = 2L_t \quad (5.2)$$

$$i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \quad (5.3)$$

I_c = momento de inércia da seção

A_c = área da seção

Como comentado anteriormente, este método só poderá ser aplicado para pilares com índice de esbeltez não superior a 90.

O valor encontrado, neste primeiro exemplo, para o índice de esbeltez foi:

$$\lambda = 80$$

O valor está, portanto, dentro do limite permitido para a utilização do método, podendo-se proceder com os cálculos.

Passo 1.1.3 – Cálculo do momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo de 1ª ordem é dado por:

$$M_{1d,min} = N_d(0,015 + 0,03h) \quad (5.4)$$

Onde,

N_d = força normal solicitante de cálculo

h = altura total da seção transversal na direção considerada, em metros (m)

A consideração do momento mínimo de 1ª ordem, em estruturas reticuladas, substitui o efeito das imperfeições locais nos pilares. Em tais estruturas, admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo. Devem ser acrescentados, a este momento, os momentos de 2ª ordem que serão definidos.

O valor calculado do momento fletor mínimo de 1ª ordem, para o exemplo, foi:

$$M_{1d,min} = 11,34kN.m$$

Passo 1.1.4 – Cálculo da esbeltez limite

Os esforços locais de 2ª ordem podem ser desprezados quando o índice de esbeltez, λ , for menor que o valor-limite λ_1 , calculado pela expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad \therefore \quad 35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad (5.5)$$

Onde,

$e_1 =$ excentricidade de 1ª ordem

A excentricidade de 1ª ordem é calculada por:

$$e_1 = \frac{M_d}{N_d} \quad (5.6)$$

O valor de α_b , para pilares em balanço, é dado por:

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \frac{M_C}{M_A} \quad \therefore \quad 1,0 \geq \alpha_b \geq 0,85 \quad (5.7)$$

Onde,

$M_A =$ momento de 1ª ordem no engaste

$M_B =$ momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço

Neste trabalho, contudo, a fim de realizar uma análise a favor da segurança, foi utilizado o valor de α_b igual a 1.

O valor encontrado para a esbeltez limite foi:

$$\lambda_1 = 35$$

Como λ foi superior a λ_1 , os esforços locais de 2ª ordem devem ser considerados. Logo, aplica-se o método da curvatura aproximada.

Passo 1.1.5 – Cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem

Neste passo, aplica-se o método da curvatura aproximada para calcular o momento total máximo no pilar, que é dado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{L_e^2}{10} \frac{1}{r} \quad \therefore \quad M_{d,tot} \geq M_{1d,A} \quad (5.8)$$

Onde,

$M_{1d,A}$ = valor de cálculo de 1ª ordem do momento M_A

$1/r$ = curvatura na seção crítica

A curvatura na seção crítica é calculada pela expressão aproximada:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (5.9)$$

A força normal adimensional, v , é dada por:

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad (5.10)$$

Onde,

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto

O momento final de projeto, considerando os efeitos de 2ª ordem, calculado foi:

$$M_{d,tot} = 202 \text{ kN.m}$$

Passo 1.1.6 – Deslocamento no topo livre do pilar

Este passo não influencia no cálculo da armação, mas fornece uma importante informação sobre a estrutura: o seu deslocamento máximo. O deslocamento na extremidade livre do pilar, para este método, pode ser obtido diretamente da eq.(5.8), que utiliza as excentricidades de 1ª e 2ª ordem.

$$M_{2d,A} = N_d \frac{L_e^2}{10} \frac{1}{r} = N_d \cdot \delta_p \quad (5.11)$$

Onde,

δ_p = deslocamento lateral no topo do pilar

Para o exemplo, temos o seguinte resultado:

$$\delta_p = 8cm$$

Passo 1.1.7 – Dimensionamento da armação

Para determinar a área de aço necessária, foi utilizado um outro programa em Mathcad (*Calc_As.xmcd*), elaborado com base no diagrama de interação. Neste programa, são inseridas as seguintes informações:

- Diâmetro da seção transversal ($D = 0,40m$);
- Recobrimento ($d' = 0,035m$);
- Resistência do concreto ($f_{ck} = 30MPa$);
- Resistência do aço ($f_{yk} = 500MPa$);
- Esforços solicitantes de cálculo ($N_d = 420kN \therefore M_{d,tot} = 202kN.m$);
- Número de barras ($n_b = 8$).

A informação adicional, neste passo, foi apenas o número de barras desejado. Como estipulação inicial, escolheu-se o valor de 8 barras. O valor resultante, dado pelo programa, foi:

$$A_s = 26,78cm^2$$

Dessa forma, para atender à área de aço calculada, optou-se pela bitola de 25mm para as 8 barras da seção, resultando numa área total de 39,27 cm².

$$A_{s,tot} = 39,27cm^2$$

5.3 NdA II – Utilização do Programa SAP2000

Para o segundo nível de aproximação, propõe-se a utilização de um programa comercial de análise tridimensional de estruturas que, no caso deste trabalho, foi o SAP2000 (versão 16).

O refinamento deste método está na incorporação da não-linearidade geométrica na análise da estrutura de maneira mais aprofundada, que é considerada

apenas de maneira aproximada pela norma no método do pilar-padrão com curvatura aproximada.

A não-linearidade física é considerada de maneira aproximada a partir de um coeficiente, aplicado ao momento de inércia bruto da seção, que simula a diminuição do momento de inércia que ocorre na seção do concreto quando ele é fissurado.

Para chegar ao valor desse coeficiente, vários exemplos foram testados no SAP e comparados aos resultados obtidos com o Mathcad. Uma breve descrição dos exemplos de teste e seus resultados pode ser vista nos Apêndices D e E.

Aplicação ao Exemplo 1 – Pilar engastado-livre (sem reação do terreno)

Passo 1.2.1 – Escolha do modelo

Neste passo, o usuário deve escolher o modelo para representação que achar mais conveniente ou estiver mais acostumado, além de escolher as unidades-padrão que preferir. Por conveniência, as unidades selecionadas para resolução deste exemplo foram kN, m e C.

Passo 1.2.2 – Dados do material

No programa, foi criado um novo material com as características do exemplo. Os valores inseridos no programa podem ser vistos na figura (5.3).

O módulo de elasticidade foi adotado com base na seguinte equação, baseada na NBR-6118/2014.

$$E_c = 5600\sqrt{f_{ck}} \quad \therefore \quad f_{ck} \text{ em MPa} \quad (5.12)$$

Aplicando a equação para o f_{ck} do problema, que é de 30MPa, tem-se:

$$E_c = 30,67GPa$$

Já para o peso por unidade de volume, foi utilizado o valor usual para o concreto, que é de 24kN/m³.

Material Property Data

General Data

Material Name and Display Color: Concrete ■

Material Type: Concrete

Material Notes:

Weight and Mass

Weight per Unit Volume: 24

Mass per Unit Volume: 2,4473

Units: KN, m, C

Isotropic Property Data

Modulus of Elasticity, E: 30670000

Poisson's Ratio, U: 0,2

Coefficient of Thermal Expansion, A: 9,900E-06

Shear Modulus, G: 12779167

Other Properties for Concrete Materials

Specified Concrete Compressive Strength, f_c: 30000

Lightweight Concrete

Shear Strength Reduction Factor:

Switch To Advanced Property Display

Figura 5.3 - Valores inseridos no programa para o material concreto

Passo 1.2.3 – Definição da seção transversal

Para definir a seção transversal da estrutura no programa, optou-se por definir uma nova seção com a aba “Concrete” e selecionar a seção circular na janela “Add Frame Section Property” (figura (5.4)).

Na nova janela, foi inserido o diâmetro ($D=0,40\text{m}$) e atribuído o material (“Concrete”) que foi criado no passo anterior. Dessa forma, o programa calcula automaticamente as demais propriedades geométricas da seção transversal.

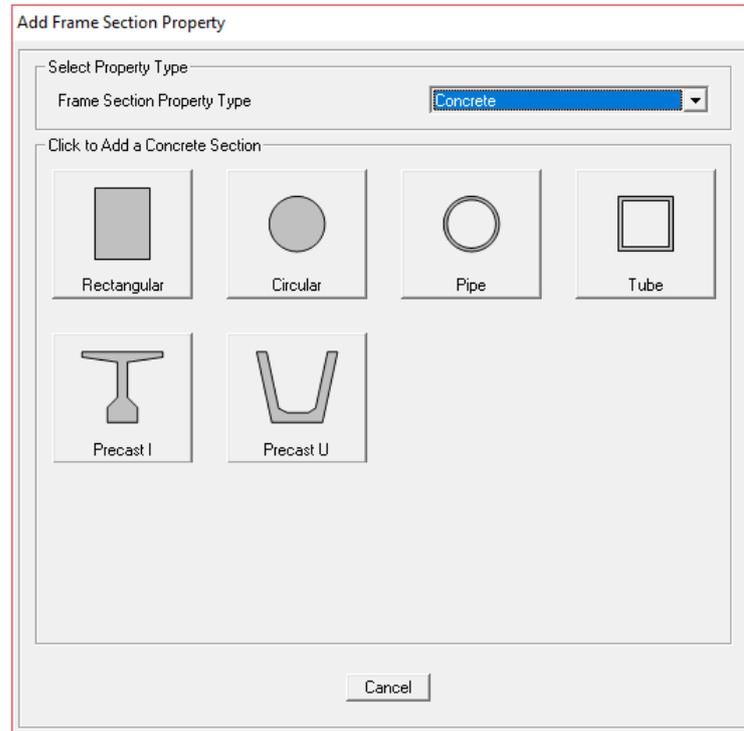


Figura 5.4 - Edição da seção transversal

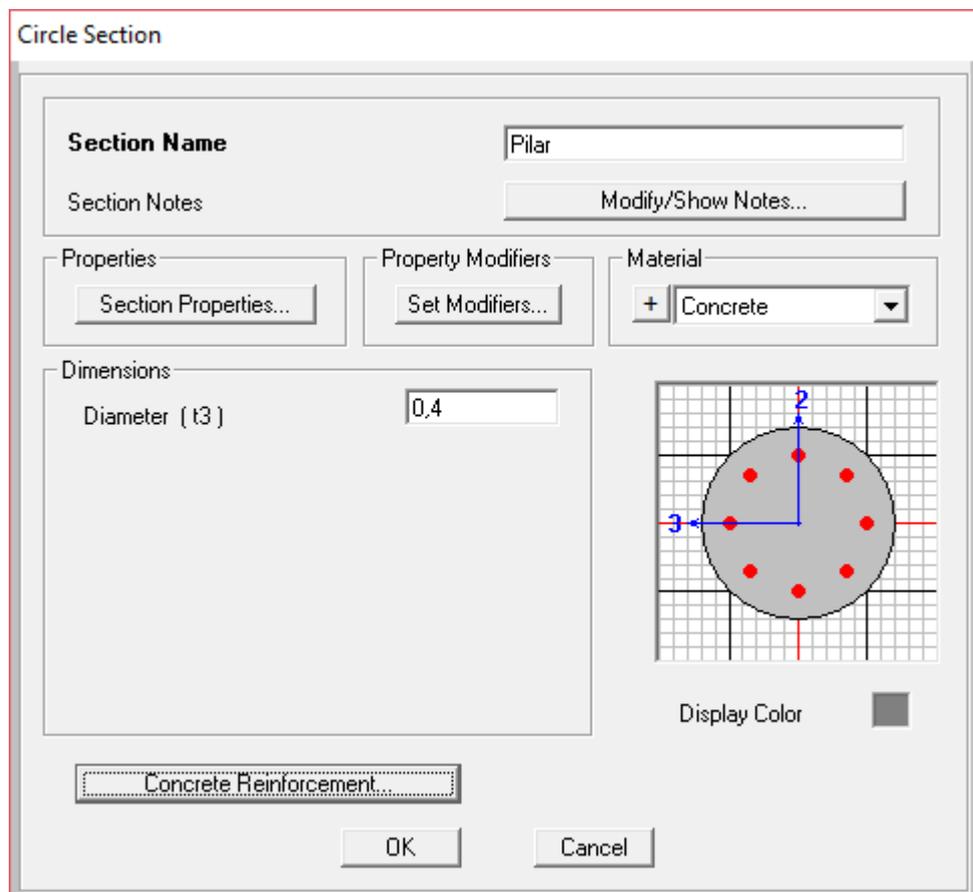


Figura 5.5 - Propriedades da seção transversal

Neste passo, uma importante modificação deve ser feita: é necessário multiplicar o momento de inércia da seção por um certo valor, reduzindo-o, a fim de simular a não-linearidade física da estrutura.

A partir dos exemplos testados neste trabalho, chegou-se num coeficiente de 50% para o momento de inércia bruto, o qual resultaria num valor adequado para simular a diminuição do momento de inércia na seção do concreto fissurado. Há, na literatura, diversos trabalhos com valores sugeridos de coeficientes para vigas e para colunas. Em um desses trabalhos pesquisados, o coeficiente utilizado para uma estaca de concreto semienterrada (seção retangular), calculado com base no código americano, ACI 318, foi de 40% (KUMAR; KARUPPAIAH; PARAMESWARAN, 2007).

$$I_{efetivo} = 0,5 \cdot I_{bruto} \quad (5.13)$$

Para inserir este coeficiente no programa, utilizou-se a opção “Set Modifiers...” na janela da figura (5.6).

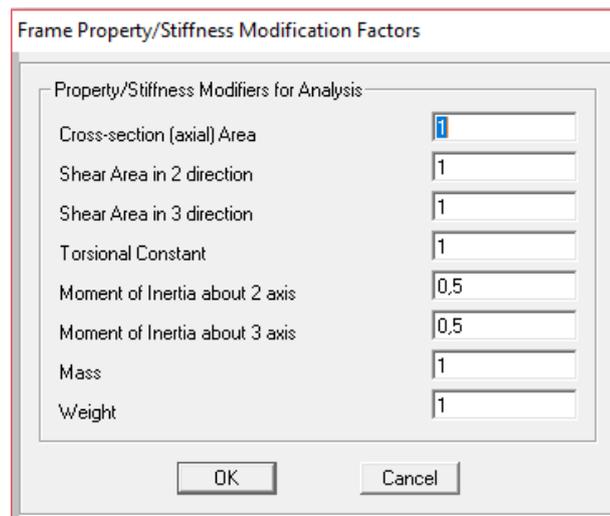


Figura 5.6 - Alteração do coeficiente do momento de inércia

Passo 1.2.4 – Desenho da estrutura

A estrutura é representada no programa por meio de barras, as quais serão desenhadas utilizando-se as linhas de grade como guia. Para o exemplo, a estrutura deve ter uma altura total de 4 metros e estar engastada em sua base e livre em seu topo.

É interessante dividir a estrutura em barras menores (uma barra para cada metro, por exemplo), para aumentar a discretização da análise e obter os valores calculados nos novos nós que surgem.

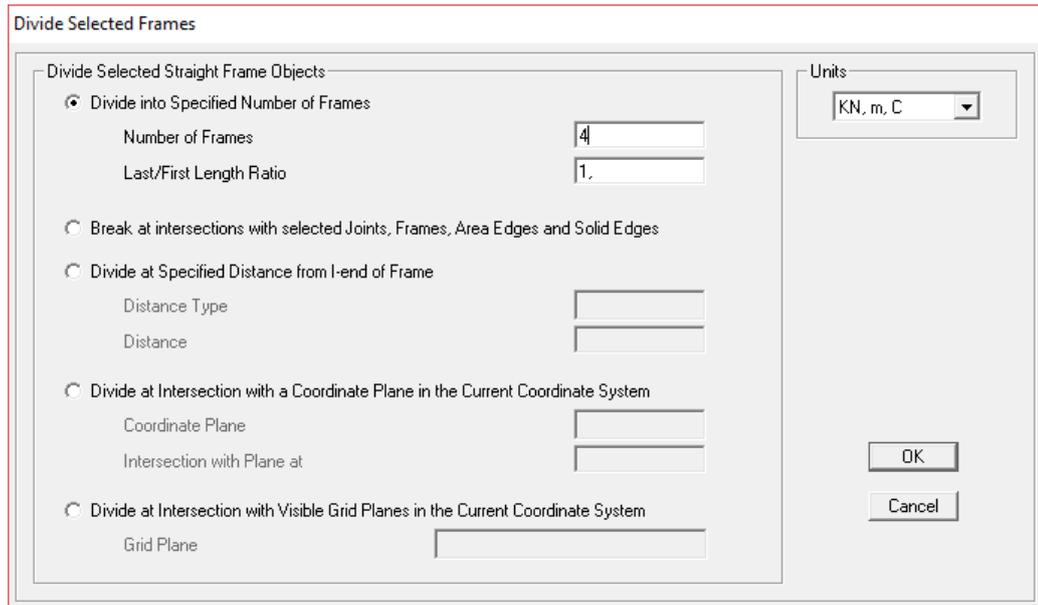


Figura 5.7 - Divisão do pilar em 4 barras

Neste passo, deve-se também atribuir às barras a seção transversal definida no passo 1.2.3.

Passo 1.2.5 – Definição do carregamento

Para definir as cargas aplicadas à estrutura, deve-se primeiramente criar um carregamento que, neste exemplo, recebeu o nome de q1 e não considerou o peso próprio da estrutura (figura (5.8)).

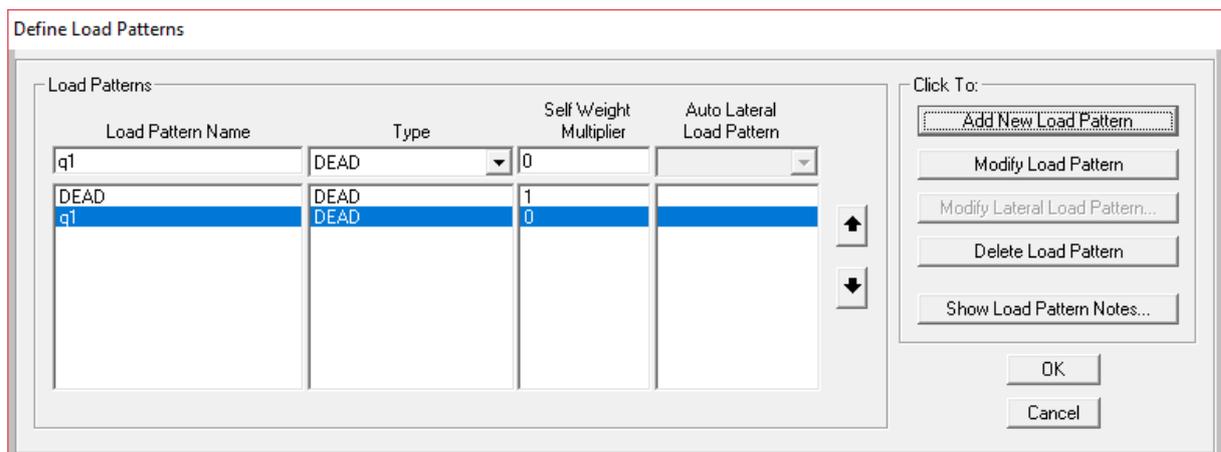


Figura 5.8 - Criação do carregamento q1

Para aplicar as cargas na estrutura, basta selecionar o nó em que ela será aplicada (que, neste exemplo, é a ponta livre do pilar) e inserir os valores desejados de força e momento nas direções correspondentes. Para este exemplo, temos:

Field	Value
Load Pattern Name	q1
Units	KN, m, C
Coordinate System	GLOBAL
Force Global X	42
Force Global Y	0
Force Global Z	-420
Moment about Global X	0
Moment about Global Y	0
Moment about Global Z	0
Options (Selected)	Replace Existing Loads

Figura 5.9 - Valores do exemplo 1 inseridos para o carregamento q1

Note que os valores inseridos foram os valores de serviço multiplicados por 1,4. A estrutura resultante, com as cargas, é mostrada na figura (5.10).

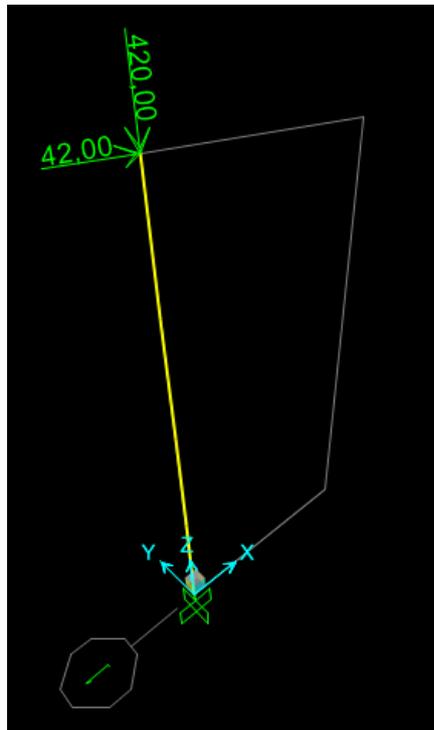


Figura 5.10 - Estaca com as cargas aplicadas

Antes de prosseguir com o processamento do programa, ainda é necessário configurar o carregamento para a análise não-linear. Para tal, basta ir na aba “Define > Load Cases...”, escolher o carregamento criado (q1) na lista que irá aparecer e clicar em “Modify/Show Load Case...”.

Na janela seguinte, depois de conferir se o carregamento está correto, deve-se seleccionar a opção “Nonlinear” na seção “Analysis Type” e a opção “P-Delta” na seção “Geometric Nonlinearity Parameters” (figura (5.11)). Esta opção, para o exemplo aqui trabalhado, apresentou os mesmos resultados que a opção “P-Delta plus Large Displacements”.

Load Case Data - Nonlinear Static

Load Case Name: q1 [Set Def Name] [Modify/Show...]

Notes: [Modify/Show...]

Load Case Type: Static [Design...]

Initial Conditions:

- Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State
- Continue from State at End of Nonlinear Case []

Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Analysis Type:

- Linear
- Nonlinear
- Nonlinear Staged Construction

Modal Load Case:

All Modal Loads Applied Use Modes from Case: MODAL []

Geometric Nonlinearity Parameters:

- None
- P-Delta
- P-Delta plus Large Displacements

Mass Source: Previous []

Loads Applied:

Load Type	Load Name	Scale Factor
Load Pattern	q1	1.
Load Pattern	q1	1.

[Add] [Modify] [Delete]

Other Parameters:

Load Application: Full Load [Modify/Show...]

Results Saved: Final State Only [Modify/Show...]

Nonlinear Parameters: Default [Modify/Show...]

[OK] [Cancel]

Figura 5.11 - Definição da análise não-linear P-Delta

Ao final deste processo, deve-se salvar o arquivo para proceder com a análise do exemplo construído.

Passo 1.2.6 – Processamento da análise

Deve-se proceder com o processamento da estrutura pelo programa.

Passo 1.2.7 – Exibição dos resultados

Os momentos obtidos pelo programa podem ser vistos na figura (5.12). O valor máximo de momento, já considerando a não-linearidade geométrica, foi de 190,74 kN.m. Já o deslocamento no topo do pilar pode ser visto na figura (5.13), com um valor de 5,42 cm.

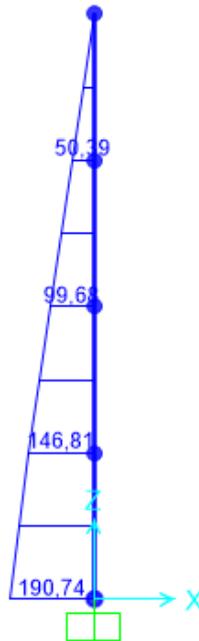


Figura 5.12 - Diagrama de momentos fletores resultante (SAP2000)

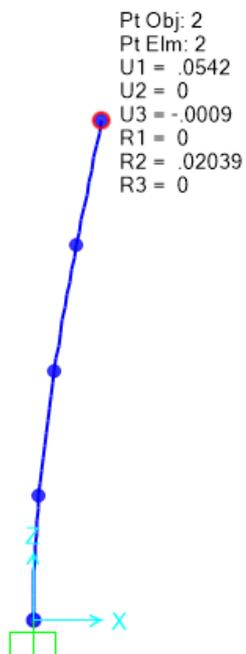


Figura 5.13 - Deslocamento lateral resultante (SAP2000)

Passo 1.2.8 – Cálculo da Armação

A área de aço foi calculada da mesma forma que o passo 1.1.7, com a diferença apenas do valor do momento fletor utilizado, que foi o obtido por este método (191 kN.m). O resultado obtido foi:

$$A_s = 24,34\text{cm}^2$$

Como o valor foi próximo, foram mantidas as 8 barras de aço de 25 mm de diâmetro.

5.4 NdA III – Programa Desenvolvido

No desenvolvimento deste trabalho, foi elaborado um programa em Mathcad para a determinação dos deslocamentos e esforços resultantes em uma estrutura de uma estaca semienterrada, considerando tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade física.

A elaboração deste programa teve como base a equação da viga sobre base elástica, como visto no capítulo 2, que incorpora os efeitos de segunda ordem decorrentes da carga axial (não-linearidade geométrica). Para a consideração da não-linearidade física da estrutura, foi elaborado um programa auxiliar, também em Mathcad, que fornece o diagrama momento-curvatura em arquivos de texto (.txt), que são lidos pelo programa principal. De posse do diagrama momento-curvatura, é possível obter valores de rigidez correspondentes às deformações sofridas pela estrutura deslocada. Assim, foi implementado um processo iterativo no programa para a atualização dos valores de rigidez adequados e, finalmente, para a determinação do deslocamento total e dos esforços resultantes.

Para a solução das equações diferenciais utilizadas por este método, fez-se uso do Método das Diferenças Finitas. No capítulo 4, como visto, há um esquema sobre o funcionamento desses dois programas e nos Apêndices A e B a estrutura completa deles pode ser encontrada.

Aplicação ao Exemplo 1 – Pilar engastado-livre (sem reação do terreno)

Passo 1.3.1 – Traçado do diagrama momento-curvatura

Para que o programa auxiliar elaborado trace o diagrama momento-curvatura (*Calc_MomCurv_Circular.xmcd*), basta informar os dados de entrada solicitados, que são os seguintes:

- Diâmetro externo da seção transversal (D_e);
- Espessura da parede (esp) – caso a seção seja vazada;
- Resistência à compressão do concreto (f_{ck});
- Módulo de deformação tangente inicial (E_{ci});
- Coeficiente de ponderação do concreto (γ_c);
- Número de barras de aço CA-50 (n_{barras});
- Diâmetro da barra (d_i);
- Resistência do aço (f_{yk});
- Módulo de elasticidade do aço (E_s);
- Coeficiente de ponderação do aço (γ_s);
- Cobrimento da armação (cob);
- Carga axial aplicada (N_s).

Para o exemplo em análise, têm-se os seguintes valores inseridos no programa:

1 - Dados de Entrada

1.1 - Propriedades da seção transversal:

Diâmetro externo: $De := 0.40$ (metros)

Espessura da parede: $esp := 0.20$ (metros)

Raio interno: $r := \frac{De}{2} - esp$ $r = 0$

1.2 - Propriedades do concreto:

Resistência à compressão: $f_{ck} := 30000$ (kPa)

Módulo de deformação tangente inicial: $E_{ci} := 31 \cdot 10^6$ (kPa) *NBR-6118 - Tabela 8.1*

Coeficiente de ponderação: $\gamma_c := 1.40$

1.3 - Propriedades da armadura:

Aço CA-50

Número de barras:	$n_{\text{barras}} := 8$	
Diâmetro da barra:	$d_i := 0.025$	(metros)
Resistência do aço:	$f_y := 5 \cdot 10^5$	(kPa)
Módulo de elasticidade do aço:	$E_s := 2.1 \cdot 10^8$	(kPa)
Coefficiente de ponderação:	$\gamma_s := 1.15$	
Cobrimento:	$cob := 0.035$	(metros)

1.4 - Dados do carregamento:

Carga axial aplicada:	$N_S := 300$	(kN)
Carga axial de projeto:	$N_{Sd} := 1.40 \cdot N_S$	(kN) $N_{Sd} = 420$

Figura 5.14 - Entrada dos dados do problema no programa *Calc_MomCurv_Circular.xmcd*

Note que, neste método, como há a necessidade de saber inicialmente uma armação, já se aproveitou o valor determinado pelos métodos anteriores (8 barras de 25 mm de diâmetro).

Como resultado, o programa irá exibir a organização das barras na seção transversal informada (figura (5.15)), o diagrama de interação para a carga solicitante (figura (5.16)) e o diagrama momento-curvatura com duas curvas (figura (5.17)), conforme recomendações da NBR-6118/2014 em seu item 15.3.1.

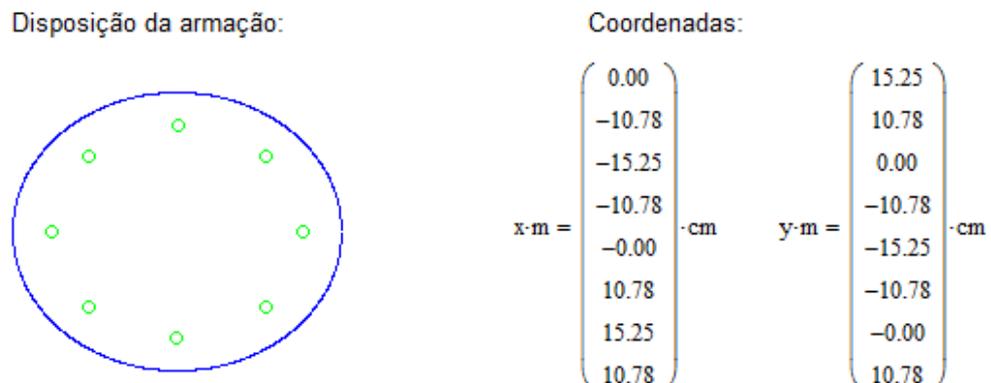


Figura 5.15 - Organização das barras informada pelo programa

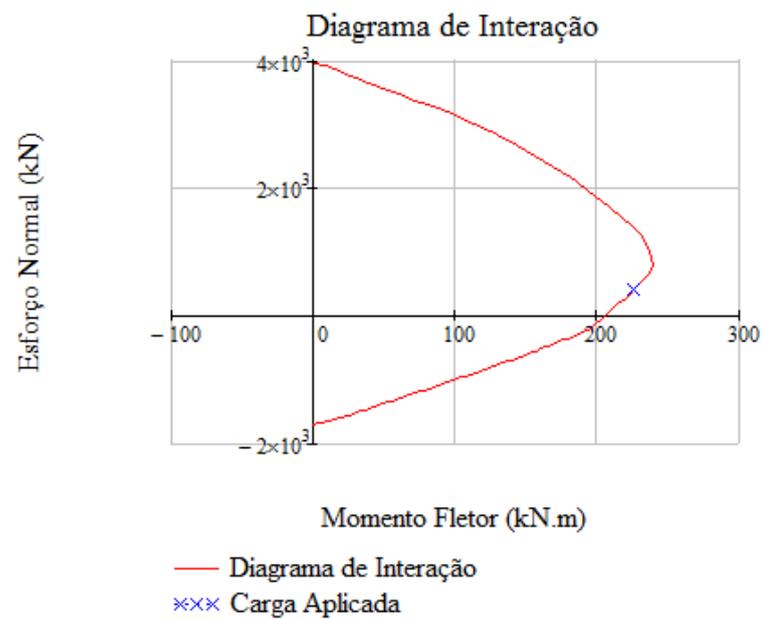


Figura 5.16 - Diagrama de interação resultante para o exemplo 1

- Carga máxima admitida para a seção ($N_{Rd} = 3938kN$);
- Máximo momento fletor que a seção suporta ($M_{Rd} = 226kN.m$);
- Curvatura máxima admitida ($\varphi_{máx} = 0,021m^{-1}$);

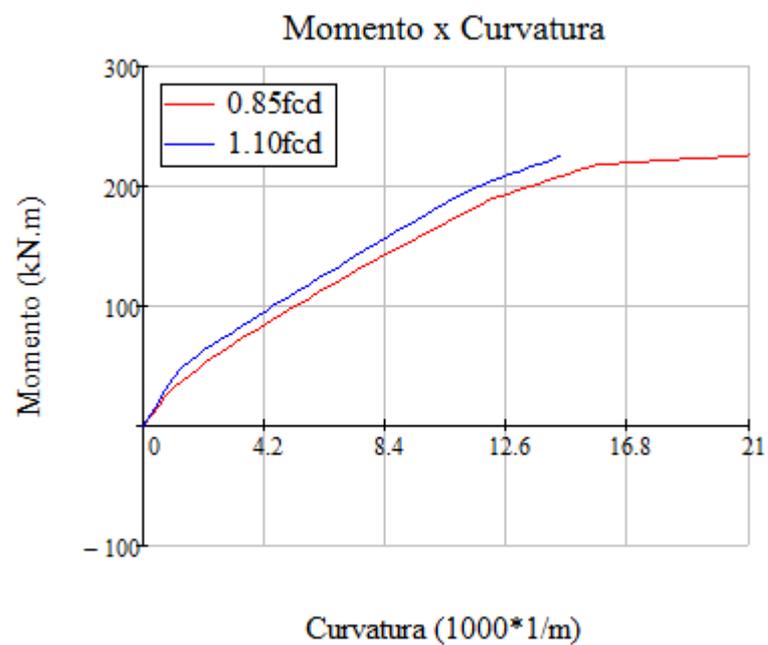


Figura 5.17 – Diagrama momento-curvatura resultante para o exemplo 1

Como resultado da análise, deverão surgir dois arquivos em .txt na pasta onde o arquivo do programa se encontra: um com os valores de momento e outro com os valores correspondentes de curvatura, que juntos formam o diagrama momento-curvatura.

Vale salientar que os momentos do arquivo de texto estarão em kN.m e as curvaturas estarão em $1000.m^{-1}$. Caso os arquivos não apareçam automaticamente na pasta, será necessário exportá-los manualmente. Basta clicar com o botão direito do mouse sobre a lista com valores obtidos (MR2 e Phi2) e selecionar a opção “Export...”, conforme a figura (5.18). Na nova janela, as opções deverão estar desmarcadas e o endereço onde o arquivo gerado irá ficar deve ser informado. Este procedimento deverá ser feito para cada uma das duas listas de dados.

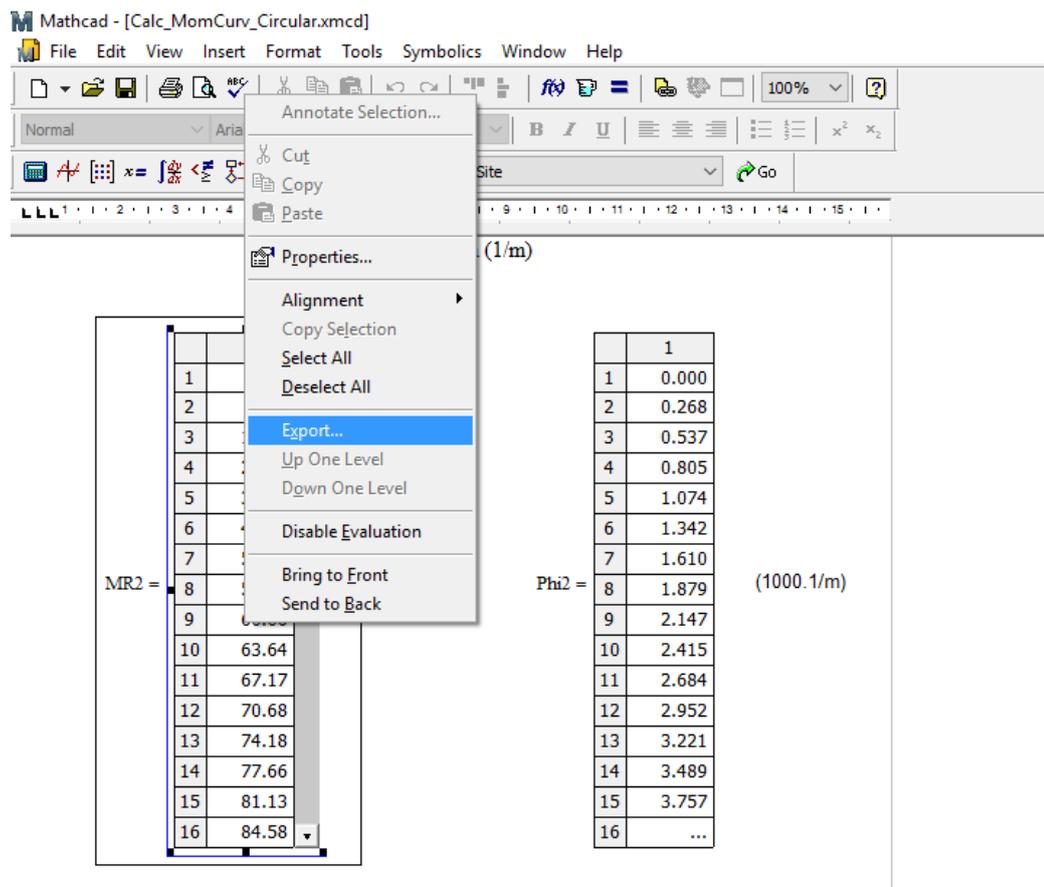


Figura 5.18 - Exportação dos dados do diagrama momento-curvatura

Um passo importante neste processo é sempre salvar o arquivo (“File > Save”) depois que os dados forem inseridos e que os resultados forem exibidos ao final do programa. Isto garante que os arquivos de texto com os dados gerados estejam de acordo com os dados inseridos.

Passo 1.3.2 – Cálculo dos esforços e do deslocamento lateral

Para que o programa principal elaborado calcule os esforços resultantes e o deslocamento lateral sofrido pela estrutura (*DeslocLat_EX01.xmcd*), basta informar os dados de entrada solicitados, que são os seguintes:

- Módulo de elasticidade do concreto (E);
- Resistência à compressão do concreto (f_{ck});
- Diâmetro da seção do pilar (D);
- Altura total do pilar (L_{total});
- Força axial aplicada no topo do pilar (N_i);
- Força lateral aplicada no topo do pilar (V_i);
- Momento fletor aplicado no topo do pilar (M_i).

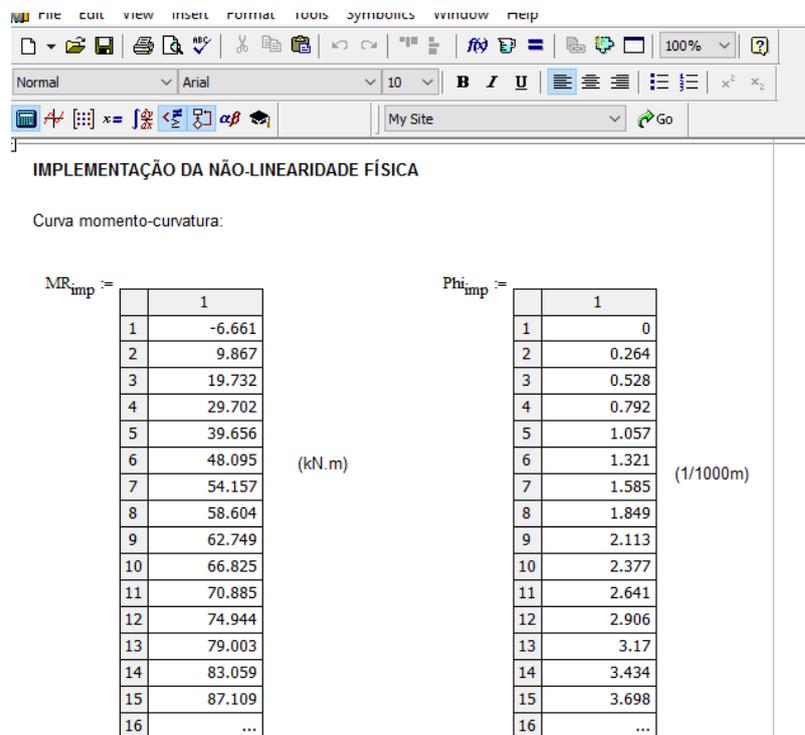


Figura 5.19 - Leitura dos dados do diagrama momento-curvatura pelo programa

DeslocLat_EX01.xmcd

Além dos dados acima, é necessário que os arquivos de texto com os valores do diagrama momento-curvatura (MR2 e Phi2) estejam localizados na mesma pasta que o programa principal. Uma vez que estejam todos numa mesma pasta, eles serão lidos automaticamente pelo programa principal (figura (5.19)).

Os valores informados ao programa, para o exemplo 1, podem ser vistos a seguir.

DADOS DE ENTRADA:

Módulo de elasticidade do concreto: $E := 0.80 \cdot 5600 \cdot \sqrt{30}$ $E = 2.454 \times 10^4$ (MN/m²)

Resistência à compressão do concreto: $f_{ck} := 30$ (MPa)

Geometria da seção do pilar:

- Seção circular:

Diâmetro: $D := 0.40$ (m) *(usar D = 0 caso a seção seja retangular)*

- Seção retangular:

Base: $b := 0$ (m)

Altura: $h := 0$ (m)

Altura total do pilar: $L_{total} := 4$ (m)

Cargas aplicadas no topo do pilar:

- Força normal: $N_i := 0.30$ (MN) $N_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot N_i$ $N_0 = 0.382$ (MN)

- Força lateral: $V_i := 0.03$ (MN) $V_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot V_i$ $V_0 = 0.038$ (MN)

- Momento fletor: $M_i := 0$ (MN) $M_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot M_i$ $M_0 = 0$ (MN)

Figura 5.20 - Entrada de dados no programa principal

Note que as cargas aplicadas estão majoradas de 1,40/1,10, ou seja, a formulação de segurança foi utilizada neste NdA.

O programa realiza dois tipos de análise: uma inicial, que considera apenas a não-linearidade geométrica e serve como base para a segunda análise, a principal, que considera tanto a não-linearidade geométrica quanto a não-linearidade física. Como resultado, o programa irá exibir os diagramas de momento fletor e de deslocamento lateral, além de informar os valores finais de cálculo, M_{d_tot} e N_{Sd} , para o dimensionamento da armadura. Os resultados obtidos para o exemplo em questão estão exibidos a seguir.

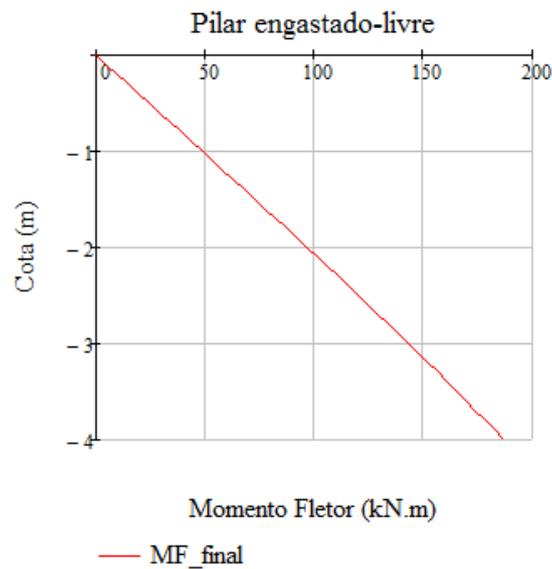


Figura 5.21 - Diagrama de momentos fletores resultante para o exemplo 1

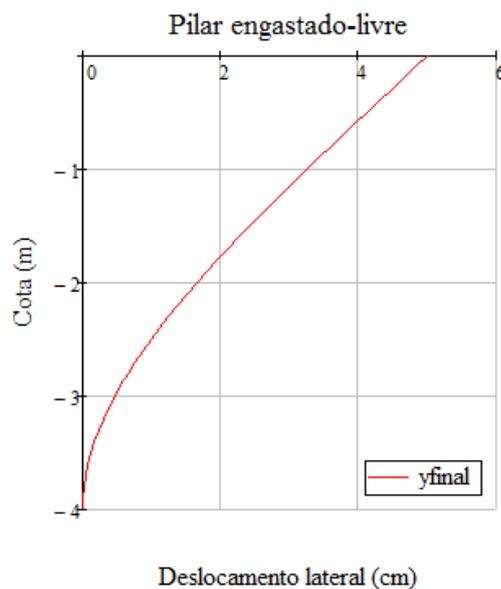


Figura 5.22 - Deslocamento lateral resultante para o exemplo 1

VALORES FINAIS DE CÁLCULO

Deslocamento máximo (topo do pilar):	$\delta_{\max} := 1.10 \max(y_{\text{final}}) \cdot m$	$\delta_{\max} = 5.002 \text{ cm}$
Momento fletor com 2ª ordem:	$M_{d_tot} := 1.10 \cdot \max(MF_{\text{sol}}) \cdot MN \cdot m$	$M_{d_tot} = 187 \text{ kN} \cdot m$
Esforço axial:	$N_{Sd} := N_0 \cdot 1.10 \cdot MN$	$N_{Sd} = 420 \text{ kN}$

Figura 5.23 - Valores resultantes para o exemplo 1

Passo 1.3.3 – Verificação da armação

A área de aço foi calculada da mesma forma que o passo 1.1.7, com a diferença apenas do valor do momento fletor utilizado, que foi o obtido por este método (187 kN.m). O resultado obtido foi:

$$A_s = 23,46 \text{ cm}^2$$

O valor adotado neste exemplo ($A_{s,tot} = 39,27 \text{ cm}^2$) atende ao mínimo necessário, logo a armação de 8 barras de bitola 25 mm pode ser mantida.

5.5 NdA IV – Utilização do Programa FB-MultiPier

Neste último nível de aproximação, um programa comercial específico é utilizado para análise da estrutura, que representa uma análise com o maior grau de complexidade. O programa utilizado foi o FB-MultiPier na versão 5.0, acadêmica.

O FB-MultiPier é um programa de análise não-linear de elementos finitos capaz de analisar diversas estruturas de pontes de maneira bastante completa. A análise realizada pelo programa engloba também modelos de comportamento não-linear estático para o solo. Dessa forma, tanto a estrutura como o solo passam por um estudo considerando suas não-linearidades.

Para os estudos deste trabalho, apenas uma pequena parte da capacidade total do programa foi utilizada, mas que serviu de grande enriquecimento para a análise.

Aplicação ao Exemplo 1 – Pilar engastado-livre (sem reação do terreno)

Para análise deste primeiro exemplo, há uma opção específica no programa que se aplica a ele, a qual faz o estudo de uma coluna isolada. O passo-a-passo utilizado será exibido a seguir.

Passo 1.4.1 – Escolha do tipo do problema

Na tela inicial do programa, para iniciar um novo arquivo, basta clicar na aba “File > New”. Uma janela irá aparecer, na qual o usuário deve escolher o tipo do problema, que para este exemplo é “Column Analysis”, pois faz a análise de uma coluna isolada, sem consideração do solo. Nesta janela, também é possível escolher o sistema de unidades adotado pelo programa (seção “Units”) e inserir informações sobre o projeto (opcional), na seção “Project Data”. A figura (5.24) mostra as opções escolhidas para este exemplo.

Figura 5.24 - Escolha do tipo do problema

Ao clicar em OK, surgirão 4 novas janelas na área principal do programa, as quais servirão de auxílio para o acompanhamento da estrutura e para a inserção dos dados (figura (5.25)).

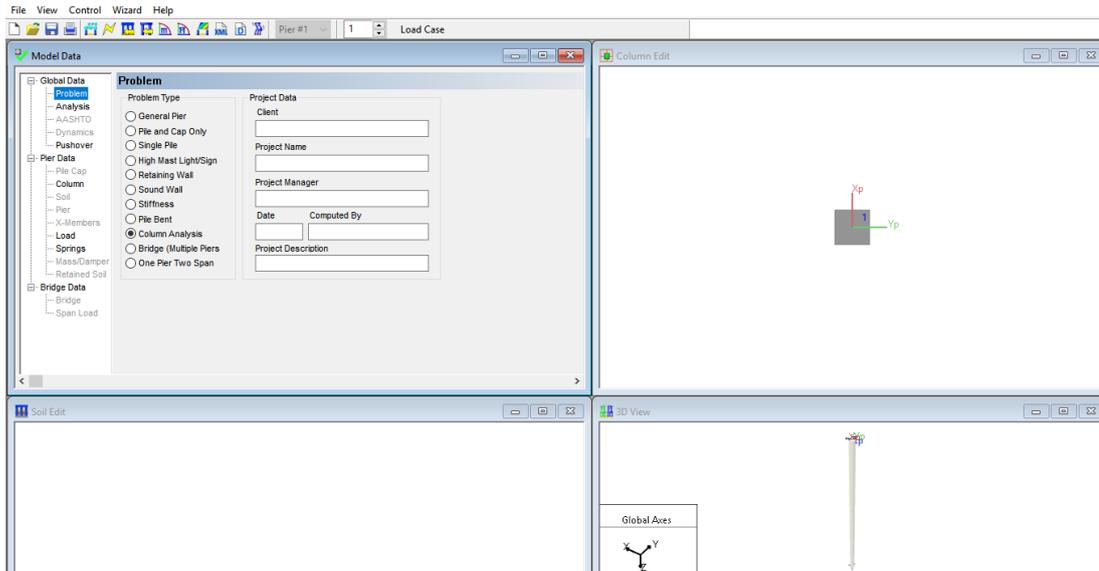


Figura 5.25 - Janelas principais do programa

Passo 1.4.2 – Dados da estrutura

Para inserir os dados da estrutura, deve-se selecionar a opção “Column” na janela “Model Data”, na qual várias opções irão aparecer já preenchidas (figura (5.26)).

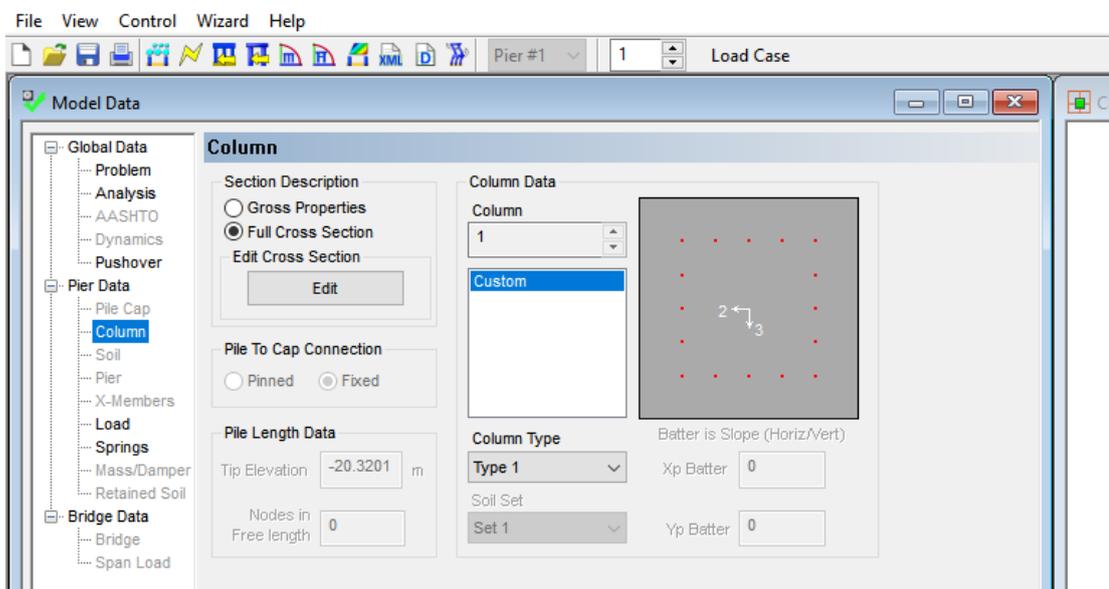


Figura 5.26 - Seleção dos dados da estrutura

Na seção “Section Description”, seleciona-se a opção “Full Cross Section” e, em seguida, clica-se no botão “Edit” em “Edit Cross Section”. Uma nova janela irá surgir na tela, já preenchida com o exemplo padrão do programa (figura (5.27)). Nela, será necessário mudar as opções para os dados do problema.

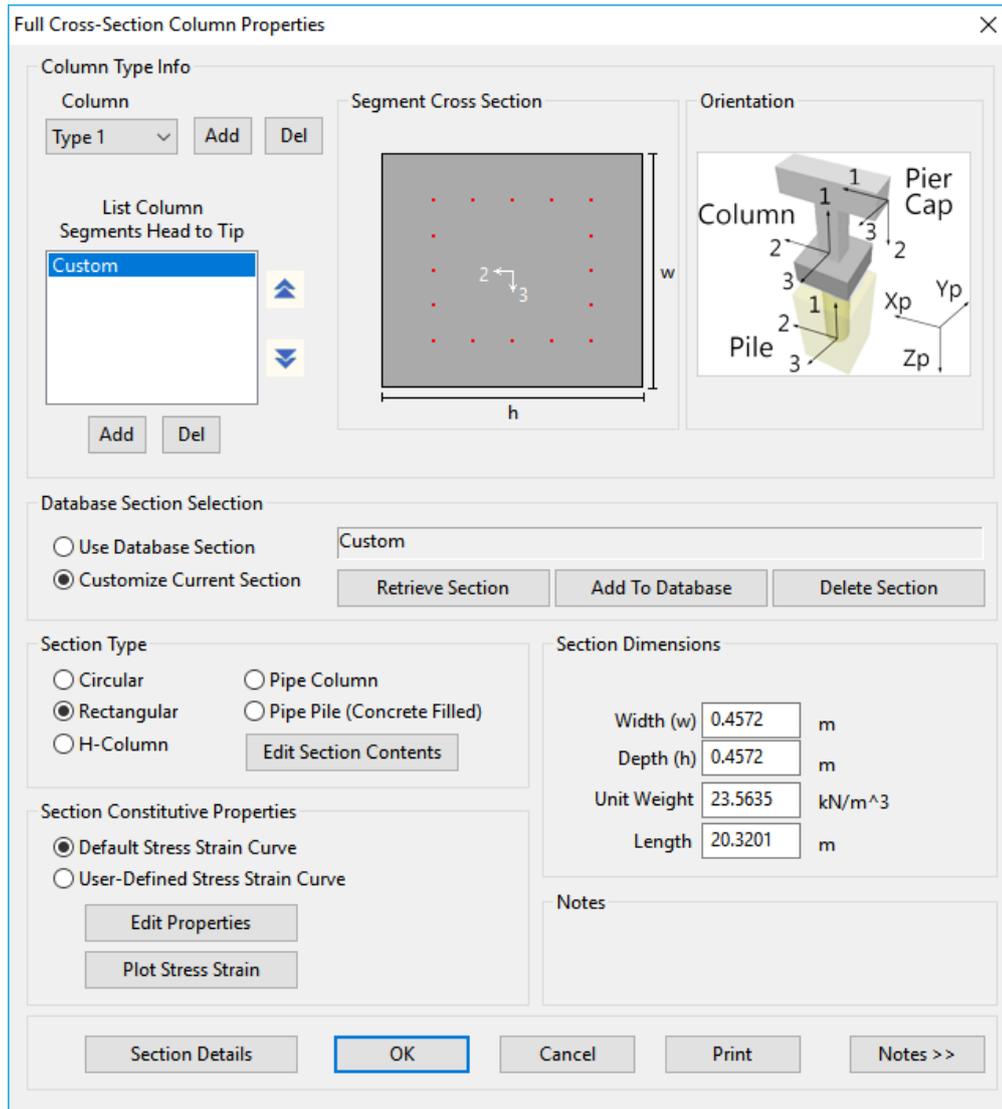


Figura 5.27 - Propriedades da seção transversal (dados do exemplo padrão do programa)

Primeiro, define-se a seção como “Circular” na seção “Section Type” e depois preenche-se o diâmetro da seção (“Diameter”), o peso específico (“Unit Weight”) e o comprimento total da coluna (“Lenght”) na seção “Section Dimensions”.

Para definir a armação da seção, deve-se clicar no botão “Edit Section Contents”. Na nova janela que surgir, deve-se deletar os grupos de barra em excesso, para que fique apenas o grupo 1. Com isso feito, prossegue-se preenchendo com os demais dados do problema. Para o exemplo 1, os dados informados ao programa podem ser vistos na figura (5.28).

Circular Section Properties

Segment1

Bar Groups

Group1

Add Del

Cross Section

Orientation

Column

Pier Cap

Pile

Xp Yp Zp

Longitudinal Reinforcement

Mild Steel Prestressed

Prestress After Losses 0 kPa

Shear Reinforcement

Spiral Tied

Casing Edit Casing

Hollow Section Edit Void

H-Section Edit H-Section

Allocation Methods

Note: After inputting bar group data below, click 'Generate Layout' to apply the data to the cross section.

Custom

Bars in Group 8

Bar Area 0.000491 m²

Group Diameter 0.33 m

Circular

Rectangular

Parallel to 2 Axis Parallel to 3 Axis

Start 2 Coord 0.33 m

Start 3 Coord 0 m

Min. Spacing 0 m

Percentage ?

Bar Area 3.13 %

Cover Thickness 0.035 m

Generate Layout

Generate Layout

Confined Concrete

None Shear Reinforcement Only Shear Reinforcement and Casing

Yield Stress 0 kPa

Shear Spacing 0 m

Bar Diam. 0 m

Figura 5.28 - Dados da seção transversal inseridos no programa

Ao clicar em OK nesta janela, uma mensagem de alerta irá aparecer (figura (5.29)), dizendo que algumas propriedades do aço estão faltando. Basta clicar em “Sim”, pois estas propriedades serão informadas em seguida.

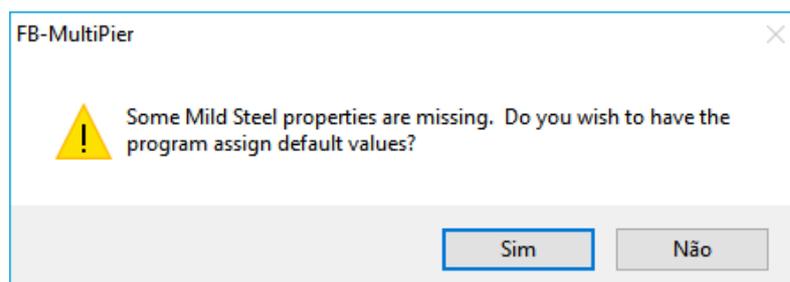


Figura 5.29 - Mensagem de alerta

Na janela inicial, que irá reaparecer na tela, a figura da seção transversal deverá estar atualizada com as informações inseridas até o momento (figura (5.30)).

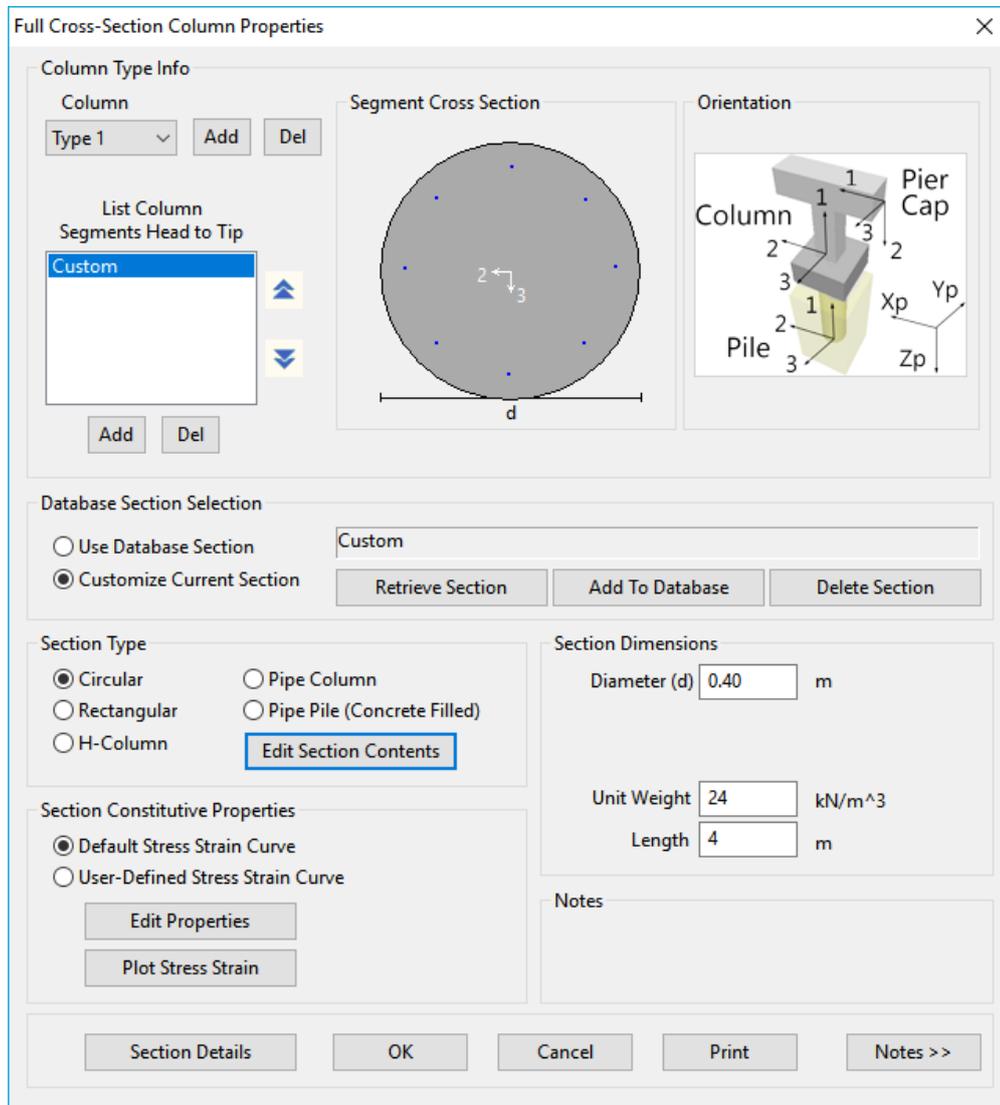


Figura 5.30 – Dados da seção transversal

Na seção “Section Constitutive Properties”, com a opção “Default Stress Strain Curve” selecionada, deve-se clicar no botão “Edit Properties”. Uma nova janela irá aparecer, na qual o usuário deverá inserir as propriedades do concreto e do aço. Com a opção “Concrete” marcada, deve-se inserir os valores para a resistência do concreto e o seu módulo de elasticidade. Agora, com a opção “Mild Steel” selecionada, deve-se informar os valores de resistência do aço e o seu módulo de elasticidade.

Para finalizar, basta clicar em OK e todas as informações sobre a composição da estrutura terão sido informadas ao programa.

Default Stress/Strain Curves

Custom

Segment1

Material Types

Concrete

Mild Steel

Prestressed

H-Pile

Casing

Poisson's Ratio: 0.2

Plot

Yield Stress: 500000 kPa

Modulus: 210000000 kPa

f'c Compressive: 30000 kPa

Concrete Modulus: 30670000 kPa

Ultimate Prestress: 0 kPa

Prestress Modulus: 0 kPa

Notes

1. Grayed values are not applicable for the defined material and can be activated by editing the section contents.
2. Set concrete f'c to zero for no concrete.
3. Clicking the 'Plot' button will display the curve for the currently selected Material Type. The curve is based on the user-inputted material properties shown above.

OK Cancel Print

Figura 5.31 - Dados dos materiais informados ao programa

Passo 1.4.3 – Dados do carregamento

Para inserir os carregamentos aplicados, seleciona-se a opção “Load” na janela “Model Data”. Nela, irão aparecer dois casos de carregamento, padrões do programa. Como só haverá um caso de carregamento, deleta-se um deles.

Com o caso de carregamento “Load Case 1” marcado, na seção “Node Applied” seleciona-se a opção “Node 1” para atribuir os carregamentos ao nó 1, que é o topo da coluna. Ao final deste processo, a janela “Model Data” deverá estar preenchida com os valores referentes ao exemplo, como mostra a figura (5.32). Note que os valores inseridos estão multiplicados por 1,40/1,10 (formulação de segurança).

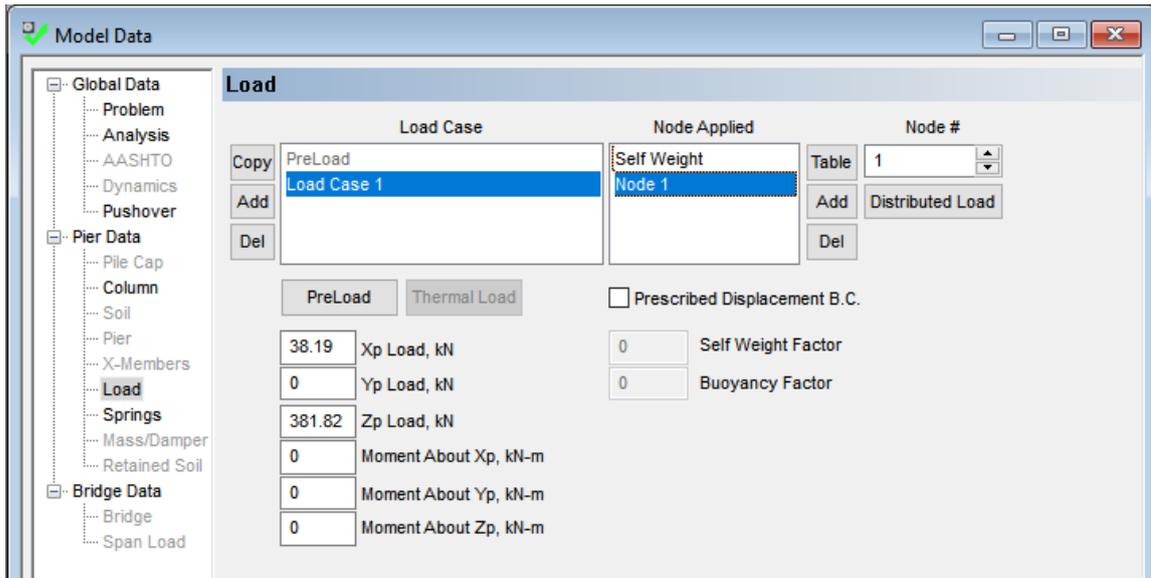


Figura 5.32 - Valores das cargas aplicadas inseridos no programa

Passo 1.4.4 – Definição dos apoios

Para o exemplo, ainda se faz necessário informar ao programa a vinculação nas extremidades da estrutura. Na janela “Model Data” deve-se seleccionar, desta vez, a opção “Springs”. Nela, irão aparecer valores do exemplo padrão do programa.

Seleccionando-se o nó do topo (“Node 1”) na seção “Spring Node List”, deve-se colocar o valor zero em todas as opções disponíveis na seção “Spring Stiffness”, pois se trata da extremidade livre do pilar do exemplo (figura (5.33)).

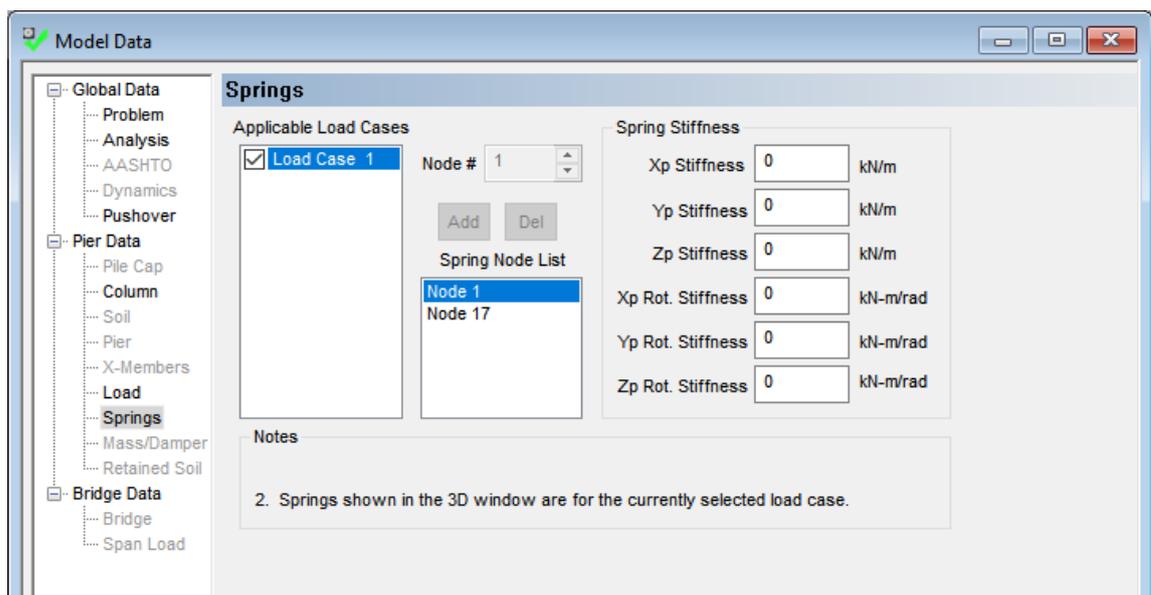


Figura 5.33 - Rigidez das molas no topo da coluna

Selecionando-se, desta vez, o nó da base (o de maior valor, neste caso “Node 17”), o usuário deve colocar um valor alto de rigidez em todas as opções disponíveis na seção “Spring Stiffness”, a fim de simular o engastamento da base do pilar do exemplo (figura (5.34)). O valor máximo admitido pelo programa é de 1×10^{20} kN/m.

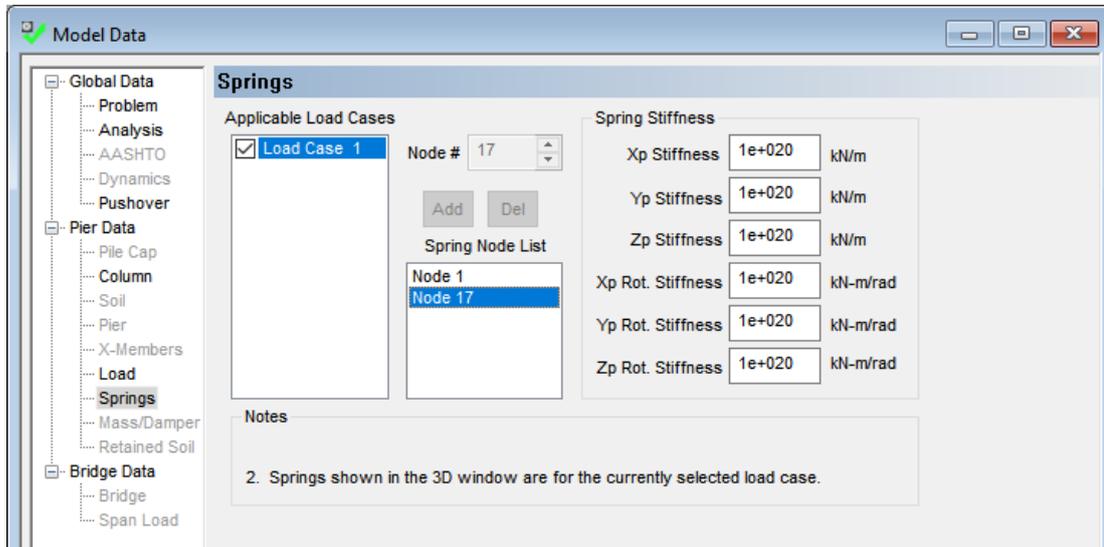


Figura 5.34 - Rigidez das molas na base da coluna

Ao final deste processo, a janela “3D View” deverá exibir uma estrutura semelhante à da figura (5.35). Neste momento, deve-se salvar o arquivo em “File > Save As”.

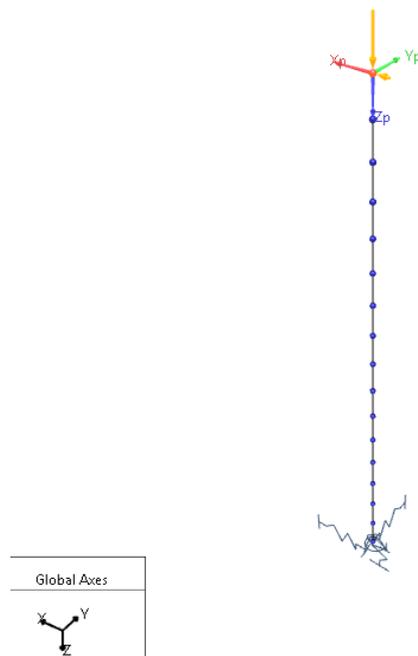


Figura 5.35 - Visualização da estaca no programa

Passo 1.4.5 – Processamento da análise

Para que o programa realize o processamento da estrutura, deve-se clicar na aba “Control > Run Analysis” da barra superior. Os resultados obtidos podem ser vistos ao clicar no botão “Pile Results” da barra de ferramentas (figura (5.36)).

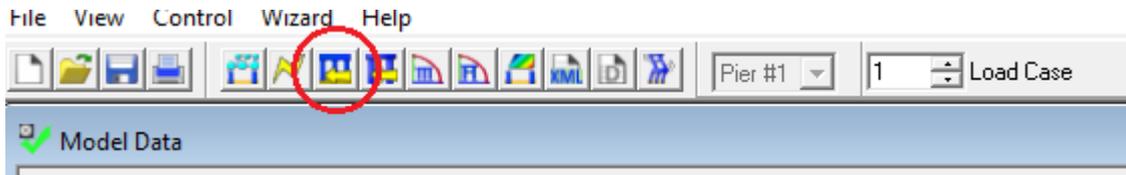


Figura 5.36 - Botão "Pile Results"

As seguintes janelas deverão aparecer na janela principal do programa (figura (5.37)):

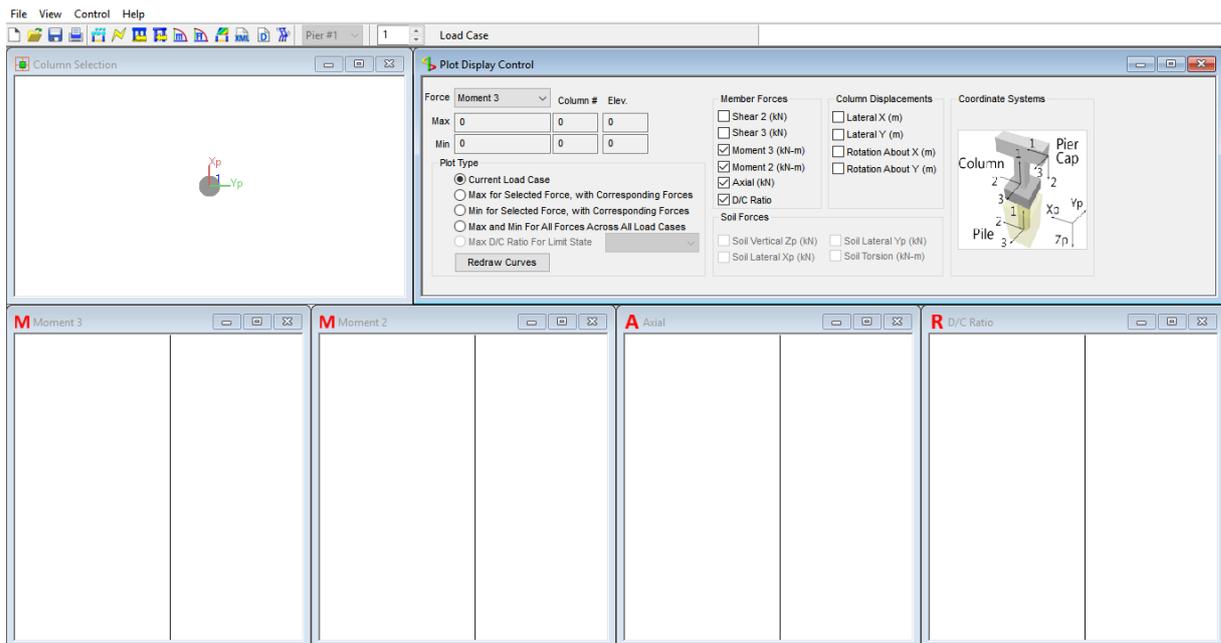


Figura 5.37 - Janela inicial dos resultados

Para que os resultados sejam desenhados nas janelas inferiores, basta dar um clique na janela “Column Selection” (figura (5.38)). Para acrescentar ou remover as janelas com os resultados, o usuário deve selecionar as opções desejadas nas seções “Member Forces” e “Column Displacements” e clicar no botão “Redraw Curves”.

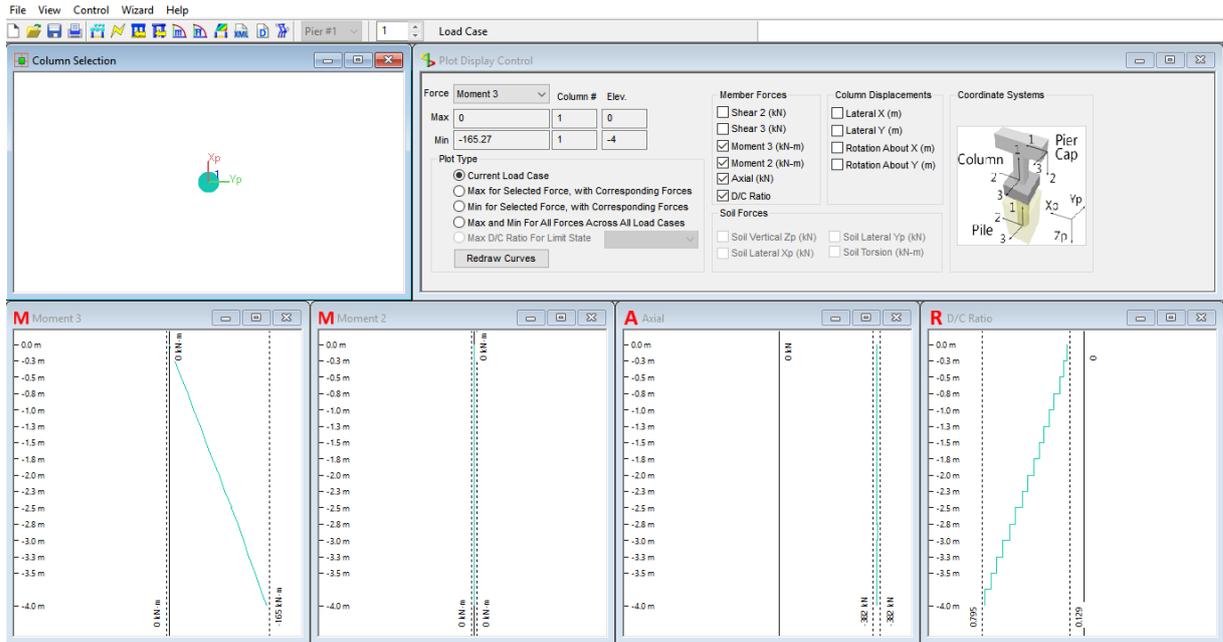


Figura 5.38 - Resultados do exemplo 1

Em cada uma das janelas exibidas com as informações da análise, é possível exibir uma nova janela com opções mais detalhas ao se clicar com o botão direito do mouse sobre o gráfico e escolher a opção “Printable Graph”.

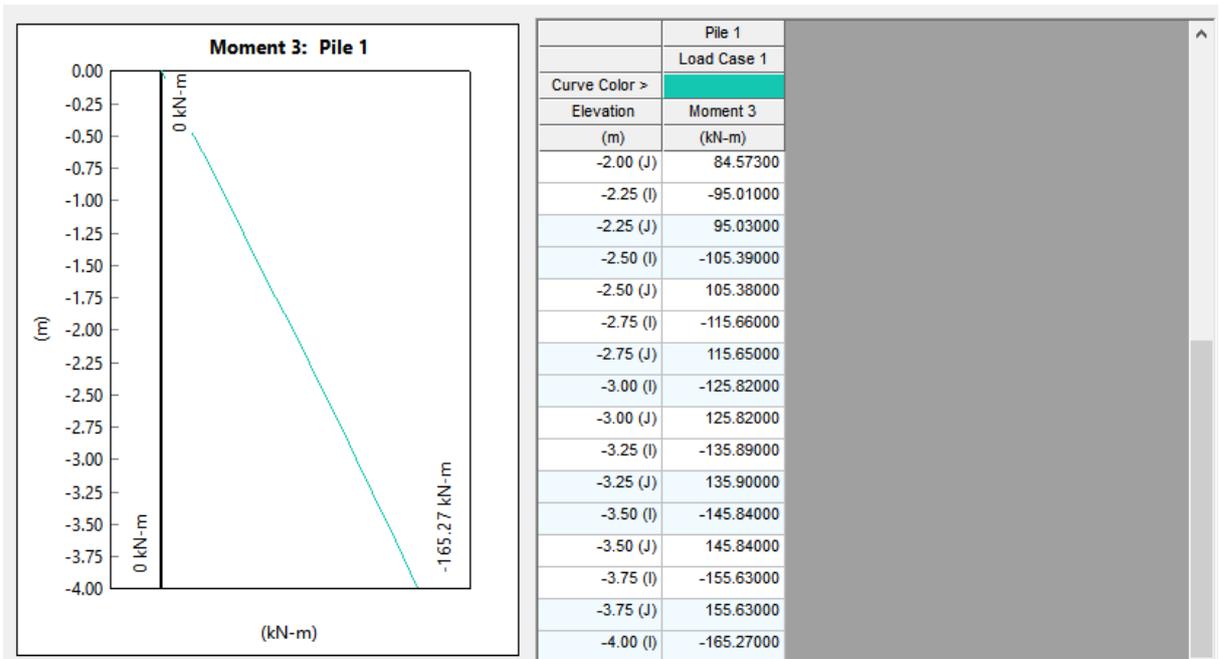


Figura 5.39 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa

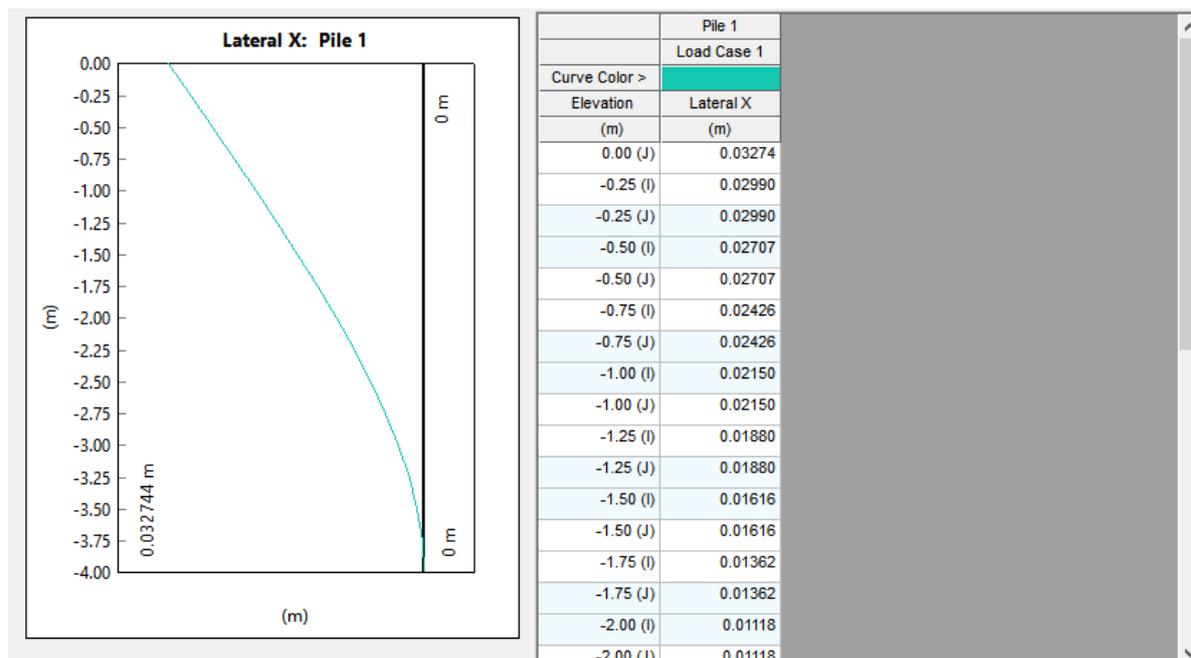


Figura 5.40 – Diagrama dos deslocamentos laterais resultantes

É importante destacar que os resultados exibidos pelo programa não estão multiplicados por 1,1. Desta forma, para completar a formulação de segurança utilizada neste modelo, deve-se multiplicar os valores gerados pelo programa por 1,1.

Os resultados para o exemplo 1, portanto, para momento fletor e deslocamento lateral foram, respectivamente, 181,80 kN.m e 3,60 cm.

Passo 1.4.6 – Verificação da armação

Segue o mesmo raciocínio visto do passo 1.3.3.

5.6 Comparação dos resultados

Os valores calculados pelos 4 métodos, para o exemplo 1, encontram-se resumidos na tabela (5.1).

Tabela 5.1 - Resultados do Exemplo 1

	NdA I	NdA II	NdA III	NdA IV
Deslocamento máximo (cm)	8,00	5,42	5,00	3,60
Momento fletor máximo (kN.m)	202	191	187	182

Como pode ser visto na tabela (5.1), os valores encontrados foram bastante próximos. Os maiores valores foram os referentes ao NdA I, como era esperando, pois trata-se do modelo com maiores simplificações, em relação aos demais. Os valores encontrados para os outros métodos foram sucessivamente decrescentes, o que confirma o refinamento que é dado na análise para os níveis de aproximação subsequentes. Também é possível perceber que os resultados obtidos pelo programa desenvolvidos foram bem próximos aos encontrados pelo NdA IV, com um erro de aproximadamente 2,7% para o momento fletor.

Além desses valores, é interessante comparar os resultados da análise não-linear com os de uma análise linear. Esta comparação foi feita utilizando o NdA IV, pois o próprio programa possui a opção de realizar uma análise apenas linear. Os resultados obtidos podem ser vistos na tabela 5.2.

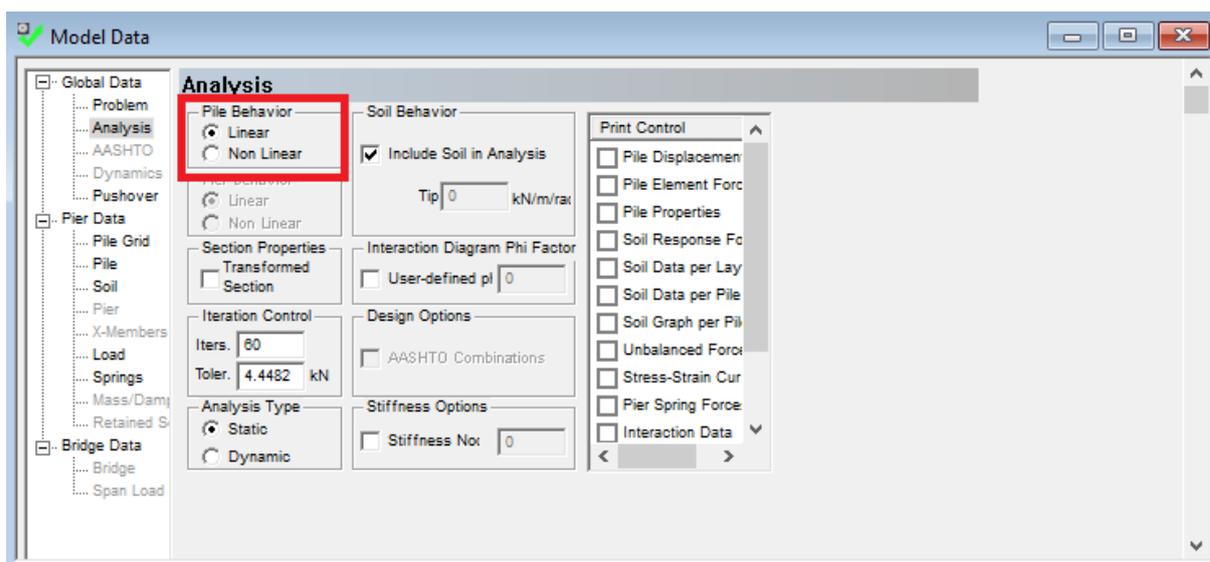


Figura 5.41 - Escolha da análise linear no FB-MultiPier

Tabela 5.2 - Comparação entre análises (exemplo 1)

Análise	Momento máximo	Deslocamento máximo
Linear	168 kN.m	2,32 cm
Não-linear	182 kN.m	3,60 cm

Os resultados encontrados mostram que a consideração de uma análise linear levaria a um erro de aproximadamente 7,7% para o momento fletor e de cerca de 35,6% para o deslocamento máximo.

6 ESTACAS SEMIENTERRADAS

Neste capítulo, um novo exemplo será tratado considerando os quatro modelos de análise vistos no capítulo 5. A diferença, neste exemplo, está na consideração da interação solo-estrutura. Duas análises serão realizadas, considerando-se um mesmo comprimento enterrado para a estaca:

- Caso 1 – Consideração de apenas uma camada de solo (areia compacta);
- Caso 2 – Consideração de duas camadas de solo, sendo uma camada de areia fofa, mais superficial, e outra camada de areia compacta.

A carga é aplicada no topo da estaca e a ponta inferior é considerada livre de esforços. Os dados para o exemplo estão descritos a seguir.

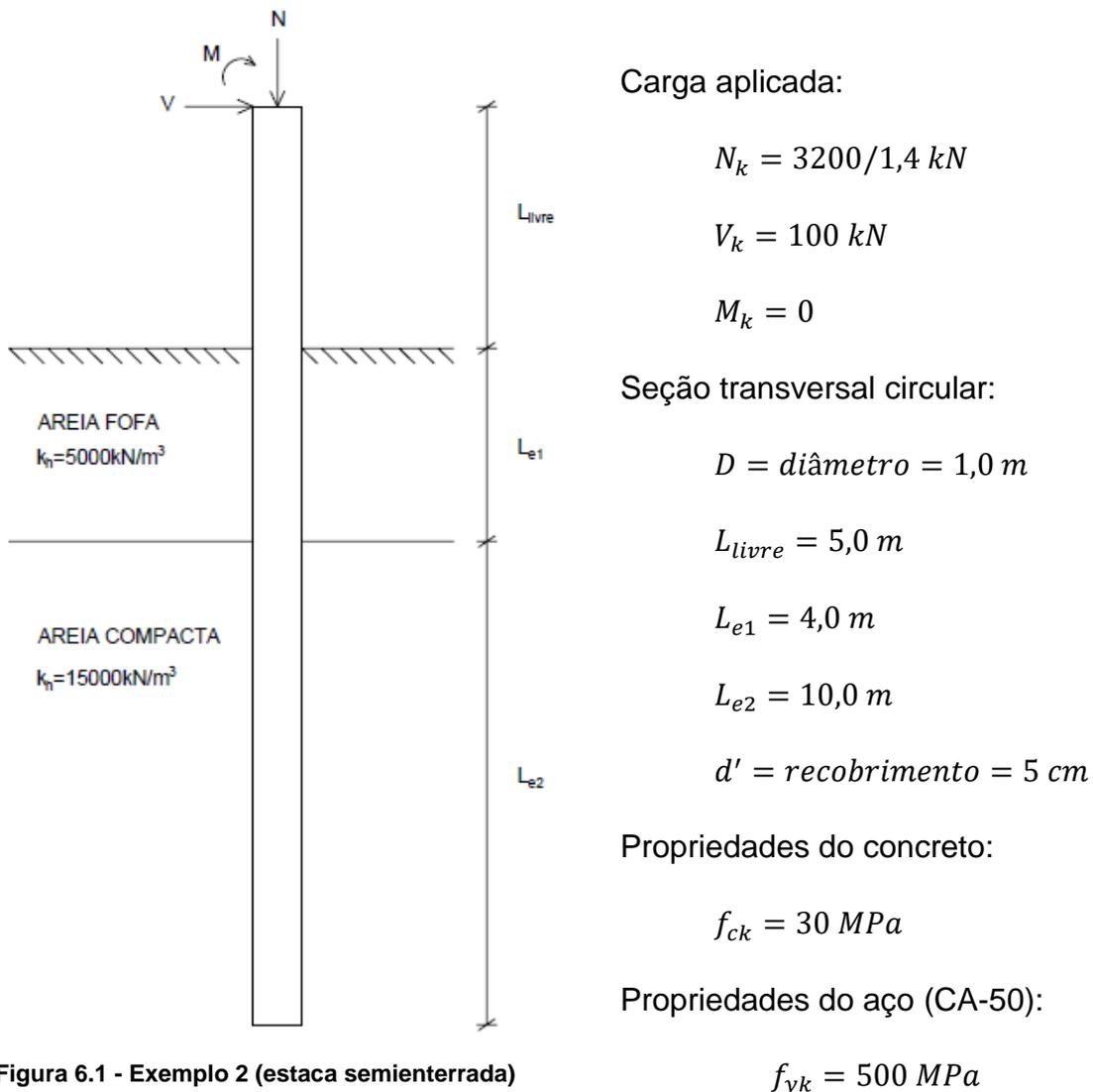


Figura 6.1 - Exemplo 2 (estaca semienterrada)

6.1 NdA I – Comprimento Elástico e Curvatura Aproximada

Para a solução deste exemplo, foi elaborado um programa em Mathcad (*Eng_Virt.xmcd*), que utiliza a teoria de Davisson e Robinson, vista no capítulo 2, a qual substitui a estaca semienterrada por uma coluna engastada a uma certa profundidade e livre da reação horizontal do terreno, para calcular as solicitações internas e analisar os efeitos de segunda ordem.

De posse da coluna engastada e livre da reação do solo, recai-se no caso do exemplo 1, visto no capítulo 5, que utiliza o método do pilar-padrão com curvatura aproximada, proposto pela NBR-6118/2014, para o cálculo da estrutura. Dessa forma, as orientações feitas no início do item 5.2 também se aplicam a este exemplo.

Para os casos do solo com mais de uma camada, que é o usual na prática, o coeficiente de reação horizontal do terreno utilizado para o cálculo do comprimento elástico deve ser o da camada mais superficial do solo, pois é a que mais influenciará na análise dos efeitos de segunda ordem.

Aplicação ao Exemplo 2 – Estaca semienterrada

Passo 2.1.1 – Dados de entrada

Os dados necessários para a aplicação do método são:

- Comprimento livre (L_1)
- Comprimento enterrado (L_2)
- Diâmetro da seção (D)
- Coeficiente de reação do terreno (k_h)
- Resistência do concreto (f_{ck})
- Carga vertical aplicada (N_k)
- Carga horizontal aplicada (V_k)
- Momento aplicado (M_k)

Os valores para os esforços de cálculo foram dados a partir de um coeficiente de majoração de 1,40. Para o exemplo proposto, os dados informados ao programa encontram-se na figura (6.2).

1. Dados de entrada:

Comprimento livre:	$L_1 := 5$	(m)		
Comprimento enterrado:	$L_2 := 14$	(m)		
Diâmetro:	$D := 1$	(m)		
Coefficiente de reação do terreno:	$k_h := 15000$	(kN/m ³)		
Resistência do concreto:	$f_{ck} := 30$	(MPa)		
Carga vertical aplicada:	$N_k := \frac{3200}{1.4}$	(kN)	$N_d := 1.40 \cdot N_k = 3200$	(kN)
Carga horizontal aplicada:	$V_k := 100$	(kN)	$V_d := 1.40 \cdot V_k = 140$	(kN)
Momento aplicado:	$M_k := 0$	(kN.m)	$M_d := 1.40 \cdot M_k = 0$	(kN.m)

Figura 6.2 - Entrada de dados no programa (caso com apenas uma camada de areia compacta)

Passo 2.1.2 – Cálculo do comprimento elástico

O comprimento elástico, como visto, é dado por:

$$L_0 = \sqrt[5]{\frac{E_c I_c}{k_h}} \quad (6.1)$$

Onde,

E_c = módulo de elasticidade do concreto

I_c = momento de inércia da seção

k_h = coeficiente de reação lateral do terreno

Os valores encontrados para o exemplo 2 foram:

$$\text{CASO 1: } L_0 = 2,51 \text{ m}$$

$$\text{CASO 2: } L_0 = 3,13 \text{ m}$$

Passo 2.1.3 – Verificação do comprimento

Para que este método possa ser aplicado, é necessário que o comprimento enterrado da estaca seja superior a pelo menos quatro vezes o comprimento elástico.

$$L_2 > 4L_0 \quad (6.2)$$

Em ambos os casos, o comprimento enterrado da estaca atende a esta verificação.

Passo 2.1.4 – Cálculo do comprimento da coluna engastada

A profundidade do engastamento é dada por:

$$L_{eng} = 1,8L_0 \quad (6.3)$$

Logo, o comprimento total da coluna engastada será:

$$L_t = L_1 + L_{eng} \quad (6.4)$$

Os resultados para o exemplo 2 são:

$$CASO 1: L_t = 9,52 \text{ m}$$

$$CASO 2: L_t = 10,64 \text{ m}$$

Passo 2.1.5 – Análise do índice de esbeltez

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.2, visto no capítulo 5. Os valores encontrados para o exemplo 2 foram:

$$CASO 1: \lambda = 76$$

$$CASO 2: \lambda = 85$$

O valor está dentro do limite permitido para a utilização do método, podendo-se proceder com os cálculos.

Passo 2.1.6 – Cálculo do momento fletor mínimo

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.3, visto no capítulo 5. Para ambos os casos, o valor encontrado foi:

$$M_{1d,mín} = 144 \text{ kN.m}$$

Passo 2.1.7 – Cálculo da esbeltez limite

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.4, visto no capítulo 5. O valor de α_b utilizado, contudo, foi igual ao valor calculado, pois a formulação da coluna engastada já é bastante a favor da segurança.

Ambos os resultados encontrados para o exemplo 2 foram:

$$\lambda_1 = 35$$

Como o valor de λ foi superior a λ_1 , os esforços locais de 2ª ordem devem ser considerados. Logo, aplica-se o método da curvatura aproximada.

Passo 2.1.8 – Cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.5, visto no capítulo 5. O valor encontrado para o exemplo 2, caso 1, foi:

$$\text{CASO 1: } M_{d,tot} = 1781 \text{ kN.m}$$

$$\text{CASO 2: } M_{d,tot} = 2064 \text{ kN.m}$$

Passo 2.1.9 – Deslocamento no topo livre da coluna

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.6, visto no capítulo 5. Os valores encontrados para o exemplo 2 foram:

$$\text{CASO 1: } \delta_p = 18,10 \text{ cm}$$

$$\text{CASO 2: } \delta_p = 22,60 \text{ cm}$$

Passo 2.1.10 – Dimensionamento da armação

Segue a mesma estrutura do passo 1.1.7, visto no capítulo 5. Os dados informados ao programa (*Calc_As.xmcd*) foram:

- Diâmetro da seção transversal ($D = 1 \text{ m}$);
- Recobrimento ($d' = 5 \text{ cm}$);
- Resistência do concreto ($f_{ck} = 30 \text{ MPa}$);
- Resistência do aço ($f_{yk} = 500 \text{ MPa}$);
- Esforços solicitantes de cálculo ($N_d = 3200 \text{ kN} \quad \therefore \quad M_{d,tot} = 1781 \text{ kN.m}$);
- Número de barras ($n_b = 18$).

Os valores resultantes dados pelo programa foram:

$$\text{CASO 1: } A_s = 35,59 \text{ cm}^2$$

$$\text{CASO 2: } A_s = 54,80 \text{ cm}^2$$

Escolhendo uma bitola de 20mm para as 18 barras, a área resultante será de 56,55 cm², que atende à área de aço calculada.

$$A_{s,tot} = 56,55 \text{ cm}^2$$

6.2 NdA II – Modelo de Winkler

Para o segundo nível de aproximação, assim como no exemplo 1, propõe-se a utilização de um programa comercial de análise tridimensional de estruturas para a análise do problema (SAP2000, versão 16).

A análise realizada pelo programa irá incorporar, da mesma forma como visto no capítulo 5, a não-linearidade geométrica de maneira mais aprofundada do que a do método anterior (NdA I) e a não-linearidade física de maneira aproximada através de um coeficiente aplicado ao momento de inércia (0,5), que simulará a fissuração do concreto.

A representação do solo, para este segundo exemplo, será feita através de uma série de molas, cada uma a uma determinada profundidade, de acordo com a teoria do Modelo de Winkler, vista no capítulo 2.

Aplicação ao Exemplo 2 – Estaca semienterrada

Passo 2.2.1 – Escolha do modelo

Idêntico ao passo 1.2.1 do capítulo 5.

Passo 2.2.2 – Dados do material

Segue a mesma estrutura do passo 1.2.2, visto no capítulo 5. Os valores deste segundo exemplo coincidem com o do exemplo anterior (figura (5.3)).

Passo 2.2.3 – Definição da seção transversal

Segue a mesma estrutura do passo 1.2.3, visto no capítulo 5. A única diferença será o valor do diâmetro informado ao programa, que é de 1 metro para o exemplo 2.

Passo 2.2.4 – Desenho da estaca

Neste segundo exemplo, a estaca foi discretizada no programa através de um elemento vertical que foi dividida em 19 barras, ficando cada uma delas com 1 metro de comprimento. A estas barras, atribuiu-se a seção transversal definida no passo 2.2.3.

Para representação do solo, foram inseridas 14 molas horizontais e 14 molas verticais (uma para cada metro de profundidade de solo) ao longo do comprimento enterrado, conforme orientações comentadas no capítulo 2 (item 2.3.2). O valor do coeficiente de mola usado no programa, dado com base no coeficiente de reação do terreno (k_h) e na profundidade da mola (z), considera uma altura de influência de 1 metro para cada nó, que coincide com o espaçamento entre as molas.

$$k_{mola}(z) = k_h \cdot z \cdot 1m$$

Dessa forma, considerando o caso de uma camada única de solo ($k_h = 15000 \text{ kN/m}^3$), teremos, a título de exemplo, os seguintes valores para as três primeiras molas horizontais:

Tabela 6.1 - Valores de coeficiente de mola

Profundidade (m)	K_{hor} (kN/m)	K_{vert} (kN/m)
1	15000	47124
2	30000	94248
3	45000	141372

Na ponta enterrada da estaca, a rigidez da mola vertical foi calculada com base na eq.(2.26). O valor encontrado foi:

$$K_{v,ponta} = 494760 \text{ kN/m}$$

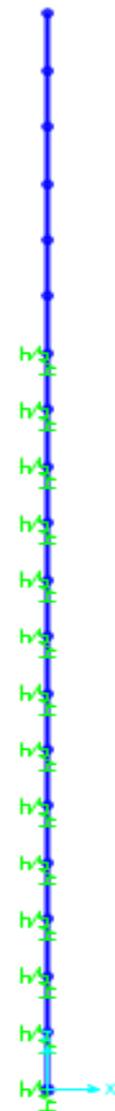


Figura 6.3 - Estaca representada no SAP2000

Passo 2.2.5 – Definição do carregamento

Segue a mesma estrutura do item 1.2.5, visto no capítulo 5. A única diferença será o valor das cargas informado ao programa que, para o exemplo 2, é:

$$Carga\ axial = 3200\ kN$$

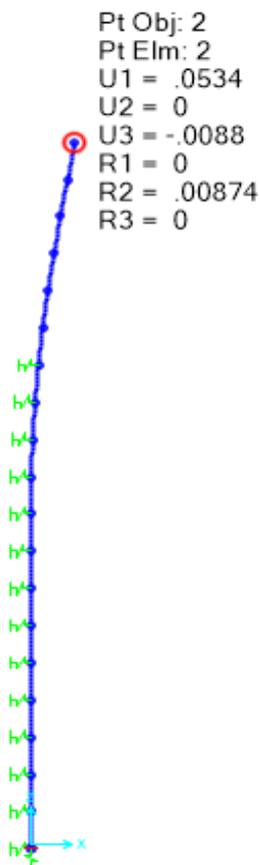
$$Carga\ lateral = 140\ kN$$

Note, mais uma vez, que os valores informados ao programa já estão multiplicados por 1,4.

Passo 2.2.6 – Processamento da análise

Segue a mesma estrutura do item 1.2.6, visto no capítulo 5.

Passo 2.2.7 – Exibição dos resultados



Os momentos obtidos pelo programa podem ser vistos na figura (6.5), cujo valor máximo, já considerando a não-linearidade geométrica, foi de 1002 kN.m. Já o deslocamento no topo da estaca pode ser visto na figura (6.4), com um valor de 5,34 cm. Estes valores se referem ao caso que considera apenas uma camada de areia compacta.

Os valores encontrados para o caso com duas camadas de areia foram 7,38 cm de deslocamento máximo e 1098 kN.m de momento fletor máximo.

Figura 6.4 - Deslocamento lateral resultante (SAP2000)

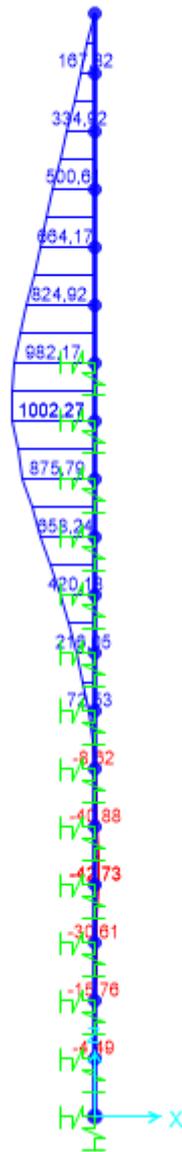


Figura 6.5 - Diagrama de momento fletor resultante (SAP2000)

Passo 2.2.8 – Cálculo da armação

A área de aço foi calculada da mesma forma que o passo 2.1.10, com a diferença apenas do valor do momento fletor utilizado, que foi o obtido por este método. Os resultados obtidos foram:

$$\text{CASO 1: } A_s = \text{valor mínimo} = 31,42 \text{ cm}^2$$

$$\text{CASO 2: } A_s = \text{valor mínimo} = 31,42 \text{ cm}^2$$

Neste exemplo, optou-se por manter as 18 barras de 20 mm de diâmetro.

6.3 NdA III – Programa Desenvolvido

Foram utilizados, neste segundo exemplo, os mesmos programas utilizados no capítulo anterior (item 5.4), com o acréscimo apenas da carga lateral exercida pelo solo através do coeficiente de reação horizontal do terreno na equação da viga sobre base elástica.

Aplicação ao Exemplo 2 – Estaca semienterrada

Passo 2.3.1 – Traçado do diagrama momento-curvatura

Para que o programa auxiliar elaborado trace o diagrama momento-curvatura (*Calc_MomCurv_Circular.xmcd*), basta informar os seguintes dados de entrada:

- Diâmetro externo da seção transversal (D_e);
- Espessura da parede (esp) – caso a seção seja vazada;
- Resistência à compressão do concreto (f_{ck});
- Módulo de deformação tangente inicial (E_{ci});
- Coeficiente de ponderação do concreto (γ_c);
- Número de barras de aço CA-50 (n_{barras});
- Diâmetro da barra (d_i);
- Resistência do aço (f_{yk});
- Módulo de elasticidade do aço (E_s);
- Coeficiente de ponderação do aço (γ_s);
- Cobrimento da armação (cob);
- Carga axial aplicada (N_s).

Para o exemplo em análise, têm-se os seguintes valores inseridos no programa:

1 - Dados de Entrada

1.1 - Propriedades da seção transversal:

Diâmetro externo: $D_e := 1$ (metros)

Espessura da parede: $esp := 0.50$ (metros)

Raio interno: $r := \frac{D_e}{2} - esp$ $r = 0$

1.2 - Propriedades do concreto:

Resistência à compressão:	$f_{ck} := 30000$	(kPa)	
Módulo de deformação tangente inicial:	$E_{ci} := 31 \cdot 10^6$	(kPa)	NBR-6118 - Tabela 8.1
Coefficiente de ponderação:	$\gamma_c := 1.40$		

1.3 - Propriedades da armadura:

Aço CA-50

Número de barras:	$n_{barras} := 18$	
Diâmetro da barra:	$d_i := 0.020$	(metros)
Resistência do aço:	$f_y := 5 \cdot 10^5$	(kPa)
Módulo de elasticidade do aço:	$E_s := 2.1 \cdot 10^8$	(kPa)
Coefficiente de ponderação:	$\gamma_s := 1.15$	
Cobrimento:	$cob := 0.05$	(metros)

1.4 - Dados do carregamento:

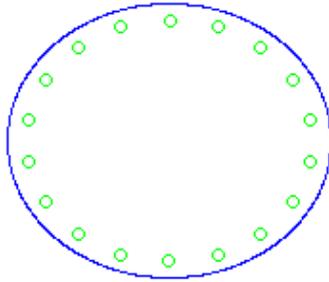
Carga axial aplicada:	$N_S := \frac{3200}{1.4}$	(kN)	
Carga axial de projeto:	$N_{Sd} := 1.40 \cdot N_S$	(kN)	$N_{Sd} = 3200$

Figura 6.6 - Entrada de dados no programa *Calc_MomCurv_Circular.xmcd* (exemplo 2)

Note que, neste método, como há a necessidade de saber inicialmente uma armação, já se aproveitou o valor determinado pelos métodos anteriores (18 barras de 20 mm de diâmetro).

Como resultado para o exemplo 2, o programa irá exibir a organização das barras na seção transversal (figura (6.7)), o digrama de interação para a carga solicitante (figura (6.8)) e o diagrama momento-curvatura com duas curvas (figura (6.9)), conforme recomendações da NBR-6118/2014 em seu item 15.3.1.

Disposição da armação:



Coordenadas:

x · m =		· cm		y · m =		· cm	
	1				1		
1	0.00			1	44.00		
2	-15.05			2	41.35		
3	-28.28			3	33.71		
4	-38.11			4	22.00		
5	-43.33			5	7.64		
6	-43.33			6	-7.64		
7	-38.11			7	-22.00		
8	-28.28			8	-33.71		
9	-15.05			9	-41.35		
10	...			10	...		

Figura 6.7 - Disposição da armação (exemplo 2)

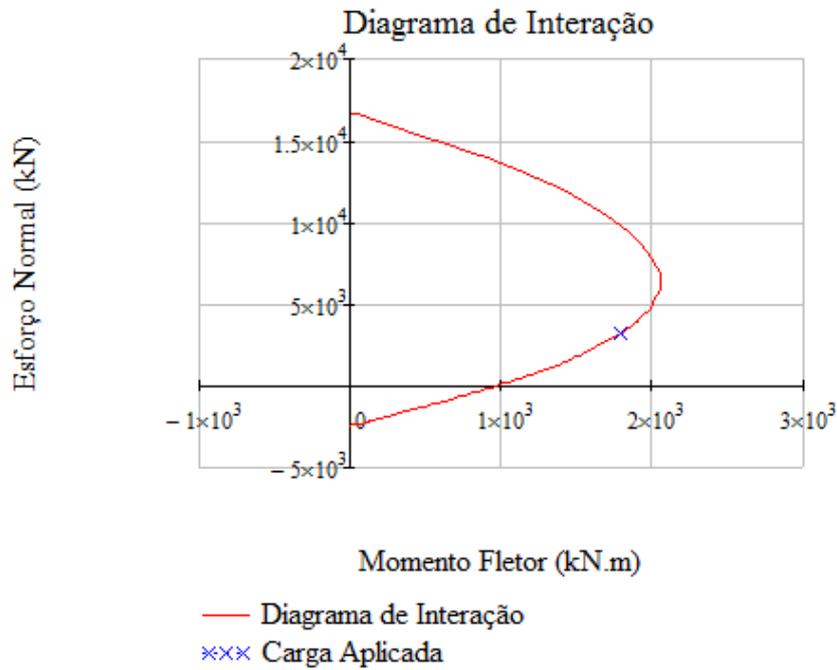


Figura 6.8 - Diagrama de interação resultante (exemplo 2)

- Carga máxima admitida para a seção ($N_{Rd} = 16680 \text{ kN}$);
- Máximo momento fletor que a seção suporta ($M_{Rd} = 1788 \text{ kN.m}$);
- Curvatura máxima admitida ($\varphi_{m\acute{a}x} = 0,009 \text{ m}^{-1}$).

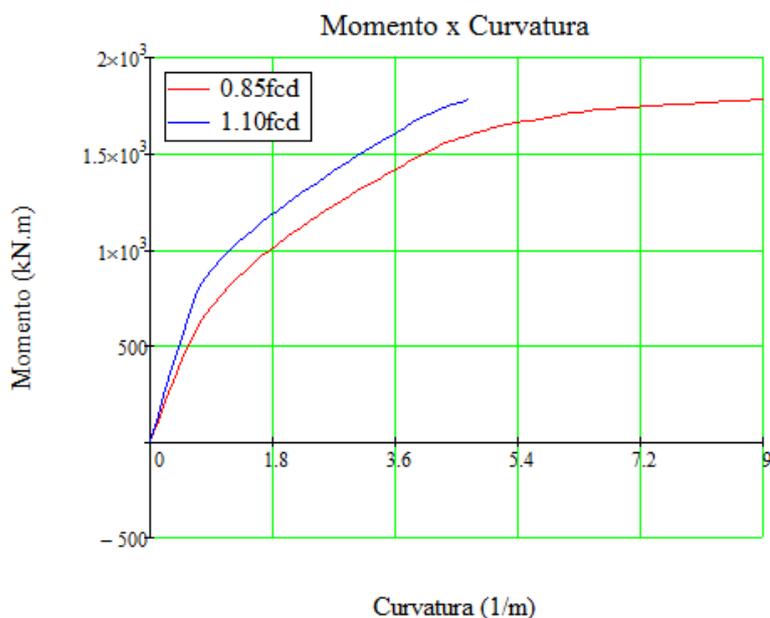


Figura 6.9 - Diagrama momento-curvatura resultante (exemplo 2)

Como resultado da análise, deverão surgir dois arquivos em .txt na pasta onde o arquivo do programa se encontra: um com os valores de momento e outro com os valores correspondentes de curvatura, que juntos formam o diagrama momento-curvatura.

Vale salientar que os momentos do arquivo de texto estarão em kN.m e as curvaturas estarão em 1000.m⁻¹. Caso os arquivos não apareçam automaticamente na pasta, será necessário exportá-los manualmente. Basta clicar com o botão direito do mouse sobre a lista com valores obtidos (MR2 e Phi2) e selecionar a opção “Export...”. Na nova janela, as opções deverão estar desmarcadas e o endereço onde o arquivo gerado irá ficar deve ser informado. Este procedimento deverá ser feito para cada uma das duas listas de dados.

Um passo importante neste processo é sempre salvar o arquivo (“File > Save”) depois que os dados forem inseridos e que os resultados forem exibidos ao final do programa. Isto garante que os arquivos de texto com os dados gerados estejam de acordo com os dados inseridos.

Passo 2.3.2 – Cálculo dos esforços e do deslocamento lateral

Segue a mesma estrutura do passo 1.3.2, visto no capítulo 5. Os dados informados ao programa, para o primeiro caso, podem ser vistos na figura (6.10).

DADOS DE ENTRADA:

Módulo de Elasticidade do Concreto: $E := 5600 \cdot \sqrt{30}$ (MN/m²)

Geometria da seção da estaca: +

- Seção circular:

Diâmetro: $D := 1$ (m) (usar $D = 0$ caso a seção seja retangular)

- Seção retangular:

Base: $b := 0$ (m)

Altura: $h := 0$ (m)

Momento de Inércia:

$$I := \begin{cases} \frac{\pi \cdot (D \div 2)^4}{4} & \text{if } D \neq 0 \\ \frac{b \cdot h^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases} \quad I = 0.049 \quad (\text{m}^4)$$

Coefficiente de reação do terreno: $k_h := 15$ (MN/m³)

Comprimento livre da estaca: $L_1 := 5$ (m)

Comprimento enterrado da estaca: $L_e := 14$ (m)

Comprimento total da estaca: $L_{\text{total}} := L_1 + L_e = 19$ (m)

Cargas aplicadas no topo da estaca:

- Força normal: $N_i := \frac{3.2}{1.40}$ $N_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot N_i$ $N_0 = 2.909$ (MN)

- Força lateral: $V_i := 0.10$ $V_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot V_i$ $V_0 = 0.127$ (MN)

- Momento fletor: $M_i := 0$ $M_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot M_i$ $M_0 = 0$ (MN)

Figura 6.10 - Entrada de dados no programa principal (exemplo 2, caso 1)

Os resultados obtidos para o exemplo em questão estão exibidos a seguir.

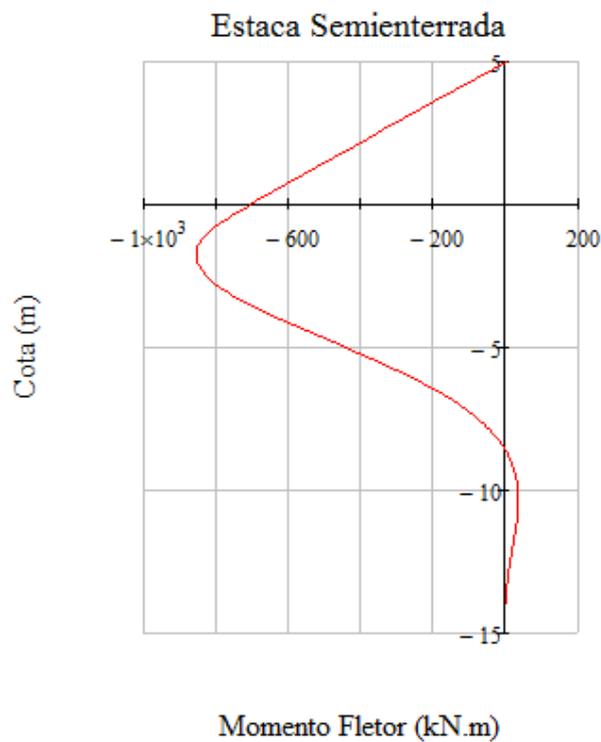


Figura 6.11 - Diagrama de momentos fletores resultante para o exemplo 2 (1 camada)

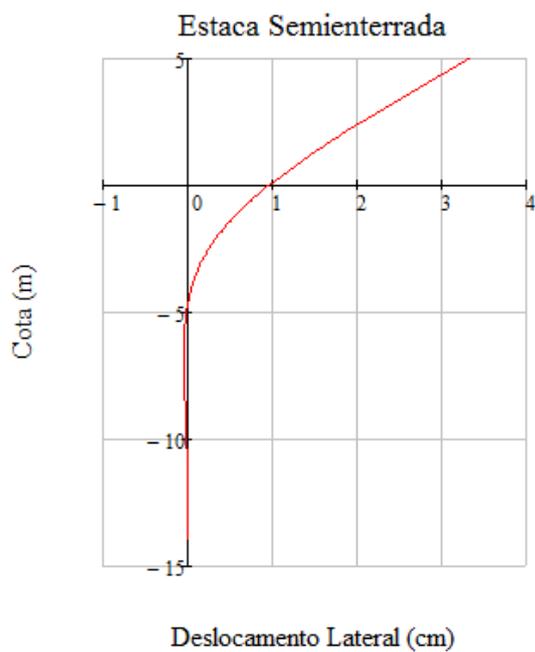


Figura 6.12 - Deslocamento lateral resultante para o exemplo 2 (1 camada)

VALORE FINAIS DE CÁLCULO

Deslocamento máximo: $\delta_{\max} := 1.10 \cdot \max(y_{\text{final}}) \cdot \text{m}$ $\delta_{\max} = 3.67 \cdot \text{cm}$

Momento fletor máximo: $M_{d_tot} := 1.10 \cdot \min(MF_{\text{sol}}) \cdot \text{MN} \cdot \text{m}$ $M_{d_tot} = -941 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Esforço Axial: $N_{Sd} := 1.10 \cdot N_0 \cdot \text{MN}$ $N_{Sd} = 3200 \cdot \text{kN}$

Figura 6.13 - Valores resultantes para o exemplo 2 (1 camada)

VALORE FINAIS DE CÁLCULO

Deslocamento máximo: $\delta_{\max} := 1.10 \cdot \max(y_{\text{final}}) \cdot \text{m}$ $\delta_{\max} = 5.62 \cdot \text{cm}$

Momento fletor máximo: $M_{d_tot} := 1.10 \cdot \min(MF_{\text{sol}}) \cdot \text{MN} \cdot \text{m}$ $M_{d_tot} = -1049 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Esforço Axial: $N_{Sd} := 1.10 \cdot N_0 \cdot \text{MN}$ $N_{Sd} = 3200 \cdot \text{kN}$

Figura 6.14 - Valores resultantes para o exemplo 2 (2 camadas)

Passo 2.3.3 – Verificação da armação

A área de aço foi calculada da mesma forma que o passo 2.1.10, com a diferença apenas do valor do momento fletor utilizado, que foi o obtido por este método. Os resultados obtidos foram:

$$A_s = \text{valor mínimo} = 31,42 \text{ cm}^2$$

Como o valor foi próximo, foram mantidas as 18 barras de aço de 20 mm de diâmetro.

6.4 NdA IV – Utilização do Programa FB-MultiPier

Como visto no item 5.5 do capítulo 5, um programa comercial específico (FB-MultiPier) é utilizado para realizar uma análise mais complexa do problema.

Na incorporação do solo na análise, o programa disponibiliza a opção de utilizar curvas p-y para a representação do solo, a qual possibilita uma caracterização mais precisa do solo em estudo.

Na caracterização do solo, optou-se por utilizar um dos modelos de curvas p-y oferecidos pelo programa (Reese – areias) e informar os parâmetros requeridos (peso específico e ângulo de atrito, por se tratar de areia). Os valores desses parâmetros foram escolhidos com base em valores tabelados fornecidos pelo próprio programa. Alguns destes valores podem ser vistos na tabela (6.2), mais adiante.

Aplicação ao Exemplo 2 – Estaca semienterrada

Passo 2.4.1 – Escolha do tipo do problema

Segue a mesma estrutura do item 1.4.1, do capítulo 5. A opção para o exemplo 2, contudo, será a “Single Pile”, que analisa uma estaca isolada com a consideração do solo.

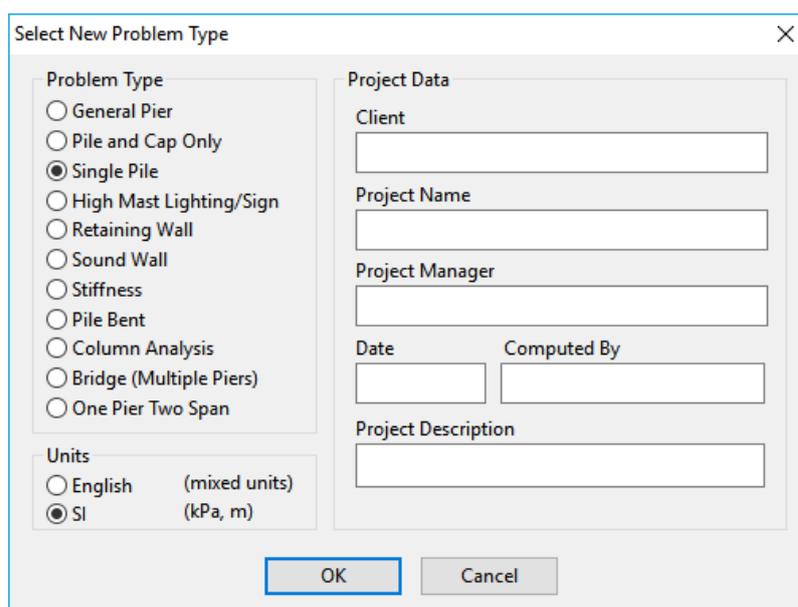


Figura 6.15 - Escolha do tipo do problema (exemplo 2)

Passo 2.4.2 – Dados da estrutura

Segue a mesma estrutura do item 1.4.2, do capítulo 5. A diferença será apenas na nomenclatura dada pelo programa à estrutura analisada: onde antes havia “Column”, leia-se “Pile”.

Na figura (6.15), encontra-se um resumo da seção transversal da estaca informada ao programa, com os dados do exemplo 2. Como pode-se perceber, os dados do concreto e do aço para este exemplo continuam os mesmo do exemplo anterior.

Full Cross-Section Pile Properties

Pile Type Info

Pile Type: Type 1 [Add] [Del]

List Pile/Shaft Segments Head to Tip

Custom [Add] [Del]

Segment Cross Section

Diagram showing a circular cross-section with diameter d and a 3D coordinate system (2, 3).

Orientation

Diagram showing a 3D view of a pile cap and pile with axes X_p , Y_p , Z_p .

Database Section Selection

Use Database Section Customize Current Section

Custom [Retrieve Section] [Add To Database] [Delete Section]

Section Type

Circular Pipe Pile

Rectangular Pipe Pile (Concrete Filled)

H-Pile [Edit Section Contents]

Section Dimensions

Diameter (d) 1 m

Unit Weight 24 kN/m³

Length 19 m

Section Constitutive Properties

Default Stress Strain Curve User-Defined Stress Strain Curve

[Edit Properties] [Plot Stress Strain]

Notes

1. Length is the distance from center of pile cap to tip elevation, or between the nodes of intermediate pile segments.

[Section Details] [OK] [Cancel] [Print] [Notes >>]

Figura 6.16 - Dados da seção transversal (exemplo 2)

Passo 2.4.3 – Dados do solo

Para inserir os dados referentes ao solo, basta selecionar a opção “Soil” na janela “Model Data”. Nesta janela, deve-se informar o número de camadas de solo desejado, as características do solo de cada camada e as cotas.

Na figura (6.16), têm-se, como exemplo, os dados informados para a camada de areia compacta para o caso de duas camadas de solo.

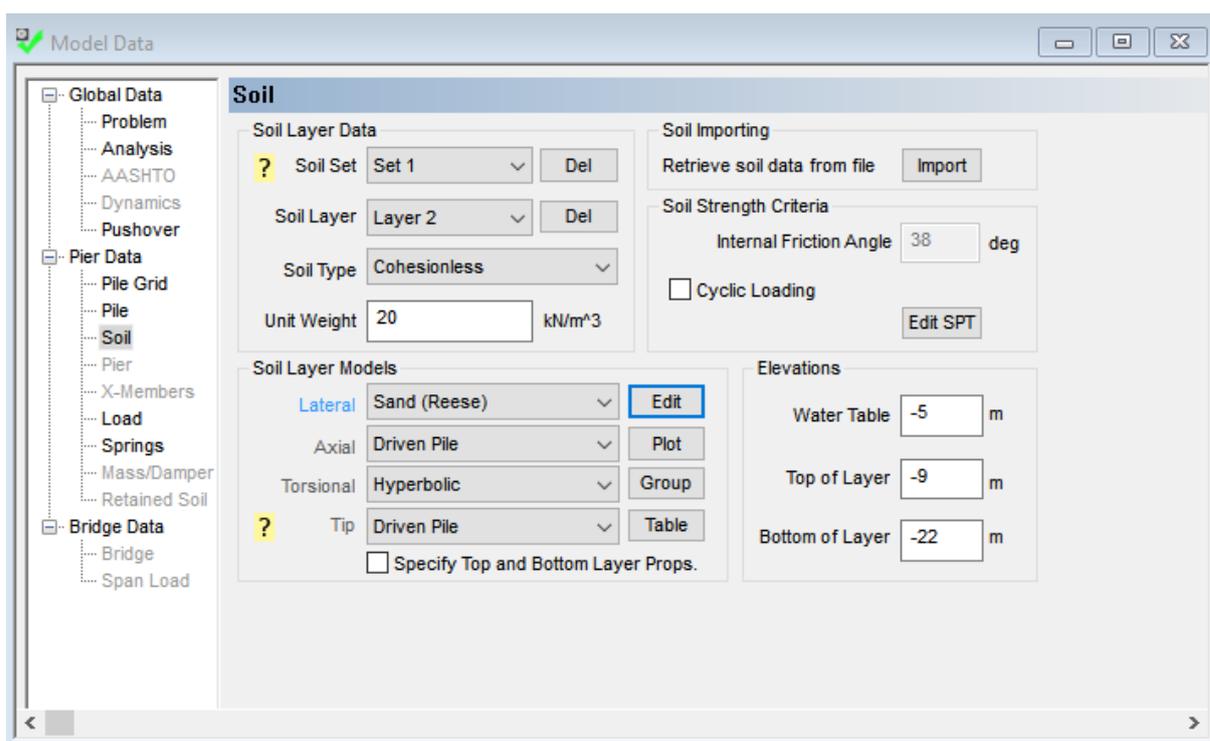


Figura 6.17 - Dados da camada de solo (camada de areia compacta, caso 2)

Os valores utilizados para o peso específico (“Unit Weight”) e para o ângulo de atrito (“Internal Friction Angle”) foram retirados de uma tabela com valores de referência do próprio programa, disponibilizada como material de apoio por ele. Alguns desses valores, referentes a solos não-coesivos, estão representados abaixo.

Tabela 6.2 - Valores de referência para solos não-coesivos (BSI, 2013)

Propriedade	Símbolo	Unidade	Fofo	Médio	Compacto
Peso específico	γ	kN/m ³	14 - 18	17 - 20	17 - 22
Ângulo de atrito	ϕ	graus	29 - 30	30 - 36	36 - 41

Na janela “Soil Edit”, é possível visualizar a estaca com os dados do solo informados ao programa. Note que, para o exemplo em análise, considerou-se a cota da água ao nível do terreno (solo completamente submerso).

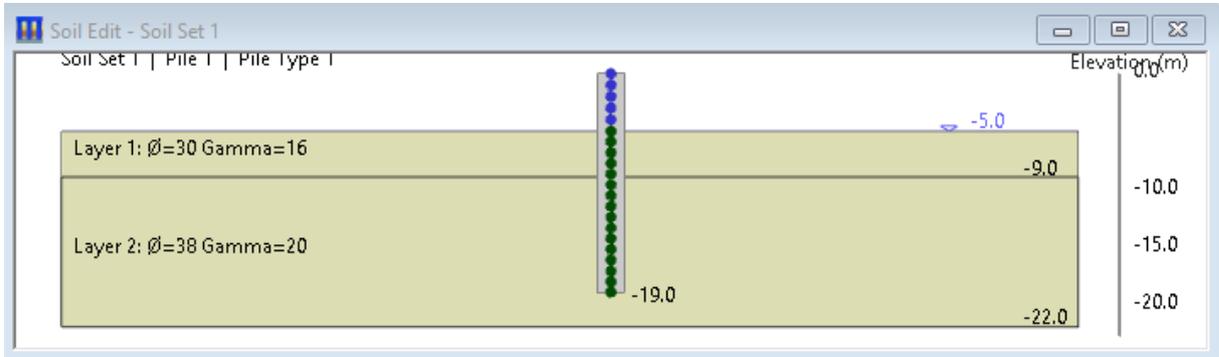


Figura 6.18 - Visualização da estaca com as camadas de solo (exemplo 2, caso 2)

Passo 2.4.4 – Dados do carregamento

Segue a mesma estrutura do item 1.4.3, do capítulo 5. Os valores informados para o exemplo 2 foram:

$$Carga\ axial = \frac{1,40}{1,10} N_k = 2909,09\ kN$$

$$Carga\ lateral = \frac{1,40}{1,10} V_k = 127,27\ kN$$

Note que, como visto no item 5.1, foi utilizada a formulação de segurança para este modelo de análise.

Passo 2.4.5 – Processamento da análise

Segue a mesma estrutura do item 1.4.5, do capítulo 5. Os resultados obtidos podem ser vistos nos diagramas a seguir.

É importante destacar que os resultados exibidos pelo programa não estão multiplicados por 1,1. Desta forma, para completar a formulação de segurança utilizada neste modelo, deve-se multiplicar os valores gerados por este coeficiente.

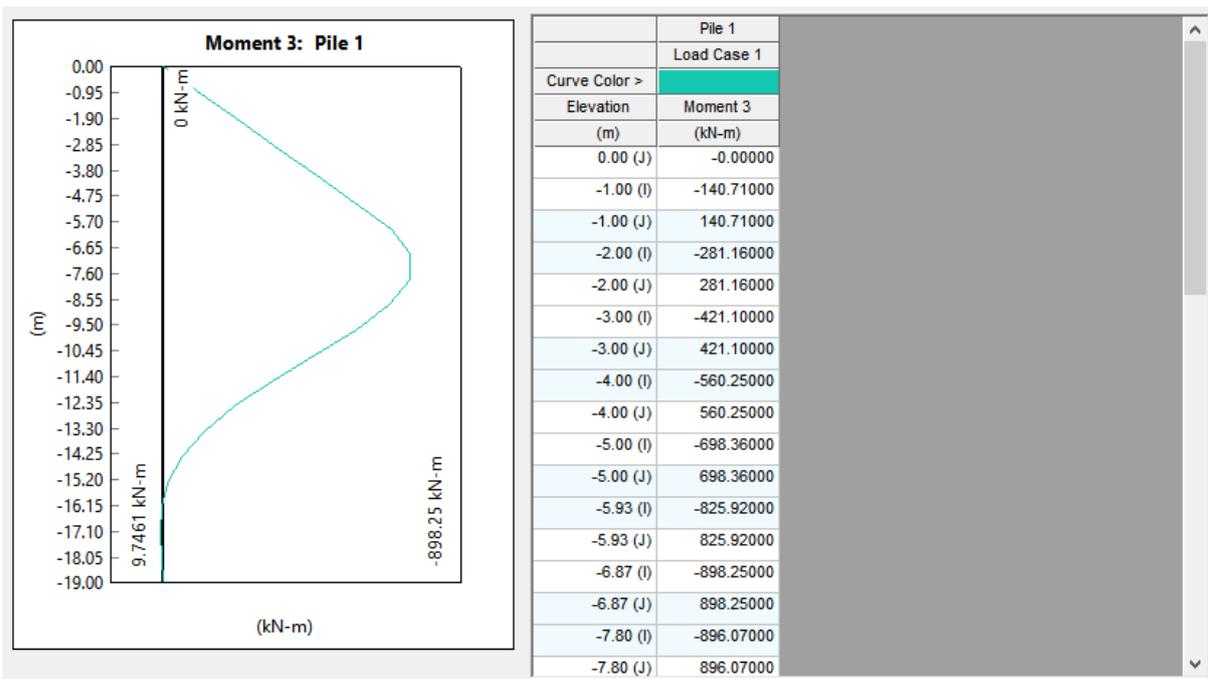


Figura 6.19 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa (caso com 1 camada)

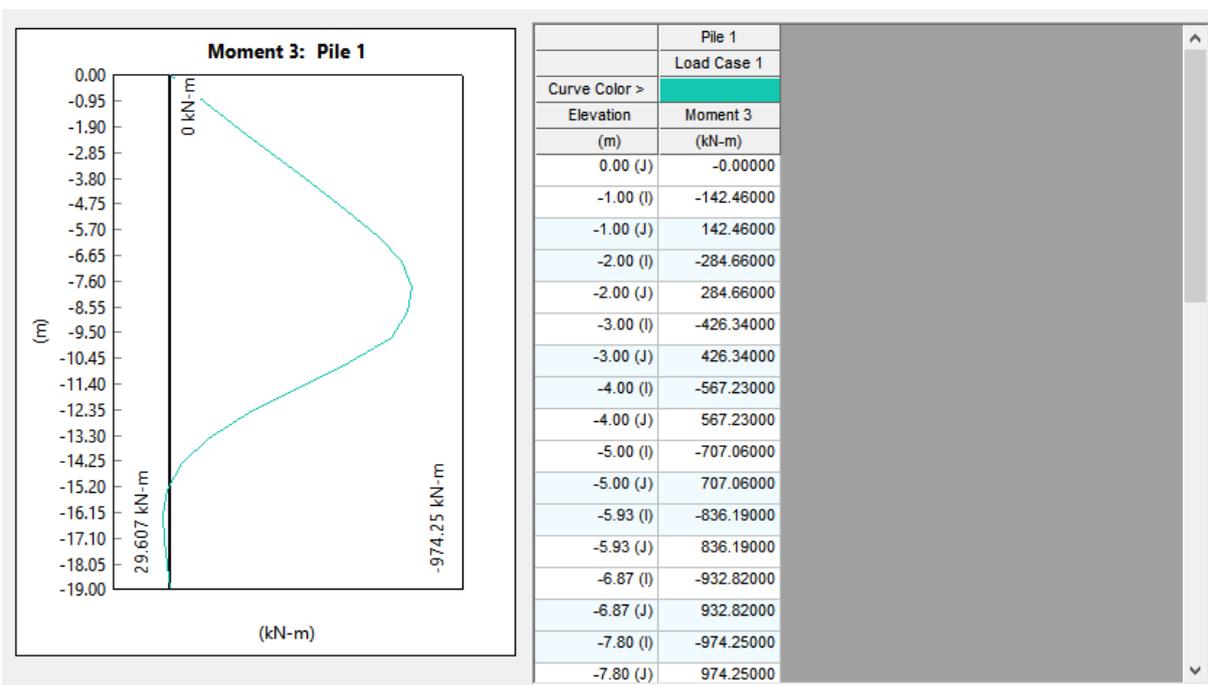


Figura 6.20 - Diagrama de momentos fletores gerado pelo programa (caso com 2 camadas)

Os valores de momento fletor máximo para o exemplo 2 foram:

- 988 kN.m para o caso com apenas uma camada (areia compacta);
- 1072 kN.m para o caso com duas camadas de areia.

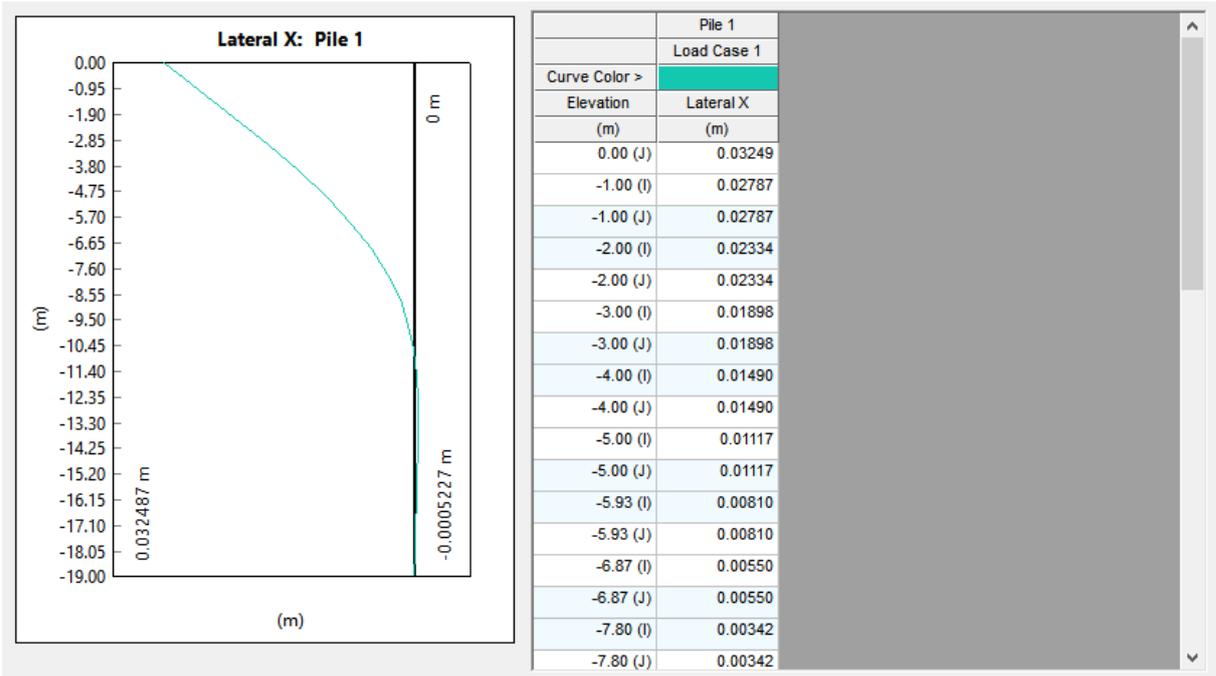


Figura 6.21 - Diagrama dos deslocamentos laterais gerado pelo programa (caso com 1 camada)

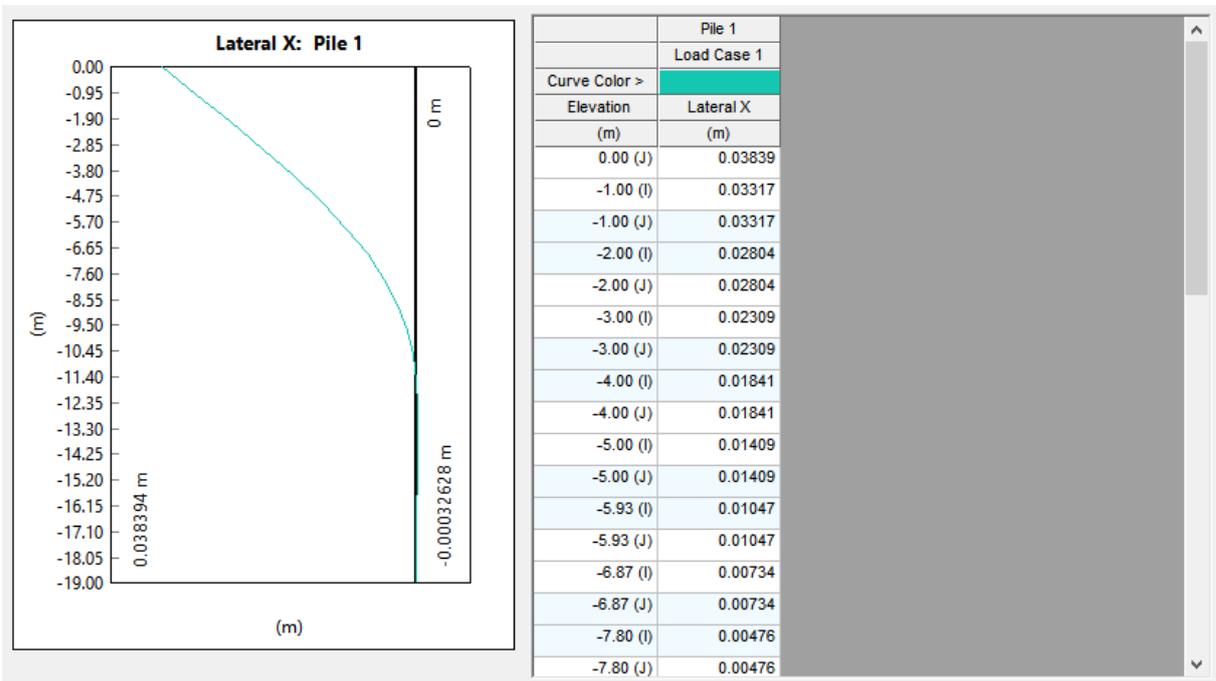


Figura 6.22 - Diagrama dos deslocamentos laterais gerado pelo programa (caso com 2 camadas)

Os valores de deslocamento máximo para o exemplo 2 foram:

- 3,58 cm para o caso com apenas uma camada (areia compacta);
- 4,22 cm para o caso com duas camadas de areia.

Passo 2.4.6 – Verificação da armação

Segue o mesmo raciocínio do passo 2.3.3.

6.5 Comparação dos resultados

Os valores calculados pelos 4 métodos, para o exemplo 2, encontram-se resumidos nas tabelas a seguir.

Tabela 6.3 - Resultados do exemplo 2 (1 camada)

	NdA I	NdA II	NdA III	NdA IV
Deslocamento máximo (cm)	18,10	5,34	3,67	3,58
Momento fletor máximo (kN.m)	1781	1002	941	988

Tabela 6.4 - Resultados do exemplo 2 (2 camadas)

	NdA I	NdA II	NdA III	NdA IV
Deslocamento máximo (cm)	22,60	7,38	5,62	4,22
Momento fletor máximo (kN.m)	2064	1098	1049	1072

Como pode-se perceber das tabelas (6.3) e (6.4), os resultados obtidos pelo NdA I foram significativamente superiores aos obtidos pelos demais níveis. Esta maior diferença pode ser atribuída ao fato de que, neste primeiro nível, para compensar as maiores simplificações, o cálculo é feito de maneira mais conservadora (a favor da segurança).

Já para os três NdA finais, os resultados encontrados, principalmente em relação aos momentos fletores, foram bastante próximos entre si. O NdA II teve um resultado muito próximo ao do NdA IV (erro de apenas 1,4% no caso 1 e de 2,4% no caso 2, para o momento fletor), o que mostra que a utilização do coeficiente é uma maneira simples e que traz uma boa resposta para simular a NLF. O NdA III, apesar de apresentar valores de momento um pouco menores, também teve valores muito próximos aos encontrados pelo NdA IV (erro de apenas 4,7% no caso 1 e de 2,1% no

caso 2, para o momento fletor). Dessa forma, os valores encontrados foram bastante satisfatórios.

A comparação entre os resultados da análise não-linear com os de uma análise linear, feita utilizando o NdA IV, pode ser vista nas tabelas seguintes.

Tabela 6.5 - Comparação entre análises (exemplo 2, caso 1)

Análise	Momento máximo	Deslocamento máximo
Linear	906 kN.m	3,32 cm
Não-linear	988 kN.m	3,58 cm

Tabela 6.6 - Comparação entre análises (exemplo 2, caso 2)

Análise	Momento máximo	Deslocamento máximo
Linear	916 kN.m	3,40 cm
Não-linear	1072 kN.m	4,22 cm

Os resultados encontrados mostram que a consideração de uma análise linear, para o caso 1, levaria a um erro de aproximadamente 8,3% para o momento fletor e de 7,3% para o deslocamento máximo. Já para o caso 2, levaria a um erro de aproximadamente 14,6% para momento fletor e de 19,4% para deslocamento máximo.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusões

- Os resultados encontrados neste trabalho se mostraram bastante satisfatórios e coerentes entre si. Como esperado, os níveis de aproximação iniciais foram os que mostraram os maiores valores, enquanto que os níveis finais foram os que, em geral, mostraram os menores valores;
- Em ambos os exemplos, o NdA I (curvatura aproximada) foi o que apresentou os maiores valores para deslocamento e para momento fletor. Este resultado já era esperado uma vez que, neste método, a análise da estrutura se dá de maneira bem mais simplificada, a qual é compensada com valores mais conservadores. Isso significa que este método não é o mais econômico, mas que pode ser aplicado com segurança para a análise de uma estaca semienterrada;
- Para o exemplo 1, que não envolve a interação solo-estrutura, os resultados obtidos pelos 4 modelos de análise foram bastante próximos entre si e gradativamente decrescentes. O maior erro percentual entre os momentos fletores encontrado foi entre o NdA IV (menor valor) e o NdA I (maior valor), com um valor de aproximadamente 11%. O erro percentual do momento fletor entre o programa desenvolvido neste trabalho (NdA III) e o NdA IV (MultiPier) foi de apenas 2,7%;
- Comparando os resultados entre uma análise linear e uma análise não-linear com o NdA IV, para o exemplo 1, obtém-se um erro de 7,7% entre os valores de momento fletor encontrados;
- Para o exemplo 2, que envolve a interação solo-estrutura, os resultados não se apresentaram gradativamente decrescentes, mas se mostraram bastante próximos entre si (com exceção do NdA I), para ambos os casos analisados. Isso mostra que os três níveis de aproximação finais estão coerentes e que as variações que ocorrem entre eles se devem à introdução do comportamento do solo na análise, tornando-a mais complexa e com maiores incertezas;

- No exemplo 2, os valores para o NdA I foram significativamente diferentes, mas como estão a favor da segurança, não representam um problema grave;
- Comparando os resultados entre uma análise linear e uma análise não-linear com o NdA IV, para o exemplo 2, obtém-se um erro de 8,3% (caso 1) e 14,5% (caso 2) entre os valores de momento fletor encontrados;
- Os bons resultados obtidos com o NdA II (SAP2000) denotam que, com a utilização de coeficientes adequados para simular tanto o comportamento do solo através de molas (k_n) como a não-linearidade física da estrutura (atribuição de um valor de rigidez adequado, que represente a fissuração que ocorre no concreto), é possível chegar a valores bem próximos aos obtidos por uma análise mais sofisticada;
- Os quatro modelos de análise se mostraram adequados para analisar uma estaca semienterrada submetida a cargas laterais e a utilização de programas alternativos (NdA II e NdA III) possibilitou a obtenção de resultados bastante próximos aos obtidos por uma análise mais sofisticada (NdA IV).

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Comparar os resultados obtidos pelos programas aqui analisados com dados experimentais;
- Implementar a análise do solo por curvas p-y no programa desenvolvido em Mathcad;
- Realizar a análise considerando uma seção retangular;
- Realizar a análise para casos em que ocorra uma flexão oblíqua;
- Elaborar um programa considerando modelos em elementos finitos;
- Propor uma possível solução analítica ou semi-analítica para o problema considerado.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. B. **Soil-pile interaction in FB-MultiPier**. Florida Bridge Software Institute, Auburn University, 2000.

ANTONIAZZI, J. P. **Interação solo-estrutura de edifícios com fundações superficiais**. 2011. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BSI Bridge Software Institute. **FB-MultiPier soil parameter table**. 2013. College of Engineering, University of Florida.

CAVALCANTI, M. B.; HOROWITZ, B. Modelos de verificação à flexão de estruturas protendidas. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 1, n. 4, p. 331-364, Dec. 2008.

CHUNG, J. H. **Manual FB-Multiplier** (versão 5.0). 2016. BSI Bridge Software Institute, University of Florida.

CSI Computer & Structures, Inc. **Manual SAP2000** (versão 16). 2013.

ĆURIĆ, I.; RADIĆ, J.; FRANETOVIĆ, M. Determination of the bending moment-curvature relationship for reinforced concrete hollow section bridge columns. **Tehnički vjesnik** 23, 3 (2016), 907-915. ISSN 1330-3651.

GHALI, A.; NEVILLE, A. M.; BROWN, T. G. **Structural analysis**: a unified classical and matrix approach. 6th ed. London and New York: Spon Press, 2009. 835 p.

HETÉNYI, M. **Beams on elastic foundation**. Baltimore: The Waverly Press, 1946. 255 p.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 637 p.

HOIT, M. I. et al. Nonlinear pile foundation analysis using Florida-Pier. **Journal of Bridge Engineering**, v. 1, n. 4, p. 135-142, Nov. 1996.

JUSTINIANO, I. N. **Análise não linear de um bloco de estacas**: estudo do efeito de sombra utilizando os multiplicadores-P. 2017. 79 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

KHOURI, M. E. **Contribuição ao projeto de pilares de pontes de concreto armado com consideração das não-linearidades física e geométrica e interação solo-estrutura**. 2001. 215 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

KUMAR, P. S.; KARUPPAIAH, K. B.; PARAMESWARAN, P. Buckling behavior of partially embedded reinforced concrete piles in sand. **ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 2, n. 4, p. 22-26, Aug. 2007. ISSN 1819-6608.

KWAK, H.; KIM, S. Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation. **Computer & Structures**, v. 80, n. 7-8, p. 615-628, Mar. 2002. ISSN 0045-7949/02/\$.

MANZELLI, A. A.; HARIK, I. E. *Approximate moment-curvature relationships for slender columns*. **Journal of Structural Engineering**, v. 119, n. 4, p. 1114-1132, Apr. 1993.

MENN, C. **Prestressed Concrete Bridges**. Translation into English and edited by Paul Gauvreau. Basel, Boston and Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990. 535 p.

PAULA, J. A. **Algoritmos para o estudo de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexão normal composta**. 1988. 191 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado**, vol. 2, 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983. 490 p.

PINTO, R. S.; RAMALHO, M. A. Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, n. 19, p. 171-206, 2002.

PIRES, S. L. **Análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão normal composta considerando as não-linearidades física e geométrica**. 2006. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. **Pile Foundation Analysis and Design**. Rainbow-Bridge Book Co., 1980.

REESE, L. C.; VAN IMPE, W. F. **Single piles and pile groups under lateral loading**. London: Taylor & Francis Group plc, 2007.

RIBEIRO, K. **Diagramas para verificação de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexão composta normal**. 2011. 308 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

SANTOS, J. A. **Fundações por estacas: ações horizontais – Elementos teóricos**. Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica e Lisboa, 2008.

SCADELAI, M. A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003**. 2004. 136 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. **Fundações**. São Paulo, Oficina de Textos, 2011. 568 p.

APÊNDICE A – Programa Auxiliar

Traçado do Diagrama Momento x Curvatura

Tipo de seção: circular

<Calc_MomCurv_Circular.xmcd>

1 - Dados de Entrada

1.1 - Propriedades da seção transversal:

Diâmetro externo:	$De := 0.40$	(metros)
Espessura da parede:	$esp := 0.20$	(metros)
Raio interno:	$r := \frac{De}{2} - esp$	$r = 0$

1.2 - Propriedades do concreto:

Resistência à compressão:	$f_{ck} := 30000$	(kPa)
Módulo de deformação tangente inicial:	$E_{ci} := 31 \cdot 10^6$	(kPa) <i>NBR-6118 - Tabela 8.1</i>
Coefficiente de ponderação:	$\gamma_c := 1.40$	

1.3 - Propriedades da armadura:

Aço CA-50

Número de barras:	$n_{barras} := 8$	
Diâmetro da barra:	$di := 0.025$	(metros)
Resistência do aço:	$f_y := 5 \cdot 10^5$	(kPa)
Módulo de elasticidade do aço:	$E_s := 2.1 \cdot 10^8$	(kPa)
Coefficiente de ponderação:	$\gamma_s := 1.15$	
Cobrimento:	$cob := 0.035$	(metros)

1.4 - Dados do carregamento:

Carga axial aplicada: $N_S := 300$ (kN)

Carga axial de projeto: $N_{Sd} := 1.40 N_S$ (kN) $N_{Sd} = 420$

2 - Deformação específica ao longo da seção

2.1 - Posição das barras de armadura na seção:

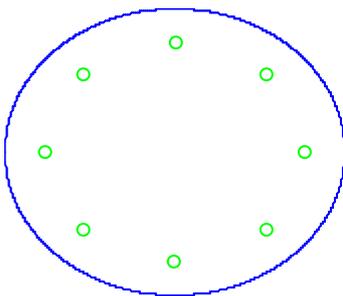
$$i := 1..n_{\text{barras}}$$

$$\alpha_i := \frac{\pi}{2} + (i - 1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n_{\text{barras}}}$$

$$y_i := \left[\frac{De}{2} - \left(\text{cob} + \frac{di}{2} \right) \right] \cdot \sin(\alpha_i)$$

$$x_i := \left[\frac{De}{2} - \left(\text{cob} + \frac{di}{2} \right) \right] \cdot \cos(\alpha_i)$$

Disposição da armadura:



Coordenadas:

$$x \cdot m = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -10.78 \\ -15.25 \\ -10.78 \\ -0.00 \\ 10.78 \\ 15.25 \\ 10.78 \end{pmatrix} \cdot \text{cm}$$

$$y \cdot m = \begin{pmatrix} 15.25 \\ 10.78 \\ 0.00 \\ -10.78 \\ -15.25 \\ -10.78 \\ -0.00 \\ 10.78 \end{pmatrix} \cdot \text{cm}$$

2.2 - Deformação ao longo da altura da seção:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\varepsilon_0, \phi, y) := \varepsilon_0 + \phi \cdot y$$

3 - Diagrama de interação (utilização do parâmetro D)

3.1 - Deformação da armadura para D = 12:

$$h := \frac{De}{2} \quad h = 0.2$$

$$\varepsilon_{4a} := \frac{3.5}{2 \cdot h} \cdot (h + \min(y))$$

3.2 - Deformação na fibra superior da seção:

$$\varepsilon_{\text{sup}}(D) := \begin{cases} (5 \cdot D - 10) & \text{if } 0 \leq D < 2 \\ (0.7 \cdot D - 1.4) & \text{if } 2 \leq D < 7 \\ 3.5 & \text{if } 7 \leq D < 13 \\ (23 - 1.5 \cdot D) & \text{if } 13 \leq D \leq 14 \end{cases}$$

3.3 - Deformação na fibra inferior da seção:

$$\varepsilon_{\text{inf}}(D) := \begin{cases} (-10) & \text{if } 0 \leq D < 7 \\ (2 \cdot D - 24) & \text{if } 7 \leq D < 12 \\ (\varepsilon_{4a} \cdot D - 12 \cdot \varepsilon_{4a}) & \text{if } 12 \leq D < 13 \\ (2 \cdot D - 26) & \text{if } 13 \leq D \leq 14 \end{cases}$$

3.4 - Deformação da altura comprimida ou tracionada:

$$y_{\text{sup}}(D) := h \quad y_{\text{inf}}(D) := \begin{cases} \min(y) & \text{if } 0 \leq D < 13 \\ -h & \text{if } 13 \leq D \leq 14 \end{cases}$$

3.5 - Deformação ao longo da altura da seção:

$$\text{Vetores para interpolação:} \quad y_i(D) := (y_{\text{inf}}(D) \quad y_{\text{sup}}(D))^T$$

$$\varepsilon_i(D) := (\varepsilon_{\text{inf}}(D) \quad \varepsilon_{\text{sup}}(D))^T$$

$$\text{Valor da deformação para um dado } y: \quad \varepsilon_D(y, D) := \text{linterp}(y_i(D), \varepsilon_i(D), y)$$

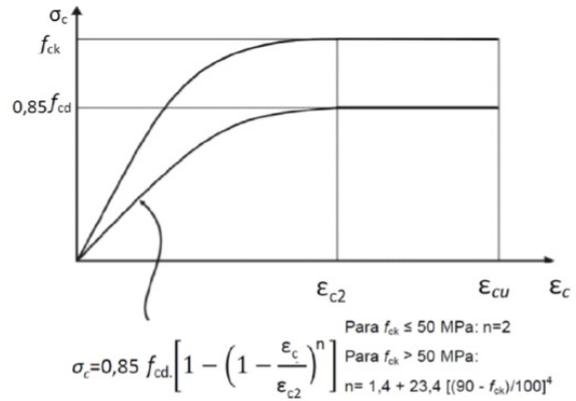
3.6 - Tensão no concreto

COMPRESSÃO

$$f_c := \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot 0.85 = 1.821 \times 10^4 \quad (\text{kPa})$$

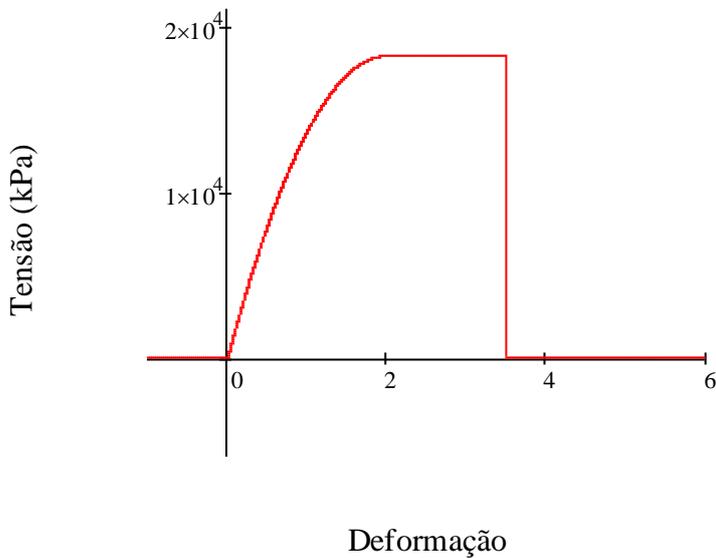
$$\epsilon_{c2} := 2$$

$$\epsilon_{cu} := 3.5$$

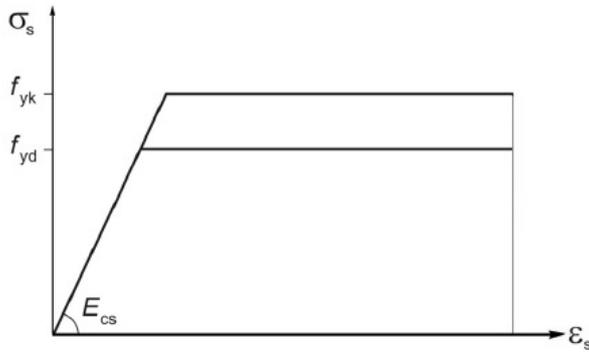


$$\sigma_{cd}(\epsilon) := \begin{cases} 0 & \text{if } \epsilon < 0 \\ \left[f_c \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \right] & \text{if } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{c2} \\ f_c & \text{if } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \\ 0 & \text{if } \epsilon > \epsilon_{cu} \end{cases}$$

Tensão x Deformação (Concreto)



3.7 - Tensão na armadura



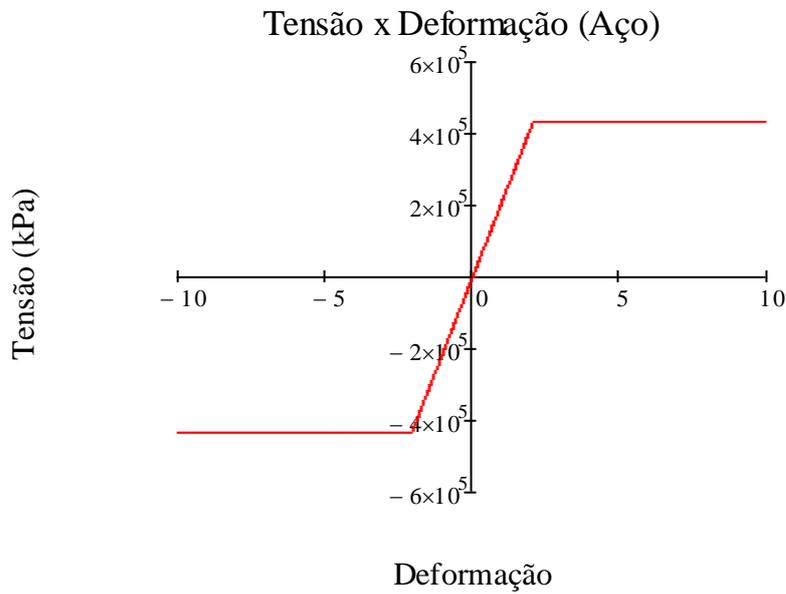
$$f_{yd} := \frac{f_y}{\gamma_s} = 4.348 \times 10^5 \text{ (kPa)}$$

$$\epsilon_{yd} := \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot 100 \quad \epsilon_{yd} = 2.07$$

$$\sigma_{si} := (0 \quad \epsilon_{yd} \quad 10)^T$$

$$\sigma_{si} := (0 \quad f_{yd} \quad f_{yd})^T$$

$$\sigma_{sd}(\epsilon) := \text{sign}(\epsilon) \cdot \text{linterp}(\sigma_{si}, \sigma_{si}, |\epsilon|)$$



3.8 - Largura da seção

$$b(y) := \begin{cases} \left[2 \cdot \sqrt{\left(\frac{De}{2}\right)^2 - y^2} \right] & \text{if } |y| \geq r \\ \left[2 \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{De}{2}\right)^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - y^2} \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.9 - Esforço normal

$$h = 0.2 \quad (\text{metros}) \quad A_s := \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}$$

$$N_{rd}(D) := \int_{-h}^h \sigma_{cd}(\varepsilon D(y, D)) \cdot b(y) \, dy + \sum_i \left(A_s \cdot \sigma_{sd}(\varepsilon D(y_i, D)) \right)$$

3.10 - Momento Fletor

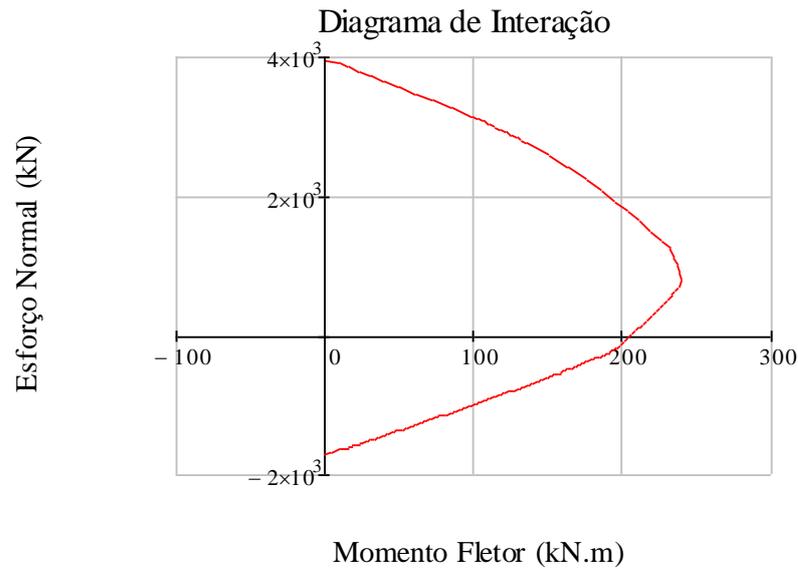
$$M_{rd}(D) := \int_{-h}^h \sigma_{cd}(\varepsilon D(y, D)) \cdot b(y) \cdot y \, dy + \sum_i \left(A_s \cdot \sigma_{sd}(\varepsilon D(y_i, D)) \cdot y_i \right)$$

3.11 - Diagrama de Interação

$$n_{saída} := 141 \quad j := 1..n_{saída} \quad D_j := (j - 1) \cdot \frac{14}{n_{saída} - 1}$$

$$N_{D_j} := N_{rd}(D_j) \quad M_{D_j} := M_{rd}(D_j)$$

$$N_{Dc} := \begin{cases} N_{Dc_1} \leftarrow N_{D_1} \\ \text{for } i \in 2..141 \\ \left| \begin{array}{l} N_{Dc_i} \leftarrow N_{Dc_{i-1}} + 0.0001 |N_{Dc_{i-1}}| \quad \text{if } N_{D_i} \leq N_{Dc_{i-1}} \\ N_{Dc_i} \leftarrow N_{D_i} \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ N_{Dc} \end{cases}$$



Carga máxima admitida para a seção:

$$N_{Rd} := \max(N_D) \quad N_{Rd} = 3938.21 \quad (\text{kN})$$

Para a carga aplicada de $N_{Sd} = 420 \text{ kN}$, temos:

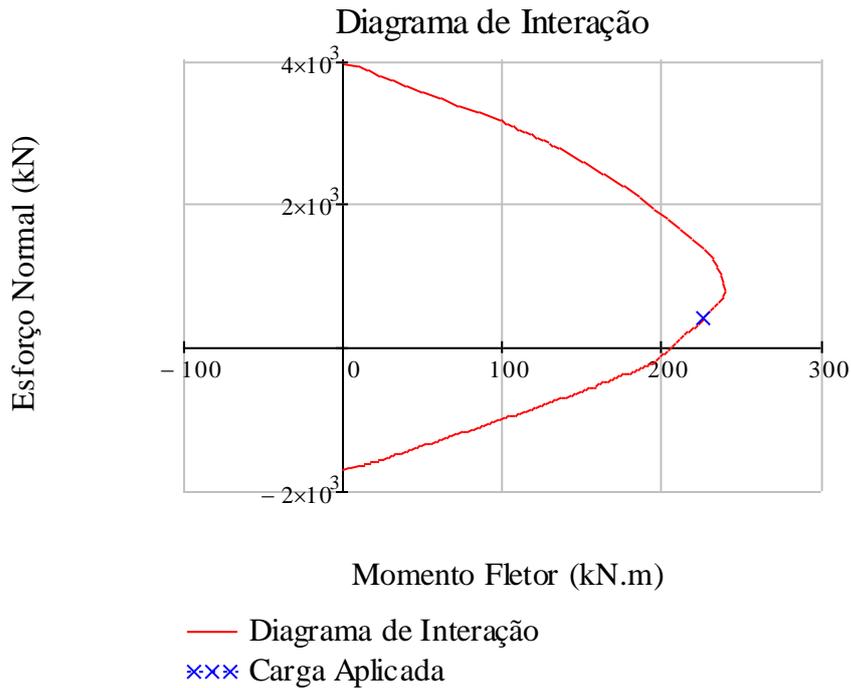
$$\text{Msg} := \begin{cases} \text{"OK - Carga aplicada dentro do admissível"} & \text{if } N_{Sd} \leq N_{Rd} \\ \text{"STOP - Carga acima do máximo admissível"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Msg} = \text{"OK - Carga aplicada dentro do admissível"}$$

Os valores resistentes de cálculo de acordo com o diagrama de interação são:

$$D_{\text{pos}} := \text{linterp}(N_{Dc}, D, N_{Sd}) \quad D_{\text{pos}} = 10.025$$

$$M_{Rd} := \text{linterp}(N_{Dc}, M_D, N_{Sd}) \quad M_{Rd} = 225.942$$



Máximo momento fletor que a seção suporta: $M_{Rd} = 225.942$ (kN.m)

Domínio em que a seção se encontra para a carga aplicada de $N_{Sd} = 420$ kN:

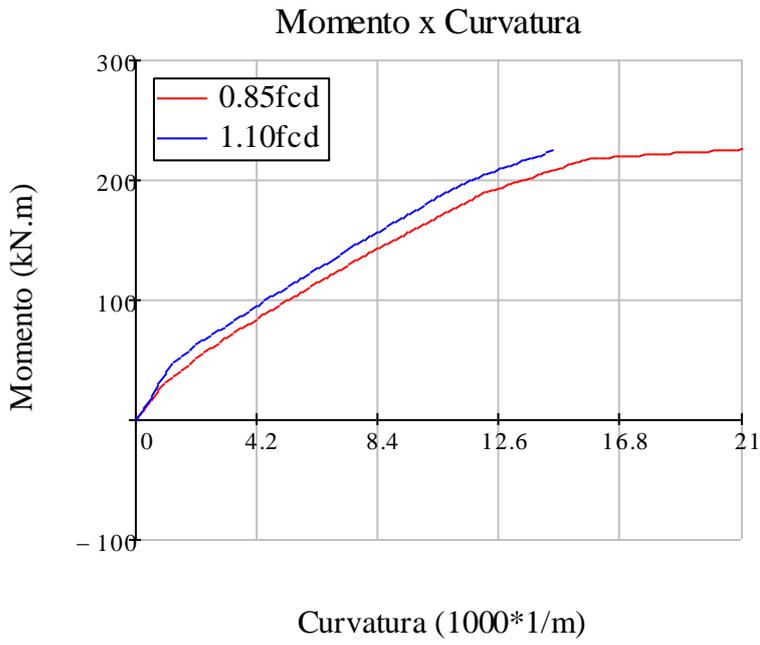
Domínio := $\left\{ \begin{array}{l} \text{"Domínio 1a - Tração Uniforme"} \text{ if } D_{pos} = 0 \\ \text{"Domínio 1"} \text{ if } 0 < D_{pos} < 2 \\ \text{"Domínio 2"} \text{ if } 2 \leq D_{pos} < 7 \\ \text{"Domínios 3 e 4"} \text{ if } 7 \leq D_{pos} \leq 12 \\ \text{"Domínio 4a"} \text{ if } 12 < D_{pos} < 13 \\ \text{"Domínio 5"} \text{ if } 13 \leq D_{pos} < 14 \\ \text{"Domínio 5b - Compressão Uniforme"} \text{ if } D_{pos} = 14 \end{array} \right.$

$$D_{pos} = 10.025$$

Domínio = "Domínios 3 e 4"

Curvatura máxima admitida:

$$\Phi_{max} := \frac{\varepsilon_{sup}(D_{pos}) - \varepsilon_{inf}(D_{pos})}{y_{sup}(D_{pos}) - y_{inf}(D_{pos})} \quad \Phi_{max} = 21.132$$



	1
1	0.00
2	9.87
3	19.73
4	29.70
5	39.66
6	48.09
7	54.16
8	58.60
9	62.75
10	66.82
11	70.88
12	74.94
13	79.00
14	83.06
15	87.11
16	...

MR2 =

(kN.m)

	1
1	0.000
2	0.264
3	0.528
4	0.792
5	1.057
6	1.321
7	1.585
8	1.849
9	2.113
10	2.377
11	2.641
12	2.906
13	3.170
14	3.434
15	3.698
16	...

Phi2 =

(1000.1/m)

APÊNDICE B – Programa Principal

Deslocamento Lateral de um Pilar em Balanço

Solução dada pela equação da linha elástica da Resistência dos Materiais a partir da aplicação do Método das Diferenças Finitas

<DeslocLat_EX01.xmcd>

DADOS DE ENTRADA:

Módulo de elasticidade do concreto: $E := 0.805600\sqrt{30}$ $E = 2.454 \times 10^4$ (MN/m²)

Resistência à compressão do concreto: $f_{ck} := 30$ (MPa)

Geometria da seção do pilar:

- Seção circular:

Diâmetro: $D := 0.40$ (m) (usar $D = 0$ caso a seção seja retangular)

- Seção retangular:

Base: $b := 0$ (m)

Altura: $h := 0$ (m)

Momento de Inércia:

$$I := \begin{cases} \frac{\pi \cdot (D \div 2)^4}{4} & \text{if } D \neq 0 \\ \frac{b \cdot h^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases} \quad I = 1.257 \times 10^{-3} \text{ (m}^4\text{)}$$

Altura total do pilar: $L_{total} := 4$ (m)

Cargas aplicadas no topo do pilar:

- Força normal: $N_i := 0.30$ (MN) $N_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot N_i$ $N_0 = 0.382$ (MN)

- Força lateral: $V_i := 0.038$ (MN) $V_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot V_i$ $V_0 = 0.038$ (MN)

- Momento fletor: $M_i := 0$ (MN) $M_0 := \frac{1.40}{1.10} \cdot M_i$ $M_0 = 0$ (MN)

ANÁLISE DA ESTACA:

Comprimento total da estaca: $L_{total} = 4 \quad (m)$

Total de pontos na discretização: $np := 10L_{total} + 1 \quad np = 41$

Total de intervalos considerados: $n := np - 1 \quad n = 40$

Profundidades consideradas na discretização:

$$i := 1..n + 1 \quad d := \frac{L_{total}}{n} \quad d = 0.1 \quad (m)$$

$$z_i := (i - 1) \cdot d$$

	1	
1	0.00	
2	0.10	
3	0.20	
4	0.30	
5	0.40	
6	0.50	
7	0.60	
z = 8	0.70	(m)
9	0.80	
10	0.90	
11	1.00	
12	1.10	
13	1.20	
14	1.30	
15	1.40	
16	...	

Definição do vetor v:

$$k := 1..n + 4 \quad (\text{total de pontos na discretização})$$

$$v_k := 0 \quad (\text{vetor inicialmente nulo})$$

Condições no topo da estaca (livre):

- Esforço cortante: $v_1 := \frac{2 \cdot V_0 \cdot d^3}{E \cdot I}$

- Momento fletor: $v_2 := \frac{M_0 \cdot d^2}{E \cdot I}$

Condições na base da estaca (engastada):

- Deslocamento nulo: $v_{n+3} := 0$

- Rotação nula: $v_{n+4} := 0$

Verificação do vetor v:

	1
1	$2.476 \cdot 10^{-6}$
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	...

v =

Definição da matriz dos coeficientes:

$$M_{n+4, n+4} := 0 \quad (\text{matriz inicialmente nula})$$

Fileira do cortante no topo da estaca:

$$M_{1,1} := -1 \quad M_{1,2} := 2 - \frac{N_0 \cdot d^2}{E \cdot I} \quad M_{1,4} := -2 + \frac{N_0 \cdot d^2}{E \cdot I} \quad M_{1,5} := 1$$

Fileira do momento no topo da estaca:

$$M_{2,2} := 1 \quad M_{2,3} := -2 \quad M_{2,4} := 1$$

Coefficientes da equação principal:

$$i := 3..n + 2 \quad d = 0.1$$

$$M_{1,i-2} := E \cdot I \quad M_{1,i-1} := (N_0 \cdot d^2 - 4 \cdot E \cdot I) \quad M_{1,i} := (6 \cdot E \cdot I - 2 \cdot N_0 \cdot d^2)$$

$$M_{1,i+1} := M_{1,i-1} \quad M_{1,i+2} := M_{1,i-2}$$

Fileira do deslocamento na base da estaca:

$$M_{n+3, n+3} := 1$$

Fileira da rotação na base da estaca:

$$M_{n+4, n+2} := -1 \quad M_{n+4, n+4} := 1$$

Verificação da matriz dos coeficientes:

	1	2	3	4	5	6
1	-1	2	0	-2	1	0
2	0	1	-2	1	0	0
3	30.835	-123.337	185.004	-123.337	30.835	0
4	0	30.835	-123.337	185.004	-123.337	30.835
5	0	0	30.835	-123.337	185.004	-123.337
6	0	0	0	30.835	-123.337	185.004
7	0	0	0	0	30.835	-123.337
8	0	0	0	0	0	30.835
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	...

Solução do sistema de equações:

$$\text{Sol} := \text{Isolve}(M, v) \quad S_0 := \text{Sol}$$

Removendo os pontos virtuais (os 2 iniciais e o final):

$$i := 1..n + 1$$

$$y_{e_i} := \text{Sol}_{i+2}$$

$$n = 40$$

DESLOCAMENTOS:

$L_{total} = 4$ $d = 0.1$ $n = 40$ $y_0 := y_e$

```
solucao(L,d) :=
  z ← 0
  n ← L/d
  for i ∈ 1..n + 1
    zi,1 ← -d·(i - 1)
    zi,2 ← yei
  z
```

$aux := solucao(L_{total}, d)$ $Prof := aux^{(1)}$ $y := aux^{(2)}$

Prof =

	1
1	0.00
2	-0.10
3	-0.20
4	-0.30
5	-0.40
6	-0.50
7	-0.60
8	-0.70
9	-0.80
10	-0.90
11	-1.00
12	-1.10
13	-1.20
14	-1.30
15	-1.40
16	...

y =

	1
1	2.87
2	2.762
3	2.654
4	2.547
5	2.44
6	2.333
7	2.227
8	2.122
9	2.018
10	1.915
11	1.813
12	1.713
13	1.614
14	1.517
15	1.421
16	...

$\frac{1}{m} \cdot cm$

CÁLCULO DOS MOMENTOS:

$i := 1..n + 1$ $d = 0.1$

$MF_i := E \cdot I \cdot \frac{Sol_{i+1} - 2Sol_{i+2} + Sol_{i+3}}{d^2}$

$MF1 := MF$

IMPLEMENTAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

Curva momento-curvatura:

$MR_{imp} :=$

	1
1	-6.661
2	9.867
3	19.732
4	29.702
5	39.656
6	48.095
7	54.157
8	58.604
9	62.749
10	66.825
11	70.885
12	74.944
13	79.003
14	83.059
15	87.109
16	...

(kN.m)

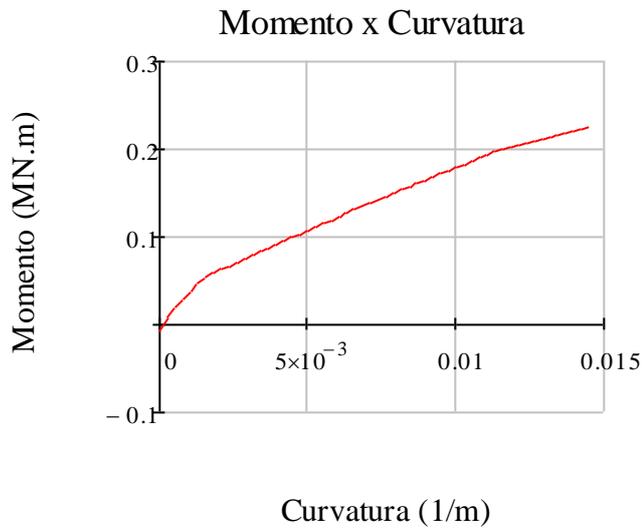
$\Phi_{imp} :=$

	1
1	0
2	0.264
3	0.528
4	0.792
5	1.057
6	1.321
7	1.585
8	1.849
9	2.113
10	2.377
11	2.641
12	2.906
13	3.17
14	3.434
15	3.698
16	...

(1/1000m)

$MR := \frac{MR_{imp}}{1000}$ (MN.m)

$\Phi := \frac{\Phi_{imp}}{1000}$ (1/m)



Determinação do momento de fissuração:

$$\alpha := 1.5$$

$$y_t := \frac{D}{2} \quad y_t = 0.2$$

$$I_c := 1 \quad I_c = 1.257 \times 10^{-3}$$

$$f_{ctm} := 0.30(f_{ck})^{\frac{2}{3}} \quad f_{ct} := f_{ctm} \quad f_{ct} = 2.896 \quad (\text{MPa})$$

$$M_r := \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t} \quad \mathbf{M_r = 0.027} \quad (\text{MN.m})$$

Consideração da rigidez correspondente em cada profundidade:

Vetor auxiliar: $vs := \text{cspline}(MR, \Phi_i)$

$$nc := \text{rows}(MF) \quad nc = 41 \quad j := 1..nc$$

Momentos calculados: $\text{Momento}_j := MF_j$ (sem os pontos virtuais)

	1	
	1	0.00
	2	4.23
	3	8.46
	4	12.69
	5	16.92
	6	21.14
	7	25.36
Momento · MN · m =	8	29.58 · kN · m
	9	33.80
	10	38.01
	11	42.22
	12	46.42
	13	50.61
	14	54.80
	15	58.99
	16	...

Curvaturas correspondentes:

$$j := 1..nc$$

$$\text{Curvatura}_j := \text{interp}(vs, MR, Phi, |Momento_j|)$$

	1
1	0.0616
2	0.1357
3	0.2296
4	0.3369
5	0.4513
6	0.5665
7	0.6790
1000 Curvatura =	8
	0.7894
	9
	0.8991
	10
	1.0113
	11
	1.1298
	12
	1.2619
	13
	1.4185
	14
	1.6201
	15
	1.8732
	16
	...

Rigidez no trecho inicial (linear):

$$\text{phi}_{EI} := \text{interp}(vs, MR, Phi, Mr)$$

$$\text{phi}_{EI} = 7.298 \times 10^{-4}$$

$$EI_{ini} := \frac{Mr}{\text{phi}_{EI}} \quad EI_{ini} = 37.407 \quad (\text{MN.m}^2)$$

Valores de rigidez para cada profundidade:

$$EI_{0j} := \text{if} \left(\text{Momento}_j \geq Mr, \frac{\text{Momento}_j}{\text{Curvatura}_j}, EI_{ini} \right)$$

NOVOS VALORES DE DESLOCAMENTO:

$$n = 40$$

$$EI_{virt_1} := EI_{ini} \quad EI_{virt_2} := EI_{ini}$$

$$EI_{virt_{j+2}} := EI_{0j}$$

$$EI_{virt_{n+4}} := 0.95 EI_{0_{n+1}}$$

```

vd := Tol ← 10-4
      EI ← EIvirt
      Mn+4,n+4 ← 0
      for i ∈ 1..n+4
        vi ← 0
        (v1 ← 2·V0·d3), (v2 ←  $\frac{M_0 \cdot d^2}{EI_3}$ )
        (M1,1 ← -EI2), (M1,2 ← 2·EI2 - N0·d2)
        (M1,3 ← -EI2 + EI4), (M1,4 ← -2·EI4 + N0·d2), (M1,5 ← EI4)
        (M2,2 ← 1), (M2,3 ← -2), (M2,4 ← 1)
      for i ∈ 3..n+2
        Mi,i-2 ← EIi-1
        Mi,i-1 ← -2·(EIi-1 + EIi) + N0·d2
        Mi,i ← 1·(EIi-1 + 4·EIi + EIi+1) - 2·N0·d2
        Mi,i+1 ← -2·(EIi + EIi+1) + N0·d2
        Mi,i+2 ← EIi+1

      Mn+3,n+3 ← 1
      Mn+4,n+2 ← -1, Mn+4,n+4 ← 1
      Sol ← Isolve(M,v)
      for i ∈ 1..n+1
        MFi ← EIi+2 ·  $\left| \frac{Sol_{i+1} - 2Sol_{i+2} + Sol_{i+3}}{d^2} \right|$ 
      δ1 ← Sol3
      ξ ←  $\frac{|\delta_1 - 0|}{|\delta_1|}$ 
      aux ← 1

```

```

while  $\xi > \text{Tol}$ 
   $(EI_1 \leftarrow EI_{ini}), (EI_2 \leftarrow EI_{ini})$ 
  for  $i \in 1..n+1$ 
     $\text{Curv}_i \leftarrow \text{interp}(vs, MR, Phi, MF_i)$ 
    if  $MF_i \geq Mr, \left( EI_{aux_i} \leftarrow \frac{MF_i}{\text{Curv}_i} \right), EI_{aux_i} \leftarrow EI_{ini}$ 
     $EI_{i+2} \leftarrow EI_{aux_i}$ 
   $(EI_{n+4} \leftarrow 0.95 \cdot EI_{aux_{n+1}})$ 
  for  $i \in 1..n+4$ 
     $v_i \leftarrow 0$ 
   $v_1 \leftarrow 2 \cdot V_0 \cdot d^3, v_2 \leftarrow \frac{M_0 \cdot d^2}{EI_3}$ 
   $M_{n+4, n+4} \leftarrow 0$ 

   $(M_{1,1} \leftarrow -EI_2), (M_{1,2} \leftarrow 2 \cdot EI_2 - N_0 \cdot d^2)$ 
   $(M_{1,3} \leftarrow -EI_2 + EI_4), (M_{1,4} \leftarrow -2 \cdot EI_4 + N_0 \cdot d^2), (M_{1,5} \leftarrow EI_4)$ 
   $(M_{2,2} \leftarrow 1), (M_{2,3} \leftarrow -2), (M_{2,4} \leftarrow 1)$ 
  for  $i \in 3..n+2$ 
     $M_{i,i-2} \leftarrow EI_{i-1}$ 
     $M_{i,i-1} \leftarrow -2 \cdot (EI_{i-1} + EI_i) + N_0 \cdot d^2$ 
     $M_{i,i} \leftarrow 1 \cdot (EI_{i-1} + 4 \cdot EI_i + EI_{i+1}) - 2 \cdot N_0 \cdot d^2$ 
     $M_{i,i+1} \leftarrow -2 \cdot (EI_i + EI_{i+1}) + N_0 \cdot d^2$ 
     $M_{i,i+2} \leftarrow EI_{i+1}$ 
   $M_{n+3, n+3} \leftarrow 1$ 
   $M_{n+4, n+2} \leftarrow -1, M_{n+4, n+4} \leftarrow 1$ 
   $\text{Sol} \leftarrow \text{Isolve}(M, v)$ 

```

```

for i ∈ 1..n + 1
  MFi ← EIi+2 ·  $\left| \frac{\text{Sol}_{i+1} - 2\text{Sol}_{i+2} + \text{Sol}_{i+3}}{d^2} \right|$ 
  δaux+1 ← Sol3
  ξ ←  $\frac{|\delta_{\text{aux}+1} - \delta_{\text{aux}}|}{|\delta_{\text{aux}+1}|}$ 
  aux ← aux + 1
vd(1) ← Sol
vd(2) ← EI
vd(3) ← MF
vd(4) ← aux
vd

```

Removendo os pontos virtuais (os 2 iniciais e o final):

$i := 1..n + 1$

$\text{Desloc}_i := \text{vd}_{i+2,1}$

$\text{EI}_{\text{final}_i} := \text{vd}_{i,2}$

DESLOCAMENTOS EM TODO O PILAR:

$L_{\text{total}} = 4$

$d = 0.1$

$n = 40$

```

solucao(L,d) :=  $\left\{ \begin{array}{l} z \leftarrow 0 \\ n \leftarrow \frac{L}{d} \\ \text{for } i \in 1..n + 1 \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{i,1} \leftarrow -d \cdot (i - 1) \\ z_{i,2} \leftarrow \text{Desloc}_i \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$ 

```

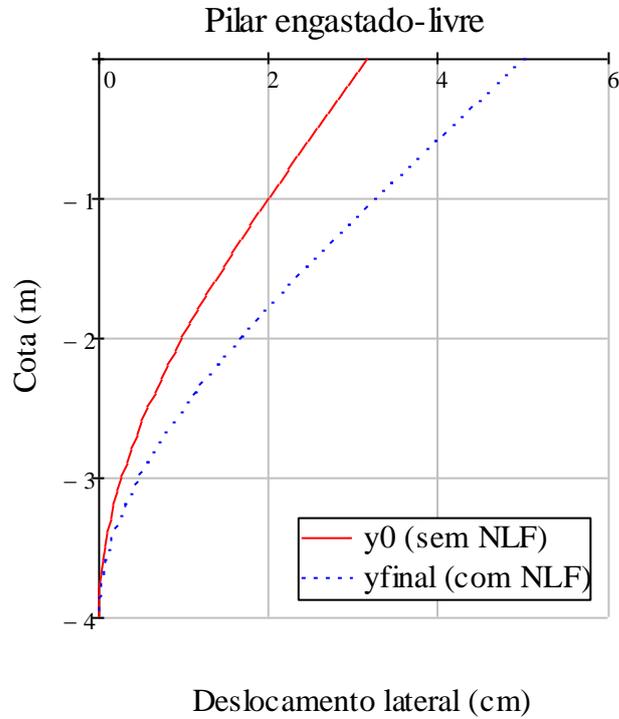
$\text{aux} := \text{solucao}(L_{\text{total}}, d)$

$\text{Prof} := \text{aux}^{\langle 1 \rangle}$

$y_{\text{final}} := \text{aux}^{\langle 2 \rangle}$

RESULTADOS

1. Deslocamentos



Deslocamentos sem NLF

Deslocamentos com NLF

Prof·m =

	1
1	0.00
2	-0.10
3	-0.20
4	-0.30
5	-0.40
6	-0.50
7	-0.60
8	-0.70
9	-0.80
10	-0.90
11	-1.00
12	-1.10
13	-1.20
14	-1.30
15	-1.40
16	...

·m

y_0 ·m =

	1
1	2.87
2	2.76
3	2.65
4	2.55
5	2.44
6	2.33
7	2.23
8	2.12
9	2.02
10	1.91
11	1.81
12	1.71
13	1.61
14	1.52
15	1.42
16	...

·cm

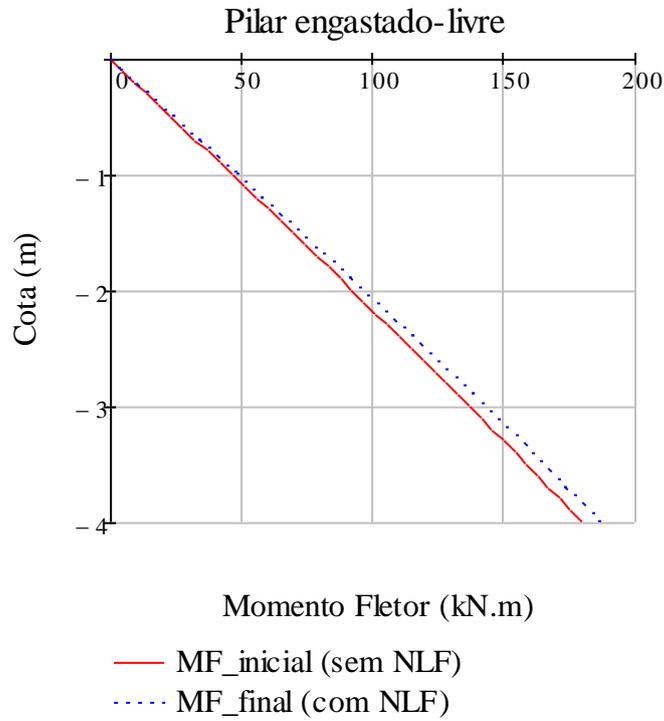
$1 \cdot y_{final}$ ·m =

	1
1	5.00
2	4.83
3	4.65
4	4.47
5	4.30
6	4.12
7	3.94
8	3.77
9	3.60
10	3.42
11	3.25
12	3.08
13	2.91
14	2.75
15	2.58
16	...

·cm

2. Momentos Fletores

$$MF_{sol} := vd^{(3)}$$



	1
1	0.00
2	-0.10
3	-0.20
4	-0.30
5	-0.40
6	-0.50
7	-0.60
8	-0.70
9	-0.80
10	-0.90
11	-1.00
12	-1.10
13	-1.20
14	-1.30
15	-1.40
16	...

Prof.m = ·m MF1 · 1100 =

Momentos sem NLF

	1
1	0.00
2	4.65
3	9.31
4	13.96
5	18.61
6	23.26
7	27.90
8	32.54
9	37.18
10	41.81
11	46.44
12	51.06
13	55.68
14	60.28
15	64.89
16	...

MF_{sol} · 1100 =

Momentos com NLF

	1
1	0.00
2	4.88
3	9.75
4	14.63
5	19.50
6	24.37
7	29.24
8	34.11
9	38.97
10	43.83
11	48.68
12	53.53
13	58.37
14	63.21
15	68.04
16	...

VALORES FINAIS DE CÁLCULO

Deslocamento máximo (topo do pilar): $\delta_{\max} := 1.10 \max(y_{\text{final}}) \cdot \text{m}$ $\delta_{\max} = 5.002 \text{ cm}$

Momento fletor com 2ª ordem: $M_{d_tot} := 1.10 \max(MF_{\text{sol}}) \cdot \text{MN} \cdot \text{m}$ $M_{d_tot} = 187 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Esforço axial: $N_{Sd} := N_0 \cdot 1.10 \text{ MN}$ $N_{Sd} = 420 \text{ kN}$

APÊNDICE C – Cálculo da Armação

Cálculo da Armação - Seções Circulares

<Calc_As.xmcd>

Dados de entrada:

Diâmetro:	$h := 0.4$	(m)		
Recobrimento:	$d' := 0.034$	(m)		
Resistência característica:	$f_{ck} := 30$	(MPa)		
Limite de escoamento:	$f_{yk} := 500$	(MPa)		
Esforços solicitantes de cálculo:	$N_d := 420$	(kN)	$M_d := 202$	(kN.m)
Número de barras:	$nb := 8$			

Posição das barras:

$$i := 1..nb$$

$$\alpha_i := \frac{\pi}{2} + (i - 1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{nb}$$

$$x_{b_i} := \left(\frac{h}{2} - d' \right) \cdot \cos(\alpha_i) \quad \xi_{s_i} := \frac{x_{b_i}}{h} \quad (\text{coordenada adimensional})$$

$$y_{b_i} := \left(\frac{h}{2} - d' \right) \cdot \sin(\alpha_i) \quad \eta_i := \frac{y_{b_i}}{h} \quad (\text{coordenada adimensional})$$

$$y_{min} := \min(y_b)$$

$$y_{min} = -0.165$$

Cálculos:

$$n_t := n_b \quad n_t = 8$$

$$f_c := 10^3 \cdot \frac{0.85 f_{ck}}{1.4} \quad f_{yd} := 10^3 \cdot \frac{f_{yk}}{1.15} \quad E_s := 21010^3$$

$$\varepsilon_{yd} := \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \varepsilon_{yd} = 2.07$$

$$A_c := \frac{\pi \cdot h^2}{4}$$

$$v_d := \frac{N_d}{f_c \cdot A_c} \quad v_d = 0.183 \quad \mu_d := \frac{M_d}{f_c \cdot A_c \cdot h} \quad \mu_d = 0.221$$

$$\varepsilon_{4a} := \frac{3.5}{h} \cdot \left(\frac{h}{2} + y_{min} \right) \quad \varepsilon_{4a} = 0.306$$

Relações tensão-deformação (concreto e aço):

$$s_c(\varepsilon) := \begin{cases} s \leftarrow 0 & \text{if } \varepsilon \leq 0 \\ s \leftarrow 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 & \text{if } 0 < \varepsilon \leq 2 \\ s \leftarrow 1 & \text{if } 2 < \varepsilon \leq 3.5 \\ s \leftarrow 0 & \text{if } \varepsilon > 3.5 \\ s \end{cases}$$

$$s_s(\varepsilon) := \begin{cases} s \leftarrow \frac{E_s}{f_{yd}} \cdot \varepsilon & \text{if } |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \\ s \leftarrow \text{sign}(\varepsilon) & \text{if } |\varepsilon| > \varepsilon_{yd} \\ s \end{cases}$$

$$t_c := -2, -1.9.. 3.5$$

$$t_s := -5, -4.9.. 5$$

Domínios de Ruptura:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_f(D) &:= \begin{cases} \text{if } 0 \leq D < 2 \\ \left| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 5 \cdot D - 10 \\ e_1 \leftarrow -10 \end{array} \right. \\ \text{if } 2 \leq D < 7 \\ \left| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 0.7 \cdot D - 1.4 \\ e_1 \leftarrow -10 \end{array} \right. \\ \text{if } 7 \leq D \leq 12 \\ \left| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 3.5 \\ e_1 \leftarrow 2 \cdot D - 24 \end{array} \right. \\ \text{if } 12 < D < 13 \\ \left| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 3.5 \\ e_1 \leftarrow \varepsilon_{4a} \cdot (D - 12) \end{array} \right. \\ \text{if } 13 \leq D \leq 14 \\ \left| \begin{array}{l} e_2 \leftarrow 23 - 1.5 \cdot D \\ e_1 \leftarrow 2 \cdot D - 26 \end{array} \right. \\ e \end{cases} & \quad yf(D) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq D < 13 \\ \left| \begin{array}{l} y_2 \leftarrow 0.5 \cdot h \\ y_1 \leftarrow d' - 0.5 \cdot h \end{array} \right. \\ \text{if } 13 \leq D \leq 14 \\ \left| \begin{array}{l} y_2 \leftarrow 0.5 \cdot h \\ y_1 \leftarrow -0.5 \cdot h \end{array} \right. \\ y \end{cases} & \quad \eta f(D) := \frac{yf(D)}{h} \\
 \end{aligned}$$

$$\xi(y, D) := \text{linterp}(yf(D), \varepsilon_f(D), y)$$

$$\varepsilon_\eta(\eta, D) := \text{linterp}(\eta f(D), \varepsilon_f(D), \eta)$$

$$\xi(D) := \frac{\varepsilon_f(D)_2}{\varepsilon_f(D)_2 - \varepsilon_f(D)_1} \cdot (\eta f(D)_2 - \eta f(D)_1)$$

$$r_c(D) := \begin{cases} r \leftarrow 0 & \text{if } 0 \leq D \leq 2 \\ r \leftarrow 0.8 \cdot \xi(D) & \text{if } 2 < D < 13.30 \\ r \leftarrow 1 & \text{if } D \geq 13.304 \\ r \end{cases}$$

$$\beta_c(D) := \begin{cases} d \leftarrow 0 & \text{if } 0 \leq D \leq 2 \\ d \leftarrow 0.4 \cdot \xi(D) & \text{if } 2 < D < 13.30 \\ d \leftarrow 0.5 & \text{if } D \geq 13.304 \\ d \end{cases}$$

$$v_R(D, \omega) := r_c(D) + \omega \cdot \sum_i \left(\frac{1}{nt} \cdot s_s(\varepsilon_\eta(\eta_i, D)) \right)$$

$$\mu_R(D, \omega) := r_c(D) \cdot (0.5 - \beta_c(D)) + \omega \cdot \sum_i \left(\frac{1}{nt} \cdot \eta_i \cdot s_s(\varepsilon_\eta(\eta_i, D)) \right)$$

$$\omega := 0 \quad D := 11$$

Given

$$\omega \geq 0$$

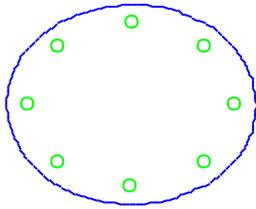
$$v_R(D, \omega) = v_p$$

$$\mu_R(D, \omega) = \mu_p$$

$$D\omega(v_p, \mu_p) := \text{Find}(D, \omega)$$

$$\begin{pmatrix} D_s \\ \omega_s \end{pmatrix} := \begin{cases} D_0 \leftarrow \text{root}(v_R(D, 0) - v_d, D) \\ \mu_0 \leftarrow \mu_R(D_0, 0) \\ \text{if } \mu_0 \geq \mu_d \\ \quad \begin{cases} S_1 \leftarrow D_0 \\ S_2 \leftarrow 0 \end{cases} \\ S \leftarrow D\omega(v_d, \mu_d) \text{ otherwise} \\ S \end{cases}$$

Seção Transversal



Para solicitações: $v_d = 0.183$ $\mu_d = 0.221$

Ruptura se dá no domínio: $D_s = 9.411$

$$\omega_s = 0.509 \quad A_{st} := 10^4 \cdot \frac{A_c \cdot \omega_s \cdot f_c}{f_{yd}}$$

Armação total: $A_{st} = 26.78$ (cm²)

APÊNDICE D – Procedimento para o cálculo do coeficiente para a rigidez

Observações iniciais:

- Para a determinação de um coeficiente que simule a não-linearidade física do concreto armado, considerou-se um pilar engastado na base e livre na ponta com um índice de esbeltez (λ) igual a 40 e com valores variados de força normal adimensional (ν) aplicada (valores adotados: 0,20, 0,40, 0,60 e 0,80).
- A esbeltez foi escolhida de forma a classificar o pilar como curto e, como consequência, torná-lo minimamente influenciado pelos efeitos de segunda ordem.
- Os valores dos resultados obtidos podem ser vistos no Anexo D.

Descrição do procedimento utilizado:

- 1) Entrada de dados:
 - a. Índice de esbeltez (λ)
 - b. Diâmetro da coluna (D)
 - c. Força normal adimensional (ν)
 - d. Resistência do concreto (f_{ck})
 - e. Resistência do aço (f_{yk})
 - f. Número de barras de aço da seção (n_{barras})

- 2) Cálculo do comprimento do pilar (L):

$$L = \frac{\lambda D}{8}$$

- 3) Cálculo da área da seção (A_c):

$$A_c = \frac{\pi D^2}{4}$$

- 4) Cálculo da carga axial atuante (N_d):

$$N_d = \nu A_c f_{cd}$$

- 5) Cálculo da armação mínima ($A_{s,mín}$):

$$A_{s,mín} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004A_c$$

6) Escolha da bitola adequada (Φ):

Neste passo, como o número de barras já é fixado, basta verificar qual bitola atende ao $A_{s,mín}$ (deixar o mais próximo possível).

7) Escolha do valor para a carga lateral (V_d):

O valor de V_d é escolhido de maneira a gerar um valor de momento na base próximo ao momento máximo suportado pela seção. Nessa etapa, utiliza-se o programa auxiliar elaborado neste trabalho (Calc_MomCurv_Circular.xmcd) para encontrar o momento máximo que a seção suporta, com base em seus diagramas. Depois, com o programa principal (DeslocLat_EX01.xmcd), também elaborado neste trabalho, vão sendo testados valores de força lateral até que o momento na base resultante seja inferior, mas próximo, ao máximo suportado pela seção.

8) Resultados do programa elaborado:

Com os valores encontrados para N_d e V_d , calcula-se o momento fletor resultante na base com o programa elaborado em Mathcad (citados no item anterior).

9) Resultados do SAP2000:

Ir testando, no SAP2000, valores de coeficiente para o momento de inércia da seção até chegar a um valor de momento fletor na base próximo ao encontrado pelo item anterior.

10) Preencher o coeficiente encontrado na tabela:

$\lambda = 40$	
v	Coefficiente
0,2	
0,4	
0,6	
0,8	

APÊNDICE E – Resultados do cálculo para o coeficiente da rigidez equivalente

DADOS DE ENTRADA:

Índice de esbeltez	λ	40		
Diâmetro	D	0,4 m		
Esforços normal adimensional	v	0,2		
Resistência do concreto	f _{ck}	30000 kPa	f _{cd}	21429 kPa
Resistência do aço	f _{yk}	500000 kPa	f _{yd}	434783 kPa
Número de barras	n _{barras}	6		

DADOS CALCULADOS:

Comprimento do pilar	L _{total}	2 m
Área da seção	A _c	0,126 m ²
Esforço normal atuante	N _d	539 kN

ARMAÇÃO:

BITOLAS:	A _s
10,0 mm	4,712 cm ²
12,5 mm	7,363 cm ²
16,0 mm	12,064 cm ²
20,0 mm	18,850 cm ²
25,0 mm	29,452 cm ²

As1 0,186 cm²
As2 5,027 cm²

As,min	5,027 cm ²
--------	-----------------------

Bitola necessária: 12,5 mm

ESFORÇO LATERAL CONSIDERADO:

V_k 30 kN V_d 42 kN

VALORES MÁXIMOS PARA A SEÇÃO:

Momento fletor M_{máx} 104 kN.m
Esforço normal N_{Rd} 2598 kN

RESULTADOS OBTIDOS:

	Mathcad	SAP	Coef.
M _{total} (kN.m)	87	87	0,5
Desloc (cm)	0,52	0,51	

DADOS DE ENTRADA:

Índice de esbeltez	λ	40		
Diâmetro	D	0,4 m		
Esforços normal adimensional	v	0,4		
Resistência do concreto	fck	30000 kPa	fcd	21429 kPa
Resistência do aço	fyk	500000 kPa	fyd	434783 kPa
Número de barras	nbarras	6		

DADOS CALCULADOS:

Comprimento do pilar	Ltotal	2 m
Área da seção	Ac	0,126 m ²
Esforço normal atuante	Nd	1077 kN

ARMAÇÃO:

BITOLAS:	As
10,0 mm	4,712 cm ²
12,5 mm	7,363 cm ²
16,0 mm	12,064 cm ²
20,0 mm	18,850 cm ²
25,0 mm	29,452 cm ²

As1 0,372 cm²As2 5,027 cm²As,min 5,027 cm²

Bitola necessária: 12,5 mm

ESFORÇO LATERAL CONSIDERADO:

Vk 14 kN

Vd 19,6 kN

VALORES MÁXIMOS PARA A SEÇÃO:

Momento fletor	Mmáx	120 kN.m
Esforço normal	NRd	2598 kN

RESULTADOS OBTIDOS:

	Mathcad	SAP	Coef.
Mtotal (kN.m)	86	89	0,6
Desloc (cm)	0,44	0,44	

DADOS DE ENTRADA:

Índice de esbeltez	λ	40		
Diâmetro	D	0,4 m		
Esforços normal adimensional	v	0,6		
Resistência do concreto	fck	30000 kPa	fcd	21429 kPa
Resistência do aço	fyk	500000 kPa	fyd	434783 kPa
Número de barras	nbarras	6		

DADOS CALCULADOS:

Comprimento do pilar	Ltotal	2 m
Área da seção	Ac	0,126 m ²
Esforço normal atuante	Nd	1616 kN

ARMAÇÃO:

BITOLAS:	As
10,0 mm	4,712 cm ²
12,5 mm	7,363 cm ²
16,0 mm	12,064 cm ²
20,0 mm	18,850 cm ²
25,0 mm	29,452 cm ²

As1 0,557 cm²As2 5,027 cm²As,min 5,027 cm²

Bitola necessária: 12,5 mm

ESFORÇO LATERAL CONSIDERADO:

Vk 25 kN

Vd 35 kN

VALORES MÁXIMOS PARA A SEÇÃO:

Momento fletor	Mmáx	103 kN.m
Esforço normal	NRd	2598 kN

RESULTADOS OBTIDOS:

	Mathcad	SAP	Coef.
Mtotal (kN.m)	77	77	0,5
Desloc (cm)	0,45	0,46	

DADOS DE ENTRADA:

Índice de esbeltez	λ	40		
Diâmetro	D	0,4 m		
Esforços normal adimensional	v	0,8		
Resistência do concreto	fck	30000 kPa	fcd	21429 kPa
Resistência do aço	fyk	500000 kPa	fyd	434783 kPa
Número de barras	nbarras	6		

DADOS CALCULADOS:

Comprimento do pilar	Ltotal	2 m
Área da seção	Ac	0,126 m ²
Esforço normal atuante	Nd	2154 kN

ARMAÇÃO:

BITOLAS:	As
10,0 mm	4,712 cm ²
12,5 mm	7,363 cm ²
16,0 mm	12,064 cm ²
20,0 mm	18,850 cm ²
25,0 mm	29,452 cm ²

As1 0,743 cm²As2 5,027 cm²As,mín 5,027 cm²

Bitola necessária: 12,5 mm

ESFORÇO LATERAL CONSIDERADO:

Vk 14 kN

Vd 19,6 kN

VALORES MÁXIMOS PARA A SEÇÃO:

Momento fletor	Mmáx	56 kN.m
Esforço normal	NRd	2598 kN

RESULTADOS OBTIDOS:

	Mathcad	SAP	Coef.
Mtotal (kN.m)	47	46	0,4
Desloc (cm)	0,36	0,35	