



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



BRAIAN SCHNEIDER BRUM

**Simulação do Escoamento Bifásico de Água e Óleo em  
Reservatórios de Petróleo Naturalmente Fraturados  
Utilizando Métodos de Volumes Finitos Acoplados a  
Modelos de Fraturas com Dimensão Reduzida**

Recife  
2017

BRAIAN SCHNEIDER BRUM

**Simulação do Escoamento Bifásico de Água e Óleo em  
Reservatórios de Petróleo Naturalmente Fraturados  
Utilizando Métodos de Volumes Finitos Acoplados a  
Modelos de Fraturas com Dimensão Reduzida**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

**Orientador:** Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.

**Co-orientador:** Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.

Recife  
2017

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

B893s      Brum, Braian Schneider.  
              Simulação do escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo naturalmente fraturados utilizando métodos de volumes finitos acoplados a modelos de fraturas com dimensão reduzida / Braian Schneider Brum - 2017.  
              151folhas, Il., Tab.; Abr. e Sigl.  
  
              Orientador: Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho.  
              Coorientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra.  
  
              Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.  
              Inclui Referências e Apêndices.  
  
              1. Engenharia Civil. 2. Escoamento bifásico de água e óleo. 3. Reservatórios naturalmente fraturados. 4. Modelo de fraturas com dimensão reduzida (LDFM). 5. MPFA-O. I. Carvalho, Darlan Karlo Elisiário de. (Orientador). II. Lyra, Paulo Roberto Maciel. (Coordenador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-149



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A comissão examinadora da Defesa de Dissertação de Mestrado

**Simulação do Escoamento Bifásico de Água e Óleo em Reservatórios de Petróleo  
Naturalmente Fraturados Utilizando Métodos de Volumes Finitos Acoplados a Modelos  
de Fraturas Com Dimensão Reduzida**

defendida por

Braian Schneider Brum

Considera o candidato APROVADO

Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho – Orientador - UFPE

Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra – Coorientador - UFPE

Recife, 31 de janeiro de 2017

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Darlan Karlo Elisiário de Carvalho – UFPE  
(orientador)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rita de Cássia Fernandes de Lima – UFPE  
(examinadora externa)

---

Prof. Dr. Igor Fernandes Gomes – UFPE  
(examinador interno)

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Rosita, e irmã, Brenda, por seu amor incondicional e que apesar de distantes sempre se fizeram presentes. Aos meus segundos pais, Julio e Lucila, por todo acolhimento e carinho durante toda minha jornada acadêmica. Ao meu irmão de consideração, Haig Wing, por todo suporte e amizade.

A Aline Dantas, meu amor, por seu afeto e por ter estado sempre ao meu lado, me apoiando, mesmo quando não merecia, e de todas as formas possíveis, por isso dedico a ela este trabalho.

A todos os companheiros e amigos do grupo de Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional (PADMEC), em especial a Márcio Souza, por toda bagagem que nos foi disponibilizada e por suas orientações, sem as quais esse trabalho não seria possível, também a Carla Perestrelo por toda parceria no desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus orientadores, Darlan Carvalho e Paulo Lyra, por toda sua atenção, dedicação ao meu desenvolvimento acadêmico, e também por toda amizade demonstrada.

A Universidade Federal de Pernambuco, seu corpo técnico e administrativo, e todos os professores, em especial do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, com quem tive oportunidade de aprender muito.

Aos seguintes órgãos: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), *Computer Modelling Group Foundation (CMG Foundation)*, Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) e CENPES-PETROBRAS (SIGER – Rede Temática de Simulação e Gerenciamento de Reservatórios), pelo suporte financeiro, direto e indireto, necessário para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus amigos mais antigos, que levo em meu coração, por compreenderem a minha ausência, e aos novos amigos conquistados durante o mestrado.

E a todos, cujos nomes não foram mencionados, mas que de alguma forma contribuíram como minha formação, meus sinceros agradecimentos.

## RESUMO

O problema do escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos pode ser descrito utilizando certas hipóteses simplificadoras, por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, composto por uma equação elíptica da pressão e uma equação hiperbólica de saturação. A modelagem deste problema representa um grande desafio, devido à complexidade dos ambientes deposicionais, incluindo camadas inclinadas, canais, fraturas e a possível existência de poços direcionais. Nesses casos, é particularmente complexo construir malhas estruturadas capazes de modelar o problema físico adequadamente. Esta dissertação tem como objetivo a modelagem numérica do escoamento bifásico em reservatórios naturalmente fraturados (RNF). Para isso, são apresentadas duas formulações pelo Método de Volumes Finitos (MVF) centrado na célula para a solução da equação de pressão: a primeira utiliza uma Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (TPFA) em conjunto com multiplicadores de transmissibilidade, e a segunda, capaz de lidar com tensores de permeabilidade completos e malhas poligonais, utiliza uma Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O) acoplada ao Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (*Lower-Dimensional Fracture Model* - LDFM). O problema hiperbólico da saturação é resolvido pelo método de ponderação a montante de primeira ordem (*First Order Upwind Method* - FOUM) com duas formulações, uma explícita e outra implícita. A abordagem LDFM é eficiente quando comparada a outras estratégias apresentadas na literatura, e faz uso de uma equação adicional associada à fratura que é tratada como uma entidade geométrica com dimensão inferior à do problema original, ou seja, para problemas em 3-D uma fratura é representada por superfícies (2-D) e para problemas em 2-D a fratura tem apenas uma dimensão no espaço. Isso reduz consideravelmente o número de graus de liberdade do sistema. Para isso, a malha deve ser ajustada à distribuição das fraturas no domínio computacional, de modo que essas fraturas são associadas às superfícies de controle, representadas pelas arestas dos volumes finitos em 2-D. É importante observar, que o campo de velocidades nas superfícies de controle que coincidem com as fraturas é dependente, tanto das pressões nas fraturas, quanto das pressões nos volumes de controle que representam a rocha matriz e que compartilham os mesmos vértices da respectiva superfície de controle. A acurácia da formulação proposta foi verificada através da resolução de alguns problemas envolvendo meio fraturado, incluindo barreiras e canais.

**Palavras-chave:** Escoamento bifásico de água e óleo. Reservatórios naturalmente fraturados. Modelo de fraturas com dimensão reduzida (LDFM). MPFA-O.

## ABSTRACT

The problem of two phase flow of oil and water in heterogeneous and anisotropic oil reservoirs can be described using certain simplifying hypotheses by a system of nonlinear partial differential equations, composed by an elliptic equation of pressure and a hyperbolic equation of saturation. The modeling of this problem represents a major challenge due to the complexity of the depositional environments, including inclined layers, channels, fractures and the possible existence of directional wells. In such cases, it is particularly complex to construct structured meshes capable of properly modeling the physical problem. This dissertation aims to model one of these complex structures, naturally fractured reservoirs (NFR). For this, are presented two formulations with Finite Volume Method (FVM), cell-centered, for the solution of the pressure equation: the first one using a Two-Point Flux Aproximation (TPFA) in conjunction with transmissibility multipliers; and the second formulation using the Multi-Point Flux Aproximation (MPFA-O), which can deal with full permeability tensors and arbitrary polygonal meshes, coupled with a Lower-Dimensional Fracture Model (LDFM). The hyperbolic problem of saturation is solved with First Order Upwind Method (FOUM) with two formulations, one explicit and another implicit. The LDFM approach is effective when compared to other strategies in the literature, and makes use of an additional equation associated to the fracture, that is treated as a geometric entity with a smaller dimension than the original problem, in other words, for 3-D problems a fracture is represented by surfaces (2-D) and for 2-D problems the fracture has only one dimension in space. This considerably reduces the number of degrees of freedom of the system. For this, the mesh must be adjusted to the distribution of fractures in the computational domain, when these fractures are associated to the control surfaces, represented by the edges of the finite volumes in 2-D. It is important to note that the velocity field on the control surfaces that coincide with the fractures is dependent, both pressures in the fractures and in the control volumes, which represent the matrix rock and which share the same vertices of the respective control surface. The accuracy of the proposed formulation was verified by solving some problems involving a fractured matrix, including barriers and channels.

**Keywords:** Water-oil biphasic flow. Naturally fractured reservoir. Lower-Dimensional Fracture Model (LDFM). MPFA-O.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Idealização dos modelos duais por Warren e Root (1963). .....  | 23 |
| Figura 2 – Seção transversal de uma rocha .....   | 28 |
| Figura 3 – Esquema do experimento de Darcy.....   | 31 |
| Figura 4 – Representação de uma fratura, pela face vermelha, num domínio 3-D. ....  | 35 |
| Figura 5 – Algoritmo de solução do problema que descreve o escoamento de água e óleo em reservatórios naturalmente fraturados.....  | 39 |
| Figura 6 – Representação computacional de um reservatório em 2-D: (a) Domínio contínuo ( $\Omega$ ); (b) Domínio discretizado com destaque para um volume de controle genérico ( $\Omega_v$ ). .....                | 40 |
| Figura 7 – Volume de controle genérico $\Omega_v$ .....   | 41 |
| Figura 8 – Aproximação da mobilidade a montante.....  | 42 |
| Figura 9 – Fragmento de uma malha unidimensional. ....  | 43 |
| Figura 10 – Fragmento de uma malha para cálculo de multiplicadores de transmissibilidade: (a) Malha utilizada; (b) Mensuração da abertura da fratura.....   | 46 |
| Figura 11 – Região de interação: (a) Fragmento da malha associada ao vértice $I$ ; (b) Destaque na região de interação e em seus componentes. ....  | 50 |
| Figura 12 – Fluxos à esquerda e à direita da meia aresta $\bar{EI}$ .....   | 52 |
| Figura 13 – Duas regiões de interação, referentes aos vértices I e J. ....  | 55 |
| Figura 14 – Região de interação com o vértice I situado no contorno. ....   | 56 |
| Figura 15 – Representação computacional de um reservatório naturalmente fraturado em 2-D: (a) Domínio fraturado ( $\Omega$ ); (b) Domínio discretizado com as arestas coincidindo com as fraturas.....              | 59 |
| Figura 16 – Fragmento de malha com região de interação: (a) sem fraturas; (b) com fraturas..  | 59 |
| Figura 17 – Ampliação da fratura $\mathcal{F}_{\bar{E}}$ e suas propriedades.....   | 60 |
| Figura 18 – Região de interação com fraturas: (a) Completa; (b) Destaque nas fraturas.....  | 63 |
| Figura 19 – Algoritmo do Método de Newton .....   | 82 |
| Figura 20 – Domínio quadrado com fratura horizontal - Problema 4.1. ....  | 89 |
| Figura 21 – Exemplo da malha 30x30 - Problema 4.1. ....   | 89 |
| Figura 22 – Comportamento do erro para o teste de convergência pelo modelo descontínuo do Problema 4.1. : (a) $a_{\mathcal{F}} = 10^{-5}$ ; (b) $a_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ ; (c) $a_{\mathcal{F}} = 10^{-3}$ ..... | 91 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 23 – Solução analítica do problema 4.1., para $a_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ : (a) $k_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ ; (b) $k_{\mathcal{F}} = 1$ ; (c) $k_{\mathcal{F}} = 10^4$ .....   | 92  |
| Figura 24 – Configuração para o escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular - Problema 4.2.....   | 93  |
| Figura 25 – Malha estruturada 96x48 utilizada no problema de escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular - Problema 4.2.....  | 94  |
| Figura 26 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular homogênea (Problema 4.2.1): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPFA - MT. ....                 | 95  |
| Figura 27 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com barreira central (Problema 4.2.2): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPFA - MT. ....                                | 96  |
| Figura 28 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com fraturas anisotrópicas (Problema 4.2.3): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPFA - MT. ....                          | 98  |
| Figura 29 – Domínios do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal – Problema 4.3.1. ....  | 99  |
| Figura 30 – Malhas do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal - Problema 4.3.1: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3.....  | 101 |
| Figura 31 – Campos de pressão do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal em 0,50VPI- Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ. ....            | 103 |
| Figura 32 – Campos de saturação de água do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal em 0,25 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ..... | 104 |
| Figura 33 – Campos de saturação de água do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal em 0,50 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ..... | 105 |
| Figura 34 – Campos de saturação de água do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal em 1 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ;  |     |

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
|           | (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ.....  | 106 |
| Figura 35 | – Problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.....   | 107 |
| Figura 36 | – Problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água .....  | 107 |
| Figura 37 | – Problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Tempo de simulação por passo de tempo em função do refinamento. ....  | 108 |
| Figura 38 | – Domínios do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2).....   | 109 |
| Figura 39 | – Malhas do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2): (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3. ....   | 111 |
| Figura 40 | – Campos de pressão do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2): (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ. ....                      | 112 |
| Figura 41 | – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com barreiras em 0,25 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ. ....          | 113 |
| Figura 42 | – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais em 0,50 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ..... | 114 |
| Figura 43 | – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais em 1 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (a') Malha 1 - SEQ; (b) Malha 2 - IMPES; (b') Malha 2 - SEQ; (c) Malha 3 - IMPES; (c') Malha 3 - SEQ. ....   | 115 |
| Figura 44 | – Problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.....  | 116 |
| Figura 45 | – Problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.....  | 116 |
| Figura 46 | – Problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Tempo de simulação por passo de tempo em função do refinamento. ....   | 118 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 47 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ: – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água. ....  | 118 |
| Figura 48 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água .....   | 119 |
| Figura 49 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ: (a) Tempo de simulação; (b) Número médio de iterações do método de Newton.....  | 120 |
| Figura 50 – Domínios e malhas do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1. ....  | 121 |
| Figura 51 – Campos de saturação de água do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1: (a) VPI = 0,10 - Caso I; (a') VPI = 0,10 - Caso II; (b) VPI = 0,50 - Caso I; (b') VPI = 0,50 - Caso II; (c) VPI = 1,00 - Caso I; (c') VPI = 1,00 - Caso II..... | 123 |
| Figura 52 – Campos de pressão do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1: (a) VPI = 0,50 - Caso I; (a') VPI = 0,50 - Caso II. ....  | 124 |
| Figura 53 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com canais e barreiras conectados - Problema 4.4.1 - Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água .  | 124 |
| Figura 54 – Domínio quadrado com múltiplas fraturas - Problema 4.4.2.....   | 125 |
| Figura 55 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de pressões - VPI = 0,50.....  | 126 |
| Figura 56 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços sem fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de pressões - VPI = 0,50. ....   | 127 |
| Figura 57 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de saturações de água: (a) VPI = 0,15; (d) VPI = 0,25; (c) VPI = 0,25; (d) VPI = 0,50. ....  | 127 |
| Figura 58 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.....  | 128 |
| Figura 59 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços sem fratura (Problema 4.4.2): (a) Campo de saturação de água para 0,35 VPI; (b) Produção de água .....   | 129 |

## LISTA DE TABELAS

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1 – Hipóteses e valores correspondentes de $\zeta$ .....  | 71  |
| Tabela 2 – Taxas de convergência do Problema 4.1. ....   | 92  |
| Tabela 3 – Número de volumes de controle das malhas do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal - Problema 4.3.1. ....  | 101 |
| Tabela 4 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) - Custo computacional.....   | 102 |
| Tabela 5 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado. ....                             | 108 |
| Tabela 6 – Número de volumes de controle das malhas do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais - Problema 4.3.2. ....   | 110 |
| Tabela 7 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) - Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado. ....                          | 117 |
| Tabela 8 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) - Custo computacional.....  | 117 |
| Tabela 9 – Problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ- Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado..... | 119 |
| Tabela 10 – Número de volumes de controle das malhas do problema de $\frac{1}{4}$ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1. ....  | 121 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|               |  |
|---------------|--|
| 2-D           | Duas Dimensões   |
| 3-D           | Três Dimensões   |
| cte           | Constante  |
| DFM           | Modelos Discretos de Matrix-Fraturas                       |
| EDP           | Equações Diferenciais Parciais                             |
| <i>et al.</i> | e outros   |
| FCA           | Aproximações com Fluxo Contínuo                            |
| FOUM          | Método de Primeira Ordem de Ponderação A Montante          |
| i.e.          | isto é   |
| IMPES         | Pressão Implícita Saturação Explícita                      |
| LDFM          | Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida                   |
| MPFA          | Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos                  |
| MPFA-O        | Variante “O” da Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos  |
| MT            | Multiplicadores de Transmissibilidade                      |
| MVF           | Método de Volumes Finitos                                  |
| PADMEC        | Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional |
| QR Codes      | Códigos de Resposta Rápida                                 |
| RNF           | Reservatório Naturalmente Fraturado                        |
| SEQ           | Sequencial Implícito                                       |
| SS            | Solução simultânea   |
| TPFA          | Aproximação de Fluxo por Dois Pontos                       |
| TOL           | Tolerância   |
| UFPE          | Universidade Federal de Pernambuco                         |
| VPI           | Volume Poroso Injetado                                     |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                        |  |
|------------------------|--|
| $V_v$                  | Volume de vazios   |
| $V_T$                  | Volume total   |
| $\phi$                 | Porosidade   |
| $w$                    | Índice referente à fase água                               |
| $o$                    | Índice referente à fase óleo                               |
| $S_w$                  | Saturação de água  |
| $S_o$                  | Saturação de Óleo  |
| $S_{wi}$               | Saturação irreduzível de água                              |
| $S_{or}$               | Saturação irreduzível de óleo                              |
| $\underline{K}$        | Tensor de permeabilidade absoluta                          |
| $\vec{x}$              | Vetor posição  |
| $k_{rw}$               | Permeabilidade relativa da água                            |
| $k_{ro}$               | Permeabilidade relativa do óleo                            |
| $S_e$                  | Saturação efetiva  |
| $\rho$                 | Densidade  |
| $m$                    | Massa  |
| $V$                    | Volume   |
| $\mu$                  | Viscosidade  |
| $\lambda_i$            | Mobilidade da fase $i$                                     |
| $\lambda_T$            | Mobilidade total   |
| $\vec{v}_i$            | Vetor velocidade da fase $i$                               |
| $\vec{\nabla}$         | Operador gradiente   |
| $p_i$                  | Pressão da fase $i$  |
| $\vec{g}$              | Vetor de aceleração gravitacional                          |
| $P$                    | Pressão do fluido  |
| $\vec{v}_T$            | Vetor velocidade total                                     |
| $f_i$                  | Fluxo fracionário da fase $i$                              |
| $\mathcal{F}$          | Índice referente às fraturas                               |
| $K_n^{\mathcal{F}}$    | Permeabilidade absoluta na fratura e no sentido normal     |
| $K_{tg}^{\mathcal{F}}$ | Permeabilidade absoluta na fratura e no sentido tangencial |
| $a_{\mathcal{F}}$      | Abertura da fratura  |
| $L_{\mathcal{F}}$      | Comprimento da fratura                                     |
| $\phi_{\mathcal{F}}$   | Porosidade da fratura                                      |

|                     |  |
|---------------------|--|
| $t$                 | Tempo  |
| $q_i$               | Termo fonte/sumidouro da fase $i$  |
| $Q_i$               | Vazão volumétrica da fase $i$  |
| $Q_T$               | Vazão volumétrica total  |
| $Q_n^{\mathcal{F}}$ | Função de transferência da fratura referente ao fluxo no sentido normal            |
| $\Omega$            | Volume de controle   |
| $\Gamma$            | Superfície   |
| $\Gamma_D$          | Fronteira de Dirichlet   |
| $\Gamma_N$          | Fronteira de Neumann   |
| $\Gamma_I$          | Fronteira do poço injetor  |
| $\Gamma_P$          | Fronteira do poço produtor   |
| $g_D$               | Função com as pressões de Dirichlet  |
| $g_N$               | Função com fluxos de Neumann   |
| $g_P$               | Função com as pressões no poço produtor  |
| $g_I$               | Função com as pressões no poço injetor   |
| $\bar{S}_w$         | Saturação prescrita no poço injetor  |
| $\vec{N}$           | Vetor área normal  |
| $\Gamma_R$          | Fronteira de Robin   |
| $g_R$               | Função com as condições de Robin   |
| $\bar{S}_w^0$       | Saturação inicial  |
| $\mathcal{N}_{vc}$  | Número de volumes de controle  |
| $\vec{n}$           | Vetor normal   |
| $\vec{v}_{IJ}$      | Velocidade na face $IJ$  |
| $\vec{N}_{IJ}$      | Vetor área normal à face $IJ$  |
| $\hat{L}$           | Volume de controle $L$   |
| $\bar{E}$           | Ponto auxiliar $E$   |
| $\underline{T}$     | Matriz de transmissibilidade   |
| $\vec{v}_{Esq}$     | Vetor com os fluxos à esquerda da face   |
| $\underline{A}$     | Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos de colocação dos fluxos à esquerda |
| $\underline{B}$     | Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos auxiliares dos fluxos à esquerda   |
| $\hat{p}$           | Vetor das pressões nos pontos de colocação   |
| $\bar{p}$           | Vetor das pressões nos pontos auxiliares   |
| $\vec{v}_{Dir}$     | Vetor com os fluxos à direita da face  |
| $\underline{C}$     | Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos de colocação dos fluxos à direita  |

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| $\underline{D}$                | Matriz dos coeficientes das pressões nos pontos auxiliares dos fluxos à direita |
| $\hat{\mathcal{F}}_E$          | Volume de controle na fratura $E$   |
| $\bar{p}_V$                    | Pressão no vértice $V$  |
| $\hat{p}_{\mathcal{F}}$        | Vetor com as pressões na fratura  |
| $\underline{A}'_{\mathcal{F}}$ | Matriz com os coeficientes nas pressões nas fraturas                            |
| $\underline{B}'_{\mathcal{F}}$ | Matriz com os coeficientes nas pressões nos vértices                            |
| $\bar{\mathcal{F}}_E^-$        | Pontos auxiliar à esquerda da fratura $E$                                       |
| $\bar{\mathcal{F}}_E^+$        | Pontos auxiliar à direita da fratura $E$  |
| $c$                            | Índice referente ao LDFM com pressão contínua                                   |
| $d$                            | Índice referente ao LDFM com pressão descontínua                                |
| $\zeta$                        | Coefficiente para imposição das condições de Robin no LDFM                      |
| $\tau_{\mathcal{F}_i}$         | Transmissibilidade na fratura $i$   |
| $C$                            | Número de Courant   |
| $\underline{J}$                | Matriz Jacobiana  |
| $\underline{I}$                | Matriz Identidade   |
| $\bar{r}$                      | Vetor de resíduos   |

## SUMÁRIO

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| 1         | <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | 18 |
| 1.1       | OBJETIVOS .....   | 25 |
| 1.2       | ORGANIZAÇÃO GERAL DA DISSERTAÇÃO .....  | 25 |
| 2         | <b>MODELO MATEMÁTICO</b> .....  | 27 |
| 2.1       | CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....   | 27 |
| 2.1.1     | <b>Porosidade</b> .....   | 27 |
| 2.1.2     | <b>Saturação</b> .....  | 28 |
| 2.1.3     | <b>Permeabilidade</b> .....   | 29 |
| 2.1.4     | <b>Densidade, Viscosidade e Mobilidade</b> .....  | 30 |
| 2.1.5     | <b>Lei de Darcy, Velocidade e Fluxo Fracionário</b> .....                                     | 30 |
| 2.1.6     | <b>Fraturas e o LDFM</b> .....  | 32 |
| 2.2       | EQUAÇÕES GOVERNANTES.....   | 33 |
| 2.2.1     | <b>Equação de Pressão</b> .....   | 33 |
| 2.2.1.1   | Equação de pressão nas fraturas com dimensão reduzida .....                                   | 34 |
| 2.2.2     | <b>Equação de Saturação</b> .....   | 36 |
| 2.2.2.1   | Equação de saturação nas fraturas com dimensão reduzida .....                                 | 37 |
| 2.2.3     | <b>Escoamento Monofásico</b> .....  | 37 |
| 2.2.4     | <b>Condições Iniciais e de Contorno</b> .....   | 38 |
| 3         | <b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA</b> .....  | 39 |
| 3.1       | EQUAÇÃO DE PRESSÃO .....  | 40 |
| 3.1.1     | <b>Método de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (TPFA)</b> .....        | 43 |
| 3.1.1.1   | Modelo de Fraturas com Multiplicadores de Transmissibilidade.....                             | 45 |
| 3.1.2     | <b>Método de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O)</b> ..... | 49 |
| 3.1.2.1   | Imposição das Condições de Contorno.....  | 56 |
| 3.1.2.2   | Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM) .....   | 58 |
| 3.1.2.2.1 | <i>Modelo de pressão contínua</i> .....   | 65 |
| 3.1.2.2.2 | <i>Modelo de pressão descontínua</i> .....  | 69 |
| 3.1.3     | <b>Sistema global de equações</b> .....   | 75 |
| 3.2       | EQUAÇÃO DA SATURAÇÃO .....  | 76 |
| 3.2.1     | <b>Equação de Saturação nas Fraturas com Dimensão Reduzida</b> .....                          | 78 |
| 3.2.2     | <b>Discretização no tempo</b> .....   | 79 |
| 3.2.2.1   | Discretização temporal explícita.....   | 80 |
| 3.2.2.2   | Discretização temporal implícita .....  | 82 |
| 4         | <b>RESULTADOS</b> .....   | 88 |
| 4.1       | TESTE DE CONVERGÊNCIA DO LDFM.....  | 88 |
| 4.2       | ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM RESERVATÓRIO COM FRATURA PERPENDICULAR .....                         | 93 |
| 4.2.1     | <b>Caso I - Fratura homogênea com permeabilidade elevada</b> .....                            | 94 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.2.2 | Caso II - Barreira central.....   | 95  |
| 4.2.3 | Caso III - Fratura anisotrópica .....   | 97  |
| 4.3   | VERIFICAÇÃO DO MÉTODO IMPLÍCITO NA DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL.....                        | 99  |
| 4.3.1 | ¼ de cinco poços com fratura diagonal.....  | 99  |
| 4.3.2 | ¼ de cinco poços com barreiras verticais .....  | 109 |
| 4.4   | FLEXIBILIDADE NA SIMULAÇÃO DE CANAIS ACOPLADOS À BARREIRAS E MÚLTIPLAS FRATURAS ..... | 120 |
| 4.4.1 | ¼ de cinco poços com canais e barreira conectados.....                                | 120 |
| 4.4.2 | ¼ de cinco poços com múltiplas fraturas.....  | 125 |
| 5     | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....   | 130 |
|       | REFERÊNCIAS.....  | 132 |
|       | APÊNDICE A – VÍDEOS DOS PROBLEMAS TRANSIENTES .....                                   | 137 |
|       | APÊNDICE B – MANUAL DE UTILIZAÇÃO .....   | 144 |

## 1 INTRODUÇÃO

Uma simulação pode ser definida, de forma geral, como um processo capaz de inferir o comportamento esperado de algum fenômeno da natureza através de modelos. Tais modelos podem ser tanto físicos, como os construídos em laboratório numa escala reduzida; como matemáticos, desenvolvidos através de um conjunto de equações capazes de descrever os processos envolvidos, ao menos os mais significativos (PEACEMAN, 1977). Como exemplo de um modelo físico, que remete aos estudos de escoamento em meios porosos, tem-se o desenvolvido por Darcy (1856), num hospital em Dijon, na França, onde foi utilizado um filtro vertical preenchido com amostras de areia não consolidada, e manômetros para aferir o potencial hidráulico. A correlação obtida entre a altura verificada nos manômetros e o escoamento, por uma metodologia empírica, levou à equação até hoje utilizada em modelos matemáticos da simulação de reservatórios de petróleo, a Lei de Darcy.

Na engenharia de reservatórios de petróleo, o principal objetivo da simulação de fluxo multifásico em meios porosos é prover informações que permitam um gerenciamento adequado das estratégias de produção ao prever o desempenho do reservatório e, a partir disso, encontrar maneiras de otimizar a recuperação dos hidrocarbonetos, maximizando a viabilidade econômica desse processo (CHEN, 2007; EWING, 1983; PEACEMAN, 1977). Diversas decisões em engenharia de reservatórios são tomadas a partir dos resultados obtidos pelos simuladores, sendo a indústria petrolífera uma das maiores usuárias de modelos computacionais na predição de resultados (ISLAM, HOSSAIN, *et al.*, 2016).

Quatro estágios inter-relacionados podem caracterizar o processo global de simulação de reservatórios (CHEN, 2007; EWING, 1983; PEACEMAN, 1977):

1. Primeiramente, é desenvolvido um modelo físico incorporando toda a física julgada necessária para descrever os fenômenos essenciais;
2. Em segundo lugar, é desenvolvido o modelo matemático capaz de representar a física adotada, que, no presente texto, é composto por sistema transiente de Equações Diferenciais Parciais (EDP) não-lineares, obtidas basicamente através da combinação da Lei de Darcy com balanços de massa para cada uma das fases e de condições iniciais e de contorno;
3. No terceiro estágio o modelo matemático é discretizado dando origem ao modelo numérico capaz de representar a física, sem fenômenos espúrios, quando possível;

4. Por fim, um algoritmo é desenvolvido e implementado para resolver de forma eficiente o sistema de equações obtido no estágio anterior

Uma formulação comumente utilizada na literatura, para modelar o escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo, consiste na segregação das EDP's em uma equação elíptica, para a pressão, e uma hiperbólica, para a saturação das fases, possibilitando a escolha da ferramenta mais adequada para a solução de cada uma destas equações (PEACEMAN, 1977; EWING, 1983; CARVALHO, 2005; SOUZA, 2015).

A simulação de reservatórios tem recebido grande aceitação na indústria, como consequência de três fatores principais: melhoria contínua da capacidade de processamento dos computadores resultando numa redução do custo computacional; aperfeiçoamento dos algoritmos numéricos capazes de resolver as equações envolvidas; e possivelmente a mais importante, a forma generalista na construção dos simuladores, possibilitando a modelagem de uma ampla variedade de estratégias de produção, envolvendo diferentes processos físicos e químicos, que vão, por exemplo, desde a simples injeção de água, até a injeção e polímeros, a combustão *in situ* ou, mais recentemente, o fraturamento hidráulico. Isto tudo, aliado a ferramentas de visualização aprazíveis ao usuário (CHEN, 2007; PEACEMAN, 1977).

A indústria do petróleo tem voltado seu interesse de forma crescente à simulação de um tipo especial de reservatório, o naturalmente fraturado, pois estima-se que pelo menos 60% das reservas remanescentes exploráveis de óleo se encontrem em campos fraturados (BEYDOUN, 1998; MATTHÄI, 2005).

A definição de reservatório naturalmente fraturado (RNF) diverge entre autores, mas quanto ao ponto de vista da análise de escoamento, vai além de apenas a presença de fraturas, conforme Nelson (2001) enfatiza ao dizer “*finding fractures is not enough*”, isto é, encontrar fraturas não é suficiente. O que é necessário é que essas fraturas estejam presentes numa quantidade e extensão capazes de alterar, de forma significativa, o comportamento esperado para um reservatório onde as mesmas não estão presentes. As fraturas afetam principalmente a permeabilidade aparente, a produção dos poços e o fator de recuperação, i.e., o percentual máximo do óleo que foi extraído do reservatório (CAVALCANTE FILHO, 2016; NELSON, 2001). Um RNF é composto por dois tipos principais de estruturas: a rocha matriz e as fraturas. A rocha matriz tipicamente apresenta uma capacidade maior de armazenar fluidos, enquanto que as fraturas demonstram maior capacidade de escoamento (FANCHI, 2005; UNSAL, MATTHÄI e BLUNT, 2010). Reservatórios naturalmente fraturados podem ser encontrados em diversos tipos de rocha, como: arenitos, carbonatos, folhelhos, siltitos e *cherts* (AGUILERA, 1995).

Os primeiros conceitos físicos de fraturas, no contexto de RNF, foram descritos para fissuras por Barenblatt *et al.* (1960), afirmando que as mesmas eram permeáveis, assim como a rocha matriz, e de dimensão superior à dimensão dos poros da rocha matriz, apresentando uma permeabilidade maior que essa última. O autor também destaca que para um determinado ponto poderiam ser definidas duas velocidades e duas pressões, uma na fratura e outra na rocha matriz.

Fraturas são definidas, de forma genérica, como descontinuidades das propriedades da rocha matriz, em especial sua permeabilidade, a qual pode diferir em várias ordens de magnitude (SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012). Essas descontinuidades não atuam somente como canais, podendo também proporcionar barreiras ao escoamento, dependendo tanto do histórico de tensões, como dos fluidos que escoaram pelas mesmas em sua formação e, também, se houve cimentação ao logo de sua gênese (BOURBIAUX, 2010; SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012). Além da permeabilidade, as fraturas apresentam outras propriedades importantes, como: abertura, comprimento e orientação.

Podem ocorrer fraturas nas mais diferentes escalas, geometrias e características (SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012). Quando estas se comportam como canais, costumam ser fraturas abertas; enquanto barreiras, são originadas após alguma cimentação em seu interior. A abertura da mesma pode variar de micrômetros a centímetros, seu comprimento de centímetros a quilômetros e sua influência no escoamento no interior do reservatório pode ser, tanto devido a grandes fraturas, como a uma densa rede de pequenas fraturas (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015; BERKOWITZ, 2002). Diversos acontecimentos podem dar origem às fraturas. Quando essas são formadas por eventos tectônicos de grande escala, costumam dar origem a duas ou três famílias de fraturas com orientações distintas. Entretanto, quando os fenômenos constitutivos são decorrentes de erosão, da pressão elevada de fluido, ou ainda de processos térmicos e químicos, pode ser formado um número muito grande de famílias (BERKOWITZ, 2002).

Técnicas de simulação de meios porosos fraturados, além de sua extrema importância econômica no campo petrolífero, podem ser estendidas para questões socioambientais, desde situações de menor impacto como a contaminação de solos por poluição doméstica, até contaminações de aquíferos com lixo radioativo a partir de um isolamento geológico ineficientemente executado. Também podem ser citadas a exploração de energia geotérmica e aplicações envolvendo mineração (BEAR, TSANG e MARSILY, 1993; BERKOWITZ, 2002).

Estudos realizados por Allan e Sun (2003), em sessenta e quatro reservatórios naturalmente fraturados, apontaram um fator de recuperação médio de 26%, corroborando assim com

a necessidade de desenvolvimento de novas técnicas e ferramentas que possibilitem a extração de um volume maior de hidrocarbonetos destes reservatórios. Entretanto, o desenvolvimento dessas ferramentas numéricas se depara com diversos problemas relacionados à modelagem de geometrias com estruturas geológicas complexas como as fraturas, assim como outros desafios inerentes à exploração de um reservatório, como a existência de camadas estratificadas inclinadas, *pinchouts* e a presença de poços direcionais (CARVALHO, 2005).

O método tradicionalmente utilizado pelos simuladores comerciais, como o IMEX®, para a discretização dos termos de difusão é o Método de Diferenças Finitas (MDF), descrito por Peaceman (1977) (CMG, 2014). O MDF é amplamente utilizado devido sua robustez comprovada em diversos casos (AZIZ e SETTARI, 1979; ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001; PEACEMAN, 1977), aliados à facilidade de implementação e baixo custo computacional, decorrentes principalmente da utilização de malhas estruturadas (CARVALHO, 2005). O *Two-Point Flux Approximation* (TPFA), i.e., aproximação de fluxo por dois pontos, é uma metodologia equivalente ao MDF, tendo a permeabilidade definida na face como sendo a média harmônica das permeabilidades nos elementos adjacentes à mesma (SOUZA, 2015). Contudo, em simulação de reservatórios, a convergência do método TPFA só é garantida com a utilização de malhas K-ortogonais, i.e., àquelas cartesianas alinhadas às direções principais do tensor de permeabilidade (SOUZA, 2015).

Outro problema decorrente da utilização de malhas estruturadas é que elas não são capazes de discretizar adequadamente reservatórios com estruturas complexas, com presença de fraturas e com poços direcionais, sendo que, com frequência, a fim de diminuir o erro de discretização espacial, faz-se uso de um número extremamente elevado de blocos (SOUZA, 2015). Beckner (2011) apresenta um caso onde uma malha não-estruturada foi capaz de discretizar adequadamente um reservatório com uma redução de três ordens de grandeza do número de blocos utilizados em uma malha estruturada.

A simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo muito heterogêneos ou em malhas não estruturadas ainda é um problema desafiador, particularmente para os reservatórios do pré-sal brasileiro, que apresentam uma variação muito acentuada das propriedades geofísicas tanto em termos espaciais como direcionais (i.e., heterogeneidade e anisotropia), no qual as técnicas de discretização convencionais, sejam baseadas em volumes finitos, elementos finitos ou diferenças finitas, não conseguem produzir soluções acuradas e robustas. Para solucionar o problema, novas metodologias são constantemente desenvolvidas, e se propõem a diminuir os efeitos de orientação de malha e melhorar a acurácia da solução, mesmo para os chamados tensores completos de permeabilidade, (BRUM, PERESTRELO, *et al.*, 2016).

Surgiu, então, uma família de formulações, utilizando o Método de Volumes Finitos (MFV) com as equações em sua forma integral, e que utiliza como base a imposição de continuidade do fluxo nas faces e a Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA), sendo que este último recurso institui o nome da metodologia. No MPFA, diferentemente do TPF, mais de dois pontos são utilizados para a construção dos fluxos nas superfícies de controle (HE e DURLOFSKY, 2006).

Essas formulações foram desenvolvidas de forma simultânea por Avatsmark *et al.* (1998a; 1998b), os quais consagraram a sigla MPFA, com origem no termo “*Multi-Point Flux Approximation*”, e por Edwards e Rogers (1998) que na ocasião chamaram o método de “*Flux Continuous Approximation*”, ou aproximações com fluxo contínuo (FCA). Dentro da família de métodos MPFA, tem-se o clássico MPFA-O (AAVATSMARK, BARKVE, *et al.*, 1998a), no qual o sufixo faz referência a forma da região de iteração criada para a aproximação do fluxo nas faces. O MPFA já apresenta aceitação na indústria do petróleo representada por sua utilização em simuladores comerciais consagrados, como o ECLIPSE® (HE e DURLOFSKY, 2006).

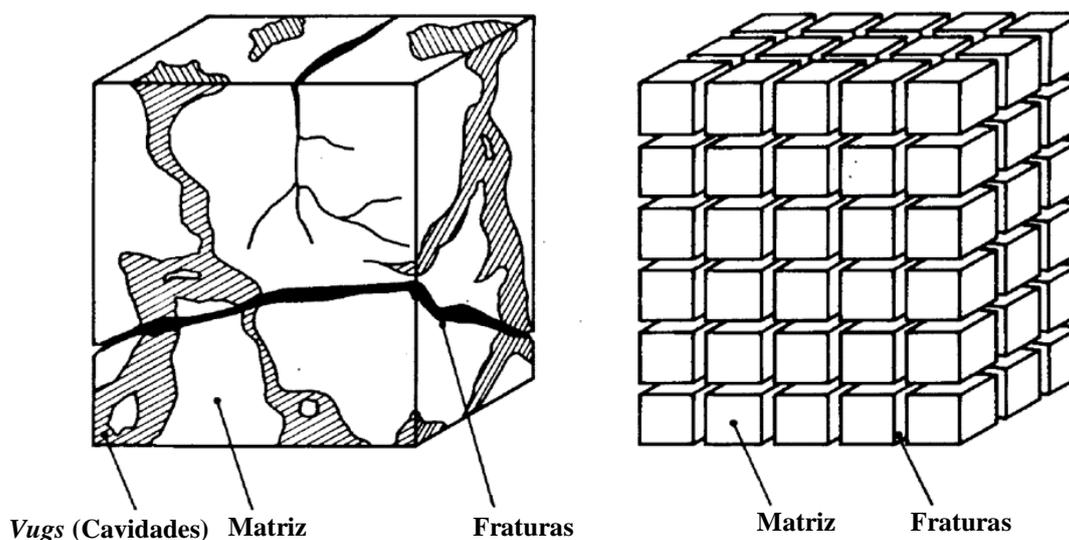
A geometria complexa das fraturas, seus múltiplos comprimentos e as escalas de tempo envolvidas, levou ao surgimento de uma variedade de métodos para tratar o escoamento em meios porosos fraturados. A primeira, e mais utilizada nas últimas décadas, foi desenvolvida por Warren e Root (1963), baseada nas definições de Barenblatt *et al.* (1960), denominada de formulações *dual continuum*, ou de contínuo dual (SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012). A concepção matemática consiste na sobreposição de dois domínios, um com uma porosidade dita primária (matriz) e outra secundária (fraturas). O domínio primário é representado por paralelepípedos idênticos, e o secundário está contido em um sistema ortogonal de fraturas uniformes orientadas paralelas aos eixos principais do sistema de coordenadas adotado, a idealização disso é apresentada na Figura 1.

Outra consideração importante é que o fluxo não ocorre diretamente através de blocos de porosidade primária, mas sim entre porosidade primária e secundária através de funções de transferência aproximadas pelo fator de forma, pela diferença de pressão entre a rocha matriz e a fratura entre outros parâmetros físicos (DA PRAT, 1990; SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012; ULEBERG e KLEPPE, 1996). Na década de 1980, diversos esforços foram voltados para tornar este modelo mais realístico, como os modelos de permeabilidade dual, o qual permitia a interconexão matriz-matriz (CAVALCANTE FILHO, 2016).

Como principais problemas das formulações duais, pode-se citar: que o fator de forma não é de fácil determinação e não está definido na presença de capilaridade ou gravidade para o escoamento multifásico; na impossibilidade da modelagem de barreiras; o sistema de fraturas

é assumido como denso, gerando resultado imprecisos para fraturas de escala elevada e não sendo possível representar suas direções características (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015; CAVALCANTE FILHO, 2016; HOTEIT e FIROOZABADI, 2008).

Figura 1 – Idealização dos modelos duais por Warren e Root (1963).



Fonte: Adaptado de Da Prat (1990).

Para contornar essas dificuldades foram desenvolvidos diversos métodos promissores, denominados Modelos de Discretos de Matriz-Fraturas (DFM), ou *Discrete Fracture-Matrix Model* (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015; HOTEIT e FIROOZABADI, 2008; MARTIN, JAFFRÉ e ROBERTS, 2005; NICK e MATTHÄI, 2011; NOORISHAD e MEHRAN, 1982; SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012). Nesses modelos, as fraturas são definidas de forma explícita no espaço, existindo uma interface clara entre matriz e fratura, que permite a análise do efeito individual de cada falha e a determinação de forma mais consistente as funções de transferência de massa, mas para tanto, em sua grande maioria, é necessária a utilização de malhas estruturadas (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015). O DFM costuma ser classificado em três grupos: mesma dimensão, dimensão reduzida e híbridos.

Nos modelos de mesma dimensão (GHORAYEB e FIROOZABADI, 2000; HÆGLAND, ASSTEERAWATT, *et al.*, 2009), as fraturas são discretizadas da mesma forma que a matriz, por um conjunto de superfícies no caso 2-D. Esse modelo não é comumente utilizado devido ao elevado custo computacional decorrente do número de células necessárias para discretizar as fraturas, o que também pode levar à redução elevada no passo de tempo máximo, necessário para garantir a estabilidade da solução (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015).

O Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (*Lower-Dimensional Fracture Model - LDFM*), foi apresentado por Martin (2005) para a modelagem do escoamento monofásico em meios porosos fraturados, ampliado para o bifásico em Hoteit & Firoozabadi (2008), ambos no contexto de elementos finitos e, posteriormente, aplicado em conjunto com uma formulação do tipo MPFA por Ahmed, Edwards, *et al.* (2015), onde foi resolvida a equação de transporte para um traçador. Para a aplicação desta metodologia, a malha deve ser construída de modo a acompanhar a distribuição de fraturas. Nos problemas em 3-D, uma fratura é representada por um conjunto de superfícies (2-D), e no caso de um domínio 2-D, as fraturas correspondem a um conjunto de arestas, tendo apenas uma dimensão no espaço. Segundo Hoteit & Firoozabadi (2008), essa metodologia promove ganhos computacionais significativos em relação aos modelos duais, de mesma dimensão ou híbridos (UNSAI, MATTHÄI e BLUNT, 2010). Os modelos híbridos, apesar de utilizarem uma dimensão reduzida nas fraturas para a construção da malha, no domínio computacional expandem as fraturas para a mesma dimensão da matriz. De acordo com Ahmed, Edwards, *et al.* (2015), o LDFM também apresenta maior acurácia em relação aos outros métodos para fraturas anisotrópicas e barreiras.

Outra metodologia que pode ser enquadrada como de dimensão reduzida, e aplicada ao TPFA, é a dos multiplicadores de transmissibilidade (MANZOCCHI, WALSH, *et al.*, 1999), onde a fratura também é representada por arestas, no caso 2-D, mas é realizada uma mudança de escala tratando a fratura através da obtenção de uma permeabilidade equivalente entre os blocos da matriz, o que não ocorre no LDFM, onde também há a definição de um fluxo tangencial à fratura.

Para a solução do problema hiperbólico da saturação, a metodologia tipicamente utilizada é o Método de Primeira Ordem de Ponderação a Montante (*First Order Upwind Method - FOUM*), ou simplesmente “*upwind*” (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001; EWING, 1983; HIRSCH, 2007). O FOUM consiste no fato de que a convecção das propriedades físicas ocorre na direção do escoamento, com isso, o valor da propriedade numa face é obtida a partir do valor correspondente na célula a montante, i.e., anterior ao fluxo. Este método apresenta propriedades interessantes quanto à monotonicidade da solução e suavidade nas regiões próximas ao choque, apesar de sua acurácia ser reduzida devido ao excesso de difusão numérica provocado pelo FOUM (CARVALHO, 2005).

Este trabalho tem como foco a apresentação de duas metodologias em volumes finitos aptas a lidar com o problema de pressão em RNF, e FOUM, com solução explícita e implícita, para o problema de saturação. Afim de avaliar a acurácia e a eficiência da formulação utilizada, resolvem-se alguns problemas *benchmark* encontrados na literatura.

## 1.1 OBJETIVOS

No contexto de RNF, a presente dissertação se concentra no estudo, desenvolvimento e implementação de uma formulação numérica para a modelagem do escoamento bifásico (óleo e água), apta a lidar com malhas poligonais quaisquer em formações heterogêneas e anisotrópicas e em situações complexas, tendo foco nas falhas geológicas.

Esta dissertação tem sua contribuição destacada por se tratar do primeiro trabalho no campo de reservatórios fraturados a ser desenvolvido no Grupo de Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional (PADMEC), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Esse pioneirismo visa ser o princípio de uma série de pesquisas direcionadas à área de RNF, cuja importância tem crescido no campo de engenharia de petróleo. Como objetivos específicos, pode-se citar:

- Descrever e implementar os multiplicadores de transmissibilidade para a solução do problema de pressão em RNF utilizando o TPFa;
- Descrever detalhadamente o MPFA-O, método de volumes finitos adotado para a solução do problema de pressão;
- Descrever a metodologia do LDFM e desenvolver seu acoplamento ao MPFA-O, utilizando a linguagem MATLAB®;
- Adaptar o FOUM, com solução explícita, para a discretização do problema de saturação com a presença de fraturas;
- Implementar uma alternativa à estratégia IMPES, para contornar o problema de instabilidade numérica e associado às altas velocidades nas fraturas, utilizando para tal uma metodologia sequencial implícita (SEQ), onde, tanto o campo de pressões quanto o campo de saturações são resolvidos implicitamente.
- Afim de avaliar a acurácia e a eficiência da formulação utilizada, resolvem-se alguns problemas, *benchmark* encontrados na literatura.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO GERAL DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação foi organizada em cinco capítulos. No presente capítulo foi apresentada uma breve contextualização de reservatórios naturalmente fraturados, com as metodologias desenvolvidas para a simulação dos mesmos e os objetivos do trabalho.

No segundo capítulo é abordada a formulação matemática que representa os fenômenos físicos a serem considerados, tendo início numa revisão de alguns conceitos básicos relativos a

reservatórios de petróleo, seguidos da equação da pressão e da equação da saturação, fechando com as condições iniciais e de contorno necessárias a definição do problema.

O capítulo três se refere à formulação numérica, onde primeiramente será apresentada a discretização para a equação da pressão, utilizando os métodos TPFA e MPFA, com tratamento das fraturas com multiplicadores de transmissibilidade e LDFM, respectivamente. Também é apresentada a discretização da equação da saturação, utilizando o método FOUM explícito, que corresponde a estratégia IMPES, e o implícito, para a metodologia sequencial implícita.

No capítulo quatro, serão apresentadas aplicações do *software* desenvolvido, incluindo comparativos com resultados disponíveis na literatura, bem como com a discussão acerca dos resultados observados.

Por fim, no capítulo cinco, são apresentadas as conclusões obtidas a partir do presente trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

Adicionalmente é apresentada a bibliografia utilizada neste trabalho, um primeiro apêndice onde estarão disponíveis *QR codes* (*Quick Response Codes*), ou Códigos de Resposta Rápida, com endereços eletrônicos disponibilizando os vídeos dos resultados completos das simulações transientes. Na versão eletrônica da dissertação também são disponibilizados os vídeos na forma de objeto interativo. Por fim, um segundo apêndice contendo um manual para servir de referência aos usuários do simulador desenvolvido.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo, serão apresentadas as equações governantes do escoamento de água e óleo em um meio poroso, fraturado ou não, as quais podem ser representadas por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, composto por uma equação elíptica da pressão e uma equação hiperbólica de transporte (PEACEMAN, 1977).

Com o objetivo de reduzir a complexidade dos modelos matemáticos de reservatórios de petróleo, costuma-se fazer uso de hipóteses simplificadoras. As hipóteses adotadas neste trabalho encontram-se sintetizadas a seguir:

1. Fluido e rocha são incompressíveis;
2. Presença de apenas duas fases líquidas, imiscíveis e com um componente cada: água e óleo, permitindo desconsiderar também os efeitos de difusão molecular;
3. Escoamento isotérmico;
4. Os efeitos gravitacionais foram desconsiderados;
5. Pressão capilar igual a zero.
6. O fluxo em meio poroso obedece a Lei de Darcy.

### 2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção, serão apresentadas, de forma sucinta, alguns dos conceitos fundamentais no campo de simulação de reservatórios.

#### 2.1.1 Porosidade

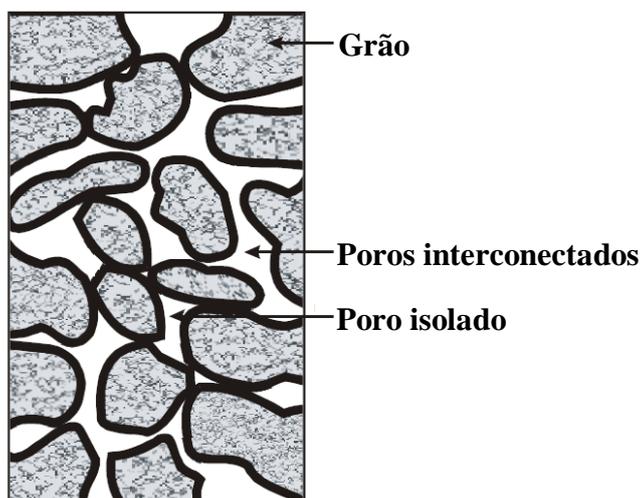
A porosidade ( $\phi$ ) consiste numa medida adimensional da fração do reservatório não ocupada por sólidos (grãos) e disponível para a armazenagem de fluidos e pode ser definida, para uma região, pela da razão entre o volume de vazios ( $V_v$ ), i.e., poros, pelo volume total ( $V_T$ ), como mostra a Eq. (2.1).

$$\phi = \frac{V_v}{V_T} \quad (2.1)$$

Considerar um modelo incompressível implica em desprezar os efeitos exercidos pela pressão na variação da porosidade, i.e., a rocha é indeformável para qualquer intervalo de tempo, logo, tem-se uma porosidade constante por partes, pois apesar de assumida como uniforme ela pode variar entre uma região e outra do reservatório.

Esta porosidade pode ser classificada como a porosidade total ou absoluta, porém, para efeitos de simulação, uma variante é considerada, denominada de porosidade efetiva, onde na mensuração do volume poroso são considerados apenas os poros interconectados, pois são por esses que pode ocorrer fluxo (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001). Na Figura 2 é apresentada uma seção de uma rocha exemplificando as definições de poros.

Figura 2 – Seção transversal de uma rocha



Fonte: Adaptado de Rosa, Carvalho e Xavier (2006)

A porosidade formada a partir do processo de deposição é denominada porosidade primária. As fraturas, por sua vez, costumam ser consideradas como um tipo de porosidade secundária (ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006; OLIVEIRA, 2016).

### 2.1.2 Saturação

Partindo da premissa que o meio poroso está totalmente ocupado pelas fases água ( $w$ ) ou óleo ( $o$ ), a saturação indica a fração do volume poroso ocupado por cada uma dessas fases. Cada fase possui diferentes propriedades que doravante serão identificadas pela letra correspondente na fora subscrita.

Como consequência da hipótese que o meio está totalmente saturado pelas fases fluídas, tem-se que saturação de água ( $S_w$ ) e de óleo ( $S_o$ ) são interdependentes, resultando na Eq. (2.2), de restrição para a saturação (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001):

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.2)$$

Em decorrência de efeitos de interação entre rocha e fluido, existe uma saturação na qual valores inferiores tornam a água imóvel, denominada saturação irreduzível de água ( $S_{wi}$ ), efeito semelhante ocorre com a fase óleo, onde não é possível extraí-lo até uma saturação menor que a definida por sua saturação residual de óleo ( $S_{or}$ ). Vale salientar que a saturação irreduzível difere de água conata, esta última representando a concentração de água pré-existente no reservatório ao ser descoberto (THOMAS, 2001).

### 2.1.3 Permeabilidade

A permeabilidade é definida como a medida de condutividade, parâmetro que indica a capacidade do meio poroso em transmitir fluidos. A permeabilidade absoluta de um meio é obtida quando considerada a presença de uma única fase (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001; ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006), podendo variar com a posição e apresentar anisotropia, sendo definida através de tensor de permeabilidade  $\underline{K}$ . Para um sistema bidimensional e de coordenadas cartesianas, tem-se (SOUZA, 2015):

$$\underline{K}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde  $\vec{x}$  é o vetor posição.

Tem-se que  $\underline{K}(\vec{x})$  deve ser simétrico e satisfazer a condição de elipticidade (EDWARDS e ROGERS, 1998):

$$K_{xy}^2 \leq K_{xx} K_{yy} \quad (2.4)$$

A unidade de medida da permeabilidade é o m<sup>2</sup>, mas na indústria petrolífera é comum a utilização do mili-Darcy (mD), em homenagem ao francês Henry Darcy. Por definição um Darcy é a permeabilidade de um meio poroso no qual um gradiente de pressão de 1,0 atm/cm promove, através de uma seção transversal de 1,0 cm<sup>2</sup>, uma vazão de 1,0 cm<sup>3</sup>/s de um fluido, cuja viscosidade é 1,0 cp (centipoise) (CARVALHO, 2015).

Na presença de mais de uma fase, a permeabilidade efetiva de cada fase ( $i$ ) é definida como o produto da permeabilidade absoluta pela permeabilidade relativa desta fase ( $k_{ri}$ ). O valor da permeabilidade relativa é função da saturação da fase e obtido de forma experimental, entretanto, pode-se defini-la através de diversas relações constitutivas presentes na literatura (SOUZA, 2015). A relação adotada neste trabalho foi a mesma tanto na matriz rochosa quanto na fratura, sendo do tipo Corey (COREY, 1954; SOUZA, 2015), definida para cada fase como:

$$k_{rw} = (S_e)^2 \quad (2.5)$$

$$k_{ro} = (1 - S_e)^2 \quad (2.6)$$

onde  $S_e$  é a saturação efetiva, definida por normalização de saturações conforme a Eq. (2.7):

$$S_e = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \quad (2.7)$$

#### 2.1.4 Densidade, Viscosidade e Mobilidade

A densidade ( $\rho$ ), ou massa específica, de um fluido qualquer, ao ser abordada como uma propriedade média, pode ser definida pela razão entre a massa ( $m$ ) desse fluido e o volume ( $V$ ), ocupado pelo mesmo (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.8)$$

A viscosidade ( $\mu$ ) é a propriedade de um fluido que correlaciona a tensão de cisalhamento aplicada com o escoamento deste fluido, ou seja, caracteriza a resistência ao escoamento que está associada ao atrito interno devido às interações intermoleculares (MUNSON, YOUNG e OKIISHI, 2002; FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

A partir disso, pode-se dizer que a medida de quão móvel uma fase será em relação a outra é proporcional à sua permeabilidade relativa e inversamente proporcional à viscosidade. A razão entre esses dois parâmetros é definida como mobilidade ( $\lambda$ ) (FANCHI, 2005):

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad (2.9)$$

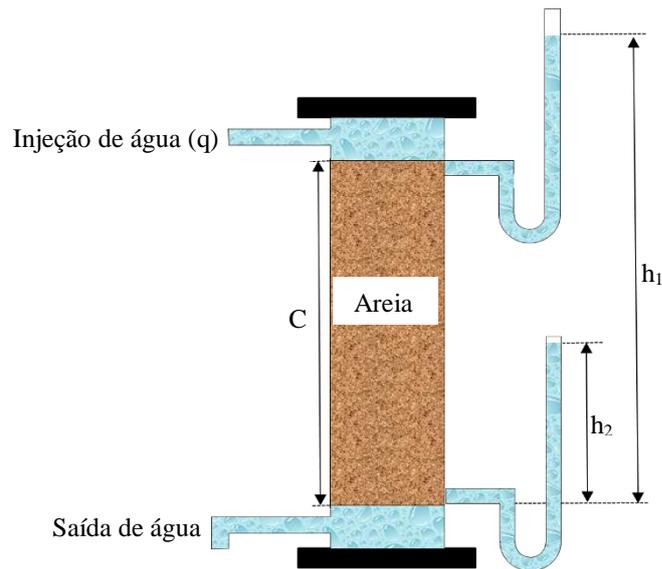
A soma das mobilidades de todas as fases presentes, neste caso, mobilidade da água ( $\lambda_w$ ) e mobilidade do óleo ( $\lambda_o$ ), é definida como mobilidade total do fluido ( $\lambda_T$ ):

$$\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o \quad (2.10)$$

#### 2.1.5 Lei de Darcy, Velocidade e Fluxo Fracionário

Em 1865, Henry Darcy investigou o fluxo de água através de um filtro de areia, na cidade de Dijon, França, conforme esquema apresentado na Figura 3:

Figura 3 – Esquema do experimento de Darcy



Fonte: Adaptado de Rosa, Carvalho e Xavier (2006)

Darcy chegou à conclusão de que o fluxo era proporcional à área de seção transversal ( $A$ ) do leito poroso e à diferença entre as alturas ( $h_1 - h_2$ ), e inversamente ao comprimento ( $C$ ), conforme Eq. (2.11) (BEAR, 1972):

$$q = KA \frac{h_1 - h_2}{C} \quad (2.11)$$

onde  $K$ , neste caso, é uma constante de proporcionalidade que varia conforme o fluido utilizado, e que viria a servir como base na definição do conceito de permeabilidade.

A equação de Darcy teve sua validade verificada para as seguintes hipóteses (ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006; CARVALHO, 2015):

- Fluido homogêneo e newtoniano;
- Meio poroso homogêneo e não reagente ao fluido;
- Escoamento laminar, isotérmico e permanente;
- Desprezados os efeitos eletrocinéticos e de *Klinkenberg* (deslizamento de gases à baixas pressões).

Apesar de ser uma formulação originalmente empírica, a Lei de Darcy, ao ser estudada para diversos fluidos e situações, levou à sua forma genérica, definida para uma fase  $i$ , pela Eq. (2.12), amplamente utilizada em simulação de reservatórios na definição da quantidade de movimento (BEAR, 1972; HELMIG, 1997; ROSA, CARVALHO e XAVIER, 2006):

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \tilde{K} (\vec{\nabla} p_i - \rho_i \vec{g}) \quad (2.12)$$

onde  $\vec{\nabla}$  é o operador gradiente,  $p_i$  é a pressão na fase  $i$ ,  $\vec{g}$  o vetor de aceleração gravitacional, e  $\vec{v}_i$  a velocidade da fase  $i$ .

A Equação (2.12) pode ser simplificada, ao desconsiderarmos o efeito gravitacional e a pressão capilar, resultando em:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \tilde{K} \vec{\nabla} p \quad (2.13)$$

onde  $p$  é a pressão do fluido.

Define-se ainda a velocidade total ( $\vec{v}_T$ ) como o somatório das velocidades de todas as fases, no presente texto, tem-se a velocidade de água ( $\vec{v}_w$ ) e velocidade do óleo ( $\vec{v}_o$ ):

$$\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_o \quad (2.14)$$

Por outro lado, o fluxo fracionário de uma fase  $i$  ( $f_i$ ), é definido como a razão da vazão de uma fase pela vazão total, onde no caso sem gravidade e capilaridade e após manipulações algébricas, pode ser definido como (FANCHI, 2005):

$$f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_T} \quad (2.15)$$

### 2.1.6 Fraturas e o LDFM

De forma geral, uma fratura ( $\mathcal{F}$ ) é definida como uma descontinuidade das propriedades da rocha matriz, e, em especial, sua permeabilidade, cuja valor pode ser ordens de magnitude diferentes da rocha matriz, atuando como canal, ou como barreira (SANDVE, BERRE e NORDBOTTEN, 2012).

No LDFM, o tensor de permeabilidade absoluta na fratura é definido através de duas componentes:

1. A permeabilidade absoluta no sentido normal à fratura ( $K_n^{\mathcal{F}}$ ), representada por um escalar;
2. A permeabilidade absoluta tangencial à fratura ( $K_{tg}^{\mathcal{F}}$ ), genericamente representada por um tensor, análogo ao da Eq. (2.3). No caso 2-D, pode-se considerar

um escalar no lugar deste tensor, pois no domínio discreto o plano tangente à fratura é reduzido à uma reta, bastando definir a permeabilidade em uma direção.

Além da permeabilidade, deve-se definir a orientação das fraturas, bem como as seguintes propriedades importantes à sua modelagem:

- Abertura ( $a_{\mathcal{F}}$ );
- Comprimento ( $L_{\mathcal{F}}$ );
- Porosidade ( $\phi_{\mathcal{F}}$ );

Grupos de fraturas com as mesmas propriedades, são denominadas de família de fraturas.

## 2.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação de conservação de massa para uma fase  $i$ , obtida a partir das hipóteses simplificadoras apresentadas na Seção 2, tem sua forma diferencial definida como (BEAR, 1972; HELMIG, 1997):

$$\phi\rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} = -\rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i + q_i \quad (2.16)$$

onde  $\phi$  é a porosidade da rocha,  $\rho_i$  é a densidade da fase,  $S_i$  a saturação da fase,  $\vec{\nabla}$  o operador gradiente,  $\vec{v}_i$  o vetor velocidade da fase  $i$ , e  $q_i$  o termo fonte/sumidouro.

### 2.2.1 Equação de Pressão

Para a obtenção de uma equação diferencial parcial elíptica, a Eq. (2.16) é manipulada com o objetivo de obter como incógnita apenas a variável pressão (CARVALHO, 2005).

Primeiramente, a Eq. (2.16) é descrita para cada uma das fases:

$$\phi\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\rho_w \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_w + q_w \quad (2.17)$$

$$\phi\rho_o \frac{\partial S_o}{\partial t} = -\rho_o \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_o + q_o \quad (2.18)$$

Definindo-se a vazão volumétrica, para uma fase qualquer  $i$ , como:

$$Q_i = \frac{q_i}{\rho_i} \quad (2.19)$$

Dividindo-se ambas as Eq. (2.17) e (2.18) pelas respectivas densidades das fases, e aplicando a Eq. (2.19), tem-se:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_w + Q_w \quad (2.20)$$

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_o + Q_o \quad (2.21)$$

Somando-se as Eqs. (2.20) e (2.21), e agrupando os termos diferenciais correspondentes, obtém-se a seguinte expressão:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_w + \vec{v}_o) + (Q_w + Q_o) = \phi \frac{\partial}{\partial t} (S_w + S_o) \quad (2.22)$$

Aplicando-se a restrição da saturação da Eq. (2.2), utilizando o conceito da velocidade total da Eq. (2.14), e analogamente a está última, definindo uma vazão volumétrica total ( $Q_T$ ), e reordenando os termos em questão, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_T = Q_T \quad (2.23)$$

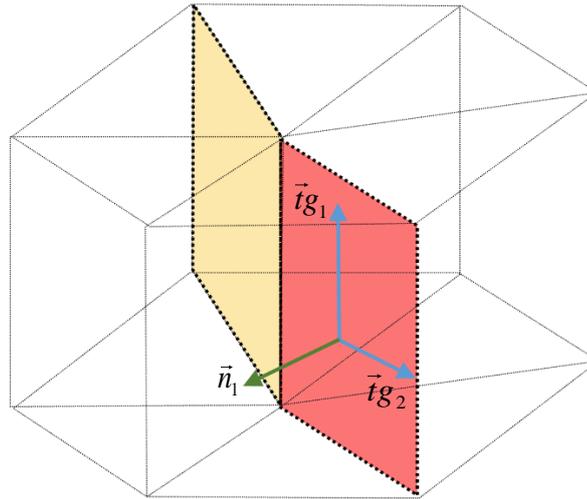
A Equação (2.23) é definida como como Equação de Pressão. A velocidade total é calculada através da Lei de Darcy, pela Eq. (2.13).

### 2.2.1.1 Equação de pressão nas fraturas com dimensão reduzida

A Equação (2.23) é válida para qualquer volume de controle do domínio, entretanto, este trabalho tem como objetivo tratar as fraturas como entidades geométricas com dimensão inferior à do problema original a fim de reduzir o custo computacional. Neste caso, resolve-se apenas o fluxo tangencial, que ocorre no plano da fratura para uma rocha matriz em 3-D, ou aresta, para uma matriz em 2-D, resultando na necessidade de adequação da Eq. (2.23).

O procedimento para essa redução de dimensão consiste, primeiramente, em adotar um sistema local de coordenadas específico para cada fratura. Utiliza-se a concepção da Figura 4, para um domínio 3-D com duas fraturas, representadas pelas faces coloridas, e sendo adotada a fratura vermelha como exemplo, na qual o sistema de coordenadas é definido pelo plano tangente à fratura (vetores azuis) e a reta normal (vetor verde).

Figura 4 – Representação de uma fratura, pela face vermelha, num domínio 3-D.



Fonte: Adaptado de Hoteit e Firoozabadi (2008).

O divergente da Eq. (2.23) para a fratura ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T,\mathcal{F}}$ ), é composto por três componentes, no caso 3-D, onde no sistema de coordenadas  $(\vec{t}g_1, \vec{t}g_2, \vec{n}_1)$ , pode ser definido como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T,\mathcal{F}} = \frac{\partial v_{tg_1}^{\mathcal{F}}}{\partial tg_1} + \frac{\partial v_{tg_2}^{\mathcal{F}}}{\partial tg_2} + \frac{\partial v_{n_1}^{\mathcal{F}}}{\partial n_1} \quad (2.24)$$

O somatório dos dois primeiros termos é denominado divergente da velocidade total no sentido tangencial à fratura ( $\vec{\nabla}_{tg} \cdot \vec{v}_{tg}^{\mathcal{F}}$ ), sendo que, no caso 2-D, esse divergente será reduzido a uma única derivada.

Vale salientar que o fluxo decorrente do último termo da Eq. (2.24) é proveniente dos elementos vizinhos da rocha matriz. Este termo é segregado do divergente, e acoplado através do uso de uma função de transferência, referente à componente normal do fluxo ( $Q_n^{\mathcal{F}}$ ), e se comporta como um termo fonte/sumidouro, e, por isso, adotou-se a mesma notação. A função de transferência irá surgir naturalmente no balanço de massa da rocha matriz.

O divergente da Eq. (2.24) é então reescrito como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T,\mathcal{F}} = \vec{\nabla}_{tg} \cdot \vec{v}_{tg}^{\mathcal{F}} + Q_n^{\mathcal{F}} \quad (2.25)$$

A velocidade tangencial na fratura, pode ser definida adaptando-se de maneira análoga a Eq. (2.12) e utilizando o conceito de permeabilidade tangencial da Seção 2.1.6:

$$\vec{v}_{T,\mathcal{F}} = -\lambda_T^{\mathcal{F}} K_{tg}^{\mathcal{F}} \vec{\nabla}_{tg}^{\mathcal{F}} p \quad (2.26)$$

onde todos os parâmetros estão definidos na fratura e  $\vec{\nabla}_{ig}^{\mathcal{F}} p$  é o gradiente de pressão no sentido tangencial à fratura.

Com isso, para a fratura são resolvidos explicitamente apenas os fluxos no sentido tangencial (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015), e a Eq. (2.23) pode ser reescrita como:

$$\vec{\nabla}_{ig} \cdot \vec{v}_{ig}^{\mathcal{F}} + Q_n^{\mathcal{F}} = Q_T^{\mathcal{F}} \quad (2.27)$$

### 2.2.2 Equação de Saturação

Devido à restrição imposta na saturação, Eq. (2.2), é suficiente que a Eq. (2.16) seja resolvida para apenas uma fase, sendo escolhida a fase água, conforme prática usual da literatura (CARVALHO, 2005; PEACEMAN, 1977).

Definindo a Eq. (2.13) para cada uma das fases:

$$\vec{v}_w = -\lambda_w \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2.28)$$

$$\vec{v}_o = -\lambda_o \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2.29)$$

Multiplicando a Eq. (2.28) por  $\lambda_o$  e a (2.29) por  $\lambda_w$ :

$$\lambda_o \vec{v}_w = -\lambda_o \lambda_w \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2.30)$$

$$\lambda_w \vec{v}_o = -\lambda_w \lambda_o \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2.31)$$

Subtraindo a Eq. (2.30) da (2.31):

$$\lambda_w \vec{v}_o - \lambda_o \vec{v}_w = \lambda_o \lambda_w \underline{K} \vec{\nabla} p - \lambda_w \lambda_o \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2.32)$$

Substituindo  $\vec{v}_o$  da Eq. (2.32) pela Eq. (2.14), e resolvendo o termo do lado direito da igualdade:

$$\lambda_w (\vec{v}_T - \vec{v}_w) - \lambda_o \vec{v}_w = 0 \quad (2.33)$$

Reordenando os termos, obtém-se a seguinte expressão:

$$(\lambda_w + \lambda_o) \vec{v}_w = \lambda_w \vec{v}_T \quad (2.34)$$

Substituindo a Eq. (2.10), e a Eq. (2.15), após isolar  $\vec{v}_w$ , tem-se que:

$$\vec{v}_w = f_w \vec{v}_T \quad (2.35)$$

Por fim, substituindo a Eq. (2.35) na (2.20), é possível definir a equação hiperbólica de saturação de água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot f_w \vec{v}_T + Q_w \quad (2.36)$$

Com isso tem-se o sistema de equações definido pelas Eq. (2.23), de pressão, e Eq. (2.36), de saturação, as quais são acopladas pela velocidade total, definida na Eq. (2.14).

### 2.2.2.1 Equação de saturação nas fraturas com dimensão reduzida

No caso da equação de saturação para fase água na fratura, pode-se substituir a velocidade total da Eq. (2.36) pela definição obtida na Eq. (2.25), e ao reordenar os termos e reescrever a função de transferência ponderada pelo fluxo fracionário, tem-se que:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\vec{\nabla}_{tg} \cdot f_w \vec{v}_{tg}^{\mathcal{F}} - f_w Q_n^{\mathcal{F}} + Q_w^{\mathcal{F}} \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Escoamento Monofásico

No escoamento monofásico, não é necessário resolver a Eq. (2.36), pois uma única fase satura o meio. Com uma única fase presente a permeabilidade relativa se torna unitária, e a equação que deve ser resolvida se resume à Eq. (2.38), obtida após a substituição na Eq. (2.23), das Eq. (2.13) e (2.9) modificadas adequadamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\mu} \underline{K} \vec{\nabla} p \right) = Q \quad (2.38)$$

Analogamente, no caso das fraturas, tem-se que:

$$\vec{\nabla}_{tg} \cdot \left( \frac{1}{\mu} \underline{K}_{tg}^{\mathcal{F}} \vec{\nabla}_{tg}^{\mathcal{F}} p \right) + Q_n^{\mathcal{F}} = Q \quad (2.39)$$

## 2.2.4 Condições Iniciais e de Contorno

Para a descrição completa do problema, é necessário definir condições iniciais e de contorno adequadas. Nesse caso, considerando um reservatório cujo domínio é  $\Omega$ , pode-se definir o seu contorno  $\Gamma$ , como:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_I \cup \Gamma_P \quad (2.40)$$

onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  representam as fronteiras externas de Dirichlet (pressão prescrita) e Neumann (fluxo prescrita), respectivamente, onde  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ;  $\Gamma_I$  são os poços injetores e  $\Gamma_P$  os poços produtores.

Condições de contorno adequadas podem ser definidas, como (CONTRERAS, LYRA, *et al.*, 2016):

$$\forall \vec{x} \in \Gamma_D \Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_D \quad (2.41)$$

$$\forall \vec{x} \in \Gamma_N \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{N} = g_N \quad (2.42)$$

$$\forall \vec{x} \in \Gamma_P \Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_P \quad (2.43)$$

$$\forall \vec{x} \in \Gamma_I \Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_I \wedge S_w(\vec{x}, t) = \bar{S}_w \quad (2.44)$$

onde  $g$  são funções escalares conhecidas das pressões ( $g_D$ ,  $g_P$  e  $g_I$ ) e fluxo ( $g_N$ ),  $\vec{N}$  o vetor área normal e  $\bar{S}_w$  a saturação prescrita nos poços injetores.

Em especial nas fraturas, é necessária a utilização de uma forma não usual de condições de contorno, denominada condições de Robin ( $\Gamma_R$ ), ou mistas, na qual a pressão e o fluxo são prescritos de forma simultâneas (MARTIN, JAFFRÉ e ROBERTS, 2005):

$$\forall \vec{x} \in \Gamma_R \Rightarrow p(\vec{x}, t) + \vec{v} \cdot \vec{N} = g_R \quad (2.45)$$

onde  $g_R$  é uma combinação das funções  $g_D$  e  $g_N$ .

Por fim, as condições iniciais são definidas como:

$$\forall \vec{x} \in \Omega \Rightarrow S_w(\vec{x}, 0) = \bar{S}_w^0 \quad (2.46)$$

onde  $\bar{S}_w^0$  é a distribuição inicial da saturação de água no reservatório.

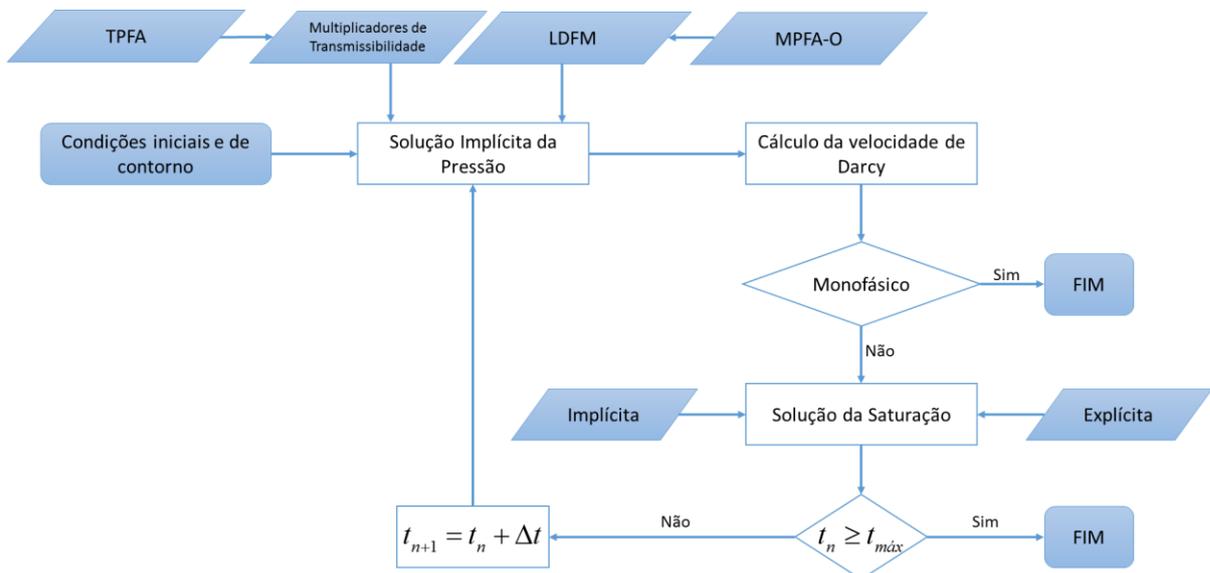
### 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

A complexidade do modelo matemático apresentado faz com que a solução analítica só possa ser obtida em condições muito restritivas, o que é de difícil ocorrência em reservatórios de petróleo, resultando na necessidade de utilização de formulações numéricas para a solução do problema proposto (CHEN, 2007; SOUZA, 2015).

O modelo discreto é solucionado através de uma formulação segregada, onde, a partir do campo de saturação inicial, a Eq. (2.23), da pressão, assim como a Eq. (2.27) para o LDFM, são resolvidas implicitamente. Em seguida, a Eq. (2.36), da saturação, e a Eq. (2.37) para o LDFM, são resolvidas, no caso de escoamento bifásico, em princípio, explicitamente. O acoplamento de ambas as equações é realizado através da velocidade de Darcy, Eq. (2.13). Essa metodologia é amplamente utilizada na indústria do petróleo, sendo denominada de *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES), i.e., Pressão Implícita Saturação Explícita (CHEN, 2007; AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015). Entretanto, a formulação explícita para a saturação está sujeita a uma restrição do passo de tempo máximo, imposta para garantir a estabilidade, e, caso a restrição seja demasiadamente elevada, é possível adotar uma formulação sequencial implícita, onde tanto a pressão quanto a saturação são resolvidas implicitamente (HOTEIT e FIROOZABADI, 2008).

Na formulação segregada, caso o tempo final não tenha sido atingido, o campo de pressões é então atualizado, dando início a um novo ciclo na simulação. O algoritmo é apresentado sucintamente na Figura 5.

Figura 5 – Algoritmo de solução do problema que descreve o escoamento de água e óleo em reservatórios naturalmente fraturados.

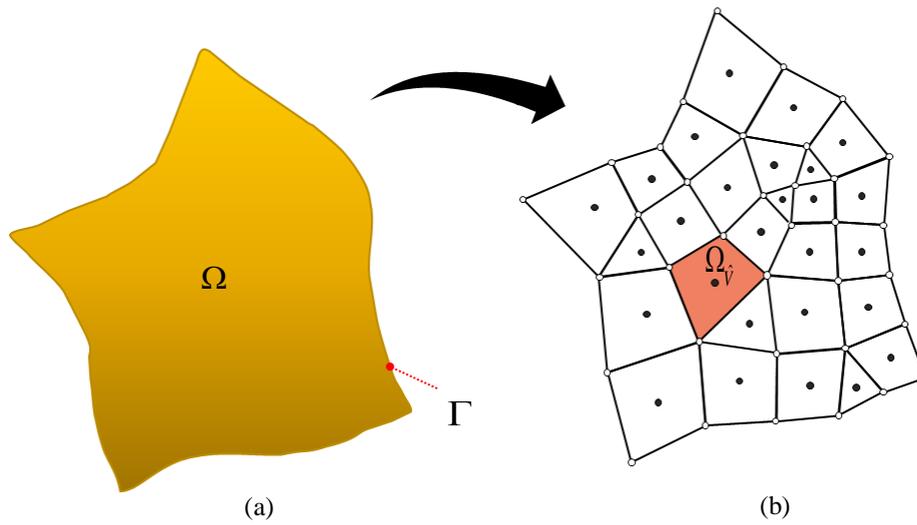


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.1 EQUAÇÃO DE PRESSÃO

Nesta seção, é apresentada uma descrição simplificada do Método de Volumes Finitos (MVF) para um domínio 2-D ( $\Omega$ ), utilizado para a solução da Eq. (2.23), e Eq. (2.27) no caso LDFM. O MVF tem como base, utilizar uma formulação integral das leis de conservação no domínio físico do problema em questão (CARVALHO, 2005; SOUZA, 2015), representado pela Figura 6 (a):

Figura 6 – Representação computacional de um reservatório em 2-D: (a) Domínio contínuo ( $\Omega$ ); (b) Domínio discretizado com destaque para um volume de controle genérico ( $\Omega_{\hat{v}}$ ).



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Desta forma, integra-se a Eq. (2.23), ao longo domínio  $\Omega$ , resultando na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_T d\Omega = \int_{\Omega} Q_T d\Omega \quad (3.1)$$

A Equação (3.1) pode ser resolvida a partir da discretização domínio  $\Omega$  em  $\mathcal{N}_{VC}$  volumes de controle, conforme Figura 6 (b), onde as integrais da Eq. (3.1) podem ser representadas como um somatório de integrais para cada volume de controle  $i$ , dada por:

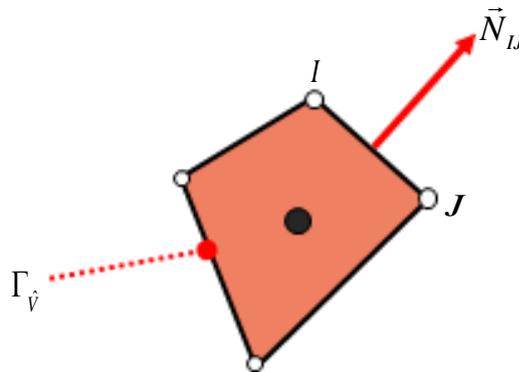
$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{v}_i}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T_{\hat{v}_i}} d\Omega_{\hat{v}_i} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{v}_i}} Q_{T_{\hat{v}_i}} d\Omega_{\hat{v}_i} \quad (3.2)$$

Por simplificação, considera-se apenas a integral para o volume de controle genérico  $\Omega_{\hat{v}}$ , em destaque na Figura 6 (b), ou seja:

$$\int_{\Omega_{\hat{v}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T_{\hat{v}}} d\Omega_{\hat{v}} = \int_{\Omega_{\hat{v}}} Q_{T_{\hat{v}}} d\Omega_{\hat{v}} \quad (3.3)$$

Na Figura 7, tem-se o volume de controle  $\Omega_{\hat{v}}$ , sua superfície de controle  $\Gamma_{\hat{v}}$ , uma aresta genérica desta superfície, definida pelos nós  $I$  e  $J$ , e o vetor normal à essa aresta ( $\vec{N}_{IJ}$ ), cujo módulo é igual ao comprimento da aresta  $IJ$ :

Figura 7 – Volume de controle genérico  $\Omega_{\hat{v}}$ .



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Utilizando o Teorema da Divergência de Gauss (STEWART, 2006) no lado esquerdo da Eq. (3.3), tem-se que a integral de volume, no domínio  $\Omega_{\hat{v}}$ , pode ser substituída por uma integral de superfície em  $\Gamma_{\hat{v}}$ :

$$\int_{\Omega_{\hat{v}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{T_{\hat{v}}} d\Omega_{\hat{v}} = \int_{\Gamma_{\hat{v}}} \vec{v}_{T_{\hat{v}}} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{v}} \quad (3.4)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal à superfície.

Os integrandos do lado direito das Eq. (3.3) e (3.4) podem ser aproximados pelo Teorema do Valor Médio (STEWART, 2006), considerando uma velocidade total média ( $\vec{v}_{IJ}$ ) para cada aresta da superfície de controle  $\Gamma_{\hat{v}}$ , e um valor médio para o termo fonte/sumidouro ( $\bar{Q}_{\hat{v}}$ ), dessa forma, tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\hat{v}}} \vec{v}_{T_{\hat{v}}} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{v}} \cong \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega_{\hat{v}}} Q_{T_{\hat{v}}} d\Omega_{\hat{v}} \cong \bar{Q}_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}} \quad (3.6)$$

Com as aproximações descritas obtém-se a Equação de Pressão em sua forma discreta, conforme a Eq. (3.7).

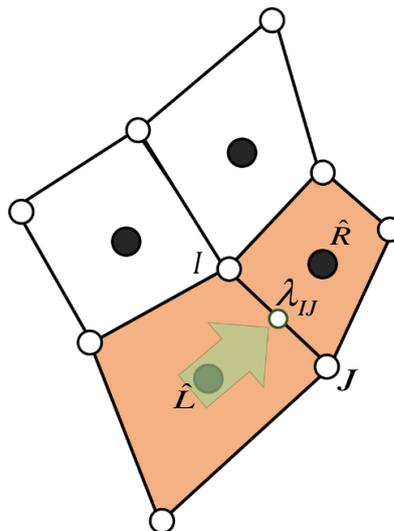
$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}} \quad (3.7)$$

Esta definição requer uma atenção especial no caso do LDFM, detalhada na seção 3.1.2.2:

O cálculo do termo da velocidade da Eq. (3.7) é realizado, de forma geral, pela Lei de Darcy, Eq. (2.13) que, por sua vez, depende do valor da mobilidade nas superfícies de controle (arestas da malha em 2-D). A aproximação da mobilidade, que depende de valores da saturação, é efetuada utilizando um método de ponderação a montante de primeira ordem (*First Order Upwind Method* – FOUM) (AZIZ e SETTARI, 1979; SOUZA, 2015).

Utilizando como referência a Figura 8, na qual o fluxo ocorre do volume  $\hat{L}$  ao volume  $\hat{R}$ , tem-se que a mobilidade  $\lambda_{IJ}$  é aproximada utilizando a saturação a montante da aresta  $IJ$ , neste caso em  $\hat{L}$ , no passo de tempo anterior, para a linearização.

Figura 8 – Aproximação da mobilidade a montante.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

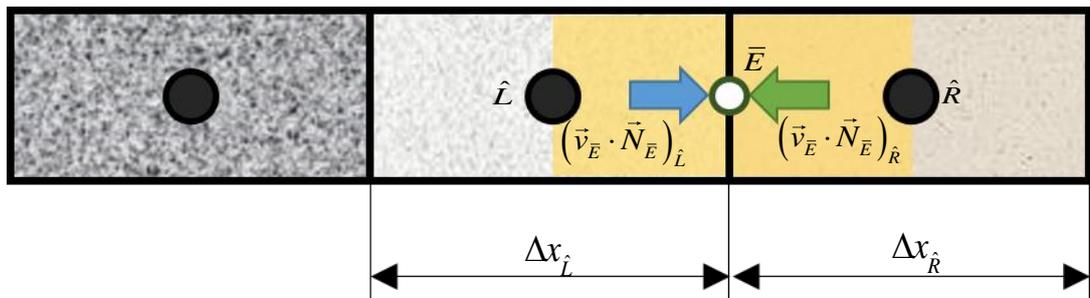
O que difere uma formulação MVF de outra é a forma como os termos de fluxos do lado esquerdo da Eq. (3.7) são calculados. Para isso, existem diversas formulações numéricas dis-

poníveis na literatura, contudo, no presente texto, foram adotadas duas formulações que impõem a continuidade do fluxo nas arestas: uma com a aproximação deste fluxo por dois pontos (TPFA) e outra por múltiplos pontos (MPFA), esta última apta a lidar com malhas não estruturadas e nos casos onde os tensores de permeabilidade não estão alinhados com a malha. A variante da MPFA adotada, foi a mais tradicional, denominada MPFA-O, que possui um suporte triangular para pressão (AAVATSMARK, BARKVE, *et al.*, 1998a; EDWARDS e ROGERS, 1998; SOUZA, 2015).

### 3.1.1 Método de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (TPFA)

Conforme discutido anteriormente, o TPFA foi concebido originalmente para malhas estruturadas ortogonais e, a partir disso, é explanado, a seguir, o cálculo do fluxo da Eq. (3.7), para uma interface  $\bar{E}$ , utilizando o fragmento de uma malha unidimensional, apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Fragmento de uma malha unidimensional.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Caso o meio seja homogêneo, i.e.,  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$  com o mesmo tensor de permeabilidade, a definição do fluxo na interface  $\bar{E}$  por uma aproximação linear, a partir das pressões no ponto de colocação  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$ , é suficiente. Porém, em geral, em reservatórios de petróleo tem-se meios altamente heterogêneos, então, para garantir a continuidade do fluxo em  $\bar{E}$ , se faz necessária a definição dos gradientes à esquerda e à direita da face, visando a obtenção de uma permeabilidade equivalente (SOUZA, 2015).

Primeiramente, define-se o fluxo na interface  $\bar{E}$ , segundo as contribuições dos elementos à esquerda ( $\hat{L}$ ) e à direita ( $\hat{R}$ ), utilizando a definição da Eq. (3.7) e a Lei de Darcy, Eq. (2.13), e aproximando o gradiente por diferenças finitas avançadas, tem-se, após alguma manipulação algébrica:

$$\left(\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}}\right)_{\hat{L}} = -2\lambda_{\bar{E}} K_{\hat{L}} \left( \frac{p_{\bar{E}} - p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} \right) \quad (3.8)$$

$$\left(\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}}\right)_{\hat{R}} = 2\lambda_{\bar{E}} K_{\hat{R}} \left( \frac{p_{\hat{R}} - p_{\bar{E}}}{\Delta x_{\hat{R}}} \right) \quad (3.9)$$

onde  $p_{\hat{L}}$  é a pressão no ponto de colocação  $\hat{L}$ ,  $p_{\hat{R}}$  a pressão no ponto de colocação  $\hat{R}$ ,  $p_{\bar{E}}$  a pressão no ponto de auxiliar  $\bar{E}$ ,  $\Delta x_{\hat{L}}$  a dimensão em  $x$  do volume  $\hat{L}$ ,  $\Delta x_{\hat{R}}$  a dimensão em  $x$  do volume  $\hat{R}$ ,  $K_{\hat{L}}$  a permeabilidade em  $\hat{L}$  e  $K_{\hat{R}}$  a permeabilidade em  $\hat{R}$ .

Com o objetivo de eliminar a dependência da pressão auxiliar, é imposta a continuidade do fluxo na interface  $\bar{E}$ , fazendo:

$$\left(\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}}\right)_{\hat{L}} = -\left(\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}}\right)_{\hat{R}} \quad (3.10)$$

Substituindo as Eq. (3.8) e (3.9) na Eq. (3.10), pode-se obter a pressão no ponto auxiliar em função das pressões nos pontos de colocação adjacentes, conforme apresentado na Eq. (3.11).

$$p_{\bar{E}} = \left( \frac{K_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} p_{\hat{L}} + \frac{K_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}} p_{\hat{R}} \right) \left( \frac{K_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}} + \frac{K_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

Por fim, substituindo a Eq. (3.11) na (3.8), e realizando algumas manipulações algébricas, tem-se definido o fluxo na interface  $\bar{E}$  como:

$$\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}} = -\lambda_{\bar{E}} \frac{2K_{\hat{L}}K_{\hat{R}}}{K_{\hat{L}}\Delta x_{\hat{R}} + K_{\hat{R}}\Delta x_{\hat{L}}} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) \quad (3.12)$$

Sabendo-se que os termos das propriedades conhecidas podem ser agrupados no parâmetro físico/geométrico chamado de transmissibilidade  $T$ , é possível chegar a seguinte equação:

$$T_{\bar{E}} = \lambda_{\bar{E}} \frac{2K_{\hat{L}}K_{\hat{R}}}{K_{\hat{L}}\Delta x_{\hat{R}} + K_{\hat{R}}\Delta x_{\hat{L}}} = \lambda_{\bar{E}} \frac{2}{\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}}}} \quad (3.13)$$

O procedimento descrito acima é feito de forma análoga para todas as arestas do interior no domínio.

Nos contornos, entretanto, a pressão auxiliar definida, para condições de Dirichlet prescritas, ou então o valor do fluxo para imposição da continuidade, em caso de condições de Neumann.

Nos contornos, entretanto, tem-se definida a pressão auxiliar em substituição ao valor obtido com a Eq. (3.11), para condições de Dirichlet, ou então o valor do fluxo para imposição da continuidade na Eq. (3.10), em caso de condições de Neumann. Substituindo nestas equações os valores descritos na Eq. (2.41), ou Eq. (2.42), respectivamente, têm-se as alterações realizadas nas arestas de contorno:

$$p_{\bar{E}} = g_D \quad (3.14)$$

Ou:

$$\vec{v}_{\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}} = -g_N \quad (3.15)$$

O procedimento descrito anteriormente, para o caso unidimensional, permanece válido para o TPFa em domínios multidimensionais (SOUZA, 2015), repetindo-se de forma análoga para cada dimensão do modelo.

### 3.1.1.1 Modelo de Fraturas com Multiplicadores de Transmissibilidade

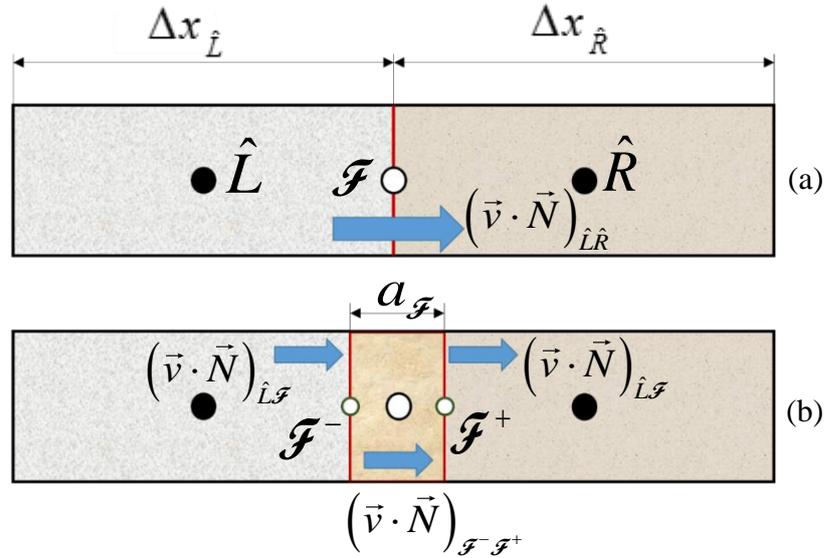
A metodologia dos Multiplicadores de Transmissibilidade descrita em Manzocchi, Walsh, *et al.* (1999) e utilizada por simuladores comerciais, consiste em fazer uma mudança de escala aplicando um fator de multiplicação ( $m^{\mathcal{F}}$ ) na transmissibilidade ( $T$ ), quando houver fratura, obtendo uma nova transmissibilidade incorporando a fratura ( $T^{\mathcal{F}}$ ), isto é:

$$T^{\mathcal{F}} = m^{\mathcal{F}} T \quad (3.16)$$

Para apresentação do método, é adotado um domínio análogo ao da Figura 9, mas com mobilidade unitária, onde os volumes  $\hat{L}$  e  $\hat{R}$  estão separados por uma fratura  $\mathcal{F}$ , que apesar de não possuir abertura ( $a_{\mathcal{F}}$ ) no domínio computacional, esse valor é utilizado para os cálculos do multiplicador de transmissibilidade.

A Figura 10 apresenta os parâmetros adicionais decorrentes da presença da fratura na interface.

Figura 10 – Fragmento de uma malha para cálculo de multiplicadores de transmissibilidade: (a) Malha utilizada; (b) Mensuração da abertura da fratura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando a configuração apresentada na Figura 10 (b) e utilizando-se uma analogia a circuitos elétricos, tem-se que os fluxos (correntes) devem ser contínuos, ou seja:

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} = \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\mathcal{F}} = \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+} = \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^+\hat{R}} \quad (3.17)$$

E o diferencial de pressão (potencial) global ( $\Delta p_{\hat{L}\hat{R}}$ ), deve ser igual ao somatório das variações de pressão intermediárias:

$$\Delta p_{\hat{L}\hat{R}} = \Delta p_{\hat{L}\mathcal{F}} + \Delta p_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+} + \Delta p_{\mathcal{F}^+\hat{R}} \quad (3.18)$$

Primeiramente, calcula-se o fluxo  $\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}}$ , de  $\hat{L}$  a  $\hat{R}$ , assumindo uma permeabilidade equivalente com a falha:

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} = -K_{eq}^{\mathcal{F}} \frac{\Delta p_{\hat{L}\hat{R}}}{\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2}} \quad (3.19)$$

E isola-se  $\Delta p_{\hat{L}\hat{R}}$ :

$$\Delta p_{\hat{L}\hat{R}} = -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} \frac{1}{K_{eq}^{\mathcal{F}}} \left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2} \right) \quad (3.20)$$

Para os demais fluxos, realiza-se procedimento análogo, mas considerando a permeabilidade de cada segmento:

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\mathcal{F}^-} = -K_{\hat{L}} \frac{\Delta p_{\hat{L}\mathcal{F}^-}}{\frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{2}} \Leftrightarrow \Delta p_{\hat{L}\mathcal{F}^-} = -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\mathcal{F}^-} \frac{1}{K_{\hat{L}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} - \frac{a_{\mathcal{F}}}{2}\right) \quad (3.21)$$

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+} = -K_{\mathcal{F}} \frac{\Delta p_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+}}{a_{\mathcal{F}}} \Leftrightarrow \Delta p_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+} = -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+} \frac{1}{K_{\mathcal{F}}} a_{\mathcal{F}} \quad (3.22)$$

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^+\hat{R}} = -K_{\hat{R}} \frac{\Delta p_{\mathcal{F}^+\hat{R}}}{\frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{2}} \Leftrightarrow \Delta p_{\mathcal{F}^+\hat{R}} = -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\mathcal{F}^+\hat{R}} \frac{1}{K_{\hat{R}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2} - \frac{a_{\mathcal{F}}}{2}\right) \quad (3.23)$$

Substituindo as Eq. (3.20) a (3.23) na (3.18) e alterando todos os fluxos  $(\vec{v} \cdot \vec{N})$  para  $(\vec{v} \cdot \vec{N})_{\hat{L}\hat{R}}$ , segundo a Eq. (3.17), tem-se:

$$\begin{aligned} -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} \frac{1}{K_{eq}^{\mathcal{F}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2}\right) &= -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} \frac{1}{K_{\hat{L}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} - \frac{a_{\mathcal{F}}}{2}\right) \dots \\ &\dots -\left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} \frac{1}{K_{\mathcal{F}}} a_{\mathcal{F}} - \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right)_{\hat{L}\hat{R}} \frac{1}{K_{\hat{R}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2} - \frac{a_{\mathcal{F}}}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dividindo a Eq. (3.24) por  $F_{\hat{L}\hat{R}}$  e realizando algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\frac{1}{K_{eq}^{\mathcal{F}}} \left(\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2}\right) = \frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{L}}} + \frac{a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{R}}} \quad (3.25)$$

Isolando-se  $K_{eq}^{\mathcal{F}}$ , tem-se:

$$K_{eq}^{\mathcal{F}} = \frac{\left(\frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{L}}} + \frac{a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{R}}}\right)} \quad (3.26)$$

Substituindo a Eq. (3.26) na Eq. (3.19), encontra-se:

$$(\vec{v} \cdot \vec{N})_{\hat{L}\hat{R}} = - \frac{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{L}}} + \frac{a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{2K_{\hat{R}}} \right)} \frac{\Delta p_{\hat{L}\hat{R}}}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{2} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{2} \right)} \quad (3.27)$$

E, simplificando a expressão acima, obtém-se:

$$(\vec{v} \cdot \vec{N})_{\hat{L}\hat{R}} = - \frac{2}{\frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{2a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{R}}}} \Delta p_{\hat{L}\hat{R}} \quad (3.28)$$

Na qual pode-se definir a transmissibilidade quando da existência de fratura, como:

$$T^{\mathcal{F}} = \frac{2}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{2a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{R}}} \right)} \quad (3.29)$$

Substituindo-se, então, na Eq. (3.16) a Eq. (3.29) e a (3.13), considerando a mobilidade unitária e o problema unidimensional, tem-se que:

$$\frac{2}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{2a_{\mathcal{F}}}{K_{\mathcal{F}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}} - a_{\mathcal{F}}}{K_{\hat{R}}} \right)} = m^{\mathcal{F}} \frac{2}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}}} \right)} \quad (3.30)$$

Isolando  $m^{\mathcal{F}}$  e agrupando os termos semelhantes, chega-se a:

$$m^{\mathcal{F}} = \frac{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}}} \right)}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}}} + a_{\mathcal{F}} \left( \frac{2}{K_{\mathcal{F}}} - \frac{1}{K_{\hat{L}}} - \frac{1}{K_{\hat{R}}} \right) \right)} \quad (3.31)$$

E, com algumas manipulações algébricas, o multiplicador de transmissibilidade, pode ser definido como:

$$m^{\mathcal{F}} = \left( 1 + a_{\mathcal{F}} \frac{\left( \frac{2}{K_{\mathcal{F}}} - \frac{1}{K_{\hat{L}}} - \frac{1}{K_{\hat{R}}} \right)}{\left( \frac{\Delta x_{\hat{L}}}{K_{\hat{L}}} + \frac{\Delta x_{\hat{R}}}{K_{\hat{R}}} \right)} \right)^{-1} \quad (3.32)$$

No caso de um domínio homogêneo ( $K_{\hat{L}} = K_{\hat{R}} = K$ ) e utilizando uma malha uniforme ( $\Delta x_{\hat{L}} = \Delta x_{\hat{R}} = \Delta x$ ), a Eq. (3.32) pode ser simplificada para:

$$m^{\mathcal{F}} = \left( 1 + \frac{a_{\mathcal{F}} (K - K_{\mathcal{F}})}{\Delta x K_{\mathcal{F}}} \right)^{-1} \quad (3.33)$$

Apesar da simplicidade de implementação da metodologia apresentada, o TPFA não é capaz de lidar com malhas não estruturadas e cujos tensores de permeabilidade não estejam alinhados com a malha (SOUZA, 2015). Já os multiplicadores de transmissibilidade subestimam a possibilidade de um fluxo no sentido tangencial à fratura, além de negligenciar propriedades do escoamento bifásico na fratura ao conceber o multiplicador (MANZOCCHI, WALSH, *et al.*, 1999).

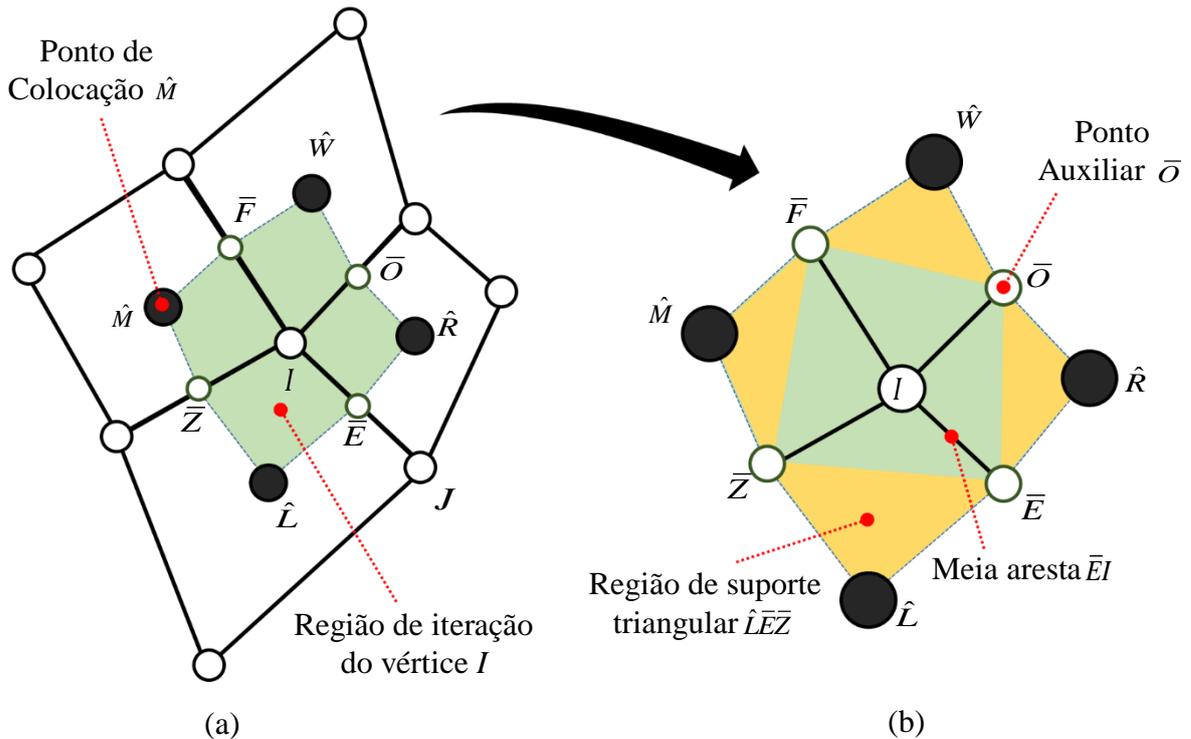
### 3.1.2 Método de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O)

O MPFA-O é capaz de diminuir os efeitos de orientação de malha e melhorar a acurácia da solução, em meios heterogêneos e anisotrópicos, mesmo para os chamados tensores completos (*Full Tensor*), sendo também capaz de lidar com malhas poligonais quaisquer, estruturadas, não-estruturadas e ainda não-conformes (AAVATSMARK, BARKVE, *et al.*, 1998a; EDWARDS e ROGERS, 1998; SOUZA, 2015). O método se baseia em dividir os volumes de controle em subcélulas, denominadas regiões de suporte triangular, assumindo uma variação linear da pressão dentro de cada subcélula, além de aplicar restrições de continuidade do fluxo, de modo a conservar massa localmente (CARVALHO, 2005). Inicialmente, são criadas regiões de iteração que fracionam cada aresta em dois segmentos, para, a partir disso, determinar os fluxos associados a estas frações, com isso o fluxo total na aresta será o somatório do fluxo dos dois segmentos.

As regiões de iteração são criadas para cada vértice da malha a partir da conexão dos centroides dos elementos adjacentes ao vértice, chamados de pontos de colocação, e dos pontos auxiliares criados sobre as arestas, conforme apresentando na Figura 11. No presente estudo, o ponto auxiliar é localizado no ponto médio da aresta, o que justifica denominar cada segmento de meia aresta. Para diferenciar um ponto de colocação de um ponto auxiliar, adota-se a notação adicional de um circunflexo sobrescrito para o primeiro, e uma barra sobrescrita, para o segundo.

A seguir, é detalhada a metodologia do MPFA-O, conforme apresentado em Souza (2015). Utilizando novamente a aresta  $IJ$  da Figura 8 como exemplo, mas limitando-se a criação de uma região de iteração genérica, associada apenas ao vértice  $I$ , tem-se a Figura 11 apresentando essa região de iteração, a qual é formada a partir da união dos pontos de colocação ( $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{W}$  e  $\hat{M}$ ) com os pontos auxiliares ( $\bar{E}$ ,  $\bar{O}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{Z}$ ), estes últimos definidos nos pontos médios de cada aresta que contém o vértice  $I$ .

Figura 11 – Região de iteração: (a) Fragmento da malha associado ao vértice  $I$ ; (b) Destaque na região de iteração e em seus componentes.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Após definida as regiões de suporte triangular, o gradiente de pressão para cada uma delas é calculado. Utilizando a região formada pelos pontos  $\hat{L}\bar{E}\bar{Z}$  como exemplo, primeiramente integra-se o gradiente no volume  $\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}$  da região de suporte triangular, a qual é transformada numa integral na superfície  $\Gamma_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}$ , segundo o Teorema da Divergência de Gauss:

$$\int_{\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \bar{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} \partial \Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = \int_{\Gamma_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} p \bar{n} \partial \Gamma_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} \quad (3.34)$$

Sendo linear a distribuição da pressão na região de suporte, seu gradiente é uma constante e pode ser retirado da integral:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} \int_{\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \partial\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = \int_{\Gamma_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} p \vec{n} \partial\Gamma_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} \quad (3.35)$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo, aplicando o Teorema do Valor Médio na integral de superfície do lado direito da Eq. (3.35), e isolando o gradiente da pressão, chega-se a:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = \frac{1}{\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \sum_{i=1}^3 p_i \vec{N}_i \quad (3.36)$$

Sabendo-se que a variação da pressão também é linear nas superfícies, tem-se que a pressão média em cada superfície pode ser definida como a média das pressões nos nós extremos das arestas, e a Eq. (3.36) é reescrita como:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = \frac{1}{\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \left[ \left( \frac{p_{\hat{L}} + p_{\bar{E}}}{2} \right) \vec{N}_{\hat{L}\bar{E}} + \left( \frac{p_{\bar{E}} + p_{\bar{Z}}}{2} \right) \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + \left( \frac{p_{\bar{Z}} + p_{\hat{L}}}{2} \right) \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}} \right] \quad (3.37)$$

onde  $p$  é a pressão em cada um dos pontos subscritos.

Reordenando a Eq. (3.37) de acordo com as pressões semelhantes, tem-se:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = \frac{1}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \left[ p_{\hat{L}} (\vec{N}_{\hat{L}\bar{E}} + \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}}) + p_{\bar{E}} (\vec{N}_{\hat{L}\bar{E}} + \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}}) + p_{\bar{Z}} (\vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}}) \right] \quad (3.38)$$

Realizando manipulações algébricas decorrentes da substituição na Eq. (3.38) da identidade geométrica descrita na Eq. (3.39):

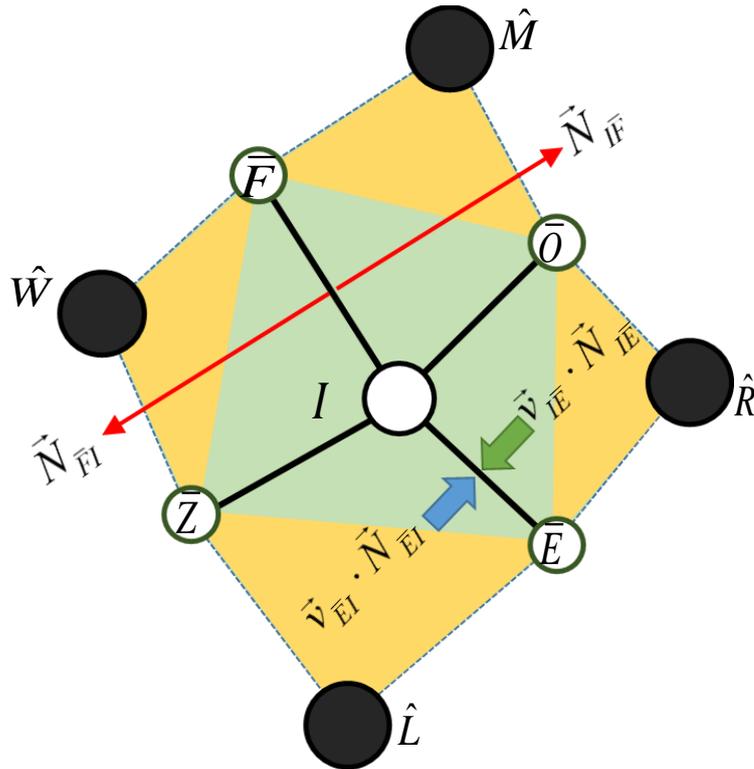
$$\vec{N}_{\hat{L}\bar{E}} + \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}} = 0 \quad (3.39)$$

Tem-se definido o gradiente da pressão na região de suporte triangular  $\hat{L}\bar{E}\bar{Z}$ , como:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} (p_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + p_{\bar{E}} \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}} + p_{\bar{Z}} \vec{N}_{\hat{L}\bar{E}}) \quad (3.40)$$

O gradiente apresentado na Eq. (3.40) é definido, de forma análoga, para as demais regiões de suporte triangular da região de iteração.

Analogamente ao TFPA, são definidas duas velocidades para cada meia aresta, uma proveniente da contribuição do volume à esquerda ( $\hat{L}$ ), e outra da contribuição do volume à direita ( $\hat{R}$ ), conforme exemplifica a Figura 12 para a meia aresta  $\bar{E}\hat{I}$ , onde os vetores normais de área foram representados para a meia aresta  $\bar{F}\hat{I}$ , como forma de não sobrecarregar a figura.

Figura 12 – Fluxos à esquerda e à direita da meia aresta  $\bar{EI}$  .

Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Cada fluxo total é calculado segundo a Lei de Darcy da Eq. (2.13), substituindo os gradientes pela extrapolação do valor definido na respectiva região de suporte triangular, com isso, tem-se que:

$$\vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI} = \lambda_{EI} K_L \frac{1}{2\Omega_{L\bar{E}\bar{Z}}} \left( p_L \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + p_{\bar{E}} \vec{N}_{\bar{Z}L} + p_{\bar{Z}} \vec{N}_{L\bar{E}} \right) \cdot \vec{N}_{EI} \quad (3.41)$$

$$\vec{v}_{IE} \cdot \vec{N}_{IE} = \lambda_{IE} K_R \frac{1}{2\Omega_{R\hat{O}\hat{E}}} \left( p_R \vec{N}_{\hat{O}\hat{E}} + p_{\hat{O}} \vec{N}_{\hat{E}R} + p_{\hat{E}} \vec{N}_{R\hat{O}} \right) \cdot \vec{N}_{IE} \quad (3.42)$$

De forma semelhante o fluxo definido na Eq. (3.41) é calculado para as demais meias arestas da região de iteração, referente às contribuições dos volumes de controle à esquerda. Então é possível reescrevê-los na forma matricial, separando os termos dependentes das pressões auxiliares em uma segunda matriz:

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI} \\ \vec{v}_{OI} \cdot \vec{N}_{OI} \\ \vec{v}_{FI} \cdot \vec{N}_{FI} \\ \vec{v}_{ZI} \cdot \vec{N}_{ZI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_L \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & 0 & 0 & B_{1,4} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,2} & B_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\hat{O}} \\ p_{\bar{F}} \\ p_{\bar{Z}} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

onde os coeficientes  $A_{i,j}$  e  $B_{i,j}$  são parâmetros físicos e geométricos, referentes aos pontos de colocação e aos pontos auxiliares, respectivamente, estando detalhados a seguir:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \frac{\lambda_{\bar{E}\bar{I}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}}; A_{2,2} = \frac{\lambda_{\bar{O}\bar{I}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{O}\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{O}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}}; A_{3,3} = \frac{\lambda_{\bar{F}\bar{I}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{F}\bar{O}} \cdot \vec{N}_{\bar{F}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}} \\
A_{4,4} &= \frac{\lambda_{\bar{Z}\bar{I}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{Z}\bar{F}} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}}; B_{1,1} = \frac{\lambda_{\bar{E}\bar{I}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{Z}\bar{L}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}}; B_{1,4} = \frac{\lambda_{\bar{E}\bar{I}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{L}\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{E}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \\
B_{2,1} &= \frac{\lambda_{\bar{O}\bar{I}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{R}\bar{O}} \cdot \vec{N}_{\bar{O}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}}; B_{2,2} = \frac{\lambda_{\bar{O}\bar{I}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{R}} \cdot \vec{N}_{\bar{O}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}}; B_{3,2} = \frac{\lambda_{\bar{F}\bar{I}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{W}\bar{F}} \cdot \vec{N}_{\bar{F}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}} \\
B_{3,3} &= \frac{\lambda_{\bar{F}\bar{I}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{O}\bar{W}} \cdot \vec{N}_{\bar{F}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}}; B_{4,3} = \frac{\lambda_{\bar{Z}\bar{I}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{M}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}}; B_{4,4} = \frac{\lambda_{\bar{Z}\bar{I}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{F}\bar{M}} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}\bar{I}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Define-se também, na forma matricial, os fluxos calculados para as demais meias arestas da região de iteração, referentes às contribuições dos volumes de controle à direita, analogamente à Eq. (3.42) e, com isso, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_{\bar{I}\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{E}} \\ \vec{v}_{\bar{I}\bar{O}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{O}} \\ \vec{v}_{\bar{I}\bar{F}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{F}} \\ \vec{v}_{\bar{I}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{Z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{3,4} \\ C_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & D_{2,2} & D_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} & D_{3,4} \\ D_{4,1} & 0 & 0 & D_{4,4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{O}} \\ p_{\bar{F}} \\ p_{\bar{Z}} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

onde os coeficientes  $C_{i,j}$  e  $D_{i,j}$  são parâmetros físicos e geométricos, e podem ser definidos como:

$$\begin{aligned}
C_{1,2} &= \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{E}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{O}\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{E}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}}; C_{2,3} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{O}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{F}\bar{O}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{O}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}}; C_{3,4} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{F}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{Z}\bar{F}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{F}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}} \\
C_{4,1} &= \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{Z}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{Z}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}}; D_{1,1} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{E}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{R}\bar{O}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{E}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}}; D_{1,2} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{E}} K_{\hat{R}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{R}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{E}}}{2\Omega_{\hat{R}\bar{O}\bar{E}}} \\
D_{2,2} &= \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{O}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{W}\bar{F}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{O}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}}; D_{2,3} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{O}} K_{\hat{W}} \vec{N}_{\bar{O}\bar{W}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{O}}}{2\Omega_{\hat{W}\bar{F}\bar{O}}}; D_{3,3} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{F}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{M}\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{F}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}} \\
D_{3,4} &= \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{F}} K_{\hat{M}} \vec{N}_{\bar{F}\bar{M}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{F}}}{2\Omega_{\hat{M}\bar{Z}\bar{F}}}; D_{4,1} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{Z}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{Z}\bar{L}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{Z}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}}; D_{4,4} = \frac{\lambda_{\bar{I}\bar{Z}} K_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{L}\bar{E}} \cdot \vec{N}_{\bar{I}\bar{Z}}}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

As Equações (3.43) e (3.45) podem ser descritas utilizando uma forma compacta, conforme segue:

$$\vec{v}_{Esq} = \underline{A} \hat{p} + \underline{B} \bar{p} \tag{3.47}$$

$$\vec{v}_{Dir} = \underline{C} \hat{p} + \underline{D} \bar{p} \quad (3.48)$$

onde  $\vec{v}_{Esq}$  é o vetor dos fluxos nas meias arestas calculados considerando as contribuições à esquerda,  $\vec{v}_{Dir}$  o vetor de fluxos das contribuições à direita;  $\hat{p}$  o vetor de pressões nos pontos de colocação,  $\bar{p}$  o vetor de pressões nos pontos auxiliares;  $\underline{A}$  e  $\underline{C}$  as matrizes de coeficientes das pressões nos pontos de colocação;  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$  as matrizes de coeficientes das pressões nos pontos auxiliares.

Vale observar que as matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{C}$  apresentam o número de linhas igual ao número de meias arestas da região de interação, e o número de colunas igual ao número de volumes de controles adjacentes ao vértice avaliado, enquanto que  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$  são matrizes quadradas de dimensão igual ao número de meias arestas da região de interação.

Com o objetivo de eliminar a dependência das pressões nos pontos auxiliares, e garantir a continuidade do fluxo nas meias arestas, é imposta a condição de continuidade segundo a Eq. (3.49):

$$\vec{v}_{Esq} = -\vec{v}_{Dir} \quad (3.49)$$

Ao substituir as Eq. (3.47) e (3.48) na Eq. (3.49), tem-se:

$$\underline{A} \hat{p} + \underline{B} \bar{p} = -\underline{C} \hat{p} - \underline{D} \bar{p} \quad (3.50)$$

E agrupando os termos semelhantes:

$$(\underline{B} + \underline{D}) \bar{p} = -(\underline{A} + \underline{C}) \hat{p} \quad (3.51)$$

A solução do sistema local da Eq. (3.51), em termos de  $\bar{p}$ , é dada por:

$$\bar{p} = -(\underline{B} + \underline{D})^{-1} (\underline{A} + \underline{C}) \hat{p} \quad (3.52)$$

Substituindo nas Eq. (3.47) e (3.48) a definição advinda da Eq. (3.52), e agrupando os termos semelhantes, é possível definir os fluxos como função das pressões apenas no pontos de colocação, da seguinte maneira:

$$\vec{v}_{Esq} = \left[ \underline{A} - \underline{B}(\underline{B} + \underline{D})^{-1} (\underline{A} + \underline{C}) \right] \hat{p} \quad (3.53)$$

$$\vec{v}_{Dir} = \left[ \underline{C} - \underline{D}(\underline{B} + \underline{D})^{-1} (\underline{A} + \underline{C}) \right] \hat{p} \quad (3.54)$$

Observa-se que os termos entre colchetes das equações acima são compostos dos parâmetros físicos e geométricos da região de interação. Com isso, podem ser interpretados como matrizes de transmissibilidade (SOUZA, 2015), conforme descrito a seguir:

$$\underline{T}_{Esq} = \underline{A} - \underline{B}(\underline{B} + \underline{D})^{-1}(\underline{A} + \underline{C}) \quad (3.55)$$

$$\underline{T}_{Dir} = \underline{C} - \underline{D}(\underline{B} + \underline{D})^{-1}(\underline{A} + \underline{C}) \quad (3.56)$$

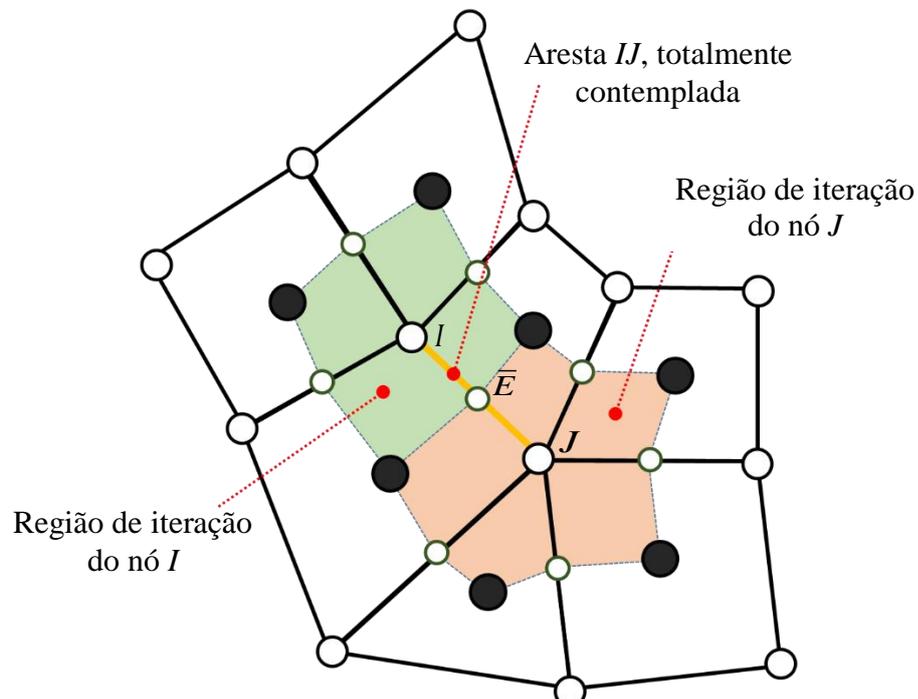
Por fim, os fluxos nas meias arestas de cada região de interação podem ser definidos, simplificadamente, como:

$$\vec{v}_{Esq} = \underline{T}_{Esq} \hat{P} \quad (3.57)$$

$$\vec{v}_{Dir} = \underline{T}_{Dir} \hat{P} \quad (3.58)$$

Ressalta-se que a solução da Equação de Pressão em sua forma discreta, Eq. (3.7), depende da definição do fluxo em toda a aresta. Tomando como exemplo a aresta  $IJ$  da Figura 13, tem-se que ela estará totalmente contemplada ao realizar os cálculos dos fluxos nas meias arestas das regiões de interação referentes aos vértices  $I$  e  $J$ , onde o fluxo total corresponde à soma dos fluxos nas meias arestas. Por sua vez, ao realizar o processo para todos os vértices da malha, todos os fluxos estarão definidos.

Figura 13 – Duas regiões de interação, referentes aos vértices  $I$  e  $J$ .



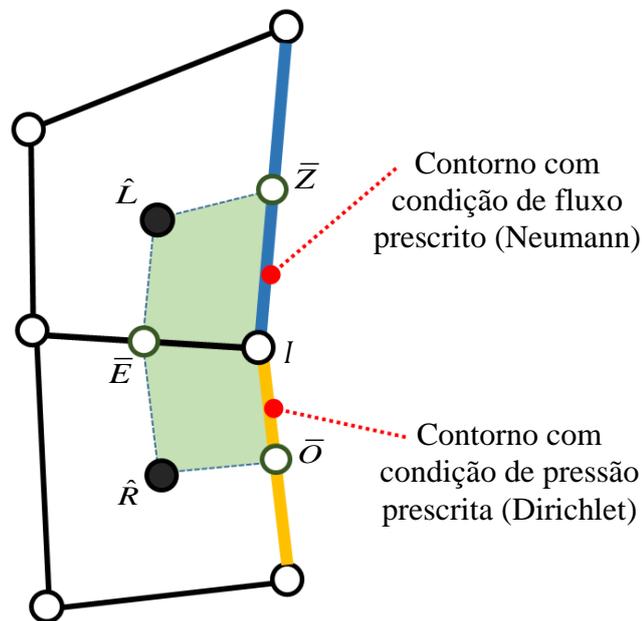
Fonte: Adaptado de Souza (2015).

A Figura 13 também representa a capacidade de o método MPFA-O lidar com malhas poligonais quaisquer, neste caso, representado por elementos mistos de triângulos e quadriláteros, pois as sub-regiões são semelhantes entre si, e sempre na forma de quadriláteros, onde a única diferença é que o número de sub-regiões para cada volume de controle será igual ao número de arestas que compõem este volume, permitindo assim a generalização do método.

### 3.1.2.1 Imposição das Condições de Contorno

Algumas modificações, na metodologia apresentada, devem ser efetuadas caso a região de interação se encontre no contorno. A Figura 14 mostra um caso em que o vértice  $I$  se encontra na superfície de contorno, sujeita a condições de Dirichlet (pressão prescrita) ou Neumann (fluxo prescrita), conforme discutido na Seção 0.

Figura 14 – Região de interação com o vértice  $I$  situado no contorno.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Vale ressaltar que, por definição, todos os fluxos provenientes das contribuições dos volumes de controle, que se encontram no contorno, são considerados fluxos à esquerda.

No caso da condição de contorno de Dirichlet, tem-se que a dependência do valor da pressão no ponto auxiliar, para o cálculo do fluxo, não será eliminada pela imposição da continuidade apresentada na Eq. (3.52), mas sim com a imposição da pressão prescrita segundo Eq. (2.41), resultado, para o caso ilustrado na Figura 14, em:

$$p_{\bar{O}} = g_D \quad (3.59)$$

Para a condição de Neumann, a modificação deverá ocorrer na imposição da continuidade do fluxo apresentada na Eq. (3.49), que será modificada pelo valor definido na Eq. (2.42), com isso, tem-se:

$$\vec{v}_{\bar{ZI}} \cdot \vec{N}_{\bar{ZI}} = g_N \quad (3.60)$$

Neste caso, o sistema definido na Eq. (3.43) para os fluxos à esquerda, pode ser reescrito, aplicando a definição da Eq. (3.59), como:

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}_{\bar{EI}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}} \\ \vec{v}_{\bar{OI}} \cdot \vec{N}_{\bar{OI}} \\ \vec{v}_{\bar{IZ}} \cdot \vec{N}_{\bar{IZ}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \\ A_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\bar{L}} \\ p_{\bar{R}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & 0 \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_{2,1} \\ 0 \end{bmatrix} \{g_D\} \quad (3.61)$$

onde  $\kappa$  representa os coeficientes dos termos conhecidos, e todos os coeficientes são descritos a seguir, como:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{\lambda_{\bar{EI}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{EZ}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}}; A_{2,2} = \frac{\lambda_{\bar{OI}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{OE}} \cdot \vec{N}_{\bar{OI}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}}; A_{3,1} = \frac{\lambda_{\bar{IZ}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{LE}} \cdot \vec{N}_{\bar{IZ}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}} \\ B_{1,1} &= \frac{\lambda_{\bar{EI}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{ZL}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}}; B_{1,2} = \frac{\lambda_{\bar{EI}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{LE}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}}; B_{2,1} = \frac{\lambda_{\bar{OI}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{RO}} \cdot \vec{N}_{\bar{OI}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}} \\ B_{3,1} &= \frac{\lambda_{\bar{IZ}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{ZL}} \cdot \vec{N}_{\bar{IZ}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}}; B_{3,2} = \frac{\lambda_{\bar{IZ}} K_{\bar{L}} \vec{N}_{\bar{LE}} \cdot \vec{N}_{\bar{IZ}}}{2\Omega_{\bar{L}\bar{E}\bar{Z}}}; \kappa_{2,1} = \frac{\lambda_{\bar{OI}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{ER}} \cdot \vec{N}_{\bar{OI}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Para o sistema de fluxos à direita, no exemplo da na Figura 14, tem-se apenas os fluxos internos, no caso o da aresta  $\bar{IE}$ , sendo definido como:

$$\{\vec{v}_{\bar{IE}} \cdot \vec{N}_{\bar{IE}}\} = [0 \quad C_{1,1}] \begin{Bmatrix} p_{\bar{L}} \\ p_{\bar{R}} \end{Bmatrix} + [D_{1,1} \quad 0] \begin{Bmatrix} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{Z}} \end{Bmatrix} + [\kappa_{1,1}] \{g_D\} \quad (3.63)$$

Com seus coeficientes definidos como:

$$C_{1,1} = \frac{\lambda_{\bar{IE}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{OE}} \cdot \vec{N}_{\bar{IE}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}}; D_{1,1} = \frac{\lambda_{\bar{IE}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{RO}} \cdot \vec{N}_{\bar{IE}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}}; \kappa_{1,1} = \frac{\lambda_{\bar{IE}} K_{\bar{R}} \vec{N}_{\bar{ER}} \cdot \vec{N}_{\bar{IE}}}{2\Omega_{\bar{R}\bar{O}\bar{E}}} \quad (3.64)$$

Impondo a continuidade dos fluxos apenas nas arestas internas e nas fronteiras de Neumann, tem-se:

$$\begin{cases} \vec{v}_{\bar{E}I} \cdot \vec{N}_{\bar{E}I} \\ \vec{v}_{\bar{I}Z} \cdot \vec{N}_{\bar{I}Z} \end{cases} = - \begin{cases} \vec{v}_{I\bar{E}} \cdot \vec{N}_{I\bar{E}} \\ \vec{v}_{Z\bar{I}} \cdot \vec{N}_{Z\bar{I}} \end{cases} \quad (3.65)$$

Substituindo, na equação acima, as Eq. (3.60), (3.61) e (3.63), com algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \end{cases} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix} \begin{cases} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{Z}} \end{cases} = \dots \\ \dots - \begin{bmatrix} 0 & C_{1,1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \end{cases} - \begin{bmatrix} D_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{Z}} \end{cases} - \begin{bmatrix} \kappa_{1,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} g_D \\ g_N \end{cases} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Reagrupando os termos e resolvendo o sistema local, analogamente à Eq. (3.52), é possível reescrever às pressões auxiliares em função das pressões nos pontos de colocação e de termos conhecidos:

$$\begin{cases} p_{\bar{E}} \\ p_{\bar{Z}} \end{cases} = - \begin{bmatrix} B_{1,1} + D_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} A_{1,1} & C_{1,1} \\ A_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \end{cases} + \begin{bmatrix} \kappa_{1,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} g_D \\ g_N \end{cases} \right) \quad (3.67)$$

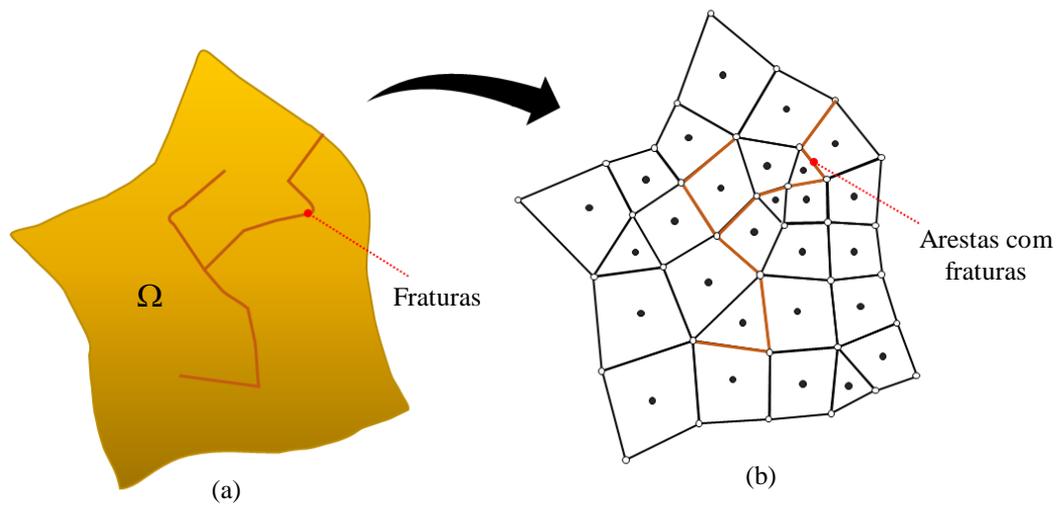
Por fim, tem-se que os fluxos nas meias arestas podem ser definidos simplesmente substituindo a Eq. (3.67) nas Eq. (3.61) e (3.63) e reagrupando os termos semelhantes.

### 3.1.2.2 Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM)

Neste trabalho, quando o MPFA-O é utilizado, adotou-se o Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM) para o tratamento das fraturas, apresentado por Ahmed, Edwards *et al.* (2015). Em tal modelo as fraturas são associadas às superfícies de controle e, de fato, modeladas com uma dimensão a menos que a matriz, ao contrário dos modelos híbridos, no qual a fratura apresenta a mesma dimensão que a matriz no domínio computacional.

No LDFM, a malha é gerada respeitando a distribuição das fraturas, de forma que coincidam com as superfícies de controle, onde são atribuídos novos graus de liberdade às superfícies de controle geradas a partir das fraturas. Isto é exemplificado na Figura 15, ao supor a discretização apresentada na Figura 6 tenha ocorrido a partir de um reservatório naturalmente fraturado:

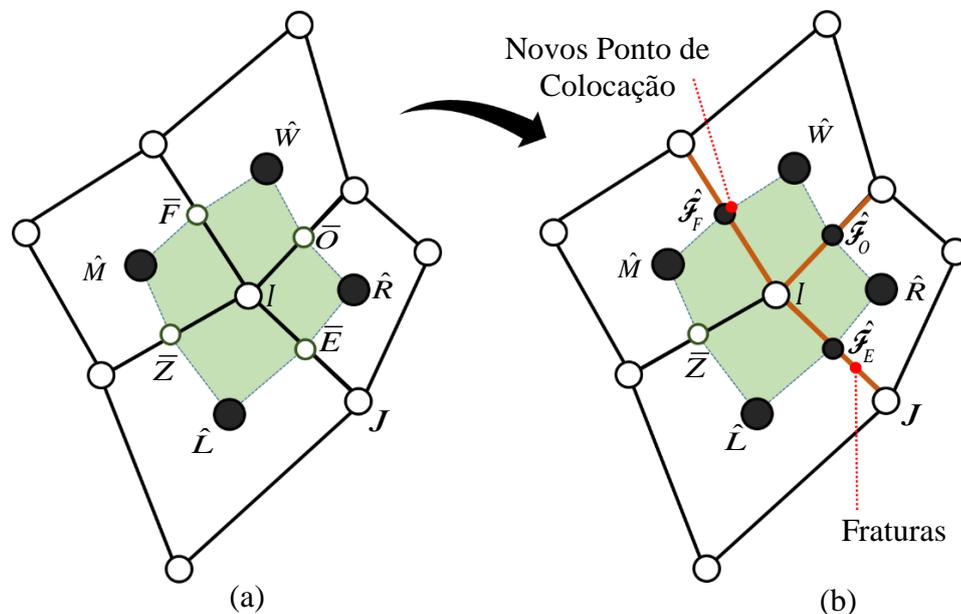
Figura 15 – Representação computacional de um reservatório naturalmente fraturado em 2-D: (a) Domínio fraturado ( $\Omega$ ); (b) Domínio discretizado com as arestas coincidindo com as fraturas.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Utilizando a mesma representação da Figura 11 (a), mas considerando que as superfícies de controle que contém os pontos auxiliares  $\bar{E}$ ,  $\bar{O}$  e  $\bar{F}$  tenham sido geradas a partir de fraturas, onde esses pontos auxiliares correspondem aos novos pontos de colocação do problema, identificados agora por  $\hat{\mathcal{F}}_E$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_O$  e  $\hat{\mathcal{F}}_F$ , respectivamente, conforme apresentado na Figura 16.

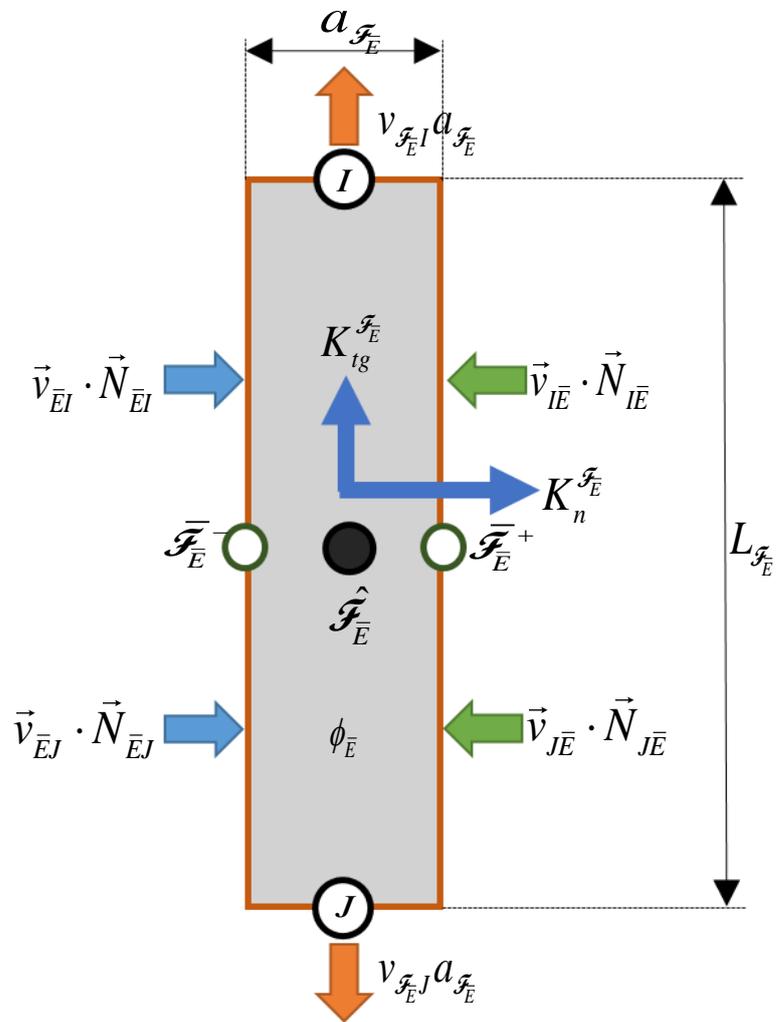
Figura 16 – Fragmento de malha com região de iteração: (a) sem fraturas; (b) com fraturas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 17 demonstra as propriedades específicas das fraturas, utilizando como exemplo a fratura  $\mathcal{F}_E$ , ao realizar uma ampliação na aresta  $IJ$ .

Figura 17 – Ampliação da fratura  $\mathcal{F}_E$  e suas propriedades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Alguma das propriedades exibidas na Figura 17 foram discutidas na Seção 2.1.6, entretanto, a permeabilidade tangencial ( $K_{tg}^{\mathcal{F}_E}$ ), no caso 2-D, pode ser definida por um escalar, devido à fratura ser unidimensional.

Apesar de a abertura ( $a_{\mathcal{F}_E}$ ) ser considerada apenas uma propriedade, não sendo tratada explicitamente no domínio discreto, é assumida a possibilidade de existência de uma descontinuidade na pressão, dando origem a dois pontos auxiliares para cada fratura:  $\mathcal{F}_E^-$ , utilizado para

a definição do gradiente no volume à esquerda e,  $\vec{\mathcal{F}}_E^+$ , para o gradiente à direita, que são detalhados ao final desta seção.

Observa-se ainda que, apesar de unidimensional, a fratura é tratada como um volume de controle com a presença dos fluxos  $\vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI}$  e  $\vec{v}_{EJ} \cdot \vec{N}_{EJ}$  provenientes da contribuição dos volumes à esquerda da fratura nas meias arestas, e os fluxos  $\vec{v}_{IE} \cdot \vec{N}_{IE}$  e  $\vec{v}_{JE} \cdot \vec{N}_{JE}$  dos volume à direita, Considera-se, também, os fluxos de  $\hat{\mathcal{F}}_E$  para  $I$  e de  $\hat{\mathcal{F}}_E$  para  $J$ , também chamados de fluxos nas fraturas, definidos, respectivamente, como  $v_{\mathcal{F}_E I} a_{\mathcal{F}_E}$  e  $v_{\mathcal{F}_E J} a_{\mathcal{F}_E}$ . Com isso, a equação da pressão para um volume de controle qualquer, apresentada na Eq. (3.7), pode ser definida para a fratura  $\mathcal{F}_E$ , como:

$$v_{\mathcal{F}_E I} a_{\mathcal{F}_E} + v_{\mathcal{F}_E J} a_{\mathcal{F}_E} - \vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI} - \vec{v}_{EJ} \cdot \vec{N}_{EJ} - \vec{v}_{IE} \cdot \vec{N}_{IE} - \vec{v}_{JE} \cdot \vec{N}_{JE} = \bar{Q}_{\mathcal{F}_E} \Omega_{\mathcal{F}_E} \quad (3.68)$$

onde o sinal negativo dos fluxos da matriz é devido a orientação contrária à definida no Teorema de Divergência de Gauss, que é para fora da superfície de controle.

Agrupando-se os termos da Eq. (3.68) de acordo com o que foi apresentado na Eq. (2.27), tem-se:

$$\vec{\nabla}_{ig} \cdot \vec{v}_{ig}^{\mathcal{F}_E} \cong v_{\mathcal{F}_E I} a_{\mathcal{F}_E} + v_{\mathcal{F}_E J} a_{\mathcal{F}_E} \quad (3.69)$$

$$Q_n^{\mathcal{F}_E} \cong -\vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI} - \vec{v}_{EJ} \cdot \vec{N}_{EJ} - \vec{v}_{IE} \cdot \vec{N}_{IE} - \vec{v}_{JE} \cdot \vec{N}_{JE} \quad (3.70)$$

$$Q_T^{\mathcal{F}_E} \cong \bar{Q}_{\mathcal{F}_E} \Omega_{\mathcal{F}_E} \quad (3.71)$$

Em vista disso, o balanço de massa para uma fratura qualquer, pode ser definido como:

$$\sum_{i=1}^2 \left\{ v_{\mathcal{F}_E i} a_{\mathcal{F}_E} \right\} + Q_n^{\mathcal{F}_E} = Q_T^{\mathcal{F}_E} \quad (3.72)$$

onde  $Q_T^{\mathcal{F}_E}$  é o produto do termo fonte médio pelo volume da fratura,  $Q_n^{\mathcal{F}_E}$  é a função de transferência matriz-fratura, obtida pelo negativo do somatório dos fluxos nas arestas fraturadas.

Para uma região de interação qualquer, a função de transferência para todas as fraturas envolvidas, pode ser representada na forma matricial, como:

$$Q_n^{\mathcal{F}} = -\vec{v}_{Esq}^{\mathcal{F}} - \vec{v}_{Dir}^{\mathcal{F}} \quad (3.73)$$

onde o índice ( $\mathcal{F}$ ) sobrescrito nas velocidades, indica que apenas os fluxos nas arestas fraturadas são considerados (ver Seções 3.1.2.2.1 e 3.1.2.2.2 com as modificações nestes fluxos para o modelo LDFM).

Faltando definir a forma com que os fluxos na fratura-fratura são calculados, que é feito integrando-se a velocidade de Darcy ao longo da abertura, e para o domínio unidimensional, pode ser definido no segmento  $\mathcal{F}_E I$ , como :

$$v_{\mathcal{F}_E I} a_{\mathcal{F}_E} = -\lambda_I K_{t_{ig}}^{\mathcal{F}_E} \frac{\delta p}{\delta L_{\mathcal{F}}} a_{\mathcal{F}_E} \quad (3.74)$$

onde  $\delta L_{\mathcal{F}}$  representa que a derivada é calculada no sentido tangencial e  $\lambda_I$  a mobilidade no vértice  $I$ .

Aproximando a derivada por diferenças finitas avançadas ao realizar-se um truncamento de primeira ordem, numa expansão de série de Taylor, tem-se:

$$\frac{\delta p}{\delta L_{\mathcal{F}}} = \frac{p_{\bar{I}} - p_{\hat{\mathcal{F}}_E}}{\frac{L_{\mathcal{F}_E}}{2}} \quad (3.75)$$

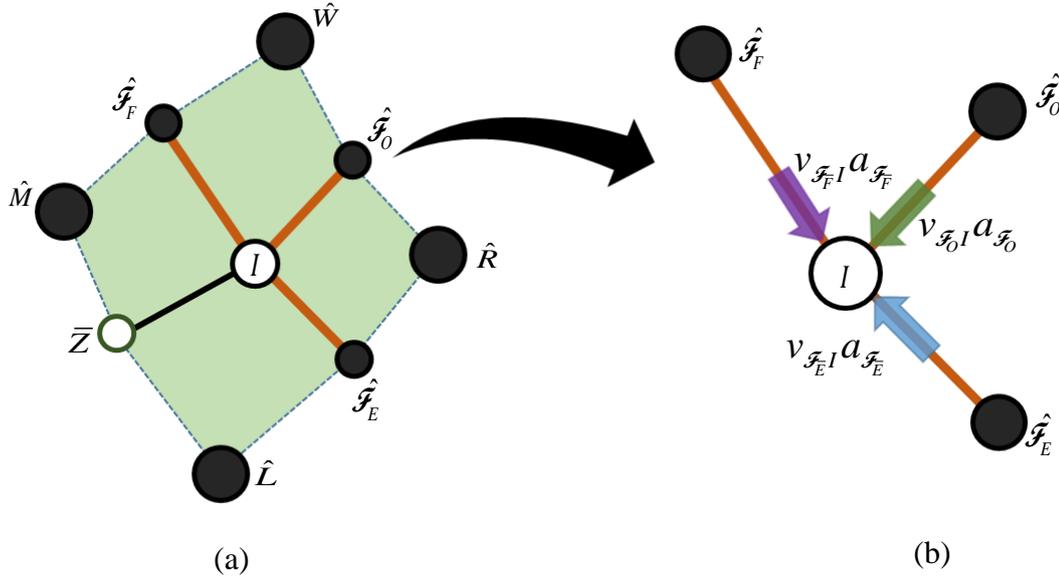
onde  $p_{\bar{I}}$  é a pressão auxiliar no vértice da fratura  $I$  e  $p_{\hat{\mathcal{F}}_E}$  a pressão na fratura.

Substituindo a Eq. (3.75) na (3.74), chega-se:

$$v_{\mathcal{F}_E I} a_{\mathcal{F}_E} = \frac{2\lambda_I K_{t_{ig}}^{\mathcal{F}_E} a_{\mathcal{F}_E}}{L_{\mathcal{F}_E}} (p_{\hat{\mathcal{F}}_E} - p_{\bar{I}}) \quad (3.76)$$

Para eliminar a dependência da pressão no ponto auxiliar, é utilizada a região de iteração destacada na Figura 16 para o vértice  $I$ , mas considerando apenas as fraturas, conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Região de interação com fraturas: (a) Completa; (b) Destaque nas fraturas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Todos os fluxos, apresentados na Figura 18 (b), são escritos em sua forma matricial, utilizando a Eq. (3.76) como referência:

$$\begin{Bmatrix} v_{\hat{\mathcal{F}}_E I} a_{\hat{\mathcal{F}}_E} \\ v_{\hat{\mathcal{F}}_O I} a_{\hat{\mathcal{F}}_O} \\ v_{\hat{\mathcal{F}}_F I} a_{\hat{\mathcal{F}}_F} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{\mathcal{F}} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2}^{\mathcal{F}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3}^{\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{\mathcal{F}}_E} \\ p_{\hat{\mathcal{F}}_O} \\ p_{\hat{\mathcal{F}}_F} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1^{\mathcal{F}} \\ B_2^{\mathcal{F}} \\ B_3^{\mathcal{F}} \end{bmatrix} \{ p_{\bar{I}} \} \quad (3.77)$$

onde os coeficientes  $A_{i,j}^{\mathcal{F}}$  e  $B_i^{\mathcal{F}}$  são parâmetros físicos e geométricos, referentes aos pontos de colocação das fraturas e aos pontos auxiliares no vértice, respectivamente, estando detalhados a seguir:

$$A_{1,1}^{\mathcal{F}} = B_1^{\mathcal{F}} = \frac{2\lambda_l K_{lg}^{\hat{\mathcal{F}}_E} a_{\hat{\mathcal{F}}_E}}{L_{\hat{\mathcal{F}}_E}}; A_{2,2}^{\mathcal{F}} = B_2^{\mathcal{F}} = \frac{2\lambda_l K_{lg}^{\hat{\mathcal{F}}_O} a_{\hat{\mathcal{F}}_O}}{L_{\hat{\mathcal{F}}_O}}; A_{3,3}^{\mathcal{F}} = B_3^{\mathcal{F}} = \frac{2\lambda_l K_{lg}^{\hat{\mathcal{F}}_F} a_{\hat{\mathcal{F}}_F}}{L_{\hat{\mathcal{F}}_F}} \quad (3.78)$$

A Equação Eq. (3.77) pode ser escrita em sua forma compacta genérica, conforme mostrado na Eq. (3.79)

$$\vec{v}_{\mathcal{F}} = \underline{A}_{\mathcal{F}} \hat{p}_{\mathcal{F}} - \vec{B}_{\mathcal{F}} \bar{p}_V \quad (3.79)$$

onde  $\vec{v}_{\mathcal{F}}$  é o vetor dos fluxos das fraturas para o vértice;  $\hat{p}_{\mathcal{F}}$  o vetor de pressões nos pontos de colocação das fraturas,  $\bar{p}_V$  a pressão no vértice;  $\underline{A}_{\mathcal{F}}$  a matriz diagonal quadrada, com dimensão igual ao número de fraturas da região de interação e contendo os coeficientes das pressões nos

pontos de colocação;  $\vec{B}_{\mathcal{F}}$  o vetor de coeficientes das pressões nos pontos auxiliares com dimensão igual ao número de fraturas na região de iteração.

Ao impor a conservação de massa, tem-se, num vértice qualquer, que o somatório dos fluxos que chegam a um vértice deve ser igual a zero, de forma análoga à Lei de *Kirchhoff* para correntes elétricas (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015), i.e.:

$$\sum_{i=1}^{n_f} \{\vec{v}_{\mathcal{F}}\}_i = 0 \quad (3.80)$$

onde  $n_f$  é o número de fraturas em torno do vértice avaliado.

Utilizando na Eq. (3.80) os fluxos definidos na Eq. (3.77), tem-se:

$$\sum_{i=1}^3 \{\vec{v}_{\mathcal{F}}\}_i = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{\mathcal{F}} & A_{2,2}^{\mathcal{F}} & A_{3,3}^{\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\hat{\mathcal{F}}_E} \\ p_{\hat{\mathcal{F}}_O} \\ p_{\hat{\mathcal{F}}_F} \end{Bmatrix} - [B_1^{\mathcal{F}} + B_2^{\mathcal{F}} + B_3^{\mathcal{F}}] \{p_{\bar{V}}\} = 0 \quad (3.81)$$

ou na forma compacta:

$$\underline{A}'_{\mathcal{F}} \hat{p}_{\mathcal{F}} - B'_{\mathcal{F}} \bar{p}_V = 0 \quad (3.82)$$

onde o apóstrofo representa a matriz e vetor de coeficientes modificados, conforme a Eq. (3.81).

$\underline{A}'_{\mathcal{F}}$  e  $B'_{\mathcal{F}}$  são construídas somando-se coluna por coluna das matrizes  $\underline{A}_{\mathcal{F}}$  e  $\vec{B}_{\mathcal{F}}$ , respectivamente, onde  $\underline{A}'_{\mathcal{F}}$  terá uma linha e  $n_f$  colunas, e  $B'_{\mathcal{F}}$  apenas um elemento, com  $n_f$  representando o número de fraturas que chegam ao vértice em questão.

Resolvendo a Eq. (3.82) para  $\bar{p}_V$ , tem-se que:

$$\bar{p}_V = (B'_{\mathcal{F}})^{-1} \underline{A}'_{\mathcal{F}} \hat{p}_{\mathcal{F}} \quad (3.83)$$

Substituindo a Eq. (3.83) na Eq. (3.79), têm-se os fluxos nas fraturas definidos em função das pressões nos pontos de colocação:

$$\vec{v}_{\mathcal{F}} = \left( \underline{A}_{\mathcal{F}} - \vec{B}_{\mathcal{F}} (B'_{\mathcal{F}})^{-1} \underline{A}'_{\mathcal{F}} \right) \hat{p}_{\mathcal{F}} \quad (3.84)$$

Os termos entre parênteses da equação acima são compostos pelos parâmetros físicos e geométricos da região de interação e, com isso, podem ser interpretados como matrizes de transmissibilidade fratura-fratura, conforme descrito a seguir:

$$\underline{T}_{\mathcal{F}} = \left( \underline{A}_{\mathcal{F}} - \underline{B}_{\mathcal{F}} (\underline{B}'_{\mathcal{F}})^{-1} \underline{A}'_{\mathcal{F}} \right) \quad (3.85)$$

Por fim, os fluxos fratura-fratura de cada região de interação podem ser definidos, simplificadaamente, como:

$$\vec{v}_{\mathcal{F}} = \underline{T}_{\mathcal{F}} \hat{p}_{\mathcal{F}} \quad (3.86)$$

Observa-se que, devido à componente tangencial de fluxo nas fraturas, não é mais plausível impor nas arestas fraturadas a Eq. (3.49), de continuidade dos fluxos à esquerda e à direita, pois nestes casos a igualdade não é necessariamente válida.

No LDFM, se torna admissível a descontinuidade da pressão na aresta fraturada ao longo do sentido normal, conforme concepção dos pontos auxiliares:  $\mathcal{F}_E^-$  e  $\mathcal{F}_E^+$ .

Com a presença da fratura, e assumindo a descontinuidade da pressão na respectiva aresta, o gradiente  $\vec{\nabla} p_{\hat{L}\hat{E}\hat{Z}}$ , à esquerda da meia aresta  $\bar{EI}$ , da Eq. (3.40), é redefinido, em função de  $\mathcal{F}_E^-$ , como:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}\hat{E}\hat{Z}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{L}\hat{E}\hat{Z}}} \left( p_{\hat{L}} \vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}_E^-} + p_{\hat{\mathcal{F}}_E^-} \vec{N}_{\hat{Z}\hat{L}} + p_{\hat{Z}} \vec{N}_{\hat{L}\hat{\mathcal{F}}_E^-} \right) \quad (3.87)$$

Enquanto o gradiente à direita da meia aresta  $\bar{EI}$  ( $\vec{\nabla} p_{\hat{R}\hat{O}\hat{E}}$ ), é definido como:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{R}\hat{O}\hat{E}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{R}\hat{O}\hat{E}}} \left( p_{\hat{R}} \vec{N}_{\hat{O}\hat{\mathcal{F}}_E^+} + p_{\hat{O}} \vec{N}_{\hat{\mathcal{F}}_E^+ \hat{R}} + p_{\hat{\mathcal{F}}_E^+} \vec{N}_{\hat{R}\hat{O}} \right) \quad (3.88)$$

Com as modificações nos gradientes, os fluxos definidos na Seção 3.1.2 devem ser atualizados e, para isso, existem duas variações do LDFM (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015):

1. Modelo de pressão contínua: admite a continuidade da pressão no sentido normal à fratura, detalhado na Seção 3.1.2.2.1, a seguir;
2. Modelo de pressão descontínua: assume a descontinuidade no campo de pressões através da fratura, apresentado na Seção 3.1.2.2.2, a seguir.

### 3.1.2.2.1 Modelo de pressão contínua

O princípio do modelo de pressão contínua é que a variação da pressão, ao longo do sentido normal à fratura, pode ser desprezada no caso de alta permeabilidade normal e aberturas pequenas (AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015), o que equivale a fazer:

$$P_{\hat{\mathcal{F}}_E^-} = P_{\hat{\mathcal{F}}_E} = P_{\hat{\mathcal{F}}_E^+} \quad (3.89)$$

Resultando em apenas uma pressão desconhecida ao longo da abertura de cada fratura,  $p_{\hat{\mathcal{F}}_E}$ , e limitando a modificação nos fluxos da matriz a uma alteração meramente conceitual, onde as pressões nas fraturas, que antes eram pontos auxiliares, se tornam pontos de colocação. Referentes à Figura 18 (a), tem-se:

$$P_{\bar{E}} = P_{\hat{\mathcal{F}}_E} \quad (3.90)$$

$$P_{\bar{O}} = P_{\hat{\mathcal{F}}_O} \quad (3.91)$$

$$P_{\bar{F}} = P_{\hat{\mathcal{F}}_F} \quad (3.92)$$

E, assim, seus coeficientes passam a compor a matriz dos pontos de colocação. Então, a Eq. (3.43), cujos coeficientes são definidos pela Eq. (3.44), é modificada para:

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}_{EI} \cdot \vec{N}_{EI} \\ \vec{v}_{OI} \cdot \vec{N}_{OI} \\ \vec{v}_{FI} \cdot \vec{N}_{FI} \\ \vec{v}_{ZI} \cdot \vec{N}_{ZI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 & B_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 & B_{2,1} & B_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 & 0 & B_{3,2} & B_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & 0 & 0 & B_{4,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\hat{L}} \\ P_{\hat{R}} \\ P_{\hat{W}} \\ P_{\hat{M}} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_E} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_O} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_F} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,4} \\ 0 \\ 0 \\ B_{4,4} \end{bmatrix} \{P_{\bar{Z}}\} \quad (3.93)$$

Observa-se que a alteração consiste, simplesmente, em transladar as colunas, correspondentes aos pontos de colocação, da matriz  $\underline{B}$  para a matriz  $\underline{A}$ , assim como as pressões nas fraturas do vetor  $\bar{p}$  para o vetor  $\hat{p}$ .

Fazendo o procedimento análogo para a Eq. (3.45), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}_{IE} \cdot \vec{N}_{IE} \\ \vec{v}_{IO} \cdot \vec{N}_{IO} \\ \vec{v}_{IF} \cdot \vec{N}_{IF} \\ \vec{v}_{IZ} \cdot \vec{N}_{IZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{1,2} & 0 & 0 & D_{1,1} & D_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2,3} & 0 & 0 & D_{2,2} & D_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & C_{3,4} & 0 & 0 & D_{3,3} \\ C_{4,1} & 0 & 0 & 0 & D_{4,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\hat{L}} \\ P_{\hat{R}} \\ P_{\hat{W}} \\ P_{\hat{M}} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_E} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_O} \\ P_{\hat{\mathcal{F}}_F} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{3,4} \\ D_{4,4} \end{bmatrix} \{P_{\bar{Z}}\} \quad (3.94)$$

onde os coeficientes são os definidos pela Eq. (3.46).

Ambos os sistemas de equações podem ser reescritos em sua forma compacta, como:

$$\vec{v}_{Esq} = \underline{A}_c \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} + \underline{B}_c \bar{p} \quad (3.95)$$

$$\vec{v}_{Dir} = \underline{C}_c \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} + \underline{D}_c \bar{p} \quad (3.96)$$

onde,  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}_{\mathcal{F}}$  e  $\bar{p}$  são as pressões na matriz, nas interfaces fraturadas e nas interfaces da matriz, respectivamente. As matrizes são indicadas com um subscrito  $c$  para diferenciar das matrizes típicas do MPFA-O, sendo seus coeficientes dependentes dos mesmos parâmetros físicos e geométricos. Observa-se que  $\underline{A}_c$  e  $\underline{C}_c$  têm o número de colunas incrementado pelo número de fraturas na região de iteração, tendo-se, conseqüentemente, a redução do mesmo número de colunas em  $\underline{B}_c$  e  $\underline{D}_c$ .

Novamente, as pressões auxiliares podem ser escritas em função das pressões nos pontos de colocação quando é imposta a continuidade dos fluxos, apenas nas arestas sem fraturas. Isto é realizado desconsiderando as linhas correspondentes aos fluxos nas arestas fraturadas, gerando matrizes modificadas representadas pelo apóstrofo sobrescrito:

$$\vec{v}'_{Esq} = -\vec{v}'_{Dir} \quad (3.97)$$

Realizando a imposição da Eq. (3.97) e isolando o vetor de pressões auxiliares, na forma expandida, tem-se:

$$\{ p_{\bar{z}} \} = - \left[ \underline{B}_{4,4} + \underline{D}_{4,4} \right]^{-1} \left[ \underline{C}_{4,1} \quad 0 \quad 0 \quad \underline{A}_{4,4} \quad \underline{D}_{4,1} \quad 0 \quad \underline{B}_{4,3} \right] \begin{Bmatrix} p_{\hat{L}} \\ p_{\hat{R}} \\ p_{\hat{W}} \\ p_{\hat{M}} \\ p_{\hat{\mathcal{E}}} \\ p_{\hat{\mathcal{O}}} \\ p_{\hat{\mathcal{F}}} \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

Observa-se que, neste caso, foram mantidos apenas os coeficientes da linha quatro ( $i = 4$ ), que corresponde à aresta sem fratura.

Reescrevendo à Eq. (3.98) em sua forma compacta, onde o apóstrofo indica que foram consideradas apenas as linhas que representam as arestas sem fraturas, tem-se:

$$\bar{p} = -(\underline{B}'_c + \underline{D}'_c)^{-1} (\underline{A}'_c + \underline{C}'_c) \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.99)$$

Vale observar que das matrizes quadradas  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$  foram removidas o mesmo número de colunas e linhas, iguais ao número de fraturas na região de iteração, para dar origem a  $\underline{B}'$  e  $\underline{D}'$  que, por sua vez, também são quadradas.

Substituindo nas Eq. (3.95) e (3.96) a Eq. (3.99), e agrupando os termos semelhantes, tem-se as vazões definidas para as meias arestas utilizando o modelo de pressão contínua:

$$\vec{V}_{Esq} = \left[ \underline{A}_c - \underline{B}_c (\underline{B}' + \underline{D}')^{-1} (\underline{A}' + \underline{C}') \right] \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.100)$$

$$\vec{V}_{Dir} = \left[ \underline{C}_c - \underline{D}_c (\underline{B}' + \underline{D}')^{-1} (\underline{A}' + \underline{C}') \right] \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.101)$$

A Equação (3.100) é reescrita adicionando as dimensões das matrizes, com o objetivo de mostrar que a coerência das operações propostas foi mantida após as modificações descritas neste tópico:

$$\vec{V}_{Esq}^{n_a \times 1} = \left[ \underline{A}_c^{n_a \times (n_m + n_{\mathcal{F}})} - \underline{B}_c^{n_a \times (n_a - n_{\mathcal{F}})} \left( \underline{B}'^{(n_a - n_{\mathcal{F}}) \times (n_a - n_{\mathcal{F}})} + \underline{D}'^{(n_a - n_{\mathcal{F}}) \times (n_a - n_{\mathcal{F}})} \right)^{-1} \dots \right. \\ \left. \dots \left( \underline{A}'^{(n_a - n_{\mathcal{F}}) \times (n_m + n_{\mathcal{F}})} + \underline{C}'^{(n_a - n_{\mathcal{F}}) \times (n_m + n_{\mathcal{F}})} \right) \right] \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \}^{(n_m + n_{\mathcal{F}}) \times 1} \quad (3.102)$$

sendo  $n_a$  o número total de arestas (incluindo as fraturadas),  $n_m$  o número de volumes de controle na matriz e  $n_{\mathcal{F}}$  o número de fraturas.

Recordando as regras dos produtos de matrizes, pode-se observar que as Eq. (3.100) e (3.101), mesmo com a alteração, pela presença de fraturas, das matrizes envolvidas, mantêm a coerência das dimensões entre estas matrizes necessária para a realização da operação matricial, esta validade é estendida para qualquer que seja a região de interação.

Os termos entre os colchetes de ambas equações, Eq. (3.100) e (3.101), podem ser descritos como matrizes de transmissibilidade para o modelo de pressão contínua, como:

$$\underline{T}_{Esq}^c = \underline{A}_c - \underline{B}_c (\underline{B}' + \underline{D}')^{-1} (\underline{A}' + \underline{C}') \quad (3.103)$$

$$\underline{T}_{Dir}^c = \underline{C}_c - \underline{D}_c (\underline{B}' + \underline{D}')^{-1} (\underline{A}' + \underline{C}') \quad (3.104)$$

Por fim, os fluxos nas meias arestas, de cada região de interação, podem ser definidos, simplificadamente, para o LDFM utilizando o modelo de pressão contínua, como:

$$\vec{V}_{Esq} = \underline{T}_{Esq}^c \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.105)$$

$$\vec{V}_{Dir} = \underline{T}_{Dir}^c \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.106)$$

### 3.1.2.2.2 Modelo de pressão descontínua

No modelo de pressão descontínua, é assumida uma variação de pressão ao longo do sentido normal à fratura, com isso, ocorre uma expansão no número de pressões auxiliares, decorrente do fato dos gradientes, à esquerda e à direita da cada fratura, serem calculados com base na pressão à esquerda ( $p_{\bar{x}^-}$ ) e à direita ( $p_{\bar{x}^+}$ ) da mesma, respectivamente, conforme apresentado nas Eqs. (3.87) e (3.88). Por esse motivo, o vetor de pressões auxiliares, definido para a Figura 18 (a), por exemplo, é modificando conforme a Eq. (3.107):

$$\{p_{\bar{E}} \quad p_{\bar{O}} \quad p_{\bar{F}} \quad p_{\bar{Z}}\}^T \Rightarrow \{p_{\bar{Z}} \quad p_{\bar{x}_E^-} \quad p_{\bar{x}_E^+} \quad p_{\bar{x}_O^-} \quad p_{\bar{x}_O^+} \quad p_{\bar{x}_F^-} \quad p_{\bar{x}_F^+}\}^T \quad (3.107)$$

onde, por uma questão meramente estrutural, as pressões nos pontos auxiliares sem fratura são posicionadas no início do vetor.

Novamente os fluxos são escritos na forma de um sistema de equações, de forma análoga à Eq. (3.43), mas considerando os novos pontos auxiliares. Os índices dos coeficientes referentes à Eq. (3.43) foram mantidos para evidenciar as modificações efetuadas utilizando o modelo de pressão descontínua, a fórmula de cálculo destes coeficientes é a mesma apresentada na Eq. (3.44). Tem-se definido o sistema, como:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\bar{E}I} \cdot \vec{N}_{\bar{E}I} \\ \vec{v}_{\bar{O}I} \cdot \vec{N}_{\bar{O}I} \\ \vec{v}_{\bar{F}I} \cdot \vec{N}_{\bar{F}I} \\ \vec{v}_{\bar{Z}I} \cdot \vec{N}_{\bar{Z}I} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{L}} \\ p_{\bar{R}} \\ p_{\bar{W}} \\ p_{\bar{M}} \end{array} \right\} \dots \\ &\dots + \begin{bmatrix} B_{1,4} & B_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,1} & B_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{3,2} & B_{3,3} & 0 \\ B_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4,3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{Z}} \\ p_{\bar{x}_E^-} \\ p_{\bar{x}_E^+} \\ p_{\bar{x}_O^-} \\ p_{\bar{x}_O^+} \\ p_{\bar{x}_F^-} \\ p_{\bar{x}_F^+} \end{array} \right\} \quad (3.108) \end{aligned}$$

onde os coeficientes são os definidos na Eq. (3.44).

No modelo descontínuo, observa-se que as únicas modificações ocorreram na matriz  $\underline{B}$ . A primeira modificação consiste em transladar as colunas referentes aos pontos auxiliares sem fratura para o início da matriz, respeitando assim, a ordem imposta no vetor de pressões. O

segundo passo corresponde a transladar apenas os coeficientes referentes às pressões à direita da fratura ( $p_{\bar{\mathcal{F}}^+}$ ), neste caso  $B_{2,1}$ ,  $B_{3,2}$ , e  $B_{4,3}$ , para uma nova coluna criada imediatamente à direita de sua posição anterior, e mantendo-o na mesma linha.

Realizando uma modificação análoga na Eq. (3.45), mas transladando os coeficientes  $D_{1,1}$ ,  $D_{2,2}$  e  $D_{3,3}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{I\bar{E}} \cdot \vec{N}_{I\bar{E}} \\ \vec{v}_{I\bar{O}} \cdot \vec{N}_{I\bar{O}} \\ \vec{v}_{I\bar{F}} \cdot \vec{N}_{I\bar{F}} \\ \vec{v}_{I\bar{Z}} \cdot \vec{N}_{I\bar{Z}} \end{array} \right\} &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & C_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{3,4} \\ C_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{L}} \\ p_{\bar{R}} \\ p_{\bar{W}} \\ p_{\bar{M}} \end{array} \right\} \dots \\ &\dots + \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & D_{1,1} & D_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2,2} & D_{2,3} & 0 \\ D_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3,3} \\ D_{4,4} & D_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{Z}} \\ p_{\bar{\mathcal{E}}^-} \\ p_{\bar{\mathcal{E}}^+} \\ p_{\bar{\mathcal{O}}^-} \\ p_{\bar{\mathcal{O}}^+} \\ p_{\bar{\mathcal{F}}^-} \\ p_{\bar{\mathcal{F}}^+} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde os coeficientes são os definidos na Eq. (3.46).

Ambos os sistemas de equações podem ser reescritos em sua forma compacta, como:

$$\vec{v}_{Esq} = \underline{A} \hat{p} + \underline{B}_d \{ \bar{p}; \bar{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.110)$$

$$\vec{v}_{Dir} = \underline{C} \hat{p} + \underline{D}_d \{ \bar{p}; \bar{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.111)$$

onde,  $\bar{p}_{\mathcal{F}}$  são as pressões auxiliares nas interfaces fraturadas. As matrizes são indicadas com um subscrito  $d$ , para indicar as alterações decorrentes do modelo descontínuo, onde  $\underline{C}$  e  $\underline{A}$  não foram alteradas. Observa-se que  $\underline{B}_d$  e  $\underline{D}_d$  têm o número de colunas incrementado pelo número de fraturas na região de iteração.

Nota-se que as matrizes  $\underline{B}_d$  e  $\underline{D}_d$  deixam de ser quadradas, indicando a necessidade de equações adicionais para resolver o sistema em termos das pressões auxiliares. Essas equações foram descritas por Martin, Jaffré e Roberts (2005), que propõe eliminar as pressões auxiliares nas fraturas através da imposição de condições de Robin, para cada aresta fraturada, fazendo:

$$-\zeta v_{Esq}^{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{F}} p_{\bar{\mathcal{F}}^-} = -(1-\zeta) v_{Dir}^{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{F}} p_{\bar{\mathcal{F}}^+} \quad (3.112)$$

$$-\zeta v_{Dir}^{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}^+} = -(1-\zeta) v_{Esq}^{\mathcal{F}} + \tau_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{F}} \quad (3.113)$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro positivo, com seus valores correspondentes sintetizados na Tabela 1, segundo as hipóteses discutidas em Martin, Jaffré e Roberts (2005), enquanto  $\tau_{\mathcal{F}}$  é um valor equivalente a transmissibilidade no sentido normal à fratura, descrito na Eq. (3.114):

$$\tau_{\mathcal{F}} = 2 \frac{K_n^{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} \quad (3.114)$$

Segundo Ahmed, Edwards, *et al.* (2015),  $\zeta$  pode assumir qualquer valor positivo no intervalo  $]1/2, 1]$ , onde  $\zeta = 3/4$  corresponde a uma aproximação da pressão de segunda ordem ao longo da fratura e  $\zeta = 1$  a um esquema simples de volumes finitos e idêntico a um esquema do tipo híbrido para fraturas com permeabilidade isotrópica.

O intervalo de validade de  $\zeta$  está aberto no valor de  $1/2$ , pois, em outros trabalhos, tal valor apresentou oscilações espúrias na solução e foi considerado o limite de estabilidade do método, enquanto,  $\zeta = 2/3$  demonstrou, heurísticamente, os melhores resultados, inclusive com erros inferiores ao esquema híbrido (MARTIN, JAFFRÉ e ROBERTS, 2005; AHMED, EDWARDS, *et al.*, 2015), com isso, no presente trabalho foi adotado  $\zeta = 2/3$ .

Tabela 1 – Hipóteses e valores correspondentes de  $\zeta$ .

| Hipótese  | $\zeta$ |
|---|---------|
| • Pressão no centro da fratura é a média das pressões nas arestas   | 1/2     |
| • Fluxo no centro da fratura é a média dos fluxos nas arestas   | 3/4     |
| • Cada fluxo é definido através do gradiente calculado entre a aresta correspondente e a pressão no centro da fratura | 1       |

Fonte: Adaptado de Martin, Jaffré e Roberts (2005)

As pressões auxiliares, nas arestas sem fratura ( $\bar{p}$ ), por sua vez, são eliminadas impondo a continuidade dos fluxos, onde isso for válido, através da Eq. (3.97).

A Equação (3.97) é imposta nos fluxos das arestas sem fraturas dos sistemas definido nas Eq. (3.110) e (3.111), simultaneamente com as Eq. (3.112) e (3.113) para os fluxos nas arestas fraturadas, onde, isolando o vetor de pressões auxiliares, tem-se o mesmo definido, em sua forma compacta, como:

$$\{\bar{p}; \bar{p}_{\mathcal{F}}\} = -\left(\underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R\right)^{-1} \left( \left(\underline{A}_d^R + \underline{C}_d^R\right) \hat{p} - \underline{E}_d^R \hat{p}_{\mathcal{F}} \right) \quad (3.115)$$

onde o subscrito  $d$  em conjunto com o sobrescrito  $R$ , indica as modificações decorrentes do modelo descontínuo após a imposição da continuidade em conjunto com as condições de Robin, estando cada uma das matrizes detalhadas abaixo:

$$\underline{B}_d^R = \begin{bmatrix} -\zeta B_{1,4} & \tau_{\bar{x}_e} - \zeta B_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\bar{x}_e} - \zeta D_{1,1} & -\zeta D_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta B_{2,1} & \tau_{\bar{x}_0} - \zeta B_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{\bar{x}_0} - \zeta D_{2,2} & -\zeta D_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\zeta B_{3,2} & \tau_{\bar{x}_f} - \zeta B_{3,3} & 0 \\ -\zeta D_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{\bar{x}_f} - \zeta D_{3,3} \\ B_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4,3} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\underline{D}_d^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\zeta)D_{1,1} & (1-\zeta)D_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ (1-\zeta)B_{1,4} & (1-\zeta)B_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\zeta)D_{2,2} & (1-\zeta)D_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\zeta)B_{2,1} & (1-\zeta)B_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ (1-\zeta)D_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\zeta)D_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\zeta)B_{3,2} & (1-\zeta)B_{3,3} & 0 \\ D_{4,4} & D_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\underline{A}_d^R = \begin{bmatrix} -\zeta A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta C_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta C_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta C_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\underline{C}_d^R = \begin{bmatrix} 0 & (1-\zeta)C_{1,2} & 0 & 0 \\ (1-\zeta)A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\zeta)C_{2,3} & 0 \\ 0 & (1-\zeta)A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\zeta)C_{3,4} \\ 0 & 0 & (1-\zeta)A_{3,3} & 0 \\ C_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$\underline{E}_d^R = \begin{bmatrix} \tau_{\bar{x}_e} & 0 & 0 \\ \tau_{\bar{x}_e} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{\bar{x}_0} & 0 \\ 0 & \tau_{\bar{x}_0} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\bar{x}_f} \\ 0 & 0 & \tau_{\bar{x}_f} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Substituindo a Eq. (3.115) nas Eq. (3.110) e (3.111), e agrupando as pressões semelhantes, tem-se:

$$\vec{V}_{Esq} = \left( \underline{A} - \underline{B}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \left( \underline{A}_d^R + \underline{C}_d^R \right) \right) \hat{p} + \underline{B}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \underline{E}_d^R \hat{p}_{\mathcal{F}} \quad (3.121)$$

$$\vec{V}_{Dir} = \left( \underline{C} - \underline{D}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \left( \underline{A}_d^R + \underline{C}_d^R \right) \right) \hat{p} + \underline{D}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \underline{E}_d^R \hat{p}_{\mathcal{F}} \quad (3.122)$$

Para demonstrar que o modelo descontínuo também manteve a coerência dimensional nas operações das matrizes, a Eq. (3.121) é reescrita com as dimensões das matrizes, utilizando os mesmos coeficientes utilizados na Eq. (3.102).

$$\begin{aligned} \vec{V}_{Esq}^{n_a \times 1} = & \left( \underline{A}^{n_a \times n_m} - \underline{B}_d^{n_a \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} \left( \underline{B}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} + \underline{D}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} \right)^{-1} \dots \right. \\ & \left. \dots \left( \underline{A}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_m)} + \underline{C}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_m)} \right) \right) \hat{p}^{n_m \times 1} \dots \\ & \dots + \underline{B}_d^{n_a \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} \left( \underline{B}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} + \underline{D}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times (n_a + n_{\mathcal{F}})} \right)^{-1} \underline{E}_d^{R(n_a + n_{\mathcal{F}}) \times n_{\mathcal{F}}} \hat{p}_{\mathcal{F}}^{n_{\mathcal{F}} \times 1} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Recordando as regras dos produtos de matrizes, observa-se que a Eq. (3.121), do ponto de vista dimensional, está coerente, e que as matrizes que serão invertidas são quadradas, isso é válido para qualquer que seja a região de interação e também para a Eq. (3.122).

Seguindo a metodologia do MPFA-O, onde há um único vetor de pressões nos pontos de colocação, os coeficientes de  $\hat{p}_{\mathcal{F}}$  são concatenados à direita dos coeficientes de  $\hat{p}$ , nas Eq. (3.121) e (3.122), onde as novas matrizes de coeficientes são rescritas como matrizes de transmissibilidade do modelo descontínuo:

$$\underline{T}_{Esq}^d = \left[ \left( \underline{A} - \underline{B}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \left( \underline{A}_d^R + \underline{C}_d^R \right) \right) \quad \underline{B}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \underline{E}_d^R \right] \quad (3.124)$$

$$\underline{T}_{Dir}^c = \left[ \left( \underline{C} - \underline{D}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \left( \underline{A}_d^R + \underline{C}_d^R \right) \right) \quad \underline{D}_d \left( \underline{B}_d^R + \underline{D}_d^R \right)^{-1} \underline{E}_d^R \right] \quad (3.125)$$

Os fluxos nas meias arestas de cada região de interação podem ser definidos, simplificadaamente, para o LDFM utilizando o modelo de pressão descontínua pelas Eq. (3.126) e (3.127), cujo sistema de equações local tem uma maior complexidade de construção do que o modelo de pressão contínua.

$$\vec{V}_{Esq} = \underline{T}_{Esq}^d \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.126)$$

$$\vec{V}_{Dir} = \underline{T}_{Dir}^c \{ \hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}} \} \quad (3.127)$$

Vale demonstrar ainda a aplicação no modelo de pressão descontínua das hipóteses de alta permeabilidade normal e aberturas pequenas, descritas por Ahmed, Edwards, *et al.* (2015) para o modelo de pressão contínua, onde a Eq. (3.112) e (3.113), com as condições de Robin manipuladas algebricamente, podem ser escritas como:

$$P_{\mathcal{F}^-} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{F}}} \left( \zeta v_{Esq}^{\mathcal{F}} - (1-\zeta) v_{Dir}^{\mathcal{F}} \right) + P_{\mathcal{F}} \quad (3.128)$$

$$P_{\mathcal{F}^+} = \frac{1}{\tau_{\mathcal{F}}} \left( \zeta v_{Dir}^{\mathcal{F}} - (1-\zeta) v_{Esq}^{\mathcal{F}} \right) + P_{\mathcal{F}} \quad (3.129)$$

sendo:

$$\frac{1}{\tau_{\mathcal{F}}} = \frac{a_{\mathcal{F}}}{2K_n^{\mathcal{F}}} \quad (3.130)$$

Definindo um valor muito pequeno para a abertura, e/ou, um valor muito elevado para a permeabilidade normal, tem-se o limite da Eq. (3.130) definido como:

$$\lim_{(K_{f_i,n} \rightarrow \infty \vee a_i \rightarrow 0)} \frac{1}{\tau_{\mathcal{F}}} = 0 \quad (3.131)$$

Eliminado, neste caso, o primeiro termo do lado direito das Eq. (3.128) e (3.129), tem-se que:

$$P_{\mathcal{F}^-} = P_{\mathcal{F}} \quad (3.132)$$

$$P_{\mathcal{F}^+} = P_{\mathcal{F}} \quad (3.133)$$

E, devido a propriedade transitiva da igualdade, tem-se:

$$P_{\mathcal{F}^-} = P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}^+} \quad (3.134)$$

que consiste na imposição chave do modelo de pressão contínua, definida na Eq. (3.89), mostrando que o modelo de pressão descontínua tende ao primeiro modelo. O fato prova a legitimidade do modelo de pressão contínua no caso de válidas as hipóteses simplificadoras apresentadas.

Por fim, a função de transferência  $Q_n^{\mathcal{F}}$ , definida na Eq. (3.73), pode ser escrita em função das transmissibilidades, como:

$$Q_n^{\mathcal{F}} = -\vec{V}_{Esq}^{\mathcal{F}} - \vec{V}_{Dir}^{\mathcal{F}} = -\left(\underline{T}_{Esq}^L + \underline{T}_{Dir}^L\right)^{\mathcal{F}} \{\hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}}\} \quad (3.135)$$

recordando que o sobrescrito  $\mathcal{F}$  adverte que foram considerados apenas os fluxos nas arestas com fraturas, e sendo o índice  $L$  a indicação de uma transmissibilidade obtida pelo LDFM, seja no modelo de pressão contínua ( $c$ ) ou descontínua ( $d$ ).

### 3.1.3 Sistema global de equações

Considerando, para todos os volumes de controle do domínio, os balanços de massa definidos pela Eq. (3.7), para os volumes na matriz, e pela Eq. (3.72), para os volumes nas fraturas, assim como a função de transferência definida na Eq. (3.135), pode-se definir um sistema algébrico global, como:

$$\begin{bmatrix} \underline{T}_{mm} & \underline{T}_{m\mathcal{F}} \\ \underline{T}_{Tm} & \underline{T}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} + \underline{T}_{T\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\hat{p}\} \\ \{\hat{p}_{\mathcal{F}}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{Q}_{\hat{v}}\Omega_{\hat{v}}\} \\ \{\bar{Q}_{\mathcal{F}_E}\Omega_{\mathcal{F}_E}\} \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

onde qual  $\underline{T}_{mm}$  representa as transmissibilidades para os fluxos de matriz para matriz,  $\underline{T}_{m\mathcal{F}}$  acopla a dependência das pressões nas fraturas à matriz,  $\underline{T}_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$  a transmissibilidade para os fluxos fratura-fratura na dimensão reduzida,  $\underline{T}_{Tm}$  e  $\underline{T}_{T\mathcal{F}}$  são os coeficientes das funções de transferência, onde  $\underline{T}_{Tm}$  acopla as pressões da matriz à fratura;  $\{\hat{p}\}$  e  $\{\bar{Q}_{\hat{v}}\Omega_{\hat{v}}\}$  são, respectivamente, vetores com todas as pressões e termos fonte/sumidouro na matriz; e o mesmo para  $\{\hat{p}_{\mathcal{F}}\}$  e  $\{\bar{Q}_{\mathcal{F}_E}\Omega_{\mathcal{F}_E}\}$  nas fraturas.

A Equação (3.136), pode ser reescrita de forma simplificada, como:

$$\underline{T}_{G\mathcal{F}} \hat{p}_{G\mathcal{F}} = u_{G\mathcal{F}} \quad (3.137)$$

onde  $\underline{T}_{G\mathcal{F}}$  é a matriz de transmissibilidade global com dimensões igual ao número de volumes de controle da matriz mais número de aresta fraturas;  $\hat{p}_{G\mathcal{F}}$  é o campo de pressões em todos os centroides da matriz e nos pontos médio das arestas fraturadas e  $u_{G\mathcal{F}}$  o vetor de carregamento global do sistema, através dos poços injetores e produtores, bem como as condições de contorno.

Utilizando os fluxos definidos na meia aresta  $\bar{EI}$ , da Figura 16 (a), como exemplo para um passo do algoritmo de montagem da matriz  $T_{G\mathcal{F}}$ , onde essa montagem ocorre a partir de um laço computacional de arestas (ver observação ao final desta seção), tem-se que:

1. Os elementos da linha da matriz  $T_{\sim Esq}^L$ , referente ao fluxo  $\vec{v}_{\bar{EI}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}}$ , são distribuídos na linha de  $T_{G\mathcal{F}}$  que corresponde ao volume de controle  $\hat{L}$ ;
2. Os elementos da linha de  $T_{\sim Dir}^L$  referente ao fluxo  $\vec{v}_{i\bar{E}} \cdot \vec{N}_{i\bar{E}}$ , são distribuídos na linha de  $T_{G\mathcal{F}}$  referente ao elemento  $\hat{R}$ ;
3. Esses mesmos elementos, mas com sinal contrário, são distribuídos na linha se  $T_{G\mathcal{F}}$  que se refere à fratura  $\hat{\mathcal{F}}_E$ , devido a função de transferência  $Q_n^{\mathcal{F}}$ ;
4. Na linha  $T_{G\mathcal{F}}$  referente à fratura  $\hat{\mathcal{F}}_E$ , também são distribuídos nos elementos da matriz  $T_{\sim \mathcal{F}}$  referentes ao fluxo fratura-fratura  $v_{\hat{\mathcal{F}}_E} a_{\hat{\mathcal{F}}_E}$ ;
5. Quanto às colunas que recebem as distribuições acima, são as referentes às pressões nos volumes de controle  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{W}$ ,  $\hat{M}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_E$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_O$  e  $\hat{\mathcal{F}}_F$ , para os itens 1 a 3, e apenas  $\hat{\mathcal{F}}_E$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_O$  e  $\hat{\mathcal{F}}_F$ , para o item 4.
6. Repete-se o procedimento, para as demais meias arestas do domínio, de forma acumulativa aos elementos já adicionados à matriz  $T_{G\mathcal{F}}$ .

Vale observar que o algoritmo foi descrito para uma meia aresta com o objetivo de simplificar sua descrição, pois, a metodologia MPFA-O é descrita com base nessas meias arestas, permitindo, assim, a consulta no presente texto das matrizes aqui descritas. Entretanto, o armazenamento destes fluxos, e a posterior montagem da matriz global, acontece por aresta, somando-se os fluxos definidos em cada meia aresta.

### 3.2 EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO

Existem três métodos frequentemente utilizados para a solução do fluxo multifásico em reservatórios de petróleo:

1. O método de solução simultânea (SS), ou totalmente implícito, é considerado o mais poderoso na solução deste problema, onde os campos de pressão e de saturação são calculados de forma implícita e resolvidos simultaneamente. Neste método o passo de tempo não é limitado por questões de estabilidade, mas em

função da precisão da solução, entretanto, é um método de alto custo computacional por passo de tempo, devido ao elevado número de equações que devem ser resolvidas de forma simultânea (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001);

2. O método segregado IMPES, que consiste em desacoplar às equações de pressão e saturação, resolvendo a primeira de maneira implícita e a segunda explicitamente, com isso, tem-se imposta uma condição de estabilidade para o passo de tempo, onde para casos menos complexos, em que a restrição não seja elevada, o método IMPES apresenta um custo computacional inferior ao SS (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001);
3. O método SEQ, sequencial implícito, busca melhorar a estabilidade do método IMPES ao resolver as equações segregadas, mas sem resultar em um elevado custo computacional, para isso, ambas equações, pressão e saturação, são resolvidas de maneira segregada e implícita, resultando numa estabilidade e custo computacional intermediários entre a formulação IMPES e SS. A vantagem deste método em relação ao SS, é que o custo computacional para a solução de dois sistemas com  $N$  equações, é, em geral, muito inferior que a solução de um único sistema com  $2N$  equações (ERTEKIN, ABOU-KASSEM e KING, 2001).

No presente trabalho, foram adotadas as formulações IMPES e SEQ, e a discretização espacial da Eq. (2.36), ocorre analogamente à discretização da Equação da Pressão, apresentada na seção 3.1, onde, segundo o MVF, primeiramente, integra-se a Eq. (2.36) em todo o domínio  $\Omega$ , apresentado na Figura 6 (a):

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot f_w \vec{v}_T \partial\Omega + \int_{\Omega} Q_w \partial\Omega \quad (3.138)$$

Representando as integrais acima como um somatório de integrais nos  $\mathcal{N}_{VC}$  volumes de controle, apresentados na Figura 6 (b), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \phi_{\hat{V}_i} \frac{\partial S_{w_{\hat{V}_i}}}{\partial t} \partial\Omega_{\hat{V}_i} = - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}_T)_{\hat{V}_i} \partial\Omega_{\hat{V}_i} + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{VC}} \int_{\Omega_{\hat{V}_i}} Q_{w_{\hat{V}_i}} \partial\Omega_{\hat{V}_i} \quad (3.139)$$

Novamente, consideram-se apenas as integrais para o volume de controle genérico  $\Omega_{\hat{V}}$ , em destaque na Figura 6 (b), resultando em:

$$\int_{\Omega_{\hat{v}}} \phi_{\hat{v}} \frac{\partial S_{w_{\hat{v}}}}{\partial t} \partial \Omega_{\hat{v}} = - \int_{\Omega_{\hat{v}}} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}_T)_{\hat{v}} \partial \Omega_{\hat{v}} + \int_{\Omega_{\hat{v}}} Q_{w_{\hat{v}}} \partial \Omega_{\hat{v}} \quad (3.140)$$

Aplicando o Teorema da divergência de Gauss na integral do termo advectivo, tem-se:

$$- \int_{\Omega_{\hat{v}}} \vec{\nabla} \cdot (f_w \vec{v}_T)_{\hat{v}} \partial \Omega_{\hat{v}} = - \int_{\Gamma_{\hat{v}}} (f_w \vec{v}_T)_{\hat{v}} \cdot \vec{n} \partial \Gamma_{\hat{v}} \quad (3.141)$$

Aproximando pelo Teorema do Valor Médio a integral da Eq. (3.141) e a última integral de Eq. (3.140):

$$- \int_{\Gamma_{\hat{v}}} (f_w \vec{v}_T)_{\hat{v}} \cdot \vec{n} \partial \Gamma_{\hat{v}} \cong - \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} (f_w \vec{v}_T)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.142)$$

$$\int_{\Omega_{\hat{v}}} Q_{w_{\hat{v}}} \partial \Omega_{\hat{v}} \cong \bar{Q}_{w_{\hat{v}}} \Omega_{\hat{v}} \quad (3.143)$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo da Eq. (3.140) para um domínio incompressível e substituindo as integrais do lado direito pelas aproximações das Eq. (3.142) e (3.143), tem-se a discretização espacial da Equação da Saturação, após isolar a derivada temporal, definida, como:

$$\frac{\partial S_{w_{\hat{v}}}}{\partial t} = - \frac{1}{\phi_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} (f_w \vec{v}_T)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{1}{\phi_{\hat{v}}} \bar{Q}_{w_{\hat{v}}} \quad (3.144)$$

Recordando que os fluxos fracionários, em cada aresta, são obtidos pelo método de ponderação à montante de primeira ordem (*First Order Upwind Method* – FOUM), conforme apresentado na Figura 8.

### 3.2.1 Equação de Saturação nas Fraturas com Dimensão Reduzida

No caso do LDFM, foi definida uma equação adicional de saturação na fratura, conforme Eq. (2.37), a qual é discretizada de forma análoga à equação para os elementos da matriz.

Aplicando na Eq. (2.37), para uma fratura genérica ( $\mathcal{F}$ ), os procedimentos descritos nas Eq. (3.138) a (3.144), e utilizando as definições fornecidas pelas Eq. (3.69) a (3.72), tem-se a Equação da Saturação, discretizada espacialmente, para um volume de controle fraturado, definida como:

$$\frac{\partial S_{w_{\mathcal{F}}}}{\partial t} = -\frac{1}{\phi_{\mathcal{F}}\Omega_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^2 (f_w v_{\mathcal{F}})_i a_{\mathcal{F}_i} - \frac{1}{\phi_{\mathcal{F}}\Omega_{\mathcal{F}}} f_w Q_n^{\mathcal{F}} + \frac{1}{\phi_{\mathcal{F}}} \bar{Q}_{w_{\mathcal{F}}} \quad (3.145)$$

No caso de múltiplas fraturas em um mesmo vértice  $I$ , conforme apresentado na Figura 18 (b), é necessário determinar um fluxo fracionário para este vértice, caso ele seja o elemento à montante do fluxo, i.e., o fluxo ocorra do vértice para a fratura, devido a utilização do FOUM para aproximação dos fluxos fracionários.

O fluxo fracionário no vértice foi definido por Hoteit e Firoozabadi (2008), através da imposição da conservação de massa de água no vértice, onde o somatório da massa que chega ao vértice, deve ser igual a massa que sai:

$$\sum_{i=1}^s f_{w_i} (v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}})_i = \sum_{j=1}^c f_{w_j} (v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}})_j \quad (3.146)$$

onde  $c$  indica os fluxos chegando em  $I$  e  $s$  os saindo,  $f_{w_i}$  é o fluxo fracionário em  $I$  e  $f_{w_j}$  o fluxo fracionário nas fraturas à montante de  $I$ .

Como  $f_{w_i}$  é uma constante, ele pode sair do somatório à esquerda e, com isso, tem-se definido o fluxo fracionário no vértice  $I$ , para um dado passo de tempo, como:

$$f_{w_i} = \frac{\sum_{j=1}^c f_{w_j} (v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}})_j}{\sum_{i=1}^s (v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}})_i} \quad (3.147)$$

Para concluir a formulação numérica das Eq. (3.144) e (3.145) é necessário efetuar a discretização temporal.

### 3.2.2 Discretização no tempo

O método adotado para a discretização temporal das Eq. (3.144) e (3.145) foi o método de primeira ordem de Euler, descrito em Tannehill, Anderson e Pletcher (1997) para uma EDP qualquer, representada a seguir em função da saturação e desconsiderando o termo de segunda ordem:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F\left(S, x, t, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \quad (3.148)$$

Sua forma discreta, pelo método de Euler Explícito, pode ser escrita como:

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} = F_i^n \left( S, x, t, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (3.149)$$

onde  $n$  representa a malha temporal,  $i$  a malha espacial e  $\Delta t$  o passo de tempo.

Enquanto o método de Euler Implícito é definido, como:

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \left( S, x, t, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (3.150)$$

Ao aplicar a formulação de Euler às Eq. (3.144) e (3.145), respectivamente, tem-se como resultado:

$$\frac{S_{w_{\hat{v}}}^{n+1} - S_{w_{\hat{v}}}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\phi_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} (f_w^k \vec{v}_T)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{1}{\phi_{\hat{v}}} \bar{Q}_{w_{\hat{v}}}^k \quad (3.151)$$

$$\frac{S_{w_{\mathcal{F}}}^{n+1} - S_{w_{\mathcal{F}}}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^2 (f_w^k v_{\mathcal{F}})_i a_{\mathcal{F}_i} - \frac{1}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} (f_w^k Q_n^{\mathcal{F}}) + \frac{1}{\phi_{\mathcal{F}}} \bar{Q}_{w_{\mathcal{F}}}^k \quad (3.152)$$

onde  $k$  indica o método adotado, sendo:

- $k = n$ : Método de Euler Explícito, utilizado na formulação IMPES;
- $k = n + 1$ : Método de Euler Implícito, utilizado na formulação SEQ;

Isolando a variável incógnita,  $S_w^{n+1}$ , em ambas as Eq. (3.151) e (3.152), tem-se a Equação da Saturação, em sua forma discreta, definida na matriz e na fratura, respectivamente, como:

$$S_{w_{\hat{v}}}^{n+1} = S_{w_{\hat{v}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} (f_w^k \vec{v}_T)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t}{\phi_{\hat{v}}} \bar{Q}_{w_{\hat{v}}}^k \quad (3.153)$$

$$S_{w_{\mathcal{F}}}^{n+1} = S_{w_{\mathcal{F}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^2 (f_w^k v_{\mathcal{F}})_i a_{\mathcal{F}_i} - \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} (f_w^k Q_n^{\mathcal{F}}) + \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}}} \bar{Q}_{w_{\mathcal{F}}}^k \quad (3.154)$$

### 3.2.2.1 Discretização temporal explícita

Na formulação explícita, utilizada no método IMPES, a saturação no passo de tempo futuro é calculada a partir de parâmetros do passo de tempo atual, ou inicial, sendo eles: saturação no próprio volume, fluxos fracionários nas arestas e o termo fonte/sumidouro, conforme apresentado no lado direito das Eq. (3.153) e (3.154). Com todos os parâmetros previamente

calculados, é possível obter a saturação atualizada de forma direta, implicando num baixo custo computacional por passo de tempo.

Entretanto, uma formulação explícita é condicionalmente estável, e o passo de tempo  $\Delta t$  deve respeitar uma condição de estabilidade (TANNEHILL, ANDERSON e PLETCHER, 1997; HIRSCH, 2007). Utilizou-se a condição de estabilidade linear de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), a qual foi adaptada de Souza (2015), para uma aproximação de primeira ordem no tempo, como:

$$\Delta t_{\Omega_{\check{v}}} \leq C \frac{\Omega_{\check{v}}}{\max_{IJ \in \Gamma_{\check{v}}} \left| \frac{\Delta f_w}{\Delta S_w} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \right|} \quad (3.155)$$

onde  $\Delta t_{\Omega_{\check{v}}}$  é o passo de tempo calculado para o volume de controle  $\Omega_{\check{v}}$ ;  $C$  é o número de Courant;  $\Delta f_w / \Delta S_w$  é a forma discreta de  $\partial f_w / \partial S_w$  calculada com a partir dos valores nos volumes à esquerda é à direita da aresta  $IJ$ ;

Na Equação (3.155), é adotado o valor máximo das velocidades características calculadas em todas as faces do volume de controle  $\Omega_{\check{v}}$ , para garantir o menor passo de tempo possível dentre os avaliados.

A razão entre  $\Omega_{\check{v}}$  e o vetor  $\vec{N}_{IJ}$  é equivalente à dimensão do volume avaliado na direção desta normal, o que condiz com a condição de estabilidade requerer que a perturbação não percorra possa percorrer mais do que um volume de controle num único passo de tempo. Para que isso seja garantido em todo domínio, é necessário adotar como passo de tempo o menor valor encontrado, considerando todos os volumes de controle da malha, da seguinte forma:

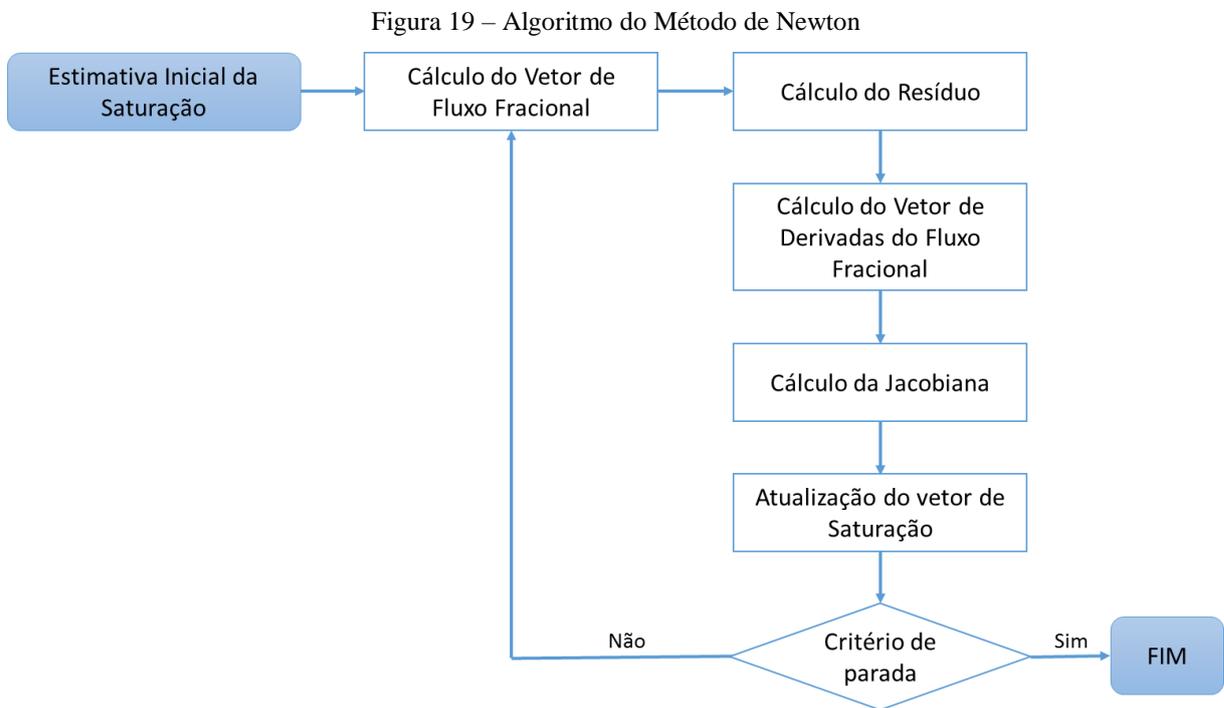
$$\Delta t = \min_{\Omega_{\check{v}} \in \Omega} \Delta t_{\Omega_{\check{v}}} \quad (3.156)$$

Vale observar que, no caso de domínios fraturados, a Eq. (3.155) também deve ser avaliada nos fluxos fratura-fratura. Esses fluxos tendem a valores elevados nos casos em que a fratura apresenta alta permeabilidade normal, ocasionando uma drástica restrição no passo de tempo máximo, e quando não considerado, pode provocar a instabilidade da solução. Uma alternativa para contornar essa restrição, é adotar uma formulação implícita, onde, em relação à estabilidade linear, não há limitações para o passo de tempo máximo.

### 3.2.2.2 Discretização temporal implícita

Ao utilizar-se a formulação SEQ, para contornar a restrição no passo de tempo decorrente da formulação IMPES, a saturação no passo de tempo futuro, em cada volume de controle, depende dos fluxos fracionários nas arestas deste volume calculados no tempo futuro que, por sua vez, são funções das saturações à montante de cada aresta. Com isso, a Eq. (3.152), da saturação na matriz, pode apresentar até, em número de incógnitas, a quantidade de arestas que o volume de controle possui, enquanto a Eq. (3.153), da saturação nas fraturas, pode apresentar até quatro incógnitas, devido à fratura ser unidimensional.

Devido ao comportamento dos fluxos fracionários, o sistema obtido é não-linear, e para sua solução foi adotado o Método de Newton, descrito em Burden e Faires (2003), cujo algoritmo adotado está apresentado, de forma simplificada, na Figura 19.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Método de Newton tem como objetivo encontrar zeros de funções, então, as Eq. (3.152) e (3.153) são reescritas como:

$$g_m(S_w^{n+1}) = S_{w_v}^n - \frac{\Delta t}{\phi_v \Omega_v} \sum_{IJ \in \Gamma_v} (f_w^{n+1} \vec{v}_T)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t}{\phi_v} \bar{Q}_{w_v}^{n+1} - S_{w_v}^{n+1} \quad (3.157)$$

$$g_{\mathcal{F}}(S_w^{n+1}) = S_{w_{\mathcal{F}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^2 (f_w^{n+1} v_{\mathcal{F}})_i a_{\mathcal{F}} - \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}} \Omega_{\mathcal{F}}} (f_w^{n+1} Q_n^{\mathcal{F}}) + \frac{\Delta t}{\phi_{\mathcal{F}}} \bar{Q}_{w_{\mathcal{F}}}^{n+1} - S_{w_{\mathcal{F}}}^{n+1} \quad (3.158)$$

Tem-se que o termo fonte/sumidouro, também pode ser escrito em função do fluxo fracionário e do fluxo total, da seguinte forma:

$$\bar{Q}_{w_v}^k = \bar{Q}_{T_v}^k f_{w_v}^k \quad (3.159)$$

$$\bar{Q}_{w_{\mathcal{F}}}^k = \bar{Q}_{T_{\mathcal{F}}}^k f_{w_{\mathcal{F}}}^k \quad (3.160)$$

Combinando as Eq. (3.157) a (3.160) para todos os volumes de controle, pode-se definir um Sistema de Equações  $\mathcal{G}(S_w^{n+1})$ , com o seguinte aspecto:

$$\mathcal{G}(\vec{S}_w^{n+1}) = \vec{S}_w^n + \Delta t \mathcal{C}_{f_w} \vec{f}_w^{n+1} - \vec{S}_w^{n+1} \quad (3.161)$$

onde  $\vec{S}_w$  é o vetor com a saturação em todos elementos (matriz e fratura) com o sobrescrito indicando o tempo atual ( $n$ ) ou futuro ( $n+1$ );  $\vec{f}_w^{n+1}$  é o vetor do fluxo fracionário definido em função de  $\vec{S}_w^{n+1}$  pela Eq. (2.15); e  $\mathcal{C}_{f_w}$  é a matriz dos coeficientes do fluxo fracionário atualizada a cada passo de tempo, mas sem a inclusão do  $\Delta t$ .

O objetivo do Método de Newton é definir um vetor  $\vec{S}_w^{n+1}$  que satisfaça a seguinte expressão:

$$\mathcal{G}(\vec{S}_w^{n+1}) = \vec{0} \quad (3.162)$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo.

A construção da matriz  $\mathcal{C}_{f_w}$  é realizada a partir dos seguintes passos e de forma acumulativa, i.e., o valor definido em um passo é somado ao valor um pré-existente:

1. Os fluxos  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  são adicionados à linha correspondente ao elemento à esquerda da aresta em que o fluxo foi definido. A coluna, por sua vez, depende do elemento à montante, que é determinado pelo sinal de  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$ , em função da definição dos vetores normais no Teorema da Divergência de Gauss, onde um fluxo positivo indica que o mesmo está saindo da superfície do volume de controle em que foi definido, então:

- Se positivo,  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  é adicionado ao elemento da diagonal principal desta linha;

- Se negativo,  $\bar{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  é adicionado à coluna correspondente ao elemento à direita da aresta  $IJ$ . Caso  $IJ$  seja uma fratura, a coluna será a correspondente ao volume de controle desta fratura;
2. Os fluxos  $v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}}$  são adicionados à linha correspondente à fratura para a qual o fluxo foi definido. E a coluna depende do sinal de  $v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}}$ :
    - Se positivo,  $v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}}$  é adicionado ao elemento da diagonal principal desta linha;
    - Se negativo,  $v_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}}$  é dividido pelo somatório dos fluxos que saem do vértice  $i$ , e então é adicionado a todas as colunas cujos fluxos fratura-fratura chegam ao vértice  $i$  e multiplicado, respectivamente, por cada um destes fluxos que chegam ao vértice  $i$ , em decorrência da Eq. (3.147);
  3. Dividem-se todos coeficientes de uma mesma linha pelo volume do elemento ao qual a linha se refere.
  4. A diagonal principal recebe os termos fonte/sumidouro total, referentes ao volume de controle que a linha representa.
  5. Dividem-se todos coeficientes de uma mesma linha pela porosidade do elemento ao qual a linha se refere.

O Método de Newton requer o cálculo da Matriz Jacobiana, definida a seguir (BURDEN e FAIRES, 2003):

$$\underline{J}(\vec{S}_w^{n+1}) = \frac{\partial G(\vec{S}_w^{n+1})}{\partial S_w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G(S_1^{n+1})}{\partial S_1} & \frac{\partial G(S_1^{n+1})}{\partial S_2} & \dots & \frac{\partial G(S_1^{n+1})}{\partial S_j} \\ \frac{\partial G(S_2^{n+1})}{\partial S_1} & \frac{\partial G(S_2^{n+1})}{\partial S_2} & \dots & \frac{\partial G(S_2^{n+1})}{\partial S_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G(S_i^{n+1})}{\partial S_1} & \frac{\partial G(S_i^{n+1})}{\partial S_2} & \dots & \frac{\partial G(S_i^{n+1})}{\partial S_j} \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

A Jacobiana pode ser obtida derivando a Eq. (3.161) em relação à saturação de água, sendo definida como:

$$\underline{J}(\vec{S}_w^{n+1}) = \Delta t C_{f_w} \frac{\partial \vec{f}_w^{n+1}}{\partial S_w} - \underline{I} \quad (3.164)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade decorrente da derivada do último termo da Eq. (3.161).

Sendo conhecida a equação que define o fluxo fracionário, Eq. (2.15), sua derivada pode ser calculada de forma analítica utilizando a Regra do Quociente (STEWART, 2006), a qual diz que:

$$\frac{d}{dS_w} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dS_w} - u \frac{dv}{dS_w}}{v^2} \quad (3.165)$$

Após substituir na Eq. (2.15), as Eq. (2.9) e (2.10) e as Eq. (2.5) a (2.7), e realizando algumas manipulações algébricas, têm-se definidos os termos da Eq. (3.166):

$$u = \frac{S_w^2 + S_{wi}^2 - 2S_w S_{wi}}{\mu_w (1 - S_{wi} - S_{or})^2} \quad (3.166)$$

$$v = \frac{S_w^2 - 2S_w S_{wi} + S_{wi}^2}{\mu_w (1 - S_{wi} - S_{or})^2} + \frac{1}{\mu_o} - \frac{S_w^2 + S_{wi}^2 - 2S_w S_{wi} + 2S_w - 2S_{wi}}{\mu_o (1 - S_{wi} - S_{or})^2} \quad (3.167)$$

E as respectivas derivadas são definidas, como:

$$\frac{du}{dS_w} = \frac{2(S_w - S_{wi})}{\mu_w (1 - S_{wi} - S_{or})^2} \quad (3.168)$$

$$\frac{dv}{dS_w} = \frac{2}{(1 - S_{wi} - S_{or})^2} \left( \frac{S_w - S_{wi}}{\mu_w} - \frac{S_w - S_{wi} + 1}{\mu_o} \right) \quad (3.169)$$

Substituindo as Eq. (3.166) a (3.169) na Eq. (3.165), bem como  $S_w$  pelo vetor  $\vec{S}_w^{n+1}$ , é determinado o vetor de derivadas do fluxo fracionário da Eq. (3.164).

A solução da Eq. (3.162) é obtida a partir de uma atualização iterativa de  $\vec{S}_w^{n+1}$ , onde para cada iteração  $k$  é definido um vetor de resíduo ( $\vec{r}^k$ ), como:

$$\vec{r}^k = \vec{S}_w^n + \Delta t \underline{C}_{f_w} \vec{f}_w^{n+1} \Big|_k - \vec{S}_w^{n+1} \Big|_k \quad (3.170)$$

O objetivo é fazer  $\vec{r}^k$  se aproximar do vetor nulo, segundo uma tolerância ( $TOL$ ), ou seja, tem-se definido o critério de paradas das iterações que atualizam  $\vec{S}_w^{n+1}$ , como:

$$\max |\vec{r}^k| \leq TOL \quad (3.171)$$

E o valor de  $\vec{S}_w^{n+1}$  é atualizado através da solução do seguinte sistema de equações:

$$\bar{S}_w^{n+1}|^{k+1} = \bar{S}_w^{n+1}|^k - \mathcal{J}(\bar{S}_w^{n+1}|^k)^{-1} \bar{r}^k \quad (3.172)$$

Para a primeira iteração, é fornecida uma estimativa inicial para a saturação, utilizando como base a saturação no passo de tempo anterior, ou seja:

$$\bar{S}_w^{n+1}|^1 = \bar{S}_w^n \quad (3.173)$$

Em suma, o algoritmo do Método de Newton, pode ser descrito de forma simplificada e com referência as equações utilizadas, da seguinte forma:

1. O vetor do fluxo fracionário é calculado pela Eq. (2.15);
2. Calcula-se os resíduos com a Eq. (3.170);
3. O vetor das derivadas do fluxo fracionário é calculado pelas Eq. (3.165) a (3.169);
4. A Jacobiana é calculada pela Eq. (3.164);
5. O vetor de saturação é atualizado pela Eq. (3.172);
6. Verifica-se o critério de parada da Eq. (3.171):
  - Se verdadeiro, o processo é interrompido e a solução é fornecida pelo passo 5;
  - Se falso, repete-se os passos 2 ao 7 utilizando a saturação atualizada no passo 5.

Caso a solução necessite de muitas iterações para atingir a tolerância definida, pode-se efetuar uma quebra no passo de tempo adotado, por este motivo, o  $\Delta t$  não foi incluído na matriz dos coeficientes ( $\mathcal{C}_{f_w}$ ), na Eq. (3.161).

É importante observar que, apesar de o passo de tempo não ser limitado, do ponto de vista da estabilidade, pela Eq. (3.156), existe um passo de tempo máximo físico necessário para garantir a acurácia da solução (HIRSCH, 2007). Devido à dificuldade em se determinar esse passo de tempo máximo, no presente trabalho foi adotado, como referência, o passo de tempo calculado apenas nos volumes de controle da matriz para o caso explícito, Eq. (3.156), i.e., desconsidera-se a restrição no passo de tempo proveniente das fraturas.

Observa-se que devido à necessidade de solução de um sistema de equações adicional, o método implícito apresenta um custo computacional mais elevado por passo de tempo do que o método explícito, se tornando eficaz apenas nos casos de elevada restrição do passo de tempo

máximo, deste último método, que pode ocorrer quando as velocidades fratura-fratura forem muito elevadas.

## 4 RESULTADOS

A formulação numérica foi implementada de maneira acoplada ao código desenvolvido por Souza (2015), disponível no grupo de Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional (PADMEC), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). No qual, foi adotada a linguagem de programação Matlab<sup>®</sup> (HAHN e VALENTINE, 2013), que permite a implementação dos algoritmos de análise numérica de forma direta, devido sua fácil prototipagem decorrente de sua fundamentação em operações matriciais e a disponibilidade de uma ampla biblioteca de funções (SOUZA, 2015). As malhas, que discretizam o domínio físico, foram geradas pelo *software* livre GMSH (GEUZAINÉ e REMACLE, 2009).

Na continuação, são apresentados resultados numéricos aplicando a formulação apresentada, tendo sido realizadas as seguintes análises: um teste de convergência do LDFM para verificação da implementação; um comparativo entre os multiplicadores de transmissibilidade, o modelo contínuo e o modelo descontínuo; um comparativo entre a saturação resolvida de forma explícita e implícita; e por fim, um teste da flexibilidade da metodologia proposta através na modelagem de canais e barreiras conectados e num caso com múltiplas fraturas. A plotagem dos resultados foi realizada através do VisIt<sup>®</sup> (VisIt User's Manual, 2005), um *software* livre de visualização científica, para grandezas de campo, e para as curvas foi utilizado o Matlab<sup>®</sup>.

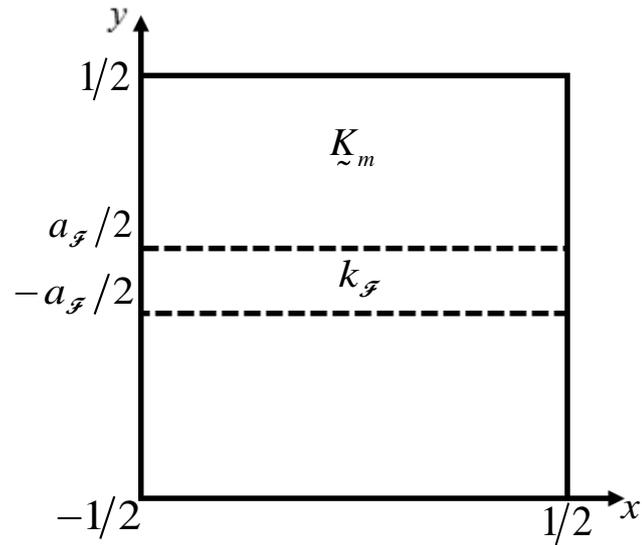
### 4.1 TESTE DE CONVERGÊNCIA DO LDFM

Com o objetivo de verificar a implementação da formulação LDFM, foi avaliado o erro na solução numérica para um problema de escoamento monofásico com solução analítica, descrito em Hægland, Assteerawatt, *et al.* (2009), composto por um reservatório com uma fratura horizontal, conforme apresentado na Figura 20.

O domínio em questão apresenta uma matriz rochosa com um tensor de permeabilidade  $\underline{K}_m$  isotrópico, definido a seguir:

$$\underline{K}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Figura 20 – Domínio quadrado com fratura horizontal - Problema 4.1.



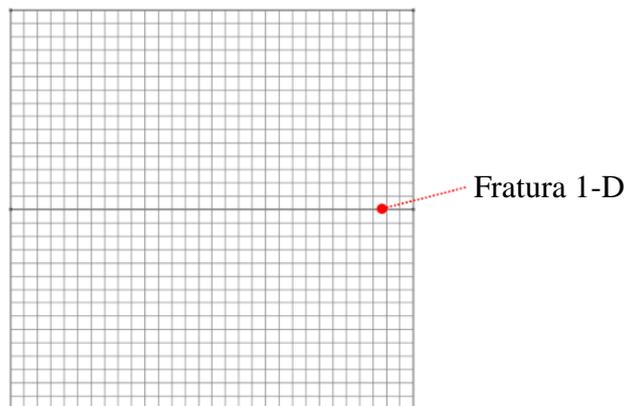
Fonte: Adaptado de Ahmed, Edwards, *et al.* (2015).

A área entre as linhas tracejadas, da Figura 20, representa a fratura, que também é isotrópica, onde as permeabilidades são obtidas a partir de diferentes valores de um multiplicador ( $k_f$ ), da seguinte forma:

$$K_n^f = K_{ig}^f = |K_m| k_f \quad (4.2)$$

A abertura da fratura ( $a_f$ ) foi concebida como uma linha na discretização do domínio, que foi realizada por uma malha estruturada e uniforme, com  $N \times N$  elementos quadrangulares, sendo  $N = \{10, 20, \dots, 100\}$ . A Figura 21 exemplifica essa discretização para a malha  $30 \times 30$ :

Figura 21 – Exemplo da malha  $30 \times 30$  - Problema 4.1.



A solução analítica foi obtida a partir da imposição do seguinte termo fonte, definido apenas nos elementos da matriz e sendo nulo para as fraturas:

$$q = (1 - k_{\mathcal{F}}) \cos x \cosh \left( \frac{a_{\mathcal{F}}}{2} \right) \quad (4.3)$$

Tem-se a solução analítica nos elementos da matriz e das fraturas definidas, respectivamente, pelas Eq. (4.4) e (4.5):

$$p = k_{\mathcal{F}} \cos x \cosh y + (1 - k_{\mathcal{F}}) \cos x \cosh \left( \frac{a_{\mathcal{F}}}{2} \right) \quad (4.4)$$

$$p_{\mathcal{F}} = \cos x \cosh y \quad (4.5)$$

As condições em todo o contorno são do tipo Dirichlet, i.e., pressão prescrita, com os valores calculados pelas Eq. (4.4) e (4.5).

Os erros na matriz e na fratura são calculados em conjunto, por uma norma  $L_2$  normalizada, definida em Sandve *et al.* (2012), como:

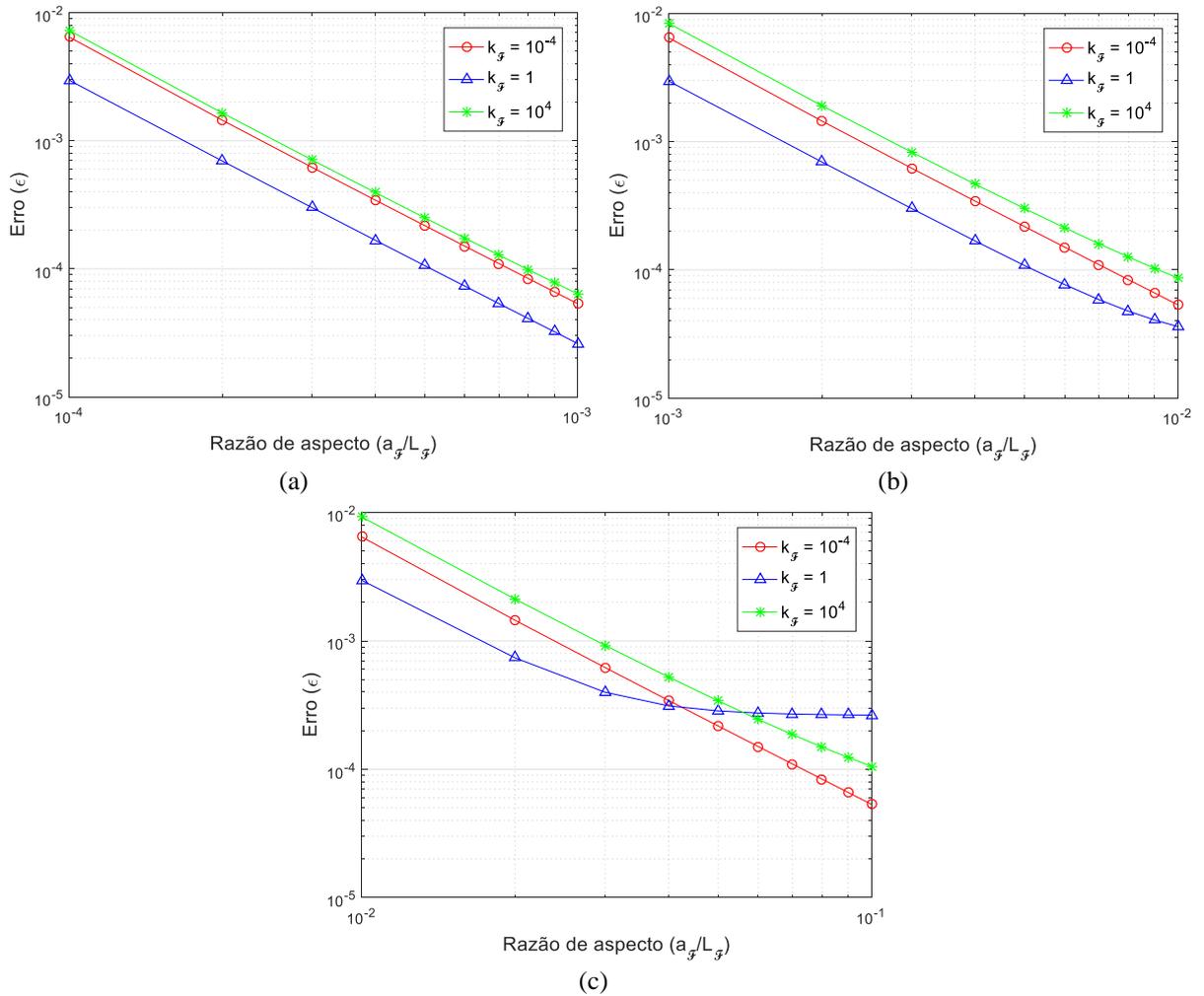
$$\varepsilon_{L_2} = \frac{\sqrt{\sum_i \Omega_i (\hat{p}_i - p_i)^2}}{(\max(\{\hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}}\}) - \min(\{\hat{p}; \hat{p}_{\mathcal{F}}\})) \sum_i \Omega_i} \quad (4.6)$$

onde  $\Omega_i$  é a área (no caso 2-D) do volume de controle avaliado,  $p_i$  é a solução analítica e  $\hat{p}_i$  o valor numérico aproximado, incluindo a solução nas fraturas. O erro é ponderado pelos valores máximos e mínimos obtidos na solução numérica e pelo o volume do domínio físico.

Para verificar o correto acoplamento do LDFM no MPFA-O, os resultados da Eq. (4.6) foram comparados com os erros obtidos por Ahmed, Edwards, *et al.* (2015) através da mesma metodologia para o problema monofásico, no qual, foram avaliados três valores para abertura  $a_{\mathcal{F}} = \{10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}\}$  e três para a permeabilidade na fratura  $k_{\mathcal{F}} = \{10^{-4}, 1, 10^4\}$ , representando uma barreira, um meio homogêneo e um canal, respectivamente. Os erros estão apresentados na Figura 22 em função da razão de aspecto de uma aresta fraturada, fazendo  $a_{\mathcal{F}}/L_{\mathcal{F}}$ , sendo  $L_{\mathcal{F}}$  o comprimento de uma aresta.

Ambos os modelos (contínuo e descontínuo) resultaram nos mesmos erros, sendo suficiente apresentar o comportamento do erro apenas para o modelo descontínuo, conforme Figura 22. Os erros foram coincidentes com os resultados em Ahmed, Edwards, *et al.* (2015), portanto a solução de referência também foi omitida na Figura 22, indicando a correta implementação da metodologia para o cálculo da pressão pelo LDFM em conjunto com o MPFA-O.

Figura 22 – Comportamento do erro para o teste de convergência pelo modelo descontínuo do Problema 4.1. :  
 (a)  $a_{\mathcal{F}} = 10^{-5}$ ; (b)  $a_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ ; (c)  $a_{\mathcal{F}} = 10^{-3}$ .



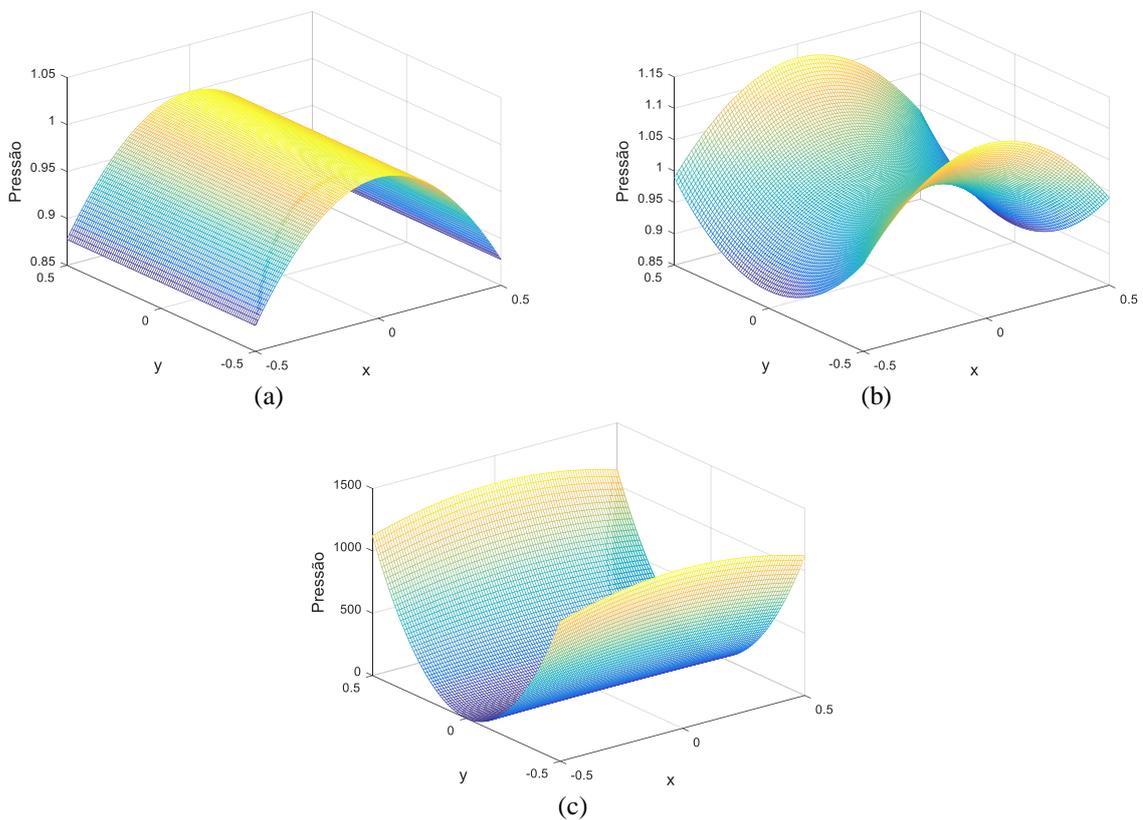
A convergência do método foi satisfatória para modelagem da barreira em todas as aberturas, conforme Figura 22, entretanto, para o caso homogêneo e do canal a taxa de convergência é reduzida conforme a magnitude da abertura da fratura se aproxima da dimensão da aresta que a representa. Tal comportamento era esperado para o LDFM, pois a hipótese de a fratura ser unidimensional é coerente nos casos em que  $a_{\mathcal{F}} \ll L_{\mathcal{F}}$ , i.e.,  $a_{\mathcal{F}}/L_{\mathcal{F}} \ll 1$ , em todos os casos em que essa hipótese foi respeitada a taxa de convergência demonstrou um comportamento adequado. A Tabela 2 apresenta as taxas de convergência e o valor de R-quadrado, obtidos a partir da regressão linear dos dados apresentados na Figura 22, onde os casos ditos com comportamento adequado, apresentaram convergência quadrática.

Tabela 2 – Taxas de convergência do Problema 4.1.

| $a_{\mathcal{F}}$ | $k_{\mathcal{F}}$ | Taxa de convergência | R-quadrado |
|-------------------|-------------------|----------------------|------------|
| $10^{-5}$         | $10^{-4}$         | 2,0667               | 0,9998     |
|                   | 1                 | 2,0457               | 0,9999     |
|                   | $10^4$            | 2,0326               | 0,9995     |
| $10^{-4}$         | $10^{-4}$         | 2,0667               | 0,9998     |
|                   | 1                 | 1,8138               | 0,9800     |
|                   | $10^4$            | 1,9297               | 0,9960     |
| $10^{-3}$         | $10^{-4}$         | 2,0672               | 0,9998     |
|                   | 1                 | 0,8324               | 0,7687     |
|                   | $10^4$            | 1,8737               | 0,9931     |

Vale observar que a igualdade dos erros obtidos com o modelo contínuo e descontínuo só era esperada para os casos de alta permeabilidade, entretanto, isso pode ser explicado pela simetria da solução do campo de pressão em relação à fratura, devido ao caráter periódico das Eq. (4.4) e (4.5). Com isso, o modelo de pressão contínua tem sua validade justificada para todas as permeabilidades, neste caso, devido à igualdade da pressão à esquerda e à direita da fratura ocorrer naturalmente.

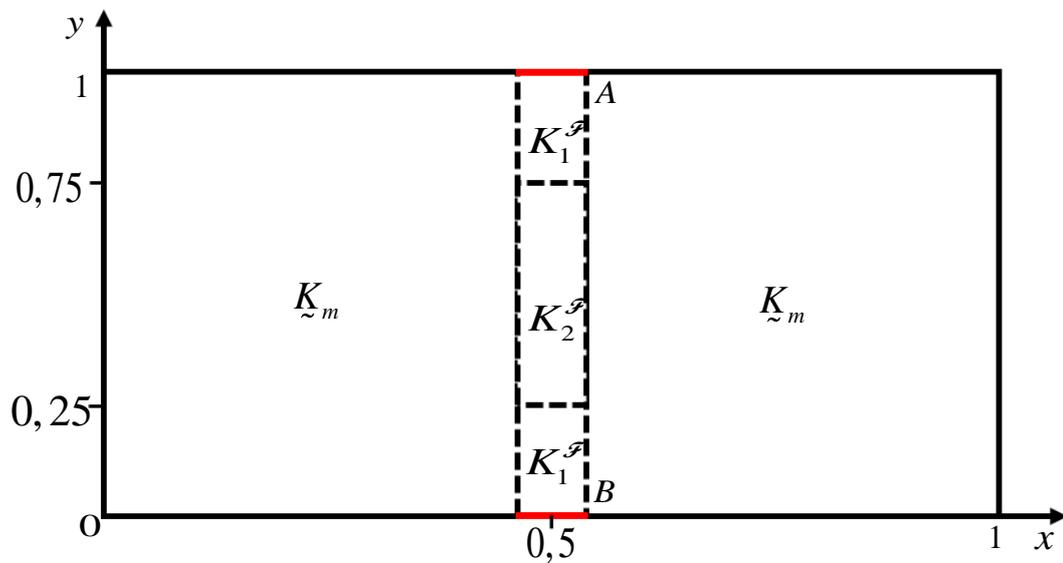
A Figura 23 evidencia a simetria apresentando a solução analítica para todas as permeabilidades, no caso  $a_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ , onde, para as demais aberturas, o comportamento é semelhante.

Figura 23 – Solução analítica do problema 4.1., para  $a_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ : (a)  $k_{\mathcal{F}} = 10^{-4}$ ; (b)  $k_{\mathcal{F}} = 1$ ; (c)  $k_{\mathcal{F}} = 10^4$ .

#### 4.2 ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM RESERVATÓRIO COM FRATURA PERPENDICULAR

Para a comparação entre o modelo de pressão contínua, o modelo de pressão descontínua e os multiplicadores de transmissibilidade (MT), foi utilizado um exemplo de Martin, Jaffré e Roberts (2005) e Ahmed, Edwards, *et al.* (2015), no qual um gradiente de pressões é imposto entre as faces de um reservatório com fratura perpendicular ao fluxo, como apresentado na Figura 24.

Figura 24 – Configuração para o escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular - Problema 4.2.



Fonte: Adaptado de Ahmed, Edwards, *et al.* (2015).

Neste exemplo são analisados três casos, com diferentes propriedades para as famílias de fraturas ( $K_1^f$  e  $K_2^f$ ), as quais estão sujeitas às condições de contorno nos pontos A e B.

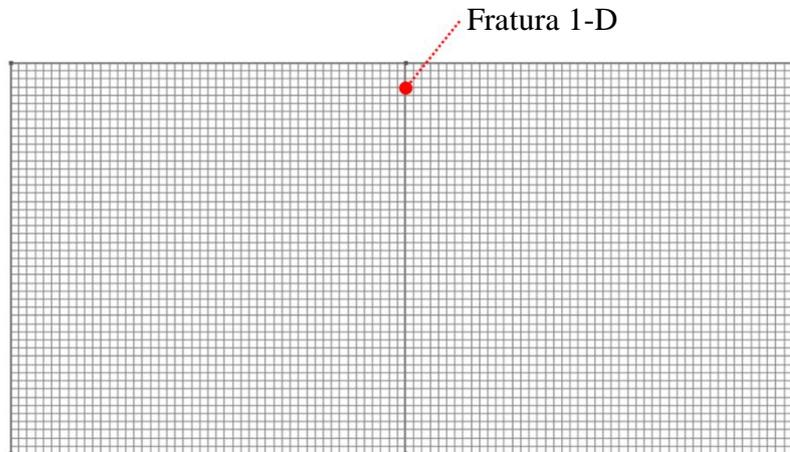
Para todos os casos, a condição de contorno na matriz é a mesma, fluxo nulo no contorno superior e inferior ( $g_N^{Sup} = g_N^{Inf} = 0$ ), pressão  $g_D^{Esq} = 0$  no contorno à esquerda e pressão  $g_D^{Dir} = 1$  no contorno à direita.

A abertura da fratura e o tensor de permeabilidade na matriz também se mantêm em todos os casos, onde  $a_f = 10^{-2}$  e o tensor de permeabilidade isotrópico é definido a seguir:

$$\tilde{K}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Foi utilizada uma malha estruturada 94x48, totalizando 4.608 volumes de controle na matriz rochosa e 48 na fratura, conforme apresentado na Figura 25:

Figura 25 – Malha estruturada 96x48 utilizada no problema de escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular - Problema 4.2.



Na sequência, são detalhados os três casos, com diferentes propriedades para a fratura.

#### 4.2.1 Caso I - Fratura homogênea com permeabilidade elevada

No primeiro caso, as fraturas estão sujeitas a condições de contorno de Dirichlet, sendo as pressões definidas para os contornos *A* e *B* da Figura 24, como:

$$g_D^A = 1 \quad (4.8)$$

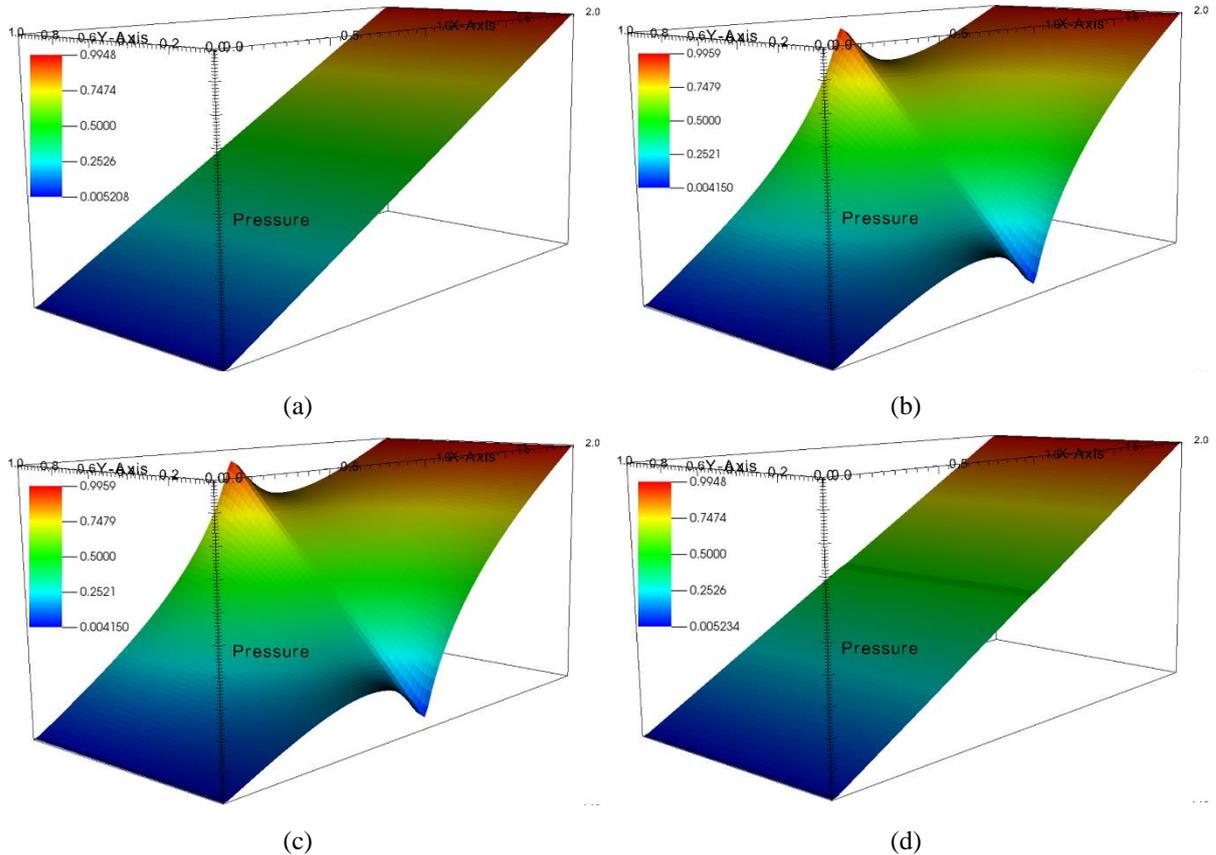
$$g_D^B = 0 \quad (4.9)$$

A fratura é homogênea e com permeabilidade elevada, conforme descrito a seguir:

$$K_{n,1}^{\mathcal{F}} = K_{tg,1}^{\mathcal{F}} = K_{n,2}^{\mathcal{F}} = K_{tg,2}^{\mathcal{F}} = 10^2 \quad (4.10)$$

A Figura 26 apresenta os mapas de pressão para o MPFA-O: desconsiderando a existência da fratura; acoplado do LDFM com o modelo de pressão contínua; e acoplado do LDFM com o modelo de pressão descontínua; e para o TPFA utilizando os multiplicadores de transmissibilidade, respectivamente.

Figura 26 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular homogênea (Problema 4.2.1): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPFA - MT.



Observa-se que, para o caso de alta permeabilidade, o modelo de pressão contínua obteve os mesmos resultados que o modelo de pressão descontínua, pois sendo a variação através do sentido normal à fratura muito pequena e suave, é possível assumi-la como contínua. Entretanto, o TPFA não foi capaz de captar a variação da pressão ao longo do sentido tangencial, pois a fratura não é tratada de forma discreta. Isso também está associado ao fato de que o mesmo não realiza interpolações no contorno em função da pressão no vértice, mas sim da pressão na aresta, com isso a pressão nos extremos da fratura só foi assimilada nos modelos acoplados LDFM que fazem uso dessas pressões para a construção do sistema local.

#### 4.2.2 Caso II - Barreira central

Neste caso, as fraturas estão sujeitas às mesmas condições de contorno de Neumann que a matriz rochosa, conforme descrito a seguir para os contornos *A* e *B* da Figura 24:

$$g_N^A = g_N^B = 0 \quad (4.11)$$

A família 1 de fraturas é homogênea e com permeabilidades elevadas:

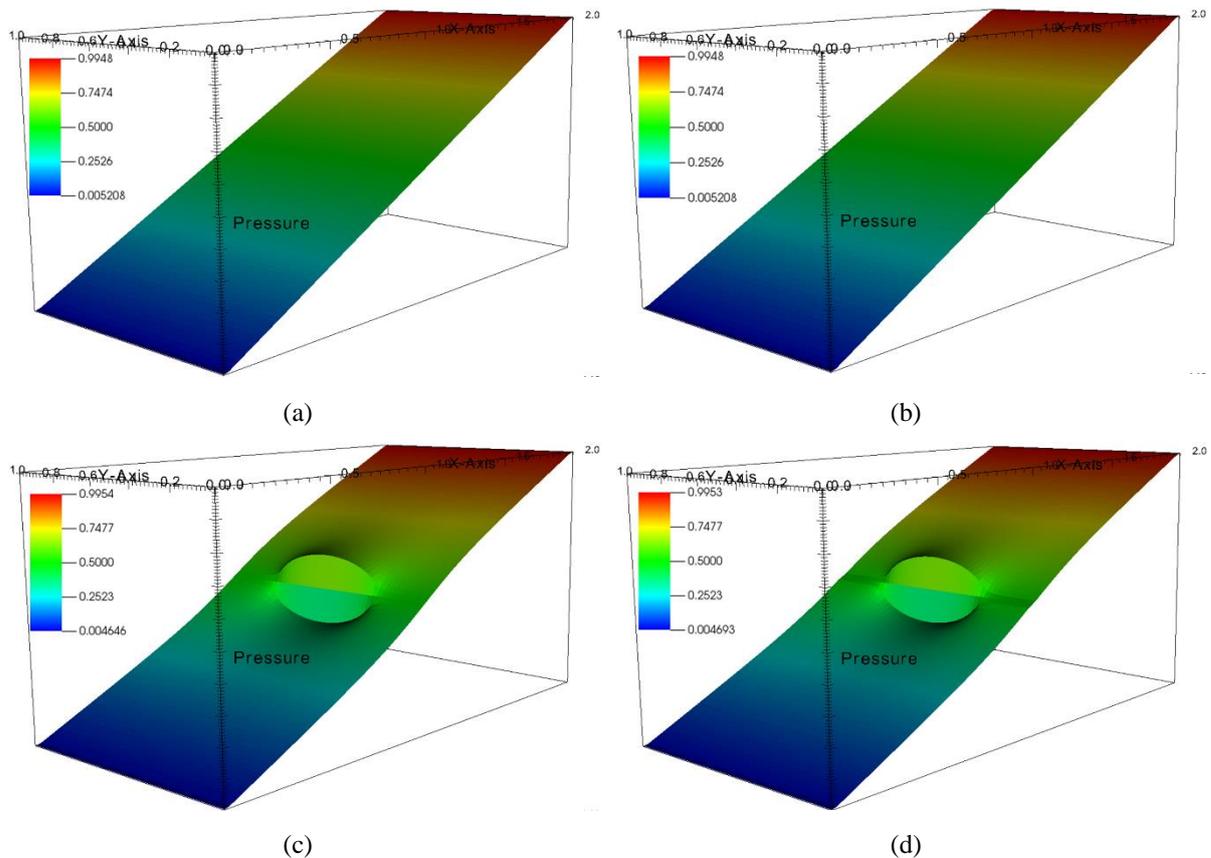
$$K_{n,1}^{\mathcal{F}} = K_{fg,1}^{\mathcal{F}} = 10^2 \quad (4.12)$$

Enquanto a fratura 2 é uma barreira:

$$K_{n,2}^{\mathcal{F}} = K_{fg,2}^{\mathcal{F}} = 2 \cdot 10^{-3} \quad (4.13)$$

A Figura 27 apresenta os mapas de pressões para o Caso II, de forma análoga à Figura 26.

Figura 27 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com barreira central (Problema 4.2.2): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPFA - MT.



Verifica-se na Figura 27 (b), que o modelo de pressão contínua apresenta um resultado satisfatório apenas na zona de maior permeabilidade, porém, não foi capaz de capturar o salto na pressão ao longo da barreira, conforme efetuado pelo modelo de pressão descontínua, Figura

27 (c), o que condiz com a própria construção deste modelo via LDFM. Com isso, o modelo de pressão contínua se mostra eficaz apenas para os casos de elevada permeabilidade no sentido normal à fratura, ou se a solução apresentar simetria em relação à fratura, conforme Problema 4.1. Neste caso, o TPFA com multiplicadores de transmissibilidade apresentou os mesmos resultados que o modelo de pressão descontínua. Isso se deve ao fato que, devido às condições de contorno, a pressão é constante ao longo do eixo  $y$ , inibindo assim os fluxos tangenciais. Essa ausência dos fluxos tangenciais também pode ser justificada pela baixa permeabilidade neste sentido para o caso da barreira.

### 4.2.3 Caso III - Fratura anisotrópica

Para o caso III, são impostas as mesmas condições de contorno do Caso I:

$$g_D^A = 1 \quad (4.14)$$

$$g_D^B = 0 \quad (4.15)$$

Entretanto, as fraturas são anisótropicas, onde a família 1 possui uma elevada permeabilidade tangencial mas oferece uma barreira para o fluxo através da mesma:

$$K_{tg,1}^{\mathcal{F}} = 2.10^2 \quad (4.16)$$

$$K_{n,1}^{\mathcal{F}} = 5.10^{-3} \quad (4.17)$$

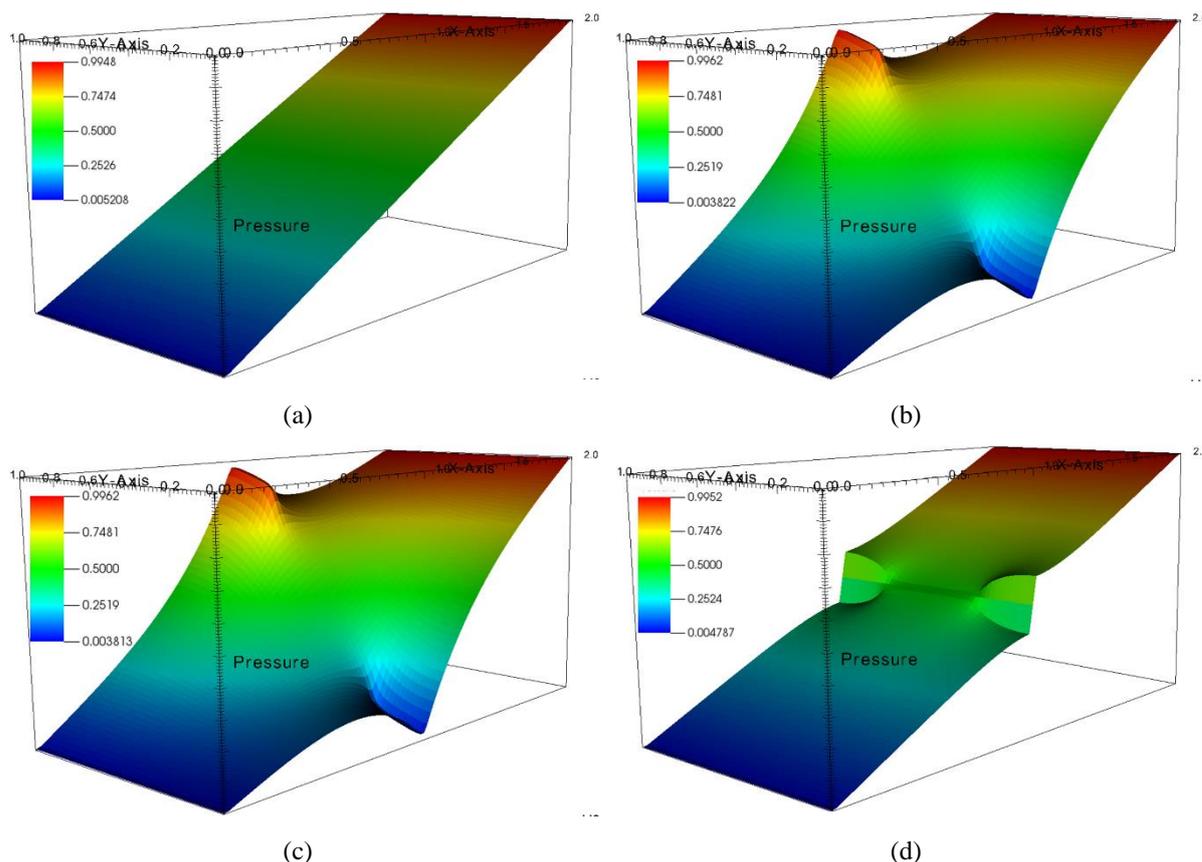
E a fratura 2, central, apresenta essas propriedades invertidas, proporcionando uma barreira apenas ao fluxo tangencial:

$$K_{tg,2}^{\mathcal{F}} = 5.10^{-3} \quad (4.18)$$

$$K_{n,2}^{\mathcal{F}} = 2.10^2 \quad (4.19)$$

A Figura 28 apresenta os mapas de pressões para o Caso III, analogamente às Figura 26 e 27:

Figura 28 – Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com fraturas anisotrópicas (Problema 4.2.3): (a) MPFA-O - sem fratura; (b) MPFA-O - LDFM Contínuo; (c) MPFA-O - LDFM Descontínuo; (d) TPGA - MT.



Nesse caso, observa-se que o modelo de pressão contínua apresentou resultados semelhantes ao modelo de pressão descontínua, mesmo no caso da barreira no sentido normal. Isso se deve ao fato de o fluxo tangencial nas regiões próximas ao contorno ser expressivo, promovendo também um vórtice na solução que faz com que exista simetria ao longo das fraturas externas, tornando válida a hipótese do modelo de pressão contínua. Ao final desta análise, pôde-se concluir que o TPGA com MT foi capaz de captar a descontinuidade na barreira no sentido normal nas regiões próxima ao contorno, porém, sem assimilar as pressões no contorno.

Os resultados apresentados nesse tópico foram semelhantes aos obtidos por Martin, Jaffré e Roberts (2005) e por Ahmed, Edwards, *et al.* (2015) para o LDFM.

A partir dos resultados obtidos é possível concluir que o TPGA com MT se limita aos casos em que fluxo tangencial na fratura não é expressivo, além de estar restrito ao uso de malhas estruturadas e com tensores ortotrópicos; o modelo de pressão contínua é válido para pequenas aberturas, elevadas permeabilidades tangenciais ou em casos específicos cuja pressão seja simétrica em relação à fratura. O modelo de pressão descontínua tem validade mais ampla, podendo ser utilizado em todas as condições supracitadas, se limitando apenas, assim como

todos os demais, a respeitar o limite quanto a razão de aspecto no qual a fratura possa ser considerada unidimensional, discutido no Problema 4.1.

### 4.3 VERIFICAÇÃO DO MÉTODO IMPLÍCITO NA DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Este tópico tem como objetivo comparar os resultados obtidos com o SEQ aos obtidos com o tradicional IMPES para dois casos distintos, com diferentes refinamentos de malha. Avaliou-se também a eficácia dos dois métodos em relação ao custo computacional onde, para a realização das simulações foi utilizado um processador Intel® Core™ i3-4160 3,60GHz com 3,87GB de memória RAM disponível, com Windows 10 Pro® 64 bits e Matlab® 2014a.

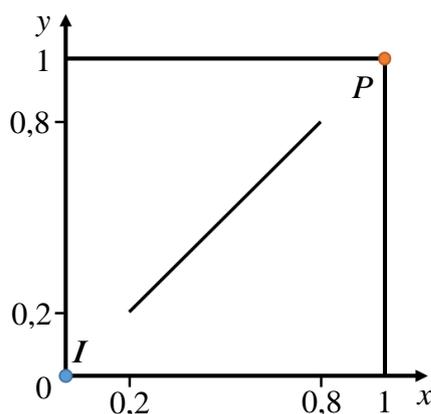
Para os problemas transientes foi utilizado uma metodologia usual na engenharia de reservatórios, que consiste em simular campos de petróleo compostos por um poço injetor central, circundado por quatro produtores, impondo condições de fluxo nulo nos contornos e restringindo o domínio a um quarto do problema original devido à simetria do problema, este modelo é denominado de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços.

Para o cálculo do passo de tempo pela Eq. (3.156), foi adotado um número de Courant igual 0,5, tanto no IMPES quanto no SEQ, sendo que no segundo foram considerados apenas os passos de tempo calculados para os elementos da matriz rochosa. Como tolerância do método de Newton, foi adotado  $TOL = 10^{-10}$ .

#### 4.3.1 $\frac{1}{4}$ de cinco poços com fratura diagonal

A Figura 29 apresenta o domínio do problema, composto por uma fratura diagonal, com permeabilidade elevada, e os poços dispostos conforme um exemplo de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços, sendo um poço injetor ( $I$ ) e um poço produtor ( $P$ ):

Figura 29 – Domínios do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal – Problema 4.3.1.



Tem-se a seguir as propriedades da matriz rochosa, que possui um tensor de permeabilidade anisotrópico:

$$\tilde{K}_m = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\phi_m = 0,2 \quad (4.21)$$

e para as fraturas:

$$\phi_{\mathcal{F}} = 1 \quad (4.22)$$

$$a_{\mathcal{F}} = 10^{-3} \quad (4.23)$$

$$K_n^{\mathcal{F}} = K_{tg}^{\mathcal{F}} = 10^4 \quad (4.24)$$

Quanto aos fluidos, foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$S_{wi} = S_{or} = 0 \quad (4.25)$$

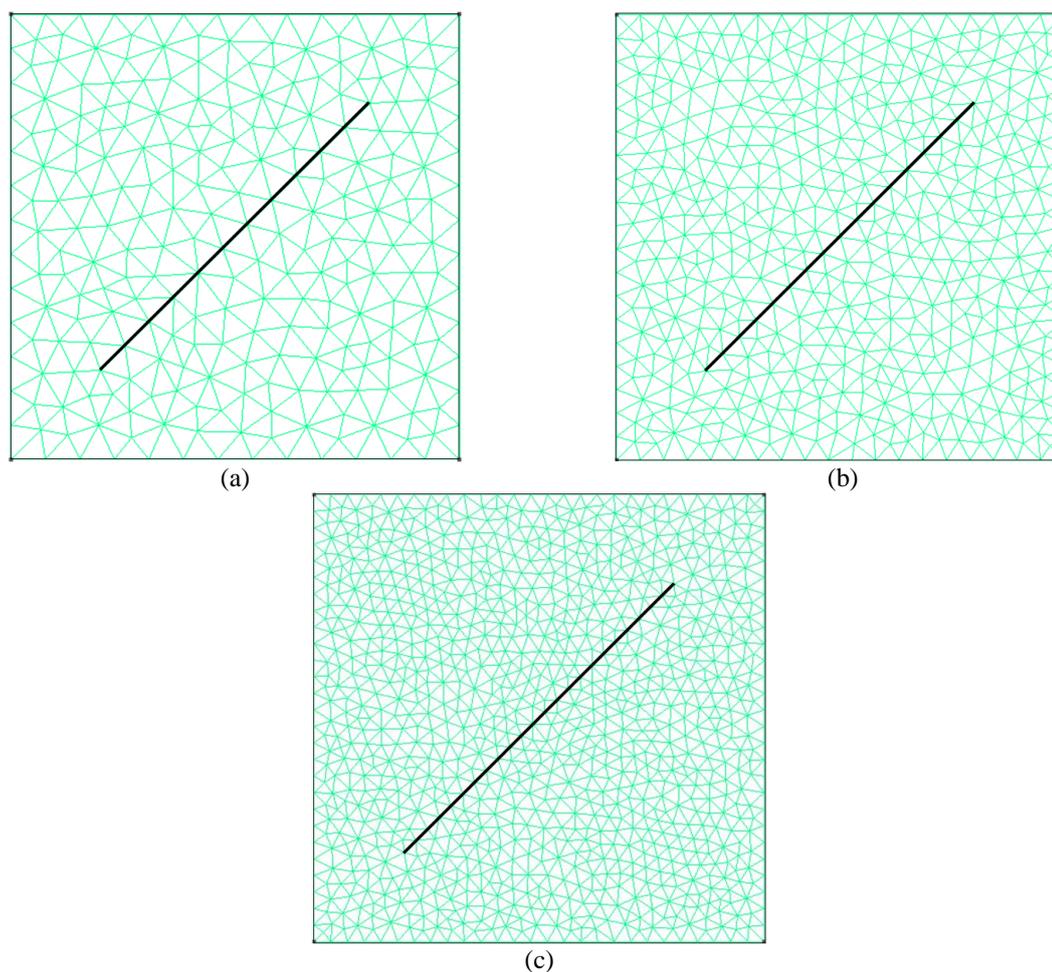
$$\mu_w = 1 \quad (4.26)$$

$$\mu_o = 0,45 \quad (4.27)$$

Como condições iniciais e de contorno, foram impostas condições de fluxo nulo  $g_N = 0$  nos contornos, pressão  $g_P = 0$  no poço produtor, pressão  $g_I = 1$  com saturação de água  $\bar{S}_w = 1$  no poço injetor e o reservatório está inicialmente saturado por óleo  $\bar{S}_w^0 = 0$ .

Utilizou-se o modelo de pressão descontínua, no qual a simulação teve como tempo máximo 1,0 Volume Poroso Injetado (VPI), onde VPI consiste numa medida de tempo adimensional, sendo 1 VPI equivalente ao tempo em que foi injetado um volume igual ao volume poroso efetivo do reservatório. Foram utilizados três níveis de refinamentos de malhas não-estruturadas, conforme apresentando na Figura 30.

Figura 30 – Malhas do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal - Problema 4.3.1: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3.



A Tabela 3 mostra o número de volumes de controle na matriz (triangulares) e na fratura (arestas), assim como o total para cada uma das malhas:

Tabela 3 – Número de volumes de controle das malhas do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal - Problema 4.3.1.

| Malha   | Volumes de controle na matriz | Volumes de controle na fratura | Total de Volumes de Controle |
|---------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Malha 1 | 454                           | 11                             | 465                          |
| Malha 2 | 944                           | 16                             | 960                          |
| Malha 3 | 1.910                         | 23                             | 1.933                        |

A Tabela 4 apresenta o número de passos de tempo, o custo computacional através dos tempos de simulação, e a razão entre o tempo de simulação no caso SEQ pelo tempo de simulação do caso IMPES, para cada uma das malhas utilizadas.

Tabela 4 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) - Custo computacional.

|         |       | Passos de tempo | Tempo de simulação (s) | Razão no tempo de simulação |
|---------|-------|-----------------|------------------------|-----------------------------|
| Malha 1 | IMPES | 14.136          | 8.309                  | -                           |
|         | SEQ   | 784             | 509                    | 16,32                       |
| Malha 2 | IMPES | 24.939          | 24.483                 | -                           |
|         | SEQ   | 1.725           | 2.462                  | 9,94                        |
| Malha 3 | IMPES | 39.533          | 76.036                 | -                           |
|         | SEQ   | 4.449           | 17.785                 | 4,27                        |

A velocidade elevada na fratura acarretou numa alta restrição no passo de tempo para o método IMPES, enquanto o método sequencial implícito, ao desconsiderar a restrição na fratura, resolveu esse mesmo problema com um custo computacional de até 16 vezes menor que o método explícito. Observa-se também que esse ganho se torna menos expressivo com o refinamento da malha.

Uma possível alternativa para otimizar o custo computacional obtido com o método SEQ, foi proposta por Hoteit e Firoozabadi (2008), que consiste numa formulação adaptativa, onde para as fraturas com altas velocidades é utilizada uma formulação implícita, enquanto no restante do domínio se utiliza a formulação explícita, não testada no presente trabalho.

Na Figura 31 são apresentados os campos de pressões em 0,50 VPI; na Figura 32 os campos de saturação de água para 0,25 VPI; na Figura 33 os campos de saturação de água para 0,50 VPI e na Figura 34 os campos de saturação de água para 1,00 VPI.

Figura 31 – Campos de pressão do problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal em 0,50VPI- Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

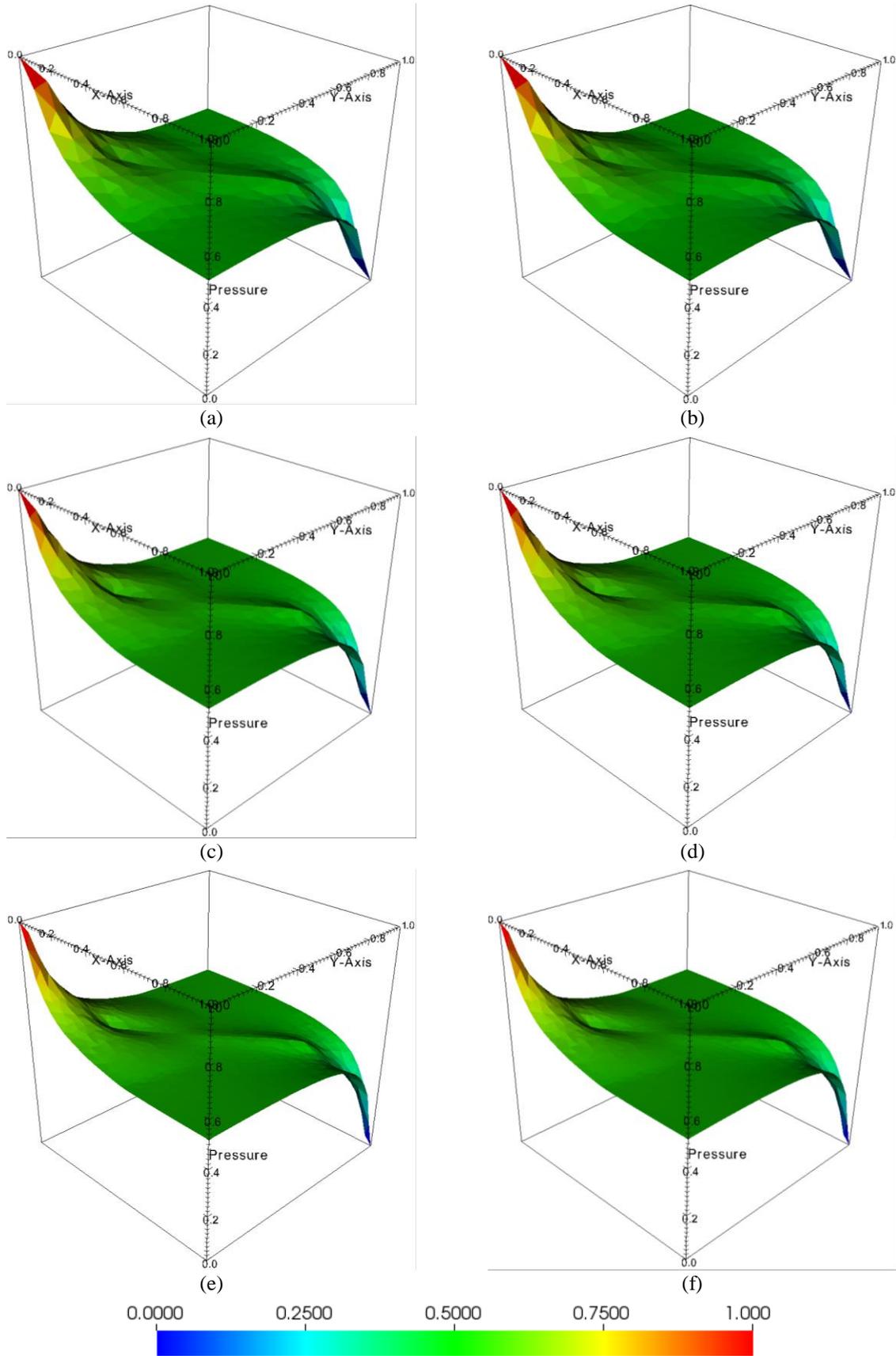


Figura 32 – Campos de saturação de água do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal em 0,25 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

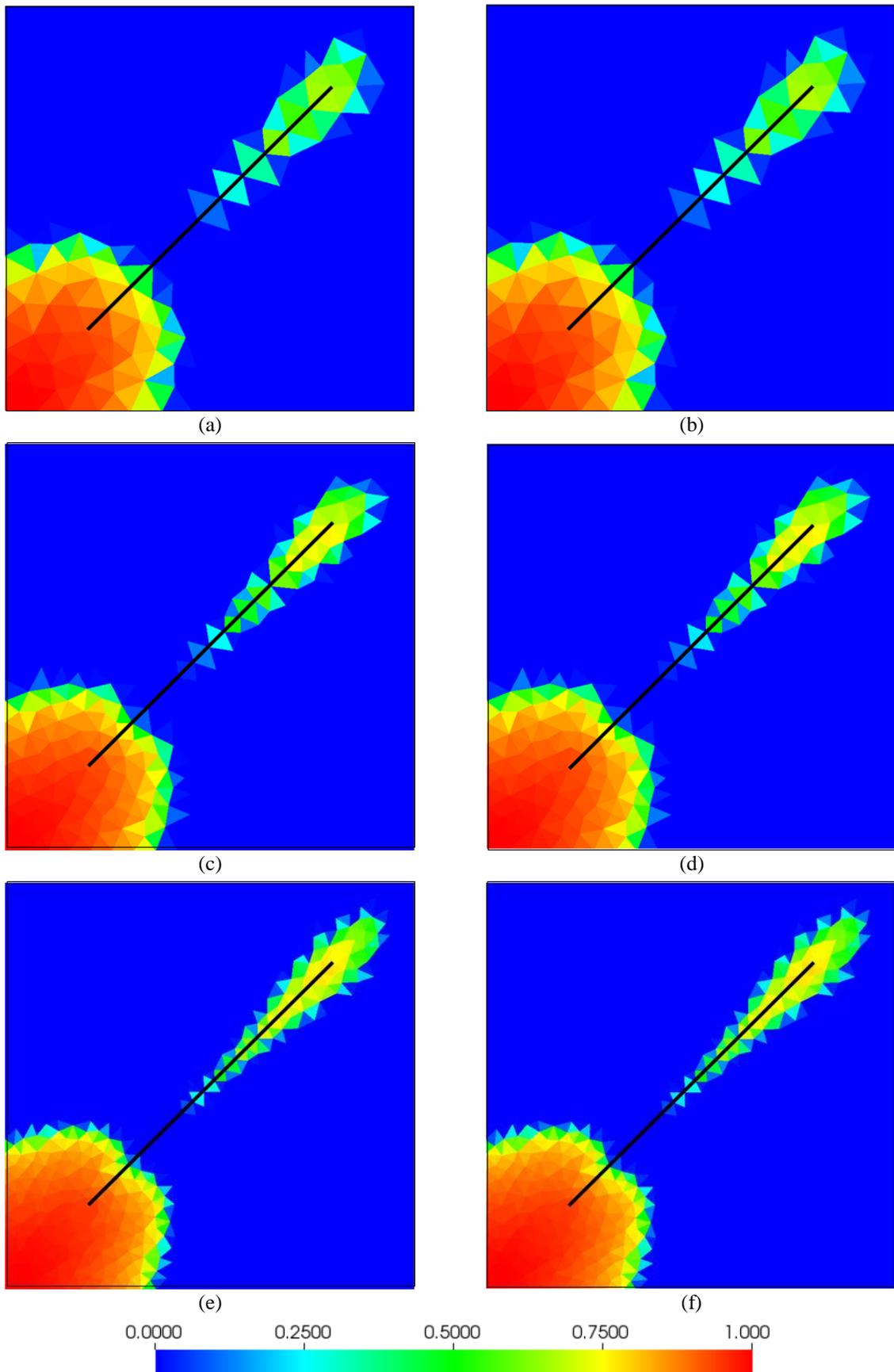


Figura 33 – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal em 0,50 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

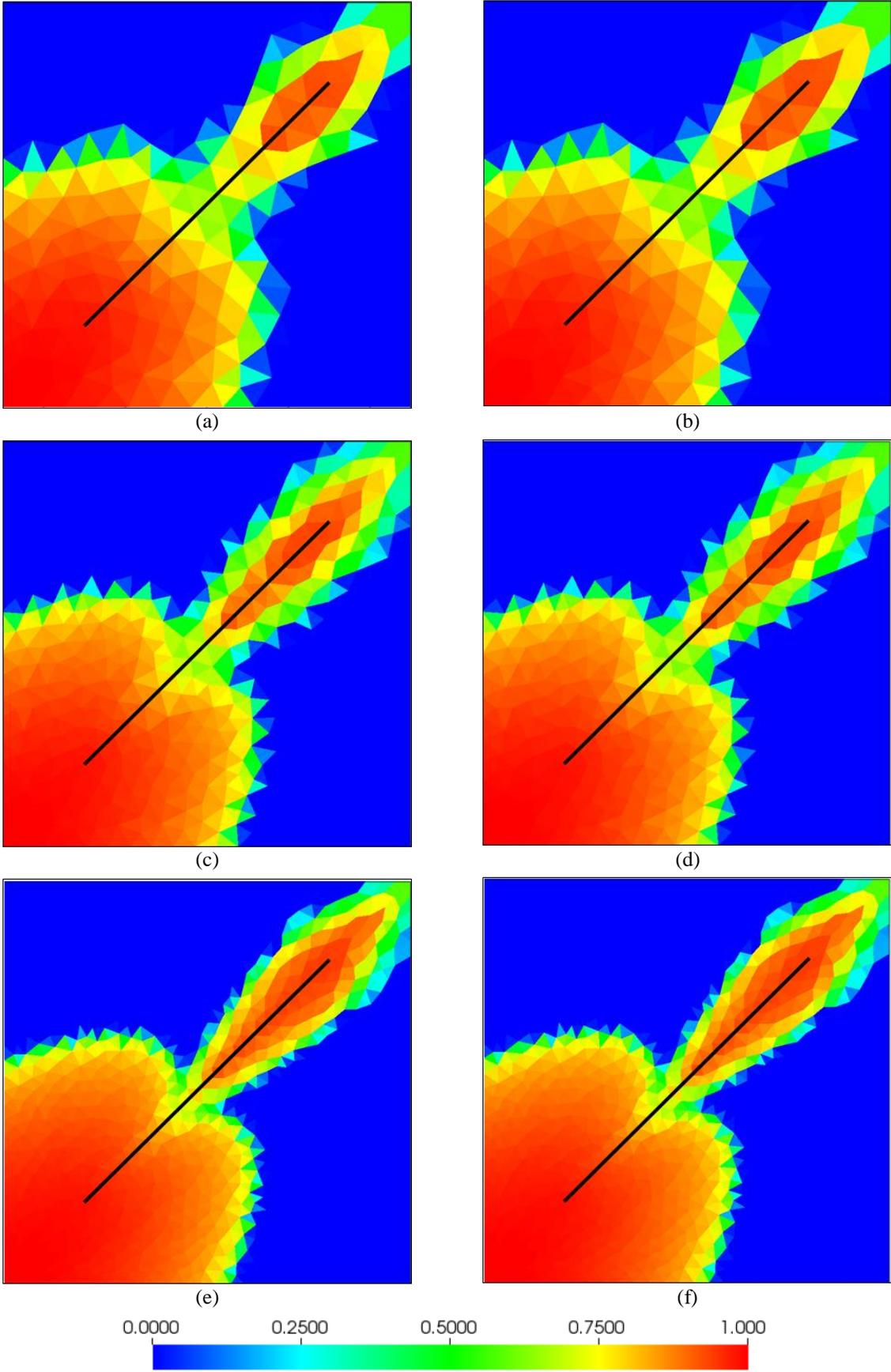
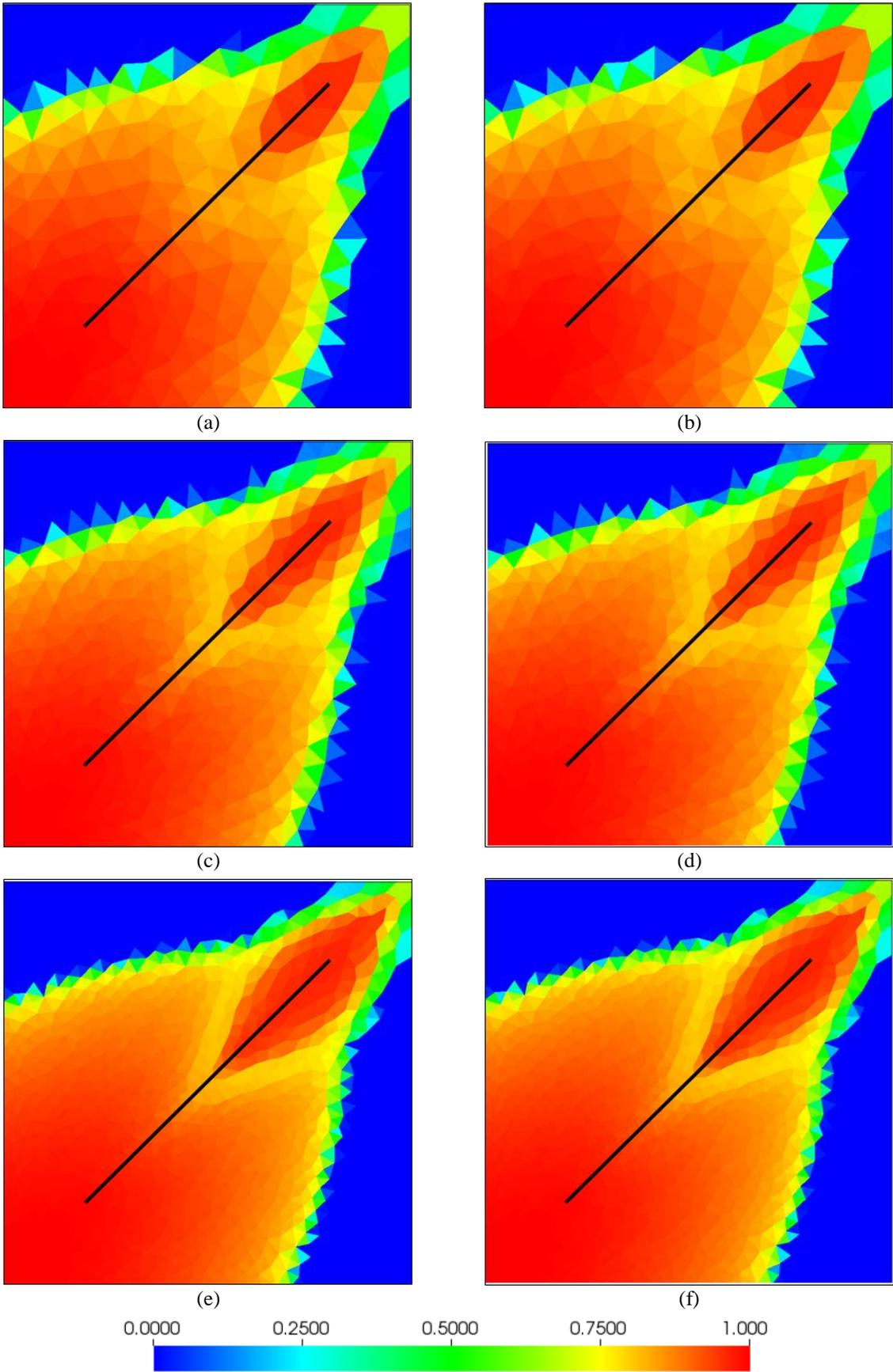


Figura 34 – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com fratura diagonal em 1 VPI - Problema 4.3.1: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.



Verifica-se que em todos os resultados apresentados não houveram diferenças significativas entre o método IMPES e o SEQ, nos quais a frente de água ao atingir a fratura, percola rapidamente na mesma, cruzando o reservatório e atingindo o poço produtor. Entretanto, uma análise mais detalhada pode ser feita a partir das curvas de produção acumulada de óleo, Figura 35 (a), e produção de água, Figura 35 (b), que indica o momento da irrupção de água (*water breakthrough*). A Figura 36 apresenta uma ampliação dessas curvas.

Figura 35 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.

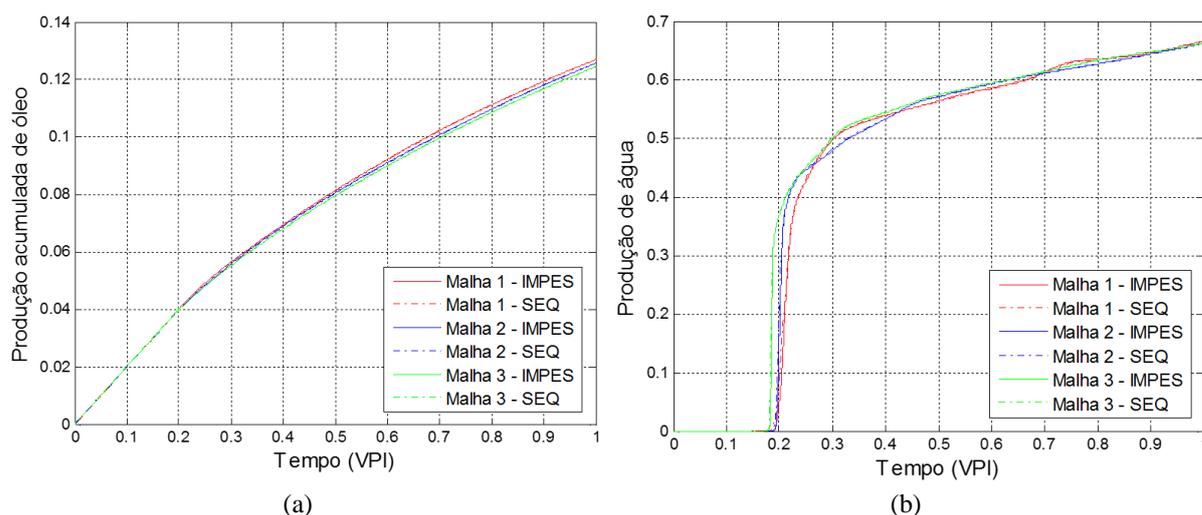
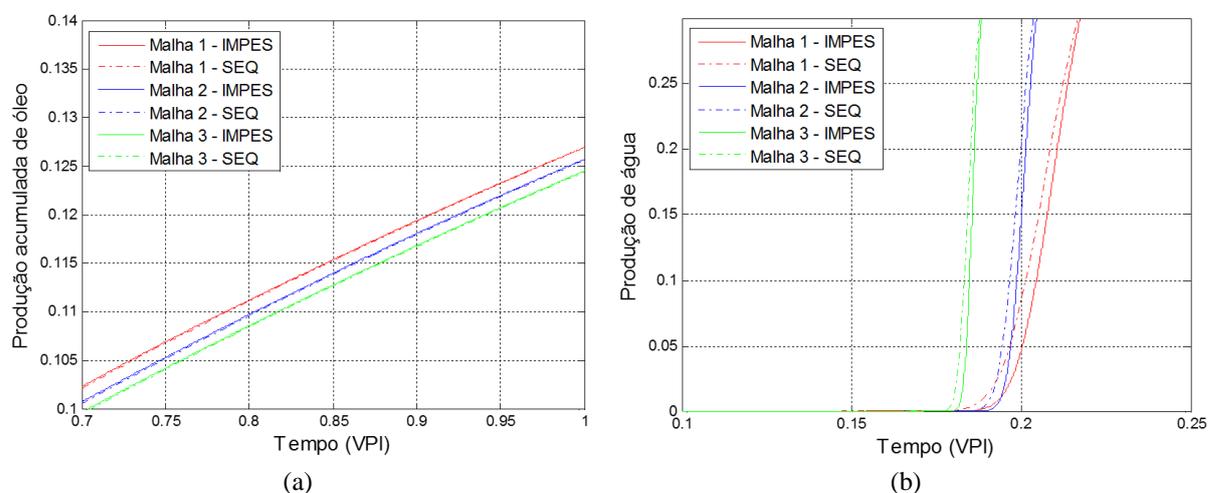


Figura 36 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água



As curvas de produção de óleo estão praticamente sobrepostas, indicando que o método SEQ foi capaz de produzir resultados semelhantes ao método IMPES, mas com um custo computacional muito inferior. A Tabela 5 evidencia os baixos erros obtidos na produção de óleo

acumulado, utilizando como referência a solução IMPES para a malha mais refinada (Malha 3).

Tabela 5 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado.

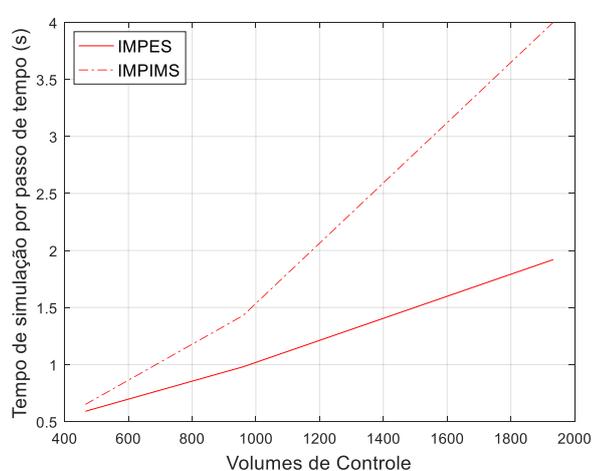
|         |       | Erro no óleo<br>acumulado (%) |
|---------|-------|-------------------------------|
| Malha 1 | IMPES | 1,95                          |
|         | SEQ   | 1,95                          |
| Malha 2 | IMPES | 0,96                          |
|         | SEQ   | 0,91                          |
| Malha 3 | IMPES | -                             |
|         | SEQ   | 0,07                          |

Observa-se que, conforme esperado, os erros reduzem com o refinamento da malha, e que o método SEQ apresentou erros similares ao IMPES para uma mesma malha.

Quanto à irrupção de água, conforme esperado, ocorreu uma pequena difusão numérica para o método SEQ, mas não muito significativa e muito inferior aos efeitos a variação obtida com as diferentes malhas.

Para finalizar este problema, a Figura 37 apresenta o tempo de simulação médio para cada passo de tempo, em função do número de volumes de controle:

Figura 37 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal (Problema 4.3.1) – Tempo de simulação por passo de tempo em função do refinamento.



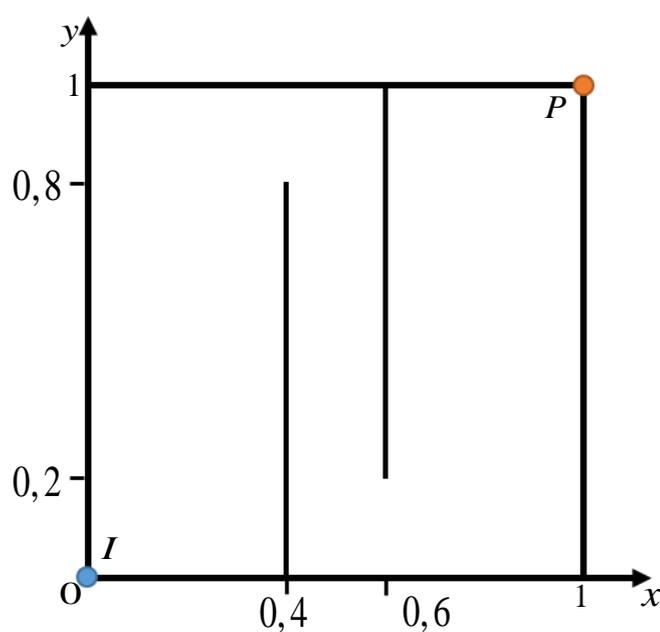
A Figura 37 evidencia que a redução do custo computacional é devida à redução do número de passos de tempo necessários ao método SEQ, pois o custo por passo de tempo é superior para a formulação sequencial implícita, o que era esperado, devido à necessidade de

solução de um número maior de sistemas de equação por passo de tempo. Também pode-se observar, que o custo computacional por passo de tempo cresce de forma mais suave para o método IMPES, quase que linearmente, justificando a redução na variação do tempo de simulação com o refinamento da malha, apresentado na Tabela 4.

### 4.3.2 ¼ de cinco poços com barreiras verticais

A Figura 38 apresenta o domínio do problema, similar ao do problema anterior, mas composto por duas barreiras verticais.

Figura 38 – Domínios do problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2)



Tem-se a seguir as propriedades da matriz rochosa, que possui um tensor de permeabilidade anisotrópico:

$$\tilde{K}_m = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\phi_m = 0,2 \quad (4.29)$$

e para as fraturas:

$$\phi_f = 1 \quad (4.30)$$

$$a_{\mathcal{F}} = 10^{-3} \quad (4.31)$$

$$K_n^{\mathcal{F}} = K_{t_g}^{\mathcal{F}} = 10^{-10} \quad (4.32)$$

Quanto aos fluidos, foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$S_{wi} = S_{or} = 0 \quad (4.33)$$

$$\mu_w = 1 \quad (4.34)$$

$$\mu_o = 0,45 \quad (4.35)$$

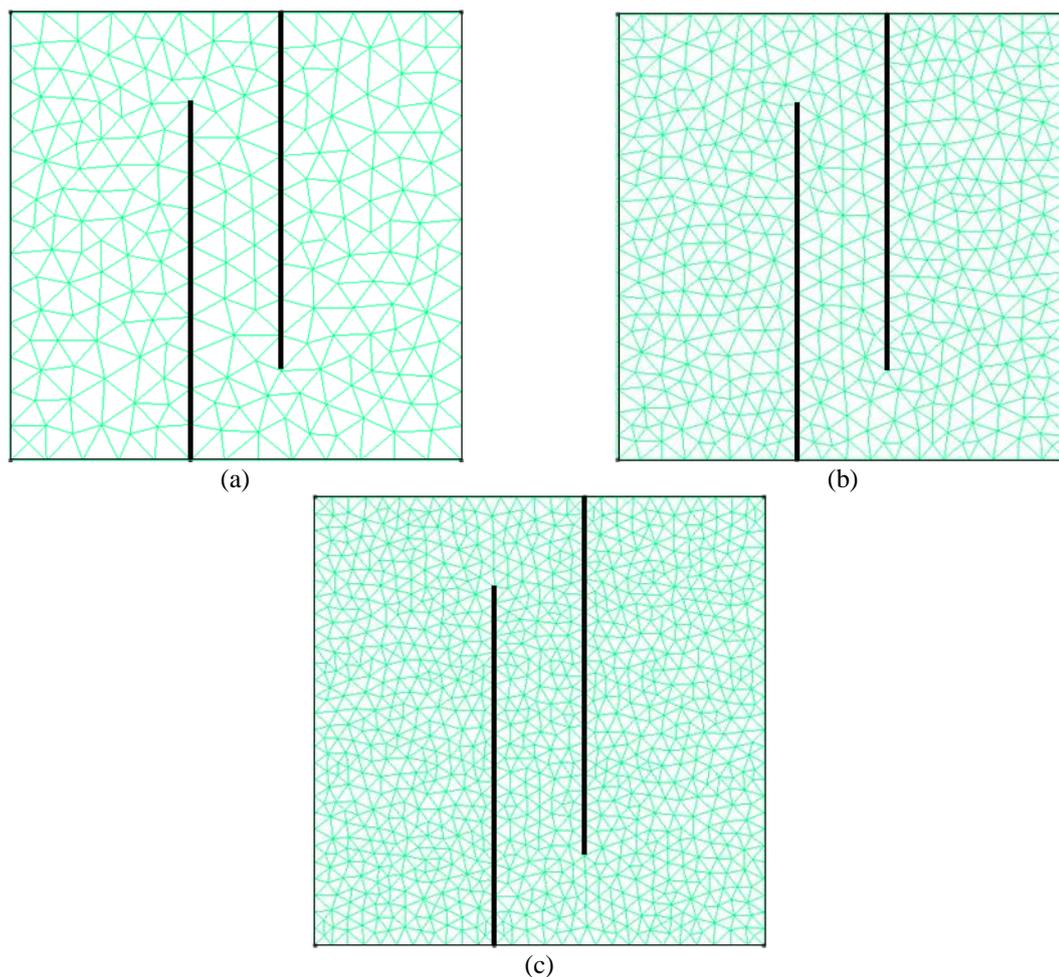
Tem-se as mesmas condições de contorno do problema anterior: fluxo nulo  $g_N = 0$  nos contornos, pressão  $g_p = 0$  no poço produtor, pressão  $g_I = 1$  com saturação de água  $\bar{S}_w = 1$  no poço injetor e o reservatório está inicialmente saturado por óleo  $\bar{S}_w^0 = 0$ .

Utilizou-se o modelo de pressão descontínua, no qual a simulação teve como tempo máximo 1 Volume Poroso Injetado (VPI). Foram utilizados três níveis de refinamentos de malha não-estruturadas, conforme apresentando na Figura 39. A Tabela 6 mostra o número de volumes de controle na matriz (triangulares) e na fratura (arestas), assim como o total para cada uma das malhas:

Tabela 6 – Número de volumes de controle das malhas do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais - Problema 4.3.2.

| Malha   | Volumes de controle na matriz | Volumes de controle na fratura | Total de Volumes de Controle |
|---------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Malha 1 | 434                           | 20                             | 444                          |
| Malha 2 | 950                           | 30                             | 980                          |
| Malha 3 | 1.904                         | 44                             | 1.948                        |

Figura 39 – Malhas do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2): (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3.



Na Figura 40 são apresentados os campos de pressões em 0,50 VPI; na Figura 41 os campos de saturação de água para 0,25 VPI; na Figura 42 os campos de saturação de água para 0,50 VPI e na Figura 43 os campos de saturação de água para 1,00 VPI.

Na Figura 40 é possível observar claramente a descontinuidade da pressão ocasionada pelas barreiras verticais, que ficam mais detalhas com o refinamento da malha.

Novamente não houve diferenças significativas entre o método IMPES e o SEQ, onde, neste caso, a frente de saturação de água avança contornando as barreiras, retardando a chegada da frente da água ao poço produtor.

Figura 40 – Campos de pressão do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2): (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

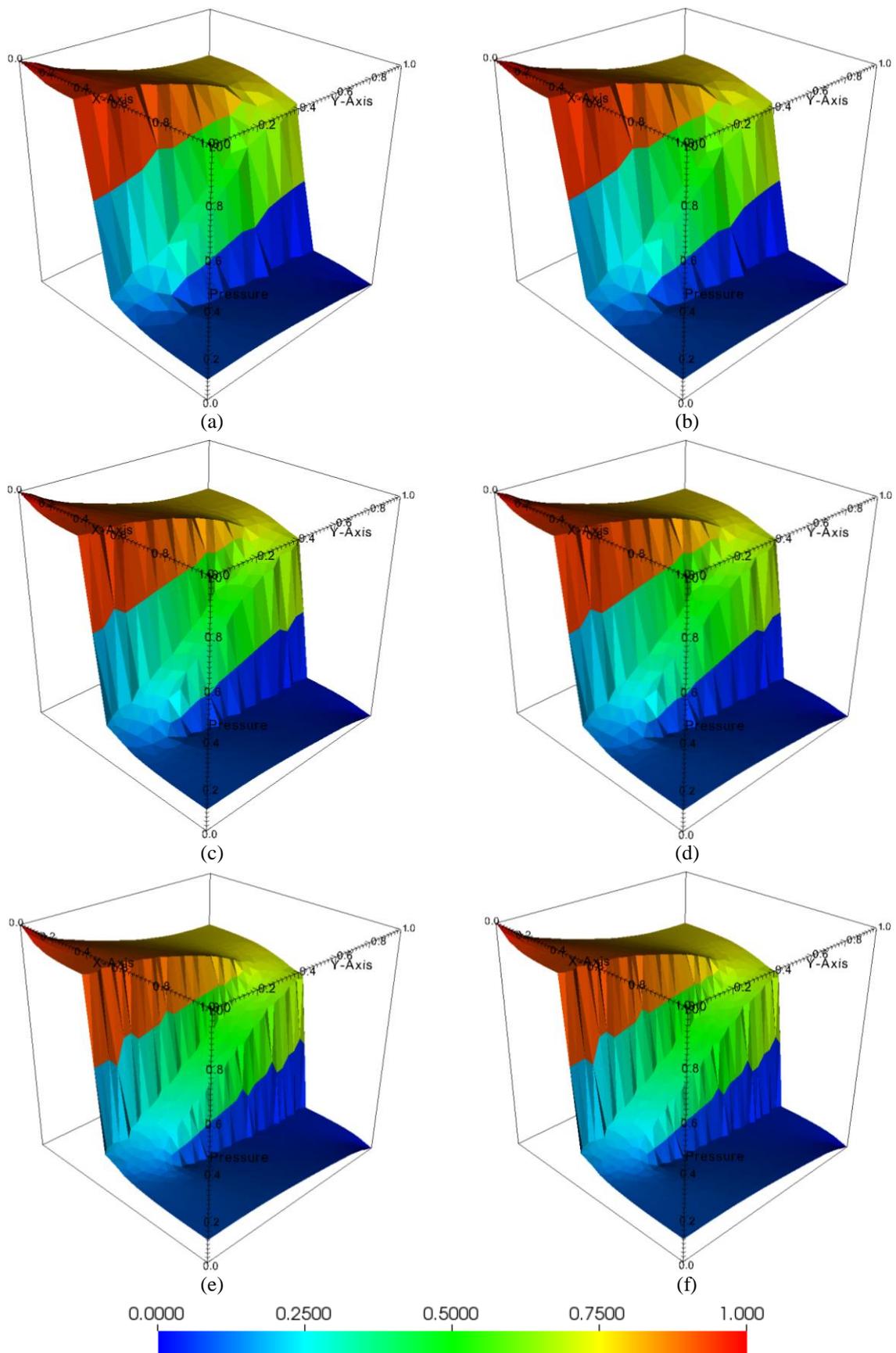


Figura 41 – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com barreiras em 0,25 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

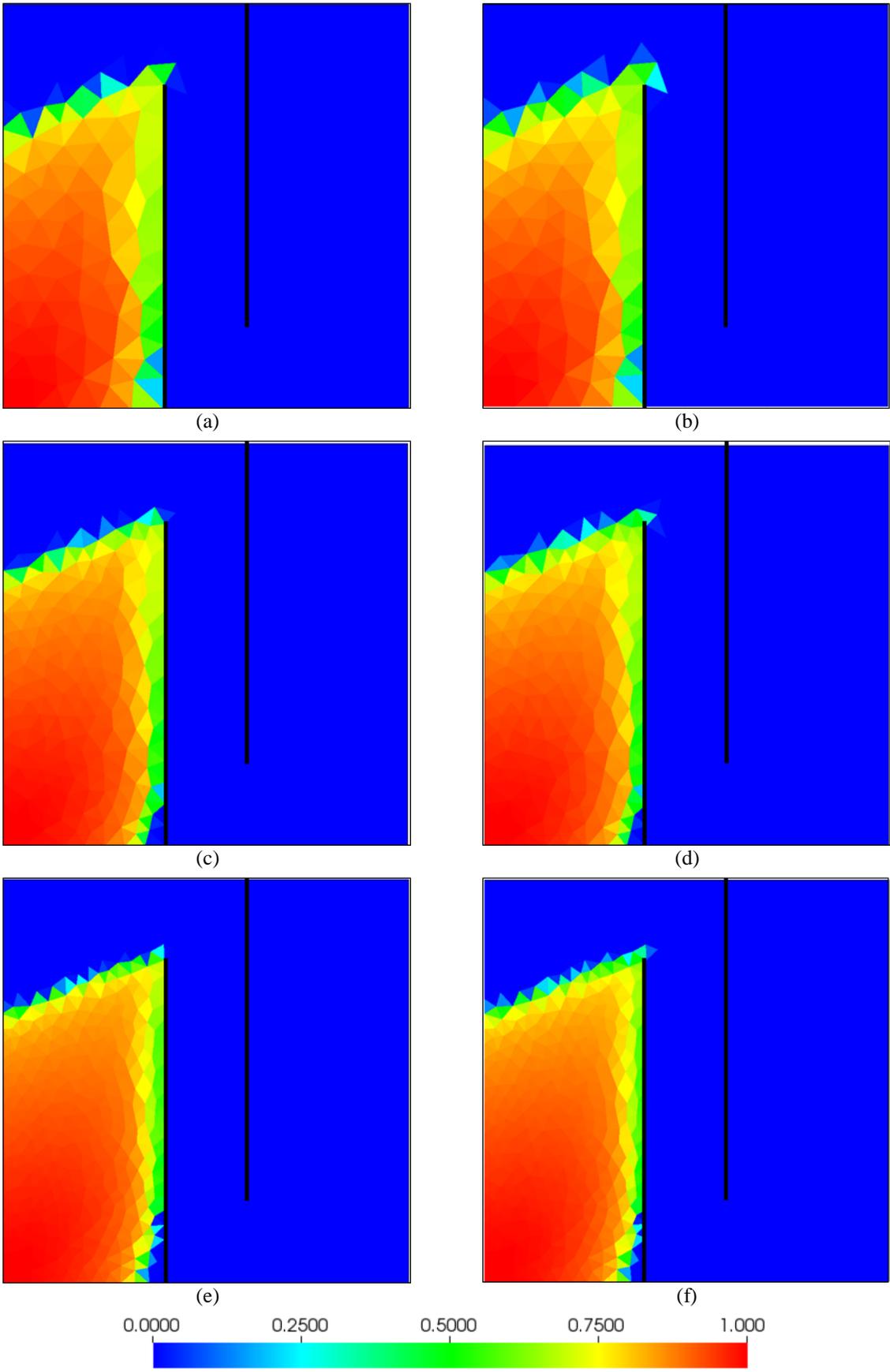


Figura 42 – Campos de saturação de água do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais em 0,50 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.

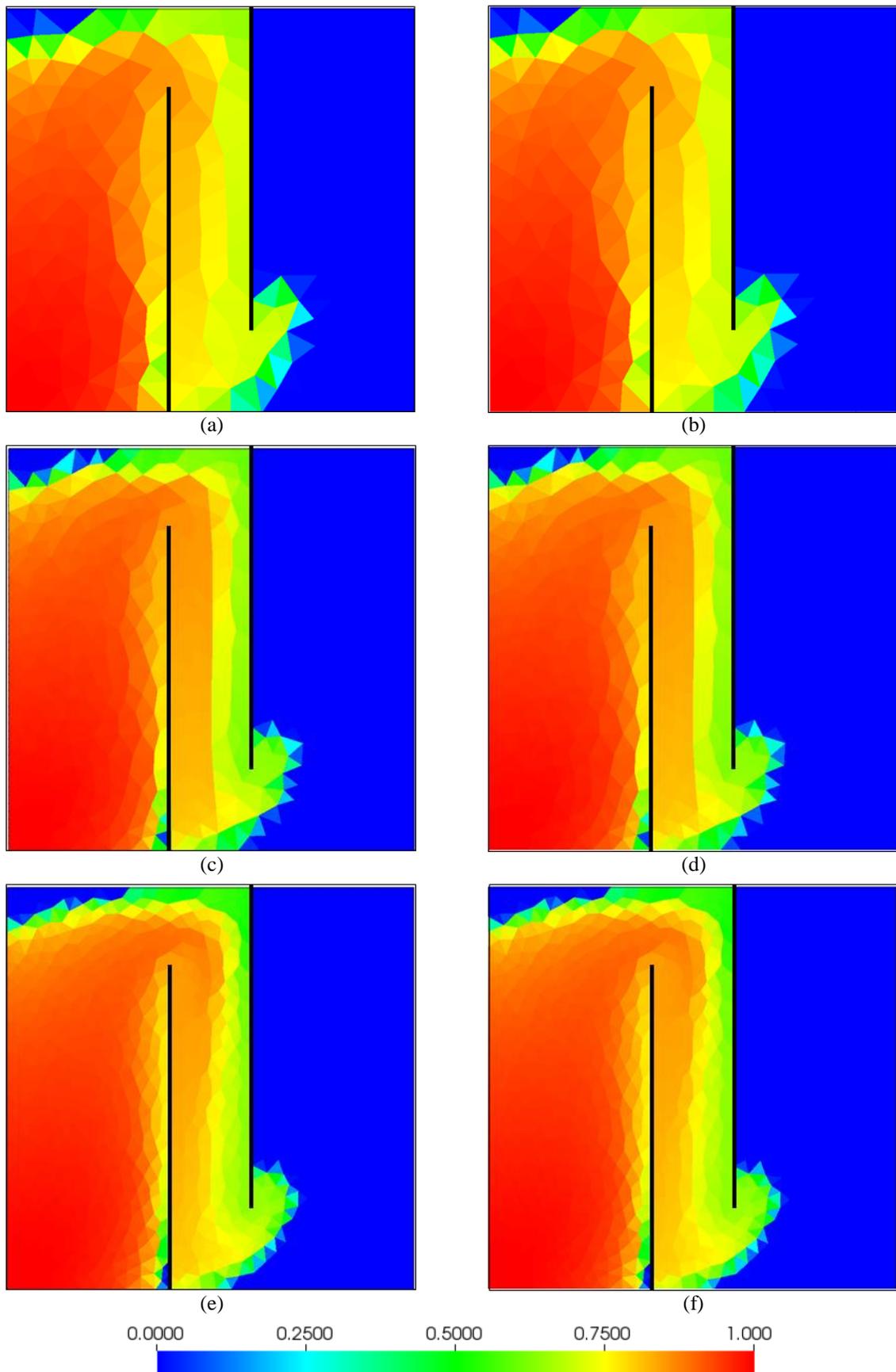
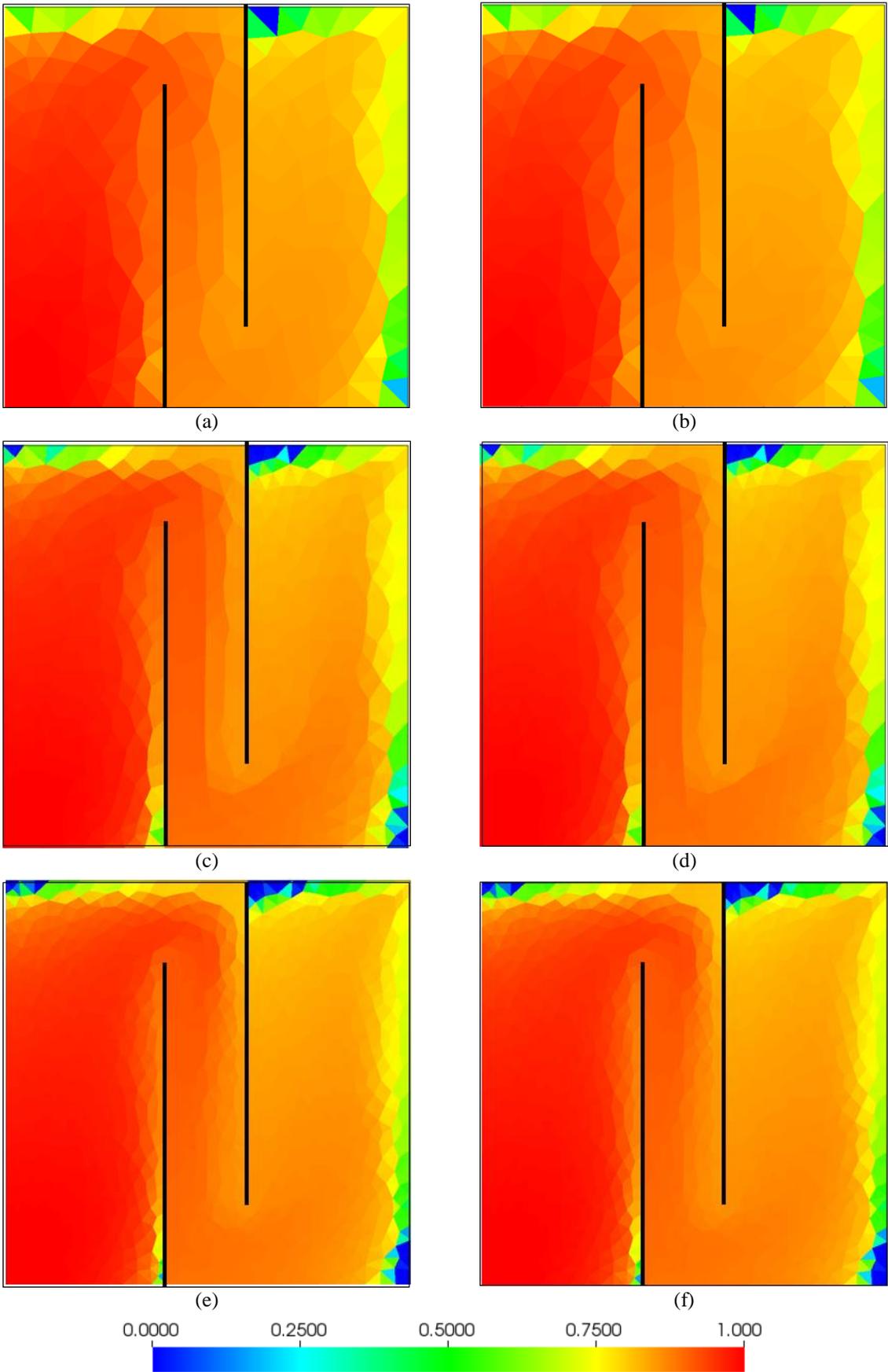


Figura 43 – Campos de saturação de água do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais em 1 VPI - Problema 4.3.2: (a) Malha 1 - IMPES; (b) Malha 1 - SEQ; (c) Malha 2 - IMPES; (d) Malha 2 - SEQ; (e) Malha 3 - IMPES; (f) Malha 3 - SEQ.



A Figura 44 (a) apresenta a curva de produção acumulada de óleo, enquanto a Figura 44 (b) a produção de água. A Figura 45 corresponde a uma ampliação das curvas supracitadas.

Figura 44 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.

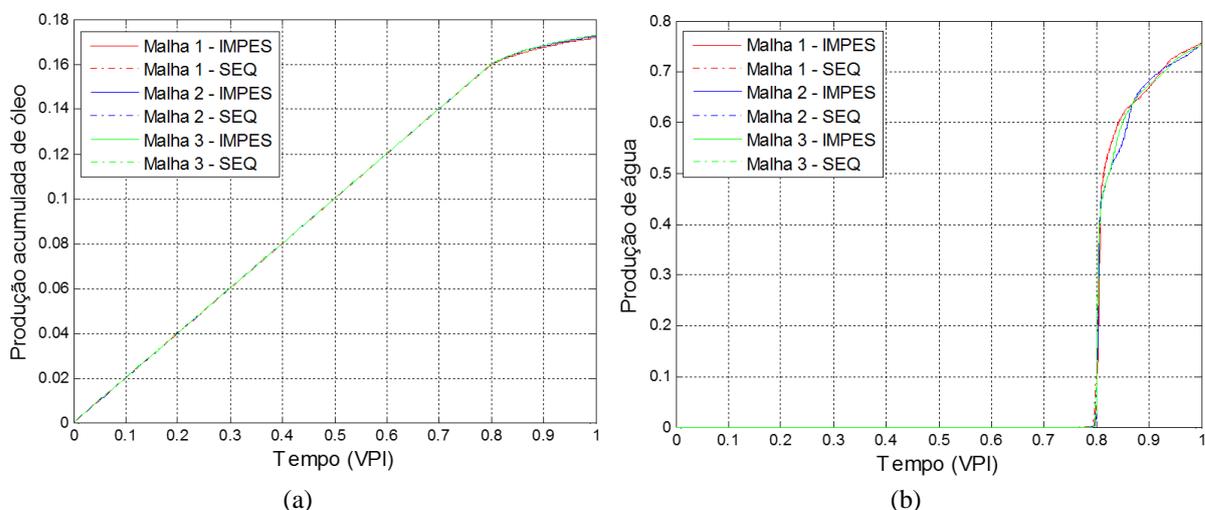
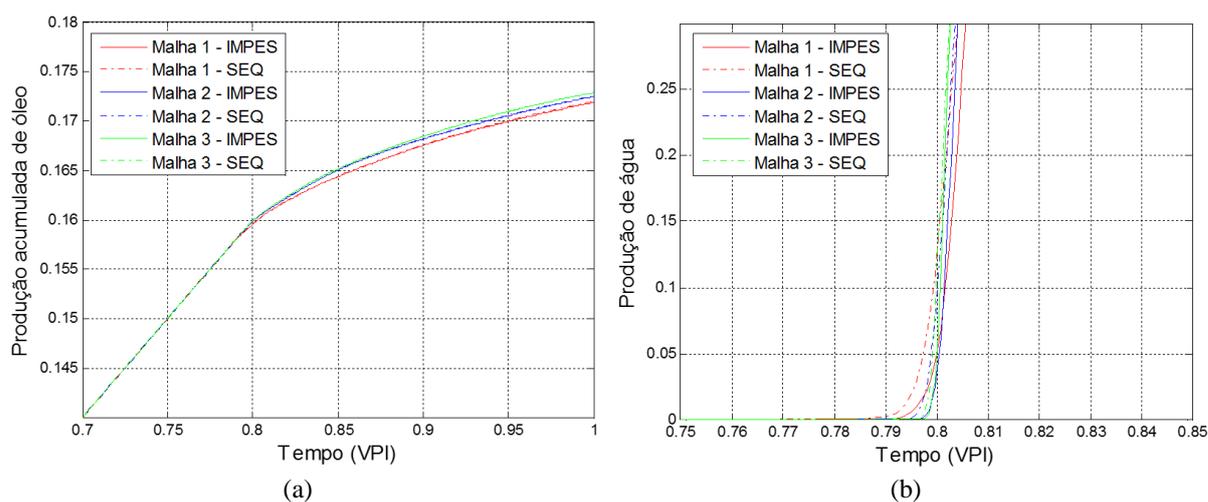


Figura 45 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água



Tem-se que as curvas de produção de óleo também se assemelham, indicando que o método SEQ foi capaz de reproduzir os resultados do método IMPES, entretanto, no presente caso com um custo computacional superior. A Tabela 7 evidência os baixos erros obtidos na produção de óleo acumulado, utilizando como referência a solução IMPES para a malha mais refinada (Malha 3).

Tabela 7 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) - Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado.

|         |       | Erro no óleo<br>acumulado (%) |
|---------|-------|-------------------------------|
| Malha 1 | IMPES | 0,58                          |
|         | SEQ   | 0,76                          |
| Malha 2 | IMPES | 0,24                          |
|         | SEQ   | 0,20                          |
| Malha 3 | IMPES | -                             |
|         | SEQ   | 0,00                          |

Observa-se que, conforme esperado, os erros reduzem com o refinamento da malha, e que o método SEQ apresentou erros similares ao IMPES para uma mesma malha.

Quanto à irrupção de água, também se verificou os efeitos de difusão numérica referentes ao método SEQ, mas menos expressivos que no caso da fratura diagonal.

Na Tabela 8 tem-se o número de passos de tempo, o custo computacional mensurado pelo tempo de simulação, e a razão entre o tempo de simulação no caso SEQ pelo tempo de simulação do caso IMPES, para cada uma das malhas utilizadas.

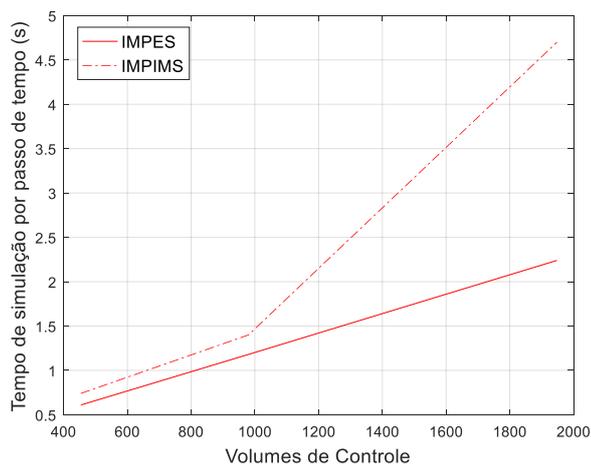
Tabela 8 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) - Custo computacional.

|         |       | Passos de<br>tempo | Tempo de<br>simulação (s) | Razão no tempo de<br>simulação |
|---------|-------|--------------------|---------------------------|--------------------------------|
| Malha 1 | IMPES | 750                | 460                       | -                              |
|         | SEQ   | 763                | 565                       | 0,81                           |
| Malha 2 | IMPES | 1.423              | 1.679                     | -                              |
|         | SEQ   | 1.444              | 2.028                     | 0,83                           |
| Malha 3 | IMPES | 2.593              | 5.800                     | -                              |
|         | SEQ   | 2.614              | 12.287                    | 0,47                           |

Neste caso, as baixas velocidades na fratura não influenciaram no passo de tempo máximo, com isso o método SEQ não foi capaz de superar o IMPES, apresentando um custo computacional até duas vezes superior.

A Figura 46 apresenta o tempo de simulação médio para cada passo de tempo em função do número de volumes de controle, o qual possui um resultado similar ao problema anterior, indicando que o tempo de simulação por passo de tempo possui uma grande dependência da dimensão do problema, e não de sua configuração.

Figura 46 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) – Tempo de simulação por passo de tempo em função do refinamento.



Como o número de passos de tempo foi similar para os dois métodos, tem-se que o SEQ não foi capaz de superar o IMPES em nenhum destes casos, do ponto de vista do custo computacional, e teve um resultado ainda menos eficiente com o refinamento, conforme apresentado na Tabela 8.

Entretanto, vale ressaltar que devido a maior estabilidade do método SEQ, pode-se impor um passo de tempo superior ao que foi calculado para os volumes de controle da matriz. Para exemplificar, foi realizado um teste aumentando-se o número de *Courant* no caso da Malha 2 - SEQ.

A Figura 47 apresenta as curvas de produção para  $C = \{0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0\}$ , sendo a Figura 47 (a) a curva de produção acumulada de óleo, e a Figura 47 (b) a produção de água. A Figura 48 corresponde a uma ampliação das curvas supracitadas.

Figura 47 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ: – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água.

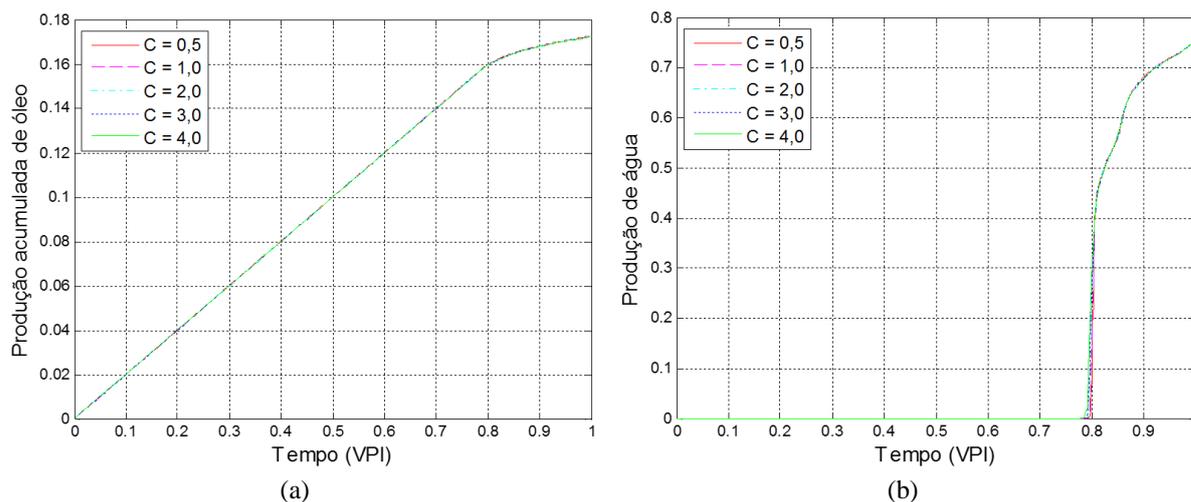
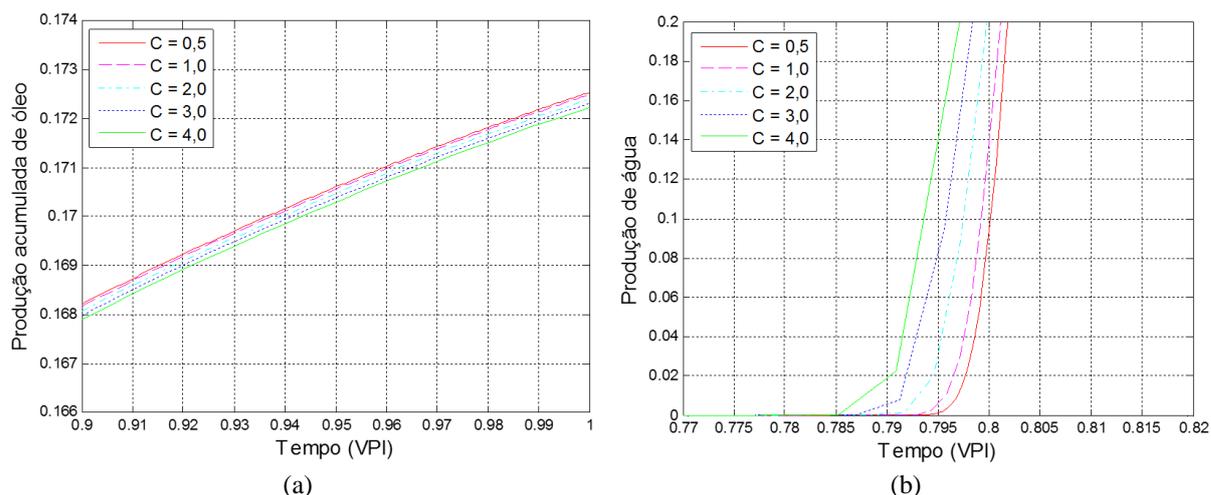


Figura 48 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ – Ampliação das curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água



Observa-se na Figura 48 (a) que não ocorreu uma variação significativa na produção acumulada de óleo, onde o erro em relação ao método IMPES com a malha mais refinada teve um pequeno aumento, conforme apresentado na Tabela 9. Na Figura 48 (b), pode-se observar que o engrossamento da malha temporal, provocado pelo aumento do número de *Courant*, ocasionou uma maior difusão numérica do método SEQ.

Tabela 9 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ- Erro na produção de óleo acumulado em relação ao IMPES mais refinado.

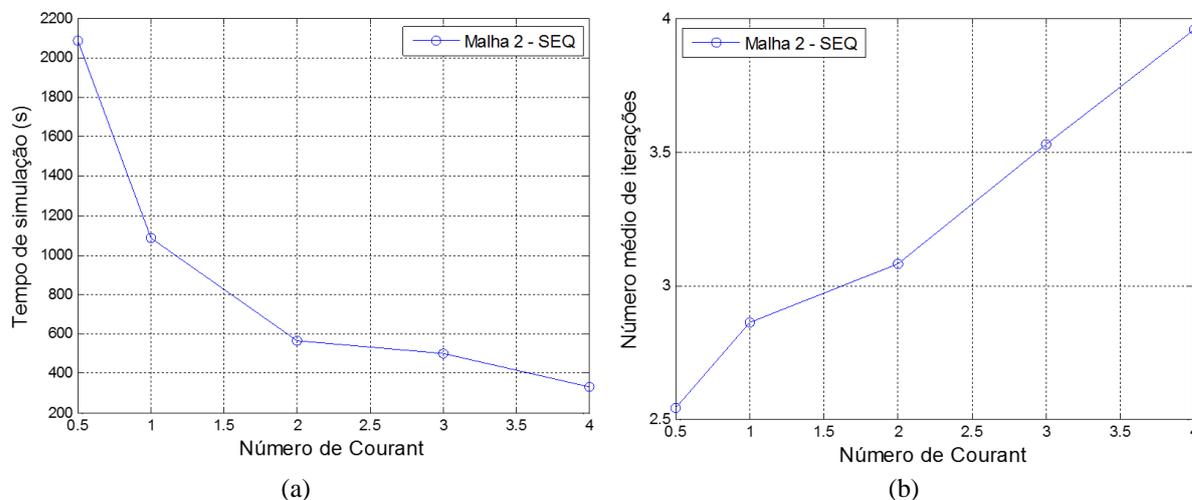
| Número de <i>Courant</i> | Erro no óleo acumulado (%) |
|--------------------------|----------------------------|
| 0,5                      | 0,20                       |
| 1,0                      | 0,23                       |
| 2,0                      | 0,28                       |
| 3,0                      | 0,33                       |
| 4,0                      | 0,38                       |

Na Figura 49 (a) é apresentado o tempo de simulação em função do número de *Courant*, enquanto na Figura 49 (b) o número médio das iterações realizadas pelo método de Newton para a solução do problema de saturação.

Neste caso, nota-se que ao duplicar o passo de tempo do método SEQ, foi possível obter um custo computacional inferior do que com método IMPES na mesma malha, entretanto, com o incremento do número de *Courant* ocorre o aumento do número de interações médio necessário ao método de Newton, sendo que para um número de *Courant* maior que 4 o método de Newton não convergiu e a simulação teve que ser interrompida. Com isso, se vê necessário novos estudos quanto ao passo de tempo a ser adotado no método SEQ, bem como alternativas

para o aperfeiçoamento do método de Newton, como por exemplo, um pré-condicionamento das matrizes envolvidas.

Figura 49 – Problema de ¼ de cinco poços com barreiras verticais (Problema 4.3.2) com a Malha 2 e método SEQ: (a) Tempo de simulação; (b) Número médio de iterações do método de Newton



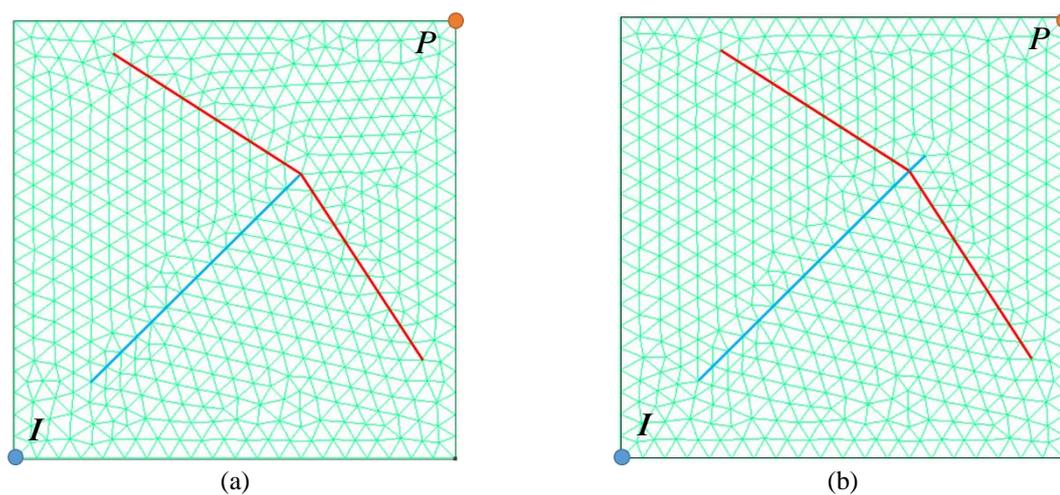
#### 4.4 FLEXIBILIDADE NA SIMULAÇÃO DE CANAIS ACOPLADOS À BARREIRAS E MÚLTIPLAS FRATURAS

Por fim, são simulados dois exemplos visando verificar a robustez do simulador para casos de canais conectados com barreiras e de múltiplas fraturas. Foi utilizado o método SEQ para a solução dos problemas desta seção, onde o passo de tempo calculado pela Eq. (3.156), considerando apenas os volumes de controle da matriz rochosa com um número de *Courant* igual a 0,5. Como tolerância do método de Newton, foi adotado  $TOL = 10^{-10}$ .

##### 4.4.1 ¼ de cinco poços com canais e barreira conectados

Neste caso, são simulados dois problemas adaptados de Hoteit e Firoozabadi (2008), com domínios de dimensão 100x100, apresentados na Figura 50 em conjunto com as malhas utilizadas, os quais são compostos por um problema de ¼ de cinco poços com canais (em azul) e barreiras (em vermelho), onde, no Caso I, Figura 50 (a), o canal intercepta as barreiras e não as cruza e, no Caso II, Figura 50 (b), o canal atravessa as barreiras.

Figura 50 – Domínios e malhas do problema de ¼ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1.



Fonte: Adaptados de Hoteit e Firoozabadi (2008).

A Tabela 10 mostra o número de volumes de controle para cada caso.

Tabela 10 – Número de volumes de controle das malhas do problema de ¼ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1.

| Malha   | Volumes de controle na matriz | Volumes de controle na fratura | Total de Volumes de Controle |
|---------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Caso I  | 1.034                         | 36                             | 1.070                        |
| Caso II | 1.022                         | 38                             | 1.060                        |

Tem-se a seguir as propriedades da matriz rochosa, para ambos os casos:

$$\tilde{K}_m = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\phi_m = 0,2 \quad (4.37)$$

e para as fraturas:

$$\phi_f = 1 \quad (4.38)$$

$$a_f = 10^{-4} \quad (4.39)$$

onde os canais, em azul, apresentam a seguinte permeabilidade:

$$K_n^f = K_{tg}^f = 8.10^2 \quad (4.40)$$

Enquanto as barreiras, em vermelho, têm a permeabilidade tendendo a zero:

$$K_n^{\mathcal{F}} = K_{tg}^{\mathcal{F}} = 10^{-23} \quad (4.41)$$

Quanto aos fluidos, foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$S_{wi} = S_{or} = 0 \quad (4.42)$$

$$\mu_w = \mu_o = 1 \quad (4.43)$$

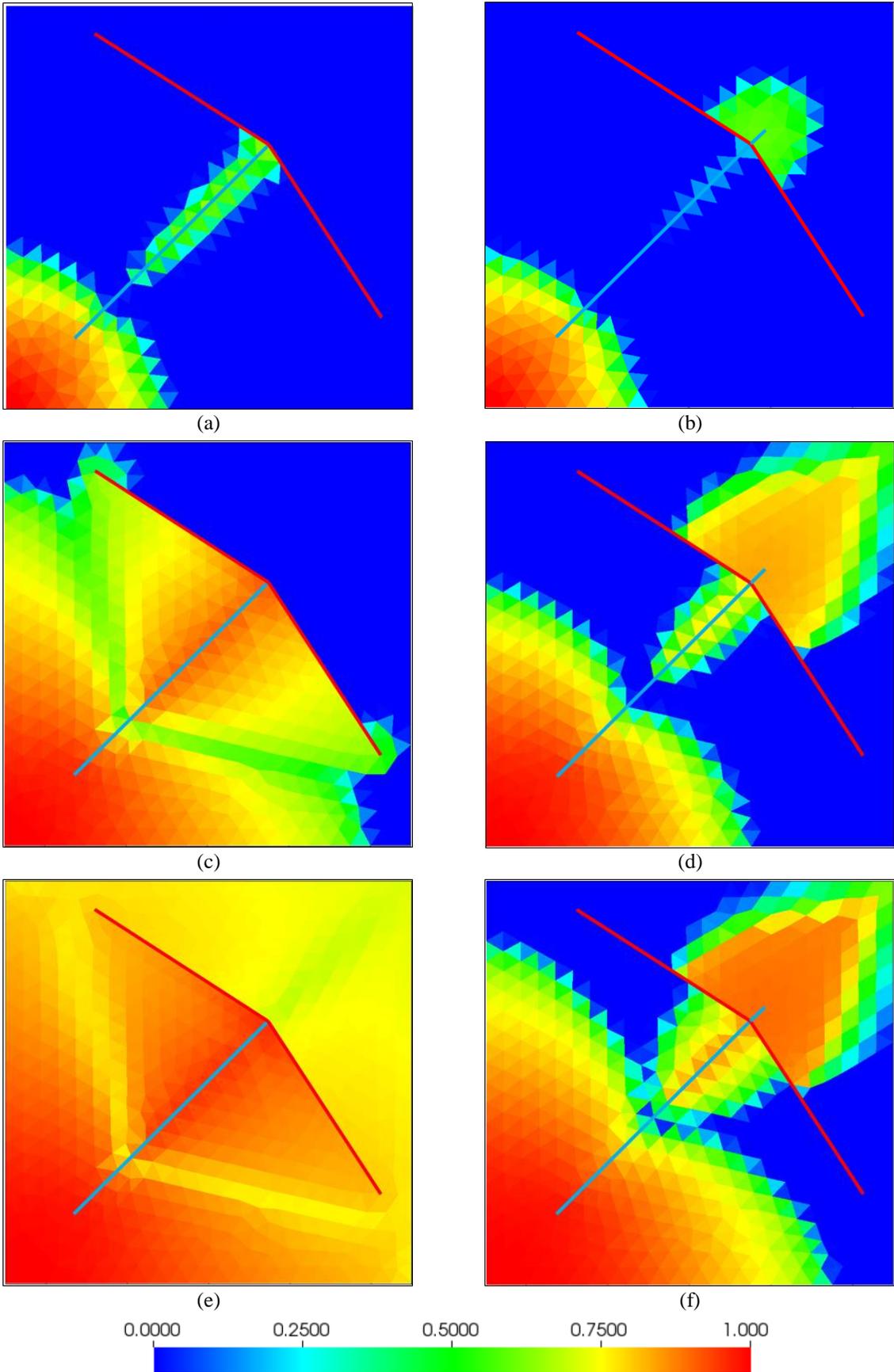
Como condições iniciais e de contorno, foram impostos fluxo nulo  $g_N = 0$  nos contornos, pressão  $g_P = 0$  no poço produtor, pressão  $g_I = 1$  com saturação de água  $\bar{S}_w = 1$  no poço injetor e o reservatório está inicialmente saturado por óleo  $\bar{S}_w^0 = 0$ .

Utilizou-se o modelo de pressão descontínua, no qual a simulação teve como tempo máximo 1 Volume Poroso Injetado (VPI).

A Figura 51 apresenta os campos de saturação de água para os dois casos, em 0,10; 0,50 e 1,00 VPI.

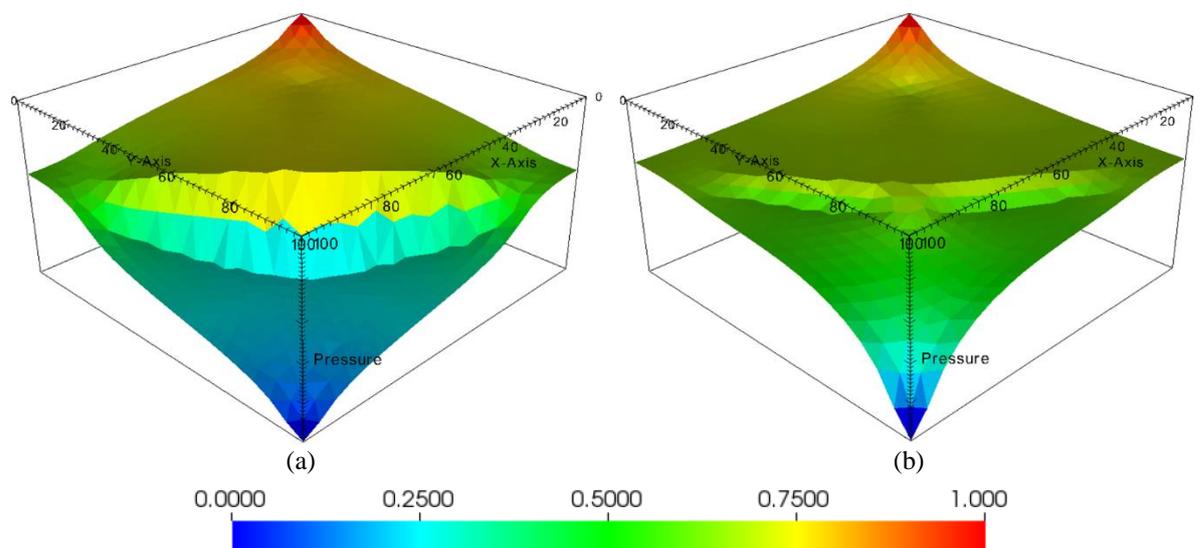
No Caso II, observa-se que a frente de saturação de água escoava através das barreiras a partir do ponto de interseção, o que não ocorre no caso I, pois o escoamento a partir do nó de interseção não ocorre para a matriz, apenas para as fraturas, i.e., os vértices extremos das fraturas são sempre tratados, em relação à matriz, como barreiras, sendo este um desafio adicional a ser desenvolvido no método LDFM. E como no caso I, a barreira possui uma baixa permeabilidade, a frente de saturação contorna as barreiras para atingir o poço produtor.

Figura 51 – Campos de saturação de água do problema de ¼ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1: (a) VPI = 0,10 - Caso I; (b) VPI = 0,10 - Caso II; (c) VPI = 0,50 - Caso I; (d) VPI = 0,50 - Caso II; (e) VPI = 1,00 - Caso I; (f) VPI = 1,00 - Caso II.



A Figura 52 apresenta os campos de pressão para ambos os casos.

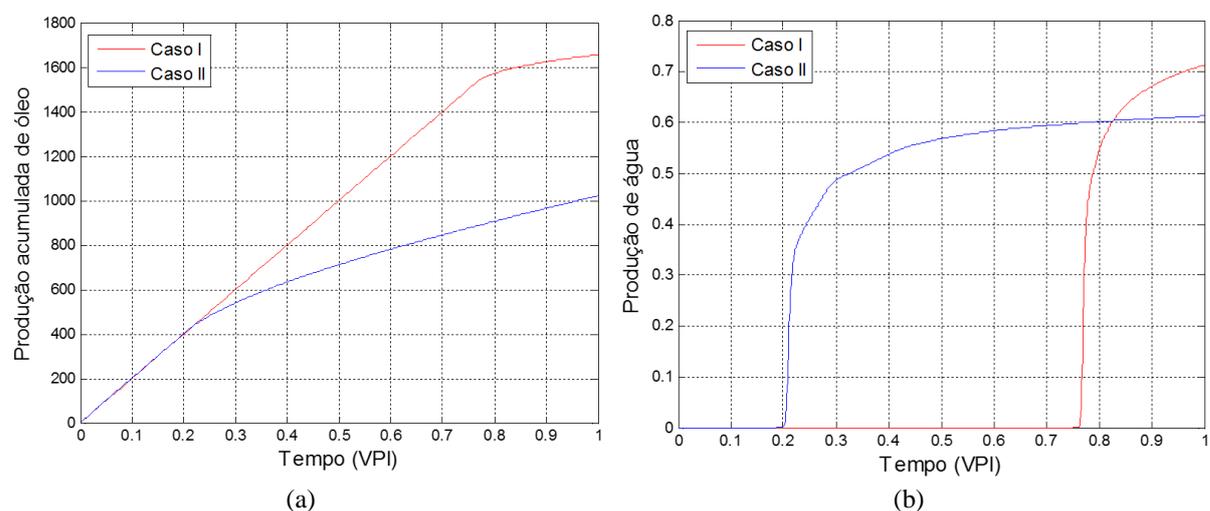
Figura 52 – Campos de pressão do problema de ¼ de cinco poços com canais e barreiras conectados – Problema 4.4.1: (a) VPI = 0,50 - Caso I; (b) VPI = 0,50 - Caso II.



Na Figura 52 (a) é observada a descontinuidade da pressão através da barreira, que é amenizada na Figura 52 (b) a partir do cruzamento no canal, observando que no Caso II a descontinuidade não ocorre na interseção.

Por fim, a Figura 53 (a) apresenta a curva de produção acumulada de óleo e a Figura 53 (b) a produção de água, nas quais fica evidenciada o retardamento da irrupção de água provocado pelo Caso I, com o qual também se obtém uma recuperação superior de óleo, devido à frente de saturação de água ser forçada a percorrer praticamente todo o reservatório.

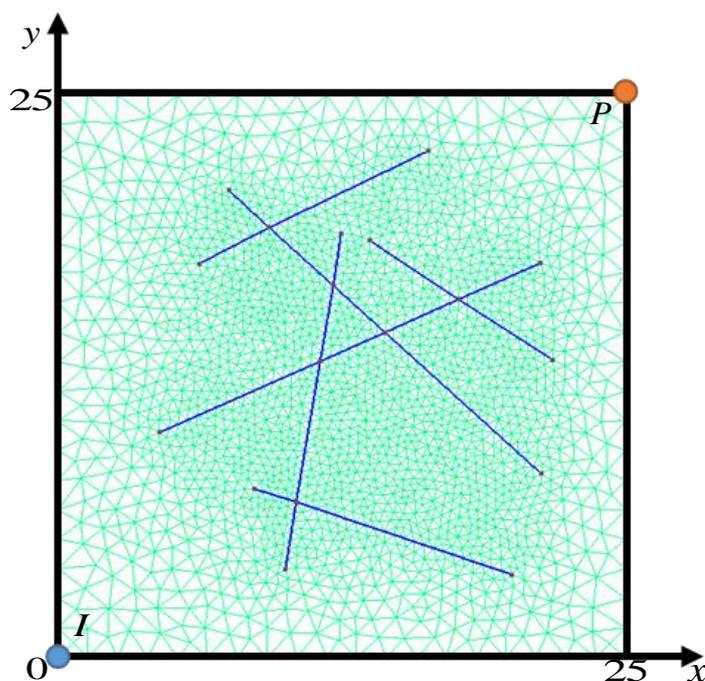
Figura 53 – Problema de ¼ de cinco poços com canais e barreiras conectados - Problema 4.4.1 - Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água



#### 4.4.2 $\frac{1}{4}$ de cinco poços com múltiplas fraturas

Como último exemplo, apresenta-se o resultado de uma simulação com múltiplas fraturas, na qual foi utilizado um exemplo adaptado de Hoteit e Firoozabadi (2008), composto por 6 fraturas interconectadas, resultando em 14 segmentos de reta. A Figura 54 apresenta o domínio do problema em conjunto com a malha utilizada, composta por 4.362 volumes de controle triangulares, onde 190 arestas representam as fraturadas.

Figura 54 – Domínio quadrado com múltiplas fraturas - Problema 4.4.2.



Adaptado de: Hoteit e Firoozabadi (2008).

Tem-se a seguir as propriedades da matriz rochosa:

$$\tilde{K}_m = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\phi_m = 0,2 \quad (4.45)$$

e para as fraturas:

$$\phi_f = 1 \quad (4.46)$$

$$a_f = 10^{-4} \quad (4.47)$$

$$K_n^{\mathcal{F}} = K_{tg}^{\mathcal{F}} = 8.10^2 \quad (4.48)$$

Quanto aos fluidos, foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$S_{wi} = S_{or} = 0 \quad (4.49)$$

$$\mu_w = 1 \quad (4.50)$$

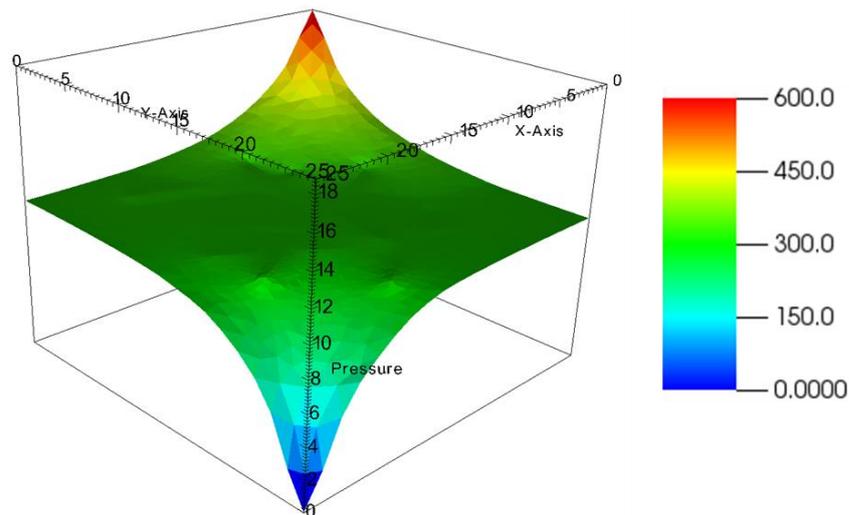
$$\mu_o = 0,45 \quad (4.51)$$

Como condições iniciais e de contorno, foram impostas condições de fluxo nulo  $g_N = 0$  nos contornos, pressão  $g_p = 0$  no poço produtor, pressão  $g_l = 600$  com saturação de água  $\bar{S}_w = 1$  no poço injetor e o reservatório está inicialmente saturado por óleo  $\bar{S}_w^0 = 0$ .

Utilizou-se o modelo de pressão contínua, pois o modelo descontínuo recai no contínuo devido à permeabilidade elevada no sentido normal à fratura, com formulação implícita para a saturação, no qual a simulação teve como tempo máximo 0,5 VPI.

A Figura 55 apresenta o campo de pressões ao final da simulação:

Figura 55 – Problema de ¼ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de pressões - VPI = 0,50.



Pode-se observar que a rede de fraturas, devido à sua permeabilidade elevada, promoveu uma distribuição suave da pressão na região das fraturas, o que não ocorreria caso as mesmas não estivessem presentes, conforme pode ser observado na Figura 56 para os mesmos parâmetros de simulação, mas desativando o LDFM:

Figura 56 – Problema de ¼ de cinco poços sem fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de pressões - VPI = 0,50.

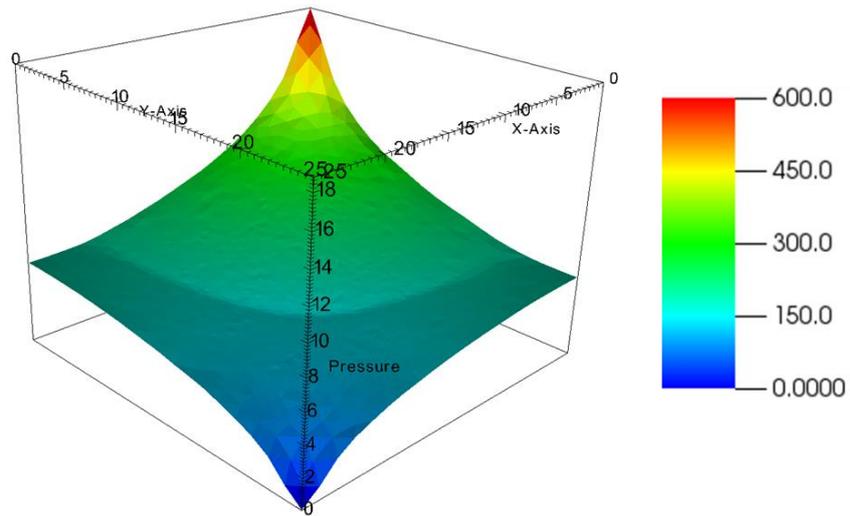
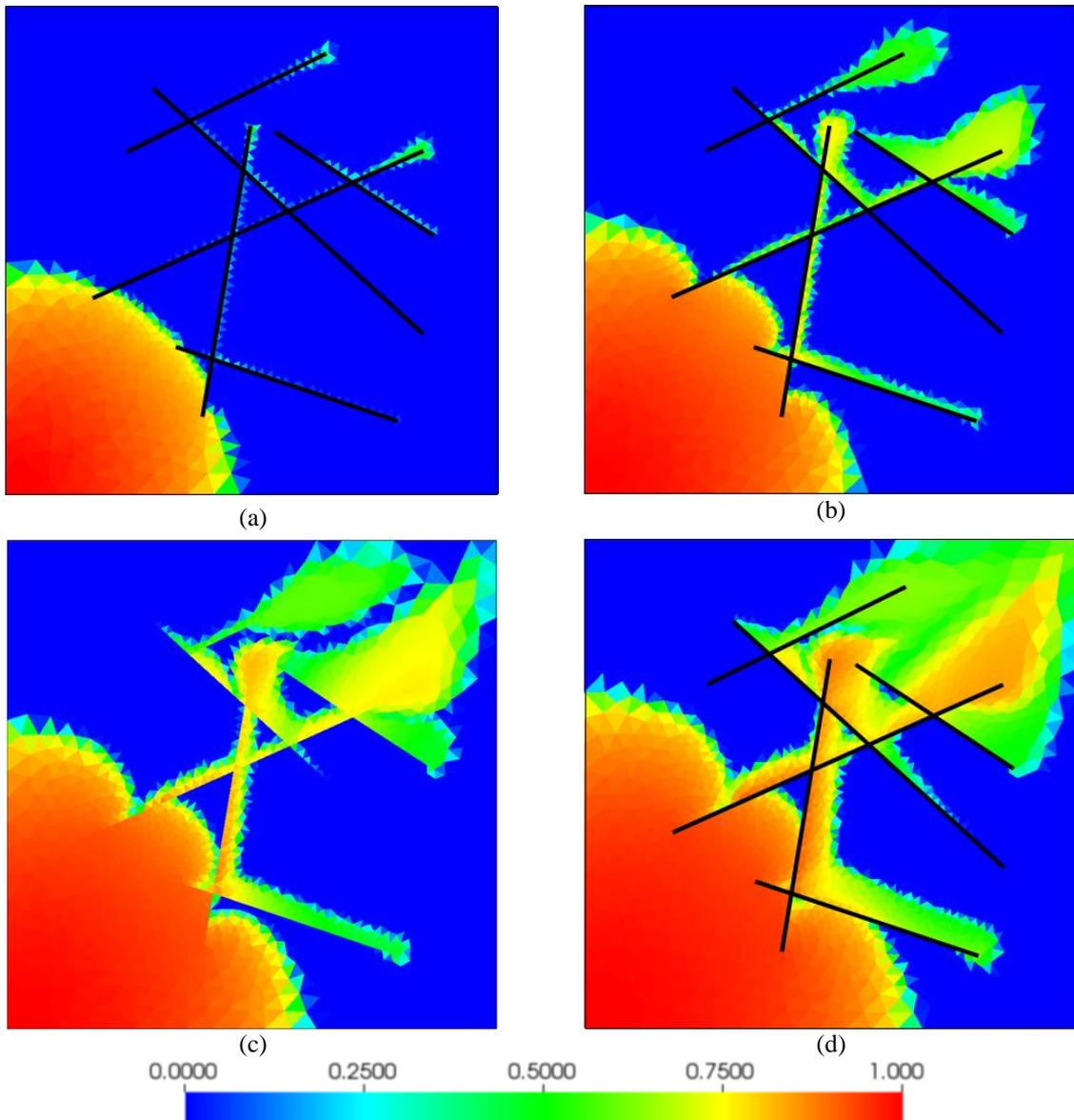


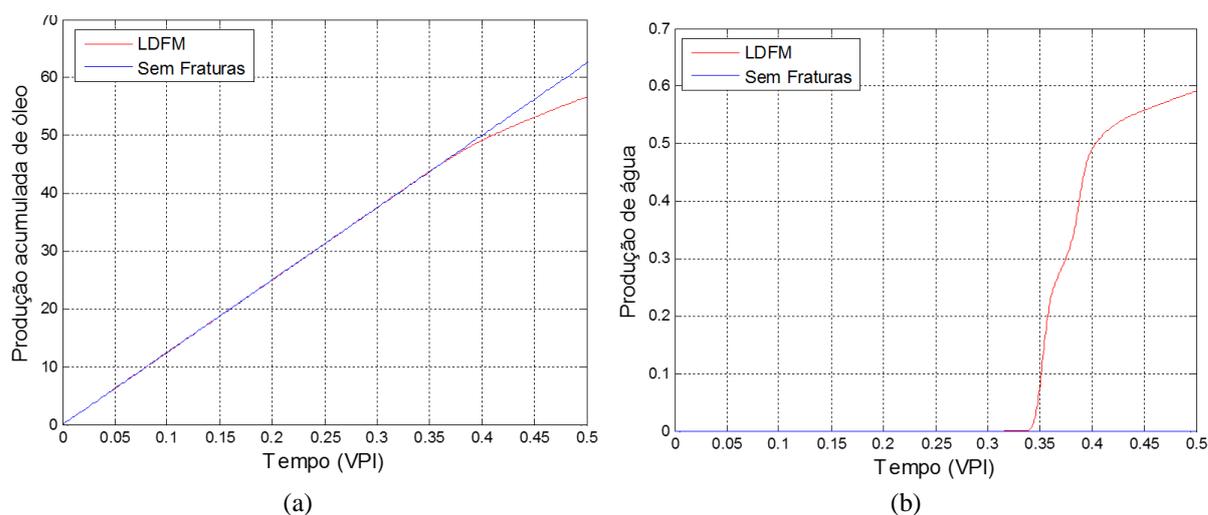
Figura 57 – Problema de ¼ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) - Campo de saturações de água: (a) VPI = 0,15; (b) VPI = 0,25; (c) VPI = 0,25; (d) VPI = 0,50.



A Figura 57 apresenta os campos de saturação para diferentes passos de tempo. Pode-se observar que as fraturas se comportam como caminhos preferenciais para o escoamento da água, distribuindo-a rapidamente ao longo de toda a rede de fraturas.

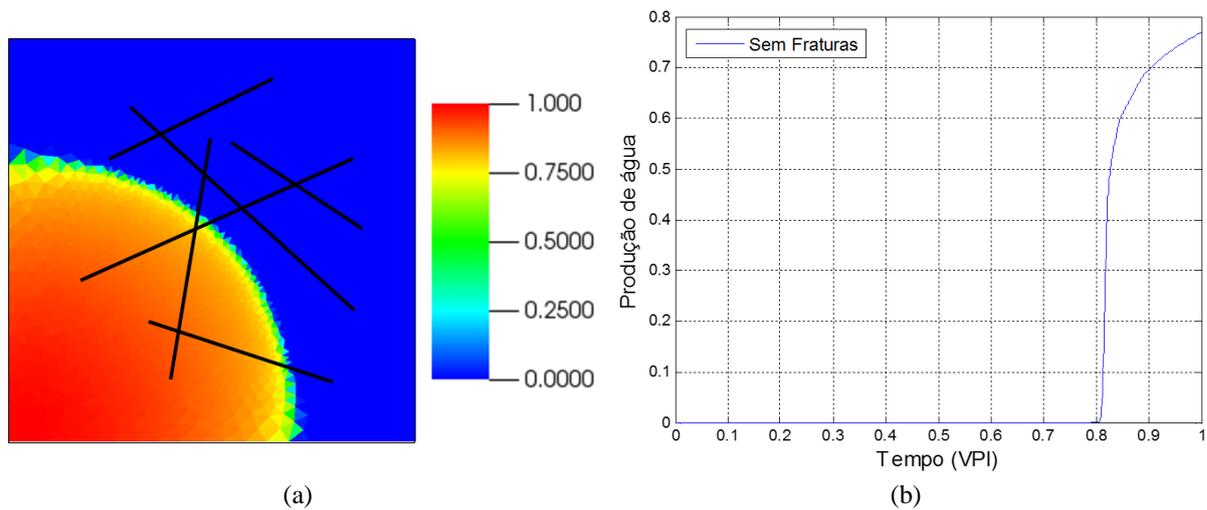
A Figura 58 com as curvas de produção evidenciam um ponto que pode se tornar importante no tratamento adequado das fraturas, pois, se estas não fossem consideradas, a irrupção de água não seria prevista para um VPI de aproximadamente 0,35, sendo a correta antecipação deste fenômeno um parâmetro fundamental à engenharia de petróleo, para o correto dimensionamento dos equipamentos em superfície.

Figura 58 – Problema de ¼ de cinco poços com múltiplas fraturas (Problema 4.4.2) – Curvas de produção: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água



A Figura 59 (a) mostra o mapa de saturação sem utilizar o LDFM, para o tempo em que ocorreria a irrupção de água (0,35VPI) quando as fraturas são modeladas. Neste caso, o fenômeno só seria esperado para aproximadamente 0,80 VPI, conforme Figura 59 (b), superestimando o tempo previsto em 2,3 vezes.

Figura 59 – Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços sem fratura (Problema 4.4.2): (a) Campo de saturação de água para 0,35 VPI; (b) Produção de água



## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, foram adaptados dois Métodos de Volumes Finitos para a simulação de fluxo em Reservatórios Naturalmente Fraturados, o primeiro utilizando uma Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (TPFA) com Multiplicadores de Transmissibilidade (MT), e o segundo utilizando a Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O) acoplada ao Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM), com modelos de pressão contínua e descontínua. Para o problema do escoamento bifásico de água e óleo, o método IMPES foi adaptado aos modelos de fraturas e foi implementado o método SEQ, no qual a saturação também é resolvida de forma implícita, de maneira sequencial, utilizando o método de Newton para resolver a não-linearidade.

Para testar a metodologia implementada, foi realizado um teste de convergência que apresentou resultados semelhantes aos da referência adotada, do qual foi possível concluir que o LDFM só apresenta uma boa acurácia quando respeitado um limite para a razão de aspecto entre a abertura e o comprimento da aresta fraturada, onde  $a_f/L_f \ll 1$ .

As três metodologias para a solução de problemas com fraturas tiveram seus resultados comparados para diferentes situações, com as quais foi possível concluir que: o TPFA com MT, que só pode ser utilizado com malhas estruturadas e tensores ortotrópicos, não é capaz de lidar com fluxos tangenciais na fratura; o modelo de pressão contínua é válido para pequenas aberturas, elevadas permeabilidades tangenciais ou em casos específicos cuja pressão seja simétrica em relação à fratura, enquanto o modelo de pressão descontínua tem validade mais ampla, limitando-se, assim como todos os demais, a respeitar o limite quanto à razão de aspecto,  $a_f/L_f \ll 1$ .

Foi realizada uma comparação quanto à acurácia e à eficácia do SEQ em relação ao IMPES. Quanto à acurácia, os resultados foram satisfatórios, ocasionando apenas uma pequena difusão numérica adicional. O SEQ se mostrou mais eficaz no caso de alta permeabilidade tangencial na fratura, no qual o critério de estabilidade do método explícito resulta numa restrição elevada ao passo de tempo, entretanto, são necessários novos estudos quanto ao passo de tempo a ser utilizado no método SEQ. No último problema avaliado, a metodologia se mostrou capaz de tratar um caso com canais e barreiras conectados e com múltiplas fraturas, no qual foi verificada a necessidade de novos estudos no LDFM quanto à imposição de uma condição de fluxo de um vértice fraturado para a matriz.

Por fim, o LDFM se mostrou uma metodologia promissora para o tratamento de Reservatórios Naturalmente Fraturados. No entanto, deve ser avaliado em conjunto com outras

metodologias, como a utilização de um *upscaling* para os casos de micro fraturas e um modelo mesma dimensão, para os casos de fraturas com elevada abertura.

Como sugestão para trabalhos futuros, são propostos os seguintes pontos:

1. Realização do acoplamento do LDFM a outras metodologias MPFA capazes de lidar de maneira mais eficiente e robusta com problemas que apresentem tensores de permeabilidade muito anisotrópicos. Tal acoplamento torna-se simples através da formulação desenvolvida e conhecimentos adquiridos com o presente trabalho;
2. Realização de novos estudos correlacionando a acurácia da solução pelo método SEQ com o passo de tempo adotado;
3. Implementação de uma solução adaptativa do problema hiperbólico, que consiste em resolver de forma implícita a saturação das fraturas com velocidades elevadas e explicitamente no restante do domínio;
4. Ampliação da física adotada, com a inclusão de um tratamento distinto para a permeabilidade relativa na fratura, a inclusão de capilaridade e gravidade, assim como o acoplamento a um simulador geomecânico;
5. Desenvolvimento de uma estratégia alternativa para o tratamento da velocidade nos vértices extremos das fraturas, possibilitando a inclusão de um termo de fluxo entre a fratura e a matriz rochosa;
6. Expandir a formulação para um domínio em 3-D.

**REFERÊNCIAS**

AAVATSMARK, I. et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the Methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 19(5), p. 1717-1736, 1998a.

AAVATSMARK, I. et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part II: Discussion and Numerical Results. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 19(5), p. 1717-1736, 1998b.

AGUILERA, R. **Naturally Fractured Reservoirs**. 2<sup>a</sup>. ed. Tulsa: Pennwell Books, 1995. 50 p.

AHMED, R. et al. Control-volume distributed multi-point flux approximation coupled with a lower-dimensional fracture model. **Journal of Computational Physics**, v. 284, p. 462-489, 2015.

ALLAN, J.; SUN, S. Q. **Controls on Recovery Factor in Fractured Reservoirs: Lessons Learned from 100 Fractured Fields**. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Denver. 2003.

AZIZ, K.; SETTARI, A. **Petroleum Reservoir Simulation**. 1<sup>a</sup>. ed. Barking: Applied Science Publishers Ltd, 1979.

BARENBLATT, G. I.; ZHELTOV, I. P.; KOCHINA, I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 24(5), p. 1286–1303, 1960.

BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. 1<sup>a</sup>. ed. New York: Dover Publications, 1972.

BEAR, J.; TSANG, C. F.; MARSILY, G. **Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock**. 1<sup>a</sup>. ed. Berkeley: Academic Press, 1993.

BECKNER, B. L. **Next Generation Reservoir Simulation – New Capabilities For New Challenges**. Apresentação. Petroleum Technology Forum. Long Beach. 2011.

BERKOWITZ, B. Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review. **Advances in Water Resources**, v. 25, p. 861-884, 2002.

BEYDOUN, Z. R. Arabian plate oil and gas: Why so rich and so prolific? **Episodes - Journal of International Geoscience**, v. 21(2), p. 74-81, 1998.

BOURBIAUX, B. Fractured Reservoir Simulation: a Challenging and Rewarding Issue. **Oil & Gas Science and Technology**, v. 65(2), p. 227-238, 2010.

BRUM, S. B. et al. Um Escoamento de Volumes Finitos para a Simulação de Escoamentos em Reservatórios Naturalmente Fraturados em 2-D Utilizando um Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida. **XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, Brasília, 2016.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 7<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CARVALHO, D. K. E. **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2005.

CARVALHO, D. K. E. **Notas de Aula de Disciplina de Simulação Numérica de Reservatórios**. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2015.

CAVALCANTE FILHO, J. S. A. **Mobility control of gas injection in highly heterogeneous and naturally fractured reservoirs**. Tese de Doutorado. The University of Texas. Austin. 2016.

CHEN, Z. **Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

CMG. **IMEX User Guide**. Calgary,: Computer Modelling Group Ltd, 2014.

CONTRERAS, F. R. L. et al. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. **Computers & Fluids**, v. 127, p. 1-16, 2016.

COREY, A. T. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. **Producers Monthly**, v. 19(1), p. 38-41, 1954.

DA PRAT, G. **Well test analysis for fractured reservoir evaluation**. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., Developments in Petroleum Science, v. 27, 1990.

DARCY, H. **Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon**. Victor Dalmont. Paris. 1856.

EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. **Computational Geoscience**, v. 2(4), p. 259-290, 1998.

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J. H.; KING, G. R. **Basic Applied Reservoir Simulation**. 1<sup>a</sup>. ed. Richardson: Society of Petroleum Engineers Inc, 2001.

EWING, R. E. **The Mathematics of Reservoir Simulation**. Philadelphia: Frontiers in Applied Mathematics, v. 1<sup>a</sup>, 1983.

FANCHI, J. R. **Principles of Applied Reservoir Simulation**. 3<sup>a</sup>. ed. Burlington: Elsevier, 2005.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 6<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro : LTC, 2006.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79(11), p. 1309-1331, 2009.

GHORAYEB, K.; FIROOZABADI, A. Numerical study of natural convection and diffusion in fractured porous media. **SPE Journal**, v. 5(1), p. 12-20, 2000.

HÆGLAND, H. et al. Comparison of cell-and vertex-centered discretization methods for flow in a two-dimensional discrete-fracture-matrix system. **Advances in Water Resources**, v. 32, p. 1740-1755, 2009.

HAHN, B. H.; VALENTINE, D. T. **Essential MATLAB for Engineers and Scientists**. 5<sup>a</sup>. ed. Oxford: Elsevier, 2013.

HE, C.; DURLOFSKY, L. J. Structured flow-based gridding and upscaling for modeling subsurface flow. **Advances in Water Resources**, v. 29, p. 1876-1892, 2006.

HELMIG, R. **Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface**. 1<sup>a</sup>. ed. Berlin: Springer-Verlag , 1997.

HIRSCH, C. **Numerical computation of internal and external flows**. 2<sup>a</sup>. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.

HOTEIT, H.; FIROOZABADI, A. An efficient numerical model for incompressible two-phase flow in fractured media. **Advances in Water Resources**, v. 31(6), p. 891-905, 2008.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atual, v. 4, 2004.

ISLAM, M. R. et al. **Advanced Petroleum Reservoir Simulation: Towards Developing Reservoir Emulators**. 2<sup>a</sup>. ed. Salem: Scrivener Publishing, 2016.

MANZOCCHI, T. et al. Fault transmissibility multipliers for simulation models. **Petroleum Geoscience**, v. 5, p. 53-63, 1999.

MARTIN, V.; JAFFRÉ, J.; ROBERTS, J. E. Modelling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 26(5), p. 1667-1691, 2005.

MATTHÄI, S. K. **Modeling Multiphase Flow in Fractured Porous Rock**. Department of Earth Sciences & Engineering, Imperial College London. London, p. 1-5. 2005.

MUNSON, B. R.; YOUNG, B. G.; OKIISHI, T. H. **Fundamentals of Fluid Mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.

NELSON, R. A. **Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs**. 2. ed. Oxford: Elsevier, 2001.

NICK, H. M.; MATTHÄI, S. K. Comparison of Three FE-FV Numerical Schemes for Single- and Two-Phase Flow Simulation of Fractured Porous Media. **Transport in Porous Media**, v. 90, p. 424-444, 2011.

NOORISHAD, J.; MEHRAN, M. An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media. **Water Resources Research**, v. 18, p. 588-596, 1982.

OLIVEIRA, A. D. **Análise das Alterações Físico-Químicas Decorrentes de Ensaio de Dissolução em Rochas Carbonáticas Sintéticas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2016.

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation**. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., Developments in Petroleum Science, v. 6, 1977.

ROSA, A. J.; CARVALHO, R. S.; XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatórios de Petróleo**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANDVE, T. H.; BERRE, I.; NORDBOTTEN, J. M. An efficient multi-point flux approximation method for discrete fracture-matrix simulations. **Journal of Computational Physics**, v. 231(9), p. 3784-3800, 2012.

SOUZA, M. R. A. **Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2015.

STEWART, J. **Cálculo**. 5º. ed. São Paulo: Thomson Learnig, v. II, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. 5ª. ed. São Paulo: Thomson Learnig, v. I, 2006.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. 2ª. ed. Washington: Taylor & Francis, 1997.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

ULEBERG, K.; & KLEPPE, J. **Dual porosity, dual permeability formulation for fractured reservoir simulation**. Trondheim RUTH Seminar, Norwegian University of Science and Technology. Stavanger. 1996.

UNSAL, E.; MATTHÄI, S. K.; BLUNT, M. J. Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions. **Computational Geosciences**, v. 14(4), p. 527–538, 2010.

VISIT User's Manual. Livermore: Lawrence Livermore National Laboratory, 2005.

WARREN, J. E.; ROOT, P. J. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 3(3), p. 245-255, 1963.

## APÊNDICE A – VÍDEOS DOS PROBLEMAS TRANSIENTES

Neste apêndice, são disponibilizados *links* para o acesso a vídeos contendo os resultados completos, para os campos de saturação de água, dos problemas transientes apresentados nesta dissertação. Para facilitar o acesso a partir da versão impressa da dissertação, os *links* também são apresentados na forma de *QR codes*, cuja leitura pode ser efetuada a partir da câmera de um celular, utilizando um aplicativo específico para esta finalidade, como *QR Reader*<sup>®</sup>, disponível nas plataformas *Android*<sup>®</sup> e *iOS*<sup>®</sup> e *Windows Mobile*<sup>®</sup>.

Na versão digital, estão disponíveis seis vídeos, um para cada problema, que podem ser visualizados diretamente no arquivo “.pdf”, na forma de objeto iterativo.

### • 4.3.1 ¼ de cinco poços com fratura diagonal

- Malha 1 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_1\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_1_Explicito.mp4)



- Malha 1 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_1\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_1_Implicito.mp4)



- Malha 2 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_2\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_2_Explicito.mp4)



- Malha 2 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_2\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_2_Implicito.mp4)



- Malha 3 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_3\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_3_Explicito.mp4)

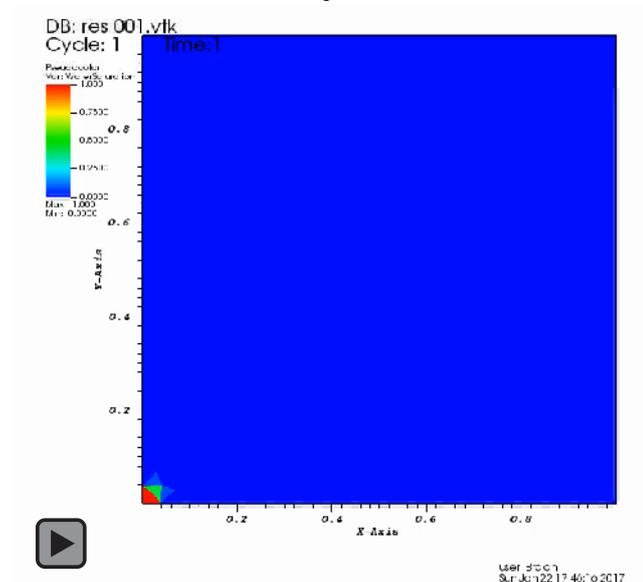


- Malha 3 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.1\\_Malha\\_3\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.1_Malha_3_Implicito.mp4)



Vídeo - Objeto iterativo:



- **4.3.2 ¼ de cinco poços com barreiras verticais**

- Malha 1 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_1\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_1_Explicito.mp4)



- Malha 1 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_1\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_1_Implicito.mp4)



- Malha 2 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_2\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_2_Explicito.mp4)



- Malha 2 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_2\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_2_Implicito.mp4)



- Malha 3 - Explícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_3\\_Explicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_3_Explicito.mp4)

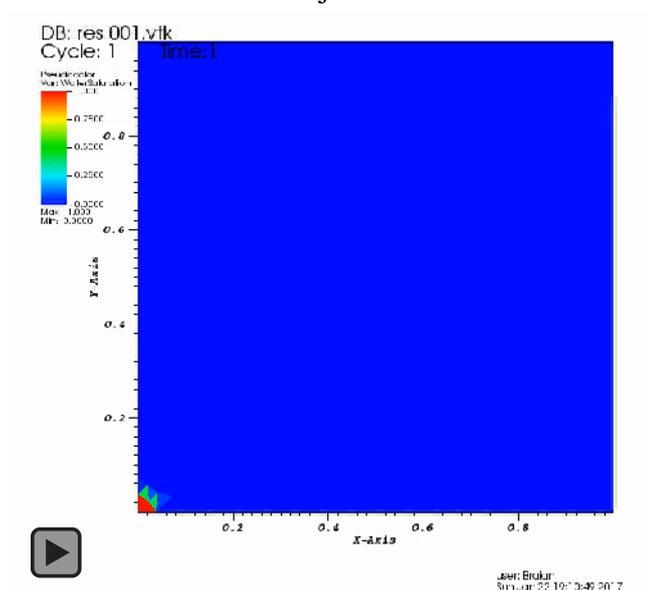


- Malha 3 - Implícito:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.3.2\\_Malha\\_3\\_Implicito.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.3.2_Malha_3_Implicito.mp4)



Vídeo - Objeto iterativo:



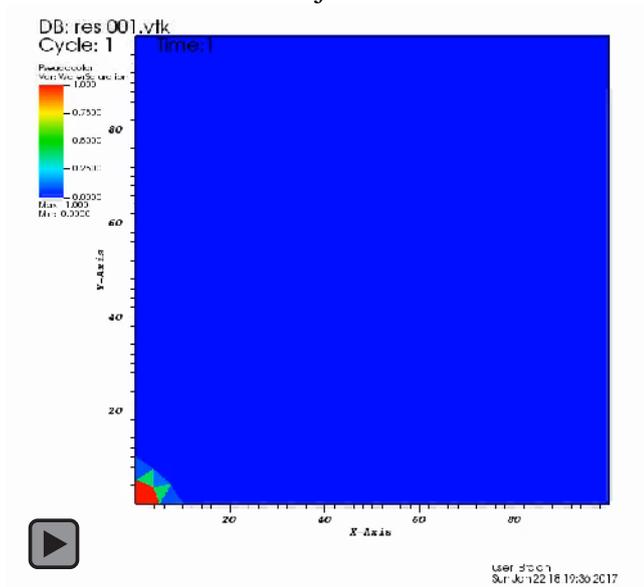
- 4.4.1 ¼ de cinco poços com canais e barreira conectados

- Caso I:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.4.1\\_Caso\\_I.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.4.1_Caso_I.mp4)



Vídeo - Objeto iterativo:

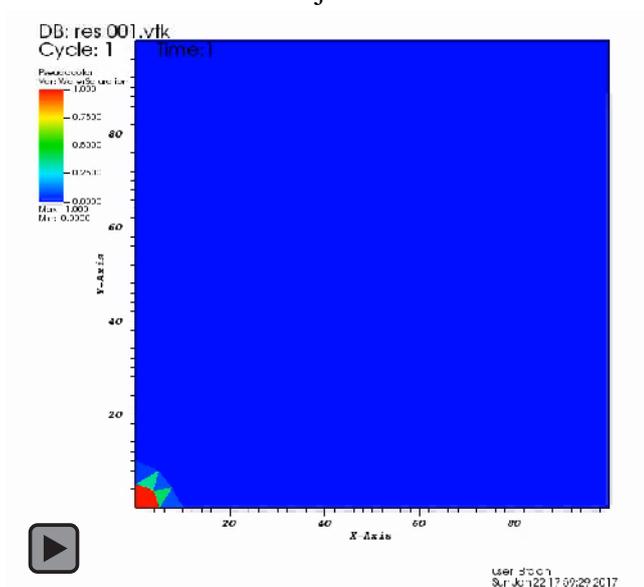


▪ Caso II:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.4.1\\_Caso\\_II.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.4.1_Caso_II.mp4)



Vídeo - Objeto iterativo:



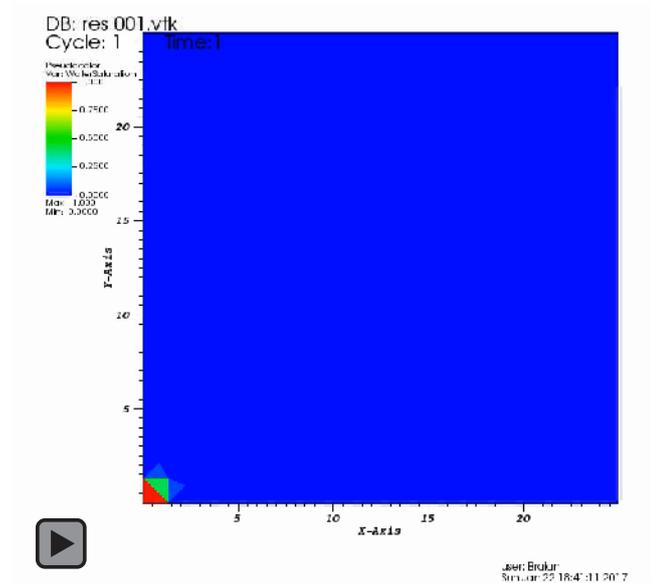
- 4.4.2 ¼ de cinco poços com múltiplas fraturas

- Múltiplas Fraturas:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.4.2\\_Multiplas.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.4.2_Multiplas.mp4)



Vídeo - Objeto iterativo



- Sem Fraturas – Até 0,5VPI:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.4.2\\_Sem\\_fratura\\_Ate\\_0.5\\_VPI.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.4.2_Sem_fratura_Ate_0.5_VPI.mp4)

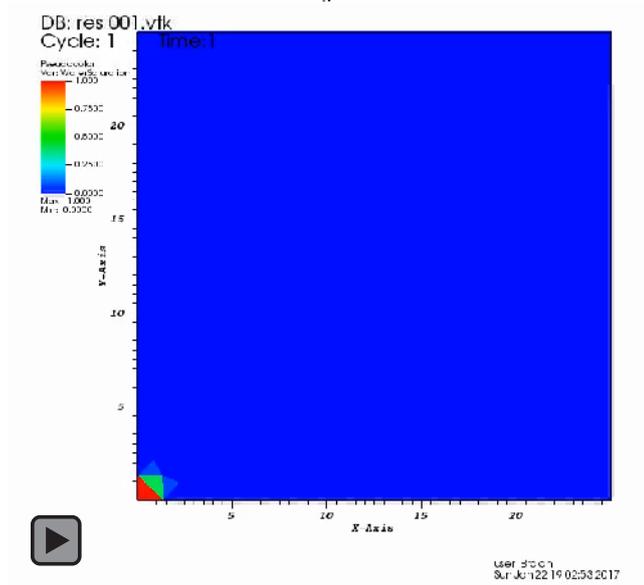


- Sem Fraturas – Até 1,0VPI:

[https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos\\_Mestrado/Problema\\_4.4.2\\_Sem\\_Fratura\\_Ate\\_1.0\\_VPI.mp4](https://dl.dropboxusercontent.com/u/12088307/Videos_Mestrado/Problema_4.4.2_Sem_Fratura_Ate_1.0_VPI.mp4)



### Vídeo - Objeto iterativo



## APÊNDICE B – MANUAL DE UTILIZAÇÃO

Este apêndice tem como objetivo servir de manual para que um usuário das rotinas numéricas implementadas por Souza (2015) esteja apto a simular também o problema de fraturas.

### 1 Arquivo de geometria:

O presente tópico fornece a orientação de como alterar uma geometria usual utilizada no simulador para uma nova, com a presença de fraturas. O objetivo principal é fazer com que a geração da malha respeite estes novos componentes, de modo a fazer coincidir as arestas dos elementos com as fraturas, e marque os mesmos, o que é fundamental para a metodologia de dimensão reduzida.

O código de Souza (2015) está programado para leitura de uma geometria, assim como uma malha, seguindo a estrutura de dados utilizada pelo GMSH que compreende um arquivo de texto para a geometria, com extensão “.geo”, ou para a malha, com extensão “.msh”. Foge do escopo deste trabalho a descrição avançada da utilização do GMSH, onde maiores informações estão disponíveis na literatura (GEUZAINÉ e REMACLE, 2009), estando este tópico limitado às particularidades decorrentes do modelo de fraturas.

Na Figura B.1, tem-se a cópia de um arquivo de texto descrevendo um domínio usual (1x1), com dois grupos físicos de pontos e três de linhas, utilizados para definição das condições de contorno e um grupo físico de superfície para atribuição das condições iniciais e de material.

Figura B.1 - Definição de um domínio usual.

```

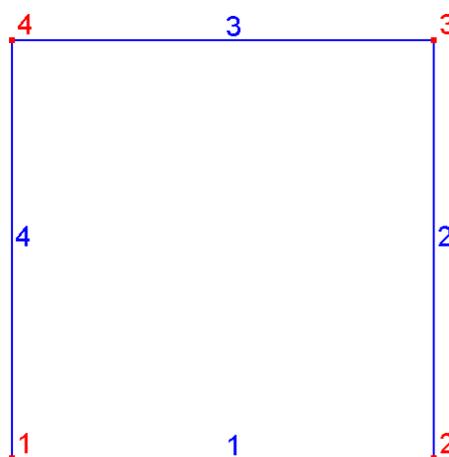
c11 = 0.05;
Point(1) = {0, 0, 0, c11};
Point(2) = {1, 0, 0, c11};
Point(3) = {1, 1, 0, c11};
Point(4) = {0, 1, 0, c11};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4};
Plane Surface(1) = {1};
Physical Point(1) = {1, 4};
Physical Point(2) = {2, 3};
Physical Line(1) = {4};
Physical Line(2) = {2};
Physical Line(3) = {1,3};
Physical Surface(1) = {1};

```

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura B.2 está a representação gráfica deste domínio, interpretada pelo GMSH, com as linhas identificadas em azul e os pontos em vermelho:

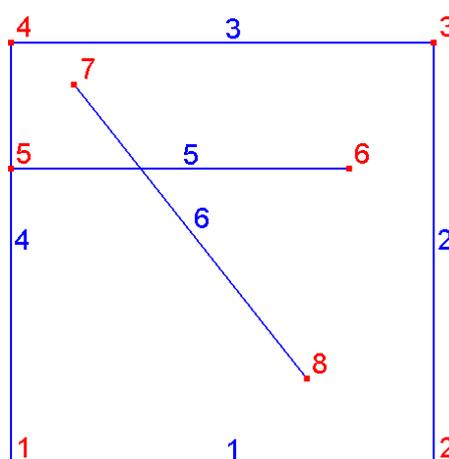
Figura B.2 - Domínio usual.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Supondo que o objetivo seja a simulação de duas fraturas definidas pelas linhas 5 e 6, conforme Figura B.3.

Figura B.3 - Domínio com duas fraturas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma etapa fundamental para a geração da malha, respeitando as fraturas, é a declaração de que as linhas 5 e 6 estão contidas na superfície do domínio, definido na Figura B.1 com o comando *Plane Surface (1)*. Entretanto, se as linhas das fraturas forem simplesmente adicionadas neste domínio, o GMSH não será mais capaz de reconhecer corretamente estas linhas, por um problema decorrente da existência de pontos de interseção, neste caso da linha 5 com a linha 6 e também com a linha 4.



irá atribuir como índice da família apenas até a casa das centenas, i.e., um *flag* 2003 irá identificar a família 3.

Lembrando que a quantidade de *Physical Lines* de contorno, inseridas antes das *Physical Lines* de fraturas, deve ser igual ao número de condições de contorno do arquivo de entrada de dados, representado pela linha 621 da Figura B.5.

Figura B.5 - Definição das condições de contorno no "Start.dat.

```

603 //-----
604 //----- Boundary Condition -----
605 //-----
606
607 //-----
608 //Treatment of Boundary Faces:
609
610 //Use the following nomenclature to classify the type of BC:
611 //[101 to 200] ==> "Dirichlet Boundary Condition";
612 //[201 to 300] ==> "Neumann Boundary Condition";
613 //[601 to 700] ==> "Periodic Boundary Condition" (only hyperbolic).
614
615 //For a general attribution, write the sequense below:
616 //1. The amount of boundary condition statment;
617 //2. In another row, write the type of boundary condition
618 //(Dirichlet, Neumann or Periodic);
619 //3. In the same row, put the algebraic value of this BC.
620
621 3
622 101 0
623 102 1
624 201 0

```

Fonte: Arquivo de entrada de dados de Souza (2015).

Aplicando todas as considerações, a Figura B.6 exemplifica um arquivo de geometria com todos os comandos utilizados na definição do domínio e fraturas, representado na Figura B.7 (a), supondo que as fraturas com a mesma orientação correspondam a uma mesma família.

Figura B.6 - Definição de um domínio fraturado

```

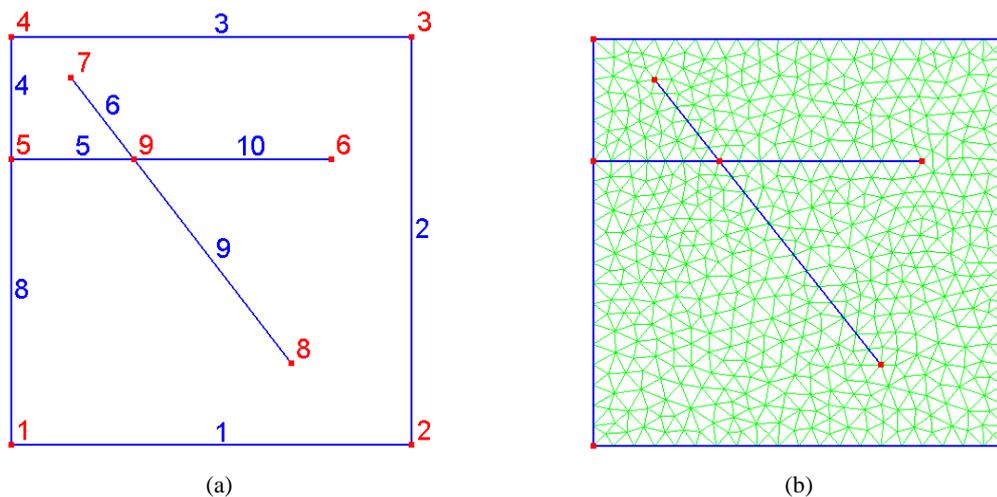
c11 = 0.05;
Point(1) = {0, 0, 0, c11};
Point(2) = {1, 0, 0, c11};
Point(3) = {1, 1, 0, c11};
Point(4) = {0, 1, 0, c11};
Point(5) = {0, 0.7, 0, c11};
Point(6) = {0.8, 0.7, 0, c11};
Point(7) = {0.15, 0.90, 0, c11};
Point(8) = {0.70, 0.20, 0, c11};
Point(9) = {0.3071428571428572, 0.7, 0, c11};
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 5};
Line(8) = {5, 1};
Line(5) = {5, 9};
Line(6) = {7, 9};
Line(9) = {9, 8};
Line(10) = {9, 6};
Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4, 8};
Plane Surface(1) = {1};
Physical Point(1) = {1, 4, 5};
Physical Point(2) = {2, 3};
Physical Line(1) = {4,8};
Physical Line(2) = {2};
Physical Line(3) = {1,3};
Physical Surface(1) = {1};
Line{5, 6, 9, 10} In Surface{1};
Physical Line(2001) = {5, 10};
Physical Line(2002) = {6, 9};

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado, tanto da geometria quanto da malha, está representado na Figura B.7, onde pode-se observar que a malha respeitou a fratura.

Figura B.7 - Definição de um domínio fraturado: (a) geometria, (b) malha



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 2 Arquivo de entrada de dados:

Ao arquivo de entrada de dados adotado por Souza (2015), denominado “*Start.dat*”, foi inserido o cartão presente na Figura B.8, com a numeração das linhas à esquerda para auxiliar na localização. Este cartão foi inserido ao final do grupo *Solver Properties*.

Figura B.8 - Cartão com os parâmetros relativos ao modelo de fraturas

```

273  //-----
274  //Fractures Parameters (Ahmed, Edwards et al. 2015 for MPFA-O and
275  //Manzocchi 1999 for TPFA)
276  //Would you like to run the lower-dimensional fracture model?
277  //[y] ==> "yes" (only for MPFA-o or TPFA); [n] ==> "no".
278  y
279
280  //Type of lower-dimensional method
281  //[c] Continuous pressure model
282  //[d] Discontinuous pressure model
283  //[a] Automatic
284  d
285
286  //If [a], write below the maximum ratio between aperture and normal
287  //permeability to the continuous model
288  1E-10
289
290
291  //The user must setup the fractures as follows:
292  //The amount of fracture families to consider;
293  2
294
295  //Enter the following properties (one row by family):
296  //1. Aperture of fracture (a);
297  //2. Tangential permeability (Kt);
298  //3. Normal permeability (Kn);
299  //4. Porosity of fracture(phi)
300  //IMPORTANT: If you used line source, the order bellow must be the
301  //same applied to define physical lines (respecting an increasing
302  //flag's order from 2001 to 3000 and one physical per family)
303  1E-3 1E-10 1E-10 1
304  1E-2 1E04 1E04 0.8
305
306  //Implicit(i) or explicit(e) saturation
307  i

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando que os modelos de fraturas foram implementados para as formulações TPFA de MPFA-O, logo, uma destas formulações deve ser selecionada no arquivo “*Start.dat*”, conforme apresentado na Figura B.9.

Figura B.9 - Cartão com os parâmetros relativos ao modelo de fraturas.

```

82 //-----
83 //Type of Solver for the Eliptic Equation (Pressure Equation)
84
85 //Write below the type of Solver for the Eliptic Equation:
86 //[tpfa] ==> "Two-Point Flux Approximation" (Traditional Scheme);
87 //[mpfao] ==> "Multi-Point Flux Approximation" (type O);
88 //[fps] ==> "Multi-Point Flux Approximation" (type FPS);
89 //[mpfae] ==> "Multi-Point Flux Approximation" (type Enriched);
90 //[mpfad] ==> "Multi-Point Flux Approximation" (type Diamond);
91 //[nlfv] ==> "Non-Linear Finite Volume" (only for triangluar mesh);
92 //[gmnl] ==> "General Meshes Non-Linear Finite Volume".
93
94 mpfao

```

Fonte: Arquivo de entrada de dados de Souza (2015).

A seguir, estão detalhados cada um destes campos de entradas de dados apresentada na Figura B.8, onde cada campo está limitado pelas linhas com comentários, estes definidos por // como caracteres iniciais.

### 2.1 Ativar modelo de fraturas com dimensão reduzida (linha 278):

Neste campo o usuário irá ativar ou não a resolução considerando as fraturas no domínio, através das seguintes opções:

- y: utilizar o modelo;
- n: não utilizar o modelo.

Esta será uma variável global denominada “*keyfrac*”.

Caso o modelo seja utilizado, serão necessários os parâmetros adicionais descritos na sequência.

### 2.2 Escolha método (linha 284):

Especificar qual método de solução deverá ser adotado no caso LDFM, caso o método escolhido para a solução da pressão tiver sido o MPFA-O:

- c: modelo de pressão contínua (Tópico 3.1.2.2.1);
- d: modelo de pressão descontínua (Tópico 3.1.2.2.2);
- a: modelo com seleção automática (detalhado no próximo tópico);

Esta será uma variável global denominada “*fracmethod*”.

### 2.3 Modelo com seleção automática (Linha 288):

Caso seja escolhido o modelo automático no tópico anterior, o usuário dever especificar neste campo a razão máxima entre a abertura da fratura e a permeabilidade normal, conforme Eq. (3.131), com o qual deverá ser utilizado o modelo de pressão contínua definido no Tópico 3.1.2.2.1, caso contrário é utilizado o modelo de pressão descontínua, Tópico 3.1.2.2.2.

### 2.4 Número de famílias de fraturas (linha 293):

Uma família de fratura é definida como um grupo de fraturas que possui as mesmas permeabilidades, abertura e porosidade. Esta entrada indica quantas famílias estarão presentes no domínio, a qual deve ser igual ao número de linhas físicas com *flags* entre 2001 e 3000, utilizadas na definição das fraturas no arquivo “.geo”. Esta variável é apenas um contador local para a leitura da próxima entrada de dados, recebendo o nome de “*numfracfam*”.

### 2.5 Propriedades das fraturas (linha 303):

O número de linhas deste campo deverá ser igual ao número de famílias definidas anteriormente, onde cada linha apresenta as seguintes entradas, referentes às propriedades apresentadas no Tópico 2.1.6, e que devem ser descritas em sequência e separadas por um espaço:

- Abertura;
- Permeabilidade tangencial;
- Permeabilidade normal.
- Porosidade

Neste caso, é apresentado na Figura B.8 a entrada de propriedades para duas famílias de fraturas. Esta será uma variável global, na forma de uma matriz com a mesma estrutura da entrada de dados, recebendo o nome de “*frac\_flag*”.

### 2.6 Método de solução do problema de saturação (linha 307):

Por fim, deve ser escolhida a metodologia para a solução do problema de saturação (Tópico 3.2):

- e: saturação resolvida pelo método explícito - IMPES (Tópico 3.2.2.1);
- i: saturação resolvida pelo método implícito - SEQ (Tópico 3.2.2.2);