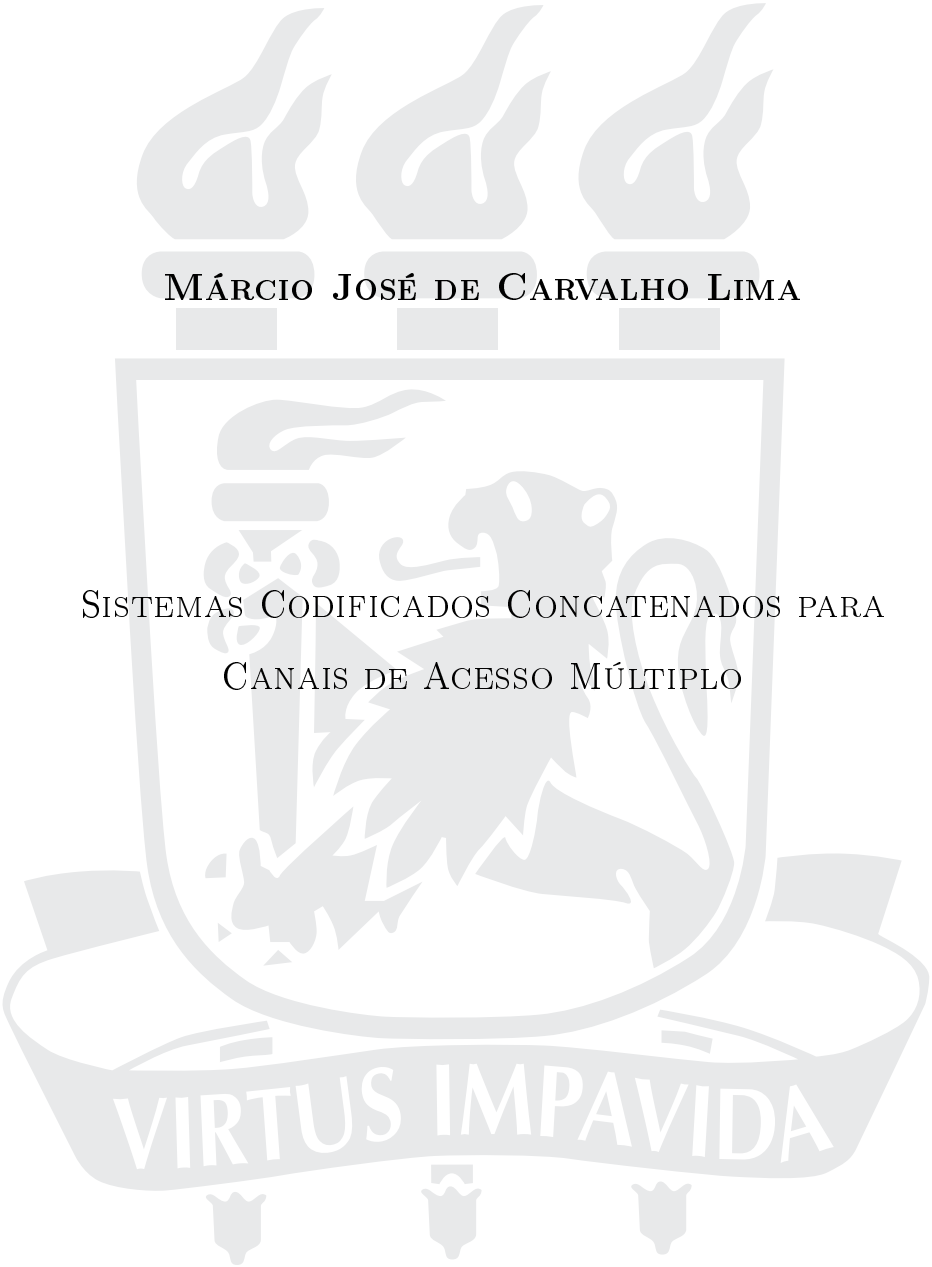
Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica



Márcio José de Carvalho Lima

Sistemas Codificados Concatenados para Canais de Acesso Múltiplo

Recife, 2017.

Márcio José de Carvalho Lima

Sistemas Codificados Concatenados para Canais de Acesso Múltiplo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco, Área de Concentração em Comunicações, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica**. Orientador:

Prof. Dr. Valdemar Cardoso da Rocha Júnior, Ph.D.

Recife, 2017.

Catalogação na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

L732s Lima, Márcio José de Carvalho.
Sistemas codificados concatenados para canais de acesso múltiplo / Márcio José de Carvalho Lima. – 2017.
178 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Valdemar Cardoso da Rocha Júnior.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2017.
Inclui Referências, Apêndices e Índice.

1. Engenharia Elétrica. 2. Canais de acesso múltiplo. 3. Canais aditivos. 4. Codificação de canal. 5. Codificados concatenados. 6. Decodificação iterativa. I. Rocha Júnior, Valdemar Cardoso da. (Orientador). II. Título.

UFPE

621.3 CDD (22. ed.) BCTG/2017-153

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE

MÁRCIO JOSÉ DE CARVALHO LIMA

TÍTULO

"SISTEMAS CODIFICADOS CONCATENADOS PARA CANAIS DE ACESSO MÚLTIPLO"

A comissão examinadora composta pelos professores: VALDEMAR CARDOSO DA ROCHA JÚNIOR, DES/UFPE; RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA, DE/UFPE; CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL, DES/UFPE; MARIA DE LOURDES MELO GUEDES ALCOFORADO, POLI/UPE e DANIEL DE CARVALHO CUNHA, CIN/UFPE sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **MÁRCIO JOSÉ DE CARVALHO LIMA APROVADO.**

Recife, 27 de janeiro de 2017.

MARCELO CABRAL CAVALCANTI
Coordenador do PPGEE

VALDEMAR CARDOSO DA ROCHA JÚNIOR
Orientador e Membro Titular Interno

MARIA DE LOURDES MELO GUEDES ALCONFORADO
Membro Titular Externo

RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA
Membro Titular Interno

DANIEL CARVALHO DA CUNHA
Membro Titular Externo

CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL
Membro Titular Interno

Ao Filho de Deus em poder, segundo o Espírito de santificação, pela ressurreição dos mortos, – Jesus Cristos, Senhor.

Agradecimentos

Qualquer pessoa que tenha passado pelo processo de preparar uma tese sabe que esse é um trabalho que não se faz sozinho; seria impossível. É inevitável que várias pessoas, por suas contribuições diretas e indiretas, influenciem o resultado final – algumas delas ao envolver-se com o trabalho em questão, outras como parte da vida do autor. Este espaço de agradecimentos é uma tentativa de reconhecer ao menos as contribuições mais importantes.
Inicialmente, ao todo poderoso e amigo Deus.
Também agradeço: ao professor Valdemar Cardoso da Rocha Jr., por ter acreditado em mim e aceitado me orientar, pela sua dedicação e orientação neste trabalho de doutorado e na vida acadêmica e pessoal; minha amada esposa, Karla, por sua presença, companheirismo diário e adjuntora nas horas mais difíceis; aos meus pais, Erivaldo e Márcia, que não só apoiaram minha decisão de fazer pós-graduação como possibilitaram minha educação, me apoiaram durante todos esses anos e incentivaram meus sonhos e a vontade de sempre aprender mais; minhas irmãs e família, alicerce fundamental da minha vida, por sua compreensão na minha ausência; à amiga e "irmã" Maria de Lourdes Alcoforado, sem seus incentivos essa tese não seria possível; aos meus irmãos na fé, Charles Montenegro, Rómulo Montenegro e Victor Rusu; aos colegas de pós-graduação e estudo, especialmente Kleber Paulo, Andrei Formiga, João Marcelo, Juliano Bandeira e Mariana Cockles, tanto pela convivência e amizade nesses anos quanto pela ajuda concreta; aos meus companheiros de viagem Vlaudemir Albuquerque, Carla Richter, Hosana Leite, Iracira Ribeiro e Lúcia Badú pelo apoio e amizade; aos professores com quem tive contato no Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE: Cecilio Pimentel, Hélio Magalhães de Oliveira, Ricardo Campello e Márcia Mahon, pelo exemplo estabelecido de pesquisadores, professores e seres humanos, modelos a serem seguidos por mim; finalmente, sem o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES e Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE-UFPE, este trabalho não teria sido possível. A todos, meu muito obrigado.

Márcio José de Carvalho Lima

Universidade Federal de Pernambuco
27 de Janeiro de 2017

RESUMO

ESTA tese utiliza codificadores convolucionais concatenados (CCC) em sistemas de comu-nicações, para emprego em canais de acesso múltiplo. Tais canais permitem o acesso simultâneo a mais de um usuário, tendo como saída do canal uma combinação dos sinais transmitidos pelos usuários. Em particular, é dada ênfase ao caso em que *T* usuários binários transmitem simultaneamente em um canal aditivo para um único receptor, denotado canal aditivo com *T* usuários binários (*T*-BAC). São propostos alguns sistemas de codificação para a simulação de codificadores e de decodificação em presença de ruído aditivo Gaussiano branco. A codificação é baseada na concatenação paralela, serial, híbrida ou mista de codificadores convolucionais com a utilização de entrelaçadores, possibilitando uma nova abordagem para sistemas de acesso múltiplo por codificação colaborativa (CCMA). A decodificação utiliza módulos com entrada suave e saída suave, denotados módulos SISO, propostos na tese para a aplicação em canais aditivos de acesso múltiplo, em um processo de decodificação iterativa e colaborativa. São apresentados algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades a posteriori dos símbolos de entrada e saída dos usuários que dividem o canal, permitindo uma decodificação conjunta ou individual das mensagens transmitidas pelos usuários. São descritas e analisadas três configurações para os sistemas de decodificação iterativa em questão, seguindo os sistemas de codificação, em que os módulos SISO podem ser arranjados de forma serial, híbrida ou mista, até então, não existentes na literatura técnica específica para aplicações em canais aditivos de acesso múltiplo. Estes sistemas são implementados, por meio de simulação, com codificadores e decodificadores para o 2-BAC, 3-BAC e 4-BAC, usando codificadores convolucionais concatenados e esquemas CCMA paralela, série e misto.

Palavras-chave: Canais de acesso múltiplo. Canais aditivos. Codificação de canal. Codificadores concatenados. Decodificação iterativa.

ABSTRACT

THIS thesis uses concatenated convolutional codes (CCC) in communication systems for application in multiple access channels. Such channels allow simultaneous access to more than one user, providing as its output a combination of the signals transmitted by the users. The case of binary users transmitting simultaneously in an additive channel to a single receptor, known as additive channel with *T* binary users (*T*-BAC), is particularly emphasized during the discussion. We propose some coding systems for simulations of coding and decoding in the presence of the additive white Gaussian noise. The coding is based on the parallel, serial, hybrid or mixed concatenation of convolutional codes using interleavers, providing a new approach to the collaborative coding multiple access (CCMA). The decoding uses some modules with soft-input soft-output, denoted as SISO modules, recommended, here, for the application in multiple access additive channels in an iterative and collaborative decoding process. In addition, we propose some algorithms employing the SISO modules that continuously update the a posteriori probabilities of the input and output symbols of the users dividing the channel, in a way that it allows a joint or individual decoding of the messages transmitted by these users. Also, we describe and analyze three configurations for the iterative decoding systems under consideration, following the coding systems in which the SISO modules can be arranged in a serial, hybrid or mixed way. This technique, until now, was not available in the current specialized literature about practical applications in multiple access additive channels. Finally, these iterative decoding systems are investigated by computer simulation, i.e., by the coding and decoding applied to the 2-BAC, 3-BAC and 4-BAC, using convolutional concatenated codes and parallel, serial and mixed CCMA schemes.

Keywords: Multiple access channel. Adder channel. Channel codification. Concatenated convolutional codes. Iterative decoding.

Lista de Ilustração

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

A seguir são apresentadas em ordem alfabética as abreviaturas utilizadas na tese.

Abreviação	**Definição**
ADSL	*Asymmetric Digital Subscriber Line.*
AWGN	Ruído aditivo Gaussiano branco (*additive white gaussian noise*).
BAC	Canal aditivo binários (*binary adder channel*).
BCH	Bose, Chaudhuri e Hocquenghem
BCJR	Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv
BER	Taxa de erro de bit (*bit error rate*).
BIAWGN	*Binary input additive white Gaussian noise.*
BPSK	Modulação por chaveamento de fase binário (*binary phase shift keying*).
CCC	Codificadores convolucionais concatenados (*concatenated convolutional codes*).
CCMA	Acesso múltiplo por codificação colaborativa (*collaborative coding multiple ac ess*).
CDMA	Múltiplo acesso por divisão de código (*code division multiple access*).
curvas EXIT	Curvas de transferência de informação extrínseca (*extrinsic information transfer charts*).
EDGE	*Enhanced date rates for GSM evolution.*
EXIT	Transferência de informação extrínseca (*extrinsic information transfer*).
FDP	Função densidade de probabilidade (*probably density function*).
FPGA	*Fied-programmable gate array.*
GSM	*Global System for Mobile.*
HCCC	Codificadores convolucionais concatenados em forma híbrida (*hybrid concatenated convolutional codes*).

Abreviação	**Definição**.
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*).
LC	Baixa complexidade (*low complexity*).
LDPC	Códigos de verificação de paridade de baixa densidade (*low density parity check code*).
LLR	Razões de log-verossimilhança (*log-likelihood ratio*).
LTE	*Long term evolution.*
MAC	Canal de acesso múltiplo (*multiple access channel*).
MAP	Máxima probabilidade *a posteriori* (*maximum a posteriori probability*).
MCCC	Codificadores convolucionais concatenados em forma mista (*mixed concatenated convolutional codes*).
ML	Máxima verossimilhança (*maximum likelihood*).
módulo SISO	Módulo de entrada suave e saída suave (*soft-in, soft-out module*).
MuD	Detecção conjunta ou multiusuário (*multiuser detection*).
MuD-LC	Detecção conjunta de baixa complexidade (*multiuser detection of low complexity*).
PCCC	Codificadores convolucionais concatenados em paralelo (*parallel concatenated convolutional codes*).
SuD	Detecção individual ou único usuário (*single-user detection*).
SuD-LC	Detecção individual de baixa complexidade (*single-user detection of low omplexity*).
SISO	Entrada suave e saída suave (*soft-in, soft-out*).
SOVA	Algoritmo de Viterbi com saída suave (*soft output Viterbi algorithm*).
SCCC	Codificadores onvolucionais concatenados em série (*serial concatenated convolutional odes*).
T-BAC	Canal aditivo com T usuários binários (*t-user binary adder channel*).
UMTS	*Universal mobile telecommunications system.*
WiMax	Padrão IEEE 802.16, denotado por Interoperabilidade Mundial para Acesso de Micro-ondas (*worldwide interoperability for microwave access*).
WUSB	*Wireless universal serial bus.*
T-BAC	Canal aditivo com T usuários binários (*T-user binary adder channel*).

Lista de Símbolos

A seguir são apresentadas notações e símbolos utilizados na tese.

$\propto$	denota proporcionalidade direta.
$\mathcal{C}_i$	Codificador constituinte do usuários i.
$C(T)$	Capacidade de canal com T usuários.
D_i^l	Decisão, em que a hipótese H_i^l é verdadeira.
$\boldsymbol{g}_t$	Sequência de ruído, definido da forma $\boldsymbol{g}_t = \{g_t^{(1)}, g_t^{(2)}, \ldots, g_t^{(j)}, \ldots, g_t^{(n)}\}$.
$g_t^{(j)}$	j-ésima amostras independentes de ruído Gaussiano branco, com variância σ^2 e média zero no instante de observação t.
$H(V)$	Entropia da variável aleatória V.
$H(V;Z)$	Entropia conjunta de duas variáveis aleatórias V e Z.
$H(V\|Z)$	Entropia da variável aleatória V, condicionada ao conhecimento de Z.
H_i^l	Hipótese o i-ésimo usuário transmitiu o símbolo $\mathbf{v}_i^l \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq l \leq \|\mathcal{V}_i\|$.
$I(V;Z)$	Informação mútua entre V e Z.
k_i	Número de símbolos do sub-bloco de informação do usuários i a cada instante de observação t.
n	Número de símbolos do sub-bloco do código cada instante de observação t.
N	Número de instantes de tempo de observação de uma sequência.
T	Número de usuários no sistema.
R_i	Taxa assintótica do codificador constituinte $\mathcal{C}_i$ atribuído ao usuário i, definida da forma $R_i = k_i/n$.
$R(T)$	Taxa total do sistema codificado com T usuários $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_T)$, definida da forma $R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T$.

$\boldsymbol{u}_{i,1}^{N}$ Sequência de símbolos de informação do usuário i, definido da forma $\boldsymbol{u}_{i,1}^{N} = \{\boldsymbol{u}_{i,1}, \boldsymbol{u}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,N}\}$.

$\mathcal{U}_i$ Espaço vetorial das mensagens do usuário i, com cardinalidade $|\mathcal{U}_i|$, definido da forma $\mathcal{U}_i = \{\mathbf{u}_i^1, \mathbf{u}_i^2, \ldots, \mathbf{u}_i^{|\mathcal{U}_i|}\}$. No caso binários $|\mathcal{U}_i| = 2^{k_i}$.

$\boldsymbol{u}_{i,t}$ Sub-bloco de informação do usuário i no instante de observação t, definido da forma $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(j)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$, $\boldsymbol{u}_{i,t} \in \mathcal{U}_i$.

U_i Alfabeto de informação do usuário i.

$u_{i,t}^{(j)}$ j-ésimo símbolo de informação do usuário i no instante de observação t, $u_{i,t}^{(j)} \in U_i$.

$\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}^{N}$ Sequência estimada das mensagens transmitidas pelo receptor referente ao usuário i no instante de obervação t, definido da forma $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}^{N} = \{\hat{\boldsymbol{u}}_{i,1}, \hat{\boldsymbol{u}}_{i,2}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{i,N}\}$.

$\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}$ Estimativa do sub-bloco de informação do usuário i no instante de observação t, definido da forma $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t} = \{\hat{u}_{i,t}^{(1)}, \hat{u}_{i,t}^{(2)}, \ldots, \hat{u}_{i,t}^{(j)}, \ldots, \hat{u}_{i,t}^{(k_i)}\}$.

$\hat{u}_{i,t}^{(j)}$ j-ésima estimativa para do símbolo associado ao usuários i no instante de observação t.

$\boldsymbol{v}_{i,1}^{N}$ Sequência de símbolos de informação codificada do usuário i, denotada por sequência-código ou sequência do código, definida da forma $\boldsymbol{v}_{i,1}^{N} = \{\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,N}\}$.

$\mathcal{V}_i$ Espaço vetorial dos sub-blocos do código associado ao usuário i, com cardinalidade $|\mathcal{U}_i|$, definido da forma $\mathcal{V}_i = \{\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2, \ldots, \mathbf{v}_i^{|\mathcal{U}_i|}\}$. No caso binários $|\mathcal{V}_i| = 2^{k_i}$.

$\boldsymbol{v}_{i,t}$ Sub-bloco do código do usuário i no instante de observação t, definido da forma $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(j)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, $\boldsymbol{v}_{i,t} \in \mathcal{V}_i$.

V_i Alfabeto do código do usuário i.

$v_{i,t}^{(j)}$ j-ésimo símbolo do código do usuário i no instante de observação t, $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$.

$\boldsymbol{v}_t$ Sequência de entrada para o canal com T usuários, definido da forma $\boldsymbol{v}_t = [\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}]$.

$\boldsymbol{y}_t$ Sequência intermediária gerada pelo canal aditivo com T usuários no instante t, definido da forma $\boldsymbol{y}_t = \{y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \ldots, y_t^{(j)}, \ldots, y_t^{(n)}\}$.

$y_t^{(j)}$ j-ésimo símbolo da sequência intermediária gerada pelo canal aditivo com T usuários no instante t, $y_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{T} v_{i,t}^{(j)}$, adição, coordenada a coordenada, dos j-ésimos símbolos dos T usuários.

$\boldsymbol{z}_t$ Saída do canal no instante t, definido da forma $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, denotado na decodificação como sequência ou bloco de observação.

Z Alfabeto da sequência de observação.

$z_t^{(j)}$ j-ésimo símbolo da sequência de observação no instante t, $z_t^{(j)} \in Z$.

Sumário

CAPÍTULO 1

Motivação e Plano de Tese

1.1 Introdução

Um dos grandes desafios envolvendo comunicações em banda larga, sejam fixas ou móveis, consiste em desenvolver tecnologias avançadas de acesso que possibilitem uma transmissão com eficiência na decodificação dos sinais transmitidos, inclusive em meios com severo desvanecimento [1].

Sistemas de comunicação têm crescido cada vez mais, tanto no número de usuários, como em taxa de transmissão, permitindo que uma quantidade crescente de indivíduos acesse informações que melhoram sua qualidade de vida. O conjunto de padrões de comunicação da família IEEE 802 [2] possui diversas aplicações. Como exemplo, há sistemas com alcances menores, tais como o Bluetooth [3] e WUSB [4, 5], tradicionalmente utilizados para conectar dispositivos numa rede local; assim como os sistemas de telefonia celular digital [6, 7] e o sistema WiMax, padrão IEEE 802.16, denotado por interoperabilidade mundial para acesso de micro-ondas [8].

Os sistemas mencionados utilizam um canal que é compartilhado por vários usuários ao mesmo tempo e mesma faixa de frequência, chamado canal de acesso múltiplo (MAC) [9]. Ou seja, os sistemas MAC permitem que cada usuário possa transmitir fazendo uso simultâneo de um mesmo canal de comunicação. O canal, por sua vez, altera os sinais transmitidos através de ruído e/ou desvanecimento, devido à existência de vários percursos entre o transmissor e o receptor. Um exemplo prático de sistemas de acesso múltiplo é o padrão de comunicações móveis UMTS, baseado no esquema de acesso múltiplo por divisão de código (CDMA) [10–

15], técnica em que os usuários transmitem ao mesmo tempo e na mesma faixa de frequência em um mesmo canal. No entanto, estes sinais podem ser separados no receptor devido à utilização de técnicas de espalhamento espectral.

Sistemas de comunicação de acesso múltiplo foram estudados primeiramente por Shannon, em 1961, e, desde então, têm sido investigados por diversos autores [10–64]. Por exemplo, a codificação colaborativa para acesso múltiplo (CCMA) [27, 33, 35–38] e a CDMA são técnicas que permitem uma transmissão simultânea eficiente de vários usuários dividindo um mesmo canal, sem a necessidade de multiplexação no tempo ou na frequência. A ideia geral desses dois esquemas de acesso múltiplo é a possibilidade de se encontrar conjuntos de sinais (códigos) que possam ser sobrepostos de forma a criar um sinal composto. Assim, os sinais individuais presentes no conjunto podem ser recuperados na recepção.

Os sistemas de comunicação de acesso múltiplo considerados nesta tese, em princípio, são para T usuários. Ou seja, supõe-se que T fontes estatisticamente independentes transmitem símbolos binários para T destinatários através de um mesmo canal aditivo sem memória, na presença de ruído. Os primeiros estudos para a obtenção de códigos para este tipo de sistema de comunicação foram dedicados a maximizar o número de palavras-código unicamente decodificáveis para um dado comprimento, associada a cada usuário, para o caso particular de dois usuários independentes [16, 17].

Neste sentido, em 1971, Ahlswede [17] determinou as regiões de capacidade para os canais de acesso múltiplo de dois ou três usuários com fontes independentes. Em 1972, Liao [18, 19] estudou o canal de acesso múltiplo geral para T usuários com fontes independentes, em que formulou a região de capacidade para este canal e estendeu o Teorema de Codificação Fundamental de Shannon[1] [65] para canais de acesso múltiplo. Posteriormente, Slepian e Wolf [20] consideraram o caso com fontes correlacionadas em que discutiram o canal de acesso múltiplo. O canal de acesso múltiplo com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) foi considerado por Cover [21] e Wyner [22], em 1975. Ahlswede [23] estendeu o caso de acesso múltiplo de duas entradas e uma saída para o caso de duas entradas e duas saídas, e Ulrey [24] determinou a região de apacidade para o caso de s entradas e r saídas, em 1975. Uma ampla pesquisa sobre os aspectos teóricos de canais de acesso múltiplo foi apresentada por Van Der Meulen [25, 26].

Peterson e Costello [9], em 1979, investigaram pares de codificadores convolucionais bi-

[1] O teorema de codificação de Shannon mostra que, para um sistema de comunicação com um transmissor e um receptor, existe uma capacidade C para um dado canal e essa comunicação pode ser estabelecida com uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena para qualquer taxa R menor que C. O teorema de codificação ainda mostra que para qualquer taxa R maior que C, é impossível tornar a probabilidade de erro arbitrariamente pequena.

nários usados para o canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC). Foi discutida a decodificação de máxima verossimilhança e definida uma treliça para dois usuários no canal AWGN.

Chang e Weldon, em 1979 [31], apresentaram uma outra abordagem no sentido de obter uma classe de códigos unicamente decodificáveis para o caso com T usuários, $T > 2$. Wilson, em 1988 [34], generalizou os códigos de Chang e Weldon e apresentou uma classe de códigos corretores de erros para o canal com T usuários.

Mais recentemente, trabalhos voltados para canais de acesso múltiplo concentraram-se na construção de códigos para o 2-BAC sem ruído, unicamente decodificáveis com altas taxas de transmissão, geralmente fazendo uso de busca computacional exaustiva [39–42, 44, 48, 49, 57]. Nestes casos, em geral, os códigos obtidos não apresentam uma estrutura que permita simplificar a decodificação.

Em 2001 foi proposto um método para construção de códigos de verificação de paridade de baixa densidade (LDPC) [66, 67] não unicamente decodificáveis para o 2-BAC [1, 45], e posteriormente outros autores caracterizaram e apresentaram códigos LDPC para o 2-BAC [50, 56, 61–63].

Em 2004 foi introduzida uma técnica de construção de códigos de treliça para o 2-BAC [46, 47], a partir da introdução de uma condição de decodibilidade única. Desde então, houve um avanço no estudo desta construção e, posteriormente, foi discutido um esquema de codificação para o 2-BAC, empregando um par de codificadores convolucionais turbo distintos [51, 53], não necessariamente formando um par de códigos unicamente decodificáveis. Neste caso o decodificador é capaz de separar os dados binários para cada usuário explorando a estrutura do codificador para combater ruído e resolver ambiguidades. Ambos os esquemas propostos para o 2-BAC ruidoso são baseados no algoritmo de decodificação BCJR [68] que utiliza o critério de máxima probabilidade *a posteriori* (MAP), estimando o erro por cada símbolo na mensagem, em uma concatenação dos codificadores componentes convolucionais em paralelo (PCCC), fazendo uso de entrelaçadores para desacoplamento estatístico da informação.

Mais recentemente, em 2010 foi estendido o uso de códigos polares [69][2] para canais de acesso múltiplo [52, 54, 59]. Em 2014, foi proposto um esquema de codificação concatenado em paralelo para T usuários, nos casos, a saber: (a) cada usuário utiliza um alfabeto biná-

[2] O código polar é um código de bloco linear que utiliza a técnica de polarização de canal, a qual consiste em construir n canais polarizados a partir de n cópias independentes e idênticas, formadas por n canais com entrada binária, discretos e sem memória, em que n denota o comprimento da palavra-código. Os canais são polarizados de modo a tornarem-se totalmente ruidosos ou sem ruído a medida que $n \to \infty$.

rios [55], e (b) cada usuários utiliza um alfabeto não binário [58]. Cada usuário emprega um código de repetição binário concatenado em paralelo com q codificadores componentes, em que o código de repetição combate a interferência multiusuário e os codificadores componentes são usados para combater o ruído Gaussiano presente no canal. Em 2015, Alcoforado *et al.* estendeu para três usuários o algoritmo de decodificação BCJR para o BAC [60] e, posteriormente, apresentou uma codificação turbo perfurada para canais aditivos binários com dois usuários [64].

Esta tese objetiva investigar soluções para o uso de sistemas de acesso múltiplo com T usuários binários, utilizando codificadores convolucionais concatenados (CCC) [70] para aplicações em sistemas de comunicação multiusuário. Desse modo, objetiva-se propor novos Sistemas Codificados Concatenados para Canais de Acesso Múltiplo.

1.2 Contribuições da Tese

Esta tese de doutorado em engenharia elétrica na área de comunicações objetiva usar codificadores convolucionais concatenados para o uso em sistemas de comunicação de acesso múltiplo para aplicações em comunicação, propondo novos sistemas de codificação colaborativa e decodificação iterativa para canais de acesso múltiplo ruidosos. As principais contribuições são as seguintes:

1. São propostos novos sistemas de codificação colaborativa não unicamente decodificáveis para canais de acesso múltiplo utilizando codificadores convolucionais concatenados, especificamente canais aditivos de acesso múltiplo com T usuários binários, a saber,
   - **SCCC** - Codificação Convolucional Concatenada em Série;
   - **HCCC** - Codificação Convolucional Concatenada na Forma Híbrida;
   - **MCCC** - Codificação Convolucional Concatenada na Forma Mista.
2. São propostos novos sistemas decodificação iterativa para canais aditivos ruidosos com usuários binários;
3. São propostos módulos de entrada suave e saída suave (Módulos SISO), baseados na regra MAP, para o desenvolvimento de métodos de decodificação iterativa e colaborativa, denominados de algoritmo SISO, em que são definidas,
   - Treliça para cada usuário;

– Estruturas paralelizáveis.

4. É proposto um Algoritmo SISO-MuD para decodificação conjunta de dois ou mais usuários binários.
5. É proposto um Algoritmo SISO-SuD para a decodificação individual, com a introdução de um decisor suave, para dois ou mais usuários binários.
6. É proposto um Algoritmo SISO de Baixa Complexidade.
7. Implementações de sistemas codificados para simulação de codificadores e decodificadores em presença de AWGN.
8. Apresentação do desempenho em termos de curvas de taxa de erro de bit versus relação sinal ruído (BER) para alguns sistemas concatenados propostos com T usuários, em que $2 \leq T \leq 4$, para configurações em série, paralelo e mista, utilizando os algoritmos propostos.

1.3 Plano de Tese

Esta tese de doutorado está organizada em seis capítulos, incluindo as conclusões e trabalhos futuros. O Capítulo 1 é introdutório, com um curto histórico, uma revisão bibliográfica e uma exposição do plano de tese. O Capítulo 2 apresenta um panorama geral sobre os canais de acesso múltiplo com T transmissores e um único receptor, responsável por estimar as mensagens transmitidas baseando-se na observação do canal e no comportamento dos codificadores utilizados por cada transmissor. Inicialmente, definem-se os conceitos necessários como entropia, informação mútua e capacidade para canais de acesso múltiplo, assim como a notação utilizada ao logo da tese. A capacidade de canal aditivo de acesso múltiplo com T usuários binários na ausência de ruído e na presença de ruído são, também, definidas e apresentadas. A capacidade de canal para canais Gaussianos servirá de limite teórico para os esquemas de codificação e decodificação propostos ao longo da tese. Por sua vez, o Capítulo 3 apresenta alguns sistemas codificados para canais de acesso múltiplo em que cada usuário utiliza um esquema de codificação com codificadores convolucionais concatenados, possibilitando uma nova abordagem para sistemas de acesso múltiplo por codificação colaborativa. Em seguida, o Capítulo 4 introduz os módulos SISO, utilizados para canais de acesso múltiplo. São propostos sistemas de codificação colaborativa e decodificação iterativa para codificadores convolucionais concatenados não unicamente decodificados, concatenados em paralelo, em série e de forma híbrida. O desempenho da decodificação é baseado no uso de algoritmos de

decodificação do tipo entrada suave-saída suave (SISO) com o uso do algoritmo de decodificação de probabilidade máxima *a posteriori*. Nesse sentido, são apresentados dois algoritmos de detecção: um algoritmo de detecção conjunta das mensagens transmitidas por todos os usuários e um algoritmo de detecção da mensagem de um único usuário. Esta tese ainda inclui três apêndices. No Apêndice A é apresentado o módulo usado na decodificação iterativa para um único usuário que servirá de apoio ao desenvolvimento do algoritmo de decisão individual para dois ou mais usuário binários em um canal aditivo ruidoso. O Apêndice B apresenta a generalização da decodificação para mais de dois usuários binários, com ênfase nos módulos SISO propostos na tese para a aplicação em canais aditivos ruidosos de acesso múltiplo, em um processo de decodificação iterativa e colaborativa. São descritos os algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades a *posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos usuários que utilizam o canal, dada uma observação, a saber o Algoritmo SISO-MuD, permitindo uma decodificação conjunta das mensagens transmitidas pelos usuários, e o Algoritmo SISO-SuD, permitindo uma decodificação individual das mensagens transmitidas pelos usuários. Por fim, o Apêndice C apresenta brevemente o método de Monte Carlo para a estimação da probabilidade de erro de bit em um canal com ruído, assim como intervalos de confiança fornecendo uma medida estatística da confiabilidade para os sistemas comunicação simulados.

CAPÍTULO 2

Modelos de Sistemas Multiusuários

... nada mais do que uma massa de inúmeras estrêlas plantadas juntas em aglomerados. [71, pag.58]

— **Galileu Galilei (1564–1642)**

SISTEMAS de comunicação que permitem que cada usuário possa transmitir fazendo uso simultâneo de um canal de comunicação são chamados de sistemas de acesso múltiplo [9]. O canal, por sua vez, pode alterar os sinais transmitidos através da adição de ruído e desvanecimento, devido à existência de vários percursos entre o transmissor e o receptor. A codificação e decodificação para sistemas de comunicação de acesso múltiplo têm sido investigadas por diversos autores [10–64].

Neste capítulo são apresentados modelos para o sistema multiusuário baseado nos trabalhos desenvolvidos em [9–11, 16, 27, 31, 46, 47, 51, 53, 72]. Em particular tratam-se dos canais aditivos de acesso múltiplo com T usuários binários, com e sem ruído, e é dada ênfase na demonstração da expressão algébrica para a capacidade de canal.

2.1 Sistemas de Acesso Múltiplo com T Usuários

Os sistemas de comunicação são utilizados para reproduzir em um ponto o valor de uma variável que existe em outro ponto. Para que isso seja possível, transmite-se uma mensagem

de um transmissor para um receptor, através de um canal. A mensagem pode ser transformada para que tenha um formato apropriado de transmissão pelo canal utilizado. No caso em que não são identificados erros durante uma transmissão, causados por alguma interferência aleatória no canal utilizado, a mensagem recebida é exatamente igual à mensagem transmitida. Entretanto, os canais utilizados, na prática, distorcem de modo aleatório a mensagem transmitida. Esta distorção pode fazer com que, na recepção, o valor da mensagem seja trocado por outro, ou que o valor seja perdido, ou que não se tenha certeza sobre qual mensagem foi transmitida. Nestas situações, ocorrem erros de transmissão. Se a distorção fosse exatamente a mesma sempre e, se para cada mensagem recebida houvesse somente uma mensagem transmitida, o seu efeito poderia ser contornado através de um mapeamento das mensagens recebidas nas mensagens transmitidas. Entretanto, a distorção é normalmente causada aleatoriamente. O canal, então, é modelado por meio de uma probabilidade de transição que indica qual é a probabilidade de receber uma mensagem, dado que uma informação foi transmitida.

Segundo Shannon [65], usa-se a expressão *canal discreto*, de um modo genérico, para designar um sistema por meio do qual uma sequência de escolhas de elementos de um conjunto finito (ou infinito contável) de símbolos pode ser transmitida de um ponto a outro. Assim, o sistema de comunicação considerado é o canal de acesso múltiplo com T usuários estatisticamente independentes que transmitem para T destinatários sobre um canal comum sem memória; ver Figura 2.1 [11, 16, 31].

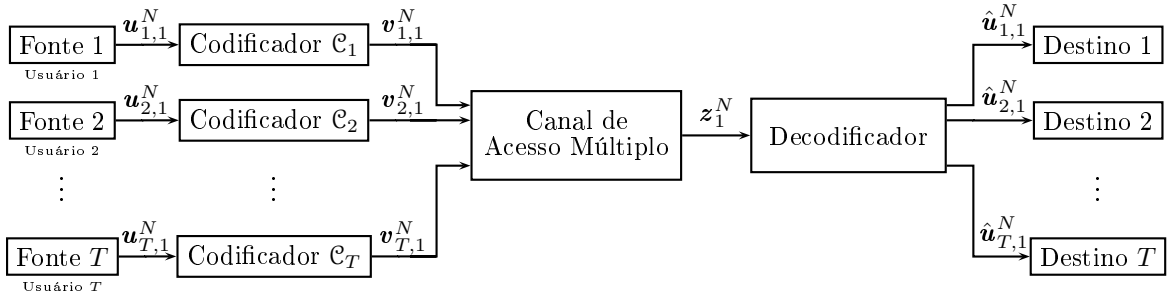


Figura 2.1: *Diagrama em blocos de um sistema de comunicação de acesso múltiplo.*

Considere um sistema de comunicação de acesso múltiplo com T usuários; ver Figura 2.1. Ao i-ésimo usuário é associada a sequência de símbolos de informação a ser codificada, $\boldsymbol{u}_{i,1}^N = \{\boldsymbol{u}_{i,1}, \boldsymbol{u}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,N}\}$. Em um instante de observação t, o i-ésimo usuário escolhe, de forma independente, um sub-bloco de informação $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(j)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$ com k_i símbolos de um dado alfabeto U_i, em que $1 \leq t \leq N$, $u_{i,t}^{(j)} \in U_i$. Dessa forma, $\boldsymbol{u}_{i,t}$ é pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U}_i = \{\mathbf{u}_i^1, \mathbf{u}_i^2, \ldots, \mathbf{u}_i^{|\mathcal{U}_i|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{U}_i|$.

A presença de ruído, o desvanecimento e a interferência entre os usuários são os três principais fatores que limitam o desempenho dos sistemas de acesso múltiplo. Em particular, a detecção multiusuário (MuD) é utilizada para combater a interferência de acesso múltiplo e o ruído, enquanto a diversidade espaço-temporal é utilizada no combate ao desvanecimento. A aplicação de códigos corretores de erro é utilizada para combater o ruído, a interferência de acesso múltiplo e o desvanecimento de forma conjunta.

A codificação em sistemas de comunicação digitais consiste em associar redundância às mensagens a serem transmitidas, visando protegê-las contra ruído e interferência. Dessa forma, consegue-se reduzir o número de erros nas mensagens decodificadas.

Antes de acessar o canal, supõe-se que cada usuário utiliza um esquema de codificação empregando um codificador constituinte do usuário i, denotado por $\mathcal{C}_i$, que associa a sequência de informação a uma sequência codificada de saída, $\boldsymbol{v}_{i,1}^{N} = \{\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,N}\}$, ver Figura 2.1. Em um instante de observação t, o codificador $\mathcal{C}_i$ associa o sub-bloco de informação ao sub-bloco de saída $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(j)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$ com n símbolos de um determinado alfabeto V_i, em que $1 \leq t \leq N$, $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$. Assim, $\boldsymbol{v}_{i,t}$ é pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{V}_i = \{\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2, \ldots, \mathbf{v}_i^{|\mathcal{V}_i|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{V}_i|$. Também é assumido que os T remetentes, a cada instante t de observação, operam na mesma banda de frequência, transmitem ao mesmo tempo, utilizam codificadores binários de mesmo comprimento n de sequência de saída dos codificadores empregados, ver Figura 2.1, e mantêm o sincronismo na transmissão dos símbolos das sequência.

São atribuídos aos T usuários os codificadores $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_T$, respectivamente, que juntos são chamados de codificadores dos T usuários $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_T)$; e cada codificador individual é chamado *codificador constituinte*. O codificador constituinte $\mathcal{C}_i$, usado pelo usuário i, gera M_i sequências distintas, então a taxa assintótica deste codificador é

$$R_i = \frac{\log M_i}{n} = \frac{k_i}{n}, \tag{2.1}$$

e a *taxa total do sistema codificado* para os T usuários $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_T)$ é definida conforme [31], como sendo,

$$R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T. \tag{2.2}$$

Para cada instante de observação t, o canal recebe como entrada os T sub-blocos de saída referentes a cada usuário, $\boldsymbol{v}_t = [\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}]$. A saída do canal é uma determinada função que combina os símbolos de entrada gerando uma sequência observação $\boldsymbol{z}_1^N =$

$\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$, em que, no instante de observação t, $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$ com n símbolos pertencentes a um determinado alfabeto Z, ou seja, $z_t^{(j)} \in Z$, $1 \leq j \leq n$.

Sendo o canal de tempo discreto e sem memória, com entradas e saídas pertencentes a alfabetos também discretos, a probabilidade condicional representando a matriz de transição do canal é, no instante de observação t,

$$P\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(z_t^{(j)} | v_{1,t}^{(j)}, v_{2,t}^{(j)}, \ldots, v_{T,t}^{(j)}\right); \tag{2.3}$$

ou,

$$P\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_t\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(z_t^{(j)} | v_t^{(j)}\right); \tag{2.4}$$

em que, no instante de observação t, $v_t^{(j)}$ é a associação da j-ésima coordenada dos T usuários.

Um único decodificador é responsável por estimar as mensagens, sequências de informação $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{T,t}$, a cada instante de observação t, para os T destinos baseado na observação do canal $\boldsymbol{z}_t$, ou na sequência de observação $\boldsymbol{z}_1^N$, e o comportamento dos codificadores - ver Figura 2.1.

Para a decisão, o receptor utiliza um critério que minimiza a probabilidade de uma decisão incorreta, sendo visto como um problema de teoria da decisão. Pode-se concluir que o vetor recebido $\boldsymbol{z}_t$, no instante de observação t, difere do vetor transmitido pelo i-ésimo usuário $\boldsymbol{v}_{i,t}$ pela forma como o canal associa os vetores transmitidos pelos $T-1$ outros usuários [73]. Nesta seção, é apresentada uma breve introdução à regra de máxima probabilidade *a posteriori* (MAP), utilizada no processo de decodificação, a qual minimiza a probabilidade de erro.

Dados dois eventos A e B, o teorema de Bayes para teste de hipóteses fornece a relação entre a probabilidade condicional e a probabilidade conjunta dos eventos A e B[1], da forma

$$P\left(A|B\right) P\left(B\right) = P\left(B|A\right) P\left(A\right) = P\left(A, B\right). \tag{2.5}$$

Aplicando o teorema de Bayes em um canal de comunicação de acesso múltiplo, pode-se

[1] No que se segue, será adotada a convenção: "A" denota variáveis aleatórias e "a" suas realizações; "$P(a) = P_A(a)$", "$p(b) = p_B(b)$", para A discreto e B real, denota distribuição de probabilidade e função densidade de probabilidade, respectivamente, com suas distribuições, funções e espaços amostrais definidos implicitamente; "$P[a] = P[A = a]$" denota probabilidade de ocorrência do evento particular "$A = a$".

escrever a probabilidade *a posteriori* como

$$P\left[\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T|\boldsymbol{z}_t\right] = \frac{P\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T\right]P\left[\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T\right]}{P\left[\boldsymbol{z}_t\right]}, \tag{2.6}$$

ou,

$$P\left[\boldsymbol{v}_t=\mathbf{v}|\boldsymbol{z}_t\right] = \frac{P\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_t=\mathbf{v}\right]P\left[\boldsymbol{v}_t=\mathbf{v}\right]}{P\left[\boldsymbol{z}_t\right]}, \tag{2.7}$$

em que a probabilidade *a posteriori* é definida em função da variável aleatória $\boldsymbol{z}_t$, que representa uma amostra do sinal recebido $\boldsymbol{z}_t$. Além disso, $\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i$ indica que a sequência transmitida pelo usuário i foi $\mathbf{v}_i$ entre as $|\mathcal{V}_i|$ possíveis, em que $\mathbf{v}_i\in\mathcal{V}_i$.

A probabilidade do sinal recebido $\boldsymbol{z}_t$ condicionado aos sinais transmitido $\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}$, ou da forma $\boldsymbol{v}_t=[\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}]$, é $P\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_t=\mathbf{v}\right]$. Considerando todo o conjunto de sinais transmitidos, tem-se que a probabilidade do sinal recebido pelo decodificador $P\left[\boldsymbol{z}_t\right]$ é dada por

$$P\left[\boldsymbol{z}_t\right]=\sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0}P\left[z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right]P\left[v_t^{(j)}\right]. \tag{2.8}$$

2.1.0.1 Teoria da Decisão

Definição 2.1 *Denote uma função genérica de decisão $h_i(\boldsymbol{z}_t)$, utilizada pelo receptor, que mapeia a sequência de observação em um conjunto de mensagens associadas ao i-ésimo usuário. Quando $h_i(\boldsymbol{z}_t)=\boldsymbol{v}_i^l$, o receptor decide que o i-ésimo usuário transmitiu o símbolo $\boldsymbol{v}_i^l\in\mathcal{V}_i$ [73, pág.78] e [74, pág.162], assim cada hipótese é definida por*

$$H_i^l: O\ sinal\ \boldsymbol{v}_i^l\ foi\ transmitido\ pelo\ usuário\ i, \tag{2.9}$$

em que $i=1,2,\ldots,T$ e $1\leq l\leq|\mathcal{V}_i|$. A decisão é:

$$D_i^l: A\ hipótese\ H_i^l\ é\ verdadeira. \tag{2.10}$$

A probabilidade de uma decisão estar correta para o usuário i é de

$$P_i(c)=P\left(\bigcup_{l=1}^{|\mathcal{V}_i|}(H_i^l,D_i^l)\right); \tag{2.11}$$

como os eventos são mutuamente excludentes,

$$P_i(c) = \sum_{l=1}^{|\mathcal{V}_i|} P\left(H_i^l, D_i^l\right). \tag{2.12}$$

Logo a probabilidade de uma decisão incorreta é

$$\begin{aligned} P_i(e) &= 1 - P_i(c) \\ &= 1 - \sum_{l=1}^{|\mathcal{V}_i|} P\left(H_i^l, D_i^l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{|\mathcal{V}_i|} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{|\mathcal{V}_i|} P\left(H_i^l, D_i^k\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

A decisão é baseada na observação da sequência $\boldsymbol{z}_t$ e deve ser feita de tal forma que minimize a probabilidade de erro.

A informação relevante para o receptor é a projeção do ruído no espaço de sinais transmitidos. O projeto do receptor ótimo consiste em determinar uma versão do procedimento que minimiza a probabilidade de erro. Para o presente trabalho, será utilizada a regra de máxima probabilidade *a posteriori* (regra MAP) [73, pág.81].

Regra MAP: Dado um vetor recebido $\boldsymbol{z}_t$, no instante de tempo t, o decodificador baseado na regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro escolhe o índice l, referente ao l-ésimo vetor no espaço vetorial dos possíveis símbolos $\mathcal{V}_i$ enviados ao canal, transmitido pelo i-ésimo usuário, que maximiza a probabilidade *a posteriori* $P(H_i^{kl}|\boldsymbol{z}_t)$, em que

$$P(H_i^l|\boldsymbol{z}_t) = \frac{P(H_i^l; \boldsymbol{z}_t)}{P(\boldsymbol{z}_t)} = \frac{P(\boldsymbol{z}_t|H_i^l)P(H_i^l)}{P(\boldsymbol{z}_t)}, \tag{2.14}$$

isto é, define-se a l-ésima decisão para o i-ésimo usuário, da forma:

$$\text{Decide-se } D_i^l, \text{ se } P(\boldsymbol{z}_t|H_i^l)P(H_i^l) \text{ é máximo.} \tag{2.15}$$

Caso ocorra igualdade entre hipóteses para um mesmo usuário, a decisão é tomada para qualquer uma das hipóteses sem alterar a probabilidade de erro mínima. No caso em que as probabilidades *a priori* $P(H_i^l)$ forem eventos equiprováveis, ou seja,

$$P(H_i^l) = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|}, \quad l = 1, \ldots, |\mathcal{V}_i|, \tag{2.16}$$

a regra de decisão MAP torna-se a regra de decisão de máxima verossimilhança, ou regra ML, ou seja, dada uma sequência de observação, a regra de máxima verossimilhança escolhe

o índice l que maximiza a probabilidade condicional, isto é:

$$\text{Decide-se } D_i^l, \text{ se } P(\boldsymbol{z}_t|H_i^l) \text{ é máximo.} \tag{2.17}$$

Caso as hipóteses forem equiprováveis a regra de máxima verossimilhança é dita ótima [73, pág.84]. Uma aplicação da regra de máxima verossimilhança consiste no caso em que as probabilidades *a priori* são desconhecidas. Neste caso, implementa-se uma regra subótima se as probabilidades *a priori* não forem equiprováveis. O dispositivo que implementa esta regra é denominado decodificador de máxima verossimilhança.

A regra de decisão MAP particularizada para um sistema de decisão com duas hipóteses, pode ser obtida reescrevendo a regra MAP, Equação (2.15), em uma forma compacta como é mostrada a seguir

$$P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_1})P(H_i^{l_1}) \underset{D_{j_2}}{\overset{D_{j_1}}{\gtrless}} P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_2})P(H_i^{l_2}), \tag{2.18}$$

para $1 \leq l_1, l_2 \leq |\mathcal{V}_i|$, $l_1 \neq l_2$ e $\mathbf{v}^{l_1}, \mathbf{v}^{l_2} \in \mathcal{V}_i$, em que a igualdade decide-se por $D_i^{l_2}$, estabelecida de forma arbitrária. Define-se a razão de verossimilhança entre as hipóteses $H_i^{l_1}$ e $H_i^{l_2}$, como

$$\boldsymbol{\Lambda}_{i,t}(\boldsymbol{z}_t) = \frac{P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_1})}{P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_2})}. \tag{2.19}$$

A regra MAP é definida como

$$\boldsymbol{\Lambda}_{i,t}(\boldsymbol{z}_t) = \frac{P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_1})}{P(\boldsymbol{z}_t|H_i^{l_2})} \underset{D_i^{l_2}}{\overset{D_i^{l_1}}{\gtrless}} \frac{P(H_i^{l_2})}{P(H_i^{l_1})}. \tag{2.20}$$

O teste de razão de verossimilhança consiste em calcular a razão de verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}_{i,t}(\boldsymbol{z}_t)$ e em compará-la com um limiar. O limiar ótimo que minimiza a probabilidade de erro é $\frac{P(H_i^{l_2})}{P(H_i^{l_1})}$.

2.2 Canal Aditivo Sem Ruído de Acesso Múltiplo com T Usuários

Considere o canal aditivo de acesso múltiplo com T fontes de informação que transmitem mensagens simultaneamente, ilustrado na Figura 2.2 [31]. Note que a i-ésima fonte de informação, no instante t de observação, gera uma sequência de saída $\boldsymbol{v}_{i,t}$ que é a i-ésima entrada do canal. Os valores dos símbolos na saída do canal são obtidos pela adição, coordenada a coordenada, dos símbolos dos blocos de saída de cada usuário, ou seja

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_{1,t} + \boldsymbol{v}_{2,t} + \cdots + \boldsymbol{v}_{T,t}, \tag{2.21}$$

em que o sub-bloco de saída do usuário i é $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(j)}, \ldots, z_{i,t}^{(n)}\}$ e a saída do canal é $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, $z_t^{(j)} \in Z$, pois,

$$\begin{aligned} z_t^{(j)} &= \sum_{i=1}^{T} v_{i,t}^{(j)} \\ &= v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + \cdots + v_{T,t}^{(j)} \\ &= v_t^{(j)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$, $v_t^{(j)} \in V$, $1 \leq i \leq T$ e $1 \leq j \leq n$.

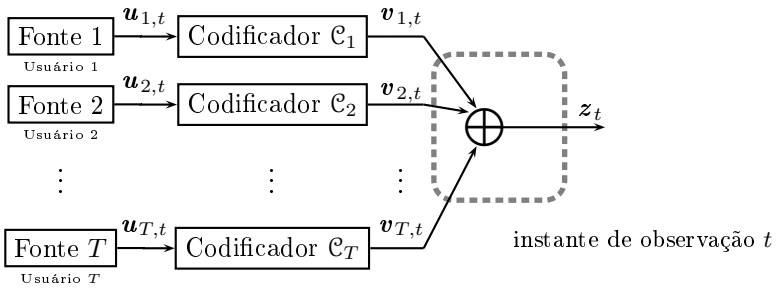


Figura 2.2: *Canal aditivo de acesso múltiplo com T usuários.*

Como o canal é de tempo discreto e sem memória, com componentes dos símbolos de entradas e saídas na j-ésima posição pertencentes aos alfabetos discretos V e Z, respectivamente, a probabilidade condicional entre a entrada e a saída para o canal, probabilidade de transição $P\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}, v_{2,t}^{(j)}, \ldots, v_{T,t}^{(j)}\right] = \mathrm{P}\left[Z = z_t^{(j)}|V_1 = v_{1,t}^{(j)}, V_2 = v_{2,t}^{(j)}, \ldots, V_T = v_{T,t}^{(j)}\right]$ [31], é definida da seguinte forma:

$$P\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}, v_{2,t}^{(j)}, \ldots, v_{T,t}^{(j)}\right] = \begin{cases} 1, & z_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + \cdots + v_{T,t}^{(j)} \\ 0, & z_t^{(j)} \neq v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + \cdots + v_{T,t}^{(j)} \end{cases}, \tag{2.23}$$

ou,

$$P\left[z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right] = \begin{cases} 1, & z_t^{(j)} = v_t^{(j)} \\ 0, & z_t^{(j)} \neq v_t^{(j)} \end{cases}, \tag{2.24}$$

pois, $v_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + \cdots + v_{T,t}^{(j)}$.

No caso em que os usuários são binários, denotado o canal aditivo com T usuários binários (T-BAC), tem-se $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$, em que $V_i = \{0,1\}$, e $v_t^{(j)} \in V$, em que $V = \{0,1,\ldots,T\}$, $1 \leq i \leq T$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.1 *[2BAC]*

O canal de acesso múltiplo 2-BAC, ilustrado na Figura 2.3, tem duas entradas e uma única saída. Durante a transmissão dois ou mais sinais são combinados em um único sinal a ser recebido. O trabalho do decodificador é estimar as mensagens no canal para seus destinos correspondentes, se possível, sem erros. As fontes são assumidas como sendo estatisticamente independentes e o canal sem memória.

Para o 2-BAC [30, 39–42, 44], cada fonte de informação, em um instante de observação t, envia ao canal sub-blocos $\boldsymbol{v}_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$, referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente, com símbolos pertencentes ao alfabeto de entrada no canal $V_1 = V_2 = \{0, 1\}$, em que a entrada do canal é da seguinte forma: $\boldsymbol{v}_t = [\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}]$. A saída do canal é a sequência $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_{1,t} + \boldsymbol{v}_{2,t}$, adição, coordenada a coordenada, das sequências de entrada. Ou seja, para a j-ésima coordenada $z_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$, com símbolos pertencentes ao alfabeto $Z = \{0, 1, 2\}$, como mostrado na Figura 2.3 [9]. Note que as possíveis ligações entre entrada e saída do 2-BAC na Figura 2.3 estão associadas com probabilidades de transição do canal da forma $P(\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t})$, para cada instante de observação t, símbolo a símbolo.

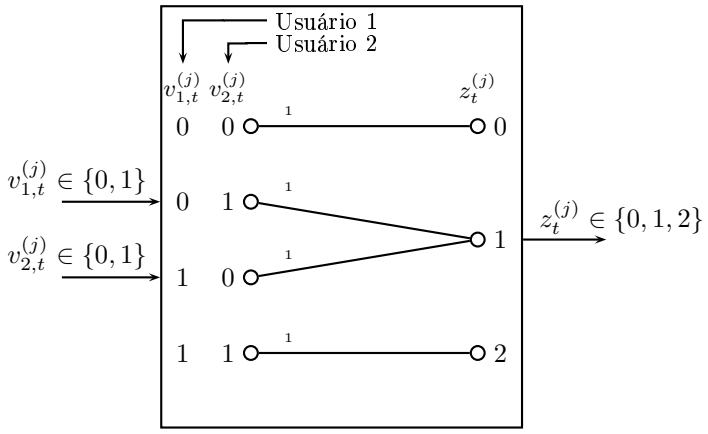


Figura 2.3: *Canal aditivo sem ruído com dois usuários binários.*

Sendo o canal de tempo discreto e sem memória, com entradas e saídas pertencentes a alfabetos também discretos, a probabilidade condicional representando a matriz de transição do canal é, no instante de observação t,

$$P(\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}) = \prod_{j=1}^{n} P\left(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}, v_{2,t}^{(j)}\right). \tag{2.25}$$

O canal aditivo binário sem ruído é também conhecido como canal de acesso múltiplo binário com apagamento, pois o símbolo 1 na saída não pode ser decodificado sem ambiguidade, mesmo no caso da ausência de ruído, por ter sido produzido por $v_{1,t}^{(j)} = 0$ e $v_{2,t}^{(j)} = 1$ ou $v_{1,t}^{(j)} = 1$ e $v_{2,t}^{(j)} = 0$. O problema da codificação para este modelo de canal é construir pares de codificadores $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, tais que:

1. *O decodificador seja capaz de decodificar os vetores binários transmitidos pelos usuários 1 e 2;*
2. *O par de taxas (R_1, R_2) seja um ponto que incide sobre a região de capacidade do canal e esteja, se possível, próximo da fronteira.*

◇

2.2.1 Capacidade do Canal Aditivo Sem Ruído com T Usuários

A informação mútua, $I(V;Z)$, é uma medida da quantidade de informação que uma variável aleatória contém acerca da outra [72]. A capacidade é o maior valor possível de informação mútua entre duas variáveis aleatórias. É um limite superior sobre o quanto o conhecimento de uma variável informa sobre a outra. Para o sistema em questão, as variáveis consideradas para este cálculo dependem do método de detecção, que pode ser feito para cada um dos usuários separadamente ou para todos os usuários conjuntamente. Em ambos os casos, a variável observada é a sequência de observação $\boldsymbol{z}_t$.

O teorema de codificação de canal ruidoso afirma que, para qualquer $\xi > 0$ e para qualquer taxa de transmissão R menor do que a capacidade de canal C, há um sistema de codificação e decodificação que transmite dados a uma taxa R, cuja probabilidade de erro é menor do que ξ para um bloco de comprimento suficientemente grande [72, pág.200]. Além disso, para qualquer taxa maior do que a capacidade do canal, a probabilidade de erro no receptor tende a um, quando o comprimento do bloco tende ao infinito [72, pág.207]. O problema de projetar um sistema de comunicação é tentar transmitir informação de forma confiável e viável com taxas mais próximas possíveis da capacidade do canal.

A maior taxa de transmissão possível para um canal é limitada pela capacidade do canal, como mostrado em [65]. A capacidade é um valor que pode ser calculado através das probabilidades de transição do canal, como será revisto. A capacidade do canal aditivo discreto sem memória com alfabeto de entrada V, alfabeto de saída Z e probabilidade de transição $P(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}) = \mathrm{P}\left[Z = z_t^{(j)}|V = v_t^{(j)}\right]$, no instante de observação t, é dada por

$$C(T) = \max_{P(z_t^{(j)})} I(V;Z); \tag{2.26}$$

em que a maximização é feita sobre todas as possíveis distribuições de probabilidade de entrada do canal $P(v_t^{(j)})$ em V e pode ser obtida seguindo a proposta de Liao [18, 31, 75], quando todos os usuários transmitem símbolos binários igualmente prováveis e estatisticamente independentes. A determinação de Z reduz a incerteza que está associada a V e vice-versa, o que é considerado um ganho de informação, denotando informação mútua, e é representado por

$$I(V;Z) = H(V) - H(V|Z) = H(Z) - H(Z|V).$$

Define-se entropia como uma medida de incerteza de uma variável aleatória [72, pág.13]. Logo, a entropia conjunta de duas variáveis aleatórias é

$$H(V,Z) = -\sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0}\ \sum_{z_t^{(j)}:P[z_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right] \log_2 P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right]. \tag{2.27}$$

A entropia de uma variável aleatória V, condicionada pela presença (ou conhecimento) de uma outra variável Z, mede a incerteza de V quando Z é conhecida. O cálculo da entropia condicional é definido como o valor esperado da entropia das variáveis condicionadas multiplicadas pela função de distribuição de probabilidade da variável aleatória $v_t^{(j)}$, na j-ésima coordenada no instante de observação t, isto é,

$$H(V|Z) = -\sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0}\ \sum_{z_t^{(j)}:P[z_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}|z_t^{(j)}\right] \log_2 P\left[v_t^{(j)}|z_t^{(j)}\right]. \tag{2.28}$$

Assim, o conceito de informação mútua $I(V;Z)$, que é a entropia relativa entre uma probabilidade conjunta e o produto das probabilidade $P\left[v_t^{(j)}\right] P\left[z_t^{(j)}\right]$, em um dado instante de observação t, é definido por

$$\begin{aligned} I(V;Z) &= \sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0}\ \sum_{z_t^{(j)}:P[z_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right]) \log_2 \frac{P\left[(v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right]}{P\left[v_t^{(j)}\right] P\left[z_t^{(j)}\right]} \\ &= \sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0}\ \sum_{z_t^{(j)}:P[z_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right] \log_2 \frac{P\left[z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right]}{P\left[(z_t^{(j)}\right]}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

que é a informação média do canal, em que

$$P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right] = P\left[z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right] P\left[v_t^{(j)}\right]; \tag{2.30}$$

e

$$P\left[z_t^{(j)}\right] = \sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0} P\left[z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right] P\left[v_t^{(j)}\right]. \tag{2.31}$$

A capacidade do canal aditivo binário com T usuários sem ruído com alfabeto de entrada associado a usuário i, $V_i = \{0,1\}$, e alfabeto de saída $Z = (0,1,2,\ldots,T)$, é obtida quando todos os usuários transmitem, na j-ésima coordenada no instante de observação t, símbolos binários igualmente prováveis e estatisticamente independentes [31].

Como no instante de observação t a j-ésima coordenada de $\boldsymbol{v}_t$ é formada pela adição, coordenada a coordenada, dos símbolos binários dos T codificadores constituintes na j-ésima coordenada, $v_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + \cdots + v_{2,t}^{(j)}$, tem-se que $v_t^{(j)} = k$, em que $k \in V = (0,1,\ldots,T)$ e

$1 \leq j \leq n$, ou seja, para uma dada combinação dos j-ésimo símbolo binário dos T usuários a adição coordenada a coordenada é igual a k. Desta forma, tem-se que o número de maneiras distintas possíveis é

$$\binom{T}{k}.$$

Além disto, cada usuário transmite símbolos binários estatisticamente independentes, logo o número de eventos possíveis no processo de escolha para a formação do j-ésimo símbolo de $\boldsymbol{v}_t$, isto é, a cardinalidade do *espaço amostral*, é 2^T. Desta forma, tem-se

$$\mathrm{P}\left[V = k\right] = \frac{\binom{T}{k}}{2^T}. \tag{2.32}$$

As probabilidades de transição do canal são dadas por

$$\mathrm{P}\left[Z = l | V = k\right] = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}, 0 \leq k, l \leq T. \tag{2.33}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(V;Z) &= \sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0} \sum_{z_t^{(j)}:P[z_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right] \log_2 \frac{P\left[z_t^{(j)} | v_t^{(j)}\right]}{P\left[z_t^{(j)}\right]} \\ &= \sum_{k=0}^{T} \sum_{l=0}^{T} \mathrm{P}\left[V = k, Z = l\right] \log_2 \frac{\mathrm{P}\left[Z = l | V = k\right]}{\mathrm{P}\left[Z = l\right]} \end{aligned} \tag{2.34}$$

e as informações mútuas são simultaneamente maximizadas quando os usuários são estatisticamente independentes e as probabilidades de transição do canal são igualmente prováveis de serem zero ou um, ver Equação (2.30), dessa forma,

$$\begin{aligned} C(T) &= \sum_{v_t^{(j)}:P[v_t^{(j)}]\neq 0} P\left[v_t^{(j)}\right] \log_2 \frac{1}{P\left[v_t^{(j)}\right]} \\ &= \sum_{k=0}^{T} \mathrm{P}\left[V = k\right] \log_2 \frac{1}{\mathrm{P}\left[V = k\right]}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

logo, obtém-se uma expressão para a capacidade do canal aditivo com T usuários binários sem ruído [31], com $R_1 + R_2 + \cdots + R_T = R(T) \leq C(T)$, em que

$$C(T) = \sum_{k=0}^{T} \frac{\binom{T}{k}}{2^T} \log_2 \frac{2^T}{\binom{T}{k}}. \tag{2.36}$$

Teorema 2.1 *A região de capacidade C de um canal aditivo com T usuários binários sem ruído é [31];*

$$C = \begin{cases} 0 \leq R_1 \leq 1, \\ 0 \leq R_1 + R_2 \leq \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{2}{k}}{2^2} \log_2 \frac{2^2}{\binom{2}{k}} \\ \quad \vdots \\ 0 \leq R_1 + R_2 + \cdots + R_T \leq \sum_{k=0}^{T} \frac{\binom{T}{k}}{2^T} \log_2 \frac{2^T}{\binom{T}{k}} \end{cases} . \tag{2.37}$$

Note que todas as informações mútuas condicionais entre as entradas e a saída podem ser calculadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} &I(V_1; Z|V_2, V_3, \ldots, V_T) \leq 1, \\ &I(V_1, V_2; Z|V_3, \ldots, V_T) \leq \sum_{k=0}^{2} \frac{\binom{2}{k}}{2^2} \log_2 \frac{2^2}{\binom{2}{k}}, \\ &\quad \vdots \\ &I(V_1, V_2, \ldots, V_T; Z) \leq \sum_{k=0}^{T} \frac{\binom{T}{k}}{2^T} \log_2 \frac{2^T}{\binom{T}{k}}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Exemplo 2.2 *[3-BAC]*

A região de capacidade para o caso de um canal aditivo com três usuários binários sem ruído é mostrada na Figura 2.4 [31], com restrições impostas pelo Teorema 2.1.

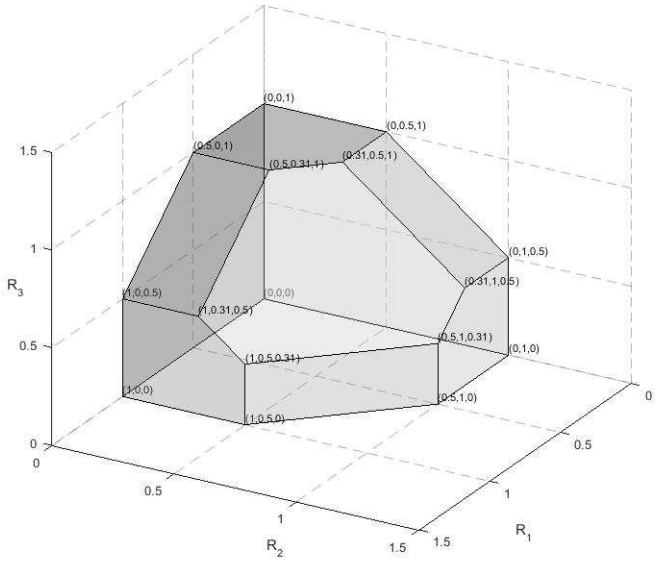


Figura 2.4: *Região de capacidade para o canal de acesso múltiplo com três usuários.*

◇

O receptor pode utilizar uma regra de decisão ótima que é baseada na sequência de observação $\boldsymbol{z}_t$ no instante de observação t, e no comportamento dos codificadores. Pode-se observar que o j-ésimo componente do vetor recebido $z_t^{(j)}$, no instante de observação t, difere do j-ésimo componente transmitido pelo i-ésimo usuário, $v_{i,t}^{(j)}$, em uma variável aleatória m_t

dada pela adição dos outros $T-1$ usuários, sendo considerado como um ruído aditivo ao i-ésimo usuário. Portanto, o processo decisório no instante de observação t pode ser definido pela hipótese

$$H_i^j : z_t^{(j)} = v_{i,t}^{(j)} + m_t; \tag{2.39}$$

em que $i = 1, 2, \ldots, T$, $1 \leq j \leq n$, $\mathbf{v}^k \in V_i = \{0, 1\}$ e

$$m_t = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{T} v_{p,t}^{(j)}. \tag{2.40}$$

Uma vez estabelecida a regra de decisão referente ao usuário i, pode-se definir uma expressão para a probabilidade de ambiguidade do usuário i na j-ésima coordenada transmitida ao canal pelo sistema decisório como

$$P_{i,t}(a) = \sum_{l=1, l \neq k}^{T} \sum_{k=1, k \neq l}^{T} P(D_i^l | H_i^k). \tag{2.41}$$

Assim, para o canal aditivo sem ruído com T usuários binários,

$$P_{i,t}(a) = 1 - \frac{T+1}{2^T}. \tag{2.42}$$

2.3 Canal Aditivo Ruidoso de Acesso Múltiplo com T Usuários

Em [74, pág.11], para efeito de estudo, geralmente se representa um canal linear como um filtro que modifica o sinal transmitido, fazendo com que, no receptor, chegue um sinal que sofreu distorções. O sinal recebido é dado pela convolução do sinal transmitido com a resposta ao impulso do canal. Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo [11, 31] ilustrado na Figura 2.5 em um instante de observação t.

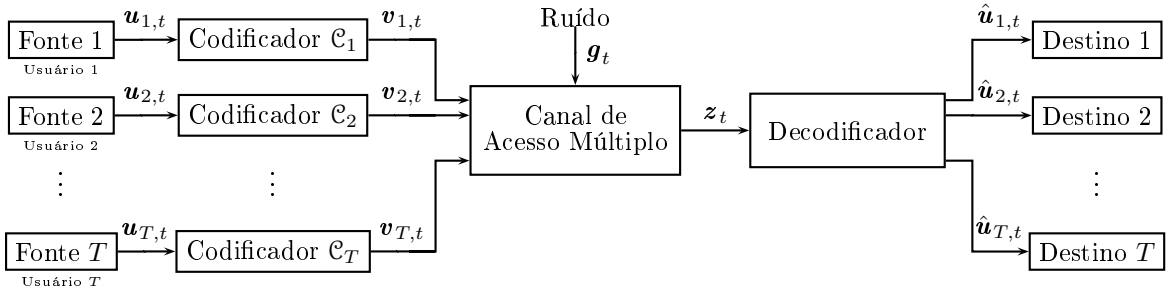


Figura 2.5: *Diagrama em blocos de um sistema de comunicação de acesso múltiplo com ruído.*

Para cada instante de observação t, o canal aditivo ruidoso recebe como entrada as T sequências-código referentes a cada usuário, $\boldsymbol{v}_t = [\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}]$, associando-as a uma única saída $\boldsymbol{z}_t$ com símbolos pertencentes a um determinado alfabeto.

Como exemplo, considere o canal descrito na Figura 2.6 em um instante de observação t. A sequência intermediária, $\boldsymbol{y}_t$, que é a adição, coordenada a coordenada, das T entradas é obtida supondo que que cada usuário transmite um bloco com símbolos de um alfabeto binário. Assim, a sequência intermediária que é gerada no canal é a variável aleatória $y_t^{(j)}$, definida por $y_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{T} v_{i,t}^{(j)}$, pois $v_{i,t}^{(j)} \in V_i = \{0,1\}$ e $1 \leq j \leq n$, pertencente ao alfabeto Y, ou seja, $y_t^{(j)} \in Y = \{0,\ldots,T\}$, para $1 \leq t \leq N$. A adição de ruído na saída intermediária $\boldsymbol{y}_t$, no instante de observação t, produz o canal ruidoso mostrado na Figura 2.6 [11, 31].

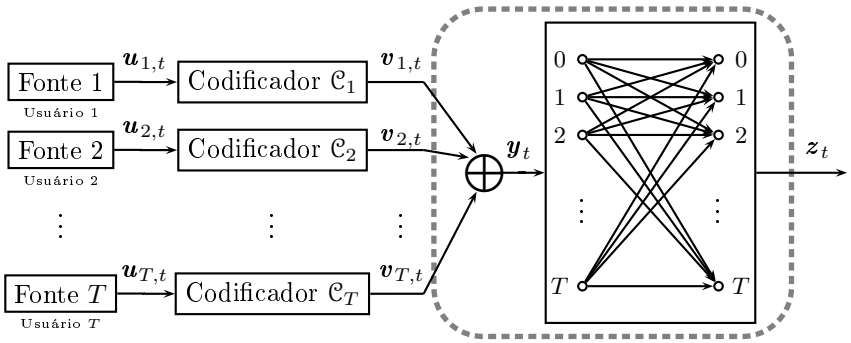


Figura 2.6: *Canal aditivo ruidoso de acesso múltiplo com T usuários binários.*

Exemplo 2.3 *[2-BAC ruidoso]*

O MAC aditivo com dois usuários binários na presença de ruído pode ser representado pelo modelo discreto da Figura 2.7 [9]; neste tipo de canal todas as transições são possíveis e existe uma probabilidade relacionando os símbolos de entrada com os de saída, no instante de observação t, $P(\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t})$.

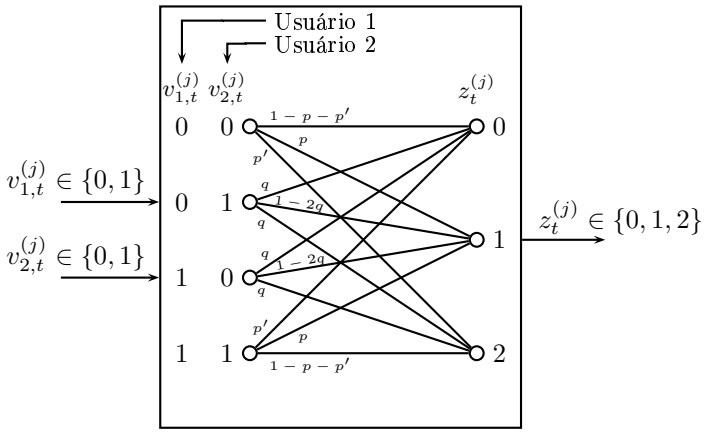


Figura 2.7: *Canal aditivo ruidoso com dois usuários binários.*

◇

2.3.1 Capacidade do Canal Aditivo Ruidoso com T Usuários

Como alvo de investigação dessa tese, considere o canal aditivo com T usuários binários descrito na Figura 2.8, as sequências $\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}$ são as T entradas, cada uma delas associada respectivamente a um usuário, de um canal sem memória, com AWGN, cuja saída é a sequência $\boldsymbol{r}_1^N$, como segue. Supondo que cada usuário possui alfabeto binário, $v_{i,t}^{(j)} \in V_i = \{0, 1\}$, utilizado para a transmissão e que utiliza uma modulação por chaveamento de fase binário (BPSK) para transmitir a sequência intermediária. Esta sequência intermediária que é representada no canal pela variável aleatória $y_t^{(j)}$ definida por $y_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{T}(2v_{i,t}^{(j)} - 1)$, $1 \leq j \leq n$, pertencente ao alfabeto Y, ou seja, $y_t^{(j)} \in Y = \{-T, \ldots, 0, \ldots, +T\}$, para $1 \leq t \leq N$. A sequência intermediária sofre interferência de ruído gerando a saída do canal, representada pela sequência $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$, em que, no instante de observação t, $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, em que $z_t^{(j)} \in \mathbb{R}$ e $1 \leq t \leq N$. A j-ésima variável aleatória contínua $z_t^{(j)}$ é definida por $z_t^{(j)} = y_t^{(j)} + g_t^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$, em que os valores $g_t^{(j)}$, de $\boldsymbol{g}_t = (g_t^{(1)}, g_t^{(2)}, \ldots, g_t^{(j)}, \ldots, g_t^{(n)})$, em que $g_t^{(j)} \in \mathbb{R}$, representam amostras independentes de ruído aditivo gaussiano branco, com variância σ^2 e média zero.

Um único decodificador é responsável por estimar as mensagens, a cada instante de observação t, $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_T$ para os T destinos com base na observação da saída do canal ruidoso. O decodificador atua baseado na sequência de observação $\boldsymbol{z}_1^N$ e no comportamento dos codificadores. Para o sistema da Figura 2.8 [11, 31], tem-se

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{g}_t; \tag{2.43}$$

e a saída é $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, $z_t^{(j)} \in Z$, pois

$$\begin{aligned} z_t^{(j)} &= \sum_{i=1}^{2}(2v_{i,t}^{(j)} - 1) + g_t^{(j)} \\ &= y_t^{(j)} + g_t^{(j)}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

em que $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$, $y_t^{(j)} \in Y = (-T, \ldots, 0, \ldots, +T)$, $1 \leq i \leq T$ e $1 \leq j \leq n$.

Considere um canal aditivo contínuo em amplitude e discreto no tempo, sem memória, com alfabeto de entrada V, alfabeto de saída Z e probabilidade de transição $P\left(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right) = \mathrm{P}\left(Z = z_t^{(j)}|V = v_t^{(j)}\right)$, no instante de observação t, e com uma densidade de probabilidade $\mathrm{p}(\boldsymbol{z}_t)$ da sequência de observação, em que $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{g}_t$ é contínua e distorcida, devido ao ruído inserido pelo canal, e representada por uma variável aleatória com densidade de probabilidade

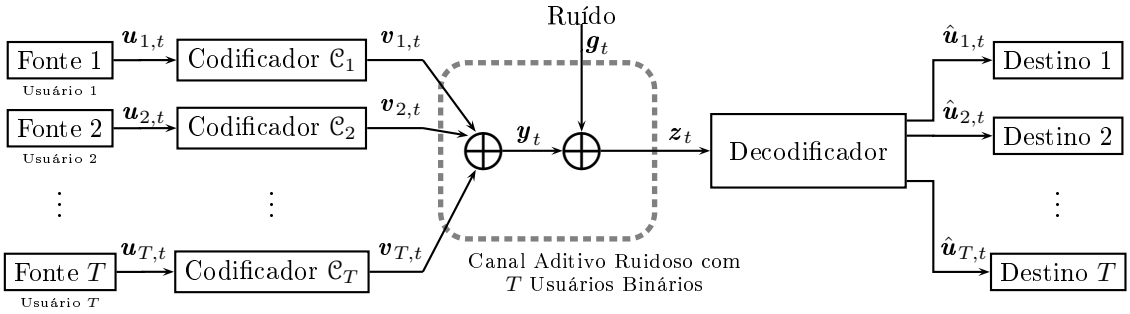


Figura 2.8: *Diagrama em blocos de um sistema de comunicação de acesso múltiplo com ruído.*

contínua. A informação mútua $I(V;Z)$ para o canal com entrada discreta e saída contínua é

$$I(V;Z) = \sum_{v_t^{(j)}:P\left[v_t^{(j)}\right]\neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(v_t^{(j)}, z_t^{(j)}\right) \log_2 \frac{P\left(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right)}{P\left(z_t^{(j)}\right)} dz_t^{(j)}; \tag{2.45}$$

logo,

$$I(V;Z) = \sum_{v_t^{(j)}:P(v_t^{(j)})\neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right) P\left(v_t^{(j)}\right) \log_2 \frac{P\left(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right)}{\left(\sum_{v_t^{(j)}:P\left[v_t^{(j)}\right]\neq 0} P\left(z_t^{(j)}|v_t^{(j)}\right) P\left(v_t^{(j)}\right)\right)} dz_t^{(j)}. \tag{2.46}$$

No caso de um canal com AWGN, modelo utilizado em função de sua simplicidade e tratabilidade matemática, e que se aplica a um grande conjunto de canais físicos, em que é adicionado ao sinal transmitido um ruído com densidade de probabilidade Gaussiana e média zero. O AWGN, variável aleatória G, está em toda a faixa de frequência com densidade espectral bilateral de potência $N_0/2$ W/Hz [74]. O canal aditivo gaussiano é considerado um canal contínuo de banda limitada em que a transmissão não sofre distorção na largura de banda B do canal e a distribuição de probabilidade gaussiana das amostras é independente do instante de observação t, com média nula e variância σ^2, da seguinte forma

$$P\left(g_t^{(j)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(g_t^{(j)})^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.47}$$

Como

$$\begin{aligned} I(V;Z) &= I(V_1, V_2, \ldots, V_T; Z) \\ &= H(Z) - H(Z|V_1, V_2, \ldots, V_T) \\ &= H(Z) - H(G), \end{aligned} \tag{2.48}$$

logo, pode-se calcular a entropia da sequência de observação e a entropia da sequência de observação condicionada à sequência transmitida pelos T usuários, assim a capacidade do canal aditivo ruidoso com T usuários binários é

$$C(T) = \max_{P(v_t^{(j)})} \{I(V;Z)\} = \max_{P(v_t^{(j)})} \{H(Z)\} + \frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2. \tag{2.49}$$

A informação mútua é maximizada quando a entropia de Z é maximizada. Esta última, por sua vez, é maximizada quando as T entradas, $\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}$, são estatisticamente independentes e igualmente prováveis. Assim,

$$H(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(z_t^{(j)}) \log_2 P(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}, \tag{2.50}$$

com

$$\begin{aligned} P\left(z_t^{(j)}\right) &= \sum_{v_t^{(j)}: P(vg_t^{(j)}) \neq 0} P\left(z_t^{(j)} | v_t^{(j)}\right) P\left(v_t^{(j)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{T} \mathrm{P}\left[v_t^{(j)} = k\right] \mathrm{P}\left[z_t^{(j)} | v_t^{(j)} = k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{T} \frac{\binom{T}{k}}{2^T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z_t^{(j)} - (T-2k))^2}{2\sigma^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Note que na expressão da informação mútua para o T-BAC, ver Equação (2.46), a entropia da observação condicionada ao ruído do canal, depende apenas da variância σ^2. Portanto, a curva chamada *limite de Shannon* é obtida para valores da taxa total $R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T$ (eixo vertical) e valores da relação sinal ruído em dB (eixo horizontal), ver Figura 2.9. Note que a Figura 2.9 apresenta o limite de Shannon para diversas taxas para os canais aditivos ruidosos com um, dois e três usuários. Estes são calculados a relação E_b/N_0 em dB, assim

$$E_s = E_b R(T) = E_b(R_1 + R_2 + \cdots + R_T). \tag{2.52}$$

Supondo a energia dos sinais transmitidos pelos usuários é unitária, ou seja, $E_s = E_1 + E_2 + \cdots + E_T = T$, tem-se

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{T}{2R(T)\sigma^2}\right], \tag{2.53}$$

em que a variância é obtida numericamente sobre a igualdade $I(V_1, V_2, \ldots, V_T; Z) = R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T$.

O algoritmo do cálculo da capacidade de Shannon para canais aditivos ruidosos com T usuários binários na presença de AWGN, intitulado *Algoritmo de Cálculo de Capacidade T Usuários*, pode ser descrito como

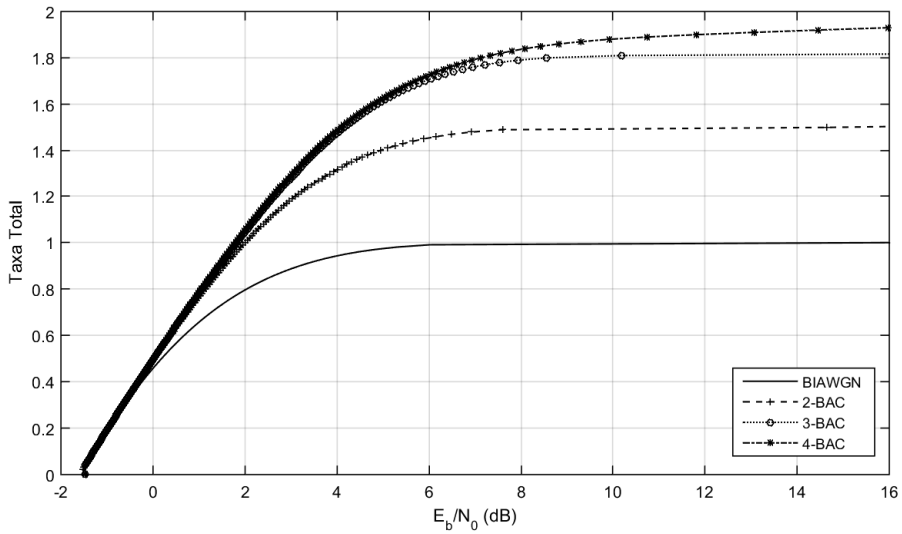


Figura 2.9: *Curva teórica do limite de Shannon aplicada ao canal aditivo de acesso múltiplo com dois, três e quatro usuários binários na presença de AWGN.*

▷ Passo 0. Inicializar T e $R(T)$.

▷ Passo 1. Calcular a variância σ^2, em que $R(T) = I(V_1, V_2, \ldots, V_T; Z) = H(Z) - H(G)$, dada pela Equação (2.49), com as equações (2.51) e (2.50).

▷ Passo 2. Calcular o limite de Shannon em dB, da forma

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{T}{2R(T)\sigma^2}\right].$$

▷ Passo 3. Emitir $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB}$.

Uma outra forma de observar o algoritmo descrito é utilizando pseudo-código. No Algoritmo apresentado na Tabela 2.1 é mostrado o *Algoritmo de Cálculo de Capacidade de T Usuários em canais aditivos ruidosos*, em que se recebe como entrada dois números inteiros T e $R(T)$, o número de usuários do sistema e a taxa total dos codificadores associados aos T usuários, ver Equação (2.2), respectivamente. A saída é o valor da capacidade de Shannon em dB, SAÍDA. Como mostrado no Algoritmo 2.1, as funções utilizadas são: CALCULAR.INFORMAÇÃO.MÚTUA(σ^2), Equação (2.48), como o próprio nome diz, calcula a informação mútua entre as variáveis V e Z para uma determinada variância; CALCULAR.ENTROPIA.RUÍDO(σ^2), Equação (2.50), calcula a entropia da sequência da saída do canal com AWGN; e CALCULAR.LIMITE.SHANNON.DB(σ^2), Equação (2.53), expressa a capacidade em dB.

Tabela 2.1: *Algoritmo do cálculo do limite de Shannon para canais aditivos ruidosos com T usuários binários.*

ENTRADA
T
R_i, para $i = 1, 2, \ldots, T$
INICIALIZAÇÃO
$d \ll 1$
$sL < 0$
$sH > 0$
ALGORITMO - CÁLCULO DO LIMITE DE SHANNON
$R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T$
Repita
$\sigma^2 = \frac{1}{2}(sL + sH)$
$I =$ Calcular.Informação.Mútua(σ^2) – Equação (2.48)
$H =$ Calcular.Entropia.Ruído(σ^2) – Equação (2.50)
$I = I - H$
se $I > R(T)$ **faça**
$sL = \sigma^2$
se não faça
$sH = \sigma^2$
fim
até $(sL - sH) > d$
SAÍDA
$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} =$ Calcular.Limite.Shannon.dB(σ^2) – Equação (2.53)

Para ilustrar o *Algoritmo de Cálculo de Capacidade T Usuários*, é apresentado o desenvolvimento do cálculo para canais de acesso múltiplo com dois usuários binários, ver Exemplo 2.4, e para três usuários binários, conferir Exemplo 2.5.

Exemplo 2.4 *[Capacidade para o 2-BAC]*

Considere o 2-BAC com AWGN em que, para o instante de observação t, o j-ésimo símbolo do usuário 1, $v_{1,t}^{(j)}$, é associado a uma variável aleatória binária V_1 e, da mesma forma, o usuário 2, $v_{2,t}^{(j)}$, é associado a uma variável aleatória binária V_2. Ambos, então, são enviados ao canal, cuja saída é uma variável aleatória $z_t^{(j)} \in Z$ e tem a forma

$$z_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + g_t^{(j)},$$

em que o ruído $g_t^{(j)} \in G$ é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância $\sigma^2 = N_0/2$.

A informação mútua entre Z e as entradas do canal V_1 e V_2 são dados por

$$\begin{aligned} I(V_1, V_2; Z) &= H(Z) - H(Z|V_1, V_2) \\ &= H(Z) - H(G), \end{aligned}$$

em que a entropia $H(Z)$ já foi definida e

$$H(G) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(g_t^{(j)}) \log_2 P(g_t^{(j)}) dg_t^{(j)},$$

com

$$P(g_t^{(j)}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-z^2/2\sigma^2\right],$$

logo

$$H(G) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma^2).$$

A entropia da sequência de observação é dada por

$$H(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(z_t^{(j)}) \log_2 P(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)},$$

em que

$$\begin{aligned} P(z_t^{(j)}) &= P[v_{1,t}^{(j)} = -1] P[v_{2,t}^{(j)} = -1] P(z_t^{(j)} | v_{1,t}^{(j)} = -1, v_{2,t}^{(j)} = -1) \\ &+ P[v_{1,t}^{(j)} = -1] P[v_{2,t}^{(j)} = +1] P(z_t^{(j)} | v_{1,t}^{(j)} = -1, v_{2,t}^{(j)} = +1) \\ &+ P[v_{1,t}^{(j)} = +1] P[v_{2,t}^{(j)} = -1] P(z_t^{(j)} | v_{1,t}^{(j)} = +1, v_{2,t}^{(j)} = -1) \\ &+ P[v_{1,t}^{(j)} = +1] P[v_{2,t}^{(j)} = +1] P(z_t^{(j)} | v_{1,t}^{(j)} = +1, v_{2,t}^{(j)} = +1) \\ &= (1/4) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(z_t^{(j)} + 2)^2/2\sigma^2\right] \\ &+ (1/2) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(z_t^{(j)})^2/2\sigma^2\right] \\ &+ (1/4) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(z_t^{(j)} - 2)^2/2\sigma^2\right], \end{aligned}$$

que depende unicamente da variância, por sua vez é obtida numericamente sobre a igualdade $I(V_1, V_2; Z) = R(T) = R_1 + R_2$ usando o Algoritmo apresentado na Tabela 2.1.

Por outro lado, a energia do símbolo pode ser definida a partir da energia de bit no processo de transmissão, da forma seguinte

$$E_s = E_b(R_1 + R_2),$$

em que R_1 e R_2 são as taxas assintóticas dos codificadores constituintes do usuário 1 e do usuário 2, respectivamente.

Assim, com o objetivo de calcular a capacidade do canal, pode-se expressar a relação sinal-ruído da forma

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s/(R_1 + R_2)}{2\sigma^2} = \frac{(E_1 + E_2)/(R_1 + R_2)}{2\sigma^2} = \frac{1}{(R_1 + R_2)\sigma^2},$$

em que é suposto $E_1 = E_2 = 1$, denotando energia dos sinais transmitidos pelos usuário 1 e usuário 2, respectivamente. A relação sinal ruído em dB, dado pela Equação (2.53), é

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{1}{(R_1+R_2)\sigma^2}\right],$$

A Figura 2.9 mostra a curva do limite de Shannon para o 2-BAC.

$\diamond$

Exemplo 2.5 *[Capacidade para o 3-BAC]*

Considere o 3-BAC com AWGN, em que para o instante de observação t, o j-ésimo símbolo do usuário 1, $v_{1,t}^{(j)}$, é associado a uma variável aleatória binária V_1, ao usuário 2, $v_{2,t}^{(j)}$, é associado a uma variável aleatória binária V_2 e, ao usuário 3, $v_{3,t}^{(j)}$, é associado a uma variável aleatória binária V_3, enviados ao canal. A saída do canal é uma variável aleatória $z_t^{(j)} \in Z$ e tem a forma

$$z_t^{(j)} = v_{1,t}^{(j)} + v_{2,t}^{(j)} + v_{3,t}^{(j)} + g_t^{(j)},$$

em que o ruído $g_t^{(j)} \in G$ é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância $\sigma^2 = N_0/2$.

A informação mútua entre Z e as entradas do canal V_1, V_2 e V_3 são dadas por

$$\begin{aligned} I(V_1,V_2,V_3;Z) &= H(Z) - H(Z|V_1,V_2,V_3) \\ &= H(Z) - H(G). \end{aligned}$$

A entropia da sequência de observação é dada por

$$H(Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P(z_t^{(j)})\log_2 P(z_t^{(j)})dz_t^{(j)},$$

em que

$$\begin{aligned}
P(z_t^{(j)}) &= P[v_{1,t}^{(j)}=-1]P[v_{2,t}^{(j)}=-1]P[v_{3,t}^{(j)}=-1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=-1,v_{2,t}^{(j)}=-1,v_{3,t}^{(j)}=-1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=-1]P[v_{2,t}^{(j)}=-1]P[v_{3,t}^{(j)}=+1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=-1,v_{2,t}^{(j)}=-1,v_{3,t}^{(j)}=+1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=-1]P[v_{2,t}^{(j)}=+1]P[v_{3,t}^{(j)}=-1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=-1,v_{2,t}^{(j)}=+1,v_{3,t}^{(j)}=-1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=+1]P[v_{2,t}^{(j)}=-1]P[v_{3,t}^{(j)}=-1]P(vz_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=+1,v_{2,t}^{(j)}=-1,v_{3,t}^{(j)}=-1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=-1]P[v_{2,t}^{(j)}=+1]P[v_{3,t}^{(j)}=+1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=-1,v_{2,t}^{(j)}=+1,v_{3,t}^{(j)}=+1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=+1]P[v_{2,t}^{(j)}=-1]P[v_{3,t}^{(j)}=+1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=+1,v_{2,t}^{(j)}=-1,v_{3,t}^{(j)}=+1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=+1]P[v_{2,t}^{(j)}=+1]P[v_{3,t}^{(j)}=-1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=+1,v_{2,t}^{(j)}=+1,v_{3,t}^{(j)}=-1) \\
&= P[v_{1,t}^{(j)}=+1]P[v_{2,t}^{(j)}=+1]P[v_{3,t}^{(j)}=+1]P(z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=+1,v_{2,t}^{(j)}=+1,v_{3,t}^{(j)}=+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/8)\frac{1}{\sigma\sqrt{2}\pi}\exp\left[-(z_t^{(j)}+3)^2/2\sigma^2\right] + (3/8)\frac{1}{\sigma\sqrt{2}\pi}\exp\left[-(z_t^{(j)}+1)^2/2\sigma^2\right] \\
&+ (3/8)\frac{1}{\sigma\sqrt{2}\pi}\exp\left[-(z_t^{(j)}-1)^2/2\sigma^2\right] + (1/8)\frac{1}{\sigma\sqrt{2}\pi}\exp\left[-(z_t^{(j)}-3)^2/2\sigma^2\right],
\end{aligned}$$

que depende unicamente da variância, por sua vez é obtida numericamente sobre a igualdade $I(V_1, V_2, V_3; Z) = R(T) = R_1 + R_2 + R_3$ *usando o Algoritmo apresentado na Tabela 2.1. A energia do símbolo pode ser definida a partir da energia de bit no processo de transmissão, da forma*

$$E_s = E_b(R_1 + R_2 + R_3),$$

logo,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s/(R_1 + R_2 + R_3)}{2\sigma^2} = \frac{(E_1 + E_2 + E_3)/(R_1 + R_2 + R_3)}{2\sigma^2} = \frac{3}{2(R_1 + R_2 + R_3)\sigma^2},$$

em que é suposto $E_1 = E_2 = E_3 = 1$*, denotando energia dos sinais transmitidos pelos usuários. A relação sinal ruído em dB, dado pela Equação (2.53), é*

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left[\frac{3}{2(R_1 + R_2 + R_3)\sigma^2}\right].$$

A Figura 2.9 mostra a curva do limite de Shannon para o 3-*BAC.*

◇

Neste capítulo é abordado um panorama geral sobre os canais de acesso múltiplo com T usuários, com enfoque em T transmissores e um único receptor responsável por estimar as mensagens transmitidas por cada usuário. Foram definidos os conceitos necessários, como entropia, informação mútua e capacidade para canais de acesso múltiplo, assim como a notação utilizada ao longo da tese. A capacidade de canal aditivo de acesso múltiplo com T usuários binários na ausência de ruído e na presença de ruído foi, também, descrita e apresentada. Por fim, a capacidade de canal para canais gaussianos servirá de limite teórico para os sistemas de codificação e decodificação propostos.

CAPÍTULO 3

Alguns Sistemas Codificados para Canais Aditivos de Acesso Múltiplo

A sabedoria consiste em compreender que o tempo dedicado ao trabalho nunca é perdido.

— **Ralph Emerson**

Os codificadores convolucionais e os codificadores convolucionais concatenados (CCC) estão entre os mais usados em aplicações práticas, inclusive em padrões mais recentes de comunicações sem fios como EDGE [6], LTE [7] e WiMax [8], devido ao excelente desempenho - próximo ao limite teórico estabelecido pela Teoria da Informação -, sendo utilizados por aplicações que requerem alta confiabilidade. Em termos práticos, são eficazes e de simples implementação do codificador. Este capítulo apresenta alguns sistemas codificados para canais de acesso múltiplo em que cada usuário utiliza um sistema de codificação com códigos convolucionais concatenados, possibilitando uma nova abordagem para sistemas de acesso múltiplo por codificação colaborativa.

3.1 Codificadores Convolucionais Concatenados

A codificação de canal é utilizada com a finalidade de detectar e corrigir erros introduzidos pelo canal, melhorando o desempenho de um enlace de comunicação. Para isto, o codificador

substitui a sequência de bits original por outra de comprimento maior, inserindo redundância na informação original. Essa adição controlada de redundância leva à diminuição da quantidade de erros na recepção, apesar da redução inevitável na taxa líquida de informação trafegada [76].

Um dos objetivos da Teoria dos Códigos Corretores de Erro é o estudo de técnicas de codificação para detecção e correção de possíveis erros ocasionados no processo de transmissão; entre estas, duas se sobressaem nesse quesito: os códigos de bloco e os codificadores convolucionais. O primeiro surge da codificação de blocos de informação e o segundo a partir de operações envolvendo elementos de memória em convoluções em um fluxo contínuo de dados. Um dos primeiros códigos de bloco criados para tal finalidade foi o de Hamming [77], porém os que atingiram aplicações comerciais foram os códigos cíclicos de Reed-Solomon [78], os códigos BCH [79, 80] e, mais recentemente, os códigos LDPC [66, 67]. Códigos LDPC permitem alcançar um desempenho muito próximo do limite de Shannon.

Os códigos convolucionais foram introduzidos por Elias [81, 82], *apud* [80, p.287] e, junto aos códigos de bloco, lideram os esforços no meio científico em se tratando de correção de erro, possuindo aplicações comerciais bastante difundidas [83, 84]. Em tais códigos, uma sequência contínua de símbolos de informação $\boldsymbol{u}_1^N$ é mapeada em uma sequência de símbolos codificados $\boldsymbol{v}_1^N$, sendo que símbolos codificados num dado instante de tempo dependem de símbolos de informação nesse dado instante e de símbolos de informação anteriores. Assim, pode-se definir o número total de elementos de memória para armazenar símbolos de informação passados utilizados pelo codificador. Todo codificador convolucional pode ser descrito por treliças ou diagrama de estados. Um estudo de bons códigos convolucionais pode ser encontrado em [85].

Os códigos turbo foram apresentados à comunidade científica, em 1993, por Berrou, Glaviex e Thitimajshima, na Conferência Internacional de Comunicações, em Genebra, por meio do artigo intitulado "*Near Shannon Limit Error Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes*" [86]. Os códigos turbo são obtidos através de codificadores convolucionais concatenados em paralelo (PCCC), em que dois ou mais códigos convolucionais constituintes são sistemáticos, recursivos e separados pelo entrelaçador (*interleaver*). Essa estrutura permite que os códigos turbo provejam comunicações confiáveis, com o desempenho, em termos de correção de erros, próximo ao limite de Shannon. Além disso, dois decodificadores trabalham de forma cooperativa, com uma versão do algoritmo BCJR embutida, a fim de fornecer informações suaves a respeito dos símbolos de informação transmitidos, em um esquema de colaboração

mútua.

A descoberta dos códigos turbo reanimou alguns conceitos e algoritmos que não estavam sendo usados na prática - como, por exemplo, o algoritmo proposto por Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv [68] - que foram combinados a idéias novas, o que resultou não só em diversos estudos que incluíam novas concatenações, mas também em códigos corretores mais eficientes [87–92].

Os esquemas de codificação e decodificação com códigos convolucionais concatenados em série (SCCC), introduzidos para um único usuário por Benedetto *et al.* [93–97], surgiram como alternativa de melhoria nos ganhos de codificação. Em contrapartida aos PCCC, os SCCC possuem uma estrutura de concatenação em série; porém, similarmente aos PCCC, os SCCC podem ser decodificados por meio de estruturas iterativas. Ademais, os SCCC apresentam a característica de redução da BER mais eficaz com o aumento da dimensão dos entrelaçadores e são capazes de eliminar o patamar de BER irredutível existente nos PCCC [94, 95, 98]. Um estudo de códigos indicam que os SCCC, quando usados, mostram-se simples e produzem bons resultados. Diversos autores apresentaram aplicações para os SCCC [99–103].

Os codificadores convolucionais concatenados de forma híbrida (HCCC) são compostos pela combinação de PCCC e SCCC, oferecendo a oportunidade de explorar as vantagens de codificadores concatenados em paralelo e em série. Várias estruturas de HCCC diferentes foram propostas na literatura específica [97, 104–111].

Diversos fatores devem ser considerados na escolha do esquema de codificação: complexidade, taxa de codificação, capacidade de correção de erro e a mínima relação sinal-ruído, a qual permite uma recepção com BER desejada, entre outros.

3.2 Sistemas Concatenados com códigos Convolucionais para o 2-BAC

Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo padrão da Figura 3.1, em que dois usuários, estatisticamente independentes, transmitem através de um mesmocanal sem memória afetado por AWGN, para dois destinos diferentes.

Ao usuário i, é associada a sequência de símbolos de entrada a ser codificada, $\boldsymbol{u}_{i,1}^{N}$, $1 \leq i \leq 2$, com $N-1$ sub-blocos da forma $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(j)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$, para $1 \leq t \leq N$, $1 \leq j \leq k_i$, $\boldsymbol{u}_{i,t} \in \mathcal{U}$ e $u_{i,t}^{(j)} \in \{0,1\}$. Consequentemente, as sequências de símbolos de informação devem passar pelos codificadores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, referentes aos usuários 1 e 2 respectivamente, a cada instante t, formando os sub-blocos do código $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(j)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, $1 \leq i \leq 2$,

$1 \leq t \leq N$, $1 \leq j \leq n$ e $\boldsymbol{v}_{i,t} \in \mathcal{V}$. Os códigos possuem taxa de transmissão assintótica $R_i = k_i/n$, $1 \leq i \leq 2$. [16, 18, 19, 27, 31, 32, 39]. Os codificadores são formados pela concatenação de codificadores convolucionais separados por um entrelaçador.

O canal aditivo com dois usuários binários consiste em um modelo de canal de acesso múltiplo sem memória em que, a cada intervalo de observação t, dois remetentes enviam dados simultaneamente [16, 27, 39]. As entradas do 2-BAC são as sequências de símbolos associadas ao usuário 1 e ao usuário 2 pelos codificadores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, a saber, $\boldsymbol{v}_{1,t}^N$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}^N$, respectivamente, podendo ser moduladas ou não - ver Figura 3.1. Assumindo que as sequências geradas pelos codificadores estão sincronizadas, o canal 2-BAC combina as entradas referentes a cada usuário, $\boldsymbol{v}_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$, em um instante de observação t, em um único vetor de saída, com símbolos pertencentes a um certo alfabeto. Por exemplo, na presença de AWGN, a saída do 2-BAC é dada pela adição, coordenada a coordenada, dos sub-blocos de entrada e ruído. Ou seja, para o sub-bloco de observação $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, $z_t^{(j)} \in Z$, tem-se

$$\begin{aligned} z_t^{(j)} &= y_t^{(j)} + g_t^{(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{T} (2v_{i,t}^{(j)} - 1) + g_t^{(j)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$, $y_t^{(j)} \in Y = (-T, \ldots, 0, \ldots, +T)$, $1 \leq i \leq T$ e $1 \leq j \leq n$.

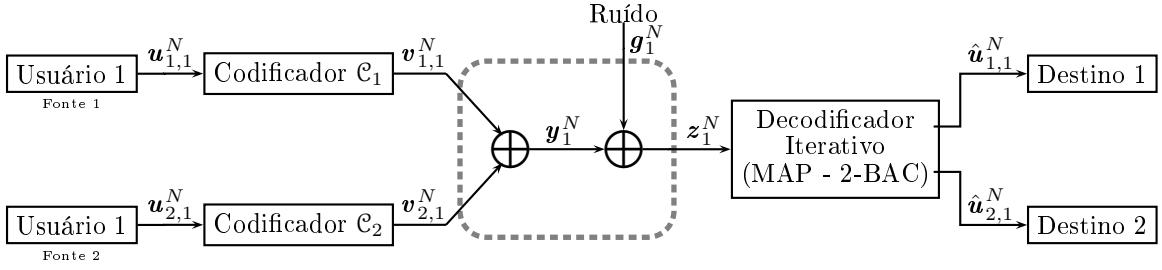


Figura 3.1: *Diagrama em blocos de um sistema de acesso múltiplo com dois usuários binários.*

O decodificador processa o vetor de saída do canal e estima as mensagens originalmente enviadas a cada destino, $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}$ e $\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}$, referentes aos usuários 1 e 2 [46, 47]. Note que a taxa conjunta de transmissão, $R_{2\text{-BAC}}$, dos codificadores, $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, é dada por $R(2) = R_{2\text{-BAC}} = R_1 + R_2$ [31].

3.2.1 Seção de Treliça

No sistema codificado para canais de acesso múltiplo proposto, cada usuário utiliza um sistema de codificação com codificadores convolucionais concatenados, formando um sistema

de acesso múltiplo por codificação colaborativa. Os codificadores convolucionais, produzem sequências de símbolos e, devido à estrutura matemática que possuem, podem ser representados por diagramas de transição de estados que são nada mais que representações gráficas do processo de codificação. Além de fornecer uma rápida inspeção a respeito do comportamento do codificador, o diagrama de estados permite indicar se o código convolucional é catastrófico [112]. Os diagramas de estado também indicam, em um dado instante de tempo, a transição de estados entre instantes consecutivos; ou seja, a cada entrada é estabelecido o próximo estado, bem como o sub-bloco do código, a partir de setas indicativas.

Embora o diagrama de estados explore graficamente a dinâmica de um codificador convolucional trazendo fácil intuição, ele não demonstra o comportamento de tal codificador ao longo do tempo. Assim sendo, uma outra representação gráfica possível é a de uma treliça, a qual pode ser desenvolvida a partir do diagrama em que é possível traçar um caminho de codificação a cada instante t. A essa representação, dá-se o nome de seção de treliça. No processo de codificação e decodificação de códigos convolucionais, a treliça tem um papel fundamental na descrição da estrutura do codificador em que define seu comportamento; ou seja, para cada usuário, a treliça é construída a partir dos caminhos obtidos pela combinação entre os símbolos de entrada e saída e seus estados, com referência à matriz geradora do codificador utilizado.

Com o objetivo de facilitar a exposição serão adotadas algumas notações apresentadas em [93] e, posteriormente, será utilizada a definição das treliças empregadas no processo de decodificação proposto. O comportamento de um código convolucional pode ser estabelecido a partir de sua treliça com um conjunto de estados definidos. Assim, considere uma treliça com um conjunto de M estados, na forma $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, \ldots, s^M\}$, na qual cada sub-bloco do código é determinado a partir da relação entre os estados e os símbolos de entrada. Sem perda de generalidade, a cada instante t é associada a uma observação.

Partindo das definições da treliça em [93], é possível definir as treliças para cada usuário da seguinte forma:

- ▷ Para cada usuário, é definida uma treliça com um conjunto de M_i estados distintos, da forma $\mathcal{S}_i = \{s^1, s^2, \ldots, s^{M_i}\}$;
- ▷ No instante de observação t, o estado da treliça para o i-ésimo usuário é $S_{i,t} = s$, em que

$s \in \mathcal{S}_i$ e um conjunto de $|\mathcal{U}_i| \times M_i$ ramos é obtido a partir do produto cartesiano

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{S}_i \times \mathcal{U}_i = \{e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, \ldots, e_i^{(|\mathcal{U}_i| \times M_i)}\}, \tag{3.2}$$

que representa todas as possíveis transições entre os estados na treliça para o usuário i. Para simplificar a notação, considere e_i um ramo pertencente ao conjunto de todos os possíveis ramos, $e_i \in \mathcal{E}_i$;

- O estado atual em um ramo $e_i \in \mathcal{E}_i$, em que $1 \leq i \leq (|\mathcal{U}_i| \times M_i)$ é definido por $s^S(e_i)$, e o próximo estado é definido por $s^E(e_i)$, em que $s^S(e_i), s^E(e_i) \in \mathcal{S}_i$ e $e_i \in \mathcal{E}_i$;
- Dado um ramo $e_i \in \mathcal{E}_i$, em que $1 \leq i \leq (|\mathcal{U}_i| \times M_i)$; o estado atual e o símbolo de entrada definem uma dupla, $(s^S(e_i); \boldsymbol{u}(e_i))$, com $\boldsymbol{u}(e_i) \in \mathcal{U}_i$, determinando unicamente o próximo estado e o sub-bloco do código correspondente, $(s^E(e_i); \boldsymbol{v}(e_i))$, e vice-versa.

Para o usuário i, em dado instante de observação t, a transição do estado atual, $S_{i,t}$, para o próximo estado, $S_{i,t+1}$, em que $S_{i,t} = s^S(e_i) \rightarrow S_{i,t+1} = s^E(e_i)$, $S_{i,t}, S_{i,t+1} \in \mathcal{S}_i$ e $e_i \in \mathcal{E}_i$, dentre um total de M_i estados possíveis e distintos, dá-se como se observa na Figura 3.2 [93, 113, 114].

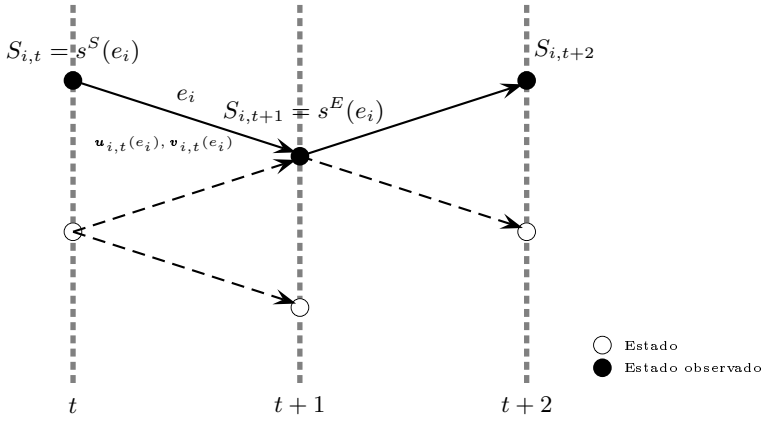


Figura 3.2: *Seção retirada da treliça do usuário i em instantes de observação consecutivos.*

Este tratamento, apresentado em [94] e adaptado para T usuários, possibilita uma abordagem de treliças independentes aplicadas a cada usuário. Deste modo, a implementação e os cálculos associados ao processo de recepção, os quais serão descritos ao longo da tese, podem ser realizados de forma paralela.

3.2.2 Entrelaçador

O entrelaçador, parte integrante do sistema aqui considerado de códigos convolucionais concatenados, é um dispositivo com uma única entrada - que consiste em uma sequência de símbolos de um determinado alfabeto - e uma única saída - formada por uma sequência de símbolos do mesmo alfabeto, idêntica à sequência da entrada, mas ordenada de uma maneira diferente [80, 86, 115]. O entrelaçador é responsável pela pseudo aleatoriedade destes codificadores.O papel do entrelaçador é fazer uma permutação de cada bloco de entrada, de forma que os codificadores operem sobre versões permutadas de um mesmo bloco de informação, produzindo, assim, uma sequência pseudo-aleatória [87, 116]. Desse modo, a operação de mapeamento de permutação realizada pelo entrelaçador pode ser representada por:

$$\pi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

$$j \mapsto \pi(j), \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Ou seja, ocorre uma permutação nos inteiros $\mathbb{Z}$, consistindo, assim, em uma função inversível. Portanto, sua função no esquema de codificação é tomar cada bloco de símbolos em sua entrada e os rearranjar em uma forma pseudo-aleatória para a codificação por outro codificador. O inverso desse processo é realizado pelo desentrelaçador, o qual é responsável por restaurar a sequência de entrada.

É possível classificar os entrelaçadores propostos na literatura em categorias, a saber: entrelaçadores puramente aleatórios, entrelaçadores determinísticos e entrelaçadores aleatórios estruturados [117]. No Exemplo 3.1 é apresentado o Entrelaçador Algébrico definido em [118].

Exemplo 3.1 *Considere o entrelaçador apresentado em [118]. Tome um número E, que seja potência de 2, a função*

$$c(j) \equiv \frac{kj(j+1)}{2} \mod E, \tag{3.5}$$

em que $0 \leq j < N$, k uma constante ímpar, é bijetiva. Para cada número inteiro $j \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq j \leq N$, o entrelaçador é gerado pelo mapeamento de permutação

$$\pi(j) = c(j+1) \mod E. \tag{3.6}$$

A Figura 3.3 mostra o padrão de mapeamento de índices para um Entrelaçador Algébrico de comprimento 1024, assim $E = 1024$, em que o eixo das abscissas indica a posição dos bits antes do entrelaçamento, enquanto que o eixo das ordenadas indica a posição dos mesmos após o entrelaçamento.

◇

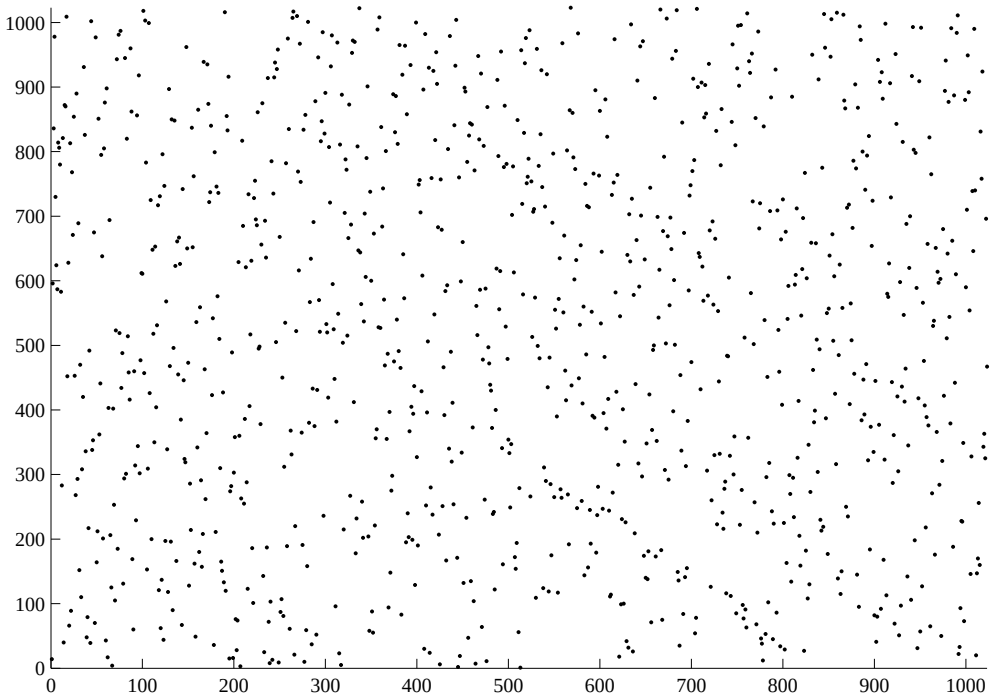


Figura 3.3: *Padrão de mapeamento de índices para um entrelaçador algébrico de comprimento* 1024.

3.3 Codificação para o 2-BAC

Inicialmente, é apresentada a estrutura denotada pelo código turbo que utiliza o esquema de códigos concatenados em paralelo, não unicamente decodificáveis, descrita em [51, 53] para o 2-BAC. Em seguida, são descritos os sistemas de codificação colaborativa de acesso múltiplo - utilizados por cada usuário -, formados pela concatenação de códigos convolucionais não unicamente decodificáveis, separados por entrelaçadores; a saber,

▷ **SCCC** - Códigos Convolucionais Concatenados em Série;

▷ **HCCC** - Códigos Convolucionais Concatenados em Forma Híbrida;

▷ **MCCC** - Códigos Convolucionais Concatenados em Forma Mista.

Os sistemas de codificação para mais que dois usuários no canal aditivo ruidoso de acesso múltiplo (T-BAC, $T > 2$) são descritos no Apêndice B, e foram omitidos, aqui, com o objetivo de simplificar a exposição dos sistemas propostos na tese.

3.3.1 Códigos Convolucionais Concatenados em Paralelo

Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo da Figura 3.1, em que o usuário i utiliza um esquema de codificação de concatenação em paralelo de um conjunto finito de

$q+1$ codificadores convolucionais, não necessariamente iguais, denotados pelos Codificadores Componentes ilustrados na Figura 3.4 [87, 116], dado o esquema de codificação PCCC para o usuário i.

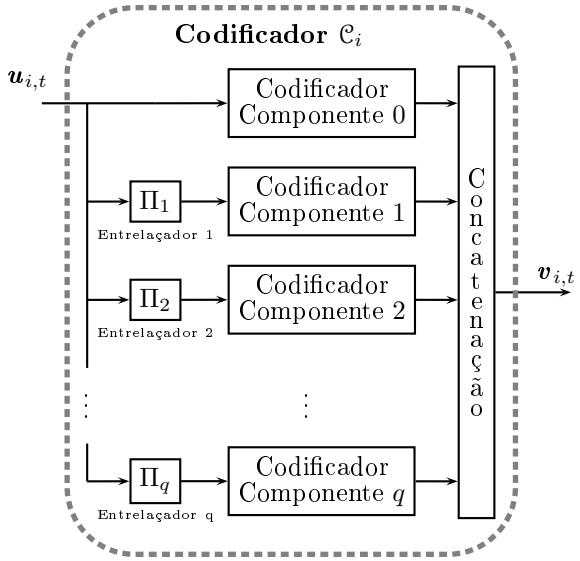


Figura 3.4: *Sistema de codificação $\mathcal{C}_i$, associado ao usuário i, utilizando PCCC em um instante de observação t, $1 \leq t \leq N$.*

No Codificador $\mathcal{C}_i$, ilustrado na Figura 3.4, todos os codificadores componentes utilizam as mesmas sequências de informação, $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$, em que $1 \leq t \leq N$, porém em uma ordem diferente, devido à presença dos entrelaçadores. A sequência código associada ao usuário i, $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, em que $1 \leq t \leq N$, é formada pela concatenação das sequências de saída de cada Codificador Componente, com a taxa de transmissão $R_i = k_i/n$ e o sistema possui taxa total $R(T) = R_1 + R_2 + \cdots + R_T$ [31].

Exemplo 3.2 *[Sistema de codificação PCCC para o 2-BAC]*

Um esquema de codificação e decodificação para o 2-BAC foi apresentado em [51, 53]. Na Figura 3.5, pode ser visto o esquema de codificação em que é utilizado um PCCC de dois codificadores convolucionais recursivos sistemáticos, denotados pelo Codificador dos Componentes 1 e 2, com taxa $1/2$, não necessariamente iguais. As tabelas 3.1 e 3.2 apresentam as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes utilizados em [51] e [53], respectivamente, para cada usuário com taxa de $1/3$ e o sistema possui taxa total $2/3$. Note que, nos dois casos, os usuários utilizam o mesmo codificador convolucional para os codificadores componentes.

Os sub-blocos código de cada usuário, a saber, $\boldsymbol{v}_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$, são formados pela concatenação do símbolo de informação com os símbolos de paridade do codificador componente 1 e do símbolo de paridade do codificador componente 2. Como os sub-blocos de informação têm comprimento $k_1 = k_2 = 1$ e os sub-blocos código têm comprimento $n = 3$, ambos os codificadores

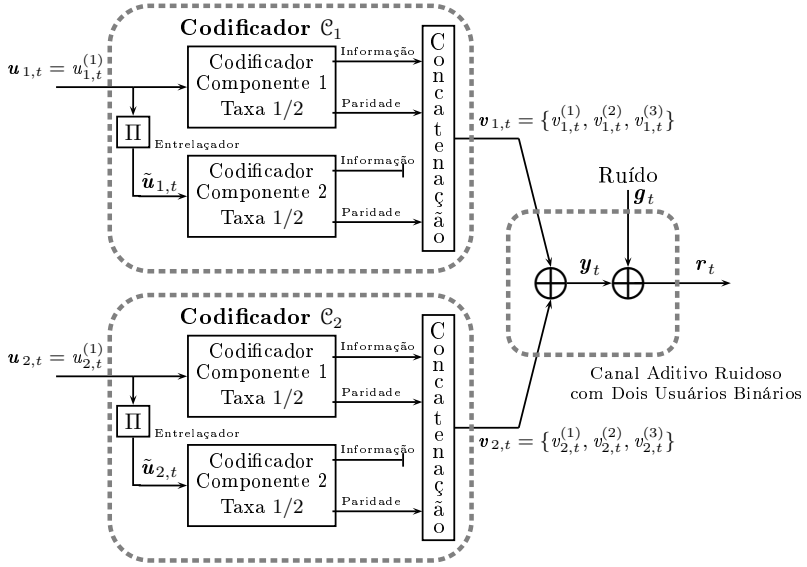


Figura 3.5: *Exemplo de um par de codificadores* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ *associados, respectivamente, aos usuários 1 e 2, apresentando concatenação em paralelo de dois codificadores convolucionais componentes.*

Tabela 3.1: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do Exemplo 3.2 para o 2-BAC utilizando PCCC.*

	Codificador Componente 1	Codificador Componente 2
Usuário 1	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{array}\right]$
Usuário 2	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{array}\right]$

Tabela 3.2: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do Exemplo 3.2 para o 2-BAC utilizando PCCC.*

	Codificador Componente 1	Codificador Componente 2
Usuário 1	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D+D^3} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 2	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$

apresentam uma taxa, para cada usuário, de $1/3$.

$\diamond$

3.3.2 Códigos Convolucionais Concatenados em Série

Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo da Figura 3.1, em que o usuário 1 e o usuário 2 utilizam um esquema de codificação em concatenação de um conjunto finito de codificadores convolucionais em série (SCCC), não necessariamente iguais, denotados por

Codificadores Componentes separados por entrelaçadores. Sem perda de generalidade, considere um conjunto composto por 2 codificadores componentes, denotados Codificador Interno e Codificador Externo, ilustrado na Figura 3.6, em que pode ser visto o esquema de codificação SCCC para o usuário i.

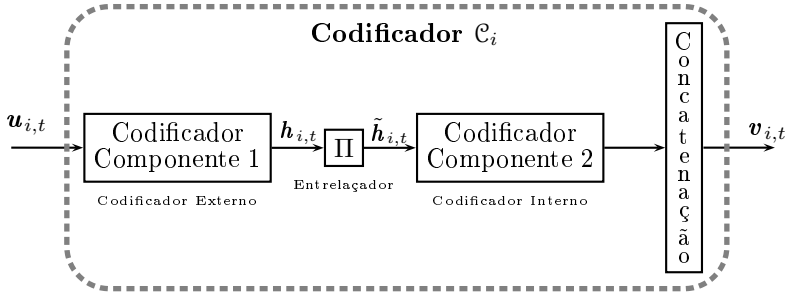


Figura 3.6: *Sistema de codificação $\mathcal{C}_i$, associado ao usuário i, utilizando SCCC genéricos em um instante de observação t, $1 \leq t \leq N$.*

Para o Codificador $\mathcal{C}_i$, referente ao usuário i, a entrada do codificador componente externo utiliza a sequência de informação $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$, em que $1 \leq t \leq N$, gerando uma sequência de saída intermediária $\boldsymbol{h}_{i,t} = \{h_{i,t}^{(1)}, h_{i,t}^{(2)}, \ldots, h_{i,t}^{(p_i)}\}$ de comprimento p_i. Ou seja, o codificador componente externo possui taxa de k_i/p_i, para $k_i \leq p_i \leq n$. A sequência intermediária $\boldsymbol{h}_{i,t}$ serve de entrada para um entrelaçador, gerando a sequência de saída permutada $\tilde{\boldsymbol{h}}_{i,t}$. Note que o entrelaçador altera apenas as posições relativas dos símbolos, gerando, assim, uma quase (ou pseudo) independência estatística entre os codificadores componentes [119]. A sequência $\tilde{\boldsymbol{h}}_{i,t}$ é aplicada ao codificador componente interno, de modo que, após a concatenação das sequências de saída, é gerado um sub-bloco código do usuário i no instante de observação t; a saber, $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, em que $1 \leq t \leq N$, de comprimento n. Logo, o codificador componente interno tem taxa p_i/n e o conjunto - codificador componente interno e externo para o usuário i - possui taxa de transmissão $R_i = k_i/n$.

Exemplo 3.3 *[Sistema de codificação SCCC para o 2-BAC]*

Como exemplificação do esquema de codificação serial para o canal 2-BAC, considere a Figura 3.7. Nesse caso, em especifico, o par de codificadores $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, associado ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, é formado por um codificador convolucional componente externo, com taxa $1/2$, e um entrelaçador, que permuta os bits de saída antes de aplicá-los a um codificador convolucional componente interno, com taxa $2/3$, gerando o sub-bloco do código que será enviada ao canal de transmissão. Dessa forma, o par de codificadores $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente, possuem a taxa $1/3$ e o sistema possui taxa total $2/3$. A Tabela 3.3 apresenta um possível conjunto de matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes utilizadas por cada usuário, para o sistema definido na Figura 3.7.

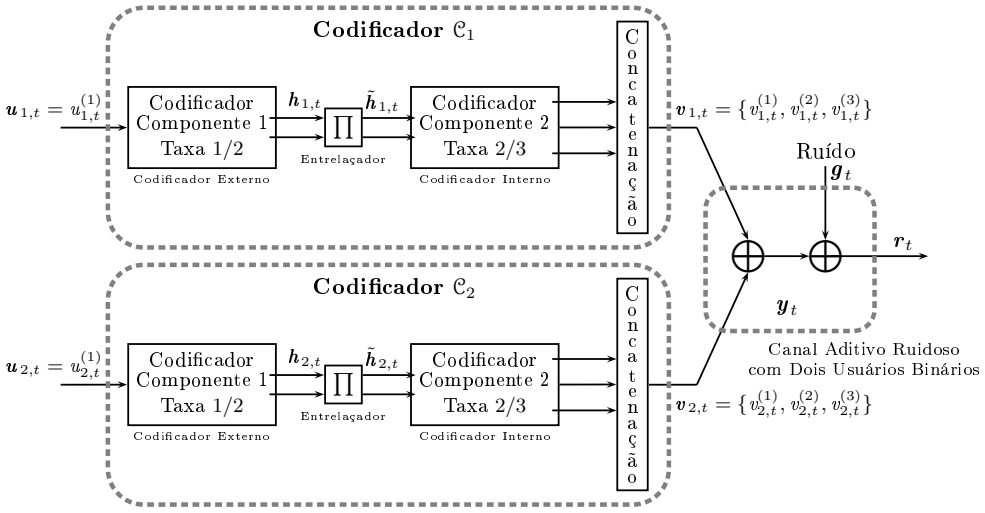


Figura 3.7: *Exemplo de um par de codificadores* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ *associado ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, apresentando concatenação em série de dois codificadores convolucionais componentes.*

Tabela 3.3: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do Exemplo 3.3 para o 2-BAC utilizando SCCC.*

	Codificador Componente 1	Codificador Componente 2
Usuário 1	$\begin{bmatrix} 1+D^2+D^3 & 1+D+D^2+D^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \\ 0 & 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$
Usuário 2	$\begin{bmatrix} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \\ 0 & 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$

◇

3.3.3 Códigos Convolucionais Concatenados em Forma Híbrida

O sistema de acesso múltiplo utilizando codificação híbrida é composto pela combinação dos esquemas paralelo e série de códigos convolucionais, para cada usuário, oferecendo a oportunidade de explorar as vantagens dos codificadores concatenados em paralelo e em série. Desse modo, pretende-se, através deste sistema, encontrar um equilíbrio entre as características positivas de um modelo e de outro. Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo da Figura 3.1, em que os usuários 1 e 2 utilizam um esquema de codificação com códigos convolucionais componentes concatenados em forma híbrida, apresentado por [108], e não necessariamente iguais, sendo separados por entrelaçadores. Sem perda de generalidade, considere um conjunto composto por dois codificadores componentes, ilustrado na Figura 3.8,

em que pode ser visto o sistema HCCC proposto para o 2-BAC.

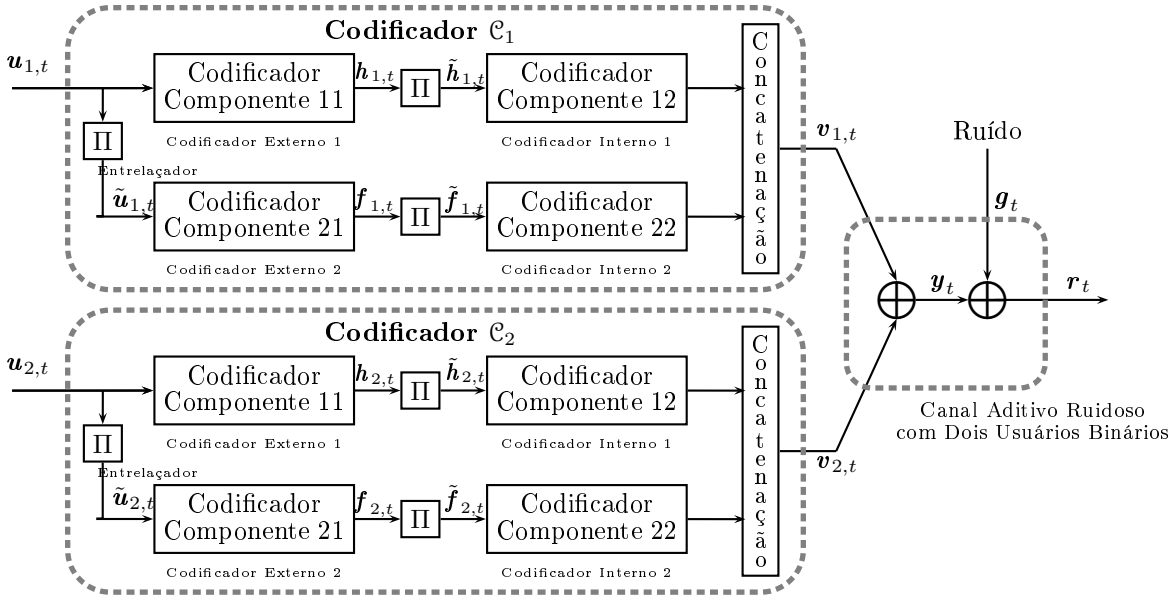


Figura 3.8: *Par de codificadores* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ *associado ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, apresentando concatenação híbrida de dois codificadores genéricos componentes para cada usuário, em um instante de observação* t, $1 \leq t \leq N$.

O Codificador $\mathcal{C}_i$ da Figura 3.8, referente ao usuário 1, é construído por meio de uma concatenação paralela de duas estruturas concatenadas de codificadores convolucionais em série. Os símbolos de entrada de ambas estruturas concatenadas em série utilizam os mesmos bits de informação $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$ de comprimento k_i, em que $1 \leq t \leq N$. Contudo, isso acontece em uma ordem diferente, denotado $\tilde{\boldsymbol{u}}_{i,t}$, devido à presença do entrelaçador para a segunda estrutura em série.

O sub-bloco do código do usuário i, $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, de comprimento n, em que $1 \leq t \leq N$, é gerado pela concatenação das saídas das estruturas em série 1 e 2 do Codificador $\mathcal{C}_i$, assim o conjunto para o usuário 1 possui taxa de transmissão $R_i = k_i/n$.

Outras concatenações de codificadores convolucionais em forma híbrida para um usuário foram propostas por diversos autores [97, 104–108]. Conforme a proposta da tese, qualquer esquema de concatenação pode ser escolhido para a construção do sistema de acesso múltiplo utilizando HCCC, desde que o sub-bloco do código gerado por cada usuário possua o mesmo comprimento n, devido ao pressuposto do sincronismo de palavra na transmissão dos usuários.

3.3.4 Códigos Convolucionais Concatenados em Forma Mista

O sistema de acesso múltiplo de codificação mista é composto pela atribuição de esquemas de concatenação em paralelo, em série ou híbrida de códigos convolucionais a cada usuário de forma independente, oferecendo características distintas de codificação a cada usuário. Considere o sistema de comunicação de acesso múltiplo da Figura 3.1 para o 2-BAC, em que os usuários 1 e 2 utilizam um esquema de codificação de codificadores componentes convolucionais concatenados, respectivamente, em série e em paralelo, e que não são necessariamente iguais. Sem perda de generalidade, considere um conjunto composto por dois codificadores componentes atribuídos a cada usuário, como ilustrado na Figura 3.9, em que pode ser visto o sistema MCCC proposto para o 2-BAC.

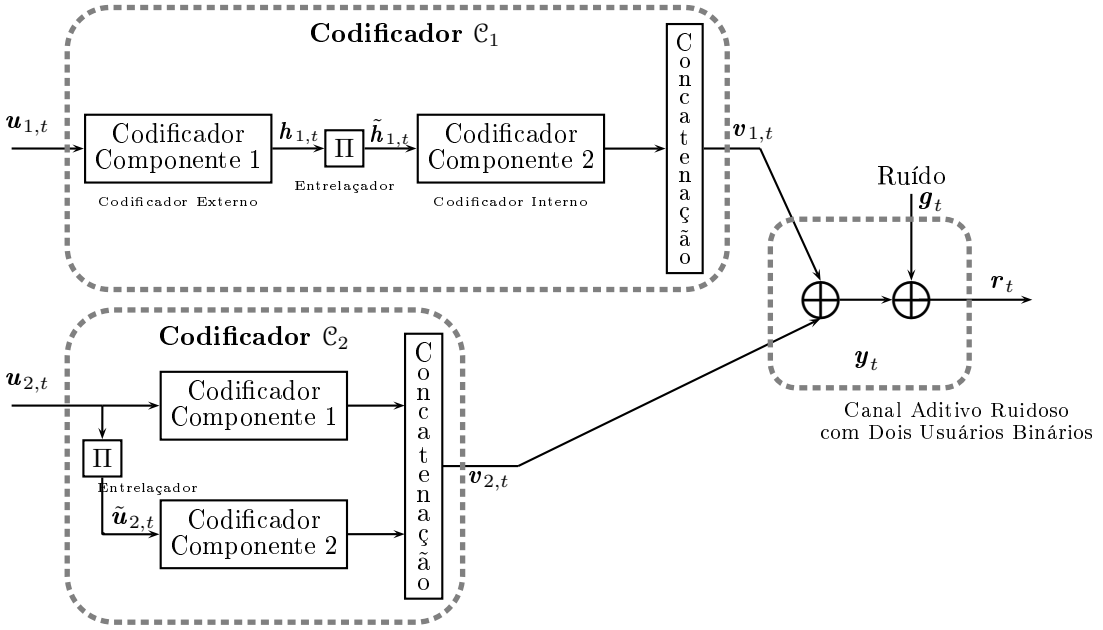


Figura 3.9: *Par de codificadores* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$*, em que é associado ao usuários 1 a SCCC e ao usuários 2 a PCCC, respectivamente, apresentando o sistema MCCC para dois usuários.*

Exemplo 3.4 *[Esquema de codificação MCCC para o 2-BAC]*

Como exemplificação do sistema de acesso múltiplo utilizando concatenação mista de códigos convolucionais para o canal 2-BAC, considere a Figura 3.10. Nesse caso, em específico, o par de codificadores $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ *é associado, respectivamente, aos usuários 1 e 2. Para o usuário 1, foi atribuído um esquema de codificação em que é utilizado um PCCC de dois codificadores convolucionais recursivos sistemáticos, denotados pelo Codificador dos Componentes 1 e 2, com taxa* $1/2$ *e não necessariamente iguais. Para o usuário 2, foi atribuído um codificador convolucional componente externo, com taxa* $1/2$*, bem como um entrelaçador que permuta os bits de saída antes de aplicá-los a um codificador convolucional componente interno, com taxa* $2/3$*, gerando sub-blocos do código que serão enviados ao canal de transmissão pelo usuário 1.*

Dessa forma, o par de codificadores $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$*, referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente, possuem taxa* $1/3$ *e o sistema possui taxa total* $2/3$*. A Tabela 3.4 apresenta um conjunto de matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes utilizadas por cada usuário para o sistema definido na Figura 3.10.*

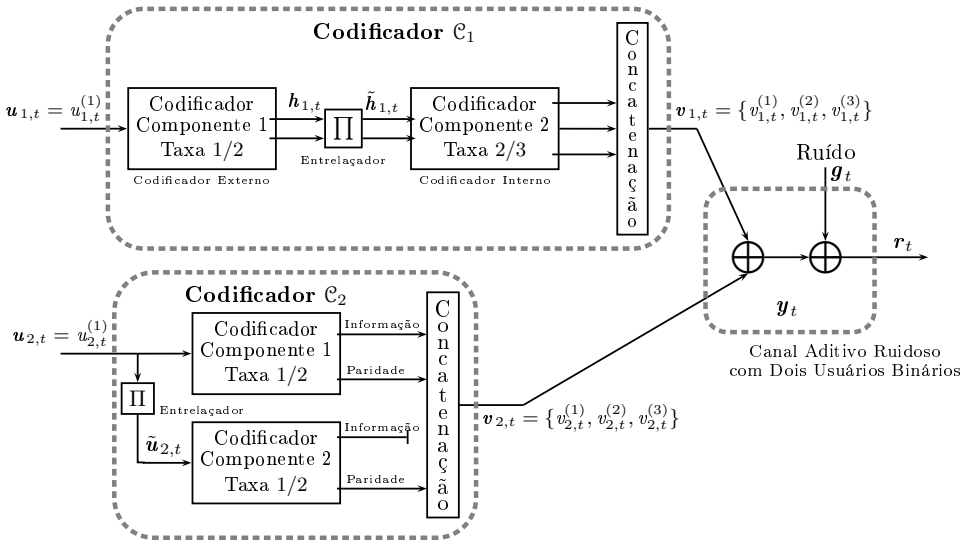


Figura 3.10: *Exemplo de um par de codificadores* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ *associados respectivamente aos usuários 1 e 2, apresentando concatenação em forma mista.*

Tabela 3.4: *Matrizes polinomiais geradoras dos códigos componentes do Exemplo 3.4 para o sistema de acesso múltiplo para o 2-BAC utilizando MCCC.*

	Codificador Componente 1	Codificador Componente 2
Usuário 1	$\begin{bmatrix} 1+D^2+D^3 & 1+D+D^2+D^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \\ 0 & 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$
Usuário 2	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{bmatrix}$

◇

Neste capítulo, é apresentada a definição dos sistemas codificados com códigos convolucionais concatenados para o 2-BAC, a saber, sistemas que operam utilizando PCCC, SCCC, HCCC e MCCC, para cada usuário. As estruturas de codificação, notações e a treliça de cada usuário foram, também, denotadas. Os conceitos deste capítulo servirão para desenvolvimento dos decodificadores e algoritmos de decodificação apresentados no Capítulo 4. O Apêndice B apresenta a extensão destes sistemas concatenados propostos para mais de dois usuários.

CAPÍTULO 4

Decodificação para Canais Aditivos de Acesso Múltiplo

Não tentes ser bem sucedido, tenta antes ser um homem de valor.

— **Albert Einstein**

Neste capítulo, será feita uma introdução à decodificação para o 2-BAC, com ênfase nos módulos SISO - módulos com entrada suave e saída suave - propostos na tese para a aplicação em canais aditivos ruidosos de acesso múltiplo, em um processo de decodificação iterativa e colaborativa. Serão descritos os algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades *a posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos usuários que dividem o canal, dada uma determinada observação. Os algoritmos propostos permitem uma decodificação conjunta e individual das mensagens transmitidas pelos usuários, ambos baseados no algoritmo MAP. Posteriormente, é apresentada a estrutura dos sistemas de decodificação iterativa utilizando os módulos SISO para os sistemas de codificação propostos.

4.1 Introdução

Em se tratando da decodificação de códigos convolucionais aplicados canais ponto a ponto, algumas propostas foram desenvolvidas [120–122]. Contudo, devido à menor complexidade exigida no processo de implementação, aliado a resultados satisfatórios, o método de decodifi-

cação por *máxima verossimilhança* proposto por Viterbi [123] ganhou notoriedade. Também chamado de algoritmo de Viterbi, o método utiliza a treliça de um código convolucional para estimar a palavra-código transmitida, dada uma seqüência de símbolos recebida através de um canal de comunicação ruidoso. Entretanto, o algoritmo não garante que seja atingida a menor BER possível. Tal algoritmo encontrou aplicabilidade em sistemas celulares como o CDMA [12] e o GSM [6], bem como na comunicação de satélites, de modems ADSL e em protocolos de comunicação sem fio [3–5, 7, 8].

Enquanto que o algoritmo de Viterbi estima a probabilidade de erro por blocos de mensagens, o algoritmo BCJR [68] minimiza a probabilidade de erro de cada símbolo na mensagem, também com o auxílio da treliça utilizada na codificação. Seu método consiste em usar métricas recursivas progressivas e regressivas para maximizar a probabilidade *a posteriori* de um símbolo ser recebido em um determinado instante de observação, sendo denominado algoritmo de máxima probabilidade *a posteriori* [86]. Várias alternativas foram traçadas com o objetivo de aliviar a carga computacional trazida pelo algoritmo [124–126].

A utilização de códigos turbo, aliados a um esquema de decodificação iterativa, resulta em diversas possibilidades de sistemas capazes de fornecer confiabilidade nas comunicações com uma relação sinal-ruído próxima a algumas unidades de decibéis (dB) do limite de Shannon. Uma visão sobre codificadores convolucionais concatenados em paralelo pode ser encontrada em [113, 114, 127, 128] e uma implementação da decodificação utilizando FPGA pode ser encontrada em [129]. Como o desempenho de um código turbo é influenciado diretamente pelo entrelaçador utilizado, em 1994, Barbulescu e Pietrobon introduziram projetos de entrelaçadores [130].

Desde do surgimento dos códigos turbo, inúmeras pesquisas na área de codificação têm sido realizadas na busca de reduzir a complexidade associada ao decodificador do tipo MAP, proposto por Bahl *et al.* [68]. Entre os decodificadores práticos de reduzida complexidade, pode-se citar os algoritmos Max-Log-MAP, proposto em 1994 por Koch e Baier [131] e também por Erfanian e outros [132]; o algoritmo Log-MAP sugerido em 1995 por Robertson [133]; e o algoritmo de Viterbi com saída suave (SOVA) proposto por Hagenauer e Hoeher [134, 135].

Embora não seja um princípio recente, com ideias principais já abordadas em [81] e nos códigos LDPC de Gallager [66, 67], a decodificação iterativa tem um papel crucial nos estudos dos códigos corretores de erros, à época chamada de decodificação probabilística (*probabilistic decoding*). As decisões suaves produzidas pelo decodificador são utilizadas, em um processo

iterativo, com o objetivo de melhorar a probabilidade *a posteriori* de um símbolo ser enviado, para o caso de uma amostra ruidosa ser recebida. Atualmente, utiliza-se a decodificação iterativa para melhorar a estimativa de razões de log-verossimilhança (LLR) [136] geradas pelos algoritmos, a exemplo da modificação do algoritmo de Viterbi [134, 137].

No Apêndice A, são descritos os módulos SISO para um usuário, apresentado por Benedetto, *et al.* [93] - abordagem que é utilizada para o algoritmo proposto de decisão individual, a saber Algoritmo SISO-SuD. O Apêndice B descreve a extensão da aplicação apresentada dos módulos SISO para o canal de acesso múltiplo ruidoso com T usuários binários transmitindo independentemente.

4.2 Módulo SISO para o 2-BAC

O algoritmo de decodificação MAP, proposto em 1974 por Bahl [68], tem como objetivo calcular as probabilidades *a posteriori* dos bits de informação. O algoritmo MAP observa todos os possíveis caminhos da treliça, o que gera uma grande complexidade. Por este motivo, ele não era muito utilizado até a descoberta dos códigos turbo, em 1993. Ao contrário do algoritmo de Viterbi, que decide sobre uma sequência de bits, o MAP toma a decisão bit a bit, além de fornecer uma probabilidade sobre a certeza da decisão, requisito necessário para a decodificação iterativa proposta por Berrou e outros. O módulo SISO proposto, baseado no algoritmo MAP, pode ser utilizado na decodificação iterativa, colaborativa e de máxima probabilidade *a posteriori* de códigos transmitidos através do 2-BAC ruidoso. O objetivo do decodificador é encontrar uma estimativa que identifique as informações geradas separadamente pelos usuários 1 e 2.

Para definir o módulo SISO para o 2-BAC, considere a representação gráfica apresentada na Figura 4.1 [93, 94, 113, 114]. As razões de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I)$ são associadas às distribuições de probabilidade *a priori* dos símbolos de entrada, em que os argumentos $\boldsymbol{u}_{1,1}^N$ e $\boldsymbol{u}_{2,1}^N$ representam os símbolos de entrada referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente. Do mesmo modo, $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I)$ são associadas às distribuições de probabilidades a priori das sequência-código, em que os argumentos $\boldsymbol{v}_{1,1}^N$ e $\boldsymbol{v}_{2,1}^N$ representam as sequências-código referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente. As razões de log-verossimilhança, $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; O)$ e $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; O)$, fazem o papel da informação extrínseca - probabilidades *a posteriori* - a ser propagada durante a decodificação iterativa associada às distribuições de probabilidade dos símbolos de entrada e das sequências-código, respectivamente.

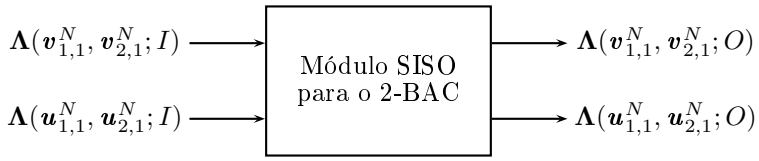


Figura 4.1: *Módulo SISO para o canal aditivo com dois usuários binários.*

Para a matriz razão de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I)$ associada à distribuição de probabilidade *a priori* da sequência dos símbolos de entrada, com dimensão $1 \times N$, tem-se

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I) = \left[\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}; I), \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}; I), \ldots, \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I), \ldots, \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}; I)\right], \tag{4.1}$$

com $1 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se razões de log-verossimilhança conjuntas dos usuários 1 e 2, dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz com dimensões $(|\mathcal{U}_1||\mathcal{U}_2|) \times 1$, em que $|\mathcal{U}_1| = 2^{k_1}$ e $|\mathcal{U}_2| = 2^{k_2}$ para o 2-BAC;

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^2}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{|\mathcal{U}_1|}, \mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{|\mathcal{U}_1|}, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

em que

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I)}{P_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I)}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^l\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2\right]}\right), \tag{4.3}$$

com $1 \leq k \leq |\mathcal{U}_1|$, $1 \leq l \leq |\mathcal{U}_2|$, $\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\mathbf{u}_2^l, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ e $1 \leq t \leq N$; em que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são fixados e diferentes dos usados no numerador.

Devido à natureza de suas entradas e saídas, o módulo SISO não tem acesso ao canal de transmissão, quando aplicado ao 2-BAC, sendo necessário um demodulador responsável por fornecer as razões de log-verossimilhança referentes ao canal, as quais, por sua vez, servem

como entradas ao módulo - razões de log-verossimilhança -, dessa forma, é possível utilizá-lo em diversas configurações de decodificação iterativa, seja PCCC, SCCC, HCCC ou MCCC, conferindo maior versatilidade, segundo será apresentado, como será descrito ao longo da tese.

Exemplo 4.1 *Para exemplificar a matriz razão de log-verossimilhança* $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I)$*, considere o par dos símbolos de informação* $(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t})$*, para um instante de observação* t*, para* $1 \leq t \leq N$*, relativos ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, ambos de comprimento* $k_1 = k_2 = 1$*. A matriz razão de log-verossimilhança* $\mathbf{\Lambda}_{\boldsymbol{u}_1^k, \boldsymbol{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I)$*, com dimensão* $4 \times N$*, em que* $\boldsymbol{u}_1^k, \boldsymbol{u}_2^l \in \{0, 1\}$*,* $1 \leq k \leq 2$ *e* $1 \leq l \leq 2$*, é da forma*

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Para a regra de decisão, define-se $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = 0$*. Assim,* $P_{0,0}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}) = P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]$*, e a razão de log-verossimilhança utilizada para decisão é*

$$\mathbf{\Lambda}_{\boldsymbol{u}_1^k, \boldsymbol{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) = \ln\left(\frac{P\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \boldsymbol{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t} = \boldsymbol{u}_2^l\right]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right), \tag{4.5}$$

ou seja, para o 2-BAC do exemplo,

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_t = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 1]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_t = 1, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_t = 1, \boldsymbol{u}_{2,t} = 1]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 1]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 1, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{u}_t = 1, \boldsymbol{u}_{2,t} = 1]}{P[\boldsymbol{u}_{1,t} = 0, \boldsymbol{u}_{2,t} = 0]}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Logo, a matriz razão de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I)$*, associada à distribuição de probabilidade* a priori *da sequência dos símbolos de entrada para o 2-BAC do exemplo, é*

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}; I) & \mathbf{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}; I) & \mathbf{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}; I) \\ \mathbf{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}; I) & \mathbf{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) & \cdots & \mathbf{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}; I) \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

◇

De forma análoga, a matriz razão de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_1^N, \boldsymbol{v}_1^N; I)$ associada à distribuição de probabilidade *a priori* da sequência do código, com dimensão $1 \times N$, é da forma

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I) = [\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}; I), \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,2}, \boldsymbol{v}_{2,2}; I), \ldots, \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I), \ldots, \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}; I)], \tag{4.8}$$

com $1 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se razões de log-verossimilhança conjuntas do usuário 1 e do usuário 2, dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz com dimensão $(|\mathcal{V}_1||\mathcal{V}_2|) \times 1$, em que $|\mathcal{V}_1| = 2^n$ e $|\mathcal{V}_2| = 2^n$ para o 2-BAC,

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^2}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{|\mathcal{V}_1|}, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

em que

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)}{P_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^g, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^h\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2\right]}\right), \tag{4.10}$$

com $1 \leq k \leq |\mathcal{V}_1|$, $1 \leq l \leq |\mathcal{V}_2|$, $\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$ e $\mathbf{v}_2^h, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$ e $1 \leq t \leq N$.

Exemplo 4.2 *Para exemplificar a matriz razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I)$ associada à distribuição de probabilidade* a priori *da sequência do código, considere o par dos símbolos de informação $(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t})$, para um instante de observação t, para $1 \leq t \leq N$, relativos ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, ambos de comprimento $n = 2$. A matriz razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^g, \boldsymbol{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$ com dimensão $16 \times N$, em que $\boldsymbol{v}_1^g$ e $\boldsymbol{v}_2^h$ são sub-blocos do código binário, sendo $1 \leq k, l \leq 4$, de forma*

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{00,00}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{00,01}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{11,10}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{11,11}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Define-se $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = 00$, assim $P_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}) = P[\boldsymbol{v}_{1,t} = 00, \boldsymbol{v}_{2,t} = 00]$, e a razão de verossimilhança utilizada para decisão é

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^g, \boldsymbol{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \ln\left(\frac{P\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \boldsymbol{v}_1^g, \boldsymbol{v}_{2,t} = \boldsymbol{v}_2^h\right]}{P\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = 00, \boldsymbol{v}_{2,t} = 00\right]}\right), \tag{4.12}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \begin{bmatrix} \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_t=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=01]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_t=11, \boldsymbol{v}_{2,t}=10]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_t=11, \boldsymbol{v}_{2,t}=11]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=01]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=11, \boldsymbol{v}_{2,t}=10]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \\ \ln\left(\dfrac{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=11, \boldsymbol{v}_{2,t}=11]}{P[\boldsymbol{v}_{1,t}=00, \boldsymbol{v}_{2,t}=00]}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Logo, para a matriz razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I)$ *associada à distribuição de probabilidade* a priori *da sequência dos símbolos de entrada,*

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{\Lambda}_{00,01}(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}; I) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{00,01}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{00,01}(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}; I) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{11,10}(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}; I) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{11,10}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{11,10}(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}; I) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{11,11}(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}; I) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{11,11}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) & \cdots & \boldsymbol{\Lambda}_{11,11}(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}; I) \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

◇

4.3 Cálculo Conjunto da Probabilidade *a posteriori* para o 2-BAC

O módulo SISO utiliza os ramos da seção de treliça de cada usuário - definida na Seção 3.2.1 e ilustrada na Figura 3.2 - e as matrizes razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; I)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; I)$, associadas às distribuições de probabilidades conjuntas *a priori* dos símbolos de entrada e dos sub-blocos do código, para o cálculo das matrizes da razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; O)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N; O)$, associadas às probabilidades conjuntas *a posteriori* dos símbolos de entrada e dos sub-blocos do código, relativos ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente.

A matriz razão de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; O)$, associada à distribuição de probabilidade *a posteriori* da sequência dos símbolos de entrada, com dimensão $1 \times N$, é da forma

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N; O) = [\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}; O), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}; O), \ldots \\ \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{,2N}; O)] \tag{4.15}$$

com $1 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se razões de verossimilhança conjuntas dos usuários 1 e 2, dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz com dimensão $(|\mathcal{U}_1||\mathcal{U}_2|) \times 1$, em que $|\mathcal{U}_1| = 2^{k_1}$ e $|\mathcal{U}_2| = 2^{k_2}$ para o 2-BAC:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1,\mathbf{u}_2^1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1,\mathbf{u}_2^2}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1,\mathbf{u}^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2,\mathbf{u}_2^1}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2,\mathbf{u}^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}^{|\mathcal{U}|_1},\mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

em que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O) &= \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\tilde{\mathrm{P}}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^l | \boldsymbol{z}_1^N\right]}{\tilde{\mathrm{P}}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]}\right), \end{aligned} \tag{4.17}$$

com $1 \leq k \leq |\mathcal{U}_1|$, $1 \leq l \leq |\mathcal{U}_2|$, $\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ e $\mathbf{u}_2^l, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ e $1 \leq t \leq N$; em que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são fixados e diferentes dos usados no numerador.

O módulo SISO é baseado na regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro de escolher os índices k e l referentes a vetores nos espaços vetoriais dos possíveis símbolos enviados ao canal, transmitidos pelo usuário 1 e pelo usuário 2, que maximizam a probabilidade *a posteriori*. Doravante, é denotado o Algoritmo SISO-MuD - algoritmo de entrada suave e saída suave para decisão conjunta, ou decisão multiusuário, (*soft input, soft output multiuser decision algorithm*). O objetivo do Algoritmo SISO-MuD, utilizado no módulo SISO, é maximizar a probabilidade *a posteriori* (regra MAP) referente à razão de log-verossimilhança conjunta dos símbolos de informação $\boldsymbol{u}_{1,t}$ e $\boldsymbol{u}_{2,t}$ serem $\mathbf{u}_1^k \in \mathcal{U}_1$ e $\mathbf{u}_2^l \in \mathcal{U}_2$, na t-ésima observação, associada ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, conhecendo uma sequência de observação $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$. Ou seja, maximizar a probabilidade *a*

posteriori,

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\mathbf{u}_1^k,\boldsymbol{u}_{2,t}=\mathbf{u}_2^l|\boldsymbol{z}_1^N\right]. \tag{4.18}$$

Analogamente, o Algoritmo SISO-MuD maximiza a probabilidade *a posteriori* referente à razão de log-verossimilhança conjunta dos sub-blocos dos códigos $\boldsymbol{v}_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$ ser $\mathbf{v}_1^g \in \mathcal{V}_1$ e $\mathbf{v}_2^g \in \mathcal{V}_2$, na t-ésima observação, para os usuários 1 e 2, respectivamente, conhecendo uma sequência de observação. Ou seja, a probabilidade *a posteriori*,

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^g,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^h|\boldsymbol{z}_1^N\right], \tag{4.19}$$

é maximizada.

Cada usuário utiliza um sistema concatenado com codificadores convolucionais, considerando as transições conjuntas associadas aos ramos $e_1 \in \mathcal{E}_1$ e $e_2 \in \mathcal{E}_2$, associadas, por sua vez, ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, em um dado instante de observação t. Assim, a relação dos estados atuais e dos próximos estados, $\left(s^S(e_1), s^S(e_2); s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$, determina unicamente as sequências de entrada e os sub-blocos do código correspondentes a cada usuário, da forma $(\boldsymbol{u}(e_1), \boldsymbol{u}(e_2); \boldsymbol{v}(e_1), \boldsymbol{v}(e_2))$. As seções de treliças para os usuários podem ser visualizadas na Figura 4.2 [93, 94, 113, 114].

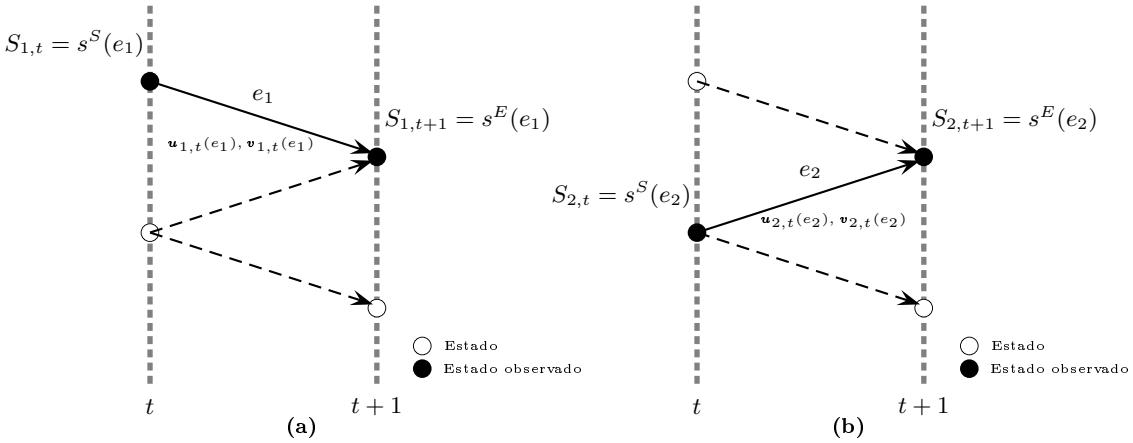


Figura 4.2: *Ramos de seções das treliças de cada usuário em instantes de observação consecutivos: (a) Usuário 1 e (b) Usuário 2.*

Dado que os eventos de transição entre cada estado são mutuamente excludentes, a probabilidade de qualquer um deles ocorrer é igual à soma das probabilidades individuais. Portanto, a probabilidade *a posteriori* dos pares dos símbolos de informação $\boldsymbol{u}_{1,t}$ e $\boldsymbol{u}_{2,t}$ serem $\mathbf{u}_1^k \in \mathcal{U}_1$ e $\mathbf{u}_2^l \in \mathcal{U}_2$, na t-ésima observação, associados ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, é

definida da seguinte maneira:

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)=\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}\mathrm{P}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)|\boldsymbol{z}_1^N\right);\tag{4.20}$$

de forma análoga, a probabilidade *a posteriori* para os sub-blocos dos códigos $\boldsymbol{v}_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$ serem $\mathbf{v}_1^g\in\mathcal{V}_1$ e $\mathbf{v}_2^h\in\mathcal{V}_2$, na t-ésima observação, associados aos usuários 1 e 2, respectivamente, é definida da seguinte forma:

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)=\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}\mathrm{P}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)|\boldsymbol{z}_1^N\right).\tag{4.21}$$

Sabendo que os codificadores convolucionais são gerados por sistemas com sequências bem definidas, para o usuário i, em dado instante de observação t, a transição do estado atual $S_{i,t}$ para o próximo estado $S_{i,t+1}$, em que $S_{i,t}=s^S(e_i)\rightarrow S_{i,t+1}=s^E(e_i)$, $S_{i,t},S_{i,t+1}\in\mathcal{S}_i$ e $e_i\in\mathcal{E}_i$, dentre um total de M_i estados possíveis e distintos, está associada à sequência de entrada $\boldsymbol{u}_{i,t}=\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)$ e ao sub-bloco do código $\boldsymbol{v}_{i,t}=\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)$. Logo, é possível dimensionar o argumento da Equação (4.20) a partir da probabilidade conjunta, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)|\boldsymbol{z}_1^N\right)\\&\quad=\mathrm{P}\left(S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2),S_{2,t}=s^E(e_2)|\boldsymbol{z}_1^N\right)\\&\quad=\frac{\mathrm{P}\left(S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2),S_{2,t}=s^E(e_2),\boldsymbol{z}_1^N\right)}{P\left(\boldsymbol{z}_1^N\right)},\end{aligned}\tag{4.22}$$

em que $P\left(\boldsymbol{z}_1^N\right)$ representa a probabilidade da sequência de observação, $\boldsymbol{z}_1^N$, que é uma constante para a regra MAP. Logo,

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\\&\quad\propto\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{1,t}=s^E(e_1),\right.\\&\qquad\qquad\left.S_{2,t-1}=s^S(e_2),S_{2,t}=s^E(e_2),\boldsymbol{z}_1^N\right],\end{aligned}\tag{4.23}$$

em que $\propto$ denota a proporcionalidade (direta) entre as expressões.

Para cada instante de observação t, a sequência observada, $\boldsymbol{z}_1^N=\{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\ldots,\boldsymbol{z}_t,\ldots,\boldsymbol{z}_N\}$, pode ser dividida em três partes: a contribuição das amostras anteriores à observação t, $\boldsymbol{z}_1^{t-1}=\{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\ldots,\boldsymbol{z}_{t-1}\}$; a contribuição da amostra atual, a parte presente, $\boldsymbol{z}_t$, associada à transição do estado $S_{1,t}$ e $S_{2,t}$ para os estados $S_{1,t+1}$ e $S_{2,t+1}$, referentes ao usuário 1 e ao usuário 2,

respectivamente; e a parte das amostras futuras a t, isto é $\boldsymbol{z}_{t+1}^{N} = \{\boldsymbol{z}_{t+1}, \boldsymbol{z}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{z}_{N}\}$, assim a probabilidade da Equação (4.23) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{N}\right] \\ &\quad = \mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}, \boldsymbol{z}_{t}, \boldsymbol{z}_{t+1}^{N}\right],\end{aligned} \tag{4.24}$$

aplicando a definição de probabilidade condicional [138, pág.98], tem-se

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{N}\right] \\ =&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N} | S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}, \boldsymbol{z}_{t}\right] \\ &\mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}, \boldsymbol{z}_{t}\right].\end{aligned} \tag{4.25}$$

Algumas considerações podem ser feitas com base na observação do comportamento do canal e da treliça: (a) devido ao canal de transmissão não ter memória, eventos anteriores não irão interferir na avaliação condicional; (b) como, no instante de observação t, são conhecidos os estados $S_{1,t} = s^{E}(e_1)$ e $S_{2,t} = s^{E}(e_2)$ das treliças do usuário 1 e do usuário 2, respectivamente, a entrada $\boldsymbol{z}_t$ já foi considerada na transição. Então, tem-se que

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{N}\right] \\ &\quad = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N} | S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t} = s^{E}(e_2)\right] \\ &\qquad \mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}, \boldsymbol{z}_{t}\right].\end{aligned} \tag{4.26}$$

Aplicando a redefinição de probabilidade condicional à segunda parcela da Equação (4.26), tem-se que

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{N}\right] \\ &\quad = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N} | S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t} = s^{E}(e_2)\right] \\ &\qquad \mathrm{P}\left[S_{1,t} = s^{E}(e_1), S_{2,t} = s^{E}(e_2), \boldsymbol{z}_{t} | S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2), \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}\right] \\ &\qquad \mathrm{P}\left[S_{1,t-1} = s^{S}(e_1), S_{2,t-1} = s^{S}(e_2) \boldsymbol{z}_{1}^{t-1}\right].\end{aligned} \tag{4.27}$$

Como a probabilidade de transição em um canal sem memória não depende das observações

anteriores, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2),S_{2,t}=s^E(e_2),\boldsymbol{z}_1^N\right]\\
&\quad=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^N|S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2)\right]\\
&\qquad\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),\boldsymbol{z}_t|S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&\qquad\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\boldsymbol{z}_1^{t-1}\right].
\end{aligned}\tag{4.28}$$

A probabilidade $\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2);\boldsymbol{z}_t|S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{t-1}=s^S(e_2)\right]$ pode ser determinada a partir das probabilidades de transição do canal com AWGN e das probabilidades de transição da treliça do codificador, na forma

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2);\boldsymbol{z}_t|S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&=\frac{\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2);\boldsymbol{z}_t\right]}{\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]}\\
&=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad\frac{\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]}{\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]}\\
&=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad\frac{\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{1,t-1}=s^S(e_1)\right]\mathrm{P}\left[S_{2,t}=s^E(e_2),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]}{\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1)\right]\mathrm{P}\left[S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]}\\
&=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|S_{1,t}=s^E(e_1),S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1)|S_{1,t-1}=s^S(e_1)\right]\mathrm{P}\left[S_{2,t}=s^E(e_2)|S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right].
\end{aligned}\tag{4.29}$$

Em um dado instante t qualquer, $\left(s^S(e_1),s^S(e_2);s^E(e_1),s^E(e_2)\right)$, os estados inicias e finais, para cada usuário, determinam unicamente os símbolos de entrada e as sequência-código correspondentes, $(\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2);\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2))$. Logo, a Equação (4.29) pode ser expressa em termos dos símbolos de entrada e sub-blocos do código para ambos os usuários, da forma que segue:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2),\boldsymbol{z}_t|S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]\\
&\quad=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2),\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right]\\
&\qquad\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right]\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right],
\end{aligned}\tag{4.30}$$

em que $\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1)|S_{1,t-1}=s^S(e_1)\right]=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right]$ é a probabilidade *a priori* da sequência da messagem do usuário 1, $\mathrm{P}\left[S_{2,t}=s^E(e_2)|S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right]=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right]$

é a probabilidade *a priori* da sequência da messagem do usuário 2, e $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2),\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right]$ é a probabilidade *a posteriori* da sequência de observação condicionada ao canal de transmissão. Ou seja,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2),\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right]\\&\quad=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right].\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, considere as probabilidades

$$A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)=\mathrm{P}\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1),S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right], \tag{4.31}$$

$$B_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^N|S_{1,t}=s^E(e_1),S_{2,t}=s^E(e_2)\right]. \tag{4.32}$$

Logo, a Equação (4.23) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\\&\propto\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right]\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right]\\&\qquad\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right]B_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right).\end{aligned} \tag{4.33}$$

Observe que as probabilidades calculadas para os valores específicos de $\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k$, e $\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l$ não dependem dos índices dos somatórios, sendo, portanto, valores constantes. Assim,

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\\&\quad\propto P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)\\&\qquad B_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right),\end{aligned} \tag{4.34}$$

em que

$$P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1),\boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right], \tag{4.35}$$

e

$$P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)=\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right]\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right]. \tag{4.36}$$

Analogamente, o algoritmo SISO pode ser utilizado para maximizar a probabilidade *a posteriori* de qualquer sub-bloco do código $\mathbf{v}_1^g$ e $\mathbf{v}_2^h$ referente ao usuário 1 e ao usuário 2,

respectivamente, em um dado instante de observação t, conhecendo a sequência de observação $\boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$, em que

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) &= \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^g, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^h | \boldsymbol{z}_1^N\right] \\ &= \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g} \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \boldsymbol{v}_{1,t}(e_1), \boldsymbol{v}_{2,t} = \boldsymbol{v}_{2,t}(e_2) | \boldsymbol{z}_1^N\right] \\ &= \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g} \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \boldsymbol{v}_{1,t}(e_1), \boldsymbol{v}_{2,t} = \boldsymbol{v}_{2,t}(e_2), \boldsymbol{z}_1^N\right]}{P\left(\boldsymbol{z}_1^N\right)}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Como visto no cálculo da probabilidade $\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right)$, a Equação (4.37) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \\ &\propto \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g} \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) \\ &\qquad A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right),\end{aligned} \tag{4.38}$$

logo,

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \\ &\propto P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g} \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) \\ &\qquad B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right),\end{aligned} \tag{4.39}$$

em que as métricas $A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right)$ e $B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$ podem ser determinadas de forma recursiva.

4.3.0.1 Métrica $A_{t-1}\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$

Inicialmente, considere a métrica $A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right)$ - Equação (4.31) - definida da forma

$$A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) = P\left[S_{1,t-1} = s^S(e_1), S_{2,t-1} = s^S(e_2), \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right]$$

que, em um instante t consecutivo a $t-1$ da treliça, tem-se $S_{1,t-1} = s^S(e_1) \rightarrow S_{1,t} = s^E(e_1)$ para o usuário 1 e $S_{2,t-1} = s^S(e_2) \rightarrow S_{2,t} = s^E(e_2)$ para o usuário 2, logo, obtém-se

$$A_t\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) = P\left[S_{1,t} = s^S(e_1), S_{2,t} = s^S(e_2), \boldsymbol{z}_1^{t-1}, \boldsymbol{z}_t\right]. \tag{4.40}$$

A partir da definição de distribuição de probabilidades marginais da Equação (4.40), tem-se

$$\begin{aligned} & A_t\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) \\ & = \sum_{e_1: s^E(e_1)=S_{1,t}} \sum_{e_2: s^E(e_2)=S_{2,t}} P\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1), S_{1,t}=s^E(e_1),\right. \\ & \qquad \left. S_{2,t-1}=s^S(e_2), S_{2,t}=s^E(e_2), \boldsymbol{z}_1^{t-1}, \boldsymbol{z}_t\right], \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} & A_t\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) \\ & = \sum_{e_1: s^E(e_1)=S_{1,t}} \sum_{e_2: s^E(e_2)=S_{2,t}} P\left[S_{1,t}=s^E(e_1), S_{2,t}=s^E(e_2)\right. \\ & \qquad \left. \boldsymbol{z}_t | S_{1,t-1}=s^S(e_1), S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right] \\ & \qquad P\left[S_{1,t-1}=s^S(e_1), S_{2,t-1}=s^S(e_2), \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right]. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Como

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1), S_{2,t}=s^E(e_2), \boldsymbol{z}_t | S_{1,t-1}=s^S(e_1), S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right] \\ & \quad = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1), \boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right] \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right] \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right] \\ & \quad = P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right), \end{aligned}$$

dado pelas equações (4.30), (4.35) e (4.36), tem-se

$$\begin{aligned} & A_t\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) \\ & = \sum_{e_1: s^E(e_1)=S_{1,t}} \sum_{e_2: s^E(e_2)=S_{2,t}} P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right) A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right), \end{aligned} \tag{4.42}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$A_0\left(s^S(e_1)=S_{1,0}, s^S(e_2)=S_{2,0}\right)=1; \tag{4.43}$$

$$A_0\left(s^S(e_1)\neq S_{1,0}, s^S(e_2)\neq S_{2,0}\right)=0; \tag{4.44}$$

em atenção à necessidade das treliças iniciarem nos estados $S_{1,0}$ e $S_{2,0}$.

4.3.0.2 Métrica $B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$

De maneira similar, considere a métrica $B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$ - Equação (4.32) - da forma

$$B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_{1,t}=s^E(e_1), S_{2,t}=s^E(e_2)\right]. \tag{4.45}$$

A partir da definição de distribuição de probabilidades marginais, em $t+1$, note que, sobre as treliças do usuário 1 e do usuário 2, a probabilidade $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N}|S_{1,t}=s^{E}(e_1),S_{2,t}=s^{E}(e_2)\right]$ é igual ao somatório de todas as probabilidades que vão para os estados $S_{1,t}=s^{E}(e_1)$ e $S_{2,t}=s^{E}(e_2)$. Ou seja, o conjunto de todos os $S_{1,t}=s^{S}(e_1)\rightarrow S_{1,t+1}=s^{E}(e_1)$ e $S_{2,t}=s^{S}(e_2)\rightarrow S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)$, logo

$$\begin{aligned}
&B_t\left(s^{E}(e_1),s^{E}(e_2)\right)\\
&=\sum_{e_1:s^{S}(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^{S}(e_2)=S_{2,t}}\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)|S_{1,t}=s^{S}(e_1),\right.\\
&\qquad\qquad\left.S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right],
\end{aligned}\tag{4.46}$$

assim, a probabilidade condicional pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)|S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\quad=\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N};,S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]}{\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]},
\end{aligned}$$

tomando o numerador

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\quad=P\left[\boldsymbol{z}_{t+2}^{N},\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\quad=P\left[\boldsymbol{z}_{t+2}^{N}|\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad P\left[\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\quad=P\left[\boldsymbol{z}_{t+2}^{N}|\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad P\left[\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right],
\end{aligned}\tag{4.47}$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_{t+1}^{N},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2),S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\quad=P\left[\boldsymbol{z}_{t+2}^{N}|\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad P\left[\boldsymbol{z}_{t+1},S_{1,t+1}=s^{E}(e_1),S_{2,t+1}=s^{E}(e_2)|S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right]\\
&\qquad\qquad P\left[S_{1,t}=s^{S}(e_1),S_{2,t}=s^{S}(e_2)\right],
\end{aligned}\tag{4.48}$$

e como

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[S_{1,t}=s^E(e_1), S_{2,t}=s^E(e_2), \boldsymbol{z}_t | S_{1,t-1}=s^S(e_1), S_{2,t-1}=s^S(e_2)\right] \\
&\quad = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1), \boldsymbol{v}_{2,t}=\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)\right] \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)\right] \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{2,t}=\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)\right] \\
&\quad = P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right),
\end{aligned}$$

dado pelas equações (4.30), (4.35) e (4.36), tem-se

$$\begin{aligned}
&B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) \\
&\quad = \sum_{e_1: s^S(e_1)=S_{1,t}} \sum_{e_2: s^S(e_2)=S_{2,t}} B_{t+1}\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t+1}, \boldsymbol{v}_{2,t+1}; I\right) \\
&\qquad\qquad P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t+1}, \boldsymbol{u}_{2,t+1}; I\right), \quad (4.49)
\end{aligned}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$B_N\left(s^E(e_1)=S_{1,N}, s^E(e_2)=S_{2,N}\right)=1; \quad (4.50)$$

$$B_N\left(s^E(e_1)\neq S_{1,N}, s^E(e_2)\neq S_{2,N}\right)=0; \quad (4.51)$$

para $S_{1,N} \in \mathcal{S}_1$ e $S_{2,N} \in \mathcal{S}_2$ levando em conta a necessidade das treliças terminarem em estado conhecido $S_{1,N}$ e $S_{2,N}$. Caso não seja conhecido o estado final da treliça, as condições de contorno apropriadas são:

$$B_N\left(s^E(e_1)=s_1, s^E(e_2)=s_2\right)=\frac{1}{M_1 M_2}, \quad (4.52)$$

para $s_1, s_2 \neq 0$, $s_2 \in \mathcal{S}_1$ e $s_2 \in \mathcal{S}_2$. Esta condição é aceitável visto que, dentre os M_1 e M_2 estados possíveis, apenas um par será escolhido como o estado atual.

4.3.1 Algoritmo SISO-MuD

Do mesmo modo que é utilizado para um usuário, o algoritmo SISO pode ser reescrito para utilizar as probabilidades $P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right)$ e $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right)$ para obter as LLR e

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right) \triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right)}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\mathbf{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t}=\mathbf{u}_2^l | \boldsymbol{z}_1^N\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t}=\mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t}=\mathbf{u}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]}\right), \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}^g,\mathbf{v}^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right)}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^g, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^h | \boldsymbol{z}_1^N\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]}\right), \quad (4.54)$$

com $1 \leq k \leq |\mathcal{U}_1|$, $1 \leq l \leq |\mathcal{U}_2|$, $1 \leq g \leq |\mathcal{V}_1|$, $1 \leq h \leq |\mathcal{V}_2|$ e $\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\mathbf{u}_2^l, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}_2$, $\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$ e $\mathbf{v}_2^h, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_2$.

A regra de decisão será: se $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^l | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]$, escolhe-se $\mathbf{u}_1^k$ e $\mathbf{u}_2^l$ ou $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ com igual probabilidade, arbitrariamente. Caso $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^k, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^l | \boldsymbol{z}_1^N\right] > \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]$, é escolhido o símbolo $\mathbf{u}_1^k$ e $\mathbf{u}_2^l$, caso contrário $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Analogamente, para o sub-bloco do código, tem-se que, se $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^g, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^h | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2 | \boldsymbol{z}_1^N\right]$, escolhe-se arbitrariamente $\mathbf{v}_1^g$ e $\mathbf{v}_2^h$ ou $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Caso $P(\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^l, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2 | \boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2 | \boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{v}_1^g$ e $\mathbf{v}_2^h$, caso contrário $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. O decodificador estima as sequências $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}$, $\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}$ e os sub-blocos dos códigos $\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}$, $\hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}$, sobre as razões de log-verossimilhança, no instante de observação t, na forma

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{u}}_{2,t} = \begin{cases} \mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right) \geq 0 \\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right) < 0; \end{cases} \tag{4.55}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{v}}_{2,t} = \begin{cases} \mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}^g, \mathbf{v}^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \geq 0 \\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}^g, \mathbf{v}^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) < 0, \end{cases} \tag{4.56}$$

Partindo do Algoritmo SISO-MuD, tem-se as equações (4.34) e (4.39):

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right) \\ &\quad \propto P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right) \sum_{e_1 : \boldsymbol{u}_{1,t}(e_1^{(i_1)}) = \mathbf{u}_1^k} \sum_{e_2 : \boldsymbol{u}_{2,t}(e_2^{(i_2)}) = \mathbf{u}_2^l} P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) \\ &\qquad\qquad B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \\ &\propto P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{w}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) \sum_{e_1 : \boldsymbol{v}_{1,t}(e_1) = \mathbf{v}_1^g} \sum_{e_2 : \boldsymbol{v}_{2,t}(e_2) = \mathbf{w}_2^h} A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) \\ &\qquad\qquad B_t\left(s^E(e_1^{(i_1)}), s^E(e_2^{(i_2)})\right) P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right), \end{aligned}$$

e as métricas obtidas dos recursos, expressas pelas equações (4.42) e (4.49). Logo, pode-se definir

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right) \propto P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I\right) P_{\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O\right); \tag{4.57}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right) \propto P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I\right) P_{\mathbf{v}_1^g, \mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O\right). \tag{4.58}$$

As distribuições de probabilidades $P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)$ e $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_1^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$ representam a informação extrínseca a ser propagada através dos decodificadores, sendo calculadas a partir das restrições do codificador referentes ao usuário 1 e ao usuário2, assim como das distribuições de probabilidades das sequências de entrada $P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)$ e $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)$, na forma

$$\begin{aligned}&P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\\&=\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)B_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right);\end{aligned}\tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}&P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\\&=\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)B_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right).\end{aligned}\tag{4.60}$$

Para redução da complexidade computacional do algoritmo SISO-MuD para o 2-BAC, aplica-se o logaritmo nas métricas, na forma

$$\begin{aligned}&\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\triangleq\ln\left(A_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right)\\&\quad\propto\ln\Bigg(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}\\&\qquad\qquad A_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\Bigg)\\&\quad\propto\ln\Bigg(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\exp\Bigg(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\\&\qquad\qquad+\alpha_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\Bigg)\Bigg),\end{aligned}\tag{4.61}$$

$$\beta_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) \triangleq \ln\left(B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)\right)$$
$$\propto \ln\Bigg(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}} B_{t+1}\left(s^E(e_1), q^E(e_2)\right)\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}$$
$$\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}\Bigg)$$
$$\propto \ln\Bigg(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}} \exp\Bigg(\beta_{t+1}\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right) + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)$$
$$+ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\Bigg)\Bigg), \quad (4.62)$$

considerando que $\lim_{x\to\infty}$, as novas condições de contorno serão assumidas como

$$\alpha_0\left(s^S(e_1) = S_{1,0}, s^S(e_2) = S_{2,0}\right) = 0; \quad (4.63)$$
$$\alpha_0\left(s^S(e_1) \neq S_{1,0}, s^S(e_2) \neq S_{2,0}\right) = -\infty; \quad (4.64)$$

e

$$\beta_N\left(s^E(e_1) = S_{1,N}, s^E(e_2) = S_{2,N}\right) = 0; \quad (4.65)$$
$$\beta_N\left(s^E(e_1) \neq S_{1,N}, s^E(e_2) \neq S_{2,N}\right) = -\infty; \quad (4.66)$$

e, consequentemente, para $P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)$ e $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$, tem-se

$$P_{\mathbf{u}^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)$$
$$\propto \sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l} \exp\Bigg(\ln\Bigg(A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$$
$$\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}\Bigg)\Bigg), \quad (4.67)$$

$$P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$$
$$\propto \sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l} \exp\Bigg(\ln\Bigg(A_{t-1}\left(s^S(e_1), s^S(e_2)\right) B_t\left(s^E(e_1), s^E(e_2)\right)$$
$$\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}\Bigg)\Bigg), \quad (4.68)$$

em que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são arbitrariamente escolhidos nos subespaços vetoriais $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, respectivamente. Assim, $P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)$ e $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)$ são constantes e, portanto, não interferem nas decisões do algoritmo SISO-MuD pela regra MAP (ver Equação (4.53)).

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\\
&\propto \sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\ \sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l} \exp\Bigg(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)\\
&\qquad\qquad + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)}\right)\Bigg)\\
&= \sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\ \sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l} \exp\Bigg(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)\Bigg). \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

Analogamente, para $P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$, tem-se,

$$
\begin{aligned}
&P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\\
&\propto \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\ \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} \exp\Bigg(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)\\
&\qquad\qquad + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)}\right)\Bigg)\\
&= \sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\ \sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h} \exp\Bigg(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\Bigg). \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

A Tabela 4.1 descreve o algoritmo para o cálculo da probabilidade *a posteriori* conjunta das sequências das mensagens e sub-blocos dos códigos para os usuários transmitindo no 2-BAC, em um dado instante de observação t.

As LLR $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_1^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)$ utilizadas no processo de decodificação iterativa, são obtidas aplicando o logaritmo em ambos os termos das Equações (4.53),

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right) \triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)}{P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)}\right)\\
&\quad = \ln\Big(P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\Big) - \ln\Big(P_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_{21}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\Big)\\
&\quad = \ln\Bigg(\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\ \sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l} \exp\Bigg(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\\
&\qquad\qquad + \beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Tabela 4.1: *Algoritmo para o cálculo da probabilidade* a posteriori *conjunta dos símbolos de entrada e dos símbolos de saída para o 2-BAC, em um instante de observação t.*

ENTRADA

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)$, para $t=1,2,\ldots,N$
$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)$, para $t=1,2,\ldots,N$

INICIALIZAÇÃO

$\alpha_0\left(s^S(e_1)=S_{1,0},s^S(e_2)=S_{2,0}\right)=0$
$\alpha_0\left(s^S(e_1)\neq S_{1,0},s^S(e_2)\neq S_{2,0}\right)=-\infty$
$\beta_N\left(s^E(e_1)=S_N,s^E(e_2)=S_{2,N}\right)=0$
$\beta_N\left(s^E(e_1)\neq S_N,s^E(e_2)\neq S_{2,N}\right)=-\infty$

ALGORITMO - PROBABILIDADE A POSTERIORI

Para $t=1$ **até** N, **faça**

$$\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)=\ln\left(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\exp\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)+\alpha_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right)\right)$$

fim

Para $t=N-1$ **até** 1, **faça**

$$\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)=\ln\left(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\exp\left(\beta_{t+1}\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\right)\right)$$

fim

$$P_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)=\sum_{e_1:\mathbf{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\mathbf{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)\right).$$

$$P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{w}_{2,t};O\right)=\sum_{e_1:\mathbf{v}_{1,t}(e_1^{(i_1)})=\mathbf{v}_1^g}\sum_{e_2:\mathbf{v}_{2,t}(e_2^{(i_2)})=\mathbf{v}_2^h}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\right).$$

SAÍDA

$P_{\mathbf{u}^k,\mathbf{d}^l}\left(\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{d}_t;O\right)$
$P_{\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^l}\left(\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{w}_t;O\right)$

$$-\ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)\right)\right). \quad (4.71)$$

Assim, as LLR $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$ são obtidas aplicando o logaritmo em ambos os termos

das Equações (4.54),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right) &\triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)}{P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)}\right)\\ &= \ln\Big(P_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\Big) - \ln\left(P_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\right)\right)\\ &- \ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\right)\right).\end{aligned}\tag{4.72}$$

A Tabela 4.2 apresenta o Algoritmo SISO-MuD, algoritmo de entrada suave e saída suave para decisão conjunta, para o cálculo das LLR conjuntas dos sub-blocos de mensagem e do codificador para o 2-BAC utilizado no módulo SISO.

O objetivo do decodificador é decidir pelas sequências $\mathbf{u}_1^k$ e $\mathbf{u}_2^l$, $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}=\mathbf{u}_1^k\in\mathcal{U}_1$ e $\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}=\mathbf{u}_2^l\in\mathcal{U}_2$, com $1\leq k\leq|\mathcal{U}_1|$ e $1\leq l\leq|\mathcal{U}_2|$, de maneira a minimizar a probabilidade de erro $\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)$ para as sequências de informação dos usuários; bem como minimizar a probabilidade $\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)$ para estimar os sub-blocos dos códigos $\mathbf{v}_1^g$ e $\mathbf{v}_2^h$, $\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}=\mathbf{v}_1^g\in\mathcal{V}_1$ e $\hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}=\mathbf{v}_2^h\in\mathcal{V}_2$, com $1\leq g\leq|\mathcal{V}_1|$ e $1\leq h\leq|\mathcal{V}_2|$. Dessa forma, calculando $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$ estimativas para $\mathbf{u}_1^k$ e $\mathbf{u}_2^l$ para as sequencias de informação e $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ estimativas para os sub-blocos do código $\mathbf{v}_1^g$ e $\mathbf{v}_2^h$ de forma conjunta a cada instante de observação t. Portanto,

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t},\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}=\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l=\arg\max_{k,l}\left(\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\right),\tag{4.73}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t},\hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}=\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h=\arg\max_{g,h}\left(\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\right).\tag{4.74}$$

A decisão do decodificador sobre as sequências $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}$, $\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}$, $\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}$ e $\hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}$ pode ser efetuada diretamente das LLR obtidas a partir do algoritmo SISO-MuD, da forma

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t},\hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}=\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l=\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\right)\arg\max_{k,l}\left(\left|\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O\right)\right|\right),\tag{4.75}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t},\hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}=\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h=\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\right)\arg\max_{g,h}\left(\left|\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\right|\right),\tag{4.76}$$

Tabela 4.2: *Algoritmo SISO-MuD para o cálculo da LLR conjunta dos sub-blocos de mensagem e do codificador para o 2-BAC.*

ENTRADA

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)$, para $t=1,2,\ldots,N$

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)$, para $t=1,2,\ldots,N$

INICIALIZAÇÃO

$\alpha_0\left(s^S(e_1)=S_{1,0},s^S(e_2)=S_{2,0}\right)=0$

$\alpha_0\left(s^S(e_1)\neq S_{1,0},s^S(e_2)\neq S_{2,0}\right)=-\infty$

$\beta_N\left(s^E(e_1)=S_{1,N},s^E(e_2)=S_{2,N}\right)=0$

$\beta_N\left(s^E(e_1)\neq S_{1,N},s^E(e_2)\neq S_{2,N}\right)=-\infty$

ALGORITMO SISO-MuD

Para $t=1$ **até** N, **faça**

$$\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)=\ln\left(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\exp\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_s^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{,2t};I)+\alpha_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right)\right)$$

fim

Para $t=N-1$ **até** 1, **faça**

$$\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)=\ln\left(\sum_{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}}\sum_{e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}\exp\left(\beta_{t+1}\left(s^E(e_1^{(i_1)}),q^E(e_2^{(i_2)})\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)\right)$$

fim

Para $t=1$ **até** N, **faça**

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)=\ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\right)\right)$$
$$-\ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{u}_t(e_1)=\mathbf{u}_1}\sum_{e_2:\boldsymbol{u}_t(e_2)=\mathbf{u}_2}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\right)\right)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O)=\ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{w}_2^h}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_1^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)\right)$$
$$-\ln\left(\sum_{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1}\sum_{e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)\right)$$

fim

SAÍDA

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{d}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)$, para $t=1,2,\ldots,N$

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{w}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O)$, para $t=1,2,\ldots,N$

em que sgn denota a função sinal, que retorna o sinal das LLR $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)$ e $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O)$, respectivamente. Para a decisão a partir das LLR fornecidas pelo algoritmo SISO-MuD, é necessário o cálculo de $|\mathcal{U}_1||\mathcal{U}_2|-1$ estimativas para as sequências de informação dos usuários, assim como o cálculo de $|\mathcal{V}_1||\mathcal{V}_2|-1$ estimativas para os sub-blocos do código dos usuários.

4.3.2 Algoritmo SISO-MuD de Baixa Complexidade para o 2-BAC

Com o objetivo de reduzir a complexidade computacional que é exigida nos cálculos efetuados pelo Algoritmo MAP, uma simplificação foi proposta por Viterbi [139], utilizando o módulo SISO para um usuário, como proposto em [93] - descrito no Apêndice A - e denotado pelo algoritmo SISO-LC (LC, *low complexity*) para um usuário.

Nesta seção é apresentado o Algoritmo SISO-MuD de Baixa Complexidade para o 2-BAC, denotado por Algoritmo SISO-MuD-LC. No Apêndice B, é descrita sua extensão para mais de dois usuários binários transmitindo em um canal aditivo ruidoso. Inicialmente, observa-se as equações (4.71) e (4.72). Como cada parcela do lado direito das equações (4.71) e (4.72) é dada por logaritmos de somatórios de exponenciais, duas aproximações podem ser efetuadas [93, 94]. Considere a expressão

$$\epsilon = \ln\left(\sum_{k}^{L}\exp\left(\epsilon_k\right)\right), \tag{4.77}$$

a primeira é

$$\epsilon = \ln\left(\sum_{k}^{L}\exp\left(\epsilon_k\right)\right) \simeq \epsilon_M, \tag{4.78}$$

em que

$$\epsilon_M \triangleq \max_k \epsilon_k, \quad k=1,\ldots,L, \tag{4.79}$$

assumindo-se que $\epsilon_M >> \epsilon_k$, $\forall \epsilon_k \neq \epsilon_M$. Assim, utilizando a primeira aproximação, as equações (4.71) e (4.72) podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)\\
&\quad\approx \max_{\substack{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k\\ e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}}\Big(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\Big)\\
&\quad- \max_{\substack{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k\\ e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}}\Big(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\Big),
\end{aligned} \tag{4.80}$$

e

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O\right)\\
&\quad\approx \max_{\substack{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g\\ e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}} \Big(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\Big)\\
&\quad- \max_{\substack{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g\\ e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}} \Big(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\Big).
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Percebe-se a primeira redução computacional obtida, já que operações de adição requerem menor esforço computacional do que as operações de multiplicação. Para computar as parcelas da expressão das equações (4.80) e (4.81), cálculos recursivos como os executados em (4.61) e (4.62) devem ser efetuados. Para tal, deve-se aplicar o logaritmo nos dois lados destas equações e executar as mesmas simplificações efetuadas em (4.80) para chegar a (4.81).

Os cálculos aproximados dos parâmetros $\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)$ e $\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)$ correspondem às equações (4.61) e (4.62), respectivamente; o mesmo vale para os valores de inicialização dos mesmos. Para o cálculo, basta que se aplique o logaritmo no resultado, da forma

$$\begin{aligned}
&\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\\
&\quad\approx \max_{\substack{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}\\ e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}} \Big(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)+\alpha_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\Big),
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)\\
&\quad\approx \max_{\substack{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}\\ e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}} \Big(\beta_{t+1}\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)+\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}\left(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I\right)\Big).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

No cálculo de todas as expressões do Algoritmo SISO-MuD-LC, é necessário apenas que se armazenem os valores máximos dos somatórios. Este fato acarreta uma segunda simplificação computacional deste algoritmo em relação ao algoritmo SISO apresentado no Apêndice A, que consiste em uma diminuição no uso de memória.

Quando a precisão da aproximação apresentada anteriormente não for suficiente, pode-se avaliar o logaritmo do somatório de exponenciais, ver Equação (4.77), empregando a seguinte

aproximação recursiva, proposta em [133, 140]:

$$\begin{aligned}\epsilon^{(1)} &= \epsilon_1 \\ \epsilon^{(l)} &= \max\left(\epsilon^{(l-1)}, \epsilon_l\right) + \ln\left(1 + \exp(-|\epsilon^{(l-1)} - \epsilon_l|)\right), \quad k = 2, \ldots, L \\ \epsilon &= \epsilon^{(L)}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Para avaliar ϵ, o algoritmo precisa executar $L-1$ vezes dois tipos de operações: uma comparação entre dois números para encontrar o valor máximo e o cálculo de

$$\ln\left(1 + \exp(-|\epsilon^{(l-1)} - \epsilon_l|)\right). \tag{4.85}$$

A segunda operação pode ser implementada utilizando uma tabela com entrada única até a precisão desejada (em [133], oito valores mostraram ser suficientes para garantir um desempenho satisfatório). Portanto, a Equação (4.77) pode ser escrita como $\epsilon = \epsilon_M + \delta(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_L) \triangleq \max_k \epsilon_k$, denotada pelo termo de correção, e pode ser calculada usando uma tabela.

A Tabela 4.3 apresenta o Algoritmo SISO-MuD-LC, algoritmo de entrada suave e saída suave para decisão conjunta de baixa complexidade, para o cálculo da LLR conjunta dos sub-blocos de mensagem e para o cálculo do codificador para o 2-BAC utilizado no módulo SISO.

4.3.3 Estrutura do Decodificador

A decodificação dos sistemas concatenados com codificadores convolucionais para canais aditivos com dois usuários binários funciona através de um processo iterativo em que há troca de informações entre os módulos SISO, visando a diminuição da probabilidade de erro de bit. As figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram as estruturas dos decodificadores para os sistemas codificados em paralelo, em série e na forma híbrida, respectivamente.

A abordagem utilizando os módulos SISO para o 2-BAC faz uso do Algoritmo SISO-MuD proposto. Note que não há alteração nas estrutura do decodificador, ou seja, na trocas de informação entre os decodificadores, em comparação os esquemas de decodifcação na literatura técnica especializada para um único usuário [93–95, 113, 114]. Esta estrutura, consiste de dois módulos SISO utilizando o Algoritmo SISO-MuD ou o Algoritmo SISO-MuD-LC interligados através de entrelaçadores e desentrelaçadores, ver figuras 4.3, 4.4 e 4.5. Cada módulo SISO para o 2-BAC tem duas entradas, denominadas de informação *a priori* da sequência de informação e sub-bloco do código, e duas saídas, denominadas informação *a posteriori* da sequência de informação e sub-bloco do código, definidas na Seção 4.2.

Tabela 4.3: *Algoritmo SISO-MuD-LC para os cálculos das LLRs conjuntas dos sub-blocos de mensagem e do codificador para o 2-BAC.*

ENTRADA

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)$, para $t=1,2,\ldots,N$

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)$, para $t=1,2,\ldots,N$

INICIALIZAÇÃO

$\alpha_0\left(s^S(e_1)=S_{1,0},s^S(e_2)=S_{2,0}\right)=0$

$\alpha_0\left(s^S(e_1)\neq S_{1,0},s^S(e_2)\neq S_{2,0}\right)=-\infty$

$\beta_N\left(s^E(e_1)=S_{1,N},s^E(e_2)=S_{2,N}\right)=0$

$\beta_N\left(s^E(e_1)\neq S_{1,N},s^E(e_2)\neq S_{2,N}\right)=-\infty$

ALGORITMO SISO-MuD-LC

Para $t=1$ **até** N, **faça**

$$\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)=\max_{\substack{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}\\e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}}\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)+\alpha_t\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)\right)$$

fim

Para $t=N-1$ **até** 1, **faça**

$$\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)=\max_{\substack{e_1:s^S(e_1)=S_{1,t}\\e_2:s^S(e_2)=S_{2,t}}}\left(\beta_{t+1}\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)$$

fim

Para $t=1$ **até** N, **faça**

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)=\max_{\substack{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k\\e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}}\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\right)-\max_{\substack{e_1:\boldsymbol{u}_{1,t}(e_1)=\mathbf{u}_1^k\\e_2:\boldsymbol{u}_{2,t}(e_2)=\mathbf{u}_2^l}}\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)\right)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{v}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O)=\max_{\substack{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g\\e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}}\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)-\max_{\substack{e_1:\boldsymbol{v}_{1,t}(e_1)=\mathbf{v}_1^g\\e_2:\boldsymbol{v}_{2,t}(e_2)=\mathbf{v}_2^h}}\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e_1),s^S(e_2)\right)+\beta_t\left(s^E(e_1),s^E(e_2)\right)+\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};I)\right)$$

fim

SAÍDA

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^k,\mathbf{d}_2^l}(\boldsymbol{u}_{1,t},\boldsymbol{u}_{2,t};O)$, para $t=1,2,\ldots,N$

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^g,\mathbf{w}_2^h}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};O)$, para $t=1,2,\ldots,N$

O processo de decodificação iterativa dispõe apenas da sequência de observação $\boldsymbol{z}_t$ e das estruturas dos codificadores convolucionais concatenados associadas a cada usuário. A cada iteração, os decodificadores trocam informações entre si, assim a probabilidade de erro de bit é minimizada.

Para a decodificação iterativa de sistemas concatenados com codificadores convolucio-

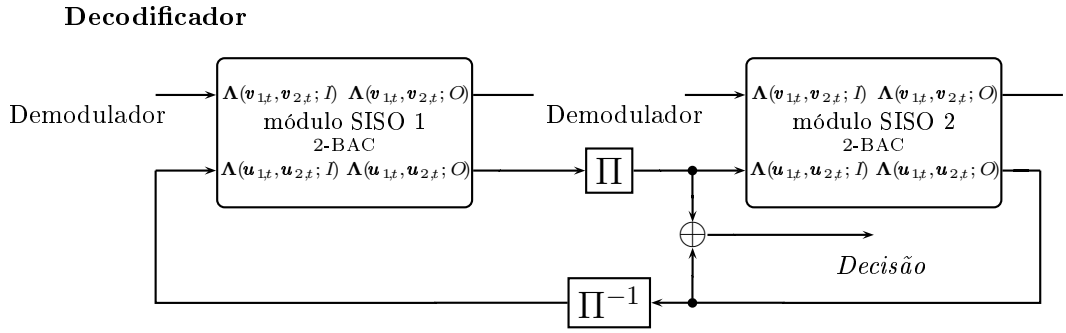


Figura 4.3: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em paralelo.*

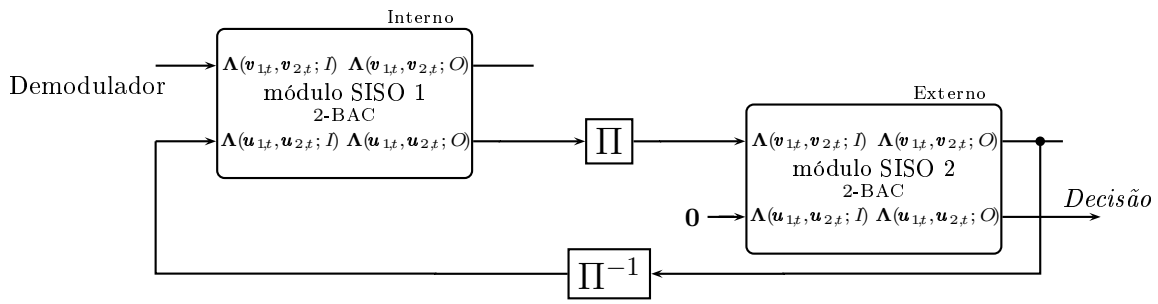


Figura 4.4: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em série.*

nais em paralelo, ver Figura 4.3, a cada iteração o demodulador fornece a LLR extrínseca $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$ para os módulos SISO 1 e 2. Os módulos SISO, utilizando o Algoritmo SISO-MuD, obtêm as LLR'S extrínsecas *a posteriori*, $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O)$. Essas informações são trocadas entre os módulos através do entrelaçador ou desentrelaçador, servindo de informação *a priori* a iteração subsequente. Inicialmente, os valores das LLR´s das sequências de informação *a priori* passadas aos decodificadores vale zero, o que é equivalente dizer que as sequências de informação são equiprováveis. Note que as saídas $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O)$ dos módulos SISO 1 e 2 não são utilizadas na decodificação.

Por sua vez, na configuração série, ver estrutura de decodificação na Figura 4.4, a cada iteração o demodulador fornece a LLR extrínseca $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$ para o módulo SISO 1, módulo interno, que disponibiliza a LLR extrínseca *a posteriori* $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O)$ na saída. Essa informação é passada para o módulo SISO 2, módulo externo, através do entrelaçador, servindo de informação *a priori* do sub-bloco do código. O módulo SISO 2 obtém a LLR

Decodificador

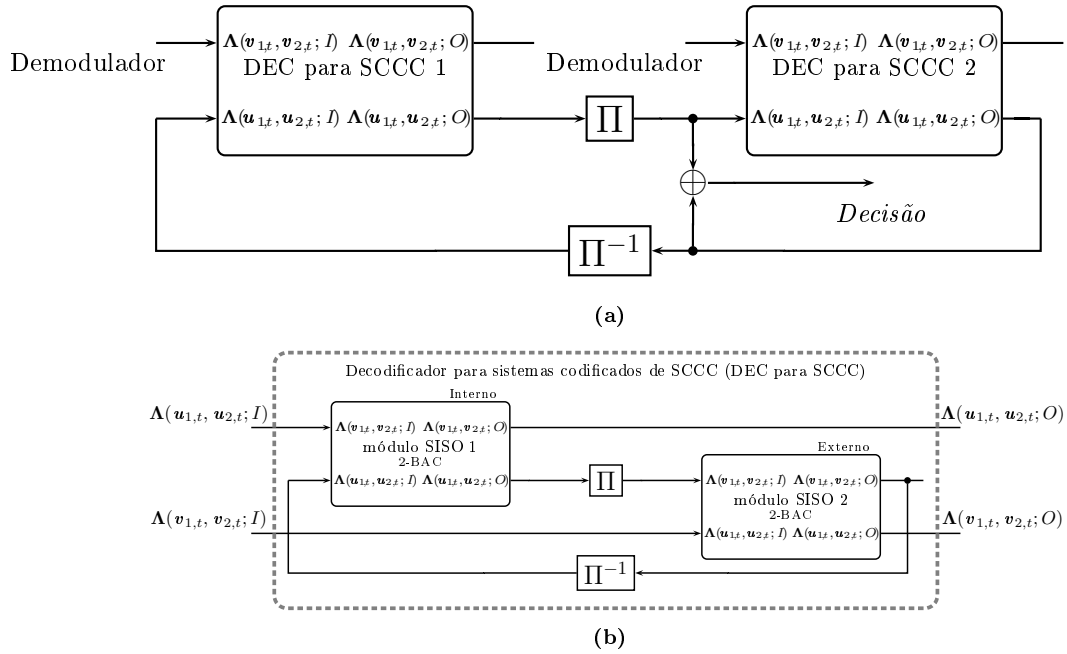


Figura 4.5: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em forma híbrida.*

extrínseca *a posteriori* da sequência de informação $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O)$ e do sub-bloco do código $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O)$. A razão de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; O)$ é passada ao módulo SISO 1 através do desentrelaçador como informação *a priori* da sequência de informação, para a iteração subsequente e a LLR $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; O)$ é usada para a decisão. Inicialmente, os valores da LLR das sequências de informação *a priori* passada ao módulos SISO Interno vale zero, sendo atualizada a cada iteração. Como o módulo SISO 2 não tem acesso ao demodulador, a informação *a priori* da sequência de informação é mantida em zero durante o processo iterativo.

Note que, na decodificação iterativa, para a sistemas concatenados com codificadores convolucionais em forma híbrida, a operação de decodificação é dividida em (a) uma operação de decodificação local, correspondente a cada codificador em série, ver Figura 4.5(b), e uma operação de decodificação global, que se refere à estrutura em paralelo, ver Figura 4.5.

Resultados de simulações realizadas com a implementação de sistemas concatenados com codificadores convolucionais para o 2-BAC são apresentados no Capítulo 5, para configurações descritas em um processo de decodificação iterativa, utilizando o Algoritmo SISO-MuD e o Algoritmo SISO-MuD-LC.

4.4 Cálculo Individual das Probabilidades *a posteriori* para o 2-BAC

A proposta abordada e discutida nas seções 4.2 e 4.3 apresenta um acréscimo na complexidade a partir do aumento do número de usuários e o tamanho da memória utilizada pelos codificadores convolucionais associados a cada usuário. Assim, com o objetivo do desenvolvimento prático de sistemas concatenados de codificadores convolucionais para dois usuários transmitindo em um canal aditivo ruidoso, é proposta uma nova abordagem para o cálculo das razões de verossimilhança para utilização nos módulos SISO, a saber o cálculo individual das probabilidades *a posteriori*, denotando o algoritmo de entrada suave e saída suave de detecção individual ou de único usuário (SuD), denotado por Algoritmo SISO-SuD.

4.4.1 Algoritmo SISO-SuD

Considere a probabilidade *a posteriori* da sequência de informação e do sub-bloco do código para o i-ésimo usuário, dado um vetor de observação fornecido pelo 2-BAC, da forma

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}\left(\boldsymbol{u}_{i,t}; O\right) = P\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right]; \tag{4.86}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}\left(\boldsymbol{v}_{i,t}; O\right) = P\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right]; \tag{4.87}$$

em que $\mathbf{u}_i^{k_i} \in \mathcal{U}_i$, $\mathbf{v}_i^{g_i} \in \mathcal{V}_i$, $1 \leq k_i \leq |\mathcal{U}_i|$ e $1 \leq g_i \leq |\mathcal{V}_i|$. Dado que os eventos de transição entre cada estado, do i-ésimo usuário, são mutuamente exclusivos, a probabilidade de qualquer um deles ocorrer é igual à soma das probabilidades individuais. Portanto, tem-se

$$\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} P\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) | \boldsymbol{z}_1^N\right]; \tag{4.88}$$

$$\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \sum_{e_i : \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i) = \mathbf{v}_i^{g_i}} P\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i) | \boldsymbol{z}_1^N\right]; \tag{4.89}$$

em que o ramo $e_i \in \mathcal{E}_i$ da treliça associada ao processo de codificação do i-ésimo usuário, como apresentado na Seção 3.2.1; como descrito para um usuário no Apêndice A, Seção A.2.2.1, Equação A.25.

O algoritmo SISO proposto pode ser reescrito para utilizar as $P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)$ e $P_{\mathbf{v}_i^{l_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)$ para obter as LLR do i-ésimo usuário, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O) \triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}\right) = \ln\left(\frac{P(\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i | \boldsymbol{z}_1^N)}\right); \tag{4.90}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O) \triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}\right) = \ln\left(\frac{P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)}\right). \tag{4.91}$$

A regra de decisão será: se $P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i^{k_i}|\boldsymbol{z}_1^N) = P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se $\mathbf{u}_i^{k_i}$ ou $\mathbf{u}_i$ com igual probabilidade, arbitrariamente. Caso $P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i^{k_i}|\boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{u}_i^{k_i}$, caso contrário $\mathbf{u}$. Analogamente, para o sub-bloco do código, tem-se que, se $P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N) = P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se arbitrariamente $\mathbf{v}_i^{l_i}$ ou $\mathbf{v}_i$. Caso $P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{v}_t=\mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{v}_i^{g_i}$, caso contrário $\mathbf{v}_i$. De forma analítica, o decodificador estima o símbolo $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}$ e o sub-bloco do código $\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t}$ sobre as razões de log-verossimilhança, no instante de observação t, da forma

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{k_i} & \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O) \geq 0 \\ \mathbf{u}_i & \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O) < 0; \end{cases} \tag{4.92}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t} = \begin{cases} \mathbf{v}_i^{g_i} & \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O) \geq 0 \\ \mathbf{v}_i & \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O) < 0. \end{cases} \tag{4.93}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O) \triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}\right) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};I)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};I)}\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}\right) \\
&= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};I) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}\right) \\
&= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};I) + \ln\left(\frac{\sum_{e_i:\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)=\mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)\right)\right)}{\sum_{e_i:\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)=\mathbf{u}_i} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)\right)\right)}\right)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O) \triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}\right) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)}\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}\right) \\
&= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}\right) \\
&= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I) + \ln\left(\frac{\sum_{e_i:\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)=\mathbf{v}_i^{g_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};I)\right)\right)}{\sum_{e_i:\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)=\mathbf{v}_i} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};I)\right)\right)}\right),
\end{aligned} \tag{4.95}$$

razões de verossimilhança utilizadas no módulo SISO, denotado poro algoritmo SISO-SuD.

O objetivo do decodificador é decidir pela sequência de informação associada ao usuário i, $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} \in \mathcal{U}_i$, com $1 \leq k_i \leq |\mathcal{U}_i|$, de maneira a minimizar a probabilidade de erro $P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)$. Para tal, ele calcula $|\mathcal{U}_i| - 1$ estimativas para $P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\mathbf{u}_{i,t}; O)$. Analogamente, o decodificador deve decidir pelo sub-bloco do código $\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i} \in \mathcal{V}_i$, com $1 \leq k_i \leq |\mathcal{V}_i|$, de maneira a minimizar a probabilidade de erro $P_{\mathbf{v}_i^{g}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)$, calculando, para isso, $|\mathcal{V}_i| - 1$ estimativas para $P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\mathbf{v}_{i,t}; O)$.

Note que as equações (4.94) e (4.95) são iguais às equações desenvolvidas para um único usuário no Algoritmo SISO descrito no Apêndice A. A mudança está na razão de verossimilhança utilizada na entrada referente ao sub-bloco do código enviado ao canal de transmissão pelo usuário. O 2-BAC envia ao decodificador a adição, coordenada a coordenada, das sequências de informação enviadas pelos usuários acrescidas do ruido do canal. Assim, a informação *a priori* para os sub-blocos do código é da forma

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)\\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i\right]}\right),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_i}\right] &= \sum_{\mathbf{V}_2} \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_i}, \mathbf{v}_2^{g_2}\right] \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2} \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j^{g_j}\right]\\ &\propto \sum_{\mathbf{V}_2} \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_i}, \mathbf{v}_2^{g_2}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right]} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2} \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j\right]}\\ &= \sum_{\mathbf{V}_2} \exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_i}, \mathbf{v}_2^{g_2}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right]}\right) + \ln\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2} \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j\right]}\right)\right)\\ &= \sum_{\mathbf{V}_2} \exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{g_i}, \mathbf{v}_2^{g_2}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right]}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2} \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t} = \mathbf{v}_j\right]}\right)\right)\\ &= \sum_{\mathbf{V}_2} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_i}, \mathbf{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{2} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t}; I)\right),\end{aligned}$$

em que $\mathbf{V}_2 : \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^{g_2}$ são todos os possíveis sub-blocos do código associado ao usuário 2.

Exemplo 4.3 *Considere dois usuários binários, em que $g_1 = g_2 = 1$ e $\boldsymbol{v}_i^{g_i} \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq 2$, as razões de verossimilhança individuais para os sub-blocos do código de cada usuário são da*

forma

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^{g_1}}(\boldsymbol{v}_{1,t}; I) \\
&= \ln\left(\frac{P[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \boldsymbol{v}_1^{g_1}]}{P[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t} = \boldsymbol{v}_1]}\right) \\
&= \ln\left(\sum_{\boldsymbol{U}_2} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^{g_i}, \boldsymbol{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{2} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t}; I)\right)\right) \\
&\qquad\qquad - \ln\left(\sum_{\boldsymbol{V}_2} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}; I) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{2} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t}; I)\right)\right),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\
&= \ln\left(\frac{P[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{2,t} = \boldsymbol{v}_2^{g_i}]}{P[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{2,t} = \boldsymbol{v}_2]}\right) \\
&= \ln\left(\sum_{\boldsymbol{V}_1} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{2} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t}; I)\right)\right) \\
&\qquad\qquad - \ln\left(\sum_{\boldsymbol{V}_1} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{2} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t}; I)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Logo, as razões de verossimilhança individuais para o usuário 1*, para uma regra de decisão com* $\boldsymbol{v}_1 = 0$ *e* $\boldsymbol{v}_2 = 0$*, são*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right) = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(1 + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Para o usuário 2, as razões de verossimilhança individuais, são

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right) = 0,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right) \\
&= \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right) \\
&- \ln\left(1 + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right).
\end{aligned}
$$

A Tabela 4.4 apresenta o algoritmo do Decisor Suave proposto para o 2-BAC, responsável por estimar as informações a priori *dos sub-blocos dos códigos do usuário 1 e do usuário 2.* ◇

Tabela 4.4: *Algoritmo de estimativa sas informações* a priori *do canal - Decisor Suave para o 2-BAC.*

ENTRADA
$\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, para $t = 1, 2, \ldots, N$
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)$, para $t = 1, 2, \ldots, N$
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, para $t = 1, 2, \ldots, N$
ALGORITMO DECISOR SUAVE
Para $t = 1$ **até** N, **faça**
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I) = 0$
$\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I) = \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right)$ $- \ln\left(1 + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right)\right)$
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I) = 0$
$\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I) = \ln\left(\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I)\right) + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right)$ $- \ln\left(1 + \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}; I) + \boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)\right)\right)$
fim
SAÍDA
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{1,t}; I)$, para $t = 1, 2, \ldots, N$
$\boldsymbol{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, $\boldsymbol{\Lambda}_1(\boldsymbol{v}_{2,t}; I)$, para $t = 1, 2, \ldots, N$

Fonte: adaptação de [51].

4.4.2 Estrutura do Decodificador

Pode-se concluir, com base nas equações (4.94) e (4.95), que as razões de log-verossimilhança podem ser obtidas através do Algoritmo SISO para um usuário como descrito no Apêndice A. Assim, as LLR's das equações (4.94) e (4.95) no processo iterativo são atualizadas utilizando a informação conjunta dos usuários fornecida pelo demodulador e informação do sub-bloco do código do outro usuário, ambas na forma de razões de log-verossimilhança. Assim, no processo iterativo a informação do sub-bloco do código do usuário 1 é atualizada a partir da

$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{2,t};I)$ e a informação do sub-bloco do código do usuário 2 a partir da $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}}(\boldsymbol{v}_{1,t};I)$. Dessa forma, é utilizado um dispositivo, denotado Decisor Suave, que recebe as LLR's conjuntas $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I)$ e individuais $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}}(\boldsymbol{v}_{1,t};I)$ e $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_2^{g_2}}(\boldsymbol{v}_{2,t};I)$, e fornece aos módulos SISO.

A adição do Decisor Suave às estruturas de decodificação de codificadores concatenados para um usuário formam o Algortimo SISO-SuD, sendo usado na decodificação iterativa para o BAC com dois ou mais usuários. As figuras 4.6 e 4.7 mostram as estruturas dos decodificadores para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em paralelo e série, respectivamente, para o 2-BAC. Observe nas figuras 4.6 e 4.7 a possibilidade da utilização de estrutura do decodificação similar para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em forma híbrida.

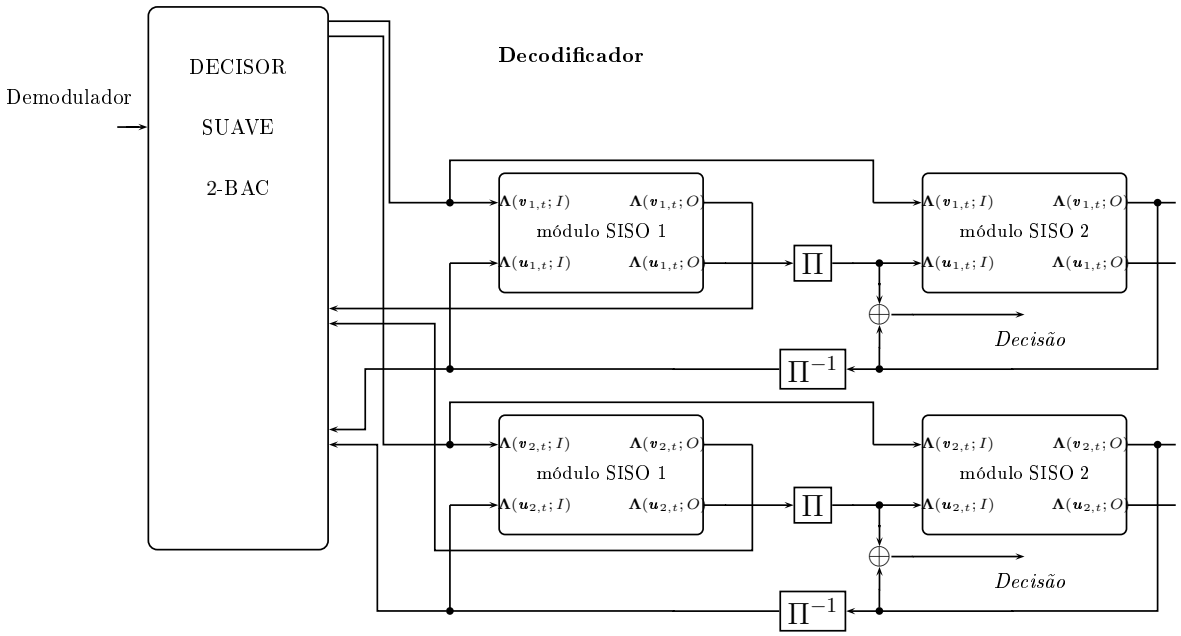


Figura 4.6: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em paralelo para dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

Como os usuários são tratados de forma individual no sistema de decodificação proposto utilizando o Algoritmo SISO-SuD, não é necessário que os usuários detenham o mesmo sistema de codificação. Por exemplo, para um sistema 2-BAC é possível que o usuário 1 utilize a codificação de SCCC e o usuário 1 utilize a codificação de PCCC. A estrutura do decodificador para sistema concatenado com codificadores convolucionais na forma mista é mostrada na Figura 4.8. Segundo o Algoritmo SISO-SuD para o 2-BAC, dado um determinado usuário, o

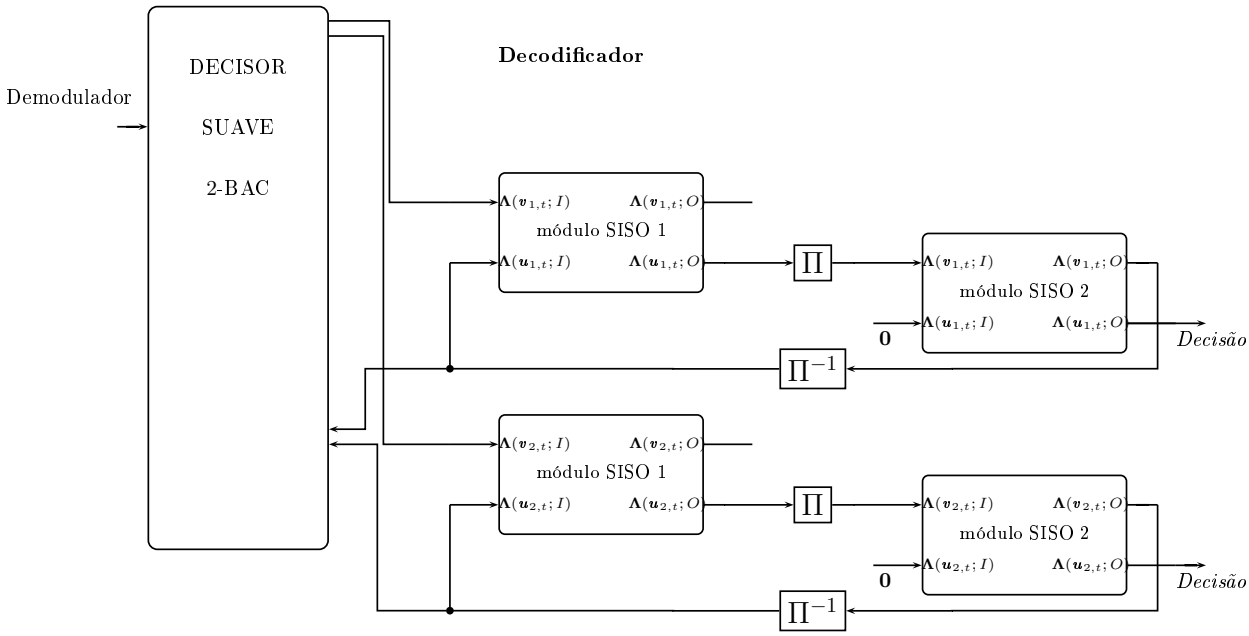


Figura 4.7: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em série para dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

outro é tratado como interferência. Logo, ambos são tratados pelo algoritmo como um ruído aditivo.

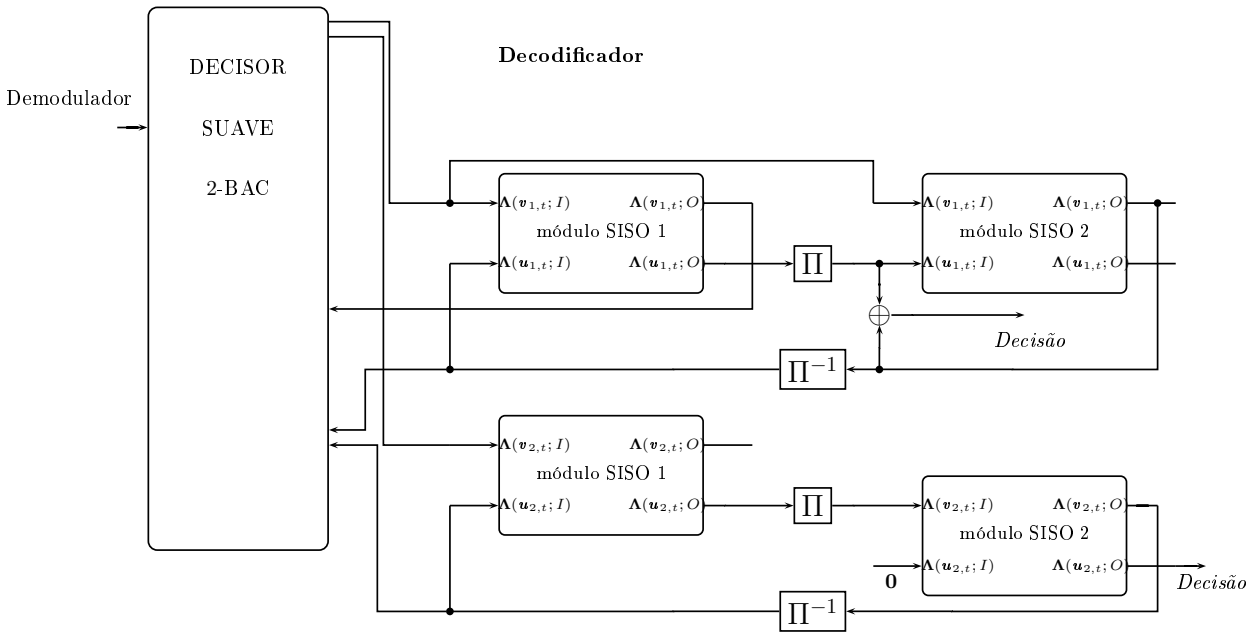


Figura 4.8: *Decodificador iterativo para sistemas concatenados com codificadores convolucionais em em forma mista para dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

Alguns resultados de simulações realizadas com a implementação de sistemas de acesso múltiplo propostos para o 2-BAC são mostrados no Capítulo 5, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.

Neste capítulo foram apresentados os algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades *a posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos usuários que dividem o canal, permitindo uma decodificação conjunta - o Algoritmo SISO-MuD, ou individual, Algoritmo SISO-SuD - das mensagens transmitidas pelos usuários, assim como versões de baixa complexidade, Algoritmo SISO-MuD-LC. Foram descritas e analisadas configurações para os sistemas de decodificação iterativa em questão, seguindo os sistemas de codificação, em que os módulos SISO podem ser arranjados de forma paralela, serial, híbrida ou mista, até então, não existentes na literatura técnica específica para aplicações em canais aditivos de acesso múltiplo. Foi introduzido o Decisor Suave, dispositivo responsável em calcular as razões de log-verossimilhança *a priori* do sub-bloco do código para o processo de decodificação iterativa. O Apêndice B apresenta a generalização dos decodificadores propostos para mais que dois usuários.

CAPÍTULO 5

Simulações e Resultados

"Probabilitas enim est gradus certitudinis et ab & ac differt ut pars a toto."[a] *"Ars Conjectand", pars quarta, Cap. IV, pp. 224-227.*

— **James Bernoulli**

[a] "Probabilidade é grau de certeza e difere da certeza absoluta assim como a parte difere do todo."

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através da implementação, por meio de simulação em *software*, de sistemas de comunicações de acesso múltiplo por codificação colaborativa, a saber, 2-BAC, 3-BAC e 4-BAC. A tarefa do decodificador é estimar os dados que foram transmitidos a partir das observações do canal. Para executar esta tarefa, no sentido de maximizar a probabilidade *a posteriori* (regra MAP), são utilizados o Algoritmo SISO-MuD e o Algoritmo SISO-SuD. A validade destes métodos pode ser confirmada através do desempenho em termos da BER versus relação sinal ruído em um processo de decodificação iterativa para canais aditivos ruidosos.

5.1 Simulação de Sistemas Codificados

O sistema de comunicação implementado pode ser visto no Capítulo 3. Para o sistema de comunicação utilizado, antes de acessar o canal, ao usuário i, é associada a sequência de símbolos de entrada em N intervalos de tempo consecutivos, a ser codificada, $\boldsymbol{u}_{i,1}^{N}$, em que, em um instante de observação t, o i-ésimo usuário escolhe um símbolo de entrada, denotado mensagem do i-ésimo usuário, $\boldsymbol{u}_{i,t}$ pertencente a um determinado alfabeto U_i e $\boldsymbol{u}_{i,t}$ e pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U}_i$, com cardinalidade $|\mathcal{U}_i|$. Consequentemente, é atribuído, a cada usuário, um sistema com códigos convolucionais concatenados, a saber $\mathcal{C}_i$, definidos através da configuração de suas matrizes polinomiais geradoras [80, pág.187]. O codificador $\mathcal{C}_i$ associa a sequência de informação escolhida $\boldsymbol{u}_{i,t}$ ao sub-bloco do código $\boldsymbol{v}_{i,t}$. Os entrelaçadores utilizados nas simulações dos sistemas concatenados são os algébricos propostos em [118]. As sequências de informação e os sub-blocos dos códigos são sequencialmente organizados e entrelaçados. Para simulações de codificadores convolucionais de taxa taxa assintótica k_i/n, as saídas são multiplexações no tempo, formando uma nova sequência de comprimento n.

Um único decodificador é responsável por estimar as mensagens, a cada instante de observação t, $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_T$ para os T destinos, baseado na observação do canal ruidoso $\boldsymbol{z}_1^N$ e nas estruturas dos codificadores associados a cada usuário. Em um processo de decodificação iterativa, o objetivo do decodificador é maximizar a probabilidade *a posteriori*, de forma conjunta (Algoritmo SISO-MuD) ou individual (Algoritmo SISO-SuD), de as razões de log-verossimilhança das sequências de informação $\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}$ serem $\mathbf{u}_{1,t}^{k_1}, \mathbf{u}_{2,t}^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_{T,t}^{k_T}$, a cada instante de observação t, em que $\boldsymbol{u}_{i,N}, \mathbf{u}_{i,t}^{k_i} \in \mathcal{U}_i$. É assumido que os usuários, a cada instante t de observação, operam na mesma banda de frequência, transmitem ao mesmo tempo, utilizam codificadores convolucionais de mesmo comprimento n e mantêm sincronismo na transmissão dos símbolos [31, 51, 53].

O decodificador trabalha de maneira iterativa, de modo que os decodificadores, separados por um entrelaçador, trocam informação entre si. Cada decodificador calcula a LLR para cada sequência de informação e sub-bloco do código, que pode ser compreendida como a razão da probabilidade de o bit ser 1 em relação à probabilidade de o bit ser 0. A troca de informação entre os decodificadores durante as iterações varia de acordo com a concatenação utilizada, que, a princípio, desconhece qualquer informação a respeito dos bits transmitidos. Ou seja, o valor das LLRs das sequências de informação *a priori* passadas aos decodificadores vale zero, o que é equivalente a dizer que as sequências de informação são equiprováveis. Uma

vez que os valores são processados, durante as iterações, há novas estimativas das sequências disponíveis para os decodificadores. Assim, quanto maior o valor absoluto da LLR, maior é a probabilidade de se ter uma decisão correta sobre o bit. Quanto mais iterações são calculadas, menor é a BER que o decodificador consegue atingir, porém a complexidade cresce com o número de iterações. O Exemplo 5.1 ilustra o comportamento da LLR da sequência de informação durante um processo de decodificação iterativa para o sistema concatenado de codificadores convolucionais em série para o 2-BAC.

Exemplo 5.1 *[LLR para sistemas concatenados de codificadores convolucionais em série para o 2-BAC]*

A Figura 5.1 mostra a evolução da LLR para cada bit de uma sequência de informação de comprimento 1024*, após seis iterações utilizando o algoritmo SISO-MuD para sistema concatenado de codificadores convolucionais em séria com taxa* $1/3$ *no 2-BAC. O eixo das abscissas representa a posição do bit na sequência transmitida, enquanto que o eixo das ordenadas representa os valores das LLRs para um bit de informação correspondente. Neste exemplo, o usuário 1 utiliza SCCC, em que o Codificador Convolucional Componente 1, denotado de Codificador Externo, possui taxa* $1/2$ *e Codificador Convolucional Componente 2, denotado de Codificador Interno, com taxa* $2/3$ *- como descrito na Tabela 5.1 -, assim o usuário 1 possui taxa* $1/3$*. Assim, o sistema apresenta taxa total* $R(2) = 2/3$*.*

Tabela 5.1: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do Exemplo 5.1 para o 2-BAC, utilizando SCCC.*

	Codificador Componente 1	Codificador Componente 2
Usuário 1	$\begin{bmatrix} 1+D^2+D^3 & 1+D+D^2+D^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \\ 0 & 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$
Usuário 2	$\begin{bmatrix} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \\ 0 & 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$

Na Figura 5.1, especificamente para a 1a. iteração, 2a. iteração e 3a. iteração, pode-se observar que, nas primeiras iterações, as LLRs estão sempre próximas de 0*; ou seja, o decodificador tem uma grande probabilidade de errar a decisão do bit de informação. À medida que o decodificador calcula mais iterações, o valor absoluto das LLR aumenta - ver quinta iteração. Quando a LLR tem um valor absoluto pequeno, é possível, ainda, ter mudança de decisão de um bit entre uma iteração e outra. Por exemplo, em uma determinada iteração a LLR pode ter seu valor positivo e, na iteração seguinte, devido a troca de informação no processo iterativo, ser negativa. Nota-se que, através de simulações da LLR em que só há mudança na decisão, entre iterações, quando o valor absoluto da LLR for menor que um "limiar" definido, que para a Figura 5.1 foi fixado um limiar é de* ± 50*. Para LLR absolutas maiores que o "limiar", a probabilidade de o decodificador não trocar mais de decisão é alta. Ou seja, se a LLR for positiva, provavelmente não irá se tornar negativa nas iterações seguintes.*

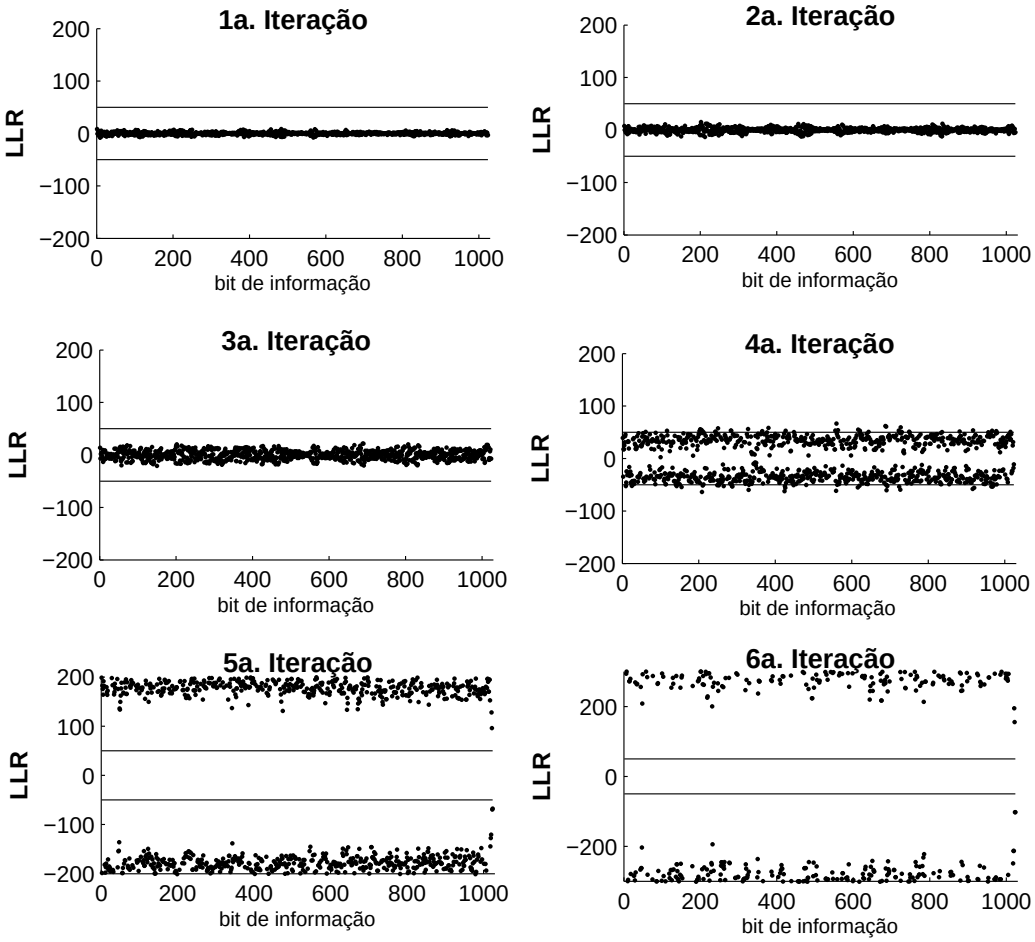


Figura 5.1: *Evolução dos valores da LLR da sequência de informação na saída do segundo módulo SISO da primeira à sexta iteração utilizando o Algoritmo SISO-MuD para sistemas concatenados de codificadores convolucionais em série para o 2-BAC.*

As linhas horizontais representam os limiares de confiabilidade, ver Figura 5.1. Pode-se ver que, a cada iteração, os valores (em módulo) aumentam. Quando o valor da LLR aumenta, significa que o decodificador tem maior probabilidade de acerto na decisão a ser tomada sobre o bit de informação.

◇

A troca de informação das sequências de informação e sub-blocos dos códigos, no processo de decodificação iterativa, para os sistemas concatenados propostos, é realizada como descrito no Capítulo 4 e Apêndice B, utilizando o Algoritmo SISO-MuD para a decisão conjunta ou o Algoritmo SISO-SuD para a decisão individual.

5.2 Canal Aditivo Ruidoso com Dois Usuários

Na simulação de sistemas de comunicação, a forma mais utilizada de avaliar o desempenho é através da BER versus relação sinal ruído do sistema, parâmetro o qual fornece uma medida estatística da confiabilidade destes sistemas. A confiabilidade das simulações depende do número de amostras utilizadas. Ou seja, depende do número de observações de experimentos de interesse [141, pág.694] - maiores detalhes no Apêndice C. Seja $\overline{BER}_L$ a estimativa de taxa de erro de bit após L simulações, se BER é a probabilidade de erro de bit do sistema, tem-se, pela desigualdade de Chebyshev [138, pág.151] [141, pág.317], que

$$P\left[|\overline{BER}_L - BER| < k\sigma_{\overline{BER}_L}\right] \geq 1 - \frac{var\left(\overline{BER}_L\right)}{k^2 var\left(\overline{BER}_L\right)} = 1 - \varpi; \tag{5.1}$$

em que $var(\overline{BER}_L)$ é a variância de $\overline{BER}_L$ e ϖ é um valor arbitrariamente pequeno, denotado por precisão da estimativa. Esta expressão indica que $\overline{BER}_L$ está dentro de um intervalo de confiança após L observações. As simulações foram realizadas para valores da relação sinal-ruído, em que $\overline{BER}_L$ esteja em um intervalo de confiança com um coeficiente de confiabilidade de 90%, ou seja, para o valor da relação sinal-ruído da curva de desempenho, foram enviados 10^7 bits.

A probabilidade de erro depende diretamente da implementação dos códigos associados a cada usuário. Uma implementação ruim pode causar, no processo iterativo, ciclos de baixa troca de informação entre os decodificadores, o que pode resultar em uma probabilidade de erro propagada entre os usuários. Para evitar essa condição, foi feita uma busca exaustiva de matrizes geradoras para a combinação de códigos convolucionais concatenados atribuídos a cada usuário.

Algumas implementações foram realizadas para o canal aditivo ruidoso com dois usuários binários, utilizando sistemas concatenados de codificadores convolucionais em paralelo, em série e misto.

5.2.1 Razões de Verossimilhança do 2-BAC

Considere a j-ésima saída de um canal aditivo ruidoso em um instante de observação t, as probabilidades de transição do canal são dadas por

$$\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=v_1,v_{2,t}^{(j)}=v_2,\ldots,v_{T,t}^{(j)}=v_T\right]=\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|y_t^{(j)}=y\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(z_t^{(j)}-y)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (5.2)$$

pois $1\leq j\leq|\mathcal{V}_i|, v_{i,t}^{(j)}\in\mathcal{V}_i=(-1,+1), y_t^{(j)}=\sum_{i=1}^{T}v_{i,t}^{(j)}$, com $y_t^{(j)}\in Y=(-T,\ldots,0,\ldots,+T)$.

Assim, o demodulador fornece ao decodificador as LLR obtidas com as probabilidade de transição canal - Equação (5.2) - da forma

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,N};I\right)\\&\quad=\ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,N};I\right)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_T}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,N};I\right)}\right)\\&\quad=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,N}=\mathbf{v}_T^{g_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,N}=\mathbf{v}_T\right]}\right). \qquad (5.3)\end{aligned}$$

Para o 2-BAC, tem-se quatro LLR, na forma

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t};I\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2\right]}\right), \qquad (5.4)$$

em que, $1\leq i\leq 2, v_{i,t}^{(j)}\in\mathcal{V}_i=(-1,+1), y_t^{(j)}=v_{1,t}^{(j)}+v_{2,t}^{(j)}$, com $y_t^{(j)}\in Y=(-2,0,+2)$. Logo, na j-ésima coordenada do sub-bloco do código, as razões de log-verossimilhança são

$$\boldsymbol{\Lambda}_{0,0}\left(v_{1,t}^{(j)},v_{2,t}^{(j)};I\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}\right)=0; \qquad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{0,1}\left(v_{1,t}^{(j)},v_{2,t}^{(j)};I\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=1\right]}{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}\right)=\frac{2z_t^{(j)}+2}{\sigma^2}; \qquad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1,0}\left(v_{1,t}^{(j)},v_{2,t}^{(j)};I\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=1,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}\right)=\frac{2z_t^{(j)}+2}{\sigma^2}; \qquad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{1,1}\left(v_{1,t}^{(j)},v_{2,t}^{(j)};I\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=1,v_{2,t}^{(j)}=1\right]}{\mathrm{P}\left[z_t^{(j)}|v_{1,t}^{(j)}=0,v_{2,t}^{(j)}=0\right]}\right)=\frac{2z_t^{(j)}}{\sigma^2}. \qquad (5.8)$$

Analogamente podem ser obtidas as razões de log-verossimilhança fornecidas pelo demodulador para canais aditivos ruidosos com mais de dois usuários.

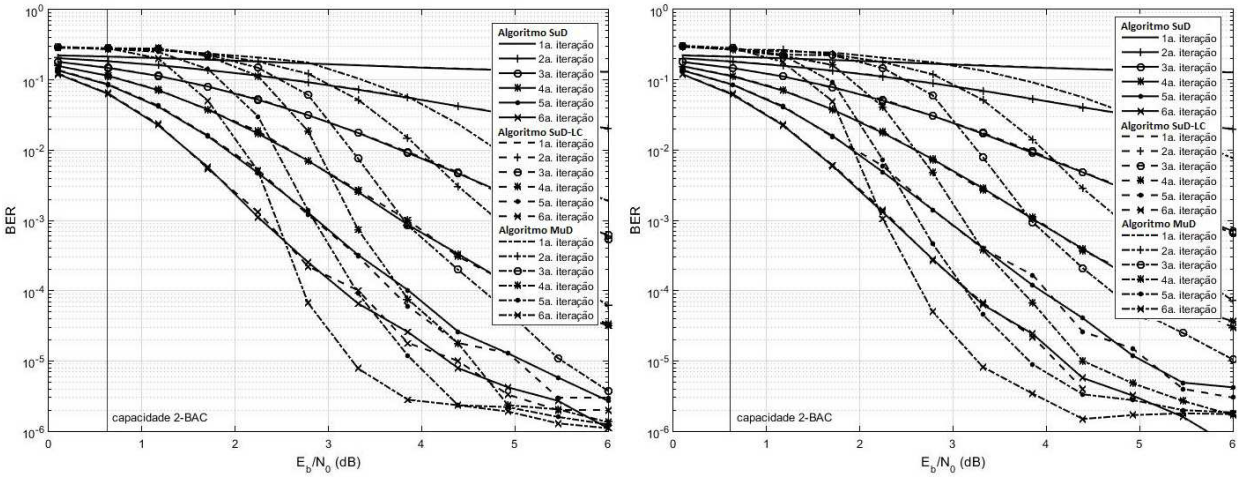
5.2.2 Sistema Concatenado em Paralelo

Para as simulações computacionais do sistema concatenado em paralelo foram realizadas implementações do Algoritmo SISO-MuD (Seção 4.3.1), do Algoritmo SISO-SuD (Seção 4.4.1)

e do Algoritmo SISO-SuD-LC (Seção 4.4.1 e Seção A.3) para o processo de decodificação iterativa.

Para o sistema concatenado de códigos convolucionais em paralelo, apresentado na Seção 3.3.1, as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes são apresentadas na Tabela 3.2. Tanto o usuário 1, quanto o usuário 2 utilizam os mesmos codificadores convolucionais componentes, com taxa assintótica 1/2, e três elementos de memória, $M = M_1 = M_2 = 3$.

As curvas de desempenho em termos da BER versus relação sinal ruído para os sistemas concatenados em paralelo são mostradas na Figura 5.2, em função do número de iterações para canais com dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-MuD, Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC descritos no Capítulo 4. A Figura 5.2(a) referente ao usuário 1 e a Figura 5.2(b) referente ao usuário 2, em que as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes para os usuários são apresentadas na Tabela 3.2.



(a) **(b)**

Figura 5.2: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de códigos convolucionais em paralelo para o 2-BAC com taxa 2/3, utilizando o Algoritmo SISO-MuD, o Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC.*

A existência do patamar de BER irredutível existente nos PCCCs [94, 95, 98] para um usuário para E_b/N_0 em torno de $4,0$ dB pode ser visto na Figura 5.2. Como o Algoritmo SISO-MuD permite uma decodificação conjunta no processo de decodificação iterativa, este atinge o limiar de saturação em torno de $10^{-}5$ em para E_b/N_0 em $3,0$ dB. Por outro lado, como o Algoritmos SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC, a cada iteração, realiza o cálculo individual das probabilidades *a posteriori*, permite uma detecção individual de cada usuá-

rio, assim sua convergência ao limiar de saturação acontece, para o sistema de comunicação considerado, em torno de $5,5$ dB.

Note que, para a sexta iteração do Algoritmo SISO-MuD, a curva de desempenho para uma BER de aproximadamente 10^{-5} a relação sinal ruído está aproximadamente 2dB acima da capacidade, a saber $0,6803$ para taxa total $2/3$, ver Figura 5.2. Para a sexta iteração do Algoritmo SISO-SuD está aproximadamente $2,5$dB acima da capacidade.

Fazendo uso de uma única treliça para os dois usuários e um algoritmo de decisão conjunta para os usuários, resultados semelhantes para a configuração paralela foram apresentados em [51] e [53]. O canal utilizado também é do tipo binário aditivo com ruído gaussiano e emprega o Algoritmo BCJR na decodificação, sendo o Algoritmo BCJR modificado para decisão conjunta e utilização para o 2-BAC.

As diferenças dos resultados da literatura [51, 53] para os encontrados neste trabalho são que os resultados apresentados aqui possibilitam (a) uma implementação paralela dos Algoritmos SISO-SuD, (b) decisões individuais para os usuários e (c) simplicidade na construção de novos sistemas de codificação e decodificação de acesso múltiplo. Observe na Figura 5.2 que para E_b/N_0 pequenas, o Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC apresenta melhor desempenho, contudo para E_b/N_0 intermediárias o Algoritmo SISO-MuD converge para o limiar de saturação, ou seja, limiar em que não há mais ganho de informação mesmo com o aumento da energia do sinal. Note ainda uma perda desprezível de entre o Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC, isso se deve a aproximações utilizadas para simplificar o algoritmo de decodificação, dessa forma, apresentando vantagem em sua utilização, ou seja, o Algoritmo SISO-MuD apresenta melhor desempenho para baixos valores de E_B/N_0, contudo, o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC, por terem menhor complexidade, são mais interessantes para valores maiores de E_B/N_0.

Ademais, um esquema de codificação de taxa mais elevada resulta quando os códigos utilizados nos codificadores componentes são perfurados [86], no entanto isso ocorre ao custo de uma pequena degradação no desempenho [64]. A degradação no desempenho resultante pode ser compensada pela utilização de códigos de comprimento de restrição mais longos.

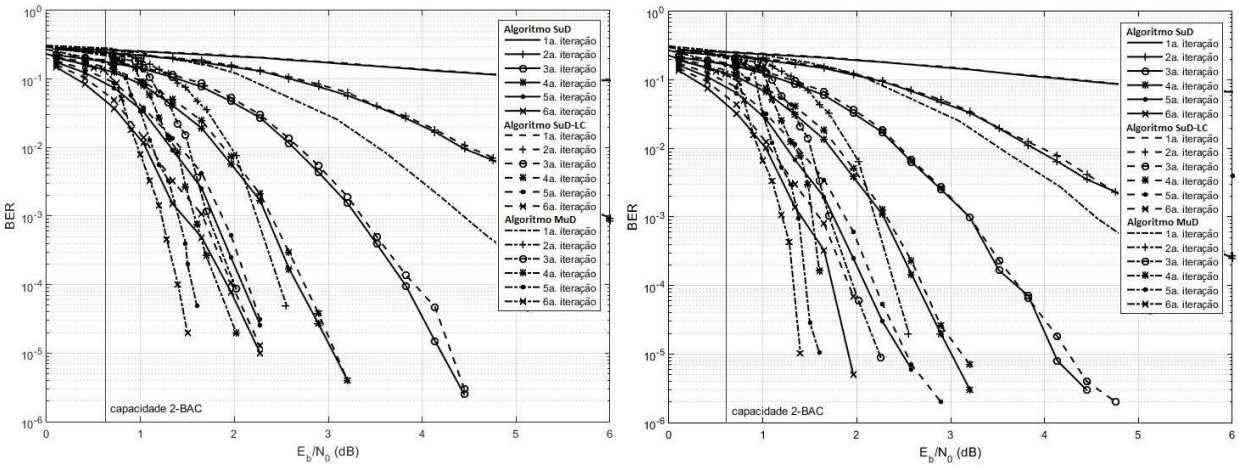
5.2.3 Sistema Concatenado em Série

Para as simulações computacionais dos sistemas concatenados em série, foram realizadas implementações do Algoritmo SISO-MuD, do Algoritmo SISO-SuD e do Algoritmo SISO-

SuD-LC, para o processo de decodificação iterativa.

Para o sistema concatenado de codificadores convolucionais em série, o par de codificadores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, associados, respectivamente, aos usuários 1 e 2, é formado por um codificador convolucional componente externo, com taxa 1/2, e por um entrelaçador, que permuta os bits de saída antes de aplicá-los a um codificador convolucional componente interno, com taxa 2/3, gerando um sub-bloco do código que será enviado ao canal de transmissão. Dessa forma, os codificadores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ possuem taxa 1/3. As matrizes geradoras polinomiais dos codificadores convolucionais componentes são apresentadas na Tabela 3.3.

As curvas de desempenho em termos da BER versus relação sinal ruído para os sistemas concatenados em série, descrito no Exemplo 3.3, são mostradas na Figura 5.3, em função do número de iterações para canais com dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-MuD, o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC. A Figura 5.3(a) referente ao usuário 1 e a Figura 5.3(b) referente ao usuário 2, em que as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes para os usuários são apresentadas na Tabela 3.3.



(a) **(b)**

Figura 5.3: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de codificadores convolucionais em série para o 2-BAC com taxa 2/3, utilizando o Algoritmo SISO-MuD, o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC.*

Note que, para a sexta iteração do Algoritmo SISO-MuD, a curva de desempenho para uma BER de aproximadamente 10^{-5} a relação sinal ruído está aproximadamente 1dB acima da capacidade, a saber $0,6803$ para taxa total 2/3, ver Figura 5.3. Da mesma forma, para o o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC está acima $1,4$dB da capacidade.

O algoritmo de baixa complexidade aplicado ao Algoritmo SISO-SuD, Algoritmo SISO-SuD-LC, introduzido na Seção 4.3.2, e apresentado especificamente para a decisão individual

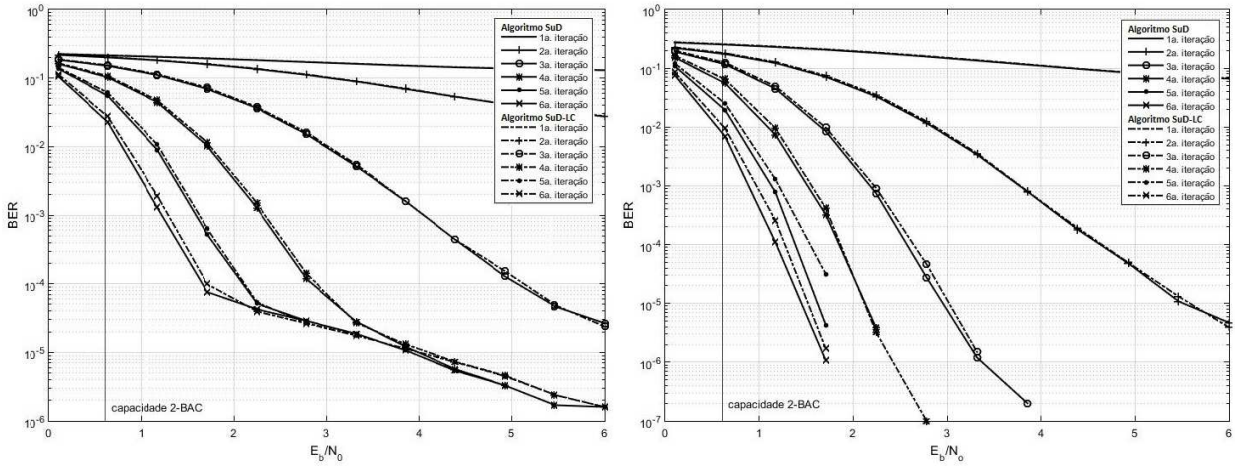
no Apêndice A, Seção A.3, realiza aproximações para os logaritmos dos somatórios de exponenciais presentes no algoritmo SISO. Para alcançar menor complexidade na decodificação iterativa, a performance é comprometida. Porém, percebe-se que a diferença de desempenho é quase imperceptível para as condições aplicadas na simulação, ressaltando que o compromisso entre complexidade computacional e desempenho é bastante vantajoso. Ambas as curvas apresentam uma probabilidade de erro por bit em torno de 10^{-4}, para E_b/N_0 de 2 dB. Assim, observa-se uma diferença de desempenho pequena entre os dois algoritmos propostos, Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC, tornando o Algoritmo SISO-SuD-LC mais atrativo devido a menor complexidade.

5.2.4 Sistema Concatenado em Forma Mista

Em um sistema concatenado de codificadores convolucionais em forma mista - apresentado na Seção 3.3.4 -, o usuário 1 conta com um esquema de codificação em que é utilizado um PCCC de dois codificadores convolucionais recursivos sistemáticos, denotados pelo Codificador Componentes 1 e 2, com taxa 1/2, não necessariamente iguais. Para o usuário 2, conta com um codificador convolucional em série, em que o codificador componente externo com taxa 1/2 e um entrelaçador, que permuta os bits de saída antes de aplicá-los a um codificador convolucional componente interno, com taxa 2/3, gerando sub-blocos do código que será enviado ao canal de transmissão pelo mesmo usuário. Dessa forma, o par de codificadores $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, referentes aos usuários 1 e 2, respectivamente, possuem taxa 1/3. A Tabela 3.4 apresenta as matrizes polinomiais geradoras associadas aos usuários. Tanto o usuário 1, quanto o usuário 2 utilizam os mesmos codificadores convolucionais componentes com taxa 1/2 e três elementos de memória, $M = M_1 = M_2 = 3$.

As curvas de desempenho em termos de BER versus relação sinal ruído para o sistema concatenado em forma mista são mostradas na Figura 5.4, em função do número de iterações para canais com dois usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD. A Figura 5.4(a) referente ao usuário 1 (PCCC) e a Figura 5.4(b) referente ao usuário 2 (SCCC), em que as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes para os usuários são apresentadas na Tabela 3.4.

Observe na Figura 5.4(a), usuário 1 que utiliza a configuração PCCC, para a sexta iteração do Algoritmo SISO-SuD, a curva de desempenho para uma BER de aproximadamente 10^{-5} a relação sinal ruído está aproximadamente 2dB acima da capacidade, a saber $0,6803$ para



(a) **(b)**

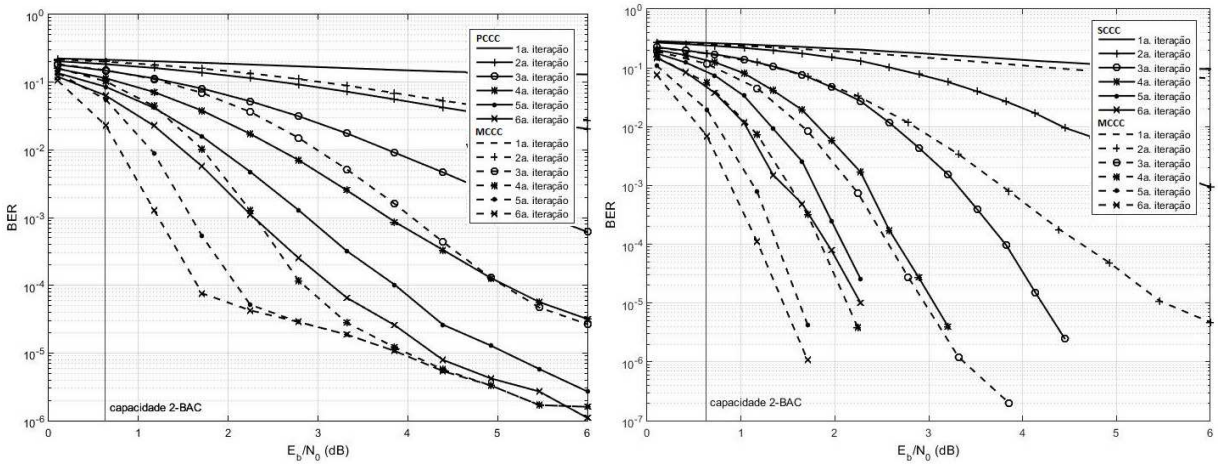
Figura 5.4: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de codificadores convolucionais em forma mista para o 2-BAC com taxa 2/3, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

taxa total 2/3, ver Figura 5.3. Da mesma forma, na Figura 5.4(b), usuário 2 que utiliza a configuração SCCC, a curva de desempenho para uma BER 10^{-5} a relação sinal ruído está aproximadamente 1dB acima da capacidade.

Com objetivo de analisar o impacto causado pelo uso de Sistemas Concatenados em Forma Mista, a Figura 5.5 compara a probabilidade de erro por bit versus relação sinal ruído, utilizando o Algoritmo SISO-SuD, para usuários que utilizam o MCCC proposto com usuários que utilizam Codificadores Convolucionais Concatenados em Paralelo, ver Figura 5.5(a), e Codificadores Convolucionais Concatenados em Série, ver Figura 5.5(b). Note que a Sistema Concatenado em Forma Mista apresenta melhor desempenho em relação as configurações PCCC e SCCC, apresentando ganho de aproximadamente $1,1$dB e $0,9$dB, respectivamente, para probabilidade de erro por bit de 10^{-4} e ganho de aproximadamente $0,4$dB e $0,7$dB, respectivamente, para BER de 10^{-5}. Tal fato pode ser explicado pela maior troca de informação no processo iterativo devido ao MCCC componentes serem de estruturas diferentes.

5.3 Canal Aditivo com mais de Dois Usuários

Considere o sistema concatenado proposto para mais de dois usuários binários para o canal aditivo ruidoso - ver Apêndice B. Resultados de simulação de computador são apresentados para o desempenho de codificação, em termos de BER e em termos de relação sinal-ruído para o 3-BAC e 4-BAC, em que os usuários utilizam sistemas concatenados de codificadores convolucionais em série para o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC.



(a) (b)

Figura 5.5: *Comparação de BER versus relação sinal ruído de sistemas concatenados de codificadores convolucionais para o 2-BAC com taxa 2/3, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

Para o sistema concatenado de codificadores convolucionais em série com três usuários, as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores convolucionais componentes são apresentadas na Tabela 5.2, com taxa global $R(3) = 3/4$. Os usuários utilizam codificadores convolucionais componentes com taxa $1/2$ e três elementos de memória, $M = M_1 = M_2 = M_3 = 3$.

Tabela 5.2: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do sistema concatenado em série para o 3-BAC.*

	Codificador Externo	Codificador Interno
Usuário 1	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^3 & 1+D+D^2+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 2	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D+D^2}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 3	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$

As curvas de desempenho para o 3-BAC, em termos de BER versus relação sinal ruído para os sistemas concatenados em série, são mostradas na Figura 5.6, em função do número de iterações para canais com três usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC. A Figura 5.6(a) referente ao usuário 1, a Figura 5.6(b) referente ao usuário 2 e a Figura 5.6(c) referente ao usuário 3, em que as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes para os usuários são apresentadas na Tabela 5.2.

Note que, para a curva de desempenho da Figura 5.6(a) está aproximadamente a $2,0$dB da capacidade do canal e para as figuras 5.6(b) e 5.6(c) está aproximadamente a $1,6$dB acima

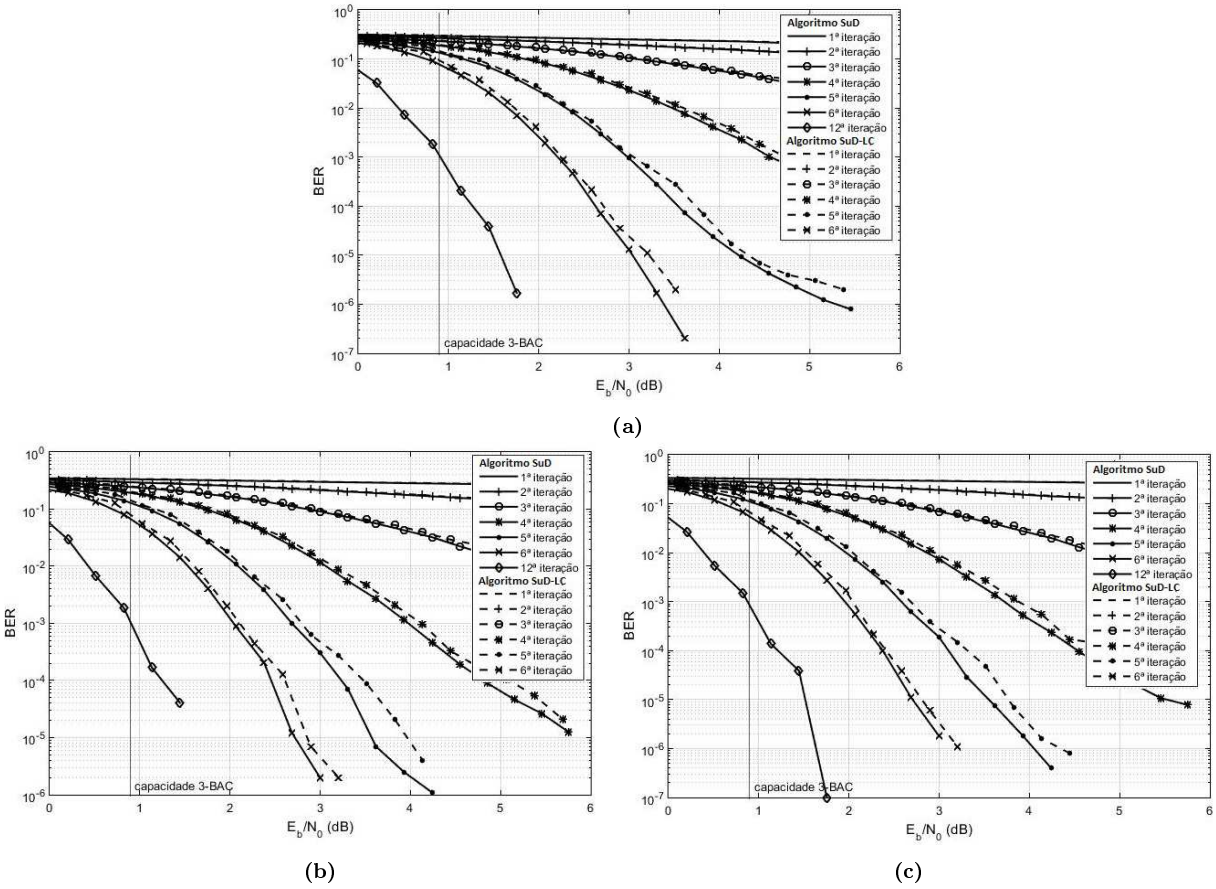


Figura 5.6: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de codificadores convolucionais em série para o 3-BAC com taxa 3/4, utilizando o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC.*

da capacidade para três usuários transmitindo em um canal aditivo ruidoso, a saber 0.8897 para um taxa total de 3/4. O algoritmo de baixa complexidade aplicado ao Algoritmo SISO-SuD, Algoritmo SISO-SuD-LC, por realiza aproximações para os logaritmos dos somatórios de exponenciais presentes no algoritmo SISO, possuí menor complexidade na decodificação iterativa, dessa forma, comprometendo seu desempenho. Observa-se uma diferença de desempenho pequena entre os dois algoritmos propostos, Algoritmo SISO-SuD e Algoritmo SISO-SuD-LC, tornando o Algoritmo SISO-SuD-LC mais atrativo devido a menor complexidade.

Para o sistema concatenado de codificadores convolucionais em série com quatro usuários, as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores convolucionais componentes são apresentadas na Tabela 5.3, com taxa global $R(3) = 4/6$. Os usuários utilizam codificadores convolucionais componentes com taxa $1/4$ e três elementos de memória, $M = M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 3$.

As curvas de desempenho para o 4-BAC, em termos de BER versus relação sinal ruído para os sistemas concatenados em série, são mostradas na Figura 5.7, em função do número de iterações para canais com quatro usuários binários, utilizando o Algoritmo SISO-SuD e

Tabela 5.3: *Matrizes polinomiais geradoras dos codificadores componentes do sistema concatenado em série para o 4-BAC.*

	Codificador Externo	Codificador Interno
Usuário 1	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^3 & 1+D+D^2+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} & \frac{1+D+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 2	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^2+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1+D+D^2}{1+D+D^2+D^3} & \frac{1+D+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 3	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^2+D^3 & 1+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1+D^3}{1+D+D^2+D^3} & \frac{1+D^2+D^3}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$
Usuário 4	$\left[\begin{array}{cc} 1+D+D^2+D^3 & 1+D+D^3 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1+D+D^3}{1+D+D^2+D^3} & \frac{1+D}{1+D+D^2+D^3} \end{array}\right]$

o Algoritmo SISO-SuD-LC. A Figura 5.7(a) referente ao usuário 1, a Figura 5.7(b) referente ao usuário 2, a Figura 5.7(c) referente ao usuário 3 e a Figura 5.7(d) referente ao usuário 4, em que as matrizes geradoras polinomiais dos codificadores componentes para os usuários são apresentadas na Tabela 5.3.

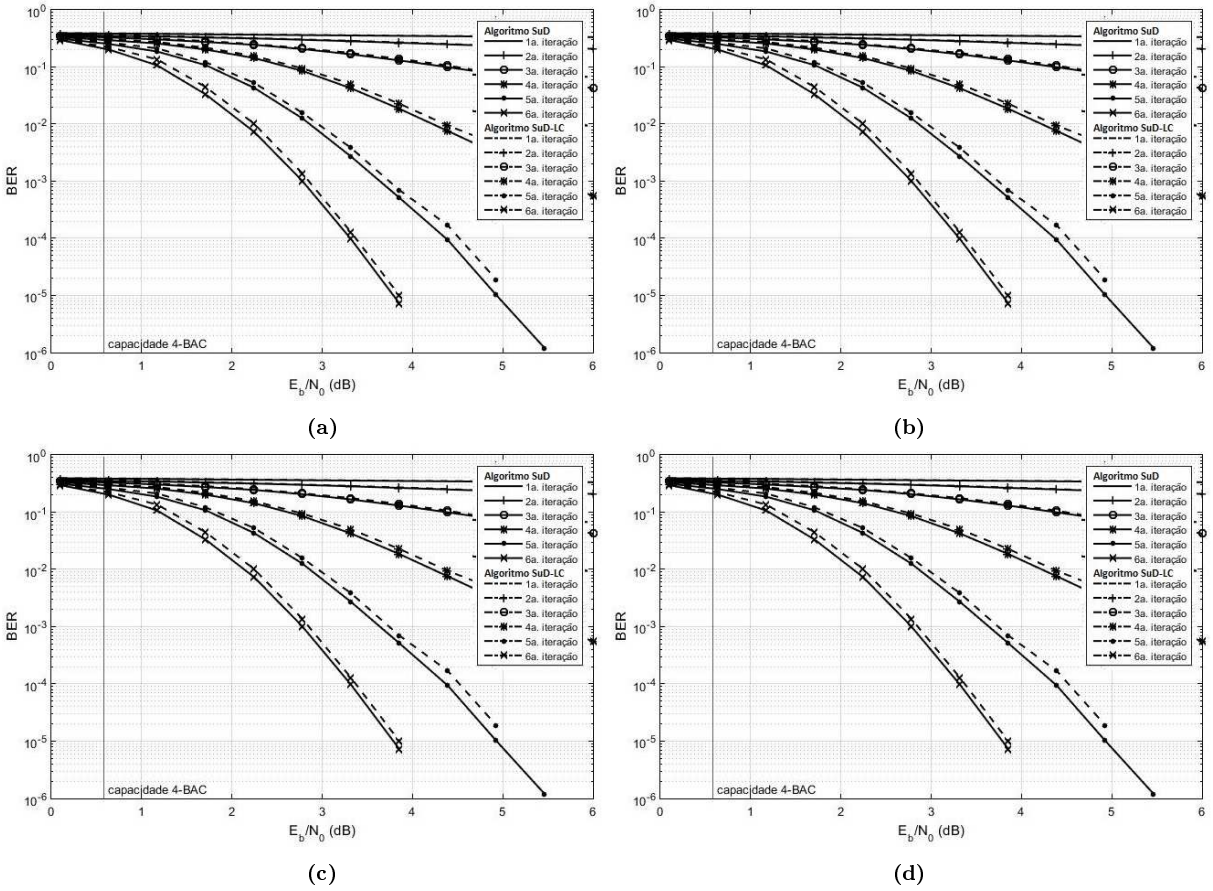


Figura 5.7: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de codificadores convolucionais em série para o 4-BAC com taxa 4/6, utilizando o Algoritmo SISO-SuD e o Algoritmo SISO-SuD-LC.*

Note que, para a sexta iteração do Algoritmo SISO-SuD e do Algoritmo SISO-SuD-LC, a curva de desempenho para uma BER de aproximadamente 10^{-5} a relação sinal ruído está aproximadamente $3,5$dB acima da capacidade, ver Figura 5.7.

A Figura 5.8 mostra o gráfico da probabilidade de erro por bit versus relação sinal ruído, utilizando o Algoritmo SISO-SuD, afim de comparar o desempenho alcançado com o aumento de usuários para o sistema de comunicação de múltiplo acesso com SCCC proposto, a saber 2-BAC e 4-BAC, ou seja. A escolha dos sistemas e matrizes geradoras apresentadas na Seção 5.2.3 e na Seção 5.3 se dá pois ambos possuem mesma taxa total $2/3$ para avaliar o impacto no sistema com a adição de usuários. Os resultados obtidos com o uso da construção mostra uma perda de aproximadamente $1,5$dB entre um sistema de comunicação para o 2-BAC e e um 4-BAC para um BER de 10^{-5} na 6a. iteração.

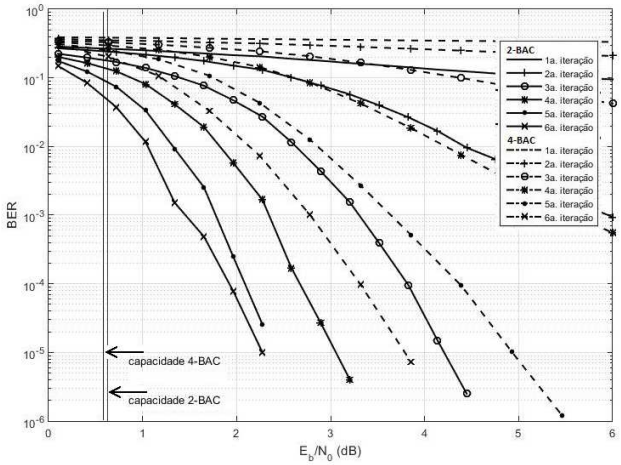


Figura 5.8: *BER versus relação sinal ruído do sistema concatenado de codificadores convolucionais em série para o 2-BAC e o 4-BAC com taxa 2/3, utilizando o Algoritmo SISO-SuD.*

Neste capítulo, foi apresentado o desempenho de alguns sistemas para a transmissão de dados multiusuário num canal AWGN, a saber, 2-BAC, 3-BAC e 4-BAC. Os algoritmos propostos permitiram a construção de decodificadores com a mesma estrutura dos decodificadores clássicos para um usuário. Os resultados foram obtidos para sistemas de decodificação em paralelo, em serial e na forma mista.

As diferenças dos resultados apresentados na literatura [51, 53, 60, 64] para os encontrados neste trabalho são as de que os resultados apresentados aqui valem para mais de dois usuários, permitindo uma implementação paralela com a utilização do Decisor Suave proposto; dessa forma, possibilitando realizar várias construções para diferentes aplicações, apresentando implementações em computador de sistemas concatenados em paralelo (PCCC), em

série (SCCC) e na forma mista (MCCC) para dois ou mais usuários.

CAPÍTULO 6

Considerações Finais

Precisamos analisar o todo, para, depois,
compreendermos as partes [...]

— **Aristóteles (384—322 a.C.)**

Este capítulo apresenta um balanço do trabalho realizado e dos resultados obtidos na pesquisa que culminou nesta tese. Sugestões para trabalhos futuros que podem ser realizados como continuações deste estudo também são apresentadas.

6.1 Contribuições

Neste trabalho, foram apresentados sistemas codificados concatenados para canais de acesso múltiplo. Em particular, a tese trata dos canais aditivos ruidosos com usuários binários, com a utilização de códigos convolucionais concatenados, utilizados em sistemas de comunicações para emprego em canais de acesso múltiplo.

No sentido de eliminar os efeitos causados pelo ruído presente nos sistemas de comunicação, foram propostos diversos esquemas de codificação e decodificação iterativa e colaborativa. Primeiramente, foi proposta uma decodificação iterativa baseada no algoritmo SISO que, por sua vez, fornece continuamente estimativas conjuntas atualizadas das razões de log-verossimilhança dos sub-blocos dos códigos e das sequências de informação para os usuários, a cada iteração. Com a aplicação dos módulos SISO, que empregam internamente o algoritmo

homônimo, a conversão entre decodificação iterativa de diferentes codificadores concatenados torna-se simples. Como os módulos SISO apresentam entradas e saídas de mesma natureza, a sua utilização no processo de decodificação está ligada apenas à disposição do tipo de concatenação e aos codificadores componentes utilizados.

Os algoritmos propostos não utilizam treliças conjuntas construídas a partir de cada usuário: como é assumido que cada usuário é independente, suas treliças também são independentes, o que permite realizar análises dissociadas de transições, possibilitando uma decisão individual no processo de decodificação. Vale salientar que, ao utilizar estimativas conjuntas (razões de log-verossimilhança) para as sequências de informação e para os sub-blocos dos códigos, é necessária a atualização dos Algoritmos SISO-MuD presentes nos módulos, sempre que o número de usuários que acessam o canal for alterado. Neste contexto, foram analisadas três configurações para o sistema de decodificação iterativa em questão, seguindo a codificação em que os módulos SISO são arranjados de forma paralela, serial ou mista, para dois ou mais usuários binários. O desempenho dos códigos convolucionais concatenados em paralelo, série ou mista, nessa ordem, pode ser estudado, verificando-se alto ganho de informação para taxa de erro de bita cada iteração para o SCCC, uma vez que o PCCC satura em torno de 4dB. No caso do MCCC, isto dependerá da concatenação associada a cada usuário.

Foi proposto um esquema de decodificação iterativa com a inclusão de um decisor suave, o Algoritmo SISO-SuD. Tem-se, com base nas equações (4.94) e (4.95), que o decodificador SISO proposto pode ser construído utilizando ferramentas clássicas disponíveis. Nota-se que a LLR para um determinado usuário pode ser obtida a partir do decisor suave, que utiliza as estimativas dos outros $T-1$ usuários, permitindo a utilização do algoritmo proposto para o cálculo das estimativas referentes à decodificação deste determinado usuário. O decisor suave é responsável por fornecer, ao módulo SISO, a LLR atualizada dos sub-blocos dos codificadores para cada usuário, por meio das equações apresentadas nas seções 4.4 e B.2. Dessa forma, qualquer sistema de decodificação iterativa utilizando os módulos SISO pode ser adaptado para aplicações com múltiplos usuários. Assim, os algoritmos já otimizados em desempenho e complexidade computacional podem ser utilizados para sua construção. Seguindo esse raciocínio, a implementação para mais de dois usuários foi realizada, permitindo a construção e a implementação computacional de sistemas com três e quatro usuários, visto que a proposta é paralelizável.

Outro resultado relevante advém do desacoplamento entre usuários no esquema de deco-

dificação proposto no Algoritmo SISO-SuD, de modo que não é uma condição necessária que os usuários detenham o mesmo esquema de codificação - a saber, PCCC, SCCC e HCCC -, denotado sistema concatenado de códigos convolucionais na forma mista, fornecendo ainda mais versatilidade no processo de decodificação.

Devido ao impacto da escolha dos códigos convolucionais utilizados nos codificadores componentes presentes no esquema de concatenação, é necessário um estudo dos melhores códigos para o processo de decodificação iterativa, resultando em uma maior proteção dos símbolos transmitidos por cada usuário em canais aditivos ruidosos. Neste intuito, foi realizada uma busca por códigos convolucionais empregados nos codificadores componentes que ofereçam menores taxas de erro por bit ou ainda menores interferências para os outros usuários presentes no canal.

Resultados de simulação de probabilidade de erro, vide curvas nas figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.6 e 5.7, mostram que os sistemas projetados pelo método utilizado podem ter desempenho próximo da capacidade. Note que as curvas de desempenho apresentam comportamento semelhante aos dos códigos convolucionais concatenados para um usuário; ver [93]. É possível que resultados ainda melhores possam ser obtidos com outros códigos convolucionais com componentes associados a cada usuário.

6.2 Estudos Futuros

Os resultados obtidos neste trabalho indicam algumas possibilidades de estudos futuros, listadas a seguir:

- ▷ Analisar as curvas de desempenho em termos de taxa de erro de bit para os sistemas concatenados de códigos convolucionais na forma híbrida. Tais esquemas são compostos pela combinação dos esquemas em paralelo e em série de codificadores, oferecendo, assim, a oportunidade de explorar as vantagens de codificadores concatenados tanto de um esquema, quanto de outro.
- ▷ Estudar o comportamento dos esquemas de codificação apresentados em outros tipos de canais como, por exemplo, com desvanecimento (Rayleigh), multipercurso e com apagamento.
- ▷ Analisar a construção de equalizadores para canais de acesso múltiplo, desenvolvendo, desse modo, um Equalizador SISO para canais aditivos ruidosos com usuários binários.
- ▷ Analisar algoritmos de baixa complexidade para canais aditivos com mais de dois usuários

binários, a saber SOVA, que permitam decodificação iterativa por usuário (Algoritmo SISO-SuD).

- ▷ Analisar o desempenho em termos de taxa de erro por bit versus relação sinal ruído utilizando modulações digitais.
- ▷ Calcular a complexidade computacional dos algoritmos propostos, permitindo a análise e o desenvolvimento de propostas para a redução de complexidade no processo de decodificação.
- ▷ Analisar qualitativamente os códigos convolucionais atribuídos aos usuários através de curvas de transferência de informação extrínseca (EXIT, *extrinsic information transfer*).
- ▷ Encontrar limitantes para o número de iterações dos algoritmos propostos, definindo limiares suficientemente satisfatórios que permitam decidir sobre a quantidade de iterações no processo de decodificação.
- ▷ Avaliar os impactos sobre os algoritmos de decisão conjunta (Algoritmo SISO-MuD) e de decisão individual (Algoritmo SISO-SuD) para códigos convolucionais atribuídos aos usuários nos sistemas codificados para acesso múltiplo.
- ▷ Avaliar os impactos de **outros entrelaçadores** sobre os algoritmos de decisão conjunta (Algoritmo SISO-MuD), de decisão individual (Algoritmo SISO-SuD) e sistemas propostos.
- ▷ Investigar o comportamento de T Usuários com F realimentações no **Decisor Suave**, $F < T$.

Referências

[1] R. Palanki, "Iterative decoding for wireless networks," Tese de doutorado (Ph.D.), California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2004.

[2] "IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee," Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2016. [Online]. Available: http://www.ieee802.org/.

[3] Bluetooth, "Specification of the bluetooth system," Bluetooth SIG, Inc., 2014. [Online]. Available: https://www.bluetooth.com/.

[4] USB Implementers Forum, "Wireless USB from the USB-IF," 2014. [Online]. Available: http://www.usb.org/developers/wusb/.

[5] K. Watanabe, "Transmission device, comunication system, transmission method and program," 2008, US 20090257476 A1. [Online]. Available: https://www.google.com/patents/US20090257476.

[6] ETSI TS 145 003 V13.3.0, "Digital cellular telecommmmunications system (phase 2+) (GSM); GSM/EDGE channel coding," European Telecommunications Standards Institute, Tech. Rep. 3GPP TS 45.003 Version 13.3.0 Release 13, 2016. [Online]. Available: http://www.etsi.org/deliver/etsi_ts/145000_145099/145003/13.03.00_60/ts_145003v130300p.pdf.

[7] ETSI TS 136 212 V8.7.0, "LTE; evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA); multiplexing and channel coding," European Telecommunications Standards Institute, Tech. Rep. 3GPP TS 36.212 Version 8.7.0 Release 8, 2009. [Online]. Available: http://www.etsi.org/deliver/etsi_ts/136200_136299/136212/08.07.00_60/ts_136212v080700p.pdf.

[8] "IEEE standard for local and metropolitan area networks part 16: Air interface for broadband wireless access systems," *IEEE Std 802.16-2009 (Revision of IEEE Std 802.16-2004)*, pp. 1–2080, 2009.

[9] R. Peterson and D. Costello, "Binary convolutional codes for a multiple-access channel (corresp.)," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 1, pp. 101–105, 1979.

[10] J. L. Massey, "Coding and modulation for code-division multiple accessing," in *Proceedings of the 3rd Int. Work. on Digital Signal Processing Techniques Applied to Space Communications (ESTEC)*, Noordwijk, The Netherlands, 1992, pp. 1–17.

[11] ——, "Coding for multiple access communications," in *Proceedings of ITG-Fachtagung Codierung für Quelle, Kanal und Übertragung*, Munich, Germany, 1994, pp. 11–20.

[12] A. J. Viterbi, *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*, ser. Addison-Wesley wireless communications series. Redwood City, CA, USA: Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.

[13] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded cdma," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 7, pp. 1046–1061, 1999.

[14] Z. Shi and C. Schlegel, "Design of serially concatenated coded cdma system," in *2002 IEEE International Conference on Communications. Conference Proceedings. ICC 2002 (Cat. No.02CH37333)*, vol. 3, 2002, pp. 1898–1902 vol.3.

[15] R. B. Filho, C. de Almeida, and G. Fraidenraich, "On the performance of cdma systems employing multiuser decorrelating detector and antenna array," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 4, pp. 1640–1648, July 2007.

[16] C. E. Shannon, "Two-way communication channels," in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*. Berkeley, California, USA: University of California Press, 1961, pp. 611–644.

[17] R. Ahlswede, "Multi-way communication channels," in *Second International Symposium on Information Theory*, Tsahkadsor, Armenia, USSR, 1971, pp. 23–52.

[18] H. H. J. Liao, "A coding theorem for multiple access communication," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Asilomar, California, USA, 1972.

[19] ——, "Multiple access channels," Tese de doutorado (Ph.D.), Dept. Elec. Eng., University of Hawaii, Honolulu, USA, 1972.

[20] D. Slepian and J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources," *The Bell System Technical Journal*, vol. 52, no. 7, pp. 1037–1076, 1973.

[21] T. M. Cover, "Some advances in broadcast channels," in *Advances in Communication Systems*, A. J. Viterbi, Ed. Elsevier, 1975, vol. 4, pp. 229–260.

[22] A. Wyner, "Recent results in the shannon theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 1, pp. 2–10, 1974.

[23] R. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers," *The Annals of Probability*, vol. 2, no. 5, pp. 805–814, 1974.

[24] M. L. Ulrey, "The capacity region of a channel with s senders and r receivers," *Information and Control*, vol. 29, no. 3, pp. 185–203, 1975. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999587590371X.

[25] E. C. van der Meulen, in *Proceedings of the IEEE-USSR Joint Workshop Information Theory*, Moscow, USSR, 1975, pp. 227–247.

[26] ——, "A survey of multi-way channels in information theory: 1961-1976," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 23, pp. 1–37, 1977.

[27] T. Kasami and S. Lin, "Coding for a multiple-access channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-22, no. 2, pp. 129–137, 1976.

[28] ——, "Bounds on the achievable rates of block coding for a memoryless multiple-access channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 24, no. 2, pp. 187–197, 1978.

[29] E. J. Weldon, "Coding for a multiple-access channel," *Information and Control*, vol. 36, no. 3, pp. 256 – 274, 1978. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995878903121.

[30] H. van Tilborg, "An upper bound for codes in a two-access binary erasure channel (corresp.)," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 24, no. 1, pp. 112–116, 1978.

[31] S.-C. Chang and E. Weldon, "Coding for t-user multiple-access channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 6, pp. 684–691, 1979.

[32] R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, no. 2, pp. 124–142, 1985.

[33] P. G. Farrell, A. Brine, A. P. Clark, and D. J. Tait, "Limits of radio communication — collaborative transmission over cellular radio channels," in *Performance Limits in Communication Theory and Practice*, J. K. Skwirzynski, Ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 1988, pp. 281–307. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-2794-0_17.

[34] J. H. Wilson, "Error-correcting codes for a t-user binary adder channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, no. 4, pp. 888–890, 1988.

[35] F. H. Ali, B. Honary, and M. Darnell, "Capacity of t user collaborative coding multiple-access scheme operating over a noisy channel," *Electronic Letters*, vol. 25, no. 11, pp. 742–744, 1989.

[36] F. H. Ali and B. Honary, "Soft decision decoding technique for collaborative coding multiple-access channels," in *Third IEE Conference on Telecommunications*, 1991, pp. 141–146.

[37] ——, "Low complexity soft decision decoding technique for t-user collaborative coding multiple-access channels," *Electronic Letters*, vol. 27, no. 13, pp. 1167–1169, 1991.

[38] ——, "Collaborative coding and decoding techniques for multiple access channel," *IEE Proceedings - Communications*, vol. 141, no. 2, pp. 56–62, 1994.

[39] V. C. da Rocha Jr. and J. L. Massey, "A new approach to the design of codes for the binary adder channel," in *Cryptography and Coding III*, ser. IMA Conf. Series, M. J. Ganley, Ed. Oxford, 1993, no. 45, pp. 179–185.

[40] V. C. da Rocha Jr., G. Markarian, and B. K. Honary, "Trellis decoding of block codes for the 2-user binary adder channel," in *ICC '93 Genebra. Technical Program, Conference*

Record, IEEE International Conference on Communications, vol. 3, 1993, pp. 1429–1433.

[41] P. Z. Fan, M. Darnell, and B. Honary, "Superimposed codes for the multiaccess binary adder channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 4, pp. 1178–1182, 1995.

[42] H. A. Cabral and V. C. da Rocha Jr., "Linear code construction for the 2-user binary adder channel," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, 1995, pp. 497–497.

[43] T. M. Cover, "Comments on broadcast channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2524–2530, Oct 1998.

[44] R. Ahlswede and V. B. Balakirsky, "Construction of uniquely decodable codes for the two-user binary adder channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 1, pp. 326–330, 1999.

[45] R. Palanki, A. Khandekar, and R. McEliece, "Graph-based codes for synchronous multiple access channels," in *Proceedings of the 39th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Oct 2001.

[46] V. C. da Rocha Jr. and M. de L. M. G. Alcoforado, "Trellis code construction for the 2-user binary adder channel," in *Proceedings of the Telecommunications and Networking - ICT 2004, 11th International Conference on Telecommunications*, Fortaleza, Ceará, Brasil, 2004, pp. 122–127.

[47] ——, "Uniquely decodable trellis codes for the two user binary adder channel," in *International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2004)*, Parma, Italy, 2004, pp. 518–522.

[48] M. Mattas and P. R. J. Ostergard, "A new bound for the zero-error capacity region of the two-user binary adder channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 9, pp. 3289–3291, 2005.

[49] L. Kiviluoto and P. R. J. Ostergard, "New uniquely decodable codes for the t-user binary adder channel with $3 \leq t \leq 5$," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, no. 3, pp. 1219–1220, 2007.

[50] A. Roumy and D. Declercq, "Characterization and optimization of ldpc codes for the 2-user gaussian multiple access channel," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, no. 1, 2007. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1155/2007/74890.

[51] M. de L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr., and M. J. de C. Lima, "A turbo coding scheme not necessarily uniquely decodable for the two-user binary adder channel," in *Proceedings of the International Telecommunications Symposium, ITS, SBrT/IEEE*, Manaus, Amazonas, Brasil, 2010.

[52] E. Şaşoğlu and E. Telatar, "Polar codes for the two-user binary-input multiple-access channel," in *2010 IEEE Information Theory Workshop on Information Theory (ITW 2010, Cairo)*, 2010, pp. 1–5.

[53] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr., G. Markarian, and M. J. de C. Lima, "Iterative decoding of turbo convolutional codes over noisy two-user binary adder channel," *Electronics Letters*, vol. 47, no. 13, pp. 749–751, 2011.

[54] E. Abbe and E. Telatar, "Polar codes for the m -user multiple access channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, no. 8, pp. 5437–5448, 2012.

[55] G. Song, J. Cheng, and Y. Watanabe, "k-user parallel concatenated code for gaussian multiple-access channel," in *2013 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, June 2013, pp. 3286–3291.

[56] Y. Tsujii, G. Song, J. Cheng, and Y. Watanabe, "Approaching multiple-access channel capacity by nonbinary coding-spreading," in *2013 IEEE International Symposium on Information Theory*, 2013, pp. 2820–2824.

[57] S. Lu, W. Hou, and J. Cheng, "Coding scheme for t-user noisy multiple-access adder channel," in *2014 International Symposium on Information Theory and its Applications*, Oct 2014, pp. 536–540.

[58] H. Han, G. Song, M. Yoshida, and J. Cheng, "k-user nonbinary parallel concatenated code for gaussian multiple-access channel," in *2014 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, June 2014, pp. 2058–2063.

[59] H. Mahdavifar, M. El-Khamy, J. Lee, and I. Kang, "Techniques for polar coding over multiple access channels," in *2014 48th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, 2014, pp. 1–6.

[60] M. de L. M. G. Alcoforado, M. C. C. Oliveira, and V. C. da Rocha Jr., "Bahl-cocke-jelinek-raviv decoding algorithm applied to the three-user binary adder channel," *IET Communications*, vol. 9, no. 7, pp. 897–902, 2015.

[61] G. Song and J. Cheng, "Low-complexity coding scheme to approach multiple-access channel capacity," in *2015 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, June 2015, pp. 2106–2110.

[62] M. Noor-A-Rahim, K. D. Nguyen, and G. Lechner, "Sc-ldpc code design for gaussian multiple access channel," *IET Communications*, vol. 10, no. 17, pp. 2402–2406, 2016.

[63] S. Sharifi, A. K. Tanc, and T. M. Duman, "Ldpc code design for the two-user gaussian multiple access channel," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 4, pp. 2833–2844, April 2016.

[64] M. de L. M. G. Alcoforado, J. J. C. B. de Jesus, and V. C. da Rocha Jr., "Turbo coding for the noisy 2-user binary adder channel with punctured convolutional codes," *Telecommunication Systems*, vol. 64, no. 3, pp. 459–465, 2017.

[65] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Tech. Jornal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 623–656, 1948.

[66] R. Gallager, "Low-density parity-check codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 8, no. 1, pp. 21–28, 1962. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1109/tit.1962.1057683.

[67] R. G. Gallager, *Low-density Parity-check Codes*, ser. Massachusetts Institute of Technology Research Monograph. Cambridge, Massachusetts, USA: M.I.T. Press, 1963. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=wWiJPwAACAAJ.

[68] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Transation Information Theory*, vol. IT-20, pp. 284–287, 1974.

[69] E. Arikan, "Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073, 2009.

[70] L. Fagoonee and B. Honary, "Application of turbo codes to tactical communications," *The International Journal of Computer and Telecommunication Networking: Special Issue on Military Communications Systems and Technologies*, vol. 46, no. 5, pp. 741–749, 2004.

[71] G. Gamow, *Biography of Physics*, ser. American Association of Physics Teachers. New York, NY, USA: Harper & Brothers, 1962.

[72] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed. Wiley-Interscience, 2006. [Online]. Available: http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=\%citeulike07-20\&path=ASIN/0471241954.

[73] C. J. L. Pimentel, *Comunicação Digital*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: BRASPORT, 2007. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=2SRnJFTRvaUC.

[74] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed., ser. McGraw-Hill International Edition. McGraw-Hill, 2008. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=ksh0GgAACAAJ.

[75] P. Chevillat, "n-user trellis coding for a class of multiple-access channels (corresp.)," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 114–120, 1981.

[76] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles And Practice*, 2nd ed. Pearson Education, 2010. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=VmPT8B-5_tAC.

[77] R. W. Hamming, "Error detecting and error correcting codes," *Bell System Technical Journal*, vol. 26, no. 2, pp. 147–160, 1950.

[78] I. S. Reed and G. Solomon, "Polynomial Codes Over Certain Finite Fields," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 8, no. 2, pp. 300–304, 1960. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1137/0108018

[79] R. C. Bose and D. K. Ray-Chaudhuri, "On a class of error correcting binary group codes," *Information and Control*, vol. 3, no. 1, pp. 68–79, 1960. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/s0019-9958(60)90287-4.

[80] S. Lin and D. J. Costello, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, ser. Prentice-Hall computer applications in electrical engineering series. Prentice-Hall, 1983.

[81] P. Elias, "Error-free coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 4, no. 4, pp. 29–37, 1954. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1109/tit.1954.1057464.

[82] ——, "Coding for noisy channels," vol. 3. Cambridge, Massachusetts, USA: Institute of Radio Engineers Convention Record, Part IV, 1955, pp. 37–46.

[83] J. Korhonen, *Introduction to 3G Mobile Communications*, ser. Artech House mobile communications series. Artech House, 2003. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=ZvcuAqL418YC.

[84] ——, *Introduction to 4G Mobile Communications:*, ser. Artech House mobile communications series. Artech House, 2014. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=lutPAwAAQBAJ.

[85] J.-J. Chang, D.-J. Hwang, and M.-C. Lin, "Some extended results on the search for good convolutional codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 5, pp. 1682–1697, 1997.

[86] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," in *ICC '93 Genebra. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on Communications*, vol. 2, Genebra, Suiça, 1993, pp. 1064–1070.

[87] D. Divsalar and F. Pollara, "Multiple turbo codes for deep-space communications," *The Telecommunications and Data Acquisition Progress Report 42-121 for NASA*, pp. 66–77, 1995.

[88] S. A. Barbulescu, "Iterative decoding of turbo codes and other concatenated codes," Tese de doutorado (Ph.D.), School of Electronic Engineering, University of South Australia, 1996. [Online]. Available: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.50.7297&rep=rep1&type=pdf.

[89] B. Sklar, "A primer on turbo code concepts," *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 12, pp. 94–102, 1997.

[90] ——, "Turbo code concepts made easy, or how I learned to concatenate and reiterate," in *MILCOM 97*, vol. 1, 1997, pp. 20–26.

[91] S. Benedetto, R. Garello, and G. Montorsi, "A search for good convolutional codes to be used in the construction of turbo codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 9, pp. 1101–1105, 1998.

[92] P. C. Massey and D. J. Costello, "New low-complexity turbo-like codes," in *Proceedings of the IEEE Information Theory Workshop*, 2001, pp. 70–72.

[93] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "A soft-input soft-output maximum a posteriori (MAP) module to decode parallel and serial concatenated codes," *The Telecommunications and Data Acquisition Progress Report 42-127 for NASA*, pp. 1–20, 1996.

[94] S. Benedetto and G. Montorsi, "Soft-input soft-output building blocks to construct and iteratively decode code networks," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, 1997, pp. 7–7.

[95] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Design of serially concatenated interleaved codes," in *Communications, 1997. ICC '97 Montreal, Towards the Knowledge Millennium. 1997 IEEE International Conference on*, vol. 2, 1997, pp. 710–714 vol.2.

[96] ——, "Serial concatenation of interleaved codes: performance analysis, design, and iterative decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 909–926, 1998.

[97] S. Benedetto and E. Biglieri, *Principles of Digital Transmission: With Wireless Applications*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[98] M. R. Soleymani, Y. Gao, and U. Vilaipornsawai, *Turbo Coding for Satellite and Wireless Communications*, ser. The Springer International Series in Engineering and Computer Science. Springer US, 2002. [Online]. Available: https://books.google.ca/books?id=8Z9oSTmbUkMC

[99] J. Yu, M. L. Boucheret, R. Vallet, A. Duverdier, and G. Mesnager, "Interleaver design for serial concatenated convolutional codes," *IEEE Communications Letters*, vol. 8, no. 8, pp. 523–525, 2004.

[100] R. Zhou and L. Yuan, "Research of parallel and serial concatenated convolutional codes channel coding technology in deep-space communication," in *2010 6th International*

Conference on Wireless Communications Networking and Mobile Computing (WiCOM), 2010, pp. 1–4.

[101] F. Mehran, "Performance evaluation of serial concatenated convolutional codes over aeronautical channels," in *2010 5th International Symposium on Telecommunications*, 2010, pp. 361–366.

[102] S. A. Ghauri, M. S. Javaid, H. Adeel, and H. Humayun, "Performance of serial concatenated convolutional codes on faded channels," in *International Conference on Information Society (i-Society 2011)*, 2011, pp. 258–263.

[103] S. Ghosh, "Fast, efficient architectures for inner and outer decoders for serial concatenated convolutional codes," Dec. 30 2014, uS Patent 8,924,811. [Online]. Available: https://www.google.com/patents/US8924811.

[104] D. Divsalar and F. Pollara, "Serial and hybrid concatenated codes with applications," in *Proceedings of the Symposium Turbo Codes and Related Topics*, 1997, pp. 80–87.

[105] S. Benedetto, G. Montorsi, D. Divsalar, and F. Pollara, "Soft-input soft-output modules for the construction and distributed iterative decoding of code networks," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 9, no. 2, pp. 155–172, 1998. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1002/ett.4460090206.

[106] D. Divsalar and F. Pollara, "Hybrid concatenated codes and iterative decoding," 2000, uS Patent 6023783. [Online]. Available: https://www.google.com/patents/US6023783.

[107] H. Gonzalez, C. Berrou, and S. Kerouedan, "Serial/parallel (s/p) turbo codes for low error rates," in *IEEE International Conference on Communications*, vol. 1, 2004, pp. 346–350.

[108] N. von Deetzen and W. Henkel, "Decoder scheduling of hybrid turbo codes," in *IEEE International Symposium on Information Theory*, 2006, pp. 2255–2258.

[109] I. B. Oluwafemi and S. H. Mneney, "Hybrid concatenated super-orthogonal space-time frequency trellis coded mimo-ofdm systems," *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, vol. 8, no. 4, pp. 530–540, 2014.

[110] R. Bassoli, V. N. Talooki, H. Marques, J. Rodriguez, R. Tafazolli, and S. Mumtaz, "Hybrid serial concatenated network codes for burst erasure channels," in *2015 IEEE 81st Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, 2015, pp. 1–4.

[111] I. B. Oluwafemi, "Hybridconcatenated coding scheme for mimo systems," *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 5, no. 3, p. 464, 2015.

[112] J. L. Massey and M. K. Sain, "Codes, automata, and continuous systems: Explicit interconnections," in *Sixth Symposium on Adaptive Processes*, 1967, pp. 33–38.

[113] S. Benedetto and G. Montorsi, "Design of parallel concatenated convolutional codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 5, pp. 591–600, 1996.

[114] ——, "Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 409–428, 1996.

[115] B. Vucetic and J. Yuan, *Turbo codes: principles and applications*, ser. Kluwer international series in engineering and computer science. NY, USA: Springer Science + Business Media, LLC.

[116] D. Divsalar and F. Pollara, "Multiple turbo codes," in *Military Communications Conference, 1995. MILCOM '95, Conference Record, IEEE*, vol. 1, 1995, pp. 279–285.

[117] R. de A. Braga, M. J. de C. Lima, M. de L. M. G. Alcoforado, and V. C. da Rocha Jr., "Estudo de entrelaçadores para códigos convolucionais não-unicamente decodificáveis no canal aditivo com dois usuários binários," in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Brasília, Distrito Federal, Brasil, 2012, pp. 122–127.

[118] O. Y. Takeshita and D. J. Costello, "New classes of algebraic interleavers for turbo-codes," in *Proceedings. 1998 IEEE International Symposium on Information Theory (Cat. No.98CH36252)*, 1998, pp. 419–419.

[119] C. Berrou and A. Glavieux, "A. near optimum error correcting coding and decoding: Turbo-codes," *IEEE Transation Comunication*, vol. IT-44, no. 10, pp. 1261–1271, 1996.

[120] J. M. Wozencraft and B. Reiffen, *Sequential decoding*, ser. Technology Press research monographs. Published jointly by the Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and Wiley, New York, 1961. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=G6Z8AAAAIAAJ.

[121] J. L. Massey, *Threshold Decoding*, ser. Massachusetts Institute of Technology Research Monograph. Cambridge, Massachusetts, USA: M.I.T. Press, 1963. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=dz9rAAAAMAAJ.

[122] R. Fano, "A heuristic discussion of probabilistic decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 9, no. 2, pp. 64–74, 1963.

[123] A. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 260–269, 1967.

[124] W. J. Gross and P. G. Gulak, "Simplified MAP algorithm suitable for implementation of turbo decoders," *Electronics Letters*, vol. 34, no. 16, pp. 1577–1578, 1998.

[125] V. Franz and J. B. Anderson, "Concatenated decoding with a reduced-search bcjr algorithm," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 2, pp. 186–195, 1998.

[126] D. Fertonani, A. Barbieri, and G. Colavolpe, "Reduced-complexity bcjr algorithm for turbo equalization," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 55, no. 12, pp. 2279–2287, 2007.

[127] L. C. Perez, J. Seghers, and D. J. Costello, "A distance spectrum interpretation of turbo codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1698–1709, 1996.

[128] W. E. Ryan, "Concatenated convolutional codes and iterative decoding," in *Wiley Encyclopedia of Telecommunications*, J. G. Proakis, Ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2003, vol. 1, pp. 556–570. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=hORSAAAAMAAJ.

[129] S. Sharma, S. Attri, and F. C. Chauhan, "A simplified and efficient implementation of fpga-based turbo decoder," in *Proceedings of the IEEE International Performance, Computing, and Communications Conference*, 2003, pp. 207–213.

[130] A. Barbulescu and S. Pietrobon, "Interleaver design for turbo codes," *Electronics Letters*, vol. 30, pp. 2107–2108, 1994.

[131] W. Koch and A. Baier, "Optimum and sub-optimum detection of coded data disturbed by time-varying intersymbol interference (applicable to digital mobile radio receivers),"

in *Global Telecommunications Conference and Exhibition. 'Communications: Connecting the Future', GLOBECOM '90., IEEE*, 1990, pp. 1679–1684 vol.3.

[132] J. Erfanian, S. Pasupathy, and G. Gulak, "Reduced complexity symbol detectors with parallel structure for ISI channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 234, pp. 1661–1671, 1994.

[133] P. Robertson, E. Villebrun, and P. Hoeher, "A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain," in *ICC '95 Seattle, 'Gateway to Globalization', IEEE International Conference on Communications*, vol. 2, 1995, pp. 1009–1013.

[134] J. Hagenauer and P. Hoeher, "A Viterbi algorithm with soft-decision outputs and its applications," in *Global Telecommunications Conference and Exhibition 'Communications Technology for the 1990s and Beyond' (GLOBECOM), IEEE*, 1989, pp. 1680–1686 vol.3.

[135] J. Hagenauer, "Source-controlled channel decoding," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 9, pp. 2449–2457, 1995.

[136] G. D. Forney, "Convolutional codes II. maximum-likelihood decoding," *Information and Control*, vol. 25, no. 3, pp. 222–266, 1974. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/S0019-9958(74)90870-5.

[137] J. Hagenauer, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Transactions Information Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429–445, 1996.

[138] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill Higher Education, 2002.

[139] A. J. Viterbi, "An intuitive justification and a simplified implementation of the MAP decoder for convolutional codes," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 2, pp. 260–264, 1998.

[140] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Soft-output decoding algorithms in iterative decoding of turbo codes," in *The Telecommunications and Data Acquisition Progress Report*. Pasadena, CA, USA: Jet Propulsion Laboratory, 1996, pp. 63–87.

[141] M. C. Jeruchim, P. Balaban, and K. S. Shanmugan, Eds., *Simulation of Communication Systems: Modeling, Methodology and Techniques*, 2nd ed. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[142] M. Kovaci and H. Balta, "Performance of trellis termination methods for rsc component encoders of turbo codes," in *10th International Symposium on Electronics and Telecommunications*, 2012, pp. 111–114.

APÊNDICE A

Módulo SISO para um usuário

O módulo SISO, apresentado por Benedetto [93], em 1996, é um dispositivo de quatro portas que possui entradas suaves - medida de confiança sobre cada símbolo - na forma de sequências de razões de log-verossimilhança. Este apêndice descreve o processo de decodificação para um usuário utilizando módulos SISO que é utilizado para o algoritmo proposto, denotado Algoritmo SISO-SuD.

A.1 Decodificação

A decodificação baseia-se na probabilidade máxima *a posteriori* (MAP) de um símbolo ser emitido através de um canal de transmissão ruidoso sem memória. Dessa forma, baseado na inferência bayesiana, segundo a qual o conhecimento acerca de um evento pode ser atualizado a partir da manipulação de alguma outra informação *a priori*, a decodificação iterativa é proposta como solução no algoritmo MAP. Assim, considere o teorema de Bayes com um canal ruidoso aditivo gaussiano branco, logo a probabilidade *a posteriori* pode ser escrita, em um instante de observação t, na forma;

$$P\left(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k | \boldsymbol{z}_t\right) = \frac{P\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k\right) \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k\right]}{P\left(\boldsymbol{z}_t\right)} \tag{A.1}$$

para $\mathbf{u}^k \in \mathcal{U}$, em que a probabilidade *a posteriori* é definida em função da variável aleatória $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{g}_t$, que, por sua vez, representa uma amostra do sinal recebido e pode ser escrita como a soma do símbolo transmitido $\boldsymbol{u}_t$ com AWGN, denotado por $\boldsymbol{g}_t$. Além disso, $\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k$ indica que $\boldsymbol{u}_t$ pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^k, \ldots, \mathbf{u}^{2^k}\}$ e representa que o k-ésimo símbolo foi transmitido entre os 2^k possíveis pertencentes ao conjunto do espaço

vetorial $\mathcal{U}$.

Quanto à função densidade de probabilidade do sinal recebido $\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{z}_t$, considerando todos conjunto de sinais transmitidos, tem-se que

$$P\left(\boldsymbol{z}_t\right) = \sum_{u_t : P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k) \neq 0} P\left(\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k\right) \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k\right]. \tag{A.2}$$

Para o caso binário, o alfabeto de $\mathbf{u}^k$ é $\{-1, +1\}$, e modulação BPSK, as funções densidade de probabilidade $P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = -1\right)$ e $P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = +1\right)$ da variável $\boldsymbol{r}_t$, condicionada aos símbolos transmitidos $u_t = -1$ e $u_t = +1$, são chamadas de *funções de verossimilhança*.

Uma regra de decisão abrupta bastante conhecida, chamada de regra de *máxima verossimilhança*, decide pelo símbolo transmitido com base no maior valor da função de log-verossimilhança. A regra de decisão MAP pode ser expressa em termos da probabilidade *a posteriori* na forma:

$$P\left(u_t = +1 | \boldsymbol{z}_t\right) \underset{\hat{u}_t^{(j)} = +1}{\overset{\hat{u}_t^{(j)} = -1}{\gtrless}} P\left(u_t = -1 | \boldsymbol{z}_t\right). \tag{A.3}$$

Aplicando o teorema de Bayes para um canal, tem-se:

$$P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = +1\right) \mathrm{P}\left[u_t = +1\right] \underset{\hat{u}_t^{(j)} = +1}{\overset{\hat{u}_t^{(j)} = -1}{\gtrless}} P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = -1\right) \mathrm{P}\left[u_t = -1\right]. \tag{A.4}$$

Em termos do logaritmo da razão entre as densidades de probabilidade condicionais, tem-se:

$$\ln\left(\frac{P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = +1\right) \mathrm{P}\left[u_t = +1\right]}{P\left(\boldsymbol{z}_t | u_t = -1\right) \mathrm{P}\left[u_t = -1\right]}\right) \underset{\hat{u}_t^{(j)} = +1}{\overset{\hat{u}_t^{(j)} = -1}{\gtrless}} 0. \tag{A.5}$$

A.2 Módulo SISO

O módulo SISO, apresentado por Benedetto [93], consiste em um dispositivo que possui entradas suaves - medida de confiança sobre cada símbolo - na forma de sequências de razões de log-verossimilhança (LLR), a saber $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}; I)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}; I)$, e produz saídas, também suaves, na forma de versões atualizadas de LLR, a saber $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}; O)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}; O)$. As saídas são calculadas por um algoritmo de decodificação que utiliza a regra MAP, baseada nas entradas e no conhecimento da treliça utilizada na codificação, conforme será visto. A representação gráfica do módulo pode ser observada na Figura A.1 [93–97, 105, 113, 114].

Para uma sequência de símbolos binários de informação, $\boldsymbol{u}_1^N = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_t, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$, denotando a mensagem a ser codificada, tem-se o símbolo $\boldsymbol{u}_t$, observado no instante t, pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \ldots, \mathbf{u}^{|\mathcal{U}|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{U}|$. Este é associado à

Figura A.1: *Módulo com entrada suave e saída suave para um usuário.*

sequência de símbolos de saída, denotadas as sequências-código por $\boldsymbol{v}_1^N = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$, em que $\boldsymbol{v}_t$ é o sub-bloco do código observado no instante t, pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{|\mathcal{V}|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{V}|$. As razões de log-verossimilhança de entrada podem ser definidas na forma [119]

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u};I) = [\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_1;I), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_2;I), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_N;I)]\,; \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v};I) = [\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_1;I), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_2;I), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_N;I)]\,. \tag{A.7}$$

O algoritmo de decodificação MAP, utilizado no módulo SISO, estima os símbolos transmitidos a partir das LLR de entradas suaves, no instante de observação t, na forma

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u}_t;I)}\right), \tag{A.8}$$

em que k, $1 \leq k \leq |\mathcal{U}|$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}^k$ são arbitrariamente escolhidos e pertencem ao subespaço vetorial. Analogamente,

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t;I)}\right); \tag{A.9}$$

em que l, $1 \leq l \leq |\mathcal{V}|$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}^l$ são arbitrariamente escolhidos e pertencentes ao subespaço vetorial $\mathcal{V}$. Em que $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)$ denotam as probabilidades *a priori* associadas, respectivamente, aos símbolos de entrada e às sequências-código, no instante de observação t.

O módulo SISO produz como saída as LLR atualizadas, $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O)$, calculadas por um algoritmo de decodificação MAP, baseado nas entradas $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)$ e no conhecimento da treliça empregada na codificação. Portanto,

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u};O) = [\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_1;O), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_2;O), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_N;O)]\,; \tag{A.10}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v};O) = [\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_1;O), \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_2;O), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O), \ldots, \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_N;O)]\,. \tag{A.11}$$

em que, a cada observação t, tem-se

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u}_t;O)}\right); \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t;O)}\right); \tag{A.13}$$

em que $\mathbf{u}$ é arbitrariamente escolhido e pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U}$ e $\mathbf{v}$ é arbitrariamente escolhido e pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{V}$. Em que $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O)$ denotam as probabilidades *a posteriori* associadas aos símbolos de entrada e às sequências-código, respectivamente.

A.2.1 Seção de Treliça

Com o objetivo de facilitar a exposição do trabalho, serão adotadas algumas notações apresentadas em [93]. O comportamento de um codificador convolucional pode ser completamente estabelecido a partir de sua treliça com um conjunto de estados. Assim, considere uma treliça com um conjunto de M estados na forma $\mathcal{S} = \{s^1, s^2, \ldots, s^M\}$, na qual cada sub-bloco do código é determinado a partir da relação entre os estados e os símbolos de entrada. Sem perda de generalidade, a cada instante t é associada uma observação.

Em Benedetto [93], dado um conjunto de entrada pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U}$, com cardinalidade $|\mathcal{U}|$, cada transição entre os estados é denominada de ramo, logo $\mathcal{E} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(|\mathcal{U}|\times M)}\}$ define o conjunto de todos os possíveis ramos presentes na treliça. Ou seja, para um dado instante de observação t, uma seção de treliça define a transição do estado atual S_t para o próximo estado S_{t+1}, em que $S_t = s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_{t+1} = s^E(e^{(i)})$ e $S_t, S_{t+1} \in \mathcal{S}$, em um total de M estados possíveis e distintos - ver Figura A.2 - definem as funções associadas a cada ramo $e^{(i)}$, em que $e^{(i)} \in \mathcal{E}$ e $1 \leq i \leq (|\mathcal{U}| \times M)$, na forma:

- ▷ Estado atual - $S_t = s^S(e^{(i)})$, em que $S_t = s^S(e^{(i)}) \in \mathcal{S}$;
- ▷ Próximo estado - $S_{t+1} = s^E(e^{(i)})$, em que $S_{t+1} = s^E(e^{(i)}) \in \mathcal{S}$;
- ▷ Símbolos de entrada associados ao ramo $e^{(i)}$ - $\boldsymbol{u}_t(e^{(i)}) \in \mathcal{U}$;
- ▷ Símbolos de saída associados ao ramo $e^{(i)}$ - $\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})$.

Note que, para $0 \leq i, j \leq |\mathcal{U}| \times M$ no instante de observação $t+1$, verifica-se que $S_{t+1} = s^S(e^{(j)}) \rightarrow S_{t+2} = s^E(e^{(j)})$. Por outro lado, na transição de estados em t, em que $S_t = s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_{t+1} = s^E(e^{(i)})$, o estado final $S_{t+1} = s^E(e^{(i)})$ torna-se o estado inicial em $t+1$, a saber, $S_{t+1} = s^S(e^{(j)})$.

Para uma transição no ramo $e^{(i)}$, em que $0 \leq i \leq (|\mathcal{U}| \times M)$, entre os estados atual e próximo, pode-se definir uma dupla $(s^S(e^{(i)}); s^E(e^{(i)}))$ que determina unicamente o símbolo de informação e símbolo do codificador correspondente $(\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})); \boldsymbol{v}_t(e^{(i)}))$ - ver Figura A.2. As relações entre as funções definidas dependem de um codificador particular. Para um

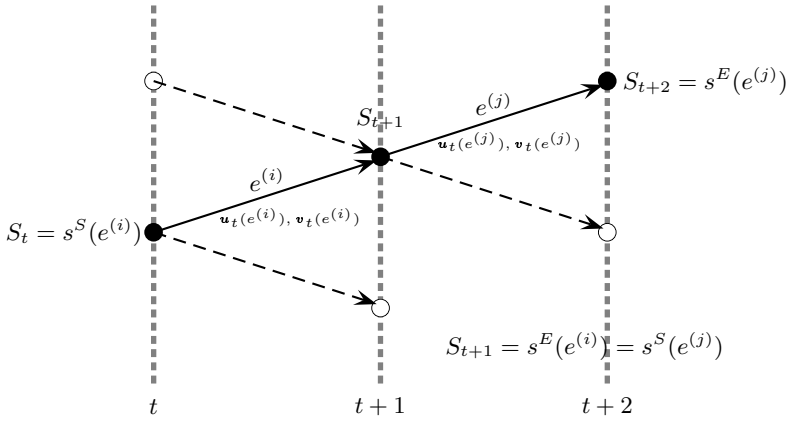


Figura A.2: *Seção retirada da treliça em instantes de observação consecutivos, em que* $0 \leq i, j \leq |\mathcal{U}| \times M$.

codificador, o estado atual e a sequência de entrada $(s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}))$ definem unicamente o próximo estado e o sub-bloco do código $(s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{v}_t(e^{(i)}))$.

A.2.2 Algoritmo SISO

Considere uma fonte de informação que gera uma sequência de símbolos de entrada a ser codificada $\boldsymbol{u}_1^N = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_t, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$, em que, cada símbolo de entrada corresponde a $\boldsymbol{u}_t = \{u_t^{(1)}, u_t^{(2)}, \ldots, u_t^{(k)}\}$, para $1 \leq t \leq N$, com distribuição de probabilidade $P(\mathbf{u}^k) = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k\right]$, $\mathbf{u}^k \in \mathcal{U}$. A sequência dos símbolos de entrada é codificada, associando-se à sequência de saída $\boldsymbol{v}_1^N = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$, em que, cada símbolo de saída é dado por $\boldsymbol{v}_t = \{v_t^{(1)}, v_t^{(2)}, \ldots, v_t^{(k)}\}$, para $1 \leq t \leq N$.

A função do algoritmo SISO é maximizar a probabilidade *a posteriori* de qualquer símbolo de informação $\boldsymbol{u}_t$, ser $\mathbf{u}^k \in \mathcal{U}$, em um dado instante de observação t, conhecendo uma sequência $\boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$, de comprimento N, denotado sequência de observação, em que $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)} \ldots, z_t^{(n)}\}$, $1 \leq j \leq n$. Por definição, probabilidade *a posteriori* da mensagem no instante de tempo t, é dada por;

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) \triangleq P\left(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k | \boldsymbol{z}_1^N\right). \tag{A.14}$$

A.2.2.1 Probabilidade *a posteriori* de uma Mensagem

Dado que os eventos de transição entre cada estado são mutuamente exclusivos, a probabilidade de qualquer um deles ocorrer é igual à soma das probabilidades individuais, portanto,

tem-se

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) = \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} P\left(\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}) | \boldsymbol{z}_1^N\right), \tag{A.15}$$

em que $e^{(i)}$ é o i-ésimo ramo da treliça associada ao processo de codificação, com $e^{(i)} \in \mathcal{E}$ e $1 \leq i \leq (|\mathcal{U}| \times M)$, como apresentado na Seção A.2.1.

Os codificadores convolucionais são gerados por sistemas sequênciais bem definidos. Em um determinado instante t, a saída do sistema é $\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})$, como função da entrada $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})$ e da transição de estados estado $S_{t-1} = s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_t = s^E(e^{(i)})$, dentro de um total de M estados possíveis e distintos, de modo que é possível dimensionar a Equação A.15 a partir da probabilidade conjunta na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}) | \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \frac{P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right)}{P(\boldsymbol{z}_1^N)}.\end{aligned} \tag{A.16}$$

A probabilidade $P(\boldsymbol{z}_1^N)$ é independente do somatório e constante, então tem-se que

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right), \tag{A.17}$$

de modo que não se interfere na regra MAP. A sequência observada $\boldsymbol{z}_1^N$ pode ser decomposta em três componentes, a saber, $\boldsymbol{z}_1^{t-1}$, z_t e $\boldsymbol{z}_{t+1}^N$, assim,

$$\begin{aligned}&P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ &= P\Big(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}, z_t, \boldsymbol{z}_{t+1}^N\Big) \\ &= P\Big(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | z_t, \boldsymbol{z}_1^{t-1}; S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)})\Big)\, P\Big(z_t, \boldsymbol{z}_1^{t-1}; S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)})\Big).\end{aligned} \tag{A.18}$$

Uma consideração importante pode ser feita com base na observação de que eventos anteriores não irão interferir na avaliação condicional, pois o estado $S_t = s^E(e^{(i)}$ é conhecido, logo

$$\begin{aligned}&P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ &\qquad = P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t = s^E(e^{(i)})\right) P\left(z_t, \boldsymbol{z}_1^{t-1}; S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)})\right).\end{aligned} \tag{A.19}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional ao termo mais à direita, tem-se

$$\begin{aligned} & P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}), S_t=s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ & = P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t=s^E(e^{(i)})\right) P\left(S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right) \\ & \qquad P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right) \qquad \text{(A.20)} \\ & = P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t=s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)})\right] \\ & \qquad P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right). \qquad \text{(A.21)} \end{aligned}$$

Considerando a definição

$$A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) \triangleq P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right); \qquad \text{(A.22)}$$

$$B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \triangleq P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t=s^E(e^{(i)})\right), \qquad \text{(A.23)}$$

tem-se

$$\begin{aligned} & P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}), S_t=s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right) = \\ & = A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)})\right]. \qquad \text{(A.24)} \end{aligned}$$

Consequentemente, a Equação (A.17) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)})\right]; \qquad \text{(A.25)}$$

Note que o cálculo $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)$ é estabelecido por uma relação baseada nas observações de acontecimentos passados, presentes e futuros, no tempo de observação t. Essa afirmação se torna verdade a partir do momento que $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) \triangleq P\left(S_{t-1}=s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right)$ define a probabilidade de permanecer no estado $s^S(e^{(i)})$ com a sequência $\boldsymbol{z}_1^{t-1}$ no instante $t-1$; $\mathrm{P}\left[S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)})\right]$ define a probabilidade de surgir um símbolo z_t dado que houve a transição $s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_t = s^E(e^{(i)})$ no instante t; e, por sua vez, $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \triangleq P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t=s^E(e^{(i)})\right)$ define a probabilidade da sequência $\boldsymbol{z}_{t+1}^N$ conhecendo o estado $S_t = s^E(e^{(i)})$.

Como o estado $S_t = s^E(e^{(i)})$ e a saída $\mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})$ são unicamente identificados pelo par $(\boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_(t-1)^S(e^{(i)}))$, a estimativa $\mathrm{P}\left[S_t=s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1}=s^S(e^{(i)})\right]$ pode ser reescrita

na forma

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); z_t | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] = \\
&= \frac{\mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_{t-1} = s^S(e^{(i)}); z_t\right]}{\mathrm{P}\left[S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right]} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right]}{\mathrm{P}\left[S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right]} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}) | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right]}{\mathrm{P}\left[S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right]} \\
&= \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}), S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}) | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] \\
&= \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right]. \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

A probabilidade $\mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right]$ depende exclusivamente do símbolo de entrada $\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})$ não havendo qualquer conhecimento prévio para sua estimativa, também referida como probabilidade *a priori* do símbolo de entrada $\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})$). Assim, tem-se $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I) = \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]$.

Em adição, sabe-se que o decodificador convolucional deve dispor da treliça utilizada na codificação, portanto ele realiza a estiva da probabilidade $\mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]$. Devido a essa suposição, é calculada a probabilidade de uma determinada variável aleatória z_t ser recebida dado que um símbolo de saída $\mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)}$ foi enviado ao canal. A essa estimativa é dado o nome de probabilidade *a posteriori* do símbolo de saída com referência ao canal, logo, $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I) = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]$.

Portanto, para o cálculo da estimativa atualizada, no instante de observação t, do símbolo de entrada $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)$, a Equação (A.27) pode ser reescrita na forma

$$
\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[z_t | \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u} = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right], \qquad \text{(A.27)}
$$

e, das definições $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I) = \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I) = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]$, tem-se

$$
\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\mathbf{u}; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I) P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I), \qquad \text{(A.28)}
$$

como a probabilidade $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I)$ é constante devido ao índice do somatório, tem-se

$$
\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) \propto P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I) \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[z_t | \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right]. \qquad \text{(A.29)}
$$

Por fim, as métricas $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)$ e $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right)$ podem ser determinadas de forma recursiva.

Métrica $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)$:

Inicialmente, considere a métrica $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)$, definida na forma

$$A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) = P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right), \tag{A.30}$$

que, em um instante t consecutivo a $t-1$, tem-se da treliça, $S_{t-1} = s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_t = s^E(e^{(i)})$, logo,

$$\begin{aligned} A_t\left(s^S(e^{(i)})\right) &= P\left(S_t = s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}, z_t\right); \\ &= \sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}).\boldsymbol{z}_1^{t-1}, z_t\right). \end{aligned} \tag{A.31}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, tem-se

$$\begin{aligned} A_t\left(s^S(e^{(i)})\right) = \sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} & P\left(S_t = s^E(e^{(i)}), z_t | S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right) \\ & P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right) \\ = \sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} & \mathrm{P}\left[S_t = s^E(e^{(i)}); z_t | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right), \end{aligned} \tag{A.32}$$

logo, das equações $\mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); z_t | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right]$ e $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) = P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right)$, tem-se

$$\begin{aligned} A_t\left(s^S(e^{(i)})\right) &= \sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right] A_{t-1}\left[s^S(e^{(i)})\right] \\ &= \sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I) P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I) A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right), \end{aligned} \tag{A.33}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$A_0\left(s^S(e^{(i)}) = S_0\right) = 1; \tag{A.34}$$

$$A_0\left(s^S(e^{(i)}) \neq S_0\right) = 0; \tag{A.35}$$

em atenção à necessidade das treliças iniciarem no estado S_0.

Métrica $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right)$:

De maneira similar, para a métrica $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right)$, tem-se que

$$B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) = P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t = s^E(e^{(i)})\right). \tag{A.36}$$

A partir da definição de distribuição de probabilidades marginais em $t+1$, note que, sobre a treliça, a probabilidade $\mathrm{P}\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t = s^E(e^{(i)})\right)$ é igual ao somatório de todas as probabilidades que vão para os estados $S_t = s^E(e^{(i)})$ - ou seja, o conjunto de todos $S_t = s^S(e^{(i)}) \rightarrow S_{t+1} = s^E(e^{(i)})$ -, logo,

$$\begin{aligned} B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) &= \sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N; S_{t+1} = s^E(e^{(i)}) | S_t = s^S(e^{(i)})\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} P\left(\boldsymbol{z}_{t+2}^N | S_t = s^S(e^{(i)}), S_{t+1} = s^E(e^{(i)})\right) \\ &\qquad \mathrm{P}\left[S_{t+1} = s^E(e^{(i)}); z_{t+1} | S_t = s^S(e^{(i)})\right], \end{aligned} \tag{A.37}$$

logo, das equações $\mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); z_t | S_{t-1} = s^S(e^{(i)})\right] = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{u}^k = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right]$ e $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) = P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_t = s^E(e^{(i)})\right)$, tem-se

$$\begin{aligned} B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) &= \sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] \mathrm{P}\left[\mathbf{u}^k = \boldsymbol{u}_t(e^{(i)})\right] \\ &= \sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I) P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I), \end{aligned} \tag{A.38}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$B_N\left(s^S(e^{(i)}) = S_N\right) = 1; \tag{A.39}$$

$$B_N\left(s^S(e^{(i)}) \neq S_N\right) = 0. \tag{A.40}$$

Levando em conta a necessidade de as treliças terminarem no estado conhecido S_N, caso o estado final seja indeterminado, este pode ser aplicado às condições

$$B_N\left(s^S(e^{(i)}) = S_N\right) = \frac{1}{M}; \tag{A.41}$$

$$B_N\left(s^S(e^{(i)}) \neq S_N\right) = 0. \tag{A.42}$$

Esta é uma condição aceitável visto que, dentre os M estados possíveis, apenas um será escolhido como o atual [142].

A.2.2.2 Probabilidade *a posteriori* do Sub-bloco do Código

Por outro lado, o algoritmo também maximiza a probabilidade *a posteriori* de qualquer sub-bloco do código $\boldsymbol{v}_t$, em um dado instante de observação t, conhecendo uma sequência

$\boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_t, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$ de comprimento N. Denotando a sequência de observação em que $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)} \ldots, z_t^{(n)}\}$, $1 \leq j \leq n$, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O) &= P\left(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}^l | \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} P\left(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}^l | \boldsymbol{z}_1^N\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} \frac{P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right)}{P\left(\boldsymbol{z}_1^N\right)}. \end{aligned} \tag{A.43}$$

A probabilidade $P\left(\boldsymbol{z}_1^N\right)$ é independente do somatório e constante, então, tem-se

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} P\left(S_{t-1} = s^S(e^{(i)}), S_t = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_1^N\right), \tag{A.44}$$

que, como visto no cálculo da probabilidade $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)$, pode-se reescrever na forma

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O) \propto \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left[s^S(e^{(i)})\right] B_t\left[s^E(e^{(i)})\right] P_{\mathbf{u}^k}\left(\boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); I\right) P_{\mathbf{v}^l}\left(\boldsymbol{v}_t(e^{(i)}); I\right). \tag{A.45}$$

Nota-se, ainda, que a probabilidade $P_{\mathbf{u}^k}\left(\boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); I\right)$ é constante devido ao índice do somatório, assim

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O) \propto P_{\mathbf{v}^l}\left(\boldsymbol{v}_t(e^{(i)}); I\right) \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{u}^k}\left(\boldsymbol{u}_t(e^{(i)}); I\right); \tag{A.46}$$

em que $A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)$ e $B_t\left(s^E(e^{(i)})\right)$ são calculados da mesma forma apresentada para $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)$.

Para casos de transmissão em canais sem memória, as distribuições de probabilidade associadas às sequências-código $P_{\mathbf{v}^l}\left(\boldsymbol{v}_t(e^{(i)}); I\right)$ podem ser determinadas na forma

$$P_{\mathbf{v}^l}\left(\boldsymbol{v}_t(e^{(i)}); I\right) = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}^l = \boldsymbol{v}_t(e^{(i)})\right] = \prod_{j=1}^{n} P_{v^{(j)}}\left(v_t^{(j)}(e^{(i)}; I)\right), \tag{A.47}$$

em que cada símbolo de saída $\mathbf{v}^l = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(j)}, \ldots, v^{(n)}\}$ em um determinado instante de observação e $P_{v^{(j)}}\left(v_t^{(j)}(e^{(i)}); I\right) = P\left[z_t^{(j)} | v^{(j)} = v_t^{(j)}\right]$, $1 \leq j \leq n$ e $v^{(j)}$ pertencem ao alfabeto das sequências-código. Ou seja, a probabilidade *a posteriori* do sub-bloco do código $\boldsymbol{v}_t$ é dada pelo produto das probabilidades *a posteriori* de cada componente $v^{(j)}$, no instante de observação dado. Por exemplo, para casos de transmissão através de canais gaussianos com média zero e variância σ^2,

$$P\left(v^{(j)}; I\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z_t^{(j)} - v^{(j)})^2}{2\sigma^2}\right), \tag{A.48}$$

logo,

$$P_{\mathbf{v}^l}\left(\boldsymbol{v}_t(e^{(i)});I\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{(z_t^{(j)} - v^{(j)})^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n}(z_t^{(j)} - v^{(j)})^2}{2\sigma^2}\right). \quad \text{(A.49)}$$

A.2.3 Razões de Log-Verossimilhança

O algoritmo SISO é escrito utilizando as probabilidades *a posteriori* $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)$ para obter as LLR:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) \triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u}_t;O)}\right) = \ln\left(\frac{P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k|\boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}|\boldsymbol{z}_1^N)}\right); \quad \text{(A.50)}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O) \triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t;O)}\right) = \ln\left(\frac{P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}^l|\boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}|\boldsymbol{z}_1^N)}\right). \quad \text{(A.51)}$$

A regra de decisão será: se $P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k|\boldsymbol{z}_1^N) = P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se $\mathbf{u}^k$ ou $\mathbf{u}$ com igual probabilidade, arbitrariamente. Caso $P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}^k|\boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{u}_t = \mathbf{u}|\boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{u}^k$; caso contrário, $\mathbf{u}$. Analogamente, para o sub-bloco do código, tem-se que: se $P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}^l|\boldsymbol{z}_1^N) = P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se arbitrariamente $\mathbf{v}^l$ ou $\mathbf{v}$. Caso $P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}^l|\boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}|\boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{v}^l$; caso contrário, $\mathbf{v}$. De forma analítica, o decodificador estima o símbolo $\hat{\boldsymbol{u}}_t$ e o sub-bloco do código $\hat{\boldsymbol{v}}_t$ sobre as razões de log-verossimilhança no instante de observação t, na seguinte forma:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_t = \begin{cases} \mathbf{u}^k & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) \geq 0 \\ \mathbf{u} & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) < 0 \end{cases}; \quad \text{(A.52)}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_t = \begin{cases} \mathbf{v}^l & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O) \geq 0 \\ \mathbf{v} & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O) < 0 \end{cases}. \quad \text{(A.53)}$$

Para $\boldsymbol{u}_t \in \mathcal{U}$, é necessário realizar o cálculo de $|\mathcal{U}| - 1$ razões de log-verossimilhança, assim como para $\boldsymbol{v}_t \in \mathcal{V}$ é necessário $|\mathcal{V}| - 1$ razões de log-verossimilhança.

Do Algoritmo SISO, tem-se as equações (A.54) e (A.55):

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O) \propto P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I) \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I); \quad \text{(A.54)}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O) \propto P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I) \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{v}_t;I). \quad \text{(A.55)}$$

Logo, pode-se definir

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O) \propto P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)\, P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O); \tag{A.56}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O) \propto P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)\, P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O), \tag{A.57}$$

em que

$$P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O) = \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I), \tag{A.58}$$

e

$$P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O) = \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I). \tag{A.59}$$

As distribuições de probabilidades $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)$ representam a *informação extrínseca* a ser propagada através dos decodificadores, sendo calculadas a partir das restrições do codificador e distribuições de probabilidades das sequências de entrada $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)$.

Para redução da complexidade computacional do algoritmo SISO, também chamado algoritmo Log-MAP, pode ser aplicado o logaritmo nas métricas, na forma

$$\begin{aligned}\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) &\triangleq \ln A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)\\ &\propto \ln\left(\sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} \frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v};I)}\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u};I)} A_t\left(s^S(e^{(i)})\right)\right)\\ &\propto \ln\left(\sum_{e^{(i)}:s^E(e^{(i)})=S_t} \exp\left(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)+a_t\left(s^S(e^{(i)})\right)\right)\right),\end{aligned} \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned}\beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) &\triangleq \ln B_t\left(s^E(e^{(i)})\right);\\ &\propto \ln\left(\sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} B_{t+1}\left(s^E(e^{(i)})\right)\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v};I)}\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;I)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u};I)}\right)\\ &\propto \ln\left(\sum_{e^{(i)}:s^S(e^{(i)})=S_t} \exp\left(\beta_{t+1}\left(s^E(e^{(i)})\right)+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)\right)\right),\end{aligned} \tag{A.61}$$

assim, considerando que $\lim_{x\to\infty} x \to \infty$, as novas condições de contorno serão assumidas como

$$\alpha_0\left(s^S(e^{(i)}) = S_0\right) = 0; \tag{A.62}$$

$$\alpha_0\left(s^S(e^{(i)}) \neq S_0\right) = -\infty; \tag{A.63}$$

e

$$\beta_N\left(s^S(e^{(i)}) = S_N\right) = 0; \tag{A.64}$$

$$\beta_N\left(s^S(e^{(i)}) \neq S_N\right) = -\infty. \tag{A.65}$$

Isto implica em dois importantes resultados: são permitidos (a) o uso direto das $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t; I)$ e $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t; I)$ no cálculo das probabilidades $P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I)$ e $P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I)$, reduzindo, assim, o número de operações computacionais e utilizações de memória; e (b) a transformação de um algoritmo multiplicativo em aditivo [97, pag.163]. Desse modo,

$$P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) = \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\ln\left(A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t; I)}\right)\right), \tag{A.66}$$

em que $\mathbf{v}$ é arbitrariamente escolhido no subespaço vetorial $\mathcal{V}$. Como $P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t; I)$ é constante, ela não interfere nas decisões do Algoritmo SISO - equações (A.50) e (A.51). Logo, a probabilidade *a posteriori* da mensagens no instante de observação t tem a forma

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O) &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\ln\left(A_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) B_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t; I)}\right)\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; I)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t; I)}\right)\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t; I)\right). \end{aligned} \tag{A.67}$$

Analogamente, para $P(\boldsymbol{v}_t; O)$, tem-se

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t; O) &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; I)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u}_t; I)}\right)\right) \\ &= \sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t; I)\right). \end{aligned} \tag{A.68}$$

A Tabela **??** descreve o Algoritmo SISO para o cálculo das razões de log-verossimilhança *a posteriori* das sequências das mensagens e do sub-bloco do código, em um dado instante de observação t.

As razões de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t; O)$ e $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t; O))$ são obtidas da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t; O) &\triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t; O)}{P_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{u}_t; O)}\right); \\ &= \ln\left(\frac{\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t; I)\right)}{\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t; I)\right)}\right); \end{aligned} \tag{A.69}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O) &\triangleq \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)}{P_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{v}_t;O)}\right);\\ &= \ln\left(\frac{\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}^l}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)+\beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right)+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)\right)}{\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{v}_t(e^{(i)})=\mathbf{v}}\exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)+\beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right)+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)\right)}\right). \quad \text{(A.70)}\end{aligned}$$

O objetivo do decodificador é decidir pelos símbolos $\hat{\boldsymbol{u}}_t = \mathbf{u}^k \in \mathcal{U}$ e $\hat{\boldsymbol{v}}_t = \mathbf{v}^l \in \mathcal{V}$, com $1 \leq k \leq |\mathcal{U}|$ e $1 \leq l \leq |\mathcal{V}|$, de maneira a diminuir a probabilidade de erro $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)$ e $\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)$, dessa forma, calculando $\mathcal{U}$ estimativas para $\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\mathbf{u}^k;O)$ para os símbolos de informação e $\mathcal{V}$ estimativas para $\tilde{P}_{\mathbf{v}^k}(\mathbf{v}^k;O)$ para os sub-blocos do código. A regra de decisão é dada por

$$\hat{\boldsymbol{u}}_t = \mathbf{u}^k = \arg\max_k\left(\tilde{P}_{\mathbf{u}^k}(\boldsymbol{u}_t;O)\right); \quad \text{(A.71)}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_t = \mathbf{v}^l = \arg\max_l\left(\tilde{P}_{\mathbf{v}^l}(\boldsymbol{v}_t;O)\right). \quad \text{(A.72)}$$

A decisão do decodificador sobre os símbolos $\hat{\boldsymbol{u}}_t$ e $\hat{\boldsymbol{v}}_t$ pode ser efetuada diretamente das LLR obtidas a partir do decodificador, na forma que segue:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_t = \mathbf{u}^k = \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O)\right)\arg\max_k\left(|\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O)|\right); \quad \text{(A.73)}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_t = \mathbf{v}^l = \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O)\right)\arg\max_l\left(|\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O)|\right); \quad \text{(A.74)}$$

em que $\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O)|\right)$ e $\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O)|\right)$ representam o sinal das LLR $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;O)$, respectivamente. Para a decisão a partir das LLR fornecidas pelo decodificador SISO, é necessário o cálculo de $|\mathcal{U}|-1$ estimativas para os símbolos de informação e $|\mathcal{U}|-1$ para as sequências-código.

Em Benedetto [93], dois módulos SISO, operando de forma cooperativa com uma versão modificada do Algoritmo BCJR [119] embutido, fornece informações suaves a respeito dos símbolos de informação transmitidos, em um esquema decodificação iterativa de colaboração mútua paralela ou serial.

A.3 Algoritmo SISO de Baixa Complexidade

Com o objetivo de reduzir a complexidade computacional que é exigida nos cálculos efetuados pelo algoritmo MAP, em 1998, Viterbi [139] propôs uma simplificação para o algoritmo de decodificação MAP, utilizados no módulo SISO, abordado nas seções anteriores, denotado pelo Algoritmo SISO-LC [93]. Inicialmente, pode-se observar que a Equação(A.69), que

corresponde à informação extrínseca da mensagem, pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) = \ln &\left(\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)\right)\right) \\ &- \ln\left(\sum_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}} \exp\left(\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)\right)\right). \quad \text{(A.75)}\end{aligned}$$

Como cada parcela do lado direito desta equação é um somatório de exponenciais, uma aproximação que pode ser efetuada consiste em se igualar cada somatório ao elemento de maior expoente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;O) \approx &\max_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}^k} \left\{\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)\right\} \\ &- \max_{e^{(i)}:\boldsymbol{u}_t(e^{(i)})=\mathbf{u}} \left\{\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) + \beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I)\right\}. \quad \text{(A.76)}\end{aligned}$$

Percebe-se, então, a primeira redução computacional obtida, uma vez que, como já foi dito, operações de soma requerem menor esforço computacional do que as operações de multiplicação. Para computar as parcelas da expressão acima, cálculos recursivos como os executados em (A.33) e (A.38) devem ser efetuados. Para tal, deve-se aplicar o logaritmo neperiano nos dois lados destas equações e executar as mesmas simplificações efetuadas em (A.75) para chegar a (A.76).

As equações A.60 e A.60 explicitam, respectivamente, os cálculos aproximados dos parâmetros $\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right)$ e $\beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right)$, assim como os valores de inicialização dos mesmos. Para o cálculo, basta que se aplique o logaritmo neperiano no resultado, na forma

$$\alpha_{t-1}\left(s^S(e^{(i)})\right) \approx \max_{e^{(i)}:\boldsymbol{s}^E(e^{(i)})=S_t} \left\{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I) + \alpha_t\left(s^S(e^{(i)})\right)\right\}; \quad \text{(A.77)}$$

$$\beta_t\left(s^E(e^{(i)})\right) \max_{e^{(i)}:\boldsymbol{s}^S(e^{(i)})=S_t} \left\{\beta_{t+1}\left(s^E(e^{(i)})\right) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_t;I) + \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_t;I)\right\}. \quad \text{(A.78)}$$

No cálculo de todas as expressões do algoritmo de baixa complexidade é necessário apenas que se armazenem os valores máximos de somatórios. Este fato acarreta na segunda simplificação computacional deste algoritmo, em relação ao MAP tradicional: a diminuição no uso de memória.

A.4 Estrutura dos Decodificadores

A decodificação dos códigos turbo funciona através de um processo iterativo onde há troca de informações entre os decodificadores, visando a diminuição da BER. As figuras A.3, A.4

e A.5 mostram as estruturas dos decodificadores para codificadores convolucionais concatenados em paralelo, em série e na forma híbrida, respectivamente [93–97, 105, 113, 114].

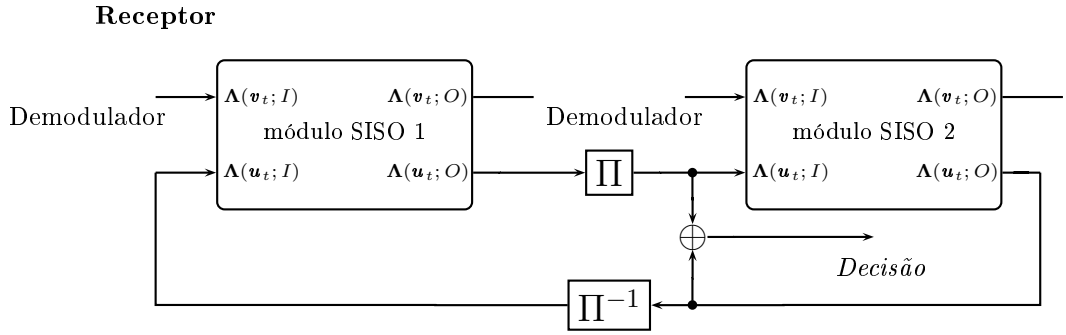


Figura A.3: *Decodificador iterativo para codificadores convolucionais concatenado em paralelo para um usuário.*

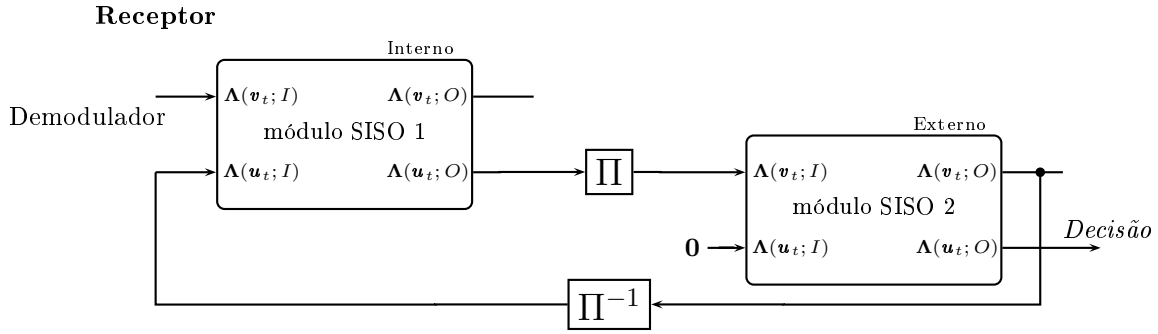


Figura A.4: *Decodificador iterativo para codificadores convolucionais concatenado em série para um usuário.*

A Figura A.5(a) estrutura do decodificador global e a Figura A.5(b) decodificador local utilizado pelo decodificador global [97, 104, 105, 108].

Estas estruturas, que são similares à do codificador, consiste em dois decodificadores interligados através de um entrelaçador igual ao utilizado no codificador. Cada decodificador componente tem duas entradas, denominadas informação *a priori*, e duas saídas, denominadas informação *a posteriori*. A cada iteração, os decodificadores trocam informações entre si e, com isso, a certeza sobre os bits tende a aumentar e, portanto, a probabilidade de erro de bit tende a diminuir. O ganho obtido através da troca de informações diminui a cada iteração e, por isso, geralmente se limita a decodificação em oito iterações, devido ao custo-benefício da alta complexidade de decodificação. A saída de cada decodificador fornece um número real que representa a probabilidade de um bit ser 0 ou 1. Este valor é representado em termos do

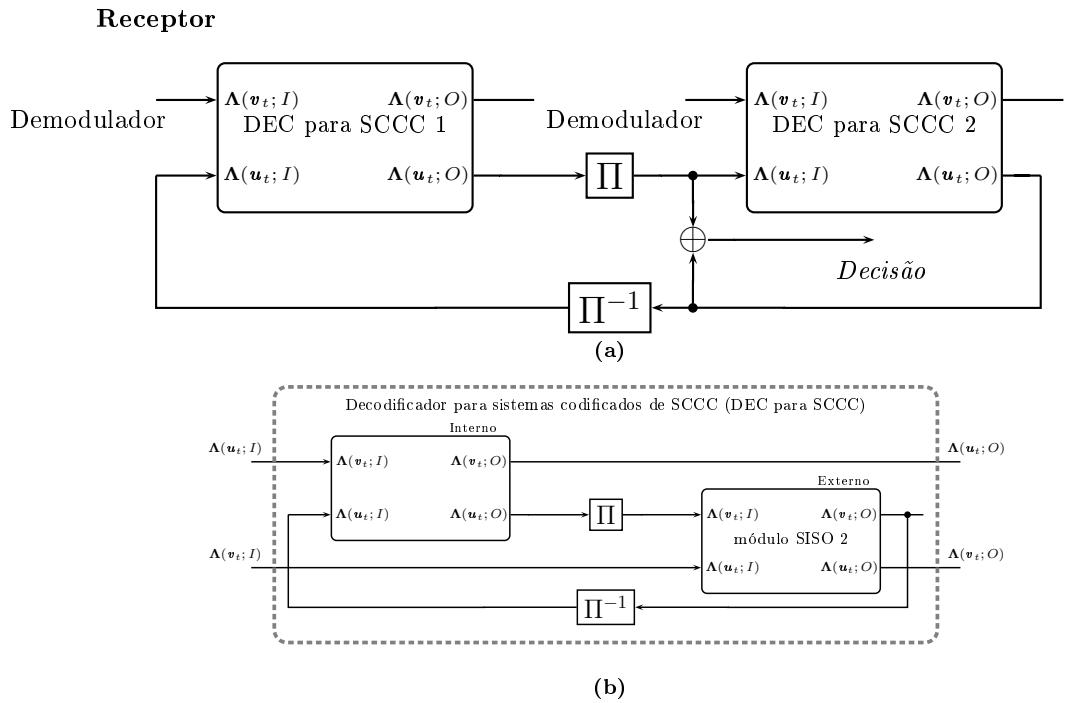


Figura A.5: *Decodificador iterativo para codificadores convolucionais concatenado em forma híbrida para um usuário.*

logaritmo da razão de log-verossimilhança.

Neste apêndice é apresentado um panorama geral sobre sistemas de decodificação de codificadores convolucionais concatenados, enfocando principalmente no algoritmo de máxima probabilidade *a posteriori*, MAP, proposto por [93], o qual visa estimar a probabilidade de erro do símbolo emitido por uma fonte de informação Markoviana, a partir da observação das transições dos estados através de um canal ruidoso sem memória. O enfoque dado servirá de apoio para o desenvolvimento dos módulos SISO para sistemas de acesso múltiplo com dois ou mais usuários transmitindo em um canal aditivo, especificamente, para o sistemas concatenados com codificadores convolucionais em forma mista.

APÊNDICE B

Sistemas Codificados Concatenados para T Usuários

Considere um canal aditivo ruidoso em que mais de dois usuários binários, denotado T-BAC, estatisticamente independentes transmitem para destinos respectivos. Suponha, também, que os T usuários utilizem sistemas concatenados de codificadores convolucionais antes de acessar o canal. Assim, as sequências de informação geradas pelos usuários devem passar pelos codificadores $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_T$, formando sub-blocos dos códigos associados a cada usuário, sendo $\boldsymbol{v}_{i,t}$, $1 \leq i \leq T$ a entrada do canal aditivo ruidoso. A saída do canal, no instante de observação t, é a adição, coordenada a coordenada, dos sub-blocos dos códigos e do ruído, como ilustrado na Figura B.1.

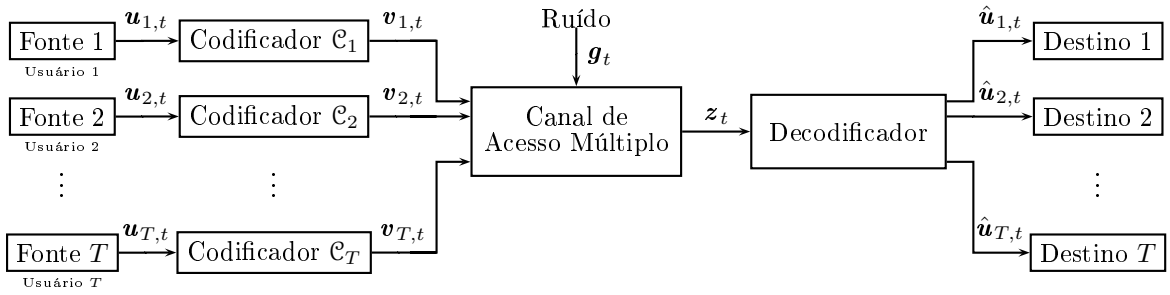


Figura B.1: *Diagrama em blocos de um sistema de comunicação de acesso múltiplo para usuários binários.*

Neste Apêndice, será apresentada a decodificação para mais de dois usuários binários, com ênfase nos módulos SISO propostos na tese para a aplicação em canais aditivos ruidosos de acesso múltiplo, em um processo de decodificação iterativa e colaborativa. Serão descritos os

algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades *a posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos usuários que dividem o canal, dada uma observação, a saber o Algoritmo SISO-MuD para o T-BAC, permitindo uma decodificação conjunta das mensagens transmitidas pelos usuários, e o Algoritmo SISO-SuD para o T-BAC, permitindo uma decodificação individual das mensagens transmitidas pelos usuários.

B.1 Codificação

Antes de acessar o canal, é associada, ao usuário i, a sequência de símbolos de entrada em N intervalos de tempo consecutivos a ser codificada: $\boldsymbol{u}_{i,1}^{N} = \{\boldsymbol{u}_{i,1}, \boldsymbol{u}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i,N}\}$, em que, em um instante de observação t, o i-ésimo usuário escolhe um símbolo de entrada, denotado mensagem do i-ésimo usuário, $\boldsymbol{u}_{i,t} = \{u_{i,t}^{(1)}, u_{i,t}^{(2)}, \ldots, u_{i,t}^{(k_i)}\}$, de comprimento k_i, para $1 \leq t \leq N$, $u_{i,t}^{(j)}$ pertencentes a um determinado alfabeto U_i, e $\boldsymbol{u}_{i,t}$ pertencente ao subespaço vetorial $\mathcal{U}_i = \{\mathbf{u}_i^1, \mathbf{u}_i^2, \ldots, \mathbf{u}_i^{|\mathcal{U}_i|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{U}_i|$. Consequentemente, é atribuído, a cada usuário, um sistema concatenado com codificadores convolucionais $\mathcal{C}_i$, que associa a sequência de informação escolhida a uma sequência do código $\boldsymbol{v}_{i,1}^{N} = \{\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,N}\}$. A cada observação no instante t, é dado o sub-bloco do código $\boldsymbol{v}_{i,t} = \{v_{i,t}^{(1)}, v_{i,t}^{(2)}, \ldots, v_{i,t}^{(n)}\}$, de comprimento n, para $1 \leq t \leq N$, $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$ e $\boldsymbol{v}_{i,t} \in \mathcal{V}_i = \{\mathbf{v}_i^1, \mathbf{v}_i^2, \ldots, \mathbf{v}_i^{|\mathcal{V}_i|}\}$, com cardinalidade $|\mathcal{V}_i|$. É assumido que os usuários, a cada instante t de observação, operam na mesma banda de frequência, transmitem ao mesmo tempo, utilizam codificadores binários de mesmo comprimento n e é mantido sincronismo na transmissão dos símbolos das sequências [31].

Para cada instante de observação t, o canal aditivo ruidoso recebe como entrada $\boldsymbol{v}_t = [\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}]$ associando a uma saída $\boldsymbol{r}_t$ com símbolos pertencentes a um determinado alfabeto. Especificamente, o canal recebe as T sequências-código referentes a cada usuário no instante t de observação, produzindo uma sequência intermediária, $\boldsymbol{y}_t$, que é a adição, coordenada a coordenada, das T entradas. Por exemplo, na utilização da modulação por chaveamento de fase binária, mapeamento de bit, uma sequência intermediária é gerada no canal, sendo a variável aleatória $y_t^{(j)}$ definida por $y_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{T}(2v_{i,t}^{(j)} - 1)$, pois $v_{i,t}^{(j)} \in V_i = \{0, 1\}$ e $1 \leq j \leq n$, pertencente ao alfabeto Y, ou seja, $y_t^{(j)} \in Y = \{-T, \ldots, 0, \ldots, +T\}$, para $1 \leq t \leq N$. A sequência intermediária sofre interferência de ruído, gerando a saída do canal representada pela sequência $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1^N = \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_t, \ldots, \boldsymbol{r}_N\}$, observado no instante t, $\boldsymbol{r}_t = \{r_t^{(1)}, r_t^{(2)}, \ldots, r_t^{(j)}, \ldots, r_t^{(n)}\}$, em que $r_t^{(j)} \in \mathbb{R}$, $1 \leq t \leq N$ e $1 \leq j \leq n$. A j-ésima

variável aleatória contínua $r_t^{(j)}$ é definida por $r_t^{(j)} = y_t^{(j)} + g_t^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$, em que os valores $g_t^{(j)}$, de $\boldsymbol{g}_t = (g_t^{(1)}, g_t^{(2)}, \ldots, g_t^{(j)}, \ldots, g_t^{(n)})$, sendo $g_t^{(j)} \in \mathbb{R}$, representam amostras do ruído aditivo gaussiano branco com variância σ^2 e média zero.

Os codificadores propostos para sistemas de codificação colaborativa de acesso múltiplo para mais de dois usuários binários, utilizado por cada usuário, formados pela concatenação de codificadores convolucionais não unicamente decodificáveis separados por entrelaçadores podem ser desenvolvidos analogamente ao que foi apresentado no Capítulo 3.2, a saber,

▷ **SCCC** - Codificadores Convolucionais Concatenados em Série;

▷ **HCCC** - Codificadores Convolucionais Concatenados em Forma Híbrida;

▷ **MCCC** - Codificadores Convolucionais Concatenados em Forma Mista.

B.1.1 Módulo SISO para o T-BAC

Para definir o módulo SISO para o T-BAC, considere a representação gráfica apresentada da Figura B.2. A matriz de razões de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^N; I)$ é associada às distribuições de probabilidades *a priori* das sequências de entrada - sequências de informação - em que os argumentos $\boldsymbol{u}_{i,1}^N$ representam a sequência de entrada associada ao usuário i. Assim como a matriz das razões de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^N; I)$ são associadas às distribuições de probabilidades *a priori* dos sub-blocos dos códigos, em que $\boldsymbol{v}_{i,1}^N$ representa o sub-bloco do código associado ao usuário i. As matrizes de razões de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^N; O)$ e $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^N; O)$ fazem o papel da informação extrínseca - probabilidades *a posteriori* - a ser propagada durante a decodificação iterativa associadas às distribuições de probabilidade dos sub-blocos dos códigos e às sequências de entrada dos usuários, respectivamente.

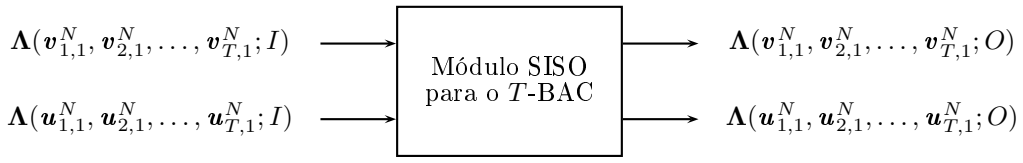


Figura B.2: *Módulo SISO para o canal aditivo com mais de dois usuários binários.*

Define-se a matriz de razões de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}_{1,1}^N, \boldsymbol{u}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^N; I)$ associada à distribuição de probabilidade *a priori* das sequências de informação dos usuários, com

dimensão $1 \times N$, da forma

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{u}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^{N}; I\right)\\&= \Big[\ \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}; I\right) \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,2}; I\right) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \Big],\end{aligned} \tag{B.1}$$

com $1 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se as razões de log-verossimilhança conjuntas dos T usuários dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz de dimensão $(|\mathcal{U}_1||\mathcal{U}_2|\cdots|\mathcal{U}_T|) \times 1$, em que $|\mathcal{U}_i| = 2^{k_i}$ e, para o T-BAC. Logo,

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^2, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^1, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{t,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{|\mathcal{U}_1|}, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|} \ldots, \mathbf{u}_T^{|\mathcal{U}_T|}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right) \end{bmatrix}, \tag{B.2}$$

em que

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right)\\&\qquad = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_T}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; I\right)}\right)\\&\qquad = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{k_1}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T^{k_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T\right]}\right),\end{aligned} \tag{B.3}$$

com $1 \leq k_i \leq |\mathcal{U}_i|$, $\mathbf{u}_i^{k_i} \in \mathcal{U}_i$ e $1 \leq t \leq N$.

De forma análoga, $\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{t,N}; I\right)$ é definida como a matriz de razões de log-verossimilhança conjunta associada à distribuição de probabilidade *a priori* dos sub-blocos

dos códigos, com dimensão $1 \times N$, da forma

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{v}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^{N}; I\right)\\&= \Big[\ \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}; I\right) \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,2}, \boldsymbol{v}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,2}; I\right) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \Big],\end{aligned} \tag{B.4}$$

com $0 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se razões de log-verossimilhança conjuntas dos T usuários dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz de dimensão $(|\mathcal{V}_1||\mathcal{V}_2|\cdots|\mathcal{V}_T|) \times 1$, em que $|\mathcal{V}_i| = 2^{k_i}$ e, para o T-BAC. Logo,

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{t,N}; I\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^2, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{|\mathcal{V}|}, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_i|} \ldots, \mathbf{v}_T^{|\mathcal{V}_T|}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right) \end{bmatrix}, \tag{B.5}$$

em que

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right)\\&\qquad = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_T}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; I\right)}\right)\\&\qquad = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T^{g_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T\right]}\right),\end{aligned} \tag{B.6}$$

com $1 \leq g_i \leq |\mathcal{V}_i|$, $\mathbf{v}_i^{g_i} \in \mathcal{V}_i$ e $1 \leq t \leq N$.

B.1.1.1 Cálculo da Informação Extrínseca

O módulo SISO utiliza os ramos da seção de treliça de cada usuário, definidos no Capítulo 3, Seção 3.2.1, como ilustrado na Figura 3.2. As matrizes de razões de log-verossimilhança $\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{u}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^{N}; I\right)$ e $\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{v}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^{N}; I\right)$, associadas às distribuições de probabilidades *a priori* das sequências de entrada e dos sub-blocos dos códigos.

Define-se a matriz de razões de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{u}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^{N}; O\right)$ associada à distribuição de probabilidade *a posteriori* da sequência dos símbolos de entrada, com dimensão $1 \times N$, na forma

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{u}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}^{N}; O\right)\\ &=\Big[\, \mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,1}, \boldsymbol{u}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,1}; O\right) \quad \mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,2}, \boldsymbol{u}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,2}; O\right) \quad \ldots \quad \mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,N}, \boldsymbol{u}_{2,N}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \Big],\end{aligned} \tag{B.7}$$

com $1 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se as razões de log-verossimilhança conjuntas dos T usuários, dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz de dimensão $(|\mathcal{U}_1||\mathcal{U}_2|\cdots|\mathcal{U}_T|) \times 1$, em que $|\mathcal{U}_i| = 2^{k_i}$, para o T-BAC. Logo,

$$\mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^2, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}^{|\mathcal{U}_2|}, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^1, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{t,N}; O\right) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|}, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^1}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{|\mathcal{U}|}, \mathbf{u}_2^{|\mathcal{U}_2|} \ldots, \mathbf{u}_T^{|\mathcal{U}_T|}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \end{bmatrix}, \tag{B.8}$$

em que

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right)\\ &\qquad = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_T}\left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right)}\right)\\ &\qquad = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{k_1}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T^{k_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T | \boldsymbol{z}_1^N\right]}\right),\end{aligned} \tag{B.9}$$

com $1 \leq k_i \leq |\mathcal{U}_i|$, $\mathbf{u}_i^{k_i} \in \mathcal{U}_i$ e $1 \leq t \leq N$.

Define-se a matriz de razões de log-verossimilhança $\mathbf{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}^{N}, \boldsymbol{v}_{2,1}^{N}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^{N}; O\right)$ associada à distribuição de probabilidade *a posteriori* dos sub-blocos dos códigos associados aos T

usuários, $\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^N$, respectivamente, com dimensão $1 \times N$, da forma

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^N; O\right)\\&= \Big[\ \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}; O\right) \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,2}, \boldsymbol{v}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,2}; O\right) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,N}, \boldsymbol{v}_{2,N}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \Big],\end{aligned} \tag{B.10}$$

com $0 \leq t \leq N$. Para cada instante de observação t, definem-se razões de log-verossimilhança conjuntas dos T usuários, dentre todas as possíveis mensagens, na forma de uma matriz de dimensão $(|\mathcal{V}_1||\mathcal{V}_2|\cdots|\mathcal{V}_T|) \times 1$, em que $|\mathcal{V}_i| = 2^{l_i}$, para T-BAC, então tem-se que:

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^2, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}^{|\mathcal{V}_2|}, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{t,N}; O\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_2|}, \ldots, \mathbf{v}_T^1}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{|\mathcal{V}|}, \mathbf{v}_2^{|\mathcal{V}_i|} \ldots, \mathbf{v}_T^{|\mathcal{V}_T|}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \end{bmatrix}, \tag{B.11}$$

em que

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right)\\&\qquad = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_T}\left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right)}\right);\\&\qquad = \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T^{g_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T | \boldsymbol{z}_1^N\right]}\right);\end{aligned} \tag{B.12}$$

com $1 \leq g_i \leq |\mathcal{V}_i|$, $\mathbf{v}_i^{g_i} \in \mathcal{V}_i$ e $1 \leq t \leq N$.

B.1.2 Decodificação para o T-BAC

Um único decodificador é responsável por estimar as mensagens, a cada instante de observação t, $\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_T$ para os T destinos, baseado na observação do canal ruidoso, no

vetor observação $\boldsymbol{z}_1^N$ e no comportamento dos codificadores. De modo que, para o esquema da Figura B.1, tem-se $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{r}_t$, em que,

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{g}_t; \tag{B.13}$$

em que a saída $\boldsymbol{z}_t = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \ldots, z_t^{(j)}, \ldots, z_t^{(n)}\}$, $z_t^{(j)}$ pertence ao alfabeto Z, pois,

$$z_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{T} (2v_{i,t}^{(j)} - 1) + g_t^{(j)} \tag{B.14}$$

$$= y_t^{(j)} + g_t^{(j)}; \tag{B.15}$$

em que, $v_{i,t}^{(j)} \in V_i$, $z_t^{(j)} \in Y = (-T, \ldots, 0, \ldots, +T)$, $1 \leq i \leq T$ e $1 \leq j \leq n$.

O objetivo do algoritmo SISO, utilizado nos módulos SISO, é maximizar a probabilidade *a posteriori* conjunta da razão de log-verossimilhança das sequências de informação $\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}$ serem $\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}$ no instante de observação t, conhecendo uma sequência de observação $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1^N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_N\}$ e a estrutura dos codificadores, em que

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}} (\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O) = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{k_1}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T^{k_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right]. \tag{B.16}$$

Para a razão de log-verossimilhança dos sub-blocos dos códigos associados aos T usuários maximizar a probabilidade *a posteriori* conjunta de os sub-blocos dos códigos $\boldsymbol{v}_{1,1}^N, \boldsymbol{v}_{2,1}^N, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,1}^N$ serem $\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}$ no instante de observação t, conhecendo uma sequência de observação $\boldsymbol{z}$ e a estrutura dos codificadores, em que

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_1^{g_1}, \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{g_T}} (\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O) = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T^{g_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right]. \tag{B.17}$$

O algoritmo SISO de decisão conjunta para o canal aditivo ruidoso com mais de dois usuários binários - Algoritmo SISO-MuD para o T-BAC - atualiza as probabilidade *a posteriori* no processo iterativo de decodificação. Assim, a regra de decisão utilizada na decodificação é: se $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{k_1}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T^{k_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T | \boldsymbol{z}_1^N\right]$, escolhe-se $\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}$ ou $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_T$ com igual probabilidade, arbitrariamente. Caso $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1^{k_1}, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T^{k_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right] > \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{1,t} = \mathbf{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,t} = \mathbf{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N} = \mathbf{u}_T | \boldsymbol{z}_1^N\right]$, é escolhido o símbolo $\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}$; caso contrário, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_T$. Analogamente, se $\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1^{l_1}, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2^{l_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T^{l_T} | \boldsymbol{z}_1^N\right] > \mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{1,t} = \mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t} = \mathbf{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N} = \mathbf{v}_T | \boldsymbol{z}_1^N\right]$ escolhe-se o sub-bloco do código $\mathbf{v}_1^{l_1}, \mathbf{v}_2^{l_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{l_T}$, caso contrários, escolhe-se o sub-bloco. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_T$

De forma analítica, o decodificador estima de forma conjunta as sequências de informação $\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{T,t}$ e os sub-blocos dos códigos $\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{v}}_{T,t}$, sobre as razões de log-verossimilhança, no instante de observação t, da seguinte forma:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{u}}_{2,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{u}}_{T,t} = \begin{cases} \mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T} & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}} \left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) \geq 0 \\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_T & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_1^{k_1}, \mathbf{u}_2^{k_2}, \ldots, \mathbf{u}_T^{k_T}} \left(\boldsymbol{u}_{1,t}, \boldsymbol{u}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{T,N}; O\right) < 0 \end{cases}, \tag{B.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{1,t}, \hat{\boldsymbol{v}}_{2,t}, \ldots, \hat{\boldsymbol{v}}_{T,t} = \begin{cases} \mathbf{v}_1^{l_1}, \mathbf{v}_2^{l_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{l_T} & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{l_1}, \mathbf{v}_2^{l_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{l_T}} \left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) \geq 0 \\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_T & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{l_1}, \mathbf{v}_2^{l_2}, \ldots, \mathbf{v}_T^{l_T}} \left(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,N}; O\right) < 0 \end{cases}. \tag{B.19}$$

Com base na proposta desta tese, a estrutura dos decodificadores para T usuários é a mesma apresentada para o 2-BAC, seguindo, também, a estrutura para codificadores concatenados para um usuários, com a diferença do algoritmo SISO-MuD definido para o número de usuários que dividem o canal.

B.2 Cálculo Individual das Probabilidades *a posteriori* para os T Usuários

Com o aumento do número de usuários, o Algoritmo SISO-MuD apresenta acréscimo na complexidade. Assim, com o objetivo do desenvolvimento prático de sistemas concatenados de codificadores convolucionais para mais de dois usuários transmitindo simultaneamente em um canal aditivo ruidoso é proposta uma nova abordagem para o cálculo das razões de log-verossimilhança para utilização nos módulos SISO - a saber, o cálculo individual das probabilidade *a posteriori*. Nesta seção é apresentada uma nova abordagem para o cálculo das razões de log-verossimilhança no Algoritmo SISO-MuD para mais de dois usuários binários, em que é desenvolvida uma razão de log-verossimilhança para um único usuário, denotada Algoritmo SISO-SuD para o T-BAC.

Considere a probabilidade *a posteriori* da sequência de informação e do sub-bloco do código para o usuário i, dada uma observação $\boldsymbol{z}_1^N$ fornecida pelo canal T-BAC, da forma

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}} \left(\boldsymbol{u}_{i,t}; O\right) = P\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right], \tag{B.20}$$

e

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}} \left(\boldsymbol{v}_{i,t}; O\right) = P\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right], \tag{B.21}$$

$0 \leq i \leq T$, $\mathbf{u}_i^{k_i} \in \mathcal{U}_i$ e $\mathbf{v}_i^{g_i} \in \mathcal{V}_i$. Dado que os eventos de transição entre cada estado, do i-ésimo usuário, são mutuamente exclusivos, a probabilidade de qualquer um deles ocorrer é igual à adição das probabilidades individuais. Portanto, tem-se

$$\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i^{k_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} P\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) | \boldsymbol{z}_1^N\right], \tag{B.22}$$

e

$$\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i} | \boldsymbol{z}_1^N\right] = \sum_{e_i : \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i) = \mathbf{v}_i^{g_i}} P\left[\boldsymbol{v}_{i,t} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i) | \boldsymbol{z}_1^N\right], \tag{B.23}$$

onde pode-se observar o ramo $e_i \in \mathcal{E}_i$ da treliça associada ao processo de codificação do usuário i, como apresentado na Seção 3.2.1. Como apresentado na Seção 4.3.1

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O) &\propto \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} A_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) B_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) \mathrm{P}\left[S_{i,t} = s^E(e^{(i)}); \boldsymbol{z}_t | S_{i,t-1} = s^S(e_i)\right] \\
&\propto \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} A_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) B_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) \mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)\right] \mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{i,t} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)\right]; \\
&\propto \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\ln\left(A_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) B_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i\right]}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{i,t} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i\right]}\right)\right) \\
&\propto \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{u}_{i,t} = \mathbf{u}_i\right]}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{i,t} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i\right]}\right)\right) \\
&\propto \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)\right) + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{l_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)\right)\right) \\
&\propto \left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)\right) + \sum_{e_i : \boldsymbol{u}_{i,t}(e_i) = \mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{l_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)\right)\right)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

das definições $P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I) = \mathrm{P}\left[\mathbf{u}_i^{k_i} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)\right]$ e $P_{\mathbf{v}_i^{l_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I) = \mathrm{P}\left[z_t | \mathbf{v}_i^{l_i} = \boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)\right]$, em que

$$\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) = \ln\left(A_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right)\right) = \ln\left(P\left(S_{i,t-1} = s^S(e_i); \boldsymbol{z}_1^{t-1}\right)\right); \tag{B.25}$$

$$\beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) = \ln\left(B_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)\right) = \ln\left(P\left(\boldsymbol{z}_{t+1}^N | S_{i,t} = s^E(e_i)\right)\right), \tag{B.26}$$

e

$$\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}\left(\boldsymbol{u}_{i,t};O\right)=P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}\left(\boldsymbol{u}_{i,t};I\right)P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}\left(\boldsymbol{u}_{i,t};O\right); \tag{B.27}$$

$$\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{l_i}}\left(\boldsymbol{v}_{i,t};O\right)=P_{\mathbf{v}_i^{l_i}}\left(\boldsymbol{v}_{i,t};I\right)P_{\mathbf{v}_i^{l_i}}\left(\boldsymbol{v}_{i,t};O\right), \tag{B.28}$$

logo,

$$P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}\left(\boldsymbol{u}_{i,t};O\right)\propto\sum_{e_i:\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)=\mathbf{u}_i^{k_i}}\exp\Big(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right)+\beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)+\ln\Big(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{l_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)\Big)\Big). \tag{B.29}$$

Analogamente, para a probabilidade *a posteriori* do sub-bloco do código associado ao usuário i, tem-se

$$P_{\mathbf{v}_i^{l_i}}\left(\boldsymbol{v}_{i,t};O\right)\propto\sum_{e_i:\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)=\mathbf{v}_i^{l_i}}\exp\Big(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right)+\beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right)+\ln\Big(\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};I)\Big)\Big) \tag{B.30}$$

Para a informação *a priori* do sub-bloco do código para o usuário i no instante de tempo t, tem-se

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};I)\\&=\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i\right]}\right)\\&=\ln\Big(\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}\right]\Big)-\ln\Big(\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i\right]\Big),\end{aligned} \tag{B.31}$$

em que

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}\right]\\&=\sum_{\mathbf{V}_1}\cdots\sum_{\mathbf{V}_{i-1}}\sum_{\mathbf{V}_{i+1}}\cdots\sum_{\mathbf{V}_T}\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}\right]\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{T}\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}\right]\\&\propto\sum_{\mathbf{V}_1}\cdots\sum_{\mathbf{V}_{i-1}}\sum_{\mathbf{V}_{i+1}}\cdots\sum_{\mathbf{V}_T}\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T\right]}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{T}\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j\right]},\end{aligned} \tag{B.32}$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}\right]\\
&\propto\sum_{\mathbf{V}_1}\cdots\sum_{\mathbf{V}_{i-1}}\sum_{\mathbf{V}_{i+1}}\cdots\sum_{\mathbf{V}_T}\exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T\right]}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\ln\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{T}\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j\right]}\right)\right)\\
&\propto\sum_{\mathbf{V}_1}\cdots\sum_{\mathbf{V}_{i-1}}\sum_{\mathbf{V}_{i+1}}\cdots\sum_{\mathbf{V}_T}\exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1},\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1,\boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T\right]}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{T}\ln\left(\frac{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}\right]}{\mathrm{P}\left[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j\right]}\right)\right),
\end{aligned}\tag{B.33}$$

assim,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\boldsymbol{z}_t|\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}\right]\\
&=\propto\sum_{\mathbf{V}_1}\cdots\sum_{\mathbf{V}_{i-1}}\sum_{\mathbf{V}_{i+1}}\cdots\sum_{\mathbf{V}_T}\exp\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\mathbf{v}_T^{g_T}}(\boldsymbol{v}_{1,t},\boldsymbol{v}_{2,t},\ldots,\boldsymbol{v}_{T,t};I)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_j^{g_j}}(\boldsymbol{v}_{j,t};I)\right),
\end{aligned}\tag{B.34}$$

em que $\mathbf{V}_i:\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}$ são todas as possíveis sequências de informação. O cálculo das razões de log-verossimilhança *a priori* do sub-bloco do código depende diretamente das LLR conjuntas, fornecidas pelo canal aditivo ruidoso através do demodulador, e as $T-1$ LLR, fornecidas pelos decodificadores individuais. Define-se o Decisor Suave como o dispositivo responsável por fornecer a informação *a priori* utilizada no processo iterativo.

O algoritmo SISO-SuD para o T-BAC utiliza as probabilidades *a posteriori* $P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)$ e $P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)$ para obter as LLR do i-ésimo usuário, da forma

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)\triangleq\ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t};O)}\right)=\ln\left(\frac{P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i^{k_i}|\boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i|\boldsymbol{z}_1^N)}\right);\tag{B.35}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)\triangleq\ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t};O)}\right)=\ln\left(\frac{P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N)}{P(\boldsymbol{v}_{i,t}=\mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)}\right).\tag{B.36}$$

A regra de decisão será: se $P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i^{k_i}|\boldsymbol{z}_1^N)=P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se $\mathbf{u}_i^{k_i}$ ou $\mathbf{u}_i$, com igual probabilidade, arbitrariamente. Caso $P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i^{k_i}|\boldsymbol{z}_1^N)>P(\boldsymbol{u}_{i,t}=\mathbf{u}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, é

escolhido o símbolo $\mathbf{u}_i^{k_i}$; caso contrário, $\mathbf{u}$. Analogamente, para o sub-bloco do código, tem-se que, se $P(\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N) = P(\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, escolhe-se arbitrariamente $\mathbf{v}_i^{g_i}$ ou $\mathbf{v}_i$. Caso $P(\boldsymbol{v}_{i,t} = \mathbf{v}_i^{g_i}|\boldsymbol{z}_1^N) > P(\boldsymbol{v}_t = \mathbf{v}_i|\boldsymbol{z}_1^N)$, é escolhido o símbolo $\mathbf{v}_i^{g_i}$; caso contrário, $\mathbf{v}_i$. De forma analítica, o decodificador estima o símbolo $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t}$ e o sub-bloco do código $\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t}$ sobre as razões de log-verossimilhança, no instante de observação t, da forma

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{k_i} & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O) \geq 0 \\ \mathbf{u}_i & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O) < 0 \end{cases}; \tag{B.37}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t} = \begin{cases} \mathbf{v}_i^{g_i} & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O) \geq 0 \\ \mathbf{v}_i & \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O) < 0 \end{cases}, \tag{B.38}$$

em que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O) &\triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}{\tilde{P}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}\right) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)}\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}\right) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}{P_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)}\right) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I) + \ln\left(\frac{\sum_{e_i:\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)=\mathbf{u}_i^{k_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)\right)\right)}{\sum_{e_i:\boldsymbol{u}_{i,t}(e_i)=\mathbf{u}_i} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{u}_i}(\boldsymbol{u}_{i,t}; I)\right)\right)}\right), \end{aligned} \tag{B.39}$$

e

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O) &\triangleq \ln\left(\frac{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}{\tilde{P}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}\right) = \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)}\right) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}\right) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I) + \ln\left(\frac{P_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}{P_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)}\right) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I) + \ln\left(\frac{\sum_{e_i:\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)=\mathbf{v}_i^{l_i}} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)\right)\right)}{\sum_{e_i:\boldsymbol{v}_{i,t}(e_i)=\mathbf{v}_i} \exp\left(\alpha_{i,t-1}\left(s^S(e_i)\right) + \beta_{i,t}\left(s^E(e_i)\right) + \ln\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)\right)\right)}\right). \end{aligned} \tag{B.40}$$

formando um algoritmo de decodificação SISO de um usuário para canais aditivos ruidosos com T usuários binários, denotado por Algoritmo SISO-SuD para o T-BAC.

O objetivo do decodificador é decidir pela estimativa $\hat{\boldsymbol{u}}_{i,t} = \mathbf{u}^{k_i} \in \mathcal{U}_i$, com $1 \leq k \leq |\mathcal{U}_i|$, de maneira a diminuir a probabilidade de erro - logo, minimizar a probabilidade *a posteriori* $\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\boldsymbol{u}_{i,t}; O)$ -, dessa forma, calculando $|\mathcal{U}_i|-1$ estimativas para $\tilde{P}_{\mathbf{u}_i^{k_i}}(\mathbf{u}_i^{k_i}; O)$ para a sequência de informação. Analogamente, a estimativa $\hat{\boldsymbol{v}}_{i,t} = \mathbf{v}^{g_i} \in \mathcal{V}_i$ é calculada minimizando a

probabilidade *a posteriori* $\tilde{P}_{\mathbf{v}^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; O)$, e, dessa forma, calculando $|\mathcal{V}_i| - 1$ estimativas para o sub-bloco do código.

A Tabela B.1 apresenta o algoritmo do Decisor Suave proposto para o T-BAC, responsável por fornecer as informações *a priori* aos $T-1$ decodificadores, baseado nas razões de log-verossimilhança do canal aditivo ruidoso $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_1^{g_1},\mathbf{v}_2^{g_2},\ldots,\mathbf{v}_T^{g_T}}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}; I)$ e na informação fornecida por cada decodificador $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)$.

Tabela B.1: *Algoritmo do Decisor Suave para o T-BAC.*

ENTRADA

$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{v}_{1,t}, \boldsymbol{v}_{2,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}; I)$ para $t = 1, 2, \ldots, N$
$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)$ para $i = 1, 2, \ldots, T$ e $t = 1, 2, \ldots, N$

ALGORITMO DECISOR SUAVE

PARA $t = 1$ **ATÉ** N, **FAÇA**
  PARA $i = 1$ **ATÉ** T, **FAÇA**
    $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)$
    $= \sum_{\mathbf{V}_1} \cdots \sum_{\mathbf{V}_{i-1}} \sum_{\mathbf{V}_{i+1}} \cdots \sum_{\mathbf{V}_T} \exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}]}{\mathrm{P}[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T]}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{T} \ln\left(\frac{\mathrm{P}[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}]}{\mathrm{P}[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j]}\right)\right)$
    $- \sum_{\mathbf{V}_1} \cdots \sum_{\mathbf{V}_{i-1}} \sum_{\mathbf{V}_{i+1}} \cdots \sum_{\mathbf{V}_T} \exp\left(\ln\left(\frac{\mathrm{P}[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1^{g_1}, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2^{g_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t}, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T^{g_T}]}{\mathrm{P}[\boldsymbol{z}_t | \boldsymbol{v}_{1,t}=\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,t}=\mathbf{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{T,t}=\mathbf{v}_T]}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{T} \ln\left(\frac{\mathrm{P}[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j^{g_j}]}{\mathrm{P}[\boldsymbol{v}_{j,t}=\mathbf{v}_j]}\right)\right)$
  FIM
FIM

SAÍDA

$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{v}_i^{g_i}}(\boldsymbol{v}_{i,t}; I)$ para $i = 1, 2, \ldots, T$ e $t = 1, 2, \ldots, N$

B.2.1 Estrutura do Decodificador

Com base nas equações B.39 e B.40, o decodificador para os sistemas concatenados com codificadores convolucionais pode ser implementado utilizando o módulos SISO para um usuário. Note que as LLR são atualizadas utilizando as LLR individuais de cada usuário, que podem ser fornecidas por algoritmos SISO de um usuário - ver Apêndice A. Ou seja, qualquer sistema de decodificação iterativa utilizando os módulos SISO pode ser adaptado para a aplicação no decodificador proposto. Para tanto, faz-se necessária a utilização de um decisor suave gerando as LLR atualizadas que fornecerão as atualizações para as iterações subsequentes.

Note que a proposta para o Algoritmo SISO-SuD permite uma implementação paralela de decodificadores independentes para os usuários. Cada decodificador é baseado na codificação

atribuída ao usuário, quer seja em sistemas concatenados de codificadores convolucionais em paralelo para todos os T usuários - ver Figura B.3 -, ou seja em sistemas concatenados de codificadores convolucionais em série para os usuários - ver Figura B.4.

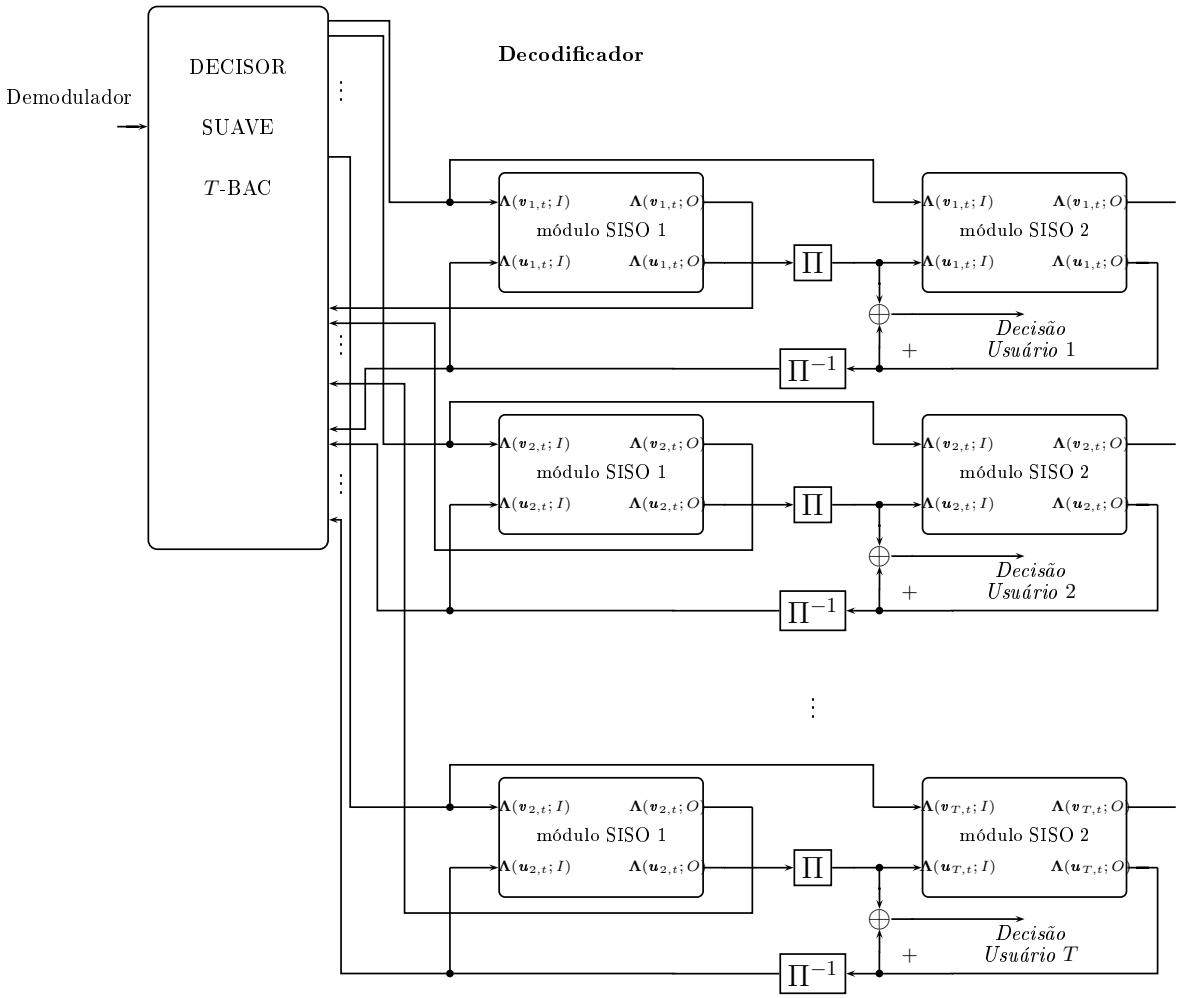


Figura B.3: *Decodificador iterativo para a concatenação de codificadores convolucionais em paralelo com T usuários binários utilizando o Algoritmo SISO-UI.*

Com a utilização do decisor suave proposto, os decodificadores operam de forma independente; não sendo condição necessária que os todos os usuários detenham o mesmo sistema de codificação, a saber PCCC, SCCC ou HCCC. Assim, pode-se atribuir sistemas concatenados de codificadores convolucionais em paralelo, série ou em forma híbrida a qualquer usuário, denotados sistemas concatenados de codificadores convolucionais em forma mista. A Figura B.5 apresenta a estrutura do decodificador iterativo para sistemas concatenados de codificadores convolucionais em forma mista com T usuários binários.

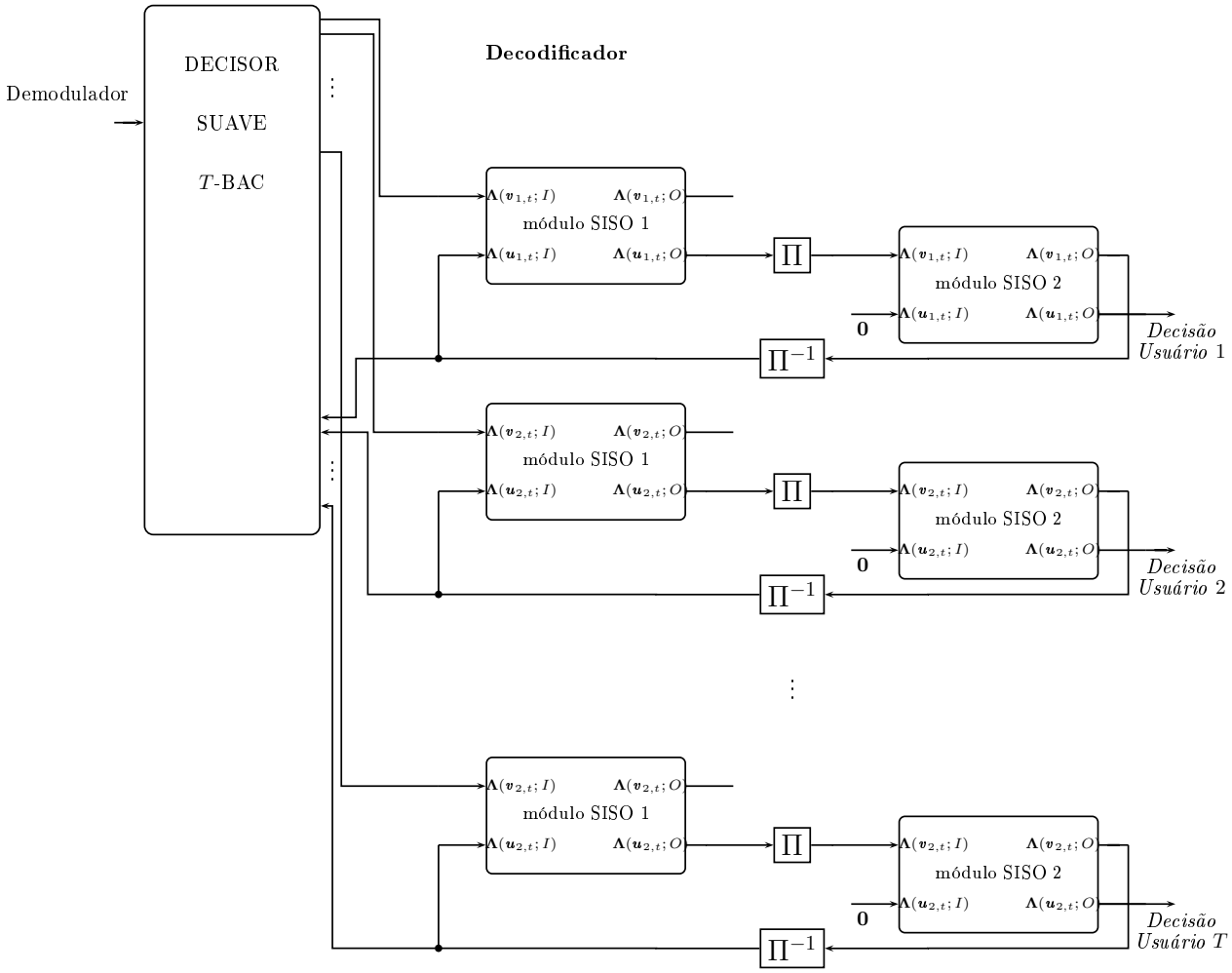


Figura B.4: *Decodificador iterativo para a concatenação de codificadores convolucionais em série.*

Neste apêndice foram apresentados os algoritmos para o módulo SISO que atualizam continuamente as probabilidades *a posteriori* dos símbolos de entrada e saída dos mais de dois usuários que dividem o canal aditivo ruidoso, permitindo uma decodificação conjunta - Algoritmo SISO-MuD, ou individual, e Algoritmo SISO-SuD -, das mensagens transmitidas pelos T usuários. Também foi apresentado o Decisor Suave, responsável por calcular as razões de log-verossimilhança *a priori* utilizadas no processo de decodificação iterativa, assim como os sistemas de decodificação para o T-BAC, utilizando sistemas concatenados com codificadores convolucionais em paralelo, em série e em forma mista.

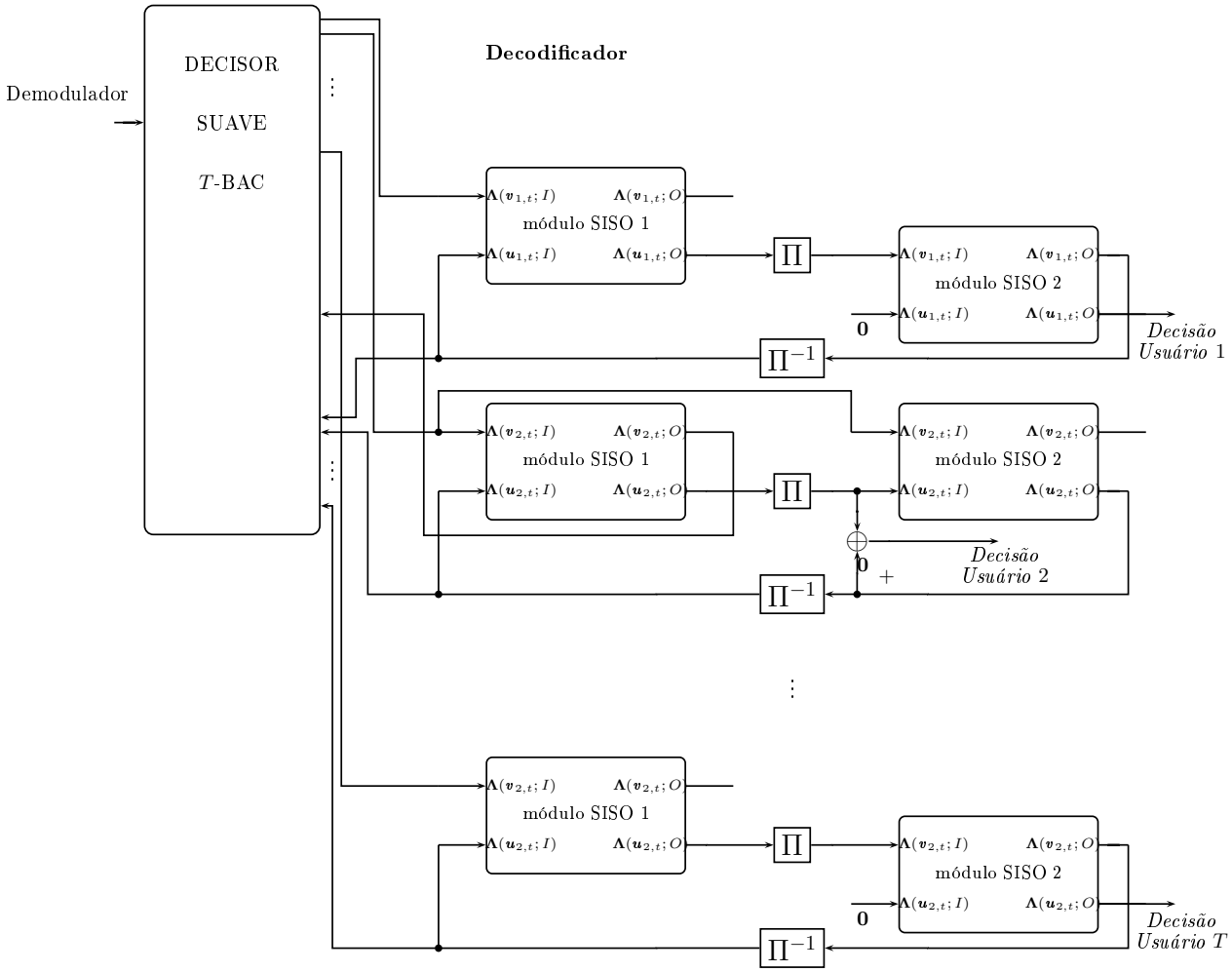


Figura B.5: *Decodificador iterativo para a concatenação de codificadores convolucionais em forma mista.*

APÊNDICE C

Intervalo de Confiança

O uso de simulações tem desempenhado um importante papel na desenvolvimento de sistemas de comunicação. Na implementação e simulação desses sistemas a forma mais utilizada de avaliar seu desempenho é através da taxa de erro de bit do sistema, parâmetro o qual fornece uma medida estatística da confiabilidade desses sistemas comunicação. Monte Carlo é o método mais utilizado para a estimação da taxa de erro de bit do sistema ou probabilidade de erro de bit, por não levar em conta a arquitetura ou a complexidade desses sistemas. Embora seja simples esse método apresenta um elevado custo computacional quando a probabilidade de erro de bit do sistema é baixa.

C.1 Introdução

Técnicas computacionais têm sido desenvolvidas com o intuito de auxiliar no processo de modelagem, análise e projeto de sistemas de comunicação. Essas técnicas podem ser divididas em duas categorias, a saber, abordagem analítica, em que é possível se avaliar fórmulas complexas, e abordagem por simulação, em que é possível modelar os componentes individuais do sistema e consequentemente implementar e simular os sinais que fluem através do mesmo [141].

C.1.1 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo permite a estimação do parâmetro de interesse por meio da freqüência relativa de ocorrência de amostras. O procedimento para a estimação da probabili-

dade de erro de bit do sistema de comunicação digital pode ser visto como um experimento de Bernoulli, em que o sucesso se refere aos erros. Dado o modelo de um sistema de comunicação e uma descrição dos sinais de entrada $\boldsymbol{u}_t$ e $\boldsymbol{g}_t$, considerados processos aleatórios, o objetivo é encontrar as propriedades estatísticas da saída $\boldsymbol{z}_t$ ou o valor esperado de alguma função do sistema $f(\boldsymbol{z}_t)$ de $\boldsymbol{z}_t$, a função $f(\cdot)$ é a resposta do sistema, podendo ser linear ou não linear [141, pág.371].

A definição de um estimador da probabilidade de erro de bit é a fração do número de erros em uma seqüência de bits transmitidos em um intervalo de tempo, que consiste em usar uma expressão em termos das médias das amostras que foram geradas durante toda a simulação. Essa definição só é válida para sistemas estacionários, em que a taxa de erro de bit não varia com o tempo.

Seja BER_j a estimativa de taxa de erro de bit para a j-ésima bit transmitido e $\overline{BER}_L$ a estimativa de taxa de erro de bit após L simulações. Se BER é a probabilidade de erro de bit do sistema, o estimador de Monte Carlo, taxa de erro de bit estimada após L experimentos, será então a média amostral dada por:

$$\overline{BER}_N = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} I_E\left[f(z_t^{(j)})\right] \tag{C.1}$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} BER_j \tag{C.2}$$

em que o índice j denota o instante dos símbolos em que as decisões foram realizadas, o termo $I_E\left[f(z_t^{(j)})\right]$ representa a função indicadora de erro ou a estimativa de probabilidade de erro de bit para a j-ésima transmissão, e o somatório representa o contador de erros. O número de experimentos do método de Monte Carlo é representado por L.

Um estimador é dito ser consistente se à medida que o número de experimentos aumenta a estimativa converge para o valor real. Uma forma de se verificar se o estimador de Monte Carlo é consistente é através de sua variância. Se a variância do estimador de erros tende a zero à medida que o número de experimentos aumenta, diz-se que esse estimador é consistente, ou seja:

$$\lim_{L\to\infty} var\left(\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} BER_j\right) = 0. \tag{C.3}$$

Sabendo-se que para um determinado número de experimentos independentes de Bernoulli, o número de sucessos ou de falhas desses experimentos é uma variável aleatória distribuída de

forma binomial, a variância do estimador de Monte Carlo é dada por:

$$var\left(\overline{BER}_L\right) = \frac{\overline{BER}_L(1-\overline{BER}_L)}{L}, \tag{C.4}$$

em que BER é a taxa de erro de bit. Pode-se verificar a partir da Equação (C.4) que o estimador de Monte Carlo é consistente. Quanto mais consistente for um estimador, mais sua estimativa irá se aproximar do valor da BER.

Considerando o número de experimentos finito, o intervalo de confiança, que consiste em uma maneira de se medir a confiança do estimador, fornece uma indicação estatística de quanto o estimador está próximo do valor verdadeiro do parâmetro estimado.

C.1.2 Intervalo de Confiança

Em estatística, um intervalo de confiança é o intervalo estimado em que a média de um parâmetro de uma amostra tem uma dada probabilidade de ocorrer. A probabilidade associada a esse intervalo é denominada de coeficiente de confiança e é denotada por $1-\varpi$, em que ϖ se refere à precisão da estimativa, definido da forma

$$P\left[\overline{BER}_{L_1} \leq BER \leq \overline{BER}_{L_2}\right] = 1-\varpi, \tag{C.5}$$

em que a estimativa foi realizada para L_1 e L_2 experimentos. Valores típicos para a precisão da estimativa são de $0,05$, de $0,05$, de $0,02$ e de $0,01$, correspondendo a 95%, 98% e 99% para o coeficiente de confiança, respectivamente [141, pág.629].

Sabendo-se que o estimador de Monte Carlo é binomialmente distribuído, a fórmula mais simples e comumente utilizada para um intervalo de confiança binomial consiste em se aproximar à distribuição Binomial à uma distribuição Gaussiana. Sabe-se que a distribuição binomial converge para a normal quando $N \to \infty$, sendo esta aproximação justificada pelo Teorema do Limite Central [138, pág.278]. Logo, a função densidade de probabilidade do estimador terá distribuição normal com desvio padrão $\sigma_{\overline{BER}_L}$ e sua média tenderá ao valor verdadeiro da probabilidade de erro, ou seja, $E(\overline{BER}_N) = BER$. Considerando a simetria da FDP do estimador e assumindo que k é uma constante positiva tem-se

$$P\left[\overline{BER}_L - k\sigma_{\overline{BER}_L} \leq BER \leq \overline{BER}_L + k\sigma_{\overline{BER}_L}\right] = 1-\varpi. \tag{C.6}$$

percebe-se que quanto menor for o intervalo de confiança mais a estimativa se aproximará do valor real. Para um dado coeficiente de segurança é desejável se encontrar a constante positiva k que minimize o tamanho do intervalo de confiança $\left[\overline{BER}_L - k\sigma_{\overline{BER}_L}, \overline{BER}_L + k\sigma_{\overline{BER}_L}\right]$ [141, pág.630].

Como BER é a probabilidade de erro de bit do sistema, tem-se, aplicando a desigualdade de Chebyshev [138, pág.151] [141, pág.317] na Equação C.6, tem-se

$$P\left[|\overline{BER}_L - BER| < k\sigma_{\overline{BER}_L}\right] \geq 1 - \frac{var\left(\overline{BER}_L\right)}{k^2 var\left(\overline{BER}_L\right)} = 1 - \varpi; \tag{C.7}$$

em que, $var\left(\overline{BER}_L\right)$ é a variância de $\overline{BER}_L$ e ϖ é um valor arbitrariamente pequeno. Assim,

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \varpi \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\varpi}}. \tag{C.8}$$

Outra medida usual da confiabilidade de uma estimativa é denominada de erro padrão normalizado, em que a variância, ou mais precisamente a raiz quadrada do desvio padrão do estimador, fornece uma forma compacta de julgar a confiabilidade estimador [141, pág.645]. Este erro normalizado é definido por

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{var\left(\overline{BER}_L\right)}}{\overline{BER}_L}, \tag{C.9}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \sqrt{\frac{var\left(\overline{BER}_L\right)}{\overline{BER}_L^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\overline{BER}_L(1-\overline{BER}_L)}{L\overline{BER}_L^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1-\overline{BER}_L}{L\overline{BER}_L}} \\
&\cong \sqrt{\frac{1}{L\overline{BER}_L}},
\end{aligned} \tag{C.10}$$

pois, deseja-se na simulação de sistemas de comunicação que a taxa de erro de bit estima seja muito pequena, $\overline{BER}_L \ll 1$, assim, $1 - \overline{BER}_L \approx 1$. Assim,

$$L = \frac{1}{\varepsilon^2 \overline{BER}_L}. \tag{C.11}$$

Exemplo C.1 *Considere valores típicos para a precisão da estimativa são de* $0,1$*, de* $0,05$*, de* $0,02$ *e de* $0,01$*, correspondendo a* 95%*,* 98% *e* 99% *para o coeficiente de confiança, respectivamente [141, pág.629]. Deseja-se calcular o número de experimentos necessários* L*, em que permita uma boa estimativa da taxa de erro de bit* $\overline{BER}_L$ *dada uma precisão. Isso equivale a dizer que a simulação pelo método de Monte Carlo irá requerer pelo menos* L *observações para produzir um estimador com uma precisão relativa desejada. Quanto maior o valor do número de erros fixado na simulação menor será o desvio padrão do estimador, mais precisa será a estimativa, e conseqüentemente um maior número de experimentos será necessário para que se consiga atingir determinada precisão relativa. Assim,*

a. Para uma precisão da estimativa são de $0,1$*, ou coeficiente de confiança de* 90% *e uma taxa de erro estimado de* $\overline{BER}_L = 10^{-5}$*, o número de experimentos necessários é*

$$L = \frac{1}{(0,1)^2 10^{-5}} = 1 \times 10^7;$$

b. Para uma precisão da estimativa são de $0,05$*, ou coeficiente de confiança de* 95% *e uma taxa de erro estimado de* $\overline{BER}_L = 10^{-5}$*, o número de experimentos necessários é*

$$L = \frac{1}{(0,05)^2 10^{-5}} = 4 \times 10^7;$$

c. Para uma precisão da estimativa são de $0,02$*, ou coeficiente de confiança de* 98% *e uma taxa de erro estimado de* $\overline{BER}_L = 10^{-5}$*, o número de experimentos necessários é*

$$L = \frac{1}{(0,02)^2 10^{-5}} = 2,5 \times 10^8;$$

d. Para uma precisão da estimativa são de $0,01$*, ou coeficiente de confiança de* 99% *e uma taxa de erro estimado de* $\overline{BER}_L = 10^{-5}$*, o número de experimentos necessários é*

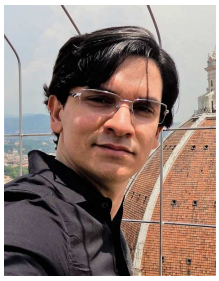
$$L = \frac{1}{(0,01)^2 10^{-5}} = 1 \times 10^9.$$

$\diamond$

Índice

W

Sobre o Autor



O autor nasceu em Paulo Afonso, Bahia, no dia 9 de setembro de 1978. Formado em Engenharia Elétrica, modalidade Eletrônica, pela Universidade Federal de Pernambuco (2004) e em Técnico em Telecomunicações pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco (CEFET-PE). Participou, durante a graduação, em pesquisa em Engenharia Biomédicas - *Fotônica Aplicada no Desenvolvimento de Imunosensores* e *Instrumentação para Medição das Propriedades Ópticas e Estruturas de Filmes*, junto ao PIBIC/CNPq/Departamento de Eletrônica e Sistemas - UFPE. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Pernambuco (2007) em Teoria dos Códigos aplicada a Comunicações. É membro do Grupo de Pesquisa em Comunicações da UFPE (Laboratório de Criptografia - LACRI), da Sociedade Brasileira de Telecomunicações (SBrT). Inscrito no Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agronomia - CREA e Membro do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (do inglês, Institute of Electrical and Electronics Engineers – IEEE).

Entre suas áreas de interesse estão os sistemas criptográficos, criptologia, telemática, teoria da decisão, teoria da informação, teoria dos códigos, genética, teologia, filosofia, historia das ciências.

Endereço: Av. Gen. Mac Arthur, No.303
Apt. 804, Ed. LIS
Cond. Le Parc, Ibiribeira
Recife – PE, Brasil
C.E.P.: 51.150 – 400

e-mail: marcio.j.c.lima@gmail.com

Esta tese foi diagramada usando LaTeX 2_ε[1] pelo autor.

[1] LaTeX 2_ε é uma extensão do LaTeX. LaTeX é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema TeX, que foi desenvolvido por Donald E. Knuth. TeX é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática ($\mathcal{AMS}$). O estilo usado na formatação desta tese foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, em 2005 por André Leite Wanderley, e em 2007 e 2015 por Márcio José de Carvalho Lima.