



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**

Fábio Pereira Lima

**INFERÊNCIA BOOTSTRAP EM MODELOS DE
REGRESSÃO BETA**

RECIFE

2017

Fábio Pereira Lima

**INFERÊNCIA BOOTSTRAP EM MODELOS DE
REGRESSÃO BETA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Estatística.

Área de concentração: Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Francisco Cribari-Neto

RECIFE

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

L732i Lima, Fábio Pereira
Inferência Bootstrap em modelos de regressão beta / Fábio Pereira Lima. –
2017.
136 f.: il., fig., tab.

Orientador: Francisco Cribari Neto.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Estatística, Recife, 2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Análise de regressão. 2. Regressão beta. I. Cribari Neto, Francisco
(orientador). II. Título.

519.536 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2017-73

FÁBIO PEREIRA LIMA

INFERÊNCIA BOOTSTRAP EM MODELOS DE REGRESSÃO BETA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Francisco Cribari Neto
UFPE

Prof. Raydonal Ospina Martínez
UFPE

Prof. Aldo William Medina Garay
UFPE

Prof. Marcelo Rodrigo Portela Ferreira
UFPB

Prof. Eufrásio de Andrade Lima Neto
UFPB

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Irani e Antônio, e minha avó, Ana. Sem seu apoio e compreensão eu não estaria aqui.

Ao meu orientador, Dr. Francisco Cribari Neto, por toda paciência e incentivo durante o período de trabalho.

Aos meus companheiros de curso e amigos, Wanderson, Itacira, Filipe, Daniel, Carol, Sadraque, Priscila e Ana, com os quais compartilhei momentos de alegria e pressão durante o período de doutorado.

A Raphaela e Fabiana, pessoas com as quais sempre posso contar independentemente do momento e que, mesmo quando não estavam presentes, não deixaram de me apoiar.

À banca examinadora, pelas observações e contribuições dadas ao trabalho.

Por fim, ao Departamento de Estatística da UFPE e à CAPES pelo apoio financeiro aos meus estudos.

*J'ai refait tous les calculs,
ils confirment l'opinion des spécialistes:
notre idée est irréalisable.
Il ne nous reste qu'une seule chose à faire:
la réaliser.*

Pierre-Georges Latécoère

RESUMO

O método bootstrap, introduzido por Efron (1979), tornou-se uma importante ferramenta estatística para contornar problemas inferenciais em pequenas amostras ou quando a teoria assintótica é intratável, podendo ser utilizado, por exemplo, na construção de intervalos de confiança, para realizar correção de viés de estimadores e para realizar testes de hipóteses. Quando se trata da classe de modelos de regressão beta proposta em Ferrari e Cribari-Neto (2004), utilizada na modelagem de variáveis contínuas no intervalo $(0, 1)$, o método tem um importante papel na construção de intervalos de predição e na realização de testes de hipóteses. A presente tese tem como objetivo abordar os principais métodos bootstrap utilizados para realizar inferências sobre os parâmetros dessa classe de modelos, avaliando os desempenhos das principais variantes de tal método. Para tanto, inicialmente são expostas adaptações do método bootstrap tendo como objetivo a realização de testes de hipóteses encaixadas e não encaixadas. Nesse cenário, propomos uma versão bootstrap duplo rápido para os testes com o objetivo de obter maior precisão nos resultados sem alto custo computacional. Adicionalmente, um estudo sobre a construção de intervalos de predição em modelos de regressão beta é realizado. Levando em conta os métodos percentil e BC_a adaptados em Espinheira et al. (2014), propomos uma adaptação do método t -bootstrap e as versões bootstrap duplo do mesmo e do método percentil. O desempenho de cada método é então avaliado na busca de determinar a melhor abordagem para cada situação.

Palavras-chave: Bootstrap. Bootstrap duplo rápido. Intervalos de predição. Regressão beta. Teste da razão de verossimilhanças.

ABSTRACT

Introduced by Efron (1979), the bootstrap became an important statistical tool, being used to overcome inference problems on small samples or when the asymptotic theory is intractable. The method can be used, for example, for constructing confidence intervals, for performing bias correction of estimators and for carrying out hypothesis testing inference. In the beta regression model, proposed by Ferrari and Cribari-Neto (2004) which is used to model continuous variables in $(0, 1)$, the bootstrap method plays an important role in the construction of prediction intervals and hypothesis testing. This thesis deals with the use of bootstrap methods for performing statistical inference in beta regression models. We present adaptations of the bootstrap method for performing nested and nonnested hypothesis testing inference. Next, we propose fast double bootstrap variants of the tests in order to achieve more accurate inferences without the high computational cost required by the standard double bootstrap. Additionally, a study of prediction intervals in the class of beta regression models is performed. We introduce t -bootstrap prediction interval and the double bootstrap versions of the percentil and t -bootstrap prediction intervals. The performance of each method is then evaluated in the quest to determine the best approach for each situation.

Keywords: Beta regression. Bootstrap. Fast double bootstrap. Likelihood ratio test. Prediction intervals.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Densidades beta para diferentes valores de (μ, ϕ) | 32 |
| 3.2 | Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 55 |
| 3.3 | Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de gastos com alimentação. | 56 |
| 3.4 | Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso. | 59 |
| 3.5 | Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados da NASCAR. | 61 |
| 4.1 | Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$, respectivamente, utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação. | 78 |
| 4.2 | Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia. | 81 |
| 4.3 | Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso. | 83 |
| 4.4 | Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 85 |
| 5.1 | Limites de predição obtidos via simulações <i>warp-speed</i> considerando $\lambda = 20$ | 109 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.2 | Limites de predição obtidos via simulações <i>warp-speed</i> considerando $\lambda = 100$. | 110 |
| 5.3 | Limites de predição obtidos via simulações <i>warp-speed</i> considerando $\lambda = 500$. | 111 |
| 5.4 | Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, <i>t</i> -bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados de recém-nascidos com baixo peso. | 118 |
| 5.5 | Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados de recém-nascidos com baixo peso. | 119 |
| 5.6 | Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, <i>t</i> -bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados da NASCAR. | 120 |
| 5.7 | Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados da NASCAR. | 121 |
| 5.8 | Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, <i>t</i> -bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados do fator de simultaneidade. | 123 |
| 5.9 | Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados do fator de simultaneidade. | 124 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 20$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$. | 44 |
| 3.2 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 100$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$. | 45 |
| 3.3 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 500$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$. | 45 |
| 3.4 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 20$ e $r = 1$ | 47 |
| 3.5 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 50$ e $r = 1$ | 47 |
| 3.6 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 100$ e $r = 1$ | 48 |
| 3.7 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 20$ e $r = 2$ | 48 |
| 3.8 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 50$ e $r = 2$ | 49 |
| 3.9 | Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 100$ e $r = 2$ | 49 |
| 3.10 | Taxas de rejeição nula (%) no submodelo da precisão. | 50 |
| 3.11 | Taxas de rejeição nula (%) obtidas a partir da variação do número de réplicas bootstrap. | 51 |
| 3.12 | Estimativas e erros-padrão para o modelo final utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 54 |
| 3.13 | Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados do fator de simultaneidade. | 54 |
| 3.14 | Estimativas e erros-padrão para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso. | 58 |
| 3.15 | Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados da NASCAR. | 60 |
| 3.16 | Medidas de avaliação dos modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados da NASCAR. | 60 |
| 4.1 | Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da média. | 71 |
| 4.2 | Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da precisão. | 72 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.3 | Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da média e precisão. | 73 |
| 4.4 | Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem na função de ligação do submodelo da média. | 74 |
| 4.5 | Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nas funções de ligação dos submodelos da média e precisão. | 75 |
| 4.6 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação. | 76 |
| 4.7 | Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de gastos com alimentação. | 77 |
| 4.8 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação. | 78 |
| 4.9 | Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de gastos com alimentação. | 78 |
| 4.10 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia. | 80 |
| 4.11 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia. | 80 |
| 4.12 | Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de oxidação da amônia. | 80 |
| 4.13 | Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de oxidação da amônia. | 81 |
| 4.14 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso. | 82 |
| 4.15 | Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso. | 82 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.16 | Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de recém-nascidos com baixo peso. | 83 |
| 4.17 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 84 |
| 4.18 | p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 84 |
| 4.19 | Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade. | 85 |
| 4.20 | Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados do fator de simultaneidade. | 85 |
| 5.1 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 20$ | 102 |
| 5.2 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 50$ | 103 |
| 5.3 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 100$ | 103 |
| 5.4 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 20$ | 104 |
| 5.5 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 50$ | 105 |
| 5.6 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 100$ | 105 |
| 5.7 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias para os intervalos de predição construídos via bootstrap duplo para o modelo com precisão variável, com $\lambda = 100$ | 106 |
| 5.8 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método <i>warp-speed</i> para o modelo com precisão variável, com $\lambda = 100$ | 108 |
| 5.9 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método <i>warp-speed</i> considerando má especificação causada pela omissão de um regressor. . . . | 112 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.10 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável erroneamente estimado com precisão constante. | 113 |
| 5.11 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método <i>warp-speed</i> considerando má especificação na função de ligação do submodelo da média. | 114 |
| 5.12 | Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método <i>warp-speed</i> considerando má especificação na função de ligação do submodelo da precisão. | 116 |
| 5.13 | Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados de recém-nascidos com baixo peso. . . | 117 |
| 5.14 | Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados da NASCAR. | 121 |
| 5.15 | Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados do fator de simultaneidade. | 122 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução e suporte computacional | 17 |
| 1.1 | Introdução | 17 |
| 1.2 | Organização da tese | 19 |
| 1.3 | Suporte computacional | 20 |
| 2 | Métodos bootstrap | 21 |
| 2.1 | Introdução | 21 |
| 2.2 | Bootstrap não-paramétrico | 22 |
| 2.2.1 | Bootstrap bayesiano | 23 |
| 2.2.2 | Bootstrap suavizado | 24 |
| 2.2.3 | Bootknife | 25 |
| 2.3 | Bootstrap paramétrico | 26 |
| 2.4 | Bootstrap duplo | 26 |
| 2.5 | Bootstrap duplo rápido | 27 |
| 2.6 | O método warp-speed | 27 |
| 3 | Testes de hipóteses via esquemas bootstrap | 29 |
| 3.1 | Introdução | 29 |
| 3.2 | O modelo de regressão beta | 31 |
| 3.3 | Testes de hipóteses | 35 |
| 3.4 | Testes de hipóteses baseados em bootstrap | 35 |
| 3.4.1 | Testes bootstrap | 36 |
| 3.4.2 | Testes bootstrap duplo | 37 |
| 3.4.3 | Testes bootstrap duplo rápido | 38 |
| 3.5 | Algoritmos para os testes bootstrap | 40 |
| 3.6 | Simulações | 43 |
| 3.7 | Aplicações | 52 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.7.1 | Aplicação 1: Fator de simultaneidade | 53 |
| 3.7.2 | Aplicação 2: Gastos com alimentação | 54 |
| 3.7.3 | Aplicação 3: Recém-nascidos com baixo peso | 56 |
| 3.7.4 | Aplicação 4: Prêmios da Ford na NASCAR | 58 |
| 3.8 | Conclusões | 61 |
| 4 | Testes de hipóteses não encaixadas via esquemas bootstrap | 63 |
| 4.1 | Introdução | 63 |
| 4.2 | Testes J e MJ em modelos de regressão beta | 65 |
| 4.2.1 | Testes J e MJ via esquemas bootstrap | 66 |
| 4.3 | Simulações | 70 |
| 4.4 | Aplicações | 75 |
| 4.4.1 | Aplicação 1: Gastos com alimentação | 75 |
| 4.4.2 | Aplicação 2: Oxidação da amônia | 78 |
| 4.4.3 | Aplicação 3: Recém-nascidos com baixo peso | 81 |
| 4.4.4 | Aplicação 4: Fator de simultaneidade | 82 |
| 4.5 | Conclusões | 86 |
| 5 | Intervalos de predição bootstrap | 87 |
| 5.1 | Introdução | 87 |
| 5.2 | Intervalos de predição | 89 |
| 5.3 | Intervalo t-bootstrap | 93 |
| 5.3.1 | Intervalo de predição t-bootstrap | 93 |
| 5.4 | Intervalos de predição via bootstrap duplo | 96 |
| 5.5 | Simulações | 101 |
| 5.5.1 | Simulações warp-speed | 106 |
| 5.6 | Aplicações | 115 |
| 5.6.1 | Aplicação 1: Recém-nascidos com baixo peso | 117 |
| 5.6.2 | Aplicação 2: Prêmios da Ford na NASCAR | 119 |
| 5.6.3 | Aplicação 3: Fator de simultaneidade | 121 |
| 5.7 | Conclusões | 124 |
| 6 | Considerações finais | 126 |
| 6.1 | Conclusões | 126 |

| | | |
|-----|--|------------|
| 6.2 | Trabalhos futuros | 127 |
| | Referências | 128 |
| | Apêndice A – Prova das igualdades para o bootstrap bayesiano | 134 |
| | Apêndice B – Matriz de informação de Fisher para o modelo de regressão beta | 136 |

Capítulo 1

Introdução e suporte computacional

1.1 Introdução

Surgido como uma variante do método *jackknife* (Quenouille (1949); Tukey (1958)), o método bootstrap introduzido por Efron (1979) se tornou uma importante ferramenta estatística, sendo aplicado para contornar problemas de inferências em pequenas amostras ou quando a teoria assintótica é intratável. Entre as principais aplicações do método estão: a construção de intervalos de confiança, a correção de viés de estimadores e a realização de testes de hipóteses.

Ao longo dos anos, o bootstrap foi vastamente aplicado e estudado, o que resultou no surgimento de algumas variantes que permitem melhorar ainda mais o seu desempenho, ainda que com um certo custo computacional. Na vertente não-paramétrica, os métodos bootstrap suavizado (Efron, 1979), bootstrap bayesiano (Rubin et al., 1981), e *bootknife* (Hesterberg, 1999) se destacam. Já em um quadro mais geral, Efron (1983) introduziu o bootstrap duplo, posteriormente estudado por Hall (1986), Beran (1987) e Hall e Martin (1988), que o utilizaram para alcançar considerável melhoria na acurácia de intervalos de confiança, ainda que com alto custo computacional. Com o intuito de contornar esse alto custo computacional, Davidson e MacKinnon (2000) propuseram o bootstrap duplo rápido. Por sua vez, a aplicação do método a modelos de regressão foi estudada em Wu (1986). Tais estudos formam a base para a utilização do método na classe de modelos de regressão beta.

Proposto por Ferrari e Cribari-Neto (2004), o modelo de regressão beta é utilizado na modelagem de variáveis contínuas no intervalo $(0, 1)$, como taxas e proporções. Quando se trata dessa classe de modelos, o método bootstrap tem um importante papel na realização de testes de hipóteses (Cribari-Neto e Queiroz, 2014) e na construção de intervalos de predição (Espinheira et al., 2014). Inferências em grandes amostras nessa classe de modelos podem ser realizadas através do teste da razão de verossimilhanças, cuja estatística de teste possui, sob certas condições de regularidade e sob a hipótese nula, distribuição limite qui-quadrado. No entanto, em pequenas amostras, tais inferências encontram um problema: a aproximação da distribuição nula exata da estatística da razão de verossimilhanças pela distribuição nula limite pode ser pobre e gerar distorções no tamanho do teste. Neste cenário, a utilização de esquemas de reamostragem bootstrap surge como uma boa alternativa para contornar tal situação e obter resultados mais próximos ao esperado.

Por sua vez, a utilização de modelos de regressão ajustados para prever valores de uma variável resposta associados a um novo conjunto de valores para as covariadas é uma prática comum na estatística. No entanto, a utilização de uma predição pontual muitas vezes pode não ser a melhor escolha, já que, como apresentado em Zerbinatti (2008), o modelo de regressão beta pode muitas vezes subestimar a resposta. Sendo assim, a obtenção de um intervalo de predição, associado a um certo nível de confiança, para tal resposta surge como uma opção interessante. Neste cenário, Espinheira et al. (2014) propuseram intervalos de predição baseados nos métodos percentil e BC_a para modelos de regressão beta, avaliando e concluindo o bom funcionamento dos mesmos.

A presente tese visa avaliar o desempenho do método bootstrap e suas principais variantes em aplicações a classe de modelo de regressão beta proposta em Ferrari e Cribari-Neto (2004). Para tanto, propomos a versão bootstrap duplo rápido para a realização de testes de hipóteses nessa classe, avaliando o desempenho da mesma contra a versão bootstrap usual e corrigida via fator de Bartlett bootstrap. Já no que se refere a intervalos de predição, propomos a versão t -bootstrap para tais intervalos, além das versões bootstrap duplo da mesma e da versão percentil. A avaliação dos métodos é realizada através de simulações de Monte Carlo considerando o bootstrap paramétrico. Adicionalmente, uma análise do impacto da má especificação do modelo sobre os intervalos construídos é realizada.

1.2 Organização da tese

A presente tese está dividida em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta, além de uma introdução aos problemas a serem abordados durante esse trabalho, informações sobre o suporte computacional utilizado no mesmo. O segundo capítulo traz uma revisão sobre o método de reamostragem bootstrap e suas principais variantes, tais como o bootstrap duplo e o bootstrap duplo rápido. Além disso, o capítulo apresenta o método de simulação *warp-speed*, baseado na teoria do bootstrap duplo rápido e proposto por Giacomini et al. (2013).

Por sua vez, o terceiro capítulo introduz o modelo de regressão beta e aborda a questão de realização de testes de hipóteses nessa classe de modelos através da estatística da razão de verossimilhanças, abordando os métodos bootstrap duplo e correção de Bartlett bootstrap como formas de melhorar o desempenho do teste. Adicionalmente, propomos a versão bootstrap duplo rápido do mesmo, como alternativa ao problema de aproximação assintótica da distribuição nula exata da estatística de teste e visando uma melhor precisão do teste sem o alto custo computacional exigido pelo bootstrap duplo. Simulações de Monte Carlo são apresentadas para avaliar os desempenhos dos métodos e aplicações a dados reais são realizadas.

Já no quarto capítulo, voltamos nossas atenções para testes de hipóteses não encaixadas. Os testes J e MJ , propostos por Davidson e MacKinnon (1981) e Hagemann (2012), respectivamente, assim como suas versões bootstrap para modelos de regressão beta, propostas por Cribari-Neto e Lucena (2015), são utilizados para a obtenção de uma versão bootstrap duplo rápido dos mesmos. Os desempenhos de tais versões dos testes são avaliados via simulações de Monte Carlo e aplicações a dados reais são realizadas.

O quinto capítulo aborda o conceito de intervalos de predição para a classe de modelos de regressão beta. Focamos na proposta da versão t -bootstrap de tais intervalos e das versões bootstrap duplo do intervalo percentil e t -bootstrap. Os desempenhos dos intervalos são avaliados via simulações de Monte Carlo e aplicações a dados reais são realizadas. Por fim, o sexto capítulo apresenta as considerações finais do presente trabalho.

1.3 Suporte computacional

As avaliações numéricas obtidas ao longo dessa tese foram realizadas utilizando a linguagem de programação matricial `Ox`, na sua versão 6.2. Desenvolvida por Jurgen Doornik em 1994, tal linguagem encontra-se disponível em <http://doornik.com>. Para mais detalhes, ver Doornik e Ooms (2007).

Para os Capítulos 3 e 5, foi utilizado um computador com sistema operacional `Mac OS X Yosemite`, processador `i5`, 128GB de armazenamento em flash e 4GB de memória LPDDR3. Já para as simulações do Capítulo 4, foi utilizado um computador com sistema operacional `Ubuntu 12.04`, processador `i7` com 8 núcleos, 1TB de disco rígido e 8GB de memória RAM.

Por sua vez, os gráficos presentes neste trabalho foram produzidos utilizando o software `R`, em sua versão 3.1, no sistema operacional `Mac OS X Yosemite`. O `R` é um software de domínio público criado por Ross Ihaka e Robert Gentleman em 1993, e encontra-se disponível em <http://r-project.org>. Para mais detalhes, ver Ihaka e Gentleman (1996) e Venables e Smith (2004).

Capítulo 2

Métodos bootstrap

2.1 Introdução

Desde que foi introduzido por Efron (1979), o método bootstrap se tornou uma importante ferramenta estatística sendo utilizado, por exemplo, na construção de intervalos de confiança, para correção de viés de estimadores e em testes de hipóteses. O método tem como ideia central tratar a amostra como a própria população e, a partir dela, obter réplicas da amostra original, seja por reamostragem com reposição (bootstrap não-paramétrico) ou pelo ajuste do modelo ao qual os dados pertencem (bootstrap paramétrico). Considere a amostra aleatória n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ cujos os valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com função de distribuição F . Seja θ um parâmetro de interesse e $\hat{\theta} = \tau(y)$ seu estimador. Inferências sobre θ podem ser realizadas utilizando a estatística τ , bastando conhecer ou estimar sua função de distribuição amostral. Para tanto, gera-se um número grande de pseudo-amostras $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ e estima-se a distribuição amostral de τ a partir da distribuição empírica de $\tau^* = \tau(y^*)$.

Durante os anos, vários autores estudaram o método e apresentaram versões que visam melhorar ainda mais seu desempenho. Entre eles vale destacar Rubin et al. (1981) e Hesterberg (1999) que propuseram versões do bootstrap não-paramétrico, Efron (1983) que propôs o bootstrap duplo como forma de aprimorar a correção de viés bootstrap, depois utilizado por Hall (1986), Beran (1987) e Hall e Martin (1988) para obtenção de

intervalos de confiança mais acurados, e Davidson e MacKinnon (2000) que propuseram o bootstrap duplo rápido, como alternativa ao alto custo computacional do bootstrap duplo.

Nesse capítulo, faremos uma revisão das principais versões do método bootstrap. Na Seção 2.2 é apresentada a versão não-paramétrica do método assim como algumas de suas variantes. Por sua vez, na Seção 2.3 tratamos da versão paramétrica do mesmo, enquanto nas Seções 2.4 e 2.5 apresentamos as versões bootstrap duplo e bootstrap duplo rápido, respectivamente. Por fim, na Seção 2.6 é apresentado o método de simulação *warp-speed*, que tem como base a teoria do bootstrap duplo rápido.

2.2 Bootstrap não-paramétrico

Considere a amostra aleatória n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, cujos valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e denote por F sua função de distribuição desconhecida. No bootstrap não-paramétrico (ou naive) as pseudo-amostras $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ são geradas selecionando observações independentemente e com reposição a partir da amostra original y , ou seja, amostrando da função de distribuição empírica discreta,

$$\widehat{F}(y_i^*) = \Pr(y_i^* = y_i) = \frac{1}{n},$$

em que $i = 1, \dots, n$.

Dessa forma, dada uma estatística de interesse τ , pode-se obter a estimativa bootstrap da função de distribuição da mesma através do seguinte processo:

1. Gere uma pseudo-amostra y^* a partir de y , com reposição.
2. Calcule a estatística de interesse para a amostra gerada, $\tau^* = \tau(y^*)$.
3. Execute os passos 1 e 2 um número grande (B) de vezes.
4. Utilize a distribuição empírica de τ^* como estimativa da distribuição de τ .

Ao longo dos anos, algumas variantes da versão naive do método foram propostas visando melhorar o desempenho do mesmo, como por exemplo o bootstrap bayesiano, o bootstrap suavizado e o *bootknife*.

2.2.1 Bootstrap bayesiano

Funcionando de maneira similar ao bootstrap naive, o bootstrap bayesiano (BB) foi proposto em Rubin et al. (1981). Tal método tem como principal diferença do método tradicional o fato de que ao invés de amostrar com reposição a partir de uma amostra $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ com cada y_i tendo probabilidade $1/n$ de ser selecionado, usa-se uma distribuição de probabilidade a posteriori para cada y_i . Tal distribuição é centrada em $1/n$, mas varia para cada y_i . Mais especificamente, uma réplica BB pode ser gerada da seguinte maneira:

1. Considere a amostra aleatória $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$;
2. Gere uma amostra aleatória $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ de tamanho $n - 1$ da distribuição uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$;
3. Ordene os valores de u tais que $u_{(0)} \leq u_{(1)} \leq \dots \leq u_{(n-1)} \leq u_{(n)}$, com $u_{(0)} = 0$ e $u_{(n)} = 1$;
4. Obtenha o vetor de probabilidades $g = (g_1, \dots, g_n)^\top$, em que $g_i = u_{(i)} - u_{(i-1)}$;
5. Reamostre com reposição de y associando a cada y_i a probabilidade g_i de ser selecionado.

Note que para cada pseudo-amostra do BB, um novo vetor de probabilidades g é gerado.

Rubin et al. (1981) ressalta que o bootstrap naive e o bayesiano são bastante similares, já que, operacionalmente, diferem apenas na maneira em que as probabilidades são associadas a cada y_i . De fato, se $f_i^{(b)}$ representa a proporção de vezes que y_i aparece na b -ésima réplica bootstrap e $g_i^{(b)}$ representa o valor de g_i para tal réplica temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f_i^{(b)}\right) &= \mathbb{E}\left(g_i^{(b)}\right) = 1/n, \\ \text{Var}\left(f_i^{(b)}\right) &= \text{Var}\left(g_i^{(b)}\right) \frac{n+1}{n} = \frac{n-1}{n^3}, \\ \text{Cor}\left(f_i^{(b)}, f_j^{(b)}\right) &= \text{Cor}\left(g_i^{(b)}, g_j^{(b)}\right) = -\frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

em que $\mathbb{E}(\cdot)$, $\text{Var}(\cdot)$ e $\text{Cor}(\cdot)$ denotam valor esperado, variância e correlação, respectivamente (ver Apêndice A). Segundo Rubin et al. (1981) tais propriedades vão garantir que a distribuição BB de θ será similar à distribuição bootstrap de $\hat{\tau}$ em muitas aplicações. No entanto, o autor destaca que as interpretações das distribuições obtidas por

cada processo serão diferentes, já que o bootstrap usual estima a distribuição amostral de $\hat{\tau}$ enquanto o BB simula a distribuição posteriori do parâmetro θ , o que seria uma vantagem na realização de inferências sobre tal parâmetro.

2.2.2 Bootstrap suavizado

Proposto em Efron (1979), o bootstrap suavizado é uma modificação do bootstrap naive geralmente utilizado quando se suspeita que a distribuição subjacente dos dados é contínua, já que nessas condições amostrar de uma distribuição contínua parece uma escolha melhor do que amostrar a partir da função de distribuição empírica, que é discreta. Para tanto, o método considera uma versão suavizada da função de distribuição empírica, obtida via estimativa de densidade *kernel*.

Considere $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ independente e identicamente distribuídos de uma distribuição F desconhecida com densidade f . Seja \hat{F} a função de distribuição empírica de y , que associa massa de probabilidade $1/n$ para cada $y_i, i = 1, \dots, n$, e seja \hat{F}_h a estimativa *kernel* de F , com densidade \hat{f}_h , dadas por

$$\hat{F}_h(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K((t - y_i)/h) \text{ e } \hat{f}_h(t) = (hn)^{-1} \sum_{i=1}^n k((t - y_i)/h), \quad (2.1)$$

em que k é uma função *kernel* tal que $K(t) = \int_{-\infty}^t k(y)dy$, geralmente escolhida como sendo a densidade normal, e $h > 0$, é denominado o parâmetro de suavização. Sob certas condições, assintoticamente, \hat{f}_h converge para a verdadeira densidade f da distribuição subjacente dos dados (Silverman, 1986).

Segundo Shakhnarovich et al. (2001), a estimação via *kernel* pode ser uma tarefa de alto custo computacional, no entanto, para amostrar de \hat{F}_h não é necessário computar explicitamente as equações em (2.1). O autor observa que tal procedimento é equivalente a adicionar uma perturbação obtida de K a y_i obtido a partir de \hat{F} . Dessa forma, o processo de reamostragem via bootstrap suavizado é feito da seguinte maneira:

1. Considere a amostra aleatória $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$.
2. Gere uma pseudo-amostra $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ a partir de y com reposição.
3. A amostra bootstrap suavizado é obtida como

$$y_i^\dagger = y_i^* + \xi_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que ξ_i é uma perturbação, comumente obtida a partir de $N(0, h^2)$.

Hesterberg (2004) e Chihara e Hesterberg (2012) sugerem a utilização de $h = s/\sqrt{n}$, em que

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

Note que, dado $w \in \mathbb{R}$, temos que

$$\Pr(y^\dagger \leq w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pr(y^* + hz < w),$$

em que $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Sendo assim,

$$\Pr(y^\dagger \leq w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{w - y^*}{h}\right), \quad (2.2)$$

em que $\Phi(\cdot)$ denota a função de distribuição normal padrão. A Equação (2.2) é uma função de distribuição contínua com densidade

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \phi\left(\frac{w - y^*}{h}\right),$$

que é um estimador *kernel*. Uma visão geral do método de estimação de densidade *kernel* pode ser encontrada em Silverman (1986).

2.2.3 Bootknife

Hesterberg (1999) sugere um procedimento de suavização alternativo ao realizado no bootstrap suavizado. No *bootknife* (ou amostragem *jackboot*), as amostras bootstrap são geradas a partir de uma amostra *jackknife*, obtida omitindo uma observação da amostra original. O autor ressalta que as omissões podem ser realizadas de forma aleatória, mas que melhores resultados são obtidos através de um procedimento de estratificação:

1. Considere a amostra aleatória $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ e seja B o número de réplicas bootstrap a serem realizadas.
2. Seja $k = \lfloor B/n \rfloor$, em que $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função piso.
3. Para cada $i = 1, \dots, n$, gere k amostras bootstrap a partir de $y_{(i)}$ com reposição, em que $y_{(i)}$ é a amostra *jackknife* de y obtida omitindo a i -ésima observação.

4. Gere um vetor v de tamanho $(B - nk)$ a partir dos números $1, \dots, n$, sem reposição, e gere as réplicas bootstrap restantes a partir de $y_{(j)}$, com $j \in v$.

Dessa forma, cada observação será omitida k ou $k + 1$ vezes. Estudos de simulação realizados por Hesterberg (1999) indicaram que o método funciona bem quando se trata de intervalos de confiança.

2.3 Bootstrap paramétrico

Seja $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ uma amostra aleatória cujos valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F_θ , em que θ é o parâmetro que indexa a distribuição. No bootstrap paramétrico, as pseudo-amostras $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$, são geradas a partir de $F_{\hat{\theta}}$, em que $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ .

Dessa forma, pode-se obter a estimativa bootstrap da função de distribuição de uma estatística de interesse τ a partir do seguinte processo:

1. Gere uma pseudo-amostra $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$, em que $y_i^* \sim F_{\hat{\theta}}$.
2. Calcule a estatística de interesse para a amostra gerada, $\tau^* = \tau(y^*)$.
3. Execute os passos 1 e 2 um número grande (B) de vezes.
4. Utilize a distribuição empírica de τ^* como estimativa da distribuição de τ .

2.4 Bootstrap duplo

Sugerido originalmente por Efron (1983), o bootstrap duplo (BD) ganhou destaque com os estudos realizados por Hall e Martin (1988) e Beran (1988), que utilizaram o método como forma de melhorar a acurácia de intervalos de confiança. Para tanto, o bootstrap duplo utiliza de um segundo nível de reamostragem, em que para cada uma das B_1 amostras bootstrap de primeiro nível são geradas B_2 pseudo-amostras de segundo nível. Dessa forma, temos que no total são geradas $B_1 \times B_2$ amostras bootstrap, o que faz com que tal procedimento tenha um alto custo computacional. Uma visão geral do método em testes de hipóteses será apresentada no Capítulo 3.

2.5 Bootstrap duplo rápido

Em busca de melhorar o desempenho do bootstrap usual sem o alto custo computacional exigido pelo bootstrap duplo, Davidson e MacKinnon (2000) propuseram o método bootstrap duplo rápido (BDR). Em tal procedimento, para cada réplica bootstrap de primeiro nível, ajusta-se o modelo para a pseudo-amostra e utiliza-se as estimativas dos parâmetros para gerar uma única amostra bootstrap de segundo nível. Dessa forma, são geradas apenas $2B$ amostras bootstrap, fazendo com que o custo computacional seja significativamente menor do que no BD.

Algumas aplicações do método podem ser encontradas em Davidson e MacKinnon (2002b) e MacKinnon (2006). Já em Davidson e Trokic (2011) são apresentados de maneira iterativa os métodos bootstrap triplo rápido e de ordens superiores. Uma visão mais ampla da utilização do BDR em testes de hipóteses será apresentada nos Capítulos 3 e 4.

2.6 O método warp-speed

Proposto em Giacomini et al. (2013), utilizando como base os estudos realizados por White (2000) e Davidson e MacKinnon (2000) em relação ao bootstrap duplo rápido, o método de simulação *warp-speed* tem como objetivo principal reduzir o alto custo computacional de simulações de Monte Carlo em inferências bootstrap. Para tanto, o método foca em reduzir o número de estatísticas computadas durante o processo. De fato, em uma simulação de Monte Carlo tradicional, se B representa o número de réplicas bootstrap e K o número de réplicas de Monte Carlo, a simulação envolve computar $K \times B$ vezes a estatística de interesse. Como B, K devem ser grandes, o método tem um alto custo computacional. Por sua vez, na simulação *warp-speed*, gera-se apenas uma amostra bootstrap para cada réplica de Monte Carlo, o que faz com que a simulação envolva o cálculo de apenas $2K$ estatísticas, as K estatísticas associadas as réplicas de Monte Carlo e as K estatísticas associadas as réplicas bootstrap, que serão utilizadas para estimar a distribuição da estatística de interesse.

Giacomini et al. (2013) avalia o desempenho do método através de simulações para a taxa de cobertura em intervalos de confiança, nas quais verifica que o método *warp-speed* apresenta resultados próximos aos obtidos via o método de simulação usual, além

de apresentar uma convergência mais rápida ao nível de confiança do que as taxas obtidas via o método de simulação usual. O autor ainda ressalta que melhores resultados são alcançados quando o número de réplicas de Monte Carlo, K , e de observações, n , são grandes. Voltaremos a tratar do método de simulação *warp-speed* no Capítulo 5.

Capítulo 3

Testes de hipóteses via esquemas bootstrap

3.1 Introdução

Em um modelo de regressão, quando a variável resposta é restrita ao intervalo $(0, 1)$, como no caso de taxas e proporções, é comum a utilização de transformações para que a mesma assuma valores em \mathbb{R} (a reta real). No entanto, nesse caso, os parâmetros não podem mais ser interpretados em termos da média da resposta original e os valores ajustados para a variável de interesse podem cair fora do intervalo unitário padrão. Para contornar tal situação, em Ferrari e Cribari-Neto (2004) foi proposta uma classe de modelos de regressão beta. Em tal classe, a variável resposta segue distribuição beta e o modelo é construído a partir de uma reparametrização da densidade da mesma. Durante os últimos anos, essa classe de modelos vem sendo bastante estudada. Trabalhos como Ospina et al. (2006) e Ferrari et al. (2011), tratam sobre inferências e estimação na mesma, enquanto Smithson e Verkuilen (2006) e Simas et al. (2010) apresentam uma generalização do modelo de regressão beta proposto em Ferrari e Cribari-Neto (2004), assumindo uma estrutura de regressão para o parâmetro de precisão. Por sua vez, Ospina e Ferrari (2012) introduzem uma extensão dos modelos de regressão beta, os modelos de regressão beta inflacionados, que são caracterizados por acomodar dados que contêm zeros e/ou uns.

Quando se trata de fazer inferências sobre os parâmetros de um modelo de regressão

beta, pode-se utilizar o teste da razão de verossimilhanças (RV). Sabe-se que, em condições regulares e sob a hipótese nula, a estatística de teste tem distribuição limite qui-quadrado χ^2 . No entanto, em amostras pequenas tal aproximação pode ser pobre, o que pode ocasionar distorções no tamanho do teste. A correção de Bartlett (Bartlett, 1937) e o ajuste de Skovgaard (Skovgaard, 2001) podem ser utilizados para contornar tal problema, contudo, o uso de esquemas de reamostragem bootstrap surge como uma boa alternativa aos métodos supracitados. Quando se trata de melhorar o desempenho do teste RV , tal método pode ser utilizado para a estimação do fator de correção de Bartlett em situações em que a derivação analítica do mesmo é difícil (Rocke, 1989). Alternativamente, o desempenho do teste pode ser aprimorado com base em valores críticos obtidos a partir de um esquema de reamostragem bootstrap, já que o mesmo permite estimar a distribuição nula da estatística de teste, evitando assim o uso de uma aproximação assintótica.

Neste cenário, a regra de decisão do teste pode ser expressa em termos do p -valor bootstrap. No entanto, vale ressaltar que às vezes os p -valores bootstrap são bem diferentes dos assintóticos, o que, segundo Davidson e MacKinnon (2007), nos indica a imprecisão do último, mas não nos garante a precisão da versão bootstrap. Nessa situação, pode-se recorrer a uma versão modificada do método que tende a apresentar uma melhor precisão, o chamado bootstrap duplo (Efron, 1983), que ainda assim possui uma desvantagem: seu alto custo computacional. Como alternativa a este problema, em Davidson e MacKinnon (2000), os autores sugerem o bootstrap duplo rápido, que permite alcançar maior precisão com custo computacional reduzido.

O objetivo desse capítulo é apresentar algoritmos para a realização de testes de hipóteses baseados em esquemas de reamostragem bootstrap, BD, BDR e da estatística da razão de verossimilhanças modificada pela correção de Bartlett bootstrap. Na Seção 3.2 é feita uma rápida apresentação do modelo de regressão beta com precisão constante e variável. Na Seção 3.3 é apresentado o teste assintótico da razão de verossimilhanças. Já na Seção 3.4 são apresentados os esquemas de reamostragem bootstrap, BD e BDR, para obtenção de p -valores. Por sua vez, a Seção 3.5 traz algoritmos para a realização de testes de hipóteses baseados em esquemas de reamostragem em modelos de regressão beta. Os desempenhos dos testes supracitados são avaliados via simulações de Monte Carlo na Seção 3.6 e aplicações a dados reais são realizadas na Seção 3.7. Por fim, as conclusões são expostas na Seção 3.8.

3.2 O modelo de regressão beta

Seja y uma variável aleatória com distribuição beta. Então, sua função de densidade é dada por

$$\pi(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (3.1)$$

em que $p, q > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$. A média e variância de y são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(y) = \frac{p}{p+q} \quad \text{e} \quad \text{Var}(y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

Em Ferrari e Cribari-Neto (2004) é proposta uma reparametrização da densidade beta tomando

$$p = \mu\phi \quad \text{e} \quad q = (1-\mu)\phi.$$

Desta forma, a densidade em (3.1) pode ser reescrita como

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (3.2)$$

em que $\mu \in (0, 1)$ e $\phi > 0$ é denominado o parâmetro de precisão. Nesse caso, denotamos $y \sim \mathcal{B}(\mu, \phi)$ e temos que

$$\mathbb{E}(y) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(y) = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\phi}.$$

A Figura 3.1 apresenta algumas densidades beta reparametrizadas para alguns valores de μ e ϕ .

Considere agora o vetor n -dimensional de variáveis aleatórias independentes, $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, tal que para cada $t = 1, \dots, n$, y_t tem densidade (3.2), com $\mathbb{E}(y_t) = \mu_t$ e parâmetro de precisão ϕ . O modelo de regressão beta com precisão constante pode ser escrito como

$$g(\mu_t) = \sum_{j=1}^k x_{tj} \beta_j = \eta_t, \quad (3.3)$$

em que β é um vetor k -dimensional de parâmetros desconhecidos e x_{t1}, \dots, x_{tk} são observações de k variáveis independentes conhecidas ($k \leq n$). Se o modelo possui intercepto tem-se $x_{t1} = 1$, para todo t . Por sua vez, $g(\cdot)$ é uma função com domínio em $(0, 1)$ e imagem em \mathbb{R} , estritamente monótona e duas vezes diferenciável, denominada

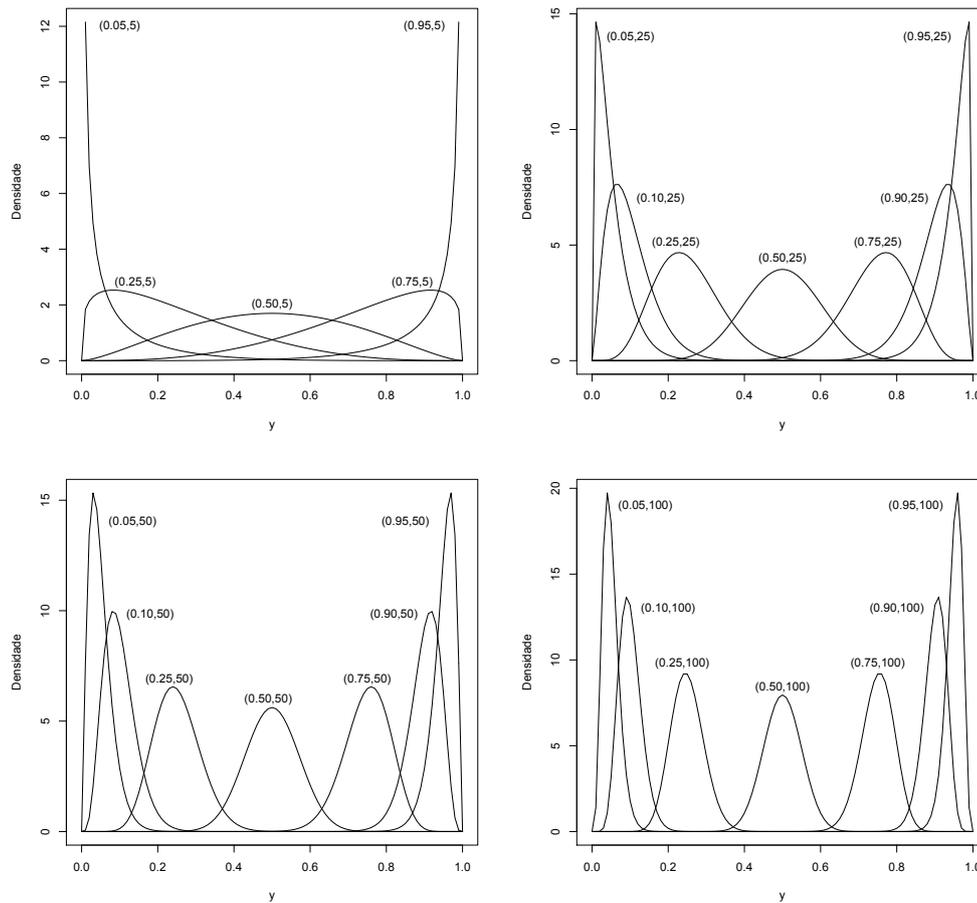


Figura 3.1: Densidades beta para diferentes valores de (μ, ϕ) .

função de ligação. Entre as funções de ligação mais utilizadas estão: logit, $g(\mu) = \log\{\mu/(1 - \mu)\}$; log-log, $g(\mu) = -\log\{-\log(\mu)\}$ e probit, $g(\mu) = \Phi^{-1}(\mu)$, em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição normal padrão.

Uma extensão do modelo de regressão beta foi introduzida por Smithson e Verkuilen (2006) e formalmente proposta por Simas et al. (2010) admitindo-se uma estrutura de regressão para o parâmetro de precisão. Neste caso, para uma amostra $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, em que $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi_t)$, supõe-se que ϕ_t satisfaz

$$h(\phi_t) = \sum_{i=1}^m z_{ti} \gamma_i = \delta_t,$$

em que γ é um vetor m -dimensional de parâmetros desconhecidos e z_{t1}, \dots, z_{tm} são observações de m covariáveis conhecidas ($m + k \leq n$) e $h(\cdot)$ é uma função de ligação com domínio em $(0, \infty)$ e imagem em \mathbb{R} , estritamente monótona e duas vezes diferenciável. Comumente, são utilizadas as funções de ligação logarítmica, $h(\phi_t) = \log(\phi_t)$, e raiz

quadrada, $h(\phi_t) = \sqrt{\phi_t}$.

A estimação dos parâmetros do modelo de regressão beta é tipicamente feita através do método da máxima verossimilhança. A função de log-verossimilhança tem a seguinte forma:

$$\ell(\beta, \gamma) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\mu_t, \phi_t), \quad (3.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_t(\mu_t, \phi_t) &= \log \Gamma(\phi_t) - \log \Gamma(\mu_t \phi_t) - \log \Gamma((1 - \mu_t) \phi_t) \\ &\quad + (\mu_t \phi_t - 1) \log y_t + \{(1 - \mu_t) \phi_t - 1\} \log(1 - y_t). \end{aligned}$$

Como $\mu_t = g^{-1}(\eta_t)$ e $\phi_t = h^{-1}(\delta_t)$ são, respectivamente, funções de β e γ , pode-se obter a função escore através da diferenciação de (3.4) em relação a estes parâmetros desconhecidos. Sendo assim, temos que as funções escore com respeito a β e γ , respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} U_\beta(\beta, \gamma) &= X^\top VT(y^* - \mu^*), \\ U_\gamma(\beta, \gamma) &= Z^\top Ha, \end{aligned}$$

em que X é uma matriz $n \times k$ cuja t -ésima linha é x_t^\top , $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $y^* = \{y_1^*, \dots, y_n^*\}^\top$, $\mu^* = \{\mu_1^*, \dots, \mu_n^*\}^\top$, $V = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\}$ e $\mu_t^* = \psi(\mu_t \phi_t) - \psi((1 - \mu_t) \phi_t)$, em que $\psi(\cdot)$ é a função digama, $\psi(w) = \partial \log \Gamma(w) / \partial w$, $w > 0$. Por sua vez, Z é uma matriz $n \times m$ cuja t -ésima linha é z_t^\top , $a = (a_1, \dots, a_n)^\top$, com $a_t = \partial \ell_t(\mu_t, \phi_t) / \partial \phi_t$, e $H = \text{diag}\{1/h'(\phi_1), \dots, 1/h'(\phi_n)\}$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos como solução do sistema

$$\begin{cases} U_\beta(\beta, \gamma) = 0 \\ U_\gamma(\beta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

que não possui forma fechada. Sendo assim, há a necessidade de se utilizar algum algoritmo de otimização não-linear, como por exemplo Newton-Raphson, BFGS, BHHH, entre outros. Para mais detalhes veja Press et al. (1992) e Nocedal e Wright (1999). Vale notar que tais algoritmos exigem a especificação de valores iniciais para serem utilizados no processo iterativo. Em Ferrari e Cribari-Neto (2004) os autores sugerem como valor inicial para β a utilização da estimativa de mínimos quadrados deste vetor de parâmetros

obtida da regressão linear das variáveis respostas transformadas $g(y_1), \dots, g(y_n)$ sobre X , ou seja, $(X^\top X)^{-1}X^\top v$, em que $v = (g(y_1), \dots, g(y_n))^\top$. Por sua vez, para o parâmetro de precisão é sugerido pelos autores o valor inicial

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\check{\mu}_t(1 - \check{\mu}_t)}{\check{\sigma}_t^2} - 1, \quad (3.5)$$

em que $\check{\mu}_t$ é obtido aplicando-se $g^{-1}(\cdot)$ ao t -ésimo ajuste da regressão linear de $g(y_1), \dots, g(y_n)$ sobre X , ou seja, $\check{\mu}_t = g^{-1}((X^\top X)^{-1}X^\top v)$, e $\check{\sigma}_t^2 = \check{\epsilon}^\top \check{\epsilon} / [(n - k)\{g'(\check{\mu}_t)\}^2]$, onde $\check{\epsilon} = v - X(X^\top X)^{-1}X^\top v$ é o vetor de resíduos obtido por mínimos quadrados ordinários.

No caso de precisão variável, em Cribari-Neto e Zeileis (2010), é sugerida a utilização da expressão (3.5) como estimativa para o intercepto de γ , levando em conta a função de ligação utilizada, e os demais coeficientes iguais a zero.

Os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$, possuem, em tamanhos amostrais grandes e sob certas condições de regularidade (Serfling, 1980), distribuição aproximada

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{k+m} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, K^{-1} \right),$$

em que K^{-1} é a inversa da informação de Fisher (ver Apêndice B), dada por

$$K^{-1} = K^{-1}(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} K^{\beta\beta} & K^{\beta\gamma} \\ K^{\gamma\beta} & K^{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} K^{\beta\beta} &= (X^\top VWX - X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1}Z^\top HTC^\top X)^{-1}, \\ K^{\beta\gamma} &= (K^{\gamma\beta})^\top = -K^{\beta\beta}X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1}, \\ K^{\gamma\gamma} &= (Z^\top DZ)^{-1}\{I_m + (Z^\top HTC^\top X)K^{\beta\beta}X^\top CTHZ(Z^\top DZ)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Aqui, $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$, com

$$w_t = \phi_t \{ \psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t)\phi_t) \} \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2},$$

$C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_n\}$, com

$$c_t = \phi_t [\psi'(\mu_t \phi_t)\mu_t - \psi'((1 - \mu_t)\phi_t)(1 - \mu_t)],$$

e $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, com

$$d_t = \psi'(\mu_t \phi_t)\mu_t^2 + \psi'((1 - \mu_t)\phi_t)(1 - \mu_t)^2 - \psi'(\phi_t),$$

em que $\psi'(\cdot)$ é a função trigama e I_m é a matriz identidade de dimensão $m \times m$.

3.3 Testes de hipóteses

Seja $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ um vetor n -dimensional de variáveis aleatórias independentes, tal que para cada $t = 1, \dots, n$, y_t tem densidade (3.2). Considere o modelo de regressão beta com precisão variável dado por

$$g(\mu_t) = \sum_{i=1}^k x_{ti}\beta_i,$$

$$h(\phi_t) = \sum_{j=1}^m z_{tj}\gamma_j.$$

Seja $\theta = (\beta^\top, \gamma^\top)^\top$ o vetor dos parâmetros que indexam o modelo. Podemos particionar θ como $\theta = (\omega^\top, \psi^\top)^\top$, em que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)^\top$ denota o vetor de parâmetros de interesse e $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)^\top$ o vetor de parâmetros de perturbação, com $r + s = m + k$.

Suponha que queremos testar a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \omega = \omega^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1 : \omega \neq \omega^{(0)}$, em que ω é um vetor r -dimensional. O teste pode ser realizado utilizando a estatística da razão de verossimilhanças, dada por

$$RV = 2\{\ell(\widehat{\omega}, \widehat{\psi}) - \ell(\omega^{(0)}, \tilde{\psi})\}, \quad (3.6)$$

em que $\ell(\omega, \psi)$ é a função de log-verossimilhança e $(\omega^{(0)\top}, \tilde{\psi}^\top)^\top$ é o estimador de máxima verossimilhança restrito de $(\omega^\top, \psi^\top)^\top$ obtido impondo a hipótese nula. Sob certas condições de regularidade e sob \mathcal{H}_0 , a estatística RV converge em distribuição para uma χ_r^2 (Serfling, 1980). Assim, o teste pode ser realizado utilizando valores críticos da distribuição assintótica χ_r^2 .

3.4 Testes de hipóteses baseados em bootstrap

Em pequenas amostras, a aproximação da distribuição nula exata da estatística de teste pela distribuição qui-quadrado pode ser pobre, resultando em taxas de rejeição nulas distorcidas. Para contornar tal situação pode-se utilizar um esquema de reamostragem bootstrap, já que este permite estimar a distribuição nula da estatística de teste, evitando assim a utilização de uma aproximação assintótica. Nosso objetivo nessa seção é obter p -valores baseados em esquemas de reamostragem bootstrap, BD e BDR que nos permitam melhorar o desempenho da estatística de teste nesse cenário.

3.4.1 Testes bootstrap

Considere a amostra aleatória n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, cujos valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Seja τ uma estatística de teste e $\hat{\tau}$ o valor que a mesma assume para a amostra y . Suponha que τ é assintoticamente pivotal, ou seja, possui distribuição nula limite livre de parâmetros desconhecidos. Nesse caso, o bootstrap fornece um refinamento assintótico, ou seja, o teste bootstrap tende a diminuir a distorção no tamanho do teste em relação a sua versão assintótica (Beran, 1988).

Seja F a função de distribuição acumulada (FDA) de τ sob a hipótese nula. Para um teste que rejeita a hipótese nula quando $\hat{\tau}$ cai na cauda superior pode-se determinar o p -valor de $\hat{\tau}$ como $1 - F(\hat{\tau})$, mas na maioria dos casos não conhecemos F . Para resolver tal situação podemos fazer uma estimativa de F utilizando o método bootstrap. Para tanto, geramos B amostras bootstrap y^* impondo \mathcal{H}_0 e, para cada uma delas, calculamos os correspondentes $\tau_i^* = \tau(y_i^*)$, com $i = 1, \dots, B$. Dessa forma, podemos estimar $F(\hat{\tau})$ pela função de distribuição empírica dos τ_i^* , $F_B^*(\hat{\tau})$, ou seja,

$$\hat{F}(\hat{\tau}) = F_B^*(\hat{\tau}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\tau_i^* \leq \hat{\tau}),$$

em que $I(\cdot)$ é a função indicadora. Dessa forma, definimos o p -valor bootstrap como a proporção das amostras bootstrap cujos τ_i^* são maiores do que $\hat{\tau}$. Ou seja,

$$p^*(\hat{\tau}) = 1 - F_B^*(\hat{\tau}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\tau_i^* > \hat{\tau}). \quad (3.7)$$

Para um determinado nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, rejeitamos a hipótese nula quando $p^*(\hat{\tau}) < \alpha$.

Quando há interesse em realizar um teste bilateral, pode-se calcular o p -valor bootstrap para cada teste unilateral e calcular o p -valor do teste bilateral como

$$p^*(\hat{\tau}) = 2 \min \left(\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\tau_i^* < \hat{\tau}), \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(\tau_i^* > \hat{\tau}) \right).$$

Nessa situação, rejeitamos a hipótese nula quando $\hat{\tau}$ se encontra abaixo do quantil $\alpha/2$ ou acima do quantil $1 - \alpha/2$ de $F_B^*(\hat{\tau})$.

3.4.2 Testes bootstrap duplo

Proposto em Efron (1983), o bootstrap duplo tem como vantagem, pelo menos em teoria, o fato de fornecer p -valores mais precisos do que os da versão simples do bootstrap. Considere a amostra aleatória n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, cujos valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição F_θ . A obtenção do p -valor bootstrap duplo pode ser realizada através do seguinte processo:

1. Gere B_1 pseudo-amostras de primeiro nível y^* impondo \mathcal{H}_0 a partir de $F_{\hat{\theta}}$, em que $\hat{\theta}$ é uma estimativa de θ obtida a partir de y .
2. Para cada amostra bootstrap de primeiro nível, compute $\tau_i^* = \tau(y_i^*)$, $i = 1, \dots, B_1$.
3. Calcule o p -valor bootstrap de primeiro nível, como na Equação (3.7), por exemplo.
4. Para cada amostra bootstrap de primeiro nível, gere B_2 pseudo-amostras de segundo nível y^{**} impondo \mathcal{H}_0 a partir de $F_{\hat{\theta}_i^*}$, em que $\hat{\theta}_i^*$ é a estimativa de θ obtida a partir da i -ésima amostra bootstrap.
5. Para cada amostra bootstrap de segundo nível, compute $\tau_{ij}^{**} = \tau(y_{ij}^{**})$, $i = 1, \dots, B_1$, $j = 1, \dots, B_2$.
6. Obtenha os p -valores bootstrap de segundo nível,

$$p_i^{**} = \frac{1}{B_2} \sum_{j=1}^{B_2} I(\tau_{ij}^{**} > \tau_i^*).$$

7. Obtenha o p -valor bootstrap duplo como a proporção dos p -valores bootstrap de segundo nível que são menores ou iguais do que o p -valor de primeiro nível. Ou seja,

$$p_D^{**}(\hat{\tau}) = \frac{1}{B_1} \sum_{i=1}^{B_1} I(p_i^{**} \leq p^*(\hat{\tau})). \quad (3.8)$$

Intuitivamente, se os τ_i^* tendem a ser menos extremos que $\hat{\tau}$, então p^* será pequeno e o teste baseado no esquema bootstrap tenderá a ser liberal. Neste cenário, é razoável esperar que os τ_{ij}^{**} tendam a ser menos extremos do que os τ_i^* e, portanto, que os p_i^{**} tendam a ser pelo menos tão pequenos quanto p^* . Consequentemente, o p -valor bootstrap duplo tenderá a ser maior que o p -valor bootstrap usual, tornando o teste menos liberal.

Note que para cada uma das B_1 amostras bootstrap de primeiro nível geramos B_2 amostras de segundo nível. Então, calculamos no total $B_1 B_2$ estatísticas de teste. Esse número elevado é a principal desvantagem do bootstrap duplo, já que isso o torna um procedimento de alto custo computacional.

3.4.3 Testes bootstrap duplo rápido

Davidson e MacKinnon (2000) propõem um método para aprimorar o desempenho de testes bootstrap sem o alto custo computacional exigido pelo bootstrap duplo, o bootstrap duplo rápido. Em tal procedimento, gera-se apenas uma amostra bootstrap de segundo nível para cada pseudo-amostra de primeiro nível, fazendo com que o custo computacional seja significativamente menor do que no BD. Segundo os autores, tal redução é possível assumindo que a distribuição dos τ_{ij}^{**} não depende de τ_i^* (MacKinnon, 2006).

Considere uma amostra aleatória n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, cujos valores são realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição F_θ . De maneira geral, a partir da amostra original y são geradas, impondo \mathcal{H}_0 e a partir de $F_{\hat{\theta}}$, B_1 pseudo-amostras y_j^* , $j = 1, \dots, B_1$, a partir das quais são obtidas as estatísticas $\tau_j^* = \tau(y_j^*)$. Em seguida, para cada y_j^* , $j = 1, \dots, B_1$, é gerada, impondo \mathcal{H}_0 e a partir de $F_{\hat{\theta}_j^*}$, uma amostra bootstrap de segundo nível y_j^{**} , para qual é obtida a estatística $\tau_j^{**} = \tau(y_j^{**})$. O p -valor bootstrap duplo rápido é definido como

$$p_{DR}^{**}(\hat{\tau}) = \frac{1}{B_1} \sum_{i=1}^{B_1} I(\tau_i^* > \hat{Q}_{B_1}^{**}(1 - p^*(\hat{\tau}))), \quad (3.9)$$

em que $\hat{Q}_{B_1}^{**}(1 - p^*(\hat{\tau}))$ denota o quantil $1 - p^*(\hat{\tau})$ de τ_i^{**} e $p^*(\hat{\tau})$ é obtido como visto na Equação (3.7). Intuitivamente, suponha que os τ_i^* tendem a ser menos extremos do que $\hat{\tau}$, então p^* será pequeno e o teste baseado no esquema bootstrap tenderá a ser liberal. Sendo assim, é razoável esperar que os τ_i^{**} tendam a ser menos extremos do que os τ_i^* . Nesse caso, $\hat{Q}_{B_1}^{**}(1 - p^*)$ deve ser menor do que $\hat{\tau}$ e, conseqüentemente, p_{DR}^{**} será maior do que p^* , tornando o teste menos liberal.

MacKinnon (2006) prova a equivalência das equações (3.8) e (3.9). Para tanto, o autor verifica que, quando $B_1 \rightarrow \infty$, a Equação (3.9) pode ser escrita como

$$p_{DR}^{**}(\hat{\tau}) = \Pr_*(\tau_i^* > Q^{**}(1 - p^*)),$$

em que $Q^{**}(x) = \lim_{B_1 \rightarrow \infty} \widehat{Q}_{B_1}^{**}(x)$ e o subscrito $*$ indica que a probabilidade foi tomada com respeito à distribuição dos τ_i^* . Por sua vez, a Equação (3.8) pode ser escrita como

$$p_D^{**}(\widehat{\tau}) = \Pr_*(\Pr_{**}(\tau_{ij}^{**} > \tau_i) < p^*(\widehat{\tau})), \quad (3.10)$$

em que o subscrito $**$ indica que a probabilidade foi tomada com respeito à distribuição dos τ_{ij}^{**} . Por definição, temos que

$$\frac{1}{B_1} \sum_{i=1}^{B_1} (\tau_i^{**} > Q^{**}(1 - p^*)) = p^*(\widehat{\tau}).$$

Sendo assim, a Equação (3.10) pode ser reescrita como

$$p_D^{**}(\widehat{\tau}) = \Pr_*(\Pr_{**}(\tau_{ij}^{**} > \tau_i^*) < \Pr_{**}(\tau_{ij}^{**} > Q^{**}(1 - p^*))).$$

Assumindo que a distribuição de τ_{ij}^{**} não depende de τ_i^* , temos que

$$\Pr_{**}(\tau_{ij}^{**} > \tau_i^*) < \Pr_{**}(\tau_{ij}^{**} > Q^{**}(1 - p^*))$$

se, e somente se,

$$\tau_i^* > Q^{**}(1 - p^*).$$

Mas $\Pr_*(\tau_i^* > Q^{**}(1 - p^*)) = P_{DR}^{**}(\widehat{\tau})$. Ou seja, quando B_1 e B_2 tendem ao infinito, o p -valor bootstrap duplo rápido é equivalente ao p -valor bootstrap duplo.

Note que, mesmo quando escolhido B_2 relativamente pequeno no bootstrap duplo, o BDR se mostra uma boa opção, já que neste são calculadas $2B_1$ estatísticas contra B_1B_2 no BD. Portanto, o BDR se mostra uma boa alternativa para se alcançar maior precisão sem alto custo computacional. Davidson e MacKinnon (2000) ressaltam que, assim como o bootstrap duplo, nem sempre o BDR apresenta resultados mais precisos que os do bootstrap usual. Em Davidson e MacKinnon (2002b), MacKinnon (2006) e Davidson e MacKinnon (2007), os autores realizam simulações comparativas entre o BDR, o BD e o bootstrap usual em diferentes aplicações. Tais simulações indicam um melhor desempenho dos métodos que contam com um segundo nível de reamostragem quando o tamanho amostral é pequeno. No entanto, quando o tamanho amostral é grande, nota-se uma equivalência dos métodos em boa parte dos casos. Além disso, em uma comparação direta entre o BDR e BD, os resultados apresentados em Davidson e MacKinnon (2007) mostram um desempenho bastante próximo dos dois, com o BDR apresentando um melhor

desempenho em alguns cenários. Dessa forma, o método pode tanto ser utilizado como substituto do bootstrap tradicional como em conjunto com ele, como, por exemplo, em casos em que o p -valor bootstrap está próximo ao nível do teste ou quando o mesmo é muito diferente do p -valor assintótico.

3.5 Algoritmos para os testes bootstrap

Considere a hipótese nula apresentada na Seção 3.3. Os algoritmos a seguir apresentam as versões bootstrap, BD, BDR e correção de Bartlett bootstrap para o teste da razão de verossimilhanças.

A versão bootstrap do teste RV pode ser descrita como a seguir.

Algoritmo 3.5.1. (*Bootstrap*)

1. Calcule a estatística de teste de interesse, RV ;
2. Gere uma amostra bootstrap y^* , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t)$, em que $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma})$. Aqui, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula;
3. Calcule a estatística RV^* associada à amostra bootstrap;
4. Execute os passos 2 e 3 um número grande (B) de vezes;
5. Calcule o quantil de interesse da distribuição empírica de RV_i^* , $i = 1, \dots, B$;
6. Realize o teste utilizando a estatística RV calculada no passo 1 junto com o valor crítico de bootstrap obtido no passo 5.

Rejeitamos a hipótese nula \mathcal{H}_0 quando a estatística RV é maior que o quantil estimado. A regra de decisão pode ainda ser expressa em função do p -valor do teste e de sua estimativa bootstrap. O p -valor aproximado via esquema bootstrap é dado por

$$p^*(RV) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(RV_i^* > RV).$$

A hipótese nula é rejeitada se o p -valor for inferior ao tamanho nominal adotado. Com o intuito de obter um p -valor bootstrap mais preciso, pode-se utilizar a versão bootstrap duplo do teste seguindo o próximo algoritmo.

Algoritmo 3.5.2. (Bootstrap duplo)

1. Calcule a estatística de teste de interesse, RV ;
2. Gere uma amostra bootstrap y^* , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t)$, em que $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma})$. Aqui, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula;
3. Calcule a estatística RV^* associada à amostra bootstrap;
4. Gere uma amostra bootstrap de segundo nível y^{**} , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^{**} \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t^*, \tilde{\phi}_t^*)$, em que $\tilde{\mu}_t^* = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta}^*)$ e $\tilde{\phi}_t^* = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma}^*)$. Aqui, $\tilde{\beta}^*$ e $\tilde{\gamma}^*$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula obtidas utilizando y^* como variável resposta;
5. Calcule a estatística RV^{**} associada à amostra bootstrap de segundo nível;
6. Execute os passos 4 e 5 um número grande (B_2) de vezes;
7. Obtenha os p -valores de segundo nível, dados por

$$p_i^{**} = \frac{1}{B_2} \sum_{j=1}^{B_2} I(RV_{ij}^{**} > RV_i^*);$$

8. Execute os passos 2 a 7 um número grande (B_1) de vezes;
9. Obtenha o p -valor de primeiro nível, dado por

$$p^*(RV) = \frac{1}{B_1} \sum_{i=1}^{B_1} I(RV_i^* > RV);$$

10. Obtenha o p -valor bootstrap duplo, dado por

$$p_D^{**}(RV) = \frac{1}{B_1} \sum_{i=1}^{B_1} I(p_i^{**} \leq p^*(RV));$$

11. A hipótese nula \mathcal{H}_0 é rejeitada se p_D^{**} é menor que o nível nominal adotado.

Para contornar o alto custo computacional do procedimento de bootstrap duplo pode-se recorrer à versão bootstrap duplo rápido do teste, apresentada no algoritmo abaixo.

Algoritmo 3.5.3. (Bootstrap duplo rápido)

1. Calcule a estatística de teste de interesse, RV ;

2. Gere uma amostra bootstrap y^* , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t)$, em que $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma})$. Aqui, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula;
3. Calcule a estatística RV^* associada à amostra bootstrap;
4. Gere uma amostra bootstrap de segundo nível y^{**} , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^{**} \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t^*, \tilde{\phi}_t^*)$, em que $\tilde{\mu}_t^* = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta}^*)$ e $\tilde{\phi}_t^* = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma}^*)$. Aqui, $\tilde{\beta}^*$ e $\tilde{\gamma}^*$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula obtidas utilizando y^* como variável resposta;
5. Calcule a estatística RV^{**} associada à amostra bootstrap de segundo nível;
6. Execute os passos 2 a 5 um número grande (B) de vezes;
7. Obtenha o p -valor de primeiro nível, dado por

$$p^*(RV) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(RV_i^* > RV);$$

8. Obtenha o quantil $1 - p^*$ de RV_i^{**} ($i = 1, \dots, B$), $\hat{Q}_B^{**}(1 - p^*(RV))$;
9. Obtenha o p -valor bootstrap duplo rápido, dado por

$$p_F^{**}(RV) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(RV_i^* > \hat{Q}_B^{**}(1 - p^*(RV)));$$

10. Rejeita-se a hipótese nula \mathcal{H}_0 se p_F^{**} é menor que o nível nominal adotado.

Por fim, uma outra alternativa para contornar o problema de desempenho da estatística RV em pequenas amostras é considerar uma versão corrigida da estatística de teste. Em Bartlett (1937), foi proposta uma correção para tal estatística, depois generalizada em Lawley (1956), que permite reduzir a ordem do erro de aproximação qui-quadrado de $O(n^{-1})$ para $O(n^{-2})$. A estatística modificada é dada por

$$RV_{Bc} = \frac{RV}{c},$$

em que $c = \mathbb{E}(RV)/r$ é o fator de correção de Bartlett e r é o número de restrições impostas pela hipótese nula. Aqui, estamos interessados na utilização da versão bootstrap de tal correção, proposta em Rocke (1989), para realizar o teste desejado. A estatística RV corrigida pelo fator de correção de Bartlett bootstrap é dada por

$$RV_{Bbc} = \frac{r RV}{RV^*},$$

em que $\overline{RV^*} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B RV_i^*$. Tal procedimento pode ser feito seguindo o algoritmo a seguir.

Algoritmo 3.5.4. (Correção de Bartlett bootstrap)

1. Calcule a estatística de teste de interesse, RV ;
2. Gere uma amostra bootstrap y^* , sob \mathcal{H}_0 , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\phi}_t)$, em que $\tilde{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \tilde{\gamma})$. Aqui, $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob a hipótese nula;
3. Calcule a estatística RV^* associada à amostra bootstrap;
4. Execute os passos 2 e 3 um número grande (B) de vezes;
5. Obtenha a estatística RV corrigida, RV_{Bbc} ;
6. Rejeite a hipótese nula se $RV_{Bbc} > \chi_{1-\alpha, r}^2$.

3.6 Simulações

Nesta seção serão apresentados resultados de simulações de Monte Carlo realizadas para avaliar os desempenhos do teste da razão de verossimilhanças e suas versões bootstrap (RV^*), do teste que usa correção de Bartlett bootstrap (RV_{Bbc}) e do teste bootstrap duplo rápido (RV^{**}) em pequenas amostras. Nas simulações a seguir foram consideradas 5000 réplicas de Monte de Carlo e 500 réplicas bootstrap.

Inicialmente, foi considerado o modelo com parâmetro de precisão constante e função de ligação logit dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}.$$

A hipótese nula considerada foi $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$. Os testes foram realizados para três tamanhos amostrais, $n = 10, 20$ e 40 , nos quais os valores das covariadas x_{ti} foram obtidos aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$. Além disso, foram consideradas três configurações para o intervalo em que a média da variável resposta assume valores, obtidos através das seguintes especificações dos parâmetros: $\beta_1 = -2.40, \beta_2 = -1.45$ que fornece $\mu \in (0.020, 0.080)$; $\beta_1 = 1.45, \beta_2 = -2.82$ fornecendo $\mu \in (0.20, 0.80)$; e

$\beta_1 = 2.9, \beta_2 = 0.9$, que fornece $\mu \in (0.94, 0.98)$. Adicionalmente, foram considerados três valores distintos para o parâmetro de precisão, a saber: $\phi = 20, 100, 500$.

As Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 apresentam os resultados de tais simulações. Nota-se que o teste RV é bastante liberal em pequenas amostras. Por exemplo, na Tabela 3.1, quando $\mu \in (0.020, 0.080)$, $n = 10$ e $\alpha = 10\%$, a taxa de rejeição do teste RV foi de 18.16%, valor bem acima do nível adotado. Por sua vez, todas as versões do teste RV baseadas em esquemas de reamostragem apresentaram taxas de rejeição mais próximas ao nível desejado, ou seja, mais próximas do nível nominal adotado, do que a versão assintótica. Por exemplo, no mesmo cenário citado acima, as versões RV^* , RV^{**} e RV_{Bbc} apresentaram taxas de rejeição de 10.20%, 10.08% e 9.94%, respectivamente.

Tabela 3.1: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 20$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 18.16 | 13.54 | 12.00 | 11.26 | 7.56 | 6.20 | 3.54 | 2.00 | 1.50 |
| RV^* | 10.20 | 10.14 | 10.38 | 4.76 | 5.24 | 5.06 | 1.18 | 1.18 | 1.50 |
| RV^{**} | 10.08 | 9.92 | 9.86 | 4.90 | 4.86 | 5.02 | 0.98 | 1.02 | 1.14 |
| RV_{Bbc} | 9.94 | 10.08 | 10.36 | 4.80 | 5.08 | 5.16 | 1.00 | 1.06 | 1.22 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 18.10 | 13.06 | 12.00 | 11.12 | 7.48 | 6.38 | 3.44 | 1.78 | 1.50 |
| RV^* | 9.92 | 9.98 | 10.68 | 4.86 | 4.90 | 5.44 | 1.38 | 1.14 | 1.14 |
| RV^{**} | 9.74 | 9.98 | 10.50 | 4.82 | 4.66 | 5.26 | 1.30 | 1.14 | 1.12 |
| RV_{Bbc} | 9.82 | 9.90 | 10.42 | 4.86 | 4.82 | 5.40 | 1.20 | 1.06 | 1.16 |
| $\mu \in (0.94, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 18.66 | 13.58 | 10.94 | 11.82 | 7.62 | 5.90 | 3.78 | 1.80 | 1.20 |
| RV^* | 10.86 | 10.28 | 9.76 | 5.68 | 5.24 | 5.06 | 1.40 | 1.16 | 0.94 |
| RV^{**} | 10.88 | 10.22 | 9.84 | 5.64 | 4.98 | 5.14 | 1.06 | 1.00 | 0.86 |
| RV_{Bbc} | 10.78 | 10.04 | 9.48 | 5.30 | 5.26 | 4.94 | 1.18 | 0.94 | 0.76 |

No geral, as versões bootstrap duplo rápido do teste RV e corrigida pelo fator de Bartlett bootstrap apresentaram desempenho superior ao teste que usa a versão bootstrap usual, principalmente ao nível nominal de 1%. Por exemplo, na Tabela 3.3, quando $\mu \in (0.020, 0.080)$, $n = 40$ e $\alpha = 1\%$, as taxas de rejeição nula dos testes RV^* e RV_{Bbc} foram de 0.96% e 1.06%, respectivamente, enquanto a obtida via bootstrap usual foi de 1.26%.

Tabela 3.2: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 100$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 18.34 | 13.86 | 11.66 | 11.20 | 7.50 | 6.36 | 3.72 | 1.60 | 1.46 |
| <i>RV*</i> | 9.92 | 10.30 | 10.14 | 5.28 | 4.84 | 5.30 | 0.90 | 1.08 | 1.34 |
| <i>RV**</i> | 9.88 | 10.06 | 9.86 | 5.00 | 4.60 | 5.14 | 0.86 | 1.08 | 1.14 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 9.84 | 10.28 | 9.88 | 5.22 | 4.70 | 5.20 | 0.80 | 1.00 | 1.04 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 18.20 | 12.96 | 12.46 | 10.84 | 7.14 | 6.52 | 3.64 | 1.74 | 1.56 |
| <i>RV*</i> | 9.62 | 9.66 | 11.10 | 5.20 | 4.96 | 5.52 | 1.22 | 1.04 | 1.22 |
| <i>RV**</i> | 9.62 | 9.80 | 10.90 | 5.04 | 4.56 | 5.46 | 1.18 | 0.80 | 1.00 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 9.72 | 9.58 | 11.14 | 5.02 | 4.76 | 5.42 | 0.98 | 0.98 | 1.08 |
| $\mu \in (0.94, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 18.58 | 13.82 | 12.08 | 11.28 | 7.72 | 6.24 | 3.90 | 1.78 | 1.50 |
| <i>RV*</i> | 10.02 | 10.34 | 10.32 | 5.36 | 5.10 | 5.18 | 1.10 | 1.08 | 1.26 |
| <i>RV**</i> | 10.04 | 10.06 | 9.98 | 5.14 | 4.82 | 5.10 | 1.18 | 0.96 | 1.18 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 10.00 | 10.42 | 10.56 | 5.16 | 4.90 | 5.02 | 1.02 | 0.94 | 1.10 |

Tabela 3.3: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\phi = 500$ no teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 17.64 | 14.16 | 11.48 | 10.92 | 7.66 | 5.66 | 3.48 | 1.98 | 1.60 |
| <i>RV*</i> | 9.66 | 10.60 | 9.96 | 5.06 | 5.50 | 5.00 | 0.98 | 1.32 | 1.26 |
| <i>RV**</i> | 9.38 | 10.48 | 9.60 | 4.74 | 5.54 | 4.90 | 0.94 | 1.08 | 0.96 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 9.74 | 10.44 | 9.88 | 5.02 | 5.44 | 4.74 | 0.80 | 0.94 | 1.06 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 18.24 | 13.40 | 11.46 | 11.22 | 7.78 | 5.78 | 3.94 | 2.04 | 1.12 |
| <i>RV*</i> | 10.22 | 10.42 | 10.26 | 5.32 | 5.54 | 4.72 | 1.22 | 1.30 | 1.02 |
| <i>RV**</i> | 10.26 | 10.24 | 9.78 | 5.30 | 5.50 | 4.60 | 0.96 | 1.24 | 0.96 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 10.02 | 10.24 | 9.84 | 5.10 | 5.40 | 4.74 | 1.06 | 1.20 | 0.82 |
| $\mu \in (0.94, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| <i>RV</i> | 18.02 | 13.58 | 11.62 | 11.16 | 7.70 | 6.04 | 3.54 | 1.84 | 1.32 |
| <i>RV*</i> | 9.98 | 10.52 | 10.02 | 5.14 | 5.40 | 5.16 | 1.16 | 1.16 | 1.24 |
| <i>RV**</i> | 9.96 | 10.22 | 9.88 | 4.92 | 5.18 | 5.10 | 1.06 | 0.98 | 1.20 |
| <i>RV_{Bbc}</i> | 10.08 | 10.42 | 9.86 | 4.84 | 5.28 | 4.92 | 0.95 | 0.86 | 0.98 |

Dando continuidade à avaliação dos testes, foi considerado o modelo com função de ligação logit para a média e logarítmica para a precisão, dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}.$$

Foram considerados três tamanhos amostrais, $n = 10, 20$ e 40 , em que, para $n = 10$, os valores das covariadas $x_{ti} = z_{tj}$ foram obtidos aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$. Por sua vez, para $n > 10$, a amostra anterior foi replicada até a obtenção do tamanho desejado, visando manter constante o grau de heterogeneidade da dispersão, dado por $\lambda = \phi_{\max}/\phi_{\min}$. Além disso, foram consideradas três configurações para o intervalo em que a média da variável resposta assume valores, obtidos através das seguintes especificações dos parâmetros do submodelo da média: $\beta_1 = -2.29, \beta_2 = -1.59, \beta_3 = 0.7$ que fornece $\mu \in (0.02, 0.12)$; $\beta_1 = 1.7, \beta_2 = -3.07, \beta_3 = 0.7$ fornecendo $\mu \in (0.28, 0.90)$; e $\beta_1 = 2.9, \beta_2 = 0.9, \beta_3 = -0.7$ que fornece $\mu \in (0.92, 0.98)$. Adicionalmente, foram considerados três valores para o grau de heterogeneidade, $\lambda = 20, 50, 100$, obtidos através das seguintes especificações dos parâmetros do submodelo da precisão, respectivamente: $\gamma_1 = 2.3, \gamma_2 = 3.35$; $\gamma_1 = 2.3, \gamma_2 = 4.37$; e $\gamma_1 = 2.3, \gamma_2 = 5.14$.

As Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam os resultados para os testes considerando a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ ($r = 1$) variando o grau de heterogeneidade. Os resultados indicam, assim como no caso de precisão constante, que a versão assintótica do teste RV é bastante liberal e que a utilização de suas versões bootstrap permite a obtenção de resultados mais próximos do esperado, ou seja, a obtenção de taxas de rejeição mais próximas ao nível nominal adotado.

No geral, nota-se que a versão do teste baseada no bootstrap duplo rápido apresenta o melhor desempenho na maior parte dos casos. Por exemplo, na Tabela 3.4 quando $\mu \in (0.20, 0.80)$, $n = 20$ e $\alpha = 5\%$, temos que a taxa de rejeição nula do teste RV^{**} foi de 5.14% , enquanto as taxas associadas às versões RV^* e RV_{Bbc} foram, respectivamente, 5.54% e 5.24% .

Por sua vez, as Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 apresentam os resultados considerando a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ ($r = 2$). No geral, percebe-se novamente desempenho liberal da versão assintótica do teste RV , com as versões baseadas no bootstrap apresentando um melhor comportamento.

Tabela 3.4: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 20$ e $r = 1$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 23.60 | 14.48 | 12.44 | 16.08 | 7.84 | 6.48 | 6.70 | 2.08 | 1.68 |
| RV^* | 10.02 | 9.86 | 10.50 | 4.86 | 4.78 | 5.30 | 1.10 | 1.16 | 1.20 |
| RV^{**} | 10.38 | 10.00 | 10.56 | 5.36 | 4.84 | 5.26 | 1.06 | 0.98 | 1.12 |
| RV_{Bbc} | 9.92 | 9.70 | 10.40 | 4.76 | 4.92 | 5.30 | 0.98 | 1.10 | 0.90 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 23.22 | 15.12 | 11.94 | 15.30 | 8.22 | 6.40 | 5.94 | 2.22 | 1.50 |
| RV^* | 9.26 | 10.30 | 10.02 | 4.54 | 5.54 | 5.18 | 1.08 | 1.16 | 1.04 |
| RV^{**} | 9.60 | 10.14 | 10.10 | 4.84 | 5.14 | 5.06 | 0.96 | 0.96 | 1.04 |
| RV_{Bbc} | 9.16 | 10.26 | 9.82 | 4.42 | 5.24 | 5.20 | 0.94 | 0.94 | 0.94 |
| $\mu \in (0.95, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 22.52 | 14.22 | 11.72 | 14.58 | 7.98 | 6.44 | 5.70 | 2.48 | 1.30 |
| RV^* | 8.94 | 9.96 | 10.16 | 4.58 | 5.12 | 4.90 | 1.10 | 1.50 | 0.90 |
| RV^{**} | 9.16 | 9.72 | 10.06 | 4.82 | 5.24 | 4.70 | 1.04 | 1.20 | 0.78 |
| RV_{Bbc} | 8.90 | 9.86 | 10.30 | 4.54 | 5.02 | 4.78 | 0.86 | 1.32 | 0.76 |

Tabela 3.5: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 50$ e $r = 1$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 22.82 | 14.82 | 12.52 | 15.22 | 8.88 | 6.82 | 5.98 | 2.58 | 1.72 |
| RV^* | 9.24 | 10.48 | 10.58 | 4.64 | 5.60 | 5.62 | 0.84 | 1.42 | 1.36 |
| RV^{**} | 9.44 | 10.32 | 10.56 | 4.70 | 5.48 | 5.68 | 0.86 | 1.10 | 1.16 |
| RV_{Bbc} | 9.44 | 10.44 | 10.34 | 4.44 | 5.38 | 5.40 | 0.64 | 1.20 | 1.24 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 22.82 | 15.84 | 11.76 | 15.20 | 8.84 | 6.74 | 5.66 | 2.40 | 1.62 |
| RV^* | 9.88 | 10.56 | 10.24 | 4.78 | 5.16 | 5.16 | 1.28 | 1.30 | 1.22 |
| RV^{**} | 9.66 | 10.56 | 10.26 | 4.70 | 5.48 | 5.24 | 0.98 | 1.34 | 1.06 |
| RV_{Bbc} | 9.86 | 10.36 | 10.24 | 4.48 | 5.10 | 5.14 | 1.04 | 1.02 | 1.14 |
| $\mu \in (0.95, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 23.36 | 14.92 | 11.76 | 15.28 | 9.40 | 6.46 | 5.90 | 2.52 | 1.58 |
| RV^* | 9.24 | 10.90 | 10.42 | 4.66 | 5.64 | 5.32 | 1.04 | 1.22 | 1.24 |
| RV^{**} | 9.36 | 10.88 | 10.30 | 4.50 | 5.34 | 5.46 | 0.92 | 1.28 | 1.04 |
| RV_{Bbc} | 9.28 | 10.98 | 10.18 | 4.70 | 5.28 | 5.06 | 0.74 | 1.04 | 1.10 |

Tabela 3.6: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 100$ e $r = 1$.

| $\mu \in (0.020, 0.080)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 22.48 | 13.96 | 11.98 | 14.42 | 7.84 | 6.50 | 5.60 | 2.36 | 1.54 |
| RV^* | 8.96 | 9.28 | 10.14 | 4.56 | 4.74 | 5.22 | 1.10 | 1.14 | 1.20 |
| RV^{**} | 8.82 | 9.26 | 10.06 | 4.60 | 5.00 | 5.32 | 1.00 | 0.78 | 1.04 |
| RV_{Bbc} | 9.00 | 9.36 | 9.84 | 4.46 | 4.72 | 5.10 | 0.88 | 0.86 | 1.04 |
| $\mu \in (0.20, 0.80)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 23.88 | 15.02 | 12.30 | 15.92 | 8.42 | 6.96 | 6.02 | 2.48 | 1.74 |
| RV^* | 10.12 | 10.14 | 10.42 | 5.24 | 4.92 | 5.48 | 1.26 | 1.14 | 1.50 |
| RV^{**} | 9.98 | 10.06 | 10.44 | 5.22 | 4.96 | 5.56 | 1.12 | 1.06 | 1.16 |
| RV_{Bbc} | 10.26 | 10.24 | 10.18 | 4.96 | 5.10 | 5.34 | 0.98 | 0.90 | 1.20 |
| $\mu \in (0.95, 0.98)$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 21.94 | 14.92 | 11.78 | 14.86 | 8.50 | 6.62 | 5.78 | 2.12 | 1.36 |
| RV^* | 9.62 | 10.10 | 10.16 | 4.88 | 5.12 | 5.36 | 0.96 | 1.06 | 1.02 |
| RV^{**} | 9.56 | 9.98 | 9.92 | 4.68 | 5.00 | 5.24 | 0.88 | 1.04 | 0.98 |
| RV_{Bbc} | 9.64 | 9.96 | 10.10 | 4.88 | 4.90 | 5.16 | 0.82 | 0.94 | 0.80 |

Tabela 3.7: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 20$ e $r = 2$.

| $\mu = 0.092$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|---------------|-----------------|-------|-------|----------------|-------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 27.20 | 15.60 | 12.40 | 18.26 | 9.24 | 6.56 | 7.28 | 2.50 | 1.60 |
| RV^* | 9.84 | 9.86 | 9.68 | 4.98 | 4.86 | 5.18 | 1.26 | 1.28 | 1.14 |
| RV^{**} | 10.30 | 9.44 | 9.52 | 4.78 | 4.70 | 5.04 | 0.98 | 1.08 | 1.04 |
| RV_{Bbc} | 9.56 | 9.50 | 9.54 | 4.76 | 4.66 | 4.90 | 0.96 | 1.10 | 0.88 |
| $\mu = 0.85$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 27.78 | 16.98 | 13.18 | 18.80 | 10.00 | 7.34 | 7.56 | 2.90 | 1.60 |
| RV^* | 10.24 | 10.74 | 10.62 | 5.24 | 5.20 | 5.72 | 1.02 | 1.32 | 1.26 |
| RV^{**} | 9.84 | 10.82 | 10.52 | 5.16 | 5.30 | 5.48 | 0.96 | 1.08 | 1.18 |
| RV_{Bbc} | 10.06 | 10.48 | 10.48 | 5.06 | 5.12 | 5.38 | 0.86 | 1.20 | 1.04 |
| $\mu = 0.95$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 26.52 | 16.32 | 12.76 | 17.76 | 9.66 | 6.34 | 6.70 | 2.70 | 1.48 |
| RV^* | 9.48 | 10.40 | 9.94 | 4.38 | 4.94 | 4.98 | 0.98 | 1.12 | 1.06 |
| RV^{**} | 9.62 | 10.06 | 9.66 | 4.60 | 4.88 | 4.88 | 0.94 | 1.00 | 1.02 |
| RV_{Bbc} | 9.48 | 10.26 | 10.04 | 4.16 | 4.86 | 5.00 | 0.86 | 0.92 | 0.90 |

Tabela 3.8: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 50$ e $r = 2$.

| $\mu = 0.092$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|---------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 27.06 | 16.50 | 11.96 | 18.28 | 9.18 | 6.82 | 7.30 | 2.76 | 1.46 |
| RV^* | 9.90 | 9.80 | 10.12 | 5.10 | 5.02 | 5.54 | 1.32 | 1.26 | 1.16 |
| RV^{**} | 9.96 | 9.72 | 10.06 | 4.98 | 4.86 | 5.20 | 1.10 | 1.18 | 1.16 |
| RV_{Bbc} | 9.76 | 9.82 | 10.06 | 4.88 | 5.02 | 5.30 | 1.02 | 0.94 | 0.96 |
| $\mu = 0.85$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 26.36 | 16.44 | 12.72 | 18.32 | 9.88 | 7.14 | 7.06 | 2.86 | 1.60 |
| RV^* | 9.86 | 10.58 | 10.14 | 4.94 | 5.52 | 5.30 | 1.04 | 1.22 | 1.24 |
| RV^{**} | 9.84 | 10.56 | 9.88 | 4.80 | 4.96 | 5.16 | 0.92 | 1.18 | 1.10 |
| RV_{Bbc} | 10.02 | 10.50 | 9.84 | 4.84 | 5.64 | 5.10 | 0.64 | 1.10 | 0.98 |
| $\mu = 0.95$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 26.70 | 16.68 | 12.38 | 18.40 | 9.44 | 7.00 | 7.24 | 2.88 | 1.52 |
| RV^* | 10.38 | 10.18 | 10.02 | 5.20 | 5.36 | 5.40 | 1.18 | 1.26 | 1.24 |
| RV^{**} | 10.50 | 10.18 | 10.02 | 5.02 | 5.42 | 5.02 | 0.92 | 1.10 | 1.10 |
| RV_{Bbc} | 10.36 | 10.00 | 9.96 | 5.12 | 5.32 | 5.08 | 0.96 | 1.00 | 1.02 |

Tabela 3.9: Taxas de rejeição nula (%) no modelo com $\lambda = 100$ e $r = 2$.

| $\mu = 0.092$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|---------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 28.36 | 16.32 | 13.30 | 19.12 | 9.66 | 7.06 | 7.90 | 2.76 | 1.60 |
| RV^* | 10.90 | 10.34 | 10.54 | 5.46 | 5.22 | 4.92 | 1.24 | 1.18 | 1.20 |
| RV^{**} | 10.82 | 10.20 | 10.44 | 5.30 | 5.08 | 5.16 | 1.18 | 1.02 | 1.10 |
| RV_{Bbc} | 10.80 | 10.02 | 10.28 | 5.24 | 4.84 | 4.84 | 0.92 | 0.98 | 1.08 |
| $\mu = 0.85$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 28.32 | 16.44 | 12.24 | 19.10 | 9.38 | 6.66 | 7.66 | 2.62 | 1.54 |
| RV^* | 10.40 | 10.10 | 9.64 | 5.50 | 5.02 | 5.06 | 1.04 | 1.04 | 1.20 |
| RV^{**} | 10.12 | 10.08 | 9.56 | 5.20 | 5.10 | 4.90 | 1.08 | 0.86 | 1.26 |
| RV_{Bbc} | 10.30 | 10.08 | 9.50 | 5.18 | 4.80 | 4.88 | 0.90 | 1.00 | 1.08 |
| $\mu = 0.95$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV | 27.36 | 16.34 | 12.82 | 18.44 | 9.50 | 6.80 | 6.78 | 2.40 | 1.42 |
| RV^* | 9.96 | 10.18 | 10.16 | 4.90 | 4.80 | 5.08 | 1.12 | 1.08 | 1.14 |
| RV^{**} | 9.84 | 10.10 | 10.10 | 4.62 | 4.88 | 4.98 | 0.90 | 1.12 | 1.18 |
| RV_{Bbc} | 9.72 | 10.22 | 10.22 | 4.80 | 4.54 | 4.96 | 0.80 | 0.92 | 0.98 |

Além disso, nota-se que as versões RV^{**} e RV_{Bbc} apresentam desempenho superior ao da versão RV^* na maior parte dos casos, valendo ressaltar novamente o desempenho de tais versões quando $\alpha = 1\%$. Por exemplo, na Tabela 3.8, para $\mu = 0.092$, $n = 10$ e $\alpha = 1\%$, as taxas de rejeição nula obtidas pelos teste RV^{**} e RV_{Bbc} foram iguais a 1.10% e 1.02% enquanto a da versão RV^* foi igual a 1.32%.

Já a Tabela 3.10 apresenta os resultados para os testes realizados no submodelo da precisão, que reforçam a superioridade das versões do teste RV baseadas em esquemas de reamostragem bootstrap. Aqui, as versões baseadas no bootstrap duplo rápido e na correção de Bartlett bootstrap seguem apresentando desempenhos mais próximos do esperado do que a baseada no bootstrap usual, na maioria dos casos. Por exemplo, para $n = 10$, quando $\mu \in (0.92, 0.98)$ e $\alpha = 5\%$, temos que a taxa de rejeição da versão bootstrap usual foi de 4.54%, enquanto as das versões BDR e corrigida por Bartlett foram 4.98% e 4.74%, respectivamente.

Tabela 3.10: Taxas de rejeição nula (%) no submodelo da precisão.

| $\mu \in (0.025, 0.13)$ | | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-------------------------|-------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|--|
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | |
| RV | 26.36 | 14.88 | 11.96 | 18.76 | 8.98 | 6.82 | 8.80 | 2.70 | 1.46 | |
| RV^* | 9.26 | 9.98 | 10.12 | 4.72 | 4.92 | 5.54 | 0.94 | 1.30 | 1.16 | |
| RV^{**} | 9.42 | 10.18 | 10.06 | 4.90 | 4.86 | 5.20 | 0.92 | 1.16 | 1.16 | |
| RV_{Bbc} | 9.74 | 9.78 | 10.06 | 4.96 | 5.00 | 5.30 | 0.78 | 1.10 | 0.96 | |
| $\mu \in (0.26, 0.87)$ | | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | |
| RV | 24.24 | 14.86 | 12.58 | 16.78 | 8.54 | 7.14 | 7.28 | 2.30 | 1.88 | |
| RV^* | 9.32 | 9.96 | 10.86 | 4.62 | 4.82 | 5.62 | 1.12 | 1.06 | 1.50 | |
| RV^{**} | 9.14 | 9.70 | 10.72 | 4.40 | 4.62 | 5.32 | 0.88 | 1.14 | 1.32 | |
| RV_{Bbc} | 9.54 | 9.92 | 10.62 | 5.02 | 4.72 | 5.44 | 1.18 | 1.00 | 1.26 | |
| $\mu \in (0.92, 0.98)$ | | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | |
| RV | 24.84 | 14.34 | 12.50 | 17.54 | 8.32 | 6.66 | 8.04 | 2.22 | 1.56 | |
| RV^* | 9.46 | 9.72 | 10.38 | 4.54 | 5.14 | 5.16 | 1.04 | 1.06 | 1.12 | |
| RV^{**} | 10.24 | 9.66 | 10.32 | 4.98 | 5.12 | 5.20 | 0.90 | 0.96 | 1.04 | |
| RV_{Bbc} | 9.56 | 9.64 | 10.20 | 4.74 | 5.06 | 5.10 | 0.94 | 0.84 | 0.92 | |

Dando continuidade aos estudos de simulação, decidimos avaliar como a variação do número de réplicas bootstrap afeta os testes baseados em esquemas de reamostragem. Para tanto, consideramos o modelo com função de ligação logit para a média e logarítmica

para a precisão, dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}.$$

Para as simulações foram considerados $B = 250, 500, 1000$, $\mu \in (0.50, 0.96)$ e $\lambda = 100$. Os resultados apresentados na Tabela 3.11 mostram que a redução no número de réplicas bootstrap afeta fortemente as versões bootstrap do teste RV , mas mantém o RV^{**} e RV_{Bbc} como melhores opções, com o último mostrando um desempenho mais próximo do desejado. Por sua vez, o aumento do número de réplicas, de modo geral, apesar de fornecer melhoras em alguns cenários, causou distorções em outros. Vale notar que o teste RV^* , com $B = 1000$, ainda apresenta, no geral, um desempenho inferior ao dos testes RV^{**} e RV_{Bbc} , com $B = 500$. Além disso, de maneira geral, o melhor desempenho foi alcançado com o teste RV^{**} com $B = 500$.

Tabela 3.11: Taxas de rejeição nula (%) obtidas a partir da variação do número de réplicas bootstrap.

| <hr/> | | | | | | | | | |
|------------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| $B = 250$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV^* | 11.20 | 10.14 | 11.34 | 5.50 | 5.62 | 6.10 | 1.42 | 1.54 | 1.62 |
| RV^{**} | 10.96 | 10.20 | 10.82 | 5.48 | 5.54 | 5.98 | 1.34 | 1.54 | 1.48 |
| RV_{Bbc} | 10.94 | 9.92 | 11.12 | 5.38 | 5.26 | 5.62 | 1.04 | 1.02 | 1.46 |
| <hr/> | | | | | | | | | |
| $B = 500$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV^* | 9.82 | 10.12 | 10.42 | 5.12 | 5.38 | 5.40 | 1.14 | 1.42 | 1.08 |
| RV^{**} | 10.00 | 9.98 | 10.26 | 5.28 | 5.30 | 5.12 | 0.98 | 1.26 | 1.06 |
| RV_{Bbc} | 9.68 | 10.06 | 10.42 | 5.10 | 5.36 | 5.34 | 1.06 | 1.20 | 0.94 |
| <hr/> | | | | | | | | | |
| $B = 1000$ | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
| n | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 | 10 | 20 | 40 |
| RV^* | 9.08 | 10.10 | 10.52 | 4.56 | 4.78 | 5.00 | 1.08 | 0.98 | 1.18 |
| RV^{**} | 9.12 | 9.88 | 10.56 | 4.30 | 4.94 | 5.12 | 1.06 | 0.84 | 1.06 |
| RV_{Bbc} | 9.16 | 9.98 | 10.46 | 4.48 | 4.78 | 4.96 | 0.96 | 0.86 | 1.00 |

No geral, nota-se que os teste baseados em esquemas de reamostragem bootstrap apresentam desempenho melhor que o teste assintótico. Além disso, na maior parte dos casos, uma comparação direta entre as versões BDR e bootstrap usual do teste RV indica a superioridade da versão BDR. Dessa forma, o método mostra-se indicado para a realização

de testes de hipóteses em pequenas amostras. Vale ressaltar que tal método não produziu um alto custo computacional nas simulações, que duraram em média 15 horas cada.

3.7 Aplicações

Nesta seção, os testes supracitados serão aplicados a quatro conjuntos de dados reais, permitindo assim uma visão do funcionamento dos métodos estudados em diferentes tamanhos amostrais. Para avaliar a qualidade do ajuste dos modelos consideramos o pseudo- R^2_{RV} (Nagelkerke (1991)), que é dado por

$$R^2_{RV} = 1 - \left(\frac{L_{null}}{L_{fit}} \right)^{2/n},$$

em que L_{null} é a função de verossimilhança maximizada do modelo sem regressores e L_{fit} é a função de verossimilhança maximizada do modelo ajustado, e a adaptação do mesmo para modelos de regressão beta com precisão variável, introduzida em Bayer e Cribari-Neto (2014), dada por

$$\bar{R}^2_{RV} = 1 - (1 - R^2_{RV}) \left(\frac{n-1}{n - (1+\alpha)k - (1-\alpha)m} \right)^\delta,$$

em que $0 < \alpha < 1$ e $\delta > 0$, além do Critério de Informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973) e do Critério de Informação Bayesiano (BIC) (Akaike (1978) e Schwarz et al. (1978)). Por sua vez, para analisar possíveis indícios de má especificação foi seguida a proposta apresentada por Cribari-Neto e Lima (2007), baseada no teste RESET, introduzido por Ramsey (1969). Tal teste consiste na inclusão do quadrado do preditor linear $\hat{\eta}$ como regressor no submodelo da média do modelo e, em seguida, avaliar a sua exclusão, ou seja, avaliar se a inclusão de tal preditor melhora o ajuste do modelo. Além disso, para a avaliação gráfica, foi considerado a adaptação para o modelo de regressão beta com precisão variável do resíduo ponderado padronizado 2 (Espinheira et al., 2008) proposta em Ferrari et al. (2011),

$$r_t = \frac{y_t^* - \hat{\mu}_t^*}{\sqrt{\hat{v}_t(1 - h_{tt}^*)}}, \quad (3.11)$$

em que $y_t^* = \log\{y_t/(1-y_t)\}$, $\mu_t^* = \psi(\mu_t\phi_t) - \psi((1-\mu_t)\phi_t)$ e $v_t = \psi'(\mu_t\phi_t) + \psi'((1-\mu_t)\phi_t)$. Aqui, h_{tt}^* é o t -ésimo elemento diagonal de

$$H^* = (\widehat{W}\widehat{V})^{1/2} X (X^\top \widehat{V}\widehat{W}X)^{-1} X^\top (\widehat{V}\widehat{W})^{1/2},$$

em que X é uma matriz $n \times k$ de covariadas, $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$ com $w_t = \phi_t v_t / \{g'(\mu_t)\}^2$ e $V = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.

3.7.1 Aplicação 1: Fator de simultaneidade

Analisado originalmente em Zerbinatti (2008), o conjunto de dados possui 42 observações obtidas a partir de um trabalho de medição realizado pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) e pela Companhia de Gás de São Paulo (COMGÁS), visando à construção de um banco de dados de fatores de simultaneidade e suas correspondentes capacidades máxima de consumo, conhecidas como potências computadas.

O fator de simultaneidade é uma peça chave no desenvolvimento de projetos de instalações prediais, já que superestimar tal fator gera custos desnecessários às companhias de gás e subestimá-lo compromete o fornecimento de gás natural e a segurança dos usuários. Tal fator permite obter um indicador da vazão máxima que ocorre em um trecho da tubulação através da equação $Q_P = F \times Q_{\max}$, em que Q_P é a vazão adotada em um trecho, F é o fator de simultaneidade e Q_{\max} é a vazão máxima possível. Dessa forma, o fator de simultaneidade é interpretado como a proporção da vazão de fato utilizada e a máxima possível, assumindo valores no intervalo $(0, 1)$.

Em Zerbinatti (2008) e Espinheira et al. (2014), os autores consideram o modelo de regressão beta com precisão constante e função de ligação logit para modelar o fator de simultaneidade em função da covariada potência computada, utilizando uma transformação logarítmica na mesma. Aqui, tal modelo será considerado o modelo $M1$ e estamos interessados em avaliar se há indícios de precisão variável. Dessa forma, o modelo de estudo é dado por

$$M2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{t2}),$$

$$\log(\phi) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{t2}).$$

A estatística RV obtida para a hipótese nula de precisão constante, $\mathcal{H}_0 = \gamma_2 = 0$, foi igual a 3.25, com p -valor = 0.07, o que indica a rejeição da hipótese nula ao nível nominal de 10%. No entanto, o p -valor bootstrap (p -valor = 0.10) indicou a não rejeição da hipótese nula ao nível nominal de 10%. Como o p -valor bootstrap mostra-se próximo do nível nominal, foram utilizados os métodos bootstrap duplo rápido e a correção de Bartlett bootstrap para averiguar os resultados. A rejeição da hipótese nula ao nível de

10% foi indicada pela versão do teste corrigida por Bartlett via bootstrap com p -valor igual a 0.09 e reforçada pela versão bootstrap duplo rápido do teste, com p -valor igual a 0.07. Dessa forma, decidimos seguir com o modelo com precisão variável.

As estimativas dos parâmetros e os respectivos erros-padrão para tal modelo são apresentados na Tabela 3.12.

Tabela 3.12: Estimativas e erros-padrão para o modelo final utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

| | β_1 | β_2 | γ_1 | γ_2 |
|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
| Estimativa | -1.717 | -0.797 | 4.001 | 0.542 |
| Erro-padrão | 0.091 | 0.085 | 0.326 | 0.296 |

A Tabela 3.13 apresenta as medidas de qualidade de ajuste obtidas para os modelos $M1$ e $M2$. Nota-se que, com exceção do critério BIC, todos os critérios favorecem o modelo $M2$, já que quanto maior os pseudos- R^2 melhor o ajuste do modelo, e quanto menores os valores de AIC e BIC, maiores os indicativos de que o modelo correspondente é adequado. Além disso, o teste RESET ($\chi^2 = 0.008$, p -valor = 0.929) não forneceu indícios de má especificação para tal modelo, assim como o gráfico normal de probabilidades (Figura 3.2).

Tabela 3.13: Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados do fator de simultaneidade.

| Modelo | R^2_{RV} | \bar{R}^2_{RV} | AIC | BIC |
|--------|------------|------------------|----------|----------|
| $M1$ | 0.722 | 0.705 | -170.779 | -165.566 |
| $M2$ | 0.743 | 0.722 | -172.031 | -165.081 |

3.7.2 Aplicação 2: Gastos com alimentação

Foram utilizados os dados apresentados em Griffiths et al. (1993, Tabela 15.4) referentes a gastos com alimentação, renda (x_2) e número de pessoas (x_3) por domicílio em uma cidade dos Estados Unidos. Ferrari e Cribari-Neto (2004) modelaram a proporção de gastos com alimentação (y) como função das covariadas x_2 e x_3 utilizando um modelo de regressão

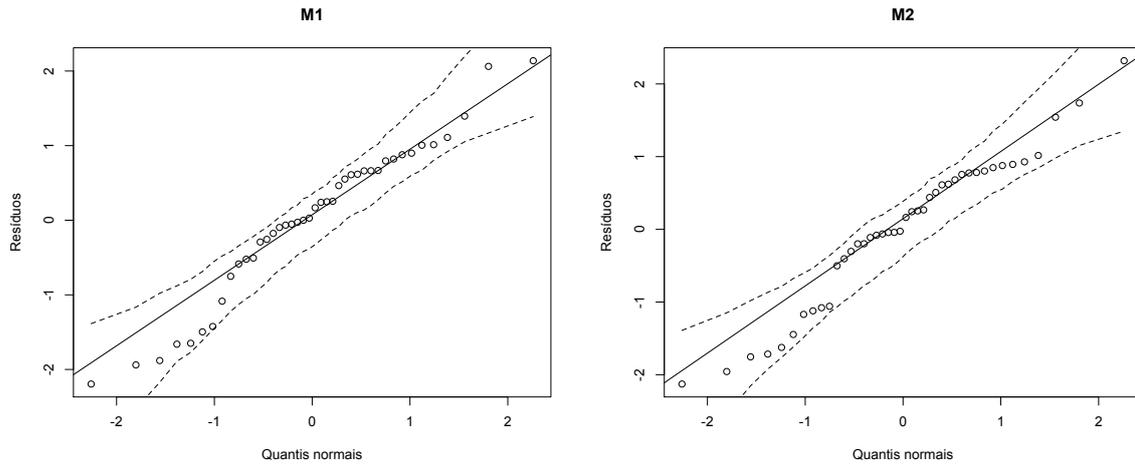


Figura 3.2: Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

beta com precisão constante. Já em Cribari-Neto e Zeileis (2010), os autores sugerem o uso do modelo com precisão variável com função de ligação logit para o submodelo da média e logarítmica para o submodelo da precisão. Aqui, o modelo inicial é dado por

$$M1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} + \gamma_3 x_{t3},$$

$t = 1, \dots, 38$. Inicialmente, foi testada a hipótese de precisão constante, $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. A estatística RV foi igual a 7.87, com p -valor = 0.02, o que indica a rejeição da hipótese nula ao nível nominal de 5%. Tal decisão foi confirmada por todas as versões bootstrap do teste com p -valores iguais a 0.03, 0.01 e 0.03 associados a RV^* , RV^{**} e RV_{Bbc} , respectivamente. Ou seja, a versão BDR do teste nos permite rejeitar a hipótese nula com mais confiança.

Dando continuidade aos testes, foi testada a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \gamma_3 = 0$. Para tal hipótese, todas as versões do teste RV indicaram a rejeição da hipótese nula com p -valores iguais a 0.01, 0.02, 0.04 e 0.01 associados a RV , RV^* , RV^{**} e RV_{Bbc} , respectivamente. Por sua vez, os testes para a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \gamma_2 = 0$ indicaram fortemente a não rejeição da mesma com todos os p -valores acima de 0.68. Dessa forma, adotamos o modelo dado

por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}.$$

Em seguida, testamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$. Os p -valores associados ao teste assintótico e a versão baseada na correção de Bartlett bootstrap foram iguais a 0.02. Por sua vez, os p -valores associados as versões bootstrap usual e BDR dos testes foram iguais a 0.03. Ou seja, todas as versões do teste RV indicaram a rejeição da hipótese nula. Por fim, testamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$. Tal hipótese foi rejeitada por todas as versões do teste com p -valores próximos de zero.

As medidas de qualidade de ajuste obtidas para tal modelo foram: $R_{RV}^2 = 0.517$ e $\overline{R}_{RV}^2 = 0.452$ e a Figura 3.3 apresenta o gráfico normal de probabilidades para o modelo selecionado. Vale ressaltar que o teste RESET ($\chi^2 = 5.024$, p -valor = 0.025) indicou haver sinais de má especificação do modelo. Voltaremos a tratar desse conjunto de dados no próximo capítulo.

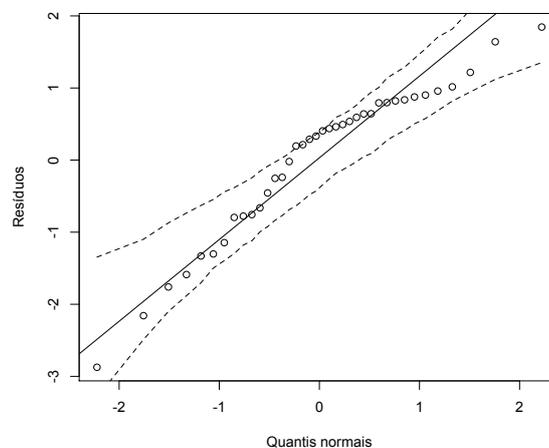


Figura 3.3: Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de gastos com alimentação.

3.7.3 Aplicação 3: Recém-nascidos com baixo peso

Segundo o *America's Health Ranking*¹ no ano de 2015, nos Estados Unidos, cerca de 8% dos recém-nascidos apresentaram quadro de baixo peso, ou seja, pesavam menos

¹<http://americashealthrankings.org>

de 2,5 quilogramas. Tal fato, geralmente, é associado a uma insuficiência placentária que pode ter como causa fatores mutáveis, ou seja, fatores em que o indivíduo pode influir, prevenindo ou tratando. Além disso, casos de gravidez prolongada e nascimentos prematuros também costumam ser relacionados a tal situação. Aqui, através de dados obtidos a partir do *America's Health Ranking* e do relatório anual *The State of Obesity*², modelamos a proporção de recém-nascidos com baixo peso do ano de 2015 (y) levando em conta os nascimentos prematuros e fatores comportamentais associados à população dos 50 estados e distrito federal dos Estados Unidos. Sendo assim, nosso conjunto de dados é composto por 51 observações, cujas as covariadas são: a porcentagem de nascimentos prematuros (x_2); a porcentagem de adultos que consomem bebidas alcoólicas em excesso (x_3); a porcentagem de adultos fumantes (x_4); a porcentagem de adultos com índice de massa corporal maior ou igual que 25 (x_5), representando a situação de sobrepeso; e a quantidade média de vegetais (x_6) e frutas (x_7) consumidas diariamente por cada habitante das 51 regiões analisadas.

Nosso modelo inicial é dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5} + \beta_6 x_{t6} + \beta_7 x_{t7},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} + \gamma_3 x_{t3} + \gamma_4 x_{t4} + \gamma_5 x_{t5} + \gamma_6 x_{t6} + \gamma_7 x_{t7}.$$

A hipótese nula de precisão constante não foi rejeitada por nenhuma versão do teste com todos os p -valores acima de 0.95. Dessa forma, adotamos o modelo com precisão contante,

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5} + \beta_6 x_{t6} + \beta_7 x_{t7}.$$

Os testes da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_7 = 0$ indicaram a não significância da variável x_7 , com p -valores acima de 0.32. Dessa forma, adotamos o modelo dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5} + \beta_6 x_{t6}.$$

Em seguida, foi testada a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_6 = 0$, para a qual os testes também indicaram a não significância da variável x_6 , com p -valores acima de 0.68. Sendo assim, adotamos o modelo dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5}.$$

²<http://stateofobesity.org>

Por sua vez, os testes indicaram unanimemente a significância da variável x_5 , com todos os p -valores próximos de zero. No que tange ao teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$, os p -valores associados a RV , RV^* , RV^{**} e RV_{Bbc} foram, respectivamente, 0.01, 0.03, 0.04 e 0.02., indicando a rejeição de tal hipótese nula ao nível de significância de 5%. Por fim, os testes de $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ e $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ indicaram a significância das variáveis x_3 e x_2 com todos os p -valores próximos de zero. Dessa forma, nosso modelo final é dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5}.$$

As estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão se encontram na Tabela 3.14 .

Tabela 3.14: Estimativas e erros-padrão para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso.

| | β_1 | β_2 | β_3 | β_4 | β_5 | ϕ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
| Estimativa | -2.269 | 7.779 | -1.130 | 1.139 | -1.677 | 2636.5 |
| Erro-padrão | 0.265 | 0.694 | 0.354 | 0.426 | 0.415 | 522.2 |

As medidas de qualidade de ajuste obtidas para o modelo foram $R_{RV}^2 = 0.806$ e $\bar{R}_{RV}^2 = 0.776$, indicando assim que o modelo se ajusta bem aos dados. Por sua vez, nem o teste RESET ($\chi^2 = 0.076$, p -valor = 0.783) nem o gráfico normal de probabilidades (Figura 3.4) indicaram haver indícios de má especificação do modelo.

3.7.4 Aplicação 4: Prêmios da Ford na NASCAR

O conjunto de dados é formado por 267 observações referentes às corridas da *Winston Cup* (atualmente, *Sprint Cup*) da NASCAR (Associação Nacional de Automobilismo Stock Car, em português) entre os anos de 1993 e 2000. Os dados foram estudados por Winner (2006) e têm como variável resposta (y) a proporção de prêmio em dinheiro ganho pelo time da Ford nas corridas. As covariáveis são: a proporção de carros que são da Ford por corrida (x_2); o comprimento da pista em milhas (x_3); o *bank* (x_4), que representa o grau de inclinação de cada pista nas curvas; o logaritmo do número de voltas (x_5); e oito variáveis dummy representando os anos das corridas (1993-2000). Winner (2015) utiliza um modelo de regressão beta com precisão constante e função de ligação logit para modelar os dados.

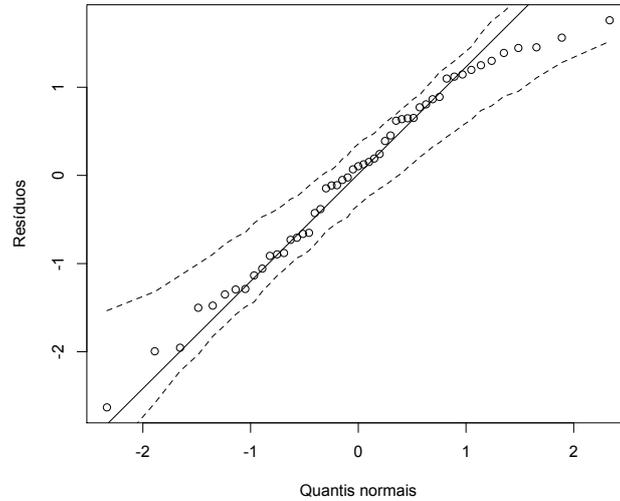


Figura 3.4: Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo final utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso.

Aqui, tal modelo será denominado modelo $M1$ e, adicionalmente, consideraremos uma estrutura de regressão para o parâmetro de precisão. Sendo assim, nosso modelo inicial é dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5} + \sum_{n=6}^{13} \beta_n x_{tn},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} + \gamma_3 x_{t3} + \gamma_4 x_{t4} + \gamma_5 x_{t5} + \sum_{n=6}^{13} \gamma_n x_{tn}.$$

A hipótese nula de precisão constante foi rejeita por todas as versões do teste, com todas apresentando p -valor < 0.01 . Em seguida, testamos a exclusão das variáveis dummy de tal submodelo. Todas as versões do teste RV indicaram a rejeição da hipótese nula com p -valor < 0.01 . Para os demais parâmetros do submodelo da precisão, todas as versões do teste indicaram unanimemente a não significância das variáveis x_2, x_3, x_4 e x_5 , com p -valores sempre muito próximos. Dessa forma, adotamos o modelo

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5} + \sum_{n=6}^{13} \beta_n x_{tn},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \sum_{n=6}^{13} \gamma_n x_{tn}.$$

Em seguida, passamos para os teste sobre os parâmetros do submodelo da média. A hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_6 = \dots = \beta_{13} = 0$ foi rejeitada com p -valor $= 0.01$ para todas as

versões do teste. Por sua vez, a hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_5 = 0$ foi rejeitada unanimemente com p -valores ≤ 0.01 . Já o teste de $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = 0$ indicou a não significância da variável x_4 , com todos p -valores acima de 0.31. Por fim, as hipóteses nulas $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$ e $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$ foram rejeitadas unanimemente com p -valor < 0.01 . Logo, nosso modelo final é dado por

$$M2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_5 x_{t5} + \sum_{n=6}^{13} \beta_n x_{tn},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \sum_{n=6}^{13} \gamma_n x_{tn}.$$

As estimativas dos parâmetros e os respectivos erros-padrão para o modelo $M2$ são apresentados na Tabela 3.15.

Tabela 3.15: Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados da NASCAR.

| β | β_1 | β_2 | β_3 | β_5 | β_6 | β_7 | β_8 | β_9 | β_{10} |
|-------------|--------------|--------------|--------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Estimativa | 0.545 | 2.433 | -0.139 | -0.259 | -0.206 | -0.027 | -0.173 | -0.189 | -0.135 |
| Erro-padrão | 0.460 | 0.399 | 0.036 | 0.068 | 0.089 | 0.092 | 0.090 | 0.088 | 0.063 |
| β | β_{11} | β_{12} | β_{13} | | | | | | |
| Estimativa | -0.150 | -0.179 | -0.181 | | | | | | |
| Erro-padrão | 0.068 | 0.065 | 0.070 | | | | | | |
| γ | γ_1 | γ_6 | γ_7 | γ_8 | γ_9 | γ_{10} | γ_{11} | γ_{12} | γ_{13} |
| Estimativa | 3.923 | 0.631 | 0.656 | 0.960 | 0.505 | 1.559 | 0.595 | 1.819 | 0.535 |
| Erro-padrão | 0.270 | 0.379 | 0.375 | 0.376 | 0.375 | 0.373 | 0.369 | 0.367 | 0.367 |

O teste RESET não indicou que há indícios de má especificação no modelo $M1$ ($\chi^2 = 1.54$, p -valor 0.215) nem no modelo $M2$ ($\chi^2 = 1.509$, p -valor = 0.219). As medidas de avaliação apresentadas na Tabela 3.16 favorecem o modelo $M2$, assim como os gráficos normais de probabilidades apresentados na Figura 3.5.

Tabela 3.16: Medidas de avaliação dos modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados da NASCAR.

| Modelo | R^2_{RV} | $\overline{R^2}_{RV}$ | AIC | BIC |
|--------|------------|-----------------------|----------|----------|
| $M1$ | 0.390 | 0.347 | -825.998 | -775.776 |
| $M2$ | 0.457 | 0.410 | -842.793 | -767.461 |

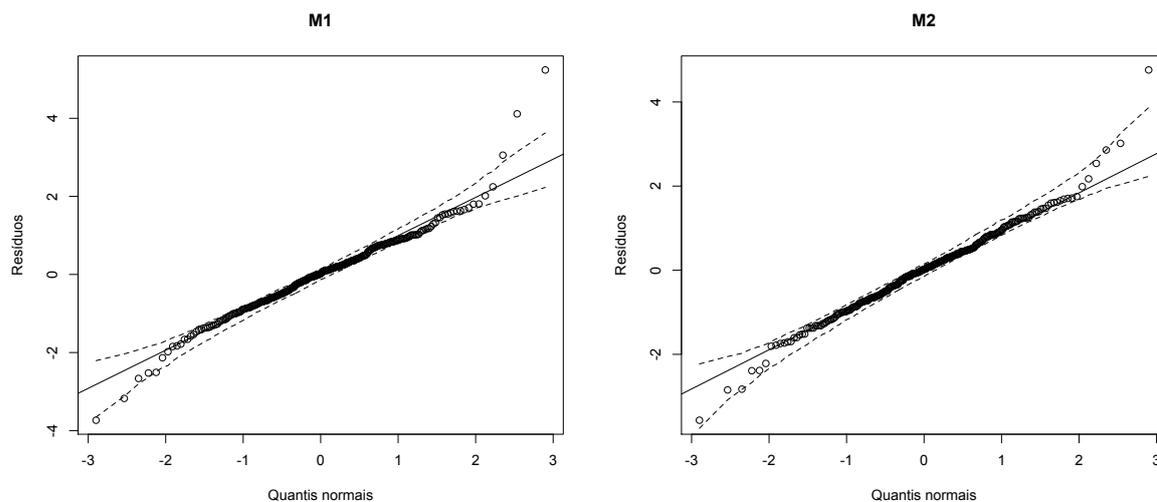


Figura 3.5: Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados da NASCAR.

3.8 Conclusões

Os modelos de regressão beta são uma importante ferramenta na modelagem de dados que assumem valores no intervalo $(0, 1)$. Inferência por testes de hipóteses em tais modelos pode ser realizada utilizando-se a estatística da razão de verossimilhanças. No entanto, as inferências se baseiam em aproximações assintóticas e, conseqüentemente, podem conduzir a testes de hipóteses com tamanhos distorcidos em pequenas amostras.

Neste cenário, a utilização de esquemas de reamostragem bootstrap mostra-se uma ótima ferramenta para contornar tal problema, já que permite estimar a distribuição nula da estatística de teste, evitando assim a utilização de uma aproximação assintótica. Nesse capítulo, consideramos algumas versões bootstrap do teste da razão de verossimilhanças visando obter um melhor desempenho do mesmo. Os resultados numéricos obtidos com dados simulados indicaram a superioridade das versões baseadas em bootstrap quando comparadas com a versão assintótica do teste e, além disso, ressaltaram um melhor desempenho da versão bootstrap duplo rápido quando comparada com a versão bootstrap usual.

Dessa forma, recomendamos a utilização do bootstrap duplo rápido para a realização de testes de hipóteses em pequenas amostras, já que o mesmo apresentou taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais do que a versão bootstrap usual na maior parte dos casos avaliados e sem um alto custo computacional. Além disso, o método pode

ser utilizado aliado a versão bootstrap usual, em casos em que haja dúvidas sobre o desempenho da última.

Capítulo 4

Testes de hipóteses não encaixadas via esquemas bootstrap

4.1 Introdução

Dois modelos de regressão linear são ditos não encaixados quando um não pode ser obtido como caso particular do outro a partir de restrições lineares sobre seus parâmetros. Neste cenário, quando se trata de testes de hipóteses não encaixadas, o teste J proposto em Davidson e MacKinnon (1981) é o procedimento comumente mais utilizado. O teste utiliza a construção de um modelo ampliado de modo que cada um dos modelos a serem testados pode ser obtido como um caso particular deste novo modelo. Seja $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$. Considere M modelos de regressão linear não encaixados associados a $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, ou seja, nenhum desses modelos pode ser obtido a partir de restrições sobre os parâmetros dos demais. O modelo ampliado pode ser escrito como

$$y = \left(1 - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^M \lambda_l \right) X_m \theta_m + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^M \lambda_l X_l \theta_l + u,$$

em que λ_l é um escalar; X_m é a matriz de dimensão $n \times k_m$ de regressores do m -ésimo modelo; θ_m é um vetor de k_m parâmetros desconhecidos; u é um vetor de erros aleatórios. Para realizar o teste J , substitui-se os parâmetros dos modelos que não estão sendo testados por suas respectivas estimativas. Dessa forma, se desejamos testar o m -ésimo

modelo, utilizamos

$$y = \left(1 - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^M \lambda_l \right) X_m \theta_m + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^M \lambda_l X_l \hat{\theta}_l + u, \quad (4.1)$$

em que $\hat{\theta}_l$ é o estimador de mínimos quadrados do vetor θ_l , ou seja, $\hat{\theta}_l = (X_l^\top X_l)^{-1} X_l^\top y$. O teste J para avaliar se o m -ésimo modelo, $m \in \mathcal{M}$, é o correto na presença de $M - 1$ modelos alternativos é realizado testando $\lambda_l = 0$, para $l \in \mathcal{M} \setminus \{m\}$ (ou seja, $l \in \mathcal{M}$ e $l \neq m$) na Equação (4.1) a partir da estatística

$$J_{n,m} = \omega_m^\top \hat{\Sigma}_m^{-1} \omega_m.$$

Aqui,

$$\omega_m = n^{-1/2} (y^\top P_l M_m y)_{l \in \mathcal{M} \setminus \{m\}}$$

e

$$\hat{\Sigma}_m = n^{-1} (y^\top P_l M_m \hat{\Omega}_m M_m P_{l'} y)_{l, l' \in \mathcal{M} \setminus \{m\}},$$

em que $P_m = X_m (X_m^\top X_m)^{-1} X_m^\top$, $M_m = I_n - P_m$ e $\hat{\Omega}_m = \text{diag}\{\hat{u}_{1,m}^2, \dots, \hat{u}_{n,m}^2\}$ é uma matriz diagonal criada utilizando o vetor de resíduos quadrados ($\hat{u}_{i,m}^2 = y_i - x_{i,m}^\top \hat{\theta}_m$).

Sob a hipótese nula, tal estatística tem distribuição assintótica χ^2 com $M - 1$ graus de liberdade. Intuitivamente, o modelo não é rejeitado quando a adição dos preditores dos demais modelos não fornece melhora notável no ajuste dele. Caso contrário, o modelo é rejeitado. Nesse cenário, pode-se ter o caso em que todos os modelos são rejeitados ou o caso em que não se rejeita mais de um modelo. Isso nos leva a uma grande desvantagem do teste J : quando há um grande número de modelos não encaixados faz-se necessária uma sequência de testes em que cada hipótese nula (o m -ésimo modelo está corretamente especificado) é considerada. Para contornar esta situação, Hagemann (2012) propôs o teste MJ , que é usado para identificar se o modelo verdadeiro se encontra entre os modelos testados, dessa forma evitando essa sequência de testes e possíveis distorções de tamanho. Sob certas condições de regularidade, o autor mostra que, se $m^* \in \mathcal{M}$ é o modelo correto, então J_{n,m^*} tem uma distribuição assintótica bem definida enquanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J_{n,m} > A) = 1$, para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \{m^*\}$ e para todo $A \in \mathbb{R}$. Ou seja, as demais estatísticas divergem para infinito. Dessa forma, o modelo candidato a modelo correto é

justamente aquele que apresenta a menor estatística J . Logo, podemos rejeitar a hipótese de que o modelo correto se encontra entre os testados baseado na estatística J mínima. Então, dados M modelos, a estatística MJ é dada por

$$MJ = \min\{J_1, \dots, J_M\}.$$

Hagemann (2012) verifica que, sob certas condições de regularidade e se o modelo correto m^* se encontra entre os modelos candidatos, J_{m^*} tem distribuição assintótica χ_{M-1}^2 .

No que se trata de modelos de regressão beta, os modelos não encaixados podem apresentar diferenças em relação aos regressores e/ou função de ligação do submodelo da média, da precisão ou de ambos. Cribari-Neto e Lucena (2015) adaptaram os testes J e MJ para modelos de regressão beta e, além disso, apresentaram versões bootstrap dos mesmos. As avaliações dos desempenhos dos testes, realizadas pelos autores via simulações de Monte Carlo, evidenciaram um melhor desempenho da versão bootstrap dos testes em comparação ao desempenho de suas respectivas versões assintóticas. Já em Cribari-Neto e Lucena (2017), os autores propuseram variantes dos testes J e MJ para a classe de modelos GAMLSS (Rigby e Stasinopoulos, 2001, 2005).

Este capítulo tem como objetivo apresentar a versão bootstrap duplo rápido dos testes supracitados e avaliar seu desempenho em pequenas amostras via simulações de Monte Carlo. Para tanto, na Seção 4.2 é feita uma rápida apresentação dos teste J e MJ em modelos de regressão beta, assim como de suas versões bootstrap, como apresentadas em Cribari-Neto e Lucena (2015). Adicionalmente, são apresentados algoritmos para a realização das versões BDR dos testes. Por sua vez, a Seção 4.3 traz os resultados numéricos das simulações de Monte Carlo para avaliar o desempenho dos testes J , MJ e de suas versões via esquemas bootstrap. A Seção 4.4 apresenta aplicações a dados reais e, por fim, na Seção 4.5 são expostas as conclusões.

4.2 Testes J e MJ em modelos de regressão beta

Modelos de regressão beta, no caso de dispersão variável, são constituídos por uma estrutura de regressão para a média e outra para a precisão. Dessa forma, modelos não encaixados podem diferir na especificação dos regressores ou funções de ligação da média, da precisão ou de ambos. Suponha que há interesse em testar M modelos de regressão

beta não encaixados. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} M_i : g(\mu) &= \eta_i = X_i \beta_i \\ h(\phi) &= \delta_i = Z_i \gamma_i, \end{aligned}$$

para $i \in \mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$; μ e ϕ são vetores n -dimensionais contendo os parâmetros de média e precisão de cada modelo, respectivamente; $g : (0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ e $h : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ são funções de ligação; η_i, δ_i são preditores lineares; X_i e Z_i são matrizes $n \times k_i$ e $n \times m_i$ de regressores e $\beta_i = (\beta_{1_i}, \dots, \beta_{k_i})^\top$ e $\gamma_i = (\gamma_{1_i}, \dots, \gamma_{m_i})^\top$ são vetores de parâmetros.

Suponha que queremos avaliar se o l -ésimo modelo é o correto, para algum $l \in \mathcal{M}$. Inicialmente, devemos identificar quais modelos diferem do modelo M_l no submodelo da média e/ou precisão. Denote por $d_{M(l)}$ e $d_{P(l)}$ o número dos demais modelos que diferem de M_l em relação ao submodelo da média e da precisão, respectivamente. Em seguida, estimamos os parâmetros de tais modelos via máxima verossimilhança e incluímos os preditores estimados $\hat{\eta}_i$ e $\hat{\delta}_i$ de tais modelos como covariadas adicionais, respectivamente, nos submodelos da média e precisão de M_l . A estatística J da razão de verossimilhanças para testar a exclusão conjunta de tais preditores é dada por

$$J_i = 2 \left\{ \ell(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \ell(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \right\},$$

em que $\ell(\beta, \gamma)$ é a função de log-verossimilhança e $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ e $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ são os estimadores de máxima verossimilhança de (β, γ) obtidos do modelo ampliado e do modelo M_l , respectivamente. Note que $d_{M(l)}$ e $d_{P(l)}$ covariadas adicionais são incluídas nos submodelos ampliados da média e precisão, respectivamente. O modelo M_l é rejeitado ao nível de significância α se $J_l > \chi_{1-\alpha, d_{M(l)}+d_{P(l)}}^2$.

Por sua vez, o teste MJ pode ser realizado computando-se individualmente todas as estatísticas J e então fazendo $MJ = \min\{J_1, \dots, J_M\}$. A hipótese nula de que o modelo correto está entre os modelos testados é rejeitada se $MJ > \chi_{1-\alpha, \tau}^2$, em que τ é o número de graus de liberdade no teste J correspondente a estatística J minimal.

4.2.1 Testes J e MJ via esquemas bootstrap

Em Yanqin e Qi (1995), Godfrey (1998) e Hagemann (2012), os autores verificam através de simulações que a realização dos testes J e MJ em pequenas amostras tende a resultar em taxas de rejeição distorcidas. Como forma de contornar tal problema, os autores

indicam a utilização de versões bootstrap dos mesmos. Já em Davidson e MacKinnon (2002a), os autores avaliam a versão bootstrap para o teste J para modelos de regressão linear. A partir de simulações de Monte Carlo os autores concluem que a versão bootstrap do teste funciona bem na maior parte dos casos, mas que para alguns casos o teste ainda apresentava taxa de rejeição acima do esperado. Dessa forma, Davidson e MacKinnon (2002b) propuseram a versão bootstrap duplo rápido do teste J para modelos de regressão linear, verificando que o mesmo apresenta um melhor desempenho que a versão bootstrap usual do teste. Por sua vez, Cribari-Neto e Lucena (2015) apresentaram as versões bootstrap do teste J e MJ para modelos de regressão beta, verificando o bom desempenho dos mesmo em tal classe de modelos. Aqui, introduzimos as versões bootstrap duplo rápido dos testes J e MJ para esta classe de modelos.

Considere o vetor n -dimensional de variáveis aleatórias independentes, $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, tal que para cada $t = 1, \dots, n$, $y_t \sim \mathcal{B}(\mu_t, \phi_t)$. Sejam X_1, X_2 e Z matrizes de regressores e η_1, η_2 e δ preditores lineares. A versão bootstrap do teste J para testar dois modelos,

$$\begin{aligned} M_i : g(\mu) &= \eta_i = X_i \beta_i \\ h(\phi) &= \delta = Z \gamma, \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, pode ser descrita como no seguinte algoritmo.

Algoritmo 4.2.1. (Teste J bootstrap)

1. Estime o modelo M_2 , obtenha o preditor estimado $\hat{\eta}_2$ e adicione-o como covariada no modelo M_1 . Em seguida, estime o modelo ampliado;
2. Calcule a estatística J ;
3. Gere uma amostra bootstrap y^* , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_t, \hat{\phi}_t)$, em que $\hat{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \hat{\beta}_1)$ e $\hat{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \hat{\gamma}_1)$. Aqui, $\hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob o modelo M_1 ;
4. Estime o modelo ampliado utilizando y^* como variável resposta e calcule J^* ;
5. Execute os passos 3 e 4 um número grande (B) de vezes;
6. Obtenha o quantil $1 - \alpha$ de (J_1^*, \dots, J_B^*) , denotado $\varsigma_{1-\alpha}$;

7. Rejeite M_1 se $J > \varsigma_{1-\alpha}$.

A decisão pode ainda ser tomada através do p -valor bootstrap:

$$p^*(J) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(J_i^* > J).$$

O Modelo M_1 é rejeitado se p^* é menor do que o nível nominal adotado.

Para se obter uma melhor precisão do teste sem alto custo computacional, pode-se recorrer à versão bootstrap duplo rápido do teste J , descrita no próximo algoritmo.

Algoritmo 4.2.2. (Teste J bootstrap duplo rápido)

1. Estime o modelo M_2 , obtenha o preditor estimado $\hat{\eta}_2$ e adicione-o como covariada no modelo M_1 . Em seguida, estime o modelo ampliado;
2. Calcule a estatística J ;
3. Gere uma amostra bootstrap y^* , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_t, \hat{\phi}_t)$, em que $\hat{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top \hat{\beta}_1)$ e $\hat{\phi}_t = h^{-1}(z_t^\top \hat{\gamma}_1)$. Aqui, $\hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob o modelo M_1 ;
4. Estime o modelo ampliado utilizando y^* como variável resposta e calcule J^* ;
5. Gere uma amostra bootstrap y^{**} , com $y_t^{**} \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_t^*, \hat{\phi}_t^*)$, em que $\hat{\mu}_t^* = g^{-1}(x_t^\top \hat{\beta}_1^*)$ e $\hat{\phi}_t^* = h^{-1}(z_t^\top \hat{\gamma}_1^*)$. Aqui, $\hat{\beta}_1^*, \hat{\gamma}_1^*$ são as estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir do modelo M_1 utilizando y^* como variável resposta;
6. Estime o modelo ampliado utilizando y^{**} como variável resposta e calcule J^{**} ;
7. Execute os passos 3 a 6 um número grande (B) de vezes;
8. Obtenha o p -valor de primeiro nível, dado por

$$p^*(J) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(J_i^* > J);$$

9. Obtenha o quantil $1 - p^*$ de $(J_1^{**}, \dots, J_B^{**})$, denotado $\hat{Q}_B^{**}(1 - p^*(J))$;
10. Obtenha o p -valor bootstrap duplo rápido, dado por

$$p_F^{**}(J) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(J_i^* > \hat{Q}_B^{**}(1 - p^*(J)));$$

11. Rejeite M_1 se $p_F^{**}(J)$ é menor que o nível nominal adotado.

Para testar o modelo M_2 o procedimento é análogo, assim como no caso de haver mais de dois modelos a serem testados.

Agora, focamos na versão bootstrap do teste MJ , que encontra-se descrita no algoritmo abaixo.

Algoritmo 4.2.3. (Teste MJ bootstrap)

1. Calcule a estatística MJ ;
2. Gere uma amostra bootstrap y^* , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_{mt}, \hat{\phi}_{mt})$, em que $\hat{\mu}_{mt} = g^{-1}(x_{mt}^\top \hat{\beta}_m)$ e $\hat{\phi}_{mt} = h^{-1}(z_{mt}^\top \hat{\gamma}_m)$. Aqui, $\hat{\beta}_m, \hat{\gamma}_m$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob o m -ésimo modelo;
3. Calcule a estatística MJ^* ;
4. Execute os passos 2 e 3 um número grande (B) de vezes;
5. Obtenha o quantil $1 - \alpha$ de (MJ_1^*, \dots, MJ_B^*) , denotado $\varsigma_{1-\alpha}$;
6. Rejeite a hipótese nula se $MJ > \varsigma_{1-\alpha}$.

Adaptando o algoritmo anterior, podemos realizar a versão bootstrap duplo rápido do teste MJ como descrito no próximo algoritmo.

Algoritmo 4.2.4. (Teste MJ bootstrap duplo rápido)

1. Calcule a estatística MJ ;
2. Gere uma amostra bootstrap y^* , com $y_t^* \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_{mt}, \hat{\phi}_{mt})$, em que $\hat{\mu}_{mt} = g^{-1}(x_{mt}^\top \hat{\beta}_m)$ e $\hat{\phi}_{mt} = h^{-1}(z_{mt}^\top \hat{\gamma}_m)$. Aqui, $\hat{\beta}_m, \hat{\gamma}_m$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob o m -ésimo modelo;
3. Calcule a estatística MJ^* ;
4. Gere uma amostra bootstrap y^{**} , com $y_t^{**} \sim \mathcal{B}(\hat{\mu}_{mt}^*, \hat{\phi}_{mt}^*)$, em que $\hat{\mu}_{mt}^* = g^{-1}(x_{mt}^\top \hat{\beta}_m^*)$ e $\hat{\phi}_{mt}^* = h^{-1}(z_{mt}^\top \hat{\gamma}_m^*)$. Aqui, $\hat{\beta}_m^*, \hat{\gamma}_m^*$ são as estimativas de máxima verossimilhança sob o m -ésimo modelo utilizando y^* como variável resposta;
5. Calcule a estatística MJ^{**} ;

6. Execute os passos 2 a 5 um número grande (B) de vezes;
7. Obtenha o p -valor de primeiro nível, dado por

$$p^*(MJ) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(MJ_i^* > MJ);$$

8. Obtenha o quantil $1 - p^*$ de $(MJ_1^{**}, \dots, MJ_B^{**})$, denotado $\widehat{Q}_B^{**}(1 - p^*(MJ))$;
9. Obtenha o p -valor bootstrap duplo rápido, dado por

$$p_F^{**}(MJ) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B I(MJ_i^* > \widehat{Q}_B^{**}(1 - p^*(MJ)));$$

10. A hipótese de que o modelo correto se encontra entre os testados é rejeitada se $p_F^{**}(MJ)$ é menor que o nível nominal adotado.

Os algoritmos apresentados nessa seção podem facilmente ser adaptados para a realização de testes referentes a outras diferenças entre os modelos, sejam em relação aos regressores ou funções de ligação.

4.3 Simulações

Nessa seção são apresentados resultados de simulações de Monte Carlo realizadas para avaliar os desempenhos dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap (J^* e MJ^*) e bootstrap duplo rápido (J^{**} e MJ^{**}) em pequenas amostras.

Ao todo, foram considerados cinco cenários distintos, nos quais dois modelos apresentam diferenças em relação aos regressores ou funções de ligação. Inicialmente, foi gerada uma amostra com 10 observações das variáveis explicativas, selecionadas aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$. Em seguida, tal amostra foi replicada até atingir os tamanhos amostrais considerados nas simulações, $n = 20, 30$ e 40 , visando manter o grau de heterogeneidade ($\lambda = \phi_{\max}/\phi_{\min}$) constante. As amostras foram então utilizadas para avaliar os desempenhos dos testes supracitados. O número de réplicas de Monte Carlo foi 10000 e os níveis nominais adotados foram $\alpha = 10\%, 5\%$ e 1% . Por sua vez, para as versões dos testes J e MJ via esquemas de reamostragem foram utilizadas 1000 réplicas bootstrap.

Para os três primeiros cenários os valores dos parâmetros foram fixados em $\beta_1 = 1.0, \beta_2 = 2.5, \beta_3 = -3.0, \gamma_1 = 1.5$ e $\gamma_2 = 1.1$. A partir desses valores, μ assume valores no intervalo $(0.29, 0.95)$ e o grau de heterogeneidade da precisão é de aproximadamente 2.68.

No cenário 1, foram considerados dois modelos que diferem nos regressores do submodelo da média,

$$M_1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} \quad \text{e} \quad M_2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_4 x_{t4},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} \qquad \qquad \qquad \log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2},$$

em que $t = 1, \dots, n$. Aqui, o modelo M_1 foi adotado como correto, ou seja, foi utilizado no processo de geração de dados. Tal modelo tem como regressores do submodelo da média x_2 e x_3 , enquanto o modelo M_2 tem como regressores desse submodelo x_2 e x_4 . A Tabela 4.1 contém as taxas de rejeição dos testes supracitados. Os resultados indicam que, para $n = 20$ e 30 , as versões bootstrap usual e BDR dos testes se mostraram as melhores opções para todos os níveis nominais. Entretanto, para $n = 40$ e 10% , os testes assintóticos apresentaram resultados mais próximos do nível nominal. Além disso, o melhor desempenho dos testes bootstrap usual e BDR ocorrem para $\alpha = 1\%$. Por último, nota-se um desempenho liberal para as versões assintóticas dos testes, enquanto as versões bootstrap apresentam desempenho mais conservativo, com as versões BDR dos testes apresentando melhor precisão do que as versões bootstrap usual na maior parte dos casos.

Tabela 4.1: Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da média.

| n | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-----------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 |
| J | 14.91 | 12.29 | 11.05 | 8.72 | 6.59 | 5.99 | 2.78 | 1.86 | 1.55 |
| J^* | 8.62 | 8.44 | 8.73 | 4.46 | 4.29 | 4.22 | 0.93 | 0.94 | 1.07 |
| J^{**} | 8.74 | 8.61 | 8.74 | 4.50 | 4.42 | 4.26 | 0.94 | 1.06 | 1.11 |
| MJ | 14.88 | 12.29 | 11.05 | 8.66 | 6.58 | 5.99 | 2.73 | 1.86 | 1.55 |
| MJ^* | 8.73 | 8.47 | 8.74 | 4.53 | 4.33 | 4.22 | 0.97 | 0.94 | 1.07 |
| MJ^{**} | 8.75 | 8.61 | 8.72 | 4.59 | 4.40 | 4.24 | 0.97 | 1.05 | 1.11 |

No segundo cenário, os modelos considerados diferem nos regressores do submodelo

da precisão:

$$M_1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} \quad \text{e} \quad M_2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} \qquad \qquad \qquad \log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}$$

$t = 1, \dots, n$. O modelo M_1 , adotado como correto, tem como regressor no submodelo da precisão x_2 enquanto o modelo M_2 tem x_3 como regressor. De acordo com a Tabela 4.2, de modo geral, as versões bootstrap dos testes apresentam melhor desempenho do que as versões assintóticas. Além disso, nota-se que, para $n = 20$ e 40 , a versão bootstrap usual do teste J é a melhor escolha para todos os níveis nominais. Por sua vez, no que se trata do teste MJ , a versão BDR do mesmo apresenta o melhor desempenho para todos os níveis nominais e tamanhos amostrais avaliados. Por exemplo, para $n = 20$ ao nível nominal de 10%, a taxa de rejeição do teste MJ^{**} foi de 8.38, enquanto a do teste MJ^* foi de 7.22.

Tabela 4.2: Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da precisão.

| n | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-----------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 |
| J | 17.79 | 13.80 | 12.63 | 10.87 | 7.45 | 7.18 | 3.63 | 2.04 | 1.57 |
| J^* | 11.38 | 10.18 | 10.34 | 6.08 | 5.08 | 5.45 | 1.45 | 1.10 | 1.06 |
| J^{**} | 11.39 | 10.14 | 10.34 | 6.26 | 5.06 | 5.53 | 1.53 | 1.16 | 1.09 |
| MJ | 6.26 | 5.37 | 5.48 | 3.00 | 2.31 | 2.53 | 0.59 | 0.42 | 0.37 |
| MJ^* | 7.22 | 7.87 | 8.52 | 3.26 | 3.20 | 3.86 | 0.52 | 0.39 | 0.58 |
| MJ^{**} | 8.38 | 8.53 | 8.86 | 3.76 | 3.53 | 3.96 | 0.62 | 0.58 | 0.71 |

Por sua vez, no cenário 3, foram considerados modelos que diferem tanto nos regressores do submodelo da média quanto nos regressores do submodelo da precisão:

$$M_1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} \quad \text{e} \quad M_2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_4 x_{t4},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} \qquad \qquad \qquad \log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}$$

$t = 1, \dots, n$. Os resultados apresentados na Tabela 4.3 mostram que as versões bootstrap dos testes J e MJ apresentam taxas de rejeições bem mais próximas dos níveis nominais considerados do que as versões assintóticas dos mesmos. Nota-se ainda que, com exceção

do caso em que $n = 20$ ao nível nominal de 1%, as versões baseadas no BDR apresentam um melhor desempenho dos que as versões baseadas no bootstrap usual, para todos os níveis nominais e tamanhos amostrais considerados. Por exemplo, para $n = 40$ e $\alpha = 5\%$, temos que as taxas de rejeição nula dos testes J e MJ baseados no BDR foram 4.96% e 4.98%, respectivamente, enquanto as taxas de rejeição associadas as versões bootstrap usual dos testes J e MJ foram 4.79% e 4.81%, respectivamente.

Tabela 4.3: Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nos regressores do submodelo da média e precisão.

| n | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-----------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 |
| J | 20.16 | 14.86 | 13.20 | 12.96 | 8.51 | 7.39 | 4.69 | 2.26 | 1.97 |
| J^* | 9.58 | 9.12 | 9.38 | 4.75 | 4.35 | 4.79 | 1.28 | 0.91 | 0.93 |
| J^{**} | 9.83 | 9.23 | 9.54 | 4.93 | 4.40 | 4.96 | 1.37 | 1.00 | 1.04 |
| MJ | 20.10 | 14.85 | 13.20 | 12.89 | 8.49 | 7.39 | 4.61 | 2.25 | 1.97 |
| MJ^* | 9.59 | 9.14 | 9.38 | 4.85 | 4.35 | 4.81 | 1.25 | 0.92 | 0.93 |
| MJ^{**} | 9.85 | 9.21 | 9.55 | 4.97 | 4.41 | 4.98 | 1.33 | 1.00 | 1.02 |

Para os dois últimos cenários, os valores dos parâmetros foram adotados como sendo $\beta_1 = 1.0, \beta_2 = 1.7, \beta_3 = -2.0, \gamma_1 = 1.5$ e $\gamma_2 = 1.1$. A partir desses valores, μ assume valores no intervalo $(0.28, 0.91)$ e o grau de heterogeneidade da precisão é de aproximadamente 2.68. No quarto cenário, foram considerados os seguintes modelos:

$$M_1 : -\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} \quad \text{e} \quad M_2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} \qquad \qquad \qquad \log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2}$$

$t = 1, \dots, n$. Nota-se que os modelos diferem em relação à função de ligação do submodelo da média. Enquanto o modelo M_1 , adotado como correto, tem função de ligação log-log, o modelo M_2 adota função de ligação logit. Os resultados apresentados na Tabela 4.4 indicam um melhor desempenho das versões bootstrap dos testes em comparação com suas versões assintóticas na maior parte dos casos avaliados. Além disso, verifica-se que a versão bootstrap usual do teste J apresenta taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais para $\alpha = 10\%$ e 1% do que as versões BDR, com exceção do caso em que $n = 20$ e $\alpha = 1\%$. Por sua vez, as versões BDR do teste MJ apresentam melhor desempenho que

a baseada no bootstrap usual para $\alpha = 10\%$ e 5% . Por exemplo, para $n = 30$ e $\alpha = 10\%$, temos que a taxa de rejeição associada a MJ^* foi 10.21% enquanto a associada a MJ^{**} foi 10% .

Tabela 4.4: Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem na função de ligação do submodelo da média.

| n | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-----------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 |
| J | 16.15 | 13.89 | 12.47 | 9.67 | 7.86 | 6.74 | 3.01 | 1.98 | 1.59 |
| J^* | 9.95 | 10.15 | 9.98 | 5.26 | 4.90 | 4.87 | 1.10 | 1.19 | 1.15 |
| J^{**} | 9.93 | 10.24 | 10.03 | 5.20 | 4.98 | 5.04 | 1.08 | 1.21 | 1.17 |
| MJ | 11.55 | 9.31 | 8.60 | 6.64 | 4.92 | 4.30 | 1.93 | 1.18 | 0.99 |
| MJ^* | 10.32 | 10.21 | 10.60 | 5.42 | 5.02 | 5.21 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| MJ^{**} | 10.04 | 10.00 | 10.46 | 5.27 | 5.00 | 5.15 | 1.00 | 1.14 | 1.24 |

No último cenário, foram considerados os modelos

$$M_1 : \begin{aligned} -\log\{-\log(\mu_t)\} &= \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} & e & \quad M_2 : \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}, \\ \sqrt{\phi_t} &= \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} & & \quad \log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2}, \end{aligned}$$

$t = 1, \dots, n$. O modelo M_1 , adotado como correto, usa funções de ligação log-log e raiz quadrada enquanto o modelo M_2 emprega funções de ligação logit e logarítmica.

As taxas de rejeição nula apresentadas na Tabela 4.5 indicam melhor desempenho das versões bootstrap dos teste J e MJ quando comparadas as versões assintóticas dos mesmos. Por sua vez, a versão bootstrap usual do teste J apresentou, na maior parte dos casos, taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais considerados. Já para o teste MJ , a versão baseada no bootstrap duplo rápido mostrou-se a melhor opção na maior parte dos casos avaliados. Por exemplo, para $n = 40$ e $\alpha = 5\%$, temos que a taxa de rejeição associada a versão bootstrap usual do teste MJ foi 5.24% contra uma taxa de rejeição de 5.06% associada a versão BDR.

No geral, nota-se que as versões BDR dos testes J e MJ mostraram-se capazes de melhorar o desempenho dos testes sem exigir um alto custo computacional. Aqui, cada simulação levou em média 60 horas para ser realizada. Vale destacar que a escolha do número de réplicas bootstrap, $B = 1000$, foi feita com base na recomendação sugerida por

Tabela 4.5: Taxas de rejeição nula (%) nos modelos que diferem nas funções de ligação dos submodelos da média e precisão.

| n | $\alpha = 10\%$ | | | $\alpha = 5\%$ | | | $\alpha = 1\%$ | | |
|-----------|-----------------|-------|-------|----------------|------|------|----------------|------|------|
| | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 40 |
| J | 21.10 | 15.65 | 13.72 | 13.22 | 8.99 | 7.79 | 4.53 | 2.70 | 2.00 |
| J^* | 10.19 | 9.59 | 9.89 | 5.30 | 5.10 | 4.88 | 1.11 | 1.18 | 1.06 |
| J^{**} | 10.23 | 9.77 | 9.75 | 5.47 | 5.16 | 5.05 | 1.18 | 1.32 | 1.04 |
| MJ | 16.82 | 12.21 | 10.40 | 9.96 | 6.85 | 5.95 | 3.12 | 1.89 | 1.33 |
| MJ^* | 10.46 | 10.20 | 9.98 | 5.45 | 5.06 | 5.24 | 1.12 | 1.20 | 1.11 |
| MJ^{**} | 10.15 | 9.89 | 9.89 | 5.40 | 5.08 | 5.06 | 1.12 | 1.19 | 1.09 |

Davidson e MacKinnon (2002a), que indicam tal número como o mínimo para realização de tais testes. De fato, simulações omitidas aqui, com $B = 500$, apresentaram uma maior distorção no tamanho dos testes para as versões bootstrap.

4.4 Aplicações

Nesta seção são apresentadas quatro aplicações a dados reais, nas quais os testes J , MJ e suas versões bootstrap e BDR são utilizados para avaliar qual a melhor função de ligação para cada modelo. Para tanto, para o submodelo da média foram consideradas as funções de ligação: logit com $g(\mu) = \log(\mu/(1 - \mu))$, log-log com $g(\mu) = -\log(-\log(\mu))$, log-log complementar (clog log) com $g(\mu) = \log(-\log(1 - \mu))$ e a função de ligação Cauchy com $g(\mu) = \tan[\pi(\mu - 0.5)]$. Para o submodelo da precisão foram consideradas as funções de ligação: logarítmica com $h(\phi) = \log(\phi)$ e raiz quadrada com $h(\phi) = \sqrt{\phi}$.

4.4.1 Aplicação 1: Gastos com alimentação

Na Seção 3.7.2, modelamos a proporção de gastos com alimentação por domicílio em uma cidade dos Estados Unidos utilizando o modelo de regressão beta dado por

$$M1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}.$$

No entanto, verificamos que o teste RESET ($\chi^2 = 5.024$, p -valor = 0.025) indicou haver sinal de má especificação do modelo. Sendo assim, decidimos avaliar se a troca das funções de ligação escolhidas podem melhorar o ajuste do modelo. Para tanto testamos o modelo $M1$ contra modelos com diferentes funções de ligação.

A Tabela 4.6 apresenta os resultados para os testes contra modelos com diferentes funções de ligação no submodelo da média. Tais resultados indicam que todos os modelos testados apresentam problemas de ajuste aos dados. De fato, se considerarmos o nível nominal de 10% todos os modelos seriam rejeitados. Por sua vez, considerando o nível de 5%, a decisão fica entre os modelos com função de ligação logit e Cauchy. Em uma comparação direta entre tais modelos, temos que o modelo com função de ligação logit é rejeitado ao nível nominal de 5% pela versão assintótica (p -valor = 0.018) e bootstrap usual (p -valor = 0.018) do teste J , e ao nível nominal de 1% pela versão BDR (p -valor = 0.009). Por sua vez, o modelo com função de ligação Cauchy não foi rejeitado pela versão bootstrap usual do teste J (p -valor = 0.061) ao nível nominal de 5%, mas foi rejeitado pela versão assintótica e BDR do teste, ambas com p -valor = 0.042. A rejeição de tal modelo é reforçada pelo teste MJ , que indicou a rejeição da hipótese nula de que o modelo correto se encontra entre os testados tanto em sua versão assintótica quanto em suas versões bootstrap, com o p -valor BDR permitindo tal rejeição com mais segurança (p -valor = 0.031).

Tabela 4.6: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação.

| Modelos | J_1 | J_1^* | J_1^{**} | J_2 | J_2^* | J_2^{**} | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|----------------------|-------|---------|------------|-------|---------|------------|-------|--------|-----------|
| logit vs. log-log | 0.055 | 0.081 | 0.077 | 0.029 | 0.039 | 0.045 | 0.055 | 0.072 | 0.071 |
| logit vs. Cauchy | 0.018 | 0.018 | 0.009 | 0.042 | 0.061 | 0.042 | 0.042 | 0.044 | 0.031 |
| logit vs. clog log | 0.023 | 0.033 | 0.033 | 0.030 | 0.046 | 0.046 | 0.030 | 0.042 | 0.042 |
| log-log vs. Cauchy | 0.016 | 0.026 | 0.023 | 0.064 | 0.075 | 0.056 | 0.064 | 0.043 | 0.029 |
| log-log vs. clog log | 0.022 | 0.041 | 0.041 | 0.052 | 0.083 | 0.096 | 0.052 | 0.066 | 0.070 |
| clog log vs. Cauchy | 0.022 | 0.033 | 0.035 | 0.039 | 0.064 | 0.078 | 0.039 | 0.047 | 0.069 |

Para efeito comparativo, adotamos o modelo com função de ligação Cauchy como

Modelo 2:

$$M2 : \tan[\pi(\mu_t - 0.5)] = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}.$$

A Tabela 4.7 apresenta as medidas de qualidade de ajuste para os modelos $M1$ e $M2$, as quais indicam a superioridade do modelo $M2$.

Tabela 4.7: Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de gastos com alimentação.

| Modelo | R_{RV}^2 | \bar{R}_{RV}^2 | AIC | BIC |
|--------|------------|------------------|---------|---------|
| M1 | 0.517 | 0.452 | -88.370 | -80.182 |
| M2 | 0.538 | 0.475 | -90.022 | -81.834 |

No entanto, o teste RESET para o modelo $M2$ ($\chi^2 = 4.193$, p -valor = 0.041) indica haver sinais de má especificação, assim como para o modelo com função de ligação logit, o que pode justificar a rejeição de tais modelos pelos testes J e MJ .

Por sua vez, a Figura 4.1 traz os gráficos normais de probabilidades para ambos os modelos, que não indicam haver fortes indícios contra nenhum dos modelos, já que, no geral, os resíduos permanecem dentro das bandas de confiança dos envelopes simulados. Dessa forma, o modelo com função de ligação Cauchy parece mais adequado a modelagem dos dados, ainda que a busca de um modelo que se ajuste melhor aos mesmos seja recomendada.

Por fim, testamos o modelo $M2$ contra o modelo

$$M3 : \tan[\pi(\mu_t - 0.5)] = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\sqrt{\phi_t} = \gamma_1 + \gamma_3 x_{t3}.$$

A Tabela 4.8 apresenta os resultados para tal teste, nos quais pode-se notar que a versão assintótica do teste J rejeita o modelo com função de ligação raiz quadrada ao nível de 10%, enquanto as versões bootstrap do mesmo não rejeitam tal modelo. Por sua vez, nenhuma versão do teste MJ rejeitou a hipótese nula de que o modelo correto se encontra entre os testados. Tal teste selecionou a partir das estatísticas J do modelo $M2$ ($J = 2.446$) e $M3$ ($J = 3.390$), o modelo $M2$ como correto.

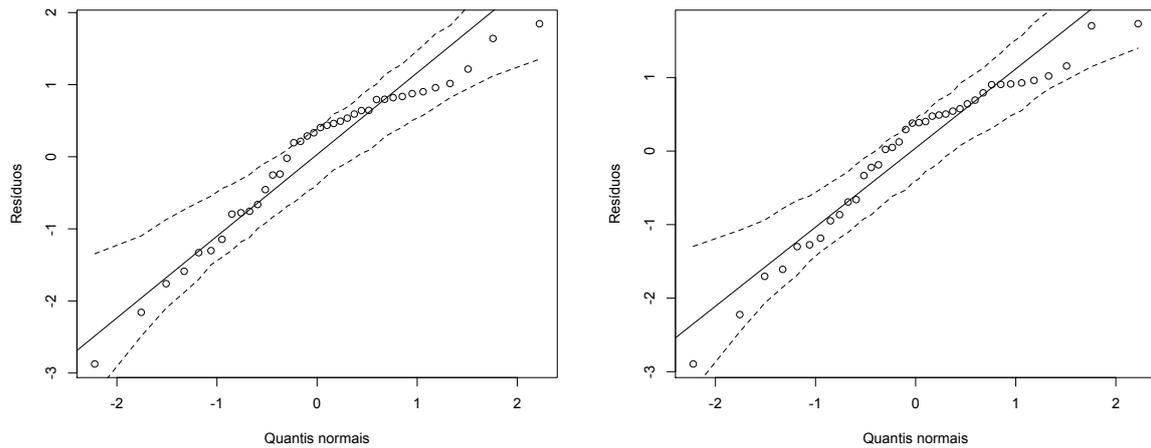


Figura 4.1: Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$, respectivamente, utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação.

Tabela 4.8: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados de gastos com alimentação.

| $M2$ vs. $M3$ | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|---------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| log vs. raiz | 0.118 | 0.188 | 0.170 | 0.066 | 0.121 | 0.134 | 0.118 | 0.161 | 0.158 |

A Tabela 4.9 apresenta as estimativas dos parâmetros e respectivos erros-padrão para o modelo $M2$.

Tabela 4.9: Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de gastos com alimentação.

| | β_1 | β_2 | β_3 | γ_1 | γ_2 |
|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Estimativa | -0.635 | -0.010 | 0.114 | 5.372 | -0.436 |
| Erro-padrão | 0.190 | 0.003 | 0.035 | 0.534 | 0.134 |

4.4.2 Aplicação 2: Oxidação da amônia

Analisado originalmente em Brownlee (1965, p.454), o conjunto de dados possui 21 observações referentes a 21 dias no processo de oxidação da amônia durante a produção de ácido nítrico. A variável resposta (y) é a proporção de perda na conversão de amônia

em ácido nítrico e as variáveis explicativas são a corrente de ar (x_2), a temperatura da água (x_3) e a concentração de ácido (x_4). Ferrari e Pinheiro (2011) utilizam o modelo de regressão beta dado por

$$M1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2},$$

para a modelagem dos dados. No entanto, de acordo com o teste RESET ($\chi^2 = 4.111$, p -valor = 0.043), tal modelo apresenta indícios de má especificação. Aqui, estamos interessados em avaliar se a troca da função de ligação escolhida pode melhorar o ajuste do modelo selecionado.

A Tabela 4.10 apresenta os p -valores para os testes realizados sobre tal modelo. Nota-se que o modelo com função de ligação Cauchy foi rejeitado em todos os cenários por todas as versões do teste J . Por sua vez, os modelos com função de ligação logit e log-log complementar só não foram rejeitados ao nível nominal de 10% pela versão assintótica do teste J quando testados contra o modelo com função de ligação Cauchy. No entanto, as versões bootstrap dos mesmos não os rejeitaram em nenhum cenário. Por exemplo, para o teste do modelo com função de ligação logit contra o modelo com função de ligação log-log, tivemos que o teste J associado ao modelo com função logit apresentou p -valor igual a 0.057 enquanto a versão bootstrap do mesmo apresentou p -valor 0.122. Nesse cenário, a utilização da versão BDR do teste J confirma a decisão tomada via a versão bootstrap usual e nos permite não rejeitar tal modelo com mais confiança, p -valor = 0.130. Além disso, nota-se que o modelo com função de ligação log-log foi o modelo selecionado pelo teste MJ em todos os cenários do qual fazia parte. Dessa forma, adotamos o modelo dado por

$$M2 : -\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2},$$

Dando continuidade aos estudos, testamos tal modelo contra o modelo com função de ligação raiz quadrada para o submodelo da precisão, dado por

$$M3 : -\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\sqrt{\phi} = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2}.$$

Tabela 4.10: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia.

| Modelos | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|----------------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| logit vs. log-log | 0.057 | 0.122 | 0.130 | 0.258 | 0.320 | 0.289 | 0.258 | 0.162 | 0.133 |
| logit vs. Cauchy | 0.246 | 0.318 | 0.290 | 0.00 | 0.001 | 0.001 | 0.246 | 0.317 | 0.289 |
| logit vs. clog log | 0.082 | 0.151 | 0.158 | 0.075 | 0.125 | 0.123 | 0.082 | 0.146 | 0.152 |
| log-log vs. Cauchy | 0.559 | 0.632 | 0.642 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.559 | 0.631 | 0.641 |
| log-log vs. clog log | 0.263 | 0.351 | 0.342 | 0.054 | 0.107 | 0.115 | 0.263 | 0.224 | 0.227 |
| clog log vs. Cauchy | 0.234 | 0.307 | 0.295 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.234 | 0.307 | 0.295 |

A Tabela 4.11 apresenta os p -valores obtidos para tal cenário. Nota-se que o modelo com função de ligação raiz quadrada para o submodelo da precisão foi rejeitado por todas as versões do teste J ao nível nominal de 5%. Dessa forma, seguimos com o modelo $M2$.

Tabela 4.11: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia.

| $M2$ vs. $M3$ | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|---------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| log vs. raiz | 0.105 | 0.204 | 0.226 | 0.010 | 0.023 | 0.015 | 0.105 | 0.156 | 0.176 |

Por sua vez, a Tabela 4.12 contém as estimativas dos parâmetros do modelo $M2$.

Tabela 4.12: Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de oxidação da amônia.

| | β_1 | β_2 | β_3 | γ_1 | γ_2 |
|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Estimativa | -2.451 | 0.013 | 0.012 | 19.695 | -0.192 |
| Erro-padrão | 0.063 | 0.001 | 0.003 | 2.077 | 0.034 |

Já a Tabela 4.13 apresenta uma comparação entre as medidas de qualidade de ajuste dos modelos $M1$ e $M2$, na qual pode-se notar que todos os critérios favorecem o modelo $M2$. Por fim, tando o teste RESET ($\chi^2 = 1.892$, p -valor = 0.169) quanto o gráfico normal de probabilidades (Figura 4.2) não indicam haver sinais de má especificação do modelo.

Tabela 4.13: Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de oxidação da amônia.

| Modelo | R_{RV}^2 | \bar{R}_{RV}^2 | AIC | BIC |
|--------|------------|------------------|----------|----------|
| $M1$ | 0.927 | 0.906 | -187.008 | -181.786 |
| $M2$ | 0.935 | 0.917 | -189.631 | -184.408 |

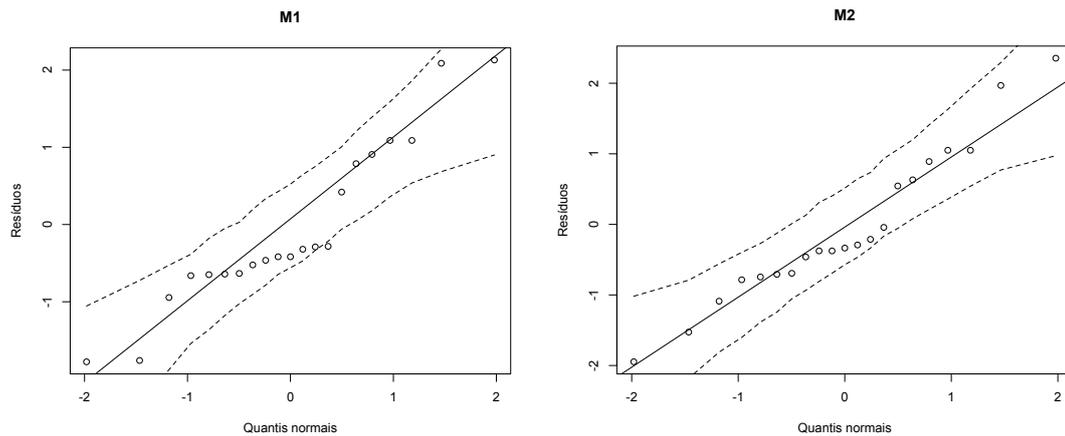


Figura 4.2: Gráficos dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para os modelos $M1$ e $M2$ utilizados na modelagem dos dados de oxidação da amônia.

4.4.3 Aplicação 3: Recém-nascidos com baixo peso

Na Seção 3.7.3, modelamos a proporção de recém-nascidos que nasceram com baixo peso nos estados e no distrito federal dos Estados Unidos, no ano de 2015, em relação a fatores mutáveis e de nascimentos prematuros. Aqui, temos interesse em avaliar se a troca da função de ligação escolhida pode melhorar o ajuste do modelo.

Nosso modelo base é dado por

$$M1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5.$$

A Tabela 4.14 apresenta os p -valores obtidos para os testes J , MJ e as versões bootstrap dos mesmos, considerando diferentes funções de ligação para o modelo $M1$. Os resultados dos testes indicam a não rejeição de todos os modelos via teste J e suas versões bootstrap. Dessa forma, selecionamos o modelo a partir do teste MJ . Aqui, o modelo com função de ligação log-log apresentou a menor estatística J em todos os cenários em que foi avaliado e, portanto, foi escolhido como o modelo correto.

Tabela 4.14: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso.

| | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|--------------------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| logit vs. \log -log | 0.788 | 0.809 | 0.822 | 0.913 | 0.911 | 0.886 | 0.912 | 0.837 | 0.818 |
| logit vs. Cauchy | 0.817 | 0.832 | 0.836 | 0.138 | 0.186 | 0.214 | 0.817 | 0.751 | 0.747 |
| logit vs. clog-log | 0.799 | 0.808 | 0.802 | 0.755 | 0.776 | 0.778 | 0.799 | 0.779 | 0.770 |
| \log -log vs. Cauchy | 0.899 | 0.883 | 0.864 | 0.132 | 0.176 | 0.210 | 0.899 | 0.858 | 0.835 |
| \log -log vs. clog-log | 0.911 | 0.916 | 0.901 | 0.746 | 0.765 | 0.767 | 0.911 | 0.833 | 0.809 |
| clog-log vs. Cauchy | 0.776 | 0.800 | 0.828 | 0.139 | 0.168 | 0.193 | 0.776 | 0.708 | 0.733 |

Dessa forma, nosso modelo $M2$ é dado por

$$M2 : -\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5.$$

A Tabela 4.15 apresenta as estimativas e respectivos erros-padrão para os parâmetros de tal modelo.

Tabela 4.15: Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso.

| | β_1 | β_2 | β_3 | β_4 | β_5 | ϕ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|
| Estimativa | -0.866 | 2.868 | -0.408 | 0.419 | -0.612 | 2639.9 |
| Erro-padrão | 0.095 | 0.260 | 0.128 | 0.156 | 0.151 | 522.8 |

Por sua vez, a Tabela 4.16 apresenta as medidas de qualidade de ajuste para os modelos $M1$ e $M2$, através das quais também selecionamos o modelo $M2$. Por fim, nem o teste RESET ($\chi^2 = 0.011$, p -valor = 0.917) nem o gráfico normal de probabilidades (Figura 4.3) indicam haver indícios de má especificação do modelo.

4.4.4 Aplicação 4: Fator de simultaneidade

Nesta seção, voltaremos a analisar os dados estudados por Zerbinatti (2008), sobre o fator de simultaneidade. Na Seção 3.7.1, vimos que o modelo que leva em consideração uma estrutura de regressão para a precisão se ajusta bem aos dados. Aqui, consideraremos tal

Tabela 4.16: Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados de recém-nascidos com baixo peso.

| Modelo | R_{RV}^2 | \bar{R}_{RV}^2 | AIC | BIC |
|--------|------------|------------------|----------|----------|
| M1 | 0.806 | 0.776 | -378.949 | -367.358 |
| M2 | 0.806 | 0.776 | -379.013 | -367.422 |

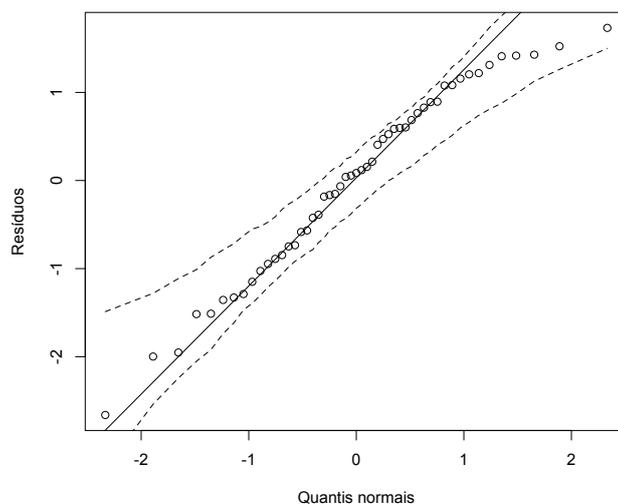


Figura 4.3: Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados de recém-nascidos com baixo peso.

modelo como modelo de base:

$$M1 : \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{t2}),$$

$$\log(\phi) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{t2}).$$

Usaremos os testes J e MJ e as versões bootstrap dos mesmos para avaliar se a troca das funções de ligação da média e precisão podem melhorar o ajuste do modelo.

A Tabela 4.17 apresenta os resultados dos teste realizados sobre o submodelo da média. Tais resultados indicam que apenas a função de ligação Cauchy não se ajusta bem aos dados, sendo rejeitada por todas as versões do teste J em todos os cenários avaliados. Por sua vez, entre as demais funções de ligação, a função log-log complementar foi a que apresentou melhor desempenho. Em todos os cenários envolvendo tal função, seu respectivo modelo não foi rejeitado por nenhuma das versões do teste J e foi selecionado

como modelo correto por todas as versões do teste MJ .

Tabela 4.17: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

| Modelos | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|----------------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| logit vs. log-log | 0.807 | 0.826 | 0.847 | 0.621 | 0.676 | 0.715 | 0.807 | 0.718 | 0.710 |
| logit vs. Cauchy | 0.685 | 0.718 | 0.713 | 0.003 | 0.010 | 0.009 | 0.685 | 0.709 | 0.708 |
| logit vs. clog log | 0.831 | 0.861 | 0.850 | 0.912 | 0.936 | 0.944 | 0.912 | 0.877 | 0.892 |
| log-log vs. Cauchy | 0.321 | 0.404 | 0.396 | 0.002 | 0.008 | 0.009 | 0.321 | 0.398 | 0.396 |
| log-log vs. clog log | 0.528 | 0.567 | 0.547 | 0.679 | 0.753 | 0.798 | 0.679 | 0.649 | 0.668 |
| clog log vs. Cauchy | 0.922 | 0.918 | 0.913 | 0.003 | 0.010 | 0.004 | 0.922 | 0.918 | 0.913 |

Sendo assim, adotamos o modelo

$$M2 : \log\{-\log(1 - \mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{t2}),$$

$$\log(\phi) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{t2}).$$

Dando continuidade aos estudos, testamos tal modelo contra o modelo com função de ligação raiz quadrada para o submodelo da precisão, dado por

$$M3 : \log\{-\log(1 - \mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{t2}),$$

$$\sqrt{\phi} = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{t2}).$$

A Tabela 4.18 apresenta os resultados para tal teste, nos quais podemos observar que todas as versões do teste J não rejeitaram nenhum dos dois modelos e que todas as versões do teste MJ não rejeitaram a hipótese de que o modelo correto se encontra entre os modelos testados. Dessa forma, como a estatística J associada ao modelo $M2$ ($J = 0.201$) foi menor do que a associada ao modelo $M3$ ($J = 0.514$), selecionamos o modelo $M2$ como modelo correto.

Tabela 4.18: p -valores dos testes J e MJ e de suas versões bootstrap e bootstrap duplo rápido para os modelos $M2$ e $M3$ utilizados na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

| $M2$ vs. $M3$ | $J1$ | $J1^*$ | $J1^{**}$ | $J2$ | $J2^*$ | $J2^{**}$ | MJ | MJ^* | MJ^{**} |
|---------------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|-----------|
| log vs. raiz | 0.654 | 0.726 | 0.708 | 0.473 | 0.613 | 0.607 | 0.654 | 0.682 | 0.677 |

Por sua vez, a Tabela 4.19 contém as estimativas dos parâmetros do modelo $M2$.

Tabela 4.19: Estimativas e erros-padrão para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

| | β_1 | β_2 | γ_1 | γ_2 |
|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
| Estimativa | -1.817 | -0.734 | 4.045 | 0.492 |
| Erro-padrão | 0.077 | 0.072 | 0.326 | 0.295 |

Já a Tabela 4.20 apresenta uma comparação entre as medidas de qualidade de ajuste dos modelos $M1$ e $M2$, na qual pode-se notar que todos os critérios favorecem o modelo $M2$. Por fim, tanto o teste RESET ($\chi^2 = 0.085$, p -valor = 0.771) quanto o gráfico normal de probabilidades (Figura 4.4) não indicam haver sinais de má especificação do modelo.

Tabela 4.20: Medidas de avaliação dos modelos selecionados para os dados do fator de simultaneidade.

| Modelo | R_{RV}^2 | \bar{R}_{RV}^2 | AIC | BIC |
|--------|------------|------------------|----------|----------|
| $M1$ | 0.743 | 0.722 | -172.043 | -165.093 |
| $M2$ | 0.743 | 0.723 | -172.127 | -165.176 |

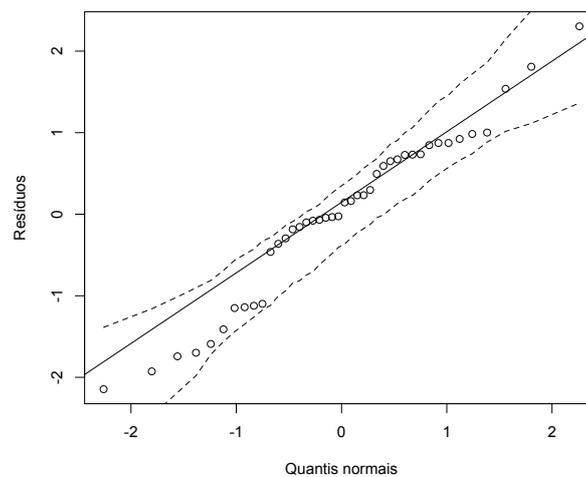


Figura 4.4: Gráfico dos resíduos ponderados padronizados 2 com envelopes simulados para o modelo $M2$ utilizado na modelagem dos dados do fator de simultaneidade.

4.5 Conclusões

Em regressão, após estimar os modelos de estudo, é comum realizar testes afim de avaliar se tais modelos são compatíveis com os dados observados. Quando esses modelos são não encaixados, ou seja, um modelo não pode ser obtido por meio de restrições lineares sobre os parâmetros que indexam os demais modelos, os testes J e MJ , propostos por Davidson e MacKinnon (1981) e Hagemann (2012), são as ferramentas comumente mais utilizadas. No que se trata de modelos de regressão beta, Cribari-Neto e Lucena (2015) adaptaram os testes J e MJ para tais modelos, além de apresentarem as versões bootstrap dos mesmos.

Neste capítulo, foi apresentada a versão bootstrap duplo rápido dos testes J e MJ para modelos de regressão beta, visando um desempenho mais preciso dos mesmos. Os desempenhos de tais testes foram avaliados em testes de hipóteses não encaixadas via simulações de Monte Carlo. Os resultados indicam desempenho mais próximo do esperado para as versões BDR dos testes na maior parte dos casos, principalmente para o teste MJ . Verificou-se ainda que o teste apresenta melhor desempenho em testes sobre o submodelo da média, onde se mostrou, de maneira geral, mais preciso que o teste baseado na versão bootstrap usual. Dessa forma, indicamos o uso da versão bootstrap duplo rápido dos testes J e MJ em pequenas amostras, já que o mesmo se mostrou capaz de melhorar o desempenho dos testes sem um alto custo computacional.

Capítulo 5

Intervalos de predição bootstrap

5.1 Introdução

A utilização de modelos de regressão ajustados para prever valores de uma variável resposta, associada a um novo conjunto de valores das covariadas de tais modelos, é uma prática comum na estatística. De fato, considere o modelo de regressão beta definido por

$$\begin{aligned}g(\mu_t) &= x_t^\top \beta = \eta_t \\h(\phi_t) &= z_t^\top \gamma = \delta_t,\end{aligned}\tag{5.1}$$

em que η_t e δ_t são preditores lineares, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^\top$ são vetores de parâmetros e $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções de ligação. Dado o conjunto de valores observados para as covariadas $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tk})^\top$ e suas respectivas respostas observadas y_t , pode-se obter a predição pontual do valor da variável resposta y_+ associada a um novo conjunto de valores para as covariadas $x_+ = (x_{+1}, \dots, x_{+k})^\top$ como

$$\hat{\mu}_+ = g^{-1} \left(\sum_{i=1}^k x_{+i} \hat{\beta}_i \right),$$

em que $\hat{\beta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de β computado utilizando-se a amostra original. No entanto, Zerbinatti (2008) mostra que modelos de regressão beta podem subestimar a resposta. Neste cenário, a obtenção de um intervalo de predição para a resposta, associado a um nível de confiança, mostra-se uma boa opção.

Em Davison e Hinkley (1997), os autores apresentam um algoritmo para a construção de intervalos de predição para modelos lineares generalizados baseados em um esquema de reamostragem bootstrap. Por sua vez, em Bai et al. (1990), Mojirsheibani e Tibshirani (1996) e Mojirsheibani (1998), os autores adaptam e avaliam os métodos propostos para a construção de intervalos de predição para o estimador de um parâmetro escalar, baseado em uma nova amostra. No que se refere a modelos de regressão beta, Espinheira et al. (2014) adaptam os métodos percentil e BC_a para essa classe de modelos. De maneira geral, considere a função $\mathcal{R}(y, \mu)$, monótona em y e que possui variância constante ao longo de todas as observações. Se μ_+ e a distribuição de $\mathcal{R}(y, \mu)$ são conhecidas e δ_α ($0 < \alpha < 1/2$) denota o α -ésimo quantil de tal distribuição, pode-se obter os limites de predição para um intervalo com nível nominal $1 - \alpha$ pelos valores $y_{+, \alpha/2}$ e $y_{+, 1-\alpha/2}$ que satisfazem $\mathcal{R}(y_{+, \alpha/2}, \mu_+) = \delta_{\alpha/2}$ e $\mathcal{R}(y_{+, 1-\alpha/2}, \mu_+) = \delta_{1-\alpha/2}$, respectivamente.

Sendo assim, o intervalo de predição pode ser calculado diretamente se μ é estimado por $\hat{\mu}$ independentemente de y_+ e os quantis de $\mathcal{R}(y_+, \hat{\mu})$ são conhecidos. No entanto, em geral, a distribuição de $\mathcal{R}(y_+, \hat{\mu})$ não é conhecida, levando-nos à utilização de esquemas de reamostragem bootstrap para estimar tal distribuição e determinar empiricamente os quantis desejados para construção de tal intervalo. Para tanto, Espinheira et al. (2014) consideram os métodos percentil e BC_a e avaliam os desempenhos dos mesmos via simulações de Monte Carlo, que indicaram que ambos os métodos funcionam bem tanto para modelos de regressão beta com precisão constante como para modelos de regressão beta com precisão variável.

Nesse capítulo, propomos a adaptação do método t -bootstrap para construção de intervalos de predição. Além disso, propomos versões do método percentil e t -bootstrap via bootstrap duplo e realizamos uma análise de como a má especificação do modelo impacta nos intervalos construídos. Para tanto, na Seção 5.2 são expostos os intervalos percentil e BC_a como apresentados em Espinheira et al. (2014). Já na Seção 5.3, propomos o intervalo de predição t -bootstrap para modelos de regressão beta. Por sua vez, a Seção 5.4 apresenta algoritmos para a construção de intervalos de predição percentil e t -bootstrap via bootstrap duplo. Na Seção 5.5 são realizadas simulações de Monte Carlo para avaliar o desempenho dos métodos supracitados. A Seção 5.6 traz aplicações a dados reais e, por fim, as conclusões são expostas na Seção 5.7.

5.2 Intervalos de predição

Considere o modelo de regressão beta com precisão variável dado na Equação (5.1), em que $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tk})^\top$ é um conjunto de valores observados para as covariadas e y_t suas respectivas respostas observadas. Nosso interesse reside na obtenção do intervalo de predição para o valor da variável resposta y_+ associada a um novo conjunto de valores para as covariadas $x_+ = (x_{+1}, \dots, x_{+k})^\top$.

Para tanto, considere o resíduo

$$\mathcal{R}(y, \hat{\mu}) = \frac{y_t^* - \hat{\mu}_t^*}{\sqrt{\hat{v}_t}}, \quad (5.2)$$

em que $\mathbb{E}(y_t^*) = \mu_t^*$ e $\text{var}(y_t^*) = v_t$, com $v_t = \psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t) \phi_t)$. Aqui,

$$y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\} \quad \text{e} \quad \mu_t^* = \psi(\mu_t \phi_t) - \psi((1 - \mu_t) \phi_t). \quad (5.3)$$

$\mathcal{R}(y, \hat{\mu})$ é uma função monótona em função de y com média nula e variância igual a 1 (Espinheira et al., 2008). Espinheira et al. (2014) sugerem, para o processo de reamostragem, a utilização do resíduo ponderado padronizado 2 (Ferrari et al., 2011) dado por

$$r_t = \frac{y_t^* - \hat{\mu}_t^*}{\sqrt{\hat{v}_t(1 - h_{tt}^*)}}, \quad (5.4)$$

com h_{tt}^* representando o t -ésimo elemento diagonal de

$$H^* = (\widehat{W}\widehat{V})^{1/2} X(X^\top \widehat{V}\widehat{W}X)^{-1} X^\top (\widehat{V}\widehat{W})^{1/2},$$

em que X é uma matriz $n \times k$ de covariadas, $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$ com $w_t = \phi_t v_t / \{g'(\mu_t)\}^2$ e $V = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$.

A partir da Equação (5.2), para y_+ , temos que

$$y_+^* = \hat{\mu}_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+).$$

Tal igualdade pode ser reescrita como

$$y_+ = \frac{\exp\{\hat{\mu}_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+)\}}{1 + \exp\{\hat{\mu}_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+)\}},$$

que nos fornece uma expressão de y_+ em função de $\mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+)$ e das estimativas $\hat{\mu}_+$ e \hat{v}_+ . Sendo assim, pode-se notar que a obtenção dos limites de predição para y_+ está diretamente ligada à obtenção dos quantis da distribuição de $\mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+)$. De fato, os

limites inferior e superior para um intervalo de predição com nível nominal $1 - \alpha$ para y_+ podem ser obtidos por

$$y_{+, \alpha/2} = \frac{\exp\{\mu_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}_{(\alpha/2)}(y_+, \hat{\mu}_+)\}}{1 + \exp\{\mu_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}_{(\alpha/2)}(y_+, \hat{\mu}_+)\}},$$

$$y_{+, 1-\alpha/2} = \frac{\exp\{\mu_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}_{(1-\alpha/2)}(y_+, \hat{\mu}_+)\}}{1 + \exp\{\mu_+^* + \sqrt{\hat{v}_+} \mathcal{R}_{(1-\alpha/2)}(y_+, \hat{\mu}_+)\}}.$$

Em Espinheira et al. (2014), os autores sugerem dois métodos para determinar os quantis da distribuição de $\mathcal{R}(y_+, \hat{\mu}_+)$: obtê-los estimando os quantis da distribuição via bootstrap pelo método percentil ou utilizando o método BC_a . Para o segundo caso, os autores adaptam o proposto por Mojirsheibani e Tibshirani (1996), que sugere um intervalo de predição para $\hat{\theta}_+$, estimador de um parâmetro escalar θ , baseado em uma nova amostra.

Tal método supõe a existência de uma função $h(\theta) = \rho$, monótona crescente, e constantes a e v_0 tais que $\hat{\rho} - \rho \sim \mathcal{N}(-v_0(1 + a\rho), (1 + a\rho)^2)$. Sob essas condições, Efron (1987) mostra que $\rho[\alpha] = \hat{\rho} + \sigma_{\hat{\rho}}\{v_0 + z_\alpha\}/\{1 - a(v_0 + z_\alpha)\}$, em que z_α é o α -ésimo quantil normal padrão e $\sigma_{\hat{\rho}} = 1 - a\hat{\rho}$. Usando a transformação inversa $h^{-1}(\cdot)$ podemos obter uma estimativa para α dada por

$$\tilde{\alpha} = \Phi\left(\hat{v}_0 + \frac{\hat{v}_0 + z_\alpha}{1 - \hat{a}(\hat{v}_0 + z_\alpha)}\right), \quad (5.5)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição normal padrão e a constante v_0 pode ser estimada como

$$\hat{v}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\hat{\theta}_b < \hat{\theta}}{B}\right),$$

$\hat{\theta}_b$ sendo a b -ésima estimativa bootstrap de θ e B denotando o número de réplicas bootstrap. Por sua vez, a constante a é bem aproximada em modelos uniparamétricos, de acordo com Efron (1987) e Davison e Hinkley (1997), pela expressão

$$a \approx \frac{1}{6} \frac{E[\dot{\ell}(\hat{\theta})^3]}{\text{var}[\dot{\ell}(\hat{\theta})]^{3/2}},$$

em que $\dot{\ell} = d \log f(y; \theta) / d\theta$. Em Espinheira et al. (2014), os autores sugerem a utilização da expressão

$$a \approx \frac{1}{6} \frac{E[\dot{\ell}_+^3]}{\text{var}[\dot{\ell}_+]^{3/2}},$$

com $\dot{\ell}_i = \phi_i(y_i^* - \mu_i^*)$, conseqüentemente $\dot{\ell}_+ = \phi_+(y_+^* - \mu_+^*)$, e um fator de correção multiplicativo dado por $(n/n_+)^{-1/2}$. Os autores indicam o cálculo analítico da mesma, com

$E[\dot{\ell}_t^3] = \varphi_t = \phi_t^3 \{\psi''(\mu_t \phi_t) - \psi''((1 - \mu_t)\phi_t)\}$ e $\text{var}[\dot{\ell}_t] = v_t = \phi_t^2 \{\psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t)\phi_t)\}$. Consequentemente, $E[\dot{\ell}_+^3] = \varphi_+$, $\text{var}[\dot{\ell}_+] = v_+$ e $\hat{a} = (1/6)\hat{\varphi}_+/\hat{v}_+^{3/2}$, em que $\hat{\varphi}_+ = \phi_+^3 \{\psi''(\hat{\mu}_+ \hat{\phi}_+) - \psi''((1 - \hat{\mu}_+)\hat{\phi}_+)\}$ e $v_+ = \hat{\phi}_+^2 \{\psi'(\hat{\mu}_+ \hat{\phi}_+) + \psi'((1 - \hat{\mu}_+)\hat{\phi}_+)\}$. Aqui,

$$\hat{\phi}_+ = h^{-1} \left(\sum_{j=1}^q z_{+j} \hat{\gamma}_j \right),$$

em que $\hat{\gamma}_j$ é o estimador de máxima verossimilhança de γ_j e z_{+j} é a j -ésima componente de $z_+ = (z_{+1}, z_{+2}, \dots, z_{+m})$. Por sua vez, para a constante \hat{v}_0 , os autores adaptam o proposto em Mojirsheibani e Tibshirani (1996) e indicam a utilização de

$$\hat{v}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#\mathcal{R}_{a_+,b} < \mathcal{R}_m}{B} \right),$$

em que \mathcal{R}_m é a mediana de $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$, computados a partir da amostra original pela Equação (5.2), e com $\mathcal{R}_{a_+,b}$ definido como no algoritmo a seguir. Se as réplicas bootstrap são indexadas por $b = 1, \dots, B$, o algoritmo a seguir fornece os passos para a construção do intervalo de predição bootstrap via método percentil e BC_a .

Algoritmo 5.2.1.

1. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b}$ de r_1, \dots, r_n , com reposição.
2. Construa uma amostra bootstrap (y_b, X, Z) , em que $y_b = (y_{1,b}, \dots, y_{n,b})^\top$, tal que

$$y_{t,b} = \frac{\exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}{1 + \exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_t, \hat{\mu}_t) = r_{t,b}$.

3. Encontre as estimativas bootstrap de β e ϕ , $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\phi}_b$, utilizando (y_b, X, Z) .
4. Utilizando a matriz de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\phi}_b$, obtenha $\hat{\mu}_{+,b}$, $\hat{\phi}_{+,b}$, $\hat{\mu}_{+,b}^*$ e $\hat{v}_{+,b}$, que são vetores n_+ -dimensionais.
5. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b}$ a partir r_1, \dots, r_n .

b) Obtenha

$$y_{a_+,b} = \frac{\exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}.$$

c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b}(y_{a_+,b}; \hat{\mu}_{a_+,b}^*) = \frac{y_{a_+,b}^* - \hat{\mu}_{a_+,b}^*}{\sqrt{\hat{v}_{a_+,b}}},$$

em que $y_{a_+,b}^* = \log\{y_{a_+,b}/(1 - y_{a_+,b})\}$. Para cada nova observação ordene os valores \mathcal{R}_{a_+} , tal que $\mathcal{R}_{a_+(1)} \leq \dots \leq \mathcal{R}_{a_+(B)}$. Compute os quantis percentis

$$\delta_{P_{(\alpha/2)}^{a_+}}^* = \mathcal{R}_{a_+(B(\alpha/2))} \quad \text{e} \quad \delta_{P_{(1-\alpha/2)}^{a_+}}^* = \mathcal{R}_{a_+(B(1-\alpha/2))},$$

e os quantis BC_a

$$\delta_{BC_a(\alpha/2)}^{*a_+} = \mathcal{R}_{a_+(B(\tilde{\alpha}/2))} \quad \text{e} \quad \delta_{BC_a(1-\alpha/2)}^{*a_+} = \mathcal{R}_{a_+(B(1-\tilde{\alpha}/2))},$$

em que $\tilde{\alpha}/2$ pode ser obtido como na Equação (5.5).

Por fim, obtenha os limites de predição do intervalo, percentil ($\delta_{a_+}^* = \delta_{P^{a_+}}^*$) ou BC_a ($\delta_{a_+}^* = \delta_{BC_a^{a_+}}^*$), utilizando

$$y_{a_+,I} = \frac{\exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{a_+(\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}{1 + \exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{a_+(\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}$$

$$y_{a_+,S} = \frac{\exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{a_+(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}{1 + \exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{a_+(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}.$$

Aqui, $\hat{\mu}_{a_+}^*$ e \hat{v}_{a_+} são as quantidades μ^* e v avaliadas em $\hat{\mu}_{a_+} = g^{-1}(x_{a_+}^\top \hat{\beta})$ e $\hat{\phi}_{a_+} = h^{-1}(z_{a_+}^\top \hat{\gamma})$, $x_{a_+}^\top$ e $z_{a_+}^\top$ sendo as a_+ -ésimas linhas de X_+ e Z_+ .

Em Bai et al. (1990), Mojirsheibani e Tibshirani (1996) e Mojirsheibani (1998), os autores adaptam e avaliam o intervalo de confiança t -bootstrap para construir intervalos de predição para um estimador de um parâmetro escalar, baseado em uma nova amostra. Segundo resultados de simulações, os autores concluem que tal método apresenta uma maior taxa de cobertura que os intervalos construídos via método percentil e BC_a , no entanto, tende também a apresentar uma maior amplitude média. Na próxima seção nosso interesse reside em adaptar e analisar o comportamento de tal intervalo no que se refere à predição do valor de uma variável resposta associada a uma nova observação em modelos de regressão beta.

5.3 Intervalo t-bootstrap

Considere uma amostra n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ oriunda de uma distribuição F com parâmetro θ e seja $\hat{\theta} = s(y)$ um estimador de θ . Em analogia com a estatística t de *Student*, defina

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}},$$

em que $\hat{\sigma}$ é o erro padrão de $\hat{\theta}$. Para construir o intervalo t -bootstrap para θ estima-se $\hat{\sigma}$ e a distribuição de T via bootstrap. Sendo assim, suponha que B amostras bootstrap y_b^* , $b = 1, \dots, B$, são geradas a partir de y . A estimativa do erro-padrão de $\hat{\theta}$ é calculada por

$$\hat{\sigma} = \left\{ (B-1)^{-1} \sum_{b=1}^B [\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

em que $\hat{\theta}_b^* = s(y_b^*)$ e

$$\hat{\theta}^*(\cdot) = B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^*.$$

Em seguida, para cada réplica bootstrap calcula-se

$$T_b^* = \frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}_b^*},$$

em que $\hat{\sigma}_b^*$ são as estimativas do erro-padrão de $\hat{\theta}_b^*$, no geral, obtidas via um segundo nível de reamostragem.

O intervalo de confiança para θ ao nível $1 - \alpha$ é dado por

$$(\hat{\theta} - t_{(1-\alpha/2)}^* \hat{\sigma}, \hat{\theta} + t_{(\alpha/2)}^* \hat{\sigma}),$$

em que $t_{(\alpha)}^*$ é o α -ésimo quantil da distribuição empírica de T_b^* .

5.3.1 Intervalo de predição t-bootstrap

Considere $Y_1, \dots, Y_n, Y_{+1}, \dots, Y_{+m}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e denote por $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ a amostra original e por $Y_+ = (Y_{+1}, \dots, Y_{+m})$ a amostra futura. Em Mojirsheibani e Tibshirani (1996), os autores constroem um intervalo de predição para \bar{Y}_+ , média dos Y_{+j} , $j = 1, \dots, m$ e, conseqüentemente, para uma única observação. Para tanto, eles utilizam a estatística

$$T = (\bar{Y}_+ - \bar{Y}) \left\{ (m^{-1} + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_n \right\}^{-1},$$

em que

$$\hat{\sigma}_n = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Os limites de predição para \bar{Y}_+ podem ser obtidos a partir de

$$\bar{Y}_{(\alpha)} = \bar{Y} + \hat{t}_{(\alpha)} \hat{\sigma}_n (m^{-1} + n^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

em que $\hat{t}_{(\alpha)}$ é o α -ésimo quantil da distribuição de

$$T^* = (\bar{Y}_+^* - \bar{Y}^*) \left\{ (m^{-1} + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_n^* \right\}^{-1}.$$

Aqui, \bar{Y}_+^* , \bar{Y}^* e $\hat{\sigma}_n^*$ são as versões bootstrap de \bar{Y}_+ , \bar{Y} e $\hat{\sigma}_n$, calculadas a partir Y_1^*, \dots, Y_n^* e $Y_{+1}^*, \dots, Y_{+m}^*$. Consequentemente, os autores chegam a um intervalo de predição para uma única observação, digamos Y_{+1} , como um caso específico do apresentado acima, utilizando

$$T = (Y_{+1} - \bar{Y}) \left\{ (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_n \right\}^{-1}.$$

Aqui, temos interesse em adaptar tal método para a criação de intervalos de predição para o valor de uma variável resposta associada a um novo conjunto de valores para as covariadas de um modelo de regressão beta. Considere

$$T = (\mathcal{R}_+ - \bar{\mathcal{R}}) \left\{ (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_n \right\}^{-1},$$

em que $\bar{\mathcal{R}}$ é a média dos $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$, que são computados a partir da amostra original pela Equação (5.2) e

$$\hat{\sigma}_n = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathcal{R}_i - \bar{\mathcal{R}})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

Se as réplicas bootstrap são indexadas por $b = 1, \dots, B$, o intervalo de predição t -bootstrap pode ser obtido como descrito no próximo algoritmo.

Algoritmo 5.3.1.

1. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b}$ de r_1, \dots, r_n , com reposição.
2. Construa uma amostra bootstrap (y_b, X, Z) , em que $y_b = (y_{1,b}, \dots, y_{n,b})^\top$, tal que

$$y_{t,b} = \frac{\exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}{1 + \exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_t, \hat{\mu}_t) = r_{t,b}$.

3. Encontre as estimativas bootstrap de β e ϕ , $\widehat{\beta}_b$ e $\widehat{\phi}_b$, utilizando (y_b, X, Z) .
4. Utilizando as matrizes de regressores originais, X e Z , juntamente com $\widehat{\beta}_b$ e $\widehat{\phi}_b$, obtenha $\widehat{\mu}_{t,b}$, $\widehat{\phi}_{t,b}$, $\widehat{\mu}_{t,b}^*$ e $\widehat{v}_{t,b}$. Utilizando as matrizes de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\widehat{\beta}_b$ e $\widehat{\phi}_b$, obtenha $\widehat{\mu}_{+,b}$, $\widehat{\phi}_{+,b}$, $\widehat{\mu}_{+,b}^*$, $\widehat{v}_{+,b}$, que são vetores n_+ -dimensionais.
5. Obtenha

$$\mathcal{R}_{t,b}(y_{t,b}, \widehat{\mu}_{t,b}) = \frac{y_{t,b}^* - \widehat{\mu}_{t,b}^*}{\sqrt{\widehat{v}_{t,b}}} \quad e \quad \widehat{\sigma}_b^* = \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n (\mathcal{R}_{t,b} - \overline{\mathcal{R}}_b)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

em que $\overline{\mathcal{R}}_b = n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{R}_{t,b}$.

6. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

- a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b}$ a partir r_1, \dots, r_n .
- b) Obtenha

$$y_{a_+,b} = \frac{\exp(\widehat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\widehat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\widehat{v}_{a_+}})}.$$

- c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b}(y_{a_+,b}, \widehat{\mu}_{a_+,b}) = \frac{y_{a_+,b}^* - \widehat{\mu}_{a_+,b}^*}{\sqrt{\widehat{v}_{a_+,b}}},$$

em que $y_{a_+,b}^* = \log\{y_{a_+,b}/(1 - y_{a_+,b})\}$.

- d) Calcule

$$T_{a_+,b} = (\mathcal{R}_{a_+,b} - \overline{\mathcal{R}}_b) \left\{ (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \widehat{\sigma}_b^* \right\}^{-1}$$

e para cada nova observação ordene os valores T_{a_+} , tal que $T_{a_+(1)} \leq \dots \leq T_{a_+(B)}$.

- e) Obtenha os quantis

$$\begin{aligned} \delta_{t(\alpha/2)}^* &= \overline{\mathcal{R}} + T_{a_+(B(\alpha/2))} \widehat{\sigma}_n (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \\ \delta_{t(1-\alpha/2)}^* &= \overline{\mathcal{R}} + T_{a_+(B(1-\alpha/2))} \widehat{\sigma}_n (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

em que $\widehat{\sigma}_n$ é calculado como na Equação (5.6).

Por fim, obtenha os limites de predição do intervalo t -bootstrap utilizando

$$y_{a+,I} = \frac{\exp\left(\widehat{\mu}_{a+}^* + \delta_{t(\alpha/2)}^* \sqrt{\widehat{v}_{a+}}\right)}{1 + \exp\left(\widehat{\mu}_{a+}^* + \delta_{t(\alpha/2)}^* \sqrt{\widehat{v}_{a+}}\right)}$$

$$y_{a+,S} = \frac{\exp\left(\widehat{\mu}_{a+}^* + \delta_{t(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\widehat{v}_{a+}}\right)}{1 + \exp\left(\widehat{\mu}_{a+}^* + \delta_{t(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\widehat{v}_{a+}}\right)}.$$

5.4 Intervalos de predição via bootstrap duplo

Ao se analisar os desempenhos de métodos de construção de intervalos de confiança é comum verificar que existe uma diferença entre o nível nominal de cobertura e a efetiva taxa de cobertura, o que representa um viés no método. Em Hall (1986), Beran (1987) e Hall e Martin (1988), os autores utilizam do bootstrap iterado para reduzir tal viés, obtendo resultados mais próximos do desejado do que através do bootstrap usual. Dessa forma, é natural esperar que intervalos de predição obtidos via bootstrap duplo também apresentem melhor desempenho que os obtidos via bootstrap usual. Nessa seção, focamos na apresentação de algoritmos para a construção de intervalos de predição via BD.

Considere o modelo de regressão beta com precisão variável dado na Equação (5.1), em que $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tk})^\top$ é um conjunto de valores observados para as covariadas e y_t suas respectivas respostas observadas. Seja $x_+ = (x_{+1}, \dots, x_{+k})^\top$ um conjunto de novos valores para as covariadas e y_+ a resposta associada a ele. Se as réplicas bootstrap de primeiro e segundo nível são indexadas por $b = 1, \dots, B$ e $d = 1, \dots, K$, respectivamente, a predição de n_+ valores via a versão bootstrap duplo do método percentil pode ser realizada através do algoritmo a seguir.

Algoritmo 5.4.1.

1. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b}$ de r_1, \dots, r_n , com reposição.
2. Construa uma amostra bootstrap (y_b, X, Z) , em que $y_b = (y_{1,b}, \dots, y_{n,b})^\top$, tal que

$$y_{t,b} = \frac{\exp(\widehat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\widehat{v}_t})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\widehat{v}_t})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_t, \widehat{\mu}_t) = r_{t,b}$.

3. Encontre as estimativas bootstrap de β e ϕ , $\widehat{\beta}_b$ e $\widehat{\phi}_b$, utilizando (y_b, X, Z) .

4. Utilizando a matriz de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\widehat{\beta}_b$ e $\widehat{\phi}_b$, obtenha $\widehat{\mu}_{+,b}$, $\widehat{\phi}_{+,b}$, $\widehat{\mu}_{+,b}^*$ e $\widehat{v}_{+,b}$, que são vetores n_+ -dimensionais.

5. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b}$ a partir r_1, \dots, r_n .

b) Obtenha

$$y_{a_+,b} = \frac{\exp(\widehat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b}\sqrt{\widehat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b}\sqrt{\widehat{v}_{a_+}})}.$$

c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b}(y_{a_+,b}, \widehat{\mu}_{a_+,b}) = \frac{y_{a_+,b}^* - \widehat{\mu}_{a_+,b}^*}{\sqrt{\widehat{v}_{a_+,b}}},$$

em que $y_{a_+,b}^* = \log\{y_{a_+,b}/(1 - y_{a_+,b})\}$.

6. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b,d}$ de $r_{1,b}, \dots, r_{n,b}$, com reposição, em que $r_{t,b}$ é a versão bootstrap de (5.4).

7. Construa uma amostra bootstrap de segundo nível $(y_{b,d}, X, Z)$, em que $y_{b,d} = (y_{1,b,d}, \dots, y_{n,b,d})^\top$, tal que

$$y_{t,b,d} = \frac{\exp(\widehat{\mu}_{t,b}^* + r_{t,b,d}\sqrt{\widehat{v}_{t,b}})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_{t,b}^* + r_{t,b,d}\sqrt{\widehat{v}_{t,b}})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_{t,b,d}, \widehat{\mu}_{t,b}) = r_{t,b,d}$.

8. Encontre as estimativas bootstrap duplo de β e ϕ , $\widehat{\beta}_{b,d}$ e $\widehat{\phi}_{b,d}$, utilizando $(y_{b,d}, X, Z)$.

9. Utilizando a matriz de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\widehat{\beta}_{b,d}$ e $\widehat{\phi}_{b,d}$, obtenha $\widehat{\mu}_{+,b,d}$, $\widehat{\phi}_{+,b,d}$, $\widehat{\mu}_{+,b,d}^*$ e $\widehat{v}_{+,b,d}$, que são vetores n_+ -dimensionais.

10. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b,d}$ a partir $r_{1,b}, \dots, r_{n,b}$.

b) Obtenha

$$y_{a_+,b,d} = \frac{\exp(\widehat{\mu}_{a_+,b}^* + r_{a_+,b,d}\sqrt{\widehat{v}_{a_+,b}})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_{a_+,b}^* + r_{a_+,b,d}\sqrt{\widehat{v}_{a_+,b}})}.$$

c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b,d}(y_{a_+,b,d}, \hat{\mu}_{a_+,b,d}^*) = \frac{y_{a_+,b,d}^* - \hat{\mu}_{a_+,b,d}^*}{\sqrt{\hat{v}_{a_+,b,d}}},$$

em que $y_{a_+,b,d}^* = \log\{y_{a_+,b,d}/(1 - y_{a_+,b,d})\}$.

d) Calcule

$$u_{a_+,b}^* = K^{-1} \sum_{d=1}^K I(\mathcal{R}_{a_+,b,d} \leq 2\mathcal{R}_{a_+,b} - \bar{\mathcal{R}})$$

e) Para cada nova observação ordene os valores $u_{a_+,b}^*$ e obtenha os quantis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$, denotados q_{inf} e q_{sup} , respectivamente.

f) Obtenha os quantis

$$\delta_{P_{(\alpha/2)}^{a_+}}^* = \mathcal{R}_{a_+}(q_{\text{inf}}) \quad \text{e} \quad \delta_{P_{(1-\alpha/2)}^{a_+}}^* = \mathcal{R}_{a_+}(q_{\text{sup}}).$$

Por fim, obtenha os limites de predição da versão bootstrap duplo do intervalo percentil utilizando

$$y_{a_+,I} = \frac{\exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{P_{(\alpha/2)}^{a_+}}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}{1 + \exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{P_{(\alpha/2)}^{a_+}}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}$$

$$y_{a_+,S} = \frac{\exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{P_{(1-\alpha/2)}^{a_+}}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}{1 + \exp\left(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{P_{(1-\alpha/2)}^{a_+}}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}}\right)}.$$

Por sua vez, uma versão via bootstrap duplo do intervalo de predição t -bootstrap para y_+ pode ser obtida através do próximo algoritmo.

Algoritmo 5.4.2.

1. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b}$ de r_1, \dots, r_n , com reposição.
2. Construa uma amostra bootstrap (y_b, X, Z) , em que $y_b = (y_{1,b}, \dots, y_{n,b})^\top$, tal que

$$y_{t,b} = \frac{\exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}{1 + \exp(\hat{\mu}_t^* + r_{t,b} \sqrt{\hat{v}_t})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_t, \hat{\mu}_t) = r_{t,b}$.

3. Encontre as estimativas bootstrap de β e ϕ , $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\phi}_b$, utilizando (y_b, X, Z) .

4. Utilizando as matrizes de regressores originais, X e Z , juntamente com $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\phi}_b$, obtenha $\hat{\mu}_{t,b}$, $\hat{\phi}_{t,b}$, $\hat{\mu}_{t,b}^*$ e $\hat{v}_{t,b}$. Utilizando as matrizes de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\phi}_b$, obtenha $\hat{\mu}_{+,b}$, $\hat{\phi}_{+,b}$, $\hat{\mu}_{+,b}^*$, $\hat{v}_{+,b}$, que são vetores n_+ -dimensionais.

5. Obtenha

$$\mathcal{R}_{t,b}(y_{t,b}, \hat{\mu}_{t,b}) = \frac{y_{t,b}^* - \hat{\mu}_{t,b}^*}{\sqrt{\hat{v}_{t,b}}} \text{ e } \hat{\sigma}_b^* = \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n (\mathcal{R}_{t,b} - \bar{\mathcal{R}}_b)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

em que $\bar{\mathcal{R}}_b = n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{R}_{t,b}$.

6. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b}$ a partir r_1, \dots, r_n .

b) Obtenha

$$y_{a_+,b} = \frac{\exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + r_{a_+,b} \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}.$$

c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b}(y_{a_+,b}, \hat{\mu}_{a_+,b}) = \frac{y_{a_+,b}^* - \hat{\mu}_{a_+,b}^*}{\sqrt{\hat{v}_{a_+,b}}},$$

em que $y_{a_+,b}^* = \log\{y_{a_+,b}/(1 - y_{a_+,b})\}$.

d) Calcule

$$T_{a_+,b} = (\mathcal{R}_{a_+,b} - \bar{\mathcal{R}}_b) \left\{ (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_b^* \right\}^{-1}.$$

7. Para $t = 1, \dots, n$ selecione aleatoriamente $r_{t,b,d}$ de $r_{1,b}, \dots, r_{n,b}$, com reposição.

8. Construa uma amostra bootstrap de segundo nível $(y_{b,d}, X, Z)$, em que $y_{b,d} = (y_{1,b,d}, \dots, y_{n,b,d})^\top$, tal que

$$y_{t,b,d} = \frac{\exp(\hat{\mu}_{t,b}^* + r_{t,b,d} \sqrt{\hat{v}_{t,b}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{t,b}^* + r_{t,b,d} \sqrt{\hat{v}_{t,b}})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_{t,b,d}, \hat{\mu}_{t,b}) = r_{t,b,d}$.

9. Encontre as estimativas bootstrap duplo de β e ϕ , $\hat{\beta}_{b,d}$ e $\hat{\phi}_{b,d}$, utilizando $(y_{b,d}, X, Z)$.

10. Utilizando a matriz de novos regressores, X_+ e Z_+ , juntamente com $\hat{\beta}_{b,d}$ e $\hat{\phi}_{b,d}$, obtenha $\hat{\mu}_{+,b,d}$, $\hat{\phi}_{+,b,d}$, $\hat{\mu}_{+,b,d}^*$ e $\hat{v}_{+,b,d}$, que são vetores n_+ -dimensionais.

11. Obtenha

$$\mathcal{R}_{t,b,d}(y_{t,b,d}, \hat{\mu}_{t,b,d}^*) = \frac{y_{t,b,d}^* - \hat{\mu}_{t,b,d}^*}{\sqrt{\hat{v}_{t,b,d}}} \quad e \quad \hat{\sigma}_{b,d}^* = \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n (\mathcal{R}_{t,b,d} - \bar{\mathcal{R}}_{b,d})^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

em que $\bar{\mathcal{R}}_{b,d} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathcal{R}_{t,b,d}$.

12. Para cada nova observação $a_+ = 1, \dots, n_+$:

a) Selecione aleatoriamente $r_{a_+,b,d}$ a partir $r_{1,b}, \dots, r_{n,b}$.

b) Obtenha

$$y_{a_+,b,d} = \frac{\exp(\hat{\mu}_{a_+,b}^* + r_{a_+,b,d} \sqrt{\hat{v}_{a_+,b}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{a_+,b}^* + r_{a_+,b,d} \sqrt{\hat{v}_{a_+,b}})}.$$

c) Calcule o erro de predição

$$\mathcal{R}_{a_+,b,d}(y_{a_+,b,d}, \hat{\mu}_{a_+,b,d}^*) = \frac{y_{a_+,b,d}^* - \hat{\mu}_{a_+,b,d}^*}{\sqrt{\hat{v}_{a_+,b,d}}},$$

em que $y_{a_+,b,d}^* = \log\{y_{a_+,b,d}/(1 - y_{a_+,b,d})\}$.

d) Calcule

$$T_{a_+,b,d} = (\mathcal{R}_{a_+,b,d} - \bar{\mathcal{R}}_{b,d}) \left\{ (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}_{b,d}^* \right\}^{-1}.$$

e) Calcule

$$z_{a_+,b} = K^{-1} \sum_{d=1}^K I(T_{a_+,b,d} \leq T_{a_+,b}).$$

f) Para cada nova observação ordene os valores $z_{a_+,b}$ e obtenha os quantis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$, denotados q_{inf} e q_{sup} , respectivamente.

g) Obtenha os quantis

$$\begin{aligned} \delta_{t(\alpha/2)}^* &= \bar{\mathcal{R}} + T_{a_+(q_{\text{inf}})} \hat{\sigma}_n (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}} \\ \delta_{t(1-\alpha/2)}^* &= \bar{\mathcal{R}} + T_{a_+(q_{\text{sup}})} \hat{\sigma}_n (1 + n^{-1})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

em que $\hat{\sigma}_n$ é calculado como na Equação (5.6).

Por fim, obtenha os limites de predição da versão bootstrap duplo do intervalo t -bootstrap utilizando

$$\begin{aligned} y_{a_+,I} &= \frac{\exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{t(\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{t(\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}})} \\ y_{a_+,S} &= \frac{\exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{t(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}{1 + \exp(\hat{\mu}_{a_+}^* + \delta_{t(1-\alpha/2)}^* \sqrt{\hat{v}_{a_+}})}. \end{aligned}$$

Booth e Hall (1994) verificam que, quando se trata de intervalos de confiança, uma escolha muito pequena ou muito grande para o número de réplicas bootstrap de segundo nível diminui a acurácia do procedimento. Sendo assim, os autores consideram um estimador para os limites do intervalo de confiança com nível exatamente igual a $(1 - \alpha)$ e verificam que o erro quadrático médio assintótico é proporcional a

$$M(B, K) = \alpha \left(\frac{5}{4} - \alpha \right) B^{-1} + (1 - \alpha)^2 K^{-2},$$

em que B e K representam o número de réplicas bootstrap de primeiro e segundo nível, respectivamente. Minimizando $M(B, K)$ impondo a condição $BK = L$ obtém-se $B = \omega L^{2/3}$ e $K = \omega^{-1} L^{1/3}$, em que $\omega = \{(1/2)(1 - \alpha)^{-2} \alpha (5/4 - \alpha)\}^{1/3}$. Os autores ainda ressaltam que, para uma maior acurácia, o produto BK deve ser maior ou igual a n^3 , em que n representa o tamanho amostral.

5.5 Simulações

Nesta seção são apresentados resultados de simulações de Monte Carlo realizadas para avaliar os desempenhos dos métodos de construção de intervalos de predição expostos nesse capítulo. Para tanto, foram considerados três tamanhos amostrais, $n = 40, 80, 120$, para a construção dos intervalos de predição associados a uma nova resposta. Foram avaliados os casos em que $\mu \in (0.02, 0.08)$, $\mu \in (0.20, 0.80)$ e $\mu \in (0.95, 0.98)$. O número de réplicas de Monte Carlo foi 5000 enquanto o número de réplicas bootstrap foi 500. Por sua vez, o nível nominal adotado foi $\alpha = 5\%$.

Inicialmente foi considerado o modelo de regressão beta com precisão constante dado por

$$\log \left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t} \right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}, \quad (5.7)$$

em que os valores das variáveis explicativas x_{ti} foram obtidos aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$ e $\phi = 20, 50, 100$.

Os resultados apresentados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 indicam que os três métodos têm desempenhos competitivos, com o método t -bootstrap apresentando taxas de cobertura mais próximas do esperado, ou seja, mais próximas do nível de confiança adotado, na maior parte dos casos. Por exemplo, na Tabela 5.1 quando $n = 120$ e $\mu \in (0.020, 0.080)$, temos que a taxa de cobertura (amplitude média) do intervalo de predição t -bootstrap foi

95.1% (0.1571) enquanto as dos intervalos percentil e BC_a foram 94.5% (0.1459) e 94.4% (0.1387), respectivamente. No entanto, vale notar que o intervalo t -bootstrap apresenta também amplitude média levemente superior a dos demais intervalos avaliados. Nota-se ainda que à medida que o valor de ϕ aumenta, a amplitude média dos intervalos caem. Adicionalmente, as taxas de não-cobertura para todos os intervalos avaliados mostram-se equilibradas.

Tabela 5.1: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 20$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|----------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.4 | 93.9 | 94.5 | 0.1570 | 0.1482 | 0.1459 | 4.1 | 4.0 | 3.1 | 2.5 | 2.1 | 2.4 |
| BC_a | 93.5 | 94.0 | 94.4 | 0.1437 | 0.1396 | 0.1387 | 3.5 | 3.4 | 2.8 | 3.0 | 2.6 | 2.8 |
| t -bootstrap | 94.2 | 94.7 | 95.1 | 0.1763 | 0.1613 | 0.1571 | 4.0 | 3.7 | 3.0 | 1.8 | 1.6 | 1.9 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.5 | 94.2 | 94.6 | 0.4294 | 0.4236 | 0.4201 | 3.5 | 2.7 | 3.1 | 3.0 | 3.1 | 2.3 |
| BC_a | 93.4 | 94.2 | 94.4 | 0.4286 | 0.4236 | 0.4197 | 3.5 | 2.7 | 3.2 | 3.1 | 3.1 | 2.4 |
| t -bootstrap | 93.6 | 94.2 | 94.7 | 0.4308 | 0.4252 | 0.4216 | 3.4 | 2.7 | 3.1 | 3.0 | 3.1 | 2.2 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.3 | 93.4 | 93.7 | 0.1483 | 0.1412 | 0.1389 | 3.4 | 3.0 | 3.3 | 3.3 | 3.6 | 3.0 |
| BC_a | 93.1 | 93.2 | 93.3 | 0.1384 | 0.1342 | 0.1334 | 3.9 | 3.7 | 3.8 | 3.0 | 3.1 | 2.9 |
| t -bootstrap | 94.3 | 94.0 | 94.2 | 0.1619 | 0.1496 | 0.1456 | 2.6 | 2.5 | 3.0 | 3.1 | 3.5 | 2.8 |

Dando continuidade às simulações, decidimos considerar uma estrutura de regressão para o parâmetro de precisão. Dessa forma, adotamos o modelo com precisão variável com função de ligação logit para o submodelo da média e logarítmica para o submodelo da precisão,

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}, \tag{5.8}$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}.$$

Os valores das variáveis explicativas $x_{ti} = z_{tj}$ foram obtidos aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$ e os graus de heterogeneidade da dispersão ($\lambda = \phi_{\max}/\phi_{\min}$) considerados foram $\lambda = 20, 50, 100$.

Tabela 5.2: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 50$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.8 | 94.5 | 94.0 | 0.0977 | 0.0937 | 0.0930 | 3.6 | 2.9 | 3.4 | 2.6 | 2.6 | 2.6 |
| BC _a | 93.7 | 94.2 | 93.8 | 0.0938 | 0.0909 | 0.0908 | 3.2 | 2.8 | 3.3 | 3.1 | 3.0 | 2.9 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.0 | 94.7 | 94.4 | 0.1008 | 0.0957 | 0.0947 | 3.5 | 2.9 | 3.3 | 2.5 | 2.4 | 2.3 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.5 | 93.5 | 94.1 | 0.2821 | 0.2756 | 0.2734 | 3.3 | 3.5 | 3.3 | 3.2 | 3.0 | 2.6 |
| BC _a | 93.5 | 93.2 | 94.0 | 0.2816 | 0.2757 | 0.2735 | 3.4 | 3.7 | 3.2 | 3.1 | 3.1 | 2.8 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.7 | 93.5 | 94.1 | 0.2825 | 0.2761 | 0.2739 | 3.2 | 3.5 | 3.3 | 3.1 | 3.0 | 2.6 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.9 | 93.8 | 94.5 | 0.0991 | 0.0954 | 0.0945 | 3.0 | 3.2 | 3.0 | 3.1 | 3.0 | 2.5 |
| BC _a | 93.5 | 93.5 | 94.3 | 0.0956 | 0.0932 | 0.0926 | 3.5 | 3.6 | 3.3 | 3.0 | 2.9 | 2.4 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.4 | 94.1 | 94.6 | 0.1016 | 0.0970 | 0.0956 | 2.6 | 3.0 | 2.9 | 3.0 | 2.9 | 2.5 |

Tabela 5.3: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão constante, $\phi = 100$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.4 | 94.1 | 94.7 | 0.0690 | 0.0669 | 0.0664 | 3.2 | 3.0 | 2.9 | 3.4 | 2.9 | 2.4 |
| BC _a | 93.3 | 93.7 | 94.6 | 0.0674 | 0.0660 | 0.0656 | 3.0 | 3.0 | 2.8 | 3.7 | 3.3 | 2.6 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.6 | 94.1 | 94.8 | 0.0699 | 0.0674 | 0.0669 | 3.2 | 3.0 | 2.9 | 3.2 | 2.9 | 2.3 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.0 | 93.9 | 94.0 | 0.2002 | 0.1961 | 0.1951 | 3.7 | 3.2 | 2.9 | 3.3 | 2.9 | 3.1 |
| BC _a | 93.1 | 93.9 | 93.8 | 0.1999 | 0.1961 | 0.1951 | 3.8 | 3.1 | 3.0 | 3.1 | 3.0 | 3.2 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.1 | 93.9 | 94.1 | 0.2003 | 0.1962 | 0.1953 | 3.7 | 3.2 | 2.8 | 3.2 | 2.9 | 3.1 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.9 | 94.3 | 94.3 | 0.0718 | 0.0700 | 0.0690 | 2.5 | 2.9 | 2.8 | 3.6 | 2.8 | 2.9 |
| BC _a | 93.6 | 94.1 | 94.1 | 0.0705 | 0.0691 | 0.0684 | 2.8 | 3.1 | 3.0 | 3.6 | 2.8 | 2.9 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.0 | 94.4 | 94.4 | 0.0725 | 0.0704 | 0.0694 | 2.4 | 2.8 | 2.7 | 3.6 | 2.8 | 2.9 |

Os resultados apresentados nas Tabela 5.4, 5.5 e 5.6 indicam que os três intervalos analisados apresentam bom comportamento, com o t -bootstrap apresentando taxas de cobertura mais próximas do desejado na maior parte dos casos.

Na Tabela 5.6, quando $\mu \in (0.95, 0.98)$ e $n = 80$, por exemplo, temos que o intervalo t -bootstrap apresentou taxa de cobertura (amplitude média) de 94.7% (0.0373) contra 94.5% (0.0369) e 94.3% (0.0370) dos intervalos percentil e BC_a , respectivamente. Adicionalmente, nota-se que as taxas de não-cobertura para todos os intervalos avaliados mostram-se equilibradas.

Tabela 5.4: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 20$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|----------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.6 | 94.0 | 94.0 | 0.0725 | 0.0705 | 0.0700 | 3.5 | 3.1 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 3.1 |
| BC_a | 93.5 | 93.6 | 93.8 | 0.0714 | 0.0698 | 0.0694 | 3.3 | 3.1 | 2.9 | 3.2 | 3.3 | 3.3 |
| t -bootstrap | 93.6 | 94.3 | 94.3 | 0.0734 | 0.0713 | 0.0707 | 3.5 | 3.0 | 2.9 | 2.9 | 2.7 | 2.8 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.8 | 94.2 | 94.2 | 0.2136 | 0.2101 | 0.2088 | 3.0 | 3.0 | 3.2 | 3.2 | 2.8 | 2.6 |
| BC_a | 93.6 | 94.3 | 94.1 | 0.2131 | 0.2100 | 0.2087 | 3.1 | 2.9 | 3.1 | 3.3 | 2.8 | 2.8 |
| t -bootstrap | 94.0 | 94.4 | 94.2 | 0.2140 | 0.2105 | 0.2092 | 2.9 | 2.9 | 3.2 | 3.1 | 2.7 | 2.6 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.0 | 93.3 | 94.0 | 0.0740 | 0.0713 | 0.0705 | 4.1 | 3.7 | 3.6 | 2.9 | 3.0 | 2.4 |
| BC_a | 92.7 | 92.9 | 93.9 | 0.0744 | 0.0719 | 0.0714 | 4.2 | 3.7 | 3.6 | 3.1 | 3.4 | 2.5 |
| t -bootstrap | 93.4 | 93.7 | 94.5 | 0.0756 | 0.0729 | 0.0721 | 3.8 | 3.4 | 3.3 | 2.8 | 2.9 | 2.2 |

Dando continuidade às simulações, decidimos analisar a melhora apresentada quando os intervalos percentil e t -bootstrap são construídos via bootstrap duplo. Para tanto, consideramos o modelo dado em (5.8), com $\mu \in (0.50, 0.96)$ e $\lambda = 100$, 500 réplicas bootstrap de primeiro nível e 125 réplicas de segundo nível. A Tabela 5.7 apresenta os resultados para tal simulação em que, como esperado, pode-se notar que as versões baseadas no bootstrap duplo apresentaram, na maior parte dos casos, uma maior taxa de cobertura tanto para o método percentil quanto para o método t -bootstrap. No entanto, apresentam também maiores amplitudes médias.

Tabela 5.5: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 50$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.7 | 94.5 | 94.8 | 0.0245 | 0.0240 | 0.0350 | 3.2 | 2.7 | 2.6 | 3.1 | 2.8 | 2.6 |
| BC _a | 93.7 | 94.5 | 94.5 | 0.0245 | 0.0239 | 0.0349 | 3.1 | 2.6 | 2.7 | 3.2 | 2.9 | 2.8 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.8 | 94.5 | 94.8 | 0.0246 | 0.0241 | 0.0351 | 3.1 | 2.8 | 2.6 | 3.1 | 2.7 | 2.6 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.2 | 94.1 | 94.6 | 0.0714 | 0.0705 | 0.1030 | 3.5 | 2.9 | 2.8 | 3.3 | 3.0 | 2.6 |
| BC _a | 92.9 | 93.8 | 94.5 | 0.0711 | 0.0705 | 0.1030 | 3.6 | 3.1 | 3.0 | 3.5 | 3.1 | 2.5 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.3 | 94.1 | 94.7 | 0.0714 | 0.0705 | 0.1031 | 3.4 | 2.9 | 2.7 | 3.3 | 3.0 | 2.6 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 93.2 | 94.2 | 93.7 | 0.0257 | 0.0254 | 0.0365 | 3.8 | 2.8 | 3.4 | 3.0 | 3.0 | 2.9 |
| BC _a | 93.0 | 94.2 | 93.7 | 0.0257 | 0.0254 | 0.0366 | 3.8 | 2.8 | 3.3 | 3.2 | 3.0 | 3.0 |
| <i>t</i> -bootstrap | 93.3 | 94.3 | 93.9 | 0.0259 | 0.0255 | 0.0369 | 3.8 | 2.7 | 3.3 | 2.9 | 3.0 | 2.8 |

Tabela 5.6: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável e $\lambda = 100$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.1 | 94.1 | 94.9 | 0.0361 | 0.0353 | 0.0239 | 3.0 | 3.2 | 2.6 | 2.9 | 2.7 | 2.5 |
| BC _a | 94.0 | 94.0 | 94.9 | 0.0359 | 0.0352 | 0.0238 | 2.9 | 3.0 | 2.6 | 3.1 | 3.0 | 2.6 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.2 | 94.2 | 95.0 | 0.0362 | 0.0354 | 0.0239 | 3.0 | 3.0 | 2.5 | 2.8 | 2.8 | 2.5 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.1 | 94.1 | 94.6 | 0.1054 | 0.1037 | 0.0700 | 3.0 | 3.1 | 2.7 | 2.9 | 2.8 | 2.7 |
| BC _a | 93.8 | 93.9 | 94.1 | 0.1052 | 0.1037 | 0.0700 | 3.1 | 3.3 | 2.8 | 3.1 | 2.8 | 3.1 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.1 | 94.1 | 94.6 | 0.1055 | 0.1038 | 0.0700 | 3.0 | 3.1 | 2.7 | 2.9 | 2.8 | 2.7 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 92.7 | 94.5 | 94.3 | 0.0377 | 0.0369 | 0.0251 | 3.9 | 3.1 | 2.9 | 3.4 | 2.4 | 2.8 |
| BC _a | 92.5 | 94.3 | 94.2 | 0.0377 | 0.0370 | 0.0251 | 4.0 | 3.1 | 3.0 | 3.5 | 2.6 | 2.8 |
| <i>t</i> -bootstrap | 92.8 | 94.7 | 94.5 | 0.0380 | 0.0373 | 0.0253 | 3.9 | 3.0 | 2.7 | 3.4 | 2.3 | 2.8 |

Tabela 5.7: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias para os intervalos de predição construídos via bootstrap duplo para o modelo com precisão variável, com $\lambda = 100$.

| $\mu \in (0.50, 0.96)$ | Não-cobertura (%) | | | | | | | | | | | |
|------------------------|-------------------|------|------|-----------------|--------|--------|------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| | 20 | 40 | 80 | 20 | 40 | 80 | 20 | 40 | 80 | 20 | 40 | 80 |
| n | | | | | | | | | | | | |
| Percentil | 92.1 | 93.8 | 93.8 | 0.1045 | 0.1003 | 0.0973 | 3.9 | 3.2 | 3.4 | 4.0 | 3.0 | 2.8 |
| Percentil BD | 98.3 | 98.8 | 98.8 | 0.1681 | 0.1439 | 0.1400 | 0.9 | 0.5 | 0.7 | 0.8 | 0.7 | 0.5 |
| t -bootstrap | 92.4 | 93.7 | 94.1 | 0.1048 | 0.1008 | 0.0978 | 3.6 | 3.3 | 3.3 | 4.0 | 3.0 | 2.6 |
| t -bootstrap BD | 92.1 | 94.1 | 94.5 | 0.1145 | 0.1062 | 0.1018 | 3.7 | 3.3 | 2.9 | 4.2 | 2.6 | 2.6 |

De fato, esse é um forte ponto negativo contra os intervalos de predição construídos via bootstrap duplo, principalmente para o intervalo percentil BD, que apresentou aumento considerável na amplitude média em todos os casos avaliados. Por sua vez, a versão do intervalo t -bootstrap baseada no BD apresentou, de modo geral, um melhor desempenho, já que na maior parte dos casos conseguiu aumentar a taxa de cobertura da versão usual sem um aumento considerável na amplitude média. Outro forte ponto negativo contra a construção de intervalos baseados no BD é seu alto custo computacional; aqui, tais simulações duraram em média 75 horas cada, enquanto as baseadas apenas no método bootstrap usual duraram em média 12 horas cada.

5.5.1 Simulações warp-speed

Dando continuidade aos estudos de simulação foi utilizado o método de simulação *warp-speed*. Para tanto, adaptamos o método proposto por Giacomini et al. (2013) para a utilização do mesmo na construção de intervalos de predição. As simulações desta seção foram realizadas através do algoritmo a seguir.

Algoritmo 5.5.1.

1. Gere K amostras n -dimensionais $y_{t,k}$. Seja y_{a_+} as repostas para as quais se deseja construir um intervalo de predição, $a_+ = 1, \dots, n_+$.
2. Para cada $k = 1, \dots, K$ selecione aleatoriamente $r_{t,k}^*$, $t = 1, \dots, n$, a partir de $r_{1,k}, \dots, r_{n,k}$, com reposição, em que $r_{t,k}$ é calculado pela Equação (5.4) a partir de $y_{t,k}$.

3. Para cada $k = 1, \dots, K$ construa uma amostra bootstrap $(y_{t,k}^\dagger, X, Z)$, tal que

$$y_{t,k}^\dagger = \frac{\exp(\widehat{\mu}_{t,k}^* + r_{t,k}^* \sqrt{\widehat{v}_{t,k}})}{1 + \exp(\widehat{\mu}_{t,k}^* + r_{t,k}^* \sqrt{\widehat{v}_{t,k}})}$$

é obtido como solução de $\mathcal{R}(y_{t,k}^\dagger, \widehat{\mu}_{t,k}) = r_{t,k}^*$.

4. Para cada y_k , $k = 1, \dots, K$, construa um intervalo de predição como descrito no Algoritmo 5.2.1 ou no Algoritmo 5.3.1 utilizando a amostra $y_{t,k}$ e as K pseudo-amostras $y_{t,k}^\dagger$. Dessa forma, para cada $a_+ = 1, \dots, n_+$, obtém-se uma sequência de K intervalos de predição dada por

$$IP_{a_+,k} = [YI_{a_+,k}, YS_{a_+,k}].$$

5. Calcule a taxa de cobertura associada ao intervalo:

$$TC = (n_+ \cdot K)^{-1} \sum_{a_+=1}^{n_+} \sum_{k=1}^K I(YI_{a_+,k} \leq y_{a_+,k} \leq YS_{a_+,k}).$$

Giacomini et al. (2013) ressalta que melhores resultados são alcançados quando o número de réplicas de Monte Carlo, K , e de observações, n , são grandes. Além disso, o autor verifica, através de simulações de Monte Carlo para intervalos de confiança, que o método apresenta uma convergência mais rápida ao nível de confiança adotado.

Nesta seção, inicialmente, replicaremos alguns cenários avaliados na seção anterior com intuito de comparar os resultados obtidos pela simulação *warp-speed* e a simulação de Monte Carlo usual. Para tanto, foram considerados três tamanhos amostrais, $n = 40, 80, 120$, $\mu \in (0.02, 0.08)$, $\mu \in (0.20, 0.80)$, $\mu \in (0.95, 0.98)$, $\lambda = 100$ e 10000 réplicas de Monte Carlo. O modelo adotado é dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2},$$

em que os valores das variáveis explicativas $x_{ti} = z_{tj}$ foram obtidos aleatoriamente da distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}(0, 1)$.

A Tabela 5.8 apresenta os resultados para tais simulações, os quais mostram um desempenho próximo ao esperado do método *warp-speed*. Em comparação com os resultados obtidos no mesmo cenário via o método de simulação de Monte Carlo usual (Tabela 5.6), nota-se que, como esperado, aqui há uma convergência mais rápida das

taxas de cobertura para o nível de confiança adotado. No entanto, de modo geral, os desempenhos dos intervalos permanecem os mesmos, com os intervalos *t*-bootstrap apresentando as maiores taxas de cobertura na maior parte dos casos. Além disso, as taxas de não-coberturas mantiveram o equilíbrio. Sendo assim, utilizamos o método *warp-speed* para a realização de simulações adicionais.

Tabela 5.8: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método *warp-speed* para o modelo com precisão variável, com $\lambda = 100$.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.7 | 94.9 | 94.8 | 0.0249 | 0.0242 | 0.0241 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.8 | 2.6 | 2.7 |
| BC _a | 94.3 | 94.8 | 94.7 | 0.0250 | 0.0241 | 0.0242 | 2.8 | 2.6 | 2.6 | 2.9 | 2.6 | 2.7 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.9 | 95.0 | 94.9 | 0.0251 | 0.0242 | 0.0242 | 2.4 | 2.4 | 2.5 | 2.7 | 2.6 | 2.6 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.4 | 94.7 | 95.3 | 0.0713 | 0.0705 | 0.0710 | 2.7 | 2.5 | 2.5 | 2.9 | 2.8 | 2.2 |
| BC _a | 94.0 | 94.6 | 94.9 | 0.0714 | 0.0704 | 0.0706 | 2.9 | 2.5 | 2.8 | 3.1 | 2.9 | 2.3 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.4 | 94.8 | 95.2 | 0.0714 | 0.0704 | 0.0710 | 2.7 | 2.5 | 2.5 | 2.9 | 2.8 | 2.3 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 95.2 | 94.2 | 94.5 | 0.0264 | 0.0251 | 0.0251 | 2.6 | 2.9 | 3.3 | 3.9 | 2.9 | 2.2 |
| BC _a | 94.7 | 93.9 | 94.2 | 0.0263 | 0.0251 | 0.0251 | 2.8 | 3.3 | 3.3 | 4.2 | 2.8 | 2.5 |
| <i>t</i> -bootstrap | 95.3 | 94.4 | 94.6 | 0.0265 | 0.0253 | 0.0253 | 2.6 | 2.8 | 3.2 | 3.8 | 2.8 | 2.2 |

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam as taxas de cobertura obtidas pelo intervalos para diferentes tamanhos amostrais ($n = 20, 40, \dots, 200$) e graus de heterogeneidade ($\lambda = 20, 100, 500$). Tais figuras indicam que os intervalos baseados no método *t*-bootstrap apresentam melhor desempenho na maior parte dos casos avaliados. Adicionalmente, os resultados das simulações para tais cenários indicam que à medida que o grau de heterogeneidade aumenta, a amplitude média dos intervalos caem. Por exemplo, considerando o cenário em que $\mu \in (0.020, 0.080)$, $n = 20$ e os intervalos obtidos via método *t*-bootstrap, temos que as amplitudes médias obtidas considerando $\lambda = 20, 100$ e 500 foram $0.0798, 0.0255$ e 0.0089 , respectivamente. Vale notar ainda que os intervalos apresentam taxas de cobertura mais oscilantes nos cenários considerados problemáticos, $\mu \in (0.020, 0.080)$ e $\mu \in (0.95, 0.98)$.

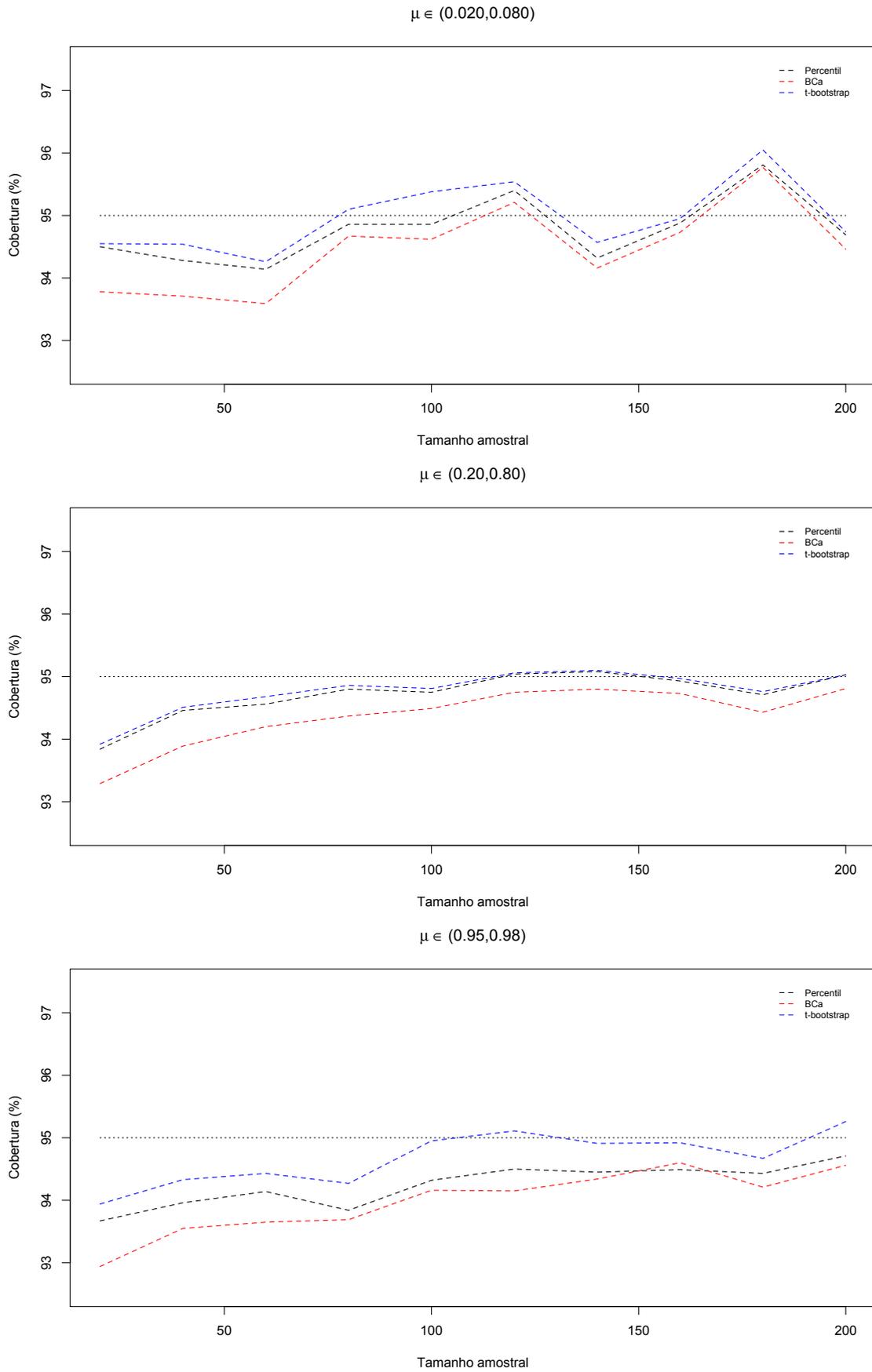


Figura 5.1: Limites de predição obtidos via simulações *warp-speed* considerando $\lambda = 20$.

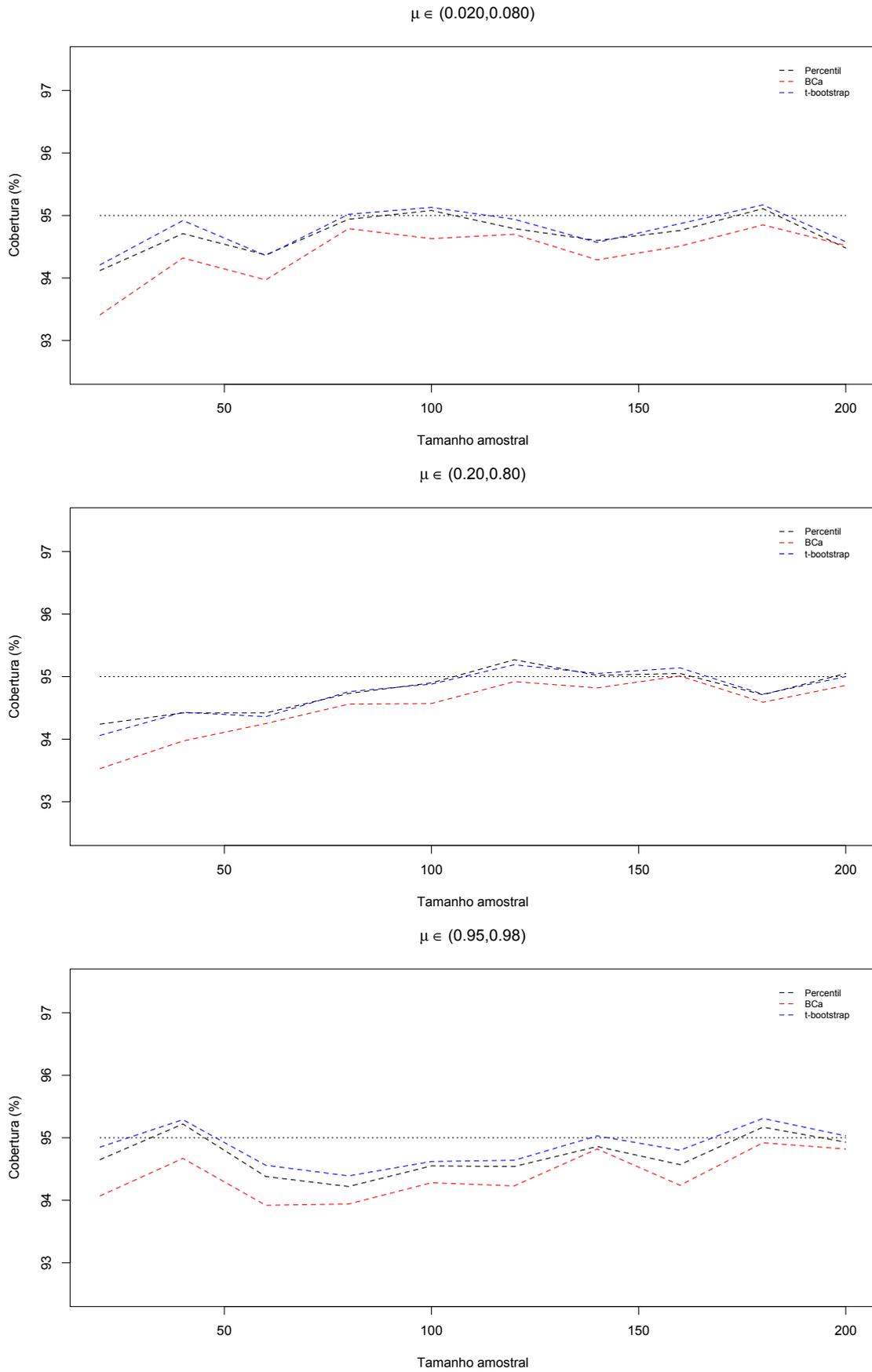


Figura 5.2: Limites de predição obtidos via simulações *warp-speed* considerando $\lambda = 100$.

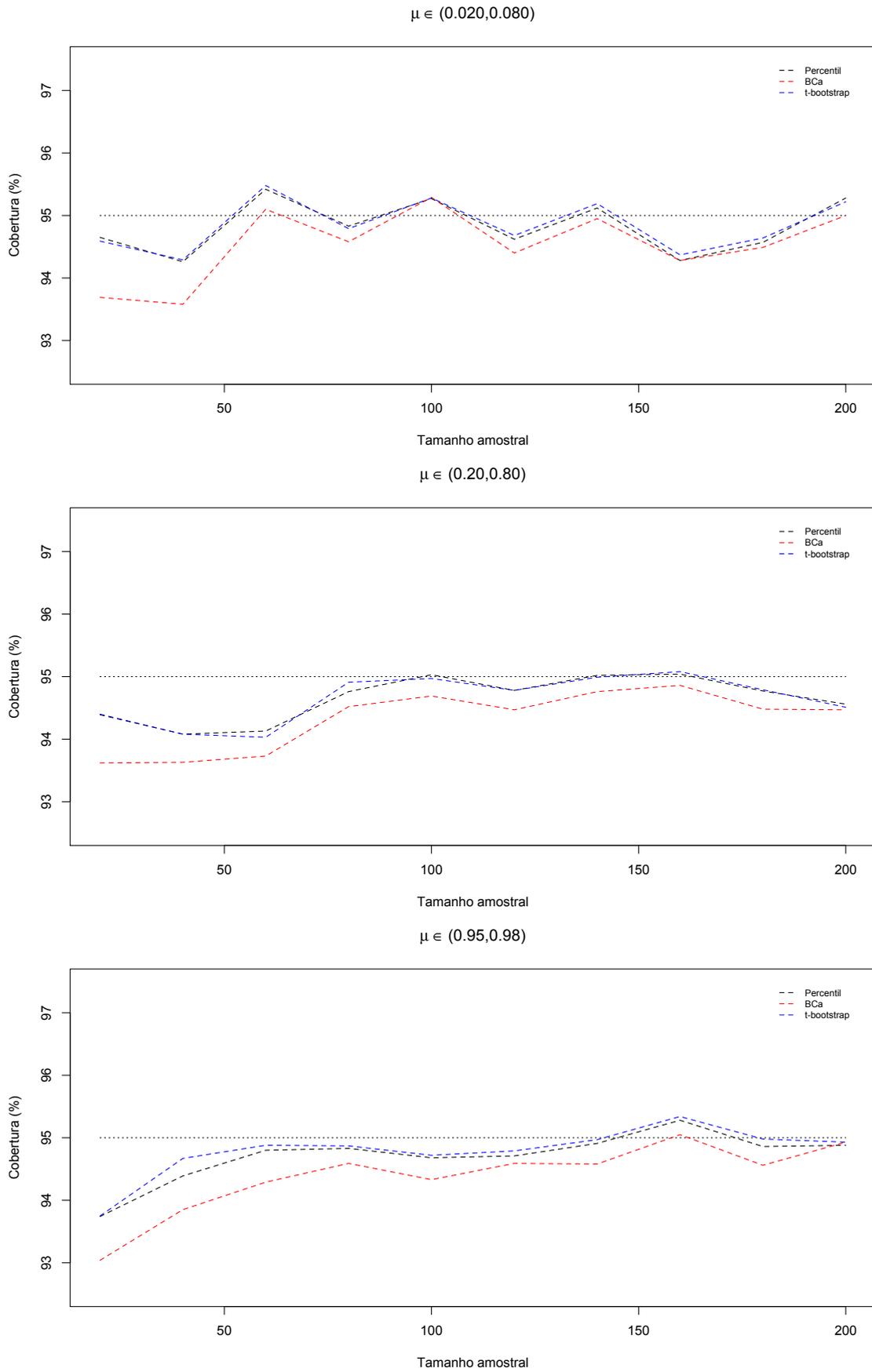


Figura 5.3: Limites de predição obtidos via simulações *warp-speed* considerando $\lambda = 500$.

Dando continuidade as simulações, decidimos avaliar o impacto causado quando o modelo utilizado para a construção dos intervalos é mal especificado. Para tanto, inicialmente, consideramos o modelo dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3}, \tag{5.9}$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}$$

como o modelo verdadeiro.

A Tabela 5.9 apresenta os resultados para o cenário em que estima-se o modelo omitindo-se a variável x_3 . Nota-se que a má especificação tem forte impacto sobre as amplitudes médias dos intervalos e, conseqüentemente, sobre as taxas de cobertura dos mesmos. Adicionalmente, nota-se um desequilíbrio nas taxas de não-cobertura, indicando que o modelo superestimou a maior parte dos valores preditos não-cobertos.

Tabela 5.9: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método *warp-speed* considerando má especificação causada pela omissão de um regressor.

| μ | $\mu \in (0.020, 0.080)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
|---------------------|--------------------------|-------|-------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 96.6 | 97.2 | 96.7 | 0.0314 | 0.0308 | 0.0305 | 3.0 | 2.6 | 3.0 | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| BC _a | 96.5 | 96.8 | 96.4 | 0.0314 | 0.0308 | 0.0305 | 3.0 | 2.9 | 3.3 | 0.5 | 0.3 | 0.3 |
| <i>t</i> -bootstrap | 96.6 | 97.1 | 96.7 | 0.0314 | 0.0309 | 0.0306 | 3.0 | 2.7 | 3.0 | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 0.4488 | 0.4286 | 0.4238 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| BC _a | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 0.4486 | 0.4291 | 0.4238 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| <i>t</i> -bootstrap | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 0.4482 | 0.4284 | 0.4235 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 98.3 | 98.1 | 97.8 | 0.0350 | 0.0333 | 0.0330 | 1.7 | 1.9 | 2.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| BC _a | 97.9 | 97.6 | 97.7 | 0.0349 | 0.0332 | 0.0331 | 2.1 | 2.4 | 2.3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| <i>t</i> -bootstrap | 98.4 | 98.2 | 97.9 | 0.0352 | 0.0335 | 0.0331 | 1.6 | 1.8 | 2.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Em seguida, avaliamos o impacto causado nos intervalos de predição quando os dados são gerados seguindo o modelo em (5.9), mas estimamos um modelo com precisão constante. Comparando os resultados apresentados na Tabela 5.10 com os resultados

obtidos na Tabela 5.8, nota-se que as amplitudes médias em todos os cenários foram maiores que o dobro das amplitudes médias originais. Por exemplo, para o intervalo t -bootstrap construído utilizando o modelo correto, considerando $n = 80$ e $\mu \in (0.020, 0.080)$, foi obtida taxa de cobertura (amplitude média) igual a 95% (0.0242), enquanto para o intervalo t -bootstrap construído a partir do modelo mal especificado foi obtida taxa de cobertura (amplitude média) igual a 100% (0.0565).

Tabela 5.10: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias dos intervalos de predição para o modelo com precisão variável erroneamente estimado com precisão constante.

| μ | $\mu \in (0.02, 0.08)$ | | | Não-cobertura (%) | | | | | | | | |
|-----------------------------------|------------------------|------|------|-------------------|--------|--------|------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 99.9 | 100 | 100 | 0.0587 | 0.0560 | 0.0584 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| BC _{α} | 99.6 | 99.8 | 99.9 | 0.0592 | 0.0560 | 0.0573 | 0.3 | 0.1 | 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| t -bootstrap | 99.9 | 100 | 100 | 0.0592 | 0.0565 | 0.0594 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Não-cobertura (%) | | | | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 99.9 | 100 | 100 | 0.1589 | 0.1571 | 0.1428 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| BC _{α} | 99.6 | 99.8 | 99.8 | 0.1609 | 0.1600 | 0.1430 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |
| t -bootstrap | 99.9 | 100 | 100 | 0.1600 | 0.1578 | 0.1433 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.0 | 0.0 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Não-cobertura (%) | | | | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | Amplitude média | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 99.9 | 99.9 | 100 | 0.0588 | 0.0556 | 0.0581 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| BC _{α} | 99.7 | 99.8 | 99.9 | 0.0580 | 0.0543 | 0.0573 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.0 |
| t -bootstrap | 99.9 | 100 | 100 | 0.0597 | 0.0568 | 0.0593 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Dando continuidade aos estudos, adotamos como modelo verdadeiro o modelo dado por

$$-\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}.$$

A Tabela 5.11 apresenta os resultados das simulações *warp-speed* para os intervalos de predição construídos a partir do modelo verdadeiro e de um modelo mal especificado, com função de ligação logit. As maiores mudanças ocorreram no cenário em que $\mu \in (0.20, 0.80)$, no qual os intervalos apresentaram forte assimetria nas taxas de não-cobertura.

Tabela 5.11: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método *warp-speed* considerando má especificação na função de ligação do submodelo da média.

| Modelo verdadeiro: $-\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2x_{t2} + \beta_3x_{t3}$ e $\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2z_{t2}$ | | | | | | | | | | | | |
|---|--------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| μ | $\mu \in (0.020, 0.080)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.4 | 94.2 | 94.9 | 0.0259 | 0.0247 | 0.0254 | 2.8 | 2.9 | 2.6 | 2.8 | 2.9 | 2.5 |
| BC _a | 94.1 | 93.9 | 94.8 | 0.0260 | 0.0246 | 0.0256 | 2.9 | 3.0 | 2.9 | 3.0 | 3.1 | 2.3 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.6 | 94.2 | 95.1 | 0.0262 | 0.0247 | 0.0255 | 2.7 | 2.9 | 2.5 | 2.7 | 2.9 | 2.4 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.3 | 94.4 | 95.3 | 0.0689 | 0.0701 | 0.0702 | 3.1 | 2.9 | 2.6 | 2.6 | 2.7 | 2.1 |
| BC _a | 93.9 | 94.1 | 94.9 | 0.0695 | 0.0701 | 0.0700 | 3.3 | 3.2 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.2 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.3 | 94.5 | 95.3 | 0.0690 | 0.0704 | 0.0702 | 3.1 | 2.8 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.2 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.4 | 94.3 | 94.5 | 0.0253 | 0.0245 | 0.0244 | 2.7 | 2.9 | 3.1 | 2.9 | 2.8 | 2.4 |
| BC _a | 94.0 | 94.0 | 94.2 | 0.0251 | 0.0245 | 0.0243 | 3.0 | 3.0 | 3.3 | 3.0 | 3.0 | 2.5 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.4 | 94.4 | 94.7 | 0.0254 | 0.0247 | 0.0245 | 2.7 | 2.9 | 3.0 | 2.9 | 2.7 | 2.3 |
| Modelo mal especificado: $\log(\mu_t/(1 - \mu_t)) = \beta_1 + \beta_2x_{t2} + \beta_3x_{t3}$ e $\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2z_{t2}$ | | | | | | | | | | | | |
| μ | $\mu \in (0.020, 0.080)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.7 | 94.4 | 95.0 | 0.0259 | 0.0245 | 0.0252 | 2.1 | 2.1 | 2.0 | 3.2 | 3.5 | 3.0 |
| BC _a | 94.1 | 94.0 | 94.9 | 0.0259 | 0.0245 | 0.0254 | 2.3 | 2.1 | 2.3 | 3.6 | 3.9 | 2.8 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.6 | 94.6 | 95.1 | 0.0259 | 0.0246 | 0.0253 | 2.1 | 2.0 | 1.9 | 3.3 | 3.4 | 3.0 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 92.1 | 91.9 | 92.8 | 0.0857 | 0.0832 | 0.0833 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 7.8 | 8.1 | 7.2 |
| BC _a | 90.4 | 90.1 | 91.7 | 0.0859 | 0.0835 | 0.0840 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 9.5 | 9.8 | 8.3 |
| <i>t</i> -bootstrap | 91.6 | 91.4 | 92.4 | 0.0855 | 0.0834 | 0.0835 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 8.3 | 8.5 | 7.6 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.4 | 94.3 | 94.5 | 0.0253 | 0.0245 | 0.0244 | 2.7 | 2.9 | 3.1 | 2.9 | 2.8 | 2.4 |
| BC _a | 94.0 | 94.0 | 94.2 | 0.0251 | 0.0245 | 0.0243 | 3.0 | 3.0 | 3.3 | 3.0 | 3.0 | 2.5 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.4 | 94.4 | 94.6 | 0.0254 | 0.0247 | 0.0245 | 2.7 | 2.9 | 3.0 | 2.9 | 2.7 | 2.4 |

Por fim, consideramos como modelo verdadeiro o modelo dado por:

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3},$$

$$\sqrt{\phi_t} = \gamma_1 + \gamma_2 z_{t2}.$$

A Tabela 5.12 apresenta os resultados das simulações *warp-speed* para os intervalos de predição construídos a partir do modelo verdadeiro e de um modelo mal especificado, com função de ligação logarítmica para o submodelo da precisão. Os resultados mostram uma leve variação na amplitude média dos intervalos e, conseqüentemente, nas taxas de cobertura. Por exemplo, para $n = 40$ e $\mu \in (0.20, 0.80)$, temos que a taxa de cobertura (amplitude média) associada ao intervalo BC_a construído a partir do modelo correto foi igual a 94.2% (0.1321), enquanto a taxa de cobertura (amplitude média) associada ao intervalo BC_a construído a partir do modelo mal especificado foi igual a 97% (0.1542).

No geral, os resultados desta seção indicam que a construção de intervalos de predição a partir de um modelo mal especificado tem forte impacto nas amplitudes médias dos mesmos. Dessa forma, a avaliação dos modelos mostra-se um passo fundamental na construção de intervalos de predição mais precisos.

Por sua vez, em relação ao método de simulação *warp-speed*, temos que as simulações desta seção levaram em média 35 minutos cada enquanto as da seção anterior, baseadas no método de simulação de Monte Carlo usual, levaram em média 18 horas cada. Ou seja, as simulações via método *warp-speed* apresentaram em média uma economia de quase 97% no tempo de simulação. Dessa forma, o método mostra-se uma ferramenta extremamente útil para simulações, principalmente em grandes amostras.

5.6 Aplicações

Nesta seção são apresentadas três aplicações a dados reais, nas quais foram considerados os intervalos percentil, BC_a e t -bootstrap, além das versões baseadas no bootstrap duplo dos intervalos percentil e t -bootstrap. O número de réplicas bootstrap foi igual a 500 para o primeiro nível e 125 para o segundo nível de reamostragem.

Tabela 5.12: Taxas de cobertura (%) e amplitudes médias obtidas via método *warp-speed* considerando má especificação na função de ligação do submodelo da precisão.

| Modelo verdadeiro: $\log(\mu_t/(1 - \mu_t)) = \beta_1 + \beta_2x_{t2} + \beta_3x_{t3}$ e $\sqrt{\phi_t} = \gamma_1 + \gamma_2z_{t2}$ | | | | | | | | | | | | |
|---|--------------------------|------|------|-----------------|--------|--------|-------------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| μ | $\mu \in (0.020, 0.080)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.6 | 95.1 | 95.0 | 0.0443 | 0.0437 | 0.0433 | 2.5 | 2.3 | 2.3 | 2.9 | 2.6 | 2.7 |
| BC _a | 94.1 | 94.7 | 94.9 | 0.0443 | 0.0437 | 0.0436 | 2.7 | 2.5 | 2.4 | 3.2 | 2.8 | 2.7 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.9 | 95.3 | 95.1 | 0.0449 | 0.0444 | 0.0436 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.7 | 2.4 | 2.7 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.5 | 94.3 | 94.1 | 0.1308 | 0.1262 | 0.1246 | 2.6 | 2.8 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 3.0 |
| BC _a | 94.2 | 93.9 | 93.8 | 0.1321 | 0.1262 | 0.1250 | 2.6 | 3.1 | 3.2 | 3.2 | 3.0 | 3.0 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.5 | 94.3 | 94.2 | 0.1313 | 0.1266 | 0.1254 | 2.6 | 2.8 | 2.8 | 2.9 | 2.9 | 3.0 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 94.5 | 94.7 | 95.0 | 0.0468 | 0.0451 | 0.0451 | 3.4 | 3.2 | 3.0 | 2.1 | 2.1 | 2.0 |
| BC _a | 94.2 | 94.4 | 94.8 | 0.0471 | 0.0453 | 0.0456 | 3.5 | 3.0 | 2.8 | 2.3 | 2.6 | 2.4 |
| <i>t</i> -bootstrap | 94.8 | 95.2 | 95.3 | 0.0475 | 0.0461 | 0.0458 | 3.2 | 2.8 | 2.8 | 2.0 | 2.0 | 1.9 |
| Modelo mal especificado: $\log(\mu_t/(1 - \mu_t)) = \beta_1 + \beta_2x_{t2} + \beta_3x_{t3}$ e $\log(\phi_t) = \gamma_1 + \gamma_2z_{t2}$ | | | | | | | | | | | | |
| μ | $\mu \in (0.020, 0.080)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 97.5 | 97.6 | 97.4 | 0.0512 | 0.0501 | 0.0497 | 1.1 | 0.9 | 0.8 | 1.4 | 1.5 | 1.8 |
| BC _a | 96.9 | 97.3 | 97.4 | 0.0512 | 0.0501 | 0.0494 | 1.2 | 1.0 | 0.8 | 1.9 | 1.7 | 1.8 |
| <i>t</i> -bootstrap | 97.5 | 97.8 | 97.7 | 0.0521 | 0.0511 | 0.0509 | 1.1 | 0.8 | 0.7 | 1.4 | 1.4 | 1.6 |
| μ | $\mu \in (0.20, 0.80)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 97.5 | 97.9 | 97.7 | 0.1542 | 0.1504 | 0.1495 | 1.2 | 0.9 | 1.1 | 1.3 | 1.2 | 1.2 |
| BC _a | 97.0 | 97.6 | 97.4 | 0.1542 | 0.1507 | 0.1498 | 1.6 | 1.0 | 1.1 | 1.4 | 1.4 | 1.5 |
| <i>t</i> -bootstrap | 97.5 | 97.9 | 97.8 | 0.1550 | 0.1508 | 0.1505 | 1.2 | 0.9 | 1.0 | 1.3 | 1.2 | 1.2 |
| μ | $\mu \in (0.95, 0.98)$ | | | Amplitude média | | | Não-cobertura (%) | | | | | |
| | Cobertura (%) | | | | | | À esquerda | | | À direita | | |
| n | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 | 40 | 80 | 120 |
| Percentil | 97.0 | 97.3 | 97.5 | 0.0528 | 0.0515 | 0.0514 | 2.0 | 1.8 | 1.7 | 1.0 | 0.9 | 0.8 |
| BC _a | 96.5 | 97.0 | 97.2 | 0.0533 | 0.0527 | 0.0514 | 2.2 | 1.7 | 1.8 | 1.3 | 1.3 | 1.0 |
| <i>t</i> -bootstrap | 97.2 | 97.8 | 98.1 | 0.0546 | 0.0539 | 0.0534 | 1.7 | 1.5 | 1.4 | 1.1 | 0.7 | 0.5 |

5.6.1 Aplicação 1: Recém-nascidos com baixo peso

Na Seção 3.7.3, modelamos a proporção de recém-nascidos com baixo peso nos 50 estados e distrito federal dos Estados Unidos, durante o ano de 2015, em função de nascimentos prematuros e fatores mutáveis, tais como o tabagismo, alcoolismo e sobrepeso. Por sua vez, utilizando os testes J , MJ e as versões bootstrap e BDR dos mesmos, na Seção 4.4.3, verificamos que o modelo com função de ligação log-log, dado por

$$-\log\{-\log(\mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \beta_5 x_{t5}$$

é o mais indicado para a modelagem dos dados. Aqui, tal modelo será utilizado para construir intervalos de predição para cada uma das 51 respostas da amostra. Para tanto, foram geradas 51 amostras obtidas pela retirada de uma observação da amostra original. Em seguida, utilizamos os métodos expostos neste capítulo para construir intervalos de predição para a observação omitida.

A Tabela 5.13 apresenta as taxas de cobertura e amplitudes média para cada um dos intervalos. Nota-se que os intervalos percentil, BC_a , t -bootstrap e a versão BD do mesmo apresentaram as mesmas taxas de cobertura, 96.1%, enquanto o intervalo percentil BD apresentou taxa de cobertura igual a 98%. No entanto, como esperado, tal intervalo também apresentou a maior amplitude média.

Tabela 5.13: Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados de recém-nascidos com baixo peso.

| Método | Cobertura (%) | Amplitude média |
|-------------------|---------------|-----------------|
| Percentil | 96.1 | 0.0216 |
| Percentil BD | 98.0 | 0.0299 |
| t -bootstrap | 96.1 | 0.0217 |
| t -bootstrap BD | 96.1 | 0.0220 |
| BC_a | 96.1 | 0.0218 |

Por sua vez, as Figuras 5.4 e 5.5 apresentam os limites de predição obtidos por cada intervalo. Nota-se que nenhum intervalo cobriu a resposta $y_{42} = 0.063$. Além disso, apenas o intervalo percentil BD cobriu a resposta $y_6 = 0.088$.

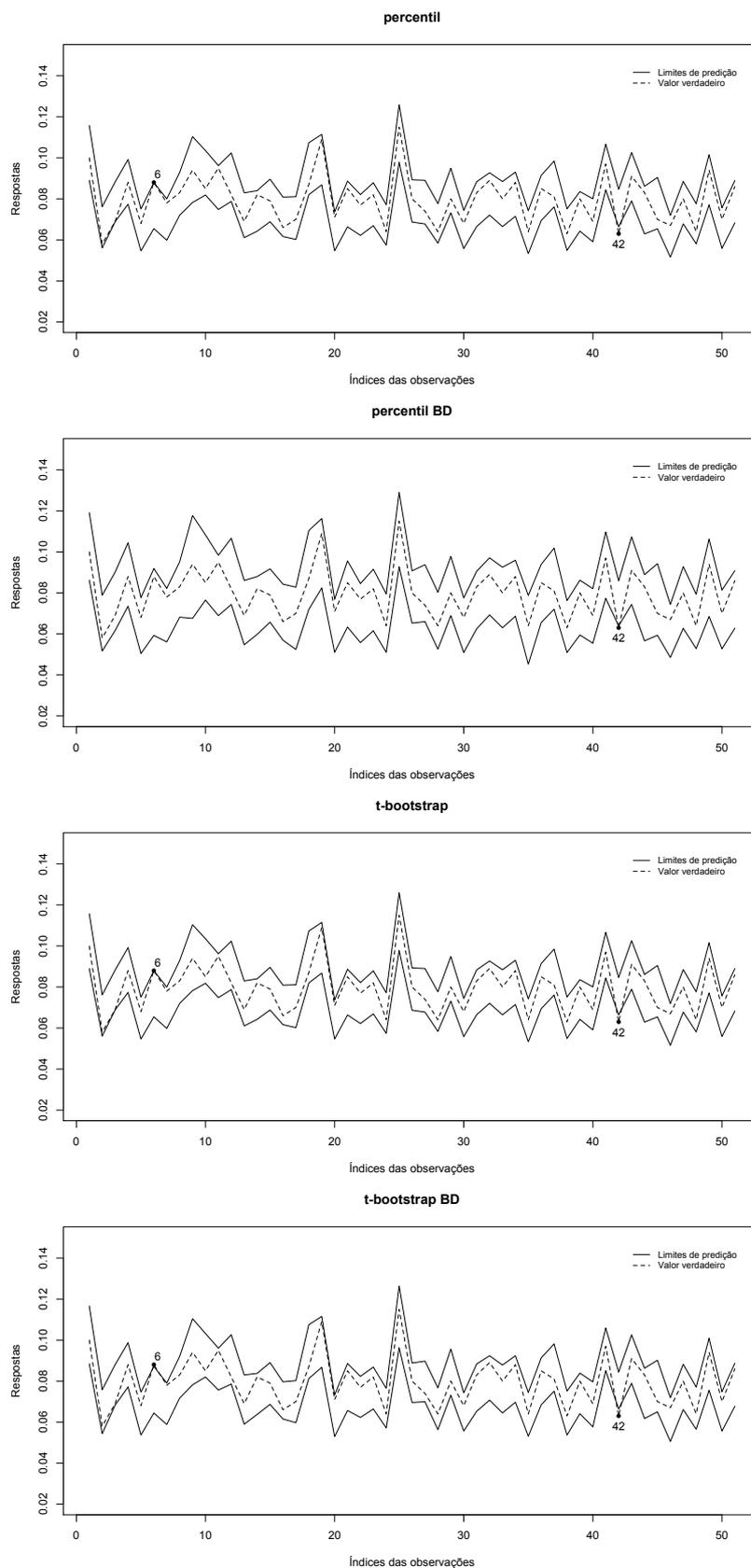


Figura 5.4: Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, *t*-bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados de recém-nascidos com baixo peso.

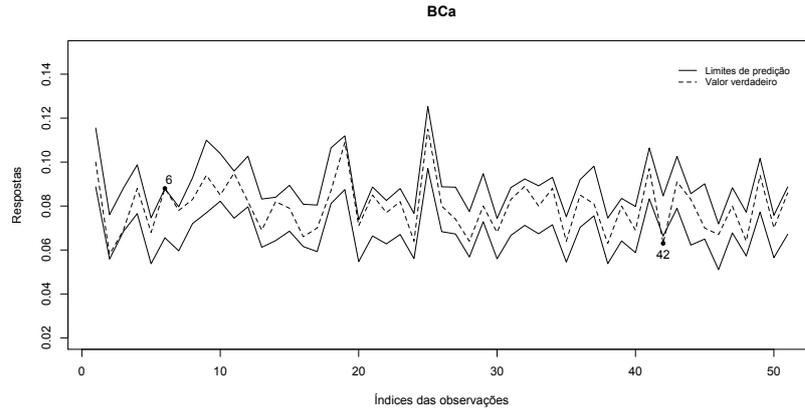


Figura 5.5: Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados de recém-nascidos com baixo peso.

5.6.2 Aplicação 2: Prêmios da Ford na NASCAR

Na Seção 3.7.4, vimos que o modelo dado por

$$\log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_5 x_{t5} + \sum_{n=6}^{13} \beta_n x_{tn},$$

$$\log(\phi_t) = \gamma_1 + \sum_{n=6}^{13} \gamma_n x_{tn}.$$

se ajusta bem aos dados da proporção de prêmio em dinheiro ganho pelo time da Ford nas corridas da *Winston Cup* da NASCAR. Aqui, utilizaremos tal modelo para a construção de intervalos de predições. Para tanto, separamos a amostra em dois grupos, o primeiro com 127 observações e o segundo com as 140 observações restantes. Em seguida, o primeiro grupo foi utilizado para construir intervalos de predição para as respostas das observações presentes no segundo grupo.

As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam os limites de predição para os intervalos de predição construídos. Nota-se que os intervalos percentil e t -bootstrap não cobriram seis respostas ($y_{14}, y_{52}, y_{59}, y_{95}, y_{109}$ e y_{133}). Por sua vez, suas versões via BD não cobriram apenas duas (y_{109} e y_{133}) e quatro (y_{14}, y_{52}, y_{109} e y_{133}) respostas, respectivamente. Já o intervalo BC_a não cobriu cinco respostas ($y_2, y_{14}, y_{52}, y_{109}$ e y_{133}).

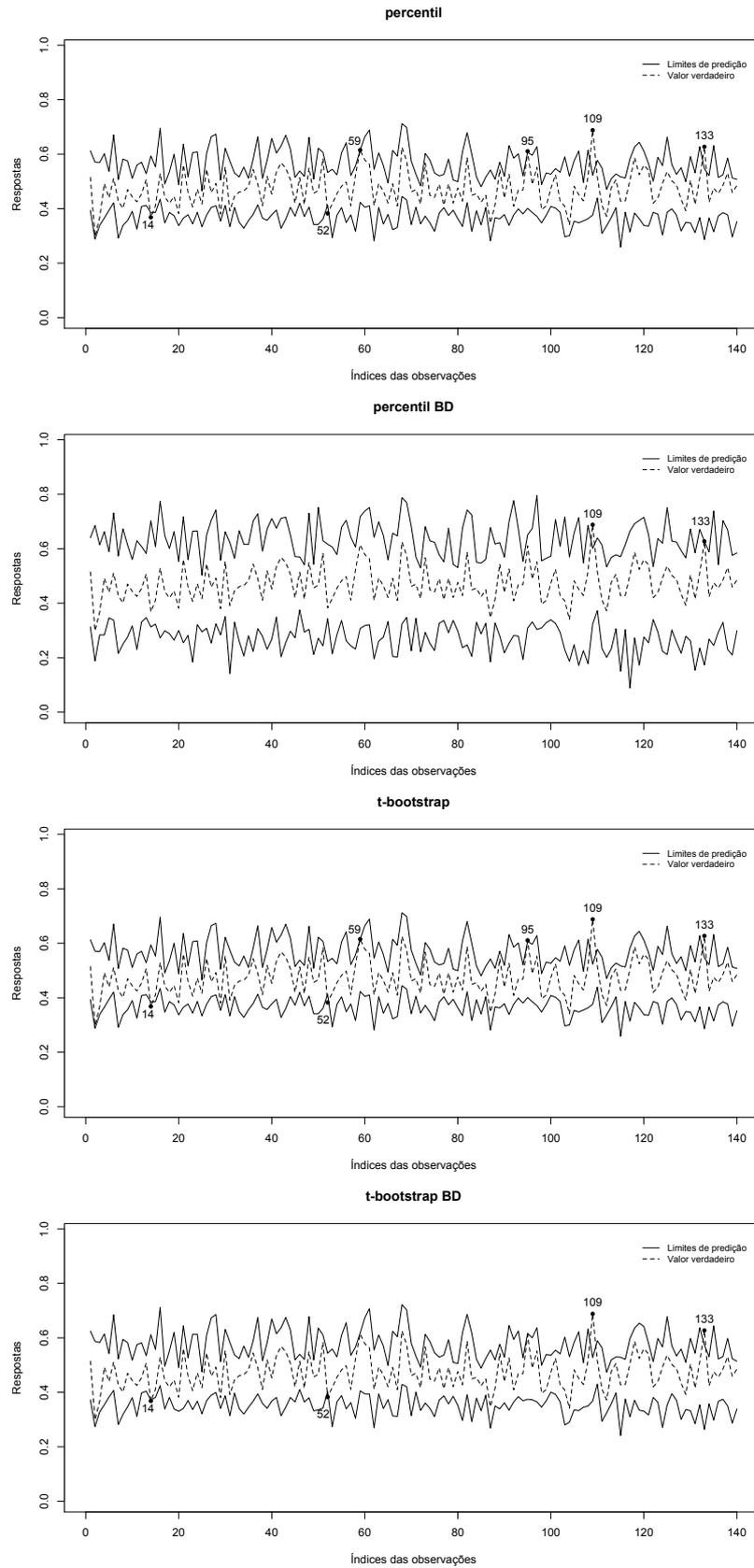


Figura 5.6: Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, *t*-bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados da NASCAR.

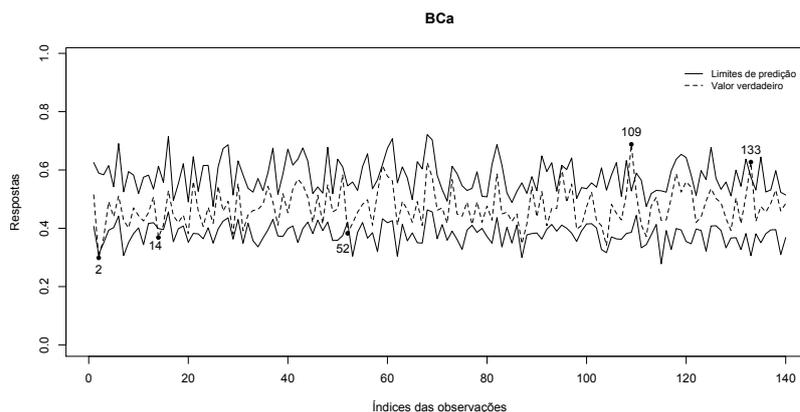


Figura 5.7: Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados da NASCAR.

A Tabela 5.14 apresenta as taxas de cobertura e amplitudes médias para cada um dos intervalos construídos. Nota-se que as maiores taxas de cobertura estão associadas aos intervalos percentil e t -bootstrap construídos via BD, que apresentaram taxas de cobertura iguais a 98.6% e 97.2%, respectivamente. No entanto, tais intervalos também apresentaram as maiores amplitudes médias, com o intervalo percentil BD apresentando um aumento considerável na mesma em relação a sua versão usual.

Tabela 5.14: Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados da NASCAR.

| Método | Cobertura (%) | Amplitude média |
|-------------------|---------------|-----------------|
| Percentil | 95.7 | 0.2029 |
| Percentil BD | 98.6 | 0.3685 |
| t -bootstrap | 95.7 | 0.2034 |
| t -bootstrap BD | 97.2 | 0.2266 |
| BC_a | 96.4 | 0.1991 |

5.6.3 Aplicação 3: Fator de simultaneidade

Nesta seção, voltaremos a tratar dos dados estudados em (Zerbinatti, 2008), a respeito do fator de simultaneidade. Na Seção 3.7.1, vimos que o modelo com função de ligação logit para o submodelo da média e logarítmica para o submodelo da precisão se ajusta bem aos dados. Por sua vez, na Seção 4.4.4, vimos que o modelo em que a função de ligação

do submodelo da média é log-log complementar foi selecionado pelos testes J e MJ como o melhor modelo, entre os testados para os dados. Dessa forma, utilizaremos o modelo

$$\log\{-\log(1 - \mu_t)\} = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{t2}),$$

$$\log(\phi) = \gamma_1 + \gamma_2 \log(x_{t2}).$$

para avaliar o desempenho dos métodos de construção de intervalos de predição estudados neste capítulo. Para tanto, foram consideradas 42 amostras formadas pela remoção de uma observação do conjunto de dados original e cada uma dessas amostras foi utilizada na construção do intervalo de predição para a resposta omitida.

A Tabela 5.15 apresenta as taxas de cobertura e amplitudes médias para cada um dos intervalos construídos. Nota-se que, mais uma vez, a maior taxa de cobertura está associada a versão do intervalo percentil construído via bootstrap duplo. Tal versão também apresentou a maior amplitude média.

Tabela 5.15: Taxas de cobertura e amplitudes médias obtidas na construção dos intervalos de predição para os dados do fator de simultaneidade.

| Método | Cobertura (%) | Amplitude média |
|-------------------|---------------|-----------------|
| Percentil | 95.2 | 0.1531 |
| Percentil BD | 97.6 | 0.2446 |
| t -bootstrap | 95.2 | 0.1527 |
| t -bootstrap BD | 95.2 | 0.1584 |
| BC_a | 92.9 | 0.1413 |

As Figuras 5.8 e 5.9 apresentam os limites de predições obtidos pelos intervalos avaliados. Pode-se notar que a resposta $y_{33} = 0.147$ não foi coberta por nenhum dos intervalos. Adicionalmente, nota-se que a resposta $y_{31} = 0.016$ só foi coberta pelo intervalo percentil BD. Por sua vez, a resposta $y_{16} = 0.276$ só não foi coberta pelo intervalo BC_a .

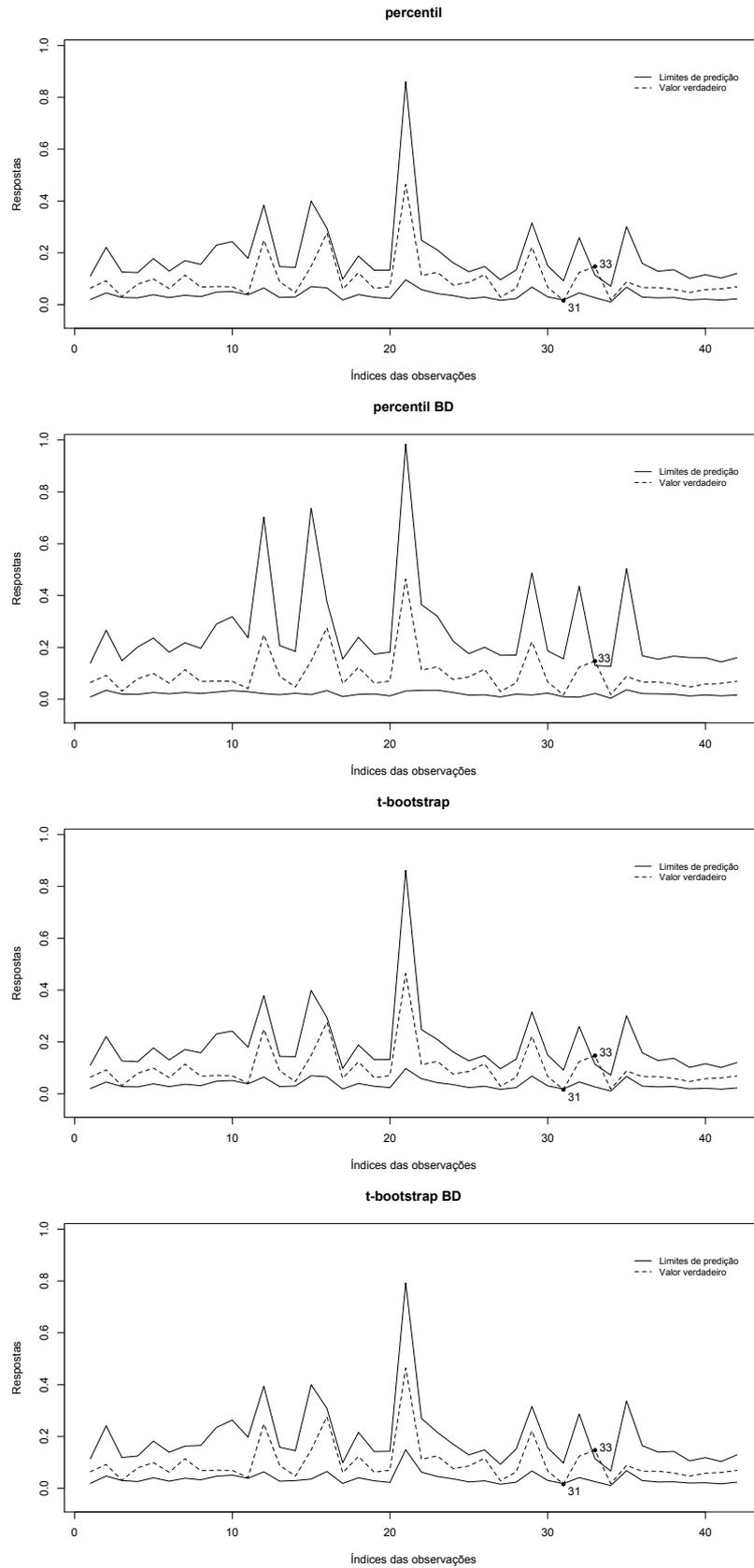


Figura 5.8: Limites de predição obtidos através dos métodos percentil, *t*-bootstrap e de suas versões via bootstrap duplo para os dados do fator de simultaneidade.

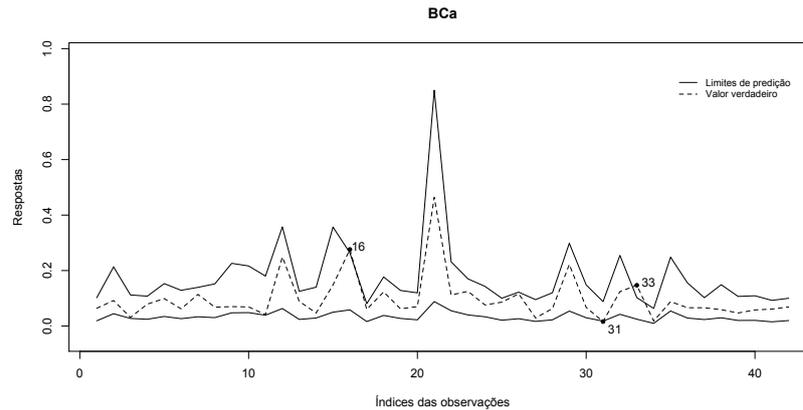


Figura 5.9: Limites de predição obtidos através do método BC_a para os dados do fator de simultaneidade.

5.7 Conclusões

A utilização de modelos ajustados para prever valores de uma variável resposta, associada a um novo conjunto de valores das covariadas de um modelo, é uma prática comum. Em modelos de regressão beta, a previsão pontual pode ser realizada sem grandes complicações, no entanto, Zerbinatti (2008) mostra que tais modelos podem subestimar a resposta. Sendo assim, a obtenção de intervalos de predição, associados a um determinado nível de confiança, mostra-se uma opção atraente. Em Espinheira et al. (2014), os autores propõem a construção de intervalos de predição via método percentil e via método BC_a . Neste capítulo, foi proposta uma adaptação do intervalo de confiança t -bootstrap para a realização de tal previsão. Tal método foi avaliado via simulações de Monte Carlo e apresentou um desempenho competitivo e, na maior parte dos casos, mas próximo do desejado que os demais, apresentando maiores taxas de cobertura sem perda significativa de precisão. Portanto, indicamos a utilização do método t -bootstrap para a construção de intervalos de predição.

Além disso, foram propostas versões bootstrap duplo para os intervalos de predição percentil e t -bootstrap. As simulações realizadas indicaram que, para ambos os métodos, os intervalos via BD apresentam taxas de cobertura maiores do que as obtidas por suas versões usuais. No entanto, tais intervalos apresentaram também maiores amplitudes médias. Tal aumento, principalmente para o intervalo percentil BD, foi significativo na maior parte dos casos. Além disso, o método mostrou-se consideravelmente mais custoso

computacionalmente. Adicionalmente, analisamos o impacto causado nos intervalos pela má especificação do modelo utilizado para a construção dos mesmos. Os resultados das simulações realizadas indicaram que a estimação por um modelo mal especificado distorce a amplitude média dos intervalos, em geral, provocando um aumento em relação a amplitude do intervalo construído tendo o modelo verdadeiro como base. Tal fato ressalta a importância da avaliação dos modelos antes da realização de previsões.

Capítulo 6

Considerações finais

6.1 Conclusões

Ao longo dos capítulos anteriores abordamos alguns aspectos de inferências bootstrap em modelos de regressão beta (Ferrari e Cribari-Neto, 2004), avaliando algumas das principais variantes do método. No Capítulo 3, tratamos de testes de hipóteses propondo a versão bootstrap duplo rápido (Davidson e MacKinnon, 2000) do teste da razão de verossimilhanças em modelos de regressão beta. O método proposto mostrou considerável melhora no desempenho alcançado pelo teste baseado no bootstrap usual e sem exigir um alto custo computacional. Dessa forma, tal método é uma excelente escolha para a realização do teste em pequenas amostras.

Por sua vez, no Capítulo 4 tratamos de testes de hipóteses não encaixadas. Neste cenário, foram apresentadas as versões bootstrap duplo rápido dos testes J e MJ , propostos por Davidson e MacKinnon (1981) e Hagemann (2012), respectivamente, para a realização dos mesmos em modelos de regressão beta. As avaliações numéricas favoreceram tais versões, que mostraram-se capazes de melhorar, principalmente, o desempenho do teste MJ .

Por fim, no Capítulo 5, foram propostos o intervalo de predição t -bootstrap e as versões bootstrap duplo do mesmo e do intervalo percentil (Espinheira et al., 2014) para a resposta associada a um novo conjunto de valores para as covariadas de um modelo de regressão beta. O intervalo t -bootstrap apresentou um bom desempenho, conseguindo alcançar

taxas de cobertura superiores as dos intervalos percentil e BC_a na maior parte dos casos avaliados. Já as versões baseadas no bootstrap duplo, mesmo apresentando maiores taxas de cobertura, têm como forte ponto negativo o fato de apresentarem maiores amplitudes médias.

6.2 Trabalhos futuros

Como foco de trabalhos futuros sugerimos:

1. Analisar métodos de inferências bootstrap no modelo de regressão beta não-linear, focando na adaptação para tal modelo do teste P proposto em Davidson e MacKinnon (1981).
2. Investigar o desempenho das variantes bootstrap em regressão beta por mínimos quadrados parciais (Bertrand et al., 2013).

REFERÊNCIAS

- Akaike, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Second International Symposium on Information Theory*, pages 267–281. Akademinai Kiado, 1973.
- Akaike, H. A bayesian analysis of the minimum AIC procedure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 30(1):9–14, 1978.
- Bai, C., Bickel, P. J., e Olshen, R. A. Hyperaccuracy of bootstrap based prediction. In *Probability in Banach Spaces 7*, pages 31–42. Springer, 1990.
- Bartlett, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 160(901):268–282, 1937.
- Bayer, F. M. e Cribari-Neto, F. Model selection criteria in beta regression with varying dispersion, 2014. URL <https://arxiv.org/abs/1405.3718>.
- Beran, R. Prepivoting to reduce level error of confidence sets. *Biometrika*, 74(3):457–468, 1987.
- Beran, R. Prepivoting test statistics: a bootstrap view of asymptotic refinements. *Journal of the American Statistical Association*, 83(403):687–697, 1988.
- Bertrand, F., Meyer, N., Beau-Faller, M., El Bayed, K., Namer, I.-J., e Maumy-Bertrand, M. Régression bêta pls. *Journal de la Société Française de Statistique*, 154(3):143–159, 2013.
- Booth, J. G. e Hall, P. Monte carlo approximation and the iterated bootstrap. *Biometrika*, 81(2):331–340, 1994.
- Brownlee, K. *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*, volume 150. Wiley New York, 1965.
- Chihara, L. M. e Hesterberg, T. C. *Mathematical Statistics with Resampling and R*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2012.

- Cribari-Neto, F. e Lima, L. B. A misspecification test for beta regressions. Technical report, 2007.
- Cribari-Neto, F. e Lucena, S. E. F. Nonnested hypothesis testing in the class of varying dispersion beta regressions. *Journal of Applied Statistics*, 42(5):967–985, 2015.
- Cribari-Neto, F. e Lucena, S. E. F. Non-nested hypothesis testing inference for GAMLSS models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(6):1189–1205, 2017.
- Cribari-Neto, F. e Queiroz, M. P. On testing inference in beta regressions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(1):186–203, 2014.
- Cribari-Neto, F. e Zeileis, A. Beta regression in R. *Journal of Statistical Software*, 34(2):1–24, 2010.
- Davidson, R. e MacKinnon, J. G. Several tests for model specification in the presence of alternative hypotheses. *Econometrica*, pages 781–793, 1981.
- Davidson, R. e MacKinnon, J. G. Improving the reliability of bootstrap tests. Working Papers 995, Queen’s University, Department of Economics, 2000.
- Davidson, R. e MacKinnon, J. G. Bootstrap J tests of nonnested linear regression models. *Journal of Econometrics*, 109(1):167–193, 2002a.
- Davidson, R. e MacKinnon, J. G. Fast double bootstrap tests of nonnested linear regression models. *Econometric Reviews*, 21(4):419–429, 2002b.
- Davidson, R. e MacKinnon, J. G. Improving the reliability of bootstrap tests with the fast double bootstrap. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(7):3259–3281, 2007.
- Davidson, R. e Trokic, M. The iterated bootstrap, 2011. URL <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2326121>.
- Davison, A. C. e Hinkley, D. V. *Bootstrap Methods and Their Applications*. Cambridge University Press, New York, 1997.
- Doornik, J. e Ooms, M. *Introduction to Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. Timberlake Consultants Press, 2007.

- Efron, B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7:1–26, 1979.
- Efron, B. Estimating the error rate of a prediction rule: improvement on cross-validation. *Journal of the American Statistical Association*, 78(382):316–331, 1983.
- Efron, B. Better bootstrap confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397):171–185, 1987.
- Espinheira, P. L., Ferrari, S. L. P., e Cribari-Neto, F. On beta regression residuals. *Journal of Applied Statistics*, 35(4):407–419, 2008.
- Espinheira, P. L., Ferrari, S. L. P., e Cribari-Neto, F. Bootstrap prediction intervals in beta regressions. *Computational Statistics*, 29(5):1263–1277, 2014.
- Ferrari, S. L. P. e Cribari-Neto, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7):799–815, 2004.
- Ferrari, S. L. P. e Pinheiro, E. C. Improved likelihood inference in beta regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(4):431–443, 2011.
- Ferrari, S. L. P., Espinheira, P. L., e Cribari-Neto, F. Diagnostic tools in beta regression with varying dispersion. *Statistica Neerlandica*, 65(3):337–351, 2011.
- Giacomini, R., Politis, D. N., e White, H. A warp-speed method for conducting Monte Carlo experiments involving bootstrap estimators. *Econometric Theory*, 29(03):567–589, 2013.
- Godfrey, L. G. Tests of non-nested regression models some results on small sample behaviour and the bootstrap. *Journal of Econometrics*, 84(1):59–74, 1998.
- Griffiths, W. E., Hill, R. C., e Judge, G. G. *Learning and Practicing Econometrics*. Wiley New York, 1993.
- Hagemann, A. A simple test for regression specification with non-nested alternatives. *Journal of Econometrics*, 166(2):247–254, 2012.
- Hall, P. On the bootstrap and confidence intervals. *The Annals of Statistics*, pages 1431–1452, 1986.

- Hall, P. e Martin, M. A. On bootstrap resampling and iteration. *Biometrika*, 75(4): 661–671, 1988.
- Hesterberg, T. Unbiasing the bootstrap-boot knife sampling vs. smoothing. *Section on Statistics and the Environment: American Statistical Association*, pages 2924–2930, 2004.
- Hesterberg, T. C. Smoothed bootstrap and jackboot sampling, 1999. URL <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.192.9620&rep=rep1&type=pdf>.
- Ihaka, R. e Gentleman, R. R: a language for data analysis and graphics. *Journal of computational and graphical statistics*, 5(3):299–314, 1996.
- Lawley, D. N. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, 43(3-4):295–303, 1956.
- MacKinnon, J. G. Applications of the fast double bootstrap. Working Papers 1023, Queen’s University, Department of Economics, 2006.
- Mojirsheibani, M. Iterated bootstrap prediction intervals. *Statistica Sinica*, 8(2):489–504, 1998.
- Mojirsheibani, M. e Tibshirani, R. Some results on bootstrap prediction intervals. *The Canadian Journal of Statistics/La Revue Canadienne de Statistique*, pages 549–568, 1996.
- Nagelkerke, N. J. A note on a general definition of the coefficient of determination. *Biometrika*, 78(3):691–692, 1991.
- Nocedal, J. e Wright, S. J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- Ospina, R. e Ferrari, S. L. P. A general class of zero-or-one inflated beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 56(6):1609–1623, 2012.
- Ospina, R., Cribari-Neto, F., e Vasconcellos, K. L. P. Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2):960–981, 2006.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., e Flannery, B. P. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, volume 2. Cambridge University, New York, 1992.
- Pyke, R. Spacings. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 27:395–449, 1965.
- Quenouille, M. H. Approximate tests of correlation in time-series. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 11(1):68–84, 1949.
- Ramsey, J. Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 31:350–371, 1969.
- Rigby, R. A. e Stasinopoulos, D. M. The GAMLSS project: a flexible approach to statistical modelling. In Klein, B. e Korsholm, L., editors, *New trends in statistical modelling: Proceedings of the 16th international workshop on statistical modelling*, pages 337–345, Odense, Denmark, 2001.
- Rigby, R. A. e Stasinopoulos, D. M. Generalized additive models for location, scale and shape. *Applied statistics*, 54:507–554, 2005.
- Rocke, D. M. Bootstrap bartlett adjustment in seemingly unrelated regression. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406):598–601, 1989.
- Rubin, D. B. et al. The Bayesian bootstrap. *The Annals of Statistics*, 9(1):130–134, 1981.
- Schwarz, G. et al. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2): 461–464, 1978.
- Serfling, R. J. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, New York; Chichester, 1980.
- Shakhnarovich, G., El-Yaniv, R., e Baram, Y. Smoothed bootstrap and statistical data cloning for classifier evaluation. In *ICML*, pages 521–528, 2001.
- Silverman, B. Density estimation for statistics and data analysis. *Monographs on Statistics and Applied Probability, London: Chapman and Hall, 1986, 1*, 1986.
- Simas, A. B., Barreto-Souza, W., e Rocha, A. V. Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(2):348–366, 2010.

- Skovgaard, I. M. Likelihood asymptotics. *Scandinavian Journal of Statistics*, 28(1):3–32, 2001.
- Smithson, M. e Verkuilen, J. A better lemon squeezer? Maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables. *Psychological Methods*, 11(1):54, 2006.
- Tukey, J. W. Bias and confidence in not-quite large samples. 29(2):614–614, 1958.
- Venables, W. N. e Smith, D. M. An Introduction to R. Network Theory Limited, 2004.
- White, H. A reality check for data snooping. *Econometrica*, 68(5):1097–1126, 2000.
- Winner, L. Nascar winston cup race results for 1975-2003. *Journal of Statistics Education*, 14(3):n3, 2006.
- Winner, L. Beta regression: Proportion of prize money by race for ford, 2015. URL http://www.stat.ufl.edu/~winner/cases/nas_ford_betareg.pptx. Acessado em 19 de novembro de 2016.
- Wu, C.-F. J. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *The Annals of Statistics*, pages 1261–1295, 1986.
- Yanqin, F. e Qi, L. Bootstrapping J -type tests for non-nested regression models. *Economics Letters*, 48(2):107–112, 1995.
- Zerbinatti, L. F. M. Predição de fator de simultaneidade através de modelos de regressão para proporções contínuas. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2008.

Apêndice A

Prova das igualdades para o bootstrap bayesiano

Considere a amostra n -dimensional $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$. Seja $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ uma réplica bootstrap obtida de y com reposição. Se X_i é o número de vezes que y_i aparece em y^* , temos que X_i segue uma distribuição multinomial (n, p_1, \dots, p_n) , em que $p_i, i = 1, \dots, n$, denota a probabilidade de selecionar y_i para y^* (Davison e Hinkley, 1997). Sendo assim, temos

$$\mathbb{E}(X_i) = np_i, \quad \text{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i) \quad \text{e} \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j,$$

em que $\mathbb{E}(\cdot)$, $\text{Var}(\cdot)$ e $\text{Cov}(\cdot)$ denotam valor esperado, variância e covariância, respectivamente. Como $p_i = 1/n, i = 1, \dots, n$, temos

$$\mathbb{E}(X_i) = 1, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{n-1}{n} \quad \text{e} \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{1}{n}.$$

Agora, sejam f_i e $f_j, i \neq j$, as proporções de vezes que y_i e y_j aparecem em y^* . Temos que

$$\mathbb{E}(f_i) = \frac{1}{n}, \quad \text{Var}(f_i) = \frac{n-1}{n^3} \quad \text{e} \quad \text{Cov}(f_i, f_j) = -\frac{1}{n^3}.$$

Consequentemente, temos

$$\text{Cor}(f_i, f_j) = -\frac{1}{n-1},$$

em que $\text{Cor}(\cdot)$ denota correlação.

Agora, considere a amostra $(n-1)$ -dimensional $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ em que $u_j \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $j = 1, \dots, n-1$. Ordene os valores de u tais que $u_{(0)} \leq u_{(1)} \leq \dots \leq u_{(n-1)} \leq u_{(n)}$, com

$u_{(0)} = 0$ e $u_{(n)} = 1$. Pyke (1965) mostra que para $g_i = u_{(i)} - u_{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n$, tem-se

$$\mathbb{E}(g_i) = \frac{1}{n}, \quad \text{Var}(g_i) = \frac{n-1}{n^2(n+1)} \quad \text{e} \quad \text{Cov}(g_i, g_j) = -\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Consequentemente,

$$\text{Cor}(g_i, g_j) = -\frac{1}{n-1}.$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f_i) &= \mathbb{E}(g_i) = \frac{1}{n}, \\ \text{Var}(f_i) &= \text{Var}(g_i) \frac{n+1}{n} = \frac{n-1}{n^3}, \\ \text{Cor}(f_i, f_j) &= \text{Cor}(g_i, g_j) = -\frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Apêndice B

Matriz de informação de Fisher para o modelo de regressão beta

Considere o modelo de regressão beta com precisão variável dado por

$$g(\mu_t) = \sum_{j=1}^k x_{tj} \beta_j = \eta_t,$$
$$h(\phi_t) = \sum_{i=1}^m z_{ti} \gamma_i = \delta_t.$$

Temos que a matriz de informação conjunta para β e γ é dada por

$$K(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\gamma} \\ K_{\gamma\beta} & K_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

em que

$$K_{\beta\beta} = X^T V W X,$$
$$K_{\beta\gamma} = (K_{\gamma\beta})^T = X^T C T H Z,$$
$$K_{\gamma\gamma} = Z^T D Z.$$

Aqui, X é uma matriz $n \times k$ cuja t -ésima linha é x_t^T , $V = \text{diag}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$, $H = \text{diag}\{1/h'(\phi_1), \dots, 1/h'(\phi_n)\}$ e Z é uma matriz $n \times m$ cuja t -ésima linha é z_t^T . Por sua vez, $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$, $C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_n\}$ e $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, com

$$w_t = \phi_t \{ \psi'(\mu_t \phi_t) + \psi'((1 - \mu_t) \phi_t) \} \frac{1}{[g'(\mu_t)]^2},$$
$$c_t = \phi_t [\psi'(\mu_t \phi_t) \mu_t - \psi'((1 - \mu_t) \phi_t) (1 - \mu_t)],$$
$$d_t = \psi'(\mu_t \phi_t) \mu_t^2 + \psi'((1 - \mu_t) \phi_t) (1 - \mu_t)^2 - \psi'(\phi_t),$$

em que $\psi'(\cdot)$ é a função trigama.