Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

EMERSSON RODRIGUES DE SOUZA

Análise de Estratégias de Alunos do Ensino Médio em Problemas de Cálculo de Área do Paralelogramo

Recife
2013

EMERSSON RODRIGUES DE SOUZA

Análise de Estratégias de Alunos do Ensino Médio em problemas de Cálculo de Área do Paralelogramo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Co-orientadora: Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife
2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Andréia Alcântara, CRB-4/1460

S729a Souza, Emersson Rodrigues de.
Análise de estratégias de alunos do ensino médio em problemas de cálculo de área do pararelogramo / Emersson Rodrigues de Souza. – 2013.
108 f. ; 30 cm.
Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Coorientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.
Inclui Referências e Anexos.

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Matemática - Ensino médio. 3. Paralelogramo. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. II. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. III. Título.

372.7 CDD (22. ed.) UFPE (CE2017-021)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

EMERSSON RODRIGUES DE SOUZA

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM PROBLEMAS DE CÁLCULO DE ÁREA DO PARALELOGRAMO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 25/10/2013.

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Presidente e Orientadora
Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
UFPE

____
Co-Orientadora
Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira
UFPE

____
Examinador Externo
Prof. Dr. Abraão Juvencio de Araujo
UFPE

____
Examinadora Interna
Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles
UFPE

Recife, 25 de outubro de 2013.

Contrários
(Pe. Fábio de Melo)

Só quem já provou a dor
Quem sofreu, se amargurou
Viu a cruz e a vida em tons reais
Quem no certo procurou
Mas no errado se perdeu
Precisou saber recomeçar

Só quem já perdeu na vida sabe o que é ganhar
Porque encontrou na derrota algum motivo pra lutar
E assim viu no outono a primavera
Descobriu que é no conflito que a vida faz crescer

Que o verso tem reverso
Que o direito tem um avesso
Que o de graça tem seu preço
Que a vida tem contrários
E a saudade é um lugar
Que só chega quem amou
E o ódio é uma forma tão estranha de amar

Que o perto tem distâncias
Que esquerdo tem direito
Que a resposta tem pergunta
E o problema solução
E que o amor começa aqui
No contrário que há em mim
E a sombra só existe quando brilha alguma luz.

Só quem soube duvidar
Pôde enfim acreditar
Viu sem ver e amou sem aprisionar
Quem no pouco se encontrou
Aprendeu multiplicar
Descobriu o dom de eternizar

Só quem perdoou na vida sabe o que é amar
Porque aprendeu que o amor só é amor
Se já provou alguma dor
E assim viu grandeza na miséria
Descobriu que é no limite
Que o amor pode nascer

Dedico este trabalho aos meus pais Maria do Carmo e José Severino juntamente com Maria Eduarda e Emersson Matheus, meus filhos amados.

AGRADECIMENTOS

Gratidão é uma palavra libertadora, pois nos coloca diante de um grande dilema: fiz tudo só? Com certeza não. Foram muitas tribulações ao longo desta jornada, os episódios envolvendo minha família trouxeram a minha fé, tantas vezes abaladas, de volta. Sei que foram momentos muito difíceis, mas tentarei conviver com suas lembranças equilibradamente para que se no futuro ocorrerem semelhantes eu peça mais uma vez a Deus a força necessária para passar pelas dificuldades, contando com a família e os amigos.

Este momento é o mais propício para dizer a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram com este trabalho, pois foi graças a vocês que tudo foi possível.

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus, pois sem Ele não teria chegado a mais esta realização, tal qual o trecho do poema *pegadas na areia*: “Meu precioso filho. Eu te amo e jamais te deixaria nas horas da tua prova e do teu sofrimento. Quando vistes na areia, apenas um par de pegadas, foi exatamente aí que EU, nos braços.... Te carreguei."

Minha gratidão ao meu pai José Severino e minha mãe Maria do Carmo, que apesar da origem humilde, sempre valorizaram os estudos e me permitiram cursar uma faculdade ao invés de trabalhar em algum estabelecimento comercial ou mesmo alguma fábrica.

Quero agradecer as orações de minha mãe ao longo da minha vida, se hoje sou um professor, é pelo fato dela ter acreditado que eu seria capaz de desempenhar tão nobre tarefa. Relutei por um bom tempo, mas descobri que foi pela timidez e não pelo salário. Hoje é o que mais amo fazer, e não me vejo em outra profissão.

Ao meu irmão Emanoel Rodrigues pelas suas palavras encorajadoras de sempre, me fazendo acreditar que posso ir mais longe.

Ao meu avô paterno José Luiz (in memoriam), chamado por mim de “vûvû” e minha avó materna Josefa Maria (in memoriam) chamada de “vó” pelas lembranças felizes de minha infância e parte de minha adolescência.

A minha querida esposa Geocilene Alves pela compreensão de minhas ausências, pelo carinho demonstrado desde o início e por me enxergar como realmente sou.

Ao professor Franck Bellemain por ter me apoiado no início da jornada.

À professora Paula Baltar, pelo exemplo de ética, profissionalismo, amizade e respeito. Serei sempre grato pelos "puxões de orelha", pelos reconhecimentos, mas, sobretudo pela sua humanidade em compreender situações difíceis. Obrigado por sempre me fazer dar o meu melhor, me fazendo acreditar em meu potencial e me permitindo não desistir jamais.

À professora Verônica Gitirana, por ter aceitado ser minha co-orientadora, sua sinceridade, amizade e ética me permitiram conhecer mais um bom ser humano. Você faz parte de minha história e jamais esquecerei de sua paciência e dedicação.

Aos professores Abraão Juvêncio e Rosinalda Teles, pela participação na banca de defesa com seus comentários e perspectivas extremamente valiosos e relevantes neste trabalho.

À Professora Ana Paula Jahn por ter participado da banca de Qualificação e pelas contribuições dadas naquele momento.

Aos amigos do grupo de pesquisa Pró – Grandeza**:** Ensino-aprendizagem das grandezas e medidas pelo apoio e companheirismo.

Aos professores do EDUMATEC – Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, aqui representado nas pessoas de Rute Borba e Carlos Eduardo Monteiro.

Aos amigos Gleison Albuquerque, Cícero Pinheiro, Josivaldo Barbosa, Ricardo Amorim e Michela Macêdo pelo apoio e sinceridade.

Aos colegas de trabalho da Escola Professora Amélia Coelho, em especial a diretora Maria José e a professora Rogéria pelo apoio durante este ano tão difícil.

A todos da minha família e aos colegas do EDUMATEC.

À Clara Cavalcanti pela disponibilidade.

E por último, mas extremamente importante, aos alunos sujeitos da pesquisa, juntamente com o professor e a escola técnica, que não mediram esforços em nos ajudar sendo imprescindíveis para a realização desta pesquisa.

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e com base no modelo didático para a conceituação da área como grandeza, proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian, como alunos do ensino médio técnico lidam com a área de paralelogramos. Estudos anteriores mostraram que habitualmente, nos problemas de cálculo da área de um paralelogramo, os dados numéricos são necessários e suficientes para realizar o cálculo por meio da fórmula, a figura desenhada é “inclinada para a direita” e tem o lado de maior comprimento na posição horizontal. Elaboramos um teste de sondagem, que contemplou tarefas em que, ora essas características eram respeitadas, ora intencionalmente as condições eram bem diferentes das comumente observadas, como não fornecer os dados numéricos e deixar a cargo dos alunos a escolha do lado a ser tomado como base. Esse teste foi aplicado com 104 alunos de quatro turmas de 2º ano do ensino médio técnico de uma escola pública estadual da região metropolitana da cidade do Recife – PE. As resoluções dos alunos foram analisadas de três pontos de vista complementares: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas. Observamos que embora seja prevista a abordagem da área de paralelogramos desde o terceiro ciclo do ensino fundamental (6º e 7º anos), dificuldades de aprendizagem persistem entre os alunos no ensino médio. Quanto ao cálculo relacional, o uso de procedimento de resolução adequado à situação (produto dos comprimentos de um lado tomado como base pela altura correspondente, por exemplo) foi observado em aproximadamente 40% dos sujeitos, nas condições habituais, e 25% dos sujeitos na tarefa proposta em condições não habituais. Além disso, uma quantidade significativa de alunos empregou fórmulas erradas, com destaque para o produto dos comprimentos dos lados e cálculos que envolvessem, de diferentes maneiras todos os dados numéricos fornecidos. Em relação ao cálculo numérico, por volta de um terço dos estudantes cometeram algum erro em operações numéricas com números decimais, em pelo menos uma das tarefas. Sob o ponto de vista da álgebra das grandezas, percebemos que em ambas as tarefas, menos de 20% dos estudantes expressou a área do paralelogramo por meio de um par (número, unidade de área). Muitos alunos deram como resposta apenas um número e outros utilizaram unidades inadequadas, como o centímetro ou o centímetro cúbico. O cruzamento dos dados relativos aos três pontos de vista mostrou que o acerto simultâneo de cálculo relacional e cálculo numérico é de aproximadamente 30% em condições habituais e 20% em condições não habituais. Em ambas as tarefas, menos de um quarto dos alunos que acertam o cálculo relacional lidam adequadamente com unidades de comprimento e de área. Mesmo entre os alunos que expressam a área por meio de um número acompanhado de uma unidade de área, com frequência operam com números e ao final expressam o resultado acrescentando a unidade.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais. Área. Paralelogramo. Álgebra das grandezas.

RESUMÉ

L'objectif de ce travail est d'analyser, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud et de l'approche de l'aire en tant que grandeur développée par Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian, la résolution de tâches sur l'aire d'un parallélogramme par des élèves de lycée technique. Des études antérieures ont montré que de manière générale dans les problèmes d'aire d'un parallélogramme, les données numériques sont celles nécessaires et suffisantes pour calculer avec la formule, la figure est « inclinée vers la droite » et son côté le plus long est en position horizontale. Nous avons élaboré un test dans lequel il y avait des tâches où ces caractéristiques étaient respectées et des tâches où les conditions étaient assez différentes de celles le plus souvent observées, comme ne pas fournir des données numériques et laisser à la charge de l'élève le choix du côté pris comme base pour appliquer la formule. Ce test a été soumis à 104 élèves de quatre classes de deuxième année de lycée technique (élèves de 15-16 ans) dans un établissement public situé dans l'agglomération de la ville de Recife au Brésil. Les résolutions des élèves ont été analysées sous trois points de vue complémentaires : le calcul relationnel, le calcul numérique et l'algèbre des grandeurs. Bien que l'enseignement de l'aire d'un parallélogramme soit prévu au début du collège (élèves de 10-12 ans), des difficultés conceptuelles d'apprentissage importantes ont été observées au lycée. Par rapport au calcul relationnel, l'usage de procédures correctes (le produit des longueurs d'un côté pris comme base par la hauteur correspondante, par exemple) a été observé sur à peu près 40% des copies, dans la tâche proposée en conditions habituelles, et sur 25% des copies, quand ces conditions ne sont pas satisfaites. De plus, une quantité significative d'élèves ont employé des formules erronées, en particulier le produit des longueurs des côtes et des calculs employant toutes les données numériques fournies dans l'énoncé. En ce qui concerne le calcul numérique, environ un tiers des élèves ont commis des erreurs sur les opérations numériques avec des nombres décimaux, au moins une fois sur les questions du test. Du point de vue de l'algèbre des grandeurs, nous avons remarqué que sur les deux tâches étudiées moins de 20% des sujets ont exprimé l'aire par un nombre suivi d'une unité d'aire. La plupart des élèves ont fourni juste un nombre ou donné une réponse avec une unité de longueur (centimètre) ou de volume (centimètre cube). Le croisement des données relatives aux trois points de vue a montré que le taux des réponses justes à la fois du point de vue du calcul relationnel et du calcul numérique est environ de 30% dans la tâche conforme aux conditions habituelles et de 20% dans le cas inhabituel. Dans les deux tâches, moins d'un quart des lycéens qui ont employé un calcul relationnel adéquat à la situation utilisent correctement des unités de longueur et d'aire. Même parmi ceux qui expriment l'aire par un nombre suivi d'une unité d'aire, en général les élèves calculent sur des nombres et seulement à la fin, pour la réponse, ajoutent l'unité.

Mots-clefs: Théorie des champs conceptuels. Aire; Parallélogramme. Algèbre des grandeurs.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nosso interesse neste trabalho concentra-se no ensino e na aprendizagem do conceito de área, focando especificamente na área de um paralelogramo.

Observando o currículo de matemática da educação básica, nota-se que o conceito de área tem um papel importante. Por meio desse conceito, por exemplo, é possível abordar situações, tanto do dia a dia, como em vários campos profissionais e ainda conexões com outros conteúdos da própria matemática. Constata-se também que algumas disciplinas escolares tais como Física, Química, Geografia, entre outras, precisam utilizá-lo. Por exemplo, para entender o conceito físico de pressão, os alunos utilizam o conceito de área.

É comum, por parte da comunidade escolar, considerar o conceito de área como pertencente ao campo da geometria. Contudo, adotamos o modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989), segundo o qual a área pertence ao campo das grandezas geométricas. Segundo essas pesquisadoras para reconhecer uma grandeza faz-se necessário a distinção entre os quadros *numérico*, *geométrico* e o das *grandezas*. Pesquisas posteriores às de Douady e Perrin-Glorian, como Bellemain e Lima (2002) e Lima e Bellemain (2010) estendem esse modelo para considerar também o comprimento e o volume como grandezas geométricas.

Voltando nosso olhar para a área de um paralelogramo, encontramos na dissertação de Santos (2005) um trabalho muito importante, pois além de considerar área como parte das grandezas geométricas, põe luz em trabalhos anteriores a respeito deste tema.

Pesquisas anteriores (VINH BANG E LUNZER, 1965, BALTAR, 1996; BELLEMAIN; LIMA, 2002) relatadas por Santos (2005), mostram uma tendência por parte dos alunos em considerarem o paralelogramo como um retângulo deformado e em calcular a área do paralelogramo multiplicando os comprimentos de seus lados. O foco excessivo no aspecto numérico e o trabalho mecânico no uso da fórmula da área do paralelogramo parecem reforçar esses entraves.

Para Santos (2005) a verbalização da fórmula *“a área do paralelogramo é a base vezes a altura”*, pelo professor, cria algumas implicações. Uma delas reside no fato de que, neste tipo de abordagem, fica claro não ser valorizada a invariância da área com relação à escolha do lado tomado como base.

Outro elemento importante é a abordagem da figura *prototípica* do paralelogramo. Segundo Santos (2005) é bastante frequente serem apresentados aos alunos, na abordagem do professor ou mesmo do livro didático, um paralelogramo que possui lado de maior comprimento na horizontal (o qual é considerado como base), “inclinação da figura” para a direita e altura interna, conforme a Figura 1 a seguir.

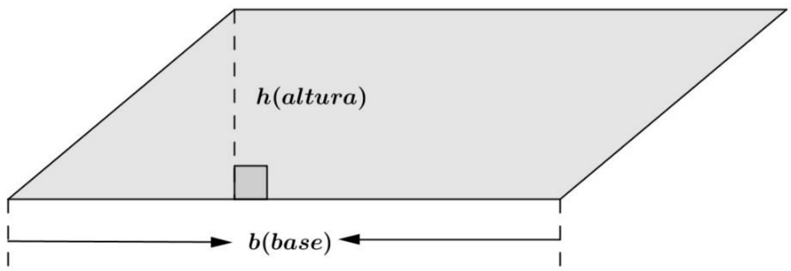


Figura 1: Figura prototípica de um paralelogramo

Para a pesquisadora o fato de apresentar raramente paralelogramos que não respeitem as características dessa figura prototípica, causa nos alunos problemas quanto ao reconhecimento do paralelogramo em outras posições ou com outras aparências e gera também dificuldades no cálculo de sua área, como por exemplo na Figura 2.

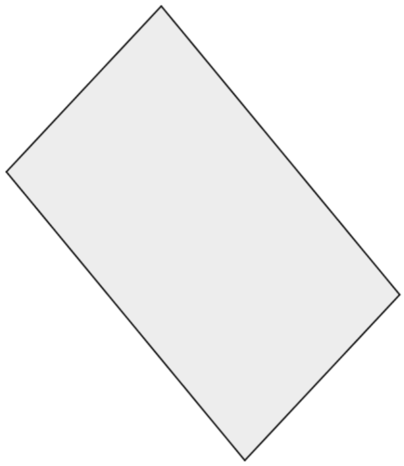


Figura 2: Paralelogramo não prototípico

O baixo índice de acertos, em relação ao cálculo da área de um paralelogramo, também é comentado por Santos (2005). Uma das justificativas apresentadas pela pesquisadora é que o aluno não consegue distinguir o objeto gráfico que representa o paralelogramo (o desenho) e o objeto teórico representado (a figura geométrica).

Nosso intuito nesta dissertação é investigar como estudantes do ensino médio lidam com situações de cálculo de área de paralelogramos. Para tal, utilizamos como suporte a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990), por meio da qual se pode investigar o desenvolvimento e a aprendizagem de competências cognitivas complexas. Para a abordagem de área como grandeza, apoiamo-nos em Douady e Perrin-Glorian (1989) e nos trabalhos que utilizam esse referencial como Baltar (1996) e Bellemain e Lima (2002).

No capítulo 1 é construída a problemática da pesquisa. Para isso, trazemos alguns elementos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990), apresentamos a abordagem de área como grandeza proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) e caracterizamos o campo conceitual das grandezas geométricas (BALTAR, 1996, LIMA; BELLEMAIN, 2010). Em seguida, focamos mais especificamente no paralelogramo e na área do paralelogramo, para o qual a principal fonte utilizada foi a dissertação de Marilene Rosa dos Santos (2005). Por fim, apresentamos nossos objetivos de pesquisa.

O capítulo 2 é dedicado ao percurso metodológico da pesquisa. Inicialmente apresentamos os sujeitos da pesquisa e as condições de aplicação do teste de sondagem, que foi o instrumento de coleta de dados utilizado. O teste foi aplicado com os alunos do 2º ano do ensino médio técnico de uma escola pública da região metropolitana da cidade do Recife – PE. Em seguida, expomos a análise a priori das questões do teste relativas ao cálculo da área do paralelogramo, focando três aspectos: o cálculo relacional (tipos de estratégias utilizadas), o cálculo numérico (existência de alguma dificuldade nas operações aritméticas) e a álgebra das grandezas (existência ou não de um tratamento algébrico relativo às unidades de medida).

O capítulo 3 traz a análise do teste com base nos elementos investigados nos capítulos anteriores.

Em nossas considerações finais, comentaremos sobre os principais aspectos da pesquisa e elementos para trabalhos posteriores. Em seguida, expomos nossas referências e os anexos.

1.1 CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

1.1.1 Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

Utilizou-se como suporte teórico nessa pesquisa a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990), por meio da qual se pode investigar o desenvolvimento e a aprendizagem de competências cognitivas complexas.

Segundo Vergnaud (1990), o conhecimento organiza-se em campos conceituais, os quais correspondem a conjuntos de situações que agregam uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que estão ligados fortemente entre si. No nosso caso, estamos interessados no estudo do campo conceitual das grandezas geométricas.

De acordo com a teoria, para estudar o desenvolvimento de um campo conceitual, é preciso enxergar o conceito através da tríade de conjuntos indissociáveis (S, I, Σ), a saber:

- **(S)** conjunto de **situações** que dão sentido ao conceito;

- **(I)** conjunto dos **invariantes operatórios,** os quais correspondem aos conhecimentos que estão dentro dos esquemas mobilizados no enfrentamento das situações, que conduzem à realização da tarefa;

- **(Σ)** conjunto das **representações simbólicas** que permitem expressar propriedades e resolver as situações problema que dão sentido ao conceito.

Estamos interessados no conceito de área, o qual de acordo com essa teoria é uma tríade composta das situações que dão sentido à área, dos invariantes operatórios e das representações simbólicas mobilizados no enfrentamento de situações envolvendo a área.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento é construído de forma gradual mediante a exposição a situações diversas. Por isso é importante, no ensino, propor uma variedade de situações que permitam a mobilização de diversos invariantes operatórios e representações simbólicas. Diferentes situações favorecem a aprendizagem de diferentes propriedades do conceito, uma vez que o conceito não se restringe a um único tipo de situação.

Dentre os invariantes operatórios, há os que Vergnaud (1990) denominou teoremas-em-ação e os que chamou de conceitos-em-ação.

> Os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não são explícitos. Eles são subjacentes ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação do aluno e seu âmbito de validade é normalmente menor que o âmbito dos teoremas. (MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2008, p. 16)

Vergnaud (1990) explica que um teorema-em-ação é uma proposição que o sujeito acredita ser verdade, mesmo que a mesma esteja incorreta do ponto de vista da matemática acadêmica. Além disso, os sujeitos os utilizam, mas não são necessariamente capazes de explicitá-los. Já os conceitos-em-ação não são nem verdadeiros nem falsos, mas podem ser adaptados ou não a determinada situação.

Por exemplo, vamos partir de um problema de cálculo da área de um paralelogramo, cujos comprimentos dos lados são 4cm e 7cm e a altura relativa ao lado de 7cm é 2,5cm, como na ilustração a seguir.

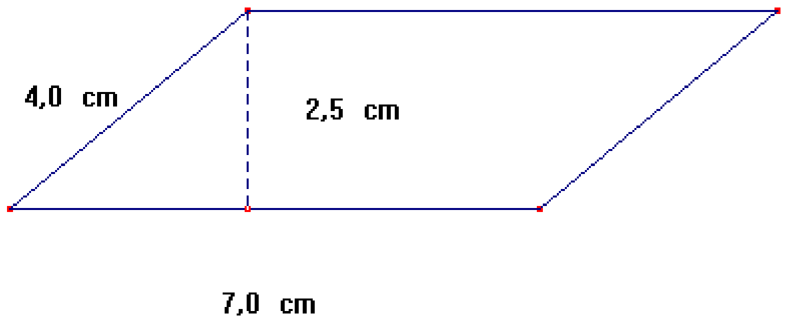


Figura 3: Exemplo de um paralelogramo

Ao resolver o problema, suponhamos que um aluno, explique que mentalmente cortou o paralelogramo em dois pedaços:

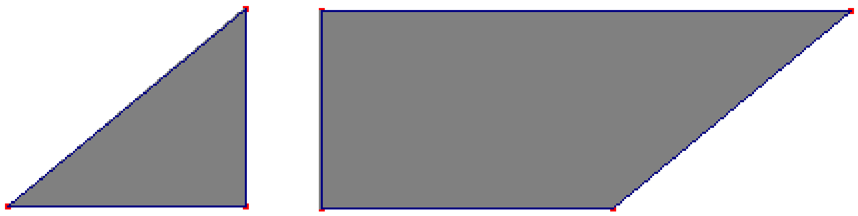


Figura 4: Corte do paralelogramo em dois pedaços

Juntou esses dois pedaços formando um retângulo.

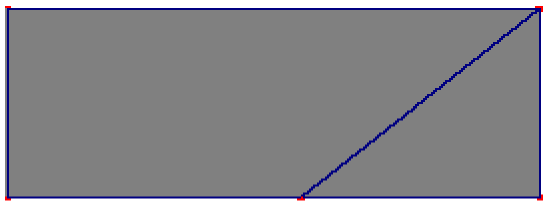


Figura 5: Junção dos dois pedaços

E calculou a área do paralelogramo multiplicando 7cm por 4cm, ou seja, os comprimentos dos lados do retângulo (que são os comprimentos de um dos lados do paralelogramo e da altura relativa a ele).

O aluno não é necessariamente capaz de explicitar que a área é invariante por isometrias, ou que se subdividimos uma figura em partes que tem apenas pontos de fronteira em comum, a área da figura é a soma das áreas dessas partes. Entretanto, essas propriedades são utilizadas pelo aluno na resolução do problema. Elas funcionam como teoremas-em-ação, que nesse caso são verdadeiros. Tampouco o aluno tem consciência de que realizou uma translação para movimentar o triângulo, mas na resolução, a translação funcionou como conceito-em-ação pertinente e adequado.

Suponhamos que outro aluno, para resolver o mesmo problema, multiplica os comprimentos dos lados (4cm por 7cm). Podemos interpretar essa ação como consequência da mobilização de um teorema-em-ação falso, segundo o qual a área de um paralelogramo é dada pelo produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. Como os retângulos são paralelogramos, há uma parte dos paralelogramos para a qual essa propriedade é verdadeira, mas não no caso geral.

Um terceiro caso possível, é de o aluno que diante da demanda de calcular a área do paralelogramo adiciona os comprimentos dos lados (4cm + 7cm + 4cm + 7cm). Uma interpretação possível desse caso é a mobilização do conceito de perímetro. O conceito de perímetro não é nem verdadeiro nem falso. Na resolução desse aluno, o perímetro foi mobilizado como um conceito-em-ação, que no caso é inadequado para o problema.

Um desafio importante da pesquisa é identificar os invariantes operatórios errôneos ou inadequados mobilizados pelos alunos a fim de criar condições para que sejam desestabilizados.

Gérard Vergnaud, em seus estudos sobre as estruturas aditivas, fez uma classificação de acordo com as dificuldades dos problemas e raciocínios requeridos para resolvê-los. Esta classificação permite ao pesquisador interpretar mais profundamente o comportamento das crianças ao se defrontarem com problemas aritméticos elementares (MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2008). Além disso, na análise da resolução de problemas aritméticos pelos alunos é necessário lançar mão de dois conceitos fundamentais e distintos: o cálculo relacional e o cálculo numérico.

> O cálculo numérico refere-se às operações usuais de adição, subtração, multiplicação, divisão, etc. O cálculo relacional refere-se às operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações. (MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2008, p. 24)

Os dois fatores tratados acima permitem ao pesquisador lançar mão de duas formas de análise que vão de encontro ao simplismo do acertou/errou.

No nosso caso, estamos interessados na aprendizagem das grandezas geométricas e suas medidas, mais precisamente, do cálculo da área de paralelogramos.

Em relação à medição de uma grandeza, Vergnaud (2009) destaca

> A medida direta das grandezas supõe que se disponha de um meio “direto” de associar a um objeto um número que será sua medida ou, ao menos, de atribuir-lhe uma aproximação [...] Muitas grandezas são suscetíveis de

> medida direta graças à existência de um sistema de medidas completas que se prestam à aproximação direta. (VERGNAUD, 2009[1], p. 155)

Vergnaud (2009) explica que o cálculo da área de um retângulo é igual ao produto de seu comprimento por sua largura e que as unidades de área são caracterizadas pelo produto de unidades de comprimento:

> [...] a dimensão área é a dimensão produto da dimensão largura e da dimensão comprimento; e a área do retângulo é o produto da medida da largura pela medida do comprimento. Portanto, as medidas de superfícies são expressas pelas unidades que são o produto das unidades de comprimento: 1 metro x 1 metro = 1 metro quadrado. (VERGNAUD, 2009, p. 155)

Segundo Vergnaud (2009) pode-se estender esse raciocínio para a compreensão dos volumes, gerando as unidades de volume, a partir do produto de um comprimento, por um comprimento e por um comprimento, ou ainda, de uma área por um comprimento.

Também, conforme Vergnaud (2009) fica claro que o ensino de Física trabalha com outras formas de composição multiplicativa das medidas[2], por exemplo, a noção de trabalho que é o produto de uma força por um comprimento. “Aliás, os físicos imaginaram uma forma particular de cálculo para esse problema da composição multiplicativa das medidas, a análise dimensional[3]” (VERGNAUD, 2009, p. 160).

A análise dimensional, o que mais tarde será chamado de álgebra das grandezas, se presta a compreender que tipo de unidade de medida é identificado pelo aluno para o cálculo da área de um paralelogramo, permitindo realizar inferências a respeito da compreensão do conceito de grandeza.

Outra implicação da Teoria dos Campos Conceituais sobre o ensino é evidenciar a importância de explorar um amplo conjunto de símbolos com significado para os alunos, a fim de permitir uma compreensão mais profunda dos conceitos.

---

[1] A tradução desse texto de Vergnaud para o português é recente, mas originalmente a obra foi publicada em francês em 1985.

[2] Vergnaud chama de medida, algo que Douady e Perrin-Glorian chamam de grandeza.

[3] Sob a ótica de Douady e Perrin-Glorian, a análise dimensional remete às grandezas e não às medidas.

Estamos interessados especificamente no conhecimento que os alunos do ensino médio detêm sobre a área do paralelogramo. Vamos questionar quais as situações que dão sentido ao conceito de área, e mais especificamente à área do paralelogramo e quais os invariantes operatórios e representações simbólicas mobilizados pelos alunos na resolução de problemas sobre a área do paralelogramo.

A seguir, focaremos a definição matemática de *área*, tomando como base Bellemain e Lima (2002, p.121-122), os quais por sua vez, se apoiam na construção apresentada por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Esta abordagem nos favorecerá na identificação de elementos importantes para o domínio do conceito de área.

1.1.2 Área como grandeza

Para a discussão do sentido que é dado à área como grandeza, o texto que segue está apoiado em Douady e Perrin-Glorian (1989) e nos trabalhos que utilizam esse referencial, como Baltar (1996) e Bellemain e Lima (2002).

O termo ***superfície*** remete a um subconjunto limitado do plano euclidiano. Define-se então uma função **f**, a qual será chamada de **função área**, cujo domínio é um conjunto **S** de superfícies, cujo contradomínio são os números reais não negativos, e que possui três propriedades:

- **Positividade**: uma superfície que possua interior não vazio tem área positiva;
- **Aditividade**: se duas superfícies **A** e **B** têm em comum no máximo pontos de sua fronteira, então a área da superfície $A \cup B$(união de **A** e **B**) é a soma da área de **A** com a área de **B**;
- **Invariância por isometrias**: se uma superfície **A** é transformada em outra, **B**, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de **A** fica inalterada em **B**, então, **A** e **B** têm a mesma área.

Assumidas as propriedades acima, há dois desafios conceituais importantes: definir o domínio **S** da função **f**, ou seja, quais são as superfícies **mensuráveis** pela função área **f** e determinar um método que permita estabelecer as correspondências entre superfície e número.

Toma-se um quadrado **U** cujo lado tem comprimento 1 para a superfície unitária e f_U a função área tal que $f_U(U) = 1$. Neste momento estabelece-se a **medida de área** da superfície **A**, na **unidade de medida** U, representada por $f_U(A)$. Desse modo,

> [...] a função área permite construir no conjunto das superfícies planas, as classes de equivalência das superfícies que tem a mesma área. Daí definirmos que: **a)** duas superfícies tem a mesma área se pertencem à mesma classe de equivalência; **b)** duas superfícies têm áreas diferentes se não pertencem à mesma classe de equivalência. (SANTOS, 2005, p. 28)

As pesquisadoras francesas Douady e Perrin-Glorian (1989) defendem que a compreensão do conceito de área se dá mediante a distinção entre três quadros: o *numérico*, o *geométrico* e o das *grandezas*. Para entender essa proposta, vamos inicialmente esclarecer o que vem a ser um quadro:

> "Dizemos que um **quadro** é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento, a esses objetos e relações." (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389, tradução nossa) [4]

Segundo a organização conceitual proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989), as superfícies fazem parte do quadro geométrico, as áreas fazem parte do quadro das grandezas e as medidas de área são números reais positivos pertencentes ao quadro numérico.

A respeito da aprendizagem do conceito de área, os estudos das pesquisadoras mostraram que alguns alunos desenvolvem uma concepção forma (ligada ao quadro geométrico) ou uma concepção número (ligada ao quadro numérico) ou ambas, mas de forma isolada uma da outra (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

[4] Nous disons qu'un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathematiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet asscocie à un moment donné à ces objets et ces relations. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p.389)

Assim, as concepções numéricas seriam aquelas segundo as quais o aluno só utiliza os aspectos pertinentes para o cálculo e as concepções geométricas são aquelas segundo as quais o aluno confunde área e superfície.

Diante do reconhecimento dessas concepções numéricas e geométricas, as autoras sugerem que “o desenvolvimento, no ensino, do conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico”[5] (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 395, tradução nossa). E também, “uma identificação precoce demais entre grandezas e números favorece o amálgama de diferentes grandezas”[6] (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 396, tradução nossa). Essas hipóteses foram testadas por meio da elaboração e experimentação de uma engenharia didática na França, em turmas do nível equivalente ao segundo ciclo (quarto e quinto anos) do ensino fundamental brasileiro.

Douady e Perrin-Glorian (1989) esclarecem que a definição de quadro possui um caráter dinâmico e recomendam para uma melhor compreensão dos conceitos que sejam realizadas *mudanças de quadros*, que na verdade são

> [...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem ser necessariamente equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e colocam em uso os objetos e técnicas que não apareciam na primeira formulação.[7] (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389, tradução nossa)

Quando as mudanças de quadro são intencionais diz-se que é feito um jogo de quadros.

> [...] as mudanças de quadros, provocadas por iniciativa do professor, nos problemas que respeitam as condições enunciadas acima, para fazer avançar as fases da resolução, notadamente para elaborar uma filiação de questões pertinentes em relação ao problema exposto, que tem lugar em

---

[5] "le developpement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique)".(DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 395)

[6] "une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs".(DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 396)

[7] [...] un moyen d’obtenir des formulations différentes d’un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d’outils et techniques qui ne s’imposaient pas dans la première formulation. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389)

> certa situação de aprendizagem.[8] (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389, tradução nossa)

A engenharia didática proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989) evidenciou a pertinência dos jogos de quadros envolvendo os quadros numérico, geométrico e das grandezas na superação dos entraves identificados na construção do conceito de área.

Vários pesquisadores da comunidade de Educação Matemática apoiam-se na abordagem da área como grandeza proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989), como é o caso de: Baltar (1996), Bellemain (2000), Bellemain e Lima (2002), Facco e Almouloud (2004), Santos (2005), Teles (2007), Melo e Bellemain (2008), Pessoa (2010), entre outros. A falta de apropriação por parte de alunos a respeito do conceito de área, verificada nestas pesquisas, aponta para lacunas na compreensão deste conceito como parte das grandezas geométricas.

Nessa pesquisa adotamos a abordagem de área como grandeza e consideramos, portanto, esse conceito como parte do campo conceitual das grandezas geométricas.

A compreensão da área envolve diversos campos conceituais: o da geometria, o dos números, o das funções (BELLEMAIN; LIMA, 2002; TELES, 2007). Comumente os professores consideram que a área é um conteúdo da geometria. Por outro lado, nas orientações curriculares atuais para o ensino fundamental, área e perímetro são conteúdos do bloco das grandezas e medidas, o que é discutido no próximo tópico. Pretendemos de forma breve, esclarecer a relação entre os campos da geometria e das grandezas e medidas apoiando-nos nos trabalhos de Lima e Carvalho (2010) e Lima e Bellemain (2010).

1.1.3 O campo conceitual das grandezas geométricas

A geometria tem desempenhado um grandioso papel em todas as sociedades e culturas através dos tempos, e também em nossos dias. Vale destacar que "uma

---

[8] [...] sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes répondant aux conditions énoncées ci-dessous, pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé, lequel prend place dans une certaine situation d'apprentissage. (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389)

das razões da importância da geometria é sua presença constante em nosso dia a dia [...] sempre ocupou um lugar de destaque, desde as primeiras fases do desenvolvimento do saber matemático” (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 135). Citando alguns povos antigos tais como egípcios e babilônios, existia dentre suas demandas sociais a necessidade de mensurar certas regiões de terras. O conhecimento necessário para vencer tal desafio estava na geometria.

Por exemplo, na civilização egípcia observa-se o uso “de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras [...] Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro” (EVES, 2004, p.75). Já em relação à Babilônia, a utilização do conhecimento geométrico “se relaciona intimamente com a mensuração prática. [...] a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência” (EVES, 2004, p.60-61). A engenharia também é repleta de situações em que é necessário o conhecimento geométrico. Por exemplo, o ato de realizar um empreendimento de construção física, necessitamos usar diversos elementos tais como formas, ângulos, área, etc.

Olhando para o esforço de se mensurar a área de certa região por parte das civilizações citadas e olhando para as construções da engenharia, percebe-se o quão importante é o ensino de geometria, pois ao negá-lo, estaremos privando o estudante de se apropriar de um conhecimento que permeia tanto o espaço escolar quanto o seu quotidiano.

Geralmente, é no campo da geometria que se estuda, entre outros conteúdos, aquilo “que hoje podemos chamar de grandezas geométricas – comprimento, área, volume e abertura de ângulo. Isso explica porque alguns tratam essas grandezas como parte do campo da geometria.” (LIMA; CARVALHO 2010, p. 136).

Contudo, nas modificações curriculares recentes as grandezas geométricas estão incluídas no campo das grandezas e medidas. Com esta atitude dá-se importância ao ensino do conceito de grandeza de um modo geral e não apenas às grandezas geométricas (LIMA; CARVALHO, 2010). Neste trabalho, mesmo que nosso interesse esteja voltado para uma grandeza geométrica (a área), entendemos que este conteúdo também se relaciona com outros campos da matemática escolar, tais como: *números e operações*, *espaço e forma*, *tratamento da informação* e *grandezas e medidas*. Neste sentido, corroboramos com o pensamento dos autores e também com as mudanças curriculares propostas, pois entendemos que desse ponto de vista há uma ampliação no tratamento deste conteúdo.

O próximo esquema, apresentado por Lima e Carvalho (2010) esclarece melhor a relação entre geometria, grandezas geométricas e as grandezas.

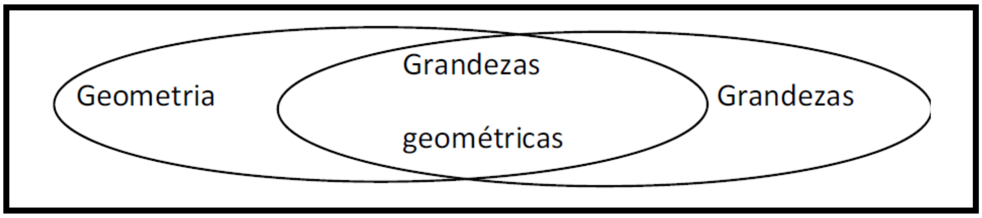


Figura 6: Diagrama da relação entre geometria, grandezas geométricas e as grandezas

Nota-se uma intersecção entre o campo da geometria e o das grandezas, que são as grandezas geométricas, assim

> O esquema indica, também, que é possível abordar assuntos de geometria em que não intervêm necessariamente as grandezas geométricas – o paralelismo entre retas, por exemplo – e, por outro lado, estudam-se grandezas que não são geométricas, como a massa, a temperatura e o valor monetário. (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 137)

A demarcação de um campo das grandezas e medidas permite também trazer à tona um tema de bastante relevância que é o processo de medição, no qual são considerados “a escolha das unidades, o conhecimento das relações entre elas, além do emprego de instrumentos de medição” (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 136-137).

Para entendermos melhor, pensemos no objeto geométrico quadrado, que pode ser definido como um *quadrilátero que possui quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos*. Esta definição refere-se a um objeto abstrato e por isso não é passível de medições com instrumentos concretos. Se procurarmos realizar medições ao exemplificá-lo concretamente sobre algum suporte (desenho, madeira, plástico, etc.), veremos que os comprimentos dos lados não são exatamente iguais, nem os ângulos medem exatamente 90 graus. Enfatizar apenas o aspecto geométrico das grandezas geométricas leva a destacar o estudo dos objetos abstratos, enquanto que a abordagem sob o ponto de vista das grandezas abre margem para estudar também o aspecto prático da medição e as questões ligadas à imprecisão da medição concreta, o que é mais um argumento em favor da consideração das grandezas e medidas como um bloco específico da matemática escolar (LIMA; CARVALHO, 2010).

Existe um laço estreito entre os objetos geométricos, as grandezas e as medidas de uma dada grandeza, pondo-se um grande desafio ao ensino desses conceitos para diferenciá-los e articulá-los simultaneamente (LIMA; BELLEMAIN, 2010).

O processo de “distinção entre objetos e grandezas justifica-se, também, por outra razão. É que a um mesmo objeto é possível associar várias grandezas” (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 174). Por exemplo, consideremos o objeto aquário cujo formato é de um paralelepípedo retângulo, podemos tentar medir sua capacidade, a medida da sua massa, as medidas de comprimento de suas arestas, etc. Desse modo a grandeza que tentaremos medir será o atributo que considerarmos no objeto.

O esquema a seguir mostrado no trabalho de Lima e Bellemain (2010) situa a relação entre objetos geométricos, grandezas e medidas.

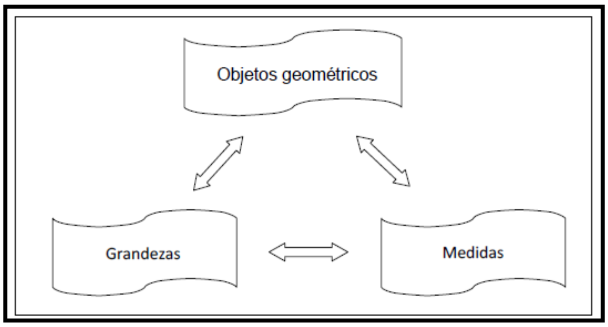


Figura 7: Relação entre objetos geométricos, grandezas e medidas.

Os autores acima ainda acrescentam, que este esquema “*pode ajudar na compreensão e no ensino dos fatos ligados a várias grandezas, em particular, comprimento, área e volume*” (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 175).

Nesta perspectiva, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN) considera-se área como pertencente ao bloco de *grandezas e medidas*, destacando que este campo é *“um articulador entre os diversos conteúdos matemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas”.* (BRASIL, 1998, p.85).

O estudo realizado por Baltar em sua tese de doutorado (BALTAR, 1996) sobre o ensino e a aprendizagem da área de figuras planas, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, a conduz a propor o esquema a seguir, apoiado na modelização da área como grandeza oriunda dos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989).

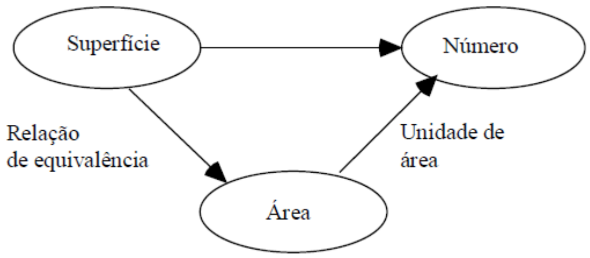
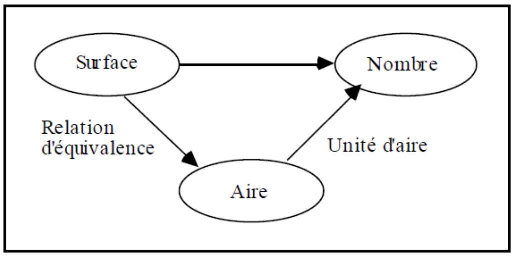


Figura 8: Modelização das relações entre os quadros numérico, geométrico e o das grandezas

Segundo Baltar (1996, p. 81, tradução nossa) [9] entender este esquema lança as bases para suscitar os principais elementos para o estudo de situações problema relativas ao conceito de área como grandeza, são eles:

a) as superfícies planas (objetos do quadro geométrico);
b) as áreas (objetos do quadro das grandezas);
c) as medidas de áreas – números reais positivos (objetos do quadro numérico);
d) a relação de equivalência "ter a mesma área" (objeto que permite passar do quadro geométrico ao das grandezas);
e) as unidades de área (objeto que permite passar do quadro das grandezas ao das medidas.

9

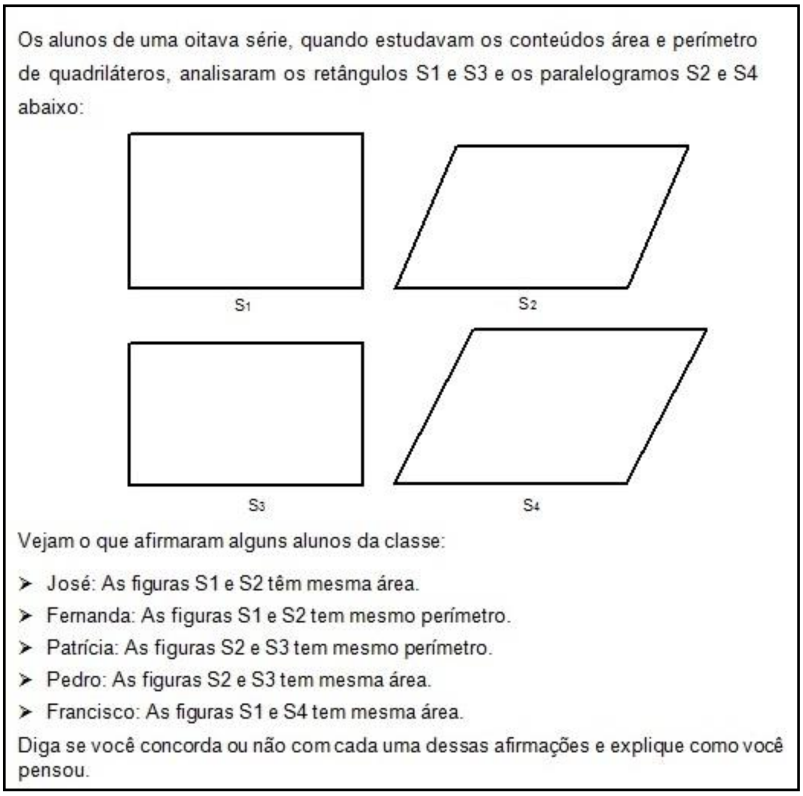


a) les surfaces planes (objets du pôle géométrique);
b) les aires (objets du pôle grandeur);
c) les mesures d'aire – nombres réels positifs (objets du pôle numérique);
d) la relation d'équivalence 'avoir même aire' (objet qui permet le passage entre le pôle géométrique et le pôle grandeur);
e) les unités d'aire (objets qui permettent d'établir le passage entre le pôle grandeur et le pôle numérique).

Diante do exposto acima, Baltar (1996) dá ênfase a três grandes classes de situações[10] relativas ao conceito de área, são elas: as **situações de comparação**, as **situações de medida** e as **situações de produção de superfícies**.

> As **situações de comparação** se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas: quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários à resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas. [11] (BALTAR 1996, p. 82, tradução nossa)

A Figura 9 mostra um exemplo de situação de comparação.


Os alunos de uma oitava série, quando estudavam os conteúdos área e perímetro de quadriláteros, analisaram os retângulos S1 e S3 e os paralelogramos S2 e S4 abaixo:

Vejam o que afirmaram alguns alunos da classe:

- José: As figuras S1 e S2 têm mesma área.
- Fernanda: As figuras S1 e S2 tem mesmo perímetro.
- Patrícia: As figuras S2 e S3 tem mesmo perímetro.
- Pedro: As figuras S2 e S3 tem mesma área.
- Francisco: As figuras S1 e S4 tem mesma área.

Diga se você concorda ou não com cada uma dessas afirmações e explique como você pensou.

Figura 9: Exemplo de uma situação de comparação

Segundo Baltar (1996)

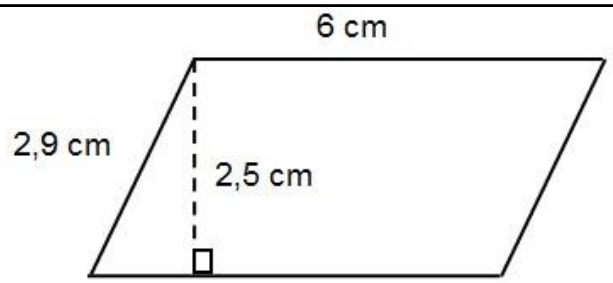
---

[10] Em conformidade com a Teoria dos Campos Conceituais, o termo situação é usado como tarefa cognitiva e não com o sentido amplo dado por Brousseau (1986) na Teoria das Situações Didáticas.

[11] Les **situations de comparaison** se placent essentiellement autour du pôle des grandeurs: quand on compare les aires de deux surfaces, on décide en particulier, si elles appartiennent à une même classe d'équivalence. Rien n'empêche que l'on utilise les autres pôles (géométrique et numérique) dans les situations de comparaison, mais leur intervention reste marginale par rapport à celle du pôle grandeur. (BALTAR, 1996, p. 82)

> Nas **situações de medida**, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. Analisamos também nas situações de medida, aquelas que dizem respeito às mudanças de unidade. [12] (BALTAR 1996, p. 82, tradução nossa)

A Figura 10 ilustra um exemplo de situação de medida.



a) Calcule a medida da área do paralelogramo. Explique como você fez.

b) Calcule a medida do perímetro do paralelogramo. Explique como você fez.

Figura 10: Exemplo de uma situação de medida

Ainda segundo Baltar (1996)

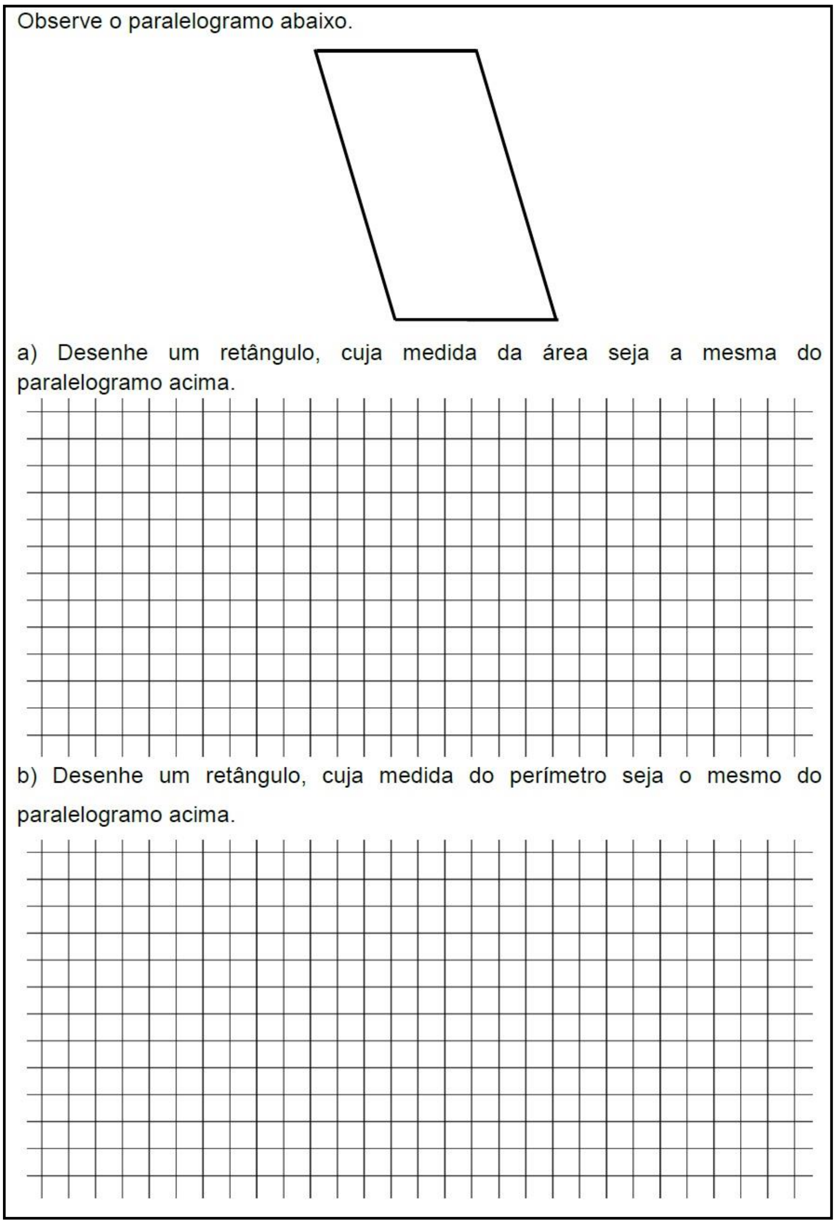
> As **situações de produção** são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, admitem várias respostas corretas. O resultado esperado é uma superfície (objeto geométrico), mas a intervenção dos demais polos pode ser muito importante.[13] (BALTAR, 1996, p. 82, tradução nossa)

A Figura 11 mostra um exemplo de situação de produção.

---

[12] Dans les **situations de mesure**, la place privilégiée est accordée au pôle numérique et au passage de la grandeur au nombre, par le choix d'une unité. Nous analysons aussi, au sein des situations de mesure, celles qui concernent les changements d'unité. (BALTAR, 1996, p. 82)

[13] Les **situations de production** sont différentes des précédentes du point de vue de la tâche cognitive à la charge de l'élève. Si pour les comparaisons et les mesures il n'y a qu'une réponse juste pour chaque situation, les situations de production admettent plusieurs réponse exactes. Le résultat attendu est une surfasse (objet du pôle géométrique), mais l'intervention des autres pôles peut être également très importante. (BALTAR 1996, p. 82)


Observe o paralelogramo abaixo.

a) Desenhe um retângulo, cuja medida da área seja a mesma do paralelogramo acima.

b) Desenhe um retângulo, cuja medida do perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima.

Figura 11: Exemplo de uma situação de produção

Cabe mencionar que nessa pesquisa decidimos focar o modo como os alunos lidam com situações de medida da área do paralelogramo.

A seguir, discorreremos de modo breve sobre figuras prototípicas de paralelogramo de modo a entender possível a influência da representação gráfica da figura sobre a resolução de tarefas relativas à área do paralelogramo.

1.1.4 Figuras prototípicas de paralelogramo

Como já foi dito, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, o sentido que um conceito tem para um sujeito depende de três dimensões: as situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas. Nesse tópico vamos focar na dimensão das representações simbólicas.

A ideia que alguém tem de paralelogramo depende entre outros aspectos da variedade de representações de paralelogramo com as quais tem contato. As representações figurativas de paralelogramos vão, portanto, ter influência sobre a compreensão que se tem do que é um paralelogramo. Por isso, vamos nos interessar pela maneira como os paralelogramos são representados graficamente, o que conduz a refletir sobre a noção de figuras prototípicas.

Há maneiras de representar as figuras geométricas, nos livros didáticos, por exemplo, que são amplamente predominantes e por vezes exclusivas. Segundo Pais (2006)

> [...] entre os desenhos que geralmente aparecem nos livros didáticos, alguns destacam-se por apresentar semelhanças relacionadas a uma posição ou a uma forma particular. São desenhos usados frequentemente, por isso despertam interesse para a educação matemática. (PAIS, 2006, p. 97)

Ainda para Pais (2006) ao se estudar os conceitos geométricos a utilização de um desenho é um importante suporte para aprendizagem, contudo o desenho possui uma natureza particular e, portanto, oposta às características do conceito. De modo que, “o aluno pode fixar sua atenção em determinados aspectos do desenho, e não perceber a totalidade intencionada na representação” (PAIS, 2006, p. 97).

Vamos chamar de figura prototípica a representação simbólica que congrega as características predominantes da figura em questão, em determinado contexto (no nosso caso, na escola). Voltando nosso olhar para a figura do paralelogramo, apoiados nos trabalhos de Santos (2005) e Teles (2007), vamos considerar alguns elementos:

- Algum dos lados está posicionado na horizontal ou na vertical?
- Em que posição se encontra o lado de maior comprimento?
- A “inclinação da figura” é para a direita ou para a esquerda?

A figura abaixo ilustra exemplos de paralelogramo e o leitor poderá constatar que alguns são mais facilmente reconhecidos como paralelogramos, pois suas características são conforme aos paralelogramos prototípicos:

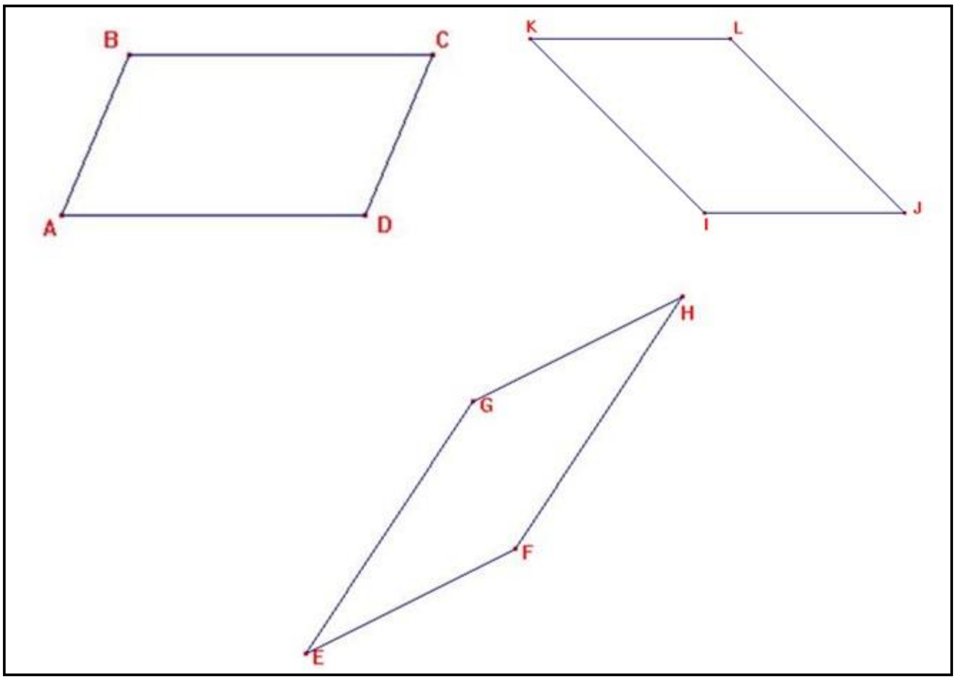


Figura 12: Exemplos de paralelogramos

Se no ensino só são abordados paralelogramos como o ABCD, dificilmente os alunos reconhecerão como paralelogramos e saberão lidar adequadamente com figuras como EFGH ou IJKL. Tomando as bordas da folha de papel como sistema de referência, podemos observar que ABCD tem o lado de maior comprimento posicionado na horizontal e a “inclinação da figura” é para a direita. Já IJKL, embora tenha um lado horizontal, ele é o de menor comprimento e a “inclinação da figura” é para a esquerda. No caso do paralelogramo EFGH, nenhum de seus lados está na posição vertical ou horizontal. Conforme mostram Santos (2005) e Teles (2007), o desempenho dos alunos na resolução de problemas envolvendo a área de um paralelogramo depende, entre outros fatores, de a figura parecer ou não com o paralelogramo prototípico.

Pais (2006) destaca que as figuras prototípicas possuem uma importância didática diferenciada e a análise destas pode fornecer informações pedagógicas possibilitando a dinamização do ensino da geometria. Por outro lado, consideramos também que é necessário, no processo de ensino explorar configurações variadas a fim de ampliar a compreensão dos sujeitos.

1.1.5 Estudos sobre o ensino e a aprendizagem da área do paralelogramo

A dissertação de mestrado de Santos (2005) foi o motor para condução de nossa pesquisa. O objetivo do trabalho da pesquisadora foi investigar as possíveis relações entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental[14] e os procedimentos utilizados pelos alunos de uma 8ª série (9º ano) na resolução de problemas relativos a esse tema. Em nossa pesquisa analisamos as estratégias de alunos do ensino médio, na resolução de problemas sobre a área de paralelogramos, sob a ótica da teoria dos campos conceituais. Pretendemos, portanto, verificar persistências, ou não, de aspectos apontados por Santos.

Em relação à figura do paralelogramo investigada na coleção de livros didáticos por Santos (2005) notam-se as seguintes regularidades: a) o paralelogramo desenhado encontra-se comumente na posição horizontal; b) o lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal; c) a “inclinação do paralelogramo” é para a direita; d) sempre existe nos problemas envolvendo área do paralelogramo a presença da figura. A pesquisadora constata, mediante as observações citadas acima, que a figura prototípica associada comumente ao paralelogramo, no livro didático da coleção investigada, é aquela em que a “figura tem inclinação para a direita” e o lado de maior comprimento encontra-se na horizontal. Em relação a nossa pesquisa, este fator é levado em consideração na elaboração do instrumento de coleta de dados, como uma variável, ora respeitando as características da figura prototípica ora rompendo com essas mesmas características. Nossa intenção é observar como os alunos lidam com este tipo de situação, e que procedimentos utilizam em sua resolução.

Santos (2005) mostra também que o livro didático analisado explora composição e decomposição de figuras na abordagem do conceito de área, o que, de acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996) ajuda na

[14] Na terminologia atualmente vigente, trata-se da etapa de 6º ao 9º ano do ensino fundamental

compreensão de área como uma grandeza, pois permite que sejam relacionados o quadro geométrico e o das grandezas. Mas desde o início, para comparar as áreas de duas figuras, o procedimento utilizado é baseado no critério do ladrilhamento, prevalecendo assim o aspecto numérico. Ainda de acordo com as pesquisas anteriores que adotam a abordagem da área como grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, BELLEMAIN; LIMA, 2002, entre outros), o foco exagerado no aspecto numérico tem gerado ou pelo menos reforçado entraves persistentes na aprendizagem da área de figuras planas. Dentro de nossa pesquisa, analisaremos como os alunos lidam com a álgebra das grandezas, que trata, entre outros aspectos, de como operam com as unidades de medida. Não indicar a unidade de medida, aponta na direção de que para o aluno a área é um número.

Santos (2005) ainda analisou os procedimentos errôneos que os alunos utilizaram na resolução de problemas. A pesquisadora constatou que os erros mais comuns para o cálculo da área de um paralelogramo são o uso de fórmulas erradas e a omissão ou o uso inadequado das unidades de medida. Ambos podem ser interpretados como indícios de concepção numérica. Já em nossa pesquisa, verificaremos a permanência e/ou ampliação destes aspectos, mediante análise do cálculo relacional (que caracteriza a estratégia utilizada pelo aluno na resolução da atividade).

A análise da convergência entre a abordagem do livro didático e o procedimento dos alunos feita por Santos (2005) aponta que tanto na coleção de livros didáticos pesquisada quanto nos procedimentos dos alunos é importante o uso das figuras como suporte para representação, ou seja, o valor presença da figura é frequente na variável didática existência de figura. Este aspecto também é contemplado na elaboração e análise a priori do instrumento de coleta de dados.

Outro ponto abordado por Santos (2005) é o desconforto de muitos alunos ao lidarem com grandezas geométricas, em especial a área. Ao analisar pesquisas anteriores, a autora verificou que os estudantes avaliados cometeram com frequência os seguintes erros: confusão entre área e perímetro, uso inadequado de unidades, utilização de fórmulas errôneas (por exemplo, determinar a área de um paralelogramo multiplicando os comprimentos dos seus lados). Também é destacado pela pesquisadora que apenas a verbalização da fórmula da área de um paralelogramo, por parte do professor, não permite ao aluno entender em que contexto ela pode ser usada. Assim, "deixa de valorizar a invariância da área com relação à escolha do lado tomado como base e de apresentar situações nas quais tal fórmula poderia ser aplicada" (SANTOS, 2005, p. 32).

Santos (2005) explica que a base e a altura de um paralelogramo assumem dois pontos de vista: o do objeto geométrico e o das grandezas.

> Do ponto de vista do objeto geométrico, pode-se considerar base como sendo qualquer um dos lados do paralelogramo e a altura um segmento de reta perpendicular, em que uma das extremidades é um vértice e a outra se situa na reta suporte do lado oposto a ele. Do ponto de vista das grandezas, base é o comprimento do lado escolhido e a altura é a distância entre os dois lados paralelos que são tomados como base. (SANTOS, 2005, p. 33-34)

Para melhor entendermos que a fórmula para o cálculo da área de um paralelogramo (A = b x h) não depende da escolha de um determinado lado tomado como base, faremos a seguir uma demonstração matemática.

Seja ABCD um paralelogramo, em que ***a*** e ***b*** são os comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente. Do mesmo modo, **x** e **y** são os respectivos comprimentos das alturas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$. Os prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ interceptam respectivamente as alturas **y** e **x** nos pontos **E** e **F**, determinando (pelo caso ângulo/ângulo/ângulo) triângulos semelhantes: BCE e BAF. Sendo assim: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Logo, $x.b = a.y$

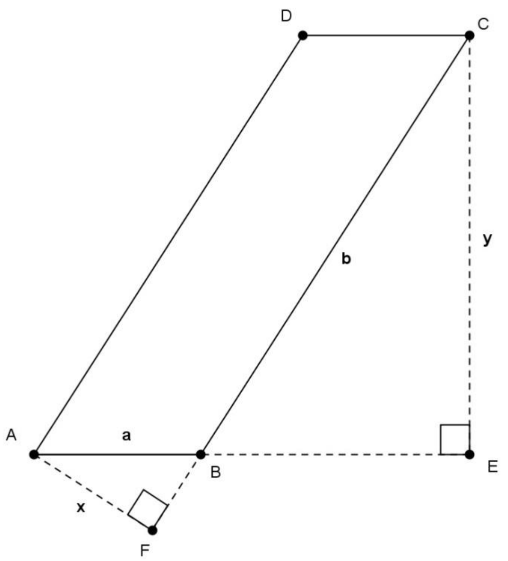


Figura 13: Invariância da área com relação à escolha da base

Conclui-se que, se a área de ABCD pode ser obtida pelo produto de **x** por **b** e pelo produto de **y** por **a** então, a área do paralelogramo é invariante com relação à escolha do lado que é tomado como base.

Na intenção de compreender o conhecimento dos alunos em relação à área do paralelogramo, Santos (2005) lança mão de dois elementos situados dentro da Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1986), que são: contrato didático e variável didática. Assim, o contrato didático é um

> [...] conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas se assemelha a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer a parte do contrato que é específica ao conteúdo: o conhecimento matemático visado. (BROUSSEAU, 1996 apud SANTOS, 2005, p. 37)

Em um contexto geral, para o ensino de matemática, Almouloud (1996 apud Santos, 2005, p. 38) evidencia algumas regras de contrato didático bastante frequentes: a) na matemática, um problema resolve-se a partir de operações; b) todos os dados necessários à resolução de um problema encontram-se no enunciado, raramente são apresentados dados inúteis e c) há sempre uma resposta para uma questão matemática e o professor a conhece.

Já em relação a variável didática, Santos (2005) afirma que

> [...] é uma ferramenta importante na categorização dos problemas matemáticos a serem propostos aos alunos, na elaboração de problemas adaptados para desestabilizar regras de ação errôneas, na escolha de problemas que contribuam significativamente para a aprendizagem e na análise dos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos, inclusive nos erros cometidos. (SANTOS, 2005, p. 35-36)

Santos (2005), em sua abordagem explicativa sobre as escolhas de variáveis didáticas, considera duas grandes categorias: a figura do paralelogramo e os problemas envolvendo área do paralelogramo.

Em relação à figura do paralelogramo destacam-se três itens: 1) *a posição relativa dos lados do paralelogramo*, que tem por objetivo verificar se no desenho do paralelogramo, um par de lados estaria na horizontal ou na vertical ou se ambos estariam inclinados; 2) *a orientação do lado de maior comprimento*, considerado pela pesquisadora a referência do paralelogramo cujos lados estão na posição horizontal para verificar se eles são ou não o de maior comprimento; 3) *a inclinação da figura* cujo objetivo é verificar se o paralelogramo possui “inclinação para direita” ou “inclinação para a esquerda”.

Em relação aos problemas envolvendo a área do paralelogramo, Santos (2005) utiliza seis categorias. A primeira é *a existência da figura*, que tem por objetivo verificar se existe presença ou ausência da figura do paralelogramo. A segunda é a *natureza das soluções*, cuja intenção é verificar se é exigido no problema algum tipo de procedimento numérico e/ou algébrico. A terceira são *os dados fornecidos*, em que a pesquisadora enfatiza que

> [...] uma das regras de contrato didático, em vigor no ensino, relativa à resolução de problema indica que a imensa maioria das questões trabalhadas em sala de aula fornece, apenas, os dados necessários e suficientes para resolver o problema. (SANTOS, 2005, p. 53)

Assim, se só são fornecidos os dados que efetivamente serão usados (no caso dos problemas relativos ao cálculo da área do paralelogramo, o comprimento de um lado tomado como base e o comprimento da altura relativa a ele), os alunos poderão responder corretamente, mas isso não significa que eles compreendem que o produto dos comprimentos dos lados não permite calcular sua área. Como diz Santos (2005), nesse caso, o erro não é explicitado e por isso não se cria a oportunidade de que ele seja invalidado. A quarta é *a posição do lado tomado como base*, que tem por objetivo verificar se o lado tomado como base encontra-se na horizontal, na vertical ou é oblíquo. A quinta é *o comprimento do lado tomado como base*, que tem por objetivo verificar se o lado tomado por base é o de maior ou menor comprimento. A sexta e última é a *posição da altura traçada*, que tem por objetivo verificar se as alturas são interiores ou exteriores à figura do paralelogramo.

Já a respeito da resolução de problemas envolvendo a área de uma figura plana com o auxílio da malha quadriculada, Pessoa (2010) afirma que

> [...] as atividades realizadas na malha quadriculada possuem um aspecto “menos formal”, no qual podemos explorar a ideia intuitiva da área e os procedimentos mais utilizados são a contagem de quadradinhos e a composição e decomposição de figuras. (PESSOA, 2010, p. 13)

A tese de doutorado de Teles (2007) utiliza como marco teórico a Teoria dos Campos Conceituais e a modelização do conceito de área como grandeza proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989). Teve por objetivo geral a investigação de imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na Matemática Escolar, bem como na formulação e no tratamento de problemas que envolvem as fórmulas de área das figuras geométricas: retângulo, quadrado, paralelogramo e triângulo. Com a realização de sua pesquisa é esclarecido o ensino-aprendizagem das fórmulas de área, permitindo a ampliação da compreensão dos educandos e também da complexidade de processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Teles (2007), em sua análise didática do conhecimento dos alunos, apresenta as variáveis didáticas em jogo nas situações que envolvem fórmulas de área de figuras geométricas planas e seus possíveis valores. Elenca assim, doze variáveis que estão relacionadas aos vários campos conceituais.

> Ao campo das grandezas relaciona-se o tipo de uso das fórmulas e as unidades de medida. Ao campo geométrico: tipos de figuras; presença da figura; posição da figura. Relacionados ao campo numérico: dados numéricos; domínio numérico dos dados e dos resultados. Ao campo algébrico e ao funcional: a natureza dos dados e as operações em jogo. Outras variáveis como contexto; caráter típico ou atípico da questão e tipo de papel também foram consideradas. (TELES, 2007, p. 127)

O Quadro 1 refere-se às variáveis didáticas que constam na tese de TELES (2007)

Quadro 1: Variáveis didáticas segundo Teles (2007)

Campo Conceitual	Variável	Valor	
Grandezas	Tipos de uso das fórmulas de área	• Calcular a área de figuras; • Calcular comprimentos que caracterizam a figura; • Comparar áreas de figuras; • Produzir figuras em condições dadas; • Estabelecer relações entre grandezas; • Otimizar; • Operar com grandezas de mesma natureza.	
	Unidades de medida	Comprimento	Área
		Metros (m), centímetros (cm), etc.	Metros quadrados (m^2), centímetros quadrados (cm^2), etc.
Geométrico	Tipos de figura	Retângulo, triângulo, paralelogramo, quadrado, trapézio, outros polígonos regulares, círculo e figuras irregulares.	
	Presença da figura	Sim	Não
	Posição da figura	Prototípica	Não-Prototípica
Numérico	Dados numéricos	Suficientes	Necessários e suficientes
	Domínio numérico dos dados e dos resultados	Naturais; Racionais positivos; Decimais, etc.	
Algébrico e ao funcional	Natureza dos dados	Números, grandezas ou letras.	
	Operações	Adição, subtração, multiplicação e divisão, seja com números, grandezas ou letras.	
	Tipo de Papel	Branco ou quadriculado	
	Contexto	Familiar, cotidiano, práticas sociais ou intramatemático.	
	Caráter típico ou atípico da questão	Comuns ou não comuns no livro didático.	

Fonte: TELES, 2007.

Nossa pesquisa vai focar um recorte mais específico das possibilidades explicitadas por Teles (2007). Do ponto de vista do campo conceitual das grandezas, o tipo de uso da fórmula privilegiado é para calcular a área de uma figura e as unidades de comprimento são centímetros. Do ponto de vista do campo conceitual geométrico, vamos trabalhar com paralelogramos em problemas que envolvem sempre a presença de figuras, mas contemplamos tanto figuras prototípicas como não-prototípicas. A seguir, apresentamos nossos objetivos de pesquisa.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Investigar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais e da abordagem de área como grandeza, como estudantes do ensino médio técnico lidam com situações de cálculo da área de paralelogramos.

1.2.2 Específicos

- Analisar as estratégias de resolução dos alunos em tarefas de cálculo de área do paralelogramo de três pontos de vista: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas (uso de unidades);

- Verificar correlações entre o cálculo relacional, os erros e acertos nos cálculos numéricos e o uso das unidades na resolução de tarefas de cálculo da área do paralelogramo;

- Comparar os procedimentos empregados pelos alunos em condições de conformidade ao contrato didático habitual relativo ao cálculo da área de paralelogramos e em situações de ruptura das regras do contrato didático.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos nosso percurso metodológico, juntamente com a análise a priori relativa ao teste aplicado com os alunos do 2º ano do ensino médio técnico.

2.1 O teste: escolhas dos sujeitos e condições de aplicação

Para realizar a parte empírica de nossa pesquisa, montamos um instrumento[15] de coleta de dados composto por quatro atividades, que foram apoiadas nas pesquisas de Baltar (1996) e de Santos (2005). Entretanto não foi possível analisar os dados das quatro atividades devido à limitação do tempo e a riqueza e amplitude dos dados. Por isso, escolhemos focar a análise apenas do *item a* das atividades 1 e 2, que correspondem a situações de medida da área do paralelogramo, deixando a análise das demais questões para um momento posterior.

Os sujeitos da pesquisa são com os estudantes de quatro turmas do 2º ano do ensino médio e técnico de uma escola pública estadual da região metropolitana da cidade do Recife – PE. Duas turmas eram do curso de Design de Interiores A (DIA, com 32 alunos e DIB, com 22 alunos) e duas turmas pertenciam ao curso de Manutenção e Suporte em Informática A (MSIA, com 29 alunos e MSIB, com 21 alunos) No total, responderam ao teste, 104 estudantes. O pesquisador não era professor dessas turmas e não tinha conhecimento prévio das mesmas. Pensamos que conhecimentos das grandezas geométricas e suas medidas podem ser úteis no exercício profissional desses estudantes, em especial aqueles das turmas Design de Interiores.

O tempo de aplicação do teste foi de duas aulas (100 minutos) e cada aluno recebeu um kit contendo malha quadriculada em que cada quadradinho possui lado de 0,5cm em transparência, malha pontilhada impressa, papel milimetrado impresso, papel vegetal, tesoura, régua graduada e lápis grafite com borracha. Optamos por

[15] Vide anexo

esta diversidade de materiais, para ampliação do universo de resoluções possíveis. Iniciamos a entrega da atividade 1 para todos, em seguida, avisamos que quando findassem esta, solicitassem a atividade 2 e assim por diante.

Para o processo de análise, das resoluções apresentadas pelos alunos nas atividades propostas, observaremos seu desempenho mediante três critérios independentes: cálculo relacional (CR), que corresponde à identificação do tipo de procedimento utilizado pelos alunos na resolução das atividades; cálculo numérico (CN), que verifica os cálculos apresentados pelos alunos independentemente do tipo de estratégia escolhida e a álgebra das grandezas (AG), que analisa o modo como os alunos lidam com as unidades, tanto na resposta como nas operações que realizam. Apesar de os critérios acima serem observados de maneira autônoma, será feito o cruzamento estatístico entre os dados de modo a verificar possíveis influências entre os diferentes critérios.

Outro ponto observado são as duas categorias que classificamos como SR (sem resposta) e OR (outras respostas), usadas para o conjunto das atividades: 1A (item *a* da atividade 1) e 2A (item *a* da atividade 2).

A primeira categoria (SR) diz respeito aos protocolos nos quais os alunos deixaram a atividade em branco, ou quando há uma resposta por meio de uma frase, sem haver qualquer ação em relação ao processo numérico ou algébrico de resolução. O código OR corresponde às resoluções que não foi possível classificar em nenhuma das estratégias especificadas nem na análise a priori nem na análise dos resultados, seja por motivo de não conclusão do raciocínio escrito, ou mesmo, por ausência de entendimento do processo de resolução.

A seguir, apresentaremos a análise a priori das atividades propostas, em consonância com nosso referencial teórico.

2.2 Análise a priori das atividades 1A e 2A

Seguem-se a apresentação e análise a priori das atividades 1A e 2A, que fazem parte do teste de sondagem aplicado com alunos do 2º ano do ensino médio técnico. Inicialmente serão justificadas as escolhas de sua elaboração. Depois, serão apresentados os principais procedimentos de resolução esperados, de acordo com a revisão de literatura, classificados em dois blocos: o primeiro corresponde às resoluções baseadas em cálculo relacional adequado à situação e o segundo diz respeito aos procedimentos apoiadas em cálculo relacional inadequado à situação.

ATIVIDADE 1

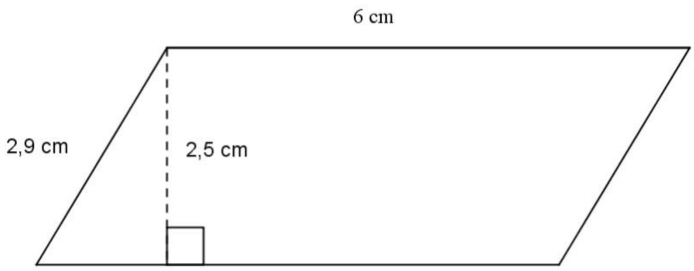


Figura 14: Apresentação da atividade 1

a) Calcule a medida da área do paralelogramo. Explique como você fez.
b)[16] Calcule a medida do perímetro do paralelogramo. Explique como você fez.

2.3 Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade 1

Nesta atividade, o paralelogramo está desenhado em verdadeira grandeza. Trata-se de uma situação de medição envolvendo a área de um paralelogramo em “condições favoráveis”, isto é, tal como é bastante comum nos livros didáticos de matemática: apresenta medidas explícitas, possui lado maior na horizontal, comumente chamado de base, inclinação para a direita e altura interna traçada, conforme é descrito por Santos (2005).

Ao mesmo tempo, o fato de termos apresentado na figura a medida do lado oblíquo, mesmo disponibilizando o kit de materiais, nos ajudará a entender como os sujeitos lidam com a escolha da base e da altura neste paralelogramo. Há um distanciamento das condições habituais de cálculo da área de um paralelogramo, uma vez que o comprimento do lado oblíquo não é necessário nesse item. Entretanto, a cláusula de contrato didático segundo a qual não há dados desnecessários é respeitada pois no teste também é solicitada a medida do

[16] Como já foi dito, não houve tempo hábil para analisar todos os dados coletados e escolhemos não analisar o item b da atividade.

perímetro do paralelogramo, e para calculá-la, o aluno precisará do comprimento do lado oblíquo. Assim, poderemos melhor analisar a resolução proposta pelos alunos, uma vez que, ao usar a fórmula da área do paralelogramo, ele deverá escolher os comprimentos que considera como base e altura. A ruptura de contrato didático se dá porque habitualmente não cabe ao aluno selecionar os dados necessários para o cálculo da área (pois em geral, para cada item são fornecidos apenas os dados que serão utilizados para resolver aquele item) e no caso da atividade do teste de sondagem, o aluno terá que escolher dentre os dados, que precisará substituir na fórmula da área do paralelogramo.

Consideraremos para a atividade 1A, como resposta correta, que a área do paralelogramo é de 15 cm^2.

Procedimentos de resolução – Atividade 1A

Em nossas reflexões, antecipamos alguns procedimentos possíveis de resolução, nos quais o aluno poderá se apoiar ao resolver a atividade 1A. Baseados em nosso referencial teórico, a análise dos procedimentos é feita por meio da noção de cálculo relacional. Separamos em dois tipos: (a) procedimentos apoiados em cálculo relacional adequado à situação e (b) procedimentos apoiados em cálculo relacional inadequado à situação.

a) Procedimentos apoiados em cálculo relacional adequado à situação

São os procedimentos que identificaremos como ACR (Acerto de cálculo relacional): BH (utiliza a fórmula A = b x h), SF (separa a figura em regiões e soma as suas áreas ou completa a figura e subtrai as áreas) e MQ (utiliza a malha quadriculada e realiza a contagem de quadradinhos).

Cálculo relacional (BH)

Escolher o cálculo relacional (BH), como procedimento de resolução, indica que o estudante utilizará a fórmula da área do paralelogramo (A = b x h), que corresponde de fato à área de um paralelogramo em termos matemáticos. Essa escolha pode acontecer mediante duas possibilidades: 1) indicar a fórmula e subsequentemente substituir, dentre os valores expostos na figura, aqueles que realmente são necessários à resolução; ou 2) não apresentar a fórmula, mas indicar a multiplicação das medidas do lado horizontal, tomado como base (6cm) e da altura correspondente (2,5cm).

Cálculo relacional (SF)

De acordo com o capítulo 1, o conceito matemático de área é tomado como uma função *f* chamada de função área, definida em um conjunto *S* de superfícies, com valores pertencentes ao conjunto dos números reais não negativos, e que deve possuir três propriedades primordiais para caracterização da grandeza área: positividade, aditividade e invariância por isometrias.

Assim, o aluno que escolhe utilizar o cálculo relacional (SF), como procedimento de resolução, está utilizando a propriedade da aditividade[17]. Visualizamos desse modo, dois procedimentos possíveis: 1) separar a figura do paralelogramo em regiões e somar suas áreas ou 2) completar a figura do paralelogramo e subtrair suas áreas.

Para o primeiro procedimento, temos a sequência a seguir, iniciando com a Figura 15, que sinaliza o paralelogramo original.

Figura 15: Paralelogramo original

Desse modo, o aluno dividirá o paralelogramo em regiões conforme a Figura 16.

[17] Se duas figuras **A** e **B** que têm em comum no máximo pontos de sua fronteira, então a área da figura $A \cup B$, união de **A** e **B** é a soma da área de **A** com a área de **B**.

Figura 16: Divisão da figura em regiões

Em seguida, conforme a Figura 17, ele separa um retângulo e dois triângulos.

Figura 17: Separação da figura do paralelogramo em um retângulo e dois triângulos

Em seguida soma suas áreas.

Figura 18: Junta-se o triângulo aos dois retângulos

Para o procedimento 2, temos a sequência a seguir, iniciando com a Figura 19, que sinaliza o paralelogramo original.

Figura 19: Paralelogramo original

Em seguida (Figura 20), o aluno completará o paralelogramo por excesso.

Figura 20: Paralelogramo completado por excesso

Para compor o retângulo, foram acrescentados ao paralelogramo inicial os dois triângulos retângulos (representados nas cores marrom e vermelha) de acordo com a Figura 21 a seguir.

Figura 21: Paralelogramo original com acréscimo de dois triângulos

O aluno determinará a medida da área paralelogramo completado por excesso e subtrair da medida da área dos dois triângulos nas cores vermelha e marrom, conforme Figura 22.

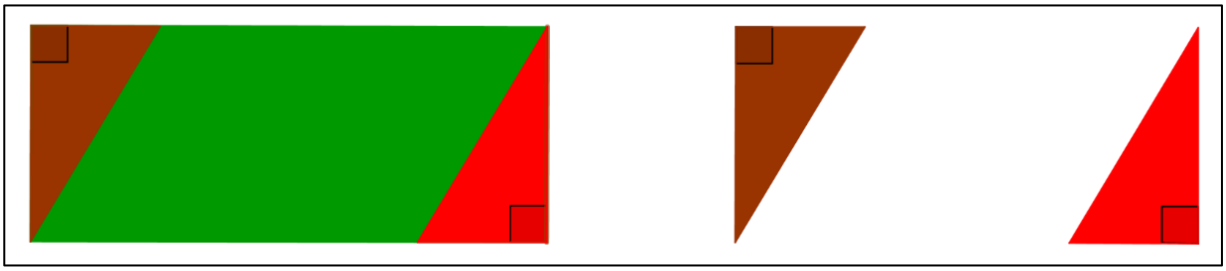


Figura 22: Retirada dos dois triângulos

Por fim, o que restará será ao paralelogramo da Figura 23.

Figura 23: Paralelogramo completado por falta

Cálculo relacional (MQ)

O cálculo relacional MQ, diz respeito às resoluções mediante o uso da malha quadriculada fornecida no kit.

Assim, baseados em Pessoa (2010), visualizamos dois procedimentos possíveis para quem utilizar este procedimento de resolução:

1) contagem de quadradinhos: neste tipo de procedimento o aluno sobrepõe a malha quadriculada à figura e realiza a contagem, fazendo as respectivas compensações, pois existem quadradinhos não completos, o que totaliza 60 quadradinhos.

2) decomposição de figuras: neste tipo de procedimento o aluno sobrepõe a malha quadriculada à figura, contudo, ao invés de realizar uma contagem imediata, realiza a decomposição deslocando o triângulo e recompondo na própria figura, de modo que, forme um retângulo e então ele realiza a contagem das seguintes formas: (a) um a um todos os quadradinhos; (b) Faz a multiplicação de 12 quadradinhos por cinco quadradinhos totalizando 60 quadradinhos; ou ainda, (c) Faz a multiplicação dos doze quadradinhos juntos (base), ou seja, do comprimento linear horizontal medindo 6 cm (lado de 12 quadradinhos), pelos lados de cinco quadradinhos juntos (altura), ou seja, do comprimento linear vertical medindo 2,5 cm totalizando 15cm^2.

b) Procedimentos apoiadas em cálculo relacional inadequado à situação

São os procedimentos que identificamos como ECR (Erro de cálculo relacional): CTM (cálculo com todas as medidas), PL (multiplicação dos lados) e CP (calcula o perímetro).

Cálculo relacional (CTM)

O cálculo relacional (CTM) corresponde a usar todas as medidas fornecidas na figura na realização de alguma operação numérica. Interpretamos esse procedimento, como consequência da cláusula de contrato didático segundo a qual o aluno deve usar todos os dados fornecidos para a resolução da atividade, a qual foi destacada em nossa fundamentação teórica. Visualizamos dois procedimentos possíveis:

1) **soma das medidas:** o aluno pode adicionar os três comprimentos dados:

$$2{,}9 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 2{,}5 \text{ cm} = 11{,}4 \text{ cm}$$

2) **multiplicação das medidas:** o aluno pode multiplicar os três comprimentos.

$$2{,}9 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 2{,}5 \text{ cm} = 43{,}5 \text{ cm}^3$$

Cálculo relacional (PL)

Para o aluno que escolhe utilizar como procedimento de resolução o cálculo relacional PL (produto dos comprimentos dos lados do paralelogramo), é possível que tenha em mente que a altura tem comprimento igual ao lado oblíquo ou que para calcular a área de um paralelogramo, devem-se multiplicar os comprimentos de seus lados. Assim, o procedimento visualizado, a respeito da multiplicação dos comprimentos dos lados será: 6 cm x 2,9 cm = 17,4 cm^2.

Cálculo relacional (CP)

O aluno que utilizar o cálculo relacional CP (calcula o perímetro) em sua resolução, talvez pense que área e perímetro são a mesma coisa ou que para calcular a área de um paralelogramo adicionam-se os comprimentos de seus lados.

Visualizamos dois tipos de resolução: 1) soma de todos os comprimentos dos lados e 2) soma dos comprimentos de todos os lados através de decomposição e recomposição.

1) **Soma de todos os comprimentos lados:** o aluno adiciona todos os comprimentos dos lados do paralelogramo;

(2,9 cm + 6,0 cm + 2,9 cm + 6,0 cm) ou 2 x (2,9 cm + 6,0 cm)

2) **Soma dos comprimentos de todos os lados por decomposição e recomposição:** o aluno desloca um dos triângulos de modo a completar um retângulo, e em seguida adiciona os comprimentos dos lados. Nesse caso, o aluno calcula o perímetro do retângulo de mesma área que o paralelogramo dado.

(2,5 cm + 6,0 cm + 2,5 cm + 6,0 cm = 17 cm) ou (2 x (2,5 cm + 6,0 cm) = 17 cm)

Esse segundo procedimento, apoiado no uso do perímetro, além da mobilização de um conceito-em-ação inadequado para a situação (o perímetro, no lugar da área), atesta o uso implícito de um teorema em ação não válido matematicamente, pois decompor parte de uma figura e a compor em outra parte, conserva a área, mas não conserva o perímetro.

ATIVIDADE 2

Observe o paralelogramo abaixo.

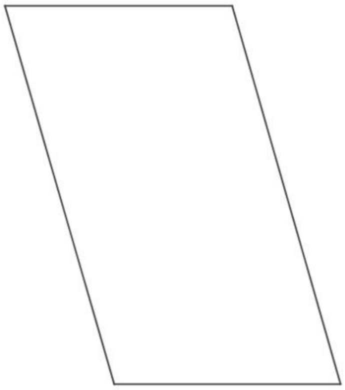


Figura 24: Apresentação da atividade 2

a) Calcule a medida da área do paralelogramo. Explique como você fez.
b)[18] Calcule a medida do perímetro do paralelogramo. Explique como você fez.

2.4 Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade 2

Esta atividade trata do cálculo da medida da área e do perímetro de um paralelogramo em "condições desfavoráveis" (é apresentado de maneira incomum, diferente da predominante nos livros didáticos). O paralelogramo desenhado possui o lado de menor comprimento na horizontal, "inclinação para a esquerda", não possui altura interna traçada e também não é indicado na figura qualquer tipo de medida. Ou seja, as condições da atividade são bem distintas daquelas que caracterizam o paralelogramo prototípico identificado por Santos (2005).

Do ponto de vista das resoluções, podemos ter as seguintes possibilidades:

a) O lado tomado como base é o lado horizontal, ou seja, o lado de menor comprimento. Já a altura pode ser tanto interna como externa ao paralelogramo. A Figura 25, representa o paralelogramo considerando a altura interna, enquanto que a Figura 26, mostra o paralelogramo considerando a altura externa.

[18] O item b da atividade 2, relativo ao perímetro, não foi analisado.

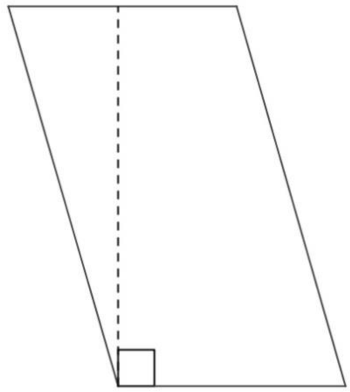


Figura 25: Paralelogramo com base na horizontal e altura interna traçada

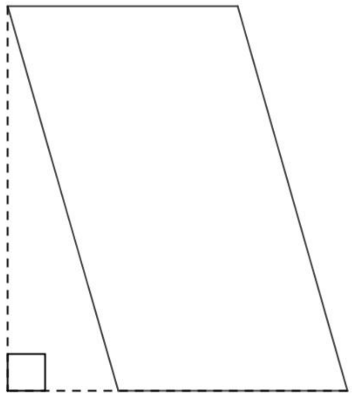


Figura 26: Paralelogramo com base na vertical e altura externa traçada

Como a atividade 2 não apresenta qualquer medida discriminada na figura, sinalizando que o aluno deva realizar sua medição, consideraremos para sua resolução alguns intervalos, pois assim estamos contemplando a imprecisão do instrumento de medida, a falta de habilidade por parte do aluno em realizar o procedimento de medição e também, o desconforto ao fazer uso de uma medida decimal. Vamos chamar o lado horizontal de base e a altura relativa a esse lado, de altura. Foram considerados corretos os intervalos (4,9cm ≤ lado oblíquo ≤ 5,3cm), (2,8cm ≤ base ≤ 3,2cm) e (4,8cm ≤ altura ≤ 5,2cm).

b) O lado tomado como base é o de maior comprimento (o lado oblíquo) e a altura considerada poderá também ser interna ou externa ao paralelogramo. A Figura 27, representa o paralelogramo com altura interna, enquanto que a Figura 28 mostra o paralelogramo com altura externa, em relação ao lado oblíquo tomado como base.

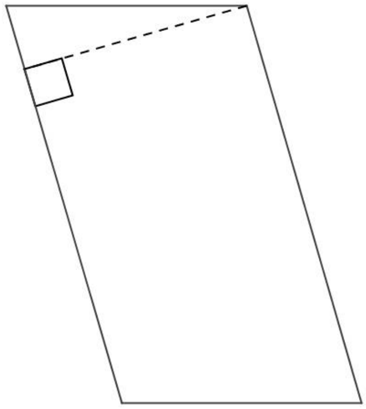


Figura 27: Paralelogramo considerando a base maior e altura interna

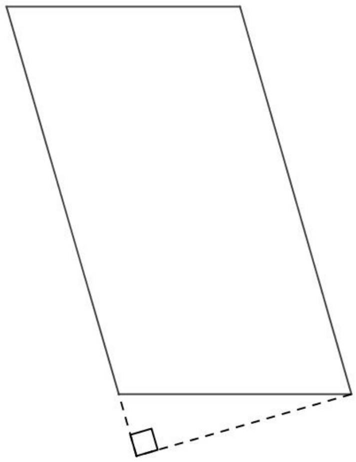


Figura 28: Paralelogramo considerando a base maior e altura externa

Como a atividade 2 não apresenta qualquer medida discriminada na figura, sinalizando que o aluno deva realizar sua medição, consideramos para a resolução desta os intervalos (4,9cm ≤ base ≤ 5,3cm), (2,8cm ≤ lado oblíquo ≤ 3,2cm) e (2,8cm ≤ altura ≤ 3,2cm)

Procedimentos de resolução - Atividade 2A

Continuando com nossas reflexões, percebemos que a atividade 2A mantém certa consonância em relação ao levantamento de procedimentos de cálculo relacional da atividade 1A. O que propomos com esta atividade é uma quebra de contrato didático, pois não fornecer os dados numéricos relativos à figura proposta ao aluno corresponde a uma mudança quanto à divisão de responsabilidades entre professor e aluno.

Antecipamos alguns procedimentos possíveis de resolução, do ponto de vista do cálculo relacional, no qual o aluno poderá se apoiar ao resolver a atividade 2A. Separamos em dois tipos: (a) procedimentos apoiados em cálculo relacional adequado à situação e (b) procedimentos apoiados em cálculo relacional inadequado à situação.

a) procedimentos apoiados em cálculo relacional adequado à situação

São os procedimentos que identificaremos como ACR (Acerto de cálculo relacional): BH (utiliza a fórmula A = b x h), SF (separa a figura em regiões e soma as suas áreas ou completa a figura e subtrai as áreas) e MQ (utiliza a malha quadriculada e realiza a contagem de quadradinhos).

Cálculo relacional (BH)

Pelos mesmos motivos já indicados na atividade 1A, mesmo com a particularidade de não possuirmos medida alguma indicada na atividade 2A, escolher a estratégia de cálculo relacional (BH), indica que o aluno multiplica o comprimento de algum dos lados do paralelogramo tomado como base pela altura relativa a ele (A = b x h). Neste caso, antes de aplicar a fórmula cabe ao aluno escolher algum dos lados do paralelogramo para tomá-lo como base. Em todos os casos, vamos considerar uma casa decimal após a vírgula, pela precisão viável com o uso da régua graduada.

O Quadro 2, mostra o conjunto de respostas que consideramos corretas, de acordo com os intervalos determinados para o caso em que o aluno considera a base como sendo o lado menor disposto na horizontal. Já o Quadro 3, mostra o conjunto de respostas corretas para o caso em que o aluno considera a base como sendo o lado maior.

Quadro 2: Respostas corretas considerando o lado menor na horizontal como base

Base (b)	Altura (h)	Área (A)
2,8 cm	4,8 cm	13,44 cm^2
2,8 cm	4,9 cm	13,72 cm^2
2,8 cm	5,0 cm	14,00 cm^2
2,8 cm	5,1 cm	14,28 cm^2
2,8 cm	5,2 cm	14,56 cm^2
2,9 cm	4,8 cm	13,92 cm^2
2,9 cm	4,9 cm	14,21 cm^2
2,9 cm	5,0 cm	14,50 cm^2
2,9 cm	5,1 cm	14,79 cm^2
2,9 cm	5,2 cm	15,08 cm^2
3,0 cm	4,8 cm	14,40 cm^2
3,0 cm	4,9 cm	14,70 cm^2
3,0 cm	5,0 cm	15,00 cm^2
3,0 cm	5,1 cm	15,30 cm^2
3,0 cm	5,2 cm	15,60 cm^2
3,1 cm	4,8 cm	14,88 cm^2
3,1 cm	4,9 cm	15,68 cm^2
3,1 cm	5,0 cm	15,50 cm^2
3,1 cm	5,1 cm	15,81 cm^2
3,1 cm	5,2 cm	16,12 cm^2
3,2 cm	4,8 cm	15,36 cm^2
3,2 cm	4,9 cm	15,68 cm^2
3,2 cm	5,0 cm	16,00 cm^2
3,2 cm	5,1 cm	16,32 cm^2
3,2 cm	5,2 cm	16,64 cm^2

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 3: Respostas corretas considerando o lado maior como base

Base (b)	Altura (h)	Área (A)
4,8 cm	2,8 cm	13,44 cm^2
4,8 cm	2,9 cm	13,92 cm^2
4,8 cm	3,0 cm	14,40 cm^2
4,8 cm	3,1 cm	14,88 cm^2
4,8 cm	3,2 cm	15,36 cm^2
4,9 cm	2,8 cm	13,72 cm^2
4,9 cm	2,9 cm	14,21 cm^2
4,9 cm	3,0 cm	14,70 cm^2
4,9 cm	3,1 cm	15,19 cm^2
4,9 cm	3,2 cm	15,68 cm^2
5,0 cm	2,8 cm	14,00 cm^2
5,0 cm	2,9 cm	14,50 cm^2
5,0 cm	3,0 cm	15,00 cm^2
5,0 cm	3,1 cm	15,50 cm^2
5,0 cm	3,2 cm	16,00 cm^2
5,1 cm	2,8 cm	14,28 cm^2
5,1 cm	2,9 cm	14,79 cm^2
5,1 cm	3,0 cm	15,3 cm^2
5,1 cm	3,1 cm	15,81 cm^2
5,1 cm	3,2 cm	16,32 cm^2
5,2 cm	2,8 cm	14,56 cm^2
5,2 cm	2,9 cm	15,08 cm^2
5,2 cm	3,0 cm	15,60 cm^2
5,2 cm	3,1 cm	16,12 cm^2
5,2 cm	3,2 cm	16,64 cm^2

Fonte: Dados da pesquisa

Cálculo relacional (SF)

Pelas mesmas circunstâncias descritas na atividade 1A, mesmo sabendo que a atividade 2A não possui medidas indicadas, o aluno ao escolher o cálculo relacional (SF) utiliza a aditividade de área por meio da decomposição que segue o mesmo mote dos procedimentos da atividade 1A: 1) separar a figura do paralelogramo em regiões e somar suas áreas ou 2) completar a figura do paralelogramo e subtrair suas áreas.

Para o procedimento 1, temos a sequência a seguir, iniciando com a Figura 29, que sinaliza o paralelogramo original.

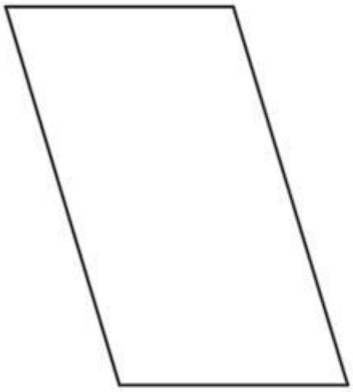


Figura 29: Paralelogramo original

Desse modo, o aluno dividirá as regiões conforme a Figura 30.

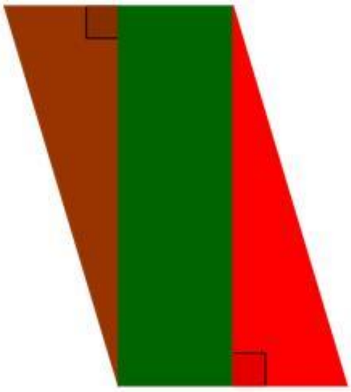


Figura 30: Divisão da figura em regiões

Em seguida, conforme a Figura 31, ele separa um retângulo e dois triângulos e soma suas áreas.

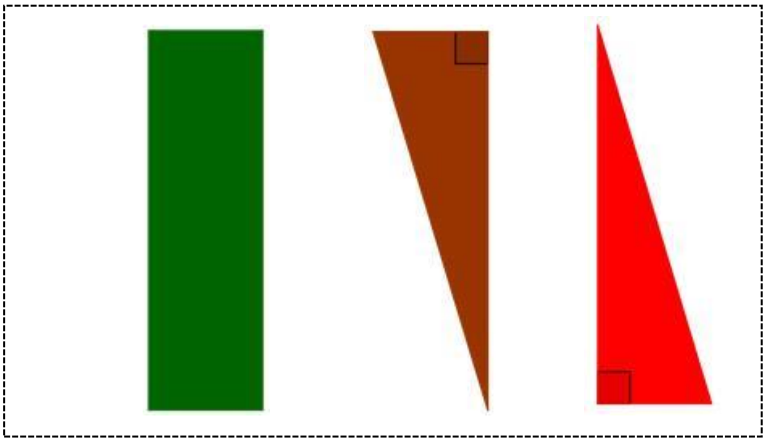


Figura 31: Separação da figura do paralelogramo em um retângulo e dois triângulos

Para o procedimento 2, temos a sequência a seguir, iniciando com a Figura 32, que sinaliza o paralelogramo original.

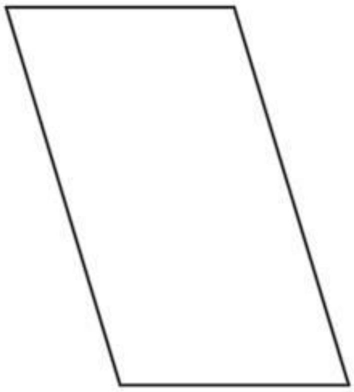


Figura 32: Paralelogramo original

Em seguida (Figura 33), o aluno completará o paralelogramo por excesso.

Figura 33: Paralelogramo completado por excesso

Ficarão então, determinados nesta nova figura (retângulo), os dois triângulos retângulos em marrom representados na Figura 34.

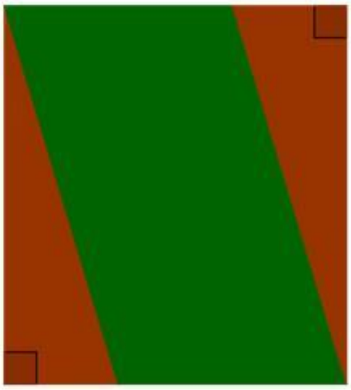


Figura 34: Detalhamento da separação das figuras

Por fim, o aluno determinará a medida da área do retângulo (Figura 33) e subtrairá da medida da área dos dois triângulos em cor marrom.

Cálculo relacional (MQ)

O cálculo relacional MQ, segue o mesmo critério e justificativas da atividade 1A. É destinado aos alunos que apresentarão a resolução mediante o uso da malha quadriculada fornecida no kit.

Apoiados em Pessoa (2010), visualizamos dois tipos de procedimentos possíveis:

1) contagem de quadradinhos: neste tipo de procedimento, o aluno sobrepõe a malha quadriculada à figura e realiza a contagem, fazendo as respectivas compensações, pois existem quadradinhos não completos, o que totaliza 60 quadradinhos.

2) decomposição de figuras: neste tipo de procedimento o aluno sobrepõe a malha quadriculada à figura, contudo, ao invés de realizar uma contagem imediata, realiza a decomposição deslocando o triângulo e recompondo na própria figura, de modo que, forme um retângulo e então ele realiza a contagem das seguintes formas: (a) um a um todos os quadradinhos; (b) Faz a multiplicação de seis quadradinhos por dez quadradinhos totalizando 60 quadradinhos; ou ainda, (c) Faz a multiplicação dos seis quadradinhos juntos (base), ou seja, do comprimento linear horizontal medindo 3 cm (lado de seis quadradinhos), pelos lados de cinco quadradinhos juntos (altura), ou seja, do comprimento linear vertical medindo 5,0 cm totalizando 15cm^2.

b) procedimentos apoiados em cálculo relacional inadequado a situação

São os procedimentos que identificaremos como ECR (Erro de cálculo relacional): PL (produto dos comprimentos dos lados do paralelogramo) e CP (calcula o perímetro).

Cálculo relacional (PL)

O cálculo relacional PL, corresponde, como no caso da atividade 1A, ao caso em que o aluno multiplica os comprimentos dos lados do paralelogramo.

Considerando o intervalo citado anteriormente para a medida do comprimento do lado horizontal e a medida do comprimento do lado oblíquo, montamos o Quadro 4, onde constam os valores que sinalizam, para nós, que o aluno empregou esse procedimento de resolução.

Quadro 4: Possibilidades de resposta considerando o lado menor na horizontal como base

Base (b)	Lado oblíquo (l)	Multiplicação do comprimento dos lados
2,8 cm	4,9 cm	13,72 cm^2
2,8 cm	5,0 cm	14,00 cm^2
2,8 cm	5,1 cm	14,28 cm^2
2,8 cm	5,2 cm	14,56 cm^2
2,8 cm	5,3 cm	14,84 cm^2
2,9 cm	4,8 cm	13,92 cm^2
2,9 cm	4,9 cm	14,21 cm^2
2,9 cm	5,0 cm	14,50 cm^2
2,9 cm	5,1 cm	14,79 cm^2
2,9 cm	5,2 cm	15,08 cm^2
2,9 cm	5,3 cm	15,37 cm^2
3,0 cm	4,9 cm	14,70 cm^2
3,0 cm	5,0 cm	15,00 cm^2
3,0 cm	5,1 cm	15,30 cm^2
3,0 cm	5,2 cm	15,60 cm^2
3,0 cm	5,3 cm	15,90 cm^2
3,1 cm	4,9 cm	15,68 cm^2
3,1 cm	5,0 cm	15,50 cm^2
3,1 cm	5,1 cm	15,81 cm^2
3,1 cm	5,2 cm	16,12 cm^2
3,1 cm	5,3 cm	16,43 cm^2
3,2 cm	4,9 cm	15,68 cm^2
3,2 cm	5,0 cm	16,00 cm^2
3,2 cm	5,1 cm	16,32 cm^2
3,2 cm	5,2 cm	16,64 cm^2

Fonte: Dados da pesquisa.

Cálculo relacional (CP)

O cálculo relacional CP (calcula o perímetro) corresponde ao caso similar na atividade 1A das resoluções que apresentam o cálculo do perímetro ao invés da área, ou seja, medem os comprimentos dos lados da figura e em seguida realizam a soma.

Tendo sido exposta nossa análise a priori, seguiremos adiante com a nossa análise dos resultados.

3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo discutimos a análise das produções dos alunos na resolução das atividades 1A e 2A em três aspectos: quanto à habilidade dos alunos em relação à interpretação do problema, o cálculo relacional; quanto ao cálculo numérico; e com relação à álgebra das grandezas.

3.1 Análise dos procedimentos do ponto de vista do cálculo relacional

Uma primeira análise dos dados refere-se ao cálculo relacional utilizado pelos sujeitos da pesquisa. Desse ponto de vista, os procedimentos de resolução dos alunos das atividades 1A e 2A foram agrupados em um mesmo quadro Foram categorizados nos seguintes tipos:

Quadro 5: Código e interpretação dos procedimentos de cálculo relacional

Tipos de Procedimentos	Código	Interpretação
Apoiadas em cálculo relacional adequado à situação	**BH**	Utilizam a fórmula A = b x h para calcular a área do paralelogramo.
	SF	Decompõem o paralelogramo, calculam as áreas das partes e adicionam as medidas obtidas.
	MQ	Utilizam a malha quadriculada para calcular a área do paralelogramo.
Apoiadas em cálculo relacional inadequado à situação	**CTM**	Realizam algum cálculo com todas as medidas marcadas na figura.
	PL	Fazem o produto dos comprimentos dos lados do paralelogramo para calcular sua área.
	FT	Utilizam a fórmula da área de um triângulo para calcular a área do paralelogramo.
	CP	Calculam o perímetro do paralelogramo.
	TP	Usam o Teorema de Pitágoras.
	MBLB	Multiplicam o comprimento do lado tomado como base (o lado horizontal) pelo comprimento do lado oblíquo e novamente pelo comprimento do lado tomado como base.
	LH	Multiplicam o comprimento do lado oblíquo pela altura relativa ao lado horizontal.
	BL/2	Multiplicam o comprimento do lado tomado como base pelo comprimento do lado oblíquo e divide por dois.
	BLA	Multiplicam o comprimento do lado horizontal, tomado como base pelo do lado oblíquo e pela altura.

Alguns desses tipos (BH, SF, MQ, CTM, PL e CP) foram antecipados na análise a priori desta questão do teste, e outros (FT, TP, MBLB, LH, BL/2 e BLA) foram observados nos testes, mas nenhum resultado conhecido das pesquisas anteriores analisadas por nós permitia antecipá-los.

Além dos tipos de cálculo relacional citados acima, categorizamos como OR as resoluções que não conseguimos interpretar e SR os testes nos quais a questão não tinha resposta.

Foi dada a classificação SR (Sem resposta) tanto para os alunos que marcaram alguma medida, mas não utilizaram nenhum procedimento, como o exemplo da Figura 35, como para aqueles que simplesmente deixaram a atividade em branco, conforme a Figura 36.

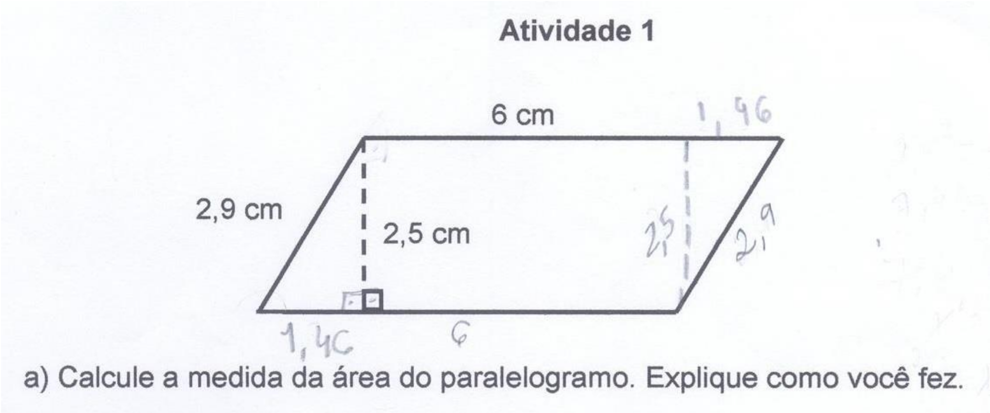


Figura 35: Protocolo do aluno DIA7 quanto à atividade 1A[19]

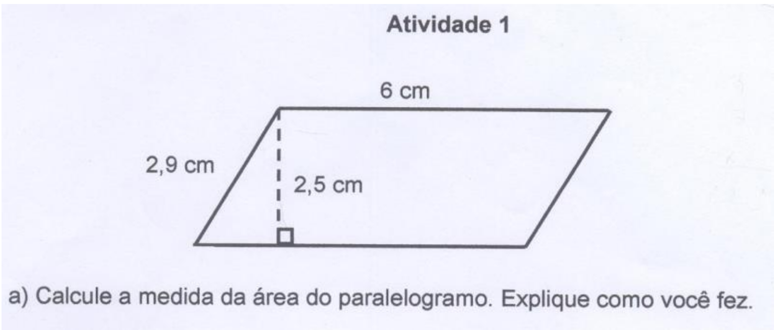
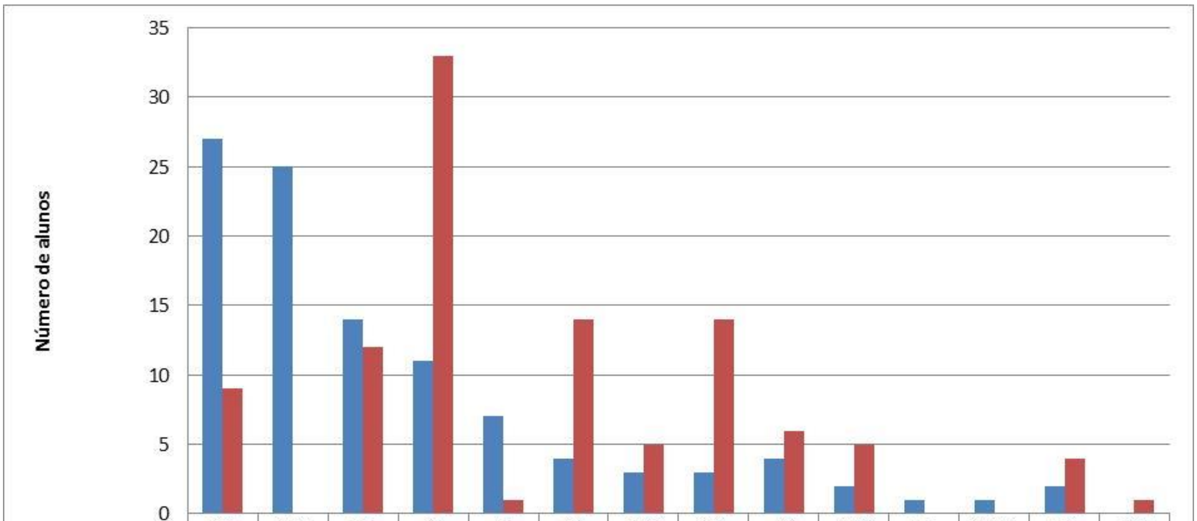


Figura 36: Protocolo do aluno DIA25 quanto à atividade 1A

---

[19] De modo geral, as figuras extraídas dos testes dos alunos foram reduzidas em tamanho para melhor incorporá-las ao texto.

Para melhor entender as escolhas dos procedimentos de resolução dos sujeitos para as duas atividades, propomos o Gráfico 1. Nosso intuito não é o de comparar os tipos de procedimentos escolhidos, mas verificar se houve alguma alteração significativa nas escolhas devido ao fato de que o paralelogramo da atividade 1A contempla características prototípicas, enquanto a atividade 2A rompe com elas.



	BH	CTM	SF	PL	FT	SR	MQ	OR	CP	BL/2	LH	MBLB	TP	BLA
ATIVIDADE 1A	27	25	14	11	7	4	3	3	4	2	1	1	2	0
ATIVIDADE 2A	9	0	12	33	1	14	5	14	6	5	0	0	4	1

Gráfico 1: Quantitativo dos procedimentos classificados segundo o cálculo relacional escolhido pelos sujeitos da pesquisa

Do ponto de vista da mudança da atividade 1A para a atividade 2A, vamos inicialmente destacar três pontos: a queda acentuada da quantidade de alunos que emprega procedimento baseada no cálculo relacional (BH), o uso de procedimento baseada no cálculo relacional (PL) que triplica e o crescimento na quantidade de ausência de resposta.

Sobre o cálculo relacional BH, observamos que o kit fornecido possuía régua e, portanto, os alunos podiam escolher um lado para tomar como base, traçar a altura relativa a esse lado, realizar as medições necessárias e calcular a área do paralelogramo na atividade 2A. Um percentual elevado de alunos que conhecia a fórmula da área do paralelogramo e foi capaz de empregá-la nas condições típicas (paralelogramo desenhado com o lado de maior comprimento na horizontal, altura relativa ao lado horizontal traçada, comprimentos necessários ao cálculo, marcados na figura), na atividade 1A, não utilizou essa fórmula na atividade 2A. A queda acentuada no emprego de BH traz indícios de que os alunos não reconhecem os elementos necessários para calcular a área do paralelogramo que são uma base e a altura relativa a essa base, nas condições apresentadas na atividade 2A. Segundo Santos (2005) a figura prototípica do paralelogramo é o que prevalece na maioria dos livros didáticos, ou seja, é aquela figura em que o lado de maior comprimento encontra-se na horizontal e a figura está inclinada para a direita, acarretando assim o não reconhecimento dos elementos necessários para calcular a área de um paralelogramo que foge às condições acima, como é o caso da figura da atividade 2A.

Nossa interpretação é que a posição do paralelogramo e o fato de não haver nenhuma medida de comprimento marcada sobre a figura explicam o aumento expressivo da quantidade de alunos que calcula a área de um paralelogramo multiplicando os comprimentos de seus lados. Como o lado horizontal é o de menor comprimento e não há nenhuma altura traçada, para resolver corretamente o problema o aluno teria que escolher algum dos lados, traçar a altura relativa a ele e medir os comprimentos do lado escolhido e da altura correspondente. Como explicitado na análise a priori, o aluno que emprega o cálculo relacional PL pode confundir os objetos geométricos (lado e altura), desconsiderando que a altura deve ser perpendicular ao lado correspondente ou pode pensar que os dois segmentos (o lado oblíquo e a altura) têm mesmo comprimento.

Como já foi dito, a atividade 2A traz muitas rupturas em relação ao contrato didático habitual, o que ajuda a explicar os três pontos destacados acima: diante de uma ruptura das condições habituais do problema, muitos alunos podem ter bloqueado (o que pode explicar o alto índice de ausência de resposta). Outros podem ter adotado o caminho de multiplicar os comprimentos dos lados (segmentos efetivamente traçados), uma vez que, de modo geral, não cabe aos alunos traçar segmentos na figura para resolver problemas de cálculo da área. Reforçando os resultados de Santos (2005), acreditamos que parte da explicação do aumento expressivo na quantidade de alunos que emprega PL na atividade 2A em comparação com a quantidade de alunos que multiplicou os comprimentos dos lados na atividade 1A bem como a queda na quantidade de alunos que utiliza a fórmula da área do paralelogramo (cálculo relacional BH) vem dessa ruptura de contrato didático.

Olharemos os dados apresentados no Gráfico 2 a seguir sob o prisma dos percentuais de alunos que deixaram as atividades em branco, empregaram procedimentos baseados em cálculo relacional adequado à situação ou procedimentos baseados em cálculo relacional inadequado à situação e, conforme descrito anteriormente, ainda no sentido da atividade 1A para a atividade 2A. Nesses percentuais não levamos em consideração o cálculo numérico nem a álgebra das grandezas. O único critério considerado para classificar as respostas aqui é nossa interpretação do cálculo relacional empregado pelos alunos.

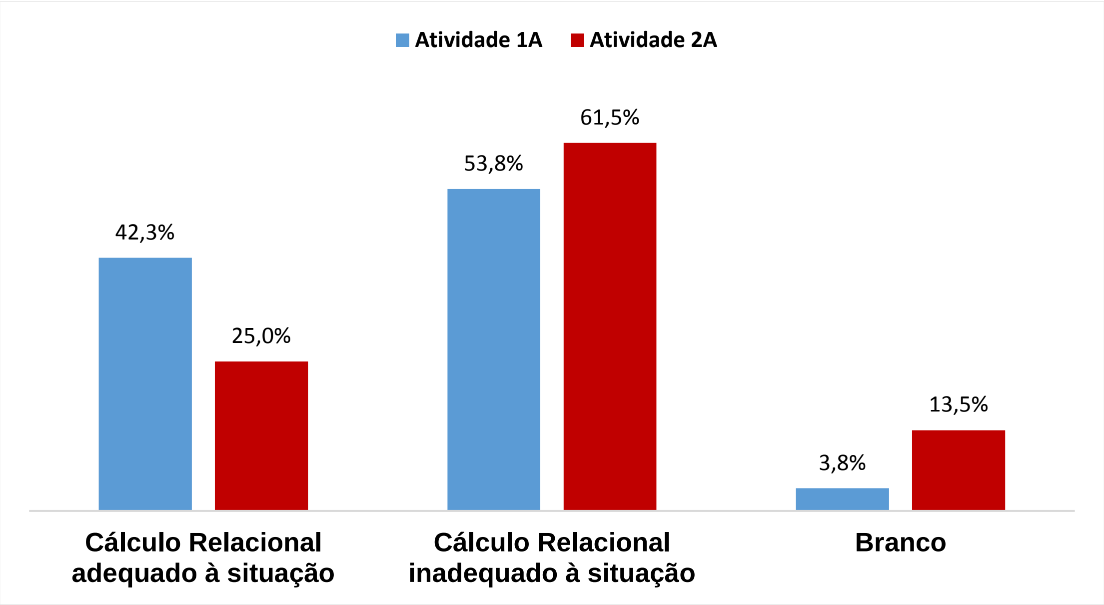


Gráfico 2: Percentual de procedimentos adequados, inadequados e em branco referente às atividades 1A e 2A.

Há um crescimento bastante acentuado (mais de 200%) na quantidade de alunos que deixou a atividade 2A em branco (14 alunos), em relação à quantidade de alunos que não responderam a atividade 1A (4 alunos). Interpretamos essa diferença como indício de que os alunos não reconheceram o paralelogramo na atividade 2A ou não foram capazes de identificar sobre a figura os dados necessários para calcular sua área.

Percebemos uma nítida queda no percentual de alunos que empregaram cálculo relacional adequado à situação, o que nos faz inferir que a ausência de medidas marcadas na figura e/ou a inclinação diferente do habitual provocaram um aumento significativo no grau de dificuldade da atividade 2A em relação à atividade 1A.

A Figura 37 ilustra uma situação na qual o estudante utiliza a procedimento baseada no cálculo relacional (BH) na atividade 1A, que é classificado como adequado à situação. O aluno explicita a fórmula da área do paralelogramo e a justifica por decomposição e recomposição.

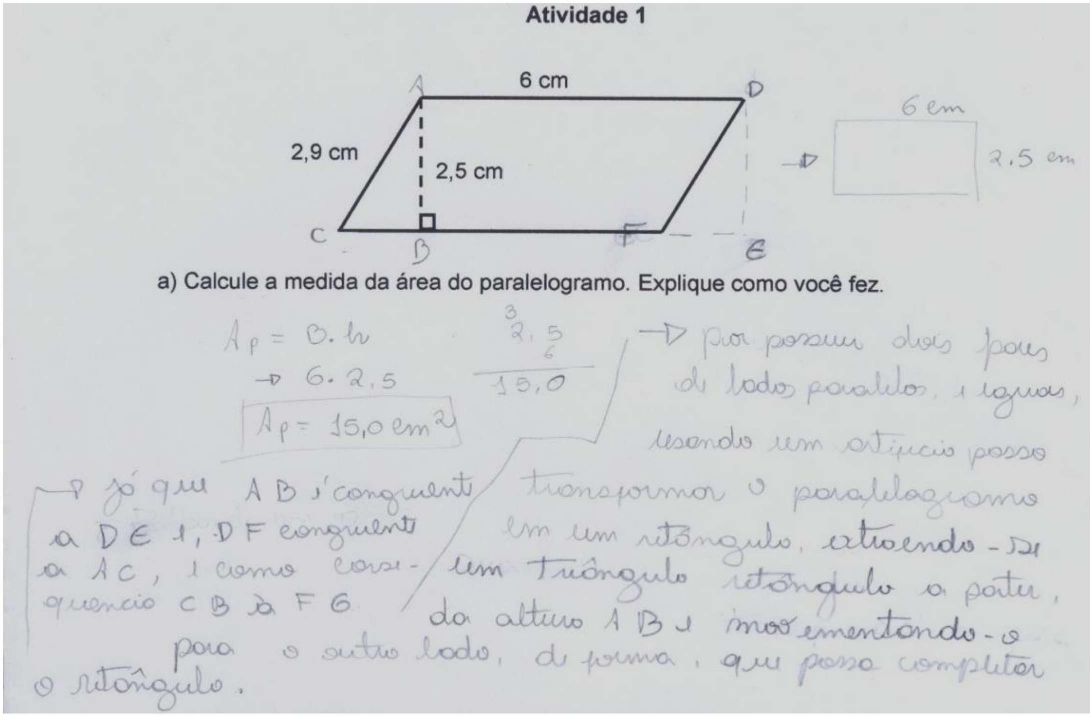


Figura 37: Protocolo do aluno MSIA3 quanto à atividade 1A

A Figura 38 é um exemplo de uso da fórmula da área do paralelogramo na atividade 2A: o aluno mede os comprimentos dos lados horizontal e oblíquo, traça uma altura relativa ao lado horizontal, mede seu comprimento e calcula a área pelo produto do comprimento do lado horizontal e da altura relativa a ele. A justificativa dada pelo aluno – “Para descobrir a medida das arestas eu utilizei a régua. Calculei a área fazendo a base vezes a altura” – mostra o uso inadequado do termo aresta, provavelmente para designar os lados do paralelogramo e deixa subentendido que para o sujeito o paralelogramo tem uma base que é o lado horizontal. Entretanto, deve-se ressaltar que mesmo em condições bem diferentes das habituais, o cálculo relacional empregado é BH, o que é adequado à situação.

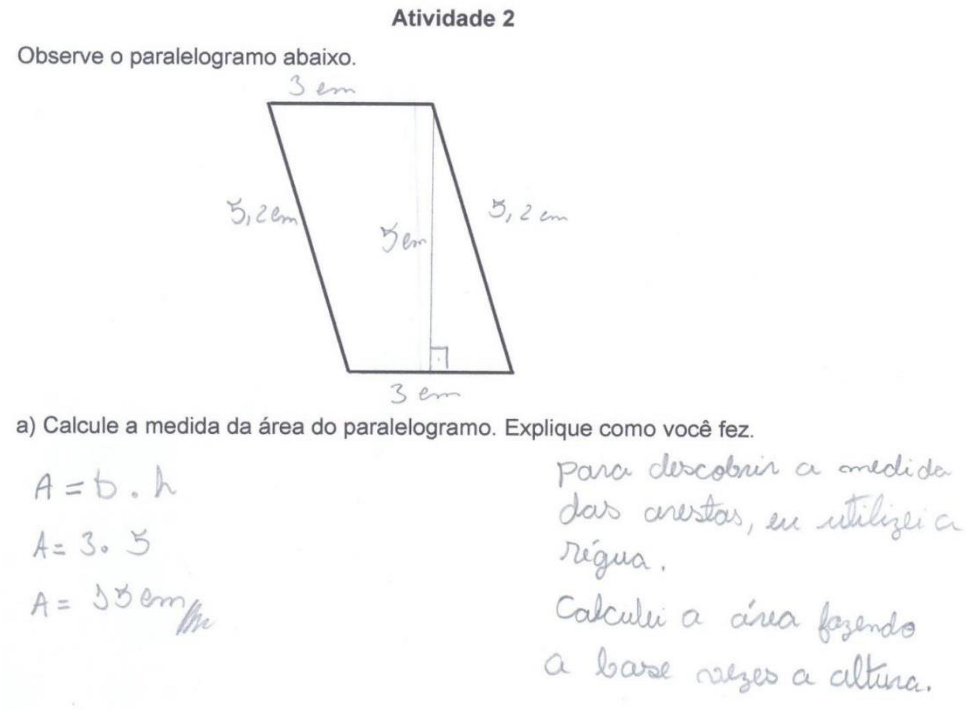


Figura 38: Protocolo do aluno DIA21 quanto à atividade 2A

Em relação ao cálculo relacional inadequado à situação, notamos que foi maior na atividade 2A, contudo, foi relativamente próximo ao percentual apresentado na atividade 1A. Observamos que mais da metade dos estudantes em ambas as atividades, não sabiam calcular a área do paralelogramo tanto em condições habituais como fora delas. Consideramos essa constatação preocupante, pois todos os alunos estavam cursando o 2º ano do ensino médio técnico, portanto prestes a concluir a educação básica e o cálculo de área de uma figura plana é um conteúdo do ensino fundamental.

Neste primeiro momento em que analisamos os procedimentos de cálculo relacional escolhidos pelos sujeitos da pesquisa, identificamos grande variedade, contudo, pudemos agrupá-las para melhor entendê-las.

Por exemplo, a Figura 39 apresenta a resolução de um dos sujeitos que utiliza o cálculo relacional CTM (realizam algum cálculo com todas as medidas marcadas na figura). Verificamos que ele adiciona as medidas dos lados paralelos juntamente com a medida duplicada da altura.

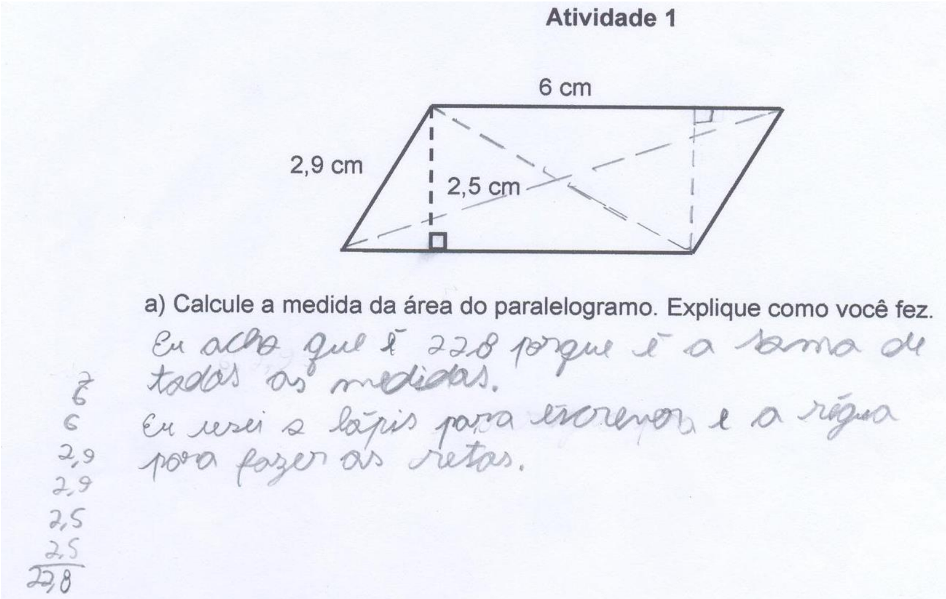


Figura 39: Protocolo do aluno DIA14 quanto à atividade 1A

A Figura 40 e a Figura 41 apresentam a resolução de dois sujeitos que utilizaram em suas respostas o cálculo relacional SF (decompõem o paralelogramo, calculam as áreas das partes e adicionam as medidas obtidas).

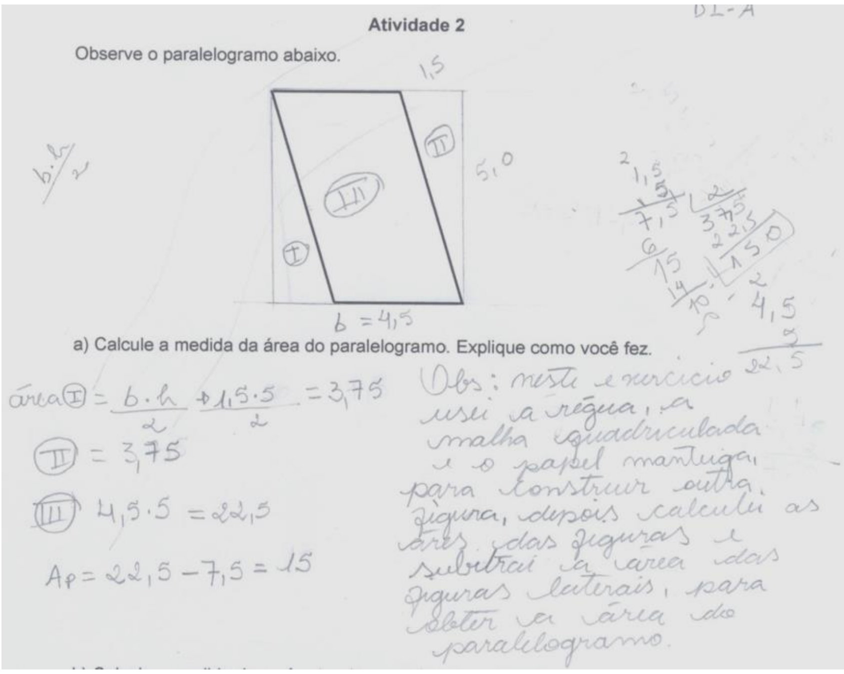


Figura 40: Protocolo do aluno DIA1 quanto à atividade 2A

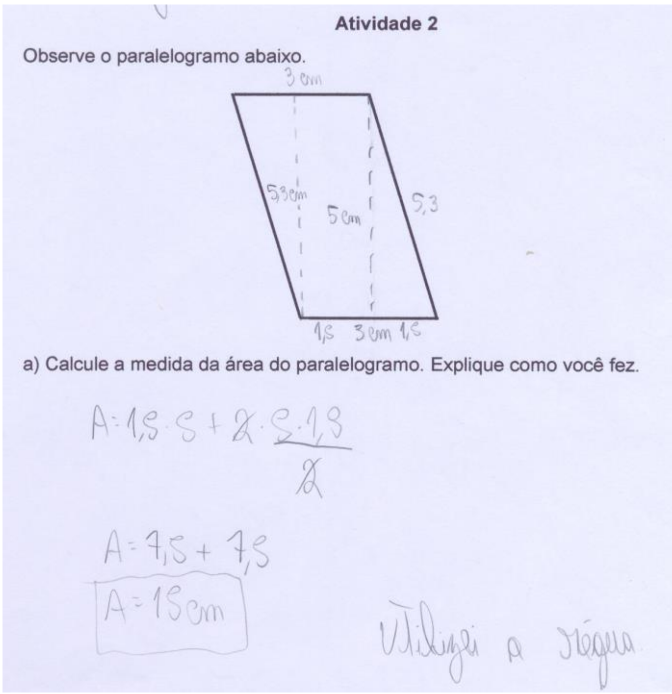


Figura 41: Protocolo do aluno MSIA17 quanto à atividade 2A

Também encontramos sujeitos que utilizaram o cálculo relacional CP (calculam o perímetro do paralelogramo), como é o caso dos protocolos apresentados na Figura 42 e na Figura 43.

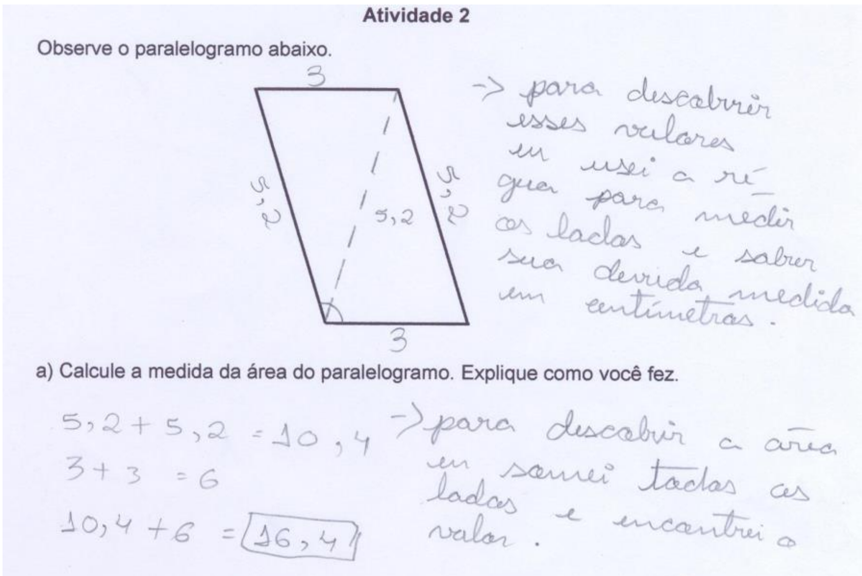


Figura 42: Protocolo do aluno MSIA4 quanto à atividade 2ª

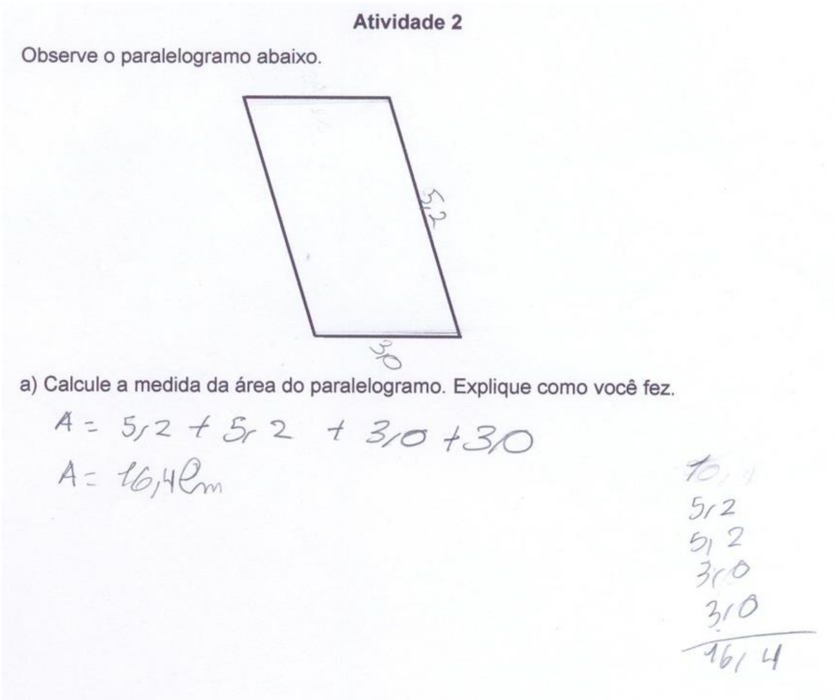


Figura 43: Protocolo do aluno DIB14 quanto à atividade 2A

A seguir, daremos tratamento ao cálculo numérico realizado pelos alunos. Cabe lembrar que podemos ter sujeitos que empregam cálculo relacional adequado à situação e também acertam os cálculos numéricos, alunos que escolhem um procedimento de cálculo relacional adequado à situação, mas não realizam corretamente os cálculos numéricos, como também escolhendo um cálculo relacional inadequado, mas que os cálculos numéricos estejam corretos, ou ainda ter cálculo relacional e cálculo numérico errados.

3.2 Análise do cálculo numérico

Em relação ao cálculo numérico, as produções dos sujeitos da pesquisa na resolução das atividades 1A e 2A foram agrupados em três categorias, conforme o Quadro 6**.**

Quadro 6: Código, situação e interpretação da análise de cálculo numérico referente às atividades 1A e 2A.

Código	Situação	Interpretação
ACN	Acerto de cálculo numérico	Designa as resoluções nas quais todos os cálculos numéricos realizados estão corretos.
ECN	Erro de cálculo numérico	Indica os protocolos nos quais há algum erro no cálculo numérico.
SCN	Sem cálculo numérico	Indica as resoluções nas quais não há nenhum cálculo numérico. Estão integrados não só os alunos que não apresentam uma operação aritmética, mas também aqueles que utilizam contagem.

Para melhor entendermos as questões envolvendo o cálculo numérico dos sujeitos da pesquisa, o Gráfico 3 sintetiza em termos quantitativos esta análise. Tal qual descrito no cálculo relacional, não temos a pretensão de realizar comparações, mas verificar se houve alguma alteração significativa nas escolhas devido ao fato de que o paralelogramo da atividade 1A contempla condições usuais, enquanto que na atividade 2A a figura foge ao padrão.

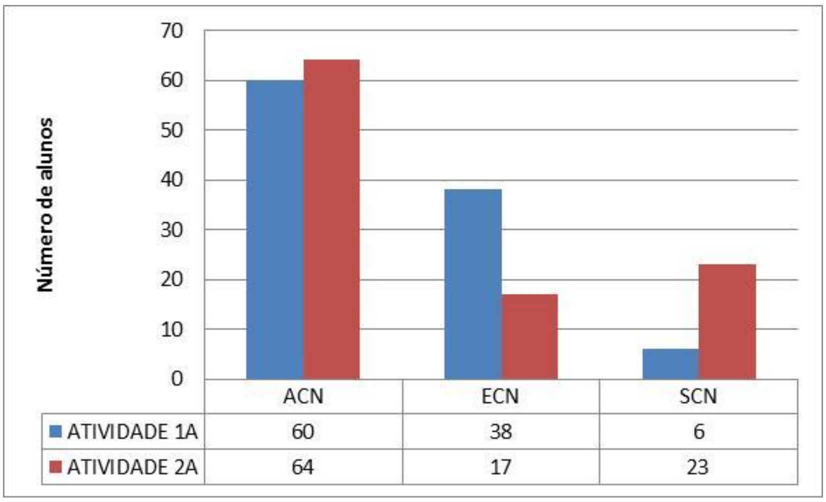


Gráfico 3: Quantitativo do tipo de cálculo numérico utilizado pelos sujeitos referente às atividades 1A e 2A.

Analisando os dados do Gráfico 3, percebemos que mais da metade dos alunos acertam o cálculo numérico, seja na atividade 1A ou 2A. Vale salientar que dentre os assinalados com o código ACN, estão os alunos que tanto escolhem um procedimento de cálculo relacional adequado, como inadequado. O mesmo vale para os alunos que foram classificados com o código ECN.

Observa-se que dentre os alunos que acertam o cálculo relacional, existe um percentual acima da metade tanto para a atividade 1A, quanto para a atividade 2A, percentuais próximos a 60% (60 alunos na atividade 1A, 64 alunos na atividade 2A para um total de 104 sujeitos da pesquisa). Isso nos permite dizer que para grande parte dos alunos o cálculo numérico não se revela um problema.

Por exemplo, a Figura 44 ilustra o caso da atividade 1A em que, embora haja erro na escolha do cálculo relacional, as operações numéricas estão corretas, o que conduz a situar esse protocolo no tipo ACN.

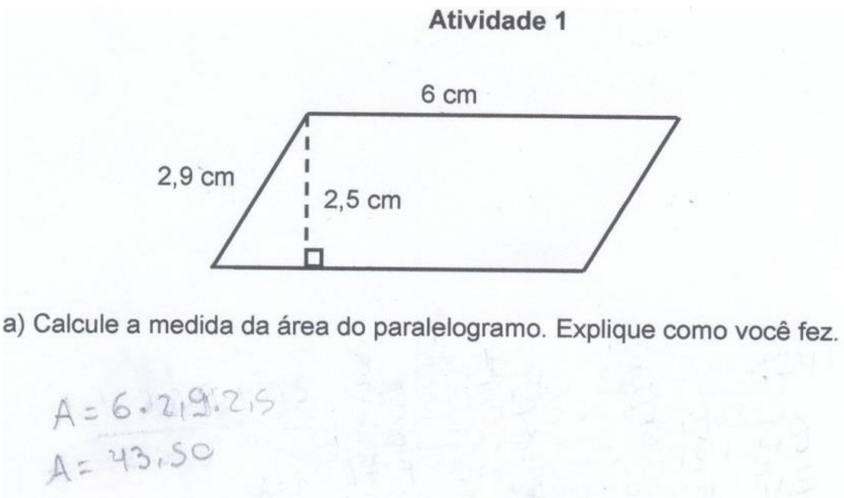


Figura 44: Protocolo do aluno MSIB16 quanto à atividade 1A

Já a Figura 45 traz a resolução da atividade 2A de um aluno que marca sobre a figura os comprimentos dos lados, indica a fórmula (A = b x h), o que corresponderia ao cálculo relacional correto (BH), substitui na fórmula os comprimentos dos lados da figura (e não os comprimentos de um lado tomado por base e da altura relativa a esse lado). Como não há erros de cálculo numérico, a resolução desse aluno também é classificada pelo código ACN.

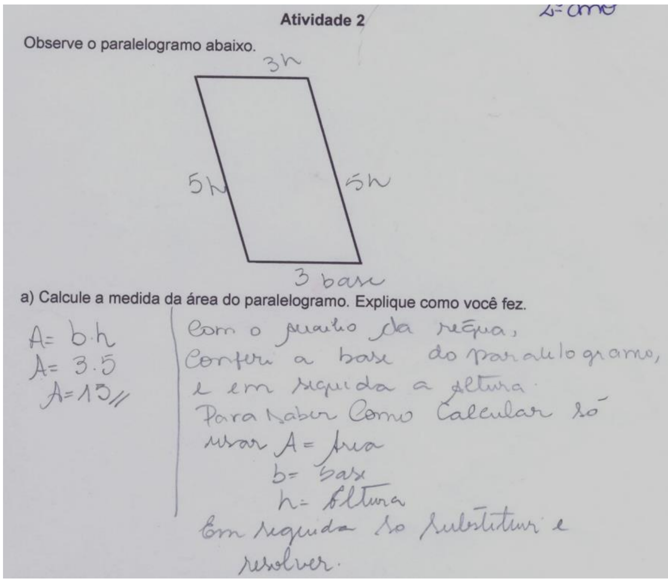


Figura 45: Protocolo do aluno DIB15 quanto à atividade 2A

Já em relação ao erro de cálculo numérico (ECN), temos a Figura 46, que mostra o protocolo de um estudante que erra ao multiplicar “6,9” por oito e continua fazendo a multiplicação por adição repetida da parte inteira e da parte decimal separadamente. Ao recompor as duas partes do total obtido da parte inteira, soma com a parte decimal do total obtido na soma da parte decimal. Isto o conduz a um erro do cálculo. Este é um caso em que tanto o cálculo relacional quanto o numérico encontram-se com erro. O aluno decompõe o paralelogramo em triângulos, calcula o perímetro de cada triângulo e adiciona os perímetros.

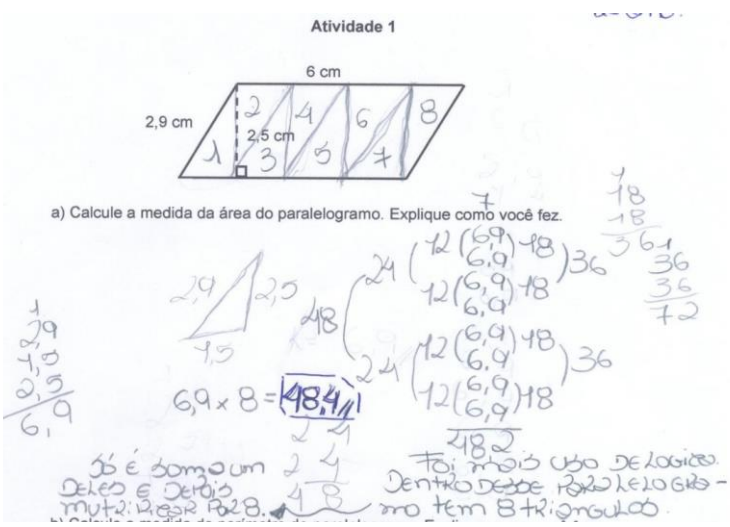


Figura 46: Protocolo do aluno DIA6 quanto à atividade 1A

3.3 Análise dos procedimentos dos alunos do ponto de vista da álgebra das grandezas

O que está em foco na análise da álgebra das grandezas é o modo como os alunos lidam com grandezas e números e um dos indícios desse aspecto é a maneira como lidam com as unidades de medida. Os procedimentos empregados pelos sujeitos da pesquisa na resolução das atividades 1A e 2A foram agrupados em três categorias, conforme o Quadro 7.

Quadro 7: Código, situação e interpretação da análise de álgebra das grandezas referente às atividades 1A e 2A.

Código	Situação	Interpretação
UC	Unidade de medida correta	Designa as resoluções nas quais é colocada a unidade de medida correta, mediante a composição: cm x cm = cm^2
UE	Unidade de medida errada	Indica os protocolos nos quais é considerada uma unidade de medida errada.
SU	Sem unidade de medida	Indica as resoluções nas quais não há indício de unidade de medida, ou seja, tanto os cálculos como os resultados são apenas números (sem qualquer unidade que designe a grandeza em jogo).

Como já foi dito, consideramos nessa pesquisa que o comprimento e a área são grandezas e podem ser representadas por pares (número e unidade de medida). De acordo com o referencial teórico adotado na pesquisa (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, BALTAR, 1996, BELLEMAIN; LIMA, 2002, entre outros) é preciso distinguir e articular os objetos geométricos (segmentos, superfícies) as grandezas (comprimento, área) e as medidas (números reais positivos). O Gráfico 4 apresenta os resultados gerais para a análise da álgebra das grandezas.

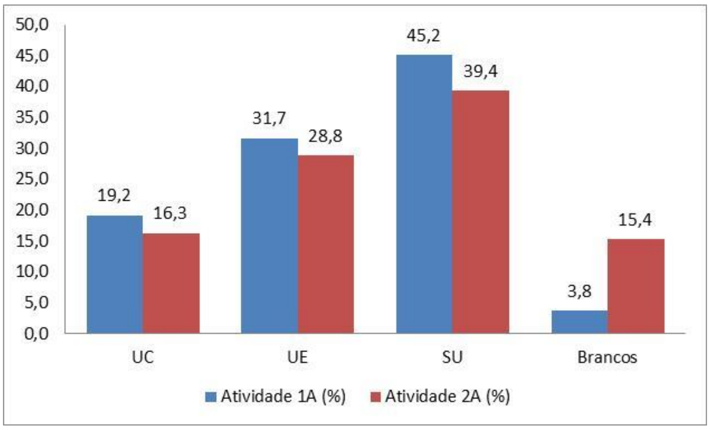


Gráfico 4: Percentuais de uso das unidades de medida

Dos 104 sujeitos pesquisados, estudantes do 2º ano do ensino médio, apenas 19,2% na atividade 1A e 16,3% na atividade 2A, expressam a área do paralelogramo por meio de um número acompanhado de uma unidade de medida. Quase metade dos sujeitos na atividade 1A e aproximadamente 40% deles na atividade 2A lidam o tempo todo com números (ausência de unidades), ou seja, não percebem a necessidade de fornecer um par (número, unidade) para caracterizar uma área, na resolução de um problema de cálculo da área do paralelogramo. Observamos ainda que tanto na atividade 1A como na 2A, por volta de 30% dos sujeitos utilizam unidades incorretas na resolução das questões. Seguem-se dois exemplos para ilustrar, nas atividades 1A (Figura 47) e 2A (Figura 48), o caso dos alunos que não utilizam nenhuma unidade de medida.

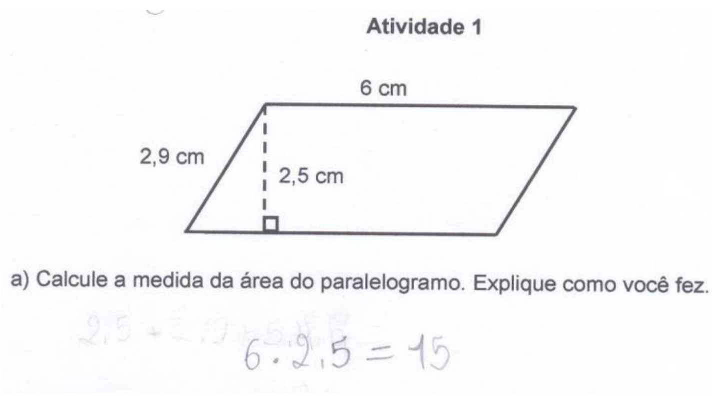


Figura 47: Protocolo do aluno MSIB17 quanto à atividade 1A

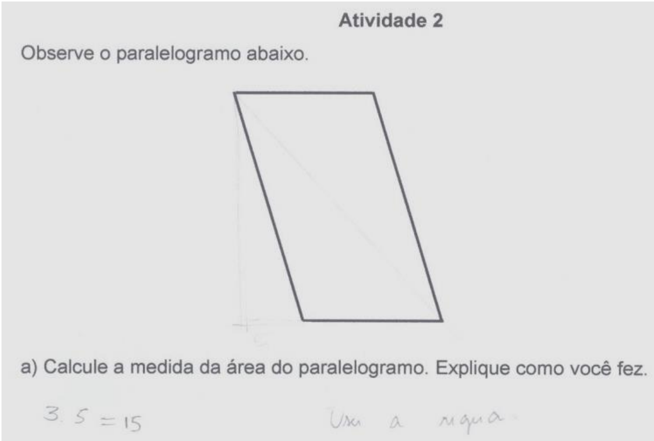


Figura 48: Protocolo do aluno DIA10 quanto à atividade 2A

Por sua vez, o número de alunos que apresentam uma unidade de medida correta (UC) é ligeiramente menor na atividade 2A em relação à atividade 1A. Seguem-se dois exemplos (Figura 49 e Figura 50), de resoluções de alunos respectivamente nas atividades 2A e 1A, nas quais a resposta dada é composta de um número com unidade adequada de área.

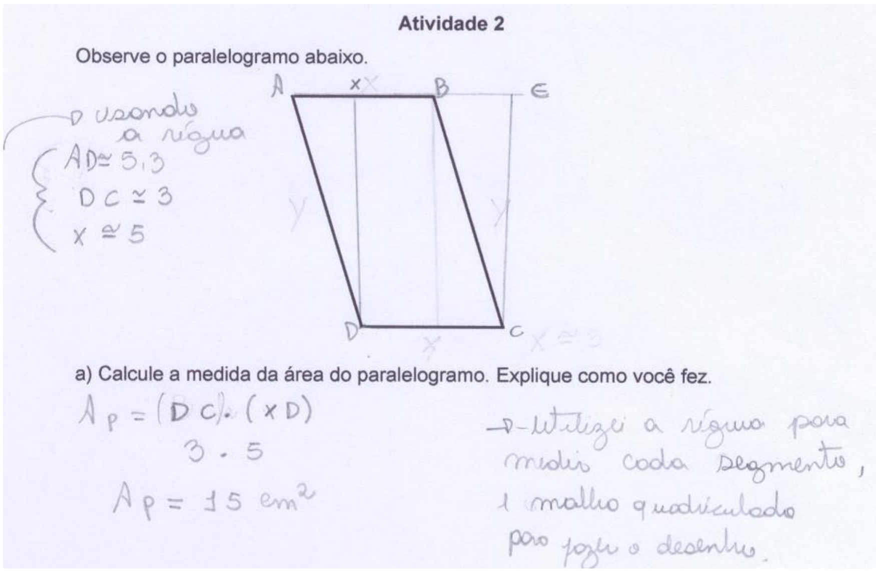


Figura 49: Protocolo do aluno MSIA3 quanto à atividade 2A

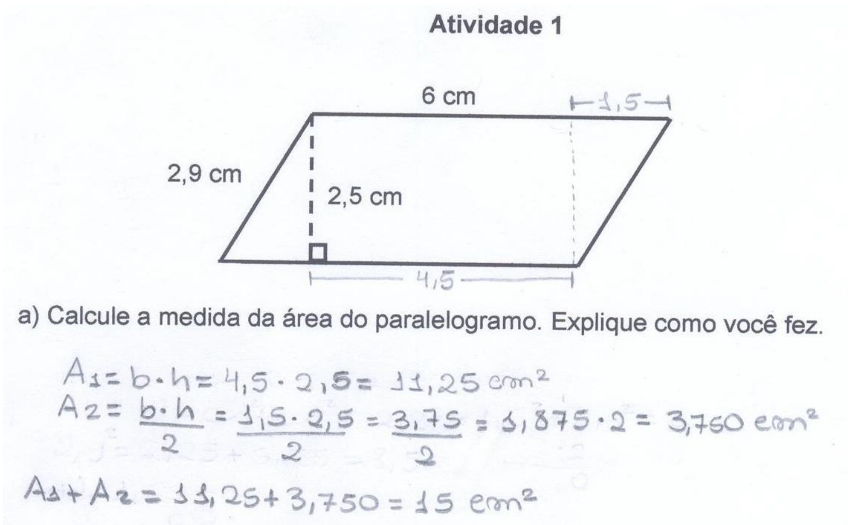


Figura 50: Protocolo do aluno DIA3 quanto à atividade 1A

Apesar de utilizar unidade adequada na resposta, o aluno MSIA3 opera com números e apenas acrescenta a unidade ao final e o aluno DIA3 escreve igualdades incorretas entre grandezas e números, como, por exemplo, 1,875 x 2 = 3,750 cm^2.

O número de alunos que apresentam uma unidade de medida errada (UE) em sua resolução, também é próximo, contudo na atividade 1A é maior do que na 2A. Identificamos a presença de unidades como centímetro cúbico e centímetro, conforme Figura 51 e Figura 52.

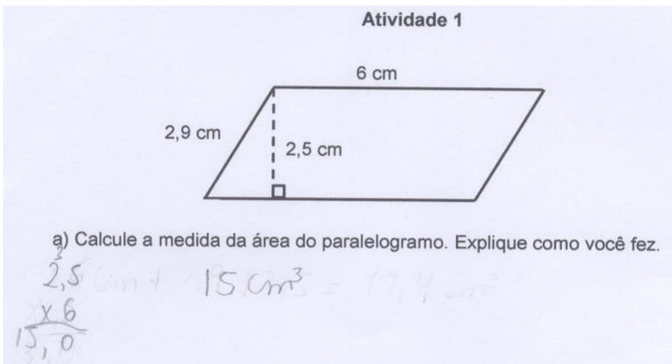


Figura 51: Protocolo do aluno DIA12 quanto à atividade 1A

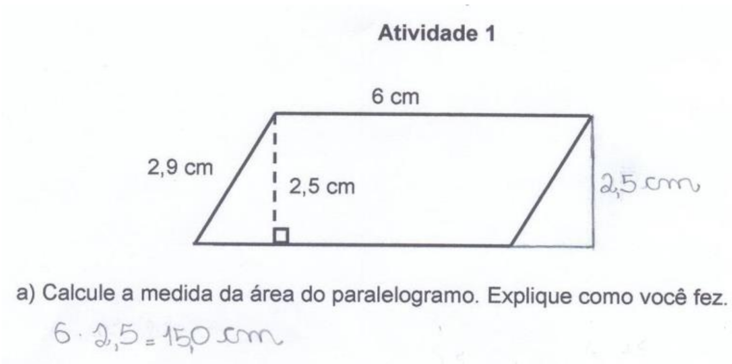


Figura 52: Protocolo do aluno DIA28 quanto à atividade 1A

Apresentaremos a seguir, para as atividades 1A e 2A, o cruzamento entre o cálculo relacional e o cálculo numérico e em seguida cálculo relacional e a álgebra das grandezas.

3.4 – Cruzamento das análises do cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas

A fim de cruzar os dados de acerto e erro no cálculo relacional e no cálculo numérico, vamos designar pelo código ACR (acerto no cálculo relacional) as resoluções que correspondem a cálculo relacional adequado, as resoluções baseadas em cálculo relacional inadequado à situação pelo código ECR (erro no cálculo relacional) e a ausência de cálculo relacional por SCR:

- ACR engloba: BH (utiliza a fórmula A=b x h), MQ (Usa a malha quadriculada) ou SF (resolução baseada na aditividade das áreas);

- ECR (Erro do cálculo relacional) engloba: TP (Usa o teorema de Pitágoras), MBLB (Multiplica a base pelo lado oblíquo e novamente pela base), LH (Multiplica o lado oblíquo pela altura), BL/2 (Multiplica a base pelo lado oblíquo e divide por dois), FT (Usa a fórmula da área do triângulo), PL (Multiplica os comprimentos dos lados), CTM (Cálculo com todas as medidas), CP (Calcula o perímetro) e OR (Outras respostas);

- SCR (Sem cálculo relacional) engloba: SR (Sem resposta).

O Gráfico 5 mostra o percentual de estudantes por categoria de cálculo relacional da atividade 1A.

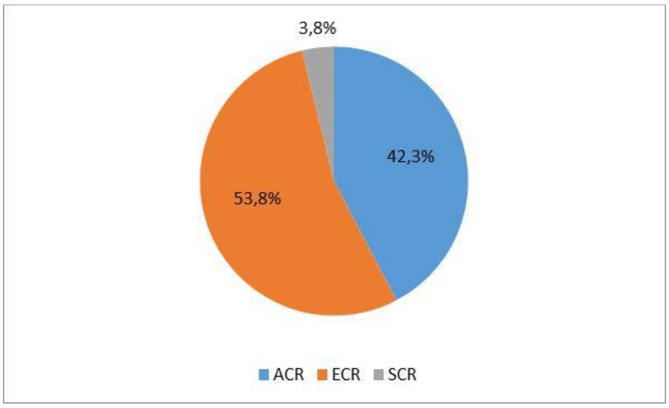


Gráfico 5: Percentual de cálculo relacional por categoria referente à atividade 1A

Em relação ao Gráfico 5, observamos que mais da metade, ou seja, 53,8% dos alunos (56 dos 104) escolhem um procedimento de cálculo relacional inadequado a situação, enquanto que um pouco menos da metade (42,3%) dos alunos (44 dos 104) escolhem adequadamente. Quatro dos 104 alunos (3,8%) não indicam o cálculo relacional.

Já o Gráfico 6 mostra o percentual de estudantes por categoria de cálculo relacional da atividade 2A.

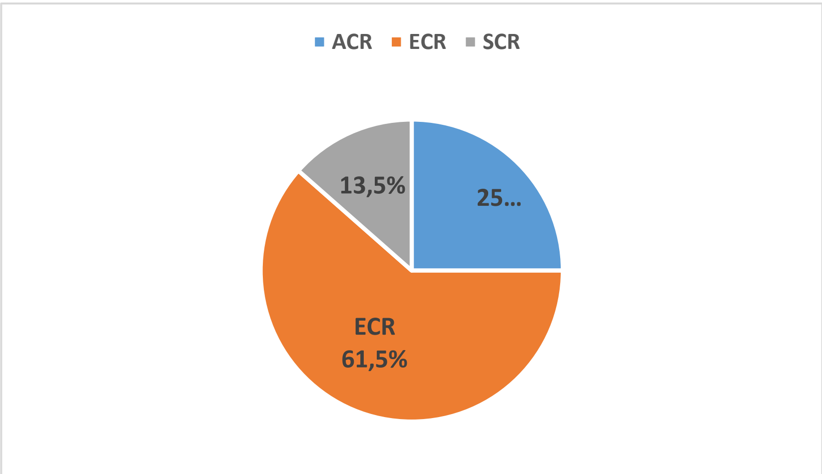


Gráfico 6: Percentual de cálculo relacional por categoria referente à atividade 2A

Em relação ao Gráfico 6, observamos que 61,5% dos alunos (64 dos 104) escolhem um procedimento de cálculo relacional inadequado a situação, enquanto que um quarto (25,0%) dos alunos (26 dos 104) escolhem adequadamente. Quatorze dos 104 alunos (13,5%) não indicam o cálculo relacional.

A Tabela 1 apresenta o cruzamento de dados do cálculo relacional, com dados do cálculo numérico para a atividade 1A.

Tabela 1: Cruzamento do Cálculo Relacional com o Cálculo Numérico

CÁLCULO NUMÉRICO	CÁLCULO RELACIONAL			
	ACR	ECR	SCR	Total
ACN	31	28	0	59
ECN	16	25	0	41
SCN	0	0	4	4
Total	**47**	**53**	**4**	**104**

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que 29,8% dos alunos (31 dos 104) acertam tanto o cálculo numérico quanto o cálculo relacional. Já 24% dos sujeitos (25 dos 104 alunos) cometem erros tanto no cálculo relacional como no cálculo numérico.

A Figura 53, mostra um exemplo em que o aluno acerta o cálculo numérico (ACN), e também utiliza um cálculo relacional adequado a situação (ACR).

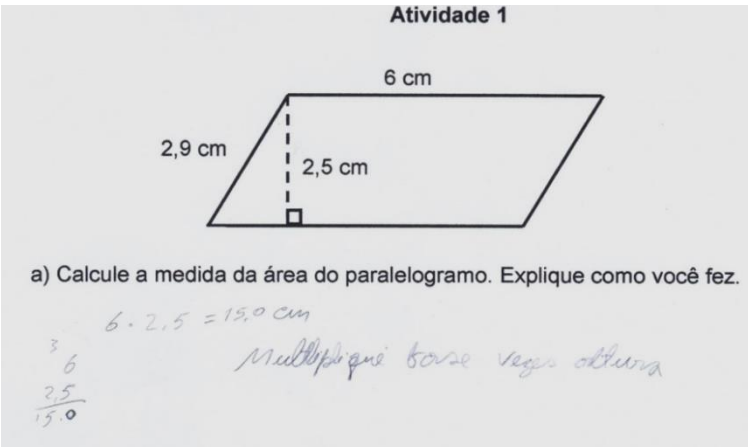


Figura 53: Protocolo do aluno MSIB7 quanto à atividade 1A

Já a Figura 54 ilustra o caso em que o aluno acerta o cálculo relacional (ACR), mas comete erros no cálculo numérico (ECN).

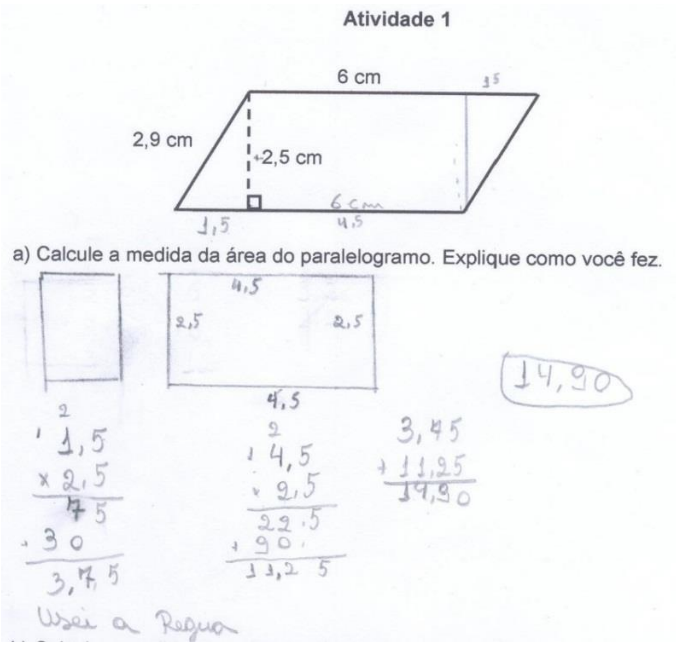


Figura 54: Protocolo do aluno DIB17 quanto à atividade 1A

A Figura 55 mostra um exemplo em que o aluno acerta o cálculo numérico (ACN), mas usa um procedimento de resolução baseado em cálculo relacional inadequado à situação (no caso, o PL).

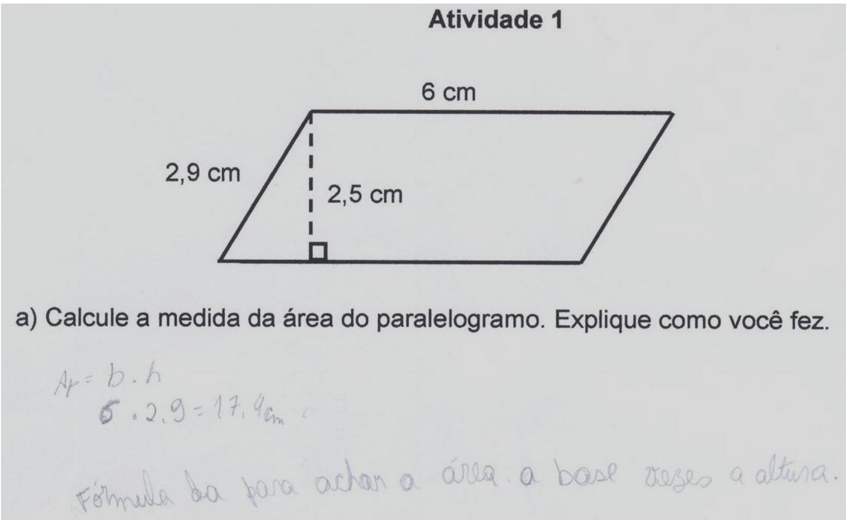


Figura 55: Protocolo do aluno MSIA24 quanto à atividade 1A

A Figura 56 nos mostra um exemplo em que o aluno comete erros tanto em relação ao cálculo relacional como quanto ao cálculo numérico.

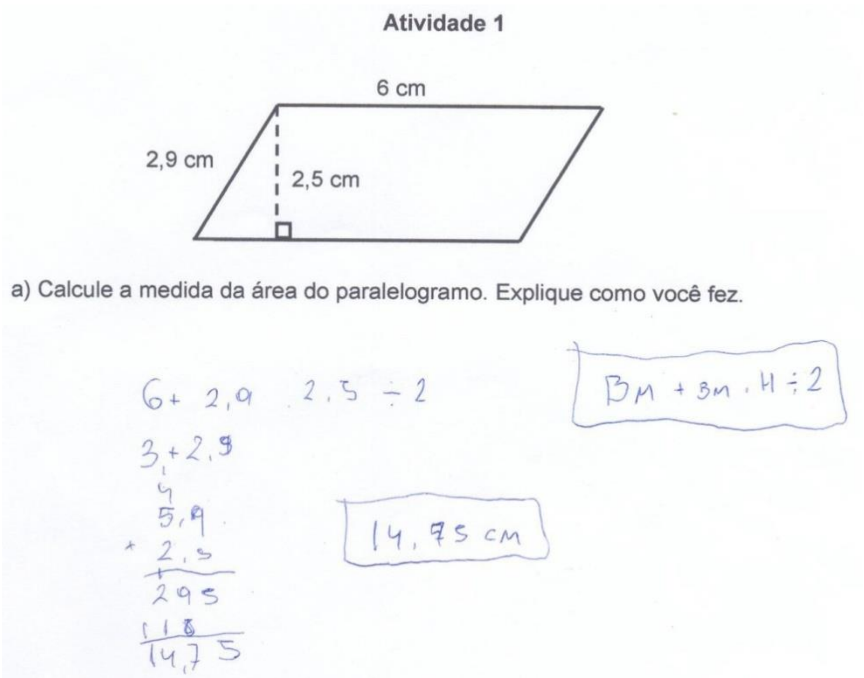


Figura 56: Protocolo do aluno MSIA16 quanto à atividade 1A

No caso da Figura 56, ao usar o cálculo relacional inadequado (CTM), o aluno enxerga na fórmula da área do trapézio um modo de utilizar todos os dados contidos na figura do paralelogramo. Já na parte do cálculo numérico é dividido seis por dois e em seguida somado ao 2,9 não sendo aplicada a propriedade distributiva da multiplicação, ou pelo menos, a soma (6 + 2,9), para em seguida dividir por dois. Mesmo realizando a multiplicação (5,9 x 2,5) de modo correto, matematicamente é incorreto seu passo inicial de resolução.

A Tabela 2 apresenta o cruzamento entre o cálculo numérico e a álgebra das grandezas na atividade 1A.

Tabela 2: Cruzamento do Cálculo Numérico com a Álgebra das Grandezas na atividade 1A

ÁLGEBRA DAS GRANDEZAS	CÁLCULO NUMÉRICO			
	ACN	ECN	SCN	Total
SR	0	0	4	4
SU	29	18	0	47
UC	13	7	0	20
UE	17	16	0	33
Total	**59**	**41**	**4**	**104**

Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, percebemos na Tabela 2 que 59 dos 104 alunos (56,7%) acertam o cálculo numérico e dentre estes, 49,1% (29 de 59 alunos), ou seja, quase a metade, não consideram em sua resposta a unidade de medida. Observamos que 41 alunos erram o cálculo numérico (o que corresponde ao índice de 39,4% dos sujeitos). Dentre estes, 43,9% (18 de 41 alunos), ou seja, quase metade deles, desconsideram em suas respostas a unidade de medida. Isso para nós é um indício de que a noção de grandeza não foi plenamente construída, pois verificamos que para estes alunos apenas o número é importante.

Já a Tabela 3 trata do cruzamento entre o cálculo relacional e a álgebra das grandezas na atividade 1A.

Tabela 3: Cruzamento entre o Cálculo Relacional e a Álgebra das Grandezas na atividade 1A

ÁLGEBRA DAS GRANDEZAS	CÁLCULO RELACIONAL			
	ACR	ECR	SCR	Total
UC	11	9	0	20
UE	19	14	0	33
SU	17	30	0	47
SR	0	0	4	4
Total	47	53	4	104

Em termos de resultado geral, observamos na Tabela 3, que 47 dos 104 alunos, ou seja, 45,2%, respondem a atividade 1A sem utilizar a unidade de medida, sendo assim o maior índice dentre as categorias de álgebra das grandezas (quase a metade). Podemos inferir que quando o aluno não considera a unidade de medida em sua resposta, isto confirma o que diz a literatura ao afirmar que muitos alunos pensam que para determinar a medida da área é necessário apenas um número e não o par: (número, unidade de medida).

Ainda segundo a Tabela 3, para a álgebra das grandezas, foi observado que 33 dos 104 alunos responderam a atividade 1A com uma unidade de medida errada, o que corresponde ao índice de 31,7%. Ao responder com uma unidade de medida errada, interpretamos que o aluno não entende o conceito de área como uma grandeza geométrica.

De acordo ainda com a Tabela 3 percebemos que 20 dos 104 alunos, ou seja, 19,2%, respondem a atividade 1A com a unidade de medida correta que é o centímetro quadrado (cm^2). Eles entendem que para determinar a área é necessário considerar não só o número real positivo, mas também a unidade de medida.

Por fim, 4 dos 104 alunos, não responderam a atividade 1A, isso corresponde em percentuais a 3,8%. Sobre este índice inferimos que estes alunos desconhecem o conteúdo solicitado.

A Tabela 4, apresenta o cruzamento do cálculo relacional com o cálculo numérico para a atividade 2A.

Tabela 4: Cruzamento do Cálculo Relacional com o Cálculo Numérico na atividade 2A

CÁLCULO NUMÉRICO	CÁLCULO RELACIONAL			
	ACR	ECR	SCR	Total
ACN	21	47	0	68
ECN	3	14	0	17
SCN	3	2	14	19
Total	**27**	**63**	**14**	**104**

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a Tabela 4 observamos que 21 dos 68 alunos cujas respostas não continham erro de cálculo numérico, ou seja, 30,9%, acertaram também o cálculo relacional. Em contrapartida, 47 alunos (69,1% dos 68 alunos) erraram o cálculo relacional.

Dos 17 alunos que cometeram erros de cálculo numérico, 3 (ou seja, 17,6%) acertaram o cálculo relacional. Por outro lado, 14 sujeitos, ou seja, 82,4% dos 17 alunos que erraram no cálculo numérico, erraram também o cálculo relacional.

A Tabela 5 trata do cruzamento entre o cálculo numérico e a álgebra das grandezas na atividade 2A.

Tabela 5: Cruzamento entre o Cálculo Numérico e a Álgebra das Grandezas na atividade 2A

ÁLGEBRA DAS GRANDEZAS	CÁLCULO NUMÉRICO			
	ACN	ECN	SCN	Total
UC	15	2	0	17
UE	25	5	0	30
SU	28	10	3	41
SR	0	0	16	16
Total Geral	**68**	**17**	**19**	**104**

Fonte: Dados da pesquisa

A Tabela 5 mostra que 65,4% (68 de 104 alunos) acertaram o cálculo numérico, que chega a ser um percentual maior do que o índice da atividade 1A. Contudo, dentre estes, 41,2% (28 de 68 alunos) não consideram em suas respostas a unidade de medida. Quanto aos que erram o cálculo numérico, cujo índice de 16,3% (ou seja, 17 de 104 alunos), ocorre que 58,8% (10 de 17 alunos), ou seja, mais da metade desses alunos também não consideram em sua resposta a unidade de medida.

Já a Tabela 6, apresenta o cruzamento do cálculo relacional com a álgebra das grandezas para a atividade 2A.

Tabela 6: Cruzamento do Cálculo Relacional com a Álgebra das Grandezas na atividade 2A

ÁLGEBRA DAS GRANDEZAS	**CÁLCULO RELACIONAL**			
	ACR	**ECR**	**SCR**	**Total**
UC	8	9	0	17
UE	5	25	0	30
SU	13	28	0	41
SR	1	1	14	16
Total	**27**	**63**	**14**	**104**

Fonte: Dados da pesquisa

Em termos de resultado geral, observamos na Tabela 6, que 41 dos 104 alunos, ou seja, 39,4%, respondem a atividade 2A sem utilizar a unidade de medida, sendo assim o maior índice dentre as categorias de álgebra das grandezas. Podemos inferir que quando o aluno não considera a unidade de medida em sua resposta, isto confirma o que diz a literatura ao afirmar que alguns alunos consideram que para determinar a medida da área é necessário apenas um número e não o par (número, unidade de medida).

Ainda segundo a Tabela 6, para a álgebra das grandezas, foi observado que 30 dos 104 sujeitos responderam a atividade 2A com uma unidade de medida errada, o que corresponde ao índice de 28,8%. Ao responder com uma unidade de medida errada, interpretamos que o aluno não entende plenamente a área como uma grandeza geométrica.

De acordo ainda com a Tabela 6, percebemos que 17 dos 104 alunos, ou seja, 16,3%, respondem a atividade 2A com a unidade de medida correta que é o centímetro quadrado (cm^2). Eles parecem entender que para determinar a área é necessário considerar não só o número real positivo, mas também a unidade de medida.

Por fim, 4 dos 104 alunos, não responderam a atividade 2A, isso corresponde em percentuais a 3,8%, igual ao da atividade 1A. Sobre este índice inferimos que estes alunos desconhecem o conteúdo solicitado.

Nossos resultados mostram que utilizar um cálculo relacional adequado à situação não implica em trabalhar corretamente a álgebra das grandezas, como podemos observar na Tabela 6, pois verifica-se que 27 de 104 alunos (26,0%) acertam o cálculo relacional, contudo, 48,1% deles (13 de 27 alunos), ou seja, quase metade dos alunos que acertam o cálculo relacional, não consideram em suas respostas a unidade de medida. Além disso, 61,0% dos sujeitos utilizam o cálculo relacional inadequado à situação (63 de 104 alunos) e dentre esses, 44,4% (28 de 63 alunos) não consideram em suas respostas a unidade de medida.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste trabalho foi analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e com base no modelo didático para a conceituação de área como grandeza proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian, como estudantes do ensino médio técnico lidam com o cálculo da área do paralelogramo.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento é construído de forma gradual mediante a exposição a situações variadas, as quais possibilitam mobilizar diversos invariantes operatórios e representações simbólicas. No nosso caso, na análise de como os alunos lidam com o cálculo da área de paralelogramos, essa teoria leva a distinguir o *cálculo relacional* e o *cálculo numérico.* Na resolução de problemas do campo das grandezas um terceiro aspecto tem papel relevante: o modo como os sujeitos lidam com unidades de medida, o que expressa a distinção entre grandezas e números e também a distinção das diferentes grandezas em jogo (por exemplo, comprimento e área). Esse aspecto faz parte da *análise dimensional* e da *álgebra das grandezas*.

De acordo com Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), para compreender o conceito de área é necessário distinguir três quadros: o *numérico*, o *geométrico* e o das *grandezas*. Para as pesquisadoras, as superfícies fazem parte do quadro geométrico, as áreas fazem parte do quadro das grandezas e as medidas de área são números reais positivos pertencentes ao quadro numérico. Adotamos a abordagem de área como grandeza e consideramos esse conceito como parte do campo conceitual das grandezas geométricas.

A compreensão da área envolve diversos campos conceituais, como o da geometria, o dos números e o das funções. Para Lima e Carvalho (2010), era papel do ensino da geometria estudar as chamadas grandezas geométricas (comprimento, área, volume, e abertura de ângulo), mas nas orientações curriculares atuais, esses conteúdos estão inseridos no campo das grandezas e medidas, fazendo com que se destaque a importância do ensino do conceito de grandeza de uma maneira geral e não apenas das grandezas geométricas.

Nossa pesquisa também está ancorada no estudo das situações que dão sentido à área desenvolvido por Baltar (1996). Essa autora destaca três grandes classes principais de situações relativas ao conceito de área: as *situações de comparação*, as *de medida* e as *de produção de superfícies.* Decidimos focar o modo como os alunos lidam com situações de medida da área do paralelogramo, o que conduziu também a dar continuidade a pesquisas anteriores sobre esse tema, com destaque para Santos (2005) e Teles (2007).

Em sua dissertação, Santos (2005) investigou, com o olhar do contrato didático e das variáveis didáticas, possíveis relações entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos de uma 8ª série (9º ano) na resolução de problemas relativos a esse tema. Essa pesquisa mostrou que de maneira geral, o paralelogramo predominante na coleção de livros didáticos analisada tinha inclinação para a direita e o lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal. Quando o objeto gráfico que representa o paralelogramo não se encontra nessa posição prototípica, os alunos apresentam mais dificuldades em resolver problemas envolvendo a área do paralelogramo. Foi verificado também pela pesquisadora que os erros mais comuns atrelados ao cálculo da área de um paralelogramo são o uso de fórmulas erradas (por exemplo, o produto dos comprimentos dos lados) e a ausência ou a utilização inadequada de unidades de medida. Outro fato destacado por Santos (2005) é que verbalizar a fórmula da área de um paralelogramo (base vezes altura) faz com que alguns alunos pensem que o paralelogramo tem uma base (o lado de maior comprimento e/ou o lado traçado horizontalmente) e uma altura. Isso parece não contribuir para a compreensão de que qualquer lado do paralelogramo pode ser tomado como base e para calcular sua área é necessário multiplicar o comprimento de um de seus lados pelo da altura relativa a ele. Esse produto não depende do lado tomado como base.

O olhar da Teoria dos Campos Conceituais leva a valorizar o papel das representações simbólicas na aprendizagem de conceitos matemáticos. A ideia que alguém tem de paralelogramo depende, entre outros aspectos, da variedade de representações de paralelogramo com as quais tem contato. As características dos desenhos de paralelogramos com os quais os sujeitos tem familiaridade vão ter influência sobre a compreensão que têm do que é um paralelogramo e sobre a possibilidade de resolver adequadamente tarefas sobre a área do paralelogramo. Assim, em nossa pesquisa, adotamos a caracterização do paralelogramo prototípico proposta por Santos (2005) e investigamos como os alunos lidam com problemas de cálculo de área nos casos em que o objeto gráfico que representa o paralelogramo prototípico e em que essas características não são respeitadas.

Santos (2005) elencou algumas variáveis didáticas em relação à representação simbólica do paralelogramo (a posição relativa dos lados do paralelogramo; a orientação do lado de maior comprimento; a inclinação da figura) e em relação aos problemas envolvendo a área de um paralelogramo (existência da figura; natureza das soluções; dados fornecidos; posição do lado tomado como base; comprimento do lado tomado como base; posição da altura traçada).

Nessa mesma perspectiva, Teles (2007) evidenciou 12 variáveis didáticas e seus respectivos valores (posição da figura; tipos de usos das fórmulas de área; dados numéricos), as quais influenciam o modo como os alunos resolvem problemas sobre área, com ênfase no uso que fazem de fórmulas. Seu marco teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais e a modelização da área como grandeza (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) e essa pesquisa mostrou a complexidade das relações entre campos conceituais na resolução de problemas que envolvem o uso de fórmulas de área.

Os aportes dessas e outras pesquisas anteriores permitiram delinear características predominantes nos problemas de área de um paralelogramo (a figura é dada, o lado de maior comprimento está traçado na posição horizontal, são fornecidos os dados necessários e suficientes para calcular a área do paralelogramo, etc.), o que leva a um contrato didático habitual sobre o cálculo da área de paralelogramos segundo o qual cabe ao professor informar ao aluno os comprimentos de um lado e da altura relativa a ele e o que fica a cargo do aluno, via de regra, é realizar o cálculo numérico e dar o resultado. Se essas condições são respeitadas, os alunos podem fornecer uma resposta correta, sem compreender necessariamente como se calcula a área do paralelogramo. Procuramos então verificar como os alunos lidam com problemas em que essas cláusulas não são respeitadas.

Para realizar a parte empírica de nossa pesquisa, montamos teste de sondagem composto por quatro atividades, cuja elaboração foi apoiada nas pesquisas de Baltar (1996) e de Santos (2005). Entretanto não foi possível analisar os dados das quatro questões devido à limitação do tempo e à riqueza e amplitude dos dados. Por isso, escolhemos focar a análise apenas nas situações de medida da área do paralelogramo das atividades 1 e 2, deixando a análise das demais questões para um momento posterior.

Este instrumento contemplou situações de medição de áreas, nas quais ora as condições eram parecidas com aquelas habitualmente propostas, como o cálculo da área de um paralelogramo com o lado de maior comprimento na posição horizontal, ora as condições eram bem diferentes das comumente observadas, como o cálculo da área de um paralelogramo no qual nenhum lado é posicionado na horizontal ou na vertical e nenhuma medida de comprimento é marcada sobre a figura. Aplicamos este teste com 104 alunos de quatro turmas de 2º ano do ensino médio técnico de uma escola pública estadual da região metropolitana da cidade do Recife – PE.

Analisamos as estratégias de resolução dos alunos sob três pontos de vista: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas.

Quanto ao cálculo relacional, há diferenças marcantes entre a tarefa em que há maior conformidade com o contrato didático habitual e a figura dada respeita as condições do paralelogramo prototípico (atividade 1A) e a atividade 2A, na qual há menor conformidade (além de não serem fornecidas medidas, a inclinação difere da comumente utilizada e o lado horizontal é o de menor comprimento).

Uma primeira observação é que a quantidade de alunos que deixam a questão 2A em branco (14 sujeitos) é mais que o triplo da quantidade de alunos que não responde a questão 1A (4 sujeitos). Existe inclusive um estudante que argumenta que o fato de não serem fornecidas as medidas na figura impossibilita a resolução. Além disso, apenas um quarto dos alunos emprega um cálculo relacional adequado à situação na atividade 2A, enquanto mais de 40% dos alunos está nessa categoria no caso da atividade 1A. Destacamos ainda que a quantidade de alunos que calcula o produto dos comprimentos dos lados (PL, sinalizado por Baltar (1996), como indicativo de mobilização de um teorema em ação errôneo) na atividade 2A (33 sujeitos) é o triplo da quantidade de alunos que usa esse cálculo relacional na atividade 1A (11 sujeitos).

Em relação ao cálculo relacional adequado à situação, destacam-se o uso da fórmula da área de um paralelogramo (27 alunos na atividade 1A e 9 alunos na atividade 2A) e a explicitação da decomposição do paralelogramo (14 alunos, na atividade 1A e 12 alunos na atividade 2A). Alguns alunos (3 na atividade 1A e 5 na atividade 2A), utilizaram a malha quadriculada (MQ), o que também havia sido sinalizado como possibilidade na análise a priori. Quanto aos erros, foram observados procedimentos discutidos na análise a priori, os quais reforçam resultados de pesquisas anteriores, como o uso de todas as medidas marcadas na figura (CTM) na atividade 1A, empregado por aproximadamente um quarto dos sujeitos, além do produto dos comprimentos dos lados (PL) já comentado. Poucos alunos utilizaram a fórmula do perímetro - CP (4 alunos na atividade 1A e 6 alunos na atividade 2A). Outras fórmulas incorretas, não antecipadas na análise a priori, foram utilizadas pelos alunos, combinando os dados da atividade de diferentes maneiras ou confundindo com a fórmula da área de um triângulo ou de um trapézio, por exemplo.

No caso da atividade 2A, em que não são fornecidas medidas, naturalmente desaparecem o cálculo relacional CTM (cálculo com todas as medidas), mas surge uma estratégia que denominamos de BLA, em que o sujeito multiplica os comprimentos de um lado tomado como base, da altura relativa a esse lado e do lado oblíquo. Interpretamos que há relação entre essa estratégia e o cálculo com todas as medidas, uma vez que o único sujeito que utiliza o BLA na atividade 2A, utilizou o CTM na atividade 1A.

Já em relação ao cálculo numérico, a dificuldade dos alunos se situa nas operações com números decimais. No caso da atividade 2A, observamos uma tendência em evitar os números decimais, por meio do uso de aproximações o que levou a uma diminuição do percentual de erros de cálculo numérico para o caso de estratégias corretas. Com a ausência de medidas da atividade 2A, alguns alunos deixaram em branco ou apenas indicam algebricamente o cálculo a ser feito. Outros utilizam a régua graduada para medir os comprimentos e realizaram o cálculo numérico correspondente. Nesse segundo caso, há uma tendência a aproximar as medidas para números inteiros o que provoca uma pequena diminuição dos erros de cálculo numérico, em relação à questão 1A.

Houve um aumento significativo na quantidade de resoluções nas quais não há nenhum cálculo numérico (SCN) de 6 sujeitos na atividade 1A para 23 sujeitos na atividade 2A. Em torno de 60% dos sujeitos realizaram os cálculos numéricos corretamente tanto na atividade 1A (60 sujeitos) como na 2A (64 sujeitos), enquanto 38 sujeitos cometeram algum erro de cálculo numérico na atividade 1A e 17 sujeitos erraram cálculos numéricos na atividade 2A. Ou seja, o domínio do cálculo numérico é mais frequente do que do cálculo relacional e o percentual de erros de cálculo numérico foi nitidamente maior quando os alunos não podiam inferir sobre as medidas apresentadas do que quando esta liberdade era dada a eles.

Em relação ao uso das unidades, tanto na atividade 1A como na 2A, o percentual de respostas sem unidades é bastante elevado (42,5% e 39,4% respectivamente) bem como o de respostas com unidade incorreta (31,7% e 28,8% respectivamente). Identificamos a presença de unidades como centímetro e centímetro cúbico. Em ambas as atividades o percentual de estudantes que expressaram corretamente a área utilizando o centímetro quadrado é inferior a 20% (19,2% na atividade 1A e 16,3%, na atividade 2A). Trata-se, portanto, de um aspecto da resolução de problemas de cálculo da área do paralelogramo que precisa ser reforçado no ensino.

Ainda sobre a álgebra das grandezas, percebemos que a utilização de forma não coerente das unidades de medida (por exemplo, expressões como $3 \times 4 = 12\ cm^2$ são incorretas pois igualam um número com uma grandeza). Mesmo olhando nos casos em que o resultado final empregava unidade de área correta, esse tipo de expressão acima foi utilizado pelos alunos. De maneira geral, a unidade de medida aparecia ao final das operações realizadas, ou seja, os alunos faziam as operações com números e no momento de dar a resposta acrescentavam a unidade. Houve apenas um aluno que utilizou uma operação entre grandezas para determinar a unidade de medida a ser utilizada. Constatamos que o uso das unidades de área tem o caráter do conhecimento de uma *convenção*, por exemplo: se todas as unidades estão em centímetros então a área deverá ser dada em centímetro quadrado.

Um dos limites que encontramos na aplicação de nosso instrumento de pesquisa, foi não ter incluído uma entrevista pós-aplicação com todos ou alguns alunos, para ficarem mais claras algumas opções nas quais inferimos como indícios dentro da abordagem teórica. Contudo, o fato de escolhermos não apresentar medidas na atividade dois, permitiu a quebra de contrato didático e por consequência deixou um pouco mais claras algumas opções por parte dos alunos. Outro limite foi a não análise das quatro questões propostas no teste inicial, pois como foi comentado anteriormente, o fator tempo e a riqueza de respostas não permitiram analisar a situação de produção de figuras de mesma área, bem como situações de comparação de superfícies.

Sugerimos para pesquisas futuras que seja considerado o aspecto dinâmico para a figura do paralelogramo, escolher um software adequado para tratar tanto a deformação das figuras, como a invariância da área de acordo com o lado tomado como base, implicações da aditividade da área em relação ao perímetro, etc. Todos estes itens tanto no aspecto da prática pedagógica do professor, quanto sua existência e adequação nos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Didática da Matemática. São Paulo: PUC, 1996.

BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese de Doutorado, 1996. Universite de Grenoble I (Scientifique Et Medicale - Joseph Fourier), U.GRENOBLE I*, França.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Estudo de Situações-problema relativas ao conceito de área. *X ENDIPE- Encontro de Didática e Prática de Ensino*, 2000, Rio de Janeiro. Ensinar e aprender: sujeitos, saberes, tempos e espaços, 2000. **Publicação em CD Rom.**

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMat, 2002.

BRASIL. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasilla: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** RDM, Paris, v. 7, n. 2, p.33-115, 1986.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. *Educational Studies in Mathematics*. vol.20, n. 4, p. 387-424, 1989.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FACCO, Sandra Regina; ALMOULOUD, S. A. **Uma abordagem de ensino-aprendizagem do conceito de área**. *VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2004, Recife: **Anais**.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Grandezas e medidas**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino; v.17, cap. 8)

LIMA, Paulo Figueiredo; CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de; **Geometria**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino; v.17, cap. 7)

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; NUNES, Terezinha; GITIRANA, Verônica. **Repensando Adição e Subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008.

MELO, M. A. P.; BELLEMAIN, P. M. B. **Identificando concepções numéricas e geométricas na resolução de um problema de área e perímetro**. *II SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2008, Recife: **Anais**.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PESSOA, Gracivane da Silva. **Um Estudo Diagnóstico Sobre o Cálculo da Área de Figuras Planas na Malha Quadriculada**: influência de algumas variáveis. Recife, 2010. Dissertação (Mestrado). UFPE, 2010.

SANTOS, Marilene Rosa. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo**: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático. Recife, 2005. Dissertação (Mestrado). UFRPE, 2005.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. Tese de Doutorado, 2007. Universidade Federal de Pernambuco. Centro de Educação: Recife, 2007.

VERGNAUD, Gérard. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches em Didactique des Mathématiques – RDM, v. 10, nº 2, 3. pp. 133 – 170, Grenoble, 1990.

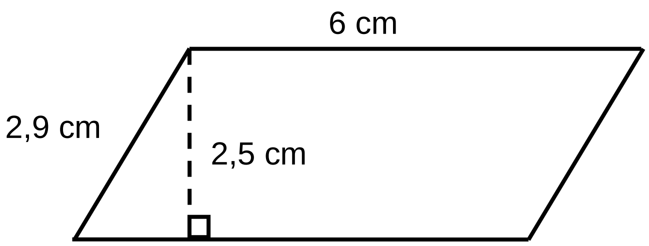
VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino de matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

VINH BANG E LUZER. **Conservations spatiales.** Etude d’épistemologie génetique. PUF, Paris, 1965.

ANEXOS

Aluno: ____ Série: ______

Atividade 1



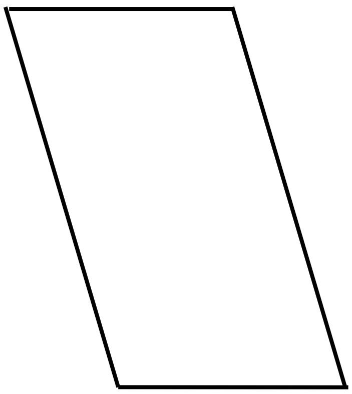
a) Calcule a medida da área do paralelogramo. Explique como você fez.

b) Calcule a medida do perímetro do paralelogramo. Explique como você fez.

Aluno: ____ Série: ______

Atividade 2

Observe o paralelogramo abaixo.



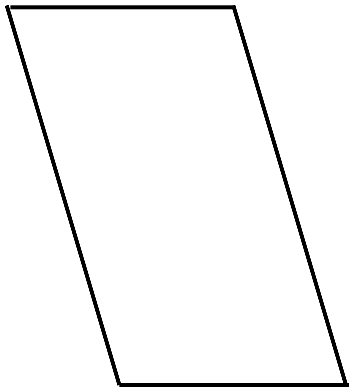
a) Calcule a medida da área do paralelogramo. Explique como você fez.

b) Calcule a medida do perímetro do paralelogramo. Explique como você fez.

Aluno: ____ Série: ______

Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo.



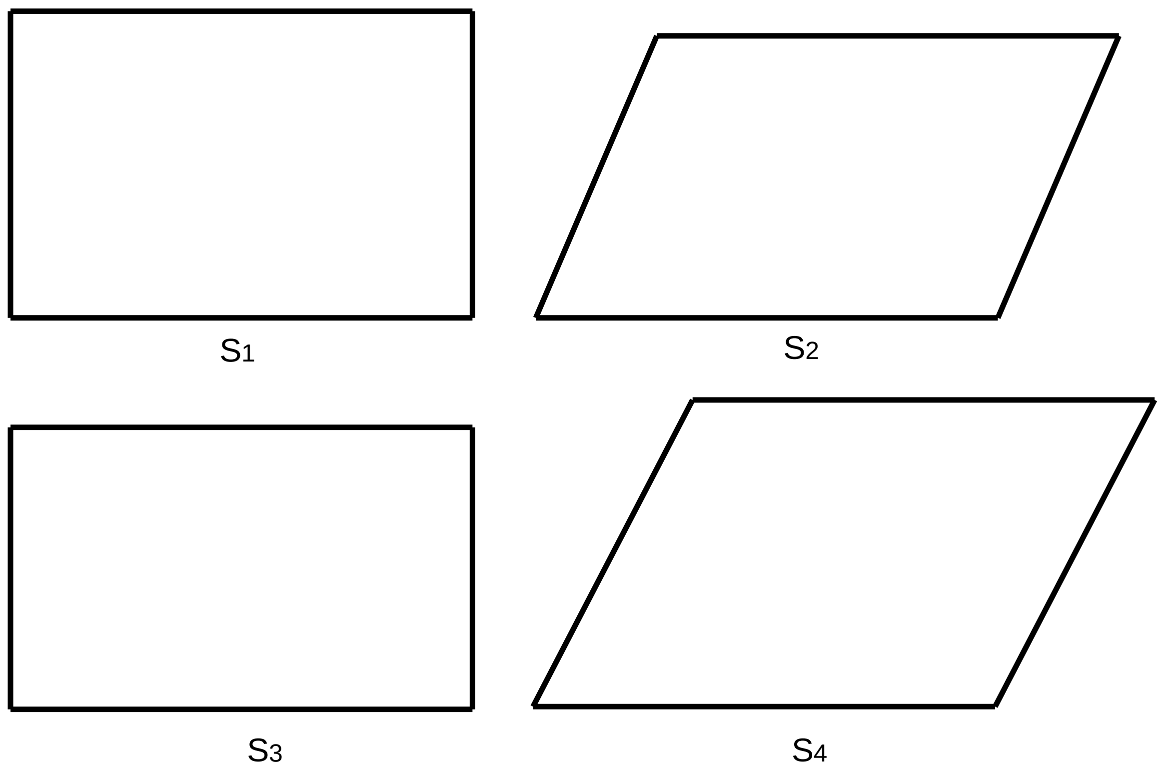
a) Desenhe um retângulo, cuja medida da área seja a mesma do paralelogramo acima.

b) Desenhe um retângulo, cuja medida do perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima.

Aluno: ____ Série: ______

Atividade 4

Os alunos de uma oitava série, quando estudavam os conteúdos área e perímetro de quadriláteros, analisaram os retângulos S1 e S3 e os paralelogramos S2 e S4 abaixo:



Vejam o que afirmaram alguns alunos da classe:

- José: As figuras S1 e S2 têm mesma área.
- Fernanda: As figuras S1 e S2 tem mesmo perímetro.
- Patrícia: As figuras S2 e S3 tem mesmo perímetro.
- Pedro: As figuras S2 e S3 tem mesma área.
- Francisco: As figuras S1 e S4 tem mesma área.

Diga se você concorda ou não com cada uma dessas afirmações e explique como você pensou.

José

Fernanda

Patrícia

Pedro

Francisco